Problemas de matemática para los entrenamientos de la Educación Secundaria Básica II

Prof. Mario Díaz González

Editorial
Pueblo y Educación

Edición: Lic. Martha M. Entralgo Flórez
Diseño de cubierta: Olga L. Domínguez Sánchez
Diseño, ilustración y emplane: María Elena Gil Mc Beath
Corrección: Esmeralda Ruiz Rouco
Caridad Arce Crespo

ISBN 959-13-1151-6 Obra completa
ISBN 959-13-1393-4 Tomo II

EDITORIAL PUEBLO Y EDUCACIÓN
Ave. 3ra. A No. 4605 entre 46 y 60,
Playa, Ciudad de La Habana,
Cuba. CP 11300.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Con este material se pretende contribuir al mejoramiento del trabajo con los alumnos interesados en profundizar sus conocimientos de matemática, y aquellos que se preparan para participar en las diferentes etapas de los Concursos y Olimpiadas de Conocimientos, facilitándoles un programa, un manual ajustado a estos requerimientos, donde aparecen las principales definiciones, conceptos, teoremas y propiedades, más utilizados en este tipo de actividad.

Como actualmente no existe un programa para el trabajo de entrenamiento de los concursos, el autor se ha propuesto preparar y poner a disposición de maestros, profesores y alumnos este material, que puede servir de guía para esta actividad, de manera que permita continuar profundizando en el estudio de la Matemática, como materia de gran importancia para el desarrollo del pensamiento lógico en los alumnos.

Este material aparece dividido en cuatro partes:

La primera parte tiene como propósito fundamental orientar a los profesores-entrenadores en los aspectos a los cuales se les debe prestar atención en las sesiones de entrenamiento con los alumnos que se proponen participar en los Concursos y Olimpiadas de Matemática, en las diferentes etapas.

En la misma se plantean los temas que deben ser tratados de acuerdo con las características de sus alumnos para que sirvan de guía a los profesores-entrenadores en la preparación de sus sesiones de entrenamiento.

En esta edición aparecen las Olimpiadas Populares Estudiantiles y los Concursos Nacionales de los cursos 2003-2004 y 2004-2005. Los problemas que aparecen propuestos han sido divididos en cuatro grupos: un primer grupo donde aparecen problemas de álgebra, un segundo grupo donde aparecen problemas de aritmética y de teoría de números, un tercer grupo donde aparecen problemas de geometría y un cuarto grupo donde aparecen problemas de conjuntos, juegos, combinatoria, tableros y otros.

Cada sesión de entrenamiento debe organizarse de forma que permita introducir aspectos teóricos que el alumno tiene que conocer y que después pueda utilizar en la resolución de problemas que se propongan por el profesor-entrenador.

La preparación de los alumnos se ha de realizar sobre la base de la profundización en los programas del grado correspondiente y de grados anteriores, así como en contenidos que se utilizan en los Concursos y Olimpiadas, que en ocasiones no aparecen en los programas de estudio y que los alumnos que se preparan para participar en estos eventos deben conocer.

En las sesiones de entrenamiento, el profesor-entrenador debe lograr que los alumnos tengan una participación muy activa durante el tiempo dedicado a esta actividad, por lo que se deben utilizar problemas novedosos que los motiven para querer resolverlos. Se debe lograr que los alumnos trabajen con independencia y seguridad.

Deben utilizarse problemas que requieran de diferentes técnicas para su solución; de esta manera se logrará que los alumnos se apropien de métodos de resolución de problemas, y puedan enfrentarse a otros más complejos que después tendrán que resolver.

Es muy importante que cuando un problema haya sido resuelto por diferentes vías, estas se discutan con todo el grupo para que sirva de modelo a todos y permita el uso de la crítica y la autocrítica, aspecto este de suma importancia en la resolución de problemas.

El profesor-entrenador debe tener en cuenta que una parte del entrenamiento de los alumnos está en el tiempo que estos puedan dedicarle a la actividad fuera del horario de clases: por lo tanto, es conveniente que al terminar la sesión de entrenamiento, oriente algunos problemas para el estudio independiente, que pueden ser sobre el tema tratado u otro ya estudiado, considerando siempre más útil que sean problemas del tema tratado para que les permita profundizar a unos y analizar con más detenimiento a otros, los contenidos y procesos utilizados en cada sesión.

Los contenidos que se tratan en los Concursos y Olimpiadas se pueden agrupar en cuatro grandes temáticas, estas son: Álgebra, Geometría, Teoría de Números y otra donde pueden aparecer temas de Lógica y Conjuntos, Combinatoria, Cuadrados Mágicos, Juegos, Tableros, Grafos, Coloración de Mapas y Planos, etc. Esta agrupación es la que utilizaremos para hacer nuestra propuesta de distribución de contenidos teniendo en cuenta que hay temas que pueden ajustarse a más de un contenido, pero que solamente aparecerá en uno de ellos.

En la segunda parte se pone en manos de profesores y estudiantes los principales conceptos, definiciones y teoremas que se utilizan para resolver la mayoría de los problemas que se presentan en las diferentes etapas de los Concursos y Olimpiadas Nacionales e Internacionales de Matemática.

Los contenidos que aquí aparecen fueron seleccionados de una gran cantidad de materiales revisados por el autor, y de acuerdo con la experiencia que en estos eventos el mismo tiene. Se ha tratado que abarquen contenidos que puedan ser tratados en los entrenamientos de la Educación Secundaria Básica.

Pudiera considerarse, para todos los que se interesen en la resolución de Problemas Elementales de Matemática, como un material de ayuda para entrenarse, que les permitirá revisar teóricamente los principales contenidos para poder aplicarlos en el proceso de resolución de problemas.

Es aconsejable que al revisar la segunda parte de este material se detengan un poco, y traten de hacer las demostraciones de cada aspecto tratado y que sea posible demostrar; esto también puede servir como entrenamiento y profundización de los contenidos objetos de estudio o de aquellos que con anterioridad han estudiado. Se ha tratado que aparezcan los temas a tratar divididos en cuatro grupos con igual distribución que para la primera parte.

En la tercera parte aparecen problemas propuestos para que sean utilizados en la preparación de los estudiantes para las primeras etapas de los Concursos de Conocimientos.

En la cuarta etapa aparecen problemas propuestos para ser utilizados en la preparación de los estudiantes para las etapas provincial y nacional de los concursos de conocimientos.

Al final del libro se propone una bibliografía donde aparecen los temas a tratar; esto no implica que si el profesor-entrenador o los alumnos interesados tienen otra bibliografía que responde a los mismos temas no se pueda utilizar, por el contrario, esto sería conveniente porque permitiría ver el tratamiento dado a estos contenidos por diferentes autores.

EL AUTOR

Temas para la preparación de los entrenamientos

Álgebra

Tema 1. *Razones y proporciones*

- Razones. Propiedades.
- Proporciones. Propiedades.
- Media proporcional.
- Tercera proporcional.
- Cuarta proporcional.
- El tanto por ciento. Aplicaciones.
- Análisis de casos para trabajar con el tanto por ciento.

Tema 2. *Trabajo con variables*

- Cálculo con variables.
- Transformaciones algebraicas.

Tema 3. *Polinomios*

- Polinomios. Grado de un polinomio. Valor numérico. Raíces de un polinomio.
- Igualdad de polinomios.
- Operaciones con polinomios.
- Productos notables:
- $(a \pm b)^2$; $(a + b)(a - b)$; $(a \pm b)^3$; $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$; $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$.
- Descomposición factorial.
- Fracciones algebraicas. Operaciones.

Tema 4. *Ecuaciones y sistemas de ecuaciones*

- Resolución de ecuaciones de primer grado.
- Resolución de ecuaciones de segundo grado.
- Ecuaciones modulares.
- Ecuaciones fraccionarias.
- Resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Tema 5. *Inecuaciones y desigualdades*

- Resolución de inecuaciones lineales.
- Propiedades de las desigualdades.
- Desigualdades entre la media aritmética y la media geométrica.
- Resolución de desigualdades.

Tema 6. *Funciones*

- Funciones. Concepto, dominio e imagen.
- Funciones lineales. Representación gráfica y propiedades.
- Resolución gráfica de ecuaciones e inecuaciones.
- Resolución gráfica de sistemas de ecuaciones.

Teoría de números

Tema 1. *Principios fundamentales de la divisibilidad*

- Número par. Su representación.
- Número impar. Su representación.
- Resultados en operaciones de cálculo con números de igual (diferente) paridad.
- Números consecutivos.
- Números pares (impares) consecutivos.
- Divisor de un número.
- Múltiplo de un número.
- Descomposición polinómica de un número.

Tema 2. *Números primos y números compuestos*

- Números primos y números compuestos.
- Números primos entre sí o primos relativos.
- La sucesión de los números primos es infinita.
- La Criba de Eratóstenes para hallar los números primos.

Tema 3. *Criterios de divisibilidad*

- Criterios de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 7, 9 y 11.
- Criterios de divisibilidad por potencias de 2, potencias de 5 o combinaciones de potencias de 2 y de 5.
- Criterios de divisibilidad por combinaciones de los casos anteriores.
- Divisores de un número.
- Descomposición factorial de un número.
- Cantidad de divisores de un número.

Tema 4. *Máximo común divisor*

- Máximo común divisor de dos o más números naturales.
- Métodos para hallar el máximo común divisor de dos o más números:
  Por descomposición factorial.
  Algoritmo de Euclides.
  Regla de Sturm.

Tema 5. *Mínimo común múltiplo*

- Mínimo común múltiplo de dos o más números naturales.
- Métodos para hallar el mínimo común múltiplo de dos o más números:
  Por descomposición factorial.
  Utilizando los múltiplos de los números dados.
- Relación entre el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos números.

Tema 6. *Ecuaciones en enteros*

- Resolución de ecuaciones lineales con dos variables cuyas soluciones sean números enteros. Solución general para este tipo de ecuaciones.

Geometría

Tema 1. *Triángulos*

- Desigualdad triangular.
- Rectas y puntos notables del triángulo.
- Teorema de Pitágoras. Generalización del teorema de Pitágoras.
- Teorema de las alturas.
- Teorema de los catetos.
- Igualdad de triángulos.
- Semejanza de triángulos.
- Teoremas sobre la bisectriz de un ángulo interior de un triángulo.
- Teoremas sobre la mediana relativa a un lado de un triángulo.
- Cálculo de la longitud de la mediana, la bisectriz o la altura en función de las longitudes de los lados del triángulo.

Tema 2. *Cuadriláteros*

- Cuadriláteros. Propiedades.
- Trapezoides, trapecios y paralelogramos. Clasificación.
- Condiciones necesarias y suficientes para determinar si un cuadrilátero es un paralelogramo o no.
- Paralelogramos especiales: rectángulo, rombo y cuadrado: sus propiedades.
- Condiciones necesarias y suficientes para determinar si un paralelogramo es un rectángulo, un rombo o un cuadrado.
- Cuadriláteros inscritos en la circunferencia. Propiedades.
- Cuadriláteros circunscritos en la circunferencia. Propiedades.

Tema 3. *Circunferencia y círculo*

- Circunferencia y círculo. Elementos y propiedades.
- Relaciones de simetría en la circunferencia.
- Relaciones de posición entre recta y circunferencia: tangente, secante, exterior. Algunas propiedades.
- Relación de posición entre dos circunferencias: tangentes, secantes, exteriores. Algunas propiedades.
- Ángulos en la circunferencia: centrales, inscritos, seminscritos, interiores y exteriores. Propiedades.
- Teorema de Thales.
- Tangentes interiores y exteriores a dos circunferencias.
- Potencia de un punto.

Tema 4. *Polígonos*

- Suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un polígono.
- Suma de las amplitudes de los ángulos exteriores de un polígono.
- Cantidad de diagonales que pueden trazarse desde un vértice en un polígono.
- Cantidad de diagonales que pueden trazarse en un polígono.
- Polígonos regulares. Propiedades.

- Determinación de la amplitud de cada uno de los ángulos interiores (exteriores) de un polígono regular.

Tema 5. *Teorema de las transversales*

- Razón entre dos segmentos.
- Segmentos proporcionales.
- Teorema de las transversales.

Tema 6. *Igualdad de triángulos*

- Criterios de igualdad de triángulos. Elementos homólogos en triángulos iguales.
- Aplicación de los criterios de igualdad de triángulos para triángulos rectángulos.

Tema 7. *Semejanza de triángulos*

- Teorema fundamental de la semejanza de triángulos. Elementos homólogos en triángulos semejantes.
- Criterios de semejanza de triángulos.
- Relación entre las áreas y los perímetros de triángulos semejantes.

Tema 8. *Áreas y Perímetros*

- Áreas y perímetros de triángulos y cuadriláteros.
- Áreas y perímetros de polígonos.
- Área del círculo y longitud de la circunferencia.
- Área sombreada.

Tema 9. *Construcciones*

- Construcciones fundamentales con regla y compás.
- Construcciones de triángulos.
- Lugares geométricos: la mediatriz de un segmento, la bisectriz de un ángulo, la circunferencia.

Tema 10. *Movimientos y transformaciones en el plano*

- Figuras simétricas.
- Movimientos y transformaciones.
- La reflexión del plano en una recta.
- La traslación en el plano. Dirección y sentido. Vectores.
- La simetría con respecto a un punto.
- La homotecia. Propiedades.

Tema 11. *Cálculo de cuerpos*

- Cubo. Propiedades. Cálculo del área lateral, del área total y del volumen.
- Ortoedro. Propiedades. Cálculo del área lateral, del área total y del volumen.
- Prisma. Propiedades. Cálculo del área lateral, del área total y del volumen.
- Pirámide. Propiedades. Cálculo del área lateral, del área total y del volumen.
- Cilindro. Propiedades. Cálculo del área lateral, del área total y del volumen.
- Cono. Propiedades. Cálculo del área lateral, del área total y del volumen.
- Esfera. Propiedades. Cálculo del área lateral, del área total y del volumen.

Conjuntos, combinatoria, tableros, juegos y coloración de planos

Tema 1. *Lógica y teoría de conjuntos*

- Nociones de lógica matemática.
- Aspectos elementales de lógica: definir, demostrar.
- Conjuntos. Elementos. Notación.
- Relación de pertenencia o no pertenencia de un elemento a un conjunto.
- Operaciones con conjunto: intersección, unión, diferencia.
- Complemento de un conjunto.
- Conjunto vacío.
- Diagramas de Venn.
- Leyes de Morgan.
- Principio de inclusión y exclusión.

Tema 2. *Combinatoria*

- Conteo.
- Principio de multiplicación.
- Nociones de combinatoria.
- Principio de Dirichlet.

Tema 3. *Cuadrados mágicos*

- Cuadrados mágicos. Métodos para llenar cuadrados mágicos de orden impar.
- Cuadrados mágicos. Análisis de los cuadrados mágicos de orden par.

Tema 4. *Coloración de planos*

- Principios básicos de coloración de planos.
- Problemas elementales de coloración de planos.

Tema 5. *Juegos*

- Teoría de juegos. Principios básicos.
- Estrategias a utilizar en algunos juegos.

Principales conceptos, definiciones y teoremas

Álgebra

Razones y proporciones

Se llama razón de una cantidad a otra cantidad de la misma especie a la división indicada de la primera cantidad por la segunda. Generalmente cuando la expresión $a : b$ se considera como razón, se lee "*a* es a *b*". El dividendo de la razón se llama antecedente y el divisor consecuente.

Algunas propiedades de las razones son:

1. El valor de una razón no se altera cuando sus dos términos se multiplican o dividen por una misma cantidad.
2. Cuando a los dos términos de una razón se le suma una misma cantidad positiva, la razón aumenta si la fracción original es propia y disminuye si es impropia mayor que 1.
3. Cuando de los dos términos de una razón se resta una misma cantidad positiva, la razón disminuye si es propia y aumenta si es impropia y mayor que 1.
4. En toda serie de razones iguales, la suma de los antecedentes es a la de los consecuentes como cualquiera de los antecedentes es a su consecuente.

Se llama proporción a la igualdad indicada de dos razones. Se llaman extremos de una proporción al numerador de la primera razón y al denominador de la segunda razón. Los otros términos se llaman medios, es decir, si $a : b = c : d$, entonces a y d son los extremos; b y c son los medios.

En $a : b = c : d$, el término d se llama cuarta proporcional de a, b y c.

Si un mismo número forma los dos medios de una proporción, se llama medio proporcional entre los extremos. En $a : b = b : c$, b es medio proporcional entre a y c, mientras que c es tercero proporcional entre a y b.

Algunas propiedades de las proporciones son:

1. En toda proporción se cumple que el producto de los extremos es igual al producto de los medios.
2. Si $ad = bc$, puede formarse proporción con dos de estos factores por medios y los otros dos por extremos.
3. Si $a : b = c : d$, entonces, $b : a = d : c$.
4. Si $a : b = c : d$, entonces, $a : c = b : d$.
5. Si $a : b = c : d$, entonces, $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} = \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$.
6. En toda proporción, el producto de los medios dividido por uno cualquiera de los extremos da el otro extremo; y el producto de los extremos dividido por uno cualquiera de los medios da el otro medio.

Sean a, b números reales positivos, $x \in \mathbb{R}$, se tiene que:

1. Si $\frac{a}{b} > 1$, entonces $\frac{a}{b} > \frac{a+x}{b+x}$.

2. Si $\frac{a}{b} < 1$, entonces $\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+x}$.

3. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = ... = k \in \mathbb{R}$, entonces $\frac{a+c+e+...}{b+d+f+...} = k$.

4. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$; $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$; $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$ y $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$.

5. Si $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, ..., \frac{a_n}{b_n}$ son razones no todas iguales, y los denominadores son todos de signos iguales, entonces la fracción $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{b_1+b_2+...+b_n}$ está comprendida entre la mayor y la menor de las razones.

Se dice que una cantidad variable varía proporcionalmente a otra, es directamente proporcional a otra, o simplemente es proporcional a otra, cuando las dos están en una relación constante. Si x y y son dos variables ligadas por la ecuación $\frac{x}{y} = k$, donde k es una cantidad constante, x es proporcional a y, y es proporcional a x.

Se dice que x es inversamente proporcional a y, y a x, cuando la relación de x es a $\frac{1}{y}$ es constante. En este caso se tiene x: $\frac{1}{y} = k$, $xy = k$, $y = \frac{k}{y}$, $x = \frac{k}{y}$. Si se duplica x, y se reduce a la mitad, y recíprocamente.

Se llama tanto por ciento de un número a una o varias de las cien partes iguales en que se puede dividir dicho número, es decir, uno o varios centésimos de un número. Su signo es %.

Si consideramos la expresión $\frac{P}{p} = \frac{B}{100}$ donde P es un número, B es el número que representa el 100 % y p es el por ciento que representa P de B. Los cálculos con el tanto por ciento pueden reducirse a tres casos que son:

1. Hallar un número conociendo qué tanto por ciento es de otro, entonces,

$$P = \frac{p \cdot B}{100}.$$

2. Hallar un número cuando se conoce un tanto por ciento del número, entonces,

$$B = \frac{P \cdot 100}{p}.$$

3. Dados dos números averiguar qué tanto por ciento es uno del otro, entonces,

$$p = \frac{P \cdot 100}{B}.$$

Trabajo con variables

Se llama dominio de una expresión algebraica al conjunto de los valores admisibles.

Si en una expresión algebraica se sustituyen las variables por números y se efectúan las operaciones indicadas; el valor resultante (si existe) recibe el nombre de valor numérico de la expresión algebraica.

Polinomios

Se denomina grado de un monomio a la suma de los exponentes de las variables que contengan.

Se denomina grado de un polinomio al mayor de los grados de los monomios que lo componen.

Si en un polinomio se sustituyen las variables por números y se efectúan las operaciones indicadas, el valor resultante (si existe) recibe el nombre de valor numérico del polinomio. Si el valor obtenido es 0, se dice que el número por el cual se sustituyó es una raíz del polinomio dado.

Las raíces de un polinomio son aquellos números reales que al evaluar el polinomio en cualquiera de ellos el resultado es 0.

Un polinomio de grado n puede tener a lo sumo n raíces.

Operaciones con polinomios

1. Adición: para adicionar polinomios se escriben uno a continuación del otro, conservando cada término su signo y reduciendo términos semejantes en caso de que existan.
2. Sustracción: para sustraer un polinomio de otro se escribe el minuendo tal y como está, y a continuación el sustraendo cambiándole el signo a cada uno de sus términos; luego se reducen los términos semejantes en caso de que existan.
3. Multiplicación: se multiplica cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio y se reducen términos semejantes en caso de que existan.
4. División: para dividir un polinomio por otro polinomio deben seguirse los pasos siguientes:
   a) El dividendo y el divisor deben ordenarse en potencias decrecientes de una misma variable.
   b) Se divide el primer término del dividendo por el primer término del divisor, obteniéndose así el primer término del cociente.
   c) Este primer término del cociente se multiplica por el divisor y el producto resultante se sustrae del dividendo; de esta forma se obtiene el resto.
   d) Si este resto es de mayor o igual grado que el divisor, lo consideramos como el nuevo dividendo y se repite así el proceso hasta obtener un resto de menor grado que el divisor, el cual será el resto de la división.

Eliminación e introducción de paréntesis

1. Todo paréntesis precedido por el signo "+" puede eliminarse dejando los términos del polinomio incluidos en él con sus propios signos.
2. Todo paréntesis precedido por el signo "–" puede eliminarse siempre que se cambie el signo a los términos del polinomio incluidos en él.
3. Si el paréntesis que se introduce está precedido por el signo "+" los términos que se incluyen en él conservan sus propios signos.
4. Si el paréntesis que se introduce está precedido por el signo "–" se les cambia el signo a los términos que se incluyen en él.

Dos polinomios $A = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ y $B = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$ son iguales si tienen el mismo grado y, además, $a_n = b_n$; $a_{n-1} = b_{n-1}$,..., $a_1 = b_1$, $a_0 = b_0$.

Productos notables

Se llaman productos notables a aquellos productos que cumplen reglas fijas, por lo que resulta útil memorizarlos para no tener que efectuar las multiplicaciones correspondientes.

Son productos notables los siguientes:

1. El cuadrado de la suma de dos términos: el cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primer término, más el duplo del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo término, es decir, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
2. El cuadrado de la diferencia de dos términos: el cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primer término, menos el duplo del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo término, es decir, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
3. La suma por la diferencia de dos términos: el producto de la suma por la diferencia de dos términos, es igual a la diferencia de sus cuadrados, es decir, $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.
4. El producto de dos binomios que tienen un término común: el producto de dos binomios que tienen un término común es igual al cuadrado del término común, más la suma algebraica de los términos no comunes por el término común, más el producto de los términos no comunes, es decir, $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$.
5. El cubo de la suma de dos términos: el cubo de una suma es igual al cubo del primer término, más el triplo del cuadrado del primer término por el segundo, más el triplo del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo, es decir, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
6. El cubo de la diferencia de dos términos: el cubo de una diferencia es igual al cubo del primer término, menos el triplo del cuadrado del primer término por el segundo, más el triplo del primero por el cuadrado del segundo, menos el cubo del segundo, es decir, $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Descomposición factorial

La operación que consiste en hallar los factores (cuando existan) de un polinomio se denomina factorización o descomposición en factores del polinomio.

Si en un polinomio existe un factor que sea común a todos sus términos, este puede descomponerse en el producto de dicho factor común por el polinomio que resulta al dividir cada uno de los monomios por ese factor común.

La diferencia de dos cuadrados se descompone en el producto de la suma por la diferencia de las bases y se tiene entonces: $x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$.

Un trinomio es cuadrado perfecto si dos de sus términos son cuadrados perfectos y el término restante es igual al doble del producto de las raíces cuadradas de dichos términos, o al opuesto de dicho producto. El trinomio cuadrado perfecto se descompone en el cuadrado de la suma o de la diferencia de las raíces cuadradas de los términos cuadrados perfectos, según el signo del término restante sea positivo o negativo, es decir, $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.

Un trinomio de la forma $x^2 + px + q$ se puede descomponer en el producto de dos factores $(x + a)(x + b)$ siempre que podamos encontrar dos números a y b cuya suma algebraica sea p y cuyo producto sea q, y se tiene entonces: $x^2 + px + q = (x + a)(x + b)$ donde $a + b = p$ y $ab = q$.

Un trinomio de la forma $mx^2 + px + q$ se puede descomponer en factores siguiendo los pasos siguientes:

1. Se ensaya una descomposición factorial para m y q ($m = ac$; $q = bd$), disponiendo los factores en columnas:

   $a \quad b$

   $c \quad d$

2. Se calculan los productos cruzados ad y bc, y se adicionan estos productos:

$$\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \\ \hline \multicolumn{2}{c}{bc + ad} \end{array}$$

3. Si $bc + ad = p$, entonces los factores del trinomio dado son $(ax + b)$ y $(cx + d)$. En caso contrario, debe ensayarse con otra combinación de factores para m y q y se tiene entonces $mx^2 + px + q = (ax + b)(cx + d)$.

La suma de dos cubos se descompone en dos factores: en uno se escribe la suma de las raíces cúbicas de cada término y en el otro el cuadrado de la primera raíz, menos el producto de las dos raíces más el cuadrado de la segunda raíz. Se tiene entonces que $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

La diferencia de dos cubos se descompone en dos factores: en uno se escribe la diferencia de las raíces cúbicas de cada término y en el otro el cuadrado de la primera raíz, más el producto de las dos raíces más el cuadrado de la segunda raíz. Se tiene entonces que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

En algunos casos, se necesita realizar agrupamientos y utilizar de manera combinada los casos de factorización ya estudiados, para hacer la descomposición.

Si A y B son dos polinomios con $b \neq 0$, el cociente indicado $\frac{A}{B}$ recibe el nombre de fracción algebraica.

Para simplificar una fracción algebraica se factorizan el numerador y el denominador, y se divide cada uno de ellos entre cada factor que les sea común.

Para sumar o restar fracciones algebraicas se procede de igual forma que con la suma o la resta de fracciones comunes. Se busca el mcm de los denominadores, se amplían todas las fracciones a un denominador común, se suman o se restan los numeradores y se simplifica el resultado de ser posible.

La multiplicación de fracciones algebraicas se efectúa de igual forma que el producto de fracciones comunes. Al multiplicar dos o más fracciones algebraicas, el resultado es una fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores y el denominador es el producto de los denominadores de las fracciones dadas.

La división de fracciones algebraicas se efectúa de igual manera que la división de fracciones comunes. Al dividir una fracción algebraica por otra, se efectúa el producto de la fracción dividendo por la fracción recíproca del divisor.

Ecuaciones y sistemas de ecuaciones

Ecuaciones

Una ecuación de primer grado es aquella donde el término de mayor grado está elevado al exponente 1 y se resuelve llevando todos los términos que contienen variables para un miembro y todos los términos que no contienen variables para el otro término, se reducen los términos semejantes hasta obtener una igualdad del tipo $ax = b$ y se despeja la variable para obtener su valor que es la solución de la ecuación.

Una ecuación de segundo grado es aquella donde el término de mayor grado está elevado al exponente 2. Se resuelve llevando todos los términos para un mismo miembro e igualando a 0, se reducen los términos semejantes hasta obtener una igualdad del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, se factoriza el polinomio de ser posible y se iguala cada factor a 0; se resuelven dos ecuaciones de primer grado y se obtienen las soluciones. Si el trinomio no puede factorizarse se aplica la fórmula general de resolución de la ecuación de segundo grado:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La expresión $D = b^2 - 4ac$ se llama discriminante de la ecuación de segundo grado y permite determinar si la ecuación tiene o no soluciones reales, y si tiene, cuántas son. Si $D > 0$ tiene dos soluciones reales. Si $D = 0$ tiene una sola solución que es $x = -\frac{b}{2a}$. Si $D < 0$ no tiene soluciones reales.

Una ecuación modular es aquella en que la variable se encuentra bajo el signo de módulo y se resuelve aplicando los siguientes métodos:

1. Supresión del módulo aplicando la definición.
2. Elevación de ambos miembros de la ecuación al cuadrado.
3. Partición en intervalos.

Una ecuación fraccionaria es aquella donde la variable aparece en el denominador. Para resolverla es necesario eliminar sus denominadores para transformarla en otra más sencilla. El denominador se elimina hallando el mínimo común múltiplo de los denominadores y se multiplica por ambos miembros de la igualdad; después se procede de acuerdo con el tipo de ecuación que hay que resolver.

Sistemas de ecuaciones

Para resolver un sistema de ecuaciones de dos ecuaciones con dos variables se puede utilizar el método de sustitución o el de reducción.

Método de sustitución: consiste en despejar una variable en alguna de las dos ecuaciones y sustituir en la otra ecuación: esto conduce a una ecuación lineal que se resuelve y luego se halla el valor de la variable en la ecuación despejada.

Método de reducción: consiste en multiplicar ambas ecuaciones por un número diferente de forma que los coeficientes de las dos variables sean opuestos, se suman ambas ecuaciones y se llega a una ecuación lineal que se resuelve. La otra variable se puede hallar de la misma forma o sustituyendo el valor de la variable obtenida en alguna de las dos ecuaciones dadas.

Inecuaciones y desigualdades

Una inecuación es una desigualdad donde aparecen variables, una inecuación lineal es aquella en que la variable de mayor grado está elevada al exponente 1 y la forma de resolverla es la siguiente:

1. Los términos se transponen de igual manera que en las ecuaciones lineales.
2. El coeficiente de la variable se transpone de igual forma que en las ecuaciones lineales, teniendo en cuenta que si el coeficiente es positivo, la desigualdad no se altera, pero si el coeficiente es negativo, el signo de la desigualdad se invierte.

Algunas propiedades de las desigualdades:

Sean a, b, c, d números reales:

1. Si $a \geq b$ y $b \geq c$, entonces $a \geq c$, de la misma manera si $c \leq b$ y $b \leq a$, entonces $c \leq a$.
2. Si $a \geq b$, entonces $a + c \geq b + c$.
3. Si $a \geq b$ y $c \geq d$, entonces $a + c \geq b + d$.
4. Si $a \geq b$ y $c > 0$, entonces $ac \geq bc$; si $a \geq b$ y $c < 0$, $ac \leq bc$.
5. Si $a > 0$, $b > 0$, entonces $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.
6. Si $a_1 \geq b_1$, $a_2 \geq b_2$, ..., $a_m \geq b_m$, entonces $a_1 + a_2 + ... + a_m \geq b_1 + b_2 + \ldots + b_m$.
7. Para $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathbb{R}_+$, entonces $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_m \geq b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_m$.

Otras desigualdades importantes

Sea $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 2$ y $0 \leq a_i \leq 1$, entonces:

$a_1 + a_2 + ... + a_n - (a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{n-1}a_n + a_na_1) \leq [\frac{1}{2}\ n]$

Sean a, b, x, $y \in \mathbb{R}_+^*$, $a \geq b$, $x \geq y$, entonces:

$$\left(1+\frac{x}{a}\right)^a \geq \left(1+\frac{y}{b}\right)^b \text{ y } \sqrt[a]{\left(\frac{1+a}{1-a}\right)} \geq \sqrt[b]{\left(\frac{1+b}{1-b}\right)}.$$

Si $x \in \mathbb{R}$; $x \geq 1$, entonces $(1 + x)^{1+x}(1 - x)^{1-x} \geq 1$.

Para todo x real positivo se cumple que $x+\frac{1}{x} \geq 2$.

Para todo x, y reales se cumple que $|\, x + y \,| \leq |\, x \,| + |\, y \,|$; $|\, x - y \,| \geq |\, x \,| - |\, y \,|$.

Relación entre la media aritmética y la media geométrica: sean a_1, a_2, ..., a_n números positivos, A_n la media aritmética $\left(A_n = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)$ y G_n la media geométrica ($G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$) de esos números, entonces $A_n \geq G_n$.

Funciones

Una función es una correspondencia donde a cada elemento de un conjunto A se le asocia un único elemento de un conjunto B. El conjunto A es el dominio de la función y a sus elementos se les llaman argumentos o preimágenes. A los elementos del conjunto B que son correspondientes de algún elemento de A se les llaman imágenes, y el conjunto de ellos se denomina conjunto imagen de la función.

La función que a cada $x \in \mathbb{R}$ le hace corresponder el número real $f(x) = mx + n$, donde m y n son números reales dados, se denomina función lineal. La gráfica de una función lineal es una recta que pasa por los puntos $(0; n)$ y $(-\frac{n}{m}; 0)$.

El elemento del dominio de la función lineal $y = mx + n$ cuya imagen es cero, se denomina cero de esta función. Ese elemento es $x = -\frac{n}{m}$.

Una función del tipo $y = k$ con $k \in \mathbb{R}$, se llama función constante y su representación gráfica es una recta paralela al eje de las abscisas que pasa por el punto $(0; k)$.

Toda ecuación de la forma $ax + by + c = 0$ con x, $y \in \mathbb{R}$; a y b no simultáneamente nulos, representa una recta en el plano coordenado.

La pendiente m de una recta dada por la ecuación $y = mx + n$, que pasa por los puntos $P_1(x_1; y_1)$ y $P_2(x_2; y_2)$ se calcula a través de la expresión $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ con $x_1 \neq x_2$.

Si la pendiente m de una función del tipo $y = mx + n$ cumple que $m > 0$, entonces la función es creciente y si $m < 0$ es decreciente.

Dada la ecuación $ax + by + c = 0$, se tiene que:

1. La solución gráfica de esta ecuación es el punto $(-\frac{c}{a}; 0)$.
2. Las soluciones gráficas de la inecuación $ax + by + c > 0$ son:

   a) Si $-\frac{a}{b} > 0$, todos los puntos $(x; y)$ tales que $x > -\frac{c}{a}$.

   b) Si $-\frac{a}{b} < 0$, todos los puntos $(x; y)$ tales que $x < -\frac{c}{a}$.
3. Las soluciones gráficas de la inecuación $ax + by + c < 0$ son:

   a) Si $-\frac{a}{b} > 0$, todos los puntos $(x; y)$ tales que $x < -\frac{c}{a}$.

   b) Si $-\frac{a}{b} < 0$, todos los puntos $(x; y)$ tales que $x > -\frac{c}{a}$.

Sean $ax + by + c = 0$ y $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ las ecuaciones de dos rectas, la solución gráfica del sistema es el punto de intersección entre ambas rectas, que está determinado por el punto de coordenadas $\left(\frac{b_1c - bc_1}{a_1b - ab_1}; \frac{a_1c - ac_1}{ab_1 - a_1b}\right)$.

Teoría de números

Principios fundamentales de la divisibilidad

- Dos números son consecutivos si se cumple que la diferencia entre ellos es 1.
- Un número par puede representarse en la forma $2n$ con n entero.
- Un número impar puede representarse en la forma $2n \pm 1$ con n entero.
- Dos números pares consecutivos se pueden escribir como $2n$ y $2n \pm 2$ con n entero.
- Dos números impares consecutivos se pueden escribir como $2n \pm 1$ y $2n \pm 1 \pm 2$ con n entero.
- La suma (diferencia) de dos números pares es par.
- La suma (diferencia) de dos números impares es par.
- El producto de k números impares es impar.
- El producto de k números donde al menos uno de ellos es par, es par.
- El número natural n es un divisor del número natural m si existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $m = nx$, es decir $\frac{m}{n}$ (n divide a m) y se dice que m es un múltiplo de n (de x).
- El número natural n no es un divisor del número natural m si al dividir m por n, el resto es un número diferente de cero, es decir $n \nmid m$ (n no divide a m); entonces $m = nx + r$, con $0 < r < n$.
- Para todo n entero positivo se cumple que $1/n$ y n/n.
- Si a es un divisor de b y además a es un divisor de c, entonces a es también un divisor de $b + c$ y de $b - c$.
- Si a es un divisor de b o un divisor de c o un divisor de ambos, entonces a es también un divisor de $b \cdot c$.
- Si los restos de las divisiones de dos números a y b por m son iguales, la diferencia $a - b$ es divisible por m, y recíprocamente, si la diferencia $a - b$ es divisible por m, los restos de las divisiones de a y b por m son iguales.

- Descomposición polinómica de un número: dado el número $N = \sqrt{a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_1 a_0}$ que tiene $n + 1$ cifras (o dígitos), se puede descomponer en forma de polinomio como: $N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$.

Números primos y números compuestos

- Todo número natural que admite solamente dos divisores es un número primo.
- La sucesión de los números primos es infinita.
- Un número que admite más de dos divisores es un número compuesto.
- Los números naturales que tienen solamente como divisor común el 1, se llaman primos entre sí o primos relativos.
- La descomposición de un número en factores primos es única.
- La cantidad de maneras en que un número compuesto puede descomponerse en dos factores que sean primos entre sí es 2^{n-1} donde n es la cantidad de factores primos diferentes en $\mathbb{N}$.

Criba de Eratóstenes

Para encontrar los números primos inferiores a uno dado, Eratóstenes ideó el procedimiento siguiente: se tacha el 1, luego se empiezan a tachar los números a partir de $4 = 2^2$ de dos en dos lugares, queda sin tachar el 3 que es primo, se comienza por el $9 = 3^2$ y se tachan de tres en tres lugares, el 5 queda sin tachar, que es primo, se comienza a partir de $25 = 5^2$ y se tachan de cinco en cinco lugares, etc. Los números que van quedando sin tachar son los números primos.

Para reconocer si un número es primo o compuesto, se comprueba si es divisible o no por algún número primo. Se prueba con los divisores primos menores que el número, comenzando por el menor (2); los divisores van siendo cada vez mayores y los cocientes enteros cada vez menores y cuando, sin haber logrado división exacta, el cociente que resulte sea inferior al divisor ya que no es necesario seguir dividiendo, en ese caso el número es primo; en caso contrario no lo es.

Todo número primo mayor que 3 puede escribirse de una de las formas $6k \pm 1$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Se dice que dos enteros impares consecutivos son primos gemelos si ambos son primos. Se desconoce si esta sucesión es o no infinita.

Solo existe un trío de números primos triples que son el 3, el 5 y el 7.

Criterios de divisibilidad

- Todos los números cuya última cifra es un número par (0, 2, 4, 6, 8) son divisibles por 2.
- Todos los números cuyas dos últimas cifras básicas sea un número divisible por 4, son divisibles por 4.
- Todos los números para los cuales la suma de sus cifras básicas es divisible por 3, son divisibles por 3.
- Todos los números para los cuales la suma de sus cifras básicas es divisible por 9, son divisibles por 9.
- Todos los números cuya última cifra es 0 ó 5, son divisibles por 5.
- Todos los números cuya última cifra es 0, son divisibles por 10.
- Todos los números cuyas dos últimas cifras básicas sea un número divisible por 25, son divisibles por 25.
- Todos los números para los cuales se cumple que la diferencia entre la suma de sus cifras de orden par y la suma de sus cifras de orden impar son divisibles por 11.
- Un número es divisible por 7 cuando se cumple que: si del número que se obtiene cuando se elimina su última cifra de la derecha, se sustrae el producto de la última cifra eliminada por un número de la forma $7n + 2$, $n \in \mathbb{N}$, resulta un número divisible por 7.
- Un número es divisible por 6 si lo es por 2 y por 3.
- Un número es divisible por 100 si lo es por 4 y por 25.
- Un número es divisible por 84 si lo es por 3, por 4 y por 7.

Divisores de un número: Sea $k = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ y C la cantidad de divisores de k; entonces $C = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)\ldots(\alpha_n + 1)$

Máximo común divisor (mcd)

- El máximo común divisor de varios números naturales, es el mayor número por el que son divisibles todos estos números.
- El mcd de dos o más números es igual al producto de los factores primos comunes elevados al menor exponente. El mcd de dos números a y b lo denotamos mcd(a, b).
- Si un número es divisor de otros dos, entonces también es divisor del máximo común divisor de estos números.
- Algoritmo de Euclides para hallar el mcd de dos números: se divide el mayor entre el menor, si la división no es exacta se divide el menor que es el divisor de los números dados entre el resto obtenido y así sucesivamente, el procedimiento concluye cuando se obtiene resto 0 y este último divisor es el mcd de los dos números dados.
- Regla de Sturm para calcular el mcd de varios números: se divide cada uno de los números dados por el menor de ellos, se considera entonces este divisor y los restos de las divisiones que no son exactas y se dividen estos números por el menor de ellos, y así sucesivamente, el procedimiento concluye cuando se obtienen todos los restos iguales a 0 y este último divisor es el mcd de los números dados.
- El menor entero positivo $d = ax + by$ con x, y enteros será el máximo común divisor de a y b.

Mínimo común múltiplo (mcm)

- El mínimo común múltiplo de números naturales dados, es el menor número diferente de 0 que es divisible por todos los números dados.
- El mcm de dos o más números es igual al producto de los factores primos comunes y no comunes elevados al mayor exponente. El mcm de dos números a y b lo denotamos mcm(a, b).
- Para hallar el mcm de dos o más números también puede tomarse el mayor de los números dados e ir buscando sus múltiplos sucesivos hasta encontrar uno que sea múltiplo del resto de los números.

Relación entre el mcd y el mcm de dos números: sea m = mcd(a, b) y M = mcm(a, b), entonces $a \cdot b = m \cdot M$.

Ecuaciones en enteros

- Dada la ecuación $ax + by = c$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Para que la ecuación tenga soluciones enteras, es necesario que mcd(a, b) = 1.
- Para hallar la solución general de la ecuación $ax + by = c$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$) de forma tal que $x, y \in \mathbb{Z}$ se procede de la forma siguiente:

Se busca una solución particular y se le adiciona el producto del coeficiente de la otra variable por un parámetro que recorre el conjunto de los números enteros; para la otra variable se adiciona a su valor de solución particular el producto del opuesto del coeficiente de la otra variable por el mismo parámetro.

Geometría

Triángulos

Rectas antiparalelas: son las rectas que forman ángulos iguales con los distintos lados de un ángulo.

Desigualdad triangular

Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo cualquiera se cumple que $a < b + c$; $b < a + c$ y $c < a + b$.

- En un triángulo cada lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.
- En un triángulo, o en triángulos iguales, a mayor lado se opone mayor ángulo, y recíprocamente.
- Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales y el tercero desigual, a mayor ángulo comprendido corresponde mayor lado.
- Los lados (ángulos) de un triángulo opuestos a ángulos (lados) congruentes son congruentes.
- La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.
- La suma de los ángulos exteriores de un triángulo obtenido prolongando sucesivamente sus lados es 360°.
- Un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes.
- En todo triángulo se cumple que el segmento que une los puntos medios de dos de sus lados es paralelo al tercer lado e igual a la mitad de su longitud.
- Las alturas relativas a los lados de un triángulo se cortan en un punto llamado ortocentro.
- Las medianas de un triángulo cualquiera se cortan en un punto que se llama baricentro; este punto determina en las medianas segmentos que están en la razón $1 : 2$.
- Las mediatrices de los lados de un triángulo se cortan en un punto llamado circuncentro; este punto es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.
- Las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo se cortan en un punto llamado incentro; este punto es el centro de la circunferencia inscrita a dicho triángulo.
- Todo ángulo obtuso de un triángulo obtusángulo es mayor que cualquiera de los otros dos ángulos interiores.
- Todo ángulo recto de un triángulo rectángulo es mayor que cualquiera de los otros dos ángulos interiores.
- En todo triángulo rectángulo se cumple que los ángulos agudos de dicho triángulo son complementarios, es decir, suman 90°.
- En un triángulo cualquiera la mediana relativa a uno de sus lados y la paralela media relativa a ese mismo lado se bisecan mutuamente.
- Un triángulo y el triángulo formado al unir los puntos medios de cada lado del triángulo dado tienen el mismo baricentro.
- Dos triángulos son congruentes (iguales) si tienen sus tres lados y sus tres ángulos respectivamente iguales.
- La suma de las distancias desde un punto cualquiera en el interior de un triángulo equilátero a los lados del triángulo es constante e igual a la longitud de su altura.
- Sea ABC un triángulo cualquiera y G su baricentro; por G se traza una recta cualquiera y se trazan AX, BZ y CY perpendiculares a esa recta, con X, Y, Z puntos de la recta trazada, entonces $AX + BZ = CY$.
- El baricentro de un triángulo triseca al segmento formado por el ortocentro y el circuncentro.
- El circuncentro de un triángulo rectángulo es el punto medio de la hipotenusa.
- Sea BE bisectriz del ángulo recto de un triángulo rectángulo ABC, BD altura y BF mediana relativas a la hipotenusa, entonces BE biseca al $\angle DBF$.

Propiedades de las bisectrices de los ángulos de un triángulo

- Si dos bisectrices diferentes de un triángulo son iguales, entonces el triángulo es isósceles.
- La amplitud del ángulo formado por dos bisectrices interiores de un triángulo es igual a la suma de un ángulo recto más la mitad de la amplitud del tercer ángulo de dicho triángulo.
- La amplitud del ángulo formado por dos bisectrices exteriores de un triángulo es igual a la diferencia de un ángulo recto con la mitad de la amplitud del tercer ángulo de dicho triángulo.
- En todo triángulo, la bisectriz de cada uno de los ángulos interiores divide al lado opuesto en segmentos directamente proporcionales, es decir, si los lados del triángulo tienen longitudes a, b y c y los segmentos determinados por la bisectriz del ángulo opuesto al lado c tienen longitudes m y n, entonces $a : b = m : n$.
- Sean CD la bisectriz del ángulo C interior al triángulo ABC, BD la bisectriz del ángulo ACB y ABE exterior y adyacente al ángulo interior B, entonces $\angle CDB = \dfrac{1}{2} \angle BAC$.

- En todo triángulo el producto de dos lados es igual al cuadrado de la bisectriz del ángulo comprendido entre ellos, más el producto de los dos segmentos que dicha bisectriz determina sobre el tercer lado. (*Nota:* Para la bisectriz de los ángulos exteriores sucede lo mismo con la prolongación del lado opuesto.)
- Sea ABC un triángulo cualquiera y a, b, c las longitudes de sus lados. Si b_a, b_b y b_c son las longitudes de las bisectrices de los ángulos A, B y C respectivamente, entonces

  $b_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{b\,c\,p(p-a)}$; $b_b = \frac{2}{a+c}\sqrt{a\,c\,p(p-b)}$; $b_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{a\,b\,p(p-c)}$ siendo p el semiperímetro del triángulo.

Propiedades de las medianas relativas a los lados de un triángulo

Sea ABC un triángulo cualquiera y a, b, c las longitudes de sus lados. Si m_a, m_b y m_c son las longitudes de las medianas relativas a los lados a, b y c, respectivamente, entonces

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}\ :\ m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}\ ;\ m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}\ .$$

Teorema de Apolonio: En todo triángulo se cumple que:

1. La suma de los cuadrados de dos de sus lados es igual al duplo del cuadrado de la mediana correspondiente al tercer lado más el duplo del cuadrado de la mitad de dicho tercer lado.
2. La diferencia de los cuadrados de dos de sus lados es igual al duplo del producto del tercer lado por la proyección sobre él de la mediana correspondiente.

Propiedades de las alturas relativas a los lados de un triángulo

- Sea ABC un triángulo cualquiera y a, b, c las longitudes de sus lados. Si h_a, h_b y h_c son las longitudes de las alturas relativas a los lados a, b y c, respectivamente y p el semiperímetro del triángulo, entonces

  $h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; $h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;

  $h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.
- El pie de la altura relativa a un lado cualquiera de un triángulo es el punto medio del segmento trazado desde el ortocentro hasta el punto donde dicha altura corta a la circunferencia circunscrita al triángulo dado.

Grupo de teoremas de Pitágoras: Sea ABC un triángulo rectángulo en A y AD es la altura relativa a la hipotenusa; entonces se cumple que:

Teorema de Pitágoras. La longitud de la hipotenusa elevada al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos, es decir, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Teorema de la altura. La longitud de la altura relativa a la hipotenusa elevada al cuadrado es igual al producto de los segmentos que esta determina en la hipotenusa, es decir, $AD^2 = BD \cdot CD$.

Teorema de los catetos. La longitud de cada cateto elevada al cuadrado es igual al producto de la hipotenusa con la proyección de este cateto sobre la hipotenusa, es decir, $AC^2 = BC \cdot CD$ y $AB^2 = BC \cdot BD$.

Nota: Para estos teoremas se cumplen también sus recíprocos.

- Si un triángulo rectángulo tiene un ángulo agudo de 30°, la longitud del cateto opuesto a ese ángulo es la mitad de la longitud de la hipotenusa.

Generalización del teorema de Pitágoras: Sea ABC un triángulo cualquiera y a, b, c las longitudes de sus lados con $a \geq b \geq c$, se tiene que:

1. Si $a^2 = b^2 + c^2$, entonces el triángulo es rectángulo en A.
2. Si $a^2 < b^2 + c^2$, entonces el triángulo es acutángulo.
3. Si $a^2 > b^2 + c^2$, entonces el triángulo es obtusángulo y el $\angle A$ es obtuso.

Igualdad de triángulos

- Dos triángulos son iguales o congruentes cuando superpuestos coinciden sus vértices.
- Si dos triángulos son iguales, entonces sus tres lados y sus tres ángulos son respectivamente iguales.
- Dos triángulos son iguales o congruentes si existe un movimiento mediante el cual uno de ellos se transforma en el otro.

Criterios de igualdad de triángulos

1. Si dos triángulos tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales, entonces estos triángulos son iguales.
2. Si dos triángulos tienen un lado y los ángulos adyacentes a ese lado respectivamente iguales, entonces estos triángulos son iguales.
3. Si dos triángulos tienen sus tres lados respectivamente iguales, entonces estos triángulos son iguales.

En triángulos iguales, a lados iguales se oponen ángulos iguales, y viceversa.

Dos triángulos rectángulos son iguales si:

1. Tienen respectivamente iguales los dos catetos.
2. Tienen respectivamente iguales un cateto y la hipotenusa.
3. Tienen respectivamente iguales un cateto y uno de los ángulos agudos.
4. Tienen respectivamente iguales la hipotenusa y uno de los ángulos agudos.

Semejanza de triángulos

- Dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos son proporcionales.
  Teorema fundamental de la semejanza de triángulos. Toda recta paralela a un lado de un triángulo, forma con los otros dos lados (o con sus prolongaciones) otro triángulo que es semejante al triángulo dado.
- Si dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente iguales, entonces son semejantes.
- Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente proporcionales e igual el ángulo comprendido entre dichos lados, entonces estos triángulos son semejantes.
- Si dos triángulos tienen sus tres lados respectivamente proporcionales, entonces son semejantes.

Cuadriláteros

- La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es de 360°.
- Los cuadriláteros se clasifican en: trapezoides, los que no tienen ninguna pareja de lados paralelos; trapecios, los que tienen una pareja de lados paralelos, y paralelogramos, los que tienen dos parejas de lados paralelos.
- La suma de los ángulos exteriores de un cuadrilátero obtenido prolongando sucesivamente sus lados es 360°.

- Los segmentos trazados al unir los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrilátero se bisecan mutuamente.
- El trapezoide simétrico es el que tiene dos parejas de lados consecutivos iguales y desiguales entre sí.
- Las diagonales de un trapezoide simétrico son perpendiculares.
- El cuadrilátero formado al unir los puntos medios de los lados consecutivos de un cuadrilátero es un paralelogramo.
- El cuadrilátero formado al unir los puntos medios de los lados consecutivos de un cuadrilátero, cuyas diagonales son perpendiculares, es un rombo.
- El cuadrilátero formado al unir los puntos medios de los lados consecutivos de un cuadrilátero, cuyas diagonales son iguales, es un rectángulo.
- El cuadrilátero formado al unir los puntos medios de los lados consecutivos de un cuadrilátero cuyas diagonales son perpendiculares y son iguales es un cuadrado.
- El punto de distancia mínima a los lados de un cuadrilátero es el punto de intersección de sus diagonales.
- Un cuadrilátero donde una pareja de ángulos opuestos son suplementarios se puede inscribir en una circunferencia, es decir, es inscriptible y se le llama cuadrilátero cíclico.
- Un cuadrilátero $ABCD$ es incriptible si y sólo si $\angle ABC + \angle ADC = 180°$.
- Un cuadrilátero al cual se le puede inscribir una circunferencia se le llama cuadrilátero circunscriptible.

Trapecios

- El trapecio es el cuadrilátero que tiene una pareja de lados opuestos paralelos que se llaman bases y los lados no paralelos se llaman lados.
- El trapecio que tiene sus lados iguales se llama trapecio isósceles.
- El trapecio que tiene un lado perpendicular a las bases se llama trapecio rectángulo.
- En un trapecio se cumple que el segmento que une los puntos medios de los lados se llama paralela media: este es paralelo a las bases e igual a la semisuma de sus longitudes.
- Sea $ABCD$ un trapecio, P_m su paralela media, P y K los puntos de intersección de las diagonales AC y BD con P_m , entonces

  $$PK = \frac{CD - AB}{2}.$$

Paralelogramos

- Un cuadrilátero convexo es un paralelogramo si y solo si los lados opuestos son paralelos.

Algunas propiedades de los paralelogramos son:

1. Los ángulos opuestos son iguales.
2. Los lados opuestos son iguales y paralelos.
3. Las diagonales se cortan en su punto medio.
4. Los ángulos consecutivos son suplementarios.
5. Una diagonal lo divide en dos triángulos congruentes.

Los paralelogramos especiales son:

1. El rectángulo que tiene todos sus ángulos iguales y de amplitud igual a 90°, sus diagonales son iguales.
2. El rombo que tiene todos sus lados iguales, sus diagonales se cortan perpendicularmente y son bisectrices de los ángulos cuyos vértices son los extremos de las diagonales.
3. El cuadrado que es el polígono regular de 4 lados que cumple con las propiedades del rectángulo y del rombo.
   - En todo paralelogramo la suma de los cuadrados de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de sus diagonales. El recíproco también es cierto.

Circunferencia y círculo

- La circunferencia es el conjunto de todos los puntos del plano que se encuentran situados a la misma distancia de un punto fijo de dicho plano; a este punto fijo se le llama centro de la circunferencia.
- El círculo es el conjunto formado por todos los puntos de una circunferencia y sus puntos interiores.
- Una circunferencia es simétrica respecto a cualquier recta que pase por su centro.
- La circunferencia es una figura centralmente simétrica; su centro de simetría es su propio centro.
- Dos circunferencias son iguales si tienen el mismo radio.
- Tres puntos no alineados determinan una circunferencia.
- Cuerdas iguales determinan arcos iguales.
- Cuerdas iguales equidistan del centro.
- A mayor cuerda corresponde mayor ángulo central.
- La mayor de dos cuerdas es la más próxima al centro.
- Un diámetro es perpendicular a una cuerda (que no es un diámetro) si y solo si está contenido en su mediatriz.
- Una recta con respecto a una circunferencia puede ser: exterior, si no tienen puntos comunes; tangente, si tienen un solo punto común; secante si tienen dos puntos comunes.
- La recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que tiene como extremo el punto de tangencia.
- Una recta es tangente a una circunferencia si y solo si es perpendicular al radio en su punto de contacto.
- Las tangentes trazadas desde un punto exterior son iguales y forman ángulos iguales con la recta diametral que pasa por el punto.
- La línea de los centros es el segmento que une los centros de dos circunferencias.
- Si dos circunferencias son tangentes, la línea de los centros pasa por el punto de contacto.

Consideremos las posiciones relativas entre dos circunferencias con distintos centros:

1. No se cortan (son exteriores o una es interior a la otra); entonces, si son exteriores, la línea de los centros es mayor que la suma de sus radios y, si son interiores, la línea de los centros es menor que la diferencia de sus radios.
2. Se cortan en un punto (interiormente o exteriormente); entonces, si son tangentes exteriormente, la línea de los centros es igual a la suma de sus radios y, si son tangentes interiormente, la línea de los centros es igual a la diferencia de los radios.
3. Son secantes, entonces la línea de los centros es menor que la suma de los radios y mayor que la diferencia.
4. Si las circunferencias son concéntricas, la línea de los centros es nula.
   Nota: Para cada caso se cumple el recíproco.
   - La línea de los centros de dos circunferencias secantes es perpendicular a la cuerda común.

Ángulos en la circunferencia

- El ángulo central tiene como lados dos radios con su vértice en el centro de la circunferencia y su amplitud es igual a la del arco que abarcan sus lados.
- Los ángulos centrales son proporcionales a los arcos que subtienden.
- El ángulo inscrito tiene como lados dos cuerdas con su vértice en un punto de la circunferencia que es el punto común de ambas cuerdas y su amplitud es igual a la mitad del arco que abarcan sus lados.
- El ángulo seminscrito tiene como lados una cuerda y una tangente con su vértice en el punto de tangencia y su amplitud es igual a la mitad del arco que abarcan sus lados.
- El ángulo interior tiene como lados dos cuerdas que se cortan en un punto interior y su amplitud es igual a la semisuma de los arcos comprendidos entre sus lados.

- El ángulo exterior tiene como lados dos secantes trazadas a una circunferencia desde un punto exterior y su amplitud es igual a la semidiferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.
- En una circunferencia o en circunferencias iguales, a arcos iguales corresponden:
  Ángulos centrales iguales
  Ángulos inscritos iguales
  Ángulo inscrito y ángulo seminscrito iguales
  Cuerdas iguales
- El ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto, es decir, tiene una amplitud de 90°.
- Dos cuerdas que se cortan en el interior de una circunferencia quedan divididas en segmentos inversamente proporcionales.
- Las secantes trazadas desde un mismo punto, son inversamente proporcionales a los segmentos exteriores.
- Potencia de un punto: el producto de dos distancias cualesquiera de un punto a una circunferencia es constante.

Polígonos

- La suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $(n - 2)\ 180°$.
- La suma de los ángulos exteriores de un polígono de n lados es 360°.
- La cantidad de diagonales que se pueden trazar desde uno de los vértices de un polígono de n lados es $n - 3$.
- La cantidad de diagonales que se pueden trazar en un polígono de n lados se puede determinar por la expresión $\frac{n\,(n-3)}{2}$.
- Un polígono convexo es regular si todos sus lados son iguales y todos sus ángulos son iguales.
- Todo polígono regular se puede inscribir (circunscribir) en una circunferencia.
- La amplitud de cada uno de los ángulos interiores de un polígono regular de n lados es

  $\frac{180^\circ\ (n-2)}{n}$.
- La amplitud de cada uno de los ángulos exteriores de un polígono regular de n lados es $\frac{360^\circ}{n}$.
- Todos los polígonos regulares tienen una circunferencia circunscrita que pasa por todos sus vértices, y una circunferencia inscrita que es tangente a todos sus lados. El centro de ambas circunferencias, que es el mismo, se llama centro del polígono. El radio del polígono es el de la circunferencia circunscrita. El radio de la circunferencia inscrita es la apotema del polígono.
- El radio, R, la apotema, a, y la mitad del lado, $l/2$, de un polígono regular forman un triángulo rectángulo.

Teorema de las transversales

- Llamamos razón entre dos segmentos a la razón entre los números que expresan sus medidas en la misma unidad de longitud.
- Los segmentos AB y CD son proporcionales a los segmentos A_1B_1 y C_1D_1 si $\frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1}$.

Teorema de las transversales

Si dos semirrectas de origen común son cortadas por varias rectas paralelas, entonces se cumple que la razón entre dos segmentos de una de estas es igual a la razón entre los dos segmentos correspondientes en la otra.

Áreas y perímetros

Para un triángulo ABC cualquiera de lados con longitudes a, b y c se tiene:

$$A = \frac{1}{2}\, b\, h_b = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = p\, r = \frac{a\,b\,c}{4R}$$

b y h_b longitud de la base y la altura relativa a dicha base, respectivamente,

$$p = \frac{1}{2}\,(a + b + c),$$

r: radio de la circunferencia inscrita al triángulo ABC,

R: radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.

- Área de un triángulo equilátero:

  $$A = \frac{\sqrt{3}}{4}\, l^2;$$

  l^2 - longitud del lado del triángulo.
- Área de un paralelogramo:
  $A = b\, h$;
  b y h - longitudes de la base y la altura relativa a dicha base respectivamente.
- Área de un rectángulo:
  $A = a\, b$;
  a y b - longitudes de los lados del rectángulo.
- Área de un rombo:

  $$A = \frac{1}{2}\, d_1 \cdot d_2;$$

  d_1 y d_2 - longitudes de las diagonales del rombo.
- Área de un cuadrado:
  $A = a^2$;
  A - longitud del lado del cuadrado.
- Área de un polígono regular:
  $A = p \cdot a$;
  p - semiperímetro del polígono;
  a - su apotema.
- Área de un círculo:
  $A = \pi\, r^2$;
  r - radio de la circunferencia.
- La parte del círculo limitada por un arco y los lados del ángulo central correspondiente se llama sector circular.
- Área de un sector circular:

  $$A_S = \frac{A}{360^\circ}\,\alpha$$

  A_S - área del sector circular,
  A - área del círculo,
  α - amplitud del ángulo central que le corresponde al sector A_S.
- La porción del plano limitada por dos circunferencias concéntricas, incluyendo estas, se llama anillo o corona circular.

- Área del anillo:
  $A_A = \pi\ (R^2 - r^2)$

  R - longitud del radio de la circunferencia exterior,

  r - longitud del radio de la circunferencia interior.

- Área de un cuadrilátero:
  $A = \sqrt{p\,(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$
  a, b, c y d - longitudes de los lados del cuadrilátero,
  p - semiperímetro.
- Longitud de la circunferencia de radio r:
  $L = 2\pi\ r$.
- Longitud de un arco de circunferencia:

  $b = \dfrac{L}{360^\circ}\,\alpha$

  b - longitud del arco,
  L - longitud de la circunferencia,
  α - amplitud del ángulo central que le corresponde el arco b.

Lugares geométricos

- La circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo.
- La mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano que equidistan de dos puntos fijos.
- La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano que equidistan de los lados del ángulo.
- Los puntos que equidistan una distancia fija r a una recta fija l, son los que se encuentran en un par de rectas paralelas a la recta dada cada una a distancia r.
- El lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos fijos A y B, es una recta que pasa por el punto medio de AB y es perpendicular a este segmento.
- El lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos rectas fijas l y m que se intersecan en O, es un par de rectas perpendiculares que pasan por O y donde cada una es bisectriz de uno de los ángulos que forman l y m.

Movimientos y transformaciones en el plano

Movimiento

Las transformaciones geométricas del plano que conservan las distancias se llaman movimientos. También puede decirse que es la correspondencia que lleva un punto del plano de su posición inicial a su posición final, es decir, ambos puntos se corresponden en el movimiento, o que ambos son homólogos.

Propiedades de los movimientos:

1. Los movimientos transforman rectas en rectas.
   Si tres puntos A, B y C están alineados y uno de ellos, por ejemplo C, está entre A y B y se cumple que $AC + CB = AB$ y si A', B', C' son las imágenes de A, B y C, respectivamente, entonces $A'C' + C'B' = A'B'$ y los tres puntos A', B' y C' están alineados.
2. Si dos rectas son paralelas, sus imágenes por un movimiento también lo son.
3. Los ángulos formados por dos rectas y por sus imágenes son iguales.

Transformación

Es un movimiento que no conserva la relación de congruencia, es decir, en un movimiento un segmento $AB = A'B'$ siendo A', B' los homólogos de A y B respectivamente. En cambio, en una transformación dicho segmento AB no es congruente con sus homólogos en la transformación.

- Si un ángulo y su imagen por un movimiento tienen el mismo (contrario) sentido, lo mismo sucede con todos los ángulos y sus imágenes por este movimiento.

Traslación

- Las traslaciones son los movimientos directos del plano que dejan invariante una recta y el sentido de esta. Dos puntos A y A' se corresponden en una traslación de vector $\vec{v}$, cuando se cumple $AA' = \vec{v}$

Algunas propiedades de la traslación son:

1. Si dos segmentos AB y $A'B'$ se corresponden en una traslación, ambos segmentos son iguales y paralelos.
2. El homólogo de un punto es otro punto.
3. La homóloga de una recta es otra recta paralela a ella.

Rotación

- Las rotaciones son los movimientos directos del plano que dejan invariante un punto. El punto doble O se llama centro de rotación.

Algunas propiedades de la rotación son:

1. El ángulo que forman un punto, el centro y la imagen de ese punto se llama ángulo de rotación.
2. Diremos que dos puntos A y A' se corresponden en una rotación de centro O y ángulo α se cumple que $OA = OA'$ y $\angle AOA' = \alpha$.

Si dos segmentos se corresponden en un giro cumplen:

1. Que son iguales.
2. Que el ángulo que forman ambos segmentos es igual al ángulo de rotación.

Las figuras homólogas en la rotación son:

1. El homólogo de un punto es otro punto.
2. La homóloga de una recta es otra recta que forma con la primitiva un ángulo igual al de rotación.

Simetría

- La simetría es el movimiento que deja invariante una recta y todos sus puntos, y no es la identidad; se llama simetría respecto de esta recta que es el eje de simetría.
- Si A es un punto cualquiera y A' es su imagen, uniendo A y A' con un punto M del eje se obtienen los ángulos AMP y $A'MP$ iguales y de sentido contrario. Las rectas MA y MA' coincidirán cuando los ángulos AMP y $A'MP$ sean rectos.
- La recta AA' es perpendicular al eje de simetría.
- Si la recta AA' es perpendicular al eje y R es el pie de esta perpendicular, entonces $AR = A'R$.

Algunas propiedades de la simetría son:

1. En una simetría respecto de un eje r, cada punto y su imagen determinan un segmento cuya mediatriz es el eje.

2. Todo movimiento inverso puede obtenerse como producto de una simetría arbitraria por un movimiento directo (traslación o rotación).

Homotecia

- Una homotecia es una transformación del plano en sí mismo que se define de la manera siguiente:

1. Se determina un punto O como centro de la homotecia.
2. Se determina un número real k ($k > 0$) como razón de la homotecia.
3. La imagen P' de un punto P está situada sobre la semirrecta OP de modo que $OP' = kOP$ si P no coincide con O.
4. O es su propia imagen (O' y O coinciden).

Algunas propiedades de la homotecia:

Para toda $H\ (O;\ k)$, lo cual significa homotecia H de centro O y razón k, se cumple:

1. La imagen de una recta es una recta paralela a ella.
2. La imagen de un segmento es un segmento paralelo a él y que tiene k veces su longitud.
3. La imagen de un ángulo es un ángulo que tiene su misma amplitud.

- La composición de dos homotecias $H\ (O_1;\ k_1)$ y $H\ (O_2;\ k_2)$, donde $k_1k_2 \neq 1$ es nuevamente una homotecia, su razón es $k_3 = k_1k_2$ y su centro O_3 se encuentra situado sobre la recta O_1O_2.
- Se define una homotecia $H\ (O;\ -k)$ con $k > 0$ como la composición de una homotecia $H\ (O;\ k)$ con una simetría central de centro O.
- Toda composición de una homotecia con un movimiento se llama transformación semejante.
- Se dice que dos figuras geométricas F_1 y F_2 son semejantes si existe una transformación semejante por la cual una se transforma en la otra. Se escribe $F_1 \sim F_2$.
- Las transformaciones semejantes son las transformaciones del plano en sí mismo para las cuales se cumple que la distancia entre dos puntos cualesquiera y la distancia entre sus imágenes están en una misma razón k ($k \in \mathbb{R}$, $k > 0$).
- Si dos figuras F y F' son semejantes con razón k, entonces se cumple para sus perímetros que $p' = k\ p$ y para sus áreas que $A' = k^2 A$.

Cálculo de cuerpos

- Un cuerpo geométrico es un conjunto de puntos limitado por una o varias superficies.
- Ortoedro: se llama ortoedro al cuerpo cuyas aristas laterales son perpendiculares a los planos de las bases y sus bases son rectángulos.

Algunas de sus propiedades son:

1 Las seis caras del ortoedro son rectángulos.
2. Las cuatro diagonales del ortoedro son iguales.
3. En todo ortoedro, el cuadrado de la diagonal es igual a la suma de los cuadrados de las tres aristas que concurren en un mismo vértice.

En un ortoedro donde los lados de la base tienen longitudes a y b y su altura es c, se cumple que:

1. El área lateral del ortoedro es $A_L = 2(ac + bc)$.
2. El área total del ortoedro es $A_T = 2(ab + ac + bc)$.
3. El volumen del ortoedro es igual al producto del área de la base por la longitud de la altura $V = abc$.

- La razón entre los volúmenes de dos ortoedros de igual base es igual a la de sus alturas.
- Cubo: es el ortoedro que tiene iguales todas sus aristas. Las seis caras del ortoedro son cuadrados iguales; se le llama también exaedro regular.

- El cuadrado de la diagonal de un cubo es igual al triplo del cuadrado de la longitud de su arista.

En un cubo de arista a se cumple que:

1. El área lateral del cubo es $A_L = 4a^2$.
2. El área total del cubo es $A_T = 6a^2$.
3. El volumen del cubo es igual al cubo de la longitud de su arista, es decir, $V = a^3$.

- Prisma: se llama prisma al cuerpo limitado por varios paralelogramos y dos polígonos iguales cuyos planos son paralelos.
- Prisma recto es aquel cuyas aristas laterales son perpendiculares a los planos de las bases. Si las aristas laterales no son perpendiculares a los planos de las bases, el prisma se llama oblicuo.
- Prisma regular es el prisma recto cuyas bases son polígonos regulares.
- El área lateral de un prisma recto es igual al producto del perímetro P de la base por la longitud de la altura h, es decir, $A_L = Ph$.
- El área total del prisma se obtiene sumando al área lateral el doble del área de la base, es decir, $A_T = Ph + 2\,A_B$.
- El volumen de un prisma es igual al producto del área de la base por la altura h, es decir, $V = A_B h$.

La pirámide es el cuerpo cuya base es un polígono cualquiera y sus caras son triángulos que tienen un vértice común o de la pirámide.

- Las pirámides triangulares, en las que todas sus caras son triángulos, se llaman también tetraedros.
- Todo tetraedro es la tercera parte del prisma triangular de igual base y altura.
- Pirámide regular es la que tiene por base un polígono regular y el pie de la altura coincide con el centro de este polígono. Sus caras laterales son triángulos isósceles iguales. La altura de cada uno de estos triángulos se llama *apotema de la pirámide*.
- Si una pirámide se corta por un plano paralelo a la base, la sección es un polígono semejante a esta. Si la pirámide es regular, las secciones paralelas a la base son polígonos regulares.
- La razón entre el área de la base de una pirámide y el área de una sección paralela a esta, es igual a la razón entre los cuadrados de sus distancias al vértice.
- El área lateral de una pirámide es igual a la suma de las áreas de todas sus caras.
- El área lateral de una pirámide regular es igual al producto del semiperímetro de la base por la longitud de la apotema de la pirámide.
- El área total de una pirámide es igual al área lateral más el área de la base.
- El volumen de una pirámide cualquiera es igual a la tercera parte del producto del área de la base A_B por su altura h, es decir, $V = \frac{1}{3}\,A_B h$.
- La razón entre los volúmenes de dos pirámides cualesquiera es igual a la de los productos de sus bases por su altura.
- Se llama tronco de pirámide a la porción de pirámide comprendida entre la base y un plano paralelo a esta que corte a todas sus aristas laterales. Si la pirámide es regular, el tronco se llama tronco de pirámide regular y sus caras laterales son trapecios isósceles iguales cuya altura se llama apotema del tronco.
- El área lateral de un tronco de pirámide regular es igual al producto de la semisuma de los perímetros de sus bases por la apotema del tronco.
- El volumen del tronco de pirámide de bases paralelas es igual al producto de un tercio de su altura por la suma de sus bases y una media proporcional entre ellas. Si B y b son las bases de un tronco de pirámide de bases paralelas y h su altura, se tiene que el volumen es $V = \frac{h}{3}\left(B + b + \sqrt{B\,b}\right)$.
- La superficie engendrada por una línea que gira alrededor de una recta llamada eje y cuyos puntos conservan la misma distancia al eje se llama superficie de revolución. La línea que gira se llama generatriz y el cuerpo engendrado sólido de revolución.

- Llamamos cilindro circular recto al cuerpo que se obtiene por la rotación de un rectángulo alrededor de uno de sus lados.
- El área lateral del cilindro circular recto es igual al producto de la longitud de la circunferencia de la base de radio r por la longitud de la generatriz (altura h), es decir, $A_L = 2\pi\ r\ h$.
- El área total del cilindro es el área lateral más la suma de las áreas de los círculos de las bases $A_T = 2\pi\ r\ (h + r)$.
- El volumen del cilindro circular recto es igual al producto del área de la base por la altura, es decir, $V = \pi\ r^2 h$.
- Llamamos cono circular recto al cuerpo que se obtiene por la rotación de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.
- El área lateral del cono circular recto es igual a la longitud de la semicircunferencia de la base multiplicada por la longitud de la generatriz g, es decir, $A_L = \pi\ r\ g$.
- El área total del cono circular recto es igual a la suma del área lateral y el área de la base, es decir, $A_T = \pi\ r\ (g + r)$.
- El volumen del cono circular recto es igual a la tercera parte del área de la base por la longitud de la altura, es decir, $V = \frac{1}{3}\pi\ r^2 h$.
- El volumen del cono circular es la tercera parte del volumen del cilindro de igual base e igual altura.
- La porción de cono circular comprendida entre la base de un cono y un plano paralelo a ella, se llama tronco de cono de bases paralelas.
- El área lateral del tronco de cono se puede calcular como $A_{LC} = \pi\ g\ (r + r')$, donde g es la generatriz del cono, r y r' son los radios de la base y del plano paralelo a la base, respectivamente.
- El área total del tronco es el área lateral más la suma de las áreas de las bases.
- El volumen de un tronco de cono es igual al producto de un tercio de la longitud de su altura por la suma de las áreas de sus bases B y B' y una media proporcional entre estas, es decir, $V = \frac{h}{3}\left(B + B' + \sqrt{B \cdot B'}\right)$.
- Llamamos esfera al cuerpo geométrico que se obtiene por la rotación de un semicírculo alrededor de su diámetro. El centro del semicírculo es el centro de la esfera. El radio y el diámetro del semicírculo son, respectivamente, el radio y el diámetro de la esfera.
- El área de una esfera de radio r es $A = 4\pi\ r^2$.
- El volumen de una esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi\ r^3$.

Conjuntos, combinatoria, tableros, coloración de planos y juegos

Lógica y teoría de conjuntos

- Si A es un conjunto y a es un elemento, decimos que a pertenece a A ($a \in A$) si a es un elemento del conjunto A y decimos que a no pertenece a A ($a \notin A$) si a no es un elemento del conjunto A.
- Usualmente determinamos o identificamos un conjunto de dos maneras diferentes: por extensión o en forma descriptiva.

Por extensión: cuando nombramos cada uno de los elementos que lo integran. Se escribe en forma tabular porque se escribe cada uno de sus elementos separados por comas y entre llaves. Ejemplo: el conjunto A formado por las letras a, b, c y d, se escribe $A = \{a, b, c, d\}$. Cuando un elemento aparece varias veces, se considera una sola vez para escribirlo.

Forma descriptiva: cuando se puede definir el conjunto A cuyos elementos poseen una cierta característica. Se escribe en forma constructiva. Ejemplo: el conjunto A de los múltiplos de 5 menores que 200: se escribe $A = \{x/\ x \in \mathbb{N}, x < 200 \text{ y } x \text{ es múltiplo de } 5\}$.

- El conjunto vacío es el conjunto que no tiene ningún elemento y lo denotamos por ϕ, o sea, para todo x, $x \notin \phi$, o también, no existe ningún x tal que $x \in \phi$.
- El conjunto unitario es el conjunto formado por un solo elemento.
- Sean dos conjuntos E y F. Se dice que E y F son iguales (o idénticos) si todo elemento de E es un elemento de F y todo elemento de F es un elemento de E. Se denota $E = F$, o sea, $E = F$, si y solo si E y F tienen los mismos elementos.

Propiedades de la igualdad de conjuntos:

1. Todo conjunto es igual a sí mismo, o sea, $E = E$. Se dice que la igualdad de conjuntos es reflexiva.
2. Si $E = F$, entonces $F = E$. Se dice que la igualdad de conjuntos es simétrica.
3. Si $E = F$ y $F = G$, entonces $E = G$. Se dice que la igualdad de conjuntos es transitiva.

- Se dice que E está incluido en F, si y solo si todo elemento de E es un elemento de F. Escribimos $E \subset F$ y decimos que E es subconjunto de F, o que E es una parte de F, o sea: $E \subset F \Leftrightarrow$ (para todo x, $x \in E \Rightarrow x \in F$).

Propiedades de la inclusión:

1. Para todo E, se tiene que $E \subset E$, o sea, la inclusión es reflexiva.
2. Para todo E, F si $E \subset F$ y $F \subset E \Rightarrow E = F$, o sea, la inclusión es antisimétrica.
3. Para todo E, F, G, si $E \subset F$ y $F \subset G \Rightarrow E \subset G$, o sea, la inclusión es transitiva.

- El conjunto formado por los subconjuntos de E se llama conjunto potencia de E y se denota $P(E)$, o sea: $P(E) = \{X / X \subset E\}$ o $X \subset E \Leftrightarrow X \in P(E)$.

Operaciones con conjuntos

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, entonces:

- La unión de conjuntos se denota $A \cup B$. Si $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ o $x \in B$.
- La intersección de conjuntos se denota $A \cap B$. Si $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ y $x \in B$.
- La diferencia de conjuntos se denota $A \setminus B$. Si $x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A$ y $x \notin B$.

Propiedades de las operaciones con conjuntos

Sean U un conjunto y $A, B, C \in P(U)$.

1. Conmutatividad de la unión: $A \cup B = B \cup A$.
2. Conmutatividad de la intersección: $A \cap B = B \cap A$.
3. Asociatividad de la unión: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
4. Asociatividad de la intersección: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
5. $A \cup \phi = A$, $A \cap \phi = \phi$.
6. $A \subset (A \cup B)$, $(A \cap B) \subset A$; $B \subset (A \cup B)$, $(A \cap B) \subset B$.
7. $A \cup U = U$.
8. Distributividad de la unión respecto a la intersección:
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
9. Distributividad de la intersección respecto a la unión:
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

- Cuando hay elementos que están en el conjunto universo (U) y que no están en A, es decir, $U \setminus A$ o A^c, se tiene que $x \in A^c \Rightarrow x \in U$ y $x \notin A$. De aquí se tienen algunos casos tales como:

  1. $\phi^c = U$
  2. $U^c = \phi$
  3. Si $A \subset B$, entonces $B^c \subset A^c$
  4. $A \cup A^c = U$
  5. $A \cap A^c = \phi$

- Los conjuntos en los que se cumple que $A \cap B = \phi$ se llaman conjuntos disjuntos.
- Mediante los diagramas de Venn podemos representar los distintos casos de operaciones con conjuntos:

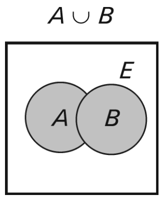

Fig. 1

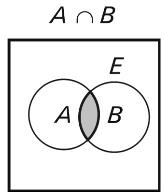

Fig. 2

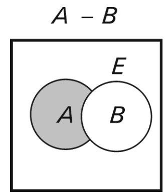

Fig. 3

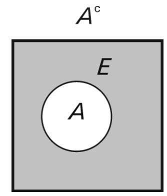

Fig. 4

Leyes de D'Morgan:

1. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$, o sea, $U \setminus (A \cap B) = (U \setminus A) \cup (U \setminus B)$.
2. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, o sea, $U \setminus (A \cup B) = (U \setminus A) \cap (U \setminus B)$.

- Se llama cardinal de un conjunto a la cantidad de elementos que tiene un conjunto y se escribe cardinal de A como $\#A$.

Principio de inclusión y exclusión: para cualquier sistema de n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se cumple:

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \# A_1 + \#A_2 + \ldots + \#A_n - [\#(A_1 \cap A_2) + \#(A_1 \cap A_3) + \ldots + \#(A_{n-1} \cap A_n)] + [\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \ldots + \#(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n)] + \ldots + (-1)^n \cdot [\#(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)].$$

Teoría combinatoria

Principio de multiplicación: si un suceso cualquiera puede ocurrir de n maneras diferentes y, después que ha ocurrido de una cualquiera de esas maneras, un segundo suceso puede ocurrir de p maneras diferentes, entonces los dos sucesos, en ese orden, pueden ocurrir de $n \cdot p$ maneras.

Principio de Dirichlet: si se distribuyen $n + 1$ objetos en n casillas habrá al menos una casilla que recibe más de un objeto. f: $\{1, 2, \ldots, n\} \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ con $n > k$; existen i, j con $i \neq j$ tal que $f(i) = f(j)$.

Cuadrados mágicos

- Un cuadrado mágico numérico es aquel que al sumar horizontalmente, verticalmente y en forma de diagonal todos los números que están en el cuadrado, la suma es la misma.
- Un cuadrado mágico es una disposición de números naturales en forma tabular, en filas y columnas completas, de manera que la suma de los números que componen cada fila, cada columna o cada diagonal es la misma constante.

Por ejemplo, el lector puede comprobar que la siguiente disposición de números naturales constituye un cuadrado mágico (cuadrado mágico de orden 3):

8	1	6
3	5	7
4	9	2

En efecto, la suma de los números que integran cada fila, cada columna o cada diagonal es igual a 15 en todos los casos.

Otro cuadrado mágico (de orden 4) puede encontrarse en la siguiente disposición de números naturales:

3	6	12	13
10	15	1	8
5	4	14	11
16	9	7	2

La suma de los números que integran cada fila, cada columna o cada diagonal es siempre la misma: 34.

Definición: se denomina cuadrado mágico de orden n (n número natural) a toda disposición cuadrada de números naturales 1, 2, 3, 4,..., n^2 en forma tabular tal que la suma de los números que componen cada fila, cada columna o cada diagonal es la misma.

- La conocida fórmula de Gauss para hallar la suma de los primeros n números naturales nos permite escribir lo siguiente: $1 + 2 + 3 + ... + n^2 = ½\, n^2 (n^2 + 1)$. De aquí concluimos que en un cuadrado de orden n la suma de los números de cada fila, columna o diagonal debe ser igual a $\frac{1}{2}\, n\, (n^2 + 1)$, pues el cuadrado mágico tiene n filas y n columnas.

Coloración de planos

- Estamos en presencia de un recubrimiento de A cuando la unión de todos los subconjuntos es el propio conjunto A.
- Un recubrimiento es minimal cuando al quitar cualquier subconjunto deja de ser un recubrimiento.

Juegos

- Una de las concepciones básicas en la teoría de los juegos es la noción de estrategia. Llámese estrategia del jugador al conjunto de reglas que determina.
- El juego se diferencia de una situación real de conflicto en que se realiza a base de reglas completamente determinadas. Los que participan en dichas situaciones de conflicto se les llama jugadores y al resultado del encuentro ganancia de una de las partes.
- Un juego se llama de suma cero si uno de los jugadores gana lo que pierde el otro, o sea, la suma de las ganancias es igual a cero. En un juego de suma cero, los intereses de los jugadores son completamente opuestos.
- Estrategia óptima de un jugador es aquella que al repetirse reiteradamente el juego garantiza al jugador la ganancia media máxima posible (o lo que es lo mismo, la pérdida mínima posible). Al elegir esta estrategia, el razonamiento básico está en la suposición de que el contrario es por lo menos tan razonable como nosotros mismos y hace todo lo posible para evitar que consigamos nuestro objetivo.

PROBLEMAS DE ENTRENAMIENTO PARA LA PRIMERA ETAPA

1. Si $3x + y = 2$; $x - 4y = 5$, entonces si $8x - 6y = *$, ¿cuál es el valor de $*$?

2. El señor X gana por día el doble de lo que gasta diariamente en alimentos y el triple de lo que gasta diariamente en otras obligaciones. Si al cabo de 40 días ha ahorrado B:360, ¿cuál es el gasto diario en alimentación?

3. Se tiene una fracción $\frac{a}{b}$ de manera que si le añadimos 14 al numerador y 26 al denominador, el valor de la fracción no varía. Determina dicha fracción.

4. El valor de un auto disminuye en un diez por ciento por cada año de uso. Si el costo original fue de \$5 000; ¿al cabo de cuántos años su costo será menor que el cincuenta por ciento?

5. Si $8a = -30$, halla el valor de $5a$.

6. Si $a = 0{,}01$ y $b = 2{,}99$. Calcula $5a^2 + 10ab + 5b^2$.

7. Para $a = \frac{1}{5}$, $b = -\frac{3}{4}$ y $c = 0{,}125$. Halla el valor de la expresión:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{\left|a-|b-c|\right|}}}$$

8. El precio inicial de un producto es de \$120. Por razones económicas aumenta en un 40 %. Al cabo de seis meses de este aumento se disminuye su precio en \$25. ¿Cuál es el precio final del producto?

9. Al precio de un producto se le hace un aumento del 60 % y posteriormente se vuelve a aumentar a partir del nuevo precio en un 40 %. ¿Cuál es el tanto por ciento de aumento total final realizado con respecto al precio inicial?

10. Si $a = 2^{x+2}$; hallar 8^x en términos de a.

11. Conociendo que $x + y = 6$, $xy = 3$. Calcula $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

12. La suma del doble de una fracción y su mitad multiplicada por ella misma, da como resultado la misma fracción. Halla la fracción que cumple con esa condición.

13. Si $x^2 + 2x + 3 = 8$, hallar el valor numérico de $3x^2 + 6x$.

14. Si $8a = 30$ y $5b = 23$:
a) ¿Cuál de los dos números $5a$ o $3b$ es mayor?
b) Halla $n = 5a - 3b$ y escribe en notación decimal.

15. Sean $P = x^3 - x^2 + 1$; $Q = x^2 - 2x - 2$ y $R = x^5 - 3x^4 + 3x^2 + 4$. Halla el valor de x para el cual se cumple la igualdad $P \cdot Q - R = 8$.

16. Si A, B y C son números racionales para los cuales se cumple que $\frac{A}{6} = \frac{B}{7} = C$. ¿Qué tanto por ciento es A de $B + C$?

17. Alberto, Beatriz y Carlos sembraron entre los tres 6 000 posturas de tabaco. Alberto sembró el triple de lo que sembró Beatriz y Carlos sembró el doble de lo que sembró Alberto. ¿Cuál fue la cantidad de posturas que sembró cada uno?

18. Si $3x - y + 1$ es a $5x + 7y + 4$ como 1 es a 4. Calcula la razón que hay entre x y y.

19. Una secundaria básica tiene 720 alumnos de matrícula. El 25 % de ellos practican deportes, las $\frac{2}{5}$ partes de los alumnos restantes están vinculados a actividades culturales y los alumnos restantes se dedican al estudio de la Matemática. ¿Cuántos alumnos se dedican a cada tipo de actividad?

20. Demuestra que el x % de y es igual al y % de x.

21. ¿Por cuáles elementos del conjunto {13, 15, 20} deben sustituirse las variables a, b y c de modo que la fracción $\frac{a(c-b)}{b-a}$ sea mayor o igual que 1?

22. Una fábrica en el mes de enero cumplió su plan mensual de producción en un 105 % y en febrero produjo un 4 % más que en enero. ¿En qué tanto por ciento la fábrica sobrecumplió el plan bimestral?

23. Sean x, y números racionales cualesquiera, sustituir cada uno de los cuadraditos por uno de los signos >, < o = según corresponda:

a) Si $x > 8$, entonces $x + 3 \square 10$.
b) Si $y < 5$, entonces $3y \square 17$.
c) Si $x > y$, entonces $y + 2 \square x + 5$.
d) Si $y < x$, entonces $60 - x \square 75 - y$.
e) Si $x > 0$, $y > 0$ y $60x = 50y$, entonces $x \square y$
f) Si x y y son números naturales, $5x > 10$, $y > x$, entonces $y \square 3$.

24. Dentro de tres años (desde ahora), Esteban tendrá tres veces más que los años que tenía hace tres años. Dentro de cuatro años Esteban tendrá a veces más años que los años que tenía hace cuatro años. Determina el valor de a.

25. En un cierto examen, todas las preguntas tienen igual valor. Si contestas 9 de las 10 primeras correctamente, pero solamente los $\frac{3}{10}$ de las restantes, obtienes el 50 % de la puntuación total. ¿Cuántas preguntas tiene el examen?

26. Juan trabajó el verano pasado en las BET. Un día tuvo que pesar cuatro sacos de papas, cada uno de menos de 100 kg, pero la balanza que tenía solamente pesaba cosas de más de 100 kg. Resolvió el problema pesando dos sacos cada vez, obteniendo como resultado 103, 105, 106, 106, 107 y 109 kg. ¿Cuánto pesaba el saco de menos peso?

27. Dados los números $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt{5}$, 1, 2 y 3, ordénalos en orden creciente.

28. ¿Cuál de los números raíz cúbica de 2 o raíz décima de 10 es mayor?

29. Ordena de menor a mayor:

a) $\sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[4]{5}$.

b) $5^{50},\ 3^{75},\ 60^{25}$.

30. Utilizando verdadero (V) o falso (F) completa el cuadro siguiente:

x	y	z	$x = y$	$x < y$	$x < z$	$y < z$
3^{34}	2^{51}	9^{19}				
$\sqrt[4]{80}$	$\sqrt[4]{48}$	$\sqrt{20}$				

31. Un corredor de larga distancia calculó que si hacía 10 km/h, llegaría al sitio designado una hora después del mediodía; si la velocidad era de 15 km/h, llegaría una hora antes del mediodía. ¿A qué velocidad debe correr para llegar al sitio exactamente al mediodía?

32. Juan gastó el 75 % del dinero que tenía en su cuenta de ahorros en las vacaciones y $\frac{2}{3}$ de lo que quedó en libros, ahora tiene \$38 menos que las dos quintas partes de lo que tenía al principio. ¿Cuánto dinero tenía inicialmente en la cuenta?

33. Sustituir cada cuadradito por un número de forma tal que se cumpla la siguiente igualdad:
$6x^2 - \square\, xy - 3y^2 - x + 7y - 2 = (2x + \square\, y + \square\,)\,(\square\, x + \square\, y - 2)$.

34. Si $P = x^3 + 5x^2 - 9x - 45 = M(x + 5)(x + 3)$. Hallar el valor de M.

35. Halla el menor número natural x que cumple que $\frac{xy}{3} > 2z$ sabiendo que:

a) z es el número que se obtiene de sustraer –12 al producto de 3 con su opuesto.

b) $y = \dfrac{1 + \dfrac{0{,}2}{3 - 0{,}2}}{3{,}5 - 1{,}2 \cdot 3}$.

36. Determina la expresión algebraica que hay que sustraer del producto de $(3a^2b + 2c)$ y $(2a^2b - c)$ para que esta diferencia dividida por $2ab$ de como resultado $-2a^3b + \frac{1}{3}ac$.

37. ¿Qué valor tiene el término $a(a + 2) + c(c - 2) - 2ac$ cuando $a - c = 7$?

38. En una escuela se quiere conocer el % de estudiantes que gustan de ir al cine los domingos, el 40 % dice que le gusta ir a otros lugares el domingo y el resto se somete a una encuesta en la cual el 55 % responde que sí. ¿Qué tanto por ciento de estudiantes gustan de ir al cine los domingos?

39. El precio de un artículo sube un 10 % en el primer trimestre del año, baja un 10 % en el segundo trimestre y vuelve a subir un 10 % en el tercer trimestre. Demuestra que el precio del artículo aumentó en un 8,9 %.

40. Sean m y n números naturales. Determina la paridad de $m^n + (n - 1)^m$ de acuerdo con la paridad de los números dados.

41. ¿Cuántos números menores que cien hay que al ser divididos por 23 dan un cociente igual al resto?

42. Un señor enumera y almacena en orden consecutivo 12 cajas con los primeros 12 números. En una caja se equivoca y en lugar del número correspondiente coloca un 1, de modo que los números marcados en las cajas suman 71. ¿En qué número se equivocó marcando la caja?

43. Calcular el valor de (123 · 456) + (877 · 544) + (877 · 456) + (123 · 544).

44. Si a, b y c son dígitos tales que $\overline{8a42} : 9 = \overline{9bc}$. Calcula $a - (b - c)$.

45. Sea S la función que a cada número natural le hace corresponder la suma de sus dígitos, por ejemplo $S(1\,997) = 1 + 9 + 9 + 7 = 26$. Calcula:
a) $S(10^{1997} - 1997)$ b) $S(4^{998} \cdot 5^{1997} - 1997)$

46. La suma de dos números naturales es 90. La suma del 25 % del primero y el 75 % del segundo es 30. Hallar los números.

47. La diferencia entre dos números positivos es 40 y la diferencia entre sus raíces cuadradas es 2. Hallar los números.

48. Considera un cuadrilátero $ABCD$ y los puntos medios de los segmentos que lo conforman. Une los puntos medios y asume que en la figura resultante uno de los ángulos es recto. ¿Qué podemos decir de los otros tres ángulos?

49. En la figura 5, el lado del cuadrado mide 8 cm. La circunferencia pasa por el punto medio de la diagonal del cuadrado. ¿Cuál es el área de la región no sombreada?

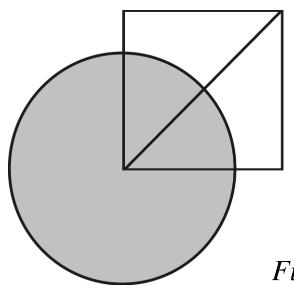

Fig. 5

50. Se tiene una circunferencia de centro O, se traza la cuerda $AB = 3$ cm de forma tal que $\angle AOB = 60°$. ¿Cuál es el área del triángulo AOB?

51. Un equilibrista de un circo debe ir de un punto a otro y luego regresar al punto inicial montado en una rueda que se desplaza sobre una cuerda tensa entre dos postes. Si en todo el recorrido la rueda da 6 vueltas, ¿cuánto mide la circunferencia de la rueda en términos de la longitud de la cuerda?

52. Supongamos que el lado de un cuadrado es la diagonal de un segundo cuadrado. Calcula la razón entre el área del primer cuadrado y la del segundo cuadrado.

53. Dado un rectángulo de 6 cm de largo y 8 cm de ancho, dibuja un polígono no convexo que tenga el mismo perímetro que el rectángulo dado.

54. En un triángulo rectángulo la amplitud de uno de sus ángulos agudos es el 80 % de la amplitud del otro ángulo agudo. ¿Cuáles son las amplitudes de esos ángulos?

55. En la figura 6, $a \parallel b$.
De acuerdo con los datos que aparecen en la figura determina las amplitudes de los ángulos interiores del triángulo ABC.

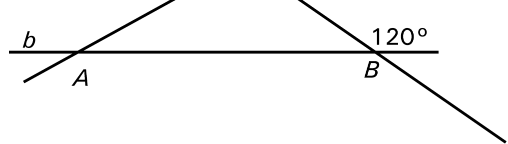

Fig. 6

56. Si AB, CD y EF son tres segmentos que se cortan en el punto O.
Hallar la suma de las amplitudes de los ángulos A, B, C, D, E y F, en la figura 7.

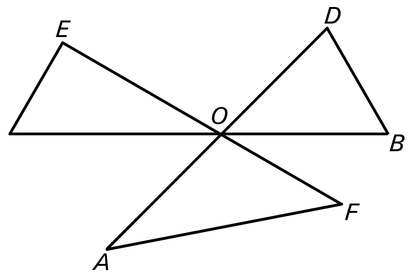

Fig. 7

57. ¿Cuántos triángulos posibles hay en la figura 8, si x y y son números naturales?

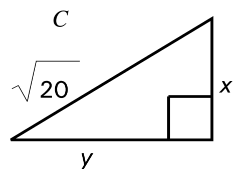

Fig. 8

58. Se tiene un triángulo equilátero ABC de lado 3 cm; se recorta una esquina triangular cuyos lados BD y BE miden una unidad cada uno. Halla el perímetro del cuadrilátero $ADEC$.

59. Se tiene el triángulo MNP con $MN = 24$, $NP = 70$ y $MP = 74$. Halla la distancia de N al punto medio de MP.

60. Se tiene un cuadrado $ABCD$ cuyos lados miden 8 cm. Se sitúa un punto E interior al lado CD. Calcula la suma de las áreas de los triángulos BCE y AED.

61. Un ángulo interior de un paralelogramo es la octava parte de la suma de los ángulos exteriores. Determina las amplitudes de los ángulos interiores del paralelogramo.

62. Se tiene un rectángulo de lados a y b. ¿En qué tanto por ciento varía su área si el lado a se disminuye en un 25 % y el lado b se aumenta en un 20 %?

63. Considera el paralelogramo $ABCD$ de la figura 9 en el que el lado DC lo hemos acortado un 25 % y el lado AB lo hemos alargado un 50 % dando lugar al trapecio $AB'C'D$.
¿En qué porcentaje ha aumentado el área del paralelogramo para llegar a ser el área del trapecio?

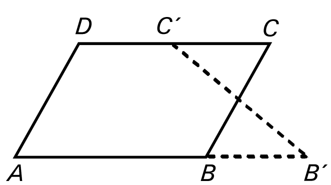

Fig. 9

64. La figura 10 representa dos círculos pequeños de radios 2 y 3 unidades que son tangentes exteriormente. Un tercer círculo está circunscrito a los otros dos.
Determina el área de la región sombreada.

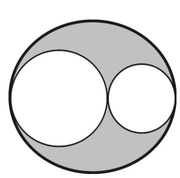

Fig. 10

65. Se recortan las esquinas de un cubo de volumen 1 000 cm^3, creando una nueva cara triangular donde antes se encontraba un vértice, y cada uno de estos triángulos es equilátero de lado 1 cm. ¿Cuántas aristas tiene este nuevo sólido?

66. ¿Cómo varía el volumen de un cono si se duplica el radio de su base y se duplica su altura?

67. Un triángulo equilátero y un cuadrado tienen igual perímetro. Hallar la razón que hay entre las áreas del triángulo y el cuadrado.

68. Hallar la longitud de la altura de un triángulo equilátero cuya área es igual a la suma de las áreas de los triángulos equiláteros de lados 4 y 6, respectivamente.

69. En lugar de caminar a lo largo de los dos lados de un rectángulo, un niño toma una diagonal y economiza una distancia igual a la mitad del lado mayor. Halla la razón entre el lado menor y el mayor.

70. Utiliza los dígitos 2, 3, 4 y 5 para llenar (sin repetir) los cuadrados y obtener la mayor suma posible.

$$\frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square}$$

71. Roberto miente los días miércoles, jueves y viernes y dice la verdad el resto de los días de la semana. Enrique miente domingo, lunes y martes y dice la verdad el resto de los días de la semana. Si ambos dicen "mañana es un día en el cual yo miento", ¿qué día de la semana es?

72. En un puesto de trueque de piedras preciosas, 800 esmeraldas se intercambian por 100 diamantes y 100 esmeraldas por 250 amatistas. ¿Cuántos diamantes se intercambian por 100 amatistas?

Soluciones

1. Basta multiplicar ambas ecuaciones por 2 y sumarlas.

2. Sea x el salario diario. Entonces, $x-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x\right)=$ *ahorro diario*. Multiplica esta expresión por 40 e iguálala a 360. Determinarás que el salario diario es $B:54$. Por lo cual, el gasto diario en alimentación es $B:27$.

3. $\frac{a}{b}=\frac{a+14}{b+26}$ entonces $ab+26a=ab+14b$ por lo que 13 a = 7 b y $\frac{a}{b}=\frac{7}{13}$.

4. 1er. año: \$4 500; 2do. año: \$4 050; 3er. año: \$3 645; 4to. año: \$3 280.50; 5to. año: \$2 952.45; 6to. año: \$2 657.20; 7mo. año: \$2 391.48 es menor que el 50 % de \$5 000 = \$2 500, al cabo de 7 años.

5. $A=-\frac{15}{4}\Rightarrow 5a=-\frac{75}{4}$

6. $5(a^2+2ab+b^2)=5(a+b)^2=5\cdot 9=45$.

7. $\left|a-\left|b-c\right|\right|=\left|\frac{1}{5}-\left|-\frac{3}{4}-0{,}125\right|\right|=\left|\frac{1}{5}-0{,}875\right|=\left|0{,}675\right|$ haciendo los cálculos ordenadamente queda como resultado $\frac{40}{13}$.

8. 140 % de 120 = \$168; 75 % de 168 = \$126 que es el precio final del producto.

9. 160 % de x = 1,6x; 140 % de 1,6x = 224 % x. Por lo que el aumento es de 124 %.

10. $8^x=2^{3x}=(2^x)^3$. Por otro lado, $2^x=\frac{1}{4}a$ entonces $8^x=\left(\frac{1}{4}a\right)^3=\frac{a^3}{64}$.

11. $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{3}=\frac{36-6}{3}=10$.

12. Sea $\frac{x}{y}$ la fracción buscada, entonces $\left(2\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x}{2y}\right)\frac{x}{y}=\frac{x}{y}\Rightarrow\frac{5x}{2y}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{2}{5}$.

13. $3x^2+6x+9=24\Rightarrow 3x^2+6x=15$.

14. a) a = 3,75 y b = 4,6, entonces 5a = 18,75 y 3b = 13,8 por lo que 5a > 3b.

b) n = 4,95.

15. $P \cdot Q = \left(x^3 - x^2 + 1\right)\left(x^2 - 2x - 2\right) = x^5 - 3x^4 + 3x^2 - 2x - 2$

$P \cdot Q - R = x^5 - 3x^4 + 3x^2 - 2x - 2 - x^5 + 3x^4 - 3x^2 - 4 = 8$

$-2x - 6 = 8;\ x = -7$.

16. $A = 6C$; $B = 7C$, entonces $B + C = 8C$ y A es el 75 % de $B + C$.

17. Alberto: $3x$; Beatriz: x y Carlos: $6x$, entonces $10x = 6\ 000$ y $x = 600$.

Beatriz sembró 600 posturas, Alberto, 1 800 y Carlos, 3 600.

18. Se tiene que $\frac{3x - y + 1}{5x + 7y + 4} = \frac{1}{4}$, entonces $12x - 4y + 4 = 5x + 7y + 4; 7x = 11y$, la razón buscada es

$\frac{x}{y} = \frac{11}{7}$.

19. 25 % de 720 = 180 practican deportes.

$\frac{2}{5}$ de 540 = 216 están vinculados a actividades culturales.

720 – (180 + 216) = 324 estudian Matemática.

20. $x\,\%$ de $y = \frac{xy}{100} = \frac{y}{100}x = y\,\%$ de x.

21. Para $a = 13$, $b = 15$, $c = 20$ se tiene que la fracción dada es igual a $32{,}5 > 1$.

22. Enero: 105 % x; Febrero: 104 % de 105 % x = 109,2 % de x, por lo que sobrecumplió el plan en un 9,2 %.

23. a) $x + 3 > 10$ b) $3y < 17$ c) $y + 2 < x + 5$

d) $60 - x < 75 - y$ e) $x < y$ f) $y > 3$

24. Edad actual: x

Edad dentro de tres años: $x + 3$

$3(x - 3) = x + 3$

$x = 6$

Dentro de 4 años tendrá 10 años.

Hace 4 años tenía 2 años.

∴El valor de a es 5.

25. Sea n el número de preguntas, v el valor de cada pregunta, entonces la puntuación total será nv; las preguntas restantes son $(n - 10)\frac{3}{10}$.

Se tiene, de acuerdo con las condiciones del problema, que

$\frac{3}{10}nv - 3v + 9v = 50\,\%\,nv$, es decir, $\frac{3}{10}n + 6 = \frac{1}{2}n$ que se satisface para $n = 30$.

∴El examen tiene 30 preguntas.

26. Sean x, y, z, t el peso de cada saco, tenemos que:
$x + y = 103$; $x + z = 105$; $x + t = 106$; $y + z = 106$; $y + t = 107$; $z + t = 109$
Sumando las tres últimas pesadas, obtenemos $2(y + z + t) = 322$, de donde

$y + z + t = 161$ y como $y + z = 106$, $t = 55$; de aquí $x = 51$, $y = 52$, $z = 54$ por lo que el saco de menos peso pesaba 51 kg.

27. $\left(\sqrt[3]{9}\right)^6 = 81$; $\left(\sqrt{5}\right)^6 = 25$; $1^6 = 1$; $2^6 = 64$; $3^6 = 729$, entonces $1 < \sqrt{5} < 2 < \sqrt[3]{9} < 3$.

28. $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{30} = 2^{10} = 1\,024$; $\left(\sqrt[10]{10}\right)^{30} = 10^3 = 1\,000$, entonces $\sqrt[3]{2} > \sqrt[10]{10}$.

29. a) $\left(\sqrt{2}\right)^{12} = 2^6 = 64$; $\left(\sqrt[3]{3}\right)^{12} = 3^4 = 81$; $\left(\sqrt[4]{5}\right)^{12} = 5^3 = 125$, entonces $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5}$.

b) $5^{50} = 25^{25}$; $3^{75} = 27^{25}$; 60^{25}, entonces $5^{50} < 3^{75} < 60^{25}$.

30.

x	y	z	$x = y$	$x < y$	$x < z$	$y < z$
3^{34}	2^{51}	9^{19}	F	F	V	V
$\sqrt[4]{80}$	$\sqrt[4]{48}$	$\sqrt{20}$	F	F	V	V

31. 10 km/h $(t + 1)$ = 15 km/h $(t - 1)$, obteniendo $t = 5$, entonces se desplazaría 60 km por lo que debe ir a una velocidad de 12 km/h.

32. Gastó $\frac{3}{4}x$, le queda $\frac{1}{4}x$, entonces $\frac{2}{3} \cdot \frac{x}{4} = \frac{x}{6}$ gastó, le queda $\frac{x}{12}$

$\frac{x}{12} = \frac{2}{5}x - 38$. Resolviendo la ecuación se tiene que $x = 120$ por lo que tenía \$120.

33. $6x^2 - 7xy - 3y^2 - x + 7y - 2 = (2x + 3y + 1)(3x + y - 2)$.

34. Se tiene $M\,(x+5)(x+3) = x^2\,(x+5) - 9\,(x+5) = (x+5)(x+3)(x-3)$, entonces $M = x - 3$.

35. $z = 3(-3) - (-12) = 3$, $y = -\frac{75}{7}$, entonces $\frac{xy}{3} > 6$ quedando $-\frac{25}{7} > 6$ y $x < -\frac{42}{25}$.

36. $\left(36a^4b^2 + 21a^2bc - 2c^2\right) - A = 2ab\left(-2a^3b + \frac{1}{3}ac\right)$, entonces $A = 32a^4b^2 + \frac{61}{3}a^2bc$.

37. $a^2 + 2a + c^2 - 2c - 2ac = (a-c)^2 + 2(a-c) = 63$.

38. 55 % del 60 % = 33 %.

39. Precio del artículo: x primer trimestre 110 % de x.

Segundo trimestre: 99 % del 110 % x = 108,9 %.

$\therefore$ El precio aumentó en un 8,9 %.

40. Nota que si m es par, cualquier potencia será par. Si m es impar cualquier potencia será impar. Si m y n son pares, la suma de las potencias es impar. Si m y n son impares, la suma de las potencias es impar. Si m y n tienen distinta paridad, la suma es par.

41. Hay 4; considerando cocientes 1, 2, 3 y 4, y haciendo los cálculos tenemos que son 24, 48, 72 y 96.

42. Suma los números del 1 al 12. Esta suma es 78. Como marcó 1 en la caja equivocada, la alternativa correcta es 8.

43. $123(456+544)+877(544+456)=(123+877)(1\,000)=1\,000\,000.$

44. $a = 4$ y $8\,442 : 9 = 938$, entonces $b = 3$, $c = 8$ y $a - (b - c) = 9$.

45. a) $\left(10^{1997}-1997\right)=99\ldots98\,003$, entonces

$S\left(10^{1997}-1997\right)=9\cdot1\,993+11=17\,948$.

1 993 nueves

b) $\left(4^{998}\cdot5^{1997}-1997\right)=\left(5\cdot100^{998}-1997\right)=499\ldots98\,003$, entonces

$S=9\cdot993+15=8\,952$.

46. $x + y = 90$; $25\,\%\,x+75\,\%\,y=30 \Rightarrow x+3y=120$, resolviendo el sistema se tiene que $x = 75$ y $y = 15$.
$\therefore$Los números son 15 y 75.

47. $x - y = 40$; $\sqrt{x}-\sqrt{y}=2$, entonces hay que buscar dos cuadrados perfectos que se diferencien en 40 y sus raíces cuadradas se diferencien en 2, esos son 121 y 81, por lo que $x = 121$ y $y = 81$, cuyas raíces son 11 y 9.

48. Dibujando varias formas de cuadriláteros convéncete de que la figura que se forma es un paralelogramo. En todo paralelogramo los ángulos opuestos son congruentes y por lo tanto si uno de los ángulos es recto, el opuesto también lo es. Solo te resta establecer que uno de los ángulos restante es recto.

49. Basta que calcules el área de cuadrado y le restes el área de un cuarto del círculo, obteniendo como resultado $64 - 8\pi$.

50. El triángulo es equilátero, la altura mide $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ y el área del triángulo AOB es igual a $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}\,\text{cm}^2$.

51. Como son 6 vueltas, la circunferencia de la rueda mide $\dfrac{1}{3}$ de la longitud de la cuerda.

52. Considera la figura 11 y asume que el cuadrado pequeño es unitario.

El lado del cuadrado grande mide $\sqrt{2}$.
Se deduce que la razón de las áreas es 2.

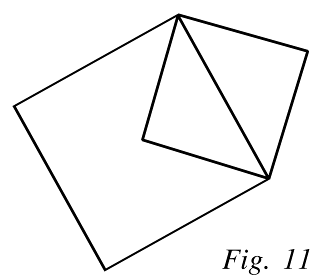

Fig. 11

53. El perímetro del rectángulo dado es de 28 cm; se puede dibujar cualquier polígono no convexo que tenga el mismo perímetro.

54. Sean α y β las amplitudes de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, con $\alpha = 80\,\%\,\beta$, entonces $80\,\%\,\beta + \beta = 90°$, $\beta = 50°$ y $\alpha = 40°$.

55. $\angle B = 60°$ por adyacente al ángulo de 120°,
$\angle A = 80°$ por correspondiente con el ángulo dado de 80°,
$\angle C = 40°$ por suma de ángulos interiores de un triángulo.

56. $\angle A + \angle AOE + \angle E = 180°$ por suma de ángulos interiores en el triángulo AOE
$\angle B + \angle BOD + \angle D = 180°$ por suma de ángulos interiores en el triángulo BOD
$\angle C + \angle COF + \angle F = 180°$ por suma de ángulos interiores en el triángulo COF
luego $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F = 360°$.

57. Debe cumplirse que $x^2 + y^2 = 20$, luego el único caso posible es para $x = 4$ y $y = 2$ o $x = 2$ y $y = 4$ $\therefore$ Hay un solo triángulo.

58. Se tiene $AD = CE = 2$ cm, $DE = 1$ cm, $AC = 3$ cm, entonces el perímetro del cuadrilátero

ADEC es $AD + DE + CE + AC = 8$ cm (fig. 12).

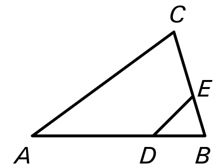

Fig. 12

59. Se tiene que $MN^2 + NP^2 = 24^2 + 70^2 = 5\,476 = 74^2 = MP^2$, entonces el triángulo *MNP* es rectángulo, y la distancia de *N* al punto medio de *MP* es la longitud del radio de la circunferencia circunscrita al ΔMNP que es igual a $\frac{1}{2}MP = 37$.

60. Al construir la figura se puede determinar fácilmente que el área buscada es la mitad del área del cuadrado, es decir, 32 cm^2.

61. Como la suma de los ángulos exteriores de un cuadrilátero cualquiera es de 360°, entonces la octava parte de 360 es 45 por lo que hay dos ángulos que miden 45° y los otros dos 135°.

62. Sea $A = ab$ el área del rectángulo, entonces 75 %a · 120 %b = 90 %A y el área disminuye un 10 %.

63. El paralelogramo inicial tenía de base b y altura h, y el trapecio al que hemos llegado tiene de bases $b + \frac{1}{2}b$ y $b - \frac{1}{4}b$ y altura también h. Así pues, el área del trapecio es $A = \frac{1}{2}\left(\frac{3b}{2} + \frac{3b}{4}\right)h = \frac{9bh}{8}$ y como bh era el área del paralelogramo, ésta ha aumentado en $\frac{1}{8}$ es decir, el 12,5 %.

64. $A_s = 5^2\pi - \left(3^2\pi + 2^2\pi\right) = 12\pi u^2$

65. El cubo tiene 12 aristas; al formar una nueva cara triangular, esta tiene tres aristas por lo tanto el nuevo sólido tendrá 15 aristas.

66. Sea $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ el volumen del cono; el volumen del nuevo cono será $V_1 = \frac{1}{3}\pi\left(2r\right)^2 2h = 8 \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 h$ por lo que el volumen aumenta 8 veces.

67. Sea m la longitud del lado del cuadrado, entonces su perímetro es $4m$ que es igual al perímetro del triángulo equilátero por lo que cada lado del triángulo mide $\frac{4}{3}m$.

El área del cuadrado es $A_C = m^2$ y el área del triángulo es $A_T =$ $A_T = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{4}{3}m\right)^2 = \frac{4\sqrt{3}}{9}m^2$ y la razón pedida es $A_T : A_c = \frac{4\sqrt{3}}{9}$.

68. Sean A_1 y A_2 las áreas respectivas de los triángulos de lados 4 y 6, entonces

$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4^2 = 4\sqrt{3}$ y $A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 6^2 = 9\sqrt{3}$ por lo que A_3 que es el área del triángulo buscado es $13\sqrt{3}\,u^2$

$A_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}m^2 = 13\sqrt{3}$ donde m es la longitud del lado del triángulo buscado, luego $m = 2\sqrt{13}$.

69. Sean a y b las longitudes de los lados del rectángulo siendo $a > b$, entonces la diagonal $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ y se cumple que $d = (a+b) - \frac{1}{2}a + b$ por lo que se cumple que $\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{2}a + b$; elevando al cuadrado ambos miembros y transponiendo queda $4a^2 + b^2 = a^2 + 4ab + 4b^2$ donde $3a^2 = 4ab$ dividiendo por $a \neq 0$, $3a = 4b$ y $b : a = 3 : 4$.

70. Consideremos la suma a optimizar como $\frac{a}{c} + \frac{b}{d}$; como se busca la mayor, entonces a y b deben ser 4 y 5 ó 5 y 4, y los denominadores c y d deben ser 2 y 3 ó 3 y 2. Como es una operación conmutativa analicemos los dos casos posibles

Primer caso: $\frac{4}{2} + \frac{5}{3} = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$; Segundo caso: $\frac{4}{3} + \frac{5}{2} = \frac{23}{6} = 3\frac{5}{6}$ y como $\frac{5}{6} > \frac{2}{3}$, entonces la solución corresponde al segundo caso, es decir, $a = 4$, $c = 3$, $b = 5$ y $d = 2$.

71. El día de la semana es el martes.

72. Nota que 8 esmeraldas equivalen a 1 diamante y 10 esmeraldas equivalen a 25 amatistas. Por lo tanto, 100 amatistas se intercambian por 40 esmeraldas o 5 diamantes.

OLIMPIADA POPULAR ESTUDIANTIL

CURSO 2003-2004

Los estudiantes de 7mo. grado deben resolver los problemas del 1 al 14.
Los estudiantes de 8vo. grado deben resolver los problemas del 4 al 17.
Los estudiantes de 9no. grado deben resolver los problemas del 7 al 20.

1. Para obtener una pintura de cierto color, Juan mezcla 7 L de pintura roja, 4 L de pintura blanca y 6 L de pintura amarilla. Calcula la proporción de pintura roja en el total de la mezcla.

2. ¿Cuál es el menor entero positivo por el que hay multiplicar 75 para obtener un cubo perfecto?

3. En la figura 13 hay sombreados algunos rectángulos. ¿Cuántos me quedan por sombrear para que al final el número total de rectángulos sombreados sea la mitad del número de rectángulos sin sombrear ?

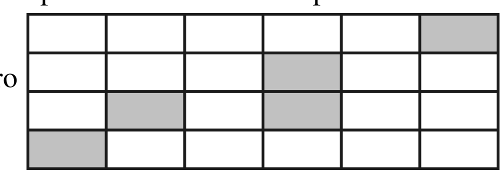

Fig. 13

4. M es el punto medio de uno de los lados del rectángulo de la figura 14 que miden 7 y 11 cm. Calcula el área, en centímetro cuadrado, del triángulo PMR.

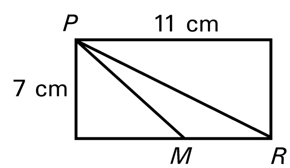

Fig. 14

5. ¿Cuál es el cociente entre el mínimo común múltiplo de los 40 primeros enteros positivos y el mínimo común múltiplo de los 30 primeros?

6. $ABCD$ es un cuadrado y P un punto en su interior tal que CDP es un triángulo equilátero. ¿Cuál es la amplitud del ángulo PBC?

7. Determina el menor entero n, $n > 0$ para el que 18^n es divisible por 3^{13}.

8. Juan tenía \$500; le dio el 30 % a su hermano y gastó el 15 % del resto. ¿Cuánto dinero le queda?

9. Un triángulo equilátero (fig. 15) está originalmente pintado de negro. Cada minuto cambia, de forma que la cuarta parte de cada triángulo negro se vuelve blanca.

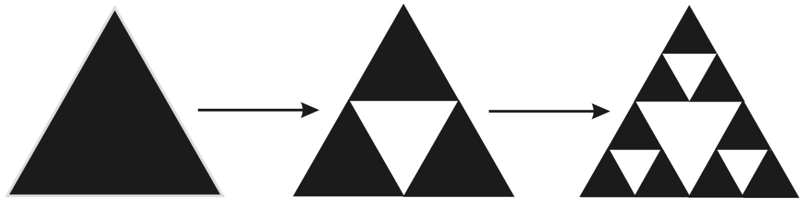

Fig. 15

Al cabo de 4 min, ¿qué parte del triángulo original sigue estando de negro?

10. $S_8 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8$, y S_n de igual forma es la suma alternada de signo de los n primeros números naturales empezando por +1. Calcula $S_{21} + S_{35} - S_{60}$.

11. En un grupo aprobó el 66 % de los alumnos y en otro, en el que había el doble, aprobó solamente el 57 %. Determina el porcentaje de aprobados que hubo entre los dos grupos.

12. Se tiene un triángulo numérico como el que se muestra. ¿Qué número es el tercero de la izquierda que aparece en la fila 89 del triángulo?

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \mathbf{1} & & & \\ & & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & & \\ & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} & \\ \mathbf{10} & \mathbf{11} & \mathbf{12} & \mathbf{13} & \mathbf{14} & \mathbf{15} & \mathbf{16} \\ & & & \vdots & & & \end{array}$$

13. Determina el último dígito de $3^{2\,003} - 5$.

14. Calcula $\sqrt[3]{\dfrac{5^{21}+5^{9}}{125^{6}+25^{3}}}$.

15. Considera la sucesión de enteros positivos: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, ... donde cada uno de los enteros positivos aparece las veces que vale. Determina el resto de la división del término que ocupa el lugar 2 003 entre 7.

16. Tenemos 400 cubitos de 1 cm de arista con los que hacemos el mayor cubo posible. ¿Cuántos cubitos nos sobran?

17. El coro de un centro escolar tiene 10 hembras y 8 varones, y la banda está formada por 8 hembras y 10 varones. Hay 6 hembras que son miembros tanto del coro como de la banda y 23 estudiantes que son miembros de alguno de los grupos, o de los dos. ¿Cuántos varones del coro no están en la banda?

18. Sofía cortó este rectángulo en las tres piezas que se muestran en la figura 16 y con ellas formó un trapecio isósceles. Calcula el perímetro del trapecio isósceles.

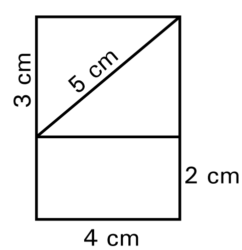

Fig. 16

19. Una parcela rectangular de 30 m por 40 m está rodeada por un paseo de 5 m de ancho. ¿Cuál es el área del paseo?

20. Un aula tiene 20 filas de asientos con 10 asientos en la primera fila y en cada fila hay un asiento más que en la anterior. Queremos hacer un examen de forma que no haya dos estudiantes juntos en la misma fila. ¿Cuál es el máximo número de estudiantes que podemos colocar?

Soluciones

1. Hay 17 L de pintura de los cuales 7 son de pintura roja por lo que la proporción es de 7 es a 17.

2. $75 = 3 \cdot 5^2$, que al multiplicar por $3^2 \cdot 5$ se obtiene un cubo perfecto que es el menor posible.

3. La figura tiene 24 rectangulitos, de los cuales hay 5 sombreados. Si sombreo x más, entonces debe cumplirse que $2(5 + x) = 24 - (5 - x)$, es decir, $x = 3$. Entonces el número total de rectángulos sombreados será de 8 y faltarían por sombrear 16.

4. El triángulo *PMR* tiene base 5,5 cm y altura 7 cm por lo que el área es de 19,25 cm^2.

5. El cociente depende de los factores primos que aparecen en el mcm de los 40 primeros enteros y que no aparecen en el de los 30 primeros. Estos son 31 y 37, y además un 2, pues un factor del mcm de los 40 primeros números es 2^5 y en el mcm de los 30 primeros aparece el factor 2^4. Luego el cociente pedido es $31 \cdot 37 \cdot 2 = 2\ 294$.

6. Como el ángulo *PCB* es de 30° (fig. 17) y el triángulo *PBC* es isósceles, cada uno de los ángulos *PBC* y *CPB* tienen igual amplitud, es decir, (180° – 30°) : 2 = 75°.

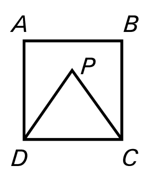

Fig. 17

7. $18^n = (2)^n\ (3)^{2n}$ y como se busca el menor y n es natural, entonces $n = 7$.

8. 30 % de 500 = 150, le quedan 350; el 15 % de 350 = 52,50, le queda 350 – 52,50 = 297,50. Le queda \$297,50.

9. 1er. minuto: $\frac{1}{4}$ de blanco y $\frac{3}{4}$ de negro

2do. minuto: $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{16}$ de blanco y $\frac{9}{16}$ de negro

3er. minuto: $\frac{7}{16} + \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{37}{64}$ de blanco y $\frac{27}{64}$ de negro

4to. minuto: $\frac{37}{64} + \frac{27}{64} \cdot \frac{1}{4} = \frac{175}{256}$ de blanco y $\frac{81}{256}$ de negro.

10. Observemos que $S_2 = -1$, $S_4 = -2$, en general $S_{2n} = -n$.

Entonces $S_{21} + S_{35} - S_{60} + 21 + S_{34} + 35 - (-30) = -10 + 21 - 17 + 35 + 30 = 59$.

11. Sean x y $2x$ la cantidad de alumnos de cada grupo, el número de aprobados fue

$\frac{66}{100}x + \frac{57}{100}2x = \frac{9x}{5}$ y la proporción de aprobados es

$\frac{\frac{9x}{5}}{3x} = \frac{3}{5}$, es decir, el 60 %.

12. El primer número de la izquierda de la fila 2 es 2 = 1 + 1
El primer número de la izquierda de la fila 3 es 5 = 1 + 1 + 3
El primer número de la izquierda de la fila 4 es 10 = 1 + 1 + 3 + 5
El primer número de la izquierda de la fila 5 es 17 = 1 + 1 + 3 + 5 + 7
Así pues, el primer número de la izquierda de la fila 89 es 1 + suma 88 primeros impares. El primer impar es $1 = 2 \cdot 1 - 1$, el segundo, $3 = 2 \cdot 2 - 1$, el 88° será $2 \cdot 88 - 1 = 175$. Tenemos que sumar entonces 1 + 3 + 5 + ... + 175 = 7 744 y luego sumarle 1 por lo que el primer número de la izquierda será 7 745 y el tercero 7 747.

13. $3^{2\,003} = \left(3^4\right)^{500} \cdot 3^3$, se tiene que 3^4 termina en 1 luego $(3^4)^{500}$ termina en 1 y $3^3 = 27$, luego $3^{2\,003}$ termina en 7 y $3^{2\,003} - 5$ termina en 2.

14. $\sqrt[3]{\frac{5^{21}+5^9}{125^6+25^3}} = \sqrt[3]{\frac{5^9\left(5^{12}+1\right)}{5^{18}+5^6}} = \sqrt[3]{\frac{5^9\left(5^{12}+1\right)}{5^6\left(5^{12}+1\right)}} = \sqrt[3]{5^3} = 5$.

15. Escribiendo bloques formados por uno, dos, varios tres, etc., veamos si hay un número entero de bloques para cubrir 2 003 lugares. Para ello, si n es el número buscado, debe verificarse que $2\,003 = \frac{1+n}{2}n$. Es decir debe cumplirse que $4\,006 = n\left(n+1\right)$ o lo que es lo mismo ver si hay dos números consecutivos cuyo producto sea 4 006, pero $62 \cdot 63 = 3\,906$ y $63 \cdot 64 = 4\,032$. Los 62 primeros números ocupan menos de 2 003 lugares y los 63 primeros más, entonces el número que ocupa el lugar 2 003 es el 63 que es múltiplo de 7 por lo que el resto es 0.

16. El cubo grande debe tener un volumen inferior o igual a 400 cm^3 y un número entero como arista. Entonces hay que encontrar el mayor entero a tal que $a^3 \leq 400$, es decir, $a = 7$ por lo que utilizaríamos $7^3 = 343$ cubitos y nos sobrarían $400 - 343 = 57$.

17. Como hay 36 miembros entre los dos grupos y 23 son de alguno de los dos, o de los dos, entonces hay 36 – 23 = 13 que, seguro, son tanto del coro como de la banda. De estos 13, 6 son hembras por lo que hay 7 varones que son del coro y de la banda, y como en el coro hay 8 varones, habrá 1 varón del coro que no está en la banda.

18. El trapecio que formó Sofía es el de la figura 18, cuyo perímetro será 2(5) + 2 + 8 = 20 cm.

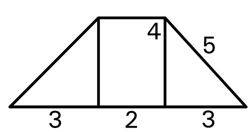

Fig. 18

19. El área de la parcela (fig. 19) es $30 \cdot 40 = 1\,200$ m^2 y el paseo rodea un rectángulo que contiene a la parcela de $40 \cdot 50 = 2\,000$ m^2 de área.
La diferencia entre las dos, es 2 000 – 1 200 = 800 m^2 será lo que corresponde solo al paseo.

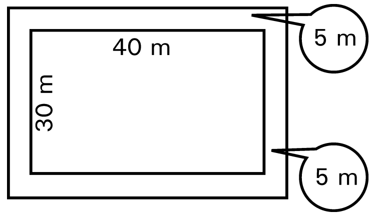

Fig. 19

20. En la primera fila hay 10 asientos y podemos colocar con las condiciones pedidas a 5 estudiantes. En la segunda fila hay 11 con lo que podremos colocar a 6. En la tercera hay 12 y podemos colocar solamente 6. Siguiendo este argumento podemos colocar 5, 6, 7, 8 etc., en las filas impares y 6, 7, 8, etc. en las filas pares. Entonces el número total de estudiantes que podemos colocar cumpliendo los requisitos pedidos es $5 + 2\,(6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14) + 15 = 200$.

Olimpiada popular estudiantil
Curso 2004-2005

Los estudiantes de 7mo. grado deben resolver los problemas del 1 al 14.
Los estudiantes de 8vo. grado deben resolver los problemas del 4 al 17.
Los estudiantes de 9no. grado deben resolver los problemas del 7 al 20.

1. ¿Cuál es el menor número por el que se debe multiplicar 2 004 para obtener un cuadrado perfecto?

2. Un vendedor de frutas compró 200 guayabas a razón de 4 por $1.00 y 200 a 5 por $2.00. Luego las vendió a razón de 5 por $3.00. ¿Cuánto ganó?

3. Un maestro repostero necesitó media taza de azúcar para preparar dos docenas de galletas. ¿Qué cantidad de azúcar necesitará para preparar cinco docenas de estas galletas?

4. Los lados de un triángulo tienen longitudes de 6 cm, 10 cm y 11 cm. ¿Cuál será la longitud de los lados de un triángulo equilátero que tiene el mismo perímetro que el triángulo dado?

5. Considera el conjunto de todos los enteros positivos de cuatro cifras diferentes. Determina la suma y la diferencia del mayor y el menor de los números de este conjunto.

6. Suponga que la operación $a*b$ da como resultado la suma de los dígitos del producto de a y b. Por ejemplo, $4*7 = 10$. Hallar $(15*10)*(15 \cdot 10)$.

7. ¿Cuántos dígitos tiene el número $(4^5)(5^{13})$?

8. Para numerar las páginas de un libro se necesitaron 4 221 dígitos. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

9. La base de un rectángulo excede en 4 cm a su altura. Si su perímetro es de 40 cm. Calcula su área conociendo que las longitudes de sus lados son números enteros.

10. ¿Qué parte del cuadrado total (fig. 20) es el rectángulo E si cada uno de los extremos de los segmentos trazados a partir del cuadrado inicial es el punto medio del otro segmento?

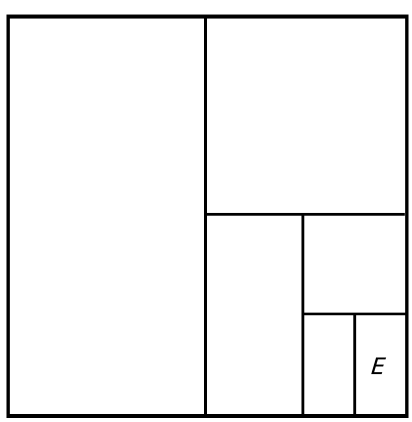

Fig. 20

11. ¿Cuál es el mayor y cuál el menor de los cocientes que puede obtenerse al tomar dos números del conjunto {–24, –3, –2, 4, 6, 8}?

12. Adriana cortó este rectángulo en las tres piezas que se muestran (fig. 21) y con ellas formó un trapecio isósceles. Calcula el perímetro del trapecio isósceles.

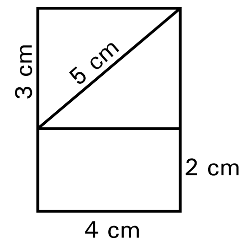

Fig. 21

13. Dividimos un cuadrado de diez mil cuadraditos pequeños, distribuidos en 100 filas de 100 cuadraditos cada fila. Pintamos de negro los 100 cuadraditos de la fila de arriba, 99 de la segunda , 98 de la tercera, y así sucesivamente. ¿Qué porción del cuadrado grande hemos pintado de negro?

14. Si reordeno los números $p = 3^{60}$, $q = 5^{48}$, $r = 6^{36}$ y $s = 7^{24}$ en orden decreciente, ¿cuál será la solución?

15. El profesor construyó la figura 22 en un geoplano de 5 · 5 y pidió que se calculara su área. ¿Puedes determinar el área?

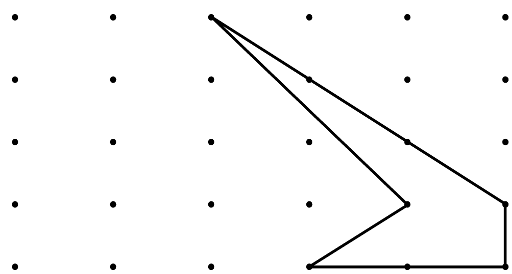

Fig. 22

16. Si la razón de $3x - 4ay + 15$ es constante y si $y = 3$ cuando $x = 2$, ¿cuál es el valor de x cuando y toma el valor 12.

17. Los alumnos de un grupo de baile se ponen en círculo, igualmente separados, y se empiezan a contar a partir de uno de ellos. Si el que tiene el número 20 está diametralmente opuesto al que tiene el número 53, ¿cuántos alumnos hay en el grupo?

18. La diferencia entre dos números es 30. Si añadimos 5 a ambos, el mayor ahora resulta ser el triple del menor. ¿Cuál era el menor al principio?

19. Se conoce que $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)n$, por ejemplo 4! = 1 · 2 · 3 · 4 = 24. Determina cuáles son los dos últimos dígitos de la suma 1! + 2! + 3! + ... + 2 004! + 2 005!

20. Se tiene el conjunto formado por todos los triángulos rectángulos donde uno de sus catetos mide 14 y los otros dos lados son números enteros. ¿Cuántos elementos tiene el conjunto?

SOLUCIONES

1. Se tiene que 2 004 = $2^2 \cdot 3 \cdot 167$, si lo multiplicamos por 501 = $3 \cdot 167$ obtendremos un cuadrado perfecto.

2. 200 : 4 = 50, gastó \$50
200 : 5 = 40, gastó \$80
Gastó en la venta \$130.
40 : 5 = 80, la venta fue de \$240.
Ganó \$110.

3. Para una docena necesitará $\frac{1}{4}$ taza. Para 5 docenas necesitará $\frac{5}{4}$ tazas.

4. El perímetro del triángulo dado es de 27 cm, por lo tanto la longitud del lado del triángulo buscado debe ser de 9 cm.

5. El mayor es 9 876 y el menor 1 234. La suma de ellos es 11 110 y la diferencia es 8 642.

6. 15*10 = 6, $15 \cdot 10 = 150$ y 6*150 = 9.

7. $4^5 \cdot 5^{13} \cdot 2^{10} \cdot 5^{13} = 125 \cdot 10^{10}$ que es un número de 13 dígitos.

8. De un dígito: 9
De dos dígitos: 180
De tres dígitos: 2700 Hay en total 2 889 dígitos utilizados
Quedan 4 221 – 2 889 = 1 332 y 1 332 : 4 = 333 siendo 999 + 333 = 1 332.
Por lo que el libro tiene 1 332 páginas.

9. Sean a y b las longitudes de sus lados, entonces $a + b = 20$ cm y $a - b = 4$. El problema se reduce a buscar dos números enteros y positivos que su suma sea 20 y su diferencia 4. Haciendo una tabla con los posibles números tenemos que el único caso es para 12 y 8 por lo que el área es de 96 cm^2.

10. Haciendo las particiones de acuerdo con los datos tenemos que los lados del rectángulo (ver figura 20) miden $\frac{1}{4}a$ y $\frac{1}{8}a$. Entonces su área es de $\frac{1}{32}a^2$.

11. El mayor cociente se obtiene al dividir (–24) : (–3) = 8.
El menor cociente se obtiene al dividir (8) : (–2) = –4.

12. Podemos disponer las piezas dadas para formar el trapecio isósceles de la forma en que aparece en la figura 23 por lo que el perímetro obtenido será: 5 + 2 + 5 + 8 = 20 cm.

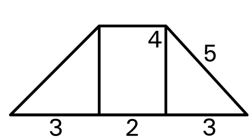

Fig. 23

13. Hemos pintado de negro 1 cuadradito de la fila de abajo, 2 de la siguiente, etc., hasta 100 de la de arriba, es decir, un total de 1 + 2 + 3 + ... + 100. La forma más cómoda de realizar esta suma es agrupando los sumandos por parejas (1ro., último), (2do., penúltimo), etc.; todas suman 101 y como hay 50 parejas obtendremos 5 050 cuadraditos pintados de negro que constituyen una proporción de $\frac{101}{200}$.

14. mcd(24, 36, 48, 60) = 12 entonces $p = (3^5)^{12} = 243^{12}$, $q = (5^4)^{12} = 625^{12}$, $r = (6^3)^{12} = 216^{12}$ y $s = (7^2)^{12} = 49^{12}$ teniendo $q > p > r > s$.

15. La figura se puede descomponer en un trapecio de bases 1 y 2 y altura 1 y un triángulo de base 1 y altura 3 (ver figura 22)

$A_{trapecio} = \frac{1}{2}(1+2)2 = 3u^2$, $A_{triángulo} = \frac{1}{2}(1 \cdot 3) = 1{,}5u^2$ y el área de la figura es de 4,5 u^2.

16. $(3x-4):(y+5) = k$ que es el valor constante de la razón; para $x = 2$ y $y = 3$ se tiene que $k = \frac{1}{9}$.

Ahora, para $y = 12$ se tiene que $(3x-4):(27) = \frac{1}{9}$ por lo que $x = \frac{7}{3}$.

17. Entre el 20 y el 53 hay 32 alumnos (sin contar ni el 20 ni el 53) en cada una de las mitades del círculo. Así que el número total será 64 + 2 = 66.

18. Sean x y y los números buscados con $x - y = 30$, $x + 5 = 3(y+5)$; resolviendo el sistema queda $y = 10$ que es el menor de los números dados.

19. Se tiene que

1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120, 6! = 720, 7! = 840, 8! = 6 720, 9! = 60 480, 10! = 604 800.

De aquí en adelante las dos últimas cifras del factorial de los números son 00 por lo que es suficiente con realizar la suma de las dos últimas cifras de estos números.
La suma en total es 213 por lo que las dos últimas cifras de la suma dada es 13.

20. Sean x y y la hipotenusa y el otro cateto del triángulo rectángulo, entonces $14^2 + y^2 = x^2$

$196 = x^2 - y^2$ Divisores de 196: 1, 2, 4, 7, 14, 28, 49, 98, 196

$196 = (x+y)(x-y)$ tenga en cuenta que $(x + y) > (x - y)$.

Como $x + y$, $x - y$ son de la misma paridad, entonces hay que buscar las parejas de divisores cuyo producto sea 196 y sean de la misma paridad, en este caso pares porque 196 es par.
Sean $x + y = 98$ y $x - y = 2$. No hay más casos.
$\therefore$el conjunto tiene un solo elemento.

Problemas de entrenamiento para la segunda etapa

1. Sean a, b dos enteros positivos, el área del triángulo en el primer cuadrante cuyos lados están formados por los ejes coordenados y la recta de ecuación $ax+by=6$ es igual a 6. Halla todos los posibles valores de a y b.

2. Sea f una función lineal tal que $f(-1)=2$ y $f(-2)=-3$. Encuentra f (5).

3. Calcula $\left(\frac{x^2+y^2}{xy}-2\right)\left(\frac{x^2+y^2}{xy}+2\right)\left(\frac{1}{(x+y)^2}-\frac{1}{(x-y)^2}\right)$.

4. Conociendo que $x-2y=5$; $2x-y=6$. Calcula $2x^2-5xy+2y^2$.

5. Si $a+\frac{1}{a}=-7$. Halla el valor de $a^2+\frac{1}{a^2}$.

6. Si el 80 % de A, el 25 % de B y el 50 % de C son proporcionales a 3, 4 y 5, respectivamente. ¿Qué tanto por ciento es A de $B+C$?

7. Si la pendiente de una recta r en el plano XY es la mitad de la pendiente de la recta $2x-3y+12=0$ y su intersección con el eje X es el doble del de la recta dada. Halla la ecuación de r.

8. Demuestra que si dos fracciones representan el mismo número racional, la fracción obtenida sumando los numeradores y los denominadores representa también el mismo número racional.

9. Sean las rectas r_1 y r_2 que satisfacen las condiciones siguientes:

i) r_1 está dada por la ecuación $y=ax$.

ii) r_2 está dada por la ecuación $5ax-y=32$.

Determina los números naturales que deben formar el dominio de la variable a para que las coordenadas del punto de intersección de estas dos rectas sean números naturales.

10. Sabiendo que $x+y=6$, $xy=3$. Calcula $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$.

11. Samuel y David compiten corriendo en una pista de 50 m y Samuel gana por 10 m, lo cual quiere decir que cuando Samuel pisa la raya final, Daniel está exactamente 10 m detrás de él. Corren una segunda carrera en la misma pista pero Samuel empieza 10 m antes de la raya de partida. Demuestra que Samuel vuelve a ganar la carrera y determina cuántos metros llega primero a la meta.

12. Determina la ecuación de la función lineal f tal que:

i) $f(4) = 1$

ii) $\dfrac{f(2) - f(5)}{f(3)} = 2$.

13. Demuestra que si se tienen dos números diferentes cuya suma es 1, si al cuadrado del mayor se le suma el menor, el resultado es el mismo que si al cuadrado del menor se le suma el mayor.

14. Sea un número fraccionario cualquiera menor que 1 con numerador y denominador enteros positivos. Demuestra que si se le suma un mismo entero positivo tanto al numerador como al denominador, el número obtenido también es menor que 1.

15. Sea $b \in \mathbb{Z}$ el valor de la ordenada donde el gráfico de una función lineal que satisface la ecuación $2f(x-2) = f(x-1) + f(x) - 11 + b$ corta al eje Y.

Determina todas las funciones f tales que $|b| < 5$ y su pendiente es un número entero, y demuestra que todas las rectas cuyas ecuaciones fueron obtenidas en el inciso anterior, tienen un punto común.

16. Halla los valores enteros positivos n, tales que la expresión $\dfrac{(2n^2 + 4n + 18)(7 - n)}{-3n^2 + 18n + 21}$ represente un número entero.

17. En los Concursos Nacionales de Matemática se consideran las hembras y los varones participantes, y se dividen en dos grupos. Los varones representan el 55 % del número total de participantes. La razón entre el número de varones de preuniversitario y el de varones de secundaria básica es igual a la razón entre la cantidad total de preuniversitario y la cantidad total de secundaria básica. Halla la razón entre la cantidad de varones de secundaria básica y la cantidad de hembras de secundaria básica.

18. Los números en los círculos grandes (fig. 24) son la suma de los números que están en los círculos pequeños adyacentes a él. ¿Cuál es la suma de los números en los círculos pequeños?

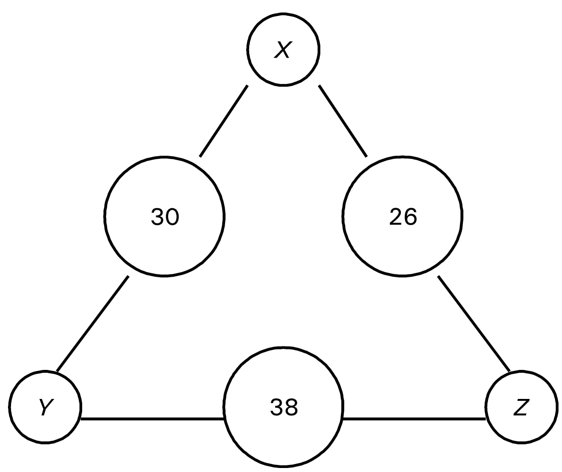

Fig. 24

19. Cuando una quinta parte de los adultos se fueron de una fiesta, la razón de los adultos a los niños era de 2 : 3. Más tarde, cuando 44 niños se fueron, la razón de los niños a los adultos era de 2 : 5. ¿Cuántas personas quedan en la fiesta?

20. Un grupo de cinco amigos se citaron para jugar dominó. En cada partido participaban 4 jugadores distintos cada vez. La suma de las edades de los jugadores para los distintos juegos fue 124, 128, 130, 136 y 142. ¿Cuál es la edad del jugador más joven?

21. Dadas las expresiones algebraicas

$$A = a^2 + 9ab - 3;\quad B = 2a^2 - b^2;\quad C = 4ab - 6a^2 + 8 \quad \text{y} \quad D = \frac{1}{2}a^2 + 3b.$$

Calcula y simplifica: a) $A - B + C - 2D$ b) $A \cdot B - C \cdot D$.

22. Sean a, b, c enteros positivos con

$$\frac{13}{9} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c+1}}$$

Encuentra el valor de $a + b + c$.

23. Demuestra que $n = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ es un entero.

24. En 5 días cuatro vacas negras y tres vacas blancas dan tanta leche como tres vacas negras y 5 vacas blancas dan en cuatro días. ¿Cuáles vacas dan más leche, las negras o las blancas?

25. Pedro y Luis suben caminando por una escalera mecánica en movimiento. Cuando Pedro llega arriba ha subido 21 escalones, mientras que Luis, quien camina con una velocidad que es el doble de la de Pedro, ha subido 28. ¿Cuántos escalones tiene la escalera en reposo?

26. Halla el valor de S si $S = \dfrac{25}{8 \cdot 9} + \dfrac{25}{9 \cdot 10} + \dfrac{25}{10 \cdot 11} + \dfrac{25}{11 \cdot 12} + \ldots + \dfrac{25}{99 \cdot 11}$

27. Un profesor de Matemática le dice a sus alumnos:
— Nací hace menos de un siglo.
— El número de años cumplidos se puede expresar como el producto de dos números primos consecutivos.
— Llevo más de 50 años impartiendo clases de Matemática.

¿Cuál es la edad de dicho profesor?

28. Dos velas tienen diferente longitud y grosor. La más larga dura 7 h ardiendo y la más corta 10 h. Si después de 4 h ardiendo, las dos velas tienen igual longitud, ¿cuál es el cociente entre las longitudes de ambas?

29. Dos jarras idénticas están llenas de una mezcla de aceite y vinagre en la proporción de 2 : 1, una de ellas y de 3 : 1, la otra. Si vaciamos ambas jarras en una grande, halla la proporción de aceite y vinagre que hay en la mezcla.

30. Se tiene una lista ordenada en orden creciente de 76 números naturales consecutivos, si el menor viene dado por la expresión $a = \dfrac{2n^2 - 3n - 5}{n^2 - 3n - 4}$ y el mayor por la expresión $b = \dfrac{16n^2 + 64n}{n^2 - 16}$. Determina cuál es el número que ocupa el trigésimocuarto lugar en la lista.

31. Adriana ingresó en la computadora las notas de cinco estudiantes, ordenadas al azar. Luego de ingresar cada nota, la computadora calculaba el promedio de todas las notas ingresadas hasta ese momento. Adriana observó que esos promedios eran siempre números enteros. Si las notas de los cinco estudiantes, ordenadas de menor a mayor, fueron 71, 76, 80, 82 y 91, determina en qué orden las ingresó Adriana en la computadora. Da todas las posibilidades.

32. Sea C el conjunto de números naturales de la forma $4n + 1$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ Se dice que un número es primo en C si no puede escribirse como el producto de números menores que él y que sean elementos de C.

a) Prueba que 4 389 es un elemento de C el cual puede escribirse de al menos dos maneras diferentes como el producto de dos números primos en C.
b) Halla otro elemento de C con la misma propiedad que 4 389.

33. Se tiene una balanza con dos platillos en la cual se puede pesar desde 1 hasta 13 kg, utilizando solamente tres pesas A, B y C. Indica de cuántos kilogramos han de ser las pesas A, B y C, y cómo realizarías cada una de las pesadas anteriores utilizando estas pesas.

34. Los números naturales se escriben en orden creciente en grupos de 5. El primer grupo comprende los números 1, 2, 3, 4 y 5; el segundo grupo, 6, 7, 8, 9 y 10, y así sucesivamente. ¿Cuál es el grupo cuya suma es la más cercana a 2 005?

35. Encuentra el menor número entero que multiplicado por 21 todas sus cifras sean 4.

36. Un número natural se llama *ascendente* si cada dígito en el número es mayor que el dígito de su izquierda. Por ejemplo, 2 478 es un número ascendente. ¿Cuántos números ascendentes hay comprendidos entre 4 000 y 5 000?

37. Se define la función f por $f(n)=(n-1)f(n-1)$, $n > 1$ y $f(1) = 1$. Calcula $f(2\,003)$.

38. Halla todos los pares de números naturales $(m; n)$ que satisfacen la igualdad $6 \cdot m^n - 8n + 1 = 2003$.

39. Se escriben en orden creciente los números enteros positivos que son múltiplos de 4, de 5 o de ambos a la vez, obteniéndose la sucesión 4, 5, 8, 10, ... Determina el número que ocupa la posición 2 003 en esta sucesión.

40. Un nadador para entrenar realiza sesiones de entrenamientos de 3, 5 y 7 km. Su entrenador le recomienda entrenar un total de 35 km. ¿Podrá realizarlos en 10 sesiones? Explica tu afirmación.

41. Considera los números n y m tales que

$$n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \text{ y } m = 1\underbrace{00000\ldots00000}_{200 \text{ ceros}}$$

¿Cuántos ceros tiene al final el número que resulta de la diferencia entre n y m?

42. Sean $P(n)$ y $S(n)$ el producto y la suma de los dígitos del número n respectivamente, por ejemplo:

$P(23)=6$ y $S(23)=5$. Si n es un número de dos dígitos tal que $n=P(n)+S(n)$. ¿Cuál es el dígito de las unidades de n?

43. ¿Cuáles son los tres dígitos que hay que aumentar al final del número 579 para que el número $\overline{579abc}$ sea divisible entre 5, 7 y 9?

44. Definimos el *reverso* de un número entero de dos cifras como el número que se obtiene permutando las dos cifras que lo componen (por ejemplo el reverso de 34 es 43). ¿Cuántos números hay que sumados a su reverso dan un cuadrado perfecto?

45. Determina todos los números de la forma $\overline{X1997Y}$ que son divisibles por 36.

46. Demuestra que la suma de los cuadrados de 3 números impares consecutivos aumentada en 1 es un múltiplo de 12.

47. Sea p un número primo y r el resto de la división de p por 210. Si sabemos que r es un número compuesto y puede representarse como la suma de dos cuadrados perfectos, determina r.
Nota: $169 = 12^2 + 5^2$.

48. Sea n un número de 6 cifras, cuadrado perfecto y cubo perfecto; si $n - 6$ es un número primo, halla el valor de n.

49. La población de una ciudad era un cuadrado perfecto, es decir, un número entero al cuadrado. Con 100 personas más, la nueva población resultó ser un cuadrado perfecto más uno. Ahora, con otro aumento de 100 personas, la población es nuevamente un cuadrado perfecto. ¿ Cuál era la población original?

50. Encuentra todas las parejas (a; b) de enteros no negativos tales que: $a^2 = 3 \cdot 2^b + 1$

51. Halla todos los enteros positivos m y n tales que $2^n + 1 = m^2$.

52. Sea $N = 10^{93}$ y sea $C(N)$ el número que representa la cantidad de ceros de N. Calcula la suma de los dígitos de $N - C(N)$.

53. Determina la cantidad de números enteros positivos de cuatro cifras, todas diferentes y ninguna 0, que hay, sabiendo que la suma de sus cifras es 12.

54. Algunas quintas potencias de números enteros tienen todas sus cifras distintas: por ejemplo, $2^5 = 32$ y $3^5 = 243$. Algunas tienen cifras repetidas, por ejemplo $10^5 = 100\,000$. Sea n el número de potencias quintas perfectas que tienen todas sus cifras distintas; demuestra que $n \leq 90$.

55. Halla todos los enteros positivos n para los cuales se cumpla que $n + 3$ divide a $n^2 + 7$.

56. El perímetro de un rombo es 34 cm y la suma de las longitudes de sus diagonales es 25 cm. Encuentra el área del rombo.

57. El perímetro de un triángulo rectángulo es de 132 cm y la suma de los cuadrados de los lados es 6 050 cm. Calcula la longitud del cateto mayor.

58. Consideremos la figura 25. El triángulo ABC es equilátero; el círculo que tiene su centro sobre el segmento determinado por los puntos A y C, es tangente a las rectas determinadas por los puntos A y B; B y C y tiene radio 2.
El triángulo $A'BC'$ tiene igual área que el círculo y $AC \parallel A'C'$.
Encuentra la altura del triángulo $A'BC'$.

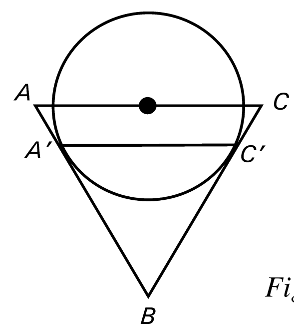

Fig. 25

59. Tenemos un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados diferentes, pero las diagonales son perpendiculares y miden 10 y 7 m, respectivamente. Halla el área del cuadrilátero.

60. Sea ABC un triángulo isósceles de base AC; $AP \perp BC$ y CE es la bisectriz del ángulo ACB.

Si $\angle ABC = 40º$, determina la amplitud del ángulo AEC.

61. En un triángulo isósceles se tiene que el ángulo opuesto a la base tiene una amplitud de 54º. Determina la amplitud del ángulo mayor formado por las bisectrices de los ángulos base al cortarse.

62. En la figura 26:

BD y BE son segmentos que trisecan al ángulo ABC;

$AC = AB$, $\angle CAB = 60º$

$\angle ADB = 100º$, $\angle GFB = 80º$.

Prueba que $DE \cdot BG = FG \cdot BD$.

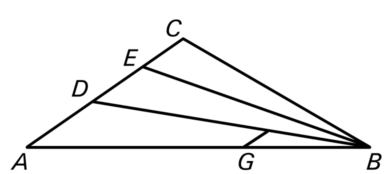

Fig. 26

63. Sea $ABCD$ un paralelogramo de 24 cm^2 de área, M y N son los puntos medios de AD y BC, respectivamente; se trazan CM y DN que se cortan en el punto O, se prolonga el lado AB por ambos extremos hasta cortar a DN y CM en los puntos P y Q, respectivamente. Calcula el área del pentágono $ABNOM$.

64. Se tiene un cuadrilátero $ABCD$ con dos ángulos rectos A y D, y dos lados iguales AB y AD que miden 5 cm. Si $CD = 17$ cm, halla el área y el perímetro del cuadrilátero $ABCD$.

65. En el rectángulo $RSTV$, en el lado RS se sitúan los puntos W y P de forma tal que $RW = WP = PS$. Si $RS = 12$ cm, $RV = 6$ cm, halla el área del trapecio $RPTV$.

66. Se tiene un terreno de forma cuadrada con 400 m^2 de superficie, en el cual se construye una circunferencia del mayor radio posible. ¿Qué razón representa el área no utilizada con respecto al área del terreno?

67. Calcula el área del triángulo ABC rectángulo en C de lados a, b y c sabiendo que $a + b = \sqrt{18}$ y la hipotenusa mide 4.

68. En la figura 27:
Triángulo ABC rectángulo en C.
$AB = 20$ cm, $AC = 12$ cm.
Si $AD = (BD + 8)$ cm.
Halla CD.

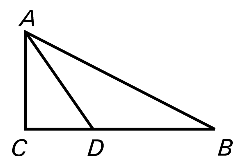

Fig. 27

69. En la figura 28:
Circunferencia de centro O y radio r. Se tiene que todas las cuerdas son iguales (pentagrama inscrito).
Halla la amplitud del ángulo ABC.

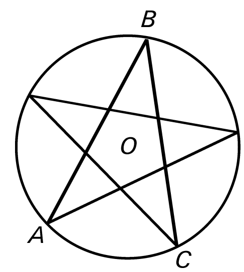

Fig. 28

70. Dado el triángulo ABC rectángulo en C. Se traza $CH \perp AB$ con $AH = 16$ cm y $BH = 49$ cm. Calcula el área del triángulo ABC.

71. Dado un triángulo ABC rectángulo en C, $AB = 6$ cm y CM es la mediana relativa al lado AB. Si el triángulo ACM es equilátero, determina el área de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.

72. En el diagrama se han situado los puntos a intervalos de 1 cm.
Halla el área de la poligonal cerrada que aparece en la figura 29.

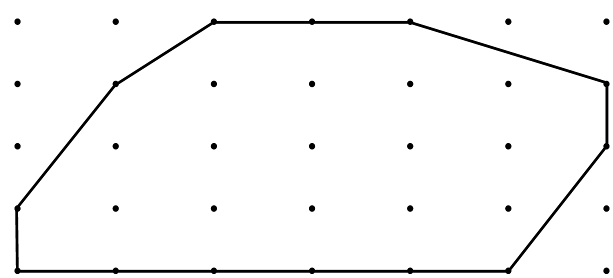
Fig. 29

73. Un cuadrado y un triángulo equilátero tienen el mismo perímetro. El área del triángulo es $9\sqrt{3}$ cm^2. Calcula la longitud de la diagonal del cuadrado.

74. En la figura 30:

El ángulo exterior C mide 116º y el ángulo BAC mide 60º, O es el incentro.
Calcula las amplitudes de los ángulos AOB, AOC y BOC.

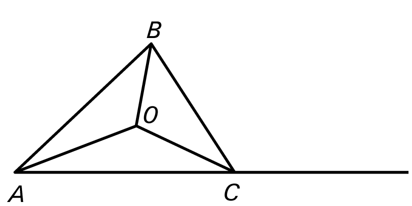

Fig. 30

75. Se tiene el triángulo *ABC* con $\angle ACB = 40º$, a partir de *A* y *B* se prolongan los lados *AC* y *BC* hasta *M* y *N* respectivamente, y se trazan las bisectrices *AD* y *BD* de los ángulos *BAM* y *ABN*. Determina la amplitud del ángulo *ADB*.

76. Dos lados de un triángulo tienen longitudes de 7 y 11 cm. Si el ángulo formado por ellos es un ángulo obtuso, prueba que para el tercer lado del triángulo de longitud x cm, se cumple que $11 < x < 18$.

77. En la figura 31:
ABCD es un paralelogramo, *KL* es la bisectriz del ángulo *MAB*.
a) Probar que el triángulo *KAB* es isósceles.
b) Probar que el triángulo *KLC* es isósceles.

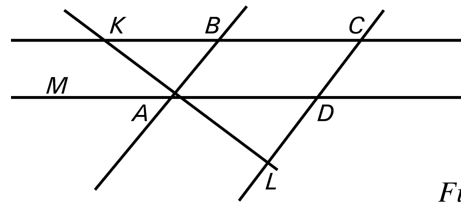

Fig. 31

78. Si el perímetro de un triángulo isósceles es de 36 cm y la altura mide 12 cm, halla el área del triángulo.

79. Se tiene un cuadrado de 16 cm de lado; en su interior se sitúa el punto *F* tal que *AF* = *BF*, sobre el lado *CD* se sitúa el punto *E* con $EF \perp CD$ y *EF* = *AF*. Halla el área del triángulo *ABF*.

80. Si desde un punto *P* exterior al segmento *MN* se traza *PQ* perpendicular a *MN*, de modo que *Q* pertenece a *MN* y *MQ* > *NQ*. Prueba que *PM* > *PN*.

81. Se tiene un triángulo *ABC* rectángulo en *A*. Los puntos *P*, *Q* y *R* son los puntos de contacto de la circunferencia inscrita con los lados *AB*, *BC* y *AC,* respectivamente. Si *AP* = 3 y *PB* = 7, halla la longitud de *RC*.

82. Se tiene un triángulo *MNP* con *PQ* bisectriz del ángulo *MPN*; por el punto *P* se prolonga el lado *MP* hasta un punto *S*. Si se traza *NS* paralela a *PQ*, demuestra que el triángulo *PNS* es isósceles.

83. Con 6 cuadrados iguales se ha construido un rectángulo *ABCD* como se muestra en la figura 32.
a) Demuestra que el triángulo *DMN* es isósceles.
b) Calcula la amplitud del $\angle DMN$.
c) Calcula la amplitud de la suma de los ángulos *DNP* y *NMB*.

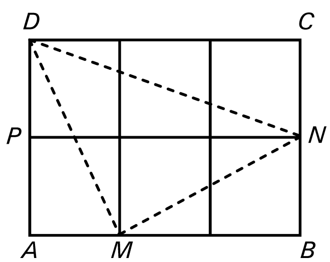

Fig. 32

84. Demuestra que en cualquier circunferencia si se trazan dos diámetros *MM'* y *NN'*, entonces las cuerdas *MN* y *M' N'* son iguales y paralelas.

85. Prueba que en un triángulo rectángulo la longitud de la hipotenusa es el doble de la longitud de su mediana correspondiente.

86. Sea *P* un punto interior del triángulo *ABC* tal que $\angle BPC = 117°$, $\angle ABP = 28°$ y $\angle ACP = 19°$. Calcula la amplitud del *BAC*.

87. En un triángulo acutángulo, la amplitud del ángulo más pequeño es la quinta parte del mayor. Si cada uno de los ángulos mide un número entero de grados, ¿cuántos grados suman los dos ángulos mayores?

88. Considera el paralelogramo *ABCD* y sobre el lado *CD* se sitúa el punto *C'* de forma tal que *CC'* es el 25 % de *CD*. A partir de *B* se prolonga el lado *AB* hasta *B'* de forma tal que *AB'* = 150 % de *AB*, dando lugar al trapecio $AB'C'D$. ¿En qué porcentaje ha aumentado el área del paralelogramo para llegar a ser el área del trapecio?

89. Sean $ABCD$ un rectángulo, E el punto medio de BC, F el punto medio de CD y G el punto de intersección de DE con BF. Si $\angle FAE = 20°$, ¿cuánto mide el $\angle EGB$?

90. Considera un cuadrado $ABCD$ en ese orden y sea E el punto medio del lado BC. Sobre el segmento DE se elige un punto F de forma tal que AF sea perpendicular a DE en ese punto.
Demuestra que $\angle CDE = \angle EFB$.

91. Tenemos un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados diferentes, pero las diagonales son perpendiculares y miden 10 y 7 m, respectivamente. Halla el área del cuadrilátero.

92. Se dice que un polígono es regular si tiene sus lados y sus ángulos iguales. ¿Cuál es la razón entre el área del triángulo ACE y el área del hexágono regular $ABCDEF$ cuyos vértices están en ese orden?

93. En el ángulo AOB se tiene que OM es bisectriz del $\angle AOB$ y ON es una semirrecta interior al $\angle MOB$. Prueba que $2\angle MON = \angle AON - \angle BON$.

94. En la figura 33 los puntos A, B y D están alineados.

El triángulo ABC es equilátero y en el triángulo BDE se tiene que $\overline{BE} = \overline{ED}$ y $\angle BED = 20°$. Halla la amplitud del $\angle ABE$.

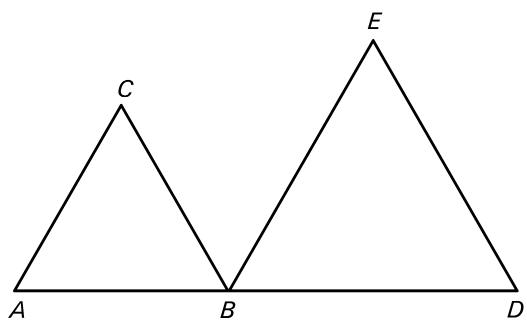

Fig. 33

95. Demuestra que las bisectrices de dos ángulos consecutivos de un paralelogramo forman un ángulo recto.

96. Sea ABC un triángulo isósceles con $AB = BC$ y $\angle ABC = 144º$. Se consideran el punto K en AB, el punto L en BC y el punto M en AC de modo que KL es paralelo a AC, KM es paralelo a BC y $KL = KM$. La recta LM corta a la prolongación del lado AB en P. Halla la amplitud del $\angle BPL$.

97. El triángulo PQR es rectángulo en Q (fig. 34).
$PS = PT$ y $RT = RU$.
Calcula la amplitud del $\angle STU$.

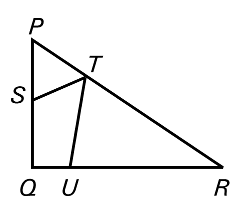

Fig. 34

98. Siete muchachas y siete muchachos fueron juntos a una fiesta. Al finalizar la fiesta, cada uno de ellos escribió el número de personas con las que había bailado. Estos números fueron: 3, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6. Demuestra que alguien se equivocó al escribir el número correspondiente.

99. De un grupo de jóvenes que se encuentran en una fiesta, se retiran 15 muchachos y entonces quedan dos muchachos por cada muchacha. Después se retiran 45 muchachos y quedan 5 muchachas por cada muchacho. ¿Cuál era el número de muchachos al comienzo de la fiesta?

100. Se tiene una lista con los primeros 53 números enteros positivos. Se distribuyen dichos números en dos grupos M y N, el grupo M con 27 de estos números y el grupo N con los restantes números de forma que en cada grupo hay el mismo promedio entre los números seleccionados. Si se quiere sacar un número del grupo M para pasar para el otro grupo, manteniendo los promedios originales de cada grupo, ¿cuál es el número que se debe cambiar de grupo?

101. En una escuela hay 1 000 estudiantes y cada uno tiene una taquilla. Todos los años, a final del curso, montan un juego algo extraño; se colocan en orden alfabético, va el primero y abre todas las taquillas. A continuación, el segundo las cierra de dos en dos, o sea, cierra la 2, 4, 6, etc. Luego va el tercero y acude a las taquillas números 3, 6, 9, 12, etc. y las abre si estaban cerradas y las cierra si estaban abiertas; luego el cuarto va a las taquillas 4, 8, 12, 16, etc. y hace lo mismo (las abre o las cierra según estén cerradas o abiertas) y así continúa el juego hasta pasar todos. Al final, ¿cuál es la última taquilla abierta?

102. Tres jugadores A, B y C participan en un juego: hay tres tarjetas, cada una de las cuales tiene escrito un número natural. Estos tres números p, q y r cumplen la condición: $0 < p < q < r$. Las tres tarjetas se revuelven y se reparten (una a cada jugador). A continuación, cada uno de ellos recibe un número de piedrecitas equivalente al número que aparece indicado en la tarjeta que le tocó y que deben conservar por el resto del juego. Después las tarjetas se revuelven otra vez. El proceso anterior se efectúa completo al menos tres veces. Cuando los jugadores se cansan y deciden terminar el juego, el jugador A se queda en total con 20 piedrecitas, B con 10 y C con 9. Además, sabemos que en la última repartición a B le tocó la tarjeta con el número r. ¿Quién recibió la tarjeta con el número q en la primera repartición?

103. En un tablero de $m \times n$ se escribe un número (no necesariamente entero) en cada casilla de tal manera que la suma de los números en cada fila y en cada columna es 1. Demuestra que $m = n$.

104. Un estudiante estuvo leyendo un libro de Matemática por 37 días de acuerdo con la siguiente regla:
(I) Cada día estaba leyendo al menos una hora.
(II) Cada día leía un número entero de horas y a lo sumo 12 h.
(III) En total él estuvo leyendo a lo sumo 60 h.
Prueba que hay algunos días consecutivos en los cuales el estudiante leyó en total durante esos días, 13 h.

105. Ernesto salió de vacaciones por algunos días y observó que llovió 7 veces en total. Cuando llovía en la mañana, estaba claro en la tarde: además, solo 5 tardes y 6 mañanas fueron claras. ¿Por cuántos días salió Ernesto de vacaciones?

106. Un condenado queda en libertad cuando alcance el final de una escalera de 100 escalones. Pero no puede avanzar a su antojo, puesto que está obligado a subir un solo escalón cada día de los meses impares y a bajar un escalón cada día de los meses pares. Comienza el 1 de enero de 2001. ¿Qué día quedará en libertad? ¿Qué día quedaría en libertad si la escalera tuviera 99 escalones?

107. Nueve personas han celebrado cuatro reuniones diferentes sentados alrededor de una mesa circular. ¿Han podido hacerlo sin que existan dos de esas personas que se hayan sentado una junto a la otra en más de una reunión? Razona la respuesta.

108. Una oficina de turismo va a realizar una encuesta sobre el número de días soleados y número de días lluviosos que se dan en el año. Para ello recurre a seis regiones que le trasmiten los datos de la siguiente tabla:

Región	*Soleados o lluviosos*	*Inclasificables*
A	336	29
B	321	44
C	335	30
D	343	22
E	329	36
F	330	35

La persona encargada de la encuesta no es imparcial y tiene esos datos más detallados. Se da cuenta de que, prescindiendo de una de las regiones, la observación da un número de días lluviosos que es la tercera parte del de días soleados. Razona cuál es la región de la que prescindirá.

109. ¿Cuántos números entre 1 y 2 005 sólo utilizan dos dígitos diferentes al escribirlos? (Por ejemplo, 1 919 cumple la condición y 1 231 no la cumple).

110. En una pizarra se tienen escritos once números 1. Se permite tomar dos números y sumarle 1 a ambos, restarle 1 a ambos, o sumarle 1 a uno y restarle 1 al otro. ¿Es posible mediante estas operaciones tener escritos en la pizarra once números 10?

111. Tienes 3 bolsas llenas de bolas: en la bolsa *A* hay 12 bolas, 4 blancas y 8 negras; en la *B* hay 6 bolas blancas y 15 bolas negras y en la bolsa *C* hay 7 bolas blancas y 20 bolas negras. Sacando una bola de cada bolsa, ¿en cuál es más fácil que te salga una bola blanca?

112. Un rectángulo de 70 cm de largo y 80 cm de ancho está totalmente recubierto por cuadrados idénticos. ¿Cuántos cuadrados, como mínimo, hacen falta?

113. Una caja está llena de bolas de 20 colores distintos. Al azar se van sacando bolas de la caja. ¿Cuál es el mínimo número de bolas que deben sacarse para poder garantizar que en la colección tomada habrá al menos 100 bolas del mismo color?

SOLUCIONES

1. La recta corta al eje x en el punto $\left(\frac{6}{a}, 0\right)$, mientras que corta al eje y en el punto $\left(0, \frac{6}{b}\right)$. Como el área del triángulo es $A = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{6}{a}\right)\left(\frac{6}{b}\right) = \frac{18}{ab} = 6$, de donde $ab = 3$, por lo que $a = 1$, $b = 3$ o $a = 3$, $b = 1$.

2. Basta observar que la forma de la función lineal es $f(x) = ax + b$. Resolviendo el sistema de ecuaciones que resulta al evaluar la función en los valores dados, se obtiene que: $f(5) = -8$.

3. Transformando la expresión dada se tiene $\frac{(x-y)^2}{xy} \cdot \frac{(x+y)^2}{xy} \left(\frac{(x-y)^2 - (x+y)}{(x+y)^2\,(x-y)^2}\right) = -4$.

4. $2x - 5xy + 2y^2 = (2x - y)(x - 2y) = 5 \cdot 6 = 30$.

5. $a + \frac{1}{a} = -7$ pero $a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 = 47$.

6. De acuerdo con los datos tenemos $\frac{80\,\%\,A}{3} = \frac{25\,\%\,B}{4} = \frac{50\,\%\,C}{5}$ entonces $\frac{4}{15}A = \frac{1}{16}B = \frac{1}{10}C$

$B = \frac{64}{15}A$; $C = \frac{8}{3}A$ sumando B y C y haciendo los cálculos se tiene que A es el 14,4 % de $B + C$.

7. La recta dada tiene pendiente $\frac{2}{3}$, la pendiente de la recta r tiene pendiente $\frac{1}{3}$.
La recta dada corta al eje x en el punto de abscisa – 6, por lo que la recta r lo corta en el punto de abscisa –12, entonces se puede formar la ecuación $0 = -4 + n$ y $n = 4$. La ecuación de r es $y = \frac{1}{3}x + 4$.

8. Sean $\frac{x}{y}$, $\frac{a}{b}$ dos fracciones con $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ entonces

$$\frac{a+x}{b+y} = \frac{\frac{bx}{y} + x}{b+y} = \frac{bx + xy}{y(b+y)} = \frac{x(b+y)}{y(b+y)} = \frac{x}{y}$$

lo que prueba que se obtiene la misma fracción.

9. r_1: $y = ax$ r_2: $y = 5ax - 32$

Se tiene $ax = 5ax - 32$, entonces $4ax = 32$ y ax = 8, como los divisores de 8 son 1, 2, 4 y 8 esos son los valores posibles para a, es decir, a = 1, 2, 4, 8.

10. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{(x+y)^2 - 2xy}{xy} = \frac{36-6}{3} = 10$.

11. Sean V_S y V_D las velocidades de Samuel y David, respectivamente, con

$V_s = \frac{50\,m}{t} = \frac{60\,m}{t_1}$

$V_D = \frac{40\,m}{t} = \frac{x\,m}{t_1}$, entonces $\frac{V_S}{V_D} = \frac{5}{4} = \frac{60}{x}$ y el valor de x es 48 por lo que David recorre 48 m y queda 2 m por detrás de Samuel.

12. Sea la función buscada del tipo $f(x) = mx + n$, por i) se tiene que $1 = 4m + n$ (1)

$f(2) = 2m + n$; $f(5) = 5m + n$ y $f(3) = 3m + n$, por ii) se tiene que $-3m = 6m + 2n$ por lo que $2n + 9m = 0$ (2).

De (1) y (2) resolviendo el sistema se tiene $m = -2$ y $n = 9$, entonces $f(x) = -2x + 9$.

13. Sean $a + b = 1$ con $a > b$, entonces $a^2 + b = (1 - b)^2 + b = b^2 - b + 1 = b^2 - b + a + b = b^2 + a$.

14. Sea $0 < \frac{x}{y} < 1$, entonces $x < y$, sea $a \in$ N* entonces $x + a < y + a$ por lo que $\frac{x+a}{y+a} < 1$.

15. a) Sea $f(x) = mx + n \Rightarrow f(0) = n = b$, luego $f(x) = mx + b$

$2[m(x-2) + b] = m(x-1) + b + mx + b - 11 + b$. Haciendo los cálculos indicados y reduciendo los términos semejantes queda $-3m = b - 11$ y $m = \frac{11-b}{3}$ para que m sea un entero $11 - b$ tiene que ser un múltiplo de 3 con $|b| < 5$, para $b = 2$, $m = 3$ y $f(x) = 3x + 2$; para $b = -1$, $m = 4$ y $f(x) = 4x - 1$; para $b = -4$, $m = 5$ y $f(x) = 5x - 4$.

b) $3x + 2 = 4x - 1$ para x = 3, entonces y = 11 y el punto es (3; 11) probando en la tercera función $5(3) - 4 = 11$ por lo que el punto pertenece también a la misma.

$\therefore$ El punto (3; 11) pertenece a las tres rectas encontradas en a).

16. $\frac{(2n^2 + 4n + 18)(7-n)}{-3n^2 + 18n + 21} \Leftrightarrow \frac{2n^2 + 4n + 18}{3n+3}$ $(n \neq 7)$ y $\frac{2n^2 + 4n + 18}{3n+3} = \frac{1}{3}\left[2n + 2 + \frac{16}{n+1}\right]$

de aquí tenemos los posibles casos:

a) $n + 1 = 1$	b) $n + 1 = 2$	c) $n + 1 = 4$	d) $n + 1 = 8$	e) $n + 1 = 16$
$n = 0$	$n = 1$	$n = 3$	$n = 7$	$n = 15$

Como los casos a) y d) son imposibles, entonces n = 1; 3 y 15.

17. Sean *x*, la cantidad de hembras de preuniversitario, y la cantidad de hembras de secundaria básica, *z,* la cantidad de varones de preuniversitario, *w* la cantidad de varones de secundaria básica.

Entonces tenemos las ecuaciones $z+w=0{,}55(x+y+z+w)$; $w:z=(y+w)(x+z)$ y se busca la razón $w:y$. Tomemos $\frac{z}{w}=\frac{x+z}{y+w}$ entonces $\frac{z+w}{w}=\frac{x+y+z+w}{y+w}$ teniendo que

$\frac{w}{y+w}=\frac{z+w}{x+y+z+w}=\frac{55}{100}=\frac{11}{20}$, de esta forma $\frac{y+w}{w}=\frac{20}{11}$ de aquí se tiene que

$\frac{y}{w}=\frac{9}{11}$ o $\frac{w}{y}=\frac{11}{9}$.

18. Se tiene que $x+y=30$, $y+z=38$, $x+z=26$, que al sumarlas tenemos $2(x+y+z)=94$; por lo tanto, $x+y+z=47$.

19. Sean *a*: número de adultos que estaban inicialmente en la fiesta y *n*: número de niños que estaban inicialmente en la fiesta.

Cuando una quinta parte de los adultos se fueron, quedaron cuatro quintas partes y la razón era

$$\frac{\frac{4}{5}a}{n}=\frac{2}{3}\ \Rightarrow\ 6a=5n$$

Después que se fueron 44 niños, la razón de los niños a los adultos era de 2 : 5, es decir,

$$\frac{n-44}{\frac{4}{5}a}=\frac{2}{5}\ \Rightarrow\ 8a=25n-1100$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones tenemos que a = 50 y n = 60.

Luego, el número de personas que quedan es $\frac{4}{5}(50)+(60-44)=40+16=56$.

20. Sean *a*, *b*, *c*, *d* y *e* las edades de los jugadores. Entonces tenemos que

$a+b+c+d=124$ (1)

$a+b+c+e=128$ (2)

$a+b+d+e=130$ (3)

$a+c+d+e=136$ (4)

$b+c+d+e=142$ (5)

Se puede observar que $e>d>c>b>a$, buscaremos entonces resolver para *a.*

Al sumar las 4 primeras ecuaciones y restar tres veces la quinta ecuación tenemos que

$4a+3(b+c+d+e)-3(b+c+d+e)-124+128+130+136-3(142)$

$4a-518-426=92$

$a=23$

21. a) $(a^2-9ab-3)-(2a^3-b^2)+(4ab-6a^2+8)-2\left(\frac{1}{2}a^2+3b\right)$

$=a^2-9ab-3-2a^3+b^2+4ab-6a^2+8-a^2-6b$

$=-2a^3-6a^2-b^2-5ab-b+5$

b) $\left(a^2-9ab-3\right)\left(2a^2-b^2\right)-\left(4ab-6a^2+8\right)\left(\frac{1}{2}a^2+3b\right)$

$=2a^4-a^2b^2-18a^3b+9ab^3-6a^2+3b^2-2a^3b-12ab^2+3a^4+18a^2b-4a^2-24b$

$=5a^4-a^2b^2-20a^3b+9ab^3-10a^2+3b^2-12ab^2+18a^2b-24b$

22. Como b y c son enteros positivos $b+\frac{1}{c+1}>1$, luego $\frac{1}{b+\frac{1}{c+1}}<1$, entonces a es la parte entera de $\frac{13}{9}$, por tanto a = 1 y $\frac{4}{9}=b+\frac{1}{c+1}$ de donde b = 2 y c = 3. Por lo tanto, $a + b + c = 6$.

23. Basta darse cuenta de que la cantidad subradical debe ser un cuadrado perfecto, por lo que $3+2\sqrt{2}=p^2$ y $3-2\sqrt{2}=q^2$, en este caso $p^2=\left(1+\sqrt{2}\right)^2$ y $q^2=\left(1-\sqrt{2}\right)^2$.

24. Llamemos x y y a las cantidades diarias de leche que dan las vacas negras y blancas, respectivamente. Tenemos entonces que: $5(4x+3y)=4(3x+5y)$ por lo que $8x=5y$, es decir, 8 vacas negras dan la misma cantidad de leche por día que 5 vacas blancas, por tanto dan más leche las vacas blancas.

25. Sea x el total de escalones que tiene la escalera en reposo; t tiempo que transcurre al pasar un escalón de una posición a la inmediata siguiente. De esta manera una persona en reposo tardaría un tiempo xt en subir la escalera mecánica. Como Pedro sube 21 escalones caminando, llega arriba en el tiempo $(x-21)t$ y para subir cada escalón, ha demorado $\frac{(x-21)t}{21}$. Similarmente, el tiempo que emplea Luis en subir cada escalón es $\frac{(x-28)t}{28}$. Como la velocidad de Luis es el doble de la de Pedro, el tiempo que demora Pedro en subir un escalón es el doble del que emplea Luis, luego $\frac{(x-21)t}{21}=\frac{2(x-28)t}{28}$ de donde x = 42.

26. Observemos que:

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} \quad \text{entonces:}$$

$$S=25\left[\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)\right]=25\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{100}\right)=\frac{23}{8}$$

27. Posibles:
$2\cdot 3$, $3\cdot 5$, $5\cdot 7$, $7\cdot 11$, $11\cdot 13 = 143 > 1001$ no puede ser.
De las restantes parejas la única que cumple las condiciones es el 77, que es la edad de ese profesor.

28. Sea x la longitud de la vela larga, y la longitud de la corta. Al cabo de 4 h se habrá consumido $\frac{4}{7}x$ en la primera y 0,4 y en la otra por lo que las longitudes que quedaron son $\frac{3}{7}x$, 0,6 y.

Como nos dicen que $\frac{3}{7}x=0{,}6\,y$, entonces $x : y = 5 : 7$ que es la razón buscada.

29. Supongamos que en la primera hay 12 L, 8 serán de aceite y 4 de vinagre. Si en la segunda hay 12 L, 9 serán de aceite y 3 de vinagre. Así, pues, en la mezcla de 24 L, 17 son de aceite y 7 de vinagre por lo que la proporción de aceite y vinagre es 17 : 7.

30. Consideremos $\frac{16n^2+64n}{n^2-16}-\frac{2n^2-3n-5}{n^2-3n-4}=75$, entonces $\frac{16n(n+4)}{(n+4)(n-4)}-\frac{(2n-5)(n+1)}{(n-4)(n+1)}=75$

que al simplificar y sumar fracciones de igual denominador queda $\frac{14n+5}{n-4}=75$, entonces

$14n+5=75n-300$ y n = 5 por lo que el número buscado es 5 + 33 = 38.

31. Sean a, b, c, d y e los números escritos en el orden en que fueron ingresados, entonces $a + b$ es múltiplo de 2, $a + b + c$ es múltiplo de 3, $a + b + c + d$ es múltiplo de 4. Además, $a + b + c + d + e$ es igual a 71 + 76 + 80 + 82 + 91 = 400, que es múltiplo de 5.

Tenemos que $a + b + c + d = 400 - e$ es múltiplo de 4 sólo si $e = 76$ o $e = 80$.

Si $e = 76$, entonces $a + b + c + d = 324$ y $a + b + c = 324 - d$. Los valores posibles de d son 71, 80, 82 y 91, para los cuales $324 - d$ es, respectivamente, 251, 244, 242, 233, y ninguno de ellos es múltiplo de 3.

Por lo tanto el valor $e = 76$ es imposible y tenemos que $e = 80$ y $a + b + c + d = 320$.

Luego, $a + b + c = 320 - d$ y los valores posibles de d son 71, 76, 82 y 91, que corresponden a $320 - d$ igual a 249, 244, 238 y 229, respectivamente. El único valor de d para el cual $320 - d$ es múltiplo de 3 es $d = 71$.
Entonces $a + b + c = 249$ y $a + b = 249 - c$. Este último número es par sólo si $c = 91$.
Quedan para a y b los números 76 y 82, que pueden ingresarse en la computadora.

32. a) 4 389 = 3 · 7 · 11 · 19 es el producto de cuatro números primos diferentes de la forma $4a + 3$, el producto de dos cualesquiera de estos números primos tienen la forma $4b + 1$ lo que demuestra claramente que dichos productos son primos en C ya que son productos de números primos 4 389 = 21 · 209 = 33 · 133 = 57 · 77
b) Por el mismo argumento del inciso anterior podemos cambiar alguno (s) números primos de la forma $4a + 3$ y seguir la misma idea que el inciso anterior ejemplo cambiamos 19 por 23 y obtenemos el número 5 313 = 3 · 7 · 11 · 23.

33. Consideremos que las pesas A, B y C pesan respectivamente 1, 3 y 9 kg; está claro que los pesos 1, 3, 4, 9, 10, 12 y 13 kg pueden ser pesados poniendo en uno de los platillos 1, 2 ó 3 de las pesas. Veamos cómo pueden pesarse los restantes pesos.
2 kg: se pone en un platillo la pesa B y en el otro la pesa A y se completa el platillo de A hasta que se equilibren.
5 kg: se pone en un platillo la pesa C y en el otro las pesas A y B, y se completa.
6 kg: se pone en un platillo la pesa C y en el otro la pesa B y se completa.
7 kg: se pone en un platillo las pesas A y C, y en el otro la pesa B, y se completa.
8 kg: se pone en un platillo la pesa C y en el otro la A, y se completa.
11 kg: se pone en un platillo las pesas B y C y en el otro la A, y se completa.

34. $S_1=1+2+3+4+5=15$; $S_2=(5+1)+(5+2)+(5+3)+(5+4)+(5+5)=40=S_1+25$;

$S_3=S_2+25=65=S_1+50=S_1+2(25)$, entonces se busca $S_n=15+(n-1)25$ que esté lo más próximo posible a 2 005, es decir, $(n-1)25$ lo más próximo a 1 990 entonces $(n-1)5$ lo más próximo a 398 que debe ser 400 que se cumple para $n = 81$ donde la suma es 2 015, para $n = 80$ la suma es 1 975.

∴ Es el grupo 81.

35. El menor número es 21 164.

36. Con segunda cifra 0, 1, 2, 3, 4, no hay ninguno. Ahora 456_ hay 3; 457_ hay 2; 458_ hay 1; 467_ hay 2; 468_ hay 1 el 4 789 que son en total 10.

37. Basta observar que $f(2)=1\cdot 1$, $f(3)=2\cdot 1$, $f(4)=3\cdot 2\cdot 1=3!$ Por lo tanto, $f(2\,003)=202!$

38. $6 \cdot m^n - 8n = 2\,002$
$3 \cdot m^n - 4n = 1\,001$
de aquí que m tiene que ser impar.
$m = 1$ no puede ser, pero $m = 3$ o $m = 5$ tampoco porque 1 001 no es divisible por ninguno de ellos.

Si $m = 7$ se tiene $3 \cdot 7^n - 28 = 1\,001$
$3 \cdot 7^n = 1\,029$
$7^n = 343$
$n = 3$
$\therefore$ Hay una única solución que es el par (7; 3).

39. La sucesión es

4, 5, 8, 10, 12, 15, 16, 20,

24, 25, 28, 30, 32, 35, 36, 40

Es decir, hay 8 términos entre los números de cada fila, pero $2\,003 = 8 \cdot 250 + 3$ lo que indica que el número que ocupa la posición 2 003 está en la fila 251, columna 3, la fila 250 termina con el 5 000 luego irá en la posición 2 003 el número 5 008.

40. No es posible. En cada sesión debe nadar un número impar de kilómetros y la suma de un número par de impares es par, por lo que nunca podrá ser 35.

41. Primero veamos en cuántos ceros termina n: cada cero al final de n se formó por la multiplicación de un 2 y un cinco, pero como el 2 aparece más veces que el cinco, basta contar cuántas veces aparece 5 como factor. En n hay $\frac{100}{5}=20$ múltiplos de 5, $\frac{100}{25}=4$ múltiplos de 25, luego el 5 aparece 24 veces como factor en n, por lo que n termina con 24 ceros.

Por lo tanto, la diferencia es un número que termina en 24 ceros.

42. Sea $n=10a+b$ con $a \neq 0$, entonces $P(n)=ab$ y $S(n)=a+b$. Por hipótesis $10a+b=ab+a+b$, luego $9a=ab$ pero como $a \neq 0$, entonces $b = 9$. Por lo que el dígito es 9.

43. Sea $\overline{p=579abc}$

Como 5, 7 y 9 son primos relativos, p es divisible por 5, 7 y 9 si y solo si p es divisible por el producto $5 \cdot 7 \cdot 9 = 315$. Ahora, entre 579 000 y 579 999 hay 3 múltiplos de 315, luego para encontrar uno de ellos dividimos 579 999 entre 315; se obtiene 1 841 y sobra 84. Entonces $p = 579\,999 - 84 = 579\,915$ es uno de los múltiplos buscados. Para encontrar los otros dos múltiplos restamos 315 y $2 \cdot 315$ para obtener respectivamente 579 600 y 579 285. Por lo tanto, hay tres soluciones:

$$\overline{abc}=915;\ \overline{abc}=600 \text{ y } \overline{abc}=285$$

44. Consideremos un número de dos cifras $\overline{ab}=10a+b$, entonces su reverso es $\overline{ba}=10b+a$. Sumando el número con su reverso obtenemos $11\,(a + b)$ que queremos que sea un cuadrado perfecto, es decir, queremos que $11(a+b)=k^2$. Además, como $0 \leq a \leq 9$ y $0 \leq b \leq 9$, tenemos que $a+b\leq 18$ luego $a+b=11$.
Por lo tanto, los números son 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 y 92.

45. Como $36 = 4 \cdot 9$ y 4 y 9 son primos entre sí entonces los números tienen que ser divisibles por 4 y por 9. El número es divisible por 4 para $Y = 2$ ó 6. Si $Y = 2$ se obtienen los números de la forma $\overline{X19972}$ para que sea divisible por 9, entonces $X = 8$ y se forma el número 819 972.

Si Y = 6 se obtienen los números de la forma $\overline{X19976}$, entonces X = 4 formando el número 419 976.

46. Sean $2n+1$; $2n+3$ y $2n+5$ los números; debemos probar que $(2n+1)^2+(2n+3)^2+(2n+5)^2+1$ es divisible por 12. En efecto resolviendo obtenemos:

$4n^2+4n+1+4n^2+12n+9+4n^2+20n+25+1$

$=12n^2+36n+36=12(n^2+3n+3)$ que es un número divisible por 12.

47. Sea $p=210n+r$ donde $0 < r < 210$. Si p = 2, 3, 5 ó 7 entonces, r = 2, 3, 5 ó 7 que es una contradicción (r es primo), luego $p > 7$. Sea q el menor primo divisor de r.

Por tanto, $r=qm$, $q \leq m$. Tenemos que $210>r=qm\geq q^2$, luego $q \leq 13$; por otra parte r no es divisible por 2, 3, 5 y 7; de otra forma p fuera divisible por algunos de los números, pero p es primo. Por tanto, $q > 7$ luego q = 11 o q = 13. Por la condición $r=a^2+b^2$ donde a y b son enteros positivos. Si q = 11, entonces a^2+b^2 es divisible por 11. Escribimos todos los posibles restos después de la división de los cuadrados perfectos por 11: 0, 1, 4, 9, 5, 3 con lo cual vemos que la suma de dos restos es divisible por 11 solo si ambos términos son iguales a 0. Por tanto, a y b son divisibles por 11; a^2 y b^2 son divisibles por 121 y como $r=a^2+b^2\geq 121+121=242>210$ se llega a una contradicción, luego q = 13, $m < 210$: $q < 17$, por tanto, $m \leq 16$ y el menor primo divisor de m no es menor que 13 y finalmente $r=mq=13^2=169$.

$169=12^2+5^2$

48. Como el número es cuadrado perfecto y cubo perfecto, es una sexta potencia de un entero, es decir, $n=a^6$ con a entero.

Los únicos enteros a para los cuales a^6 tiene 6 cifras son 9, 8, 7 pues 10^6 tiene 7 cifras y 6^6 tiene 5.

De esta forma, el número buscado es 9^6, 8^6 ó 7^6. Pero $9^6-6=3(3\cdot 9^5)$ que no es primo, de la misma forma $8^6 - 6$ es un número par luego no es primo, veamos $7^6 - 6 = 117\,649 - 6 = 117\,643$ que es un número primo por lo que $n=7^6=117\,649$.

49. Sean a, b y c enteros no negativos tales que a^2 es la población original, b^2+1, la población después del primer aumento y c^2, la población después del segundo.

Entonces tenemos que:

$a^2+100=b^2+1$

$b^2+101=c^2$

$c^2-a^2=200 \Rightarrow (c+a)(c-a)=200$

La descomposición de 200 en factores primos es $200 = 2^3 \cdot 5^2$, considerando entonces los divisores de 200 y que $c + a \geq c - a$ tenemos que:

$c + a = 200$ $\quad c - a = 1 \Rightarrow c$ no es entero
$c + a = 100$ $\quad c - a = 2 \Rightarrow c = 51$ y $a = 49$
$c + a = 50$ $\quad c - a = 4 \Rightarrow c = 27$ y $a = 23$

$c + a = 40 \quad c - a = 5 \Rightarrow c$ no es entero
$c + a = 25 \quad c - a = 8 \Rightarrow c$ no es entero
$c + a = 20 \quad c - a = 10 \Rightarrow c = 15$ y $a = 5$

Analicemos ahora los casos 2, 3 y 6.
El segundo caso cumple las otras condiciones del problema, a saber,
$49^2 + 100 = 50^2$ y $50^2 + 101 = 51^2$
En el tercer caso, $c = 27$ y $a = 23$. Tenemos que $23^2 + 100 - 1$ no es un cuadrado perfecto. Igualmente, el último caso 25 + 100 - 1 no es un cuadrado perfecto. Por lo tanto, la población original era $49^2 = 2\,401$.

50. De la ecuación tenemos que $3 \cdot 2^b = a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$. De los dos números $a - 1$ y $a + 1$, uno debe ser potencia de 2 y el otro el triplo de una potencia de 2. Hay dos posibilidades.

Caso 1:

$a - 1 = 2^m$ y $a + 1 = 3 \cdot 2^n$. Tenemos que $3 \cdot 2^n = 2^n + 2$. Si $m = 0$, el lado derecho es 3 y entonces n también es cero, de donde $b = m + n$. Así obtenemos la solución $a = 2$, $b = 0$. Si $m > 0$, el lado derecho es par y por lo tanto n también es mayor que cero. Si $m = 1$ obtenemos $3 \cdot 2^{n-1} = 2$ que es imposible. Cuando m es mayor o igual que 2 el lado derecho es impar y entonces, para que el lado izquierdo lo sea, n debe ser 1. De $n = 1$ obtenemos la solución $a = 5$, $b = 3$.

Caso 2:

$a - 1 = 3 \cdot 2^m$ y $a + 1 = 2^n$. Ahora tenemos que $2^n = 3 \cdot 2^m + 2$. El lado derecho es por lo menos $3 \cdot 2^0 + 2 = 5$, de modo que n es mayor o igual que 3. Ahora sabemos que el lado izquierdo es múltiplo de 8. Si m es mayor o igual a 2 el lado derecho ni siquiera sería múltiplo de 4, por lo tanto $m < 2$. Con $m = 0$ se tiene $2^n = 5$ que es imposible y con $m = 1$ se obtiene $n = 3$, de donde $b = 4$ y $a = 7$.

Por lo tanto las soluciones son $a = 2$, $b = 0$; $a = 5$, $b = 3$ y $a = 7$, $b = 4$.

51. Si $2^n + 1 = m^2$, entonces $2^n = m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$. De aquí que m tiene que ser un número impar; sea $m = 2r + 1$, entonces $2^n = (2r)(2r+2) = 4r(r+1)$. Como r y $r + 1$ son dos números consecutivos no pueden ser ambos pares porque el producto tiene que ser una potencia de 2 por lo que $r = 1$, de donde $m = n = 3$.

52. 10^{93} = 1000...000 o sea, un uno y 93 ceros. Entonces $N - C(N) = 999\ldots9\,907$, es decir, 91 nueves, un cero y un siete donde la suma de sus dígitos es $91 \cdot 9 + 7 = 826$.

53. Como son todas diferentes y ninguna cero, entre las tres menores suma al menos 6, (1 + 2 + 3). Así pues, una posibilidad es 6 123 y todas las ordenaciones posibles con esas cuatro cifras, o sea, 24 números. Pero la suma 12 con todas diferentes no se da solamente en 1 + 2 + 3 + 6 sino también en la suma 1 + 2 + 4 + 5. Así pues, la cantidad total de números con esa característica será $24 \cdot 2 = 48$.

54. Ningún número con 11 dígitos o más puede tener todas sus cifras diferentes por lo que si x^5 tiene todos sus dígitos diferentes, entonces $x < 100$, y los posibles valores de x son a, 2, 3, ..., 98, 99. Además, cualquier múltiplo de 10 tiene ceros repetidos cuando se eleva a la quinta potencia.
$\therefore\ n \leq 90$.

55. Tenemos que $n^2 + 7 = (n+3)^2 - 6n - 2 = (n+3)^2 - 6(n+3) + 16$.
Entonces $n + 3$ divide a $n^2 + 7$ cuando $n + 3$ divide a 16 por lo que $n = 1$, $n = 5$ o $n = 13$.

56. El área de un rombo es el semiproducto de las longitudes de sus diagonales. Denotemos por $2x$ y $2y$ las longitudes de las diagonales. Luego,

$$(x+y)^2=\left(\frac{25}{2}\right)^2;\; x^2+y^2=\left(\frac{17}{2}\right)^2.$$

De estas dos igualdades se obtiene que $84=2xy$.

57. **S**ean c_1, c_2, h las longitudes de los catetos y la hipotenusa, respectivamente. Entonces las siguientes ecuaciones nos dan la relación entre ellos: $c_1+c_2+h=132$; $c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+h^2=6\,050$.

Se deduce que $h = 55$, $c_1+c_2=77$ y $c_1\cdot c_2=1\,452$. Por consiguiente las medidas de los catetos pueden obtenerse resolviendo la ecuación de segundo grado $x^2-77x+1\,452=0$.

58. Observa que el triángulo *A'BC'* es equilátero. La longitud del lado del triángulo *A'BC'* puede obtenerse en términos de su altura ya que al trazar la altura desde el vértice *B* hasta el lado determinado por los puntos *A'* y *C'*, se obtiene un triángulo 30-60-90. Como el área del círculo y la del triángulo son iguales, se deduce que la altura es igual a $\sqrt{\pi\sqrt{3}}$.

59. Sea el cuadrilátero *ABCD* (fig. 35), *P* es el punto donde se cortan las diagonales *AC* y *BD*. Consideremos que $AP = x$, $CP = 10 - x$; $BP = y$, $DP = 7 - y$, entonces el área del cuadrilátero es

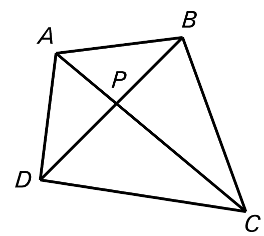

Fig. 35

$$A=\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}y(10-x)+\frac{1}{2}(10-x)(7-y)+\frac{1}{2}x(7-y)=35\,\mathrm{m}^2$$

Otra vía de solución:

El área del cuadrilátero se puede calcular de acuerdo con la figura 36 de la siguiente manera:

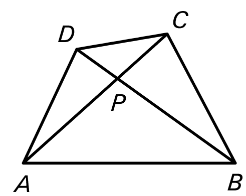

Fig. 36

$A_{ABCD}=A_{APD}+A_{CDP}+A_{ABP}+A_{BCP}$, es decir,

$$A_{ABCD}=\frac{1}{2}AP\cdot PD+\frac{1}{2}DP\cdot PC+\frac{1}{2}AP\cdot PB+\frac{1}{2}BP\cdot CP$$

$$=\frac{1}{2}AP(PD+PB)+\frac{1}{2}CP(PD+PB)$$

$$=\frac{1}{2}(PD+PB)(AP+CP)=\frac{1}{2}BD\cdot AC$$

$$=\frac{1}{2}10\cdot 7=\frac{1}{2}35\,\mathrm{m}^2$$

60. $\angle BAC = 180° - 2(40°) = 100°$

$\angle ECA = 20°$

$\angle AEC = 180° - (100° + 20°) = 60°$

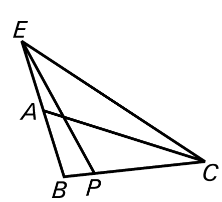

Fig. 37

61. Sea I el punto donde se cortan las dos bisectrices trazadas, se tiene que

$\angle ACB = 54°$

$$\angle AIC = 180° - (\angle IAB + \angle IBA) = 180° - \frac{1}{2}(180° - 54°) = 180° - 63 = 117°.$$

62. Como $\angle CAB = 60°$ y $AC = AB$, entonces el triángulo ABC es equilátero y

$\angle ABD = \angle DBE = \angle EBC = 20°$ (fig. 38).
En los triángulos BDE y BFG tenemos:

$\angle ABD = \angle DBE$; $\angle BDE = \angle GFB = 80°$.
Luego $\Delta BDE \sim \Delta BFG$ y

$DE : FG = BD : BG \Rightarrow DE \cdot BG = FG \cdot BD$.

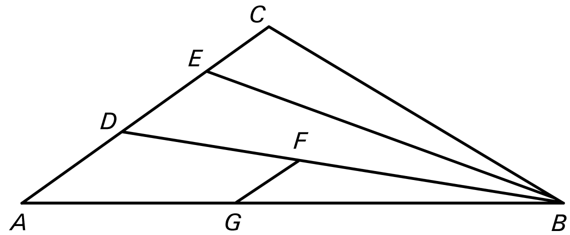

Fig. 38

63. El área del pentágono $ABNOM$ está formada por el área del paralelogramo $ABNM$ y el área del triángulo MNO (fig. 39).
El área del paralelogramo es igual a la mitad del área del paralelogramo $ABCD$, es decir, 12 cm^2.
Como los triángulos MNO y CDO son iguales, tienen igual área y la altura relativa del lado MN es igual a la cuarta parte de la altura del paralelogramo $ABCD$ por lo que área del triángulo MNO es igual a la octava parte del área de $ABCD$. El área del pentágono $ABNOM$ es igual a 12 cm^2 + 3 cm^2 = 15 cm^2.

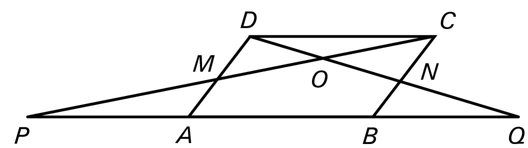

Fig. 39

64. El cuadrilátero es un trapecio con $AB // CD$ por ser AB y CD perpendiculares a una misma recta, calculemos la longitud de la paralela media $\frac{1}{2}(AB + CD) = 11\,\text{cm}$ y el área pedida es $11 \cdot 5 = 55$ cm^2.

65. Las longitudes de los lados del trapecio son $PR = 8$ cm, $VT = 12$ cm y $RV = 6$ cm entonces el área será

$$\frac{1}{2}(PR + TV)RV = \frac{1}{2}(20)6 = 60\,\text{cm}^2.$$

66. $A = l^2 = 400 \Rightarrow l = 20$ cm, entonces el radio mide 10 m.

$$A_S : A = (A - \pi r^2) : A = \frac{1}{4}(4 - \pi) = 1 - \frac{1}{4}\pi$$

67. Se tiene que $a^2 + b^2 = c^2 = 16$, $(a + b)^2 - 2ab = 16$; $18 - 2ab = 16$ y $ab = 1$, entonces $A = \frac{1}{2}ab = 0{,}5\,\text{u}^2$.

68. En el $\Delta\, ABC$: $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 16\,\text{cm}$

$CD = BC - BD = 16 - BD$ (ver figura 27)

En el $\Delta\, CDA$: $AD^2 - AC^2 = (BD + 8)^2 = 12^2 + (16 - BD)^2$

$BD^2 + 16BD + 64 = 144 + 256 - 32BD + BD^2 \Rightarrow 48BC = 336$ y $BD = 7$ cm, $CD = 9$ cm.

69. $\angle ABC = 72°$.

70. El área del triángulo se puede calcular como el semiproducto de la hipotenusa por su altura; la hipotenusa mide 65 cm y la altura se puede calcular utilizando el teorema de las alturas ya que CH es dicha altura en el triángulo dado, entonces $CH^2 = AH \cdot BH = 28^2$ por lo que $CH = 28$ cm.

Entonces el área del triángulo es $\frac{1}{2}AB \cdot CH = 910\,\text{cm}^2$.

71. Como el triángulo ACM es equilátero, entonces $AC = CM = AM = \frac{1}{2}AB = 3\,\text{cm}$, entonces $BC = 3\sqrt{3}$ y el área del triángulo ABC es $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

72. Vamos a calcular el área pedida hallando el área del rectángulo y restando las áreas ocupadas por las figuras que están fuera del polígono, que son dos triángulos rectángulos de catetos 1 y 2, un triángulo rectángulo de catetos 1 y un trapecio de bases 1 y 3 y altura 1.
Las áreas de los triángulos rectángulos de catetos 1 y 2 es de 1 cm^2, luego entre los dos tienen 2 cm^2 de área. El área del otro triángulo es $\frac{1}{2}\text{cm}^2$ y el área del trapecio es de 2 cm^2 por lo que el área de la poligonal es $24 - \left(2 + \frac{1}{2} + 2\right) = 19{,}5\,\text{cm}^2$.

73. Sean m y n las longitudes respectivas de los lados del cuadrado y del rectángulo que tienen el mismo perímetro, entonces $4m = 3n$, pero el área del triángulo es $\frac{1}{4}\sqrt{3}\,n^2 = 9\sqrt{3}$, entonces n = 4 cm, y como, entonces m = 3 cm. Por tanto, la diagonal del cuadrado es $d = \sqrt{2}\,m$, es decir, $3\sqrt{2}\,\text{cm}$.

74. $\angle ACB$ = 64° por adyacente,
$\angle OAC$ = 30° y $\angle ACO$ = 32° por ser AO y CO bisectrices de los ángulos ACB y BAC, entonces
$\angle AOC$ = 180° – 62° = 118°
$\angle ABO = \frac{1}{2}(180° - (62° + 60°))$
$\angle ABO$ = 28° y $\angle AOB$ = 180° + (30° + 28°).
$\angle AOB$ = 122° luego $\angle COB$ = 360° – (118° + 122°) = 120°.

75. Se tiene que $\angle ABC$ + $\angle BAC$ = 140° (fig. 40) por suma de ángulos interiores en el triángulo ABC, pero $\angle ABC + \angle ABN = 180°$ y $\angle BAC + \angle BAM = 180°$ por ser adyacentes entonces $\angle ABN$ + $\angle BAM$ = 220°.
De esta forma $\angle DBA$ + $\angle BAD$ = 110° por ser BD y AD las bisectrices de los ángulos ABN y BAM por lo que $\angle ADB$ = 70°.

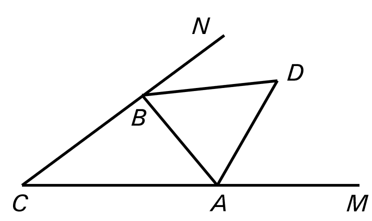

Fig. 40

76. Como el ángulo formado por los lados dados es un ángulo obtuso, entonces el lado que se opone a ese ángulo es el mayor de los tres lados del triángulo, luego x > 11 y de acuerdo con la desigualdad triangular $x < 7 + 11 = 18$, luego 11 < x < 18.

77. a) De acuerdo con la figura 31 se tiene que $\angle KAM$ = $\angle KAB$ por ser KL bisectriz del $\angle MAB$, $\angle MAK$ = $\angle AKB$ por alternos entre paralelas luego $\angle KAB$ = $\angle AKB$ y el triángulo KAB es isósceles.

b) $\angle KLC = \angle KAM$ por correspondientes y como $\angle KAM = \angle KAB = \angle AKB$ se tiene que $\angle KLC = \angle AKB$ y el triángulo KLC es isósceles.

78. Sean a y b las longitudes de los lados del triángulo isósceles con $2a + b = 36$, entonces se cumple que $h^2 + \left(\frac{1}{2}b\right)^2 = a^2$ resolviendo el sistema de ecuaciones queda $a = 13$ cm, $b = 10$ cm y el área del triángulo es $\frac{1}{2}10 \cdot 12 = 60\ \text{cm}$.

79. Sea G el punto donde EF corta a AB con $FG = xy$, $EF = 16 - x$ pero $EF = AF = BF$ por lo que $AF = BF = 16 - x$.

En el triángulo isósceles ABF se tiene $FG^2 + AG^2 = AF^2$, $x^2 + 8^2 = (16 - x)^2$. Resolviendo la ecuación se tiene $x = 6$, entonces $FG = 6$ cm y $A_{ABF} = \frac{1}{2} AB \cdot FG = 48\ \text{cm}$.

80. Al trazar $PQ \perp MN$ se forman dos triángulos rectángulos MQP de catetos PQ, MQ e hipotenusa PM y NPQ de catetos NQ, PQ e hipotenusa PN.
Como $PQ = PQ$ y $MQ > NQ$, entonces al aplicar el teorema de Pitágoras se cumple que $PQ^2 + MQ^2 > PQ^2 + NQ^2$ y como $PQ^2 + MQ^2 = PM^2$; $PQ^2 + NQ^2 = PN^2$; se cumple que $PM > PN$.

81. De acuerdo con la figura 41 se tiene que $AR = AP = 3$, $BQ = BP = 7$ y $CR = CQ = x$. Por ser cada pareja segmentos de tangentes trazadas desde un punto exterior a la circunferencia, entonces $(x + 7)^2 = 10^2 + (x + 3)^2$ y resolviendo la ecuación $x = 7{,}5$ es decir, $CR = 7{,}5$.

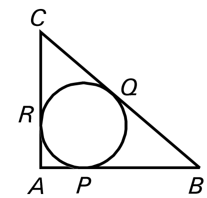

Fig. 41

82. Se tiene que $\angle QPN = \angle PNS$ (fig. 42) por alternos entre paralelas $\angle PSN = \angle MPQ$ por correspondientes entre paralelas, pero $\angle QPN = \angle QPM$ por ser PQ bisectriz del $\angle MPN$, entonces $\angle PSN = \angle PNS$ y el triángulo PNS es isósceles.

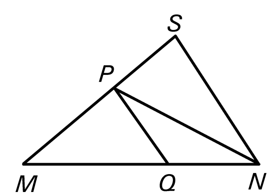

Fig. 42

83. a) Como los triángulos AMD y BNM son dos triángulos rectángulos de catetos de longitudes 1 y 2, entonces $DM = MN$ y el triángulo DMN es isósceles.

b) Si consideramos un sistema de coordenadas de forma tal que el punto A es el origen de coordenadas, entonces los puntos M (1;0) y D (0;2) determinan una recta de pendiente – 2 y los puntos M (1;0) y N (3;1) determinan una recta de pendiente $\frac{1}{2}$. Como el producto de las pendientes es –1, entonces las rectas DM y MN son perpendiculares y $\angle DMN = 90°$.

c) Como el triángulo DMN es rectángulo e isósceles entonces $\angle DNM = \angle MDN = 45°$, pero $\angle DNM = \angle DNP + \angle PNM$ y $\angle NMB = \angle PNM$ por alternos entre paralelas, se tiene que la suma de los ángulos DNP y NMB es de 45°.

84. Los triángulos MON' y $M'O'N$ son iguales por tener respectivamente iguales dos lados que son los radios y el ángulo comprendido entre ellos por ser opuestos por el vértice, luego por elementos homólogos las cuerdas MN y $M'N'$ son iguales (fig. 43).
Como son triángulos isósceles y los ángulos $M'M'N'$ y $M'MN$ son dos ángulos alternos iguales, entonces las cuerdas MN y $M'N'$ son paralelas.

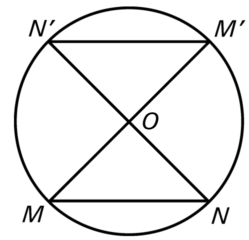

Fig. 43

85. Como el punto medio de la hipotenusa es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo rectángulo y la hipotenusa es un diámetro, entonces al trazar la mediana relativa a la hipotenusa esta es un radio de la circunferencia circunscrita por lo que la hipotenusa tiene el doble de la longitud de su mediana correspondiente.

86. Prolonguemos *CP* a partir de *P* hasta *Q* un punto de *AB* (fig. 44), entonces $\angle BPQ = 63°$ por ser adyacente al $\angle BPC$, $\angle CQA = 91°$ por ser exterior en el triángulo *BPQ*.
En el triángulo *ACQ* se tiene $\angle BAC = 180° - (91° + 19°) = 70°$ por ser ángulos interiores de un mismo triángulo.

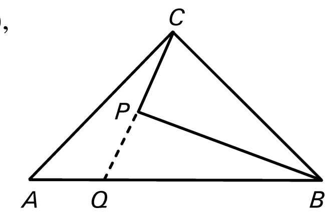

Fig. 44

87. Sean a, b y $5a$ las amplitudes de los ángulos interiores entonces $6a + b = 180°$, por lo que $b = 6(30° - a)$. Como a, b y $5a$ son ángulos agudos, cada uno de ellos es menor de 90°, así pues $6(30° - a) < 90° \Rightarrow 30° - a < 15° \Rightarrow a > 15°$, pero como $5a < 90° \Rightarrow a < 18°$ por lo que $a = 16°$ o $a = 17°$.

Si $a = 16° \Rightarrow 5a = 80°$ y $b = 84°$ por lo que $5a$ no es el mayor.

Si $a = 17° \Rightarrow 5a = 85°$ y $b = 78°$ que cumple las condiciones del problema. Así pues, los ángulos mayores son el de 78° y el de 85° cuya suma es de 163°.

88. El paralelogramo inicial tenía de base b y altura h y el trapecio al que hemos llegado tiene de bases $b + \frac{1}{2}b$ y $b - \frac{1}{4}b$ y altura también h (fig. 45).

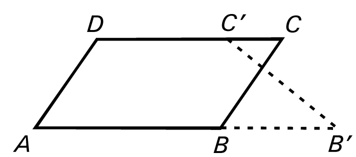

Fig. 45

Así pues, el área del trapecio es $A = \frac{1}{2}\left(\frac{3b}{2} + \frac{3b}{4}\right)h = \frac{9\,\mathrm{bh}}{8}$ y como bh era el área del paralelogramo, ésta ha aumentado en $\frac{1}{8}$, es decir, el 12,5 %.

89. Los triángulos *ABE* y *DCE* son iguales por lo que $\angle AEB = DEC$. Análogamente los triángulos *ADF* y *BCF* tienen dos ángulos iguales y $\angle DAF = \angle FBC$. Entonces, tenemos que

$$\angle EGB = 180° - \angle BEG - \angle GBE = \angle DEC - \angle FBC = \angle AEB - \angle DAF$$
$$= 90° - \angle BAE - \angle DAF = 20°$$

90. Si se traza *AE* se tiene que los triángulos *ABE* y *EDC* son iguales por lo que $\angle EAB = \angle EDC$.
Bastaría demostrar que $\angle EAB = \angle EFB$.
Como $\angle AFE = \angle ABE = 90°$, entonces el cuadrilátero *ABCD* es inscriptible, por lo tanto dichos ángulos serán iguales por ser inscritos en la misma cuerda.

91. Sea el cuadrilátero *ABCD* (fig. 46), *P* es el punto donde se cortan las diagonales *AC* y *BD*. Consideremos que $AP = x$, $CP = 10 - x$; $BP = y$, $DP = 7 - y$, entonces el área del cuadrilátero es

$$A = \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}y(10 - x) + \frac{1}{2}(10 - x)(7 - y) + \frac{1}{2}x(7 - y) = 35\ \mathrm{m}^2$$

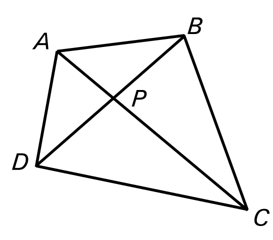

Fig. 46

92. Sea O el centro del hexágono (fig. 47), observemos que $\Delta CDE = \Delta EOC$, de manera que sus áreas son iguales. Análogamente pasa con los triángulos ABC y AOC, y con la pareja EOA y EFA, por lo que $A_{AEC} = \frac{1}{2} A_{ABCFDEF}$.

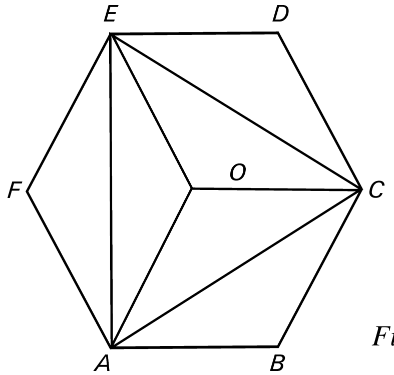

Fig. 47

93. Como OM es bisectriz del $\angle AOB$, entonces $\angle AOM = \angle BOM$ por propiedad de la bisectriz

(1) $\angle MON = \angle AON - \angle AOM$

(2) $\angle MON = \angle BOM - \angle BON$ sumando miembro a miembro en (1) y (2)

$2\angle MON = \angle AON - \angle BON$ l.q.q.d.

94. Tenemos que:

(1) $\angle ABE = \angle ABC + \angle CBE$ como el triángulo ABC es equilátero, entonces:

$\angle ABC = \angle BAC = \angle ACB = 60°$ (ver figura 33).

En el triángulo BED se tiene que: $\overline{BE} = \overline{ED}$, entonces el triángulo es isósceles de base $\overline{CD} = \overline{BP}$ y como $\angle BED = 20°$, entonces $\angle EBD = \angle EDB$ (2) Pero $\angle EBD + \angle EDB + \angle BED = 180°$ por suma de los ángulos interiores de un triángulo por tanto $\angle EBD + \angle EDB = 160°$ y $2\ \angle EBD = 160°$ sustituyendo por (2). Por tanto, $\angle EBD = 80°$, por otro lado se tiene $\angle ABC + \angle CBE + \angle EBD = 180°$ por formar un ángulo llano y $\angle ABE = 180° - 80°$, $\angle ABE = 100°$.

95. Sea $ABCD$ un paralelogramo (fig. 48) donde $\overline{AE}$ y $\overline{DE}$ son las bisectrices de los ángulos consecutivos BAD y ADC las cuales se cortan formando el triángulo ADE. Por propiedad de los paralelogramos sabemos que: $\angle BAC + \angle ADC = 180°$ En el triángulo ADE se cumple que $\angle ADE + \angle DAE + AED = 180°$ por suma de ángulos interiores de un triángulo de donde

$$\angle AED + 180° - (\angle ADE + \angle DAE) = 180° - \left(\frac{1}{2}\angle ADC + \frac{1}{2}\angle BAC\right)$$

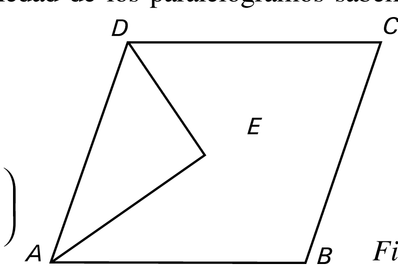

Fig. 48

$$= 180° - \left[\frac{1}{2}(\angle ADC + \angle BAC)\right] = 180° - 90°, \quad \angle AED = 90°$$

96. El cuadrilátero $LCMK$ es un paralelogramo (fig. 49), pues sus lados opuestos son paralelos, luego $CL = KM$ y $CM = KL$. Como $KL = KM$, resulta que $CL = CM$ y el triángulo CML es isósceles de base LM.
En el triángulo BPL tenemos

$\angle BPL = 180° - \angle LBP - \angle PLB$.

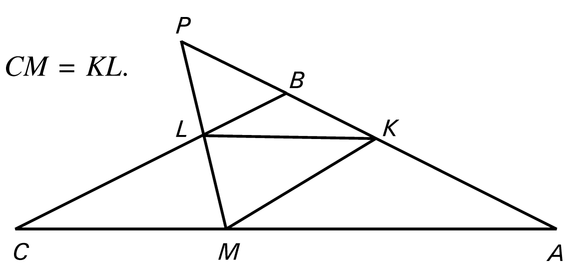

Fig. 49

El ángulo LBP es suplementario del ángulo ABC, luego $\angle LBP = 180° - 144° = 36°$.
$\angle PLB$ = $\angle CLM$ por opuestos por el vértice.

En el triángulo isósceles CML tenemos $\angle CLM = \frac{1}{2}(180° - \angle LCM) = \frac{1}{2}(180° - \angle BCA)$, y en el triángulo isósceles ABC tenemos $\angle BCA = \frac{1}{2}(180° - \angle ABC) = 18°$, luego $\angle CLM = \frac{1}{2}(180° - 18°) = 81°$, es decir, $\angle PLB$ = 81º, por lo que $\angle BPL = 180° - 36° - 81° = 63°$.

97. Sea $\angle QRT = x$, tenemos que $\angle UTR = \frac{1}{2}(180° - x)$, $\angle QPR = 90° - x$,

$\angle PTS = \frac{1}{2}(180° - (90° - x)) = \frac{1}{2}(90° + x)$ (ver figura 34).

Por otra parte, $\angle UTR + \angle STU + \angle PTS = 180°$, de donde $\angle STU = 180° - \frac{1}{2}(180° - x) - \frac{1}{2}(90° + x) = 45°$.

98. Al contar la cantidad de piezas bailadas hay 68 por lo que las 7 muchachas bailaron 34 y los 7 muchachos las otras 34, pero al organizarlas tenemos que 4 muchachas y 4 muchachos bailaron cada uno 6 piezas y quedan 10 piezas para cada uno que no se pueden acomodar con cinco 3 y un 5 por lo que alguno de ellos se equivocó.

99. Sean $x - 15 = 2y$, $5(x - 60) = y$, resolviendo el sistema queda y = 25, x = 65 que es el número de muchachos que había al comenzar la fiesta.

100. Se tiene que 1 + 2 + 3 + ... + 53 = 1 431, y el promedio de esos números es 27. Si se saca el 27, la suma de los números que quedan entre los dos grupos es 1 404 teniendo 702 para cada grupo y el promedio de cada grupo es 702:26 = 27 y al cambiar el 27 para el grupo N el promedio sigue siendo el mismo que es 27.

101. Las taquillas que quedan abiertas son las que son modificadas un número impar de veces, es decir, aquellas cuyo número tiene un número impar de divisores, aquellos que sean cuadrados perfectos. Así pues, las taquillas que quedan abiertas son las de números cuadrados perfectos menores que 100 y el mayor es el 961 = 31^2.

102. n: cantidad de reparticiones, $n \geq 3$ entonces $n(p + q + r) = 39 \Rightarrow n = 3$ o n = 13.

Si n =13, entonces $p + q + r = 3$
$\therefore$ $p = q = r$ ¡imposible!
Como B se quedó con 10 y en su última ronda le tocó r, entonces $r \leq 8$.

Como A se quedó con 20 y la última ronda no le tocó r debemos tener que $r \geq 7$.

p	q	r
1	4	8
2	3	8
1	5	7
2	4	7

Las posibilidades (2;3;8), (2;4;7) y (1;5;7) quedan descartadas pues ninguna combinación da las 20 con las que se quedó A.

Luego:

n	A	B	C
1	8	1	4
2	8	1	4
3	4	8	1

$\therefore$ A C le tocó la tarjeta con el número q.

103. Sumemos todos los números del tablero. Si sumamos primero los de cada fila y después sumamos esos resultados obtenemos m. Si, por otra parte, sumamos primero los de cada columna y después sumamos esos resultados obtenemos n. Por lo tanto, $m = n$.

104. Sea a la cantidad de horas que el estudiante estuvo leyendo durante el día i = 1, 2, 3, ..., 37 y $A_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_i$, i = 1, 2, 3, ..., 37 es el número de horas que el estudiante leyó durante los primeros i-días. Debemos probar que existen enteros positivos k, m con $k < m$ tal que

$a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_m = 13 \Leftrightarrow A_m - A_k = 13$ o lo que es lo mismo $A_m = A_k + 13$.

De acuerdo con la hipótesis del problema tenemos

$1 \leq A_1 < A_2 <\ldots < A_{37} \leq 60$ (1)

$14 \leq A_m + 13 < A_2 + 13 < \ldots < A_{37} + 13 \leq 73$ (2)

por lo que tenemos 74 enteros entre 1 y 73, y de esta forma al menos dos de ellos son iguales. Dado que cada dos números de la relación (1) son diferentes y también es verdad para los números en la relación (2), concluimos que existen enteros k y m tales que $A_m = A_k + 13$.

105. Supongamos que Ernesto salió n días. Llovió n – 6 mañanas y n – 5 tardes. Como en total llovió 7 días y nunca la mañana y la tarde del mismo día, $n - 6 + n - 5 = 7$, así que n = 9.

106. Es fácil observar que el primer año va a moverse entre los escalones 1 y 36. Este, el 36, lo alcanza el día 31 de julio. El 31 de diciembre de ese año, llegará al escalón 3. En general, si un 31 de diciembre está en el escalón n, el año siguiente se mueve entre los escalones n + 1 y n + 36 y termina en el n + 3; si ese año siguiente no es bisiesto, o bien se mueve entre los escalones n + 1 y n + 35 y termina en el $n + 2$ si ese año siguiente es bisiesto.

Con unas cuentas sencillas, vemos que el 31 de diciembre de 2024 llegará al escalón 66, tras haber pasado el 31 de julio de ese mismo año por el escalón 99 como punto más elevado. A partir de ahí, se observa lo siguiente respecto al año 2 025: el 31 de enero termina en el escalón 97, el 28 de febrero en el 69, y el 31 de marzo, por fin en el 100. Si la escalera hubiera tenido un peldaño menos, habría quedado en libertad 8 meses antes, el 31 de julio de 2 024.

107. La respuesta es sí, pueden celebrar las cuatro reuniones de modo que al final cada persona haya estado sentada junto a otras dos diferentes cada vez. Para demostrarlo, consideramos las siguientes cuatro formas de ordenar los números del 1 al 9, que representan cuatro maneras de sentarse alrededor de la mesa comenzando en un lugar y siguiendo el giro de las agujas del reloj:

Primera reunión: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Segunda reunión: 1, 3, 5, 7, 9, 4, 6, 2, 8
Tercera reunión: 1, 4, 7, 3, 8, 5, 2, 9, 6
Cuarta reunión: 1, 5, 9, 3, 6, 8, 4, 2, 7

108.

Región	*Soleados o lluviosos*	*Inclasificables*
A	336	29
B	321	44
C	335	30
D	343	22
E	329	36
F	330	35

Al suprimir una región, la suma de días soleados o lluviosos de las restantes ha de ser múltiplo de 4. Esta suma vale para las seis regiones 1994 que dividido entre 4 da resto 2. El único dato de esta columna que da resto 2 al dividirlo entre 4 es 330 correspondiente a la región F. Suprimiendo esta región quedan entre las cinco restantes 416 días lluviosos y $3 \cdot 416 = 1\ 248$ días soleados.

109. Del 1 al 9 no hay ninguno, del 10 al 99 todos cumplen excepto los múltiplos de 11 que sólo utilizan un dígito. Por lo tanto, hay 81 números de la forma ab con $a > 0$ y $a \neq b$. Del 100 al 999, para que usen dos dígitos, tienen que ser de la forma abb, aab, aba con $a > 0$ y $b \neq a$. De cada forma hay 81 números, por lo que entre 100 y 999 hay $81 \cdot 3 = 243$ números. Entre 1 000 y 1 999 deben ser de la forma $1a11$, $11a1$, $111a$, $1aa1$, $1a1a$, $11aa$ o $1aaa$, para cierta a. En cada forma hay 9 valores posibles para a, luego, hay $9 \cdot 7 = 63$ números. Por último, entre 2 000 y 2 005, sólo existen dos números. Por lo que entre 1 y 2 005 hay $81 + 243 + 63 + 2 = 389$.

$\therefore$ Sólo utilizan dos dígitos diferentes al escribirlos 389 números.

110. No es posible, ya que ninguna de las operaciones cambia la paridad de la suma de los once números. Inicialmente es 11, así que no podemos llegar a 110.

111. En la bolsa A hay 4 bolas blancas y 8 negras, hay una bola blanca por cada 2 bolas negras.
En la bolsa B hay 6 bolas blancas y 15 bolas negras, hay una bola blanca por cada 2,5 bolas negras.
En la bolsa C hay 7 bolas blancas y 20 bolas negras, hay una bola blanca por cada 2,86.

$\therefore$ Es más fácil en la bolsa A .

112. El menor número de cuadrados aparecerá cuando estos sean lo mayor posible, es decir, de lado igual al mcd (70,80) = 10. Así pues, el área $70 \cdot 80 = 5\ 600$ cm^2 la cubrimos con cuadrados de $10^2 = 100$ cm^2 de área, por lo que hacen falta 56.

113. Noten que si se sacan 20 bolas, podría ser que todas fueran de colores distintos, así que sólo podríamos garantizar que hay dos bolas del mismo color si se sacan 21 bolas (aquí se aplicó el Principio de las Casillas). De la misma manera, se necesitan $41 = (20 \cdot 2 + 1)$ bolas para poder afirmar que con seguridad hay 3 bolas (al menos) del mismo color, pues con 40 bolas podría ser que cada color apareciera exactamente 2 veces. Con el mismo razonamiento que hemos seguido llegamos al resultado:

Se necesitan $20 \cdot 99 + 1 = 1\ 981$ bolas.

Concurso Nacional
Curso 2003-2004
Temario común

1. Todos los asientos de un teatro que tiene 37 filas y en cada fila hay 25 butacas, están ocupados. En un cierto momento se pide al público presente que cambien de asiento, moviéndose un lugar, ya sea a la izquierda, a la derecha, adelante o hacia atrás. ¿Es posible hacerlo? Demuestra tu afirmación.

2. Adriana ingresó en la computadora las notas de cinco estudiantes, ordenadas al azar. Luego de ingresar cada nota, la computadora calculaba el promedio de todas las notas ingresadas hasta ese momento. Adriana observó que esos promedios eran siempre números enteros. Si las notas de los cinco estudiantes, ordenadas de menor a mayor, fueron 71, 76, 80, 82 y 91, determinar en qué orden las ingresó Adriana en la computadora. Dar todas las posibilidades.

3. Se colocan monedas en los vértices de un polígono regular. Dos jugadores retiran alternadamente una o dos monedas. En este último caso deben estar situadas en vértices consecutivos. Gana el que retira la última moneda. ¿Cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora?

SOLUCIONES

1. No es posible. Una manera de mostrarlo es tomar una cuadrícula de 37 x 25 y pensar que las casillas representan los lugares donde están las personas. Si coloreamos las casillas como un tablero de ajedrez observamos que si una persona cambia de lugar entonces se muda a una casilla de otro color, pero en esta cuadrícula hay más casillas de un color que de otro por lo que no todas las personas podrán acomodarse.

2. Sean a, b, c, d, e los números escritos en el orden en que fueron ingresados, entonces $a + b$ es múltiplo de 2, $a + b + c$ es múltiplo de 3, $a + b + c + d$ es múltiplo de 4.

Además, $a + b + c + d + e$ es igual a $71 + 76 + 80 + 82 + 91 = 400$, que es múltiplo de 5.

Tenemos que $a + b + c + d = 400 - e$ es múltiplo de 4 sólo si $e = 76$ o $e = 80$.

Si $e = 76$, entonces $a + b + c + d = 324$ y $a + b + c = 324 - d$. Los valores posibles de d son 71, 80, 82 y 91, para los cuales $324 - d$ es, respectivamente, 251, 244, 242, 233, y ninguno de ellos es múltiplo de 3.

Por lo tanto el valor $e = 76$ es imposible y tenemos que $e = 80$ y $a + b + c + d = 320$.

Luego, $a + b + c = 320 - d$ y los valores posibles de d son 71, 76, 82 y 91, que corresponden a $320 - d$ igual a 249, 244, 238 y 229, respectivamente. El único valor de d para el cual $320 - d$ es múltiplo de 3 es $d = 71$.

Entonces $a + b + c = 249$ y $a + b = 249 - c$. Este último número es par sólo si $c = 91$.

Quedan para a y b los números 76 y 82, que pueden ingresarse en cualquier orden.

3. La estrategia ganadora es que comience el contrario.

En un triángulo, retire el adversario 1 ó 2 monedas, se retira la última.

En un cuadrado, si el adversario retira 1, se retira la del vértice opuesto, de modo que ganas. Si retira 2 monedas, se retiran las otras 2 y gana.

En un pentágono, si el adversario retira 2 monedas, se retira la del vértice central de las 3 que quedan con moneda, así vuelves a ganar. Si el adversario retira 1 moneda, se retiran las dos de los vértices que forman el lado opuesto al vértice cuya moneda ha retirado el oponente y ganas.

De ahí en adelante el polígono dado puede ser dividido en los casos anteriores y siempre ganas.

La estrategia es que el otro empiece.

Concurso Nacional
Curso 2003-2004

Séptimo grado: Preguntas 1, 2 y 3.

Octavo grado: Preguntas 4, 5 y 6.

Noveno grado: Preguntas 7, 8 y 9.

1. A un libro de 100 páginas numeradas del 1 al 200 se le desprendieron 25 hojas. Los números de las páginas desprendidas se suman, ¿puede esta suma ser igual a 2 004?

2. En la figura 50 que se muestra, los puntos *M* y *N* son los puntos medios de los lados *PA* y *PB* del triángulo *PAB*. Si *P* se mueve sobre una recta paralela al lado *AB*.

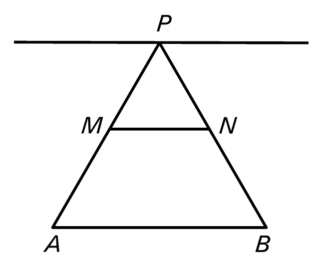

Fig. 50

¿Cuántas de las cantidades siguientes cambian? Justifica tu respuesta para cada caso:

a) La longitud del segmento *MN*.

b) El perímetro del triángulo *PAB*.

c) El área del triángulo *PAB*.

d) El área del trapecio *ABNM*.

3. En la suma $ABCA + CAD = CDBC$, cada una de las letras *A*, *B*, *C* y *D* representa un dígito distinto. Calcula la suma de todos los posibles valores del número de cuatro cifras.

4. Tenemos un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados diferentes, pero las diagonales son perpendiculares y miden 10 y 7 m, respectivamente. Hallar el área del cuadrilátero.

5. En una competencia matemática, la suma de las puntuaciones de Guillermo y Ricardo fue la misma que la suma de las puntuaciones de Ana y Carolina. Si se hubiesen intercambiado las puntuaciones de Guillermo y Carolina, entonces la suma de las puntuaciones de Ana y Carolina habría excedido la suma de las puntuaciones de los dos varones. Además, la puntuación de Ricardo fue superior a la suma de las puntuaciones de Guillermo y Carolina. Suponiendo todas las puntuaciones no negativas. Demuestra que el orden de los concursantes según sus puntuaciones fue Ana, Ricardo, Guillermo y Carolina.

6. Pablo elige un entero positivo n y escribe en el pizarrón los $2n + 1$ números: $n, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, ..., \frac{n}{2n+1}$ (los denominadores van aumentando de 1 en 1). Laura elige dos números escritos por Pablo, a y b, los borra y escribe el número $2ab - a - b + 1$. Después de repetir este proceso $2n$ veces, en el pizarrón hay un solo número escrito. Determinar los posibles valores de este único número.

7. Sean a y b dos números reales tales que:

i) $a > b$

ii) $a^2 + b^2 = 64$ y $a^4 + b^4 = 2\,066$.

Hallar el valor de la expresión $a^2 - b^2$.

8. Dado el paralelogramo $ABCD$. Sean E el punto medio del lado AD y F el pie de la perpendicular trazada desde el punto B hasta la recta CE. Probar que el triángulo ABF es isósceles.

9. Se colocan alrededor de una circunferencia 2 004 números diferentes tal que la diferencia entre cualesquiera dos números adyacentes es 2 ó 3. ¿Cuál puede ser la diferencia máxima entre cualesquiera dos de estos números?

SOLUCIONES

1. En una hoja hay dos números consecutivos, uno par y otro impar, la suma de estos es impar, luego nunca podrá ser 2 004.

2. Al moverse P como indica el problema, obtenemos triángulos de base AB y altura la distancia de la recta AB a la paralela que pasa por P.

I. La longitud del segmento MN paralela media, permanece constante porque AB es constante y la longitud de MN es igual a la mitad de AB.
II. El perímetro del triángulo PAB cambia porque cambian PA y PB.
III. El área del triángulo PAB no cambia por no cambiar la base ni la altura.
IV. El área del trapecio no cambia, pues sus bases y su altura se mantienen constantes.

$\therefore$ Solamente cambia el perímetro del triángulo PAB.

3. La suma equivale a

(1 000 A + 100 B + 10 C + A) + (100 C + 10 A + D) = 1 000 C + 100 D + 10 B + C, es decir, $1011a+90B=891C+99D$. De esa ecuación concluimos que 1 011A es múltiplo de 9, por lo que A debe ser múltiplo de 3. Si $A = 3a$, tenemos que 337 a + 10 B = 99 C + 11 D. Entonces 337 a + 10 B = 11 (31a + B) – (4 a + B) es múltiplo de 11, por lo que 4a + B debe ser múltiplo de 11.

Ahora, como $3a = A \leq 9$, tenemos que $a \leq 3$ y por lo tanto $4A + B \leq 4 \cdot 3 + 9 = 21$. Como 4$a$ + B es múltiplo de 11 y menor que 22, deducimos que 4A + B = 11 y de $99C+11D=11(31a+B)-(4a+B)$ obtenemos $9C+D=31a+B-1$.

Considerando que $a \leq 3$, resolvamos $4a+B=11$. Si $a = 0$, obtenemos $B = 11$ que es imposible. Si $a = 3$, obtenemos $B = -1$ que también es imposible. Las soluciones son $a = 1$, $B = 7$ y $a = 2$, $B = 3$.

En el primer caso tenemos que $9C+D=31a+B-1=37$. La única solución en la que C y D son dígitos es $C = 7$, $D = 1$. Esto nos da la solución 6 376 + 761 = 7 137 de la suma original. La respuesta al problema es 4 174 + 7 137 = 11 311.

4. Sea el cuadrilátero $ABCD$ (ver figura 35), P es el punto donde se cortan las diagonales AC y BD. Consideremos que $AP = x$, $CP=10-x$; $BP = y$, $DP=7-y$, entonces el área del cuadrilátero es

$$A=\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}y(10-x)+\frac{1}{2}(10-x)(7-y)+\frac{1}{2}x(7-y)=35\text{ cm}^2$$

5. Sean A, G, C y R las puntuaciones de Ana, Guillermo, Carolina y Ricardo, respectivamente. Entonces: $A + C = G + R$ (1) $A + G > C + R$ (2) $R > G + C$ (3)

Sumando (1) y (2), se tiene $2A > 2R$ por lo que $A > R$. Restando la (1) a la (2), resulta $G - C > C - G$, por lo que $G > C$. Por la (3), $R > G$ ya que $C \geq 0$. En resumen $A > R > G > C$.

6. Observemos que si $b = \frac{1}{2}$, la expresión $2ab - a - b + 1 = 2a\frac{1}{2} - a - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$.

Inicialmente $\frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$ está escrito en el pizarrón, y si Laura borra $\frac{1}{2}$ y cualquier otro número, escribirá $\frac{1}{2}$.

Es decir, $\frac{1}{2}$ siempre estará escrito en el pizarrón. Cuando haya solo un número, este será $\frac{1}{2}$.

7. $(a^2 + b^2)^2 = 4\,096$, entonces $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = 4\,096$ y $2(a^4 + b^4) = 4\,132$.

Restando las dos ecuaciones se tiene $2a^4 + 2b^4 - (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) = 36$ y $a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = 36$ por lo que $(a^2 - b^2)^2 = 36$, de donde $a^2 - b^2 = 6$.

8. Prolonguemos el segmento CE a partir de E y prolonguemos AB a partir de A. Sea L el punto donde se cortan CE y AB (fig. 51).
En los triángulos AEL y CDE tenemos:
$AE = DE$ por ser E el punto medio de AD
$\angle AEL = \angle CED$ por opuestos por el vértice
$\angle EAL = \angle CDE$ por alternos entre paralelas.

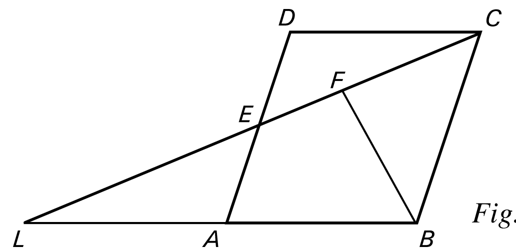

Fig. 51

$\therefore$ Los triángulos AEL y CDE son iguales y se tiene que $AL = CD = AB$.

Entonces en el triángulo rectángulo BFL, AF es la mediana relativa a la hipotenusa por lo que $AF = AL = AB$ por lo tanto el triángulo ABF es isósceles.

9. Podemos asumir que el más pequeño de los 2 004 números es 0. Entonces el mayor es, a lo sumo el número $1\,002 \cdot 3 = 3\,006$, si está diametralmente opuesto a 0, y todas las diferencias entre los pares adyacentes es de 3. Sin embargo, esto significa que los 2 003 números no serán diferentes. El mayor es a lo sumo 3 003, y esto puede lograrse con 0, 3, 6, ..., 3 003, 3 005, 3 002, 2 999,..., 2.

Concurso Nacional
Curso 2004-2005
Temario común

1. Coloca en cada casilla un número entero entre 1 y 16, sin repetir, de manera que la suma de los números escritos en dos casillas vecinas sea siempre un cuadrado perfecto.

2. Un terreno tiene forma de cuadrilátero convexo y sus lados miden 140 m, 133 m, 210 m y 182 m. Se desea colocar postes a lo largo del perímetro de manera que cada vértice tenga un poste, exista la misma distancia entre postes consecutivos y esta sea el mayor entero posible. ¿Cuántos postes se necesitan?

3. Encuentra 10 enteros positivos distintos tales que cada uno de ellos divide a la suma de los diez.

SOLUCIONES

1. Los cuadrados perfectos que se pueden obtener como suma de dos enteros entre 1 y 16 son 4, 9, 16 y 25. Observamos que 16 sólo puede tener un vecino, 9, y que 8 solo puede tener un vecino, 1. Por lo tanto 16 y 8 están en las casillas de los extremos y al lado de cada uno están, respectivamente, 9 y 1. Si ponemos 16 en el extremo izquierdo, tenemos:

16	9													1	8

Los únicos vecinos posibles de 9 son 16 y 7, luego debemos poner 7 a la derecha de 9 y así vamos obteniendo los únicos números que pueden ocupar las casillas vecinas quedando el tablero de la siguiente forma.

16	9	7	2	14	11	5	4	12	13	3	6	10	15	1	8

2. Si los postes consecutivos están a la misma distancia y colocamos postes en los vértices del terreno, la distancia entre cada par de postes debe ser un divisor común de las longitudes de los lados. Además, como se quiere que estén a la mayor distancia posible, debe ser el máximo común divisor de dichas longitudes. Tenemos que ese máximo será 7. Por lo que cada par de postes consecutivos deben estar separados por una distancia de 7 m. Como el perímetro del terreno es 665 m, al dividirlo entre 7 tenemos 95 postes.

3. Construyamos una de las posibles colecciones de diez enteros. Iniciemos con los primeros dos enteros positivos.
El siguiente elemento será, 1 = 2 = 3; el cuarto elemento será, 1 + 2 + 3 = 6; el quinto elemento será, 1 + 2 + 3 + 6 = 12. Observemos que por construcción, en la última suma cada elemento del conjunto divide a las sumas de todos los elementos. Continuamos con este procedimiento hasta obtener el décimo elemento de la colección, que será 384. Cada uno de los elementos del conjunto divide a la suma 768. Por lo tanto, 1, 2, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384 es la colección construida. En general, para construir colecciones de números con el procedimiento descrito anteriormente, debemos iniciar con un entero positivo a, y su doble $2a$.

Concurso Nacional
Curso 2004-2005

Séptimo grado: Preguntas 1, 2 y 3.
Octavo grado: Preguntas 4, 5 y 6.
Noveno grado: Preguntas 6, 7 y 8.

1. Sea un triángulo PQR rectángulo en Q, considere los puntos S, U y T sobre los lados PQ, QR y PR, respectivamente de forma tal que $PS = PT$ y $RT = RU$. Halla la amplitud de $\angle STU$.

2. Dos jarras idénticas están llenas de una mezcla de una sustancia A y una sustancia B en la proporción de 2 : 1, una de ellas y de 3 : 1 la otra. Si vaciamos ambas jarras en una grande, halla la proporción de la sustancia A y la sustancia B que hay en la mezcla.

3. Algunas quintas potencias de números enteros tienen todas sus cifras distintas, por ejemplo $2^5 = 32$ y $3^5 = 243$; algunas tienen cifras repetidas, por ejemplo $10^5 = 100\,000$. Sea n el número de potencias quintas perfectas que tienen todas sus cifras distintas, demuestra que $n \leq 90$.

4. Dos velas tienen diferente longitud y grosor. La más larga dura 7 h ardiendo y la más corta 10 h. Si después de 4 horas ardiendo, las dos velas tienen igual longitud, ¿cuál es el cociente entre las longitudes de ambas?

5. Sea un ángulo recto de vértice A; sobre la bisectriz del ángulo A se elige un punto P, $P \neq A$. Por el punto P se traza una recta L que corta a los lados del ángulo en los puntos B y C. Sea $\overline{AB} = a$ y $\overline{AC} = b$.

Demuestra que la suma $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ no depende de la elección de la recta L.

6. Determina las dos últimas cifras del número 2^{222}.

7. La cantidad de habitantes de una ciudad era un cuadrado perfecto, es decir, un número entero al cuadrado. Con 100 personas más, la nueva cantidad de habitantes resultó ser un cuadrado perfecto más uno. Ahora, con otro aumento de 100 personas, la cantidad de habitantes es nuevamente un cuadrado perfecto. ¿Cuál era la cantidad de habitantes original de la ciudad?

8. Se tiene un triángulo ABC acutángulo, sean M_1, M_2 y M_3 los puntos medios de los lados AB, BC y AC, respectivamente. De cada punto medio se trazan segmentos perpendiculares a cada uno de los otros dos lados del triángulo; los puntos de intersección de estos segmentos y los puntos M_1, M_2 y M_3 son los vértices de un hexágono.
Demuestra que el área del hexágono es el doble del área del triángulo $M_1M_2M_3$.

SOLUCIONES

1. Sea $\angle QRT = x$, tenemos que

$$\angle UTR = \frac{1}{2}(180° - x),\ \angle QPR = 90° - x,\ \angle PTS = \frac{1}{2}(180° - (90° - x)) = \frac{1}{2}(90° + x).$$

Por otra parte, $\angle UTR + \angle STU + \angle PTS = 180°$, de donde $\angle STU = 180° - \frac{1}{2}(180° - x) - \frac{1}{2}(90° + x) = 45°$.

2. Supongamos que en la primera hay 12 L, 8 serán de *A* y 4 de *B*. Si en la segunda hay 12 L, 9 serán de *A* y 3 de *B*. Así pues, en la mezcla de 24 L, 17 son de *A* y 7 de *B* por lo que la proporción de *A* y *B* es 17 : 7.

3. Ningún número con 11 dígitos o más puede tener todas sus cifras diferentes por lo que si x^5 tiene todos sus dígitos diferentes, entonces $x < 100$, y los posibles valores de x son *a*, 2, 3, ..., 98, 99. Además, cualquier múltiplo de 10 tiene ceros repetidos cuando se eleva a la quinta potencia.

$\therefore\ n \le 90.$

4. Sea x la longitud de la vela larga, y, la longitud de la corta. Al cabo de 4 h se habrá consumido $\frac{4}{7}x$ en la primera y 0,4 y en la otra, por lo que las longitudes que quedaron son $\frac{3}{7}x$, 0,6 y.

Como nos dicen que $\frac{3}{7}x = 0{,}6\,y$, entonces $x : y = 5 : 7$ que es la razón buscada.

5. Llamémosle h a la distancia de P (fig. 52) a los lados del ángulo $(ABC) = (APB) + (ACP)$ por lo que nos quedaría que: $ab = ah + bh$, entonces $ab = h(a+b)$ quedando $h = \frac{ab}{a+b}$ por lo que

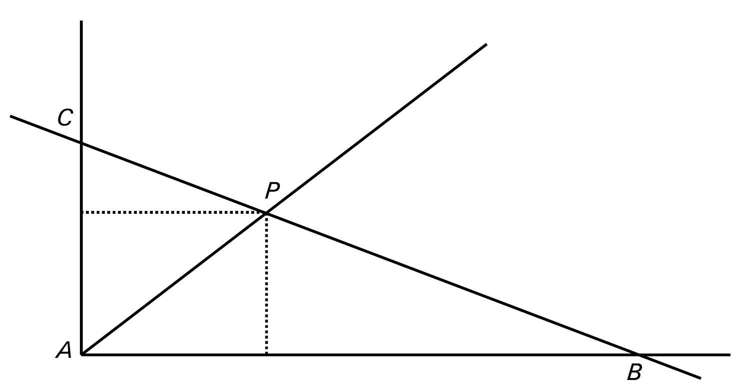

Fig. 52

$\frac{1}{h}=\frac{a+b}{ab} \Rightarrow \frac{1}{h}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ y como h es constante queda demostrado que la suma no depende de la elección de la recta (fig. 53).

6. Si observamos las primeras potencias de 2, podemos encontrar una ley de formación.

Potencia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Últimos dos dígitos	02	04	08	16	32	64	28	56	12	24	48
Potencia	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Últimos dos dígitos	96	92	84	68	36	72	44	88	76	52	04

Entre las potencias de 2 encontramos 20 diferentes parejas de dos dígitos finales. Además, van apareciendo cíclicamente cada veinte posiciones. Ahora 221 : 20 da cociente 11 y resto 1, por lo que las dos últimas cifras de 2^{222} deben ser las mismas que las de 2^2 que es 04.

7. Sean a, b y c enteros no negativos tales que a^2 es la población original, $b^2 + 1$, la población después del primer aumento y c^2, la población después del segundo. Entonces tenemos que:

$a^2 + 100 = b^2 + 1$

$b^2 + 101 = c^2$

luego $c^2 - a^2 = 200 \Rightarrow (c+a)(c-a) = 200$.

La descomposición de 200 en factores primos es $200 = 2^3 \cdot 5^2$. Considerando entonces los divisores de 200 y que $c + a \geq c - a$ tenemos que:

$c + a = 200 \quad c - a = 1 \quad \Rightarrow \quad c$ no es entero

$c + a = 100 \quad c - a = 2 \quad \Rightarrow \quad c = 51$ y $a = 49$

$c + a = 50 \quad c - a = 4 \quad \Rightarrow \quad c = 27$ y $a = 23$

$c + a = 40 \quad c - a = 5 \quad \Rightarrow \quad c$ no es entero

$c + a = 25 \quad c - a = 8 \quad \Rightarrow \quad c$ no es entero

$c + a = 20 \quad c - a = 10 \quad \Rightarrow \quad c = 15$ y $a = 5$

Analicemos ahora los casos 2, 3 y 6

El segundo caso cumple las otras condiciones del problema, a saber,

$49^2 + 100 = 50^2$ y $50^2 + 101 = 51^2$

En el tercer caso, $c = 27$ y $a = 23$ tenemos que $23^2 + 100 - 1$ no es un cuadrado perfecto. Igualmente, el último caso $25 + 100 - 1$ no es un cuadrado perfecto. Por lo tanto la cantidad de habitantes original era $49^2 = 2\,401$.

8.

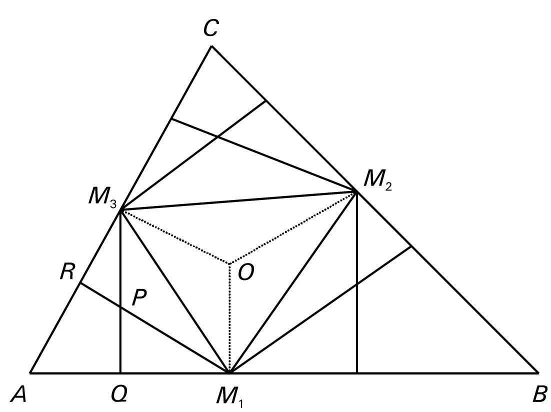

Fig. 53

Por M_1, M_2 y M_3 se trazan las mediatrices (fig. 53), sea O el punto de intersección de ellas, entonces M_3Q es paralela a OM_1 por lo que $\angle OM_1M_3 = \angle PM_3M_1$ por alternos entre paralelas. Análogamente pasa con los ángulos $\angle OM_3M_1$ y M_3M_1R.

De aquí concluimos que $\Delta PM_3M_1 = \Delta OM_1M_3$ y por tanto sus áreas son iguales.

Análogamente pasa con las otras dos parejas de triángulos.
Por lo tanto el área del triángulo $M_1M_2M_3$ es la mitad del área del hexágono.