

MATEMÁTICA

Para la Escuela Pedagógica

Autores:

Dr. C. Ernesto Fernández Rivero (UCP “E. J. Varona”). Coordinador de colectivo y capítulo 1.

Lic. Yolanda Martínez Sotelo (UCP “E. J. Varona”). Capítulo 2.

M Sc. Alina Parets Gómez (UCP “E. J. Varona”). Capítulo 3.

Dr. C. Eduardo Villegas Jiménez (MINED). Selección de ejercicios y revisor técnico del texto.

PROLOGO

Este libro ha sido escrito para los estudiantes que se forman como maestros primarios en las Escuelas Pedagógicas y en su elaboración se han hecho corresponder los contenidos que se tratan con las exigencias del programa de Matemática y la preparación real de los estudiantes que ingresan a estos planes de formación de nivel medio, con una mirada intencionada hacia las necesidades de la futura profesión.

El texto está conformado por tres capítulos y en cada uno de ellos se propone una colección de ejercicios en dos grupos: los “ejercicios del capítulo” orientados a una primera fijación de los contenidos tratados, resaltando en los epígrafes en que se subdivide el capítulo los que deben ser resueltos; en un segundo grupo de ejercicios se presentan los denominados “Ejercicios variados” dirigidos a consolidar los conocimientos mediante la resolución de ejercicios y problemas, muchos de los cuales presentan un mayor grado de dificultad, pero que contribuyen a que los estudiantes estén en condiciones de realizar los ejercicios y problemas de los textos escolares de Matemática en el nivel de educación primaria.

Ha sido la intención abordar los contenidos con rigor matemático, pero ajustado a las posibilidades reales de comprensión por parte de los estudiantes. Por esta razón la presentación de los contenidos se inicia con el análisis de ejemplos que responden a las vivencias que poseen los estudiantes del contexto en que se han desarrollado, incluidos los aprendizajes escolares de los niveles precedentes, lo que conduce a la formalización de estos contenidos mediante el enunciado de definiciones y teoremas. Siempre que ha sido posible se verifica la veracidad de las formulaciones que se presentan y se renuncia a aquellas que se consideran algo complejas para la comprensión de los estudiantes, pero que los profesores de Matemática de las Escuelas Pedagógicas podrán incluirlas en el trabajo docente con los grupos en que lo consideren posible. De igual manera la colección de ejercicios que se incluye en este libro es solo una selección para uso de los estudiantes y se deben añadir otros que resulten del trabajo metodológico e investigativo de los docentes.

El texto responde a las unidades de estudio del primer semestre de primer año. El capítulo 1 se dedica a las **Nociones básicas de lógica y conjuntos**, teniendo en cuenta que los fundamentos lógico-conjuntistas son parte esencial de la concepción general que sustenta el curso de Matemática en la escuela. No se aspira a un abordaje riguroso de las teorías de la lógica y los conjuntos, ni al cálculo de proposiciones, pues sería imposible de asimilar por los estudiantes de estos planes de estudio, sino de sentar las bases conceptuales para una comprensión teórica de los contenidos matemáticos que se estudian de

primero a sexto grado y que serán tratados durante las diferentes unidades que conforman la disciplina Matemática en las Escuelas Pedagógicas.

El capítulo 2 se dedica a **Los números naturales**, tanto a la construcción del conjunto numérico, como al dominio numérico. Se enfatiza en los procedimientos de cálculo con el fin de asegurar el dominio de estos por parte de los estudiantes.

El capítulo 3 trata la **Divisibilidad** en los números naturales, se precisan los conceptos de mínimo común múltiplo y máximo común divisor y los procedimientos empleados para el cálculo de estos. De importancia es el dominio de los criterios de divisibilidad en los números naturales y los ejercicios propuestos ofrecen una buena oportunidad para el desarrollo del pensamiento y el entrenamiento en la solución de problemas.

La urgencia de disponer de un texto para la disciplina Matemática no ha permitido realizar un pilotaje que hubiera enriquecido la obra que se presenta, pero con las observaciones y recomendaciones que nos hagan llegar podrá perfeccionarse para una próxima edición de este material. Serán bien recibidas las experiencias y opiniones, que siempre serán atendidas por el colectivo que tuvo a su cargo la tarea de elaborar este material.

Los autores.

ÍNDICE

Pág.

Capítulo 1 Nociones básicas sobre lógica y conjuntos.

1.1 Algunos conceptos primarios.

1.2 Conjuntos.

1.3 Algunas relaciones fundamentales en los conjuntos.

1.4 Formas proposicionales. Operaciones con conjuntos.

Ejercicios del capítulo.

Ejercicios variados del capítulo.

Capítulo 2 Los números naturales.

2.1 El conjunto de los números naturales.

2.2 Uso de los números naturales.

2.3 La sucesión de los números naturales.

2.4 Sistema de posición decimal.

2.5 Numeración romana.

2.6 El orden de los números naturales.

2.7 Adición de números naturales.

2.8 Sustracción de números naturales.

2.9 Multiplicación de números naturales.

2.10 Potencia de un número natural.

2.11 División de números naturales.

Ejercicios del capítulo.

Ejercicios variados del capítulo.

Capítulo 3 La divisibilidad en los números naturales.

3.1 La relación de divisibilidad de números naturales.

3.2 Criterios para la divisibilidad de números naturales.

3.3 Números primos. Máximo común divisor y mínimo común Múltiplo.

Ejercicios del capítulo.

Ejercicios variados del capítulo.

Capítulo 1

Nociones básicas sobre lógica y conjuntos

1.1 Algunos conceptos primarios

El ser humano desde que nace se pone en contacto con el mundo que le rodea e inicia un largo proceso de aprendizaje. Se aprende a caminar, a hablar, a comer, a jugar, entre otras muchas cosas. Por ejemplo, para aprender a hablar se requiere nombrar con palabras determinados objetos, hechos, sucesos, fenómenos o procesos; comprender el significado de las palabras que se emplean; conocer reglas básicas para expresar las ideas.

Con el ingreso a la escuela primaria se enriquece el aprendizaje de la lengua materna con la adquisición de normas para la escritura de palabras, de reglas para la redacción de oraciones, de procedimientos para buscar en el diccionario el significado de nuevos vocablos. De esta manera, se aprende a hablar adecuadamente, a leer y a escribir correctamente en la lengua materna, lo que permite comunicarse de manera oral y escrita con otros individuos. Pero, esto es posible lograrlo porque ha estado precedido de un conocimiento previo elemental del idioma durante los primeros años de vida.

En el aprendizaje de la Matemática también se requiere adquirir un vocabulario, que conlleva a comprender el significado de nuevas palabras y las formas de escribirlas (denotarlas).

En este capítulo se presentan elementos básicos para la construcción de un lenguaje matemático en ramas tan importantes como la aritmética, el álgebra y la geometría.

Al igual que en el aprendizaje de un idioma, las nuevas palabras se describen mediante el empleo de otras ya conocidas. La diferencia principal en la construcción del vocabulario matemático respecto a otras ramas del saber radica en que:

- se parte de algunos términos o palabras que no se definen explícitamente, pero que representan objetos primitivos (o básicos) dentro de una rama o teoría matemática, que se denominan **conceptos** básicos y
- de ciertos **juicios** en enunciados llamados axiomas o postulados, que se refieren a dichos objetos afirmando algo de ellos, que asumimos como verdaderos;

- a partir de estos conceptos y juicios, mediante el empleo de **razonamientos** lógicos es posible enunciar nuevos términos, así como comprobar la veracidad de otros enunciados valorativos referidos a ellos.

En lo anteriormente expresado hay tres términos que requieren aclaración para su empleo en Matemática: concepto, juicio y razonamiento.

Concepto es el reflejo mental de un conjunto o clase de entes (individuos, procesos o relaciones) sobre la base de sus características invariantes.

Se domina el concepto, cuando se es capaz de identificar, dado un ente, si este es representante o no del concepto. En algunos casos hay que estar en condiciones además de hallar o construir representantes del concepto dado.

En el lenguaje formal de la Matemática, hay conceptos que se consideran básicos. Estos conceptos se introducen mediante ejemplos y explicaciones que apelan a la intuición (conocimiento directo, inmediato, considerado evidente). Los conceptos que no son básicos requieren una definición.

Definición es una formulación en el lenguaje matemático de lo que pensamos son las características invariantes de un conjunto o clase de individuos, procesos o relaciones, en la que se debe tener certeza que incluye todos los casos a los que se refiere y excluye a todos los demás.

En ocasiones al definir conceptos se comentan errores. A continuación se muestran ejemplos de alguno de los errores más comunes.

Ejemplo 1.1: Definición de cuadrado

- Si se formula como “cuadrilátero con cuatro lados iguales”, esta definición es incorrecta, porque se incluye al rombo, luego se refiere casos en exceso que no reflejan el concepto de cuadrado. La descripción correcta de cuadrado debe incluir, además de lados iguales, la característica (propiedad) de sus ángulos rectos.

Ejemplo 1.2: Definición de rectángulo:

- Si se formula como “cuadrilátero cuyos ángulos son rectos y sus lados iguales”, es incorrecta la definición. En este caso la descripción excluye a los rectángulos que no son cuadrados, por lo que no incluye todos los casos deseados.

Una forma más correcta de formular una definición es mediante el empleo de la expresión “sí y solo sí”, que permite conectar el nuevo vocablo con las características invariantes que lo determinan, de modo que lo definido tenga sentido y no sea contradictorio. En el ejemplo anterior, una definición correcta de rectángulo es:

Un paralelogramo es un rectángulo sí y solo sí sus ángulos son rectos.

Se debe observar que:

- El nuevo término a definir es “rectángulo”.
- Las propiedades o características que determinan a este objeto geométrico son:
 - ✓ Ser un paralelogramo.
 - ✓ Tener los ángulos rectos.
- Para definir el nuevo término se emplea, además de las propiedades que lo caracterizan, un término ya conocido con anterioridad: paralelogramo. Luego, para comprender el significado del paralelogramo no basta con los cuatro lados rectos, se requiere además identificar que es un cuadrilátero convexo que tiene sus lados opuestos paralelos.

También es bastante común formular una definición mediante el establecimiento de una relación entre la denominación del nuevo ente matemático y las propiedades que lo caracterizan. Así, por ejemplo, se puede definir un rectángulo de la manera siguiente:

Se denomina rectángulo a todo paralelogramo que tiene sus ángulos rectos.

¿Qué se entiende por juicio?

Juicio es una afirmación acerca de uno o varios objetos matemáticos o de relaciones entre ellos, expresada por una oración del lenguaje común o fórmula integrada por símbolos convencionales.

Aquellos juicios en que se puede determinar si son verdaderos o falsos en el contexto de la teoría correspondiente se denominan **proposiciones**.

Ejemplos de proposiciones son:

- $2 + 7 = 10$ (Falso)
- Un cuadrado es un rectángulo. (Verdadero)
- Un rectángulo es un cuadrado. (Falso)
- La suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo es 180° . (Verdadero)

Se denomina **teorema** a una proposición verdadera que es consecuencia lógica inmediata de los axiomas o definiciones o es el resultado de una cadena de pasos deductivos en que intervienen proposiciones intermedias cuya veracidad se ha ido demostrando con anterioridad.

En lo adelante, para la descripción de los contenidos que se abordan en este libro se utilizarán convenientemente definiciones y teoremas.

Razonamiento es una forma de pensamiento mediante la cual, partiendo de una o más proposiciones ya conocidas, se obtiene otra proposición de veracidad probable o comprobada.

Existen reglas del razonamiento correcto que resultan muy importantes para la vida. Los razonamientos que garantizan pasar de juicios verdaderos a otros también verdaderos se llaman deductivos y los que no necesariamente conducen a conclusiones verdaderas a partir de premisas verdaderas, se llaman reductivos. Entre los razonamientos reductivos se distinguen los inductivos, pero también son posibles otros razonamientos como los que se realizan por analogía.

Obsérvese que mediante el razonamiento se procede de tal manera que de unas proposiciones que sirven de antecedentes (premisas) se deriva una proposición como consecuencia (conclusión).

Si la conclusión obtenida se deriva de las premisas de una manera necesaria estamos en presencia de un razonamiento **deductivo**.

Ejemplo 1.3:

Premisa: Todo demócrata respeta la libertad.

Premisa: Algunos gobernantes no respetan la libertad.

Conclusión: Algunos gobernantes no son demócratas.

Si la conclusión obtenida se deriva de las premisas con un alto grado de probabilidad, basándose en la experiencia y en el contexto, pero no se puede garantizar la veracidad de la conclusión, el razonamiento es **reductivo** (no deductivo).

Ejemplo 1.4:

Como se ha expresado un caso particular de razonamiento reductivo es el razonamiento **inductivo**. En este razonamiento se generaliza para todos los elementos de un conjunto la propiedad observada en un número finito de casos. La verdad de la conclusión en el razonamiento inductivo no está asegurada por la veracidad de las premisas, aunque se haya observado esta relación probable en numerosos casos.

Si se sustituye k por un número impar mayor o igual que 3 en la expresión

$p = \frac{2^k + 1}{3}$, el resultado es:

k	3	5	7	9
p	3	11	43	171

¡Todos estos resultados son números primos! ¿Podemos afirmar que siempre que se sustituya k por un número impar mayor o igual que 3, se va a obtener un número primo? Desde luego que no y no es difícil hallar un contraejemplo para probar que no se cumple siempre.

Por ejemplo, si se sustituye la expresión anterior por $k=11$, se obtiene un valor de p que ni siquiera es un número natural.

Ejemplo 1.5:

Los médicos para diagnosticar a sus pacientes emplean un tipo de razonamiento no deductivo denominado razonamiento clínico. Aplicando este razonamiento se establece a partir de síntomas, signos y exploraciones complementarias, qué enfermedad padece una persona. La experiencia y profesionalidad del médico reduce notablemente el riesgo de conclusiones falsas a partir de estas premisas, pero como se conoce este método no es infalible.

En resumen:

- *Que una proposición sea verdadera significa que es un axioma de la teoría, un teorema u otra proposición que se obtiene de axiomas y teoremas mediante una cadena de razonamientos deductivos.*
- Las teorías matemáticas están conformadas por conceptos básicos y axiomas, a partir de los cuales es posible definir otros conceptos y comprobar la veracidad de proposiciones referidas a propiedades que cumplen los objetos de esa teoría.

Así, por ejemplo, en la Geometría plana se basa en los conceptos básicos de punto, recta y plano y en las relaciones básicas de incidencia y orden, a partir de los cuales se enuncian algunos axiomas (de incidencia y de orden), que sirven de base para la demostración de propiedades que se refieren a figuras planas y a relaciones entre ellas.

En la Aritmética se parte del concepto de número natural y de la relación “sucesor” para enunciar axiomas, a partir de los cuales se construye el conjunto de los números naturales.

Ejercicios 1 al 3

1.2 Conjuntos

Desde la infancia, el hombre se habitúa a emplear en su lenguaje común términos que expresan la idea de agrupamiento o reunión de objetos; así, son

familiares los términos: destacamento, regimiento, cañaveral, grupo, tribu, conjunto (de lápices, sillas, pelotas, entre otros).

En Matemática también se utilizan objetos que se consideran como una reunión de otros, por ejemplo:

- Una recta es un conjunto de puntos de un plano.
- Los múltiplos de un número natural forman un conjunto de números naturales.
- Los diámetros de una circunferencia forman un conjunto de segmentos del plano.

Entre todos los términos que encierran la idea de colectividad los matemáticos han seleccionado uno: **conjunto**.

En los ejemplos mencionados anteriormente se consideran conjuntos formados por objetos individuales:

- Los pioneros son los objetos individuales que forman un destacamento. Cada pionero es uno de estos objetos individuales.
- Los soldados son los objetos individuales que forman un regimiento. Cada soldado es uno de estos objetos individuales.
- Las cañas son los objetos individuales que forman un cañaveral. Cada caña es uno de estos objetos individuales.
- Los puntos son los objetos individuales que forman una recta. Cada punto es uno de estos objetos individuales.

En Matemática se ha seleccionado un término para designar a estos objetos individuales: **elemento**

Así, es posible decir entonces:

- Una recta es un *conjunto* de puntos del plano. Cada punto es un elemento de este *conjunto*.
- Cada múltiplo de un número es un *elemento del conjunto* de los múltiplos de este número.
- Cada diámetro de una circunferencia es un *elemento del conjunto* de diámetros de esta circunferencia.

Esta misma terminología se puede aplicar a ejemplos de la vida diaria, por ejemplo:

- Un destacamento de pioneros es un conjunto que agrupa a pioneros. Cada pionero es un *elemento* del destacamento.
- Un regimiento es un *conjunto* de soldados. Cada soldado es un *elemento* del regimiento.
- Un cañaveral es un *conjunto* de cañas. Cada caña es un *elemento* del cañaveral.

Hay que ser cuidadosos con el empleo de esta terminología, pues un elemento lo es de un cierto conjunto; no tiene sentido decir, por ejemplo:

- El punto A es un elemento.
- El número 5 es un elemento.

Para completar el sentido de estas expresiones debe decirse:

- El punto A es un elemento de la recta AB.
- El número 5 es un elemento del conjunto de los números naturales.

Igualmente, un conjunto está formado por elementos determinados y no tiene sentido decir:

- Una recta es un conjunto
- Un alfabeto es un conjunto.
- Un destacamento es un conjunto.

Los términos *conjunto* y *elemento* constituyen la base del lenguaje matemático. **Conjunto y elemento** son nociones primitivas que no pueden definirse, luego se toman como conceptos básicos, a partir de los cuales se pueden definir otros entes matemáticos y formular proposiciones verdaderas (teoremas) sobre relaciones y propiedades referidas a conjuntos.

Determinación y notación de un conjunto

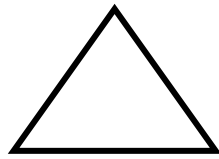
Los ejemplos de conjunto considerados hasta ahora han sido dados de antemano; pero, esto no es necesario, ya que pueden formarse conjuntos a voluntad, reuniendo objetos cualesquiera. Pueden, por ejemplo, formarse conjuntos:

- Con este libro de Matemática, la vocal a y el edificio donde vives.

- Con el número 3, el edificio de la escuela, el centro de la circunferencia y la recta que aparecen en la figura a continuación:



- Con los múltiplos de 5 y el triángulo que aparece a continuación:



Sin embargo, no siempre que se mencionan varios objetos se indica cómo formar un conjunto; debe observarse que en los ejemplos anteriores para cualquier objeto dado, es posible establecer una y solo una de las posibilidades siguientes:

- El objeto es elemento del conjunto formado.
- El objeto no es elemento del conjunto formado.

Es indispensable respetar esta regla cuando se forman conjuntos. Por ejemplo, cuando se dice:

Una libreta, un libro y un lápiz

no se ha indicado cómo formar un conjunto, ya que no puede decidirse, por ejemplo, si este libro de Matemática es o no un elemento del conjunto.

Cuando se indica cómo formar un conjunto se dice que *se ha determinado el conjunto*.

Definición:

Un conjunto está determinado cuando para cada objeto, es posible decidir si es un elemento del conjunto o no.

En Matemática los objetos se representan por símbolos. En los primeros grados de la enseñanza se aprende que las cifras son los símbolos con que se representan números. Por ejemplo:

- La cifra “5” representa el número cinco.
- Las cifras “4” y “7”, escritas en la forma 47, representan al número cuarenta y siete.

Más correctamente se dice:

- “El símbolo 5 denota al número cinco” o “la notación para el número cinco es el símbolo 5”.
- “El símbolo 47 denota el número cuarenta y siete” o “la notación para el número cuarenta y siete es el símbolo 47”.

Para los términos *conjunto* y *elemento* se emplean ciertos símbolos para denotarlos. En general, se utiliza el siguiente convenio:

Los conjuntos se denotan por letras mayúsculas del alfabeto latino y los elementos del conjunto se denotan por letras minúsculas.

Ejemplo 1.6: **A** denota al conjunto formado por este libro de Matemática, el edificio donde vives y la vocal **a**. Si la letra **I** denota este libro de Matemática y la letra **e** el edificio donde vives, se dice entonces que:

El conjunto **A** está formado por los elementos **I**, **a** y **e**.

Nótese que la letra mayúscula **A** denota al conjunto y las letras minúsculas **I**, **a** y **e** denotan los elementos que forman el conjunto.

Una manera cómoda y breve de representar un conjunto es mediante el empleo de la *notación tabular*.

En el ejemplo anterior la representación del conjunto en notación tabular sería:

$$A = \{I, a, e\}$$

En este caso, ha sido fácil representar todos los elementos del conjunto entre llaves.

Ejemplo 1.7: Sea **B** el conjunto formado por los números naturales comprendidos entre 10 y 100, ambos inclusive.

La tarea de representar entre llaves todos los elementos del conjunto **B** es posible pero sería larga y tediosa, si se escribiera cada número; sin embargo, el conjunto **B** puede representarse más brevemente de la forma siguiente:

$$B = \{10, 11, 12, \dots, 100\}$$

Obsérvese que ha sido posible representar el conjunto B en esta forma abreviada porque:

- Se conoce el orden establecido en el conjunto de los números naturales.
- Los elementos del conjunto B se han representado en ese orden, separados por comas y representando algunos de ellos por puntos suspensivos; esto permite inferir cuáles son los elementos sustituidos (los puntos suspensivos que los sustituyen son siempre tres).
- Al escribir el número 100 después de los puntos se indica claramente que este es el último elemento del conjunto, así como escribir en primer lugar el 10, indica que este es el primer elemento del conjunto.

Ejemplo 1.8: Sea C el conjunto de los números naturales mayores que 100.

Es imposible tabular todos los elementos de este conjunto, pues es ilimitado. En efecto, dado un número natural cualquiera, el número que resulta al sumarle 1 (su sucesor) es mayor que él.

El conjunto C puede representarse en notación tabular:

$$C = \{101, 102, 103, \dots\}$$

En este caso no se ha escrito número alguno después de los puntos suspensivos, con lo cual se indica que el conjunto es ilimitado.

Estos ejemplos indican *la forma de proceder para representar en notación tabular un conjunto* cuando pueden tabularse sus elementos, o es posible sugerir cuáles son estos elementos tabulando solo algunos de ellos.

Existen conjuntos para los cuales ninguno de los procedimientos descritos es sencillo; no es fácil, por ejemplo, representar en notación tabular el conjunto de cubanos. En este caso se utiliza habitualmente la *forma descriptiva* a partir expresar cierta propiedad que poseen los elementos del conjunto. En el ejemplo anterior, la propiedad de ser cubanos.

Resumen:

- Un conjunto está bien determinado (o bien definido), únicamente cuando de alguna manera se da a conocer claramente cuáles son los elementos que lo integran.

- Para determinar un conjunto se emplea:
 - La forma tabular cuando es posible nombrar cada uno de los elementos. En este caso se indica el conjunto escribiendo entre llaves, y separados por comas, los símbolos que representan a los elementos.
 - La forma descriptiva cuando se enuncia una propiedad característica de los elementos del conjunto, es decir, una propiedad común a todos los elementos del conjunto y solo a ellos. Por ejemplo, el conjunto de los números pares, que se denota: $A = \{x \in \mathbb{N}: x \text{ es un número par}\}$ o también A : conjunto de los números pares.

Conjunto universo. Conjunto unitario, conjunto vacío

Al revisar los ejemplos de conjuntos que se han utilizado, se observa que en cada caso, los elementos del conjunto se seleccionaron entre los elementos de un conjunto mayor, que entonces recibe el nombre de: **conjunto universo** (también Universo de referencia o universo de discurso).

Para lograr claridad y precisión al determinar conjuntos debe establecerse de antemano cuál es el *universo de referencia* para los conjuntos que se han de determinar. Algunos ejemplos ayudarán a comprender cómo se hace esto.

1. Si el *universo de referencia* está formado por los doce meses del año, están bien determinados los conjuntos siguientes:
 - a) El conjunto formado por los cuatro primeros meses del año.
 - b) El conjunto formado por los meses que tienen 31 días.
2. Si el *universo de referencia* está constituido por los números naturales, están bien determinados:
 - a) El conjunto formado por los divisores de 10.
 - b) El conjunto formado por los múltiplos de 7.

¿Puede ser determinado en este universo el conjunto del ejemplo formado por los múltiplos de 5 y el triángulo dado en la figura? Claro que no, pues se refieren a dos universos diferentes: el universo de los números naturales donde se determinan los múltiplos de 5 y el universo de las figuras planas donde se encuentra el triángulo dado.

En el trabajo matemático es imprescindible dejar establecido cuál es el *universo de referencia* en que se han de considerar los conjuntos, de lo contrario se provocan ambigüedades como la que se señala en el ejemplo siguiente:

3. ¿Cuál es el elemento que se obtiene al dividir dos por cinco?

Ya se ha dicho que un elemento lo es siempre de algún conjunto, luego al hablar de elemento queda sobrentendido un conjunto de referencia que lo contiene. En este ejemplo el universo pueden ser alguno de los conjuntos numéricos estudiados: el conjunto de los números naturales, el conjunto de los números fraccionarios, el conjunto de los números reales u otro.

En el conjunto de los números naturales no es posible dividir dos por cinco, luego la respuesta sería que no se obtiene ningún elemento (no tiene solución). Pero, si fuera en el conjunto de los números fraccionarios, la respuesta sería dos quintos. ¡La pregunta tendrá distintas respuestas según cuál de los conjuntos numéricos se considere como universo de referencia!

Debe observarse siempre con atención cuál es el universo de referencia en cada caso.

El universo de referencia se denota generalmente por la letra mayúscula “U”.

Como se ha dicho el término conjunto se ha introducido para designar objetos que se consideran constituidos por objetos individuales. Los ejemplos mostrados anteriormente se refieren a conjuntos formados por varios elementos. Sin embargo, existen conjuntos especiales que son de importancia en el trabajo con conjuntos.

Ejemplo 1.9: En el universo de los meses del año, sea el conjunto A formado por el mes que tiene menos días.

Si se denota por m el mes que tiene menos días (febrero), se puede representar el conjunto A en notación tabular, así:

$$A = \{m\}$$

Obsérvese que el conjunto A está bien determinado, pero ¡el conjunto A tiene un único elemento! Este ejemplo muestra que existen conjuntos formados por

un solo elemento. Es decir, el conjunto A es un objeto formado por objetos individuales, en este caso por un solo objeto individual.

Se establece entonces que:

Existen conjuntos formados por un solo elemento. Estos conjuntos se llaman **conjuntos unitarios**.

Ejemplo 1.10: En el universo de los números naturales, sea B el conjunto formado por el elemento que resulta de dividir dos entre cinco.

Ya se vio anteriormente que este conjunto no tiene ningún elemento, pues dos no se puede dividir por cinco en el conjunto de números naturales.

Se tiene entonces un conjunto bien determinado y que sin embargo, carece de elementos.

Se admite entonces que:

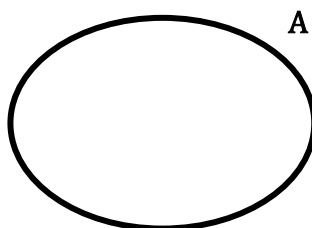
Existe un único conjunto que no tiene elementos. Este conjunto se llama **conjunto vacío** y se denota por la letra griega Φ (Se lee Phi ó Fi).

Representación gráfica de conjuntos mediante diagramas

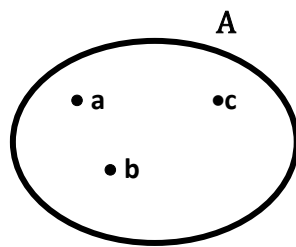
Los objetos o entes matemáticos son abstracciones de la realidad concreta, luego no pueden verse y tocarse como los pupitres del aula o las paredes del edificio de la escuela; para facilitar la comprensión y el razonamiento sobre estos objetos es conveniente utilizar, siempre que sea posible, una representación gráfica de los mismos.

Es posible representar gráficamente las relaciones entre conjuntos por medio de diagramas. ¿Cómo proceder entonces para representar gráficamente un conjunto cualquiera?

Considérese un conjunto A cualquiera dado que se requiere representar gráficamente. Se conviene en dibujar un trazo continuo y cerrado para representar el conjunto, como se muestra a continuación:



Si se requiere representar además elementos del conjunto **A**, entonces se marcan puntos interiores al trazo y se denotan convenientemente. Así, por ejemplo:

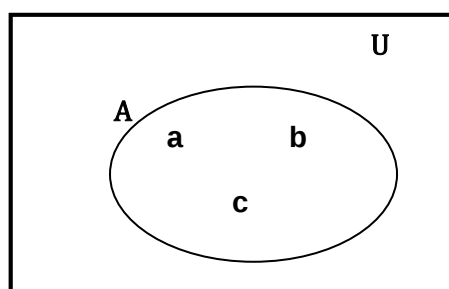


De esta manera queda representado el conjunto **A** y tres elementos que están contenidos en el conjunto **A**, es decir **a, b, c**.

Obsérvese que se han representado los elementos **a, b, c** del conjunto **A**; sin embargo, esto no significa que sean los únicos elementos contenidos en **A**.

Para representar gráficamente el conjunto **U**, **universo de referencia**, se utiliza el mismo convenio, se dibuja un trazo continuo y cerrado. También se emplea para representar conjuntos que se construyen con elementos de **U**.

Por ejemplo, si los elementos **a, b, c** están contenidos en el *universo de referencia* considerado y **A** es un conjunto que contiene estos elementos, entonces se puede realizar una representación gráfica de esta situación de la manera siguiente:



En resumen:

Para la representación gráfica de conjuntos mediante diagramas, se seleccionan figuras geométricas planas cualesquiera que representan conjuntos determinados referidos a uno conjunto mayor que los contiene a todos y se ilustran relaciones y operaciones con dichos conjuntos o

con sus elementos, según sea necesario. A estos diagramas se le denominan Diagramas de Venn.

1.3 Algunas relaciones fundamentales en los conjuntos

Una relación entre elementos y conjuntos: la relación de pertenencia

Ya se ha visto que un conjunto está *determinado*, cuando *para cada objeto es posible decidir, si es un elemento del conjunto o no*. Entonces, se debe observar que:

- cuando se considera un elemento debemos hacerlo siempre en relación con un cierto conjunto en el cual se encuentra.
- cuando se trate de un conjunto éste se considerará siempre con relación a ciertos elementos que lo forman.

Así, se ha establecido desde el principio una relación entre elementos y conjuntos, que se denomina: **relación de pertenencia**.

Ejemplo 1.11:

En el conjunto de los números naturales pares, sea A el conjunto formado por los múltiplos de 4.

El conjunto A puede representarse en notación tabular como:

$$A = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, \dots\}$$

En el conjunto A se tiene que:

- 16 está relacionado con A, porque 16 está en A.
- 20 está relacionado con A, porque 20 está en A.
- 10 no está relacionado con A, porque 10 no está en A.
- 18 no está relacionado con A, porque 18 no está en A.

De este modo ha de razonarse siempre que se quiera determinar si un elemento y un conjunto dados están relacionados. En estos casos se aplica el criterio:

Un elemento y un conjunto están relacionados, si el elemento está en el conjunto.

Este criterio se expresa igualmente:

Un elemento y un conjunto están relacionados, si el conjunto contiene el elemento.

Para indicar que un elemento y un conjunto están relacionados se emplea el símbolo: $\in$

Este es el símbolo que denota la relación de pertenencia.

Sí lo aplicamos en el ejemplo anterior, resulta que:

Se escribe	Se lee
$16 \in A$	<i>16 es elemento de A (16 pertenece a A)</i>
$A \ni 16$	<i>A contiene a 16</i>
$20 \in A$	<i>20 es elemento de A (20 pertenece a A)</i>
$A \ni 20$	<i>A contiene a 20</i>

En general, si B denota un conjunto cualquiera y b es un elemento que está en B, entonces:

Se escribe	Se lee
$b \in B$	<i>b es un elemento del conjunto B</i> <i>b pertenece al conjunto B</i>
También se escribe a veces	Se lee
$B \ni b$	<i>El conjunto B contiene al elemento b.</i>

De manera análoga, cuando se quiere indicar que un elemento no pertenece a cierto conjunto se emplea el símbolo: $\notin$

Este es el símbolo para negar la relación de pertenencia; esto es, para indicar que entre un elemento y un conjunto no se cumple la relación de pertenencia.

En el ejemplo anterior:

Se escribe	Se lee
$18 \notin A$	<i>18 no es elemento de A (18 no pertenece a A)</i>
$A \not\ni 18$	<i>A no contiene a 18</i>

En general, si B es un conjunto cualquiera y a es un elemento que no está en B , entonces

Se escribe	Se lee
$a \notin B$	<i>a no es elemento de B</i> <i>a no pertenece al conjunto B</i>
También se escribe a veces	Se lee
$B \not\ni a$	<i>El conjunto B no contiene al elemento a.</i>

Obsérvese que los símbolos $\in$, $\notin$ solo se escriben entre dos símbolos, uno de los cuales denota un elemento del universo de referencia que se considere y el otro un conjunto de elementos de ese universo.

$\in$ indica que el elemento pertenece al conjunto (está en el conjunto).

$\notin$ indica que el elemento no pertenece al conjunto (no está en él).

Luego, el criterio para decidir si un conjunto está bien determinado o no, puede enunciarse ahora así:

Un conjunto A está bien determinado cuando para cada elemento a del universo, es posible establecer una y solo una de las posibilidades siguientes:

$$a \in A \qquad \text{ó} \qquad a \notin A$$

Una relación entre conjuntos: la igualdad

Se ha visto una **relación entre elementos y conjuntos** que constituye una relación fundamental de la Matemática: **la relación de pertenencia**.

Existe también otra relación fundamental que constituye una **relación entre conjuntos: la relación de igualdad**.

Esta relación de igualdad entre conjuntos puede enunciarse:

Un conjunto solo es igual a sí mismo.

Como un conjunto está formado por elementos, la expresión anterior significa que:

Dos conjuntos A y B son iguales, si y solo si están formados por los mismos elementos.

Ejemplo 1.12: Sean el universo formado por los números naturales y los conjuntos:

$A = \{6, 7, 8, 9\}$

B : conjunto formado por los números comprendidos entre 5 y 10.

Se tiene entonces que $A = B$, porque A y B están formados por los mismos elementos: los números 6, 7, 8 y 9.

Esta es otra forma de decir que A y B denotan el mismo conjunto.

Obsérvese que si a denota un elemento cualquiera del universo y $a \in A$, entonces a denota un número comprendido entre 5 y 10 (no incluye ni 5 ni 10), o sea, $a \in B$.

Análogamente, si $a \notin A$, entonces a no denota un número comprendido entre 5 y 10, o sea, $a \notin B$.

Entonces, para cualquier objeto a del universo ($a \in U$) la respuesta a las preguntas:

¿Es a elemento de A ? ¿Es a elemento de B ?

es siempre la misma.

La misma idea se explica diciendo que:

Las expresiones $a \in A$ y $a \in B$, son ambas ciertas o ambas falsas.

El análisis realizado en este ejemplo puede repetirse en general para conjuntos A y B cualesquiera. Así, resulta el siguiente **criterio para determinar cuándo dos conjuntos son iguales**:

Si A y B son dos conjuntos determinados en un mismo universo, se tiene que:

$A = B$ si y solo si para todo elemento $a \in U$, la respuesta a las preguntas:

¿Es a elemento de A ? ¿Es a elemento de B ? es siempre la misma.

También se puede decir:

Para todo elemento $a \in U$, las expresiones: $a \in A$, $a \in B$, son ambas ciertas o ambas falsas.

Cuando se dice que $a \in A$ y $a \in B$ son ambas ciertas o ambas falsas se quiere expresar que:

Si $a \in A$, entonces $a \in B$ y si $a \in B$, entonces $a \in A$.

Es decir, se cumple $a \in A$ si y solo si se cumple $a \in B$, lo cual se expresa brevemente así:

$a \in A$, si y solo si, $a \in B$.

El criterio enunciado permite comparar conjuntos y decidir si son iguales o no, aunque no se escriban todos sus elementos.

Ejemplos (se considera que el universo es el conjunto de los números naturales)

1. Sea A el conjunto de los números naturales múltiplos de 10 y B el conjunto de los números divisibles por 2 y 5. Se trata de comparar A y B aplicando el criterio.

Se considera $a \in U$, tal que $a \in A$.

¿Qué se sabe de a ? Pues bien, se sabe que a es múltiplo de 10; la regla abreviada de multiplicación por 10 permite concluir que la última cifra de a es cero. Pero, si la última cifra de a es cero, a es divisible por 2 (cero es par) y también, a es divisible por 5, luego $a \in B$. Se ha demostrado que: si $a \in A$, entonces $a \in B$.

Ahora, se toma $a \in U$, tal que $a \in B$.

¿Qué se sabe de a ? Se sabe que a es divisible por 2 y por 5. Como es divisible por 2, a termina en cifra par, y por ser divisible por 5 termina en 0 o en 5, pero entre cero y cinco, solo el cero es par. ¿Qué se puede concluir? Se concluye que necesariamente a termina en cero, luego $a \in A$.

Se ha demostrado ahora que: si $a \in B$, entonces $a \in A$.

Conclusión: $A = B$, porque $a \in A$ si y solo si, $a \in B$.

2. Sea I el conjunto de los números impares y P el conjunto de los números pares.

Para mostrar que $I \neq P$ basta analizar que $1 \in I$ pero $1 \notin P$.

3. Sea $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $N = \{3, 5, 2, 4, 1\}$

Obsérvese que si $a \in M$, entonces $a \in N$ y, si $a \in N$, entonces $a \in M$, porque M y N contienen los mismos elementos, aunque escritos en distinto orden.

Se tiene entonces que $M = N$, y se hace evidente que *al escribir un conjunto en notación tabular no es de interés el orden en que se escriben sus elementos*.

4. Sea $R = \{1, 2, 2\}$ y $S = \{1, 2\}$

Si $a \in R$ es $a = 1$ o $a = 2$ y, por lo tanto $a \in S$; igualmente si $a \in S$, entonces $a = 1$ o $a = 2$ y, por consiguiente $a \in R$, se tiene entonces que:

$a \in R$ si y solo si $a \in S$.

Luego, $R = S$, aunque se hayan escrito en R algunos elementos de S repetidos.

En general, cuando se escribe un conjunto en notación tabular es innecesario escribir el mismo elemento más de una vez.

La igualdad de conjuntos cumple las siguientes propiedades:

- Reflexiva: $A = A$.
- Simétrica: Si $A = B$, entonces $B = A$.
- Transitiva: Si $A = B$ y $B = C$, entonces $A = C$.

Nótese que A , B y C denotan conjuntos cualesquiera.

En Matemática, *una relación que cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva se denomina relación de equivalencia*. La igualdad de conjuntos es un ejemplo de relación de equivalencia.

Otra relación entre conjuntos: la relación de inclusión

Dado un conjunto A cualquiera, se ha visto que pueden formarse nuevos conjuntos con los elementos de A . Los conjuntos así obtenidos están contenidos en el conjunto A : todos sus elementos son elementos de A .

Esta posibilidad sugiere una nueva relación entre conjuntos que se define a continuación.

Sean A y B definidos en un mismo universo U ,

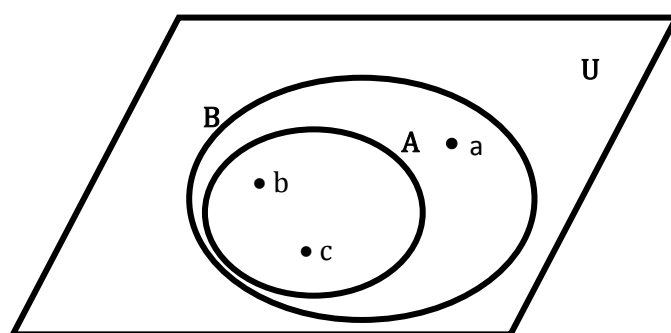
Se dice que A *está incluido en* B y se denota $A \subset B$, si y solo si para todo elemento a del universo se tiene que: si $a \in A$ entonces $a \in B$.

En otras palabras, se dice que A está incluido en B ($A \subset B$) si y solo si todos los elementos de A están contenidos en B. También puede decirse que A es un subconjunto o una parte de B.

La misma idea se expresa a veces diciendo que B incluye a A y se denota:

$$B \supset A.$$

Para indicar en un diagrama que $A \subset B$, se representa el gráfico de A contenido en el interior del gráfico de B como se ha hecho en la figura siguiente:



Obsérvese que en el diagrama se ha marcado un punto a tal que $a \in B$ y $a \notin A$ para indicar que en este caso $B \neq A$.

Si B no está incluido en A se denota: $B \not\subset A$.

Ejemplos 1.13:

1. Sea U el conjunto de las letras del alfabeto español y A el conjunto de vocales.

El conjunto B formado por las vocales de la palabra “libro” es un subconjunto de A. En efecto,

$$B = \{i, o\} \text{ y } A = \{a, e, i, o, u\}$$

Todos los elementos de B son elementos de A.

2. Con los mismos conjuntos U y A del ejemplo anterior, considérese C el conjunto de las letras de la palabra “libro”

$$C = \{b, i, l, o, r\}$$

En este caso $C \not\subset A$ y tampoco $A \subset C$.

3. Sea U el conjunto de todos los cubanos y A el conjunto de los niños menores de 5 años. Los siguientes son subconjuntos de A:

B: Conjunto de los niños que no son mayores de 4 años.

C: Conjunto de los niños menores de 5 años que son padres de familia.

Se tiene entonces que $B \subset A$, $C \subset A$. Pero, por otra parte:

$$B = A \quad \text{y} \quad C = \Phi$$

Entonces: $A \subset A$ y $\Phi \subset A$.

En general, si A es un conjunto cualquiera de un universo U se tiene:

$$A \subset U, \quad A \subset A \quad \text{y} \quad \Phi \subset A.$$

Por otra parte, todo subconjunto $B \subset A$ tal que $B \neq A$ y $B \neq \Phi$ se llama *parte propia o subconjunto propio de A*.

Ejercicios 4 al 41

1.4 Formas proposicionales. Operaciones con conjuntos

Del epígrafe 1.1 se conoce que una *proposición* en Matemática es una afirmación acerca de uno o varios objetos matemáticos o de relaciones entre ellos, expresada por una oración del lenguaje común o fórmula integrada por símbolos convencionales, en que se puede determinar si es verdadera o falsa en el contexto de la teoría correspondiente.

Se puede decir que las siguientes expresiones son proposiciones, pues de ellas se puede decir si son verdaderas o falsas:

- $3 + 5 = 8$
- $2 < 7$
- En todo cuadrilátero la suma de las amplitudes de sus ángulos interiores es 360° .

Sin embargo, no se puede decir que $x + 7 = 0$ sea una proposición, pues no se puede afirmar que sea cierto o falso hasta que se determine un valor específico para la variable x. En caso de que x fuese 3, entonces $3 + 7$ sería distinto del número cero y resultaría una proposición falsa. Así mismo, se sabe que en el conjunto de los números naturales no es posible encontrar un valor en el cual el resultado de esta operación de adición sea cero, luego siempre conduciría a

proposiciones falsas. Sin embargo, si se considerase como dominio de la variable (universo de referencia) los números enteros, se tendrían valores para los cuales la igualdad es falsa y ella solo es verdadera, si se le asigna a x el valor de (-7) .

De igual manera $2 < x$ no es una proposición. Tampoco lo es la siguiente afirmación: x es isósceles (donde x asume valores de U , conjunto universo formado por los triángulos del plano).

Del análisis de situaciones como las anteriores resulta:

Definición:

*Una **forma proposicional** es una estructura lingüística que contiene variables y que se convierte en una proposición cuando se sustituyen las variables por elementos del universo de referencia.*

En lo adelante solo nos referiremos a formas proposicionales con una variable, de modo de simplificar los aspectos objeto de estudio.

Notación: Una forma proposicional que contiene una sola variable se representa por símbolos en la forma $p(x)$, donde x es la variable implicada, que asume valores del universo (universo de referencia).

Se escribe $p(x)$ y se lee “ p en x ”

Cada sustitución de la variable por elementos del universo de referencia (dominio básico o simplemente dominio) se denomina *interpretación de la variable sobre U* .

Posibilidades de obtener proposiciones a partir de formas proposicionales:

- En el análisis realizado en el ejemplo referido a la expresión $x + 7 = 0$, es posible observar que, de la interpretación de la variable es posible obtener proposiciones, que se puede afirmar que son verdaderas o falsas.
- En las formulaciones matemáticas se usan muy frecuentemente símbolos, conocidos como cuantificadores:

- ✓ En símbolos: $\forall$ Se lee: “para todo”. Este cuantificador universal significa que el conjunto de verdad de una forma proposicional es la totalidad del conjunto de referencia.
- ✓ En símbolos: $\exists$ Se lee: “existe”. Este cuantificador existencial significa que el conjunto de verdad de una forma proposicional contiene al menos un elemento del conjunto de referencia.

El empleo de estos cuantificadores es otra vía para obtener proposiciones de las formas proposicionales. Por ejemplo, en el dominio de los números reales, $x^2 \geq 100$ no es una proposición, sino una forma proposicional. Sin embargo, si en lugar de la expresión anterior fuera el caso de: “Para todo número real x se cumple $x^2 \geq 100$ ” es una proposición falsa, mientras “existe un número real x para el cual se cumple $x^2 \geq 100$ ” es una proposición verdadera.

Hasta ahora se han visto proposiciones simples y formas proposicionales que conducen a una proposición simple. Pero, en la construcción del lenguaje matemático es posible formar **proposiciones compuestas** a partir de proposiciones simples dadas, mediante el empleo de determinadas conjunciones gramaticales (o enlaces). De manera que,

de las proposiciones simples p y q pueden obtenerse nuevas proposiciones (compuestas): “ p y q ”, “ p o q ”, “Si p , entonces q ”, “ p si y solo si q ”

A continuación se presentan cada una de estas proposiciones compuestas y algunas de ellas se emplean en la introducción de operaciones con conjuntos.

Conjunción e intersección

En epígrafes anteriores se introdujo el concepto de proposición como aquel juicio en que se puede determinar si es verdadero o falso en el contexto de una determinada teoría. También es posible combinar proposiciones y obtener nuevas proposiciones.

Ejemplos 1.14:

1. Sean las proposiciones simples p y q :

p : 3 es un número primo.

q : 12 es un número compuesto.

Las proposiciones p , q se pueden unir por la conjunción “y” de la manera siguiente: 3 es un número primo **y** 12 es un número compuesto.

2. r : 8 es un número par.

s : 9 es el sucesor de 8.

Estas dos proposiciones se pueden unir y resulta la proposición: 8 es un número par **y** 9 es el sucesor de 8.

3. m : 9 es el cuadrado de 4.

n : 10 es múltiplo de 5.

Se pueden unir mediante la conjunción y, de manera que resulta una nueva proposición: 9 es el cuadrado de 4 **y** 10 es múltiplo de 5.

De los ejemplos anteriores se puede concluir que, es posible unir dos proposiciones simples y obtener una proposición compuesta, mediante el empleo de un conector o enlace de ambas proposiciones simples. En este caso mediante el empleo de la conjunción “y”.

De esta nueva proposición que surge al unir p y q ¿será posible determinar si es verdadera o falsa a partir de conocer que lo son p y q ?

En el ejemplo 1 de manera inmediata es posible afirmar que la proposición p es verdadera, pues 3 solo es divisible por 1 y por el propio 3; luego 3 es un número primo. También q es verdadera, pues 12 es divisible por 1 y 12, pero también lo es por 2, 3, 4, 6; es decir es un número compuesto. La unión de ambas proposiciones mediante la conjunción también es verdadera.

El análisis intuitivo permite expresar que la nueva proposición p y q es verdadera, pues p lo es y q también. De igual manera, es de suponer que si una de las dos es falsa, resulta que la nueva proposición p y q es falsa. Es el caso del ejemplo 3.

Definición:

Se denomina **conjunción de dos proposiciones simples** a la proposición que resulta de unir dos proposiciones simples mediante la conjunción “y”.

La conjunción que asocia una proposición simple p con otra q , se escribe: $p \wedge q$. Se lee “ p y q ”.

Una conjunción es verdadera, solo cuando todas las proposiciones simples que la componen son verdaderas.

Para el análisis de los posibles valores de verdad de la conjunción se emplea la tabla de verdad que se muestra continuación:

Tabla de verdad de la conjunción		
p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

En la tabla se puede observar que:

- el valor de verdad de $p \wedge q$ depende de los valores de las proposiciones simples que la componen.
- los valores que se corresponden están en la misma línea horizontal; por ejemplo, la tercera línea dice que si p es falso y q es verdadero, entonces $p \wedge q$ es falso.

Es el caso del ejemplo 3.

$m \wedge n$: 9 es el cuadrado de 4 y 10 es múltiplo de 5.

De igual manera, es posible obtener la **conjunción de dos formas proposicionales** y se escribe: $p(x) \wedge q(x)$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son formas proposicionales.

Es posible determinar el valor de verdad de la forma proposicional al sustituir x por valores del universo de referencia en cada una de las proposiciones p y q , obteniéndose la conjunción de las dos proposiciones simples p y q .

Ejemplo: Sea $p(x): x + 3 = 0$; $q(x): x - 1 = 0$

Entonces, la conjunción $p(x) \wedge q(x)$ es

$$x + 3 = 0 \quad \text{y} \quad x - 1 = 0 .$$

Para el valor $x = 2$, la conjunción de las formas proposicionales se convierte en la conjunción de las proposiciones: $(2 + 3 = 0)$ y $(2 - 1 = 0)$

que es falsa, puesto que lo es cada proposición simple que la compone (véase línea 4 de la tabla de verdad de la conjunción).

Definición:

Se llama **conjunto intersección** de dos conjuntos A y B al conjunto formado por los elementos que están en A y en B simultáneamente.

Se denota: $A \cap B$

Se lee: A intersección B

Es decir, que $x \in A \cap B$ significa que $(x \in A) \wedge (x \in B)$

Ejemplos 1.15:

1. Sea N el universo formado por el conjunto de los números naturales y los conjuntos $A = \{0, 3, 6, 9\}$ y $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

Se tiene entonces: $A \cap B = \{0, 6\}$.

2. Sea N el universo formado por el conjunto de los números naturales y los conjuntos $A = \{0, 3, 6, 9\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

Se tiene entonces: $A \cap B = \emptyset$. Es decir, los conjuntos A y B no tienen elementos comunes, decimos en este caso que A y B son **conjuntos disjuntos**.

3. En el mismo universo, sean

C : conjunto de los números pares menores que 20.

D : conjunto de los múltiplos de 3 menores que 20.

Se tiene que:

$$C = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}.$$

$$D = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$$

$$\text{Entonces, } C \cap D = \{0, 6, 12, 18\}.$$

Si se expresan C y D de la manera siguiente:

$c(x)$: conjunto de las x , tal que x es un número par menor que 20.

$d(x)$: conjunto de las x , tal que x es múltiplo de 3 menor que 20.

Estas formas proposicionales se convierten en proposiciones para valores específicos de x dentro del universo de los números naturales, que serán verdaderas si sus valores son menores que 20.

Otra forma de expresar la intersección de C y D es:

$$C \cap D = \{x \text{ tal que } c(x) \wedge d(x)\}.$$

Se lee el conjunto intersección de C y D está formado por cada x que cumple que es un número par menor que 20 y a la vez es un múltiplo de 3 menor que 20.

$$\text{Entonces, } C \cap D = \{0, 6, 12, 18\}.$$

En este ejemplo se observa que:

- Es posible expresar los conjuntos a partir de las propiedades que deben cumplir sus elementos. En este caso se emplea una variable y se describe con su empleo la relación que se cumple.
- Los conjuntos expresados de la manera antes descrita son formas proposicionales y la intersección de conjuntos queda representada por la conjunción de las dos formas proposicionales.

Se puede resumir lo anterior de la manera siguiente:

$$\text{Si } A = p(x) \text{ y } B = q(x), \text{ entonces } A \cap B = \{x \text{ tal que } p(x) \wedge q(x)\}$$

Definición:

La operación que a los conjuntos A y B hace corresponder el conjunto $A \cap B$ se llama **intersección de conjuntos**.

Ejercicios 42 al 47

Alternativa y unión

Al igual que fue posible unir dos proposiciones simples mediante la conjunción “y”, se pueden unir dos proposiciones simples mediante la disjunción “o”. Ejemplo: Sean las proposiciones p : Pedro es estudiante q : Pedro es trabajador. Podemos formar una nueva proposición uniendo ambas proposiciones mediante “o”: Pedro es estudiante o Pedro es trabajador.

Definición:

Se denomina **alternativa de dos proposiciones simples** a la proposición que resulta de unir dos proposiciones simples mediante la disjunción “o”.

Se expresa con el símbolo: $p \vee q$ y se lee “p o q”.

El análisis de los valores de verdad de la alternativa dada en el ejemplo anterior permite afirmar que ella es verdadera, si una de las dos lo es. En este caso, que “Juan sea estudiante” o que “Juan sea trabajador”. También incluye el caso en que “Pedro sea estudiante y trabajador”.

Una alternativa es verdadera, cuando por lo menos una de las proposiciones simples que la componen es verdadera.

Los posibles valores de verdad de la alternativa se muestran en la tabla de verdad:

Tabla de verdad de la alternativa		
p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

De igual manera, es posible obtener la **alternativa de dos formas proposicionales** y se escribe: $p(x) \vee q(x)$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son formas proposicionales.

Ejemplo: Considere el caso del ejemplo utilizado anteriormente para presentar la conjunción: Sea $p(x): x + 3 = 0$; $q(x): x - 1 = 0$

Entonces, la alternativa $p(x) \vee q(x)$ es $(x + 3 = 0) \vee (x - 1 = 0)$.

Para el valor $x = 2$, la alternativa de las formas proposicionales se convierte en la alternativa de las proposiciones: $(2 + 3 = 0) \vee (2 - 1 = 0)$

que es falsa, puesto que lo es cada proposición simple que la compone (véase línea 4 de la tabla de verdad de la alternativa).

Definición:

Se llama **conjunto unión** de dos conjuntos A y B al conjunto formado por los elementos que están al menos en uno de los conjuntos A **ó** B.

Se denota: $A \cup B$.

Se lee: A unión B.

Es decir, que $x \in A \cup B$ significa que $(x \in A) \vee (x \in B)$

Ejemplos 1.16:

1. Sea N el universo formado por el conjunto de los números naturales y los conjuntos $A = \{0, 3, 6, 9\}$ y $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

Se tiene entonces:

$$A \cup B = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}.$$

2. En el mismo universo, sean

C: conjunto de los números pares menores que 20.

D: conjunto de los múltiplos de 3 menores que 20.

Se tiene que:

$$C = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}.$$

$$D = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$$

$$\text{Entonces, } C \cup D = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18\}.$$

De manera análoga se procede con formas proposicionales.

Ejemplo 1.17:

Sea U el universo de los números naturales y sean A y B conjuntos de ese universo, de manera que:

A es el conjunto de los números pares.

B es el conjunto de los números impares

Entonces, $A \cup B$ es el conjunto de todos los números naturales. Expresado en símbolos matemáticos:

$$A = \{x \in N \text{ tal que } x \text{ es par}\}$$

$$B = \{x \in N \text{ tal que } x \text{ es impar}\}$$

$$\text{Entonces, } A \cup B = \{x \in N \text{ tal que } x \text{ es par ó } x \text{ es impar}\}.$$

Obsérvese que para determinar los valores de verdad de $A \cup B$, se requiere sustituir por valores numéricos del conjunto de números naturales y verificar si la proposición alternativa que resulta es verdadera o falsa.

Se puede resumir lo anterior de la manera siguiente:

Si $A = p(x)$ y $B = q(x)$, entonces $A \cup B = \{x \text{ tal que } p(x) \vee q(x)\}$

Definición:

La operación que a los conjuntos A y B hace corresponder el conjunto $A \cup B$ se llama **unión de conjuntos**.

Ejercicios 48 al 53

Negación y complementación

Hasta aquí se han visto proposiciones compuestas que se forman de dos proposiciones simples dadas, mediante el empleo de determinados enlaces gramaticales (y, o). A continuación se presenta un caso en que se aplica un enlace a una sola proposición.

Es posible la formación de una nueva proposición negando la proposición dada inicialmente. El valor de verdad de la proposición obtenida es el valor opuesto al de la proposición inicial. Es decir, si p es verdadera, la negación de p es falsa, y si p es falsa, la negación de p es verdadera.

Ejemplos 1.18:

1. Dada la proposición: "Hay sol". La negación sería "No hay sol".
2. "El día esta soleado". Su negación: "El día no está soleado"
3. "Pedro aprende con dificultad". Su negación: "Pedro aprende sin dificultad".
4. "3 es un número primo". Su negación: "3 no es un número primo".

En los ejemplos anteriores de ser verdadera la proposición dada, la negación sería falsa, pues afirma lo contrario a lo expresado por la proposición inicial.

Obsérvese que en la estructura gramatical del idioma castellano no siempre la negación se formula anteponiendo el adverbio "no", como en los ejemplos 1, 2 y 4. En ocasiones se modifica la preposición, como en el ejemplo 3 (mediante

el empleo de las preposiciones “con” y “sin”) o se varía algún adjetivo: “La leche está caliente” y su negación “la leche está fría”. Aunque en este caso también se acepta decir: “La leche no está caliente”. Por eso al formular en la lengua castellana una proposición y su negación debe atenderse al correcto empleo de las reglas de la sintaxis de la oración.

En el lenguaje cotidiano hay ocasiones en que negamos una proposición y la resultante no es la negación lógica del enunciado original. Por ejemplo, decimos “la leche no está fría” y esto no significa necesariamente: “la leche está caliente”. Frío y caliente son conceptos relativos, de manera que la leche que no está fría podría estar tibia o a temperatura ambiente (no estar ni fría, ni caliente).

Las matemáticas son más precisas en su lenguaje, sin embargo, se cometen errores de interpretación al emplear la negación de proposiciones. Por ejemplo:

- a) Decir que un número es **no negativo**, no quiere decir que el número en cuestión es **positivo**, ya que puede ser **cero**.
- b) Decir que una función **no es creciente** en un intervalo dado, no es decir que esa función es **creciente**. La función puede no ser creciente, ni decreciente en el intervalo (puede ser constante o tener un comportamiento irregular).

Análogamente a la negación de proposiciones, se puede formar la negación de una forma proposicional, pero primero se debe precisar su conjunto de verdad. Si al sustituir por un valor de la variable perteneciente al universo de referencia, se obtiene una proposición verdadera, la sustitución de este valor en la negación de la forma proposicional tiene que ser falsa. De igual manera, si la sustitución del valor fuera falsa, la negación tendría que ser verdadera.

Ejemplo 1.19: Sea $p(x) = \{x \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \text{ es par}\}$,

su negación sería $\{x \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \text{ es impar}\}$

Como se observa para un número natural cualquiera es posible determinar si es número par o no. La negación sería el valor opuesto: de ser par el número, entonces su negación sería que fuera impar.

Definición:

Se denomina **negación de una proposición simple** a la proposición que tiene como valor de verdad el opuesto al de la proposición inicial.

La negación se expresa con el símbolo: $\sim p$ y se lee “no p”.

Los posibles valores de verdad de la negación se muestran en la tabla de verdad:

Tabla de verdad de la negación	
p	$\sim p$
V	F
F	V

Definición:

Se llama **conjunto complemento** del conjunto A al conjunto formado por los elementos del universo que no están en el conjunto A.

Se denota: A^c .

Es decir, que $x \in A^c$ significa que $(x \notin A)$

Ejemplos 1.20:

1. Si $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y $A = \{0, 1, 4, 5, 7, 8\}$.
 $A^c = \{2, 3, 6, 9\}$.
2. Si U es el conjunto de las vocales del alfabeto español y $V = \{a, i, u\}$, entonces $V^c = \{e, o\}$.
3. Si el conjunto A coincide con todo el universo U, entonces $A^c = \emptyset$.
4. Si el conjunto $A = \emptyset$, entonces $A^c = U$.

Ejercicios 54 al 57

Diferencia de conjuntos

Dados dos conjuntos cualesquiera **A** y **B** en un mismo universo **U**, se han estudiado dos tipos de conjuntos que pueden asociarse a ellos:

El conjunto unión $A \cup B$ y el conjunto intersección $A \cap B$.

Sin embargo, aún es posible, formar un nuevo conjunto a partir de dos conjuntos dados **A** y **B**.

Definición:

Si **A** y **B** son dos conjuntos definidos en un mismo universo **U**, se llama **conjunto diferencia** de **A** y **B**, al conjunto formado por los elementos de **A** que no son elementos de **B**.

Se denota: $A \setminus B$ Se lee: **A** diferencia **B**

Definición:

La operación que a los conjuntos A y B hace corresponder el conjunto $A \setminus B$ se llama **diferencia de conjuntos**.

Ejercicios 58 y 59

Implicación

Definición

Una **implicación** es una proposición formada por dos proposiciones unidas por la expresión “sí ..., entonces ...”.

Se denota: $p \Rightarrow q$ Se lee: “Si p, entonces q” (p implica q)

Resultan de interés las implicaciones que se relacionan de algún modo. Así, por ejemplo, son implicaciones:

1. Si sale el sol, voy a la playa.
2. Si estudio, salgo bien en los exámenes.
3. Si x es múltiplo de 6, entonces x es múltiplo de 3.
4. Si dos ángulos son adyacentes, entonces suman 180° .
5. Si dos rectas cortadas por una secante son paralelas, entonces los ángulos correspondientes son iguales.
6. Si dos triángulos son iguales, entonces sus tres lados y sus tres ángulos son respectivamente iguales.

El valor de verdad de esta proposición compuesta depende de los valores de las dos proposiciones simples que la conforman. En el ejemplo 1 puede darse

el caso que el sol salga o no, pero aun saliendo el sol, puede que realmente vaya o que no vaya a la playa.

Al asegurar que la implicación es verdadera, se está afirmando que si sale el sol, **es seguro** que voy a la playa.

El procedimiento final para encontrar el valor de verdad de una implicación se establece en la siguiente tabla de verdad:

Tabla de verdad de la implicación		
p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Obsérvese que la línea horizontal 1 muestra el caso de una hipótesis verdadera con una conclusión verdadera, en que el razonamiento empleado ha sido correcto y que conduce a la implicación verdadera.

En la línea 2 se tiene el caso de una hipótesis verdadera y una conclusión falsa. Lo cual con un razonamiento sin errores es imposible, por eso se considera en este caso la implicación falsa.

Las líneas 3 y 4 parten de una hipótesis falsa. En este caso aunque el razonamiento sea correcto se puede llegar a una conclusión verdadera o falsa. Por eso en estos dos casos, se considera la implicación verdadera.

Ejemplos de implicaciones verdaderas y falsas:

Implicación	Valor de verdad
1. Sí $2 + 7 = 9$, entonces $3 + 7 = 10$	V
2. Si $2 + 7 = 9$, entonces $3 + 7 = 8$	F
3. Sí $2 + 7 = 8$, entonces $3 + 7 = 9$	V
4. Sí $2 + 7 = 8$, entonces $3 + 7 = 10$	V

CONCLUSIÓN:

Una implicación siempre es verdadera, excepto en el caso que siendo la proposición p verdadera, se obtenga una proposición q falsa, en cuyo caso se dice que la implicación es falsa.

En la construcción del lenguaje propio de la Matemática resulta de importancia el concepto de teorema que se expresa afirmando la validez de una proposición constituida a su vez por una premisa o proposición antecedente (denominada hipótesis) y una conclusión o proposición consecuente (denominada tesis); tal proposición compuesta es una implicación.

La veracidad de un teorema es consecuencia lógica inmediata de los axiomas o definiciones o es el resultado de una cadena de pasos deductivos en que intervienen proposiciones intermedias cuya veracidad se ha ido demostrando con anterioridad.

Obsérvese que también es posible establecer la implicación de formas proposicionales. Si $p(x)$ y $q(x)$ son formas proposicionales, la implicación se escribe: $p(x) \Rightarrow q(x)$ y se lee “Si $p(x)$, entonces $q(x)$ ”.

Para la determinación del valor de verdad de la implicación de formas proposicionales hay que examinar las posibilidades que resultan de la tabla de verdad.

Ejercicio 60

Equivalencia

Como se ha podido observar en el análisis de cada proposición compuesta estudiada resulta necesario prestar atención a los valores de verdad de las proposiciones simples que la componen. Resulta de interés, entonces, la noción de **equivalencia** de dos proposiciones.

Definición

Una **equivalencia** es una proposición formada por dos proposiciones unidas por la expresión "... si y solo si ...".

Se denota por: $p \Leftrightarrow q$ Se lee: "p si y solo si q" (p es equivalente a q)

La tabla de verdad de la equivalencia es la siguiente:

Tabla de verdad de la equivalencia		
p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ejemplos 1.21:

Equivalencia	Valor de verdad
1. $(2 + 3 = 5) \Leftrightarrow (4 + 3 = 7)$	V (ya que las dos proposiciones simples son verdaderas)
2. $(2 + 3 = 5) \Leftrightarrow (4 \cdot 3 = 7)$	F (ya que una proposición es verdadera y la otra falsa)
3. $(2 + 3 = 6) \Leftrightarrow (4 \cdot 3 = 7)$	V (ya que las dos proposiciones son falsas)

Al inicio de este capítulo se explicó el concepto de definición y se enfatizó que una forma correcta de formular una definición es mediante el empleo de la expresión "si y solo si", que permite conectar el nuevo vocablo con las características invariantes que lo determinan, de modo que lo definido tenga sentido y no sea contradictorio. Se mostró que una definición correcta de rectángulo es:

Un paralelogramo es un rectángulo si y solo si sus ángulos son rectos.

Una formulación que precisa mejor la equivalencia puede ser la siguiente:

Si ABCD es un paralelogramo,

$(ABCD \text{ es un rectángulo}) \Leftrightarrow (ABCD \text{ tiene sus ángulos rectos})$

Puede verse intuitivamente que si ABCD es verdadera, es decir un rectángulo, ABCD tiene sus ángulos rectos también es verdadera. En caso que ABCD no fuera rectángulo (es decir fuera falsa la proposición dada), también sería falsa que tuviera sus ángulos rectos. No es posible que ABCD no fuera rectángulo y tuviera sus ángulos rectos.

Ejercicio 61

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO

1.- Determina cuáles de los siguientes enunciados corresponden a proposiciones. Fundamenta en cada caso:

- a) La tierra es plana.
- b) El cero es un número natural.
- c) Resuelve todos los ejercicios por favor.
- d) $43 - 28 = 15$
- e) ¿Cuántas patas tiene el gato?
- f) $y = x + 2$
- g) El equipo Industriales será campeón en la presente serie nacional.
- h) La suma de dos números naturales es siempre un número natural.
- i) La diferencia de dos números naturales es siempre un número natural.
- j) El producto de dos números naturales es siempre un número natural.

2.- Cita dos afirmaciones que sean consideradas juicios falsos y que no han sido mencionadas en este libro de texto.

3.- Revisa los libros de texto de quinto y sexto grados y escribe en tu libreta:

- a) Tres definiciones de contenidos aritméticos y tres de contenidos geométricos.
- b) Tres proposiciones (teoremas) referidas a la Aritmética y tres a la Geometría.

4.- Dado el conjunto formado por el número 56, las vocales de la palabra maestro y las sillas del aula, determina si los siguientes objetos pertenecen o no al conjunto dado:

- a) La letra u.
- b) Una tiza.
- c) El televisor del aula
- d) El número que se obtiene al multiplicar 7 por 8.

5.- Analice con cuáles de los objetos que se mencionan a continuación es posible formar, desde el punto de vista matemático, un conjunto que esté determinado:

- a) Los números naturales del 1 al 20.
- b) Las letras del alfabeto español.
- c) Un triángulo.
- d) Una recta paralela.

6.- Con cada una de las frases siguientes se pretende indicar cómo determinar un conjunto. Decir en cada caso, si el conjunto queda bien determinado o no y explicar cada respuesta.

- a) El conjunto formado por los números: 7, 11, 25, 1 000.
- b) Un conjunto formado por números.
- c) Un conjunto de lápices.
- d) El conjunto de lápices rojos que hay en tu escuela.
- e) Un conjunto formado por: tu profesor de Matemática, tu papá y tus compañeros y compañeras de aula.
- f) El conjunto de letras.
- g) El conjunto de números.
- h) Un conjunto formado por las letras de la palabra Revolución.

7.- Escoge símbolos para denotar el conjunto y los elementos que lo constituyen en los conjuntos bien determinados del ejercicio anterior.

8.- Si se toma como universo de referencia el conjunto de números naturales, analizar si están bien determinados los siguientes conjuntos:

- a) El conjunto de números pares.
- b) El conjunto de números primos.
- c) El conjunto de divisores de 45.

9.- Denota el conjunto y los elementos que lo constituyen en los ejemplos de conjuntos bien determinados del ejercicio anterior.

10.- Si se toma como universo de referencia el conjunto de números naturales y se forma el conjunto **M** de los múltiplos de 3:

- a) Representa mediante un diagrama esta situación.
- b) Señala en el diagrama anterior que 9, 15 y 18 son múltiplos de 3.
- c) Señala en el diagrama que 10 no es múltiplo de 3. Señala además otro número natural que no sea múltiplo de 3.

11.- Escoge un universo de referencia formado por seis elementos.

- a) Representa gráficamente el universo y todos sus elementos.
- b) Representa gráficamente cuatro conjuntos en este universo.

12.- Escoge un universo de referencia formado por siete elementos.

- a) Representa gráficamente el universo y todos sus elementos.
- b) Representa gráficamente un conjunto unitario, un conjunto formado por dos elementos y el conjunto vacío.

13.- ¿Está bien determinado un conjunto por su representación gráfica?

14.- Si se considera como universo de referencia el conjunto de las letras del alfabeto español, escribe en notación tabular:

- a) El conjunto **A** formado por las vocales.
- b) El conjunto de las letras de la palabra **matemática**.
- c) El conjunto formado por las consonantes de la palabra **calcular**.

15.- Sea el universo **U** el conjunto de los números naturales. Escribe los siguientes conjuntos en notación tabular.

- a) El conjunto de los números pares comprendidos entre 2 y 20 ambos inclusive.
- b) El conjunto de los números impares menores comprendidos entre 5 y 45.
- c) El conjunto de los múltiplos de 8 menores que 75.
- d) El conjunto de los números pares menores que 100.

16.- Sea el universo **U** el conjunto de los números naturales. Escribe en notación tabular, mediante una forma abreviada, los siguientes conjuntos.

- a) El conjunto **P** de números pares.
- b) El conjunto de los múltiplos de 10.
- c) El conjunto de los números naturales mayores que 200.

17.- Describe con palabras cada uno de los siguientes conjuntos escritos en notación tabular:

- a) $I = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$
- b) $A = \{5, 7, 9, 11, 13, 15\}$
- c) $B = \{4, 8, 12, 16, \dots, 36\}$
- d) $C = \{a, b, c, d, \dots, z\}$

18 - Escribe en forma tabular los siguientes conjuntos:

- a) El conjunto formado por las letras p, q, r, s.
- b) El conjunto formado por los números naturales menores que 5.
- c) Los números pares menores que 12.
- d) los múltiplos de 5 menores e iguales que 50
- e) Conjunto formado por los números naturales que son primos y par a la vez
- f) El conjunto de los números primos menores que 20
- g) Los divisores de 24.
- h) $A = \{x \in \mathbb{N}; x < 5\}$
- i) $B = \{x \in \mathbb{N}; 5 \leq 5x \leq 45\}$
- j) $C = \{x \in \mathbb{N}; x \mid 18\}$
- k) $D = \{x \in \mathbb{N}; 3 \mid x \text{ y } x < 30\}$
- l) $E = \{x \in \mathbb{N}; 2 < x\}$

19.- Escribe en forma constructiva los siguientes conjuntos

- a) $\mathbf{A} = \{ 1, 3, 5, 7 \}$
- b) $\mathbf{B} = \{ 2, 4, 6, 8 \}$
- c) $\mathbf{C} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$
- d) $\mathbf{D} = \{ 0, 2, 4, 6, 8, \dots \}$
- e) $\mathbf{E} = \{ 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 \}$
- f) $\mathbf{F} = \{ 9, 25, 49, 81 \}$

20.- Escribe dos ejemplos de conjuntos:

- a) Nulo o vacío
- b) Unitario
- c) Finito de dos elementos
- d) Infinito

21.- Escribe ejemplos de un objeto que puede ser representado por distintos símbolos.

22.- Sea $\mathbf{U}$ el universo de referencia y $\mathbf{a}$ uno cualquiera de sus elementos. Cuál de las siguientes expresiones es cierta? ¿Por qué?

$$\mathbf{a} \in \mathbf{U}$$

$$\mathbf{a} \notin \mathbf{U}$$

23.- Escoge como universo de referencia el conjunto de números naturales y sea $\mathbf{P}$ el conjunto de números pares.

- a) Representa en un diagrama esta situación.
- b) Sitúa en el diagrama puntos que indiquen las siguientes relaciones:

$$4 \in \mathbf{P}, 12 \in \mathbf{P}, 1 \notin \mathbf{P}, 3 \in \mathbf{U}, 17 \notin \mathbf{P}$$

24.- Representa gráficamente el universo de referencia y un conjunto $\mathbf{A}$ de ese universo.

- a) Sitúa un punto que represente que un elemento del conjunto pertenece al conjunto $\mathbf{A}$. Escribir esta relación en símbolos.
- b) Sitúa un punto que represente que un elemento del conjunto no pertenece al conjunto $\mathbf{A}$. Escribir esta relación en símbolos.

25.- Si se toma como conjunto universo el conjunto de letras que forman el alfabeto español y $\mathbf{M}$ es el conjunto formado por las letras $\mathbf{r}$, $\mathbf{s}$ y $\mathbf{t}$, decir cuáles de las afirmaciones siguientes son correctas o incorrectas.

- a) $\mathbf{a} \in \mathbf{M}$
- b) $\mathbf{t} \in \mathbf{U}$
- c) $\mathbf{M} \ni \mathbf{a}$
- d) $\mathbf{s} \notin \mathbf{M}$
- e) $\mathbf{p} \notin \mathbf{U}$
- f) $\mathbf{M} \ni \mathbf{h}$

26.- Considera el universo formado por los "triángulos" que pueden trazarse en la hoja de tu libreta, así como los "vértices" de estos triángulos. Dibuja dos de estos triángulos y denótalos por $\mathbf{ABC}$ y $\mathbf{MNP}$. Representa en un diagrama:

- a) El conjunto formado por los triángulos $\mathbf{ABC}$ y $\mathbf{MNP}$.
- b) El conjunto formado por los vértices de los triángulos $\mathbf{ABC}$ y $\mathbf{MNP}$.

- c) El conjunto formado por el triángulo **ABC** y los vértices **M, N, P**.
d) ¿Puede representarse en este universo el segmento $\overline{AC}$?

Escribe en símbolos la relación que existe entre el segmento $\overline{AC}$ y el universo **U**.

27.- ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales?

$$A = \{ r, t, s \}$$

$$B = \{ s, t, r, s \}$$

$$C = \{ t, s, t, r \}$$

$$D = \{ s, r, s, t \}$$

28.- ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales?

$$A = \{ 1, 3, 5, 7 \}$$

$$B = \{ 3, 5, 7, 1 \}$$

$$C = \{ 3, 9, 5, 7 \}$$

$$D = \{ 1, 7, 5, 3 \}$$

$$E = \{ 1, 5, 7, 9 \}$$

29.- Considera los conjuntos:

A : Conjunto de los satélites naturales del planeta Tierra.

B : Conjunto de las vocales de la palabra "casa".

¿Se puede afirmar que **A = B**?

30.- Dados los conjuntos:

$$V = \{ v \mid v \text{ es letra de la palabra ROMA} \}$$

$$W = \{ w \mid w \text{ es letra de la palabra MAR} \}$$

$$X = \{ x \mid x \text{ es letra de la palabra MATEMÁTICA} \}$$

$$Y = \{ y \mid y \text{ es letra de la palabra AMOR} \}$$

$$Z = \{ z \mid z \text{ es letra de la palabra ARITMÉTICA} \}$$

Exprésalos en notación tabular y compáralos de dos en dos para determinar cuáles son iguales o subconjunto uno del otro.

31.- Sean **A, B** y **C** los conjuntos:

$$A = \{ 1, 2, c \}$$

$$B = \{ a, 2, 3 \}$$

$$C = \{ a, b, c \}$$

Se conocen las relaciones **A = B** y **B = C**.

¿Cuáles son los números naturales representados por **a, b** y **c**?

32.- Determina cuáles de los siguientes conjuntos son iguales:

$$A = \{ a; e; i; o; u \}$$

$$B = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es divisor de } 12 \}$$

$$\mathbf{C} = \{ 1; 12 \}$$

D : Conjunto de las vocales

$$\mathbf{E} = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es un número primo par} \}$$

$$\mathbf{F} = \{ 1; 2; 3; 4; 6; 12 \}$$

$$\mathbf{G} = \{ 2 \}$$

H: Conjunto de las consonantes

33.- Sea **U** el conjunto de los números naturales. Representa en un diagrama:

- a) El conjunto de los divisores de de 24.
- b) El conjunto de los divisores de de 24 que son múltiplos de 2.
- c) El conjunto de los divisores de de 24 que son múltiplos de 4.
- d) El conjunto de los divisores de de 24 que son múltiplos de 3.

Escribe las relaciones de inclusión que existen entre estos conjuntos.

34.- Sea el conjunto de números naturales el universo y **C**, **O**, **P** los conjuntos:

O : Conjunto de los múltiplos de 8.

C : Conjunto de los múltiplos de 4.

P : Conjunto de los números pares.

Demostrar que:

si $\mathbf{a} \in \mathbf{O}$, entonces $\mathbf{a} \in \mathbf{C}$ y

si $\mathbf{a} \in \mathbf{C}$, entonces $\mathbf{a} \in \mathbf{P}$.

¿Qué relaciones existen entre los conjuntos **C**, **O**, **P**?

35.- Sea **U** el conjunto de las letras del alfabeto español y sean:

$$\mathbf{V} = \{ \mathbf{d} \},$$

$$\mathbf{W} = \{ \mathbf{c}, \mathbf{d} \},$$

$$\mathbf{X} = \{ \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \}$$

$$\mathbf{Y} = \{ \mathbf{a}, \mathbf{b} \}$$

$$\mathbf{Z} = \{ \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d} \}$$

Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas:

- | | |
|--|--|
| a) $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$ | f) $\mathbf{X} \not\subset \mathbf{Z}$ |
| b) $\mathbf{V} \not\subset \mathbf{W}$ | g) $\mathbf{V} \subset \mathbf{X}$ |
| c) $\mathbf{W} \neq \mathbf{Z}$ | h) $\mathbf{Y} \not\subset \mathbf{Z}$ |
| d) $\mathbf{Z} \subset \mathbf{V}$ | i) $\mathbf{X} = \mathbf{W}$ |
| e) $\mathbf{V} \not\subset \mathbf{Y}$ | j) $\mathbf{W} \subset \mathbf{Y}$ |

36.- Sea el universo **U** el conjunto de las letras del alfabeto y sea $\mathbf{M} = \{ \mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t} \}$.

Diga cuáles de las afirmaciones siguientes son correctas, o incorrectas. Si alguna es incorrecta, decir por qué.

- a) $\mathbf{r} \in \mathbf{M}$
- b) $\mathbf{r} \subset \mathbf{M}$
- c) $\{ \mathbf{r} \} \in \mathbf{M}$
- d) $\{ \mathbf{r} \} \subset \mathbf{M}$

- 37.- Sea **U** el conjunto de los números naturales. Si **M** = {0, 1, 2}, escribe todos los subconjuntos de **M**.
- 38.- ¿Cómo se demuestra que un conjunto **A** no es subconjunto de otro conjunto **B**? Demuestra que, si **U** es el conjunto de números naturales, **A** = {2, 3, 4, 5} no es subconjunto del conjunto **B** formado por todos los números pares.
- 39.- Sean **A**, **B** y **C** conjuntos de un mismo universo **U**. Demuestra que: Si **A** $\subset$ **B** y **B** $\subset$ **C**, entonces **A** $\subset$ **C**. (Propiedad transitiva)
- 40.- Demuestra que si **A** y **B** son conjuntos de un mismo universo se tiene: **A** $\subset$ **B** y **B** $\subset$ **A** sí solo si **A** = **B**.
- 41.- Demuestra, utilizando el ejercicio anterior, que si **A** es subconjunto del conjunto vacío, entonces **A** = ϕ .
- 42.- Identifica en cada uno de los casos siguientes cuando se trata de una proposición y cuando de una forma proposicional
- _____ $8 = 7 + 1$
 - _____ $x + 1 = 0$
 - _____ El área de este cuadrado es 12 m^2
 - _____ El 11 es un número primo
 - _____ 16 es el cuadrado del número natural 4.
 - _____ Todo cuadrado es un rectángulo
 - _____ Triángulo ABC es equilátero.
- 43.- ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas? Fundamenta tu respuesta en cada caso.
- Existe un número natural x , para el que $x \cdot 0 = 0$.
 - Existe un número natural y , para el que $0 \cdot y = 1$.
 - Existe un número natural z , para el que $z \cdot 1 = 0$.
- 44.- Sea **U** el conjunto de números naturales y sean **A** = {1, 2, 3, 4} ; **B** = {2, 4, 6, 8} y **C** = {3, 4, 5, 6} Halla:
- A** $\cap$ **B**
 - A** $\cap$ **C**
 - B** $\cap$ **C**
 - B** $\cap$ **B**
- 45.- Sea **R** el conjunto de los rectángulos del plano y **P** el conjunto de los rombos del plano. Diga qué elementos forman el conjunto **R** $\cap$ **P**.

- 46.- Sea r y s dos rectas que se cortan en M . Si R es el conjunto formado por los puntos de la recta r y S el conjunto formado por los puntos de la recta s , cómo está formado el conjunto $R \cap S$.
- 47.- Sea I el conjunto de los números naturales impares y P el conjunto de los números pares. Determina el conjunto numérico que resulta de la intersección de I y P .
- 48.- Sea U el conjunto de números naturales y sean
 $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{2, 4, 6, 8\}$ y $C = \{3, 4, 5, 6\}$
Halla:
- a) $A \cup B$ c) $B \cup C$
b) $A \cup C$ d) $B \cup B$
- 49.- Sea I el conjunto de los números naturales impares y P el conjunto de los números naturales pares. Determina el conjunto numérico que resulta de la unión de I y P .
- 50.- Determina la unión de los conjuntos M y N , si:
a) $M = \{x \text{ es un número natural mayor que } 5\}$
 $N = \{y \text{ es un número natural tal que menor } 3\}$
b) $M = \{x \text{ es un número natural par}\}$
 $N = \{y \text{ es un número natural múltiplo de } 4\}$
- 51.- Sean $U = \{a, b, c, d, e\}$; $A = \{a, b, d\}$ $B = \{b, d, e\}$.
Halla: a) $A \cup B$ b) $A \cap B$
- 52.- Sea A el conjunto de los números naturales mayores que 1 y B el conjunto de los números naturales mayores que 7. Determina $A \cap B$ y $A \cup B$.
- 53.- Demuestra que si $A \subset B$, entonces:
a) $A \cap B = A$ b) $A \cup B = B$
- 54.- Escribe las proposiciones que son las negaciones lógicas de las proposiciones siguientes:
- a) Todas las luces del aula están encendidas.
b) Hay luces en el aula que están encendidas.
c) Existe un número natural x , tal que x es menor que 1.
d) Todos los números naturales son pares.
e) Todos los números primos son impares.
f) Existen números impares n para los que $n^3 + 1$ es par.
g) Existen números pares n para los que $n^3 + 1$ es par.

h) El cociente de dos números naturales es siempre un número natural.

- 55.- Sea $U = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ y sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$;
 $B = \{2, 4, 6, 8\}$ y $C = \{3, 4, 5, 6\}$

Hallar:

- | | | |
|-------------------|-------------------|--------------|
| a) A^c | b) B^c | c) C^c |
| d) $(A \cap C)^c$ | e) $(A \cap B)^c$ | d) $(A^c)^c$ |

- 56.- Si en un universo U se consideran dos conjuntos A y B tales que $A \subset B$
¿Cómo pudiera definirse el *complemento de A respecto a B*?

- 57.- Si A es un conjunto vacío en un universo U , hallar:

- a) $A \cap A^c$
b) $A \cup A^c$

- 58.- Sea U el conjunto de los números naturales y sean los conjuntos
 $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{2, 4, 6, 8\}$ y $C = \{3, 4, 5, 6\}$

Hallar:

- | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|
| a) $A \setminus B$ | b) $C \setminus A$ | c) $B \setminus C$ |
| d) $B \setminus A$ | e) $A \setminus C$ | f) $B \setminus B$ |

- 59.- Representa gráficamente los conjuntos diferencias del ejercicio anterior.

- 60.- Dadas dos proposiciones p y q , escriba la proposición compuesta $p \Rightarrow q$
empleando la expresión "si ..., entonces".

a) p : ΔABC es un triángulo isósceles

q : ΔABC es un triángulo equilátero

Diga si la implicación que resulta es verdadera o falsa y fundamente su respuesta.

b) p : a es divisible por 4

q : $2a$ es divisible por 8

Diga si la implicación que resulta es verdadera o falsa y fundamente su respuesta.

c) p : $ABCD$ es un paralelogramo

q : $ABCD$ es un rectángulo

Diga si la implicación que resulta es verdadera o falsa y fundamente su respuesta.

d) p : $3x + 2 = x + 4$

q : $x = 1$

Diga si la implicación que resulta es verdadera o falsa y fundamente su respuesta.

61.- Dadas dos proposiciones p y q, escriba la proposición compuesta $p \Leftrightarrow q$ empleando la expresión "sí y solo sí".

a) p: dos rectas son paralelas

q: las dos rectas son equidistantes

Diga si la implicación que resulta es verdadera o falsa y fundamente su respuesta.

b) p: ΔABC es un triángulo equiángulo

q: ΔABC es un triángulo equilátero

Diga si la implicación que resulta es verdadera o falsa y fundamente su respuesta.

c) p: a es un número natural impar

q: a es divisible por 2.

Diga si la implicación que resulta es verdadera o falsa y fundamente su respuesta.

62.- Determina el valor de verdad de la forma proposicional (implicación o equivalencia), para el valor dado a la variable:

___ Si $x = 3$, entonces $x^2 = 9$.	Para $x = 3$
___ Si $x = 3$, entonces $x^2 = 9$.	Para $x = -3$
___ Si $x^2 = 9$, entonces $x = 3$.	Para $x = -3$
___ Si $x^2 = 9$, entonces $x = 3$.	Para $x = 3$
___ $x^2 = 9$ si y solo si $x = 3$.	Para $x = -3$
___ $x^2 - 3x = 0$ si y solo si $x(x-3) = 0$.	Para $x = 3$
___ $x^2 - 3x = 0$ si y solo si $x(x-3) = 0$.	Para $x = -3$
___ $x^2 - 3x = 0$ si y solo si $x(x-3) = 0$.	Para $x = 0$
___ $x^2 - 3x = 0$ si y solo si $x(x-3) = 0$.	Para $x = 2$

EJERCICIOS VARIADOS DEL CAPÍTULO

- 1.- Qué elementos tiene el conjunto formado por los cocientes que se obtienen al dividir por 3 (en los casos en que tenga sentido plantear la división), los números 6, 9, 15, 22, 30, 41, 52, si se toma como universo de referencia:
 - a) El conjunto de números naturales.
 - b) El conjunto de números fraccionarios.
- 2.- Escribe en dos formas diferentes (por extensión y por comprensión) los siguientes conjuntos de números:
 - a) P: conjunto formado por los números naturales pares desde el 0 hasta el 10.
 - b) Q: conjunto de los números impares comprendidos entre cero y diez.
 - c) R: conjunto de los números naturales primos menores o iguales que 29.
 - d) S: conjunto de los números naturales divisores de 32.
 - e) T: conjunto de los números naturales que son múltiplos de 3.
- 3.- Determina el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justifica las que sean falsas.
 - a. ☐ Los elementos se denotan con letra minúscula y los conjuntos con letra mayúscula
 - b. ☐ Entre los elementos y los conjuntos se establece una relación de pertenencia.
 - c. ☐ El conjunto nulo o vacío es el que tiene al menos un elemento.
 - d. ☐ Todo conjunto es subconjunto de sí mismo.
 - e. ☐ $K = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ y $V = \{ a, e, i, o, u \}$; $K = V$
- 4.- En un examen con cinco preguntas de Verdadero o Falso, se conoce que:
 - a) Hay más preguntas verdaderas que falsas.
 - b) No existen tres preguntas seguidas con el mismo valor de verdad.
 - c) La segunda tiene el mismo valor de verdad que la primera.
 - d) La segunda y la quinta tienen valores contrarios.¿Cuál es el valor de verdad de cada pregunta?
5. Razona y dime qué tipo de polígono soy:
 - Tengo 3 ó 4 lados,
 - mis ángulos son todos iguales y
 - mis lados no son todos iguales.

6.- Razona y dime quién soy:

- Soy un número par,
- soy mayor que 20 y menor que 30,
- no soy 25 y
- la suma de mis dígitos es igual a 8.

7.- Sean los conjuntos **E** y **F** formados por:

E : Conjunto de los múltiplos de 9.

F : Conjunto de los números la suma de cuyas cifras es múltiplo de 9.

Probar que **A = B**.

(Sugerencia: Observa que $10 = 9 + 1$, $100 = 99 + 1$, ...)

Qué se puede decir de las expresiones:

El número natural **a** es múltiplo de 9.

La suma de las cifras del número natural **a** es múltiplo de 9.)

8.- Considera los conjuntos:

A : Conjunto de los cubanos de más de 3 m de altura.

B : Conjunto de los gatos con alas.

¿Se puede afirmar que **A = B** ?

9.- El conjunto vacío es un objeto matemático. Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, justificando la respuesta:

a) $\phi \in \{\phi\}$

b) $\phi \notin \phi$

c) Para cualquier objeto matemático t , $t \notin \{\phi\}$

10.- En un grupo escolar hay 20 alumnos. De ellos se conoce que 10 pertenecen al círculo optativo de Matemática, 8 al de Historia y 7 al de Literatura. ¿Cuántos alumnos participan:

a) al menos en un círculo.

b) en no más de un círculo.

11.- Una encuesta a un grupo de 36 alumnos indicó que 15 de ellos tenían al menos un perro, 14 tenían al menos un gato y 11 no tenían ni perros ni gatos. ¿Cuántos alumnos tenían ambos animales?

12.- Un torneo individual de tenis de mesa se realiza entre 6 jugadores. ¿cuántos partidos diferentes pueden jugarse en la primera vuelta?

13.- Un maestro pide a sus alumnos que dado el conjunto

$$U = \{3, 6, 12, 15, 21, 27, 42, 51\},$$

encuentren un subconjunto de estos números que sume 100.

- a) Pedro comienza a descartar posibilidades escribiendo todos los subconjuntos con un elemento, después todos los de dos elementos y así sucesivamente hasta el propio conjunto U . Al final halla la suma en cada caso.
- b) Juana se percató de que todos los elementos de U son múltiplos de 3. Como sabe que la suma de varios múltiplos de 3 tiene que ser también múltiplo de 3, llega a la conclusión de que ninguna de estas sumas puede dar 100 (pues 100 no es múltiplo de 3).

¿Cuál es la respuesta que dará al maestro cada uno de ellos? ¿Qué opinas sobre los razonamientos que siguieron para llegar a su respuesta?

14.- Sean los conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{N}; 0 < x < 10\}$$

$$B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$$

C : Los números pares menores que 10.

$$D = \{0; 3; 6; 9; 12\}$$

$$E = \{x \in \mathbb{N}; 0 \leq x \leq 10\}$$

$$F = \{4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$$

$$G = \{9, 25, 49, 81\}$$

a). Escribe en la línea el signo $\subset$, $\not\subset$, $\in$, $\notin$, $\neq$, $=$ según convenga:

$$B \underline{\hspace{1cm}} A \quad 0 \underline{\hspace{1cm}} A \quad D \underline{\hspace{1cm}} A \quad C \underline{\hspace{1cm}} B \quad 3 \underline{\hspace{1cm}} B \quad E \underline{\hspace{1cm}} A \quad 5 \underline{\hspace{1cm}} E$$

b) Forma un conjunto H que sea subconjunto del conjunto C .

c) Halla:

$$D \cap B \quad B \cup D \quad B / D$$

$$F \cap G \quad F \cup G \quad D / B$$

$$F \cap E \quad A \cup E \quad F / G$$

15.- Sea U el universo formado por los divisores de 20 y sean los conjuntos:

A : Conjunto formado por los elementos de U que son pares.

B : Conjunto formado por los elementos de U que son múltiplos de 9.

C : Conjunto formado por los elementos de U que son múltiplos de 5.

Comprobar que:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

- 16.- Demuestra que para conjuntos cualesquiera se cumple que:
 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Ley asociativa de la unión de conjuntos)
- 17.- Sea U el universo formado por los divisores de 36 y sean los conjuntos:
A : Conjunto formado por los elementos de U que son pares.
B : Conjunto formado por los elementos de U que son múltiplos de 3.
C : Conjunto formado por los elementos de U que son múltiplos de 6.
 Comprobar que:
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- 18.- Demuestra que para conjuntos cualesquiera se cumple que:
 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (Ley asociativa de la intersección de conjuntos)
- 19.- De los 34 alumnos de un grupo escolar, hay 14 que saben montar bicicleta, 25 que saben nadar y 9 que saben hacer las dos cosas. ¿Cuántos alumnos del grupo no saben ni nadar, ni montar bicicleta?
- 20.- En un grupo de 1 000 hombre, 600 juegan baloncesto, 720 practican béisbol y 560 practican natación. Se sabe también que 380 juegan baloncesto y practican béisbol, 270 juegan baloncesto y practican natación, 350 practican béisbol y natación y 80 juegan baloncesto y practican natación y béisbol.
- a) ¿Cuántos hombres del grupo no juegan baloncesto o no practican béisbol, o no practican natación?
- b) ¿Cuántos no juegan baloncesto?
- (Sugerencia: Utilizar diagramas conjuntistas)
- 21.- En un grupo de 100 alumnos, 60 tienen inclinación hacia la Matemática, 40 hacia la Química y 45 hacia la Física. Se sabe además que:
 10 tienen inclinación hacia las tres asignaturas
 25 tienen inclinación hacia Matemática y Física
 17 tienen inclinación hacia Matemática y Química
 20 tienen inclinación hacia Química y Física
- a) ¿Cuántos tienen inclinación únicamente hacia la Matemática?
 ¿Física? ¿Química?
- b) ¿Cuántos no tienen inclinación hacia alguna de las tres?
- (Sugerencia: Utilizar diagramas conjuntistas)

22.- Sea el conjunto universal $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y sean los conjuntos:

$A = \{a, b, c, d, e\}$; $B = \{a, c, e, g\}$ y $C = \{b, c, f, g\}$

Hallar:

a) $A \cup B$

f) $A \cup B^c$

b) $B \cap A$

g) $A^c \cap B^c$

c) B^c

h) $B^c \setminus A^c$

d) $B \setminus A$

i) $(A \cap B^c)^c$

e) $A^c \cap B$

23.- Demostrar la siguiente afirmación:

Sean A y B dos conjuntos de un universo U .

Si $A \subset B$, entonces $A \setminus B = \emptyset$

25.- Si A y B son dos conjuntos en un universo U , demostrar que:

$$B \setminus A \subset A^c$$

Capítulo 2

Los números naturales

2.1 El conjunto de los números naturales

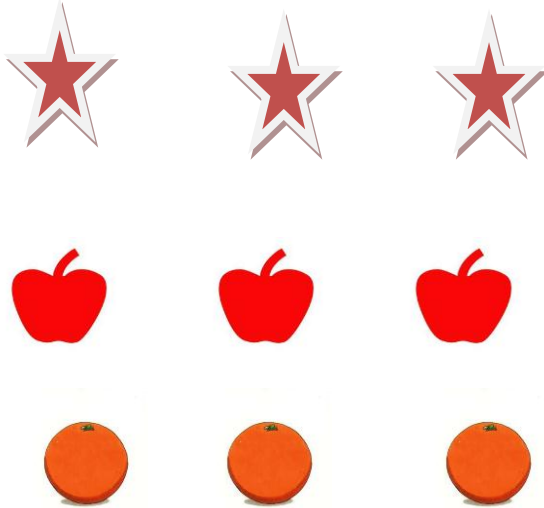
Antes de que surgieran las cifras para la representación de cantidades, el ser humano usó otros recursos para contar, utilizaban para ello objetos como [piedras](#), palitos de [madera](#), [nudos](#) en una cuerda, o simplemente los dedos. Por ejemplo, para controlar las ovejas del rebaño colocaban una piedra por cada oveja que salía a pastar, al regresar retiraban una piedra por cada oveja que entraba al corral y así controlaban si habían regresado todas. En Perú los incas hacían un nudo en una cuerda por cada cesta de cereales que recolectaban.

Más adelante comenzaron a utilizar los símbolos gráficos como señales para contar, por ejemplo marcas en una vara o simplemente trazos específicos sobre la arena. Como se puede apreciar en los ejemplos anteriores, comparaban los conjuntos, establecían una correspondencia entre los nudos y las cestas de cereal o entre las piedras y las ovejas para determinar si había la misma cantidad. A esa cantidad le asociaban un símbolo, esa actividad de contar y comparar los conjuntos se mantiene hasta nuestros días y se precisa que cuando los conjuntos que se comparan tienen la misma cantidad de elementos, tienen esa característica común que permite asociarles un símbolo llamado número.

De esta manera es muy probable que surgieran en nuestra América los quipus. Los Incas, antiguos pobladores de América del Sur (Perú, Ecuador, Bolivia y parte de Colombia, Chile y Argentina) desarrollaron los **quipus** como un sistema rudimentario de registro de información numérica. Constan de un cordel horizontal del cual penden varias cuerdas delgadas trenzadas. Estas eran de diferentes tamaños y en ellas se trenzaban grupos de nudos situados a intervalos distintos. Para representar el número 304, por ejemplo, la cuerda llevaba 4 nudos en el extremo inferior, dejaba la zona inmediata superior sin nudos y la superior a esta, con tres nudos.

En preescolar y primer grado los niños realizan actividades como la siguiente:

- Compara las estrellas con las manzanas
- Compara las estrellas con las naranjas
- Compara las naranjas con las manzanas



Los niños observan que:

- Hay tantas estrellas como manzanas.
- Hay tantas estrellas como naranjas.
- Hay tantas manzanas como naranjas.

De estos tres conjuntos es posible expresar:

- Tienen la misma cantidad de elementos, a la que asociamos un símbolo:
3. Este símbolo es un número expresado en el sistema de numeración que aprendemos desde pequeños y que en nuestro lenguaje se llama **tres**. En otro sistema de numeración conocido se escribe **III** y se asocia en inglés a la palabra **three**, en francés a **trois** y en alemán a **drei**.
- Si se toman dos conjuntos, por ejemplo conjunto de estrellas y conjunto de manzanas (pero, también pudieran ser estrellas y naranjas o manzanas y naranjas) es posible asociar a cada elemento del conjunto de estrellas un único elemento del conjunto de manzanas, de tal manera que cada elemento del conjunto de manzana sea correspondiente de un único elemento del conjunto de estrella. Cuando esto ocurre se dice que los dos conjuntos son equipotentes.

Definición:

Dados dos conjuntos A y B, se dice que **A es equipotente a B** si y solo si es posible asociar a cada elemento del conjunto A un único elemento del conjunto B de tal manera que también cada elemento del conjunto B sea correspondiente de un único elemento del conjunto A.

Teorema:

La relación “**equipotente a**” es una relación de equivalencia entre conjuntos.

Para que la relación “equipotente a” sea una relación de equivalencia debe cumplir las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Reflexiva: Todo conjunto es equipotente con él mismo.

En efecto, si A es un conjunto cualquiera, es posible asociar a todo elemento $a \in A$ un único elemento de A: el propio elemento a. A su vez, todo elemento de A es correspondiente de un único elemento de A: el mismo elemento.

Simétrica: Si el conjunto A es equipotente a B, entonces el conjunto B es equipotente a A.

Como el conjunto A es equipotente a B, basta con asociar a todo elemento del conjunto B el único elemento del conjunto A del cual es correspondiente.

Transitiva: Si el conjunto A es equipotente al conjunto B y el conjunto B es equipotente al conjunto C, entonces el conjunto A es equipotente al conjunto C.

La idea para demostrar la propiedad transitiva es encontrar una forma de asociar todo elemento de A con los elementos de C. La vía es asociar a todo elemento de A con el correspondiente en C del elemento que le corresponde en B.

Luego, la relación “equipotente a” es un relación de equivalencia.

Esta propiedad de los conjuntos equipotentes permite asegurar que estos tienen la misma cantidad de elementos.

En el ejemplo de las estrellas, las manzanas y las naranjas se puede observar que esos conjuntos equipotentes tienen la misma cantidad de

elementos. Precisamente esta propiedad es característica de los conjuntos equipotentes.

Ejemplo:

Sean los conjuntos: $A = \{1, 3, 5, 7\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8\}$

Estos conjuntos son equipotentes, pues es posible asociar a cada elemento de A un único elemento de B, de tal manera que también cada elemento del conjunto B sea correspondiente de un único elemento del conjunto A. Los conjuntos A y B tienen la misma cantidad de elementos. En este caso tienen 4 elementos. De manera general, la equipotencia entre conjuntos introduce un nuevo objeto matemático para caracterizar a los conjuntos equipotentes entre sí: el cardinal de conjuntos.

Definición:

Si los conjuntos A y B son equipotentes se dice entonces que tienen el mismo cardinal.

De esta manera los conjuntos equipotentes tienen el mismo cardinal, cuando se trata de conjuntos finitos equipotentes se habla que tienen la misma cantidad de elementos.

En el ejemplo de los conjuntos: $A = \{1, 3, 5, 7\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8\}$, el cardinal de los conjuntos anteriores se expresa así: $\text{Card}(A) = 4$, $\text{Card}(B) = 4$

Ejemplo:

Sea

D: el conjunto formado por las cinco vocales.

E: el conjunto de las vocales de la palabra evaluación.

Si estos conjuntos se expresan en notación tabular se observa:

$D = \{a, e, i, o, u\}$

$E = \{e, a, u, i, o\}$

Estos conjuntos son equipotentes, luego tienen la misma cantidad de elementos, cada uno tiene cinco elementos $\text{card}(D) = 5$, $\text{card}(E) = 5$. Es fácil observar que ambos conjuntos están formados por las cinco vocales, en este caso se puede afirmar que esos conjuntos son iguales y se escribe $D = E$. Los conjuntos iguales tienen los mismos elementos. Dos cuestiones más se pueden apreciar:

- Al denotar los conjuntos, no importa en qué orden aparecen los elementos.
- Los elementos se consideran una sola vez (como en el ejemplo, la **a** de evaluación).

Se puede concluir que:

Si A es equipotente a B, entonces $\text{card}(A) = \text{card}(B)$.

Si A no es equipotente a B, entonces $\text{card}(A) \neq \text{card}(B)$.

Debe notarse que para que lo expresado tenga sentido, la definición de cardinal de conjuntos debe satisfacer las propiedades de la igualdad: reflexiva, simétrica y transitiva. A partir de la definición de “equipotente a” y de la demostración de las propiedades antes enunciadas para la relación de equipotencia, se puede comprobar que se satisfacen estas propiedades también para la igualdad de cardinales de conjuntos.

En la práctica, cotidianamente, se establecen correspondencias entre objetos que constituyen conjuntos finitos equipotentes. Ejemplo:

En la clase de Matemática de segundo grado, cada pionero usa una pañoleta, coloca sobre la mesa el libro de Matemática, el cuaderno, la libreta y cada uno tiene un lápiz. Independientemente de los objetos mencionados; niños, pañoletas, libros, cuadernos, libretas, lápices, todos tienen en común la cantidad de elementos, **todos tienen la misma cantidad de objetos**. Estos conjuntos son equipotentes, a todos les corresponde el mismo **cardinal** que se representa con un **número natural**, que puede ser 20, (15 ó 30) niños, pañoletas, libros, cuadernos, libretas o lápices.

Definición:

Un **número natural** es el cardinal de un conjunto finito y de todos aquellos conjuntos equipotentes a él.

Es importante comprender el significado de un número natural: es un objeto matemático que se interpreta como **cardinal** de un conjunto finito y de todos los conjuntos equivalentes a él. El significado del número natural como cardinal se refiere a la cantidad de elementos de un conjunto finito.

En el capítulo 1 se introdujeron los conceptos de conjuntos finitos e infinitos. Una definición más rigurosa es la siguiente:

Un conjunto F es **finito** si y solo si F no contiene ningún subconjunto propio S , tal que S sea equipotente con F .

Un conjunto que no es finito, se denomina **infinito**.

Ejemplo

El conjunto de los números naturales pares es un **subconjunto propio** del conjunto de los números naturales. Sin embargo, es posible establecer una correspondencia que asocia a cada número natural, su duplo.

Naturales	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
Naturales pares	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	...

De manera que, para cada número natural hay un número natural par y viceversa. El conjunto de los números naturales pares es **equipotente** al conjunto de los números naturales.

Lo anteriormente expuesto se puede resumir en:

- **El cardinal de un conjunto es un número natural si es el cardinal de un conjunto finito.**
- **El conjunto de los números naturales es un conjunto infinito.**
- **El cardinal del conjunto de los números naturales no es un número natural.**

Un **número natural** es un objeto matemático que mediante procesos de abstracción y generalización se obtiene una representación mental de la cantidad de elementos que tienen como propiedad común una clase de conjuntos finitos equipotentes. La representación verbal o gráfica de un **número natural** es un [símbolo](#) que indica una cantidad. Estos símbolos y con ellos los números naturales que representan, se usan para contar los elementos de un [conjunto](#). Ejemplo:

Mediante el empleo de la propiedad de los conjuntos finitos equipotentes de tener la misma cantidad de elementos se introduce el concepto de número natural.

El cardinal de un conjunto se puede expresar con símbolos, por ejemplo:

- Φ es el único conjunto carente de elementos y al cardinal de Φ se le denomina “cero” y se denota por el símbolo: 0 .
- Los conjuntos unitarios (constituidos por un solo elemento) son equipotentes y al cardinal se le denomina “uno” y se denota por el símbolo: 1.
- Los conjuntos binarios (constituidos por solo dos elementos) son equipotentes y al cardinal se le denomina “dos” y se denota por el símbolo: 2. Obsérvese que los conjuntos binarios se obtienen adicionando un elemento a los conjuntos unitarios.
- Del mismo modo, agregando un nuevo elemento a cada conjunto binario, se obtiene el número “tres”, que es el cardinal de los nuevos conjuntos resultantes.
- Procediendo de manera análoga y de forma sucesiva se obtiene la sucesión de números naturales: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

El símbolo gráfico de un número recibe el nombre de cifra. Una **cifra** es un signo que sirve para representar un número. Los símbolos o cifras que se utilizan para los números naturales son: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. Con estas cifras se representan los primeros diez números naturales y lo curioso es que con estas cifras se puede representar cualquier número natural, por grande que este sea.

Es un error conceptual creer que las palabras cero, uno, dos, etcétera o los símbolos 0, 1, 2, etcétera son los números naturales. Esas palabras y símbolos son solo el medio para representar un número, no son el número, del mismo modo que un dibujo de un gato, no es el gato.

Ejercicios del 1 al 3

2.2 Uso de los números naturales

En el medio circundante constantemente se emplean los números naturales, pero ¿todos significan lo mismo? Observe los siguientes enunciados:

- El 261 45 67 es el número del teléfono de un amigo.
- El número 10 aparece en la camisa de un jugador de beisbol.
- Un cartón de huevos contiene 30 huevos.
- 24 estudiantes se encuentran presentes.
- El 5º festival de la canción.
- Los decimosextos juegos panamericanos.
- El aniversario 50 de la victoria de Playa Girón.
- El número del carné de identidad: 5201 1407 433
- La ruta de ómnibus: 265
- Las 312 páginas de un libro.

En todos los casos aparecen números naturales. En unos casos para expresar la cantidad de cosas: los 30 huevos, los 24 estudiantes, las 312 páginas del libro. En otros sirven para establecer un orden, 5º festival, 16º juegos, aniversario 50 y en otros expresan un número que tiene un significado predeterminado, el número de teléfono, el de la camisa, el carné de identidad, la ruta de ómnibus.

Se puede concluir:

Los números naturales son usados para expresar cantidades (**cardinales** de conjuntos finitos: 30, 24, 312), pero también se emplean para describir la posición de un elemento en una secuencia ordenada, como se generaliza con el concepto de **ordinal** (5º festival, 16º juegos, aniversario 50).

Los números se usan en la vida diaria además como identificadores, para números de teléfono, numeración de calles, carné de identidad, tarjetas magnéticas, etc.). En estos casos se emplean como **códigos**. Los códigos en su origen tienen un significado cardinal, ordinal o mezcla de ambos, pero en su uso suelen apartarse de ese significado. Así por ejemplo, la numeración de los

trajes de los jugadores de un equipo de baloncesto pudieron representar un orden, pero con el uso hay jugadores que se aferran a un número y se mueven de equipo con él; también hay números que no se usan más en un equipo como homenaje al desempeño de algún jugador que ya no está activo y jugó con él. El número del carnet de identidad, es también un código, ya que parte de él es una fecha y otra parte tiene otros significados, que pueden ser ordinales.

Observe la siguiente información que ilustra cómo se pueden combinar en la práctica los diferentes significados:

De los 16 estudiantes participantes en la competencia de atletismo resultaron ganadores el número 13 que obtuvo el 1. lugar, el número 8 consiguió el 2. lugar y en el 3. lugar se empataron el número 6 y el 12. En este caso el 16 indica la cantidad de participantes en el evento (cardinal) los números 13; 8; 6 y 12 se utilizan como código para identificar a cada atleta y es evidente el carácter ordinal de 1. ; 2. y 3.

En resumen:

Los números naturales tienen significados de:

Cardinal: Determinan la cantidad de elementos de los conjuntos finitos.

Ordinal: Describen la posición de un elemento en una secuencia.

Código: Se establece un significado de interés para una identidad

Ejercicios del 4 al 8

2.3 La sucesión de los números naturales

El conjunto de los números naturales se denota por N y se puede representar así: $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$

Ese conjunto está ordenado y forma una sucesión que cumple algunas propiedades conocidas como "[axiomas de Peano](#)" que rigen la estructura de los números naturales. La sucesión comienza con el cero, que es el cardinal del conjunto vacío. Cada número natural representado a partir de él, representa a un conjunto que tiene un elemento más que el representado por el número anterior.

Los cinco axiomas de Peano pueden expresarse de la siguiente manera:

1. El 0 es un número natural.
2. Si n es un número natural, entonces el sucesor de n también es un número natural.
3. El 0 no es el sucesor de ningún número natural.
4. Si hay dos números naturales n y m con el mismo sucesor, entonces n y m son el mismo número natural.
5. Si el 0 pertenece a un conjunto, y dado un número natural cualquiera, el sucesor de ese número también pertenece a ese conjunto, entonces todos los números naturales pertenecen a ese conjunto.

En la escuela se resumen de forma más breve planteando:

- Cero es el primer número natural.
- Cada número natural n tiene un sucesor $n+1$ que es otro número natural.
- Todo número natural excepto el cero tiene un antecesor que es $n-1$.
- Mediante la adición sucesiva de 1 se obtienen infinitos números naturales.
- No existe el mayor número natural.

Ejercicios 9 y10

2.4 Sistema de posición decimal

Para contar, tal como hacían nuestros ancestros, se puede trazar rayas. Por ejemplo, si un inspector estatal observa los vehículos que transitan de Matanzas a La Habana y cuenta los automóviles que pasan con matrícula de La Habana, cada vez que pasa uno, traza una raya y al final se tiene:

//////////

Si se cuentan las rayas, se obtiene 17. En la medida en que se agrega más rayas, se dificulta la visualización. Es por eso que se emplean otros recursos para distinguir mejor las cantidades que se tienen. Una manera bastante empleada es agrupar de 5 en 5, trazando cuatro rayas paralelas y una oblicua:

||||| ||| ||

Este sistema de representación es muy rudimentario, como lo que es también el de los quipus. Los sistemas de numeración más enraizados en nuestras sociedades son los sistemas de numeración posicional y el sistema de numeración romano.

Un sistema de numeración es un conjunto de reglas que sirven para expresar y escribir números. En el **sistema de posición decimal** estas reglas son:

1. Todo número se puede escribir empleando las cifras básicas: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
2. Diez unidades de un orden cualquiera forman una unidad del orden inmediato superior.
3. Toda cifra básica escrita a la izquierda de otra representa un valor relativo, diez veces mayor al que representaría en una posición correspondiente al orden inmediato inferior.

El número de símbolos permitidos en un sistema de numeración posicional se conoce como **base** del sistema de numeración. Si un sistema de numeración posicional tiene base b significa que disponemos de b símbolos diferentes para escribir los números, y que b unidades forman una unidad de orden superior.

El **sistema decimal** es un [sistema de numeración posicional](#) en el que las [cantidades](#) se representan utilizando como [base](#) el número [diez](#), por lo que se compone de diez cifras diferentes (llamadas cifras básicas o dígitos): [cero](#) (0); [uno](#) (1); [dos](#) (2); [tres](#) (3); [cuatro](#) (4); [cinco](#) (5); [seis](#) (6); [siete](#) (7); [ocho](#) (8) y

[nueve](#) (9). Este conjunto de símbolos se conoce como indo-arábigo por su origen árabe e [hindú](#).

Un **dígito numérico** es un símbolo. El nombre **dígito** proviene del latín **dígitus**, dedo, porque los 10 [dedos](#) corresponden a los 10 dígitos en el sistema numérico común de base 10. Los dígitos se combinan para escribir las cifras. A cada número le corresponde una cifra (Ejemplo: 97 086) y un numeral (noventa y siete mil ochenta y seis). Este número (**polidígito**) se escribe con los dígitos: "9", "7", "0", "8", "6"

Formación de las potencias de diez

Con diez unidades de un orden se obtiene el orden inmediato superior.

- 1 unidad ----- $1 = 10^0$ ----- uno
- 10 unidades forman una decena----- $10 \cdot 1 = 10 = 10^1$ ----- diez
- 10 decenas forman una centena----- $10 \cdot 10 = 100 = 10^2$ ----- cien
- 10 centenas forman un millar----- $10 \cdot 100 = 1000 = 10^3$ ----- mil
- 10 unidades de millar forman una decena de millar ----- $10 \cdot 1000 =$
 $= 10\,000 = 10^4$ -----diez mil
- 10 decenas de millar forman una centena de millar----- $10 \cdot 10\,000$
 $= 100\,000 = 10^5$ ----- cien mil
- 10 centenas de millar forman una unidad de millón ----- $10 \cdot 100\,000 =$
 $= 1\,000\,000 = 10^6$ ----- un millón
- 10 unidades de millón forman una decena de millón----- $10 \cdot 1\,000\,000 =$
 $= 10\,000\,000 = 10^7$ ----- diez millones
- 10 decenas de millón forman una centena de millón ----- $10 \cdot 10\,000\,000 =$
 $= 100\,000\,000 = 10^8$ ----- cien millones

- 10 centenas de millón forman una unidad de millar de millón -----

$$10 \cdot 100\,000\,000 = 1\,000\,000\,000 = 10^9 \text{ --- mil millones}$$

Obsérvese que uno, diez, cien, mil, diez mil, cien mil, un millón, diez millones, cien millones, mil millones son potencias de diez, que se obtienen multiplicando sucesivamente por 10 o si se multiplica por 10 una potencia conocida resulta la inmediata superior. Se puede generalizar que se obtiene una potencia de diez cualquiera, así:

$$10 \cdot 10^n = 10^{n+1} \quad (n \text{ es un número natural cualquiera})^{(1)}$$

Los niños en la escuela se familiarizan con esta representación de los números naturales, a través de medios de enseñanza apropiados para ello. Uno de ellos consiste en cubos organizados de la siguiente manera:

Representado	Representante	Medio
1	cubito	
10	Barra con 10 cubitos	
100	Plancha con 10 barras	
1000	Cubo con 10 planchas	

Una ventaja de este medio está en la ayuda que puede brindar a la representación mental, pues se aprecia que 1000 es una nueva unidad (unidad de millar) a partir de la cual se repite el ciclo cubito-barra-plancha-cubo, que culmina en el millón.

Formalmente esto se expresa diciendo que la reunión de tres órdenes consecutivos, comenzando por las unidades simples, constituye una clase. Es decir, las unidades, decenas y centenas constituye la **clase de las unidades**; las unidades de millar, decenas de millar y centenas de millar forman la **clase de los millares**; y análogamente se forman la **clase de los millones**; **clase de los millares de millón**; **clase de los billones** y así sucesivamente.

¹⁾ El décuplo de una potencia de diez es igual a la potencia de diez inmediata superior

En algunos países como Francia, Alemania y Estados Unidos, con un criterio de ordenamiento diferente, llaman billón al millar de millones, trillón a lo que nosotros denominamos billón, cuatrillón a nuestro millar de billones y así sucesivamente.

A partir de las potencias se obtienen los múltiplos de potencias de diez.

Ejemplos:

$$2 \cdot 100\,000 = 200\,000 \text{ ---- doscientos mil}$$

$3 \cdot 100\,000 = 300\,000$ ----- *trescientos mil y así sucesivamente, si se continúa multiplicando por cien mil el resto de los dígitos hasta 9, se originan otros múltiplos de cien mil.*

Los múltiplos de potencias de diez se forman multiplicando los dígitos distintos de cero por la potencia de diez, es decir: $a \cdot 10^n$ con $a > 0$ y $n \geq 0$.

El sistema decimal es un sistema de numeración posicional, por lo que el valor del dígito depende de su posición dentro del número, ese valor se conoce como valor relativo de la cifra. De acuerdo a ese valor, el dígito 5 toma diferentes valores en el número 505 005. Esto se aprecia bien en la descomposición de números en múltiplos de potencias de diez así:

$505\,005 = 500\,000 + 5000 + 5$, en el lugar de las unidades su valor es cinco, en las unidades de millar es igual a cinco mil y en las centenas de millar quinientos mil.

Los números se descomponen en unidades de distintos órdenes, de tal forma que 10 unidades de cualquier orden equivalen a una de un orden inmediato superior. El orden que sirve de guía es la unidad, propiamente dicha (b^0).

Al escribir los números de varios lugares los dígitos se escriben **de izquierda a derecha** (incluso en idiomas que normalmente escriben de derecha a izquierda), empezando por los órdenes superiores y acabando en la unidad como tal, marcando la carencia de unidades con un 0 (cero). En el [sistema decimal](#) los números se pueden descomponer de diferentes formas:

$$535 = 500 + 30 + 5$$

$$535 = 5 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5 \cdot 1$$

$$535 = 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

$$3\,234 = 3000 + 200 + 30 + 4$$

$$3\,234 = 3 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 1$$

$$3\,234 = 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$$

Los ejemplos anteriores muestran que los números naturales se pueden representar de formas diferentes:

- a) Como suma de múltiplos de potencias de 10 (en los que el otro factor es una cifra básica o número de un lugar):

$$3\,234 = 3000 + 200 + 30 + 4$$

- b) Suma de productos de números de un lugar por potencias de diez expresadas estas potencias como unidades seguidas de ceros:

$$3\,234 = 3 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 1$$

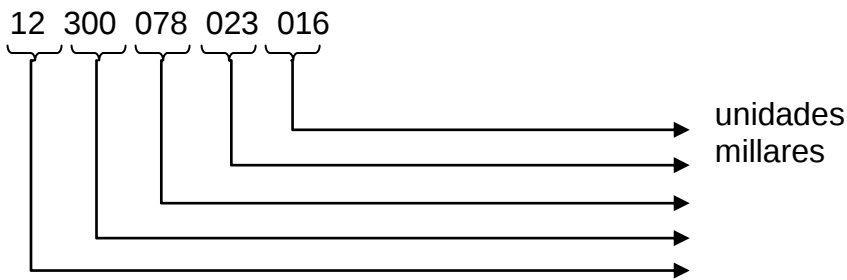
- c) Suma de productos de números de un lugar por potencias de diez escritas en notación decimal: $3\,234 = 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$

Las dos últimas formas indican que las potencias están ordenadas y que cada una ocupa un lugar determinado y que cada cifra básica que forma el número es el coeficiente de las potencias, por lo que si se realizan las operaciones planteadas en cualquiera de estas formas de representación se obtiene el número.

$$3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 = 3 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 1 = 3000 + 200 + 30 + 4 = 3\,234$$

El múltiplo de la mayor potencia de diez indica la cantidad de lugares que tiene el número.

Para comprender la estructura decimal de los números naturales estos pueden



escribirse en una tabla de posición decimal, cada cifra básica se coloca en el orden correspondiente. Se escriben de izquierda a derecha.

10^9	10^8	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	1
U de millar de millón	C de millón	D de millón	U de millón	C de millar	D de millar	U de millar	C	D	U
							5	3	5
						3	2	3	4
					9	7	0	8	6
8	6	0	0	2	2	1	0	0	9

La tabla facilita la lectura de los números, así el último se lee:

Ocho mil seiscientos millones doscientos veintiún mil nueve.

Ejemplo:

Lee el número 12300078023016

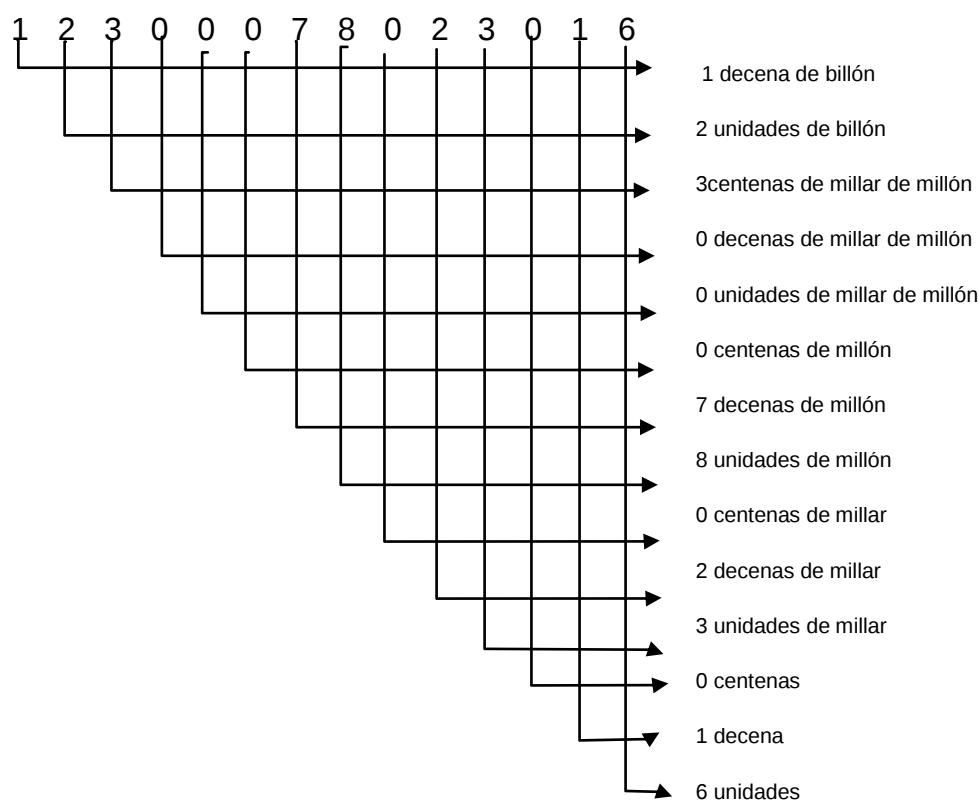
Para leer los números grandes no es necesario recurrir siempre a la tabla, para facilitar su lectura las cifras se agrupan de tres en tres, comenzando por la derecha:

millones
 millares de millón
 billones

Cada tres órdenes forman una clase y cada seis un período esto facilita la lectura, si se observa detenidamente el próximo ejemplo es fácil percatarse cómo los nombres de los órdenes se repiten, si se dominan las potencias de diez es posible leer números cualesquiera.

Ejemplo:

Doce billones trescientos mil setenta y ocho millones veintitrés mil dieciséis



El número 345621216122126 tal como está escrito es difícil poder leerlo.

Para facilitar la lectura se hace lo explicado anteriormente:

Se forman grupos de tres cifras básicas, comenzando por la derecha.

345 621 216 122 126 se lee trescientos cuarenta y cinco billones seiscientos veintiún mil doscientos dieciséis millones ciento veintidós mil ciento veintiséis

EN RESUMEN

- 0, 1,2,3,4,5,6,7, 8, 9 son cifras básicas o dígitos con las que se puede escribir un número cualquiera porque tienen un valor de acuerdo al lugar que ocupen.
- El cero (0) es el signo numérico, que en notación posicional ocupa los lugares donde no hay una cifra significativa. Si está situado a la derecha de un número entero, decuplica (multiplica por 10) su valor; colocado a la izquierda, no lo modifica.
- Los números 1, 10, 100, 1000, 10 000, ... son potencias de diez.
- El décuplo de una potencia de diez es igual a la potencia de diez inmediata superior, es decir que si se multiplica una potencia de diez por 10 se obtiene la inmediata superior, con símbolos las potencias se obtienen como $10^n \cdot 10 = 10^{n+1}$.
- Al multiplicar un número natural distinto de cero por una potencia de diez se obtienen múltiplos de potencias de diez, es decir: $a \cdot 10^n$ con $a > 0$.
- Si se adicionan múltiplos de diferentes potencias de diez se obtienen números de varios lugares.
- Todo número se designa por una cifra.
- Las cifras están formadas por cifras básicas o dígitos, estas designan a los diferentes factores de las potencias de diez. Se escriben de izquierda a derecha según las potencias que designen.

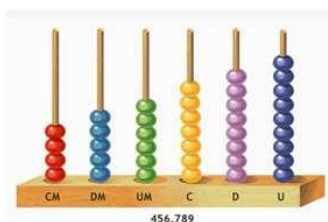
Observe que:

Si se cuenta desde 0, incrementando una unidad cada vez, al llegar a 9 unidades, se *agotan* las cifras básicas o dígitos. Si se necesita seguir contando, no se dispone de un nuevo dígito para representar la cantidad que se ha contado. Por tanto, se añade una nueva *columna* a la izquierda del número, se *vuelven a utilizar* los dígitos y resulta una unidad de segundo orden (**decena**), se coloca el **cero** en las **unidades** y el uno en las **decenas**. Resulta entonces, $9 + 1 = 10$.

De igual forma, cuando contamos hasta 99, se *agotan* los dígitos para las dos columnas; por tanto si se suma una unidad más, se debe poner cero en las columnas de la derecha y sumar 1 a la de la izquierda (decenas). Pero, la columna de la izquierda ya *ha agotado* los dígitos, así que se coloca cero y se suma 1 a la siguiente columna (**centena**). Como resultado queda, $99+1=100$.

El hábito de contar usando el sistema decimal, no nos hace conscientes de este comportamiento, y se da por hecho que $99+1=100$, sin pensar en el significado que encierra esa expresión.

Un medio muy adecuado para adquirir conciencia del valor relativo de las cifras y lo que estas representan en el sistema de posición decimal es el **ábaco**. El ábaco surgió y evolucionó desde la Antigüedad como un útil instrumento de cálculo. Aunque hay muchos tipos diferentes de ábacos, estos consisten por regla general en un marco de madera o plástico con líneas por las que se desplazan diez o más cuentas. Cada línea representa un orden (una línea para las unidades, otra para las decenas y así sucesivamente). En las figuras se representa en un ábaco vertical el número 456 789 y en uno horizontal el número 87 364.



Ejercicios del 11 al 23

2.5 Numeración romana.

El sistema de **numeración romana** se desarrolló en la [antigua Roma](#) y se utilizó en todo su imperio. Este consta de siete símbolos que son: I=1, V=5; X=10, L=50, C=100; D=500 y la M=1000. Los símbolos numéricos romanos forman un sistema aditivo; esto significa, por una parte, que si a la derecha de

una cifra romana se escribe otra igual o menor, el valor de ésta se adiciona a la anterior.

<i>Romano</i>	<i>Adición representada en el sistema decimal</i>	<i>Indoarábigo</i>
<i>III</i>	<i>1+1+1</i>	<i>3</i>
<i>XX</i>	<i>10+10</i>	<i>20</i>
<i>VI</i>	<i>5+1</i>	<i>6</i>
<i>XVI</i>	<i>10+5+1</i>	<i>16</i>
<i>LXVI</i>	<i>50+10+5+1</i>	<i>66</i>

Por otra parte, si a la izquierda de una cifra romana se escribe otra menor, el valor de ésta se sustrae de aquella.

<i>Romano</i>	<i>Sustracción representada en el sistema decimal</i>	<i>Indoarábigo</i>
<i>IV</i>	<i>5 - 1</i>	<i>4</i>
<i>IX</i>	<i>10 - 1</i>	<i>9</i>
<i>XL</i>	<i>50 - 10</i>	<i>40</i>
<i>XC</i>	<i>100 - 10</i>	<i>90</i>
<i>CD</i>	<i>500 - 100</i>	<i>400</i>

La cifra "I" colocada delante de la "V" o la "X", les resta una unidad; la "X", precediendo a la "L" o a la "C", les resta diez unidades y la "C", delante de la "D" o la "M", les resta cien unidades.

En ningún número se puede poner una misma letra más de tres veces seguidas. Ejemplos: XIII = 13; XIV = 14; XXXIII = 33; XXXIV = 34

La "V", la "L" y la "D" no pueden duplicarse porque otras letras ("X", "C", "M") representan su valor duplicado.

Si entre dos cifras cualesquiera existe otra menor, ésta restará su valor a la siguiente.

Ejemplos: XIX = 19; LIV = 54; CXXIX = 129

En resumen, las reglas del **sistema de numeración romana** son:

- a) No se pueden utilizar más de tres letras iguales seguidas, ni aisladas, ni más de una a la izquierda de una letra de mayor valor.
- b) Colocando a la derecha de una letra otra igual o menor, el valor de la primera se adiciona al valor de la segunda.
- c) Colocando a la izquierda de una letra otra menor, el valor de la segunda se sustrae del valor de la primera.

Para representar números mayores, se coloca una barra sobre los símbolos conocidos y estos quedan multiplicados por mil. De igual manera, dos barras encima multiplican por un millón y cuatro barras por un billón. Las barras se emplean cuando se agotan otros recursos, por ejemplo tres mil se escribe con tres M y no con una barra sobre los símbolos del número tres romano. De igual manera, un millón se escribe con una barra sobre una M y no con dos barras sobre un uno romano.

Los números romanos se pueden encontrar en la escritura de fechas, en la enumeración de capítulos de una obra y en algunos relojes, de ahí que se estudien en la actualidad como un conocimiento imprescindible para comprender información que podemos encontrar con bastante frecuencia .

Ejemplos de algunos números romanos que resultan interesantes por su escritura:

$9 = IX$; $11 = XI$; $40 = XL$; $50 = L$; $51 = LI$; $59 = LIX$; $60 = LX$;

$61 = LXI$; $88 = LXXXVIII$; $89 = LXXXIX$; $90 = XC$; $91 = XCI$;

$99 = XCIX$; $100 = C$; $400 = CD$; $444 = CDXLIV$; $456 = CDXLVI$;

$449 = CDXLIX$; $450 = CDL$; $899 = DCCCXCIX$; $900 = CM$;

$989 = CMLXXXIX$; $990 = CMXC$; $999 = CMXCIX$; $1000 = M$;

$1\ 999 = MCMXC$

Los símbolos con una raya superior significa que están multiplicados por mil.

Por ejemplo,

$\overline{X} = 10\ 000$ diez mil ; $\overline{L} = 50\ 000$ cincuenta mil ; $\overline{D} = 500\ 000$ quinientos mil ; $\overline{M} = 1\ 000\ 000$ un millón

Después de conocer las características de los números romanos y de analizar los ejemplos anteriores, se infieren las ventajas del sistema de posición decimal que permite escribir con sólo diez dígitos diferentes cualquier valor numérico por muy grande o pequeño que sea

Ejercicios del 24 al 28

2.6 El orden de los números naturales

Los números naturales tal como han sido contruidos, resultan ordenados de la manera siguiente:

1. Cero es el primer número natural.
2. Cada número natural n tiene un **sucesor** n' , que es otro número natural distinto de él (n se dice entonces que es **antecesor** de n').
3. Todo número natural, excepto el cero, es el sucesor de otro número natural.

La relación “**menor que**” se define en los números naturales de la siguiente forma:

Sean a y b dos números naturales cualesquiera; se dice que a es menor que b , si existe un número natural x distinto de cero tal que $a + x = b$.

Con símbolos se expresa: $a < b$ si $\exists x, x \in \mathbb{N}$ y $x \neq 0$ tal que $a + x = b$.

Por ejemplo:

$4 < 7$ significa que existe un número “3” que cumple que $4 + 3 = 7$.

$186 < 190$ porque $186 + 4 = 190$

$13 \nless 10$ (se lee: 13 no es menor que 10) porque no existe un número natural x distinto de cero tal que $13 + x = 10$.

La expresión “ a es menor que b ” (“ $a < b$ ”) es equivalente a “ b es mayor que a ” (“ $b > a$ ”).

La relación de orden **es menor que** en los números naturales es **irreflexiva**, lo que equivale a decir que cumple las propiedades siguientes:

Propiedad irreflexiva: No existe un número natural a que sea menor que él mismo: $a \nless a$.

Propiedad asimétrica: Para todo número natural a y b se cumple: si $a < b$, entonces $b \nless a$.

Propiedad transitiva: Para todo número natural a, b, c se cumple: si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Cumple además la **propiedad de tricotomía** que plantea que para dos números naturales cualesquiera a y b se cumple exactamente una de las siguientes posibilidades: $a < b$, $a > b$ ó $a = b$.

Para ordenar números naturales, estos se comparan aplicando la definición u otros recursos. Ejemplo:

Compara para determinar el número que es menor:

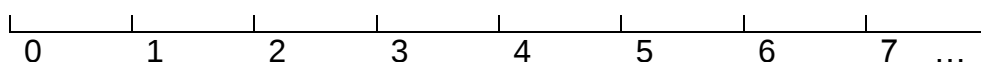
3 670 con 12 408;

$3\,670 < 12\,408$ porque uno tiene 4 lugares y el otro tiene cinco, el de cuatro lugares es menor que el de cinco lugares.

52 890 con 23 568

$23\,568 < 52\,890$ porque ambos tienen la misma cantidad de lugares y $2 < 5$.

Los números naturales se representan en un rayo o semirrecta numérica.



Para representar números en el rayo se selecciona una determinada unidad que se transporta tantas veces como sea necesario, se le asigna un valor acorde a los números a representar; por ejemplo si se desea representar múltiplos de 1000 cada división representa una unidad de millar.

En general, cada número natural se representa por un segmento que contiene el segmento unidad tantas veces como elementos tiene el conjunto que representa el número.

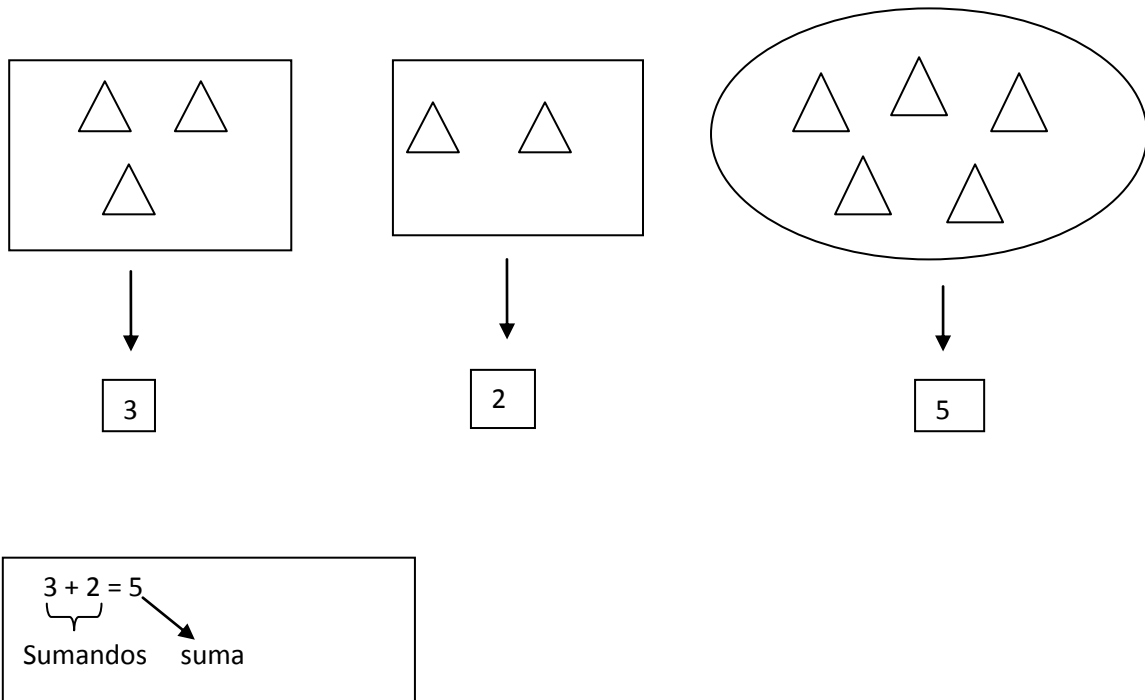
Ejercicios del 29 al 36

Operaciones de cálculo con números naturales

2.7 Adición de números naturales

Desde primer grado los niños de forma intuitiva se familiarizan con este concepto cuando con ejemplos como el siguiente introducen el concepto de adición:

María coloca tres triángulos a la izquierda de su mesa y dos a la derecha; para saber el total que tiene los une ¿Cuántos triángulos tiene en total?



Al estudiar la teoría de conjuntos se estudia la unión de conjuntos y se realizan ejercicios como el del ejemplo:

Sean $A = \{1, 3, 5\}$; $B = \{2, 4\}$; $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determina el cardinal de cada conjunto y del conjunto unión.

$$\text{card}(A) = 3 \quad \text{card}(B) = 2 \quad \text{card}(A \cup B) = 5$$

Si se quiere determinar el total de elementos del conjunto unión, basta con sumar los cardinales de cada conjunto. El cardinal de la unión de los conjuntos A y B es: $3 + 2 = 5$

Definición:

Se denomina **suma $a + b$** de dos números naturales a y b, al número cardinal del conjunto unión A y B, donde A y B son conjuntos disjuntos, **a** es el cardinal del conjunto A y **b** el cardinal del conjunto B.

Los números naturales **a y b** reciben el nombre de **sumandos** y el resultado es la **suma**.

Definición:

La **adición de números naturales** es una operación que asocia a cada dos números naturales a y b otro número natural c que es su suma.

La adición de números naturales **siempre se puede realizar**, porque para dos números naturales cualesquiera que se adicionen el resultado es único y es también un número natural.

Situaciones como las siguientes también se resuelven con la adición

- Carlos recogió 6 cajas de tomate y Luis 2 cajas más que él ¿Cuántas cajas recogió Luis?

En este caso se da lo recogido por uno y lo de más que hizo el otro o el exceso que tuvo; para hallar lo que hizo Luis en total, se adicionan 6 y 2.

- Roberto ha recorrido 36 km, para llegar a su destino, aún le faltan 24 km ¿Cuántos kilómetros debe recorrer en total?

En este caso le dan dos partes, la recorrida y la que falta por recorrer para hallar el total o todo, se adiciona $36 + 24 = 60$

Propiedades de la adición de números naturales.

La adición de números naturales cumple las siguientes propiedades:

➤ **Propiedad asociativa**

Cualesquiera sean los números naturales a , b y c , se cumple:

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Ejemplo: $13 + (27 + 34) = 13 + 61 = 74$

$$13 + (27 + 34) = (13 + 27) + 34 = 40 + 34 = 74$$

➤ **Propiedad conmutativa**

Cualesquiera sean los números naturales a y b , se cumple:

$$\mathbf{a + b = b + a}$$

Ejemplo: $54 + 6 = 60$; $6 + 54 = 60$

➤ **Existencia del neutro para la adición**

En la adición, el cero es el elemento neutro. Cualquier número a sumado con 0 vuelve a dar a : $\mathbf{a + 0 = a}$.

Ejemplo: $25 + 0 = 25$

➤ **Propiedad de monotonía**

Sean b y c números naturales. Para cada número natural a se cumple:

Si $b < c$, entonces $a + b < a + c$

Cálculo en ejercicios de adición

Al efectuar cálculos en ejercicios de adición se consideran básicos los que se realizan con cifras de un lugar y que se aprenden de memoria como significado de la unión de conjuntos disjuntos. En la siguiente tabla, se pueden apreciar sombreados los resultados que hay que memorizar (de los 100 casos, sólo 36).

Para determinarlo se ha tenido en cuenta que adicionar 0 y 1 se aprende sin dificultades desde edades tempranas y que la propiedad conmutativa de la adición permite transferir resultados cuando se intercambian sumandos, por ejemplo si se ha memorizado que $3 + 2 = 5$, entonces se conoce que $2 + 3$ es también 5.

El reconocimiento de los casos que hay que memorizar permite organizar los ejercicios que se realizan con énfasis en estos casos. Se han sombreado más oscuros en la tabla los casos en que hay sobrepaso (aquellos en que el resultado sobrepasa a 10).

0+0	0+1	0+2	0+3	0+4	0+5	0+6	0+7	0+8	0+9
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

1+0	1+1	1+2	1+3	1+4	1+5	1+6	1+7	1+8	1+9
2+0	2+1	2+2	2+3	2+4	2+5	2+6	2+7	2+8	2+9
3+0	3+1	3+2	3+3	3+4	3+5	3+6	3+7	3+8	3+9
4+0	4+1	4+2	4+3	4+4	4+5	4+6	4+7	4+8	4+9
5+0	5+1	5+2	5+3	5+4	5+5	5+6	5+7	5+8	5+9
6+0	6+1	6+2	6+3	6+4	6+5	6+6	6+7	6+8	6+9
7+0	7+1	7+2	7+3	7+4	7+5	7+6	7+7	7+8	7+9
8+0	8+1	8+2	8+3	8+4	8+5	8+6	8+7	8+8	8+9
9+0	9+1	9+2	9+3	9+4	9+5	9+6	9+7	9+8	9+9

Estos resultados se transfieren a procedimientos cada vez más complicados, pero una gran gama de ejercicios pueden resolverse por reflexiones lógicas, sin necesidad de recurrir a la escritura, por ejemplo:

5+4	15+4	50+40	55+40	55+44	150+44	5400+4500	5454+4545
-----	------	-------	-------	-------	--------	-----------	-----------

Dos ejemplos más dan una noción de la variedad de ejercicios que se pueden realizar y la manera en que se combinan recursos para resolverlos:

a) Para calcular $64 + 35$ se puede pensar de la siguiente manera:

“ $64 + 30 = 94$ y $94 + 5 = 99$ ”.

b) Para adicionar $64 + 73$, hay al menos dos caminos: “ $64 + 70 = 134$ y $134 + 3 = 137$ ” o también “ $60+70 = 130$ y $130 + 4 + 3 = 137$ ”.

Cuando los sumandos están formados por números más grandes o se han dado varios sumandos, hay que calcular aplicando un procedimiento escrito porque resolverlos sin este apoyo se hace difícil. El dominio de las propiedades facilita el cálculo sobre todo cuando aparecen varios sumandos.

Ejemplo

Calcula: $60\,256 + 963 + 892\,906 + 63\,078$.

Para calcular se escriben los sumandos uno debajo del otro como si estuvieran en una tabla de posición decimal

$$\begin{array}{r}
 60256 \\
 963 \\
 892906 \\
 + 63078 \\
 \hline
 1017203
 \end{array}$$

Se suman en primer lugar las cifras de la columna de las unidades, colocando en el resultado la cifra de unidades que resulte; cuando estas unidades sean más de 10, las decenas se añaden como un sumando más en el próximo lugar y así se procede en el resto de los lugares.

Si la adición tiene más de dos sumandos en la misma columna se agrupan, mentalmente, de forma conveniente los dígitos aplicando la propiedad estudiada, así pudiera quedar:

$6 + 6 + 8 + 3 = 23$, se escribe 3 y se adicionan 2 (decenas) al próximo lugar;

$2 + 5 + 7 + 6 = 20$, se escribe 0 y se adiciona 2 (centenas) al próximo lugar ; ...

Y así en los otros lugares.

Ejercicios del 37 al 46

2.8 Sustracción de números naturales

En primer grado los alumnos realizan actividades como la siguiente para introducir el concepto de diferencia a partir del trabajo con conjuntos:

Dibuja cinco triángulos



Tacha dos triángulos

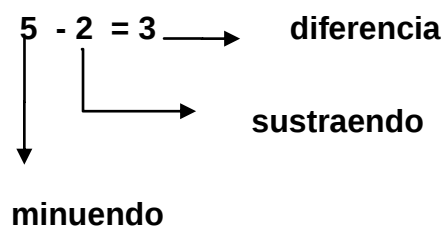


Quedan tres triángulos



Este proceder también se basa como en el caso de la adición, en el trabajo con conjuntos. Se tiene un conjunto A de cinco triángulos y un subconjunto de él de dos triángulos denominado B. La diferencia de estos conjuntos es un conjunto de tres elementos.

a es el minuendo, b es el sustraendo y x la diferencia:



Definición:

Se denomina diferencia $a - b$ de dos números naturales a y b , tales que $a = \text{Card}(A)$, $b = \text{Card}(B)$ y A subconjunto de B , al cardinal x del conjunto $A \setminus B$.

Definición:

La sustracción es la operación de números naturales que asocia a cada dos números naturales a y b ; $a \geq b$, su diferencia c que es otro número natural.

En la sustracción $a - b = x$; $b \leq a$, al número a se le llama minuendo, al b sustraendo y x es la diferencia.

Hallar x , significa buscar el número que sumado con b dé como resultado a , por lo que se puede concluir:

La sustracción es **la operación inversa de la adición**.

La sustracción en el conjunto de los números naturales solo se puede realizar si el minuendo es mayor o igual que el sustraendo.

En la escuela se presentan situaciones como la siguiente:

¿Qué número natural sumado con 19 da como resultado 25? Si se denota por x el número buscado, el problema consiste en hallar el valor de x en la igualdad: $19 + x = 25$; el sumando buscado queda determinado unívocamente $x=6$, porque **$19 + 6 = 25$** (1)

Se pudo resolver planteando la sustracción: **$25 - 19 = 6$** (2)

En la igualdad (1) el **25** es la suma, **19** un sumando y el **6** el sumando desconocido. En la igualdad (2) el **25** es el **minuendo**, el **19** el **sustraendo** y el resultado **6**, **la diferencia**

¿Existe un número natural x que sumado con 45 dé como resultado 45?

Respuesta: $x = 0$, porque $45 + 0 = 45$

¿Existe un número natural que sumado con 45 dé como resultado 40?

Respuesta: $40 < 45$, por lo que $45 + x = 40$ no tiene solución.

Se sustrae en otras situaciones de la vida práctica por ejemplo:

Una fecha importante en las luchas por la independencia de Cuba es el 10 de octubre del año 1868 ¿Cuántos años se conmemoran el próximo 10 de octubre?

Si estamos en el año 2013 a ese número se le sustrae el 1868 y se obtiene el resultado deseado.

$$\begin{array}{r} - 1868 \\ \hline 145 \end{array}$$

Roberto tiene 28 años, él tiene 6 años **más** que Yolanda ¿Qué edad tiene Yolanda?

$28 - 6 = 22$ Al sustraer estás eliminando el exceso, los años de más de una edad sobre la otra y así calculas la edad de Yolanda

La siguiente tabla muestra la cantidad de médicos que había en Cuba en los primeros años del siglo XXI.

año	2000	2001	2002
Total de médicos	65 997	66 325	67 079

Analiza la tabla y responde:

- ¿Cuántos médicos **más** había en el 2002 que en el año 2000?
- ¿En cuánto **exceden** los médicos que había en el 2001 de los que había en el 2000?
- ¿Cuántos médicos **menos** había en el 2000 que en el año 2007?

Para calcular la cantidad de médicos **más** que había en un año que en el otro se sustrae al número de médicos del 2002 el número que representa los del 2000

$$\begin{array}{r} 67079 \\ - 65997 \\ \hline 1082 \end{array}$$

- Para hallar **el exceso** también se sustrae:

$$\begin{array}{r}
 66325 \\
 - 65997 \\
 \hline
 328
 \end{array}$$

c) Para calcular **cuántos menos** se sustrae:

$$\begin{array}{r}
 67079 \\
 - 65997 \\
 \hline
 1082
 \end{array}$$

Resumen:

- La sustracción es la operación inversa de la adición.
- La sustracción de números naturales sólo se puede realizar si el minuendo es mayor o igual que el sustraendo.
- $a - a = 0$
- $a - 0 = a$

Cálculo en ejercicios de sustracción con números naturales.

Para los ejercicios de sustracción es básica la memorización lograda en los de adición como operación inversa. Memorizar que $9 + 9 = 18$, permite pasar sin dificultades a calcular: $18 - 9 = 9$.

Memorizar que $2 + 3 = 5$ conduce, tanto a $5 - 3 = 2$, como a $5 - 2 = 3$.

Para resolver ejercicios de sustracción debes tener presente:

- para poder calcular, el minuendo tiene que ser mayor o igual que el sustraendo;
- para calcular, se emplean diferentes procedimientos: el aditivo o el sustractivo;
- en algunos órdenes de la sustracción pueden presentarse sobrepasos.

- Una vez hecho este análisis se procede a calcular y controlar el resultado

Ejemplo: 987 - 345

Se compara $987 > 345$, se puede calcular.

Se calcula y se controla:

Cálculo

$$\begin{array}{r} 9 \ 8 \ 7 \\ - 3 \ 4 \ 5 \\ \hline 6 \ 4 \ 2 \end{array}$$

Control

$$\begin{array}{r} 6 \ 4 \ 2 \\ + 3 \ 4 \ 5 \\ \hline 9 \ 8 \ 7 \end{array}$$

Analice los siguientes ejemplos detenidamente:

A	B	C
$25 - 3 = 22$	$25 - 23 = 2$	$15 - 13 = 2$
$25 - 13 = 12$	$35 - 23 = 12$	$25 - 23 = 2$
$25 - 23 = 2$	$45 - 23 = 22$	$35 - 33 = 2$

Es fácil observar que en las columnas A y B al modificarse el minuendo o el sustraendo se modifica la diferencia, no así en la columna C.

Calcula $91\ 301 - 80\ 906$

$91\ 301 > 80\ 906$, por tanto tiene solución

- Se escribe el minuendo y debajo el sustraendo
- Se comienza a calcular por las unidades

$$\begin{array}{r} 9 \ 1 \ 3 \ 0 \ 1 \\ - 8 \ 0 \ 9 \ 0 \ 6 \\ \hline 1 \ 0 \ 3 \ 9 \ 5 \end{array}$$

Se calcula con ayuda del procedimiento aditivo, buscando el número que adicionado con cada lugar del sustraendo es igual al minuendo. Si ese número no existe hay sobrepaso; en ese caso, se adiciona 10 al minuendo.

En el ejemplo el ejercicio tiene sobrepaso en varios lugares, se comienza a calcular por las unidades, se busca el número que sumado con cada lugar del sustraendo es igual al minuendo, si ese número no existe hay sobrepaso; en ese caso, se adiciona 10 al minuendo.

Usando el método aditivo:

- En el lugar de las unidades tenemos $6 + x = 1$; como no existe ningún número natural que sumado con 6 dé 1, se adiciona 10 y se forma el número 11, ahora sí se puede buscar ese valor de x ; $6 + x = 11$, luego $x = 5$; se escribe 5 en el lugar de las unidades.
- Se adiciona uno (una decena) en el próximo lugar del sustraendo $1 + 0 = 1$; se busca el número que sumado con el sustraendo 1 es igual al minuendo 0; como no existe ningún número natural que sumado con 1 dé 0, se adiciona 10, ahora sí se puede buscar ese valor de x ; $1 + x = 10$, luego $x = 9$; se escribe 9 en el lugar de las decenas.
- Se adiciona uno (una centena) en el próximo lugar del sustraendo y se continúa repitiendo análogamente este proceder todas las veces que sea necesario.

Se puede sustraer usando el método sustractivo en este caso sería:

$$11 - 6 = 5; \quad 10 - 1 = 9; \quad 13 - 10 = 3; \quad 1 - 1 = 0; \quad 9 - 8 = 1$$

Se controla aplicando la relación entre la adición y la sustracción, ($m = s+d$). Se adiciona la diferencia con el sustraendo, si el resultado es igual al minuendo el cálculo es correcto.

$$\begin{array}{r} 10395 \\ + \quad 8006 \\ \hline 91301 \end{array}$$

La relación entre la adición y la sustracción no sólo se aplica para controlar el resultado del ejercicio, es muy útil también en la solución de igualdades con variables (ecuaciones) para la reflexión de la búsqueda de la vía de solución, en los casos en que aún no es conocido el algoritmo de la solución de ecuaciones. Ejemplos:

a) $x - 4798 = 4778$ en este caso se conoce el sustraendo y la diferencia.

Hay que hallar el minuendo, se aplica por tanto la relación conocida:

$$x = 4778 + 4798$$

$$x = 9576$$

b) ¿Qué número sumado con 4798 da como resultado 9576?

c) Halla el número que sumado con 4778 da como resultado 9576?

Como se observa en estos casos hay que buscar un sumando al aplicar la relación entre la adición y la sustracción para ello se plantea:

b) $4798 + x = 9576$ en este caso se plantea $9576 - x = 4798$; $x = 9576 - 4798$

c) $x + 4778 = 9576$ en este caso se plantea $9576 - x = 4778$; $x = 9576 - 4778$

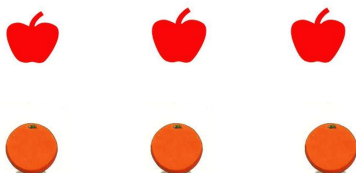
En conclusión:

- Para hallar el minuendo se adiciona y
- para calcular la diferencia o el sustraendo (sumandos desconocidos), se sustrae.

Ejercicios del 47 al 65

2.9 Multiplicación de números naturales

Cuando en primer grado se introduce la multiplicación de números naturales se suele hacer con ejemplos similares al siguiente



Para saber la cantidad de frutas podemos sumar atendiendo a su tipo.

Hay tres manzanas y tres naranjas, con ayuda de la adición se obtiene **3 + 3 = 6**.

También se puede decir que hay tres columnas con 2 frutas cada una **(2 + 2 = 6)** o que hay dos filas con tres frutas cada una **(3 + 3 = 6)**.

En cada caso se han planteado uniones de conjuntos equipotentes a las que se les asocian adiciones de sumandos iguales.

Esas adiciones se pueden representar con ayuda de la multiplicación escribiendo el sumando que se repite y el número que indica la cantidad de veces que se repite, relacionados por el signo de multiplicación así:

$3 \cdot 2 = 6$ $2 \cdot 3 = 6$ Se originan así dos igualdades de multiplicación. Los factores se intercambian y el resultado no varía.

Ejemplo:

En una panadería a las diez de la mañana sacaron una bandeja con 100 panecillos, a los quince minutos sacaron otra con la misma cantidad y a las diez y treinta volvieron a sacar otros cien panecillos ¿cuántos panes sacaron en total?

Es fácil averiguarlo sumando $100 + 100 + 100 = 300$. En este caso ese ejercicio de adición tiene una característica importante a tener en cuenta y es que todos los sumandos son iguales, por lo que su resultado se puede calcular con ayuda de la multiplicación. Se escribe el sumando que se repite 100 el número 3 que indica las veces que se repite y el signo “por” y se obtiene $100 \cdot 3 = 300$

En general la multiplicación de dos números naturales a y b puede representar una forma abreviada para la adición de sumandos iguales

$$a + a + a + a + a + a + \dots + a = a \cdot b$$

b veces

$$\begin{array}{lcl} a \cdot b = c & \longrightarrow & \text{producto} \\ \downarrow & & \downarrow \\ & & \text{factor} \end{array}$$

factor

Definición:

La multiplicación de números naturales es la operación que asocia a cada dos números naturales a y b , otro número natural c que es su producto, donde a y b son factores.

La multiplicación de números naturales siempre se puede realizar, porque para dos números naturales cualesquiera que se multipliquen el resultado es único y es también un número natural.

La multiplicación de números naturales cumple las siguientes propiedades:

➤ **Propiedad asociativa**

Cualesquiera sean los números naturales a , b y c , se cumple:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

$$\text{Ejemplo: } 6 \cdot (4 \cdot 3) = 6 \cdot 12 = 72 = 24 \cdot 3 = (6 \cdot 4) \cdot 3$$

➤ **Propiedad conmutativa**

Cualesquiera sean los números naturales a y b se cumple:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

$$\text{Ejemplo: } 6 \cdot 4 = 4 \cdot 6 = 24$$

➤ **Existencia de neutro para la multiplicación**

En la multiplicación, el uno es el elemento neutro; es decir, cualquier número a multiplicado por 1 da como resultado a : $a \cdot 1 = a$.

$$\text{Ejemplo: } 25 \cdot 1 = 25$$

➤ **Propiedad de monotonía:** Si b y c son números naturales tales que $b < c$, entonces para cada número natural $a \neq 0$ se cumple $a \cdot b < a \cdot c$

$$\text{Ejemplo: Si } 3 < 5, \text{ entonces } 4 \cdot 3 < 4 \cdot 5.$$

$$\text{En efecto } 12 < 20.$$

Dos propiedades más son interesantes en el caso de la multiplicación:

➤ **Existencia de elemento nulo para la multiplicación**

En la multiplicación, el cero es el elemento nulo; es decir, cualquier número a multiplicado por cero da como resultado cero: $a \cdot 0 = 0$.

➤ **Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición**

Cualesquiera sean los números naturales a, b y c se cumple:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Cálculo en ejercicios de multiplicación

Para realizar con efectividad ejercicios de multiplicación se requiere como en el caso de las operaciones anteriores memorizar una serie de cálculos básicos. En la enseñanza tradicional los alumnos aprendían mecánicamente las llamadas tablas de multiplicar. La enseñanza desarrolladora presta más atención al significado de los cálculos, pero no puede subestimar las repeticiones necesarias para fijar los cálculos básicos contenidos en las tablas del 2 al 9.

El resultado de una multiplicación es igual a cero, si y solo si al menos uno de los factores es igual a cero.

Al complicarse los cálculos, las reflexiones lógicas deben acompañar a la memorización, mientras no sea imprescindible utilizar un procedimiento escrito, como es el caso de las multiplicaciones planteadas en la siguiente tabla.

a	b	c	d	e
3·4 =12	30·4=120	30·40=1200	30·10	1202·10=12 020
8·5=40	80·5=400	80·50=4000	85·10=850	1257·100= 125 700

Todos los ejercicios anteriores se pueden calcular mentalmente, los de la columna a son ejercicios básicos que se memorizan en los primeros grados de la escuela primaria. Si se dominan los ejercicios básicos, es muy fácil calcular las multiplicaciones de las columnas b y c. En los ejercicios de las columnas d y e se aplica la regla para multiplicar por potencias de diez que consiste en escribir el factor diferente a la potencia y agregar tantos ceros como tenga la potencia.

Una vez que estos procederes se dominan, deben emplearse siempre que haya que calcular ejercicios de estos tipos, sin embargo en otros casos no es

fácil calcular en la mente porque son números muy grandes y para mayor seguridad se recurre a un procedimiento escrito.

Ejemplo:

Multiplica 9783 por 608.

Vía 1: Si se descompone el segundo factor y se aplica la propiedad distributiva:

$$9783 \cdot 608 = 9783 \cdot (600 + 8) = 9783(600) + 9783(8)$$

Al analizar el ejemplo, es fácil observar que sólo hay que multiplicar 6 por 9783 (y agregar dos ceros) y 8 por 9783. Finalmente sumar estos dos resultados.

$$\begin{array}{r} 783 \cdot 600 \\ \hline 5869800 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9783 \cdot 8 \\ \hline 78264 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5869800 \\ + 78264 \\ \hline 5948064 \end{array}$$

El procedimiento escrito se puede simplificar aún más, pero es importante comprender el significado de lo que se escribe. Si se comprende el significado, cualesquiera de las dos formas de expresar el resultado simplificado (Vía 2) es comprensible.

Vía 2

$$\begin{array}{r}
 9783 \cdot 608 \\
 \hline
 586980 \\
 78264 \\
 \hline
 5948064
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 9783 \cdot 608 \\
 \hline
 78264 \\
 586980 \\
 \hline
 5948064
 \end{array}$$

Ejercicios del 67 al 82

2.10 Potencia de un número natural

Un producto de varios factores iguales, se puede escribir más brevemente en forma de potencia. Por ejemplo, los productos $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$ y $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5$

En general:

Si a es un número natural y n es otro número natural mayor que 1, la potencia a^n es el producto $a \cdot a \cdot a \cdot a \dots$ (n veces).

En la igualdad $a^n = b$, b se llama **potencia**, a es la **base** de la potencia y n es el **exponente** de la potencia.

Las siguientes proposiciones son importantes, en relación con las potencias:

- Para cada número natural $a \neq 0$, se cumple: $a^0 = 1$.
- Para cada número natural a , se cumple: $a^1 = a$.

Como hemos observado en epígrafes anteriores, utilizando la escritura en forma de potencia, es posible expresar todo número natural a , del siguiente modo:

$a = a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \dots + a_n \cdot 10^0$ (donde $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ son números naturales comprendidos entre 0 y 9, ambos inclusive)

Con las potencias se puede calcular si se tienen en cuenta las siguientes propiedades:

- $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

Ejemplo:

$$2^2 \cdot 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$2^{2+3} = 2^5$$

- $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$

Ejemplo:

$$2^2 \cdot 3^2 = (2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 6 \cdot 6 = 36$$

- $a^r : a^s = a^{r-s} ; r \geq s$

Ejemplos:

a) $2^6 : 2^3 = 2^{6-3} = 2^3 = 8$

b) $2^3 : 2^3 = 2^{3-3} = 2^0 = 1$

- $a^r : b^r = (a : b)^r$

Ejemplo:

$$8^2 : 2^2 = (8 : 2)^2 = 4^2 = 16$$

- $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

Ejemplo:

$$(5^3)^2 = 5^{3 \cdot 2} = 5^6 = 15\,625$$

2.11 División de números naturales

En la práctica cotidiana se presentan situaciones parecidas en las que hay que distribuir o repartir como las siguientes:

Situación 1:

Distribuye 8 círculos en dos grupos iguales, averigua cuántos círculos hay en cada grupo:



En cada grupo hay cuatro círculos, se puede resolver matemáticamente con la igualdad $8 : 2 = 4$

“Con los 24 estudiantes de un grupo se forman cuatro equipos con la misma cantidad de estudiantes ¿Cuántos alumnos hay en cada equipo?”

Para resolver la situación se divide $24 : 4 = 6$. En cada equipo hay seis estudiantes.

Situación 2:

Distribuye 8 círculos en grupos de 2 círculos cada uno, determina la cantidad de grupos que se forman.



Se forman cuatro grupos de 2 círculos cada uno. Se resuelve dividiendo ocho entre dos para ver las veces que está contenido el dos en ocho

$$8 : 2 = 4$$

“Con los 24 estudiantes de un grupo se desea formar equipos de 4 estudiantes cada uno ¿Cuántos equipos se forman?”

En este caso también se divide para saber las veces que el 4 está contenido en 24 y se obtiene la igualdad $24 : 4 = 6$. Se forman seis equipos.

Se observa que al dividir el cociente en ambos casos es el mismo, pero en la primera situación se reparte en partes iguales; el seis indica la cantidad de

estudiantes de cada parte .En la segunda se forman grupos con la misma cantidad de alumnos, hay que averiguar la cantidad de grupos o partes que se forman, en este caso seis equipos.

Como se observa, se divide cuando un conjunto o un todo se reparte en partes iguales y hay que averiguar el contenido o cantidad de cada parte. El cociente indica la cantidad de elementos de cada parte.

También se divide, para hallar la cantidad de partes o de grupos que se forman, si se conoce el contenido o cantidad de cada parte; en este caso el cociente indica la cantidad de partes que se forman.

Cociente de dos números naturales

La división de números naturales es la operación *que asocia a cada dos números naturales a y b ($b \neq 0$ y a múltiplo de b) otro número natural c que es su **cociente**.*

*a se denomina **dividendo** y b **divisor**.*

Otros ejemplos en que se emplean la división:

- a) En un concurso participan 12 estudiantes la cuarta parte de ellos obtuvieron excelente ¿Cuántos estudiantes obtuvieron excelente?

Se divide para averiguar la parte del total de estudiantes que sacó excelente.

$12:4 = 3$; 12 es el dividendo, 4 es el divisor y 3 es el cociente

- b) Con 36 postales ¿Cuántas docenas de postales se pueden formar?

En este caso se divide para saber las veces que el 12 está contenido en 36.

$36 : 12 = 3$

Se divide también en situaciones como las siguientes:

- c) Hallar el valor de x , para el cual $4 \cdot x = 36$.

Basta pensar en el número que multiplicado por 4 es igual a 36, este es 9.

d) Hallar el valor de x , para el cual $x \cdot 5 = 2345$

En este caso el proceso es el mismo, solo que no es tan fácil hallar mentalmente el valor de la x ; para calcularlo es posible facilitar el cálculo con ayuda de la división de modo que el producto pasa a ser el dividendo, el factor conocido es el divisor y el factor que hay que hallar es el cociente, queda así: $2345 : 5 = x$

$$\begin{array}{r} 2345 \overline{) 2345} \\ \underline{20} \\ 34 \\ \underline{30} \\ 45 \\ \underline{45} \\ 0 \end{array}$$

Se observa que entre la división y la multiplicación se establece una relación, pues cuando se divide se busca un factor, dado el producto y el otro factor por lo que se afirma:

- La división es la **operación inversa de la multiplicación**.
- La división de números naturales **solo se puede realizar si el dividendo es múltiplo del divisor**.

La división de números naturales cumple las siguientes propiedades:

- Para cada número natural a , se cumple $a : 1 = a$.
- Para cada número natural a ($a \neq 0$), se cumple $a : a = 1$.
- Para cada número natural a ($a \neq 0$), se cumple $0 : a = 0$.

Cálculo con ejercicios de división

Calcula el cociente de la forma más ventajosa posible:

a	b	c	d	e
$12:4=3$	$120:4=30$	$1200:40=30$	$300:10=30$	$1020:10=102$
$40:5=8$	$400:5=80$	$4000:50=80$	$850:10=85$	$125700:100=1\ 257$

Todos los ejercicios anteriores se pueden calcular mentalmente, los de la columna **a** son ejercicios básicos que se memorizan en los primeros grados de la escuela primaria; si se dominan, es muy fácil calcular los de las columnas **b** y **c**. En los ejercicios de las columnas **d** y **e** se aplica la regla para dividir por potencias de diez que consiste en escribir el dividendo y suprimir tantos ceros como tenga la potencia es decir se aplica que un número queda dividido por 10 (100, 1000, 10 000 ...) si se quita a su derecha un (dos, tres, cuatro...) cero . Una vez que estos procederes se dominen deben emplearse siempre que haya que calcular ejercicios de estos tipos, sin embargo en otros casos no es fácil calcular en la mente porque son números muy grandes y se necesita del procedimiento escrito para calcular con facilidad y mayor exactitud.

El cálculo de los ejercicios de división no resulta muy fácil porque requiere del dominio de todas las operaciones de cálculo estudiadas, además de que deben tenerse en cuenta las características de cada tipo de ejercicio a resolver. Una característica importante está determinada por la cantidad de cifras del divisor; éste puede tener un lugar, dos o más lugares, otro aspecto a tener en cuenta es si es exacta, tiene restos parciales y/o final. A continuación se muestran ejemplos de ejercicios, algunos se calculan otros no. Es importante resolverlos y analizar con profundidad los pasos que se siguieron para efectuar los cálculos.

➤ El divisor es un número de un lugar:

- a) $963:3$ b) $1896:3$ c) $575:5$ d) $1872:6$ e) $8127:9$
f) $8\ 048:8$ g) $9546:5$ h) $27\ 268:8$ i) $189096:9$ j) $9728805:8$

➤ El
div

isor tiene dos o más lugares

Para resolverlos se debe tener en cuenta algunos pasos para calcular con exactitud

- a) $527:31$ b) $12978:42$ c) $6387:12$ d) $6717:12$ e) $3\ 433\ 962:495$

- 1) Escribe el ejercicio.
- 2) Determina el primer dividendo parcial, éste tiene que ser mayor o igual que el divisor.
- 3) Estima el cociente, para ello cuenta las cifras que quedan después de seleccionado el primer dividendo parcial ; pues cada cifra representa un dividendo, por tanto para cada una tiene que haber una cifra en el dividendo (Es posible calcular la primera cifra del cociente y colocar en los otros lugares tantas rayitas o puntos como lugares queden en el dividendo).
- 4) Calcula la primera cifra del cociente (buscando el número que multiplicado por el divisor es igual o menor que el dividendo parcial).
- 5) Sustrae el producto obtenido del dividendo parcial. La diferencia o resto no puede ser igual ni mayor que el divisor.
- 6) Con el resto y la cifra siguiente forma el próximo dividendo parcial, si es menor que el divisor coloca cero en el cociente, repite el paso 5 y 6 tantas veces como sea necesario.
- 7) Controla el resultado multiplicando el divisor por el cociente y adicionando el resto final.

Ejemplo de cómo se aplican los pasos anteriores.

$$\begin{array}{r}
 1 \ 8' \ 9' \ 6' \ | \ 3 \\
 \underline{1 \ 8} \\
 0 \ 9 \\
 9 \\
 \underline{ 9} \\
 0 \ 6 \\
 6 \\
 \underline{ 6} \\
 0
 \end{array}$$

En ese caso la división es exacta
 todos los dividendos parciales
 son múltiplos del divisor,

- hay tres dividendos parciales, el
 cociente tiene tres lugares.

$$\begin{array}{r} 18' \ 7 \ 2 \ 6 \big| 3 \\ 18 \qquad \qquad 6 \ \dots \end{array}$$

En este caso el cociente va a aproximarse a 6000, o sea tendrá 4 lugares y la primera cifra del cociente es 6 hay un resto parcial 1(1decena) con el 2 de las unidades se forma el próximo dividendo parcial 12.

$$\begin{array}{r} 18' \ 7 \ 2 \ 6 \big| 3 \\ 18 \qquad \qquad 6 \underline{2} \underline{4} \underline{2} \\ \hline 7 \\ 6 \\ \hline 1 \ 2 \\ 1 \ 2 \\ \hline 0 \ 6 \\ 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \ 7' \ 2' \ 6' \ 8' \big| 8 \\ 2 \ 4 \qquad \qquad 3 \underline{4} \underline{0} \underline{8} \\ \hline 3 \ 2 \\ 3 \ 2 \\ \hline 6 \\ 0 \\ \hline 6 \ 8 \\ 6 \ 4 \\ \hline 4 \end{array}$$

Control

$$\begin{array}{r} 3 \ 4 \ 0 \ 8 \ . \ 8 \\ 2 \ 7 \ 2 \ 6 \ 4 \\ \hline \end{array}$$

$$2 \ 7 \ 2 \ 6 \ 4 + 4 = 27268$$

$$\begin{array}{r} 9' \ 7' \ 2' \ 8' \ 8' \ 0' \ 5' \big| 8 \\ 8 \qquad \qquad \qquad 1 \underline{2} \underline{1} \underline{6} \underline{0} \underline{0} \\ 1 \ 7 \\ 1 \ 6 \\ \hline 1 \ 2 \\ 8 \\ \hline 4 \ 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \ 1 \ 6 \ 0 \ 0 \ . \ 8 \\ 9 \ 7 \ 2 \ 8 \ 0 \ 0 \\ \hline \end{array}$$

$$9 \ 7 \ 2 \ 8 \ 0 \ 0 + 5 = 9 \ 7 \ 2 \ 8 \ 0 \ 5$$

Se han resuelto algunos ejemplos de ejercicios de división, cuyos divisores son números de un lugar, aplicando los pasos del procedimiento escrito de la división .A continuación se muestra cómo ese mismo proceder se puede aplicar cuando el divisor tiene dos o más lugares.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 2 & 9' & 7' & 8' & 42 \\ 1 & 2 & 6 & & & \underline{309} \end{array}$$

Cuando el producto parcial es cero no es necesario escribirlo porque la diferencia coincide con el dividendo parcial por tanto bajas la próxima cifra, formas el nuevo dividendo y continúas el cálculo.

[illegible]

$ \begin{array}{r} 3 \ 4 \ 3 \ 3' \ 9' \ 6' \ 2' \ \overline{) 495} \\ 2 \ 9 \ 7 \ 0 \\ \hline 4 \ 6 \ 3 \ 9 \\ 4 \ 4 \ 5 \ 5 \\ \hline 1 \ 8 \ 4 \ 6 \\ 1 \ 4 \ 8 \ 5 \\ \hline 3 \ 6 \ 1 \ 2 \\ 3 \ 4 \ 6 \ 5 \\ \hline 1 \ 4 \ 7 \end{array} $	control $ \begin{array}{r} 6 \ 9 \ 3 \ 7 \ . \ 4 \ 9 \ 5 \\ \hline 2 \ 7 \ 7 \ 4 \ 8 \\ 6 \ 2 \ 4 \ 3 \ 3 \\ 3 \ 4 \ 6 \ 8 \ 5 \\ \hline 3 \ 4 \ 3 \ 3 \ 8 \ 1 \ 5 \\ + 1 \ 4 \ 7 \\ \hline 3 \ 4 \ 3 \ 3 \ 9 \ 6 \ 2 \end{array} $
---	--

En la división con divisores de dos o más lugares existen ejercicios con determinadas características que necesitan de un análisis diferente a las divisiones con divisores de un lugar: **la rectificación de cifras en el cociente.**

La rectificación de cifras en el cociente consiste en ir probando y rectificando el cálculo disminuyendo o aumentando sistemáticamente uno el estimado, hasta encontrar la cifra del cociente que permite obtener el resto adecuado

Aspectos importantes a tener en cuenta al calcular ejercicios de división:

- El divisor nunca puede ser cero.
- A cada dividendo parcial le corresponde una cifra del cociente. En caso de que el dividendo parcial sea menor que el divisor se escribe cero en ese lugar del cociente.
- Si el resto parcial es igual o mayor que el divisor se adiciona uno a la cifra del cociente. El resto nunca puede ser mayor o igual que el divisor
- Si el resto parcial es mayor que el dividendo parcial se sustrae uno (sucesivamente si es necesario) a la cifra del cociente hasta que se encuentre la cifra adecuada.
- Para controlar la exactitud del resultado se aplica la relación $\text{dividendo} = \text{divisor} \cdot \text{cociente} + \text{resto}$ $D = d \cdot c + r$

Resumen:

- El conjunto de los números naturales se denota por N y se representa así:

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots\}$$

- El conjunto $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots\}$ se ha formado añadiendo uno a cada número natural (comenzando por 0) para obtener cada vez el sucesor que es un nuevo número natural, Puede proseguirse indefinidamente originando así la sucesión de números naturales
- El conjunto de los números naturales es un conjunto ordenado, en el que se cumple la relación de orden “es menor que”.
- En el conjunto de los números naturales las operaciones de adición y multiplicación siempre tienen solución.
- Las operaciones de adición y multiplicación de números naturales cumplen las propiedades conmutativa y asociativa. En el caso de la multiplicación cumple además la propiedad distributiva respecto a la adición.
- La operación sustracción de números naturales no siempre se puede realizar, solo es posible si el minuendo es mayor o igual que el sustraendo.
- La sustracción es la operación inversa de la adición.
- La operación división de números naturales no siempre se puede realizar, solo se puede realizar si el dividendo es múltiplo del divisor.
- La división es la operación inversa de la multiplicación.

Obsérvese que en el conjunto de números naturales se definen operaciones y se establece una relación de orden.

Definición:

Se denomina **dominio de los números naturales** al conjunto de números naturales dotado de la relación de orden y las operaciones de adición y multiplicación (siempre realizables en el).

En el dominio de los números naturales es posible realizar otras operaciones con restricciones, como por ejemplo: la sustracción y la división.

Cuando se habla del conjunto de números naturales se refiere solo a la sucesión de números 0, 1, 2, 3, 4, ... Mientras que al hablar del dominio de los números naturales se debe tener en cuenta, además del conjunto numérico, el orden y las operaciones definidas en el.

Ejercicios del 83 al 100

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO

1. a) Determina cuáles de los siguientes conjuntos son iguales:

$$A = \{ a; e; i; o; u \}$$

$$B = \{ x \in \mathbb{N} ; x \text{ es divisores de } 12 \}$$

$$C = \{ 1; 12 \}$$

D : Conjunto de las vocales

$$E = \{ x \in \mathbb{N} \text{ y } x \text{ es un número primo par} \}$$

$$F = \{ 1; 2; 3; 4; 6; 12 \}$$

$$G = \{ 2 \}$$

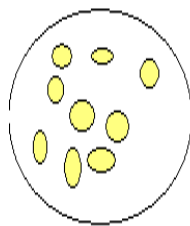
H: Conjunto de los números menores que 5.

I: Vocales de la palabra mamá

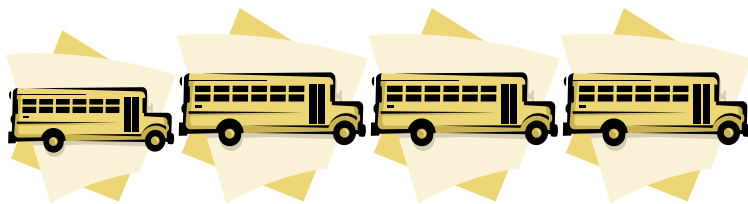
b) Escribe en la línea la palabra equipotentes o los símbolos $\subset$; $\not\subset$; $\notin$; $\in$; $=$ según convenga:

- a. El conjunto A es _____ con el conjunto H
- b. B _____ F
- c. C _____ B
- d. G _____ I
- e. 2 _____ E
- f. E _____ G
- g. I _____ A
- h. 6 _____ E
- i. H _____ F

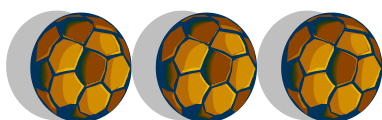
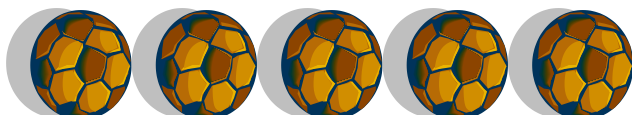
2-Escribe el cardinal de los conjuntos que se han representado.



a) _____



b) _____



C _____

3. Dado los conjuntos:

A _ Las provincias de Cuba con la nueva división política administrativa.

B _ las aulas de tu escuela.

C _ Los divisores de 48

D _ Los múltiplos de 7

E _ Los varones que miden 5m de tu aula

F _ La bandera de la estrella solitaria

G _ El número de rectas que pasan por un punto.

H _ Los vértices de un triángulo

I _ Números pares

J = $\{ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48 \}$

E = $\{ 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 \}$

$$F = \{ 0, 2, 4, 6, 8 \}$$

$$G = \{ 9, 25, 49, 81 \}$$

$$H = \{ x \in \mathbb{N}; 0 \leq x \leq 10 \}$$

- Clasifica los conjuntos en finitos e infinitos.
- Escribe el cardinal de los conjuntos finitos
- Nombra todos los elementos del conjunto A
- Escribe en notación tabular los conjuntos C , D y H
- Escribe en notación constructiva el conjunto I
- Explica la relación que existe entre los conjuntos C y J
- Forma un conjunto K que sea equipotente con el conjunto F y subconjunto del conjunto J,
- Halla: $E \cup G$; $H \cup F$; $F \cap G$; $F \cap E$; $H \setminus F$
- Escribe el cardinal de : $E \cup G$; $H \cup F$; $F \cap G$; $F \cap E$; $H \setminus F$

4. Dadas siguientes situaciones marca con una equis (X) las que ilustran el carácter de código de los números naturales. Justifica en cada caso

- ☐ El número del teléfono de un amigo
- ☐ El comprobante dado por el chofer al pagar el ómnibus
- ☐ El número de páginas que has leído de un libro
- ☐ El ómnibus urbano que pasa cerca de la escuela.
- ☐ El número de tarjeta que permite extraer dinero de un cajero automático.
- ☐ La cantidad de libros de un estante
- ☐ El carné de identidad de cada persona.
- ☐ La hora que marca el reloj.

5. En una competencia la moto número 15, llegó en el lugar 15 y demoró 15 minutos en llegar a la meta.

En la situación anterior aparece tres veces el 15 ¿Tienen el mismo significado? Fundamenta tu respuesta.

6. Analiza la siguiente información para que respondas lo que se pide.

En algunos lugares de La Habana, como Playa, La Lisa y Marianao, existe una forma curiosa de identificar las casas u otras edificaciones; consiste en que las primeras cifras de la izquierda del número indica el menor de los número de las calles entre las que se encuentra ubicada, así una farmacia ubicada en la calle 64 entre 35 y 37 puede tener el número 3508. Si vives en 45 entre 120 y 122 el número de tu casa pudiera ser 120032, esto facilita la búsqueda de direcciones.

6.1- Escribe los números que indican entre las calles que se encuentran las siguientes direcciones:

- a) calle 7ª № 2412
- b) calle 9ª № 2412
- c) 66 № 11306
- d) Calle A № 4680

6.2-Carlos y Roberto son amigos, ellos dicen quererse tanto que tienen hasta el mismo número de casa, ellos viven en calles paralelas y las perpendiculares son las mismas. ¿Es esto posible?

6.3-Si un amigo escribe desde otra provincia a personas de estos municipios ¿qué dato de la dirección tiene que estar bien claro para no confundir el destinatario?

6.4-Ana vino de Bayamo a visitar a Raquel para no olvidar la dirección utilizó algunas características que le llamaron mucho la atención de la dirección de su amiga que son las que siguen:

- El número de la casa termina en el cuadrado de 5
- La calle en que vive se designa con el cuadrado de 10.
- Una de las perpendiculares es el cuadrado de 11, pero el número de calle siguiente se le ha olvidado, se pregunta si será el número que indica el cuadrado de 12...tú qué opinas.

- a) Escribe el número de la casa de Raquel.
- b) De los significados de los números naturales cuál se ha aplicado en el ejemplo.

7. Lee detenidamente la siguiente situación para que respondas lo que se te pide:

En una carrera de motos participaron 15 motociclistas. Cada uno de ellos usa una camiseta con un número que lo identifica. Estos eran **múltiplos de cinco** consecutivos, comenzando por el propio **cinco**. Los ganadores de los tres primeros lugares fueron: lugar uno: No. 15, lugar dos: No. 60 y lugar tres: No. 45.

- a) En la información anterior aparece dos veces el número 15. Explica su **significado** en cada situación.
- b) ¿Qué **significado** tienen los números: uno, dos y tres?
- c) ¿Cuál fue el **mayor número** que se le colocó a uno de los motociclistas participantes?
- d) Escribe todos los **números pares** que aparecen en las camisetas de los motociclistas.

8. Pedro es el pelotero No. 24 del equipo de Pinar del Río. Este vive en la Calle Martí No. 104, su teléfono tiene el número 771 890. Javier es el pelotero No. 33 del equipo Industriales. Él vive en la calle 23 No. 2 435. El teléfono de su casa es 6 587 403. Cada uno de estos equipos tiene: 3 receptores, 8 jugadores de cuadro, 10 lanzadores, 6 jardineros y 8 reservas. Además tienen 12 directivos y técnicos. Pedro ocupó el lugar dos, mientras que Javier el lugar cinco dentro de los bateadores de mayor promedio. Todos participaron en la quincuagésima serie nacional de beisbol

- a) En la información anterior aparecen varios números que tienen diferentes significados.

8.1-Agrupar en tres columnas en correspondencia con el significado que los distinguen.

8.2-Selecciona de las listas anteriores los números que permiten llenar correctamente los espacios en blanco:

Los números _____ representan la **cantidad de elementos** que tienen determinados conjuntos.

Los números _____ indican el **orden** en que se encuentran ubicados los elementos de un conjunto.

Los números _____ se refieren a un **código** para identificar personas u objetos.

9. Observa la tabla, determina lo que te dan y lo que te piden en cada fila y columna.

a) Completa los espacios en blanco:

$n-1$		0			9000		
n	100 000			0		4 999	
$n+1$			10 000				80 000

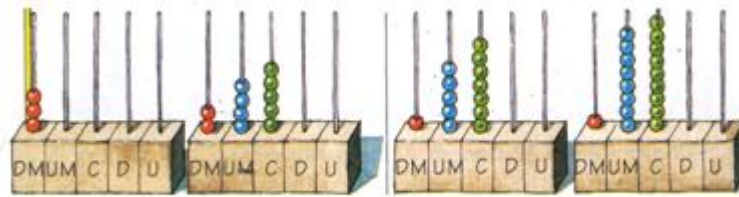
b) Después de llenar la tabla escribe las propiedades de la sucesión de los números naturales que aplicaste.

10. Responde verdadero (V) o falso (F) según sean las afirmaciones siguientes. Fundamenta las falsas:

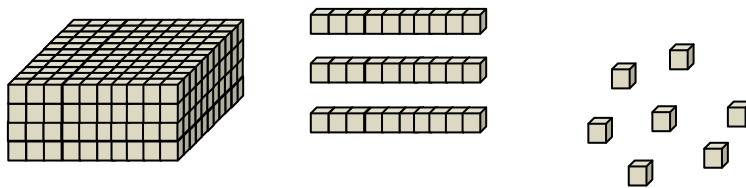
- ___ No existe el menor número natural.
- ___ Cada número natural tiene un antecesor.
- ___ Mediante la adición sucesiva de uno se obtiene cualquier número natural.
- ___ Cada número natural tiene un sucesor.
- ___ El conjunto de los números naturales es finito
- ___ La diferencia entre dos números naturales consecutivos es uno.
- ___ El número 999 999 999 999 999 999 999 es el mayor de los números naturales.
- ___ Cero es el menor número natural.
- ___ Si se adiciona sucesivamente 1 se obtiene un último número natural
- ___ No existe el mayor número natural

11. Escribe en cada caso el número que se ha representado

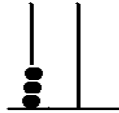
a)



b)



12. ¿Cuántas cuentas hay que colocar y dónde para que esté representado el número 41?



13. a) Escribe el número que se forma en cada caso:

A)9 decenas de millón 6 centenas de millar 3 centenas 9 unidades
b)17 centenas de millar 6 unidades de millar 3 centenas y 5 unidades

c)25 decenas de millón 2 centenas de millar 9 decenas
d)10 centenas de millar

e)10.1000 000

f)10. 10^8

g) $9.1000\ 000$

h) 6.10^8

a) 4.10^{10}

b) $20\ 000\ 000 + 56\ 376$

c) $300\ 000 + 6000 + 800 + 20 + 3$

d) $8.1000\ 000 + 6.100\ 000 + 4.1000 + 3.100 + 2.10$

e) $9.10^9 + 6.10^6 + 4.10^4 + 3.10^2 + 2.10 + 6.1$

f) $8.10^{11} + 6.10^8 + 1.10^5 + 7.10^2 + 6.1$

g) 156 centenas de millar y 12 unidades

h) Doce millones seiscientos veintiséis

Nota: Si tienes dudas auxílate de la tabla de posición decimal

13. b) Escribe el numeral de cada número formado.

14.- Dado los números siguientes:

• 209 326

• 123 617 016

• 340 6 21 322

• 2 6 35 208 009

• 950 004 007 200

• 806 902 000 000

a) Escribe el numeral de cada uno.

b) Representalos como:

- Suma de múltiplos de potencias de diez
- Suma de productos de números de un lugar por una potencia de diez.
- Suma de productos de números de un lugar por una potencia de diez escrita en forma exponencial.

c) Escribe el último número en la tabla de posición decimal.

15- Escribe con cifras:

- a) once millones seiscientos sesenta y cuatro mil quinientos veintitrés.
- b) Ciento veinticuatro millones seiscientos cuatro mil ciento dieciocho.
- c) Veintiún mil doscientos dieciséis millones nueve mil seis.
- d) Ciento catorce mil dos millones trescientos mil cien
- e) ocho mil millones tres.

16. Forma el número que cumple todas las condiciones dadas en cada caso:

- a) Un número de seis lugares que tenga un ocho en las decenas de millar y cero en las unidades.
- b) Un número de ocho lugares que tenga un nueve en las decenas de millar y 6 en las unidades.
- c) Un número de nueve lugares que tenga: un nueve en las decenas de millar, 6 en las unidades de millar, 3 en las centenas y 0 en las unidades.
- d) El menor número de siete lugares que no es potencia de diez
- e) El menor número de siete lugares que:
 - es impar y múltiplo de cinco,
 - el lugar de las centenas lo ocupa el cuadrado de 2
 - en el lugar de las decenas de millar aparece un 8.
- f) El mayor número de nueve lugares.
- g) El mayor número de seis lugares que:
 - _es par,
 - las centenas de millar está ocupada por $\sqrt[3]{27}$,
 - las unidades de millar las ocupa el dígito que representa 2^3
- h) Selecciona la respuesta correcta:
 - El número natural de seis cifras que tiene un 3 en el lugar de las *centenas de millar*, un 1 en el lugar de las *decenas* y un 0 en los restantes lugares es:

(1) ____ 300 100 (2) ____ 300 010 (3) ____ 030 010 (4) ____ 300 001

17-. Con las cifras básicas o dígitos 3, 8, 0, 6, 2,9 sin repetir ninguna:

- a) Forma el menor número posible.

- b) Forma el mayor número posible.
- c) Forma el menor número posible con el 9 en las decenas.
- d) Forma el menor número posible con el 9 en las decenas de millar.
- e) Forma el mayor número posible con el 9 en las unidades de millar.
- f) Forma otros tres números que en las centenas de millar tengan 6
- g) Forma otros tres números que en las unidades esté el 0.
- h) Forma otros tres números que en las centenas de millar esté el 6 y en las unidades el nueve.
- i) Ordena de menor a mayor los números del inciso f
- j) Ordena de forma descendente los números del inciso h.
- k) (Consulten en equipo los números obtenidos por cada uno, copien todos lo que no se repiten.
- l) formen otros números, qué pueden concluir.
- m) Investiguen en computación, en la biblioteca o con su profesor cómo hallar la totalidad de los números que se forman con esos dígitos sin que se repita ninguno)

18. Escribe el menor y el mayor número de cinco cifras que se pueden formar con las cifras básicas 5, 6, 0, 1 y 7, sin que se repitan.

19. ¿Cuántos números de tres cifras hay:

- a) que comienzan con 33. Escríbelos.
- b) que terminan con 33. Escríbelos.
- c) que comienzan con 3.
- d) que terminan con 3.

20. Halla:

- el antecesor de los números que formaste en el inciso g.
- el sucesor de los números que formaste en el inciso h.

21. Analiza la siguiente información para que resuelvas los ejercicios que te proponen.

ETECSA tiene una forma peculiar de asignar los números telefónicos, por ejemplo, en una zona del Vedado, en La Habana, algunos teléfonos comienzan con 831, tienen 7 dígitos y no hay ningún número telefónico que se repita: Ejemplo 831 0794.

- a) Con esas mismas cifras (0, 7, 9, 4) cuántos y cuáles números telefónicos nuevos se pueden asignar. Escríbelos
- b) Nombra el principio de nuestro sistema de numeración que permite que ningún número se repita.
- c) Supón que debes asignar números telefónicos a 10 personas de esta zona y te ponen como condición:

- El 831 es fijo porque identifica el lugar,
- en los otros cuatro lugares no debe repetirse ninguna cifra,

¿Es esto posible? Fundamenta tu respuesta. Escribe los números que asignarías.

21 d) De las funciones que tienen los números naturales cuál es la que utiliza esta empresa para prestar este servicio.

22 Resume los principios fundamentales del sistema de posición decimal y de la sucesión de los números naturales (Axiomas de Peano).

23. Resuelve las siguientes situaciones:

Varias personas extraen dinero del banco y solicitan se les entregue el dinero en la menor cantidad de billetes posible. Determina en cada caso:

- a) La denominación o valor en que les dieron los billetes ⁽²⁾.

²La denominación o el valor de los billetes ; \$1; \$3; \$5, \$10; \$20; \$50 y \$100.00

b) La cantidad de billetes que les entregaron de cada valor.

c) El total de billetes que les entregaron.

1ª José extrajo del banco \$ 9 312.00

2ª Carlos \$ 7510.00

3ª Luis \$ 34011.00

4ª El administrador de un centro de trabajo sacó \$879 618.00

5ª Un trabajador por cuenta propia depositó en el banco 543 billetes de cien, 9 billetes de diez y ocho billetes de uno ¿Cuántos pesos en total ingresó al banco?

6ª Dalia y Orquídea han ahorrado dinero para sus vacaciones. Dalia tiene 3 billetes de \$100, 25 billetes de \$10 y 18 de \$1. Orquídea posee 3 billetes de \$100, 23 billetes de \$10 y 38 de \$1. ¿Cuál de las dos ha ahorrado más dinero?

24. Memoriza los símbolos romanos y su valor.

25. Observa en tu entorno la utilización de los números romanos y escribe tres ejemplos en que se emplean.

26. Escribe en el sistema de numeración decimal:

a) MXII

b) DCCVIV

c) CMLXXIX

d) CMLXXXI

e) DCXXV

27) - Escribe en el sistema de numeración decimal y con los símbolos numéricos romanos:

- El día, el mes y el año en que realizas la actividad.
- El año en que naciste.
- El año en que triunfó la Revolución.
- La fecha completa del inicio de nuestras guerras de independencia.
- La fecha de la caída en combate del “Titán de Bronce”.

27. Después de realizada la actividad anterior argumenta cuál sistema de numeración es más ventajoso.
28. Determina el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
- A. ☐ Los símbolos numéricos romanos forman un sistema posicional.
 - B. ☐ El sistema de numeración decimal tiene 10 cifras básicas o dígitos.
 - C. ☐ Las potencias de diez se obtienen como $10+10+10+10+10+\dots 10$ (n veces)
 - D. ☐ En el número 954 654 se utilizan seis dígitos para escribirlo.
 - E. ☐ En el número 804 765 123 se han utilizado todas las cifras básicas o dígitos para representarlo.
 - F. ☐ En el número 90 124 608 el cero ocupa el lugar de las decenas y de las unidades de millón.
 - G. ☐ Los números 1; 10; 100; 1000; 10 000; 100 000... son potencias de 10.
 - H. ☐ Nuestro sistema de numeración es posicional porque cada cifra tiene un valor de acuerdo al lugar que ocupa.
 - I. ☐ Los números naturales se pueden representar como suma de múltiplos de potencias de 10.
 - J. ☐ El número que se forma con $6 \cdot 10^7 + 8 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 7 \cdot 1$ tiene seis lugares
 - K. ☐ Los símbolos numéricos romanos forman un sistema aditivo.
 - L. ☐ Los sistemas posicionales como el decimal y el binario son más ventajosos que el romano.
29. Determina el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

Fundamenta las falsas

- a) ☐ El número de comprobante de pago de un taxi expresa el carácter cardinal de los números naturales.
- b) ☐ Para dos números naturales cualesquiera x ; y se cumple: $x < y$ o $x > y$ o $x = y$.
- c) ☐ El número que le corresponde a los estudiantes premiados en una competencia de natación expresa el carácter de código de los números naturales.

- d) ____ La relación de orden de los números naturales es reflexiva ($a < a$)
- e) ____ Para tres números naturales cualesquiera x ; y ; z se cumple si $x < y$; $y < z$; entonces $x < z$.
- f) ____ Para todo número natural a y b se cumple: si $a < b$ entonces $b < a$
- g) ____ Cero es el menor número natural.
- h) ____ Si se adiciona sucesivamente 1 se obtiene un último número natural
- i) ____ El orden de los números naturales cumple la propiedad asimétrica.
- j) ____ La propiedad de tricotomía plantea que para dos números naturales cualesquiera a y b se cumple exactamente una de las siguientes posibilidades: $a < b$, $a > b$ ó $a = b$.
- k) ____ Para ordenar números dados es necesario compararlos primero.

30_Determina:

- a) Los números que se hallan entre 996 y 1004
- b) Entre qué múltiplos consecutivos de 100 000 se encuentran los números siguientes: 268 975; 679 401; 100 005; 996 897
- c) Los valores de x para los que se cumple:

$$99\,998 < x < 100\,005$$

$$32\,568 < x < 46\,789$$

$$679 \leq x < 686$$

$$26\,568 < x \leq 26\,574$$

$$8994 \leq x \leq 9002$$

- d) Representa en un rayo numérico cada uno de los intervalos dados anteriormente;(utiliza una escala adecuada en cada caso)

31. En los siguientes números se han sustituido algunas cifras que no tienen que ser iguales entre sí por asteriscos. **Ordénalos de mayor a menor** en cada inciso. Fundamenta cómo lo hiciste en cada caso:

a) $2^{**}37^{**}$; $3^{**}7^{**}$; 1^*91^{**} ; 9^{*****}

$$\begin{array}{llll} \text{b) } 2 \cdot 7 \cdot 6; & 2 \cdot 6 \cdot 7; & 2 \cdot 7 \cdot 6; & 7 \cdot 2 \cdot 6; \\ \text{c) } 1 \cdot 3; & 3 \cdot 1; & 3 \cdot 1; & 1 \cdot 3 \end{array}$$

32. Observa y determina si puedes comparar sin completar los números.

Explica tus reflexiones. Si puedes comparar escribe el signo correspondiente:

- a) $3 \spadesuit \spadesuit \spadesuit \spadesuit$ $5 \spadesuit \spadesuit \spadesuit \spadesuit$
b) $\spadesuit \spadesuit \spadesuit \spadesuit \spadesuit \spadesuit$ $\spadesuit \spadesuit \spadesuit \spadesuit \spadesuit$
c) $\spadesuit \spadesuit 9 \spadesuit \spadesuit$ $\spadesuit \spadesuit \spadesuit 7 \spadesuit$
d) $69 \spadesuit \spadesuit \spadesuit \spadesuit$ $62 \spadesuit \spadesuit \spadesuit \spadesuit$
e) $580 \spadesuit \spadesuit \spadesuit$ $586 \spadesuit \spadesuit \spadesuit$

33. Completa los cuadraditos con los símbolos $<$, $=$ ó $>$ según convenga (sin efectuar las adiciones)

- a) $7\,659$ $7 \cdot 1\,000 + 6 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 9 \cdot 1$
b) $63\,742$ $6 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^3 + 742$
c) $59\,406$ $5 \cdot 10^5 + 406$
d) $35 + 46$ $34 + 46$
e) $529 + 467$ $529 + 477$

34. Dado los conjuntos de números:

$$A = \{500; 505, 510, 515, 520\}$$

$$B = \{501; 503, 505, 507, 509\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{N}; 500 \leq x \leq 510\}$$

- a) Halla: $A \cap B$ $B \cup A$
 $A \cap C$ $A \setminus C$

- b) Escribe en forma tabular el conjunto C. Representa ese intervalo en un rayo numérico.

35. Observa la tabla, determina lo que te dan y lo que te piden en cada fila y columna. Completa los espacios en blanco:

$n-1$				9909			
n	100 000	0	9 809 999			4 999	
$N+1$					1909		80 000

Después de llenar la tabla:

- escribe las propiedades de la sucesión de los números naturales que aplicaste.
- Ordena los números dados en la tabla de forma descendente o decreciente.
- Ordena los números que escribiste en los espacios en blanco de forma ascendente.

36. En una gran ciudad controlan el tráfico de vehículos con una computadora que los cuenta de mil en mil trazando una raya cada vez que transita esa cantidad:

Vehículos	conteo	Total de vehículos
Autos		
Ómnibus		
Camiones		
Motos		

l) Observa la tabla y completa los espacios en blanco:

- Los vehículos que menos transitan por la ciudad son los_____
esta cifra es_____ menos que las motos.
- El medio de transporte más frecuente en la ciudad es_____ seguido por_____.
- Si en cada auto viajan cuatro personas, en este medio se transportaron_____ personas.

d. La pantalla registró un total de _____ vehículos.

II) Halla:

-en cuánto excede el número de ómnibus al de las motos.

-las veces que está contenido el número de camiones en el de los ómnibus.

III) Secciona la respuesta más adecuada. Fundamenta tu selección:

Si fueras la máxima autoridad de esa ciudad harías campaña para convencer a los ciudadanos para que viajaran en:

A.-motos_____ B._ camiones_____ C._ ómnibus_____ D.- autos_____

37. Lee detenidamente las situaciones dadas y responde lo que se pregunta.

Rosa y Ernesto fueron al mercado. Rosa compró vegetales y Ernesto frutas.

a) ¿Cómo se puede saber lo que gastaron entre los dos? Argumenta.

b) Si se sabe que Rosa gastó cinco pesos menos que Ernesto. ¿Cómo determinar lo que gastó Ernesto? Fundamenta tu respuesta.

c) Si se conoce lo que gastó Ernesto y que Rosa gastó cinco pesos más que él. ¿Cómo determinar lo que gastó Rosa? Explica tu razonamiento.

38. Calcula:

a) $490\,568 + 8\,762$

b) $679\,086 + 70\,934$

c) $25896 + 4567 + 7\,069\,568 + 3009$

d) $\$245\,678 + \$578 + \$9\,804$

e) $25\,789\text{ km} + 9\,604\text{ km} + 965\text{ km}$

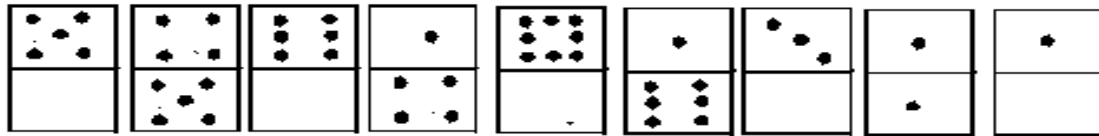
39. Completa la tabla. Justifica la propiedad de la adición que se aplica:

m	n	m + n	n + m
---	---	-------	-------

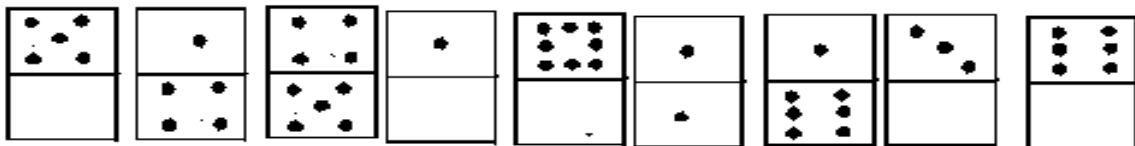
480 975	19 025		
43 896	357 904		
145 987	50 603		
87 965	2 450 987		
986 543 201	907 620		

40. Analiza la siguiente situación:

Después de terminar una partida de dominó, el ganador recoge las fichas de su contrario que aparecen a continuación:



Y para contarla las ordena de la siguiente manera y dice rápidamente 46



a) Explica cómo calculó el jugador para responder de forma rápida y segura.

41. Calcula la suma de: 67 890 y 6 508 .

42. Un sumando es el sucesor de 56 899 el otro sumando es 7895. Halla la suma.

43. En una escuela hay presentes 964 estudiantes. Si hay 18 estudiantes

ausentes. ¿Cuál es la matrícula de la escuela?

44. ¿Cuál es la distancia entre dos pueblos si ya se han recorrido 4678 m y faltan por recorrer 387 m?

45. Héctor saca de su cuenta bancaria \$860.00, después \$ 980.00, otro día saca \$650 .y aún le quedan \$2467.00. ¿Cuánto dinero tenía ahorrado en el banco?

46. Dados los datos siguientes:

596 matas de mango

643 matas de naranja

325 matas de guayaba

Formula un el problema y resuélvelo.

47. Analiza las siguientes situaciones y responde lo que se pregunta.

- Ernesto fue al mercado, compró vegetales y frutas .Pagó y le dieron un vuelto.

¿Cómo calculó el dependiente para dar el vuelto? Argumenta.

- Si se sabe lo que gastó Rosa y que Ernesto gastó cinco pesos menos que. ella ¿Cómo determinar lo que gastó Ernesto?
Fundamenta tu respuesta.
- Si se conoce que el dinero que gastó Ernesto son cinco pesos más que lo gastado por Rosa. ¿Cómo determinar lo que gastó Rosa?
Explica tu razonamiento.

48. Calcula:

- a) $98\,765 - 56\,549$ g) $257\,890 + 987\,043 - 90\,874$
 b) $876\,540 - 98\,039$ h) $78\,900 + (98\,132 - 87\,908)$
 c) $765\,102 - 68\,403$ i) $9\,875 + k = 10\,508$
 d) $975\,008 - 47\,989$ j) $m - 79\,808 = 11\,613$
 e) $60\text{km} - 39\,786\text{m}$ k) $346\,090 - n = 240\,145$
 f) $3500\text{ml} - 875\text{ml}$ l) $5\,900 + y = 48\,96$

49- Completa los espacios en blanco. Fundamenta el procedimiento que utilizaste en cada caso.

a)

a	b	a-b
5 709		12 079
	20 970	67 008
890 603		902 008
	46 089	80 006

b)

c	d	c - d
	1 498	9 008
78 095	69 910	
6 509	8 902	
123 000		98 705

50. Realiza los siguientes ejercicios de cálculo:

- 1) $4\,425 - 1\,218$
- 2) $3\,526 - 7\,512$
- 3) $6\,700 - 6\,700$

$$4) 5\,700 - 3\,00$$

$$5) 4\,210 - 328$$

- Describe los ejercicios señalando semejanzas y diferencias.
- Determina si todos los ejercicios se pueden resolver. Fundamenta tu respuesta.
- Menciona cómo efectuar el control.

51. Realiza los siguientes ejercicios de cálculo:

$$a) 6\,509 + 2\,491 \qquad 7\,320 - 617$$

- Camila hizo los cálculos anteriores y obtuvo los resultados que se muestran. Compáralos con los tuyos y señala los posibles errores de cálculo que cometió.

6 509	7 320
<u>+2 491</u>	<u>- 617</u>
8 900	703

- Explica por qué Camila se equivocó en:

La adición: _____

La sustracción: _____

52. Sustituye el asterisco por la cifra que conviene en cada caso. Fundamenta cómo lo hiciste.

$$\begin{array}{r} * \quad 0 \quad 1 \quad * \\ - \quad 5 \quad * \quad 9 \\ \hline 8 \quad * \quad 0 \quad 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \quad * \quad 0 \quad 4 \\ - \quad 2 \quad 5 \quad 9 \quad * \\ \hline * \quad 7 \quad * \quad 7 \end{array}$$

53. Lee y resuelve:

- a) El minuendo es 98 600 el sustraendo 4 576 calcula la diferencia.
- b) El sustraendo es 589 y la diferencia 6 290, halla el minuendo.
- c) ¿De qué número sustraes 90874 para obtener 586?
- d) Sustrae 9876 de 20 056
- e) Halla la diferencia de 90 875 y 145 608
- f) La suma de dos números es 17 603, el mayor de ellos es 9758. ¿Cuál es el menor?
- g) Un sumando es el duplo de 568, la suma es 6 848. Calcula el otro sumando.

54. Resuelve:

- a) $637 + x = 937$
- b) $2000 - y = 1500$
- c) $4300 + k = 5100$
- d) $x - 908 = 3\,500$

55. En una tienda se recaudaron 4 310 pesos el lunes. El martes se recaudan 1 038 pesos más que el lunes. ¿Cuántos pesos se recaudaron el martes?

56. A una base de campismo llegaron 180 vacacionistas. De ellos 60 compiten en natación, 42 practican la pesca y el resto exploran los alrededores. ¿Cuántos campistas participan en la exploración?

57. Si los que compiten en natación y 5 de los que practican pesca llegaron en la mañana, ¿cuántos llegaron en la tarde?

58. Si los exploradores fueron a dormir temprano y los demás bailaron ¿cuántos fueron a bailar en la noche?

59. En una escuela 140 estudiantes participan en concursos de conocimientos diferentes. En Matemática participaron 36 alumnos, en Lengua Española 42 ¿Cuántos concursaron en el resto de las asignaturas?

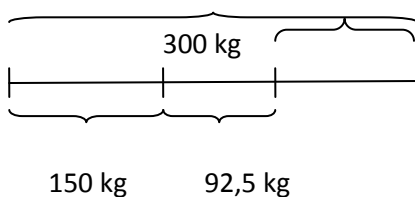
60. En una escuela hay 120 alumnos que participan en círculos de interés, 48 están en el Guerrilleros de la Enseñanza, 36 en el de Amigos de la Lectura, 30 en el Matemáticos del Futuro y el resto en el de Amigos de la FAR. ¿Cuántos estudiantes están en el círculo amigos de las FAR?

61. Un ómnibus escolar ha recorrido 128 km . Si la ciudad de destino está a 432 km del lugar de salida ¿Cuántos kilómetros le faltan por recorrer?

62. En un mercado concentrador había 7500kg de viandas. Por la mañana se extrajeron 958kg , al medio día 972 kg y por la tarde 975 kg.¿Cuántos kilogramos de mercancías quedan en el almacén?

63. Tenía \$50,00, gasté \$13,00 en malanga, \$9,00 en ajo, \$5,00 en boniato. Con el dinero que me queda, ¿puedo comprar una libra de jamón que cuesta \$33,00? ¿Cuánto me sobra o me falta?

64. Observa el siguiente esquema. Elabora la situación problémica que te sugiere.Resuélvelo



65. La siguiente tabla muestra la cantidad de médicos que había en Cuba en los primeros años del siglo XXI

año	2000	2001	2002
Total de médicos	65 997	66 325	67079

Analiza la tabla y responde:

- a) Representa como suma de productos el número de médicos existentes en el año 2002.
- b) ¿Cuántos médicos más había en el 2002 que en el año 2000?
- c) ¿En cuánto exceden los médicos que había en el 2001 de los que había en el 2000?
- d) ¿Cuántos médicos había entre los tres años?

66. Determina el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

Fundamenta las falsas:

- A. ☐ La adición de números naturales cumple la propiedad asociativa.
- B. ☐ $2\,345 + 0 = 0$
- C. ☐ La adición de números naturales siempre se puede realizar:
- D. ☐ $345 + 583 \neq 583 + 345$
- E. ☐ $a - a = 7$
- F. ☐ $567 - 0 = 567$
- G. ☐ La sustracción de números naturales siempre se puede realizar.
- H. ☐ $543 - 278 = 278 - 543$
- I. ☐ La adición de números naturales cumple la propiedad conmutativa.
- J. ☐ La sustracción es la operación inversa de la adición.

67. Lee detenidamente cada situación y explica cómo las resuelves

-En una librería hay un número de estantes con cierta cantidad de libros en cada uno. ¿Cómo averiguar cuántos libros hay en la librería?

-En saludo al primero de mayo cada grupo confeccionó la misma cantidad de banderas. Ayuda a la directora a averiguar cómo saber cuántas banderas se hicieron.

- Si una fábrica duplica el número de confecciones que debía realizar en saludo al 26 de julio ¿qué harías para saber el total de productos realizados?

68. ¿Cómo calculas con rapidez una suma en la que 568 aparece 36 veces como sumando?

69. Calcula. Siempre que sea posible realiza los cálculos mentalmente. Explica cómo pensaste:

a) $987 \cdot 100$

f) $56\,078 \cdot 10^4$

b) $987 \cdot 100$

g) $5679 \cdot 90$

c) $508 \cdot 100$

h) $986 \cdot 45$

d) $9786 \cdot 1000$

i) $308 \cdot 98$

e) $900 \cdot 6$

j) $4076 \cdot 307$

70. Aplica la propiedad conmutativa y calcula:

a) $89 \cdot 786$

b) $76 \cdot 509$

c) $905 \cdot 1236$

71. Asocia convenientemente y calcula:

a) $500 \cdot 4 \cdot 25$

b) $5 \cdot 987 \cdot 2$

c) $4 \cdot 605 \cdot 10$

72. Halla el quíntuplo de 678.

73. Un factor es 4567 el otro factor es 97 , halla el producto.

74. Sustraer de 2 358 900 el producto de los números 4812 y 15.

75. ¿Cuántos días son 45 semanas?

76. ¿Cuántos días son 8 años?

77. Halla el número que:

a) multiplicado por 9 da como resultado 72.

b) multiplicado por 8 da como resultado 72.

- c) multiplicado por 8 da como resultado 56
- d) multiplicado por 8 da como resultado 560
- e) multiplicado por 8 da como resultado 56
- f) multiplicado por 70 da como resultado 4900

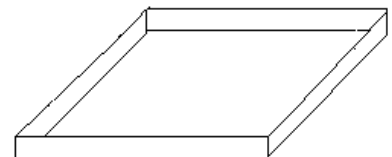
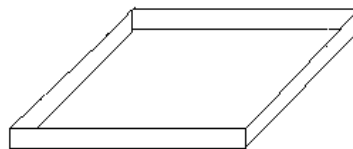
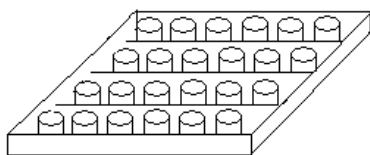
78. En un ómnibus viajaban 17 personas y después subieron otras 14. El precio del pasaje era de \$5. ¿Cuánto dinero recibió en total el conductor del ómnibus?

79. Luisa adornó 5 cajas iguales de regalos con cinta . Si utilizó 100 cm de cinta para cada caja, ¿cuántos metros de cinta necesita para adornar las 5 cajas?

80. Un productor de miel envasa el producto en cajas que contienen 24 pomos. Si tiene almacenadas 10 de esas cajas, ¿cuántos pomos de miel acopió

81)- En la figura se muestra una caja de latas de refrescos. ¿Cuántos refrescos hay en:

- _tres cajas iguales?
- _ocho cajas iguales?
- _nueve cajas y la tercera parte de otra?
- 10 cajas y la mitad de otra?



82. Se deben transportar 1278 sacos de papa. Cargaron seis camiones con 135 sacos cada uno. ¿Cuántos sacos faltan por transportar?

83. Lee cada situación y explica la operación de cálculo que la resuelve.

- Eduardo distribuye sus sellos en dos sobres. ¿Cómo saber cuántos sellos hay en cada sobre?
- Los pioneros de segundo formaron dos filas con la misma cantidad de alumnos ¿Qué hacer para saber cuántos niños hay en cada fila?
- La producción de dulces de una panadería se envasa en cajas que contienen la misma cantidad de dulces. ¿Qué hacer para averiguar la cantidad de cajas que se necesitan?

84. Calcula:

- a) $9360:30$
- b) $1545:5$
- c) $3612:27$
- d) $74\ 328:42$

85. Completa las tablas siguientes. Fundamenta el procedimiento que utilizaste en cada caso:

a	b	$a \cdot b$
18 045	67	
	54	194 886
	39	168 480
30 608	97	

c	d	$c:d$
13 536	32	
	39	4 320
	53	924
25 842	73	

86.

Observa lo que te dan y lo que te piden. Explica cómo hallas lo que te piden:

Dividendo	Divisor	Cociente	Resto
2931	36		

1463		52	
	67	94	19
575	18		17
1752		73	

87. Analiza y calcula los siguientes ejercicios con texto:

- El dividendo es 1917, el divisor es 71. Halla el cociente.
- El producto es 4578. un factor es 88 Halla el otro factor.
- ¿Por qué número debes multiplicar a 5697 para obtener 0?
- El divisor es 1 y el cociente 5 670. Halla el dividendo.
- El divisor es 31 y el cociente 224. Halla el dividendo.
- ¿Cuántas veces 1792 contiene a 56?
- ¿cuántas veces 28 está contenido en 15 708?

Resuelve los problemas. Puedes apoyarte en esquemas:

88. Se repartieron por igual 1453 libretas por igual entre 32 grupos, si sobraron 13 libretas ¿Cuántas se entregaron a cada grupo?

89. Si seis libros cuestan \$120. ¿Cuánto cuestan 14 libros de esos mismos libros?

90. ¿Cuántos turistas toman asiento en 12 ómnibus, si en cada uno caben 48 personas, incluidos el chofer su ayudante y el guía.

91. Una fábrica de caramelos produjo 48 925 caramelos surtidos y 55 375 caramelos de café con leche, todos son envasados en cajas de 100 unidades .¿Cuántas cajas se obtienen?

92. Una obrera de una granja avícola recogió en media jornada de trabajo 470 huevos. ¿Cuántos “cartones” necesita para envasarlos, si en cada cartón solo se pueden colocar 30 huevos?

93. Para una actividad productiva los 423 estudiantes de una escuela se agrupan en brigadas de 18 niños, excepto en la última brigada en que la cantidad de niños es menor. ¿Cuántos estudiantes *hay en la última brigada*?

94. *En los* ómnibus escolares pueden viajar, como máximo, 42 pasajeros. Un centro escolar tiene que transportar 310 estudiantes hacia la escuela al campo. ¿Cuántos ómnibus necesita alquilar para el traslado de los estudiantes?

95) Para una representación teatral los niños de un grupo forman grupos de tres niños, pero entonces sobra un niño. Si se agrupan en grupos de 4, no sobra ninguno. Determina el número de niños, sabiendo que está entre 10 y 20.

96. Los 335 niños y profesores de una escuela se trasladan hacia el teatro en ómnibus que tienen la misma capacidad. En el último ómnibus se ocuparon solo 15 asientos. Menciona posibles capacidades de los ómnibus.

97. Se distribuyen 475 pollos diariamente, durante cinco días. Si se deben distribuir 2700 pollos ¿Cuántos pollos faltan por distribuir?

98. Determina el valor de verdad de la siguientes proposiciones. Fundamenta las falsas:

A. ____ La división es la operación inversa de la multiplicación.

B. ____ La división de números naturales siempre se puede realizar.

C. ____ $81:0=81$

D. ____ $a:1=0$

E. ____ La multiplicación cumple la propiedad conmutativa.

F. ____ En la división de números naturales se cumple: $D=d \cdot c + r$

G. ____ El ejercicio $43:6$ da como resultado 6 y resto 7.

H. ____ $a + a + a + a + a + a + a = 7 \cdot a$

I. ____ $a:0=16$

J. ____ $a:a=1$

K. ____ $3+3+3=3^3$

L. ____ La división de números naturales tiene solución si el dividendo es múltiplo del divisor.

99. Calcula:

a) $875 : 5^2 + (348 - 1399)$

b) $\sqrt[3]{81} + 264.7$

c) $981:9+(8^2 \cdot 32)$

100. Halla el valor de x en cada caso. (Recuerda la relación $D= d \cdot c+r$)

a) $475 \cdot x = 144\,400$

b) $z : 52 = 80$

c) $660 : y = 60$

d) $80\,178 = 25 \cdot x + 3$

EJERCICIOS VARIADOS DELCAPÍTULO

1. En los templos de los faraones egipcios se han encontrado símbolos que representan cantidades. Estudiando el significado de estos símbolos se ha llegado a saber qué número representa cada combinación de símbolos hallada. Con estos números se registraban las riquezas acumuladas, la cantidad de enemigos capturados en una batalla y otros datos importantes para el faraón y su corte. El sistema de numeración empleado es decimal, pero no tiene en cuenta diferencias en el valor de los símbolos por el lugar que ocupan. El número representado se calcula como la suma de los valores de los símbolos que lo componen

En la siguiente tabla se señala el valor de cada símbolo:

Valor	1	10	100	1000	10000	100000	1
-------	---	----	-----	------	-------	--------	---

							000000
Símbolo	I	n	9	I	I	9	I

¿Cuál de las siguientes cantidades representadas con símbolos egipcios representa el número menor? Marca con una cruz A, B ó C. Fundamenta.

☐ A) IIII nnnn 9999 II II 9

☐ B) 9 9 III I 999 n II

☐ C) I 9 I I

2. La tabla siguiente muestra el arqueo de una caja en un banco. Cada raya representa 50 billetes. Observa la tabla, analiza lo que te dan y lo que debes hallar para que realices con éxito la tarea.

Denominación de Billetes	Conteo	Total de billetes	Total de pesos
1 peso	IIII II II		
5 pesos	IIII II II I		
10 pesos	IIII II II II IIII		
20 pesos	IIII II II II I		
50 pesos	I II II II		

100 pesos			
-----------	--	--	--

a) Completa las columnas en blanco. Trata de hacer los cálculos mentalmente para que desarrolles habilidades.

b) Ordena las cantidades de dinero de menor a mayor.

c) Calcula:

_ el total de billetes que hay en el banco

_ el total de dinero

3. Cambio de denominación:

Para no transportar tantos billetes en el banco cambiaron todo el dinero en los billetes más grandes posibles.

Completa la tabla siguiente con la cantidad de billetes necesarios de cada valor para cada cantidad de dinero obtenida en la tabla anterior.

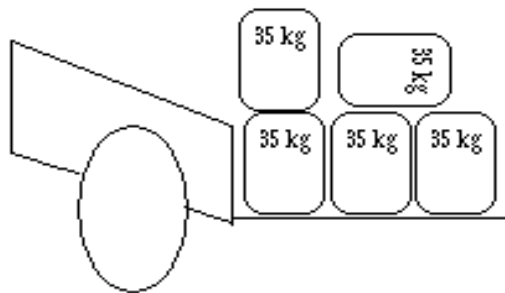
Tipos de billetes	Total de pesos	Billetes de \$5.00	Billetes \$10.00	Billetes de \$20	Billetes de\$50	Billetes de\$100
\$1.00						
\$5.00						
\$10.00						
\$20.00						
\$50.00						

4. Se dice que un número natural es “**palindrómico**” si al leerlo de derecha a izquierda o de izquierda a derecha se obtiene el mismo número. Por ejemplo 393 y 1441 son palindrómicos. Determina todos los números palindrómicos entre 800 y 2 000.

5. Anelis vive en una calle cuyas casas están numeradas del 1 al 34.
¿Cuántas veces aparece el dígito 3 en la numeración de las casas?

6. Con un kilogramo de pienso se alimentan 25 gallinas.

a) ¿Cuántas gallinas se pueden alimentar con todos esos sacos?



b) ¿Cuántos gramos como promedio come cada gallina de un kilogramo de pienso?

7. La tabla muestra los egresados de la Escuela Latinoamericana de Medicina durante un quinquenio.

Año	Cantidad de egresados
2005	1496
2006	1419
2007	1545
2008	1500
2009	1296

Analiza la tabla, calcula y completa:

- La graduación más pequeña fue el año _____ y la mayor fue el año _____.
- La diferencia entre las dos graduaciones que representan números pares es _____.
- En ese quinquenio se graduaron _____ médicos.
- El promedio de egresados por curso es de _____.
- En la mayor graduación egresaron _____ estudiantes más que en la menor.
- Ordena de mayor a menor el número de egresados.
- Escribe los números que son múltiplos de 4.
- Escribe los números que son múltiplos de 5.
- Escribe los números que son múltiplos de 3.
- Escribe los números que son múltiplos de 3, 9 y 6.
- Escribe los números que son múltiplos de 2, 5, 10, 25, 50 y 100.

8. En un agromercado aparece un cartel con la siguiente información:

Productos	Precios
Ajo:	\$1 la cabeza, \$25 la ristra
Yuca	\$1 (1 libra)
Malanga	\$3,00 (1 libra)
Papa	\$1 (1 libra)
Calabaza	\$2,00 (1 libra)
Plátano macho	\$2 (1 libra)
Boniato	\$0,75

Guayaba	\$3 (1 libra)
Piña	\$6.00(una piña)
Mango	\$4 (1 libra)

De los productos que aparecen en la pizarra:

- a) ¿Qué producto es el más caro
¿Cuáles cuestan lo mismo?
- b) Si tienes \$50.00 para comprar viandas, calcula la cantidad que puedes comprar de cada vianda
- c) Carlos tiene \$20.00 compra, una fruta bomba y una piña, con el dinero que le queda cuántas libras de guayaba puede comprar ¿Cuánto tienen que devolverle?
- d) Eduardo quiere comprar guayabas. ¿Cuántas libras podrá comprar si tiene solo \$10?
- e) Si una ristra de ajo tiene aproximadamente 30 cabezas de ajo, ¿qué será más económico, comprar los ajos por separado o comprar la ristra?
- f) Si para hacer unos buñuelos y unos casquitos de guayaba la mamá de Rosa le ha encargado, 3 lb de yuca, 1 lb de malanga y 4 lb de guayaba, ¿qué dinero debe llevar Rosa como mínimo?
- g) Si para hacer un pomo de mermelada de guayaba se necesitan como mínimo 3 lb de guayaba y cada libra de guayaba son aproximadamente tres guayabas, ¿cuántas guayabas se necesitan para hacer mermelada para cinco pomos?

9. La tabla muestra las poblaciones de algunas provincias seleccionadas (según la actual división política-administrativa)

Provincia	Población
Artemisa	Quinientos dos mil trescientos doce
Ciego de Ávila	422 576
Las Tunas	536 027
Matanzas	690 113
Santiago de Cuba	1047 015
Mayabeque	381385
La Habana	2 141 652
Pinar del Río	592 851

- Escribe con cifras la población correspondiente a Artemisa
- Calcula el total de habitantes que viven en la región occidental
- Ordena de manera creciente las provincias según sean las poblaciones
- ¿En cuánto excede la población de Artemisa a la de Mayabeque?
- ¿Cuántos habitantes más hay en Santiago de Cuba que en Matanzas?
- Escribe el numeral que representa la población de:
 - Matanzas
 - Ciego de Ávila
 - La Habana
 - La población de la provincia más poblada después de La Habana.
 - Calcula el total de personas que viven en el resto del país si la población de Cuba es de 11 240 841 habitantes.

10. Para una actividad productiva los 428 estudiantes de una escuela se agrupan en brigadas de 18 niños, excepto en la última brigada en que la cantidad de niños es menor. ¿Cuántos estudiantes hay en la última brigada?

11. En los ómnibus escolares pueden viajar, como máximo, 42 pasajeros. Un centro escolar tiene que transportar 310 estudiantes hacia la escuela al

campo. ¿Cuántos ómnibus necesita alquilar para el traslado de los estudiantes?

12. Para una representación teatral los niños de un grupo forman equipos de tres niños, pero entonces sobra un niño. Si se organizan en grupos de 4, no sobra ninguno. Determina el número de niños, sabiendo que está entre 10 y 20.

13. Los 335 niños y profesores de una escuela se trasladan hacia el teatro en ómnibus que tienen la misma capacidad. En el último ómnibus se ocuparon solo 15 asientos. Menciona posibles capacidades de los ómnibus ajustándote para ello a la realidad.

14. De todas las posibles capacidades cuál es la más conveniente utilizar para ahorrar combustible y salario de choferes. Fundamenta tu respuesta.

15. Se distribuyen 475 pollos, diariamente durante 5 días. Si se deben distribuir 2 700 pollos, ¿cuántos pollos faltan por distribuir?

16. Entre Elena y su hermana más pequeña pesan 87 kilogramos. Si la hermana pesa la mitad de lo que pesa Elena. ¿Cuánto pesa cada uno?

17. Cuando en La Habana son las 12 del día, en Moscú son las 8 de la noche. Un avión sale de La Habana a las 7 a.m. (hora de Cuba) y efectúa el viaje en 11 horas. ¿A qué hora aterrizaje en Moscú?

18. Marcos, Alejandro y César tienen 66 bolas entre los tres. Las del primero con las del segundo suman 34, las del segundo con el tercero suman 45 y las del tercero con las del primero 53. ¿Cuántas bolas tienen cada uno?

19. En una tienda de ropa, el lunes reciben 80 m de tela. El martes venden 440 m. Si aún quedan en la tienda la mitad de los metros de tela que tenían el lunes, cuántos metros de tela había en la tienda antes de recibir las del lunes.

20. Un avión recorrió 8 820 km en 12 h de vuelo y otro necesitó 11 h para recorrer 8 250 km ¿Cuál es el más veloz? Fundamente su respuesta.

Capítulo 3

La divisibilidad en los números naturales

3.1 La relación de divisibilidad de números naturales

Al estudiar en la escuela primaria la operación de división en el dominio de los números naturales se subraya que solo es posible realizar esta operación entre dos números naturales cuando uno es múltiplo del otro. Así, por ejemplo, se puede dividir:

- 12 por 3,
- 6 por 2,
- 124 por 4.

Las divisiones de los ejemplos anteriores se pueden realizar pues:

- Existe un número natural 4 que cumple: $3 \cdot 4 = 12$.
- Existe un número natural 3 que cumple: $2 \cdot 3 = 6$.
- Existe un número natural 31 que cumple: $31 \cdot 4 = 124$.

Sin embargo, no se puede dividir 7 por 2, ya que no es posible encontrar un número natural que multiplicado por 2 se obtenga como resultado 7. Análogamente, no es posible dividir 15 por 4, pues no existe un número natural que multiplicado por 4 resulte 15. Se puede pensar en muchos más casos de divisiones entre dos números naturales donde no es posible realizar la división. Por eso en el dominio de los números naturales la operación de división no puede realizarse siempre.

Definición:

Se llama **múltiplo** de un número natural al número que resulta de multiplicar este número por otro cualquiera.

Ejemplo:

- Son múltiplos del número natural 7, los números 0, 7, 14, 21, 28, 35.

Obsérvese que en el ejemplo anterior solo se han escrito un número finito de múltiplos y que existen muchos más. Para hallar los múltiplos de un número basta multiplicarlos por cada número natural, empezando por el cero. Por eso el conjunto de múltiplos de un número natural es un conjunto numérico infinito, que incluye al cero y al propio número.

En resumen:

- Si **b** es múltiplo de **a**, se cumple que $a \cdot x = b$, donde $a, b, x \in \mathbf{N}$
- Todo número es múltiplo de sí mismo.
Bastaría multiplicar el número dado por el número 1 y el resultado es el mismo.
- El 0 es múltiplo de cualquier número y es el menor de sus múltiplos.
Cualquier número al multiplicarlo por 0 resulta 0. Por eso, en el ejemplo anterior 0 es múltiplo de 7 y es el menor de los múltiplos.
- El conjunto de múltiplos de un número es infinito.

Definición:

Se llama **divisor** de un número natural al número, distinto de cero, que divide de manera exacta al número.

Ejemplo:

- Son divisores de 12, los números 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Obsérvese que el 1 y el propio número son divisores del número 12. Para hallar los divisores de un número basta con dividir sucesivamente por los números menores o igual que él. Los que den cociente exacto son sus divisores.

En resumen:

- Todo número es divisor de sí mismo y es el mayor de los divisores.
- El 1 es divisor de todos los números y es el menor de sus divisores.
- El conjunto de divisores de un número es finito.

En la teoría de los números naturales resulta de importancia las relaciones y propiedades que se cumplen para los números que pueden dividirse uno por el otro. Precisamente, se le llama **divisibilidad** a la parte de la teoría de los números que estudia las condiciones que debe reunir un número para que sea divisible por otro.

Definición:

Un número natural **a** se denomina **divisible por un número natural b (distinto de cero)**, si y solo si existe un número natural x tal que $a = b \cdot x$.

En símbolos: $b \mid a \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N}, b \cdot x = a$

Si $b \neq 0$, se dice también :

- **a** es "múltiplo de" **b**.
- **b** "es divisor de" **a**.
- **b** "divide a" **a**.

Si **a** no es divisible por **b**, se escribe $b \nmid a$. —

Ejemplos:

- $2 \mid 6$ porque $2 \cdot 3 = 6$ y $3 \in \mathbb{N}$; luego, 6 es divisible por 2.
- $3 \mid 12$ porque $3 \cdot 4 = 12$ y $4 \in \mathbb{N}$; luego, 12 es divisible por 3.

- $2 \nmid 5$ ya que no existe un número natural x que cumpla $2 \cdot x = 5$. Por lo tanto, 5 no es divisible por 2.

Ya se ha estudiado en capítulos anteriores algunas relaciones que son posibles establecer en el conjunto de los números naturales. Por ejemplo, "igual a", "menor que", "mayor que", "menor o igual que", "mayor o igual que". También otras relaciones en conjuntos cualesquiera, por lo que también se emplean en conjuntos numéricos, como "pertenece a", "subconjunto de", "unión", "intersección", entre otras.

La definición anterior de "divisible por" permite identificar una relación en el conjunto de los números naturales, la **relación de divisibilidad** entre números naturales. Es decir, dados dos números naturales cualesquiera es posible determinar si uno es "divisible por" el otro. En caso de que sea posible, se dice que esos dos números están relacionados por la relación de divisibilidad. En caso de que no sea posible, decimos que no están relacionados por esta relación.

Propiedades de la relación de divisibilidad

Sean a , b y c números naturales cualesquiera se cumple:

- 1) $a \mid a$ (Propiedad reflexiva)

Pues cualquiera sea el número natural a , se cumple que $a \cdot 1 = a$

- 2) Si $a \mid b \wedge b/a \Rightarrow a = b$ (Propiedad antisimétrica)

Es sencillo demostrar la proposición anterior. Solo basta aplicar la definición estudiada

$$a \mid b \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N}, a \cdot x = b \quad (1)$$

$$b \mid a \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N}, b \cdot x = a \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), resulta $(b \cdot y) \cdot x = b$

Aplicando la propiedad asociativa de la adición de números naturales, se

tiene $b \cdot (y \cdot x) = b$. Esto significa que $x = y = 1$, ya que para que el

resultado de multiplica dos números naturales sea igual a 1, estos números

deben ser 1.

Por lo tanto, sustituyendo los valores obtenidos de x, y en (1) o (2) resulta

que $a = b$.

3) $a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c$ (Propiedad transitiva)

Premisa: a, b y c son números naturales cualesquiera y $a \mid b$, $b \mid c$

Tesis: $a \mid c$

Demostración:

Sean a, b y c son números naturales cualesquiera

1) $a \mid b \Leftrightarrow \exists x_1 \in \mathbb{N}, a \cdot x_1 = b$ por definición de divisibilidad de dos números naturales.

2) $b \mid c \Leftrightarrow \exists x_2 \in \mathbb{N}, b \cdot x_2 = c$ por definición de divisibilidad de dos números naturales.

Multiplicando 1) y 2) obtenemos:

$\exists x \in \mathbb{N}, a \cdot b \cdot x = b \cdot c$ (donde $x_1 \cdot x_2 = x$ es un número natural, pues esta operación siempre es realizable en $\mathbb{N}$)

De donde, $\exists x \in \mathbb{N}, a \cdot x = c$

Por lo tanto, $a \mid c$ (por definición de divisibilidad de dos números)

Teorema:

Sean a, b y c números naturales cualesquiera.

Si $a \mid b \wedge a \mid c$, entonces $a \mid b + c$

Demostración:

1) $a \mid b \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N}, a \cdot x = b$ por definición de divisibilidad de dos números naturales.

2) $a \mid c \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{N}, a \cdot y = c$ por definición de divisibilidad de dos números naturales.

Adicionando (1) y (2) resulta

$$(a \cdot x) + (a \cdot y) = b + c$$

Si en el miembro izquierdo de la igualdad anterior se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición, se tiene:

$$a \cdot (x + y) = b + c$$

Como x, y son números naturales, entonces su suma también lo es, pues la adición siempre es realizable en $\mathbb{N}$. Si se denota esa suma por z , resulta que: $a \cdot z = b + c$

Esto significa, por definición, que se cumple:

$a \mid b + c$ (la tesis que se requería demostrar)

Ejemplo:

Si $3 \mid 12$ y $3 \mid 45$, entonces $3 \mid 57$.

Teorema:

Sean a, b, c y d números naturales cualesquiera.

Si $a \mid b \wedge c \mid d$, entonces $a \cdot c \mid b \cdot d$

Demostración:

1) $a \mid b \Leftrightarrow \exists x_1 \in \mathbb{N}, a \cdot x_1 = b$ por definición de divisibilidad de dos números naturales.

2) $c \mid d \Leftrightarrow \exists x_2 \in \mathbb{N}, c \cdot x_2 = d$ por definición de divisibilidad de dos números naturales.

De multiplicar ambas igualdades resulta:

$$(a \cdot x_1) \cdot (c \cdot x_2) = b \cdot d$$

Aplicando las propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación de números naturales se tiene:

$$(a \cdot c) \cdot (x_1 \cdot x_2) = b \cdot d$$

Como x_1 y x_2 son números naturales, entonces su producto también lo es, pues la multiplicación siempre es realizable en $\mathbb{N}$. Si se denota ese producto por z , resulta que:

$$(a \cdot c) \cdot z = b \cdot d$$

Esto significa, por definición, que se cumple:

$$a \cdot c \mid b \cdot d \text{ (la tesis que se requería demostrar)}$$

Ejemplo:

Si $2 \mid 8$ y $3 \mid 12$, entonces $6 \mid 96$

De manera similar a como se han realizado estas demostraciones es posible demostrar otras propiedades de la divisibilidad en el conjunto de los números naturales.

Como ya se dijo, en la Aritmética resulta de importancia la divisibilidad entre números naturales. Sin embargo, en la escuela primaria no se define la divisibilidad como relación, aunque se da conocer que un número es divisible por otro cuando el resto es cero, así como algunas de sus propiedades más importantes y se hace énfasis en reglas para conocer cuando un número natural es divisible por ciertos números naturales.

Ejercicios 1 al 7

3. 2 Criterios para la divisibilidad de números naturales

Para conocer si un número es divisible o múltiplo de otro resulta muy conveniente conocer las condiciones que debe cumplir ese número. Los siguientes teoremas expresan estas condiciones, que se conocen como criterios de divisibilidad y cuyas demostraciones no serán realizadas en esta ocasión.

Teorema 1:

Un número es divisible por 3, si y solo si la **suma** de sus cifras básicas es divisible por 3.

Ejemplos:

- 288 es divisible por 3, pues $2 + 8 + 8 = 18$ y 18 es divisible por 3.
- 12 es divisible por 3, pues $1 + 2 = 3$ y 3 es divisible por 3.

Teorema 2:

Un número es divisible por 9, si y solo si la **suma** de sus cifras básicas es divisible por 9.

Ejemplos:

- 288 es divisible por 9 ya que $2 + 8 + 8 = 18$ y 18 es divisible por 9.
- 12 no es divisible por 9, pues $1 + 2 = 3$ y 3 es divisible por 9.

Teorema 3:

Un número es divisible por 2, si y solo si su **última cifra** es un número par.

Ejemplos: Los números 13**6**, 14**0**, 2 77**8** son divisibles por 2, pues terminan en cifra par (6, 0 y 8 respectivamente).

Teorema 4:

Un número es divisible por 10, si y solo si **su última** cifra es 0.

Ejemplos: Los números 3 21**0**, 100, 30 son divisibles por 10.

Nota: De igual manera un número es divisible por 100 (o por 1 000), si sus dos últimas cifras (o sus tres últimas cifras) terminan en 0.

Teorema 5:

Un número es divisible por 5, si y solo si, su **última** cifra es 0 ó 5.

Ejemplos: 105, 210 son divisibles por 5.

Teorema 6:

Un número es divisible por 4, si y solo si, el **número formado** por sus **dos últimas cifras**, tomadas en el mismo orden del número dado, es un número divisible por 4

Ejemplo: **124** es divisible por 4, porque 24 lo es.

Teorema 7:

Un número es divisible por 8, si y solo si, el **número formado** por las **tres últimas cifras**, tomadas en el mismo orden del número dado, es un número divisible por 8.

Ejemplo: 23 **824** es divisible por 8, porque 824 lo es

Teorema 8:

Un número es divisible por 11, si y solo si, la **suma alternada** de sus cifras básicas es divisible por 11.

Ejemplo: 8140 es divisible por 11 porque $8140 = (8 + 4) - (1 + 0) = 12 - 1 = 11$.

Ejercicios 8 al 18

3.3 Números primos. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Los números primos juegan un papel importante en la descomposición en factores primos de los números naturales, contenido este que se estudia en el 5to grado de la enseñanza

primaria, pues son la base de la Aritmética.

Definición:

Todo número natural, distinto de cero y de uno, se denomina **número primo**, si y solo si, tiene como únicos divisores a 1 y al propio número.

Ejemplos de números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13,

Obsérvese que:

- 1) Los números primos son infinitos. Es decir, el conjunto de números primos es un subconjunto infinito de los números naturales.
- 2) Los números naturales mayores que 1 se pueden escribir de manera única como un producto de factores primos

Ejemplo: $315 = 3 \cdot 105$

$$\begin{array}{c} \wedge \\ = 3 \cdot 3 \cdot 35 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \wedge \\ 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \end{array}$$

$$315 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Si escribimos 315 en forma de potencias, tenemos: $3^2 \cdot 5 \cdot 7$

- 3) Existen números naturales que no son primos. A esos números se le llaman **números compuestos**.

Ejercicios 19 y 23

Máximo común divisor y el Mínimo común múltiplo

Del epígrafe 3.1 se conoce que el conjunto de múltiplos de un número es infinito y el conjunto de divisores es finito. Ahora bien, dado dos o más números naturales, resulta que cada uno de ellos tiene un número limitado de divisores y un número ilimitado de múltiplos. De ahí la necesidad de conocer cómo determinar el máximo divisor común y el mínimo común múltiplo de esos números.

Definición:

El número natural **d** es **máximo común divisor** de **n** números naturales si se cumple que:

- a) **d** es divisor común de los números naturales dados
- b) **d** es divisor de los restantes divisores comunes

Se denota: $\text{mcd}(a,b)$ Se lee: máximo común divisor de **a** y **b**.

Ejemplo:

Para determinar el $\text{mcd}(6,18)$ según la definición anterior procedemos de la siguiente forma.

Sea D_6 el conjunto de los divisores de 6 y D_{18} el conjunto de los divisores de 18, entonces:

$D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$ y $D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

¿Cuáles son los divisores comunes de 6 y 18?

1, 2, 3, 6

¿Cuál es el máximo común divisor?

6, obsérvese que los restantes divisores comunes son divisores de ese que es el máximo, es decir 6.

Luego, **$\text{mcd}(6,18) = 6$**

Como se puede apreciar, mediante la definición se puede determinar el máximo común divisor de números naturales, pero esta no constituye un procedimiento ventajoso. Más adelante se estudian algunos de ellos.

Definición:

El número natural **t** es **mínimo común múltiplo** de **n** números naturales si se cumple que:

- a) t es múltiplo común de los números naturales dados
- b) Los restantes múltiplo comunes son múltiplos de él

Se denota: $\text{mcm}(a,b)$

Se lee: mínimo común múltiplo de a y b.

Ejemplo: Para determinar el $\text{mcm}(6,18)$ según la definición, se hallan algunos múltiplos de 6 y 18 (recordar que son infinitos).

Sean M_6 y M_{18} los conjuntos formados por los múltiplos de 6 y 18 respectivamente

$M_6 = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, \dots\}$

$$M_{18} = \{0, 18, 36, 54, 72, 90, 108\}$$

¿Cuáles son múltiplos comunes de 6 y 18?

0, 18, 36, 54, 72

¿Cuál es el mínimo común múltiplo?

18, obsérvese que los restantes múltiplos comunes son múltiplos de ese que es el mínimo, es decir 18.

$$\text{Luego, } \text{mcm}(6, 18) = 18$$

En este ejemplo se puede apreciar también que mediante la definición se puede determinar el mínimo común múltiplo de números naturales, pero esta no constituye un procedimiento ventajoso. A continuación se muestran dos formas rápidas y seguras.

Procedimientos para determinar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de varios números naturales

Es habitual la determinación del mcd y el mcm de números naturales mediante el empleo de:

- Método abreviado
- Método de la factorización primaria

Método abreviado:

- Para calcular el máximo común divisor: Se ve sucesivamente si el menor de esos números, o su mitad, o su tercera, o su cuarta, etc, (si las tiene) es divisor de los otros

números dados. El primero que lo sea es el máximo común divisor de todo.

Ejemplos: $\text{mcd} (6, 18, 24) = 6$

$$\text{mcd} (12, 18, 15) = 3$$

- Para calcular el mínimo común múltiplo: Se ve sucesivamente si el mayor, o su duplo, o su triplo, etc, es múltiplo de los otros números dados. El primero que lo sea es el mínimo común múltiplo de todos ellos.

Ejemplos: $\text{mcm} (2, 5, 10) = 10$

$$\text{mcm} (6, 18, 24) = 72$$

Método de la factorización primaria

- El máximo común divisor es el producto de los factores comunes en el **menor exponente**.
- El mínimo común múltiplo es el producto de los factores comunes en su **mayor exponente y los no comunes**

Ejemplos.

Hallar $\text{mcd}(30, 18)$

1. Descomponer los números dados en factores primos

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ \hline 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ \hline 18 = 2 \cdot 3^2 \end{array}$$

2. Tomar los factores comunes en su menor exponente

2 y 3

3. Multiplicar los anteriores factores y el producto obtenido es el máximo común divisor.

$$\text{mcd}(60,18) = 2 \cdot 3 = 6$$

Hallar $\text{mcm}(30,18)$

1. Descomponer los números dados en factores primos

Ya se conoce que: $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ y $18 = 2 \cdot 3^2$

2. Tomar los factores comunes y no comunes, con su mayor exponente

2, 3^2 y 5

3. Se multiplican los anteriores factores y el producto obtenido es el mínimo común múltiplo.

$$\text{mcm}(60,18) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$$

En los ejemplos anteriores ha sido posible determinar factores primos comunes de los números dados, pero en ocasiones no los hay. En ese caso se dice que los números son **primos entre sí**.

Ejemplo:

Hallar el $\text{mcm}(12,25)$.

1. Descomponer los números dados en factores primos

Ya se conoce que: $12 = 3 \cdot 2^2$ y $25 = 5^2$

2. No hay factores primos comunes a ambos números, pues dichos números son primos entre sí, es decir no tienen divisores comunes entre sí diferentes de 1.
3. En este caso que los números son primos entre sí se halla el mcm multiplicando entre sí ambos números.

Ejercicios 24 al 29

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO

1. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Fundamente su respuesta.
 - a) $24 \mid 288$
 - b) $10 \mid 200$
 - c) $13 \mid 288$
 - d) $10 \mid 10$.

2. Determina todos los números divisibles por 3 comprendidos entre 5 y 25. Expresa el resultado en forma de conjunto.

3. Sean los conjuntos

D_6 : divisores de 6,

D_{10} : divisores de 10 y

D_{12} : divisores de 12.

Investiga si los elementos de estos conjuntos son también elementos de D_{36} (conjunto de divisores de 36).

4. El mayor número de cuatro cifras cuyo antecesor sea divisible por:

a) 2 b) 3 c) 5

5. El menor número de cinco cifras cuyo sucesor sea divisible por:

a) 2 b) 3 c) 10

6. Las cifras básicas 0, 3, 5 y 4 pueden combinarse de varias maneras para obtener números de cuatro cifras diferentes. Escribe estas posibilidades, teniendo en cuenta que los números que obtengas sea divisible por:

a) 2 b) 3 c) 2 y 5 d) 3 y 10.

7. Oscar compró sellos de 10 y de 25 centavos. Por 11 sellos pagó \$ 1,25. ¿Cuántos sellos de cada tipo compró Oscar?

8. ¿Por cuál de los números 2, 4, 5 y 11 es divisible 1234?

9. Explique por qué el número 2310 es divisible por 2, 3, 5, 6, 10 y 11, pero no lo es por 4 y 8.

10. Escribe todos los números de tres lugares que son divisibles simultáneamente por 5; 10 y 100.

11. Explique por qué el número 2 310 es divisible por 2, 3, 5, 6, 10, y 11, pero no lo es por 4, 8 ni 9?
12. ¿Cuál es la menor cifra que debe añadirse al número 124 para obtener un número de cuatro cifras que sea divisible por 3?
13. ¿Cuál es el mayor valor que puede tomar x para que se forme un número divisible por el número dado en las siguientes expresiones:
- a. $12x$ divisible por 2
 - b. $53x$ divisible por 5
 - c. $1\,25x$ divisible por 4
 - d. $58x52$ divisible por 8
14. Escribe el mayor número de tres cifras diferentes que sea divisible por 2 y por 3 a la vez.
15. ¿Cuál es la menor cifra que debe añadirse al número 124 para obtener un número de cuatro cifras divisible por 3.
16. Determine los valores que deben tener x , y , z para obtener el menor número posible de cinco cifras que sea divisible por 2, 3 y 4 en la expresión $x5y8z$.
17. ¿Cuáles y cuántos números de cuatro cifras se pueden escribir con los dígitos 0, 1, 3 y 5 que sean divisible por 3, 5 y 10 considerando que cada dígito debe aparecer una sola vez en cada número formado.
18. ¿Cuántos números de cuatro cifras no repetidas hay que sean divisibles

por 5 y 10 simultáneamente?

19. Escribe todos los números primos menores que 289

20. Descompón en factores primos 315, 294, 432.

21. Descompón en factores: 125, 216, 360, 432.

22. De los siguientes números: 17, 31, 48, 35, 66, 72, 87. Indicar cuáles son primos y cuáles compuestos.

23. Investiga si los siguientes números son primos o compuestos:

113, 129 y 127

24. Halle el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de:

- a) 45 y 63
- b) 75, 135 y 165
- c) 664 y 984

25. Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de:

- a) 72 y 108 b) 60 y 104 c) 786 y 930 d) 120, 62 y 186

26. Halle el menor número de hectáreas de una cooperativa que puede dividirse exactamente en 12, 15 ó 18 hectáreas.

27. Un ciclista puede recorrer una distancia de 32, 48 ó 72 kilómetros en un número exacto de horas. ¿Cuál es la mayor velocidad que puede alcanzar

en esas condiciones?

28. Si dos números son primos ¿Cómo puedes determinar el mínimo común múltiplo de ambos números?

29. Un ómnibus sale de La Habana para Santiago de Cuba cada 4 días, otro cada 5 días y otro cada 6 días. ¿Cada cuánto tiempo partirán los tres de La Habana el mismo día?

EJERCICIOS VARIADOS DEL CAPÍTULO

1. Si dos números son primos, ¿cómo puedes determinar el mínimo común múltiplo de ambos números?
2. Si uno de dos números es primo, ¿qué puedes hacer para hallar el mínimo común múltiplo de los dos números?

3. ¿Cuál es el menor número de libretas que puede repartirse exactamente entre 21, 24 o 30 alumnos?
4. De las 120 clases de piano en el curso, Grisell asistió a un número de ellas que es múltiplo de 2, 5, 10 y 22. ¿A cuántas clases asistió?
5. Escribe el mayor número de cuatro lugares que cumple las condiciones siguientes:
 - a) El lugar de las decenas lo ocupa el antecesor del dígito 3
 - b) Es múltiplo a la vez de 2; 3 y 5.
6. Determine las cifras que deben tomar x, y, z para obtener el menor número posible de cinco cifras que sea divisible por 2, 3 y 4 en la expresión $x5y8z$. Justifica su respuesta.
7. ¿Cuáles y cuántos números de cuatro cifras se pueden escribir con los dígitos 0, 1, 3 y 5 que sean divisibles por 3, 5 y 10, considerando que cada dígito debe aparecer una solo vez en cada número?
8. Hallar el menor número de hectáreas de una cooperativa que pueda dividirse exactamente entre 12, 15 o 18 hectáreas.
9. Un ciclista puede recorrer una distancia de 32, 48 o 72 km en un número exacto de horas. ¿Cuál es la mayor velocidad que puede alcanzar en esas condiciones?
10. Tres cintas de 36m, 48m y 60m de longitud se quieren dividir en pedazos iguales y de la mayor longitud posible, ¿qué longitud debe tener cada pieza?
11. Determina el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justifica las falsas.
 - a) La menor cifra que debe añadirse al número 124 para que resulte un número de 4 cifras divisible por 3 es 0.
 - b) 23 es un número primo.
 - c) $\text{mcm}(12, 24, 120) = 200$.
 - d) El mayor número de cuatro cifras divisible por 4 es 9996.
 - e) $\text{mcd}(12, 200, 80) = 12$
 - f) $\text{mcd}(80, 28, 24) = 16$
 - g) El menor número de tres cifras divisible por 2 y 3 simultáneamente es 102.
 - h) 2 es el menor número primo.
 - i) Todos los números primos son impares.
 - j) Si un número es primo entonces es impar.

- k) Existe un número primo que es par.
- l) El menor número de tres cifras divisible por 2 y 3 simultáneamente es 102.

12. Demuestra que las proposiciones siguientes son verdaderas:

- a) La diferencia entre un número de tres cifras y el número que se forma invirtiendo el orden de sus cifras es divisible por 99.
- b) La suma de tres números naturales consecutivos es par, si el número es impar, y es impar si el número menor es par.
- c) Si a y b son divisibles por el mismo número c ($a, b, c \in \mathbf{N}$), entonces $a - b$ es divisible por c .
- d) Si a y b son divisibles por el mismo número c ($a, b, c \in \mathbf{N}$), entonces $a \cdot b$ es divisible por c .

13. Demuestra que:

"La suma de tres números naturales consecutivos es divisible por 6, si el primer número es impar".

14. Probar que: El producto de tres números naturales consecutivos es divisible por 6".

15. El número $1k31k4$ es divisible por 12 y no por 9. Hallar el número.

16. En un número de dos cifras, la cifra de las unidades excede en 2 a la cifra de las decenas. Si al número se le agrega el triplo de la cifra de las unidades resulta 36. ¿Cuál es el número?

17. Un faro emite señales por radio en tres frecuencias distintas cada 24, 64 y 145 s. Si a las 12:00 m se emiten simultáneamente señales de los tres tipos. ¿Cuál será la hora más próxima en que volverán a emitirse simultáneamente señales de los tres tipos?

18. La suma de las dos cifras de un número es 9, si se intercambian de lugar las cifras de este número se obtiene un número igual a $5/6$ del inicial. ¿Cuál es el número?

19. Determina cuántos de los primeros 100 números naturales son divisibles por 2, 3, 4 y 5 simultáneamente?
20. Se tienen tres cajas que contienen 1 600 kg, 2 000 kg y 3 392 kg de un material. El material está dividido en bloques del mismo peso y el mayor posible. ¿Cuántos bloques de material hay en total?
21. Hallar el número más grande que está contenido exactamente en 140, 180 y 200.
22. Un ciclista puede recorrer una distancia de 32, 48 o 72 km en un número exacto de horas. ¿Cuál es la mayor velocidad que puede alcanzar en esas condiciones?
23. A, B, y C tienen respectivamente 30, 48 y 72 años. Se D tiene la mayor edad que cabe exactamente en las de A, B y C. ¿Cuántos años tiene D?
24. Se tienen tres depósitos de 144, 240 y 336 litros de capacidad respectivamente. Si con una manguera se puede llenar cualquiera de ellos en un número exacto de minutos, ¿cuál es la mayor cantidad de agua que puede verter la manguera por minutos?
25. Hallar el mayor número por el cual podrá dividirse 61, 91 y 106 para obtener en las tres divisiones un resto igual a la unidad.
26. Si 160, 237 y 391 se dividen entre ciertos números, dejan resto 6. Hallar dichos números.
27. ¿Cuál es el menor número que dividido entre 20, 25 o 30 deja resto 7?
28. Entre todos los números que contienen a 150, 200 y 250, ¿cuáles son los tres más pequeños?

29. Tres llaves de un tanque vierten respectivamente 20, 30 y 50 litros por minuto. Si cualquiera de ella puede llenarlo por un número exacto de minutos. ¿Cuál es la menor capacidad que pudiera tener el tanque?
30. En el librero de mi casa tengo menos de 70 libros, si se forman con ellos grupos de 2, 3, 4, 5 o 6 siempre sobra 1. ¿Cuántos libros hay en mi librero?
31. Dos ómnibus A y B parten de un mismo punto simultáneamente a las 5am. El ómnibus A emplea 309 minutos en hacer un recorrido y volver al punto de partida y el B demora 45 minutos. ¿A qué hora volverán a encontrarse?
32. Dos cometas se aproximan al sol, uno cada 25 años y el otro cada 50 años. Habiéndose aproximado juntos al sol en el año 1965. ¿En qué año volverán a aproximarse al sol ambos cometas?

BIBLIOGRAFÍA

- Marx Suse. Teoría elemental de los números, ecuaciones y combinatoria. Editorial Libros para la Educación. La Habana, 1980.
- Rizo Cabrera, Celia y colectivo de autores. Matemática 6. Editorial Pueblo y Educación. La Habana, 1990.
- Rizo Cabrera, Celia y colectivo de autores. Matemática 5. Editorial Pueblo y Educación. La Habana, 1989.

- Muñoz Baños, F. y colectivo de autores. Matemática 8. Editorial Pueblo y Educación. La Habana, 1990.
- Davidson San Juan, Luis J. y colectivo de autores. Problemas de matemática elemental I. Editorial Pueblo y Educación. La Habana, 1987.
- Vilenkin, N. Ya. y colectivos de autores. Modernos elementos del curso escolar de matemáticas. Impreso por VIPO Vneshtorgizdat por pedido especial de Ediciones Cubanas para la Editorial Pueblo y Educación. Moscú, 1988.
- Allendoerfer, Carl B. y Oakley Cletus O. Introducción Moderna a la Matemática Superior. Ediciones del Castillo, S.A. Madrid, 1975.
- Vinográfov, I. Fundamentos de la teoría de los números. Editorial Mir. Moscú, 1971.
