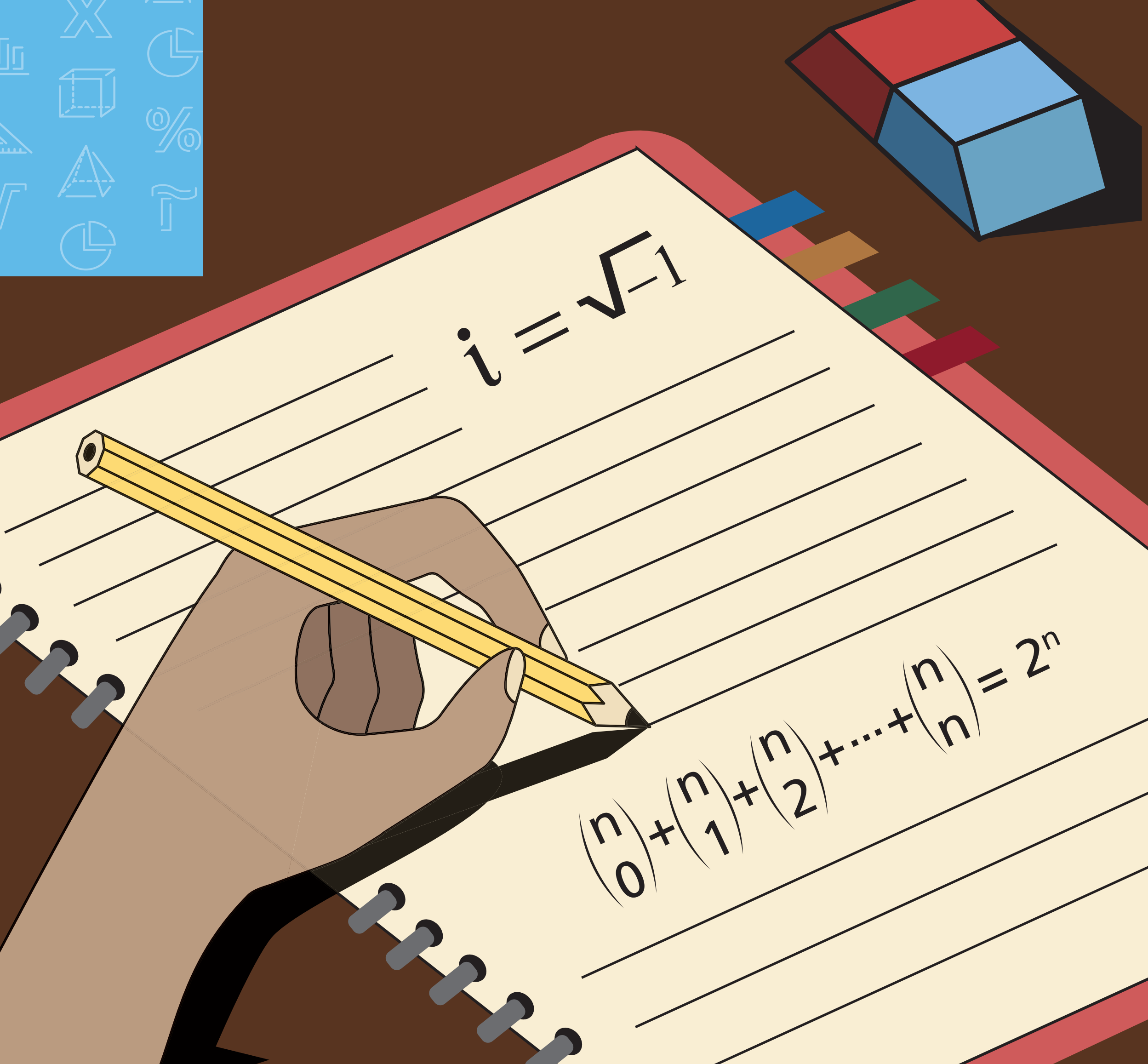


MATEMÁTICA

duodécimo grado

MATEMÁTICA

duodécimo grado

Dra. C. Emma M. García Enis
M. Sc. Yonjaner Martínez Sánchez
M. Sc. Rosa Alicia Cárdenas Puig
M. Sc. Richard Naredo Castellanos
Lic. Zulema Cuadrado González
Dr. C. Aurelio Quintana Valdés †
M. Sc. Francisco E. Rodríguez Meneses

EDITORIAL
PUEBLO Y EDUCACIÓN

Este material forma parte del conjunto de trabajos dirigidos al Tercer Perfeccionamiento Continuo del Sistema Nacional de la Educación General. En su elaboración participaron maestros, metodólogos y especialistas a partir de concepciones teóricas y metodológicas precedentes, adecuadas y enriquecidas en correspondencia con el fin y los objetivos propios de cada nivel educativo, de las exigencias de la sociedad cubana actual y sus perspectivas.

Ha sido revisado por la subcomisión responsable de la asignatura perteneciente a la Comisión Nacional Permanente para la revisión de planes, programas y textos de estudio del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas del Ministerio de Educación.

Colaboradora:
■ Dra. C. Marta Álvarez Pérez

Edición y corrección:
■ Lic. Amada Díaz Zuazo

Cubierta e ilustración:
■ Camila Noa

Diseño:
■ Instituto Superior de Diseño (ISDi):
Adriana Vigil Hernández ■ Alessandra Fuentes Tiel ■ Jennifer González Espinosa ■ Thalia Ibarra Villavicencio ■ Laura Ramos García ■ Ernesto Alejandro Gilart Ruiz ■ María Fernanda Lemus González ■ Aldahir Santana Guzmán ■ Litsary Zamora Rodríguez ■ Samira González González ■ Marian Ramos Rodríguez ■ Kamila Carpio Crespo ■ DCV María Paula Lista Jorge ■ M. Sc. Maité Fundora Iglesias ■ Dr. C. Ernesto Fernández Sánchez

Emplane:
■ María Pacheco Gola

ISBN 978-959-13-5225-5 (Versión impresa)
ISBN 978-959-13-5231-6 (Versión digital)

EDITORIAL PUEBLO Y EDUCACIÓN
Av. 3.ª A No. 4601 entre 46 y 60,
Playa, La Habana, Cuba. CP 11300
epueblo@epe.gemined.cu

ÍNDICE

Preámbulo

El presente libro de texto que ponemos en tus manos, elaborado para el duodécimo grado, ha tenido como punto de partida el resultado de muchos años de trabajo de un grupo importante de especialistas en la disciplina y en la metodología para su enseñanza y aprendizaje, encabezado en un primer momento por el Dr. C. Luis Campistrous Pérez y la Dra. C. Celia Rizo Cabrera, posteriormente, por la Dra. C. Marta Álvarez Pérez y liderado por el Dr. C. Aurelio Quintana Valdés. A lo largo de todo el proceso de elaboración permitió que sus autores contaran, no solo con valiosos materiales de apoyo, sino con acertadas críticas, reflexiones, valoraciones y sugerencias, de los profesores que participaron en la etapa experimental dedicados a la enseñanza de la matemática, y de otros especialistas de la enseñanza preuniversitaria y de las universidades, que siempre realizaron observaciones oportunas y necesarias, en particular a los del Proyecto de investigación de la Universidad Marta Abreu: *Alternativas Metodológicas para el trabajo con los libros de textos en la Matemática de la Educación Media*.

¡A todos, nuestro infinito agradecimiento!

Estudiante:

Este libro lo hemos escrito para ti, para que puedas obtener los conocimientos matemáticos básicos de este grado, que completan los saberes de la disciplina correspondientes al nivel medio superior, los cuales te serán útiles además para comprender los contenidos que estudiarás en el nivel superior. En consecuencia, estos contenidos matemáticos no se presentan aislados, por lo que el libro tiene la intención de reactivar los conocimientos anteriores, los cuales representan la base necesaria para introducir los nuevos, que a su vez constituyen su ampliación y profundización.

El contenido de este libro está estructurado en cuatro capítulos que se corresponden con las unidades del programa de estudio que comprende el curso escolar. Para organizar mejor el contenido, los capítulos están divididos en epígrafes y algunos de estos en subepígrafes.

Cada uno de los capítulos comienza con una introducción que revela, de manera breve, el surgimiento y evolución a través del tiempo del contenido fundamental que se estudia en el capítulo, las principales personalidades que propiciaron su desarrollo y la importancia que tiene su estudio para el mejoramiento humano, expuestos mediante algunas de sus aplicaciones a diversas ramas de las ciencias, en relación con el progreso científico y tecnológico de la sociedad, por lo cual también permiten orientar tus motivaciones profesionales. En cada capítulo se presentan, además, situaciones problémicas, que pueden ser resueltas con los conocimientos que adquieras en el desarrollo del capítulo o en el epígrafe en cuestión.

En cada epígrafe encontrarás los contenidos del curso, algunos de ellos destacados en recuadros, como es el caso de las definiciones, los teoremas y las propiedades; los ejemplos resueltos, que contienen además algunas sugerencias, ilustran cómo debes proceder para resolver ejercicios importantes que corresponden a ese contenido. Al final de cada uno de los epígrafes aparecen ejercicios propuestos para el trabajo independiente, muchos de los cuales requieren del uso de asistentes matemáticos y tienen el propósito de obtener nuevos conocimientos que debes compartir con tu profesor de matemática y compañeros de tu grado. Al final de cada capítulo encontrarás otros ejercicios que integran los contenidos tratados. Los ejercicios que aparecen señalados con un asterisco (*) son lo que presentan un mayor grado de dificultad.

Para que puedas comprender mejor el contenido y establecer una comunicación más amena con tu libro, este contiene algunas secciones tales como:

Recuerda que…: presenta pequeños resúmenes de contenidos que debes saber para obtener otros nuevos.

¿Sabías que…?: es una sección itinerante y variada, para expresar brevemente informaciones relevantes en el tema: una noticia, un descubrimiento o una aplicación de la matemática.

Saber más: trata aspectos relacionados con el contenido que no corresponden al programa, es decir, una breve ampliación del tema, que puedes investigar utilizando los medios de comunicación.

Reflexiona: presenta situaciones problémicas en las que debes pensar porque tiene que ver con un concepto, una relación o un procedimiento.

De la historia: en esta sección se destacan aspectos de personalidades vinculadas al descubrimiento, surgimiento de nuevos contenidos o al origen y desarrollo de aspectos de la matemática tratados.

¡Atención!: esta sección es una alerta en algunos aspectos para ser cuidadoso y no incurrir en errores. También destaca algunos elementos que se van a considerar en la resolución de las actividades o ejercicios propuestos.

Investiga y aprende: se proponen tareas para investigar y así enriquecer el conocimiento con el aprendizaje de nuevos contenidos y procederes.

Aplica tus conocimientos: se trata de ejercicios que debes resolver, porque se refieren a contenidos anteriores que debes reactivar y obtener un nuevo conocimiento.

Reflexiona sobre lo aprendido: se trata de un grupo de preguntas simples cuyas respuestas sintetizan los contenidos fundamentales del capítulo.

Comprueba tus conocimientos: se trata de una tarea de aprendizaje que puede servirte como autoevaluación.

Conéctate: es en el sitio www.cubaeduca.cu donde puedes consultar la teoría y ejercicios resueltos, relacionado con los temas estudiados.

Además, incluye:

Ejemplos: pueden ser ejercicios resueltos que muestran procedimientos de trabajo.

Preguntas detonantes: están identificadas con el símbolo #, y están dirigidas a activar el razonamiento del tema que se trata.

Ejercicios: contiene los que se proponen para cada epígrafe.

Ejercicios del capítulo: agrupa los que integran los contenidos tratados en todo el capítulo.

Autoevaluación: aparece al final de cada capítulo estructurada en dos tipos de test.

Respuesta a los ejercicios: contiene las soluciones de los ejercicios de cada capítulo del libro

Ponemos en tus manos esta obra y confiamos que sabrás aprovechar el contenido que en ella se recoge, no solo para tu enriquecimiento personal, sino también para compartir los conocimientos que adquieras con todos los que rodean.

Los autores

CAPÍTULO 1

Inducción completa. Sucesiones numéricas

Quienes tienen el privilegio de vivir en esta época –el siglo XXI– les es imposible concebir el progreso de la humanidad, sin relacionarlo con el desarrollo científico-tecnológico, expresado en la automatización creciente de los procesos productivos, el desarrollo de la informática y de otras ciencias, que requieren de encontrar soluciones creativas y sostenibles.

Para ello es necesario desarrollar la capacidad de hacer razonamientos inductivos y deductivos para orientarse, juzgar la veracidad de una proposición o la validez de una conjetura, a partir de los hechos y las condiciones de un contexto determinado, y que en no pocas ocasiones se explican o se demuestran por modelos, procedimientos y métodos matemáticos.

Entre las situaciones que se modelan o demuestran por métodos matemáticos se encuentran las que generan listas de números, como: la velocidad de crecimiento bacteriano al transcurrir cierto tiempo; los ingresos obtenidos por el interés financiero de una cuenta bancaria; la concentración en sangre de un medicamento; la frecuencia de las notas musicales medidas en ciclos por segundos; la depreciación del valor de un artículo en uso, o la secuencia de alturas que alcanza el rebote de una pelota lanzada

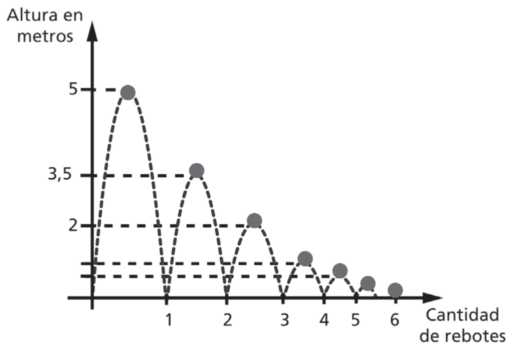


Fig. 1.1

al aire (figura 1.1). En Matemática estas listas de números se llaman sucesiones numéricas.

Al respecto, ¿qué vas a aprender en este capítulo?

Aprenderás a diferenciar entre razonamientos deductivos e inductivos y a comprender el valor de estos para orientarte en cualquier situación o contexto, a hacer predicciones y juzgar la veracidad del contenido de una declaración, o la validez de un determinado juicio a partir de los hechos disponibles.

Profundizarás en los métodos inductivos que te permitirán demostrar propiedades de los números naturales. Ampliarás tus conocimientos sobre las sucesiones numéricas, a partir de los cuales aplicarás procedimientos y métodos inductivos para la demostración de propiedades, que luego podrás transferir a diversas situaciones de la realidad y a otras disciplinas durante tus estudios superiores.

1.1 Inducción completa

Un llamado a razonar es la invitación que con frecuencia nos hacemos unos a los otros en la vida cotidiana. Lo hacemos de forma natural, con razonamientos inductivos o deductivos, por ser una capacidad inherente al hombre. En varias asignaturas la utilizaste, para obtener las leyes de gravitación universal, la ley de Ohm, la ley de Hoocke o la demostración del carácter conservativo de ciertos sistemas, entre otros ejemplos.

En Matemática, para identificar las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de las operaciones con números naturales (figura 1.2), entre otros ejemplos, hiciste uso de razonamientos inductivos y deductivos.

Ahora se trata de comprender la utilidad de los métodos definidos por estos razonamientos, para demostrar proposiciones en los números naturales, en las que cualquier sustitución de la variable las transforma en propiedades con validez universal.

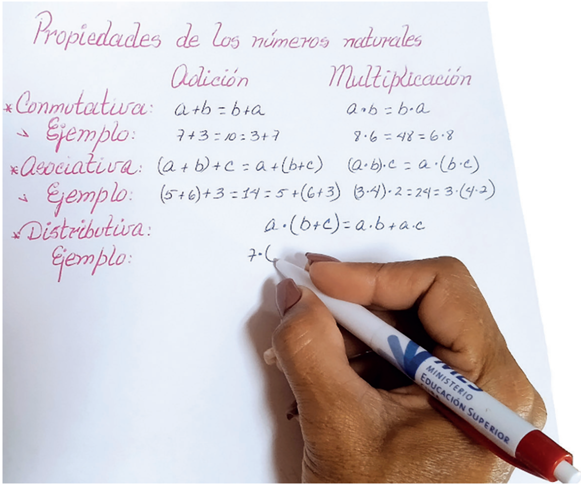


Fig. 1.2

¿Cuándo un razonamiento es deductivo o inductivo?

¿Cómo inciden los razonamientos deductivos e inductivos en la determinación de métodos matemáticos?

¿Será necesario demostrar que una proposición es una propiedad, probando que se cumple para cada número natural?

¿Cómo demostrar la validez universal de una proposición matemática?

Razonamientos deductivos e inductivos

Para comprender la diferencia entre un razonamiento deductivo y uno inductivo, es conveniente que te detengas en una situación de la vida cotidiana como la siguiente:

- Si tienes conocimiento del horario de una ruta de ómnibus se puede saber a qué hora pasará por cierto lugar: *razonamiento deductivo.*
- Si observas durante varios días, que una ruta de ómnibus pasa entre las 7:20 a.m. y las 7:25 a.m. por ese lugar, se puede afirmar con cierta seguridad que siempre pasa en ese intervalo de tiempo por el referido lugar: *razonamiento inductivo.*

Observa que del razonamiento inductivo anterior, también, se pueden diferenciar proposiciones particulares y generales.

La proposición: *el ómnibus pasó el lunes a las 7:25 a.m. por ese lugar*, tiene menor nivel de generalidad, que la proposición: *el ómnibus pasa todos los días entre las 7:20 a.m. y las 7:25 a.m. por ese lugar.* Esta, resulta a su vez particular, con respecto a: *el 80 % de los ómnibus de esa ruta pasan todos los días entre las 7:20 a.m. y las 7:25 a.m. por ese lugar.*

Del análisis anterior se infiere que lo general y lo particular son conceptos relativos.

Ejemplo 1.1

La tabla 1.1 de frecuencia recoge, en datos agrupados, los resultados de las mediciones de la presión arterial máxima (sistólica), en una muestra de pacientes con edades de 16 años a 18 años.

Tabla 1.1

Presión arterial máxima	Marca de clase	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia absoluta acumulada		Frecuencia relativa acumulada	
[80;100)	90	40	0,16	40	259	0,16	1,0
[100;120)	110	120	0,46	160	219	0,62	0,84
[120;140)	130	65	0,25	225	99	0,87	0,38
[140;160)	150	22	0,084	247	34	0,954	0,130
[160;180)	170	7	0,028	254	12	0,982	0,046
[180;200)	190	5	0,018	259	5	1,0	0,018

Se conoce que la presión arterial máxima a partir de 139 es considerada delicada y más de 150 grave, entonces se pueden hacer los razonamientos siguientes:

a) Más del 50 % de la muestra tiene la presión arterial máxima normal.
b) 65 jóvenes están en una situación de riesgo.
c) Hay 34 jóvenes en situación grave, con respecto a su presión arterial máxima.

Clasificar y fundamentar, en deductivo o inductivo, particular o general al tipo de razonamiento utilizado para el análisis de la situación dada.

Resolución

Tipo de razonamiento			Fundamentación
a)	deductivo	particular	160 jóvenes están entre 80 a 120
b)	inductivo	general	En cada caso se generaliza, al considerar la marca de clase.
c)	inductivo	general	Si los datos fueran simples el análisis sería otro.

En general se puede concluir que:

- Mediante el *razonamiento deductivo* se obtienen proposiciones verdaderas a partir de premisas verdaderas, con ayuda de reglas de inferencias deductivas.
- Mediante el *razonamiento inductivo,* se pasa de una proposición particular a otra de mayor generalidad. Este tipo de razonamiento no conduce necesariamente a conclusiones verdaderas a partir de premisas verdaderas.

Conéctate

Accede al sitio www.cubaeduca.cu en la sección curricular, busca en Matemática duodécimo grado la lección Inducción completa y responde la interrogante que se da a continuación:
¿Por qué el razonamiento deductivo es una herramienta fundamental en la enseñanza de las matemáticas?

Métodos deductivos e inductivos

▲ ¿Cómo demostrar verdades infinitas?

Piensa en ejemplos de la vida en los que se han utilizado los razonamientos inductivos y deductivos. Debes saber que como métodos permiten comprender y modelar fenómenos y procesos del mundo que nos rodea. En particular, el método inductivo es útil para generar nuevas ideas y teorías, y el método deductivo para probarlas. Estos métodos son muy utilizados en la demostración de proposiciones matemáticas y en otras ciencias.

Investiga y aprende

Investiga y socializa con tus compañeros cómo se complementan los métodos inductivo y deductivo en la producción de conocimientos en un área de tu interés.

Por ejemplo, una afirmación sobre números naturales es una propiedad en el conjunto de los números naturales, en la cual al sustituir la variable n por un número natural dado obtenemos una proposición verdadera o falsa. Es decir, la propiedad puede cumplirse para todos los números naturales, para algunos o para ninguno.

Reflexiona

¿Cómo utilizarías el método inductivo y el deductivo en la demostración de propiedades de números naturales?

Ejemplo 1.2

Sean A, B y C proposiciones sobre los números naturales, tal que:

A: El producto de dos números naturales consecutivos es par.

B: Un número natural es par.

C: El producto de un número natural distinto de cero, por cero es el mismo número.

a) Representar simbólicamente las propiedades dadas, con la variable n.
b) Analizar si es verdadera o falsa. Justificar y ejemplificar para un valor de n.

Resolución:

$A(n)$: $n(n+1)$ es par, o $n(n+1)=k;\ k\in\mathbb{N}$	Es verdadera, porque de dos números naturales cualesquiera, si uno es par el producto siempre es par. Ejemplos: $A(4)$: $4\ (4+1)=20$, es par. $A(7)$: $7\ (7+1)=56$, es par.
$B(n)$: n es par	Es verdadera, para los pares. Ejemplo: $B(6)$: 6, es par. No se cumple para los impares. Ejemplo: $B(11)$:11, es impar.
$C(n)$: $n\cdot 0=n; n\neq 0$	Es falsa, porque la multiplicación de cualquier número natural por cero siempre es cero. Ejemplo: $C(13)$: $13\cdot 0=0$ y $13\neq 0$. ◆

Para la Matemática son especialmente importantes aquellas proposiciones en las que, para cualquier sustitución de la variable n por un número natural, se obtienen proposiciones que siempre se cumplen.

Ejemplo 1.3

Probar que $A(n)$: $n(n+1)$ es par, para todo n.

Resolución:

Sea $n\in\mathbb{N}$, en ese caso hay dos posibilidades

Primera: n es par, luego $n=2k$ y $(n+1)=2k+1$; $k\in\mathbb{N}$ y se tiene que

$$n(n+1)=2k(2k+1)$$

Segunda: n es impar, luego $n=2k+1$ y $(n+1)=2k+2=2(k+1)$; $k\in\mathbb{N}$ y se tiene que $$n(n+1)=(2k+1)\cdot 2(k+1)$$

Luego, en cualquiera de las dos posibilidades $n(n+1)$, es par. ◆

En realidad, las demostraciones de este tipo no siempre son tan evidentes. Para comprobar que una propiedad se cumple para todos los números naturales es necesario realizar una demostración, que puede ser deductiva, como las ejemplificadas anteriormente, o mediante métodos inductivos.

En particular es muy efectivo el llamado *método de inducción completa*.

Definición 1.1

La **inducción completa** es el razonamiento que conduce a una conclusión general, a partir del estudio de todos los casos del fenómeno observado y tiene su validez garantizada. Un caso particular de ella es la **inducción matemática**.

En este método se parte de probar que la propiedad se cumple en dos casos bajo ciertas condiciones, lo que permite generalizarla para todos los números naturales.

Ejemplo 1.4

Demostrar que el producto de n números impares, es impar.

Resolución:

Sean $a_1;a_2;a_3;\ldots;a_n$, números impares cualesquiera tales que:

$a_1 = 2k+1; k \in \mathbb{N}$ y $a_2 = 2r+1;\ r \in \mathbb{N}$.

Luego, para $n = 2$ se tiene que: $a_1 \cdot a_2 = (2k+1)(2r+1)$

$$= 4kr + 2(k+r) + 1$$

$$= 2(2kr + k + r) + 1 \text{, es impar}$$

Para $n = 3$ se tiene que: $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = (a_1 \cdot a_2) \cdot a_3 = b_1 \cdot a_3$

Como $b_1 = (a_1 \cdot a_2)$ es impar, entonces $b_1 \cdot a_3$ es impar, luego $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$ es impar. Podemos repetir este procedimiento para $n = 4$ y *así sucesivamente.*

Luego, $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$, es impar para todo n. ◆

Observa que en este caso comenzamos por demostrar la propiedad para $n = 2$ y hemos "inducido" su validez general.

Reflexiona

¿Qué significado tienen los tres puntos suspensivos entre dos términos?

Aunque la demostración del ejemplo anterior parece convincente, al incluir la expresión "así sucesivamente", no explicita a todos los elementos que se consideran en la propiedad que se va a demostrar, esto puede dar lugar a imprecisiones que conducen una **inducción incompleta o empírica.**

Saber más

La **inducción incompleta o empírica** es el razonamiento del cual se llega a inferir una conclusión o ley general, a partir de observaciones de casos particulares del fenómeno estudiado; puede dar lugar a conclusiones verdaderas o falsas. Es utilizada en las ciencias experimentales, pero las conclusiones que se obtienen solo poseen cierto nivel de plausibilidad, que depende, entre otras cosas, del número de observaciones realizadas y su posterior comprobación; por tanto, siempre están sujetas a las modificaciones que los nuevos datos puedan aportar. En Matemática es útil para el descubrimiento de nuevas propiedades, pero no garantiza su validez.

Un ejemplo matemático de *inducción incompleta* que conduce a una conclusión falsa es el siguiente:

Ejemplo 1.5

Demostrar si es posible la validez universal de la proposición $P(n)$: $n^2 - n + 41$, es primo.

Resolución:

Al sustituir n por un número natural, obtenemos *sucesivamente:*

$P(0)$: $0^2 - 0 + 41 = 41$, es primo. Verdadero

$P(1)$: $1^2 - 1 + 41 = 41$, es primo. Verdadero

$P(2)$: $2^2 - 2 + 41 = 43$, es primo. Verdadero

$P(3)$: $3^2 - 3 + 41 = 47$, es primo. Verdadero

Pareciera que la proposición es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$, sin embargo:

$P(21)$: $21^2 - 41 + 41 = 1\,681$, no es primo. Es divisible por 41.

Luego, la proposición no se cumple para todo número natural. ◆

El ejemplo anterior ilustra que, no siempre se puede asegurar el valor de verdad de una conjetura, sin considerar cuántos casos particulares se verifiquen. Se necesita una demostración para determinar la verdad de la proposición.

De la historia

En el siglo XVII el matemático alemán Godofredo Wilhelm Leibniz (1646-1716) demostró que cualquiera sea el entero positivo n:

el número $n^3 - n$ es divisible por 3,

el número $n^5 - n$ es divisible por 5;

el número $n^7 - n$ es divisible por 7.

De aquí supuso que para todo k impar y cualquier natural $n^K - n$ era divisible por k.

Sin embargo, pronto observó que $2^9 - 2 = 510$ no es divisible por 9.

También el jurista y matemático francés Pierre de Fernant (1607-1665) supuso que el número $2^{2^n} + 1$ era un número primo para todo número natural n, después de haber probado que para:

$$n = 0, \quad 2^{2^0} + 1 = 3$$
$$n = 1, \quad 2^{2^1} + 1 = 5$$
$$n = 2, \quad 2^{2^2} + 1 = 17$$
$$n = 3, \quad 2^{2^3} + 1 = 257$$
$$n = 4, \quad 2^{2^4} + 1 = 65\,537$$

Sin embargo, el matemático físico suizo Leonhard Euler (1707-1783) refutó esta suposición cuando demostró que para $n = 5$, $2^{2^5} + 1 = 4294967297$ es divisible por 641.

Principio de inducción completa

La importancia del método de inducción completa, radica en que garantiza la validez de una proposición, sin necesidad de probar para cada número natural.

La validez de sus resultados se garantiza en virtud del teorema siguiente:

Teorema 1.1 Principio de inducción completa

Si para una propiedad $P(n)$, sobre el conjunto de los naturales se cumple:

I) $P(a)$ es verdadera, $a \in \mathbb{N}$

II) Para todo número natural K, de $P(K)$ se deduce $P(K+1)$

Entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq a$.

Este teorema lo aceptamos como verdadero y lo aplicaremos a la demostración de propiedades que dependen de un número natural.

¿? ¿Sabías que...?

La esencia del método de inducción completa se puede representar con las fichas de un juego de dominó. Imagina las fichas colocadas verticalmente, ¿cómo tumbarlas todas?

Un método sería tumbar las fichas una a una (figura 1.3).

Fig. 1.3

Esto es análogo a demostrar que la propiedad se cumple para cada número natural probando uno a uno.

Otro método sería, colocar las fichas en una fila de manera que la distancia entre ellas sea siempre menor que su altura (figura 1.4 a). Al tumbar la primera caen todas sucesivamente (figura 1.4 b).

a

b

Fig. 1.4

Esto es análogo a las dos condiciones del principio de inducción completa.

- Probar que la propiedad se cumple para un primer número natural.
- Probar que, si la propiedad se cumple para otro número cualquiera, entonces siempre se cumple para su sucesor.

Al aplicar el principio de inducción completa podemos proceder asociando sus condiciones al siguiente procedimiento:

- **Inicio o base de inducción.** Garantizar que la propiedad se cumple para un primer número natural.
- **Hipótesis de inducción.** Suponer que la propiedad se cumple para un número natural k cualquiera: $P(k)$.
- **Tesis de inducción.** De la suposición (hipótesis) se deduce que la propiedad también se cumple para el sucesor $k+1$, de k: $P(k+1)$
- **Demostración de la tesis de inducción.** Refiere a deducir $P(k+1)$ de $P(k)$.

Ejemplo 1.6

Demostrar por inducción completa que para todos los números naturales se cumple la propiedad $P(n): n^3 - n + 3$, es múltiplo de 3.

Resolución:

Inicio o base de inducción: verifiquemos que la propiedad se cumple para un primer número natural, probemos para el primer número natural $n = 0$, luego: $P(0): 0^3 - 0 + 3 = 3;$ 3 es múltiplo de 3; es verdadera.

Hipótesis de inducción: supongamos que la propiedad se cumple para un número natural k cualquiera.

$P(k): k^3 - k + 3 = 3q; \qquad q \in \mathbb{N}$

Tesis de inducción: de la hipótesis se deduce que su sucesor $k+1$ también se cumple:

$P(k+1) : (k+1)^3 - (k+1) + 3 = 3q; \quad q \in \mathbb{N}$

Demostración de la tesis de inducción: para deducir $P(k+1)$ de $P(k)$, desarrollamos el miembro izquierdo de la tesis para identificar el término

$(k+1)$, que se debe adicionar en ambos miembros de la hipótesis, para deducir $3q$.

$$(k+1)^3-(k+1)+3=k^3+3k^2+3k+1-k-1+3$$

$$=k^3+3k^2+3k-k+3$$

Como $k^3-k+3=3q$, entonces el término $(k+1)$ es $3k^2+3k$ por lo que

$$=3q+3k^2+3k$$

$$=3\left(q+k^2+k\right)\text{, es múltiplo de 3.}$$

Luego, la propiedad $n^3-n+3=3$ es múltiplo de 3 para todo $n\in\mathbb{N}$. ◆

Atención

Observa que en la demostración se debe llegar al miembro derecho de la tesis.

El principio de inducción completa también se aplica en la demostración de desigualdades.

Ejemplo 1.7

Demostrar por inducción completa que $P(n):3^n>n$, para $n\geq 1$.

Resolución:

Inicio de inducción: probemos que se cumple para el primer número natural que se indica en la condición de la propiedad, es decir; para $n=1$,

$P(1):3^1>1;\quad 3>1$, la propiedad se cumple.

Hipótesis de inducción: supongamos que se cumple para un número natural k cualquiera.

$$P(k):3^k>k$$

Tesis de inducción: se deduce que se cumple para su sucesor $(k+1)$, se tiene que:

$$P(k+1): 3^{k+1} > k+1$$

$$3^{k} \cdot 3 > k+1$$

Demostración de la tesis de inducción: luego para deducir $P(k+1)$ de $P(k)$:

Se multiplica por tres, ambos miembros de $P(k)$ y se desarrolla el miembro izquierdo $3^{k} \cdot 3 > k \cdot 3$

$$3^{k+1} > 3k$$

$$3^{k+1} > k+k+k$$

Al ser $k \geq 1$, se cumple que $k+k+k > k+1$, luego

$3^{k+1} > k+k+k > k+1$, y, por lo tanto

$3^{k+1} > k+1$, lo cual significa que $P(k+1)$ es verdadera.

En virtud del principio de inducción, $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N} : n \geq 1$. ◆

Reflexiona sobre lo aprendido

1. A partir de la informacion que te ofrece el ejemplo 1.1, di qué análisis harías en cuanto al siguiente razonamiento:
   - Aproximadamente el 38 % de los jóvenes de la muestra aparentan tener una causa de riesgo para padecer de tensión arterial alta.
2. Elabora y socializa, en tu grupo, ejemplos de al menos dos situaciones de la vida cotidiana y (o) de la matemática, en las cuales se evidencie que: *mediante el razonamiento inductivo se pasa de una proposición particular a otra de mayor generalidad, que no siempre conducen necesariamente a conclusiones verdaderas a partir de premisas verdaderas.*
3. Explica cómo el razonamiento deductivo se utiliza para verificar las hipótesis generadas por el razonamiento inductivo.

4. Es de vital importancia en el método inductivo la observación y la recopilación de datos empíricos. ¿Cómo puedes aplicar este principio a tu vida diaria para tomar decisiones más objetivas? Escoge una situación personal o social en la que debas tomar una decisión, ¿qué tipo de información recopilas y cómo la utilizas en tu decisión?
5. ¿Cómo demostrar por el principio de inducción completa que, cualquier número entero de pesos mayor que 7, puede pagarse con billetes de 3 y 5 pesos, sin necesidad de cambio?
6. En Geometría, también existen propiedades que son verdaderas para cualquier número natural *n*.
7. Comprueba con el uso de GeoGebra, que por *n* puntos del plano de los cuales no hay tres alineados, pasan $\frac{n(n-1)}{2}$ rectas. ¿Cómo demostrar por el principio de inducción completa esta propiedad geométrica?

Ejercicios del epígrafe 1.1

1. Analiza, para socializar con tus compañeros, la proposición que consideres correcta.

1.1 ¿Qué papel juega el razonamiento inductivo en el proceso de descubrimiento matemático?

a) El razonamiento inductivo se utiliza para probar y verificar las hipótesis existentes.

b) El razonamiento inductivo se utiliza para encontrar patrones y regularidades en los objetos matemáticos.

c) El razonamiento inductivo se utiliza para enseñar matemáticas a los estudiantes.

d) El razonamiento inductivo se utiliza para llegar a conclusiones definitivas.

1.2 ¿Cuál es la diferencia fundamental entre el razonamiento inductivo y el deductivo?

a) El razonamiento inductivo se basa en la observación, ya que el deductivo se basa en la lógica formal.

b) El razonamiento inductivo parte de conclusiones específicas, ya que el deductivo parte de principios generales.

c) El razonamiento inductivo es utilizado en las ciencias naturales y formales, ya que el deductivo es utilizado en las ciencias sociales.

d) El razonamiento inductivo es más complejo que el deductivo.

2. Demuestra por inducción completa que para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumplen las propiedades siguientes.

a) $5^n - 1$ es divisible por 4.

b) $3^n - 1$ es divisible por 2.

c) $n(n+1)(n+2)$ es múltiplo de 3.

d) $4^n + 15n - 1$ es divisible por 9.

e) $7^n - 3^n$ es múltiplo de 4.

f) $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ es divisible por 7.

3. Demuestra por inducción completa las desigualdades siguientes.

a) $2^n > n$

b) $n^2 + n > 2n - 1$

c) $3n > n + 1$

d) $n^2 + 1 > n$

e) $(1+n)^2 > 1 + n^2$

f) $2^n \geq n^2$

g) $(n+1)^2 < 2n^2$

h) $(1+a)^n > 1 + na \quad (a \neq 0, a > -1)$

4. Demuestra por el principio de inducción matemática que $n^2 - n + 41$, siempre es un número natural impar.

5. Demuestra que $8^n - 3^n$ es divisible por 5 para todos los números naturales n.

6. Demuestra que $3^{2n} - 1$ es divisible por 8 para todos los números naturales n.

7. Sean $b_{n+1} = 3b_n$ y $b_1 = 5$. Demuestra que $b_n = 5 \cdot 3^{n-1}$, para todo número natural n.

8. Demuestra que la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados es $(n-2)\pi$.

9. Determinar todos los números naturales para los cuales $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n > 2^n$.

10. Demuestra que para todo número natural $n > 1$ se cumple que

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}.$$

Conéctate

11. Accede a https://curricular.cubaeduca.cu/education/category?id=2088&type=theme
Encontrarás la lección correspondiente a ejercicios sobre el método de demostración por inducción completa, realízalos para que amplíes y verifiques los conocimientos adquiridos en este epígrafe.

1.2 Sucesiones numéricas

Estructura lógica y término general de una sucesión numérica

Nuestra vida cotidiana es diversa en situaciones que suceden siguiendo un orden, una característica o un patrón (figura 1.5).

Fig. 1.5

El transcurso de los días de una semana y los meses de un año, así como la estatura que una persona alcanza durante un periodo de su vida, o el crecimiento de una población bacteriana, son situaciones que, medidas con las magnitudes correspondientes, constituyen ejemplos de sucesiones que pasan inadvertidas, pero que, sin embargo, demuestran su natural presencia en la cotidianidad.

En general, las sucesiones son el objeto matemático que permite explicar o modelar dichos patrones, a partir de sus aplicaciones en diversos campos de las ciencias y la propia Matemática.

La expresión *sucesión numérica* la utilizas desde los primeros grados, con la cual aprendiste, por ejemplo, sobre la sucesión de los números naturales {0; 1; 2; 3; 4; 5; 7; ...} o la sucesión de sus cuadrados perfectos {1; 4; 9; 16; 25;...}. Sin embargo, profundizar en su estudio es de gran importancia por cuanto contribuirá al desarrollo de tu cultura matemática y en variados aspectos que pueden orientar tu futura vida profesional.

En este epígrafe encontrarás respuestas a las interrogantes siguientes:

¿Qué es una sucesión numérica? *¿Cuáles son los elementos que distinguen a una sucesión numérica? ¿Cómo generar una sucesión o identificar el patrón que la genera? ¿Cómo obtener sumas parciales de los términos de una sucesión numérica? ¿Cuáles tipos de sucesiones numéricas se pueden identificar?*

Algunas sucesiones son particularmente numéricas, debido a que sus elementos están en una correspondencia biunívoca con los números naturales. En tales casos es posible hacer la representación geométrica de algunos de sus elementos de dos maneras: en una recta numérica o en un sistema de coordenadas rectangulares.

Por ejemplo, la representación geométrica de la sucesión $\{1;4;7;10;13;16;\ldots\}$, en la recta numérica se muestra en la figura 1.6.

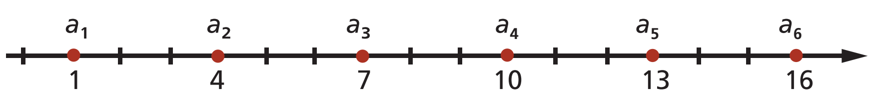


Fig. 1.6

Cuando se utiliza el sistema de ejes coordenados rectangulares se obtienen puntos aislados como se muestra en la figura 1.7.

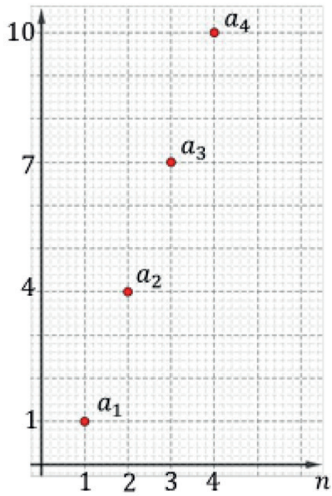


Fig. 1.7

Recuerda que...

Una función f: de A en B es una correspondencia en la que a cada elemento del conjunto A se le asocia un único elemento del conjunto B.
También una función $f: X \rightarrow Y$ es un conjunto de pares ordenados $(x; y)$; tal que cada $x \in X$, aparece como primera componente de un solo par ordenado.

De lo anterior se deduce que toda sucesión se puede representar geométricamente como una correspondencia entre los números naturales y el conjunto de los números reales, es decir, que es una función que a cada $n \in \mathbb{N}$, le hace corresponder un $a_n \in \mathbb{R}$ y, en consecuencia, la gráfica consiste en puntos de la forma $(n; a_n)$ que debido a la naturaleza discreta del dominio no forman una curva continua, ni una poligonal.

Observa que cada término se obtuvo de hacer corresponder a cada número natural n, un número real a_n mediante una función. En estos casos el conjunto de números reales o imágenes ordenados $\{a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n; \ldots\}$ constituye una *sucesión numérica*.

Luego, podemos establecer la siguiente definición.

Definición 1.2

Una sucesión numérica es una función de $n \to f(n)$ cuyo dominio es un subconjunto de los números naturales y cuyas imágenes son números reales. Los elementos $f(n)$ se llaman términos de la sucesión y se denotan como a_n.

Según el dominio de la sucesión esta puede ser *finita* (tiene cardinal) o *infinita* (no tiene cardinal) y se denota de las formas siguientes: $a_1; a_2; a_3; \ldots$ o $a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n; \ldots$ así como por $\{a_n\}$, (a_n). Por ejemplo:

- La sucesión de los dígitos que se utilizan en nuestro sistema de posición decimal $\{a_n\}$ ={0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}, es una sucesión finita, se compone de diez términos, es decir; su cardinal es diez ($\#\{a_n\} = 10$), de donde $a_1 = 0$ y $a_{10} = 9$.
- La sucesión de los números naturales (a_n) = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; ... ; $a_n; \ldots$}, es una sucesión infinita, no se puede determinar su cardinal.
- $\{a_n\}$ = {1; 0; 0; 1; 0; 1; 0; 0}, es una sucesión finita de ocho elementos y muestra que sus elementos pueden repetirse, su cardinal es ocho ($\#\{a_n\} = 8$).

Observa que, en el último de los ejemplos anteriores, es imposible identificar la forma de obtener los términos de la sucesión a partir del orden que ocupan en esta (ordinal de un término), no obstante, es importante destacar que algunas sucesiones con estas características tienen una amplia aplicación en otras ciencias.

¿Sabías que...?

En informática y telecomunicaciones un bit (abreviatura de dígito binario) es la unidad básica de información digital que solo puede tomar dos valores: 0 o 1. De manera que la sucesión {1; 0; 0; 1; 0; 1; 1; 0; 1; 0} puede representar una cadena de bits, mediante la cual los datos numéricos se traducen en un número.

Por ejemplo, una cadena consecutiva de pulsos de luz representa la información digital que se transmite a través de un enlace de fibra óptica. El estado "On" representa un bit con valor 1 y el estado "Off" representa un bit con valor 0.

	Ranura de bit									
Estado alto (ON)	1			1		1	1		1	
Estado bajo (OFF)		0	0		0			0		0

Fig. 1.8

Modelar el comportamiento de los términos de las sucesiones es unas de las tareas más importantes de la Matemática.

Existen sucesiones en las cuales se hace más evidente el comportamiento de sus términos, como en los siguientes:

- $\{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; \ldots; a_n; \ldots\}$; es una sucesión infinita, donde $a_n = 2n$. Es la sucesión de los números naturales pares. Podemos afirmar que el ordinal del término 12 es 7.
- $\left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots a_n; \ldots\right\}$, es una sucesión infinita, donde $a_n = n^{-1}; (n \geq 1)$. Es la sucesión del recíproco de los números naturales distintos de cero.

La ecuación de la función que permite obtener los términos de una sucesión numérica se denomina *ley de formación explícita de la sucesión*.

Al término a_n se le llama *término general de la sucesión* a partir del número natural n o *término* n-*ésimo de la sucesión*.

Ejemplo 1.8

Hallar los seis primeros términos de las sucesiones generadas por las leyes de formación siguientes:

a) $\left\{\frac{(n+1)^2}{n}\right\}; n \geq 1$ b) $\{a_n\} = \left\{(-2)^{n+1}\right\}$ c) $\left\{\frac{4n-3}{n+1}\right\}$

Resolución:

a) $\left\{4; \frac{9}{2}; \frac{16}{3}; \frac{25}{4}; \frac{36}{5}; \frac{49}{6}\right\}$

b) $\{-2; 4; -8; 16; -32; 64\}$

c) $\left\{-3; \frac{1}{2}; \frac{5}{3}; \frac{9}{4}; \frac{13}{5}; \frac{17}{6}\right\}$ ◆

Atención

Observa que según la ley de formación la sucesión puede ser creciente o decreciente, así como tener signos alternos.

¿Sabías que...?

No en todas las sucesiones se puede definir la ley de formación, para obtener su término n-ésimo. Es conocido el caso de la sucesión de los números primos $\{2; 3; 5; 7; 11; ...; a_n; ...\}$ para la cual aún no se ha podido encontrar las condiciones que modelan su formación.

Con frecuencia aparecen sucesiones en las que sus términos se definen por un conjunto de indicaciones de manera que cada uno se obtiene, a partir de los términos precedentes, así, por ejemplo, la famosa sucesión de Fibonacci: $F_n = \{1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; \ldots\}$, que es una sucesión infinita en la que cada término a partir del tercero, se obtiene de adicionar los dos anteriores, tiene como ley de formación explícita la siguiente:

$$a_1 = a_2 = 1 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \ ; n \geq 2$$

Siempre que el término n-ésimo de una sucesión dependa de algunos o de todos los términos precedentes, se dice que es una **sucesión recursiva** o que son **sucesiones definidas recursivamente.**

De la historia

Se considera que la sucesión $F_n = \{1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; ...\}$ fue propuesta por el matematico italiano, Leonardo Fibonacci, también llamado Leonardo de Pisa (1175-1240), figura 1.9. Resultó de resolver el famoso problema sobre ¿cuánto crece una colonia de conejos a partir de una pareja adulta?, suponiendo que cada mes, el par produce uno nuevo, el cual a su vez empieza a reproducirse al cabo de dos meses.

Fig. 1.9

Esta sucesión aparece también en la ramificación de las plantas, en la estructura de algunas flores y en formas espirales que se pueden apreciar en la naturaleza (figura 1.10).

Fig. 1.10

Conéctate

Utiliza alguna de las aplicaciones de inteligencia artificial reconocidas por tu grupo y tus profesores e investiga sobre la serie de Fibonacci y la relación que existe en algunos fenómenos de la naturaleza y su forma.

Ejemplo 1.9

Hallar los seis primeros términos de las sucesiones generadas por las condiciones siguientes:

a) Los dos primeros términos son 1 y 2, cada término a partir del tercero es el producto de los dos precedentes.

b) $a_1 = 1$ y $a_n = 2(a_{n-1} + 3)$

Resolución:

a) Como es una sucesión recursiva de la cual se conocen los dos primeros términos al calcular los siguientes cuatro términos se obtiene:
$a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 2 \cdot 1 = 2$ y $a_4 = 2 \cdot 2 = 4$, $a_5 = 4 \cdot 2 = 8$ y $a_6 = 8 \cdot 4 = 32$
Luego, los primeros seis primeros términos de la sucesión son $\{1; 2; 2; 4; 8; 32\}$.

b) Puesto que se trata de una sucesión recursiva de la cual se conoce el primer término.
$a_1 = 1$, se puede continuar como sigue:

$$a_2 = 2(1+3) = 8$$

$$a_3 = 2(8+3) = 22$$

$$a_4 = 2(22+3) = 50$$

$$a_5 = 2(50+3) = 106$$

$$a_6 = 2(106+3) = 218$$

Luego, los seis primeros términos de la sucesión son

$\{1; 8; 22; 50; 106; 218\}$. ◆

Ejemplo 1.10

Identificar la ley de formación explícita de los términos de las sucesiones siguientes:

a) $\{1; 2; 5; 10; 17; \ldots; a_n; \ldots\}$ b) $\left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots; a_n; \ldots\right\}$

c) $\left\{\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{5}{6}; \frac{7}{8}; \ldots; a_n; \ldots\right\}$

Resolución:

a) Puede ser caracterizada por la ley de formación explícita $a_n = n^2 + 1$ con $n \in \mathbb{N}$.

También se puede expresar como $\{a_n\}=\{n^2+1\}$ para $n\in\mathbb{N}$ o $a_n=n^2-2n+2$ con $n\in\mathbb{N}^*$.

b) Se puede expresar como $a_n=\dfrac{1}{n};\ n\neq 0$ o como $\{a_n\}=\left\{\dfrac{1}{n}\right\}, n\in\mathbb{N}^*$.

c) Como en cada término el numerador es un número impar, se expresa como (2n – 1) y el denominador como 2n por representar números pares; luego $a_n=\dfrac{2n-1}{2n}$ con $n\in\mathbb{N}: n>0$. ◆

Atención

Observa que la ley de formación explícita de una sucesión puede ser no única para una determinada sucesión como el inciso a, del ejemplo 1.10.

Aplica tus conocimientos

¿Cuál es la ley de formación con la que puedes listar la cantidad de ancestros que tienes, a partir de considerar que perteneces a la quinta generación de descendientes?

Sumas parciales de una sucesión

Trabajar con las sumas parciales de una sucesión numérica tiene gran importancia por su amplia aplicación en diversas situaciones cotidianas, de las ciencias y de la propia matemática. Te permiten conocer el monto de una cuenta de ahorro o de un interés financiero pasado cierto tiempo, así como, la depreciación del valor de una maquinaria en explotación pasados *n* años, entre otros ejemplos.

Para realizar sumas parciales de los términos de una sucesión $\{a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n; \ldots\}$ es conveniente establecer que:

$S_1=a_1$ es la primera suma parcial.

$S_2=a_1+a_2$ es la segunda suma parcial o suma hasta el segundo término.

$S_3=a_1+a_2+a_3$ es la tercera suma parcial o suma hasta el tercer término.

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ cuarta suma parcial o suma hasta el cuarto término.

$\vdots$

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ es la n-ésima suma parcial o suma hasta el n-ésimo término.

La sucesión S_1; S_2; S_3; …; S_n; es la sucesión de las sumas parciales.

Siempre que conoces una sucesión y la ecuación $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ de las sumas parciales de sus términos, es posible calcular la suma hasta un término n-ésimo determinado.

Ejemplo 1.11

Sea $S_n = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$ la ecuación de la suma n-ésima de la sucesión que tiene como ley de formación de sus términos a $a_n = \frac{1}{2^n}$.

a) Determinar los primeros cinco términos de la sucesión.
b) Calcular la suma hasta el término que ocupa el lugar diez en la sucesión.

Resolución:

a) Como $n = 0$, no indefine el denominador de a_n , entonces los términos de la sucesión, buscados son: 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$.
b) Como, en este caso, el primer término de la sucesión es $n = 0$, el término que ocupa el lugar diez, es $n - 1 = 10 - 1 = 9$, luego al sustituir en la ecuación de la suma n-ésima, se obtiene:

$$S_{10} = 1 - \frac{1}{2^9} = 1 - \frac{1}{312} = \frac{311}{312}.$$

Luego, la suma hasta el término que ocupa el lugar diez en la sucesión es $\frac{311}{312}$ ◆

Aplica tus conocimientos

¿Cómo proceder para determinar las primeras cuatro sumas parciales de la suceción cuyos términos tienen como ley de formación $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$?

Encuentra la fórmula de la suma S_n hasta el término n-ésimo de la suceción.

(Ver la nota 1 al capítulo 1 en los anexos)

Sucesiones aritméticas

Como parte de un proyecto de restauración, en una ciudad se rescata un inmueble con valor patrimonial, en el cual se destina una pieza para una sala de teatro. Si fueras miembro del equipo de diseñadores y arquitectos puedes ofrecer tus criterios y puntos de vista sobre la cantidad de asientos que se deben ubicar y la mejor manera de distribuirlos, atendiendo al modelo seleccionado y que se representa en la figura 1.11.

Fig. 1.11

¿Cuántos asientos se pueden ubicar en cada fila?

¿Cuántas filas pueden tener cada sección de la sala, si para cada una de ellas se dispone de un número determinado de asientos?

¿Cuántos asientos se pueden ubicar en la sala?

Observa que la situación planteada, te lleva a generar listas de números, por lo que, para dar una sugerencia acertada al respecto, debes tener conocimientos elementales sobre las *sucesiones aritméticas.*

Definición 1.3

Una sucesión numérica $a_1; a_2; a_3; ...; a_n;...$ es una **sucesión aritmética**, si existe un número d tal que $a_n = a_{n-1} + d$, con $n \geq 1$, donde d siempre es la diferencia entre dos términos consecutivos de la sucesión.

Ejemplo 1.12

Determina los cinco primeros términos de la sucesión aritmética que tienen como primer término $a_1 = 5$ y la diferencia común $d = 3$.

Resolución:

Si tomando $a_1 = 5$ y se adiciona sucesivamente $d = 3$, se obtiene

$$a_2 = 5 + 3 = 8$$

$$a_3 = 8 + 3 = 11$$

$$a_4 = 11 + 3 = 14$$

$$a_5 = 14 + 3 = 17$$

Luego, la sucesión aritmética con sus cinco primeros términos es $\{5; 8; 11; 14; 17; \ldots; a_n; \ldots\}$, donde $a_n = a_{n-1} + 3$. ◆

Cuando se conocen los dos primeros términos de una sucesión aritmética, se puede calcular el término n-ésimo por la ecuación: $a_n = a_1 + (n-1)d$, donde a_1 es el primer término y d la diferencia común de la sucesión para $n \in \mathbb{N}: n \geq 1$.

Ejemplo 1.13

Completar los cinco primeros términos y determinar el término 250 de la sucesión aritmética cuyos dos primeros términos son:

a) 6 y 10 b) 8 y 3

Resolución:

a) Si $a_1 = 6$ y $a_2 = 10$, entonces $d = 4$, y se aplica la definición para completar los restantes tres términos pedidos, estos son: $a_3 = 14$, $a_4 = 18$ y $a_5 = 22$
Para determinar el término 250, se sustituye en $a_n = a_1 + (n-1)d$
Se tiene que $a_{250} = 6 + 249 \cdot 4 = 1\,002$
Luego, la sucesión aritmética es {6; 10; 14; 18; 22; ...; 1 002; ...; a_n; ...}

b) Como $a_1 = 8$ y $a_2 = 3$, entonces $d = -5$ luego los restantes tres términos pedidos son: $a_3 = -2$, $a_4 = -7$ y $a_5 = -12$

Para determinar el término 250, se sustituye en $a_n = a_1 + (n-1)d$

Luego $a_{250} = 8 + 249 \cdot (-5) = -1\,237$

Luego, la sucesión aritmética es {8; 3; – 2; –7; –12; ...; –1 237; ...; a_n; ...}. ◆

Reflexiona

Representa en GeoGebra los gráficos de los términos de las sucesiones aritméticas del ejemplo 1.13.
¿Qué relación existe entre el valor *d* y la monotonía de la sucesión, y entre las sucesiones aritméticas y las funciones lineales?

Ejemplo 1.14

Sean $a_{11} = 26$ y $a_{19} = 46$ términos de una sucesión aritmética.

Calcular el término a_{101}.

Resolución:

Se requiere encontrar el primer término a_1 y la diferencia común *d*, luego al sustituir $a_{11} = 26$, y $a_{19} = 46$ en $a_n = a_1 + (n-1)d$, se obtiene:

$26 = a_1 + (11-1)d = a_1 + 10d$

$46 = a_1 + (19-1)d = a_1 + 18d$

El primer término a_1 y la diferencia común *d* se obtienen de resolver el sistema de ecuaciones:

$26 = a_1 + 10d$

$46 = a_1 + 18d$

De donde resulta que, $a_1 = 1$ y $d = 2{,}5$

Al sustituir en $a_n = a_1 + (n-1)d$ se tiene:

$$a_{101} = 1 + (101-1) \cdot 2{,}5$$

$$a_{101} = 1 + 100 \cdot 2{,}5$$

$$a_{101} = 251.$$

Luego, el término a_{101} es 251. ◆

Aplica tus conocimientos

Verifica el resultado por cualquiera de los métodos conocidos para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables.

Reflexiona

¿Cómo determinar el término n-ésimo de la sucesión aritmética si el primer término se obtiene para el primer número natural?

Sumas parciales de una sucesión aritmética

Para determinar las sumas parciales de una sucesión aritmética, es conveniente establecer que la n-ésima suma parcial de los términos $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$, de la sucesión donde $a_n = a_1 + (n-1)d$, está dada por una de las fórmulas siguientes:

$$S(n) = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right] \qquad \text{o} \qquad S(n) = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$$

Donde a_1 es el primer término de la sucesión y d la diferencia común.

Ejemplo 1.15

Los sacos de arroz recibidos en un almacén se organizan en 12 hileras sobre palés que los levantan del piso. En una primera fila se colocan 25 sacos, en la segunda 24, en la tercera 23 y así sucesivamente. ¿Cuántos sacos de arroz se recibieron en el almacén?

Resolución:

Como $a_1 = 25$ y $d = -1$ porque en este caso la sucesión es decreciente, luego al sustituir en $S(n) = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$ se obtiene que:

$$S(12) = \frac{12}{2}\left[2 \cdot 25 + (12-1)\cdot(-1)\right]$$

$$S(12) = 6[50 - 11] = 6 \cdot 39 = 234$$

Luego, en el almacén se recibieron 234 sacos de arroz. ♦

Ejemplo 1.16

La sección A de la platea de un teatro tiene 663 asientos distribuidos en filas, tal que, en las dos primeras tiene 15 y 18 asientos respectivamente, de manera que la diferencia de asientos entre dos filas consecutivas es constante. ¿Cuántas filas de asientos tiene la sección A del teatro?

Resolución:

Como $a_1 = 15$ y $a_2 = 18$, luego $d = 3$, y $S = 663$, al sustituir en:

$S(n) = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$ se tiene que

$$663 = \frac{n}{2}\left[2 \cdot 15 + (n-1) \cdot 3\right] = \frac{n}{2}[27 + 3n]$$

$$0 = \frac{3n^2}{2} + \frac{27n}{2} - 663 \quad \Big| \cdot \left(\frac{2}{3}\right)$$

$$0 = n^2 + 9n - 442$$

$0 = (n-17)(n+26)$, de donde $n = 17$ o $n = -26$

Respuesta: la sección A del teatro tiene 17 filas de asientos. ◆

(Ver la nota 2 al capítulo 1 en los anexos)

Investiga y aprende

¿Cómo calcular la suma de los cien primeros números naturales, sin necesidad de adicionarlos uno a uno? ¿Se puede generalizar una fórmula para la suma *n*-ésima de todos los números naturales?

Aplica tus conocimientos

1. Respecto a la restauración de la sala de teatro de la situación inicial, determina:
   a) ¿Cuántos asientos pueden tener las seis primeras filas, si en la primera y la segunda se ubican 12 y 15, respectivamente, y la diferencia de asientos entre dos filas consecutivas es constante?
   b) ¿Cuántas filas puede tener cada sección de la sala, según el modelo, si para cada una se dispone de 240 asientos?
2. ¿Cómo determinar la suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética que está definida para los números naturales?

Conéctate

Accede al sitio www.cubaeduca.cu en la sección curricular, busca en Matemática duodécimo grado en Actividades de aprendizaje. Repaso sobre funciones, y realiza los ejercicios propuestos.

Sucesiones geométricas

En microbiología, se realizan estudios para determinar la concentración de bacterias en una muestra. Partiendo del supuesto de que una bacteria es capaz de formar una colonia (figura 1.12), se trabaja con una medida denominada *Unidades formadoras de colonias* (UFC) por mililitros (mL). Imagina que eres miembro de un equipo de microbiólogos que realiza un estudio para determinar la concentración bacteriana en un cultivo que, tiene 2 500 UFC/mL y observaron que estas aumentan su concentración en un 5 % cada hora.

Fig. 1.12

¿Cómo puedes determinar las UFC que tiene el cultivo al transcurrir *n* horas? ¿Cuál es la fórmula que modela la velocidad de crecimiento bacteriano en ese cultivo?

La situación planteada, se distingue por generar una lista de números, cuyas características te permitirán conocer sobre otro tipo de sucesión numérica, que se obtiene cuando a partir de un número *a*, multiplicamos repetidamente por una constante $q \neq 0$, es de las llamadas sucesiones geométricas que se presentan con bastante frecuencia en diversas situaciones de la cotidianidad, o de las ciencias.

Definición 1.4

Una sucesión numérica a_1; a_2; a_3; ...; a_n;... es una **sucesión geométrica**, si existe un número q tal que, $a_n = q \cdot a_{n-1}$, con $n \geq 1$, donde q es la razón entre dos términos consecutivos cualesquiera de la sucesión.

Ejemplo 1.17

Determinar los cinco primeros términos de una sucesión geométrica que tiene:

$a_1 = 2$ y $q = 3$, y encuentra la ecuación de su término n-ésimo.

Resolución:

Como $a_1 = 2$ se multiplica sucesivamente por $q = 3$ cada producto obtenido, por lo que: $a_2 = 2 \cdot 3 = 6$;

$a_3 = 6 \cdot 3 = 18$;

$a_4 = 18 \cdot 3 = 54$;

$a_5 = 54 \cdot 3 = 162$

Luego, la sucesión geométrica es {2; 6; 18; 54; 162; ... ; a_n; ...} donde la ecuación de su término n-ésimo es $a_n = 3a_{n-1}$. ◆

A partir del conocer el primer término de una sucesión geométrica, y la razón común q entre sus términos, se puede calcular el término n-ésimo por la ecuación:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Ejemplo 1.18

Dados $a_1 = 5$ y $q = -3$

a) ¿Cuál es la ley de formación de los términos de la sucesión geométrica que ellos generan?

b) ¿Cuáles son los primeros cinco términos de la sucesión geométrica?

Resolución:

a) Como $a_1 = 5$ y $q = -3$, al sustituir en $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ se obtiene la ley de formación de los términos de la sucesión geométrica que genera:

$a_n = a_1 \cdot (-3)^{n-1}$; $n \geq 1$

Respuesta: la ley de formación de los términos de la sucesión geométrica que generan $a_1 = 5$ y $q = -3$ es $a_n = a_1 \cdot (-3)^{n-1}$; $n \geq 1$.

b) Como $a_1 = 5$, sustituyendo en la ley de formación encontrada se tiene que:

$a_2 = 5(-3)^{2-1} = 5 \cdot (-3) = -15$

$a_3 = 5(-3)^{3-1} = 5 \cdot 9 = 45$

$a_4 = 5(-3)^{4-1} = 5 \cdot (-27) = -135$

$a_5 = 5(-3)^{5-1} = 5 \cdot 81 = 405$

Respuesta: los primeros cinco términos de la sucesión geométrica es {5; 15; 45; 135; 405}. ◆

Ejemplo 1.19

Dada la sucesión geométrica $\left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16} \ldots; a_n; \ldots\right\}$, encontrar la ley de formación de los términos *n*-ésimos que la genera.

Resolución:

Se tienen que el primer término es $a_1 = 1$, como se conoce que la sucesión es geométrica, para encontrar la razón común q, se divide un término cualquiera por el término anterior. En tal caso se pueden seleccionar: $\frac{1}{16} : \frac{1}{8} = \frac{1}{16} \cdot \frac{8}{1} = \frac{1}{2} = q$, se tiene que $a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Luego, la ley de formación de los términos *n*-ésimos que genera la sucesión $\left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; a_n\right\}$, es $a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. ◆

(Ver la nota 3 al capítulo 1 en los anexos)

Reflexiona

1. Representa en un gráfico de GeoGebra los términos de las sucesiones geométricas de los ejemplos 1.17 y 1.18.
   a) ¿Qué relación existe entre el signo del valor q y el signo de los términos de la sucesión? ¿Qué razonamientos puedes hacer con respecto a su monotonía?
2. ¿Cómo determinar el término n-ésimo de las sucesión geométrica si el primer término se obtiene para el primer número natural?

Sumas parciales de una sucesión geométrica

Para determinar las sumas parciales de una sucesión geométrica, es conveniente establecer que la n-ésima suma parcial de los términos $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \cdots$, de la sucesión con $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, q \neq 0$ es:

$$S(n) = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \quad \text{con } n \in \mathbb{N} : n \geq 1$$

Donde a_1 es el primer término de la sucesión y q la razón común.

Ejemplo 1.20

Determinar los cinco primeros términos y la suma parcial hasta el décimo término de la sucesión geométrica donde $a_1 = 2$ y $q = -2$.

Resolución:

a) Para determinar los cinco primeros términos de la sucesión geométrica se sustituyen los valores $a_1 = 2$ y $q = -2$, en $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ de donde se obtiene que:

$$a_n = 2 \cdot (-2)^{n-1} \text{ ; } n \geq 1 \text{ luego}$$

$$a_2 = 2 \cdot (-2)^1 = -4$$

$$a_3 = 2 \cdot (-2)^2 = 8$$

$$a_4 = 2 \cdot (-2)^3 = -16$$

$$a_5 = 2 \cdot (-2)^4 = 32$$

Para hallar la suma parcial hasta el décimo término, se sustituyen los valores de

$a_1 = 2,\ q = -2$ y $n = 10$, en $S(n) = a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$, luego se tiene que:

$$S(10) = 2 \cdot \frac{1-(-2)^{10}}{1+2} = 2 \cdot \frac{1-1\,024}{3} = -682\,.$$

Luego, la sucesión geométrica es {2; – 4; 8;– 16; 32; ...; a_n;...} y la suma parcial hasta el décimo término es –682. ◆

(Ver la nota 4 al capítulo 1 en los anexos)

Reflexiona sobre lo aprendido

1. ¿Cómo determinar la suma de los n primeros términos de una sucesión geométrica si está definida para los números naturales?
2. Según la información que tiene el centro de costo de una entidad laboral el precio de un televisor asignado a una oficina, es de 11 125 CUP, y su depreciación anual es de un 10 % con respecto a su valor original. El estado de la tarjeta de depreciación del valor anual del televisor, se muestra en la tabla siguiente:

Valor inicial	1.er año	2.o año	3.er año	**4.o año**	5.o año	**6.o año**	**7.o año**	**8.o año**
11 125		8 900		6 675		4 450	3 337,5	

a) Analiza la información anterior y socializa en tu grupo la vía que utilizarías para calcular en cuánto decrece el valor del televisor cada año.

b) Completa la tarjeta en tu cuaderno de trabajo con el valor anual del televisor en cada año.

3. Los asientos de una sala de cine que se construye para una comunidad del Plan Turquino, se disponen de manera que en cada una de las filas después de la primera, hay dos asientos más que en la fila anterior. Se sabe que en la última fila hay 35 asientos.
   a) ¿Cuántos asientos hay en la primera fila?
   b) ¿Cuántas filas hay en la sala del cine?
   c) ¿Cuántos asientos tiene en total la sala del cine?

4. De la situación inicial planteada respecto al estudio realizado por el equipo de microbiólogos, di cuántas unidades formadoras de colonias (UFC) habrá en el cultivo pasadas 3 h.
5. Los términos n-ésimos de una sucesión geométrica se generan por la ley de formación $a_n = \frac{1}{5} \cdot 2^{n-1}$.
   a) Representa los cinco primeros términos en un gráfico de GeoGebra e identifica la función real de la cual son imágenes.
   b) Analiza el comportamiento de la función si $0 < q < 1$.
   c) ¿Qué pasaría si $q = 1$?
   d) Calcula la suma hasta un término n-ésimo cualquiera.
6. Investiga sobre los procesos de reproducción celular de los organismos por Mitosis y por Meiosis. ¿Cuál de ellos puede ser modelado mediante una sucesión aritmética o por una geométrica? Socializa en el grupo tu razonamiento.
7. ¿Cómo se obtiene el antecesor y el sucesor del término general de una sucesión?

Demostración de fórmulas de términos y sumas *n*-ésimas de una sucesión por Principio de inducción completa

Consideremos que la relación matemática entre descubrimiento y demostración tiene gran importancia, ya que solo podemos atribuir valor de verdad a un descubrimiento después que se ha demostrado. En tal sentido, la **inducción matemática** que estudiaste en el primer epígrafe de este capítulo resulta un poderoso método para demostrar la propiedad que cumplen los términos de una sucesión numérica y sus sumas parciales.

Ejemplo 1.21

Sea $S(n) = 0 + 2 + 4 + \ldots + 2n$, la adición de los términos de una sucesión aritmética.

a) Demostrar que $S(n) = n(n+1)$, se cumple, para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Determinar el sumando que ocupa el lugar 58.

c) Calcular la suma hasta el término 102.

Resolución:

a) *Inicio o base de inducción:* probar que $S(n)$ se cumple para $n=0$, luego: $S(0)=0(0+1)=0$, $a_1=0$; $0=0$, la propiedad es verdadera para n = 0.

Hipótesis de inducción: supongamos que la propiedad se cumple para un número natural k cualquiera.

$S(k)=0+2+4+\ldots+2k=k(k+1)$

Tesis de inducción: de $S(k)$ se debe deducir que su sucesor $k+1$ también cumple la propiedad, es decir;

$S(k+1)=0+2+4+\ldots+2(k+1)=(k+1)(k+2)$

Demostración de la tesis de inducción: para deducir $S(k+1)$ de $S(k)$, basta adicionar el término $2(k+1)$ obtenido en el miembro derecho de $S(k+1)$, en ambos miembros de $S(k)$; resulta que:

$S(k)=0+2+4+\ldots+2k+\left[2(k+1)\right]=k(k+1)+2(k+1)$ (como los miembros izquiedos de la tesis y de la demostración son iguales, probemos que los miembros derechos, también son iguales)

$$=k^2+3k+2$$

$$=(k+1)(k+2)$$

Luego, se puede afirmar que $S(n)=n(n+1)$, para todo $n\in\mathbb{N}$.

b) Como la ley de formación del término es $a_n=2n$ y el primer término se obtiene para $n=0$, se sustituye para $n=57$.

$a_{58}=2\cdot 57=114$

Respuesta: el sumando que ocupa el lugar 58 en la propiedad es 114.

c) En este caso, como el término es 102 y ley de formación del término es $a_n=2n$, entonces el término 102 ocupa la posición 51 y se obtiene para $n=50$ para calcular la suma hasta el término 102, se sustituye $n=51-1$

$n=50$, pues el primer término se obtiene para $n=0$.

$S(n) = n(n+1),$

$50(50+1) = 2\,550$

Respuesta: la suma hasta el término 102 es 2 550. ◆

Ejemplo 1.22

Sea $S(n)$ la suma n-ésima de la sucesión aritmética:

$\{5;\ 8;\ 11;\ 14;\ 17;\ \ldots;\ (3n+2);\ \ldots\}$

Demostrar por inducción completa que: $S(n) = 5n + \frac{3}{2}n(n-1)$

Resolución:

Inicio o base de inducción:

Debemos garantizar que la propiedad se cumple para un primer número natural.

Probemos para $n = 0$ $\quad S(0) = 5 \cdot 0 + \frac{3}{2} \cdot 0(0-1) = 0;\ 0 \neq 5;$ no se cumple

para $n = 1$ $\quad S(1) = 5 \cdot 1 + \frac{3}{2} \cdot 1(1-1) = 5;\ a_1 = 5$ y $5 = 5;$ se cumple.

Hipótesis de inducción: supongamos que se cumple para un número natural k cualquiera.

$S(k) = 5k + \frac{3}{2}k(k-1)$

$S(k) = \frac{3}{2}k^2 + \frac{7}{2}k$

Tesis de inducción: de la suposición se debe deducir que para su sucesor $k+1$ también se cumple, de donde resulta que:

$S(k+1) = 5(k+1) + \frac{3}{2}(k+1)(k+1-1),$

$S(k+1) = \frac{3}{2}k^2 + \frac{13}{2}k + 5$

Demostración de la tesis de inducción: debemos demostrar que la tesis $S(k+1)$ es verdadera, partiendo de la hipótesis $S(k)$, para ello adicionemos el término $[3k+5]$, en ambos miembros de $S(k)$ y desarrollemos el miembro derecho.

$$\begin{aligned} S(k)+(3k+5) &= \frac{3}{2}k^2+\frac{7}{2}k+[3k+5] \\ &= \frac{3}{2}k^2+\frac{7}{2}k+3k+5 \\ &= \frac{3}{2}k^2+\frac{13}{2}k+5 \end{aligned}$$

Luego, se cumple que $S(n)=5n+\frac{3}{2}n(n-1)$ para todo n natural con $n\geq 1$ permite determinar la suma n-ésima de la sucesión aritmética $\{5;8;11;14;17;\ldots;(3n+2);\ldots\}$. ◆

(Ver la nota 5 al capítulo 1 en los anexos)

Ejemplo 1.23

Sea la sucesión geométrica $\{3;6;12;24;\ldots;3\cdot 2^{n-1}\}$ y $S(n)$, la suma n-ésima de sus términos.

a) Demostrar por inducción completa que: $S(n)=3(2^n-1)$, para todo n natural con $n\geq 1$.

b) Determinar cuántos de los primeros términos se deben adicionar para obtener como suma parcial 381.

Resolución:

a)

Inicio de inducción: garantizar que $S(n)$ se cumple para el primer número natural que se indica, es decir; para $n=1$.

$a_1=3$ $S(n)=3(2^n-1)$, $S(1)=3(2^1-1)=3(2-1)=3\cdot 1=3$ $3=3$; se cumple.

Hipótesis de inducción: suponer que $S(n)$ se cumple para un número natural k cualquiera:

$3+6+12+24+\ldots+(3\cdot 2^{k-1})=3(2^k-1)$

Tesis de inducción: de la suposición debe deducirse que el sucesor $k+1$ también cumple la propiedad, es decir:

$$3+6+12+24+\ldots+\left[3\cdot 2^{k}\right]=3\left(2^{k+1}-1\right),$$

Demostración de la tesis de inducción: deducir $S(k+1)$ partiendo de $S(k)$, adicionar el término $\left[3\cdot 2^{k}\right]$, en ambos miembros de $S(k)$.

$$3+6+12+24+\ldots+\left(3\cdot 2^{k-1}\right)+\left[3\cdot 2^{k}\right]=3\left(2^{k}-1\right)+\left[3\cdot 2^{k}\right]$$

Como el miembro izquierdo de la tesis es igual al miembro izquierdo de la demostración, nos quedaría desarrollar el miembro derecho de la demostración hasta obtener el miembro derecho de la tesis:

$$\begin{aligned}
&=\left(3\cdot 2^{k}\right)-3+3\cdot 2^{k}\\
&=2\cdot\left(3\cdot 2^{k}\right)-3\\
&=3\cdot 2^{k+1}-3\\
&=3\left(2^{k+1}-1\right)
\end{aligned}$$

Luego, se cumple que $S(n)=3\left(2^{n}-1\right)$, para todo n natural con $n\geq 1$; permite determinar las sumas parciales de los n-ésimos términos de la sucesión geométrica $\left\{3;6;12;24;\ldots;3\cdot 2^{n-1}\right\}$.

b) $S(n)=3\left(2^{n}-1\right)=381$

$$\begin{aligned}
3\left(2^{n}-1\right)&=381\\
2^{n}-1&=127\\
2^{n}&=128\\
2^{n}&=2^{7}\\
n&=7
\end{aligned}$$

Para obtener la suma parcial 381 se deben adicionar los siete primeros términos de la sucesión.

Conéctate

Busca una herramienta de inteligencia artificial (IA) y:

a) Demuestra que la cantidad de diagonales de un polígono de n lados, es $\frac{n(n-3)}{2}$.

b) Valora el procedimiento seguido por la IA.

Ejemplifica la demostración, con ayuda del GeoGebra.

Ejercicios del epígrafe 1.2

Sucesiones numéricas

1. Identifica, en tu cuaderno de trabajo, cuál de los conjuntos de pares ordenados no constituye una sucesión. Justifica en cada inciso.

a) $A=\{(0;0);(1;5);(2;10);(3;15);(4;20)\}$.

b) $B=\{(n;a_n):a_n=2n^2-3,n\in\mathbb{N}\}$.

c) $C=\{(1;0);(2;1);(3;1);(4;2);(5;3)\}$

d) $D=\{(1;-2);(2;-1);(3;0);(4;1)\}$.

e) $E=\left\{\left(1;\frac{1}{2}\right);(2,1);\left(1;\frac{3}{2}\right);(4,2)\right\}$.

f) $F=\{(n;a_n):a_n=3n+1,n\in\mathbb{Z}\}$.

g) $G=\{(1;0,5);(2;1,5);(3;2,5);(4;3,5)\}$.

1.1 De las que son sucesiones, diga cuáles son aritméticas y cuáles geométricas.

2. Calcula los primeros cinco términos de las sucesiones que tienen la ley de formación siguiente.

a) $a_n=3n-1$

b) $a_n=n^2-2$

c) $a_n=\dfrac{n}{n+2}$

d) $a_n = \dfrac{-3^n}{2^n}$

e) $a_n = 4n+3$

f) $a_n = 2a_{n-1}+1$ y $a_1 = 1$; $n \geq 2$

g) $a_n = 2(a_{n-1}-2)$ y $a_1 = 3$; n ≥ 2

h) $a_n = \dfrac{1}{a_{n-1}}$ y $a_1 = 3$; n ≥ 2

i) $a_n = \dfrac{n^2+1}{n+3}$, $n \geq 0$

2.1 Representa en un sistema de coordenadas cartesianas utilizando GeoGebra, los cuatro primeros términos encontrados de cada sucesión y analiza su monotonía.

3. Determina una ley de formación explicita para calcular el *n*-ésimo término de las sucesiones siguientes:

a) 1; 4; 7; 10; ...

b) $1; \dfrac{3}{4}; \dfrac{5}{9}; \dfrac{7}{16}; \dfrac{9}{25}; \ldots$

c) 5; –25; 125; –625; ...

d) 2; 6; 2; 6; .

3.1 Calcula en cada caso el término duodécimo de la sucesión.

4. Calcula los primeros cuatro términos y la suma hasta el término indicado de las sucesiones dadas:

a) $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ y $S(n) = 1 - \dfrac{1}{2^n}$ para $n = 6$

b) $a_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ y $S(n) = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ para $n = 10$

5. Dada la sucesión de pares ordenados de números racionales

$\left\{(1;2);\left(\dfrac{1}{2};1\right);(2;4);\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right);(3;8);\left(\dfrac{1}{8};\dfrac{1}{3}\right);(4;16)\right\}$, el par ordenado siguiente es:

a) $\left(\dfrac{1}{8};\dfrac{1}{4}\right)$

b) $\left(\dfrac{1}{16};\dfrac{1}{4}\right)$

c) $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{16}\right)$

d) $(5;32)$

6. Los cinco primeros términos de una sucesión de tríos ordenados de números naturales son:

$\{(1;2;3);(2;-3;4);(3;4;5);(4;-5;6);(5;6;7)\}$.

Entonces el cuadragésimo término es:

a) $(39;-40;41)$ b) $(40;-41;42)$ c) $(40;41;42)$ d) $(41;42;43)$

7. ¿Cuál de los números dados falta en la sucesión formada por 0; 1; 8; 27; 125; ...?

a) 64 b) 49 c) 169 d) 144

8. Los cinco primeros términos de una sucesión de polinomios son

$1;2x;\frac{x^2}{4};8x^3;\frac{x^4}{16}$. Entonces el noveno término es:

a) $512x^8$ b) $\frac{x^9}{256}$ c) $\frac{x^8}{256}$ d) $512x^9$

9. En el año 2024 se inaugura un nuevo reparto residencial, con una población de 3 500 habitantes. A partir de la eficiencia que tiene la empresa constructora, para generar nuevos fondos habitacionales, se estima que la población aumente anualmente en una tasa de 2 %. Además, se prevé que n años después, a partir de 2024, la tasa de crecimiento poblacional se represente mediante la fórmula $P(n) = 3\,500 \cdot (1{,}02)^n$.

a) Calcula los primeros cinco términos de la sucesión que genera.

b) ¿Cuál debe ser la población actual del reparto residencial según la fórmula de tasa de crecimiento poblacional estimada?

10. En una cooperativa pesquera deciden ampliar sus producciones, con un nuevo embalse en el que inician un cultivo de 5 000 tilapias. Se conoce que la cantidad aumenta un 8 % cada mes y se cosechan 300 tilapias todos los meses, para una industria local. ¿Cuál es la ley de formación, que permite calcular la cantidad de tilapias que hay en el embalse pasado n meses? ¿Cuántas tilapias se pueden contar en el embalse cumplido el primer año?

11. Determina los cinco primeros términos de la sucesión aritmética y la suma parcial de los *n*-ésimos términos que se indican, dados el primer término a_1 y la diferencia común d.

a) $a_1 = 5,\ d = 3$ y S_{15}

b) $a_1 = 2$ y $d = -2$ y S_{27}

c) $a_1 = 3$ y $d = 4$ y S_{12}

d) $a_1 = 1$ y $d = \frac{3}{4}$ y S_{41}

11.1 Selecciona para a_1 y d dos valores cualesquiera.

a) Escribe los seis primeros términos de la sucesión aritmética que generan.

b) Calcula la suma *n*-énsima hasta un valor de *n*, determinado.

12. Dados los dos primeros términos de una sucesión aritmética:

a) 6; 10 b) 8; 3 c) -15; -13 d) 1; $\frac{1}{4}$

a) Determina el término 78 de la sucesión aritmética que generan cada caso.

b) Calcula la suma hasta el término 23.

13. Dados los términos $a_{10} = 16$ y $a_{20} = 86$ de una sucesión aritmética.

a) Calcula el término a_{100}. b) Calcula S_{100}.

14. Calcula la suma de los términos de las sucesiones aritméticas siguientes hasta el término indicado.

a) $6 + 10 + 14 + \ldots + 202$

b) $15 + 17 + 19 + \ldots + 213$

c) $5 + 5{,}5 + 6 + 6{,}5 + \ldots + 1\,000$

d) $31 + 35 + 39 + \ldots + 319$

15. Determina los cinco primeros términos de una sucesión geométrica que tiene:

a) $a_1 = 2$ y $q = -2$

b) $a_1 = -1$ y $q = -\frac{1}{3}$

c) $a_1 = 3$ y $q = -\frac{1}{4}$

d) $a_1 = -15$ y $q = \frac{1}{5}$

16. Calcula en cada caso del ejercicio anterior, la suma *n*-ésima para un valor: $0 < n \leq 100$.

17. Expresa una ley de formación explícita de cada una de las sucesiones geométricas siguientes:

a) $\{3;30;300;\cdots\}$ b) $\{2;-10;50;-250;\ldots\}$

c) $\left\{1;\frac{1}{3};\frac{1}{9};\frac{1}{27};\ldots\right\}$ d) $\left\{3;3^{\frac{5}{3}};3^{\frac{7}{3}};27;\ldots\right\}$

18. Calcula la suma de los términos de las sucesiones geométricas siguientes hasta el término indicado.

a) $2+6+18+54+\ldots+1\,458$.

b) $4+2+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{256}$.

c) $2-4+8-6+32-\ldots+8\,192$.

d) $48+96+192+\ldots+24\,576$.

19. Un estudiante de 12.º grado se prepara para los exámenes de ingreso a la Educación Superior, se propone estudiar Geometría Plana, desde el 6 de septiembre, y resolver dos problemas geométricos cada día.

a) Si el estudiante pretende dar solución a 30 problemas geométricos y estudia todos los días hasta lograrlo, ¿Qué parte del total de problemas geométricos que se propuso resolver, le faltará por resolver al concluir el día 10 de septiembre?

b) ¿En qué día de septiembre el estudiante debe terminar con la resolución de todos los problemas geométricos propuestos?

20.

Conéctate

Accede al sitio www.cubaeduca.cu en la sección curricular, busca en Matemática duodécimo grado la lección Sucesiones numéricas y realiza los ejercicios de autoevalución.

Demostración de fórmulas de términos y sumas n-ésimas de sucesiones por el Principio de inducción completa

21. Demuestra por inducción completa que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple:

a) $0+3+6+\ldots+3n=\frac{3}{2}n(n+1)$

b) $5+7+9+\ldots+(2n+5)=(n+1)(n+5)$

c) $11+13+15+\ldots+(2n+11)=(n+1)(n+11)$

d) $2+7+12+\ldots+(5n+2)=\frac{(n+1)(5n+4)}{2}$

e) $1+2+4+\ldots+2^{n}=2^{n+1}-1$

f) $7+6\cdot 7+6\cdot 7^{2}+\ldots+6\cdot 7^{n}=7^{n+1}$

21.1 Selecciona al menos tres de las propiedades dadas:

a) Determina el término que ocupa el lugar a_{n-s}.

b) Calcula la suma hasta el término determinado.

22. Demuestra por inducción completa que para todo $n \in \mathbb{N} : n \geq 1$ se cumple:

a) $6+12+18+\ldots+6n=3n(n+1)$

b) $7+9+11+\ldots+(2n+5)=n(n+6)$

c) $3+7+11+\ldots+(4n-1)=n(2n+1)$

d) $7+13+19+\ldots+(6n+1)=n(3n+4)$

e) $1^{2}+2^{2}+3^{2}+\ldots+n^{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

f) $1^{2}+3^{2}+5^{2}+\ldots+(2n-1)^{2}=\frac{1}{3}n\left(4n^{2}-1\right)$

g) $1^{3}+3^{3}+5^{3}+\ldots+(2n-1)^{3}=n^{2}\left(2n^{2}-1\right)$

h) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

22.1 Selecciona al menos cinco de las propiedades anteriores:

a) Determina el sumando que ocupa el lugar a_{n-s}.

b) Calcula la suma hasta el sumando determinado.

23. Demuestra por inducción completa que para una sucesión aritmética $a_1; a_2; a_3; \cdots, a_n; \ldots;$ se cumple:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = na_1 + \frac{(n-1)n}{2}d$$

24. Demuestra por inducción completa que en la sucesión geométrica $a_1; a_2; a_3; \cdots; a_n; \ldots;$ se cumple:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

25. Observa que $1 = 1$, $1 + 3 = 4$, $1 + 3 + 5 = 9$, $1 + 3 + 5 + 7 = 16$. ¿Cuál es la fórmula para determinar la suma de los primeros n números impares? Demuestra que se cumple para todos los números naturales.

26. Sea la igualdad $\frac{1}{2} + \frac{7}{2} + \frac{13}{2} + \ldots + \left(\frac{6n-5}{2}\right) = S(n)$:

a) Demuestra aplicando el principio de inducción completa que para todo $n \in \mathbb{N}: n \geq 1$ se cumple que $S(n) = \frac{n(3n-2)}{2}$.

b) Calcula la suma de los 20 primeros términos de la igualdad.

27. Dada la sucesión $\{a_n\} = \left\{\frac{3}{5}; \frac{6}{5}; \frac{9}{5}; \ldots; \frac{3n}{5}; \ldots\right\}$ con $n \in \mathbb{N}: n \geq 1$:

a) Determina la posición que ocupa el término 2 025 en la sucesión.

b) Demuestra aplicando el principio de inducción completa que $\frac{3}{5} + \frac{6}{5} + \frac{9}{5} + \ldots + \frac{3n}{5} = \frac{3n(n+1)}{10}$ para todos los valores de $n \in \mathbb{N}: n \geq 1$.

28.

Conéctate

Accede al sitio www.cubaeduca.cu en la sección curricular, busca en Matemática duodécimo grado la lección Inducción completa y realiza los ejercicios que aparecen.

Ejercicios del capítulo

1. Determina si las proposiciones siguientes son verdaderas o falsas. En los casos en que consideres que son verdaderas demuéstralo. Si consideras alguna falsa, escribe un contraejemplo que lo confirme.

a) $P(n): n^3 - n$, es divisible por 3 para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) $P(n): 3^{2n} + 7$ es divisible por 8 para todo $n \in \mathbb{N}$.

c) $P(n): 3^{4n} - 1$ es divisible por 15 para todo $n \in \mathbb{N}$.

d) $P(n): 4n < 2^n$ para todo $n \geq 5$.

e) $P(n): (n+1)^2 \leq n^3$ para todo $n \geq 2$.

f) $P(n): 3^{2n} + 7$ es divisible por 8 $n \in \mathbb{N}$.

2. Demuestra por inducción completa que $2^{2n-1} + 3^{2n-1}$ es divisible por 5 para todos los números naturales n.

3. Demuestra por inducción completa que $100n \leq n^2$, para todo $n \in \mathbb{N}: n \geq 100$.

4. Demuestra aplicando el principio de inducción matemática que $8^n - 3^n$, es divisible por 5 para todo $n \in \mathbb{N}$.

5. Halla los siete primeros términos de las sucesiones siguientes:

a) $\left\{\frac{n}{3}\right\}$ b) $\left\{2 \cdot 3^{n-1}\right\}$ c) $\left\{4 + 2(n-1)\right\}$ d) $\left\{\frac{1}{2n+1}\right\}$ e) $\left\{3n^2 - n\right\}$

f) Los términos de orden impar son sucesivamente los cuadrados perfectos enteros y los términos de orden par son los sucesivos múltiplos de 3.

6. El lunes, Camila inició su nuevo trabajo (torcido de tabaco). Ese día preparó 105 tabacos. Su jefa espera que con la experiencia que vaya adquiriendo sea más productiva y que cada día de esta primera semana (de lunes a sábado), se espera que ella prepare 10 tabacos más que el total del día anterior.

a) ¿Cuántos tabacos se espera que prepare Camila al tercer día de trabajo?
b) Determina una expresión algebraica que permita obtener la cantidad de Tabaco torcido por Camila en cada uno de los días de la primera semana de trabajo. Compruébala.
c) Determina una expresión algebraica que permita obtener la cantidad total de tabaco torcido por Camila en la primera semana de trabajo. ¿Cuántos tabacos se espera que prepare Camila en sus primeros seis días de trabajo?
d) Investiga cuántos tabacos como promedio puede torcer una persona. Elabora una situación que refleje la cantidad de tabacos que puede torcer Camila en la segunda semana de trabajo, a partir de los datos obtenidos en los incisos anteriores.

7. Demuestra por inducción completa que para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple:

$$1+3+3^2+\ldots+3^n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$$

8. Demuestra por inducción completa que para todo $n \in \mathbb{N} : n \geq 1$ se cumple:

a) $2 \cdot 5+5 \cdot 8+8 \cdot 11+\cdots+(3n-1)(3n+2)=n\left(3n^2+6n+1\right)$

$$\frac{1}{1 \cdot 2}+\frac{1}{2 \cdot 3}+\frac{1}{3 \cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{\text{n}}{n+1}$$

b) $\dfrac{1}{1 \cdot 3}+\dfrac{1}{3 \cdot 5}+\dfrac{1}{5 \cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$

9. Prueba que para todo número natural $n \geq 1$ se cumple:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\cdots+\ n)^2$$

10. Dada la sucesión numérica $a_n=\{3; 6; 9; 12; \ldots\}$:

a) Identifica si la sucesión es aritmética o geométrica.

b) Determina la ley de formación explícita de la sucesión.

c) Calcula el término de orden 100.

d) ¿Qué lugar ocupa el término 801?

e) Determina la propiedad que permite adicionar los términos n-ésimos de la sucesión.

f) Calcula $S(19)$.

g) Calcula $3+6+9+12+\ldots+900$.

h) Demuestra aplicando el principio de inducción completa que la propiedad obtenida se cumple para todo $n \in \mathbb{N}: n \geq 1$.

11. Dada la sucesión $\{4;14;30;\ldots;n(3n+1);\ldots\}$ para $n \in \mathbb{N}: n \geq 1$:

a) Determina el decimotercer término de la sucesión.

b) Verifica si el término 1 220 ocupa la posición 20 en la sucesión anterior.

c) Demuestra aplicando el principio de inducción completa que las sumas parciales de los términos de la sucesión anterior se obtienen por la fórmula $n(n+1)^2$ para $n \in \mathbb{N}: n \geq 1$.

d) Calcula la suma de los 10 primeros términos.

12. Sea $a_n = \{3n+2\}$ con $n \in \mathbb{N}: n \geq 1$, el término n-ésimo de una sucesión aritmética.

a) Calcula el término que ocupa el lugar 100.

b) Determina el ordinal del término 152 en la sucesión.

c) Demuestra por inducción completa que la suma hasta el n-ésimo término de la sucesión se puede calcular por la fórmula $S(n) = \dfrac{n(3n+7)}{2}$ para todos los valores de $n \in \mathbb{N}: n \geq 1$.

d) Determina la posición del término para el cual se obtuvo la suma 185.

13. Sea la sucesión $\{a_n\} = \{2;7;12;\ldots;(5n+2);\ldots\}$:

a) Determina el término que ocupa la posición 31.

b) Demuestra aplicando el principio de inducción completa que la suma hasta el término n-ésimo en la sucesión dada se puede calcular por la fórmula $S(n)=\dfrac{(n+1)(5n+4)}{2}$.

14. Dada la igualdad $9+11+13+\ldots+(2n+7)=n(n+8)$ para todo $n\in\mathbb{N}: n\geq 1$:

a) Demuestra aplicando el principio de inducción completa que la igualdad anterior es verdadera.

b) Determina el trigésimo quinto sumando.

c) Verifica si el término 602 ocupa la posición 298 en el miembro izquierdo de la igualdad.

d) Calcula la suma de los primeros 50 términos.

e) Calcula a_{100}.

f) Calcula $S(62)$.

15. Dada la sucesión $\{a_n\}=\{4;7;10;\ldots;(3n+4);\ldots\}$ para $n\in\mathbb{N}$.

a) Determina el decimotercer término de la sucesión.

b) ¿Qué posición ocupa el término 94 en la sucesión?

c) Demuestra aplicando el principio de inducción completa que las sumas parciales de sus términos se calculan por la fórmula $S(n)=\dfrac{(n+1)(3n+8)}{2}$ para todos los números naturales.

d) Calcula $S(29)$.

16. Demuestra que la inecuación siguiente es válida para $n > 1$.

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{14}$$

17. Demuestra por inducción completa que para todo número natural se cumple que:

$$x+(x-1)x+(x-1)x^2+\ldots+(x-1)x^n=x^{n+1}$$

a) Formula al menos dos sucesiones que cumplan la condición anterior.

b) Determina un término n-ésimo de las sucesiones encontradas y la suma parcial hasta el término determinado.

c) Demuestra por inducción completa la validez de las sumas n-ésimas de los casos particulares encontrados.

18. Demuestra por inducción completa que para todo número natural se cumple que $1+a+a^2+\ldots+a^n=\dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}$.

a) Plantea al menos dos sucesiones que cumplan la condición anterior.

b) Determina un término n-ésimo de las sucesiones encontradas y la suma parcial hasta el término determinado.

c) Demuestra por inducción completa la validez de las sumas n-ésimas de los casos particulares encontrados.

Autoevaluación

1. Determina el término general de las sucesiones siguientes:

a) $\{8;5;2;-1;-4;\ldots\}$ b) $\{4;6;8;10;12;\ldots\}$ c) $\{5;11;14;17;\ldots\}$

d) $\{0;2;4;6;8;\ldots\}$ e) $\{5;2;-1;-4;-7;\ldots\}$ f) $\{1;6;11;16;21;26;\ldots\}$

g) $\{2;-3;-8;-13;-18;\ldots\}$ h) $\{50;51;52;53;54;\ldots\}$ i) $\left\{\frac{1}{3};\frac{1}{5};\frac{1}{7};\frac{1}{9};\frac{1}{11};\ldots\right\}$

j) $\left\{\frac{2}{5};\frac{3}{7};\frac{4}{9};\frac{5}{11};\frac{6}{13};\ldots\right\}$ k) $\left\{1;\frac{2}{3};\frac{3}{5};\frac{4}{7};\frac{5}{9};\ldots\right\}$ l) $\left\{\frac{13}{5};\frac{13}{7};\frac{13}{9};\frac{13}{11};1\ldots\right\}$

m) $\{5;10;19;32;49;70;95;\ldots\}$ n) $\{6;15;28;45;66;91;\ldots\}$

ñ) $\{1;10;25;46;73;\ldots\}$

1.1 Calcula la suma de los 20 primeros términos de las sucesiones de los incisos b, c y f.

2. Comenta algún ejemplo de la vida práctica en el que hayas utilizado una función o un patrón para resolver un problema o tomar una decisión. ¿Cómo te ayuda el concepto de función a comprender mejor el mundo que te rodea?

3. Elabora una proposición verdadera sobre los conceptos asociados a las sucesiones numéricas, atendiendo a la condición de que aparezcan en cada caso las palabras siguientes:

a) función, dominio y conjunto imagen.
b) recursiva.
c) aritmética.
d) razón común.
e) *n*-ésimo término.
f) suma parcial.

4. Demuestra por inducción completa las proposiciones siguientes sobre números naturales.

a) $3^{2n}-1$, es divisible por 8.

b) n^2+n, es divisible por 2.

c) $1+2n \leq 3^n$.

d) $3^n \geq (n+1)^2$.

5. Verifica por inducción completa que las propiedades que aparecen a continuación, son verdaderas.

a) $4+4\cdot 5+4\cdot 5^2+\ldots+4\cdot 5^n=5^{n+1}-1$.

b) $4+14+30+\ldots+n(3n+1)=n(n+1)^2$ para $n \geq 1$.

5.1 Determina en cada sucesión el término que ocupa el lugar a_{n-s} y calcula la suma hasta ese término.

6. Copia en tu cuaderno de trabajo la respuesta correcta en cada caso. La figura 1.13 está formada por cuadraditos que se van comportando de una forma regular. Según la cantidad de cuadraditos en cada una de las posiciones (1, 2 y 3):

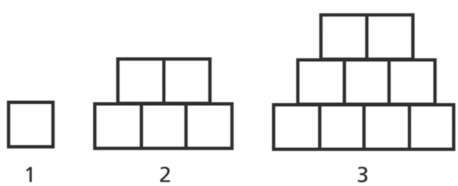


Fig. 1.13

6.1 En la posición n-ésima, la cantidad de cuadraditos será de:

a) $3n-2$ b) n^2+1 c) $2n-1$ d) $4n-3$

6.2 Se puede afirmar que hasta la posición 20 la cantidad de cuadraditos total es de:

a) 77 b) 761 c) 800 d) 58

7. Dada la propiedad $3+8+13+\ldots+(5n-2)=\dfrac{5n^2+n}{2}$:

a) Demuestra aplicando el principio de inducción completa que la propiedad se cumple para todo número n distinto de cero.

b) Determina el ordinal del sumando 498.

c) ¿Cuántos de los primeros términos se deben adicionar para obtener la suma parcial 1 010?

8. Dada la igualdad $2+4+8+\ldots+2^{n+1}=S(n)$:

a) Demuestra aplicando el principio de inducción completa que para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $S(n)=2\left(2\cdot 2^n-1\right)$.

b) Determina el sumando que ocupa la quinta posición.

c) Determina hasta qué término se obtiene la suma parcial 1 022.

9. Sea la igualdad $3+12+21+\ldots+(9n-6)=S(n)$:

a) Demuestra aplicando el principio de inducción completa que $S(n)=\dfrac{3n(3n-1)}{2}$ se cumple para todo $n \in \mathbb{N} : n \geq 1$.

b) Determina el término que ocupa la cuadragésima posición.

c) Verifica si la suma de los diez primeros términos es 436.

CAPÍTULO 2

Estadística y probabilidades. Combinatoria

Durante tus estudios sobre las diferentes áreas de las matemáticas has comprobado que estas tienen un importante papel en el desarrollo de las ciencias, la tecnología y la interpretación de la vida cotidiana. Al respecto Einstein (1879-1955) (figura 2.1), decía: *"estoy convencido de que mediante construcciones puramente matemáticas se pueden descubrir los conceptos y las leyes que los conecten entre sí, que son los elementos que nos ofrecen la clave para la comprensión de los fenómenos naturales"*[1].

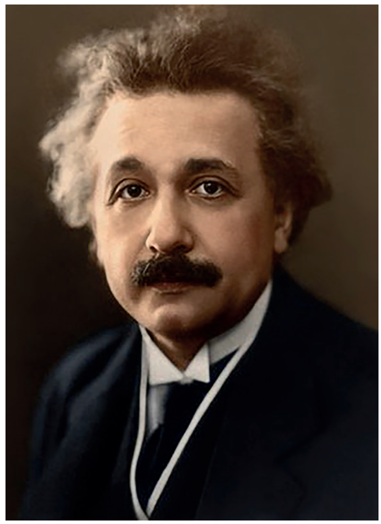


Fig. 2.1

En ese sentido, requerirás conocimientos sobre estadística, probabilidades y combinatoria, por ser áreas matemáticas que van de la mano, en el análisis de hechos y fenómenos que ocurren tanto en la naturaleza como en la sociedad y que tienen influencia en todas las ciencias.

Respecto a ¿qué vas a aprender en este capítulo?

[1] A. Einstein: *Mi credo humanista*, p. 95.

Sistematizarás tus conocimientos sobre Estadística Descriptiva mediante la resolución de problemas y la interpretación de situaciones en diferentes campos de aplicación. Los ampliarás al adquirir nociones de la Teoría de las probabilidades y la Combinatoria. Estos conocimientos te permitirán comprender fenómenos y procesos que se manifiestan en otras disciplinas, que formarán parte de tus estudios superiores o de tu futura vida profesional.

2.1 Procesamiento estadístico de datos

La Estadística, está muy difundida en la actualidad, debido a que sus métodos, proporcionan la base necesaria para tomar decisiones acertadas, en cuanto a la planificación de estrategias, cumplimiento de metas y objetivos en diversos campos de aplicación (figura 2.2), que requieren del trabajo con grandes masas de datos.

Fig. 2.2

En particular la **estadística descriptiva** que estudias, desde grados anteriores, tiene como objetivo describir las características principales de fenómenos, procesos, problemas o situaciones de diversos contextos, que requieran, la aplicación y el análisis de las medidas de tendencia central, de posición y de dispersión.

Considera que administras una cooperativa y que requieres realizar un estudio de la experiencia laboral (en meses trabajados) de sus miembros hombres y mujeres, para lo cual empleas determinados métodos estadísticos que al ser aplicados ofrecieron los resultados que se presentan en la tabla 2.1.

Tabla 2.1

Experiencia Laboral (en meses)			
Mujeres		**Hombres**	
Media	98,8095238	Media	95,3441558
Mediana	48	Mediana	68,5
Moda	0	Moda	0
Cuartil1 (Q1) Cuartil 3 (Q3)	12 149,5	Cuartil 1 (Q1) Cuartil 3 (Q3)	20 136,75
Desviación estándar	120,422733	Desviación estándar	94,1206554
Rango	476	Rango	408
Mínimo	0	Mínimo	0
Máximo	476	Máximo	408

Una vez calculadas las medidas de posición y de dispersión, ¿cómo caracterizar la experiencia laboral de los hombres y las mujeres de la cooperativa? ¿Cuáles de los estadígrafos permiten una interpretación más objetiva de los resultados?

Recuerda que...

En un análisis estadístico de datos un **estadígrafo** es una función numérica, evaluada por los datos de una distribución que actúa como estimador, por ejemplo, la media, la varianza y la desviación típica. También es usual que se identifiquen como **indicadores** o **estadísticos.**

Las interrogantes del estudio anterior indican la necesidad de comprender el significado de cada estadígrafo y su utilidad para caracterizar el fenómeno que se investiga a partir del comportamiento de los datos, debido a que existen situaciones en las cuales unos estadígrafos determinan o influyen más que otros en la interpretación y la toma de decisiones.

Ejemplo 2.1

Para seleccionar el equipo de mejores resultados en un concurso de conocimientos de Matemática, se analizaron las calificaciones obtenidas en el examen que les fue aplicado (calificado sobre 100 puntos) a los 10 integrantes de cada uno de los equipos A y B como se muestra en la tabla siguiente.

Tabla 2.2

Calificación de los estudiantes										
Equipo A	100	75	66	50	70	54	60	20	45	60
Equipo B	62	61	65	60	63	59	60	55	58	57

¿Cuál de los equipos obtuvo mejores resultados?

Resolución:

Para decidir se parte de calcular estadígrafos de posición y dispersión.

Tabla 2.3

Medidas de tendencia central			
media	**moda**	**mediana**	Como las medidas de tendencia central alcanzan los mismos valores en ambos equipos, no aportan elementos en el análisis para determinar cuál de los dos equipos obtuvo mejores resultados.
$x_A = 60$	$(m_o)_A = 60$	$(m_d)_A = 60$	
$x_B = 60$	$(m_d)_B = 60$	$(m_o)_B = 60$	

Se hace necesario analizar el comportamiento de los estadígrafos de dispersión.

Tabla 2.4

Medidas de dispersión		
Rango	$R_A = 80$	$R_B = 10$
Desviación típica	$S_A = 19{,}8$	$S_B = 2{,}8$
Varianza	$S^2_A = 392{,}2$	$S^2_B = 7{,}8$
Desviación media	$D\overline{x}_A = 20{,}9$	$D\overline{x}_B = 2{,}8$

Al analizar los resultados expuestos se puede apreciar que:

- Las calificaciones en el equipo A están más dispersas que en el equipo B, por lo que los resultados del equipo B son más homogéneos que los del equipo A.
- La desviación media de los resultados del equipo B es mucho menor que la del grupo A, por tanto, tuvieron un rendimiento más homogéneo entre sí que los del equipo A.
- La varianza de los resultados del equipo B es menor que la varianza de los resultados del equipo A y, por tanto, las calificaciones son más homogéneas dado que hay menor variabilidad en las calificaciones.
- La desviación típica o estándar del equipo B es menor que la del equipo A, lo que demuestra que los resultados del equipo B son más homogéneos y están mejor distribuidos alrededor de la media.

Conclusión:

Los resultados muestran que el equipo B obtuvo globalmente mejores resultados que el equipo A, dado que están mejor distribuidos alrededor de la media. ◆

Aplica tus conocimientos

Busca en periódicos locales o nacionales, dos noticias en las que se muestre la aplicación de la estadística a situaciones de la vida cotidiana; estúdialas y haz un comentario acerca de la información obtenida.
Identifica: el objetivo de la situación descrita, la población, la muestra, las variables, la unidad estadística y los indicadores que consideres más pertinentes.

Ejemplo 2.2

Con la finalidad de perfeccionar el proceso de instalación de paneles solares en las zonas del Plan Turquino, se probó la aplicación de dos métodos A y B con la intención de identificar el más adecuado y generalizarlo. Se seleccionaron al azar cien especialistas que aplicaron ambos métodos y se les determinó el coeficiente de destreza (en una escala de 1 a 15) demostrado en la actividad. Los resultados se muestran a continuación.

Tabla 2.5

Coeficiente de destreza	7	8	9	10	11	12	13
Frecuencia (Método A)	10	15	40	25	10	0	0
Frecuencia (Método B)	0	0	10	15	40	25	10

Determinar cuál de los dos métodos de instalación de paneles solares se consideró más adecuado para su posterior generalización.

Resolución:

Al calcular las medidas de tendencia central (media, moda y mediana) se obtuvo:

Tabla 2.6

Media	**Mediana**	**Moda**
$x_A = 9{,}1$	$(m_d)_A = 9$	$(m_o)_A = 9$
$x_B = 11{,}1$	$(m_d)_B = 11$	$(m_o)_B = 11$

Al calcular las medidas de dispersión se obtuvo:

Tabla 2.7

Rango	$R_A = 4$	$R_B = 4$
Varianza	$S^2{}_A = 1{,}184$	$S^2{}_B = 1{,}19$
Desviación estándar	$S_A = 11{,}1$	$S_B = 11{,}1$

En los resultados de las medidas de tendencia central se observan valores diferentes en el comportamiento de la media, moda y mediana. Sin embargo, al analizar las medidas de dispersión se aprecia, en ambos métodos, valores similares lo que demuestra igual nivel de homogeneidad en la dispersión de los datos. En este caso la decisión se toma a partir de los resultados de las medidas de tendencia central y no de dispersión, dado que estas no aportan al análisis que se realiza.

Conclusión:

Como los valores de la media, la moda y la mediana del Método B están por encima de los valores obtenidos al aplicar el método A, evidencia que el coeficiente de destreza demostrado por los obreros en la aplicación del método B es superior con respecto al método A. Luego el método B es el más adecuado para su generalización. ◆

Conéctate

Accede al sitio www.cubaeduca.cu en la sección curricular, busca en Matemática duodécimo y resuelve los ejercicios que aparecen en el tema Estadística Descriptiva.

Ejemplo 2.3

El grupo de desarrollo de *software* de una empresa Informática debe analizar su eficiencia, respecto a su capacidad de respuesta a nuevos requerimientos (NR) a los productos, que solicitaron sus clientes durante el año pasado. Se conoce que en ese periodo recibieron 552 solicitudes de NR. Al ingresar los datos en una hoja de cálculo, determinaron los valores de los estadígrafos que se muestran en la tabla 2.8.

Tabla 2.8

Rango	Media	Moda	Mediana
34 días	5,94 días	1 día	2 días

¿Cuál es el estadígrafo que mejor caracteriza la eficiencia del grupo de desarrollo?

Resolución:

A partir de esos resultados se consideró, que la **mediana** es el estadístico que mejor caracteriza la eficiencia del grupo de desarrollo de la empresa. ◆

Reflexiona

En el estudio del ejemplo 2.3 se consideraron las 522 solicitudes recibidas. ¿En tu opinión qué pudo estar determinando esa decisión?

¿Por qué se puede considerar que es la mediana el estadígrafo que mejor explica la capacidad de respuesta a los NR del grupo de desarrollo de *software* de la empresa de informática?

¿Cómo intervienen el rango, la moda y la media?

¿Cuál de los estadísticos de dispersión te hubiera aportado mayor objetividad en el análisis? Explica tu razonamiento.

Se reconoce que, el desarrollo de la informática y las comunicaciones han determinado en el auge actual de la estadística, por cuanto permiten acceder a múltiples datos de alcance nacional o mundial, relacionados con sus campos de aplicación.

¿Sabías que...?

La utilización de la **Estadística** es tan extensa que se aplica en diversos campos de investigación. Entre los que se encuentran la:

- Estadística en la economía, en la salud y en la industria.
- Geoestadística, Bioestadística, Física Estadística.
- Estadística en agronomía, Estadística en planificación, Cienciometría.
- Estadística en la comercialización o mercadotecnia, Econometría.
- Estadística del medio ambiente.
- Estadística Computacional.
- Estadística en la planificación de obras civiles.
- Estadísticas de negocios y mercadeo.
- Estadística en Psicometría y Ergonomía Laboral.
- Estadística en los controles de Calidad y Productividad.
- Estadística en Técnicas de Muestreo y Control.
- Estadística en el análisis de procesos y quimiometría (para análisis de datos en química analítica e ingeniería química).

Entre los estadígrafos de posición que ya conoces, además de los cuartiles, también son utilizados los percentiles, conocidos también como cuantiles, estos se relacionan con las frecuencias acumuladas y son equivalentes a porcentajes acumulados.

Definición 2.1

El percentil de orden P de la variable X es el puntaje X_P tal que por debajo de él se halla el P % de la distribución de X y por encima de él se halla el $(100 - P)$ % de esa distribución.

Ejemplo 2.4

El percentil de orden 80 de los puntos de la distribución del segmento de la figura 2.3 comprendido entre los números reales 0 y 5, es el punto correspondiente al número 4, por debajo de él se haya el 80 % de los puntos del segmento y por encima, el 20 %.

Fig. 2.3

¿Cuál es la posición de los percentiles de órdenes 0,50; 0,90 y 0,25 de los puntos del segmento de recta dada?

Resolución:

Como se muestra en la figura 2.4 los percentiles:

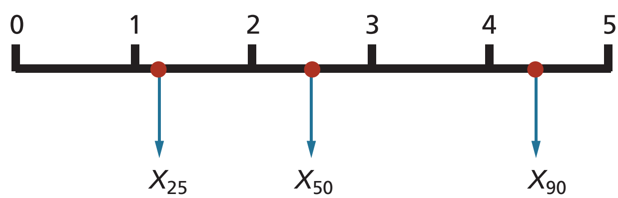


Fig. 2.4

$X_{50} = 2{,}5$; $X_{90} = 4{,}5$; $X_{25} = 1{,}25$ ◆

¿Sabías que...?

Los percentiles se utilizan en la valoración del desarrollo físico de las niñas y niños a través de indicadores somatométricos, como la talla, el peso (masa corporal), la circunferencia cefálica y del brazo, entre otros.

Ejemplo 2.5

Para evaluar las influencias de algunas condiciones maternas, como la diabetes gestacional en el crecimiento fetal, se toman los datos de la circunferencia abdominal (CA), en milímetros, de un grupo de 12 fetos en el séptimo mes de embarazo.

Tabla 2.9

Feto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
CA	280	301	305	305	310	325	332	335	340	345	348	350

Interpretar el significado del percentil 75 de la circunferencia abdominal del grupo de fetos.

Resolución:

Procedimiento para calcular el percentil:

1. Ordenar de menor a mayor el conjunto de datos.

   Como los datos se presentan en la tabla ordenados se procede a calcular Xp.

2. Identificar el lugar que ocupa el percentil buscado con la fórmula $Xp = \frac{p}{100}(n+1)$

   $$X_{75} = \frac{75}{100} \cdot (12+1)$$
   $$= 0{,}75 \cdot 13 = 9{,}75$$

   Significa que el percentil 75 se encuentra entre la novena y la décima posición en los datos ordenados que son 340 y 345, respectivamente.

3. Calcular el percentil buscado con la fórmula:

$$X_{75} = n_i + \left(n_{(i+1)} + n_i\right)\left(x_k - i\right)$$

Donde:

– n_i es el valor en la posición i.

– $n_{(i+1)}$ es el valor en la siguiente posición.

$$X_{75} = 340 + (345 + 340)(9,75 - 9)$$

$$X_{75} = 340 + 5 \cdot 0,75$$

$$X_{75} = 340 + 3,75$$

$$X_{75} = 343,75$$

El percentil 75 es 343,75 mm

Significa que el 75 % de los fetos, del grupo en estudio en el séptimo mes de embarazo, presentan una circunferencia abdominal menor o igual a 343,75 mm, mientras que el 25 % la tienen mayor que 343,45 mm. ◆

Investiga y aprende

1. Investiga si una circunferencia abdominal de 343,75 mm es normal con respecto a los valores establecidos para un feto en el séptimo mes de embarazo. ¿Cuáles son las posibles interpretaciones de ese resultado para fetos de entre 28 y 32 semanas de gestación?
2. Indaga, en diferentes fuentes de información, acerca de la importancia de los percentiles en el análisis de datos y plantea ejemplos de su aplicación.

Ejemplo 2.6

Con la intención de reorientar las estrategias de publicidad de un hotel se hace un estudio sobre: la procedencia y cantidad de días que permanecen hospedados sus clientes. Para ello, se registró la procedencia y la cantidad de días hospedados (indicado entre paréntesis) por cada cliente durante una semana como se muestra a continuación donde: A es Argentina, B es Brasil, C es Canadá, E es Ecuador, P es Perú y V es Venezuela.

B(3)	B(3)	B(3)	E(2)	C (7)	C(7)	V(5)	V(5)	A(2)	C(3)	P(1)	V(5)
P(1)	P(1)	C (2)	C(2)	C (2)	C (1)	C (3)	C (3)	B(3)	V(3)	V(3)	C(3)
E(7)	B(2)	B(2)	B(2)	B(2)	B(2)	B(2)	V(5)	V(5)	V(5)	C(7)	B(2)
C (7)	A(2)	A(2)	A(3)	C(7)	C (7)	P(1)	P(1)	P(1)	P(1)	C(5)	P(1)
V(5)	V(5)	V(5)	P(1)	P(1)	V(5)	V(5)	B(2)	B(2)	E(5)	E(5)	V(5)

C(3)	C(3)	P(3)	A(2)	A(2)	A(2)	A(3)	A(3)	C (2)	E(2)	C(2)	A(3)
V(7)	V(7)	V(7)	V(7)	V(7)	V(7)	C (1)	A(4)	A(4)	A(4)	C (3)	C(1)
P(1)	P(1)	C (1)	C(1)	C (1)	B(3)	P(1)	E(5)	E(5)	P(1)	P(1)	P(1)
B(3)	B(3)	E(2)	E(2)	E(2)	E(2)	V(3)	V(3)	V(3)	V(3)	V(3)	V(3)
C (7)	C (7)	C (7)	C(7)	C (7)	C (7)	V(3)	A(1)	B(6)	B(6)	A(1)	V(3)
B(2)	B(2)	B(2)	E(4)	C (5)	C(5)	V(3)	V(3)	A(2)	C(3)	P(4)	V(5)
P(2)	P(2)	C (4)	C(3)	C (3)	C (3)	C (3)	C (3)	B(3)	V(2)	V(2)	C(3)
V(3)	V(3)	V(5)	P(2)	P(2)	V(5)	V(5)	B(4)	B(4)	E(2)	E(2)	V(5)

a) Explicar el procedimiento que se va a seguir para realizar el estudio.
b) Determinar los indicadores más pertinentes, con el uso de recursos informáticos disponibles.
c) Representar gráficamente la información.
d) Elaborar un informe con los resultados del estudio realizado.

Resolución:

a) Procedimiento para el estudio: a partir de seleccionar de manera aleatoria varias semanas dentro de un periodo prudencial de tiempo, se determina la tendencia en cada semana y la variabilidad (dispersión) de la cantidad de días hospedados en cada semana con el propósito de compararlas y tomar algunas decisiones en cuanto a los momentos de mayor demanda por los clientes y el país de procedencia.
b) Para realizar el procesamiento estadístico de los datos, se puede utilizar paquetes estadísticos profesionales como el SPSS o el STATGRAPHICS, también el Microsoft Excel, el GeoGebra (versión 6.0 o superior), o de otros *softwares más avanzados.*

Para determinar los indicadores más pertinentes hay que considerar que se estudia la relación entre dos tipos de variables: *procedencia de los clientes y cantidad de días que se hospedan los clientes durante una semana.*

Atención

Como la variable *procedencia de los clientes* es cualitativa, le corresponde una escala nominal y al introducir los datos en la hoja de cálculo del *software* de deben recodificar. Por ejemplo: A = 1, B = 2 y así sucesivamente. Se debe tener presente que son **códigos** numéricos establecidos para representar a cada categoría de la variable que se estudia.

Resultados de procesar la primera variable:

Tabla 2.10

Variable cualitativa Procedencia de los clientes			
		Frecuencia absoluta	**Frecuencia relativa**
Válido	Argentina	16	10,3
	Brasil	24	15,4
	Canadá	41	**26,3**
	Ecuador	14	9,0
	Perú	22	14,1
	Venezuela	39	25,0
	Total	156	100,0

Al ser una variable cualitativa, el único indicador o estadístico que caracteriza su comportamiento es la **moda.** Significa que la mayor procedencia de clientes al hotel es de Canadá.

Resultados de procesar la segunda variable.

Tabla 2.11

Variable cuantitativa discreta Cantidad de días que se hospedaron los clientes durante la semana				
		Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
Válido	1	24	15,4	15,4
	2	38	24,4	39,7
	3	41	26,3	66,0
	4	8	5,1	71,2
	5	24	15,4	86,5
	6	2	1,3	87,8
	7	19	12,2	100,0
	Total	156	100,0	

Estadígrafos		
	Válido	156
	Perdidos	0
Media		3,33
Varianza		3,501
Desviación estándar		1,871
Mínimo		1
Máximo		7
Percentiles	25	2
	50 (Mediana)	3
	75	5

Como es una variable cuantitativa discreta en escala de razón, la media (en este caso 3,33) es el indicador o estadístico que caracteriza el comportamiento de este tipo de variable estadística.

También se determinó la mediana (en este caso 3) la cual coincide con el segundo cuartil Q_2. Como la media y la mediana en este ejemplo no difieren mucho, puede decirse que la distribución es algo simétrica.

Al determinar la varianza y la desviación típica (o estándar), se observa que los valores hallados de estas medidas de dispersión son un tanto menor, lo que indica que la distribución es bastante homogénea a la media.

c) Para comparar *la procedencia de los clientes* se puede utilizar el gráfico de barras (figura 2.5), también se puede utilizar el gráfico circular o de pastel (figura 2.6) con la finalidad de representar el porcentaje de clientes por países que se hospedaron del total de hospedados en la semana.

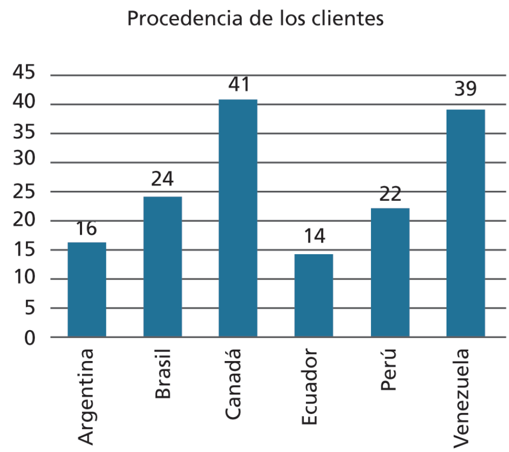


Fig. 2.5

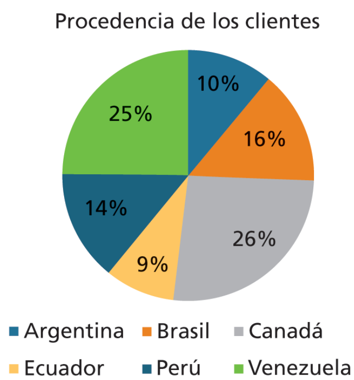


Fig. 2.6

Para representar *la cantidad de días que se hospedaron los clientes durante la semana* se utilizó el gráfico de barras, como se muestra en la figura 2.7, y para representar *la cantidad de clientes hospedados por cada día durante una semana*, se utilizó el gráfico de cajas (figura 2.8) en el que se aprecia que la mediana está muy próxima a la media.

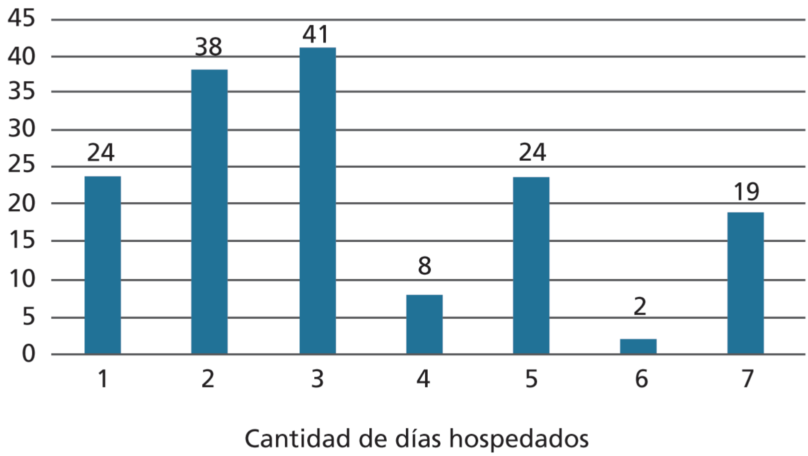


Fig. 2.7

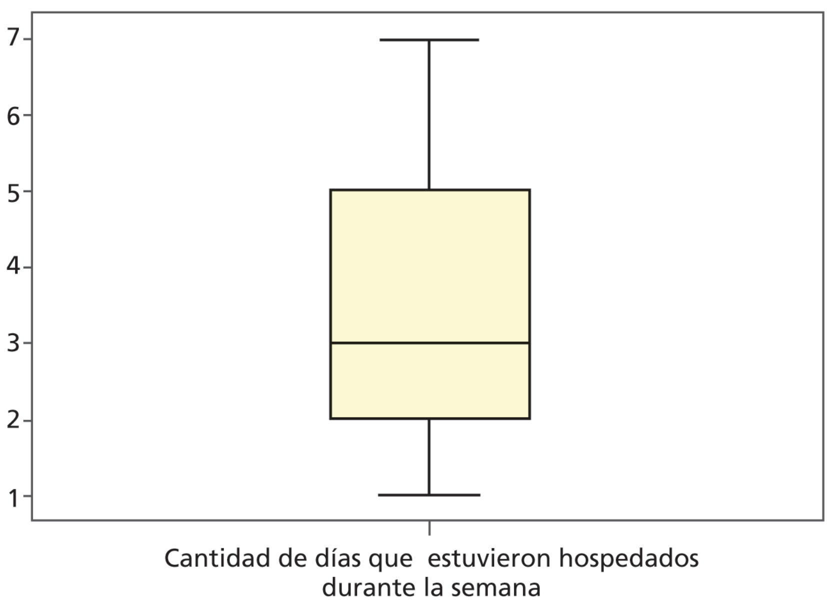


Fig. 2.8

d) Para la elaboración del informe se consideran los resultados de los indicadores y su interpretación en correspondencia con el significado del estadístico calculado.

Informe

Los resultados del estudio realizado sobre la procedencia y cantidad de días que permanecen hospedados los clientes en el hotel, evidencian que:

- El país de mayor procedencia de clientes es Canadá con 41 (26,3 %) de los 153 clientes hospedados durante la semana, seguido de Venezuela y Brasil y, los de menor frecuencia en ese orden son Ecuador, Argentina y Perú, por lo que se deben analizar las estrategias publicitarias para estos últimos, a fin de lograr mayor afluencia de turistas *(significado de la moda).*
- El promedio de permanencia de los 153 clientes hospedados en una semana es de 3 días aproximadamente *(significado de la media)* y el 50 % de los clientes que se mantienen hospedados durante una cantidad de días mayor o igual a 3 *(significado de la mediana que coincide con el segundo cuartil).*
- Además, se observa poca variabilidad en la distribución del tiempo de hospedaje de los clientes por cantidad de días, lo que ofrece mayor homogeneidad en el tiempo de permanecía de los clientes en el hotel *(significado de la varianza y la desviación típica).*

Se recomienda a la gerencia del hotel valorar los resultados obtenidos y reanalizar las estrategias de publicidad para su perfeccionamiento, fundamentalmente en los países de menos afluencia. ◆

Reflexiona

¿Cómo analizar el estado de permanencia de los clientes por países?

¿Sabías que...?

Las terminologías:

Minería de datos: revela los nexos cada vez más estrechos entre la Estadística y la Informática determinando, entre otros aspectos, la posibilidad de trabajar con toda la población en un estudio estadístico. En ese sentido, disponer de eficaces sistemas de procesamiento electrónicos, y asistentes matemáticos, permiten optimizar el procesamiento de los datos, la interpretación de sus resultados, ya sea para comprender el entorno socio cultural y económico, como para tomar decisiones a nivel laboral ante situaciones de incertidumbre.

Sesgo: significa errores que se comenten en la investigación, no debido al azar, que hacen que el resultado del muestreo difiera del verdadero. Generalmente no son cuantificables y se pueden prevenir con medidas que se deben tomar al realizar la recopilación de la información. Estos pueden ocurrir entre otras causas: al no considerar todas las unidades de observación, a la incorrecta enumeración de los elementos, por un inadecuado tipo de muestreo, al no controlar la mayor cantidad de variables que intervienen en el objeto que se investiga, así como por errores de cálculo.

Saber más

Fórmula para calcular los percentiles de un conjunto de datos agrupados en intervalos de clases

$$P_k = L_i + \frac{k\left(\frac{n}{100}\right) - F_{ai-1}}{F_i} \cdot I \quad \text{Donde: } k = 1, 2, 3, \ldots, 99$$

Li: límite inferior real de la clase del percentil *k.*

n: tamaño de la muestra.

F_{ai-1}: frecuencia absoluta acumulada ($Fai \downarrow$) de la clase que antecede a la clase del percentil *k.*

Fi: frecuencia absoluta de la clase del percentil *k.*

I: amplitud de la clase del percentil *k.*

Aplica tus conocimientos

1. Una microempresa ha tenido durante los últimos ocho años los siguientes rendimientos: ganancias del 11 %, 15 %, 18 %, 12 %, 11 % y 5 % y pérdidas del 4 % y 9 %.

   a) Representa la información gráficamente.

   b) ¿Podrías determinar el rendimiento promedio de esta microempresa? Fundamenta tu respuesta.

2. El inspector del área de recursos humanos de una empresa dedicada a la recuperación de materia prima, argumenta que los trabajadores vinculados a la producción realizan un menor número de tareas por día, que los de oficina. Para comprobarlo se registró la cantidad de tareas realizadas durante diez días por los trabajadores de cada grupo y se obtuvo la siguiente información:

   Cantidad de tareas realizadas por los trabajadores vinculados a la producción:
   12, 18, 19, 15, 18, 16, 15, 18, 19, 18

   Cantidad de tareas realizadas por los trabajadores vinculados a la oficina:
   15, 18, 17, 16, 18, 15, 19, 19, 18, 19
   Determina los indicadores que consideres más pertinentes para comparar estos dos grupos en cuanto a la cantidad de tareas realizadas. Según los resultados, ¿qué le dirías al inspector?

3. Selecciona, junto a tu equipo de estudio, uno de los campos de aplicación de la estadística, que se relacione con alguno de los temas siguientes:

   - Historia de la localidad
   - Cultura ciudadana y jurídica
   - Salud y sexualidad
   - Cultura y tradiciones
   - Tarea Vida
   - La ciencia y tecnología
   - Desarrollo económico y sostenible
   - La FEEM en las redes sociales

     a) Indaguen sobre los resultados de esos campos de la estadística en Cuba.

     b) Formulen un problema para resolver a nivel de escuela, comunidad, provincia o nación, y desarrollen el *ciclo investigativo del procesamiento estadístico de datos* estudiado en 10.º grado.

     c) Socialicen los resultados en el grupo y decidan sobre su presentación en una jornada científica estudiantil.

(Ver la nota 1 al capítulo 2 en los anexos)

Ejercicios del epígrafe 2.1

1. Decide sobre la veracidad de las proposiciones siguientes. Justifica en cada caso tu decisión.

a) La Estadística estudia las regularidades de fenómenos aleatorios no deterministas.

b) La Estadística Descriptiva se ocupa de caracterizar conjuntos de datos, hacer generalizaciones y posteriormente tomar decisiones en base a estos.

c) La población es cualquier conjunto de individuos sean: objetos, sucesos o procesos.

d) En las investigaciones, una variable estadística es considerada como cualquier característica medible de un fenómeno o proceso.

e) La unidad estadística es el objeto o elemento sobre el cual se observa o mide una característica en una investigación estadística.

f) Las variables estadísticas cualitativas son aquellas que están dadas por mediciones y observaciones numéricas en los objetos de interés.

g) Las escalas de medición de las variables estadísticas se clasifican en nominal, ordinal, de intervalo y de razones.

h) La escala nominal se refiere a la clasificación de variables cuando se utilizan cualidades para designar categorías que no generan un orden explícito.

i) Los estadígrafos de tendencia central (media, moda y mediana) son medidas de posición.

j) La media de una muestra divide siempre a los datos en dos partes, la mitad con valores mayores y la otra con valores menores que esta.

k) La moda puede ser utilizada para cualquier tipo de datos y escala.

l) La mediana siempre existe y puede no ser única.

m) El segundo cuartil Q_2 equivale al 50 % de los datos y es el valor equivalente a la mediana.

n) Los estadígrafos de dispersión son aquellas medidas que indican la variabilidad o dispersión de los datos de una distribución alrededor de un valor central.

ñ) Son medidas de dispersión el recorrido o rango, la desviación media, la varianza y la desviación típica o estándar.
o) La varianza mide la variabilidad de una muestra y puede tomar cualquier valor real.
p) La desviación típica o estándar mide cuánto se desvían los datos con respecto a la media, es la de mayor confiabilidad y la más utilizada por los investigadores

2. Gestiona en CubaEduca y en otras fuentes de información digitales los contenidos relacionados con la Estadística Descriptiva, e indaga sobre:

a) ¿Por qué consideras importante la estadística? Menciona situaciones de tu entorno en que sea necesario utilizar la estadística.
b) ¿Qué significado tiene para ti planear y recopilar datos, analizarlos e interpretarlos? ¿Qué diferencias existe entre estas acciones?
c) ¿Para qué se utiliza la tabla de frecuencias?
d) ¿Qué significa y cómo se interpreta la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa? ¿Qué significa y cómo se interpreta la frecuencia absoluta acumulada y la frecuencia relativa acumulada?
e) ¿Cuándo se debe utilizar la marca de clase? ¿En qué consiste?
f) ¿Qué entiendes por datos agrupados? ¿Por qué se utilizan?
g) ¿Con qué finalidad se utilizan los gráficos? ¿Qué tipos de gráficos conoces? ¿Se utilizan de igual forma en todos los casos?
h) ¿Qué diferencia existe entre un estadígrafo de tendencia central, uno de variabilidad y uno de posición no central? ¿Cuándo es pertinente utilizar cada uno de los indicadores de tendencia central? ¿El tipo de variable incide en la pertinencia del estadígrafo? ¿La escala puede incidir en la pertinencia?
i) ¿Qué es la moda? ¿Cómo se representa y se calcula? ¿Varía el procedimiento para calcularla según las características de sus datos?
j) ¿Qué es la mediana? ¿Cómo se representa y se calcula? ¿Varía el procedimiento para calcularla según las características de sus datos?
k) ¿Qué es la media? ¿Cómo se representa y se calcula? ¿Varía el procedimiento para calcularla según las características de sus datos?

l) ¿Qué es el percentil? ¿Cómo se representa y se calcula? ¿Cambia la forma de hallarlo según la forma de sus datos? ¿Qué es un cuartil, cómo se representa y se calcula? ¿Varía el procedimiento para calcularlo según las características de sus datos?

m) ¿Qué significa que haya sesgo?

2.1 Elabora un cuadro resumen en el que sistematices los conceptos y las propiedades de la Estadística Descriptiva: población, muestra, variable (su clasificación), tipos de escalas (su clasificación), distribución de frecuencias (su clasificación), clase, marca de clase, límite y amplitud de clase, rango o recorrido de la variable, frecuencia absoluta y relativa y acumulativa, tipos de gráficos y su utilización, medidas de tendencia central, de dispersión y de posición no central.

3. Clasifica cada una de las variables siguientes, según sean cualitativas o cuantitativas (discretas o continuas) y según la escala de medición, además, determina en cada caso cuál es la población.

a) Cantidad de botellas de refresco envasadas en un día, por la corporación Los Portales S.A.

b) Índice de mortalidad infantil por cada mil nacidos vivos en Cuba el año pasado.

c) Tipos de defectos observados por día en la producción de accesorios para computadores DGM.

d) Motivación que sienten los estudiantes de una escuela por el estudio de la matemática.

e) Respuesta al cliente por cada pedido que se hace por teléfono en una de las oficinas de Transtur S.A.

f) Cantidad de hojas de papel desechadas por día en una imprenta.

g) Cantidad de pacientes infantiles que asisten a una consulta médica.

h) Nivel de aceptación de cada uno de los clientes del servicio de mantenimiento que ofrecen los trabajadores del taller de reparación de televisores.

i) Resultados por categorías del test de conocimientos aplicado a los aspirantes al cargo de inspector de transporte.

j) Cantidad de estudiantes que optan por carreras pedagógicas en un preuniversitario.

4. Clasifica en tu cuaderno de trabajo las proposiciones o planteamientos siguientes en verdaderos o falsos y justifica tu respuesta.

a) En una tabla de frecuencias absolutas, si una de las frecuencias se triplica, la media aritmética del conjunto de datos no variará.

b) Si a cada una de las frecuencias de los intervalos de clase de una tabla se le agregan dos datos, la moda cambia.

c) Si a cada una de las frecuencias de los intervalos de la clase en una tabla, le disminuyen dos datos, la mediana no cambia.

d) Si a cada una de las frecuencias de los intervalos de la clase de una tabla se le adiciona dos, la media aritmética varía.

e) Si a cada uno de los datos de una muestra se le incrementan tres unidades su desviación típica aumenta en tres unidades.

f) Después de calcular la media de los salarios mensuales en una cooperativa de transporte, el departamento de personal informa que todos los salarios deben ajustarse multiplicándolos por un factor igual a 1,10. De acuerdo con lo anterior se puede decir que el salario promedio de cada trabajador aumentó en 10 pesos.

5. El director de una cooperativa agropecuaria, dedicada a la producción porcina, desea evaluar las características de las razas que mejor responden a las necesidades del mercado actual en el territorio (municipal, provincial, nacional o internacional) en el que pretenden insertar a la empresa y presupuestar su desarrollo acorde con las características que requieren.

5.1 Investiga sobre las razas que más abundan en nuestro país o tu territorio, y sus características.

5.2 Identifica en la situación planteada:

a) El problema que se va a estudiar.

b) Los objetivos.

c) Las variables y clasifícalas.

d) Las escalas de medición de las variables identificadas.

5.3 Elabora el instrumento para recoger la información.

5.4 ¿Cómo codificaría la información para usar una hoja de cálculo?

6. El departamento de planificación del Municipio de Educación en coordinación con el Programa Educa a tu Hijo de un consejo popular o demarcación, tomó una muestra del número de niñas y niños que cumplen 5 años de edad antes de finalizar el mes de diciembre, con el propósito de estimar la posible matrícula de Preescolar en la escuela primaria de la circunscripción. Esta arrojó los siguientes resultados por cuadra:

2	0	1	2	1	3	0	2	1	2	1	3
1	0	0	1	0	2	3	0	1	2	2	1
4	3	2	1	0	0	1	1	2	0	1	0
2	1	1	2	2	1	0	1	2	1	1	2
0	1	1	0	2	1	2	1	3	1	1	0
1	0	2	3	0	1	2	2	1	0	1	2
1	0	2	0	1	0	0	1	0	2	2	0
1	1	1	2	1	2	1	2	1	0		

a) Determina los indicadores que consideres más pertinentes. Fundamenta el porqué de la selección.

b) Haz una interpretación de la información con base en los indicadores.

7. El gerente de la Empresa CUBACONS aplicó una encuesta de opinión, a varios clientes, sobre la calidad de atención del servicio, con los siguientes resultados (Donde: 1 es muy insatisfecho, 2 insatisfecho, 3 satisfecho y 4 muy satisfecho).

1	2	1	2	1	4	4	3	3	3	4	4
4	3	3	3	3	2	2	3	2	2	2	2
3	3	1	3	2	4	2	3	4	3	2	1
1	4	4	3	2	1	3	2	4	1	2	3
1	2	1	2	1	4	4	3	3	3	4	4
4	3	3	3	3	2	2	3	2	2	2	2
3	3	1	3	2	4	2	3	4	3	2	1
1	4	4	3	2	1	3	2	4	3	4	2
1	2	2	3								

a) Calcula los indicadores más pertinentes.
b) Elabora el gráfico que consideres más adecuado para esta información.
c) Haz una interpretación de la información con base en los indicadores.

8. Para incrementar el número de comidas vendidas por el restaurante El Cochinito se inició un proyecto, para el cual se registraron datos de 50 observaciones sobre la cantidad de almuerzos vendidos por día, cuyos resultados son:

53	47	75	44	96	51	83	21	56	58
55	92	49	97	39	82	53	32	68	37
58	72	81	57	74	23	85	85	73	80
63	57	37	35	80	81	29	47	80	81
54	67	43	72	81	31	69	57	81	82

a) Utilizando los recursos informáticos que posees, representa en una tabla de frecuencias la información anterior y elabora el gráfico que consideres más adecuado para esta información.
b) Calcula los indicadores que consideres más adecuado. Fundamenta tu selección.
c) Haz una interpretación de la información con base en los indicadores.

9. El director de una prestigiosa institución educativa, desea implementar una reforma curricular que permita a los egresados de la institución, un desempeño eficiente en su continuidad de estudio y, que al mismo tiempo, estimule las capacidades intelectuales de los estudiantes desde el primer año de entrada a la institución. Para desarrollar el estudio seleccionó una muestra de estudiantes del primer año, a los que les aplicó una prueba para medir el coeficiente intelectual. La prueba puntúa entre 12 y 71 puntos (valores enteros) en una escala directamente proporcional. La información sobre la medición del coeficiente intelectual de los estudiantes se muestra a continuación:

Tabla 2.12

Intervalo de clase	Marca de clase	Frec. absoluta	Frec. relativa	Frec. absoluta acum.	Frec. relativa acum.
(11,5; 21,5]	16	5	0,05	5	0,05
(21,5;31,5]	26	15	0,15	20	0,20
(31,5;41,5]	36	25	0,25	45	0,45
(41,5;51,5]	46	30	0,30	75	0,75
(51,5;61,5]	56	15	0,15	90	0,90
(61,5;71,5]	66	10	0,10	100	1,00
TOTAL		100	1,00		

De acuerdo con la información de la tabla, di si estás o no de acuerdo con las afirmaciones siguientes. Fundamenta en cada una de ellas:

a) El coeficiente intelectual es homogéneo.

b) Para el puntaje del coeficiente intelectual de los estudiantes seleccionados, la mediana sería 41,5, puesto que es el valor que está en la mitad de los valores desde 11,5 hasta 71,5.

c) La mayoría de estudiantes poseen un coeficiente intelectual entre 41,5 y 51,5 puntos.

(Ver la nota 2 al capítulo 2 en los anexos)

2.2 Probabilidades

▲ ¿Cómo predecir las ocurrencias de fenómenos?

Hasta ahora la matemática que has estudiado es adecuada para la descripción causal de fenómenos; este tipo de descripción nos permite conocer con seguridad las consecuencias si se conocen las causas. Por ejemplo: "si se deja caer una pelota en el aire" podemos asegurar que caerá atraída por la fuerza de gravedad de la tierra y, si conocemos la altura, podemos calcular la velocidad con que choca con el suelo.

Además, de los fenómenos que pueden ser modelados mediante una descripción causal, existen fenómenos para los que no es posible una descripción de ese tipo en el estado actual de nuestros conocimientos o no hay recursos para realizar los cálculos que estos requerirían.

En estos casos, se habla de fenómenos sujetos a influjos casuales o fenómenos aleatorios que se dan en la naturaleza y la sociedad y que pueden ser comprendidos mediante la aplicación de métodos teórico-probabilísticos los que constituyen objeto de estudio en este epígrafe.

Fig. 2.9

Si lanzamos al aire una moneda de un peso (figura 2.9) esperamos que el hecho de que muestre hacia arriba la cara que representa la estrella y el hecho de que muestre hacia arriba la cara del escudo sean igualmente probables.

¿Cuál es la probabilidad de que sea estrella?

Si se lanza una moneda 5 000 veces, ¿deberá resultar la estrella aproximadamente el mismo número de veces que el escudo? ¿Cuántas veces saldría estrella y cuántas veces escudo?

¿Cómo se expresa la probabilidad de un suceso? ¿Qué relación existe entre la estadística y las probabilidades? ¿Cuáles son las propiedades que se cumplen en la probabilidad de ocurrencia de un suceso o fenómeno?

En fenómenos aleatorios o casuales como el comentado anteriormente no se puede predecir con exactitud qué ocurrirá, aunque se puede esperar la ocurrencia de un suceso dado, con una frecuencia relativa o probabilidad determinada. Estudiarlos nos permite hacer predicciones con cierto margen de seguridad, como por ejemplo sobre:

- El tiempo de vida de un equipo eléctrico.
- La esperanza de vida de las personas en una región o país.
- La cantidad de personas que llegan a una estación para abordar un tren.
- El sexo de un niño antes de formarse el embrión.

La **Teoría de las probabilidades** proporciona modelos matemáticos para la descripción de fenómenos sujetos a influjos casuales y tiene como objetivo esencial la comprensión matemática de la regularidad de los fenómenos aleatorios. Por su parte la **Estadística** proporciona sobre la base de la teoría de las probabilidades métodos mediante los cuales se puede obtener información de las distintas poblaciones que se van a investigar utilizando datos muestrales aleatorios sobre la base de datos concretos.

De la historia

La primera vez que la palabra *probabilidad* aparece en la historia occidental de las matemáticas es en un comentario, en 1477, sobre la *Divina Comedia* de Dante, aunque la mayoría de los historiadores afirman que se originó en una partida de dados.

El matemático francés Blaise Pascal (1623-1665) (figura 2.10) recibió una carta de su amigo el Chavalier de Meré, un jugador profesional, quien le preguntó cómo dividir las apuestas si dos jugadores comenzaban, pero no terminaban un juego constituido por cinco encuentros en que el triunfador es el que gana tres de los cinco encuentros.
Los jugadores decidieron dividir las apuestas de acuerdo con sus *probabilidades* de ganar el juego. Pascal compartió el problema con Pierret Fermat (1601-1665), y juntos lo resolvieron, iniciándose así el desarrollo de las **probabilidades.**

Fig. 2.10

Posteriormente el astrónomo y matemático francés Pierre Simón Laplace (1749-1827) (figura 2.11) entre sus múltiples trabajos destaca el de la **Teoría analítica de las probabilidades**, en 1812.

Fig. 2.11

Las probabilidades son razones expresadas como fracciones decimales o porcentajes determinadas al considerar los resultados o consecuencias de experimentos, que se realizan como una actividad cuyos resultados pueden observarse y registrarse.

Si por ejemplo en 1 000 lanzamientos de una moneda salen 600 estrellas, la frecuencia relativa de las estrellas es $\frac{600}{1000}=\frac{3}{5}=0,6$ lo que se puede interpretar como que de cada 5 lanzamientos en 3 sale estrella de ahí que la probabilidad de que al lanzar la moneda sea estrella es de un 60 %.

Como puedes apreciar el concepto de frecuencia relativa en estadística está relacionado con el concepto de probabilidad de un suceso aleatorio, de ahí que en la Teoría de las probabilidades y de la Estadística estén fuertemente ligadas y te encuentres con la definición de *Frecuencia relativa de probabilidad.*

En este epígrafe, incursionarás en los llamados *sucesos aleatorios,* los cuales son considerados como aquellos que pueden presentarse bajo determinadas condiciones, pero no de forma obligatoria. Por ejemplo:

– Al tirar dos dados la suma de los números es siempre menor e igual que 12.
– Al escoger una vocal de la palabra "solidaridad" puede ser escogida una de las tres vocales: a, i, o.

El concepto de probabilidad que estudiarás en este grado es el *clásico*, que se atribuye a Laplace, el cual se sustenta en el concepto de *casos igualmente posibles,* es decir, que no se diferencian en relación con el grado de indeterminación de la ocurrencia en el marco de un *experimento aleatorio*, considerado este, como aquel cuyo resultado es incierto en el marco de distintas posibilidades y se puede repetir un número de veces arbitrario (al menos mentalmente), manteniendo las mismas condiciones exteriores. Por ejemplo:

– El lanzamiento de una moneda.
– La tirada única de un dado después de ser agitado en un cubilete.
– La extracción al azar de una muestra de *n* objetos en una población.
– Toda medición que se realice.

Definición 2.2

Si un suceso A puede ocurrir en n_A casos de n casos posibles e igualmente probables, se define la probabilidad de A y se denota $p(A)$ al cociente:

$$p(A) = \frac{n_A}{n}$$

Ejemplo 2.7

Si se escoge al azar una letra de la palabra "prisma":

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea la letra "s"?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea una vocal?

Resolución:

– Primero se determinan los sucesos en correspondencia con lo que se pide. En este caso se consideran dos sucesos A y B, dados por:

a) Suceso A: escoger la letra "s".

b) Suceso B: escoger una vocal.

– Luego se identifican los *casos posibles* (n), para cada uno de los sucesos A y B. Para ambos sucesos es 6, dado que la palabra "prisma" tiene seis letras.

– Posteriormente se determinan los *casos favorables* (n_A). En el caso del suceso A es un caso favorable dado que en la palabra "prisma" aparece solo una vez la letra "s" y en el caso del suceso B son dos, dado que existen en la palabra dos vocales.

– Finalmente se sustituye en la fórmula y se calcula la probabilidad del suceso como se muestra a continuación.

a) $n = 6$; $n_A = 1$ entonces $p(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{1}{6} \approx 0{,}17$

b) $n = 6$; $n_B = 2$ entonces $p(B) = \frac{n_B}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0{,}3$

Respuesta:

a) La probabilidad de que se escoja al azar la letra "s" es aproximadamente igual al 17 %.

b) La probabilidad de que se escoja al azar una vocal es aproximadamente igual al 33 %. ◆

Ejemplo 2.8

En una fábrica dedicada a la producción de dispositivos electrónicos, se realiza al azar un muestreo de calidad. Para realizarlo se seleccionó al azar una caja con 68 dispositivos electrónicos en la que se detectó la existencia de 17 defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad, de que al extraer aleatoriamente uno de estos dispositivos no sea defectuoso?

Resolución:

Suceso A: extraer un dispositivo no defectuoso.

Casos posibles: $n = 68$, porque extraer uno cualquiera de estos dispositivos debe ser igualmente posible.

Casos favorables: $n_A = 68 - 17 = 51$, porque en la caja hay 17 dispositivos defectuosos.

Entonces la probabilidad de extraer un dispositivo electrónico no defectuoso es:

$$p(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{51}{68} \approx \frac{3}{4} = 0{,}75$$

Luego, la probabilidad de extraer un dispositivo electrónico no defectuoso es de un 75 %. ◆

El ejemplo anterior, también permite hacer las observaciones siguientes:

– Si los 68 dispositivos de la caja son no defectuosos, entonces

$$p(A) = \frac{68}{68} = 1.$$

Este caso A es llamado **suceso seguro**. Es el que siempre se verifica al realizar el experimento y su probabilidad es igual a **uno**.

– Si los 68 dispositivos de la caja son defectuosos, entonces

$$p(A) = \frac{0}{68} = 0.$$

En este caso A es un **suceso imposible.** Es el que nunca se verifica y su probabilidad es igual a **cero.**

Otra manera de resolver el problema del ejemplo 2.8 es determinando la probabilidad de que al extraer aleatoriamente uno de estos dispositivos sea defectuoso, en este caso:

Suceso A: extraer un dispositivo no defectuoso.

Casos posibles: $n = 68$, porque extraer uno cualquiera de estos dispositivos debe ser igualmente posible.

Casos favorables: $n_A = 17$, porque en la caja hay 17 dispositivos defectuosos.

Entonces la probabilidad de extraer un dispositivo electrónico defectuoso es:

$$p(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{17}{68} \approx \frac{1}{4} = 0,25$$

Y al sustraer el proceso seguro de que ocurra con el suceso de que no ocurra tenemos;

$$1 - 0,25 = 0,75$$

Luego, la probabilidad de extraer un dispositivo electrónico no defectuoso es de un 75 %. ◆

Teorema 2.1

La probabilidad satisface las propiedades

a) Para todo suceso A, $0 \leq p(A) \leq 1$.

b) Si A y B son dos sucesos excluyentes (es decir, no pueden ocurrir simultáneamente) entonces: $p(A \text{o} B) = p(A) + p(B)$.

c) $p(no\, A) = 1 - p(A)$.

Demostración

a) Si n_A representa los casos favorables y n los casos posibles, se cumple que:

$0 \leq n_A \leq n$ luego, $0 \leq \frac{n_A}{n} \leq \frac{n}{n} = 1$, significa que $0 \leq p(A) \leq 1$ como se quería demostrar.

b) Como A y B no pueden ocurrir simultáneamente, si n_A es el número de veces que ocurre A y n_B el número de veces que ocurre B, el número de veces que ocurre A o B es la suma de $n_A + n_B$ luego:

$$p(A o B) = \frac{n_A + n_B}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} = p(A) + p(B)$$

c) Si n_A es el número de veces que ocurre A, entonces, no ocurre en $n - n_A$ casos, luego:

$$p(no\,A) = \frac{n - n_A}{n} = \frac{n}{n} - \frac{n_A}{n} = 1 - p(A)\,. \quad \blacklozenge$$

Este teorema es muy útil para calcular la probabilidad de un suceso.

Ejemplo 2.9

Como parte de las actividades recreativas que se desarrollan en un instituto preuniversitario, los estudiantes realizan diferentes juegos de mesa. Uno de los juegos utilizados contiene 25 fichas, de las cuales hay 6 de color rojo, 8 azules y el resto de otros colores. Si se selecciona una ficha al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esta sea roja o azul?

Resolución:

Sean los sucesos:

A: seleccionar una ficha azul.

B: seleccionar una ficha roja.

C: seleccionar una ficha que sea roja o azul. En este caso la ocurrencia de A no depende de la ocurrencia de B (y viceversa), es decir los dos sucesos pueden ocurrir independientemente uno del otro, por tanto la unión de ellos es el suceso C, es decir:

$C = A o B$.

Primera vía de solución:

n = 25 y $n_C = 14$ así: $p(C) = \frac{14}{25} = 0{,}56$ es la probabilidad de extraer una ficha que sea roja o azul.

Segunda vía de solución:

$p(A) = \frac{8}{25} = 0{,}32$ es la probabilidad de extraer una ficha azul y

$p(B) = \frac{6}{25} = 0{,}24$, es la probabilidad de extraer una ficha roja

De esta forma, $p(A) + p(B) = \frac{8}{25} + \frac{6}{25} = 0{,}56 = p(A o B)$

Tercera vía de solución:

no C: Extraer una ficha que no sea ni azul, ni roja.

$p(no\ C) + p(C) = 1$ entonces $p(C) = 1 - p(no\ C) = 1 - \frac{11}{25} = \frac{14}{25} = 0{,}56$

Luego, la probabilidad de seleccionar al azar una ficha roja o azul es del 56 %. ◆

Ejemplo 2.10

Considera tres urnas (figura 2.12) con la siguiente composición: la urna **I** contiene 2 bolas blancas y 4 bolas rojas, la **II** contiene 1 bola blanca y 3 bolas rojas y la urna **III** contiene 3 bolas blancas y 3 bolas rojas. Una bola es seleccionada de cada urna. Determina la probabilidad de que:

a) Las tres bolas que se escojan sean blancas,
b) Se escojan exactamente dos bolas blancas,
c) Al menos una de las tres bolas sea roja.

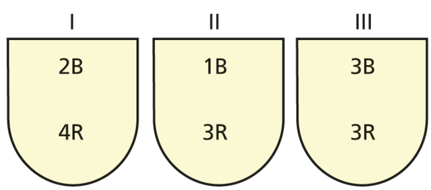


Fig. 2.12

Resolución:

Experimento: seleccionar una bola de cada urna.

$n = 6 \cdot 4 \cdot 6 = 144$ posibilidades en total.

a) Suceso A: se seleccionan tres bolas blancas

$n_A = 2 \cdot 1 \cdot 3 = 6,\ \ p(A) = \frac{6}{144} = \frac{1}{24} \approx 0{,}04.$

Respuesta: la probabilidad de seleccionar las tres bolas del mismo color es aproximadamente igual a 0,04.

b) Suceso B: se escogen exactamente dos bolas blancas. Para este suceso se pueden analizar tres casos:

Tabla 2.13

Caso 1	Caso 2	Caso 3
(blanca; blanca; roja)	(blanca; roja; blanca)	(roja; blanca; blanca)
$2 \cdot 1 \cdot 3 = 6$	$2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$	$4 \cdot 1 \cdot 3 = 12$
$n_B = 6 + 18 + 12 = 36$ $\quad p(B) = \frac{36}{144} = \frac{1}{4} = 0{,}25$		

Respuesta: la probabilidad de seleccionar exactamente dos bolas blancas es 0,25.

c) Suceso C: se selecciona al menos una bola roja.

Suceso no C: ninguna bola seleccionada es roja (suceso A)

$p(C) = 1 - p(no\ C) = 1 - \frac{1}{24} = \frac{23}{24} \approx 0{,}96.$

Respuesta: la probabilidad de seleccionar al menos una bola roja es aproximadamente igual a 0,96. ◆

Ejemplo 2.11

Se tienen dos cajas (I y II). En la caja I hay 6 lápices azules y en la caja II hay 2 lápices azules y 5 lápices rojos. Si se escoge al azar un lápiz de cada caja. Calcula la probabilidad de los sucesos.

Suceso A: los dos lápices son rojos,

Suceso B: uno de los lápices es rojo y el otro azul, Suceso C: los dos lápices son azules,

Suceso D: al menos uno de los lápices es azul.

Resolución:

Caja I: lápices azules: 6 y lápices rojos: 0

Caja II: lápices azules: 2 y lápices rojos: 5

Experimento: extraer un lápiz de cada caja.

Dado que el total de lápices que existen en la caja I es 6, y el total de lápices que existen en la caja II es 7, para todos los sucesos existen $n = 6 \cdot 7 = 42$ posibilidades de extraer un lápiz de cada caja.

a) Suceso A: los dos lápices son rojos.

Como en la caja 1 no hay lápices rojos $n_A = 0 \cdot 5 = 0$ $p(A) = \frac{0}{42} = \frac{0}{42} = 0$.

Respuesta: la probabilidad de seleccionar un lápiz de cada caja y que los dos lápices sean rojos es 0. Luego, es un suceso imposible de que ocurra

b) Suceso B: uno de los lápices es rojo y el otro es azul.

Como se extrae un lápiz de cada caja y en la caja I no hay lápices rojos obligatoriamente el rojo se tiene que extraer de la caja I y el azul de la caja II luego, $n_B = 5 \cdot 6 = 30$ por tanto $p(B) = \frac{30}{42} = \frac{5}{7} \approx 0{,}71$.

Respuesta: la probabilidad de seleccionar un lápiz de cada caja y que estos sean uno rojo y el otro azul es 0,71.

c) Suceso C: los dos lápices son azules.

En este caso como los dos son azules y se extrae un lápiz de cada caja entonces

$n_C = 6 \cdot 2 = 12$ y $p(C) = \frac{12}{42} = \frac{2}{7} \approx 0{,}23$.

Respuesta: la probabilidad de seleccionar un lápiz de cada caja y que ambos sean azules es 0,23.

d) Suceso D: al menos uno de los lápices es azul entonces

Suceso no D: Ninguno es azul (o sea los dos son rojos).

En este caso no $D = A$ y $p(D) = 1 - p(\text{no } D) = 1 - 0 = 1$. Es decir, extraer al menos un lápiz azul, es un suceso seguro.

Respuesta: la probabilidad de seleccionar un lápiz de cada caja y que al menos uno de los lápices sea azul es 1. ◆

Saber más

Las probabilidades y la Estadística constituyen la base de la teoría de colas. Esta teoría permite analizar y mejorar la eficiencia en el manejo del tiempo de espera y del uso de recursos. Al modelar los sistemas y predecir comportamientos, se pueden tomar decisiones para optimizar la espera del cliente y mejorar la productividad. La teoría de colas utiliza modelos que se basan en procesos aleatorios. Esto implica que tanto las llegadas de clientes como los tiempos de servicio son variables aleatorias, en el que las distribuciones de probabilidad juegan un papel crucial.

Constituye un marco poderoso para analizar y optimizar sistemas en los que ocurre la espera. Al aplicar métodos estadísticos y probabilísticos, permiten predecir comportamientos futuros y tomar decisiones sobre cómo mejorar la eficiencia del servicio.

Ejemplo 2.12

En una caja se encuentran diez *breakers* entre los cuales hay 4 de 40 amperes. Se extraen sucesivamente dos *breakers* no reponiéndose el tomado al inicio antes de haber extraído el segundo. Cada *breaker* tiene la misma probabilidad de ser tomado. Calcula la probabilidad de que los *breakers* extraídos tengan un amperaje diferente de 40.

Resolución:

Suceso A: extraer dos *breakers* con amperaje diferente a 40.

En este caso se analizan dos subprocesos:

A_1: extraer un *breaker* con amperaje diferente a 40 la primera vez.

A_2: extraer un *breaker* con amperaje diferente a 40 la segunda vez.

Si son 10 *breakers* y 4 son de 40 amperes, entonces 6 tienen un amperaje diferente de 40.

Utilizando la definición clásica de probabilidad se obtiene que:

$n = 10$ y $n_{A_1} = 6$ luego $p(A_1) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$n = 9$ y $n_{A_2} = 5$ luego $p(A_2) = \frac{5}{9}$ (es 9 y 5 dado que ya fue extraído la primera vez un breaker).

Atención

Si A y B son dos sucesos independientes, $p(A\,y\,B) = p(A)\cdot p(B)$

Por tanto, para determinar la probabilidad de que los dos *breakers* extraídos tengan amperaje diferente de 40 basta determinar

$$p(A) = \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{9} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}.$$

Respuesta: La probabilidad de que los *Breakers* extraídos tengan un amperaje diferente de 40 es $\frac{1}{3}$. ◆

Conéctate

Accede al sitio:

Inicio a la combinatoria. Formas de conteo. Resuelve los ejercicios que aparecen.

https://curricular.cubaeduca.cu/education/category?id=2758&type=theme

Ejercicios del epígrafe 2.2

1. Al lanzar un dado (homogéneo), ¿cuál es la probabilidad de obtener una cara que tenga tres puntos?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que se muestre una cara que tenga dos o tres puntos con el lanzamiento de un dado (homogéneo)?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados (homogéneos) la suma de los puntos sea 14?
4. En un grupo de 35 estudiantes de 12.º grado en el cual todos optan por carreras universitarias, hay 14 que optan por Ciencias médicas. Si se selecciona un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que opte por otras carreras?

5. Se tiene un juego de dominó de 28 fichas (desde el doble blanco hasta el doble seis). ¿Qué probabilidad hay de que al escoger una ficha haya en esta exactamente cuatro puntos?
6. En una caja hay 30 tornillos de los cuales 6 están oxidados. Si se extrae un tornillo al azar ¿cuál es la probabilidad de que no esté oxidado?
7. Si se escoge al azar una letra de la palabra "humanismo" ¿cuál es la probabilidad de que sea la letra "s"? ¿Cuál es la probabilidad de que sea una vocal?
8. Se lanzan dos dados (homogéneos), ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos sea 7?
9. Se lanzan dos dados (homogéneos), uno es rojo y otro es blanco. Calcula la probabilidad de que el dado rojo muestre un número mayor que el dado blanco.
10. Calcula la probabilidad de que al lanzar dos dados (homogéneos), se obtenga el número cinco en la primera tirada y sea un número par en la segunda tirada.
11. Calcula la probabilidad de obtener "estrella y un número mayor que 4" al lanzar una moneda y un dado (homogéneo).
12. Se lanzan dos dados (homogéneos), calcula la probabilidad de que la suma de los puntos obtenidos:
    a) Sea mayor que 9.
    b) Sea múltiplo de 3.
13. Calcula la probabilidad de que al lanzar un dado (homogéneo) se obtenga un número múltiplo de 7.
14. Al lanzar tres dados (homogéneos), ¿Qué es más probable; obtener en total diez puntos o alcanzar solo nueve puntos?
15. Se tiene una urna que contiene 4 bolas blancas, 5 azules y 1 roja. Calcula la probabilidad de que al seleccionar al azar 3 bolas sean:
    a) Las tres del mismo color.
    b) Dos sean blancas y la otra azul o roja.
    c) Una de cada color.

16. Un examen clínico tiene una sensibilidad del 95 % (detecta correctamente a los enfermos) y una especificidad del 95 % (identifica correctamente a los sanos).

a) Si una persona está enferma, ¿cuál es la probabilidad de que el examen sea positivo?

b) Si la prevalencia de la enfermedad en la población es del 2 %, ¿cuál es la probabilidad de que un paciente sano obtenga un resultado positivo (falso positivo)?

17. En una ciudad, la probabilidad de lluvia en un día cualquiera es del 30 %.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que llueva hoy?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no llueva ni hoy ni mañana?

18. En la tabla 2.14 se registró las alturas en centímetros de 50 plantas y se agruparon en intervalos de clases:

a) Determina la altura media aproximada de las plantas.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger al azar una de las plantas, esta tenga una altura de [30;40) cm?

Tabla 2.14

Clases	Plantas
[10; 20)	8
[20; 30)	15
[30;40)	20
[40; 50)	7

2.3 Combinatoria

Con frecuencia realizas operaciones básicas de conteo y acciones en las que tienes que organizar, seleccionar y combinar elementos de conjuntos para lo cual los colocas en correspondencia con la sucesión de los números naturales.

Por ejemplo, para conformar y asignar el número de identidad de los ciudadanos, los códigos de las tarjetas de recarga de la telefonía móvil o de una cuenta bancaria, entre otros casos, se necesitan de técnicas mucho más elaboradas. ¿Cómo determinar la cantidad de combinaciones posibles de 8 dígitos, para formar los números de los celulares de los usuarios en Cuba?

En este epígrafe estudiarás algunas técnicas de conteo que corresponden a una rama de las matemáticas que se conoce como **Teoría combinatoria,** y que son muy útiles en la resolución de diversos problemas en los que son necesarios ordenar de formas diferentes los elementos de un conjunto o seleccionar de diferentes formas un subconjunto de elementos de un conjunto mayor. Incluye entre sus temas, además, el Principio de inclusión-exclusión, grafos y redes, sobre los cuales conocerás en tus estudios superiores.

Fig. 2.13

De la historia

El análisis combinatorio desde su propio origen está estrechamente vinculado con la teoría de las probabilidades. Esto puede afirmarse ya que, tanto Pierre Fermat (1601-1665) como Blas Pascal (1623-1662) al intentar resolver ciertos problemas relacionados con los juegos al azar se vieron obligados a analizar y numerar las **combinaciones** que brindaban los datos de estos problemas.

Más como disciplina científica la **Teoría combinatoria** aparece por primera vez en los trabajos de G.W. Leibniz (figura 2.14) en su obra *Razonamientos sobre el arte combinatorio.*

Fig. 2.14

Principios básicos de la teoría combinatoria

▲ ¿De qué forma optimizar recursos en la vida?

Existen variadas técnicas de conteo que permiten dar solución a situaciones, en las cuales es necesario determinar primero los conjuntos que se van a tener presente *en el conteo.*

Ejemplo 2.13

Suponiendo que tienes que registrar en una tabla de frecuencia el grupo sanguíneo (GS) de las personas que ingresan en una instalación de salud. ¿Cuántas características de la variable GS debes identificar en la tabla de frecuencia?

Resolución:

En este caso es necesario tener en cuenta que el GS se identifica primero por la presencia o no, de los tipos de aglutinógenos y sus combinaciones (A, B, AB y O) y en segundo lugar la presencia o no del factor RH, positivo (+) o negativo (–). Podemos modelar la situación en un diagrama como el de la figura 2.15.

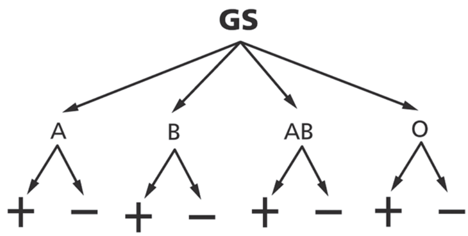


Fig. 2.15

Recuerda que...

Este tipo de diagrama recibe el nombre de diagrama de árbol, porque cada punto se ramifica de la misma forma que lo hace un árbol. Es muy utilizado en la programación y para modelar procesos.

En este diagrama cada flecha representa la clasificación de un grupo sanguíneo a partir de los tipos de aglutinógenos y sus combinaciones. Para completar la clasificación es necesario seleccionar dos flechas sucesivas; en el diagrama se aprecia que hay tantos grupos sanguíneos como flechas entre los aglutinógenos y el factor RH, es decir existen ocho grupos sanguíneos, luego en la tabla de frecuencia la variable debe tener los valores siguientes:

A+, A–, B+, B–, AB+, AB–, O + y O – .

Observa que en la situación ocurren dos sucesos, uno después de otro, y el total de clasificaciones se obtuvo multiplicando $4 \cdot 2 = 8$ ◆

Este resultado se fundamenta en el **principio de multiplicación** o **principio fundamental de conteo**.

Teorema 2.2 (Principio de multiplicación)

Si un suceso cualquiera puede ocurrir de n maneras diferentes y, después que ha ocurrido de una cualquiera de esas maneras, un segundo suceso puede ocurrir de p maneras diferentes, entonces los dos sucesos, en ese orden, pueden ocurrir de $n \cdot p$ maneras.

¿? ¿Sabías que...?

El teorema anterior recibe el nombre de **principio de multiplicación** pues afirma que si dos sucesos ocurren uno después del otro, el total de formas en que pueden ocurrir se obtiene multiplicando el número de formas del primero por el número de formas del segundo.

Ejemplo 2.14

Para viajar del municipio Pinar del Río hasta la ciudad de Santiago de Cuba, con escala en La Habana, existen 11 salidas de ómnibus en diferentes horarios. El viaje desde La Habana hasta al destino final, se puede hacer por dos vías, en un ómnibus con ruta La Habana-Santiago de Cuba o La Habana-Guantánamo. ¿De cuántas formas diferentes se puede llegar del municipio Pinar del Río a la ciudad de Santiago de Cuba?

Resolución:

El primer suceso es la selección de una de las 11 salidas de ómnibus de Pinar del Río a La Habana y el segundo la selección de una de las dos rutas posibles hacia Santiago (La Habana-Santiago o La Habana-Guantánamo).

En total se puede llegar de $11 \cdot 2 = 22$ formas diferentes, según los horarios establecidos. ◆

Ejemplo 2.15

En un cruzamiento entre dos plantas de guisantes de semillas amarillas y de textura lisa *Aa*, se obtuvo en la descendencia, individuos de diferentes fenotipos.

a) ¿Cuántas combinaciones se obtuvieron en los genotipos de los descendientes?

b) Si el carácter dominante (semillas amarillas) está determinado por el alelo dominante *A*, ¿cuál es la probabilidad de que se manifieste el carácter dominante en la descendencia?

Resolución:

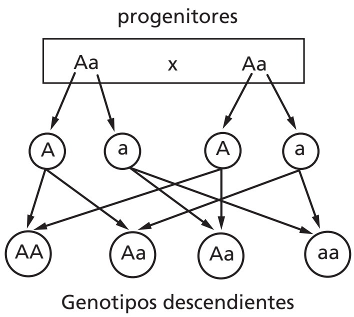


Fig. 2.16

a) El primer suceso es la separación de los dos genes alelos de los progenitores, y el segundo es la combinación de los alelos de un progenitor, con los del otro. Se obtuvieron $2 \cdot 2 = 4$ genotipos de tres combinaciones en los descendientes (AA o Aa o aa)

b) $p(AA \text{ o } 2Aa) = p(AA) + 2p(Aa) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ dado que la ocurrencia de los sucesos AA o Aa son mutuamente excluyentes. Luego, $p(A) = \frac{3}{4}$. ◆

En la práctica no se requiere usar siempre los diagramas de árbol, sin embargo, constituyen un recurso esencial para comprender problemas de mayor nivel de complejidad.

Para aplicar el Teorema 2.2 no es necesario que los sucesos se continúen en el tiempo; lo esencial es que se distinga cuál es el primero y cuál es el segundo.

Ejemplo 2.16

¿Cuántas sílabas de dos letras, que comienzan por una consonante, existen en el idioma español?

Resolución:

Este es un caso en que el conteo directo se hace más difícil por el número de posibilidades. El primer suceso es la selección de la primera letra (una consonante) y el segundo la selección de la segunda letra (una vocal).

Como en el español hay 22 consonantes, el primer suceso puede ocurrir de 22 formas y como hay 5 vocales, el segundo puede ocurrir de 5 formas. Entonces en total se pueden obtener $22 \cdot 5 = 110$ sílabas. ◆

El principio de multiplicación puede extenderse también a más de dos sucesos.

Ejemplo 2.17

¿Cuántos números de cuatro cifras son múltiplos de dos?

Resolución:

En este caso tenemos cuatro sucesos. Consideremos las cifras de izquierda a derecha.

- Primero seleccionar las cifras de la unidad de millar: puede ocurrir 9 veces porque no puede ser cero.
- Segundo seleccionar las cifras de las centenas: puede ocurrir 10 veces.
- Tercero en seleccionar las cifras de las decenas: puede ocurrir 10 veces
- Cuarto seleccionar las cifras de las unidades: puede ocurrir cinco veces, porque los múltiplos de dos terminan en 0; 2; 4; 6 y 8.

Luego, aplicando el principio de multiplicación encontramos que existen: $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 4\,500$, números de cuatro cifras que son múltiplos de dos. ◆

Reflexiona

¿Cuántos teléfonos celulares, que inician con el número 52 pueden existir en Cuba?

Existen otros problemas de conteo, para lo cual se requieren otros recursos o procedimientos, como los diagramas conjuntistas.

Ejemplo 2.18

En una jornada científica, de los 30 estudiantes de un grupo 16 se presentan con un proyecto de Historia de la localidad (H); 14, en Ciencias para todos (C); y 16, con resultados de la Tarea Vida (V). Si 3 estudiantes participaron en los tres resultados, 8 en Ciencias para todos y la Tarea Vida, 3 solamente en la tarea Vida y 4 solamente en Historia de la localidad.

a) ¿Cuántos estudiantes participaron en los proyectos de Historia de la localidad y de Ciencias para todos?

b) ¿Cuántos participaron solamente en Ciencia para Todos?

c) ¿Cuántos no presentaron resultados en ninguno de los tres proyectos?

Resolución:

Denotemos por H el conjunto de los que se presentaron por el proyecto de Historia de la localidad, por C a los del proyecto de Ciencias para todos y por V a los de la Tarea Vida. La figura 2.17 recoge los datos de la situación que se analiza.

Total de estudiantes del grupo: 30

Presentados en H: 16

Presentados en C: 14

Presentados en V: 16

Presentados en C y V: 8

Presentación solo en V: 3

Presentaron solo en C: 2

Presentados en los tres proyectos: 3

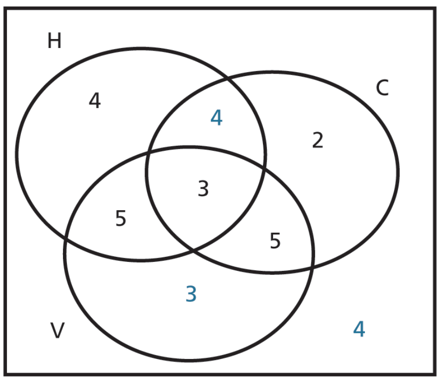


Fig. 2.17

Recuerda que...

Para completar el diagrama es recomendable empezar de adentro hacia afuera, es decir, por los elementos que pertenecen a un mayor número de conjuntos.

a) Participaron en los proyectos de Historia de la localidad y de Ciencias para todos, 4 estudiantes.
b) Participaron solamente en los proyectos de Tarea Vida 3 estudiantes.
c) No presentaron resultados en ninguno de los tres proyectos, 4 estudiantes. ◆

Este problema también se puede resolver por el llamado Principio de las inclusiones y exclusiones y se recoge en el teorema siguiente, que no vamos a demostrar.

Teorema 2.3 (Principio de las inclusiones y exclusiones)

Para cualquier sistema de n conjuntos A_1, A_2, ..., A_n se cumple:

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) =$$

$$\#A_1 + \#A_2 + \ldots + \#A_n - \left[\#(A_1 \cap A_2) + \#(A_1 \cap A_3) + \ldots + \#(A_{n-1} \cap A_n)\right] +$$

$$+\left[\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \ldots + \#(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n)\right] + \ldots + (1)^{n-1} \cdot \#(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_3)$$

El principio de las inclusiones y exclusiones es muy utilizado cuando en el problema de conteo intervienen una cantidad de considerable de conjuntos o cuando la cantidad de elementos que tienen no se pueden determinar con facilidad. Analicemos un ejemplo sencillo que ilustre cómo se pudiera aplicar este principio.

Ejemplo 2.19

En una encuesta realizada a un grupo de estudiantes de un grupo de duodécimo grado sobre las plataformas digitales que utilizaron el fin de semana pasado. Los resultados indicaron que 22 estudiantes utilizaron WhatsApp (W), 15 Telegram (T) y 13 Facebook (F). 5 estudiantes utilizaron estas tres plataformas digitales, 3 utilizaron solo WhatsApp y Facebook, 4 solamente Facebook y 3 solamente Telegram.

a) ¿Cuántos estudiantes del grupo utilizaron solo Telegram y WhatsApp?
b) ¿Cuántos estudiantes utilizaron solamente WhatsApp?
c) ¿Cuántos estudiantes tiene el grupo si dos de ellos utilizaron otras plataformas digitales (O)?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que al seleccionar al azar un estudiante entre los que utilizaron algunas de estas tres plataformas digitales, este haya utilizado solo una de ellas?

Resolución:

En la figura 2.18 a están los datos conocidos.

Representamos por W^c el conjunto de elementos que no pertenecen a W y por $\#W$: la cantidad de elementos de W.

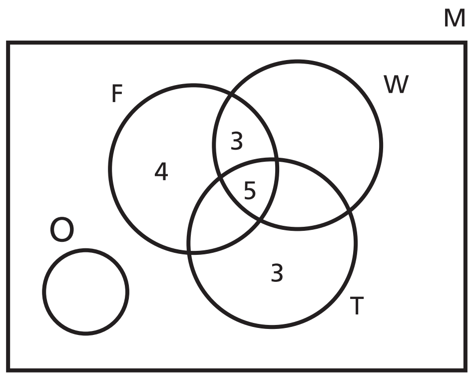


Fig. 2.18 a

a) $\#\left(F\cap T\cap W^c\right)=\#F-\left(4+5+3\right)=13-12=1$

Es decir, un estudiante del grupo utilizó solo Telegram y WhatsApp.

b) $\#\left(F\cap T\cap W^c\right)=\#T-\left(3+1+5\right)=15-9=6$

$\#\left(T\cap W\cap F^c\right)=\#W-\left(3+6+5\right)=22-14=8$

Es decir, 8 estudiantes del grupo utilizaron solamente WhatsApp.

c) $\#M=\#\left(F\cup W\cup T\cup O\right)=\#F+\#W+\#T+\#O-$

$\left[\#(F\cap W)+\#(F\cap T)+\#(F\cap O)+\#(W\cap T)+\#(W\cap O)+\#(T\cap O)\right]+$

$\left[\#(F\cap W\cap T)+\#(F\cap W\cap O)+\#(F\cap T\cap O)+\#(W\cap T\cap O)\right]$

$\#M=13+22+15+2-\left[8+6+0+11+0+0\right]+\left[5+0+0+0\right]$

$\#M=\#\left(F\cup W\cup T\cup O\right)=52-\left(25\right)+\left(5\right)=52-20=32$

El grupo tiene 32 estudiantes.

d) En la figura 2.18 b se han reflejado los resultados obtenidos en los tres incisos anteriores.
Para determinar la probabilidad analicemos:
Experimento: seleccionar al azar un estudiante entre los que utilizaron algunas de estas tres plataformas digitales (A).

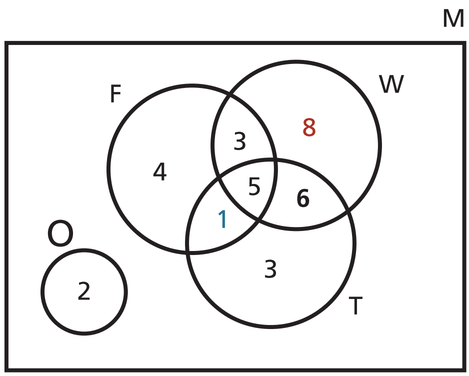


Fig. 2.18 b

n : Casos posibles $n = \#M - \#O = 32 - 2 = 30$

n_A : Casos favorables $n_A = \#\left(T \cap F^c \cap W^c\right) + \#\left(W \cap F^c \cap T^c\right) + \#\left(F \cap F^c \cap W^c\right)$

$n = 3 + 8 + 4 = 15$

$p(A) = \dfrac{n_A}{n}$, $p(A) = \dfrac{15}{30} = 0{,}5$

Finalmente, la probabilidad de que al seleccionar al azar un estudiante entre los que utilizaron algunas de las plataformas digitales, WhatsApp, Facebook o Telegram; este haya utilizado solo una de ellas es de un 50 %. ◆

Variación y combinación

Existen algunos casos de problemas de conteo para cuya solución no son suficientes los recursos de la Teoría combinatoria tratados anteriormente, estos exigen tener una mayor claridad de lo que se quiere o aspira, conocer cuáles son las condiciones con las que se cuenta para lograr tales aspiraciones o tomar decisiones en diferentes contextos, estos pueden ser en el plano político- económico-social, en las investigaciones científicas para el desarrollo de las ciencias e incluso en el plano personal.

Un momento decisivo para la toma de decisiones en la definición de tu proyecto de vida, está relacionado con la selección de tu futura profesión, al llenar la boleta para el otorgamiento de plazas (figura 2.19). Has pensado:

¿De cuántas formas diferentes pueden quedar ordenadas las diez opciones de carreras universitarias, si tienes la posibilidad de escoger de entre 23 ofertas?

¿Tiene alguna importancia el orden en que finalmente quedan dispuestas las opciones de carreras seleccionadas?

Supongamos que las cinco especialidades que más te atraen para continuar estudios universitarios son Matemática (M); Física (F); Biología (B), Microbiología (Mcr) y Bioquímica (Bq). Al intentar llenar la boleta de ingreso, ocurre que cuando escribes la tercera o cuarta opción, la indecisión te lleva a plantear otra variante de selección.

Fig. 2.19

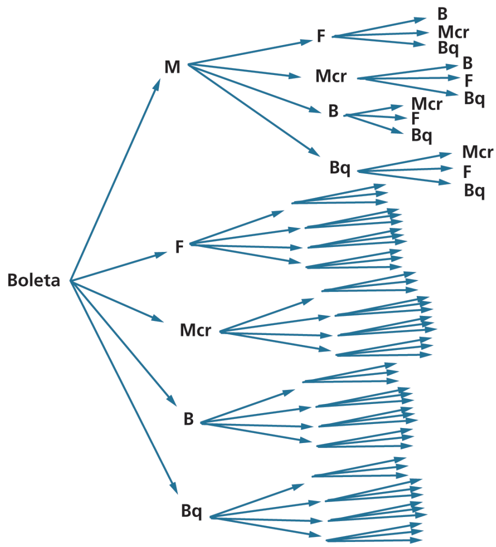


Fig. 2.20

El diagrama de árbol de la figura 2.20, indica todas las posibles variantes que te han quedado en cada uno de los intentos.

Como en una boleta no se pueden repetir las especialidades, para contarlas apliquemos el principio de multiplicación.

La primera especialidad se puede escoger 5 veces, la segunda 4 veces (no se puede repetir la primera especialidad), y la tercera de tres formas (no se pueden repetir ninguna de las dos anteriores).

Es decir, puedes haber llegado a realizar $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ variantes diferentes de llenar las boletas, solo planteando 3 de 5 especialidades posibles.

En este caso se pone de manifiesto una **variación** de un suceso sin repetición.

Definición 2.3

Se llaman **variaciones** (sin repetición) de n objetos tomados p a p , a todas las posibles ordenaciones de p objetos tomados de los n.

Ejemplo 2.20

Entre las tradiciones populares de Cuba, que caracterizan a la región central del país, se identifican las Parrandas, que son Patrimonio Cultural de la Humanidad desde 2018. Si en un encuentro regional participan los Jutíos y los Nañacos, los Sapos y los Chivos, el Carmen y el Salvador, el Gallo y el Gavilán, el Bando Rojo y el Bando Azul. ¿Cuántas variaciones tomadas 2 a 2 se pueden hacer con las 5 parejas de barrios o bandos para organizar una competencia?

Resolución:

Como son 5 parejas: $5 \cdot 4 = 20$ formas diferentes. ◆

En los casos en que $n = p$ hablamos de permutaciones de orden n.

Teorema 2.4

El número de **permutaciones** de orden n se denota P_n y se calcula con la fórmula

$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

Demostración

Procedemos por inducción completa en n: para $n = 2$

$P_2 = 2 = 2 \cdot 1$ es cierta pues solo existen dos permutaciones a_1a_2 y a_2a_1.

Supongamos que es cierta para $n = k$, o sea $P_k = k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

Para formar las permutaciones de orden $k+1$ podemos proceder como se ilustra en la figura 2.21, seleccionar uno cualquiera de los $k+1$ elementos y después para cada selección, escoger una permutación de orden k. Entonces según el principio de multiplicación

$$P_{k+1} = (k+1)\cdot k\cdot(k+1)\cdot k\cdot(k-1)\cdot k\cdot\ldots\cdot 2\cdot$$

Como se quería:

$$P_n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$$

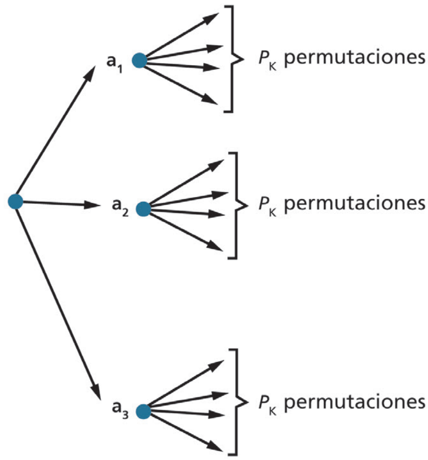


Fig. 2.21

Reflexiona

Si al concluir el encuentro regional de parrandas, se ubican en una tabla de posiciones las preferencias del público por cada uno de los diez barrios o bandos, ¿De cuántas formas diferentes se pueden ordenar?

Ejemplo 2.21

En la liga élite de béisbol realizada en 2025 en Cuba, participan los seis mejores equipos, de entre los que representan a cada provincia y al municipio especial Isla de la Juventud.

¿De cuántas formas diferentes pudo quedar ordenada la tabla de posiciones al concluir la liga si no hubo empates?

Resolución:

Cada posición final es una permutación de los seis equipos, por tanto, en total pueden existir; $P_6 = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 720$.

Respuesta: la tabla de posición al concluir la liga élite pudo quedar ordenada de 720 formas diferentes. ◆

El número $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ de permutaciones, aparece con frecuencia en otras formas de ordenamiento o selección de elementos de un conjunto, por lo que se hace conveniente definir una notación.

Definición 2.4

Se llama **factorial de un número *n*** y se denota $n!$ *al número*

$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

En general se cumple que:

Teorema 2.5

El número de **variaciones** de n objetos tomados p a p se denota V_p^n y se calcula mediante la fórmula $V_p^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)$.

Utilizando factoriales se puede escribir como: $V_p^n = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

En efecto se cumple que

$$V_p^n = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)$$

$$= \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)(n-p)(n-p-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-p)(n-p-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Para dar generalidad a esta fórmula es necesario que se incluya el caso $n = p$, en este caso $V_p^n = P_n = n!$ y debe ser $(n-p)! = 1$, esta es una de las razones por las que se define que $0! = 1$.

En general se tiene que la permutación es un caso particular de la variación.

Ejemplo 2.22

Si se quisiera decidir sobre los tres primeros lugares del encuentro entre barrios y bandos de parrandas del ejemplo 2.20 ¿De cuántas formas puede hacerse?

Resolución:

Se trata de formar grupos de tres en los cuales el orden juega un papel muy esencial. Pues no es lo mismo que los primeros lugares los ocupen

Nañacos, Sapos y Bando Rojo, que Sapos, El Carmen y Jutíos o cualquiera de las otras variaciones encontradas.

El hecho de que el orden sea esencial, nos indica que son variaciones, luego se trata de calcular las variaciones de 10 elementos tomados 3 a 3. Empecemos en 10 y tomemos tres factores decrecientes sucesivos.

$$V_p^n = \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 720$$

Respuesta: existen 720 formas diferentes de obtener los tres primeros lugares. ◆

Ejemplo 2.23

a) ¿De cuántas formas diferentes pueden distribuirse en los días de la semana los cumpleaños de cuatro personas, de modo que no haya coincidencias?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en un grupo de cuatro personas haya al menos dos que nacieran el mismo día de la semana?

Resolución:

a) Se trata de distribuir los 7 días de la semana en 4 grupos en los que el orden es esencial, ya que no es lo mismo que el lunes sea el cumpleaños de Alejandro a que sea el de José. Esto significa que hay que contar las variaciones (sin repetición) de 7 elementos tomados cuatro a cuatro.

$$V_4^7 = \frac{7!}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$

Respuesta: los cumpleaños de cuatro personas pueden distribuirse en los días de la semana los, de modo que no haya coincidencias de 840 maneras diferentes.

b) En este caso se trata de calcular la probabilidad de que al menos dos cumpleaños coincidan; es más simple calcular la probabilidad de que no coincidan y aplicar el teorema 2.1.

Calculamos la probabilidad de que no coincidan. El número de casos favorables es el calculado en el inciso a, $n_A = 840$.

Calculemos el número de casos posibles: el primer cumpleaños puede ocurrir cualquier día de la semana, es decir, de 7 formas; para cada una de estas formas cada uno puede ocurrir de 7 formas y así sucesivamente.

Luego, según el principio de multiplicación $n = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2\,401$

$$P\text{ (no coincidencia)} = \frac{840}{2\,401} = 0{,}35$$

Luego, si A es el suceso que consiste en que al menos dos coincidan

$$p(A) = 1 - p(no\,A) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$$

Respuesta: la probabilidad de que en un grupo de cuatro personas haya al menos dos que nacieran el mismo día de la semana es de un 65 %. ◆

Existen diversidad de situaciones tales como seleccionar un equipo de personas, elegir cartas de una baraja o formar subconjuntos específicos de objetos, en los cuales el orden en que se elijan no es relevante, en tales casos únicamente interesa que los elementos formen parte del subconjunto. Para los problemas de conteo con tales características resulta que las llamadas combinaciones son una herramienta fundamental.

Definición 2.5

Se llama **combinaciones** de n objetos tomados p a p, a todos los subconjuntos de p elementos que se pueden tomar con los n elementos.

Ejemplo 2.24

En un IPU hay 5 sociedades científicas (SC) que investigan sobre temas de la Tarea Vida ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar tres cualesquiera de ellas para que participen en un evento científico auspiciado por el CITMA en el Consejo Popular?

Resolución:

En la figura 2.22 se indica cómo formar las combinaciones.

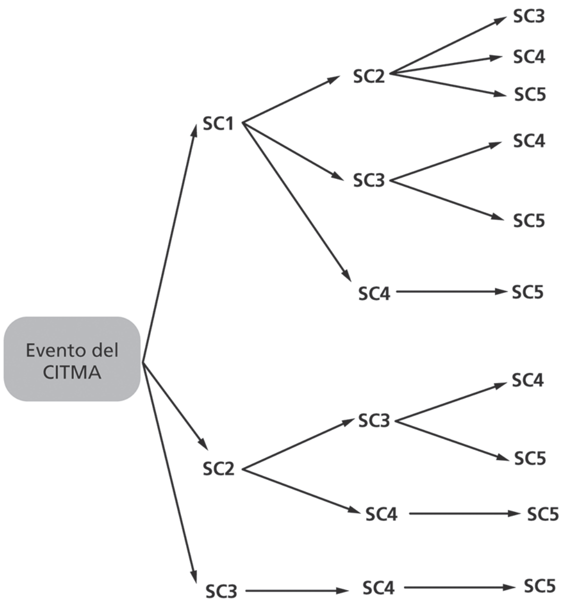


Fig. 2.22

Para contarlas debemos observar que, con cada tres SC diferentes, se forma una sola combinación, en lugar de 3! = 6 variaciones diferentes que se forman con ellas, luego el total será

$$\frac{V_3^5}{3!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 10$$

Respuesta: las tres SC que participarían en el evento del CITMA, se pueden seleccionar de 10 formas diferentes. ◆

Atención

Las combinaciones se diferencian de las variaciones en el hecho de que se forman subconjuntos en los que el orden no influye en los resultados de la selección.

El principio aplicado en el ejemplo 2.23 se cumple en general.

Teorema 2.6

El número de **combinaciones** o coeficiente binomial de n elementos tomados p a p se denota C_p^n o $\binom{n}{p}$ y se calcula con la fórmula $\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$.

Demostración

Para demostrar este teorema basta observar que cada *p!* variación da lugar a una sola combinación, pues no importa el orden, luego,

$$\binom{n}{p} = \frac{V_p^n}{\text{p!}} = \frac{n!}{(n-p)!\text{p!}}$$

Ejemplo 2.25

De un grupo de diez miembros del ejecutivo de la FEEM de un IPVCE, hay que seleccionar 3 delegados a la asamblea Municipal. ¿De cuántas formas pueden elegirse?

Resolución:

Como en este caso no importa el orden, se trata de combinaciones:

$$C_3^{10} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 3 \cdot 2} = 5 \cdot 3 \cdot 8 = 120$$

Respuesta: los delegados a la asamblea municipal de la FEEM se pueden seleccionar de 120 formas diferentes. ◆

Ejemplo 2.26

Un proyecto sociocultural que promueve el conocimiento de las tradiciones culturales está integrado por 6 hembras y 4 varones. Se selecciona al azar a dos de sus miembros para que presenten sus resultados en un evento comunitario. ¿Cuál es la probabilidad de que se escojan dos hembras?

Resolución:

En esta oportunidad los casos favorables son los que consisten en que los dos miembros seleccionados sean hembras y el total de casos posibles son todas las formas de extraer dos hembras.

Como no se marca el orden de extracción (las dos personas son las mismas, cualquiera sea el orden en que se sacaron), se trata de combinaciones y la cantidad de casos posibles es: $n = C_8^{10} = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$

Los casos favorables son los que consisten en extraer dos hembras (suceso A) de nuevo no interesa el orden y como son 4.

$$n_A = C_2^4 = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{4} = 6$$

luego $p(A) = \dfrac{C_2^4}{C_2^{10}} = \dfrac{6}{45} = \dfrac{2}{15} = 0{,}13$

Respuesta: la probabilidad de que se escojan tres hembras es de 13 %. ◆

Aplica tus conocimientos

1. Entre los números naturales del 1 al 1 000 hay 500 que son divisibles por 2; 333 que los son por 3 y 166 divisibles por 6. ¿Cuántos números entre 1 y 1 000 son impares y múltiplos de 3?
2. Si se selecciona al azar un número de tres cifras. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de sus dígitos sea 4?
3. Del ejemplo 2.25 calcula:

   a) La probabilidad de que se seleccionen dos varones.

   b) La probabilidad de que se seleccione una hembra y un varón.

Conéctate

Accede al sitio: https://curricular.cubaeduca.cu/education/category?id=2802&-type=content-manager a la lección Ejercicios sobre técnicas de conteo y realiza los ejercicios que aparecen.

Ejercicios del epígrafe 2.3

Principios básicos de la teoría combinatoria

1. ¿Cuántos números de tres cifras son múltiplos de 5?

2. De la ciudad A hasta la B conducen cinco caminos, y de la ciudad B a la C tres. ¿Cuántos caminos que pasan por B conducen desde A hasta C?

3. ¿De cuántos modos se pueden escoger una vocal y una consonante de la palabra número?

4. A la cima de una montaña conducen 5 caminos. ¿De cuántas maneras puede subir un turista y descender de ella utilizando esos caminos? ¿Y si el ascenso y el descenso tienen lugar por caminos diferentes?

5. En una reunión de 18 personas todas se saludan entre sí y ningún par de personas se saluda más de una vez. ¿Cuántos saludos de mano se dan?

6. En una tienda de ropa hay camisas para hombres en 4 tallas diferentes, y en tres colores distintos cada talla. ¿Cuántos tipos diferentes de camisa hay en la tienda?

7. De entre 3 ejemplares de un texto de Algebra, 7 de Geometría y 7 de Trigonometría hay que escoger un ejemplar de cada texto. ¿Cuántos modos de hacerlo existen?

8. Hay 6 pares de guantes de distintas medidas. ¿De cuántas maneras se pueden escoger entre ellos un guante de la mano izquierda y otro de la mano derecha, de forma que estos sean de distintas medidas?

9. Se forman signos que consisten en una figura geométrica (circunferencia, cuadrado, triangulo o hexágono), una letra y una cifra. ¿Cuántos signos de este tipo pueden formarse?

10. Dados los conjuntos $A=\{a;b;c\}$, $B=\{1;2\}$ y $C=\{p;q\}$. Determina cuántas ternas ordenadas $(x;\ y;\ z)$ pueden formarse tales que $x \in A$, $y \in B$, $z \in C$.

11. ¿De cuántas maneras diferentes pueden escribirse las letras *ABCD*, una detrás de la otra y sin repetir ninguna?

12. Un niño tiene un juego de figuras plásticas. Cada figura es de uno de los tres colores (azul, rojo, blanco); uno de los tamaños (pequeño, mediano, grande) y de una de las cuatro formas (cuadrada, redonda, triangular, ovalada) el juego tiene una figura de cada uno de los tipos posibles.

a) ¿De cuántas figuras consta el juego?

b) ¿Cuántas figuras triangulares hay?

c) ¿Cuántas figuras no son ovaladas?

d) ¿Cuántas figuras azules tiene el juego?

e) ¿Cuántas figuras difieren de la figura triangular roja grande en exactamente dos características?

13. ¿Cuántos números de dos dígitos pueden formarse con las cifras 1; 2; 3; 4; 5; 6 y 7? ¿Cuántos de ellos tienen sus dos cifras diferentes?

14. ¿Cuántos números de tres dígitos pueden formarse con las cifras del número 24 356? ¿Cuántas de ellas son pares?

15. ¿Cuántos números de tres cifras pueden formarse que son múltiplo de 2?

16. Determina la cantidad de números impares que tienen tres cifras y son menores que 500.

17. ¿Cuántos números de cuatro cifras existen?

18. ¿Cuántos números naturales de cuatro cifras existen que no contiene la cifra 7?

19. ¿Cuántos de los primeros 1 000 números enteros positivos tienen todas sus cifras diferentes?

20. ¿Cuántos números naturales mayores que 53 000 tienen las dos propiedades siguientes?

I. Todos sus dígitos son diferentes.

II. Entre sus dígitos no están ni el 0 ni el 9.

21. ¿De cuántas formas se puede indicar en un tablero de ajedrez dos casillas, una blanca y otra negra?

22. ¿De cuántas formas se puede escoger en un tablero de ajedrez, un cuadro blanco y uno negro de manera que no estén ni en la misma fila ni en la misma columna?

23. Al transmitir informaciones por telégrafo se utiliza el código Morse. En este código, las letras, las cifras y los signos de puntuación se representan por puntos y rayas.

Por ejemplo, la letra E se representa por un punto (.) y la letra L por tres puntos y una raya (...-). Empleando hasta cinco signos ¿cuántas letras pueden codificarse?

24. ¿Cuántos números naturales existen entre 10 y 96, ambos inclusive? ¿Y entre 158 y 2 030? ¿Y entre los números naturales *a* y *b* con $a < b$?

25. Cuántos pares ordenados ($x;y$) de números enteros ordenados no negativos existen tales que:

a) $x + y = 4$ b) $x + y = 20$ c) $x + y = n\,;n \in \mathbb{N}$

26. ¿Cuántos números naturales de tres cifras existen tales que la suma de sus dígitos es 5?

27. En una Facultad de idiomas se conoce que de un grupo de 67 estudiantes: 47 hablan el idioma inglés, 35 el ruso y 23 ambos idiomas. ¿Cuántas personas en el instituto no hablan ni el inglés ni el ruso?

28. De un grupo de jóvenes se conoce que a 19 les gustan las matemáticas, a 17 las artes plásticas, a 11 les gusta la historia, 12 prefieren matemáticas y artes plásticas; 7, historia y matemáticas; 5, artes plásticas e historia. A 2 les gustan las 3 y a 5 ninguna de ellas ¿Cuántos jóvenes hay en el grupo?

29. En una encuesta relacionada con los hábitos de lectura se obtienen los datos siguientes:

El 60 % de los encuestados lee el periódico A, el 50 % lee el periódico B, el 50 % lee el periódico C, el 30 % lee los periódicos A y B, el 20 % los periódicos B y C, el 30 % los periódicos A y C y el 10 % lee los tres periódicos.

a) ¿Qué tanto por ciento de los encuestados lee exactamente los dos periódicos?

b) ¿Qué tanto por ciento no lee ninguno de los tres periódicos?

30. El responsable de un grupo de estudiantes dio los siguientes datos sobre ellos: “en nuestra aula hay 45 alumnos, de los cuales 25 son varones, 30 alumnos tienen buenas notas entre ellos 16 varones. Entre los 28 estudiantes que practican deporte hay 10 varones y 17 con buenas notas. Hay 15 varones que tienen buenas notas y practican deportes”.

Días después el profesor guía, quien les impartía matemáticas, lo llamó y le dijo que había un error en los datos.

Muestra que, efectivamente los datos son erróneos.

(Sugerencia: calcula la cantidad de estudiantes del grupo que no practican deportes ni tienen buenas notas).

31. En un grupo de 30 estudiantes de la Escuela de Arte, se conoce que 12 estudian música, 16 estudian danza y 16 estudian canto. Si tres estudian las 3 (música, canto y danza), 5 estudian solamente música y danza, 2 solamente música y 6 solamente canto. ¿Cuál es la probabilidad de que al seleccionar uno de ellos estudie solamente danza?

32. Un grupo de 40 estudiantes conversan acerca de las carreras que habían seleccionado. 21 estudiantes pidieron Arquitectura, 21 estudiantes pidieron Ingeniería Industrial, 17 Economía. 3 seleccionaron las tres carreras, 5 solo Ingeniería Industrial y Economía, 2 solamente Economía y 4 solamente Ingeniería Industrial.

a) ¿Cuántos estudiantes seleccionaron solo Arquitectura?
b) ¿Cuántos estudiantes seleccionaron solo Arquitectura e Ingeniería Industrial?
c) ¿Cuántos estudiantes no seleccionaron ninguna de estas carreras?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que al seleccionar al azar uno de los estudiantes que pidieron una de estas tres carreras, este haya seleccionado solamente una carrera?

Variación y combinación

33. Forma todas las variaciones de las letras A, B, C, D, E, F tomadas dos a dos.

34. Forma las variaciones de los números 1; 2; 3; 4 tomadas tres a tres.

35. Calcula el número de variaciones de siete objetos tomados cinco a cinco.

36. ¿De cuántas maneras se pueden depositar 4 cartas en 7 buzones, no depositando más de una carta en cada buzón?

37. Una línea de ferrocarriles tiene 30 estaciones, cada una de las cuales expide boletos a las demás estaciones. Determina cuántas clases de boletos se necesitan.

38. En una carrera de 100 metros planos participan 8 corredores. ¿De cuántas maneras diferentes pueden quedar ubicados los corredores en la carrera (sin considerar empates)?

39. Una sala de teatro tiene 6 puertas. ¿De cuántas maneras es posible entrar por una puerta y salir por otra diferente?

40. ¿Cuántos números entre 100 y 999, ambos inclusive, están formados solamente por dígitos impares diferentes?

41. ¿De cuántas formas puede confeccionarse una bandera de tres franjas de colores distintos si tienen telas de colores azul, blanco, rojo, amarillo y verde? ¿Y si la franja superior debe ser de color rojo?

42. ¿Cuántos diccionarios diferentes hay que editar para que se puedan hacer traducciones directamente entre cualquiera de los idiomas: español, ruso, inglés, francés y alemán?

43. Con los dígitos 1; 2; 3; 4; 5 y 6, ¿Cuántos números menores que 1 000 pueden formarse que no tengan cifras repetidas?

44. ¿Cuántos números de cuatro cifras diferentes pueden formarse con las cifras del número 2 574? ¿Cuántos de ellos son impares?

45. Escribe todas las permutaciones del conjunto $\{azul, rojo, blanco\}$.

46. Calcula el número de todas las "palabras" tengan sentido o no, que se obtienen permutando las letras de la palabra AMOR. Escríbelas.

47. ¿De cuántas maneras pueden disponerse los 9 jugadores de un equipo de béisbol? ¿De cuántas maneras si el lanzador y el receptor son fijos?

48. ¿De cuántas maneras 6 soldados pueden colocarse en fila? ¿De cuántas maneras si a uno de ellos no se le permite ocupar los extremos?

49. ¿De cuántas maneras pueden sentarse 5 personas alrededor de una mesa redonda?

50. ¿De cuántas maneras pueden colocarse 8 llaves en un llavero?

51. Escribe las combinaciones de las letras A, B, C, D tomadas tres a tres.

52. Un equipo de 8 estudiantes realizó un trabajo de investigación. En la exposición del trabajo participan 4 estudiantes. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar los 4 estudiantes?

53. Hay 20 puntos en el plano, de los cuales no hay tres alineados. ¿Cuántas rectas pueden trazarse uniendo pares de puntos? ¿Cuántos triángulos pueden formarse cuyos vértices sean tres de estos puntos?

54. En una circunferencia están situados 20 puntos. Considerando estos puntos como vértices, ¿cuántos triángulos inscritos en la circunferencia pueden trazarse?
55. En un plano hay 12 puntos, pero 4 están en línea recta. Determina el número de rectas de unión.
56. Calcula el número de diagonales de un polígono de n lados.
57. Durante la etapa clasificatoria de la liga élite del béisbol cubano participan 6 equipos. Si cada par de equipos se enfrentan 8 veces, ¿cuántos juegos se realizan en total?
58. Una compañía está formada por 3 capitanes, 6 sargentos y 60 soldados reclutados. ¿De cuántos modos puede elegirse entre ellos un destacamento formado por un capitán, dos sargentos y 20 soldados reclutados?
59. ¿Cuántas formas existen de escoger 12 personas de entre 17, si dos personas de estas 17 no pueden ser elegidas juntas?
60. En una urna hay fichas con los números 1; 2; 3;…; 10. De ella se sacan tres fichas a la vez. ¿En cuántos casos la suma de los números escritos en esas fichas será igual a nueve? ¿Y no menor que 9?
61. Un coro está formado por diez participantes. ¿De cuántos modos se pueden escoger seis participantes durante tres días, de forma que cada día el coro tenga distintas composiciones?
62. Alejandro necesita encender su televisor, pero su hermano menor le quitó las dos pilas al control remoto y las juntó con tres pilas iguales pero que ya no funcionan. ¿Cuántas veces como máximo Alejandro debe probar las pilas para acertar con las dos que funcionan?
63. Dados 5 segmentos de longitud 4 cm, 6 cm, 7 cm, 8 cm y 9 cm, respectivamente. ¿Cuántos triángulos diferentes pueden formarse?
    Nota: dos triángulos se consideran diferentes si no son congruentes.
64. ¿Cuántos números naturales entre 10 000 y 100 000 tienen como únicos dígitos 6; 7 u 8? ¿Cuántos 6; 7; 8 y 0?
65. En una reunión deben intervenir cinco personas: A, B, C, D y E ¿De cuántas maneras se pueden distribuir en la lista de oradores con la condición de que B debe intervenir inmediatamente después de A?

66. Hay nueve libros diferentes en un estante: cuatro son de color rojo y cinco son de color verde. ¿De cuántas maneras diferentes es posible colocarlos uno al lado del otro en el estante de tal forma que?

a) No haya restricciones.

b) Los libros de color rojo deben estar juntos y los de color verde también.

c) Los libros de color rojo deben estar juntos, pero los de color verde pueden estarlo o no.

d) No hay dos libros juntos del mismo color.

67. Un examen consta de diez preguntas ¿De cuántas maneras puede un estudiante responder de manera correcta, exactamente 8 preguntas? ¿De cuántas maneras puede responder erróneamente a lo sumo a dos preguntas?

68. Un grupo de danza está formado por 7 hombres y 4 mujeres. Es necesario seleccionar 6 personas de forma tal que entre ellas haya no menos de 2 mujeres. ¿De cuántas maneras puede efectuarse la elección?

69. Para los premios de un concurso de Matemáticas se tienen tres ejemplares de un libro, 2 de otro y 1 de un tercero. ¿De cuántos modos se pueden entregar los premios (primero, segundo y tercer lugares), si en el concurso participan 20 personas y a nadie se le otorgan dos ejemplares de un mismo libro, pero se le pueden entregar dos o tres libros diferentes?

70. Dos muchachos y dos muchachas se colocan en fila, al azar, para tomarse una fotografía, ¿Cuál es la probabilidad de que las muchachas y los muchachos queden alternados en la fotografía?

71. En una habitación hay 5 personas que llevan números de identificación del 1 al 5. Si se seleccionan al azar, dos personas, ¿cuál es la probabilidad de que entre estos dos números de identificación el mayor sea el 3?

72. Tomando al azar tres dígitos del conjunto se forma un número de tres cifras distintas. Calcula la posibilidad de que sea múltiplo de tres.

73. Un profesor de Educación Física decide dividir a sus estudiantes en dos equipos de a cinco para jugar baloncesto. Para esto anota los nombres en 10 papelitos (uno en cada papelito) y los coloca en una caja. Uno de los muchachos le dice a su mejor amigo: "ojalá caigamos en el mismo equipo". El amigo le responde: "tenemos 50 % de probabilidad de jugar juntos". ¿Fundamenta si es correcta su afirmación?

74. Se lanzan cuatro dados. ¿Cuál es la probabilidad de que los cuatro números mostrados sean diferentes?

75. En un lote de 12 artículos se conoce que hay 4 de ellos que son defectuosos. Si se escogen dos artículos del lote al mismo tiempo, calcula la probabilidad de que:

a) Los dos sean defectuosos.
b) Los dos sean buenos.
c) Uso sea bueno y el otro defectuoso.
d) Al menos un artículo sea bueno.

76. Se reúnen 7 personas: calcula la probabilidad de que todas cumplan años en diferentes días de la semana.

77. Una delegación deportiva está formada por 5 boxeadores, 3 esgrimistas y 4 luchadores para representar a Cuba en un evento deportivo internacional.

a) ¿De cuántas formas se pueden seleccionar dos deportistas para que sean los abanderados de la delegación?
b) ¿De cuántas formas se pueden ordenar sus nombres en la relación de participantes por Cuba si los boxeadores deben encabezarla?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger 2 deportistas uno sea boxeador y el otro esgrimista?

78. Una Sociedad Científica de Matemática está integrada por tres hembras y dos varones. Determina:

a) ¿De cuántas maneras diferentes en que pueden sentarse uno al lado de otro, de modo que los varones queden uno en cada extremo, para exponer ante el grupo el resultado de sus investigaciones?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que al seleccionar al azar un integrante de la Sociedad Científica, este resulte una hembra?

c) Si se desea seleccionar al azar 2 estudiantes entre los integrantes del de la Sociedad Científica, determina la probabilidad de que:

– Ambos sean hembras.

– Que sean del mismo género.

– Que sea una hembra y un varón.

79. Un pelotón de estudiantes Camilitos está integrado por 30 estudiantes, de ellos 10 son hembras.

79.1 Copia en tu cuaderno de trabajo la respuesta correcta en cada incisos:

a) La cantidad de maneras posibles en que pueden colocarse en una columna para la marcha todos los estudiantes de modo que los varones marchen al final es:

A) $2 \cdot 20! \cdot 10!$ B) $20! \cdot 10!$ C) $30!$ D) Ninguna de las anteriores

b) La cantidad de maneras posibles de seleccionar 4 estudiantes del grupo de modo que solo uno de ellos sea hembra es:

A) $10V_3^{20}$ B) $\binom{20}{4}$ C) $\binom{20}{3}\cdot 10$ D) V_4^{10}

c) El número de maneras diferentes de seleccionar un monitor de Química, uno de Física y uno de Matemática es de:

A) $30 \cdot 29 \cdot 28$ B) $\binom{30}{3}$ C) P_3 D) V_3^{10}

79.2 Calcula la probabilidad de que al seleccionar al azar 3 estudiantes del grupo como mínimo 2 sean hembras.

80. Una fábrica produce 1 200 lámparas LED, de las cuales 18 son defectuosas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir una al azar sea defectuosa?

b) Si se compran 5 lámparas, ¿cuál es la probabilidad de que ninguna sea defectuosa?

81. Un gen recesivo sigue un patrón de herencia mendeliana. En una pareja heterosexual en la que ambos son portadores heterocigotos (Aa), se sabe que la probabilidad de que un hijo manifieste el gen recesivo (aa) es del 25 %.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un hijo herede el gen y lo manifieste (es decir, sea aa)?

b) Si se estudian 5 hijos de familias independientes, cada uno con padres heterocigotos (Aa), ¿cuántas combinaciones distintas pueden darse en las que exactamente 2 de los 5 hijos manifiesten el gen recesivo?

82. Un sistema de seguridad requiere contraseñas de 6 caracteres con 3 letras (sin repetir) y 3 números (sin repetir).

a) ¿Cuántas contraseñas únicas pueden crearse?

b) Si alguien prueba una contraseña al azar, ¿cuál es la probabilidad de acertar?

83. Demuestra que si $n, p \in \mathbb{N}$ y $n > p$, entonces

a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n}$ b) $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ c) $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

84. Calcula de la manera más ventajosa

a) $C_2^7 + C_3^7$ b) $C_3^9 - C_3^8$

c) $C_9^{13} + C_9^{14} + C_{10}^{13}$ d) $\binom{21}{12} + \binom{23}{18} + \binom{21}{16} + \binom{22}{6}$

2.4 Teorema del binomio

▲ ¿Qué beneficios ofrece el conocimiento de la estadística y la combinatoria?

En el desarrollo del capítulo has apreciado que la teoría combinatoria proporciona conceptos y recursos matemáticos para contar y combinar elementos de conjuntos en diversidad de situaciones. Sin embargo, existen otros contextos combinatorios en campos tales como Economía y Finanzas, Ingenierías y Ciencias Sociales, Biología y Genética, entre otros, que exigen modelaciones matemáticas más específicas.

Considera que eres especialista en genética de un laboratorio de la Agricultura, en el cual se investiga sobre el mejoramiento genético de *la papa (figura 2.23), a partir de dos variedades que difieren en su **resistencia a plagas de nemátodos**.*

Fig. 2.23

Esa característica, está controlada por un alelo dominante (R) sobre un alelo recesivo (r) y al realizar un cruce entre dos plantas heterocigotas para este rasgo (Rr x Rr), las posibles combinaciones genotípicas de la descendencia que se obtienen NN, Nn y nN resultan en plantas resistentes a plagas de nemátodos, mientras que el genotipo nn resulta en plantas no resistentes, luego la probabilidad de que una planta sea resistente a plagas de nematodos es de 75 % y la probabilidad de que no sea resistente es de 25 %.

¿Cómo puedes determinar la probabilidad de obtener exactamente k *plantas resistentes a plagas de nemátodos de un total de* n *plantas en la descendencia?*

Situaciones como la anterior, se modelan con la fórmula:

$P(x=k)=\binom{n}{k}\cdot a^{k}\cdot b^{n-k}$, donde

- n, es el total de ensayos, pruebas o estudios (*total de plantas de la descendencia*)
- k, es el número exacto de ensayos éxitos deseados (*total de plantas deseadas con la característica en estudio*)
- a, es la probabilidad de éxito en un ensayo (*probabilidad de que una planta tenga la característica estudiada).*
- b, es la probabilidad de éxito en un ensayo (*probabilidad de que una planta no tenga la característica estudiada)*
- $\binom{n}{k}=C_{k}^{n}$, son las combinaciones posibles de obtener exactamente k éxitos de n ensayos (*total de combinaciones posibles de obtener* k *plantas con las caracteristicas en estudio, de una descendencia de* n *plantas*).

Esta fórmula aplicada al cálculo de la probabilidad específica de sucesos que siguen un patrón binomial, resulta ser un sumando del desarrollo de binomios de la forma $(a+b)^n$, de los cuales son casos particulares $(a+b)^2$ y $(a+b)^3$, que ya conoces. En general el desarrollo de binomios *con grados* $n \in \mathbb{N} : n > 2$ se presenta en el teorema siguiente:

Teorema 2.7 Teorema del binomio

El desarrollo de un binomio de grado n, es:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Donde $\binom{n}{k}$ se denomina coeficiente binomial y es igual al número combinatorio C_k^n.

Observa que la suma de los exponentes de a y b es siempre n y que el coeficiente es el número combinatorio C_k^n donde k es exponente de b.

(Ver la nota 3 al capítulo 2 en los anexos)

Ejemplo 2.27

Hallar el desarrollo de $(a+b)^6$

Resolución:

Según el Teorema del binomio se tiene:

$$(a+b)^6 = \binom{6}{0}a^6 + \binom{6}{1}a^5b + \binom{6}{2}a^4b^2 + \binom{6}{3}a^3b^3 + \binom{6}{4}a^2b^4 + \binom{6}{5}ab^5 + \binom{6}{6}b^6$$

Atención

Observa que los exponentes de a y b suman 6.

Se calcula cada coeficiente binomial

$C_0^6 = 1$; $C_1^6 = 6$; $C_2^6 = 15$; $C_3^6 = 20$; $C_4^6 = 15$; $C_5^6 = 6$; $C_6^6 = 1$

Luego, el desarrollo de $(a+b)^6$ es

$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$. ◆

De la historia

El teorema del binomio fue formulado por Isaac Newton, en el siglo XVII, como parte de su trabajo en análisis matemático y en el desarrollo del cálculo. Aunque los desarrollos de los binomio $(a + b)^2$ y $(a + b)^3$ se conocían desde tiempos antiguos, y fueron exploradas por matemáticos árabes e indios, la generalización de Newton, que incluía exponentes fraccionarios y negativos, representó un avance significativo, en el desarrollo de las teorías matemáticas y sus aplicaciones.

Ejemplo 2.28

Determinar el coeficiente del término a^3b^9 en el desarrollo del binomio $(a+b)^n$.

Resolución:

Como en el coeficiente binomial $\binom{n}{k}$, k es el exponente de b y la suma de los exponentes de a y de b es n, se deduce que el coeficiente de a^3b^9 es $\binom{12}{9}=\frac{12!}{3!9!}=220.$ ◆

Ejemplo 2.29

Encontrar del desarrollo de $\left(m+\frac{1}{m}\right)^{10}$

a) El cuarto término.

b) El término independiente.

Resolución:

a) Como el primer término es m^{10}, porque el exponente de $\frac{1}{m}$ es cero y este exponente aumenta de 1 en 1, en el cuarto término aparece $\left(\frac{1}{m}\right)^3$, entonces este término es: $\binom{10}{3}m^7\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^3=\frac{10!}{7!3!}m^7\cdot\frac{1}{m^3}=120m^4$.

b) En el término independiente m y $\frac{1}{m}$ deben aparecer con el mismo exponente como la suma de ambos es 10, el exponente de cada uno es 5, luego, el término independiente es: $\binom{10}{5}m^5\cdot\frac{1}{m^5}=\binom{10}{5}=\frac{10!}{5!5!}=252.$ ◆

En general el teorema del binomio resulta una herramienta poderosa para resolver problemas que permiten dar significado a la teoría matemática con sus aplicaciones del mundo real en muchos campos. Cada sumando de su desarrollo representa una posible combinación de la probabilidad de éxitos y fracasos de un suceso.

Ejemplo 2.30

De la investigación para el mejoramiento genético de las plantas de papas, planteado en la situación inicial. ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente dos plantas resistentes a plagas de nematodos de un total de cuatro plantas en la descendencia?

Resolución:

De la información que brinda la situación inicial se conoce que:

- el total de plantas de la descendencia es $n = 4$.
- el número exacto de plantas resistentes a plagas de nemátodos, deseadas es $k = 2$.
- la probabilidad de que una planta sea resistente a plagas de nemátodos es de (75 %), $a = \frac{3}{4}$.
- la probabilidad de que una planta no sea resistente a plagas de nemátodos es (25 %), $a = \frac{1}{4}$.

Como se quiere calcular la probabilidad de obtener exactamente 2 plantas resistentes en 4 plantas descendientes, al tomar del Teorema del binomio la fórmula: $P = \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ y sustituir, obtenemos que $P(x = 2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$ de donde:

el coeficiente binomial $\binom{n}{k} = C_k^n$

$$C_2^4 = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$= \frac{4!}{(4-2)!\,2!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 2!}{2! \cdot 2!} = \frac{12}{2 \cdot 1} = 6$$

Significa que existen 6 combinaciones diferentes en las que puede ocurrir que se obtengan 2 plantas resistentes de un total de 4 plantas descendientes.

$$a^k = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

Como estamos interesados en 2 éxitos (resistentes), elevamos la probabilidad de éxito al cuadrado y se obtiene la probabilidad de que 2 de las plantas sean resistentes al calor.

$$b^{n-k} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

Como 4 – 2 = 2 fracasos (no resistentes), se eleva la probabilidad de fracaso al cuadrado. Y se obtiene la probabilidad de que las otras 2 plantas no sean resistentes.

Luego, $P(x=2) = 6 \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{16} = \frac{54}{256} \approx 0{,}2109$.

Por lo tanto, la probabilidad de obtener exactamente 2 plantas resistentes a la plaga de nemátodos de un total de 4 plantas descendientes es de aproximadamente 0,2109 (21,09 %). ◆

También existe otro recurso matemático que permite encontrar los coeficientes del desarrollo de un binomio, conocido como Triángulo de Pascal o de Tartaglia.

Potencia de binomio $(a \pm b)^n$

$(a \pm b)^0 = 1$	$n = 0$
$(a \pm b)^1 = a \pm b$	$n = 1$
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	$n = 2$
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$	$n = 3$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

Fig. 2.24

Nótese en la figura 2.24 que a partir de n = 2 (coeficientes de la tercera fila del triángulo) después del primer coeficiente (1) el resto, excepto el último (1); se obtienen de adicionar los dos coeficientes que se encuentran en la parte superior de este. Así aparecen: 1, el coeficiente 2 = 1 + 1 y 1. Para n = 3 (cuarta fila) tenemos: 1, 3 = 1 + 2, 3 = 2 + 1, 1 y así sucesivamente.

Ejemplo 2.31

Hallar del desarrollo de $(x+y)^4$

a) El coeficiente correspondiente al tercer término.

b) El cuarto término.

Resolución:

a) En el desarrollo de $(x+y)^4$ tiene 5 términos.
Para $n = 4$ los coeficientes son: 1, $4=(1+3)$, $6=(3+3)$, $4=(3+1)$ y 1

Respuesta: el coeficiente correspondiente al tercer término es 6.

b) El exponente de la x va decreciendo iniciando por $n = 4$ y el de la y por el contrario va creciendo desde $n = 0$.

De manera que $(x+y)^4$ tiene 5 términos x^4y^0, x^3y^1, x^2y^2, x^1y^3, x^0y^4; pero ya conocemos sus coeficientes, $1x^4y^0$, $4x^3y^1$, $6x^2y^2$, $4x^1y^3$, $1x^0y^4$; que se puede expresar: x^4, $4x^3y$, $6x^2y^2$, $4xy^3$, y^4.

Respuesta: el término que ocupa la cuarta posición en el desarrollo de $(x+y)^4$ es $4xy^3$. ◆

Investiga y aprende

1. Indaga en otras fuentes de información de reconocimiento científico sobre las propiedades del triángulo de Pascal. ¿Cómo puedes aplicar algunas de ellas en el desarrollo de potencias de binomio?

   1.1 ¿Qué relación tiene alguna de estas propiedades con el Teorema del binomio?

   1.2 ¿Qué ventajas y desventajas tienen la utilización de estas dos herramientas?

Aplica tus conocimientos

1. Halla el coeficiente del tercer, quinto y décimo término en el desarrollo de:

   a) $(x-1)^6$ b) $(a+b)^{28}$

   1.1 ¿Existen otros términos con esos mismos coeficientes? ¿Cuál es el coeficiente de a^1b^5 y $a^{17}b^{11}$?

1.2 ¿Qué herramienta utilizaste para determinar los coeficientes?

2. Para probar un algoritmo de procesamiento del lenguaje natural para analizar la frecuencia de aparición de ciertas palabras en los textos científicos y literarios, se selecciona un artículo de Economía, con el interés de calcular la probabilidad de que la palabra "sostenible", aparezca exactamente 5 veces en un párrafo de 7 oraciones, asumiendo que la probabilidad de aparición de la palabra en cada oración es $p = \frac{1}{3}$. ¿Escribe el algoritmo y calcula el resultado que se obtiene?

Conéctate

Indaga en Internet sobre: el desarrollo e implementación de *softwares* que aplican el teorema del binomio y otras técnicas probabilísticas, Elabora un informe de los campos de utilización de esas herramientas y bibliotecas informáticas.

Ejercicios del epígrafe 2.4

1. Halla el desarrollo de:

a) $(m+n)^6$ b) $(a+3)^4$ c) $(a-b)^5$ d) $\left(h-\frac{1}{2}\right)^3$

2. Determina el coeficiente del término:

a) x^3y^8 en el desarrollo de $(x+y)$

b) x^3 en el desarrollo de $(x+2)^5$

3. Desarrolla:

a) $(x+2y)^3$ b $(2x+5y)^4$ c) $\left(\sqrt{2}+a\right)^4$ d) $\left(\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{4}v\right)^6$

4. Calcula:

a) El sexto término de $(x-y)^{15}$

b) El octavo término de $(2a-x)^{10}$

c) El cuarto término de $(x+3y)^9$

d) El décimo término de $(2a+b)^{15}$

5. Halla el término independiente de x en el desarrollo de:

a) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{14}$ b) $\left(3x^2-\frac{1}{2x}\right)^9$ c) $\left(\frac{1}{x^5}+2x^2\right)^7$ d) $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{3n}$

6. Calcula y expresa el resultado como un poliniomio

a) $(x+1)^4+(x-1)^4$ b) $(1+4a)^3-(1-4a)^3$

7. Del triángulo de Pascal, determina:

a) ¿Cuál es la suma de los números en la fila 5?

b) El sexto número de la sucesión de Fibonacci.

8. Demuestra que para todo n natural se cumple que:

a) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2$ b) $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$

Ejercicios del capítulo

1. En la tabla 2.15 se le plantean seis características, de un grupo de estudiantes de 12.º grado, seleccionados al azar de la matrícula del grado para hacer un estudio sobre sus preferencias por tipo de carrera para su ingreso a la educación superior, obtenidas a partir de una encuesta realizada.

Tabla 2.15

Sexo	Color de la piel	Opinión sobre la calidad de la preparación que reciben	Tipo de carrera por la que opta	Resultados docentes en Matemática	
				10.º grado	11.º grado
M	N	Muy Buena	C. Técnicas	95,75	92,5
M	B	Buena	C. Naturales y Matemática	96	99,5
M	B	Muy Buena	C. Naturales y Matemática	85	89,5
M	M	Regular	C. Pedagógicas	90,3	94
M	M	Mala	C. Técnicas	92	93.5
M	B	Buena	C. Médicas	98,5	92,5
F	B	Muy Buena	C. Económicas	93	97
M	N	Muy Buena	C. Técnicas	92	91,5
M	M	Buena	C. Naturales y Matemática	94,75	95
M	M	Buena	C. Médicas	97	97,5
M	M	Muy Buena	C. Técnicas	91	90,5

Sexo	Color de la piel	Opinión sobre la calidad de la preparación que reciben	Tipo de carrera por la que opta	Resultados docentes en Matemática	
				10.º grado	11.º grado
F	B	Muy Buena	C. Económicas	96	95,5
M	B	Muy Buena	C. Naturales y Matemática	99	99,5
F	N	Regular	C. Soc. y Humanistas	95	98,5
F	B	Buena	C. Médicas	95,4	96
F	M	Muy Buena	C. Pedagógicas	91,5	94
M	M	Buena	C. Pedagógicas	92,7	90
M	N	Buena	C. Técnicas	89,5	92,4
M	M	Regular	C. Pedagógicas	74,5	79
F	M	Buena	C. Técnicas	87	86
M	B	Muy Buena	C. Agropecuarias	89,2	81
M	B	Muy Buena	C. Médicas	88,3	89,5
M	N	Mala	C. Agropecuarias	77	71,5
F	N	Muy Buena	C. Técnicas	99,2	96.5
M	M	Buena	C. Técnicas	90	92,5
M	M	Regular	C. Pedagógicas	87,7	80
M	B	Buena	C. Naturales y Matemática	97,7	94,5
M	B	Buena	C. Pedagógicas	92	96
F	B	Muy Buena	C. Naturales y Matemática	96,5	98
F	B	Muy Buena	C. Soc. y Humanistas	94,3	92,5
M	B	Muy Buena	C. Técnicas	95,5	97,5
F	B	Buena	Arte	98,5	99
F	N	Buena	C. Médicas	95,8	92,1
M	M	Muy Buena	Arte	97,4	96
M	M	Muy Buena	Cultura Física	87	92,5
F	M	Buena	C. Económicas	98	99,5
F	M	Buena	C. Médicas	99	99,5
F	N	Muy Buena	C. Pedagógicas	94	97.5
M	M	Buena	C. Pedagógicas	92,5	94
M	M	Regular	C. Técnicas	74,5	89

Sexo	Color de la piel	Opinión sobre la calidad de la preparación que reciben	Tipo de carrera por la que opta	Resultados docentes en Matemática	
				10.º grado	11.º grado
M	B	Muy Buena	C. Técnicas	97	96
F	B	Buena	C. Médicas	94,2	91
F	M	Muy Buena	C. Soc. y Humanistas	88,3	92,5
F	N	Buena	C. Económicas	87	91,5
M	M	Buena	C. Técnicas	99,3	96,5
M	B	Buena	C. Médicas	90	92,5
F	B	Muy Buena	C. Agropecuarias	89,7	90
F	B	Muy Buena	C. Soc. y Humanistas	96	95,5
F	M	Buena	C. Económicas	97	99,5
F	B	Buena	C. Médicas	95	98,5
F	M	Buena	C. Agropecuarias	90	91
M	N	Regular	Cultura Física	90	91,5
M	B	Regular	C. Soc. y Humanistas	98,5	99,2
F	M	Muy Buena	C. Técnicas	91,4	95,8
M	B	Muy Buena	Cultura Física	87,5	85

Leyenda
Sexo: M (masculino) F (femenino)
Color de la piel: B (blanco) M (mestizo) N (negro)

a) Determina los indicadores que consideres más adecuados en cada caso utilizando un asistente matemático.
b) Representa gráficamente los resultados utilizando el tipo de gráfico más adecuados en cada caso.
c) Elabora un informe que refleje la caracterización del grupo seleccionado de acuerdo con los resultados obtenidos.

2. Una obra de cuatro tomos se coloca en el estante al azar. Calcula la probabilidad de que los tomos no queden en orden ni de derecha a izquierda ni de izquierda a derecha.

3. Un cubo, cuyas caras están pintadas, se ha dividido en 1 000 cubos iguales más pequeños, los cuales son colocados en una bolsa. Calcula la probabilidad de que uno de los cubos pequeños tomado al azar tenga exactamente.

a) Una cara pintada

b) Dos caras pintadas

c) Tres caras pintadas

4. En una competición de halterofilia hay tres jueces: A, B y C. Cada uno de ellos dispone de un botón o pulsador independiente y oculto a los demás. Si en opinión de un juez el levantador ha alzado el peso manteniéndolo inmóvil sobre su cabeza, con brazos y piernas extendidos, entonces pulsa su botón. Cuando dos o los tres jueces han pulsado su botón, se enciende la luz blanca de "peso superado".

a) Se necesita un circuito eléctrico que conecte los tres botones A, B y C con la luz y que se encienda de acuerdo con la norma anterior. El esquema lógico de dicho circuito se corresponde con el suceso "2 o 3 jueces pulsan su botón". Utiliza el Álgebra de Sucesos y sus propiedades para expresarlo de la forma más simplificada posible.

b) La probabilidad de que un juez falle en su apreciación es del 10 %. ¿Cuál es la probabilidad de que el veredicto final sobre un levantamiento sea erróneo?

5. En una encuesta realizada a un grupo de 50 estudiantes de un IPVCE, sobre los lugares que frecuentan los fines de semana; los resultados fueron los siguientes: 14 estudiantes afirman que asisten al cine, 12 plantean que van al teatro, 22 asisten a una discoteca; 5 dicen asistir solamente al cine y a una discoteca, pues no le gusta el teatro, 12 plantean que ellos solamente van a la discoteca, 4 señalan que asisten al cine y al teatro, y tres manifiestan que cuando salen los fines de semana les da tiempo para ir al cine, al teatro y a una discoteca.

a) De los 50 estudiantes, ¿cuántos no prefieren ninguna de estas tres actividades de esparcimiento?

b) ¿Cuántos estudiantes prefieren solamente asistir a una de las tres actividades?

c) Si entre los estudiantes que prefieren al menos dos de estas diversiones se seleccionan dos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que frecuenten el teatro y la discoteca?

6. En un campeonato de voleibol masculino y femenino, intervienen equipos de 6 países en ambos sexos. ¿De cuántas formas diferentes se pueden repartir los primeros lugares?

7. Luis tiene 9 libros y Ana 7. Todos los libros son diferentes entre sí.

a) ¿De cuántas maneras diferentes puede ordenar Ana sus libros en un estante uno al lado del otro?

b) ¿De cuántas maneras puede escoger Luis 2 de sus libros para prestárselos a Ana?

c) ¿De cuántas maneras pueden intercambiar Ana y Luis dos de los libros de uno por dos de los libros del otro?

8. Un estudiante necesita llamar por teléfono a una compañera de estudio, pero solo recuerda las cuatro primeras cifras de su número telefónico, y que las otras cuatro son distintas entre sí y menores que 5. Si la llama por teléfono al azar, ¿qué probabilidad tiene de acertar?

9. En una mueblería hay 14 lámparas de noche de las cuales se sabe que 5 tienen defectos. Si se escogen al azar 2 lámparas para hacer un chequeo de calidad. Calcula la probabilidad de que:

a) ninguna sea defectuosa,

b) exactamente una sea defectuosa,

c) al menos una sea defectuosa.

10 Si se escriben las 27 letras del alfabeto en un orden aleatorio. ¿Cuál es la probabilidad de que las letras x, y queden juntas?

11. En la figura 2.25 cada par de puntos consecutivos, horizontal y verticalmente dista una unidad.

a) ¿Cuántos cuadrados existen cuyos vértices son cuatro de esos puntos?

b) Si se seleccionan al azar cuatro de los puntos de la figura ¿cuál es la probabilidad de que sea un cuadrado?

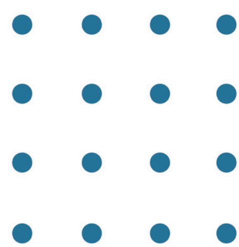


Fig. 2.25

12. Las hortalizas poseen un valor nutritivo significativo, porque en su composición contienen miligramos de vitaminas y minerales. En la tabla 2.16 se muestra las vitaminas contenidas en las hortalizas seleccionadas .

Tabla 2.16

	Hortaliza	Vitamina A	Vitamina B1	Vitamina B2	Vitamina C
1	Coliflor	x	x	x	x
2	Pepino	-	x	x	-
3	Espinaca	-	x	x	-
4	Lechuga	x	x	x	x
5	Melón	-	x	x	x
6	Tomate	-	x	x	x
7	Zanahoria	x	x	x	x
8	Rábano	x	x	x	x
9	Ajo	-	-	-	-

a) ¿De cuántas maneras pueden listarse las hortalizas?

b) ¿De cuántas maneras pueden seleccionarse 3 de las hortalizas que contienen vitamina B1?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar al azar 3 de ellas, para una ensalada estas posean las cuatro vitaminas?

13. En un IPU, como parte del Proyecto Educativo de Grupo, 25 estudiantes de un grupo participan en los cursos complementarios: Los asistentes matemáticos, el GeoGebra (G), La Programación Informática (PI) y El Desarrollo de habilidades artísticas (A). La figura 2.26 representa la distribución de todos los estudiantes (M) del grupo. Se conoce que: 13 asistieron al curso de G, 14 al curso de PI, y 9 al curso de A.

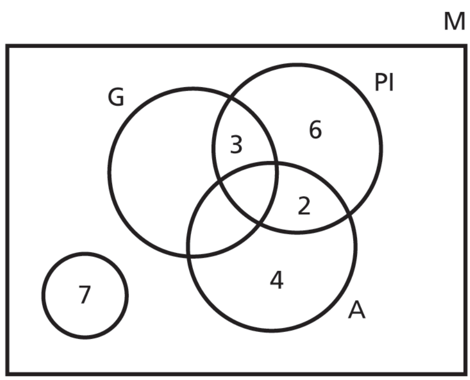


Fig. 2.26

a) ¿Cuántos estudiantes asistieron solamente al curso Los asistentes matemáticos, el GeoGebra?

b) ¿De cuántas maneras es posible seleccionar dos estudiantes entre los que asistieron exactamente a dos de estos tres cursos?

c) ¿Cuál es la matrícula del grupo?

d) Calcula la probabilidad de que, al elegir un estudiante entre los participantes en estos tres cursos, este no haya asistido al curso Los asistentes matemáticos, el GeoGebra.

14. Un hospital debe programar cuatro cirugías en diferentes horarios para cuatro pacientes.

a) ¿De cuántas formas se pueden organizar las cirugías?

b) Si una cirugía de emergencia debe ser la primera, ¿cuántas opciones quedan?

15. Una molécula está compuesta por seis átomos de carbono distinguibles (etiquetados C1, C2, C3, C4, C5, C6), los cuales se enlazan en una cadena lineal, en la cual el orden de los átomos determina una estructura única:

a) ¿Cuántas secuencias lineales distintas pueden formarse con los seis átomos?

b) Si los átomos C1 y C2 deben permanecer siempre adyacentes en la secuencia, ¿cuántas configuraciones diferentes son posibles?

16. Como parte de un estudio médico, se registraron los tiempos de reacción en milisegundos (ms) en 30 pacientes con una enfermedad determinada, como se muestra en la tabla 2.17:

Tabla 2.17

Clases	Pacientes
[100; 200)	5
[200; 300)	12
[300;400)	10
[400; 500)	3

a) Calcula el valor aproximado de la mediana.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que al seleccionar uno de los pacientes, este tenga menos de 300 ms de reacción?

17. Se lanza una moneda cuatro veces.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente dos caras?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una sea escudo?

18. En una fábrica, dos de cada cien componentes tienen defectos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una caja de diez componentes todos funcionen?

b) ¿Cuántas formas hay de inspeccionar tres componentes específicos en un lote de 20?

19. Un equipo de investigación tiene un grupo de 12 ratones sanos para seleccionar cinco de ellos al azar para un experimento:

a) ¿Cuántas combinaciones diferentes de ratones se pueden formar con los 12 disponibles?

b) Antes de realizar la selección, se descubre que dos de los 12 ratones están enfermos y deben ser excluidos del experimento. ¿Cuántas combinaciones de cinco ratones sanos son posibles ahora?

20. Desde un telescopio se puede observar cuatro estrellas de un cúmulo de 15 en una noche.

a) ¿Cuántos conjuntos de estrellas se puede observar?

b) Si es obligatorio observar una estrella en particular, ¿cuántos conjuntos incluyen a esa estrella?

21. Demuestra que para toda $n \geq 4$ se cumple $n! > 2^n$.

Autoevaluación

1. Clasifica en tu cuaderno de trabajo cada una de las proposiciones siguientes en verdaderas o falsas. Justifica las que sean falsas.

a) El objeto de la estadística al igual que el de las probabilidades es estudiar fenómenos aleatorios.

b) La Estadística Descriptiva se dedica a estudiar la descripción y caracterización de un universo, representado por un conjunto de datos para derivar conclusiones acerca de un universo mayor.

c) La muestra es cualquier subconjunto de la población.

d) Las variables discretas tienen su recorrido numerable con valores enteros que no son divisibles por la unidad.

e) En las escalas ordinales se utilizan cualidades para generar categorías y estas no generan un orden explícito.

f) En las escalas de intervalo las opciones son valores numéricos y estos números se pueden utilizar para hacer comparaciones de valores, en que el cero es un valor arbitrario en una escala y no absoluto.

g) La media aritmética es un valor cuantitativo que describe la variabilidad de los datos con respecto a un valor central.

h) La moda siempre representa la frecuencia relativa de más del 50 % de los datos.

i) La mediana de una variable es el punto por debajo del cual se encuentra el 50 % de sus valores.

j) El rango mide la amplitud de una muestra o la dispersión de los valores extremos.

k) Si a todos los datos de una muestra se le adiciona la misma constante, o se le cambian los datos de origen, la varianza varía.

l) La Desviación Típica o Estándar mide cuánto se desvían los datos con respecto a la mediana.

m) La Teoría de las Probabilidades proporciona modelos matemáticos para la descripción de fenómenos deterministas.

n) La probabilidad de un suceso cualquiera A es $P(A) \geq 0$.

ñ) La permutación es un caso particular de variaciones sin repetición.

o) Se llaman variaciones de *n* objetos tomados *p* a *p,* a todos los subconjuntos de *p* elementos que se pueden formar con los *n* objetos.

2. Lee detenidamente y responde:

2.1 Clasifica en tu cuaderno de trabajo las proposiciones siguientes en verdaderas (V) o falsas (F). Justifica las falsas.

En la tabla 2.18 se muestran los rangos de notas alcanzados (sobre 100 puntos) por los estudiantes de 11.º grado de un IPU, en el examen final de Matemática el pasado curso.

Tabla 2.18

Rango de notas	Fi	x_i·F_i
A: [55; 60)	15	862,5
B: [60; 65)	3	187,5
C: [65; 70)	17	1 147,5
D: [70; 75)	2	145
E: [75; 80)	30	2 325
F: [80; 85)	15	1 237,5
G: [85; 90)	45	3 937,5
H: [90; 95)	30	2 775
I: [95; 100)	23	2 242,5

a) La variable estudiada se clasifica como cuantitativa discreta.

b) El límite inferior real de la clase mediana es 85,5.

c) La nota más frecuente es 87,5 puntos.

d) Los estudiantes suspensos representan el 12 %.

e) La probabilidad de que al seleccionar al azar una nota, resulte de uno de los estudiantes con notas de [80; 90) es de aproximadamente 33 %.

f) Si a partir de 90 puntos se considera una nota con calidad, entonces el promedio de calidad de notas es de 94,7 puntos.

2.2 Completa en tu cuaderno de trabajo cada una de las afirmaciones siguientes, de manera que obtengas una proposición verdadera en cada caso.

En la tabla 2.19 se ha registrado la cantidad de pulsaciones por minuto de 35 estudiantes después de una carrera de velocidad en Educación Física.

Tabla 2.19

Ritmo de pulsaciones por minuto	Cantidad de estudiantes
91-100	7
101-110	8
111-120	15
121-130	5

a) El rango de las pulsaciones fue de

b) El valor de la moda se encuentra en la clase

c) Las maneras diferentes en que los estudiantes que tuvieron entre 121-130 pulsaciones por minutos se pueden sentar en tres asientos dispuestos uno al lado del otro es de

d) La probabilidad porcentual de que al seleccionar al azar un estudiante, este haya tenido una pulsación por minuto registrada en la clase 91-100 es de

3. En una empresa de mantenimiento de computadoras. Se consultó a 50 clientes, sobre la calidad del servicio de atención al cliente, con los resultados en los que: 1 es muy insatisfecho, 2 insatisfecho, 3 satisfecho y 4 muy satisfecho.

2	1	2	1	4	4	3	3	3	4	4	4	4	3	3	3	3	2	2	3	2	2	2	2	3
2	3	1	3	2	4	3	2	2	2	3	2	3	1	3	1	1	4	2	2	3	3	2	3	2

a) Identifica la variable y clasifícala, el tipo de escala y la población.

b) Determina los indicadores que consideres más pertinentes.

c) Elabora el gráfico que consideres pertinente para esta información.

d) Haz una interpretación de la información con base en los indicadores.

4. En uno de los policlínicos del municipio se estudió el nivel de glucosa en sangre de los niños que asistieron a consulta, durante una semana. Se tomó la muestra de 48 niños en ayunas, en la cual se obtuvo la siguiente información.

64	36	49	53	67	57	61	58	72	58	40	56
68	63	42	50	56	30	79	54	65	63	34	54
74	52	50	42	51	45	57	51	32	49	58	55
60	42	53	50	38	69	47	59	49	50	76	66

a) Identifica la variable y clasifícala, el tipo de escala y la población.

b) Calcula los indicadores que consideres más pertinentes.

c) Elabora el gráfico que consideres pertinente para esta información.

d) Haz una interpretación de la información con base en los indicadores.

5. En un grupo de estudiante hay 20 hembras y 15 varones. Escribe en tu cuaderno de trabajo si se trata de variación (V), permutación (P), combinación (C) o probabilidad (p) y escribe su fórmula en casa inciso:

a) ¿De cuántas formas pueden ordenarse todos los estudiantes en una fila?

b) ¿De cuántas maneras pueden ubicarse en una hilera de 8 asientos 3 varones en el extremo izquierdo y 5 hembras en el derecho?

c) ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un monitor de Matemática, uno de Física y otro de Química?

d) ¿De cuántas formas pueden formarse 3 equipos de 5 varones cada uno?

e) ¿Cuál es la probabilidad de escoger 5 estudiantes para una actividad en la que a lo sumo 3 sean hembras?

6. Completa en tu cuaderno de trabajo cada una de las afirmaciones siguientes de manera que obtengas una proposición verdadera en cada inciso.

En la tabla 2.20 se recoge las notas alcanzadas en la evaluación final de Química de 33 estudiantes de un grupo de 12.º grado:

Tabla 2.20

Notas alcanzadas	Fi
A:[60;70)	5
B:[70;80)	15
C:[80;90)	10
D:[90;100)	3

a) La variable estadística objeto de estudio es

b) La escala que se puede utilizar para medir la variable estadística estudiada es

c) La cantidad de estudiantes que alcanzaron notas superiores e iguales a 80 puntos en la evaluación final es

d) La amplitud o el rango de la clase C es de

e) La probabilidad de que al seleccionar al azar un estudiante, este haya alcanzado una nota igual o superior a 90 puntos es

f) La nota central entre las notas alcanzadas por el grupo es aproximadamente

g) La nota más frecuente alcanzada por el grupo es aproximadamente

7. Completa en tu cuaderno de trabajo cada una de las afirmaciones siguientes de manera que obtengas una proposición verdadera en cada inciso.

Los resultados de una investigación realizada para determinar el comportamiento del consumo de electricidad de 30 viviendas en el mes de septiembre, se muestra en la tabla 2.21:

Tabla 2.21

Consumo (kW h)	Fi
[100;150)	7
[150;200)	10
[200;250)	6
[250;300)	5
[300;350)	2

a) La variable estudiada se clasifica como cuantitativa

b) La mediana se encuentra en la clase

c) La cantidad de viviendas que consumió menos de 200 kW h es

d) La longitud de clase es

e) El consumo promedio por vivienda es

8. Si se selecciona al azar un número de tres cifras, ¿cuál es la probabilidad de que las sumas de sus dígitos sean igual a 4?

9. En un instituto de investigaciones científicas trabajan 55 personas, de estas 26 conocen el idioma ruso, 20 el alemán y 16 el francés. Además, 13 conocen el ruso y el alemán; 8 el ruso y el francés. Hay tres personas que hablan los tres idiomas. Si se selecciona al azar una de las personas que trabajan en el instituto, ¿cuál es la probabilidad de que no hable ninguno de estos tres idiomas?

10. En la figura 2.27 se representa la distribución de los 30 estudiantes del grupo 12.º B en cuanto a su participación en los concursos de Matemática (M), Física (F) y Química (Q) a nivel de grupo. Los números colocados en cada región informan sobre la cantidad de elementos de los conjuntos representados.

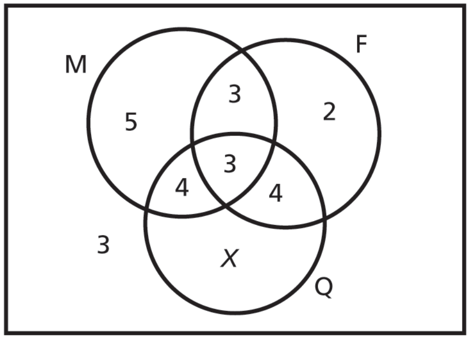


Fig. 2.27

a) Expresa qué significa "*x*" en el diagrama y determina su valor.

b) Determina de cuántas maneras diferentes se pueden otorgar los tres primeros lugares entre los participantes en el concurso de Matemática.

c) Calcula la probabilidad de que, al elegir un estudiante entre los participantes en los concursos, este no haya concursado en Física.

11. Copia en tu cuaderno de trabajo la respuesta correcta en cada inciso. En la figura 2.28 se representa la distribución de 16 estudiantes que participaron en los concursos de Matemática (M), Física (F) e Informática (I). Los números colocados en cada región del diagrama informan la cantidad de elementos de los conjuntos representados:

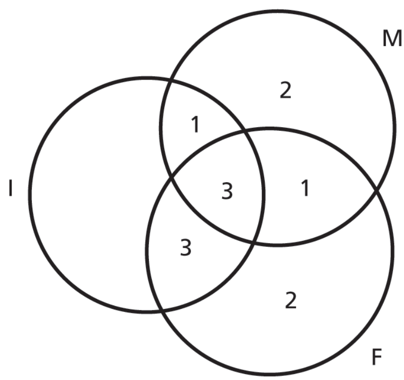


Fig. 2.28

11.1 La cantidad de estudiantes que solo participó en el concurso de Informática es:

a) 11 b) 7 c) 4 d) 8

11.2 La probabilidad de que al escoger al azar un estudiante entre los participantes y este haya participado solo en los concursos de Matemática y Física es:

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{16}$ c) 1 d) 2

12. En una carrera de 400 metros planos participan 5 corredores. ¿De cuántas maneras diferentes pueden quedar ubicados los corredores en la carrera (sin considerar empates)?

13. Se lanza tres veces una moneda bien equilibrada y sale cara las tres veces. Si la moneda se lanza una cuarta vez, ¿qué es más probable que salga, cara o escudo?

14. En una circunferencia están situados 15 puntos. Considerando estos puntos como vértices, ¿cuántos triángulos inscritos en la circunferencia pueden trazarse?

15. En un lote de 4 artículos se conoce que hay 4 de ellos que son defectuosos. Si se escogen dos artículos del lote al mismo tiempo, calcula la probabilidad de que:

a) los dos sean defectuosos,

b) los dos sean buenos,

c) uno sea bueno y el otro defectuoso,

d) al menos un artículo sea bueno.

16. Dado el binomio $(a+b)^{22}$. Determina:

a) La cantidad de término que tiene su desarrollo.

b) ¿En qué posición se encuentra el término cuyo coeficiente es simétrico con relación a los demás coeficientes?

c) Determina el vigésimo término.

17. De los 30 estudiantes del grupo 12.º A de un preuniversitario, 12 participan en un concurso de ortografía a nivel de centro.

a) Determina de cuántas maneras diferentes todos los estudiantes que participaron en el concurso pueden quedar ubicados en los tres primeros lugares (sin considerar empates).

b) Calcula de cuántas formas diferentes se puede seleccionar dos estudiantes del grupo 12.º A para que divulguen los resultados obtenidos en el concurso.

c) Determina la probabilidad de que, al seleccionar un estudiante, este no haya participado en el concurso.

18. El equipo de ajedrez del grupo 12.º C tiene 7 integrantes, de ellos 2 son del sexo femenino. Si como parte de su preparación realizan un torneo a nivel de grupo:

a) ¿De cuántas formas puede quedar conformada la tabla de posiciones al finalizar el torneo sin que haya empates?

b) ¿De cuántas maneras diferentes se pueden repartir los tres primeros lugares sin que haya empates?

c) Al seleccionar un miembro del equipo para una entrevista. ¿Cuál es la probabilidad de que no sea del sexo femenino?

19. Se cruzan dos individuos heterocigóticos para dos caracteres (Aa Bb).

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el genotipo del hijo sea AABB?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el fenotipo del hijo corresponda a los dos caracteres dominantes?

CAPÍTULO 3

Números Complejos

En los siglos XVI y XVII, matemáticos como Gerolano Cardano, Leonard Euler y Johann Carl Friedrich Gauss desarrollaron toda una teoría sobre los llamados números complejos, que desde entonces y hasta la actualidad se utilizan en diversos campos de las matemáticas, en especial en la geometría fractal, y en otras áreas como la física, la cinematografía, las telecomunicaciones, la informática, la ingeniería hidráulica, la electrónica, así como en la aerodinámica, de la cual te resultará interesante saber, que entre los numerosos problemas que se resuelven mediante operaciones con números complejos, se encuentra el diseño de las alas de los aviones (figura 3.1).

Fig. 3.1

Al respecto ¿qué vas a aprender en este capítulo?

Aprenderás acerca de las limitaciones del dominio de los números reales, que dieron lugar a la introducción de números imaginarios, y con ellos, a un dominio numérico más amplio con características, relaciones y propiedades que permiten realizar las operaciones de cálculo sin restricciones. Conocerás, además, algunas de sus aplicaciones en otras ciencias en las cuales puedes encontrar intereses profesionales.

3.1 Introducción a los números complejos

A la par del desarrollo de la humanidad y de la necesidad de utilizar en la vida cotidiana los números para ordenar, medir, repartir y calcular al explicar o modelar diversos fenómenos o procesos, fueron apareciendo las limitaciones de las operaciones de cálculo, que han dado origen en cada momento histórico a nuevos dominios numéricos hasta llegar al dominio de los números reales.

¿Cuál es la limitación del dominio de los números reales que motivó la necesidad de su ampliación hacia un nuevo dominio numérico? ¿Qué es un número complejo? ¿Cuáles son sus características?

Limitaciones y ampliaciones sucesivas de los dominios numéricos

▲ ¿Por qué se requiere el conocimiento de los números complejos?

Hasta ahora han sido problemas prácticos, los que han motivado las sucesivas ampliaciones de los dominios numéricos (figura 3.2). Conoces que el primero y más restringido de ellos es el conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$), de cuyas limitaciones se originan las primeras ampliaciones.

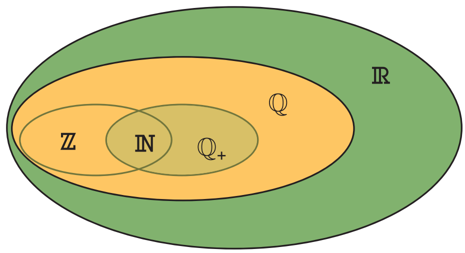


Fig. 3.2

- Es así que, el dominio de los números fraccionarios $(\mathbb{Q}_+)$ surge para resolver el problema de dividir una unidad en varias partes proporcionales, o sea, para solucionar ecuaciones de la forma $ax = b$ en las que b no es múltiplo de a. El problema se resuelve añadiendo nuevos números de la forma $\frac{b}{a}$, donde $a \in \mathbb{N}: \ b \in \mathbb{N}, a \neq 0$.
- Por su parte el dominio de los números enteros ($\mathbb{Z}$), surge para resolver el problema de magnitudes que tienen dos sentidos diferentes; matemáticamente, esto conduce a la resolución de ecuaciones de la forma

$x + a = b$ ($b < a$). El problema se resuelve añadiendo los números negativos $-a$ $(a \in \mathbb{N})$.

- Posteriormente el dominio de los números racionales $(\mathbb{Q})$ se origina para resolver la división entre dos cantidades enteras, que permiten resolver ecuaciones de la forma $ax = b$ en las que b, puede o no ser múltiplo de a y el cociente es una cantidad finita o infinita periódica. El problema se resuelve añadiendo nuevos números de la forma $\frac{b}{a}$, donde $a \in \mathbb{Z},\ \ b \in \mathbb{Z},\quad a \neq 0$.

Más adelante se completa con la aparición del dominio de los reales ($\mathbb{R}$) para medir cantidades irracionales, como la longitud de la diagonal del cuadrado de lado unitario; equivalente a la solución de la ecuación, $x^2 = a$ ($a > 0$).

Ejemplo 3.1

Justificar las proposiciones que aparecen a continuación:

a) El dominio más restringido al cual pertenece $\frac{3}{4}$ es $\mathbb{Q}_+$.

b) El número $-5{,}3$ es un elemento del conjunto $\mathbb{Q}$.

c) El número π no es un valor racional.

d) Todo número natural es fraccionario.

e) El dominio de los números reales, es una ampliación del dominio de los números racionales.

f) El número $\sqrt{-8}$ no pertenece a $\mathbb{R}$.

Resolución:

a) Porque el dominio $\mathbb{Q}_+$ se expresa como el cociente de dos números naturales diferente de cero.

b) Toda expresión decimal finita positiva o negativa, es un número racional, que pueda ser expresado como una fracción de la forma $\frac{p}{q}$ con $q \neq 0$.

c) El número π, es un número con infinitas cifras decimales no periódicas, por eso no es un número racional.

d) Todo número natural es fraccionario, porque puede ser expresado como el cociente de dos números naturales, por ejemplo: $12 = \frac{12}{1}$ o $12,\overline{0}$.

e) El dominio de los números reales, es una ampliación del dominio de los racionales, porque le fue adicionado a los racionales, las expresiones decimales no periódicas (irracionales) ejemplos: log2 y e.

f) La $\sqrt{-8} = 2\sqrt{-2}$, y como el radicando es negativo no es posible calcular la raíz cuadrada en $\mathbb{R}$. ◆

Aplica tus conocimientos

1. Calcula y expresa el dominio más restringido al cual pertenece el resultado.

a) $2,5 : 0,50 + 3,4$

b) $\frac{0,1}{0,01} + 3\frac{1}{7} : \frac{3}{7} - \frac{1}{5}$

c) $\dfrac{\left(\frac{3}{4}\right)^2 : \frac{3}{16}}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{1}{4}$

2. Determina los valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen las ecuaciones siguientes:

a) $3(x-2)^2 = \dfrac{3(2-x^2)}{4}$

b) $\sqrt{4x - 2\sqrt{x-3}} - \sqrt{4x-4} = 0$

3. Identifica el dominio numérico más restringido al que pertenecen ambas componentes del par o los pares ordenados del conjunto solución del sistema de ecuaciones siguiente: $\begin{cases} 3^{\log(2y-x)} = 1 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$

Números complejos. Expresión binómica de un número complejo

▲ ¿En qué aspectos de la vida cotidiana, son importantes los números complejos?

Desde la antigüedad, se han identificado problemas prácticos que revelan la limitación que tienen los números reales para extraer raíces de índice par de números negativos, y cuya solución ha dado lugar al surgimiento de un dominio numérico más amplio. Al respecto, consideremos el problema siguiente:

Se quiere construir una caja similar a la imagen de la figura 3.3 de forma tal, que su volumen sea numéricamente igual a su perímetro disminuido en $10\sqrt{2}$ unidades. ¿Cuál sería la longitud de las aristas del cubo?

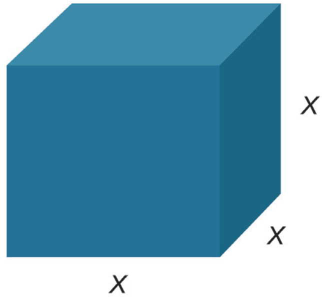


Fig. 3.3

Por los datos de la imagen la figura representada es un cubo y la solución del problema conduce a la ecuación siguiente:

$x^3 = 12x - 10\sqrt{2}$.

De la historia

Fue el matemático e ingeniero italiano Nicolo Fontana (1499-1557) apodado Tartaglia (figura 3.4) a causa de su tartamudez, quien demostró que las ecuaciones de tercer grado de forma $x^3 = px + q$, pueden ser resueltas y que su raíz se expresa en la forma: $x = \sqrt[3]{u}$. Esta es una ecuación de tercer grado que puede ser resuelta por:

(I) $u + v = q$

(II) $u \cdot v = \left(\frac{p}{3}\right)^3$

Fig. 3.4

En el caso de la situación del volumen de cubo que se plantea, $p = 12$, $q = -10\sqrt{2}$ y el sistema de ecuaciones es:

$u + v = -10\sqrt{2}$ [1]

$u \cdot v = (4)^3 = 64$ [2]

Para resolverlo, despejamos u en [2], $u = \frac{v}{64}$, y sustituimos en [1]:

$\frac{v}{64} + v = -10\sqrt{2}$

$64 + v^2 = -10\sqrt{2}v$

$v^2 + 10\sqrt{2}v + 64 = 0.$

Al tratar de resolver la ecuación se aplica la fórmula del discriminante:

$D = b^2 - 4ac$ y se obtiene:

$D = (10\sqrt{2}\,)2 - 4 \cdot 64 = 200 - 256 = - 56 < 0$

Como $D < 0$, entonces, $v = \dfrac{b^2 \pm \sqrt{-56}}{2a}$ no se puede calcular por lo que el sistema no tiene solución real. Significa que:

- el dominio de los números reales $\mathbb{R}$, resulta insuficiente para dar solución a situaciones que requieran de la extracción de la raíz cuadrada de números negativos.
- por lo que si se amplía el campo real, entonces todas las ecuaciones de segundo grado tendrían solución.

Es así que se introduce un elemento llamado *unidad imaginaria* que se denota por i y cumple con la condición:

$$\boxed{i^2 = -1} \quad (1)$$

A partir de la condición (1) es posible conocer las potencias sucesivas de la unidad imaginaria

Potencias de exponente natural de la unidad imaginaria			
$i^0 = 1$	$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = i^2 \cdot i = -i$
$i^4 = i^3 \cdot i = 1$	$i^5 = i^4 \cdot i = i$	$i^6 = i^5 \cdot i = -1$	$i^7 = i^6 \cdot i = -i$
$i^8 = i^7 \cdot i = 1$	$i^9 = i^8 \cdot i = i$	$i^{10} = i^9 \cdot i = -1$	$i^{11} = i^{10} \cdot i = -i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
En general, $i^{4n} = 1$	$i^{4n+1} = i$	$i^{4n+2} = -1$	$i^{4n+3} = -i$
Es decir que, $i^{4n+k} = i^k$; (k = 0,1, 2, 3).			

Ejemplo 3.2

Calcula: a) i^{12} b) i^{21} c) i^{38} d) i^{15}

Resolución:

Dividiendo en cada caso el exponente por 4, tenemos:

a) $i^{12} = i^{12+0} = i^{0} = 1$

b) $i^{21} = i^{20+1} = i^{1} = i$

c) $i^{38} = i^{36+2} = i^{2} = -1$

d) $i^{15} = i^{12+3} = i^{3} = -i$ ◆

La introducción de la unidad imaginaria que da solución a la operación de radicación de índice par, de números negativos en el dominio de los números reales, dio origen a los **números complejos.**

Definición 3.1

Un número complejo, es la adición de un número real y el producto de la unidad imaginaria por un número real. Su notación es $z = a + bi$, donde:

a es la parte real y se denota $\Re(z)$,

b es la parte imaginaria y se denota $\Im(z)$.

En símbolos: $\Re(a+bi) = a$ *y* $\Im(a+bi) = b$.

La expresión $a+bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$, se llama **forma binómica, aritmética o rectangular** de un número complejo.

Cuando $\Re(z) = 0$, tal que $z = bi$ con $b \neq 0$, se dice que z es un **número imaginario o imaginario puro.**

Cuando $\Im(z) = 0$, tal que $z = a$, se dice que z es un **número complejo real** o **real**.

Saber más

W. R. Hamilton (1805-1865), figura 3.5, notable matemático irlandés, definía los números complejos como pares ordenados de números reales, atendiendo a un conjunto formal de reglas.

Fig. 3.5

En otras fuentes bibliográficas puedes encontrar que un número complejo, también se define como un par ordenado de números reales $z = (a;b)$; donde a es la parte real y b es la parte imaginaria.

Al par ordenado $(a;0)$ se le denomina número complejo real y al $(0;b)$, con $b \neq 0$ número imaginario puro.

En esta notación, la unidad imaginaria se define como $i = (0;1)$.

También en ingeniería puedes encontrar la notación de unidad imaginaria como j. Por ejemplo, en el cálculo de la impedancia en un circuito RLC en serie. Supongamos que un circuito eléctrico compuesto por una resistencia R = 10 Ω, un inductor $L = 0{,}1$ H, y un capacitor $C = 100$ μF, conectados en serie a una fuente de voltaje sinusoidal de 100 V y frecuencia $f = 50$ Hz. La unidad imaginaria j permite modelar la oposición de inductores y capacitores en corriente alterna, simplificando cálculos que de otra manera requerirían resolver ecuaciones diferenciales. En este ejemplo, la corriente resultante tiene una magnitud de casi 10 A y un pequeño defasaje debido a la reactancia neta casi nula. La resolución de este tipo de problemas es esencial en el diseño de filtros eléctricos, sistemas de potencias y dispositivos electrónicos que operan con señales variables en el tiempo.

Ejemplo 3.3

Fundamentar por qué los números siguientes se definen como números complejos:

a) $3 + 2i$ b) $-5 - i$ c) $6i$ d) 10

Respuesta:

Estos números son complejos porque cumplen con la definición, es decir que:

a) $3+2i$ está formado por la adición del número real 3 y el producto de la unidad imaginaria por el número real 2.

b) $-5-i$ está formado por la adición del número real –5 y el producto de la unidad imaginaria por el número real –1.

c) $6i$ está formado por la adición del número real 0 y el producto de la unidad imaginaria por el número real 6.

d) 10 está formado por la adición del número real 10 y el producto de la unidad imaginaria por el número real 0. ◆

Ejemplo 3.4

Determinar la parte real y la parte imaginaria de los números complejos siguientes:

a) $z_1 = 3+7i$ b) $z_2 = -10i-2$ c) $z_3 = 12i$ d) $z_3 = 12i$

	Parte real	Parte imaginaria
a) $z_1 = 3+7i$	$\Re(3+7i)=3$	$\Im(3+7i)=7$
b) $z_2 = -10i-2$	$\Re(-10i-2)=-2$	$\Im(-2-10i)=-10$
c) $z_3 = 12i$	$\Re(12i)=0$	$\Im(12i)=12$
d) $z_4 = 45$	$\Re(45)=45$	$\Im(45)=0$ ◆

De la historia

Los antecedentes del número complejo datan del Renacimiento, siglos XV y XVI, cuando matemáticos italianos encontraron ecuaciones de segundo y tercer grados con soluciones “sin sentido”. El nombre **unidad imaginaria,** es una reminiscencia de la época en que se consideraba que estos números eran imaginarios, absurdos y envueltos en misterio.

Jerónimo Cardano (1515-1576) fue el primero en representar este “sin sentido” con un símbolo. Discursando sobre la imposibilidad de partir 10 en dos partes, cuyo producto fuera 40, demostró que conduciría a las expresiones imposibles $5+\sqrt{-15}$ y $5-\sqrt{-15}$.

Continuaron llamándose números imaginarios hasta finales del siglo XVIII, cuando fueron denominados complejos por el matemático alemán C. F. Gauss (1777-1855) al dar la primera prueba rigurosa del Teorema fundamental del Álgebra, durante su disertación doctoral.

Los números complejos caracterizados en su forma binómica, por sus componentes reales –parte real $(\Re)$ y parte imaginaria $(\Im)$– hace que tengan el mismo comportamiento que tienen los números reales, y propicia que no se tengan que introducir nuevas operaciones, por lo que bastará operar con el nuevo elemento introducido.

Bajo estas condiciones, a partir de la condición (1) que se ha introducido con la unidad imaginaria *i*, los números reales quedan como un subconjunto del conjunto ampliado, de manera que estos y los imaginarios puros son casos particulares del dominio de los números complejos.

El diagrama de Venn, de la figura 3.6 presenta las relaciones conjuntista entre los Dominios numéricos estudiados. Se puede inferir que el Conjunto de los números complejos es un Dominio numérico.

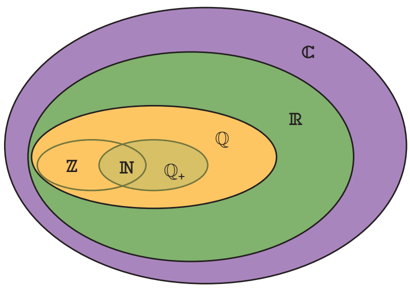


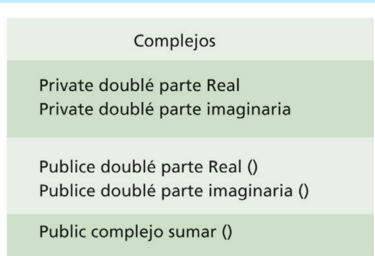
Fig. 3.6

Significa, que sus elementos expresados en la forma binómica $(a + bi)$ cumplen determinadas condiciones con respecto a las operaciones de adición y multiplicación, así como, de las propiedades que lo dotan de cierta estructura que permiten considerarlo un dominio numérico.

Sobre estas condiciones que caracterizan al Dominio de los números complejos, denotado por ($\mathbb{C}$), se profundizará en los próximos epígrafes de este capítulo.

¿Sabías que...?

En los proyectos informáticos, se emplea el **Lenguaje de Modelado Unificado** (UML) basado en diagramas para la especificación, visualización, construcción y documentación de modelos de sistemas de *software* en los que se utilizan operaciones que requieren de la manipulación de los **números complejos**. Por ejemplo, para adaptar las notaciones gráficas a lenguajes de programación concretos, en el caso de las operaciones por la sintaxis propia de Java, como se muestran en las siguientes imágenes de las figuras 3.7 a, b.



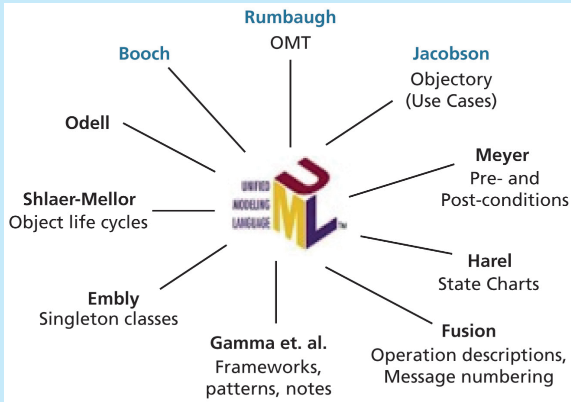


Fig. 3.7

Reflexiona sobre lo aprendido

1. ¿Qué es un número imaginario?

   a) Un número complejo con parte real igual a cero.

   b) Un número que no se puede representar en la recta numérica.

   c) Un número que se utiliza para resolver ecuaciones de segundo grado.

   d) Un número que se utiliza para medir la distancia entre dos puntos.

   (IA https://app.diffit.me/packet/82492cf1-2ee8-4462-a579-d18681c86465)

2. Los números imaginarios fueron inicialmente considerados "ficticios" o "inútiles". ¿Has tenido alguna experiencia en la que algo que parecía inútil o sin sentido te haya resultado útil o interesante después?

   (IA https://app.diffit.me/packet/82492cf1-2ee8-4462-a579-d18681c86465)

3. Los números complejos son importantes en la física y las matemáticas.
   ¿Qué te parece más importante en tu vida la lógica y la razón, o la imaginación y la creatividad? Explica tu respuesta.
   (IA https://app.diffit.me/packet/82492cf1-2ee8-4462-a579-d18681c86465)
4. Verifica si la siguiente ecuación tiene solución en $\mathbb{R}$.

$$\frac{x^2 - x + 16}{x^2 + x + 1} = \frac{x + 6}{x - 1} + \frac{x + 36}{x^3 - 1}$$

5. *¿A partir de introducir la unidad imaginaria y la condición (1) cuál sería la solución de* $v = \frac{b^2 \pm \sqrt{-56}}{2a}$, y cuál la longitud del cubo de la figura 3.3?
6. Simplifica:

   a) $i^4(i^{12} - 2)$ b) $i^{13} + 1$ c) $(i^{16} - 1)$ d) $2\,i^{301} + i^3$

   e) $4i^2 - 3i^3$ f) $i^{2026} - i^{38}$ g) $(i^2)^{1014} \cdot (i^3)^{91}$

7. Escribe números complejos que cumplan las condiciones siguientes:

   a) La parte real en cada número complejo es: –2; 1; 6; 0; –1

   b) La parte imaginaria en cada número complejo es: 7; 0; –3; 4; –5

   c) Es un imaginario puro cuya parte imaginaria es un elemento de $\mathbb{Q}$.

   7.1 Elabora un diagrama de Venn que represente las relaciones conjuntistas entre dominios numéricos, y ubica los números escritos en el dominio más restringido al cual pertenecen.

Investiga y aprende

Sobre el impacto del surgimiento de los números complejos para el desarrollo de la humanidad, el matemático y científico Ian Stewart escribió un libro titulado *17 ecuaciones que cambiaron el mundo*, el capítulo 5 lo dedicó a los números complejos.

www.libromaravillosos.com y www.cubaeduca.cu

a) Fundamenta por qué el autor considera que los números complejos, produjeron cambios en el mundo.
b) Existen otros autores como Michael Guillen, quien escribió el libro *Cinco ecuaciones que cambiaron al mundo*, y en una de ellas define la unidad imaginaria.
   Establece una comparación crítica entre ambas lecturas.

Para profundizar en el tema, te sugerimos consultar el contenido y resolver las actividades propuestas en:

Conéctate

Forma binómica de un número complejo
https://curricular.cubaeduca.cu/education/category?id=1563&type=theme

Ejercicios del epígrafe 3.1

1. Enuncia una situación de la vida práctica en la que solo tengan sentido los elementos del conjunto numérico dado:

a) Naturales b) Enteros c) Fraccionarios d) Irracionales

2. Identifica en tu cuaderno de trabajo cuáles de las relaciones que se dan a continuación son verdaderas o falsas:

a) $0 \in \mathbb{N}$ b) $\frac{3}{2} \in \mathbb{N}$ c) $\tan\frac{\pi}{3} \notin \mathbb{R}$ d) $7{,}66 \in \mathbb{Q}$ e) $\mathbb{I} \subset \mathbb{Q}$

f) $-6 \in \mathbb{Z}$ g) $4{,}\overline{7} \in \mathbb{Q}_+$ h) $\sqrt{400} \in \mathbb{N}$ i) $\log 0{,}01 \in \mathbb{N}$ j) $\log_2 0{,}25 \in \mathbb{Z}$

3. Analiza y escribe en tu cuaderno de trabajo ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$) según corresponda al dominio numérico más restringido al cual pertenece el resultado de calcular:

a) $\sqrt{4{,}9} \cdot \sqrt{\sqrt{100}}$ b) $\dfrac{2^{\operatorname{sen} 30°}}{\sqrt{12}}$ c) $\log_2 \sqrt[3]{4} - \dfrac{5}{3}$ d) $\sqrt{2}^{\log_2(9)-1}$

4. Sean tres conjuntos formados por los números que tienen como dominio más restringido el indicado:

A: números enteros *B*: números fraccionarios *C*: enteros y fraccionarios

4.1 Selecciona de la lista, que aparece a continuación, los números que cumplen con las condiciones dadas y conforma el conjunto escribiendo sus elementos.

Lista: $\dfrac{2}{3}$; $\sqrt{9+7}$; $\dfrac{1}{\log_2 \sqrt[3]{2}}$; $\left(\sqrt{3}\right)^4$; $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}$; $\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2}$; $0{,}8$

4.2 Elabora un diagrama de Venn que relacione a los conjuntos *A*, *B* y *C*.

5. Sea el conjunto: $U=\left\{\frac{1}{2};0;-1;\sqrt{25};\pi;\frac{5}{3};2{,}\overline{09};-\sqrt{6};e\right\}$

Escribe en notación tabular los elementos de los conjuntos siguientes:

$A=\{x\in U \text{ y } x\in\mathbb{N}\}$ $\quad B=\{x\in U \text{ y } x\in\mathbb{Q}\}$ $\quad C=\{x\in U \text{ y } x\notin\mathbb{Z}\}$

$D=\{x\in U \text{ y } x\in\mathbb{R}\}$ $\quad E=\{x\in U \text{ y } x\in\mathbb{Z}\}$ $\quad F=\{x\in U \text{ y } x\notin\mathbb{R}\}$

6. Fundamenta si las proposiciones dadas a continuación son verdaderas o falsas:

a) $\left\{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4};\frac{2}{3};e^2;\sqrt{5}\right\}\subset\mathbb{R}$ b) $\left\{e^{\frac{1}{2}};2;-5;0\right\}\subset\mathbb{Z}$

c) $\left\{\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)^2;2\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6};1;\cos\frac{\pi}{2};\sqrt{16};\log 2\right\}\subset\mathbb{Q}$ d) $\left\{e^{\ln(\sqrt{2})};\frac{1}{3};0;5\right\}\subset\mathbb{Q}$

7. Determina cuál es el domino numérico más restringido al que pertenecen los resultados de las operaciones siguientes.

a) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ b) $\left|\frac{7-12}{12-6}\right|$ c) $-\left(2^{\log_4\frac{1}{8}}\right)$ d) $\frac{\left(10^{-2}\right)^4\cdot 10^3}{10^{-5}}$

8. Verifica si las ecuaciones siguientes tienen solución en el conjunto U dado:

a) $\frac{4x^2-3x+5}{x^2-2x+13}=2 \qquad U=\mathbb{N}$

b) $\frac{3x}{2x-1}-\frac{39}{2x+1}=5-\frac{45}{4x^2-1} \qquad U=\mathbb{Z}$

c) $(m-n)x^2-nx=m \qquad U=\mathbb{Q},\ m,n\in\mathbb{Q}$

d) $\sqrt{2x-2\sqrt{x-3}}-\sqrt{4x-4}=0 \qquad U=\mathbb{R}$

9. Argumenta por qué son verdaderas o falsas las proposiciones siguientes:

a) El dominio numérico más amplio de los estudiados, es el conjunto de los números complejos.

b) El conjunto de los números naturales, no es un subconjunto de los números complejos.

c) La ecuación $x^2+x+1=0$, tiene a lo sumo una solución compleja.

d) El número complejo $5+3i$ pertenece a los números reales.

10. Determina el dominio numérico más restringido al que pertenecen los números siguientes:

a) $\sqrt{5}$ b) $\frac{2}{3}$ c) -7 d) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$ e) $3i$

f) $\sqrt[6]{8}$ g) $\left(\sqrt{3}\right)^4$ h) -4^2 i) $4^{\log_2 3}$ j) $\sqrt{-3-4}$

k) -7.56 l) π m) $0-i$ n) $7+1{,}5i$ ñ) $-3i^{120}$

11. De los números complejos dados a continuación, escribe en tu cuaderno de trabajo cuáles representan un número complejo real y cuáles son imaginarios puros.

a) $z_1 - 3 - 2i$ b) $z_2 - 4$ c) $z_3 = -\frac{1}{2}i$ d) $z_4 - 0$

e) $z_5 = \sqrt{5}\,i$ f) $z_6 = i$ g) $z_7 = \frac{11}{3}$ h) $z_8 = 4 - \frac{11}{3}$

i) $z_9 = -2{,}7$ j) $z_{10} = 4i$ k) $z_{11} = x$ l) $z_{12} = yi\ (y \neq 0)$

12. Identifica y justifica en tu cuaderno de trabajo si las proposiciones que aparecen a continuación se cumplen *siempre*, *nunca* o *algunas veces*.

a) El número $4i$ es un elemento del conjunto de los números reales.

b) El conjunto de los números reales es un subconjunto de los números complejos.

c) El número real 0,87 es un elemento del conjunto de los números complejos.

d) El número complejo $5+i$ pertenece al conjunto de los números reales.

e) El dominio más restringido al cual pertenece i^2 es $\mathbb{Z}$.

13. Identifica en tu cuaderno de trabajo, cuáles de las proposiciones que aparecen a continuación son falsas y escríbelas en tu cuaderno de trabajo como verdaderas.

a) La parte imaginaria del número complejo $3-4i$ es 4.

b) La parte real del número complejo $87i-2$ es –2.

c) Un número es imaginario puro si su parte real es cero.

d) Un número es real cuando la parte imaginaria es 1.

e) Si P y Q son dos conjuntos tal que: $P=\{-2;-1;0;1;5\}$ y $Q=\{x\in\mathbb{R}:x\geq 1\}$, entonces $P\cap Q=\{5\}$.

f) $1{,}5i\notin\mathbb{R}$.

g) Sean A y B dos conjuntos no vacíos, si $6i\notin A$ y $6i\in(A\cup B)$, entonces $6i\notin B$.

h) Si A y B son dos conjuntos tales que $A=\left\{-3;\sqrt{-5};\frac{7}{2}\right\}$ y $B=\{x\in\mathbb{R}:x\leq 3{,}5\}$, entonces $A\setminus B=\left\{\sqrt{5}i\right\}$.

i) $\left(3+4i+4i^{2027}\right)\in\mathbb{N}$.

j) Una ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$, b y c parámetros reales) siempre tiene solución en el dominio de los números reales.

3.2 Relaciones y operaciones entre números complejos en forma binómica

Para describir formas irregulares impredecibles (figura 3.8), como una llama o una nube se emplea un ente geométrico, llamado **fractal**, que al ampliarse aumenta su definición infinitamente, conservándose semejante a sí mismo. Los fractales se emplean además en la compresión de imágenes digitales para su almacenamiento compacto por una computadora, y en la creación cinematográfica, entre otros usos, por sus bellas figuras.

Fig. 3.8

Estos se obtienen como resultado de realizar operaciones de cálculo con números complejos, en particular la adición y la multiplicación sin restricciones, que además cumplen propiedades y relaciones que lo distinguen como un Dominio numérico.

¿Cuándo dos números complejos son iguales? ¿Cómo adicionar y multiplicar números complejos expresados en forma binómica? ¿Cuáles conceptos asociados a las operaciones con números reales se pueden transferir por analogía al cálculo con números complejos? ¿Qué propiedades cumplen las operaciones con números complejos?

De la historia

Fue el ingeniero hidráulico y matemático italiano Rafael Bombelli (1526-1572), el primero en exponer la forma $a \pm b\sqrt{-1}$ como expresión del número complejo y en efectuar operaciones con ellos en su libro *Algebra*, publicado en 1572 (figura 3.9).

L ALGEBRA
PARTE MAGGIORE
DELL'ARIMETICA
DIVISA IN TRE LIBRI
DI RAFAEL BOMBELLI
DA BOLOGNA.
Nouamente posta in luce.
IN BOLOGNA
Nella stamperia di Giouanni Rossi
MDLXXII.
Con Licentia delli RR. VV. del Vesc. & Inquisit.

Fig. 3.9

Relación de igualdad entre números complejos

¿Qué condiciones deben cumplir dos o más números complejos para declarar la igualdad entre ellos?

Teniendo en cuenta la condición (1) y que los múltiplos de i no son comparables con los números reales, se cumple que dos números complejos son iguales cuando coinciden en sus partes reales y también en sus partes imaginarias.

Es decir que:

$a + ib = c + id$ si y solo si

$a = c$ y $b = d$.

La relación de igualdad entre números complejos permite resolver ecuaciones como la del ejemplo siguiente.

Ejemplo 3.5

Determinar los valores de x, y si: $(x+2)+3i=-1+(y^2+2y)i$

Resolución:

Partes reales: $x+2,-1$ Partes imaginarias: 3, y^2+2y	Identificación de la parte real y la parte imaginaria de cada número complejo.
$x+2=-1$ y $3=(y^2+2y)$	Por la relación de igualdad, se igualan las partes reales y de la misma forma las partes imaginarias
$x+2=-1$ $x=-1-2$ $x=-3$	Se toma la ecuación de la parte real y se resuelve
$3=y^2+2y$ $y^2+2y-3=0$ $(y+3)(y-1)=0$ $y_1=-3 \quad y_2=1$	Se toma la parte imaginaria y se resuelve la ecuación cuadrática obtenida.

Se puede comprobar sustituyendo los valores reales encontrados:

Sustituyendo $x=-3$ y $y_1=-3$ en la ecuación $(x+2)+3i=-1+(y^2+2y)i$, se obtiene:

$$(x+2)+3i \qquad -1+(y^2+2y)i$$

$$(-3+2)+3i \qquad -1+\left[(-3)^2+2(-3)\right]i$$

$$-1+3i=-1+3i$$

Sustituyendo $x=-3$ y $y_2=1$ en la ecuación, se obtiene

$$(x+2)+3i \qquad -1+(y^2+2y)i$$

$$-1+3i \qquad -1+\left[(1)^2+2(1)\right]i$$

$$-1+3i=-1+3i$$

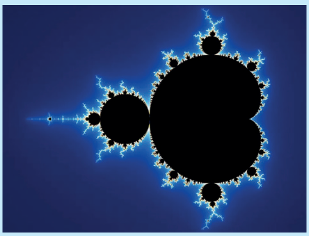
Luego, el conjunto solución de la ecuación es $S=\{(-3;-3),(-3;1)\}$. ◆

Como se aprecia en el ejemplo 3.5, existen ecuaciones con expresiones complejas en forma binómicas, que al aplicarles la relación de igualdad de números complejos, su resolución se reduce a la resolución de ecuaciones lineales y (o) cuadráticas en una variable, e incluso a un sistema de ecuaciones cuyo conjunto solución está en $\mathbb{R}$. Su aplicación desde el dominio de los números complejos es de gran utilidad para las ciencias.

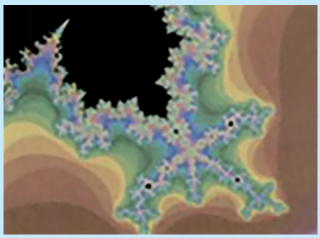
¿Sabías que...?

El término fractal fue "acuñado" por el matemático polaco Benoit Mandelbrot (1924-2010), figura 3.10. Muchas de estas formas como la de la figura 3.11 a, cuyo detalle se ve en la 3.11 b se logran iterando funciones de números complejos.

Fig. 3.10



a



b

Fig. 3.11

Su ejemplo más famoso denominado conjunto de Mandelbrot, emplea la función cuadrática $f(z) = z^2 + c$, donde c es un número complejo. Así, comenzando con $z_0 = 0$, las iteraciones son:

$$z_1 = f(0) = c,$$

$$z_2 = f(c) = c^2 + c,$$

$$z_3 = f(c^2 + c) = (c^2 + c)^2 + c, \text{ etcétera.}$$

Es decir, que la sucesión $z_0, z_1, z_2, z_3, \ldots$, dependiendo de la elección de c, será acotada o no: aquí, para $c = 0{,}1 + 0{,}2i$, se estabiliza en $0{,}5 + 0{,}22i$. Mientras que para $c = 1 - i$, crece sin cota.

Por su capacidad de definición y facilidad de formación basta una imagen inicial a escala y una simple regla para repetirla.

Investiga y aprende

En el dominio de los números reales, la relación de orden entre sus elementos establece los conceptos de "mayor y menor que" y se cumplen propiedades de la Ley de Monotonía. Luego, si consideramos que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$:

¿Se pueden establecer relaciones de orden en el dominio de los números complejos?

¿Tienen sentido las desigualdades $(a+bi)<(c+di)$?

Adición y multiplicación de números complejos en forma binómica

La forma binómica $a + bi$ de los números complejos hace posible calcular con ellos igual que si fueran elementos de cualquier conjunto numérico que sea un Dominio. Siempre se puede adicionar y multiplicar números complejos, como cuando lo hacemos con los números reales.

En general para los números complejos $(a+bi)$y $(c+di)$ con $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ se cumple que:

Adición	$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$
Multiplicación	$(a+bi)(c+di)=ac-bd+(ad+bc)i$

Ejemplo 3.6

Calcular

a) $(2+3i)+(3-2i)$ b) $(1+3i)(7+4i)$ c) $5i+2(8-5i)$

Resolución:

a) $(2+3i)+(3-2i)$

$=(3+2)+(3-2)i$

$=5+i$

Se agrupa la parte real con la parte real de cada sumando y de igual forma las partes imaginarias, luego se reducen los términos semejantes.

$(1+3i)(7+4i)$

$=7+4i+21i+12i^2$

$=7+25i+12(-1)$

$=-5+25i$

Aplicar la ley distributiva de la multiplicación con respecto a la adición.

Se aplica la condición (1) de la unidad imaginaria y se reducen los términos semejantes.

b) $5i + 2(8 - 5i)$

$= 5i + 16 - 10i$

$= 16 - 5i$

Se efectúa el producto indicado, aplicando la ley distributiva de la multiplicación con respecto a la adición y se reducen los términos semejantes. ◆

Saber más

Iniciamos el capítulo planteando la limitación del dominio de los números reales, que dio lugar a su ampliación, sin embargo, la aparición del dominio de los números complejos también resolvió la restricción existente en la operación de logaritmación con números reales negativos, al introducir la ecuación $e^{i\pi} + 1 = 0$, conocida como Identidad de Euler.
Como la potenciación es la operación inversa a la logaritmación, de la identidad de Euler se obtiene $e^{i\pi} = -1$, de ahí que $\log(-1) = i\pi\log(e)$.[1]

Opuesto, conjugado y módulo de un número complejo

Los conceptos de opuesto, conjugado y módulo, que conoces asociados a las operaciones con números reales, se transfieren por analogía al dominio de los números complejos, esto permite establecer nuevas relaciones y otras operaciones entre números complejos expresados en forma binómica.

Opuesto de un número complejo en forma binómica

Recuerda que...

Los números opuestos, o también llamados números simétricos, son los que tienen el mismo número o valor absoluto, con el signo contrario.

Luego, por analogía, para los números complejos se establece la definición siguiente:

Definición 3.2

Dos números complejos se llaman **opuestos,** si difieren en los signos de la parte real y de la parte imaginaria.

En símbolos, si $z = a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, su opuesto, que se denota $-z$ (se lee opuesto de z), es $-z = -a - bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

[1] Carlos Sánchez Fernández y Rita Roldán Inguanzo: *Paseo por el universo de los números*, p. 102.

Ejemplo 3.7

Determinar el opuesto de los números complejos siguientes:

a) $-5+4i$ b) $-3i+2,5$ c) $2,3$ d) $-9,2i$

Resolución:

Se puede plantear que:

a) $-(-5+4i)=5-4i$

b) $-(-3i+2,5)=-2,5+3i$

c) $-(2,3)=-2,3$

d) $-(-9,2i)=9,2i$ ◆

Al introducir el concepto de opuesto de un número complejo, se puede realizar la operación de sustracción, para la cual se procede de forma análoga a como se realiza en el dominio de los números reales.

Ejemplo 3.8

Calcular

a) $(4+2i)-(8-i)$ b) $2i\,(1+7i)-(6-i)$

Resolución:

a) $(4+2i)-(8-i)$
$=(4+2i)+(-8+i)$
$=(4-8)+(2i+i)$
$=-4+3i$

como $-(8-i)=(-8+i)$ entonces se procede como en la adición.

b) $2i\,(1+7i)-(6-i)$
$=2i-14-6+i$
$=-20+3i$

Por orden de operaciones primero se realiza a multiplicación, después se haya el opuesto del sustraendo y luego se procede como en la adición. ◆

Conjugado de un número complejo en forma binómica

Al estudiar la operación de radicación con números reales, te familiarizaste con el concepto de *conjugada de una expresión binómica,* en la cual al menos uno de los términos contenía la operación de radicación. En particular, se aplicaba esa relación para racionalizar denominadores en una operación de división de fracciones algebraicas.

Recuerda que...

$a + b$ y $a - b$ son dos expresiones conjugadas.

Este concepto se transfiere al nuevo dominio numérico como **conjugado de un número complejo,** expresado en forma binómica.

Definición 3.3

Dos números complejos se llaman **conjugados** si difieren solo en el signo de la parte imaginaria. En símbolos, si $z = a + bi$, donde a, $b \in \mathbb{R}$, su conjugado, que se denota: $\bar{z}$ (se lee z barra), *es* $\bar{z} = a - bi$, donde a, $b \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.9

Escribir el conjugado de los números complejos siguientes:

a) $z = 2 + \pi i$ b) $z = \frac{8}{3}i - \sqrt{2}$ c) $z = 5$ d) $z = 3i$

Resolución:

a) Como $\Im(z) = \pi$; luego el conjugado de z es: $\bar{z} = 2 - \pi i$

b) $z = \frac{8}{3}i - \sqrt{2} = -\sqrt{2} + \frac{8}{3}i$, luego, $\bar{z} = -\sqrt{2} - \frac{8}{3}i$

c) $z = 5$, luego $\bar{z} = 5$, porque $\Im(z) = 0$

d) $z = 3i$, *luego* $\bar{z} = -3i$, porque $\Re(z) = 0$. ◆

Atención

Como puedes apreciar, para obtener el conjugado de un número complejo, debes determinar el opuesto de la parte imaginaria.

Entre un número complejo y su conjugado se cumplen ciertas relaciones con respecto a las operaciones de adición, sustracción y multiplicación.

Teorema 3.1

Sea $a + bi$ un número complejo, $z \in \mathbb{C}$ cualquiera; entonces se cumple:

a) $z + \bar{z} = 2\Re(z)$ b) $z - \bar{z} = 2\Im(z)i$ c) $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$

Demostración:

Se reduce a un simple cálculo de las operaciones indicadas.

Si $z = a + bi$ y, $\bar{z} = a - bi$, entonces:

a) $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2\mathfrak{R}(z)$

b) $z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi = 2\ bi = 2\mathfrak{I}(z)i$

c) $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = (a)^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$ por ser una sustracción de cuadrados y la condición (1) de la unidad imaginaria.

Reflexiona

Si z y w son números complejos,

a) $\overline{\overline{z}} = z$ b) $\bar{z} + \bar{w} = \overline{z + w}$ c) $\bar{z} \cdot \bar{w} = \overline{z \cdot w}$ d) $(\bar{z})^n = \overline{z^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

En general, para probar estas propiedades, ¿cómo lo harías y qué método usarías? En 10.° y 11.° grados, con las identidades trigonométricas, empleaste un método similar.

División de un número complejo en forma binómica

La introducción del concepto de conjugado de un número complejo y sus relaciones con respecto a las operaciones de adición, sustracción y multiplicación, permiten realizar sin restricciones la operación de división.

Recuerda que...

Para racionalizar el denominador de fracciones algebraicas de la forma $\frac{A}{B}$, donde $B = b + \sqrt{c}$, se amplía la fracción, para ello se multiplica por la conjugada del denominador, es decir, por $b - \sqrt{c}$, debido a que $(b + \sqrt{c})(b - \sqrt{c}) = b^2 - c$ con $b, c \in \mathbb{R} : c \geq 0, b \neq \pm\sqrt{c}$.

Ejemplo 3.10

Realizar las divisiones de los números complejos siguientes, expresar el resultado en forma binómica.

a) $\dfrac{1 - 3i}{3i}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{2} + i}$ c) $\dfrac{2 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}i}$

Resolución:

a) $\dfrac{1-3i}{3i}$

$=\dfrac{1-3i}{3i}\cdot\dfrac{i}{i}=$

Como se está dividiendo por un número imaginario, se puede ampliar la fracción (multiplicar numerador y denominador), por una potencia de *i* de manera que el exponente del denominador sea par, el más cómodo es 2.

$=\dfrac{i-3i^2}{3i^2}=\dfrac{i+3}{-3}=$

Efectuar la multiplicación indicada (numerador con numerador y denominador con denominador. Tener presente que las potencias de *i*, en particular $i^2=-1$.

$=-1-\dfrac{i}{3}$

Separar en fracciones simples.

b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+i}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}+i}\cdot\dfrac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}-i}=$

Se debe ampliar la fracción (multiplicar numerador y denominador), por el conjugado del denominador.

$=\dfrac{\sqrt{2}-i}{2+1}=\dfrac{\sqrt{2}-i}{3}=$

Efectuar la multiplicación indicada (numerador con numerador y denominador con denominador. Tener presente que en el denominador siempre se va a multiplicar $z\cdot\bar{z}$ y por tanto se obtiene a^2+b^2)

$=\dfrac{\sqrt{2}}{3}-\dfrac{1}{3}i$

Separar en fracciones simples.

c) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}i}$

Proceder de forma análoga.

$=\dfrac{2-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}i}\cdot\dfrac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}=$

$$= \frac{2-2\sqrt{3}i-\sqrt{3}i+\left(\sqrt{3}i\right)^2}{4}$$

$$= \frac{2-3\sqrt{3}i-3}{4}$$

$$= \frac{-1-3\sqrt{3}i}{4}$$

$$= -\frac{1}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{4}i. \quad \blacklozenge$$

Módulo de un número complejo en forma binómica

El producto de un número complejo y su conjugado, está asociado al concepto de módulo de un número complejo, con el cual se generaliza la noción de valor absoluto de un número.

Definición 3.4

Se llama módulo de un número complejo $z \in \mathbb{C}$, y se denota $|z|$, al número real $\sqrt{z\cdot\bar{z}}$.

Ejemplo 3.11

Calcular el módulo de los números complejos siguientes:

a) $z = 2 + 3i$ b) $z = \sqrt{2}$ c) $z = 2 - 3i$

Resolución:

a) $|z| = \sqrt{z\cdot\bar{z}} = \sqrt{(2+3i)(2-3i)} = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}.$

b) $|z| = \sqrt{z\cdot\bar{z}} = \sqrt{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$

c) $|z| = \sqrt{z\cdot\bar{z}} = \sqrt{(2-3i)(2+3i)} = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}. \quad \blacklozenge$

En general, se cumple que si $z = a+bi$, entonces: $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ *por tanto:* $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$.

Reflexiona

Si el número complejo z es un imaginario puro, ¿a qué es igual su módulo?

Propiedades de las operaciones con números complejos

Como las operaciones con números complejos se efectúan calculando con sus partes reales e imaginarias, cumplen las propiedades de las operaciones con números reales.

Teorema 3.2

- La adición y multiplicación de números complejos son conmutativas y asociativas, es decir:

  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (propiedad conmutativa de la adición)

  $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ (propiedad conmutativa de la multiplicación)

  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (propiedad asociativa de la adición)

  $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ (propiedad asociativa de la multiplicación)

- La adición de dos números complejos z y $-z$ se anulan, es decir

  $z + (-z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

- El cero es el elemento neutro de la adición, es decir,

  $z + 0 = 0 + z = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

- El uno es el elemento neutro de la multiplicación, es decir,

  $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$ y $z \cdot z^{-1} = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

- La multiplicación de números complejos es distributiva respecto a la adición y la sustracción, es decir, para todo z, z_1 y $z_2 \in \mathbb{C}$, se cumple:

  $z \cdot (z_1 \pm z_2) = z \cdot z_1 \pm z \cdot z_2$.

Ejemplo 3.12

a) Comprobar que: $(2+3i) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{2}{3}i\right) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{2}{3}i\right) + (2+3i)$

b) Calcular de la forma más ventajosa posible:

$$\left[\left(\sqrt{2} + \pi\right) + \frac{\sqrt{5}}{5}i\right] + (4 - i) + \left[\left(-\sqrt{2} - \pi\right) - \frac{\sqrt{5}}{5}i\right]$$

Resolución:

a) Calculando tenemos:

$$(2+3i) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{2}{3}i\right) = \left(2 - \frac{1}{2}\right) + \left(3 - \frac{2}{3}\right)i = \frac{3}{2} + \frac{7}{3}i$$

$$= \left(-\frac{1}{2} - \frac{2}{3}i\right) + (2+3i) = \left(-\frac{1}{2} + 2\right) + \left(-\frac{2}{3} + 3\right)i = \frac{3}{2} + \frac{7}{3}$$

Luego, se cumple la igualdad.

b) Aplicando las propiedades conmutativa y asociativa, obtenemos:

$$\left[\left(\sqrt{2}+\pi\right)+\frac{\sqrt{5}}{5}i\right]+(4-i)+\left[\left(-\sqrt{2}-\pi\right)-\frac{\sqrt{5}}{5}i\right]$$

$$=\left(\sqrt{2}+\pi\right)+\frac{\sqrt{5}}{5}i+\left[\left((4-i)+\left(-\sqrt{2}-\pi\right)-\frac{\sqrt{5}}{5}i\right)\right]$$

$$=\left(\sqrt{2}+\pi\right)+\frac{\sqrt{5}}{5}i+\left[\left(-\sqrt{2}-\pi\right)-\frac{\sqrt{5}}{5}i+(4-i)\right]$$

$$=\left[\left(\sqrt{2}+\pi\right)+\frac{\sqrt{5}}{5}i+\left(-\sqrt{2}-\pi\right)-\frac{\sqrt{5}}{5}i\right]+(4-i)=(4-i). \quad \blacklozenge$$

Atención

En la práctica, se cancelan directamente los opuestos, sin necesidad de efectuar todas las trasformaciones que hemos realizado en el ejemplo con el fin de que se comprenda por qué resulta así.

Reflexiona sobre lo aprendido

1. ¿Cuáles condiciones deben cumplir los componentes de dos números complejos, para que su producto sea un número complejo imaginario puro?
2. ¿Cómo demostrar con el principio de inducción completa que la propiedad $\left(\bar{z}\right)^n=\overline{z^n}$, con $n \in \mathbb{N}$?
3. ¿Para qué valores de x y y ($x, y \in \mathbb{R}$) los números complejos $z_1 = 9y^2 - 4 - 10xi$ y $z_2 = 8y^2 + 20i^7$ son conjugados?
4. ¿Qué relación debe existir entre a y b ($a, b \in \mathbb{R}$) para que $\dfrac{3-2ai}{b-2i}$ sea un imaginario puro?

Conéctate

Accede a www.cubaeduca.cu a las Actividades de aprendizaje de los números complejos de Matemática Duodécimo grado, y realiza los ejercicios 1; 2; 3; 6 y 7.

Ejercicios del epígrafe 3.2

1. Aplica la definición de igualdad de números complejos y determina los valores de x, $y \in \mathbb{R}$ que satisfacen las ecuaciones siguientes:

a) $x^2 - y - yi = 5 - 2x + 3(1 - x)i$ b) $(2x^2 + y^2 - 11) + (2y^2 - x^2)\,i = 17i$

c) $(4 + 2i)x + (5 - 3i)y = 13 + i$ d) $(3x - i) + (y - x + 5) = 8 - iy.$

2. Calcula la suma de los números complejos siguientes:

a) $(3 + 2i) + (5 + 3i)$ b) $(1 + 7i) + (4 + 5i)$ c) $(5 + 5i) + (-8 + 2i)$

d) $(-3 + 2i) + (16 - 11i)$ e) $(-15 - 8i) + (-1 - i)$ f) $\left(-6 - \frac{1}{3}i\right) + \left(5 - \frac{2}{3}i\right)$

g) $(-4 + 2i) + i$ h) $(5 + 2i) + (2 + 4i)$ i) $(6 + 3i) + (3 - 5i)$

j) $(7 + 2i) + (5 - 4i)$ k) $(2 + 0i) + (4 + 0i)$ l) $(3 + 0i) + (0 + 3i)$

m) $(-3 - 5i) + (4 + 5i)$ n) $(-8 - 5i) + (-2 - 2i)$ ñ) $(9 + 2i) + (4 - 2i)$

o) $(2p - 3qi) + \left(-\frac{m}{2}i + n\right)$ p) $\left(-\frac{1}{5} + \frac{5}{3}i\right) + \left(-\frac{2}{3} - i\right)$ q) $\left(\frac{\sqrt{2}}{3} - i\right) + \left(-\frac{1}{3} + 2i\right)$

r) $\left(\frac{1}{2} - 0{,}5i\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5}i\right)$ s) $\left(\frac{1}{2} - 0{,}5i\right) + \left(\frac{1}{2} + 0{,}5i\right)$ t) $\left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}i\right) + \left(\frac{1}{4} - \sqrt{3}\,i\right)$

3. Calcula.

a) $(4 + 2i)\,(5 + i)$ b) $(2 + 0i)\,(3 + 0i)$ c) $(5 + 0i)\,(0 + 2i)$

d) $4(5 + 2i)$ e) $-5(4 + 3i)$ f) $\frac{1}{4}(-2 - 4i)$

g) $(3 + 2i)\,(3 - 2i)$ h) $(8 + i)\,(3 - 2i)$ i) $(-5 - 4i)\,(2i)$

j) $(1 + 2i)\,(2 + 5i)$ k) $(2 + 3i)\,(3 + 15i)$ l) $\left(1 - \sqrt{2}i\right)\left(\sqrt{2}i + 1\right)$

4. Calcula:

a) $(2 - i)(3 + i) + \left(\frac{1}{2} - 4i\right)$ b) $(3 - i)\,(7 + i) + 5i\,(3 - 2i)$

c) $\left(\sqrt{3} - \sqrt{5i}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{5i}\right) + 2i\left(\frac{5}{2} - i\right)$ d) $\left(\sqrt{5} + 3i\right)^2 + 2\sqrt{5}i$

5. Halla la diferencia de los números complejos que se indican

	z_1	z_2
a)	$(4+2i)$	$(2+4i)$
b)	$(-8+2i)$	$(3+6i)$
c)	$(10+3i)$	$(-5-2i)$
d)	$(2+2i)$	$(2-i)$
e)	$(-8+2i)$	$\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}\,i\right)$
f)	$(6-2i)$	$(2+7i)$

6. Calcula:

a) $(1+i)(1-i)-3(2+3i)$

b) $(\sqrt{2}\,i-3)(\sqrt{2}+i)-2\left(1-\frac{i}{2}\right)$

c) $-(55-2i)-(2-i)(4+3i)$

d) $(2+3i)^2-(2-3i)^2$

e) $(1+i)^3-(1-i)^3$

f) $(\sqrt{2}+i)^2-(\sqrt{2}-i)^2$

g) $i(1+i)^4-(1-i)^3$

h) $(\sqrt{5}-i)^2-2i(\sqrt{5}+i)$

7. El voltaje en un capacitor es $V_C=-5i$ y en una resistencia $V_R=7$.

a) Calcula el voltaje total V_T si $V_T = V_C + V_R$.

b) Clasifica al número V_C.

8. En un circuito de corriente alterna, las impedancias son los números complejos z_1 y z_2. Si $z_1=3+4i$ (resistencia y bobina) y $z_2=2-5i$ (resistencia y capacitor):

a) Calcula la impedancia total si z_1 y z_2 están en serie.

b) Clasifica z_1 y z_2 en real, imaginario puro o complejo.

9. Determina los valores de x, y con $x, y \in \mathbb{R}$) si:

a) $x^2-3x+(y-4)=-2+3i$

b) $x+y-i(2x-y)=4-4i$

c) $x^2+i(y^2-2)=x-iy$

d) $x^2+y-i(y+1)=2-3i$

e) $x+y+ixy=4$

f) $x-2y+3ix-3iy=5-i$

g) $2+x+3i(y-24)=3i$

h) $x-iy=4$

i) $x^4 - x^2 + i(y-4) = -1 + 3i$ j) $\frac{x}{y} + 3ixy = 1$

k) $(x-3i) + (5+iy) = 6-6i$ l) $[x^2 + 1 + (y-1)i] - [2x + (y^2+1)i] = 0$

m) $(x^2 + iy) + (-3 - 4i) = 2x - i$ n) $(x+iy) + (x-iy) = 5$

ñ) $(x+y) - (x-iy) = 4$ o) $(x+2-i)(y-1-i) = 3-4i$

10. Calcula los valores de $x, y \in \mathbb{R}$ que satisfacen las ecuaciones siguientes:

a) $(x+iy)(1-5i) = 2+5i$ b) $(x+iy)(-1+4i) = -9+5i$

c) $(x+iy)(3-7i) = 2+4i$ d) $(x+iy)(2+i) = 1+3i$

11. Determina la parte real y la parte imaginaria de los números complejos siguientes:

a) $3-4i$ b) $\frac{2+5i}{2}$ c) $x - xy + (3-4i)$

d) $x^2 + y^2$ e) $12 - (i+4)$ f) $(2-i)(i-\sqrt{5})$

g) $\sqrt{-9}$ h) $\frac{1}{i}$ i) $5-\sqrt{2}i$

j) $\sqrt{-2} + (i + \sqrt{5})$ k) $5^{0,6} - i10^{\frac{1}{4}}$ l) $\frac{2+5i}{1-i}$

m) $(x+i)(yi-4)(2-\sqrt{3})$ n) $(2+3i)^4$ ñ) $(2-i)-(i-2)$

12. ¿Para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ los números complejos dados son imaginarios puros? ¿Para qué valor de $y \in \mathbb{R}$ su parte imaginaria es 0?

a) $z = x + \sqrt{x+1} - 5 + (2y-1)i$

b) $z = \frac{1}{2x-2} + \frac{3}{x^2-1} - \frac{1}{4} + (y^2 + y + 1)i$

c) $z = \frac{5x}{2x^2 - x - 1} + \frac{4x-5}{x^2-1} - \frac{5}{2x+1} + \left(y - \sqrt{9-2y-1}\right)i$

13. Sea $z = (a+2i) + 3i$ y $z_1 = 5 + (b-1)i$, con $a, b \in \mathbb{R}$:

Determina a y b para que:

a) $(z + z_1) = 0$ b) $\mathfrak{R}(z - z_1) = 0$ c) $\mathfrak{I}(z + z_1) = 0$

d) $\mathfrak{I}(z - z_1) = 0$ e) $\mathfrak{R}(z \cdot z_1) = 0$ f) $\mathfrak{I}(z \cdot z_1) = 0$

14. La velocidad en un flujo se describe como $V = (2+k)+(3-k)i$.

a) Si la parte imaginaria es 1, determina el valor de k.

b) ¿Para qué valor de k, V alcanza un valor real?

15. Selecciona en tu cuaderno de trabajo la respuesta correcta.

En un circuito en paralelo, dos tensiones complejas V_1 y V_2 son iguales. Si $V_1 = x+1+(y-2)i$ y $V_2 = 3+4i$, entonces los valores de x y de y en ese orden es:

a) $x = 3$, $y = 5$ *b)* $x = 6$, $y = 2$ *c)* $x = 2$, $y = 6$ *d)* $x = 4$, $y = 2$

16. Determina el conjugado de los números complejos siguientes:

a) $\frac{3}{2} - \sqrt{2}\,i$ b) $i^4 - i^3 + 5i^2 - 1$ c) $\sqrt{2} - i \cdot 3\log 5$

d) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}i\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}i\right)$ e) $2 - i$ f) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}i\right)+\left(\frac{2}{3}-0{,}73i\right)$

g) $5-4i$ h) $(1+i)^4$ i) $(2-i)+(2+i)$

j) $(3+5i)^2-(4-i)^2$ k) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}i\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}i\right)$ l) $10^{\frac{2}{3}} - 5^{\frac{3}{4}} + \left(\sqrt{2}i\right)^3$

m) $(2+4i)\left(\sqrt{3}-5i\right)$ n) $(6+7i)-\left(\sqrt{5}-2i\right)$ ñ) $\left(\sqrt{2}-i\right)\left(\sqrt{3}i-4\right)$

o) $\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$ p) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\cdot\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ q) $(1+i)-(1-i)$

r) $\log 5 - (3^{1,5}+\log 3)i$ s) $i\pi - \tan 60^\circ$ t) $2^{\log_2 10-1} - \tan 225^\circ$

17. Si $z = (4-3i)^2 + (2+6i)(1-4i)$ es un número complejo. Calcula $\bar{z}$.

18. Dado el número complejo $\bar{z} = (1+i)^2 - (1-i)^2 + i(-1)$, determina $\mathfrak{R}(z)$ e $\mathfrak{I}(z)$.

19. Si z es un número complejo. Demuestra que $z \in \mathbb{R}$ si y solo si $\bar{z} = z$.

20. Determina el número complejo z que satisface:

a) $z^2 = \bar{z}$ b) $z^2 = -\bar{z}$

21. Calcula las operaciones siguientes con números complejos:

a) $\frac{4+2i}{2+2i}$ b) $\frac{4+2i}{8+2i}$ c) $\frac{5+5i}{2+2i}$ d) $\frac{4-i}{2+3i}$

e) $\dfrac{10-10i}{4-2i}$ f) $\dfrac{20+10i}{2+5i}$ g) $\dfrac{(1+i)(2+2i)}{3+3i}$ h) $\dfrac{11-2i}{2i-1}+\dfrac{7+i}{1-i}$

i) $\dfrac{(2-i)(3i-1)}{1+3i}$ j) $\dfrac{i-3}{2+i}\cdot\dfrac{2-i}{2-i}$ k) $\dfrac{(3+5i)(2-3i)}{1+i}$ l) $\dfrac{1-i}{2-2i}:\dfrac{1+i}{i-2}$

22. Calcula el módulo de los números complejos siguientes:

a) $z = 3 + 4i$ b) $z = (-24; 7)$ c) $z=\sqrt{3}+i$

d) $z = \cos x + i\cdot \operatorname{sen} x$ e) $z = \tan 45°+i$ f) $z=x^2-y^2+2xyi$

g) $z = 7 + i$ h) $z=\sqrt{27}$ i) $z = 0{,}3 + 1{,}7i$

j) $z = 15 + 8i$ k) $z = -24 - 7i$ l) $z=\sqrt{3}-2i$

23. Calcula el módulo del número complejo w con la condición indicada:

a) $w = z - 1$; $z = 2{,}5 - i$ b) $w = z^2 + z + 1$; $\bar{z}=\sqrt{3}i-1$

c) $w = z^3$; $\bar{z}=1-i$ d) $w = z^4 - z$; $-z=-1+i$

24. Calcula el módulo del número complejo s con la condición indicada:

a) $s=\dfrac{z}{z+1}$; $z=i$ b) $s=\dfrac{z-1}{z^2-z+2}$; $\bar{z}=1-2i$

c) $s=\dfrac{z^2+i}{z+1}$; $\bar{z}=2+3i$

25. Si z, z_1 y z_2 son números complejos. Prueba que:

a) $\dfrac{z}{\bar{z}}=\dfrac{z}{|z|^2}$ b) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$ c) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

26. Calcula las operaciones siguientes con números complejos:

a) $\dfrac{3i+1}{i}$ b) $\dfrac{2-4i}{2+i}$ c) $\dfrac{i^3-4}{i^2-i^5}$ d) $\dfrac{5-6i}{5+6i}$ e) $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}i}{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}i}$

27. Si $z_1 = 1-i$, $z_2 = -2+4i$ y $z_3 = 2-2i$, son números complejos, calcula $\Im\left[\dfrac{z_1\cdot z_2}{z_3}\right]$.

28. Si $z_1 = 1 - i$, $z_2=\sqrt{3}+i$ y $z_3=1+\sqrt{3}i$, son números complejos, calcula:

a) $z_1:\bar{z}_1$ b) $\dfrac{\bar{z}_3\cdot z_2}{z_1}$ c) $\dfrac{z_2\cdot z_3}{z_1}$ d) $\dfrac{\bar{z}_2}{z_3}$ e) $\dfrac{z_1\cdot z_2}{z_3}$

29. Identifica cuáles de las proposiciones que aparecen a continuación son falsas y escríbelas en tu cuaderno de trabajo como verdaderas.

a) Si $z_1 = 1 + 3i$ y $z_2 = -1 - i$ son dos números complejos, entonces $|z_1 + z_2| = 2$.

b) Si $w_1 = 4 - 3i^3$ y $w_2 = -i + 2$ son dos números complejos, entonces al calcular $w_1 - w_2$ se obtiene $6 + 2i$.

c) Calcular $(1+3i)(-3i+1)\cdot i^{2022}$ se obtiene un número entero.

d) El opuesto del número complejo que resulta de calcular $i^{117}(1+2i)$ es $-2-i$.

e) La suma de un número complejo con su conjugado es siempre un número real.

30. Determina la relación entre a y b $(a, b \in \mathbb{R})$, si $z - a + bi$ y $\bar{z} = \dfrac{1}{2}$ $(z \neq 0)$ son dos números complejos.

31. Resuelve la ecuación lineal $ax + b = 0$, donde $a,\ b \in \mathbb{C}$ si:

a) $a = 1 - 2i$ $\quad b = -i$

b) $a = -2i$ $\quad b = -i$

c) $a = 3 - 4\sqrt{2}i$ $\quad b = -3 - \sqrt{2}i$

d) $a = (3-i)(4+2i)$ $\quad b = (2+i)(5-3i)$

32*. Demuestra que:

a) $\dfrac{\sqrt{1+x^2}+i}{1-i\sqrt{1+x^2}} = i \qquad (x \in \mathbb{R})$

b) $\dfrac{(1+i)^2}{\sqrt{3}-i} = \dfrac{\sqrt{3}+i}{(1-i)^2}$

33*. Determina el valor que debe tener k en la expresión $z = \dfrac{2-ki}{1+4i}$ $(k \in \mathbb{R})$

a) para que z sea un número real;

b) para que z sea un número imaginario puro.

34. Resuelve los sistemas de ecuaciones siguientes, donde $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$:

a) $\begin{cases} z_1 + z_2 = -1 - i \\ 3z_1 + z_2 = 2 - 3i \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2(z_1 - z_2) + z_1 = 1 - 2i \\ z_2 - z_1 - 3z_1 = 2 - 4i \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3(z_1 + z_2) - (z_1 - 3z_2) = -4 - 2i \\ z_1 + 3z_2 - (z_2 - 2z_1) = 1 + 2i \end{cases}$

d) $\begin{cases} z_1 + z_2 = 1 + 3i \\ iz_1 + z_2 = -1 + 3i \end{cases}$

35*. La diferencia de dos números complejos es $2-2i$ y el producto es $4+2i$. Determina estos números

36*. Halla dos números complejos cuya suma es $-i$ y su producto es $8-14i$.

37*. Determina si existen dos números complejos cuya suma es 6, la diferencia es 4 y el producto es $3i$.

38. Resuelve:

a) $z^2+9=0$ b) $z^2-3z=0$ c) $z^2+15=0$

d) $z^2+z+1=0$ e) $z^3-8i=0$ f) $z^2-\sqrt{2}\cdot iz=0$

g) $z^3=8iz$ h) $z^3=64$ i) $z^4+2z^2+1=0$

j) $z^2-3z+4=0$ k) $z^2-z+5=0$ l) $z^2-\sqrt{2}z+\sqrt{2}=1$

39. Sean los números complejos:

$z_1=-\sqrt{3}-3i$, $z_2=3\sqrt{2}-3\sqrt{2}i$, $z_3=-6{,}5i$, $z_4=-2\cos 180°$, $w_1=7+yi$, $w_2=a-1+bi$, $w_3=x+2+(2x-1)i$ y $w_4=-\sqrt{3}+i$

39.1 De cada número complejo:

a) Menciona la parte real y la parte imaginaria.

b) Clasifícalos en complejo real e imaginario puro.

c) Determina su módulo, opuesto y conjugado.

39.2 Determina los valores de la variable en cada caso si:

a) $w_1=w_2$ b) $w_1=w_3$ c) $w_2=w_4$

39.3 Calcula

$a)\, w_4-z_3-3i^3$ $b)\, z_1\cdot z_2+3\sqrt{6}$ $c)\, z_1\cdot\overline{z_1}$

$d)\, (z_2)^2$ $e)\, (z_4)^5$ $f)\, (w_4)^3$

$g)\, z_4\cdot i^{63}+2i^{2032}$ $h)\, \dfrac{z_4}{z_1}$ $i)\, \dfrac{z_1}{z_4}$

40. La función de onda de una partícula es $\psi=(2-i)e^{iw\cdot t}$, si $t=0$:

a) Identifica la parte real y la parte imaginaria de Ψ.

b) Calcula el módulo de Ψ.

3.3 Forma trigonométrica de un número complejo

Los números complejos, también han devenido herramienta imprescindible para modelar matemáticamente fenómenos tales como el movimiento vibratorio, las oscilaciones armónicas, en los cuales es de utilidad su interpretación geométrica y las relaciones trigonométricas, debido a que permiten una descripción objetiva de las señales periódicas variables. En consecuencia, es importante conocer acerca de otras formas de representación de los números complejos, a partir de su relación con la forma binómica.

Fig. 3.12

¿Cómo se representan gráficamente los números complejos? ¿Qué interpretación geométrica se obtiene de su representación? ¿Cuáles elementos y relaciones se revelan a partir de su representación geométrica? ¿Cómo intervienen esos elementos para obtener otra forma de expresar un número complejo? ¿Cómo convertir un número complejo de una forma de representación a la otra? ¿Cómo calcular con números complejos expresados en otra forma?

Representación geométrica de números complejos

Los números reales se representan en una recta, de modo que a cada uno corresponda un punto en ella y recíprocamente, lo que significa que en la recta solo pueden ser representados números reales, o sea, no hay lugar para los números complejos cuyas partes imaginarias sean distintas de cero.

Podemos notar que cada número complejo $z = a + bi$ está determinado por un par de números reales ($a;b$); de ahí surge la idea de representar los números complejos utilizando el plano coordenado.

Como se observa en la figura 3.13, sobre el eje de las abscisas (eje x) se representa la parte real del número complejo y, por esta razón, recibe el nombre de *eje real.* Sobre el eje de las ordenadas (eje y) se representa la parte imaginaria y recibe el nombre de *eje imaginario*.

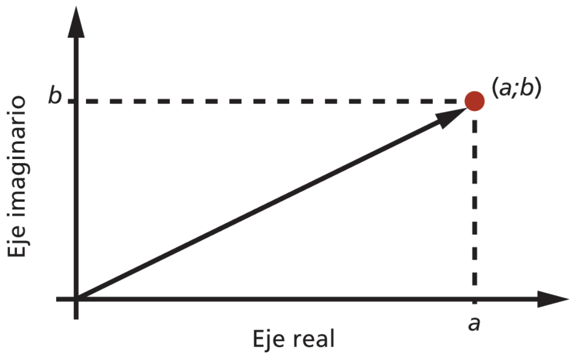


Fig. 3.13

> En general se tiene que:
> - El punto (a; b) se denomina **afijo** del número complejo $z = a + bi$.
> - La representación gráfica de un número complejo es el vector de origen (0;0) cuyo extremo es el afijo de z.

Como se analizó en el epígrafe anterior, los módulos de dos números complejos opuestos tienen el mismo valor, $|z| = |-z|$, sin embargo, se representan en cuadrantes diferentes. Si $z = a + bi$ se encuentra en el primer cuadrante su opuesto $-z$ estará en el tercer cuadradante. Los afijos $(a;b)$ y $(-a;-b)$ determinan una recta que pasa por el origen $(0;0)$ del plano coordenado, es decir estarían en la misma dirección, la diferencia está en el sentido, ambos están en sentido diferente en relación al origen: luego, un número complejo tiene módulo, dirección y sentido; representa por tanto un vector.

La perpendicularidad de los ejes real e imaginario, se conoce como **Diagrama de Argand.**

Recuerda que...

- En Física se utilizan las características de los vectores para representar magnitudes como la velocidad y la fuerza, cuya interpretación necesita de una dirección y un sentido. De manera que, un vector $\overrightarrow{AB}$ cuyos extremos son *A* y *B* están en orden para señalar su sentido, denominando al origen del primero *A* y conservándose la denominación de extremo para el segundo *B*, que se identifica con la punta de la saeta.
- Habitualmente, su longitud, norma o módulo se designa por la magnitud vectorial correspondiente (fuerza, velocidad, aceleración, entre otras) y su dirección, por el ángulo θ, medido en sentido antihorario respecto al eje de las abscisas o semieje (x) positivo.

Ejemplo 3.13

a) Identificar los números complejos que aparecen representados en la figura 3.14

b) Representar gráficamente los números complejos:

$z_1 = -3 + i$ $\quad z_2 = 1 - 2i$ $\quad z_3 = 2i$

$z_4 = -2 - i$ $\quad z_5 = 3{,}5$

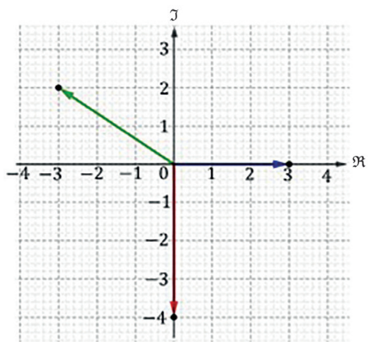


Fig. 3.14

Resolución:

a) En la figura 3.14 se tiene que:

- el vector sobre el eje real corresponde a un número real, es decir tiene afijo $(3;0)$, luego es el número complejo $3 + 0i = 3$.
- el vector sobre el eje imaginario, tiene afijo $(0;-4)$, representa al número complejo $0 - 4i = 4i$, *es* un imaginario puro*.*
- el vector representado en el segundo cuadrante tiene afijo $(-3;2)$, por lo que se trata del número complejo $-3 + 2i$.

b) En el sistema de coordenadas rectangulares de la figura 3.15 se han representado los afijos de los números complejos dados y los vectores que determinan. Al observar la representación puedes apreciar lo siguiente:

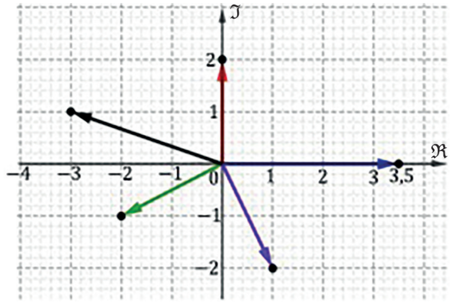


Fig. 3.15

Número	**Análisis**
z_1	Como la parte real es –3 y la parte imaginaria es 1, que es el coeficiente de la unidad imaginaria *i*, tiene afijo $(-3;1)$ significa que es un vector del segundo cuadrante.
z_2	Su parte real es 1 y la parte imaginaria es –2, que es el coeficiente de la unidad imaginaria *i*, luego tiene afijo $(1;-2)$ significa que es un vector del cuarto cuadrante.
z_3	Por ser un número imaginario puro, su parte real es 0 y la parte imaginaria es 2, que es el coeficiente de la unidad imaginaria *i*, luego, su afijo es $(0;2)$ significa que es un vector situado sobre el eje imaginario.
z_4	Su parte real es –2 y la parte imaginaria es –1, que es el coeficiente de la unidad imaginaria *i*, luego tiene afijo $(-2;-1)$ significa que es un vector del tercer cuadrante.
z_5	Como su parte real es 3,5 y la parte imaginaria es 0, que es el coeficiente de la unidad imaginaria *i*, tiene afijo $(3{,}5;0)$ significa que es un vector situado sobre el eje real. ◆

Al igual que en los números reales, en los números imaginarios el módulo es la longitud que hay desde el origen hasta donde está situado el número (afijo). En el caso de los números complejos $z = a + bi$ *con* $a \neq 0$ y $b \neq 0$ esa distancia se obtiene de calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son los valores de *a* y *b.*

Puede comprobarse fácilmente que la longitud del vector que representa al número complejo $z = a + bi$ es $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, o sea:

> El módulo de un número complejo es igual a la longitud del vector que lo representa y se designa por la letra griega ρ, tal que:
>
> $$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
>
> Equivale a decir que, esa longitud se obtiene de calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen las longitudes *a* y *b* correspondientes a la parte real e imaginaria del número complejo *z*.

Del resultado anterior se deduce que el lugar geométrico de los afijos de los números complejos de módulo 1, o sea, el conjunto solución de la ecuación $|z| = 1$, es una circunferencia de centro en el origen y radio 1 (figura 3.16). Esta es la circunferencia unitaria.

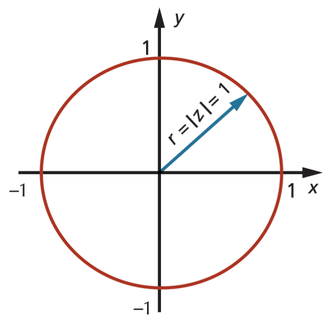


Fig. 3.16

Ejemplo 3.14

Dado el número complejo $z = 1 + \sqrt{3}i$, representado gráficamente en la figura 3.17 determinar:

a) El módulo de *z*.

b) El ángulo que forma el vector que representa a *z* con el semieje real positivo.

Resolución:

a) Del número complejo $z = 1 + \sqrt{3}i$ se tiene que $\Re(z) = a = 1$ y $\Im(z) = b = \sqrt{3}$ de donde resulta su representación en la figura 3.17.
Para determinar el módulo, se tiene:
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$

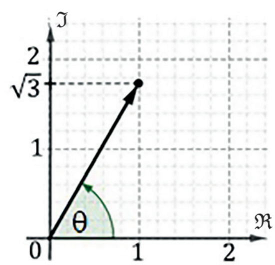


Fig. 3.17

b) Sea θ el ángulo que forma z con el eje real del plano complejo; entonces:

$$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \quad \text{y} \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}; \text{ luego, } \theta = \frac{\pi}{3}. \quad \blacklozenge$$

Ejemplo 3.15

Determinar el número complejo de módulo 1 cuya representación geométrica forma un ángulo de 40° con el semieje real positivo.

Resolución:

En la figura análisis (figura 3.18), y aplicando las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo tenemos,

$a = |z| \cdot \cos 40° - 1 \cdot \cos 40° = 0{,}776$

$b = |z| \cdot \operatorname{sen} 40° - 1 \cdot \operatorname{sen} 40° = 0{,}643$

luego, $z = a + ib = 0{,}776 + 0{,}643i$. ◆

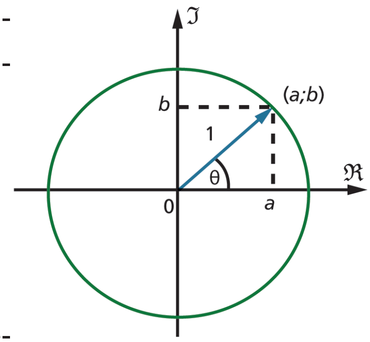


Fig. 3.18

Dado que los números complejos se representan mediante vectores, la adición y sustracción de estos números pueden efectuarse geométricamente mediante la adición y sustracción de vectores.

Ejemplo 3.16

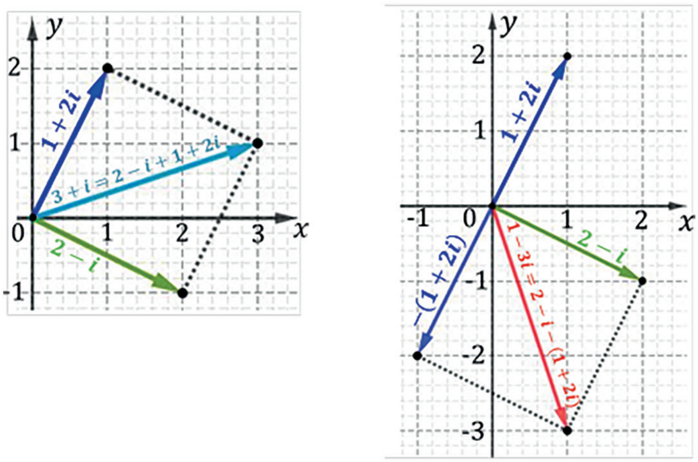
Representar geométricamente la adición y la sustracción de los números complejos: $z_1 = 2 - i$ y $z_2 = 1 + 2i$.

Resolución:

En la figura 3.19 a, se han representado los vectores que representan los números complejos $z_1 = 2 - i$ y $z_2 = 1 + 2i$ dados, y se ha construido el paralelogramo que estos determinan.

La suma pedida es $(3 + i)$ que está representada por el vector contenido en su diagonal.

De igual forma, en la figura 3.19 b se ha representado $z_1 = 2 - i$ y $-1-2i$, que es el opuesto de $z_2 = 1+2i$. La diagonal del paralelogramo contiene al vector que representa la diferencia pedida $(1-3i)$. ◆



a) b)

Fig. 3.19

Reflexiona

¿Por qué puede afirmarse que de la inecuación $|z| < 1$ no se obtiene un lugar geométrico?

Ejemplo 3.17

Representar geométricamente el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : 3 \leq |z| \leq 5\}$

Resolución:

Sabemos que la representación gráfica de $|z| = 3$ es la circunferencia con centro en el origen y radio 3.

Igualmente, $|z| = 5$ es la circunferencia con centro en el origen y radio 5.

Si $|z| > 3$, el afijo de z es exterior a la circunferencia de radio 3 y si $|z| < 5$, su afijo es interior a la circunferencia de radio 5.

Luego, la representación gráfica del conjunto es el anillo circular que determinan ambas circunferencias (figura 3.20). ◆

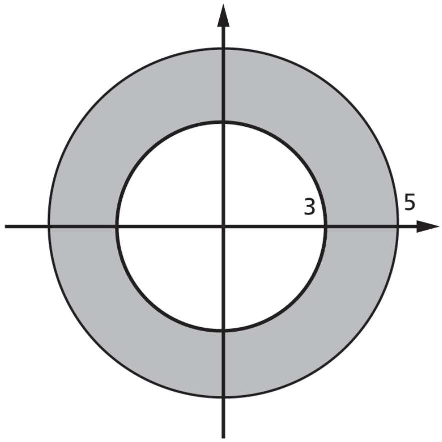


Fig. 3.20

Ejemplo 3.18

Dados los números complejos: $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 4 + 2i$, $z_3 = 1 + 3i$ y $z_4 = 4 + 3i$

a) Probar que los afijos de los números complejos dados determinan un rectángulo.

b) Comprobar que las diagonales son congruentes.

Resolución:

a) Como la representación gráfica de los números complejos se realiza mediante vectores, $z_2 - z_1$, $z_4 - z_3$ y $z_3 - z_1$, $z_4 - z_1$ estarán representando a los dos pares de lados opuestos del cuadrilátero.

Para que la figura sea un paralelogramo, $z_2 - z_1$ debe ser igual a $z_4 - z_3$ así como $z_3 - z_1$ igual a $z_4 - z_2$:

$$z_2 - z_1 = 4 + 2i - (1 + 2i) = 3 \qquad z_4 - z_3 = 4 + 3i - (1 + 3i) = 3$$

$$z_3 - z_1 = 1 + 3i - (1 + 2i) = i \qquad z_4 - z_2 = 4 + 3i - (4 + 2i) = i$$

Efectivamente, el primer par es igual a 3 y el segundo, a i. Además, forman ángulos de 90º, ya que los valores del primer par están en el eje real y los del segundo, en el eje imaginario, por lo que el paralelogramo es rectángulo (figura 3.21).

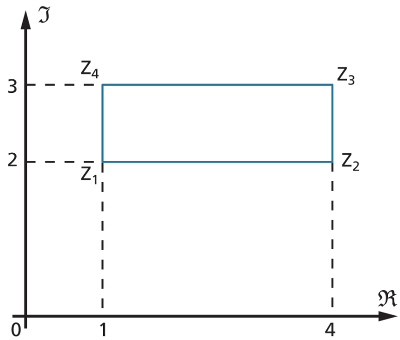


Fig. 3.21

b) Para comprobar que sus diagonales $z_4 - z_1$ y $z_1 - z_3$ son congruentes, debemos demostrar que sus módulos son iguales:

$$z_4 - z_1 = 4 + 3i - (1 + 2i) = 3 + i \qquad |z_4 - z_1| = |3 + i| = \sqrt{10}$$

$$z_1 - z_3 = 4 + 2i - (1 + 3i) = 3 - i \qquad |z_3 - z_2| = |3 - i| = \sqrt{10}$$

Luego, $|z_4 - z_1| = |z_3 - z_2|$, por lo que las diagonales son congruentes. ◆

Expresión trigonométrica de un número complejo

La representación geométrica del número complejo sugiere otra forma de expresión, que tiene importantes aplicaciones en la propia matemática y en algunas ingenierías.

Por ejemplo, en la robótica (figura 3.22) donde se integran las ingenierías mecánica, eléctrica, electrónica, biomédica y las ciencias de la computación, se facilita la realización de gráficos por computadora, las transformaciones y rotaciones en el plano para las animaciones, simulaciones y control de movimiento.

Fig. 3.22

Para obtener la otra forma de representación de un número complejo consideremos que, dado en su forma binómica $z = a + bi$ [1], de módulo

$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, cuya representación forma un ángulo θ con el semieje real positivo (figura 3.23 a), se tiene que, $a = \rho\cos\theta$ y $b = \rho$ sen θ, [2]

por lo que, sustituyendo [2] en [1], resulta $z = \rho\cos\theta + i \cdot \rho$ sen θ,

y, extrayendo factor común, se obtiene:

$$\boxed{z = \rho(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)}$$

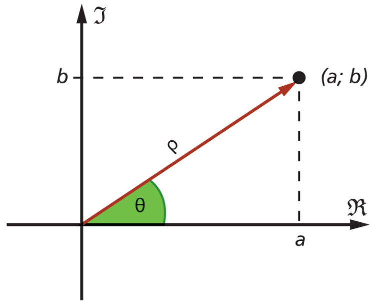


Fig. 3.23a

Esta forma de representar los números complejos recibe el nombre de **forma trigonométrica** o **forma polar** de los números complejos.
El ángulo θ se denomina **argumento** del número complejo y se determina excepto por un múltiplo de 2π, ya que el seno y el coseno son periódicos con período 2π.

Asimismo, dado su número complejo conjugado $\bar{z} = a - bi$ (figura 3.23 b),

se tiene que $a = \rho\cos\theta$ y $-b = \rho$ sen θ,

por lo que, $z = \rho\cos\theta - i \cdot \rho\operatorname{sen}\theta$,

y al extraer el factor común, se obtiene:

$$\boxed{\bar{z} = \rho(\cos\theta - i \cdot \operatorname{sen}\theta)}$$

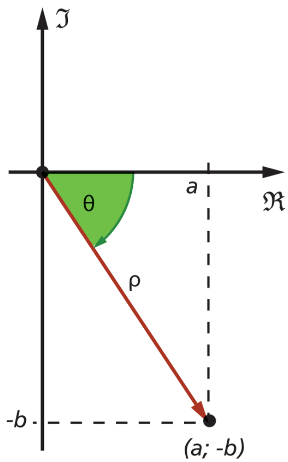


Fig. 3.23b

Por tanto, como en la forma binómica el conjugado de un número complejo en forma trigonométrica se escribe cambiando el signo de la parte imaginaria:

$$\overline{\rho(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)} = \rho(\cos\theta - i \cdot \operatorname{sen}\theta)$$

De aquí resulta que las representaciones geométricas de los números complejos conjugados son simétricas respecto al eje real (figuras 3.23 a y 3.23 b).

Reflexiona

¿Cómo determinar el opuesto de un número complejo en forma polar?

Ejemplo 3.19

Expresar en forma trigonométrica: a) $2+2i$ b) $\overline{2+2i}$ c) $-1-2i$

Resolución:

a) Para expresar el número complejo $2+2i$ dado en forma binómica a la trigonométrica, debemos partir de que $2+2i=\rho(\cos\theta+i\cdot\operatorname{sen}\theta)$ [1]

Identificamos en qué cuadrante se encuentra el afijo, como $a=2>0$ y $b=2>0$, está en el primer cuadrante.

Luego, se calcula el módulo ρ del número complejo

$\rho=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ [2]

Posteriormente se determina el ángulo θ de la siguiente forma

$\tan\theta=\dfrac{b}{a}$, $\tan\theta=\dfrac{2}{2}=1$, luego $\theta=45^\circ+k\cdot180^\circ$, $k=0,1,2,3,\ldots$

Aunque θ admite cualquiera de esos valores, aquí y en lo sucesivo fijaremos y emplearemos el intervalo principal $\left[0^\circ;360^\circ\right)$ o $[0;2\pi)$.

Como *el afijo está* en el primer cuadrante (figura 3.24), o sea , $k=0$; por lo que $\theta=45^\circ$ [3]

Por tanto, sustituyendo [2] y [3] en [1], se tiene:

$2+2i=2\sqrt{2}\left(\cos45^\circ+i\cdot\operatorname{sen}45^\circ\right)$.

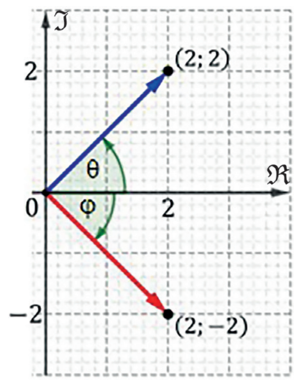


Fig. 3.24

b) Para expresar en forma trigonométrica $\overline{2+2i}=2-2i$ representado en la figura la 3.24 determinamos en qué cuadrante se encuentra el número:

Como $a=2>0$ y $b=-2>0$, el afijo del número complejo $2-2i$ está en el cuarto cuadrante,

$\rho=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2^2+(-1)^2}=2\sqrt{2}$ y

$\tan\varphi = \frac{b}{a}$, $\tan\varphi = \frac{-2}{2} = -1$; luego,

$\varphi = 45° + k \cdot 180°$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Como *el afijo* está en el IV cuadrante $k = 2$ y

$\varphi = -45° + 2 \cdot 180° = -45° + 360° = 315°$, luego:

$\overline{2+2\,i} = 2\sqrt{2}\left(\cos 315° + i \cdot \operatorname{sen} 315°\right)$ (en el intervalo principal) o

$= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-45°\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(-45°\right)\right]$ (–45° está en el cuarto cuadrante),

$= 2\sqrt{2}\left(\cos 45° - i \cdot \operatorname{sen} 45°\right)$. ◆

Atención

Observa que, si un número complejo está en forma trigonométrica, el conjugado se obtiene restando el argumento de 360°, y en la forma trigonométrica, cambiando solo el signo de la parte imaginaria.

c) Análogamente, para expresar en forma trigonométrica el número complejo $-1-2i$, representado en la figura 3.25, tenemos que:
Como $a = -1$ y $b = -2$ son negativos, el ángulo θ está en el tercer cuadrante.

$\rho = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$.

$\tan\varphi = \frac{b}{a}$, $\tan\varphi = \frac{-2}{-1} = 2$; luego,

$\varphi = 63{,}4°$ y

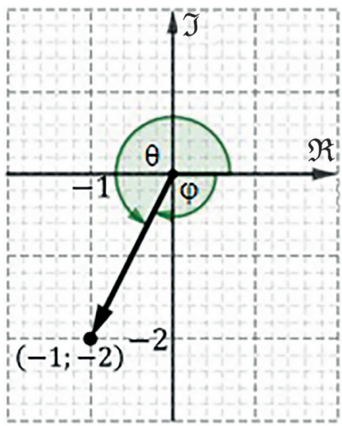


Fig. 3.25

$\theta = 63{,}4° + k \cdot 180°$;

el ángulo θ está en el tercer cuadrante, por lo que $k = 1$ y

$\theta = 63{,}4° + 1 \cdot 180° = 243{,}4°$;

Entonces, $-1-2i = \sqrt{5}\left(\cos 243{,}4° + i \cdot \operatorname{sen} 243{,}4°\right)$. ◆

Ejemplo 3.20

Expresar en forma binómica:

a) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\cdot\ \text{sen}\dfrac{2\pi}{3}\right)$ b) $3\left(\cos 50^{\circ}+i\cdot\ \text{sen}50^{\circ}\right)$

Resolución:

Para la conversión de la forma trigonométrica a la binómica, basta hacer las operaciones indicadas en el número propuesto:

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot\ \text{sen}\frac{2\pi}{3}\right)=\sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot\sqrt{2}\text{sen}\frac{2\pi}{3}$$

$$=\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)+i\cdot\sqrt{2}\text{sen}\frac{\pi}{3}$$

$$=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\right)+i\cdot\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Luego, $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\cdot\ \text{sen}\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

b) $3\left(\cos 50^{\circ}+i\cdot\ \text{sen}50^{\circ}\right)=3\ \cos 50^{\circ}+i\cdot 3\text{sen}50^{\circ}$

$$=3(0,643-i\cdot 3(0,766)$$

$$=1,93-2,30i.$$

Luego $3\left(\cos 50^{\circ}+i\cdot\ \text{sen}50^{\circ}\right)=1,93\quad 2,30i$ ♦

De la historia

La representación Geométrica del número complejo pertenece al agrimensor danés Gaspar Wessel (1745-1818) (figura 3.26 a), quien la expuso en su ensayo *Sobre la representación analítica de la dirección,* enviado a la Academia de Ciencias de Copenhague, en 1798, en el cual estuvo inadvertido por largo tiempo.

En 1799, fue introducida independientemente por el matemático alemán K. F. Gauss (1777-1855) (figura 3.26 b). Y en 1806, por el contador suizo J. R. Argand (1768-1822) (figura 3.26 c) -a quien se le debe, además, el nombre de **módulo** para la longitud del vector que lo repesenta.

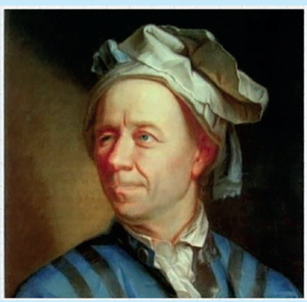
a

b

c

Fig. 3.26

La notación ***i*** de la unidad imaginaria fue introducida por el mátemático suizo L. Euler (1707-1783) (figura 3.27 a). Mientras que las denominaciones de **afijo** y **argumento** para designar un punto del plano complejo y el ángulo del vector que lo reperesenta, se atribuyen al matemático francés A. L. Cauchy (1789- 1857) (figura 3.27 b). Por otra parte la notación **IzI** para el módulo del número complejo se debe al matemático alemán K. Weierstrass (1815-1897) (figura 3.27 c).



a

b

c

Fig. 3.27

Multiplicación y división de números complejos en forma trigonométrica

La forma trigonométrica de los números complejos resulta particularmente útil para las operaciones de multiplicación y división.

Teorema 3.3

Sean $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\cdot\operatorname{sen}\theta_1)$ *y* $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\cdot\operatorname{sen}\theta_2)$, dos números complejos, entonces:

a) $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\cdot\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)\right]$

b) $z_1 : z_2 = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\cdot\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)\right]$, $\rho_2 \neq 0$

Demostración

a) $z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\cdot\operatorname{sen}\theta_1)\cdot\rho_2(\cos\theta_2 + i\cdot\operatorname{sen}\theta_2)$ Se efectúa la multiplicación indicada

$$= \rho_1\cdot\rho_2(\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2 + i\cdot\cos\theta_1\cdot\operatorname{sen}\theta_2 + i\cdot\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\cdot\operatorname{sen}\theta_2)$$

Se agrupan los términos semejantes y se extrae factor común i.

$$= \rho_1\cdot\rho_2\left[(\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\cdot\operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1\cdot\cos\theta_2 + \cos\theta_1\cdot\operatorname{sen}\theta_2)\right].$$

Al escribir las expresiones entre paréntesis como el coseno y el seno de la adición de dos ángulos, resulta, como se quería:

$$z_1\cdot z_2 = \rho_1\cdot\rho_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\cdot\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)\right].$$

b) $z_1 : z_2 = \dfrac{\rho_1\cos\theta_1 + i\cdot\rho_1\operatorname{sen}\theta_1}{\rho_2\cos\theta_2 + i\cdot\rho_2\operatorname{sen}\theta_2}$

$= \dfrac{\rho_1\cos\theta_1 + i\cdot\rho_1\operatorname{sen}\theta_1}{\rho_2\cos\theta_2 + i\cdot\rho_2\operatorname{sen}\theta_2}\cdot\dfrac{\rho_2\cos\theta_2 - i\cdot\rho_2\operatorname{sen}\theta_2}{\rho_2\cos\theta_2 - i\cdot\rho_2\operatorname{sen}\theta_2}$ Se efectúa la división de números complejos en forma binómica, ampliando la fracción por el conjugado de z_2:

$$= \frac{\rho_1\rho_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) + i\cdot(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2)]}{\rho_2^{\,2}}.$$

Si escribimos las expresiones entre paréntesis como el coseno y el seno de la sustracción de dos ángulos, resulta:

$$z_1 : z_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\cdot\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)\right]. \quad ◆$$

Ejemplo 3.21

Calcular $z_1 \cdot z_2$ y $z_1 : z_2$ si:

a) $z_1 = 5(\cos 30° + i \cdot \text{sen}\, 30°)$; $\quad z_2 = \sqrt{5}(\cos 75° + i \cdot \text{sen}\, 75°)$

b) $z_1 = \sqrt{21}\left(\cos\frac{\pi}{3} - i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{3}\right)$; $\quad z_2 = \sqrt{7}(\cos 1{,}2 + i \cdot \text{sen}\, 1{,}2)$

Resolución:

a) $z_1 \cdot z_2 = 5\sqrt{5}\ [\cos(30° + 75°) + i \cdot \text{sen}\,(30° + 75°)]$

$= 5\sqrt{5}\ (\cos 105° + i \cdot \text{sen}\, 105°)$

$z_1 : z_2 = \dfrac{5}{\sqrt{5}}\ [\cos(30° - 75°) + i \cdot \text{sen}\,(30° - 75°)]$

$= \sqrt{5}\ (\cos 45° - i \cdot \text{sen}\, 45°)$

b) $z_1 \cdot z_2 = \sqrt{21} \cdot \sqrt{7}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + 1{,}2\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + 1{,}2\right)\right]$

$= \sqrt{49 \cdot 3}\ (\cos 2{,}25 + i \cdot \text{sen}\, 2{,}25)$

$= 7\sqrt{3}\ (\cos 2{,}25 + i \cdot \text{sen}\, 2{,}25)$

$z_1 : z_2 = \dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} - 1{,}2\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} - 1{,}2\right)\right]$

$= \sqrt{3}\ [\cos(-0{,}153) + i \cdot \text{sen}\,(-0{,}153)]$

$= \sqrt{3}\ (\cos 0{,}153 - i \cdot \text{sen}\, 0{,}153)$. ◆

Saber más

Geométricamente, empleando su representación vectorial, el producto z de dos números complejos z_1 y z_2 puede realizarse como sigue (figura 3.28).

Si $\overrightarrow{OA}$ *y* $\overrightarrow{OB}$ son los vectores de z_1 y z_2, con el vector unidad $\overrightarrow{O1}$ y el vector $\overrightarrow{OA}$, se traza el triángulo *O1A;* luego, con $\overline{OB}$ como lado homólogo de $\overline{O1}$, en el mismo sentido se traza el triángulo semejante *OBC,* cuyo lado $\overrightarrow{OC}$ es el vector de z.

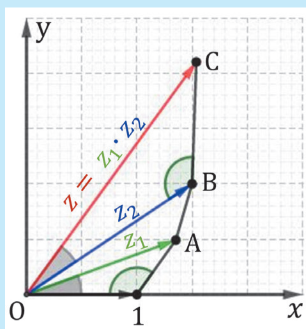


Fig. 3.28

En efecto, por semejanza de triángulos, $\frac{O1}{OB}=\frac{OA}{OC}$ o $\frac{1}{|z_2|}=\frac{|z_1|}{|z|}$, de donde $|z|=|z_1|\cdot|z_2|$;

además, $\sphericalangle COB = \sphericalangle AO1 = \theta_1$,

por lo que $\theta = \sphericalangle CO1 = \sphericalangle AO1 + \sphericalangle BO1 = \theta_1 + \theta_2$.

El cociente se hace de forma parecida, pero con $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OA}$ como dividendo y divisor, respectivamente, y construyendo en opuesto sentido el triángulo semejante *OBC*

Dado que el cálculo de la multiplicación y división de números complejos en forma trigonométrica se reduce a operar con los módulos y argumentos por separado, es usual representar la forma trigonométrica de manera abreviada:

$$\boxed{\rho(\cos\varphi + i\cdot\text{sen}\varphi) = \rho\,\text{cis}\varphi}$$

En esta expresión:

c : es la inicial de la palabra coseno.

i : es la unidad imaginaria.

s : es la inicial de la palabra seno.

Con esta notación, los resultados del teorema 3.3 se expresan:

$$\rho_1\text{cis}\ \varphi_1 \cdot \rho_2\ \text{cis}\ \varphi_2 = \rho_1\rho_2\ \text{cis}\ (\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$\rho_1\text{cis}\ \varphi_1 : \rho_2\ \text{cis}\ \varphi_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2}\text{cis}\ (\varphi_1 - \varphi_2) \quad \rho_2 \neq 0$$

Ejemplo 3.22

Calcular $z_1 \cdot z_2$ y $z_1 : z_2$ si:

a) z_1 = cis 141°; z_2 = cis 63°

b) z_1 = cis 2,17; z_2 = cis 5

Resolución:

a) $z_1 \cdot z_2$ = cis 141° · cis 63° = cis 204°

$z_1 : z_2$ = cis 141° : cis 63° = cis 78°

b) $z_1 \cdot z_2$ = cis 2,17 · cis 5 = cis 7,17 = cis (7,17 – 6,28) = cis 0,89

$z_1 : z_2$ = cis 2,17 : **cis** 5 = cis (–2,83) = cis (2π 2,83) = cis 3,45. ◆

En general, en el plano complejo, *el afijo* de un número puede representarse por coordenadas rectangulares $(a;b)$ o por coordenadas polares $(\rho;\theta)$ (figura 3.29), relacionadas entre sí por las ecuaciones que permiten convertir de una forma a la otra.

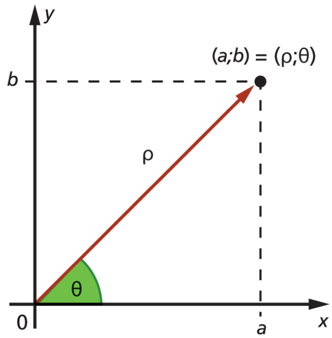


Fig. 3.29

La primera: $a = \rho\cos\theta$ y $b = \rho$ sen θ [1]

Convierte de trigonométrica (polar) a binómica (rectangular). En este caso basta hacer las operaciones indicadas en el número de forma trigonométrica propuesto, o sea, calcular $\cos\theta$ y senθ y multiplicar por ρ.

La segunda: $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\theta = \tan^{-1}\dfrac{b}{a}$ [2]

Convierte de binómica (rectangular) a trigonométrica (polar). En este caso para el cálculo de θ, debe determinarse su cuadrante (C) por los signos de b y a, o sea:

- ambos positivos, primer cuadrante (I C)
- b positivo y a negativo, segundo cuadrante (II C)
- ambos negativos, tercer cuadrante (III C)
- b negativo y a positivo, cuarto cuadrante (IV C)

Como el ángulo de la tangente puede ser $\theta + k \cdot 180°$ (o $\theta + k \cdot \pi$), donde k = 0,1,2, ..., se fija y se emplea el intervalo principal [0°;360°) o [0, 2π).

Por ejemplo, *si* $\dfrac{b}{-a} = -\sqrt{3}$

$\theta = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = -60° + k \cdot 180°$,

Como b es positivo y a, negativo, θ es del II cuadrante; luego,

$k = 1$ y $\theta = -60° + 1 \cdot 180° = 120°$.

¿Sabías que...?

Además de la abreviatura $\rho\,\text{cis}\theta$ para la forma trigonométrica del número complejo $\rho(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$, existen otras:

La forma **fasorial** $(\rho\angle\theta)$, donde $\angle\theta$ (se lee "con ángulo θ") y es equivalente a $\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta$.

Por ejemplo $w = 5(\cos 30^\circ + i \cdot \text{sen}30^\circ) = 5\angle 30^\circ$.

La forma **exponencial** o Fórmula de Euler $\left(z = \rho \cdot e^{i\theta}\right)$ donde $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\theta$, conocida como identidad de Euler. Ejemplo $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot sen\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Ambas formas se emplean en la tecnología, fundamentalmente en la ingeniería eléctrica para el análisis de circuitos excitados con señales sinusoidales, es decir, por curvas que describen las funciones seno y coseno (figura 3.30).

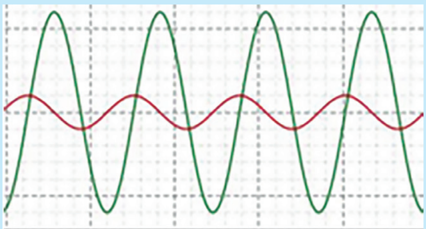


Fig. 3.30

Por su sencillez, a su entrada, en lugar de una señal sinusoidal, se emplea esta función exponencial para $\theta = \omega t$ y i la unidad imaginaria como $\rho e^{j\omega t} = \rho(\cos\omega t + \text{sen}\omega t)$, por ser expresiones de un mismo número, y a la salida se toma su parte real o imaginaria, por cuanto la respuesta a una señal sinusoidal es otra sinusoide de igual frecuencia.

Curiosamente, estas dos formas equivalentes del número complejo, con $\rho = 1$, permiten obtener $\text{sen}(\alpha \pm \beta)$ y $\cos(\alpha \pm \beta)$... ¡sin usar la Trigonometría!

En efecto, por la multiplicación de dos potencias,

$e^{i(\alpha\pm\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{\pm i\beta}$ [1], y, por equivalencia, $e^{i(\alpha\pm\beta)} = \cos(\alpha \pm \beta) + i \cdot \text{sen}(\alpha \pm \beta)$,

$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \cdot \text{sen}\alpha$, $e^{e^{\pm i\beta}} = \cos\beta \pm i \cdot \text{sen}\beta$

por lo que, sustituyendo estas relaciones en [1], resulta

$\cos(\alpha \pm \beta) + i \cdot \text{sen}(\alpha \pm \beta) = (\cos\alpha + i \cdot \text{sen}\alpha) \cdot (\cos\beta \pm i \cdot \text{sen}\beta)$

$= \cos\alpha\,\cos\beta \mp \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta + i \cdot (\text{sen}\,\alpha\,\cos\beta \pm \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta)$.

Igualando las partes reales y las imaginarias por separado, finalmente se tiene:

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\,\cos\beta \mp \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$

$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen}\,\alpha\,\cos\beta \pm \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$

Potenciación y radicación de números complejos en forma trigonométrica

A partir de la definición de unidad imaginaria y sus potencias de exponente natural para números complejos, se puede definir la potencia de números complejos y su operación inversa, la radicación.

Ejemplo 3.23

Calcular $(3+2i)^2$

Resolución:

Al aplicar la fórmula del cuadrado de un binomio, se obtiene

$(3+2i)^2 = (3)^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2i + [2]^2 \cdot i^2$

$= 9 + 12i + 4(-1)$

$= 5 + 12i$. ◆

El cálculo de potencias de mayor orden resulta más complejo. Sin embargo, el siguiente teorema permite calcular las potencias en notación trigonométrica.

Teorema 3.4 (Teorema de Moivre)

Si $z = \rho(\cos\theta + i \cdot \text{ sen } \theta)$ es un número complejo y $n \in \mathbb{N}$, se cumple:

$z^n = \rho^n \left[\cos(n \cdot \theta) + i \cdot \text{sen}(n \cdot \theta)\right]$ (fórmula de Moivre)

Demostración:

Haremos la demostración aplicando el principio de inducción completa estudiado.

Para $n = 1$ se cumple, pues $z_1 = z = \rho$ $(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$.

Supongamos que se cumple para un número natural cualquiera k:

$z^k = \rho^k$ $(\cos k\theta + i \cdot \text{sen} k\theta)$.

Entonces, para el sucesor de k, es decir $k + 1$

$$z^{k+1} = z^k \cdot z = \rho^k\left(\cos k\theta + i\cdot \mathrm{sen}\, k\theta\right)\cdot \rho\left(\cos\theta + i\cdot \mathrm{sen}\theta\right)$$

$$= \rho^{k+1}\left[\cos\left(k\theta+\theta\right) + i\cdot \mathrm{sen}\left(k\theta+\theta\right)\right]$$

$$= \rho^{k+1}\left[\cos\left(k+1\right)\theta + i\cdot \mathrm{sen}\left(k+1\right)\theta\right] \text{ o sea,}$$

$$z^{k+1} = \rho^{k+1}\left[\cos\left(k+1\right)\theta + i\cdot \mathrm{sen}\left(k+1\right)\theta\right]$$

y, por tanto, la fórmula de Moivre se cumple para todo *n.*

En notación abreviada, el teorema de Moivre se expresa:

$$\boxed{\left(\rho\ \mathrm{cis}\,\varphi\right)^n = \rho^n\ \mathrm{cis}\, n\varphi}$$

Ejemplo 3.24

Calcular z^n si:

a) $z = 2\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\cdot \mathrm{sen}\frac{\pi}{2}\right)$, para $n = 3$

b) $z = 0{,}2\ (\cos 25° + i\cdot \mathrm{sen}\, 25°)$, para $n = 5$

c) $z = \sqrt{3} - i$, para $n = 4$

Resolución:

a) Utilizando la fórmula de Moivre, tenemos:

$$z^3 = \left[2\sqrt[3]{2}\right]^3\left(\cos 3\cdot\frac{\pi}{2} + i\cdot \mathrm{sen}\, 3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 8\cdot 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\cdot \mathrm{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = 16\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\cdot \mathrm{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$= -16i$$

b) En este caso:

$$z^5 = (0{,}2)5\ (\cos 5\cdot 25° + i\cdot \mathrm{sen}\ 5\cdot 25°)$$

$$= 0{,}000\ 32\ (\cos 125° + i\cdot \mathrm{sen}\ 125°)$$

$$= 3{,}2\cdot 10^{-4}\ (\cos 125° + i\cdot \mathrm{sen}\ 125°)$$

c) Expresemos z en forma trigonométrica:

$$\rho = |z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = 2.$$

$$\tan\theta = \frac{-1}{\sqrt{3}};\quad \theta = -30° + k\cdot 180°$$

y como el afijo de z está en el IV cuadrante, debe ser $k = 2$, por lo que

$\theta = -30° + 2 \cdot 180° = -30° + 360° = 330°$,

$z = 2(\cos 330° + i \cdot \operatorname{sen} 330°)$ y por tanto:

$z^4 = 24\ (\cos 4 \cdot 330° + i \cdot \operatorname{sen} 4 \cdot 330°)$

$= 16(\cos 1\,320° + 1 \cdot \operatorname{sen} 1\,320°)$

$=16(\cos 240° + i \cdot \operatorname{sen} 240°)$. ◆

De la historia

Abraham de Moivre (1667-1754) (figura 3.31), francés, matemático protestante, emigrado en Londres después de dos años de prisión en Francia por represión religiosa, contribuyó al desarrollo del cálculo de probabilidades, la geometría analítica, la teoría de los números complejos y la trigonometría.

El carácter analítico de la trigonometría comenzó con la fórmula que lleva su nombre, al asociarla con el dominio de los números complejos.

Fig. 3.31

Llevó una existencia de pobreza durante gran parte de su vida. Pese a su eminencia científica y ser miembro de la Real Sociedad de Londres, jamás pudo obtener un puesto de profesor universitario.
Murió en la miseria, en 1754, cinco meses después de ser nombrado miembro externo de la Academia de Ciencias de París.

Una vez definidas las potencias, es posible definir las raíces de los números complejos.

Definición 3.5

Sea $z \in \mathbb{C}$; z_0 es una raíz n-ésima de z si se cumple: $z_0^{\,n} = z$

Ejemplo 3.25

Calcular $\sqrt{z}$ si $z = 2 + 2\sqrt{3}\,i$

Resolución:

Como al operar con números complejos en forma binómica siempre se obtiene un número complejo también en forma binómica, las raíces de z tendrán la forma $z_0 = x + yi$ con $x, y \in \mathbb{R}$, es decir, una de las raíces cuadrada *de z es:* $\sqrt{z} = z_0 = x + yi$; entonces:

$z = (z_0)^2 = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, es decir,

$2 + 2\sqrt{3}i = x^2 - y^2 + 2xyi$ aplicar la relación de igualdad de números complejos en forma binómica (igualar las partes reales y de manera similar las partes imaginarias),

$x^2 - y^2 = 2$ [1]

$2xy = 2\sqrt{3}$ [2]

Para resolver el sistema cuadrático:

$x = \dfrac{\sqrt{3}}{y}$ [3] Despejar la variable x en la ecuación [2],

$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{y}\right)^2 - y^2 = 2$ Sustituir [3] en [1]:

$\dfrac{3}{y^2} - y^2 = 2$ Aplicar propiedad de las potencias.

$3 - y^4 = 2y^2$ Eliminar denominador multiplicando por y^2 $(y \neq 0)$.

$y^4 + 2y^2 - 3 = 0$ Igualar a cero la ecuación.

$(y^2 + 3)(y^2 - 1) = (y + \sqrt{-3})(y - \sqrt{-3})(y + 1)(y - 1) = 0$ Factorizar.

$y = \pm\sqrt{3}i$ $y = \pm 1$ Hallar los ceros (solo se toma la solución positiva, pues por definición de números complejos $x, y \in \mathbb{R}$).

$x = \dfrac{\sqrt{3}}{\pm 1} = \pm\sqrt{3}$ sustituir $y = \pm 1$ en [3] (observa que el signo de y es opuesto al de x).

Encontramos las raíces cuadradas del número complejo $z = 2 + 2\sqrt{3}i$,

$z_0 - \sqrt{3} + i \qquad z_1 = -\sqrt{3} - i$. ◆

Aplica tus conocimientos

Expresa en forma trigonométrica al número complejo $z = 2 + 2\sqrt{3}i$ y a sus raíces cuadradas obtenida en el ejemplo 3.25.

De manera análoga a la potenciación en las raíces, el cálculo se simplifica utilizando la forma trigonométrica de los números complejos.

Teorema 3.5

Si $z = \rho(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$ es un número complejo y $n \in \mathbb{N}$, entonces z tiene n raíces n-ésimas dadas por la expresión:

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right], \quad k = 0, 1, \ldots, n - 1$$

Aquí $\sqrt[n]{\rho}$ representa a la raíz aritmética de $\rho \in \mathbb{R}$.

Demostración:

Sea $z_k = \rho$ $(\cos\varphi_k + i \cdot \operatorname{sen}\varphi_k)$ una raíz n-ésima de z; entonces, de la fórmula de Moivre resulta:

$z = z_k^n = \rho_k^n$ $(\cos n\varphi_k + i \cdot \operatorname{sen} n\,\varphi_k)$, *o sea,*

$\rho(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta) = \rho_k^n$ $(\cos n\varphi_k + i \cdot \operatorname{sen} n\varphi_k)$,

De esta igualdad se deduce que los módulos son iguales, $\rho = \rho_k^n$, y los argumentos se diferencian en un múltiplo de 2π , $n\varphi_k - \theta$. De aquí resulta:

$$\rho k = \sqrt[n]{\rho} \qquad \text{y} \qquad \varphi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Un número real tiene una única raíz aritmética, es decir, para todo

$k\rho_k = \sqrt[n]{\rho}$;

sin embargo, φ_k toma k valores diferentes, por lo que:

$$\varphi_k - \varphi_0 = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} - \left(\frac{\theta}{n}\right) = \frac{k}{n} \cdot 2\pi\ ;$$

luego, φ_k *y* φ_0 se diferencian en un múltiplo de 2π solo si k es un múltiplo de n y, por tanto, se obtienen n valores para $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$ como se quería. ◆

En notación abreviada:

$$\sqrt[n]{\rho \cdot \text{cis}\varphi} = \sqrt[n]{\rho} \cdot \text{cis}\left[\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right], \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Ejemplo 3.26

Calcular:

a) las raíces quintas de $z = 32 \cdot \text{cis}\,\dfrac{5\pi}{6}$.

b) las raíces cuartas de $z = 1$.

c) las raíces cúbicas de $z = i$.

d) $\left(\sqrt{3} - i\right)^{\frac{2}{3}}$.

Resolución:

a) Aplicando el teorema 2, resulta:

$$\sqrt[5]{z} = \sqrt[5]{32} \cdot \text{cis}\left[\frac{\frac{5\pi}{6}}{5} + \frac{2k\pi}{5}\right], \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

$$= 2 \cdot \text{cis}\left[\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{5}\right], \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Explícitamente las raíces se obtienen dándole valores a k:

$$z_0 = 2\text{cis} \cdot \text{cis}\frac{\pi}{6}$$

$$z_1 = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{5}\right) = 2 \cdot \text{cis}\frac{17\pi}{30}$$

$$z_2 = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{5}\right) = 2 \cdot \text{cis}\frac{29\pi}{30}$$

$$z_3 = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{6\pi}{5}\right) = 2 \cdot \text{cis}\frac{41\pi}{30}$$

$$z_4 = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{8\pi}{5}\right) = 2 \cdot \text{cis}\frac{53\pi}{30}$$

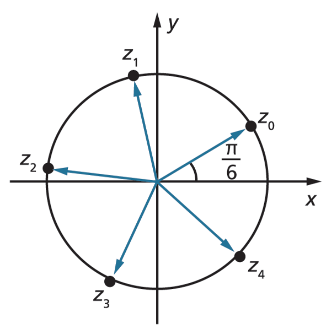


Fig. 3.32

En la figura 3.32 se han representado estas raíces.

b) Escribimos 1 en forma trigonométrica:

$1=\left(\cos 0^\circ + i\cdot \operatorname{sen} 0^\circ\right)$; entonces:

$$\sqrt[4]{1}=\left[\cos\frac{360^\circ k}{4}+i\cdot\operatorname{sen}\frac{360^\circ k}{4}\right],\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Dando valores a k obtenemos las raíces:

$z_0 = 1;$

$z_1 = (\cos 90^\circ + i\cdot\operatorname{sen} 90^\circ) = i$

$z_2 = (\cos 180^\circ + i\cdot\operatorname{sen} 180^\circ) = -1$

$z_3 = (\cos 90^\circ - i\cdot\operatorname{sen} 90^\circ) = -i$

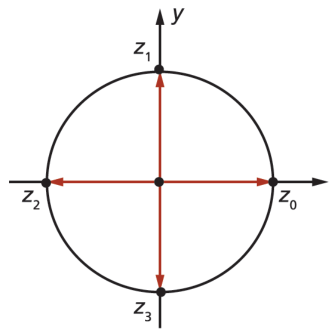


Fig. 3.33

En la figura 3.33 se han representado estas raíces

c) En este caso, z = cis $\frac{\pi}{2}$; luego:

$$\sqrt[3]{z}=\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right),\quad k = 0,\ 1,\ 2.$$

Dando valores a k, obtenemos:

z_0 = cis $\frac{\pi}{6}$;

z_1 = cis $\frac{5\pi}{6}$

z_2 = cis $\frac{3\pi}{2} = -$i

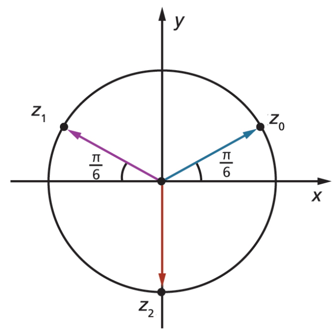


Fig. 3.34

En la figura 3.34 se han representado estas raíces.

d) Interpretamos el exponente fraccionario como en $\mathbb{R}$:

$$\left(\sqrt{3}-i\right)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{(3-i)^2}$$

Pero en $\mathbb{C}$ obtenemos tres valores. En efecto, usando la forma trigonométrica:

$$\sqrt{3}-i=2\cdot\operatorname{cis}315^\circ$$

$$\left(\sqrt{3}-i\right)^2=\left(2\cdot\operatorname{cis}315^\circ\right)^2 = 4\cdot \operatorname{cis} 630^\circ = 4\cdot\operatorname{cis} 270^\circ$$

$$\sqrt[3]{(3-i)^2}=\sqrt[3]{4}\cdot\leq\operatorname{cis}\left(\frac{270^\circ}{3}+k\cdot 120^\circ\right);\ k = 0,\ 1,\ 2.$$

Dando valores a *k*, obtenemos:

$$z_0 = \sqrt[3]{4}\text{cis}90° = \sqrt[3]{4}\,i$$

$$z_1 = \sqrt[3]{4}\,\text{cis}\,(90° + 120°) = \sqrt[3]{4}\ \text{cis}\ 210°$$

$$z_2 = \sqrt[3]{4}\,\text{cis}\,(210° + 120°) = \sqrt[3]{4}\ \text{cis}\ 330°$$

Cabe destacar una diferencia notable en relación con los números reales. En $\mathbb{R}$, el símbolo $\sqrt[n]{\rho}$ $(\rho \geq 0)$ representa un único valor, la raíz aritmética de ρ; en $\mathbb{C}$, el símbolo $\sqrt[n]{z}$ (*z* cualquiera) representa las *n* raíces *n*-ésimas de *z*.

Las figuras de la 3.32 a la 3.34 muestran que los afijos de las raíces *n*-ésimas de un número complejo forman los vértices de un polígono regular de *n* lados, inscrito en la circunferencia de centro en el origen y radio $\sqrt[n]{\rho}$ como se muestra en la figura 3.35.

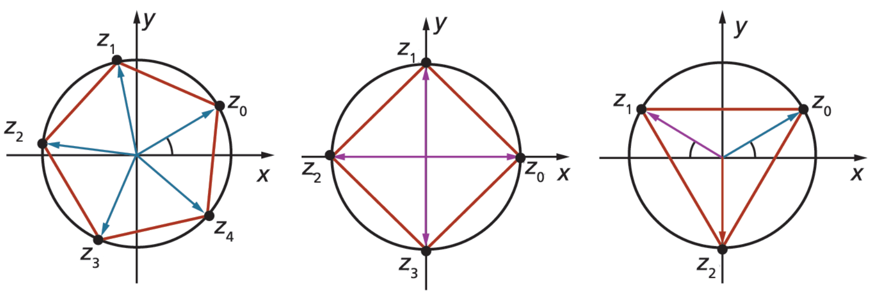


Fig. 3.35

Por otra parte, dado que las raíces *n-ésimas* de 1 se expresan por:

$$\frac{2k\pi}{n} + i \cdot \text{sen}\frac{2k\pi}{n} = \text{cis}\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

y para todo $z \in \mathbb{C}$, se tiene:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{\pi} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{\pi} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

$$= \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\frac{\theta}{\pi} + i \cdot \text{sen}\frac{\theta}{\pi}\right] \cdot \left[\cos\frac{2k\pi}{n} + i \cdot \text{sen}\frac{2k\pi}{n}\right]$$

$$\sqrt[n]{\rho} \cdot \text{cis}\frac{\theta}{\pi} \cdot \text{cis}\frac{2k\,\pi}{n}; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Podemos concluir:

Las n raíces n-ésimas de un número complejo z se obtienen multiplicando una raíz n-ésima de z por las n-ésimas raíces de 1.

Saber más

De la identidad fundamental logarítmica $z = e^{\ln z}$, $z \in \mathbb{C}$, elevándola al número complejo w, o sea, $z^w = e^{w \ln z}$, se obtienen las potencias de base y exponente complejos, con las que se determinan las potencias de base negativa y exponente irracional de números reales, cálculo que, en ese dominio numérico, es imposible. Así, se elimina la limitación que quedaba pendiente de solución.

Por ejemplo:

Si $z = -1$ y $w = \pi$, al calcular z^w, se tiene que:

como $z^w = e^{w \ln z}$,

$(-1)^{\pi} = e^{\pi \ \ln(-1)} = e^{\pi(\ln 1 + i\pi)} = e^{\pi(0 + i\pi)} = e^{i\pi^2} = \cos\pi^2 + i \cdot \operatorname{sen}\pi^2$,

donde se ha escogido el valor principal del logaritmo ($k = 0$), pues las potencias de exponente complejo tienen también $k \in \mathbb{N}$ valores.

Reflexiona sobre lo aprendido

1. Los números complejos se utilizan en la tecnología que usamos a diario, como los amplificadores, filtros, teléfonos, computadoras y motores. Reflexiona sobre cómo la tecnología ha transformado tu vida y cómo te sientes al saber que los números complejos están detrás de ella.
2. La forma trigonométrica de los números complejos ofrece una perspectiva geométrica. Explica desde tu experiencia, dónde una perspectiva diferente te ayudó a comprender mejor una situación o un problema.
3. La forma trigonométrica facilita la comprensión de las potencias de los números complejos. Explica un ejemplo de tu vida en el que la comprensión de un concepto matemático te ayudó a resolver un problema práctico.
4. ¿Cuál es la representación geométrica de un número complejo z que cumple las condiciones siguientes:
   a) $\mathfrak{I}(z) = 0$
   b) $\mathfrak{R}(z) = 0$
   c) Es el producto de dos números complejos opuestos.

5. Sean los números complejos $z_1 = 3 - 2i$ y $z_2 = -1 + i$:

   a) Representa gráficamente la adición y la sustracción con el uso del GeoGebra.

   b) Expresa su producto en forma trigonométrica.

6. Determina los valores de *a* y *b* si se cumple que: $a + bi = \frac{(-1-i)\cdot 2\operatorname{cis}45°)}{3\operatorname{cis}120°}$

7. Calcula las raíces cúbicas de *z* si $z = -4\sqrt{3} - 4i$.

¿Sabías que...?

En mecánica ondulatoria, una de las distintas formulaciones de la física cuántica aportada, en 1926, por el físico alemán, premio Nobel de Física Edwin Schrödinger (1887–1961) (figura 3.36) considera el comportamiento dual de la materia, como onda y como partícula, una cantidad importante es la función de onda ψ –cuyo carácter cíclico frecuente hace que se exprese naturalmente como un número complejo, ψ–. Su interpretación física es:

Dado cualquier punto y una partícula en un volumen *V*, el producto complejo $\psi \cdot \overline{\psi} = |\psi|^2$–un número real– es la probabilidad de que la partícula esté en ese punto, aplicable a los componentes del átomo (electrón, neutrino, etcétera).

Fig. 3.36

Ejercicios del epígrafe 3.3

Representación geométrica de números complejos

1. Representa gráficamente los números complejos siguientes:

a) $3 + 5i$ b) $4 - i$ c) $-2 - 2i$

d) $-4i$ e) $\frac{1}{2} - \frac{3}{4}i$ f) $-0{,}2 + 0{,}5i$

g) -4 h) $4\cos 60° - i\sqrt{2}\operatorname{sen}45°$

2. Obtén gráficamente la suma y diferencia de los números complejos z_1 y z_2. Con ayuda del asistente matemático GeoGebra:

a) $z_1 = 4 - 6i$ y $z_2 = -3 + 2i$

b) $z_1 = -2i$ y $z_2 = -2 - i$

c) $z_1 = i$ y $z_2 = -\frac{1}{2} - i$

d) $z_1 = -3{,}5 + 6i$ y $z_2 = \frac{5}{2} - i$

e) $z_1 = 3 + i$ y $z_2 = (-3; -1)$

f) $z_1 = \sqrt{3}i$ y $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$

3. Determina los números complejos cuyos afijos son los vértices de las figuras representadas en cada caso (figura 3.37).

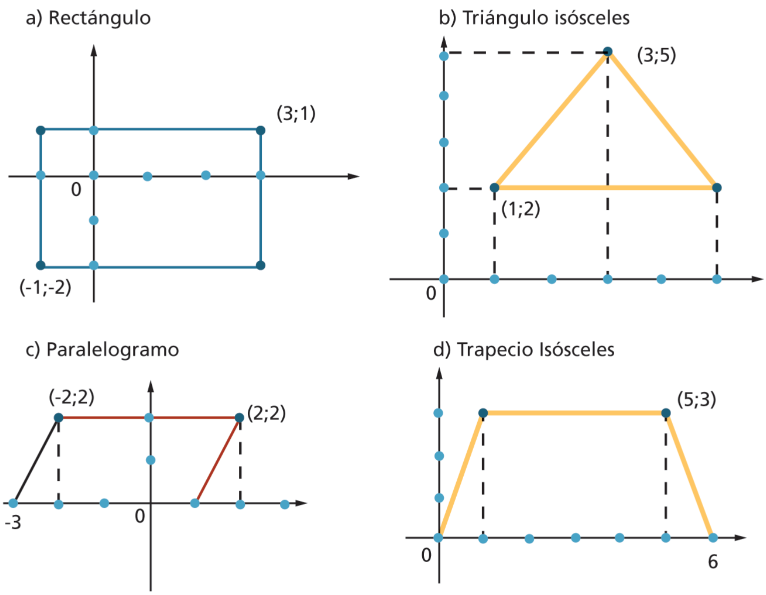


Fig. 3.37

4. Escribe en tu cuaderno de trabajo, los números complejos asociados a los lados de las figuras del ejercicio 3.

5. Calcula:

a) la longitud de las diagonales del rectángulo del ejercicio 3 a, y los ángulos que forman.

b) los ángulos del triángulo isósceles del ejercicio 3 b, y la longitud de la base.

c) la longitud de los lados y de las diagonales del cuadrilátero del ejercicio 3d, la amplitud de los ángulos de ese paralelogramo (comprueba que las diagonales se cortan en su punto medio).

6. Analiza la figura 3.19 b y determina otra manera gráfica de obtener la sustracción de los números complejos $2-i$ y $1+2i$.

7*. Representa geométricamente los conjuntos dados con el uso del GeoGebra

a) $\{z : 2<|z|<4\}$ b) $\{z : |z+1|\le 3\}$ c) $\left\{z : |z|>\frac{2}{3}\right\}$

d) $\{z : |z-i|>2\}$ e) $\{z : |z-1-i|<2\}$ f) $\{z : 1<|z-2+i|\le 3\}$

g) $\{z : |z|=\sqrt{2}\}$ h) $\{z : |z+1|=3\}$ i) $\{z : |z|=|z-1|\}$

j) $\{z : |z-1|=|z-i|\}$ k) $\{z : |z-1-i|=|z+1+i|\}$ l) $\{z : \Re(z)>1\}$

m) $\{z : \Re(z)\le 3\}$ n) $\{z : -1\le\Re(z)<5\}$ ñ) $\{z : \Im(z)=3\}$

o) $\{z : \Im(z)\ge -1\}$ p) $\{z : 4\le\Im(z)<1\}$ q) $\left\{z : \Re\left(\frac{1}{2}\right)=1\right\}$

r) $\{z : |z|=\Re(z)+1\}$ s) $\{z : |z|=z+\bar{z}+1\}$ t) $\{z : |z|=\Im(z)-1\}$

u) $\{z : \Re(z)+\Im(z)=2\}$ v) $\{z : \Re(z)+\Im(z)\le 3\}$ w) $\{z : \Re(z)=\Im(z)\}$

x) $\{z : |z|=\Re(z)\}$ y) $\{z : |z|=z-\bar{z}\}$ z) $\{z : |z|=\Im(z)\}$

8*. Explica el significado geométrico de las trasformaciones dadas, en las que $z' \to z$:

a) $z' = z - 2i$ b) $z' = z + 1 - i$ c) $z' = z - 4$

d) $z' = 1 - z$ e) $z' = \sqrt{2}\, z$ f) $z' = i - 2z$

g) $z' = \frac{z}{\sqrt{z}}$ h) $z' = -\frac{1}{3} z$ i) $z' + 1 = \frac{1}{3}(z-i)$

j) $z' = z(1 + i)$ k) $z' = \frac{z}{\sqrt{z}}(z-i)$ l) $z' = 2iz$

m) $z' = \frac{1}{i}z$ n) $z' = -z$ ñ) $z' = -3iz$

o) $z' = iz - 1$ p) $z' - 1 = i(z-1)$ q) $z' = (1-i)(1+i)z$

9*. Determina z' en función de z ($z' = f(z)$), si $z \to z'$ en las trasformaciones siguientes:

a) Traslación de 2 unidades, paralela al eje real y en sentido positivo.

b) Traslación de $\frac{1}{2}$ unidad en la dirección positiva del eje imaginario y después 2 unidades en la dirección negativa del eje real.

c) Traslación de $\sqrt{2}$ unidades en dirección de la bisectríz del cuadrante I.

d) Rotación de centro en el origen y ángulo de 90°.

e) Rotación de centro en el origen y ángulo de 45°.

f) Homotecia de centro en el origen y razón 3.

g) Homotecia de centro en $-1+i$ y razón $\frac{1}{2}$.

h) Simetría respecto al eje real.

i) Simetría respecto al eje imaginario.

j) Simetría respecto al origen.

k) Simetría respecto al punto $(2-i)$.

m) Simetría respecto a la recta $\Re(z) = -1$.

n) Simetría respecto a la recta $\Re(z) = \Im(z)$.

ñ) Semejanza de centro en el origen, ángulo de 45° y razón $\frac{1}{2}$.

o) Semejanza de centro en $3+4i$, ángulo de 45° y razón 5.

10*. Si $z' = z - 1 - i$ y $z'' = z'\left[\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$:

Determina la trasformación $z' \to z''$ y descríbela geométricamente. ¿Hay algún punto invariante por esta trasformación compuesta?

11*. Sea z tal que $|z| = 1$ y $z_1 = z^2$, $z_2 = z^3$. ¿Qué tipo de triángulo es el formado por los afijos de z, z_1, z_2. Fundamenta el análisis de tu afirmación con el uso del GeoGebra.

12*. El tesoro del pirata

Un joven se encontró un pedazo de papel, en el cual se describe la posición del tesoro de un pirata en una isla desierta. La descripción era:

En la isla hay una palmera, un cedro y una horca. Caminar desde la horca hasta la palmera contando los pasos; al llegar a la palmera, girar 90° a la derecha, contar el mismo número de pasos y clavar una estaca.

Regresar a la horca, caminar hasta el cedro contando los pasos; al llegar al cedro, girar 90° a la izquierda, contar el mismo número de pasos y clavar otra estaca. El tesoro está en el centro de la línea determinada por ambas estacas.

Al llegar a la isla, estaban el cedro y la palmera, pero la horca había desaparecido por el tiempo transcurrido. El joven no pudo encontrar el tesoro y regresó a casa.

Lo triste de la historia es que, si el joven hubiera sabido calcular con números complejos, podía haber encontrado el tesoro. Explica cómo lo hubiera hallado.

Expresiones trigonométricas de números complejos

13. Expresa en forma trigonométrica los números complejos siguientes:

a) $z = -2$

b) $z = 2i$

c) $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

d) $z = -2 + 2\sqrt{3}i$

e) $z = 1 + \sqrt{3}i$

f) $z = 4 + 3i$

g) $z = -\dfrac{5}{2} - \dfrac{5}{2}\sqrt{3}i$

h) $z = 2\sqrt{3} - i$

i) $z = \cos\alpha - i \cdot \operatorname{sen}\alpha$

j) $z = (-1; \sqrt{3})$

k) $z = 3\cos 120° - i \cdot 3\operatorname{sen}120°$

l) $z = \cos\dfrac{\pi}{4} - i \cdot \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}$

m) $z = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{5}i$

n) $z = i\, 0{,}125 - 0{,}2$

ñ) $z = \dfrac{4}{17} - \dfrac{5}{31}i$

14. Expresa en forma binómica los números complejos siguientes:

a) $z = \operatorname{cis} 90°$

b) $z = 2\operatorname{cis}180°$

c) $z = 4(\cos\alpha - i \cdot \operatorname{sen}\alpha)$

d) $z = 5\sqrt{2}\left[\cos\dfrac{3\pi}{4} - i \cdot \leq \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{4}\right]$

e) $z = \dfrac{3}{4}(\cos 32{,}4° + i \cdot 3\operatorname{sen}32{,}4°)$

f) $z = 3\sqrt{2}\left[\cos\dfrac{7\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{4}\right]$

g) $z = \sqrt{5}\operatorname{cis} 40{,}1°$

h) $z = \sqrt{3}\operatorname{cis}(-15°)$

i) $z = 3{,}27\operatorname{cis}\left[-\dfrac{\pi}{6}\right]$

j) $z = 3{,}51\operatorname{cis}\left[\dfrac{\pi}{12}\right]$

k) $z = \frac{3}{4}$ cis (– 57°)

l) $z = \frac{2}{7}$ cis (175°)

m) $z = \sqrt{5}$ cis (–175°)

n) z = 1,53 cis $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

ñ) $z = 2{,}15\left[\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{6}\right]$

o) z = cis 0°

p) $z = \text{cis}\, 270°$

15*. Calcula el módulo y el argumento del número complejo w:

a) Si una de las raíces de la ecuación $z^3 - az + 4 = 0$ es $z_0 = 1 - i$ con $a \in \mathbb{C}$ y $w = a + 2i$.

b) Si $z = \frac{i-5}{2}$ es un número complejo y $w = \frac{1}{z+2} + i^3$.

16. Halla los valores de ρ y φ en:

a) $\rho \text{ cis } \varphi = \frac{1+\sqrt{3}}{1+i}$

b) $\rho \text{ cis } \varphi = \frac{18+i}{2+3i} + i^{12}$

c) $\rho \text{ cis } \varphi = \frac{(2-i)(1+i)}{1+i} + \frac{\sqrt{3}-4i}{4}$

d) $\rho \text{ cis } \varphi = \frac{3-2i}{2+3i} + \frac{1-i}{1+i} + \frac{4+4\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}$

17. Representa con ayuda del GeoGebra los números complejos siguientes, sin expresarlos en forma binómica.

a) z_1 = 2 cis 0°

b) z_2 = 4 cis180°

c) $z_3 = \cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{3}$

d) $z_4 = \frac{11}{2}$ (cos 36° + i · 3 sen 36°)

e) z_5 = 3 (cos 30° – i · sen30°)

18*. Sean los números complejos $z_1 = \rho_1 (\cos\varphi_1 + i \cdot \text{sen}\varphi_1) = \rho_1 (\cos\varphi_1 + i \cdot \text{sen}\varphi_1)$ y $z_2 = \rho_2 (\cos\varphi_2 + i \cdot \text{sen}\varphi_2)$. ¿Qué condiciones deben cumplirse para establecer la igualdad entre z_1 y z_2 expresados en forma trigonométrica o polar?

Multiplicación y división de números complejos en forma trigonométrica

19*. La suma de dos números complejos es 6; el módulo del primero es $\sqrt{13}$ y el del segundo, 5. Halla a esos números, su producto y su cociente.

20. Calcula las siguientes operaciones con números complejos.

a) $(\cos 15° + i \cdot \text{sen } 15°) \cdot 2\,(\cos 30° + i \cdot \text{sen } 30°)$

b) $2\text{cis} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2}\text{cis}\frac{3\pi}{4}$

c) $0{,}8\,(\cos 7{,}2° + i \cdot \text{sen } 7{,}2°) \cdot 4{,}2\,(\cos 1{,}8° + i \cdot \text{sen } 1{,}8°)$

d) $\frac{7}{10}\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{5}{21}\text{cis}\frac{5\pi}{6}$

e) $\frac{2}{3}\text{cis}\,20° \cdot \frac{9}{8}\text{cis}\,(-120°) \cdot \frac{4}{3}\text{cis}\,100°$

f) $\sqrt{2}\,\text{cis}\,20° \cdot \frac{1}{5}\text{cis}\frac{\pi}{5}$

g) $1{,}27\text{cis}\,2 \cdot \frac{2}{3}\text{cis}\,3$

h) $\frac{\pi}{4}\text{cis}\,41{,}3° \cdot \frac{1}{3}\text{cis}\,1{,}5°$

i) $\sqrt{10}\,\text{cis}\,(-27°) \cdot \sqrt{2}\,\text{cis}\,3{,}1°$

j) $\sqrt{\frac{1}{2}}\text{cis}42° \cdot 1{,}57\text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

k) $\frac{2}{11}\text{cis}71{,}21° \cdot \text{cis}\,(-176°)$

l) $\frac{2}{11}\text{cis}\;\;48{,}3° \cdot 1{,}65\text{cis}\,50°$

m) $\frac{2}{3}\text{cis}\frac{\pi}{12} \cdot \frac{1}{5}\text{cis}\frac{5\pi}{6}$

n) $3{,}89\text{ cis }145° \cdot 3\text{ cis }67{,}2°$

ñ) $\sqrt{3{,}17}\,\text{cis}\;\;3{,}09 \cdot \text{cis}\,2{,}51$

o) $\text{cis }53° \cdot \text{cis }41{,}3°$

p) $2\text{ cis }80° \cdot \text{cis}\frac{\pi}{2}$

q) $3{,}57\text{ cis }1{,}5 \cdot 2{,}17\text{ cis }\frac{\pi}{5}$

r) $-3 \cdot 2\text{cis}\frac{\pi}{6} \cdot 5\text{ cis}10° \cdot i$

21. Calcula:

a) $\dfrac{8\,(\cos 70° + i \cdot \text{sen}70°)}{2\,(\cos 40° + i \cdot \text{sen}40°)}$

b) $\dfrac{\sqrt{3}\text{ cis}20°}{\sqrt{5}\text{ cis}\,(-100°)}$

c) $\dfrac{2{,}8\,(\cos 21{,}5° + i \cdot \leq \text{sen}21{,}5°)}{0{,}07\,(\cos 17{,}8° + i \cdot \text{sen}17{,}8°)}$

d) $\left[\frac{2}{3}\text{cis}\frac{5\pi}{3}\right] : \left[\frac{4}{9}\text{cis}\frac{\pi}{9}\right]$

e) $\dfrac{20\,\text{cis}\left(-\frac{5\pi}{2}\right)}{4\,\text{cis}\left(-\frac{5\pi}{18}\right)}$

f) $3{,}27\text{ cis}\,2 : 1{,}51\text{cis}1{,}5$

g) $\sqrt{5}\text{cis }54{,}3° : 3{,}21\text{cis }(-127°)$

h) $\frac{3}{13}\text{ cis}(-27{,}5°) : \text{cis }(157)$

i) $\frac{4}{17}\text{ cis }\;463° : \text{cis }178°$

j) $\sqrt{51}\,(\cos 3 - i \cdot \text{sen } 3) : \sqrt{15}\,\text{cis }1{,}67$

k) $1{,}7\text{ cis }\frac{\pi}{15} : 2{,}17\text{cis }3$

l) $\text{cis }2{,}59 : \text{cis }\frac{\pi}{2}$

m) $\sqrt{51}\text{ cis }\;41{,}5° : \text{cis }2{,}5$

n) $3{,}91\text{ cis }179° : 5{,}83\text{ cis }\frac{\pi}{6}$

ñ) $\frac{5}{12}(\cos 31{,}2° - i \cdot \text{sen}\,31{,}2°) : \frac{6}{13}\text{cis}\,\frac{4\pi}{3}$

o) cis 185° : cis 200°

p) cis 4 : cis 5

q) $\sqrt{17}$ cis 4,15 : cis 57,4°

r) $5{,}2\ \text{cis}\,\frac{\pi}{12} : 6{,}25\ \text{cis}\ 43° : \text{cis}\ (-2{,}17)$

s) $\dfrac{10\ \text{cis}\,30° \cdot 2\,\text{cis}\,10° - 5\ \text{cis}\,\frac{2\pi}{9}}{3\ \text{cis}\,5° \cdot \left[\frac{1}{5}\text{cis}\,35° : 0{,}2\ \text{cis}\,\frac{\pi}{12}\right]}$

22. Calcula las siguientes operaciones con números complejos.

a) (4 cis 18° – 2 cis 18°) : 3 cis45°

b) $\dfrac{2\,\text{cis}\,\frac{5\pi}{4} \cdot 3\,\text{cis}\left[-\frac{\pi}{4}\right]}{6\,\text{cis}\,2\pi}$

c) $\dfrac{5(\cos 30° + i \cdot \text{sen}40°) \cdot 2(\cos 75° + i \cdot \text{sen}75°)}{3(\cos 120° + i \cdot \text{sen}120°) \cdot 4(\cos 60° + i \cdot \text{sen}60°)}$

d) $\dfrac{4\,\text{cis}\,\frac{2\pi}{3} \cdot 24\,\text{cis}\,\frac{4\pi}{3}}{2\,\text{cis}\left[-\frac{5\pi}{6}\right] \cdot 6\,\text{cis}\left[-\frac{\pi}{6}\right]}$

23. Escribe en forma trigonométrica el número complejo z:

a) $z = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-i}$

b) $z = \dfrac{(1+i)(-\sqrt{3}+i)}{(1-i)(\sqrt{3}+i)}$

c) $z = \dfrac{2i(\sqrt{3}-i)}{(1+i)(-\sqrt{3}-i)}$

d) $z = \dfrac{(1-i)(9+3i\sqrt{3})}{(4+4i)5i}$

24. Halla el valor de ρ y φ en las expresiones siguientes:

a) $\rho\ \text{cis}\ \varphi = \dfrac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)(4\,\text{cis}\,65°)}{2i - 15°}$

b) $\rho\ \text{cis}\ \varphi = \dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{3} - i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{i}$

c) $\rho\ \text{cis}\ \varphi = \dfrac{(\sqrt{3}-i)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{2\cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\frac{3\pi}{4}}$

25. Sea la expresión $w = \dfrac{z_1}{z_2 \cdot z_3}$ ($z_2 \neq 0$ y $z_3 \neq 0$):

Calcula $|w|$ y arg (w) si $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$ y $z_3 = 1 + \sqrt{3}i$.

26*. Simplifica las siguientes expresiones.

a) $\sqrt{2}\,\text{cis}\ 45° + 2 + 3i + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{cis}\ 60°$

b) $3 - i + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left[\cos\dfrac{\pi}{3} + i\cdot\text{sen}\dfrac{\pi}{3}\right] - \left[1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right]$

c) $(-1 - i)\cdot 2\,(\cos 30° + i\cdot\text{sen}\ 30°)$

d) $(2 + 2i)\cdot 3\ \text{cis}\ 75°\cdot 5(\text{cis}\ 105°)$

e) $\dfrac{3 - i}{\cos 150° + i\cdot\text{sen}150°}$

f) $\dfrac{2 + \dfrac{3}{2}i + \sqrt{2}\left[\cos\dfrac{\pi}{3} + i\cdot\text{sen}\dfrac{\pi}{3}\right]}{\sqrt{3}\text{cis}\ \pi - \left(\dfrac{1}{2} + \sqrt{3}i\right)}$

27. Determina los valores de a y b para los que se cumpla que:

$$a + bi = \frac{\left(1 - \sqrt{3}i\right)\cdot\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)}{2\left[\cos(-\dfrac{\pi}{6}) + i\cdot\text{sen}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]}$$

28. Efectúa y expresa el resultado en forma binómica o rectangular:

a) $\dfrac{2\,\text{cis}\dfrac{\pi}{4}}{3\sqrt{2}\ \text{cis}\dfrac{\pi}{4}}$

b) $\dfrac{3\,\text{cis}60°\left(9 + 3\sqrt{3}i\right)}{3i\left(\text{cis}135°\right)}$

c) $\dfrac{8\left(\cos 40° + i\cdot\text{sen}40°\right)\cdot 2\left(\cos 170° + i\cdot\text{sen}170°\right)}{4\,\text{cis}190°)}$

29. Calcula x y y si:

a) $z = x + yi = \dfrac{2\,\text{cis}40°\cdot 8\ \text{cis}5°}{4\,\text{cis}195°}$

b) Determina el módulo y el argumento del conjugado del opuesto de z.

30. a) Determina el valor de la siguiente expresión:

$$z = \frac{2\ \text{cis}15°\,(1 - i)}{\sqrt{2}\,(\cos 120° + i\cdot\text{sen}120°)}$$

b) Representa gráficamente el resultado anterior.

31. Halla el valor de z en la siguiente expresión y expresa el resultado en forma binómica:

$$z=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\cdot 3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\cdot\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right)}{6\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\cdot\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)}$$

32*. El cociente de dos números complejos es imaginario puro, su suma es real e igual a 5, y el módulo del dividendo es el duplo del módulo del divisor. Halla los números.

Potenciación y radicación de números complejos

33. Calcula las operaciones siguientes con números complejos:

a) $(2+3i)^2$ b) $(1+i)^3$ c) $(3-4i)^2$ d) $(-1-5i)^2$

e) $(6i-5)^2$ f) $(i-1)^6$ g) $(x-i)^2$ h) $\sqrt{(2+i)^2}$

34. Calcula las operaciones siguientes con números complejos:

a) z^n si $z = 2\text{ cis }30°$ y $n = 4, 5, 6.$

b) $[3(\cos 18{,}6°+i\cdot\operatorname{sen} 18{,}6°)]^3$

c) $(\text{cis }2)^6$

d) $\left(\sqrt{5}\text{ cis}\frac{\pi}{5}\right)^8$

e) $[2\text{ cis }(-1)]^6$

f) $\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)^{-4}$

g) $(\sqrt{3}\text{ cis }0{,}5)^{10}$

h) $(\text{cis }45°)^4$

i) $\left(\sqrt{10}\text{ cis}\frac{\pi}{7}\right)^{14}$

j) $\left(cis\frac{\pi}{9}\right)^{-8}$

k) $[4(\cos 25°+i\cdot\operatorname{sen} 25°)]^4$

l) $(3\text{ cis }120°)^5$

m) $\left[\frac{1}{2}\text{ cis}\frac{\pi}{20}\right]^{10}$

n) $[1{,}5(\cos 18{,}2°+i\cdot\operatorname{sen} 18{,}2°)]^3$

ñ) $\left(\sqrt{3}\text{ cis}\frac{5\pi}{6}\right)^4$

o) $\left(2\text{ cis}180°\right)^{\frac{1}{3}}$

p) $(2+3i)^4$

q) $(-1-i)^5$

r) $\left[\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right]^{10}$

s) $(2{,}5i-1{,}5)^6$

t) $(-2-2i)^{20}$

u) $(\sqrt{3}-i)^{100}$

v) $(-i-\sqrt{3}\,i)^{10}$

w) $(-9-\sqrt{27}\,i)^8$

35. Determina el valor de la expresión:

$$w=\frac{z_1\cdot z_3}{z_2},\ \text{si}\ z_1=1-i\ ,\ z_2=\sqrt{3}i\quad \text{y}\quad z_3=2\ \text{cis}\frac{\pi}{2}$$

36. Sea $a\in\mathbb{C}^*$. Si se conoce que el valor de $a+\frac{1}{a}$ es el que se indica, calcula la expresión pedida:

a) $a+\frac{1}{a}=2+3i$. Calcula $a^2+\frac{1}{a^2}$

b) $a+\frac{1}{a}=2$. Calcula $a^n+\frac{1}{a^n}$

c) $a+\frac{1}{a}=1$. Calcula $a^2+\frac{1}{a^2}$

d) $a+\frac{1}{a}=0$. Calcula $a^n+\frac{1}{a^n}$

37. Determina $w=\frac{ab^3}{c}$ en forma binómica si:

$a=-3+3i$, $b=2$ cis $20°$ y $c=2(\cos\pi+i\,\text{sen}\,\pi)$

38. Halla el módulo y el argumento de w en:

$$w=\frac{\left(-\sqrt{3}+i\right)^3\cdot(i-\sqrt{3})^4}{(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^6}$$ empleando la forma trigonométrica o polar.

39. Sea $z=\dfrac{\left(2\,\text{cis}\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(3\,\text{cis}\frac{3\pi}{2}\right)^2}{6\ \text{cis}\frac{3\pi}{2}}$. Calcula $|z|$ y arg z.

40. Calcula los valores ρ y φ en: $\rho\ \text{cis}\ \varphi=\dfrac{\left(\sqrt{2}\ \text{cis}\ \frac{\pi}{4}\right)^2(1+i)}{4\ \text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

41. Efectúa $z=\dfrac{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^3}{\left(1+i\sqrt{3}\right)\cdot(4\ \text{cis}75°)}$ y calcula $|z|$ y arg z.

42. Sea el número complejo $c=\dfrac{\left(2\ \text{cis}\ \frac{\pi}{6}\right)^2\left(3\ \text{cis}\ \frac{\pi}{4}\right)}{6\ \text{cis}(-\pi)}$

a) Expresa c en notación trigonométrica.

b) Expresa c en forma binómica.

c) Calcula arg $\bar{c}$.

43. Calcula $|z|$ y arg z, si $z=\dfrac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^5}{(-2+2i)^4}+\dfrac{(1+i)\cdot(3+i)^3}{(1-i\sqrt{3})^3}-\dfrac{3}{4}+\dfrac{11}{2}i$

44. Dado $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Calcula $\overline{(z)^4}$.

45. Calcula las raíces cuadradas de los números siguientes:

a) $36 \text{ cis} \frac{\pi}{6}$ b) $\sqrt{3}+i$ c) $-1-i$

d) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ e) $-5i$ f) $24i-7$

g) $24-10i$ h) -8 i) $8i+15$

j) $3-4i$ k) $4+4i$ l) $-5-5i$

m) $5-12i$ n) $4i-3$ ñ) $8-6i$

o) $16i$ p) $-144i$ q) $2-2i$

46. Calcula las siguientes operaciones con números complejos.

a) $\sqrt[3]{8\text{cis}60^\circ}$ b) $\sqrt[4]{81\text{cis}120^\circ}$ c) $\sqrt[5]{32\text{cis}150^\circ}$ d) $\sqrt[6]{729\text{cis}50^\circ}$

e) $\sqrt[7]{\text{cis}3}$ f) $\sqrt[8]{\text{cis}\frac{5\pi}{6}}$ g) $\sqrt[10]{100\text{cis}\frac{5\pi}{6}}$

h) $\sqrt[4]{13{,}6\left(\cos 2 + i\cdot\text{sen}2\right)}$ i) $\sqrt[4]{18\left(\cos 35^\circ + i\cdot\text{sen}35\right)}$

j) $\sqrt[6]{3{,}5\text{cis}\left(-1{,}7\right)}$ k) $\sqrt[3]{4+4\sqrt{3}i}$ l) $\sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}$ m) $\sqrt[5]{2\sqrt{3}-2i}$

n) $[z_1 - z_2]^{\frac{1}{3}}$ si $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i$ y $z_2 = -\sqrt{3}i - 1$

47*. Denota por a_1 una de las raíces complejas de 1, por a_2 la otra y por a_3 la raíz real. Demuestra que:

a) $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ b) $a_1 \cdot (a_2)^2 = a_3$

48. ¿Para qué valor de $x \in \mathbb{C}$ se cumple que $x^3 - 8i = 0$?

49. Halla las soluciones de las ecuaciones siguientes:

a) $x^6 + 27 = 0 \quad (z \in \mathbb{C})$ b) $x^6 = i \quad (z \in \mathbb{C})$.

50*. Sea $w \in \mathbb{C}$ tal que $w^3 = \dfrac{\left(2 \text{ cis } \frac{\pi}{6}\right)^3 \left(3 \text{ cis } \frac{\pi}{4}\right)}{2\left[\cos(-\pi) + i\cdot\text{sen}(-\pi)\right]}$. Calcula $\sqrt{\overline{w}}$.

51. Halla $\bar{z}$ si $z=\dfrac{z_1\cdot z_2}{z_3}$, sabiendo que:

$z_1=4\sqrt{3}-4i,\qquad z_2=2\text{ cis}150°\qquad \text{y}\qquad z_3^2=\dfrac{1}{2}\text{ cis}\dfrac{\pi}{6}$.

52. Halla las raíces sextas de la unidad y represéntalas gráficamente en una circunferencia. Comprueba en el GeoGebra tus resultados obtenidos.

53. Dados los números complejos

$z_1=2\left(\cos 60°-i\operatorname{sen}60°\right),\ z_2=3\text{ cis}\dfrac{\pi}{4},\ z_3=\sqrt{10}\left(\cos 315°+i\operatorname{sen}315°\right),$

$w_1=\sqrt{3}-i,\ w_2=-3i,\ w_3=\text{cis}\,30°\ \text{ y }\ w_4=\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$

a) Menciona en cada caso, la parte real y la parte imaginaria.

b) Determina su opuesto y conjugado.

c) Expresa cada número en forma binómica o polar según corresponda.

d) Calcula $\dfrac{z_1\cdot z_2}{z_3}\quad \dfrac{z_1:z_2}{(w_3)^8}\quad \dfrac{z_3\cdot w_1}{w_4}\quad \dfrac{w_1\cdot w_2}{w_2:w_3}\quad \dfrac{w_1:w_3}{(w_1)^4}\quad \sqrt[3]{w_3}$

54. Identifica, cuáles de las proposiciones que aparecen a continuación son falsas y escríbelas en tu cuaderno de trabajo como verdaderas.

a) El afijo del número complejo $w=-\sqrt{6}+\sqrt{2}i$ se encuentra en el segundo cuadrante.

b) Si $z=1+i$ es un número complejo en forma binómica, entonces expresado en forma trigonométrica es $z=\text{cis}\dfrac{\pi}{4}$.

c) Sean $z_1=4\text{cis}\dfrac{3\pi}{4}$ y $z_2=2\text{cis}\,\theta$ son dos números complejos, entonces si $z_1\cdot z_2=8\text{ cis}\dfrac{7\pi}{4}$, necesariamente $\theta=\pi$.

d) Al realizar la operación de números complejos $4\text{cis}\dfrac{\pi}{3}\cdot 2\text{ cis}\,\pi$ se obtiene $8\text{cis}\dfrac{5\pi}{3}$.

e) La parte imaginaria del número complejo $3\left(\cos\pi+i\operatorname{sen}\pi\right)$ es 0.

f) Si z representa un número complejo en forma binómica y $\bar{z}$ su conjugado, entonces $|z|=|\bar{z}|$.

g) Al expresar el número complejo $z=2-2i$ en forma polar se obtiene $z=2\text{ cis}135°$.

h) Si $z = 2\text{cis}25°$ es un número complejo en forma trigonométrica, entonces $z^4 = 16\text{cis}100°$.

i) El conjugado del número complejo $w_1 = 7\text{cis}25°$ es $\overline{w_1} = 7\left(\cos 25° - i\,\text{sen}25°\right)$.

j) Al expresar el número complejo $z = 3\text{cis}270°$ en forma binómica se obtiene $z = 3i$.

k) Si z_1 y z_2 son dos números complejos tal que $z_1 = 2 + 2i$ y $z_2 = 2\ \text{cis}45°$, entonces $z_1 = z_2$.

l) El conjugado del número complejo $z_1 = -8 - 2i$ es $\overline{z_1} = 8 + 2i$.

m) Si $z_1 = 2 + 3i$ y $z_2 = 2 - 3i$ son dos números complejos, entonces $z_1 \cdot z_2 = 10$.

3.4 Resolución de ecuaciones en el dominio de los números complejos

Desde el inicio del capítulo aprendiste sobre las aplicaciones de los números complejos en otras áreas de la Matemática, en particular las relacionadas con la resolución de ecuaciones.

Ejemplo 3.27

Resolver las ecuaciones en el dominio de los números complejos:

a) $z^2 + 4 = 0$ b) $x^3 - 3x^2 + 12x - 10 = 0$

Resolución:

a)

Primera vía: $z^2 + 4 = z^2 - (-4) = z^2 - 4i^2 = (z - 2i)(z + 2i) = 0$; luego:

$z + 2i = 0$ o $z - 2i = 0$

$z = -2i$ o $z = 2i$, por tanto, la ecuación tiene dos raíces, que son los números complejos conjugados $-2i$ y $2i$.

$S = \{-2i; 2i\}$

Segunda vía: $z^2 + 4 = 0$

$z^2 = -4$

$z^2 = 4i^2$

$z = \pm\sqrt{4i^2} = \pm 2i$

$S = \{-2i; 2i\}$.

b)

En este caso al aplicar la regla de Ruffini para descomponer en factores se obtiene:

$(x-1)(x^2 - 2x + 10) = 0$

$x - 1 = 0$ o $x^2 - 2x + 10 = 0$ El trinomio no admite descomposición factorial en el dominio de los número entero $\mathbb{Z}$.

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">$x^2 - 2x + 10 = 0$</td></tr>
<tr><td>Primera vía: por la fórmula general de resolución de ecuaciones cuadráticas</td><td>Segunda vía: por completamiento cuadrático</td></tr>
<tr><td>$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$a = 1 \ b = -2 \ c = 10$
$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$
$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -36 < 0$
Las soluciones de la ecuación cuadrática no son reales.
$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 6i}{2}$
$x_{1,2} = \frac{2(1 \pm 3i)}{2} = 1 \pm 3i$
$x_1 = 1 + 3i \ \ x_2 = 1 - 3i$</td><td>$x^2 - 2x + 10 = 0$
$x^2 - 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2 + 10 = 0$
$(x^2 - 2x + 1) - 1 + 10 = 0$
$(x-1)^2 + 9 = 0$
$(x-1)^2 = -9$
$x - 1 = \pm\sqrt{-9}$
$x = 1 \pm 3i$
$x_1 = 1 + 3i \ \ x_2 = 1 - 3i$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">$S = \{1; 1+3i; 1-3i\}$. ◆</td></tr>
</table>

Ahora analicemos, cómo se obtiene la solución de la ecuación $x^3 - 12x + 10\sqrt{2} = 0$, considerada en la situación inicial del epígrafe 3.1.

Tenemos que $x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$, donde u y v son las soluciones del sistema:

(I) $u + v = -10\sqrt{2}$

(II) $u \cdot v = 64$

que se reduce a la ecuación de segundo grado:

$v^2 + 10\sqrt{2}v + 64 = 0$ cuyas soluciones son:

$v = 5\sqrt{2} \pm \sqrt{50-64} = -\,5\sqrt{2} \pm \sqrt{-14} = -\,5\sqrt{2} \pm i\sqrt{14}$;

entonces:

$x = \sqrt[3]{-5\sqrt{2}+i\sqrt{14}} + \sqrt[3]{-5\sqrt{2}-i\sqrt{14}}$

Calculando tenemos:

$x= \sqrt[3]{-5\sqrt{2}+i\sqrt{14}} + \sqrt[3]{-5\sqrt{2}-i\sqrt{14}}$

$= \sqrt[3]{8\left(\cos 152° + i\cdot \operatorname{sen} 152°\right)} + \sqrt[3]{8\left(\cos 152° - i\cdot \operatorname{sen} 152°\right)}$

$= 2\,[\cos\,(50{,}7° + 120°k) + i \cdot \operatorname{sen}\,(50{,}7° + 120°k)]$

$+\,[\cos\,(50{,}7° + 120°k) - i \cdot \operatorname{sen}\,(50{,}7° + 120°k)]$

$= 4 \cdot \cos\,(50{,}7° + 120°k) \qquad k = 0,\ 1,\ 2.$

La expresión dada tiene tres valores diferentes:

$$\sqrt[3]{-5\sqrt{2}+\sqrt{14}} + \sqrt[3]{-5\sqrt{2}-\sqrt{14}} = \begin{cases} 2{,}53, & k=0 \\ -3{,}95 & k=1 \\ 1{,}41 & k=2 \end{cases}$$

El valor obtenido para $k = 2$ coincide, dentro de la precisión utilizada, con $\sqrt{2}$, que es la raíz que conocíamos.

Se puede comprobar que los otros dos valores son también raíces. En este caso, el cálculo con números complejos se ha aplicado para obtener las tres raíces reales de la ecuación, pero es imposible con los métodos conocidos en grados anteriores en el dominio de los números reales.

También en las ecuaciones de segundo grado puede aplicarse el cálculo con números complejos; en este caso, se obtienen raíces para cada ecuación.

Ejemplo 3.28

Resolver las ecuaciones siguientes:

a) $4x^2 - 4x + 1 = 0$ b) $x^2 + x + 1 = 0$ c) $x^2 - 2ix - 5 = 0$

Resolución:

a) En este caso, se puede descomponer, pues se trata de un trinomio cuadrado perfecto,

$(2x-1)^2 = 0$

$2x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{2}$ se obtienen dos raíces iguales.

$S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

b) Esta ecuación no admite descomposición en $\mathbb{Z}$ y podemos aplicar la fórmula general de resolución de ecuaciones de segundo grado o completamiento cuadrático.

<table>
<tr><th>Aplicando la fórmula general
$x^2 + x + 1 = 0$</th><th>Aplicando completamiento cuadrático</th></tr>
<tr><td>

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$a = 1 \quad b = 1 \quad c = 1$

$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$

Aquí el discriminante es negativo y no hay raíces reales, pero sí complejas:

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad x_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

se obtienen dos raíces conjugadas.

</td><td>

$x^2 + x + 1 = 0$

$x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 0$

$\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + 1 = 0$

$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$

$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}$

$x + \frac{1}{2} = \pm\sqrt{-\frac{3}{4}}$

$x + \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Al expresar las raíces en forma trigonométrica se obtiene:

$S = \left\{ \begin{array}{l} \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\frac{2\pi}{3}\right) \\ \left(\cos\frac{2\pi}{3} - i \cdot \text{sen}\frac{2\pi}{3}\right) \end{array} \right.$

</td></tr>
</table>

c) Aquí es similar al anterior con la diferencia de que uno de los coeficientes es imaginario:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$a = 1 \qquad b = -2i \qquad c = -5$

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$D = (-2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 4i^2 + 20 = -4 + 20 = 16$$

$$x_{1,2} = \frac{2i \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2i \pm 4}{2} = \frac{2(i \pm 2)}{2} = i \pm 2$$

$x_1 = 2 + i \qquad x_2 = -2 + i$

$S = \{2 + i; -2 + i\}$. ◆

Saber más

Observa que en este caso de la ecuación $x^2 + x + 1$ las raíces son raíces complejas $= \frac{(x^3 + x + 1)(x-1)}{x-1} = \frac{x^3 - 1}{x-1}$ y las soluciones de la ecuación son las **raíces cúbicas primitivas de la unidad** distintas de 1, es decir, los números complejos que satisfacen $x^3 = 1$ pero no $x = 1$.

En general: $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots\ x + 1 = \frac{x^n - 1}{x-1}$ y las raíces de $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots\ x + 1 = 0$ son las raíces n-ésimas complejas de 1.

Estas ecuaciones se llaman *ciclotómicas.*

Hemos visto que las ecuaciones de tercer grado tienen tres raíces y las de segundo grado, dos; ambas son casos particulares de un teorema general.

Teorema 3.6 (Teorema fundamental del Álgebra)

Toda ecuación de grado n en $\mathbb{C}$ tiene exactamente n raíces complejas.

En este grado no podemos probar el teorema. Aunque K. F. Gauss dio cuatro demostraciones en el curso de su vida, ninguna es estrictamente algebraica, pues demandan conocimientos del Análisis matemático, que se estudia en el nivel superior.

¿Sabías que...?

En la hidrodinámica o estudio de las fuerzas y movimientos de los fluidos (gases y líquidos) la descripción de flujos estables incompresibles, irrotacionales (sin torbellinos) y planos (en dos dimensiones) está formulada por una función de variable compleja, $w = f(z)$, donde $z = x + yi$, denominada *potencial complejo*. Si los flujos fueran inestables, w dependería también del tiempo, (t).

Estos flujos son el fundamento de la teoría del vuelo, aplicable al diseño del ala de un avión, tanto en su aerodinamismo (forma de mínima resistencia al aire), como en su sustentación, desarrollada por Nicolái E. Zhukovski (1847-1921) (figura 3.38) eminente matemático ruso, presidente de la Sociedad Matemática de Moscú y profesor de su Universidad, a quien V. I. Lenin llamó padre de la aviación rusa. Curiosamente, el aire, que es compresible normalmente, deja de serlo a velocidades menores de unos 500 km/h, que es la velocidad de los aviones en su aterrizaje y despegue.

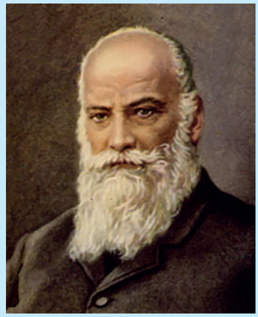


Fig. 3.38

Terminaremos este epígrafe con algunos resultados sobre los polinomios con coeficientes complejos.

Como sabemos, los polinomios son expresiones de la forma:

$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ en los que $a_0 \in \mathbb{C}, (a \neq 0)$

$n \in \mathbb{N}$ es el grado del polinomio y z es la variable compleja sobre la cual se define el polinomio (que puede tomar valores complejos) y cuya igualdad se determina por la definición siguiente.

Definición 3.6 (Igualdad de los polinomios)

Dos polinomios $a_n z^n + \ldots + a_i z + a_0$, $a_n \neq 0$ y $b_m z^m + \ldots + b_i z + b_0$, $b_m \neq 0$ son iguales si y solo si sus grados son iguales $(n = m)$ y sus coeficientes también, es decir:

$a_k = b_k \quad k = 0, 1, \ldots n$

Es decir, la igualdad de polinomios se basa en la coincidencia exacta de sus coeficientes y grados, independientemente de las raíces o valores que tomen para ciertos valores de z.

Esta definición es fundamental en álgebra y se aplica en diversos contextos matemáticos, incluyendo la resolución de ecuaciones polinómicas y la teoría de funciones analíticas.

Ejemplo 3.29

Calcular A y B para que se cumpla:

$$\frac{x+2}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}$$

Resolución:

Efectuando en el miembro derecho obtenemos:

$$\frac{x+2}{x^2-5x+6}=\frac{A(x-2)+B(x-3)}{x^2-5x+6}=\frac{Ax-2A+Bx-3B}{x^2-5x+6}=\frac{(A+B)x+(-2A-3B)}{x^2-5x+6}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores deben serlo también:

Aplicando la definición de igualdad de números complejos, tenemos:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A-3B=2 \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por 2 y adicionando ambas ecuaciones se tiene:

$-B=4$, luego $B=-4$

y sustituyendo $B=-4$ en la primera ecuación resulta:

$A-4=1$ luego, $A=5$, es decir,

$$\frac{x+2}{x^2-5x+6}=\frac{5}{x-3}-\frac{4}{x-2}. \quad \blacklozenge$$

El procedimiento introducido en este ejemplo se llama método de los ***coeficientes indeterminados***, pues se introducen coeficientes que no se conocen, y cuyo valor se determinan aplicando la definición de igualdad.

Del teorema fundamental del Álgebra resulta que, todo polinomio con coeficientes complejos puede descomponerse en factores lineales.

Teorema 3.7 (Teorema de factorización total)

Si $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ es un polinomio con $a_k \in \mathbb{C}$ y $z_1, z_2, ..., z_n$ son las raíces de la ecuación $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0$, entonces

$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdot ... \cdot (z - z_n) \cdot z_1, ..., z_n$

se llaman también ceros del polinomio.

Sin embargo, es importante que sepas que esta propiedad es fundamental en la criptografía moderna, especialmente en sistemas como RSA, en los que la seguridad depende de la dificultad de factorizar números grandes en sus componentes primos. Además, en la vida cotidiana, se aplica en situaciones como la división equitativa de recursos, la gestión del tiempo y la comparación de precios, demostrando su utilidad práctica más allá del área matemática.

Ejemplo 3.30

Descomponer en factores $x^2 + x + 1$

Resolución:

Sabemos que $x^2 + x + 1 = 0$ tiene dos raíces

$\alpha_1 = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$ y $\alpha_2 = \left(\cos\frac{2\pi}{3} - i \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$

Luego del teorema 3.7 resulta:

$x^2 + x + 1 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$. ◆

Observa que el polinomio del ejemplo 3.30 no tiene descomposición en polinomios con coeficientes reales.

Combinando el teorema 3.7, podemos descomponer cualquier fracción en fracciones simples del tipo $\frac{A}{x - \alpha}$.

Ejemplo 3.31

Descomponer en fracciones simples la fracción algebraica $\frac{2x+1}{x^2+1}$

Resolución:

Como $x^2 + 1 = 0$ tiene raíces $\pm i$, tenemos:

$x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$ y entonces escribimos,

$$\frac{2x+1}{x^2+1}=\frac{A}{x-i}+\frac{B}{x+i}=\frac{A(x+i)+B(x-i)}{(x-i)(x+i)}=\frac{Ax+Ai+Bx-Bi}{x^2+1}$$
$$=\frac{(A+B)x+(A-B)i}{x^2+1}$$

Aplicando la definición de igualdad de fracciones de igual denominador, tenemos:

$$\begin{cases} A+B=2 \\ (A-B)i=1 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} A+B=2 \\ A-B=-1 \end{cases} \quad \text{pues } 1=i^{4k} \text{ con } k\in\mathbb{Z}, \text{ para } k=1 \quad 1=i^4$$

Dividiendo por la unidad imaginaria en la segunda ecuación tenemos $A-B=i^3$, pero $i^3=-i$ de donde resulta que $A-B=-i$

De la resolución del sistema se obtiene:

$A=\frac{2-i}{2}$ y $B=\frac{2+i}{2}$, o sea,

$$\frac{2x+1}{x^2+1}=\frac{2-i}{2(x-i)}+\frac{2+i}{2(x+i)}. \quad \blacklozenge$$

Ejercicios del epígrafe 3.4

1. Determina las soluciones de las ecuaciones siguientes en el dominio de los números complejos:

a) $x^2-3x+2=0$ b) $2x^2+x-2=0$ c) $x^2+x-5=0$

d) $3x^2-x-2=0$ e) $4x^2+x-2=0$ f) $x^2+x-1=0$

g) $x^2+x+3=0$ h) $x^2+4=0$ i) $x^4+2x^2+1=0$

j) $x^4+x^2-1=0$ k) $x^4+x^2+1=0$ l) $x^2-3x+5=0$

m) $5x^2-x+1=0$ n) $(2x-1)^2-(x+2)(x-2)-2x^2=-2x-5$

ñ) $x^2+2x-2+4i=0$ o) $x^2-(2+4i)x+2i-3=0$

2. Resuelve las ecuaciones siguientes ($z\in\mathbb{C}$):

a) $z^2+iz=2$ b) $z^2+iz+1=0$

c) $z^2+2iz-1=0$ d) $z^2+2iz=5$

e) $z^2=2z-5$ f) $z(z-2i)=5$

3. Demuestra que la suma de las raíces quintas de la unidad real es nula. Sugerencia: resuelve la ecuación $x^5 = 1$.

4. Sean las expresiones algebraicas $A(x) = 2x(x-2)$, $B(x) = 3(x^2+3)$ y $C(x) = x + y$:

a) Determina los valores de $x \in \mathbb{C}$ para los cuales se cumple que $A(x) = B(x)$.

b) Diga la parte real del número complejo que resulta de dividir una de las raíces de la ecuación entre $1-i$.

c) Expresa el número complejo $z = \sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{5\pi}{4}$ en forma binómica.

d) Calcula el coeficiente del término x^5y^2 en el desarrollo de $\left[C(x)\right]^7$

5. Sean las expresiones $P(x) = x^3 + 2x^2$ y $Q(x) = x(x^2 - x) - 9$:

a) Determina los valores de la variable en el dominio de los números complejos para que $P(x) = Q(x)$.

6. Sean los números complejos $z_1 = 4\ \text{cis}120°$, $z_2 = 4x - 6i$, $z_3 = 2\,\text{cis}\,25°$, $z_4 = 2 + 3yi$ y $w = 2 - 2i$:

a) Expresa z_1 en forma binómica.

b) Si $z_2 = z_4$, determina los valores de x, y.

c) Calcula $(z_3)^4$.

d) Calcula $(w)^{10}$.

7. Sean las expresiones $M(x) = (2x+1)^2 + x^3$ y $N(x) = x(x^2 + 3x) + 4x$:

7.1 ¿Para qué valores de $x \in \mathbb{C}$ se cumple que $M(x) = N(x)$?

7.2 Si $z_1 = i^{2\,031}(-2+2i)$ y $z_2 = 1 + 2i$ y $z_3 = 2\sqrt{2}\,\text{cis}\,135°$

a) Calcula $z_1 - z_2$.

b) Determina la parte real de z_3.

c) Calcula $\frac{(z_1)^4}{z_3}$.

8. Descompón en factores complejos:

a) $2x^3 + 7x^2 + 16$ b) $x^4 - x^3 - 4x^2 - 5x - 3$

9. Reduce los polinomios siguientes y determina su grado:

a) $P(x) = 7x^3 + 5x - 3 - 3x^3 - 2x + 7$

b) $Q(x) = (2x+1)^2 - (x+1)(x-1) - 3x^2$

c) $M(x;y) = 2x^2y^3 - xy\left(xy^2 - 1\right) - 4x^3y^4 + 6x^3y^4 - xy$

d) $S(a;b) = \frac{1}{2}a^3b^2 - \frac{1}{4}a^2b^3 + \frac{3}{4}a^3b^2 + \frac{5}{8}a^2b^3 + 2$

10. Sea $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x + 1$, calcula $P(1)$, $P(-1)$, $P(2)$ y $P\left(\frac{1}{2}\right)$ aplicando la regla de Ruffini o de Horner.

11. Dado $P(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 3$, calcula $P(-i)$, $P(1-i)$ y $P\left(i^{-1}\right)$.

12. Halla un polinomio de tercer grado cuyas raíces sean:

a) $x_1 = 1$ $\quad x_2 = -2$ $\quad x_3 = 0$

b) $x_1 = -1$ $\quad x_2 = -1$ $\quad x_3 = \frac{1}{2}$

c) $x_1 = x_2 = x_3 = -i$

d) $x_1 = 1$ $\quad x_2 = 1$ $\quad x_3 = -i$ $\quad x_4 = 0$

e) $x_1 = 1$ $\quad x_2 = i$ $\quad x_3 = -i$

f) $x_1 = 1$ $\quad x_2 = 2$ $\quad x_3 = -i$

g) $x_1 = 1$ $\quad x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\quad x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

13. Descompón en fracciones simples:

a) $\frac{x-5}{(x+1)(x-1)}$ $\quad$ b) $\frac{3}{x^2+3x}$ $\quad$ c) $\frac{8x-8}{x^3-2x^2-8x}$ $\quad$ d) $\frac{3x}{x^2-25}$

Ejercicios del capítulo

1. Escribe en tu cuaderno de trabajo la respuesta correcta en cada inciso.

A. El resultado de multiplicar los números complejos $z_1 = 4 + 2i$ y $z_2 = 5 - i$ es:

a) $20 - 2i$ $\quad$ b) $22 + 6i$ $\quad$ c) $18 + 6i$ $\quad$ d) 22

B. Sea $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + 2i$ y $z_3 = 3 + 3i$ son números complejos. Al calcular $\dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_3}$ se obtiene:

a) $\dfrac{4i}{3+3i}$ b) $\dfrac{4}{3}i$ c) $\dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3}i$ d) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3}i$

C. El conjugado de calcular $\overline{z_1 \cdot z_2}$ para $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 5 + 2i$ es:

a) $13 - 11i$ b) $13 + 11i$ c) $-11i$ d) 13

2. Escribe en tu cuaderno de trabajo cuáles de las proposiciones que aparecen a continuación, son verdaderas o falsas. Fundamenta tu elección.

a) Al adicionar dos números complejos conjugados, el resultado es un número real.

b) El afijo del número complejo $-4i$ se encuentra en el segundo cuadrante.

c) Los valores x, y reales que satisfacen a la ecuación

$(1 - i)x + (2 + i)y = 4x - 2i^{142}$ son $x = 1$ y $y = 0$

d) La raíz cúbica de un número negativo pertenece al dominio de los números complejos.

3. Simplifica las operaciones siguientes:

a) $(3 - i) + (2{,}5 + i) - (1{,}3 + 6{,}7i)$ b) $(i - 4)(2 + 3i) - \left[\left(\dfrac{1}{5} - 0{,}85i\right) + \dfrac{2}{3} - i\right]$

c) $\left[\sqrt{2}\operatorname{cis}45° + \left(\dfrac{2}{3} - 5{,}1i\right)(1 - i)\right] : (2 - i)$ d) $\left[5\operatorname{cis}40° - \sqrt{3}\operatorname{cis}30°\right](2 + 3i)$

e) $(0{,}4 - 0{,}3i)^2 + 2\left[\cos\dfrac{\pi}{5} - i \cdot \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{5}\right]$ f) $(2 + i)^5 - 0{,}45 \operatorname{cis} 45°$

g) $3{,}5 \operatorname{cis} 48° \cdot 2{,}7 \operatorname{cis}(-65°) : \sqrt{3}\operatorname{cis}70°$

h) $2{,}7\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{3} : 6{,}1 \operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) \cdot 7{,}8 \operatorname{cis}\dfrac{2\pi}{3}$

i) $5{,}65 \operatorname{cis} 140° \cdot \overline{3 \operatorname{cis}40°} : 8 \operatorname{cis} 65°$ j) $\left[\left(\overline{3+\mathrm{i}}\right) - (3 + i)\right] \cdot (2 - i)$

k) $\left(\overline{4+i}\right)\cdot\left(\overline{-1+3i}\right)-\left(\overline{7-2i}\right)\cdot\left(\overline{2-7i}\right)$

l) $\overline{(2\ -i)\cdot(i+2)}+\sqrt{5}\left[\cos\frac{\pi}{3}-\ i\cdot\text{sen}\frac{\pi}{3}\right]$

4. Determina los valores de x y $y\in\mathbb{R}$ en las ecuaciones siguientes:

a) $x+3i+2=5+yi$

b) $x-2i=3+3i-yi$

c) $x-iy=y+ix$

d) $2x+iy=9+y-3ix$

e) $3y-ix+1=iy-3x$

f) $3x-y-i=2ix-iy$

g) $(x+iy)\cdot(1+2i)=-1+8i$

h) $(x+iy)\cdot(2-i)=5$

i) $(x+iy)\cdot(x-iy)=(2+ix)^2$

j) $(x+iy)^2=1+i$

k) $(x-iy)\cdot\left(\overline{x-iy}\right)=(x+1)^2$

l) $(2x-3i)^2=(i-9y)y$

m) $|x-iy|=4$

n) $x^2-3x-i(y+x-1)=y+1$

5*. Prueba que:

a) $\Re\,(z)=0$, si $\Im\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)=0$, con $z\neq i$.

b) $\Re\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)=0$, si $z\in\mathbb{C}$ con $|z|=1$.

6. Cuál es el valor de $a\in\mathbb{R}$ para que el número $z=\dfrac{2-4ai}{1+i}$ sea un número real.

7*. Sea el número complejo $w=\dfrac{z-1}{z+1}$ $(z\in\mathbb{C},\ z\neq-1)$.

a) Determina $\Re(w)$ e $\Im(w)$.

b) Demuestra que si w es un número imaginario puro, entonces $|w|=1$.

8*. a) Sea $z=x+i\,y$ $(x,\ y\in\mathbb{R})$. Demuestra que:

$$x=\frac{\bar{z}+z}{2}\qquad\text{y}\qquad y=\frac{\bar{z}-z}{2}i$$

b) Sea la ecuación de la recta $Ax+By+C=0$ con $A\neq0$ o $B\neq0$ $(x,\ y\in\mathbb{R})$. Demuestra que:

$$(A+iB)\,\bar{z}+(A-iB)\,z+2C=0$$

9. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $w^3 - 4\sqrt{2}\,(1 + i) = 0$ b) $w^5 - 4 + 4i = 0$ c) $w^4 - \frac{1+3i}{2+i} = 0$

10. Halla dos números complejos tales que su diferencia sea igual a $6i$ y su cociente sea un número imaginario puro.

11* La suma de dos números complejos es $3 + 2i$. La parte real de uno es 2. Halla esos números si su cociente es un número imaginario puro.

12. Calcula el valor de la suma: $S = 1 + i + i^2 + \dots i^{120}$.

13. Determina las partes real e imaginaria de los números complejos siguientes:

a) $z = \frac{(1+2i)^3}{i} + i19$ b) $z = \frac{5+2i}{2-5i} - \frac{3-4i}{4+3i} + \frac{1}{i}$ c) $z = \frac{2-3i}{1+4i} + i6$

14. Sea la función compleja $f(z) = 2z^4 - z^3 + z^2 - z - 1 \quad (z \in \mathbb{C})$:

a) Calcula $f(1 - i)$ y $f(1 + \sqrt{3}\,i)$

b) Investiga si $z_0 = i$ es cero de f.

15. Demuestra que si $|z_1| = |z_2|$, entonces $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ es un número imaginario puro.

16. Determina ρ y φ dado:

$\rho \operatorname{cis} \varphi = \sqrt[3]{\frac{ma^2}{b}}$, donde $m = \sqrt{3} + i$, $a = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ y $b = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

17. Calcula las raíces cuartas de z si: $\bar{z} = a^3bc$

Donde, $a = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{18}$, $b = \sqrt{2}(\cos 40° + i \cdot \operatorname{sen} 40°)$ y $c = \sqrt{3} \operatorname{cis} 50°$.

18. Un extremo de un diámetro de circunferencia cuyo centro coincide con el origen de coordenadas es el punto $4\sqrt{2} + 2i$. Halla el número que representa los extremos del diámetro perpendicular al dado y calcula la longitud del diámetro de la circunferencia.

18.1 Verifica el resultado obtenido con el uso de GeoGebra.

19. ¿Qué figura del plano representan las ecuaciones siguientes?

a) $\Im(z^2) = 2$ b) $\Re\left[\frac{1}{z}\right] = 2$ c) $\Im\left[\frac{1}{z}\right] = \frac{1}{2}$

d) $z \cdot \overline{z} + (1 - i)\, z + (1 + i)\, \overline{z} = 0$ e) $\overline{(z^2 - \overline{z})^2} = -8$

f) $\Im(z^2 - \overline{z}) = 2 - \Im(z)$ g) $2z \cdot \overline{z} + (2 + i)z + (2 - i)\overline{z} = 0$

19.1 Representa con ayuda del GeoGebra la figura obtenida.

20. a) Calcula las raíces cúbicas de $\overline{z}$ si $z = 3 + \sqrt{3}\, i$.

b) Las raíces cuadradas de z si $z = \dfrac{40 \text{ cis} 20° \cdot 2\text{cis} 40°}{(\sqrt{3} - i)^3}$.

21. El centro de un cuadrado es el afijo de $z_0 = 1 + i$ y uno de los vértices es el afijo de $z_1 = 1 - i$

a) ¿Qué números complejos determinan los vértices restantes?

b) Calcula la longitud de la diagonal del cuadrado.

c) Verifica con ayuda del GeoGebra el resultado obtenido

22*. a) Si α es una de las raíces cúbicas complejas de la unidad, comprueba las relaciones siguientes:

$1 + \alpha + \alpha^2 = 0$ $(1 + \alpha^2)^6 + (1 + \alpha)^4 = \frac{1}{3}(1 - \alpha)^2$

b) Si α_1 es una raíz cúbica compleja de la unidad y α_1, la otra, muestra que:

$\alpha_1 + \alpha_2 = -1$ $\alpha_1 + \alpha_2^2 = \alpha_2$

23*. Demuestra que si $z_1, z_3 \in \mathbb{C}$ se verifica que:

$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\, |z_1|^2 + |z_2|^2$, e interpreta geométricamente este resultado.

24. Describe geométricamente el conjunto de números complejos z que cumple la condición siguiente: $z - \overline{z} = i$.

25. Comprueba si $1 \pm \sqrt{3}i$ son raíces de la ecuación: $x^2 - 4x + 3 = -\dfrac{3}{x^2 - 1}$.

26*. Determina el valor de n para que el polinomio $2x^3 - 2x^2 + nx - 1$ sea divisible por $x - 3$.

27*. a) Determina a y b en el polinomio $x^4 - ax^3 + 2x^2 - bx + 1$, sabiendo que es divisible por $x - 1$ y $x - 2$.

b) ¿Cuál es el polinomio de tercer grado en una variable cuyas raíces o ceros son: $-4i$, $-1 - i$, 1 y toma el valor numérico $9i - 3$ cuando la variable toma el valor i?

28*. Dado dos vetores $\vec{s}$ con origen en (-1;0) y final (–4;4), y $\vec{t}$ con origen en (–1;–2) y final (2;1):

Determina las coordenadas del vector con origen en el origen de coordenadas que resulta de calcular:

a) $\vec{s}+\vec{t}$ b) $\vec{s}-\vec{t}$ c) $\vec{t}-\vec{s}$ d) $\vec{t}+\vec{s}$ e) $-(\vec{s}-\vec{t})$

29. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$

b) $x^3-\sqrt{3}x^2+3x+x^2-\sqrt{3}x+3=0$

30. Lee detenidamente y responde.

30.1 Clasifica en tu cuaderno de trabajo las proposiciones siguientes en verdaderas o falsas. Justifica las falsas.

a) Al calcular $\sqrt{5}-i^{2\,028}$ se obtiene un número real.

b) La parte real del número complejo $\sqrt{2}\text{cis}\dfrac{3\pi}{4}$ es $-\dfrac{1}{2}$.

c) Al calcular $\left(-\sqrt{7}-i\right)\left(-\sqrt{7}+i\right)$ se obtiene un número real.

d) La ecuación $x^3+2x=1$ tiene al menos una solución real.

e) Una de las raíces quinta de 32 es $z_0=2\text{cis}\,0°$.

f) El afijo del número complejo $z=2\text{cis}\dfrac{3\pi}{2}$ tiene como coordenadas $(-2;0)$.

g) El conjugado del número complejo $w_1=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{7}+i\cdot\text{sen}\dfrac{\pi}{7}\right)$ es $\overline{w_1}=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{7}-i\cdot\text{sen}\dfrac{\pi}{7}\right)$.

h) El argumento del número complejo conjugado de $w_2=5\text{cis}\dfrac{7\pi}{6}$ es 30°.

i) Si el módulo del número complejo z es ρ, entonces el módulo de $-z$ y de $\bar{z}$ es ρ.

30.2 Escribe en tu cuaderno de trabajo la respuesta correcta en cada caso.

Dado el número complejo $w=2-2\sqrt{3}\,i$:

30.2.1 El argumento del número complejo w es:

a) 150° b) 30° c) 300° d) 240°

30.2.2 El número complejo w en forma polar se expresa como:

a) $4\text{cis}\,60°$ b) $2\text{cis}\,300°$ c) $2\text{cis}\,240°$ d) $4\text{cis}\,300°$

30.2.3 Al calcular $\dfrac{w : 2\text{cis}\,120°}{\text{cis}\,360°}$ se obtiene:

a) $2\text{cis}\left(-120°\right)$ b) -2 c) $8\text{cis}\,420°$ d) $-2i$

30.2.4 Al calcular $(w)^4$ se obtiene el número complejo:

a) $256\text{cis}\,120°$ b) $-256\text{cis}\,296°$ c) $256\text{cis}\,75°$ d) $16\text{cis}\,296°$

30.2.5 Si $w = z$ y $z = 3a - 1 + 4\sqrt{6}\,bi$, entonces los valores de a y b en ese orden es:

a) -1 y $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) 1 y $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ c) $\dfrac{1}{3}$ y $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ d) 1 y $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

30.3 Completa en tu cuaderno de trabajo las proposiciones siguientes de manera que sean verdaderas.

30.3.1 Sean los números complejos $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 3 - 4i$, $z_3 = \sqrt{3} + \sqrt{3}\,i, z_4 = \left(-3;4\right)$ y $z_5 = 12\text{cis}120°$:

a) La parte imaginaria del opuesto del número complejo que resulta de calcular $z_1 + z_2 - z_4$ es

b) La parte real del número complejo que resulta de calcular $z_2 \cdot z_4$ es

c) Al calcular $z_3 \cdot \overline{z_3} \cdot i^{2\,025}$ se obtiene el número complejo

d) El módulo de z_3 y su argumento θ es

e) El conjugado del número complejo que resulta de calcular $\dfrac{z_2}{z_1}$ es

f) El número complejo que se obtiene de calcular $z_1 \cdot i^{2\,026} + 2$ se clasifica como

g) Los afijos de z_1 y z_2 se encuentran en el cuadrante

h) El número complejo que resulta de calcular $z_1 \cdot z_2$ se encuentran en el cuadrante

i) Si $z_1 = z_6$ y $z_6 = -2p - 9\left(q - 1\right)i$, entonces los valores de p y q en ese orden son

j) z_1 expresado en forma trigonométrica es

k) z_5 expresado en forma aritmética es

l) Al calcular $(z_1)^4$ se obtiene

m) Al calcular $\sqrt[6]{z_3}$ se obtiene

n) El polígono que resulta de unir los afijos de las raíces $\sqrt[6]{z_3}$ es

ñ) Al calcular $\dfrac{z_5 \cdot 3\text{cis}\,30°}{4\text{cis}\,15°}$ se obtiene

o) El módulo del número complejo representado en la figura 3.39 es:

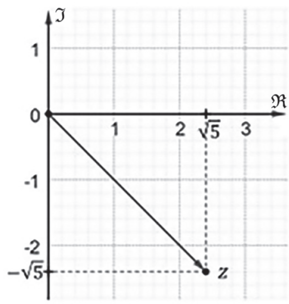


Fig. 3.39

31. Determina las raíces de las ecuaciones siguientes en el dominio de los números complejos:

a) $x^2 - 6x + 10 = 0$　　b) $z^2 - 2zi + 3 = 0$

c) $z^2 - 3iz = 3$　　d) $x^3 + (-1+i)x^2 + (2-i)x = 2$

31.1 Expresa cada raíz en forma trigonométrica.

32. Calcula los valores de x y y de modo que $\dfrac{3+xi}{1+2i} = y + 2i$.

33. Determina el valor de x para que el producto de $(2-3i)(3+xi)$:

a) Sea imaginario puro　　b) Sea un número real

34. En electrónica, las impedancias pueden ser resistivas (reales), reactivas (imaginarias) o combinadas (complejas).

34.1 Clasifica cada impedancia:

a) $z_1 = 5$　　b) $z_2 = -3i$　　c) $z_3 = 2+i$　　d) $z_4 = 0$　　e) $z_5 = 4 - 0i$

34.2 Determina en cada caso su magnitud.

Autoevaluación

1. Argumenta en tu cuaderno de trabajo por qué son verdaderas o falsas las proposiciones siguientes:

a) La parte rayada que representa la operación entre los conjuntos M y N en la figura 3.40 es $M \cap N$.

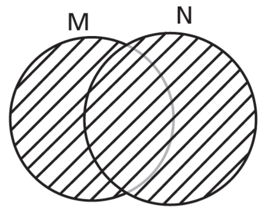


Fig. 3.40

b) Sean los conjuntos P y Q tal que:
$P = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -3\}$ y
$P \cap Q = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$, entonces
$Q = \{-1;0;1\}$.

c) Todo número real, es un número complejo.

d) El conjugado del número complejo $4i + 1$ es $-4i - 1$.

e) La parte imaginaria del número complejo $1 - 3i$ es $-3i$.

f) El conjunto solución de la ecuación $|z| = 2$ es una circunferencia de radio en $(0;0)$ y diámetro 4.

g) El módulo del número complejo de afijo $\left(-1;\sqrt{3}\right)$ es 1.

h) Todo número complejo tiene parte imaginaria.

i) La ecuación $x^2 + c = 0$, con $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, siempre tiene dos soluciones reales.

j) La ecuación $(x+4)^2 + 2 = 0$ tiene dos soluciones reales.

k) La probabilidad de que al seleccionar al azar una solución de la ecuación $x^5 = 32$, esta sea real es de un 20 %.

2. Escribe en tu cuaderno de trabajo la respuesta correcta en cada caso:

2.1 La parte real de todo número complejo es un número:

a) entero   b) fraccionario

c) imaginario puro   d) complejo real

2.2 El conjugado de $z = 2\sqrt{2}\operatorname{cis}120^\circ$ es:

a) $-\sqrt{2} + \sqrt{6}i$ b) $-\sqrt{2} - \sqrt{6}i$ c) $\sqrt{2} - \sqrt{6}i$ d) $\sqrt{2i} - \sqrt{6}$

2.3 El argumento de $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ es:

a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{5\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{6}$ d) $\frac{11\pi}{6}$

2.4 Al resolver la ecuación $x^3+x=0$, las soluciones complejas de esta son:

a) $x=0$ o $x=\pm1$ b) $x=\pm i$ c) $x=\pm\sqrt{2}$ d) $x=\sqrt{3}$

2.5 Se conoce que el número complejo $z=2\ \text{cis}30^0$ determina el afijo de uno de los vértices de un cuadrado, cuyo centro está en el origen de coordenadas. Escribe en tu cuaderno de trabajo a cuál de los números complejos siguientes corresponde al afijo de otro de los vértices del cuadrado.

a) $2\ \text{cis}\ 90°$ b) $2\ \text{cis}\ 150°$ c) $2\ \text{cis}\ 300°$ d) $2\ \text{cis}(-30°)$

3. Si $z_1=4-3i^9$ y $z_2=-i+3$ son dos números complejos:

3.1 El módulo de z_2 es:

a) $\sqrt{2}$ b) 9 c) $\sqrt{10}$ d) 2

3.2 Al calcular z_1-z_2 se obtiene:

a) $(-1-2i)$ b) $1+2i$ c) $(-2-2i)$ d) $(7-4i)$

3.3 El afijo del conjugado del número complejo representado por z_2 se encuentra en el cuadrante:

a) I b) II c) III d) IV

4. Si $z_1=x+yi$, $z_2=5x-2yi$ y $w=6(-i+2)$ son números complejos:

4.1 Los valores de x y y que satisfacen la ecuación $z_1+z_2=w$ son:

a) $x=\frac{1}{2}$, $y=6$ b) $x=-3$, $y=-3$ c) $x=2$, $y=6$ d) $x=-3$, $y=-\frac{1}{3}$

4.2 El afijo del opuesto del número complejo representado por w es:

a) $(-1;2)$ b) $(2;-1)$ c) $(-6;12)$ d) $(-12;6)$

5. Si $z_1=5-2i$, $z_2=6\text{cis}120°$ y $z_3=3(x^2-6x)-27+\sqrt{2-y}\,i$ son números complejos.

5.1 Determina:

a) El módulo de z_1 b) La parte imaginaria de z_2 c) $|x_2 - x_1|$

5.2 Escribe en tu cuaderno de trabajo la respuesta correcta en cada caso:

I. Al calcular $(z_2)^2$ se obtiene como resultado:

a) $6\text{cis}120°$ b) $6\text{cis}14000°$ c) $36\text{cis}120°$ d) $36\text{cis}240°$

II. Los valores de x y y que hacen que $z_1 = z_3$ son:

a) 5 y -27 b) 3 y 6 c) $-\frac{4}{3};6$ y -2 d) $\frac{4}{3};6$ y 2

6. Si $-3-(m-7)i = 6\text{cis}120°$. Determina el valor de m.

7. Determina el argumento de los números complejos $5i$, $-7i$, 3 y -3.

8. Un rotor gira con velocidad angular representada por el número complejo $w = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\ \text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$.

a) ¿Cuál es el valor del ángulo que forma con el semieje real positivo?

b) Calcula $\dfrac{w \cdot 4\text{cis}30°}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\ \text{sen}\frac{\pi}{4}\right)}$.

9. En un circuito de AC, el voltaje $V = z \cdot I$. Si $I = 2 + i$ A y $z = 3 - 2i$. Determina la tensión.

10. El ángulo de fase de un número complejo $z = 1 + i$ puede representar, por ejemplo, una impedancia, tensión o corriente en un circuito de corriente alterna (AC), es de gran importancia en este tipo de circuitos.

10.1 ¿Qué representa la parte real, la parte imaginaria y el argumento de un número complejo (fasor)?

10.2 Si $z = 1 + i$ representa una impedancia. Determina su módulo y el ángulo de fase.

10.3 En un circuito AC con elementos reactivos (bobinas y capacitores), la impedancia z determina el desfaseje entre la tensión V y la corriente I. Investiga y determina para la impedancia $z = 1 + i$ si:

a) La corriente se atrasa respecto a la tensión (comportamiento inductivo).

b) La corriente se adelanta (comportamiento capacitivo).

c) La corriente y la tensión están en fase (comportamiento resistivo puro).

10.4 El ángulo de fase en este tipo de circuitos está directamente relacionado con la potencia reactiva y el factor de potencia ($\cos\theta$):
Potencia activa $(P) = V \cdot I \cos\theta$ Potencia reactiva $(Q) = V \cdot I \text{sen}\theta$.
¿Por qué se puede afirmar que el circuito con impedancia $z = 1 + i$ consume potencia?

10.5 Investiga qué indica el ángulo de fase de 45° en un circuito AC.

11. En un circuito en serie, con impedancias $z_1 = 5 + 3i$ y $z_2 = 1 - 2i$:

a) Calcula la impedancia total z_{Total}.

b) Determina el módulo de la impedancia total.

c) Determina el argumento.

d) Si el voltaje es $V = 20v$, determina la corriente $|I|$.

12. Argumenta la afirmación siguiente:

"Los números complejos no son solo una abstracción matemática: son herramientas esenciales para modelar fenómenos ondulatorios, analizar sistemas dinámicos y diseñar tecnologías que usamos diariamente, como celulares, internet o equipos médicos. Su capacidad para unificar magnitudes y fases en una sola expresión los hace insustituibles en la ciencia moderna".

CAPÍTULO 4

Geometría del espacio

Otro de los privilegios de vivir en esta época –el siglo XXI– es ser parte de las generaciones que hacen y harán sostenible el desarrollo de la informática y la computación para disponer y disfrutar de sus aplicaciones en campos tan importantes para la vida como son la medicina, las ingenierías, incluso el entretenimiento, la educación y la seguridad ciudadana (figura 4.1).

Lo anterior se puede apreciar, por ejemplo, en el desarrollo de *software* para modelar moléculas de proteínas y estudiar sus procesos biológicos, con fines farmacéuticos, los desarrolladores utilizan herramientas de modelado 3D para crear objetos y entornos realistas, utilizando conceptos geométricos como la perspectiva,

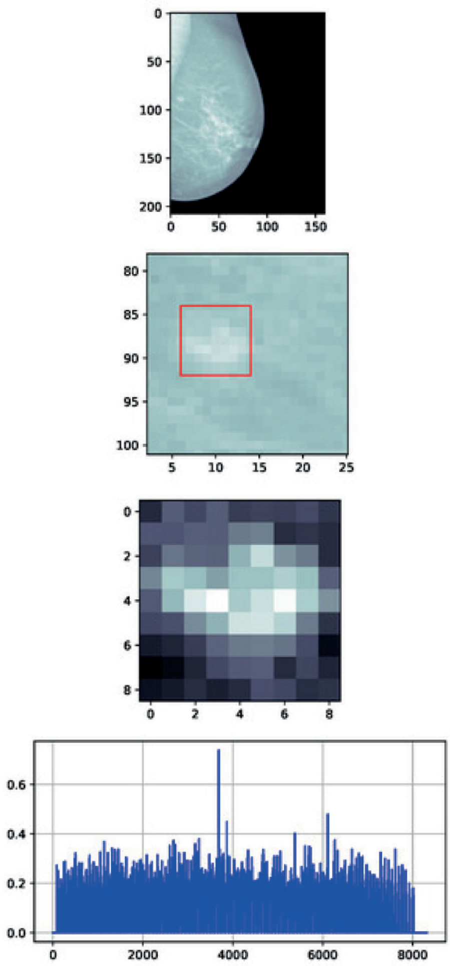


Fig. 4.1

la escala y la proporción, para lograr una representación visual convincente en los destinados al diseño e impresión de objetos en tres dimensiones, en los videojuegos y simulaciones de la realidad virtual, se manifiesta en la tecnología implementada en los vehículos autónomos e incluso en los asistentes matemáticos que disponemos para la enseñanza y aprendizaje de la Matemática como el GeoGebra.

En general, son muy importantes los conocimientos y habilidades geométricas, porque nos permiten estimar y determinar cantidades de magnitud en situaciones prácticas o de otras áreas del conocimiento o la técnica, así como, esbozar o construir figuras y cuerpos geométricos que cumplan determinadas condiciones en los diversos contextos en los cuales esta se aplica.

Al respecto, ¿qué aprenderás en este capítulo?

Descubrirás y demostrarás otros conceptos, propiedades y relaciones de la Geometría del espacio, que te permitirán profundizar y ampliar tus conocimientos sobre esa rama de la matemática, y su aplicación en la Geometría analítica del espacio, así como en otros campos del saber. Los nuevos aprendizajes que vas adquirir, son útiles para interpretar y crear modelos, representaciones de objetos y situaciones de la realidad, por lo que pueden contribuir al desarrollo de tu pensamiento geométrico y analítico, así como a tus capacidades intelectuales y motivaciones profesionales en especialidades en las que estos conocimientos tienen aplicación.

4.1 Geometría sintética del espacio

▲ ¿Qué importancia tiene en el mundo actual el conocimiento de la geometría del espacio?

La geometría del espacio (también llamada estereometría) es la rama de la geometría que se encarga de estudiar las figuras geométricas que ocupan un lugar en el espacio.

Entre estas figuras voluminosas, también llamadas sólidos o cuerpos, se encuentran el prisma, el cono, el cubo, el cilindro, la pirámide y la esfera, cuyas medidas y propiedades en el espacio tridimensional son ampliamente utilizadas en las matemáticas, las ingenierías, las ciencias naturales, la informática y la computación.

Con la utilización de un programa de diseño asistido por computadora (CAD), se modeló un trofeo para los ganadores del Concurso Nacional de Matemáticas, como se muestra en la figura 4.2.

El diseño incluye un cubo macizo y un cono transparente, cuya base está inscrita en una de las caras del cubo. Dentro del cono, está inscrita una esfera dorada, y la sección transversal del cono es un triángulo equilátero, determinado por el diámetro de su base.

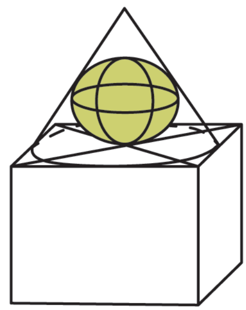


Fig. 4.2

¿Qué relación existe entre 4 de las generatrices del cono y las aristas de una cara del cubo? ¿Cómo se puede fundamentar? ¿Cuál será el volumen de la esfera, si las aristas del cubo deben medir 1,0 dm?

Para que amplíes tus conocimientos te sugiero la actividad siguiente.

Investiga y aprende

Utiliza los medios informáticos o de comunicación a tu alcance y describe en tu cuaderno de trabajo:

¿Cómo se emplea la geometría del espacio para determinar la configuración absoluta de las moléculas?

Si se conoce que la geometría del espacio es útil en el desarrollo de biofármacos, explica qué concepto o conceptos se utilizan para optimizar este proceso y qué se busca lograr con ello.

Para ampliar y profundizar los conocimientos sobre la Geometría del espacio es necesario sistematizar la Geometría plana, sus elementos básicos: punto, recta y plano, el concepto de polígono en particular, los de triángulo y cuadrilátero, así como los de circunferencia y círculo; debido a que sus propiedades y relaciones métricas intervienen en el cálculo de áreas de superficies y volumen de los cuerpos del espacio.

De la historia

Las primeras indicaciones del estudio de ecuaciones cuantitativas y formas espaciales aparecen en tierras de Egipto y Mesopotamia. Y se considera que lo conocido como Geometría tiene su origen en los conocimientos logrados por los antiguos egipcios sobre la "medida de la Tierra", a propósito de su actividad creadora. Son ejemplos de ello las construcciones de pirámides, la agrimensura del Valle del Nilo por las inundaciones anuales, y el estudio de la astrología.

Sin embargo, el documento *Instrucciones para el conocimiento de todas las cosas oscuras,* escrito hacia 1700 a.n.e., por un sacerdote llamado Ahmes, es una evidencia de que los conocimientos matemáticos eran un secreto que pertenecía a sacerdotes y a los encargados de las construcciones de monumentos.

Por su parte los antiguos griegos asimilaron estos conocimientos, y continuaron su desarrollo como una rama del saber. Se destacan entre ellos Tales de Mileto, Pitágoras, Hipócrates de Quíos, Platón, Aristóteles, Euclides y Arquímedes, entre otros. A los aportes de los dos últimos le debemos la expresión de la Geometría del espacio actual, así como a los del francés Descartes en el siglo XVII, cuyos aportes contribuyeron a la obtención de progresos importantes en el Renacimiento.

Es importante señalar, que también existen evidencias de que la Geometría fue una de las principales actividades, en los pueblos originarios de Mesoamérica, la civilización Maya, por ejemplo, logró expresar en sus fundamentos de astronomía, escultura y arquitectura (figura 4.3), los conocimientos geométricos que poseían.

Fig. 4.3 Pirámide Maya

Repaso y profundización de Geometría plana

Entre los conocimientos que has aprendido sobre Geometría se destacan las posiciones relativas entre puntos y rectas, entre rectas y, en particular, las relaciones entre pares de ángulos, longitudes de segmentos y las amplitudes de ángulos de figuras geométricas elementales, como triángulos, cuadriláteros, círculos, entre otras. Conocerlas te ha permitido comprender, interpretar, representar y crear modelos de cuerpos del espacio.

¿Sabías que...?

El método axiomático es un método científico particular de la ciencia, que se utiliza para sistematizar los conocimientos acumulados en el desarrollo de esta ciencia. Es aplicable no solo a la Matemática, sino también a otras ciencias, como la Física y la Biología.

El método consiste en considerar ciertos conceptos como básicos o primarios (no definidos en esa teoría), así como determinadas relaciones entre estos conceptos básicos. Para describir las propiedades de estas relaciones se consideran proposiciones que no se demuestran en el desarrollo de esta teoría, son los llamados *axiomas o postulados*. A partir de ellos se deducen sus consecuencias, aplicando las leyes de la lógica formal. Estas consecuencias constituyen las definiciones y teoremas de la teoría.

El iniciador de este método fue el geómetra griego Euclides de Alejandría (siglo IV a.n.e.), conocido como el "padre de la Geometría". En su obra más famosa, *Los elementos*, hizo una recopilación sistemática de los conocimientos matemáticos de la época; en ella formuló los cinco postulados siguientes:

1. Entre dos puntos cualesquiera se puede trazar una línea recta.
2. Una línea recta puede prolongarse indefinidamente en ambas direcciones.
3. Se puede trazar un círculo con cualquier centro y cualquier radio.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. (Postulado de las paralelas) Si una línea recta corta a otras dos líneas formando ángulos internos en un lado cuya suma es menor que dos ángulos rectos, entonces esas dos líneas se encontrarán si se prolongan lo suficiente en ese lado.

Posteriormente, David Hilbert (1862-1943) reformula la construcción axiomática de Euclides, incorporándole la lógica a su fundamentación, lo cual contribuye a su formalización.

Recuerda que...

Un teorema es una proposición de la cual se ha garantizado su veracidad por medio de la demostración, utilizando razonamientos lógicos y basándose en axiomas y otros teoremas demostrados previamente.
Un teorema consta de:

Hipótesis o *premisas*, que son las condiciones bajo las cuales se aplica el teorema.
Tesis o *conclusión*: lo que se afirma como cierto cuando se cumplen las hipótesis.
Demostración: es el proceso lógico mediante el cual se muestra que se cumple la tesis, partiendo de las hipótesis y de otros teoremas demostrados en la teoría.

Relaciones entre pares de ángulos

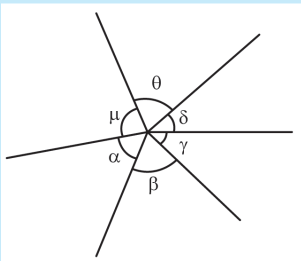
Como se puede apreciar en la figura 4.4, los ángulos alrededor de un punto y los pares de ángulos determinados por rectas que se cortan, tienen una importante presencia en la vida cotidiana.

Fig. 4.4 Sifón del alcantarillado de La Habana

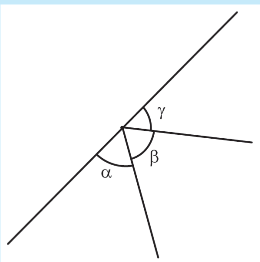
Las relaciones y propiedades entre pares de ángulos, se aplican en las demostraciones geométricas.

Reflexiona

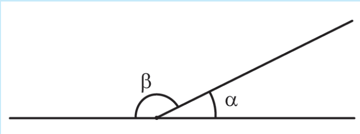
En la figura 4.5 se muestran ángulos consecutivos con un vértice común. ¿Qué los distingue, y qué relaciones se cumplen en cada uno de ellos?



a



b



c

Fig. 4.5

¿Qué propiedades cumplen los pares de ángulos determinados por dos rectas paralelas *a* y *b* cortadas por una tercera recta *c*? (figura 4.6). ¿Y qué pasaría si las rectas *a* y *b* no son paralelas?

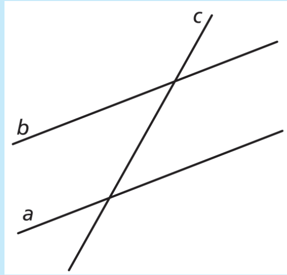


Fig. 4.6

Ejemplo 4.1

En la figura 4.7 las rectas que se cortan r_1 y r_2, forman pares de ángulos donde $\alpha = 45°$. Fundamentar por qué:

a) $\gamma = 45°$

b) $\beta = 135°$

c) $\delta = \beta$

d) $\gamma = \alpha$

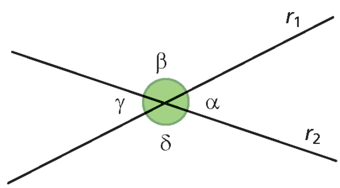


Fig. 4.7

Resolución:

a) $\gamma = 45°$ porque γ y α son ángulos opuestos por el vértice, luego, tienen la misma amplitud.

b) Se cumple que $\beta = 135°$, porque α y β son ángulos adyacentes, lo que significa que $\alpha + \beta = 180°$.

c) $\delta = \beta$ porque son ángulos opuestos por el vértice, quiere decir que sus amplitudes son iguales.

d) $\gamma = \alpha$ por ser ángulos opuestos por el vértice, luego tienen la misma amplitud. ◆

También puedes encontrar otras relaciones entre ángulos, atendiendo a las relaciones entre las rectas.

Recuerda que...

- Si dos ángulos, ambos agudos (o ambos obtusos), tienen sus lados respectivamente paralelos, entonces sus amplitudes son iguales.
- Si dos ángulos, uno agudo y otro obtuso, tienen sus lados respectivamente paralelos, entonces la suma de sus amplitudes es 180°.
- Si dos ángulos, ambos agudos (o ambos obtusos), tienen sus lados respectivamente perpendiculares, entonces sus amplitudes son iguales.
- Si dos ángulos, uno agudo y el otro obtuso, tienen sus lados respectivamente perpendiculares, entonces la suma de sus amplitudes es 180°.

Por la importancia y aplicación de estas relaciones te sugerimos que realices las actividades propuestas en la sección siguiente:

Aplica tus conocimientos

1. Realiza un resumen sobre los ángulos y sus propiedades que se forman:
   a. Entre dos rectas que se cortan.
   b. Entre dos rectas cortadas por una secante.
2. Con ayuda del GeoGebra representa las relaciones entre ángulos descritas en la sección *Recuerda que* anterior.
3. ¿Cuál es la amplitud de los ángulos que se indican en la figura 4.8?
4. Dos ángulos adyacentes están en la razón $\frac{5}{7}$. ¿Cuáles son sus amplitudes?

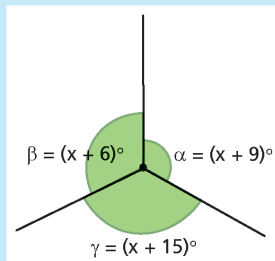


Fig. 4.8

Triángulos. Propiedades y relaciones métricas

Es muy frecuente apreciar que el triángulo aparece como la figura plana que conforma la superficie de los cuerpos, así como de estructuras geométricas (figura 4.9). Además, se considera el polígono más estable y

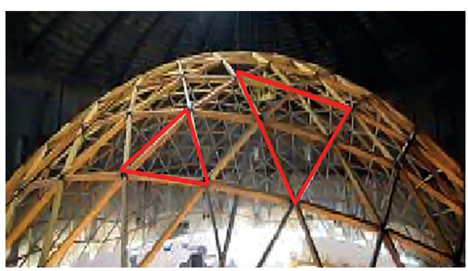


Fig. 4.9

resistente que se puede construir con tres segmentos de rectas que se cortan dos a dos.

Reflexiona

Explica si es posible construir triángulos con lados de longitudes 12 cm; 5,0 cm y 4,0 cm. ¿Qué condición se ha de cumplir para garantizar la existencia de un triángulo? Comprueba con ayuda del GeoGebra esa condición?

Las propiedades y relaciones métricas en los triángulos son aplicadas para resolver diversas situaciones de la práctica cotidiana, así como en demostraciones geométricas.

Ejemplo 4.2

Demostrar que la suma de los ángulos exteriores de un triángulo es de 360º.

Resolución:

Tracemos la ΔBAC y los ángulos exteriores δ, θ y φ (figura 4.10) entonces:

$\delta = \alpha + \gamma$ (por teorema del ángulo exterior (δ) del triángulo *BAC)*

$\theta = \alpha + \beta$,

$\varphi = \beta + \gamma$, adicionando miembro a miembros

tenemos: $\delta + \theta + \varphi = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma$

$\delta + \theta + \varphi = 2(\alpha + \beta + \gamma)$

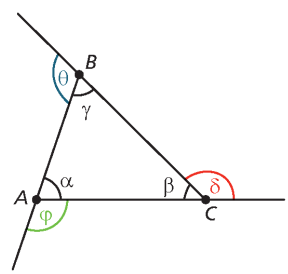


Fig. 4.10

como α, β y γ son los ángulos interiores del ΔBAC,

tenemos: $\delta + \theta + \varphi = 2 \cdot 180°$

$\delta + \theta + \varphi = 360°$

Luego, queda demostrado que la suma de los ángulos exteriores de un triángulo es de 360º. ◆

Reflexiona

- ¿Por qué en todo triángulo existen 6 ángulos exteriores que son iguales 2 a 2?
- ¿La altura relativa a cualquiera de los lados de un triángulo, es siempre un segmento interior a él?

Recuerda que...

Dos triángulos son iguales si existe un movimiento del plano que transforme a uno en otro (traslación, rotación, reflexión o cualquier composición de ellos) o si al superponerlos uno encima del otro sus dimensiones coinciden, es decir, en las longitudes de sus tres lados y en las amplitudes de sus tres ángulos respectivamente.

Criterios de igualdad de triángulos

Dos triángulos son iguales si tienen respectivamente iguales:

Los tres lados (l.l.l)

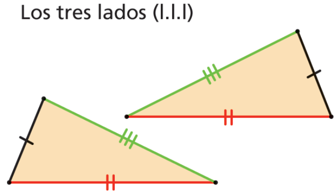


Fig. 4.11

Dos lados y el ángulo comprendido (l.a.l)

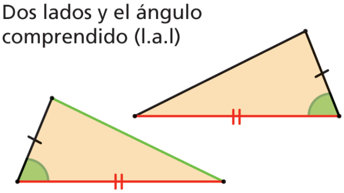


Fig. 4.12

Un lado y los ángulos adyacentes a ese lado (a.l.a)

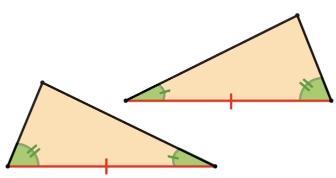


Fig. 4.13

Dos lados y el ángulo opuesto al mayor de estos lados (l.l.a)

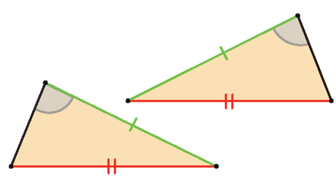


Fig. 4.14

Ejemplo 4.3

En la figura 4.15, *ABCD:* trapecio isósceles de bases $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$. Se conoce, además que:

$\overline{DE} \perp \overline{AD}$, $\overline{AF} \perp \overline{AD}$ y el $\sphericalangle BCE = \sphericalangle FBC$.

a) Probar que $\Delta EDC = \Delta BAF$.

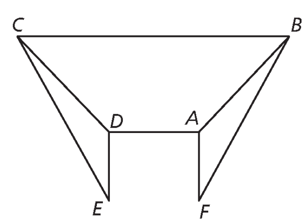


Fig. 4.15

b) Calcular el área del triángulo *BAF* si

$\overline{DC} = 4\sqrt{2}$dm, $\overline{AF} = 2{,}64$ dm y el $\sphericalangle DAB = 135^\circ$.

Resolución:

a) En la figura se cumple que:

(1) $\overline{CD} = \overline{AB}$ (por ser lados no paralelos del trapecio isósceles *ABCD*).

$\sphericalangle BCE = \sphericalangle FBC$ (por datos).

$\sphericalangle BCD = \sphericalangle ABC$ (por ser ángulos bases del trapecio isósceles *ABCD*).

De la sustracción miembro a miembro de las igualdades anteriores se tiene

$\sphericalangle BCE - \sphericalangle BCD = \sphericalangle FBC - \sphericalangle ABC$ (por diferencia de ángulos).

(2) $\sphericalangle DCE = \sphericalangle FBA$

$\sphericalangle EDC + \sphericalangle CDA + \sphericalangle ADE = 360^\circ$ (I) (por suma de ángulos alrededor del punto D).

$\sphericalangle BAF + \sphericalangle DAB + \sphericalangle FAD = 360^\circ$ (II) (por suma de ángulos alrededor del punto A).

De (I) y (II) tenemos:

$\sphericalangle EDC + \sphericalangle CDA + \sphericalangle ADE = \sphericalangle BAF + \sphericalangle DAB + \sphericalangle FAD$

$\sphericalangle CDA = \sphericalangle DAB$ (por ángulos bases del trapecio isósceles *ABCD*).

$\sphericalangle ADE = \sphericalangle FAD = 90^\circ$ (por ser $\overline{DE} \perp \overline{AD}$ y $\overline{AF} \perp \overline{AD}$).

(3) $\sphericalangle EDC = \sphericalangle BAF$ (por diferencia de ángulos iguales).

Luego, $\Delta EDC = \Delta BAF$ (por tener un lado y los ángulos adyacentes a él, respectivamente iguales).

b) Como se cumple que:

$\sphericalangle FAD + \sphericalangle DAB + \sphericalangle BAF = 360^\circ$ (por ser ángulos consecutivos alrededor de un punto-ángulo completo)

$90^\circ + 135^\circ + \sphericalangle BAF = 360^\circ$

$225^\circ + \sphericalangle BAF = 360^\circ$

$\sphericalangle BAF = 135°$

$\overline{DC} = \overline{AB} = 2\sqrt{2}\text{dm}$ (por lados homólogos de triángulos iguales)

$$A_{\Delta BAF} = \frac{\overline{AF}\cdot\overline{AB}}{2}\cdot \text{sen}\sphericalangle BAF$$

$$A_{\Delta BAF} = \frac{2{,}64\cdot 2\sqrt{2}}{2}\cdot \text{sen}135° = 2{,}64\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2{,}64\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2{,}64\cdot 2$$
$$= 5{,}28\,\text{dm}^2$$

El valor del área del triángulo *BAF* es 5,28 dm^2. ◆

Recuerda que...

Las medianas, mediatrices, bisectrices y alturas de un triángulo son **rectas notables,** y sus respectivos puntos de intercepción en ese orden son: baricentro, circuncentro, incentro y ortocentro. Estos **puntos notables,** cumplen las propiedades siguientes:

Baricentro: su distancia a un vértice es $\frac{2}{3}$ de la longitud de la mediana correspondiente, y su distancia al punto medio del lado opuesto a ese vértice es $\frac{1}{3}$ de la longitud de la mediana. Es el centro de gravedad del triángulo.

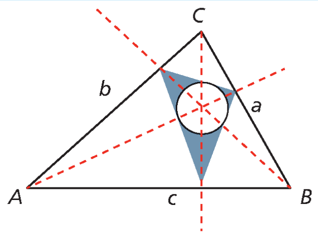


Fig. 4.16

Circuncentro: es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Incentro: es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.

Ortocentro: es el incentro del triángulo órtico, el cual tiene como vértices los pies de las tres alturas del triángulo original (figura 4.16).

Entre las relaciones métricas de los triángulos que conoces se destacan el grupo de teoremas de Pitágoras, así como las leyes de los senos y los cosenos que se aplican a la resolución de triángulos rectángulos y no rectángulos, respectivamente.

Ejemplo 4.4

En la figura 4.17, se tiene que:

- ΔBCA es isosceles de base $\overline{AB}$,
- D es el punto medio de $\overline{AB}$,
- $DEFC$ es un paralelogramo,
- $\overline{DE} \perp \overline{BC}$.

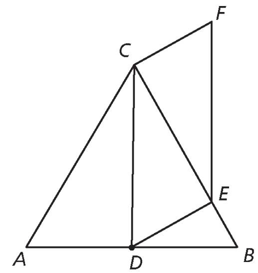


Fig. 4.17

a) Demostrar que $\overline{AC} = \dfrac{\overline{AD} \cdot \overline{EF}}{\overline{CF}}$.

b) Si el $\sphericalangle CDE = 2\sphericalangle EDB$, probar que el ΔBCA es equilátero.

c) Si $\overline{CF} = 2\sqrt{3}\,\text{dm}$, calcular el valor del perímetro del triángulo BCA.

Resolución:

a) Para demostrar que $\overline{AC} = \dfrac{\overline{AD} \cdot \overline{EF}}{\overline{CF}}$, ello se cumple en triángulos semejantes, por lo que debemos demostrar que $\Delta ADC \sim \Delta FCE$.

En la figura se cumple que:

$\sphericalangle ADC = \sphericalangle CDB = 90^\circ$ (por ser $\overline{CD}$ mediana y altura del ΔBCA, isósceles de base $\overline{AB}$)

$\sphericalangle DEC = \sphericalangle BED = 90^\circ$ (por ser $\overline{DE} \perp \overline{BC}$).

$\sphericalangle DEC = \sphericalangle FCE = 90^\circ$ (por ser ángulos alternos entre las paralelas $\overline{DE}$ y $\overline{FC}$, secante $\overline{CE}$ y $\sphericalangle DEC = 90^\circ$)

$\alpha_1 : \sphericalangle ADC = \sphericalangle FCE = 90^\circ$ (por tener igual amplitud).

$\sphericalangle DBE = \sphericalangle CDE$ (por ser ángulos agudos formados por lados respectivamente perpendiculares)

$\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC$ (por ser ángulos bases del ΔBCA, isósceles de base $\overline{AB}$).

$\sphericalangle CDE = \sphericalangle EFC$ (por ser ángulos opuestos del paralelogramo $DEFC$).

$\alpha_2 : \sphericalangle CAD = \sphericalangle EFC$ (por carácter transitivo).

Entonces, $\Delta ADC \sim \Delta FCE$ (por tener dos pares de ángulos respectivamente iguales).

Luego, se cumple que $\frac{\overline{AC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CE}} = k$ de donde $\frac{\overline{AC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CF}}$ y resulta $\overline{AC} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CF}} \cdot \overline{EF}$ como se quería, por lo que queda demostrado.

b) $\sphericalangle CDE + \sphericalangle EDB = 90°$ (por ser ángulos complementarios) pero como

$\sphericalangle CDE = 2\sphericalangle EDB$ se tiene que

$2\sphericalangle EDB + \sphericalangle EDB = 90°$

$3\sphericalangle EDB = 90°$ y resulta que

$\sphericalangle EDB = 30°$,

Luego, el $\sphericalangle DBC = 60°$ (por ser complementario con el $\sphericalangle BCD$).

Por tanto, el triángulo *BCA* es equilátero por ser isósceles con un ángulo interior de 60°.

c) En el triángulo *BED* rectángulo en *E*, se tiene que:

$\sphericalangle DBE = 60°$, $\sphericalangle EDB = 30°$ (por complementario con el $\sphericalangle DBE$) y

$\overline{CF} = \overline{DE} = 2\sqrt{3}\,\text{dm}$ (Por ser lados opuestos del paralelogramo *DEFC*). De donde resulta que:

$\overline{EB} = 2{,}0$ dm y $\overline{BD} = 4{,}0$ dm (por razones trigonométricas o por propiedad del triángulo rectángulo con un ángulo interior de 30º), pero $\overline{AB} = 2\overline{BD} = 8{,}0$ dm. Luego,

$P_{\Delta BCA} = 3\overline{AB}$

$P_{\Delta BCA} = 3 \cdot 8 = 24\,\text{dm}$

El valor del perímetro del triángulo *BCA* es de 24 dm. ◆

Reflexiona

- ¿Qué condiciones necesarias y suficientes deben cumplir dos triángulos rectángulos para que sea iguales?

Recuerda que...

Dos triángulos son semejantes si sus ángulos son respectivamente iguales y sus lados homólogos son respectivamente proporcionales.

Teorema fundamental de la semejanza de triángulos

Si una recta paralela a un lado de un triángulo corta a los otros dos lados o a sus prolongaciones, entonces los triángulos así determinados son semejantes.

Criterios de semejanza de triángulos

Dos triángulos son semejantes si tienen respectivamente:

- dos ángulos iguales (a.a.)
- dos lados proporcionales e igual el ángulo comprendido (p.a.p)
- proporcionales sus tres lados (p.p.p.)

Si ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son semejantes y sus perímetros son P y P' y sus áreas A y A' respectivamente, entonces $P' = kP$ y $A' = k^2A$, donde k es la razón entre el lado del $\Delta A'B'C'$ y su homólogo en el ΔABC.

De la historia

Los siglos VI y V a.n.e. se distinguen por el desarrollo que alcanzó la Matemática como teoría deductiva, representada por la escuela de Pitágoras. En la Geometría fue notable el estudio de las propiedades de polígonos y cuerpos regulares, pero sobre todo, se destaca el descubrimiento de la existencia de segmentos inconmensurables, cuya longitud no se puede expresar como la razón de dos números enteros.

Esto constituyó la primera crisis de los fundamentos de la matemática y condujo a que esta se construyera en lo adelante sobre bases geométricas.

Conéctate

Accede a

https://curricular.cubaeduca.cu/education/category?id=1509&type=theme

Resumen sobre geometría plana para 12.º grado

Ejemplo 4.5

En la circunferencia (figura 4.18), de centro O y diámetro $\overline{AB}$, se tiene que:

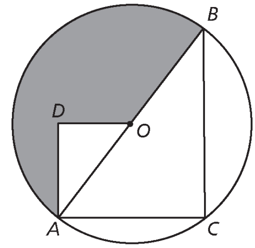


Fig. 4.18

- C es un punto de la circunferencia,
- $\overline{OD} \parallel \overline{AC}$,
- $\overline{OD} \perp \overline{AD}$.

a) Demostrar que $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{BC} \cdot \overline{AO}$.

b) Si $\overline{AB} = 10\,\text{dm}$ y $\overline{AC} = 6{,}0$ dm, calcular el valor aproximado del área de la región sombreada

Resolución:

a) Primero se debe demostrar que se cumple que $\Delta ACB \sim \Delta ODA$.

En la figura se cumple que:

- $\sphericalangle ACB = 90°$ (por ser un ángulo inscrito que le corresponde un arco de 180º).
- $\sphericalangle ODA = 90°$ (por ser $\overline{OD} \perp \overline{AD}$).
- $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ODA$ (por tener la misma amplitud).
- $\sphericalangle BAC = \sphericalangle AOD$ (por ser alternos entre las paralelas $\overline{OD}$ y $\overline{AC}$ y secante $\overline{AB}$),

Entonces $\Delta ACB \sim \Delta ODA$ por tener dos ángulos respectivamente iguales (a.a).

Por ser lados homólogos se cumple que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DO}} = k$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}},$$ de donde

$$\overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{BC} \cdot \overline{AO}$$

Luego, queda demostrado que $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{BC} \cdot \overline{AO}$.

b)

$$A_S = A_{semCír} - A_{\Delta ODA}$$

$$A_S = \frac{\pi \cdot r^2}{2} - \frac{\overline{AD} \cdot \overline{DO}}{2}$$

$$\overline{AB} = 2\overline{AO} \qquad (d = 2r)$$

$$\overline{AO} = 5{,}0 \text{ dm}$$

En el ΔODA rectángulo en D (por ser $\sphericalangle ODA = 90^{o}$) se cumple que:

$\overline{AD} = 4{,}0$ dm (por sen 3, 4 y 5; trío de números pitagóricos o por Teorema de Pitágoras).

$$A_S \approx \frac{3{,}14 \cdot 5^2}{2} - \frac{4 \cdot 3}{2}$$

$$A_S \approx \frac{3{,}14 \cdot 25}{2} - \frac{4 \cdot 3}{2}$$

$$A_S \approx \frac{78{,}5}{2} - 6 = 39{,}25 - 6$$

$$A_S \approx 33{,}25 \text{ dm}^2$$

El valor del área de la región sombreada es aproximadamente igual a 33dm^2. ◆

Ejemplo 4.6

Durante una maniobra un soldado desde la posición de acostado observa con un ángulo de elevación de 39,81° la copa de un árbol que crece en una pendiente; al desplazarse 2,0 m la observa con un ángulo de elevación de 51,34° y se percata que está a 4,0 m de la parte del árbol más cercana a la tierra. Si la copa del árbol y las dos posiciones que asume el soldado están en línea recta, ¿cuál es la altura del árbol?

Resolución:

El esbozo gráfico del problema planteado aparece en la figura 4.19 donde:

$n = \overline{BC} = 4{,}0$ m: es la distancia del pie del árbol al vértice del primer ángulo de elevación $\theta = 51{,}34°$.

$m = \overline{AB} = 2{,}0$ m: es la distancia más abajo del primer punto de observación, donde el ángulo de elevacion $\alpha = 39{,}81°$:

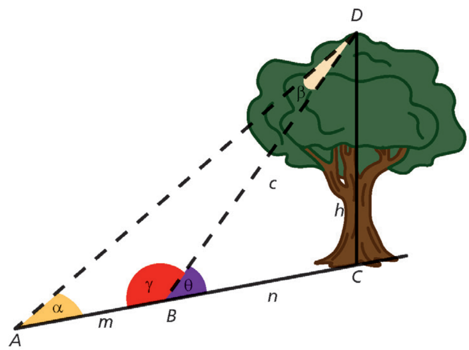


Fig. 4.19

$c = \overline{BD}$, $\alpha = \sphericalangle DAC = 39{,}81°$, $\beta = \sphericalangle BDA = 51{,}34°$, $\gamma = \sphericalangle ABD$, $\theta = \sphericalangle DBC$:

Se debe calcular el valor de h: altura del árbol

$\gamma + \theta = 180°$ (por ser ángulos adyacentes)

$\gamma + 41{,}3° = 180°$

$\gamma = 138{,}7°$

En ΔABD: $\alpha + \gamma + \beta = 180°$ (por suma de ángulos interiores del triángulo)

$39{,}81° + \beta + 128{,}66° = 180°$

$\beta = 11{,}53°$

Por la ley de los senos se tiene que: $\dfrac{m}{\operatorname{sen}\beta} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\alpha}$

$$c = \frac{m \cdot \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{2 \cdot \operatorname{sen} 39{,}81°}{\operatorname{sen} 11{,}53°} = \frac{2 \cdot 0{,}640}{0{,}2} \approx \frac{1{,}28}{0{,}2} \approx 6{,}40 \text{ m}$$

En el ΔBCD, rectángulo en D (por teorema de Pitágoras) se cumple que $c^2 = n^2 + h^2$, $c^2 - n^2 = h^2$ *de donde resulta*

$$h = \sqrt{c^2 - n^2}$$

$$h \approx \sqrt{(6{,}4)^2 - (4)^2} \approx \sqrt{40{,}96 - 15} \approx \sqrt{24{,}96} - 4{,}995$$

$h \approx 5{,}0$ m

El árbol tiene una altura aproximada de 5,0 m. ◆

Aplica tus conocimientos

1. Comprueba que es posible fundamentar la propiedad de la altura relativa a la base del triángulo isósceles del ejemplo 4.4 por las vías siguientes:
   a) Con el uso del GeoGebra comprueba que una reflexión de eje *CD,* transforma el ΔADC en el ΔCDB.
   b) Demuestra la igualdad de los triángulos que determina la altura $\overline{CD}$ sobre el lado $\overline{AB}$.
2. Verifica las propiedades de los puntos notables de un triángulo, con ayuda del asistente matemático GeoGebra.
3. Considera el ΔBCA rectángulo en C (figura 4.20), $\overline{CD} = h_{\overline{AB}}$.

   Demuestra que $\Delta BCA \sim \Delta ADC \sim \Delta CDB$. ¿A qué conclusión llegas sobre los triángulos determinados por la altura relativa a la hipotenusa de un triángulo rectángulo?

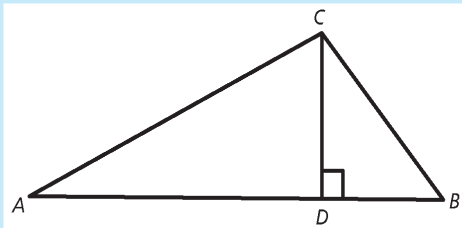


Fig. 4.20

Cuadriláteros. Propiedades

Los cuadriláteros son figuras geométricas que tiene una importante presencia en la cotidianidad (figura 4.21), además de que sus propiedades se aplican ampliamente en diversas demostraciones geométricas.

Fig. 4.21 Exposición del Cartel cubano

En general para resolver problemas o demostraciones geométricas, es conveniente seguir los pasos siguientes:

1. Analizar toda la información (teoremas y propiedades) que nos brindan los datos.

2. Analizar todos los teoremas relacionados con lo que se debe demostrar, para verificar si se cumplen las premisas de algunos de ellos.
3. Establecer relaciones entre la información que te brindan los datos para conformar las premisas de los teoremas relacionado con lo que quieres demostrar.
4. Realizar la demostración.

Ejemplo 4.7

En la figura 4.22 el ΔEFD es isósceles de base $\overline{ED}$.
$\overline{EF} = \overline{AC}$, $\sphericalangle A = \sphericalangle DFB$.
Demostrar que *AFDC,* es un paralelogramo.

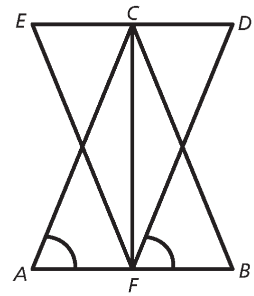


Fig. 4.22

Resolución:

Veamos cómo proceder a partir de los pasos dados:

1. Analizar toda la información

¿Qué significa que el ΔEFD *sea isósceles de* base $\overline{ED}$?

- $\overline{EF} = \overline{FD}$; $\sphericalangle E = \sphericalangle D$.
- La altura relativa a la base $\overline{ED}$ es mediana de la base y bisectriz del ángulo principal *EFD*.

  Del dato $\overline{EF} = \overline{AC}$, ¿qué relaciones podemos establecer con lo analizado hasta ahora?
- Observa, que tenemos a $\overline{EF} = \overline{FD}$ y que $\overline{EF} = \overline{AC}$, por lo que podemos plantear que: $\overline{EF} = \overline{FD} = \overline{AC}$, de donde, $\overline{FD} = \overline{AC}$, por propiedad transitiva de la igualdad de segmentos.

  ¿Qué información nos aporta el dato $\sphericalangle A = \sphericalangle DFB$?

  Como $\sphericalangle A = \sphericalangle DFB$ están en posición de correspondientes entre $\overline{AC}$ y $\overline{FD}$ y $\overline{AB}$ secante y como son iguales, se puede afirmar que $\overline{FD} \parallel \overline{AC}$.

2. Analizar todos los teoremas relacionados y si se cumplen las premisas

Ahora analicemos ¿qué nos piden demostrar?

Para demostrar que el cuadrilátero *AFDC* es un paralelogramo debemos probar que:

- los lados opuestos son paralelos, o

- los lados opuestos son iguales, o
- un par de lados opuestos son iguales y paralelos, o
- las diagonales se cortan en su punto medio, o
- los ángulos opuestos son iguales, o
- los ángulos consecutives son suplementarios.

3. Relacionar la información que brindan los datos.

Según lo analizado anteriormente ¿cómo se puede demostrar?
Observemos que se puede demostrar que, *AFDC* es un paralelogramo a partir de que un par de lados opuestos son iguales y paralelos, pues según se deduce de los datos $\overline{FD} = \overline{AC}$ y $\overline{FD} \parallel \overline{AC}$.

4. Realizar la demostración

¿Cómo quedaría planteada la demostración?

Demostración:

$\overline{EF} = \overline{FD}$ (por ser el ΔEFD isósceles de base $\overline{ED}$).

$\overline{EF} = \overline{AC}$ (por datos)

Luego, $\overline{FD} = \overline{AC}$ (por el carácter transitivo de la igualdad).

$\sphericalangle A = \sphericalangle DFB$ por datos, y como están en posición de correspondientes entre $\overline{AC}$ y $\overline{FD}$, y $\overline{AB}$ secante, entonces $\overline{FD} \parallel \overline{AC}$ (por el recíproco del teorema de los ángulos correspondientes entre paralelas).

Entonces, AFDC es un paralelogramo (por tener un par de lados opuestos paralelos e iguales). ◆

Reflexiona

Los cuadriláteros se pueden clasificar en trapecios y trapezoides; ¿cuál de estos dos grupos incluye a los paralelogramos?

¿Cuáles son las condiciones adicionales que debe cumplir el paralelogramo para ser rectángulo, rombo o cuadrado?

¿Cómo quedaría en un esquema lógico la relación entre los cuadriláteros?

Aplica tus conocimientos

1. La figura 4.23 muestra la sección transversal de una pieza que tiene un hueco rectangular de 1,0 cm de ancho. Si $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$.
   Por cuántas vías diferentes puedes calcular el área de la sección transversal con los datos que se muestran en la figura, si sabes que $\overline{RF}$ = 4,0 cm.
2. Haz un cuadro resumen con las fórmulas de áreas y perímetros de figuras planas. Declara el significado de cada variable que utilices en cada caso.

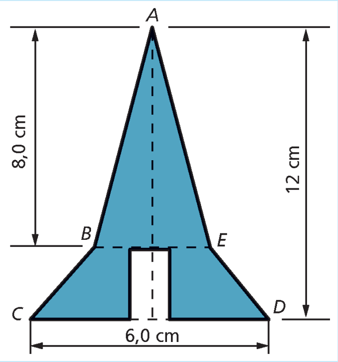


Fig. 4.23

Circunferencia y círculo

En la Geometría la circunferencia y el círculo son de los elementos geométricos que más han aportado al desarrollo de la humanidad (figura 4.24). La invención de la rueda en la prehistoria marcó el punto de partida del desarrollo tecnológico que nos ha traído hasta la actualidad.

Fig. 4.24

Sus relaciones métricas y propiedades tienen diversidad de aplicaciones como, por ejemplo, en la industria automovilística, en el comercio con la invención de las monedas, en el deporte tanto por la forma de algunos implementos como para delimitar áreas en terrenos deportivos o salas de juego, en la música por la forma que tienen ciertos instrumentos musicales, en la cartografía para modelar el sistema planetario, también en el sistema horario, en la arquitectura, en el arte y hasta en un parque de diversiones.

Reflexiona

¿La llanta de una bicicleta representa una circunferencia, un círculo o ninguna de las dos anteriores?
¿Cuáles relaciones en la circunferencia te permiten trazar dos cuerdas iguales y paralelas?
¿Qué relaciones de perpendicularidad se pueden encontrar entre elementos de la circunferencia y entre estos elementos y las rectas del plano?

Ejemplo 4.8

En la figura 4.25, $\overline{FH} \perp \overline{BC}$; $\overline{EH} \perp \overline{AC}$;

$\overline{FH}$: diámetro,

$\overline{FH} \cap \overline{AC} \cap \overline{BD} = \{G\}$

Probar que:

a) $\widehat{AB} = \widehat{CD} = \widehat{EF}$

b) $ABCD$ es un trapecio isósceles.

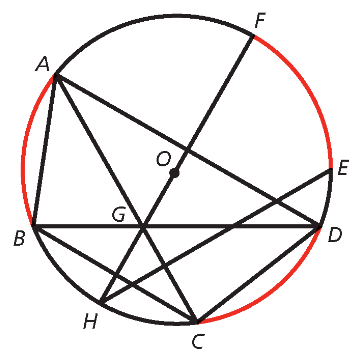


Fig. 4.25

Resolución:

a) $\overline{FH} \perp \overline{BC}$ (por datos).

$\overline{EH} \perp \overline{AC}$ (por datos).

Luego, $\sphericalangle FHE = \sphericalangle BCA$ (por ser ángulos agudos formados por lados respectivamente perpendiculares).

Entonces, $\widehat{AB} = \widehat{EF}$ (I) (por ser correspondientes a ángulos inscritos iguales en una misma circunferencia).

$\overline{FH}$: está situado sobre la mediatriz de $\overline{BC}$ (porque todo radio o diámetro perpendicular a una cuerda la biseca (la corta en su punto medio).

$\overline{BG} = \overline{CG}$ (porque todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de sus extremos).

Por tanto, ΔCGB es isósceles de base $\overline{BC}$ (por tener dos lados iguales).

$\sphericalangle BCA = \sphericalangle BDC$ (por ser ángulos bases del ΔCGB isósceles de base $\overline{BC}$).

Luego, $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ (II) (por ser correspondientes a ángulos inscritos iguales en una misma circunferencia).

De (I) y (II) tenemos que: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{EF}$ (por el carácter transitivo de la relación de igualdad).

b) $\sphericalangle DAC = \sphericalangle BCA$ (porque a arcos iguales en una misma circunferencia le corresponden ángulos inscritos iguales).

Como $\sphericalangle DAC$ y $\sphericalangle BCA$ están en posición de alternos entre $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, y $\overline{AC}$ secante, y son iguales, entonces:

$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ (por el recíproco del teorema de los ángulos alternos entre paralelas).

$\overline{AB} = \overline{CD}$ (porque a arcos iguales corresponden cuerdas iguales).

Luego, $ABCD$ es un trapecio isósceles (por tener un par de lados opuestos paralelos y los lados no paralelos iguales). ◆

(Ver la nota 1 al capítulo 4 en los anexos)

Ejemplo 4.9

El cuadrado $ABCD$ está inscrito en la circunferencia de centro O y radio $\overline{OB}$ (figura 4.26).

Calcular el valor del área sombreada, si la longitud de la circunferencia es de 50 cm.

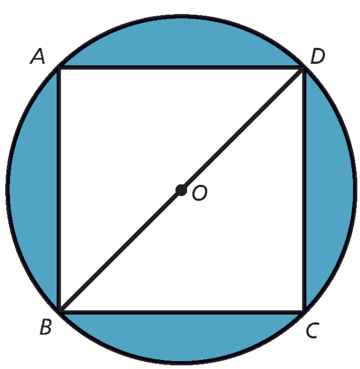


Fig. 4.26

Resolución:

¿Cómo obtener el valor del área de la región sombreada A_s?

Se obtiene de sustraer del área del círculo, el área del cuadrado, se deben conocer las longitudes del radio del círculo y del lado o diagonal del cuadrado.

$A_{sombreada} = A_{círculo} - A_{ABCD}$

¿Cómo obtener la longitud del radio del círculo?

Conocemos la longitud de la circunferencia, luego de $L_C = 2\pi r$ se obtiene

$$r = \frac{L_C}{2\pi} \approx \frac{50}{2 \cdot 3,14} \approx \frac{25}{3,14} \approx 7,96 \approx 8,0 \text{ cm}$$

pero, $d = \overline{BD} = 2r \approx (2 \cdot 8)\text{cm} = 16 \text{ cm}$

$$A_{ABCD} = \frac{d^2}{2} \text{ (considerando al cuadrado como un rombo)}$$

$$= \frac{16^2}{2} = \frac{256}{2} = 128\text{cm}^2 \text{ y}$$

$$A_{círculo} = \pi \cdot r^2$$

$$A_{círculo} \approx 3,14 \cdot 8^2 \approx 3,14 \cdot 64 \approx 200,96 \text{ cm}^2$$

$$A_{sombreada} = A_{círculo} - A_{ABCD}$$

$$A_{sombreada} \approx 200,96 \text{ cm}^2 - 128 \text{ cm}^2$$

$$A_{sombreada} \approx 72,96 \text{ cm}^2$$

$$A_{sombreada} \approx 73 \text{ cm}^2$$

El valor del área sombreada es aproximadamente igual a 73 cm^2. ◆

Aplica tus conocimientos

1. Fundamenta la veracidad o falsedad de las proposiciones siguientes:
   a) En toda circunferencia o en circunferencias iguales a ángulos centrales iguales corresponden cuerdas desiguales y arcos iguales.
   b) En toda circunferencia o en circunferencias iguales a arcos iguales corresponden cuerdas iguales y viceversa.
   c) La amplitud de un arco es igual a la amplitud del ángulo central correspondiente.

d) La amplitud de un ángulo inscrito es igual a la amplitud del ángulo central y del arco correspondiente.

e) En toda circunferencia o en circunferencias iguales algunos de los ángulos inscritos en un mismo arco son desiguales.

f) Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es de 60º.

g) Todo radio o diámetro perpendicular a una cuerda biseca a esta y al arco correspondiente.

h) Toda recta tangente a la circunferencia es perpendicular al radio o diámetro en el punto de tangencia.

i) Desde un punto exterior a la circunferencia se pueden trazar infinitas tangentes a la circunferencia.

j) Los segmentos de tangente trazados desde un punto exterior a la circunferencia son iguales.

2. Analiza el ejemplo 4.9 y fundamenta por qué la longitud l, del lado de un cuadrado inscrito en una circunferencia se puede calcular a través de la relación $l = \sqrt{2}\,r$.

3. En la circunferencia de centro O (figura 4.27), $\overline{AB}$ es un diámetro, $\overline{AB} \perp \overline{OD}$, $\overline{BC}$ = 6,0 cm y $\overline{AC}$= 8,0 cm.

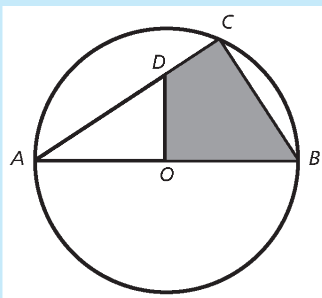


Fig. 4.27

a) Prueba que $\triangle AOD \sim \triangle BCA$.

b) Determina el valor del área de la región sombreada.

c) Calcula el valor del perímetro del $\triangle AOD$.

Relaciones entre puntos, rectas y planos en el espacio

Las figuras que se estudian en Geometría plana coexisten con los cuerpos geométricos, que tienen su expresión en un mundo tridimensional (figura 4.28), cuyas medidas y propiedades son estudiadas por la Geometría del espacio.

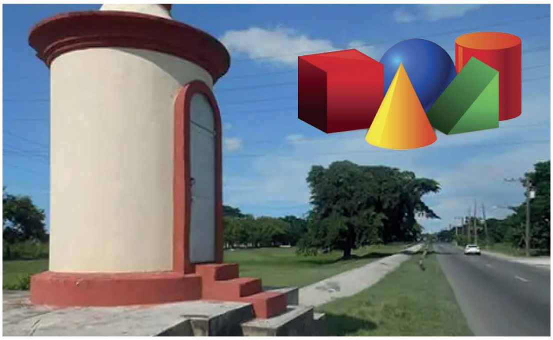


Fig. 4.28

El conocimiento de otras relaciones entre los elementos geométricos estudiados, además de favorecer tu orientación en el entorno al comprender mejor el espacio, también te preparan para su aplicación en otras áreas matemáticas, así como en tus futuros estudios de ingeniería u otras ciencias.

En la Geometría plana a partir de las relaciones entre punto y recta en un plano, se conocen las propiedades siguientes:

- Dos rectas son paralelas si no tienen puntos comunes.
- Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí.
- Por un punto P de una recta r se puede trazar una y solo una recta perpendicular a la recta r.
- Por un punto T exterior a una recta s se puede trazar una y solo una recta perpendicular a la recta s.

¿Se cumplirán estas propiedades del plano en el espacio? ¿Qué caracteriza a un plano a partir de las relaciones entre puntos y rectas en el espacio?

¿Cómo caracterizar al espacio?

Empecemos caracterizando las relaciones entre puntos, rectas y planos, que ya conocemos de la Geometría plana.

Recuerda que...

La recta está caracterizada por ser un subconjunto de puntos del plano que cumple las propiedades siguientes:

- Dos puntos determinan una recta y solo una.
- Por un punto pasan infinitas rectas.
- El conjunto de puntos de una recta se puede poner en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números reales de manera que se conserva el orden.
- Si dos rectas tienen dos puntos en común son coincidentes.

Si observas a tu alrededor comprenderás que, en la Geometría del espacio se manifiestan algunas propiedades que son diferentes respecto a las que conoces de la Geometría plana.

Ejemplo 4.10

El prisma recto de base rectangular de la figura 4.29 es un esbozo de uno de los modelos de cajas que se utilizó para envasar los bulbos de la vacuna cubana Abdala contra la Covid-19 (figura 4.30).

Analizar las relaciones entre puntos, rectas y planos que lo conforman.

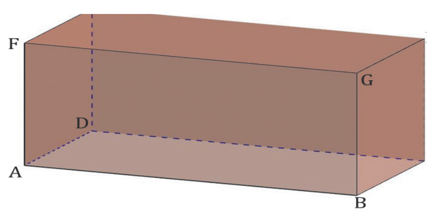


Fig. 4.29

Fig. 4.30

Resolución:

- La recta que contiene a la arista $\overline{EH}$ no tiene puntos comunes con la recta que contiene a la arista $\overline{AB}$ y las rectas EH y AB *no son paralelas* (figura 4.30 a).

Fig. 4.30 a

- La recta que contiene a la arista $\overline{AE}$ es perpendicular a la recta que contiene a la arista $\overline{EH}$ y a la recta que contiene a la arista $\overline{AB}$. Las rectas *EH* y *AB* *no son paralelas* (figura 4.30 b).

Fig. 4.30 b

- Las rectas *EH* y *EF* son perpendiculares a la recta *AE* en el punto *E* por lo que en *el espacio se pueden trazar más de una perpendicular a una recta por un punto de ella* (figura 4.30 c). ◆

Fig. 4.30 c

Reflexiona

Imagina que el prisma recto de la figura 4.29 es un esbozo del aula o habitación donde estudias. Identifica en ese entorno las relaciones encontradas entre puntos, rectas y planos en el espacio.

Como puedes observar, la diferencia fundamental entre el plano y el espacio radica en que el plano tiene dos dimensiones (largo y ancho) y el espacio tiene tres dimensiones (largo, ancho y alto).

En particular, las relaciones entre puntos y rectas en el espacio son las que permiten caracterizar al plano, con las propiedades siguientes:

1. Por tres puntos del espacio, no situados en línea recta, pasa un plano y solo uno.
2. Si una recta tiene dos puntos en un plano, entonces está contenida en ese plano.
3. Si dos planos tienen un punto común, entonces tienen una recta común que contiene a ese punto (recta de intersección).

¿Sabías que...?

El plano al igual que la recta es una figura ilimitada (figura 4.31), y del mismo modo que para representar una recta se dibuja un segmento de esta, para representar un plano, se dibuja solo una porción de este, la cual puede ser un rectángulo que visto en perspectiva parece un paralelogramo y se denota con una letra griega.

Fig. 4.31

En el espacio los cuerpos no pueden ubicarse en un plano, estos están limitados por superficies, y en algunos como el prisma de la figura 4.29, las superficies son figuras planas. Las relaciones conjuntistas que existen entre puntos, rectas y planos permiten caracterizar al espacio. En consecuencia, se dice que:

El **espacio** es un conjunto de puntos en el cual hay algunos subconjuntos llamados rectas, y otros subconjuntos llamados planos.

Reflexiona

¿Por qué una mesa o silla de tres patas, nunca cojea? o ¿por qué un pintor para realizar su obra coloca el lienzo sobre un trípode? ¿Solo tres puntos no alineados determinan un plano único?

¿En el espacio si dos rectas no tienen puntos comunes son siempre paralelas?

Las propiedades de las caracterizaciones de rectas y planos son axiomas que se aceptan sin demostración; unidas a otras propiedades conocidas, pueden ser utilizadas para realizar demostraciones geométricas.

Teorema 4.1

Dos rectas que se cortan determinan un plano y solo uno.

Demostración

Sean p y q (figura 4.32) las rectas y A el punto de intersección, tomemos en p un punto $P \neq A$ y en q un punto $Q \neq A$.

Entonces los puntos A, P y Q que no están alineados, determinan un plano α y solo uno, según la propiedad (1) de la caracterización de plano.

Según la propiedad 2, la recta p está contenida en α, pues tiene en él a los puntos A y P; igualmente la recta q tiene los puntos A y Q en α y está contenida en él.

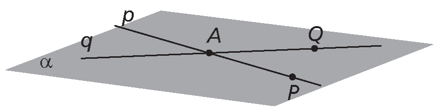


Fig. 4.32

Ejemplo 4.11

Demostrar que una recta r y un punto exterior a esta, determinan un plano y solo uno.

Resolución:

Sea el punto $A \notin r$ de la figura 4.33, consideremos un punto B de la recta r entonces:

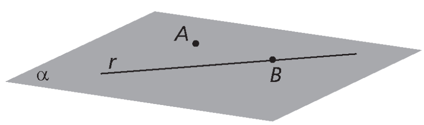


Fig. 4.33

Las rectas AB y r se cortan y determinan un plano único α (teorema 4.1). ◆

En general, en el espacio se cumplen todas las propiedades conocidas relativas al paralelismo, el orden y la congruencia, pero como hemos visto; dos rectas en el espacio pueden no ser paralelas y no cortarse; luego para el caso del paralelismo es necesario modificar la definición de rectas paralelas.

Definición 4.1

Dos rectas en el espacio son paralelas si y solo si

a) están contenidas en un plano y ,

b) son paralelas en ese plano.

En consecuencia, en el espacio son posibles las siguientes relaciones entre rectas:

- Las rectas están en un plano y entonces:
  a) se cortan (secante) o,
  b) son paralelas.
- Las rectas no están en un plano y entonces no se cortan. En este caso se dice que se **cruzan** o que son **alabeadas**.

Se conviene en llamar ángulo entre rectas que se **cruzan** (alabeadas), al ángulo que forman, a partir de un punto dos semirrectas paralelas a aquellas. En la figura 4.34, β es el ángulo determinado entre las rectas alabeadas s y p.

Fig. 4.34

Ejemplo 4.12

Probar que dos rectas paralelas determinan un plano y solo uno.

Resolución:

Sean q y p rectas paralelas (figura 4.35); por definición de paralelismo de rectas están contenidas en un plano. Este plano está determinado por los puntos A, $B \in p$ y $C \in q$, luego es único. ◆

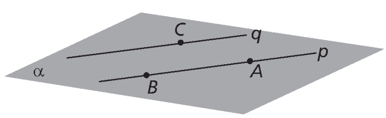


Fig. 4.35

(Ver la nota 2 al capítulo 4 en los anexos)

Reflexiona

1. Durante el desarrollo de este subepígrafe se identificaron las formas o criterios para determinar planos únicos obtenidos a partir de la propiedad 1, que se resumen en las figuras 4.36 a, b, c, d.

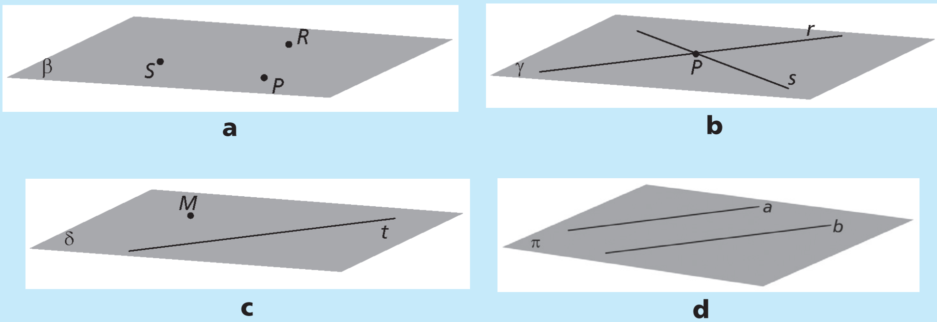


Fig. 4.36

   1.1 Completa el resumen en tu cuaderno de trabajo con las condiciones que deben cumplir los puntos y rectas según corresponda y escribe los criterios para determinar planos únicos, que sugieren las figuras.

2. Analiza nuevamente el teorema 4.1 e identifica en tu cuaderno de trabajo:

   a) Premisas y tesis.

   b) Su recíproco. Investiga si se cumple.

Rectas y planos

En diversas ramas de la ciencia y la tecnología tiene importancia considerar las relaciones entre puntos y rectas en el espacio, los criterios para la determinación de planos, así como, la relaciones entre rectas y planos en el espacio. Como, por ejemplo, para el diseño de objetos, estructuras e instalaciones que deben ser representados por figuras planas.

Para el diseño de las instalaciones hidráulicas en la construcción de un inmueble (figura 4.37). ¿Qué relaciones de posición se pueden *considerar entre una recta con respecto al plano?*

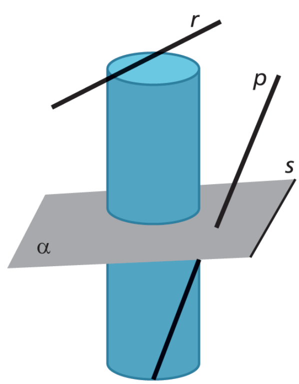


Fig. 4.37

De la historia

A la Geometría de los sólidos dedica Euclides los tomos XI, XII; XIII, de su famosa obra *Los elementos*, y con excepción de la esfera, desarrolla la geometría del espacio, de la cual presenta las definiciones, los teoremas relativos a rectas y planos en el espacio, los teoremas relativos a paralelepípedos y concluye con la construcción de los cinco poliedros regulares. La estereometría se completa tal y como la estudiamos hoy con los trabajos del Gran Arquímedes, en sus obras: *Sobre la esfera y el cilindro* y *De los conoides y esferoides*.

Al identificar en tu entorno esas relaciones, reconocerás muchos ejemplos de rectas y planos que no tienen puntos comunes, por ejemplo: las rectas determinadas por las losas del piso, con el techo de tu aula. En tal caso lo puedes considerar paralelos.

Analizaremos, teniendo en cuenta la propiedad 2, la relación entre recta y plano a partir de la existencia o no de puntos comunes.

Definición 4.2

Una recta y un plano son paralelos si no se intersecan.

Observa en el prisma recto de la figura 4.38 que:

- un plano paralelo a la recta *CD* es el plano *ABF*.
- y la recta *BC* y el plano *DEF* son paralelos.

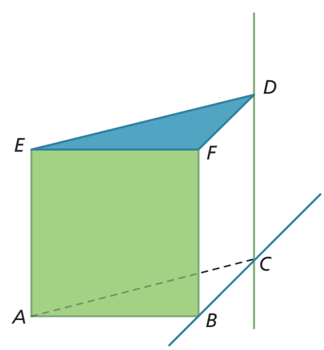


Fig. 4.38

Estos planos y las rectas indicadas no tienen puntos comunes (por mucho que se prolonguen).

Ejemplo 4.13

Probar que si una recta de un plano es paralela a otro plano que lo interseca, también es paralela a la recta de intersección.

Resolución:

Sea la recta $p \subset \beta$ (figura 4.39), q la recta de intersección de los planos α y β, $p \parallel \alpha$.

Debemos probar que $p \parallel q$.

Si la recta p cortara a q lo haría en un punto Q de α, lo que es imposible ya que $p \parallel \alpha$. Ambas rectas están contenidas en el plano β y no tienen puntos comunes, luego, $p \parallel q$ ◆

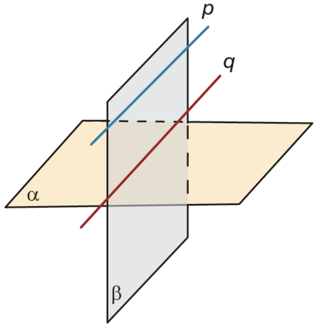


Fig. 4.39

Reflexiona

¿Cómo probar que una recta es paralela a un plano?
Si una recta es paralela a un plano, ¿a cuántas rectas de ese plano es paralela? ¿A cuáles?

Teorema 4.2 (Criterio de paralelismo de recta y plano)

Una recta es paralela a un plano si es paralela a una recta contenida en ese plano.

Demostración:

Se tiene en la figura 4.40 que $p \parallel q$ y $q \subset \alpha$.

Debemos demostrar que $p \parallel \alpha$.

Como $p \parallel q$, se puede trazar un plano β que contenga a p y q. Si la recta p cortara al plano α, cortaría también a q, pues $q = \alpha \cap \beta$, lo que es imposible pues $p \parallel q$.

Luego, $p \parallel \alpha$. ◆

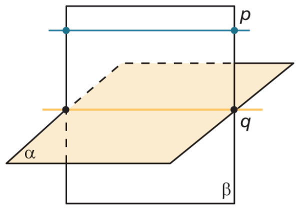


Fig. 4.40

Ejemplo 4.14

Probar que, si dos rectas se cruzan, por cada una de ellas se puede trazar un plano paralelo a la otra.

Resolución:

Sean p y q dos rectas que se cruzan (figura 4.41).

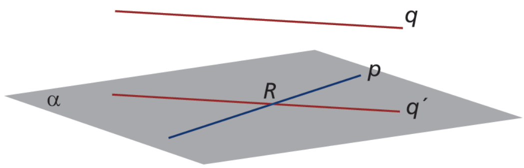


Fig. 4.41

Tracemos por un punto R de p una recta q' paralela a q. La recta p y q' determinan un plano α (Teorema 4.1) que es paralelo a q (Teorema 4.2). ◆

En tu entorno también se reconocen ejemplos de rectas que tienen un punto común con el plano, y pueden ocurrir dos casos:

a) La recta es perpendicular a todas las rectas del plano que pasan por su punto de intersección (figura 4.42). En este caso se dice que es una *recta perpendicular al plano*. El punto P se denomina pie o traza de la perpendicular.

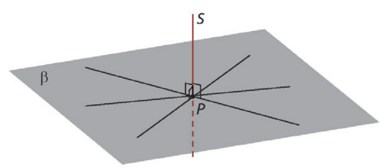


Fig. 4.42

b) La recta es perpendicular a solo una de las rectas que pasan por su punto de intersección (figura 4.43). En este caso se dice que la *recta es oblicua al plano*. El punto P se denomina pie o traza de la oblicua.

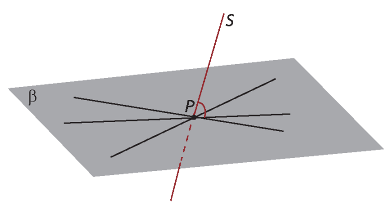


Fig. 4.43

Por “perpendicular” (oblicua) al plano se entiende también el segmento de recta perpendicular (recta oblicua) comprendido entre un punto y un plano.

En la vida diaria puedes encontrar ejemplos de rectas perpendiculares y oblicuas a un plano; por ejemplo, la recta de intersección de dos paredes del aula es perpendicular al piso, mientras que los tensores que sostienen un poste determinan rectas oblicuas al piso.

Observa en la pirámide recta de la figura 4.44 que:

- La recta *EO* es la perpendicular al plano de la base *ABCD*, en el punto *O*.
- Las rectas *EA*, *EB, EC* y *ED* son oblicuas al plano de la base.

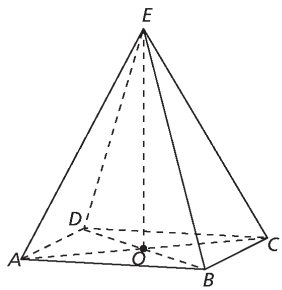


Fig. 4.44

Reflexiona

¿Son verticales todas las rectas perpendiculares a una recta horizontal? Ejemplifica.

Puedes profundizar en el tema tratado, por lo que te propongo ejercitarlo en:

Conéctate

Accede al sitio
https://curricular.cubaeduca.cu/education/category?id=2972&type=theme
Encontrarás la lección Relaciones entre rectas y plano.
Realiza los ejercicios de autoevaluación que aparecen en la lección.

¿Bajo qué condiciones necesarias y suficientes se puede afirmar que una recta es perpendicular a un plano?

Los teoremas y sus demostraciones que estudiarás a continuación te ofrecerán los conocimientos al respecto.

Teorema 4.3 (Criterio de perpendicularidad de recta y plano)

Si una recta es perpendicular a dos rectas de un plano que se cortan en su pie, entonces es perpendicular al plano.

Demostración:

Sean m y n dos rectas que se cortan en el plano α (figura 4.45) y p una recta tal que, $p \perp m$ y $p \perp n$.

B punto de intersección de p, m y n.

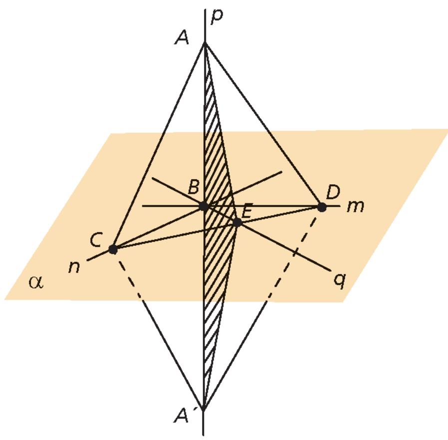


Fig. 4.45

Se debe demostrar que p es perpendicular a todas las rectas que pasan por B. Sea q una cualquiera de esas rectas, luego hay que probar que $p \perp q$.

Tomemos sobre la recta p dos puntos A y A' simétricos con respecto a B, y sobre las rectas m y n dos puntos arbitrarios C y D.

Denotemos por E al punto de intersección de la recta q con CD.

Uniendo los puntos A y A' con C, D y E, respectivamente se tiene:

$\Delta ACD = \Delta DCA'$. (Como $\overline{CD}$ es lado común, $\overline{AC} = \overline{A'C}$ y $\overline{AD} = \overline{A'D}$, por ser m y n mediatrices de $\overline{AA'}$)

Por tanto: $\sphericalangle ACE = \sphericalangle ECA'$ por elementos homólogos de triángulos iguales, luego, $\Delta ACE = \Delta ECA'$ (por tener dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales (l.a.l).

De donde $\overline{AE} = \overline{A'E}$ por elementos homólogos de triángulos iguales y el $\Delta AA'E$ es isósceles de base $\overline{AA'}$, luego, $\overline{EB}$ es la mediana relativa a la base del triángulo isósceles por lo que también es altura y las rectas p y q son perpendiculares. ◆

Ejemplo 4.15

Fundamentar, que en el cubo de la figura 4.46 la recta GH es perpendicular al plano CDE.

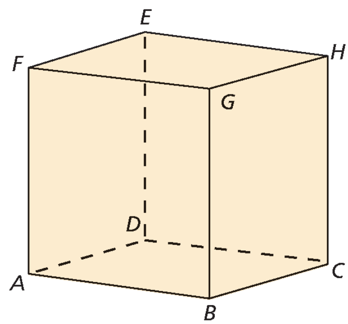


Fig. 4.46

Resolución:

$GH \perp HC$, (por ser $\overline{GH}$ y $\overline{HC}$ lados consecutivos del cuadrado $BCGH$).

$GH \perp HE$, (por ser $\overline{GH}$ y $\overline{HE}$ lados consecutivos del cuadrado $EFGH$).

Luego, GH es perpendicular al plano CDE (por ser perpendicular a dos rectas de ese plano que se cortan en su pie H), (criterio de perpendicularidad de rectas y planos). ◆

Ejemplo 4.16

Probar que por cualquier punto de una recta se puede trazar un plano perpendicular a esta.

Resolución:

Sean la recta p y un punto A cualquiera de p (figura 4.47).

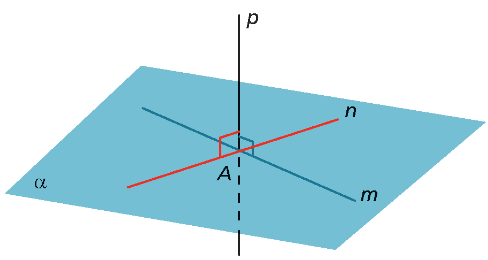


Fig. 4.47

Tracemos por A dos rectas m y n perpendiculares a p.

Estas rectas m y n determinan un plano $\alpha \perp p$ (teorerna 4.3) ◆

Teorema 4.4

Si desde un punto se trazan una perpendicular y varias oblicuas a un plano, la perpendicular es menor que las oblicuas.

Demostración:

Sea A un punto que no pertenece a α,(figura 4.48).

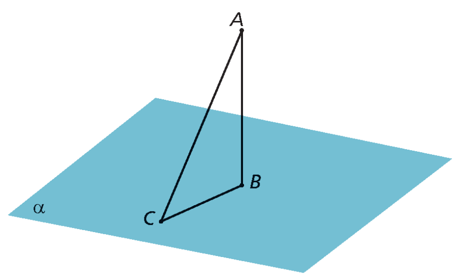


Fig. 4.48

Se traza desde el punto A un segmeto perpendicular α $\left(\overline{AB} \perp \alpha\right)$ y un segmento de oblicua con pie en C ($\overline{AC}$ es oblicua a α).

Uniendo los puntos C y B se obtiene el ΔCBA rectángulo en B pues $\overline{AB} \perp \alpha$ y por tanto lo es a $\overline{CB}$(toda recta perpendicular al plano es perpendicular a todas las rectas del plano que pasan por su pie); luego $\overline{AB} < \overline{AC}$, ya que $\overline{AB}$ es cateto y $\overline{AC}$, es hipotenusa.

Reflexiona

Si una recta es perpendicular a un plano, ¿a cuántas rectas de ese plano es perpendicular? ¿A cuáles?

¿Qué longitud puede tener una cuerda para ser utilizada como tensor de un poste de 6,5 m si debe fijarse en el extremo superior del poste?

Como consecuencia del teorema 4.4, se tiene que de todos los segmentos que pueden trazarse desde un punto a un plano, el menor es el segmento de perpendicular. Por lo que se puede definir que:

Definición 4.3

La distancia de un punto a un plano, es la longitud del segmento de perpendicular comprendido entre el punto y el plano.

La proyección de un punto, un segmento y, en general, de una figura plana sobre una recta; puede hacerse en el plano y puede extenderse al espacio proyectando, ahora, sobre un plano.

Definición 4.4

a) Llamamos proyección de una oblicua $\overline{AB}$ sobre un plano α, al segmento $\overline{A'B}$ que une al pie de la oblicua con el pie de la perpendicular bajada desde el mismo punto A al plano α (se denota $\overline{A'B} = \text{proy}_{\alpha}\overline{AB}$) (figura 4.49).

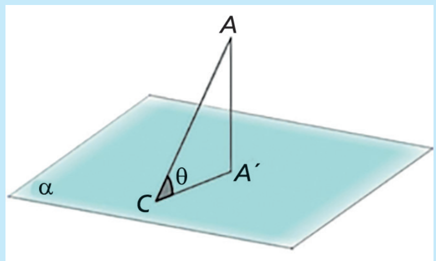


Fig. 4.49

b) Llamamos ángulo de una oblicua $\overline{AB}$ respecto a un plano α al ángulo θ formado por la oblicua y su proyección sobre α.

Saber más

Se llama ángulo de inclinación entre dos planos al menor ángulo formado por dos rectas, una de cada plano, perpendiculares a la recta de intersección entre los planos en un mismo punto de esta. En la figura 4.50, el $\sphericalangle BOA$ es el ángulo de inclinación entre los planos α y β.

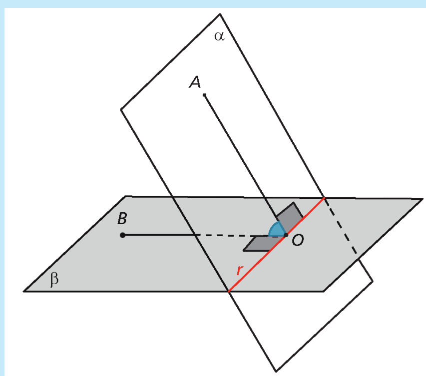


Fig. 4.50

Ejemplo 4.17

Un triángulo isósceles *BCA*, rectángulo en *C*, se encuentra sobre un plano α. Por el vértice *C* se traza la perpendicular $\overline{CM}$ a α tal que $\overline{CM} = 15$ cm (figura 4.51).

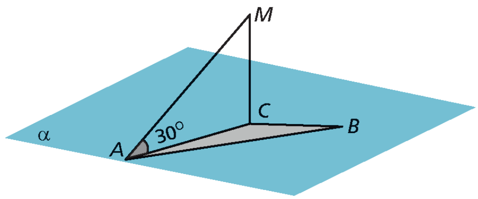


Fig. 4.51

a) Hallar la longitud de la oblicua $\overline{AM}$ si esta forma un ángulo de 30° con el plano α.

b) Hallar el área del triángulo *BCA*.

Resolución:

a) Tenemos que el ΔACM es rectángulo en *C* por ser $\overline{CM} \perp \alpha$ por lo que es perpendicular a toda recta del plano que pasa por su pie, luego:
$\overline{AM} = 2\overline{CM}$ por ser el cateto opuesto a un ángulo de 30° en un triángulo rectángulo.
$\overline{AM} = 2 \cdot 15 = 30$ cm

b) $\overline{AC} = \overline{BC}$ por ser el ΔBCA isósceles de base $\overline{AB}$.
$\overline{AC} = \overline{CM} \cdot \sqrt{3}$ por ser el cateto adyacente al ángulo de 30° en un triángulo rectángulo.

$\overline{AC} = 15\sqrt{3}$ cm luego, $\overline{BC} = 15\sqrt{3}$ cm

$$A_{\Delta BCA} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC}$$

$$A_{\Delta BCA} = \frac{\left(15\sqrt{3}\right)^2}{2} = \frac{225 \cdot 3}{2} = \frac{675}{2} = 337{,}5 \text{ cm}^2 \approx 3{,}4 \text{ dm}^2. \quad \blacklozenge$$

(Ver la nota 3 al capítulo 4 en los anexos)

Ejemplo 4.18

Demostrar que si desde un punto exterior a un plano, se trazan la perpendicular y varias oblicuas cuyas proyecciones son iguales entonces las oblicuas son iguales.

Resolución:

Sea A un punto exterior a un plano α ($A \notin \alpha$) (figura 4.52) $\overline{AD} \perp \alpha$,

$\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ oblicuas respecto a α,

$\overline{BD} = \text{proy}_{\alpha}\overline{AB}$ y $\overline{CD} = \text{proy}_{\alpha}\overline{AC}$

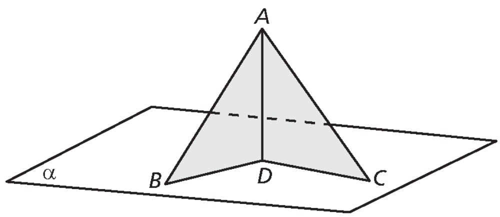


Fig. 4.52

Debemos probar que los triángulos BDA y ADC son iguales.

Como $\overline{AD} \perp \alpha$ es perpendicular a todas las rectas del plano α que pasan por su pie, luego: $\overline{AD} \perp \overline{BD}$ y $\overline{AD} \perp \overline{CD}$

entonces $\sphericalangle BDA = \sphericalangle ADC = 90°$

$\overline{AD}$: lado común

$\overline{BD} = \overline{CD}$ (por datos), por lo que:

$\Delta BDA = \Delta ADC$ (por tener respectivamente iguales dos lados y el ángulo comprendido).

Luego, $\overline{AB} = \overline{AC}$ (por elementos homólogos de triángulos iguales). ◆

Saber más

Comprueba, utilizando el GeoGebra, el recíproco de la relación demostrada en el ejemplo 4.18.

"Si desde un punto exterior a un plano se trazan la perpendicular y varias oblicuas iguales entonces las proyecciones correspondientes también son iguales"

Es muy común encontrar a tu alrededor imágenes como la del conjunto escultórico *Ernesto Che Guevara,* de la Plaza de la Revolución de la provincia Villa Clara (figura 4.53), que revelan nuevas relaciones entre rectas y planos.

Fig. 4.53

Observa que esta, en particular, sugiere la necesidad de expresar las condiciones necesarias y suficientes para establecer la relación entre rectas paralelas, perpendiculares a un plano.

Teorema 4.5

a) Si una de dos rectas paralelas es perpendicular a un plano, la otra también lo es.

b) Dos rectas perpendiculares a un plano son paralelas entre sí.

Demostración:

a) Sean el plano α y las rectas p y q tales que $p \perp \alpha$ y $p \parallel q$, P y Q los pies de p y q sobre α respectivamente (figura 4.54 a).

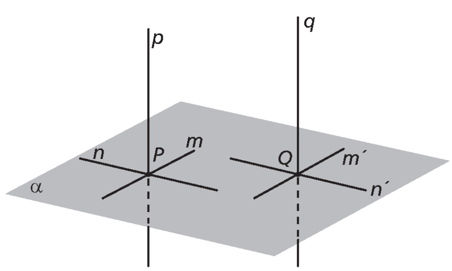


Fig. 4.54a

Tracemos por P dos rectas m y n y por Q dos rectas m' y n' tales que $m' \parallel m$ y $n' \parallel n$.

Tenemos que: $p \perp m$ y $p \perp n$ (por ser $p \perp \alpha$).

luego $q \perp m'$ y $q \perp n'$ (por ser $p \parallel q$, $m' \parallel m$ y $n' \parallel n$, *en el espacio se conservan las propiedades relativas al paralelismo*).

Por lo tanto, $q \perp \alpha$ (por criterio de perpendicularidad de recta y plano).

b) Sean $p \perp \alpha$ y $q \perp \alpha$, es la intersección de p y α y (figura 4.54 b).

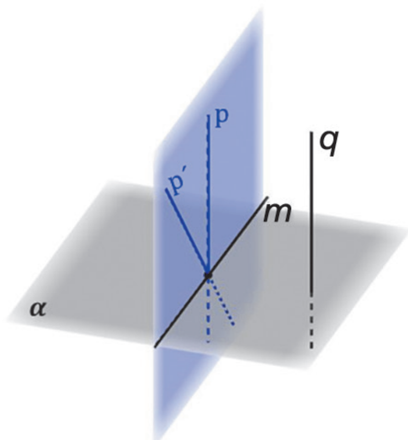


Fig. 4.54b

Supongamos que $p \neq q$. Tracemos por P la recta $p' \parallel q$. Las rectas p y p' determinan un plano β que interseca al plano α según la recta m. Se tiene que $p' \perp \alpha$ (inciso a) luego, $p' \perp m$, pero también $q \perp m$, (por ser $p \perp \alpha$).

Luego, en el plano β se han trazado dos rectas perpendiculares a m en el mismo punto lo que es imposible, por lo que $p \parallel q$.

Ejemplo 4.19

Probar que los puntos de una recta paralela a un plano equidistan del plano.

Resolución:

Sean $p \parallel \alpha$, A y B dos puntos cualesquiera de p (figura 4.55). Tracemos por A y B dos segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ perpendiculares a α, (C y $D \in \alpha$), entonces, $AC \parallel BD$ (teorema 4.5 b). Las rectas AC y BD determinan un plano β que interseca a α según la recta CD, luego, $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ (ejemplo 4.13).

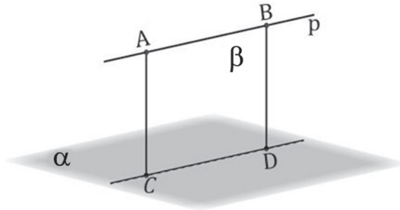


Fig. 4.55

Luego, $ABCD$ es un rectángulo y $\overline{AC} = \overline{BD}$. ◆

Teorema 4.6 (Teorema de las tres perpendiculares)

Si una recta de un plano que pasa por el pie de una oblicua al plano es perpendicular a la proyección de la oblicua, entonces es perpendicular a la oblicua.

Demostración:

Sean la recta AB oblicua a α (figura 4.56 a), $CB = proy_{\alpha}AB$, r una recta contenida en α tal que $r \perp CB$ y β el plano determinado por A, B y C.

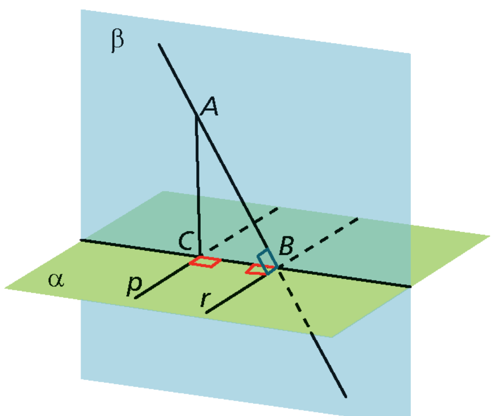


Fig. 4.56 a

Debemos probar que $r \perp AB$.

Tracemos por C una recta p tal que $p \parallel r$.

Tenemos que:

$p \perp AB$ ($AC \perp \alpha$ y $p \subset \alpha$)

$p \perp CB$ ($p \parallel r$, $r \perp BC$ y p, r, $BC \subset \alpha$).

Luego, $p \perp \beta$ (por criterio de perpendicularidad de recta y plano)

pero $r \parallel p$, luego $r \perp \beta$ (teorema 4.5 a) por tanto $r \perp AB$ (figura 4.56 b).

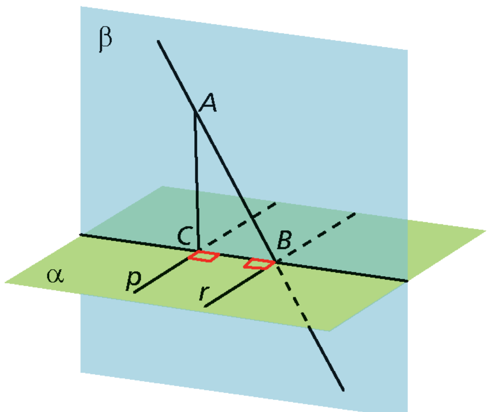


Fig. 4.56 b

Saber más

El recíproco de este teorema 4.6 se cumple, es decir:

Si una recta de un plano, que pasa por el pie de una oblicua, es perpendicular a la oblicua, entonces la recta es perpendicular a su proyección.

La demostración es similar al del teorema directo (figura 4.56 c).

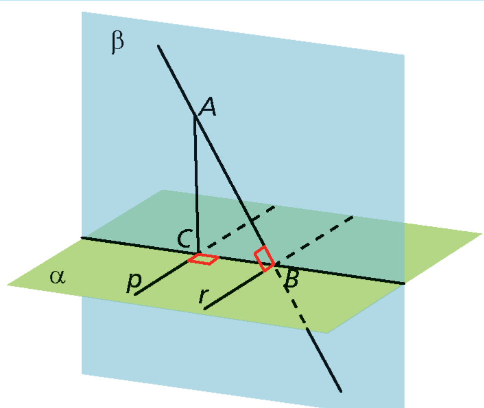


Fig. 4.56 c

Ejemplo 4.20

En el plano β, se tiene el triángulo rectángulo *BCA* tal que, $\overline{AC} = 10$ cm y el $\sphericalangle CAB = 30°$. Por el vértice *C* del ángulo recto se ha trazado una perpendicular al plano α del triángulo, y en ella se ha tomado un punto *M* tal que $\overline{CM} = 12$ cm.

a) Determinar el valor del área del triángulo *ABM*.

b) Calcular el valor del área de la proyección del triángulo *ABM* sobre α.

Resolución:

a) Tenemos (figura 4.57) que el $A_{\Delta ABM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot h$ (1).

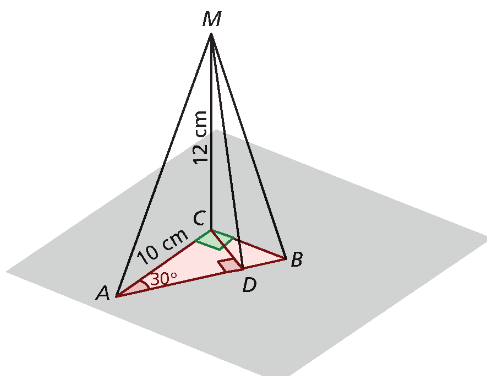


Fig. 4.57

Tracemos la altura $\overline{CD}$ del ΔBCA, se tiene que: $\overline{AB} \perp \overline{CD}$, pero $\overline{CD} = proy_{\alpha}\overline{MD}$, luego, $\overline{AB} \perp \overline{MD}$ (por el teorema de las tres perpendiculares) por lo tanto, $\overline{MD} = h_{\overline{AB}}$.

En el ΔBCA rectángulo en *C* se tiene:

$$\overline{AC} = \sqrt{3} \cdot \overline{BC} = \frac{\sqrt{3} \cdot \overline{AB}}{2} \quad \text{(por el teorema del ángulo de 30°)}$$

$$\overline{AB} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \overline{AC}}{3} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

En el ΔADC rectángulo en *D por ser* $\overline{CD}$ altura del ΔBCA, relativa al lado $\overline{AB}$, se tiene que:

$\overline{CD}$ = 5,0 cm (por ser el cateto opuesto al ángulo de 30º) luego, en el ΔDCM rectángulo en C (por ser $\overline{CD}$ segmento de recta contenido en β y pasar por C, pie de la perpendicular $\overline{MC}$ al plano), se tiene que:

$\overline{MD} = \sqrt{\overline{CD}^2 + \overline{CM}^2}$ (por el Teorema de Pitágoras).

= $\sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$ cm.

Sustituyendo en (1) tenemos:

$$A_{\Delta ABM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{20\sqrt{3}}{3} \cdot 13\ 75\ \text{cm}^2 \approx 75\ \text{cm}^2$$

b) $proy_{\alpha} \Delta BMA = \Delta BCA$ (por ser $\overline{MC} \perp \alpha$) luego:

$$A_{proy_{\alpha}} \Delta BMA = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AB} \cdot \text{sen} 30^{\circ}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{20\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{50\sqrt{3}}{3} \approx 28{,}8\ \text{cm}^2.$$

Respuestas:

a) El valor del área del ΔABM es aproximadamente igual a 75 cm².

b) El valor del área de la proyección del ΔABM sobre α es aproximadamente igual a 29 cm². ◆

Reflexiona

1. La geometría está presente en cada aspecto de nuestra vida diaria. Ejemplifica cómo la geometría se aplica en tu propia vida, tanto dentro como fuera del aula.
2. La geometría espacial es importante para el desarrollo de habilidades cognitivas. ¿Cómo crees que el estudio de la geometría ha influido en tu capacidad de razonamiento lógico, pensamiento crítico y resolución de problemas?
3. La geometría nos ayuda a comprender y aprovechar el espacio de manera eficiente. ¿Describe alguna situación en la que hayas utilizado conceptos geométricos para organizar tu espacio personal o para resolver un problema práctico?

Ejemplo 4.21

En el prisma recto *ABCDEFGH,* cuya base inferior es el cuadrado *ABCD* (figura 4.58) se han trazado las oblicuas $\overline{HA}$, $\overline{HO}$, $\overline{HC}$ y $\overline{FO}$, respecto al plano que contiene a la base, donde es el punto de intersección de las diagonales.

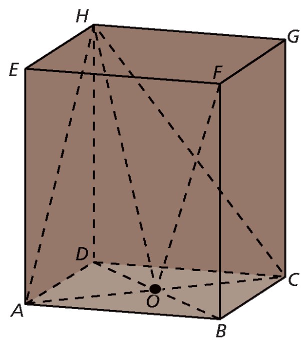


Fig. 4.58

a) Probar que $\overline{FO}$ es la mediatriz de $\overline{AC}$.

b) Demostrar que $\overline{HO}$ es la bisectriz del $\sphericalangle CHA$.

c) Calcular el valor del volumen del prisma si $\overline{HD}$ = 12,0 cm y $\sphericalangle OHD = 30^\circ$.

Resolución:

a) Probemos que la oblicua $\overline{FO}$ es mediatriz de $\overline{AC}$.

En el plano α, determinado por los puntos no alineados *A, B y C* se tiene que:

$\overline{FB} \perp \alpha$ (por ser arista lateral, es altura).

$\overline{FO}$ es oblicua y *O* su pie en α.

$\overline{OB} = proy_{\alpha}\, \overline{FO}$.

$\overline{AC} \subset \alpha$ (segmento de recta del plano que pasa por *O*).

$\overline{AC} \perp \overline{OB}$ (por ser diagonal y semidiagonal respectivamente del cuadrado *ABCD*).

Entonces $\overline{AC} \perp \overline{FO}$ (por el Teorema de las tres perpendiculares).

Luego, FO es mediatriz de $\overline{AC}$ (por ser perpendicular a $\overline{AC}$ en su punto medio O).

b) Demostremos que la oblicua $\overline{HO}$ es bisectriz del $\sphericalangle CHA$.

$\overline{HD} \perp \alpha$ en el punto D (por ser arista lateral del prisma recto $ABCDEFGH$),

Luego, es perpendicular a todas las rectas de α que pasan por su pie D, por lo que

$\overline{AD} = proy_{\alpha}\overline{HA}$ y $\overline{CD} = proy_{\alpha}\overline{HC}$

pero $\overline{AD} = \overline{CD}$ (por ser lados del cuadrado $ABCD$)

y $\overline{HA} = \overline{HC}$ (por ser oblicuas que parten de un mismo punto de una perpendicular al plano y le corresponden proyecciones que tienen igual longitud), entonces el ΔCHA es isósceles de base $\overline{AC}$ por lo que $\overline{HO}$ es la mediana relativa a la base $\overline{AC}$.

Por tanto, $\overline{HO}$ es bisectriz del $\sphericalangle CHA$ (porque en todo triángulo isósceles las rectas notables relativas al lado desigual coinciden en altura, mediana, mediatriz y bisectriz).

c) $\overline{HD} = \sqrt{3} \cdot \overline{OD}$ (por ser cateto adyacente al ángulo de 30º en el triángulo rectángulo HDO).

$$\overline{OD} = \frac{\sqrt{3} \cdot \overline{HD}}{3} = \frac{\sqrt{3} \cdot 12}{3} = 4\sqrt{3}\,\text{cm},$$

luego, la diagonal $\overline{BD} = 2 \cdot \overline{OD} = 8 \cdot \sqrt{3}\,\text{cm}$.

y se tiene que el volumen del prisma es:

$$V_{prisma} = A_{ABCD} \cdot \overline{HD} = \frac{\overline{BD}^2}{2} \cdot \overline{HD}$$

$$= \frac{\left(8\sqrt{3}\right)^2}{2} \cdot 12 = 64 \cdot 3 \cdot 6 = 1\,152\ \text{cm}^3 \approx 11{,}5\ \text{dm}^3.$$

Respuesta:

El valor del volumen del prisma es aproximadamente igual a 11,5 dm^3. ◆

Investiga y aprende

Encuentra otra vía para realizar la demostración del inciso b, del ejemplo 4.21, y calcula la amplitud del ángulo de inclinación entre los planos *ABC* y *AEC*.

Ejemplo 4.22

En la pirámide recta *ABCDS*, su base romboidal *ABCD* tiene 52 cm de perímetro (figura 4.59), $\sphericalangle ABC = 45°$, $E \in \overline{BS}$

$F \in \overline{BD}$, $F = proy_{ABC}E$ y O es el punto donde se cortan las diagonales de la base.

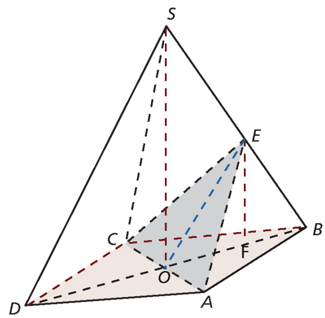


Fig. 4.59

Probar que:

a) $\overline{EO}$ es altura del ΔAEC.

b) $\Delta ABE = \Delta BEC$.

c) $\dfrac{V_{ABCE}}{V_{ABCDS}} = \dfrac{1}{4}$ si $\overline{EF} = 8{,}0\,\text{cm}$ y $\dfrac{\overline{EF}}{\overline{OS}} = \dfrac{1}{2}$.

Resolución:

a) En el plano α, determinado por los puntos no alineados *A, B* y *C* se cumple que:

$\overline{EF} \perp \alpha$ (por ser $F = proy_{ABC}E$).

$\overline{EO}$ es oblicua a α y O su pie.

$\overline{AC} \subset \alpha$ es el segmento de recta del plano que pasa por el pie de $\overline{EO}$.

$\overline{OF} = proy_{\alpha}\overline{EO}$.

$\overline{AC} \perp \overline{OF}$ (por ser diagonal y segmento de diagonal, respectivamente, del rombo *ABCD*).

Entonces $\overline{AC} \perp \overline{OF}$ (por el teorema de las tres perpendiculares).

Luego, $\overline{OE} = h_{\overline{AC}}$ en el ΔACE.

b) Debemos probar que $\Delta ABE = \Delta BEC$.

En todo rombo cada diagonal es mediatriz de la otra, luego, $\overline{AF} = \overline{FC}$ porque todo punto de la mediatriz equidista de los extremos del segmento.

$\overline{FA} = proy_{\alpha}\overline{AE}$ y $\overline{FC} = proy_{\alpha}\overline{CE}$. Luego, $\overline{EA} = \overline{EC}$ (por ser oblicuas que parten del mismo punto E de la perpendicular $\overline{EF}$ y tener proyecciones iguales).

$\overline{BE}$: lado común.

$\overline{AB} = \overline{BC}$ (por ser lados del rombo $ABCD$).

Entonces $\Delta ABE = \Delta BEC$ (por tener sus tres lados respectivamente iguales).

c) Primera vía

$P_{ABCD} = 4 \cdot \overline{AB}$,

$$\overline{AB} = \frac{P_{ABCD}}{4} = \frac{52}{4} = 13 \text{ m}$$

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{OS}} = \frac{1}{2} \text{ luego, } \overline{OS} = 2 \cdot \overline{EF} = 2 \cdot 8 = 16 \text{ cm.}$$

$$A_{ABCD} = \overline{AB}^2 \cdot \operatorname{sen}\sphericalangle ABC$$

$$= 13^2 \cdot \operatorname{sen}45^\circ = 169 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 84{,}5\sqrt{2} \text{ cm}^2.$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}A_{ABCD}, \quad A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 84{,}5\sqrt{2} \text{ cm}^2 = 42{,}25\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

$$\frac{V_{ABCE}}{V_{ABCDS}} = \frac{\frac{1}{3}A_{ABC} \cdot \overline{EF}}{\frac{1}{3}A_{ABCDS} \cdot \overline{OS}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 42{,}25\sqrt{2} \cdot 8}{\frac{1}{3} \cdot 84{,}5\sqrt{2} \cdot 16} = \frac{1}{4}.$$

Segunda vía

$$\frac{V_{ABCE}}{V_{ABCDS}} = \frac{\frac{1}{3}A_{ABC} \cdot \overline{EF}}{\frac{1}{3}A_{ABCDS} \cdot \overline{OS}}$$ pero $A_{ABC} = \frac{1}{2}A_{ABCD}$ y $\frac{\overline{EF}}{\overline{OS}} = \frac{1}{2}$ de donde resulta que:

$2 \cdot A_{ABC} = A_{ABCD}$ y $2 \cdot \overline{EF} = \overline{OS}$

$$\frac{V_{ABCE}}{V_{ABCDS}} = \frac{\frac{1}{3} A_{ABC} \cdot \overline{EF}}{\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot A_{ABC} \cdot 2 \cdot \overline{EF}} = \frac{1}{4}.$$

Luego, queda demostrado que $\frac{V_{ABCE}}{V_{ABCDS}} = \frac{1}{4}$. ◆

Reflexiona sobre lo aprendido

1. Se puede resumir que:

   1.1 Dos rectas distintas en el espacio pueden:

   a) Tener un punto en común (son secantes, están contenidas en un mismo plano).

   b) No tener puntos comunes. Pueden suceder dos casos:

   - ser paralelas, las rectas *están contenidas en un mismo plano*.
   - ser alabeadas, las rectas *no están contenidas en un mismo plano*.

   1.2 Una recta y un plano pueden:

   a) No tener puntos comunes, es ese caso son paralelas.

   b) Tener puntos comunes. Pueden suceder dos casos:

   - todos los puntos de la recta pertenecen al plano, la recta está contenida en el plano.
   - tienen un solo punto común, en ese caso se intersecan.

2. Completa el resumen, conformando con tu equipo un catálogo con al menos cinco imágenes de monumentos patrimoniales de Cuba en los que se manifiesten las posiciones relativas entre rectas y planos, estudiados.

3. *Encuentra otra vía para realizar la demostración del inciso b del ejemplo 4.21 y* calcula la amplitud del ángulo de inclinación entre los planos *ABC* y *AEC*.

4. Respecto al trofeo para los ganadores del concurso nacional de Matemática, modelado en la figura 4.2, a partir de los conocimientos adquiridos, ya puedes debatir con tu grupo acerca de las interrogantes:

   ¿Qué relación existe entre cuatro de las generatrices del cono y las aristas de una cara del cubo? ¿cómo se puede fundamentar? ¿qué volumen debe tener la esfera si las aristas del cubo deben medir 1,0 dm?

Ejercicios del epígrafe 4.1

Repaso y profundización de Geometría plana

1. Si $\sphericalangle A = \dfrac{360°}{n}$ y $\sphericalangle B = \dfrac{180°(n-2)}{n}$ comprueba que los ángulos A y B son suplementarios.

2. En la figura 4.60, *M, N* y *P* son puntos alineados. Si $\sphericalangle QNP = 2\theta$ y $\sphericalangle M = \theta$. Prueba que: $\overline{MN} = \overline{NQ}$.

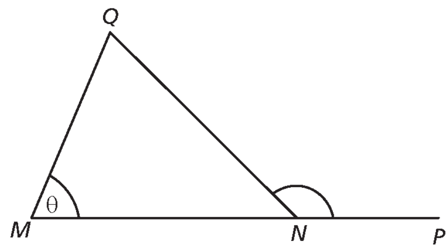


Fig. 4.60

3. Identifica en tu cuaderno de trabajo si las proposiciones que aparecen a continuación son verdaderas o falsas. Justifica las falsas.

a) Dos rectas perpendiculares entre sí forman un ángulo recto.

b) La distancia de un punto a una recta, es la longitud del punto a la recta.

c) Por cada punto de un plano se pueden trazar infinitas rectas paralelas y perpendiculares.

d) Los ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos o perpendiculares son iguales.

e) El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al otro.

f) Cada mediana en cualquier triángulo divide a este en triángulos de iguales áreas.

g) Solo en el triángulo rectángulo se cumple el teorema de las alturas.

h) En un triángulo obtusángulo solo una de las alturas queda trazada fuera de este.

i) Los puntos de una circunferencia equidistan del punto medio de la hipotenusa de cualquier triángulo rectángulo inscrito en ella.

j) Si la distancia de una recta al centro de una circunferencia es igual a la longitud del radio, entonces la recta es secante a la circunferencia.

k) Si dos triángulos tienen sus tres ángulos respectivamente iguales, entonces son semejantes.

l) Las diagonales de todo paralelogramo se cortan perpendicularmente.

m) El paralelogramo que tiene sus diagonales perpendiculares es un cuadrado.

n) En todo cuadrado de lado *a* unidades, la longitud de su diagonal es siempre $a\sqrt{2}\,\text{u}$.

ñ) Un rombo en el que una diagonal sea el doble de la otra tiene un ángulo interior con amplitud de 60º.

o) Si *a* es la distancia del centro de un polígono regular a cada lado y *P*, su perímetro; entonces el área (*A*) se puede calcular como $A = P \cdot a$.

4. Observa la figura 4.61, correspondiente al triángulo *ACB* rectángulo en *C* con $\overline{AC}$ = 4,0 cm y argumenta en tu cuaderno de trabajo por qué se puede afirmar que.

a. El $\sphericalangle$ *ACB* es recto.

b. El triángulo *ACB* es isósceles.

c. $\text{sen}\,\alpha = \cos\alpha$.

d. La longitud de $\overline{AB} = 4\sqrt{2}\,\text{u}$.

e. $A_{\Delta ACB} = 8{,}0\ \text{cm}^2$.

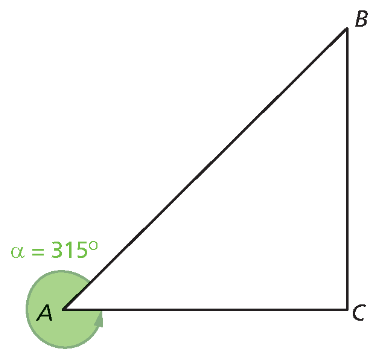


Fig. 4.61

5. Emma, Rosa y José estudian contenidos sobre la circunferencia y el círculo. Al respecto comentan:

Emma: -En la circunferencia el diámetro perpendicular a una cuerda la divide en dos partes iguales.

Rosa: -En la circunferencia los ángulos inscritos y seminscritos sobre un mismo arco tienen igual amplitud.

José: -La amplitud de un ángulo inscrito sobre una semicircunferencia es igual a 180°.

Escribe en tu cuaderno de trabajo, quiénes tienen la razón:

a) Emma y José b) Rosa y José

c) Rosa y Emma d) Los tres tienen la razón

6. En la figura 4.62 $MPQC$ es un paralelogramo, ΔABC equilátero, $\overline{AC} = 6{,}0$ cm, M es el punto medio de $\overline{AC}$, $\overline{BC} \cap \overline{MP} = \{N\}$ y N es el punto medio de $\overline{BC}$ y $\overline{MP}$, respectivamente.

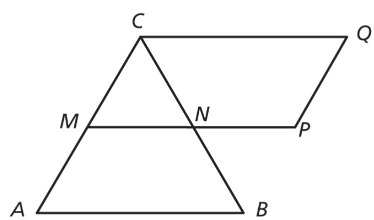


Fig. 4.62

a) Calcula la amplitud del $\sphericalangle QCB$, el valor del $A_{\Delta ABC}$ y A_{NPQC}.

b) ¿Es $\overline{BC}$ bisectriz del $\sphericalangle QCA$? Fundamenta tu respuesta.

c) ¿Podemos afirmar que $\overline{CQ} = \overline{AB}$? Justifica tu respuesta.

d) Demuestra que $ABQC$ es un paralelogramo.

7. En la circunferencia de centro O y radio $\overline{OA}$ (figura 4.63) $\overline{BC}$ y $\overline{MN}$ son diámetros, $\overline{MN} \perp \overline{AC}$ en el punto F, $\sphericalangle BCA = 36{,}8°$, $\overline{ON} = 5{,}0$ cm y $\overline{MC} = 4{,}48$ cm.

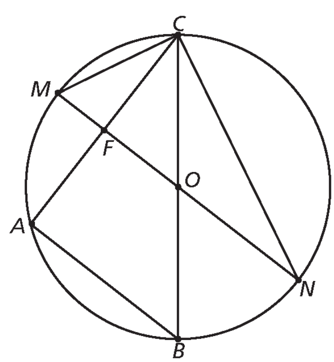


Fig. 4.63

7.1 Clasifica los triángulos NCM y CAB según la amplitud de sus ángulos interiores.

7.2 Calcula:

a) La amplitud del $\sphericalangle MNC$.

b) La longitud de $\overline{FC}$.

c) El área de los triángulos CAB y CON.

7.3 Sin realizar cálculos, ¿podemos afirmar que $A_{\Delta MOC} = A_{\Delta CON}$? Fundamenta tu respuesta.

8. En la figura 4.64 se tiene que:

- $ABCD$ es un rombo,
- El ΔCFD es isósceles de base $\overline{DC}$ y $\overline{FE}$ es su altura relativa al lado $\overline{DC}$,
- $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ACF$.

a) Prueba que $\overline{EC} = \sqrt{\dfrac{\overline{FC} \cdot \overline{OC}}{2}}$.

b) Calcula el valor del perímetro del pentágono $ABCFD$, si $\overline{BD} = 12\,\text{dm}$ y el $\sphericalangle ACD = 30°$.

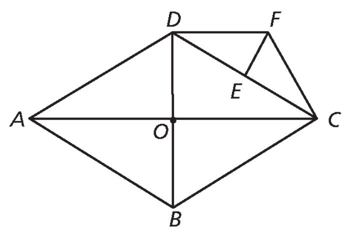


Fig. 4.64

9. En la figura 4.65 el punto C pertenece a la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB}$. Se conoce, además que:

- $\overline{DE} \parallel \overline{CB}$,
- $\overline{BE}$ es tangente en B,
- $\overline{CF}$ es la altura del ΔBCA relativa al lado $\overline{AB}$.

a) Demuestra que $\Delta ODA = \Delta CFB \sim \Delta EBO = \Delta BCA$.

b) Calcula el valor del área de la región sombreada si $\overline{FC} = 2\sqrt{3}\,\text{dm}$ y $\overline{FB} = 2{,}00$ dm.

c) Determina el valor del perímetro del cuadrilátero $DEBC$.

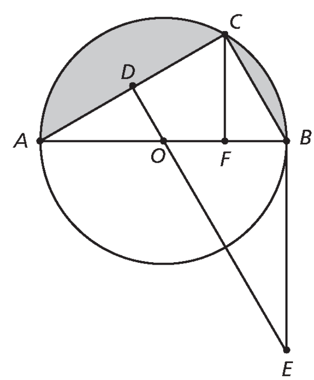


Fig. 4.65

10. En la figura 4.66 se tiene la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB}$. Se conoce, además que:

- D es un punto de la circunferencia,
- A, D y C son puntos alineados,
- $\overline{ED} \perp \overline{BC}$ y $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$.

a) Demuestra que $\Delta BDA \sim \Delta DEC$.

b) Si el $\measuredangle DAB = 30°$ y $\overline{BD} = 5{,}0$ dm, calcula el valor del perímetro de la región sombreada.

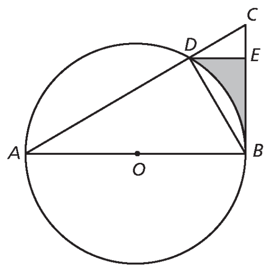


Fig. 4.66

(Ver la nota 4 al capítulo 4 en los anexos)

Relaciones entre rectas en el espacio

11. En los prismas rectos de la figura 4.67, identifica en tu cuaderno de trabajo utilizando las aristas:

a) Dos rectas paralelas.

b) Dos rectas que se cruzan.

c) Tres rectas que sean perpendiculares dos a dos.

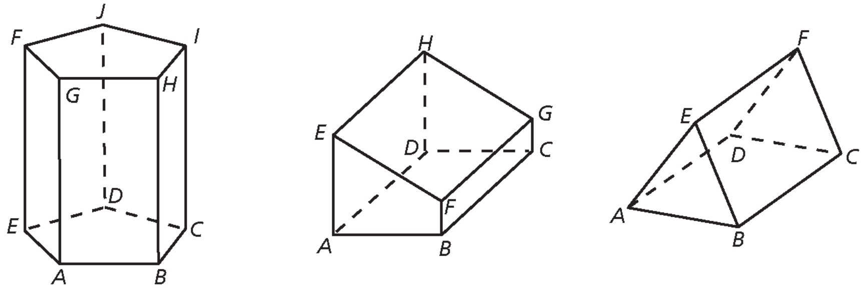


Fig. 4.67

12. Sea el cubo *ABCDEFH* (figura 4.68). Identifica en tu cuaderno de trabajo, utilizando las aristas:

a) Dos rectas paralelas que no pertenezcan a una misma cara.

b) Dos rectas alabeadas.

c) Dos rectas perpendiculares.

d) Cuatro puntos que no estén en un mismo plano.

e) Dos rectas que se corten en un punto que no sea vértice.

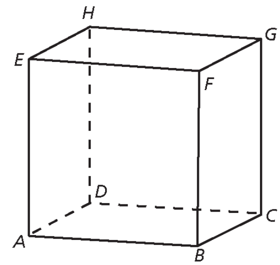


Fig. 4.68

13. ¿Cuántos pares de aristas situados sobre rectas cruzadas hay en una pirámide triangular?

14. ¿Cuántos pares de aristas paralelas y aristas que se cruzan hay en un ortoedro?

15. ¿Por qué cojea una mesa de cuatro patas con una más corta que las otras?

16. Si se unen con dos hilos los extremos inferiores de las patas no consecutivas de una silla, ¿cómo se sabe si estos cuatro extremos están en el mismo plano?

17. Si dos rectas en el espacio no se cortan por mucho que se prolonguen, ¿se puede afirmar que son paralelas?

18. ¿Cuántos planos determinan tres rectas concurrentes no coplanares?

19. Se tienen siete puntos entre los que nunca hay cuatro en un mismo plano. ¿Cuántos planos determinan?

20. ¿Cuántos planos determinan 20 puntos, no hallándose nunca cuatro de ellos en el mismo plano, ni tres en línea recta? ¿Cuántos planos determinan *n* puntos en las mismas condiciones?

21. ¿Cuántos planos determinan tres rectas paralelas?

22. ¿Cuál es el número mayor de planos que pueden determinar tres rectas paralelas y un punto cualquiera exterior a estas?

23. Dos rectas se cortan, si una tercera recta cruza a una de ellas y es paralela a la otra, ¿cuántos planos distintos determinan? Comprueba tu resultado con un asistente matemático.

24. ¿Cuántos planos determinan dos rectas que se cortan al ser cortadas por una tercera? Comprueba tu resultado con un asistente matemático.

25. Prueba que si una recta corta a dos rectas paralelas, las tres están en un mismo plano. Comprueba tu resultado con un asistente matemático.

26. Si cuatro puntos no están en un plano, prueba que tres de ellos no están alineados. Verifica tu resultado con un asistente matemático.

27. Demuestra que, si las rectas *AB* y *CD* no están en un mismo plano, entonces las rectas *AC* y *BD* tampoco están en un mismo plano. Verifica tu resultado con un asistente matemático.

Rectas y planos

28. La figura 4.69 representa un prisma hexagonal regular; identifica en tu cuaderno de trabajo:

a) Dos rectas paralelas al plano *ABC*.

b) Una recta paralela al plano *AGL*.

c) Dos planos paralelos a la recta *HI*.

d) Una recta paralela a dos planos.

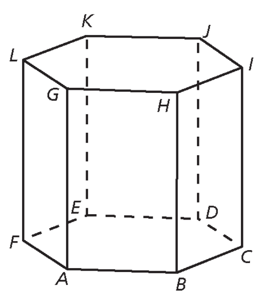


Fig. 4.69

28.1 Fundamenta en cada caso tu respuesta.

29. En la figura 4.69 del ejercicio anterior, identifica en tu cuaderno de trabajo:

a) Rectas perpendiculares al plano *ABC*.

b) Rectas oblicuas al plano que contiene al rectángulo *ABHG*.

30. Dos rectas paralelas a un plano, ¿son paralelas entre sí?

31. ¿Cuántas rectas paralelas a un plano pueden trazarse por un punto exterior al plano?

32. Si dos rectas son paralelas, el plano que contenga solo a una de estas, ¿qué relación guarda con la otra? Verifica tu resultado con un asistente matemático.

33. Dos rectas se cruzan, ¿cuántos planos pueden trazarse que contengan a una de estas y sean paralelos a la otra? Verifica tu resultado con un asistente matemático.

34. Si una recta es paralela a un plano, ¿podrá ser paralela a dos rectas de ese plano?, ¿a cuántas puede serlo? Verifica tu resultado con un asistente matemático.

35. Si una recta es perpendicular a un plano, ¿a cuántas rectas de ese plano es perpendicular? Verifica tu resultado con un asistente matemático.

36. Determina la longitud de la proyección sobre un plano de una oblicua de 18 cm de longitud que forma un ángulo de 60° con ese plano.

37. Un punto *P* dista 14,1 cm de un plano α, calcula la longitud de la proyección de la oblicua $\overline{PM}$ sobre α si esta forma un ángulo de 45° con ese plano.

38. La oblicua $\overline{AB}$ a un plano tiene una longitud de 20 cm y su proyección sobre este mide 10 cm, ¿qué amplitud tiene el ángulo que forma con el plano?

39. Dos puntos *A* y *B* se encuentran en semiespacios distintos con respecto a un plano α. Si la distancia de *A* y *B* al plano son de 20 cm y 40 cm respectivamente, y la distancia entre sus proyecciones es de 80 cm. ¿Cuál es la distancia entre *A* y *B*?

40. Los puntos *M* y *N* se encuentran situados en el mismo semiespacio en relación con el plano β. Si sus distancias al plano se encuentran en la razón $\frac{2}{3}$ y la recta que ellos determinan corta al plano en un punto *P*, situado a 12 cm del punto *M*, ¿a qué distancia de *P* se encuentra *N*? ¿a qué distancia se hallan entre sí los puntos *M* y *N*?

41. Por un punto exterior a un plano se han trazado a este una perpendicular que mide 12 cm y una oblicua que mide 16 cm. Calcula la longitud de la proyección de la perpendicular sobre la oblicua?

42. Si $\overline{AD}$ es la altura del triángulo *CAB* y $\overline{PA} \perp \alpha$ (figura 4.70):

a) Prueba que el ángulo *PDC* es rectángulo.

b) Calcula la longitud de $\overline{PC}$ si $\overline{PD} = 4{,}0$ cm y $\overline{CD} = 5{,}0$ cm.

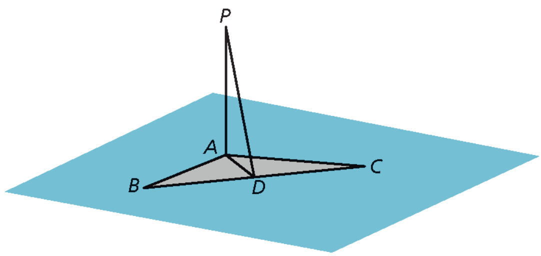


Fig. 4.70

43. Por el centro de una circunferencia circunscrita a un triángulo se traza una perpendicular al plano del triángulo. Demuestra que cada punto de esta recta equidista de los vértices del triángulo. Comprueba tus resultados con un asistente matemático.

44. La figura 4.71 representa un ortoedro de dimensiones: $\overline{AB} = 30\text{cm}$, $\overline{BC} = 20\text{cm}$ y $\overline{BG} = 15\text{cm}$. De los segmentos trazados en la figura, determina:

a) Un par de rectas paralelas y un par de rectas alabeadas. Fundamenta tu respuesta.

b) Una recta paralela al plano *ABD* y una recta perpendicular al plano *BCH*. Fundamenta tu respuesta.

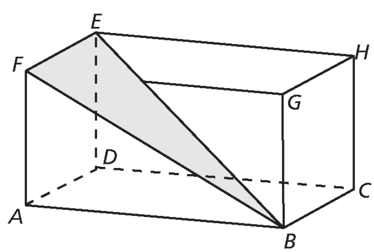


Fig. 4.71

c) El valor del área de la región sombreada y el volumen de la pirámide *ADEFB*.

45. *ABCDEFGH* es un ortoedro (figura 4.72)

- $M \in \overline{BC}$; $\overline{BC} = 3 \cdot \overline{MB}$; $\overline{EB} = 6{,}0$ cm;
- sen $\sphericalangle AEB = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y el valor del área sombreada es de 24 cm^2.

a) Determina la relación de posición de la recta *FG* con respecto al plano *MBH*. Justifica.

b) Demuestra que *BMHE* es un trapecio rectángulo.

c) Determina el valor del volumen del ortoedro.

d) Calcula el valor del perímetro de la región sombreada.

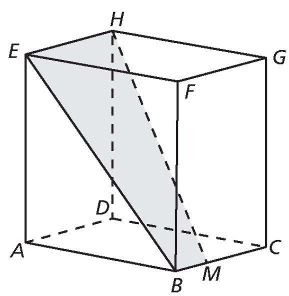


Fig. 4.72

46. En el cono recto de la figura 4.73 se cumple:

- $\overline{AB}$ es diámetro de la base y $\overline{OS}$ es su altura,
- *C* es un punto de la circunferencia base,
- *M* y *N* son los puntos medios de las cuerdas $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente,
- $\sphericalangle CBA = \sphericalangle OSA = 30°$ y $\overline{AB} = 11{,}0$ cm.

Demuestra que los triángulos *SMC* y *CNS* son rectángulos.

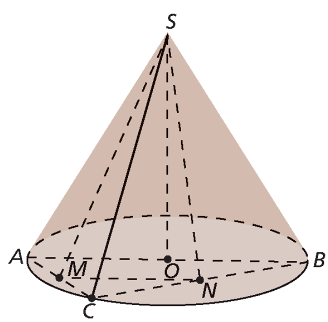


Fig. 4.73

46.1 Calcula:

a) el valor del volumen del cono y de las pirámides *OMNS* y *CNMS*.

b) el valor del área total del cono.

47. Al cilindro de la figura 4.74 se le ha realizado una perforación cónica por el centro de la base. Se conoce, además, que:

- $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son diámetros del cilindro y del cono respectivamente,
- A, C, O y D son puntos alineados,
- D es el punto medio de la cuerda $\overline{RN}$ en la base inferior,
- $\overline{CD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$,
- $O = proy_{ARB} S$ y $S \in \overline{OE}$.

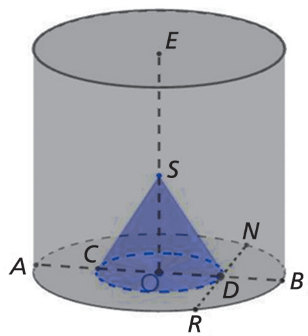


Fig. 4.74

47.1 Prueba que:

a) $\overline{SD}$ es la mediatriz de $\overline{RN}$.

b) ΔDSC es equilátero si $\overline{OS} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \overline{AB}$.

47.2 Calcula el valor del volumen del cilindro perforado si $\overline{OE} = \overline{AB}$ y $\overline{SD} = 6{,}0$ cm.

48. A un cilindro circular recto se le realiza una perforación cónica por el centro de la base de forma tal que el diámetro de la perforación es igual al radio de la base del cilindro.

a) Demuestra que las generatrices del cono son perpendiculares a las cuerdas de la base del cilindro tangentes a la base del cono.

b) Si el diámetro del cilindro es de 20 cm, las generatrices del cono son de 1,3 dm y la razón entre la altura del cilindro y la del cono es de 1,5; calcula el valor volumen del cuerpo perforado.

49. La figura 4.75 muestra un cuerpo de madera formado por una pirámide de base cuadrada $ABCD$ y altura $\overline{SC}$, y un cono circular recto de igual altura, donde se cumple que:

- Las bases de ambos cuerpos están en el mismo plano,
- $\overline{BD} \cap \overline{AC} = \{O\}$,
- El centro de la base del cono es el punto C y el radio $\overline{OC}$,
- $\overline{AB} = 4{,}0\,\text{cm}$,
- $\tan \sphericalangle SAC = \sqrt{2}$.

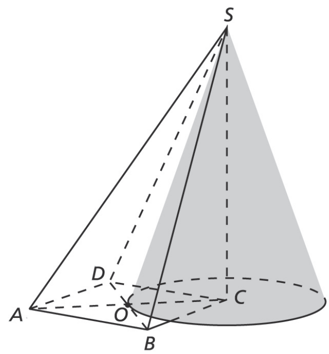


Fig. 4.75

a) Demuestra que las caras ABS y SDA de la pirámide son iguales.

b) Calcula el valor del volumen del cuerpo.

c) Calcula el valor del área total del cuerpo.

50. En el prisma recto $ABCDEFGH$ de base cuadrada (figura 4.76); se han trazado las oblicuas al plano ABC; $\overline{AH}$, $\overline{OH}$, $\overline{OF}$ y $\overline{CF}$.

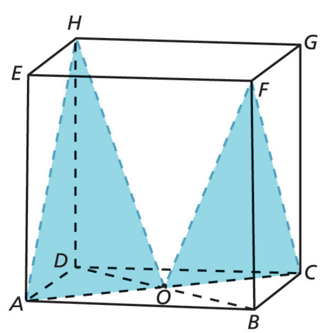


Fig. 4.76

Demuestra que los triángulos AOH y CFO son rectángulos e iguales.

50.1 Si $\sphericalangle CFO = 30°$ y $\overline{OF} = 15\,cm$, calcula:

a) El valor del área del triángulo OCF y del cuadrilátero $ACGE$.

b) El valor del área total del prisma y su volumen.

51. La figura 4.77 muestra la pirámide $ABCDE$ de altura $\overline{ED}$ y base el trapecio $ABCD$ rectángulo en A y D.

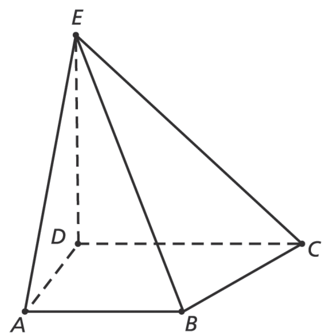


Fig. 4.77

a) Utilizando los vértices de la figura. Escribe en tu cuaderno de trabajo una recta alabeada a $\overline{EA}$.

b) Demuestra que el triángulo EAB es rectángulo.

c) Si $\overline{EC} = 8\sqrt{2}\,cm$, $\overline{AD} = \overline{DC}$, $2 \cdot \overline{AB} = \overline{DC}$ y el $\sphericalangle DCE = 45°$. Calcula el valor del volumen de la pirámide.

52. En el prisma recto $MNPQRSTU$ (figura 4.78) de base rectangular. El valor del área de la base $MNPQ$ es de 120 cm^2.

a) Determina dos segmentos de los trazados en la figura que no determinen un plano.

b) Demuestra que el ΔRNP es rectángulo.

c) Calcula el valor del volumen del prisma si $\overline{RN} = 12\,cm$ y el $\sphericalangle MRN = 60°$.

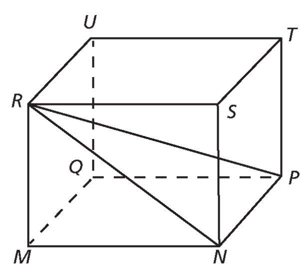


Fig. 4.78

53. La figura 4.79 muestra el prisma recto *ABCDEFGH*, de bases cuadradas *ABCD* y *EFGH*:

- $\overline{DB}$ es una de sus diagonales de la base inferior,
- *O* es punto de intersección de las diagonales.

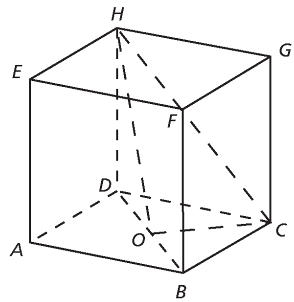


Fig. 4.79

a) Utilizando los vértices de la figura. Escribe en tu cuaderno de trabajo una arista que sea alabeada a $\overline{HE}$.

b) Prueba que el triángulo *HOC* es rectángulo.

c) Si $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$ cm y $\overline{OH} = 4{,}0$ cm. Calcula el valor del volumen del prisma.

54. La figura 4.80 muestra el prisma recto *ABCDEF* de bases *ABC* y *DEF*, triángulos rectángulos en *B* y *E* respectivamente. Además, se conoce que:

- $I \in \overline{AD}$,
- $\overline{AG}$ corta a $\overline{HI}$ y $\overline{ED}$ en los puntos *H* y *G* respectivamente,
- $\overline{HI} \parallel \overline{ED}$.

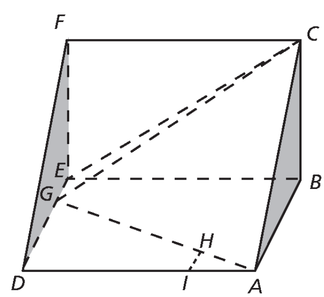


Fig. 4.80

a) De los segmentos trazados en la figura escribe en tu cuaderno de trabajo uno que sea paralelo al plano que contiene a los segmentos de rectas *AG* y *BE*.

b) Demuestra que el triángulo *CEG* es rectángulo.

c) Si $\overline{AD} = 9{,}0$ cm, $\overline{AI} = 3{,}0$ cm, $\overline{HI} = 20$ mm, $\overline{BC} = 6{,}0$ cm y $\operatorname{sen}\sphericalangle BCA = \frac{4}{5}$, calcula el valor del volumen de la pirámide *ABEGC*.

55. En el interior de la esfera de diámetro $\overline{AB}$ y centro *O* está situado el cono circular recto de vértice *S* (figura 4.81). El diámetro y el centro de la base del cono coinciden con los de la esfera. El vértice *S* es un punto interior de la esfera. El diámetro $\overline{AB}$ corta a la cuerda $\overline{PQ}$ de la base del cono en su punto medio *N*.

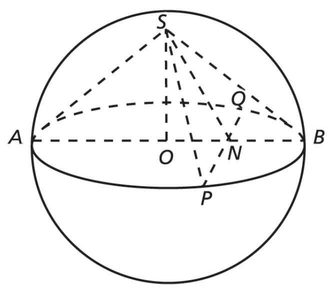


Fig. 4.81

a) Prueba que el triángulo *PNS* es rectángulo.

b) Si el valor del área de la esfera es de $256\pi \text{cm}^2$ y la $\tan\sphericalangle BSO = \frac{4}{3}$. Calcula el valor del área total del cono.

56. Se tienen dos piezas macizas: una en forma de esfera y otra en forma de cilindro circular recto. Se perfora la base superior del cilindro hasta hacerle una hendidura semiesférica de igual radio que la base del cilindro. En la hendidura se introduce la esfera resultando el cuerpo que se muestra en la figura 4.82. Se conoce, además, que:

- *O* es centro de la esfera y de la base superior del cilindro,
- $\overline{AC}$ es diámetro de la esfera y de la base superior del cilindro,
- *B* es un punto de la esfera y $\overline{AB} = 3\sqrt{2}$ cm,

- La altura del cilindro es 4,00 cm,
- El ΔABC es isósceles de base $\overline{AC}$.

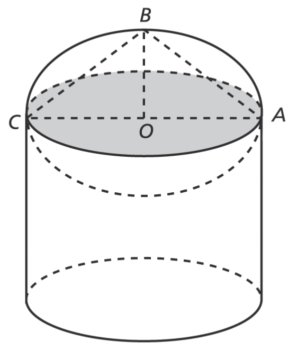


Fig. 4.82

a) Calcula la longitud del radio de la esfera.

b) Calcula el valor del volumen de material que se desechó al perforar la base superior del cilindro.

c) Calcula el valor del área total del cuerpo resultante.

4.2 Geometría analítica del espacio

Entre los conocimientos que adquiriste en Geografía, está el relacionado con el Sistema de Posicionamiento Global (GPS) de localización geográfica de puntos en la superficie de la tierra (figura 4.83). Se basa en el método de *triangulación*, que se utiliza para la determinación de las coordenadas de cualquier punto sobre la tierra.

Fig. 4.83 GPS en un celular

Ese método se utiliza para rastrear celulares, en el sistema de navegación de los automóviles e incluso para calcular la ubicación de un satélite o de una nave espacial. También se aplica en cartografía, en actividades forestales y de otras ciencias.

Los conocimientos que contribuyeron a la obtención de progresos tan importantes en las ciencias y en la tecnología, son parte de los aportes de matemáticos como el francés Descartes (1593-1662) que, al introducir los métodos algebraicos en la geometría, aportó los fundamentos de la geometría analítica del espacio, que estudiarás en este epígrafe.

De la historia

Euclides (325 a.n.e.–265 a.n.e.) en *Los Elementos* partió de cinco postulados para construir la Geometría (figura 4.84). Si alguno de estos postulados no se cumple, entonces tenemos lo que se denomina Geometrías no Euclidianas.

Cuando a principios del siglo XIX, Matemáticos como Gauss, Lobachevsky, Bolyai, entre otros, indistintamente intentaron demostrar por reducción al absurdo, el quinto postulado: "Dada una recta y un punto exterior a ella, hay una única recta que es paralela a la recta dada y que pasa por el punto", encontraron que podían construirse otras geometrías que no lo verificaba, como la Geometría Hiperbólica, o la Geometría Elíptica, que conocerás de continuar estudios superiores en ingeniería.

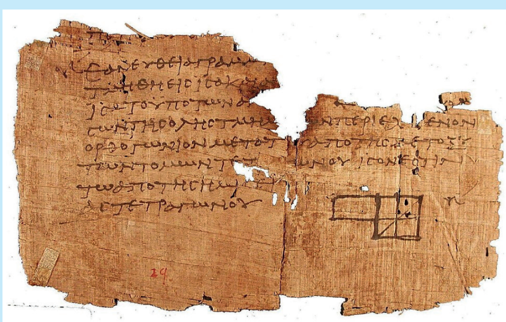


Fig. 4.84

Coordenadas en el espacio

Como recordarás, en el plano es posible estudiar analíticamente las propiedades de las figuras mediante la introducción del sistema rectangular de coordenadas (figura 4.85). Este sistema permite establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano y los pares ordenados de números reales.

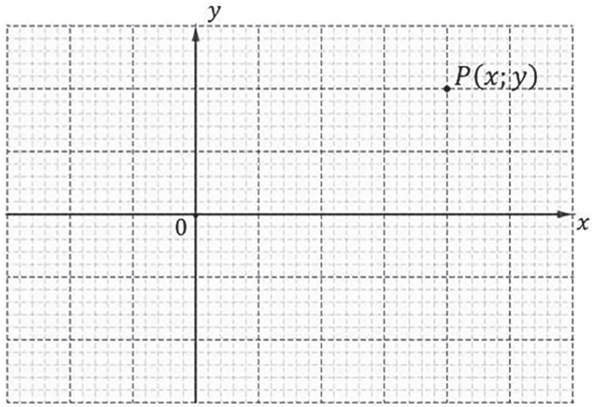


Fig. 4.85

En el espacio también se pueden asignar coordenadas a los puntos, pero, como tiene tres dimensiones se necesitan tres coordenadas.

En efecto, se pueden trazar tres planos mutuamente perpendiculares que se corten en un punto *O* (figura 4.86). Las rectas de intersección de estos planos son los ejes coordenados y los planos son llamados planos coordenados.

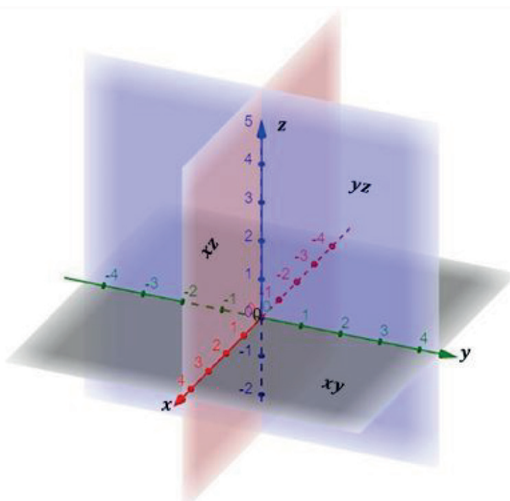


Fig. 4.86

El determinado por los ejes x y y se llama plano xy.

El determinado por los ejes y y z plano yz.

El determinado por los ejes x y z se llama plano xz.

El sistema obtenido de esta forma se llama sistema rectangular de coordenadas en el espacio.

Para asignar coordenadas a los puntos se procede de la misma forma que en el plano, pero utilizando tres coordenadas formando la terna o tripleta ordenada $(x; y; z)$.

Saber más

Estos sistemas rectangulares se llaman sistemas rectangulares directos, pues un tornillo que se haga girar del eje x al eje y, avanza en el sentido del eje z. Nosotros solo utilizaremos este sistema y por eso no especificamos que es directo.

El procedimiento de la representación de puntos en el espacio se realiza similar a como lo realizas en el plano, es decir, en el plano la coordenada x del punto representa la distancia de este al eje y, y la coordenada y la distancia del punto al eje x.

En el espacio:

- la coordenada x representa la distancia del punto al plano yz,
- la coordenada y, la distancia al plano xz,
- la coordenada z la distancia al plano xy.

Ejemplo 4.23

a) Situar en un sistema de coordenadas los puntos $P_1(1;2;4)$, $P_2(2;0;3)$ y $P_3(3;3;0)$.

b) Determinar las coordenadas de los puntos representados en la figura 4.87.

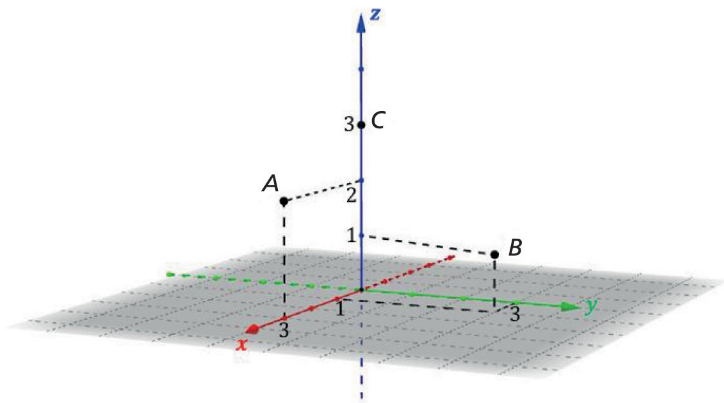


Fig. 4.87

Resolución:

a) En la práctica no es necesario representar los planos coordenados, sino solo los ejes como se muestra en la figura 4.87.

Observa que, para poder obtener una figura en perspectiva, las representaciones de los ejes *x*, *y* forman un ángulo de aproximadamente 135° y sobre el eje *x* se toma una escala que es la mitad de la de los otros ejes.

La representación de los puntos P_1, P_2 y P_3 se muestran en la figura 4.88.

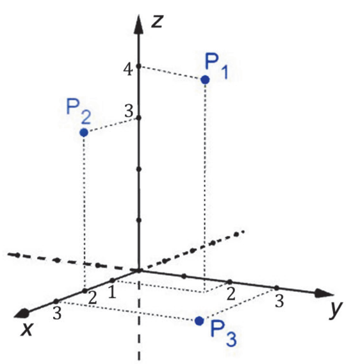


Fig. 4.88

b) Las coordenadas de los puntos de la figura 4.87 son:

A(3;0;2), B(1;3;1) y C(0;0;3). ◆

En la representación de puntos en el espacio se tiene que:
la condición $x = 0$ caracteriza al plano yz,
la condición $y = 0$ caracteriza al plano xz,
y la condición $z = 0$ caracteriza al plano xy.
Como cada eje es la intersección de dos planos coordenados:
la condición $x = 0$, $y = 0$, caracteriza al eje z,
la condición $x = 0$, $z = 0$, caracteriza al eje y,
y la condición $y = 0$, $z = 0$, caracteriza al eje x.

¿Sabías que...?

Para generar el modelo digital de un terreno es importante tener en cuenta la adquisición de datos (Topografía, Fotogrametría o Cartografía existentes), del cual resulta una nube de puntos con coordenadas tridimensionales ($x; y; z$), que representen de manera fiel la superficie topográfica que se va a representar. Esta nube de puntos, con distribución totalmente irregular, serán los datos de partida, cuyo procesamiento mediante algoritmos de cálculo, se utilizan para la formación del modelo digital del terreno, formada por superficies elementales planas triangulares, y que se definen a partir de los puntos de coordenadas tridimensionales.

Ejemplo 4.24

a) Dado el punto A de coordenadas $(3;-1;4)$ escribir las coordenadas del punto donde un plano que pasa por A y es perpendicular al eje z, corta a este último. Escribir las coordenadas de un punto arbitrario de ese plano.

b) Dado el punto $B(-2;4;1)$. Escribir las coordenadas del punto donde una recta paralela al eje z que pasa por B corta al plano xy. Escribir las coordenadas de un punto arbitrario de esa recta.

Resolución:

a) El punto buscado pertenece al eje z, luego las coordenadas x e y son cero. Si el plano es paralelo al xy, la coordenada z será la misma del punto dado, por tanto, las coordenadas del punto son $(0;0;4)$. Su representación puede observarse en la figura 4.89. Un punto arbitrario de ese plano tendrá coordenadas $(x;\ y;\ 4)$.

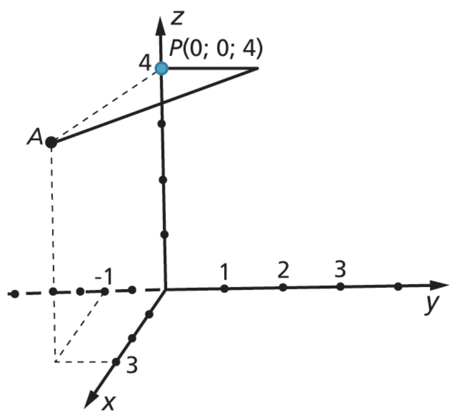


Fig. 4.89

b) El punto buscado está sobre el plano xy, luego $z = 0$.

Si la recta es paralela al eje z, interseca al plano xy en el punto $P(-2;4;0)$. Puede verse en la figura 4.90.

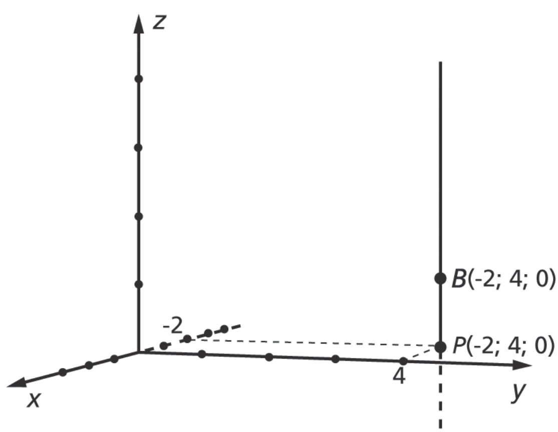


Fig. 4.90

Un punto arbitrario de esta recta tendrá coordenadas $(-2;4;z)$. ◆

Investiga y aprende

Con ayuda de la inteligencia artificial, investiga y debate con tus compañeros sobre la afirmación siguiente:
La Geometría Analítica del Espacio es una herramienta invisible, pero omnipresente. Desde usar Google Maps hasta lanzar un cohete a Marte, sus ecuaciones y modelos matemáticos hacen posible resolver problemas complejos en 3D: es la base de la tecnología moderna.

Teorema 4.7

La correspondencia establecida entre las ternas de números reales (x; y; Z) y los puntos del espacio mediante un sistema rectangular de coordenadas es biunívoca.

Demostración:

Si por el punto A del eje x (figura 4.91), trazamos un plano paralelo al plano yz (dos planos son paralelos si no se intersecan), por el punto B del eje y un plano paralelo al plano xz y por el punto C del eje z un plano paralelo al plano xy; estos tres planos son únicos (por un punto exterior a un plano se puede trazar un plano paralelo y solo uno) y se cortan en un punto P de coordenadas $(x;y;z)$ con $\overline{\text{OA}} = x$, $\overline{OB} = y$ y $\overline{OC} = z$. Luego, a cada terna de números reales corresponde un punto único del espacio.

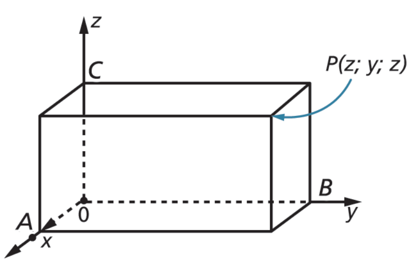


Fig. 4.91

Recíprocamente, si tenemos un punto P del espacio y trazamos por este planos paralelos a los planos coordenados, estos cortan a los ejes en los puntos *A*, *B* y *C*; con lo que quedan determinados tres números reales. Por lo tanto, a cada terna de números reales corresponde un punto único del espacio y viceversa.

¿Sabías que...?

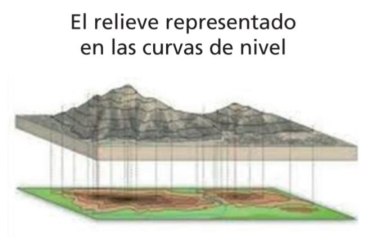
El aumento de la población mundial, así como las necesidades de comunicación, vivienda, el desarrollo de la producción agrícola y expansión territorial, originaron la **topografía**, que es una aplicación de la **geometría**, en la que existe una correspondencia entre los elementos geométricos y su materialización sobre el terreno (figura 4.92).

Fig. 4.92 Maqueta de La Habana

En la actualidad existe una urgente necesidad de elaborar planos y mapas topográficos con alta precisión, para determinar límites entre países, tareas en las que se complementa con la geodesia.

Los planos del meridiano, del horizonte y el vertical, se usan en topografía para proyectar sobre ellos los objetos geométricos para conocer su posición en dos o tres dimensiones, formando sistemas de coordenadas (x; y), (x; y; Z), (n; e), (r; l), son distancias a los ejes de referencia contenidos en los planos ya mencionados.

La topografía tiene aplicaciones en la ingeniería agrícola, tanto en levantamientos como trazos, deslindes, divisiones de tierra (Geodesia), determinaciones de áreas (Agrimensura), nivelación de terrenos, construcción de bordos, canales y drenes (figura 4.93).



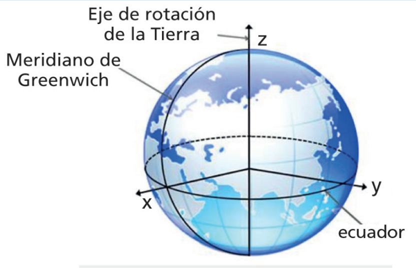


Fig. 4.93

En la ingeniería eléctrica: levantamientos previos y trazos de líneas de transmisión, construcción de plantas hidroeléctricas, instalación de equipos para plantas nucleoeléctricas.

En la ingeniería mecánica e ingeniería industrial: para la instalación precisa de máquinas y equipos industriales, configuraciones de piezas metálicas de gran precisión. En la ingeniería minera: para el levantamiento y trazo de túneles, galerías y lumbreras, cuantificaciones de volúmenes extraídos, entre otras.

Ejemplo 4.25

Si los puntos $(2;3;1)$, $(2;5;-1)$ y $(0;5;1)$ son vértices de un ortoedro de bases paralelas a los planos coordenados.

a) Determinar las coordenadas de los vértices restantes.

b) Calcular el valor volumen del ortoedro.

Resolución:

a) Como el ortoedro tiene sus bases paralelas a los planos coordenados, tendrá cuatro vértices con una coordenada constante (figura 4.94). Conocemos los vértices: $E(2;3;1)$, $B(2;5;-1)$ y $G(0;5;1)$.

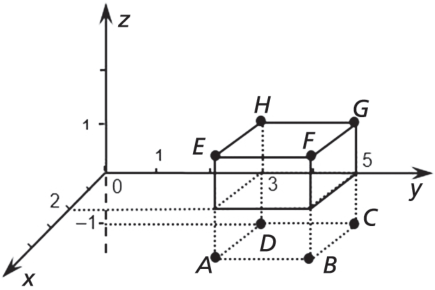


Fig. 4.94

Los vértices estarán en los planos:

$x = 2\,;\, x = 0$

$y = 3\,;\, y = 5$

$z = 1\,;\, z = -1$

Los vértices restantes serán: $A(2;3;-1)$, $C(0;5;-1)$, $D(0;3;-1)$, $F(2;5;1)$, $H(0;3;1)$.

b) Como se muestra en la figura 4.94, los lados del ortoedro miden $\overline{AB} = 2{,}0$ u, $\overline{AD} = 2{,}0$ u y $\overline{DH} = 2{,}0$ u, luego, $V = \overline{AB}^3$ $V = 2^3 = 8{,}0$ u^3. ◆

Aplica tus conocimientos

Calcula el volumen de una pirámide recta de base rectangular de lados paralelos a los ejes coordenados en el plano *xy*, si dos de sus vértices son (1;0;0) y (3;4;0) y tiene 6,0 u de altura (figura 4.95).

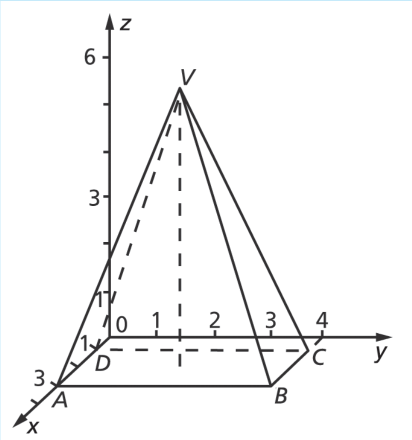


Fig. 4.95

Determina las coordenadas del vértice principal (cúspide) de la pirámide.

Distancia entre dos puntos en el espacio

En el plano ya habías determinado una relación que te permitía calcular la distancia entre dos puntos, es decir, la longitud de un segmento en el plano.

Recuerda que...

La distancia entre dos puntos del plano $A(x_1;y_1)$ y $B(x_2;y_2)$ se obtiene por la fórmula $d(A,B)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

¿Cómo determinarías la distancia entre dos puntos cualesquiera en el espacio?

Observa que en la relación de la distancia entre los puntos del plano es necesario calcular las diferencias entre las coordenadas *x* y *y* de los puntos, pero en el espacio los puntos se representan con tres coordenadas por lo que es necesario tener la diferencia de las terceras coordenadas.

Teorema 4.8

Sean $P(x_1;y_1;z_1)$ y $Q(x_2;y_2;z_2)$ dos puntos cualesquiera en el espacio, la distancia entre estos viene dada por la expresión,

$$d(P;Q)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

Demostración:

Sean $P(x_1;y_1;z_1)$ y $Q(x_2;y_2;z_2)$ dos puntos cualesquiera del espacio (figura 4.96) tracemos por estos puntos planos paralelos a los planos coordenados.

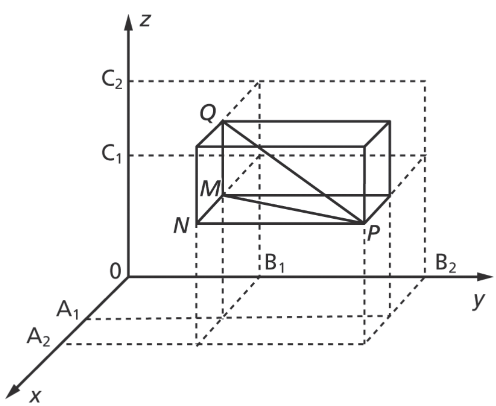


Fig. 4.96

Estos planos se intersecan formando un ortoedro en el cual $\overline{PQ}$ es una diagonal interior de este. Tenemos que $d(P;Q)=\left|\overline{PQ}\right|$.

Aplicando el teorema de Pitágoras en los triángulos *MNP* y *QMP* se obtiene que:

En el *MNP*, $\left|\overline{MP}\right|^2=\left|\overline{MN}\right|^2+\left|\overline{NP}\right|^2$ (1)

En el *QMP*, $\left|\overline{PQ}\right|^2=\left|\overline{MP}\right|^2+\left|\overline{QM}\right|^2$ (2)

Sustituyendo (1) en (2) tenemos: $\left|\overline{PQ}\right|^2=\left|\overline{MN}\right|^2+\left|\overline{NP}\right|^2+\left|\overline{QM}\right|^2$

Pero $\left|\overline{MN}\right|=\left|\overline{A_2A_1}\right|=|x_1-x_2|$

$\left|\overline{NP}\right|=\left|\overline{B_2B_1}\right|=|y_1-y_2|$

$\left|\overline{QM}\right|=\left|\overline{C_2C_1}\right|=|z_1-z_2|$,

luego: $\left|\overline{PQ}\right|^2=|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2+|z_1-z_2|^2$

de donde: $d(P;Q)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$. ◆

Ejemplo 4.26

a) Calcular la distancia entre los puntos $A(2;1;-3)$ y $B(-1;5;3)$.

b) Probar que la pirámide de vértices $P(0;0;0)$, $Q\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2};0\right)$, $R(0;3;0)$ y $S\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2};\sqrt{6}\right)$, es un tetraedro regular.

Resolución:

a) Aplicando la fórmula del teorema 4.8

$$d(A;B)=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2}$$

$$d(A;B)=\sqrt{(2+1)^2+(1-5)^2+(-3-3)^2}=\sqrt{9+16+36}$$

$$=\sqrt{61}\approx 7{,}81 \text{ u.}$$

b) En un tetraedro regular todas las caras son triángulos equiláteros y en cada vértice concurren tres aristas. Veamos si todas las aristas son iguales.

$$d(P;Q)=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{27}{4}+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{36}{4}}=3{,}0\text{ u.}$$

$$d(P;R)=\sqrt{3^2}=3{,}0\text{ u.}$$

$$d(P;S)=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{9}{4}+6}=\sqrt{3+6}=3{,}0\text{ u.}$$

$$d(Q;R)=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{27}{4}+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{36}{4}}=3{,}0\text{ u.}$$

$$d(Q;S)=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}=\sqrt{3+6}=3{,}0\text{ u}$$

$$d(S;R)=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{9}{4}+6}=\sqrt{3+6}=3{,}0\text{ u.}$$

Como todas las aristas son iguales la pirámide *PQRS* es un tetraedro regular. ◆

Conocidas las coordenadas de dos puntos $A(x_1;y_1;z_1)$ y $B(x_2;y_2;z_2)$ del espacio también es posible hallar las coordenadas del punto medio del segmento que estos determinan. Estas coordenadas son:

$$x_M=\frac{x_1+x_2}{2}\ ;\ y_M=\frac{y_1+y_2}{2}\ ;\ z_M=\frac{z_1+z_2}{2}$$

Aplica tus conocimientos

1. Dada las coordenadas de los vértices $P(2;2;0)$, $Q(0;0;3)$ y $R(1;1;1{,}5)$. Determina si es posible construir un triángulo.
2. Dado el triángulo cuyos vértices son los puntos: $A(3;-1;2)$, $B(0;4;2)$ y $C(-3;2;1)$, comprueba que es isósceles y halla la longitud de la mediana relativa al lado desigual.

¿Sabías que...?

Se puede determinar la relación de dos rectas en el espacio conocidas las coordenadas de dos de sus puntos, sin usar vectores ni ecuaciones de las rectas de manera explícita.

Sean las rectas $l_1 : A(x_1;y_1;z_1)$ y $B(x_2;y_2;z_2)$ y $l_2 : C(x_3;y_3;z_3)$ y $D(x_4;y_4;z_4)$:

1. ¿Son paralelas?

   Se calcula las *diferencias* entre las coordenadas de los puntos de cada recta y compara sus proporciones:

   Para $l_1 : \Delta x_1 = x_2 - x_1$, $\Delta y_1 = y_2 - y_1$, $\Delta z_1 = z_2 - z_1$.

   Para $l_2 : \Delta x_2 = x_4 - x_3$, $\Delta y_2 = y_4 - y_3$, $\Delta z_2 = z_4 - z_3$.

   Condición de paralelismo: $\dfrac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \dfrac{\Delta y_1}{\Delta y_2} = \dfrac{\Delta z_1}{\Delta z_2}$

   Si se cumple, son paralelas.

   Luego, se verifica si tienen algún punto en común, para saber si son coincidentes. Para que las rectas sean coincidentes todos los puntos de l_1 deben estar en l_2. Como son paralelas, basta con probar que un punto de los de la recta l_2 (C) pertenece a la recta l_1.

   - Se calcula la diferencia entre C y A:

     $\Delta x_C = x_3 - x_1$, $\Delta y_C = y_3 - y_1$, $\Delta z_C = z_3 - z_1$.

   - Se verifica si estas diferencias son proporcionales a las de l_1

     $\dfrac{\Delta x_C}{\Delta x_1} = \dfrac{\Delta y_C}{\Delta y_1} = \dfrac{\Delta z_C}{\Delta z_1}$.

   - Si se cumple, C está en l_1, y por tanto l_1 y l_2 son coincidentes.
   - Si no, son paralelas pero no coincidentes.

2. ¿Son secantes o alabeadas?

   Si no son paralelas, para ver si se cortan:

   – Toma las primeras dos coordenadas (x y y) y resuelve el sistema lineal para t y s:

   $$\begin{cases} x_1 + t\Delta x_1 = x_3 + s\Delta x_2 \\ y_1 + t\Delta y_1 = y_3 + s\Delta y_2 \end{cases}$$

   – Si tiene solución única, se sustituye t y s en la tercera coordenada z:

   – Si $z_1 + t\Delta z_1 = z_3 + s\Delta z_2$ entonces l_1 y l_1 son secantes.

   – Si $z_1 + t\Delta z_1 \neq z_3 + s\Delta z_2$ entonces l_1 y l_1 son alabeadas.

3. ¿Son perpendiculares?

Usa el producto de las diferencias:

$\Delta x_1 \cdot \Delta x_2 + \Delta y_1 \cdot \Delta y_2 + \Delta z_1 \cdot \Delta z_2 = 0$

Si es cero, son perpendiculares.

Ejemplo 1 Rectas coincidentes.

Sean las rectas determinadas por los puntos dados:

u: $A(1;2;3)$ y $B(3;6;9) \rightarrow$ Diferencias: $\Delta x_1 = 2$, $\Delta y_1 = 4$ y $\Delta z_1 = 6$.

v: $C(2;4;6)$ y $D(4;8;12) \rightarrow$ Diferencias: $\Delta x_2 = 2$, $\Delta y_2 = 4$ y $\Delta z_2 = 6$

1. ¿Son paralelas? $\frac{2}{2} = \frac{4}{4} = \frac{6}{6} = 1$ son paralelas.

Verificar si el punto $C(2;4;6)$ está en u: $\frac{2-1}{2} = \frac{4-2}{4} = \frac{6-3}{6} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ se cumple.

Conclusión: las rectas u y v son paralelas coincidentes.

Ejemplo 2 Rectas paralelas no coincidentes.

Sean las rectas determinadas por los puntos dados:

a: $A(0;0;0)$ y $B(1;1;1) \rightarrow$ Diferencias: $\Delta x_1 = 1$, $\Delta y_1 = 1$ y $\Delta z_1 = 1$.

b: $C(0;0;1)$ y $D(1;1;2) \rightarrow$ Diferencias: $\Delta x_2 = 1$, $\Delta y_2 = 1$ y $\Delta z_2 = 1$.

1. ¿Son paralelas? $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{1} = 1$ son paralelas.

Verificar si el punto $C(0;0;1)$ está en α: $\frac{0-0}{1} = \frac{0-0}{1} = \frac{1-0}{1}$ $\quad 0 = 0 \neq 1$ no se cumple.

Conclusión: Las rectas a y b son paralelas no coincidentes.

Ejemplo 3 Rectas alabeadas

Sean las rectas determinadas por los puntos dados:

p: $A(1;0;0)$ y $B(0;1;0) \rightarrow$ Diferencias: $\Delta x_1 = -1$, $\Delta y_1 = 1$ y $\Delta z_1 = 0$.

q: $C(0;0;1)$ y $D(1;1;1) \rightarrow$ Diferencias: $\Delta x_2 = 1$, $\Delta y_2 = 1$ y $\Delta z_2 = 0$

1. ¿Son paralelas? $\frac{-1}{1} \neq \frac{1}{1}$ No son paralelas.

2. ¿Son secantes?
   Resuelve:

$$\begin{cases} 1+t(-1)=0+s(1) \\ 0+t(1)=0+s(1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t+s=1 \\ t-s=0 \end{cases}$$

$$t=s=0{,}5$$

Verifica: $z: 0+0=1+0 \rightarrow 0 \neq 1$ no son secantes.

Conclusión: Las rectas p y q son alabeadas.

Saber más

La ecuación general de un plano está dada por: $\pi: Ax+By+Cz+D=0$. Si dos puntos $P_1(x_1;y_1;z_1)$ y $P_2(x_2;y_2;z_2)$ pertenece a la recta s:

Podemos saber la relación de posición de la recta y el plano evaluando los puntos de la recta en la ecuación del plano:

$$\begin{cases} Ax_1+By_1+Cz_1+D=d_1 \\ Ax_2+By_2+Cz_2+D=d_2 \end{cases}$$

1. Si $d_1=d_2=0$. Ambos puntos pertenecen al plano, por lo que la recta está contenida en él.
2. Si $d_1=0$ y $d_2\neq 0$ (o viceversa). Solo un punto está en el plano, por lo que la recta corta al plano en ese punto (son secantes).
3. Si $d_1\neq 0$ y $d_2\neq 0$ (tienen el mismo signo). Ambos puntos están en el mismo semiespacio, por lo que la recta es paralela al plano.
4. Si $d_1\neq 0$ y $d_2\neq 0$ (tienen signos opuestos). Ambos puntos están en semiespacio diferentes, por lo que la recta corta al plano (son secantes).

Por ejemplo:

Sea el plano β, determinado por la ecuación $\beta: 2x-y+3z-5=0$ y los puntos $P_1(1;2;1)$ y $P_2(3;-1;0)$.

a. Evaluaos P_1 $2(1)-(2)+3(1)-5=-2$ $(d_1=-2)$

b. Evaluaos P_2 $2(3)-(-1)+3(0)-5=2$ $(d_2=2)$

Como $d_1\neq 0$ y $d_2\neq 0$ y tienen signos opuestos, la recta corta al plano (son secantes).

Ejercicios del epígrafe 4.2

1. Representa en un sistema de coordenadas los puntos
$A(2;0;-1)$, $B(4;-3;7)$,
$C(-5;-9;2)$ y $D(3;-2;4)$.

2. Halla las coordenadas de los vértices del cubo de arista $a = 4{,}0$ u representado en la figura 4.97.

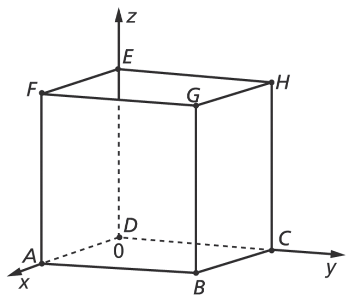


Fig. 4.97

3. Los puntos $(3;1;2)$, $(3;5;2)$, $(-1;1;2)$ y $(3;1;6)$ son vértices de un cubo. Halla los vértices restantes y dibuja el cubo. Comprueba tus resultados con ayuda de un asistente matemático.

4. Un octaedro regular es un cuerpo de ocho caras que son triángulos equiláteros y en cada vértice concurren cuatro aristas. Los puntos $(2;2;0)$, $(2;0;2)$, $(4;2;2)$, $(2;4;2)$, $(0;2;2)$ y $(2;2;4)$ son los vértices de un octaedro regular. Dibuja el octaedro. Comprueba tus resultados con un asistente matemático.

5. Dibuja la pirámide triangular de vértice $V(4;4;1)$ si los vértices de la base son los puntos $(4;1;4)$, $(4:4;4)$ y $(1;4;4)$ y calcula el valor de su volumen.

6. El punto $P(2;3;3)$ es un vértice de un ortoedro formado por los planos coordenados y los planos que pasando por P son paralelos a estos. Halla las coordenadas de los otros siete vértices y el valor del volumen del cuerpo. Verifica tu resultado con un asistente matemático.

7. Calcula la distancia entre los puntos:

a) $A(2;5;3)$ y $B(-3;2;1)$.

b) $C(0;3;0)$ y $D(6;0;2)$.

c) $E(-4;-2;3)$ y $F(3;3;5)$. d) $G(-1;-2;2)$ y $H(2;2;-1)$.

e) $I(-1;3;2)$ y el origen de coordenadas.

7.1 Comprueba tus resultados con un asistente matemático.

8. Calcula los valores del perímetro y el área del triángulo cuyos vértices son los puntos;

$A(4;6;1)$, $B(6;4;0)$ y $C(-2;3;3)$. Comprueba tus resultados con ayuda de un asistente matemático.

8.1 Determina las coordenadas del punto medio de cada lado del triángulo.

9. Halla la distancia del punto $(3;-1;2)$ a cada uno de los planos coordenados y a los ejes coordenados.

10. Comprueba que los puntos $A(5;1;5)$, $B(-3;-2;1)$ y $C(4;3;2)$ son los vértices de un triángulo rectángulo y calcula su área.

10.1 Determina la longitud de la paralela media relativa a la hipotenusa.

11. Halla la distancia del punto $(-2;5;3)$ a cada uno de los planos coordenados y al origen de coordenadas.

12. Demuestra que el cuadrado de la distancia de cualquier punto del espacio al origen de coordenadas, es igual a la suma de los cuadrados de sus distancias a los planos coordenados. Comprueba tus resultados con ayuda de un asistente matemático.

13. Comprueba que los puntos $(1;1;0)$, $(3;3;0)$, $(3;1;2)$ y $(1;3;2)$ son vértices de un tetraedro regular.

14. Dados los puntos $(0;0;0)$, $(10;0;0)$, $\left(5;5\sqrt{3};0\right)$ y $\left(5;\frac{5\sqrt{3}}{3};\frac{10\sqrt{6}}{3}\right)$.

a) Comprueba que son los vértices de un tetraedro regular.

b) Calcula el valor del volumen del tetraedro.

15. Los puntos $\left(0;1;\sqrt{2}\right)$, $\left(3;5;\sqrt{2}\right)$, $\left(7;2;\sqrt{2}\right)$ y $\left(4;-2;\sqrt{2}\right)$ son vértices de un octaedro regular.

a) Halla las coordenadas de los otros dos vértices si se sabe que están sobre una recta paralela al eje z y la distancia entre ellos $5\sqrt{2}$ u.

b) Calcula el valor del área lateral del cuerpo.

16. Determina las coordenadas de los extremos A y B del segmento dividido entre partes iguales por los puntos $P(-4;2;1)$ y $Q(1;5;1)$.

17. Sea un cubo de lado igual a 4,0 cm, tal que está ubicado en el primer octante ($x > 0$; $y > 0$; $z > 0$) y tres de sus caras sobre los planos coordenados. Los centros de las seis caras del cubo son los vértices de un octaedro regular.

a) Halla las coordenadas de los vértices del octaedro.

b) Calcula la longitud de las aristas del octaedro y represente gráficamente tanto el cubo como el octaedro.

18. Halla las coordenadas de los puntos simétricos a los puntos

$A(2;3;1)$, $B(5;-3;2)$, $C(-3;2;-1)$ y $D(a;b;c)$ respecto:

a) al plano xy b) al plano xz c) al plano yz

d) al eje x e) al eje y f) al eje z

19. Un puente tiene vigas definidas por las rectas l_1, l_2 y l_3 que pasan por los puntos de coordenadas:

$l_1 : A(1;2;3)$ y $B(4;5;6)$,

$l_2 : C(0;1;2)$ y $D(3;4;5)$,

$l_3 : E(2;-1;4)$ y $F(5;2;7)$.

19.1 Auxíliate de un asistente matemático que tenga vista gráfica en 3D (GeoGebra) y responde cada uno de los incisos siguientes:

a) Prueba si l_1 y l_2 son rectas paralelas o rectas alabeadas.

b) Verifica si l_3 es paralela al plano $\pi : 2x - y + 3z = 4$. En caso de no ser paralelo diga las coordenadas de intersección entre el plano y la recta.

c) Calcula el valor del volumen de una columna cilíndrica del puente con radio 2,0 m y altura igual a la distancia entre l_1 y l_2.

(Ver la nota 5 al capítulo 4 en los anexos)

Ejercicios del capítulo

1. Di si las siguientes proposiciones son verdaderas en planimetría, estereometría o en ambas.

a) Por un punto situado fuera de una recta se puede trazar una paralela y solo una a esta.

b) Por un punto situado fuera de una recta se puede trazar una perpendicular y solo una a esta.

c) Por un punto de una recta se puede trazar una perpendicular y solo una a esta.

d) Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí.

e) Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí.

f) Por un punto de una recta se pueden trazar infinitas perpendiculares a esa recta.

2. Una recta r corta a un plano α en un punto P. En la recta se toman dos puntos M y N situados cada uno en distintos semiespacios respecto a α y equidistantes de P. Si el punto M dista 10 cm del plano α, ¿cuánto dista N de ese plano?

3. El cuadrado $ABCD$ en el plano α es cortado por el cuadrilátero $BNDM$ por la diagonal $\overline{BD}$ como se muestra en la figura 4.98, de forma tal que y $A = proy_{\alpha}M$, $C = proy_{\alpha}N$ y $\overline{MN} \cap \overline{BD} = \{O\}$.

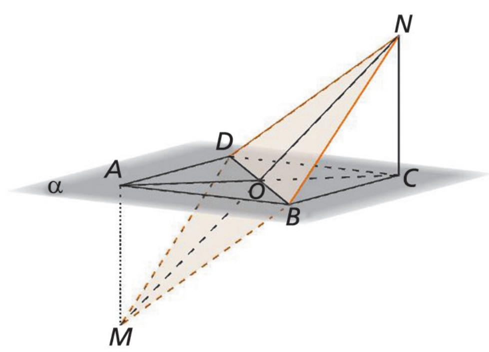


Fig. 4.98

a) Demuestra que $\overline{MN} \perp \overline{BD}$.

b) El cuadrilátero $BNDM$ es un rombo. Fundamenta esta afirmación.

3.1 Si el área del cuadrado *ABCD* es de 2,88 dm^2 y el punto *M* se encuentra a 6,0 cm del plano α, calcula:

a) El valor del área del rombo *BNDM* y la amplitud del ángulo con que corta al plano α.

b) El valor del volumen de la pirámide *BCDN* y su área total.

4. Sea la circunferencia de centro *O* de diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ (figura 4.99), y el triángulo *EOD* rectángulo en *O* tal que el vértice *E* tiene como proyección sobre el plano *ACD* el punto *B*. Demuestra que el $\widehat{BD} = 90^o$.

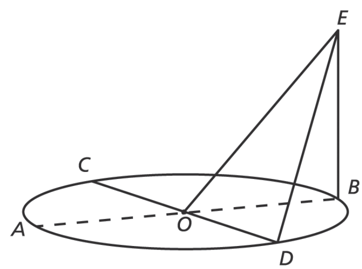


Fig. 4.99

4.1 Si el área del triángulo *EOD* es de 37,5 cm^2 y el diámetro de la circunferencia es de 10 cm, calcula:

a) La distancia del punto *E* al plano de la circunferencia.

b) La longitud de la cuerda $\overline{BD}$.

c) El valor del área total y el volumen de la pirámide *ODBE.*

5. En el vértice *B* de un ángulo recto del trapecio rectángulo *ABCD* se ha trazado la circunferencia base de un cono circular recto (figura 4.100) de radio $\overline{BA}$ = 8,0 cm tangente en *C* a la base mayor del trapecio la cual es igual al diámetro de la circunferencia.

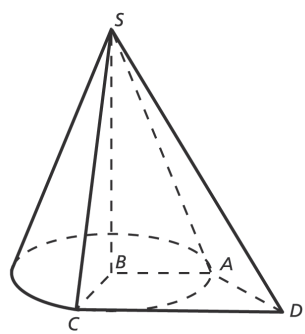


Fig. 4.100

a) Demuestra que el triángulo *SCD* es rectángulo.

b) Calcula el valor del volumen de la pirámide oblicua que tiene como base ese trapecio y su altura coincide con la altura del cono si sus generatrices tienen una inclinación de 60º con la base.

c) Calcula el valor del área del triángulo *SCD*.

d) Calcula la amplitud del ángulo de inclinación de la arista $\overline{SD}$ respecto al plano de la base.

6. Desde un punto *S* exterior al plano α que contiene al rombo *ABCD*, se traza la oblicua $\overline{OS}$ (figura 4.101) siendo *O* la intersección de las diagonales del rombo y D = $proy_{\alpha}S$.

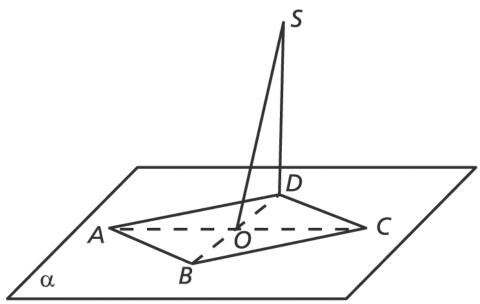


Fig. 4.101

Demuestra que $\overline{OS}$ es mediatriz de $\overline{AC}$.

6.1 Esboza la figura en tu cuaderno de trabajo, traza las oblicuas $\overline{AS}$, $\overline{BS}$, $\overline{CS}$ y calcula el valor del volumen y el área total de la pirámide *ABCDS,* si $\overline{AB}$ = 14 cm y $\sphericalangle SBD = \sphericalangle BCD = 45^{\circ}$.

6.2 Demuestra que $\Delta ABS = \Delta SBC$.

7. El cuadrado *ABCD* está inscrito en una circunferencia de 25,1 cm de longitud; por el punto *O* de intersección de sus diagonales se levanta una perpendicular $\overline{OS}$ de 4,0 cm de longitud al plano que contiene al cuadrado.

a) Haz un esbozo de la figura.

b) Calcula la distancia de *S* a cada vértice del cuadrado.

c) Determina la amplitud del ángulo que forma la oblicua $\overline{SA}$ con el plano que contiene al cuadrado.

8. El lado $\overline{AB}$ del triángulo equilátero *ABC* es el diámetro del círculo de centro *O* en el plano α (figura 4.102) y el vértice *C* tiene como proyección sobre α, el punto *D* interior del círculo.

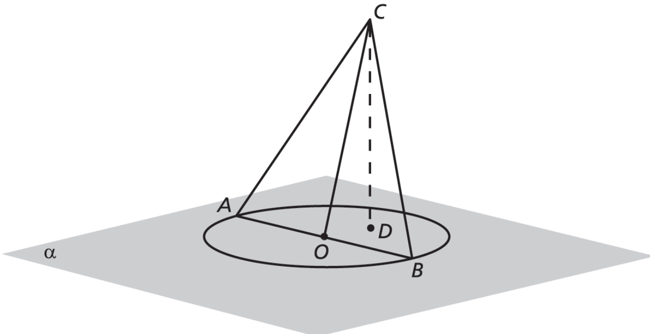


Fig. 4.102

a) Demuestra que el radio que contiene al punto *D* es perpendicular al diámetro $\overline{AB}$.

8.1 Si *D* es el punto medio del radio y el diámetro del círculo mide 8,0 cm:

a) Calcula el valor del volumen y el área total de la pirámide *ABCD*.

b) Calcula la amplitud del ángulo de inclinación del triángulo *ABC* respecto al plano α.

9. Uno de los catetos de un triángulo rectángulo e isósceles está contenido en el plano α y el otro forma con este un ángulo igual a 45°.

a) Demuestra que la proyección de este triángulo en el plano α es un triángulo rectángulo.

b) Calcula la amplitud del ángulo que forma la hipotenusa con el plano α.

10. En la figura 4.103 se muestra el diseño de una pieza maciza que tiene forma de prisma recto *ABCDEFGH*, además; se conoce que sus bases son los rectángulos *ABCD* y *EFGH*.

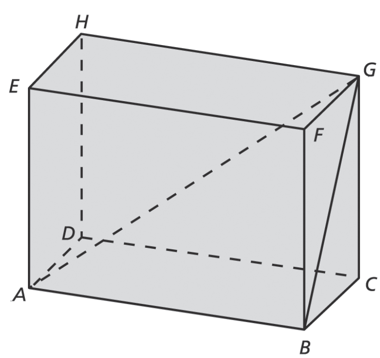


Fig. 4.103

a) De los segmentos de rectas trazados en la figura determina uno que se cruce con $\overline{HD}$.

b) Demuestra que el ΔABG es rectángulo.

c) Si el perímetro de la base $ABCD$ es 12 dm, $\overline{BC} = 2{,}0$ dm y $\tan\sphericalangle GBC = 3$, calcula el valor del volumen del prisma $ABCDEFGH$.

11. La figura 4.104 muestra un cubo tal que la suma de sus aristas es de 48 cm. Desde E y H se trazan las oblicuas al centro de la cara $ABCD$.

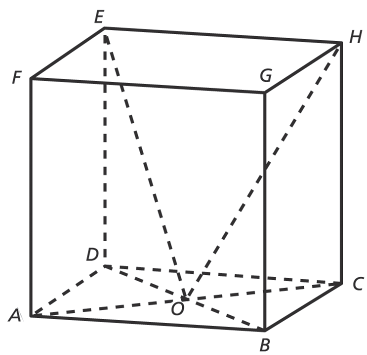


Fig. 4.104

a) Demuestra que $\overline{OE} \perp \overline{AC}$.

b) ¿Es $\overline{OH}$ mediatriz de $\overline{BD}$? Fundamenta tu respuesta.

c) Calcula la amplitud del ángulo formado por las oblicuas trazadas.

d) Calcula el valor del área del triángulo EOH.

12. Desde un punto exterior a un plano se trazan dos oblicuas iguales de 14,1 cm; el ángulo que esas oblicuas forman con el plano es de 45° y sus proyecciones son perpendiculares. Calcula la distancia entre los pies de las oblicuas y la amplitud del ángulo que estas forman.

13. Se tiene un círculo de 4,0 cm de radio, por su centro O se traza una perpendicular al plano del círculo y sobre esta se toma un segmento $\overline{OM} = 8{,}0$ cm. Determina la distancia del punto M a una cuerda de 6,0 cm de longitud.

14. En una pirámide triangular regular, la altura es igual al lado de la base.

a) Determina la amplitud del ángulo formado por la arista lateral y el plano de la base.

b) Calcula el volumen de esa pirámide si el lado de la base mide 12 dm.

15. El prisma recto *ABCDEFGH* (figura 4.105) de altura 16,0 cm tiene como base inferior el trapecio *ABCD* de área 1,32 dm^2. Se conoce, además, que:

- $\overline{AD} = 15{,}0$ cm y $\overline{BC} = 7{,}00$ cm son las bases del trapecio *ABCD*.
- $\overline{CM}$ es una de las alturas del trapecio base,
- $\overline{GD}$ es una diagonal de la cara *CDGH*,
- $\overline{GM}$ es oblicua,
- el $\sphericalangle CDA = 67{,}4°$.

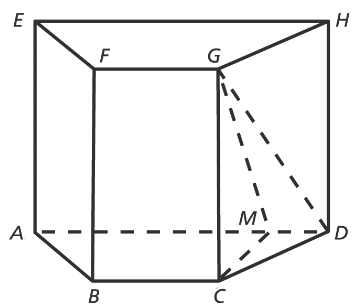


Fig. 4.105

a) Demuestra que el ΔDMG es rectángulo.

b) Calcula:

b.1) el valor del área del ΔDMG y el área lateral del prisma,

b.2) el valor del volumen de la pirámide *CDMG*.

16. Expresa el volumen del tetraedro regular en función de su altura *h*.

17. Determina los valores del área y el volumen de un octaedro regular de 3,0 cm de arista.

18. La mediana de una de las caras de un octaedro regular mide 17,3 m. Calcula el valor del área del octaedro.

19. Representa en un sistema de coordenadas los puntos $(2;1;0)$, $(0;3;4)$, $(2;0;-1)$, $(3;-2;4)$, $(1;2;-3)$ y $(-5;3;-2)$.

20. Esboza en tu cuaderno de trabajo el tetraedro cuyos vértices son los puntos $(0;0;0)$, $(2;0;0)$, $(0;2;0)$ y $(0;0;2)$. ¿Es este tetraedro regular?

Calcula el valor de su volumen. Verifica tu resultado con un asistente matemático.

21. Los puntos $(1;1;0)$, $(5;1;0)$ y $(5;5;8)$ son vértices de un prisma *cuadrangular regular* que tiene una base en el plano xy. Halla los vértices restantes y dibuja el prisma.

22. Comprueba que los puntos $A(1;1;1)$, $B(3;1;1)$, $C(3;4;1)$ y $D(1;4;1)$, tomados en ese orden, son los vértices de un rectángulo.

22.1 Determina la longitud de la altura de la pirámide recta $ABCDE$ cuya base es el rectángulo $ABCD$ si el valor de su volumen $8,0\ u^3$.

23. Comprueba que los puntos $(4;2;4)$, $(10;2;-2)$ y $(2;0;-4)$ son vértices de un triángulo equilátero y calcula el valor de su área.

23.1 Determina las coordenadas de su incentro.

24. Calcula la distancia del punto $(2;3;-4)$ a cada uno de los planos coordenados y a los ejes coordenados.

25. Sean los puntos de coordenadas: $A(4;3;5)$, $B(-3;2;1)$, $C(2;-3;0)$ y $C(0;0;-3)$. Determina las coordenadas de sus proyecciones:

a) al plano xy b) al plano xz c) al plano yz

d) al eje x e) al eje y f) al eje z

26. Un arquitecto diseña un edificio con columnas en 3D. Las coordenadas de las bases de dos columnas son $A(3; 5; 0)$ y $B(7;1;0)$. Además, un muro está definido por los puntos $C(0; 4; 3)$, $D(4;8;3)$ y $E(1;2;3)$.

a) Calcula la distancia entre las columnas A y B.

b) Determina las coordenadas del punto medio entre C y D.

c) Determina si los puntos C, D, E y $F(5;10;3)$ pertenecen al mismo plano.

27. Dos aviones P y Q en el momento en que el radar toma su ubicación sus posiciones eran $P(120;80;10)$ y $Q(90;120;12)$.

a) Calcula la distancia entre los aviones en el momento en que se toman las coordenadas de sus posiciones.

b) Determina las coordenadas del punto medio entre los aviones en ese momento.

c) Verifica si la ruta de P y Q está contenida en el plano $2x-3y+4z=50$.

28. Dos satélites que orbitan la Tierra, se encuentran en las posiciones $S_1(2;-1;4)$ y $S_2(-3;5;7)$ en miles de kilómetros.

a) Calcula la distancia entre los satélites.

b) Determina las coordenadas del punto medio entre los dos satélites para instalar un repetidor (es un dispositivo que recibe, amplifica y transmite señales para facilitar la comunicación a larga distancia).

c) Determina si las posiciones de los satélites S_1, S_2 y la Tierra (origen $(0;0;0)$ y una estrella $E(1;2;-2)$ son coplanares.

29. En una cirugía, un tumor está ubicado en $T(5;-2;8)$ (cm) y un sensor en $M(1;3;4)$.

a) ¿A qué distancia se encuentra el sensor del tumor?

b) Determina las coordenadas del punto medio entre las posiciones T y M para guiar una biopsia.

c) Verifica si los puntos T, M, $N(2;0;6)$ y $P(3;1;5)$ definen un plano quirúrgico.

30. Tres sismos E_1, E_2 y E_3 ocurrieron en la posición $E_1(2;3;-5)$, $E_2(4;-1;-3)$ y $E_3(-2;5;-7)$ (kilómetros de profundidad) respectivamente.

a) Calcula la distancia entre E_1 y E_2.

b) Encuentra el punto medio entre E_3 y un volcán V, ubicado en $V(1;2;-4)$.

c) Determina si los sismos y el volcán están alineados en una misma falla plana.

Autoevaluación

1. En la figura 4.106 se tiene el cuadrado *ABCD* contenido en el plano β. Además, se conoce, que:

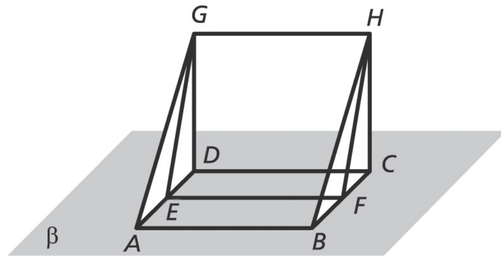


Fig. 4.106

- *E* y *F* son los puntos medios de los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ del cuadrado *ABCD* respectivamente,
- *EFHG* es un cuadrado,
- $G \notin \beta$,
- El $\triangle BCH$ es escaleno.

1.1 Clasifica en tu cuaderno de trabajo las proposiciones siguientes en verdaderas o falsas. Funtamenta las falsas.

a) $\overline{AE}$ es la proyección de la oblicua $\overline{GA}$ en el plano β.

b) $\overline{AB} \parallel \overline{GH}$.

c) $\overline{HF} \perp \overline{BC}$ en el punto F.

d) El ángulo de inclinación de la oblicua $\overline{GF}$ con el plano β es de 45°.

e) Las oblicuas $\overline{GF}$ y $\overline{HE}$ tienen sus proyecciones de igual longitud.

2. En la figura 4.107 se tiene el rombo *ABCD* contenido en el plano γ. Además, se conoce, que:

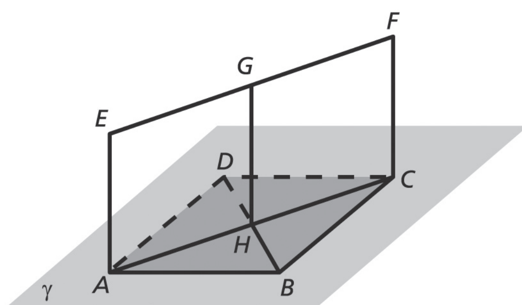


Fig. 4.107

- *H* es el punto donde se intersecan las diagonales ($\overline{AC}$ y $\overline{BD}$) del rombo,
- *ACFE* es un cuadrado,
- $\overline{GH} \parallel \overline{EA}$,
- $\overline{GH} \perp \overline{DB}$ en H,
- $\overline{EF} \not\subset \gamma$.

2.1 Clasifica en tu cuaderno de trabajo las proposiciones siguientes en verdaderas o falsas. Funtamenta las falsas.

a) $\overline{GH}$ es perpendicular al plano γ.

b) $\overline{HB}$ es la proyección de la oblicua $\overline{GB}$ en el plano γ.

c) Las oblicuas $\overline{EH}$ y $\overline{FH}$ son iguales.

d) *G* es punto medio de $\overline{EF}$.

e) $\overline{AC}$ es la proyección de la oblicua $\overline{FA}$ en el plano γ.

3. Dado el prisma recto de base triangular *ABCDEF* (figura 4.108). Justifica en cada caso la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

a) La recta *DA* es paralela al plano *BCE*.

b) Las rectas *DE* y *FC* se cortan.

c) Los puntos *A*, *B* y *F* determinan un plano.

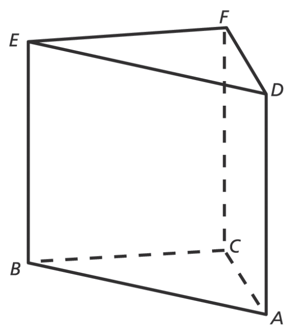


Fig. 4.108

3.1 Escribe en tu cuaderno de trabajo la opción que garantiza la veracidad de las proposiciones siguientes:

a) Con respecto al plano *ACB*, la recta *FC* es:

1) oblicua 2) perpendicular

3) paralela 4) está contenida en *ACB*

b) El plano *EBA* está determinado por

1) las rectas *AE* y *FC* 2) la recta *AE* y el punto *A*

3) la recta *AE* y el punto *B* 4) la recta *AE* y el punto *C*

c) Si la diagonal $\overline{AF}$ mide 10,0 cm y forma con la altura del prisma un ángulo de 30°, entonces la longitud de su proyección: es:

1) $\overline{CA} = 10\sqrt{3}$ cm
2) $\overline{CA} = 5{,}0$ cm
3) $\overline{CA} = 5\sqrt{3}$ cm
4) $\overline{CA} = 20$ cm

4. El prisma recto *ABCDEFGH* tiene su base cuadrada (figura 4.109). La diagonal del prisma $\overline{HB} = 13$ cm y su proyección $\overline{DB} = 12$ cm.

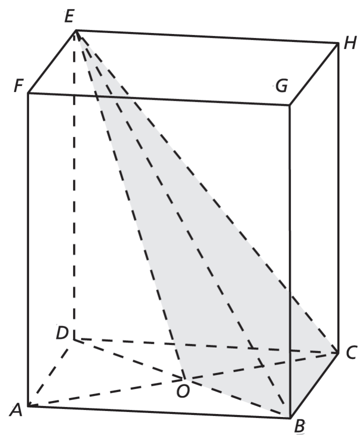


Fig. 4.109

4.1 Escribe en tu cuaderno de trabajo las dimensiones y magnitudes del cuerpo a las que corresponden los valores numéricos siguientes:

a) 5,0 b) $6\sqrt{2}$ c) 72 d) 360 e) $120\sqrt{2}$

Precisa en cada caso la unidad de medida que les corresponde.

4.2 Si *O* es el punto de intercepción de las diagonales de la base ABCD. Demuestra que ΔEOC es un triángulo rectángulo.

4.3 Escribe en tu cuaderno de trabajo los valores que se aproximan a:

a) El área del ΔEOC.

1) 24 cm² 2) 47 cm² 3) 15 cm² 4) $10\sqrt{2}$ cm²

b) El volumen del cuerpo que resulta de perforar el prisma recto *ABCDEFGH* por la pirámide oblicua *OBCH*.

1) 90 cm² 2) 30 cm² 3) 330 cm² 4) 360 cm²

5. En la figura 4.110 se muestra la pirámide oblicua $ABCDF$, cuya base es el paralelogramo $ABCD$. Además, se conoce que:

- $\overline{FD}$ es la altura de la pirámide,
- $\triangle BEF$ es rectángulo en E,
- E es un punto de $\overline{DC}$.

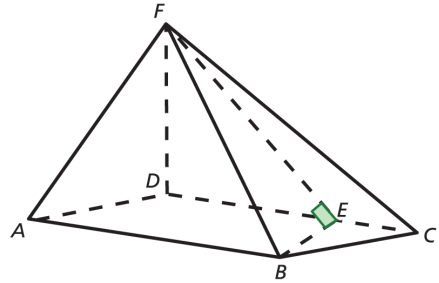


Fig. 4.110

a) De los segmentos trazados, identifica uno que sea paralelo al plano ADF.

b) Demuestra que $\overline{BE}$ es una de las alturas del paralelogramo $ABCD$.

c) Si $\overline{BC} = 5{,}0$ dm, $\overline{BE} = 40$ cm, $\overline{DC} = 9{,}0$ dm y el $\sphericalangle DEF = 45^\circ$. Determina el valor del volumen de la pirámide $ABEDF$.

6. A un cilindro circular recto se le realiza una perforación cónica por el centro de la base de forma tal que el diámetro de la perforación es igual al radio de la base del cilindro.

a) Demuestra que las generatrices del cono son perpendiculares a las cuerdas de la base del cilindro tangentes a la base del cono. Comprueba tus resultados en un asistente matemático.

b) Si el diámetro del cilindro es de 20 cm, las generatrices del cono tienen 1,3 dm de longitud y la razón entre la altura del cilindro y la del cono es de 1,5 dm, calcula el valor del volumen del cuerpo perforado.

7. En el cilindro recto de la figura 4.111 se tiene que $\overline{CD}$, $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$ son diámetros tales que $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ y $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$. Se conoce, además, que A y B son las proyecciones de E y F respectivamente.

a) Prueba que $\Delta EOD = \Delta FDO$.

b) Prueba que los triángulo EOF y EDF son isósceles.

7.1 Si $\overline{FB} = 5{,}0$ dm y $\overline{AB} = 6{,}0$ dm, calcula:

a) El valor volumen de la pirámide $EOFD$.

b) La amplitud del $\sphericalangle EDF$.

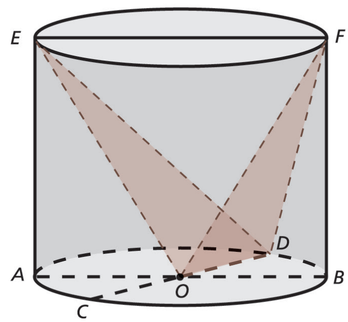


Fig. 4.111

8. En la figura 4.112, la recta PT está contenida en el plano de la base del cono circular recto. $\overline{OS}$ es la altura del cono y la recta PT es tangente en P a la circunferencia de centro O. Si $\overline{SP} = 24$ cm y $\overline{SP}$ forma un ángulo de 60° con el plano de la base.

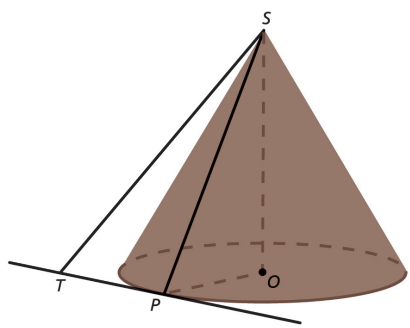


Fig. 4.112

a) Clasifica el ΔTPS según las amplitudes de sus ángulos interiores. Fundamenta.

b) Calcula el valor del área lateral del cono y expresa el resultado en decímetros cuadrados (dm^2).

c) Calcula el valor del volumen del cono.

9. La figura 4.113 muestra una pieza de cristal maciza en forma de cilindro circular recto cuyo diámetro es $\overline{AC} = 4{,}0$ cm. Se conoce, además que el ΔDBC representa una lámina de bronce que se inscribe en el cilindro de forma tal que $\overline{AD}$ es la altura del cilindro y B pertenece a la circunferencia de la base inferior.

a) Prueba que la lámina de bronce representa un triángulo rectángulo.

b) Si el área lateral de la pieza es $A_L = 37{,}0$ dm^2. Calcula el valor del volumen del cilindro.

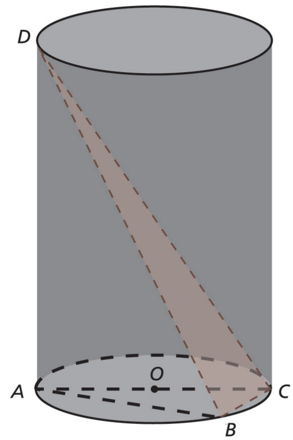


Fig. 4.113

10. En la figura 4.114 se muestra una pieza maciza en forma de semiesfera de diámetro $\overline{CD}$ y centro O, de la cual se quiere obtener un cono circular recto de vértice S, de modo que la base del cono coincida con la base de la semiesfera.

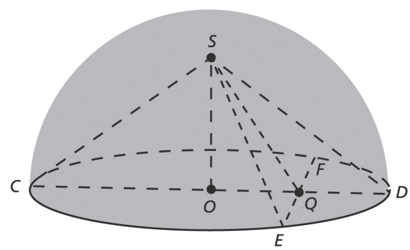


Fig. 4.114

- El vértice S es un punto interior de la semiesfera,
- El diámetro $\overline{CD}$ corta a la cuerda $\overline{EF}$ de la base del cono en su punto medio Q.

a) Prueba que el $\sphericalangle QSE$ y $\sphericalangle SEQ$ son complementarios.

b) Si el área de la semiesfera es de 192π dm^2 y la sen$\sphericalangle OSC = \frac{3}{5}$, calcula el valor del área total del cono que se obtendrá.

11. En la figura 4.115 se muestra una pieza maciza de metal en forma de cubo $ABCDEFGH$, de la que ha sido extraída la cuña $MCNOPQ$ tal que:

- O y Q son los puntos donde se intersecan las diagonales de las bases $ABCD$ y $EFGH$ del cubo,

- M y N son los puntos medios de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{DC}$ respectivamente,
- $\overline{PN}$ es altura del cubo,
- El volumen del cubo es de 64 cm^3.
  a) Calcula el valor del volumen de la cuña.
  b) ¿Qué parte del volumen del cubo representa el volumen de la cuña? Fundamenta tu respuesta.

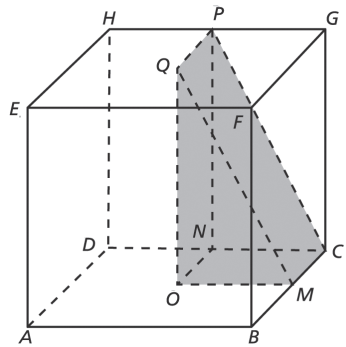


Fig. 4.115

12. Se conoce que un cubo tiene cuatro de sus vértices de la forma: $A(-a;-a;-a)$, $B(a;-a;-a)$, $C(-a;a;-a)$ y $D(a;a;a)$. Halla los demás vértices.

13. Dados los puntos de coordenadas $A(1;-2;-3)$, $B(2;-3;0)$, $C(3;1;-9)$ y $D(-1;1;-12)$. Calcula la distancia entre:

a) A y C b) B y D c) C y D

14. Calcula la distancia del origen de coordenadas O a los puntos:

$A(4;-2;-4)$, $B(-4;12;6)$, $C(12;-4;3)$ y $D(12;16;-15)$.

15. Demuestra que es isósceles el triángulo cuyos vértices son:

$P(3;-1;2)$, $Q(0;-4;2)$ y $R(-3;2;1)$.

16. Demuestra que es rectángulo el triángulo cuyos vértices son:

$M(3;-1;6)$, $N(-1;7;-2)$ y $P(1;-3;2)$.

17. Dados los vértices del triángulo ABC de coordenadas:

$A(3;2;-5)$, $B(1;-4;3)$ y $C(-3;0;1)$.

a) Determina las coordenadas de los puntos medios de sus lados.

b) Calcula la longitud de las medianas relativas a cada lado del triángulo.

18. Clasifica las proposiciones siguientes en tu cuaderno de trabajo, en verdaderas o falsas. Justifica las falsas.

a) La recta r de ecuación $r: 3x-2y-1=0$ y el punto $P(3;2;0)$, determinan un único plano.

b) Las rectas de ecuaciones $s: 2x-y-2=0$ y $t: x-\frac{1}{2}y-1=0$, determinan un único plano.

18.1 Con ayuda del GeoGebra, representa el plano α, determinado por los puntos de coordenadas $A(0;2;0)$, $B(0;-1;0)$ y $C(0;0;3)$.

18.2 Traza en α:

a) Una recta que tenga dos puntos comunes con el plano.

b) Una recta perpendicular.

c) Una recta oblicua.

d) Un plano paralelo.

e) Un plano perpendicular.

18.3 Determina la distancia entre los dos planos paralelos.

19. En el GeoGebra, con la VISTA 3D (activa solo las opciones: ejes y cuadrículas).

a) Introduce en la entrada la ecuación $x=0$. ¿Qué se ha representado? Determina las coordendas de tres puntos que pertenezcan al plano yz.

b) Traza una recta perpendicular al eje de las abscisas en el punto $A(3;0;0)$. ¿Cuál es la relación entre la recta y el plano yz? Determina la distancia que los separa.

20. Argumenta la afirmación siguiente:

"La geometría del espacio es esencial tanto para el avance científico como para resolver problemas diarios; desde explorar el cosmos hasta organizar una mudanza, sus principios permiten innovar en campos tan diversos como la medicina, la ingeniería o el arte. Demuestra cómo conceptos matemáticos abstractos se convierten en soluciones tangibles para la vida real."

ANEXOS

Respuestas a los ejercicios

Capítulo 1

Epígrafe 1.1 Inducción completda

1. 1.1 b) 1.2 b)

Epígrafe 1.2 Sucesiones numéricas

2.

a) $\{-1; 2; 5; 8; 11;\ldots\}$

b) $\{-2; -1; 2; 7; 14;\ldots\}$

c) $\left\{0; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3};\ldots\right\}$

d) $\left\{-1; -\frac{3}{2}; -\frac{9}{4}; -\frac{27}{8}, -\frac{81}{16};\ldots\right\}$

e) $\{3; 7; 11; 15; 19;\ldots\}$

f) $\{1; 3; 7; 15; 31;\ldots\}$

g) $\{3; 2; 0; -4; -12;\ldots\}$

h) $\left\{3; \frac{1}{3}; 3; \frac{1}{3}; 3;\ldots\right\}$

i) $\left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 1; \frac{5}{3}; \frac{17}{7};\ldots\right\}$

3. a) $a_n = 3n+1$; $(n \geq 0)$

b) $a_n = \frac{2n-1}{n^2}$; $(n \geq 1)$

c) $a_n = (-1)^n \cdot 5^{n+1}$; $(n \geq 0)$

d) $a_n = 4-2(-1)^n$; $(n \geq 0)$

3.1 a) $a_{12} = 34$ b) $a_{12} = \frac{23}{144}$ c) $a_{12} = -244\ 140\ 625$ d) $a_{12} = 6$

4. a) $\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8};\frac{1}{16}\right\}$ y $S_6=\frac{63}{64}$ b) $\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{6};\frac{1}{12};\frac{1}{20}\right\}$ y $S_{10}=\frac{10}{11}$

5. b) $\left(\frac{1}{16};\frac{1}{4}\right)$

6. b) $(40;41;42)$

7. a) 64

8. c) $\frac{x^8}{256}$

9. $\{3\,500;\,3\,570;\,3\,641;\,3\,714;\,3\,789;\ldots\}$

10. a) $P_0=5\,000$ y $P_n=1{,}08\cdot P_{n-1}-300$ b) 6 898

11. a) $\{5;8;11;14;17;\ldots\}$ y $a_{15}=47$; $S_{15}=390$

b) $\{2;0;-2;-4;-6;\ldots\}$ y $a_{27}=-50$; $S_{27}=-673$

c) $\{3;7;11;15;19;\ldots\}$ y $a_{12}=47$; $S_{12}=300$

d) $\left\{1;\frac{7}{4};\frac{5}{2};\frac{13}{4};4;\ldots\right\}$ y $a_{41}=31$; $S_{41}=656$

12. Para todo $n\in\mathbb{N}:n\geq 1$

a) $a_{78}=314$ y $S_{23}=1\,150$ b) $a_{78}=-377$ y $S_{23}=-1\,081$

c) $a_{78}=139$ y $S_{23}=161$ d) $a_{78}=-\frac{227}{4}$ y $S_{23}=-166{,}75$

13. a) $a_{100}=646$ b) $S_{100}=29950$

14. Para todo $n\in\mathbb{N}:n\geq 1$ a) 5 200 b) 11 400 c) 1 000 477,5 d) 12 775

15. Para todo $n\in\mathbb{N}:n\geq 1$

a) $\{2;-4;8;-16;32,\ldots\}$ b) $\left\{-1;\frac{1}{3};-\frac{1}{9};\frac{1}{27};-\frac{1}{81};\ldots\right\}$

c) $\left\{3;-\frac{3}{4};\frac{3}{16};-\frac{3}{64};\frac{3}{256};\ldots\right\}$ d) $\left\{-15;-3;-\frac{3}{5};-\frac{3}{25};-\frac{3}{125};\ldots\right\}$

17. Para todo $n \in \mathbb{N} : n \geq 1$

a) $a_n = 3 \cdot 10^{n-1}$ b) $a_n = 2(-5)^{n-1}$ c) $a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ d) $a_n = 3^{\left(\frac{2n+1}{3}\right)}$

18. Para todo $n \in \mathbb{N} : n \geq 1$

a) 2 186 b) $\frac{2\,047}{256}$ c) 5 462 d) 49 104

19. a) $\frac{2}{3}$ b) El 20 de septiembre

Ejercicios del capítulo 1

1. a) Verdadera: se cumple para todo número $n \in \mathbb{N}$.

b) Verdadera: se cumple para todo número natural $n \geq 5$.

c) Falsa: para $n = 0$ se cumple, para $n = 1$ se obtiene 80 que no es divisible por 15.

d) Verdadera

e) Falsa: para $n = 2$ se tiene que $9 > 8$, contradice la desigualdad.

f) Verdadera

5. Para todo n natural se tiene que:

a) $\left\{0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}; 2\right\}$ b) $\left\{\frac{2}{3}; 2; 6; 18; 54; 162; 486\right\}$

c) $\{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14\}$ d) $\left\{1; \frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \frac{1}{7}; \frac{1}{9}; \frac{1}{11}; \frac{1}{13}\right\}$

e) $\{0; 2; 10; 24; 44; 70; 102\}$ f) $\{0; 0; 1; 3; 4; 6; 9\}$

6. a) 125 tabacos b) $a_n = 10n + 95 : n \in \mathbb{N} : n \geq 1$

c) $S(n) = 5n(n+20)$, $n \in \mathbb{N} : n \geq 1$ $S(6) = 780$ tabacos

10. a) Es una sucesión aritmética b) $a_n = 3n$ con $n \in \mathbb{N} : n \geq 1$

c) $a_{100} = 300$

d) 267 e) $S(n) = \dfrac{3n(n+1)}{2}$ f) $S(19) = 570$ b) 135 450

11. a) 520 d) 1 210

12. a) 302 b) es el quincuagésimo término (50) d) la décima posición

13. a) 152

14. b) 77 d) 2 900 e) 207 f) 4 340

15. a) 40 b) 31 d) 1 425

Autoevaluación

1. Para todo $n \in \mathbb{N} : n \geq 1$

a) $a_n = 11 - 3n$ b) $(a_n) = (2n+2)$ c) $\{a_n\} = \begin{cases} 5 & si \quad n = 1 \\ 3n+5 & si \quad n \geq 2 \end{cases}$

d) $a_n = (2n-2)$ e) $(a_n) = (8-3n)$ f) $\{a_n\} = \{5n-4\}$

g) $a_n = 7 - 5n$ h) $(a_n) = (n+49)$ i) $\{a_n\} = \left\{\dfrac{1}{2n+1}\right\}$

j) $a_n = \dfrac{n+1}{2n+3}$ k) $(a_n) = \left(\dfrac{n}{2n-1}\right)$ l) $\{a_n\} = \left\{\dfrac{13}{2n+3}\right\}$

m) $a_n = 2n^2 - n + 4$ n) $(a_n) = (2n^2 + 3n + 1)$ ñ) $\{a_n\} = \{3n^2 - 2\}$

1.1 b) $S(20) = 460$ c) $S(20) = 727$ f) $S(20) = 970$

6. **6.1** a) $3n - 2$ **6.2** d) 58

7. b) 100 c) 20

8. b) 32 c) 8

9. b) 354

Capítulo 2

Epígrafe 2.1 Procesamiento estadístico de datos

1. a) Verdadera. La estadística se ocupa del análisis, interpretación, presentación y organización de datos. Dentro de este campo, se estudian los fenómenos aleatorios y no deterministas, es decir, aquellos cuyos resultados no pueden predecirse con certeza y están sujetos a variabilidad. La estadística se emplea para identificar patrones y regularidades dentro de estos fenómenos.

   b) Falsa. Aunque la estadística descriptiva se ocupa de caracterizar conjuntos de datos, hacer generalizaciones sobre una población basándose en una muestra es parte de la estadística inferencial y aunque la descriptiva proporciona información esencial y puede influir en la *toma de decisiones*, la decisión en sí y las inferencias derivadas se basan en técnicas inferenciales.

   c) Verdadera. En estadística, el término "población" se refiere a cualquier conjunto completo de elementos que se desea estudiar, y estos elementos pueden ser individuos, objetos, sucesos o procesos.

   d) Verdadera. Una variable estadística es una característica, atributo o propiedad de un fenómeno o proceso que puede ser medido o cuantificado. Son fundamentales en la investigación estadística porque permiten la recolección, análisis e interpretación de datos para comprender y describir fenómenos o procesos.

   e) Verdadera. Por ser el elemento básico de la población sobre el cual se recolectan los datos.

f) Falsa. Las variables cualitativas se refieren a categorías o cualidades no numéricas, como el color de los ojos o el tipo de vivienda. Las variables cuantitativas son las que están dadas por mediciones y observaciones numéricas.

g) Verdadera. Esta es una clasificación estándar, que abarca todas las posibles formas de medición, de las variables estadísticas.

h) Verdadera. Es la que categoriza los datos sin ningún orden implícito, como por ejemplo, el género o el estado civil.

i) Verdadera. Media, moda y mediana son medidas de tendencia central, también consideradas medidas de posición ya que indican la ubicación central de los datos.

j) Falsa. Esta afirmación describe la mediana, no la media. La media es el promedio aritmético y no necesariamente divide a los datos en dos partes iguales.

k) Verdadera. La moda es la medida que indica la característica o valor más frecuente en un conjunto de datos y puede ser utilizada tanto en datos cualitativos como cuantitativos.

l) Falsa. La mediana siempre existe y es única para un conjunto de datos ordenados, dividiendo los datos en dos partes iguales.

m) Verdadera. Es el valor que divide el conjunto de datos en dos partes iguales, por lo que es equivalente a la mediana.

n) Verdadera. Los estadígrafos de dispersión, como la desviación estándar y la varianza, indican la variabilidad o dispersión de los datos en relación con un valor central.

ñ) Verdadera. Todas indican cuán dispersos están los datos en un conjunto.

o) Falsa. La varianza mide la variabilidad de una muestra, pero siempre toma valores no negativos ya que es el promedio de los cuadrados de las diferencias respecto a la media.

p) Verdadera. La desviación estándar mide la cantidad de variación o dispersión de un conjunto de datos respecto a la media y es una de las medidas más utilizadas en estadística debido a su interpretación directa y utilidad en análisis posteriores.

3.

	Variable	Escala	Población
a)	Cantidad de botellas que se envasan por día (cuantitativa discreta)	De razón	Todas las botellas de refresco que se envasan (en un turno de trabajo, día, semana o mes, etc.)
b)	Índice de mortalidad infantil por cada mil nacidos vivos el año pasado (cuantitativa continua)	De razón	Cantidad de niños nacidos vivos el año pasado
c)	Tipos de defectos detectados por día en la producción de accesorios de computadoras DGM (cualitativa)	Nominal	Todos los accesorios producidos para las computadoras DGM
d)	Motivación que sienten los estudiantes por el estudio de la matemática (cualitativa)	Ordinal	Todos los estudiantes de la escuela, grado o grupo.
e)	Respuesta al cliente por el pedido que se hace por teléfono en las oficinas de Transtur S.A. (cualitativa)	Nominal	Todos los clientes que solicitan respuesta telefónica en las oficinas de Transtur S.A.
f)	Cantidad de hojas desechadas por día en una imprenta (cuantitativa discreta).	De razón	Cantidad de hojas que se utilizan en un día en la imprenta.
g)	Cantidad de pacientes infantiles que asisten a una consulta médica (cuantitativa discreta).	De razón	Total de pacientes infantiles que asisten a una consulta médica
h)	Nivel de aceptación de los clientes por el servicio de mantenimiento que reciben a los televisores (cualitativa)	Ordinal	Todos los clientes que asistieron al taller de reparación de televisores

	Variable	Escala	Población
i)	Resultados por categorías del test de conocimientos aplicado a los aspirantes al cargo de inspector (cualitativa)	Ordinal	Total de aspirantes al cargo de inspector en transporte.
j)	Cantidad de estudiantes que optan por carreras pedagógicas en un preuniversitario (cuantitativa discreta)	De razón	Total de estudiantes del preuniversitario

4. a) Falso. Si triplicamos la frecuencia de cada dato, como la media es un cociente, en este caso aumentaría solamente el numerador. La media también se triplica.

b) Falso. Si a cada una de las frecuencias de los intervalos de clase de una tabla se le agregan dos datos, la clase modal se mantiene (no se altera) pues a todos los intervalos se le agregó la misma cantidad y al aplicar la fórmula está en sí depende de los datos de la clase modal por tanto no varía la moda.

c) Verdadero. La mediana es el valor que divide los datos en dos partes iguales. Disminuir la misma cantidad en todas las frecuencias no afecta la posición de la mediana, ya que la distribución relativa de los datos no cambia.

d) Verdadero. Si cambia la media pues se incrementa la cantidad de observaciones, aunque la marca de clase permanece igual.

e) Falso. La desviación típica se mantiene igual ya que la diferencia $(x_i - \overline{x})$ se mantiene constante aunque se adicionen tres a cada dato.

f) Falso. Pues el hecho de multiplicar por 1,10 no significa que aumentó en 10 pesos el salario. Por ejemplo, los trabajadores que ganan 500 pesos se les incrementan en 50 pesos.

5.2 a) El estudio de las características de las razas porcinas que mejor responden a las necesidades del mercado actual en el territorio en términos de:

Preferencias de los consumidores.

Adaptación a las condiciones locales.

Rentabilidad económica.

Potencial de comercialización.

b) Evaluar las características de las razas que mejor responden a las necesidades del mercado actual en el territorio como calidad de carne, contenido graso, etc. (municipal, provincial, nacional o internacional) en el que pretenden insertar a la empresa con la finalidad de presupuestar su desarrollo acorde con las características que requieren las razas seleccionadas.

c) Características de las razas porcinas, es cualitativa

Variable	Tipo	Escala
Raza porcina	Cualitativa	Nominal
Tasa de crecimiento	Cuantitativa continua	De razón
Prolificidad (lechones-partos)	Cuantitativa discreta	De razón
Calidad de la carne	Cualitativa	Ordinal
Resistencia a enfermedades	Cualitativa	Ordinal
Adaptación climática	Cualitativa	Ordinal
Costo de alimentación	Cuantitativa continua	De razón
Demanda del mercado	Cualitativo	Ordinal
Precio de venta	Cuantitativo continua	De razón

d) Corresponde a una escala nominal

Nominal: razas (las que más abundan en el territorio).

Ordinal: calidad de carne (de primera, de segunda, de tercera), resistencia (baja, media, alta).

Razón: peso (masa) al sacrificio, costo de producción, precio de venta.

5.4 Dado que la escala es nominal, la codificación se realiza en correspondencia con las razas que fueron investigadas.

6. a)

Indicadores pertinentes			
N	Válido	94	Son estos los indicadores porque se está en presencia de una variable cuantitativa discreta en escala de intervalo.
Media		1,18	
Desviación estándar		0,927	
Varianza		0,859	
Mínimo		0	
Máximo		4	
Percentiles	25	0	
	50 (mediana)	1	
	75	2	

b) Como es una variable cuantitativa discreta, la media (en este caso 1,18) es el indicador o estadístico que caracteriza el comportamiento de este tipo de variable estadística. La media en este ejemplo significa que el promedio de la cantidad de niñas y niños que cumplen 5 años antes de finalizar el año es aproximadamente de 1 por cuadra. En el caso de la mediana, para este ejemplo significaría que en el 50 % de las cuadras la cantidad de niñas y niños que cumplen 5 años antes de finalizar el año es menor o igual a 1. En el caso de la varianza y la desviación típica (o estándar), en el ejemplo, los valores hallados de estas medidas de dispersión son un tanto menor, lo que indica que la distribución es homogénea a la media, es decir, es poco dispersa.

7. a)

Indicadores pertinentes		
N	Válido	100
Moda		Satisfecho
Percentiles	25	2
	50 (mediana)	3
	75	3

b) Puede elaborarse el gráfico de barras (figura R1) para comparar en estado de opinión y el circular (figura R2) para observar cómo está distribuido el estado de opinión del todo.

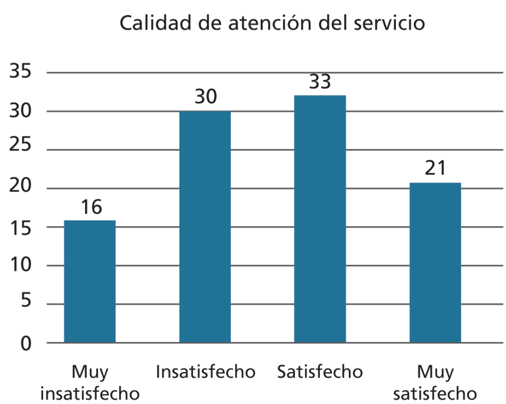


Fig. R1

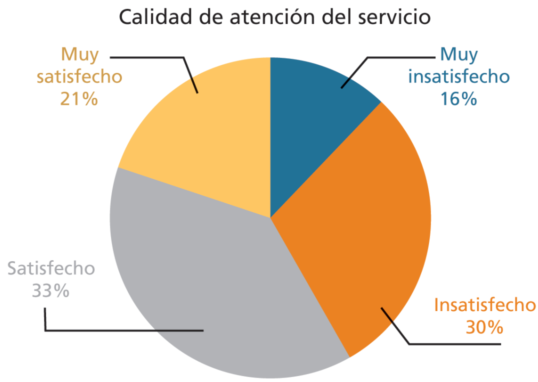


Fig. R2

c) Como es una variable cualitativa ordinal o de rango, la mediana (en este caso es Satisfecho) es el indicador o estadístico que caracteriza el comportamiento de este tipo de variable estadística. La mediana en este ejemplo significa que el 50 % de estos clientes considera sentirse satisfecho o más que eso con relación a la calidad de atención del servicio.

8. a)

Variable: cantidad de almuerzos vendidos por día en el restaurante El Cochinito, en una muestra de 50 días			
Puntajes	**Frecuencia**	**Porcentaje**	**Porcentaje acumulado**
21	1	2,0	2,0
23	1	2,0	4,0
29	1	2,0	6,0
31	1	2,0	8,0
32	1	2,0	10,0
35	1	2,0	12,0
37	2	4,0	16,0
39	1	2,0	18,0

Variable: cantidad de almuerzos vendidos por día en el restaurante El Cochinito, en una muestra de 50 días			
Puntajes	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
43	1	2,0	20,0
44	1	2,0	22,0
47	2	4,0	26,0
49	1	2,0	28,0
51	1	2,0	30,0
53	2	4,0	34,0
54	1	2,0	36,0
55	1	2,0	38,0
56	1	2,0	40,0
57	3	6,0	46,0
58	2	4,0	50,0
63	1	2,0	52,0
67	1	2,0	54,0
68	1	2,0	56,0
69	1	2,0	58,0
72	2	4,0	62,0
73	1	2,0	64,0
74	1	2,0	66,0
75	1	2,0	68,0
80	3	6,0	74,0
81	5	10,0	84,0
82	2	4,0	88,0
83	1	2,0	90,0
85	2	4,0	94,0
92	1	2,0	96,0
96	1	2,0	98,0

Variable: cantidad de almuerzos vendidos por día en el restaurante El Cochinito, en una muestra de 50 días			
Puntajes	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
97	1	2,0	100,0
Total	**50**	**100**	

Intervalos de clase	Marca de clase	Frec. Absoluta	Frec. Relativa	Frec. Absoluta Acum.	Frec. Relativa Acum.
[21; 31)	26	3	0,06	3	0,06
[31; 41)	36	6	0,12	9	0,18
[41; 51)	46	5	0,10	14	0,28
[51; 61)	56	11	0,22	25	0,50
[61; 71)	66	4	0,08	29	0,58
[71; 81)	76	8	0,16	37	0,74
[81; 91)	86	10	0,20	47	0,94
[91;101)	96	3	0,06	50	1,00
TOTAL		50	1,00		

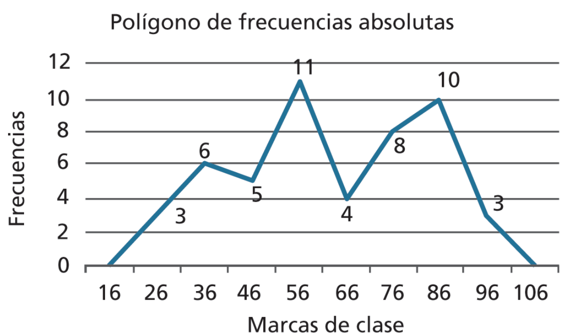


Fig. R3

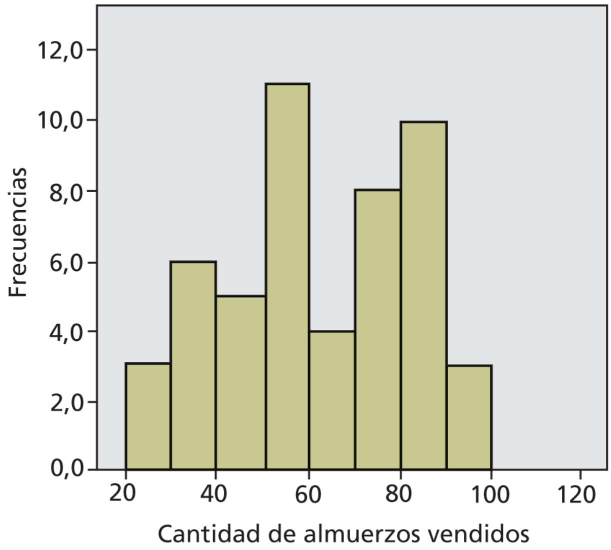


Fig. R4

b)

Indicadores pertinentes		
N	Válido	50
Media		62,06
Mediana (segundo cuartil)		60,50
Desviación estándar		20,002
Varianza		400,098
Mínimo		21
Máximo		97
Percentil 25 (primer cuartil)		47
Percentil 75 (tercer cuartil)		81

Son estos los indicadores porque se está en presencia de una variable cuantitativa discreta en escala de razón.

Fig. R5

c) Como es una variable cuantitativa discreta, la media (en este caso 62,06) es el indicador o estadístico que caracteriza el comportamiento de este tipo de variable estadística. La media en este ejemplo significa que el promedio de la cantidad de almuerzos vendidos en estos 50 días es de 62 aproximadamente. En el caso de la mediana, para este ejemplo, significaría que el 50 % de estos días tiene una cantidad de almuerzos vendidos mayor o igual a 61 aproximadamente. En el caso de la varianza y la desviación típica (o estándar) muestran la variabilidad de la distribución indicando si los diferentes puntajes de la variable que se estudia están muy alejados de la media. En el ejemplo, los valores hallados de estas medidas de dispersión son un tanto mayor, lo que indica que la distribución es poco homogénea a la media, es decir, es bastante dispersa.

Recomendaciones: investigar los factores que causan tanta variabilidad (días de semana contra fin de semana, clima, eventos especiales) para estabilizar las ventas, especialmente para evitar días con muy bajas ventas o nulas.

9. a) No es tan homogéneo, pues el valor de su desviación estándar no es pequeño
($S \approx 13{,}21$ ya que su varianza es $S^2 = 174{,}49$).

b) No, pues el valor de la mediana para estos datos agrupados en intervalos de clase es de 46,50.

c) Si, pues el intervalo $(41{,}5;\ 51{,}5]$ es la clase modal.

Epígrafe 2.2 Probabilidades

1. $\frac{1}{6}$ 2. $\frac{1}{3}$ 3. Imposible 4. 0,6 5. $\frac{3}{28}$

6. 0,8 7. $\frac{1}{9}$; $\frac{4}{9}$ 8. $\frac{1}{6}$ 9. $\frac{5}{12}$ 10. $\frac{1}{12}$

11. $\frac{1}{6}$ 12. a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{3}$ 13. 0

14. Obtener 10 puntos porque la probabilidad de obtener una suma de 10 puntos es $\frac{27}{216}$ mientras que la suma de 9 puntos es $\frac{25}{216}$.

15. a) 12 % b) 30 % c) 17 %

16. a) 0,95 b) Probabilidad de falso positivo: $0{,}05 \cdot 0{,}98 = 0{,}049$

17. a) 0,3 b) $0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}49$ 18. a) $\bar{x} = 30{,}2\,\text{cm}$ b) $\frac{20}{50} = 40\ \%$.

2.3 Combinatoria. Principios básicos de la teoría combinatoria

1. 180 2. 15 3. 9 4. 25 y 20

5. 153 6. 12 7. 147 8. 30

9. 1 080 10. 12 11. 24

12. a) 36 b) 9 c) 27 d) 12 e) 16 13. 49 y 42

14. 125 y 75 15. 450 16. 200 17. 9 000

18. 5 832 **19.** 738 **20.** 103 920 **21.** 1 024

22. 768 **23.** 62

24. 87 ; 1 871 (sin incluirlos); b – a + 1 (incluyendo los extremos)

25. a) 5 b) 21 c) $n + 1$ **26.** 15 **27.** 8

28. 30 **29.** a) 50 % b) 10 %

30. La cantidad de muchachas que no practican deportes ni tienen buenas notas es negativa (–2), lo cual es imposible.

31. 10 % **32.** a) 2 b) 9 c) 8 d) 25 %

Variación y combinación

33. Son 30 variaciones diferentes: AB; AC; AD; AE; AF; BA; BC; BD; BE; BF; CA; CB; CD; CE; CF; DA; DB; DC; DE; DF; EA; EB; EC; ED; EF; FA; FB; FC; FD; FE

34. Son 24 variaciones diferentes: 123, 124, 132, 134, 142, 143, 213, 214, 231, 234, 241, 243, 312, 314, 321, 324, 341, 342, 412, 413, 421, 423, 431, 432.

35. 2 520 **36.** $V_4^7 = 840$ **37.** $V_2^{30} = 870$ **38.** $P_8 = 40\,320$ **39.** $V_2^6 = 30$

40. $V_3^5 = 60$ **41.** $V_3^5 = 60$; $V_2^4 = 12$ **42.** $V_2^5 = 20$ **43.** $V_1^6 + V_2^6 + V_3^6 = 156$

44. $P_4 = 24$; $P_3 = 12$

45. Son 6 permutaciones: (azul rojo blanco) (azul blanco rojo) (rojo azul blanco) (rojo blanco azul) (blanco rojo azul) (blanco azul rojo).

46. $P_4 = 24$ (AMOR; AMRO; AOMR; AORM; ARMO; AROM; MAOR; MARO; MOAR; MORA; MRAO; MROA; OAMR; OARM; OMAR; OMRA; ORAM; ORMA; RAMO; RAOM; ROMA; ROAM; RMAO; RMOA).

47. $P_9 = 362\,880$; $P_7 = 5\,040$ **48.** $P_6 = 720 \cdot 6! - 2 \cdot 5! = 480$ **49.** $P_4 = 24$

50. $\frac{1}{2} \cdot P_7 = 2\,520$ **51.** ABC; ABD; ACD; ADE; BCD; CDE **52.** $C_4^8 = 70$

53. $C_2^{20} = 190 \cdot C_3^{20} = 1\,140$ **54.** $C_3^{20} = 1140$ **55.** $C_2^{12} - C_2^4 + 1 = 61$

56. $C_2^n = \frac{n(n-3)}{2}$ **57.** $8 \cdot C_2^6 = 120$ **58.** $45 \cdot C_{20}^{60}$ **59.** $C_{12}^{17} - C_{10}^{15} = 3\,185$

60. a) 3 b) 116 **61.** $C_6^{10} \cdot \left(C_6^{10} - 1\right)\left(C_6^{10} - 2\right) = 9\,129\,120$ **62.** 10

63. $C_3^6 = 10$ **64.** 243; 768 **65.** $P_4 = 24$

66. a) $P_9 = 362\,880$ b) $2 \cdot P_4 \cdot P_5 = 5\,760$ c) $P_4 \cdot P_6 = 17\,280$ d) $P_4 \cdot P_5 = 2\,880$

67. $C_8^{10} = 45$; $C_{10}^{10} + C_9^{10} + C_8^{10} = 56$ **68.** $C_2^4 \cdot C_4^7 + C_3^4 \cdot C_3^7 + C_4^4 \cdot C_2^7 = 371$

69. $\binom{20}{3} \cdot \binom{20}{2} \cdot \binom{20}{1}$ **70.** $\frac{2 \cdot P_1 \cdot P_2}{P_4} = \frac{1}{3}$ **71.** $\frac{2}{C_2^5} = \frac{1}{5}$ **72.** 0,4

73. No. Tienen aproximadamente 44.4% de posibilidades.

74. $\frac{V_4^6}{1296} = \frac{5}{18}$

75. a) $\frac{C_2^4}{C_2^{12}} = \frac{1}{11}$ b) $\frac{C_2^8}{C_2^{12}} = \frac{14}{33}$ c) $\frac{C_1^8 \cdot C_1^4}{C_2^{12}} = \frac{16}{33}$ d) $\frac{10}{11}$ **76.** $\frac{7!}{7^7} \approx 0{,}006$

77. a) 66 b) $P_5 P_7$ c) 22,7 % **78.** a) 12 b) 60 % c) 30 %, 40 %, 60 %

79. **79.1** a) $20! \cdot 10!$ b) $\binom{20}{3} \cdot 10$ c) $30 \cdot 29 \cdot 28$ 79.2 25%

80. a) 1,5 % b) 92,7% **81.** a) 0,25 b) 10

82. a) $\binom{6}{3} \cdot V_3^{27} \cdot V_3^{10} = 252\,720\,000$ b) $\frac{1}{252\,720\,000}$

Epígrafe 2.4 Teorema del binomio

1. a) $m^6+6m^5n+15m^4n^2+20m^3n^3+15m^2n^4+6mn^5+n^6$

b) $a^4+12a^3+54a^2+108a+81$

c) $a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$

d) $h^3-\frac{3}{2}h^2+\frac{3}{4}h-\frac{1}{8}$

2. a) $\binom{11}{8}=165$; b) $\binom{5}{2}\cdot 2^2=40$

3. a) $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$

b) $16x^4+160x^3y+600x^2y^2+1\,000xy^3+625y^4$

c) $4+8\sqrt{2}a+12a^2+4\sqrt{2}a^3+a^4$

d) $\frac{1}{64}u^{12}-\frac{3}{64}u^{10}v+\frac{15}{256}u^8v^2-\frac{5}{128}u^6v^3+\frac{15}{1024}u^4v^4-\frac{3}{1024}u^2v^5+\frac{1}{4\,096}v^6$

4. a) $-3\,003x^{10}y^5$ b) $-960a^3x^7$ c) $2\,268x^6y^3$ d) $320\,320a^6b^9$

5. a) $\binom{14}{7}$ b) $\binom{9}{6}\cdot\frac{27}{64}$ c) $\binom{7}{5}\cdot 32$ d) $\binom{3n}{n}$

6. a) $2x^4+12x^2+2$ b) $24a+128a^3$

7. a) 32 b) 8

Ejercicios del capítulo

1. a)

	Sexo			Moda
		Frecuencia	Porcentaje	
Válido	Femenino	23	41,8	Masculino
	Masculino	32	58,2	
	Total	**55**	**100,0**	

Color de la piel				Moda
		Frecuencia	Porcentaje	
Válido	Blanco	23	41,8	Blanco
	Mestizo	22	40,0	
	Negro	10	18,2	
	Total	**55**	**100,0**	

Opinión de la calidad de la preparación que reciben					Moda	Mediana
		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado		
Válido	Mala	2	3,6	3,6	Buena y Muy buena	Buena
	Regular	7	12,7	16,4		
	Buena	23	41,8	58,2		
	Muy buena	23	41,8	100,0		
	Total	**55**	**100,0**			

Tipo de carrera por la que opta				Moda
		Frecuencia	Porcentaje	
Válido	C. Técnicas	13	23,6	C. Técnicas
	C. Naturales y Matem.	6	10,9	
	C. Pedagógicas	8	14,5	
	C. Médicas	9	16,4	
	C. Económicas	5	9,1	
	C. Soc. y Humanist.	5	9,1	
	C. Agropecuarias	4	7,3	
	Arte	2	3,6	
	Cultura Física	3	5,5	
	Total	**55**	**100,0**	

Indicadores pertinentes			
		Resultados docentes en Matemática	
		10.º grado	11.º grado
N	Válido	55	55
Media		92,380	93,064
Desviación estándar		5,6504	5,6186
Mínimo		74,5	71,5
Máximo		99,3	99,5
Percentiles	25	89,700	91,000
	50 (mediana)	93,000	94,000
	75	96,500	97,000

b)

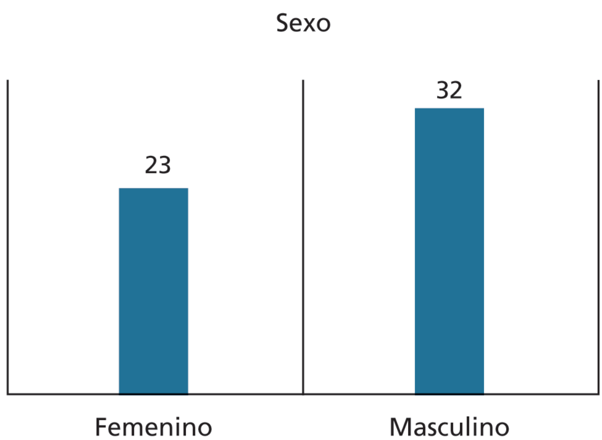


Fig. R6

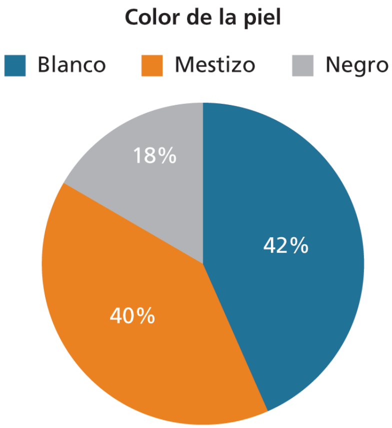


Fig. R7

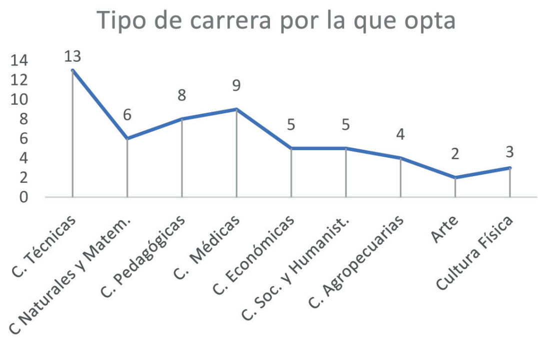


Fig. R8

Fig. R9

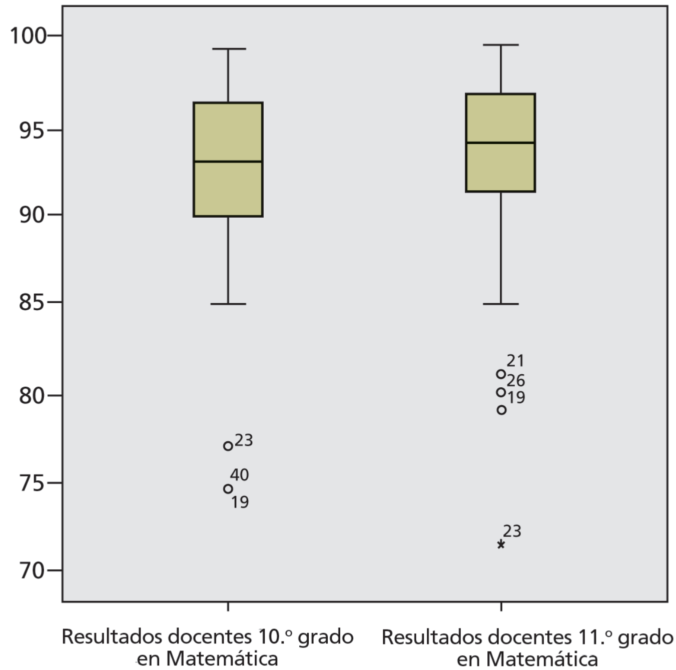


Fig. R10

c) El grupo de 55 estudiantes de 12.º grado, seleccionados al azar, se caracteriza por ser del sexo masculino y predominar el color blanco de la piel, así como tener una buena opinión de la calidad de la preparación que reciben y la carrera de más preferencia es la de Ciencias Técnicas.

En cuanto a los resultados docentes de los 55 estudiantes en 10.º grado en la asignatura Matemática, el indicador o estadístico que caracteriza este tipo de variable estadística es la media, en este caso significa que el promedio de los resultados docentes de 10.º grado en Matemática es aproximadamente de 92,4 puntos. Mientras que la mediana indica que, en el 10.º grado el 50 % de los estudiantes de la media alcanzaron resultados docentes mayores o iguales a 93 puntos, en esa asignatura. En el caso de la desviación típica (o estándar), el valor obtenido indica que la distribución es homogénea a la media, es decir, es poco dispersa; esto se corrobora en su correspondiente diagrama de cajas, en el que se muestra poca dispersión o poca variabilidad entre los cuartiles 25, 50 y 75.

En cuanto a los resultados docentes de 11.º grado en Matemática, del grupo de 55 estudiantes, la media es el indicador o estadístico que caracteriza el comportamiento de este tipo de variable estadística. La media en este caso significa que el promedio de los resultados docentes de 11.º grado en Matemática es de 93 aproximadamente. En el caso de la mediana, indica que el 50 % de estos estudiantes lograron resultados docentes mayores o iguales a 94 puntos en la asignatura. En el caso de la desviación típica (o estándar), el valor hallado indica que la distribución es homogénea a la media, es decir, es poco dispersa; esto se puede corroborar en su correspondiente diagrama de cajas, en el que se muestra poca dispersión o poca variabilidad entre los cuartiles 25, 50 y 75.

2. $\frac{11}{12}$ **3.** a) $\frac{48}{125}$ b) $\frac{12}{125}$ c) $\frac{1}{125}$

4. a) $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C) =$

$(A \cap B) \cup [(A \cup B) \cap C]$

b) P (2 fallos $\cup$ 3 fallos) = 0, 028 (2,8 %)

5. a) 16 b) 23 c) 18,18 % **6.** 36

7. a) $P_7 = 5\,040$ b) $C_2^9 = 36$ c) $C_2^7 \cdot C_2^9 = 756$ **8.** $\frac{1}{C_4^5} = \frac{1}{120}$

9. a) $\frac{C_2^9}{C_2^{14}} = \frac{36}{91}$ b) $\frac{5 \cdot 9}{C_2^{14}} = \frac{45}{91}$ c) $\frac{55}{91}$ **10.** $\frac{2}{27}$

11. a) 20 b) $\frac{20}{C_4^{16}} = \frac{1}{91}$ **12.** a) 9! = 362 880 b) $C_3^8 = 56$ c) $\frac{1}{21}$

13.

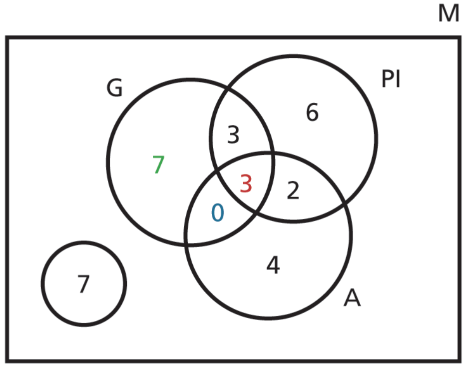


Fig. R11

a) 7 b) $\binom{5}{2} = 10$ c) 32 d) $\frac{12}{25} = 0,48 \quad (48\%)$

14. a) $4! = 24$ b) $3! = 6$

15. a) $6! = 720$

b) $2 \cdot 5! = 240$ (tratar los dos átomos como uno solo y multiplicar por 2)

16. a) $M_e \approx 283\text{ms}$ b) $\frac{5+12}{30} \cdot 100 = 56,67\ \%.$

17. a) $0,375\ (37,5\ \%)$ b) $\frac{15}{16}\ (93,75\ \%)$

18. a) $0,8171\ (81,71\ \%)$ b) 1 140

19. a) $\binom{12}{5} = 792$ b) $\binom{10}{5} = 252$ (excluyendo los 2 enfermos)

20. a) $\binom{15}{4} = 1\,365$ b) $\binom{14}{3} = 364$ (elegir 3 de las 14 restantes)

Autoevaluación

1.

Proposición	Clasificación	Justificación
a)	F	La estadística estudia datos para tomar decisiones, mientras que la probabilidades modela fenómenos aleatorios.
b)	F	La Estadística Descriptiva se dedica a estudiar la descripción y caracterización de un universo, representado por un conjunto de datos para derivar conclusiones acerca de ese universo. Estudia toda y cada una de las observaciones de la población.
c)	F	La muestra es una parte REPRESENTATIVA de toda la población, que no depende necesariamente de su tamaño.
d)	F	Las variables discretas tienen su recorrido numerable con valores enteros, pero pueden ser divisibles (conteo de objetos).
e)	F	En las escalas ordinales se utilizan cualidades para generar categorías y como su nombre lo indica generan un orden explícito. (alto, medio, bajo).
f)	V	
g)	F	La media aritmética es una medida de tendencia central que representa el valor típico o central de un conjunto de datos, indica el punto de equilibrio de una distribución de datos (la varianza o la desviación estándar son las que dan esa variabilidad alrededor de un valor).
h)	F	La moda es el valor más frecuente, pero no necesariamente supera el 50%. (Ejemplo: $\{1; 1; 2; 3\}$, la moda es 1 con 50%).

Proposición	Clasificación	Justificación
i)	V	La Desviación Típica o Estándar es una medida de dispersión que mide cuánto se desvían los datos respecto a la media, no respecto a la mediana.
j)	V	
k)	V	
l)	F	En parte. Es común que la Desviación Típica o Estándar mide cuánto se desvían los datos con respecto a cierto valor central, por lo general la media; pero puede ser también la mediana.
m)	F	Los fenómenos deterministas se rigen por leyes exactas y la Teoría de las Probabilidades proporciona modelos matemáticos para la descripción de fenómenos aleatorios sobre todo casuales.
n)	F	Uno de los axiomas de las probabilidades plantea que esta no es negativa pero tampoco mayor que 1. Es decir: La probabilidad de un suceso cualquiera A es $0 \leq P(A) \geq 1$
ñ)	V	
o)	F	Las variaciones de *n* objetos tomados *p* a *p, son ordenaciones* de *p* elementos que se pueden formar con los *n* objetos.

2.

Proposición	Clasificación	Justificación
a)	F	La variable estudiada es cuantitativa continua, pues las notas pueden tomar cualquier valor en un intervalo real. (Ejemplo, 87,3).
b)	F	El límite inferior real de la clase mediana es 84,5.

Proposición	Clasificación	Justificación
c)	F	La nota más frecuente, es decir la moda la cual está en la clase G: [85; 90) es aproximadamente 87,8 puntos.
d)	F	Los estudiantes suspensos son 15 de 180, que representan el 8,3 % del total.
e)	V	
f)	V	

19. a) $P(AABB) = \frac{1}{16}$ b) $\frac{9}{16}$

2.2

a) 39 pulsaciones por minuto

b) 111-120

c) 60 maneras diferentes.

d) 20 %

3.

a)

Variable: calidad del servicio de atención al cliente.

Clasificación de la variable: Cualitativa.

Tipo de escala: Ordinal.

Valores de la variable: 1: muy insatisfecho, 2: insatisfecho, 3: satisfecho, 4: muy satisfecho.

Población: 50 clientes encuestados.

Capítulo 3

Epígrafe 3.1 Introducción a los números complejos

2.

Proposición	Clasificación	Justificación
a)	V	0: representa el cardinal del conjunto que no tiene elementos. El número cero representa el cardinal del conjunto vacío (ya que se define el conjunto que no tiene elementos $A = \varnothing$ y su cardinal $\# A = 0$).
b)	F	$\frac{3}{2}$ no representa el cardinal de ningún conjunto.
c)	V	$\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, $\sqrt{3} \in \mathbb{I}$ y $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$.
d)	V	$7{,}66 = \frac{766}{100}$, que es racional (es el cociente entre dos números enteros).
e)	F	$\mathbb{I}$: representa el conjunto de los números irracionales (las expresiones infinitas no periódicas) y $\mathbb{Q}$: el dominio de los números racionales (las expresiones decimales periódicas, sin periodo 9). Son conjuntos disjuntos, es decir; $\mathbb{I} \cap \mathbb{Q} = \varnothing$.
f)	V	–6, es el opuesto del número natural 6.
g)	V	$4{,}7 = \frac{43}{9}$, que es fraccionario (es el cociente entre dos números naturales).
h)	V	$\sqrt{400} = 20$ y 20 es el cardinal de todos los conjuntos que tienen 20 elementos.
i)	F	$\log 0{,}01 = -2$, y –2 no representa el cardinal de ningún conjunto.

Proposición	Clasificación	Justificación
j)	V	$\log_2 0{,}25 = \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2$ y -2 no representa el cardinal de ningún conjunto.

3. a) $\mathbb{N}$ b) $\mathbb{R}$ c) $\mathbb{Z}$ d) $\mathbb{R}$

4. 4.1 $A = \{-1;3;4;9\}$ $B = \{0,\overline{6};0,5;0,8;3;4;9\}$ $C = \{-1;3;4;9;0,\overline{6};0,5;0,8\}$

4.2

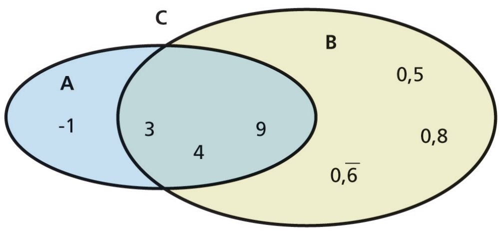


Fig. R12

5. $A = \{0;\sqrt{25}\}$ $B = \left\{\frac{1}{2};0;-1;\sqrt{25};\frac{5}{3};2,\overline{09}\right\}$

$C = \left\{\frac{1}{2};\pi;\frac{5}{3};2,\overline{09};-\sqrt{6};e\right\}$ $D = \left\{\frac{1}{2};0;-1;\pi;\sqrt{25};\frac{5}{3};2,\overline{09};-\sqrt{6};e\right\} = U$

$E = \{0;-1;\sqrt{25}\}$ $F = \{\ \}$

6.

Proposición	Clasificación	Justificación
a)	V	$\text{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbb{R}$, $\frac{2}{3} \in \mathbb{R}$, $e^2 \in \mathbb{R}$, $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$.
b)	F	$e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \notin \mathbb{Z}$
c)	F	$\left(\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$, $2\text{sen}\frac{5\pi}{6} = 2\text{sen}\frac{\pi}{6} = 1 \in \mathbb{Q}$, $1 \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{16} = 4 \in \mathbb{Q}$, $\log 2 \notin \mathbb{Q}$

Proposición	Clasificación	Justificación
d)	F	$\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)^2=\frac{1}{4}\in\mathbb{Q}$, $2\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}=e^{\ln(\sqrt{2})}=\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$, $\frac{1}{3}\in\mathbb{Q}$, $\frac{1}{2}\in\mathbb{Q}$

7. a) $\mathbb{R}$ b) $\mathbb{Q}_+$ c) $\mathbb{R}$ d) $\mathbb{N}$

8. a) $S=\{3\}$; por tanto, existe una solución en $U=\mathbb{Z}$.

b) $S=\{1\}$; por tanto, existe una solución en $U=\mathbb{Z}$.

c) $x_1=-1$ o $x_2=\dfrac{m}{m-n}$; $m-n\neq 0$; por tanto al menos tiene una solución en $U=\mathbb{Q}$.

d) $=-3<0$; no tiene solución real, por tanto, no existe solución en $U=\mathbb{R}$.

9. a) V, porque el conjunto de los números complejos da solución a las insuficiencias del dominio de los números reales, luego, este es un subconjunto.

b) F, porque el conjunto de los números naturales, forma parte de los reales, luego, es un subconjunto de los números complejos.

c) F, porque *a lo sumo* significa que, no tiene más de una solución compleja, sin embargo, al resolver la ecuación el discriminante es negativo y sus dos soluciones son complejas.

d) F, porque el conjunto de números complejos no es un subconjunto de los números reales, luego, ninguno de sus elementos pertenece a los reales.

10.

a) $\mathbb{R}$	b) $\mathbb{Q}_+$	c) $\mathbb{Z}$	d) $\mathbb{N}$	e) $\mathbb{C}$
f) $\mathbb{R}$	g) $\mathbb{N}$	h) $\mathbb{Z}$	i) $\mathbb{N}$	j) $\mathbb{C}$
k) $\mathbb{Q}$	l) $\mathbb{R}$	m) $\mathbb{C}$	n) $\mathbb{C}$	ñ) $\mathbb{N}$

11. Número real: b); d); g); h); i); k) ; Número imaginario puro: c); e); f); j); l)

12. a) nunca b) siempre c) siempre d) nunca

e) siempre (su resultado)

13. a) F, porque es –4.

b) V.

c) F, porque la parte real debe ser cero y la parte imaginaria diferente de cero

d) F, Un número es real cuando la parte imaginaria es 0.

e) F, el 1 pertenece a ambos conjuntos por tanto pertenece a la intersección o $P \cap Q = \{1;5\}$.

f) V.

g) F, para que un elemento pertenezca a la unión de dos conjuntos es necesario y suficiente que pertenezca a uno de los conjunto, $6i \in B$.

h) V

i) V

j) F, para $b^2 - 4ac < 0$ las soluciones no son reales o un contraejemplo ($x^2 + 4 = 0$, $x = \pm 2i$ que son soluciones imaginarias, luego, no pertenecen a $\mathbb{R}$).

Epígrafe 3.2 Relaciones y operaciones entre números complejos en forma binómica

1. a) $x_1 = 2$; $y_1 = 3$ o $x_2 = -1$; $y_2 = -6$;

b) $x_1 = 1$, $y_1 = 3$; $x_2 = -1$, $y_2 = 3$; $x_3 = 1$, $y_3 = -3$ o $x_4 = -1$, $y_4 = -3$;

c) $x = 2$; $y = 1$

d) $x = 1$; $y = 1$

2. a) $8 + 5i$ b) $5 + 12i$ c) $-3 + 7i$ d) $13 - 9i$

e) $-16 - 9i$ f) $-1 - i$ g) $-4 + 3i$ h) $7 + 6i$

i) $9 - 2i$ j) $12 - 2i$ k) 6 l) $3 + 3i$

m) 1 n) $-10 - 7i$ ñ) 13 o) $(2p + n) - \frac{6q+m}{2}i$

p) $-\frac{13}{15} + \frac{2}{3}i$ q) $0{,}138 + i$ r) $\frac{3}{4} - 0{,}9i$ s) 1 t) $0{,}75$

3. a) $18 + 14i$ b) 6 c) $10i$ d) $20 + 8i$

e) $-20 - 15i$ f) $-\frac{1}{2} - i$ g) 13 h) $26 - 13i$

i) $8 - 10i$ j) $-8 + 9i$ k) $-39 + 39i$ l) 3

4. a) $7{,}5 + 5i$ b) $32 + 11i$ c) $10 + 5i$ d) $-4 + 8\sqrt{5}\,i$

5. a) $2 - 2i$ b) $-11 - 4i$ c) $15 + 5i$

d) $3i$ e) $8{,}5 + \left(2 - \sqrt{3}\right)i$ f) $4 - 9i$

6. a) $-4 - 9i$ b) $7{,}64$ c) -66 d) $24i$

e) $4i$ f) $4\sqrt{2}\,i$ g) $2 - 2i$ h) $6 - 4\sqrt{5}\,i$

7. a) $V_T = 7 - 5i$

b) Número imaginario: Parte real: 0; Parte imaginaria: –5

8. a) $z_T = z_1 + z_2 = 5 - i$

b) z_1 y z_2 son números complejos, tanto la parte real como la parte imaginaria de cada uno son distintas de cero.

9. a) $x_1 = 1;\ y = 7$ o $x_2 = 2;\ y = 7$

b) $x = \frac{8}{3}$; $y = \frac{4}{3}$

c) $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $y_1 = -2$; $y_2 = 1$

d) $x = 0$; $y = 2$

e) $x_1 = 0$; $x_2 = 4$; $y_1 = 4$; $y_2 = 0$

f) $x = -\dfrac{17}{3}$; $y = -\dfrac{16}{3}$

g) $x = -2$; $y = 25$

h) $x = 4$; $y = 0$

i) No existen j) No existen k) $x = 1$; $y = -3$

l) No existen m) $x = -1$; $x = 3$; $y = 3$ n) $x = 2{,}5$; $y \in \mathbb{R}$

ñ) No existen o) $x = 0$; $y = 3$

10. a) $x = -\dfrac{23}{26}$; $y = \dfrac{15}{26}$ b) $x = \dfrac{29}{17}$; $y = \dfrac{31}{17}$

c) $x = -\dfrac{11}{29}$; $y = \dfrac{13}{29}$ d) $x = 1$; $y = 1$

11. a) $\mathfrak{R}$: 3 ; $\mathfrak{I}$: – 4 b) $\mathfrak{R}$:1 ; $\mathfrak{I}$: 2,5

c) $\mathfrak{R}$: $x - xy + 3$; $\mathfrak{I}$: – 4 d) $\mathfrak{R}$: $x^2 + y^2$; $\mathfrak{I}$: 0

e) $\mathfrak{R}$: 8 ; $\mathfrak{I}$: – 1 f) $\mathfrak{R}$: $-2\sqrt{5} + 1$; $\mathfrak{I}$: $2 + \sqrt{5}$

g) $\mathfrak{R}$: 0 ; $\mathfrak{I}$: 3 h) $\mathfrak{R}$: 0 ; $\mathfrak{I}$: – 1

i) $\mathfrak{R}$**:** 5, $\mathfrak{I}$**:** $-\sqrt{2}$ **j)** $\mathfrak{R}$**:** $\sqrt{5}$ **;** $\mathfrak{I}$ $\sqrt{2} + 1$

k) $\mathfrak{R}$**:** $5^{0,6}$; $\mathfrak{I}$: $-10^{\frac{1}{4}}$ l) $\mathfrak{R}$: – 1,5 ; $\mathfrak{I}$: 3,5

m) $\mathfrak{R}$: $(-4x - y)\left(2 - \sqrt{3}\right)$; $\mathfrak{I}$: $(2 - \sqrt{3})\,(xy - 4)$

n) $\mathfrak{R}$: –119 ; $\mathfrak{I}$: –120

ñ) $\mathfrak{R}$: 4 ; $\mathfrak{I}$: –2

12. a) imaginario puro si: $x = 3$; real si: $y = \dfrac{1}{2}$.

b) imaginario puro si: $x = -3$ o $x = 5$; no existe: $y \in \mathbb{R}$.

c) imaginario. puro si: $x = 3$ o $x = \dfrac{1}{8}$; real si: $y = 2$.

13. a) $a = -5$; $b = -4$ b) $a = 5$ c) $b = -4$ d) $b = 6$

e) $b = a + 1$ f) $a = \dfrac{25}{b-1}; (b \neq 1)$

14. a) $k = 2$ b) $k = 3$

15. c) $x = 2$; $y = 6$

16. a) $\dfrac{3}{2} + \sqrt{2}\,i$ b) $-5 - i$ c) $\sqrt{2} + i\,3\log 5$ d) $-1 - 2\sqrt{6}i$

e) $2 + i$ f) $2{,}08 + 2{,}46i$ g) $-5 + 4i$ h) -4 i) 4

j) $-31 - 38i$ k) 7 l) $\sqrt[3]{100} + \left(\sqrt[4]{125} + 2\sqrt{2}\right)i$

m) $23 + \sqrt{3}i$ n) $\left(6 - \sqrt{5}\right) - 9i$

ñ) $\left(-4\sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{3}\right) - \left(\sqrt{6+4}\right)i$ o) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

p) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ q) $-2i$ r) $\log 5 + (3^{1,5} + \log 3)i$

s) $-\sqrt{3} - \pi i$ t) 4

17. $\bar{z} = 33 + 26i.$

18. $\Re\,(z) = 0$; $\Im: (z) = -3$

20. a) $z = 0$; $z = 1$; $z = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ o $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

b) $z = 0$; $z = -1$; $z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ o $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

21. a) $\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}i$ b) $\dfrac{9}{17} + \dfrac{2}{17}i$ c) $\dfrac{5}{2}$ d) $\dfrac{5}{13} - \dfrac{14}{13}i$

e) $3 - i$ f) $\frac{90}{29} - \frac{80}{29}i$ g) $\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$ h) 0

i) $2{,}2 + 0{,}4i$ j) $-1 + i$ k) $11 - 10i$ l) $-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}i$

22.

a) $|z| = 5$ b) $|z| = 25$ c) $|z| = 2$ d) $|z| = 1$

e) $|z| = \sqrt{2}$ f) $|z| = x^2 + y^2$ g) $|z| = 2\sqrt{2}$ h) $|z| = 3\sqrt{3}$

i) $|z| = 1{,}73$ j) $|z| = 17$ k) $|z| = 25$ l) $|z| = \sqrt{7}$

23. a) $|w| = \sqrt{3{,}25}$ b) $|w| = \sqrt{7}$ c) $|w| = 2\sqrt{2}$ d) $|w| = \sqrt{26}$

24. a) $|s| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $|s| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $|s| \frac{\sqrt{73}}{3}$

26. a) $3 - i$ b) $-2i$ c) $2{,}5 - 1{,}5i$ d) $-\frac{11}{61} - \frac{60}{61}i$ e) $-\frac{5}{13} - \frac{12}{13}i$.

27. 2

28. a) $-i$ b) $\sqrt{3} + 1 + \left(\sqrt{3} - 1\right)i$ c) $-2 + 2i$ d) $-i$ e) $\frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}i$

29.

a) V.

b) F, $w_1 - w_2 = 2 + 4i$.

c) V.

d) F, el opuesto es $2-i$.

e) V.

30. $a=\dfrac{1}{2}$ y $b=0$

31. a) $x=-\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}i$ b) $x=-\dfrac{1}{2}$ c) $x=\dfrac{1}{41}+\dfrac{15\sqrt{2}}{41}i$

d) $x=-0{,}9+0{,}2i$

33*. a) $k=-8$ b) $k=\dfrac{1}{2}$

34. a) $z_1=1{,}5-i$; $z_2=-2{,}5$ b) $z_1=-1+2i$; $z_2=-2+4i$.

c) $z_1=1+1\dfrac{1}{7}i$; $z_2=-1-\dfrac{5}{7}i$ d) $z_1=1+i$; $z_2=2i$

35*. $z=3-i$ y $z=1+i$ o $z=-1-i$ y $z=-3+i$

36*. Los números son $2+3i$ y $-2-4i$

38. a) $z_1=\pm 3i$; $z_2=\pm\dfrac{6}{2}i$ b) $z_1=0$; $z_2=3$ c) $z=\pm\sqrt{15}i$

d) $z_{1,2}=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ e) $z_1=\sqrt{3}+i$; $z_2=-\sqrt{3}+i$; $z_3=-2i$

f) $z_1=0$; $z_2=\sqrt{2}\,i$ g) $z_1=0$; $z_2=2+2i$; $z_3=-2-2i$

h) $z_1=4$; $z_{2,3}=-2\pm 2\sqrt{3}i$ *i)* $z=\pm i$ j) $z_{1,2}=1{,}5\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}i$

k) $z_{1,2}=0{,}5\pm\dfrac{\sqrt{19}}{2}i$ l) $z_1=1$; $z_2=\sqrt{2}-1$

39.

39.1

	a) $\mathfrak{R}$ y $\mathfrak{I}$	b) Clasif.	c) $\lvert z\rvert$	$-z$	$\bar{z}$
z_1	$\mathfrak{R}:-\sqrt{3}$ y $\mathfrak{I}:-3$	No es real ni imaginario: es complejo	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{3}+3i$,	$-\sqrt{3}+3i$
z_2	$\mathfrak{R}:3\sqrt{2}$ y $\mathfrak{I}:-3\sqrt{2}$	No es real ni imaginario: es complejo	6	$-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$	$3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$
z_3	$\mathfrak{R}:0$ y $\mathfrak{I}:-6{,}5$	Imaginario puro	6,5	$6{,}5i$	$6{,}5i$
z_4	$\mathfrak{R}:2$ y $\mathfrak{I}:0$	Complejo real	2	$2\cos 180°$	$-2\cos 180°$
w_1	$\mathfrak{R}:7$ y $\mathfrak{I}:y$	Complejo real si $y=0$	$\sqrt{49+y^2}$	$-7-yi$	$7-y$
w_2	$\mathfrak{R}:a-1$ y $\mathfrak{I}:b$ $a,b\in\mathbb{R}$	Complejo real si $a\in\mathbb{R}:a\neq 1$ y $b=0$ Imaginario puro si $b\neq 0$ y $a=1$	$\sqrt{a^2+b^2-2a+1}$	$-a+1-bi$	$a-1-bi$
w_3	$\mathfrak{R}:x+2$ y $\mathfrak{I}:2x-1$ $x\in\mathbb{R}$	Complejo real si $x=\frac{1}{2}$ Imaginario puro si $x=-2$	$\sqrt{5x^2+5}$	$-x-2-(2x-1)i$	$x+2-(2x-1)i$
w_4	$\mathfrak{R}:-\sqrt{3}$ y $\mathfrak{I}:1$	No es real ni imaginario: es complejo	2	$\sqrt{3}-i$	$-\sqrt{3}-i$

39.2

a)		b)		c)	
$a=8$	$y=b$	$x=5$	$y=9$	$a=1-\sqrt{3}$	$b=1$

39.3

a) $-\sqrt{3}+10{,}5i$	b) $-18\sqrt{2}+3\sqrt{6}i$	c) 12	d) $-36i$	e) 32
f) $8i$	g) $2-2i$	h) $-\dfrac{\sqrt{3}}{6}+\dfrac{i}{2}$	i) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3i}{2}$	

40. a) $\psi=2-i$. Parte real: 2 y la parte imaginaria: –1 b) $|\psi|=\sqrt{5}$

Epígrafe 3.3 Forma trigonométrica de los números complejos

Representación geométrica de números complejos

1.

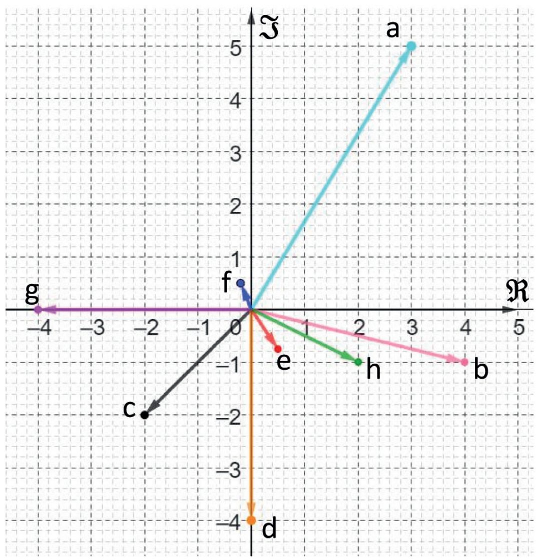


Fig. R13

3. a) $-1+i$; $-1-2i$; $3-2i$; $3+i$

b) $1+2i$; $5+2i$; $3+5i$

c) $-2+2i$; -3 ; 1; $2+2i$

d) 0; 6; $5+3i$; $1+3i$.

4. a) 4 y $3i$ b) 4; $-2+3i$ y $2+3i$

c) 4 y $1+2i$ d) 6; $1+3i$; 4 y $-1+3i$.

5. a) diagonales 5,0 u; forman ángulos de 73,8° y 106,2° (lo opuestos son iguales).

b) lado base: 4,0 u; ángulos bases 56,3° y ángulo principal 76,4°.

c) lados bases 4,0 u y 6,0 u; lados no paralelos 3,16 u (es un trapecio isósceles); diagonales: 5,83 u; ángulos: 108,4° y 71,6°.

7*.

a) Anillo centrado en el origen con radio interior 2,0 u y radio exterior 4,0 u (abierto) (figura R14).

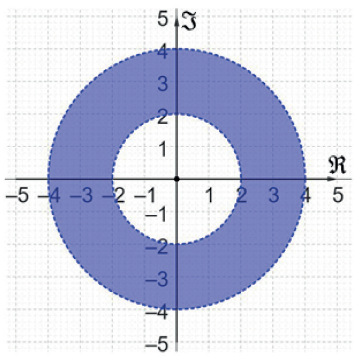


Fig. R14

b) Disco cerrado, centrado en $(-1;0)$ con radio $3{,}0u$ (figura R15).

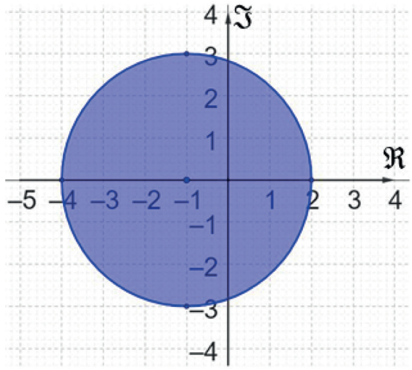


Fig. R15

c) Exterior de un disco abierto con centro $(0;0)$ y radio $\frac{2}{3}$u (figura R16).

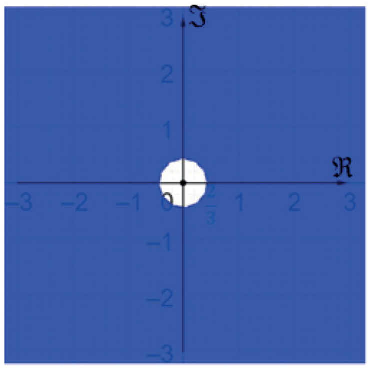


Fig. R16

d) Exterior de un disco abierto centrado en i $(0;1)$ con radio 2,0u (figura R17).

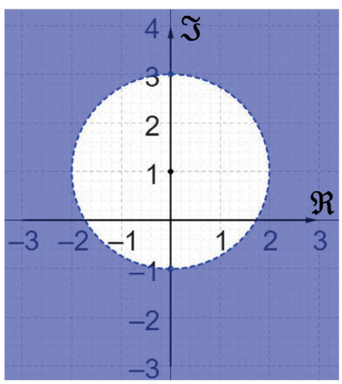


Fig. R17

e) Disco abierto centrado en $1+i\,(1;1)$ y radio 2,0 u (figura R18).

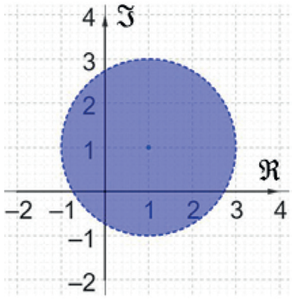


Fig. R18

f) Anillo centrado en $2-i\,(2;-1)$ con radio interior 1,0 u (abierto) y radio exterior 3,0 u (cerrado) (figura R19).

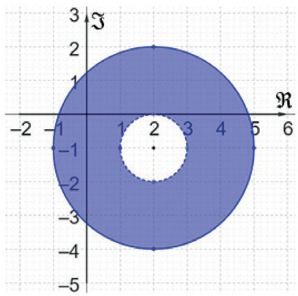


Fig. R19

g) Circunferencia centrada en el origen con radio $\sqrt{2}$ u (figura R20).

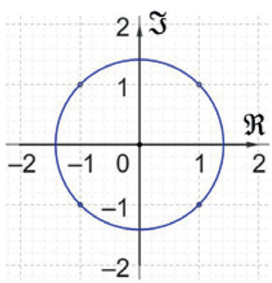


Fig. R20

h) Circunferencia centrada en –1 $(-1;0)$ con radio 3,0 u (figura R21).

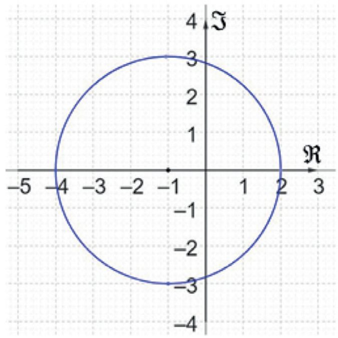


Fig. R21

i) Recta vertical que es mediatriz del segmento que une $(0;0)$ y $(1;0)$, es decir; $x = \dfrac{1}{2}$ (figura R22).

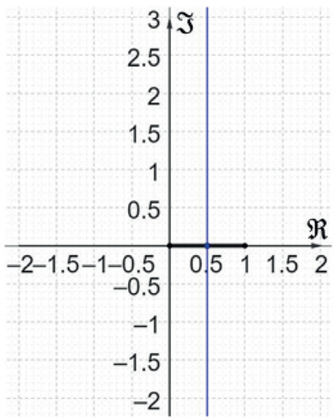


Fig. R22

j) Recta que es la mediatriz del segmento que une $(1;0)$ y $(0;1)$, es decir; $y = x$ (figura R23).

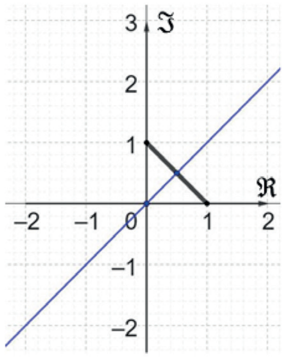


Fig. R23

k) Recta que es la mediatriz del segmento que une (1;1) y $(-1;-1)$, es decir; $y = -x$ (figura R24).

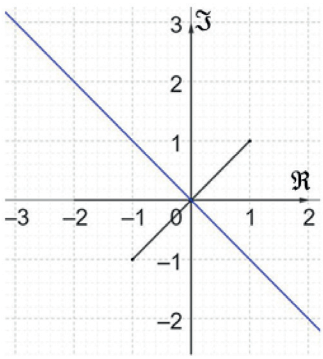


Fig. R24

l) Semiplanos a la izquierda de la recta vertical $x = 1$ (excluyendo a la recta) (figura R25).

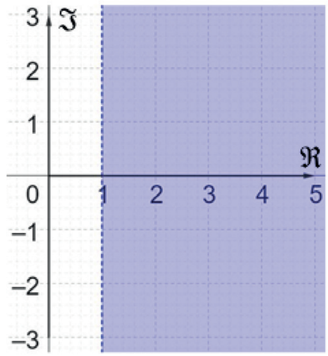


Fig. R25

m) Semiplanos a la izquierda de la recta vertical $x = 3$ (incluyendo a la recta) (figura R26).

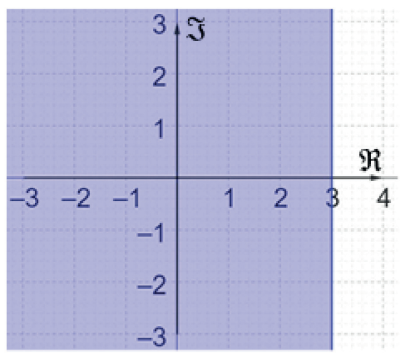


Fig. R26

n) Banda vertical entre las rectas $x = -1$ (incluida) y $x = 5$ (excluida) (figura R27).

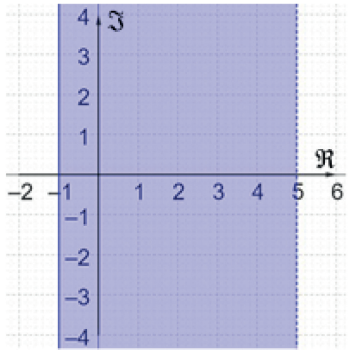


Fig. R27

ñ) Es el conjunto de todos los puntos de la recta horizontal $y = 3$ (excluyendo la recta) (figura R28).

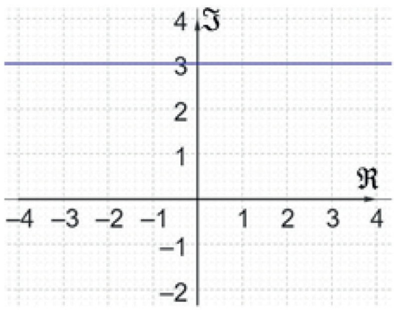


Fig. R28

o) Semiplanos por encima de la recta horizontal $y = -1$ (incluyendo la recta) (figura R29).

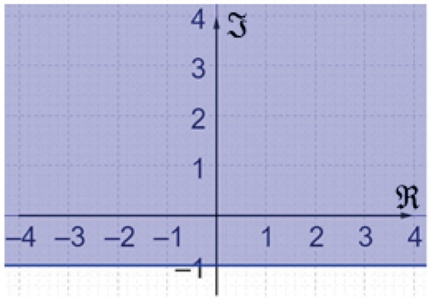


Fig. R29

r) Es el conjunto de todos los puntos del plano complejo que satisfacen la ecuación de la parábola $y^2 = 2x + 1$ (figura R30).

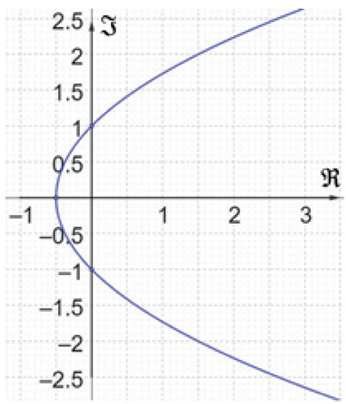


Fig. R30

s) Es el conjunto de todos los puntos del plano complejo que satisfacen la rama derecha de la hipérbola

$$\frac{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{1}{9}}-\frac{y^2}{\frac{1}{3}}=1 \text{ (figura R31).}$$

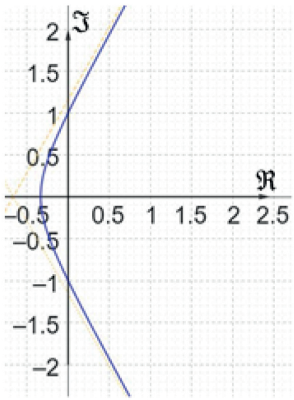


Fig. R31

u) El conjunto es una recta en el plano complejo que satisface la ecuación de la recta $x+y-2=0$ (figura R32).

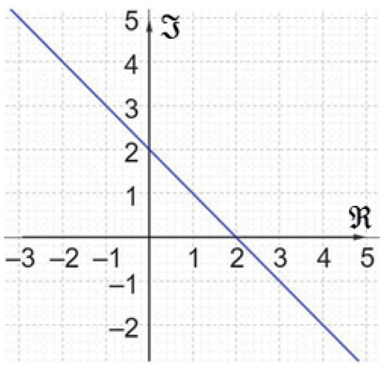


Fig. R32

v) Semiplanos por debajo de la recta $x + y - 3 = 0$ (incluyendo la recta) (figura R33).

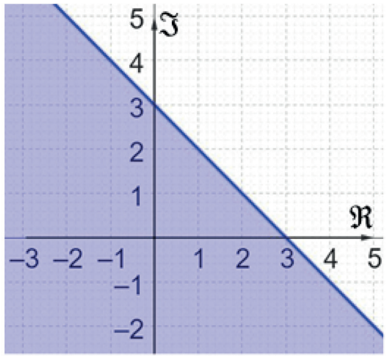


Fig. R33

w) Recta $y = x$ (figura R34).

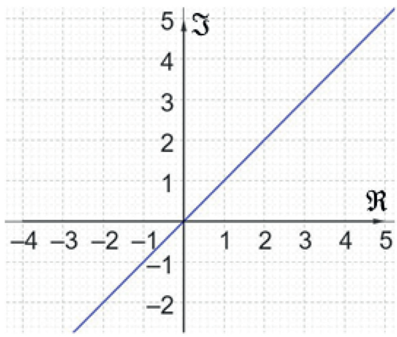


Fig. R34

x) Semirrecta $x \geq 0$ en el eje real (parte no negativa del eje x) (figura R35).

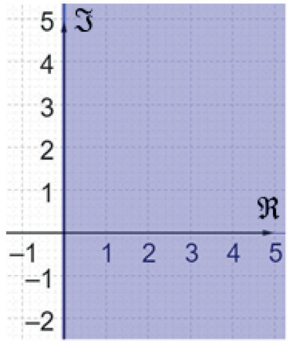


Fig. R35

y) Es el punto origen del plano complejo (figura R36).

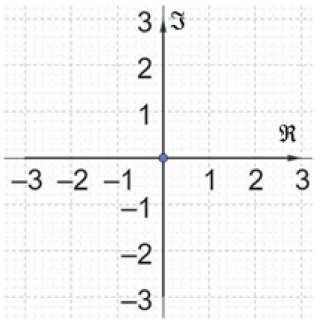


Fig. R36

z) Es el conjunto de todos los puntos del plano complejo que satisfacen la condición $y \geq 0$ (figura R37).

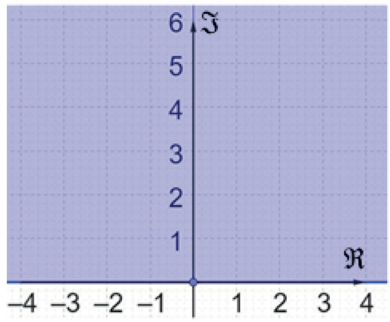


Fig. R37

8*.

a) Es una traslación del vector $(-2;0)$, (traslación vertical hacia abajo 2 unidades).

b) Traslación por el vector (1;-1), (traslación diagonal hacia la derecha 1 unidad y hacia abajo 1 unidad).

c) Es una traslación de vector $(-4;0)$, (traslación hacia la izquierda en 4 unidades).

d) Reflexión sobre el punto 0,5 seguida de una reflexión sobre el eje real.

e) Es una homotecia (escalamiento) con centro en el origen y factor de escala (de razón) $\sqrt{2}$.

f) Reflexión respecto al origen, homotecia con 2 y traslación vertical hacia arriba en 1 unidad.

g) Homotecia con centro en el origen y razón $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (contracción).

h) Reflexión respecto al origen seguida de una homotecia con razón $\frac{1}{3}$.

i) Es una homotecia centrada $\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$, de razón $\frac{1}{3}$.

j) Rotación 45° y homotecia por razón $\sqrt{2}$.

l) Rotación de 90° y homotecia por razón 2.

m) Rotación de –90° y centro en $(0;0)$.

n) Reflexión respecto al origen (inversión central).

ñ) Es una simetría central respecto al origen de coordenadas y una homotecia de razón 3.

o) Rotación de 90° seguida de una traslación horizontal hacia la izquierda en 1 unidad.

p) Es una rotación de 90° alrededor del $(1;0)$.

q) Homotecia con razón 2 (duplica el módulo de z).

9*. a) $z' = z + 2$; b) $z' = z - 2 + \frac{1}{2}i$; c) $z' = z + \sqrt{2}\,(1 + i)$;

d) $z' = z \cdot i$; e) $z' = z \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$; f) $z' = 3z$;

g) $z' = \frac{1}{2}(-1 + i + z)$; h) $z' = \bar{z}$; i) $z' = -\bar{z}$;

j) $z' = -z$; k) $z' = -z + 4 - 2i$; l) $z' = \bar{z} + 2i$;

m) $z' = -\bar{z} - 2$; n) $z' = \frac{1}{2}\bar{z}(1 - i)^2$; ñ) $z' = \frac{1}{2}z\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

o) $z' = 5(z - 3 - 4i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) + 3 + 4i$

10*. Se ha trasladado z en dirección de la diagonal del tercer cuadrante y se rota un ángulo de 60° con centro en el origen. El punto invariante es:

$$z = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i$$

11*. El triángulo formado por z_1, z_2 y z_3 es equilátero cuando el argumento es $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ o $\theta = \dfrac{4\pi}{3}$. Si $z = \pm 1$ no se forma un triángulo. Si $z = \pm i$ se forma un triángulo isósceles.

12*. Con la distancia, $2d$, entre los dos árboles y las de las caminatas desde la horca hasta las estacas, $\overline{HP}$, $\overline{PE_1}$ y $\overline{PC}$, $\overline{CE_2}$ se construye a escala la figura R38 en el plano complejo z, donde el cedro z_C y la palmera z_P quedan en el eje real y la horca z_H y el tesoro z_T, en el imaginario.

La solución es: $z_T = -iz_P$, donde $|z_P| = d$.

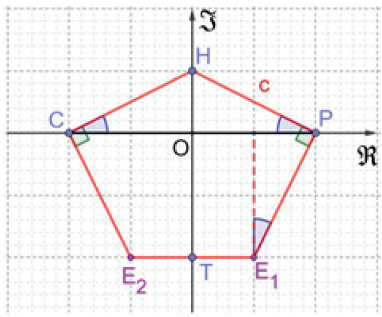


Fig. R38

El joven pudo haber encontrado el tesoro sin saber de la ubicación de la horca, usando números complejos:

$$Tesoro = \frac{z_P + z_C}{2} + \frac{z_C - z_P}{2} i.$$

Expresiones trigonométricas de números complejos

13. a) 2 cis 180° b) 2 cis 90° c) 2 cis 45°

d) 4 cis 120° e) 2 cis 60° f) 5 cis 36,8°

g) 5 cis 240° h) $\sqrt{13}$cis 344,2° i) cis$(2\pi - \theta)$

j) 2 cis 120° k) 3 cis 240° l) cis $\dfrac{7\pi}{4}$

m) $\frac{\sqrt{61}}{15}$cis 50,2° n) 0,236 cis 133,8° ñ) 0,236 cis 325,6°

14. a) i b) – 2 c) $4\cos\alpha - 4i\operatorname{sen}\alpha$ d) – 5 – 5i

e) 0,633 + 1,206i f) 3 – 3i g) 1,712 + 1,437i h) 1,673 – 0,448i

i) 2,832 – 1,635i j) 3,391 + 0,909i k) 0,409 – 0,629i

l) – 0,285 + 0,0249i m) 2,227 + 0,194i n) 1,53i

ñ) 1,862 + 1,075i o) 1 p) $-i$

15*. a) $|w| = 2\sqrt{2}$, $\theta = 45°$ b) $|w| = \sqrt{5}$, arg w = 191,3°

16. a) $\rho = 1{,}94$; $\theta = 315°$ b) $\rho = 4\sqrt{2}$; $\theta = 315°$

c) $\rho = 3{,}15$; $\theta = 320{,}58°$ d) $\rho = 2\sqrt{3}$, $\theta = 0°$

18*. $\rho_1 = \rho_2$; $\theta_1 = \theta_2$ (en el período principal).

Multiplicación y división de números complejo en forma trigonométrica

19*. a) $z_1 = 2 + 3i$ y $z_2 = 4 - 3i$; $z_3 = 2 - 3i$ y $z_4 = 4 + 3i$;

$z_1 \cdot z_2 = 17 + 6i$; $z_3 \cdot z_4 = 17 - 6i$; $\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1+18i}{25}$;

$\frac{z_3}{z_4} = \frac{-1-18i}{25}$

20. a) 2 cis 45° b) – 1 c) 3,36 cis 9° d) $\frac{1}{6}$ cis $\frac{\pi}{4}$ e) 1

f) $\frac{\sqrt{2}}{5}$cis 56° g) 0,847 cis 5° h) $\frac{\pi}{12}$cis 42,8°

i) $2\sqrt{5}$cis (–23,9°) j) 1,11 cis 12° k) $\frac{2}{11}$cis (–104, 79°)

l) 0,3 cis 98,3° m) $\frac{2}{15}$ cis $\frac{11\pi}{12} \cong 0{,}133$ cis $\frac{11\pi}{12}$ n) 11,7 cis 212,2°

ñ) 178 cis 5,6°　　o) cis 94,3°　　p) $2\,\text{cis}\,170^\circ$

q) 7,75 cis 2,13°　　r) 30 cis 310°

21. a) 4 cis 30°　　b) $\sqrt{\frac{3}{5}}$ cis 120°　　c) 40 cis 3,7°　　d) 1,5 cis $\frac{14\pi}{9}$;

e) 5 cis $\frac{16\pi}{9}$　　f) 2,17 cis 0,5　　g) 0,70 cis 181,3°

h) $\frac{3}{13}$ cis 175,5° $\cong$ 0,231 cis 175,5°　　i) $\frac{4}{17}$ cis 285° $\cong$ 0,235 cis 285°

j) $\sqrt{\frac{17}{5}}\,\text{cis}\,1{,}61$　　k) 0,783 cis $\left(\frac{\pi-45}{15}\right)$;　　l) cis 1,02

m) $2\sqrt{2}$ cis 258°　　n) 0,671 cis 149,6°

ñ) $\frac{65}{72}$ cis 88,8° $\cong$ 0,903 cis 88,8　　o) cis 345°　　p) cis (–1)

q) $\sqrt{17}$ cis 180,38°　　r) 0,832 cis 1,68　　s) 5 cis 15°.

22. a) $\frac{2}{3}$ cis 333° $\cong$ 0,667 cis 333°　　b) –1

c) $\frac{5}{6}$ cis (-75°) $\cong$ 0,833 cis 285°　　d) –8.

23. a) $\sqrt{2}$ cis 105°　　b) cis 210°　　c) $\sqrt{2}$ cis 165°　　d) $\frac{3\sqrt{3}}{10}\text{cis}\,210^\circ$

24. a) $\rho = \sqrt{2},\ \theta = 35^\circ$　　b) $\rho = 1,\ \theta = 270^\circ$　　c) $\rho = 1,\ \theta = \frac{5\pi}{12}$

25. a) $|w| = \frac{\sqrt{2}}{4}$, arg (w) = 315°.

26*. a) $3{,}43 + 4{,}75i$　　b) $2+\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1+2\sqrt{3}}{4}i$　　c) $1-\sqrt{3}-\left(1+\sqrt{3}\right)i$

d) $-30-30i$　　e) $\frac{-3\sqrt{3}-1}{2}-\frac{-3+\sqrt{3}}{2}i$　　f) $-1{,}35-0{,}17i$

27. $a = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{3}$; $b = -\dfrac{\pi}{3}$.

28. a) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ b) $-3\sqrt{6}-3\sqrt{6}\,i$ c) $3{,}76+1{,}37i$

29. a) $x=-2\sqrt{3}$; $y=-2$ b) $\rho\left(\overline{-z}\right)=4$; $\theta\left(\overline{-z}\right)=300°$.

30. a) $2\operatorname{cis}210°$.

b) Representación gráfica del número complejo z (figura R39).

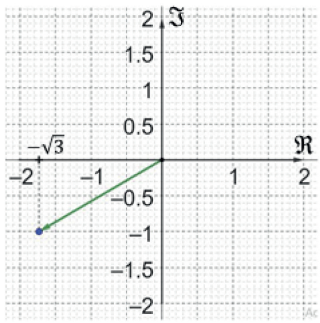


Fig. R39

31. $z=i$.

32*. $z_1=1+2i$; $z_2=4-2i$ o

$z_1=1-2i$; $z_2=4+2i$

Potenciación y radicación de números complejos

33. a) $-5+12i$ b) $-2+2i$ c) $-7-24i$ d) $-24+10i$

e) $-11-60i$ f) $-8i$ g) $x^2-2ix+1$ h) $\pm(2+i)$

34. a) $z^4=16\operatorname{cis}120°$; $z^5=32\operatorname{cis}150°$; $z^6=64\operatorname{cis}180°=-64$

b) $27\operatorname{cis}55{,}8°$ c) $\operatorname{cis}5{,}72$ d) $625\operatorname{cis}\dfrac{8\pi}{5}$ e) $64\operatorname{cis}(-6)$

f) $\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}$ g) $243\operatorname{cis}5$ h) -1 i) 10^7

j) $\operatorname{cis}\left(\frac{-8\pi}{9}\right)$ k) $256\operatorname{cis}100°$ l) $243\operatorname{cis}240°$ m) $\frac{i}{1024}$

n) $3{,}38\operatorname{cis}54{,}6°$ ñ) $9\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}$ o) $\sqrt[3]{2}\operatorname{cis}60°$ p) $-119-120i$

q) $-4-4i$ r) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ s) $611+61\frac{7}{8}i$ t) -2^{30}

u) $-2^{99}+2^{99}\sqrt{3}$ v) $-\left(1+\sqrt{3}\right)^{10}$ w) $\left(6\sqrt{3}\right)^{8}\operatorname{cis}240°$

35. $2\frac{2}{3}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}$

36. a) $-7+12i$ b) 2 c) -1

d) 0 (si n es impar); 2 (si $n = 4k$); – 2 (si $n = 4k + 2$); $k \in \mathbb{Z}$

$$a^n+\frac{1}{a^n}=\begin{cases}0 & \text{si } n \text{ esimpar}\\ 2(-1)^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ es par}\end{cases}$$

37. $w=6\left(1+\sqrt{3}\right)+6\left(\sqrt{3}-1\right)i.$

38. $|w| = 2,\ \arg(w)=\frac{4\pi}{3}.$

39. $|z| = 3;\ \arg(z)=\frac{7\pi}{4}.$

40. $\rho=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \theta=\pi.$

41. $|z|=1,\ \arg(z)=0°.$

42. a) $2\operatorname{cis}\frac{19\pi}{12}$ b) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i$ c) $-\frac{19\pi}{12}$

43. $|z|=\frac{\sqrt{3}}{4};\ \arg(z)=270°.$

44. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i.$

45.

a) $z_0 = 6\text{cis}\left(\frac{\pi}{12}\right)$ y $z_1 = 6\text{cis}\left(\frac{13\pi}{12}\right)$

b) $\rho = 2$ y $\theta = \frac{\pi}{6}$; $z_0 = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{12}\right)$ y $z_1 = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{13\pi}{12}\right)$

c) $\rho = \sqrt{2}$ y $\theta = \frac{5\pi}{4}$; $z_0 = \sqrt[4]{2}\text{cis}\left(\frac{5\pi}{8}\right)$ y $z_1 = \sqrt[4]{2}\,\text{cis}\left(\frac{13\pi}{8}\right)$

d) $\rho = 1$ y $\theta = \frac{\pi}{3}$; $z_0 = \text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ y $z_1 = \text{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

e) $\rho = 5$ y $\theta = \frac{3\pi}{2}$;

$z_0 = \sqrt{5}\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2}(-1+i)$ y $z_1 = \sqrt{5}\,\text{cis}\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{2}(-1+i)$

f) $z_{0,1} = \pm(3+4i)$

g) $z_{0,1} = \pm(-5+i)$

h) $z_{0,1} = \pm 2\sqrt{2}\,i$

i) $z_{0,1} = \pm(4+i)$

j) $z_{0,1} = \pm(2-i)$

k) $\rho = 4\sqrt{2}$ y $\theta = \frac{\pi}{4}$; $z_0 = 2\sqrt[4]{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{8}\right)$ y $z_1 = 2\sqrt[4]{2}\,\text{cis}\left(\frac{9\pi}{8}\right)$

l) $\rho = 5\sqrt{2}$ y $\theta = \frac{5\pi}{4}$; $z_0 = \sqrt{5\sqrt{2}}\,\text{cis}\left(\frac{5\pi}{8}\right)$ y $z_1 = \sqrt{5\sqrt{2}}\,\text{cis}\left(\frac{13\pi}{8}\right)$

m) $z_{0,1} = \pm(3-2i)$

n) $z_{0,1} = \pm(1+2i)$

ñ) $z_{0,1} = \pm(3-i)$

o) $z_0 = 2\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{4}$ y $z_1 = 2\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{5\pi}{4}$

p) $z_0 = 12\text{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -6\sqrt{2}+6\sqrt{2}\,i$ y $z_1 = 12\text{cis}\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 6\sqrt{2}-6\sqrt{2}\,i$

q) $\rho = 2\sqrt{2}$ y $\theta = -\frac{\pi}{4}$; $z_0 = \sqrt[4]{8}\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ y $z_1 = \sqrt[4]{8}\,\text{cis}\left(-\frac{7\pi}{8}\right)$

46.

a) $z_0 = 2\,\text{cis}\,20°$; $z_1 = 2\,\text{cis}\,140°$; $z_2 = 2\,\text{cis}\,260°$

b) $z_0 = 3\,\text{cis}\,30°$; $z_1 = 3\,\text{cis}\,120°$; $z_2 = 3\,\text{cis}\,210°$; $z_3 = 3\,\text{cis}\,300°$

c) $z_0 = 2\,\text{cis}\,30°$; $z_1 = 2\,\text{cis}\,102°$; $z_2 = 2\,\text{cis}\,174°$;

$z_3 = 2\,\text{cis}\,246°$; $z_4 = 2\,\text{cis}\,318°$

d) $z_0 = 3\text{cis}\,8{,}33°$; $z_1 = 3\text{cis}\,68{,}3°$; $z_2 = 3\text{cis}\,128{,}3°$;

$z_3 = 3\text{cis}\,188{,}3°$; $z_4 = 3\text{cis}\,248{,}3°$; $z_5 = 3\text{cis}\,308{,}3°$

e) $z_0 = \text{cis}\,0{,}429°$; $z_1 = \text{cis}\,51{,}33°$; $z_2 = \text{cis}\,103{,}71°$;

$z_3 = \text{cis}\,208°$; $z_4 = \text{cis}\,260{,}1°$; $z_5 = \text{cis}\,312{,}3°$

f) $z_0 = \text{cis}\,\frac{5\pi}{48}$; $z_1 = \text{cis}\,\frac{17\pi}{48}$; $z_2 = \text{cis}\,\frac{29\pi}{48}$; $z_3 = \text{cis}\,\frac{41\pi}{48}$; $z_4 = \text{cis}\,\frac{53\pi}{48}$;

$z_5 = \text{cis}\,\frac{65\pi}{48}$; $z_6 = \text{cis}\,\frac{77\pi}{48}$; $z_8 = \text{cis}\,\frac{89\pi}{48}$

g) $z_0 = 1{,}58\,\text{cis}\,\frac{\pi}{12}$; $z_1 = 1{,}58\,\text{cis}\,\frac{17\pi}{60}$; $z_2 = 1{,}58\,\text{cis}\,\frac{29\pi}{60}$; $z_3 = 1{,}58\,\text{cis}\,\frac{81\pi}{60}$;

$z_4 = 1{,}58\,\text{cis}\,\frac{53\pi}{60}$; $z_5 = 1{,}58\,\text{cis}\,\frac{13\pi}{12}$; $z_6 = 1{,}58\,\text{cis}\,\frac{17\pi}{60}$;

$z_7 = 1{,}58\,\text{cis}\,\frac{89\pi}{60};\;\; z_8 = 1{,}58\,\text{cis}\,\frac{101\pi}{60};\;\; z_9 = 1{,}58\,\text{cis}\,\frac{113\pi}{60}$

h) $z_0 = 3{,}11\text{cis}\,0{,}5;\;\; z_1 = 3{,}11\text{cis}\,1{,}43;\;\; z_2 = 3{,}11\text{cis}\,2{,}35;\;\; z_3 = 3{,}11\text{cis}\,3{,}273$

i) $z_0 = 2{,}06\,\text{cis}\,8{,}75°;\;\; z_1 = 2{,}06\,\text{cis}\,98{,}8°;$

$z_2 = 2{,}06\,\text{cis}\,188{,}8°;\;\; z_3 = 2{,}06\,\text{cis}\,278{,}8°$

j) $z_0 = \sqrt[5]{3{,}5}\;\text{cis}\,0{,}283;\; z_1 = \sqrt[5]{3{,}5}\,\text{cis}\,0{,}791;\;\; z_2 = \sqrt[5]{3{,}5}\,\text{cis}\,1{,}865;$

$z_3 = \sqrt[5]{3{,}5}\,\text{cis}\,2{,}939;\;\; z_4 = \sqrt[5]{3{,}5}\,\text{cis}\,4{,}014;\;\; z_5 = \sqrt[5]{3{,}5}\,\text{cis}\,5{,}089$

k) $z_0 = 2\text{cis}\,\frac{\pi}{9}\;;\;\; z_1 = 2\text{cis}\,\frac{7\pi}{9}\;;\;\; z_2 = 2\text{cis}\,\frac{13\pi}{9}$

l) $z_0 = \text{cis}\,7{,}5°\;;\;\; z_1 = \text{cis}\,97{,}5°\;;\;\; z_2 = \text{cis}\,187{,}5°\;;\;\; z_3 = \text{cis}\,277{,}5°$

m) $z_0 = \sqrt[5]{4}\,\text{cis}\,\frac{11\pi}{30};\;\; z_1 = \sqrt[5]{4}\,\text{cis}\,\frac{23\pi}{30};\;\; z_2 = \sqrt[5]{4}\,\text{cis}\,\frac{35\pi}{30};\;\; z_3 = \sqrt[5]{4}\,\text{cis}\,\frac{47\pi}{30};$

$z_4 = \sqrt[5]{4}\text{cis}\,\frac{59\pi}{30}$

n) $z_0 = \sqrt[3]{6}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{9};\;\; z_1 = \sqrt[3]{6}\,\text{cis}\,\frac{7\pi}{9};\; z_2 = \sqrt[3]{6}\,\text{cis}\,\frac{13\pi}{9}$

48. $x = 2\,\text{cis}\,30° = \sqrt{3} + i$ o $x = 2\,\text{cis}\,150° = -\sqrt{3} + i$ o $x = 2\,\text{cis}\,270° = -2i$.

49.

a) $z_0 = \sqrt{3}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;\qquad z_1 = \sqrt{3}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{2} = \sqrt{3}i$

$z_2 = \sqrt{3}\,\text{cis}\,\frac{5\pi}{6} = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;\quad z_3 = \sqrt{3}\,\text{cis}\,\frac{7\pi}{6} = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_4 = \sqrt{3}\,\text{cis}\,\frac{9\pi}{6} = -\sqrt{3}i\;;\qquad z_5 = \sqrt{3}\,\text{cis}\,\frac{11\pi}{6} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

b) $z_0 = \text{cis}\frac{\pi}{12}$; $z_1 = \text{cis}\frac{5\pi}{12}$; $z_2 = \text{cis}\frac{3\pi}{4}$;

$z_3 = \text{cis}\frac{13\pi}{12}$; $z_4 = \text{cis}\frac{17\pi}{12}$; $z_5 = \text{cis}\frac{21\pi}{12}$

50.

$1{,}85\,\text{cis}\left(\frac{7\pi}{24}\right)$; $1{,}85\,\text{cis}\left(\frac{25\pi}{24}\right)$; $1{,}85\,\text{cis}\left(\frac{11\pi}{8}\right)$; $1{,}85\,\text{cis}\left(\frac{41\pi}{24}\right)$

$1{,}85\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{24}\right)$; $1{,}85\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

51. $\bar{z} = 16\sqrt{2}\,\text{cis}\frac{17\pi}{12}$ o $\bar{z} = 16\sqrt{2}\,\text{cis}\frac{\pi}{12}$

52.

a) $z_0 = \text{cis}\,0° = 1$; $z_1 = \text{cis}\,60° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$;

$z_2 = \text{cis}\,120° = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_3 = \text{cis}\,180° = -1$;

$z_4 = \text{cis}\,240° = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_5 = \text{cis}\,300° = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

b) Representación gráfica (figura R40).

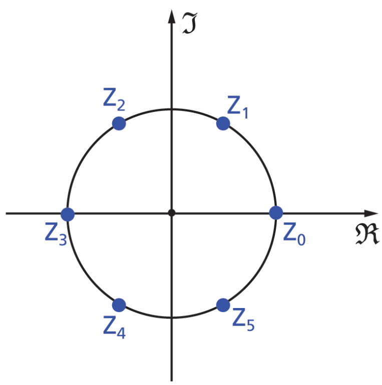


Fig. R40

53.

a)

Números complejos	Parte real	Parte imaginaria
$z_1 = 2\text{cis}\,300°$	1	$-\sqrt{3}$
$z_2 = 3\ \text{cis}\,\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$
$z_3 = \sqrt{10}\,\text{cis}\,315°$	$\sqrt{5}$	$-\sqrt{5}$
$w_1 = \sqrt{3} - i$	$\sqrt{3}$	-1
$w_2 = -3i$	0	-3
$w_3 = \text{cis}\,30°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$w_4 = \left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$

b)

Números complejos	Opuesto	Conjugado
z_1	$2\text{cis}\,120°$	$2\text{cis}\,60°$
z_2	$3\ \text{cis}\,\frac{5\pi}{4}$	$3\ \text{cis}\,\frac{7\pi}{4}$
z_3	$\sqrt{10}\,\text{cis}\,135°$	$\sqrt{10}\,\text{cis}\,45°$
w_1	$-\sqrt{3} + i$	$\sqrt{3} + i$
w_2	$3i$	$3i$
w_3	$\text{cis}\,210°$	$\text{cis}\,330°$
$w_4 = \left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$	$\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$	$\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$

c)

Números complejos	Forma binómica	Forma polar
z_1	$1 - \sqrt{3}i$	$2\text{cis}\,300°$
z_2	$\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$	$3\ \text{cis}\,45°$
z_3	$\sqrt{5} - \sqrt{5}i$	$\sqrt{10}\,\text{cis}\,315°$

Números complejos	Forma binómica	Forma polar
w_1	$\sqrt{3}-i$	$2\ \text{cis}330°$
w_2	$-3i$	$3\text{cis}270°$
w_3	$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$	$\text{cis}30°$
w_4	$-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$	$2\ \text{cis}225°$

d)

$$\frac{z_1 \cdot z_2}{z_3}=\frac{3}{5}\sqrt{10}\text{cis}30°;\qquad \frac{z_1 : z_2}{(w_3)^8}=\frac{2}{3}\text{cis}15°;\qquad \frac{z_3 \cdot w_1}{w_4}=\sqrt{10}\,\text{cis}60°$$

$$\frac{w_1 \cdot w_2}{w_2 : w_3}=2;\quad \frac{w_1 : w_3}{(w_1)^4}=\frac{1}{8}\text{cis}60°;\ \sqrt[3]{w_3}=\sqrt[3]{\text{cis}30°}=\begin{cases} z_0=\text{cis}10° \\ z_1=\text{cis}130° \\ z_2=\text{cis}250° \end{cases}$$

54. a) Verdadera.

b) Falsa, porque $1+i=\sqrt{2}\ \text{cis}\frac{\pi}{4}$, o $|1+i|\neq 1$

c) Verdadera.

d) Falsa, porque $4\ \text{cis}\frac{\pi}{3}\cdot 2\ \text{cis}\ \pi = 8\ \text{cis}\frac{4\pi}{3}$, o porque en la multiplicación de números complejos en forma polar se, multiplican sus módulos y se adicionan sus argumentos y $\varphi=\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4\pi}{3}\neq\frac{5\pi}{3}$.

e) Verdadera.

f) Verdadera.

g) Falsa, porque $z=2-2i=2\sqrt{2}\ \text{cis}315°$, o porque el $|2-2i|=2\sqrt{2}$ y su argumento es $\theta=315°$ o que z pertence al cuarto cuadrante no al segundo cuadrante.

h) Verdadera.

i) Verdadera.

j) Falsa, porque $z = 3\text{cis}270° = -3i$, o porque representa un número imaginario negativo cuyo afijo tiene coordenadas $(0;-3)$.

k) Falsa, porque ambos números tienen igual argumento pero módulos diferentes. $|z_1| = 2\sqrt{2}$, $|z_2| = 2$ y $|z_1| = 2\sqrt{2} \neq |z_2| = 2$.

l) Falsa, porque en el conjugado de un número complejo en forma binómica solo cambia el signo de la parte imaginaria, $\overline{z_1} = -8 + 2i$; si cambia el signo de ambas partes sería su opuesto.

m) Falsa, porque $z_1 \cdot z_2 = 13 \neq 10$.

Epígrafe 3.4 Resolución de ecuaciones en el dominio de los números complejos

1. a) $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$ b) $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$ c) $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$

d) $x_1 = -\dfrac{2}{3}$; $x_2 = 1$ e) $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{33}}{8}$ f) $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

g) $x_{1,2} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{11}}{2} i$ h) $2i$; $-2i$ i) $\pm i$

j) $x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}}$; $x_{3,4} = \pm\sqrt{\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}}$

k) $x_{1,2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$; $x_{3,4} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$

l) $x_{1,2} = \dfrac{3}{2} \pm \dfrac{\sqrt{11}}{2} i$ m) $x_{1,2} = \dfrac{1}{10} \pm \dfrac{\sqrt{19}}{2} i$ n) $x_{1,2} = 1 \pm 3i$

ñ) $x_1 = 1 - i$; $x_2 = -3 + i$ o) $x_1 = i$; $x_2 = 2 + 3i$

2. a) $x_{1,2} = \dfrac{-i \pm \sqrt{7}}{2}$ b) $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} i$ c) $x_{1,2} = -i$

d) $x_{1,2} = \pm 2 - i$ e) $x_{1,2} = 1 \pm 2i$ f) $x_{1,2} = \pm 2 + i$

4. a) $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{5}i$ b) $\dfrac{-2 \pm \sqrt{5}}{2}$ c) $z = -1 - i$ d) 21

5. a) $x_1 = \sqrt{3}i \quad x_2 = -\sqrt{3}i$

6. a) $-2 + i \cdot 2\sqrt{3}$ b) $x = \dfrac{1}{2} \quad y = -2$ c) $16 \operatorname{cis} 100°$ d) $-32768i$

7. **7.1** $x_1 = i \; ; \quad x_2 = -i$

7.2 a) 1 b) -2 c) $32 \operatorname{cis} 45°$

8. a) $(x+4)\left(x - \dfrac{1+\sqrt{31}}{4} i\right)\left(x - \dfrac{1-\sqrt{31}}{4} i\right)$

b) $(x+1)(x-3)\left(x - \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} i\right)\left(x - \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} i\right)$

9. a) grado: 3 b) grado: 1 c) grado: 7 d) grado: 5

10. a) P(1) = –1 ; P(–1) = 9 ; $P\left(\dfrac{1}{9}\right) = 0$

11. a) P(–*i*) = *2* ; *P*(1 –*i*) = *1 – 8i* ; $P(-i) = 2$

12. a) $P(x) = x^3 + x^2 - 2x$ b) $P(x) = x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}$ c) $P(x) = x^3 + 3ix^2 - 3x - i$

d) $P(x) = x^4 + (i-2)x^3 + (1-2i)x^2 + ix$ e) $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

f) $P(x) = x^3 + (i-3)x^2 + (2-3i)x + 2i$ g) $P(x) = x^3 - 1$

13. a) $\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{2}{x-1}$ b) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x+3}$ c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-4} - \dfrac{2}{x+2}$ e) $\dfrac{3}{2(x+5)} + \dfrac{3}{2(x+5)}$

Ejercicios del capítulo

1. A- b); B- d); C- a)

2. a) V, porque $x + iy + x - iy = 2x$.

b) F, porque su afijo es (0,–4) se encuentra en el eje *y*, entre el III C y IV C.

c) F, porque los valores que satisfacen a la ecuación son $x = -2$ y $y = -2$.

d) V, porque el dominio más amplio es el de los complejos y todos los números estudiados pertenecen a este dominio.

3. a) $4{,}2 - 6{,}7i$ b) $-11{,}9 - 8{,}15i$ c) $-0{,}420 - 2{,}59i$

d) $2{,}38 + 11{,}7i$ e) $1{,}69 - 1{,}42i$ f) $-38{,}3 + 40{,}7i$

g) $5{,}46 \text{ cis}(-87°)$ h) $-3{,}45 \text{ cis} \dfrac{4\pi}{3}$ i) $2{,}13 \text{ cis } 35°$

j) $-2 - 4i$; k) $-7 - 64i$; l) $6{,}12 - 1{,}94i$;

4. a) $x = 3$; $y = 3$ b) $x = 3$; $y = 5$ c) $x = y = 0$

d) $x = \dfrac{9}{5}$; $y = -\dfrac{27}{5}$ e) No existen f) $x = 1$; $y = 3$;

g) $x = 3$; $y = 2$ h) $x = 2$; $y = 1$ i) $x = 0$; $y \pm 2$

j) $x = \pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}}$; $y = \dfrac{1}{2x}$ k) $x = -\dfrac{1}{2}$; $y = 0$ l) $x = \pm\dfrac{3\sqrt{13}}{130}$; $y = -12x$

m) Infinitas soluciones $-4 \le x \le 4$

n) $x = 1 + \sqrt{3}$; $y = -\sqrt{3}$ $x = 1 - \sqrt{3}$; $y = \sqrt{3}$

6. $a = -\dfrac{1}{2}$.

7*. a) $\Re(w) = \dfrac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 2\Re(z) + 1}$; $\Im(w) = \dfrac{2\Im(z)}{|z|^2 + 2\Re(z) + 1}$.

9. a) $2\text{ cis}\dfrac{\pi}{12}$; $2\text{ cis}\dfrac{3\pi}{4}$; $2\text{ cis}\dfrac{17\pi}{12}$

b) $\sqrt{2}\text{ cis}\dfrac{7\pi}{20}$; $\sqrt{2}\text{ cis}\dfrac{17\pi}{20}$; $\sqrt{2}\text{ cis}\dfrac{23\pi}{20}$; $\sqrt{2}\text{ cis}\dfrac{37\pi}{4}$; $\sqrt{2}\text{ cis}\dfrac{39\pi}{20}$

c) $\sqrt[8]{2}\text{ cis}\dfrac{\pi}{16}$; $\sqrt[8]{2}\text{ cis}\dfrac{9\pi}{16}$; $\sqrt[8]{2}\text{ cis}\dfrac{17\pi}{16}$; $\sqrt[8]{2}\text{ cis}\dfrac{25\pi}{16}$

10. $z_1 = \dfrac{6a(1+ia)}{1+a^2}$; $z_2 = \dfrac{6(a-i)}{1+a^2}$; $a \in \mathbb{R}^*$.

Ejemplos: $z_1 = 3+3i$; $z_2 = 3-3i$ o $z_1 = 3-3i$; $z_2 = -3-3i$

11. $z_1 = 2 + 2{,}73i$; $z_2 = -0{,}73 - 0{,}73i$ *o* $z_1 = 2 - 0{,}73i$; $z_2 = 2{,}73 + 2{,}73i$.

12. S = 1.

13. a) $\Re(z) = -2$; $\Im(z) = 10$

b) $\Re(z) = 0$; $\Im(z) = 1$

c) $\Re(z) = -1\dfrac{10}{17}$; $\Im(z) = -\dfrac{11}{17}$

14. a) $-8 + i$ *y* $22 + \sqrt{3}i$

16. $\rho = 2$; $\theta_1 = \dfrac{\pi}{9} = 20°$

17. $\sqrt[8]{24}\text{cis } 60°$; $\sqrt[8]{24}\text{ cis } 150°$; $\sqrt[8]{24}\text{cis } 240°$; $\sqrt[8]{24}\text{cis } 300°$

18. $-4 + 8\sqrt{2}i$ y $-4 + 8\sqrt{2}i$. Longitud: $d = 12$.

19. a) hipérbola b) circunferencia c) circunferencia

d) dos puntos e) hipérbola f) hipérbola g) elipse

20. a) $\sqrt[6]{12}\text{ cis}\left(10° + \dfrac{2k\pi}{3}\right)$; $k = 0; 1; 2$

b) $\sqrt{10}\text{ cis } 75°$ y $\sqrt{10}\text{ cis } 195°$

21. Los números que representan los vértices restantes son:

$z_1 = 1 + 3i$; $z_2 = 3 + i$ y $z_3 = -1 + i$. La longitud de la diagonal es 4,0 u.

24. Los afijos de estos números están sobre una recta paralela al eje real que interseca el eje imaginario en $\frac{1}{2}$.

26. $n = -\frac{35}{3}$

27. a) $a = \frac{17}{6}$; $b = \frac{7}{6}$ b) $(x - 4i)\ (x + 1 + i)(x - 1)$

28. a) $(0;7)$ b) $(-6;1)$ c) $(6;-1)$ d) $(0;7)$ e) $(6;-1)$

29. a) $z_{1,2} = \pm\, i,\ z_{3,4} = \pm 2i$ b) $z_1 = -1$; $z_{2,3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{3i}{2}$

30.

30.1

a) Verdadera.

b) Falsa, porque la parte real del número complejo $\sqrt{2}\ \text{cis}\,\frac{3\pi}{4}$ es $\sqrt{2}\ \cos\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1,\ -1 \neq -\frac{1}{2}$.

c) Verdadera. $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$.

d) Verdadera. Los polinomios en una variable compleja de grado n impar y coeficientes reales, tienen al menos una solución real.

e) Verdadera.

f) Falsa, porque el número complejo $z = 2\ \text{cis}\,\frac{3\pi}{2}$ tiene como argumento el ángulo axial $\frac{3\pi}{2}$, lo que representa un número imaginario negativo, luego su afijo tiene la forma $(0;b)$; en este caso $(0;-2)$.

g) Verdadera.

h) Verdadera.

i) Verdadera.

30.2: **30.2.1** c) **30.2.2** d) **30.2.3** b) **30.2.4** a) **30.2.5** b)

30.3: 30.3.1

a) 11 b) 7 c) $25i$ d) $|z_3| = \sqrt{6}$ y $, = \frac{\pi}{4}$ e) $1\frac{5}{13} + \frac{1}{13}i$

f) Imaginario o imaginario puro

g) En el cuarto cuadrante h) tercer cuadrante i) $p = -1;\quad q = 1\frac{1}{3}$

j) $z_1 = \sqrt{13}\,\text{cis}\,303{,}7°$ k) $z_5 = -6 + 6\sqrt{3}\,i$ l) $(z_1)^4 = -119 + 120i$

m) $z_0 = \sqrt[12]{6}\,\text{cis}\,7{,}5°$, $z_1 = \sqrt[12]{6}\,\text{cis}\,67{,}5°$, $z_2 = \sqrt[12]{6}\,\text{cis}\,127{,}5°$, $z_3 = \sqrt[12]{6}\,\text{cis}\,187{,}5°$

$z_4 = \sqrt[12]{6}\,\text{cis}\,247{,}5°$, $z_5 = \sqrt[12]{6}\,\text{cis}\,307{,}5°$ n) hexágono regular

ñ) $9\,\text{cis}\,135°$ o) $\sqrt{10}$

31. a) $x_{1,2} = 3 \pm i$ b) $z_1 = 3i \quad z_2 = -i$; c) $z_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

d) $x_1 = 1$; $x_2 = 2i$; $x_3 = -i$

32. $x = 16$; $y = 7$ **33.** a) $x = -2$ b) $x = 4{,}5$

34.

34.1 a) Real (resistencia pura)

b) Imaginario puro (reactancia capacitiva)

c) Complejo (combinada) (no es real ni imaginario puro)

d) Real (valor cero)

e) Real (parte imaginaria es cero)

34.2 a) 5 b) 3 c) 5 d) 0 e) 4

Autoevaluación

8. a) $\frac{\pi}{4}$ b) $2\sqrt{2}\ \text{cis}30°$

9. $V = 8 - i$ voltios

10.

10.1 Parte real: corresponde a la componente en fase con la referencia.

Parte imaginaria: corresponde con la componente en cuadratura (desfasaje 90º).

Ángulo de fase: indica el desfasaje entre la señal y la referencia (usualmente la tensión de entrada).

10.2 $|z| = \sqrt{2}$ y el ángulo de fase es $\theta = 45°$.

10.3 a) Si $\theta > 0°$ la corriente se atrasa respecto a la tensión (comportamiento inductivo).

Si $\theta < 0°$ la corriente se adelanta (comportamiento capacitivo).

Si $\theta = 0°$ la corriente y la tensión están en fase (comportamiento resistivo puro).

Como la parte imaginaria es $b = 1 > 0$, lo que indica "reactancia inductiva". En circuitos inductivos, la corriente se atrasa respecto a la tensión. Por tanto, el circuito con $z = 1 + i$ tiene un comportamiento inductivo.

10.4 La Potencia activa: P, $P = V \cdot I \cdot \cos\theta$ $(\cos 45° > 0)$.

El factor de potencia ($\cos\theta$): $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$. Es positiva P, lo que significa que el circuito "consume" energía real "potencia" (convertida en calor o trabajo) debido a la componente imaginaria de z.

La Potencia reactiva: Q, $Q = V \cdot I \cdot \operatorname{sen}\theta \quad (\operatorname{sen}45° > 0)$.

Aunque Q no "consume" (es energía oscilante), la existencia de $P > 0$ confirma un consumo neto de potencia.

Conclusiones. El ángulo de fase de $z = 1 + i$ en un circuito AC, indica:

- Un desfasaje de corriente-tensión de 45° (corriente atrasada).
- Un factor de potencia de $0,707$ (ni totalmente resistivo ni puramente reactivo).
- La presencia de efectos inductivos y resistivos combinados.

10.5 El ángulo de fase de 45° en un circuito AC indica un desfasaje entre corriente y tensión, afectando la potencia reactiva y el factor de potencia del circuito.

Balance resistivo-reactivo: $\tan 45° = 1 = \dfrac{Reactancia}{Resistencia} = 1$. Indica que la resistencia y la reactancia son iguales $R = X$.

Comportamiento: Dominio inductivo si $X > 0$.

Factor de potencia: $\cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$. Solo el 70,7% de la potencia aparente es útil (activa).

Implicaciones:

– Circuito con pérdidas moderadas de energía.

– Presencia de elementos inductivos.

Conclusiones: El ángulo de fase de 45° en un circuito AC indica $R = X$ y un comportamiento inductivo, con factor de potencia 0,707.

11. a) $z_{Total} = (5+1) + (3-2)i = 6 + i$ b) $|z_{Total}| = |6+i| = \sqrt{6^2 + 1^1} = \sqrt{37}$

c) $\tan\theta = \frac{1}{6}$, $\theta \approx 9{,}46°$ d) $V = z \cdot I$ $|I| = \frac{V}{|z_{Total}|}$; $|I| = \frac{20}{\sqrt{37}} \approx 3{,}28\,\text{A}$

Capítulo 4

Epígrafe 4.1 Geometría sintética del espacio

Repaso y profundización de Geometría plana

3.

a) Verdadera.

b) Falsa, porque para que sea distancia, el segmento tiene que ser perpendicular a la recta.

c) Falsa, porque por cada punto del plano se pueden trazar exactamente una paralela y una perpendicular.

d) Falsa, porque si un ángulo es agudo y el otro es obtuso, la suma es 180°.

e) Verdadera.

f) Verdadera.

g) Verdadera.

h) Falsa, porque en un triángulo obtusángulo solo la altura relativa al mayor de los lados queda interior al triángulo, las otras dos alturas son exteriores a este.

i) Verdadera.

j) Es falsa, porque si la recta tiene solo un punto en común con la circunferencia, es tangente; para que sea secante tiene que tener dos puntos comunes a la circunferencia.

k) Verdadera.

l) Falso, porque el rectángulo general (no es cuadrado) es un paralelogramo y no tiene sus diagonales perpendiculares.

m) Falsa, no necesariamente porque puede ser un rombo.

n) Verdadera.

o) Falso, porque la razón entre las semidiagonales mayor y menor es 2, $\tan\alpha = 2$ y $\alpha \neq 30°, 60°$.

p) Falsa, porque el área de todo polígono regular se determina como el producto del semiperímertro del polígono por la apotema de este, es decir; $A = \frac{Pa}{2}$.

4.

a) Porque el triángulo es rectángulo en C, luego $\overline{AC} \perp \overline{BC}$.

b) Porque el ángulo $\alpha = 45°$ y por suma de ángulos interiores, el otro ángulo interior $\beta = 45°$, luego los lados que se oponen a estos ángulo también son iguales.

c) Por ser un triángulo isósceles y rectángulo.

d) Como se conoce que $b = 4{,}0\,\text{cm}$, se puede aplicar el Teorema de Pitágoras $c^2 = a^2 + b^2$ o razones trigonométricas.

e) En un triángulo rectángulo sus dos catetos son bases y alturas, luego el área sería el semiproducto de las longitudes de sus catetos, es decir; $A_{\Delta ACB} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}{2}$.

5. Rosa y Emma

6. a) $\sphericalangle QCB = 60°$; $A_{\Delta ABC} = 9\sqrt{3}\ \text{cm}^2 \approx 16\ \text{cm}^2$; $A_{NPQC} = \frac{27\sqrt{3}}{4} \approx 12\ \text{cm}^2$

7.

7.1 ΔNCM y ΔCAB son triángulos rectángulos en C y A respectivamente.

7.2 a) $\sphericalangle MNC = 26{,}6^\circ$ b) $\overline{FC} = 4{,}0$ cm c) $A_{\Delta CAB} \approx 24$ cm^2 ;

$A_{\Delta CON} = 10$ cm^2

7.3 Si, $\overline{OC}$ es mediana del ΔCMN luego divide a este en dos triángulos de iguales áreas.

8. b) 50 dm

9.

b) El área sombreada es aproximadamente 11,3 dm^2.

c) El perímetro del cuadrilátero $DEBC$ es aproximadamente 31,3 dm.

10. b) El perímetro del área sombreada 12 dm.

Relaciones entre rectas en el espacio

15. Porque las 4 patas no están en el mismo plano.

16. Si los hilos se intersecan en un punto.

17. No necesariamente, pueden ser alabeadas.

18. 3 planos.

19. 35 planos. **20.** 1 140; $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

21. Uno o tres planos.

22. Seis planos.

23. Dos planos.

24. Uno o tres planos.

Rectas y Planos

30. No necesariamente, pueden cortarse o cruzarse.

31. Infinitas. **32.** El plano es paralelo a la otra recta. **33.** Solo uno.

34. Sí puede ser paralela a dos rectas contenidas en ese plano; a infinitas rectas contenidas en el plano. **35.** A infinitas rectas contenidas en ese plano.

36. 9,0 cm **37.** 14,1 cm **38.** 60° **39.** 10 dm **40.** 18 cm; 6,0 cm

41. 9,0 cm **42.** b) $\overline{PC} = 6{,}4$ cm **44.** c) $A_{FBE} = 3{,}4\ dm^2$; $V_{FBE} = 3{,}0\ dm^3$

45. a) Es paralela d) $V \approx 1{,}1 \cdot 10^2\ cm^3$ o $\approx 0{,}11\ dm^3$; $P_{BMHE} \approx 21$ cm

46.1. a) $VC = 301\ cm^3$; $V_{OMNS} = V_{CMNS} = 20{,}8\ cm^3$ b) $A_T = 285\ cm^2$

47.2 $V = 1{,}3\ dm^3$

48. b) $V \approx 5{,}3\ dm^3$

49. b) $V = 93\ cm^3$ c) $A_T = 1{,}8\ dm^2$

50.1 a) $A_{\Delta OCF} = 65\ cm^2$; $A_{ACGE} = 2{,}1\ dm^2$ b) $V = 1{,}8\ dm^3$; $A_T = 9{,}0\ dm^2$

51. a) $\overline{BC}$ o $\overline{DC}$ c) $V_{pirámide} \approx 0{,}13\,dm^3$ o $V_{pirámide} \approx 1{,}3 \cdot 10^2\ cm^3$

52. c) $V_{prisma} \approx 0{,}72\,dm^3$ o $\approx 7{,}2 \cdot 10^2\ cm^3$

53. c) $V(prisma) \approx 28\ cm^3$

54. c) $V(pirámide\ ABEGC) = 90\,cm^3$

55. b) El valor del área total del cono es aproximadamente igual a $452\,cm^2$

56. a) $R = 3{,}0\,cm$ b) $A_{desecha} \approx 28\,cm^3$ c) $A_{Tcuerpo} \approx 1{,}6\,dm^2 \approx 1{,}6 \cdot 10^2\ cm^2$

Epígrafe 4.2 Geometría analítica del espacio

2. $A(4;0;0)$, $B(4;4;0)$, $C(0;4;0)$, $D(0;0;0)$, $E(0;0;4)$, $F(4;0;4)$, $G(4;4;4)$, $H(0;4;4)$

3. (–1;5;2), (3;5;6), (–1;5;6), (–1;1;6)

5. $\frac{9}{2}$

6. (0;0;0), (2;0;0), (2;3;0), (0;3;0), (0;3;3), (0;0;3), (2;0;3), 18 u^3

7. a) 6,16 u b) 7,00 u c) 8,83 u d) 5,83 u e) 3,74 u

8. $P_{\Delta ABC} \approx 18{,}6\,\text{u}$ y $A_{\Delta ABC} \approx 9{,}70\,\text{u}^2$

8.1 $M_{AB}(5;5;0{,}5)$, $M_{BC}(2;3{,}5;1{,}5)$ y $M_{AC}(1;4{,}5;2)$

9. Al plano *xy*: 2; al plano *yz*: 3; al plano *xz*: 1; al eje *x*: 2,24; al eje *y*: 3,61; al eje *z*: 3,16 u

10. $A_{\Delta ABC} \approx 16{,}2\ \text{u}^2$.

10.1 La longitud de la paralela media relativa a la hipotenusa es aproximadamente igual a 4,72 u.

11. Al plano *xy*: 3,0 u; al plano *xz*: 5,0 u; al plano *yz*: 2,0 u; al origen: 6,16 u.

14. b) $\frac{250\sqrt{2}}{3} = 118$

15. a) $\left(3{,}5;1{,}5;\frac{7\sqrt{2}}{2}\right), \left(3{,}5;1{,}5;\frac{-3\sqrt{2}}{2}\right)$ b) 86,5 u^2

16. $A(-9;-1;1)$ y $B(6;8;1)$

17. a) (2;2;0), (2;0;2), (4;2;2), (2;2;4), (2;4;2), (0;2;2) b) $2\sqrt{2}$ u $\approx$ 2,82 u

18. a) Al plano *xy*: $A'(2;3;-1)$; $B'(5;-3;-2)$; $C'(-3;2;1)$; $D'(a;b;-c)$

b) Al plano *xz*: $A'(2;-3;1)$; $B'(5;\ 3;2)$; $C'(-3;-2;-1)$; $D'(a;-b;c)$;

c) Al plano *yz*; $A'(-2;3;1)$; $B'(-5;-3;2)$; $C'(3;2;-1)$; $D'(-a;b;c)$

d) Al eje *x*: $A'(2;-3;-1)$; $B'(5;3;-2)$; $C'(-3;-2;1)$; $D'(a;-b;-c)$

e) Al eje *y*; $A'(-2;3;-1)$; $B'(-5;-3;-2)$; $C'(3;2;1)$; $D'(-a;b;-c)$

f) Al eje *z*: $A'(-2;-3;1)$; $B'(-5;3; 2)$; $C'(3;-2;-1)$; $D'(-a;-b;-c)$

19. a) En la vista gráfica 3D del GeoGebra:

- Trazar las rectas $l_{\_1}$ y $l_{\_2}$, una vez introducidos los pares de puntos que pertenecen a cada recta.
- Verificar si es posible determinar un plano con esas dos rectas.

Es posible determinar un único plano, pues las rectas son paralelas.

b) Podemos representarlo en el GeoGebra directamente y tenemos que se cortan en el punto de coordenadas $\left(-1,25;-4,25;\frac{3}{4}\right)$.

c) El valor del volumen es aproximadamente igual a $\left(-1,25;-4,25;\frac{3}{4}\right)$.

Ejercicios del Capítulo

1. a) En ambas b) En planimetría c) En planimetría d) En ambas;

e) En planimetría f) En estereometría.

2. 10 cm

3.1 a) $A_{BNDM} = 3{,}23\ dm^2$; $\sphericalangle NOC = 26{,}5°$ b) $V = 0{,}288\ dm^3$; $A = 4{,}07\ dm^2$

4.1 a) $\approx 14{,}1\ cm$ b) $\approx 7{,}05\ cm$ c) $121\ cm^2$; $58{,}8\ cm^3$

5. b) $443\ cm^3$ c) $128\ cm^2$ d) $37{,}7°$

6.1 a) $V \approx 0{,}50\ dm^3$; $A_T \approx 4{,}9\ dm^2$.

7. b) $\approx 5{,}6\ cm$ c) $45°$

8.1 a) $V = 18\ cm^3$; $A_T = 65\ cm^2$ b) $\sphericalangle COD = 73{,}3°$

9. b) $30°$

10. a) $\overline{AG}$, $\overline{BG}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$, $\overline{EF}$ o $\overline{GF}$ c) $48\,dm^3$

11. c) $\approx 48{,}2°$ d) $\approx 9{,}0\ cm^2$

12. ≈ 14 cm; $60°$

13. 8,4 cm

14. a) $60°$ b) $0{,}25\ m^3$

15. b.1) $50{,}0\ cm^2$; $758\ cm^3$ b.2) $240\ cm^3$

16. $V = \dfrac{\sqrt{3}}{8}h^3$

17. $\approx 31\ m^2$; $\approx 13\ m^3$

18. $1{,}38 \cdot 10^2\ m^2$

20. No; $1\frac{1}{3}\ u^3$

21. (1;5;0), (5;5;0), (1;1;8), (5;1;8), (1;5;8)

22. **22.1** 4,0u

23. $31{,}1\ u^2$ **23.1** $\left(\dfrac{16}{3};\dfrac{4}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$

24. plano *xy*: 4; plano xz: 3; plano *yz*: 2; eje *x*: 5; eje *y*: 4,47; eje *z*: 3,61

25. a) $A'(4;3;0)$, $B'(-3;2;0)$, $C'(2;-3;0)$, $D'(0;0;0)$

b) $A'(4;0;5)$, $B'(-3;0;1)$, $C'(2;0;0)$, $D'(0;0;-3)$

c) $A'(0;3;5)$, $B'(0;2;1)$, $C'(0;-3;0)$, $D'(0;0;-3)$

d) $A'(4;0;0)$, $B'(-3;0;0)$, $C'(2;0;0)$, $D'(0;0;0)$

e) $A'(0;3;0)$, $B'(0;2;0)$, $C'(0;-3;0)$, $D'(0;0;0)$

f) $A'(0;0;5)$, $B'(0;0;1)$, $C'(0;0;0)$, $D'(0;0;-3)$

26.

a) Distancia entre las columnas $A(3;5;0)$ y $B(7;1;0)$

La distancia d entre dos puntos en el espacio 3D se calcula con la fórmula:

$$\overline{BA}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

$$\overline{BA}=\sqrt{(7-3)^2+(1-5)^2+(0-0)^2}=\sqrt{4^2+(-4)^2+0^2}=\sqrt{2\cdot 4^2}=4\sqrt{2}\text{ m}$$

Respuesta: la distancia entre las columnas A y B es $4\sqrt{2}$ m.

b) Punto medio entre $C(0;4;3)$ y $D(4;8;3)$:

El punto medio M se calcula como: $M\left(\frac{x_D+x_C}{2};\frac{y_D+y_C}{2};\frac{z_D+z_C}{2}\right)$ Sustituyendo las coordenadas de C y D:

$$M\left(\frac{4+0}{2};\frac{8+4}{2};\frac{3+3}{2}\right)=M(2;6;3)$$

Respuesta: Las coordenadas del punto medio son $(2;6;3)$.

c) Verificar si los puntos $C(0;4;3)$, $D(4;8;3)$, $E(1;2;3)$ y $F(5;10;3)$ pertenecen al mismo plano:

Observamos que todos los puntos tienen la misma coordenada $z=3$. Esto significa que todos están en el plano horizontal definido por $z=3$. Por lo tanto, son coplanares.

Conclusión: Los puntos $C(0;4;3)$, $D(4;8;3)$, $E(1;2;3)$ y $F(5;10;3)$ pertenecen al mismo plano.

Si no se hubiera notado que todos los puntos comparten la misma coordenada, podríamos haber usado la siguiente estrategia

Se determina la ecuación del plano. Supongamos que los puntos C, D, E definen un plano. Para verificar si F está en ese plano, sustituimos sus coordenadas en la ecuación del plano.

Sin embargo, dado que los cuatro puntos tienen $z = 3$, es evidente que todos están en el plano $z = 3$. Como z es constante para todos los puntos, no hay variación en la tercera dimensión, lo que confirma que son coplanares.

27.

– Posición del avión $P(120; 80; 10)$ km y la posición del avión

$Q(90; 120; 12)$ km

a) La distancia entre los dos aviones en el espacio se calcula con la fórmula:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{(90-120)^2 + (120-80)^2 + (12-10)^2} = \sqrt{(-30)^2 + 40^2 + 2^2}$$
$$= \sqrt{900 + 1\,600 + 4} = \sqrt{2\,504} \approx 50{,}04 \text{ km}$$

Respuesta: la distancia entre los aviones en el momento en que se toman las posiciones es aproximadamente 50,04 km.

b) Las coordenadas del punto medio M entre los aviones P y Q se calcula como: $M\left(\dfrac{x_Q + x_P}{2}; \dfrac{y_Q + y_P}{2}; \dfrac{z_Q + z_P}{2}\right)$ Sustituyendo las coordenadas de P y Q:

$$M\left(\frac{90+120}{2}; \frac{120+80}{2}; \frac{12+10}{2}\right) = M\left(\frac{210}{2}; \frac{200}{2}; \frac{22}{2}\right) = M(105; 100; 11)$$

Conclusión: las coordenadas del punto medio entre los aviones es $(105; 100; 11)$ km.

c) Para verificar si la ruta (recta que une P y Q) está contenida en el plano $2x - 3y + 4z = 50$, ambos puntos deben satisfacer la ecuación del plano.

1. Para el punto

$P(120; 80; 10)$: $2(120) - 3(80) + 4(10) = 240 - 240 + 40 = 40 \neq 50$

Para el punto

$Q(90;120;12)$: $2(90)-3(120)+4(12)=180-360+48=-132\neq 50$

Como ninguno de los puntos satisface la ecuación del plano, la ruta no está contenida en él.

Respuesta: la ruta de los aviones P y Q no está contenida en el plano determinado por la ecuación $2x-3y+4z=50$.

28.

a) La distancia entre los satélites S_1 y S_2 se calcula con la fórmula:

$\overline{S_1S_2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ Sustituyendo los valores:

$$\overline{PQ}=\sqrt{(-3-2)^2+(5+1)^2+(7-4)^2}=\sqrt{(-5)^2+6^2+3^2}=\sqrt{25+36+9}=\sqrt{70}$$

$\approx 8{,}37$ mil km

Respuesta: la distancia entre los dos satélites es aproximadamente 8 370 km.

b) Las coordenadas del punto medio M entre los satélites S_1 y S_2 para instalar un repetidor se calcula como:

$M\left(\frac{x_2+x_1}{2};\frac{y_2+y_1}{2};\frac{z_2+z_1}{2}\right)$ Sustituyendo las coordenadas de S_1 y S_2:

$$M\left(\frac{-3+2}{2};\frac{5-1}{2};\frac{7+4}{2}\right)=M\left(-\frac{1}{2};\frac{4}{2};\frac{11}{2}\right)=M(0{,}5;2;5{,}5)$$

Conclusión: para que el repetidor esté en el punto medio entre los satélites S_1 y S_2 tiene que estar en las coordenadas $(0{,}5;2;5{,}5)$ miles de kilómetros.

c) Para verificar si los puntos $S_1(2;-1;4)$, $S_2(-3;5;7)$ y la Tierra (origen $(0;0;0)$) y una estrella $E(1;2;-2)$ son coplanares usamos la condición de volumen del tetraedro:

$$V_{Tetraedro} = \frac{1}{6}\left|x_1\left(y_2 z_e - y_e z_2\right) - y_1\left(x_2 z_e - y_e z_2\right) + z_1\left(x_2 y_e - x_e y_2\right)\right|$$

$$x_1\left(y_2 z_e - y_e z_2\right): 2\left[5(-2) - 2\cdot 7\right] = 2(-10-14) = -48$$

$$y_1\left(x_2 z_e - y_e z_2\right):\ -(-1)\left[-3(-2) - 1\cdot 7\right] = 1(6-7) = -1$$

$$z_1\left(x_2 y_e - x_e y_2\right): 4\left[-3(2) - 1\cdot 5\right] = 4(-6-5) = -44$$

Suma: $-48 - 1 - 44 = 93$

$$V_{Tetraedro} = \frac{1}{6}\cdot 93 \neq 0$$

Respuesta: no son coplanares porque el volumen del tetraedro no es cero.

29.

a) Distancia sensor-tumor:

$\overline{MT} = \sqrt{\left(x_T - x_M\right)^2 + \left(y_T - y_M\right)^2 + \left(z_T - z_M\right)^2}$ Sustituyendo los valores:

$$\overline{MT} = \sqrt{(1-5)^2 + (3-(-2))^2 + (4-8)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (5)^2 + (-4)^2}$$
$$= \sqrt{16+25+16} = \sqrt{57}\ \text{cm}$$

Respuesta: la distancia entre el sensor y el tumos es de $\sqrt{57}$ cm.

b) Punto medio para biopsia:

Punto medio entre $T(5;-2;8)$ y $M(1;3;4)$

$Q\left(\frac{x_T + x_M}{2};\frac{y_T + y_M}{2};\frac{z_T + z_M}{2}\right)$ Sustituyendo las coordenadas de T y M:

$$Q\left(\frac{5+1}{2};\frac{-2+3}{2};\frac{8+4}{2}\right) = Q\left(3;\frac{1}{2};6\right) = Q(3;0{,}5;6)$$

Respuesta: las coordenadas del punto medio entre las posiciones T y M es $(3;0{,}5;6)$ cm.

c) Plano quirúrgico con T, M, $N(2;0;6)$, $P(3;1;5)$:

Para que los 4 puntos definan un plano, la ecuación siguiente debe ser consistente para todos los puntos:

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

Tomamos $T(5;-2;8)$ como punto base y verificamos si *M, N, P* satisfacen la misma ecuación.

1. Vector normal implícito:

– Usamos *T, M, N* para encontrar a, b, c:

– *M*: $a(1-5)+b(3-(-2))+c(4-8)=-4a+5b-4c=0$

– *N*: $a(2-5)+b(0-(-2))+c(6-8)=-3a+2b-2c=0$

– Resolviendo el sistema:

– De $-4a+5b-4c=0$ y $-3a+2b-2c=0$, obtenemos

$a=2k$, $b=-2k$, $c=-4{,}5k$.

2. Verificación para $P(3;1;5)$:

– Sustituyendo en la ecuación:

$2(3-5)-2(1-(-2))-4{,}5(5-8)=-4-6+13{,}5=3{,}5\neq 0$

Respuesta: los puntos no definen un plano (no son coplanares).

Nota: En este problema el inciso c, aunque no usamos matrices explícitas, la verificación de coplanaridad requiere resolver un sistema de ecuaciones, que es conceptualmente similar al método del determinante, pero expresado de manera algebraica.

30.

a) Distancia entre E_1 y E_2:

Las coordenadas de las posiciones de los sismos son $E_1(2;3;-5)$ y $E_2(4;-1;-3)$

La fórmula de la distancia entre dos puntos

$\overline{E_1E_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ Sustituyendo los valores:

$\overline{MT} = \sqrt{(4-2)^2 + (-1-3)^2 + (-3-(-5))^2} = \sqrt{(2)^2 + (-4)^2 + (2)^2}$

$= \sqrt{4+16+4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ km

Respuesta: la distancia entre las posiciones de los sismos entre E_1 y E_2 es $2\sqrt{6}$ km.

b) Punto medio entre la posición del sismo E_3 y el volcán V:

Las coordenadas son $E_3(-2; 5; -7)$ y $V(1; 2; -4)$

El punto medio M se calcula como el promedio de las coordenadas $M\left(\frac{x_V + x_3}{2}; \frac{y_V + y_3}{2}; \frac{z_V + z_3}{2}\right)$ Sustituyendo las coordenadas de T y M:

$$M\left(\frac{1-2}{2}; \frac{2+5}{2}; \frac{-4-7}{2}\right) = M\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}; -\frac{11}{2}\right) = M(-0{,}5; 3{,}5; -5{,}5)$$

Respuesta: El punto medio es $M(-0{,}5; 3{,}5; -5{,}5)$

c) Determinar si E_1, E_2, E_3 y V están alineados o en un mismo plano:

Para verificar si están alineados, calculamos las pendientes o razones entre las diferencias de coordenadas. Primero, verificamos si E_1, E_2 y E_3 están alineados:

1. Diferencias entre E_1 y E_2

$\Delta x_{12} = x_2 - x_1\ \Delta x_{12} = 4 - 2 = 2$

$\Delta y_{12} = y_2 - y_1\ \Delta y_{12} = -1 - 3 = -4$

$\Delta z_{12} = z_2 - z_1\ \Delta z_{12} = -3 - (-5) = 2$

2. Diferencias entre E_1 y E_3

$\Delta x_{13} = x_3 - x_1\ \Delta x_{13} = -2 - 2 = -4$

$\Delta y_{13} = y_3 - y_1 \Delta y_{13} = 5 - 3 = 2$

$\Delta z_{13} = z_3 - z_1 \Delta z_{13} = -7 - (-5) = -2$

3. Verificación de proporcionalidad:

$$\frac{\Delta x_{12}}{\Delta x_{13}} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$
$$\frac{\Delta y_{12}}{\Delta y_{13}} = \frac{-4}{2} = -2$$
$$\frac{\Delta z_{12}}{\Delta z_{13}} = \frac{2}{-2} = -1$$

Las razones no son iguales, por lo que E_1, E_2 y E_3 no están alineados.

4. Verificación si V está en el mismo plano que E_1, E_2 y E_3:

Usamos la ecuación del plano generado por E_1, E_2 y E_3. La ecuación general de un plano es tiene la forma $ax + by + cz + d = 0$.

Sustituimos las coordenadas de E_1, E_2 y E_3 para obtener un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2a + 3b - 5c + d = 0 \ (1) \\ 4a - b - 3c + d = 0 \ (2) \\ -2a + 5b - 7c + d = 0 \ (3) \end{cases}$$

Sustraemos (1) de (3) y obtenemos $a - 2b + c = 0$ (4)

De manera análoga sustraemos (1) de (2) y obtenemos

$-2a + b - c = 0$ (4)

De despejar a en la ecuación (4), tenemos que $a = 2b - c$ y la sustituimos en (5):

$-2(2b - c) + b - c = 0$

$-4b + 2c + b - c = 0$

$-3b + c = 0$ y $c = 3b$

Sustituimos $c = 3b$ en (4):

$$a = 2b - 3b = -b$$

Sustituimos $a = -b$ y $c = 3b$ en (1):

$$2(-b) + 3b - 5(3b) + d = 0$$

$$-2b + 3b - 15b + d = 0$$

$-14b + d = 0$ entonces $d = 14b$

La ecuación del plano es:

$-bx + by + 3bz + 14b = 0$ entonces $-x + y + 3z + 14 = 0$

Simplificando: $x - y - 3z - 14 = 0$

4. Verificación de V(1;2;–4):

Sustituimos en la ecuación del plano:

$$1 - 2 - 3(-4) - 14 = 1 - 2 + 12 - 14 = -3 \neq 0$$

Como no se cumple, V no está en el mismo plano que E_1, E_2 y E_3.

Respuesta: Los sismos E_1, E_2, E_3 y el volcán V no están alineados ni pertenecen a la misma falla plana.

Autoevaluación

5. c) 60 dm^3

6. b) $V = 5\,338$ $cm^3 \approx 5{,}3$ dm^3

7. **7.2** a) $V = 15$ dm^3 b) $\sphericalangle EDF = 54{,}5°$

8. a) ΔSPT es rectángulo en P b) $A_L \approx 9{,}0$ dm^2;

c) $V = 3\,129$ $cm^3 \approx 3{,}1$ dm^3

9. b) $V = 3\,705\text{ cm}^3 \approx 3{,}7\text{ dm}^3$

10. b) $144\pi\text{ dm}^2$

11. a) $8{,}0\text{cm}^3$ b) $\frac{1}{8}$

12. (a;a;–a), (–a;–a;a), (a;–a;a), (–a;a;a)

13. a) 7,0 u b) 13 u c) 5,0 u

14. $d(O;A) = 6{,}0$ u ; $d(O;B) = 14$ u ; $d(O;C) = 13$ u ; $d(O;D) = 25$ u

17. a) (2;–1;–1), (–1;–2;2), (0;1;–2)

b) desde A está a 9,0 u, de B a $\sqrt{51} \approx 7{,}1$ u y desde C a $\sqrt{30} \approx 5{,}5$ u

18.

a) Verdadera.

b) Falsa, porque las ecuaciones son equivalentes, representan la misma recta y por una recta pasan infinitos planos.

18.3 1,0 u

Notas al capítulo 1

1. Te proponemos otra manera de determinar la ley de formación explícita de una sucesión.

   Sucesiones cuyo término general tiene la forma de una ecuación lineal

   $\{a_n\} = \{dn + e\}$ $(y = mx + n)$.

   Donde d es la diferencia entre dos términos consecutivos (la pendiente) (intersección en y) es el término anterior al primer término, es decir, $e = a_1 + (-)d$ (se sustrae si es creciente la sucesión)

Ejemplos:

$\{3;5;7;9;11;\ldots\}$	$\{6;11;16;21;26;\ldots\}$	Procedimiento
Variante I $\{dn+e\}$		
$d=\dfrac{a_2-a_1}{n_2-n_1}$ Para n = 1, y = 3 (1; 3) Para n = 2, y = 5 (2; 5) $d=\dfrac{5-3}{2-1}=\dfrac{2}{1}=2$ d = 2	$b=\dfrac{a_2-a_1}{n_2-n_1}$ Para n = 1, y = 6 (1; 6) Para n = 3, y = 16 (3; 16) $d=\dfrac{16-6}{3-1}=\dfrac{10}{2}=5$ d = 5	Determinación del valor de la pendiente d a partir de dos puntos: $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ $d=\dfrac{a_2-a_1}{n_2-n_1}$
$y = dn + e$ 3 = 2(1) + e 3 = 2 + e e = 1	$y = dn + e$ 16 = 5(3) + e 16 = 15 + e e = 1	Determinación del valor de e a partir de d y un punto:
$\{2n+1\}=\{3;5;7;9;11;\ldots\}$ o $\{a_n\}=\{2n+1\}$ para todo $n\in\mathbb{N}:n\geq 1$	$\{5n+1\}=\{6;11;16;21;26;\ldots\}$ o $\{a_n\}=\{5n+1\}$ para todo $n\in\mathbb{N}:n\geq 1$	Obtención del término general de la sucesión. $\{dn+e\}=\{a_1;a_2;a_3;\ldots;a_n;\ldots\}$ $\{a_n\}=\{dn+e\}$
Variante II $\{dn+e\}$		
$\{3;\ 5;\ 7;\ 9;\ 11;\ \ldots\}$ 2 2 2 2 $\rightarrow d$ d = 2	$\{6;\ 11;\ 16;\ 21;\ 26;\ \ldots\}$ 5 5 5 5 $\rightarrow d$ d = 5	Identificación de la diferencia d
$a_1=3$	$a_1=6$	Identificación del primer término a_1
e = 3 – 2 e = 1	e = 6 – 5 e = 1	Identificación del valor de e $e=a_1-d$
$\{2n+1\}=\{3;5;7;9;11;\ldots\}$ o $\{a_n\}=\{2n+1\}$ para todo $n\in\mathbb{N}:n\geq 1$	$\{5n+1\}=\{6;11;16;21;26;\ldots\}$ o $\{a_n\}=\{5n+1\}$ para todo $n\in\mathbb{N}:n\geq 1$	Obtención del término general de la sucesión. $\{dn+e\}=\{a_1;a_2;a_3;\ldots;a_n;\ldots\}$ $\{a_n\}=\{dn+e\}$

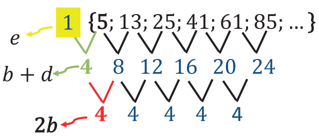
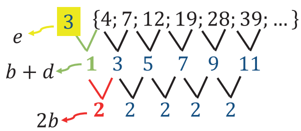
Para las sucesiones cuyo término general tiene la forma cuadrática:

$\{a_n\} = \{bn^2 + dn + e\}$ $\left(y = mx^2 + px + q\right)$ con $b + d + e = a_1$, $3b + d = d_1$, $2b = d_2$,

Donde, d_1 es la primera diferencia entre los dos primeros términos de la sucesión y d_2 la diferencia entre las diferencias anteriores.

Ejemplos:

$\{5;13;25;41;61;85;\ldots\}$	$\{4;7;12;19;28;39;\ldots\}$	**Procedimiento**
Variante I $\{a_n\} = \{bn^2 + dn + e\}$		
$\{5;\ 13;\ 25;\ 41;\ 61;\ 85;\ \ldots\}$ $d_1 \leftarrow 8 \quad 12 \quad 16 \quad 20 \quad 24$ $d_2 \leftarrow 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4$ $d_1 = 8$ y $d_2 = 4$	$\{4;\ 7;\ 12;\ 19;\ 28;\ 39;\ \ldots\}$ $d_1 \leftarrow 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad 11$ $d_2 \leftarrow 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2$ $d_1 = 3$ y $d_2 = 2$	Determinación de los valor d_1 y d_2
$2b = d_2$ $2b = 4$ $b = 2$	$2b = d_2$ $2b = 2$ $b = 1$	Determinación del valor de b
$3b + d = d_1$ $3(2) + d = 8$ $6 + d = 8$ $d = 2$	$3b + d = d_1$ $3(1) + d = 3$ $3 + d = 3$ $d = 0$	Determinación del valor de d
$a_1 = 5$	$a_1 = 4$	Identificación del primer término a_1
$b + d + e = a_1$ $2 + 2 + e = 5$ $4 + e = 5$ $e = 1$	$b + d + e = a_1$ $1 + 0 + e = 4$ $1 + e = 4$ $e = 3$	Determinación del valor de e

$\{2n^2+2n+1\}=$ $\{5;13;25;41;61;85;\ldots\}$ o $\{a_n\}=\{2n^2+2n+1\}$ para todo $n\in\mathbb{N}:n\geq 1$	$\{n^2+3\}=$ $\{4;7;12;19;28;39;\ldots\}$ o $\{a_n\}=\{2n^2+2n+1\}$ para todo $n\in\mathbb{N}:n\geq 1$	Obtención del término general de la sucesión. $\{bn^2+dn+e\}=$ $\{a_1;a_2;a_3;\ldots;a_n;\ldots\}$ o $\{a_n\}=\{bn^2+dn+e\}$ para todo $n\in\mathbb{N}:n\geq 1$
Variante II $\{bn^2+dn+e\}$		
		Identificación de la diferencia *d*. Determinación de diferencias entre cada término de la sucesión y entre las diferencias obtenidas, así como los valores anteriores al primer término y cada primera diferencia.
$e=1$ $2b=4$ $b=2$ $b+d=4$ $2+d=4$ $d=2$	$e=3$ $2b=2$ $b=1$ $b+d=1$ $1+d=1$ $d=0$	Determinación de los coeficientes b, d, e
$\{2n^2+2n+1\}=$ $\{5;13;25;41;61;85;\ldots\}$ o $\{a_n\}=\{2n^2+2n+1\}$ para todo $n\in\mathbb{N}:n\geq 1$	$\{n^2+3\}=$ $\{4;7;12;19;28;39;\ldots\}$ o $\{a_n\}=\{2n^2+2n+1\}$ para todo $n\in\mathbb{N}:n\geq 1$	Obtención del término general de la sucesión. $\{bn^2+dn+e\}=$ $\{a_1;a_2;a_3;\ldots;a_n;\ldots\}$ o $\{a_n\}=\{bn^2+dn+e\}$ para todo $n\in\mathbb{N}:n\geq 1$

Para sucesiones o progresiones aritméticas cuyo primer término se obtiene para $n = 0$

Demostrar que $a_n = dn + a_1$ permite obtener los términos de una sucesión aritmética para todo n natural, donde a_1 es el primer término y d la diferencia entre dos términos consecutivos (si la sucesión es decreciente $d < 0$).

Demostración:

Inicio o paso base de inducción (garantizar que para el primer elemento n de $\mathbb{N}$ se obtiene el primer término de la sucesión)

Para $n = 0$ se tiene $a_1 = d(0) + a_1 = 0 + a_1 = a_1$, $a_1 = a_1$ se cumple.

Hipótesis de inducción (suponer que para un número natural k cualquiera se obtiene un término de esa sucesión), es decir; $a_k = dk + a_1$

Tesis de inducción (de a_k se deduce que el sucesor $k+1$ es también un término de la sucesión) de donde resulta; $a_{k+1} = d(k+1) + a_1$

Demostración (partiendo de la suposición (hipótesis) a_k, debemos deducir la tesis (a_{k+1})

$a_k = dk + a_1$ (adicionando la diferencia$[d]$).

$a_{k+1} = dk + a_1 + d$

$a_{k+1} = dk + d + a_1 = d(k+1) + a_1$

$a_{k+1} = d(k+1) + a_1$

Conclusiones: Como $a_n = dn + a_1$ se cumple para $n = 0$, para un número natural cualquiera y su sucesor, entonces se cumple para todo n natural.

2. Te proponemos para calcular las sumas parciales hasta el n-ésimo término de una sucesión o progresión aritmética cuyo primer término se obtiene para $n = 0$

Demostrar que $S(n)=\dfrac{(n+1)(dn+2a_1)}{2}$ permite obtener las sumas parciales de los términos de una sucesión aritmética para todo n natural.

Donde a_1 es el primer término y d la diferencia entre dos términos consecutivos (si la sucesión es decreciente $d<0$).

Se puede planear como: $a_1+a_2+a_3+\ldots+dn+a_1=\dfrac{(n+1)(dn+2a_1)}{2}=S(n)$.

Demostración:

Inicio o paso base de inducción (garantizar que para el primer elemento n de $\mathbb{N}$ se obtiene el primer término de la sucesión)

Para $n=0$ se tiene

$$S(0)=\frac{(0+1)(d(0)+2a_1)}{2}=\frac{(1)(0+2a_1)}{2}=\frac{2a_1}{2}=a_1,\ \ a_1=a_1 \quad \text{se cumple.}$$

Hipótesis de inducción (suponer que para un número natural k cualquiera se obtiene la suma parcial de n-ésima de los términos de esa sucesión), es decir;

$$S(k)=\frac{(k+1)(dk+2a_1)}{2}$$

Tesis de inducción (de $S(k)$ se deduce que la suma hasta el sucesor $k+1$, también se calcula mediante la relación) de la cual resulta;

$$S(k+1)=\frac{[(k+1)+1][d(k+1)+2a_1]}{2}=\frac{(k+2)[d(k+1)+2a_1]}{2}=$$

$$\frac{=(k+2)(dk+d+2a_1)}{2}$$

Demostración (partiendo de la suposición (hipótesis) $S(k)$, deducir la tesis de inducción, $S(k+1)$

$$S(k)=\frac{(k+1)(dk+2a_1)}{2}$$ (adicionando el término sucesor $\left[a_{k+1}=d(k+1)+a_1\right]$).

$$S(k+1)=\frac{(k+1)(dk+2a_1)}{2}+d(k+1)+a_1$$

$$S(k+1)=\frac{(k+1)(dk+2a_1)+2d(k+1)+2a_1}{2}=$$
$$\frac{=dk^2+2a_1k+dk+2a_1+2dk+2d+2}{2}$$

$$S(k+1)=\frac{dk^2+2a_1k+dk+2dk+2d+4a_1}{2}=$$
$$\frac{=\left(dk^2+2dk\right)+(dk+2d)+(2a_1k+4}{2}$$

$$S(k+1)=\frac{dk(k+2)+d(k+2)+2a_1(k+2)}{2}=\frac{(k+2)(dk+d+2a_1)}{2}$$
$$S(k+1)=\frac{(k+2)(dk+d+2a_1)}{2}$$

Conclusiones: como $S(n)=\frac{(n+1)(dn+2a_1)}{2}$ se cumple para $n=0$, para un número natural cualquiera y su sucesor, entonces se cumple para todo n natural.

3. Te proponemos para toda sucesión o progresión geométrica cuyo primer término se obtiene para $n=0$

Demostrar que $a_n=a_1\cdot q^n$ permite obtener los términos de una sucesión geométrica para todo n natural.

donde a_1 es el primer término y q el cociente entre dos términos consecutivos (si la sucesión es decreciente $q<1$)

Demostración:

Inicio o paso base de inducción (garantizar que para el primer elemento n de $\mathbb{N}$ se obtiene el primer término de la sucesión)

Para $n=0$ se tiene $a_1=a_1\cdot q^0=a_1\cdot 1=a_1$, $a_1=a_1$ se cumple, con $q\neq 0$

Hipótesis de inducción (suponer que para un número natural k cualquiera se obtiene un término de dicha sucesión), es decir;

$a_k = a_1 \cdot q^k$

Tesis de inducción (de a_k se deduce que el sucesor $k+1$ es también un término de la sucesión) de donde resulta;

$a_{k+1} = a_1 \cdot q^{k+1}$

Demostración (partiendo de la suposición (hipótesis) a_k, deducir la tesis (a_{k+1})

$a_k = a_1 \cdot q^k$ (multiplicando por el cociente$[q]$).

$a_{k+1} = a_1 \cdot q^k \cdot q^1$

$a_{k+1} = a_1 \cdot q^{k+1}$

Conclusiones: Como $a_n = a_1 \cdot q^n$ se cumple para $n = 0$, para un número natural cualquiera y su sucesor, entonces se cumple para todo n natural.

4. Te proponemos para toda suma parcial hasta el n-ésimo término de una sucesión o progresión geométrica cuyo primer término se obtiene para $n = 0$

Demostrar que $S(n) = a_1 \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$ permite obtener las sumas parciales de los términos de una sucesión geométrica para todo n natural.

Donde a_1 es el primer término y d la diferencia entre dos términos consecutivos (si la sucesión es decreciente $q < 1$).

Se puede plantear como $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_1 \cdot q^n = a_1 \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = S(n)$.

Demostración:

Inicio o paso base de inducción (garantizar que para el primer elemento n de $\mathbb{N}$ se obtiene el primer término de la sucesión)

Para $n = 0$ se tiene $S(0) = a_1 \dfrac{q^{0+1} - 1}{q-1} = a_1 \dfrac{q^1 - 1}{q-1} = a_1 \dfrac{q-1}{q-1} = a_1$, $a_1 = a_1$ se cumple.

Hipótesis de inducción (suponer que para un número natural k cualquiera se obtiene la suma parcial n-ésima de los términos de esa sucesión), es decir;

$$S(k) = a_1 \frac{q^{k+1} - 1}{q-1}$$

Tesis de inducción (de $S(k)$ se deduce que la suma hasta el sucesor $k+1$, también se obtiene mediante la relación) de la cual resulta;

$$S(k+1) = a_1 \frac{q^{k+2} - 1}{q-1}$$

Demostración (partiendo de la suposición (hipótesis) $S(k)$, deducir la tesis de inducción, $S(k+1)$)

$S(k) = a_1 \dfrac{q^{k+1} - 1}{q-1}$ (adicionando el término sucesor $\left[a_{k+1} = a_1 \cdot q^{k+1}\right]$).

$$S(k+1) = a_1 \frac{q^{k+1} - 1}{q-1} + a_1 \cdot q^{k+1}$$

$$S(k+1) = a_1 \left(\frac{q^{k+1} - 1}{q-1} + q^{k+1} \right) = a_1 \frac{(q-1)q^{k+1} + q^{k+1} - 1}{q-1} =$$

$$= a_1 \frac{q \cdot q^{k+1} - q^{k+1} + q^{k+1} - 1}{q-1}$$

$$S(k+1) = a_1 \frac{q^{k+2} - 1}{q-1}$$

Conclusiones: como $S(n) = a_1 \dfrac{q^{n+1} - 1}{q-1}$ se cumple para $n = 0$, para un número natural cualquiera y su sucesor, entonces se cumple para todo n natural.

5. Ejemplo de aplicación de sucesiones:

Una microempresa artesanal, en su condición de persona jurídica, solicitó un préstamo de 100 mil pesos a otra empresa a la cual está asociada, con el objetivo de financiar su proyecto principal. El primer mes debe pagar 500 pesos y cada mes siguiente pagará 500 pesos más que el anterior hasta liquidar el préstamo. Suponiendo que no se cobrarán intereses:

a) ¿Cuánto dinero debe la microempresa después del primer pago?

b) ¿De cuántos pesos es la deuda de la microempresa después del quinto pago?

c) ¿En cuántos meses se completará la liquidación del préstamo?

Resolución:

a) Los pagos forman una sucesión aritmética: 500; 1 000; 1 500; …

El primer término es $a_1 = 500$ y la diferencia $d = 500$

Para adicionar los primeros n pagos usamos: $S(n) = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$. Luego:

- Después del primer pago: pagó 500
  Saldo = 100 000 – 500 = 99 500 pesos.

  Respuesta: la microempresa debe después del primer pago es de \$99 500.00.

b) Saldos después del quinto pago:

- Después del quinto pago: $S_5 = \frac{5}{2}\left[2(500) + (5-1)500\right]$

$$= \frac{5}{2}[1000 + 2000] = 7500$$

Saldo = 100 000 – 7 500 = 92 500 pesos.

Respuesta: la deuda de la microempresa después del quinto pago es de $ 92 500.

c) En este caso se requiere encontrar el menor número n de meses en que se logra pagar el monto total del préstamo.

Paso 1: Plantear la condición para el número de pagos n,

se sustituye $a_1 = 500$ y $d = 500$ de la fórmula general y se simplifica:

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2(500) + (n-1)500\right] = 500n + 250n(n-1) = 250n(2+n-1)$$
$$= 250n(n+1)$$

Paso 2: Resolver la inecuación:

$250n(n+1) \geq 100\,000$ dividiendo por 250 ambos miembros, se obtiene

$n(n+1) \geq 400$ como buscamos el menor n que cumpla esta condición:

- Si n = 20 → 20 · 21= 420 (sí alcanza).

Entonces, con 20 pagos ya se alcanza o supera la suma de 100 000 pesos.

Paso 3: Comprobar monto total pagado en 20 meses

Calculamos S(20) tenemos que S(20) = 250 · 20 · 21 = 105 000 pesos.

Como efectivamente supera los 100 000 pesos requeridos. Entonces, en el vigésimo mes se liquida totalmente el préstamo.

Investiga y aprende

El préstamo entre empresas es un proceso que está sujeto a la supervisión bancaria y a la ley, con la necesidad de contratos formales y garantías adecuadas. Cuando una empresa adquiere un préstamo para sus operaciones o crecimiento, también asume una deuda y la obligación de pagar intereses en el futuro.

¿Cuál sería el saldo final que se debe pagar si se acuerda un interés del 10 % sobre el monto total?

Notas al capítulo 2

1. Otros ejercicios

4. Considera que en tu equipo de estudio deciden indagar sobre la aceptación que tienen las personas acerca de algunos géneros musicales, en dependencia de lo cual deciden si el estudio lo hacen en la comunidad o en la escuela. Según el género musical seleccionado:

   a) ¿Cuál es la población que se debe estudiar?

   b) ¿Le preguntarías a todas las personas de la comunidad o de la escuela?

   c) Proporciona un ejemplo de población y explica cuál sería una muestra representativa, en base al estudio y el género musical seleccionado.

5. Organicen el grupo en tres equipos al azar, y tomen sus estaturas y pesos. Establezcan si existe alguna relación entre estas variables. La variable independiente *x* será la altura y la variable *y* será el peso.

   a) Realiza la tabla de distribución de frecuencias.

   b) Realiza el diagrama de dispersión.

   c) Calcula el coeficiente de correlación, ¿Qué tipo de correlación se presenta entre las variables?

   d) Consideras que existe una correlación nula, débil o fuerte entre las variables.

   e) ¿Cuál es la estatura media de los integrantes de tu equipo? ¿Cuál es el peso aproximado de una persona con esa estatura?

   f) ¿Cuál es la estatura que debe tener una persona que tiene masa corporal de 65 kg?

2. Plantea al menos un ejemplo para el cual tenga sentido el uso del estadígrafo que se describe:

a) Es el estadígrafo más usado y mientras más pequeño sea su valor significa que es más baja la variabilidad de los datos de la distribución de frecuencia.

b) Representa al promedio de las desviaciones elevadas. Sirve para determinar qué tan alejados se encuentran los datos de la media.

c) Es la diferencia entre el dato mayor y menor de la distribución.

d) Es el promedio de todos los datos.

e) Es el estadígrafo representado por el dato que ocupa el centro de la distribución de frecuencia, cuando se encuentran ordenados de menor a mayor.

f) Es el estadígrafo que representa al dato de mayor frecuencia en la distribución.

3. Aquí le proponemos la demostración del teorema del binomio o Teorema del binomio de Newton

$\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$

$$= (a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \ldots +$$

$$+ \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que $(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n} b^n$

Demostración:

Base de inducción:

Para $n = 0$, se tiene que:

En el miembro izquierdo tenemos $(a+b)^0 = 1$

Y en el miembro derecho, $\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{n}b^n$ según el teorema (el resto de los términos se anulan, pues n es menor que k),

$\binom{0}{0}a^0$ o $\binom{0}{0}b^0 = 1$ pues $\left[\binom{0}{0} = 1\right]$ no se adicionan los términos, para $n = 0$ el desarrollo del binomio solo tendrá $n+1$ término, 1 en este caso es el término independiente 1,

Se tiene que 1 = 1, se cumple la propiedad.

Hipótesis de inducción:

Supongamos que se cumple para un número natural arbitrario k, esto es

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \ldots + \binom{k}{k}b^k$$

Tesis de inducción:

Debemos demostrar que se cumple para el sucesor de k, $k+1$, es decir que:

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

Demostración:

Multipliquemos la hipótesis por $(a+b)$ para obtener el miembro izquierdo de la tesis.

$$(a+b)(a+b)^k = (a+b)\left[\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \ldots + \binom{k}{k}b^k\right]$$

Se aplica propiedad de la potencia en el miembro izquierdo y propiedad distributiva en el derecho.

$$(a+b)^{k+1} = a\left[\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \ldots + \binom{k}{k}b^k\right] +$$

$$+\, b\left[\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \ldots + \binom{k}{k}b^k\right]$$

$$= \binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k}{1}a^k b + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k}{k}ab^k +$$

$$+\left[\binom{k}{0}a^k b + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^3 + \ldots + \binom{k}{k-1}ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1}\right]$$

se agrupan los términos semejantes y se aplica $\binom{k}{0} = \binom{k}{k} = 1$

$$= a^{k+1} + \binom{k}{1}a^k b + \binom{k}{0}a^k b + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{k}ab^k +$$

$$+\binom{k}{k-1}ab^k + \ldots + \binom{k}{2}a^{k-2}b^3 + b^{k+1}$$

se extrae factor común en parejas

$$= a^{k+1} + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{0}\right]a^k b + \left[\binom{k}{2} + \binom{k}{1}\right]a^{k-1}b^2 +$$

$$+\binom{k}{2}a^{k-2}b^3 \ldots + \left[\binom{k}{k} + \binom{k}{k-1}\right]ab^k + \ldots + b^{k+1}$$

por fórmula de Pascal $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$, tenemos que:

$$= a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^3 + \ldots + \binom{k+1}{k}ab^k + \ldots + b^{k+1}$$

pero $\binom{k+1}{0} = \binom{k+1}{k+1} = 1$

$$= \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^3 + \ldots + \binom{k+1}{k}ab^k + \ldots +$$

$$+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

pero el exponente de b, representa contar todas las formas posibles de elegir k elementos b y la suma de los exponentes de a y b es el exponente del binomio, en este caso $k+1$, de donde $\binom{k}{2}a^{k-2}b^3$ equivale a

$\binom{k+1}{3}a^{k-2}b^3$ que es precisamente el término sucesor de $\binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2$ que no es necesario colocar, es decir;

$$=\binom{k+1}{0}a^{k+1}+\binom{k+1}{1}a^k b+\binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2+\binom{k+1}{3}a^{k-2}b^3+\ldots+$$

$$+\binom{k+1}{k}ab^k+\ldots+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

como se quería,

Luego, $(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$

se cumple para todo $n\in\mathbb{N}$.

Usando el símbolo de sumatoria $\forall n\in\mathbb{N}$ se tiene que:

$$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$$

Demostración:

Base de inducción:

Para $n=0$, se tiene que:

En el miembro izquierdo tenemos $(a+b)^0=1$ (por propiedad de la potencia)

Y en el miembro derecho,

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$$

$$\sum_{r=0}^{0}\binom{0}{r}a^{0-r}b^r=\binom{0}{0}a^{0-0}b^0=1\cdot1\cdot1=1,\quad \text{por propiedad}\left[\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1\right]$$

Se tiene que 1 = 1, se cumple

Hipótesis de inducción:

Supongamos que la se cumple para un número natural arbitrario k, esto es

$$(a+b)^k = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} a^{k-r} b^r$$

Tesis de inducción:

Debemos demostrar que la se cumple para el sucesor de k, $k+1$, es decir que:

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{r=0}^{k+1} \binom{k+1}{r} a^{k+1-r} b^r$$

Demostración:

Multipliquemos la hipótesis por $(a+b)$ para obtener el miembro izquierdo de la tesis.

$$(a+b)(a+b)^k = (a+b)\sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} a^{k-r} b^r$$

Se aplica propiedad de la potencia en el miembro izquierdo y propiedad distributiva en el derecho.

$$(a+b)^{k+1} = a\sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} a^{k-r} b^r + b\sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} a^{k-r} b^r$$

Se introduce cada factor en la sumatoria

$$= \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} a \cdot a^{k-r} b^r + \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} b \cdot a^{k-r} b^r$$

Se aplica propiedad de la potencia.

$$= \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} a^{k+1-r} b^r + \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} a^{k-r} b^{r+1}$$

Adicionamos 1 a r en el segundo sumando para obtener los mismos exponentes (por propiedad de la sumatoria) tenemos que:

$$=\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}a^{k+1-r}b^{r}+\sum_{r=0+1}^{k}\binom{k}{r-1}a^{k-(r-1)}b^{r-1+1}=\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}a^{k+1-r}b^{r}+\sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r-1}a^{k+1-r}b^{r}$$

$$=\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}a^{k+1-r}b^{r}+\sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r}a^{k+1-r}b^{r}$$

Desarrollamos el primer sumando para el primer término, es decir; para $r=0$, para poder operar con la sumatoria.

$$=\binom{k}{0}a^{k+1-0}b^{0}+\sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r}a^{k+1-r}b^{r}+\sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r-1}a^{k+1-r}b^{r}$$

Efectuamos la adición y extraemos factor común.

$$=\binom{k}{0}a^{k+1-0}b^{0}+\sum_{r=1}^{k}\left[\binom{k}{r}a^{k+1-r}b^{r}+\binom{k}{r-1}a^{k+1-r}b^{r}\right]=$$

$$=\binom{k}{0}a^{k+1-0}b^{0}+\sum_{r=1}^{k}\left[\binom{k}{r}+\binom{k}{r-1}\right]a^{k+1-r}b^{r}$$

aplicamos la fórmula de Pascal $\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}$, tenemos que:

$$=\binom{k}{0}a^{k+1-0}b^{0}+\sum_{r=1}^{k}\binom{k+1}{r}a^{k+1-r}b^{r}$$

pero como $\binom{k}{0}a^{k+1-0}b^{0}=\binom{k+1}{0}a^{k+1-0}b^{0}$ es la suma para $r=0$ pues $\binom{k}{0}=\binom{k+1}{0}$, obtenemos que:

$$=\sum_{r=0}^{k}\binom{k+1}{r}a^{k+1-r}b^{r}$$

Luego,

$$(a+b)^{n}=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^{r}$$

se cumple para todo $n\in\mathbb{N}$.

1.

Atención

Es importante que, al resolver ejercicios y problemas sobre la planimetría, en el cálculo de área y perímetro, tengas la identificación de herramientas que te permiten integrar contenidos matemáticos conocidos en grados anteriores. Para el cálculo de la longitud de un lado, necesitas aplicar algunas de ellas, las que relacionan a continuación:

- Las propiedades de las figuras. Segmentos de rectas notables.
- El despeje en fórmula.
- El grupo de Teoremas de Pitágoras.
- Las razones trigonométricas (directa o indirecta). Propiedad del triángulo rectángulo con un ángulo interior de 30º.
- La ley de los senos y la ley de los cosenos.
- Los elementos homólogos de triángulos iguales.
- Los lados proporcionales en triángulos semejantes.
- La proporcionalidad entre los perímetros y la razón de semejanza y entre esta última al cuadrado y las áreas de los triángulos semejantes.
- El Teorema de las Transversales.

Estas, además; te serán de gran utilidad en el cálculo de cuerpos geométricos.

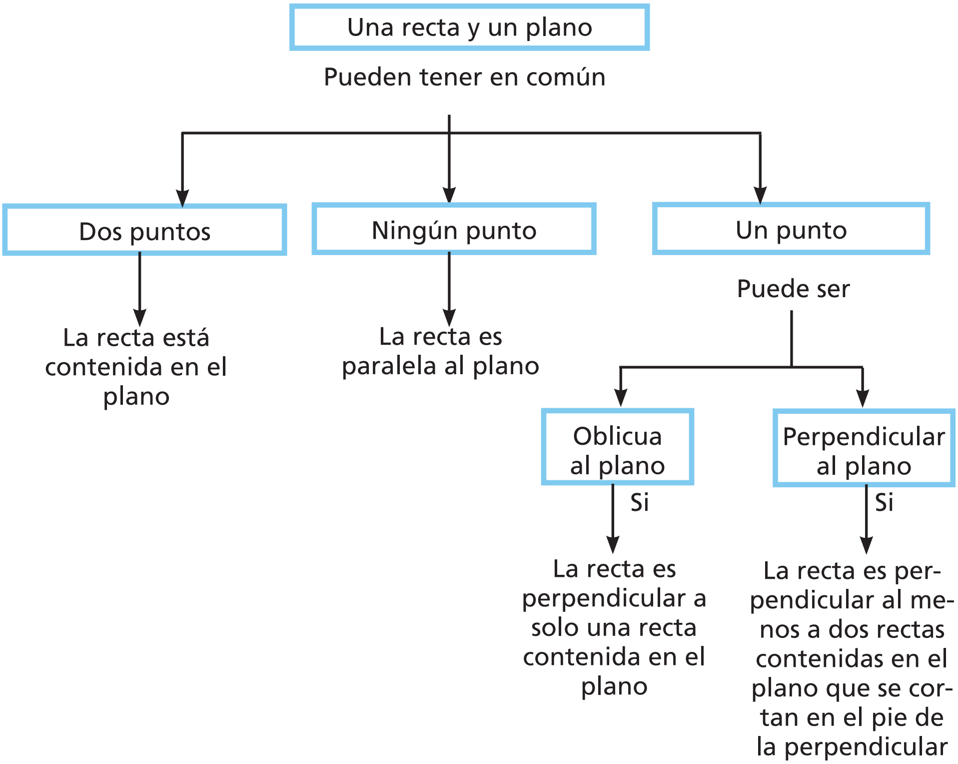
2. Resumen de las relaciones de rectas en el espacio:

Dos rectas en el espacio

Pueden

- Tener un punto en común → Son secantes
- No tener puntos en común → Son paralelas / Son alabeadas

3. Como parte de las relaciones entre rectas y planos, se concluye que:



4. Otros ejercicios del epígrafe 4.1

11. Demuestra que el área de cualquier cuadrilátero convexo es igual al semiproducto de sus diagonales multiplicado por el seno de un ángulo de los que estas determinan al cortarse.

12. Sean θ, un ángulo central (en radianes) de una circunferencia de radio r; b y c su arco y cuerda corrrespondiente respectivamente. Demuestra que:

a) $c = 2r \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ b) $b = r \cdot \theta$

5. Otro ejercicio del epígrafe 4.2

20. Un ingeniero diseña un soporte para un panel solar. El soporte consta de:

- 4 columnas verticales ubicadas en los puntos $A(1;0;0)$, $B(4;0;0)$, $C(1;3;0)$, y $D(4;3;0)$ (en metros).
- Las vigas diagonales que conectan A con $E(2{,}5;1{,}5;2)$ y B con E.
- El panel solar está definido por los puntos $E(2{,}5;1{,}5;2)$, $F(2{,}5;1{,}5;4)$, y $G(5;4{,}5;4)$.

20.1 Verificación de la base del soporte:

a) Demuestra que las columnas A, B, C y D forman un rectángulo en el plano $z=0$.

b) Calcula la longitud de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, las que garantizan la estabilidad.

20.2 Análisis de vigas diagonales:

a) Determina si las rectas que contienen a los puntos A y E, B y E son rectas oblicuas, paralelas, o si se intersectan.

b) Encuentra el ángulo entre las vigas $\overline{AE}$ y $\overline{BE}$.

20.3 Posición del panel solar:

a) Demuestra que los puntos E, F y G definen un plano. Fundamenta.

b) Verifica si el panel solar (plano EFG) es paralelo u oblicuo al suelo (plano $z=0$).

20.4 Cálculo de áreas:

a) Calcula el área del panel solar.

b) Si el soporte tiene una estructura prismática entre los planos $z=0$ y $z=2$, calcula su área lateral.

20.5 Volumen del soporte:

a) Calcula el valor del volumen del espacio entre el suelo ($z = 0$) y el panel solar (plano *EFG*), considerando que el prisma es recto.

Respuestas. Anexos

20. (de la nota 5 al capítulo 4 de los anexos)

20.1 Verificación de la base del soporte

a)

1. Lados opuestos iguales:

– Longitud de $\overline{AB}$: $\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$

$$\overline{AB} = \sqrt{(4-1)^2 + (0-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{3^2} = 3{,}0 \text{ m}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 + (z_C - z_D)^2}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{(4-1)^2 + (3-3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{3^2} = 3{,}0 \text{ m}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(1-4)^2 + (3-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2} \text{ m}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2 + (z_A - z_D)^2}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{(4-1)^2 + (3-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2} \text{ m}$$

2. Ángulos rectos:

– Vectores $\overrightarrow{AB} = (3;\, 0;\, 0)$ y $\overrightarrow{AD} = (0;\, 3;\, 0)$.

– Producto escalar: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 3 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 0 = 0 \cdot$

– Conclusión: Es un rectángulo.

Para el análisis de este inciso a) puedes utilizar los conocimientos adquiridos en Física 10.º y 11.º grado donde trabajaste el producto vectorial y producto cruz respectivamente. Aquí es conveniente trabajarlo desde las coordenadas de los puntos. O al analizar inciso b) para concluir que la base es un rectángulo.

b) Longitud de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$:

$$\overline{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(1-1)^2 + (3-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{3^2} = 3{,}0 \text{ m}$$

$$\overline{BD} = \sqrt{(x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2 + (z_B - z_D)^2}$$

$$\overline{BD} = \sqrt{(4-4)^2 + (3-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{3^2} = 3{,}0 \text{ m}$$

20.2 Análisis de vigas diagonales

a) Rectas $\overline{AE}$ y $\overline{BE}$:

– Recta AE pasa por los puntos $A(1;\,0;\,0)$ y $E(2{,}5;\,1{,}5;\,2)$:

– Recta BE pasa por los puntos $B(4;\,0;\,0)$ y $E(2{,}5;\,1{,}5;\,2)$:

Ambas rectas pasan por E, por lo tanto se intersectan en E.

b) Ángulo entre las rectas AE y BE:

– Vectores directores: $\overrightarrow{AE} = (1{,}5;\,1{,}5;\,2)$, $\overrightarrow{BE} = (1{,}5;\,1{,}5;\,2)$.

– Producto escalar:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 1{,}5 \cdot (-1{,}5) + 1{,}5 \cdot 1{,}5 + 2 \cdot 2 = -2{,}25 + 2{,}25 + 4 = 4.$$

– Magnitudes:

$$\overrightarrow{AE} = \sqrt{1{,}5^2 + 1{,}5^2 + 2^2} = \sqrt{2{,}25 + 2{,}25 + 4} = \sqrt{8{,}5} \text{ m}$$

$$\overrightarrow{BE} = \sqrt{(-1{,}5)^2 + 1{,}5^2 + 2^2} = \sqrt{2{,}25 + 2{,}25 + 4} = \sqrt{8{,}5} \text{ m}$$

– Ángulo θ:

$$\cos\theta = \frac{4}{8{,}5} \approx 0{,}4706 \Rightarrow \theta \approx 61{,}9^\circ.$$

Para el análisis de este inciso 1.2 b) si no es posible llegar por el trabajo con vectores. Te sugerimos la ayuda de un asistente matemático (GeoGebra)

20.3 Posición del panel solar

a) Demostrar que los puntos E, F, G determinan un plano:

– Puntos:

– $E(2,5;\ 1,5;\ 2)$, $F(2,5;\ 1,5;\ 4)$, $G(5;\ 4,5;\ 4)$.

$$\overline{EF}=\sqrt{(x_E-x_F)^2+(y_E-y_F)^2+(z_E-z_F)^2}$$

$$\overline{EF}=\sqrt{(2,5-2,5)^2+(1,5-1,5)^2+(2-4)^2}=\sqrt{2^2}=2,0\text{ m}$$

$$\overline{FG}=\sqrt{(x_F-x_G)^2+(y_F-y_G)^2+(z_F-z_G)^2}$$

$$\overline{FG}=\sqrt{(2,5-5)^2+(1,5-4,5)^2+(4-4)^2}=\frac{\sqrt{61}}{2}\approx 3,91\text{ m}$$

$$\overline{EG}=\sqrt{(x_E-x_G)^2+(y_E-y_G)^2+(z_E-z_G)^2}$$

$$\overline{ED}=\sqrt{(2,5-5)^2+(1,5-4,5)^2+(2-4)^2}=\frac{\sqrt{77}}{2}\approx 4,39\text{ m}$$

Aplicando desigualdad triangular

$2<3,91\text{ m}+4,39\text{ m}$ $\quad$ $3,91\text{ m}<2+4,39\text{ m}$ $\quad$ $4,39\text{ m}<2+3,91\text{ m}$

Tenemos que es posible constriur un triángulo con los tres puntos, lo que verifica que estos puntos no están alineados y por tanto, determina un único plano (EFG).

b) Paralelismo entre el panel (EFG) y el suelo ($z=0$):

– Vector $\overrightarrow{EF}=F-E=(2,5-2,5;1,5-1,5;4-2)=(0;0;2)$.

– Vector $\overrightarrow{EG}=G-E=(5-2,5;4,5-1,5;4-2)=(2,5;3;2)$.

$$\overrightarrow{EF}\times\overrightarrow{EG}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 0 & 0 & 2\\ 2,5 & 3 & 2\end{vmatrix}=(-6;5;0)$$

El plano $z = 0$ es el plano xy, el vector normal de $z = 0$ es $(0;0;1)$ y no es paralelo al vector normal $(-6;5;0)$ del plano EFG.

Los planos no son paralelos se intersectan.

Otra vía sería

– Vector normal del panel: $\overrightarrow{n_{EFG}} = (-6;\ 5;\ 0)$.

– Vector normal del suelo: $\overrightarrow{n_{z=0}} = (0;\ 0;\ 1)$.

– Producto escalar: $\overrightarrow{n_{EFG}} \cdot \overrightarrow{n_{z=0}} = (-6(0)+5(0)+0(1)) = 0$.

Como el producto escalar es cero, los vectores normales son perpendiculares lo que implica que los planos también los son.

Otra manera pudiera ser, con ayuda del GeoGebra, al introducir las coordenadas del plano EFG y la ecuación del plano $z = 0$ en la vista gráfica 3D y se notará que se cortan. Al seleccionar un punto P que no pertenezca a ninguno de los planos, se traza una perpendiclar al plano EFG. Indicamos un punto Q de la recta tal que $Q \neq P$ y que no pertenezca al plano EFG y, el origen de coordenadas y procedemos a mediar la amplitud del $\sphericalangle OPQ$, se verifica que es de 90º por lo que los planos son perpendiculars.

20.4 Cálculo de áreas

a) Área del panel solar (triángulo EFG):

– Vectores $\overrightarrow{EF} = (0;0;2)$ y $\overrightarrow{EG} = (2{,}5;3;2)$.

– Producto vectorial: $\overrightarrow{EF} \times \overrightarrow{EG} = (-6;5;0)$.

– Magnitud: $\overrightarrow{EF} \times \overrightarrow{EG} = \sqrt{(-6)^2 + 5^2 + 0^2} = \sqrt{61}$.

– Área: $\frac{1}{2}\sqrt{61} \approx 3{,}905\ \text{m}^2$.

Otra vía conocida por los estudiantes, como se conocen las longitudes de los lados del triángulo *EFG*, su área se puede determinar aplicando la fórmula de Herón.

Sea p el semiperímetro del triángulo $p_{\triangle EFG} = \dfrac{\overline{EF}+\overline{FG}+\overline{EG}}{2}$ y su área

$$A_{\triangle EFG}\sqrt{p\left(p-\overline{EF}\right)\left(p-\overline{FG}\right)\left(p-\overline{EG}\right)}$$

$$p_{\triangle EFG} = \frac{\overline{EF}+\overline{FG}+\overline{EG}}{2}$$

$$p_{\triangle EFG} \approx \frac{2+3{,}905+4{,}387}{2} \approx \frac{10{,}292}{2} \approx 5{,}15 \text{ m}$$

$$A_{\triangle EFG} \approx \sqrt{5{,}146(5{,}146-2)(5{,}146-3{,}905)(5{,}146-4{,}387)}$$

$$\approx \sqrt{5{,}146(3{,}146)(1{,}241)(0{,}759)} \approx \sqrt{15{,}25} \approx 3{,}905 \text{ m}^2 \approx 3{,}9 \text{ m}^2$$

b) Área lateral del soporte prismático:

– Base: Rectángulo *ABCD* con perímetro:

$2\left(3+\sqrt{18}\right) \approx 2(3+4{,}243) \approx 14{,}486$ m.

– Altura del prisma: 2 m entre $z=0$ y $z=2$.

– Área lateral: $P_{base} \cdot h = 14{,}486 \cdot 2 \approx 28{,}97 \text{ m}^2 \approx 29 \text{ m}^2$.

20.5 Volumen del soporte

a) Volumen entre $z=0$ y el plano *EFG*:

– Método: Usar el área de la base *ABCD* y la altura promedio, conciderando que el prisma es recto.

– Área de la base: $3 \cdot 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}\text{m}^2$ (rectángulo).

– Altura promedio: Dado que el plano *EFG* está en ($z=2$) a ($z=4$), pero la estructura prismática llega hasta ($z=2$), el volumen se calcula como:

$$\begin{aligned}\text{Volumen} &= A_{base} \cdot h\\ &= 9\sqrt{2} \cdot 2 = 18\sqrt{2} \approx 25 \text{ m}^3.\end{aligned}$$

Tabla de senos y cosenos

Seno											
Grad.	**,0**	**,1**	**,2**	**,3**	**,4**	**,5**	**,6**	**,7**	**,8**	**,9**	**(1,0)**	
0	0,0000	0,0017	0,0035	0,0052	0,0070	0,0087	0,0105	0,0122	0,0140	0,0157	0,0175	89
1	0,0175	0,0192	0,0209	0,0227	0,0244	0,0262	0,0279	0,0297	0,0314	0,0332	0,0349	88
2	0,0349	0,0366	0,0384	0,0401	0,0419	0,0346	0,0454	0,0471	0,0488	0,0506	0,0523	87
3	0,0523	0,0541	0,0558	0,0576	0,0593	0,0610	0,0628	0,0645	0,0663	0,0680	0,0698	86
4	0,0698	0,0715	0,0732	0,0750	0,0767	0,0785	0,0802	0,0819	0,0837	0,0854	0,0872	85
5	0,0872	0,0889	0,0906	0,0924	0,0941	0,0958	0,0976	0,0993	0,1011	0,1028	0,1045	84
6	0,1045	0,1063	0,1080	0,1097	0,1115	0,1132	0,1149	0,1167	0,1184	0,1201	0,1219	83
7	0,1219	0,1236	0,1253	0,1271	0,1288	0,1305	0,1323	0,1340	0,1357	0,1374	0,1392	82
8	0,1392	0,1409	0,1426	0,1444	0,1461	0,1478	0,1495	0,1513	0,1530	0,1547	0,1564	81
9	0,1564	0,1582	0,1599	0,1616	0,1633	0,1650	0,1668	0,1685	0,1702	0,1719	0,1736	80
10	0,1736	0,1754	0,1771	0,1788	0,1805	0,1822	0,1840	0,1857	0,1874	0,1891	0,1908	79
11	0,1908	0,1925	0,1942	0,1959	0,1977	0,1994	0,2011	0,2028	0,2045	0,2062	0,2079	78
12	0,2079	0,2096	0,2113	0,2130	0,2147	0,2164	0,2181	0,2198	0,2215	0,2233	0,2250	77
13	0,2250	0,2267	0,2284	0,2300	0,2317	0,2334	0,2351	0,2368	0,2385	0,2402	0,2419	76
14	0,2419	0,2436	0,2453	0,2470	0,2487	0,2504	0,2521	0,2538	0,2554	0,2571	0,2588	75
15	0,5288	0,2605	0,2622	0,2639	0,2656	0,2672	0,2689	0,2706	0,2723	0,2740	0,2756	74
16	0,2756	0,2773	0,2790	0,2807	0,2823	0,2840	0,2857	0,2874	0,2890	0,2907	0,2924	73
17	0,2924	0,2940	0,2957	0,2974	0,2990	0,3007	0,3024	0,3040	0,3057	0,3074	0,3090	72
18	0,3090	0,3107	0,3123	0,3140	0,3156	0,3173	0,3190	0,3206	0,3223	0,3239	0,3256	71
19	0,3256	0,3272	0,3289	0,3305	0,3322	0,3338	0,3355	0,3371	0,3387	0,3404	0,3420	70
20	0,3420	0,3437	0,3453	0,3469	0,3486	0,3502	0,3518	0,3535	0,3551	0,3567	0,3584	69
21	0,3584	0,3600	0,3616	0,3633	0,3649	0,3665	0,3681	0,3697	0,3714	0,3730	0,3746	68
22	0,3746	0,3762	0,3778	0,3795	0,3811	0,3827	0,3843	0,3859	0,3875	0,3891	0,3907	67
23	0,3907	0,3923	0,3939	0,3955	0,3971	0,3987	0,4003	0,4019	0,4035	0,4051	0,4067	66
24	0,4067	0,4083	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4163	0,4179	0,4195	0,4210	0,4226	65
25	0,4226	0,4242	0,4258	0,4274	0,4289	0,4305	0,4321	0,4337	0,4352	0,4368	0,4384	64
26	0,4384	0,4399	0,4415	0,4431	0,4446	0,4462	0,4478	0,4493	0,4509	0,4524	0,4540	63
27	0,4540	0,4555	0,4571	0,4586	0,4602	0,4617	0,4633	0,4648	0,4664	0,4679	0,4695	62
28	0,4695	0,4710	0,4726	0,4741	0,4756	0,4772	0,4787	0,4802	0,4818	0,4833	0,4848	61
29	0,4848	0,4863	0,4879	0,4894	0,4909	0,4924	0,4939	0,4955	0,4970	0,4985	0,5000	60
30	0,5000	0,5015	0,5030	0,5045	0,5060	0,5075	0,5090	0,5105	0,5120	0,5135	0,5150	59
31	0,5150	0,5165	0,5180	0,5195	0,5210	0,5225	0,5240	0,5255	0,5270	0,5284	0,5299	58
32	0,5299	0,5314	0,5329	0,5344	0,5358	0,5373	0,5388	0,5402	0,5417	0,5432	0,5446	57
33	0,5446	0,5461	0,5476	0,5490	0,5505	0,5519	0,5534	0,5548	0,5563	0,5577	0,5592	56
34	0,5592	0,5306	0,5621	0,5635	0,5650	0,5664	0,5678	0,5693	0,5707	0,5721	0,5736	55
35	0,5736	0,5750	0,5764	0,5779	0,5793	0,5807	0,5821	0,5835	0,5850	0,5864	0,5878	54
36	0,5878	0,5892	0,5906	0,5920	0,5934	0,5948	0,5962	0,5976	0,5990	0,6004	0,6018	53
37	0,6018	0,6032	0,6046	0,6060	0,6074	0,6088	0,6101	0,6115	0,6129	0,6143	0,6157	52
38	0,6157	0,6170	0,6184	0,6198	0,6211	0,5225	0,6239	0,6252	0,6266	0,6280	0,6293	51
39	0,6293	0,6307	0,6320	0,6334	0,6347	0,6361	0,6374	0,6388	0,6401	0,6414	0,6428	50
40	0,6428	0,6441	0,6455	0,6468	0,6481	0,6494	0,6508	0,6521	0,6534	0,6547	0,6561	49
41	0,6561	0,6574	0,6587	0,6600	0,6613	0,6626	0,6639	0,6652	0,6665	0,6678	0,6691	48
42	0,6691	0,6704	0,6717	0,6730	0,6743	0,6756	0,6769	0,6782	0,6794	0,6807	0,6820	47
43	0,6820	0,6833	0,6845	0,6858	0,6871	0,6884	0,6896	0,6909	0,6921	0,6934	0,6947	46
44	0,6947	0,6959	0,6972	0,6984	0,6997	0,7009	0,7022	0,7034	0,7046	0,7059	0,7071	45
	(1,0)	**,9**	**,8**	**,7**	**,6**	**,5**	**,4**	**,3**	**,2**	**,1**	**,0**	**Grad.**
Coseno												

Tabla de senos y cosenos

Seno

Grad.	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	(1,0)	
45	0,7071	0,7083	0,7096	0,7108	0,7120	0,7133	0,7145	0,7157	0,7169	0,7181	0,7193	44
46	0,7193	0,7206	0,7218	0,7230	0,7242	0,7254	0,7266	0,7278	0,7290	0,7302	0,7314	43
47	0,7314	0,7325	0,7337	0,7349	0,7361	0,7373	0,7385	0,7396	0,7408	0,7420	0,7431	42
48	0,7431	0,7443	0,7455	0,7466	0,7478	0,7490	0,7501	0,7513	0,7524	0,7536	0,7547	41
49	0,7547	0,7559	0,7570	0,7581	0,7593	0,7604	0,7615	0,7627	0,7638	0,7649	0,7660	40
50	0,7660	0,7672	0,7683	0,7694	0,7705	0,7716	0,7727	0,7738	0,7749	0,7760	0,7771	39
51	0,7771	0,7782	0,7793	0,7804	0,7815	0,7826	0,7837	0,7848	0,7859	0,7869	0,7880	38
52	0,7880	0,7891	0,7902	0,7912	0,7923	0,7934	0,7944	0,7955	0,7965	0,7976	0,7986	37
53	0,7986	0,7997	0,8007	0,8018	0,8028	0,8039	0,0849	0,8059	0,8070	0,8080	0,8090	36
54	0,8090	0,8100	0,8111	0,8121	0,8131	0,8141	0,8151	0,8161	0,8171	0,8181	0,8192	35
55	0,8192	0,8202	0,8211	0,8221	0,8231	0,8241	0,8251	0,8261	0,8271	0,8281	0,8290	34
56	0,8290	0,8300	0,8310	0,8320	0,8329	0,8339	0,8348	0,8358	0,8368	0,8377	0,8387	33
57	0,8387	0,8396	0,8406	0,8415	0,8425	0,8434	0,8443	0,8453	0,8462	0,8471	0,8480	32
58	0,8480	0,8490	0,8499	0,8508	0,8517	0,8526	0,8536	0,8545	0,8554	0,8563	0,8572	31
59	0,8572	0,8581	0,8590	0,8599	0,8607	0,8616	0,8625	0,8634	0,8643	0,8652	0,8660	30
60	0,8660	0,8669	0,8678	0,8686	0,8695	0,8704	0,8712	0,8721	0,8729	0,8738	0,8746	29
61	0,8746	0,8755	0,8763	0,8771	0,8780	0,8788	0,8796	0,8805	0,8813	0,8821	0,8829	28
62	0,8829	0,8838	0,8846	0,8854	0,8862	0,8870	0,8878	0,8886	0,8894	0,8902	0,8910	27
63	0,8910	0,8918	0,8926	0,8934	0,8942	0,8949	0,8957	0,8965	0,8973	0,8980	0,8988	26
64	0,8988	0,8996	0,9003	0,9011	0,9018	0,9026	0,9033	0,9041	0,9048	0,9056	0,9063	25
65	0,9063	0,9070	0,9078	0,9085	0,9092	0,9100	0,9107	0,9114	0,9121	0,9128	0,9135	24
66	0,9135	0,9143	0,9150	0,9157	0,9164	0,9171	0,9178	0,9184	0,9191	0,9198	0,9205	23
67	0,9205	0,9212	0,9219	0,9225	0,9232	0,9239	0,9245	0,9252	0,9259	0,9265	0,9272	22
68	0,9272	0,9278	0,9285	0,9291	0,9298	0,9304	0,9311	0,9317	0,9323	0,9330	0,9336	21
69	0,9336	0,9342	0,9348	0,9354	0,9361	0,9367	0,9373	0,9379	0,9385	0,9391	0,9397	20
70	0,9397	0,9403	0,9409	0,9415	0,9421	0,9426	0,9432	0,9438	0,9444	0,9449	0,9455	19
71	0,9455	0,9461	0,9466	0,9472	0,9478	0,8483	0,9489	0,9494	0,9500	0,9505	0,9511	18
72	0,9511	0,9516	0,9521	0,9527	0,9532	0,9537	0,9542	0,9548	0,9553	0,9558	0,9563	17
73	0,9563	0,9568	0,9573	0,9578	0,9583	0,9588	0,9593	0,9598	0,9603	0,9608	0,9613	16
74	0,9613	0,9617	0,9622	0,9627	0,9632	0,9636	0,9641	0,9646	0,9650	0,9655	0,9659	15
75	0,9659	0,9664	0,9668	0,9673	0,9677	0,9681	0,9686	0,9690	0,9694	0,9699	0,9703	14
76	0,9703	0,9707	0,9711	0,9715	0,9720	0,9724	0,9728	0,9732	0,9736	0,9740	0,9744	13
77	0,9744	0,9748	0,9751	0,9755	0,9759	0,9763	0,9767	0,9770	0,9774	0,9778	0,9781	12
78	0,9781	0,9785	0,9789	0,9792	0,9796	0,9799	0,9803	0,9806	0,9810	0,9813	0,9816	11
79	0,9816	0,9820	0,9823	0,9826	0,9829	0,9833	0,9836	0,9839	0,9842	0,9845	0,9848	10
80	0,9848	0,9851	0,9854	0,9857	0,9860	0,9863	0,9866	0,9869	0,9871	0,9874	0,9877	9
81	0,9877	0,9880	0,9882	0,9885	0,9888	0,9890	0,9893	0,9895	0,9898	0,9900	0,9903	8
82	0,9903	0,9905	0,9907	0,9910	0,9912	0,9914	0,9917	0,9919	0,9921	0,9923	0,9925	7
83	0,9925	0,9928	0,9930	0,9932	0,9934	0,9936	0,9938	0,9940	0,9942	0,9943	0,9945	6
84	0,9945	0,9947	0,9949	0,9951	0,9952	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9962	5
85	0,9962	0,9963	0,9965	0,9966	0,9968	0,9969	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	0,9976	4
86	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9980	0,9981	0,9982	0,9983	0,9984	0,9985	0,9986	3
87	0,9986	0,9987	0,9988	0,9989	0,9990	0,9990	0,9991	0,9992	0,9993	0,9993	0,9994	2
88	0,9994	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	1
89	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0
	(1,0)	**,9**	**,8**	**,7**	**,6**	**,5**	**,4**	**,3**	**,2**	**,1**	**,0**	**Grad.**

Coseno

Tabla de tangentes y cotangentes

Tangente

Grad.	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	(1,0)	
0	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175	89
1	0,0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	88
2	0,0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507	0524	87
3	0,0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682	0699	86
4	0,0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857	0875	85
5	0,0875	0892	0910	0928	0945	0963	0981	0998	1016	1033	1051	84
6	0,1051	1069	1086	1104	1122	1139	1157	1175	1192	1210	1228	83
7	0,1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388	1405	82
8	0,1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566	1584	81
9	0,1584	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745	1763	80
10	0,1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	1944	79
11	0,1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	2126	78
12	0,2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	2309	77
13	0,2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	2493	76
14	0,2493	2512	2530	2549	2568	2586	2605	2623	2642	2661	2679	75
15	0,2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	2867	74
16	0,2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3057	73
17	0,3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3249	72
18	0,3249	3269	3288	33,07	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3443	71
19	0,3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	3640	70
20	0,3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3839	69
21	0,3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	4040	68
22	0,4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	4245	67
23	0,4245	4265	4286	4307	4327	4348	4369	4390	4411	4431	4452	66
24	0,4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	4663	65
25	0,4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4877	64
26	0,4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	5095	63
27	0,5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	5317	62
28	0,5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	5543	61
29	0,5543	5566	5589	5672	5635	5658	5681	5704	5727	5750	5774	60
30	0,5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	6009	59
31	0,6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	6249	58
32	0,6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	6494	57
33	0,6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	6745	56
34	0,6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	7002	55
35	0,7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239	7265	54
36	0,7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	7536	53
37	0,7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	7813	52
38	0,7813	7841	7869	7898	7926	7954	7983	8012	8040	8069	8098	51
39	0,8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	8391	50
40	0,8391	8421	8451	8481	8511	8541	8571	8601	8632	8662	8693	49
41	0,8693	8724	8754	8785	8816	8847	8878	8910	8941	8972	9004	48
42	0,9004	9036	9067	9099	9131	9163	9195	9228	9260	9293	9325	47
43	0,9395	9358	9391	9424	9457	9490	9523	3556	9590	9623	9657	46
44	0,9657	9691	9725	9759	9793	9827	9861	9896	9930	9965	1,000	45
	(1,0)	,9	,8	,7	,6	,5	,4	,3	,2	,1	,0	Grad.

Cotangente

Tabla de tangentes y cotangentes

Tangente											
Grad.	**,0**	**,1**	**,2**	**,3**	**,4**	**,5**	**,6**	**,7**	**,8**	**,9**	**(1,0)**	
45	1,000	003	007	011	014	018	021	025	028	032	036	44
46	1,036	039	043	046	050	054	057	061	065	069	072	43
47	1,072	076	080	084	087	091	095	099	103	107	111	42
48	1,111	115	118	122	126	130	134	138	142	146	150	41
49	1,150	154	159	163	167	171	175	179	183	188	192	40
50	1,192	196	200	205	209	213	217	222	226	230	235	39
51	1,235	239	244	248	253	257	262	266	271	275	280	38
52	1,280	285	289	294	299	303	308	313	317	322	327	37
53	1,327	332	337	342	347	351	356	361	366	371	376	36
54	1,376	381	387	392	397	402	407	412	418	423	428	35
55	1,428	433	439	444	450	455	460	466	471	477	483	34
56	1,483	488	494	499	505	511	517	522	528	534	540	33
57	1,540	546	552	558	564	570	576	582	588	594	600	32
58	1,600	607	613	619	625	632	638	645	651	658	664	31
59	1,664	671	678	684	691	698	704	711	718	725	732	30
60	1,732	739	746	753	760	767	775	782	789	797	804	29
61	1,804	811	819	827	834	842	849	857	865	873	881	28
62	1,881	889	897	905	913	921	929	937	946	954	963	27
63	1,963	971	980	988	997	*006	*014	*023	*032	*041	*050	26
64	2,050	059	069	078	087	097	106	116	125	135	145	25
65	2,145	154	164	174	184	194	204	215	225	236	246	24
66	2,246	257	267	278	289	300	311	322	333	344	356	23
67	2,356	367	379	391	402	414	426	438	450	463	475	22
68	2,475	488	500	513	526	539	552	565	578	592	605	21
69	2,605	619	633	646	660	675	689	703	718	733	747	20
70	2,747	762	778	793	808	824	840	856	872	888	904	19
71	2,904	921	937	954	971	989	*006	*024	*042	*060	*078	18
72	3,078	096	115	133	152	172	191	211	230	251	271	17
73	3,271	291	312	333	354	376	398	420	442	465	487	16
74	3,487	511	534	558	582	606	630	655	681	706	732	15
75	3,732	758	785	812	839	867	895	923	952	981	*011	14
76	4,011	041	071	102	134	165	198	230	264	297	331	13
77	4,331	366	402	437	474	511	548	586	625	665	705	12
78	4,705	745	787	829	872	915	959	*005	*050	*097	*145	11
79	5,145	193	242	292	343	396	449	503	558	614	671	10
80	5,671	5,730	5,789	5,850	5,912	5,976	6,041	6,107	6,174	6,243	6,314	9
81	6,314	6,386	6,460	6,535	6,612	6,691	6,772	6,855	6,940	7,026	7,115	8
82	7,115	7,207	7,300	7,396	7,495	7,596	7,700	7,806	7,916	8,028	8,144	7
83	8,144	8,264	8,386	8,513	8,643	8,777	8,915	9,058	9,205	9,357	9,514	6
84	9,514	9,677	9,845	10,0	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	5
85	11,43	11,696	11,91	12,16	12,43	12,71	13,00	13,30	13,62	13,95	14,30	4
86	14,30	14,67	15,06	15,46	15,89	16,35	16,83	17,34	17,89	18,46	19,08	3
87	19,08	19,74	20,45	21,20	22,02	22,90	23,86	24,90	26,03	27,27	28,64	2
88	28,64	30,14	31,82	33,69	35,80	38,19	40,92	44,07	47,74	52,08	57,29	1
89	57,29	63,66	71,62	81,85	95,49	114,6	143,2	191,0	286,5	573,0	…	0
	(1,0)	**,9**	**,8**	**,7**	**,6**	**,5**	**,4**	**,3**	**,2**	**,1**	**,0**	**Grad.**
Cotangente												

Tabla de secantes y cosecantes

Secante												
Grad.	**,0**	**,1**	**,2**	**,3**	**,4**	**,5**	**,6**	**,7**	**,8**	**,9**	**(1,0)**	
0	1,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0001	0001	0001	0002	89
1	1,0002	0002	0002	0003	0003	0003	0004	0004	0005	0005	0006	88
2	1,0006	0007	0007	0008	0009	0010	0010	0011	0012	0013	0014	87
3	1,0014	0015	0016	0017	0018	0019	0020	0021	0022	0023	0024	86
4	1,0024	0026	0027	0028	0029	0031	0032	0034	0035	0037	0038	85
5	1,0038	0040	0041	0043	0044	0046	0048	0049	0051	0053	0055	84
6	1,0055	0057	0058	0060	0062	0064	0066	0068	0070	0073	0076	83
7	1,0076	0078	0080	0082	0084	0087	0088	0091	0094	0096	0098	82
8	1,0098	0101	0103	0106	0108	0111	0113	0116	0119	0121	0125	81
9	1,0125	0128	0131	0133	0136	0139	0142	0145	0148	0151	0154	80
10	1,0154	0157	0161	10164	0167	0170	10174	0177	0180	0183	0187	79
11	1,0187	0191	0194	0198	0201	0205	0208	0212	0216	0220	0224	78
12	1,0224	0227	0231	0235	0239	0243	0247	0251	0255	0259	0263	77
13	1,0263	0267	0271	0275	0280	0284	0288	0293	0298	0302	0306	76
14	1,0306	0310	0316	0320	0324	0330	0334	0338	0343	0348	0353	75
15	1,0353	0357	0363	0367	0372	0378	0382	0387	0393	0398	0403	74
16	1,0403	0408	0413	0419	0424	0430	0435	0441	0446	0452	0457	73
17	1,0457	0462	0468	0473	0480	0485	0491	0496	0503	0509	0514	72
18	1,0514	0521	0526	0533	0539	0545	0551	0557	0564	0570	0576	71
19	1,0576	0583	0589	0595	0602	0609	0615	0621	0628	0635	0642	70
20	1,0642	0648	0655	0662	0669	0676	0683	0691	0697	0704	0711	69
21	1,0711	0718	0726	0733	0740	0748	0755	0763	0770	0778	0785	68
22	1,0785	0793	0800	0808	0817	0824	0832	0840	0847	0855	0864	67
23	1,0864	0872	0880	0889	0896	0904	0912	0921	0929	0937	0947	66
24	1,0947	0955	0964	0972	0981	0989	0999	1007	1016	1025	1034	65
25	1,1034	1042	1052	1061	1071	1079	1089	1098	1107	1116	1126	64
26	1,1126	1136	1145	1154	1164	1174	1183	1193	1203	1213	1223	63
27	1,1223	1233	1244	1254	1264	1274	1284	1294	1305	1315	1326	62
28	1,1326	1337	1347	1357	1369	1379	1390	1401	1,1412	1422	1434	61
29	1,1434	1444	1456	1467	1478	1489	1501	1513	1523	1535	1547	60
30	1,1547	1558	1570	1582	1594	1606	1618	1629	1641	1654	1666	59
31	1,1666	1678	1690	1703	1715	1729	1741	1754	1766	1779	1792	58
32	1,1792	1805	1818	1830	1844	1857	1869	1884	1896	1910	1923	57
33	1,1923	1937	1950	1965	1979	1992	2006	2019	2034	2048	2063	56
34	1,2063	2076	2090	2105	2120	2134	2149	2164	2179	2192	2207	55
35	1,2207	2223	2238	2253	2268	2284	2299	2314	2329	2346	2361	54
36	1,2361	2376	2392	2408	2424	2439	2456	2472	2489	2505	2522	53
37	1,2522	2538	2555	2571	2588	2604	2621	2639	2655	2673	2690	52
38	1,2690	2708	2724	2742	2760	2778	2796	2814	2832	2850	2868	51
39	1,2868	2887	2905	2923	2942	2960	2979	2997	3016	3034	3055	50
40	1,3055	3074	3092	3111	3132	3151	3170	3191	3210	3229	3250	49
41	1,3250	3270	3291	3310	3332	3351	3373	3394	3414	3435	3457	48
42	1,3457	3477	3499	3521	3541	3563	3585	3607	3630	3652	3672	47
43	1,3672	3695	3717	3740	3763	3785	3808	3831	3854	3877	3902	46
44	1,3902	3926	3949	3972	3996	4019	4045	4069	4092	4118	4142	45
	(1,0)	**,9**	**,8**	**,7**	**,6**	**,5**	**,4**	**,3**	**,2**	**,1**	**,0**	**Grad.**
Cosecante												

Tabla de secantes y cosecantes

Secante												
Grad.	**,0**	**,1**	**,2**	**,3**	**,4**	**,5**	**,6**	**,7**	**,8**	**,9**	**(1,0)**	
45	1,414	417	1419	422	424	427	429	432	434	437	439	44
46	1,439	442	445	447	450	453	455	458	461	463	466	43
47	1,466	469	472	474	477	480	483	486	489	492	495	42
48	1,495	497	500	503	506	507	512	515	518	521	524	41
49	1,524	527	530	534	537	540	543	546	549	553	556	40
50	1,556	559	562	565	569	572	576	579	582	586	589	39
51	1,589	592	596	599	603	596	610	613	617	621	624	38
52	1,624	628	632	635	639	643	646	650	654	658	662	37
53	1,662	666	669	673	677	681	685	689	693	697	701	36
54	1,701	705	709	714	718	722	726	730	735	739	743	35
55	1,743	748	752	757	761	766	770	775	779	785	788	34
56	1,788	793	798	802	807	812	817	821	826	831	836	33
57	1,836	841	846	851	856	861	866	871	877	882	887	32
58	1,887	893	898	903	908	914	919	925	931	936	942	31
59	1,942	947	953	959	965	970	976	982	988	994	*000	30
60	2,000	006	012	018	025	031	037	043	050	056	063	29
61	2,063	069	076	082	089	096	103	109	116	123	130	28
62	2,130	137	144	151	158	166	173	181	188	195	203	27
63	2,203	210	218	226	233	241	249	257	265	273	281	26
64	2,281	289	298	306	314	323	332	340	349	357	366	25
65	2,366	375	384	393	402	411	421	430	440	449	459	24
66	2,459	469	478	488	498	508	518	528	539	549	560	23
67	2,560	570	581	591	602	613	624	635	647	658	670	22
68	2,670	681	693	705	717	729	740	753	765	778	790	21
69	2,790	803	816	829	843	856	869	883	896	910	924	20
70	2,924	938	952	966	981	996	*010	*026	*040	*056	*071	19
71	3,071	087	103	119	135	152	169	185	202	219	236	18
72	3,236	253	271	289	307	326	344	362	382	401	420	17
73	3,420	440	460	479	500	521	542	563	584	606	628	16
74	3,628	650	672	695	719	743	765	789	814	839	864	15
75	3,864	890	915	940	967	994	*021	*049	*077	*105	*134	14
76	4,134	163	193	223	254	284	316	348	378	411	444	13
77	4,444	478	515	550	585	621	658	695	733	771	810	12
78	4,810	850	890	931	973	015	058	105	149	195	241	11
79	5,241	288	336	385	435	488	540	593	647	701	760	10
80	5,760	817	875	935	995	*061	*124	*188	*254	*321	*394	9
81	6,394	464	536	609	689	766	845	925	*013	*097	*184	8
82	7,184	278	369	463	559	663	764	868	981	*091	*203	7
83	8,203	326	446	569	703	834	969	9,116	9,259	9,407	9,569	6
84	9,569	9,728	9,891	10,07	10,25	10,40	10,63	10,82	11,04	11,25	11,47	5
85	11,47	11,71	11,95	12,21	12,47	12,74	13,04	13,33	13,66	13,99	14,33	4
86	14,33	14,71	15,08	15,50	15,92	16,39	16,86	17,36	17,92	18,48	19,12	3
87	19,12	19,76	20,49	21,23	22,03	28,90	23,87	24,94	26,04	27,32	28,65	2
88	28, 67	30,12	31,85	33,67	35,84	38,17	40,98	44,05	47,85	52,08	57,14	1
89	57,14	63, 69	71,43	81,97	95,24	114,9	148,9	192,3	285,7	588,2	....	0
	(1,0)	**,9**	**,8**	**,7**	**,6**	**,5**	**,4**	**,3**	**,2**	**,1**	**,0**	**Grad.**
Cosecante												

La función $y = x^2$; $1{,}00 \le x \le 5{,}49$ (Cuadrados)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,020	1,040	1,061	1,082	1,102	1,124	1,145	1,166	1,188
1,1	1,210	1,232	1,254	1,277	1,300	1,322	1,346	1,369	1,392	1,416
1,2	1,440	1,464	1,488	1,513	1,538	1,562	1,588	1,613	1,638	1,664
1,3	1,690	1,716	1,742	1,769	1,796	1,822	1,850	1,877	1,904	1,932
1,4	1,960	1,988	2,016	2,045	2,074	2,102	2,132	1,161	2,190	2,220
1,5	2,250	2,280	2,310	2,341	2,372	2,402	2,434	2,465	2,496	2,528
1,6	2,560	2,592	2,624	2,657	2,690	2,722	2,756	2,789	2,822	2,856
1,7	2,890	2,924	2,958	2,993	3,028	3,062	3,098	3,133	3,168	3,204
1,8	3,240	3,276	3,312	3,349	3,386	3,420	3,460	3,497	3,534	3,572
1,9	3,610	3,648	3,686	3,725	3,764	3,802	3,842	3,881	3,920	3,960
2,0	4,000	4,040	4,080	4,121	4,162	4,202	4,244	4,285	4,326	4,368
2,1	4,410	4,452	4,494	4,537	4,580	4,622	4,666	4,709	4,752	4,796
2,2	4,840	4,884	4,928	4,973	5,018	5,062	5,108	5,153	5,198	5,244
2,3	5,290	5,336	5,382	5,429	5,476	5,522	5,570	5,617	5,664	5,712
2,4	5,760	5,808	5,856	5,905	5,954	6,002	6,052	6,101	6,150	6,200
2,5	6,250	6,300	6,350	6,401	6,452	6,502	6,554	6,605	6,656	6,708
2,6	6,760	6,812	6,864	6,917	6,970	7,022	7,076	7,129	7,182	7,236
2,7	7,290	7,344	7,398	7,453	7,508	7,562	7,618	7,673	7,728	7,784
2,8	7,840	7,896	7,952	8,009	8,066	8,122	1,180	8,237	8,294	8,352
2,9	8,410	8,468	8,526	8,585	8,644	8,702	8,762	8,821	8,880	8,940
3,0	9,000	9,060	9,120	9,181	9,242	9,302	9,364	9,425	9,486	9,548
3,1	9,610	9,672	9,734	9,797	9,860	9,922	9,986	10,05	10,11	10,18
3,2	10,24	10,30	10,37	10,43	10,50	10,56	10,63	10,69	10,76	10,82
3,3	10,89	10,96	11,02	11,09	11,16	11,22	11,29	11,36	11,42	11,49
3,4	11,56	11,63	11,70	11,76	11,83	11,90	11,97	12,04	12,11	12,18
3,5	12,25	12,32	12,39	12,46	12,53	12,60	12,67	12,74	12,82	12,89
3,6	12,96	13,03	13,10	13,18	13,25	13,32	13,40	13,47	13,54	13,62
3,7	13,69	13,76	13,84	13,91	13,99	14,06	14,14	14,21	14,29	14,36
3,8	14,44	14,52	14,59	14,67	14,75	14,82	14,90	14,98	15,05	15,13
3,9	15,21	15,29	15,37	15,44	15,52	15,60	15,68	15,76	15,84	15,92
4,0	16,00	16,08	16,16	16,24	16,32	16,40	16,48	16,56	16,65	16,73
4,1	16,81	16,89	16,97	17,06	17,14	17,22	17,31	17,39	17,47	17,56
4,2	17,64	17,72	17,81	17,89	17,98	18,06	18,15	18,23	18,32	18,40
4,3	18,49	18,58	18,66	18,75	18,84	18,92	19,01	19,10	19,18	19,27
4,4	19,36	19,45	19,54	19,62	17,71	19,80	19,89	19,98	20,07	20,16
4,5	20,25	20,34	20,43	20,52	20,61	20,70	20,79	20,88	20,98	21,07
4,6	21,16	21,25	21,34	21,44	21,53	21,62	21,72	21,81	21,90	22,00
4,7	22,09	22,18	22,28	22,37	22,47	22,56	22,66	22,75	22,85	22,94
4,8	23,04	23,14	23,23	23,33	23,43	23,52	23,62	23,72	23,81	23,91
4,9	24,01	24,11	24,21	24,30	24,40	24,50	24,60	24,70	24,80	24,90
5,0	25,00	25,10	25,20	25,30	25,40	25,50	25,60	25,70	25,81	25,91
5,1	26,01	26,11	24,21	26,32	26,42	26,52	26,63	26,73	26,83	26,94
5,2	27,04	27,14	27,25	27,35	27,46	27,56	27,67	27,77	27,88	27,98
5,3	28,09	28,20	28,30	28,41	28,52	28,62	28,73	28,84	28,94	29,05
5,4	29,16	29,27	29,38	29,48	29,59	29,70	29,81	29,92	30,03	30,14

Si se corre la coma en x un lugar a la derecha (izquierda), se debe correr en x^2 dos lugares a la derecha (izquierda).

La función $y = x^2$; $5{,}50 \le x \le 9{,}99$ (Cuadrados)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	30,25	30,36	30,47	30,58	30,69	30,80	30,91	31,02	31,14	31,25
5,6	31,36	31,47	31,58	31,70	31,81	31,92	32,04	32,15	32,26	32,38
5,7	32,49	32,60	32,72	32,83	32,95	33,06	33,18	33,29	33,41	33,52
5,8	33,64	33,76	33,87	33,99	34,11	34,22	34,34	34,46	34,57	34,69
5,9	34,81	34,93	35,05	35,16	35,28	35,40	35,52	35,64	35,76	35,88
6,0	36,00	36,12	36,24	36,36	36,48	36,60	36,72	36,84	36,97	37,09
6,1	37,21	37,33	37,45	37,58	37,70	37,82	37,95	38,07	38,19	38,32
6,2	38,44	38,56	38,69	38,81	38,94	39,06	39,19	39,31	39,44	39,56
6,3	39,69	39,82	39,94	40,07	40,20	40,32	40,45	40,58	40,70	40,83
6,4	40,96	41,09	41,22	41,34	41,47	41,60	41,73	41,86	41,99	42,12
6,5	42,25	42,38	42,51	42,64	42,77	42,90	43,03	43,16	43,30	43,43
6,6	43,56	43,69	43,82	43,96	44,09	44,22	44,36	44,49	44,62	44,76
6,7	44,89	45,02	45,16	45,29	45,43	45,56	45,70	45,83	45,97	46,10
6,8	46,24	46,38	46,51	46,65	46,79	46,92	47,06	47,20	47,33	47,47
6,9	47,61	47,75	47,89	48,02	48,16	48,30	48,44	48,58	48,72	48,86
7,0	49,00	49,14	49,28	49,42	49,56	49,70	49,84	49,98	50,13	50,27
7,1	50,41	50,55	50,69	50,84	50,98	51,12	51,27	51,41	51,55	51,70
7,2	51,84	51,98	52,13	52,27	52,42	52,56	52,71	52,85	53,00	53,14
7,3	53,29	53,44	53,58	53,73	53,88	54,02	54,17	54,32	54,46	54,61
7,4	54,76	54,91	55,06	55,20	55,35	55,50	55,65	55,80	55,95	56,10
7,5	56,25	56,40	56,55	56,70	56,85	57,00	57,15	57,30	57,46	57,61
7,6	57,76	57,91	58,06	58,22	58,37	58,52	58,68	58,83	58,98	59,14
7,7	59,29	59,44	59,60	59,75	59,91	60,06	60,22	60,37	60,53	60,68
7,8	60,84	61,00	61,15	61,31	61,47	61,62	61,72	61,94	62,09	62,25
7,9	62,41	62,57	62,73	62,88	63,04	63,20	63,36	63,52	63,68	63,84
8,0	64,00	64,16	64,32	64,48	64,64	64,80	64,96	65,12	65,29	65,45
8,1	65,61	65,77	65,93	66,10	66,26	66,42	66,59	66,75	66,91	67,08
8,2	67,24	67,00	13,84	13,91	13,99	14,06	14,14	14,21	14,29	14,36
8,3	68,89	69,06	69,22	69,39	69,56	69,72	69,89	70,06	70,22	70,39
8,4	70,56	70,73	70,90	71,06	71,23	71,40	71,57	71,74	71,91	72,08
8,5	72,25	72,42	72,59	72,76	72,93	73,10	73,27	73,44	73,62	73,79
8,6	73,96	74,13	74,30	74,48	74,65	74,82	75,00	75,17	75,34	75,52
8,7	75,69	75,86	76,04	76,21	76,39	76,56	76,74	7691,00	77,09	77,26
8,8	77,44	77,62	77,79	77,97	78,15	78,32	78,50	78,58	78,85	79,03
8,9	79,21	73,39	79,57	79,74	79,92	80,10	80,28	80,46	80,64	80,82
9,0	81,00	81,18	81,36	81,54	81,72	81,90	82,08	82,26	82,45	82,63
9,1	82,81	82,99	83,17	83,36	83,54	83,82	83,91	84,09	84,27	84,46
9,2	84,64	84,82	85,01	85,19	85,38	85,56	85,75	85,93	86,12	86,30
9,3	86,49	86,68	86,86	87,05	87,24	87,42	87,61	87,80	87,98	88,17
9,4	88,36	88,55	88,74	88,92	89,11	89,30	89,49	89,68	89,87	90,06
9,5	90,25	90,44	90,63	90,82	91,01	91,20	91,39	91,58	91,78	91,97
9,6	92,16	92,35	92,54	92,74	92,93	93,12	93,32	93,51	93,70	93,90
9,7	94,09	94,28	94,48	94,67	94,87	95,06	95,26	95,45	95,65	95,84
9,8	96,04	96,24	96,43	96,63	96,83	97,02	97,22	97,42	97,61	97,81
9,9	98,01	98,21	98,41	98,60	98,80	99,00	99,20	99,40	99,60	99,80

$8{,}47^2 = 71{,}74$ $\quad 0{,}847^2 = 0{,}7174$ $\quad \sqrt{21,44} = 4,63$ $\quad \sqrt{0,2144} = 0,463$

$84{,}7^2 = 7174$ $\quad 8{,}472^2 = 71{,}77$ $\quad \sqrt{21,44} = 46,3$

La función $y = x^3$; $1{,}00 \leq x \leq 5{,}49$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,030	1,061	1,093		1,158	1,191	1,225	1,260	1,295
1,1	1,331	1,368	1,405	1,443	1,482	1,521	1,561	1,602	1,643	1,685
1,2	1,728	1,772	1,816	1,861	1,907	1,953	2,000	2,048	2,097	2,147
1,3	2,197	2,248	2,300	2,353	2,406	2,460	2,515	2,571	2,628	2,686
1,4	2,744	2,803	2,863	2,924	2,986	3,049	3,112	3,177	3,242	3,308
1,5	3,375	3,443	3,512	3,582	3,652	3,724	3,796	3,870	3,944	4,020
1,6	4,096	4,173	4,252	4,331	4,411	4,492	4,574	4,657	4,742	4,827
1,7	4,913	5,000	5,088	5,178	5,268	5,359	5,452	5,545	5,640	5,735
1,8	5,832	5,930	6,029	6,128	6,230	6,332	6,435	6,539	6,645	6,751
1,9	6,859	6,968	7,078	7,189	7,301	7,415	7,530	7,645	7,762	7,881
2,0	8,000	8,121	8,242	8,365	8,490	8,615	83,742	8,870	8,999	9,129
2,1	9,261	9,394	9,528	9,664	9,800	9,938	10,08	10,22	10,36	10,50
2,2	10,65	10,79	10,96	11,09	11,24	11,39	11,54	11,70	11,85	12,01
2,3	12,17	12,33	12,49	12,65	12,81	12,98	13,14	13,31	13,48	13,65
2,4	13,82	140,00	14,17	14,35	14,53	14,71	14,89	15,07	15,25	15,44
2,5	15,63	15,81	16,00	16,19	16,39	16,58	16,78	16,97	17,17	17,37
2,6	17,58	17,78	17,98	18,19	18,40	18,61	18,82	19,03	19,25	19,47
2,7	19,68	19,90	20,12	20,35	20,57	20,80	21,02	21,25	21,40	21,72
2,8	21,95	22,19	22,43	22,67	22,91	23,15	23,39	23,64	23,89	24,14
2,9	24,39	24,64	24,90	25,15	25,41	25,67	25,93	26,20	26,46	26,73
3,0	27,00	27,27	27,54	27,82	28,09	28,37	28,65	28,93	29,22	29,50
3,1	29,79	30,08	30,37	30,66	30,96	31,26	31,55	31,86	32,16	32,46
3,2	32,77	33,08	33,39	33,70	34,01	34,33	34,65	34,90	35,29	35,61
3,3	35,94	36,26	36,59	36,93	37,26	37,60	37,93	38,27	38,61	38,96
3,4	39,30	39,65	40,00	40,35	40,71	41,06	41,42	41,78	42,14	42,51
3,5	42,88	43,24	43,61	43,99	44,36	44,74	45,12	45,50	45,88	46,27
3,6	46,66	47,05	47,44	47,83	48,23	48,63	49,03	49,43	49,84	50,24
3,7	50,65	51,06	51,48	51,90	52,31	52,73	53,16	53,58	54,01	54,44
3,8	54,87	55,31	55,74	56,18	56,62	57,07	57,51	57,96	58,41	58,86
3,9	59,32	59,78	60,24	60,70	61,16	61,63	62,10	62,57	63,04	63,52
4,0	64,00	64,48	64,96	65,45	65,94	66,43	66,92	67,42	67,92	68,42
4,1	68,92	69,43	69,93	70,44	70,96	71,47	71,99	72,51	73,03	73,56
4,2	74,09	74,62	75,15	75,69	76,23	76,77	77,31	77,85	78,40	78,95
4,3	79,51	80,06	80,62	81,18	81,75	82,31	82,88	83,45	84,03	84,60
4,4	85,18	85,77	86,35	86,94	87,53	88,12	88,72	89,31	89,92	90,52
4,5	91,13	91,73	92,35	92,96	93,58	94,20	94,82	95,44	96,07	96,70
4,6	97,34	97,97	98,61	99,25	99,90	100,5	101,2	101,8	102,5	103,2
4,7	103,8	104,5	105,2	105,8	106,5	107,2	107,9	108,5	109,2	109,9
4,8	110,6	111,3	112,0	112,7	113,4	114,1	114,8	115,5	116,2	116,9
4,9	117,6	118,4	119,1	119,8	120,6	121,3	122,0	122,8	123,5	124,3
5,0	125,0	125,8	126,5	127,3	128,0	128,8	129,6	130,3	131,1	131,9
5,1	132,7	133,4	134,2	135,0	135,8	136,6	137,4	138,2	139,0	139,8
5,2	140,6	141,4	142,2	143,1	143,9	144,7	145,5	146,4	147,2	148,0
5,3	148,9	149,7	150,6	151,4	152,3	153,1	154,0	154,9	155,7	156,6
5,4	157,5	158,3	159,2	160,1	161,0	161,9	162,8	163,7	164,6	165,5

Si se corre la coma en *x* un lugar a la derecha (izquierda), se debe correr en x^3 tres lugares a la derecha (izquierda).

La función $y = x^3$; $5{,}50 \le x \le 9{,}99$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	166,4	167,3	168,2	169,1	170,0	171,0	171,9	172,8	173,7	174,7
5,6	175,6	176,6	177,5	178,5	179,4	180,4	181,3	182,3	183,3	184,2
5,7	185,2	186,2	187,1	188,1	189,1	190,1	191,1	192,1	193,1	194,1
5,8	195,1	196,1	197,1	198,2	199,2	200,2	201,2	202,3	203,3	204,3
5,9	205,4	206,4	207,5	208,5	209,6	210,6	211,7	212,8	213,8	214,9
6,0	216,0	217,1	218,2	219,3	220,3	221,4	222,5	223,6	224,8	225,9
6,1	227,0	228,1	229,2	230,3	231,5	232,6	233,7	234,9	236,0	237,2
6,2	238,3	239,5	240,6	241,8	243,0	244,1	245,3	246,5	247,7	248,9
6,3	250,0	251,2	252,4	253,6	254,8	256,0	257,3	258,5	259,7	260,9
6,4	262,1	263,4	264,6	265,8	267,1	268,3	269,6	270,8	272,1	273,4
6,5	274,6	275,9	277,2	278,4	279,7	281,0	282,3	283,6	284,9	286,2
6,6	287,5	288,8	290,1	291,4	292,8	294,1	295,4	296,7	298,1	299,4
6,7	300,8	302,1	303,5	304,8	306,2	307,5	308,9	310,3	311,7	313,0
6,8	314,4	315,8	317,2	318,6	320,0	321,4	322,8	324,2	325,7	327,1
6,9	328,5	329,9	331,4	332,8	334,3	335,7	337,2	338,6	340,1	341,5
7,0	343,0	344,5	345,9	347,4	348,9	350,4	351,9	353,4	354,9	356,4
7,1	357,9	359,4	360,9	362,5	364,0	365,5	367,1	368,6	370,1	371,7
7,2	373,2	374,8	376,4	377,9	379,5	381,1	382,7	384,2	385,8	387,4
7,3	389,0	390,6	392,2	393,8	395,4	397,1	398,7	400,3	401,9	403,6
7,4	405,2	406,9	408,5	410,2	411,8	413,5	415,2	416,8	418,5	420,2
7,5	421,9	423,6	425,3	427,0	428,7	430,4	432,1	433,8	435,5	437,2
7,6	439,0	440,7	442,5	444,2	445,9	447,7	449,5	451,2	453,0	454,8
7,7	456,5	458,3	460,1	461,9	463,7	465,5	467,3	469,1	470,9	472,7
7,8	474,6	476,4	478,2	480,0	481,9	483,7	485,6	487,4	489,3	491,2
7,9	493,0	494,9	496,8	498,7	500,6	502,5	504,4	506,3	508,2	510,1
8,0	512,0	513,9	515,8	517,8	519,7	521,7	523,6	525,6	527,5	529,5
8,1	531,4	533,4	535,4	537,4	539,4	541,3	543,3	545,3	547,3	549,4
8,2	551,4	553,4	555,4	557,4	559,5	561,5	563,6	565,6	567,7	569,7
8,3	571,8	573,9	575,9	578,0	580,1	582,2	584,3	586,4	588,5	590,6
8,4	592,7	594,8	596,9	599,1	601,2	603,4	605,5	607,6	609,8	612,0
8,5	614,1	616,3	618,5	620,7	622,8	625,0	627,2	629,4	631,6	633,8
8,6	636,1	638,3	640,5	642,7	645,0	647,2	649,5	651,7	654,0	656,2
8,7	658,5	660,8	663,1	665,3	667,6	669,9	672,2	674,5	676,8	679,2
8,8	681,5	683,8	686,1	688,5	690,8	693,2	695,5	697,9	700,2	702,6
8,9	705,0	707,3	709,7	712,1	714,5	716,9	719,3	721,7	724,2	726,6
9,0	729,0	731,4	733,9	736,3	738,8	741,2	743,7	746,1	748,6	751,1
9,1	753,6	756,1	758,6	761,0	763,6	766,1	768,6	771,1	773,6	776,2
9,2	778,7	781,2	783,8	786,3	788,9	791,5	794,0	796,6	799,2	801,8
9,3	804,4	807,0	809,6	812,2	814,8	817,4	820,0	822,7	825,3	827,9
9,4	830,6	833,2	835,9	838,6	841,2	843,9	846,6	849,3	852,0	854,7
9,5	857,4	860,1	862,8	865,5	868,3	871,0	873,7	876,5	879,2	882,0
9,6	884,7	887,5	890,3	893,1	895,8	898,6	901,4	904,2	907,0	909,9
9,7	912,7	915,5	918,3	921,2	924,0	926,9	929,7	932,6	935,4	938,3
9,8	941,2	944,1	947,0	949,9	952,8	955,7	958,6	961,5	964,4	967,4
9,9	970,3	973,2	976,2	979,1	982,1	985,1	988,0	991,0	994,0	997,0

$8{,}47^3 = 607{,}6$ $\quad 0{,}847^3 = 0{,}6076$ $\quad \sqrt[3]{123{,}5} = 4{,}98$ $\quad \sqrt[3]{0{,}1235} = 0{,}498$

$84{,}7^3 = 607\,600$ $\quad 8{,}472^3 = 608{,}0$ $\quad \sqrt[3]{123\,500} = 49{,}8$

Notación científica

La notación científica es una forma de expresar números muy grandes o muy pequeños de manera más cómoda y concisa, es muy útil en campos como la física, la química y la astronomía, que trabajan con números extremadamente grandes o muy pequeños.

Un número está expresado en notación científica si se escribe como:

$$a = a_0 \cdot 10^k \text{ con } a_0, k \in \mathbb{Z} : 0 < a_0 < 10.$$

Ejemplos: $4\,567 = 4{,}567 \cdot 10$‡ ; $0{,}000456 = 4{,}56 \cdot 10^{-4}$

Reglas de redondeo

Las reglas de redondeo son muy importantes en la matemática y en la ciencia en general, permiten redondear números con precisión y consistencia.

Redondeo por defecto (o hacia abajo): si el dígito que se va a redondear está seguido de 0, 1, 2, 3, o 4, se redondea hacia abajo (por defecto).

Ejemplos: $1514 \approx 1500$; $1926 \approx 1\,900$; $1\,932 \approx 1\,900$; $1\,853 \approx 1\,850$

Redondeo por exceso (o hacia arriba): si el dígito que se va a redondear está seguido de 5, 6, 7, 8, o 9, se redondea hacia arriba (por exceso).

Ejemplos: $1\,868 \approx 1\,900$; $1\,984 \approx 2\,000$; $2\,018 \approx 2\,020$; $2\,025 \approx 2\,030$

Valores aproximados y cifras significativas

En un valor aproximado se llaman cifras significativas. Todas las que se encuentran a partir de la primera cifra diferente de cero. Si un número está en notación científica, los ceros de la potencia de diez no son cifras significativas.

Ejemplos:

2 020	tiene cuatro cifras significativas
0,022 00	tiene tres cifras significativas

0,020 60	tiene cuatro cifras significativas
0,000 000 1	tiene una cifra significativa
$2{,}01 \cdot 10^{-4}$	tiene tres cifras significativas

Un valor aproximado que se obtiene de uno exacto, aplicando las reglas del redondeo, tiene todas sus cifras significativas correctas.

Ejemplos:

1,41 es un valor aproximado de $\sqrt{2}$ con tres cifras correctas.

0,6667 es un valor aproximado de $\frac{2}{3}$ con cuatro cifras exactas.

$1{,}7 \cdot 10^2$ es un valor aproximado de $\sqrt{30000}$ con dos cifras correctas.

Regla fundamental del cálculo aproximado

Cuando se calcula con valores aproximados, el resultado debe darse con tantas cifras significativas como el dato que tenga menor número de cifras significativas. Los cálculos intermedios se realizan con una cifra significativa más que las que debe tener la respuesta; en caso de que esto sea demasiado engorroso, se calcula con tantas cifras como debe tener la respuesta; nunca con menos.

Para el cálculo del tanto por ciento, la cantidad de decimales y su redondeo dependen del contexto científico, técnico o estadístico. Se le aplica las reglas del redondeo y la del cálculo aproximado.

Para el cálculo de longitudes, perímetro, áreas y volúmenes si los únicos datos que se proporcionan están en función de números irracionales como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, π, etc.; la respuesta se expresará con tantas cifras significativas como la cantidad de cifras significativas que se proporcionan para esos números. En estos casos, siempre que sea un solo factor, la respuesta puede expresarse en función del número irracional que se tenga como único dato.

Esto se debe a que un número irracional se considera como un valor aproximado con una cantidad específica de cifras significativas, y debemos mantener esa precisión en nuestros cálculos y resultados.

BIBLIOGRAFÍA

Álvarez, Pérez. M., B. Almeida y E. Villegas: *El proceso de enseñanza de la Matemática. Documentos metodológicos*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2014.

Álvarez Pérez, M. y otros: *Manual de ejercicios de Matemática para la Educación Media Superior*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2008.

Ballester Pedroso, S. y otros: *Didáctica de la Matemática*, t. I, Ed. Universitaria Félix Varela, La Habana, 2018.

Campistrous Pérez, I. y otros: *Matemática décimo grado*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1989.

Campistrous Pérez, I. y otros: *Matemática onceno grado*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1990.

Campistrous Pérez, I. y otros: *Matemática duodécimo grado*, Parte 1 y 2, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1991.

Castillo Reyna, J. J. y otros: *Matemática onceno grado,* Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2024.

Castillo Reyna, J. J. y otros: *Orientaciones metodológicas Matemática* déci-mo *grado*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2024.

Che, Soler, J. y A. O. Pérez Jacinto: *Nociones de Estadística aplicada a las investigaciones pedagógicas* [Material digital], Instituto Superior Pedagógico Enrique José Varona, La Habana, 2008.

Davidson San Juan, L. D.: *Ecuaciones y matemáticos*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2008.

___________________.: *Ecuaciones y matemáticos, Solucionario*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2008.

DAVIDSON SAN JUAN, L. D. y otros: *Manual de problemas de Matemática Elemental 1*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1987.

____________________: *Manual de problemas de Matemática Elemental 2*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1995.

EGAÑA MORALES, E.: *La Estadística. Herramienta fundamental en la investigación pedagógica*, 2.ª ed., Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2010.

EINSTEIN, A.: *Mi credo humanista*, Elaleph.com, 2000, Recuperado el 1 de diciembre de 2012 de http://www.iacat.com/revista/recrearte/recrearte05/Seccion8/CredoHumanista.pdf

ICCP: *Bases generales para el perfeccionamiento del sistema nacional de educación*, Documento impreso, La Habana, 2013.

MARTÍNEZ SÁNCHEZ, Y.: *Compendio de Exámenes Finales de Matemática 12mo. grado* (2010-2020), Soporte Digital, Publicado en el portal Cubaeduca, 2021.

____________________: *Compendio de Exámenes de Ingreso a la Educación Superior en Cuba. Matemática* (2010-2025), Soporte Digital, Publicado en el portal Cubaeduca, 2025.

RODRÍGUEZ MENESES, F. y otros: *Programa matemática onceno grado,* Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2024.

____________________ : *Matemática* décimo *grado,* Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2023.

____________________ : *Orientaciones metodológicas Matemática* décimo *grado*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2023.

____________________ : *Programa matemática* décimo *grado,* Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2023.

____________________ : *Introducción a la Estadística Descriptiva*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2007.

MUÑOZ BAÑOS, F. y L. CAMPISTROUS PÉREZ: *Problemas de Matemática Elemental*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1986.

NAREDO CASTELLANOS, R.: *Entrénate en Geometría*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2011.

OCHOA ROJAS, R.: *Funciones y temas afines*, 3 t., Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2009.

PALACIO PEÑA, J.: *Didáctica de la Matemática: Búsqueda de relaciones y contextualización de problemas*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2007.

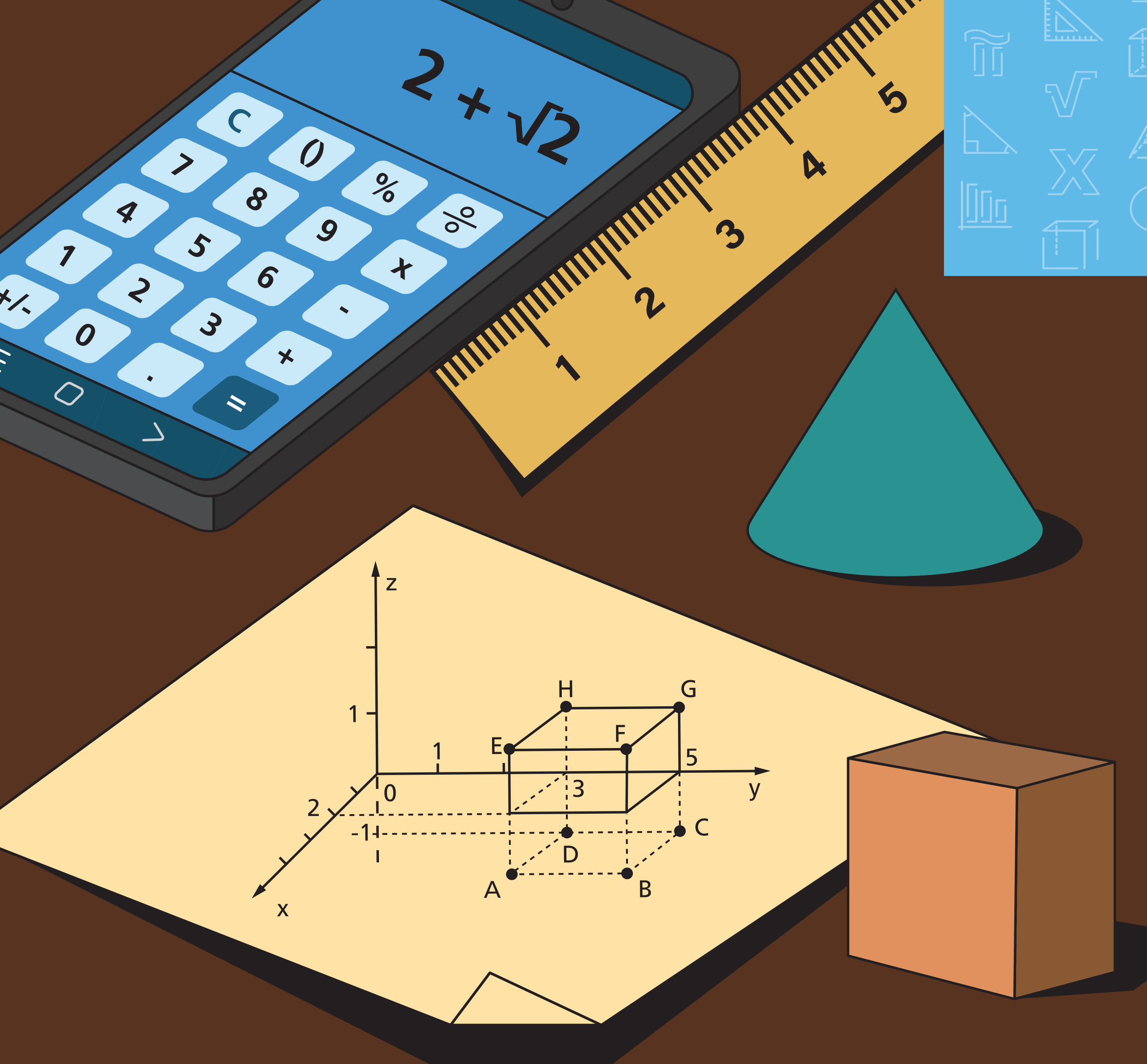
POLYA, G.: *Cómo plantear y resolver problemas*, Ed. Trillas, México, 1989.

RÍBNIKOV, K.: *Historia de las Matemáticas*, 1.a ed. en español, Ed. Mir, Moscú, 1987.

SÁNCHEZ FERNÁNDEZ, CARLOS y RITA ROLDÁN INGUANZO: *Paseo por el universo de los números*, Ed. Academia, La Habana, 2012.

STEWART, J.: *Cálculo con trascendentes tempranas*, Parte 1, Ed. Félix Varela, La Habana, 2006.

www.cuaeduca.cu.http://matematica.cuaeduca.cu/idex.php?option-comcontent&viewarticle&id4874:-lista-de-act-de-apred-10mo&catid 528&Itemid 73



EDITORIAL
PUEBLO Y EDUCACIÓN

9 789591 352316