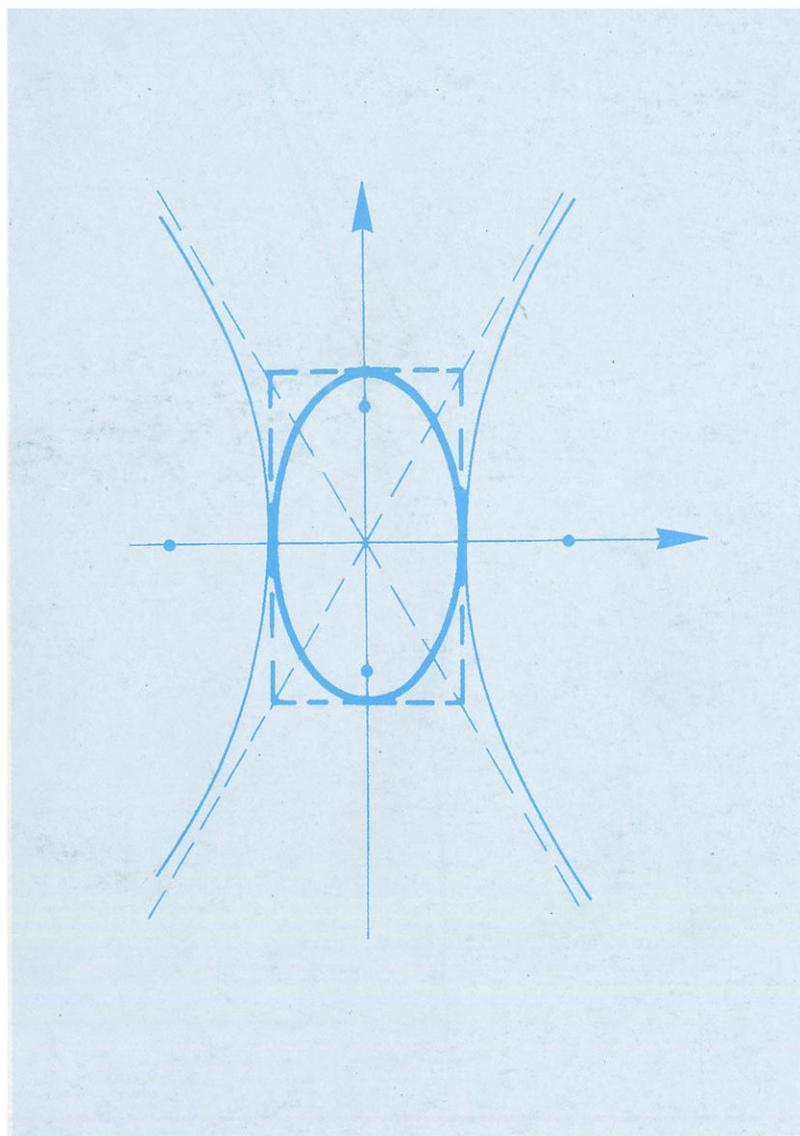


LIBRO DE DISTRIBUCIÓN GRATUITA. PROHIBIDA SU VENTA



**Matemática**

11° grado

# MATEMÁTICA

Onceño grado

Dr. Luis Campistrous Pérez  
Prof. Zulema Cuadrado González  
Prof. Hilba Rivero Álvarez  
Prof. Richard Naredo Castellanos  
Lic. Alexis Durán Jorrín  
Dr. Joaquín Palacios Peña  
Dra. Celia Rizo Cabrera



Editorial  
Pueblo y Educación

O Quinta reimpression, 2005  
© Primera reimpression, 1991  
© Ministerio de Educaci3n, Cuba, 1990  
© Editorial Pueblo y Educaci3n, 1990

ISBN 959-13-0688-1

EDITORIAL PUEBLO Y EDUCACI3N  
Ave. 3ra. A No. 4605 entre 46 y 60,  
Playa, Ciudad de La Habana,  
Cuba. CP 11300.

Agradecemos la colaboración que en la elaboración de este libro han brindado los colectivos de investigadores de los Institutos Superiores Pedagógicos "Juan Marinello" (Cálculo Vectorial y Geometría Analítica), "José de la Luz y Caballero", filial Las Tunas (Cálculo Diferencial y trabajo en demostraciones) y "José Martí" (Límite).

Agradecemos también al C. Dr. Luis J. Davidson su colaboración en la búsqueda de referencias históricas sobre los temas que aborda éste libro, y al profesor Carlos López Pérez su dedicación en la revisión general del texto.

Este libro forma parte del conjunto de trabajos dirigidos al Perfeccionamiento continuo del Sistema Nacional de Educación en la Educación General Politécnica y Laboral. Ha sido elaborado por un colectivo de autores integrado por metodólogos, maestros, profesores y especialistas y revisado por la subcomisión correspondiente de la Comisión Nacional Permanente para la Revisión de Planes, Programas y Textos de Estudio del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas del Ministerio de Educación.

## ORIENTACIONES SOBRE EL TRABAJO CON ESTE LIBRO

Para estudiar por este libro debes tener en cuenta que el contenido se encuentra en los capítulos del 1 al 6.

Cada capítulo está dividida en epígrafes y algunos de estos en subepígrafes.

En cada epígrafe encontrarás los contenidos del curso, algunos de ellos destacados en recuadros, y ejemplos resueltos que ilustran cómo debes actuar para resolver ejercicios importantes que corresponden a ese contenido. Al final de cada epígrafe y de cada capítulo aparecen ejercicios que debes resolver para tu ejercitación y que corresponden a la materia estudiada en cada uno de estos. Los ejercicios que aparecen señaladas con un asterisco, son los que presentan un mayor grado de dificultad.

En las últimas páginas del libro aparecen las respuestas de la mayoría de los ejercicios propuestos, lo que te permitirá autocontrolar tu trabajo.

Los epígrafes marcados con un asterisco son para los estudiantes de los Institutos Preuniversitarios Vocacionales de Ciencias Exactas (IPVCE).

Aparecen, además, las tablas de cuadrados y cubos; las de las funciones seno, coseno, tangente y cotangente, así como las tablas de logaritmos, que necesitarás para resolver ejercicios y problemas; también un Memento donde se resumen algunos contenidos de grados anteriores que te serán necesarios para el trabajo en este grado.

# ÍNDICE

Las funciones exponenciales y logarítmicas .....	XI
<b>CAPÍTULO 1: Logaritmos. Funciones exponenciales y logarítmicas .....</b>	<b>1</b>
<i>Logaritmos .....</i>	<i>1</i>
1. Potenciación .....	1
Monotonía de la potenciación .....	4
Ejercicios .....	5
2. Logaritmación .....	8
Ejercicios .....	12
<i>Propiedades de los logaritmos .....</i>	<i>15</i>
3. Otras propiedades de los logaritmos .....	15
Ejercicios .....	19
4. Logaritmos decimales .....	23
Aplicaciones de los logaritmos .....	31
Ejercicios .....	33
<i>Funciones exponenciales y logarítmicas .....</i>	<i>35</i>
5. Funciones exponenciales .....	35
Ejercicios .....	40
6. Funciones logarítmicas .....	42
Ejercicios .....	47
<i>Ejercicios del capítulo .....</i>	<i>48</i>
<b>La Geometría analítica .....</b>	<b>57</b>
<b>CAPÍTULO 2: Geometría analítica de la recta en el plano .....</b>	<b>59</b>
<i>Ecuación cartesiana de la recta .....</i>	<i>59</i>
1. Fórmulas básicas .....	59
Ejercicios .....	69
3. Ecuación cartesiana de la recta .....	72
Ejercicios .....	81
<i>Ecuación paramétrica de la recta .....</i>	<i>85</i>
3. Vectores y coordenadas .....	85
Ejercicios .....	95
4. Ecuación paramétrica de la recta en el plano .....	98
Ejercicios .....	104
<i>Ejercicios del capítulo .....</i>	<i>106</i>

Sobre la historia de las secciones cónicas .....	112
<b>CAPÍTULO 3: Curvas de segundo grado. Secciones cónicas</b> .....	115
<i>Circunferencia</i> .....	115
1. Ecuación cartesiana de la circunferencia .....	115
Ejercicios .....	120
<i>Parábola</i> .....	124
2. Caracterización geométrica de la parábola .....	124
Ejercicios .....	131
<i>Elipse</i> .....	133
3. Ecuación cartesiana de la elipse .....	133
Ejercicios .....	143
<i>Hipérbola</i> .....	147
4. Ecuación cartesiana de la hipérbola .....	147
Ejercicios .....	154
<b>c*</b> Secciones cónicas .....	158
Ejercicios .....	164
<i>Ejercicios del capítulo</i> .....	165
Concepto de límite .....	169
<b>CAPÍTULO 4: Funciones y límites</b> .....	171
<i>Funciones numéricas</i> .....	171
1. Funciones. Dominio e imagen .....	171
Ejercicios .....	178
2. Operaciones con funciones .....	183
Ejercicios .....	187
<i>Límites</i> .....	187
3. Límite de una función en un punto .....	189
Ejercicios .....	196
4. Operaciones con límites .....	198
Ejercicios .....	204
5. Límites notables .....	205
Ejercicios .....	210
6. Funciones exponencial y logarítmica de base e ....	211
Ejercicios .....	215
7. Funciones continuas .....	217
Ejercicios .....	220

8* Límites infinitos .....	222
Ejercicios .....	227
Ejercicios del capítulo .....	228
El cálculo diferencial .....	231
CAPÍTULO 5: Cálculo diferencial .....	234
Derivada de una función .....	234
1. Tangente a una curva .....	234
Ejercicios .....	237
2. Derivada de una función .....	240
Ejercicios .....	245
3. Reglas de derivación .....	247
Ejercicios .....	252
4. Otras reglas de derivación .....	256
Ejercicios .....	261
5. Derivación de funciones trigonométricas .....	263
Ejercicios .....	265
6. Derivación de funciones logarítmicas y exponencia- les .....	267
Ejercicios .....	270
7. Cálculo de derivadas .....	273
Ejercicios .....	274
Aplicaciones de la derivada al análisis de funciones .	278
8. Crecimiento y decrecimiento de las funciones en un intervalo .....	278
Ejercicios .....	283
9. Determinación de extremos locales de una función .	284
Ejercicios .....	290
Otras aplicaciones de la derivada .....	293
10. Cálculo aproximado de los valores de una función .	293
Ejercicios .....	295
11. Problemas sobre valores extremos .....	296
Ejercicios .....	299
12.* Rapidez de cambio .....	302
Ejercicios .....	305
Ejercicios del capítulo .....	307

El Cálculo integral .....	310
<b>CAPÍTULO 6: Cálculo integral</b> .....	<b>312</b>
<i>Integración</i> .....	312
1. Primitiva de una función .....	312
<b>Ejercicios</b> .....	<b>315</b>
2. Integral indefinida .....	316
Ejercicios .....	319
3. Integral definida .....	321
Ejercicios .....	323
<i>Áreas</i> .....	324
4. Área e integración .....	324
Ejercicios .....	326
5. Aplicación al cálculo de áreas .....	327
Ejercicios .....	332
<i>Ejercicios de1 capítulo</i> .....	335
<b>Respuestas de los ejercicios</b> .....	<b>339</b>
<b>Anexo</b> .....	<b>392</b>
<b>Tablas matemáticas</b> .....	<b>392</b>
<b>Memento</b> .....	<b>402</b>

## LAS FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

En las tablillas de barro con escritura cuneiforme de la época babilónica (1600 a.n.e.), se hallan algunos cuadros con las potencias de los números, muy parecidos a las actuales tablas de logaritmos. En estas tablillas con los exponentes de las diez primeras potencias, están los resultados para las bases 9, 16, 100, 225,... etc. (puede observarse que son todos cuadrados perfectos).

Se ilustran en estas escrituras cuneiformes, problemas donde se plantean cuestiones tales como a qué exponente hay que elevar un número dado para obtener otro también prefijado, es decir, lo que para nosotros actualmente va a significar cuál es el logaritmo de este último número, en un sistema cuya base es el primero de los números dados.

Aunque el trabajo con los exponentes continúa desarrollándose, no es hasta 250 a.n.e. que el más grande de los matemáticos griegos, Arquímedes de Siracusa, en su obra *Arenario* menciona la propiedad de los exponentes que conduciría a la creación de los logaritmos. Esta propiedad Arquímedes la enuncia de la siguiente forma: la suma de los órdenes (exponentes) de varios números con la misma base corresponde al orden (exponente) del producto de estos números.

No obstante estos antecedentes de la noción de logaritmo, la idea definitiva que condujo a la invención de los logaritmos, tal como los estudiamos hoy, se debe al matemático escocés Juan Neper (1550- 1617). Esta idea está basada en la correspondencia que existe entre la sucesión de los números naturales y la de sus potencias.

Neper utilizó como base para sus logaritmos, un número irracional que estudiarás en el capítulo de Funciones (se denota  $e$  y es aproximadamente igual a 2,715 281) y que en la matemática actual es la base de un sistema de logaritmos que se denominan, en honor a Neper, *logaritmos neperianos* y que estudiarás también en este capítulo.

Nuestras actuales tablas de logaritmos, que aparecen al final de este libro, fueron preparadas por el matemático inglés Henry Briggs, quien de acuerdo con Neper, decidió que la base 10 sería mas útil en muchos casos por ser la base del sistema de numeración que se utiliza universalmente.

En este capítulo vas a trabajar fundamentalmente con los logaritmos de base 10 y, como antes dijimos, más tarde profundizarás tus conocimientos con el estudio del número  $e$  y de los logaritmos que tienen esa base.

# LOGARITMOS. FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

## LOGARITMOS

### 1. Potenciación

Desde grados anteriores has estudiado las potencias, en décimo grado se definieron las potencias de exponente real y sus propiedades (punto 3 del Memento). Debes tener en cuenta que las potencias de exponente real solo se definieron si la base es positiva, es decir, en la igualdad:

$$a^c = b \quad \text{necesariamente} \quad a > 0 \quad \text{y} \quad b > 0 \quad (1)$$

Las propiedades de la potenciación pueden ser aplicadas al cálculo.

#### Ejemplo 1

Calcula aplicando las propiedades de las potencias:

$$\text{a) } 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \quad \text{b) } 3^{\frac{3}{4}} : 3^{\frac{1}{2}} \quad \text{c) } (2^{-4})^{-\frac{1}{2}} \quad \text{d) } \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

$$\text{e) } 20^4 : 5^4 \quad \text{f) } (x+y)^{\frac{1}{2}} \cdot (x+y)^2 \quad \text{g) } \frac{x^m + 1,5}{x^m - 2} \quad (x \neq 0)$$

$$\text{h) } (x^2 - 4)^2 : (x+2)^2 \quad (x \neq -2) \quad \text{i) } (x + \sqrt{2})^3 \cdot (x - \sqrt{2})^3$$

Resolución

$$\text{a) } 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = 5^{\frac{3+2}{6}} = 5^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{5^5} = \sqrt[6]{3125}$$

$$\text{b) } 3^{\frac{3}{4}} : 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3-2}{4}} = 3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$$

$$\text{c) } \left(2^{-4}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(2\right)^{(-4)\left(-\frac{1}{2}\right)} = 2^2 = 2^2 = 4$$

$$\text{d) } \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$$

$$\text{e) } 20^4 : 5^4 = (20 : 5)^4 = 4^4 = 256$$

$$\text{f) } (x+y)^{\frac{1}{2}} \cdot (x+y)^2 = (x+y)^{\frac{1}{2} + 2} = (x+y)^{\frac{5}{2}}$$

$$g) \frac{x^{m+1,5}}{m-2} = x^{m+1,5-(m-2)} = x^{m+1,5-m+2} = x^{3,5}$$

$$h) (x^2-4)^2 : (x+2)^2 = \frac{(x+2) \cdot (x-2)^2}{(x+2)^2} = \frac{(x+2)^2 \cdot (x-2)^2}{(x+2)^2} = (x-2)^2$$

$$i) (x+\sqrt{2})^3 \cdot (x-\sqrt{2})^3 = \left[ (x+\sqrt{2}) \cdot (x-\sqrt{2}) \right]^3 = (x^2-2)^3 \quad \blacksquare$$

Las propiedades de la potenciación también resultan útiles para resolver ecuaciones en las que intervienen potencias; para esto hay que tener presente que de la igualdad (1) resulta que:

$$\text{Si } a^x = a^y, \text{ entonces } x = y \quad (a \neq 1).$$

### Ejemplo 2

Resuelve:

$$a) 2^x = \frac{1}{64} \quad b) 2^{x-1} = 4^5 \quad c) \sqrt[3]{4^x} = 32 \quad d) 9^{x+3} = 27^x$$

Resolución

$$a) 2^x = \frac{1}{64}$$

$$2^x = \frac{1}{2^6}$$

Expresando 64 como potencia de 2.

$$2^x = 2^{-6}$$

Aplicando definición da exponente negativo.

$$x = -6$$

Si das potencias de la misma base son iguales, entonces los exponentes también lo son.

$$b) 2^{x-1} = 4^5$$

$$2^{x-1} = (2^2)^5$$

$$2^{x-1} = 2^{10}$$

$$x-1 = 10$$

$$x = 11$$

$$c) \sqrt[3]{4^x} = 32$$

$$4^{\frac{x}{3}} = 32$$

$$(2^2)^{\frac{x}{3}} = 2^5$$

$$2^{\frac{2}{3}x} = 2^5$$

$$\frac{2}{3}x = 5$$

$$x = \frac{15}{2}$$

$$d) 9^{x+3} = 27^x$$

$$(3^2)^{x+3} = 3^{3x}$$

$$3^{2x+6} = 3^{3x}$$

$$2x+6 = 3x$$

$$x = 6$$

Observa que para resolver estas ecuaciones hemos transformado las mismas en otras con potencias de igual base, para eso aplicamos la definición a las propiedades de la

potenciación.

Con reflexiones de este tipo podemos resolver ecuaciones que requieren otros conocimientos.

**Ejemplo 3**

Resuelve:

a)  $5 \cdot 2^{x-3} = 80$

b)  $5^{x-1} + 5^{x-2} = 30$

c)  $(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

d)  $2^{2x} + 8 \cdot 2^x - 48 = 0$

e)  $3^x = 40$

Resolución

a)  $5 \cdot 2^{x-3} = 80$

$2^{x-3} = 80 : 5$

$2^{x-3} = 16$

$2^{x-3} = 2^4$

$x - 3 = 4$

$x = 7$

b)  $5^{x-1} + 5^{x-2} = 30$  como  $5^{x-1} = 5^x \cdot 5^{-1}$

y  $5^{x-2} = 5^x \cdot 5^{-2}$

$5^x (5^{-1} + 5^{-2}) = 30$  extrayendo factor

común  $5^x$

$5^x \left( \frac{6}{25} \right) = 30$

$5^x = 30 \cdot \frac{25}{6}$

$5^x = 125$

$5^x = 5^3$

$x = 3$

c)  $(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

Si hacemos  $2^x = y$  resulta que:

$y^2 - 5 \cdot y + 4 = 0$

$(y - 4) \cdot (y - 1) = 0$

$y = 4$  ó  $y = 1$  Como:  $2^x = y$

$2^x = 4$  ó  $2^x = 1$

$2^x = 2^2$  ó  $2^x = 2^0$

$x = 2$  ó  $x = 0$

d)  $2^{2x} + 8 \cdot 2^x - 48 = 0$

Si hacemos  $2^x = y$  resulta que:

$y^2 + 8 \cdot y - 48 = 0$

$(y + 12) (y - 4) = 0$

$y = -12$  ó  $y = 4$  Como  $2^x = y$

$2^x = -12$  ó  $2^x = 4$

Imposible

$2^x = 2^2$

$2^x > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$

$x = 2$

e)  $3^x = 40$  Tratamos de expresar 40 como una potencia de base 3, pero no podemos asegurar que exista un número  $x$  que satisfaga la ecuación, por tanto, por ahora no podemos resolver esta ecuación. ■

Observa que en el inciso d) una de las potencias halladas es negativa, lo que es imposible ya que  $a^x > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

### Monotonía de la potenciación

Desde grados anteriores conoces que si:  $a > 1$  y  $b > 0$ ;  $a \cdot b > b$ . Aplicando esta propiedad a la potenciación resulta:

Si $c > 0$	Si $c < 0$
Si $a > 1$ ; $a^c > 1$	Si $a > 1$ ; $a^c < 1$
Si $a = 1$ ; $a^c = 1$	Si $a = 1$ ; $a^c = 1$
Si $0 < a < 1$ ; $a^c < 1$	Si $0 < a < 1$ ; $a^c > 1$

Esta propiedad permite demostrar la propiedad de monotonía de la potenciación.

#### Teorema 1

- a) Si  $a > 1$ , se cumple: si  $x < y$ , entonces  $a^x < a^y$ .
- b) Si  $0 < a < 1$ , se cumple: Si  $x < y$ , entonces  $a^x > a^y$ .

#### Demostración

a)  $a^y = a^{y-x} \cdot a^x$

pero  $y - x > 0$  y  $a > 1$  por lo que necesariamente  $a^{y-x} > 1$ .

entonces  $a^y = a^{y-x} \cdot a^x > a^x$  luego  $a^x < a^y$

El inciso b) se demuestra análogamente. ●

#### Ejemplo 4

Compara las siguientes potencias:

- a)  $3^{-2}$  y  $3^6$     b)  $0,4^2$  y  $0,4^9$     c)  $10^{-\frac{1}{2}}$  y  $10^{-\frac{1}{4}}$
- d)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$  y  $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

#### Resolución

- a) Como  $-2 < 6$  y la base es mayor que 1 ;  $3^{-2} < 3^6$
- b) Como  $2 < 9$  y la base está entre 0 y 1 ;  $0,4^2 > 0,4^9$
- c) Como  $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{4}$  y la base es mayor que 1 :  
 $10^{-\frac{1}{2}} < 10^{-\frac{1}{4}}$

d) Como  $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$  y la base está entre 0 y 1 ;

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \blacksquare$$

La estructura del Teorema 1, garantiza que se cumpla su recíproco .

Teorema 2

- a) Si  $a > 1$ , se cumple: Si  $a^x < a^y$ , entonces  $x < y$ ,  
 b) Si  $0 < a < 1$ , se cumple: Si  $a^x < a^y$ , entonces  $x > y$ .

Ejercicios (epígrafe 1)

1. Calcula aplicando las propiedades de las potencias.

Considera todas las variables positivas.

- |   |  |  |
|---|--|--|
| a) $(3x)^4$   | b) $x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{4}}$                                   | c) $10^2 : 10^5$   |
| d) $y^{\frac{2}{5}} : y^{\frac{1}{5}}$                              | e) $\left(5^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$                            | f) $a^{n+1} \cdot a^{n-2}$   |
| g) $\left(\frac{1}{4b}\right)^{-2}$                                 | h) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{2}} : \left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$ | i) $8^2 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3$                                |
| j) $4^{\frac{1}{3}} : 4^{-2}$                                       | k) $\left(\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)^2$                                      | l) $2^4 \cdot 3^4$   |
| m) $8^4 : 2^4$  | n) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{3}{4}}$                                   | ñ) $\left(2\sqrt[3]{9}\right)^{\sqrt{3}}$                                |
| o) $(7^{10})^{-0.1}$  | p) $11^{\frac{5}{4}} : 11^{\frac{1}{4}}$                                     | q) $13^{2\sqrt{2}} : 13^{\sqrt{2}}$                                      |
| r) $6^{\sqrt{2}+2} : 6^{\sqrt{2}-2}$                                |  | s) $3a^{9\sqrt{7}-2} \cdot 2a^{4-3\sqrt{7}}$                             |
| t) $(b^2 + \sqrt{5})^2 - \sqrt{5}$                                  |  | u) $\left(\frac{m^{\frac{2}{3}} \cdot m^{\frac{1}{3}}}{m^3}\right)^{-4}$ |
| v) $\left(a^{\frac{3}{4}} : a^{\frac{2}{5}}\right)^{10}$            |  | w) $\left(b^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{1}{2}}\right)^6 : b^{0,2}$      |
| x) $\left(y^{0,75} \cdot y^{0,5}\right)^{-4} \cdot y^{\frac{1}{3}}$ |  |  |

2. Calcula:

- |   |   |
|---|---|
| a) $3^4 \cdot \frac{1}{3^2} \cdot (-3)^2$                                       | b) $(2)^{-6} \cdot (2)^3 : (2)^{\frac{1}{3}}$         |
| c) $\left(-\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^2 \cdot (-5)^4$ | d) $4^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} : (-4)^2$ |

e)  $6^2 \cdot 8^{-1} \cdot \frac{1}{6}$

f)  $9^2 \cdot 3^{-\frac{1}{2}}$

g)  $4^2 + 81^{\frac{1}{4}} - 5^{-1}$

h)  $10^{-1} \cdot 4 + 3^0 - (5\sqrt{2})^2$

i)  $(3^{2x} : 3^{0,5 + 2x}) \cdot 3^{\frac{3}{4}}$

j)  $(5^{\frac{x}{4}} \cdot 5^{-3x})^{-\frac{4}{11}}$

k)  $a^3 \cdot b^5 \cdot a^{-7} \cdot b^{-2}$

l)  $(3^{-2} - 2^3)3^3$

m)  $18^2 \cdot 3^{-3} \cdot 6^{-4}$

n)  $\frac{6 + 6^{-2} \cdot 3^{-2} + 3^{-2}}{6^3 \cdot 6^{-5}}$

ñ)  $\frac{111^2 + 2 \cdot 11100 - 111 \cdot 10^3}{1110}$

o)  $\frac{3^2 \cdot 5 - 3 \cdot 5^3 + 5^2 \cdot 3 \cdot 10^2}{15 \cdot 10}$

3. Aplicando las propiedades de las potencias, *di* si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Justifica en caso de ser falsa.

a)  $\frac{1}{10} = 10^{-1}$

b)  $\frac{a^2}{a^5} = a^{-3}$

c)  $a^6 \cdot a^{-4} \cdot a = a^2$

d)  $2^{10} = 32^2$

e)  $10^{n+1} = 10^n \cdot 10$

f)  $3^m : 3^{m-3} = 3^3$

g)  $2^{x+1} \cdot 2^{1-x} = 2^{2x}$

h)  $2^{x-1} = 2^x \cdot \frac{1}{2}$

i)  $10^{n-1} = 10^n \cdot 10$

j)  $a^x \cdot a^y : a^{-z} = a^{x+y-z} \quad (a > 0)$

k)  $p^{2n+3} : p^{n+1} = p^{n+2} \quad (p > 0)$

4. ¿Cómo debe ser  $a$ , para que se verifique que:

$$a > a^2 > a^3 > \dots > a^n > \dots ?$$

5. Probar que:

$$\text{si } 1 < a \text{ entonces } 1 < a < a^2 < a^3 < \dots < a^n < \dots$$

6. Compara las siguientes potencias:

a)  $10^{-5}$  y  $10^{-3}$

b)  $5^{-1}$  y  $5^{-4}$

c)  $(0,3)^4$  y  $(0,3)^2$

d)  $\left(\frac{1}{10}\right)^2$  y  $\left(\frac{1}{10}\right)^{-1}$

e)  $4^{\frac{1}{2}}$  y  $4^{\frac{3}{4}}$

f)  $2^{0,2}$  y  $2^{0,09}$

g)  $\left(\frac{3}{4}\right)^2$  y  $\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}$

h)  $\left(\frac{1}{2}\right)^3$  y  $2^{-4}$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)  $5^x = 125$

b)  $2^x = \frac{1}{4}$

c)  $10^{3x} = 1000$

d)  $3^{2x} = 27$

e)  $25^x = \frac{1}{125}$

f)  $10^x = \sqrt[4]{1000}$

g)  $9^x = 243$

h)  $8^{2x} = 128$

i)  $2^x = 2\sqrt{2}$

j)  $2^x \cdot 4 = 32$

k)  $\sqrt{6^x} = 36$

l)  $3^{2x+1} = 1$

$$\begin{array}{lll}
 \text{m)} 6^x = 36\sqrt[3]{6} & \text{r)} (2^x)^2 = 2^{x+\frac{1}{4}} & \text{ñ)} 7^x = \frac{1}{\sqrt[3]{49}} \\
 \text{o)} (3\sqrt{9})^x = \frac{1}{27} & \text{p)} 27 = \left(\frac{1}{3}\right)^x & \text{q)} (9\sqrt{9})^x = \frac{1}{3\sqrt[9]{81}} \\
 \text{r)} 8^x = 8\sqrt[8]{64} & \text{s)} 4^x = \frac{2}{\sqrt[5]{8}} & \text{t)} 5^x = \sqrt[4]{25^9} \\
 \text{u)} 2^x = \frac{1}{2\sqrt[3]{4}} & \text{v)} 4^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{2} & \text{w)} 3^{3-6x} = \frac{27}{3\sqrt[3]{81}} \\
 \text{x)} \sqrt{3^x} = \frac{1}{\sqrt[4]{27}} & \text{y)} 6^{3x+4} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{9}}{36} & \\
 \text{z)} \left(\frac{3}{5}\right)^{2x} = \frac{27}{125} & & 
 \end{array}$$

R. Determina las soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} 3^{3x+2} = 3 & \text{b)} 2^{\frac{x}{3}+2} = 8 & \text{c)} 7^{x+2} = \frac{1}{343} \\
 \text{d)} 36^{x+9} = 216 & \text{e)} (2^x)^{x+9} = 16 & \text{f)} (3^x)^{x-1} = 9 \\
 \text{g)} (4^{x-2})^x = 8^x & \text{h)} (3^x)^{x-1} = 1 & \text{i)} (5^{x-2})^{x-3} = 1 \\
 \text{j)} \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2} = 0,25 & \text{k)} 3^{x^2-5} = 81 & \text{l)} 5^{3x^2+8} = 25 \\
 \text{m)} 7^{3x^2+x} = 49 & \text{n)} 2^{x^2} \cdot 9^{5x} = 1 & \text{ñ)} 4^{\frac{x-1}{2}} = 8^{x^2-1} \\
 \text{o)} 2 \cdot 4^x = \sqrt{2} & \text{p)} 4^{x+3} \cdot 2^x = 8^{x-1} & \text{q)} (3^x)^x \cdot 9^x = 27 \\
 \text{r)} 9^{-3x} = \left(\frac{1}{27}\right)^{x+3} & \text{s)} (2^x \cdot 32)^x = \frac{1}{64} & \text{t)} (4^x)^x \cdot 64^x = \frac{1}{16} \\
 \text{u)} 4^{\frac{x}{9}-2} \cdot 4^{x+1} = 64 & \text{v)} 12^{\frac{1-x}{x}} = \frac{12}{12^x} & \text{w)} (3^{x^2-x})\sqrt{2} = 9\sqrt{2}
 \end{array}$$

9. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \begin{cases} 3^x + y = 1 \\ 2^x + 2y = 2 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 2^x + y = 32 \\ 2^x - y = \frac{1}{8} \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 5^x \cdot 5^{2y} = 125 \\ 25^y \cdot 5^{3x} = 5 \end{cases} \\
 \text{d)} \begin{cases} 7^x \cdot 7^{2y} = 49 \\ 7^y \cdot 49^{2x} = \frac{1}{7} \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} 2^x - 9 = \frac{2^y}{64} \\ 32 \cdot 2^x = 4^y \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 4^x + \frac{5}{2}y = \frac{1}{64} \\ 2^{3x} - 4y = 4^7 \end{cases}
 \end{array}$$

$$g) \begin{cases} 2^{x^2+3x} = \frac{2^y}{64} \\ 16 \cdot 2^{x+1} = 2^y \end{cases} \quad h) \begin{cases} 5^{x^2-2xy+2y^2} = \frac{1}{25} \\ 3^{x+y} = 9 \end{cases} \quad i) \begin{cases} 9^x = 21y \\ 3^{x+1} = 9y \end{cases}$$

10. Para qué valores de  $x \in \mathbb{R}$ , se cumple que:

a)  $3 \cdot 2^{x+3} = 192$                       b)  $10 \cdot 2^{x^2-4} = 320$

c)  $2 \cdot 3^{x^2-x-10} = 6$                       d)  $2^{2x} - 9 \cdot 2^{x+9} = 0$

e)  $3^{2x} - 9 \cdot 3^x - 9 = 0$                       f)  $9^x + 3 = 4 \cdot 3^x$

g)  $2^{x+1} + 2^{x-2} = \frac{9}{2}$                       h)  $\frac{4^{\frac{x}{2}}}{2} - \frac{2^{x-1}}{3} = \frac{4}{3}$

11. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a)  $2^{5x-1} > 16$                       b)  $5^{2x} \cdot 5 < 125$                       c)  $27 \cdot 3^k \geq 9$

d)  $7^{3-2x} \leq 49$                       e)  $4^{2x} : 4 > 8$                       f)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} > 32$

g)  $\frac{1}{3^x} \cdot \frac{1}{27} < \frac{1}{9}$                       h)  $9^x \cdot 27 > 3^x \cdot 3$

i)  $\left(\frac{1}{5}\right)^{x+2,5} < \frac{1}{125}$                       j)  $2^{x^2} \cdot 2^{5x} > 64$

k)  $\left(9^{x-\sqrt{3}}\right)^{x+\sqrt{3}} > 1$                       l)  $4^x \leq \frac{2^{x+2}}{8}$                       m)  $4^{x^2} > \frac{2^{x+2}}{8}$

12. Dados:  $A = \frac{2x^2 - x - 3}{x}$                       y                       $B = \frac{3x}{6x - 9}$ ,

resuelve  $2^{A \cdot B} = 16$

13. Si  $C = \frac{x^2 - 4}{4}$  y  $D = \frac{2x - 4}{8x}$ , resuelve  $5^{\frac{C}{D}} = \frac{1}{5}$

14. Sabiendo que:

$$E = \frac{2 - x}{x^2 - 4x + 4}, \quad F = \frac{6x^2 - 18x}{2x^2 - 4x} \quad \text{y} \quad G = \frac{x^2 - 6x + 8}{3x^2 - 4x - 20}$$

determina el valor de  $x$  si  $3^{(E+F)G} = 81$

## 2. Logaritmicación

Ya conoces que una de las operaciones inversas de la potenciación es la logaritmicación.

Definición 1

Dados dos números reales  $a$  y  $b$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$  y  $b > 0$ ) se llama **logaritmo en base  $a$  de  $b$**  y se denota  $\log_a b$  al número  $x$  que satisface la ecuación  $a^x = b$ .

Simbólicamente:  $\log_a b = x$  si y solo si  $a^x = b$

### Ejemplo 1

Calcula:

a)  $\log_2 16$     b)  $\log_3 \frac{1}{27}$     c)  $\log_{\frac{1}{4}} 2\sqrt{2}$     d)  $\log_3(-1)$

Resolución

a) Se plantea la ecuación  $2^x = 16$ , entonces

$$\log_2 16 = 4, \text{ porque } 2^4 = 16$$

b) En este caso se obtiene la ecuación  $3^x = \frac{1}{27}$ , o sea,

$$3^x = 3^{-3}, \text{ luego } \log_3 \frac{1}{27} = -3, \text{ porque } 3^{-3} = \frac{1}{27}$$

c) La ecuación es  $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 2\sqrt{2}$

$$\left(2^{-2}\right)^x = 2^{\frac{3}{2}} \text{ Expresando ambas potencias}$$

$$2^{-2x} = 2^{\frac{3}{2}} \text{ en base 2.}$$

$$-2x = \frac{3}{2}$$

$$x = -\frac{3}{4}, \text{ entonces}$$

$$\log_{\frac{1}{4}} 2\sqrt{2} = -\frac{3}{4}, \text{ porque } \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{4}} = 2\sqrt{2}$$

d) Planteamos la ecuación  $3^x = -1$ , esta ecuación no tiene solución, pues cualquier potencia de un número positivo es positiva, es decir:  $\log(-1)$  no está definido. ■

Observa que en la definición se exige  $b > 0$ .

### Ejemplo 2

Para qué valores de  $x$  están definidas las expresiones:

a)  $\log_{0,5}(3 - 9x)$     b)  $\log_4(x^2 - x)$

Resolución

a) Debe ser  $3 - 9x > 0$ , resolviendo esta inecuación:

$$3 - 9x > 0$$

$$-9x > -3$$

$$9x < 3$$

$$x < \frac{1}{3}$$

luego  $\log_{0,5}(3 - 9x)$  está definido si  $x < \frac{1}{3}$ .

b) Debe ser  $x^2 - x > 0$ , resolviendo esta inecuación tenemos:

$$x^2 - x > 0$$

$$x(x-1) > 0$$



En la figura 1.1 se

destacan las soluciones.

Fig. 1.1

El conjunto solución es:  $(-\infty ; 0) \cup (1 ; \infty)$ .

Observa que se excluyen 0 y 1, luego  $\log_4 (x^2 - x)$  está definido si:  $x < 0$  ó  $x > 1$  ■

### Ejemplo 3

Para qué valores de  $x$  se cumple que:

a)  $\log_2 x = 6$       b)  $\log_2 (x^2 - x) = 1$       c)  $\log_x 81 = 4$

d)  $\log_4^2 x + \log_4 x - 6 = 0$

Resolución

a)  $\log_2 x = 6$  significa que  $2^6 = x$  luego  $x = 64$

b)  $\log_2 (x^2 - x) = 1$  significa que  $x^2 - x = 2^1 = 2$

resolviendo esta ecuación obtenemos dos soluciones

$$x_1 = 2 \quad \text{y} \quad x_2 = -1$$

c)  $\log_x 81 = 4$  significa que  $x^4 = 81$  entonces

$$x = \pm \sqrt[4]{81}$$

$$x = \pm 3$$

pero recuerda que por definición  $x > 0$ , luego  $x = 3$  es la solución.

d)  $\log_4^2 x + \log_4 x - 6 = 0$  Haciendo  $y = \log_4 x$  obtenemos

$$y^2 + y - 6 = 0$$

$$(y+3)(y-2) = 0$$

$$y_1 = -3$$

$$\text{y} \quad y_2 = 2 \quad (y = \log_4 x)$$

luego  $\log_4 x = -3$  ó  $\log_4 x = 2$

significa que  $x = 4^{-9}$  ó  $x = 4^2$

$$x = \frac{1}{64} \quad \text{ó} \quad x = 16$$

Las soluciones son:  $x_1 = \frac{1}{64}$  y  $x_2 = 16$  ( $x_1, x_2 > 0$ ) ■

La definición de logaritmo se puede resumir en la identidad:

$$a^{\log_a b} = b \quad (1)$$

$$(a > 0, a \neq 1, b > 0)$$

Esta identidad resulta útil en numerosas situaciones.

**Ejemplo 4**

Calcula:

- a)  $2^{\log_2 5}$       b)  $3^{2 \log_3 6}$       c)  $4^{\log_2 7}$       d)  $6^{\log_6 7 + 1}$

Resolución

Utilizando la identidad (1) tenemos:

- a)  $2^{\log_2 5} = 5$       b)  $3^{2 \log_3 6} = \left(3^{\log_3 6}\right)^2 = 6^2 = 36$
- c)  $4^{\log_2 7} = \left(2^2\right)^{\log_2 7} = \left(2^{\log_2 7}\right)^2 = 7^2 = 49$
- d)  $6^{\log_6 7 + 1} = 6^{\log_6 7} \cdot 6 = 7 \cdot 6 = 42$  ■

El siguiente teorema muestra que la logaritmación es una operación monótona.

Teorema 1

- a) Si  $a > 1$  de  $b > c$  resulta  $\log_a b > \log_a c$ .
- b) Si  $0 < a < 1$  de  $b > c$  resulta  $\log_a b < \log_a c$ .

Demostración

a) Supongamos  $\log_a b \leq \log_a c$  entonces  $b = a^{\log_a b} \leq a^{\log_a c} = c$

pues  $a > 1$ , es decir,  $b \leq c$  lo que contradice la hipótesis, luego  $\log_a b > \log_a c$  como se quiere.

b) Se demuestra de forma análoga. ■

**Ejemplo 5**

- a) Compara  $\log_5 17$  y  $\log_5 21$
- b) Determina el valor de  $x$  que satisface
- 1)  $3^x < 9$       2)  $\log_4 x < 3$

Resolución

- a)  $\log_5 17 < \log_5 21$ , porque  $17 < 21$  y  $5 > 1$
- b) 1) De  $3^x < 9$ , se deduce que  $\log_3 3^x < \log_3 9$ ,  
o sea,  $x < 2$

2) De  $\log_4 x < 3$ , se deduce que  $4^{\log_4 x} < 4^3$ ,  
o sea,  $x < 64$

pero como  $x > 0$ , entonces la solución es  $0 < x < 64$  ■

¡Atención! Aquí se aplica la monotonía de las potencias.

Ejercicios (epigrafe 2)

1. Calcula:

- a)  $\log_9 9$       b)  $\log_4 16$       c)  $\log_{1/4} 4$       d)  $\log_6 1$   
 e)  $\log_9 3$       f)  $\log_2 128$       g)  $\log_{10} \frac{1}{10}$       h)  $\log_{1/2} 8$   
 i)  $\log_{2.5} 2.5$       j)  $\log_5 \sqrt[3]{5}$       k)  $\log_{9\sqrt{3}} 9\sqrt{3}$   
 l)  $\log_{a\sqrt{3}} 27$       m)  $5^{2 - \log_5 10}$       n)  $2^{\log_2 5 + \log_9 9}$   
 ñ)  $3^{3 - \log_9 9}$       o)  $\log_b \left[ b \cdot \sqrt[5]{b} \right]$       ( $b > 0, b \neq 1$ )

2. Halla el valor numérico de las siguientes expresiones:

- a)  $\log_7 7 + \log_3 27 - 2 \log_{10} 0,01$   
 b)  $\log_{15} 1 + \log_2 \frac{1}{8} - \log_5 125$   
 c)  $\log_2 32 - 3 \log_{\sqrt{2}} 1 + \log_{1/4} 4 - \log_{1/2} 8$   
 d)  $\log_{10} 100 - \log_{10} 0,1 + \log_{10} \frac{1}{1000} - 3$   
 e)  $\frac{1}{5} \log_5 25 + \sqrt{\log_2 16} - \log_4 \frac{1}{64}$   
 f)  $\log_{1/9} 81 - \frac{1}{5} \log_5 \frac{1}{5} + \sqrt{-\log_{10} 0,1}$   
 g)  $3^{\log_3 27} : \log_2 8 - \log_4 \frac{1}{16}$   
 h)  $4^{\log_2 3} + 125^{\log_5 2} : \log_5 625$   
 i)  $3^{2 \log_3 9} \cdot \log_3 \sqrt[3]{3} - 27^{\log_3 5}$   
 j)  $13^{\log_{19} 5} + 4 \log_6 \frac{1}{8} \cdot \log_{11} 121$

3. Calcula el valor de x en:

- a)  $\log_4 64 = x$       b)  $\log_x 9 = 2$       c)  $\log_5 x = \frac{1}{2}$   
 d)  $\log_5 1 = x$       e)  $\log_3 x = -3$       f)  $\log_x \sqrt{2} = 1$

g)  $\log_{\sqrt{6}} 4 = x$       h)  $\log_{1/3} x = -2$

4. Despeja r en las siguientes fórmulas:

a)  $p^r = q$       b)  $p + q^r = s$       c)  $\frac{(p^r)^2}{2} = q^3$

d)  $3p = q^{r+1} + 2$       e)  $\sqrt{p^r} - q = 5$

Indica los valores reales que pueden tomar p, q, r y s en las expresiones que obtienes.

5. Para qué valores de x están definidos los siguientes términos:

a)  $\log_5 3x$       b)  $\log_3 \frac{4}{x}$       c)  $\log_4 \frac{5}{x+2}$

d)  $\log_{0,6} (4x - 3)$       e)  $\log_2 (x^2 - 5x + 6)$       f)  $\log_a (x-1)^2$

g)  $\log_5 (-x)$       h)  $\log_{1/2} (5-x)$       i)  $\log_6 (x^2 + 3)$

j)  $\log_9 (x^2 - 3)$       k)  $\log_9 \left( \frac{3x + 2}{2} \right)$

l)  $\log_{0,5} \left( \frac{2x + 1}{x} \right)$       m)  $\log_{1/2} (x^2 - 3x - 10)$

n)  $\log_5 (3x^2 - 7x - 6)$       ñ)  $\log_4 \left( \frac{x^2 - x}{x + 1} \right)$

o)  $\log_2 (-x^2 + 5x)$       p)  $\log_7 (6 + x - x^2)$

q)  $\log_5 (2x^2 + x - 6)$       r)  $\log_9 \left( \frac{x^2 - 12x + 32}{x^2 - 8x + 16} \right)$

s)  $\log_2 \left( \frac{x^2 - 49}{x^2 + 2x - 63} \right)$       t)  $\log_2 \left( \frac{x^2 - 5}{x^2 + 2} \right)$

u)  $\log_9 (x^2 - 10x + 25)$       v)  $\log_a (-x^2)$       ( $a > 0, a \neq 1$ )

6. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)  $\log_9 x = 4$       b)  $\log_{\sqrt{9}} x = 2$       c)  $\log_2 x = \frac{1}{3}$

d)  $\log_{0,2} x = 3$       e)  $\log_5 (6x - 1) = 1$       f)  $\log_4 2x = 2$

g)  $\log_2 (3x - 2) = 4$       h)  $\log_{\sqrt[3]{9}} (x + 1) = 2$

i)  $\log_{10} (x^2 - 15x) = 2$       j)  $\log_7 (2x^2 - 5x) = 1$

k)  $\log_9 \left( \frac{x + 3}{x - 1} \right) = 1$       l)  $2 \log_9 (2x - 2) = 1$

m)  $\log_{\sqrt[2]{2}} x = 4$       n)  $\log_{12} (x^2 - x) = 1$

$$ñ) \log_9(\log_9 x) = 0$$

$$o) \log_4 \left( \frac{x-8}{x-2} \right) = 2$$

$$p) \log_{1/2}(x^2 + 4x - 5) = -4$$

$$q) \log_9(-x^2 + 5x) = \log_9 6$$

$$r) \log_5 \sqrt{5} = x + 2,6$$

$$s) \log_2 16^x = 6x - 2$$

7. Determina el conjunta solución de:

$$a) \log_2(x^2 + 5x + 2) - \log_{1/5} 125 + \log_2 128$$

$$b) \log_{11}(11^{x^2} + 11^x + 20) = 2$$

$$c) (\log_2 x)^2 - 2 \log_2 x - 3 = 0$$

$$d) \log_9^2 x - 5 \log_9 x + 6 = 0 \quad e) \log_5^2 x - \log_5 x = 0$$

$$f) \log_2 8^x = x^2$$

$$g) 3 \log_2^2 x + 2 \log_2 x - 5 = 0$$

$$h) \log_6(x^2 - 3) = 1$$

$$i) 3 \log_9^2 x + 4 \log_9 x = 2 \log_2 4$$

$$j) \log_4(x^2 - 6x) = 2$$

$$k) \log_4^2 x + 5 \log_4 x = 4^{\log_4 6}$$

$$l) \log_9 \left( 4x - \frac{1}{9} \right) = \log_{\sqrt{9}} \sqrt{9} + \log_9 9$$

$$m) \frac{\log_5(5x + 11)}{\log_5(x + 3)} = 2$$

B. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a) \begin{cases} \log_5(2x - y) = 1 \\ \log_5(3x - 2y) = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \log_2(x + y) = 3 \\ 2^x : 2^y = 5^{\log_5 2} \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \log_x(3x + y) = 0 \\ \log_{\sqrt{9}}(x - y) = 2 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \log_7(3x - 2y) = 1 \\ \log_5(2x - y) = 1 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} \log_2(x + y) = 2 \\ \frac{\log_4(9x - y)}{4} = 2^{\log_2 9} \end{cases}$$

9. Resuelve:

$$a) 5 \log_9 x = 1 + \log_9 x$$

$$b) 8 \log_5(x + 2) - 6 = \log_5(x + 2) + 1$$

$$c) \log_{10}^2(x - 3) - \log_{10}(x - 3) = 0$$

$$d) \log_{x+9}(2x - 1) = 1 \quad (x > -3, x \neq -2)$$

$$e) \log_{6-x} x = 2$$

$$f) \log_{1/2} (2x - 3) = -2$$

$$g) \frac{7 + \log_2 x}{5 \log_2 x} = 3$$

$$h) \frac{3 + \log_{10} x}{2 - \log_{10} x} = 4$$

$$10. \text{ Probar que: } 2^x = 6 \quad \text{si} \quad x = \frac{\log_x x + \log_2 6 - 1}{\frac{4}{3} \log_3 \sqrt[4]{27}}$$

11. Para qué valores de  $x \in \mathbb{R}$ , se cumple que:

$$a) \log_3 (x+2) > 0$$

$$b) \log_3 (2x - 3) \geq 0$$

$$c) \log_2 x < 0$$

$$d) \log_4 (x+2) \leq 0$$

$$e) \log_2 \left( \frac{x^2 + x}{x} \right) \leq 0$$

$$f) \log_{10} \left( \frac{x^2 + 10x + 25}{x^2 - 25} \right) > 0$$

$$g) \log_6 (x-2)^2 \leq 0$$

$$h) \log_3 \left( \frac{x-4}{x} \right) \geq 0$$

$$i) \log_{10} (x^2 + 6x + 10) > 0$$

12. Determina los valores de  $x$  que satisfacen:

$$a) 2^x > \frac{1}{2}$$

$$b) 3^{x+1,1} \leq \sqrt{27}$$

$$c) 16^{2x} < 128$$

$$d) \frac{1}{3^x} \geq \frac{1}{9}$$

$$e) \log_3 x < 3$$

$$f) \log_3 (2x) > 1$$

$$g) \log_4 (3x+1) \leq 1$$

$$h) \log_2 \left( \frac{x+2}{3} \right) > 2$$

13. Halla dos números cuya suma es 22 y la diferencia de sus logaritmos de base 10 es 1.

## PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

### 3. Otras propiedades de los logaritmos

En este capítulo has trabajado con algunas propiedades de los logaritmos como son:

$\log_a a = 1 ; \log_a 1 = 0 ; a > 0 ; a \neq 1 ; b > 0$	$\log_b a$	$a^{\log_a b} = b$	Identidad fundamental logarítmica.
--	------------	--------------------	------------------------------------

Además de estas propiedades, los logaritmos poseen otras que sirven de base al cálculo (y en la resolución de ecuaciones y problemas). Citemos algunas que se aplican frecuentemente.

Teorema 1

Si  $b > 0$ ,  $c > 0$  y  $a > 0$  tal que  $a \neq 1$ ,  $c \neq 1$  entonces se cumple:

a)  $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

b)  $\log_a \left( \frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$

c)  $\log_a b^x = x \log_a b$

d)  $\log_a c \cdot \log_c b = \log_a b$

e)  $\log_{a^x} b = \frac{1}{x} \log_a b \quad (x \neq 0)$

Demostración

a) Se tiene que  $a^{\log_a b + \log_a c} = a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c} = b \cdot c$

luego por definición tenemos:

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \quad \blacksquare$$

Esta propiedad se generaliza al caso de un producto de más de dos factores, a sea,

Sean  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  se cumple que:

$$\log_a (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \dots + \log_a x_n$$

b) Se tiene que: 
$$\frac{\log_a b - \log_a c}{a} = \frac{\log_a b}{\frac{a}{\log_a c}} = \frac{b}{c}$$

luego  $\log_a \left( \frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c \quad \blacksquare$

c) Se tiene  $a^{x \log_a b} = \left( a^{\log_a b} \right)^x = b^x$

luego  $\log_a b^x = x \cdot \log_a b \quad \blacksquare$

En particular si  $x = \frac{1}{n}$  tenemos que:

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log_a b.$$

d) Se tiene que

$$\frac{\log_a c \cdot \log_c b}{a} = \left( a^{\log_a c} \right)^{\log_c b} = c^{\log_c b} = b$$

luego  $\log_a b = \log_a c \cdot \log_c b \quad \blacksquare$

De esta propiedad resulta la fórmula del cambia de base

$$\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$$

e) Se tiene que:  $\log_{a^x} b = \frac{\log_a b}{\log_a a^x} = \frac{\log_a b}{x \log_a a} = \frac{1}{x} \log_a b$  ■

### Ejemplo 1

Expresa como una suma de logaritmos:

a)  $\log_a (3,25 \cdot 0,64 \cdot 1,58)$       b)  $\log_a \left( \frac{5,15 \cdot 45,3}{0,061} \right)$

c)  $\log_a (28^3 \cdot 35,4 : \sqrt{15})$       d)  $\log_a \sqrt{\frac{4,1 \cdot 26,4}{8,2 \cdot 6,5}}$

Resolución

a)  $\log_a (3,25 \cdot 0,64 \cdot 1,58) = \log_a 3,25 + \log_a 0,64 + \log_a 1,58$

b)  $\log_a \left( \frac{5,15 \cdot 45,3}{0,061} \right) = \log_a 5,15 + \log_a 45,3 - \log_a 0,061$

c)  $\log_a (28^3 \cdot 35,4 : \sqrt{15}) = 3 \log_a 28 + \log_a 35,4 - \frac{1}{2} \log_a 15$

d)  $\log_a \sqrt{\frac{4,1 \cdot 26,4}{8,2 \cdot 6,5}} =$

$= \frac{1}{2} (\log_a 4,1 + \log_a 26,4 - \log_a 8,2 - \log_a 6,5)$  ■

### Ejemplo 2

Calcula:

a)  $\log_5 2 \cdot \log_2 25$

b)  $\log_7 3 \cdot \log_9 49$

c)  $\log_8 32$

Resolución

a)  $\log_5 2 \cdot \log_2 25 = \log_5 25 = 2$

b)  $\log_7 3 \cdot \log_9 49 = \log_7 49 = 2$

c)  $\log_8 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 8} = \frac{5}{3}$  ■

### Ejemplo 3

Expresa como un solo logaritmo:

a)  $\log_a 20 + \log_a 6 - \log_a 12$

b)  $\log_a 7 + 3 \log_a 2 - \frac{1}{2} \log_a 9$

c)  $\frac{1}{2} \log_a 81 + \log_a 20 - \log_a 2 - 2 \log_a 3$

d)  $\frac{1}{3} (\log_a 5,1 + \log_a 3,8 - \log_a 4)$

Resolución

$$a) \log_a 20 + \log_a 6 - \log_a 12 = \log_a \left( \frac{20 \cdot 6}{12} \right) = \log_a 10$$

$$b) \log_a 7 + 3 \log_a 2 - \frac{1}{2} \log_a 9 = \log_a \left( \frac{7 \cdot 2^3}{\sqrt{9}} \right) = \log_a \frac{56}{3}$$

$$c) \frac{1}{2} \log_a 81 + \log_a 20 - \log_a 2 - 2 \log_a 3 = \log_a \left( \frac{\sqrt{81} \cdot 20}{2 \cdot 3^2} \right) \\ = \log_a 10$$

$$d) \frac{1}{3} (\log_a 5,1 + \log_a 3,8 - \log_a 4) = \log_a \sqrt[3]{\frac{5,1 \cdot 3,8}{4}} \\ = \log_a \sqrt[3]{4,8} \quad \blacksquare$$

#### Ejemplo 4

Resolver

$$a) \log_a (x+4) + \log_a (x-4) = 2$$

$$b) \log_2 (x-8) - \log_2 (x+6) = 3$$

$$c) 2 \log_7 x = \log_7 3x + \log_7 6$$

Resolución

$$a) \log_a (x+4) + \log_a (x-4) = 2$$

$$\log_a \left[ (x+4) \cdot (x-4) \right] = 2$$

$$\log_a (x^2 - 16) = 2$$

$$x^2 - 16 = a^2$$

$$x^2 = 25$$

$$|x| = 5$$

$$x = \pm 5$$

luego

Observa que:  $\log_a \left[ (x+4) \cdot (x-4) \right]$  puede estar definido sin que lo estén  $\log_a (x+4)$  y  $\log_a (x-4)$ . Vemos que en la ecuación original para  $x = -5$  resulta  $\log_a (-1)$  y  $\log_a (-9)$  que no están definidos, para  $x = 5$  resulta  $\log_a 9$  y  $\log_a 1$  que sí están definidos, luego la solución de la ecuación es  $x = 5$ .

Como ves en estas ecuaciones debes comprobar los valores hallados.

$$b) \log_2 (x-8) - \log_2 (x+6) = 3$$

$$\log_2 \left( \frac{x-8}{x+6} \right) = 3$$

$$\frac{x-8}{x+6} = 2^3$$

se tiene

$$x = -8$$

Resolviendo esta ecuación

Pero esta solución no satisface la ecuación original, ya que  $\log_2(-16)$  no está definido, luego la ecuación no tiene solución,  $S = \phi$ .

c)  $2 \log_7 x = \log_7 3x + \log_7 6$

$$\log_7 x^2 = \log_7 (3x \cdot 6)$$

$$x^2 = 18x$$

Resolviendo la ecuación resulta

$$x_1 = 0 \quad \text{y} \quad x_2 = 18$$

Comprobando vemos que para  $x = 0$  resulta,  $\log_7 0$  que no está definido, para  $x = 18$  resulta  $\log_7 18$  y  $\log_7 54$  que sí están definidos, luego la solución es  $x = 18$ . ■

Ejercicios (epígrafe 3)

1. Aplica las propiedades de los logaritmos en :

a)  $\log_a (1,5 \cdot 2,6)$

b)  $\log_a \left[ \frac{2,3 \cdot 7}{5 \cdot 6} \right]$

c)  $\log_a (2^3 \cdot 5^4 \cdot \sqrt[3]{7})$

d)  $\log_a \left[ \frac{11^3 \cdot 8^5}{5^2 \cdot 6^3} \right]$

e)  $\log_a \frac{62,7}{\sqrt[3]{6} \cdot 8,1}$

f)  $\log_a \sqrt[3]{\frac{30 \cdot 0,5}{21}}$

2. Expresa como suma  $\log_{10} x$ , con a, b, c y d positivos, si:

a)  $x = \frac{a b^3}{a \sqrt[3]{d^2}}$     b)  $x = \frac{\sqrt[5]{a(b+c)^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$     c)  $x = \frac{(a+b)^3 \sqrt[3]{c}}{\sqrt{(a+b)^2} \cdot d^3}$

3. Expresa mediante un solo logaritmo:

a)  $\log_a 3,4 + \log_a 5$

b)  $\log_a 6,37 - \log_a 0,1$

c)  $\log_a 650 + \log_a 20 - \log_a 6,5$

d)  $\frac{1}{2} \log_a 4 + 5 \log_a 3 - (2 \log_a 6 + \frac{1}{3} \log_a 2)$

4. Calcula x en las siguientes ecuaciones:

a)  $\log_{10} x = \log_{10} 5 - \log_{10} 2 + \log_{10} 3$

b)  $\log_{10} x = \log_{10} 7 + \log_{10} 5 - \log_{10} 3$

c)  $\log_{10} x = 2 \log_{10} 3 - 3 \log_{10} 5$

d)  $\log_{10} x = 3 \log_{10} 2 - 2 \log_{10} 3 + \log_{10} 5$

e)  $\log_{10} x = \frac{1}{3} \log_{10} 2 + \frac{1}{3} \log_{10} 32$

f)  $\log_{10} x - \frac{1}{2} \log_{10} 3 = \frac{2}{3} \log_{10} 5 - \frac{1}{3} \log_{10} 2$

g)  $\log_{10} x = \frac{1}{5} \log_{10} (a+b) - \left( \log_{10} a + \log_{10} (b+c) \right)$

$$h) \log_{10} x = \frac{1}{2} \log_{10} (a^2 + b^2) - \frac{1}{3} \left( \log_{10} (a+b) - \log_{10} (b-a) \right)$$

$$i) \log_{10} x = \frac{3 \log_{10} a - (3 \log_{10} b + 2 \log_{10} c)}{4}$$

$$j) \log_{10} x = \frac{1}{3} \left[ \log_{10} a + \frac{1}{4} (\log_{10} a + 3 \log_{10} c) \right] - \left( \log_{10} b + 3 \log_{10} (c+a) \right)$$

5. Di si las igualdades siguientes son verdaderas o falsas; en caso de que sea falsa, escríbela correctamente:

a)  $\log_a (A \cdot B \cdot C)^3 = 3 \log_a A + \log_a B + \log_a C$ .

b)  $\log_a \left( \frac{A}{B} \right)^3 = 3 \log_a A - 3 \log_a B$

c)  $\log_a \left( \frac{A \cdot B}{C \cdot D} \right) = \log_a A + \log_a B - (\log_a C + \log_a D)$

d)  $\log_a \sqrt[3]{18} = \log_a \frac{18}{2} = \log_a 9$

e)  $\log_a \frac{\sqrt[5]{A^2}}{\sqrt[3]{B}} = \frac{1}{5} (2 \log_a A - \log_a B) = \frac{3}{5} \log_a A - \frac{1}{5} \log_a B$

f)  $\log_a \frac{15^2}{7} = 2 \log_a 15 - 2 \log_a 7$

6. Si  $\log_x a = 5$ ;  $\log_x b = 2$ ;  $\log_x c = -1$ . Calcula:

a)  $\log_x (a \cdot b \cdot c)$       b)  $\log_x \left( \frac{a^2 \cdot b^2}{c^4} \right)$       c)  $\log_x \left( \frac{a^3}{b^2 \cdot c^4} \right)$

d)  $\log_x \frac{\sqrt[5]{ab}}{\sqrt[5]{c^2}}$       e)  $\log_x \sqrt[3]{\frac{a \cdot b^{-1}}{c}}$

7. Si  $\log_b a = \frac{7}{4}$ ;  $\log_b c = \frac{1}{2}$ ; encuentra el valor de:

a)  $\log_b (a \cdot c)$       b)  $\log_b (a \cdot c)^2$       c)  $\log_b \left( \frac{a}{c} \right)$

d)  $\log_b (\sqrt{a} \cdot c)$       e)  $\log_b \sqrt{\frac{a}{c}}$       f)  $\log_b \frac{\sqrt[4]{a^2 c^9}}{\sqrt{c}}$

8. Prueba que:

a)  $\log_a \left( \frac{1}{a} \right)^2 = -2$

b)  $\left( \log_a \frac{1}{a} \right)^2 = 1$

c)  $\log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$

d)  $\log_{a^2} x = \frac{1}{2} \log_a x$

9. Simplifica las siguientes expresiones:

a)  $\log_a (\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a})$

b)  $\log_a \left[ a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{5}} \right]^8$

c)  $\log_a (\sqrt[5]{a} \sqrt[5]{a^4} \sqrt{a})$

d)  $\log_a \sqrt[3]{\sqrt{a}} + \log_a a^{\frac{5}{3}}$

$$e) \log_a (a\sqrt{a}) - \log_a \sqrt[4]{a} \quad f) \log_a a\sqrt[3]{a} - \log_a a^{\frac{5}{6}} - \log_a \sqrt[4]{a^3}$$

10. Dados:

$$\log_{10} 2 = 0,3010 \quad , \log_{10} 3 = 0,4771 \quad , \log_{10} 5 = 0,6990$$

$$\text{Halla: } \log_{10} 12, \log_{10} 36, \log_{10} 360, \log_{10} 120, \log_{10} 0,5$$

$$\log_{10} \frac{2}{5}, \log_{10} 24, \log_{10} \sqrt{8}$$

11. Determina el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

$$a) \log_2 (x+3) + \log_2 (x-4) = 3$$

$$b) \log_2 (x+7) - \log_2 (x-11) = 2$$

$$c) 2 \log_{10} x = \log_{10} 4 + \log_{10} 3x$$

$$d) \log_2 x + \log_2 2x + \log_2 4x + \log_2 8x = 10$$

$$e) \log_2 (x^2 + 2x - 7) - \log_2 (x-1) = 2$$

$$f) \log_3 (x-1) + \log_3 (2x+1) - \log_3 (x-3) = 3$$

$$g) \log_{\sqrt{2}} (2x+1) - \log_{\sqrt{2}} (5x+2) = 2$$

$$h) \log_2 x = 3 - \log_2 7$$

$$i) \log_2 (2x-3) + \log_2 (x+6) = 3$$

$$j) \log_3 (2x+1) - \log_3 (x-1) - 1 = 0$$

$$k) \log_5 (x^2 - 100) - \log_5 (x-10) = 2$$

$$l) \log_2 (2x) + \log_2 (x-3) = \log_2 8$$

$$m) \log_{10} (x+1) + \log_{10} (x+2) = \log_{10} x + \log_{10} 5$$

$$n) \log_7 x + \log_7 (x+2) = \log_7 8 + \log_7 6$$

$$ñ) \log_{10} (x+6) - \frac{1}{2} \log_{10} (2x-3) = 2 - \log_{10} 25$$

$$o^*) 3 \log_{10} \left[ \frac{x}{3} \right] + 2 \log_{10} \left[ \frac{x}{7} \right] = 4 \log_{10} x - \log_{10} 49$$

$$p) \log_{10} x^2 = \log_{10} \left[ x + \frac{11}{10} \right] + 1$$

$$q) \log_2 (x-1) + 1 = \log_2 (x+2) + \log_2 (7-x) - \log_2 3$$

$$r^*) \log_2 x + \log_8 x = 8 \quad s^*) \log_x 5 + \log_{25} x = \frac{14}{2}$$

$$t^*) \log_2 (x^2 + 2) = \log_{1/2} (x^2 - 2)$$

$$u) \log_3 (x^3 - 4) = \log_3 x + \log_3 (4 - x)$$

12. Dado  $M = \log_{10} (x - 8) + 2 \log_{10} (x + 1) - \log_{10} (x + 1)$ :

a) Expresa M como un solo logaritmo.

b) Si  $M = 1$ , Calcula el valor de x y compruébalo.

13. Si  $A = \log_2 (m^2 - n^2) - \log_2 (n + m)$  y

$$B = \frac{\log_2 (m^2 - 2mn + n^2)}{\log_2 4}, \text{ verifica que: } 2^{A+B} = (m - n)^2.$$

14. Prueba que:

a)  $\log_a \frac{x+2}{x} - \log_a \frac{x+2}{2} = \log_a 2 - \log_a x$

b)  $2^{\log_2 \left( \frac{x+3}{x+2} \right) + \log_2 (x^2 - 4)} = x^2 + x - 6$

c)  $a^F = \frac{a+x}{3-x}$ , si  $F = \log_a \left( \frac{a^2 - x^2}{x^2 - ax - 3x + 3a} \right)$

d)  $\frac{\log_a (x^2 - y^2)}{\log_a (x + y)} - \log_{x+y} (x - y) = 1$

15. Sean  $A = \log_9 \sqrt{3}$  y  $B = \log_{\sqrt{9}} 81$ .

a) Expresa A y B como logaritmos de base 3.

b) Prueba que  $2A - \frac{1}{4} B = -\frac{3}{2}$ .

16. Halla el valor de x en :

a)  $\log_5 x = \log_5 3 - \log_{25} \sqrt{3}$

b)  $\log_2 x = \log_{\sqrt{2}} 25 - 3 \log_8 5$

c)  $\frac{1}{1/2} \log_3 49 = \log_{40} 7 + \log_7 x$

17. Prueba que :

a)  $\log_a \sqrt{b} = \log_a b$

b)  $\log_a b^\omega = \frac{\omega}{a} \log_a b$

c)  $\log_{1/8} 36 + \log_{\sqrt{4}} 6 = \frac{5}{6} \log_2 6$

#### 4. Logaritmos decimales

El conjunto de los logaritmos de los números calculados en una base dada se llama sistema de logaritmos. Por su relación con nuestro sistema de numeración, la base 10 es la que ha encontrado mayores aplicaciones al cálculo; el sistema de logaritmos de base 30 se conoce como sistema decimal de logaritmos. También se le llama sistema de logaritmos vulgares o de Briggs.

Por su frecuente uso, los logaritmos decimales se denotan sin escribir la base, es decir, en lugar de  $\log_{10} N$  se escribe  $\log N$  y se sobreentiende que la base es 10.

Para calcular los logaritmos decimales existen tablas que aparecen al final del libro. Para este cálculo es necesario recordar que el logaritmo de un número es otro número que, por la general, tiene una parte entera y una decimal.

La parte entera de un logaritmo decimal depende solo de la cantidad de cifras que tenga el número, como se observa en el siguiente cuadro.

N	Potencias	Logaritmos
10000	$10^4$	4
1000	$10^3$	3
100	$10^2$	2
10	$10^1$	1
1	$10^0$	0
0,1	$10^{-1}$	-1
0,01	$10^{-2}$	-2
0,001	$10^{-3}$	-3
0,0001	$10^{-4}$	-4

Luego  $\log 10^k = k$

La parte entera de un logaritmo se llama característica.

• Si  $N$  es un número que tiene  $k$  cifras enteras se tiene:

con 1 cifra	$1 \leq N < 10$	$0 \leq \log N < 1$
con 2 cifras	$10 \leq N < 10^2$	$1 \leq \log N < 2$
con 3 cifras	$10^2 \leq N < 10^3$	$2 \leq \log N < 3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
con k cifras	$10^{k-1} \leq N < 10^k$	$k-1 \leq \log N < k$

Como puedes ver:

La característica del logaritmo decimal de un número de k cifras enteras es  $k - 1$ .

Si  $0 < N < 1$  y comienza con k ceros (incluido el cero delante de la coma), se tiene:

con 1 cero	$10^{-1} \leq N < 10^0$	$-1 \leq \log N < 0$
con 2 ceros	$10^{-2} \leq N < 10^{-1}$	$-2 \leq \log N < -1$
con 3 ceros	$10^{-3} \leq N < 10^{-2}$	$-3 \leq \log N < -2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
con k ceros	$10^{-k} \leq N < 10^{-k+1}$	$-k \leq \log N < -k+1$

Luego:

La característica del logaritmo decimal de un número que comienza con k ceros es  $-k$ .

Observa que como  $\log 1 = 0$ , los logaritmos de los números menores que 1 son negativos.

### Ejemplo 1

Determina la característica de los logaritmos siguientes:

- a)  $\log 347$                       b)  $\log 34,7$                       c)  $\log 3,47$   
d)  $\log 0,347$                       e)  $\log 0,0347$

Resolución

- a) Como 347 tiene 3 cifras enteras, la característica es 2.  
b) Como 34,7 tiene 2 cifras enteras, la característica es 1.  
c) Como 3,47 tiene 1 cifra entera, la característica es 0.  
d) Como 0,347 comienza con un cero, la característica es -1.  
e) Como 0,0347 comienza con dos ceros, la característica es -2. ■

La parte decimal del logaritmo de un número, se llama **mantisa** y no depende de la posición de la **coma** decimal.

Observa que si  $N$  es un número cualquiera de cinco cifras enteras, lo podemos representar en la forma

$$N = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \quad \text{y, por ejemplo,}$$

$$\begin{aligned} \log a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 &= \log \left( a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \cdot 10^2 \right) \\ &= \log \left( 10^{\log a_1 a_2 a_3 a_4 a_5} \cdot 10^2 \right) \\ &= \log 10^{\log a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 + 2} \\ &= 2 + \log a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \end{aligned}$$

Los números  $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$  y  $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$  tienen la misma sucesión de cifras, en el mismo orden, y solo cambia la posición de la coma. Sus logaritmos se diferencian solo en un número entero, que en este caso es 2, luego necesariamente, sus partes decimales (mantisas) tienen que ser iguales.

### Ejemplo 2

Si  $\log 3,47 = 0,5403$ , determina los logaritmos de:

- a) 34,7      b) 347      c) 0,347      d) 0,0347

**Resolución**

La mantisa es siempre 0,5403, (por tener todos los números las mismas cifras, en el mismo orden), por tanto basta conocer la característica, utilizando los resultados del ejemplo 1 se tiene:

- a)  $\log 34,7 = 1,5403$                       b)  $\log 347 = 2,5403$   
 c)  $\log 0,347 = -1 + 0,5403$               d)  $\log 0,0347 = -2 + 0,5403$

En los incisos c) y d) la característica es negativa, en ese caso se acostumbra a escribir el logaritmo como una suma con la parte decimal positiva. ■

En algunos casos es fácil calcular el logaritmo de un número; esta es la situación con las potencias enteras o fraccionarias de 10:

$$\log 10^2 = 2 \quad ; \quad \log 10^{-0,5} = -0,5 \quad ; \quad \log \sqrt{10} = \frac{1}{2} \quad ;$$

$$\log \sqrt[5]{10^2} = \frac{2}{5} \quad ; \quad \text{etcétera.}$$

Para el resto de los números el logaritmo es un número irracional que no es fácil de calcular; por esta razón para el cálculo de logaritmos se recurre a valores que han sido calculados y dispuestos, como se ha dicho antes, en tablas como los de las páginas 400 y 401.

En estas tablas aparecen las mantisas de los logaritmos de los números, calculados desde 100 hasta 999 con cuatro cifras correctas.

La mantisa del logaritmo de un número se encuentra en la intersección de la fila que comienza con sus dos primeras cifras y la columna que comienza con la última cifra.

Como la mantisa no depende de la coma decimal, esta tabla nos da directamente el logaritmo de cualquier número que tenga tres cifras significativas.

**Ejemplo 3**

Determina el logaritmo decimal de los números siguientes:

- a) 124    b) 1,24    c) 1240    d) 80    e) 8000    f) 0,08

Resolución

- a)  $\log 124$

En la página 400 aparecen los logaritmos de los números del 100 al 549. En la intersección de la fila encabezada (12) y la columna (4) encontramos la sucesión de cifras 0934 (fig. 1.2).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10										
11										
12					0934					
13										
14										

Fig. 1.2

Como 124 tiene tres cifras la característica es 2, luego

$$\log 124 = 2,0934$$

b)  $\log 1,24$

Como la mantisa no depende de la posición de la coma decimal, buscamos el logaritmo del número determinado por la sucesión de cifras 124 como en el inciso a, luego

$$\log 1,24 = 0,0934$$

c)  $\log 1240$

Buscamos la sucesión de cifras 124, la cuarta cifra coma es cero, solo interviene para determinar la característica, luego

$$\log 1240 = 3,0934$$

d)  $\log 80$

Como el número sólo tiene dos cifras, completamos a tres con ceros y buscamos el logaritmo de 800.

En la página 401 aparecen los logaritmos de los números del 550 al 999; en la intersección de la fila encabezada por 80 y la columna encabezada por 0 encontramos la sucesión de cifras 9031 (fig 1.3).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	↓									
80	9031									
81										
82										
83										
84										

Fig 1.3

80 tiene dos cifras, su característica es 1, luego,

$$\log 80 = 1,9031$$

e)  $\log 8000$

Como la mantisa no depende de la posición de la coma decimal, entonces

$$\log 8000 = 3,9031$$

f)  $\log 0,08$

Análogamente, completamos tres cifras con ceros y buscamos el logaritmo de 800, como la mantisa es la misma, entonces

$$\log 0,08 = -2 + 0,9031 \quad \blacksquare$$

Si el número tiene más de tres cifras significativas, es necesario redondear para buscar en la tabla; en ese caso no pueden tomarse todas las cifras de la tabla como correctas; el logaritmo sólo puede darse con tres cifras significativas (incluyendo la parte entera), luego de la tabla solo se toman dos.

#### Ejemplo 4

Determina el logaritmo decimal de los números siguientes:

a) 1548

b) 341,3

c) 5,685

Resolución

a)  $\log 1548$

Redondeamos a tres cifras,  $1548 \approx 1550$  y buscamos  $\log 1550$  en la tabla; encontramos la sucesión de cifras 1903; redondeando a dos lugares obtenemos:

$$\begin{aligned}\log 1548 &\approx \log 1550 = 3,1903 \approx 3,19, \text{ es decir,} \\ \log 1548 &= 3,19\end{aligned}$$

b)  $\log 341,3$

En este caso redondeamos a 341 y encontramos

$$\begin{aligned}\log 341,3 &\approx \log 341 = 2,5328 \approx 2,53, \text{ o sea,} \\ \log 341,3 &= 2,53\end{aligned}$$

c)  $\log 5,685$

En este caso redondeamos a 5,69 y encontramos .

$$\begin{aligned}\log 5,685 &\approx \log 5,69 = 0,7551 \approx 0,76 ; \text{ o sea,} \\ \log 5,685 &= 0,76 \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Aunque en casi todos los casos al trabajar con logaritmos utilizamos valores aproximados, al dar el resultado utilizaremos el signo de igualdad como es usual.

Al igual que ocurre con otras tablas, la tabla de los logaritmos puede ser utilizada para resolver ecuaciones logarítmicas sencillas, esto equivale a calcular potencias de 10.

### Ejemplo 5

Resuelve:

a)  $\log x = 1,6571$

b)  $\log x = 2,1819$

c)  $\log x = 3,53$

d)  $\log^2 x = 12,46$

Resolución

a)  $\log x = 1,6571$

$\log x = 1,6571$  significa que  $x = 10^{1,6571}$  es decir, resolver esta ecuación es equivalente a calcular

Para resolverlo buscamos en la tabla la mantisa, es decir. la sucesión de cifras 6571; la encontramos en la intersección de la fila encabezada 45 y de la columna encabezada 4. Como la característica es 1, el número tiene dos cifras enteras, luego,

$$x = 45,4$$

[significa que  $10^{1,6571} = 45,4 \Leftrightarrow \log 45,4 = 1,6571$ .]

b)  $\log x = 2,1819$

En este caso no aparece en la tabla la sucesión de cifras 1819, la más cercana es 1818 que está en la intersección de la fila 15 y la columna 2. Como la característica es 2, el número tiene tres cifras significativas, luego,

$$x = 152$$

(pues  $\log 152 = 2,1818 \approx 2,1819$ , o sea,  $10^{2,1819} = 152$ ).

c)  $\log x = 3,53$

Como se trata de un ejercicio formal, 3,53 es un valor exacto, y para buscar en la tabla la completamos a 5300.

En la tabla aparece 5302 en la intersección de la fila 33 y la columna 9, luego  $x = 3390$ , o sea,

$$10^{3,53} = 3390$$

d)  $\log^2 x = 12,46$

$\log^2 x = 12,46$  significa  $\log x = \sqrt{12,46}$ . En la tabla de cuadrados encontramos  $\sqrt{12,46} = 3,53$  y resulta la ecuación  $\log x = 3,53$ , pero ahora 3,53 es un valor aproximado con tres cifras correctas. En la tabla de

logaritmos sólo podemos buscar dos cifras (53); si redondeamos los valores de la tabla a dos cifras veremos que se redondean a 53 todos los valores del log 335 al log 342, por lo que sólo podemos garantizar dos cifras en la respuesta:

$$x = 3400 = 3,4 \cdot 10^3 \quad \blacksquare$$

También podemos proceder como en el inciso c: buscar el valor más próximo de 5300 y redondear a dos cifras; en ese caso obtenemos el mismo resultado:

$$x = 3390 \approx 3400 = 3,4 \cdot 10^3$$

Es costumbre en algunos textos y aplicaciones sustituir la expresión  $10^x$  por antilog x.

### Ejemplo 6

Calcula:

a) antilog 1,4720

b)  $10^{1,4720}$

c) antilog  $\sqrt{51,55}$

d)  $10^{\sqrt{14,75}}$

Resolución

a) antilog 1,4720

El valor más próximo a 4720 es 4713, en la intersección de la fila 29 y la columna 6; luego,

$$\text{antilog } 1,4720 = 29,6$$

b)  $10^{1,4720} = 29,6$

c) antilog  $\sqrt{51,55}$

$\sqrt{51,55} = 7,18$  con tres cifras correctas. en la tabla buscamos sólo con dos, luego,

$$\text{antilog } \sqrt{51,55} \approx \text{antilog } 7,18 = 1,51 \cdot 10^7 \approx 1,5 \cdot 10^7$$

d)  $10^{\sqrt{14,75}}$

En la tabla de cuadrados encontramos  $\sqrt{14,75} \approx 3,84$ ; buscamos en la tabla la sucesión de cifras de 84 y tenemos que el más próximo es 8401 en la intersección de la fila 69 y la columna 2, luego,

$$10^{\sqrt{14,75}} = 6920 \approx 6900 = 6,9 \cdot 10^3 \quad \blacksquare$$

## • Aplicaciones de los logaritmos

Los logaritmos pueden ayudar a hacer más sencillas algunas cálculos.

### Ejemplo 7

Calcula:

a)  $2^{9,17}$       b)  $\sqrt[5]{\frac{1,73 \cdot 594}{0,214}}$       c)  $\log_7 218$

Resolución

a) Si  $B = 2^{9,17}$ , entonces  $\log B = 3,17 \cdot \log 2$   
 $= 3,17 \cdot 0,3010$   
 $= 0,9542$

luego,  $B = \text{antilog } 0,9542 = 9,00$   
es decir,  $2^{9,17} = 9$

b) Pongamos  $A = \sqrt[5]{\frac{1,73 \cdot 594}{0,214}}$ , entonces  
 $\log A = \frac{1}{5} (\log 1,73 + \log 594 - \log 0,214)$   
 $= \frac{1}{5} (0,238 + 2,7738 - (-1 + 0,3304))$   
 $= \frac{1}{5} (3,6814)$   
 $= 0,7363$

entonces  $A = \text{antilog } 0,7363 = 5,45$

c) Aplicando la fórmula del cambio de base obtenemos:

$$\log_7 218 = \frac{\log 218}{\log 7} = \frac{2,3385}{0,8451} = 2,767 \quad \blacksquare$$

Los logaritmos también tienen aplicaciones prácticas, algunas de estas aplicaciones se refieren al uso de la escala logarítmica para medir magnitudes.

Por ejemplo, en la escala de Richter la intensidad de un terremoto se mide por la expresión  $\log \frac{I}{S}$ , donde:

$I$ : es la amplitud de las oscilaciones en un sismógrafo a 100 km del epicentro.

$S$ : es la intensidad de un terremoto tipo de amplitud  $10^{-4}$  cm.

Observa que la intensidad de un terremoto tipo es:

$$\log \frac{S}{S} = \log 1 = 0$$

En esta escala un terremoto de intensidad 8 es 100 veces

más fuerte que uno de Intensidad  $h$ .

**Ejemplo 8**

En el año 1906 ocurrió un terremoto en San Francisco de California de intensidad 8,3 en la escala Richter y otro en la frontera de Colombia y Ecuador. de intensidad 8,9. ¿Cuántas veces más intenso fue el terremoto de Suramérica que el de San Francisca?

Resolución

Sean  $I_F$  la intensidad del terremoto de San Francisco e  $I_C$  la del de la frontera Ecuador - Colombia.

La razón de la intensidad es  $\frac{I_C}{I_F}$ , entonces:

$$\log \frac{I_C}{I_F} = \log \frac{\frac{I_C}{S}}{\frac{I_F}{S}} = \log \frac{I_C}{S} - \log \frac{I_F}{S} = 8,9 - 8,3 = 0,6$$

$$\frac{I_C}{I_F} = \text{antilog } 0,6 = 3,98 \approx 4,0$$

(redondeamos a dos cifras pues partimos *de bus* cifras)

**Respuesta:** El terremoto de Suramérica fue cuatro veces más intenso que el de San Francisco. ■

La escala logarítmica también se aplica para medir la intensidad del sonido en decibeles (db).

En este caso la intensidad es  $10 \log L$ , donde

$L$  : es la amplitud del sonido comparado con un sonido audible.

**Ejemplo 9**

El tráfico ordinario registra una intensidad de sonido de aproximadamente 70 db. Un cierto motor tiene un sonido aproximadamente 4000 veces más fuerte. ¿Cuál es la intensidad del sonido del motor en decibeles?

Resolución

Sea  $L_T$  la amplitud del sonido del tráfico.

$L_M$  la amplitud del sonido del motor.

Se tiene  $\frac{L_M}{L_T} = 4000$ , luego  $\log \frac{L_M}{L_T} = \log 4000 = 3,6$

$$\log L_M - \log L_T = 3,6$$

$$\log L_M = 3,6 + \log L_T$$

$$\begin{aligned} I &= 10 \log L_M = 10 (3,6 + \log L_T) = 36 + 10 \log L_T \\ &= 36 + 70 = 106 \approx 1,1 \cdot 10^2 \end{aligned}$$

Respuesta: La intensidad del sonido del motor es aproximadamente 110 db. ■

#### Ejercicios ( epígrafe 4 )

1. Indica la característica de los logaritmos de los números siguientes:

- |               |           |            |
|---------------|-----------|------------|
| a) 20         | b) 845    | c) 0,04    |
| d) 34,3       | e) 756,28 | f) 0,02    |
| g) 16432      | h) 51     | i) 1000    |
| j) 2,95       | k) 10,51  | l) 300,67  |
| m) 0,00000001 | n) 8532,9 | ñ) 0,00349 |
| o) 0,5        |           |            |

2. Indica los intervalos en los cuales están situados los logaritmos de los números  $x$ , tales que:

- |                           |                                |
|---------------------------|--------------------------------|
| a) $10 < x < 100$         | b) $10000 < x < 100000$        |
| c) $\frac{1}{10} < x < 1$ | d) $10^{-5} < x < 0,0001$      |
| e) $1 < x < 10$           | f) $\frac{1}{1000} < x < 0,01$ |
| g) $200 < x < 1000$       | h) $15 < x < 150$              |
| i) $4,5 < x < 65$         |                                |

3. Determina la mantisa de los logaritmos de los números siguientes:

- |         |         |         |          |
|---------|---------|---------|----------|
| a) 225  | b) 367  | c) 8,47 | d) 22,5  |
| e) 9,98 | f) 54,2 | g) 8243 | h) 76,48 |
| i) 1000 | j) 40   | k) 63,8 | l) 6825  |

4. Halla los logaritmos de los siguientes números:

- |           |          |            |          |
|-----------|----------|------------|----------|
| a) 781    | b) 24,8  | c) 2,31    | d) 0,345 |
| e) 0,0427 | f) 1,49  | g) 2,53    | h) 80,06 |
| i) 146,2  | j) 6,93  | k) 0,00089 | l) 5,4   |
| m) 0,27   | n) 34,7  | ñ) -3      | o) 4,207 |
| p) 0,5382 | q) 1964  | r) 0,2917  | s) 3000  |
| t) 230,6  | u) 11090 | v) 1,265   | w) 0     |

x) 8,62            y) 8,624            z) 999.

5. Determina el valor de x en:

- |                           |                      |
|---------------------------|----------------------|
| a) $\log 5,42 = x$        | b) $\log x = 2,4639$ |
| c) $\log x = 1,4440$      | d) $x = \log 34,8$   |
| e) $\log x = -1 + 0,1959$ | f) $x = \log 829,4$  |
| g) $\log 0,0048 = x$      | h) $10^x = 40$       |
| i) $10^x = 657$           | j) $10^{1,9289} = x$ |
| k) $x = 10^{0,089}$       | l) $10^{x+1} = 500$  |
| m) $10^{x-2} = 263$       | n) $3^x = 40$        |
| ñ) $2^x = 35$             | o) $10^x = 3-63$     |
| p) $10^{3,150} = x$       | q) $10^{2x} = 513$   |
| r) $\log^2 x = 25,12$     | s) $\log^2 x = 64,2$ |
| t) $10^{\sqrt{x}} = x$    |                      |

6. Halla el antilogaritmo de las siguientes números:

- |           |                |           |
|-----------|----------------|-----------|
| a) 2,9212 | b) 1,9211      | c) 3,3874 |
| d) 0,7380 | e) -2 + 0,9217 | f) 5,1492 |
| g) 0,7007 | h) 1,6121      | i) 0,0086 |
| j) 1,5159 | k) -1 + 0,8132 | l) 0,8006 |
| m) 4,4667 | n) 0,9632      | ñ) 1,1523 |
| o) 2,4200 | p) -3 + 0,1399 | q) 3,6484 |

7. Calcula:

- |                           |                        |                     |
|---------------------------|------------------------|---------------------|
| a) $10^{0,5011}$          | b) $10^{1,298}$        | c) antilog 2,96     |
| d) $10^{0,00}$            | e) $10^{3,1847}$       | f) antilog 0,1847   |
| g) $10^{-p+0,8722}$       | h) antilog 1,7259      | i) antilog 0,9518   |
| j) antilog $\sqrt{11,29}$ | k) $10^{\sqrt{11,29}}$ | l) $10^{\sqrt{51}}$ |

8. Calcula:

- |                  |                    |                  |
|------------------|--------------------|------------------|
| a) $\log 38$     | b) $\log 6,23$     | c) $\log 18,4$   |
| d) $\log 0,641$  | e) $\log 1,41$     | f) $\log 0,012$  |
| g) $\log 2100$   | h) $\log 0,000429$ | i) $\log 42,9$   |
| j) $\log 1,415$  | k) $\log 45,41$    | l) $\log 694,56$ |
| m) $\log 0,6543$ | n) $\log 0,0005$   | ñ) $\log 700,6$  |

9. Tres terremotos ocurrieron en las localidades A, B y C con intensidades de 3, 4 y 5 en la escala Richter respectivamente. ¿Cuántas veces más fuerte fue el terremoto:

- a) B en relación con el A?    b) C en relación con el B?  
 c) C en relación con el A?
10. La música rock amplificada tiene una intensidad de 120 db, la conversación ordinaria, de 50 db y el oído (murmullo), de 20 db. ¿Cuántas veces más alta es:  
 a) la conversación que el murmullo?  
 b) la música rock que la conversación?  
 c) la música rock que el murmullo?
11. Calcula el pH de una disolución, cuya concentración es:  
 a)  $0,001 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$                       b)  $5,4\cdot 10^{-9} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$
12. Calcula la concentración de iones hidronio que contiene una disolución cuyo  $\text{pH} = 2,4$ .

## FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

### 5. Funciones exponenciales

Hemos visto que a cada número real  $x$  se le puede asociar una única potencia del número real  $a$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ); esta permite definir una función.

#### Definición 1

Se llama función exponencial de base  $a$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ) a la función que a cada número real  $x$ , le hace corresponder  $a^x$ , es decir, al conjunto de pares ordenados

$$\{ (x ; a^x) : x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1 \}$$

#### Ejemplo 1

- a) Determina para qué valor de  $x$ , alcanza el valor 5, 10 y 38,5 la función  $y = 10^x$ .  
 b) Calcula la imagen por la función  $y = 10^x$  de 0,5 ; 1,3 ; -1,7.

#### Resolución

- a) Se trata de resolver las ecuaciones:

$$10^x = 5 \qquad 10^x = 10; \quad 10^x = 38,5$$

$$x = \log 5 \qquad x = \log 10$$

$$x = 0,699 \qquad x = 1$$

- $10^x = 10$        $x = 1$
- $10^x = 38,5$      $x = \log 38,5$   
 $x = 1,5855$

b) Se trata de calcular  $10^{0,5}$ ;  $10^{1,3}$ ;  $10^{-1,7}$

luego  $10^{0,5} = \text{antilog } (0,5) = 3,16$

$10^{1,3} = \text{antilog } (1,3) = 20$

$10^{-1,7} = \text{antilog } (-1,7) = \text{antilog } (-2 + 0,3)$   
 $= 0,02$

¡Atención! Recuerda que los valores de la tabla son positivos, por eso expresamos el logaritmo como la suma de un número negativo (característica) y un decimal positivo (mántisa).

Se ha definido la función de base 10, pues desempeña un papel importante en la práctica y por ser también la base de nuestro sistema de numeración. En forma análoga se pueden definir funciones exponenciales para bases positivas cualesquiera y diferentes de 1.

Ya sabemos determinar potencias de 10 con cualquier exponente y podemos trazar el gráfico de esta función.

En la tabla siguiente se han calculado algunos pares.

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$10^x$	0,01	0,03	0,1	0,32	1	1,3	1,6	2	2,5	3,2	4

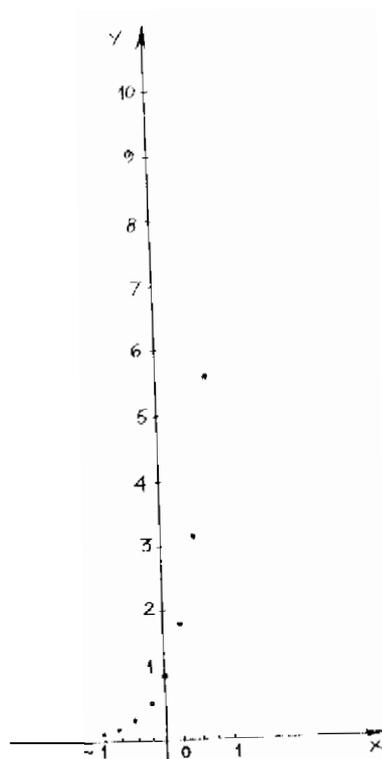
x	0,7	0,8	0,9	0,95	1	1,5	2	2,1	2,2	2,3	2,5
$10^x$	.5	6,4	8	8,9	10	32	100	126	159	200	316

Al representar estos puntos en un sistema de coordenadas, obtenemos una gráfica como la de la figura 1.4a.

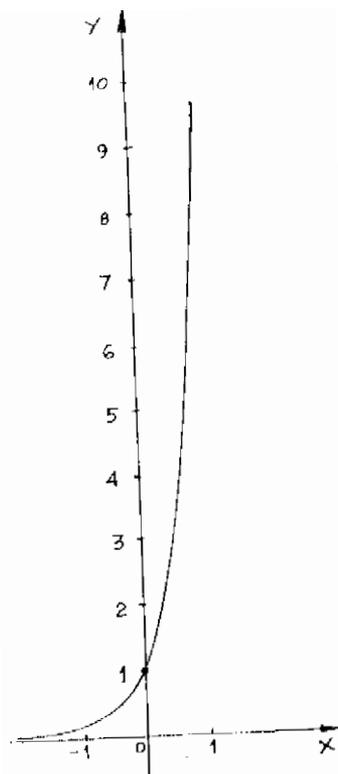
Observa que los últimos pares se salen del gráfico porque los valores de  $10^x$  crecen muy rápidamente.

Si determinamos más puntos, podemos tener una idea más aproximada de la gráfica de la función; esta gráfica es

una curva como la que se muestra en la figura 1.4b.



(a)



(b)

Fig.1.4

Debes tener presente que  $10^x > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  y por tanto su gráfica "no toca" al eje "x", aunque se aproxima ilimitadamente a él. Esta recta a la cual la curva se acerca ilimitadamente se denomina asíntota de la función exponencial.

A partir de la gráfica se obtienen las propiedades de la función  $y = 10^x$ .

Dominio: $\mathbb{R}$	La proyección de la gráfica cubre todo el eje "x",
Imagen: $\mathbb{R}_+^*$	La proyección de la gráfica cubre la parte superior del eje "y" (sin incluir el cero).
Ceros: No tiene	La gráfica no corta el eje "x".
Monotonía: Creciente	La gráfica asciende de izquierda a derecha.
Valor Máxima: No tiene	La función toma cualquier valor positivo.
Valor Mínimo: No tiene	La gráfica se aproxima indefinidamente al eje "x", pero no lo toca.
Paridad: No es par ni impar	No es simétrica respecto al origen ni al eje "y",
Periodicidad: No es periódica	

### Ejemplo 2

Representa gráficamente la función  $y = 2^x$  y analiza sus propiedades.

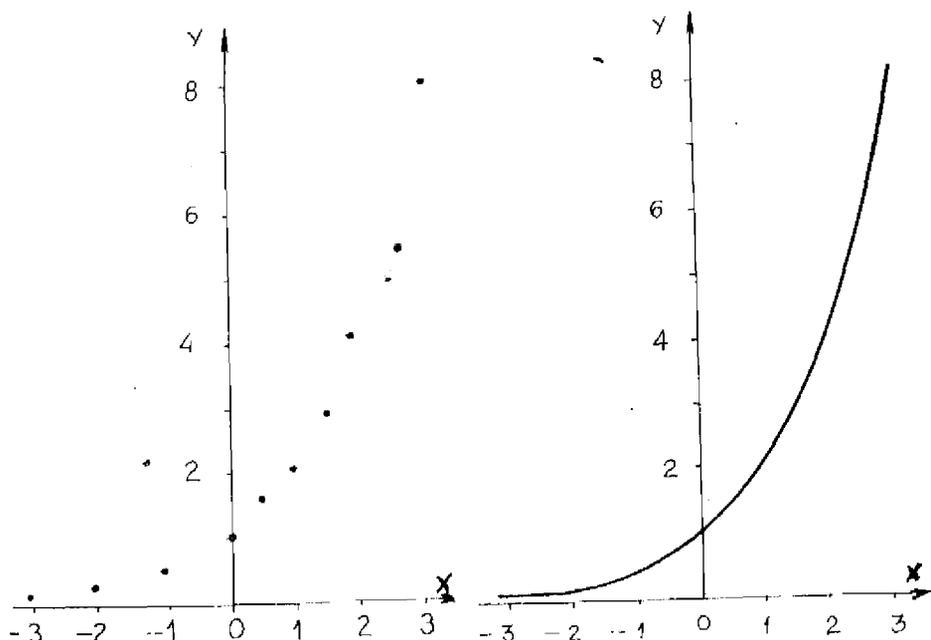
Resolución

Ya sabemos que  $2^x = 10^{(\log 2)x} = 10^{0,3x}$ , luego esta gráfica se obtiene de la de  $10^x$  por una contracción en el sentido del eje "x", para trazarla determinemos algunos pares ordenados:

x	-3	-2	-1	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$2^x$	0,125	0,25	0,5	1	1,4	2	2,8	4	5,6	8

Al representar estos pares ordenados en un sistema de coordenadas, obtenemos una gráfica como la de la figura 1.5a.

Sabemos que la gráfica de la función es una curva que contiene a esos pares ordenados (fig. 1.5b).



a)

b)

Fig. 1.5

De la gráfica de  $y = 2^x$  resultan sus propiedades.

Observa que estas coinciden con las de  $y = 10^x$ .

En general, las propiedades de las funciones  $y = a^x$  y sus gráficas pueden obtenerse de la de  $y = 10^x$ .

Basta observar que;  $y = a^x = 10^{x \log a}$ .

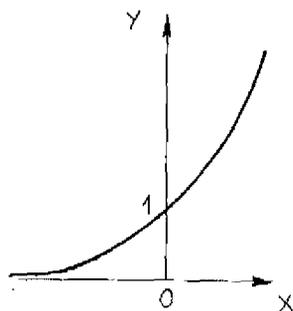
Si  $a > 1$ , entonces  $\log a > 0$  y la gráfica se obtiene de la de  $y = 10^x$  por una contracción o dilatación en la dirección del eje "x" (fig 1.6 a).

Si  $0 < a < 1$ , entonces  $\log a < 0$  y a la contracción o dilatación de la gráfica de  $y = 10^x$  le sigue una simetría respecto al eje "y" (fig 1.6 b).

Para las funciones exponenciales de base  $a$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) se cumple:

• Si  $a > 1$  Propiedades

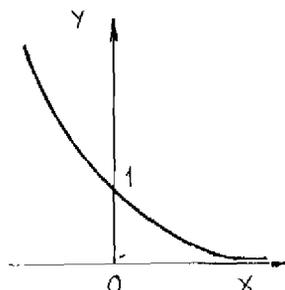
Dominio:  $x \in \mathbb{R}$   
 Imagen:  $y > 0$   
 Ceros: No tiene  
 Monotonía: Creciente



a)

• Si  $0 < a < 1$  Propiedades

Dominio:  $x \in \mathbb{R}$   
 Imagen:  $y > 0$   
 Ceros: No tiene  
 Monotonía: Decreciente



b)

Fig. 1.6

Además no tienen valor máximo, ni valor mínimo.  
 No son periódicas, no son pares ni impares.

Observa que en general las propiedades, en ambos casos, coinciden con las de  $y = 10^x$ , excepto la monotonía en el caso en que  $0 < a < 1$ , pues al reflejarse la gráfica en el eje "y" desciende en lugar de ascender.

Ejercicios (epígrafe 5)

1. Los puntos  $A_1, A_2, A_3, A_4$  están situados en la curva  $y = 10^x$ , sus abscisas son iguales respectivamente a los números  $-4; 0; 0,5; 2; 1,6$ . Determina las ordenadas de estos puntos.
3. Los puntos  $B_1, B_2, B_3, B_4$  están situados en la curva  $y = 10^x$ , sus ordenadas son iguales respectivamente a los números  $1; 0,1; 1,2; 2; 79,6$ . Determina las abscisas de estos puntos.
3. Determina cuáles de las pares ordenados siguientes pertenecen a las funciones  $y = 2^x$  ó  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ :  
 $(-2; \frac{1}{4})$  ;  $(5; \frac{1}{32})$  ;  $(1; 0,5)$  ;  $(0; 2)$   
 $(0; ni)$  ;  $(u; 1)$  ;  $(-0,1; 0)$  ;  $(-2; -4)$
4. Determina qué función exponencial de la turma  $y = a^x$

( $a > 0$ ;  $a \neq 1$ ) contiene los pares ordenados siguientes:

- a) (1; 2,5)    b) (2;  $\frac{1}{4}$ )    c) (3; 64)    d) (-5;  $\frac{1}{32}$ )

5.\* Sean las funciones:

$$f(x) = 5^x \qquad g(x) = 5^x - 1 \qquad t(x) = 5^{x+3}$$

$$p(x) = 5^{x+3} - 1$$

Determina: a) Dominio e imagen de estas funciones.

b) Ceras en caso de que existan.

c) ¿Para qué valor de  $x$  se cumple que:

$$f(x) = \sqrt[3]{5} \ ; \ g(x) - 4 = 0 \ ; \ t(x + 6) = \frac{1}{25} \ ?$$

6.\* Dadas Las funciones:

$$f(x) = 4^x \qquad g(x) = y + 2^{x-2} \qquad x = 3^{x-4} - 9$$

$$m(x) = 10^{x+1} \qquad n(x) = \left[-\frac{1}{5}\right]^x + 2$$

a) Determina la imagen de cada una.

b) ¿En qué punta su gráfica corta el eje " $x$ "?

c) Obtén en cada caso el par (0;  $y$ ). Esboza sus gráficos.

d) Calcula: 
$$\frac{f(0,5) - \frac{1}{3} h(5) + 3 m(-1)}{\sqrt{2}}$$

e) Si  $h(x) = -6$ , calcula  $x$ .

7. Si  $f(x) = 3^{x-6}$  y  $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

a) Determina analíticamente el punto de intersección de los gráficos de dichas funciones.

b) Calcula: 
$$\frac{f(4) + 3 g(2) - f(5)}{g(0)}$$

c) ¿Para qué valor de  $x$ ,  $f(x) = \sqrt{27}$  y  $g(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$  ?

8. Para qué valores de  $x$  se cumple que:

a)  $f(8x - 3) = 25$  si  $f(x) = 5^x$

b)  $f(2x^2) = f(5x + 12)$  si  $f(x) = 7^x$

c)  $f(5 - 2x) > \frac{1}{32}$  si  $f(x) = 2^x$

d)  $f(2x^2 + 5) - 9 < 0$  si  $f(x) = \left(-\frac{1}{3}\right)^x$

9.\* Determina la ecuación de las funciones cuyos gráficos, se muestran en la figura 1.7. Analiza sus propiedades.

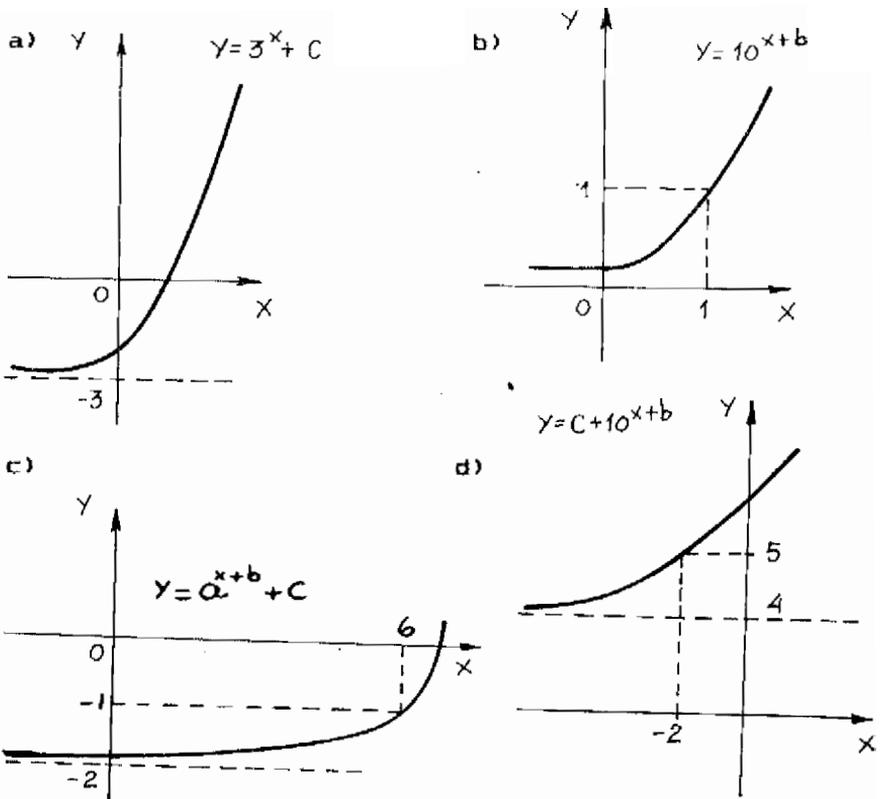


Fig. 1.7

## 6. Funciones logarítmicas

### Definición 1

Se llama función logarítmica de base  $a$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) a la función que a cada  $x$  ( $x > 0$ ) le hace corresponder  $\log_a x$ , es decir, al conjunto

$$\left\{ (x; \log_a x) ; x \in \mathbb{R}_+^* ; a > 0, a \neq 1 \right\}$$

### Ejemplo 1

- a) Determina la imagen de 3,5; 50; 0,5 por la función  $y = \log x$ .
- b) Determina para qué valor de  $x$  alcanza el valor 1,5; 0,93; y -1 la función  $y = \log x$ .

Resolución:

- a) Calcularnos directamente utilizando la tabla

$$\log 3,5 = 0,5441$$

$$\log 50 = 1,699$$

$\log 0,5 = -1 + 0,699 = -0,301$ . Efectuamos, pues la imagen es un número real.

b) Resolviendo las ecuaciones

$$\log x = 1,5; \quad \log x = 0,93; \quad \log x = -1, \quad \text{obtenemos}$$

$$\log x = 1,5$$

$$x = 10^{1,5}$$

$$x = 31,6$$

$$\log x = 0,93$$

$$x = 10^{0,93}$$

$$x = 8,52$$

$$\log x = -1$$

$$x = 10^{-1}$$

$$x = 0,1$$

La función logaritmo de base 10 se puede representar gráficamente construyendo una tabla como la siguiente:

x	0,01	0,03	0,1	0,32	1	1,5	1,6	2
log x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,1	0,2	0,3

x	2,5	3,2	4	5	6,4	8	10	32
log x	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,5

Si representamos estos pares en un sistema de coordenadas, obtenemos una gráfica como la de la figura 1.8 a.

Si determinamos más puntos, podemos tener una idea más aproximada de la gráfica (fig 1.8 b).

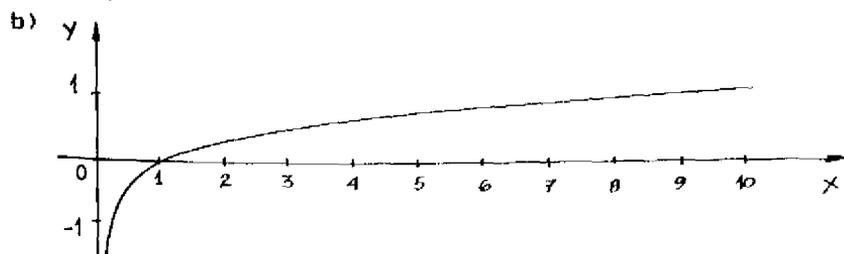
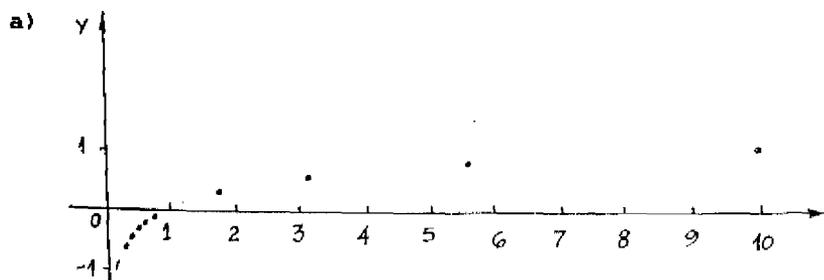


Fig. 1.8

En este caso hay que tener presente que  $x > 0$ , y por

tanto la gráfica no toca al eje "y", aunque se aproxima ilimitadamente a él. A esta recta a la cual la curva se acerca sin tocarla se denomina asíntota de la función logarítmica.

De la gráfica de la función  $y = \log x$ , se pueden inferir sus propiedades.

Dominio: $\mathbb{R}_+$	La proyección de la gráfica cubre el semieje positivo de las "x".
Imagen: $\mathbb{R}$	La proyección de la gráfica cubre el eje "y".
Cero: $x = 1$	La gráfica corta al eje x en el punto (1;0).
Monotonía: Creciente	La gráfica asciende de izquierda a derecha.
No tiene máximo ni mínimo.	
No es par ni impar.	

Análogamente se pueden definir funciones logarítmicas para cualquier base a ( $a > 0$ ;  $a \neq 1$ )

### Ejemplo 2

Traza la gráfica de la función  $y = \log_2 x$ . Analiza sus propiedades.

Resolución

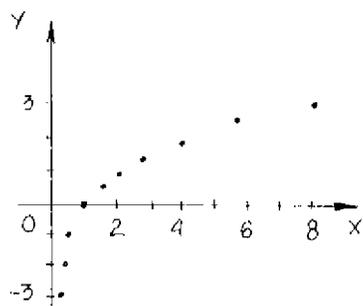
Se escribe  $\log_2 x = \frac{\log x}{\log 2} = \frac{\log x}{0,3}$ , luego esta gráfica se obtiene de la de  $y = \log x$  por una contracción en el sentido del eje "x". Para trazarla determinemos algunos puntos de la misma:

x	0,125	0,25	0,5	1	1,4	2	2,8	4	5,6	8
$\log_2 x$	-3	-2	-1	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

Al representar estos pares ordenados en un sistema de coordenadas, obtenemos una gráfica como la de la figura 1.9 a.

La gráfica de esta función es una curva que contiene esos pares ordenados (fig 1.9 b).

a)



b) y ↑

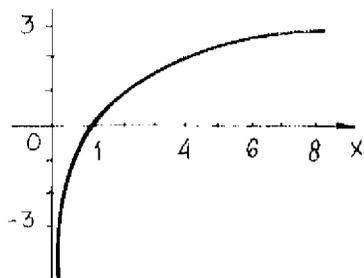


Fig 1.9

Al igual que en las funciones exponenciales, las gráficas de las funciones logarítmicas de base  $a$  ( $a > 1$ ) se pueden obtener de  $y = \log x$  por una dilatación o contracción de su gráfica:  $\log_a x = \frac{1}{\log a} \cdot \log x$  ( $\log_a x > 0$ ).

Por ello se conservan las propiedades de  $y = \log x$ .

Si  $0 < a < 1$ , entonces  $\log a < 0$  y se tiene que:

$$\log_a x = \frac{1}{\log a} \cdot \log x \quad \text{con} \quad \frac{1}{\log a} < 0$$

Esto significa que la gráfica se obtiene de la de  $Y = \log x$ , añadiéndole, a la dilatación a contracción de su gráfica, una simetría con respecto al eje " $y=0$ ".

Por ello las propiedades también se conservan, excepto la monotonía que cambia.

Para las funciones  $y = \log_a x$  ( $a > 1, x > 0$ ), se cumple:

Domínio:  $\mathbb{R}_+^*$                   Imagen:  $\mathbb{R}$                   Ceros:  $x = 1$

Monotonía: Creciente                  Extremos: No tienen ni  
máximo ni mínimo

Paridad: No es par ni impar.

### Teorema 1

Las funciones  $y = \log_a x$  y  $y = a^x$  son inversas una de la otra.

Demostración

$$y = \log_a x \quad \text{significa que} \quad x = a^y$$

y esta significa que ambas funciones son inversas. ■

Por ser funciones inversas;, el gráfico de  $y = \log_a x$  se obtiene reflejando el gráfico de  $y = a^x$  en la recta  $y = x$  (fig 1.10).

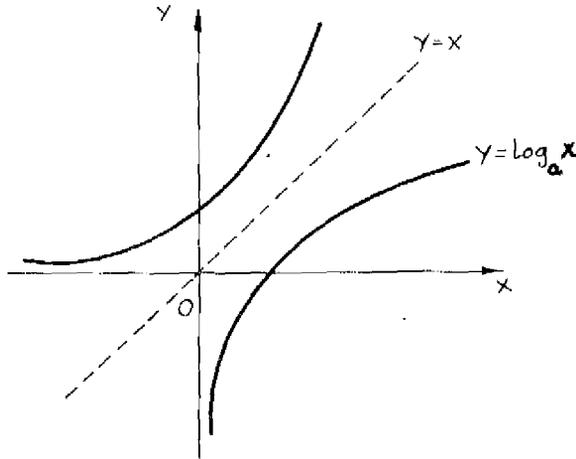


Fig 1.10

**Ejemplo 3**

Traza el gráfico de  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  y a partir de éste el de  $y = \log_{1/2} x$ . Finaliza sus propiedades.

Resolución

Reflejando el gráfico de  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  en la recta  $y = x$ , obtenemos el gráfico de  $y = \log_{1/2} x$  (fig 1.11).

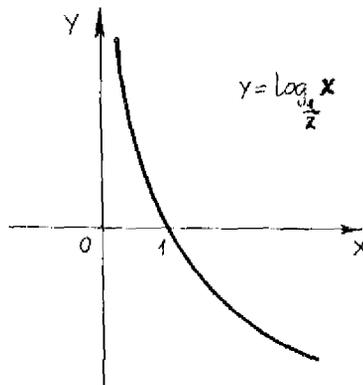


Fig 1.11

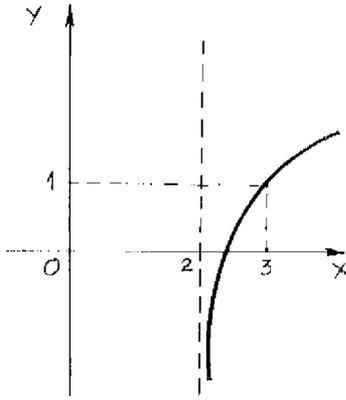
De la gráfica resultan sus propiedades:

Dominio:  $x \in \mathbb{R}_+^4$       Imagen:  $y \in \mathbb{R}$       Ceros:  $x = 1$   
Monotonía: Decreciente      Extremos: No tiene máximo  
Paridad: No es par ni impar.      ni mínimo. ■

Ejercicios (epígrafe 6)

- Determina si las siguientes pares pertenecen o no a la función  $y = \log x$ 
    - (100; 2)
    - ( $\frac{1}{10}$ ; -1)
    - (5; 1,699)
    - (855; 2,932)
  - Determina la imagen por la función  $y = \log x$  de:
    - 4,5
    - 2,4
    - 15
    - 0,3
  - Determina para qué valor de  $x$ , la función  $y = \log x$ , alcanza el valor:
    - 2,96
    - 1,711
    - 3,692
    - 0,17
  - Determina qué función logarítmica del tipo  $y = \log_a x$  contiene los pares ordenados siguientes:
    - (64; 3)
    - (49; 2)
    - ( $-\frac{1}{2}$ ;  $-\frac{1}{2}$ )
    - ( $5^{-2}$ ; -1)
  - \* Representa gráficamente las siguientes funciones si:  
 $f(x) = \log_3 x - 1$ ;  $g(x) = \log_5(x+0,5)$ ;  $m(x) = \log_5(x-5) + 1$ 
    - Determina el dominio y la imagen de  $f$ ,  $g$ ,  $m$ .
    - Calcula su ceros.
    - Calcula  $x$  si:  $f(x) = -3$ ;  $g(x) = 1$ ;  $m(x) = 2$ .
  - Determina los valores de  $x$  para los que están definidas las siguientes funciones:
    - $f(x) = \log_2 \left[ 2x - \frac{9}{4} \right]$
    - $g(x) = \log_3 \left[ \frac{1}{9} x + 6 \right]$
    - $h(x) = \log(5 - 3x)$
    - $t(x) = \log(x^2 + 3x - 18)$
  - Sea la función  $p(x) = \log(x^2 - x - 11)$ 
    - ¿Para qué valores de  $x$ ,  $p(x) > 0$ ?
    - ¿Para qué valores de  $x$ ,  $p(x) = 0$ ?
- B.<sup>E</sup> Los gráficos siguientes (fig. 1.12) representan funciones del tipo  $y = \log_3(x + b) + c$ , en cada caso:

a)



b)

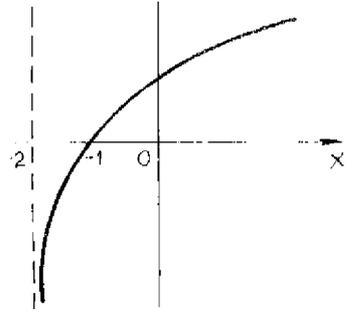


Fig 1.12

- Escribe su ecuación.
  - Determina los valores de  $x$  para los que está definida la función.
  - Halla su cero.
  - Escribe las coordenadas de los puntos  $P_1, P_2, P_3$  si sus ordenadas son 2, -1, y  $\frac{1}{2}$  respectivamente.
  - Escribe las coordenadas de los puntos  $Q_1, Q_2, Q_3$  si sus abscisas son 25,  $-\frac{5}{3}$ , y 0 respectivamente.
9. Traza el gráfico de la función  $5^x$  a partir del gráfico de  $y = \log_5 x$ . Analiza sus propiedades.

### Ejercicios del capítulo

1. Calcula aplicando las propiedades de las potencias (considera todas las variables positivas).

- |   |  |
|---|--|
| a) $a^x \cdot a^{-4x} \cdot a^{3x}$                                       | b) $c^{-x} \cdot c^{\frac{3}{4}} \cdot c^2$              |
| c) $\theta^2 \cdot \theta^{\frac{1}{2}} \cdot \theta^{-2} \cdot \theta^4$ | d) $2^{\frac{2}{5}} \cdot 2^{-5} : 2^{\frac{12}{5}}$     |
| e) $3^{\frac{5}{9}} \cdot 3^{-\frac{2}{9}} : 3^{-\frac{1}{4}}$            | f) $5^{\frac{1}{4}} : 5^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{5}$    |
| g) $\left[ 3^{\frac{9}{4}} : 3^{\frac{2}{5}} \right]^{\frac{10}{7}}$      | h) $\left[ \frac{x}{y} \right]^{-2} \cdot (x^{-4})^{-2}$ |
| i) $(3pq)^2 \cdot (2q)^{-1} \cdot (5p)^{-2}$                              | j) $(0,3bc)^2 \cdot \left[ \frac{1}{2} b^3 \right]^{-2}$ |

$$k) x^{m+2}(x^{-m} + x)$$

$$m) \frac{9^{1/2} - 2^0 \cdot 2^2}{3\sqrt{3}}$$

$$n) \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}{2 + \sqrt{5}}$$

$$p) \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^9 \cdot 2^9}{13\sqrt{2}}$$

$$1) (x^2 + y^{-2}) : xy^{-1}$$

$$n) \frac{3^4 : 9^3 \cdot 27}{6\sqrt{2}}$$

$$o) \frac{10^2 \cdot 5^{-2} - 15^0}{8 - \sqrt{10}}$$

$$q) 11^{\frac{1}{2}} \cdot 11^{\frac{9}{2}} + \frac{2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{-\frac{7}{15}}}{\sqrt[5]{2}}$$

## 2. Resuelve:

$$a) 4^{2x} = \frac{1}{64}$$

$$c) 6^{x-1} = 216 \sqrt[9]{6}$$

$$e) 2^{3x+1} = 4^{x-2}$$

$$g) 25^{x-1} = 125^{x+9}$$

$$i) 9^{q-1} = 3^{3q+1}$$

$$k) 8^{x-9} = 4^{0,5x}$$

$$m) 3^{x^2 - 5} = 81$$

$$ñ) (2^x)^{x-4} = \frac{1}{8}$$

$$p) \left(\frac{1}{4}\right)^{2t+1} = 16^{t+2}$$

$$r) 2 \cdot 3^{x^2 - x + 1} = 6$$

$$t) (3^x)^{x-9} = \frac{1}{9}$$

$$v) (3^x)^{x+2} = 1$$

$$x) 3^{\frac{x}{4}} = \frac{1}{9\sqrt{3}}$$

$$z) 10 \cdot 3^{x-9} = 810$$

$$b) 2^x = \sqrt[9]{4}$$

$$d) \sqrt[3]{3^x} = \frac{1}{\sqrt{27}}$$

$$f) 27^{x+1} = 9^x$$

$$h) 9^x = \sqrt[5]{27}$$

$$j) 25^{2x} = \sqrt{5}$$

$$l) 7^{2p} = 49^{p-1}$$

$$n) 5^{2x-1} = 25^{x^2 - 1/4}$$

$$o) (16^x)^{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$q) 3 \cdot 2^{x+9} = 192$$

$$s) 2^{\sqrt{x}} = 128$$

$$u) (4^{x-9})^x = 8^x$$

$$w) (5^{x-2})^{x-9} = 1$$

$$y) 3^{6x - (2x+4)} = 9^{x+8}$$

## 3. Determina las soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$a) 2^{\frac{x}{9} + 2} = \frac{1}{8} \quad b) \frac{2^{5x-1}}{2^{9x+9}} = \frac{1}{4} \quad c) 2^{x-2} = \frac{16}{2^{x-4}}$$

$$d) 2^{x^2 + 7x + 7} - \frac{1}{32} = 0$$

$$e) 3^{2x+1} = \frac{27}{3\sqrt{81}}$$

$$f) 2^{2(3x-1)} = 16^x$$

$$g) 4^{\frac{x}{2} + 1} = \sqrt[4]{32^x}$$

$$h) 3 \cdot 4^{x+1} = 96$$

$$i) \frac{2^{x-1}}{9^{-3x}} = \frac{1}{64}$$

4. Determina el conjunto solución de las siguientes ecuaciones exponenciales:

$$a) 10^{3x-1} > 100^x$$

$$b) 7^{x-1} \leq 343^x$$

$$c) \left( \sqrt[3]{3} \right)^{x^2-9x} > \left( \sqrt[3]{3} \right)^4$$

$$d) 2^{2x-1} > 4^{x+1}$$

$$e) 11^{x^2} < 11^x$$

$$f) \left( \sqrt[2]{2} \right)^{x+1} \geq 1$$

$$g) \left( \frac{1}{2} \right)^{3x-1} < \left( \frac{1}{2} \right)^{x+5}$$

$$h) 5^x > 1$$

$$i) (0,6)^{5x-1} \leq (0,6)^{2x+9}$$

$$j) \left( \frac{1}{4} \right)^{x^2} < \left( \frac{1}{16} \right)^{4x-6}$$

$$k) \left( \frac{1}{5} \right)^{x^2-x} > \left( \frac{1}{5} \right)^6$$

$$l) 4^{9x} > 16^{x-1}$$

$$m) 5^{x(x-9)} > \left( \frac{1}{5} \right)^2$$

$$n) (n)^{x^2-5x+7} > n$$

$$ñ) (3^{-2})^{x+1} > 3^x$$

$$o) \left( \frac{1}{2} \right)^{x-1} \leq 2^{2x}$$

$$p) 2^{(x-1)^2} \cdot 2^{x-4} \geq 8$$

$$q) \left( \frac{1}{2} \right)^{x^2-4} \leq 8^x \cdot 8^2$$

5. Halla los valores de  $x$  para que se cumpla que:

$$a) a^x < 1 \quad (a > 1)$$

$$b) a^x \geq 1 \quad (a > 1)$$

$$c) a^x < 1 \quad (0 < a < 1)$$

$$d) a^x \leq a \quad (a > 1)$$

$$e) a^x > a \quad (0 < a < 1)$$

$$f) a^{3x-1} > a^{x+1} \quad (a > 1)$$

$$g) a^{x^2} < a^{25} \quad (0 < a < 1)$$

$$h) a^{x^2} > a^{4x+24} \quad (a > 1)$$

6. Calcula las siguientes logaritmos:

$$a) \log_5 625$$

$$b) \log_{11} 121$$

$$c) \log_9 27^{-\frac{1}{2}}$$

$$d) \log_\pi \pi^{\frac{1}{2}}$$

$$e) \log_2 4\sqrt{4}$$

$$f) \log_9 81\sqrt{3}$$

$$g) \log_8 8$$

$$h) \log_2 \sqrt[4]{8}$$

7. Efectúa:

$$a) \log \sqrt{10} + \log \sqrt[4]{1000} + \log 10^{\frac{4}{5}}$$

$$b) \log_2 8 + \log_{\frac{1}{2}} 32 - \log_2 \frac{1}{16} + \log_2 \sqrt{8}$$

$$c) \log 0,001 - \log 10 \sqrt{10} + \log_{0,1} 0,1$$

$$d) 2^{2 \log_2 3} - 3 \log_2 2 + \frac{1}{5 \log_5 0,5}$$

$$e) \frac{1}{5} \log_6 36 + \log_5 \frac{1}{25} \cdot \log_2 \sqrt{2}$$

$$f) \log_9 9\sqrt{3} = \log_4 \frac{1}{16} - 6^{\log_6 3}$$

8. Calcula los logaritmos decimales de los siguientes números:

a) 24,3

b) 6,8

c) 153

d) 0,12

e) 89,6

f) 7,32

g) 3500

h) 4612

i) 4

j) 5626

k) 8532,9

l) 853,29

m) 23

n) 0,6209

ñ) 456

o) 71000

p) 80,5

q) 7,59

r) 0,0093

s) 0,0000021

t) 63,87

u) 398,2

v) 2,456

9. Expresa mediante un solo logaritmo y calcula:

a)  $\log_5 4 + \log_5 6 - \log_5 3$

b)  $\log_2 5 + \log_2 7 + \log_2 6$

c)  $2 \log_6 5 - \log_6 7 - \log_6 5$

d)  $3 \log_7 3 + 2 \log_7 5$

e)  $2 \log_3 7 - (\log_3 14 + \log_3 35)$

f)  $\log_2 9 + \log_2 5 - \log_2 15$

g)  $\frac{3}{2} \log 4 + \frac{1}{3} \log 27$

h)  $\log_6 2 + \frac{1}{5} \log_6 32 - \log_2 6$

10. Despeja m en las siguientes fórmulas:

a)  $a^m - b = c$

b)  $c + a^{m-1} = b$

c)  $a \sqrt[m]{b^m} - c = 0$

d)  $(b^m)^m + ac = 1$

Escribe los valores admisibles de las variables a, b, c.

11. Entre qué números enteros están comprendidos los logaritmos de base 10 de las numeras:

a) 3

b) 18

c) 134

d) 1782

e) 0,5

f) 0,07

g) 0,018

h) 0,00215

12. Resuelve considerando todas las expresiones positivas:

a)  $\log x = \log 7 + \log 6 - \log 3$

b)  $\log x = 2 \log 3 + 3 \log 5$

- c)  $\log x = 3 \log 2 - 2 \log 3 + \log 5$   
 d)  $\log x = 3 \log a - (3 \log b + 2 \log c)$   
 e)  $\log x = \frac{1}{3} \log(a + b) - \left( \log a + 2 \log(b + c) \right)$   
 f)  $\log x = \log \sqrt[3]{a^2} - \frac{1}{2} \log a$   
 g)  $\log x = \frac{3}{4} \log b - \frac{1}{2} \log c + \frac{1}{4} \log b$   
 h)  $\log x = 2 \log \sqrt{a + b} - \log \sqrt{a - b} + \frac{1}{2} \log(a + b)$

13. Halla el conjunto solución de:

- a)  $\log_5 2 + \log_5(x + 1) = 1$   
 b)  $4 \log_5 x + 7 = 2 \log_5 x + 11$   
 c)  $5 \log_9 x + 12 = 2 \log_9 x + 21$   
 d)  $3 \log_4 x + 5 = \log_4 x + 1$   
 e)  $2 \log_3 x + 3 = 4 \log_3 x + 1$   
 f)  $5 \log_n x + 2 = \log_n x^2 - 1$   
 g)  $3 - 2 \log x^2 = 3 \log x - 2$   
 h)  $\log_9 x = 2 - \log_3 9$   
 i)  $2 \log x = \log 4 + \log(x - 1)$   
 j)  $\log x^2 + \log x = 1$   
 k)  $\frac{3 - \log_4 x}{2 - \log_4 x^3} = 1$   
 l)  $\log \frac{\sqrt{x + 3}}{\sqrt{x + 1}} = 2$   
 m)  $\log_2 \sqrt[9]{8^{x-1}} = 2x - 4$   
 n)  $\log(x - 9) + 2 \log \sqrt{2x-1} = 2$   
 ñ)  $\log(2^x + 8) + \frac{1}{\log(2^x + 8)} = 2$   
 al  $\log_{\sqrt{7}} \left[ \sqrt{x + 5} + x \right] = 2$

14. Selecciona la solución de la inecuación:

- a)  $\log_5 \left( x^2 - \frac{3}{2} x \right) < 0$  en  
 (1)  $-\frac{1}{2} < x < 0$  ó  $\frac{3}{2} < x < 2$       (2)  $0 < x < \frac{3}{2}$   
 (3)  $-\frac{1}{2} < x < 2$       (4)  $\emptyset$   
 b)  $\log_a(2x - 1) < \log_a 3$  siendo  $a > 1$  en

$$(1) x < 2 \quad (2) -\frac{1}{2} \leq x < 2 \quad (3) \frac{1}{2} < x < 2$$

$$c) \log(5 - 3x) > \log(x^2 + 5) \quad \text{en}$$

$$(1) x < -3 \text{ ó } x > 0 \quad (2) -3 < x < 0 \quad (3) \phi$$

$$d) \log_{0,9}(x^2 - 1) < \log_{0,9}(4x - 5) \quad \text{en}$$

$$(1) x > 2 \quad (2) \phi \quad (3) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

$$e) \log_2(x^2 + 6) < \log_2(2 - 4x) \quad \text{en}$$

$$(1) x < -2 \quad (2) \phi \quad (3) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

15. Resuelve las siguientes sistemas de ecuaciones;

$$a) \left. \begin{aligned} 2^{2(x+y)} &= 2 \\ 2^{2x-6y} &= 8 \end{aligned} \right\} \quad b) \left. \begin{aligned} 4^{\frac{x}{2} + y} &= 32 \\ \log_2 x - \log_2 y &= 1 \end{aligned} \right\}$$

$$c) \left. \begin{aligned} 2^{7x-5y} &= 8 \\ 3^{2x+2y} &= 3 \end{aligned} \right\} \quad d) \left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 404 \\ \log x - \log y &= 1 \end{aligned} \right\}$$

$$e) \left. \begin{aligned} 9^{2x-5y} &= 27 \\ \log(x+1) + \log(y+3) &= \log(x^2-1) \end{aligned} \right\}$$

$$f) \left. \begin{aligned} 2^{x-y} - 8 &= 0 \\ \log_2(2x-3y) - \log_2 y &= 1 \end{aligned} \right\}$$

$$g) \left. \begin{aligned} \log_9 27 &= x + y \\ \log_9(4x+y) &= 1 + \log_9(x+1) \end{aligned} \right\}$$

$$h) \left. \begin{aligned} x + y &= 22 \\ \log x - \log y &= 1 \end{aligned} \right\}$$

$$i) \left. \begin{aligned} x^2 - y^2 &= 11 \\ \log x - \log y &= 1 \end{aligned} \right\}$$

$$j) \left. \begin{aligned} 3^{x+y} - 243 &= 0 \\ \log_2 x + \log_2(x-2y) &= 5 \end{aligned} \right\}$$

16. Determina los valores de  $x \in \mathbb{R}$  que satisfacen:

$$a) \log_2(3x-2) = 4 \log_2 3 - \log_2 27$$

$$b) 4 \cdot 3^{2x-1} = \frac{4}{3\sqrt{3}}$$

- c)  $\log_5 x + \log_5 (x-1) = \frac{1}{2} \log_5 4$
- d)  $\log (6x-4) = \cos \frac{3\pi}{2}$
- e)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-10} = \frac{\text{sen } 90^\circ}{9\sqrt{9}}$
- f)  $2^{x^2-9x} = \log_4 \left(\tan \frac{\pi}{4}\right)$
- g)  $9^{2x-1} = \cos 60^\circ = 27$
- h)  $(2^3)^{x-2} = \cos \frac{\pi}{4}$
- i)  $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-9x} = 49^x$
- j)  $\log (6x-2) + \log 2 = 3 \log 2$
- k)  $\log_3 4x + \log_3 (x+2) = \log_3 3x$
- l)  $3^{x^2-19} = \frac{1}{81}$
- m)  $\log_5 x = 3 \log_5 2 + \log_5 3$
- n)  $\left(9^{x-9}\right)^{x+9} = 1$
- o)  $\log_2 10 + 2 \log_5 2 - \log_2 5 = \log_2 (3x-1)$
- p)  $\log_2 3x + \log_2 \left(x + \frac{1}{3}\right) = -\log_2 4$
- q)  $100 \cdot 100^x = \sqrt{10^{15}}$
- r)  $\left(\frac{4}{7}\right)^{2x+3} = \left(\frac{7}{4}\right)^{9x-5}$
- s)  $(3x+1)^{9x^2-14x-4} = 3x+1$
- t)  $9^{-3x} = \left(\frac{1}{27}\right)^{x+9}$
- u)  $\sqrt{9^{x(x+1)}} = \frac{1}{4\sqrt{3}}$
- v)  $5^{\frac{x^2-8}{x-2}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1-x^2}{x+1}}$
- w)  $\log_{\sqrt{2}} (x+1) = 2 + \log_{\sqrt{2}} x$
- x)  $\log_x (x+1) = 2 - \log_x (x-2)$
- y)  $\log_2^2 x + \log_2 x^2 = 8$

$$y) \log(x+2) + \log x = \log 8$$

$$z) \log_3 x^3 + \log_3^2 x = 10$$

17. Probar que si  $\log_2 M + 3 \log_2 N - y = 3$ , entonces  $2^3 + Y = M \cdot N^3$

18. Resuelve las siguientes inecuaciones;

a)  $\log_{1,5}(x-8) > \log_{1,5} 3$

b)  $\log_2(4-x) < \log_2 3$

c)  $\log_{1/8} x < \log_{1/8}(5x-2)$

d)  $\log(y^2 - 2y + 1) < 2$

e)  $\log_2(x-5) + \log_2(x-4) < 1$

f)  $\log_9(x^2 - 1) < 1$

g)  $\log_{0,5} x < 3$

h)  $\log_4(2x+1) - \log_4 3 > \log_4 x$

i)  $\log_2(x^2 - x - 6) > 0$

j)  $\log_{1/2}(x^2 + 4x - 5) \geq -4$

19. Completa las coordenadas de los puntos A, B, C y D que pertenecen a la función  $y = \log(x-1)$  si conoces que: A(3;y); B(x;1); C(3,5;y); D(x;-1).

20. Si  $f(x) = 4^x$ , investiga para qué valores de x

$$f(3x^2 - 5x) = 16$$

21. Sea  $f(x) = 6^x$ , ¿para qué valores de x se cumple que  $f(3x+5) - 36 > 0$ ?

22. Calcula x en  $f(2x+1) = 1$

a) si  $f(x) = 10^x$                       b) si  $f(x) = \log x$

23.\* Si  $f(x) = 3^x - 4$ ;  $g(x) = \log_9(x-3)$

a) ¿ En qué punto sus gráficas cortan el eje "x"?

b) Determina el dominio, la imagen y la monotonía de f y g.

c) Representálas gráficamente.

d) Halla  $x \in \mathbb{R}$  si  $f(x) + 3 = 0$  y

$$g(x) + \log_9(2x+15) - 4 = 0.$$

24. Sea la función  $h(x) = 3^x + 3$

a) Investiga si los pares  $(4;84)$ ;  $(-1; \frac{10}{3})$ ;  $(0;2)$ ;  $(2;5)$  pertenecen o no a h.

b) Determina la imagen de la función en el intervalo

$$-1 \leq x \leq 2.$$

c) ¿Para qué valor de  $x$ ,  $h(x) = 12$ ;  $h(x) = 5$ ?

d) Resuelve:

$$\left. \begin{aligned} h(2a + b) &= 4 \\ h(2a - 5b) &= 30 \end{aligned} \right\}$$

25.\* Dadas los gráficos de funciones del tipo indicado (fig. 1.13). Escribe sus ecuaciones y analiza sus propiedades.

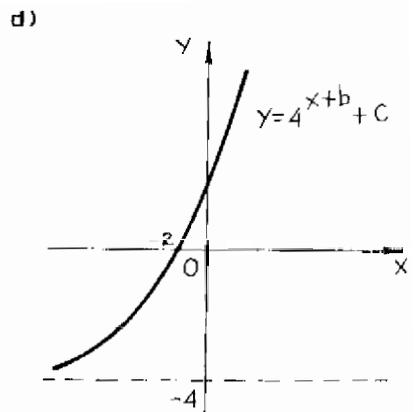
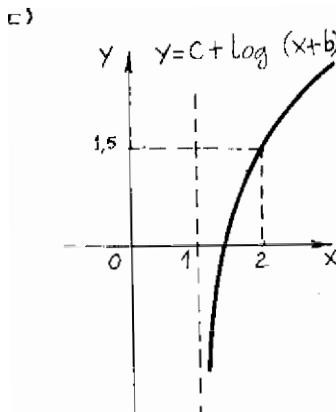
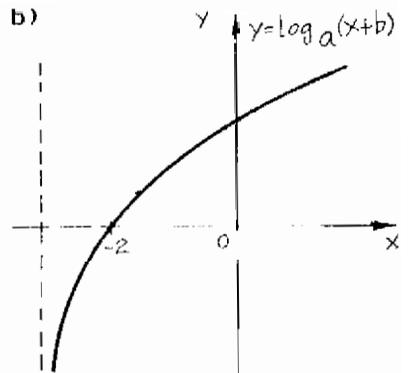
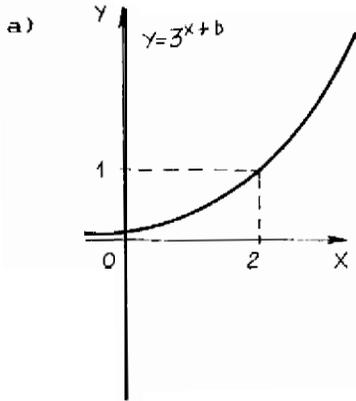


Fig. 1.13

## LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

EL surgimiento de esta rama de la Matemática la podemos encontrar, coma en otras ocasiones, en el trabajo de los antiguos griegos. Un antecedente de la geometría analítica parece hallarse en las obras de Apolonio de Perga (262-190 a.n.e.) pues este, en su libro Las Cónicas, usa procedimientos muy similares a los que después llevarían a Descartes a crear este método en el que se combinan armoniosamente los recursos del álgebra y la geometría.

Unos cinco siglos más tarde, en el año 300 d.n.e., Pappus de Alejandría escribe su obra Colección y en ella plantea un problema que propone buscar el lugar geométrico formado por las intersecciones de rectas que satisfacen determinadas condiciones.

Ni Apolonio, ni Pappus logran llegar a la geometría analítica, porque ambos eran fundamentalmente geómetras y carecían de todos los recursos algebraicos; de poseerlos, les hubiese permitido adelantar varios siglos este descubrimiento.

Cuando siglos después surge el álgebra simbólica, se crean las condiciones para que se produzca el surgimiento de la geometría analítica. Esta se debe a la matemática francés René Descartes (1596-1650), precisamente, cuando al intentar resolver el mismo problema propuesto por Pappus, este le conduce a la idea de enlazar la geometría y el álgebra.

Así Pues, desde 1628, emplea Descartes sus procedimientos para resolver problemas de geometría, pero no los publica hasta 1637, en un apéndice de su famosa obra El discurso del método.

Aunque la prioridad del descubrimiento de la analítica no puede discutirse a Descartes, no es menos cierta que tuvo un rival en el matemático francés Pedro Fermat (1601-1665).

Fermat, al abordar la tarea de redactar, con una visión

adecuada a su época, la obra de Apolonio, **Lugares Planas**, llega al principio fundamental de la geometría analítica al expresar;

Siempre que en una ecuación final. aparezcan dos variables, tenemos *un* lugar geométrico, pues el *extremo* de una de las variables describe una línea, recta o curva.

En esta capítulo vas a estudiar, fundamentalmente, la geometría analítica de la recta, y aprenderás a utilizar los recursos algebraicos para calcular y para demostrar propiedades que antes solo podías hacer utilizando métodos geométricos.

GEOMETRÍA ANALÍTICA DE LA RECTA EN EL PLANO

ECUACIÓN CARTESTIANA DE LA RECTA

1. Fórmulas básicas

Desde grados anteriores conoces los sistemas de coordenadas cartesianos y los has utilizado en el estudio de las representaciones gráficas de funciones. En este capítulo aplicaremos los sistemas de coordenadas al estudio de la geometría, en particular comenzaremos por obtener fórmulas que representan analíticamente (es decir, en términos de coordenadas) hechos básicos de la geometría.

Teorema 1

Dados dos puntos del plano  $P_1(x_1; y_1)$  y  $P_2(x_2; y_2)$ , la distancia entre ellos esta dada por la fórmula:

$$d(P_1; P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Demostración

Trazamos por  $P_1$  una recta paralela al eje "y" y por  $P_2$  una recta paralela al eje "x", (fig. 2.1), estas rectas son perpendiculares entre sí y, por tanto, se intersecan en un punto  $Q(x_1; y_2)$ .

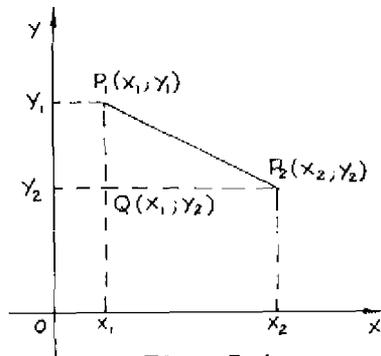


Fig. 2.1

En estas condiciones  $|P_1Q| = |y_1 - y_2|$  y

$$|P_2Q| = |x_1 - x_2|$$

Del teorema de Pitágoras resulta entonces:

$$|\overline{P_1 P_2}| = \sqrt{|\overline{P_1 Q}|^2 + |\overline{P_2 Q}|^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Pero  $|\overline{P_1 P_2}|$  es, precisamente, la distancia  $d(P_1, P_2)$ , luego  $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$  como se quería. ■

### Ejemplo 1

Calcula la distancia entre los pares de puntos dados:

a)  $P_1(3; 4)$  ,  $P_2(5; 1)$                       b)  $P_1(6, 3; -1)$  ,  $P_2(-2, 3; -3)$

c)  $P(\sqrt{2}; 1)$  ,  $Q\left(4; \frac{1}{3}\right)$

Resolución

Como conocemos las coordenadas de los puntos, sustituyendo en la fórmula de distancia tenemos:

$$\begin{aligned} \text{a) } d(P_1; P_2) &= \sqrt{(3 - 5)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} \\ &= \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} = 3,61 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } d(P_1; P_2) &= \sqrt{(6,3 + 2,3)^2 + (-1 + 3)^2} = \sqrt{8,6^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{73,96 + 4} = \sqrt{77,96} = 8,83 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } d(P, Q) &= \sqrt{(\sqrt{2} - 4)^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{(1,41 - 4)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{6,708 + 0,445} = \sqrt{7,153} = 2,67 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### Ejemplo 2

a) Prueba que el triángulo cuyos vértices son  $A(-1; 0)$ ,  $B(7; -8)$  y  $C(-2; -9)$  es isósceles.

b) Halla el centro y el radio de la circunferencia que pasa por los puntos  $D(0; 0)$ ,  $E(1; 7)$ ,  $F(7; -1)$ .

c) Prueba que los triángulos de vértices  $G(3; 5)$ ,  $H(1; 1)$ ,  $I(-1; 2)$ , y  $J(0; -1)$ ,  $K(2; 3)$ ,  $L(4; 2)$  son rectángulos y congruentes.

Resolución

a) Calculemos las longitudes de los lados:

$$d(A; B) = \sqrt{(-1 - 7)^2 + (0 + 8)^2} = \sqrt{64 + 64} = \sqrt{128} = 11,3$$

$$d(B; C) = \sqrt{(7 + 2)^2 + (-8 + 9)^2} = \sqrt{81 + 1} = \sqrt{82} = 9,06$$

$$d(C; A) = \sqrt{(-2 + 1)^2 + (-9 - 0)^2} = \sqrt{1 + 81} = \sqrt{82} = 9,06$$

luego como los lados  $\overline{BC}$  y  $\overline{CA}$  son iguales el  $\Delta ABC$  es isós-

rales.

b) Como sabes, todas los puntos de la circunferencia equidistan del centro. Sea  $O(x;y)$  el centro de la circunferencia, luego:

$$d(O;D) = d(O;E) = d(O;F), \quad (\text{fig.2.2}),$$

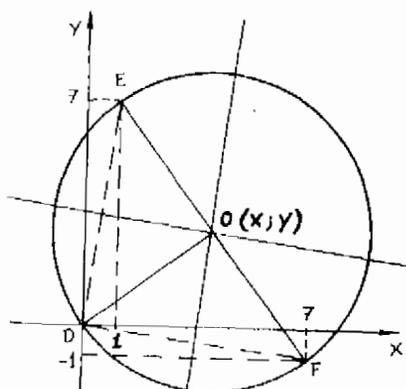


Fig. 2.2

es decir,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-7)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y+1)^2}$$

tomando dos a dos los miembros de esta cadena de igualdades se obtiene:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-7)^2}$$

que es equivalente a:  $2x + 14y - 50 = 0$  (1)

$$y \quad \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y+1)^2}$$

que es equivalente a:  $7x - y - 25 = 0$  (2)

Con la ecuaciones (1) y (2) formamos un sistema cuya solución son las coordenadas  $(x;y)$  del centro de la circunferencia. Esta solución es:  $(4;3)$

Para hallar el radio tenemos que:

$$r = d(O;D) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

c) Para probar que dos triángulos son congruentes basta con probar que sus tres lados son respectivamente iguales.

En el  $\triangle BHI$  tenemos:

$$|BH| = d(B;H) = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$$

$$|MI| = d(H; I) = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$|GI| = d(G; I) = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

En el  $\Delta JKL$  tenemos:

$$|JK| = d(J; K) = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$$

$$|KL| = d(K; L) = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$|LJ| = d(L; J) = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

luego como los lados son respectivamente iguales, dichas triángulos son congruentes.

Para probar que un triángulo es rectángulo solo es necesario comprobar que satisface el teorema de Pitágoras. Como la hipotenusa es el mayor de los lados, en el  $\Delta GHI$  debe cumplirse que:

$$|GI|^2 = |GH|^2 + |HI|^2$$

y esto se cumple ya que  $25 = 20 + 5$  luego el  $\Delta GHI$  es rectángulo, y también lo es el  $\Delta JKL$  por ser ambas congruentes. ■

El teorema 1 permite representar analíticamente un concepto geométrico fundamental. el de distancia entre dos puntos, Otro concepto básico es el de la dirección de una recta, para caracterizar esta dirección utilizamos un concepto que ya conoces: la pendiente.

Teorema 2

Sean  $P_1(x_1; y_1)$ ,  $P_2(x_2; y_2)$  dos puntos de una recta, no paralela al eje "y"; la pendiente::

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

es la tangente del ángulo que forma la recta con el semieje "x" positivo.

Demostración

Trazamos por  $P_1$  una paralela al eje "x" de modo que la semirrecta  $P_1Q$  tenga la orientación positiva y por  $P_2$  una paralela al eje "y": ambas rectas se cortan en  $Q$  (fig.2.3).

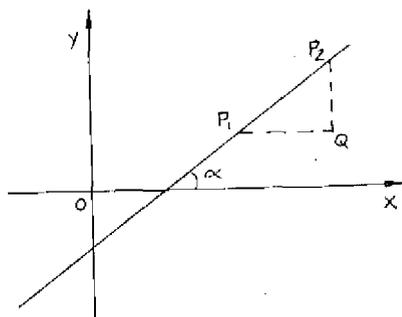


Fig. 2.3

Sea  $\alpha$  el ángulo que la recta forma con el semieje "x" positivo, tenemos:

$$\angle P_2 P_1 Q = \angle \alpha \quad \text{por ángulos correspondientes entre paralelas}$$

$$\text{luego: } \tan \alpha = \tan \angle P_2 P_1 Q = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ o sea,}$$

$$m = \tan \alpha \quad \text{como se quería. } \square$$

Una recta paralela al eje "y" no tiene pendiente pues  $x_2 = x_1$  y el cociente se indefina.

### Ejemplo 3

Calcula la pendiente de las rectas determinadas por los puntos dados y halla el ángulo que forma con el semieje "x" positivo.

a)  $P_1(1; 3)$  ,  $P_2(6; 7)$

b)  $A(3; 7)$  ,  $B(-0,5; \frac{3}{4})$

c)  $C(-3,5; \sqrt{2})$  ,  $D(5; -\frac{2}{3})$

Resolución

a) Calculemos la pendiente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - 3}{6 - 1} = \frac{4}{5}$$

para calcular el ángulo  $\alpha$  que forma la recta con la dirección positiva del eje "x" tenemos:

$$\tan \alpha = m = \frac{4}{5} = 0,8 \quad \text{luego} \quad \alpha = 38,7^\circ$$

b) La pendiente es:  $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{3}{4} - 7}{-0,5 - 3} = \frac{-6,25}{-3,5} = 1,786$

y  $\tan \alpha = m = 1,786 \quad \text{luego} \quad \alpha = 60,8^\circ$

$$\begin{aligned}
 \text{c) La pendiente es: } m &= \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{-\frac{2}{3} - \sqrt{2}}{5 + 3,5} \\
 &= \frac{-0,6667 - 1,414}{8,5} \\
 &= \frac{-2,0807}{8,5} = -0,2448
 \end{aligned}$$

y  $\tan \alpha = m = -0,2448$  luego  $\alpha = 180^\circ - 13,8^\circ = 166,2^\circ$  m

La pendiente de una recta determina su dirección, luego utilizándola se puede decidir sobre el paralelismo y la perpendicularidad de las rectas.

### Teorema 3

Sean las rectas  $r_1$  y  $r_2$  de pendientes  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente, se cumple que:

- a)  $r_1 \parallel r_2$  si y solo si  $m_1 = m_2$   
 b)  $r_1 \perp r_2$  si y solo si  $m_1 = -\frac{1}{m_2}$

### Demostración

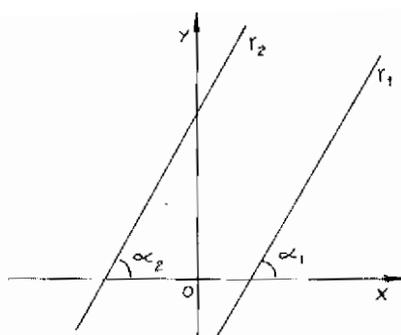
a) si  $r_1 \parallel r_2$  (fig. 2.4 a) se cumple que:

$$\alpha_1 = \alpha_2 \quad \text{por ser correspondientes}$$

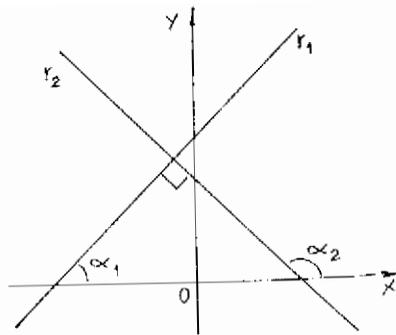
$$\text{luego} \quad \tan \alpha_1 = \tan \alpha_2$$

par tanto  $m_1 = m_2$  (condición de paralelismo)

como los pasos son reversibles se demuestra que si  $m_1 = m_2$ , entonces  $r_1 \parallel r_2$  y queda demostrado el inciso a.



(a)



(b)

Fig. 2.4

b)  $r_1 \perp r_2$  (fig. 2.4 b) se cumple que:

$$\alpha_2 = 90^\circ + \alpha_1 \quad \text{Ángulo exterior a un triángulo}$$

luego  $\tan \alpha_2 = \tan (90^\circ + \alpha_1)$

$$\tan \alpha = -\cot \alpha_1 = -\frac{1}{\tan \alpha_1} \quad (\text{punto 49 del Me-mento})$$

por tanta  $m_2 = -\frac{1}{m_1}$  (condición de perpendicularidad)

como los pasos son reversibles se demuestra que si  $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ , entonces  $r_1 \perp r_2$  y queda demostrado el inciso b. ●

**Ejemplo 4**

- Prueba que PQRS es un paralelogramo si: P(-2; -1), Q(2; 1), R(3; 4) y S(-1; 2).
- En el paralelogramo ABCD cuyos vértices son A(1; 1), B(4; 2), C(5; 5) y D(2; 4). Calcula la pendiente de sus diagonales. Prueba que son perpendiculares. ¿Qué tipo de paralelogramo es?
- Prueba que los puntos E(-2; -4), F(4; -1) y G(8; 1) están alineados.
- Prueba que los triángulos ABC y AMN, representados en el papel cuadrículado (fig. 2.5) son semejantes.

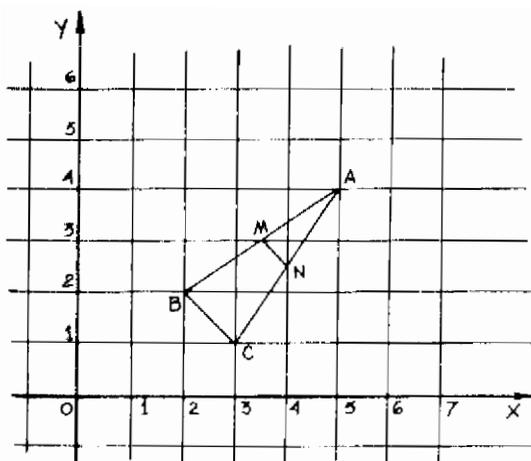


Fig. 2.5

**Resolución**

a) Basta probar que este cuadrilátero tiene dos lados paralelos e iguales.

Hallando las pendientes de  $\overline{PQ}$  y  $\overline{RS}$ , tenemos:

$$m_{PQ} = \frac{1 + 1}{2 + 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad m_{RS} = \frac{2 - 4}{-1 - 3} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

luego  $\overline{PQ} \parallel \overline{RS}$ , porque sus pendientes son iguales.

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$|\overline{RS}| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

por tanto,  $\overline{PQ} = \overline{RS}$  y el cuadrilátero es un paralelogramo.

b) En el paralelogramo ABCD

(fig. 2.6) calculemos las pendientes de las diagonales

las  $\overline{AC}$  y  $\overline{BD}$ .

$$m_{AC} = \frac{5 - 1}{5 - 1} = 1,$$

$$m_{BD} = \frac{4 - 2}{2 - 4} = \frac{2}{-2} = -1$$

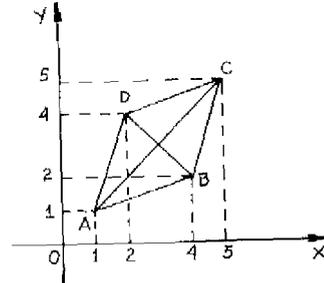


Fig. 2.6

se cumple que:  $m_{AC} = -\frac{1}{m_{BD}}$ , luego,  $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ .

El paralelogramo es un rombo porque sus diagonales son perpendiculares.

c) Para probar que los puntos E, F y G están alineados basta probar que los segmentos  $\overline{EF}$  y  $\overline{FG}$  son paralelos ya que tienen un punta común.

$$m_{EF} = \frac{-1 + 4}{4 + 2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad m_{FG} = \frac{1 + 1}{8 - 4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

luego  $\overline{EF} \parallel \overline{FG}$  y como tienen un punto común, los puntos E, F y G están alineados.

d) Para probar que dichos triángulos son semejantes basta probar que tienen dos pares de ángulos iguales.

En los triángulos ABC y AMN el ángulo de vértice A es común; nos faltaría probar la igualdad de otra pareja de ángulos. Para ello analicemos si los segmentos  $\overline{MN}$  y  $\overline{BC}$  son paralelos.

Tenemos que:

$$M(3,5;3), N(4;2,5), B(2;2) \text{ y } C(3;1)$$

$$\text{luego } m_{MN} = \frac{2,5 - 3}{4 - 3,5} = \frac{-0,5}{0,5} = -1$$

$$m_{BC} = \frac{1 - 2}{3 - 2} = \frac{-1}{1} = -1$$

por tanto,  $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ , por lo que los ángulos AMN y ABC son iguales (correspondientes entre paralelas) y se

cumple que los triángulos AMN y ABC son semejantes. ■

El siguiente teorema permite calcular las coordenadas del punto medio de un segmento y resulta de utilidad en el trabajo geométrico.

Teorema 4

Sea  $\overline{AB}$  un segmento cuyos extremos tienen coordenadas  $A(x_A; y_A)$ ,  $B(x_B; y_B)$ , entonces las coordenadas del punto medio  $M(x_M; y_M)$  de  $\overline{AB}$  son:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad ; \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Demostración

En el  $\triangle ABC$ ,  $\overline{MM'}$  paralela media (fig. 2.7), luego

$\overline{BC} = 2 \overline{MM'}$ , es decir,

$$y_B - y_A = 2(y_M - y_A)$$

$$y_B + y_A = 2 y_M$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Análogamente se obtiene  $x_M$ . ■

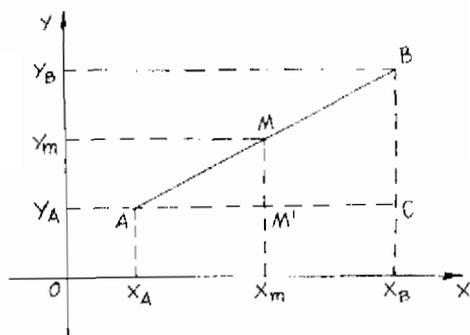


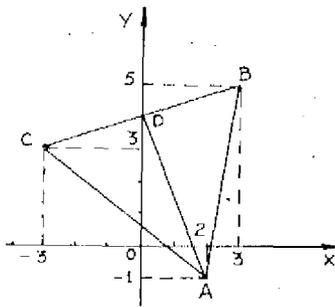
Fig. 2.7

### Ejemplo 5

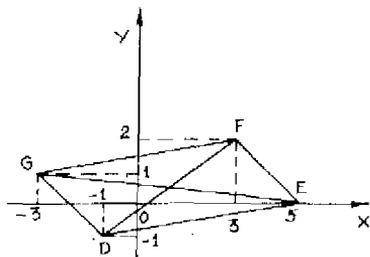
- Dado el triángulo cuyos vértices son los puntos  $A(2; -1)$ ,  $B(3; 5)$  y  $C(-3; 3)$ , calcula la longitud de la mediana relativa al lado  $\overline{BC}$ .
- Prueba que las diagonales del cuadrilátero cuyos vértices son  $D(-1; -1)$ ,  $E(5; 0)$ ,  $F(3; 2)$  y  $G(-3; 1)$  se cortan en su punto medio. ¿Qué tipo de cuadrilátero es?

Resolución

- Para calcular la longitud de la mediana  $\overline{AD}$ , debemos conocer las coordenadas del punto medio (D) del lado  $\overline{BC}$  (fig. 2.8 a).



(a)



(b)

Fig. 2.8

$$\text{luego } (x_D; y_D) = \left[ \frac{x_B + x_C}{2}; \frac{y_B + y_C}{2} \right] = \left[ \frac{0}{2}; \frac{8}{2} \right] = (0; 4)$$

por tanta  $D(0; 4)$

$$\text{ahora } |\overline{DA}| = d(D, A) = \sqrt{(0 - 2)^2 + (4 + 1)^2} = \sqrt{4 + 25} \\ = \sqrt{29} = 5,39$$

b) Hallemos los puntos medios  $M$  y  $N$  de las diagonales  $\overline{DF}$  y  $\overline{EG}$  respectivamente (fig. 2.8 b):

$$(x_M; y_M) = \left[ \frac{2}{2}; \frac{1}{2} \right] = \left[ 1; \frac{1}{2} \right] \quad \text{luego} \quad M \left[ 1; \frac{1}{2} \right]$$

$$(x_N; y_N) = \left[ \frac{2}{2}; \frac{1}{2} \right] = \left[ 1; \frac{1}{2} \right] \quad \text{luego} \quad N \left[ 1; \frac{1}{2} \right]$$

por tanta  $M$  y  $N$  coinciden y las diagonales se cortan en su punto medio, luego el cuadrilátero es un paralelogramo. ●

Las coordenadas permiten también demostrar propiedades geométricas.

### Ejemplo 6

Prueba que las diagonales de un rectángulo son congruentes.

#### Resolución

Cuando queremos demostrar una propiedad geométrica, la posición de los ejes no influye en los resultados y, por tanto, se trata de escogerlos lo más convenientemente posible. En este caso escogemos un vértice del rectángulo en el origen (fig. 2.9), un lado coincidiendo con el eje "x" y entonces otro está situado sobre el eje "y".

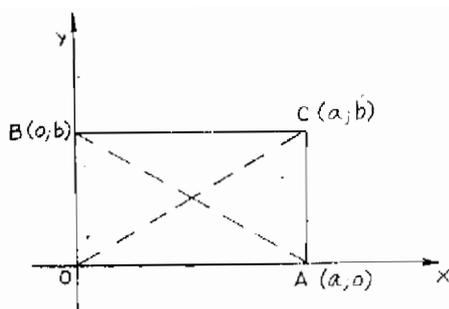


Fig. 2.9

Sean los vértices  $O(0;0)$  ,  $A(a;0)$  ,  $B(0;b)$  ,  $C(a;b)$  , entonces:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2} = |\overline{OC}|$$

como se quería. ■

### Ejercicios (epígrafe 1)

1. Halla la distancia entre los puntos:

- |  |   |
|--|---|
| a) $A(-3;2)$ , $B(6;-4)$   | b) $C(5;7)$ , $D(6;-3)$                         |
| c) $E(3;1)$ , $F(1;-1)$  | d) $G(1;0)$ , $H(-2;1)$                         |
| e) $I(4;5)$ , $J(6;5)$   | f) $K(2;6)$ , $L(0,5;3)$                        |
| g) $M\left(\frac{1}{3};4\right)$ , $N\left(\frac{2}{5};1\right)$ | h) $O(\sqrt{2};3)$ , $P(0;\sqrt{9})$            |
| i) $Q(2,5;2)$ , $R(1,3;1,5)$                                     | j) $S\left(\frac{1}{2};3\right)$ , $T(2,7;3,1)$ |

2. Halla la coordenada que falta si:

- a)  $d(A,B) = 4$  ;  $A(2;5)$  ,  $B(2,5;y)$   
 b)  $d(C,D) = 2\sqrt{3}$  ;  $C(2a;1)$  ,  $D(a;2)$   
 c)  $d(H,I) = 4,5$  ;  $H(3a;5)$  ,  $I(a-1;6)$   
 d)  $d(E,F) = 3$  ;  $E(4;b)$  ,  $F(-1;b^2)$

3. Si sabes que una recta  $p$  forma con el semieje  $x$  positivo un ángulo  $\alpha$ , determina el valor de su pendiente.

- a)  $\alpha = 15^\circ$     b)  $\alpha = 45^\circ$     c)  $\alpha = 60^\circ$     d)  $\alpha = 78^\circ$   
 e)  $\alpha = 90^\circ$     f)  $\alpha = 110^\circ$     g)  $\alpha = 145^\circ$     h)  $\alpha = 180^\circ$

4. Calcula la amplitud del ángulo  $\alpha$  que forma la recta  $r$  con la dirección positiva del eje "x" si sabes que pasa por los puntos:

- a)  $A(4;3)$  ,  $B(-1;4)$     b)  $C(2,5;2)$  ,  $D(1,5;\sqrt{9})$   
 c)  $E(\sqrt{8};2,6)$  ,  $F(\sqrt{2};1,3)$     d)  $G(3;8)$  ,  $H(-3,4;2\sqrt{2})$

- e)  $I(-3,6;3,7)$  ,  $J(9;5)$       f)  $K(7,1;2\sqrt{9})$  ,  $L(6,1;\sqrt{9})$
5. Sea el triángulo ABC de vértices  $A(1;1)$  ,  $B(0;5)$  y  $C(4;7)$ . Calcula:
- la longitud de sus lados, clasifícalo;
  - la longitud de sus medianas.
6. Muestra que el triángulo cuyos vértices son  $A(2;-3)$  ,  $B(5;-2)$  y  $C(4;1)$  es rectángulo. Halla la longitud de la mediana relativa a la hipotenusa.
7. Dado el triángulo cuyos vértices son  $M(1;1)$  ,  $N(5;3)$  y  $P(6;-4)$  , comprueba que es isósceles y calcula su área.
8. Los puntos dados corresponden a vértices de un cuadrilátero (en ese orden). Halla las longitudes y las pendientes de sus diagonales, clasifícalo,
- $A(2;0)$  ,  $B(5;-1)$  ,  $C(6;2)$  ,  $D(3;3)$
  - $E(0;0)$  ,  $F(4,5;1,5)$  ,  $G(6;6)$  ,  $H(1,5;4,5)$
  - $M(0;1)$  ,  $N(4;2)$  ,  $O(4;5)$  ,  $P(0;4)$
  - $Q(-1;-2)$  ,  $R(4;-3)$  ,  $S(5;2)$  ,  $T(0;3)$
  - $U(-4;-1)$  ,  $V(1,5;0)$  ,  $W(4;5)$  ,  $X(1,5;4)$
  - $A(-2;-3)$  ,  $B(6;1)$  ,  $C(2;4)$  ,  $D(-2;2)$
  - $E(2;3)$  ,  $F(-2;1)$  ,  $G(0;-5)$  ,  $H(6;0)$
9. Dados los vértices de un cuadrilátero  $A(-1;-2)$  ,  $B(3;1)$  ,  $C(7;-2)$  y  $D(3;-5)$  , comprueba que es un rombo y calcula su área.
10. Se tiene un cuadrilátero cuyas vértices son:  $M(-3;-1)$  ,  $N(0;3)$  ,  $O(3;4)$  y  $P(4;-1)$ .
- Halla su perímetro.
  - Comprueba que el cuadrilátero que se obtiene al unir los puntos medios de sus lados es un paralelogramo.
11. a) Prueba que los triángulos ABC y DEF representados en la figura 2.10 son iguales.
- b) ¿Qué tipo de cuadrilátero es el ABDE?
12. Demuestra que el segmento que une los puntos medios de los lados de un triángulo es paralelo al tercer lado e igual a su mitad,

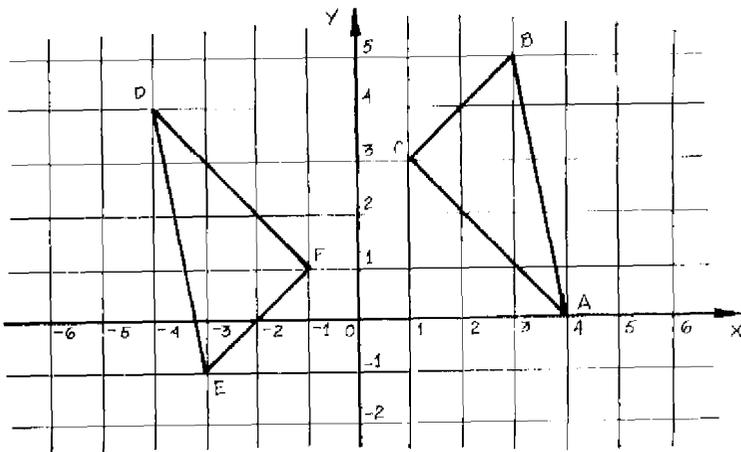


Fig. 2.10

13. Los puntos  $A(4;1)$ ,  $B(3;5)$ ,  $C(1;3)$  y  $D(-1;5)$ , tomados en ese orden, son los vértices de un cuadrado.
- Halla su área.
  - Halla el centro y el radio de la circunferencia circunscrita.
14. Halla el centro y el radio de la circunferencia que pasa por los puntos:
- $A(0;0)$ ,  $B(0;6)$ ,  $C(3;3)$
  - $D(1;5)$ ,  $E(5;1)$ ,  $F(1;-3)$
  - $G(5;3)$ ,  $H(4;6)$ ,  $I(0;8)$
  - $J(-3;6)$ ,  $K(2,1)$ ,  $L(1;4)$
  - Prueba que los triángulos  $GHI$  y  $JKL$  son semejantes.
15. Prueba que el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio, es paralelo a los otros dos lados e igual a la semisuma de ellos.
16. Demuestra que en un paralelogramo las diagonales se cortan en su punto medio.
17. Prueba que las diagonales del rombo se cortan perpendicularmente.

## 2. Ecuación cartesiana de la recta

En tus estudios realizados hasta ahora has trabajado con ecuaciones de dos variables tales como  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $y = mx + n$ , etc., para las cuales existe un conjunto de puntos  $P(x;y)$  del plano que la satisfacen. Este conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen a la ecuación se llama gráfico de la ecuación u lugar geométrico.

Algunos ejemplos de lugares geométricos aparecen representados en la figura 2.11.

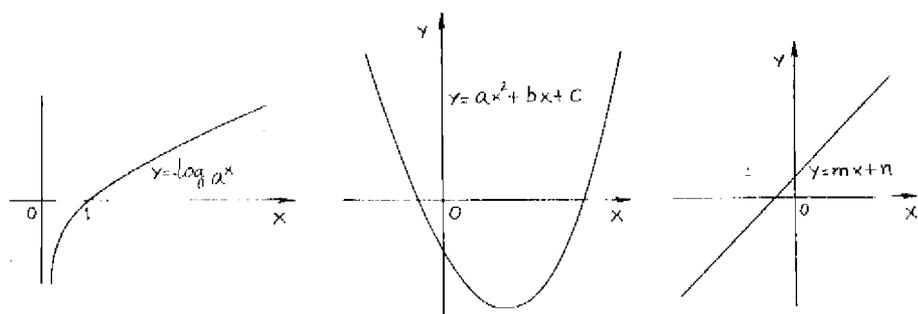


Fig. 2.11

En este epígrafe comenzaremos a estudiar la relación que existe entre las figuras geométricas y las ecuaciones que las representan.

### Ejemplo 1

Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos que equidistan de  $A(1;3)$  y  $B(2;5)$ .

Resolución

Sea  $P(x;y)$  un punto cualquiera del lugar geométrico, entonces debe cumplirse que:

$$d(P,A) = d(P,B) \quad (\text{fig. 2.12})$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2}$$

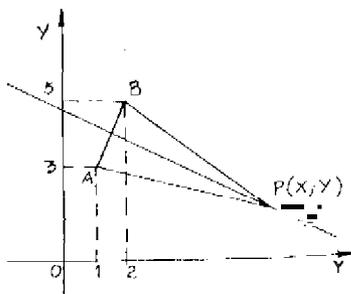


Fig. 2.12

como las distancias son siempre positivas, esto se cumple si y solo si:

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = (x - 2)^2 + (y - 5)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 10y + 25$$

$$2x + 4y - 19 = 0$$

o sea, si y solo si  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{19}{4}$ . ■

En el ejemplo anterior la ecuación del lugar geométrico es una ecuación de primer grado cuya gráfica es una recta. Esta no es sorprendente ya que desde la secundaria básica sabes que los puntos que equidistan de los extremos de un segmento, en este caso  $\overline{AB}$ , están en la mediatriz de este segmento. Como la mediatriz es una recta, su ecuación es de la forma  $y = mx + n$  donde  $m$  es su pendiente.

En general se cumple:

Teorema 1

El lugar geométrico de la ecuación  $Ax + By + C = 0$  con  $A \neq 0$  ó  $B \neq 0$  es una recta.

Demostración

Si  $B \neq 0$ , en la ecuación  $Ax + By + C = 0$ , despejando "y" obtenemos:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

luego su gráfica es una recta de pendiente  $m = -\frac{A}{B}$ .

Recíprocamente, a una recta, debemos probar que su ecuación es de la forma dada.

Sean  $P(x_1; y_1)$  y  $P_2(x_2; y_2)$  dos puntos de la recta, si  $P(x; y)$  es un punto cualquiera de la recta (fig. 2.13),

debe ser:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{la pendiente es única.}$$

$$(x_2 - x_1)(y - y_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1)$$

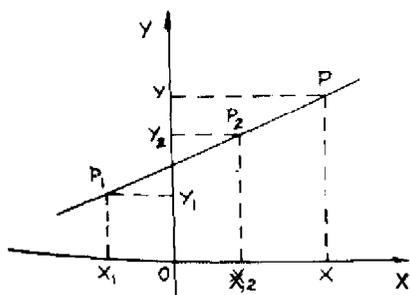


Fig. 2.13

$$(x_2 - x_1)y - (x_2 - x_1)y_1 = (y_2 - y_1)x - (y_2 - y_1)x_1$$

$$(x_2 - x_1)y - x_2y_1 + x_1y_1 = (y_2 - y_1)x - y_2x_1 + y_1x_1$$

$$(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y - x_2y_1 + y_2x_1 = 0$$

$$(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + (y_2x_1 - x_2y_1) = 0$$

que es de la forma dada con:

$$A = y_1 - y_2 \quad , \quad B = x_2 - x_1 \quad , \quad C = y_2x_1 - x_2y_1$$

y al menos uno de los coeficientes A ó B es distinta de cero.  $\square$

En la ecuación  $Ax + By + C = 0$  se tiene que:

Si  $A = 0$ , se trata de una recta paralela al eje  $x$ ,  
 $y = -\frac{C}{B}$  (fig. 2.14 a).

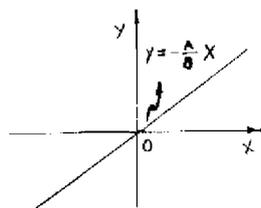
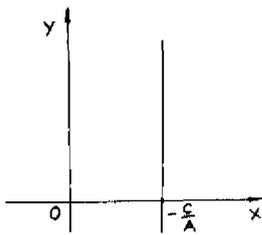
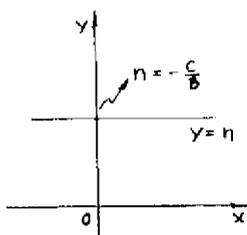
En el caso  $B = 0$ , la ecuación adapta la forma

$$Ax + C = 0 \quad \text{ó} \quad x = -\frac{C}{A}$$

que representa una recta paralela al eje  $y$  (fig. 2.14 b).

En este caso no representa una función lineal.

En el caso  $C = 0$  la ecuación se reduce a  $y = -\frac{A}{B}x$  ó  
 $y = mx$  la cual es una recta que pasa por el origen de co-  
ordenadas (fig. 2.14 c).



pasa por el origen

paralela al eje "x"      paralela al eje "y"      de coordenadas

(a)

(b)

(c)

Fig. 2.14

Hasta el momento, en el trabajo realizado con las ecuaciones con dos variables, se ha partido de la ecuación Para hallar el lugar geométrico correspondiente; pero también es posible hacer el proceso inverso, es decir, partir del lugar geométrico para obtener su ecuación.

En el caso de la recta hay diferentes posibilidades para hacerla ya que una recta queda determinada de diferentes formas:

- a) Conocidos un punto de la misma y su dirección (esta puede venir dada por la pendiente).  
 b) Conocidos dos de sus puntos.

**Ejemplo 2**

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto A(3;2) y tiene pendiente  $m = \frac{1}{2}$ .

Resolución

Conocidos un punto y la pendiente la recta queda determinada (fig. 2.15), luego considerando un punto cualquiera P(x ; y) de la recta se cumple

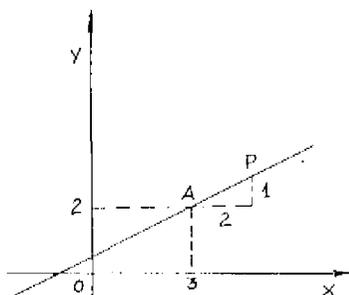


Fig. 2.15

$$m = \frac{y - 2}{x - 3}$$

pero como  $m = \frac{1}{2}$ , entonces:  $\frac{1}{2} = \frac{y - 2}{x - 3}$   
 $x - 3 = 2y - 4$   
 $x - 2y + 1 = 0$  ■

**Ejemplo 3**

Halla la ecuación de la *recta* determinada por los puntos B(2 ; -3) y C(4 ; 5).

Resolución

Como conocemos dos puntos, podemos hallar la pendiente de la recta;

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 + 3}{4 - 2} = \frac{8}{2} = 4$$

Conocida ya la pendiente procederemos igual al ejemplo anterior con uno cualquiera de los puntos dados, en este caso tomamos B.

$$4 = \frac{y + 3}{x - 2}$$

$$4x - 8 = y + 3$$

$$4x - y - 11 = 0$$
 ■

Puedes comprobar, en el ejemplo anterior, que si tomas el punto C obtendrás la misma ecuación.

En resumen:

Para obtener la ecuación de una recta seguimos el algoritmo:

1. Si conocemos **un punto** y la **pendiente**:
  - a) consideramos un **punto**  $P(x ; y)$  cualquiera de la recta;
  - b) sustituimos las **coordenadas** de  $P$  y del punto conocido al igual que el valor de la pendiente en la fórmula de la misma;
  - c) efectuamos y expresamos en la forma  $Ax + By + C = 0$  ó  $y = mx + n$ .
2. Si conocemos dos puntos:

Hallamos el valor de la pendiente y seguimos el procedimiento anterior utilizando uno de los puntos dados.

#### Ejemplo 4

Determina los *puntos* de intersección de las rectas

a)  $2x - y - 1 = 0$     b)  $3x - y - 1 = 0$     c)  $6x + 8y + 10 = 0$   
 $x - 2y + 4 = 0$      $3x - y - 4 = 0$      $3x + 4y + 5 = 0$

Resolución

Los puntos de intersección de ambas rectas deben satisfacer las dos ecuaciones, luego se trata de resolver el sistema (punto 15 del Memento).

a)  $r : 2x - y - 1 = 0$   
 $r' : x - 2y + 4 = 0$

Resolvamos el sistema:  $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$

El sistema tiene una única solución (2;3), esto significa que las rectas tienen un único punto común, es decir, se cortan en el punto (2;3) (fig. 2.16 a).

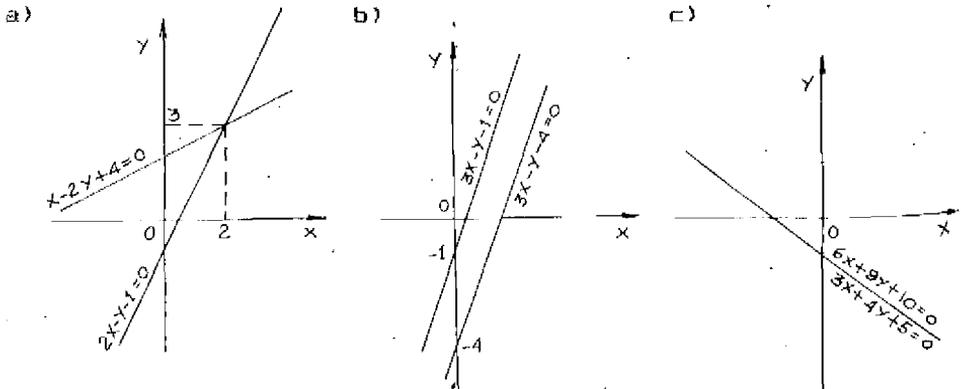


Fig. 2.16

$$b) r : 3x - y - 1 = 0$$

$$r' : 3x - y - 4 = 0$$

Restando ambas ecuaciones para eliminar  $x$ , obtenemos:  $3 = 0$  que es un absurdo. Esto significa que el sistema no tiene solución, es decir, las rectas no tienen puntos comunes, lo que significa que son paralelas no coincidentes (fig. 2.16 b). A la misma conclusión podemos llegar si notamos que las pendientes son iguales y no tienen el mismo intercepto en el eje "y".

$$c) r : 6x + 8y + 10 = 0 \quad (1)$$

$$r' : 3x + 4y + 5 = 0 \quad (2)$$

Multiplicando la ecuación (2) por  $-2$  y sumando la ecuación obtenida con (1) obtenemos  $0 = 0$ , lo cual se cumple siempre. Esto significa que el sistema tiene infinitas soluciones, luego las rectas tienen todos sus puntos comunes, es decir, las rectas son coincidentes (fig. 2.16 c).

A la misma conclusión se puede llegar si notamos que tienen la misma pendiente y el mismo intercepto en el eje "y". ■

### Ejemplo 5

Los vértices del triángulo ABC, son  $A(-2; 2)$ ,  $B(3; 0)$  y  $C(2; 5)$ .

- Halla la ecuación de la recta que contiene al lado  $\overline{AB}$ .
- Halla el pie de la altura relativa
- Halla los ángulos A y B.

Resolución

Conocidos los puntos A y B calculamos la pendiente de la

RE (fig. 2.17):

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 2}{3 - (-2)} = -\frac{2}{5}$$

un punto  $P(x; y)$

cualquiera de la recta y toman-

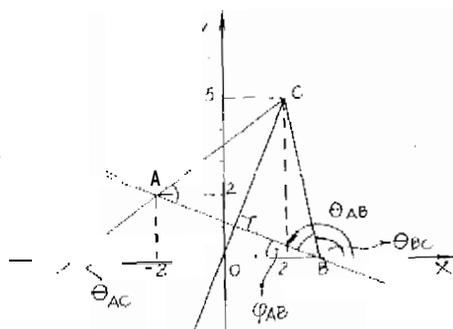


Fig. 2.17

do el punto B (podías haber tomado el punto A), conocida ya la pendiente tenemos:

$$-\frac{2}{5} = \frac{y - 0}{x - 3}$$

$$-2x + 6 = 5y$$

$$2x + 5y - 6 = 0$$

b) Para hallar el pie de la altura buscamos la ecuación de la recta que la contiene y determinamos su punto de intersección con la recta AB (fig. 2.17).

La ecuación de la altura será:

$$\frac{Y - Y_c}{x - x_c} \equiv m_h = -\frac{1}{m_{AB}}$$

$$\frac{y - 5}{x - 2} = \frac{5}{2}$$

$$5x - 2y = 0$$

Ahora resolvemos el sistema  $\begin{cases} 2x + 5y - 6 = 0 \\ 5x - 2y = 0 \end{cases}$

de donde se obtiene:  $x = \frac{12}{29} \approx 0,414$      $y = \frac{30}{29} \approx 1,03$ ,

luego, el pie de la altura es el punto (0,414;1,03).

c) En la figura 2.17 apreciamos que

$$\angle A = \angle \theta_{AC} + \angle \varphi_{AB}$$

$\angle \theta_{AC}$  y  $\angle \varphi_{AB}$  las calculamos a partir de la pendiente

$$\tan \angle \theta_{AC} = m_{AC} = \frac{4}{3} \approx 1,33 \quad , \quad \angle \theta_{AC} = 53,1^\circ$$

$$\tan \angle \varphi_{AB} = -m_{AB} = \frac{2}{5} = 0,4 \quad , \quad \angle \varphi_{AB} = 21,8^\circ$$

luego  $\angle A = 53,1^\circ + 21,8^\circ = 74,9^\circ$

Análogamente:

$$\angle B = \angle \theta_{AB} - \angle \theta_{BC}$$

$$\angle \theta_{AB} = 180^\circ - \angle \varphi_{AB} = 158,2^\circ$$

$$\tan \angle \theta_{BC} = m_{BC} = -5 \quad , \quad \angle \theta_{BC} = 101,3^\circ$$

y  $\angle B = 158,2^\circ - 101,3^\circ = 56,9^\circ$  ■

En el epígrafe 1 de este capítulo demostramos una expresión para calcular la distancia entre dos puntos cualesquiera en el plano. En el presente epígrafe estudiaras una relación que también permite calcular distancias, en este

caso entre un punto y una recta.

Teorema 2

La distancia de un punto  $P(x_1; y_1)$  a la recta  $r$  de ecuación  $Ax + By + C = 0$  se denota  $d(P_1; r)$  y es:

$$d(P_1; r) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Demostración

Sea la recta  $r$  de ecuación

$Ax + By + C = 0$  y un punto

$P_1(x_1; y_1)$  que no pertenece

a la recta  $r$  (fig. 2.18),

luego  $d(P_1, r) = |P_1P|$

donde  $P$  es el pie de la

perpendicular trazada des-

de  $P_1$  a  $r$ .

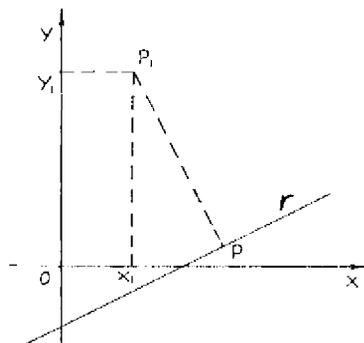


Fig. 2.18

Determinemos la ecuación de la perpendicular  $r_1$  a  $r$  que pasa por  $P_1$ .

Como  $r_1 \perp r$ , tenemos que  $m_r = -\frac{A}{B}$  y  $m_{r_1} = \frac{B}{A}$ ;

la ecuación de  $r_1$  sería:

$$\frac{B}{A} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$y - y_1 = \frac{B}{A} (x - x_1)$$

$$y = \frac{B}{A} (x - x_1) + y_1 \quad (1)$$

Para hallar las coordenadas de  $P$  sustituimos (1) en la ecuación de  $r$ :

$$Ax + B \left[ \frac{B}{A} (x - x_1) + y_1 \right] + C = 0$$

$$Ax + \frac{B^2}{A} (x - x_1) + By_1 + C = 0$$

$$Ax + \frac{B^2}{A} x - \frac{B^2}{A} x_1 + By_1 + C = 0$$

$$\left( \frac{A^2 + B^2}{A} \right) x - \frac{B^2 x_1 - AB y_1 - AC}{A} = 0$$

$$x = \frac{B^2 x_1 - ABy_1 - AC}{A^2 + B^2} \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1):

$$y = \frac{B}{A} \left[ \frac{B^2 x_1 - ABy_1 - AC}{A^2 + B^2} - x_1 \right] + y_1$$

$$y = \frac{B}{A} \left[ \frac{B^2 x_1 - ABy_1 - AC - A^2 x_1 - B^2 x_1}{A^2 + B^2} \right] + y_1$$

$$y = \frac{B}{A} \left[ \frac{-A(Ax_1 + By_1 + C)}{A^2 + B^2} \right] + y_1$$

$$y = -B \left[ \frac{Ax_1 + By_1 + C}{A^2 + B^2} \right] + y_1$$

$$\text{luego } P \left[ \frac{B^2 x_1 - ABy_1 - AC}{A^2 + B^2} ; -B \left[ \frac{Ax_1 + By_1 + C}{A^2 + B^2} \right] + y_1 \right]$$

La distancia del punto  $P_1$  al punto  $P$  es la  $d(P_1, P)$ , entonces:

$$\begin{aligned} d(P_1, P) &= d(P_1, P) = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \\ &= \sqrt{\left[ \frac{-A(Ax_1 + By_1 + C)}{A^2 + B^2} \right]^2 + \left[ -B \left[ \frac{Ax_1 + By_1 + C}{A^2 + B^2} \right] \right]^2} \\ &= \sqrt{\frac{A^2 (Ax_1 + By_1 + C)^2}{(A^2 + B^2)^2} + \frac{B^2 (Ax_1 + By_1 + C)^2}{(A^2 + B^2)^2}} \\ &= \sqrt{(A^2 + B^2) \frac{(Ax_1 + By_1 + C)^2}{(A^2 + B^2)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(Ax_1 + By_1 + C)^2}{A^2 + B^2}} \\ &= \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### Ejemplo 6

En el  $\triangle MNP$  calcula la altura relativa al lado  $\overline{MN}$  si sus vértices son:  $M(4; -2)$ ,  $N(-8; 7)$  y  $P(2; 7)$ .

Resolución

Hallar la altura pedida no es más que calcular la distancia del vértice  $P$  a la recta que contiene al lado  $\overline{MN}$ .

Pendiente de la recta  $MN$ :

$$m = \frac{7 - (-2)}{-8 - 4} = \frac{9}{-12} = -\frac{3}{4}$$

Ecuación de la recta  $MN$ :

$$-\frac{3}{4} = \frac{y + 2}{x - 4}$$
$$-3x + 12 = 4y + 8$$

$$3x + 4y - 4 = 0$$

Cálculo de la altura pedida:

$$h = d(P, MN) = \frac{|3(2) + 4(7) - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|6 + 28 - 4|}{\sqrt{25}} = \frac{30}{5} = 6$$

Respuesta: La altura relativa al lado  $\overline{MN}$  es de 6 u. ■

Ejercicios (epígrafe 2)

- Halla la pendiente y el punto de intersección con el eje "y" de la recta cuya ecuación es:
  - $y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$
  - $3x - 2y - 5 = 0$
  - $5x + 2y + 4 = 0$
  - $2x + 5y = 0$
  - $x + \sqrt{2}y + 2 = 0$
  - $6x - \sqrt{3}y - 9 = 0$
- Determina una ecuación de la recta que contiene al punto  $P_0$  y tiene pendiente  $m$  si:
  - $P_0(3; 2)$ ,  $m = 4$
  - $P_0(-5; 2)$ ,  $m = -3$
  - $P_0(-6; -4)$ ,  $m = \frac{1}{3}$
  - $P_0\left(\frac{1}{2}; -2\right)$ ,  $m = -1$
  - $P_0(-3; 2)$ ,  $m = 0$
  - $P_0\left(\frac{1}{4}; 0\right)$ ,  $m = -\frac{3}{4}$
  - $P_0(0; -4)$ ,  $m = -\frac{1}{4}$
  - $P_0\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$ ,  $m = 0,5$
  - $P(\sqrt{8}; 2)$ ,  $m = \sqrt{8}$
  - $P(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ ,  $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- Determina la ecuación de la recta que contiene los pares de puntos siguientes:
  - $(2; 3)$  y  $(3; 5)$
  - $(-1; -5)$  y  $(-3; 5)$

- c)  $(-1 ; 0)$  y  $(3 ; -16)$       d)  $(2 ; \frac{1}{2})$  y  $(3 ; -4)$   
 e)  $(2 ; 0)$  y  $(0 ; -3)$       f)  $(\frac{3}{4} ; -1)$  y  $(2 ; -\frac{1}{2})$   
 g)  $(3 ; -5)$  y  $(3 ; 6)$       h)  $(0 ; -5)$  y  $(3 ; -\frac{1}{2})$   
 i)  $(\frac{1}{2} ; \frac{1}{3})$  y  $(\frac{1}{4} ; \frac{1}{5})$       j)  $(0 ; 2\sqrt{2})$  y  $(\sqrt{3} ; -\sqrt{2})$

4. Halla la ecuación de la recta de **pendiente 3** y que **intercepta** al eje  $x$  en el **punta de abscisa -2**.
5. Halla la ecuación de la recta que **pasa por el punto**  $A(-6 ; -31)$  y **tiene un ángulo de inclinación  $\theta$**  de:  
 a)  $30^\circ$     b)  $45^\circ$     c)  $60^\circ$     d)  $90^\circ$     e)  $180^\circ$
6. **Determina las ecuaciones de los ejes coordenados.**
7. **Determina una ecuación de la recta de pendiente  $m = -3$**  que **tiene el mismo punto de intersección con el eje  $y$**  que la recta  $2x - 3y - 6 = 0$ .
8. **Determina los puntos de intersección de los siguientes pares de rectas;**  
 a)  $5x - 3y - 1 = 0$  ;  $4x - 5y + 32 = 0$   
 b)  $3x - 2y + 6 = 0$  ;  $y = \frac{3}{2}x - 2$   
 c)  $2x + 3y = 1$  ;  $8x + 12y - 4 = 0$   
 d)  $x + 3y = 0$  ;  $15x - 5y = 0$   
 e)  $2x - 3y + 7 = 0$  ;  $4x - 3y = 1$   
 f)  $x - 4y + 13 = 0$  ;  $3x = 2y - 9$
9. Dada la recta  $5x + 3y - 3 = 0$  **determina la pendiente de la recta:**  
 a) **paralela a la recta dada,**  
 b) **perpendicular a la recta dada.**
10. **Sea la recta  $2x - 3y + 5 = 0$ , halla la ecuación de la recta que pasa por el punto  $M(4; -5)$  y es:**  
 a) **paralela a la recta dada,**  
 b) **perpendicular a la recta dada.**
11. ¿ **Para qué valor de  $a$  las rectas**  
 $y = ax + 3$     y     $y = -3x + 2$   
**son paralelas?**
12. ¿ **Para qué valor de  $a$  las rectas**  
 $y = ax - 1$     y     $y = 5x + 3$

son perpendiculares?

13. Una recta  $r$  pasa por los puntos  $(3;2)$  y  $(-4;-6)$ , y otra,  $n$ , pasa por el punto  $(7;1)$  y el punto  $A$  cuya ordenada es  $-6$ . Halla la abscisa del punto  $A$ , sabiendo que  $n \perp r$ .
14. ¿Cuál es la ecuación de la recta perpendicular a la recta  $2x - 3y + 7 = 0$  y que pasa por el punto medio del segmento de esta comprendido entre los ejes coordenados?
15. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas:  
 $x - y + 4 = 0$  y  $4x + y - 19 = 0$   
y es paralela a la recta  $2x - 3y + 6 = 0$ .
16. Muestra que la relación de perpendicularidad entre las rectas  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  y  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  se puede escribir como  $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ .
17. Determina el área del triángulo limitado por la recta  $5x + 8y - 40 = 0$  y los ejes coordenados.
18. Los vértices de un cuadrilátero  $ABCD$  son los puntos  $A(0;-2)$ ,  $B(9;-3)$ ,  $C(7;4)$  y  $D(1;5)$ . Halla las ecuaciones de sus diagonales.
19. Los vértices de un triángulo son los puntos  $L(-2;1)$ ,  $M(4;7)$  y  $N(6;-3)$ .
- Halla la ecuación de la recta que pasa por el vértice  $L$  con pendiente  $\frac{1}{2}$ .
  - Halla las coordenadas del baricentro.
  - Halla el ángulo entre las medianas relativas a los lados  $\overline{LM}$  y  $\overline{MN}$ .
20. Dado el triángulo cuyos vértices son  $D(-5;-5)$ ,  $E(1;7)$  y  $F(5;1)$ :
- halla las ecuaciones de las rectas que pasan por sus vértices y son paralelas al lado opuesto,
  - halla las coordenadas del ortocentro,
  - halla las coordenadas del circuncentro.
21. Las ecuaciones de los lados de un triángulo son:  
 $3x - y - 7 = 0$ ,  $x + y - 5 = 0$  y  $2x - y - 7 = 0$ .

Halla las coordenadas de sus vértices.

22. Los vértices de un triángulo son los puntos  $A(-5;2)$ ,  $B(5;6)$  y  $C(1;-2)$ . Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto medio de  $\overline{BC}$  y es perpendicular a la mediana relativa a este lado y el ángulo que forma con el lado  $\overline{AB}$ .
23. Una recta de pendiente  $-2$  pasa por el punto  $(2;7)$  y por los puntos  $A$  y  $B$ . Si la ordenada de  $A$  es  $3$  y la abscisa de  $B$  es  $6$ , ¿cuál es la abscisa de  $A$  y cuál la ordenada de  $B$ ?
24. Dos rectas se cortan formando un ángulo de  $45^\circ$ . Una de ellas pasa por los puntos  $(-2;1)$  y  $(9;7)$  y la otra pasa por el punto  $(3;9)$  y por el punto  $A$  cuya abscisa es  $-2$ . Halla la ordenada de  $A$ .

Halla la distancia del punto dado a la recta indicada:

- a)  $A\left(\frac{3}{2}; 9\right)$ ,  $4x + 3y - 8 = 0$
- b)  $B(3;1)$ ,  $6x - 8y - 5 = 0$
- c)  $C(0;1)$ ,  $x - 2y + 3 = 0$
- d)  $D(2;1)$ ,  $y = 3x + 7$
26. Halla la altura relativa al lado  $\overline{AB}$  del triángulo cuyos vértices son:  $A(4;-2)$ ,  $B(1;4)$  y  $C(-2;0)$ .
27. Halla las distancias entre las rectas  $4x - 3y + 25 = 0$  y  $6x - 6y + 25 = 0$ .
28. La base de un triángulo está contenida en la recta que pasa por los puntos  $(-3;1)$  y  $(5;-1)$ . ¿Cuál es la distancia del tercer vértice  $(6;3)$  a la base?
29. Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos  $(3;5)$ ,  $(-2;4)$  y  $(-3;-1)$ .
30. Las ecuaciones de los lados de un triángulo son respectivamente  $3x + 5y - 16 = 0$ ,  $x - y = 0$  y  $x + y + 4 = 0$ . Halla la distancia de cada vértice al lado opuesto, y la amplitud de los ángulos interiores.
- 31.\* El área de un triángulo es  $A = 15 \text{ u}^2$ , dos de sus vértices son los puntos:  $A(-1;-3)$  y  $B(5;0)$  y el tercer vértice,  $C$ , está en la recta  $2x - y + 1 = 0$ . Determina

las coordenadas de C.

32. Los puntos  $A(1;-1)$ ,  $B(5;1)$  y  $C(1;5)$  son vértices de un triángulo.
- Clasifica dicho triángulo según la longitud de sus lados.
  - Calcula su área, perímetro y ángulos interiores.
  - Calcula las coordenadas del circuncentro, del ortocentro y del baricentro.
  - Prueba que el circuncentro, el ortocentro y el baricentro están sobre una misma recta (recta de Euler).
- 33.\* Un punto se mueve de tal manera que su distancia al eje y disminuida en 3 es siempre igual al doble de su distancia al eje x. Halla la ecuación de su lugar geométrico y haz su interpretación gráfica.
34. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al eje x es siempre igual a su distancia al punto  $A(0;4)$ . Halla la ecuación de su lugar geométrico.
35. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto  $B(2;4)$  es siempre igual a su distancia al eje x disminuida en 3. Halla la ecuación de su lugar geométrico.

## ECUACIÓN PARAMÉTRICA DE LA RECTA

### 3. Vectores y coordenadas

Desde secundaria básica conoces el concepto de vector y aprendiste a calcular con vectores (puntos del 38 al 42 del Memento). Cuando disponemos de un sistema de coordenadas podemos utilizar procedimientos analíticos para calcular con vectores.

En efecto, como ya conoces, si se tiene un vector  $\vec{AB}$ , se puede descomponer en dos vectores paralelos a los ejes,  $\vec{a}_x$  y  $\vec{a}_y$  (fig. 2.19), que lo determinan completamente y que llamaremos componentes del vector. Como estos vectores tienen dirección conocida, para determinarlos basta con-

CONOCER su sentido que puede ser positivo (si coincide con el del eje) u negativo (si es opuesto al del eje).

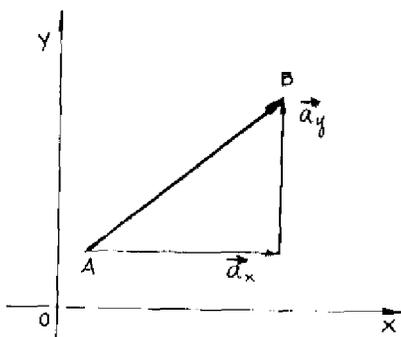


Fig. 2.19

Así pues, un vector  $\vec{a}$  en un plano coordenado está determinado completamente por dos números  $a_x$  y  $a_y$  que son las módulos de sus componentes en la dirección de los ejes prvistas de signo positiva o negativo según tengan estas componentes el sentido del semieje positivo o negativo. Escribimos  $\vec{a}(a_x; a_y)$  y le llamamos a  $a_x$  y  $a_y$  coordenadas del vector.

Lo antes planteado significa, en particular, que dos vectores son iguales si y solo si tienen iguales coordenadas.

El vector opuesto al vector  $\vec{a}$  (punto 38 del Memento) se denota  $-\vec{a}$  y tiene por coordenadas  $(-a_x; -a_y)$ . El vector de coordenadas  $\vec{0}(0;0)$  es el vector nula.

#### Ejemplo 1

- a) Determina las coordenadas de un vector  $\vec{a}$ , si  $|\vec{a}| = 6,3$  y forma un ángulo de  $110^\circ$  con el semieje "x" positivo.  
 b) Si  $\vec{a}(a_x; a_y)$  con  $a_x = 2$ ,  $a_y = -3$ , determina  $|\vec{a}|$  y  $\theta$ .

Resolución

a)  $a_x = |\vec{a}| \cos \theta = 6,3 \cos 110^\circ = 6,3(-0,3420) = -2,15$   
 $a_y = |\vec{a}| \sin \theta = 6,3 \sin 110^\circ = 6,3(0,9397) = 5,92$   
 luego  $\vec{a}(-2,15; 5,92)$

- b) Como  $\vec{a}_x + \vec{a}_y = \vec{a}$  y  $\vec{a}_x, \vec{a}_y$  son ortogonales, el triángulo determinada por ellos es rectángulo (fig. 2.20),  
 luego:

CONOCER su sentido que puede ser positivo (si coincide con el del eje) u negativo (si es opuesto al del eje).

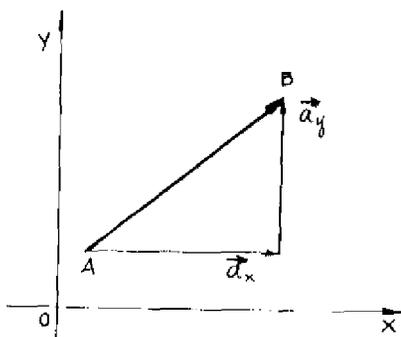


Fig. 2.19

Así pues, un vector  $\vec{a}$  en un plano coordenada está determinado completamente por dos números  $a_x$  y  $a_y$  que son los módulos de sus componentes en la dirección de los ejes pr vistos de signo positiva o negativa según tengan estas componentes el sentido del semieje positivo o negativa. Escribimos  $\vec{a}(a_x; a_y)$  y le llamamos a  $a_x$  y  $a_y$  coordenadas del vector.

Lo antes planteado significa, en particular, que dos vectores son iguales si y solo si tienen iguales; coordenadas.

El vector opuesto al vector  $\vec{a}$  (punto 38 del Memento) se denota  $-\vec{a}$  y tiene por coordenadas  $(-a_x; -a_y)$ . El vector de coordenadas  $\vec{0}(0;0)$  es el vector nula.

#### Ejemplo 1

- a) Determina las coordenadas de un vector  $\vec{a}$ , si  $|\vec{a}| = 6,3$  y forma un ángulo de  $110^\circ$  con el semieje "x" positivo.  
 b) Si  $\vec{a}(a_x; a_y)$  con  $a_x = 2$ ,  $a_y = -3$ , determina  $|\vec{a}|$  y  $\theta$ .

Resolución

a)  $a_x = |\vec{a}| \cos \theta = 6,3 \cos 110^\circ = 6,3(-0,3420) = -2,15$   
 $a_y = |\vec{a}| \sin \theta = 6,3 \sin 110^\circ = 6,3(0,9397) = 5,92$   
 luego  $\vec{a}(-2,15 ; 5,92)$

- b) Como  $\vec{a}_x + \vec{a}_y = \vec{a}$  y  $\vec{a}_x$ ,  $\vec{a}_y$  son ortogonales, el triángulo determinado por ellos es rectángulo (fig. 2.20),  
 luego:

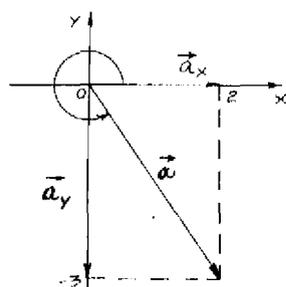


Fig. 2.20

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{a}_x|^2 + |\vec{a}_y|^2 = a_x^2 + a_y^2$$

$$= 4 + 9 = 13$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{13} = 3,61, \text{ además,}$$

$$\cos \theta = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{2}{3,61} = 0,5540 \text{ y}$$

$\theta$  es un ángulo del IV cuadrante, entonces:

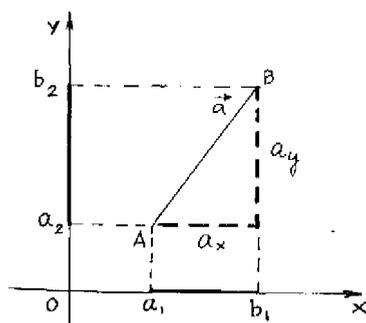
$$\theta = 360^\circ - 56,4^\circ = 303,6^\circ$$

El vector  $\vec{a}$  tiene módulo 3,61 y forma un ángulo de  $303,6^\circ$  con el semieje "x" positivo. ■

Observa que en general  $|\vec{a}|$  se puede calcular conocidas sus coordenadas  $a_x$  y  $a_y$  pues (fig. 2.20):  $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

Cuando se conocen el origen y el extremo de un vector, sus coordenadas pueden expresarse en función de las coordenadas de sus extremos. En efecto (fig. 2.21):

Si  $A(a_1; a_2)$  y  $B(b_1; b_2)$ , entonces  $\vec{AB} (b_1 - a_1; b_2 - a_2)$ .



$$a_y = b_2 - a_2$$

$$a_x = b_1 - a_1$$

Fig. 2.21

### Ejemplo 2

Determina:

- las coordenadas y el módulo del vector  $\vec{AB}$  si  $A(1; 5)$ ,  $B(-2; 1)$ ;
- las coordenadas del vector  $\vec{CD}$  si  $C(0; 0)$ ,  $D(4; 3)$ ;
- las coordenadas del origen del vector  $\vec{EF}$  si  $F(6; -3)$  sabiendo

que  $F(2;1)$ ;

d) las coordenadas del extremo del vector  $\vec{GH}(4;-7)$  sabiendo que  $G(4;9)$ .

Resolución

a) Como conoces las coordenadas de los extremos del vector, entonces:

$$a_x = b_1 - a_1 = -2 - 1 = -3$$

$$a_y = b_2 - a_2 = 1 - 5 = -4, \text{ luego } \vec{AB}(-3;-4)$$

$$\text{por tanto } |\vec{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

b)

$$a_x = d_1 - c_1 = 4 - 0 = 4$$

$$a_y = d_2 - c_2 = 3 - 0 = 3, \text{ luego } \vec{CD}(4;3)$$

c) Como se muestra en la figura 2.21 las coordenadas de un vector se calculan restando a las coordenadas del extremo las del origen.

$$a_x = f_1 - e_1$$

$$6 = 2 - e_1$$

$$e_1 = -4$$

$$a_y = f_2 - e_2$$

$$-3 = 1 - e_2$$

$$e_2 = 4$$

Luego el origen E tiene coordenadas  $(-4; 4)$ .

d)

$$a_x = h_1 - g_1$$

$$4 = h - 4$$

$$h_1 = 8$$

$$a_y = h_2 - g_2$$

$$-7 = h_2 - 9$$

$$h_2 = 2$$

Luego el extremo H tiene coordenadas  $(8; 2)$ .

Al representar los vectores en un sistema de coordenadas, se puede escoger como origen, el origen de coordenadas; un vector como este recibe el nombre de vector de posición del punto extremo del vector.

### Ejemplo 3

Dados los puntos  $A(3;4)$ ,  $B(-5;2)$ ,  $C(-3;-3)$  y  $D(6;-2)$ :

a) Representalos en un sistema de coordenadas y traza sus vectores de posición.

b) ¿Cuáles son las coordenadas de dichos vectores?

Resolución

a) La representación de los puntos y los vectores aparece en la figura 2.22.

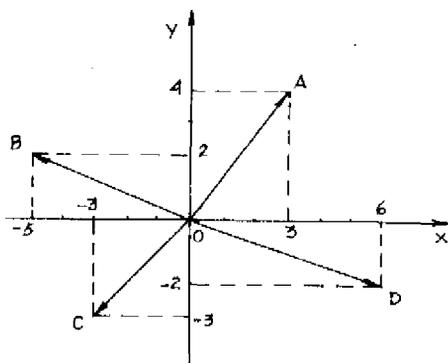


Fig. 2.22

b)  $\vec{OA}(3;4)$  ,  $\vec{OB}(-5;2)$  ,  $\vec{OC}(-3;-3)$  ,  $\vec{OD}(6;-2)$  ■

Observa que las coordenadas de estos vectores de posición son a su vez las coordenadas de los puntos A, B, C y D.

En general, las coordenadas de un vector de posición  $\vec{OA}$  coinciden con las coordenadas de A.

En resumen:

Dado un sistema de coordenadas, cada vector  $\vec{a}$  está determinada por sus coordenadas  $\vec{a}(a_x; a_y)$  con:

$$a_x = |\vec{a}| \cos \theta ; \quad a_y = |\vec{a}| \sin \theta$$

donde  $\theta$  es el ángulo que forma el vector con el semieje "x" positiva.

Recíprocamente:

si se conocen  $a_x$  y  $a_y$ ,  $\vec{a}$  se determina:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} , \quad \cos \theta = \frac{a_x}{|\vec{a}|} , \quad \sin \theta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$$

Si  $A(x_A; y_A)$  ,  $B(x_B; y_B)$ , entonces  $\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$

$\vec{OA}(x_A; y_A)$  y  $\vec{OB}(x_B; y_B)$ .

Quando los vectores están dados en un sistema de coordenadas, las operaciones se pueden efectuar analíticamente.

Teorema 1

Si  $\vec{a}(a_x; a_y)$ ,  $\vec{b}(b_x; b_y)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces

a)  $\vec{a} + \vec{b}$  tiene coordenadas  $(a_x + b_x; a_y + b_y)$ .

b)  $\vec{a} - \vec{b}$  tiene coordenadas  $(a_x - b_x; a_y - b_y)$ .

c)  $\lambda \vec{a}$  tiene coordenadas  $(\lambda a_x; \lambda a_y)$ .

Demostración

Sean  $\vec{a}(a_x; a_y)$  y  $\vec{b}(b_x; b_y)$

a) Obtengamos la suma

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$$

(ver punto 39 del Memento)

en un sistema de coordenadas (fig. 2.23), se tiene que:

$$s_x = \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = a_x + b_x$$

$$s_y = \overline{DF} = \overline{DE} + \overline{EF} = a_y + b_y,$$

luego el vector  $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$  tiene coordenadas  $(a_x + b_x; a_y + b_y)$

b) Como conoces la diferencia  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$  (punto 40 del Memento), luego si  $\vec{b}(b_x; b_y)$  su opuesto tiene coordenadas  $(-b_x; -b_y)$  y se tiene que:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) : (a_x; a_y) + (-b_x; -b_y) = (a_x - b_x; a_y - b_y)$$

c)

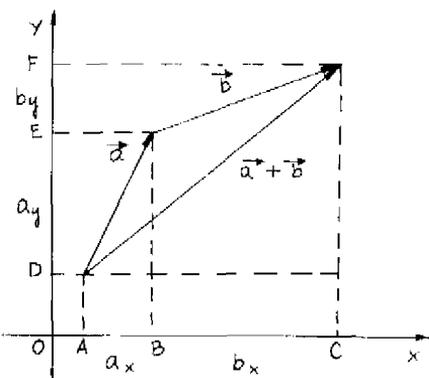


Fig. 2.23

Sean  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $\vec{c} = \lambda \vec{a}$

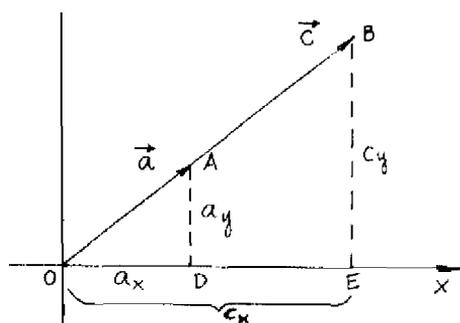


Fig. 2.24

En la figura 2.24 tenemos que  $\triangle OAD \sim \triangle OBE$  con razón de semejanza  $\lambda$ , luego

$$\overline{OE} = \lambda \overline{OD} \text{ y } \overline{EB} = \lambda \overline{DA}$$

por tanto-

$$c_x = \lambda a_x \text{ y } c_y = \lambda a_y$$

y las coordenadas de  $\lambda \vec{a}$  son  $(\lambda a_x; \lambda a_y)$ . ■

**Ejemplo 4**

Calcula  $\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{a} - \vec{b}$ ,  $\lambda\vec{a}$  si sabemos que:

a)  $\vec{a}(8; 4)$ ,  $\vec{b}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$ ,  $\lambda = \frac{1}{4}$ .

b)  $\vec{a} = \overline{AB}$ ,  $\vec{b} = \overline{CD}$  con  $A(4; 5)$ ,  $B(7; -2)$ ,  $C(2; 8)$ ,  $D(7; -7)$ ,  $\lambda = 2,3$ .

c)  $|\vec{a}| = 3,2$ ,  $|\vec{b}| = 2,1$ , el vector  $\vec{a}$  forma un ángulo de  $30^\circ$  con el eje  $x$  y el vector  $\vec{b}$  uno de  $120^\circ$ ,  $\lambda = -4$ .

Resolución

a)  $\vec{a} + \vec{b} : (8; 4) + \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right) = \left(8 + \frac{1}{2}; 4 + \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{17}{2}; \frac{13}{3}\right)$

$\vec{a} - \vec{b} : (8; 4) - \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right) = \left(8 - \frac{1}{2}; 4 - \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{15}{2}; \frac{11}{3}\right)$

$\lambda\vec{a} : \frac{1}{4}(8; 4) = \left(\frac{8}{4}; \frac{4}{4}\right) = (2; 1)$

b) Debemos calcular previamente las coordenadas de los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  pues lo que conocemos son las coordenadas de su origen y de su extremo.

Coordenadas del vector  $\vec{a} = \overline{AB}$ :

$a_x = x_2 - x_1 = 7 - 4 = 3$  ;  $a_y = y_2 - y_1 = -2 - 5 = -7$ ,

luego  $\vec{a}(3; -7)$

Coordenadas del vector  $\vec{b} = \overline{CD}$ :

$b_x = x_2 - x_1 = 7 - 2 = 5$  ;  $b_y = y_2 - y_1 = -7 - 8 = -15$ ,

luego  $\vec{b}(5; -15)$

por tanto:  $\vec{a} + \vec{b} : (3 + 5; -7 - 15) = (8; -22)$

$\vec{a} - \vec{b} : (3 - 5; -7 + 15) = (-2; 8)$

$\lambda\vec{a} : 2,3(3; -7) = (6,9; -16,1)$

c) Al igual que en el inciso anterior, debemos calcular previamente las coordenadas de los vectores, pero, en este caso, conocidos el módulo y el ángulo que forma con el eje "x".

Coordenadas del vector  $\vec{a}$ :

$a_x = |\vec{a}| \cos \theta = 3,2 \cos 30^\circ = 3,2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,6 \sqrt{3} = 2,77$

$a_y = |\vec{a}| \sin \theta = 3,2 \sin 30^\circ = 3,2 \cdot 0,5 = 1,6$ ;

luego  $\vec{a}(2,77; 1,6)$ .

Coordenadas del vector  $\vec{b}$ :

$b_x = |\vec{b}| \cos \theta' = 2,1 \cos 120^\circ = -2,1 \cdot 0,5 = -1,05$

$$b_y = |\vec{b}| \operatorname{sen} \theta' = 2,1 \operatorname{sen} 120^\circ = 2,1 \cdot 0,866 = 1,8186 = 1,82$$

luego  $\vec{b}(-1,05; 1,82)$ . Por tanto:

$$\vec{a} + \vec{b} : (2,77 - 1,05 ; 1,6 + 1,82) = (1,72; 3,42)$$

$$\vec{a} - \vec{b} : (2,77 + 1,05 ; 1,6 - 1,82) = (3,82; -0,22)$$

$$\lambda \vec{a} : -4 (2,77; 1,6) = (-11,1; -6,4) \quad \blacksquare$$

De Física conoces que para calcular el trabajo realizado por una fuerza para mover un cuerpo utilizas la expresión:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| |\vec{s}| \cos \theta$$

donde  $|F|$  es el módulo de la fuerza aplicada al cuerpo,  $|\vec{s}|$  es el módulo del desplazamiento y  $\theta$  es el ángulo formado por la fuerza y la dirección del desplazamiento ( $\vec{s}$ ).

Teniendo en cuenta que la fuerza y el desplazamiento son vectores, vemos que para calcular el trabajo se realiza una operación entre vectores cuya resultado es un número real (escalar) y que se denomina *producto escalar* entre los vectores dados.

En general, si  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  son vectores se tiene que:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}; \vec{b})$$

El producto escalar también se puede calcular mediante coordenadas.

Teorema 2

Si  $\vec{a}(a_x; a_y)$  y  $\vec{b}(b_x; b_y)$ , entonces  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$ .

Demostración

Tenemos que  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ ,

pero,  $\theta = \alpha - \beta$  (fig. 2.25),

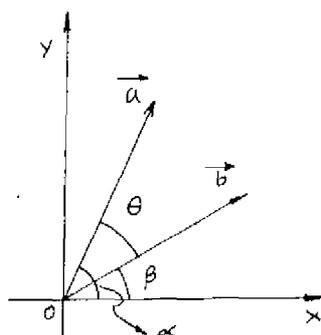


Fig. 2.25

**Ejemplo 5**

Calcula el producto escalar de los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  y el ángulo entre ellos si :

a)  $\vec{a}(4;5)$  ;  $\vec{b}(3;2;6)$  .  
 b)  $\vec{a} = \vec{AB}$  ,  $\vec{b} = \vec{CD}$  y  $A(4;6)$  ,  $B(-2;5;2)$  ,  $C(9;10;3)$  ,  $D(-7;5)$  .

Resolución

a) Como conocemos las coordenadas de los vectores tenemos:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x x + a_y y = 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 12 + 10 = 22$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 4 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{22}{\sqrt{41} \cdot 7} = \frac{22}{\sqrt{287}} \approx 0,9835$$

$$\theta = 10,4^\circ$$

b) Debemos calcular previamente las coordenadas de los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , pues lo que conocemos son las coordenadas de su origen y extremo.

Coordenadas del vector  $\vec{a} = \vec{AB}$ :

$$a_x = x_B - x_A = -2 - 4 = -6$$

$$a_y = y_B - y_A = 5,2 - 6 = -0,8$$

Luego  $\vec{a}(-6; -0,8)$ .

Coordenadas del vector  $\vec{b} = \vec{CD}$ :

$$b_x = x_D - x_C = -7 - 9 = -16$$

$$b_y = y_D - y_C = 5 - 10,3 = -5,3$$

Luego  $\vec{b}(-10,7; -5,3)$ .

Por tanto  $\vec{a} \cdot \vec{b} = (-6)(-10,7) + (-0,8)(-5,3) = 64,2 + 4,24 = 68,44 = 68,4$

Análogamente:

$$\cos \theta = \frac{68,4}{\sqrt{36 + 0,64} \cdot \sqrt{114,5 + 28,1}} = \frac{68,4}{6,05 \cdot 11,9} = 0,95$$

$$\theta = 18,2^\circ \quad \blacksquare$$

También mediante coordenadas se pueden determinar el paralelismo y la perpendicularidad entre las direcciones de los vectores.

•  $\vec{a} \parallel \vec{b}$  si y solo si existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ .  
 •  $\vec{a} \perp \vec{b}$  si y solo si  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

#### Ejemplo

Sean los puntos  $A(-1; -2)$ ,  $B(6; -6)$ ,  $C(5; 2)$ ,  $M(-2; 6)$  los vértices de un cuadrilátero tomadas en ese orden.

- a) Prueba que sus diagonales son perpendiculares y desiguales.  
 b) Prueba que sus lados son iguales y paralelos.  
 c) ¿Qué tipo de cuadrilátero es?

Resolución

a) Para probar que son perpendiculares basta con calcular el producto escalar de los vectores que ellas determinan.

Sean  $\vec{a} = \vec{AC} = (6; 4)$  y  $\vec{b} = \vec{BD} = (-8; 12)$ ,

luego  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6(-8) + 4 \cdot 12 = -48 + 48 = 0$

por tanto  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

La distancia entre dos puntos es también el módulo del vector que estos determinan, luego tenemos que:

$$d(A,C) = |\vec{a}| = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$$

$$d(B,D) = |\vec{b}| = \sqrt{64 + 144} = \sqrt{208}$$

luego  $d(A,C) \neq d(B,D)$ ,

por lo que las diagonales son perpendiculares y desiguales.

b) Para probar que son paralelos calculemos previamente

las coordenadas de los vectores que determinan sus lados:  $\vec{c} = \vec{AB} = (7; -4)$ ,  $\vec{d} = \vec{BC} = (-1; 8)$  y  $\vec{e} = \vec{CD} = (-7; 4)$ ,

$\vec{f} = \vec{DA} = (1; 6)$ ; de donde tenemos que:

•  $\vec{c} = \lambda \vec{e}$  con  $\lambda = -1$ , luego  $\vec{c} \parallel \vec{e}$  y  $|\vec{c}| = |\vec{e}|$

$\vec{d} = \lambda \vec{f}$  con  $\lambda = 1$ , luego  $\vec{d} \parallel \vec{f}$  y  $|\vec{d}| = |\vec{f}|$ ,

para probar que los cuatro lados son iguales basta

calcular la longitud de dos consecutivos:

$$|\vec{c}| = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65} \quad ; \quad |\vec{d}| = \sqrt{1 + 64} = \sqrt{65} ,$$

luego  $|\vec{c}| = |\vec{d}| = |\vec{e}| = |\vec{f}|$ ,

par lo que sus lados son paralelos dos a dos e iguales.

- c) El cuadrilátero es un rombo por tener sus cuatro lados iguales y paralelos dos a dos y, además, sus diagonales son perpendiculares. m

Ejercicios (epígrafe 3)

1. Determina las coordenadas de los vectores que tienen como origen y extremo respectivamente los puntos siguientes. Representalos en un sistema de coordenadas.

- a) A(3;2) , B(5;6)                      b) M(1;0) , N(7;9)  
c) C(-2;3) , D(-4;7)                  d) E(-3;-1) , D(-4;7)  
e) R(3;-7) , S(-2;-3)                f) G(-2;-9) , H(-7;5)

2. Halla el extremo del vector que tiene por coordenadas (4;-3) si su origen se encuentra en el punto:

- a) A(3;2)                      b) B(-1;-3)                      c) C(-7;7)  
d) D(8;-9)                    e) E(-2;-5)                    f) F(5;5)

3. Encuentra el origen del vector de coordenadas (-2;5) si su extrema se encuentra en el punto:

- a) A(6;2)                      b) B(-6;5)                      c) C(-1;-3)  
d) D(-3;-2)                  e) E(4;-6)                      f) F $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$

4. Dados los siguientes vectores, calcula su módulo y represéntalos en un sistema de coordenadas.

- a)  $\vec{a}(3; \frac{1}{2})$                       b)  $\vec{b}(0; \sqrt{5})$                       c)  $\vec{c}(-9;-4)$   
d)  $\vec{AB}$ , si A(-2;1) y B(5;3)

- e)  $\vec{CD}$ , si C $\left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{5}\right)$  y D(1;4)

5. Determina el ángulo que forma el vector  $\vec{a}$  con el semieje "x" positivo.

- a)  $\vec{a}(5;0)$                       b)  $\vec{a}(3;5)$                       c)  $\vec{a}(0;8)$                       d)  $\vec{a}(-2;3)$   
e)  $\vec{a}(-3;0)$                     f)  $\vec{a}(-7;-4)$                     g)  $\vec{a}(0;-5)$                     h)  $\vec{a}(6;-4)$

6. Determina el extremo que falta si se sabe que:

- a)  $|\vec{EF}| = 5,2$  ;  $\theta = 46^\circ$  ; E(1;4)  
b)  $|\vec{OG}| = 4$  ;  $\theta = 121^\circ$  ; G(5;6)  
c)  $|\vec{HI}| = 7,1$  ;  $\theta = 150^\circ$  ; H(2;4)



- 15.\* Dado el vector  $\vec{a}(3;-4)$ . Halla las coordenadas de los vectores que son perpendiculares a  $\vec{a}$ , y además, tienen módulo 1.
16. Muestra que los puntos  $(0;-1)$ ,  $(3;2)$ ,  $(0;1)$  y  $(-3;-2)$  son vértices de un paralelogramo.
17. Verifica que los cuatro puntos  $A(3;-1)$ ,  $B(3;2)$ ,  $C(1;2)$  y  $D(-1;-1)$  son vértices de un trapecio.
18. Dadas los vértices de un cuadrilátero  $A(-1;2)$ ,  $B(1;-\frac{1}{2})$ ,  $C(4;2)$  y  $D(1;4)$ , muestra que sus diagonales  $\overline{AC}$  y  $\overline{BD}$  son perpendiculares.
19. Se dan los vectores  $\vec{a}(2;1)$  y  $\vec{b}(1;-3)$ . Halla el vector  $\vec{c}$  que satisface:  $\vec{c} \cdot \vec{a} = -5$  y  $\vec{c} \cdot \vec{b} = -13$ .
20. Comprueba que el cuadrilátero ABCD es un cuadrado si:  $A(2;2)$ ,  $B(5;-1)$ ,  $C(8;2)$  y  $D(5;5)$ .
21. Muestra que el triángulo cuyos vértices son los puntos  $A(2;-3)$ ,  $B(5;-2)$  y  $C(4;1)$  es rectángulo. Halla la longitud de la mediana relativa a la hipotenusa.
22. Halla el módulo de la suma y la diferencia de los vectores  $\vec{a}(3;-5)$  y  $\vec{b}(-1;1)$ .
23.  $A(-3;1)$ ,  $B(0;2)$  y  $C(-1;4)$  son tres vértices sucesivos de un paralelogramo:
- halla las coordenadas del cuarto vértice (D),
  - halla el ángulo formado por sus diagonales  $\overline{BD}$  y  $\overline{AC}$ .
24. Dados los vértices de un cuadrilátero  $A(-1;-2)$ ,  $B(3;1)$ ,  $C(7;-2)$  y  $D(3;-5)$ , comprueba que es un rombo.
- 25.\* Prueba que:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} [|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2]$ .
26. Calcula el trabajo realizada por la fuerza  $\vec{F}(3;-2)$ , si su punto de aplicación se desplaza en un movimiento rectilíneo de la posición  $A(2;-3)$  a la posición  $B(3;-2)$ .
27. Halla la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que se conserva siempre equidistante de los puntos  $M(-1;3)$  y  $N(2;6)$ .
28. Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto  $(3;2)$  es siempre

igual a 5.

29. Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos  $A(4;5)$  y  $B(-3;2)$  es siempre igual a 58.
30. Prueba que los puntos medios de los lados de un paralelogramo determinan un paralelogramo.
31. Sean  $A$  y  $B$  dos puntos del plano y  $M$  el punto medio del segmento  $\overline{AB}$ . Demuestra que para cualquier punto  $O$  del plano se cumple:  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ .
32. Prueba que las medianas de un triángulo cualquiera  $ABC$  se intersecan en un punto  $G$  tal que se cumple:
- $G$  divide a cada mediana en la razón  $2 : 1$ , contando desde el vértice del triángulo.
  - Para cualquier punto  $O$  del plano se tiene:
$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$
  - $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .

#### 4. Ecuación paramétrica de la recta en el plano

La ecuación de la recta que hemos estudiado relaciona las coordenadas cartesianas de un punto variable, por eso se le llama ecuación cartesiana de la recta. A veces es conveniente escribir ecuaciones en las que aparezcan variables que no representen coordenadas.

##### Teorema 1

La ecuación  $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}$  representa una recta que pasa por el punto de vector de posición  $\vec{r}_0$  y paralela al vector  $\vec{a}$ .

##### Demostración

$\vec{r}$  es el vector de posición de un punto  $P$  de la recta si y solo si  $\vec{r} - \vec{r}_0$  es paralelo a  $\vec{a}$ , o sea,

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{a}$$

que equivale a  $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}$ . ■

En la ecuación  $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}$  se tiene que:

$\vec{r}$  : es el vector de posición para un punto cualquiera  $P$

de la recta.

$\vec{r}_0$ : es el vector de posición de un punto  $P_0$  conocido de la recta.

$t$ : es una variable que recorre el dominio de los números reales (parámetro).

$\vec{a}$ : vector director de la recta.

Esta ecuación recibe el nombre de ecuación paramétrica de la recta.

### Ejemplo 1

Dados los puntos  $M(3;4)$  y  $N(-2;5)$ , halla una ecuación paramétrica de la recta que:

- pasa por el punto  $N$  y tiene vector director  $\vec{a}(-1;3)$ ,
- pasa por los puntos  $M$  y  $N$ ,
- es paralela a la recta del inciso a y pasa por el punto  $M$

Resolución

a) Como conocemos un punto de la recta y el vector director sustituyendo en la ecuación  $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}$  tenemos:

$$(x;y) = (-2;5) + t(-1;3)$$

la cual es una ecuación paramétrica de la recta que pasa por  $N$  y tiene vector director  $\vec{a}(-1;3)$ , (fig.2.26 a).

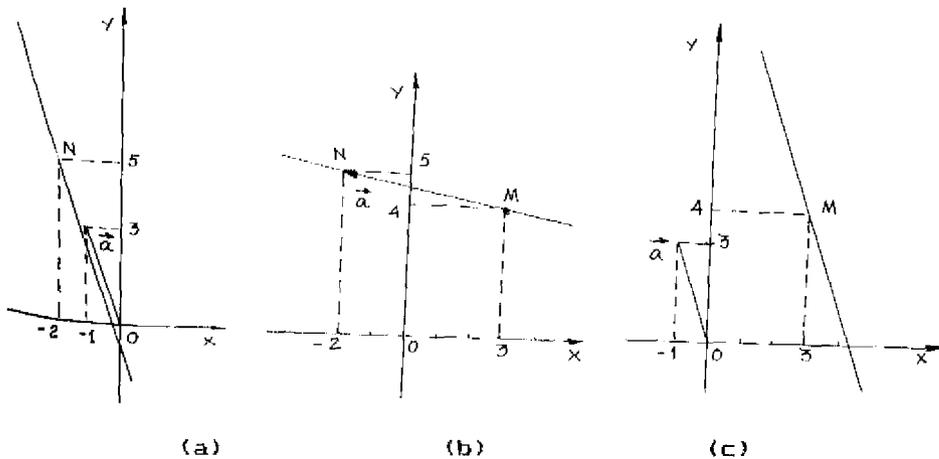


Fig. 2.26

b) En este caso conocemos dos puntos  $M$  y  $N$  pero no el vector director; considerando como vector director  $\vec{a}$  el

vector  $\overrightarrow{MN}$  y como punto conocido uno cualquiera de los puntos M ó N podemos escribir una ecuación paramétrica de la recta que pasa por M y N (fig. 2.26 b).

Sea  $\vec{a} = \overrightarrow{MN}$ :  $(x_N - x_M; y_N - y_M) = (-2 - 3; 5 - 4) = (-5; 1)$   
 considerando el punto N tenemos:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}$$

$$(x; y) = (-2; 5) + t(-5; 1)$$

c) Como las rectas deben ser paralelas, basta tomar  $\vec{a}$  a cualquier vector paralelo a  $\vec{a}$  como vector director (fig. 2.26 c). Entonces una ecuación paramétrica de la recta pedida sería:

$$(x; y) = (3; 4) + t(-1; 3) \quad \blacksquare$$

Es usual escribir las ecuaciones paramétricas en forma de un sistema de manera tal que a cada coordenada corresponde una ecuación. Para el caso de la recta resulta:

$$(x; y) = (x_0; y_0) + t(a_x; a_y)$$

que es equivalente al sistema

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_x \\ y = y_0 + ta_y \end{cases}$$

### Ejemplo 2

Sea la recta r que pasa por el punto M(4;6) con vector director  $\vec{a}(5; -3)$ .

- Calcula las coordenadas de los puntos de r que corresponden a los valores del parámetro  $t = 1$  y  $t = -2$ .
- Investiga si r contiene los puntos A(-1;9) y B(2;3).
- Escribe una ecuación paramétrica de la recta p perpendicular a r en el punto M.

Resolución

Una ecuación de la recta r sería:  $\begin{cases} x = 4 + 5t \\ y = 6 - 3t \end{cases}$  luego:

a) para  $t = 1$

$$\begin{cases} x = 4 + 5(1) = 9 \\ y = 6 - 3(1) = 3 \end{cases} \quad \text{y el punto sería } (9; 3)$$

para  $t = -2$

$$\begin{cases} x = 4 + 5(-2) = -6 \\ y = 6 - 3(-2) = 12 \end{cases} \quad \text{y el punto sería } (-6; 12)$$

b) Si  $r$  contiene al punto  $A(-1;9)$  debe cumplirse que:

$$\begin{cases} -1 = 4 + 5t & (1) \\ 9 = 3t & (2) \end{cases}$$

De (1) obtenemos:  $t = -1$  que, como se comprueba al sustituir, es una solución de (2), es decir,  $t = -1$  es una solución del sistema y la recta  $r$  contiene al punto A.

Veamos si  $r$  contiene a  $B(2;3)$ :

$$\begin{cases} 2 = 4 + 5t & (3) \\ 3 = 6 - 3t & (4) \end{cases}$$

De (3) se obtiene  $t = -\frac{2}{5}$  que no es solución de (4), luego el sistema no tiene solución y la recta no contiene al punto B.

c) Si  $p \perp r$  entonces  $\vec{a}_p \perp \vec{a}$ , puedes comprobar que si  $\vec{a}(5;-3)$ , entonces  $(3;5)$  es perpendicular a él:

$$5(3) + (-3)5 = 0$$

luego un vector puede ser  $\vec{a}_p(3;5)$  y la ecuación:

$$\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 6 + 5t \end{cases}$$

### Ejemplo 3

a) Escribe la ecuación cartesiana de la recta dada por la

ecuación paramétrica  $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$

b) Dada la recta de ecuación  $2x + 3y - 6 = 0$ , determina un punto y un vector director. Escribe una ecuación paramétrica de la misma.

#### Resolución

a) Para obtener una ecuación cartesiana, debemos "eliminar" el parámetro  $t$ ; para hacerlo despejamos:

$$t = \frac{x-2}{5} \quad (1) \qquad t = \frac{y+1}{2} \quad (2)$$

Igualando (1) y (2) obtenemos:  $\frac{x-2}{5} = \frac{y+1}{2}$ ;

en esta ecuación hemos eliminado el parámetro  $t$ ; de

aquí resulta:  $2x - 4 = 5y + 5$

$$2x - 5y - 9 = 0$$

b) Para determinar un punto damos un valor cualquiera a  $x$

( $x = 0$ ) y calculamos  $y : y = 5$ .

Obtenemos el punto:  $(0; 2)$ .

Un vector director puede obtenerse directamente de la ecuación, pues  $m = -\frac{2}{3} = -\frac{a}{a_x}$  se puede escoger  $a = -3$  ;

$a_y = 2$ , o sea, el vector  $\vec{a}(-3; 2)$ . Una ecuación paramétrica es:  $(x; y) = (0; 2) + t(-3; 2)$ . ■

Como se ha visto en el inciso a del ejemplo anterior, conocida una ecuación paramétrica de una recta, es posible determinar una ecuación cartesiana "eliminando" el parámetro en el sistema. El ejemplo muestra que también se pueden aprovechar las relaciones conocidas para pasar de una ecuación a otra.

En resumen:

Si  $Ax + By + C = 0$  es la ecuación cartesiana de una recta, tenemos:

- Se busca un punto  $P_0(x_0; y_0)$  de ella.
- Se obtiene  $m$  despejando  $y$  ó  $m = -\frac{A}{B}$ .
- Un vector director es  $(-B; A)$ .

Una ecuación paramétrica de esa recta es:  
 $(x; y) = (x_0; y_0) + t(-B; A)$

#### Ejemplo 4

Determina los puntos de intersección de las rectas:

a)  $(x; y) = (2; -3) + t(-1; 2)$  ;  $(x; y) = (-1; 5) + t(4; -8)$

b)  $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 5 + 2t \end{cases}$        $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 2 + t \end{cases}$

c)  $(x; y) = (1; -1) + t(1; 2)$  ;  $x - 2y - 6 = 0$

Resolución

a)  $r_1 \begin{cases} x = 2 - t_1 \\ y = -3 + 2t_1 \end{cases}$        $r_2 \begin{cases} x = -1 + 4t_2 \\ y = 5 - 8t_2 \end{cases}$

Al copiar los sistemas hemos diferenciado los parámetros de ambas, pues hay que trabajar con las des y necesitamos diferenciarlas. Para ver si hay puntos comunes igualamos las coordenadas.

$$\begin{aligned} 2 - t_1 &= -1 + 4t_2 \\ -3 + 2t_1 &= 5 - 8t_2 \end{aligned}$$

Este sistema puede escribirse:

$$\begin{aligned} t_1 + 4t_2 &= 3 \\ 2t_1 + 8t_2 &= 8 \end{aligned}$$

Eliminando  $t_1$  obtenemos :  $2 = 0$  ,

luego no hay solución. Las rectas son paralelas y no coinciden.

También se llega a la misma conclusión si notamos que los vectores directores son paralelos.

$$\vec{a}_2 = -4\vec{a}_1 \quad \text{y} \quad (-1;5) \notin r_1$$

$$b) \quad r_1: \begin{cases} x = 4 + t_1 \\ y = 5 + 2t_1 \end{cases} \quad r_2: \begin{cases} x = 5 - 2t_2 \\ y = 2 + t_2 \end{cases}$$

Al igualar coordenadas se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} t + 2t_2 &= 1 \\ 2t_1 - t_2 &= -3 \end{aligned}$$

en el cual se obtiene el valor paramétrico  $t_1 = -1$ , sustituyendo este en la ecuación correspondiente obtenemos el punto (3;3) que es el punto de intersección de las rectas dadas.

**Nota:** si determinamos el parámetro  $t_2$  y lo sustituimos en la recta correspondiente se obtiene el mismo punto.

Compruébalo.

$$c) \quad (x;y) = (1;-1) + t(1;2)$$

$$x - 2y - 6 = 0$$

Para determinar el punto de intersección, necesitamos tener ambas rectas expresadas en la misma forma, para ello expresemos la paramétrica en cartesiana.

$$(x;y) = (1;-1) + t(1;2)$$

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$$

de donde  $t = x - 1$  y  $t = \frac{y + 1}{2}$ , luego, la ecuación quedaría:

$$2x - y - 3 = 0$$

Formemos el sistema con las dos ecuaciones cartesianas

$$\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ x - 2y &= 6 \end{aligned}$$

Al resolver este sistema, obtenemos la solución  $(0; -3)$  que es el punto de Intersección de dichas rectas . ●

### Ejemplo 5

Determina el ángulo entre las rectas

$$(x; y) = (1; 2) + t(3; 1) \quad \text{y} \quad (x; y) = (1; 1) + t(-2; 2)$$

Resolución

Como las rectas están dadas por sus ecuaciones paramétricas, podemos tomar sus vectores directores para determinar el ángulo entre ellas, ya que del producto escalar conoces que:

$$\cos \angle (\vec{a}, \vec{a}_1) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{a}_1}{|\vec{a}| |\vec{a}_1|}$$

$$\text{Sean } \vec{a}(3; 1) \quad \text{y} \quad \vec{a}_1(-2; 2), \text{ luego } \vec{a} \cdot \vec{a}_1 = -6 + 2 = -4$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

$$|\vec{a}_1| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}, \text{ por tanto}$$

$$\begin{aligned} \cos \angle (\vec{a}; \vec{a}_1) &= \frac{-4}{\sqrt{10} \sqrt{8}} = \frac{-4}{\sqrt{80}} = \frac{-4}{4\sqrt{5}} \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{5} \approx -0,4472 \end{aligned}$$

El ángulo entre dos rectas siempre se considera agudo, tomamos el ángulo en el primer cuadrante, luego:  $\angle (\vec{a}; \vec{a}_1) = 63,4^\circ$ ; por tanto el ángulo entre las rectas es de  $63,4^\circ$ . ■

### Ejercicios (epígrafe 4)

1. Escribe una ecuación paramétrica de la recta  $r$  que pasa por el punto  $P_0$  y tiene vector director  $\vec{a}$ .

a)  $P_0(4; 5)$ ,  $\vec{a}(-4; 6)$

b)  $P_0\left(-\frac{1}{2}; 4\right)$ ,  $\vec{a}(5; 3)$

c)  $P_0(4; \sqrt{8})$ ,  $\vec{a}(3; 4)$

d)  $P_0(2; -5)$ ,  $\vec{a}\left(-\frac{4}{5}; 7\right)$

2. Escribe una ecuación paramétrica de la recta que contiene a los puntos:

a)  $A(0; 0)$ ,  $B(-3; -6)$

b)  $C\left(5; \frac{1}{9}\right)$ ,  $D\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{6}\right)$

c)  $E(8; -3)$ ,  $F\left(\frac{4}{5}; 0, 6\right)$

d)  $G(\sqrt{8}; 5)$ ,  $H(-\sqrt{8}; 2)$

e)  $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$  ,  $J\left(\frac{2}{3}; \frac{5}{7}\right)$                       f)  $K(9;6)$  ,  $L\left(-\frac{10}{6}; 3\right)$

3. Escribe una ecuación paramétrica de la recta que contiene al origen de coordenadas y es bisectriz del primer cuadrante.

4. Investiga si las siguientes puntos pertenecen a la recta que contiene al punto  $A(5;-3)$  y tiene vector director  $\vec{a}(6;\frac{3}{4})$ .

a)  $A\left(11; -\frac{9}{4}\right)$                       b)  $B(29;0)$                       c)  $C\left(5; -\frac{3}{2}\right)$

d)  $D\left(-1; -\frac{15}{4}\right)$                       e)  $E\left(7; -\frac{11}{4}\right)$                       f)  $F(17;3)$

5. Escribe una ecuación paramétrica para la recta que contiene al punto  $A(-1;3)$  con vector director  $\vec{a}(2;-5)$ . Indica otros tres puntos que pertenezcan a dicha recta y otros tres vectores directores de la misma.

6. Representa gráficamente el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación  $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}$  con  $\vec{r}_0(-1;4)$  y  $\vec{a}(2;-3)$  para los siguientes intervalos de  $t$ .

a)  $t = 5$                       b)  $|t| < 3$                       c)  $0 < t < 1$   
 d)  $t = -5$                       e)  $50 < t < +\infty$                       f)  $-\infty < t < 4$

7. Sea la recta  $r$  de ecuación:  $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - 5t \end{cases}$ , halla una ecuación paramétrica de la recta que:

- a) contiene al punta  $M(2;-5)$  y es paralela a  $r$ ,
- b) contiene al punto  $Q(-1;2)$  y es perpendicular a  $r$ .

8. finaliza si los siguientes pares de rectas san paralelas o perpendiculares.

a)  $(x;y) = 2;5) + t(-1;2)$                       b)  $(x;y) = (1;8) + t(4;6)$   
 $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 5 + 4t \end{cases}$                        $(x;y) = (8;9) + t(6;-4)$

c)  $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 5 - 3t \end{cases}$                        $\begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$

9. Determina los puntos de intersección de los siguientes pares de rectas. Si se cortan, determina el ángulo entre ellas.

a)  $(x;y) = (-5;0) + t(2;1)$  ;  $(x;y) = (3;2) + t(-1;2)$

$$b) \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 5t \end{cases} ; \begin{cases} x = -\frac{3}{2}t \\ y = 4 - \frac{5}{2}t \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x = 3t \\ y = \frac{1}{3} - 2t \end{cases} ; (x;y) = \left(1; \frac{1}{3}\right) + t(6;-4)$$

$$d) (x;y) = (3;4) + t\left(2; \frac{1}{4}\right) ; x + 2y + 5 = 0$$

$$e) \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \end{cases} ; x + y - 4 = 0$$

$$f) (x;y) = (-1;0) + t(5;-2) ; x - 3y + 1 = 0$$

10. Analiza la posición relativa de la recta que pasa por punto  $(3;-2)$  con vector director  $\vec{a}(-1;2)$ , y la que contiene a la mediana del triángulo ABC relativa al lado AC; si los vértices del mismo son:  $A(-1;4)$ ,  $B(2;5)$  y  $C(3;-2)$ .

11. Las siguientes ecuaciones representan una recta, exprésalas en la forma  $Ax + By + C = 0$ .

$$a) (x;y) = (-3;5) + t(2;1) \quad b) (x;y) = (1;-8) + t(-1;-6)$$

$$c) \begin{cases} x = -6 - 7/8 t \\ y = -2 \end{cases} \quad d) \begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 7 + 5t \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x = -7 \\ y = 4t \end{cases} \quad f) \begin{cases} x = 3t \\ y = 4 \end{cases}$$

12. Las siguientes ecuaciones representan rectas. Exprésalas en forma paramétrica.

$$a) 3x + 4y + 12 = 0 \quad b) x - 2y + 3 = 0$$

$$c) 2x + 5y = 0 \quad d) 4x + y = 0$$

$$e) x + 2 = 0 \quad f) y - 4 = 0$$

- 13.\* Sean P un punto del plano de una circunferencia de centro O y radio r, y  $d = |\overline{OP}|$ , entonces si Q y R son los puntos de intersección de una recta que pasa por P con la circunferencia, se cumple:  $|\overline{PQ}| \cdot |\overline{PR}| = d^2 - r^2$ .  
Demuéstralo.

### Ejercicios del capítulo

1. Una recta de pendiente 3 pasa por el punto  $(3;2)$ ; si la abscisa de otro punto de la recta es 4, halla su ordenada,

2. Una recta pasa por los puntos  $M(-2; -5)$  y  $N(4; 1)$ . Si un punto de abscisa 10 pertenece a la recta, ¿cuál es su ordenada?
3. Comprueba que la recta que pasa por los puntos  $A(1; 1)$  y  $B(2; -1)$  es paralela a la recta que pasa por los puntos  $C(-1; 3)$  y  $D(0; 1)$  y perpendicular a la recta que pasa por los puntos  $E(6; 2)$  y  $F(0; -1)$ .
4. Dado el triángulo cuyos vértices son:  $A(2; -1)$ ,  $B(4; 7)$  y  $C(6; -3)$ . Halla
  - a) una ecuación paramétrica del lado  $\overline{AB}$ ,
  - b) una ecuación paramétrica de la recta que pasa por  $A$  y es paralela al lado  $\overline{BC}$ ,
  - c) la ecuación de la mediana relativa al lado  $\overline{AB}$ ,
  - d) la ecuación de la mediatriz del lado  $\overline{AB}$ ,
  - e) la ecuación de la altura relativa al lado  $\overline{AB}$ .
5. Halla las ecuaciones de las rectas paralelas a la recta  $3x - 4y - 10 = 0$  que se encuentran a una distancia de 3 unidades de ella.
- 6\*. Dadas las ecuaciones de dos lados de un cuadrado  $5x + 12y - 10 = 0$ ,  $5x + 12y + 29 = 0$ ; halla las ecuaciones de los otros dos lados, si el punto  $M(-3; 5)$  está en un lado de este cuadrado.
- 7\*. Se dan las ecuaciones de dos lados de un rectángulo  $5x + 2y - 7 = 0$ ,  $5x + 2y - 36 = 0$  y la ecuación de una de sus diagonales  $3x + 7y - 10 = 0$ . Halla las ecuaciones de los otros dos lados y de la otra diagonal.
8. Dados dos vértices de un triángulo  $ABC$ ,  $A(-2; -3)$  y  $B(2; 1)$  y el punto  $N(1; -2)$  de intersección de sus alturas, halla las ecuaciones de sus lados.
9. Dados dos vértices de un triángulo,  $A(-10; 2)$  y  $B(6; 4)$ , cuyas alturas se cortan en el punto  $N(5; 2)$ ; determina las coordenadas del vértice  $C$ , si se encuentra en la recta  $x - 2y - 18 = 0$ .
10. Una recta pasa por el punto  $P$ , si sabemos que  $C = -AB$ , halla la ecuación de la recta si:
  - a)  $P(-2; 6)$  y  $A + B = 5$
  - b)  $P(4; 10)$  y  $A - B = 9$

c)  $P(2;0)$  y  $A^2 - B^2 = 5$       d)  $P(0;1)$  y  $A^2 + B^2 = 5$

11. Sean  $\vec{m} = \overrightarrow{CD}$  y  $\vec{n} = \overrightarrow{CE}$ . Representa gráficamente y calcula:

a)  $|\vec{m} + \vec{n}|$  si  $|\vec{m}| = 5$  ;  $|\vec{n}| = 4,2$  ;  $\angle(\vec{m};\vec{n}) = 110^\circ$

b)  $|\vec{m} - \vec{n}|$  si  $|\vec{m}| = 7,3$  ;  $|\vec{n}| = 4$  ;  $\angle(\vec{m};\vec{n}) = 50^\circ$

c)  $|\vec{n}|$  si  $|\vec{m}| = \sqrt{2}$  ;  $|\vec{m} - \vec{n}| = \sqrt{10}$  ;  $\angle(\vec{m};\vec{n}) = 45^\circ$

d)  $|\vec{m}|$  si  $|\vec{n}| = 5$  ;  $|\vec{m} + \vec{n}| = 5\sqrt{7}$  ;  $\angle(\vec{m};\vec{n}) = 30^\circ$

12. Demuestra que el cuadrilátero que se obtiene al unir los puntos medios de un cuadrilátero cualquiera es un paralelogramo.

13. Determina las coordenadas del vector  $\vec{a}$  si conocemos su módulo y el ángulo  $\theta$  que forma con el semieje "x" positivo.

a)  $|\vec{a}| = 5,8$  ,  $\theta = 55^\circ$       b)  $|\vec{a}| = 12,6$  ,  $\theta = 130^\circ$

c)  $|\vec{a}| = 1,5$  ,  $\theta = 145^\circ$       d)  $|\vec{a}| = 4,95$  ,  $\theta = 300^\circ$

e)  $|\vec{a}| = 3,5$  ,  $\theta = 125^\circ$       f)  $|\vec{a}| = 12,5$  ,  $\theta = 223^\circ$

g)  $|\vec{a}| = 3\sqrt{2}$  ,  $\theta = 75,2^\circ$       h)  $|\vec{a}| = 5\sqrt{3}$  ,  $\theta = 80,4^\circ$

14. Determina el extremo que falta, si se sabe que:

a)  $|\overrightarrow{AB}| = 4,3$  ,  $\theta = 47^\circ$  y  $A(3;5)$

b)  $|\overrightarrow{CD}| = 6,7$  ,  $\theta = 99^\circ$  y  $D(-7;6)$

c)  $|\overrightarrow{MN}| = 8$  ;  $\theta = 120^\circ$  y  $N(4;4)$

d)  $|\overrightarrow{PQ}| = 10$  ;  $\theta = 200^\circ$  y  $P(-2;3)$

e)  $|\overrightarrow{RE}| = 3,5$  ;  $\theta = 50^\circ$  y  $R(3,2;6)$

f)  $|\overrightarrow{TO}| = 4,67$  ;  $\theta = 155^\circ$  y  $O(6;4,5)$

g)  $|\overrightarrow{WS}| = 15$  ;  $\theta = 309^\circ$  y  $S(3;1)$

15. Calcula el producto escalar de los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  sabiendo que:

a)  $|\vec{a}| = 3,2$  ;  $|\vec{b}| = 5,1$  ;  $\angle(\vec{a};\vec{b}) = 30^\circ$

b)  $\vec{a}(4;7)$  ,  $|\vec{b}| = 1,7$  ;  $\angle(\vec{a};\vec{b}) = 140^\circ$

c)  $\vec{a}(5;8)$  ,  $\vec{b}(7;6)$

d)  $\vec{a}(-6;3)$  ,  $\vec{b}(4;1)$

16. Halla los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  para que los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  sean ortogonales si sabemos que:

a)  $\vec{a}(\alpha;5)$  ,  $\vec{b}(-3;\beta)$  y  $3\alpha + \beta = 12$

b)  $\vec{a}(3\alpha;8)$  ,  $\vec{b}(2;\beta)$  y  $2\beta - 3\alpha = 2$

- c)  $\vec{a}(\alpha; 2\beta)$  ,  $\vec{b}(3; 1)$  y  $a - \beta = 4$   
d)  $\vec{a}(15; -1)$  ,  $\vec{b}(2\alpha; 3)$  y  $5\alpha - \beta = 1$   
e)  $\vec{a}(\alpha; 4)$  ,  $\vec{b}(2\alpha; \beta)$  y  $a + \beta = 5$   
f)  $\vec{a}(\alpha; 3)$  ,  $\vec{b}(\alpha; 2\beta)$  y  $7\alpha + 6\beta = 12$   
g)  $\vec{a}(4\alpha; 2)$  ,  $\vec{b}(\alpha; 2\beta)$  y  $a + \beta = 3$   
h)  $\vec{a}(\alpha; 1)$  ,  $\vec{b}(1; -\beta)$  y  $\alpha^2 + \beta^2 = 32$
17. Dadas las fuerzas  $\vec{F}_1(3; -4)$  ,  $\vec{F}_2(2; 3)$  y  $\vec{F}_3(-3; 2)$  aplicadas a un punto, calcula el trabajo realizada por la resultante si el punto de aplicación se desplaza de la posición A(5; 3) a la posición B(9; 6) con un movimiento rectilíneo.
18. Se dan los vértices de un triángulo A(3; 2) , B(5; 1) y C(3; -2). Calcula:  
a) el ángulo  $\beta$ ,  
b) el ángulo exterior de vértice A.
- 19\*. Sean tres vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  y  $\vec{c}$  de módulos a, b y c respectivamente y  $\alpha = \angle(\vec{b}; \vec{c})$ ,  $\beta = \angle(\vec{a}; \vec{c})$ , y  $\gamma = \angle(\vec{a}; \vec{b})$ . Prueba que el módulo s de la suma de los tres vectores está dado por la fórmula
- $$s^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha + 2ac \cos \beta + 2ab \cos \gamma$$
- Nota:  $\vec{s} \cdot \vec{s} = s^2$  si  $|\vec{s}| = s$ .
20. Halla la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que la razón de sus distancias a los puntos A(2; 5) y B(-1; 3) es siempre igual a 1.
21. Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos tales que la diferencia de las cuadradas de sus distancias a los puntos (2; 1) y (-3; 4) es siempre igual a 3.
22. Halla el pie de la perpendicular bajada desde el punto (-1; 2) a la recta  $3x - 5y - 21 = 0$ .
23. Halla la proyección del punto P(-1; 10) sobre la recta determinada por los puntos A(2; -3) y B(-6; 1).
24. Desde el punto (2; -3) se traza una perpendicular a la recta  $3x - 4y + 6 = 0$ . ¿ A qué distancia se halla dicha perpendicular del punto (6; 8)?

25. Halla la ecuación de la recta, si el punto  $P(2;3)$  es el pie de la perpendicular bajada del origen de coordenadas a esta recta. Determina la distancia del origen de coordenadas a dicha recta.
26. El punto  $(4;3)$  es un vértice de un cuadrado y la recta  $2x + y + 4 = 0$  contiene uno de sus lados. Halla el área de dicho cuadrado.
- 27.\* Dadas las ecuaciones de dos lados de un cuadrado y una de sus vértices, halla las ecuaciones de los otros dos lados de este cuadrado,  
 $4x - 3y + 3 = 0$  ,  $4x - 3y - 17 = 0$  ,  $A(2;-3)$
28. Un punto  $P$  se mueve de tal manera que su distancia al punto  $A(-1;5)$  es dos veces la distancia de  $P$  a la recta  $x - y + 1 = 0$ . Halla la ecuación de su lugar geométrico.
- 29.\* Dadas las ecuaciones de dos lados de un paralelogramo:  $Bx + 3y + 1 = 0$  ,  $2x + y - 1 = 0$  y la ecuación de una de sus diagonales,  $3x + 2y + 3 = 0$  ; determina las coordenadas de sus vértices.
30. Dos de los lados de un paralelogramo tienen por ecuaciones  $x - 3y + 13 = 0$  y  $3x - 2y + 4 = 0$  respectivamente y uno de sus vértices es el punto  $(-3;1)$ . Halla:  
 a) las coordenadas de los vértices que faltan,  
 b) las longitudes de sus diagonales,  
 c) sus ángulos interiores.
- 31.\* Halla la posición relativa de las siguientes rectas con la mediatriz del segmento que une los puntos  $A(-2;3)$  y  $B(4;-5)$ . En caso de que se corten halla el punto de intersección y si son paralelas la distancia entre las mismas.  
 a)  $4x - 2y - 11 = 0$                       b)  $3x - 4y + 13 = 0$
- 32.\* Los lados de un triángulo se dan por sus ecuaciones:  
 $4x - y - 7 = 0$  ,  $x + 3y - 31 = 0$  ,  $x + 5y - 7 = 0$ .  
 Halla el punto de intersección de sus alturas.
- 33.\* Los lados de un triángulo están en las rectas cuyas ecuaciones son:  $x + 5y - 7 = 0$  ,  $3x - 2y - 4 = 0$  y

$7x + y + 19 = 0$ . Calcula su área.

34. Halla el centro y el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo cuyos vértices son:

a)  $(0;0)$  ,  $(6;0)$  ,  $\left(3;\frac{9}{4}\right)$       b)  $(0;0)$  ,  $(4;0)$  ,  $\left(0;\frac{16}{3}\right)$

35. Demuestra que en todo triángulo rectángulo la mediana relativa a la hipotenusa es igual a la mitad de la hipotenusa.

36. Demuestra la ley de los cosenos.

37. Demuestra que en una circunferencia, todo ángulo inscrito en un diámetro es recto. (Teorema de Thales)

38. Demuestra que en todo triángulo rectángulo la altura relativa a la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos en que divide a la hipotenusa. (Teorema de las alturas)

39. Demuestra que en todo triángulo rectángulo cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella. (Teorema de los catetos)

40. Demuestra que la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual al duplo de la suma de los cuadrados de sus lados.

41. En una ciudad con calles perpendiculares (fig. 2-27), un grupo de  $2^5 = 32$  personas sale

de un punto A. La mitad se dirige al norte y la otra mitad al este; en cada esquina ocurre una división análoga (mitad al norte y mitad al este) durante 5 cuadras.

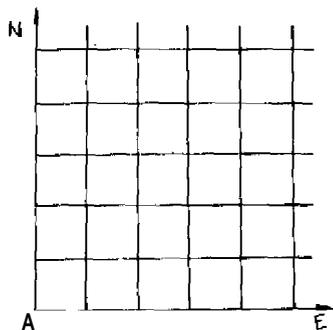


Fig. 2.27

a) Encuentra la ecuación de un lugar geométrico conocido sobre el que se encuentran las 32 personas.

b) Indica las coordenadas (con referencia al punto A) de los puntos donde están las 32 personas. ¿Cuántas hay en cada punto?

## SOBRE LA HISTORIA DE LAS SECCIONES CÓNICAS

Las curvas que se obtienen al intersecar un cono circular recto con un plano (secciones cónicas), eran ya conocidas por los antiguos griegos. Por primera vez las estudió, sistemáticamente Menaecmo, matemático griego, alumno de Platón que vivió en el siglo IV a.n.e.. Menaecmo estudió estas curvas como un medio para resolver el problema de la duplicación del cubo\*, y las obtenía intersecando un cono circular recto con un plano perpendicular a una generatriz:

si el ángulo en el vértice del cono es agudo se obtiene una elipse, si es recto una parábola y si es obtuso, una hipérbola.

El estudio más completo de las secciones cónicas en la antigua Grecia, tan completo que solo ha sido superado en los tiempos modernos, es debido a Apolonio de Perga, quien enseñó en Alejandría y en Pérgamo en la segunda mitad del siglo III a.n.e. y es considerado el segundo matemático de la antigüedad, después de Arquímedes.

Apolonio introduce en el estudio de las cónicas una innovación fundamental: no considera cada tipo de cónica como procedente de la intersección de un plano con un cono de diferente abertura, sino que las obtiene todas de un mismo cono, haciendo variar la inclinación del plano tal y como se hace en el epígrafe 5 de este capítulo.

Como se mencionó en la nota histórica del capítulo 2, al estudiar las cónicas, Apolonio lo hace de manera que se

1) Este problema, conocido también como el problema de Delos, consistía en encontrar la arista de un cubo cuyo volumen fuera el doble del que se utilizaba como altar en la ciudad de Delos. Menaecmo utilizó, para su resolución, las parábolas que nosotros representamos hoy por las ecuaciones

$$x^2 = ay \quad \text{e} \quad y^2 = 2ax$$

donde  $x$  es la arista de un cubo de volumen  $2a^3$ .

le puede considerar un precursor de la Geometría Analítica, ya que utiliza una especie de coordenadas: el diámetro se usa como nuestro eje "x" y la perpendicular en el vértice como nuestro eje "y". Para caracterizar las curvas él utiliza un equivalente geométrico de nuestras ecuaciones, en términos de lo que se conoce como álgebra geométrica y que juega el mismo papel que el álgebra en nuestra Geometría Analítica.

Las propiedades a las que se hacen referencia en el párrafo anterior, son las que nosotros expresaremos mediante la ecuación  $y^2 = 4px - (1 - e^2) x^2$ , que significa que el área del cuadrado construido sobre la ordenada es igual, menor o mayor que el Arca del rectángulo de base  $x$  y altura  $4p$ . De esta propiedad derivó Apolonio las nombres, pues parábola en griega viene a significar que el área es igual ( $e=1$ ), elipse que hay un defecto ( $e<1$ ) e hipérbola que hay un exceso ( $e>1$ ).

Al considerar la obra de Apolonio y su utilización del método de coordenadas, no se debe olvidar que para él los sistemas de coordenadas eran inseparables de las curvas concretas, que no introduce coordenadas para todos los puntos del plano y que no reduce el problema geométrico a otro algebraico, pues no disponía de una teoría algebraica suficientemente desarrollada. Esta sería obra de Descartes y Fermat como ya leiste en la nota histórica del capítulo anterior.

Después de la obra de Apolonio, el siguiente paso de avance en la teoría de las secciones cónicas será dado cuando Fermat aplique los métodos de la Geometría Analítica y obtenga las ecuaciones reducidas de las cónicas. A partir de ese momento se abandona el estudio de las cónicas como curvas en el espacio y se les considera como lugares geométricos planos, tal como se hace en el capítulo que comienza a estudiar.

Sin embargo, en los trabajos de Fermat había muy poco que no fuera una traducción de los resultados de Apolonio

al lenguaje del álgebra. Una vía cualitativamente *nueva* se abrid *con* los trabajos de J.Desargues (1593-1662) y Blas Pascal (1623-1662), que, consideraron las secciones cónica.; como "proyecciones" centrales de una circunferencia, con lo que sentaron las bases de la Geometría Proyectiva e iniciaron un capítulo nuevo en la Teoría de las secciones cónicas con el estudio de sus propiedades proyectivas, que están fuera de los objetivos de este libro.

Para terminar debemos señalar que las cónicas (descubiertas en el siglo IV a.n.e.) constituyen el modelo matemático para describir el movimiento de las planetas de acuerdo a las leyes descubiertas por Johann Kepler (1571-1630) y que Newton fundamenta: los planetas se mueven en órbitas elípticas con el sol en uno de sus focas.

**CURVAS DE SEGUNDO GRADO. SECCIONES CÓNICAS**

**CIRCUNFERENCIA**

**1. Ecuación cartesiana de la circunferencia**

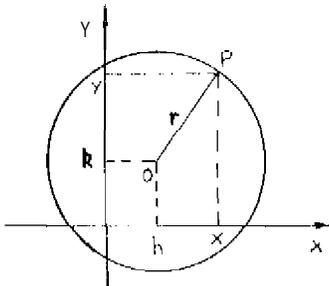
En el capítulo anterior estudiaste cómo dado un sistema de coordenadas, se puede asociar una ecuación a un objeto geométrico conocido: la línea recta. En el presente epígrafe estudiaremos cómo hacer corresponder una ecuación, en un plano coordenado, a otro objeto geométrico conocido: la circunferencia (punto 37 del Nemento).

**Teorema 1**

La circunferencia de centro  $O(h;k)$  y radio  $r$  tiene ecuación:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

**Demostración**



**Fig. 3.1**

que es equivalente a

Un punto  $P(x;y)$  pertenece a la circunferencia si y solo si se cumple:

$$d(O,P) = r \quad (\text{fig. 3.1})$$

que puede escribirse:

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad \blacksquare$$

Si se considera como origen de coordenadas el centro de la circunferencia su ecuación será

$$x^2 + y^2 = r^2$$

que es la ecuación de la circunferencia referida a su centro y se conoce como ecuación canónica de la circunferencia.

### Ejemplo 1

Escribe la ecuación de la circunferencia que tiene centro  $O$  y radio  $r$ .

a)  $O(4; -5)$  ;  $r = \sqrt{3}$

b)  $O(0;0)$  ;  $r = 4$

Resolución

a) Sustituyendo en la ecuación  $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$  las coordenadas del centro y el radio tenemos:

$$(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 3$$

que es la ecuación de la circunferencia pedida (fig. 3.2 a)  
 b)  $x^2 + y^2 = 16$ , es la ecuación de la circunferencia pedida (fig. 3.2 b).

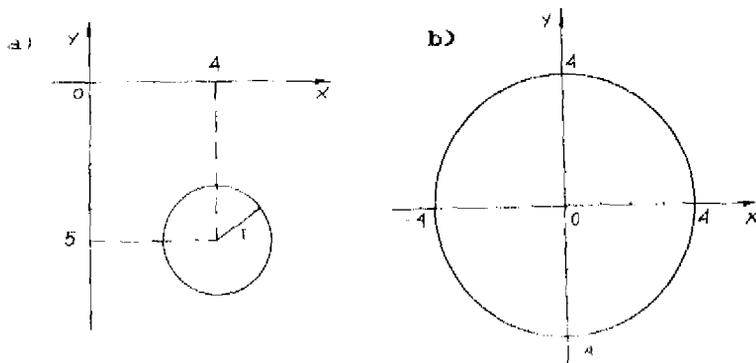


Fig. 3.2

### Ejemplo 2

Las siguientes ecuaciones representan circunferencias. Determina su centro y radio.

a)  $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 8$

b)  $x^2 + y^2 + 10x - 8y + 9 = 0$

Resolución

a) Comparando con la ecuación general tenemos:  $h = -4$ ,  $k = 2$  y  $r^2 = 8$ , de aquí obtenemos que:  $O(-4; 2)$  y  $r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ .

b) En este caso la ecuación no está dada en la forma conocida por lo que debemos expresarla en esa forma:

$$x^2 + y^2 + 10x - 8y + 9 = 0$$

$$(x^2 + 10x + 25) + (y^2 - 8y + 16) = -9 + 25 + 16 \quad \text{completando / cuadrados.}$$

$$(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 32,$$

luego  $O(-5; 4)$  y  $r = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$  ■

**Ejemplo 3**

Los puntos  $A(-1; 3)$  y  $B(5; 1)$  son los extremos de un diámetro de una circunferencia, escribe la ecuación de la misma.

**Resolución**

Para determinar la ecuación de una circunferencia debemos conocer su centro y su radio. Conocemos los puntos extremos de un diámetro de ella, luego si calculamos el punto medio del segmento  $\overline{AB}$  obtenemos las coordenadas del centro  $O$  de la circunferencia (fig. 3.3):

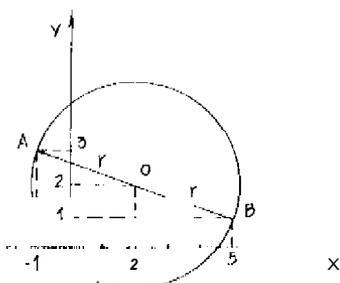


Fig. 3.3

$$O : \left( \frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left( \frac{4}{2} ; \frac{4}{2} \right) = (2; 2)$$

Para obtener el radio calculamos la distancia de  $O$  a cualquiera de los puntos  $A$  ó  $B$ :

$$r = d(O, A) = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

por tanto la ecuación de la circunferencia pedida es:

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 10 \quad \blacksquare$$

**Ejemplo 4**

Dada la circunferencia  $(x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0)$ , determina los puntos de intersección con las rectas:

a)  $x - y - 2 = 0$       b)  $3x - y - 15 = 0$       c)  $x = 3$

**Resolución**

Para buscar los puntos de intersección resolvemos el sistema formado por ambas ecuaciones.

$$a) \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0 & (1) \\ x - y - 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Despejando  $x$  en (2), obtenemos:  $x = y + 2$  (3)

sustituyendo (3) en (1):  $(y + 2)^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$

$$y^2 + 4y + 4 + y^2 - 2y - 8 = 0$$

$$2y^2 + 2y - 4 = 0$$

$$y^2 + y - 2 = 0$$

$$(y + 2)(y - 1) = 0$$

$$y_1 = -2 \quad y \quad y_2 = 1$$

sustituyendo en (3), encontramos:

$$\text{para } y_1 = -2 \quad ; \quad x_1 = (-2) + 2 = 0$$

$$\text{para } y_2 = 1 \quad ; \quad x_2 = 1 + 2 = 3$$

luego se intersecan en dos puntos  $P_1(0; -2)$  y  $P_2(3; 1)$ .  
 Esta significa que la recta es secante a la circunferencia, la distancia del centro de la circunferencia a la recta es menor que el radio (fig. 3.4 a).

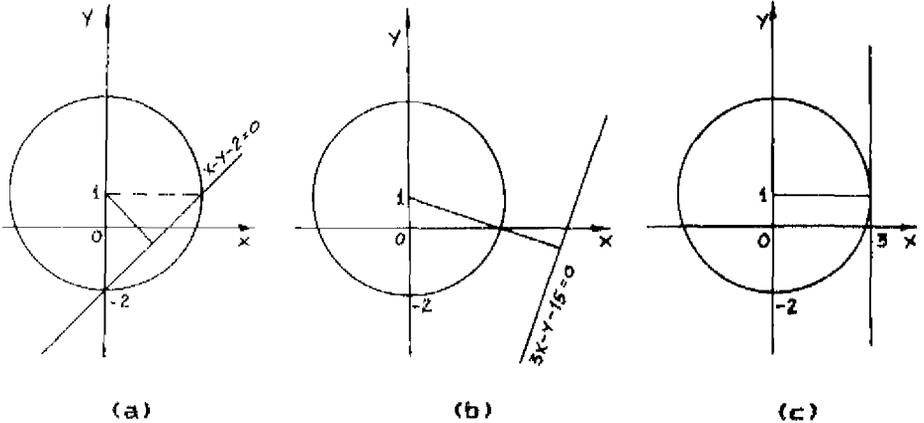


Fig. 3.4

$$b) \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0 & (1) \\ 3x - y - 15 = 0 & (2) \end{cases}$$

Despejando  $y$  en (2), obtenemos:  $y = 3x - 15$  (3)

sustituyendo (3) en (1):

$$\begin{aligned} x^2 + (3x - 15)^2 - 2(3x - 15) - 8 &= 0 \\ x^2 + 9x^2 - 90x + 225 - 6x + 30 - 8 &= 0 \\ 10x^2 - 96x + 247 &= 0 \end{aligned}$$

como  $D = b^2 - 4ac = 9216 - 9880 = -644 < 0$ , esta ecuación carece de soluciones reales, la recta y la circunferencia no se intersecan, o sea, la recta es exterior a la circunferencia. En este caso la distancia del centro de la circunferencia a la recta es mayor que el radio (fig. 3.4 b).

$$c) \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0 & (1) \\ x = 3 & (2) \end{cases}$$

Sustituyendo (2) en (1) se tiene:

$$\begin{aligned}
 9 + y^2 - 2y - 8 &= 0 \\
 y^2 - 2y + 1 &= 0 \\
 (y - 1)^2 &= 0 \\
 y &= 1
 \end{aligned}$$

que es un cero doble, luego solo tienen un punto común "doble",  $P(3;1)$ ; la recta es tangente a la circunferencia, y por tanto su distancia al centro de la circunferencia es igual al radio y es perpendicular a esta en el punto de contacto (fig. 3.4 c). ■

**Ejemplo 5**

Los puntos  $A(0;2)$ ,  $B(3;0)$ ,  $C(5;3)$  y  $D(2;5)$  son los vértices de un cuadrado. Escribe la ecuación de la circunferencia inscrita en dicho cuadrado.

Resolución

El centro de la circunferencia inscrita equidista de los lados del cuadrado

(fig. 3.5), es decir, es el punto de intersección de las bisectrices; como en el cuadrado las diagonales son bisectrices, el centro será el

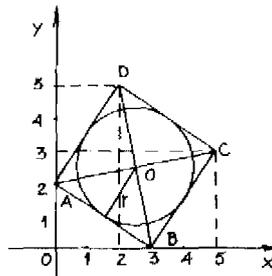


Fig. 3.5

punto de intersección de sus diagonales y su radio es la mitad de la longitud de sus lados. Como las diagonales se cortan en su punto medio, basta determinar el punto medio de una de ellas:

$$O: \left( \frac{x_A + x_C}{2} ; \frac{y_A + y_C}{2} \right) = \left( \frac{5}{2} ; \frac{5}{2} \right)$$

Y el radio es la mitad de la longitud de un lado, sea:

$$r = \frac{1}{2} d(A;B) = \frac{1}{2} \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \sqrt{9 + 4} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

luego la ecuación pedida es:  $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$

que es equivalente a:  $x^2 + y^2 - 5x - 5y + 9,25 = 0$  ■

### Ejemplo 6

Halla los puntos de intersección de las circunferencias

$$x^2 + y^2 = 16 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$$

Resolución

Resolvamos el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 & (1) \\ x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0 & (2) \end{cases}$$

Sustituyendo (1) en (2), tenemos:

$$16 - 4x - 12 = 0 \quad \text{de donde} \quad x = 1$$

sustituyendo  $x = 1$  en (1), obtenemos:  $y^2 = 15$

$$\text{luego} \quad y = \pm \sqrt{15} = \pm 3,87$$

por lo que las circunferencias se cortan en los puntos

$$(1; 3,87) \quad \text{y} \quad (1; -3,87) \quad \blacksquare$$

Ejercicios (epígrafe 1)

1. Escribe la ecuación de la circunferencia que tiene centro  $O$  y radio  $r$ .

a)  $O(1; 3)$ ,  $r = 3$

b)  $O(4; -2)$ ,  $r = 8$

c)  $O(0; 0)$ ,  $r = \sqrt{5}$

d)  $O(0; 3)$ ,  $r = 2\sqrt{3}$

e)  $O\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ ,  $r = \frac{\sqrt{24}}{3}$

f)  $O(3, 1; 0)$ ,  $r = 5,2$

g)  $O(3; -2)$ ,  $r = 3\sqrt{3}$

h)  $O(4, 2; 5, 1)$ ,  $r = 2,1\sqrt{5}$

i)  $O(2; -2, 3)$ ,  $r = \frac{\sqrt{9}}{3}$

j)  $O(3, 2)$ ,  $r = 3,2 \cdot 10^{-2}$

2. Determina el centro y al radio de la circunferencia cuya ecuación es:

a)  $x^2 + y^2 = 81$

b)  $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 20$

c)  $x^2 + (y + 3)^2 = 16$

d)  $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$

e)  $x^2 + y^2 + 6x - 7 = 0$

f)  $x^2 + y^2 - 7x - 4y = 0$

g)  $x^2 + y^2 - x + 2y + 1 = 0$

h)  $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$

i)  $x^2 + y^2 - 2xy - 9 = 0$

j)  $2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 7 = 0$

k)  $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 6 = 0$

3. Halla la ecuación de la circunferencia de centro  $O$  y que pasa por el punto  $A$ .

a)  $O(5; -2)$ ,  $A(1; 5)$

b)  $O(-2; 0)$ ,  $A(1; \sqrt{5})$

c)  $O(2; 3)$ ,  $A(6; 0)$

d)  $O(2\sqrt{3}; \sqrt{5})$ ,  $A(0; 0)$

e)  $O(-4; -1)$ ,  $A(1; 2)$

f)  $O(3\sqrt{2}; 4\sqrt{3})$ ,  $A(2\sqrt{2}; 3\sqrt{3})$

g)  $O(3;1;4,1)$  ,  $A(3;2,1)$     h)  $O(2,6;\sqrt{6})$  ,  $A(4,9;5)$

i)  $O(5;5)$  ,  $A(\sqrt{6};\sqrt{7})$     j)  $O(4;5)$  ,  $A(4,5)$

4. Si  $\overline{AB}$  es al diámetro de una circunferencia, halla la ecuación de la misma en los siguientes casos:

a)  $A(2;3)$  ,  $B(-4;5)$

b)  $A(-1;5)$  ,  $B(1;-3)$

c)  $A(-5;2)$  ,  $B(5;-2)$

d)  $A(4;3)$  ,  $B(-3;-1)$

e)  $A(4;3)$  ,  $B(3;4)$

f)  $A\left(\frac{5}{2};2\right)$  ,  $B\left(-\frac{1}{2};3\right)$

$A\left(\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right)$  ,  $B\left(0;-\frac{1}{2}\right)$

h)  $A\left(0;\frac{1}{3}\right)$  ,  $B\left(\frac{1}{2};2\right)$

i)  $A(\sqrt{2};3)$  ,  $B(3;\sqrt{2})$

j)  $A(10,4;3,6)$  ,  $B(14,1;20,4)$

5. Dada la ecuación de la circunferencia

a)  $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 47 = 0$

b)  $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 20 = 0$

c)  $x^2 + y^2 + 10x - 6y + 21 = a$

d)  $x^2 + y^2 - 4x + by + 13 = 0$

halla la ecuación de la circunferencia concéntrica de radio doble.

6. Escribe la ecuación de la circunferencia con centra en al punto  $O(-1;-1)$  y que es tangente a la recta:

a)  $y = x + 1$

b)  $4x + 3y - 5 = 0$

c)  $x - 2y - 2 = 0$

d)  $2x - y - 7 = 0$

7. Halla la ecuación de la circunferencia concéntrica a la circunferencia  $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0$  que sea tangente a la recta  $3x - 4y + 7 = 0$ .

8. Halla la ecuación del diámetro de la circunferencia

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$$

que es perpendicular a la recta  $5x + 2y - 13 = 0$ .

9. Halla la ecuación de la recta que contiene al diámetro de la circunferencia  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$  y que biseca a la cuerda de extremos  $A(6;-1)$  ,  $B(2;3)$ .

10. Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos:

a)  $A(2;-2)$  ,  $B(8;4)$  y  $C(6;0)$

b)  $A(0;0)$  ,  $B(2;6)$  y  $C(10;0)$

11. Una circunferencia pasa por los puntos  $A(-3;3)$  y  $B(1;4)$ . Halla la ecuación de la misma si:

a) la abscisa de su centra es 2,



d)  $x^2 + y^2 + 2x + 6y = 0$  ; A(0;0)

e)  $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$  ; A(-5;5)

f)  $x^2 + y^2 + 2x - 16 = 0$  ; A(0;4)

17. Determina la longitud de la cuerda de la circunferencia  $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$  cuyo punto medio es A(1;2).
18. Halla la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo cuyos vértices son los puntos (5;3) , (6;2) y (3;-1).
19. Un círculo de radio 4 tiene su centro en el punto O(1;-1). Halla la ecuación de 3º lugar geométrico de los puntos medios de todos sus radios.
20. Halla la ecuación de 2º lugar geométrico de los puntos tales que sus distancias al punto (3;2) sean la mitad de sus distancias al punto (-1;3).
21. Dado el triángulo de vértice A(0;2) , B(2;0) y C(4;0), determina:
- el punto medio de cada lado,
  - los pies de las tres alturas,
  - los puntos medios de los segmentos determinadas por cada vértice y el ortocentro.
- a) Prueba que todos los puntos encontrados están en una circunferencia (esta es la llamada circunferencia de los nueve puntos) y determina su ecuación.
- b) Prueba que el centro N de la circunferencia de los nueve puntos está en la recta de Euler (recta que contiene al ortocentro (H), al baricentro (G) y al circuncentro (O') del triángulo).
- \* c) Prueba que  $\overline{O'G} = 2\overline{GN}$ .
22. Halla la ecuación de la recta tangente a la circunferencia dada que pasa por el punto P.
- a)  $x^2 + y^2 = 9$  , P(5;0)
- b)  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$  , P(3;3)
- c)  $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$  , P(11;4)
23. Sobre la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$  se sitúan 6 puntos de forma que sean los vértices de un exágono regular.
- a) ¿Cuál es la longitud del lado del exágono determi-

nado?

- b) Si uno de los puntos tiene coordenadas  $(1;0)$ , ¿cuáles son las coordenadas de los restantes puntos?
- c) ¿Cuántas diagonales se pueden trazar en ese exágono?
- d) ¿De cuántas formas se pueden unir los 6 puntos mediante 5 segmentos que no se intersequen?
24. Halla la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo cuyos vértices son los puntos:  $(0;0)$ ,  $(6;0)$  y  $(3;4)$ .
25. Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos tales que la suma de los cuadrados de sus 5 distancias a los puntos  $(3;0)$  y  $(5;6)$  sea igual a 30.

## PARABOLA

### 2. Caracterización geométrica de la parábola

Desde cursos anteriores conoces que la gráfica de la función  $y = ax^2 + bx + c$  es una curva llamada parábola. Esta curva puede ser trazada, igual que la circunferencia, mediante un movimiento continuo.

Tomemos una regla, un cartabón y un hilo cuya longitud sea igual al cateto mayor del cartabón, fijemos un extremo del hilo en el extremo del cateto mayor que corresponde al ángulo agudo y el otro en un punto del plano (fig. 3.6).

Deslicemos el cartabón sobre la regla manteniendo tenso el hilo con un lápiz, al hacerlo se describe una parábola. El procedimiento anterior pone de manifiesto una propiedad de la parábola:

Sus puntas equidistan de una recta fija llamada directriz (representada por la regla) y de un punto fijo llamado foco (representada por el punto donde se fijó al hilo).

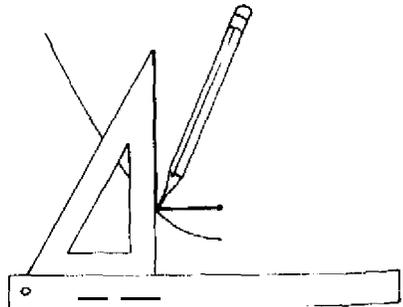


Fig. 3.6

Para demostrar esta propiedad tomaremos la parábola referida a un sistema de coordenadas en el cual, el vértice está en el origen, entonces su ecuación es de la forma:

$$y = ax^2 \quad \text{y por comodidad la escribiremos: } x^2 = 4py.$$

Teorema 1

La parábola  $x^2 = 4py$  es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de la recta  $y = -p$  y del punto  $(0;p)$ .

Demostración

Sean  $P(x;y)$  un punto cualquiera de la parábola,  $F(0;p)$  y  $\ell$  la recta  $y + p = 0$ , luego:

$$\begin{aligned} d(P,F) &= \sqrt{x^2 + (y - p)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + \left(\frac{x^2}{4p} - p\right)^2} \quad \text{Sustituyendo } y = \frac{x^2}{4p} \\ &= \sqrt{x^2 + \frac{x^4}{16p^2} - \frac{x^2}{2} + p^2} \\ &= \sqrt{\frac{x^4}{16p^2} + \frac{x^2}{2} + p^2} = \sqrt{\left(\frac{x^2}{4p} + p\right)^2} \\ &= \left|\frac{x^2}{4p} + p\right| = |y + p| \quad \text{Sustituyendo } \frac{x^2}{4p} = y \\ &= d(P,\ell) \end{aligned}$$

Recíprocamente, si un punto  $P(x;y)$  satisface la condición  $d(P,\ell) = d(P,F)$  se demuestra que  $P$  está en la parábola. De esta forma los puntos de la parábola, y solo ellos, satisfacen la condición, con lo que se ha demostrado que es el lugar geométrico pedido. ■

La recta  $y = -p$  es la directriz de la parábola, el punto  $F(0;p)$  es el foco de la parábola. Como ya sabes, la recta  $x = 0$  es eje de simetría de la parábola y la intersección de este eje y la parábola es el punto  $V(0;0)$  que es su vértice. La distancia del foco a la directriz es  $2p$  y se llama parámetro de la parábola.

#### Ejemplo 1

Escribe la ecuación y representa gráficamente la parábola que cumple: a)  $V(0;0)$ ,  $F(0;3)$     b)  $F(0;2)$ ,  $\ell: y + 2 = 0$

## Resolución

a) En este caso conocemos el vértice y el foco. Podemos hallar el valor de  $p$ , pues es la distancia entre estas puntos (por ser el vértice un punto de la parábola, equidista del foco y la directriz) luego  $p = 3$  por la que la ecuación pedida es:  $x^2 = 12y$  ( $4 \cdot p = 4 \cdot 3 = 12$ ).

Para representar esta parábola debemos conocer, por lo menos, tres puntos de ella uno de los cuales debe ser siempre el vértice, los otros dos los puedes hallar evaluando en la ecuación de la parábola, por comodidad estos pueden ser dos puntos simétricos con respecto a su eje. Como conocemos el vértice ( $V(0;0)$ ) busquemos los otros dos puntos evaluando en la ecuación de la parábola. Para la ordenada del foco ( $y = 3$ ) obtenemos:

$$x^2 = 36 \text{ luego } x = \pm 6.$$

Los puntos de la parábola a representar serían:  $(0;0)$ ,  $(6;3)$

y  $(-6;3)$  (fig. 3.7), uniendo estos con un trazo continuo obten-

dremos el gráfico aproximado de

esta parábola.

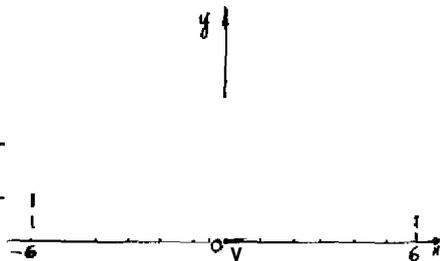


Fig. 3.7

b) Conocemos el foco y la ecuación de la directriz, luego podemos determinar  $p$  ya que:

$$2p = d(P, \ell) = |y + 2| = |2 + 2| = 4$$

por lo que  $p = 2$  y la ecuación de la parábola será:  $x^2 = 8y$ .

Para representarla conocemos su vértice ( $V(0;0)$ ), hallemos los otros dos puntos. Para  $y=2$  se obtiene  $x^2 = 16$  de donde  $x = \pm 4$  y la parábola pasa por los puntos  $(-4;2)$  y  $(4;2)$  (fig.3.8).

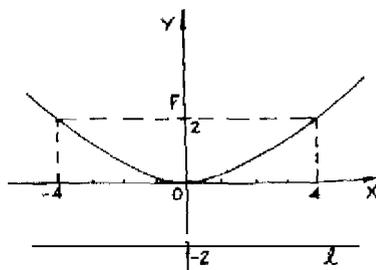


Fig.3.8

Si el vértice no está en el origen, sino en  $(h;k)$ , y la parábola mantiene su eje paralelo al eje "y", la ecuación puede escribirse coma:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

**Ejemplo 2**

Escribe la ecuación de la parábola que cumple:

a)  $V(3,6)$  ,  $F(3;10)$

b)  $F(4;8)$  ,  $l: y + 2 = 0$

Resolución

a) Conocemos el vértice y el foco, podemos hallar el valor de  $p$ :  $p = d(V,F) = 4$  (fig.3.9), y coma su eje es paralelo al eje "y", la ecuación pedida es:

$$(x - 3)^2 = 16(y - 6)$$

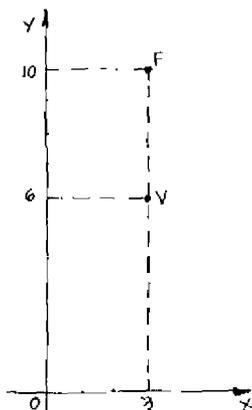


Fig. 3.9

b) Conocemos el foco y la ecuación de la directriz, debemos buscar el vértice y el

valor de  $p$ . El vértice es el punto medio de la perpendicular bajada del foca a la directriz, luego tiene la misma abscisa del #000 y su ordenada es 3 (fig. 3.10), por tanta  $V(4;3)$  y  $p = 5$  por lo que la ecuación pedida es:

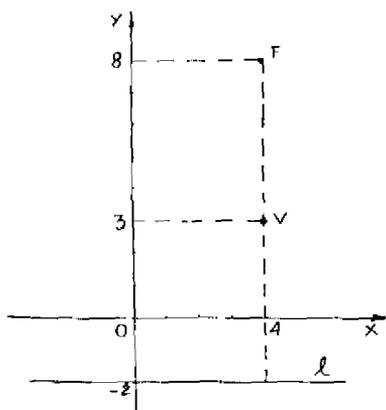


Fig. 3.10

$$(x - 4)^2 = 20(y - 3)$$

Si en la ecuación  $(x - h)^2 = 4p(y - k)$  se antepone a  $4p$  el signo menos, la parábola se refleja en el eje de las  $x$  y su ecuación sería:

$$(x - h)^2 = -4p(y - k),$$

que representa una parábola que abre hacia abajo.

Observa que estas parábolas tienen eje paralelo al eje "y", y en sus ecuaciones aparece la variable y lineal.

Si la parábola tiene su eje paralela al eje "x" su ecuación será:

$$C(y - k)^2 = 4p(x - h) \quad \text{ó} \quad (y - k)^2 = -4p(x - h)$$

en dependencia de que abra a la derecha a a la izquierda respectivamente.

En general:

**La parábola es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo del plano, llamado foco, y de una recta fija, llamada directriz, que no pasa por el foco.**

### Ejemplo 3

Las siguientes ecuaciones representan parábolas. Halla en cada caso las coordenadas del foco y del vértice, y la ecuación de la directriz. Representa en un sistema de coordenadas la parábola del inciso s.

a)  $y^2 + 4y + 4x = 0$

b)  $y^2 - 8x = 0$

c)  $x^2 - 10y - 10 = 0$

d)  $2x^2 - 12x + 3y - 9 = 0$

Resolución

a)  $y^2 + 4y + 4x = 0$

Para hallar los elementos pedidos debemos expresar la ecuación en la forma conocida, para ella dejamos en el primer miembro los términos que corresponden a la variable de segundo grado (en este caso y) y completamos cuadrados:

$$y^2 + 4y + 4x = 0$$

$$y^2 + 4y = -4x$$

$$y^2 + 4y + 4 = -4x + 4$$

$$(y + 2)^2 = -4(x - 1)$$

luego  $4p = 4$ , de donde  $p = 1$  y  $V(1; -2)$

La parábola tiene el eje paralela al eje x (es la variable lineal) y abre hacia la izquierda, por lo tanto

el foco es  $F(0; -2)$  y la directriz  $\ell$  es:

$$\begin{aligned}x &= h + p \\x &= 1 + 1 \\x &= 2 \\x - 2 &= 0\end{aligned}$$

Para representar esta parábola, como ya conocemos el vértice, solo nos queda hallar otros dos puntos, por comodidad evaluaremos la ecuación para la  $x$  del foco.

Para  $x = 0$  tenemos:

$4y = 0$  de donde se obtiene:

$$y_1 = 0 \quad \text{y} \quad y_2 = -4$$

La parábola pasa por los puntos

$(1; -2)$ ,  $(0; 0)$  y  $(0; -4)$

(fig. 3.11).

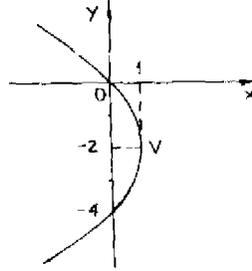


Fig. 3.11

b)  $y^2 - 8x = 0$

En este caso no es necesario completar cuadrados, la parábola tiene el vértice en el origen de coordenadas el eje coincide con el eje "x" y la parábola abre hacia la derecha, luego:

$$\begin{aligned}4p &= 8 & , & \quad V(0; 0) & , & \quad F: (h+p; 0) & , & \quad \ell: x = h - p \\p &= 2 & & & & = (2; 0) & & \quad x = -2 \\ & & & & & & & \quad x + 2 = 0\end{aligned}$$

c)  $x^2 - 10y - 10 = 0$

$$x^2 = 10y + 10$$

$$x^2 = 10(y + 1)$$

luego  $4p = 10$  de donde  $p = \frac{5}{2}$  y  $V(0; -1)$ .

El eje de la parábola es paralela al eje  $y$  (es la variable lineal) y abre hacia arriba, luego

$$\begin{aligned}F: \left(0; -1 + \frac{5}{2}\right) &= \left(0; \frac{3}{2}\right) & \quad \ell: y - k - p \\ & & \quad y = -1 - \frac{5}{2} \\ & & \quad 2y = -2 - 5 \\ & & \quad 2y + 7 = 0\end{aligned}$$

d)  $2x^2 - 12x + 3y - 9 = 0$

$$2x^2 - 12x = -3y + 9$$

$$2(x^2 - 6x + 9) = -3y + 9 + 18$$

$$2(x - 3)^2 = -3y + 27$$

$$(x - 3)^2 = -\frac{3}{2}(y - 9)$$

luego  $4p = \frac{3}{2}$ , de donde  $p = \frac{3}{8}$  y  $V(3;9)$ .

El eje de la parábola es paralelo al eje "y" y esta abre hacia abajo, luego:

$$F: \left[3; 9 - \frac{3}{8}\right] = \left[3; \frac{69}{8}\right] = (3; 8,6) \quad ; \quad \begin{aligned} \zeta: y &= k + p \\ y &= 9 + \frac{3}{8} \\ 8y &= 72 + 3 \\ 8y - 75 &= 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

#### Ejemplo 4

Determina los puntos de intersección entre las curvas:

a)  $y^2 - 4y - 8x + 12 = 0$  ,  $y = x - 5$

b)  $y^2 = 4x$  ,  $x^2 + y^2 - 6x - 6 = 0$

Resolución

a) Para obtener los puntos de intersección resolvamos el sistema formado por las ecuaciones de las dos curvas:

$$\begin{cases} y^2 - 4y - 8x + 12 = 0 & (1) \\ y = x - 5 & (2) \end{cases}$$

Sustituyendo (2) en (1) se obtiene:

$$(x - 5)^2 - 4(x - 5) - 8x + 12 = 0$$

que es equivalente a  $x^2 - 22x + 57 = 0$

cuyas soluciones son:  $x_1 = 3$  y  $x_2 = 19$

Sustituyendo estos valores en (2) se obtiene:

para  $x_1 = 3$  ,  $y_1 = 3 - 5 = -2$

para  $x_2 = 19$  ,  $y_2 = 3 - 19 = -16$

por lo que la recta interseca a la parábola en los puntos  $(3; -2)$  y  $(19; -16)$ .

b) Resolvamos el sistema  $\begin{cases} y^2 = 4x & (3) \\ x^2 + y^2 - 6x - 6 = 0 & (4) \end{cases}$

Sustituyendo (3) en (4) se obtiene la ecuación:

$$x^2 - 2x - 6 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 24}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{2} = 1 \pm \sqrt{7} \quad \text{de donde:}$$

$$x_1 = 3,65 \quad \text{y} \quad x_2 = -1,65$$

sustituyendo los valores de  $x$  en (3) se obtiene:

$$\text{para } x_1 = 3,65 \quad , \quad y_1 = \pm \sqrt{4 \cdot 3,65} = \pm 3,82$$

$$\text{para } x_2 = -1,65 \text{ no hay solución pues } y^2 > 0,$$

luego la parábola y la circunferencia se cortan en los puntos  $(3,65; 3,82)$  y  $(3,65; -3,82)$  ■

### Ejercicios (epígrafe 2)

1. Escribe la ecuación de una parábola si se sabe que:
  - a)  $V(-1;2)$  ,  $F(3;2)$
  - b)  $V(0;3)$  ,  $t: y = 5$
  - c)  $F(3;0)$  ,  $t: x + 3 = 0$
  - d)  $V(0;0)$  ,  $p = 5$
  - e)  $F(-4;3)$  ,  $t: x = 0$
  - f)  $V(4;-1)$ , eje:  $x - 4 = 0$  y pasa por el punto  $(3;-3)$
2. Dadas las siguientes ecuaciones, investiga si representan una parábola y en caso positivo, determina las coordenadas de su vértice y foco y la ecuación de la directriz:
  - a)  $y^2 - 20x = 0$
  - b)  $x^2 + 3y = 0$
  - c)  $y^2 - 8x - 6y + 9 = 0$
  - d)  $x^2 - 6x + 4y - 3 = 0$
  - e)  $3x^2 + 18x - 4y + 27 = 0$
  - f)  $y^2 - 8x + 32 = 0$
  - g)  $x^2 + y^2 + 4y = 0$
  - h)  $x^2 - 5x - 3y - 8 = 0$
3. Escribe la ecuación de la parábola que pasa por el origen de coordenadas y es simétrica respecto al eje de ordenadas, si las coordenadas del foco son  $F(0;-3)$ .
4. Determina la ecuación de la parábola  $y^2 = 4p(x - 3)$ , sabiendo que pasa por el punto  $(5;4)$ .
5. Calcula la distancia del punto de abscisa 7 de la parábola  $y^2 = 20x$  al foco de la misma.
6. Halla la ecuación de la parábola con vértice en la recta  $x + 2y + 5 = 0$  y que pasa por los puntos  $(-2;0)$  y  $(-2;-4)$ .
7. El centro de la circunferencia  $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$  es el vértice de una parábola cuyo eje tiene como ecuación  $y + 1 = 0$ . Si la parábola pasa por el punto  $D(4;3)$ 
  - a) halla su ecuación,
  - b) halla la ecuación de la directriz.
8. En un espejo cuya sección es una parábola, todo rayo de

luz que incida paralelo al eje de esta se refleja pasando por el foco. Un rayo de luz de ecuación  $y = -2$  cae sobre un espejo cuya sección plana es la parábola  $y^2 = 24x$  (fig. 3.12). Halla la ecuación de la recta a la cual pertenece el rayo reflejado.

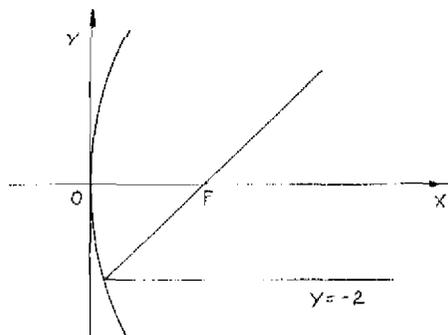


Fig. 3.12

9. Determina los puntos de intersección de la parábola y las rectas dadas.
- $x^2 = 5y$  ;  $2x - y - 5 = 0$
  - $(y - 4)^2 = 4(x + 1)$  ;  $2x - y + 6 = 0$
  - $x^2 + 6x - 8y + 25 = 0$  ;  $x - y + 3 = 0$
  - $y = (x + 5)^2$  ;  $x - 6y + 6 = 0$
  - $x^2 + 2x - 2y + 5 = 0$  ;  $x - 2y - 2 = 0$
  - $(y + 0,25)^2 = 9x$  ;  $y = 9x - 0,25$
10. Halla los puntos de intersección de las siguientes curvas.
- $y^2 = 4x$  ,  $(x - 1)^2 + y^2 = 25$
  - $y^2 - 6y - 6x - 3 = 0$  ,  $x^2 + y^2 - 8x - 6y - 11 = 0$
  - $(x + 1)^2 = -8y$  ,  $(x + 1)^2 + y^2 = 2$
  - $x^2 - 2x - 5y + 26 = 0$  ,  $x^2 - 2x + 5y + 6 = 0$
  - $x^2 - 2x - 5y - 4 = 0$  ,  $x^2 - 2x + 5y - 24 = 0$
11. Escribe la ecuación de la circunferencia cuyo centro coincide con el foco de la parábola  $y^2 = 8x$  y es tangente a la directriz de la parábola.
- 12\*. Una parábola contiene a los puntos de intersección de la recta  $y = x$  y la circunferencia  $x^2 + y^2 - 10y = 0$  y es simétrica respecto al eje de ordenadas. Escribe la ecuación de la parábola y de su directriz.
13. La cuerda de un puente colgante tiene la forma de una parábola (fig. 3.13). Halla la altura sobre el puente de los postes que sostienen la cuerda si, en la figura,  $|\overline{OB}| = 5,0$  ,  $|\overline{DA}| = 0,27$  y la longitud del puente es

de 60 u.

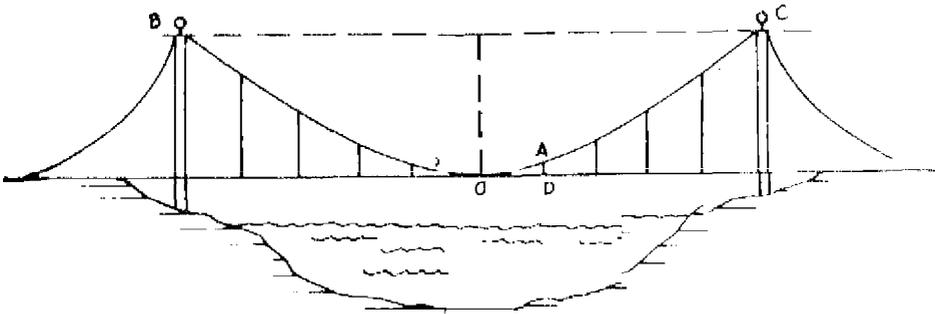


Fig. 5.13

14. Un punto se mueve de tal manera que la razón de sus distancias a la recta  $y - 4 = 0$  y al punto  $(3;2)$  es 1. Determina la ecuación de su lugar geométrico.
15. Un punto se mueve de tal forma que su distancia a la recta  $y = x$  es igual a su distancia al punto  $(3,-1)$ . Halla la ecuación de su lugar geométrico.

## ELIPSE

### 3. Ecuación cartesiana de la elipse

#### Definición 1

La elipse es el lugar geométrico de los puntos de un plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijas del mismo plano, llamados focos, es una constante mayor que la distancia entre las focos,

De la propia definición de la elipse surge la idea de cómo tratarla mediante un movimiento continuo. Para ello basta fijar dos alfileres en los puntos que serán los

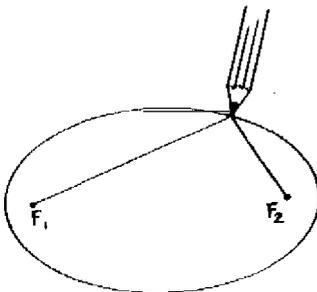


Fig. 3.14

tos, tomamos entonces un hilo inextensible con una longitud mayor que la distancia entre los focos y anudamos sus extremos en las alfileres, estirando el hilo con la punta de un lápiz (fig. 3.14) y moviendo este obtenemos la

curva. Este es el llamado método del jardinero.

La distancia entre los focos  $F_1$  y  $F_2$  de una elipse es la distancia focal y se denota  $2c$ ;  $c$  representa entonces la semidistancia focal.

La recta que contiene a los focos interseca a la elipse en dos puntos  $A_1, A_2$  (fig. 3.15) llamados vértices principales; el segmento  $\overline{A_1 A_2}$  es el eje mayor o principal y su longitud se denota  $2a$ ,

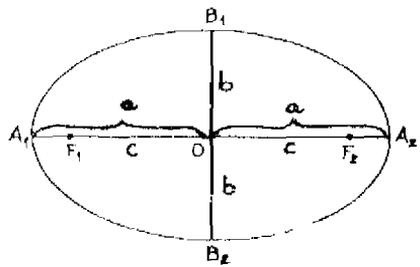


Fig. 3-15

entonces  $a$  representa la longitud del semieje mayor. Es fácil ver que la recta  $A_1 A_2$  es eje de simetría de la elipse.

La mediatriz del eje mayor interseca a la elipse en dos puntos  $B_1$  y  $B_2$  (fig. 3.15) llamados vértices no principales; el segmento  $\overline{B_1 B_2}$  es el eje menor y su longitud se denota, usualmente, por  $2b$ , donde  $b$  es la longitud del semieje menor. Es fácil ver que la recta  $B_1 B_2$  es otro eje de simetría de la elipse.

Resulta, pues, que la elipse tiene dos ejes de simetría que son perpendiculares, de esto se deduce que el punto de intersección de ambos ejes es centro de simetría de la elipse. Esto significa que la elipse, al igual que la circunferencia, es una curva con centro.

Observa que, aunque la elipse tiene un centro, sus puntos no equidistan de este, es decir, tiene cierta excentricidad que puede ser medida por la razón  $\frac{c}{a} < 1$ . En efecto si  $c = 0$  ambos focos coinciden con el centro y la elipse se convierte en una circunferencia  $\left[ \frac{c}{a} = 0 \right]$  y no tiene excentricidad. A medida que  $\frac{c}{a}$  crece la elipse se aparta más de la circunferencia (se aplasta más) y se hace más excéntrica. Al número  $e = \frac{c}{a}$  se le llama excentricidad de la elipse.

Resulta fácil comprobar (fig. 3.16), considerando los vértices principales, que la constante mencionada en la definición de la elipse es la longitud del eje mayor ( $2a$ ), es decir, que todo punto  $P$  de la elipse satis-

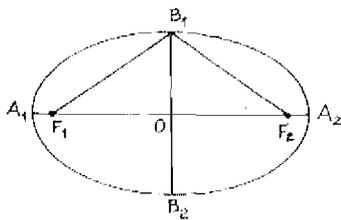


Fig. 3.16

face:  $|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2a$ .

Las longitudes  $a$ ,  $b$ , y  $c$  están relacionadas entre sí por:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (I)$$

como se comprueba enseguida considerando  $B_1$  como punto de la elipse (fig. 3.16):

$$|\overline{B_1 F_1}| + |\overline{B_1 F_2}| = 2a$$

pero  $|\overline{B_1 F_1}| = |\overline{B_1 F_2}|$  ya que  $B_1 O$  es mediatriz de  $F_1 F_2$

$$\text{Y } |\overline{B_1 F_1}| = a$$

y como el triángulo  $B_1 O F_1$  es rectángulo en  $O$ , resulta (I).

Teorema 1

La elipse de centro en el origen de coordenadas y semiejes  $a$  y  $b$  con eje mayor  $a$  sobre el eje  $x$  tiene por ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Demostración

Sea  $P(x; y)$  un punto cualquiera de la elipse (fig. 3.17). Como el centro es el origen de coordenadas, los focos son los puntos  $F_1(-c; 0)$  y  $F_2(c; 0)$ .

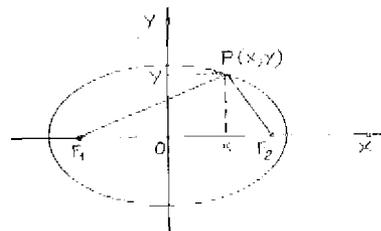


Fig. 3.17

De la definición de elipse tenemos:

$$|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2a, \text{ de donde}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

elevando al cuadrado ambos miembros se tiene:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

$$a^2 \left[ (x-c)^2 + y^2 \right] = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 - a^2(a^2 - c^2)$ , pero  $b^2 = a^2 - c^2$ , luego

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ , por tanta dividiendo por  $a^2b^2$  obtenemos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (I)$$

Recíprocamente, si un punta  $P_1(x_1; y_1)$  satisface la ecuación (I), es decir, cumple:

$$\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b} = 1 \quad \text{multiplicando por } a^2b^2 \text{ se tiene:}$$

$$b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2, \text{ sustituyendo } b^2 = a^2 - c^2 \text{ se tiene}$$

$(a^2 - c^2)x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2(a^2 - c^2)$ , restando  $2a^2cx_1$  en ambos miembros, efectuando las operaciones y agrupando convenientemente se llega a:  $a^2 \left[ (x_1 - c)^2 + y_1^2 \right] = (a^2 - cx_1)^2$

$$a\sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2} = |a^2 - cx_1|$$

para  $a^2 > cx_1$  luego  $a^2 - cx_1 > 0$ , por tanto,

$$a\sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2} = a^2 - cx_1$$

multiplicando por 4 esta ecuación y sumando en ambos miembros  $x_1^2 + c^2$  se obtiene:

$$4a\sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2} + x_1^2 + c^2 = 4a^2 - 4cx_1 + x_1^2 + c^2$$

que puede expresarse en la forma:

$$x_1^2 + 2cx_1 + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2} + x_1^2 - 2cx_1 + c^2$$

factorizando y sumando  $y_1^2$  se obtiene:

$$(x_1 + c)^2 + y_1^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2} + (x_1 - c)^2 + y_1^2$$

pero el miembro derecho es un trinomio cuadrado perfecto,

luego:

$$(x_1 + c)^2 + y_1^2 = \left[ 2a - \sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2} \right]^2$$

extrayendo raíz cuadrada se tiene:

$$\sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2} = 2a - \sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2}$$

a la que es equivalente:

$$\sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2} = 2a$$

luego el punto  $P_1$  satisface la condición geométrica y por tanto pertenece a la elipse. ■

La ecuación (I) es la ecuación de la elipse referida a su centro y ejes en los ejes coordenados y recibe el nombre de ecuación canónica de la elipse. En lo sucesivo supondremos siempre que los ejes son paralelos a los ejes de coordenadas.

### Ejemplo 1

Escribe la ecuación de la elipse que tiene centro en el origen de coordenadas, eje mayor paralelo al eje "x" y cumple:

a)  $a = 3$  ;  $b = 2$

b)  $2a = 8$  ;  $c = 3$

Resolución

a) Sustituyendo a y b en la ecuación canónica se tiene-

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

que es la ecuación de la elipse pedida.

b) Para escribir la ecuación de la elipse se deben conocer a y b. De la relación  $a^2 = b^2 + c^2$  se tiene:

$$b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 9 = 7$$

por lo que la ecuación pedida es:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1 \quad \blacksquare$$

Si la elipse tuviera su eje mayor sobre el eje "y" la ecuación quedaría:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (II)$$

Una elipse pueda tener su centro en cualquier punto del plano. Si el centro es el punto  $O(h;k)$  y sus ejes son pa-

rales a los ejes de coordenadas entonces las ecuaciones (I) y (II) se expresarían:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$$

respectivamente, las cuales se obtienen por traslación.

**Ejemplo 2**

Escribe la ecuación de la elipse que tiene centro  $O$  y cumple:

- a)  $O(3; -4)$ ,  $a = 5$ ,  $b = 3$       b)  $O(-2; 0)$ ,  $2b = 10$ ,  $F_2(2; 0)$

Resolución

a) Como no se conoce la posición de los ejes tendremos dos soluciones:

$$\frac{(x - 3)^2}{25} + \frac{(y + 4)^2}{9} = 1 \quad \text{o} \quad \frac{(x - 3)^2}{9} + \frac{(y + 4)^2}{25} = 1$$

(fig. 3.18)

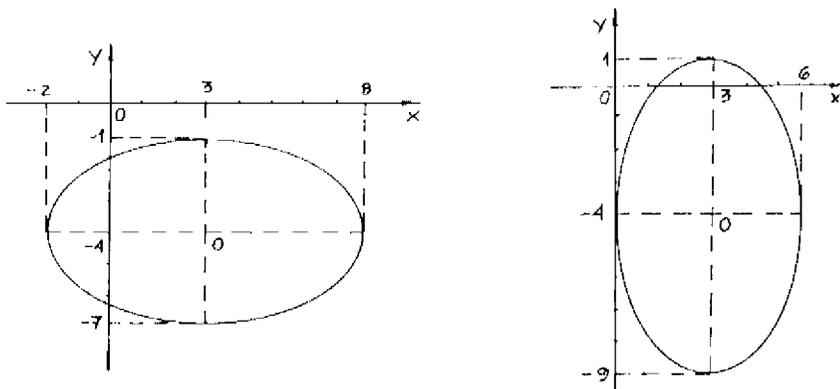


Fig. 3.18

b) Según la posición de  $O$  y  $F$  tenemos que el eje mayor de la elipse es paralelo al eje "x" (ambos tienen la misma y)

(fig. 3.19) y  $c = 4$

(distancia entre  $O$  y  $F_2$ )

debemos determinar el valor de  $a$ :

$$a^2 = b^2 + c^2 = 25 + 16 = 41$$

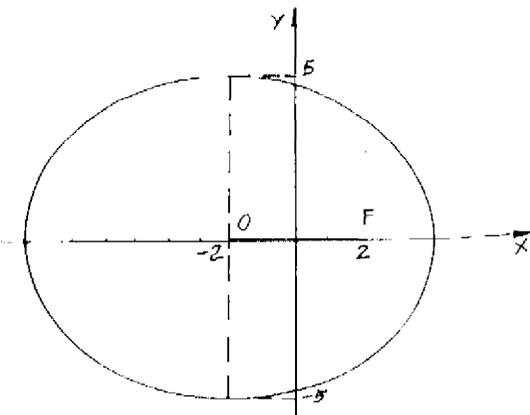


Fig. 3.19

luego la ecuación pedida es:  $\frac{(x+2)^2}{41} + \frac{y^2}{25} = 1$ . ■

**Ejemplo 3**

Representa en un sistema de coordenadas la elipse:

a)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

b)  $9x^2 + 16y^2 + 18x - 64y - 71 = 0$

Resolución

a) Según la ecuación de la elipse tenemos:

- . Su centro es  $O(0,0)$ .
- . Su eje mayor coincide con el eje  $x$ .
- .  $a = 5$  y  $b = 4$ .

Determinemos las coordenadas de los vértices.

Como el eje mayor está sobre el eje "x", la ordenada de  $A_1$  y  $A_2$  es cero y como  $a = 5$  y el centro está en el origen están a 5 unidades de este, es decir, uno tiene abscisa 5 y el otro -5, luego:  $A_1(-5;0)$  ,  $A_2(5;0)$ .

Para los vértices  $B_1$  y  $B_2$  observamos que el eje menor está en el eje "y", las abscisas de  $B_1$  y  $B_2$  son cero. Como  $b = 4$ , están a 4 unidades del origen, es decir, uno tiene ordenada 4 y el otro -4, luego:  $B_1(0;4)$  ,  $B_2(0;-4)$ .

Representando estos puntos y el centro en un sistema de coordenadas trazamos la elipse (fig. 3.20).

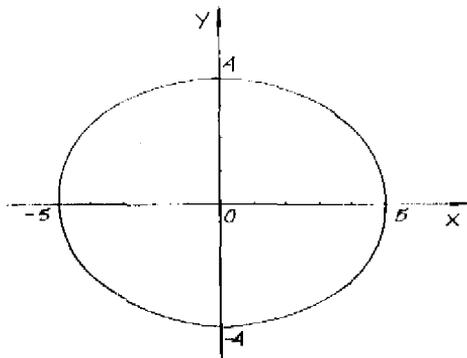


Fig. 3.20

b) En este caso no tenemos explícitamente las coordenadas del centro y los semiejes, por tanto, debemos expresar la ecuación en la forma conocida.

$$9x^2 + 16y^2 + 18x - 64y - 71 = 0$$

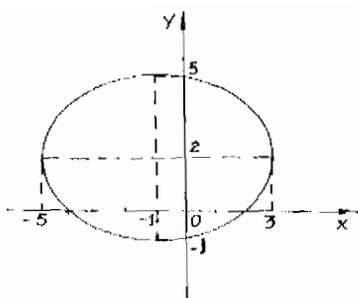
$$9(x^2 + 2x + 1) + 16(y^2 - 4y + 4) = 71 + 9 + 64$$

$$9(x + 1)^2 + 16(y - 2)^2 = 144$$

$$\frac{(x + 1)^2}{16} + \frac{(y - 2)^2}{9} = 1$$

luego según la ecuación tenemos que:  $O(-1;2)$ ,  $a = 4$ ,  $b = 3$  y su eje mayor es paralelo al eje  $x$ .

Para representar esta elipse procedemos como en el inciso anterior a partir del centro de la elipse. Observa que esto equivale a medir, a partir del centro, las longitudes de los semiejes en direcciones paralelas a los ejes coordenados (fig. 3.21). De esta figura se obtienen fácilmente las coordenadas de los vértices.



$$A_1: (-1 - 4; 2) = (-5; 2)$$

$$A_2: (-1 + 4; 2) = (3; 2)$$

$$B_1: (-1; 2 + 3) = (-1; 5)$$

$$B_2: (-1; 2 - 3) = (-1; -1)$$

Fig. 3.21

#### Ejemplo 4

Determina la ecuación de la elipse representada en la figura 3.22.

Resolución

Necesitamos, hallar las coordenadas del centro y los valores de  $a$  y  $b$ .

Del gráfico obtenemos que  $2c = 10$  (distancia focal), luego,  $c = 5$ . Para determinar las coordenadas del centro podemos hacerlo hallando el punto medio del segmento  $\overline{F_1 F_2}$  o simplemente, como la abscisa es la misma que la de los focos ( $h = 2$ ), determinamos la  $k$  ( $y$ ) contando  $c$  unidades ( $5$ ) hacia abajo a partir de  $F_1$  o hacia arriba a partir de

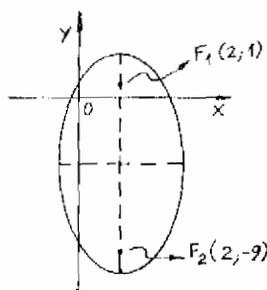


Fig. 3.22

$F_2$  y obtenemos  $k = -4$ , luego,  $O(2; -4)$ .

Ahora podemos determinar  $a$ , calculando la distancia entre  $O$  y  $A_1$ , teniendo que:  $a = |\overline{OA_1}| = |2 - (-4)| = 6$

Para determinar  $b$  utilizamos:  $a^2 = b^2 + c^2$  de donde

$$36 = b^2 + 25$$

$$b^2 = 11$$

Como el eje mayor es paralelo al eje  $y$ , la ecuación es:

$$\frac{(x - 2)^2}{11} + \frac{(y + 4)^2}{36} = 1 \quad \blacksquare$$

También se puede investigar si una curva cualquiera y una elipse se intersecan o no.

### Ejemplo 5

Halla los puntos de intersección de la elipse  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

y las curvas:

a)  $3x - 5y + 15 = 0$       b)  $x^2 + y^2 = 16$       c)  $y^2 = 8x$

Resolución

Para determinar los puntos de intersección formemos un sistema con la ecuación de la elipse y la recta.

$$a) \begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 & (1) \\ 3x - 5y + 15 = 0 & (2) \end{cases}$$

Despejando una variable en (2) se tiene:

$$y = \frac{3}{5}x + 3 \quad (3)$$

sustituyendo en (1) obtenemos:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{\left(\frac{3}{5}x + 3\right)^2}{9} = 1$$

$$9x^2 + 25\left(\frac{3}{5}x + 3\right)^2 = 225$$

de donde se obtiene la ecuación:  $x^2 + 5x = 0$ ,

la cual tiene solución:  $x_1 = 0$ ;  $x = -5$ ,

luego sustituyendo en (3) se tiene:

$$\text{para } x_1 = 0 \quad ; \quad y_1 = 3;$$

$$\text{para } x_2 = -5 \quad ; \quad y_2 = -3 + 3 = 0$$

por lo que la recta interseca a la elipse en los puntos  $P_1(0;3)$  y  $P_2(-5;0)$ , decimos que la recta es secante a la elipse.

$$b) \begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 & (1) \\ x^2 + y^2 = 16 & (2) \end{cases}$$

Despejando  $x^2$  en (2), sustituyendo en (1) y eliminando denominadores se obtiene:  $9(16 - y^2) + 25y^2 = 225$

la cual es equivalente a:  $16y^2 = 81$ ,

cuyas soluciones son:  $y_1 = \frac{9}{4}$  y  $y_2 = -\frac{9}{4}$

sustituyendo estos valores en (2) se tiene:

para  $y_1 = \frac{9}{4}$ ,  $x_1 = \pm \frac{5\sqrt{7}}{4} = \pm 3,31$ ; para  $y_2 = -\frac{9}{4}$ ,  $x_2 = \pm 3,31$

luego los puntos de intersección son:

$(3,31; 2,25)$ ,  $(-3,31; 2,25)$ ,  $(3,31; -2,25)$ ,  $(-3,31; -2,25)$

$$c) \begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 & (1) \\ y^2 = 8x & (2) \end{cases}$$

Sustituyendo (2) en (1) y eliminando denominadores se obtiene la ecuación:  $9x^2 + 25(8x) = 225$ ,

que es equivalente a:  $9x^2 + 200x - 225 = 0$

Aplicando la fórmula de resolución de la ecuación de segundo grado, se obtienen las soluciones:

$$x_1 = 1,07 \quad \text{y} \quad x_2 = -23,3$$

Sustituyendo en (2) se tiene:

para  $x_1 = 1,07$ ,  $y_1^2 = 8(1,07) = 8,56$

$$y_1 = \pm 2,93$$

para  $x_2 = -23,3$  no hay solución pues  $y^2 > 0$ ,

luego, los puntos de intersección son:

$$(1,07; 2,93) \text{ y } (1,07; -2,93) \quad \blacksquare$$

#### Ejemplo 6

La Tierra tiene una trayectoria elíptica alrededor del Sol que se encuentra en uno de sus focos. Sabiendo que el semieje mayor de esa elipse mide  $1,485 \cdot 10^8$  km y que la excentricidad es  $\frac{1}{62}$ , halla las distancias máxima y mínima al Sol.

Resolución

$\overline{A_1 F_2}$ : mayor distancia de la Tierra al Sol.

$\overline{A_2 F_2}$ : menor distancia de la Tierra al Sol.

$$\overline{A_1 F_2} = a + c \quad ; \quad \overline{A_2 F_2} = a - c$$

(fig. 3.23).

Debemos calcular  $c$

$$e = \frac{c}{a} \quad , \quad \text{luego,}$$

$$c = e \cdot a = \frac{1}{62} \cdot 1,485 \cdot 10^8 = 2,395 \cdot 10^6$$

entonces

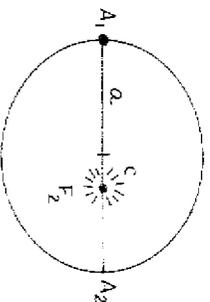


Fig. 3.23

$$\begin{aligned} \overline{A_1 F_2} &= 1,485 \cdot 10^8 + 2,395 \cdot 10^6 = 148,5 \cdot 10^6 + 2,395 \cdot 10^6 \\ &= 1,509 \cdot 10^8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{A_2 F_2} &= 1,485 \cdot 10^8 - 2,395 \cdot 10^6 = 148,5 \cdot 10^6 - 2,395 \cdot 10^6 \\ &= 1,461 \cdot 10^8 \end{aligned}$$

Respuesta: La mayor y menor distancia de la Tierra al Sol son respectivamente  $1,509 \cdot 10^8$  y  $1,461 \cdot 10^8$ . ■

Ejercicios (epigrafe 3)

1. Halla la ecuación de la elipse con eje mayor paralelo al eje  $x$ , sabiendo que:

a)  $a = 5$ ,  $b = 2$  y  $O(3;1)$

b)  $2a = 10$ ,  $2c = 8$  y  $O(-1;0)$

c)  $2b = 24$ ,  $2c = 10$  y  $O(0;0)$

d)  $2c = 3$ ,  $e = \frac{3}{5}$  y  $O(-4;2)$

e)  $2a = 20$ ,  $e = \frac{3}{5}$  y  $O(2;2)$

f)  $e = \frac{1}{2}$  y  $O(3;2)$

g)  $c = \sqrt{3}$ ,  $e = \frac{2\sqrt{3}}{9}$  y  $O(0;1)$

h)  $2a = 10$ ,  $c = 7$  y  $O(3;-5)$

2. Halla la ecuación de la elipse con eje mayor paralelo al eje  $y$ , sabiendo que:

a)  $a = 7$ ,  $b = 2$  y  $O(0;0)$

b)  $2a = 10$ ,  $2c = 8$  y  $O(2;3)$

c)  $2c = 12$ ,  $e = \frac{12}{13}$  y  $O(5;0)$

d)  $2a = 18$ ,  $e = \frac{1}{2}$  y  $O(-6;-3)$

e)  $2b = 16$ ,  $e = \frac{3}{5}$  y  $O(0;-4)$

f)  $b = \sqrt{3}$ ,  $e = \frac{2}{5}$  y  $O(-1;2)$

- g)  $c = 1,5$  ,  $e = \frac{3}{4}$  y  $O(0;0)$
- h)  $a = 3$  ,  $b = 2$  ,  $c = 4$  y  $O(-3;2)$
3. Escribe la ecuación de la elipse que cumple:
- a)  $F_1(-3;0)$  ,  $F_2(3;0)$  y  $a = 4$
- b)  $O(5;3)$  ,  $B_2(5;0)$  y  $A_1(-1;3)$
- c)  $B_1(6;8)$  ,  $B_2(6;-2)$  y  $A_1(0;3)$
- d)  $O(4;8)$  ,  $B_2(4;4)$  y  $e = \frac{1}{2}$
- e)  $A_1(5;4)$  ,  $A_2(5;-3)$  y  $e = \frac{2}{3}$
- f)  $A_1(-4;2)$  ,  $F_1(-6;2)$  y  $O(-2;2)$
4. Determina centra, semiejes, vértices, focos y excentricidad de las siguientes elipses:
- a)  $x^2 + 4y^2 = 25$
- b)  $4x^2 + 9y^2 + 8x - 18y - 23 = 0$
- c)  $x^2 + 4y^2 + 4x - 36 = 0$
- d)  $10x^2 + 20y^2 + 60x - 20y - 105 = 0$
- e)  $3x^2 + y^2 + 2y - 11 = 0$
- f)  $18x^2 + 8y^2 + 72x + 16y - 64 = 0$
- g)  $x^2 + 4y^2 - 24y + 48 = 0$
- h)  $2x^2 + 3y^2 - 16x + by + 29 = 0$
- i)  $2x^2 - 4xy + 8y^2 + 7 = 0$
5. Representa en un sistema de coordenadas las siguientes elipses:
- a)  $9x^2 + 16y^2 = 144$
- b)  $16x^2 + 9y^2 - 32x + 18y + 72 = 0$
- c)  $3x^2 + 4y^2 + 12x - 8y - 32 = 0$
- d)  $16x^2 + 4y^2 + 32x - 48 = 0$
- e)  $x^2 + 4y^2 + 10x - 8y + 37 = 0$
- f)  $9x^2 + y^2 - 8y + 7 = 0$
- g)  $3x^2 + 5y^2 - 30x + 10y + 65 = 0$
6. Dados los gráficos de las siguientes elipses, obtén su ecuación (fig. 3.24).

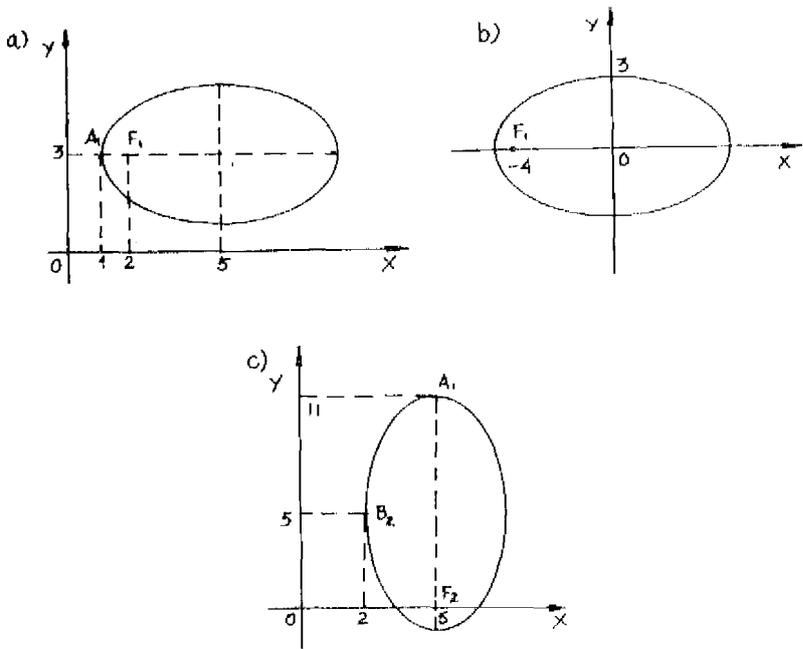


Fig. 3.24

7. Halla en la elipse  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$  los puntos de esta que cumplen:
- las abscisas son:  $-3; 1; 2$ ,
  - las ordenadas son:  $2; 1; -1$ .
8. Determina cuáles de los puntos  $C_1(-2; 3)$ ,  $C_2(2; -2)$ ,  $C_3(2; -4)$ ,  $C_4(-1; 3)$ ,  $C_5(-4; -3)$ ,  $C_6(3; -1)$  están en la elipse  $8x^2 + 5y^2 = 77$ .
9. Halla la ecuación de la circunferencia que tiene centro en el foco  $F_1$  de la elipse  $9x^2 + 25y^2 - 100y - 125 = 0$  y de radio  $r = \frac{c}{2}$ .
10. Calcula el área de 2 cuadrilátero que tiene dos vértices en los focos de la elipse  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  y los otras dos coinciden con las extremos del eje menor.
- 11\*. Encuentra la ecuación y excentricidad de una elipse sabiendo que uno de sus vértices es el punto  $(0; -7)$ , que su centro está en el origen y que pasa por el punto  $(\sqrt{5}; \frac{14}{3})$ .

- 17\*. Halla la ecuación de una elipse con centro  $(1;2)$ , uno de los focos en  $(6;2)$  y que pasa por el punto  $(4;6)$ .
13. Determina la ecuación de una elipse con centro en el punto  $(-3;2)$  y tangente a los ejes coordenados.
14. Determina los puntos de intersección de la elipse y la recta dadas:
- $\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$  ;  $y = x$
  - $4(x-3)^2 + 9(y+2)^2 = 36$  ;  $2x - 3y - 6 = 0$
  - $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{13} = 1$  ;  $y = x + 7$
  - $4x^2 + 16(y-3)^2 = 64$  ;  $y = \frac{1}{2}x - 5$
  - $\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$  ;  $3x - 4y = 0$
  - $\frac{(x-2)^2}{4} + (y-2)^2 = 1$  ;  $x - 2y + 4 = 0$
  - $16x^2 + 36y^2 = 576$  ;  $y = \frac{1}{2}x - 5$
  - $16(x-4)^2 + 36(y-2)^2 = 576$  ;  $x - 2y - 10 = 0$
  - $9x^2 + 16y^2 - 160y + 256 = 0$  ;  $y = \frac{3}{4}x + 2$
15. ¿Para qué valores de  $n$  la recta  $y = n - x$  es tangente, secante o exterior a la elipse  $5x^2 + 20y^2 = 100$ ?
16. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto  $(3;1)$  es siempre igual a la mitad de su distancia al eje  $y$ . Halla la ecuación de su lugar geométrico.
17. Un satélite artificial de la Tierra está a una distancia mínima de la superficie terrestre de  $1,87 \cdot 10^7$  km y una máxima de  $1,39 \cdot 10^8$  km. Si el radio de la Tierra es  $6,29 \cdot 10^3$  km, ¿cuál es la excentricidad de la órbita?
18. Halla los puntos de intersección entre las curvas dadas.
- $3x^2 + y^2 = 21$  ,  $y^2 = 2x + 5$
  - $x^2 + 3y^2 = 12$  ,  $5x^2 + y^2 = 46$
  - $5x^2 + 4y^2 = 20$  ,  $4x^2 + 5y^2 = 20$
  - $6(x-1)^2 + 8y^2 = 48$  ,  $y^2 = x$

# HIPÉRBOLA

## 4. Ecuación cartesiana de la hipérbola

### Definición 1

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos de un plano tales que el módulo de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del mismo plano, llamados focos, es una constante menor que la distancia entre los focos.

La figura 3.25 representa una hipérbola.  $F_1$  y  $F_2$  son los focos, la distancia entre ellos es la **distancia focal** y se denota por  $2c$ ,  $c$  representa la **semidistancia focal**. La recta que contiene a

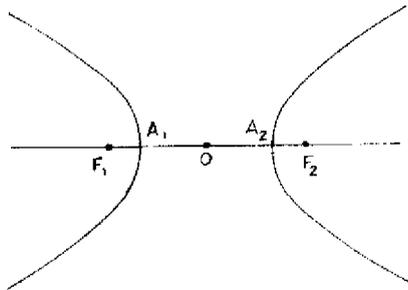


Fig. 3.25

los focos interseca a la curva en los puntos  $A_1$  y  $A_2$  que son los **vértices** de la hipérbola. Al segmento  $\overline{A_1 A_2}$  lo llamamos **eje principal** y su longitud se denota  $2a$ ,  $a$  representa el **semieje principal**.

Al igual que en la elipse, el cociente  $e = \frac{c}{a}$  se llama **excentricidad** de la hipérbola, y de la propia definición se tiene que  $2c > 2a$ , entonces,  $c > a$  y por tanto  $e = \frac{c}{a} > 1$ .

La mediatriz del segmento  $\overline{A_1 A_2}$  es eje de simetría de la hipérbola (fig. 3.26), pero no la corta, es el **eje no principal**.

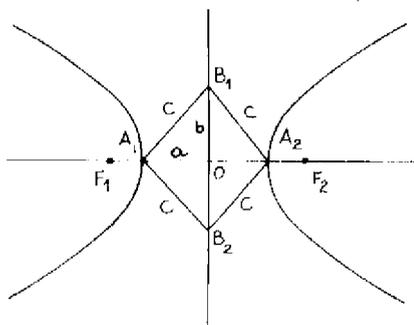


Fig. 3.26

Por analogía con la elipse determinamos los puntos  $B_1$  y  $B_2$  tales que:

$$|\overline{OB_1}| = |\overline{OB_2}| = \sqrt{c^2 - a^2}$$

y a esta longitud la denotamos por  $b$  y le llamamos **longitud del semieje no principal**.

En general se cumple que:  $b^2 = c^2 - a^2$

Resulta fácil comprobar, considerando los vértices, que la constante mencionada en la definición 1 es la longitud del eje principal (2a), es decir, que todo punto de la hipérbola satisface:

$$\left| |\overline{PF}_1| - |\overline{PF}_2| \right| = 2a$$

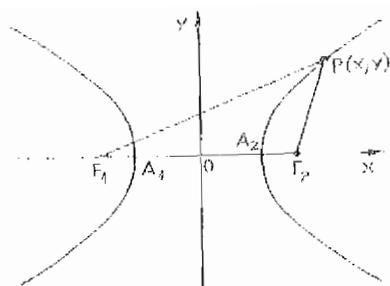
Teorema 1

La hipérbola de centro en el origen de coordenadas y semiejes a y b con eje principal en el eje x, tiene por ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Demostración

En la figura 3.27 tenemos que P(x;y) es un punto cualquiera de la hipérbola. Como el centro es el origen de co-



ordenadas los focos son los puntos  $F_1(-c;0)$  y  $F_2(c;0)$ .

De la definición de hipérbola tenemos:

$$\left| |\overline{PF}_1| - |\overline{PF}_2| \right| = 2a$$

(condición geométrica),

Fig. 3.27

de donde:

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2$$

$$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2 \left[ (x-c)^2 + y^2 \right]$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\text{porque } c^2 - a^2 = b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (I)$$

Recíprocamente, se puede demostrar que si  $P_1(x_1; y_1)$  es un punto cualquiera que satisface la ecuación (I), entonces también  $P_1(x_1; y_1)$  satisface la condición geométrica por tanto este punto está sobre la hipérbola, luego la ecuación (I) es la ecuación de la hipérbola. ■

La ecuación (I) es la ecuación de la hipérbola referida a su centro y ejes, y recibe el nombre de ecuación canónica de la hipérbola.

### Ejemplo 1

Escribe la ecuación de la hipérbola que tiene centro en el origen de coordenadas. eje principal sobre el eje "x" y cumple: a)  $a = 3$ ,  $b = 2$       b)  $2a = 6$ ,  $c = 5$

Resolución

a) Sustituyendo a y b en la ecuación canónica se tiene:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

que es la ecuación de la hipérbola pedida.

b) Para escribir la ecuación de la hipérbola se deben conocer a y b, luego, como conocemos a y c tenemos:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 9 = 16$$

por lo que la ecuación pedida es:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \quad \blacksquare$$

Si la hipérbola tuviera su eje principal sobre el eje "y", la ecuación quedaría:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (II)$$

El centro de la hipérbola puede estar en cualquier punto  $O(h; k)$ , si sus ejes son paralelos a los ejes coordenados, entonces las ecuaciones (I) y (II) se expresan:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

respectivamente, las cuales se obtienen por traslación.

Observa que el cuadrado del eje principal de la hipérbola siempre se encuentra en el denominador de la variable precedida del signo positivo (es el único para el que se obtiene intersección), es decir, que el eje principal es paralelo al eje correspondiente a esa variable.

### Ejemplo 2

Escribe la ecuación de la hipérbola que tiene centro  $O$  y cumple:

- a)  $O(3; -4)$ ,  $a = 4$ ,  $b = 3$       b)  $O(6; 1)$ ,  $2b = 10$ ,  $F_2(0; 1)$

Resolución

- a) Como no se conoce la posición de los ejes tendremos dos soluciones:

$$\frac{(x - 3)^2}{16} - \frac{(y + 4)^2}{9} = 1 \quad \text{ó} \quad \frac{(y + 4)^2}{16} - \frac{(x - 3)^2}{9} = 1$$

- b) Según la posición de  $O$  y  $F_2$  tenemos que el eje principal de la hipérbola es paralela al eje  $x$  (ambos puntos tienen la misma  $y$ ) y  $c = 6$  (distancia entre  $O$  y  $F_2$ ) (fig. 3.28), debemos deter-

minar el valor de  $a$ :

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 = c^2 - b^2 = 36 - 25 = 11$$

luego la ecuación pedida es:

$$\frac{(x - 6)^2}{11} - \frac{(y - 1)^2}{25} = 1 \quad \blacksquare$$

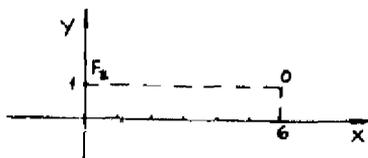


Fig. 3.28

Observa que la hipérbola no es una curva cerrada y limitada como la elipse, para trazarla es necesaria tener idea del transcurso de la curva a grandes distancias del centro. Se puede comprobar que para valores muy grandes de  $|x|$ , (fig. 3.29) la curva se aproxima

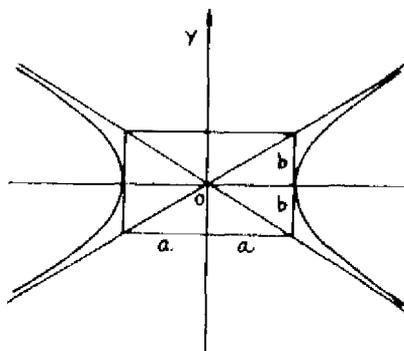


Fig. 3-79

a las rectas que contienen las diagonales del rectángulo de lados paralelos a los ejes coordenadas, centro en el origen de coordenadas y longitud de los lados  $2a$  y  $2b$ .

Estas rectas tienen ecuaciones  $y = \pm \frac{b}{a} x$  y se llaman asíntotas de la hipérbola. Si el eje principal es paralelo al eje "y" las ecuaciones son de la forma  $y = \pm \frac{a}{b} x$ .

**Ejemplo 3**

Representa en un sistema de coordenadas las siguientes hipérbola y escribe las ecuaciones de sus asíntotas.

a)  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

b)  $\frac{(y - 2)^2}{4} - \frac{(x - 3)^2}{9} = 1$

Resolución

a)  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

Construyamos el rectángulo de lados  $2a$  y  $2b$ , como la variable  $x$  está precedida del signo positivo, el eje principal es paralelo al eje  $x$ , además,  $a^2 = 16$  y  $b^2 = 9$ , por lo que  $a = 4$  y  $b = 3$ , luego a partir del centro de la hipérbola  $(0;0)$  (fig. 3.30) situamos 4 unidades a la izquierda y 4 a la derecha obteniendo los vértices  $A_1$  y  $A_2$  a partir de estos situamos  $b$  unidades (3) hacia arriba y hacia abajo obteniendo así el rectángulo deseado.

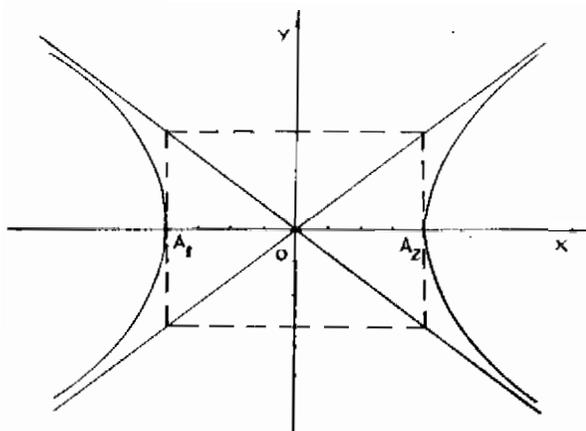


Fig. 3.30

Trazando las asíntotas, obtenemos un gráfico aproximado de la curva pedida.

Para hallar las ecuaciones de las asíntotas tenemos que  $m = \pm \frac{3}{4}$  y como pasa por el (0;0) las ecuaciones serían:

$$y = \frac{3}{4}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{3}{4}x$$

b) 
$$\frac{(y - 2)^2}{4} - \frac{(x - 3)^2}{9} = 1$$

En este caso, el centro de la hipérbola es el punto (3;2) y el eje principal es **paralelo al eje "y"** (variable positiva) luego  $a^2 = 4$  y  $b^2 = 9$  por lo que  $a = 2$  y  $b = 3$ .

Construyamos el rectángulo correspondiente tomando el eje principal (2a) paralelo al eje y, y b paralelo al eje "x" (fig. 3.31), tracemos las asíntotas y por ende la curva pedida.

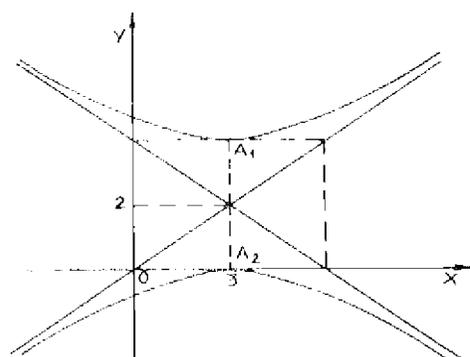


Fig. 3.31

Para hallar las ecuaciones de las asíntotas tenemos que  $m = \pm \frac{2}{3}$  y pasan por el punto (3;2) entonces:

$$\pm \frac{2}{3} = \frac{y - 2}{x - 3}$$

$$\pm 2x \mp 6 = 3y - 6$$

$$2x - 6 = 3y - 6 \quad \text{y} \quad -2x + 6 = 3y - 6$$

$$2x - 3y = 0 \quad \text{y} \quad 2x + 3y - 12 = 0 \quad \blacksquare$$

Desde secundaria básica conoces la función  $y = \frac{k}{x}$  y le llamas hipérbola a su gráfica, quizás te sorprenda que ahora demos ese nombre a una curva obtenida de otra forma.

Se puede demostrar (aunque aquí no lo haremos) que la gráfica de  $y = \frac{k}{x}$  es en realidad una hipérbola, la diferencia entre las ecuaciones es que se utiliza un sistema de referencia diferente.

En efecto (fig.3.32 a), la gráfica de  $y = \frac{k}{x}$  es una hi-

hipérbola para sus asíntotas son los ejes de coordenadas  $x$  y  $y$ . por tanto, perpendiculares. Si observas la hipérbola  $x^2 - y^2 = 1$  (fig. 3.32 b), puedes apreciar que es la misma anterior pero rotada: ahora las asíntotas son las bisectrices de los cuadrantes, que también son perpendiculares.

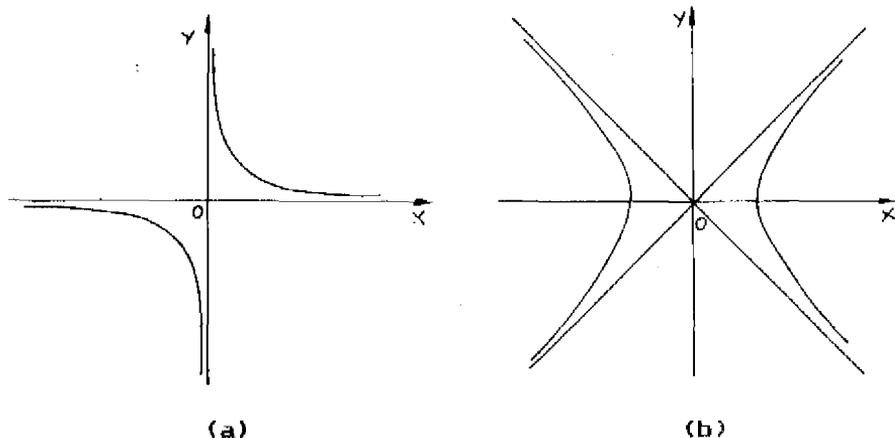


Fig. 3.32

Las hipérbolas cuyas asíntotas son perpendiculares se llaman equilateras, porque en este caso (como puedes comprobar en el ejemplo anterior)  $a = b$ .

**Ejemplo 4**

Halla los puntos de intersección de la hipérbola

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

con las curvas: a)  $5x - 4y - 16 = 0$       b)  $y^2 - x + 10 = 0$

Resolución

Formemos los sistemas con las ecuaciones de la hipérbola y de la curva para determinar los puntos de intersección.

$$a) \begin{cases} \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 & (1) \\ 5x - 4y - 16 = 0 & (2) \end{cases}$$

Despejando en (2) una variable obtenemos:

$$y = \frac{5}{4} x - 4 \quad (3)$$

sustituyendo (3) en (1) se tiene:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{\left(\frac{5}{4}x - 4\right)^2}{9} = 1$$

$$9x^2 - 16\left(\frac{5}{4}x - 4\right)^2 = 144$$

de donde se obtiene la ecuación:

$$(x - 5)^2 = 0$$

de solución  $x = 5$

sustituyendo  $x = 5$  en (3) obtenemos:  $y = \frac{9}{4}$ ,

por tanto la recta interseca a la hipérbola en el punto

$$\left(5; \frac{9}{4}\right).$$

$$b) \begin{cases} \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 & (1) \\ y^2 - x + 10 = 0 & (2) \end{cases}$$

Despejemos una variable en (2):  $y^2 = x - 10$  (3)

sustituyendo (3) en (1) obtenemos:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{x - 10}{9} = 1$$

$9x^2 - 16(x - 10) = 144$  de donde se obtiene la ecuación:

$$9x^2 - 16x + 16 = 0$$

cuyo discriminante  $D = b^2 - 4ac = 256 - 576 = -320 < 0$

por lo que la hipérbola y la parábola no tienen puntos comunes. ■

### Ejercicios (epígrafe 41)

1. Halla la ecuación de la hipérbola con eje principal paralela al eje  $x$ , sabiendo que:

a)  $a = 8$ ,  $b = 2$  y  $O(1;3)$

b)  $2a = 6$ ,  $2c = 10$  y  $O(-2;0)$

c)  $2b = 10$ ,  $2c = 24$  y  $O(0;0)$

d)  $2c = 12$ ,  $e = \frac{3}{2}$  y  $O(-1;-2)$

e)  $2a = 6$ ,  $e = \frac{13}{12}$  y  $O(-5;3)$

f)  $2b = 8$ ,  $e = \frac{5}{3}$  y  $O(0;-5)$

g)  $2b = 10$ ,  $e = \frac{4}{3}$  y  $O(0;0)$

h)  $2a = \sqrt{5}$ ,  $e = \frac{\sqrt{7}}{2}$  y  $O(-4;1)$

2. Halla la ecuación de la hipérbola con eje principal pa-

paralelo al eje y sabiendo que:

- a)  $a = 9$ ,  $b = 4$  y  $O(0;0)$
- b)  $2a = 8$ ,  $2c = 10$  y  $O(1;2)$
- c)  $2c = 12$ ,  $e = \frac{6}{5}$  y  $O(3;0)$
- d)  $2a = 16$ ,  $e = \frac{5}{3}$  y  $O(-1;-3)$
- e)  $2b = 20$ ,  $c = 10\sqrt{2}$  y  $O(-4;8)$
- f)  $2b = 24$ ,  $e = \frac{5}{3}$  y  $O(0;-7)$
- g)  $2b = 12$ ,  $2a = 16$ ,  $e = \frac{5}{3}$  y  $O(-2,3)$
- h)  $2b = \sqrt{6}$ ,  $e = 2$  y  $O(-5;1)$

3. Escribe la ecuación de una hipérbola sabiendo que:

- a)  $O(0;0)$ ,  $F_1(-5;0)$ ,  $a = 2$
- b)  $O(0;0)$ ,  $A_1(0;3)$ ,  $F_1(0;5)$
- c)  $F_1(4;-2)$ ,  $F_2(4;-8)$ ,  $2a = 4$
- d)  $A_1(-6;3)$ ,  $A_2(1;3)$ ,  $F_1(-8;3)$
- e)  $A_1(1;-2)$ ,  $F_2(9;-2)$ ,  $O(3;-2)$
- f)  $F_1(-3;0)$ ,  $F_2(3;0)$ ,  $b = \sqrt{2}$
- g)  $F_1(2;0)$ ,  $A_1(2;2)$ ,  $O(2;-1)$
- h)  $O(-2;1)$ ,  $A_1(-5;1)$ ,  $2b = 5$

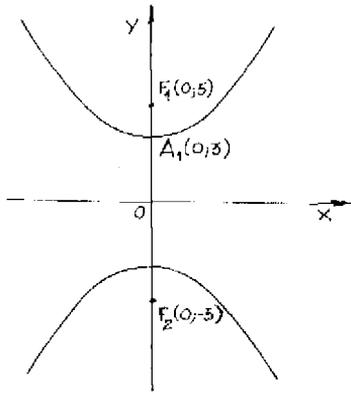
4. Determina centro, semieje, vértices, focos y excentricidad de las siguientes hipérbolas.

- a)  $x^2 - 9y^2 = 25$
- b)  $4y^2 - 9x^2 = 36$
- c)  $4x^2 - 9y^2 + 32x + 36y - 8 = 0$
- d)  $25x^2 - 4y^2 + 150x + 325 = 0$
- e)  $4x^2 - y^2 + 2y - 8 = 0$
- f)  $x^2 - y^2 - x + 4y = 0$
- g)  $x^2 - 2y^2 - xy + x - 2y = 0$
- h)  $16x^2 - 20y^2 - 20y - 75 = 0$
- i)  $x^2 - 4y^2 - 2x + 1 = 0$
- j)  $3x^2 - y^2 + 30x + 78 = 0$

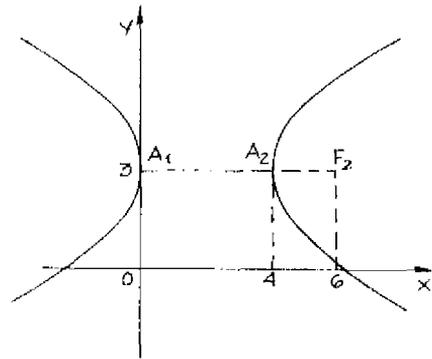
5. Representa en un sistema de coordenadas las siguientes hipérbolas:

- a)  $x^2 - y^2 = 16$
- b)  $4x^2 - 9y^2 - 24x - 36y - 36 = 0$
- c)  $x^2 - 4y^2 + 16y = 0$
- d)  $4x^2 - 20y^2 - 8x - 80y - 79 = 0$

6. Los siguientes gráficos representan hipérbolas. Escribe la ecuación correspondiente en cada caso (fig. 3.33).



(a)



(b)

Fig. 3.35

7. En la hipérbola cuya ecuación es  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$  halla los puntos que cumplen:
- Su abscisa es:  $-5; 8; 4$ .
  - Su ordenada es:  $3; -4; 7$ .
8. Determina cuáles de las siguientes puntos están en la hipérbola cuya ecuación es  $3x^2 - y^2 = 12$ :
- $P_1(4;6)$
  - $P_2(-1;\sqrt{5})$
  - $P_3(-3;\sqrt{6})$
  - $P_4(\sqrt{5};\sqrt{8})$
- 9\*. Escribe la ecuación de una hipérbola de centro en el origen y focos sobre el eje  $x$  si se sabe que pasa por el punto  $N[-5; \frac{16}{3}]$  y su distancia focal es igual a 10 unidades.
10. Los focos de una hipérbola coinciden con las focos de la elipse  $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$ . Escribe la ecuación de la hipérbola si su excentricidad es igual a 2.
- 11\*. Halla la ecuación de la hipérbola de centro en el origen, eje principal sobre el de ordenadas y que pasa por los puntos  $(4;6)$  y  $(1;-3)$ .
12. Las focos de una hipérbola son 1 o puntos  $(4;-2)$  y  $(4;-8)$  y la longitud de su eje principal es 4. Halla la ecuación de la hipérbola, las ecuaciones de sus asíntotas y la excentricidad.
13. Demuestra que la distancia de un foco de la hipérbola

$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$  a una asíntota es igual a  $b$ .

14. El punto  $P(10; -\sqrt{5})$  pertenece a la hipérbola  $x^2 - 4y^2 = 80$ .  
Halla las ecuaciones de las rectas que pasan por  $P$  y los focos de la hipérbola.
15. Por el foco izquierda de la hipérbola  $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{9} = 1$  se ha trazado una perpendicular a la recta que contiene los vértices. Determina la distancia de los focos a los puntos de intersección de esta perpendicular con la hipérbola.
16. Halla los puntos de intersección de la hipérbola y la curva que se dan a continuación.
- a)  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$  ;  $4x - 3y - 16 = 0$
- b)  $4x^2 - 9y^2 = 36$  ;  $2x - y + 1 = 0$
- c)  $x^2 - 4y^2 = 32$  ;  $3x + 2y - 16 = 0$
- d)  $x^2 - 4y^2 - 6x - 24y - 47 = 0$  ;  $x - 3y - 12 = 0$
- e)  $2x^2 - 5y^2 = 52$  ;  $3x^2 - 7y^2 = 80$
- f)  $4x^2 - 3y^2 = -12$  ;  $5x^2 + 2y^2 = 77$
- g)  $2x^2 + y^2 = 33$  ;  $x^2 - y^2 = 15$
- h)  $x^2 - 4y^2 - 6x + 5 = 0$  ;  $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$
17. Determina bajo qué condiciones las asíntotas de la hipérbola  $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$  son perpendiculares entre sí.
- 18\*. Demuestra que el producto de las distancias de cualquier punto de la hipérbola  $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$  a sus dos asíntotas es una cantidad constante e igual a  $\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$ .
19. Un punto se mueve en el plano de tal manera que su distancia a la recta  $y + 4 = 0$  es  $\frac{1}{2}$  de su distancia al punto  $(3; 2)$ . Halla la ecuación de su lugar geométrico.
20. La base de un triángulo es de longitud fija siendo sus extremos los puntos  $(3; 0)$  y  $(-3; 0)$ . Halla la ecuación del lugar geométrico determinado por el vértice opuesto si el producto de las pendientes de los lados variables es siempre igual a 4.
21. Dos de los vértices de un triángulo son los puntos

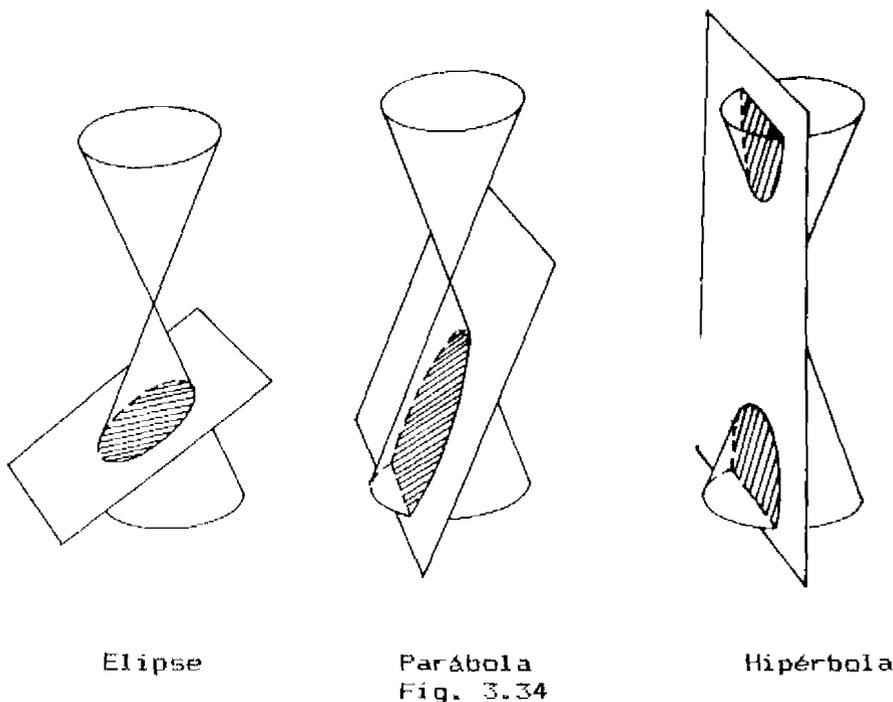
$A(2;0)$  y  $B(6;0)$ . Halla la ecuación del lugar geométrico determinado por el tercer vértice (C) si se mueve de tal manera que la diferencia entre las longitudes AC y BC es siempre igual a la mitad de la longitud del lado AB.

22. Se han situado tres puntos de escucha, A, B y C, de modo que A está situado a 700 m al norte de B, y C a 1500 m al este de B. El ruido de un cañonazo se escucha simultáneamente en A y B 2 s después de oírse en C. Determina la posición del cañón asumiendo que la velocidad del sonido es 340 m/s.

### 5\*. Secciones cónicas

Al estudiar las curvas de segundo grado has podido apreciar que existen semejanzas entre ellas y, además, reciben el nombre común de secciones cónicas.

Las semejanzas y el nombre genérico se deben a que tienen un origen común: son secciones planas de un cono circular recto (fig. 3.34).



Como se puede apreciar en la figura, si el ángulo de inclinación del plano ( $\alpha$ ) es menor que el ángulo de inclinación de las generatrices del cono ( $\beta$ ), es decir  $\alpha < \beta$ , la intersección es una elipse; si  $\alpha = \beta$  es una parábola y si  $\alpha > \beta$  una hipérbola, en este caso el plano corta a las dos hojas del cono y por esa la hipérbola tiene dos ramas, Teorema 1

Sean C un cono circular recto de vértice V y cuyas generatrices forman un ángulo  $\beta$  con el plano de la base, y  $\epsilon$  un plano con ángulo de inclinación  $\alpha$  respecta a la base del cono y que no contiene a V, entonces la intersección del plano y el cono es:

- a) una elipse si  $\alpha < \beta$ ,
- b) una parábola si  $\alpha = \beta$ ,
- c) una hipérbola si  $\alpha > \beta$ .

**Demostración**

Para realizar la demostración inscribimos en el cono esferas tangentes al plano  $\epsilon$ . Estas esferas reciben el nombre de esferas de Dandelin, en honor al matemático que las utilizó por primera vez en 1822.

al Si  $\alpha < \beta$  se inscriben dos esferas tangentes a  $\epsilon$  en dos puntos  $F_1$  y  $F_2$ . En la figura 3.35 se tiene:

$$\overline{PF} = \overline{PH} \quad \text{y} \quad \overline{PF}_2 = \overline{PH}_2 \quad \text{por ser tangentes desde un punto a una esfera.}$$

$$\text{luego} \quad \overline{PF}_1 + \overline{PF}_2 = \overline{PH}_1 + \overline{PH}_2 = \overline{H_1 H_2} = \overline{A_1 A_2} \quad \overline{H_1 H_2} \quad \text{constante.}$$

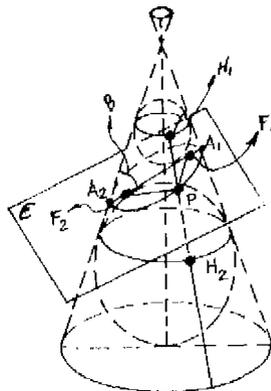


Fig. 3.35

b) Si  $\alpha = \beta$ , hay una sola esfera tangente en F al plana.

$\varepsilon$ . En la figura 3.36 se tiene:

$\varepsilon \cap \varepsilon_1 = l$  (directriz),  $\overline{PL} \perp l$ ,  $\overline{VD} \parallel \varepsilon$ , entonces

$$\overline{PA} = \overline{PF} \quad \text{por ser tangentes exteriores.}$$

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PL}} = \frac{\overline{VA}}{\overline{VD}} \quad \text{teorema de las transversales,}$$

$$\overline{PA} = \overline{PL}, \quad \text{pues } \overline{VA} = \overline{VD}.$$

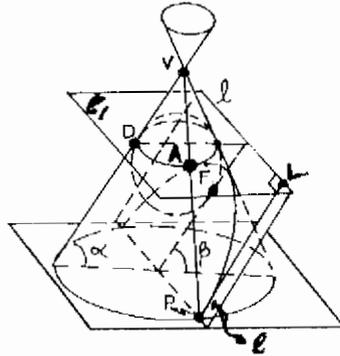


Fig. 3.36

El inciso c se demuestra como el inciso a utilizando la figura 3.37,

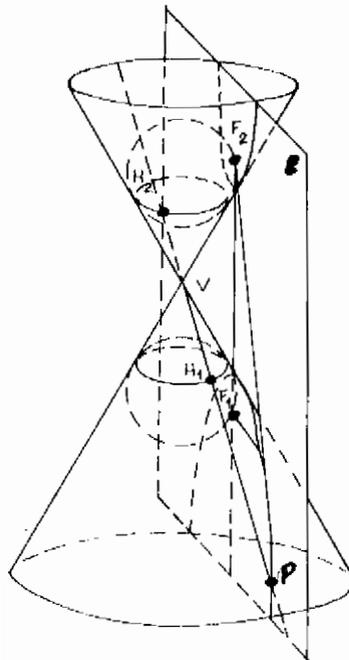


Fig. 3.37 ■

El teorema 1 muestra que las secciones cónicas tienen un origen común, el teorema 2 mostrará que pueden ser caracterizadas por una misma propiedad.

### Teorema 2

Una sección cónica es el lugar geométrico de los puntos de un plano que satisfacen que la razón de sus distancias a un punto fijo llamado foco y a una recta fija llamada directriz es una constante  $e$ . Si  $e < 1$  se trata de una elipse, si  $e = 1$ , de una parábola y si  $e > 1$ , de una hipérbola.  
 Para la elipse y la hipérbola,  $e = \frac{c}{a}$ .

### Demostración

Haremos la demostración para el caso de la elipse (para la parábola ya fue demostrado), el caso de la hipérbola se demuestra igual.

En la figura 3.38 se tiene que:

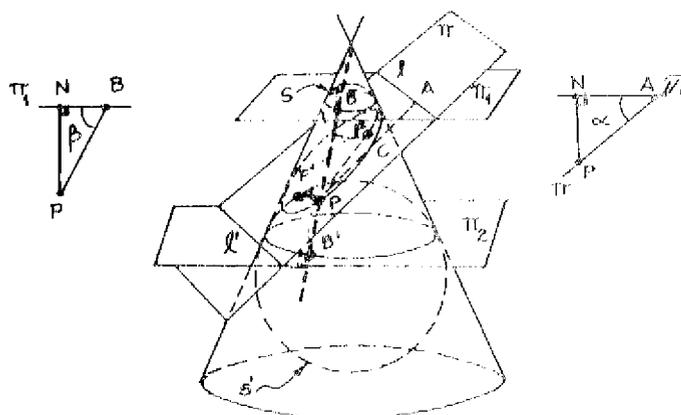


Fig. 3.38

$$\overline{PN} = \overline{PA} \operatorname{sen} \alpha = \overline{PB} \operatorname{sen} \beta$$

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta}, \quad \overline{PB} = \overline{PF}, \quad \text{luego} \quad \frac{\overline{PF}}{\overline{PA}} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta}$$

En la figura 3.39 se muestra una sección longitudinal del cono para el caso de la elipse. Como  $\overline{A_1 A_2}$  es la distancia entre los planos de tangencia de las esferas y el cono, de esta figura resulta:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} \quad \square$$

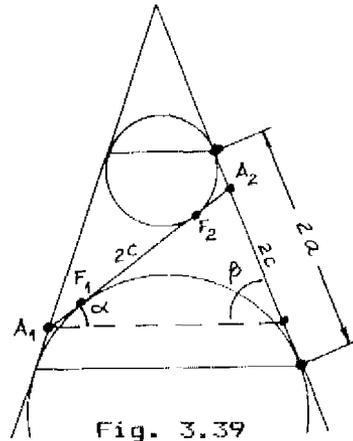


Fig. 3.39

Al igual que en la parábola, la distancia de la directriz al foco de una sección cónica la denotaremos  $2p$  y la llamaremos parámetro; se puede obtener una ecuación común para las secciones cónicas en función de ese parámetro y la excentricidad.

**Teorema 3**

Sean  $C$  una rama de sección cónica de excentricidad  $e$  y parámetro  $2p$ ,  $F$  un foco y  $l$  la directriz más próxima a ese foco. Denotemos por  $\rho$  la distancia de un punto de la curva al foco y por  $\varphi$  el ángulo formado por una semirrecta de origen en el foco que contiene al punto y el semieje de la cónica que corta a la directriz (fig. 3.42), entonces:

$$\rho = \frac{2ep}{1 + e \cos \varphi}$$

**Demostración (fig. 3.40)**

$$\frac{\rho}{d(P, l)} = e$$

$$d(P, l) = 2p - \rho \cos \varphi$$

$$\rho = e(2p - \rho \cos \varphi)$$

$$\rho(1 + e \cos \varphi) = 2ep$$

$$\rho = \frac{2ep}{1 + e \cos \varphi} \quad \blacksquare$$

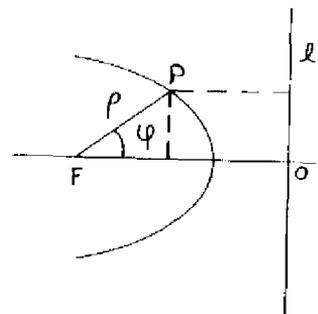


Fig. 3.40

En el caso de la hipérbola, esta ecuación corresponde a la rama asociada al foco dada, para la otra rama la ecuación sería:

$$\rho = \frac{-2ep}{1 - e \cos \varphi}$$

Esta es la llamada ecuación polar de la sección cónica.

**Ejemplo 1**

a) Identifica la sección cónica de ecuación polar:

$$\rho = \frac{144}{13 + 5 \cos \varphi}$$

b) Escribe la ecuación polar de la elipse que tiene foco  $F(2;1)$ , excentricidad  $e = \frac{1}{2}$  y cuya directriz tiene ecuación  $2x - 3y + 1 = 0$ .

Resolución

a) Llevamos la ecuación a la forma canónica.

$$\rho = \frac{\frac{144}{13}}{1 + \frac{5}{13} \cos \varphi}$$

luego  $e = \frac{5}{13} < 1$  y se trata de una elipse. Su parámetro

es  $\frac{144}{13} : \frac{5}{13} = \frac{144}{5}$

b)  $2p = d(F, l) = \frac{|2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 1|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$

y la ecuación es:  $\rho = \frac{\frac{2\sqrt{13}}{13}}{1 + \frac{1}{2} \cos \varphi} = \frac{4\sqrt{13}}{26 + 13 \cos \varphi}$  ■

A partir de la ecuación polar se puede obtener una ecuación cartesiana referida al vértice (el origen de coordenadas está en el vértice).

**Teorema 4**

La ecuación referida al vértice de una sección cónica es:  $y^2 = -4epx + (e^2 - 1)x^2$

En el caso de la hipérbola, la ecuación representa una rama. La demostración de este teorema se deja como ejercicio.

Si  $e = 1$  se obtiene la ecuación canónica de la parábola  $y^2 = 4px$ . Esta ecuación representa que el área del cuadrado construido sobre la ordenada es igual a la del rectángulo de base  $x$  y altura  $4p$ . De aquí se deriva el nombre, pues la voz griega *parabolé* (ἡ παραβολή) significa comparar o

poner al lado.

En el caso de la elipse  $e < 1$ , y el área del rectángulo es menor que la del cuadrado, hay un defecto, de ahí el nombre, pues la voz griega *elleipsis* (ηλλειψις) significa insuficiencia.

Para la hipérbola  $e > 1$ , y hay un "exceso de área", su nombre, se deriva de la voz griega *hyperbolé* (ὑπερβολή), que significa exceso.

Cuando  $e \neq 1$  resulta una cónica con centro, en este caso se puede probar que las ecuaciones de las directrices referidas al centro son:  $x = \pm \frac{a}{e}$  y que  $2p = \frac{b^2}{c}$

**Ejemplo 2**

Dada la hipérbola  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ , escribe la ecuación polar de una rama.

Resolución

Se tiene  $a = 4$ ,  $b = 3$ ,  $c = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ,  $e = \frac{5}{4}$

$p = \frac{b^2}{c} = \frac{9}{5}$  y la ecuación es:

$$\rho = \frac{\frac{5}{4} \cdot \frac{9}{5}}{1 + \frac{5}{4} \cos \varphi} = \frac{9}{4 + 5 \cos \varphi} \quad \blacksquare$$

Ejercicios (epígrafe 5)

1. Identifica al tipo de cónica y escribe la ecuación referida al centro.

a)  $\rho = \frac{12}{1 + \frac{2}{3} \cos \varphi}$

b)  $\rho = \frac{15}{6 + 9 \cos \varphi}$

c)  $\rho = \frac{10}{2 + 2 \cos \varphi}$

d)  $\rho = \frac{25}{4 + 20 \cos \varphi}$

d)  $\rho = \frac{16}{-4 - 3 \cos \varphi}$

e)  $\rho = \frac{10}{5 + 5 \cos \varphi}$

2. Escribe la ecuación polar y la ecuación referida al vértice de las cónicas.

a)  $5x^2 + 12y^2 + 10x - 48y - 5 = 0$

b)  $4x^2 - 6y^2 - 8x + 18y - 20 = 0$

c)  $2x^2 + 6x - 4y + 8 = 0$

d)  $9x^2 + 4y^2 - 27x - 16y + 2 = 0$

$$e) 9x^2 - 4y^2 - 27x - 16y + 2 = 0$$

$$f) 10y^2 + 30y - x = 0$$

$$g) x^2 + y^2 - 8x + 10y - 3 = 0$$

3. Dados la directriz, el foco y la excentricidad de una cónica escribe las ecuaciones: polar, canónica y referida al vértice de la misma.

a)  $x = 5$  ,  $F(6;0)$  y  $e = 1$

b)  $x = -1$  ,  $F(2;1)$  y  $e = 0,5$

c)  $x = 2$  ,  $F(5;4)$  y  $e = 2$

d)  $x = \frac{3}{4}$  ,  $F(2;5)$  y  $e = 12$

e)  $x = \frac{5\sqrt{2}}{3}$  ,  $F(3;4)$  y  $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. Demostrar que la curva dada por la ecuación:

$$\rho = \frac{c}{1 + a \cos \theta + b \sin \theta}$$

es una cónica. Clasificala.

5. Dados tres puntos de una cónica, donde la primera coordenada es  $\rho$  y la segunda es  $\varphi$  de la ecuación polar. Escribe sus ecuaciones polar y canónica.

a)  $(1;0)$  ,  $\left(\frac{9}{5}; \frac{\pi}{2}\right)$  y  $(9;\pi)$     b)  $\left(\frac{9}{5}; 2\pi\right)$  ,  $\left(\frac{9}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  y  $(-9;\pi)$

6. El principio de Cavalieri generalizada afirma que si dos regiones determinan sobre cada recta de un haz de rectas paralelas, y segmentos que están en la razón  $k_1:k_2$ , entonces sus áreas están en esta razón.

Utiliza este resultado para calcular el área de la elipse a partir del área de la circunferencia.

7. Encuentra una ecuación paramétrica para la elipse.

8. Demuestra el Teorema 4.

9. Demuestra que las ecuaciones referidas al centro, de las directrices de una cónica con centro, son  $x = \pm \frac{a}{e}$ .

10. Demuestra que para una cónica con centro,  $2p = \frac{b^2}{c}$ .

### Ejercicios del capítulo

1. Escribe la ecuación de la circunferencia que cumple:

a) Tiene centro  $O(4;3)$  y radio 8.

- b) Tiene centro en el punto  $O(5;-2)$  y pasa por el punto  $F(-1;5)$ .
- c) Tiene los extremos de un diámetro en los puntos  $A(5;11)$  y  $B(3;9)$ .
- d) Es tangente a la recta  $x - y + 4 = 0$  y tiene centro en el punto  $(6;0)$ .
2. Determina el valor de  $k$  para que la circunferencia  $x^2 + y^2 - 8x + 10y + k = 0$  tenga radio 7.
3. Halla la distancia mínima del punto a la circunferencia en cada uno de los casos siguientes:
- a)  $A(6;-8)$  ;  $x^2 + y^2 = 9$
- b)  $B(3;9)$  ;  $x^2 + y^2 - 26x + 30y + 313 = 0$
- c)  $C(-7;2)$  ;  $x^2 + y^2 - 10x - 14y - 151 = 0$
4. Escribe la ecuación de la cuerda de la circunferencia  $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$ , que tiene punto medio en el punto  $A(1;2)$ .
5. El punto  $O(3;-1)$  es el centro de una circunferencia que interseca a la recta  $2x - 5y + 18 = 0$ ; si la longitud de la cuerda que determina esta recta es 6, halla la ecuación de la circunferencia.
6. Escribe la ecuación de la elipse que cumple:
- a)  $O(4;6)$  ;  $a = 7$  ;  $2b = 12$
- b)  $F_1(0,4)$  ;  $F_2(6;4)$  ;  $2a = 8$
- c)  $O(0,5)$  ;  $a = 12$  ;  $e = \frac{3}{4}$
7. Halla la ecuación de la elipse que tiene su centro en el origen, un foco en  $(0;3)$  y longitud del semieje mayor igual a 5.
8. Si sabemos que el punto  $B(-4;2,4)$  está en la elipse  $16x^2 + 25y^2 = 400$ , halla la distancia de  $B$  a los focos. ¿Qué resultado se muestra en este ejercicio?
9. Se da el punto  $A\left(2; -\frac{5}{3}\right)$  en la elipse  $5x^2 + 9y^2 = 43$ . Halla las ecuaciones de las rectas que pasan por  $A$  y los focos de la elipse.
10. Halla el área del cuadrilátero que tiene sus vértices en los vértices de la elipse:
- a)  $16x^2 + 25y^2 = 400$       b)  $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$

11. Halla la **ecuación** de la **hipérbola** que cumple con lo siguiente:
- Tiene centro  $O(0;0)$  ,  $2a = 6$  y  $e = 2$ .
  - Tiene centro  $O(-4;1)$ , un vértice en  $(2;1)$  y la **semidistancia focal** mide 8 unidades.
  - Tiene centro  $O(0;0)$ ,  $A_2(6;0)$  y la **ecuación** de una **asíntota**  $4x - 3y = 0$ .
  - Sus **vértices** son los puntos  $(1;7)$  y  $(1;-1)$  y la **excentricidad** es  $e = \frac{5}{4}$ .
12. Halla la **ecuación** de la hipérbola **equilátera** que pasa por el punto  $(3;-1)$  y cuyos ejes coinciden con los ejes **coordenados**.
13. Halla el centro, la excentricidad, los focos y las **asíntotas** de la hipérbola  $9x^2 - 4y^2 - 36x - 24y - 36 = 0$ .
14. Halla la **ecuación** de la **hipérbola** con centro en  $(0;-1)$ , eje principal paralela al eje  $x$  y que pasa por las **puntas**  $(3;-3)$  y  $(7;5)$ .
15. Halla la **ecuación** de una **parábola** que cumple lo siguiente:
- Su **vértice** es el punto  $(2;3)$  y **para** pasar por el origen.
  - Su **foco** está en el **origen** de coordenadas y la **directriz** es  $x - 6 = 0$ .
  - Su **vértice** es el punto  $(3;2)$  y el **foco** es  $(5;2)$ .  
Si  $F(2;-2)$  y la **directriz** es  $y - 4 = 0$ .
16. Halla el **vértice**, el **foco** y la **directriz** de la **parábola**:
- $y^2 + 4y - 6x + 7 = 0$
  - $4x^2 + 4x + 3y - 2 = 0$
17. Halla la **ecuación** de la **parábola** con **vértice** en la **recta**  $x + 2y + 5 = 0$  y **pasa** por los puntos  $(-2;0)$  y  $(-2;-4)$ .
18. Halla la **ecuación** de la **circunferencia** del **menor** radio posible que **pasa** por el **foco** de la **parábola**  $y^2 = 8x$  tiene su centro en la **recta**  $x - y + 4 = 0$ .
19. El centro de la **circunferencia**  $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$  es el **vértice** de una **parábola** cuyo eje tiene por **ecuación**  $y + 1 = 0$ . Si la **parábola** **pasa** por el punto

A(4;3), halla su ecuación y la de la directriz.

20. Halla la ecuación de la elipse que tiene focas en los focos de las parábolas:

$$(y + 2)^2 = 8(x - 1) \quad , \quad (y + 2)^2 = -16(x - 6)$$

y cuyo semieje mayor  $a = c + p$ , donde  $p$  es el menor de los semiparámetros de las parábolas dadas.

## CONCEPTO DE LÍMITE

Aunque la noción de límite está implícita en las obras del gran Arquímedes, cuando para calcular el valor de  $\pi$  este emplea el método de exhaustión de Eudoxio (370 a. n. e.), esta idea no reaparece hasta Fermat que la retorna en su tratada **Método para hallar máximos y mínimos**. En esta obra Fermat compara el valor dado a cierta función  $f(x)$  en un punto, con el valor  $f(x + E)$  en otro punto que se aproxima al primero al hacer  $E = 0$ . Sin embargo, Fermat no tiene aún con claridad el concepto de límite.

Nuevamente en 1676, es otro de las grandes matemáticos de la historia, Newton (1642-1727), quien en su obra **La cuadratura de las curvas**, se propone hallar la razón de incrementos que él denomina "evanescentes" (que se desvanecen) y al realizar esto se aproxima al concepto de límite. La única objeción que se le hace es la falta de precisión de la palabra desvanecerse.

Vuelve otra vez sobre la noción de límite el matemático francés D'Alembert (1717-1783), el que en su **Encyclopedie** lo define al expresar que:

Una cantidad es el límite de una segunda cantidad variable, si la segunda puede aproximarse a la primera hasta diferir de ella en menos que una cantidad dada (aunque nunca lleque a coincidir con ella).

Esta definición de D'Alembert fue la piedra de toque para que los matemáticos del siglo XIX llegaran a la definición de límite. Así es que finalmente, Agustín Cauchy (1789-1857), al considerar la definición de D'Alembert como punto de partida, formula en su obra **Curso de Análisis** publicado en 1821, la definición de límite casi como la estudiamos hoy:

Cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo de modo que terminan por diferir

de este una cantidad tan pequeña como se quiera, este último valor se denomina límite de los restantes valores.

En este capítulo estudiarás una de las definiciones actuales del concepto de límite y conocerás algunas propiedades de las Funciones y de los límites que te permitirán calcularlos con cierta facilidad.

## FUNCIONES Y LÍMITES

## FUNCIONES NUMÉRICAS

## 1. Funciones. Dominio e imagen

Desde grados anteriores conoces el concepto de función y sabes que es un modelo matemático para representar la dependencia entre magnitudes. Así, por ejemplo, la función cuadrática representa la forma en que depende el área (A) de un cuadrado de la longitud (l) de su lado:

$$A = l^2$$

También esta función puede representar la forma en que depende el espacio recorrido (s) del tiempo (t), en un movimiento uniformemente acelerado:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2; \quad v_0: \text{velocidad inicial}; \quad a: \text{aceleración.}$$

Estos ejemplos ilustran que el mismo modelo matemático sirve para reflejar diferentes situaciones prácticas, esto es una evidencia de la generalidad de la matemática y una de las causas de su importancia y aplicabilidad.

En matemática, por la general, las funciones se representan mediante una fórmula que expresa la forma en que la variable dependiente (función), depende de la variable independiente (argumento). En los puntos 20 y 21 del Memento aparecen las fórmulas que corresponden a las funciones que has estudiado; también aparecen las gráficas y propiedades fundamentales de esas funciones, esta información te será de utilidad en el resto del curso.

**Ejemplo 1**

Haz un esbozo del gráfico de las funciones:

a)  $y = x^3 + x$

b)  $y = -\frac{1}{x} + 2$

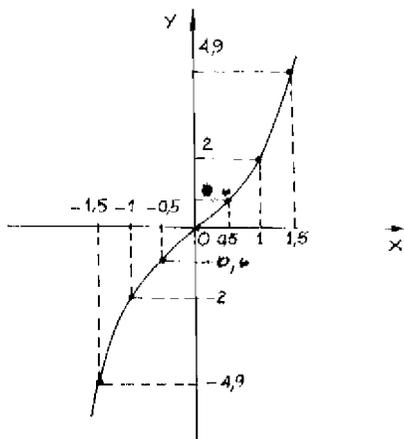
Resolución

a)  $y = x^3 + x$

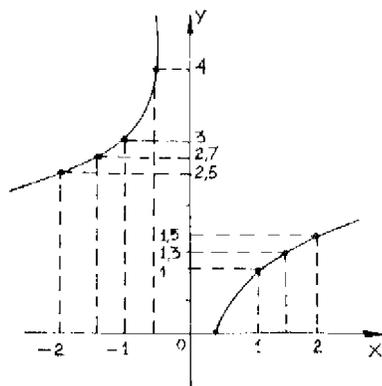
Construimos una tabla con algunos **valores** de la función (calculamos solo hasta las décimas, pues no se pueden **representar con mayor precisión**):

x	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5
y	-4,9	-2	-0,6	0	0,6	2	4,9

Representamos estos **puntos** en un sistema de **coordenada**;- y esbozamos la **curva** que los contiene (fig. 4.1a).



a)



b)

Fig 4.1

b)  $y = -\frac{1}{x} + 2$

Comenzamos por construir la tabla:

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0,5	1	1,5	2
y	2,5	2,7	3	4	0,1	1	1,3	1,5

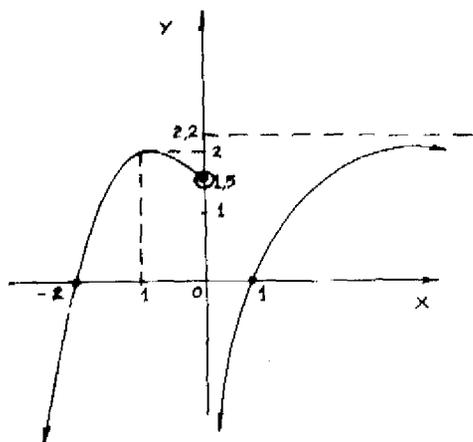
En este caso la función **no está definida** para  $x = 0$ , al pasar de valores **negativos** a **positivos** se produce un 'salto' en los valores de la **función**. Basándonos en La gráfica de  $y = \frac{1}{x}$ , trazamos dos **arraz** de **curva**, una que **contiene** las **puntos** que corresponden a  $x < 0$  y otro que **contiene** los que corresponden a  $x > 0$  (fig. 4.1b). ■

Dada una función cuya gráfica nos es desconocida, solo **esbozamos** la parte de la **gráfica** que contiene los **puntos** calculados. Para hacer la **representación completa** de **funciones** arbitrarias se necesitan otros **recursos** que **apren-**

derás en este curso y otros posteriores.

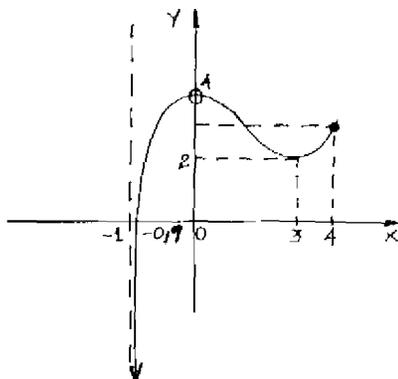
### Ejemplo 2

Para las funciones definidas en las gráficas de la figura 4.2 indica: dominio, imagen, ceros, intervalos de monotonía, puntos de máximo y mínimo, paridad y si son o no inyectivas.



a)

Fig.4.2



b)

#### Resolución

al (Fig.4.2a). Las flechas que aparecen en el gráfico indican que este se prolonga indefinidamente. Entonces:

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}^*$$

La proyección cubre el eje "x" excepto el  $x = 0$ .

$$\text{Im } f = (-\infty ; 2,2]$$

Proyección sobre el eje "y" cubre hasta 2,2.

$$\text{Ceros: } x_1 = -2 \text{ y } x_2 = 1$$

Corta al eje "x" en -2 y 1.

$$\text{Creciente en } (-\infty ; -1] \text{ y } \mathbb{R}_+^*$$

La gráfica asciende de izquierda a derecha.

$$\text{Decreciente en } [-1 ; 0)$$

La gráfica desciende de izquierda a derecha.

Observa que el punto donde cambia la monotonía se puede incluir en ambos intervalos: crecimiento y decrecimiento.

$$\text{Punto de máximo: } x = -1$$

La gráfica en ese punto está por encima de los que la rodean. No es absoluto, toma valores mayores.

$$\text{Punto de mínimo: no tiene}$$

Ningún punto está rodeado de valores mayores.

No es par ni impar,

No es simétrica respecto al origen ni al eje "y".

No es inyectiva

Hay rectas  $y = y_0$  que la cortan en dos puntos, con  $y_0 \in (-\infty; 2]$ .

b) (Fig. 4.2 b):

Dom  $f = (-1; 0) \cup (0; 4]$

La proyección no cubre el origen ni el punto  $x = 4$ .

Im  $f = (-\infty; 4]$

La proyección sobre el eje "y" no contiene al 4.

Cero  $x = -0,9$

Corta al eje "x" en  $x = -0,9$ .

Creciente en  $(-\infty; 0)$  y  $[3; 4]$

La gráfica se eleva de izquierda a derecha.

Decreciente en  $[0; 3]$

La gráfica desciende de izquierda a derecha.

Observa que el punto donde cambia la monotonía se puede incluir en ambos intervalos: crecimiento y decrecimiento.

Punto de máximo: no tiene

Ningún punto está rodeado de valores menores.

Punto de mínimo:  $x = 3$

El valor en ese punto es menor que los que lo rodea.

No es par ni impar

No es simétrica respecto al origen ni al eje "y".

No es inyectiva.

Hay rectas  $y = y_0$  que la cortan en dos puntos, desde  $y_0 = 3$  a  $y_0 = 4$ , menos el 4. ■

Las funciones que estudiaremos en esta curso tienen como dominio e imagen subconjuntos de  $\mathbb{R}$ . Estas funciones se llaman funciones numéricas.

Para que una función esté completamente definida, es necesario indicar su dominio; sin embargo, las funciones numéricas que estudiaremos se definen mediante una fórmula y en ese caso, el dominio puede quedar implícito, gracias al convenio siguiente:

Cuando una función numérica,  $f$ , se define mediante una fórmula para  $f(x)$ , su dominio es el subconjunto más amplio de  $\mathbb{R}$  en el cual esa fórmula tiene sentido.

**Ejemplo 3**

Determina el dominio de las funciones numéricas:

a)  $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$

b)  $y = \log \frac{x^2-4}{x^2+x-2}$

c)  $g(y) = \frac{\sqrt{\cos y}}{\cos^2 y - \cos y}$

Resolución

a)  $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$

La función está definida solo si:

$$\frac{x-2}{x+3} \geq 0$$

El radical está definido solo si el radicando es no nsgat Cvo.

Analizamos el signo de la fracción a)

en la figura 4.3a). Resulta:

Dom f =  $(-\infty; -3) \cup [2; +\infty)$



Se ha excluido el -3 pues la fracción se indefine.

b)  $y = \log \frac{x^2-4}{x^2+x-2}$



Fig. 4.3

La función está definida solo si:

$$\frac{x^2-4}{x^2+x-2} > 0$$

El Logaritmo está definido solo si el argumento es positivo.

$$\begin{aligned} \frac{x^2-4}{x^2+x-2} &= \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-1)} \\ &= \frac{x-2}{x-1} \end{aligned}$$

Descomponiendo en factores para resolver.

Simplificando.

En la figura 4.3b se analiza el signo de la fracción, resulta:

Dom y =  $(-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (2; +\infty)$

El -2 se excluye pues la función no está definida para ese valor.

c)  $g(y) = \frac{\sqrt{\cos y}}{\cos^2 y - \cos y}$

Para la función g, el dominio es el subconjunto de  $\mathbb{R}$  donde el radical está definido y el denominador es diferente de 0. El radical está definido si  $\cos y \geq 0$ ,

a sea, si  $y$  es un ángulo del primero u cuarta cuadrantes, es decir,

$$2k\pi \leq y \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{ó} \quad \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \leq y \leq 2(k+1)\pi$$

El denominador se anula cuando:

$$\cos^2 y - \cos y = 0$$

$$\cos y (\cos y - 1) = 0$$

$$y = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{ó} \quad y = 2k\pi$$

Luego se anula en los valores extremos de los intervalos de definición de  $\sqrt{\cos y}$ , y es necesario eliminar la igualdad puesto que deben cumplirse ambas condiciones.

$$\text{Dom } g = \left\{ 2k\pi < y < 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{ó} \quad \frac{3\pi}{2} + 2k\pi < y < 2(k+1)\pi \right\} \blacksquare$$

La imagen de las funciones numéricas no se determina tan sencillamente como el dominio; no pueden darse procedimientos generales aunque a veces resultan útiles los que se aplican en el ejemplo siguiente.

#### Ejemplo 4

Determina la imagen de las funciones:

$$\text{a) } y = \frac{x+1}{x-2} \quad \text{b) } f(x) = 2 + \sqrt{x+1} \quad \text{c) } y = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$$

Resolución

$$\text{a) } y = \frac{x+1}{x-2}$$

Para determinar la imagen comenzaremos por despejar  $x$  en la ecuación de la función (esto es, resolveremos la ecuación de la función en términos de  $y$ ):

$$y(x-2) = x+1$$

$$yx - x = 2y + 1$$

$$(y-1)x = 2y+1$$

$$x = \frac{2y+1}{y-1} \quad (1)$$

Hemos obtenido una expresión de  $x$  en términos de  $y$ , en ella podemos apreciar qué valores puede tomar  $y$ .

Como todas las transformaciones realizadas son equivalentes, la ecuación (1) obtenida se satisface para los mismos valores que la ecuación de la función; dada que (1) solo se indefine para  $y = 1$ , la imagen de la fun-

ción es:

$$\{y \in \mathbb{R} : y \neq 1\}$$

b)  $f(x) = 2 + \sqrt{x+1}$

En este caso ponemos  $y = f(x)$

$$y = 2 + \sqrt{x+1}$$

$$y - 2 = \sqrt{x+1}$$

$$(y - 2)^2 = x + 1$$

$$x = (y - 2)^2 - 1 \quad (2)$$

que está definida para  $y \in \mathbb{R}$ . Sin embargo, no podemos concluir que la imagen es todo  $\mathbb{R}$ , pues en la obtención de (2) interviene una transformación que no es equivalente (la elevación al cuadrada); por consiguiente debemos utilizar otro recurso para precisar la imagen.

En este caso se pueda obtener la imagen de una función conocida: la función  $y = \sqrt{x+1}$ .

Esta función toma todos los valores reales no negativos, luego  $y = 2 + \sqrt{x+1}$  que se obtiene trasladando la 2 unidades en la dirección positiva del eje  $y$ , o sea, sumándole 2 a cada uno de sus valores, toma todos los valores mayores o iguales que 2.

$$\text{Im } f = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 2\} = [2; +\infty)$$

c)  $y = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$

resulta sucesivamente:

$$y^2 = \frac{x+1}{x-1}$$

$$xy^2 - y^2 = x + 1$$

$$(y^2 - 1)x = y^2 + 1$$

$$x = \frac{y^2 + 1}{y^2 - 1}$$

Esta es la expresión de  $x$  en términos de  $y$ .

Esta expresión solo deja de estar definida para  $y = 1$ , pero como intervienen transformaciones no equivalentes, esto no determina necesariamente la imagen de la función. Por ejemplo, es fácil ver que  $-2$  no puede estar

en la imagen de la función. sin embargo. en este caso no se deduce directamente de la imagen de otra conocida y debemos proceder de otra forma.

Para precisar la imagen, comprobamos cuáles de estos valores satisfacen la ecuación original, pues al despejar  $x$  hemos resuelto una ecuación y si las transformaciones no son equivalentes debemos comprobar. Para ello sustituimos en la ecuación original la solución

$$x = \frac{y^2 + 1}{y^2 - 1}$$

MI:  $y$

$$\text{MD: } \frac{\sqrt{\frac{y^2 + 1}{y^2 - 1} + 1}}{\sqrt{\frac{y^2 + 1}{y^2 - 1} + 1}} = \frac{\sqrt{\frac{2y^2}{y^2 - 1}}}{\sqrt{\frac{2}{y^2 - 1}}} \quad \text{definida si } |y| > 1$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{y^2} = |y|$$

luego MI = MD solo si  $y \geq 0$ . esto significa que la ecuación de la función se satisface para  $y > 1$  (para  $|y| \leq 1$  no está definido el miembro derecho) y la imagen es:

$$\{y \in \mathbb{R}: y > 1\} = (1; +\infty) \quad \blacksquare$$

### Ejercicios (epígrafe 1)

1. Representa gráficamente las funciones siguientes:

a)  $y = x^2 - x + 3$

b)  $y = x^3 - 5$

c)  $y = 2x + 3$

d\*)  $y = \frac{2}{x} + x$

e\*)  $y = 2x^3 - x + 1$

f)  $y = 2x^2 + 3x - 1$

g)  $y = 3x - 4$

h)  $y = 3x^2 - 1$

i)  $y = 3 + \log(x-2)$

j)  $y = \cos(2x-1)$

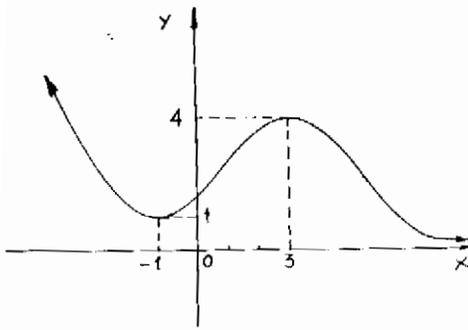
k)  $y = \tan x + 1$

l)  $y = 2 + 10^{x-1}$

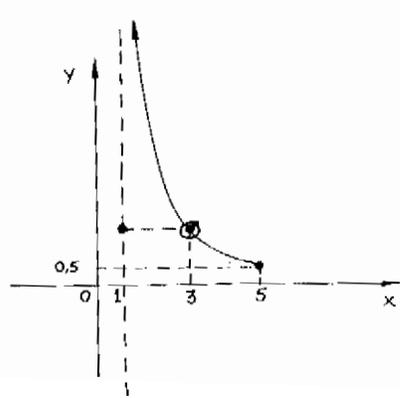
2. Para cada una de las funciones definidas mediante los siguientes gráficos (fig. 4.41 indica:

Dominio, imagen, ceros, intervalos de monotonía, puntos de máximo, mínimos, paridad y si es o no inyectiva.

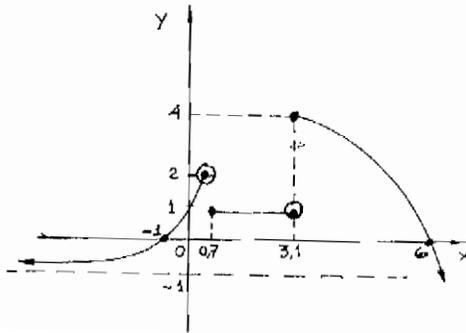
a)



b)



c)



d)

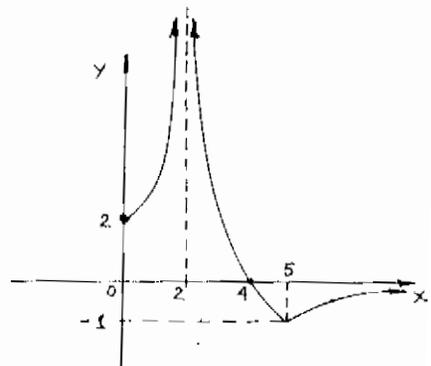


Fig. 4.4

3. Determina los valores de cada una de las funciones siguientes en los puntos:  $a - h$ ,  $2$ ,  $2 + h$ ,  $2 - h$ .

a)  $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2$

b)  $x^2 + 5x - 14$

c)  $\sqrt{x} - \sqrt{2}$

d)  $\log x - \log 2$

4. Determina si las funciones siguientes son pares o impares:

a)  $y = x^a + x - \frac{1}{x}$

b)  $y = \cos x - x^2$

c)  $y = x^2 + \sqrt{x}$

d)  $y = \tan x + \frac{1}{x^2}$

e)  $y = x \operatorname{sen} x$

f)  $y = x^2 \operatorname{cox} x$

g)  $y = \sqrt{x^2}$

h)  $y = \frac{1}{x} - 2$

5. Se tiene un alambre de longitud 80,0 cm y se quiere formar con él un arco rectangular.

- Expresa el área del rectángulo en función de la longitud del menor lado del rectángulo. ¿Cuál es el dominio de la función obtenida?
- Determina qué longitud debe tener el lado para que el área sea máxima.

h. Con un alambre de longitud  $a$  se construyen un triángulo equilátero y un cuadrado.

- Expresa la suma de las áreas como función del lado del triángulo equilátero y determina el dominio de esta función.
- Halla cuál debe ser la longitud del lado del triángulo para que el área sea mínima.

7. Se inscribe un rectángulo en una circunferencia de radio 1.

- Expresa el área del rectángulo en función de su lado menor y determina el dominio de la función obtenida.
- Halla la longitud del lado que corresponde al área máxima.

8. Determina en cada caso si  $f = g$ . Explica tu respuesta.

- $f(x) = x$  ;  $g(x) = \frac{x^2}{x}$
- $f(x) = \log x^2$  ;  $g(x) = 2 \log x$
- $f(x) = \frac{1}{x}$  ;  $g(x) = \frac{1}{x^2}$
- $f(x) = \sqrt{x^2}$  ;  $g(x) = x$

9. Determina el dominio de las funciones numéricas siguientes y calcula su valor en los puntos indicados:

- $y = x - 1$  ;  $x_1 = 1$  748,  $x_2 = \frac{37}{39}$
- $g(x) = \frac{2x}{x^2 - 3x + 2}$
- $y = \frac{1}{1 + x^2}$
- $y = \frac{x^2 + 5x}{x^3 - 5x^2 + x}$
- $f(x) = \frac{x - 2}{2x + 1}$  ;  $x_1 = 3$  ;  $x_2 = -5$
- $y = \frac{\frac{x + 1}{3 - x}}{2 + \frac{1}{x}}$  ;  $x = \frac{1}{2}$

$$10) y = \sqrt{x^2 - 4x + 3} ; x_1 = \frac{12}{17} ; x_2 = 6$$

$$j) y = \sqrt{(x+5)(x+1)-2} ; x = -3,61$$

$$k) y = \sqrt{\frac{3x^2 - 2x - 2}{7x^2 - 15}}$$

$$l) h(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^2 - 4x + 4}}$$

$$m) y = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2-x} - \sqrt{x+5}}$$

$$n) y = \sqrt{\log \left[ \frac{5x - x^2}{4} \right]}$$

$$o) f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x - \operatorname{sen} x} ; x = \frac{\pi}{3}$$

$$p) q(x) = 1 + \sqrt{\cos^2 2k\pi x - 1}$$

$$q) f(x) = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x - \operatorname{sen} x}$$

$$r) h(x) = \frac{\sqrt{\tan x}}{1 + \sqrt{2 + \operatorname{sen} 2x}}$$

$$s) y = \frac{\log \sqrt{1 - \cos x}}{x^2 - x + 1}$$

10. Halla el dominio y calcula el valor que se indica:

$$a) y = \frac{x^3 - 7}{x^2 - 3x + 1}$$

$$b) f(x) = \frac{x^3 + 7x - 1}{x^2 - \frac{9}{4}}$$

$$c) y = \frac{\frac{x-1}{x+1} - \frac{x-2}{x-1}}{\frac{x+2}{x-3} + 1}$$

$$d) y = \frac{x^3 - x + 1}{x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1} ; x = 1,7$$

$$e) f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2 - x - 2}} ; x = 6 ; x = -9,7$$

$$f) y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x}} ; x = 0,126$$

$$g) y = \frac{\sqrt{x^2 + 3x - 7}}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x + 3}}$$

$$h) y = \log \frac{5x^2 + 7x - 1}{16x^2 - 81}$$

$$i) y = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}}$$

$$j) y = \log_2 \frac{x-5}{x+3} - \log_2 \frac{x-2}{x+3}$$

$$k) y = \frac{x^2 - 1}{\cos 2x - \sin x}$$

$$l) f(x) = \frac{\sqrt[3]{\sin x}}{\sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x}}$$

$$m) y = \frac{\sin x}{\tan^2 x - 3 \tan x + 4} ; x = \frac{3\pi}{4}$$

$$n) f(x) = \sqrt{1 - |x|} ; x_1 = -0,118$$

$$ñ) y = \sqrt{1 + |x|} ; x_1 = -100$$

$$o) y = \frac{1}{\sqrt{1 - |x|}} ; x = 3$$

$$p) y = \frac{1}{\sqrt{|x| - x}} ; x_1 = 3$$

$$q) y = \frac{1}{\sqrt{1 + |x|}}$$

11. Determina para qué valores de  $x$  no están definidas las funciones siguientes. Si se indica, calcula su valor en el punto.

$$a) f(x) = \log_x 2$$

$$b) y = \log(x+3)$$

$$c) y = \frac{\log_n |\sin^2 x - 1|}{\sin 3x - \frac{1}{2}}$$

$$d) y = \log_2 \frac{x-5}{x-2}$$

$$e) y = \frac{\cos x}{2 \sin^2 x - \sin x} ; x = 1,3$$

$$f) y = \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x}; x = \frac{\pi}{12}$$

$$g) y = \frac{\sqrt{\cos x}}{\cos^2 2x + 3 \operatorname{sen} 2x - 3}; x = \frac{5\pi}{6}$$

$$h) f(x) = \frac{\operatorname{sen} 2x}{1 + 2 \operatorname{sen} x \cos x}; x = 2,6$$

$$i^*) y = \frac{\sqrt{x^5 + 3x^9 + 8x^2 + 24}}{\sqrt{x^2 - 5} - \sqrt{2x + 1}}$$

$$j) y = \frac{\sqrt{\log(x^4 + 2x^2 + 1)}}{\sqrt{x + 3} - x + 1}$$

12. Determina los ceros y la imagen de Las funciones siguientes:

a)  $y = x^2 - 3x + 3$

b)  $y = x^2 - 5$

c)  $y = 2x + 3$

d)  $y = \frac{2}{x} + x$

e)  $y = 2x^2 + 3x - 1$

f)  $y = 3x - 4$

g)  $y = \frac{x + 2}{x^2 - 4}$

h)  $g(x) = 1 + \sqrt{\cos^2 2k\pi x - 1}$

i)  $y = \sqrt{x - 3} + 4$

j)  $y = \sqrt{(x + 5)(x + 1) - 2}$

k)  $h(x) = \sqrt{1 + |x|}$

l)  $y = \frac{x + 5}{x - 5}$

m)  $y = \frac{x - 3}{x + 1}$

n)  $y = \log_3(x - 2) + 1$

ñ)  $f(x) = 3 \operatorname{sen} 2x - i!$

o)  $y = 5 \cos x + 1$

p)  $g(x) = \frac{1}{\tan x}$

q)  $y = \log |\operatorname{sen} x|$

## 2. Operaciones con funciones

### Definición 1

Dadas dos funciones numéricas,  $f(x)$  y  $g(x)$ , se definen las funciones:

Suma por  $(f + g)(x) = f(x) + g(x);$   
con  $\operatorname{Dom}(f + g) = \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$

Diferencia por  $(f - g)(x) = f(x) - g(x);$   
con  $\operatorname{Dom}(f - g) = \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$

Producto por  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x);$   
con  $\operatorname{Dom}(f \cdot g) = \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$

Cociente por  $(f/g)(x) = f(x)/g(x);$   
con  $\operatorname{Dom}(f/g) = \{x \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g : g(x) \neq 0\}$   
 $= (\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g) \setminus \{x : g(x) = 0\}$

**Ejemplo 1**

Dadas las funciones  $f(x) = \sqrt{x} + 1$  ;  $g(x) = \sqrt{x} - 1$  ;  
 $h(x) = x - 1$  ;  $m(x) = \ln(x^2 - 1)$  ;  $k(x) = \text{sen } 2x$  ;  
 $n(x) = \text{sen } x$ . Determina las funciones:

- a)  $k + n$     b)  $f - g$     c)  $h \cdot m$     d)  $h/g$

Resolución

a)  $(k + n)(x) = k(x) + n(x) = \text{sen } 2x + \text{sen } x$

b)  $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \left[ \sqrt{x} + 1 \right] - \left[ \sqrt{x} - 1 \right] = 2$

$\text{Dom}(f - g) = \mathbb{R}_+$ . Es necesario aclarar el dominio porque la función numérica  $y = 2$  tiene dominio  $\mathbb{R}$  que, por tanto, no coincide con el  $\text{Dom}(f - g)$ ; es decir, no se puede afirmar  $(f - g)(x) = 2$ .

c)  $(h \cdot m)(x) = h(x) \cdot m(x) = (x - 1) \ln(x^2 - 1)$

d)  $\left( \frac{h}{g} \right)(x) = \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \sqrt{x} + 1$

$\text{Dom} \left( \frac{h}{g} \right) = \left\{ x \in \mathbb{R}_+ : x \neq 1 \right\}$ . Nuevamente es necesario aclarar el dominio. Observa que:  $\left( \frac{h}{g} \right)(x) \neq f(x)$  (¡No tienen el mismo dominio!) ■

Además de las operaciones algebraicas contenidas en la definición 1, con las funciones se realizan otras operaciones.

Definición 2

Sean  $f$  y  $g$  funciones tales que  $\text{Im}f \cap \text{mg} \neq \emptyset$ , entonces se llama función compuesta  $g \circ f$  a la función definida por:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

con  $\text{Dom}(g \circ f) = \left\{ x \in \text{Dom } f : g(f(x)) \text{ está definida} \right\}$

$$= \text{Dom } f \cap \text{Dom}(g(f(x)))$$

**Ejemplo 2**

Dadas las funciones  $f(x) = x^2$ ;  $g(x) = \sqrt{x}$ ;  $k(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

determina:

- a)  $g \circ f$     b)  $f \circ g$     c)  $k \circ f$     d)  $f \circ k$

### Resolución

$$a) (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = |x|$$

b)  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$  que tiene dominio  $\mathbb{R}$ , pero como  $\text{Dom } g = \mathbb{R}_+$ , hay que precisar el dominio de la función compuesta, luego:

$$(f \circ g)(x) = x, \quad \text{Dom } (f \circ g) = \mathbb{R}_+$$

que no coincide con la función numérica  $y = x$ .

$$c) (k \circ f)(x) = k(f(x)) = k(x^2) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$d) (f \circ k)(x) = f(k(x)) = f\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)^2 = \frac{1}{x+1}$$

Pero el dominio de la compuesta es más pequeño que el de esta función; por tanto, para que la función quede bien definida hay que precisar el dominio:

$$(f \circ k)(x) = \frac{1}{x+1},$$

$$\text{Dom } (f \circ k) = \text{Dom } f(k(x)) \cap \text{dom } k$$

$$= (-1; +\infty) \cap \mathbb{R} \setminus \{-1\} = (-1; +\infty) \quad \blacksquare$$

En ocasiones, para facilitar la determinación de la función compuesta, las funciones se representan mediante ecuaciones en las que se diferencian las variables.

### Ejemplo 3

Dadas las funciones  $w = \frac{1}{1+y^2}$ ,  $z = \frac{1}{1+y^2}$ ,  $y = \tan x$ .

Determina la función compuesta  $w = h(x)$ .

### Resolución

Obtenemos sucesivamente

$$w = \frac{1}{1+y^2} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x$$

$$w = \sqrt{z} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$$

pero teniendo en cuenta el dominio de  $y = \tan x$

$$w = |\cos x|, \quad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad \blacksquare$$

Desde gradas anteriores conoces el concepto de función inversa, en la práctica se necesita con frecuencia determinar la función inversa de una dada (punto 19 del Memento).

**Ejemplo 4**

Analiza si Las siguientes funciones tienen inversa y determinálas en ese caso.

a)  $y = \frac{2x + 1}{x + 3}$     b)  $f(x) = \sqrt{x - 3} - 1$     c)  $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Resolución

a) Para determinar si tiene Inversa es necesario averiguar si es inyectiva o no. Una forma cómoda de hacerlo es despejar x y ver cuántos elementos del dominio corresponden a cada elemento de la imagen:

$$y(x + 3) = 2x + 1$$

$$yx + 3y = 2x + 1$$

$$yx - 2x = 1 - 3y$$

$$(y - 2)x = 1 - 3y$$

$$x = \frac{1 - 3y}{y - 2}$$

A cada elemento de la imagen,  $y \neq 2$ , corresponde un único valor del dominio, luego es inyectiva.

Como todas las transformaciones han sido equivalentes, la expresión obtenida puede utilizarse para definir la inversa sin precisiones adicionales. Luego la inversa es:

$$y = \frac{1 - 3x}{x - 2}$$

Intercambiamos las variables para mantener el convenio de que x es la variable independiente.

b) Poniendo  $y = f(x)$  y procediendo como en a)

$$y = \sqrt{x - 3} - 1$$

$$(y + 1)^2 = x - 3$$

$$x = 3 + (y + 1)^2$$

A cada valor de y corresponde un único valor de x, es inyectiva; pero en esta tasa las transformaciones no han sido equivalentes y es necesaria tomar en cuenta que el dominio de la inversa es la imagen de la función; como  $\text{Im } f = [-1; +\infty)$ , la inversa es:

$$f^{-1}(x) = 3 + (x + 1)^2, \quad \text{Dom } f^{-1} = [-1; +\infty)$$

c) En este caso de  $y = h(x)$  resulta

$$\begin{aligned} y^2 &= 1 - x^2 \\ x^2 &= 1 - y^2 \quad (1) \end{aligned}$$

A cada valor de  $y$  corresponden 2 valores de  $x$ , no es inyectiva y no tiene inversa.

Puede obtenerse una función inyectiva limitando el dominio de  $h$ , de modo que a cada valor de  $y$  corresponda un solo valor de  $x$  en ese dominio (por ejemplo a  $[-1;0]$  ó  $[0;1]$ ) y en ese caso la ecuación (1) define la inversa

$y = -$  ó  $y = \sqrt{1 - x^2}$  según el dominio escogido. ■

Ejercicios (epígrafe 2)

1. Dadas las funciones  $f$  y  $g$ , determina:  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $f \cdot g$ ,

$\frac{f}{g}$

a)  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$ ;  $g(x) = x$

b)  $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ ;  $g(x) = \frac{1}{x+1}$

c)  $f(x) = \sqrt{x+1}$ ;  $g(x) = 2\sqrt{x+1}$

d)  $f(x) = \log_2 x$ ;  $g(x) = \log_2 (-x)$

e)  $f(x) = \sin 2x$ ;  $g(x) = \tan x$

f)  $f(x) = \sqrt{x^2}$ ;  $g(x) = \cos x$

g)  $f(x) = 10^{x-1}$ ;  $g(x) = 10^x$

h)  $f(x) = \sqrt{x^2+2x+1}$ ;  $g(x) = x+1$

i)  $f(x) = x^2 + 7x - 1$ ;  $g(x) = \frac{x+1}{x^2-x+1}$

j)  $f(x) = \frac{x+2}{x^2-3x+2}$ ;  $g(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$

k)  $f(x) = \frac{x^2+3}{x^3-5x^2+6x}$ ;  $g(x) = \frac{x}{x+1}$

l)  $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ ;  $g(x) = \frac{x^2-4}{x^3+3x^2-4}$

2. Dadas las funciones  $f$  y  $g$  determina  $f \circ g$  y  $g \circ f$ .

a)  $f(x) = 2x + x^{-2}$ ;  $g(x) = x^4 + 2x + 1$

b)  $f(x) = \log x$ ;  $g(x) = \sqrt{\sin x}$

- c)  $f(x) = |x|$  ;  $g(x) = \sqrt{x}$   
 d)  $f(x) = \text{sen}^2 x$  ;  $g(x) = \sqrt{x-1}$   
 e)  $f(x) = x^2$  ;  $g(x) = x+5$   
 f)  $f(x) = 10^{x-1}$  ;  $g(x) = \cos^2 x$   
 g)  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  ;  $g(x) = \text{sen } 2x$   
 h)  $f(x) = x-3$  ;  $g(x) = \frac{1+x}{1-x}$   
 i)  $f(x) = \log x$  ;  $g(x) = \sqrt{x^2-1}$   
 j)  $f(x) = \frac{x-3}{x^2+1}$  ;  $g(x) = \frac{x}{x+1}$   
 k)  $f(x) = x^2+3x+1$  ;  $g(x) = \sqrt{x+1}$   
 l)  $f(x) = \sqrt{x^2+1}$  ;  $g(x) = \frac{1}{x-1}$

3. Determina si las proposiciones siguientes son verdaderas o falsas. Justifica.

- a)  $f(x) = \sqrt{x}$  ;  $g(x) = x^2$  ;  $f \circ g(x) = g \circ f(x) = x$   
 b)  $f(x) = \frac{1}{x}$  ;  $f \circ f(x) = x$   
 c)  $f(x) = \log x$  ;  $g(x) = 10^x$  ;  $f \circ g(x) = g \circ f(x) = x$   
 d)  $f(x) = \text{sen}^2 x$  ;  $g(x) = \sqrt{x}$  ;  $g \circ f(x) = \text{sen } x$   
 e)  $f(x) = \text{sen } x$  ;  $g(x) = 1$  ;  $h(x) = \sqrt{x}$  ;  
 $h(g(x) - (f(x))^2) = |\cos x|$

4. Determina la función compuesta  $z = h(x)$ :

- a)  $y = \text{sen } x$  ;  $z = y^9$       b)  $y = x-1$  ;  $z = y^8 - y$   
 c)  $y = \tan x$  ;  $z = 1 + y^2$   
 d)  $y = \frac{1}{x}$  ;  $w = \frac{1}{y}$  ;  $z = \frac{w^2+3w-1}{w+1}$   
 e)  $y = 4$  ;  $z = y^2+5$   
 f)  $y = \frac{x-1}{x}$  ;  $z = \sqrt{y^2-1}$   
 g)  $y = \frac{2x}{1+x}$  ;  $z = \frac{y^2+1}{y^3-1}$   
 h)  $x = \tan \frac{y}{2}$  ;  $z = \text{sen } y$   
 i)  $y = \frac{x}{x^2-1}$  ;  $t = \sqrt{y}$  ;  $z = \frac{t^2+1}{t-1}$   
 j)  $x = \tan \frac{t}{2}$  ;  $z = \cos t$   
 k)  $y = \frac{1}{2x}$  ;  $z = \frac{y}{\sqrt{y^2+1}}$

$$l) x = \tan \frac{\theta}{2} ; z = \frac{\operatorname{sen} \theta + \operatorname{csc} \theta}{1 + \cos \theta}$$

$$m) y = x^2 + 3x - 1 ; z = y^2 - 1$$

$$n) y = \sqrt{x^2 + 1} ; z = y^2 - y$$

$$ñ) y = \tan x - x ; z = 1 + y^2$$

5. Decide si las funciones siguientes tienen inversa; si la tienen, determinala:

$$a) y = \frac{x - 1}{2x + 3}$$

$$b) y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

$$c) y = \frac{3x - 1}{5x + 4}$$

$$d) y = 2x + 3$$

$$e) y = x^9$$

$$f) y = x^2 - 3x + 1$$

$$g) y = \sqrt{x + 5}$$

$$h) y = x + \sqrt{x + 1}$$

$$i) y = 10^{x+5}$$

$$j) y = 10^{x-3}$$

$$k) y = 3 + \log(x - 4)$$

$$l) y = \sqrt{4 - x^2}$$

$$m) y = |x|$$

$$n) y = \frac{x^2 + 4}{x - 5}$$

$$ñ) y = \cos x$$

$$o) y = \operatorname{sen} x$$

$$p) y = 4$$

$$q) y = 4 - \sqrt{x + 5}$$

## LÍMITES

### 3. Límite de una función en un punto

Todos los conceptos matemáticos que has estudiado hasta ahora están relacionados con procesos finitos; un momento importante en la matemática lo constituye la introducción de procesos infinitos; uno de los que más trascendencia tiene, está contenido en el concepto de límite.

El origen del concepto límite se remonta, como se dice en la nota histórica, hasta las obras de Arquímedes.

A partir del área de un triángulo y mediante un número finito de operaciones elementales, se puede calcular el área de cualquier polígono. Sin embargo, con este procedimiento no se puede obtener el área del círculo. Veamos cómo puede calcularse esta área mediante un procedimiento infinito.

Si en una circunferencia (fig. 4.5) se inscribe un cuadrado el área del cuadrado es menor que el área del círculo. Si a partir del cuadrado se inscribe un octógono, el área se aproxima más al área del círculo. Si se continúa de la misma forma inscribiendo polígonos de  $2^n$  lados, veremos que a medida que  $n$  crece la aproximación es cada vez mejor, pero para cualquier número finito  $n$ , el área será diferente del área del círculo.

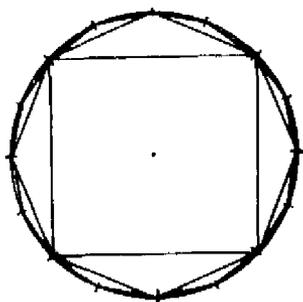
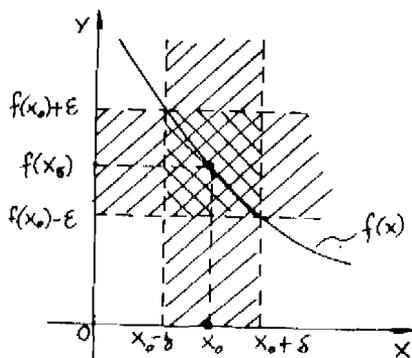


Fig. 4.9

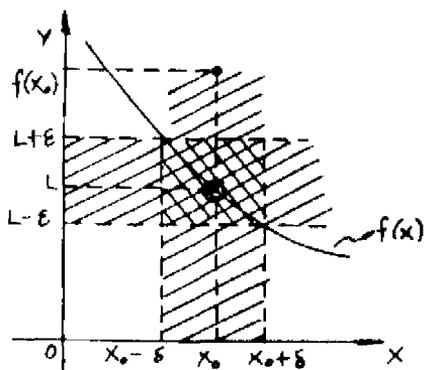
Sala si consideramos que  $n$  crece ilimitadamente podremos alcanzar el área del círculo, se trata en ese caso da un proceso infinito.

Aunque el origen del concepto se remonta e estas ideas geométricas, nosotros lo utilizaremos en otra proceso infinito: el análisis del comportamiento de los valores de una función cuando la variable independiente ( $x$ ) se aproxima lo como se dice usualmente, tiende) a un valor dado ( $x_0$ ). En la figura 4.6 se ilustran distintas posibilidades para este comportamiento.

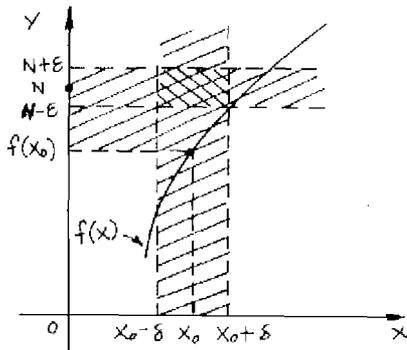
a)



b)



c)



d)

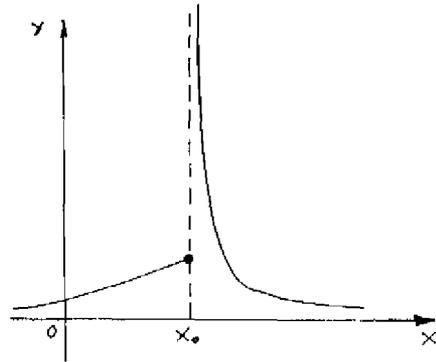


Fig. 4.6

La **figura 4.6a** ilustra el caso de una función en la cual sus valores se aproximan al valor  $f(x_0)$  en el punto  $x_0$ , cuando  $x$  está suficientemente próximo a  $x_0$ .

Esta aproximación podemos comprobarla si se traza una banda horizontal tan estrecha como se quiera alrededor de  $f(x_0)$ ; esta banda está limitada por las rectas  $y = f(x_0) + \epsilon$  y  $y = f(x_0) - \epsilon$ , donde  $\epsilon > 0$  es un número arbitrariamente pequeña.

Una porción de la gráfica queda contenida en el interior de la banda y se puede encontrar un número  $\delta > 0$  tal que los valores de la función en el intervalo  $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$  estén contenidos en la banda (la porción del gráfico contenida en la banda vertical limitada por las rectas  $x = x_0 - \delta$  y  $x = x_0 + \delta$ , está también en el interior de la banda horizontal).

La **figura 4.6b** ilustra el caso de una función en la cual sus valores se aproximan a un valor  $L \neq f(x_0)$  cuando  $x$  tiende a  $x_0$  ( $x \rightarrow x_0$ ); en este caso, puedes observar que en el interior de las bandas horizontales está contenida el gráfico de la función para los valores del argumento suficientemente próximos a  $x_0$ , excepto el punto  $(x_0; f(x_0))$ . Esto muestra que, para analizar al comportamiento al aproximarse a  $x_0$ , no es conveniente hacer intervenir el valor de la función en  $x_0$ , ya que sus valores

se pueden aproximar a un número  $L \neq f(x_0)$ .

En la figura 4.6c se ilustra el caso de un valor  $N$  al cual no se aproximan los valores de la función cuando  $x \rightarrow x_0$ . En este caso puedes observar que para toda banda vertical, es posible encontrar una banda horizontal de modo que el gráfico quede completamente fuera de la intersección de las bandas. Si comparas con los gráficos anteriores puedes observar que los valores de la función se aproximan a otro número  $f(x_0) \neq N$ .

La figura 4.6d ilustra el caso de una función cuyos valores no se aproximan a ningún valor cuando  $x \rightarrow x_0$ . En este caso puedes observar que los valores de la función se hacen arbitrariamente grandes al aproximarnos a  $x_0$ ; cualquier banda horizontal deja fuera una porción del gráfico.

En el caso en que los valores de la función se aproximan a un número  $L$ , cuando  $x \rightarrow x_0$ , decimos que  $L$  es el límite de la función en ese punto, a que la función tiende a  $L$  ( $f(x) \rightarrow L$ ). Estas ideas se precisan en la definición 1.

#### Definición 1

Sean  $f$  una función numérica y  $x_0 \in \mathbb{R}$ , se dice que  $L$  es el límite de la función en  $x_0$ , o que  $f(x)$  tiende a  $L$  ( $f(x) \rightarrow L$ ) cuando  $x$  tiende a  $x_0$  ( $x \rightarrow x_0$ ), y se denota

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

si cualquiera sea el número  $\epsilon > 0$ , es posible encontrar un número  $\delta > 0$  que satisface:

si  $0 < |x - x_0| < \delta$ , entonces  $|f(x) - L| < \epsilon$  (1).

La condición  $|f(x) - L| < \epsilon$  significa que los valores de la función están contenidos en la banda horizontal limitada por las rectas  $y = L - \epsilon$  y  $y = L + \epsilon$ , o sea,  $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$ ; la condición  $0 < |x - x_0| < \delta$  significa que están contenidas en la banda vertical de centro en  $x_0$  y amplitud  $2\delta$  y que  $x \neq x_0$ , a sea, que el valor  $f(x_0)$

no interviene en la definición.

**Ejemplo 1**

- a) ¿Qué valor deba tener  $\delta$  para que de  $|x - 2| < \delta$  se deduzca  $|2x - 4| < 0,0001$ .
- b) Probar que:  $\lim_{x \rightarrow 2} 2x = 4$ .

Resolución

- a) Para que se cumpla

$$\begin{aligned} |2x - 4| &< 0,0001 = 10^{-4} \\ \text{debe ser } 2|x - 2| &< 10^{-4} \\ |x - 2| &< \frac{1}{2} 10^{-4} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Dividiendo por 2} \\ \text{ambos miembros.} \end{array}$$

luego basta escoger  $\delta < 0,5 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-5}$

- b) En este caso  $f(x) = 2x$ ,  $x_0 = 2$  y  $L = 4$ , para verificar la definición debemos tomar un número  $\epsilon > 0$  arbitrario y, a partir de él, encontrar un número  $\delta > 0$  que verifique la condición (1), que en este caso es:

$$\text{si } 0 < |x - 2| < \delta, \text{ entonces } |2x - 4| < \epsilon.$$

Para tratar de encontrar  $\delta$ , razonamos a partir de la conclusión ( $|2x - 4| < \epsilon$ ) y "buscamos" el valor conveniente para  $\delta$ , es decir, razonamos "hacia atrás", de la conclusión a la premisa:

$$\begin{aligned} |2x - 4| &< \epsilon \\ 2|x - 2| &< \epsilon && \text{Extrayendo factor} \\ &&& \text{común 2.} \\ |x - 2| &< \frac{\epsilon}{2} && \text{Dividiendo por 2} \\ &&& \text{ambos miembros.} \end{aligned}$$

Como las transformaciones han sido equivalentes, es suficiente tomar  $\delta \leq \frac{\epsilon}{2}$ . Vamos a comprobarlo:

$$\begin{aligned} \text{Si } |x - 2| < \delta \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ entonces} \\ |x - 2| &< \frac{\epsilon}{2} \\ 2|x - 2| &< \epsilon \\ |2x - 4| &< \epsilon \end{aligned}$$

como se quería. ■

El ejemplo 1 ilustra el uso de la definición: sirve para comprobar que un número dada es límite, pero no dice nada sobre cómo hallar el límite. La determinación del límite puede llegar a ser un problema muy difícil; en este capítulo estudiaremos procedimientos para calcular límites

en los casos más simples.

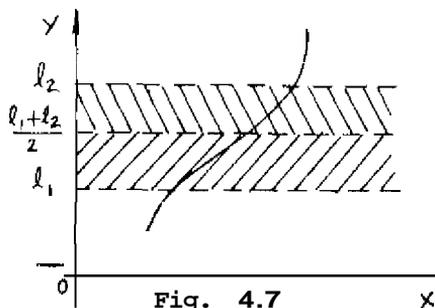
Comenzaremos por analizar la unicidad de 2 límite.

Teorema 1

El límite cuando existe es único

Demostración

La figura 4.7 ilustra que si  $l_1 \neq l_2$  se pueden seleccionar bandas alrededor de  $l_1$  y  $l_2$  que no tienen puntos comunes; si la gráfica está en una banda, entonces no puede estar en la otra y uno de los ~~dos~~ no es límite.



Formalmente precedemos por reducción al absurdo. Suponemos que existen dos límites  $l_1$  y  $l_2$  ( $l_2 > l_1$ ). entonces para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que;

$$|f(x) - l_1| < \epsilon \quad \text{y} \quad |f(x) - l_2| < \epsilon \quad \text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta$$

tomemos (como induce el gráfico)  $\epsilon = \frac{l_2 - l_1}{2}$ , entonces para  $0 < |x - x_0| < \delta$  debe ser

$$|f(x) - l_1| < \frac{l_2 - l_1}{2} \qquad |f(x) - l_2| < \frac{l_2 - l_1}{2}$$

que significa

$$\begin{array}{l} -\frac{l_2 - l_1}{2} < f(x) - l_1 < \frac{l_2 - l_1}{2} \\ l_1 - \frac{l_2 - l_1}{2} < f(x) < l_1 + \frac{l_2 - l_1}{2} \\ \frac{3l_1 - l_2}{2} < f(x) < \frac{l_1 + l_2}{2} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} -\frac{l_2 - l_1}{2} < f(x) - l_2 < \frac{l_2 - l_1}{2} \\ l_2 - \frac{l_2 - l_1}{2} < f(x) < l_2 + \frac{l_2 - l_1}{2} \\ \frac{l_1 + l_2}{2} < f(x) < \frac{3l_2 - l_1}{2} \end{array} \right.$$

o sea,

$$\frac{l_1 + l_2}{2} < f(x) < \frac{l_1 + l_2}{2}$$

que es una contradicción. ■

## Teorema 2

Se cumple:

- a) El límite de una constante es ella misma:  
 si  $f(x) = c$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$  ( $x_0 \in \mathbb{R}$ ).
- b)  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ .
- c) El límite de un radical es la raíz del límite  
 $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$  ( $x_0 \in \mathbb{R}$ ).

### Demostración

a) La figura 4.8 ilustra que para un  $\varepsilon > 0$  arbitraria se cumple siempre que:

$$|f(x) - c| < \varepsilon$$

pues

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

b) Basta tomar  $\delta = \varepsilon$  pues entonces:

$$0 < |x - x_0| < \delta < \varepsilon$$

lo que significa  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ .

c) Debemos probar que para un  $\varepsilon > 0$  cualquiera fijado, existe un  $\delta$  tal que

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |x - x_0| < \delta$$

Procedemos nuevamente razonando "hacia atrás":

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon \text{ equivale a}$$

$$\frac{|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \cdot |\sqrt{x} + \sqrt{x_0}|}{|\sqrt{x} + \sqrt{x_0}|} < \varepsilon$$

Multiplicando numerador y denominador por  $|\sqrt{x} + \sqrt{x_0}| > 0$  (pues  $x_0 > 0$ ).

$$\frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \varepsilon$$

Pero como  $\sqrt{x} > 0$ ,  $\sqrt{x} + \sqrt{x_0} > \sqrt{x_0}$  y

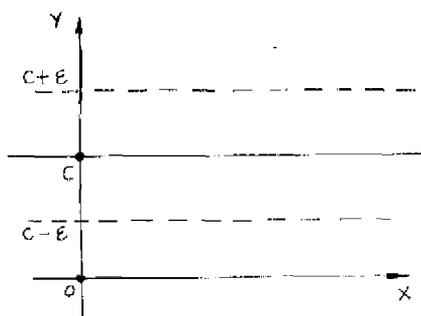


Fig. 4.8

$$y = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \varepsilon \quad \text{si} \quad |x - x_0| < \varepsilon \sqrt{x_0}$$

Si disminuye el denominador aumenta la fracción.  
Multiplicando por  $\sqrt{x_0} > 0$ .

Probamos realizar la demostración con  $\delta \leq \varepsilon \sqrt{x_0}$

Sea  $\varepsilon > 0$ , debemos probar que:

si  $0 < |x - x_0| < \delta \leq \varepsilon \sqrt{x_0}$ , entonces  $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon$

En efecto, hemos visto que la última desigualdad equivale a:

$$\frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \varepsilon$$

pero  $\frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \frac{\delta}{\sqrt{x_0}}$  Pues  $|x - x_0| < \delta$

y  $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \frac{\varepsilon \sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0}} = \varepsilon$  como se quería. ■

El teorema 2 nos permite calcular algunos límites sencillos.

### Ejemplo 2

Calcula los límites siguientes: a)  $\lim_{x \rightarrow 3} 4$       b)  $\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x}$

Resolución

Aplicando el teorema 1, tenemos de forma inmediata

a)  $\lim_{x \rightarrow 3} 4 = 4$       b)  $\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x} = \sqrt{9} = 3$  ■

Ejercicios (epígrafe 3)

1. Determina en cada caso el valor que debe tomar  $\delta$  para que la condición dada se satisfaga.

a) Si  $|x - 1| < \delta$ , entonces  $|3x - 3| < 10^{-5}$ .

b) Si  $|x| < \delta$ , entonces  $|(x + 4) - 4| < 10^{-10}$ .

c) Si  $|x - 4| < \delta$ , entonces  $|2x - 8| < 10^{-7}$ .

d) Si  $|x| < \delta$ , entonces  $|x^2| < 10^{-9}$ .

e)\* Si  $|x - 2| < \delta$ , entonces  $|x^2 + x - 6| < 10^{-11}$ .

f)\* Si  $|x - 4| < \delta$ , entonces  $|2x^2 - x - 28| < 50$ .

2. Comprueba directamente utilizando la definición, los límites siguientes:

a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{2} = 1,5$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + 3) = 3$

c)  $\lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{1}{x} \right) = -1$

d)  $\lim_{x \rightarrow 1/2} (3x + 2) = 3,5$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

f)  $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$

g)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) = 0$

h)  $\lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 = 2$

i)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2) = 6$

j)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3$

k)  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x + 1) = 1$

l)  $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 3x + 4) = 6$

3. A partir de los siguientes gráficos (fig. 4.9) analiza si existe el límite de la función en los puntos indicados.

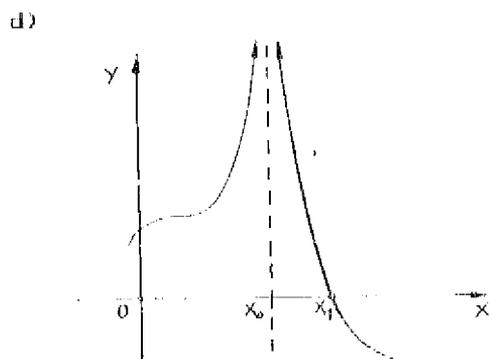
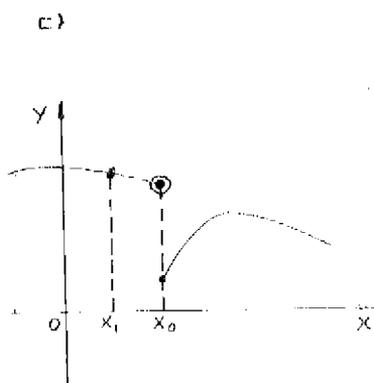
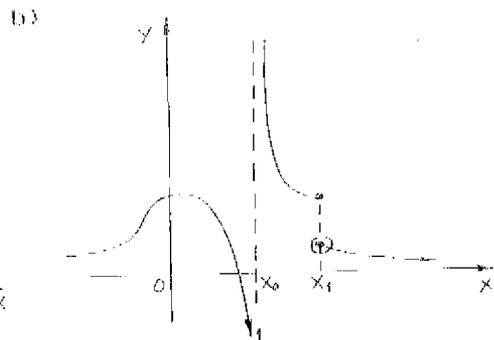
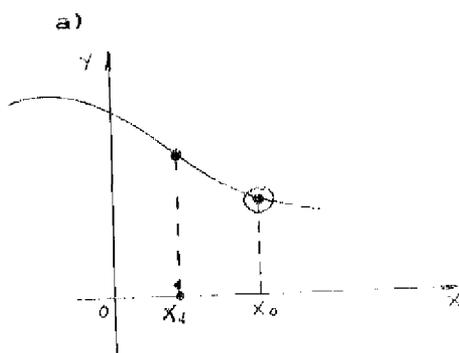


Fig. 4.9

4. Calcula los límites siguientes:

a)  $\lim_{x \rightarrow 3} 4$

b)  $\lim_{x \rightarrow -1} x$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+9}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \pi} 3$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x-1}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 1/2} \sqrt{x}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 1/4} \sqrt{x+0,5}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow 1/5} \sqrt{x+0,37}$$

$$ñ) \lim_{x \rightarrow -0,53} \sqrt{x+3,77}$$

$$p) \lim_{x \rightarrow 1,65} \sqrt{x-1,17}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -1/2} \sqrt{x+5}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 4} x$$

$$h) \lim_{x \rightarrow -5} \sqrt{3+x}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow \sqrt{9}} \sqrt{x-0,17}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow \pi} \sqrt{x+3}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow -1/8} \sqrt{x + \frac{1}{x}}$$

$$o) \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \sqrt{x}$$

$$q) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \sqrt{x}$$

#### 4. Operaciones con límites

Hasta ahora solo puedes calcular algunos límites; el teorema que sigue te permitirá disponer de un procedimiento para la determinación de límites.

Teorema 1

Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = F$  y  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = G$ , entonces

a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \pm g) = F \pm G$ ,

b)  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g) = F \cdot G$ ,

c) si además  $G \neq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f}{g} \right) = \frac{F}{G}$ .

Demostración

Todos ~~los~~ incisos se demuestran de forma análoga; demostremos el inciso a) (para la suma) a manera de ilustración:

Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $0 < |x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - F| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ o sea, } -\frac{\varepsilon}{2} < f(x) - F < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|g(x) - G| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ o sea, } -\frac{\varepsilon}{2} < g(x) - G < \frac{\varepsilon}{2}$$

sumando adecuadamente resulta:

$$-e < f(x) + g(x) - (F + G) < e$$

que significa:  $|(f + g)(x) - (F + G)| < e$

es decir,  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = F + G$ . ■

### Ejemplo 1

Calcula los límites siguientes:

a)  $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 + x - \sqrt{x})$       b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$       c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

Resolución

a)  $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 + x - \sqrt{x})$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} x^2 + \lim_{x \rightarrow 4} x - \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x}$$

Aplicando el teorema 10.

$$= \lim_{x \rightarrow 4} x \cdot \lim_{x \rightarrow 4} x + \lim_{x \rightarrow 4} x - \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x}$$

Aplicando el teorema 1 b

$$= 4 \cdot 4 + 4 - \sqrt{4} = 4^2 + 4 - 2 = 18$$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 4)}{\lim_{x \rightarrow 0} (x - 2)}$ 

Aplicamos teorema 1 c porque  $\lim_{x \rightarrow 0} (x - 2) = -2 \neq 0$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} x^2 - \lim_{x \rightarrow 0} 4}{\lim_{x \rightarrow 0} x - \lim_{x \rightarrow 0} 2}$$

$$= \frac{0 - 4}{0 - 2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

En este caso  $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = \lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 2 = 2 - 2 = 0$  y

no se puede utilizar el teorema. Como el numerador también se anula para  $x = 2$ , hay en él un factor  $x - 2$ ; en este caso, analizamos la fracción para tratar de simplificar y obtenemos:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2 \quad \text{si } x \neq 2$$

Es decir, para todo  $x \neq 2$ ;  $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$ , como en el límite no interviene el valor  $f(x_0)$  (en este caso  $x_0 = 2$ ) podemos utilizar la fracción simplificada para calcular el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 2 = 2 + 2 = 4 \quad \blacksquare$$

El procedimiento del ejemplo 1 puede ser generalizado, de forma que, en muchos casos, el cálculo de límites se reduce a la evaluación de funciones.

Teorema 2

Si  $P$  y  $Q$  son polinomios,  $Q(x_0) \neq 0$ , entonces:

a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$

b)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$

La demostración de este teorema es una simple comprobación y la omitimos.

El teorema 2 significa que para calcular el límite de una función racional basta evaluar y, si la función no está definida, pues el denominador se anula, se analiza si es posible simplificar y se procede como en el ejemplo 1c. Si no es posible simplificar, el límite no existe.

**Ejemplo 2**

Calcula los límites siguientes, si existen.

- a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 + x^3 - 1}{x^2 + 1}$       b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 2x^3 - x^2 + 3x - 2}{x^2 - 5x + 6}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$       d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 1}$

Resolución:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 + x^3 - 1}{x^2 + 1}$   
 Como el denominador no se anula para  $x = 1$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 + x^3 - 1}{x^2 + 1} = \frac{1 + 1 - 1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 2x^3 - x^2 + 3x - 2}{x^2 - 5x + 6}$

En este caso  $2^2 - 5(2) + 6 = 0$ . No es posible evaluar, analizamos entonces si es posible simplificar, para

ello descomponemos en factores el numerador y el denominador.

$$x^4 - 2x^3 - x^2 + 3x - 2 = (x - 2)(x^3 - x + 1)$$

Utilizando  
Ruffini

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

luego:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 2x^3 - x^2 + 3x - 2}{x^2 - 5x + 6} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^3 - x + 1)}{(x - 2)(x - 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x + 1}{x - 3} = \frac{2^3 - 2 + 1}{2 - 3} \\ &= -7 \end{aligned}$$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$  no existe El denominador se anula y no es posible simplificar.

d) En este caso  $1^2 - 2 + 1 = 0$  y al simplificar resulta

$$\frac{x - 1}{(x - 1)^2} = \frac{1}{x - 1}, \text{ pero } 1 - 1 = 0, \text{ no se puede simplificar}$$

y  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 1}$  no existe. ■

También en el caso de las funciones trigonométricas el cálculo del límite se reduce a una evaluación.

**Teorema 3**

a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{cos} x = \operatorname{cos} x_0$   
 c)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tan} x = \operatorname{tan} x_0$ ,  $x_0 \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$

**Demostración**

a) Sea  $\varepsilon > 0$ , debemos encontrar  $\delta > 0$  tal que

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |x - x_0| < \delta$$

Transformemos la expresión  $\operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x$  utilizando la identidad que aparece en el punto 47 del momento.

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0 = 2 \operatorname{cos} \frac{x + x_0}{2} \operatorname{sen} \frac{x - x_0}{2}$$

$$\text{luego} \quad |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0| = 2 \left| \operatorname{cos} \frac{x + x_0}{2} \right| \left| \operatorname{sen} \frac{x - x_0}{2} \right|$$

y como  $|\operatorname{cos} x| \leq 1$ , resulta

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0| \leq 2 \left| \operatorname{sen} \frac{x - x_0}{2} \right|$$

La figura 4.10 muestra que si  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{sen} \theta \leq \theta$ , entonces

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0| \leq 2 \frac{|x - x_0|}{2} = |x - x_0|$$

luego basta tomar  $\delta \leq \varepsilon$

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0| \leq |x - x_0| < \delta \leq \varepsilon$$

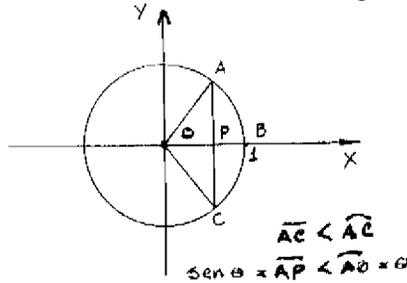


Fig. 4.10

b)  $\cos x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$ , por tanto

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left( 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \right) = 1 - 2 \lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \\ &= 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x_0}{2} = \cos x_0 \end{aligned}$$

c) En este caso, como  $x_0 \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ ,  $\cos x_0 \neq 0$  y se puede aplicar el teorema 1c:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \tan x = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{sen} x}{\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x} = \frac{\operatorname{sen} x_0}{\cos x_0} = \tan x_0$$

### Ejemplo 3

Calcula: a)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)$       b)  $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \left( \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\tan x} \right)$

Resolución

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 1 - \cos 0 = 1 - 1 = 0$

b) 
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/6} \left( \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\tan x} \right) &= \frac{\operatorname{sen} \pi/6 - \cos \pi/6}{\tan \pi/6} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \\ &= \frac{3(1 - \sqrt{3})}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 3}{2} \approx -0,634 \end{aligned}$$

En algunas ocasiones el cálculo de límites se facilita

con el siguiente teorema que se refiere a las funciones compuestas.

Teorema 4

$$\begin{array}{l} \text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0 \quad \text{y} \quad \lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = z_0 \\ \text{entonces } \lim_{x \rightarrow x_0} (f \circ g)(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = z_0 \end{array}$$

Demostración

Sea  $\varepsilon > 0$ , entonces existe  $\delta_1$  tal que si  $|g(x_0) - y_0| < \delta_1$   
 $|f(g(x)) - z_0| < \varepsilon$

pero como  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0$ , existe  $\delta$  tal que si  $0 < |x - x_0| < \delta$ ,

entonces  $|g(x) - y_0| < \delta_1$ , es decir,

si  $0 < |x - x_0| < \delta$ , entonces  $|f(g(x)) - z_0| < \varepsilon$

que significa

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f \circ g(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(y) \quad \text{como se quería.} \quad \blacksquare$$

**Ejemplo 4**

Calcula; a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 + 3}$                       b)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \operatorname{sen} 3x$

Resolución

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 + 3}$

Como  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3) = 4$ , del teorema 4 resulta:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 + 3} = \lim_{y \rightarrow 4} \sqrt{y} = \sqrt{4} = 2$$

En la práctica, como para calcular el límite del radical basta evaluar, se calcula de forma más simple:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 + 3} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3)} = \sqrt{1 + 3} = 2$$

b)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \operatorname{sen} 3x$

Análogamente

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} \left[ \lim_{x \rightarrow \pi/2} 3x \right] = \operatorname{sen} 3\pi/2 = -1 \quad \blacksquare$$

Ejercicios (epígrafe 4)

1. Calcule los límites siguientes:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 3}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x^2 - 5x + 1}{x - 4} + 1 \right]$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{x - 2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x^4 - x^2 + 1}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0,35} \frac{x^2 - 4x + 1}{x^3 - 6}$

f)  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} \frac{x - 5}{x^3 - x^2 + x}$

g)  $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\tan^2 x + \operatorname{sen} x}$

h)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 9}$

i)  $\lim_{x \rightarrow 1/4} \frac{\sqrt{x} + 4}{x^3 + 2x + 1}$

j)  $\lim_{x \rightarrow 5\pi/6} \frac{\cos x - \tan x}{\frac{3}{4} - \cos^2 x}$

2. Determine los límites siguientes:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^2 + x + 1}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{x^2 + 1}{x^2 - x - 1}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$

d)  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^4 + x^2 + 1}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 1}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$

g)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$

h)  $\lim_{x \rightarrow 1,57} \frac{x^3 + x^2 + \sqrt{x}}{x^4 - \sqrt{9x^2 + x} - \sqrt{5}}$

i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

j\*)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2 + x - 1}}{\sqrt{x + 4} - 3}$

k)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{sen}(3x - 1) + \sqrt{x}}{\cos(2x + 1) - x^2}$

l)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1 - \cos x}$

m\*)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right]$

n)  $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$

3. Calcule:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\sqrt{4x + 3}}{\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{5x + 1}}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0,85} \frac{x + \sqrt{x}}{x^2 - x + 2/7}$

d)  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{7}} \frac{x^4 + 2x^3 + x^2 + x - 0,6}{x^5 - x^3 + x^2 + 3x}$

e\*)  $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\operatorname{sen} x - \tan x}{\operatorname{sen} x + \tan x}$

- f\*)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x+2}{x^2-5x+4} - \frac{x-4}{3(x^2-3x+2)} \right)$       g)  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} \frac{x+\sqrt{9}}{x-\sqrt{9}}$
- h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x}$
- i\*)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^r-1}{x^s-1} \quad r, s \in \mathbb{Z}$
- j)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}}{x-2}$
- k)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (1+\tan^2 x) \cos^2 x$
- l)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2}$
- m)  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x \tan x - \cos x \tan^2 x}{\sin x \cos x \cos 2x}$
- n)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+1}}$
- ñ)  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1-\tan x}{\cos x}$
- o)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$
- p\*)  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}$
- q)  $\lim_{x \rightarrow 1} \tan \frac{3\pi x}{2} \cos x$
- r\*)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$

## 5. Límites notables

En el cálculo con límites resulta de utilidad el conocimiento de algunos límites especiales que tienen aplicaciones importantes.

**Teorema 1** (Límite fundamental trigonométrico)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

**Demostración**

En el cálculo de este límite no puede aplicarse el teore-

ma lo del epígrafe 4, pues  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ .

Para realizar la demostración utilizaremos el significado geométrico del seno y el arco. En la fig. 4.11 tenemos que:

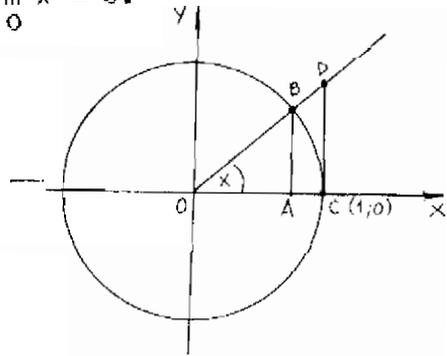


Fig. 4.11

$$\text{Área}(\Delta AOB) \leq \text{Área}(\text{sector } OBC) \leq \text{Área}(\Delta OCD)$$

pero  $\text{Área}(\Delta AOB) = \frac{1}{2} \sin x \cos x$

$\text{Área}(\text{sector } OBC) = \pi \cdot 1^2 \cdot \left(\frac{x}{2\pi}\right) = \frac{x}{2}$  Punto 45 del Memento.

$\text{Área}(\Delta OCD) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot \frac{CD}{OC} = \frac{1}{2} \tan x$

luego  $\frac{1}{2} \sin x \cos x \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2} \tan x$

$\cos x \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$  Dividiendo por  $\sin x > 0$ .

o sea,  $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}$  Invertiendo los cocientes.

pero como  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$   $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$ .

para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $0 < |x| < \delta$ , entonces

$1-\epsilon < \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x} < 1+\epsilon$ , que significa:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  como se quería. ■

**Ejemplo 1**

Calcula: a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$     b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}}$     c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

Resolución

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x}$  Multiplicando y dividiendo por 2

$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x}$   $\lim_{x \rightarrow 0} 2 = 2$

$= 2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y}$  Utilizando la sustitución  $y = 2x$ .

$= 2$  Utilizando el Lema 1.

En la práctica no es necesaria realizar explícitamente

la sustitución.

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left( \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \right)}{\frac{x^2}{2}}$$

Aplicando  
 $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$   
 $\cos x = x/2$ .

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left( 1 - \cos^2 \frac{x}{2} \right) + \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}$$

Aplicando  
 $1 - \cos^2 \frac{x}{2} = \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$ .

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}$$

Dividiendo numerador y denominador por 2.

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = 1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1 \quad \blacksquare$$

### Ejemplo 2

En una circunferencia de radio  $r$  se inscriben polígonos regulares de  $n$  lados. Utiliza tus conocimientos sobre límite para justificar la fórmula del área de la circunferencia.

Resolución

El polígono regular puede ser descompuesto en  $n$  triángulos como el de la figura 4.12. El área de cada uno de esos triángulos es:

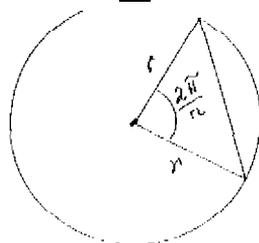


Fig. 4.12

$$A_r = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{n} \quad \text{punto 45 del Momento.}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{n}$$

y como son  $n$  triángulos  $A_p = \frac{n}{2} \cdot r^2 \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{n}$

que puede escribirse  $A_p = n r^2 \frac{\text{sen} \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}$  Multiplicando y dividiendo por  $n$ .

que, con la sustitución  $x = \frac{2\pi}{n}$ , se puede escribir

$$A_p = n r^2 \frac{\text{sen } x}{x}$$

Observa que a medida que  $n$  crece,  $\frac{2\pi}{n}$  decrece, aproximándose a cero, y el área del polígono se "aproxima" al área de la circunferencia.

La expresión "se aproxima", formalmente se interpreta como un límite, es decir:

$$A_c = \lim_{x \rightarrow 0} n r^2 \frac{\text{sen } x}{x} = n r^2 \quad \blacksquare$$

Un procedimiento análogo, aunque menos formalizado y más intuitiva, fue utilizado por los matemáticos griegos de la antigüedad.

Particularmente importante en toda la matemática es el teorema siguiente:

Teorema 2 (Límite fundamental algebraico)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \text{ existe}$$

Este teorema no lo demostraremos pues no contamos con recursos suficientes para ello; en cursos posteriores de Matemática podrás llegar a demostrarlo.

Para hacer plausible este teorema, calcularemos algunos valores de la expresión  $(1+x)^{\frac{1}{x}}$  para valores pequeños de  $x$  de la forma  $\frac{1}{10^n}$ . En las computadoras de la escuela puedes calcular otros valores.

$$\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{10}}} = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = 2,593\ 742\ 46\dots$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} &= 2,704\ 813\ 829\dots \\ \left(1 + 10^{-2}\right)^{10^2} &= 2,716\ 923\ 932\dots \\ \left(1 + 10^{-4}\right)^{10^4} &= 2,718\ 145\ 927\dots \\ \left(1 + 10^{-5}\right)^{10^5} &= 2,718\ 268\ 237\dots \\ \left(1 + 10^{-6}\right)^{10^6} &= 2,718\ 280\ 469\dots \\ \left(1 + 10^{-7}\right)^{10^7} &= 2,718\ 281\ 892\dots \\ \left(1 + 10^{-8}\right)^{10^8} &= 2,718\ 281\ 815\dots \\ \left(1 + 10^{-9}\right)^{10^9} &= 2,718\ 281\ 827\dots \end{aligned}$$

Estos valores permiten apreciar que cuando  $x$  decrece,  $(1 + \frac{1}{x})^x$  crece, pero "acercándose" a un determinado valor. Observa que en cada uno de los valores calculados aparece una cifra que se empieza a repetir.

Aunque no lo vamos a demostrar, el valor del límite que estamos considerando es un número irracional; con 10 cifras correctas, su valor es: 2,718 281 828

**Definición 1**

Se llama número de Euler y se denota  $e$ , al número

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 2,718\ 281\ 828\ 4\dots$$

**Ejemplo 3**

Calcula:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$       b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^{\frac{1}{x}}$

Resolución

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 = e^2 \approx 7,40$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{2}x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{2}x\right)^{\frac{2}{x} \cdot \frac{1}{2}}$$

Multiplicando y dividiendo por 2 el exponente.

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left(1 + \frac{1}{2}x\right)^{\frac{2}{x}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Propiedades de las potencias.

$$= \left[ \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{2}x\right)^{\frac{2}{x}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Propiedades de los límites.

$$= e^{1/2} = \sqrt{e} \approx 1,65 \quad \blacksquare$$

## Ejercicios (epígrafe 5)

### 1. Calcula:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{sen} x}{\frac{x}{2}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} (1-5x)^{\frac{1}{x}}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 3x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^2$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{2x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 0} (2^x - x2^x)^{\frac{1}{2x}}$$

### 2. Calcula los límites siguientes:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$$

$$b) \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1-y}{\operatorname{sen}(1-y)}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1}{x}}$$

$$g^*) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$$

$$h^*) \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{2}{x}}$$

$$i^*) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$j^*) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$$

$$k^*) \lim_{y \rightarrow 0} (1 - y)^{\frac{1}{\tan y}}$$

$$l^*) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t}$$

- 3.\* Considera la ecuación general de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sus soluciones son funciones de los coeficientes de la ecuación. Analiza el límite de esas soluciones cuando  $a$  tiende a cero y  $b$  y  $c$  permanecen constantes. ¿Qué interpretación puedes hacer de este resultado?

4. Un segmento  $\overline{AB}$  de longitud 3 se divide en  $n$  partes iguales y sobre cada una de ellas se construye un triángulo rectángulo isósceles. Calcula el límite de la longitud de la línea quebrada así construida cuando el número de lados crece ilimitadamente y compárala con la longitud del segmento original.

- 5.\* Sean  $AC$  un arco de circunferencia de radio  $R$  (fig. 4.13),  $AT$  y  $TC$  tangentes en  $A$  y  $C$ ,  $TO \perp AC$ ,  $EF$  tangente en el punto medio del arco  $AC$ . Si  $\theta$  es el ángulo formado por los radios  $\overline{OA}$  y  $\overline{OB}$ , calcula la razón entre las áreas de los triángulos  $ATC$  y  $ETF$  cuando  $\theta \rightarrow 0$ .

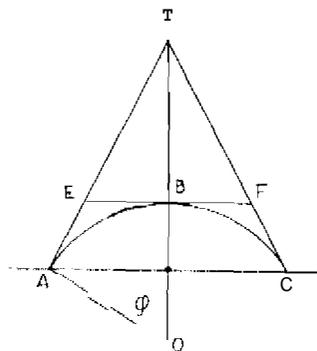


Fig. 4.13

#### 6. Funciones exponencial y logarítmica de base e

En un capítulo anterior estudiaste las funciones exponenciales y logarítmicas de base 10 que tienen numerosas aplicaciones prácticas; sin embargo, debido al teorema 2 del epígrafe 5, en la teoría matemática el papel principal corresponde a las funciones:

$$y = e^x ; y = \log_e x = \ln x$$

En el caso de la función logarítmica se utiliza una notación especial debido a la frecuencia con que se presenta en matemática. La abreviatura  $\ln$  alude al nombre logarit-

mos naturales con el cual se les conoce, y que se debe a que aparecen de modo natural en los problemas del Análisis. También se les llama **logaritmos Neperianos**.<sup>1)</sup>

Para construir la gráfica de  $y = e^x$ , calculamos algunos valores y los representamos en la siguiente tabla.

x	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$e^x$	0,05	0,14	0,37	0,61	1	1,65	2,72	4,48	7,39

Los valores de esta tabla pueden ser calculados utilizando **logaritmos decimales**. En efecto,

$$\begin{aligned}
 e^{-2} &= \left(10^{\log e}\right)^{-2} = 10^{-2\log e} = 10^{-2\log(2,72)} = 10^{-2 \cdot (0,434)} \\
 &= 10^{-0,868} = 10^{-1+0,1308} \quad \text{lo expresamos con mantisa positiva} \\
 &= \text{antilog}(-1 + 0,1308) \\
 &= 0,135 \approx 0,14 \quad 2)
 \end{aligned}$$

Representemos los puntos en un sistema de coordenadas y tracemos la curva que los contiene y cuya forma te es conocida (fig.4.14).

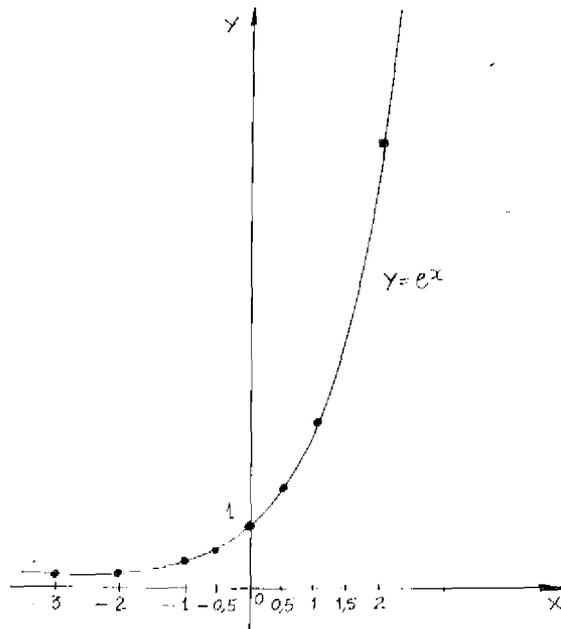


Fig.4.14

1) En honor de John Neper.

2) También existen tablas de  $y = 2^x$ ,  $y = \ln x$  pero son más complejas y en este texto no las utilizaremos.

De la misma forma, para representar la gráfica de  $y = \ln x$  se utiliza la tabla siguiente:

x	0,1	0,5	0,8	1	1,5	2	2,5	3	4	5
ln x	-2,3	-0,69	-0,22	0	0,41	0,69	0,92	1,1	1,39	1,61

Representamos los puntos en un sistema de coordenadas y trazamos la curva que los contiene, pues también en este caso la forma te es conocida (fig.4.15).

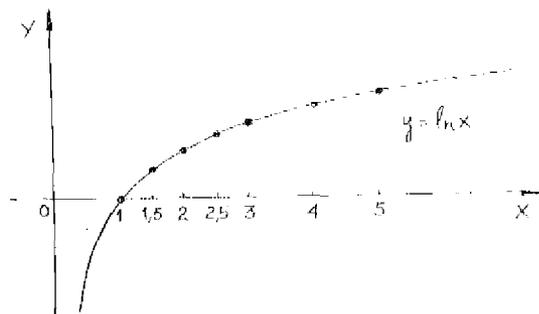


Fig. 4.15

En estos gráficos son evidentes las propiedades ya conocidas de las funciones exponenciales y logarítmicas:

	$y = e^x$	$y = \ln x$
Dominio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+$
Imagen	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$
Ceros	No tiene	No tiene
Monotonía	Creciente	Creciente
Máximo	No tiene	No tiene
Mínimo	No tiene	No tiene
Paridad	No es par ni impar	No es par ni impar
Inyectiva	Si	Si
Inversa	$y = \ln x$	$y = e^x$

### Ejemplo 1

a) Calcula  $\ln 3,7$

b) Calcula  $e^{5,9}$

c) Resuelve gráficamente la ecuación  $\ln x - x + 2 = 0$

Resolución

$$\text{a) } \ln 3,7 = \frac{\log 3,7}{\log e}$$

Utilizando cambio de base de los logaritmos.

$$= \frac{0,5682}{0,4346} = 1,3077 = 1,31 \quad \text{Se tomó con tres cifras.}$$

$$\text{b) } e^{5,9} = 10^{5,9 \log e} = 10^{5,9 \cdot (0,4346)} = 10^{2,5618}$$

$$= \text{antilog}(2 + 0,5618) = 200 \quad \text{Se tomó con tres cifras.}$$

$$e^{5,9} = 2,00 \cdot 10^2$$

c) La ecuación dada  $\ln x - x + 2 = 0$ , es equivalente a:

$$\ln x = x - 2$$

que puede escribirse como un sistema  $\begin{cases} y = \ln x \\ y = x - 2 \end{cases}$

En la fig. 4.16 se han representado las gráficas de ambas funciones, en ellas se puede apreciar que la ecuación dada tiene dos soluciones  $x_1 \approx 0,16$  y  $x_2 \approx 3,1$ . Comprobando podemos ver que:

$$\ln 0,16 \approx -1,83 \approx -1,8$$

pero

$$0,16 - 2 = -1,84 \approx -1,8$$

luego

$$\ln 0,16 \approx 0,16 - 2$$

$$\ln 3,1 \approx 1,13 \approx 1,1$$

$$3,1 - 2 = 1,1$$

$$\text{por tanto } \ln 3,1 \approx 3,1 - 2 \quad \blacksquare$$

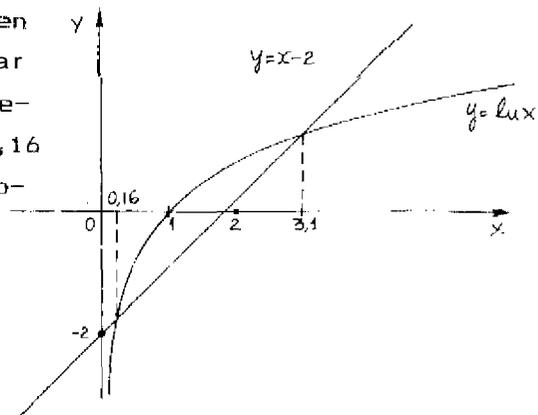


Fig. 4.16

También para las funciones exponenciales y logarítmicas, el cálculo de límites se reduce a una evaluación en los puntos donde están definidas. En especial para la base  $e$ .

Teorema 1

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} e^x &= e^{x_0} \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow x_0} \ln x &= \ln x_0 ; x_0 > 0 \end{aligned}$$

Este teorema no vamos a demostrarlo, en los ejercicios de este epígrafe encontrarás un procedimiento para hacerlo.

Ejemplo 2

Calcula los límites siguientes:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} \left[ e^{\sqrt{x+5}} - e^{x+9} + \frac{1}{e^x} \right]$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \ln(x+1) - x \ln x + \frac{1}{\ln 2x} \right]$$

Resolución

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} \left[ e^{\sqrt{x+5}} - e^{x+9} + \frac{1}{e^x} \right] \\ = \lim_{x \rightarrow -1} e^{\sqrt{x+5}} - \lim_{x \rightarrow -1} e^{x+9} + \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{e^x} \\ = e^{\sqrt{-1+5}} - e^{-1+9} + \frac{1}{e^{-1}} \\ = e^2 - e^2 + e = e = 2,72 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \ln(x+1) - x \ln x + \frac{1}{\ln 2x} \right] \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \ln(x+1) - \lim_{x \rightarrow 1} x \ln x + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln 2x} \\ = \ln(1+1) - 1 \cdot \ln 1 + \frac{1}{\ln 2 \cdot 1} \\ = \ln 2 - 0 + \frac{1}{\ln 2} = \ln 2 + \frac{1}{\ln 2} \approx 2,14 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicios (epígrafe 6)

1. Calcula:

a)  $\ln 15,3$

b)  $e^{7,3}$

c)  $\ln 0,153$

d)  $e^{0,671}$

e)  $e^{0,92}$

f)  $\ln 153$

g)  $\ln 71,6$

h)  $e^{0,031}$

i)  $e^{42,5}$

2. Resuelve, aproximadamente, las siguientes ecuaciones:

a)  $e^x + x - 3 = 0$

b)  $\ln(x+1) - x - 3 = 0$

c)  $e^x - x^2 - 1 = 0$

d)  $2x - \ln x - 4 = 0$

e)  $\operatorname{sen} x - x = 0$

f)  $\cos x - 4x = 0$

3. Calcula los límites siguientes:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} e^x$

b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \ln x$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1,5} (e^x + x)$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2,3} (\ln x - x^2 + x)$

e)  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} (e^{x^2} + x - x + \ln x)$

f)  $\lim_{x \rightarrow 1} e^{x^2} + a \cdot \ln(x^a + 1)$

g)  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{a}} (e^{x^a - x} - \ln(x^2 + 1))$

h)  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln \sqrt{x+1}} (x^2 + 3 - \ln(x+3))$

4\*. a) Comprueba la descomposición factorial

$$(x^n - 1) = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

b) Aplica el resultado del inciso a) para probar que

$$(1 + \lambda)^n - 1 > n\lambda, \quad \lambda > 0$$

c) Deduce del inciso b) la desigualdad de Bernoulli:

$$(1 + \lambda)^n > 1 + n\lambda, \quad \lambda > 0$$

5\*. a) Utilizando el hecho de que  $e^{\frac{1}{n}} > 1$ , escribe

$$e^{\frac{1}{n}} = 1 + \lambda, \quad \lambda > 0 \quad \text{y aplica la desigualdad de Bernoulli para deducir}$$

$$e > 1 + n\lambda, \quad \lambda = e^{\frac{1}{n}} - 1$$

b) Utiliza el resultado del inciso a) para probar que

$$e^n - 1 < \frac{e^n - 1}{n}$$

6\*. a) Prueba que  $\left| \frac{e^x - e^{x_0}}{e^{x_0}} \right| < \epsilon$  si y solo si  $\left| e^{x-x_0} - 1 \right| < \frac{\epsilon}{e^{x_0}}$ .

b) Deduce del inciso a) que  $\lim_{x \rightarrow x_0} e^x = e^{x_0}$  si y solo si

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1, \quad \text{es decir, que el límite de la función}$$

exponencial se calcula evaluando si y solo si esto

ocurre para  $x = 0$ .

- c) Utiliza el hecho de que cualquiera sea  $n$  existe  $x$  tal que  $|x| < \frac{1}{n}$  y la desigualdad del ejercicio 5b para probar que  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ .

7\*. a) Prueba que

$$|\ln x - \ln x_0| < \varepsilon \text{ si y solo si } \left| \ln \frac{x}{x_0} \right| < \varepsilon.$$

b) Deduce del inciso a) que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \ln x = \ln x_0 \text{ si y solo si, } \lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0.$$

c) Probar que  $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$ .

## 7. Funciones continuas

Las gráficas de todas las funciones que has estudiado, se pueden trazar sin levantar el lápiz del papel, excepto en algunos puntos excepcionales, como los puntos  $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ , para la función tangente, o el punto  $x = 0$  para la función  $y = \frac{1}{x}$ .

Esta característica se corresponde con una propiedad de las funciones que estudiaremos en este epígrafe: la continuidad. Observa que el nombre se corresponde con el sentido usual del término: una función es continua si su gráfica lo es; es decir, si no se interrumpe.

La figura 4.17, ilustra algunos casos que pueden presentarse:

En la figura 4.17a, la gráfica se puede pasar por la recta  $x = x_0$  sin levantar el lápiz del papel: la función es continua. Observa que la función tiene límite en  $x_0$ , está definida en  $x_0$  y

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

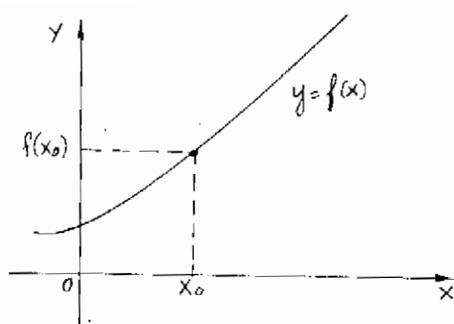
En la figura 4.17b, hay que "saltar" la recta  $x = x_0$ , pues  $f(x_0)$  no está definida.

En la figura 4.17c, al pasar por  $x = x_0$ , la gráfica "salta", "se rompe", en este caso no existe límite.

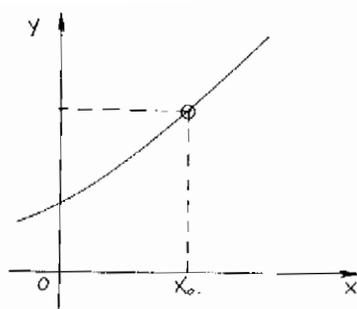
En la figura 4.17d, hay que saltar al pasar por  $x = x_0$ , pues

$$f(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

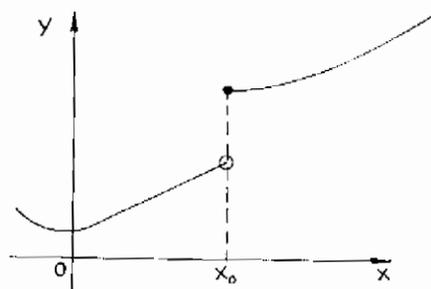
a)



b)



c)



d)

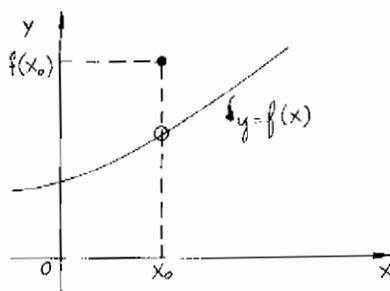


Fig. 4.17

Estos ejemplos sugieren una nueva interpretación del concepto de continuidad: una función es continua en  $x_0$  si a valores de  $x$  próximos a  $x_0$ , corresponden valores de  $f(x)$  cercanas a  $f(x_0)$ , en otras palabras, a pequeños incrementos de la variable corresponden pequeños incrementos de la función.

Definición 1

Sea  $f$  una función numérica,  $f$  es continua en  $x_0$  si:

- $f(x_0)$  existe
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existe
- $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

### Ejemplo 1

- a) Prueba que la función  $y = \text{sen } x$  es continua en  $x_0 = 0$ .  
b) Prueba que la función  $y = \ln(x - 1)$  no es continua en  $x_0 = 1$ .  
c) Analiza la continuidad de la función  $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$  en  $x_0 = 0$ .

Resolución

- a) En efecto, sabemos que:

$$\text{sen } 0 = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \text{sen } x = 0, \text{ entonces:}$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen } x = \text{sen } 0,$$

luego es continua.

- b) Basta observar que  $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$  y que la función  $\ln x$  no está definida ni tiene límite en  $x_0 = 0$ .  
c) Esta función no está definida en  $x_0 = 0$ , no es continua.

Sin embargo,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$ .

Como en este caso existe el límite, la función puede "hacerse continua" si se define  $f(0) = 1$ . Esto significa que se define una nueva función a partir de la dada:

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen } x}{x} & ; x \neq 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases}$$

que sí es continua en  $x_0 = 0$ . ■

De lo dicho hasta ahora y los teoremas sobre límite, se desprende que las funciones elementales (punto 21 del Momento) son continuas en todos los puntos en los que están definidas.

Teorema 1

Ia.; funciones elementales son continuas en todos los puntos en que están definidas, luego, si  $f$  es una función elemental y  $x_0 \in \text{Dom } f$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

La demostración de este teorema es una simple aplicación de los teoremas sobre límite de funciones y no la

haremos.

En la práctica, el teorema 1 permite calcular la mayor parte de los límites que se presentan en la matemática elemental.

**Ejemplo 2**

Calcula los límites siguientes,

a)  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} (e^x \operatorname{sen}(x - 1) + \tan x \cdot \ln(x^2 - 1))$

b)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left( \operatorname{sen} x \cos x - \cos 2x + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right)$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\tan x} - \cos 2x \right)$

Resolución

a) Como es una función elemental y está definida en  $x_0 = \sqrt{2}$ , basta evaluar:

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} (e^x \operatorname{sen}(x - 1) + \tan x \cdot \ln(x^2 - 1))$$

$$= e^{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(\sqrt{2} - 1) + \tan \sqrt{2} \cdot \ln(2 - 1)$$

$$= e^{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(\sqrt{2} - 1)$$

$$= 10^{1,41 \log e} \cdot \operatorname{sen} \frac{0,41 \cdot 180}{3,14}$$

Expresando  $\sqrt{2} - 1$  en grados.

$$= 1,63$$

b) Igualmente hay que evaluar

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left( \operatorname{sen} x \cos x - \cos 2x + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right)$$

$$= \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{2\pi}{2} + \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}} = 1$$

c) En este caso  $\frac{1}{\tan 0}$  no está definida y como  $\cos 0 = 1$ , el límite no existe. ■

Ejercicios (epígrafe 7)

1. Analiza la continuidad de las funciones  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$\text{y } g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ en}$$

a)  $x_0 = 0$

b)  $x = x_0 \in \mathbb{R}$

2.<sup>a</sup> Se define la función "parte entera", denotada con un corchete [ ], de la forma siguiente:

Si  $k \leq x < k + 1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , entonces  $[x] = k$

Analiza la continuidad de esta función para:

- a)  $x = 1$                       b)  $x = k \in \mathbb{Z}$                       c)  $x = x_0 \in \mathbb{R}$

3. Analiza si las funciones siguientes son continuas en  $x = 0$ . Si no lo son investiga si es posible "hacerlas continuas en ese punto".

- a)  $\operatorname{sgn}(x) = \frac{|x|}{x}$                       b)  $y = \frac{\cos x}{x}$                       c)  $y = \frac{e^x - 1}{x}$   
 d)  $y = \frac{x^2 - x}{x^3 - x}$                       e)  $y = \frac{x^4 - x}{x^9 - x^2}$                       f)  $y = \frac{1}{\sqrt{x^2}}$

4. Calcula los límites siguientes:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^4 + x^3 - x + 1)$                       b)  $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^5 - x^3 + 4)$   
 c)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x + 4}{x^4 + 2x^2 + 1}$                       d)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^7 + x^5 + x^3 + x}{x^6 + x^4 + x^2 + 1}$   
 e)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^7 - 128}{x^2 + 4x + 4}$                       f)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 + 2x + 1}{x^2 - 9}$

5. Calcula:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \ln(x^4 - 5x + 1)$                       b)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} e^{x^2 + x - 1}$   
 c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left[ \sqrt[7]{x^5 + 3} + \sqrt[5]{x^3 - 3x} \right]$                       d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1+x)}{x}$   
 e)  $\lim_{h \rightarrow 4} e^{2h} \cdot \operatorname{sen} \sqrt{h^2 + 1}$                       f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x^2 - 2x + 1)$   
 g)  $\lim_{y \rightarrow 2} \left[ \ln(y^2 + 3y + 2) - \ln(y + 2) \right]$                       h)  $\lim_{x \rightarrow 5} e^{9x^2 - 5x + 1}$   
 i)  $\lim_{h \rightarrow 1} \left[ e^{h^2 - h} \ln(2 - h) + \operatorname{sen} \sqrt{x^2 + 1} \right]$                       j)  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} (x - \sqrt{3} x^2 + 1)$

6\*. Calcula:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{sen} x} - \sqrt{1 - \operatorname{sen} x}}{\tan x}$                       b)  $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 10}{x^2 - 100}$   
 c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\operatorname{sen}^2 x}$                       d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}$   
 e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{1+x}) - 1}{x}$                       f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{sen} x} - 1}{x}$   
 g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[9]{x}} - 1}{x}$                       h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x + 2}{1 - x} \right)^{\frac{1}{x}}$

7. Tres rectángulos de alturas respectivas 3,0 m ; 2,0 m y 1,0 m y de bases iguales a 1 m, están separados una de otro por una distancia de 1m (fig.4.18). Sea  $x$  la distancia horizontal desde el punto A al punta variable F.

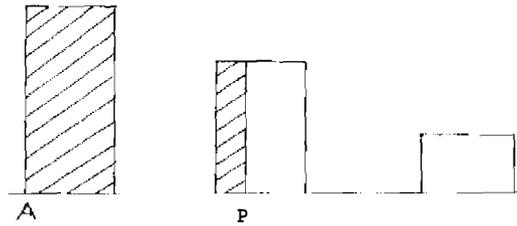


Fig. 4.18

- Expresa el área rayada en función de  $x$ .
- Analiza la continuidad de esa función.

### 8.\* Límites infinitos

El estudio del límite que hemos realizado hasta ahora, está relacionado con puntos de continuidad de las funciones: se trata de puntos  $x_a \in \mathbb{R}$  en los que el límite es, también, un número real.

En la práctica resulta conveniente hablar de límite también cuando los valores de la función (o los argumentos) se hacen arbitrariamente grandes. Para indicar valores arbitrariamente grandes, hablaremos de valores infinitos (que denotaremos  $\infty$ ), pero debes tener en cuenta que es solo una forma de hablar;  $\infty$  no es un número real,

La figura 4.19a, ilustra el caso de la función  $y = \frac{1}{x^2}$  en  $x = 0$ ; cuando  $x \rightarrow 0$ , los valores de la función se hacen arbitrariamente grandes y positivos, para indicarlo escribimos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

En el caso que  $y = -\frac{1}{x^2}$  (fig.4.19b) los valores se hacen arbitrariamente grandes en módulo, pero son negativos; para indicarlo escribimos:

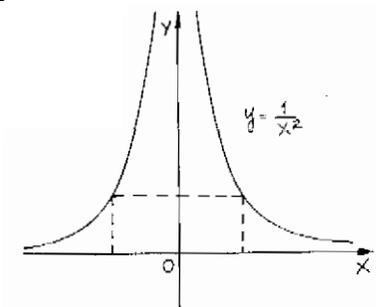
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{x^2} \right) = -\infty.$$

Finalmente la figura 4.19c ilustra el caso de  $y = \frac{1}{x}$ , en la cual los valores se hacen arbitrariamente grandes, pero pueden ser positivos o negativos, para indicarlo escribi-

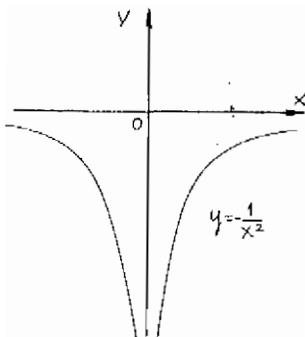
mos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = m \quad (\text{sin signo})$$

a)



b)



c)

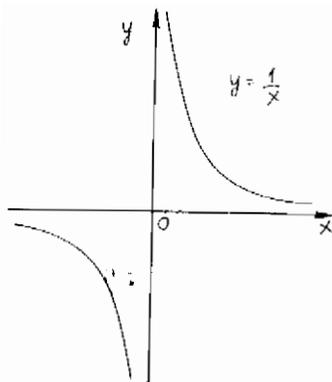


Fig.4.19

En todos los casos decimos que la función tiene un límite infinito en  $x_0$  y que  $x_0$  es un polo de la función. Observa que si  $x_0$  es un polo, la gráfica de la función se aproxima a la recta  $x = x_0$  cuando  $x \rightarrow x_0$ , esa recta es una asíntota vertical de la gráfica.

En el caso de las funciones racionales, sus valores pueden crecer arbitrariamente solo si el denominador se aproxima a cero y el numerador se conserva diferente de cero; esto es posible solo en los puntos en los cuales se anula el denominador y no se anula el numerador. Dado que si un mismo valor anula al numerador y al denominador la fracción puede ser simplificada se cumple que:

$x_0$  es un polo de una función racional si y solo si en la expresión simplificada  $y = \frac{P}{Q}(x)$ ,  $x_0$  anula al denominador, es decir,  $Q(x_0) = 0$ .

Si al descomponer en factores el denominador, el exponente de  $x - x_0$  en el denominador es impar, ocurre como en la figura 4.19c y el límite es  $\infty$  (sin signo), si el exponente es par, ocurre como en la figura 4.19a ó b y el límite será  $+\infty$  ó  $-\infty$  según el caso.

**Ejemplo 1**

a) Determina:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{x^2 - 4x + 4}$ ;  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan x$

b) Determina los polos y las ecuaciones de las asíntotas verticales para las funciones  $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 6x + 9}$ ,  
 $g(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 3x + 1}{2x - 1}$ .

Resolución

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{x^2 - 4x + 4}$

En ningún caso se puede evaluar, pues el denominador de la fracción se anula, tratamos de simplificar y encontramos:

$$\frac{2 - x}{x^2 - 4x + 4} = \frac{-(x - 2)}{(x - 2)^2} = \frac{-1}{x - 2}$$

como el exponente de  $x - 2$  es impar, tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{x - 2} = \infty \quad (\text{sin signo}).$$

La gráfica de esta función alrededor de 2 es como la de  $\frac{1}{x}$  alrededor de 0.

$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan x$

En el caso de la tangente ya sabes que  $x = \frac{\pi}{2}$  es una asíntota y que la tangente toma valores positivos antes de  $\frac{\pi}{2}$  y negativos después:

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan x = \infty$$

Observe que aunque  $y = \tan x$  no es una función racional

nal,  $x_0 = \pi/2$  es un polo.

b) Para analizar los polos debemos ver si es posible simplificar:

$$f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 6x + 9} = \frac{(x-3)(x-4)}{(x-3)^2} = \frac{x-4}{x-3},$$

$x_0 = 3$  es un polo;  $x = 3$  asíntota vertical.

$g(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 3x + 1}{2x - 1}$  el denominador se anula en  $x = \frac{1}{2}$ , dividimos el numerador por  $2x - 1$ , para tratar de eliminar factores comunes; en este caso resulta divisible y obtenemos:

$$\frac{(2x-1)(x^2+x-1)}{2x-1} = x^2+x-1$$

no tiene polos ni asíntotas. ■

Observa que la función racional  $y = \frac{2x^3 + x^2 - 3x + 1}{2x - 1}$  no está definida en  $x_0 = \frac{1}{2}$ , es discontinua en ese punta (pues no está definida), pero tiene límite finito:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2x^3 + x^2 - 3x + 1}{2x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1/2} (x^2 + x - 1) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Es decir, es discontinua pero no tiene polo, es una situación como la representada en la figura 4.17b.

Simbólicamente la expresión  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  significa que para cualquier número  $k$  escogido de antemano (por grande que sea), se puede escoger  $\delta > 0$  tal que si

$$0 < |x - x_0| < \delta \text{ entonces } |f(x)| > k$$

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

En otras palabras, si  $x_0$  es un polo de  $f$  y  $\frac{1}{f}$  está definida en  $x_0$ , entonces  $x_0$  es un cero de  $\frac{1}{f}$ .

### Ejemplo 2

Determina los ceros de  $f$ , comprueba que son polos de  $\frac{1}{f}$ .

a)  $f(x) = x^2 - 2x - 1$

b)  $f(x) = \frac{x^2 - 8x + 16}{(x-4)^3}$

c)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

Resolución

a)  $f(x) = x^2 - 2x - 1$

Igualemos a 0 para buscar los ceros:

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Utilizamos la fórmula de resolución de la ecuación de 2do. grado (punto 13 del Memento).

$$\begin{aligned} \text{luego } f(x) &= (x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2}) \\ &= (x - 2,41)(x + 0,414) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})}$$

por tanto los valores calculados son polos.

b)  $f(x) = \frac{x^2 - 8x + 16}{(x - 4)^3}$

Igualemos a cero el numerador:

$$x^2 - 8x + 16 = 0, \quad (x - 4)^2 = 0$$

luego se puede simplificar

$$f(x) = \frac{(x - 4)^2}{(x - 4)^3} = \frac{1}{x - 4}, \text{ no tiene ceros.}$$

c)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$

igualemos a cero  $x + 1 = 0$ ,  $x = -1$  es un **cero** de  $f$

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{x - 1}{x^2 - 1} \text{ y } x = -1 \text{ es un polo. } \blacksquare$$

Finalmente, analicemos en la figura 4.19 que cuando las valores de  $x$  se hacen arbitrariamente grandes (positivos o negativos) los valores de la función se aproximan a cero. En esos casos decimos que el límite en el infinito ( $+\infty$  ó  $-\infty$ ), de la función, es cero y lo escribiremos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

La recta  $y = 0$  se llama asíntota horizontal de la función.

El concepto de límite en el infinito se puede formular de una forma más precisa, análoga al límite ya definido, aunque nosotros no lo haremos. Para el cálculo utilizare-

mas el hecho de que el límite en el infinito se puede reducir al límite finito y utilizaremos las reglas de cálculo que ya conocernos.

**Ejemplo 3**

Determina las asíntotas horizontales, si existen.

a)  $y = \frac{x + 3}{x + 2}$

b)  $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

Resolución

a)  $y = \frac{x + 3}{x + 2}$

Para aplicar las reglas de cálculo trataremos de obtener límites finitos, para ello dividimos por  $x$  numerador y denominador:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 3}{x + 2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x}} \\ &= \frac{1 + 0}{1 + 0} = 1 \end{aligned} \quad \text{porque } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Asíntota horizontal  $y = 1$

b)  $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

En este caso dividimos por  $x^2$  (la mayor potencia de  $x$ ):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1 + 0} = 0$$

Asíntota horizontal  $y = 0$ . ■

Para el cálculo resulta útil el conocimiento del siguiente *teorema* que no vamos a demostrar, puedes convencerte de su validez revisando los gráficos de las funciones.

**Teorema 1**

Se cumple:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$     b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$     c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

d)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{sen} x$ ;  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{cos} x$ ;  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{tan} x$  no existen.

**Ejercicios (epígrafe E1)**

1. Determina los ceros y los polos de las funciones siguientes. Escribe las ecuaciones de las asíntotas ver-

tales.

$$a) y = \frac{10x}{x^2 - 1}$$

$$b) y = \frac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

$$c) y = \frac{x^2 - 5x + 1}{3x + 7}$$

$$d) y = \frac{2x^2 - x + 3}{x^3 - 6x + 5}$$

$$e) y = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

$$f) y = \frac{\sqrt{x+2} - x}{x^2 - 9}$$

$$g) y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$$

$$h) y = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$$

$$i) y = \frac{x^3 - 1000}{x^3 - 20x^2 + 100}$$

$$j) y = \frac{3x + 5}{2x + 7}$$

$$k) y = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 4}$$

$$l) y = \frac{x^2 - 16}{x^4 + 8x^2 + 16}$$

$$m) y = \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$$

$$n) y = \log(x^2 + 3x + 12) - 1$$

$$ñ) y = \sqrt{x^2 + 8x - 3} - \sqrt{x^2 + 4x + 3}$$

$$o) y = e^{2x^2 + x - 6} - 1$$

$$p) y = \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 3x + 7}$$

$$q) y = \cos^2 x + \sin x + 1$$

$$r) y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$$

$$s) y = \frac{3x^2 + 4x - 2}{x + 2}$$

$$t) y = \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 9}$$

$$u) y = \frac{\cos 2x - \cos x}{\sin 2x + \sin x}$$

$$v) y = \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2}$$

2. Determina, si es posible, el límite en  $+\infty$  y  $-\infty$  de las funciones del ejercicio 1. Escribe la ecuación de las asíntotas horizontales.

### Ejercicios del capítulo

1. A) Representa gráficamente las funciones siguientes y determina analíticamente su dominio, imagen, paridad y ceras. Si tienen inversa, determinala.

$$a) y = 3x + 5$$

$$b) y = \frac{1}{2}x^2 + 1$$

$$c) y = \frac{3}{2} - 2x^2$$

$$d) y = x^3 + 3$$

$$e) y = 2 \cos \left[ x - \frac{\pi}{6} \right]$$

$$f) y = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 2x + 1}$$

$$g) y = \frac{1}{x^2 - 9}$$

$$i) y = \frac{2x^6 - x^3 - 6}{x^6 - 4}$$

$$k) y = \ln x + 2$$

$$m) y = e^{x^2 + x}$$

$$ñ) y = \sqrt{x - 1}$$

$$p) y = \frac{x^2 + 4x + 4}{2x^2 - 8}$$

$$r) y = \frac{\sqrt{x - 7}}{\sqrt{x + 2}}$$

$$t) y = \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}$$

$$h) y = \sin 2x$$

$$j) y = 2e^x + 1$$

$$l) y = \ln(1 + x)$$

$$n) y = \sqrt{x^2 + 4} - 3$$

$$o) y = \frac{\sqrt{x + 1} - 2}{\sqrt{x + 1} - 1}$$

$$q) y = \frac{x + 3}{2x - 5}$$

$$s) y = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$$

$$u) y = \frac{2x^3 - 13x^2 + 23x - 12}{3x^2 - 17x + 20}$$

B\*) Determina polos y asíntotas.

2. Calcula los límites siguientes:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{1}{4x^2 - 1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(2x + 1) \frac{\pi}{4} - x}{e^x \ln x + x^2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 - x^3 + x^2 - 1}{6x^4 - x^2 + 1}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a + x) - \sin(a - x)}{x}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$$

$$i) \lim_{x \rightarrow \pi/2} (2 \sin x - \cos x + \tan x)$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + x^2 - 9x - 9}{x^2 - x - 6}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x + 3x - 2}{e^{2x} + e^x - 1}$$

$$o) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 5} + \sqrt{4x + 6}}{\sqrt{x + 6} - \sqrt{x}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 + x - 1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^6 - 1}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 7x - 1}}{\sqrt{2x^3 - x^2 + x}}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - x^2 + 1)$$

$$ñ) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^2 + x - 1) + 3}{\sin x + 3}$$

$$p) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln x - \ln 2}{x - 2}$$

$$q^*) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$r^*) \lim_{x \rightarrow \infty} \tan x$$

$$s^*) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(a + 2h) - 2 \operatorname{sen}(a + h) + \operatorname{sen} a}{h^2}$$

$$t^*) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 5}{2x + 7}$$

$$u) \lim_{x \rightarrow \sqrt{9}} \frac{x^5 + x^9 + x^2 - x + 1}{x^4 - x - 3}$$

$$v^*) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 3x + 7} \right)^x$$

$$w) \lim_{x \rightarrow 3,5} \frac{e^{x^2 + x} - \ln x + x^2 + 7}{2^{2x+9} + \ln(x^2 + 1) - x^9 + 1}$$

$$x) \lim_{x \rightarrow 1/3} (3x^5 + 4x^9 - x^2 + 5x + 1)$$

$$y) \lim_{x \rightarrow -a} \frac{x^3 + a^3}{x^4 - a^4}$$

$$z) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{1 - \cos 5x}$$

3. Analiza si existe el limite de las siguientes funciones en los puntos donde dejan de ser continuas. Si es posible define una nueva función que sea continua en esos puntos.

$$a) y = 1 + 2^{\frac{1}{x}}$$

$$b) y = \frac{\operatorname{sen} x}{\tan x}, x \in [0; 2\pi]$$

$$c) y = \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$d) y = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$e) y = \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{9}, x \in [0; 2\pi]$$

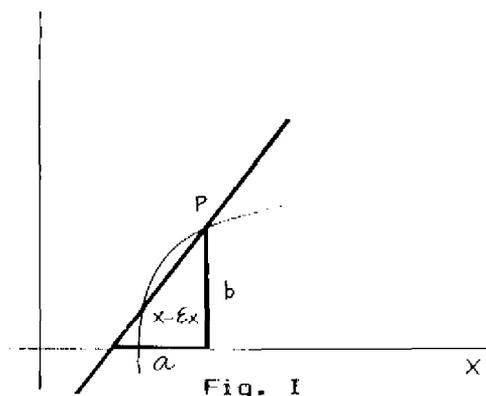
$$f) y = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

## EL CÁLCULO DIFERENCIAL

Puede decirse que el Cálculo Diferencial se debe por partes iguales a dos grandes matemáticos que casi simultáneamente llegaron a este. Ellos son, Isaac Newton, antes mencionado en el capítulo de límite, y el alemán Gottfried Wilhelm (1646- 1716). Sin embargo, se conoce que los precursores de ambos genios matemáticos, en esta dirección, fueron varios y principalmente Fermat y el maestro de Newton, Isaac Barrow (1630-1677).

Trabajaba Fermat en sus ideas sobre la Geometría Analítica cuando descubrió cómo hallar la tangente a una curva al aplicar el procedimiento de usar valores próximos de la variable.

Fermat calculó el segmento del eje "x" entre el pie de la ordenada del punto de tangencia y la intersección de la tangente con el eje "x" (fig. I). Determinaba así la tangente como la posición límite de una secante cuando los puntos de intersección con la curva tienden a coincidir.



Si lo escribimos con la notación actual, la pendiente de la tangente por P, según Fermat, sería  $\frac{b}{a} = \frac{f(x + \epsilon)}{a + \epsilon}$ . El conocimiento de ello explica por qué Pedro Simón Laplace (1749-1827) reclama que Fermat es el verdadero descubridor del Cálculo Diferencial.

Orientado aproximadamente por la misma idea de Fermat, la que seguramente conocía, Barrow calcula la pendiente

pero lo hace en el triángulo MPQ, en el que calcula el cociente que lo conduce a la pendiente de la tangente por el punto P (fig. II).

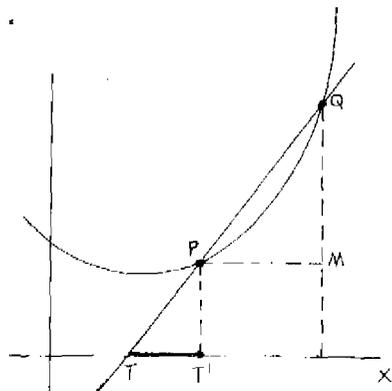


Fig. II

Alrededor de esos mismos años y trabajando independientemente, llegaron a los conceptos fundamentales del Cálculo Diferencial los grandes matemáticos Newton y Leibniz aportando cada uno elementos diferentes sobre el concepto de derivada y su notación.

Newton (1671) expresa la derivada, a la que él llama *fluxión*, como la razón de cambio entre dos variables que representan las coordenadas de un punto cuyo movimiento continuo genera una curva y utiliza, para la derivada, la notación  $\dot{y}$ .

Leibniz (1682) expresa su concepto de derivada a partir de un esquema geométrico (fig. III) en el que ya usa la notación  $\frac{dy}{dx}$  para la derivada y para escribir:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{AB}$$

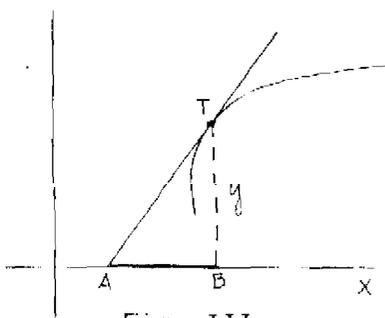


Fig. III

El nombre de función derivada o simplemente derivada, lo emplea por primera vez José Luis Lagrange (1736-1813) en su obra *Teoría de las funciones analíticas* publicada en 1797, y es en esta que propone, para la derivada de una función  $f(x)$  la notación  $f'(x)$  que es una de las que usare

mas en este libra.

Las derivadas y algunas de sus aplicaciones las estudiarás por primera vez en este Capítulo y continuarás profundizando en ellas en el siguiente, relativo al Cálculo integral.

CALCULO DIFERENCIAL

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

1. *Tangente a una curva*

Desde la secundaria básica conoces la tangente a una circunferencia, y en un capítulo anterior estudiaste la tangente a la elipse; en ambos rasos la tangente es una recta que tiene un único punto de contacto con la curva (fig. 5.1).

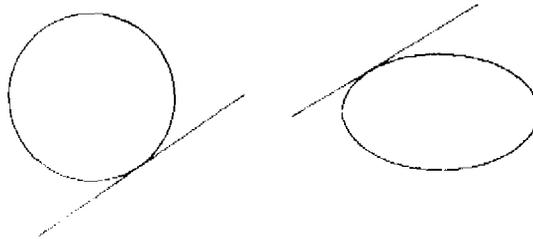


Fig. 5.1

Sin embargo, no has estudiado ninguna definición general de *tangente* a una curva o a la gráfica de una función. La figura 5.2 muestra que la idea de que se trata de una recta que tiene un punto común con la curva no es aplicable: en la figura 5.2a la recta "parece" tangente, pero corta a la curva en más de un punto; en la figura 5.2b la recta "no parece" tangente, pero corta a la curva en un único punto.

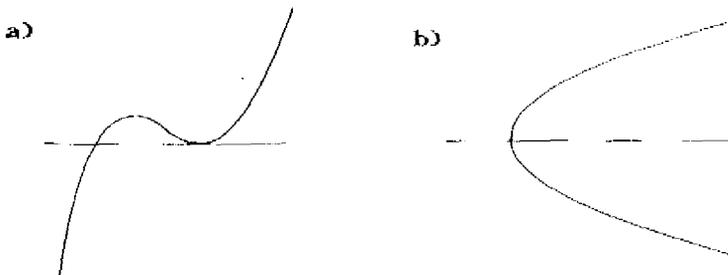


Fig. 5.2

El problema de la tangente no puede ser resuelto mediante procesos finitos y fue una de los problemas que dio origen a una de las ramas más poderosas de la matemática: el Cálculo infinitesimal.

Para definir la tangente a una curva, se debe utilizar el concepto de límite que acabamos de estudiar.

Consideremos una curva cualquiera (para fijar ideas, la gráfica de  $y = x^2$  en la figura Y.3), la tangente PT en el punto P puede ser obtenida de la forma siguiente:

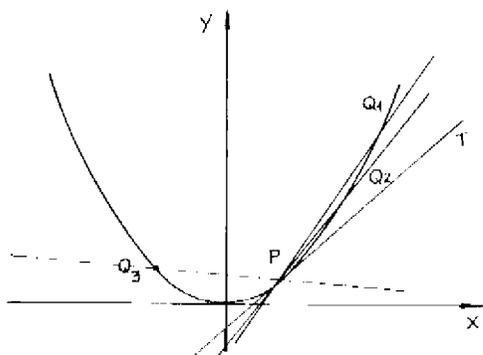


Fig. 5.3

Tomemos otros puntos de la curva  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dots$ , cada uno de estos puntos determina con P una secante:  $PQ_1, PQ_2, \dots$ . Si los puntos  $Q_n$  se van escogiendo cada vez más próximos a P la secante  $PQ_n$  se aproxima cada vez más a la recta PT; de modo que la tangente es, en cierto sentido, el límite de las secantes.

Con estas ideas intuitivas podemos determinar rectas tangentes a algunas curvas sencillas, como se hace en el ejemplo 1 para la parábola.

#### Ejemplo 1

Determina la ecuación de la recta tangente a la parábola  $y = x^2$  en el punto de abscisa  $x_0 = 2$ .

Resolución

La tangente será el límite de las secantes, como una recta está determinada por un punto y la pendiente, y todas pasan por el punto dado, para determinarla basta la pendiente.

Consideremos una secante que pase por P y Q (Q puede estar a la derecha o a la izquierda de P; en la figura 5.4 se ha considerado Q a la derecha). El punto P tiene abscisa  $x_0 = 2$  y ordenada  $y_0 = x_0^2 = 2^2 = 4$ .

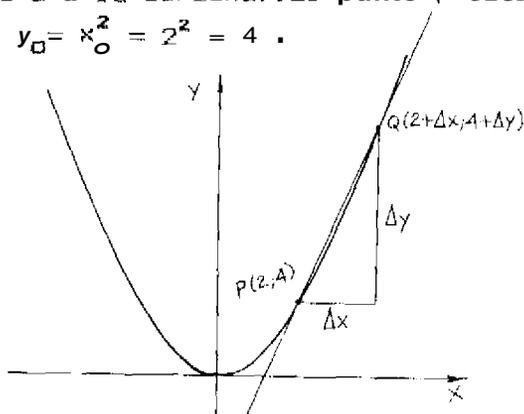


Fig. 5.4

La abscisa del punto Q puede expresarse en la forma

$$x = x_0 + \Delta x = 2 + \Delta x$$

donde  $\Delta x$  es el "incremento" (positiva o negativo), es decir, lo que hay que añadir a  $x_0 = 2$  para obtener  $x$ .

De la misma forma la ordenada se puede expresar

$$y = y_0 + \Delta y = 4 + \Delta y$$

donde  $\Delta y$  es el "incremento" de la variable dependiente; este incremento puede calcularse como la diferencia entre las ordenadas de P y Q (fig. 5.4):

$$\Delta y = y - y_0 = y - 4$$

Pero como se trata de la función  $y = x^2$  y  $x = 2 + \Delta x$  esta diferencia puede escribirse

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = (2 + \Delta x)^2 - 2^2$$

Del análisis de la figura 5.4 resulta claro que la pendiente de la recta PQ es:

$$\begin{aligned} m_s &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - 4}{\Delta x} = \frac{(2 + \Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} = \\ &= \frac{4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 4}{\Delta x} = 4 + \Delta x \end{aligned}$$

Como la tangente es el límite de las secantes, su pendiente es el límite de las pendientes  $m_s$  cuando Q se acerca a P, es decir, la abscisa  $x$  tiende a  $x_0$  y por tanto  $\Delta x = x - x_0$  tiende a cero:

$$m_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} m_s = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4 + \Delta x) = 4$$

La ecuación de la tangente es entonces:

$$\frac{y - 4}{x - 2} = 4$$

$$y - 4 = 4x - 8$$

$$4x - y - 4 = 0 \quad \bullet$$

En general, la recta tangente a la gráfica de una función en un punto es la recta que pasa por el punto con pendiente  $m_t$  dada por:

$$m_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

A la pendiente de la recta tangente se le llama, también, pendiente de la curva en el punto.

Como  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  puede no existir, es posible que no exista la tangente; ese es el caso de la gráfica de la función  $y = |x|$  en  $x = 0$  (fig. 5.5).

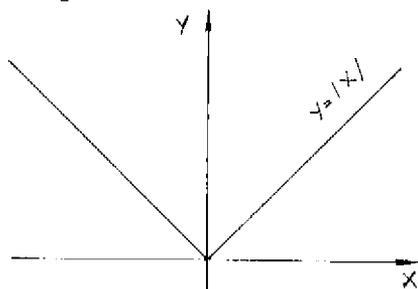


Fig. 5.5

En este caso se trata del punto de abscisa  $x_0 = 0$ , la ordenada correspondiente es  $y_0 = |x_0| = |0| = 0$  entonces

$$\Delta y = y - y_0 = |0 + \Delta x| - |0| = |\Delta x|$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta x > 0 \\ -1 & \text{si } \Delta x < 0 \end{cases}$$

y el límite no existe.

Ejercicios (epígrafe 1)

1. Calcula el incremento de la variable dependiente  $y$ 
  - a)  $y = x^3 + 1$  cuando  $x$  pasa de  $x_0 = 0$  a  $x = 0,1$
  - b)  $y = x^2 - 1$  cuando  $x$  pasa de  $x_0 = 1$  a  $x = 1,2$

- c)  $y = 1 - 2x^2$  cuando  $x$  pasa de  $x_0 = 0$  a  $x = 0,2$   
 d)  $y = 3$  cuando  $x$  pasa de  $x_0 = 3$  a  $x = 3,1$

2. Halla el incremento  $\Delta y$  y la razón  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  para la función:

a)  $y = x^2 + 1$  cuando  $x_0 = 1$  y  $\Delta x = 0,1$

b)  $y = \frac{1}{(x^2 - 2)^2}$  cuando  $x_0 = 1$  y  $\Delta x = 0,4$

c)  $y = \sqrt{x}$  cuando  $x_0 = 0$  y  $\Delta x = 0,0001$

d)  $y = \log x$  cuando  $x_0 = 100000$  y  $\Delta x = -90000$

3. Sea  $y = 2x + 3$  y  $\Delta x = 5$ . Calcula  $\Delta y$ . ¿Podrá plantearse un ejercicio similar para la función  $y = x^2$ ? ¿Por qué?

4. Di cuál es la pendiente de la tangente a la curva en el punto indicado.

a)  $y = 2x + 3$  en  $x_0 = 1$     b)  $y = 2 - 3x$  en  $x_0 = -1$

c)  $y = \frac{1}{2}x$  en  $x_0 = 2$     d)  $y = mx + n$  en  $x_0 = 1$

5. ¿Qué curvas representan las funciones del ejercicio anterior? ¿Dependerá el valor de la pendiente del punto seleccionado? ¿Por qué?

h. Calcula la pendiente de la tangente a la curva en el punto indicado.

a)  $y = x^2 + 1$  en  $x_0 = 0$     b)  $y = |x| - 1$  en  $x_0 = 0$

c)  $y = -\frac{1}{3}x^2$  en  $x_0 = 3$     d)  $y = |x-2|$  en  $x_0 = 2$

e)  $y = x^2 + x + 1$  en  $x_0 = 1$     f)  $y = x^9$  en  $x_0 = 1$

7. ¿Dependerá del punto seleccionado el valor de la pendiente de las tangentes a las curvas del ejercicio anterior? Fundamenta.

8. De las curvas determinadas por las ecuaciones

$y = 5x + 1$ ,  $y = 3 + 5x$ ,  $y = x^2 + x$ ,  $y = \frac{1}{3}(1 + 15x)$

¿Cuáles tienen la misma pendiente en cualquiera de sus puntos? ¿Cuáles tienen la misma pendiente en el punto  $x_0 = 2$ ?

9. La recta de ecuación  $y = 2x + 3$  es tangente al gráfico de la función  $f$  en el punto  $x_0 = 1$ . ¿Cuál es el valor de la pendiente de la curva en  $x_0 = 1$ ?

10. Halla la pendiente de la tangente en el punto  $x_0 = 3$  de la curva representada en la figura 5.6.
11. a) Halla la pendiente en el punto  $x = 2$  de la curva representada en la figura 5.7.  
 b) Calcula  $f(2)$ .

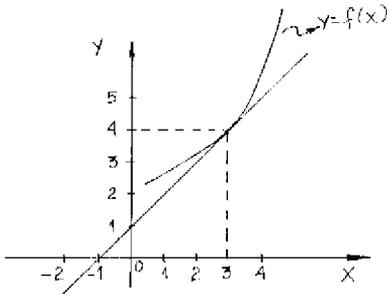


Fig. 5.6

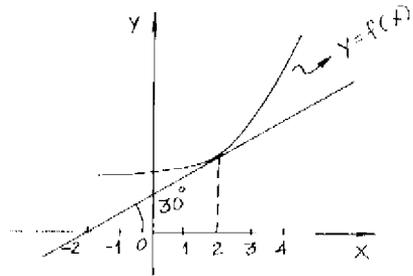


Fig. 5.7

12. Si  $f(1) = 3$  y la pendiente del gráfico de  $f$  en  $x = 1$  es 2, escribe la ecuación de la tangente al gráfico de la función  $f$  en el punto  $x_0 = 1$ .
13. ¿En cuáles de los puntos representados no tiene tangente la curva de la figura 5.8 ?

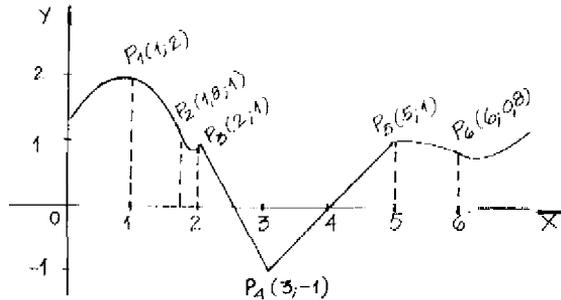


Fig. 5.8

14. Escribe la ecuación de la tangente a la curva en el punto indicado-
- a)  $y = 4x^2$   $(-1; 4)$       b)  $y = x^2 - 5x + 4$   $(1; 0)$   
 c)  $y = x^3 - 2x$   $(-1; 1)$

## 2. Derivada de una función

Como **cabes**, la **pendiente** de la **tangente** a una **curva** se **obtiene** como un **limite**. Este **limite** tiene **gran importancia** por sus **aplicaciones** en la **matemática** y en otras **ciencias**.

### Definición 1

Se llama **derivada** de una **función**  $y = f(x)$  en el **punto**  $x_0$  y se denota por  $f'(x_0)$  al **limite** de la **razón**  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , es decir,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Si tal **limite** no **existe**,  $f$  no tiene **derivada** en  $x_0$ .

### Ejemplo 1

Calcula la **derivada** de  $f(x) = x^2 + 1$  en el **punto**  $x_0 = 2$ .

Resolución

$$f(x_0) = f(2) = x_0^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(2 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 + 1 = (2 + \Delta x)^2 + 1 = 4 + 4 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 + 1 = 5 + 4 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\Delta y = f(2 + \Delta x) - f(2) = 4 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 4 + \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4 + \Delta x) = 4, \text{ por lo tanto } f'(2) = 4 \quad \blacksquare$$

La **definición** de **derivada** de una **función** en un **punto** permite **formalizar** la **definición** de **tangente**:

La **tangente** a la **gráfica** de la **función**  $y = f(x)$  en el **punto**  $P(x_0; f(x_0))$  es la **recta** que **pasa** por  $P$  y tiene **pendiente**  $f'(x_0)$ .

### Ejemplo 2

Determina la **ecuación** de la **recta** **tangente** a la **gráfica** de  $g(x) = x^2 + 1$ , en el **punto**  $x_0 = 2$ .

Resolución

En el **ejemplo 1** vimos que  $g(2) = 4$ , luego la **pendiente** de la **tangente** es  $m_t = 4$ ; como esta **recta** **pasa** por el **punto**  $(2; g(2)) = (2; 5)$  su **ecuación** es:

$$\frac{y - 5}{x - 2} = 4$$

$$y - 5 = 4(x - 2)$$

$$4x - y - 3 = 0 \quad \blacksquare$$

Una función puede no tener derivada en algunos puntos, por ejemplo, del análisis realizado en el epígrafe 1, puede concluir que la función  $y = |x|$  no tiene derivada en  $x_0 = 0$ .

Cuando una función tiene derivada en un punto se dice que es derivable en ese punto. Así, por ejemplo, la función  $y = x^2$  es derivable en  $x_0 = 5$  y la función  $f(x) = |x|$  no es derivable en  $x_0 = 0$ . Una función es derivable si lo es en cada punto de su dominio,

Que la función  $f$  sea derivable en el punto  $x_0$  significa que la curva que representa su gráfico tiene tangente en el punto  $(x_0; f(x_0))$ . De este hecho y de la noción sobre función continua puedes inferir, intuitivamente, que para que una función sea derivable tiene que ser continua.

#### Teorema 1

Si una función es derivable en el punto  $x_0$ , entonces es continua en ese punto.

#### Demostración

Sea  $f$  una función derivable en  $x_0$ , es decir, tal que existe

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Se tiene

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \Delta x \quad \text{con } \Delta x = x - x_0 \\ &= f(x_0) + \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \Delta x \end{aligned}$$

Si  $x \rightarrow x_0$ , entonces  $\Delta x \rightarrow 0$  y como  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$  existe, resulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \Delta x$$

$$= f(x_0) + f'(x) \cdot 0 = f(x_0)$$

Es decir,  $f$  es continua en  $x_0$  ■

El recíproco no es válido, es decir, no siempre una función continua es derivable. Por ejemplo, la función  $y = |x|$  es continua, pero no derivable en  $x = 0$ .

Al calcular la derivada de una función  $f$  en un punto se obtiene un valor único. Podemos entonces considerar la función que a cada punto  $x$  le hace corresponder  $f'(x)$ . A tal función se le llama función derivada de la función  $f$  y se denota  $f'$ .

Resulta entonces que para las  $x \in \mathbb{R}$  tales que  $f$  es derivable en  $x$  se cumple:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

### Ejemplo 3

Halla la derivada de la función  $f(x) = x^2$ .

Resolución

El cálculo que realizamos en este ejemplo es igual al que se realiza en el ejemplo 1 del epígrafe 1 pero sustituyendo  $z$  por  $x$

$$f(x) = x^2$$

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\begin{aligned} \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) &= x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 \\ &= 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x (2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

La derivada de la función  $f(x) = x^2$  es  $f'(x) = 2x$ . ■

### Ejemplo 4

Deriva la función  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

Resolución

También podemos calcular la derivada en  $x_0$ , con  $x_0$  ar-

arbitrario mediante  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

En efecto, como  $\Delta x = x - x_0$ ,  $x_0 + \Delta x = x$ ,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (x_0 + \Delta x) = x_0 \quad \text{y} \quad f(x_0 + \Delta x) = f(x)$$

entonces

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

En este caso:  $\blacktriangle$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - x}{x x_0}$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \cdot \frac{x_0 - x}{x x_0} = \frac{-1}{x x_0}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-1}{x x_0} = -\frac{1}{x_0^2}$$

Por lo tanto  $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$  y como  $x_0$  es arbitrario

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \blacksquare$$

La derivada de la función  $y = f(x)$  se denota también de otras formas. Por ejemplo:

$y'$  para denotar la función derivada.

$y'(x_0)$  para denotar la derivada en  $x_0$ .

$\frac{dy}{dx}$  para denotar la función derivada.

$\frac{dy}{dx}(x_0)$  para denotar la derivada en  $x_0$ .

$\frac{df(x)}{dx}$  para denotar la función derivada.

$\frac{df(x_0)}{dx}$  para denotar la derivada en  $x_0$ .

Puede ocurrir que la derivada de la función  $f$  sea una función derivable. En tal caso a la derivada de la derivada de  $f$  se le llama segunda derivada de  $f$  y se denota por  $f''$ .

Análogamente, la derivada de la segunda derivada de  $f$  es la tercera derivada de  $f$  que se denota por  $f'''$ , y así sucesivamente.

Como sabemos que la pendiente de la recta tangente en un punto es la derivada de la función en ese punto, ya podemos calcular la derivada de funciones lineales:

- Si  $y = mx + n$ , entonces  $\frac{dy}{dx} = m$ .
- En particular, si  $y=c$  ( $c$  constante),  $m=0$  y  $(c)' = 0$   
si  $y=x$ ,  $m=1$  y  $(x)' = 1$

También resulta sencillo el cálculo de derivadas de las potencias de exponente natural.

Teorema 2

$$(x^n)' = n x^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

Demostración

Sean  $y = x^n$  y  $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} y'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x_0^{n-1})}{x - x_0} \quad \begin{array}{l} \text{Puedes} \\ \text{comprobarlo} \\ \text{multiplicando} \end{array} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x_0^{n-1}) \\ &= \underbrace{x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + \dots + x_0^{n-1}}_{n \text{ veces}} = n x_0^{n-1} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Como  $x_0$  es arbitrario, entonces  $y'(x) = (x^n)' = n x^{n-1}$

### Ejemplo 5

Calcula la derivada de  $y = x^5$  en  $x_0 = 3$ .

Resolución

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 5x^4 \\ \frac{dy}{dx}(3) &= 5 \cdot 3^4 = 405 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Recuerda que para derivar la función  $y = f(x)$  aplican-  
do la definición debes:

1. Sustituir  $x$  por  $x + \Delta x$  y hallar  $f(x + \Delta x)$ .

2. Hallar el incremento de la función

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

3. Dividir por  $\Delta x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

4. Calcular el límite cuando  $\Delta x$  tiende a cero

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

### Ejercicios (epígrafe 2)

1. Calcula la derivada de la función en el punto indicada.

a)  $y = 4x + 3$  en  $x_0 = 1$

b)  $y = x^2 + 5$  en  $x_0 = -1$

c)  $y = 4 - x^2$  en  $x_0 = 2$

d)  $y = 4x - x^2$  en  $x_0 = 0$

e)  $y = 2t - t^2$  en  $t_0 = -1$

f)  $y = \frac{1}{2}x - x^2$  en  $x_0 = 1$

g)  $y = u^3 - 3$  en  $u_0 = 1$

h)  $y = x^3 - 5x^2 + 1$  en  $x_0 = 1$

i)  $y = -\frac{4}{x}$  en  $x_0 = 3$

j)  $y = 0,01x^2$  en  $x_0 = 1$

k)  $y = ax^2 + bx + c$  en  $x_0 = 1$

2. La recta de ecuación  $y = 5x - \frac{7}{2}$  es tangente al gráfico de la función  $f$  en el punto  $x = 2$ . Determina  $f'(2)$ .

3. Si  $f$  es la función representada en la figura 5.9, halla  $f'(3)$ .

4. En la figura 5.10 aparece representada una función  $f$ .

a) Calcula  $f'(5)$ .

b) Calcula  $f(5)$ .

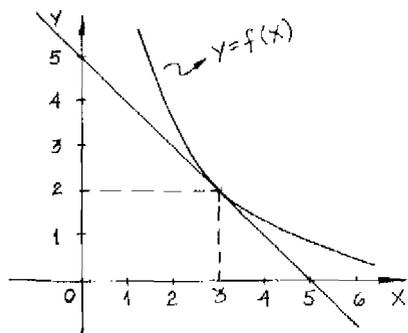


Fig. 5.7

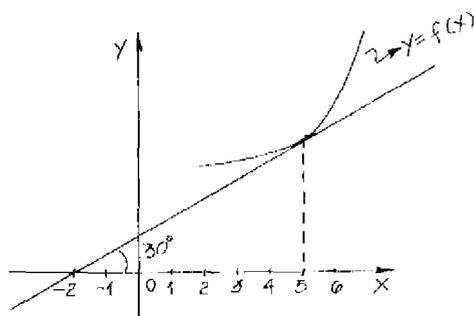


Fig. 5.10

5. Si  $f(4) = -3$  y  $f'(4) = 5$ , escribe la ecuación de la recta tangente al gráfico de la función  $f$  en el punto  $x_0 = 4$ .
6. Halla la derivada de la función:
- |                        |                          |
|------------------------|--------------------------|
| a) $y = 5x - 2,3$      | b) $y = Ax + B$          |
| c) $y = x^2 + x + 1$   | d) $y = 1 - x^2$         |
| e) $y = \frac{3}{x}$   | f) $y = \frac{A}{x} + B$ |
| g) $y = ax^2 + bx + c$ | h) $y = x^6$             |
| i) $f(x) = x^5$        | j) $y = x^p$             |
7. Calcula la derivada de la función  $f(x) = |x-1|$  en los puntos  $x_0 = 0$  y  $x_1 = 1$ .
- a) ¿Es derivable la función? Fundamenta.
- b) ¿Es continua?
8. Observa la curva representada en la figura 5.11.
- a) ¿En cuáles de los puntos  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 2$ ,  $x_4 = 2,5$ ,  $x_5 = 3$  es derivable la función que representa la curva?
- b) Halla el valor de la pendiente de la curva en los puntos  $x = 2,5$  y  $x = 4$ .

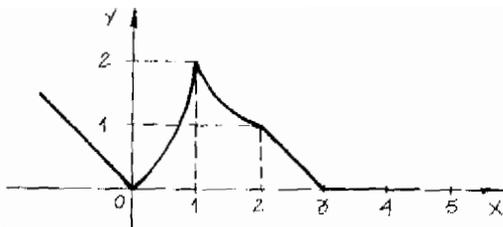


Fig. 5.11

9. ¿Qué diferencias existen entre la derivada de una función en un punto y la función derivada?
10. Halla los puntos de la curva  $f(x) = x - x^2$  en los cuales la tangente forma con el eje  $Ox$  un ángulo de
- a)  $45^\circ$       b)  $0^\circ$       c)  $135^\circ$
11. Halla el ángulo de inclinación de la tangente a la curva en el punto indicado.
- a)  $y = x^3$       en  $(0;0)$

b)  $y = x^4$  en (2;16)

c)  $y = x^7$  en (1;1)

12. Enuncia en la forma "Si ..., entonces ..." el recíproco del teorema: Toda función derivable es continua. Fundamenta por qué no es verdadero.

### 3. Reglas de derivación

La derivación de funciones aplicando la definición puede resultar engorrosa, excepto en casos relativamente sencillos. Por ello es conveniente establecer reglas que permitan efectuar rápidamente el cálculo de derivadas. Algunas de estas reglas se relacionan en el teorema siguiente.

#### Teorema 1

Si  $f$  y  $g$  son derivables, se cumple:

i)  $(f \pm g)' = f' \pm g'$

$$g + f \cdot g'$$

iii)  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ ,  $f(x) \neq 0$

$$= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}, g(x) \neq 0$$

Este teorema (cuya demostración haremos después) permite, junto con las derivadas calculadas en el epígrafe 2, derivar funciones racionales.

#### Ejemplo 1

Deriva la función:

a)  $y = x + \sqrt{2}$     b)  $y = x^2 + 3x - 1$     c)  $f(x) = \frac{1}{3}x - x^2$

Resolución

Ya sabemos que:

$$(x^2)' = 2x, \quad (3x)' = 3, \quad \left(\frac{1}{3}x\right)' = \frac{1}{3} \text{ y } (\sqrt{2})' = (1)' = 0$$

luego las derivadas pueden obtenerse aplicando la regla de derivación i).

a)  $y' = (x + \sqrt{2})' = (x)' + (\sqrt{2})' = 1 + 0 = 1$

b)  $y' = (x^2 + 3x - 1)' = (x^2)' + (3x)' + (1)' = 2x + 3 + 0 = 2x + 3$

c)  $f'(x) = \left(\frac{1}{3}x - x^2\right)' = \left(\frac{1}{3}x\right)' - (x^2)' = \frac{1}{3} - 2x$  ■

La regla de derivación i) puede generalizarse a cualquier número de sumandos y se expresa con palabras en una forma sencilla:

La derivada de una suma algebraica es la suma algebraica de las derivadas.

**Ejemplo 2**

Halla la derivada de la función  $y = Cx^2 + 3x)(x-1)$ .

Resolución

En este caso aplicamos la regla ii).

$$y' = (x^2 + 3x)' \cdot (x-1) + (x^2 + 3x)(x-1)'$$

La derivada de cada factor se obtiene aplicando la regla i).

$$y' = (2x+3)(x-1) + (x^2+3x) \cdot 1$$

$$y' = 2x^2 - 2x + 3x - 3 + x^2 + 3x$$

$$y' = 3x^2 + 4x - 3 \quad \blacksquare$$

Esta regla se enuncia con palabras de una forma sencilla:

La derivada de un producto es la derivada del primer factor por el segundo más el primero por la derivada del segundo.

También en este caso se puede extender a un número finito de factores.

**Ejemplo 3**

Deriva la función  $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ .

Resolución

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-1)'(x-2)(x-3) + (x-1)(x-2)'(x-3) + (x-1)(x-2)(x-3)' \\ &= 1 \cdot (x-2)(x-3) + (x-1) \cdot 1 \cdot (x-3) + (x-1)(x-2) \cdot 1 \\ &= x^2 - 5x + 6 + x^2 - 4x + 3 + x^2 - 3x + 2 \\ &= 3x^2 - 12x + 11 \end{aligned}$$

También se puede proceder:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 && \text{efectuando el producto} \\ f'(x) &= 3x^2 - 12x + 11 && \text{aplicando la regla i} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Si  $c$  es número real y  $f$  una función derivable se cumple

$$(c \cdot f)' = (c)' \cdot f + c \cdot f' = 0 \cdot f + c \cdot f' = c \cdot f'$$

es decir:

La derivada del producto de una constante por una función derivable es igual al producto de la constante por la derivada de la función.

**Ejemplo 4**

- a) Calcula la derivada de la función  $y = 8x^4$ .  
 b) Halla la ecuación de la tangente a la parábola  $x^2 = 16y$  en el punto  $P(4; y_0)$ .

Resolución

a)  $y = 8x^4$

Se conoce que  $(x^4)' = 4x^3$ , luego

$$y' = 8 \cdot (x^4)' = 8 \cdot 4x^3 = 32x^3$$

- b) De  $x^2 = 16y$ , se obtiene  $y = \frac{1}{16}x^2$ , luego  $y_0 = \frac{1}{16} \cdot 4^2 = 1$   
 Derivando

$$y' = \frac{1}{16} \cdot 2x = \frac{1}{8}x$$

y evaluando en  $x = 4$  obtenemos  $y'(4) = \frac{1}{2}$ .

La tangente tiene pendiente  $\frac{1}{2}$  y pasa por el punto  $(4; 1)$ .

Su ecuación es  $x - 2y - 2 = 0$  (ver figura 5.12).  $\square$

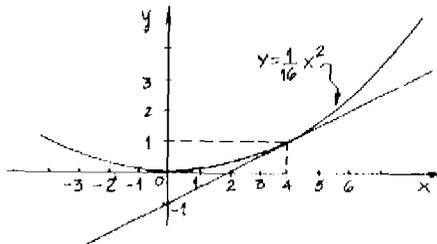


Fig. 5.12

**Ejemplo 5**

Deriva la función  $y = \frac{1}{3x^2 - 5x + 1}$

Resolución

Aplicamos la regla iii):

$$y' = \frac{-(3x^2 - 5x + 1)}{(3x^2 - 5x + 1)^2} = \frac{-(6x - 5)}{(3x^2 - 5x + 1)^2} = \frac{5 - 6x}{(3x^2 - 5x + 1)^2} \quad \blacksquare$$

**Ejemplo 6**

Halla la derivada de la función:

a)  $y = \frac{5x - 2}{2x + 3}$

b)  $h(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

Resolución

Aplicamos la regla iv).

a)  $y = \frac{5x - 2}{2x + 3}$

$$y' = \frac{(5x - 2)'(2x + 3) - (5x - 2)(2x + 3)'}{(2x + 3)^2}$$

$$= \frac{5(2x + 3) - (5x - 2) \cdot 2}{(2x + 3)^2} = \frac{10x + 15 - 10x + 4}{(2x + 3)^2}$$

$$= \frac{19}{(2x + 3)^2}$$

b)  $h(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

$$h'(x) = \frac{(x^2)'(x^2 + 1) - x^2(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x(x^2 + 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{2x(x^2 + 1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} \quad \blacksquare$$

Esta regla se enuncia:

La derivada de un cociente es el denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador sobre el cuadrado del denominador.

Terminamos el epígrafe con la demostración del teorema 1:

Demostración

i) Sean  $f$  y  $g$  dos funciones derivables. Existen

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad \text{y} \quad g'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$$

Sea  $s(x) = f(x) + g(x)$  (1)

entonces  $s(x + \Delta x) = f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)$  (2)

Restando (1) de (2)

$$s(x + \Delta x) - s(x) = f(x + \Delta x) - f(x) + g(x + \Delta x) - g(x)$$

$$\Delta s = \Delta f + \Delta g$$

y dividiendo por  $\Delta x$

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x}$$

Entonces

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$$

$$s'(x) = f'(x) + g'(x)$$

La demostración es análoga para la diferencia de dos funciones derivables.

ii) Sea  $p(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$\text{Se cumple } \Delta p = p(x + \Delta x) - p(x)$$

$$= f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)$$

Como  $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$  y  $\Delta g = g(x + \Delta x) - g(x)$ , se tiene

$$f(x + \Delta x) = \Delta f + f(x) \quad \text{y} \quad g(x + \Delta x) = \Delta g + g(x)$$

y se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta p &= \left[ \Delta f + f(x) \right] \cdot \left[ \Delta g + g(x) \right] - f(x) \cdot g(x) \\ &= \Delta f \cdot \Delta g + \Delta f \cdot g(x) + f(x) \cdot \Delta g \end{aligned}$$

Dividiendo por  $\Delta x$

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = \Delta f \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} + \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x}$$

Como  $f$  es derivable, es continua. Luego  $\Delta f \rightarrow 0$  cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Se tiene entonces

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x) + f(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$$

$$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

iii) Consideremos  $r(x) = \frac{1}{f(x)}$ , entonces

$$\begin{aligned} \Delta r &= r(x + \Delta x) - r(x) \\ &= \frac{1}{f(x + \Delta x)} - \frac{1}{f(x)} = \frac{f(x) - f(x + \Delta x)}{f(x + \Delta x) \cdot f(x)} \\ &= \frac{-\Delta f}{f(x + \Delta x) \cdot f(x)} \end{aligned}$$

Dividiendo por  $\Delta x$

$$\frac{\Delta r}{\Delta x} = - \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{1}{f(x + \Delta x) \cdot f(x)}$$

La función  $f$  es continua por ser derivable, por lo tanto

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) = f(x), \text{ luego}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x + \Delta x) \cdot f(x)}$$

$$r'(x) = - f'(x) \cdot \frac{1}{(f(x))^2} = - \frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

iv) Sea  $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  con  $g(x) \neq 0$ .

Como  $q = \frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ , entonces  $q$  es derivable, pues  $f$

y  $\frac{1}{g}$  lo son. Por lo tanto en virtud de la regla de la derivada del producto:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)' &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)' \\ &= \frac{f'}{g} + f \cdot \left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{f'}{g} - \frac{f \cdot g'}{g^2} \\ &= \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Resumen de las reglas de derivación:

$\cdot (mx + n)' = m$	$\cdot (c)' = 0$ ( $c$ constante)
$\cdot (x^n)' = n x^{n-1}$	$\cdot (f + g)' = f' + g'$
$\cdot (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$	$\cdot (c \cdot f)' = c \cdot f'$
$\cdot \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - f \cdot g'}{g^2} \quad (g \neq 0)$	$\cdot \left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2} \quad (f \neq 0)$

Ejercicios (epígrafe 3)

1. Halla la derivada de la función:

a)  $y = x^8$                       b)  $y = 3x^{10}$                       c)  $y = x^{-6}$

d)  $y = \frac{4}{x^5}$                       e)  $y = x^{10} + 6x^7 + 5x^4 - 8$

f)  $y = \frac{1}{8}x^8 - 11x + 4$                       g)  $y = x^3(x^2 - 5x + 6)$

h)  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 6}$                       i)  $y = \frac{x^2 + 1}{2x}$

j)  $y = (x^3 + x + 1)^2$                       k)  $y = (2x - 1)(3x - 1)(x + 5)$

$$\begin{array}{ll}
 \text{l) } y = x^2(x-3) & \text{m) } f(x) = (x-2)(x^2+x+8) \\
 \text{n) } y = (7x-1)(x+3) & \text{ñ) } y = 3(x-2) + (x-1)(x-2) \\
 \text{o) } y = (x^2-2)(x^2+3) & \text{p) } y = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right)^2 \\
 \text{q) } y = \frac{2}{x} & \text{r) } y = \frac{1}{x^2} \\
 \text{s) } y = \frac{4}{x^2+3} & \text{t) } y = \frac{1}{x-2} \\
 \text{u) } y = \frac{5x-3}{5} & \text{v) } y = \frac{5}{1+x^2} \\
 \text{w) } y = \frac{x-1}{x^2-1} & \text{x) } y = \frac{2x^2-x}{3x^4-2x-7} \\
 \text{y) } y = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x} & \text{z) } y = \frac{x}{x^2-4} + \frac{2}{x+2}
 \end{array}$$

2. Deriva. Halla el valor de la derivada en el punto indicado.

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } y = 3x^x - 2x^2 + 5x - 4 & x_0 = -1 \\
 \text{b) } y = x^2 \sqrt{2} + x \sqrt{3} - 5 & \\
 \text{c) } y = \frac{1}{8} x^4 - 2x^3 + 7x - 0,2 & \\
 \text{d) } y = 4x^2 - \frac{2}{5} x + 0,001 & x_0 = 1,3 \\
 \text{e) } y = \frac{3}{4} - 5x^2 + \frac{1}{6} x^5 + \frac{2}{3} x^7 & \\
 \text{f) } y = 2x^{10} + x^5 - x^2 + 4 & x_0 = 0,1 \\
 \text{g) } y = \frac{x^2-2}{3-x^2} & x_0 = \frac{2}{3} \\
 \text{h) } y = \frac{x^2-x-2}{x^2+x} & x_0 = -\frac{1}{2} \\
 \text{i) } y = \frac{x^a+6x^2}{x^2+12x+36} & \\
 \text{j) } y = \frac{3x-2}{x^2-5x+6} & x_0 = 1 \\
 \text{k) } y = \frac{ax^a}{x^2+x-17} & (a \neq 0) \\
 \text{l) } y = \frac{ax^2}{bx^2+cx+d} & (a, b \neq 0)
 \end{array}$$

3. ¿En qué puntos la derivada de la función  $f(x) = x^3$  coincide numéricamente con el valor de la propia función,

es decir,  $f(x) = f'(x)$ ?

4. Sabiendo que la derivada de  $f$  es  $f'(x) = 5x - 3$ , halla la derivada de la función  $g$  si  $g(x) = 4f(x) - 11$ .
5. Si  $f'(x) = 3x^2 + 1$ , halla la derivada de  $g$  si se sabe que  $g(x) = 2f(x)$ .
6. Si  $f$  y  $g$  son funciones derivables y  $f(x) + g(x) = 5$  para toda  $x \in \mathbb{R}$ , prueba que  $f'(x) = -g'(x)$ .
7. Sabiendo que  $f$  y  $g$  son funciones derivables y  $f(x) + g(x) = 4x$  y  $f(x) - g(x) = 6$ , determina  $f'(x)$  y  $g'(x)$ .

8. Considera las funciones:

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \quad \text{y} \quad g(x) = -\frac{1}{x+1}$$

- a) Comprueba que  $f'(x) = g'(x)$ .
  - b) Comprueba que existe un número real  $c$  tal que  $f(x) = g(x) + c$ .
  - c) ¿Qué relación existe entre dos funciones cuyas derivadas sean iguales? Fundamenta.
9. Suponiendo que la función  $y = \sqrt{x}$  es derivable halla su derivada. (Sugerencia:  $x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$  si  $x > 0$ .)

10. Deriva la función  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x + 6}$

- a) aplicando la regla de derivación de un cociente,
- b) considerándola como recíproco de  $g(x) = x^2 + 5x + 6$ .

11. Calcula la derivada de la función  $y = \frac{1}{f(x) + g(x)}$  si  $f$  y  $g$  son dos funciones derivables y  $f(x) \neq -g(x)$ .

12. Determina una función  $f$  que satisfaga las condiciones

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f'(x) = 3x^2 & \text{b) } f'(x) = 3x^2 & \text{c) } f'(x) = 4x^3 + x^2 \\ f(0) = a & f(0) = 2 & f(1) = 4/3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{d) } f'(x) = x^5 - x^4 + 2x & \text{e) } f'(x) = -\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4} - \frac{4}{x^5} \\ f(0) = -3 & f(1) = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{f) } f'(x) = \frac{4x^5 + 6x^4 - 5x^2}{x^2} \\ f(1) = 2 \end{array}$$

13. Determina la pendiente de la tangente a la curva de ecuación  $y = f(x)$  en el punto indicado.

a)  $y = \frac{1}{x}(x + 2)$  en  $x_0 = 1$

b)  $y = x^2 - \frac{1}{x} + 1$  en  $x_0 = 2$

c)  $f(x) = \frac{1}{x}(x^2 + 4)$  en  $x_0 = 1$

d)  $y = (0,5x - 1)(x^2 - 2x + 4)$  en  $x_0 = \frac{1}{2}$

e)  $y = x^2 + x - 1$  en  $x_0 = 0$

f)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 3}$  en  $x_0 = -4$

14. Determina la ecuación de la recta tangente al gráfico de la función  $f$  en el punto  $x_0$  para las funciones del ejercicio anterior.

15. Halla la segunda derivada de la función:

a)  $y = 8x^4 - 6x + 5$

b)  $f(x) = x^2(x^4 + 7)$

c)  $y = \frac{2x}{x + 2}$

d)  $f(t) = \frac{5t - 2}{3}$

e)  $g(x) = \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{24}x^4$

f)  $y = (x^2 - 2)(x^2 + 3)$

g)  $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

h)  $h(r) = \frac{1 - r}{1 + r}$

16. Si  $y = f(x) \cdot g(x)$ , y las funciones  $f$  y  $g$  son dos veces derivables, expresa la segunda derivada  $y''$  mediante las funciones  $f$  y  $g$  y sus derivadas (primera y segunda).

17. Muestra que si  $y = \frac{x}{x-1}$ , entonces se cumple que  $y'' + y' + \frac{2x-4}{(x-1)^3} = \frac{y}{x(x-1)}$ .

18. Halla la derivada indicada:

a)  $y = 12x^5 - \frac{3}{4}x^4 - x^2$  ( $y^{(3)}$ )

b)  $y = \frac{1}{x}$  ( $y^{(4)}$ )

c)  $y = 5x^2 + \frac{3}{x}$  ( $y^{(6)}$ )

19. La derivada de orden  $n$  de la función

$$f(x) = x^{17} + 4x^9 + 6x^5 - 8x^3 - 4x + 1$$

es igual a cero para todo  $x$ , o sea,  $f^{(n)}(x) \equiv 0$ . Halla el menor valor posible de  $n$  (sin calcular la derivada).

20. Halla una función polinómica  $f$  que satisfaga las condiciones:
- $f(2) = 2$ ;  $f'(4) = 1$ ;  $f''(0) = 2$ ;  $f$  es de segundo grado.
  - $f(-5) = 30$ ;  $f'(\frac{3}{2}) = 3$ ;  $f''(x) = 2$ ;  $f$  es de grado 2.
  - $f(0) = 3$ ;  $f'(0) = -7$ ;  $f''(0) = 5$ ;  $f'''(6) = 4$ ;  $f$  es de tercer grado.
  - $f(2) = -21$ ;  $f'(3) = 13$ ;  $f''(4) = 36$ ;  $f'''(x) = 60$ ;  $f$  es de tercer grado.
21. Halla la ecuación de la *tangente* a La parábola  $x^2 = 25y$  en el **punta de abscisa**  $x = 5$ .
22. *Escribe* las ecuaciones de las *tangentes* a la parábola  $y = 3x^2 + 3x - 6$  en los puntos de ordenada  $y = 0$ .
23. Halla La ecuación de la parábola  $y = x^2 + bx + c$  cuya *tangente* en el **punto**  $(1;1)$  es la recta  $x = y$ .
24. Demuestra que las curvas  $y = x^3 + 2$  e  $y = 2x^2 + 2$  tienen una *tangente* común en el punto  $(0;2)$ .
25. ¿En qué punta la *tangente* a la parábola  $y = x^2 - 7x + 3$  es **paralela** a la *recta*  $5x + y - 3 = 0$ ?
26. Si  $f + g$  es derivable, ¿son derivables  $f$  y  $g$ ? **Fundamenta.**
27. Si  $f + g$  y  $f$  son derivables, ¿es derivable  $g$ ? **Fundamenta.**

#### 4. Otras reglas de derivación

Todas las reglas de derivación que hemos estudiada hasta ahora se refieren a operaciones racionales con funciones; una operación irracional que se presenta con frecuencia es la radicación.

##### Teorema 1

La función  $y = \sqrt{x}$  ( $x > 0$ ) es derivable y se cumple

$$\left( \sqrt{x} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

### Demostración

Sea  $y = \sqrt{x}$  ( $x > 0$ ) entonces,

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

Multiplicando numerador y denominador por  $\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}$  se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

Como la función  $y = \sqrt{x}$  es continua,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{x + \Delta x} = \sqrt{x}$  pasa  $x > 0$ . Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### Ejemplo 1

Deriva:

a)  $y = \sqrt{36x}$       b)  $y = x^2 \sqrt{x}$       c)  $y = \frac{\sqrt{x}}{x}$

Resolución

a)  $y = \sqrt{36x}$

$$y = 6\sqrt{x} \text{ por lo que } y' = 6 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{x}$$

b)  $y = x^2 \sqrt{x}$

$$y' = 2x \sqrt{x} + x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x \sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}}$$

$$= 2x\sqrt{x} + \frac{x\sqrt{x}}{2} = \frac{5}{2} x\sqrt{x}$$

$$c) y = \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x - \sqrt{x} \cdot 1}{x^2} = \frac{\frac{x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{x}}{2} - \sqrt{x}}{x^2} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}{x^2} = -\frac{\sqrt{x}}{2x^2} \quad \blacksquare$$

Otra operación conocida es la composición de funciones; la regla para derivar funciones compuestas permite aumentar considerablemente el número de funciones que podemos derivar.

Teorema 2 (Regla de la cadena)

Si las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  son derivables, entonces la función compuesta  $F(x) = f(g(x))$  es derivable y se cumple

$$\left[ f(g(x)) \right]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

### Ejemplo 2

Calcula la derivada de la función  $y = (3x - 5)^{20}$ .

Resolución

$$y = f(g(x)) \quad \text{con} \quad f(x) = x^{20} \quad \text{y} \quad g(x) = 3x - 5$$

Como  $f'(x) = 20x^{19}$  y  $g'(x) = 3$ , entonces se cumple

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(3x-5) \cdot (3x-5)' = 20(3x-5)^{19} \cdot 3$$

$$= 60(3x-5)^{19} \quad \blacksquare$$

### Ejemplo 3

Deriva la función  $y = (x^2 - 6x + 5)^{10}$ .

Resolución

$$y = f(g(x)) \quad \text{con} \quad f(x) = x^{10} \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 - 6x + 5$$

Como  $f'(x) = 10x^9$  y  $g'(x) = 2x - 6$ , entonces

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(x^2 - 6x + 5) \cdot g'(x)$$

$$= 10(x^2 - 6x + 5)^9 \cdot (2x - 6) = 20(x - 3)(x^2 - 6x + 5) \quad \blacksquare$$

**Ejemplo 4**

Halla la derivada de la función  $y = \sqrt{1 + x^2}$ .

Resolución

$$y = f(g(x)) \text{ siendo } f(x) = \sqrt{x} \text{ y } g(x) = 1 + x^2$$

Como  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  y  $g'(x) = 2x$ , entonces

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(1 + x^2) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 + x^2}} \cdot 2x$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \quad \blacksquare$$

**Ejemplo 5**

Halla la ecuación de la tangente a la elipse  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$  en el punto  $P_0(3; \frac{16}{5})$ .

Resolución

La elipse no es el gráfico de una función, pues rectas paralelas al eje "y" la cortan en dos puntos, es decir, existen puntos con dos imágenes (fig. 5.13a).

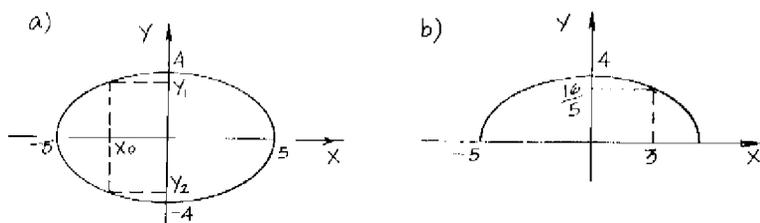


Fig. 5.13

Como  $y_0 = \frac{16}{5} > 0$  ■ consideramos la curva  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$  con  $y \geq 0$  (fig. 5.13b). Esta semielipse representa una función.

La ecuación de esta función, en forma explícita, se obtiene **despejando** de la ecuación de la elipse:

$$\frac{y^2}{16} = 1 - \frac{x^2}{25}$$

$$y^2 = \frac{16}{25} (25 - x^2)$$

$$y = \pm \frac{4}{5} \sqrt{25 - x^2}$$

Como  $y \geq 0$ , entonces  $y = \frac{4}{5} \sqrt{25 - x^2}$ . Esta es la ecuación de la semielipse.

Derivando se obtiene:

$$y' = \frac{4}{5} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}} = \frac{-4x}{5\sqrt{25 - x^2}}$$

Haciendo  $x = 3$  se obtiene  $y'(3) = \frac{-12}{5\sqrt{25 - 9}} = -\frac{3}{5}$ .

La tangente tiene pendiente  $-\frac{3}{5}$  y pasa por el punto  $(3; \frac{16}{5})$ . Su ecuación es  $y = -\frac{3}{5}x + 5$ . ■

**Ejemplo 6**

Halla la ecuación de la *tangente* a la hipérbola  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$  en el punto  $P_0(5; y_0)$ , si  $y_0 < 0$ .

Resolución

Al igual que la elipse, la hipérbola no es el gráfico de una función, pues existen puntos con dos imágenes (fig. 5.14a).

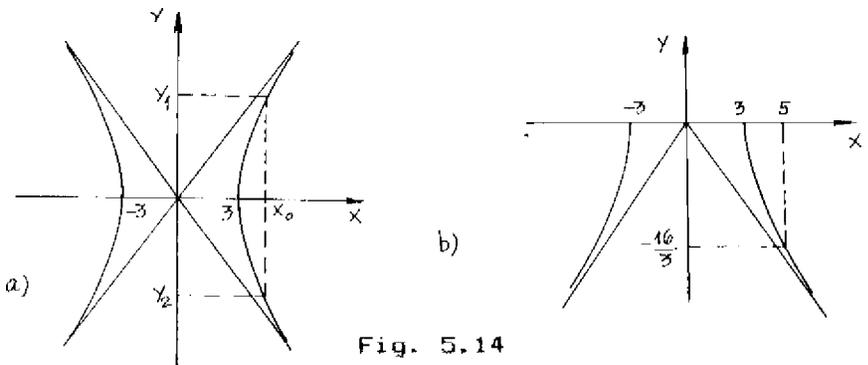


Fig. 5.14

Despejando en la ecuación de la hipérbola:

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{16} &= \frac{x^2}{9} - 1 \\ y^2 &= \frac{16}{9} (x^2 - 9) \\ y &= \pm \frac{4}{3} \sqrt{x^2 - 9} \end{aligned}$$

Evaluando en  $x_0 = 5$  y teniendo en cuenta que  $y_0 < 0$  se obtiene  $y_0 = -\frac{4}{3} \sqrt{25 - 9} = -\frac{16}{3}$ .

Consideramos la curva  $y = -\frac{4}{3}\sqrt{x^2 - 9}$  (fig. 5.14b).

Derivando:

$$y' = -\frac{4}{3} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 9}} = \frac{-4x}{3\sqrt{x^2 - 9}}$$

Evaluando para  $x_0 = 5$  obtenemos  $y'(5) = \frac{-20}{3\sqrt{25 - 9}} = -\frac{5}{3}$ .

La recta tangente tiene pendiente  $-\frac{5}{3}$  y pasa por el punto  $(5; -\frac{16}{3})$ . Su ecuación es  $y = -\frac{5}{3}x + 3$ . ■

Ejercicios (epígrafe 4)

1. Halla la derivada de la función:

a)  $y = \sqrt{x} + 5$

b)  $y = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}$

c)  $y = \sqrt{x}(2 + \sqrt{x})$

d)  $y = x^4(1 + \sqrt{x})$

e)  $y = \frac{x}{x + \sqrt{x}}$

f)  $y = \frac{\sqrt{x}}{1 - x}$

2. Deriva la función:

a)  $y = (2x + 1)^3$

b)  $y = (3x^2 + 5x - 1)^5$

c)  $y = (1 - 6t - t^2)^2$

d)  $y = (\frac{5}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{7}{4})^3$

e)  $y = \sqrt{9x + 4}$

f)  $y = \sqrt{3x - x^2}$

g)  $y = \frac{5}{4}\sqrt{16 - x^2}$

h)  $f(x) = \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}$

i)  $y = (2x - \frac{1}{3}x^2 + x^3)^4$

j)  $y = (\frac{2}{5}x^5 - 0,03x^4 + 12x - x^9)^6$

k)  $y = ((2x + 1)(x - \frac{1}{2}))^8$

l)  $y = \left(\frac{x - 1}{x + 3}\right)^3$

m)  $y = \left(\frac{x^2 - x + 3}{x^2 + 3}\right)^2$

n)  $y = \sqrt{3x^3 - \frac{16}{3}x^4 - x^5}$

ñ)  $y = 2\sqrt{3x^2 - 2x^9 + 5}$

o)  $y = \sqrt{\frac{2x + 1}{x + 4}}$

p)  $y = \sqrt{\frac{x}{x^2 + 5}}$

q)  $y = \sqrt{\frac{x^3}{x^9 + 1}}$

3. Calcula el valor de la derivada de la función en el punto indicado.

a)  $y = (x^2 - x + 1)^4$   $x_0 = 1$

b)  $y = (\sqrt[3]{x} - 1)^{10}$   $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

c)  $y = \sqrt{x^2 - 1}$   $x_0 = 2$

d)  $y = \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + 1\right)^2$   $x_0 = \frac{1}{2}$

e)  $y = \sqrt{2,5x^2 - 0,5x}$   $x_0 = -2$

f)  $y = \sqrt{x^6 + 2x^7 - 4x^9 + 12x}$   $x_0 = 1$

4. Deriva la función  $f(x) = (ax + b)^2$

a) empleando la regla de la cadena,

b) desarrollando  $(ax+b)^2$ .

5. Demuestra que si  $f$  es una función derivable, entonces la derivada de la función  $f^n$  con  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  es  $nf^{n-1} \cdot f'$ .

6. Deriva dos veces la función:

a)  $f(x) = x^2(2x + 1)^3$       b)  $y = \sqrt{\frac{x}{2x + 1}}$

7. Deriva la función  $y = \sqrt{f(x)}$ , si  $f$  es una función derivable y  $f(x) > 0$ .

8. Determina la ecuación de la tangente a la elipse  $4x^2 + 5y^2 = 41$  en el punto  $(3; 1)$ .

9. Halla la ecuación de la tangente a la hipérbola  $x^2 - y^2 = 7$  en el punto  $(4; -3)$ .

10. Halla las ecuaciones de las tangentes, con pendiente  $m = -\frac{2}{9}$ , a la elipse  $4x^2 + 9y^2 = 40$ .

11. Halla las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia  $x^2 + y^2 = 25$  que son paralelas a la recta  $4x + 3y = 12$ .

12. Halla el ángulo de inclinación de la curva  $y = \frac{1}{2}(x - 3)(x^2 + 1)$  en los puntos en que corta al eje  $x$  (ángulo de inclinación de una curva en un punto es el ángulo de inclinación de la tangente a la curva en dicho punto).

13. Demuestra que la derivada de una función par es una función impar y la derivada de una función impar es una función par.

(Sugerencia:  $f$  es par si  $f(x) = f(-x)$ ,  $x \in \text{Dom } f$   
 $f$  es impar si  $f(-x) = -f(x)$  .)

14. Demuestra que la derivada de una función periódica es también una función periódica. (Sugerencia:  $f$  es periódica si existe  $p$  real tal que  $f(x) = f(x + p)$  para  $x$ ,  $x + p \in \text{Dom } f$  .)

15. Se llama ángulo de intersección de dos curvas al ángulo que forman las tangentes a las curvas en el punto de intersección. Halla el ángulo de intersección de las curvas:

a)  $y = x^2$  ,  $y = x^3$

b)  $y = (x - 2)^2$  ,  $y = -4 + 6x - x^2$

c)  $y = x^2$  ,  $y = \frac{1}{x}$

16. Halla e) ángulo de intersección de las circunferencias

$$x^2 - 4x + y^2 = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 = 8$$

17. Demuestra que las hipérbolas  $xy = 1$  y  $x^2 - y^2 = 1$  son ortogonales, es decir, el ángulo de intersección de esas dos curvas es recto.

### 5. Derivación de funciones trigonométricas

#### Teorema 1

Las funciones seno, coseno y tangente son derivables y se cumple:

i)  $(\text{sen } x)' = \text{cos } x$

ii)  $(\text{cos } x)' = -\text{sen } x$

iii)  $(\text{tan } x)' = \frac{1}{\text{cos}^2 x}$

#### Demostración

i) Sea  $y = \text{sen } x$  .

$$\begin{aligned} \Delta y &= \text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen } x \\ &= \text{sen } x \cdot \text{cos } \Delta x + \text{cos } x \cdot \text{sen } \Delta x - \text{sen } x \\ &= \text{sen } x (\text{cos } \Delta x - 1) + \text{cos } x \cdot \text{sen } \Delta x \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{sen } x \cdot \frac{\text{cos } \Delta x - 1}{\Delta x} + \text{cos } x \cdot \frac{\text{sen } \Delta x}{\Delta x}$$

Como  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \Delta x}{\Delta x} = 1$  y

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \text{sen}^2 \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ -\text{sen} \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\text{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \right] = 0 \cdot 1 = 0$$

Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \text{sen } x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} + \cos x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \Delta x}{\Delta x} \\ &= \text{sen } x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 \\ &= \cos x \end{aligned}$$

ii) Sea  $y = \cos x$ .

Como  $\cos x = \text{sen} \left[ \frac{\pi}{2} - x \right]$ , entonces  $y = \text{sen} \left[ \frac{\pi}{2} - x \right]$

Aplicando la regla de la cadena se tiene

$$\begin{aligned} y' &= \cos \left[ \frac{\pi}{2} - x \right] \cdot \left[ \frac{\pi}{2} - x \right]' = \cos \left[ \frac{\pi}{2} - x \right] \cdot (-1) \\ &= -\cos \left[ \frac{\pi}{2} - x \right] = -\text{sen } x \end{aligned}$$

iii) Sea  $y = \tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$

entonces  $y' = \frac{(\text{sen } x)' \cdot \cos x - \text{sen } x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x}$

$$\begin{aligned} &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \text{sen } x \cdot (-\text{sen } x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### Ejemplo 1

Deriva la función:

a)  $y = x^2 \text{sen } x$

b)  $y = \text{sen } x \cdot \cos x$

c)  $y = \frac{\tan x}{x}$

Resolución

a)  $y = x^2 \text{sen } x$

$$y' = (x^2)' \cdot \text{sen } x + x^2 \cdot (\text{sen } x)'$$

$$y' = 2x \cdot \text{sen } x + x^2 \cdot \cos x = 2x \text{sen } x + x^2 \cos x$$

b)  $y = \text{sen } x \cdot \cos x$

$$y' = (\text{sen } x)' \cdot \cos x + \text{sen } x \cdot (\cos x)'$$

$$y' = \cos x \cdot \cos x + \text{sen } x \cdot (-\text{sen } x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$$

$$y' = \cos 2x$$

$$c) y = \frac{\tan x}{x}$$

$$y' = \frac{(\tan x)' \cdot x - \tan x \cdot (x)'}{x^2}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot x - \tan x \cdot 1}{x^2} = \frac{\frac{x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x}}{x^2}$$

$$y' = \frac{\frac{x - \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x}}{x^2} = \frac{x - \sin x \cdot \cos x}{x^2 \cos^2 x}$$

### Ejemplo 2

Halla la derivada de la función:

a)  $y = \sin(3x + 2)$     b)  $y = \cos(x^2 + 1)$     c)  $y = \tan \sqrt{x}$

Resolución

a)  $y = \sin(3x + 2)$

aplicando 1a regla de la cadena

$$y' = \cos(3x + 2) \cdot (3x + 2)' = 3 \cos(3x + 2)$$

b)  $y = \cos(x^2 + 1)$

$$y' = -\sin(x^2 + 1) \cdot (x^2 + 1)' = -2x \sin(x^2 + 1)$$

c)  $y = \tan \sqrt{x}$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot \cos^2 \sqrt{x}}$$

Ejercicios de aplicación (Ejerc. 2)

1. Deriva las funciones:

a)  $y = 3 \sin x$

b)  $y = \frac{1}{4} \cos x$

c)  $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x$

d)  $y = \sqrt{2} \tan x$

e)  $y = \sin x + x^3$

f)  $y = \sin x + \tan x$

g)  $y = \tan x + \cos x$

h)  $y = 2(\sin y - x + 3)$

i)  $y = \cos x \cdot \tan x + \frac{\sin x}{\tan x}$

2. Halla la derivada de la función:

a)  $y = \cos(5 - 2x)$

b)  $y = 2 \tan 4x$

c)  $y = \sin(ax + b)$

d)  $y = \cos(mx + n)$

e)  $y = 3 \sin(3x + 5)$

f)  $y = \sin(2x^2 - 3)$

g)  $y = \frac{\cos x}{x}$

h)  $y = \sqrt{x} \cdot \sin x$

i)  $y = \sin 3x + \cos 2x$

j)  $y = \sin t + \cos t$

$$k) y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \operatorname{sen} 3x$$

$$l) y = \cos^2 x$$

$$m) y = \cos x + \sqrt{x}$$

$$n) y = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$$

$$ñ) y = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

$$o) y = \cot x$$

$$p) y = x \cot x$$

$$q) y = \sqrt{2x+1} - \frac{1}{\operatorname{sen} 4x}$$

$$r) y = (1 + \operatorname{sen} 2x)^2$$

$$s) y = \operatorname{sen} 3x \cdot \cos^2 x$$

$$t) y = \operatorname{sen} (x^2 - 1)^2$$

$$u) y = 2x \operatorname{sen} x - (x^2 - 2) \cos x$$

3. La función secante se define por  $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ .  
Halla su derivada.

4. Calcula el valor de la pendiente de la curva  $y = f(x)$  en el punto indicado.

$$a) y = 5 \tan x \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$b) y = 2 \operatorname{sen} x + \frac{1}{3} \cos x \quad x_0 = 0$$

$$c) y = \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$d) y = x^3 \cos x \quad x_0 = 0$$

$$e) y = 2 \tan x - \frac{1}{4} \cos x \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$f) f(x) = 3x \operatorname{sen} x \quad x_0 = \frac{5\pi}{18}$$

$$g) y = \cos^2 x \quad x_a = \frac{\pi}{3}$$

5. Determina la función  $f$  que satisface las condiciones:

$$a) f'(x) = -\cos x$$

$$b) f'(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$$

$$f(0) = 0$$

$$f(0) = 1$$

$$c) f'(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$$

$$d) f'(x) = 5 \cos x$$

$$f(0) = 3$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$$

$$e) f'(x) = 2x - \operatorname{sen} x + \frac{1}{x^2}$$

$$f) f'(x) = \frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$f(1) = \cos 1$$

$$f(0) = 1$$

6. Prueba que la derivada de

a)  $y = \operatorname{sen} 2x$  puede expresarse como  $y' = 2(2\cos^2 x - 1)$ ,

b)  $y = \cos 2x$  puede expresarse como  $y' = -4 \operatorname{sen} x \cos x$ ,

c)  $y = \cos^2 x$  puede expresarse como  $y' = -\operatorname{sen} 2x$ .

7. ¿En qué puntos la curva

a)  $y = 2 \operatorname{sen} x + \cos 2x$

b)  $y = 2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \cos^2 x$

tiene derivada nula?

8. ¿En qué punto, la tangente al gráfico de la función

$y = \operatorname{sen} x$  tiene pendiente  $m = 1$ ?

9. Escribe la ecuación de la tangente a la curva  $y = f(x)$  en el punto indicado:

a)  $y = \operatorname{sen} x$        $(\pi; 0)$

b)  $y = \cos 2x$        $(\frac{\pi}{2}; -1)$

c)  $y = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$        $(\frac{1}{\pi}; 0)$

d)  $y = \tan 3x$        $(\frac{\pi}{15}; 0,726)$

e)  $y = 2x \cos x$        $(\frac{\pi}{12}; 0,506)$

10. Halla la derivada de segundo orden de la función:

a)  $y = \operatorname{sen}^2 x$

b)  $y = \tan x$

11. Determina la tercera derivada de la función:

a)  $y = \cos^2 x$

b)  $y = x \operatorname{sen} x$

## 6. Derivación de funciones logarítmicas y exponenciales

### Teorema 1

La función  $y = \ln x$  es derivable y se cumple

$$\left( \ln x \right)' = \frac{1}{x}$$

### Demostración

Sea  $y = \ln x$

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln \frac{x + \Delta x}{x} = \ln \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{x} \ln \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)}{\frac{\Delta x}{x}}$$

$$= \frac{1}{x} \ln \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \cdot \frac{x}{\Delta x}$$

haciendo  $r = \frac{\Delta x}{x}$  se obtiene

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \ln(1+r)^{\frac{1}{r}}$$

Como  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} r = 0$ , es decir,  $r$  tiende a cero cuando  $\Delta x$  tiende

a cero, entonces

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+r)^{\frac{1}{r}} = \frac{1}{x} \ln \lim_{r \rightarrow 0} (1+r)^{\frac{1}{r}}$$

$$= \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x} \quad \blacksquare$$

### Ejemplo 1

Deriva:

a)  $y = x \ln x$       b)  $y = \frac{\ln x}{x^2}$

Resolución

a)  $y = x \ln x$

$$y' = (x)' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)'$$

$$y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

b)  $y = \frac{\ln x}{x^2}$

$$y' = \frac{(\ln x)' \cdot x^2 - \ln x \cdot (x^2)'}{(x^2)^2}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} \quad \blacksquare$$

### Ejemplo 2

Halla la derivada de la función:

a)  $f(x) = \ln(5x - 1)$     b)  $y = \ln(3x - x^2)$     c)  $y = \ln \operatorname{sen} x$

Resolución

a)  $f(x) = \ln(5x - 1)$

$$f'(x) = \frac{1}{5x - 1} \cdot (5x - 1)' = \frac{1}{5x - 1} \cdot 5 = \frac{5}{5x - 1}$$

b)  $y = \ln(3x - x^2)$

$$y' = \frac{1}{3x - x^2} \cdot (3x - x^2)' = \frac{1}{3x - x^2} \cdot (3 - 2x) = \frac{3 - 2x}{3x - x^2}$$

c)  $y = \ln \operatorname{sen} x$

$$y' = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cot} x \quad \blacksquare$$

Teorema 2

La función  $y = e^x$  es derivable y se cumple  
 $(e^x)' = e^x$

Demostración

$$\text{Sea } y = e^x.$$

Se tiene  $\ln y = x$ .

Como la función logaritmo es derivable, entonces

$$(\ln y)' = x'$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 1$$

Aplicando la regla de la cadena:

Despejando y sustituyendo  $y = e^x$ , obtenemos

$$y' = y = e^x \quad \blacksquare$$

### Ejemplo 3

Deriva la función:

a)  $y = x e^x$       b)  $y = e^x \operatorname{sen} x$

Resolución

a)  $y = x e^x$

$$y' = (x)' \cdot e^x + x \cdot (e^x)'$$

$$y' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x + x e^x = (x + 1) e^x$$

b)  $y = e^x \operatorname{sen} x$

$$y' = e^x \cdot \operatorname{sen} x + e^x \cdot \cos x = e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) \quad \blacksquare$$

### Ejemplo 4

Halla la derivada (r. la función:

a)  $y = e^{2x}$       b)  $y = e^{\sqrt{x}}$

Resolución

a)  $y = e^{2x}$

$$y' = e^{2x} \cdot (2x)' = e^{2x} \cdot 2 = 2 e^{2x}$$

b)  $y = e^{\sqrt{x}}$

$$y' = e^{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \quad \blacksquare$$

Ya conoces que la derivada de la función  $y = x^n$  con  $n$  natural es  $y' = n x^{n-1}$ . La regla para derivar la función exponencial permite extender esta regla a exponentes reales.

**Teorema 3**

La función  $y = x^r$  con  $r \in \mathbb{R}$  y  $x > 0$  es derivable y se cumple  $(x^r)' = r x^{r-1}$

**Demostración**

Sea  $y = x^r$ ,  $x > 0$ ,  $r \in \mathbb{R}$ .

Como  $y = x^r = e^{r \ln x}$ , entonces

$$y' = \left( e^{r \ln x} \right)' = e^{r \ln x} \cdot (r \ln x)'$$

Aplicando la regla de la cadena.

$$y' = e^{r \ln x} \cdot \frac{r}{x} = x^r \cdot \frac{r}{x} = r x^{r-1} \quad \blacksquare$$

**Ejemplo 5**

Deriva la función:

- a)  $y = x^{\frac{3}{4}}$     b)  $y = x^{\sqrt{2}}$     c)  $y = \sqrt[3]{x}$     d)  $y = \sqrt[5]{x^2}$

Resolución

a)  $y = x^{\frac{3}{4}}$

$$y' = \frac{3}{4} x^{\frac{3}{4} - 1} = \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} \quad \text{ó} \quad y' = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$$

b)  $y = x^{\sqrt{2}}$

$$y' = \sqrt{2} x^{\sqrt{2} - 1}$$

c)  $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$$y' = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3} - 1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \quad \text{ó} \quad y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

d)  $y = \sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}$

$$y' = \frac{2}{5} x^{\frac{2}{5} - 1} = \frac{2}{5} x^{-\frac{3}{5}} \quad \text{ó} \quad y' = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}} \quad \blacksquare$$

**Ejercicios (epígrafe 6)**

1. Deriva la función:

- a)  $y = 2 \ln x$     b)  $y = 4e^x$     c)  $y = 2x + e^x$

$$d) y = \ln x - \frac{x+1}{x}$$

$$e) y = e^x \ln x$$

$$f) y = (e^x + 2)(e^x - 1)$$

$$g) y = \frac{1 + \ln x}{x}$$

2. Halla la derivada de la función:

$$a) y = \ln(x+1)$$

$$b) y = \ln 2x$$

$$e) y = \ln(3x+1)$$

$$d) y = \ln(3x^2+1)$$

$$e) y = \ln(5x^2 - x + 1)$$

$$f) y = \ln(1-2x)$$

$$g) y = x \ln x$$

$$h) y = \sqrt{x} \ln x$$

$$i) y = \frac{1}{x^2} \ln x$$

$$j) y = \ln^2 x$$

$$k) y = x^9 \ln x - \frac{x^3}{3}$$

$$l) y = \frac{1}{x} + 2 \ln x - \frac{\ln x}{x}$$

$$m) y = \ln(\ln x)$$

$$n) y = x^5 + \ln x + 2$$

$$ñ) y = \sqrt{e^x}$$

$$o) y = \ln \sin x$$

$$p) y = \sin x + \sin \ln x + \ln \sin x + \ln x$$

$$q) y = (1 + \ln \sin x)^2$$

3. Deriva la función:

$$a) y = e^x + e^{2x}$$

$$b) y = e^{x+9}$$

$$c) y = e^{3x+1} + 3x + 1$$

$$d) y = e^{-x}$$

$$e) y = e^{-2x}$$

$$f) y = 5e^x - e^{3x}$$

$$g) y = 5e^{-x^2}$$

$$h) y = \sqrt{x} + e\sqrt{x}$$

$$i) y = e^{x^9 - 9x+1}$$

$$j) y = \ln e^{\sin x}$$

$$k) y = x^e + 2x$$

4. Halla la pendiente de la curva  $y = f(x)$  en el punto indicado. Determina la ecuación de la recta tangente en los incisos b y c.

$$a) y = \frac{1}{4} \ln x + \sqrt{2} \quad \text{en } x_0 = 0,25$$

$$b) y = \frac{3}{5} e^x + 1 \quad \text{en } x_0 = 0$$

$$c) y = 4x e^x + 2 \ln x \quad \text{en } x_0 = 1$$

5. Halla la ecuación de la recta perpendicular a la tangente a la curva en el punto indicado.

$$a) y = x^3 - 2x^2 + 4 \quad (2;4)$$

$$b) y = \ln(3x^5 - 2) \quad (1;0)$$

6. Calcula el área del triángulo determinado por la recta tangente a la curva  $xy = 1$  en  $P_0(1;1)$ , y los ejes de coordenadas.
- 7.\* Determina en qué puntos de la curva  $y = f(x)$  sus tangentes pasan por el origen de coordenadas.
- a)  $y = 13x^2 + 2x^3 + 5x + 9$
- b)  $y = e^{5x}$
8. Halla la segunda derivada de la función:
- a)  $y = \ln(1 - x)$
- b)  $y = e^{x^2}$
9. Halla la derivada indicada de la función  $y = f(x)$
- a)  $y = \ln(1 + x)$  (tercera)
- b)  $y = e^{2x}$  (quinta)
- c)  $y = e^x \ln x$  (segunda)
10. Halla  $f(0)$ ,  $f'(0)$ ,  $f''(0)$  y  $f'''(0)$ , si  $f(x) = e^x \sin x$ .
11. Dada la función  $f(x) = e^{-x}$ . Calcula  $f(0) + x f'(0) - f''(0)$ .
12. Escribe la ecuación de la tangente a la curva  $y = \ln x$  sabiendo que su pendiente es 3.
13. Determina una función  $f$  que satisfaga las condiciones
- |                          |                              |
|--------------------------|------------------------------|
| a) $f'(x) = \frac{4}{x}$ | b) $f'(x) = \frac{2}{x}$     |
| $f(1) = 0$               | $f(1) = 2$                   |
| c) $f'(x) = f(x)$        | d) $f'(x) - f(x) = 0$        |
| $f(0) = 1$               | $f(0) = 2$                   |
| e) $f'(x) = f(x) - 3$    | f) $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$ |
| $f(0) = 8$               | $f(e) = 1 + e$               |
14. Demuestra las reglas de derivación del producto y del cociente de dos funciones positivas, empleando la derivada de la función logaritmo y la regla de derivación de funciones compuestas. (Sugerencia: Aplica logaritmos al producto  $f \cdot g$  y deriva.)

## 7. Cálculo de derivadas

### Resumen de las reglas de derivación:

• $(f \pm g)' = f' \pm g'$	• $(c)' = 0, c \in \mathbb{R}$
• $(f \cdot g)' = f'g + f \cdot g'$	• $(c \cdot f)' = c \cdot f'$
• $\left[ \frac{1}{f} \right]' = \frac{-f'}{f^2} \quad (f \neq 0)$	
• $\left[ \frac{f}{g} \right]' = \frac{f'g - f \cdot g'}{g^2} \quad (g \neq 0)$	
• $(x^r)' = r x^{r-1} \quad (r \in \mathbb{R})$	
• $\left[ \sqrt{x} \right]' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	
• $[f(g)]' = f'(g) \cdot g'$	
• $(\text{sen } x)' = \text{cas } x$	• $(\text{cos } x)' = -\text{sen } x$
• $(\text{tan } x)' = \frac{1}{\text{cos}^2 x}$	
• $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	• $(e^x)' = e^x$

Estas reglas te permiten calcular derivadas de las funciones elementales.

En este epígrafe te proponemos ejercicios que te ayudarán a sistematizar lo aprendido sobre el cálculo de derivadas.

#### Ejemplo 1

a) Si  $y = \frac{1}{20} x^5 e^{2x} + \frac{1}{6} x^9 e^{2x}$ , calcula  $y'' - 4y' + 4y$ .

b) Comprueba que  $y = e^{\text{sen} x}$  satisface la ecuación

$$y'' + y \text{sen}^2 x = (1 - \text{sen } x) e^{\text{sen} x}.$$

Resolución

$$a) y = \frac{1}{20} x^5 e^{2x} + \frac{1}{6} x^9 e^{2x}$$

$$y = \frac{1}{2} e^{2x} \left( \frac{1}{10} x^5 + \frac{1}{3} x^9 \right) \quad \text{por lo que}$$

$$y' = e^{2x} \left( \frac{1}{10} x^5 + \frac{1}{3} x^9 \right) + \frac{1}{2} e^{2x} \left( \frac{1}{2} x^4 + x^2 \right)$$

$$y' = e^{2x} \left( \frac{1}{10} x^5 + \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^9 + \frac{1}{2} x^2 \right)$$

Derivando nuevamente obtenemos:

$$y'' = 2e^{2x} \left( \frac{1}{10} x^5 + \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^9 + \frac{1}{2} x^2 \right) + e^{2x} \left( \frac{1}{2} x^4 + x^9 + x^2 + x \right)$$

$$= e^{2x} \left( \frac{1}{5} x^5 + x^4 + \frac{5}{3} x^3 + 2x^2 + x \right)$$

Sustituyendo se obtiene:

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 4y &= e^{2x} \left( \frac{1}{5} x^5 + x^4 + \frac{5}{3} x^3 + 2x^2 + x - \frac{2}{5} x^5 - x^4 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{3} x^3 - 2x^2 + \frac{1}{5} x^5 + \frac{2}{3} x^3 \right) \\ &= e^{2x} (x^3 + x) \end{aligned}$$

b)  $y = e^{\operatorname{sen} x}$

$$y' = \cos x \cdot e^{\operatorname{sen} x}$$

$$\begin{aligned} y'' &= -\operatorname{sen} x \cdot e^{\operatorname{sen} x} + \cos x \cdot \cos x \cdot e^{\operatorname{sen} x} \\ &= e^{\operatorname{sen} x} (\cos^2 x - \operatorname{sen} x) \end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} y'' + y \operatorname{sen}^2 x &= e^{\operatorname{sen} x} (\cos^2 x - \operatorname{sen} x) + \operatorname{sen}^2 x \cdot e^{\operatorname{sen} x} \\ &= e^{\operatorname{sen} x} (\cos^2 x - \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x) \\ &= (1 - \operatorname{sen} x) e^{\operatorname{sen} x} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### Ejercicios (epígrafe 7)

1. Deriva la función:

a)  $y = 3x^2 - \frac{1}{x}$       b)  $y = \operatorname{sen}(13x-1)$       c)  $y = 3\sqrt{x} + x^2$

d)  $y = \ln 4x^2$       e)  $y = \frac{x^2 - 1}{x + 3}$       f)  $y = 2 \cos 3x^2$

g)  $y = 5e^{x+11}$       h)  $y = \sqrt{10x^2 + 3}$       i)  $y = \frac{\ln(2x-7)}{3}$

j)  $y = (5x-4)(x^2+15x)$       k)  $y = \sqrt{3x} + \ln 3x$

l)  $y = \frac{e^x}{x+3}$       m)  $y = \frac{2}{3} x^4 - x^9 + 16x^2 - x + 4$

n)  $y = (x^3 + 12x^2 - \frac{1}{16}x + 4)^3$

ñ)  $y = \operatorname{sen}(x^3 - x^2 + x + 1)$

o)  $y = \frac{x^2 - 12x}{x^3 + 1}$

p)  $y = \cos \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

q)  $y = \tan(2x - 3x^4 + 5x^9 - \frac{1}{4}x^2)$

r)  $y = \frac{x\sqrt{2} - 3}{1+x\sqrt{2}}$

s)  $y = \ln(1 + x^2 - x^3)$

t)  $y = \ln(x^5 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x^3)^4$

$$u) y = e^{4x^4 - x^2 + x^3 - \frac{11}{9}}$$

$$v) y = \sqrt{8x^2 - 12x^4 + \frac{1}{2}x^5}$$

$$w) y = (2x + 1) \left(x - \frac{1}{3}\right) (x^2 + 2)$$

2. Halla la derivada de la función:

$$a) y = \sqrt[3]{x + 1}$$

$$b) y = \sqrt[4]{2x - 5}$$

$$c) y = 3x^{\frac{9}{2}} - 2x^{\frac{9}{2}} + x^{-9}$$

$$d) y = x^2 \sqrt[3]{x^2}$$

$$e) y = \left(\frac{5x - 7}{4x + 3}\right)^2$$

$$f) y = \sqrt{\frac{2x + 3}{3x - 2}}$$

$$g) y = \sin(2 - x)$$

$$h) y = \frac{1}{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$i) y = \sqrt{\sin x}$$

$$j) f(x) = \sin \sqrt{x}$$

$$k) y = a \sin(bx + c)$$

$$l) y = \sin(x^2 - 5x + 1)$$

$$m) y = \tan 2x + \cot x^2$$

$$n) y = 3 \ln \ln x$$

$$p) y = e^{-9x+5}$$

$$o) y = e^{\tan x}$$

$$q) y = 2e^{x^2-1}$$

$$r) y = 5e^{2\cos x}$$

3. Determina los puntos en los cuales la tangente a la curva  $y = f(x)$  es paralela al eje  $x$ .

$$a) f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$$

$$b) f(x) = \sin x - \frac{1}{4} \cos 2x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$c) y = \sqrt{2x - x^2}$$

4. Halla la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función en el punto indicado.

$$a) y = (x^2 - 2)^2 \quad x_0 = -1$$

$$b) f(x) = 2x - \cos 2x \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$c) f(x) = x + \tan \frac{x}{2} \quad x_0 = 2\pi$$

$$d) y = \ln \cos x \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$e) y = \sqrt{1 - x^2} \quad x_0 = -\sqrt{2}$$

5. Determina el valor de la derivada de la función en el punto indicado.

$$a) y = 7 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad x_0 = 0 \quad b) y = |x - 2| \quad x_0 = 2$$

$$c) y = \sqrt{2x - 3} \quad x_0 = \frac{3}{5} \qquad d) y = \frac{1}{x^2 + 1} \quad x_0 = 1$$

6. Si  $f(x) = (ax + b)\sin x + (cx + d)\cos x$ , determina los valores de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  para que se cumpla

$$f'(x) = x \cos x.$$

7. Demuestra que la función  $y = \frac{x^2 + 2x}{2} + 2$  satisface la ecuación  $1 + (y')^2 = 2y y''$ .

8. Muestra que la función  $y = \frac{x^9}{4}$  satisface la ecuación  $y' + \frac{y}{x} - x^2 = 0$ .

9. Si  $y = x \cos x$ , resuelve la ecuación  $y'' + y + 1 = 0$ .

10. Determina los valores de  $a$  para los cuales la función  $f(x) = 2ax \sin \frac{x}{2}$  satisface la condición:

$$a) f'(\pi) = 1 \qquad b) f''(\pi) = -\pi$$

11. Determina una función  $f$  que satisfaga las condiciones:

$$a) f(0) = 2 \qquad b) f(0) = f'(0) = 1$$

$$f'(0) = 5 \qquad f''(0) = f'''(0) = 1$$

$$f''(x) = x^2 - 2$$

$$c) f(0) = 1$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

$$f''(x) = -\sin x$$

12. Halla las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola  $xy = 1$  trazadas desde el punto  $(-1; 1)$ .

13. Halla el ángulo de inclinación de la tangente a la curva en el punto indicada.

$$a) y = x^4 + 1 \quad \text{en} \quad (0; 0)$$

$$b) y = x^3 - 2x + 4 \quad \text{en} \quad (1, 4; 3, 944)$$

$$c) y = \sin x \quad \text{en} \quad (\pi; 0)$$

$$d) y = 2xe^x \quad \text{en} \quad \left(-1; -\frac{2}{e}\right)$$

14. Muestra que las curvas  $y = 4x^2 + 2x - 8$  y  $y = x^3 - x + 10$  son tangentes entre sí en el punto  $(3; 34)$ . ¿Ocurre lo mismo en el punto  $(-2; 4)$ ? (Dos curvas son tangentes en un punto si tienen en ese punto una tangente común.)

15. El siguiente programa de computación, escrito en BASIC, permite calcular la derivada  $n$ -ésima de la función  $y = \sin x$ . ¿Cuál es su fundamento matemático?

```

10 REM PROGRAMA PARA DERIVAR LA FUNCION SENO
20 INPUT "Deme el orden de la derivada a hallar";N
30 R = N - 4*INT(N/4) : R = R + 1
40 PRINT "La derivada "N"-esima es ";
50 ON R GOTO 60,70,80,90
60 PRINT "sen x" :GOTO 100
70 PRINT "cos x" :GOTO 100
80 PRINT "-sen x" :GOTO 100
90 PRINT "-cos x"
100 END

```

16.\* Demuestra la siguiente identidad:

$$f'(x) = f(x) \left[ \ln f(x) \right]' \quad \text{para } f(x) > 0.$$

(Sugerencia: Halla la derivada de  $\ln f(x)$  empleando la regla de la cadena.)

17.\* Empleando la fórmula del ejercicio anterior deriva la función:

$$\begin{array}{ll}
\text{a) } f(x) = x^x & \text{b) } f(x) = x^{\ln x} \\
\text{c) } f(x) = x^{\operatorname{sen} x} & \text{d) } f(x) = (\ln x)^x \\
\text{e) } f(x) = (\operatorname{sen} x)^x & \text{f) } f(x) = x^{\sqrt{x}}
\end{array}$$

18. Sean la curva  $y = 3x^5 - 11x^2 + 3$  y el punto  $P(1; -5)$  de la misma. La recta tangente a la curva en  $P$  corta al eje "x" en el punto  $A$ . La recta perpendicular en  $P$  a dicha tangente corta al eje "x" en el punto  $B$ . Calcula la longitud del segmento  $\overline{AB}$ .

19. Demuestra que la función  $y = \frac{1}{1+x+\ln x}$  satisface la ecuación  $xy' = y(y \ln x - 1)$ .

20. Demuestra que la función  $y = \frac{x}{e^x}$  satisface la ecuación  $xy' = (1-x)y$ .

21. Demuestra que la función  $y = x e^{-\frac{1}{2}x^2}$  satisface la ecuación  $xy' = (1-x^2)y$ .

22. Demuestra que la función  $y = \frac{1}{2}x^2 e^x$  satisface la ecuación  $y'' - 2y' + y = e^x$ .

23. Si  $f$  y  $g$  son funciones derivables tantas veces como se

quiera y  $h = f \circ g$ :

- ¿Cuál es el coeficiente de  $f' \circ g'$  en  $h''$ ?
- ¿Cuál de los términos  $f' \circ g''$  y  $f'' \circ g'$  tiene mayor coeficiente en  $h''$ ?
- ¿Cuántos términos aparecen en  $h^{(10)}$ ? ¿Cuáles son los coeficientes de  $f^{(10)}$ ;  $f' \circ g^{(9)}$ ;  $f'' \circ g''$ ;  $f^{(9)} \circ g'$ ?

24. Dada la función  $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$ , determina:

- El coeficiente de  $\frac{\text{cos } x}{x^2}$  en  $f''$ .
- El coeficiente de  $\frac{\text{sen } x}{x^5}$  en  $f^{IV}$ .

## APLICACIONES DE LA DERIVADA AL ANÁLISIS DE FUNCIONES

B. Crecimiento y decrecimiento de las funciones en un intervalo

Teorema 1

(Teorema del valor medio del cálculo diferencial)

Si  $f$  es una función continua en el intervalo  $[x_1; x_2]$  y es derivable para cada  $x$  del intervalo  $(x_1; x_2)$ , entonces existe  $c \in (x_1; x_2)$  tal que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

Este teorema es conocido también como teorema de los incrementos finitos y tiene una interpretación geométrica.

El cociente  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$  es la pendiente de la secante AB determinada por los puntos  $A(x_1; f(x_1))$  y  $B(x_2; f(x_2))$ ;  $f'(c)$  es la pendiente de la tangente al gráfico de  $f$  en  $(c; f(c))$ . Entonces el teorema afirma que hay un punto en el cual la tangente es paralela a la secante AB (fig. 5-15).

Observa que si escribimos  $x_2 - x_1 = \Delta x$ ,  $x_2 = x_1 + \Delta x$ , la igualdad del teorema se transforma en

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = f'(c)$$

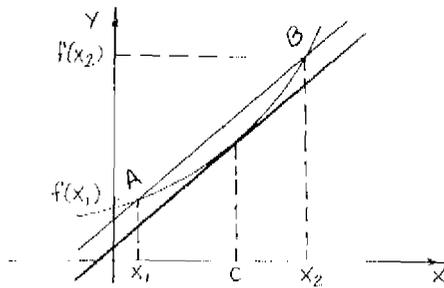


Fig. 5.15

o sea,  $f(x_1 + \Delta x) = f(x_1) + \Delta x \cdot f'(c)$ ,  $c \in (x_1; x_1 + \Delta x)$ .

Hasta ahora hemos analizado la monotonia de las funciones apoyándonos, fundamentalmente, en su gráfica; el teorema 1 nos permitirá obtener criterios analíticos sencillos para el análisis de la monotonia.

Teorema 2

Si  $f$  es una función derivable en el intervalo  $(a; b)$  y para cada  $x$  con  $a < x < b$  se cumple  $f'(x) > 0$ , entonces la función  $f$  es estrictamente creciente en el intervalo dado.

Demostración

Sea  $f$  una función que satisface las premisas del teorema y sean  $x_1$  y  $x_2$  tales que  $a < x_1 < x_2 < b$ . (ver fig. 5.16).

Debemos probar que  $f(x_1) < f(x_2)$ .

Como  $x_2 \in x_1$  entonces  $x = x_1 + \Delta x$  con  $\Delta x > 0$ .

En el intervalo  $[x_1; x_2]$  la función  $f$  es derivable por lo que se cumplen las premisas del teorema de los incrementos finitos. Entonces existe un punto  $x_0$  con  $x_1 < x_0 < x_2$

tal que  $f(x_2) = f(x_1) + \Delta x \cdot f'(x_0)$ , es decir,

$$f(x_2) - f(x_1) = \Delta x \cdot f'(x_0)$$

Como  $\Delta x > 0$  y  $f'(x_0) > 0$ , se obtiene:

$$f(x_2) - f(x_1) > 0, \text{ o sea, } f(x_1) < f(x_2). \quad \blacksquare$$

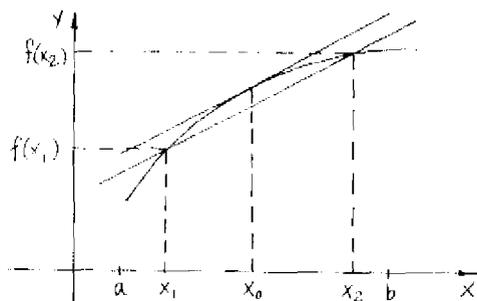


Fig. 5.16

De manera análoga puede demostrarse el siguiente teorema:

Teorema 3

Si  $f$  es una función derivable en el intervalo  $(a; b)$  y para cada  $x$  con  $a < x < b$  se cumple  $f'(x) < 0$ , entonces la función  $f$  es estrictamente decreciente en el intervalo dado.

Los teoremas 2 y 3 permiten reducir el análisis del crecimiento y decrecimiento de una función al análisis del signo de la derivada de la función.

### Ejemplo 1<sup>o</sup>A

Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función  $y = -\frac{3}{3}x^3 + x^2 + 1$ .

Resolución

Como  $y' = x^2 + 2x = x(x + 2)$  basta analizar el signo de la expresión  $x(x + 2)$ . Se obtiene (fig. 5.17a):

$y'$  es positiva si  $x < -2$  ó si  $x > 0$ .

$y'$  es negativa si  $-2 < x < 0$ .

Por lo tanto la función es estrictamente creciente en los intervalos  $(-\infty; -2)$  y  $(0; +\infty)$  y decreciente en el intervalo  $(-2; 0)$ . ■

Con estos datos podemos hacer un esbozo del gráfico de la función que, aproximadamente, se representa en la figura 5.17b.

a)



b)

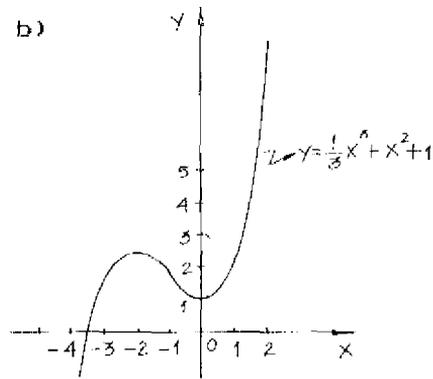


Fig. 5.17

**Ejemplo 5**

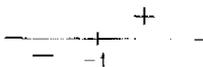
Analiza la monotonía de la función  $f(x) = x e^x$ .

Resolución

$f'(x) = e^x(x + 1)$ . Como  $e^x > 0$ , para todo  $x$  resalta que  $f'$  es negativa si  $x < -1$  y positiva si  $x > -1$ . (fig. 5.18a). La función es estrictamente *decreciente* si  $x < -1$  y *creciente* si  $x > -1$ .  $\square$

Con estos datos obtenemos un esbozo aproximado del gráfico de la función que representamos en la figura 5.18b.

a)



b)

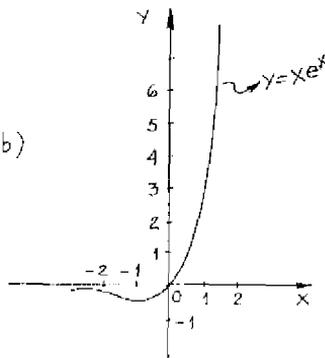


Fig. 5.18

**Ejemplo 3**

Determina los *intervalos* de monotonía de la función  $y = x^3$ .

Resolución

Se cumple  $y' = 3x^2 > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 0$ , por lo tanto la función es estrictamente *creciente* para  $x > 0$  y para  $x < 0$ . Como la función es continua en  $x = 0$ , entonces la función es *creciente* en todo  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**Ejemplo 4**

Investigar el crecimiento y decrecimiento de la función

$$y = \frac{1}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

Resolución

$$\text{Se cumple } y' = -\frac{2x - 3x^2 + 1}{(x^3 - x^2 - x + 1)^2} = \frac{-(3x + 1)(x - 1)}{(x^2 - 1)^2(x^2 - 1)}$$

$$\text{Para } x \neq 1 \quad y' = \frac{-3x - 1}{(x - 1)(x^2 - 1)^2} = \frac{3x + 1}{(1 - x)^3(x + 1)^2}$$

Como para  $x \neq -1$   $(x+1)^2 > 0$ , basta analizar el signo del cociente  $\frac{3x + 1}{(x - 1)^3}$ . Se obtiene (fig. 5.19a):

$$y' > 0 \quad \text{si} \quad -\frac{1}{3} < x < 1$$

$$y' < 0 \quad \text{si } x < -1 \text{ ó } -1 < x < -\frac{1}{3} \text{ ó si } x > 1$$

Por lo tanto la función es estrictamente creciente en el intervalo  $(-\frac{1}{3}; 1)$  y estrictamente decreciente en los intervalos  $(-\infty; -1)$ ,  $(-1; -\frac{1}{3})$  y  $(1; \infty)$  (ver figura 5.19b). ■

a)

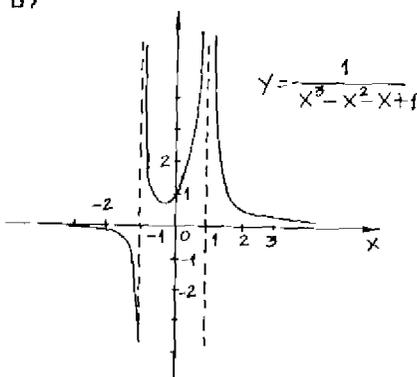
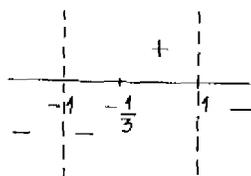


Fig. 5.19

En los ejemplos anteriores se observa que el dominio de la función puede dividirse en un número finito de intervalos de crecimiento y de decrecimiento (intervalos de monotonía). Estos intervalos están limitados por puntos críticos, es decir., puntos donde  $f'(x) = 0$  ó  $f'(x)$  no existe. Tal división del dominio de la función en intervalos de monotonía puede hacerse para todas las funciones que estudiaras en este libro.

Ejercicios (epígrafe B)

1. Determina los intervalos de monotonía de la función:

- a)  $y = -x^2$       b)  $y = (x-3)^2$       c)  $y = \sqrt{25 - 4x^2}$   
 d)  $y = \sqrt{x - 4}$       e)  $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$   
 f)  $y = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$       g)  $y = x^3 - 8$   
 h)  $y = \frac{1}{x - 2}$       i)  $y = 2 + x^{\frac{2}{3}}$   
 j)  $y = x^{\frac{4}{9}}(1 - x)^{\frac{1}{9}}$       k)  $y = x(12 - 2x)^2$   
 l)  $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x + 1$   
 m)  $y = x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 2x^2 - 8x - 28$   
 n)  $y = 2x^3 - \frac{39}{2}x^2 - 21x + 3$   
 ñ)  $y = \frac{1}{2}x^3 + \frac{13}{2}x^2 + 8x - \frac{5}{2}$   
 o)  $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 - 4x^2 + 12x - 6$   
 p)  $y = x^5 + \frac{10}{3}x^3 + 5x - 2$

2. Analiza la monotonía de la función:

- a)  $y = x^2 - 2x + 5$       b)  $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3$   
 c)  $y = 1 - 4x - x^2$       d)  $y = (x - 2)^2$   
 e)  $y = (x + 4)^3$       f)  $y = x^2(x - 3)$   
 g)  $y = \frac{x}{x - 2}$       h)  $y = \frac{1}{(x - 1)^2}$   
 i)  $y = \frac{x}{x^2 - 6x - 16}$       j)  $y = (x - 3)\sqrt{x}$   
 k)  $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x}}$       l)  $y = x + \operatorname{sen} x$   
 m)  $y = x \ln x$       n)  $y = 2e^{x^2 - 4x}$   
 ñ)  $y = e^{\frac{1}{x-3}}$       o)  $y = \frac{e^x}{x}$   
 p)  $y = e^x(x^2 - 2x)$       q)  $y = x \ln^2 x$   
 r)  $y = x^2 e^{-x}$       s)  $y = \sqrt{x(10 - x)}$   
 t)  $y = \operatorname{sen}^4 x + \operatorname{cos}^4 x$       ( $0 \leq x \leq \pi$ )  
 u)  $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x - 4$       v)  $y = x^4 + 4x^3 - 34x^2 - 12x$

3. Demuestra que  $y = x^5 + 20x - 6$  es una función creciente.
4. Demuestra que  $y = 1 - x^3 - x^7$  es una función decreciente.
5. La *figura* 5.20 muestra el gráfico de la derivada de la función  $f$ . Determina los intervalos de monotonia de la función  $f$ .

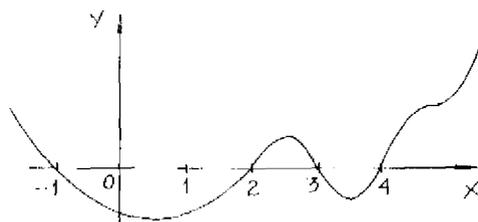


Fig 5.20

6. ¿ Es posible que una función  $f$  sea decreciente en el intervalo  $[a;b]$  y exista  $x_0$  con  $a \leq x_0 \leq b$  tal que
  - a)  $f'(x_a) = 0$
  - b)  $f'(x_0) > 0$
  - c)  $f'(x_0)$  no existe
7. ¿ Es posible que una función  $f$  sea creciente en el intervalo  $[a;b]$  y exista  $x_0$  con  $a \leq x_0 \leq b$  tal que
  - a)  $f'(x_0) = 0$
  - b)  $f'(x_0) < 0$
  - c)  $f'(x_0)$  no existe
8. Demuestra que si el ángulo de inclinación de las tangentes a la curva  $y = f(x)$  en cada uno de sus puntos es agudo, entonces la función  $f$  es creciente, y si es obtuso, decreciente.

### 9. Determinación de extremos locales de una función

Del estudio previa de la; funciones conoces que un punto  $x_0$  es un extremo local. (máximo a mínimo) de una función  $f$ , si el valor  $f(x_0)$  es mayor (máximo) o menor (mínimo) que todos los valores que toma la función en un intervalo del tipo  $(x_a - \delta; x_0 + \delta)$ .

#### Teorema 1

Para que una función derivable en  $x_0$  tenga un extremo local en  $x_0$  es necesaria que se cumpla  $f'(x_0) = 0$ .

#### Demostración

Consideremos que  $f$  tiene un extrema local en  $x_0$  y demos

tremos *que* se cumple  $f'(x_0) = 0$ .

Supongamos que  $f'(x_0) \neq 0$ , es decir, o bien  $f'(x_0) > 0$  o bien  $f'(x_0) < 0$ .

$$\text{Sea } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$$

Entonces para  $\Delta x$  suficientemente pequeño se cumple, cualquiera sea  $\varepsilon$

$$f'(x_0) - \varepsilon < \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < f'(x_0) + \varepsilon$$

y tomando  $\varepsilon = \frac{f'(x_0)}{2}$  resulta

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x} > \frac{f'(x_0)}{2} > 0, \text{ con } x = x_0 + \Delta x$$

Por lo tanto para  $\Delta x > 0$  se cumple  $f(x) > f(x_0)$  y para  $\Delta x < 0$ ,  $f(x) < f(x_0)$ . Es decir, que  $f$  es creciente en un intervalo del tipo  $(x_0 - \Delta x; x_0 + \Delta x)$ .

Análogamente, si  $f'(x_0) < 0$ ,  $f$  es decreciente en  $(x_0 - \Delta x; x_0 + \Delta x)$ .

En cualquiera de los dos casos  $f$  no puede tener un extremo en  $x_0$  lo que es una contradicción. Por lo tanto no es posible que  $f'(x_0) \neq 0$  y en consecuencia se cumple  $f'(x_0) = 0$ . ■

Desde el punto de vista geométrico el teorema 1 significa que si una función  $f$  derivable en  $x_0$  tiene un extremo local en  $x_0$ , entonces la tangente al gráfico de  $f$  en ese punto tiene pendiente  $m = 0$ , es decir, la tangente es paralela al eje  $x$  (fig. 5.21).

Del teorema 1 se deduce que los puntos en los que una función derivable tiene extremos locales están entre los que satisfacen la condición  $f'(x) = 0$ .

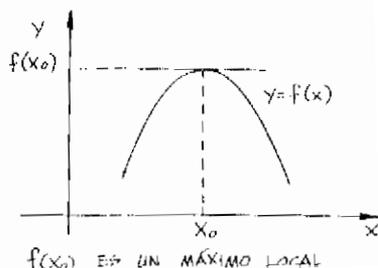
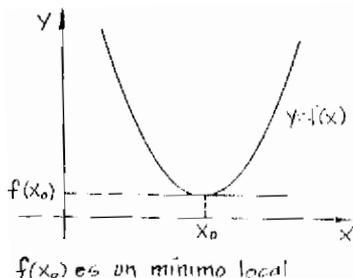


Fig. 5.21

### Ejemplo 1

Analiza en qué puntos es posible que tenga extremos locales la función:

a)  $y = 4x^2 + 2x$       b)  $y = 5x + 1$       c)  $y = x^3 + 2$

d)  $y = 4 \operatorname{sen} x + 3$       e)  $y = \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$

Resolución

a)  $y = 4x^2 + 2x$

Para tales puntos debe cumplirse  $y' = 0$ . Como  $y' = 8x + 2$  entonces  $8x + 2 = 0$

$$x = -\frac{1}{4}$$

b)  $y = 5x + 1$

La derivada de la función es  $y' = 5$ . La función no tiene extremos locales pues  $y' \neq 0$  para todo  $x$ .

c)  $y = x^3 + 2$

$y' = 3x^2$  entonces  $3x^2 = 0$   
 $x = 0$

d)  $y = 4 \operatorname{sen} x + 3$

$y' = 4 \cos x$  y resolviendo la ecuación  $y' = 0$  obtenemos

$$4 \operatorname{cos} x = 0$$

$$\operatorname{cos} x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

e)  $y = \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$

$y' = 5x^2 + x - 3$

Entonces  $5x^2 + x - 3 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{61}}{10}$$

$x_1 \approx 0,681$

$x_2 \approx -0,881$  ■

La condición  $f'(x_0) = 0$  no es suficiente para la existencia de extremos, es decir, una función puede tener derivada  $y' = 0$  en un punto y no tener extremo en ese punto. Por ejemplo, para la función  $f(x) = x^3 + 2$  se cumple  $f'(0) = 0$  pero no tiene extremo local en  $x_0 = 0$  (fig. 5.22).

Existen funciones que no tienen derivada en un punto, pero sí poseen extremo. Por ejemplo, la función  $y = |x+1|$  (fig. 5.23) no es derivable en  $x = -1$ , pero tiene un mínimo local en ese punto.

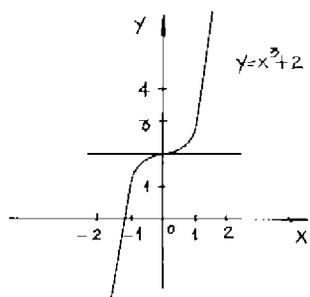


Fig. 5.22

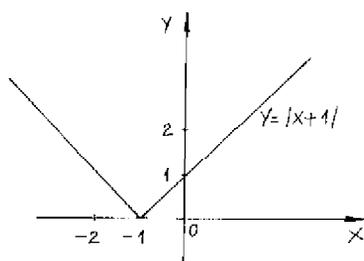


Fig. 5.23

En la práctica es necesario un criterio que nos permita afirmar que una función tiene un extremo local. Un análisis de la figura 5.21 nos permite afirmar:

Si  $f(x)$  crece en  $(x_0 - \Delta x; x_0)$  y decrece en  $(x_0; x_0 + \Delta x)$  se trata de un máximo local.

Si  $f(x)$  decrece en  $(x_0 - \Delta x; x_0)$  y crece en  $(x_0; x_0 + \Delta x)$  se trata de un mínimo local.

Como el crecimiento está determinado por el signo de la derivada tenemos:

$x_0$  es un punto de

- máximo local si  $f'(x)$  pasa de positiva a negativa
- mínimo local si  $f'(x)$  pasa de negativa a positiva.

#### Ejemplo 2

Halla los extremos locales de la función

$$f(x) = x^3 - 12x - 4$$

Resolución

$$f(x) = x^3 - 12x + 4$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 0$$

Los ceros de  $f'(x)$  son  $x_1 = 2$  y  $x_2 = -2$ . Al analizar el signo de  $f'$  encontramos  $f'(x) > 0$  en  $(-\infty; -2)$  y  $(2; +\infty)$

$$f'(x) < 0 \text{ en } (-2; 2),$$

luego en  $x = -2$   $f'(x)$  pasa de valores positivos a negativos, se trata de un máximo que es  $y_{\max} = f(-2) = 12$ .

En  $x = 2$   $f'(x)$  pasa de valores negativos a positivos, se trata de un mínimo que es  $y_{\min} = f(2) = -20$ . ■

Teorema 2

Sea  $f$  una función dos veces derivable en  $x_0$ .

Si  $f'(x_0) = 0$  y  $f''(x_0) \neq 0$  entonces  $f$  tiene un extremo local en  $x_0$ .

Si  $f''(x_0) > 0$  el extremo es un mínimo local.

Si  $f''(x_0) < 0$  es un máximo local.

Demostración

Como la segunda derivada de  $f$  es la derivada de la derivada de  $f$ , entonces

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}$$

Pero como  $f'(x_0) = 0$  se tiene:

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$$

Si  $f''(x_0) > 0$  entonces para  $\Delta x$  suficientemente pequeño

se cumple  $\frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} > 0$ . Por lo tanto  $\Delta x$  y  $f'(x_0 + \Delta x)$  tienen el mismo signo, es decir,

si  $\Delta x > 0$  entonces  $f'(x_0 + \Delta x) > 0$  y

si  $\Delta x < 0$  entonces  $f'(x_0 + \Delta x) < 0$ .

Lo anterior significa que la función  $f$  es decreciente en un intervalo de la forma  $(x_0 - \Delta x; x_0)$  y creciente en  $(x_0; x_0 + \Delta x)$ . Como  $f$  es continua en  $x_0$  por ser derivable

1) El razonamiento es análogo al utilizado para demostrar el teorema 1.

ble, tiene un mínimo local en  $x_0$ .

La demostración es análoga para el caso  $f''(x_0) < 0$ . ■

### Ejemplo 3

Halla los extremos locales de la función

a)  $y = x^2 e^x$

b)  $y = 2 \operatorname{sen} 2x + 1$ ,  $0 \leq x \leq \pi$

Resolución

a)  $y = x^2 e^x$

$$y' = 2x \cdot e^x + x^2 e^x = (x^2 + 2x)e^x$$

Como  $e^x > 0$  para todo  $x$ , debe ser  $x^2 + 2x = 0$

$$x(x + 2) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = -2$$

$$y'' = e^x(x^2 + 2x) + e^x(2x + 2) = (x^2 + 4x + 2)e^x$$

Para  $x = 0$ ,  $y'' = 2 > 0$

Para  $x = -2$ ,  $y'' = -2e^{-2} < 0$

Entonces en  $x = 0$ ,  $y_{\min} = 0$

y en  $x = -2$ ,  $y_{\max} = 4e^{-2}$

b)  $y = 2 \operatorname{sen} 2x + 1$ ,  $0 \leq x \leq \pi$

$$y' = 4 \cos 2x$$

$$4 \cos 2x = 0$$

$$\cos 2x = 0$$

$$2x = (2k+1) \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = (2k+1) \frac{\pi}{4}$$

Como  $0 \leq x \leq \pi$  entonces  $x = \frac{\pi}{4}$  o  $x = \frac{3\pi}{4}$

$$y'' = -8 \operatorname{sen} 2x$$

Para  $x = \frac{\pi}{4}$ ,  $y'' = -8 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = -8 < 0$  y

para  $x = \frac{3\pi}{4}$ ,  $y'' = -8 \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = 8 > 0$

En  $x = \frac{\pi}{4}$ ,  $y_{\max} = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + 1 = 3$

En  $x = \frac{3\pi}{4}$ ,  $y_{\min} = 2 \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} + 1 = -1$  ■

## Resumen

Para la determinación de los extremos locales de una función debes:

1. Hallar la derivada de la función.
2. Igualar a cero esta derivada y resolver la ecuación obtenida para hallar sus raíces reales.
3. Hallar la segunda derivada de la función o analizar el signo de la primera derivada.
4. Si la segunda derivada es positiva hay un mínimo y si es negativa hay un máximo; o, si la primera derivada pasa de positiva a negativa hay un máximo y si pasa de negativa a positiva, un mínimo.  
Si no ocurre ninguno de estos dos casos no se puede decidir.
5. Calcular el valor extremo evaluando la función en los valores de  $x$  encontrados.

### Ejercicios (epígrafe 9)

1. Halla los máximos y los mínimos locales de la función:
  - a)  $f(x) = x(12 - 2x)^2$
  - b)  $y = x^2 + \frac{250}{x}$
  - c)  $f(x) = x^2 + 2x - 3$
  - d)  $f(x) = 3 + 2x - x^2$
  - e)  $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$
  - f)  $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$
  - g)  $f(x) = (2 - x)^3$
  - h)  $y = (x^2 - 4)^2$
  - i)  $y = x^3 + \frac{48}{x}$
  - j)  $y = 2x^3 + 7x$
2. Determina los puntos en los que la función  $f$  tiene extremos locales. Clasifícalos.
  - a)  $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$
  - b)  $f(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$
  - c)  $f(x) = e^{\sin x}$
  - d)  $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x$
  - e)  $f(x) = \frac{1}{\sin x + \cos x}$
  - f)  $f(x) = \sqrt{8+x} - \sqrt{8-x}$
  - g)  $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$
  - h)  $f(x) = e^{\cos x}$
  - i)  $f(x) = \cos x - \ln \cos x$
  - j)  $f(x) = 2x - \tan x$

$$k) f(x) = \sqrt{x^3 - 3x}$$

$$l) f(x) = x^2 \ln x$$

3. Determina los intervalos de crecimiento y los extremos locales de la función:

a)  $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$

b)  $y = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$

c)  $y = 12x^3 - 30x^2 - 24x + 12$

d)  $y = \frac{8}{3}x^3 + x^2 - x + 16$

4. Determina los puntos  $x$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$ , en los que tiene extremos locales la función. Analiza si es máxima o mínimo.

a)  $y = \frac{1}{2} \sin 2x$

b)  $y = \cos^2 x - \cos x$

c)  $y = x - 2 \sin x$

d)  $y = \sin x (1 + \cos x)$

e)  $y = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

f)  $y = 1 - 7 \sin(\pi + \frac{x}{8})$

g)  $y = 4 \sin x - 3 \cos x$

h)  $y = \sin x (1 - 2 \cos x)$

5. La figura 5.24 muestra la gráfica de la derivada de la función  $f$ . Halla todas las puntas en los que  $f$  tiene extremos locales.

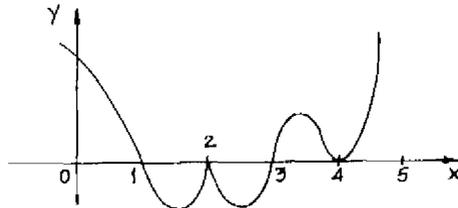


Fig 5.24

6. ¿Es posible que una función tenga un extremo local en  $x_0$  y no se cumpla  $f'(x_0) = 0$ ?
7. Esboza el gráfico de una función  $f$  que tenga un máximo local en  $x = 1$  y un mínimo local en  $x = 3$  tal que
- a)  $f(1) = 3$      $f(3) = a$     b)  $f'(1) \neq 0$      $f'(3) = 0$
- c)  $f(1) = f(3)$
- d)  $f(1) = f'(1) = f(3) = f'(3)$
8. Demuestra que la función carece de extremos:
- a)  $f(x) = \frac{2}{2x + 3}$     b)  $f(x) = \frac{x}{x - 2}$
- c)  $f(x) = \frac{ax + c}{cx + d}$

9. La abscisa del **vértice** de toda parábola **que** se obtiene como representación gráfica de una función  $y = x^2 + px + q$  es un punto en el cual esta función tiene un extremo. Determina por esta vía las coordenadas del vértice de la parábola.

10. Halla el extremo local de la función  $y = ax^2 + bx + c$ . ¿De qué depende que sea máximo o mínimo? Da una interpretación geométrica del resultado.

11. Determina  $p$  y  $q$  de tal manera que  $y = 3$  sea un mínimo de la función  $f(x) = x^2 + px + q$  para  $x = 1$ .

12. ¿Para qué valores de  $a$ , la función

$$y = a \operatorname{sen} x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x$$

tiene un extremo para  $x = \frac{\pi}{3}$  ?  
¿ Es un máximo o un mínimo?

13. Halla los valores de  $a$  y  $b$  para los cuales la función  $y = a \ln x + bx^2 + x$  tiene extremos en los puntos  $x = 1$  y  $x_2 = 2$ .

14. Demuestra que

$$y = (a - x)^2 + (a_2 - x)^2 + \dots + (a - x)^2$$

tiene un mínimo local cuando  $x = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$

15.\* Demuestra la desigualdad  $e^x \geq x + 1$ .

(Sugerencia: Prueba que la función  $f(x) = e^x - x - 1$  toma su valor mínimo para  $x = 0$ .)

16.\* Demuestra la desigualdad:

a)  $\operatorname{sen} x < x$  para  $x > 0$

b)  $\ln(x + 1) < x$  para  $x > 0$

17.\* Esboza el gráfico de la función. Para ello determina el dominio de la función, ceros, puntos de discontinuidad, extremos locales, monotonía, comportamiento en el infinito y asíntotas.

a)  $y = x^9 - 3x^2$

b)  $y = \frac{1}{6} (3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 5)$

c)  $y = \frac{x^2 - 1}{(x - 2)^2}$

d)  $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$

e)  $y = \frac{x}{x^2 + 4}$

f)  $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x}$

18.\* Representa gráficamente la curva:

a)  $y = 3 \operatorname{sen}^2 x$

b)  $y = \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$

c)  $y = e^{\operatorname{sen} x} \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$

d)  $y = \ln \operatorname{sen} x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$

e)  $y = x^2 e^x$

f)  $y = (x-3)\sqrt[3]{x^2}$

### OTRAS APLICACIONES DE LA DERIVADA

#### 10. Cálculo aproximado de los valores de una función

Al estudiar el concepto de función continua vimos que para valores de argumentos próximos a  $x_0$ , los valores de la función están próximos a  $f(x_0)$ , en otras palabras, si  $x \approx x_0$ ,  $f(x) \approx f(x_0)$ . Así, por ejemplo,

$$\operatorname{sen} 1^\circ = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{180}\right) = \operatorname{sen} 0,0175 \approx \operatorname{sen} 0 = 0$$

Si buscamos  $\operatorname{sen} 1^\circ$  en la tabla, encontramos

$$\operatorname{sen} 1^\circ = 0,0175$$

Vemos que en efecto  $\operatorname{sen} 1^\circ \approx \operatorname{sen} 0$ , aunque la diferencia es casi 0,02; es decir, el error que se comete es casi 0,02.

La introducción de la derivación nos permite hacer cálculos aproximados más precisos para las funciones derivables.

Dado que si  $f(x)$  es derivable en  $x_0$  re cumple:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

entonces podemos escribir la fórmula aproximada

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \approx f'(x_0)$$

con cualquier precisión dada de antemano, siempre que se escoja  $\Delta x$  suficientemente pequeña. Esta fórmula puede escribirse:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \Delta x \cdot f'(x_0)$$

Y será nuestra fórmula básica para el cálculo aproximado.

Utilizando esta fórmula, tendremos en el cálculo de

sen  $1^{\circ}$ :

sen  $1^{\circ} = \text{sen} \left( 0 + \frac{\pi}{180} \right) \approx \text{sen } 0 + \frac{\pi}{180} \cdot \cos 0 = 0,0175$   
que coincide con el valor de la tabla, es decir, tiene error menor que  $5 \cdot 10^{-5}$ .

### Ejemplo 1

Calcula aproximadamente  $\sqrt{38}$ .

Resolución

Para aplicar la fórmula debemos encontrar un  $x_0$  próximo a 38 en el cual se pueda calcular con exactitud  $\sqrt{x_0}$ ; en este caso es claro que  $x_0 = 36$  conviene. Entonces

$$\sqrt{38} = \sqrt{36+2}, \quad x_0 = 36, \quad \Delta x = 2$$

Entonces la expresión  $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \Delta x \cdot f'(x_0)$  adquiere la forma

$$\sqrt{38} = \sqrt{36 + 2} \approx \sqrt{36} + \frac{2}{2\sqrt{36}} = 6 + \frac{1}{6} \approx 6,17$$

En la tabla de cuadrados  $\sqrt{38} = 6,16$ ; el error es menor que 0,01. ■

### Ejemplo 2

Calcula tan  $45,15^{\circ}$ .

Resolución

Observa que el valor que buscamos no está en la tabla, o sea, que aplicando el procedimiento que estudiamos podemos mejorar la precisión de la tabla.

Considerando  $y = \tan x$  se tiene  $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$

Por lo tanto  $\tan(x_0 + \Delta x) \approx \tan x_0 + \frac{\Delta x}{\cos^2 x_0}$

Como  $45,15^{\circ} = 45^{\circ} + 0,15^{\circ}$ , convertimos a radianes y tomamos

$x_0 = \frac{\pi}{4}$  y  $\Delta x = \frac{0,15 \cdot \pi}{180} \approx 0,00262$  obteniéndose

$\tan 45,15^{\circ} = \tan(45^{\circ} + 0,15^{\circ}) \approx \tan\left(\frac{\pi}{4} + 0,00262\right)$

$$= \tan \frac{\pi}{4} + \frac{0,00262}{\cos^2 \frac{\pi}{4}}$$

$$= 1 + \frac{0,00262}{1} = 1,00262$$

En la computadora de tu escuela puedes encontrar que con seis cifras el valor es 1,00525, es decir, el error aparece sólo en la sexta cifra. ■

**Ejemplo 3**

Justifica las fórmulas de cálculo aproximado ( $x \approx 0$ ):

a)  $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$

b)  $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$

Resolución

a)  $\sqrt{1+x} \approx \sqrt{1} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1}} = 1 + \frac{x}{2}$

b)  $\frac{1}{1+x} \approx \frac{1}{1} + x \cdot \frac{-1}{1^2} = 1 - x$  ■

**Ejercicio 5** (epígrafe 10)

1. Calcula aproximadamente:

- a)  $\cos 61^\circ$     b)  $\tan 44^\circ$     c)  $e^{0,2}$     d)  $\sqrt[4]{17}$   
 e)  $\sin 31^\circ$     f)  $\sqrt{4,1}$     g)  $\sin 30,17^\circ$     h)  $\cos 59,85^\circ$

2. Halla el valor aproximado de la función:

- a)  $y = x^3 - 4x^2 + 5x + 3$  para  $x = 1,03$   
 b)  $f(x) = \sqrt{1+x}$  para  $x = 0,2$   
 c)  $f(x) = e^{1-x^2}$  para  $x = 1,05$

3. Halla el valor aproximado de  $\tan 45^\circ 3' 20''$ .

4. Deduce la fórmula aproximada  $(x + \Delta x)^2 \approx x^2 + 2x \cdot \Delta x$ .

(para valores de  $|\Delta x|$  pequeños en relación a  $x$ )

Da una interpretación geométrica a esta fórmula.

(Sugerencia: Haz el análisis en la figura 5.25.)

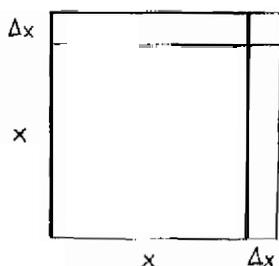


Fig. 5.25

5. Deduce la fórmula aproximada

$$(x + \Delta x)^3 \approx x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x$$

Da una interpretación geométrica a esta fórmula.

(Sugerencia: Dibuja un cubo de lado  $x + \Delta x$ .)

6. Deduce la fórmula aproximada:

$$\sqrt[3]{x + \Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

y halla los valores aproximados de  $\sqrt[3]{10}$ ,  $\sqrt[3]{70}$ ,  $\sqrt[3]{200}$ .

7.\* Demuestra, basándote en la ley de Ohm  $\left(I = \frac{U}{R}\right)$ , que una pequeña variación de la intensidad de la corriente, debida a una pequeña variación de la resistencia, puede calcularse de manera aproximada por la fórmula

$$\Delta I \approx -\frac{I}{R} \cdot \Delta R$$

8.\* Demuestra que un error relativo de 1 %, cometido al determinar la longitud del radio, da lugar a un error relativo aproximada de un 2 %, al calcular el área del círculo.

## 11. Problemas sobre valores extremos

Muchos problemas prácticos de optimización pueden ser resueltos aplicando el cálculo diferencial.

### Ejemplo 1

Halla dos números naturales cuya suma sea 120 de tal manera que el producto de una de ellas por el cuadrado del otro sea máximo.

Resolución

Para resolver el problema se requiere optimizar un producto, el primer paso consiste en representar ese producto mediante una función, es decir, modelar el problema matemáticamente.

Sean  $N_1$  y  $N_2$  los números, entonces el producto de uno por el cuadrado del otro se puede representar

$$P = N_1^2 \cdot N_2$$

y ambos números están relacionados por la ecuación

$$N_1 + N_2 = 120$$

Representemos el producto en función de uno de los números, sea  $N_1 = x$ , entonces  $N_2 = 120 - x$  y

$$P = P(x) = x^2(120 - x)$$

De esta manera hemos encontrado un modelo matemático al problema práctico: encontrar el máximo de la función

$$P(x) = x^2(120 - x) = 120x^2 - x^3 \text{ en el intervalo } [0; \infty).$$

Derivando  $P'(x) = 240x - 3x^2$

$$240x - 3x^2 = 0$$

$$3x(80 - x) = 0$$

$$x = 0 \text{ ó } x = 80$$

$$P''(x) = 240 - 6x$$

$$P''(80) = -240 < 0 \text{ hay máximo local.}$$

Como en  $[0; 80)$  la función  $P$  crece y en  $[80; \infty)$  decrece, el máximo hallado es absoluta, es decir, es el mayor valor que toma la función.

$$\text{Calculamos } y = 120 - x = 40$$

Respuestas Los números son 40 y 80. ■

### Ejemplo 2

Se necesita una superficie rectangular cercada por tres de sus lados con tela metálica y por el cuarto lado con un muro de piedra. Se dispone de 20 metros lineales de tela metálica. Calcula las dimensiones que ha de tener la superficie para que su área sea lo mayor posible.

Resolución



Fig. 5.26

En la figura 5.26 aparece representada la superficie. Su área es  $A = xy$  siendo  $x, y$  los lados del rectángulo.

Como se dispone de 20 m de tela metálica, entonces  $x + y + x = 2x + y = 20$ , es decir,

$$y = 20 - 2x$$

El área es  $A = A(x) = x(20 - 2x) = 20x - 2x^2$  con

$$0 \leq x \leq 10.$$

1) En este capítulo, los datos de los problemas de extremos se consideran números exactos.

por lo que en  $r = \sqrt[3]{\frac{2V}{3\pi}}$  hay un mínimo absoluto.

$$A'(r) > 0 \text{ si } r > \sqrt[3]{\frac{2V}{3\pi}}$$

$$\text{Luego } A'(r) < 0 \text{ si } 0 < r < \sqrt[3]{\frac{2V}{3\pi}} \text{ y}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{2V}{3\pi}}$$

$$r^3 = \frac{2V}{3\pi}$$

$$4\pi r = \frac{r^2}{2V}$$

$$\text{Derivando esta función: } A'(r) = 4\pi r - \frac{r^2}{2V}$$

$$A = A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \left[ \frac{\pi r^2}{V} \right] = 2\pi r^2 + \frac{r^3}{2V} \quad (r > 0)$$

El área total en función del radio es:

$$\text{El volumen es } V = \pi r^2 h \text{ y por tanto } h = \frac{V}{\pi r^2}.$$

el radio de la base y  $h$  la altura del cilindro.

El área total del cilindro es  $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ , siendo  $r$

Resolución

total sea la menor posible?

¿Qué relación debe haber entre el radio y la altura de un cilindro circular recto de volumen dado  $V$  para que su área

**Ejemplo 3**

el otro lado, 5 m.  $\blacksquare$

Respuesta: El lado cercado por el muro debe medir 10 m y

$$\text{El valor de } y = 20 - 2 \cdot 5 = 10$$

luego el máximo es absoluto y es el valor buscado.

$$A(0) = 0, \quad A(10) = 0$$

extremos del intervalo:

máximo. Este máximo lo comparamos con los valores de los

$A'(x) = -4 < 0$  para todo  $x$ , por lo que en  $x = 5$  hay un

$$x = 5$$

$$20 - 4x = 0$$

Hallamos el máximo de la función  $A$ :

$$A'(x) = 20 - 4x$$

$$\text{Entonces } \frac{h}{r} = \frac{\frac{V}{\pi r^2}}{r} = \frac{V}{\pi r^3} = \frac{V}{\pi \frac{V}{2n}} = 2$$

**Respuesta:** La altura del cilindro debe ser el doble del radio de la base. ■

#### Resumen

Para resolver un problema sobre valores extremos debes:

1. Dibujar una figura de análisis (si es necesario).
- f. Determinar cuál es la magnitud a optimizar, es decir, a maximizar u minimizar:
3. Expresar esa magnitud en función de una sola variable.
4. Determinar el extremo pedido.
5. Responder a la pregunta del problema.

#### Ejercicios (epígrafe 11)

1. De todas las *pares* de números naturales cuya suma es 10, ¿cuáles son los que su producto es máximo?
2. Determina el número positivo que al adicionarle su recíproca se obtiene la menor suma.
3. ¿Cuál es el número positivo que sumado con el cuádruplo de su recíproco da el menor resultado?
4. Halla dos números cuya suma sea 18, tales que el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.
5. Halla dos números cuya suma sea 24 tales; que el producto de uno de ellos por el cubo del otro sea máximo.
6. Halla dos números positivos cuyo producto sea 16 y al su suma sea mínima,
  - b) la suma de uno de ellas con el cuadrado del otro sea mínima.
7. Descomponer un número positivo dado ( $a$ ) en dos sumandos, de tal forma que su producto sea el mayor posible.
8. La suma de tres números naturales es 18 y se sabe que al menos dos de ellos son iguales. ¿Cuáles son estos números si su producto es máximo?

9. ¿ Para qué fracción de numerador 1 se obtiene la mayor diferencia cuando se resta de ella su segunda y tercera potencias?
10. De todos los triángulos isosceles, cuyas base y altura suman 20 cm, ¿ cual es la longitud de la base del que tiene área máxima?
11. Entre todos los rectángulos que tienen 48 cm de perimetro, ¿ cual es el de área máxima?
12. Con un trozo de alambre de longitud  $l$  se quiere formar un rectángulo cuya área sea la mayor posible. Calcula sus dimensiones.
13. Se desea construir una caja abierta, en forma de ortoedro de base cuadrada y con una rapacidad de 108 litros. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que tenga mínima superficie y, por tanto, mínimo costo?
14. De una hoja de cartón cuadrada de 18 cm de lado, hay que hacer una caja abierta que tenga el mayor volumen posible, recortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando después las salientes (fig. 5.27) .  
¿Cuál debe ser la longitud del lado de los cuadrados cortados?

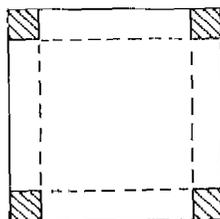


Fig. 5.27

- 15.\* Una hoja de papel para un cartel tiene una superficie de  $2 \text{ m}^2$ . Los márgenes superior e inferior miden 20 cm y los laterales 12 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del papel si el área de la parte impresa es máxima?

16. A una semicircunferencia debe inscribirse un rectángulo con la mayor área posible de modo que un lado del rectángulo esté situada sobre el diámetro de la semicircunferencia. ¿En qué razón deben estar los lados del rectángulo?
17. A un triángulo isósceles ABC de base  $\overline{AB} = 10$  cm y altura sobre la base  $\overline{CD} = 20$  cm se le inscribe un rectángulo con dos de sus vértices en  $\overline{AB}$ . Calcula las dimensiones del rectángulo para que su área sea máxima.
- 18\*. Se inscribe un rectángulo en la elipse  $\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{225} = 1$  con sus lados paralelos a las ejes. Halla las dimensiones de dicho rectángulo para que
- el área sea máxima,
  - el perímetro sea máximo.
19. Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima que tiene uno de sus vértices sobre la curva  $y = e^{-x^2}$  y uno de sus lados sobre el eje x ( fig. 5.28).

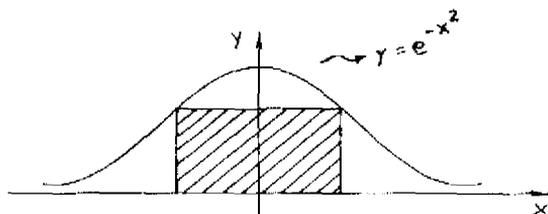


Fig. 5.28

- 20\*. Halla la altura que debe tener un cilindro circular recta inscrito en una esfera de 6 m de diámetro, para que su volumen sea máximo.
- 21\*. Halla el radio del cono circular recto de volumen máximo que se puede inscribir en una esfera de 3 m de radio.
22. En un cono circular recto de 6 cm de radio, y 8 cm de altura se inscribe un cilindro circular recto. Halla el radio del cilindro para que

- a) su volumen sea máximo,
- b) su área lateral sea máxima.

- 23.\* Determina las dimensiones del cilindro circular recto de área lateral máxima que se puede inscribir en una esfera de 4 cm de *radio*.
- 24.\* Calcula la altura del cono circular recto de máximo volumen que puede *inscribirse* en una esfera de radio R dada.
25. Halla sobre la recta  $y = x$  el punto A tal que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos  $P_1(-a;0)$ ,  $P_2(a;0)$  y  $P_3(0;b)$  sea mínima.
26. ¿Cuál es el punto de la curva  $4y = x^2$  más próximo al punto A(0;4) ?
- 27.\* El alcance de un proyectil (no tomando en consideración la resistencia del aire y otras causas perturbadoras) está dado por la fórmula

$$x = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

donde  $v_0$  representa el valor de su velocidad inicial,  $g$  la aceleración debida a la gravedad y  $\alpha$  el ángulo de tiro. ¿Qué valor ha de tener  $\alpha$  para que el alcance del proyectil sea máximo?

- 28.\* En el problema anterior, la altura del proyectil en el instante  $t$  está dada por la fórmula

$$h = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

Halla la altura máxima que alcanza el proyectil para una velocidad inicial y un ángulo de tiro dados.

### 12.\* Rapidez de cambio

Conoces que si un punto se mueve con movimiento rectilíneo uniforme, entonces la ecuación de su movimiento es  $s = s_0 + vt$  donde  $s$  es el valor del desplazamiento,  $s_0$  el valor del desplazamiento inicial,  $v$  el valor de la veloci-

dad y  $t$  el tiempo.

Observa que como en este caso la velocidad es constante resulta que el desplazamiento es una función lineal del tiempo, es decir,  $s = s(t) = s_a + vt$ .

Se cumple entonces  $s'(t) = v$ .

En el caso general de cualquier clase de movimiento, uniforme o no, se define:

La velocidad en un instante dado es la derivada del desplazamiento con respecto al tiempo.

#### Ejemplo 1

La ley del movimiento de un móvil es  $s(t) = 50t - 10t^2$  ( $s$  en metros y  $t$  en segundos). Calcula su velocidad a los 2,0 s.

Resolución

Derivando a  $s$  con respecto a  $t$  se obtiene:

$$v(t) = s'(t) = 90 - 20t \quad \text{y evaluando para } t = 2$$

$$v(2) = s'(2) = 90 - 40 = 50$$

Respuesta: A los 2 s la velocidad es de 50 m/s. ■

#### Ejemplo 2

La ecuación del movimiento de un punto es  $s = 12t - \frac{4}{3}t^3$  donde  $t$  se mide en segundos y  $s$  en metros. Determina el instante en que el móvil se detiene.

Resolución

La velocidad en el instante  $t$  es

$$v = s' = 12 - \frac{4}{3}t^2$$

Cuando el móvil se detiene su velocidad es Cero, por lo tanto

$$12 - \frac{4}{3}t^2 = 0$$

$$\frac{4}{3}t^2 = 12$$

$$t^2 = 9$$

Como  $t \geq 0$ , entonces  $t = 3$ .

Respuesta: El móvil se detiene a los 3 s. ■

El concepto de velocidad puede extenderse a un problema más general: Supongamos que  $m = m(t)$  es una magnitud que depende del tiempo, entonces

La rapidez con que cambia la magnitud  $m$  en un instante dado es la derivada de  $m$  con respecto al tiempo.

**Ejemplo 3**

La ley del movimiento de un punto es  $s = t^3 - 2t^2 + 5t - 1$ , expresándose  $t$  en segundos y  $s$  en centímetros. Calcula la aceleración del móvil a los 5,0 s.

Resolución

La aceleración es la rapidez con que cambia la velocidad, es decir, la derivada de la velocidad con respecto al tiempo. Como la velocidad es la derivada del desplazamiento resulta que la aceleración es la segunda derivada del desplazamiento.

$$\text{Entonces, } v = s' = 3t^2 - 4t + 5$$

$$a = v' = s'' = 6t - 4$$

Para  $t = 5$  se obtiene  $a = 26$

Respuesta: La aceleración a los 5 s es 26 cm/s<sup>2</sup>.

**Ejemplo 4**

Una esfera de metal se dilata por el calor de tal manera que su volumen es  $V = \frac{\pi}{3}(1 + 3t)^3$  ( $t$  en segundos y  $V$  en centímetros cúbicos). Calcula:

- a) El volumen inicial.
- b) La rapidez con que varía el volumen a los 3,00 s.

Resolución

a) El volumen inicial se obtiene para  $t = 0$ , es  $V = 4,19$

b) Calculamos la derivada del volumen con respecto al tiempo

$$V' = 12\pi(1 + 3t)^2$$

Para  $t = 3$  se obtiene  $V' = 3770$

Respuesta: El volumen inicial es de 4,19 cm<sup>3</sup>. A los 3 segundos el volumen cambia con una rapidez de 3,77 dm<sup>3</sup>/s.

**Ejemplo 5**

Uno de los catetos de un triángulo rectángulo varía de tal manera que su longitud es  $S + 2t$  centímetros ( $t$  en segundos) mientras que la hipotenusa es constante e igual a 80 cm. Calcula la rapidez con la que está cambiando el

otro cateto cuando el primero mide 36 cm

Resolución

Sean  $a = 2 + 2t$  un cateto y  $c = 60$  la hipotenusa del triángulo-

$$\text{El otro cateto es } b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{3600 - (2 + 2t)^2}$$

Calculemos al cabo de que tiempo el cateto  $a$  mida 36 cm

$$2 + 2t = 36$$

$$t = 17, \text{ es decir, a los 17 s}$$

Derivando, se obtiene

$$b' = \frac{-4(2+2t)}{2\sqrt{3600-(2+2t)^2}} = \frac{-4-4t}{\sqrt{3596-8t-4t^2}}$$

Evaluando para  $t = 17$  obtenemos  $b' = -1,5$ .

Respuestas El cateto está cambiando con una rapidez de  $-1,5$  cm/s, es decir, está disminuyendo 1,5 cm cada segundo. ■

Ejercicios (epígrafe 12)

1. Calcula la velocidad y la aceleración cuando  $t = 1,0$  de los cuerpos cuyos movimientos rectilíneos obedecen a la ley siguiente (las distancias se suponen medidas en centímetros y los tiempos en segundos):

a)  $s = t^2 - t + 4$

b)  $s = 5t^2$

c)  $s = t^3 + t + 2$

d)  $s = t^3 - t^2 + 2t + 6$

e)  $s = t^4 - t^2 + 2$

f)  $s = \text{sen } \frac{\pi}{3} t$

g)  $s = 10 \cos \frac{\pi}{3} t$

2. Calcula la velocidad y la aceleración iniciales en el movimiento de ecuación ( $t$  en segundos,  $s$  en metros):

a)  $s = t^4 + 3t + 4$

b)  $s = 8 \cos 2t + 4 \text{ sen } 2t$

3. Calcula la posición, velocidad y aceleración iniciales y después de 10 s ( $t$  en segundos y  $s$  en metros).

a)  $s = 2t^3 + 3t^2 + 4t - 20$

b)  $s = \cos \frac{\pi}{4} t + 20 \text{ sen } \frac{\pi}{4} t$

4. Un punto se mueve de modo que el desplazamiento es  $s = 16 + 4Bt - t^2$ . ¿Cuándo y dónde se detiene?
5. ¿Cuándo y dónde se detiene un móvil cuyo movimiento tiene por fórmula  $x = a \sin \pi t$  ?
6. Para un móvil, lanzado verticalmente hacia arriba, la ecuación del movimiento es  $s = 56t - 4,9t^2$ . Halla:
  - a) las expresiones de la velocidad y de la aceleración en cualquier instante  $t$ ,
  - b) el instante en que la velocidad es nula,
  - c) la máxima altura alcanzada.
7. Dos trenes parten de la misma estación, uno hacia el sur a 50 km/h y el otro hacia el este a 70 km/h. ¿Con qué rapidez se están separando?
8. El ángulo  $a$  en radianes, girado por una campana en  $t$  segundos, viene dado por la fórmula  $a = 4t + \frac{2}{t}$ . Halla la expresión de su velocidad y cuándo esta se anula.
9. Por el eje  $x$  se mueven dos puntos que tienen respectivamente las leyes de movimiento  $x = 100 + 5t$  y  $x = \frac{1}{2} t^2$  con  $t \geq 0$ . ¿Con qué rapidez se alejarán estos puntos, uno del otro, en el momento de su encuentro? ( $x$  se da en centímetros y  $t$  en segundos).
10. Un punto se mueve sobre la hipérbola  $y = \frac{10}{x}$  de tal modo que  $x = t$  ( $t$  en segundos,  $t > 0$ ). ¿Con qué rapidez variara su ordenada cuando el punto pase por la posición (5;2)?
11. Uno de los lados de un rectángulo tiene una longitud constante  $a = 10$  cm, mientras que el otro,  $b$ , es variable ( $b = 2 + 4t$ ,  $t$  en segundos). ¿Con qué rapidez aumentan la diagonal del rectángulo y su área en el instante en que  $b = 30$  cm ?
12. Los extremos de un segmento  $\overline{AB}$  de 5,0 cm de longitud se deslizan por las rectas perpendiculares entre sí  $OX$  y  $OY$  (fig. 5.29).

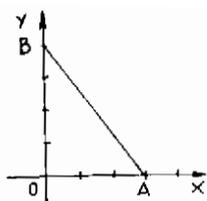


fig. 5.29

$\overline{OA} = 3,0$  cm del origen de coordenadas?

El punto A se mueve de tal manera que su posición es  $x = 2t$ .

¿Cuál será la velocidad de desplazamiento del extremo B en el instante en que el extremo A se encuentre a una distancia

### Ejercicios del capítulo

1. Calcula la derivada de la función:

a)  $y = x^3 - 3x$

b)  $y = -\frac{x}{3} - \frac{2}{x^2} + 10$

c)  $y = \left(\frac{1}{3}x - x^3\right)^4$

d)  $y = \frac{1 + 2x}{3 - 5x}$

e)  $y = x e^{-x}$

f)  $y = \frac{\frac{3}{5}x^5 - 2x}{3}$

g)  $y = \ln(9 - x^2)$

h)  $y = \ln \sin x + \ln \cos x$

i)  $y = \ln(x^3 + 8x^2 + 16x)$

j)  $y = \ln \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$

k)  $y = x + 2 \sin^2 x$

l)  $y = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \ln \tan \frac{x}{2}$

2. Sabiendo que  $y = e^x \sin x$  y  $z = e^x \cos x$ , demostrar que  $y'' = 2z$  y  $z'' = -2y$ .

3. Deriva:

a)  $y = \frac{x^3 - 8}{x + 2} \cdot \frac{x^2 + 4x + 4}{x - 2}$

b)  $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 - x - 6}$

c)  $y = \frac{9x^2 + 6x + 1}{x^2 - 9} \cdot \frac{3x^2 - 23x - 8}{x^2 - 5x - 24}$

4. Determina los intervalos de monotonía de la función:

a)  $y = \frac{2}{x}$

b)  $y = \frac{2}{3 - x}$

c)  $y = x^2(x - 3)$

d)  $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 5$

e)  $y = \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 9}$

f)  $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x}$

g)  $y = x e^{-\frac{x}{2}}$

h)  $y = \ln(x^2 + 1)$

$$i) y = x - 2 \sin^2 x \qquad j) y = 5(1 - \cos^2 x)$$

$$k) y = \frac{1}{3} \ln \sin x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

$$l) y = \pi + e^{\sin x} \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

5. ¿Qué punto del gráfico de la función  $y = \ln x$  tiene la menor distancia a la recta  $y = \frac{1}{2}x + 5$ ?

6. Muestra que la derivada de la función

$$y = \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 8x \quad \text{es} \quad y' = \sin 3x \cos 5x.$$

7. Si  $y = 3 \sin x$ , halla los valores de  $x$  que satisfacen la ecuación  $y' + \frac{1}{9}y^2 - 3 = 0$ .

8. Analiza la monotonía y determina los extremos locales de la función:

$$a) y = x^3 - 3x^2 + 3x - 10 \qquad b) y = \frac{3}{1 - x^2}$$

$$c) y = \frac{x^2 - 4}{1 - x^2} \qquad d) y = 3 \sin^2 x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

$$e) y = 2e^{\sin x} \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

$$f) y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$$

$$g) y = 1 + \ln \sin x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

$$h) f(x) = 3(\sin x + \cos x) \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$i) g(x) = e^x - 3 \ln(e^x + 1)$$

9. Muestra que la función  $y = \frac{1}{4} \ln \frac{x - 1}{x + 1}$  no tiene extremos locales.

10.\* Halla una función  $f$  que satisfaga la ecuación:

$$a) 2 f'(x) + 1 = e^x$$

$$b) (f'(x))^2 - 3x f'(x) + 2x^2 = 0$$

11. Halla dos funciones  $f$  y  $g$  tales que:

$$a) \begin{cases} f'(x) + 2g'(x) = 2 \\ f'(x) - g'(x) = 0,5 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} f'(x) + g'(x) = 3x \\ f'(x) - g'(x) = x + 2 \end{cases}$$

12. Sea  $f(x-1) = x^2$ .

a) Halla la ecuación de  $g$ , si

$$g(x) = f(x+1) + f(x) - f(x-1).$$

b) Prueba que en el punto  $x_0 = -3$ , la tangente al gráfico de  $g$  es paralela al eje  $x$ .

c) Calcula  $h'(2)$  si  $h(x) = g(x) \cdot g(x+1)$ .

13. Un punto material realiza el movimiento rectilíneo según la ley  $s(t) = 5t + 2t^2 - \frac{1}{3}t^3$ , donde  $s$  es el desplazamiento en metros y  $t$ , el tiempo en segundos. ¿En qué instante de tiempo,  $t$ , la velocidad de movimiento del punto será máxima y cuál es la magnitud de esta velocidad máxima?

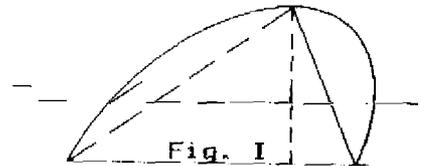
14. Halla el área máxima de un rectángulo cuyos vértices están en el origen de un sistema cartesiano de coordenadas. sobre el eje  $x$ , sobre el eje  $y$  y sobre la parábola  $y = 4 - x^2$ .

## EL CÁLCULO INTEGRAL

Debemos retornar al siglo V a.n.e. para hablar del Cálculo Integral. En esa época el matemático griega Demócrito de Abdera, establece la noción de geometría atómica al concebir un *segmento*, un *área* o un volumen como integrada por un enorme (aunque finito) número de átomos indivisibles. Así por ejemplo, el volumen de un sólido era la suma de los volúmenes de los átomos que componían al sólido.

Tres siglos más tarde, es otra vez Arquímedes de Siracusa, quien utilizando las teorías de Demócrito y el Método de *exhausción* de Eudoxio, realiza la más importante de las aplicaciones de estas ideas y con ella se aproxima considerablemente al Cálculo Integral. Arquímedes, en su obra *La cuadratura de la parábola* determina el área de un segmento de esta curva usando los procedimientos mencionados y demuestra que:

el área del segmento de parábola es  $\frac{4}{3}$  del área del triángulo que tenga igual altura que el segmento parabólico (fig. I).



La noción de integral se introduce de nuevo en 1635, cuando el italiano Buenaventura Cavalieri (1598-1647) regresa a las ideas atomísticas de Demócrito y publica en 1635 un tratado en el que describe su método de los indivisibles, mediante el cual encuentra un teorema geométrico que resulta ser equivalente al que mediante en nuestra actual cálculo integral se expresa:

$$\int_0^a x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^a = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Estimulados por las ideas de Cavalieri, otros matemáticos se dedican a buscar áreas de curvas, y entre estos se destaca Fermat el que considera el intervalo de *área* bajo una curva para formar rectángulos circunscritos. Suma des-

pués las áreas de estos rectángulos, que considera cada *ver* más pequeños y obtiene de este modo el área baja la curva (fig. II).

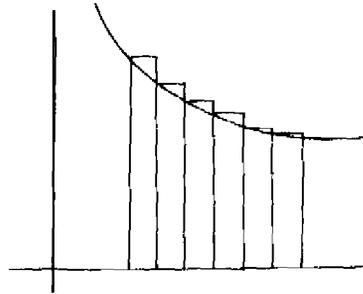


Fig. II

Y es de nueva otro de los grandes matemáticos, el inglés Newton quien por primera vez calcula un área mediante el proceso inverso de lo que conocemos *por* derivación. De este modo descubre la relación inversa que existe entre la determinación de la pendiente de una curva y del área bajo esta, es decir, la relación que existe entre el Cálculo Diferencial y el Integral.

Es el gran matemático alemán Leibniz, quien por primera vez hace uso del actual signo de integral. El lo denota por una *S* alargada  $\int$ , y la deriva de la primera *letra* de la palabra latina Summa que indicaba la suma de los "indivisibles" de Cavalieri.

En este capítulo aprenderás de una manera sencilla los Conceptos de integral indefinida y definida. así como aprenderás a calcularlas y, en especial, los podrás usar para calcular áreas que antes no podías hacer con las fórmulas conocidas.

## CALCULO INTEGRAL

### INTEGRACIÓN

#### 1. Primitiva de una función

En este capítulo consideraremos el problema inverso al planteado en el anterior: se trata ahora de encontrar la función conocida su derivada.

#### Definición 1

Sea  $f(x)$  definida sobre un intervalo  $I$ :  
 $F$  definida sobre  $I$  es una primitiva de  $f$   
 si  $F'(x) = f(x)$ , para cada  $x \in I$ .

#### Ejemplo 1

Comprueba en cada caso que  $F(x)$  es una primitiva de  $f(x)$  en el intervalo dado.

a)  $F(x) = \frac{1}{3} x^3$ ,  $f(x) = x^2$  en  $\mathbb{R}$

b)  $F(x) = \frac{1}{3} x^3 + 5$ ,  $f(x) = x^2$  en  $\mathbb{R}$ .

c)  $F(x) = \sqrt{x}$ ,  $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  en  $(0; \infty)$

#### Resolución

a)  $F(x) = \frac{1}{3} x^3$  es una primitiva de la función  $f(x) = x^2$  en  $(-\infty, \infty)$ , puesto que  $\left(\frac{1}{3} x^3\right)' = x^2$  para cada  $x \in \mathbb{R}$ .

b) La función  $F(x) = \frac{1}{3} x^3 + 5$  es una primitiva de la función  $f(x) = x^2$  en  $(-\infty, \infty)$ , puesta que  $\left(\frac{1}{3} x^3 + 5\right)' = x^2$  para cada  $x \in \mathbb{R}$ .

c) La función  $F(x) = \sqrt{x}$  es una primitiva de la función  $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  en  $(0, \infty)$ , puesto que  $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  ■

En el ejemplo 1 puede apreciarse que la función primitiva de una función dada no es única.

### Teorema 1

Si  $F(x)$  es una primitiva de la función  $f(x)$  sobre  $I$  entonces  $F(x) + c$  es también una primitiva donde  $c$  es un número real cualquiera (constante).

### Demostración

Tenemos que  $(F(x) + c)' = F'(x) + (c)' = f(x) + 0 = f(x)$ . ■

### Teorema 2

Si  $F(x)$  y  $G(x)$  son dos primitivas de una función  $f(x)$  sobre el intervalo  $I$ , entonces  $F(x) - G(x) = c$  en  $I$ , donde  $c$  es una constante

### Demostración

Debemos demostrar que  $H(x) = F(x) - G(x) = c$ , para esto es suficiente demostrar que  $H'(x) = 0$  sobre  $I$ . En efecto, si se cumple que  $H'(x) = 0$ , por el teorema del valor medio del cálculo diferencial se tendrá que si  $x_1, x_2 \in I$ ,

$$H(x_2) = H(x_1) + (x_2 - x_1) H'(x) = H(x_1) \quad x_1 < x < x_2$$

es decir,  $H(x) = c$  sobre  $I$ .

Por hipótesis  $F'(x) = G'(x) = f(x)$ .

Derivando  $H(x)$  obtenemos:

$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$  para todo  $x \in I$  como se quería. ●

No siempre es fácil determinar una primitiva de una función dada, no obstante si la función  $f$  es continua en el intervalo  $I$ , se puede afirmar que la primitiva existe aunque no podamos calcularla. En este curso nos limitaremos a determinar primitivas para funciones elementales estudiadas en cursos anteriores.

**Teorema 3**

En cada intervalo donde están definidas, una primitiva de la función:

a)  $f(x) = x^\alpha$  ( $\alpha \neq -1$ ) es  $F(x) = \frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha + 1}$

Si  $\alpha = -1$  y  $x > 0$  es  $F(x) = \ln x$

b)  $g(x) = \cos x$  es  $G(x) = -\sin x$

c)  $h(x) = \sin x$  es  $H(x) = -\cos x$

d)  $i(x) = e^x$  es  $I(x) = e^x$

**Demostración**

a)  $\left( \frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha + 1} \right)' = \frac{1}{\alpha + 1} (\alpha + 1) x^\alpha = x^\alpha$

Si  $\alpha = -1$  entonces  $F(x) = \ln x$  pues  $(\ln x)' = \frac{1}{x} = x^{-1}$

b)  $(-\sin x)' = -(\cos x)' = -(-\sin x) = \sin x$

c)  $(\cos x)' = -\sin x$

d)  $(e^x)' = e^x$  ■

**Ejemplo 2**

Determina todas las primitivas de:

a)  $x^{-2}$

b)  $\cos x$

c)  $e^x$

**Resolución**

a) Una primitiva de  $x^{-2}$  en cualquier intervalo donde esté definida es:  $\frac{1}{-2 + 1} x^{-2+1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x}$  [teorema 3 a).

Todas las primitivas se obtienen sumando una constante,

luego las primitivas de  $x^{-2}$  son  $-\frac{1}{x} + c$ .

b) Una primitiva es  $-\sin x$ , todas las primitivas se obtienen sumando una constante:  $-\sin x + c$ .

c)  $e^x + c$  ■

**Ejemplo 3**

Sea  $f(x) = \frac{1}{x}$ , determina la primitiva  $F$  de  $f$  tal que  $F(1) = S$ ,

**Resolución**

Cabemos que una primitiva de  $\frac{1}{x}$  es  $\ln x$ , todas las primitivas se representan en la forma;

$$F(x) = \ln x + c$$

Para determinar el valor de  $c$ , sustituimos para  $x = 1$

$$F(1) = \ln 1 + c = 0 + c \quad \text{luego} \quad c = 2$$

$$y \quad F(x) = \ln x + 2 \quad \blacksquare$$

### Ejercicios (epígrafe 1)

1. Determina cuáles de las siguientes funciones son primitivas de la función  $f(x) = (x+1)^2$  en  $\mathbb{R}$ :

a)  $F(x) = \frac{1}{3}(x+1) + 3$       b)  $F(x) = \frac{1}{3}(x+1)^3 + 5$

c)  $F(x) = 3(x+1)^3 + 5$       d)  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + 1$

2. Comprueba en cada caso, si  $F(x)$  es una primitiva de  $f(x)$  en el intervalo dado.

a)  $F(x) = \frac{1}{3} \sin 3x$        $f(x) = \cos 3x$       en  $\mathbb{R}$

b)  $F(x) = 2x^3 - 8$       ,       $f(x) = 6x^2 - 8$       en  $\mathbb{R}$

c)  $F(x) = 3 + \cos x$       ,       $f(x) = -\sin x$       en  $\mathbb{R}$

d)  $F(x) = 2x + e^{3x}$       ,       $f(x) = 2 + 3e^{3x}$       en  $\mathbb{R}$

e)  $F(x) = \cos 2x + \sin x$       ,       $f(x) = \cos x - 2\sin 2x$       en  $\mathbb{R}$

f)  $F(x) = \frac{1}{x^2}$        $f(x) = \frac{1}{x}$       en  $\mathbb{R}^*$

g)  $F(x) = \ln x^2 + \ln x + 3$       ,       $f(x) = \frac{3}{x}$       en  $\mathbb{R}_+^*$

3. Determina una primitiva de:

a)  $x^3$       b)  $\sin x$       c)  $x^{-a}$       d)  $\cos x$

e)  $\frac{x^3 + x^2}{x+1}$       f)  $e^x$       g)  $\frac{1}{x}$  ,  $x > 0$       h)  $\cot x \sin x$

4. Determina todas las primitivas de:

a)  $\cos x$       b)  $x^{-7}$       c)  $e^x$       d)  $\sin x$

e)  $3$       f)  $\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} + 1$       g)  $\frac{\sin 2x}{2\cos x}$       h)  $x^2(x+1) - x^2$

i)  $2\cos x - \cos(-x)$       j)  $\frac{\cos x - \cos a}{\sin^2 x}$

k)  $\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} - \sqrt{x+2}$       l)  $\frac{x^4 + x^3 - y - 1}{x^2 + x + 1} + 1$

5. Dadas las funciones primitivas de la función  $f$ , escribe la ecuación de dicha función ( $c$ : constante).

a)  $F(x) = 3x^2 + 5x + c$

b)  $F(x) = e^x + \cos x + c$

c)  $F(x) = 3x^2 - \frac{1}{x} + c$

d)  $F(x) = 4\sin x - 4x^3 + \frac{x}{5} - \frac{2}{x} + c$

e)  $F(x) = 5x + \frac{x^2}{4} - x^3 + \frac{3}{4}\sqrt[9]{x^4} + c$

- f)  $F(x) = e^x + \ln x - 3x^6 + c \quad (x > 0)$
6. Determina la primitiva  $G$  tal que  $G(0) = 1$ .
- a)  $g(x) = x^4$       b)  $g(x) = \cos x$       c)  $g(x) = \operatorname{sen} x$   
d)  $g(x) = e^x$       e)  $g(x) = \frac{1}{x}$
7. Determina una primitiva  $F$  de  $f$  bajo las siguientes condiciones:
- a)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} + 1$  ;  $c = 0$   
b)  $f(x) = \frac{1 - (\operatorname{sen} x - \cos x)^2}{2\operatorname{sen} x}$  ;  $c = 0$   
c)  $f(x) = \frac{\cos 2x}{\cos x - \operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x$  ;  $c = \pi$   
d)  $f(x) = \frac{e^{2x} - 4}{e^x + 2} + 2$  ;  $c = 0$   
e)  $f(x) = \frac{xe^5 + e^5}{e^5} - 1$  ;  $c = 1$   
f)  $f(x) = (x + 3)(x - 3) + 9$  ;  $F(2) = \frac{2}{3}$   
g)  $f(x) = \operatorname{sen} x \cos 2x + 2\operatorname{sen}^9 x$  ;  $F(\pi) = 3$   
h)  $f(x) = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2\operatorname{sen} x} - \cos x + \frac{x}{x^2}$  ;  $F(e) = 2$

## 2. Integral indefinida

Así como el paso de la función a la derivada es una operación llamada derivación, el paso de una función a sus primitivas es una operación llamada integración que se denota con el símbolo  $\int$ . Así, para escribir las primitivas de  $f(x)$  se escribe  $\int f(x) dx$ .

El símbolo  $\int$  se llama integral;  $f(x)dx$ , integrando y  $f(x)$ , función subintegral, y  $dx$  indica que  $x$  es la variable de integración, es decir, la variable con respecto a la cual  $f$  es derivada,

Si  $F(x)$  es una de las primitivas de  $f(x)$ , podemos escribir  $\int f(x)dx = F(x) + c$ , teniendo en cuenta que dos primitivas de una misma función se diferencian en una constante.

La expresión  $\int f(x) dx = F(x) + c$  se llama integral indefinida de  $f(x)$ .

Utilizando la simbología establecida y el teorema 3 del epígrafe 1, podemos resumir las reglas para la integración de las funciones conocidas y que llamaremos integrales inmediatas:

$$\begin{aligned}
 1. \int x^\alpha dx &= \frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1) \\
 2. \int x^{-1} dx &= \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c \\
 3. \int \operatorname{sen} x dx &= -\cos x + c \\
 4. \int \cos x dx &= \operatorname{sen} x + c \\
 5. \int e^x dx &= e^x + c
 \end{aligned}$$

### Ejemplo 1

Calcula: a)  $\int \cos x dx$       b)  $\int \sqrt{x} dx$

*Resolución*

a)  $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + c$

b)  $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} x^{\frac{1}{2} + 1} + c = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$  ■

Resultan útiles las propiedades de la integral indefinida contenidas en el teorema 1.

### Teorema 1

Si  $f(x)$  y  $g(x)$  son funciones continuas, se cumple:

a)  $\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$ , o sea, toda constante que sea factor de la función subintegral puede ponerse como factor fuera del signo de integración.

b)  $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ , o sea, la integral de una suma es igual a la suma de la integral de cada uno de los sumandos.

c) Si  $F(x)$  es una primitiva para  $f(x)$ , entonces

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b)$$

### Demostración

$$a) \left[ \int a f(x) dx \right]' = a f(x) \quad \text{Por definición.}$$

$$\left[ a \int f(x) dx \right]' = a \left[ \int f(x) dx \right]' = a f(x)$$

$$\text{luego } \int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

$$b) \left[ \int (f(x) + g(x)) dx \right]' = f(x) + g(x) \quad \text{Por definición.}$$

$$\begin{aligned} \left[ \int f(x) dx + \int g(x) dx \right]' &= \left[ \int f(x) dx \right]' + \left[ \int g(x) dx \right]' \\ &= f(x) + g(x) \end{aligned}$$

$$\text{luego } \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

c) Sea  $F(x)$  una primitiva para  $f(x)$ , entonces

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{a} F(ax + b) \right]' &= \frac{1}{a} \left[ F(ax + b) \right]' \\ &= \frac{1}{a} (ax + b)' F'(ax + b) && \text{Aplicando la} \\ &= \frac{1}{a} \cdot a \cdot F'(ax + b) && \text{regla de la} \\ &= f(ax + b) && \text{cadena.} \end{aligned}$$

■

Las igualdades del teorema 1 son igualdades entre primitivas, es decir, significa que ambos miembros de la igualdad tienen la misma derivada. En otras palabras, la igualdad se interpreta en el sentido de que la diferencia entre ambos miembros es una constante.

### Ejemplo 2

Calcula las integrales siguientes:

a)  $\int 3x^2 dx$

b)  $\int (x^2 + x + 13) dx$

c)  $\int (3x^{-2} + 2 \operatorname{sen} x) dx$

d)  $\int (x^2 + e^{2x}) dx$

e)  $\int \operatorname{sen}(3x + 1) dx$

f)  $\int \sqrt{2x + 1} dx$

Resolución

a)  $\int 3x^2 dx = 3 \int x^2 dx = 3 \cdot \frac{1}{3} x^3 + c = x^3 + c$

Aplicando el teorema 1a.

b)  $\int (x^2 + x + 1) dx = \int x^2 dx + \int x dx + \int dx$

Aplicando el teorema 1b.

$$\text{luego } \int (x^2 + x + 1) dx = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + x + c$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int (3x^{-2} + 2 \operatorname{sen} x) dx &= \int 3x^{-2} dx + \int 2 \operatorname{sen} x dx && \text{Aplicando el teorema 1b.} \\ &= 3 \int x^{-2} dx + 2 \int \operatorname{sen} x && \text{Aplicando el teorema 1a.} \\ &= 3 \cdot \frac{1}{-1} x^{-1} + 2 (-\cos x) + c \\ &= -3 x^{-1} - 2 \cos x + c \end{aligned}$$

$$\text{d) } \int (x^2 + e^{2x}) dx = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} e^{2x} + c \quad \text{Aplicando el teorema 1b.}$$

$$\text{e) } \int \operatorname{sen} (3x + 1) dx = \frac{1}{3} \cos (3x + 1) + c \quad \text{Aplicando el teorema 1c.}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \int \sqrt{2x+1} dx &= \int (2x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}} (2x+1)^{\frac{3}{2}} + c && \text{Aplicando el teorema 1c.} \\ &= \frac{1}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} + c \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## Ejercicios (epigrafe 2)

### 1. Calcula:

$$\text{a) } \int x^6 dx$$

$$\text{b) } \int 4x^3 dx$$

$$\text{c) } \int x^{-3} dx \quad (x \neq 0)$$

$$\text{d) } \int x^{\frac{1}{3}} dx$$

$$\text{e) } \int 6 \operatorname{sen} x dx$$

$$\text{f) } \int (\operatorname{sen} x + \cos x) dx$$

$$\text{g) } \int 3 x^{-4} dx \quad (x > 0)$$

$$\text{h) } \int (3x^2 - 4x + 7) dx$$

$$\text{i) } \int (e^x + 6) dx$$

$$\text{j) } \int (6x^2 + x + \frac{1}{x}) dx \quad (x > 0)$$

$$\text{k) } \int (2x + e^x) dx$$

$$\text{l) } \int (6x^2 + 8x - \operatorname{sen} x) dx$$

$$\text{m) } \int x(2x + 1) dx$$

$$\text{n) } \int (x - 5)^2 dx$$

$$\text{ñ) } \int x(1 - x^2) dx$$

$$\text{o) } \int \frac{x^6 + 3x^5 - 6x + 1}{x^2} dx \quad (x > 0)$$

$$\text{p) } \int \frac{x^2 + 6x + 5}{2} dx$$

$$\text{q) } \int \sqrt{x} (1 - x^2) dx$$

$$\text{r) } \int \left[ x^a + x^{-2} + \frac{1}{5} + \sqrt[3]{x^5} \right] dx$$

$$\text{s) } \int (e^x + \tan x \cos x) dx$$

$$t) \int (\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x) dx$$

2. Calcula:

$$a) \int (3x - 1)^2 dx$$

$$b) \int \sin 3x dx$$

$$c) \int (e^{2x} + \sin 6x) dx$$

$$d) \int [e^{-x} + (2x - 1)^3] dx$$

$$e) \int \cos (2x + 1) dx$$

$$f) \int \frac{1}{2x + 3} dx \quad (x > -\frac{3}{2})$$

$$g) \int e^{-2x} (e^{2x} - e^{-2x}) dx$$

3. Sin integrar, comprueba si son válidos los siguientes resultados.

$$a) \int (x^3 - \sin x) dx = \frac{1}{3} x^4 - \cos x + c$$

$$b) \int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + c \quad (x > 0)$$

$$c) \int \sin ax \cos ax dx = \frac{\sin 2ax}{2a} + c$$

$$d) \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + c$$

$$e) \int (\frac{1}{2} x \sqrt{x} - 2\sqrt{x}) dx = \frac{x^{5/2}}{5} - \frac{4x^{3/2}}{3} + c$$

$$f) \int \frac{e^{2x} dx}{e^{2x} + 1} = \frac{1}{2} \ln (e^{2x} + 1) + c$$

$$g) \int \frac{\sin x}{1 - \cos x} dx = \ln (1 - \cos x) + c$$

$$h) \int \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln (x + 1) + c$$

4. Escribe en cada casa, dos primitivas de:

$$a) \int -3 dx \quad b) \int 4x dx \quad c) \int \frac{1}{9} x^2 dx \quad d) \int \frac{1}{x^3} dx$$

$$e) \int 5a^2 x^3 dx$$

$$f) \int (6x^2 + 8x + 3) dx$$

$$g) \int x(x + 3) dx$$

$$h) \int (x + 2)(x + 5) dx$$

$$i) \int (a + bx^2)^2 dx$$

$$j) \int \sqrt[3]{x} dx$$

$$k) \int \frac{5t^2 - 3t}{t} dt$$

$$l) \int (\cos 2x + \sin 3x) dx$$

$$m) \int \frac{4 \sin 2x}{\cos x} dx$$

$$n) \int \frac{x^2 - 49}{x + 7} dx$$

$$ñ) \int (5e^{-9x} + \sin x) dx$$

$$o) \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{x} dx$$

### 3 Integral definida

#### Definición 1

Sea  $f(x)$  una función continua en un intervalo  $I$ , se llama integral definida de  $f$  desde  $a$  hasta  $b$  ( $a, b \in I$  y se denota  $\int_a^b f(x) dx$  al número

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

donde  $F$  es una primitiva cualquiera de  $f$ ,  $a$  y  $b$  son los límites de integración.

Esta definición es correcta pues la expresión  $F(b) - F(a)$  no depende de la primitiva, en efecto si  $G(x)$  es otra primitiva de  $f(x)$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= G(b) - G(a) = [F(b)+c] - [F(a)+c] \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

#### Ejemplo 1

Calcula:  $\int_1^9 x^2 dx$

Resolución

Como  $F(x) = \frac{1}{3} x^3$  es una primitiva de  $f(x) = x^2$

y  $F(3) = \frac{1}{3} (3)^3 = 9$ ,  $F(1) = \frac{1}{3} (1)^3 = \frac{1}{3}$

tendremos que  $\int_1^9 x^2 dx = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$ . ■

En la práctica se procede de la siguiente forma:

$$\int_1^9 x^2 dx = \left. \frac{1}{3} x^3 \right|_1^9 = \frac{1}{3} (3)^3 - \frac{1}{3} (1)^3 = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

Esto es, se escribe la primitiva y se indican los límites de integración, luego se evalúa la función y se efectúa la diferencia indicada.

Las funciones para las que se puede calcular la integral definida desde  $a$  hasta  $b$  se llaman integrables sobre  $[a; b]$ .

De la definición 1 resulta entonces, que las funciones continuas son integrables.

Las integrales definidas conservan las propiedades de las integrales indefinidas.

### Teorema 1

Si  $f$  y  $g$  son funciones continuas en un intervalo  $I$ ;  $a, b \in I$ , se cumple:

a) Para todo  $c \in \mathbb{R}$   $\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$

b)  $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

c)  $\int_a^b f(cx + d) dx = \frac{1}{c} F(cx + d) \Big|_a^b$   
donde  $F'(x) = f(x)$

Estas operaciones resultan inmediatamente a partir de las propiedades de la integral indefinida.

### Ejemplo 2

Calcula:

a)  $\int_0^5 2x^4 dx$       b)  $\int_1^2 \left[ \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right] dx$       c)  $\int_0^{\pi/2} \cos 2x dx$

Resolución

a)  $\int_0^5 2x^4 dx = 2 \int_0^5 x^4 dx = 2 \cdot \left. \frac{x^5}{5} \right|_0^5 = 2 \left( \frac{5^5}{5} - \frac{0^5}{5} \right) = \frac{486}{5}$

b)  $\int_1^2 \left[ \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right] dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \ln x \Big|_1^2 + \left. \frac{1}{-1} x^{-1} \right|_1^2$   
 $= \ln 2 - \ln 1 - \left( \frac{1}{2} - 1 \right) = \ln 2 + \frac{1}{2}$

c)  $\int_0^{\pi/2} \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_0^{\pi/2}$        $\sin x$  es una primitiva de  $\cos x$ .  
 $= \frac{1}{2} (\sin \pi - \sin 0) = 0$

Las integrales definidas poseen, además, algunas propiedades que dependen del intervalo.

### Teorema 2

Si  $f$  es una función continua en  $I$ ;  $a, b \in I$ , se cumple:

a)  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

b) Si  $a < c < b$ , entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

### Demostración

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_a^b f(x) \, dx &= F(b) - F(a) = - \left[ F(a) - F(b) \right] \\ &= - \int_b^a f(x) \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_a^b f(x) \, dx &= F(b) - F(a) \\ &= F(b) - F(c) + F(c) - F(a) \\ &= \left[ F(b) - F(c) \right] + \left[ F(c) - F(a) \right] \\ &= \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### Ejercicios (epígrafe 3)

- ¿Qué diferencias y similitudes existen entre la integral definida y la integral indefinida?
- ¿Cumple la integral  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} \, dx$  con las exigencias de la definición?
- Di cuáles de las siguientes igualdades son correctas. Justifica (sin efectuar el cálculo).

$$\text{a) } \int_1^2 (x - 1) \, dx = \int_2^1 (1 - x) \, dx$$

$$\text{b) } \int_1^5 x^3 \, dx + \int_1^5 x^2 \, dx = \int_1^5 (x^3 + x^2) \, dx$$

$$\text{c) } \int_1^2 6x^3 \, dx + \int_2^5 6x^3 \, dx = 6 \int_1^5 x^3 \, dx$$

$$\text{d) } \int_1^2 x^3 \, dx + \int_1^2 x^2 \, dx > \int_1^2 (x^3 + x^2) \, dx$$

$$\text{e) } \int_1^2 x^2 \, dx + \int_2^5 x^2 \, dx + \int_5^1 x^2 \, dx = 0$$

### 4. Calcula:

$$\text{a) } \int_0^2 x^5 \, dx$$

$$\text{b) } \int_0^2 \frac{1}{3} x^2 \, dx$$

$$\text{c) } \int_{-1}^1 x^9 \, dx$$

$$\text{d) } \int_0^\pi \operatorname{sen} x \, dx$$

$$\text{e) } \int_1^e \frac{1}{x} \, dx$$

$$\text{f) } \int_0^1 e^x \, dx$$

$$\text{g) } \int_0^1 (x^2 + 6x + 1) \, dx$$

$$\text{h) } \int_0^{\pi/4} (\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x) \, dx$$

$$\text{i) } \int_0^1 (1 - 3x - 6x^2) \, dx$$

$$\text{j) } \int_0^1 (e^x + 1/3 x^2 + 6) \, dx$$

$$\text{k) } \int_0^1 \sqrt{e^x} \, dx$$

$$\text{l) } \int_1^e \frac{x^3 + x + 1}{x} \, dx$$

$$\text{m}^*) \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x \, dx$$

$$\text{n}^*) \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[ 1 + (\operatorname{cos} x + \operatorname{sen} x)^2 \right] dx$$

$$\text{ñ)} \int_0^1 \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} dx$$

$$\text{o)} \int_0^9 \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x + 3} dx$$

5. Calcula  $\int_0^a f(x) dx$  si:

$$\text{a)} \text{ Si } f(x) = \begin{cases} 3 \operatorname{sen} x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 3 & \text{si } \pi/2 < x \leq 3 \end{cases}$$

$$\text{b)} \text{ Si } f(x) = \begin{cases} 3x + 6 & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ 9 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

6. Determina si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

$$\text{a)} \int_0^9 x dx = \frac{9}{2}$$

$$\text{b)} \int_{1/2}^2 (x^2 - 1) dx = \frac{1}{8}$$

$$\text{c)} \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{e^2 - 1}{2}$$

$$\text{d)} \int_0^1 (-x^2 + 1) dx = \frac{2}{3}$$

$$\text{e)} \int_{-\sqrt{9}}^{\sqrt{9}} x^9 dx = 1$$

$$\text{f)} \int_{\pi/2}^{\pi} (\operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x) dx = 2$$

$$\text{g)} \int_0^{\pi} \tan x \operatorname{cos} x dx = 2$$

$$\text{h)} \int_1^2 \frac{2}{x} dx = 2$$

7. Determine los valores posibles de a en las igualdades siguientes:

$$\text{a)} \int_{\sqrt{2}}^a x dx = 17$$

$$\text{b)} \int_1^a (x + 6) dx = 16$$

$$\text{c)} \int_0^a (2x - 1) dx = 6$$

$$\text{d)} \int_a^{\pi/2} \operatorname{cos} x dx = 1$$

$$\text{e)} \int_1^a \frac{1}{x} dx = 1$$

$$\text{f)} \int_0^9 (ax + 3) dx = 4,5$$

$$\text{g)} \int_a^5 (2x - 1) dx = 18$$

$$\text{h)} \int_0^a (x^2 - x + 5) dx = 32/3$$

## ÁREAS

### 4. Área e integración

En este epígrafe estudiaremos la relación entre área e integración, para hacerlo es conveniente utilizar la notación siguiente:

Sean  $f(x)$  una función continua, no negativa, en un intervalo y  $x_0$  un punto de ese intervalo, por  $A(x)$  denotamos el área comprendida entre la gráfica de  $f(x)$  y el eje "x" desde  $x_0$  hasta  $x$  (fig. 6.1).

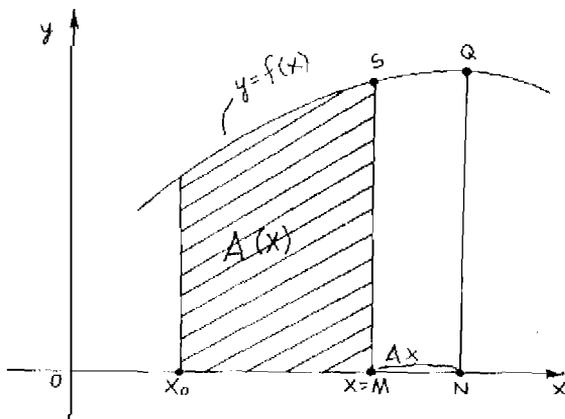


Fig 6.1

En estas condiciones se cumple:

Teorema 1

$A(x)$  es una primitiva de  $f(x)$ .

Demostración

Calculemos la derivada de  $A(x)$

$$A'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{Área (MSON)}}{\Delta x}$$

Pero, para  $\Delta x$  suficientemente pequeño, la gráfica de la función puede ser considerada como un segmento de recta y la figura MSON como un trapecio, entonces se tiene:

$$\frac{\text{Área (MSON)}}{\Delta x} = \left[ \frac{f(x) + f(x + \Delta x)}{2} \cdot \Delta x \right] \cdot \frac{1}{\Delta x} = \frac{f(x) + f(x + \Delta x)}{2}$$

$$y \quad A'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(x + \Delta x)}{2} = f(x)$$

es decir,  $A'(x) = f(x)$ , coma se queria. ●

Teorema 2

Si  $f(x)$  es una función continua, no negativa en un intervalo, y  $a, b$  dos puntos de ese intervalo, entonces el área de la región comprendida entre la gráfica de la función y el eje  $x$  desde  $a$  hasta  $b$  se calcula mediante la integral

$$\int_a^b f(x) dx \quad (a < b)$$

### Demostración

Como  $A(x)$  es una primitiva de  $f(x)$ , en la figura 6.2 tenemos:

$$\int_a^b f(x) dx = A(b) - A(a)$$

y esto es exactamente lo que queremos demostrar, pues esta diferencia de áreas es el área pedida,

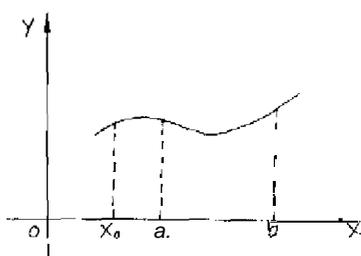


Fig. 4.2

### [Ejemplo 1]

Halla el área de la región limitada por las rectas  $y = 5x$ ;  $x = 2$  y el eje de las abscisas.

Resolución

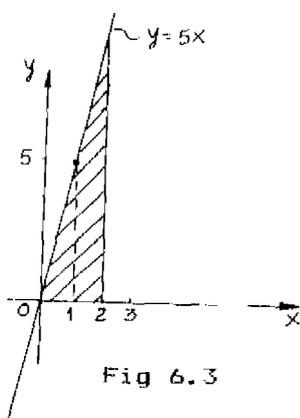


Fig. 6.3

Como  $f(x) \geq 0$ , para toda  $x$  entre 0 y 2 (fig. 6.3) se tiene:

$$\begin{aligned} \int_0^2 5x dx &= 5 \int_0^2 x dx \\ &= 5 \cdot \left. \frac{1}{2} x^2 \right|_0^2 \\ &= \frac{5}{2} (4 - 0) \\ &= 10 \text{ u}^2 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### Ejercicios (epígrafe 4)

1. En los siguientes ejercicios, traza la gráfica correspondiente y luego, auxiliándote del cálculo integral, halla el área:

- limitada por la recta  $y = 2x$ , el eje  $x$  y la recta  $x = 6$ ,
- limitada por la recta  $x + y = 10$ , el eje  $x$  y las rectas  $x = 2$  y  $x = 8$ .

Comprueba cada resultado de los incisos anteriores, hallando el área por la fórmula estudiada en geometría.

2. Traza las gráficas de las funciones siguientes y calcula en cada caso el área de la región limitada por el gráfico de la función, el eje  $x$  y las rectas  $x = a$  y  $x = b$  donde  $a$  y  $b$  son los extremos de los intervalos dados:

a)  $y = x^2$        $[0; 2]$  ;  $[-4; -2]$

b)  $y = x + 2$        $[-2; 0]$  ;  $[1; 4]$

c)  $y = -x^2 + 4$        $[-2; 2]$  ;  $[0; 2]$

d)  $y = \sqrt{x}$        $[0; 1]$  ;  $[1; 4]$

e)  $y = x$        $[0; 6]$  ;  $\left[2; \frac{7}{2}\right]$

f)  $y = x^2 + 1$        $[-1; 1]$  ;  $[0; 1]$

g)  $y = x^9$        $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$  ;  $\left[1; \sqrt{2}\right]$

3. Demuestra, usando el cálculo integral, que:

- a) El área de un rectángulo es el producto del largo por el ancho,
- b) el área de un triángulo rectángulo es el semiproducto de los catetos,
- c) el **Área de un trapecio** rectángulo es el producto de la semisuma de las bases por la altura.

#### 5. Aplicación al cálculo de áreas

El teorema 2 del epígrafe 3 permite calcular el área de una superficie plana limitada por las rectas  $x = a$ ;  $x = b$  ( $a < b$ ), el eje de las abscisas y la gráfica de una función  $f(x)$  no negativa ( $f(x) \geq 0$  para todo  $x$  de su dominio).

#### **Ejemplo 1**

Calcula el área de la región comprendida entre la curva  $y = -x^2 + 1$  y el eje de las abscisas.

**Resolución**

En este caso no se indican los límites para el cálculo del área. La figura 6.4 ilustra que la gráfica corta al eje " $x$ " en dos puntos y el área comprendida entre la gráfica y el eje " $x$ " está limitada por esos puntos; luego, debe

DES comenzar por calcular los puntos donde la gráfica corta al eje "x", es decir, los ceros de  $f$ .

$-x^2 + 1 = 0$  de donde  $x = \pm 1$ , luego los límites de integración son  $-1$  y  $1$ .

EL área sería:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx = \left[ -\frac{1}{3}x^3 + x \right]_{-1}^1 \\
 &= \left( -\frac{1}{3} + 1 \right) - \left( \frac{1}{3} - 1 \right) \\
 &= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

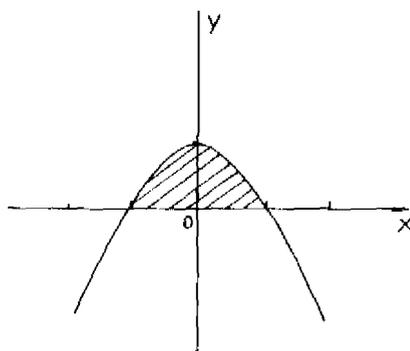


Fig. 6.4

Como el área de una región no varía al reflejarla en una recta, este resultado puede ser utilizado para calcular el área comprendida entre la gráfica de una función continua, positiva o negativa, y el eje "x"; basta utilizar el módulo (fig. 6.5):

El área limitada por la gráfica de una función continua  $f(x)$ , el eje "x" y las rectas  $x = a$ ,  $x = b$  está dada por:

$$\int_a^b |f(x)| dx$$

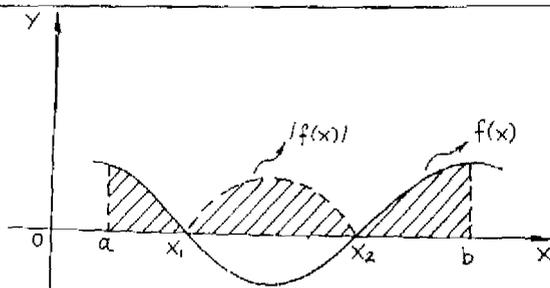


Fig. 6.5

En la figura 6.5 se ilustra que para calcular la integral del módulo es necesario descomponer el intervalo de integración en subintervalos, según la función cambie de signo.

El área es, entonces, una suma de áreas:

$$A = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} -f(x) dx + \int_{x_2}^b f(x) dx$$

### Ejemplo 2

Calcular el área de la región comprendida entre la gráfica de  $y = \text{sen } x$  y el eje "x" en el intervalo  $[0; 2\pi]$ .

Resolución

Como  $A = \int_0^{2\pi} |\text{sen } x| dx$  hay que analizar el signo de  $y = \text{sen } x$ , sabemos que:

$$\text{si } x \in [0; \pi], \text{sen } x \geq 0 \text{ y } |\text{sen } x| = \text{sen } x$$

$$\text{si } x \in [\pi; 2\pi], \text{sen } x \leq 0, \text{ y } |\text{sen } x| = -\text{sen } x$$

luego hay que descomponer el intervalo de integración en dos subintervalos:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi} |\text{sen } x| dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\text{sen } x| dx \\ &= \int_0^{\pi} \text{sen } x dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\text{sen } x dx \\ &= -\cos x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} \\ &= -(-1 - 1) + (1 - (-1)) \\ &= 4 \text{ u}^2 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### Ejemplo 3

Calcula el área de la región comprendida entre el gráfico de la función  $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$  y el eje "x".

Resolución

Para calcular el área debemos analizar dónde la gráfica corta al eje "x", o sea, dónde la función cambia de signo:

$$x^3 - x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2)(x + 1) = 0$$

$$x_1 = -1; x_2 = 0; x_3 = 2$$

luego el área debe calcularse de  $-1$  a  $2$  porque en ese intervalo la función limita un área con el eje "x" (fig.6.6).

Sabemos que:

$$A = \int_{-1}^2 |x^3 - x^2 - 2x| dx$$

Y para calcular hay que analizar el signo de  $x^3 - x^2 - 2x$ .

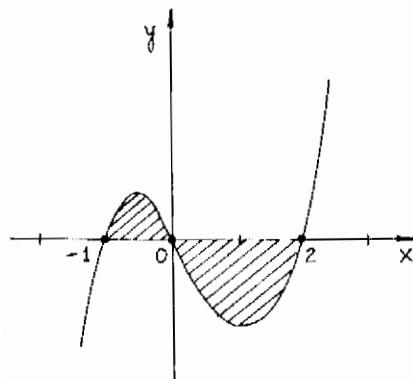


Fig. 6.6

Dado que  $x^3 - x^2 - 2x = x(x - 2)(x + 1)$  al analizar el signo (fig. 6.7) vemos que

$f$  es no negativa en  $[-1; 0]$   $\frac{-}{-1} \frac{+}{0} \frac{-}{2} \frac{+}{}$   
 y no positiva en  $[0; 2]$ ,

entonces:

Fig. 6.7

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - 2x) dx + \int_0^2 -(x^3 - x^2 - 2x) dx \\
 &= \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-1}^0 - \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^2 \\
 &= - \left[ \frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 \right] - \left[ \left( \frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{3} - 2^2 \right) - 0 \right] \\
 &= \frac{5}{12} - \left[ -\frac{8}{3} \right] = \frac{37}{12} u^2 \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Sean  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  das funciones, sus gráficas comprenden una región sobre el intervalo limitado por las abscisas de los puntos de intersección de ambas curvas (fig. 6.8).

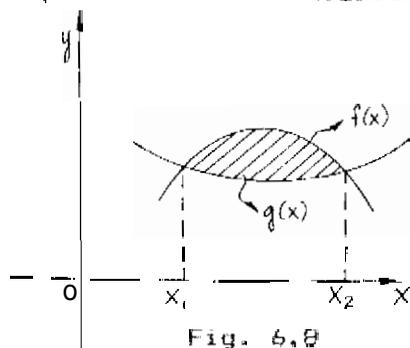


Fig. 6.8

En la figura 6.8 podemos ver que si ambas funciones son

no negativas y  $g(x) \leq f(x)$  para todo  $x \in [x_1, x_2]$ , el área limitada por ellas puede calcularse:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx - \int_{x_1}^{x_2} g(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x)) dx$$

En general el área entre dos curvas se calcula:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)| dx$$

donde  $x_1$  y  $x_2$  con las abscisas de los puntos de intersección.

Si tenemos más de dos puntos de intersección el área se calcula por partes.

#### Ejemplo 4

a) Calcula el área limitada por los gráficos de  $f(x) = x$  y  $g(x) = x^2$ .

b) Calcula el área limitada por los gráficos de  $f(x) = x$  y  $g(x) = x^9$ .

Resolución

a) En la figura 6.9 se han representado ambas curvas, para calcular el área debemos determinar los puntos de intersección y para hacerla planteamos la igualdad:

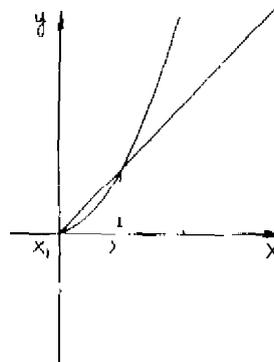


Fig. 6.9

$$\begin{aligned} x &= x^2 \\ x^2 - x &= 0 \\ x_1 = 0, x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Como en el intervalo  $[0;1]$  la función  $x^2 - x$  es no positiva, entonces

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 |x^2 - x| dx = \int_0^1 (x - x^2) dx \\ &= \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} u^2 \end{aligned}$$

b) También aquí planteamos la igualdad:

$$x^3 = x$$

$$x^3 - x = 0$$

$$x(x^2 - 1) = 0$$

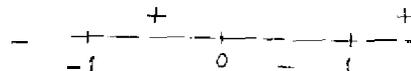
$$x(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = -1$$

Como  $A = \int_{-1}^1 |x^3 - x| dx$ , analicemos el signo de  $x^3 - x$ .

Dado que  $x^3 - x = x(x - 1)(x + 1)$ , concluimos que:

$x^3 - x$  es no negativa en  $[-1; 0]$

(fig. 6.10) y  $|x^3 - x| = x^3 - x$ ; 

además, es no positiva en  $[0; 1]$

y  $|x^3 - x| = x - x^3$ , luego:

Fig. 6.10

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 |x^3 - x| dx + \int_0^1 |x^3 - x| dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (x - x^3) dx \\ &= \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### Ejercicios (epígrafe 5)

- Calcula el área de la figura limitada por la parábola  $y = -\frac{1}{2}x^2$ , por las rectas  $x = 1$ ,  $x = 3$  y el eje de las abscisas.
- Calcula el área limitada por la parábola  $y = 4x - x^2$  y el eje de las abscisas.
- Determina el área bajo cada una de las curvas siguientes en el intervalo indicada.
  - $y = x^2$  en  $2 \leq x \leq 5$
  - $y = x^3$  en  $1 \leq x < 3$
  - $y = \sin 3x$  en  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$
  - $y = e^x - 1$  en  $-1 \leq x \leq 0$
  - $y = \frac{3}{x}$  en  $e \leq x \leq e^2$
  - $y = \sqrt{x} - 2$  en  $0 \leq x \leq 4$

4. La figura 6.11 muestra la curva  $y = x^2 - x^a$  en el intervalo  $[0; 2]$ . Calcula el área sombreada.

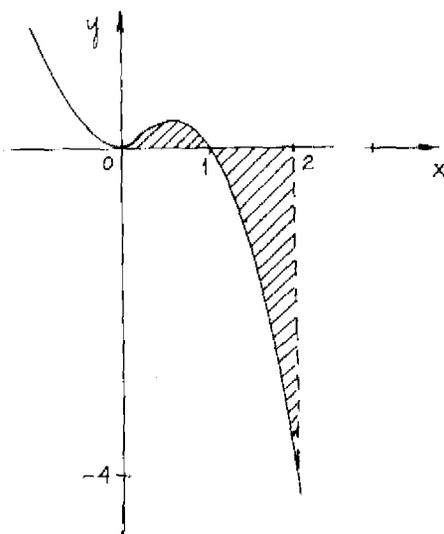
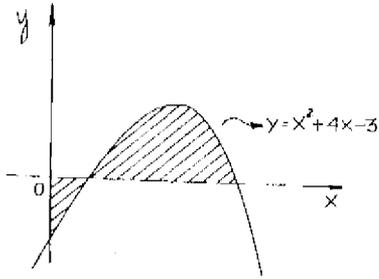


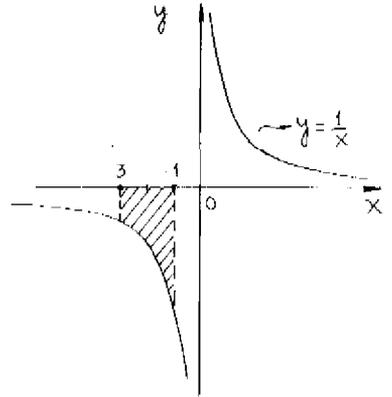
Fig. 6.11

5. Calcula el Área de la región limitada por la función  $f$  y el eje de las abscisas.
- a)  $y = 4x + x^2$                       b)  $y = x^3 - 6x^2 + 8x$   
 c)  $y = x^3 - 7x + 6$                     d)  $y = x^2 - 7x + 6$
6. Halla el área comprendida entre las curvas;
- a)  $y = 2x + x^2$  ;  $y = x$   
 b)  $y = \frac{1}{2}x^2$  ;  $y = 4 - x$   
 c)  $y = 6x - x^2$  ;  $y = x^2 - 2x$   
 d)  $x^2 - 9y = 0$  ;  $x - 3y + 6 = 0$   
 e)  $y^2 = x$  ;  $y = x^2$   
 f)  $y = \sqrt{4x}$  ;  $y = 2x - 4$   
 g)  $y = x(x-1)(x-2)$  ;  $y = 0$   
 h)  $xy = a^2$ , el eje  $x$  y las rectas;  $x = a$  y  $x = 2a$  ( $a > 0$ )  
 i)  $y = \sin x$  ,  $y = \cos x$  ,  $x = 0$  ,  $x = \pi/2$
7. Calcula el área de las regiones representadas en la figura 6.12.

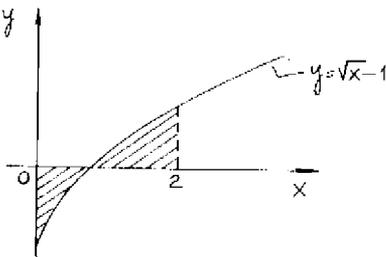
a)



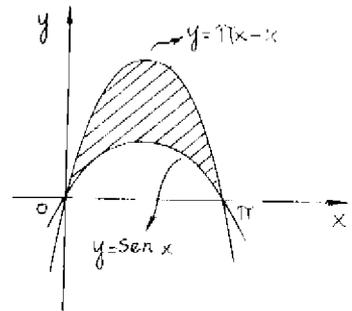
b)



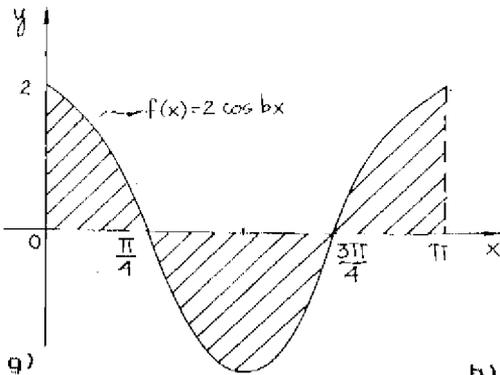
c)



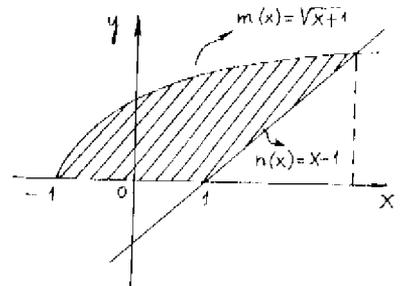
d)



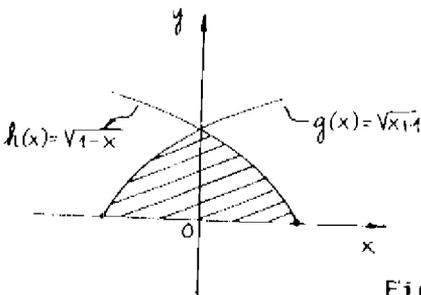
e)



f)



g)



h)

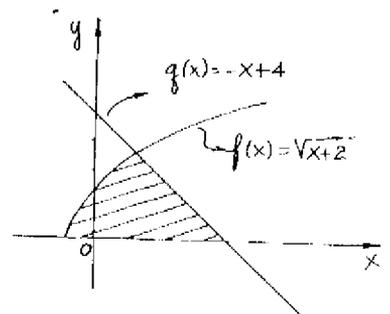


Fig. 6.12

- g. Comprueba que  $\int_{-1}^1 x \, dx = 0$  y que el área de la región determinada por la función  $y = x$  en el intervalo  $[-1; 1]$  es igual a  $1u^2$ . Justifica por qué el área no se corresponde con el valor de la integral.

### Ejercicios del capítulo

1. Determina todas las primitivas de:

a)  $f(x) = \frac{\sin 3x}{2}$

b)  $g(x) = \frac{x^4 - 3x}{x^a}$

c)  $h(x) = \frac{2}{x} + e^{5x}$

d)  $i(x) = e^{2x} + \cos 2x$

e)  $j(x) = \sqrt{x} - \frac{x}{5} + \frac{1}{x+1}$

f)  $k(x) = \left[ 3 - 2\sqrt{x} \right]^2$

2. Calcula la primitiva de la función cuya gráfica pasa por el punto indicado.

a)  $f(x) = x^2 - 0,5x$       P  $\left(1; -\frac{2}{3}\right)$

b)  $g(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2$       B  $(-2; 4)$

c)  $h(x) = e^x + 3$       C  $(0; -3, 4)$

d)  $t(x) = 2 \sin 4x + \cos x$       D  $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$

3. Dadas las funciones primitivas de  $f$ , escribe la ecuación de dicha función.

a)  $F(x) = e^{3x} + \cos \frac{1}{2}x + c$

b)  $F(x) = 5e^{2 \cdot 5x} - \cos 3x + \sqrt[4]{x^3} + c$

c)  $F(x) = \sin \frac{x}{2} + \frac{3}{4}e^{1/2 x} + x + c$

d)  $F(x) = \frac{2}{x^4} + \frac{1}{3x-1} - \sqrt{2} \sin \sqrt{2}x + c$

4. Calcula:

a)  $\int e^{-t+2} \, dt$

b)  $\int \frac{x^4 + x^3 - x^2}{x^3} \, dx$

c)  $\int e^{3y+1} - \frac{1}{x} \, dx$

d)  $\int \left[ 5 \cos 2x - \sqrt{x} \right] dx$

e)  $\int \left[ \frac{1}{3} \sin (3x + 1) - 4e^x \right] dx$

f)  $\int \left[ \frac{3}{x} + \frac{1}{16}e^{6x} \right] dx$

g)  $\int \left[ \frac{2}{5z-3} - \cos (3z + 2) + \sqrt[3]{z^2} \right] dz$

h)  $\int \left[ e^{7x} + 6 - \sqrt{8x + 40} + 7x^6 \right] dx$

$$i) \int \left( \frac{e^x}{2} - \frac{1}{2x} + 4 \cos \frac{x}{2} \right) dx$$

$$j) \int \left( \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{3} + \cot x \tan x \right) dx$$

$$k) \int \frac{2 \sin^2 x}{3x(1 - \cos^2 x)} dx$$

$$l) \int \left( e^{ax} \sin^2 x - e^{ax} \cos^{-1} x \right) dx$$

$$m) \int \left( \sqrt{ax + 1} + a^2 \right) dx$$

$$n) \int \frac{3y^3 - 5y^2 - 3y + 5}{3y^2 - 2y - 5} dy$$

5. Calcula las siguientes integrales:

$$a) \int (\sin 6x + e^x + \cos x) dx$$

$$b) \int (1/x + 1/x^2) dx$$

$$c) \int \frac{e^x + 1}{e^x} dx$$

$$d) \int \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1} dx$$

$$e) \int e^{-t} + 2 dy$$

$$f) \int_{-1/2}^{1/2} 3(x^2 + 1) dx$$

$$g) \int \frac{1}{x^9} dx$$

$$h) \int_1^9 \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1} dx$$

$$i) \int_2^6 \frac{2 + x}{2} dx$$

$$j) \int_{-2}^2 (1 - x)^3 dx$$

$$k) \int \sqrt{x} dx$$

$$l) 2 \sin^2 x - \int 2 \sin 2x dx$$

$$m) \int \sqrt[m]{x^n} dx$$

$$n) \int \left( \frac{1 - z}{z} \right)^2 dz$$

$$ñ) \int \frac{\sqrt{x} - x^9 e^x + x^2}{x^9} dx$$

$$o) \int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx$$

6. a) Halla  $\int (x - 3) dx$  si para  $x = 2$  el valor de la función primitiva es igual a  $Y$ .

b) Halla  $\int (\sin x + \cos x) dx$  si para  $x = \pi/2$  el valor de la función primitiva es igual a 2.

7. La función  $f(x)$  tiene valores iguales en los puntos  $x = a$  y  $x = b$  y una derivada continua. ¿A qué es igual la integral  $\int_a^b f'(x) dx$ ?

8. Calcula:

$$a) \int_{-1}^1 3(x^2 + 1) dx$$

$$b) \int_{-2}^2 (1 - x^2) dx$$

$$c) \int_1^4 (x^2 - 2x + 7) dx$$

$$d) \int_{-2}^2 (3x + 4) dx$$

$$e) \int_0^{\pi/9} \sin x dx$$

$$f) \int_0^{\sqrt{8}} \left( \frac{x^2}{2} - x + 1 \right) dx$$

$$g) \int_0^{\pi} [4 \operatorname{sen}(3x - \pi)] dx$$

$$h) \int_0^{\infty} \frac{dx}{3x + 6}$$

9. Sean las funciones  $f(x) = x^2 - 6x + 8$  y  $g(x) = -3x + 8$ .

- Halla el área de la región del plano limitada por las funciones  $f$  y  $g$ .
- ¿Cuál es la función primitiva de  $f$  que cumple:  $F(-1) = -11$ ?
- ¿Cuál es la función primitiva de  $g$  cuya gráfica pasa por el punto  $(\frac{1}{3}; 1)$ ?

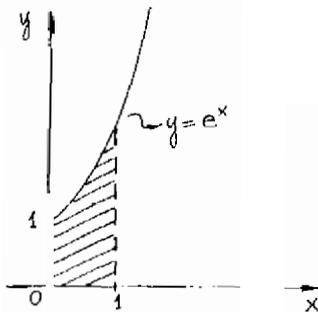
10. Halla el área comprendida entre las curvas:

- $y = \sqrt{x+1}$ , la recta  $y = x+1$  y el eje "x"
- $y = 1-x$ ,  $y = e^x - e$  y  $x = 0$
- $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 2-x$  y  $y = 0$
- $x^2 = 4y$ ,  $x^2 = 8y - 4$

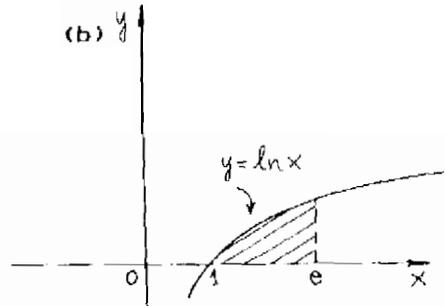
11. El área bajo la curva comprendida por el gráfico de la función  $y = \sqrt{x}$  y el eje "x" en el intervalo  $3 \leq x \leq b$  es  $A = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ . Halla  $b$ .

12. Calcula el área de las regiones representadas en la figura 6.13.

(a)



(b)



SUGERENCIA:  $(x \ln x - x)' = \ln x$

Fig. 6.13

13\*. El área de la porción del plano limitada por la función  $f(x) = -\frac{3}{x^4}$  ( $x \neq 0$ ) y el eje de las abscisas en el intervalo  $[k; 1]$  es  $26 \text{ u}^2$ . ¿Cuál es el valor numérico de  $k$  en dicho intervalo?

14\*. Calcula el área limitada por la curva

$$y = x^3 - 9x^2 + 24x - 18,$$

el eje de *las* abscisas y dos rectas paralelas al eje de ordenadas y trazadas de manera que pasan por los puntos de extremos locales de la función.

15\*. Calcula el área comprendida entre la curva

$y = -x^2 - x + 12$ , el eje de las abscisas y la tangente a la curva en el punta de abscisa  $x = -1$ .

RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS

CAPÍTULO 1

Epígrafe 1

- 1) a)  $81x^4$     b)  $\sqrt[12]{x^7}$     c) 0,001    d)  $\sqrt[5]{y^7}$     e)  $\sqrt[3]{5^7}$   
 f)  $a^{2n-1}$     g)  $16b^2$     h)  $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$     i)  $\frac{1}{8}$     j)  $16\sqrt[3]{4}$   
 k)  $\frac{9}{8}$     l) 1296    m) 256    n)  $2\sqrt[4]{2}$     ñ) 8  
 o)  $\frac{1}{7}$     p) 11    q)  $13\sqrt{2}$     r) 1296    s)  $6a^2$   
 t)  $\frac{1}{b}$     u)  $a^0$     v)  $a^3\sqrt{a}$     w)  $b^{0,0}$     x)  $\frac{\sqrt[3]{y}}{y}$
- 2) a) 81    b)  $\frac{\sqrt[3]{4^7}}{16}$     c) 1    d) 16    e)  $\frac{3}{4}$     f)  $2/\sqrt{3}$   
 g)  $\frac{64}{5}$     h)  $-\frac{243}{5}$     i)  $\sqrt[4]{3}$     j)  $5^x$     k)  $\frac{b^3}{a^4}$     l) - 213  
 m)  $\frac{1}{108}$     n)  $\frac{1981}{9}$     ñ) - 68,9    o) 47,8
- 3) a) V    b) V    c) F    d) V    e) V    f) V  
 g) F    h) V    i) F    j) F    k) V
- 6) a)  $10^{-5} < 10^{-9}$     b)  $5^{-1} > 5^{-4}$     c)  $(0,3)^4 < (0,3)^2$   
 d)  $\left(\frac{1}{10}\right)^2 < \left(\frac{1}{10}\right)^{-1}$     e)  $4^{\frac{1}{2}} < 4^{\frac{3}{4}}$     f)  $2^{0,2} > 2^{0,09}$   
 g)  $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^{-2}$     h)  $\left(\frac{1}{2}\right)^3 > 2^{-4}$
- 7) a) 3    b) -2    c) 1    d)  $\frac{3}{2}$     e)  $-\frac{3}{2}$     f)  $\frac{3}{4}$     g)  $\frac{5}{2}$     h)  $\frac{7}{6}$   
 i)  $\frac{3}{2}$     j) 3    k) 4    l)  $-\frac{1}{2}$     m)  $\frac{7}{3}$     n)  $\frac{1}{4}$     ñ)  $-\frac{2}{3}$     o) -2  
 p) -3    q)  $-\frac{14}{15}$     r)  $\frac{5}{4}$     s)  $\frac{1}{5}$     t)  $\frac{3}{2}$     u)  $-\frac{5}{3}$     v) 2    w)  $\frac{1}{2}$   
 x) -3    y)  $-\frac{11}{6}$     z)  $\frac{3}{2}$
- 8) a)  $-\frac{1}{3}$     b) 3    c) -5    d)  $-\frac{3}{2}$     e)  $x_1 = 1$  y  $x_2 = -4$   
 f)  $x_1 = 2$  y  $x_2 = -1$     g)  $x_1 = 0$  y  $x_2 = \frac{7}{2}$     h)  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 1$   
 i)  $x_1 = 2$  y  $x_2 = 3$     j)  $x_1 = 1$  y  $x_2 = -1$     k)  $x_1 = 3$  y  $x_2 = -3$   
 l) n.s.    m)  $x_1 = \frac{2}{3}$  y  $x_2 = -1$     n)  $x_1 = 0$  y  $x_2 = -15$   
 ñ)  $x_1 = -\frac{2}{3}$  y  $x_2 = 1$     o)  $-\frac{1}{4}$     p) n.s.  
 q)  $x_1 = -3$  y  $x_2 = 1$     r) 3    s)  $x_1 = -3$  y  $x_2 = -2$

t)  $x_1 = -1$  y  $x_2 = -2$  u) 3 v) 1 w)  $x_1 = 2$  y  $x_2 = -1$

9) a)  $x = -1$ ,  $y = 1$  b)  $x = 1$ ,  $y = 4$  c)  $x = -1$ ,  $y = 2$

d)  $x = 0$ ,  $y = -1$  e)  $x = -1$ ,  $y = 2$  f)  $x = 2$ ,  $y = -2$

g)  $x = -1$ ,  $y = 4$  h) n.s. i)  $x = 3$ ,  $y = 9$

10) a) 3 b)  $\frac{1}{3}$  c)  $x_1 = 5$  y  $x_2 = -4$  d)  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 3$

e) 2 f)  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 1$  g) 1 h) 2.

11) a)  $x > 1$  b)  $x < 1$  c)  $x \geq -1$  d)  $x \geq \frac{1}{2}$  e)  $x > \frac{5}{4}$

f)  $x < -6$  g)  $x > -1$  h)  $x > -2$  i)  $x > 0,5$

j)  $x < -4$  ó  $x > 1$  k)  $|x| > \sqrt{3}$  l) n.s m)  $x \in \mathbb{R}$

12) 3 13) -1 14) -4

### Epígrafe 2

1) a) 2 b) 2 c) -1 d) 0 e)  $\frac{1}{2}$  f) 7 g) -1 h) -3

i) 1 j)  $\frac{1}{3}$  k) 5 l) 2 m) 2,5 n) 10 ñ)  $\frac{27}{8}$  o)  $\frac{6}{5}$

2) a) 8 b) -6 c) 7 d) -3 e)  $\frac{27}{5}$  f)  $-\frac{14}{5}$  g) 11

h) 11 i) -122 j) -3

3) a) 3 b) 3 c)  $\sqrt{5}$  d) 0 e)  $\frac{1}{27}$  f)  $\sqrt{2}$  g)  $\frac{4}{3}$  h) 9

4) a)  $r = \log_p q$  b)  $r = \log_q (s - p)$  c)  $r = \frac{1}{2} \log_p 2q^3$

d)  $r = \log_q \frac{3p - 2}{q}$  e)  $r = 2 \log_p (q + 5)$

Los valores admisibles de las variables son:

a)  $q > 0$ ,  $p > 0$ ,  $p \neq 1$  b)  $q > 0$ ,  $q \neq 1$ ,  $s > p$

c)  $q > 0$   $p > 0$ ,  $p \neq 1$  d)  $q > 0$ ,  $q \neq 1$ ,  $p > \frac{2}{3}$

e)  $p > 0$ ,  $p \neq 1$ ,  $q > -5$

5) a)  $x > 0$  b)  $x > 0$  c)  $x > -2$  d)  $x > \frac{3}{4}$

e)  $x < 2$  ó  $x > 3$  f)  $x \in \mathbb{R}$ ;  $x \neq 1$  g)  $x < 0$  h)  $x < 5$

i)  $x \in \mathbb{R}$  j)  $|x| > \sqrt{3}$  k)  $x > -\frac{2}{3}$  l)  $x < -\frac{1}{2}$

ó  $x > 0$  m)  $x < -2$  ó  $x > 5$  n)  $x < -\frac{2}{3}$  ó  $x > 3$

ñ)  $x > 1$  ó  $-1 < x < 0$  o)  $0 < x < 5$  p)  $-2 < x < 3$

- q)  $x < -2$  ó  $x > \frac{3}{2}$     r)  $x < 4$  ó  $x > 8$     s)  $x < -9$   
 ó  $x > -7$     t)  $|x| > \sqrt{5}$     u)  $x \in \mathbb{R}; x \neq 5$   
 v) n.s.    p)  $p > 0, p \neq 1$

- 6) a) 81    b) 3    c)  $\sqrt[3]{2}$     d) 0,008    e) 1    f) 8    g) 6  
 h) 26    i)  $x_1 = 20$  y  $x_2 = -5$     j)  $x_1 = -1$  y  $x_2 = \frac{7}{2}$   
 k) 3    l)  $\frac{5}{2}$     m) 64    n)  $x_1 = -3$  y  $x_2 = 4$     ñ) 9  
 o)  $\frac{8}{5}$     p)  $x_1 = -7$  y  $x_2 = 3$     q)  $x_1 = 2$  y  $x_2 = 3$   
 r) -2,1    s)  $x = 1$

- 7) a)  $S = \{-7; 2\}$     b)  $S = \{-2; -9\}$     c)  $S = \{8; \frac{1}{2}\}$   
 d)  $S = \{9; 27\}$     e)  $S = \{1; 5\}$     f)  $S = \{0; 3\}$   
 g)  $S = \{2; \frac{\sqrt[3]{2}}{4}\}$     h)  $S = \{-3; 3\}$     i)  $S = \{\sqrt[3]{9}; \frac{1}{9}\}$   
 j)  $S = \{-2; 8\}$     k)  $S = \{4; \frac{1}{4096}\}$     l)  $S = \{\frac{41}{6}\}$   
 m)  $S = \{1; -2\}$

- 8) a)  $x = 5$  ;  $y = 5$     b)  $x = 4,5$  ;  $y = 3,5$     c)  $\phi$   
 d)  $x = 3$  ;  $y = 1$     e)  $x = \frac{7}{4}$  ;  $y = \frac{9}{4}$

- 9) a)  $\sqrt[4]{3}$     b) 3    c)  $x_1 = 4$  y  $x_2 = 13$     d) 4  
 e)  $x = 4$     f)  $\frac{7}{2}$     g)  $\sqrt{2}$     h) 10

- 11) a)  $x > -1$     b)  $x \geq 2$     c)  $0 < x < 1$     d)  $-2 < x \leq -1$   
 e)  $-1 < x < 0$     f)  $x > 5$     g)  $1 \leq x \leq 3$     h)  $x < 0$     i)  $x \in \mathbb{R}$   
 ( $x \neq 2$ )

- 12) a)  $x > -1$     b)  $x \leq 0,4$     c)  $x < \frac{7}{8}$     d)  $x \leq 2$   
 e)  $0 < x < 125$     f)  $x > \frac{3}{2}$     g)  $-\frac{1}{3} < x \leq 1$     h)  $x > 10$

- 13) 20 y 2

### Epígrafe 3

- 1) a)  $\log_a 1,5 + \log_a 2,6$   
 b)  $\log_a 2,3 + \log_a 7 - \log_a 5 - \log_a 6$

$$c) 3 \log_a 2 + 4 \log_a 5 + \frac{1}{3} \log_a 7$$

$$d) 3 \log_a 11 + 5 \log_a 8 - 2 \log_a 5 - 3 \log_a 6$$

$$e) \log_a 62,7 - \frac{1}{3} \log_a 6 - \log_a 8,1$$

$$f) \frac{1}{3} (\log_a 30 + \log_a 0,5 - \log_a 21)$$

$$2) a) \log_{10} x = 3 \log_{10} b - \frac{2}{3} \log_{10} d$$

$$b) \log_{10} x = \frac{1}{5} \left( \log_{10} a + 2 \log_{10} (b+c) \right) - \frac{1}{2} \log_{10} (a^2 + b^2)$$

$$c) \log_{10} x = \frac{13}{5} \log_{10} (a+b) + \frac{1}{3} \log_{10} c - 3 \log_{10} d$$

$$3) a) \log_a 17 \quad b) \log_a 63,7 \quad c) \log_a 2000 \quad d) \log_a \frac{27}{\frac{8}{2\sqrt{2}}}$$

$$4) a) x = 7,5 \quad b) x = \frac{35}{3} \quad c) \frac{9}{125} \quad d) \frac{40}{9} \quad e) 4$$

$$f) \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[9]{125} \quad g) \frac{\sqrt[5]{a+b}}{a(b+c)} \quad h) \frac{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt[9]{b-a}}{\sqrt[3]{a+b}}$$

$$i) \frac{\sqrt[4]{\left(\frac{a}{b}\right)^8} \cdot \sqrt{c}}{c} \quad j) \frac{\sqrt[9]{a} \cdot \sqrt[12]{a} \cdot \sqrt[4]{c}}{b(c+a)^8}$$

$$5) a) F \quad b) V \quad c) V \quad d) F \quad e) V \quad f) F$$

$$6) a) 6 \quad b) 18 \quad c) 15 \quad d) 7,9 \quad e) \frac{4}{3}$$

$$7) a) \frac{5}{4} \quad b) \frac{5}{2} \quad c) \frac{1}{4} \quad d) \frac{7}{8} \quad e) \frac{1}{8} \quad f) \frac{1}{2}$$

$$9) a) \frac{17}{12} \quad b) \frac{13}{5} \quad c) \frac{3}{2} \quad d) \frac{11}{6} \quad e) \frac{5}{4} \quad f) -\frac{1}{4}$$

$$10) \log 12 = 1,0791; \quad \log 36 = 1,5562; \quad \log 360 = 2,5560$$

$$\log 120 = 2,0791; \quad \log 0,5 = -1 + 0,699 = -0,301$$

$$\log \frac{2}{5} = -0,398; \quad \log 24 = 1,3801; \quad \log \sqrt[3]{8} = 0,4515$$

$$11) a) S = \{5\} \quad b) S = \{17\} \quad c) S = \{12\} \quad d) S = \{2\}$$

$$e) S = \{3\} \quad f) S = \{10; 4\} \quad g) S = \left\{ -\frac{3}{8} \right\} \quad h) S = \left\{ \frac{8}{7} \right\}$$

$$i) S = \{2\} \quad j) S = \{4\} \quad k) S = \{15\} \quad l) S = \{4\}$$

$$m) n.s. \quad n) S = \{6\} \quad p) S = \{6; 14\} \quad o) S = \{27\}$$

$$p) S = \{-1; 11\} \quad q) S = \{4\} \quad r) S = \{64\} \quad s) S = \{5; 25\}$$

$$t) S = \left\{ \sqrt[4]{5} \right\} \quad u) S = \{-2; -1; 2\}$$

$$12) a) M = \log_{10} (x^2 - 7x - 8) \quad b) x = 9, -2$$

16) a)  $x = \sqrt[4]{27}$     b)  $x = 125$     c)  $x = 1$

**Epígrafe 4**

1) a) 1    b) 2    c) -2    d) 1    e) 2    f) -2    g) 4    h) 1  
i) 3    j) 0    k) 1    l) 2    m) -8    n) 3    ñ) -3    o) -1

2) a)  $1 < \log x < 2$     b)  $4 < \log x < 5$     c)  $-1 < \log x < 0$   
d)  $-5 < \log x < -4$     e)  $0 < \log x < 1$     f)  $-3 < \log x < -2$   
g)  $2 < \log x < 3$     h)  $1 < \log x < 2$     i)  $0 < \log x < 1$

3) a) 0,3522    b) 0,5647    c) 0,9279    d) 0,3522    e) 0,9991  
f) 0,7340    g) 0,92    h) 0,88    i) 0    j) 0,6021  
k) 0,8048    l) 0,83

4) a) 2,8927    b) 1,3945    c) 0,3636    d)  $-1 + 0,5378$   
e)  $-2 + 0,6304$     f) 0,1732    g) 0,4031    h) 1,90  
i) 2,16    j) 0,8407    k)  $-4 + 0,9494$     l) 0,7324  
m)  $-1 + 0,4514$     n) 1,5403    ñ) No definido    o) 0,62  
p)  $-1 + 0,73$     q) 3,29    r)  $-1 + 0,46$     s) 3-48  
t) 2,36    u) 4,05    v) 0,10  
w) No definida.    x) 0,4355    y) 0,94    z) 2,9996

5) a) 0,7340    b) 291    c) 27,8    d) 1,5416    e) 0,157  
f) 2,92    g)  $-3 + 0,6812$     h) 1,6021    i) 2,8176  
j) 84,8    k) 4,82    l) 1,699    m) 4,42    n) 3,36  
ñ) 5,13    o) 0,5599    p) 9100    q) 1,3551  
r)  $1,26 \cdot 10^5$     s)  $1,26 \cdot 10^8$     t)  $x = 26$

6) a) 834    b) 83,4    c) 2440    d) 5,47    e) 0,0835  
f)  $1,41 \cdot 10^3$     g) 5,02    h) 40,9    i) 1,02    j) 32,8  
k) 0,65    l) 6,32    m) 29300    n) 9,19    ñ) 14,2  
o) 263    p) 0,00138    q) 4450

7) a) 3,17    b) 17,3    c) 912    d) 9,12  
e) 1530    f) 1,53    g) 0,0745    h) 53,2  
i) 8,95    j)  $2,15 \cdot 10^3$     k)  $2,15 \cdot 10^9$     l)  $1,4 \cdot 10^7$

8) a) 1,5798    b) 0,7945    c) 1,2648    d)  $-1 + 0,8069$   
e) 0,1492    f)  $-2 + 0,0792$     g) 3,3222    h)  $-4 + 0,6325$   
i) 1,6325    j) 0,15    k) 1,66    l) 2,84  
m)  $-1 + 0,82$     n)  $-4 + 0,699$     ñ) 2,85

9) a) El terremoto B fue 10 veces más fuerte que el A.  
b) El terremoto C fue 10 veces más fuerte que el B.

c) El terremoto C fue 100 veces más fuerte que el A.

11) a)  $\text{pH} = 3$    b)  $\text{pH} = 8,3$

12)  $C(\text{H}^+) = 4,0 \cdot 10^{-9}$

### Epígrafe 5

1) Las ordenadas son: 0,0001; 1; 3,16; 100; 39,8

2) Las abscisas son: 0; -1; 0,0792; 0,301; 1,9009

3)  $(-2; \frac{1}{4}) \in 2^x$ ;  $(5; -\frac{1}{32}) \in (\frac{1}{2})^x$ ;  $(1; \frac{1}{2}) \in (\frac{1}{2})^x$

$(0; 1) \in 2^x$ ;  $(0; 1) \in (\frac{1}{2})^x$

Los pares restantes no pertenecen a dichas funciones.

4) a)  $y = 2,5^x$    b)  $y = 0,5^x$    c)  $y = 4^x$    d)  $y = 2^x$

5) a) Dominio de  $f, g, t, p$  ( $x \in \mathbb{R}$ )   Im. de  $f$  y  $t$ :  $y > 0$   
de  $g$  y  $p$ :  $y > -1$   
b) Ceros:  $f$  y  $t$  no tienen; de  $g$  es  $x = 0$ ; de  $p$   $x = -3$

c)  $x = \frac{1}{5}$ ;  $x = 1$ ;  $x = -11$

6) a) Im  $f$ :  $y \in \mathbb{R}_+$ ; Im  $g$ :  $y > 5$ ; Im  $h$ :  $y > -9$   
Im  $m$ :  $y > 0$ ; Im  $n$ :  $y > 2$

b) No cortan el eje  $x$ :  $f, g, m, n$ ;  $h$  la corta en  $x = 6$

c)  $(0; 1) \in f$ ,  $(0; \frac{31}{4}) \in g$ ,  $(0; -\frac{728}{81}) \in h$ ,  
 $(10; 10) \in m$ ,  $(0; 3) \in n$

d)  $\frac{7\sqrt{2}}{2}$    e)  $x = 5$

7) a)  $P(3; -\frac{1}{27})$    b)  $\frac{1}{9}$    c)  $x = 7,5$ ;  $x = 0,5$

8) a)  $x = \frac{5}{8}$    b)  $x_1 = 4$  y  $x_2 = -\frac{3}{2}$    c)  $x < 5$    d)  $x \in \mathbb{R}$

9) a)  $y = 3^x - 3$    b)  $y = 10^{x-1}$

c)  $y = a^x - 2$ ;  $a > 1$    d)  $y = 4 + 10^{x+2}$

### Epígrafe 6

1) a) Pertenece. b) Pertenece. c) No pertenece. d) Pertenece.

2) a) 0,6532   b) 0,3802   c) 1,1761   d) -0,5229

3) a) 912   b) 51,4   c) 4920   d) 1,48

4) a)  $\log_4 x$    b)  $y = \log_7 x$    c) No existe   d)  $y = \log_{25} x$

5) a) Dom  $f$ :  $x > 0$ ; Dom  $g$ :  $x > -0,5$ ; Dom  $m$ :  $x > 5$   
Im  $f$ :  $y \in \mathbb{R}$ ; Im  $g$ :  $y \in \mathbb{R}$ ; Im  $m$ :  $y \in \mathbb{R}$

b) Cero de  $f$ :  $x = 5$ ; cero de  $g$ :  $x = \frac{1}{2}$ ;

cero de  $m$ :  $x = 5,2$    c)  $x = \frac{1}{25}$ ;  $x = 4,5$ ;  $x = 10$

6) a)  $x > \frac{3}{8}$     b)  $x > -18$     c)  $x < \frac{5}{3}$     d)  $x < -6$  ó  $x > 3$

7) a)  $x < -3$ ,  $x > 4$     b)  $x = -3$  ó  $x = 4$

8) a)  $y = \log_9(x - 2) + 1$      $y = \log_9 9x + 2$

b)  $x > 2$

c) Cero:  $x = \frac{7}{3}$

d)  $P_1(5; 1)$ ;  $P_2(-\frac{19}{9}; -1)$ ;  $P_3(2,6; \frac{1}{2})$

$P_1(7; 2)$ ;  $P_2(-\frac{5}{3}; -1)$ ;  $P_3(-0,3; \frac{1}{2})$

e)  $Q_1(25; 3,8)$ ;  $Q_2$  y  $Q_3$  no existen.

$Q_1(25; 3)$ ;  $Q_2(-\frac{5}{3}; -1)$ ;  $Q_3(0; 0,6)$

### Ejercicios del capítulo

1) a) 1    b)  $c^{-x} \cdot c^2 \sqrt[4]{c^3}$     c)  $2^{19} \sqrt{2}$     d)  $2^{-7}$     e)  $3 \sqrt[4]{3}$

f)  $\sqrt[4]{5}$     g)  $\sqrt{3}$     h)  $y^2$     i)  $\frac{9q}{50}$     j)  $\frac{0,36c^2}{b^4}$

k)  $x^2 + x^{m+9}$     l)  $xy + \frac{1}{xy}$     m)  $-\frac{\sqrt{3}}{9}$     n)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$

ñ)  $9\sqrt{5} - 18$     o)  $\frac{8 + \sqrt{10}}{18}$     p)  $\frac{\sqrt{2}}{8}$     q) 122

2) a)  $-\frac{3}{2}$     b)  $\frac{2}{3}$     c)  $\frac{13}{3}$     d) -3    e) -5    f) -3

g) -11    h)  $\frac{3}{10}$     i) -3    j)  $\frac{1}{8}$     k)  $\frac{9}{2}$     l) n.s.

m)  $\frac{1}{3}$     n)  $\frac{1}{2}$     ñ)  $x_1 = 1$  y  $x_2 = 3$     o)  $-\frac{1}{2}$     p)  $-\frac{5}{4}$

q) 3    r)  $x_1 = 1$  y  $x_2 = 0$     s) 49    t) 1 y 2

u) 0 y  $\frac{2}{2}$     v) 0 y -2    w) 2 y 3    x) -10    y) 10    z) 7

3) a) -15    b) 1    c) 5    d)  $x_1 = -3$  y  $x_2 = -4$     e)  $-\frac{1}{2}$

f) 1    g) n.s.    h)  $\frac{3}{2}$     i)  $-\frac{1}{2}$

4) a)  $x > 1$     b)  $x \geq -\frac{1}{2}$     c)  $x < -1$  ó  $x > 4$     d) n.s.

e)  $0 < x < 1$     f)  $x \geq -1$     g)  $x > 3$     h)  $x > 0$

i)  $x \geq \frac{4}{5}$     j)  $x < 2$  ó  $x > 6$     k)  $-2 < x < 3$     l)  $x > -2$

m)  $x < 1$  ó  $x > 2$     n)  $x < 2$     o)  $x > 3$     ñ)  $x < -\frac{2}{3}$

p)  $x \geq \frac{1}{3}$     q)  $x \leq -2$  ó  $x \geq -1$

5) a)  $x < 0$     b)  $x \geq 0$     c)  $x > 0$     d)  $x \leq 1$     e)  $x < 1$

f)  $x > 1$     g)  $|x| > 5$     h)  $x < -3$  ó  $x > 7$

6) a) 4    b) 2    c)  $-\frac{3}{2}$     d)  $\frac{1}{2}$     e) 3    f)  $\frac{9}{2}$     g) 6    h)  $\frac{3}{4}$

- 7) a)  $\frac{41}{20}$     b) 3,5    c) - 3,5    d) 8    e) - 0,6    f)  $-\frac{17}{4}$
- 8) a) 1,3856    b) 0,8325    c) 2,1847    d)  $-1 + 0,0792$   
 e) 1,9523    f) 0,8645    g) 3,5441    h) 3,66  
 i) 0,6021    j) 3,75    k) 3,93    l) 2,93  
 m) 1,3617    n)  $-1 + 0,79$     ñ) 2,6590    o) 4,8513  
 p) 1,9058    q) 0,8802    r)  $-3 + 0,9685$     s)  $-6 + 0,3222$   
 t) 1,81    u) 2,60    v) 0,39    w) 3,93
- 9) a) 1,29    b) 7,715    c) - 0,1877    d) 3,3478  
 e) -2,0959    f) 1,5850    g) 1,3802    h) -0,2263
- 10) a)  $m = \log_a (b + c)$     b)  $m = \log_a (b - c) + 1$   
 c)  $m = \log_b \left[ \frac{c}{a} \right]^3$     d)  $m = \frac{1}{\log_b (1 - ac)}$
- Los valores admisibles son:
- a)  $b > -c$ ;  $a > 0$ ;  $a \neq 1$     b)  $b > c$ ;  $a > 0$ ;  $a \neq 1$   
 c)  $\frac{c}{a} > 0$ ;  $b > 0$ ;  $b \neq 1$     d)  $ac \leq 0$ ;  $b > 0$ ;  $b \neq 1$
- 11) a)  $0 < \log 3 < 1$     b)  $1 < \log 18 < 2$   
 c)  $2 < \log 134 < 3$     d)  $3 < \log 1782 < 4$   
 e)  $-1 < \log 0,5 < 0$     f)  $-2 < \log 0,07 < -1$   
 g)  $-2 < \log 0,018 < -1$     h)  $-3 < \log 0,00215 < -2$
- 12) a) 14    b) 1125    c)  $\frac{40}{9}$     d)  $\frac{a^3}{b^3 \cdot c^2}$     e)  $\frac{\sqrt[3]{a+b}}{a \cdot (b+c)^3}$   
 f)  $\sqrt[4]{a}$     g)  $\frac{b\sqrt{c}}{c}$     h)  $\frac{(a+b)\sqrt{a^2-b^2}}{a-b}$
- 13) a)  $S = \{1,5\}$     b)  $S = \{25\}$     c)  $S = \{27\}$     d)  $S = \left\{ \frac{1}{16} \right\}$   
 e)  $S = \{3\}$     f)  $S = \left\{ \frac{1}{\pi} \right\}$     g)  $S = \left\{ \sqrt[7]{10^5} \right\}$     h)  $x = 1$   
 i)  $S = \{2\}$     j)  $S = \left\{ \sqrt[9]{10} \right\}$     k)  $S = \left\{ \frac{1}{4} \right\}$     l)  $S = \{1\}$   
 m)  $S = \{3\}$     n)  $S = \{13\}$     ñ)  $S = \{1\}$     o)  $S = \{4\}$
- 14) a) (1)    b) (3)    c) (2)    d) (3)    e) (2)
- 15) a)  $x = \frac{3}{4}$ ;  $y = -\frac{1}{4}$     b)  $x = \frac{5}{2}$ ;  $y = \frac{5}{4}$

e)  $x = \frac{37}{6}$ ;  $y = \frac{13}{6}$     c)  $x = \frac{11}{24}$ ;  $y = \frac{1}{24}$

d)  $x = 20$ ;  $y = 2$     f)  $x = 5$ ;  $y = 2$

g) Infinitas soluciones    h)  $x = 20$ ;  $y = 2$

i)  $x = \frac{10}{3}$ ;  $y = \frac{1}{3}$     j)  $x = -\frac{16}{3}$ ;  $y = -\frac{1}{3}$

16) a)  $\frac{5}{3}$     b)  $-\frac{1}{4}$     c)  $x = 2$     d)  $\frac{5}{6}$     e)  $\frac{16}{3}$

f) n.s.    g)  $\frac{7}{8}$     h)  $\frac{11}{6}$     i)  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 1$     j) 1

k)  $\phi$     l)  $\pm 3$     m) 24    n)  $x_1 = 3$  y  $x_2 = -3$

ñ)  $x_1 = 3$  y  $x_2 = -3$     o)  $x_1 = \frac{1}{6}$  y  $x_2 = -\frac{1}{2}$

p)  $\frac{11}{4}$     q)  $\frac{2}{5}$     r)  $x_1 = 5$  y  $x_2 = -\frac{1}{3}$     s) 3    t) -0,5

u)  $\frac{10}{3}$     v) 1    w)  $\phi$     x)  $x_1 = 4$  y  $x_2 = \frac{1}{16}$     y) 2

z)  $x_1 = 9$  y  $x_2 = -\frac{1}{243}$

18) a)  $x > 11$     b)  $1 < x < 4$     c)  $\frac{2}{5} < x < \frac{1}{2}$     d)  $-9 < y < 11$ ;  $y \neq 1$     e)  $5 < x < 6$

f)  $-2 < x < -1$  ó  $1 < x < 2$     g)  $0 < x < \frac{1}{5}$

h)  $0 < x < 1$     i)  $x < \frac{1 - \sqrt{29}}{2}$  ó  $x > \frac{1 + \sqrt{29}}{2}$

j)  $x \geq 3$  ó  $x \leq -7$

19) A(3; 0,3) ; B(11; 1) ; C(3,5; 0,4) ; D( $\frac{11}{10}$ ; -1)

20)  $x = -\frac{1}{5}$  ó  $x = 2$     21)  $x > -1$     22) a)  $-\frac{1}{2}$     b)  $\frac{9}{2}$

23) a) f corta al eje x en  $x = \log_a 4$ ; g, en  $x = 4$

b) Dom f:  $x \in \mathbb{R}$ ; Im f:  $y > 3$ ; creciente

Dom g:  $x > 4$ ; Im g:  $y \in \mathbb{R}$ ; creciente

d)  $x = 0$ ;  $x = 6$

24) a) Pertenece; pertenece; no pertenece; no pertenece.

b)  $-\frac{10}{3} < y < 12$     c)  $x = 2$ ;  $x = \log_3 2$

d)  $a = \frac{1}{4}$ ;  $b = -\frac{1}{2}$

25) a)  $y = 3^{x-2}$     b)  $y = \log_a(x+3)$ ;  $a > 1$

c)  $y = 1,5 + \log(x-1)$     d)  $y = 4^{x+3} - 4$

## CAPÍTULO 2

### Epígrafe 1

1) a)  $\sqrt{117} \approx 10,8$     b)  $\sqrt{101} \approx 10,0$     c)  $2\sqrt{2} \approx 2,82$

d)  $\sqrt{10} \approx 3,16$     e) 2    f)  $\sqrt{11,25} \approx 3,35$     g)  $\sqrt{-\frac{2026}{225}} \approx 3,0$

h)  $\sqrt{3,61} \approx 1,9$     i)  $\sqrt{1,69} \approx 1,3$     j)  $\sqrt{4,85} \approx 2,2$

2 a)  $y_B = 8,97$  y  $y_B = 1,03$

b)  $x_C = \pm 2\sqrt{11} \approx \pm 6,64$  ;  $x_D = \pm \sqrt{11} \approx \pm 3,32$

c)  $x_H = 5,1$  y  $x_H = -8,1$  ;  $x_I = 0,7$  y  $x_I = -3,7$

d) No existe.

3 a) 0,268    b) 1    c) 1    d) 4,70    e) No definida.

f) -2,75    g) -0,700    h) 0

4 a)  $168,7^\circ$     b)  $15,1^\circ$     c)  $57,4^\circ$     d)  $39,0^\circ$     e)  $10,3^\circ$

f)  $60^\circ$

5 a)  $\sqrt{17} \approx 4,12$  ;  $3\sqrt{5} \approx 6,72$  ;  $2\sqrt{5} \approx 4,48$  ; escaleno

b)  $\sqrt{28,25} \approx 5,32$  ;  $\frac{\sqrt{29}}{2} \approx 2,70$  ;  $\sqrt{26} \approx 5,10$

6  $\sqrt{5} \approx 2,24$

7  $A = 15 u^2$

8 a) Longitudes:  $2\sqrt{5}$  ; pendientes:  $\frac{1}{2}$  y  $-2$  ; cuadrada.

b) Longitudes:  $6\sqrt{2}$  y  $3\sqrt{2}$  ; pendientes: 1 y  $-1$  ; rombo.

c) Longitudes:  $4\sqrt{2}$  y  $2\sqrt{5}$  ; pendientes: 1 y  $-\frac{1}{2}$  ; paralelogramo.

d) Longitudes:  $2\sqrt{13}$  ; pendientes:  $\frac{2}{3}$  y  $-\frac{3}{2}$  ; cuadrado.

e) Longitudes: 10 y 4 ; pendientes:  $\frac{3}{4}$  y no definida; No pertenece a la clasificación dada.

f) Longitudes:  $\sqrt{65}$  ; pendientes:  $\frac{7}{4}$  y  $-\frac{1}{8}$  ; trapecio.

g) Longitudes:  $\sqrt{65}$  y  $\sqrt{68}$  ; pendientes: 4 y  $-\frac{1}{8}$  ; no pertenece a la clasificación dada.

9  $24 u^2$

10 a) 20,3 u

11 b) Paralelogramo.

13 a)  $20 u^2$     b) (2;4);  $\sqrt{10} \approx 3,16$

14 a) (0;3) ; 3    b) (1;1) ; 4    c) (0;3) ; 5

d) (-3;1) ; 5

### Epígrafe 2

1 a)  $m = -\frac{2}{3}$  ;  $\left(0; \frac{8}{3}\right)$     b)  $m = \frac{3}{2}$  ;  $\left(0; -\frac{5}{2}\right)$

c)  $m = -\frac{5}{2}$  ; (0;-2)    d)  $m = -\frac{2}{5}$  ; (0; 0)

e)  $m = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $(0; \sqrt{2})$     f)  $m = 2\sqrt{3}$ ;  $(0; 3\sqrt{3})$

2) a)  $4x - y - 10 = 0$     b)  $3x + y + 13 = 0$   
 c)  $x - 3y - 6 = 0$     d)  $2x + 2y + 3 = 0$     e)  $y - 2 = 0$   
 f)  $12x + 16y - 3 = 0$     g)  $x + 4y + 16 = 0$   
 h)  $12x - 24y + 5 = 0$     i)  $\sqrt{9}x - y - 1 = 0$   
 j)  $\sqrt{2}x - 2y + 2(\sqrt{2} - 1) = 0$

3) a)  $2x - y - 1 = 0$     b)  $5x + y + 10 = 0$   
 c)  $4x + y + 4 = 0$     d)  $9x + 2y - 19 = 0$   
 e)  $3x - 2y - 6 = 0$     f)  $4x - 10y - 13 = 0$   
 g)  $x - 3 = 0$     h)  $3x - 2y - 10 = 0$   
 i)  $4x - 15y + 3 = 0$     j)  $\sqrt{3}x + y - 2\sqrt{2} = 0$

4)  $3x - y + 6 = 0$

5) a)  $\sqrt{8}x - 3y + 3(2\sqrt{3} - 3) = 0$     b)  $x - y + 3 = 0$   
 c)  $\sqrt{3}x - y + 3(2\sqrt{3} - 1) = 0$     d)  $x - 6 = 0$     e)  $y - 3 = 0$

6) Eje y:  $x = 0$ ; eje x:  $y = 0$     7)  $y = -3x - 2$

8) a)  $\left\{\frac{101}{13}; \frac{164}{13}\right\}$     b) No tienen.    c) Infinitos, las rectas coinciden,    d)  $(0; 0)$     e)  $(4; 5)$     f)  $(-1; 3)$

9) a)  $-\frac{5}{3}$     b)  $\frac{3}{5}$

10) a)  $2x - 3y - 23 = 0$     b)  $3x + 2y - 2 = 0$

11)  $\alpha = -3$     12)  $\alpha = -\frac{1}{5}$     13)  $x = 15$

14)  $36x + 24y + 35 = 0$     15)  $2x - 3y + 15 = 0$

17)  $20u^2$     18)  $\overline{AC}: 6x - 7y - 14 = 0$ ;  $\overline{BD}: x + y - 6 = 0$

19) a)  $x - 2y + 4 = 0$     b)  $G\left(\frac{8}{3}; \frac{5}{3}\right)$     c)  $62,6^\circ$

20) a)  $3x + 2y + 25 = 0$ ;  $3x - 5y + 32 = 0$ ;  $2x - y - 9 = 0$

b)  $\left\{\frac{31}{7}; \frac{9}{7}\right\}$     c)  $\left\{-\frac{12}{7}; \frac{6}{7}\right\}$

21)  $(3; 2)$ ;  $(0; -7)$ ;  $(4; 1)$     22)  $x - 3 = 0$ ;  $68,2^\circ$

23)  $x_A = 4$ ;  $y_B = -1$     24)  $y = -8$

25) a) 5    b)  $\frac{1}{2}$     c)  $\frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0,448$     d)  $\frac{6\sqrt{10}}{5} \approx 3,79$

26)  $2\sqrt{5}$     27)  $2,5u$     28)  $\sqrt{17} \approx 4,12$     29)  $12u^2$

$$\boxed{30} \quad \frac{6\sqrt{10}}{5} \approx 3,79 \quad ; \quad \frac{12\sqrt{94}}{17} \approx 4,12 \quad ; \quad 4\sqrt{2} \approx 5,64 \quad ;$$

$$76^\circ \quad ; \quad 63,4^\circ \quad ; \quad 40,6^\circ$$

$$\boxed{31} \quad C\left[-\frac{17}{3} ; -\frac{31}{3}\right] \quad \delta \quad C(1; 3)$$

$$\boxed{32} \quad \text{a) Escaleno} \quad \text{b) } A = 12 u^2, P = 16,1 u \quad ; \quad \text{ángulos interiores: } 45^\circ ; 71,6^\circ \text{ y } 63,4^\circ$$

$$\text{c) Circuncentro } (2; 31, \text{ ortocentro } (3; 1) , \\ \text{baricentro } \left(\frac{7}{3} ; \frac{5}{3}\right)$$

$$\boxed{33} \quad |x| - 3 = 2|y| \quad \boxed{34} \quad x^2 - 8y + 16 = 0$$

$$\boxed{35} \quad x^2 - 4x - 2y + 11 = 0 \quad , \quad y \geq 3$$

### Epígrafe 3

$$\boxed{1} \quad \text{a) } \overline{AB}(2; 4) \quad \text{b) } \overline{MN}(6; 9) \quad \text{c) } \overline{CD}(-2; 4) \quad \text{d) } \overline{ED}(-1; 8)$$

$$\text{e) } \overline{RS}(-5; 4) \quad \text{f) } \overline{GH}(-5; 14)$$

$$\boxed{2} \quad \text{a) } (7; -1) \quad \text{b) } (3; -6) \quad \text{c) } (-3; 4) \quad \text{d) } (12; -12)$$

$$\text{e) } (2; -8) \quad \text{f) } (9; -2)$$

$$\boxed{3} \quad \text{a) } (8; -3) \quad \text{b) } (-4; 0) \quad \text{c) } (1; -8) \quad \text{d) } (-1; -7)$$

$$\text{e) } (6; -11) \quad \text{f) } \left(\frac{5}{2}; -\frac{17}{4}\right)$$

$$\boxed{4} \quad \text{a) } |\vec{a}| = \frac{\sqrt{37}}{4} \approx 3,04 \quad \text{b) } |\vec{b}| = \sqrt{5} \approx 2,24$$

$$\text{c) } |\vec{c}| = \sqrt{97} \approx 9,85 \quad \text{d) } |\overline{AB}| = \sqrt{53} \approx 7,28$$

$$\text{e) } |\overline{CD}| = \frac{52}{15} \approx 3,47$$

$$\boxed{5} \quad \text{a) } 0^\circ \quad \text{b) } 59,1^\circ \quad \text{c) } 90^\circ \quad \text{d) } 123,6^\circ \quad \text{e) } 180^\circ$$

$$\text{f) } 209,7^\circ \quad \text{g) } 270^\circ \quad \text{h) } 326,3^\circ$$

$$\boxed{6} \quad \text{a) } F(4,61; 7,74) \quad \text{b) } D(7,06; 2,57) \quad \text{c) } I(-4,15; 7,55)$$

$$\text{d) } J(3,07; 13,07) \quad \text{e) } S(3; 13,3) \quad \text{f) } Z(-10,1; 1)$$

$$\boxed{7} \quad \text{a) } (4; 6) \quad \text{b) } (-1; 5) \quad \text{c) } (1; -2) \quad \text{d) } (3; 6)$$

$$\text{e) } (3; 1) \quad \text{f) } (10; -1) \quad \text{g) } (1,4; 0,8) \quad \text{h) } (p-m; q-n)$$

$$\boxed{8} \quad \text{a) } (6; -8) \quad \text{b) } (-6; -15) \quad \text{c) } (8; 2) \quad \text{d) } (4; -7)$$

$$\text{e) } (5; -3) \quad \text{f) } (-12; 0)$$

$$\boxed{9} \quad \vec{a} + \vec{b} : (-3; 5) \quad ; \quad \vec{a} - \vec{b} : (-5; 7) \quad ; \quad 5\vec{a} : (-20; 30);$$

$$3\vec{b} - \frac{\vec{a}}{2} : (5; -6)$$

$$\boxed{10} \quad \text{a) } (12; -6) \quad \text{b) } (-1; 1) \quad \text{c) } (2; -4) \quad \text{d) } (-19; 9)$$

e) (12; -11)    f) (8; -8)

11) a) 14,8    b) 5,47    c) 38    d) -54,8    e) 21,3

12) a)  $\alpha = 0$     b)  $\alpha = \pm \sqrt{8}$     c)  $\alpha = 0$  ó  $\alpha = -1$

13)  $y = -\frac{3}{2}$     14)  $(x; \frac{4}{7}x)$ , infinitas.

15)  $(\frac{4}{5}; \frac{3}{5})$  y  $(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5})$     19)  $\vec{z}(-4; 3)$

22)  $|a + b| = 2\sqrt{5} \approx 4,47$  ;  $|a - b| = 2\sqrt{19} \approx 7,21$

23) a) D(-4; 3)    b)  $\angle(\overline{BD}; \overline{AC}) = 109,6^\circ$

26)  $W = 1$  u    27)  $x + y - 5 = 0$

28)  $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$

29)  $x^2 + y^2 - x - 7y - 2 = 0$

#### Epigrafe 4

1) a)  $\begin{cases} x = 4 - 4t \\ y = 5 + 6t \end{cases}$     b)  $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} + 5t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$     c)  $\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = \sqrt{a} + 4t \end{cases}$

d)  $\begin{cases} x = 2 - \frac{4}{5}t \\ y = -5 + 7t \end{cases}$

2) a)  $\begin{cases} x = -3t \\ y = -6t \end{cases}$     b)  $\begin{cases} x = 5 - \frac{17}{4}t \\ y = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}t \end{cases}$

c)  $\begin{cases} x = a - 7,2t \\ y = -3 + 3,6t \end{cases}$     d)  $\begin{cases} x = \sqrt{9} + 2\sqrt{9}t \\ y = Y + 3t \end{cases}$

e)  $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}t \\ y = \frac{1}{4} + \frac{19}{28}t \end{cases}$     f)  $\begin{cases} x = 9 - \frac{32}{3}t \\ y = 6 - 3t \end{cases}$

3)  $x = t$  ;  $y = t$

4) a) Pertenece,    b) Pertenece.    c) No pertenece  
d) Pertenece.    e) No pertenece.    f) No pertenece.

5)  $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - 5t \end{cases}$

7) a)  $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -5 - 5t \end{cases}$     b)  $\begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$

8) a) Paralelas,    b) Perpendiculares.    c) Ni paralelas ni perpendiculares.

9) a)  $\left(-\frac{11}{5}; \frac{18}{5}\right)$ ;  $90^\circ$     b) No tienen.    c) No tienen.

d)  $(-9, 8; 2, 4)$ ;  $33,7^\circ$     e) No tienen.    f)  $(-1; 0)$ ;  $40,2^\circ$

10) Se cortan.

11) a)  $x - 2y + 13 = 0$     b)  $6x - y - 14 = 0$

c)  $y + 2 = 0$     d)  $x + y - 8 = 0$

e)  $x + 7 = 0$     f)  $y - 4 = 0$

12) a)  $\begin{cases} x = 4t \\ y = -3 - 3t \end{cases}$     b)  $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = t \end{cases}$     c)  $\begin{cases} x = 5t \\ y = -2t \end{cases}$

d)  $\begin{cases} x = t \\ y = -4t \end{cases}$     e)  $\begin{cases} x = -2 \\ y = t \end{cases}$     f)  $\begin{cases} x = t \\ y = 4 \end{cases}$

### Ejercicios del capítulo

1)  $y = 5$     2)  $y = 5$

4) a)  $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + 8t \end{cases}$     b)  $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - 10t \end{cases}$

c)  $2x + y - 9 = 0$     d)  $x + 4y - 15 = 0$

e)  $x + 4y + 6 = 0$

5)  $3x - 4y - 25 = 0$  ó  $3x - 4y + 5 = 0$

6)  $12x - 5y + 61 = 0$  y  $12x - 5y + 22 = 0$  ó  
 $12x - 5y + 61 = 0$  y  $12x - 5y + 100 = 0$

7) Lados:  $2x - 5y - 26 = 0$ ;  $2x - 5y + 3 = 0$ ;  
 diagonal:  $7x - 3y - 33 = 0$

8) a:  $3x + y - 7 = 0$  ; b:  $x + 3y + 11 = 0$  ;  
 c:  $x - y - 1 = 0$

9)  $(6; -6)$

10) a)  $2x - y + 10 = 0$  ó  $3x + 2y - 6 = 0$

b)  $2x + y - 18 = 0$  ó  $5x - 4y + 20 = 0$

c)  $3x + 2y - 6 = 0$  ó  $-3x + 2y + 6 = 0$

d)  $x = 0$  ó  $x + 2y - 2 = 0$  ó  $x - 2y + 2 = 0$

11) a)  $|\vec{m} - \vec{n}| = \sqrt{28,3} \approx 5,32$

b)  $|\vec{m} - \vec{n}| = \sqrt{31,7} \approx 5,63$

c)  $|\vec{n}| = 4$     d)  $|\vec{m}| = 5\sqrt{3} \approx 8,65$

e)  $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 = \frac{8}{3}$     f)  $(x - 3,1)^2 + y^2 = 27,04$

g)  $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 27$

h)  $(x - 4,2)^2 + (y - 5,1)^2 = 22,1$

i)  $(x - 2)^2 + (y + 2,3)^2 = \frac{1}{3}$

j)  $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1,02 \cdot 10^{-5}$

2) a)  $M(0;0); r = 9$     b)  $M(2;-3); r = 2\sqrt{5}$

c)  $M(0;-3); r = 4$     d)  $M(-2; 1); r = 5$

e)  $M(-3;0); r = 4$     f)  $M(\frac{7}{2}; 2); r = \sqrt{65}$

g)  $M(\frac{1}{2}; -1); r = \frac{1}{2}$     h) No es una circunferencia.

i) No es una circunferencia.    j)  $M(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}); r = \sqrt{5}$

k) No es una circunferencia,

3) a)  $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 65$     b)  $(x + 2)^2 + y^2 = 14$

c)  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$

d)  $(x - 2\sqrt{9})^2 + (y - \sqrt{5})^2 = 17$

e)  $(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 34$

f)  $(x - 3\sqrt{2})^2 + (y - 4\sqrt{9})^2 = 5$

g)  $(x - 3,1)^2 + (y - 4,1)^2 = 4,01$

h)  $(x - 2,6)^2 + (y - \sqrt{5})^2 = 12,9$

i)  $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 12,0$     j) No existe.

4) a)  $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 10$     b)  $x^2 + (y - 1)^2 = 17$

c)  $x^2 + y^2 = 29$

d)  $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 = \frac{65}{4}$

e)  $(x - \frac{7}{2})^2 + (y - \frac{7}{2})^2 = \frac{1}{2}$

f)  $(x - 1)^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{5}{2}$

g)  $(x - \frac{3}{8})^2 + y^2 = \frac{25}{64}$     h)  $(x - \frac{1}{4})^2 + (y - \frac{7}{6})^2 = \frac{109}{144}$

i)  $(x - 2,21)^2 + (y - 2,21)^2 = 1,27$

j)  $(x - 12,3)^2 + (y - 12)^2 = 74,2$

5) a)  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 208$

b)  $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 148$

c)  $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 52$     d) No es circunferencia.

6) a)  $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = \frac{1}{2}$

b)  $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = \frac{144}{25}$

$$c) (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = \frac{1}{5}$$

$$d) (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = \frac{64}{5}$$

$$7) (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

$$8) 2x - 5y + 19 = 0$$

$$9) x - y - 3 = 0$$

$$10) a) (x-1)^2 + (y-5)^2 = 50$$

$$b) (x-5)^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{250}{9}$$

$$11) a) (x-2)^2 + \left(y + \frac{17}{2}\right)^2 = \frac{629}{4}$$

$$b) \left[x + \frac{1}{8}\right]^2 + y^2 = \frac{1008}{64}$$

$$c) \left[x + \frac{1}{4}\right]^2 + \left[y - \frac{1}{2}\right]^2 = \frac{221}{16}$$

12) a) Secante. b) Tangente. c) Exterior.

d) Exterior, e) Tangente. f) Secante.

13) a) (0; 1); (2; 3) b) (4; 5)

c) No tienen puntos de intersección.

d) (-3; 1); (-1; 3) e) (1; 6); (-3; 4)

f) No tienen puntos de intersección.

14) a) (2,6;-1,5) ; (-2,6;-1,5) b) (-1;3) c) (4;2)

d) (2;1) ; (4;3) e) (4; -2) ; (-3;5) f) No existen.

15) a) Tangente: (k = -2); secante: (k ≠ -2); exterior: no existe ningún valor de k tal que D < 0.

b) Tangente: (k = -38 ó k = 2); secante: (k > 2 ó k < -38); exterior: (-38 < k < 2)

16) a) x + y - 6 = 0 b) y = 5 - x

c) 3x - 2y - 24 = 0 d) y = -\frac{1}{3}x

e) 3x - 2y + 25 = 0 f) x + 4y - 16 = 0

17) 4,48

$$18) (x-4)^2 + (y-1)^2 = 5$$

$$19) (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$$

$$20) 3x^2 + 3y^2 - 26x - 10y + 42 = 0$$

21) . Puntos medios de los lados: (1;1) , (3;0) , (2;1)

. Pies de las alturas: (0;0) , (3;-1) , \left(\frac{12}{5}; \frac{4}{5}\right);

. Puntos medias: (0;-1) , (1;-2) , (2;-2);  
ortocentro (0;-4)

22) a) 3x + 4y - 15 = 0 ; 3x - 4y - 15 = 0

b) x + 2y - 9 = 0 ; x - 2y + 3 = 0

c) 4x - 3y - 32 = 0 ; 3x + 4y - 49 = 0

23) a) 1 b) \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{9}}{2}\right) , \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{9}}{2}\right) , (-1;0) , \left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{9}}{2}\right) ,

$$\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{9}}{2}\right) \quad \text{c) } 9 \quad \text{d) } 5$$

$$\boxed{24} \quad (x-3)^2 + (y-1,5)^2 = 2,25 \quad \boxed{25} \quad x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0$$

### Epigrafe E

$$\boxed{1} \quad \text{a) } (y-2)^2 = 16(x+1) \quad \text{b) } x^2 = -8(y-3) \quad \text{c) } y^2 = 12x$$

$$\text{d) } y^2 = 20x; \quad x^2 = 20y; \quad y^2 = -20x; \quad x^2 = -20y$$

$$\text{e) } (y-3)^2 = -8(x+2) \quad \text{f) } (x-4)^2 = -\frac{1}{2}(y+1)$$

$$\square \quad \text{a) } V(0; 0); F(5; 0); C \quad x + 5 = 0$$

$$\text{b) } V(0; 0); F(0; -\frac{3}{4}); \ell: y = \frac{3}{4}$$

$$\text{c) } V(0; 3); F(2; 3); \ell: x = -2$$

$$\text{d) } V(3; 3); F(3; 2); \ell: y - 4 = 0$$

$$\text{e) } V(-3; 0); F(-3; \frac{1}{3}); \ell: 3y + 1 = 0$$

$$\text{f) } V(4; 0); F(6; 0); \ell: x - 2 = 0$$

g) No es un parábola.

$$\text{h) } V\left(\frac{5}{2}; -\frac{10}{4}\right); F\left(\frac{5}{2}; -4\right); \ell: y = -\frac{11}{2}$$

$$\boxed{3} \quad x^2 = -12y$$

$$\boxed{4} \quad y^2 = 8(x-3)$$

$$\boxed{5} \quad d(P; F) = 12$$

$$\boxed{6} \quad (y+2)^2 = -4(x+1)$$

$$\boxed{7} \quad \text{a) } (y+1)^2 = 8(x-2) \quad \text{b) } \ell: x = 0$$

$$\boxed{8} \quad y = \frac{12}{35}x - \frac{72}{35}$$

$$\boxed{9} \quad \text{a) } (5; 5) \quad \text{b) } (0; 6), (-1; 4) \quad \text{c) } (1; 4) \quad \text{d) } \left[-\frac{9}{2}; \frac{1}{4}\right],$$

$$\left[-\frac{16}{3}; \frac{1}{9}\right] \quad \text{e) } \text{No tienen.} \quad \text{f) } (0; 0,25), \left[\frac{1}{9}; 0,75\right]$$

$$\boxed{10} \quad \text{a) } (4; 4), (4; -4) \quad \text{b) } (4; 9), (4; 3), (-2; 3)$$

$$\text{c) } (0,36; -0,23), (-2,36; -0,23)$$

$$\text{d) } \text{No existen.} \quad \text{e) } (4,87; 2), (-2,87; 2)$$

$$\boxed{11} \quad (x-2)^2 + y^2 = 16 \quad \boxed{12} \quad x^2 = 5y; \quad \ell: 4y + 5 = 0$$

$$\boxed{13} \quad 9,7 \text{ u}$$

$$\boxed{14} \quad (x-3)^2 = -4(y-3)$$

$$\boxed{15} \quad x^2 + y^2 + 2xy - 12x + 4y + 20 = 0$$

### Epigrafe 3

$$\boxed{1} \quad \text{a) } \frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \quad \text{b) } \frac{(x+1)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\text{c) } \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1 \quad \text{d) } \frac{(x+4)^2}{25/4} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

$$e) \frac{(x-2)^2}{100} + \frac{(y-2)^2}{64} = 1$$

$$f) \frac{(x-3)^2}{4c^2} + \frac{(y-2)^2}{3c^2} = 1 \quad c \in \mathbb{R}, c > 0$$

$$g) \frac{x^2}{81/4} + \frac{y^2}{69/4} = 1 \quad h) \text{ No existe.}$$

$$2) a) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{49} = 1 \quad b) \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$$

$$c) \frac{(x-5)^2}{6,25} + \frac{y^2}{42,3} = 1 \quad d) \frac{(x+6)^2}{60,8} + \frac{(y+3)^2}{81} = 1$$

$$e) \frac{x^2}{64} + \frac{(y+4)^2}{100} = 1 \quad f) \frac{(x+1)^2}{3} + \frac{(y-2)^2}{\frac{25}{7}} = 1$$

$$g) \frac{x^2}{1,75} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad h) \text{ No existe.}$$

$$3) a) \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1 \quad b) \frac{(x-5)^2}{36} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$

$$c) \frac{(x-6)^2}{36} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1 \quad d) \frac{(x-4)^2}{\frac{64}{3}} + \frac{(y-8)^2}{16} = 1$$

$$e) \frac{(x-5)^2}{\frac{245}{36}} + \frac{(y-1/2)^2}{\frac{49}{4}} = 1 \quad f) \text{ No es elipse } (c > a)$$

$$4) a) O(0;0); a = 5; b = \frac{5}{2}; c = 4,33; e = 0,866;$$

$$A_1(-5;0); A_2(5;0); B_1(0;\frac{5}{2}); B_2(0;-\frac{5}{2});$$

$$F_1(-4,33;0); F_2(4,33;0)$$

$$b) O(-1;1); a = 3; b = 2; c = 2,24; e = 0,747;$$

$$A_1(-4;1); A_2(2;1); B_1(-1;3); B_2(-1;-1);$$

$$F_1(-3,24;1); F_2(1,24;1)$$

$$c) O(-2;0); a = 6,32; b = 3,16; c = 5,48;$$

$$e = 0,866; A_1(-8,32;0); A_2(4,32;0); B_1(-2;3,16);$$

$$B_2(-2; -3,16); F_1(-7,48;0); F_2(3,48;0)$$

$$d) O(-3;\frac{1}{2}); a = 2\sqrt{5}; b = 3,16; c = 3,16;$$

$$e = 0,707; A_1(-7,48;\frac{1}{2}); A_2(1,48;\frac{1}{2}); B_1(-3;3,66);$$

$$B_2(-3; -2,66); F_1(-6,16;\frac{1}{2}); F_2(0,16;\frac{1}{2})$$

$$e) O(0; -1); a = 3,46; b = 2; c = 2,83; e = 0,818;$$

$$A_1(0;2,46); A_2(0;-4,46); B_1(2;-1); B_2(-2;-1);$$

$$F_1(0;1,83); F_2(0;-3,83)$$

$$f) O(-2; -1); a = 4,23; b = 2,83; c = 3,16;$$

$$e = 0,747; A_1(-2;3,23); A_2(-2;-5,23); B_1(0,83;-1);$$

$$B_2(-4,83;-1) ; F_1(-2;2,16) ; F_2(-2;-4,16)$$

g) No es una elipse.

h)  $O(4;-1) ; a = 1,73 ; b = 1,41 ; c = 1 ; e = 0,577 ;$

$$A_1(2,27;-1) ; A_2(5,73;-1) ; B_1(4;0,41) ; B_2(4;-2,41) ;$$

$$F_1(3;-1) ; F_2(5;-1)$$

i) No se pueden determinar.

[6] a)  $\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{7} = 1$       b)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

c)  $\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{36} = 1$

[7] a)  $(-3;\pm 1,6) ; (1;\pm 1,96) ; (2;\pm 1,83)$

b)  $(0;2) ; (\pm 4,33; 1) ; (\pm 4,33;-1)$

[8] Pertenecen  $C_1$  y  $C_6$ ; no pertenece  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  y  $C_5$

[9]  $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 4$

[10]  $A = 2b \sqrt{a^2 - b^2} u^2$

[11]  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1 ; e = 0,903$

[12]  $\frac{(x-1)^2}{45} + \frac{(y-2)^2}{20} = 1$

[13]  $\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

[14] a) No tienen.      b)  $(0;-2) ; (3;0)$       c)  $\left(-\frac{36}{7}; \frac{13}{7}\right)$

d) No tienen.      e)  $(0;0) ; (4;3)$       f)  $(0;2) ; (2;3)$

g)  $(3,6;-3,2)$       h)  $(7,6;-1,2)$       i)  $(0;2) ; (4;5)$

[15] Tangente:  $(n = \pm 5)$ ; exterior:  $(n > 5 \text{ ó } n < -5)$  ;

secante:  $(-5 < n < 5)$

[16]  $\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{3} = 1$

[17]  $e = 8,50 \cdot 10^{-2}$

[18] a)  $(2;\pm 3)$       b)  $(3;\pm 1) ; (-3;\pm 1)$

c)  $(1,49;\pm 1,49) ; (-1,49;\pm 1,49)$       d)  $(3;\pm 1,73)$

#### Epigrafe 4

[1] a)  $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1$

b)  $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

c)  $\frac{x^2}{119} - \frac{y^2}{25} = 1$

d)  $\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{20} = 1$

e)  $\frac{(x+5)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{25/16} = 1$

f)  $\frac{x^2}{9} - \frac{(y+5)^2}{16} = 1$

g)  $7x^2 - 9y^2 = 225$

h)  $12(x+4)^2 - 16(y-1)^2 = 75$

[2] a)  $\frac{y^2}{81} - \frac{x^2}{16} = 1$

b)  $\frac{(y-2)^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$

$$c) \frac{y^2}{25} - \frac{(x-3)^2}{11} = 1$$

$$d) \frac{(y+3)^2}{64} - \frac{(x+1)^2}{1024/9} = 1$$

$$e) \frac{(y-8)^2}{100} - \frac{(x+4)^2}{100} = 1$$

$$f) \frac{(y+7)^2}{81} - \frac{x^2}{144} = 1$$

g) No existe.

$$h) \frac{(y-1)^2}{0,5} - \frac{(x+5)^2}{1,5} = 1$$

$$\boxed{3} \quad a) \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{21} = 1$$

$$b) \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

$$c) \frac{(y+5)^2}{4} - \frac{(x-4)^2}{5} = 1$$

$$d) \frac{(x+5/2)^2}{49/4} - \frac{(y-3)^2}{18} = 1$$

$$e) \frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{32} = 1$$

$$f) \frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{2} = 1$$

g) No existe.

$$h) \frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{6,25} = 1$$

$$\boxed{4} \quad a) a = 5 ; b = \frac{5}{3} ; c = 5,27 ; O(0; 0) ; A_1(-5; 0) ;$$

$$A_2(5; 0) ; F_1(-5,27; 0) ; F_2(5,27; 0) ; e = 1,05$$

$$b) a = 3 ; b = 2 ; c = 3,61 ; O(0; 0) ; A_1(0; 3) ;$$

$$A_2(0; -3) ; F_1(0; 3,61) ; F_2(0; -3,61) ; e = 1,2$$

$$c) a = 3 ; b = 2 ; c = 3,61 ; O(-4; 2) ; A_1(-7; 2) ;$$

$$A_2(-1; 2) ; F_1(-7,61; 2) ; F_2(-0,39; 2) ; e = 1,2$$

$$d) a = 5 ; b = 2 ; c = 5,39 ; O(-3; 0) ; A_1(-3; 5) ;$$

$$A_2(-3; -5) ; F_1(-3; 5,39) ; F_2(-3; -5,39) ; e = 1,08$$

$$e) a = \frac{1}{2} ; b = 1 ; c = 1,12 ; O(0; 1) ; A_1(-\frac{1}{2}; 1) ;$$

$$A_2(\frac{1}{2}; 1) ; F_1(-1,12; 1) ; F_2(1,12; 1) ; e = 2,24$$

$$f) a = b = 1,94 ; c = 2,74 ; O(0,5; 2) ; A_1(0,5; 3,94) ;$$

$$A_2(0,5; 0,06) ; F_1(0,5; 4,74) ; F_2(0,5; -0,74) ;$$

$$e = 1,41$$

g) No se pueden determinar.

$$h) O(0; -0,5) ; a = 2,09 ; b = 1,87 ; c = 2,81 ; e = 1,34$$

$$A_1(-2,09; -0,5) ; A_2(2,09; -0,5) ; F_1(-2,81; -0,5) ;$$

$$F_2(2,81; -0,5)$$

i) No es una hipérbola.

$$j) O(-5; 0) ; a = \sqrt{8} \approx 1,73 ; 4 = 1 ; c = 2 ; e = 1,15 ;$$

$$A_1(-5; 1,73) ; A_2(-5; -1,73) ; F_1(-5; 2) ; F_2(-5; -2)$$

$$\boxed{6} \quad a) \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

$$b) \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{12} = 1$$

$$\boxed{7} \quad a) (-5; \pm 2,25) ; (8; \pm 5,19) ; (4; 0)$$

b)  $(\pm 5,64; 3)$  ;  $(\pm \frac{20}{3}; -41)$  ;  $(\pm 10,2; 7)$

- a) Pertenece. b) No pertenece. c) No pertenece.  
d) Pertenece.

9)  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$        10)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$        11)  $\frac{y^2}{7,2} - \frac{x^2}{4} = 1$

12)  $\frac{(y+5)^2}{4} - \frac{(x-4)^2}{5} = 1$  ; e = 1,5;

$2x - \sqrt{5}y - (5\sqrt{5} + 8) = 0$  y  $2x + \sqrt{5}y + 5\sqrt{5} - 8 = 0$

14)  $y = -\frac{\sqrt{5}}{20}x - \frac{\sqrt{5}}{2}$  ;  $x - 10 = 0$        15) 2,08 ; 26,1

- 16) a) (6,25; 3)      b) No tienen puntos comunes.  
c) (6; -1)      d) (-3;-5); (9;-1)  
e) (6;±2) , (-6;±2)      f) (3;±4) , (-3;±4)  
g) (4;±1) , (-4;±1)      h) (5;0) , (1;0)

17) Si a = b       19)  $\frac{(y+6)^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{48} = 1$

20)  $4x^2 - y^2 - 36 = 0$        21)  $3x^2 - y^2 - 24x + 45 = 0$

- 22) El cañón se encuentra a 0,39 km al oeste y 0,35 km al norte de C.

**Epígrafe 5**

1) a) Elipse;  $\frac{x^2}{467} + \frac{y^2}{259} = 1$       b) Hipérbola;  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

c) Parábola;  $y^2 = 10x$

d) Hipérbola;  $9216x^2 - 384y^2 = 625$

e) Elipse;  $49x^2 + 112y^2 = 4096$       f) Parábola;  $y^2 = 4x$

2) a)  $\rho = \frac{5\sqrt{3}}{6 + \sqrt{21} \cos \varphi}$  ;  $y^2 = -\frac{5\sqrt{3}}{3}x - \frac{5}{12}x^2$

b)  $\rho = \frac{4\sqrt{6}}{3 + \sqrt{15} \cos \varphi}$  ;  $y^2 = -\frac{8\sqrt{6}}{3}x + \frac{2}{3}x^2$

c)  $\rho = \frac{1}{1 + \cos \varphi}$  ;  $y^2 = -2x$

d)  $\rho = \frac{4}{3 + \sqrt{5} \cos \varphi}$  ;  $y^2 = -\frac{8}{3}x - \frac{4}{9}x^2$

e)  $\rho = \frac{9}{2 + \sqrt{13} \cos \varphi}$  ;  $y^2 = -9x + \frac{9}{4}x^2$

f)  $\rho = \frac{1}{20 + 20 \cos \varphi}$  ;  $y^2 = -\frac{1}{10}x$

- g) Es una circunferencia.

- 3** a)  $\rho = \frac{1}{1 + \cos \varphi}$  ;  $y^2 = 2x$   
 b)  $\rho = \frac{1,5}{1 + 0,5 \cos \varphi}$  ;  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  ;  $y^2 = -3x - \frac{3}{4}x^2$   
 c)  $\rho = \frac{6}{1 + 2 \cos \varphi}$  ;  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$  ;  $y^2 = -12x + 3x^2$   
 d)  $\rho = \frac{15}{1 + 12 \cos \varphi}$  ;  $20449x^2 - 143y^2 = 225$  ;  
 $y^2 = -30x + 143x^2$   
 e)  $\rho = \frac{2\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2} \cos \varphi}$  ;  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$  ;  
 $y^2 = -2\sqrt{2}x - \frac{1}{2}x^2$
- 5** a)  $\rho = \frac{9}{5 + 4 \cos \varphi}$  ;  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$   
 b)  $\rho = \frac{9}{2 + 3 \cos \varphi}$  ;  $25x^2 - 20y^2 = 324$
- 6**  $\pi ab u^2$       **7**  $\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \operatorname{sen} \theta \end{cases}$

### Ejercicios del capítulo

- 1** a)  $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 64$       b)  $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 85$   
 c)  $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 17$       d)  $(x - 6)^2 + y^2 = 72$
- 2**  $k = -8$       **3** a) 7      b) 17      c) 2
- 4**  $x + 2y - 5 = 0$       **5**  $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 38$
- 6** a)  $\frac{(x - 4)^2}{49} + \frac{(y - 6)^2}{36} = 1$       ó       $\frac{(x - 4)^2}{36} + \frac{(y - 6)^2}{49} = 1$   
 b)  $\frac{(x - 3)^2}{16} + \frac{(y - 4)^2}{7} = 1$   
 c)  $\frac{x^2}{144} + \frac{(y - 5)^2}{63} = 1$       ó       $\frac{x^2}{63} + \frac{(y - 5)^2}{144} = 1$
- 7**  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$       **8**  $d(F_1; B) = 2,6$  ;  $d(F_2; B) = 7,4$
- Se muestra que :
- $d(F_1; B) + d(F_2; B) = 2a$
- 9**  $5x + 12y + 10 = 0$  ;  $x - 2 = 0$       **10** a)  $40u^2$       b)  $13,4u^2$
- 11** a)  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$       ó       $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1$   
 b)  $\frac{(x + 4)^2}{36} - \frac{(y - 1)^2}{28} = 1$       c)  $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$

$$d) \frac{(y-3)^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$$

$$\boxed{12} \quad \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$$

$$\boxed{13} \quad e = 1,91 ; 0 \quad (2; -3) ; F_1(-1,61; -3) ; F_2(5,61; -3) ; \\ 3x - 2y - 12 = 0 ; 3x + 2y = 0$$

$$\boxed{14} \quad \frac{x^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{3,2} = 1$$

$$\boxed{15} \quad a) (y-3)^2 = -\frac{9}{2}(x-2) \quad \text{ó} \quad (x-2)^2 = -\frac{4}{3}(y-3)$$

$$b) y^2 = -12(x-3) \quad c) (y-2)^2 = 8(x-3)$$

$$d) (x-2)^2 = -12(y-1)$$

$$\boxed{16} \quad a) V(\frac{1}{2}; -2) ; F(2; -2) ; x + 1 = 0$$

$$b) V(-0,5; 1) ; F(-0,5; \frac{13}{16}) ; 16y - 19 = 0$$

$$\boxed{17} \quad (y+2)^2 = -4(x+1)$$

$$\boxed{18} \quad (x+1)^2 + (y-3)^2 = 18 \quad \boxed{19} \quad (y+1)^2 = 8(x-2)$$

Directriz:  $x = 0$

$$\boxed{20} \quad 24 \left[ x - \frac{5}{2} \right]^2 + 25(y+2)^2 = 150$$

## CAPÍTULO 4

### Epigrafe 3

- $\boxed{2}$  a) Dom:  $\mathbb{R}$  ; Im:  $(0; +\infty)$  ; ceros: no tiene ; decreciente:  $(-\infty; -1)$  ;  $(3; +\infty)$  ; creciente:  $[-1; 3]$  ; mínimo en:  $-1$  ; máximo en:  $3$  ; no es par, ni impar, ni inyectiva.
- b) Dom:  $[1; 3) \cup (3; 5]$  ; Im:  $[0,5; +\infty)$  ; ceros: no tiene ; decreciente:  $(1; 3)$  y  $(3; 5)$  ; mínimo en:  $5$  ; máximo no tiene ; no es par, ni impar, es inyectiva.
- c) Dom:  $\mathbb{R}$  ; Im:  $(-\infty; 4]$  ; ceros:  $-1$  y  $6$  ; decreciente:  $(0,7; 3,1)$  y  $(3,1; +\infty)$  ; creciente:  $(-\infty; 0,7)$  y  $(0,7; 3,1)$  ; mínimo en:  $[0,7 ; 3,1)$  ; máximo en:  $3,1$  y  $(0,7; 3,1)$  ; no es par, ni impar, ni inyectiva.
- d) Dom:  $\mathbb{R}_+ \setminus \{2\}$  ; Im:  $[-1; +\infty)$  ; ceros:  $4$  ; decreciente:  $(2; 5]$  ; creciente:  $(0; 2]$  y  $[5; +\infty)$  ; mínimo en:  $5$  ; máximo en: no tiene ; no es par, ni impar, ni inyectiva.
- $\boxed{3}$  a)  $\sin(a-h) - \sin 2$  ;  $0$  ;  $\sin(2+h) - \sin 2$  ;  $\sin(2-h) - \sin 2$
- b)  $a^2 - (2h-5)a + h^2 - 5h - 14$  ;  $0$  ;  $h(h+9)$  ;  $h(h-9)$

c)  $\sqrt{a-h} - \sqrt{2}$  ; 0 ;  $\sqrt{2+h} - \sqrt{2}$  ;  $\sqrt{2-h} - \sqrt{2}$  ; ( $a-h \geq 0$  ;  $2+h > 0$  ;  $2-h > 0$ )

d)  $\log \frac{a-h}{2}$  ; 0 ;  $\log \left(1 + \frac{h}{2}\right)$  ;  $\log \left(1 - \frac{h}{2}\right)$  ; ( $a-h \geq 0$  ;  $2+h > 0$  ;  $2-h > 0$ )

- 4) a) Impar    b) Par    c) Ni par, ni impar.  
 d) Ni par, ni impar.    e) Par    f) Par    g) Par  
 h) Ni par, ni impar.

5) a)  $A(x) = x(41 - x)$  ;  $0 < x < 41$     b) 20,5

6) a)  $A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 + \left(\frac{a-3x}{4}\right)^2$  ;  $0 < x < \frac{a}{3}$     b) 0,188a

7) a)  $A(x) = x\sqrt{4-x^2}$  ;  $0 < x < 2$     b)  $\sqrt{2} \approx 1,41$

- 8) a) No; 0 a Dom g    b) No; Dom y =  $(0; +\infty) \neq$  Dom A =  $\mathbb{R}^*$   
 c) No;  $f(x) \neq g(x)$     d) No;  $f(x) = |x| \neq x$

9) a) Dom:  $\mathbb{R}$ ; 1747;  $-\frac{2}{39} \approx 5,13 \cdot 10^{-2}$     b) Dom:  $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$

c) Dom:  $\mathbb{R}$     d) Dom:  $\mathbb{R} \setminus \{0; 4,79; 0,209\}$

e) Dom:  $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ ;  $\frac{1}{7} \approx 0,143$  ;  $\frac{7}{9} \approx 0,778$

f)  $\mathbb{D} \quad \mathbb{R} \setminus \left\{0; 3; -\frac{1}{2}\right\}$  ;  $\frac{3}{20} = 0,15$

g) Dom:  $\mathbb{R} \setminus \{-5; -2\}$

h) Dom:  $(-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$  ; 0,821 ;  $\sqrt{15} \approx 3,87$

i) Dom:  $(-\infty; -1,32] \cup [5,32; +\infty)$  ; no definido

j) Dom:  $(-\infty; -1,29) \cup [-0,549; 1,22] \cup [1,29; +\infty)$

k) Dom:  $[-1; 2) \cup [4; +\infty)$     l) Dom:  $[3; +\infty) \setminus \{3,45\}$

m) Dom:  $[1; 4]$     n) Dom:  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$ ;  $-\frac{\sqrt{3} + 3}{2} \approx -2,37$

o) Dom:  $\left\{\frac{n}{2k}, n \in \mathbb{Z}\right\}$

p) Dom:  $\mathbb{R} \setminus \left\{0,667 + 2k\pi; 2,48 + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$

q) Dom:  $\left\{x : k\pi \leq x < k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$

r) Dom:  $\left\{\mathbb{R} \setminus 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$

10) a) Dom:  $\mathbb{R} \setminus \{2,62; 0,382\}$     b) Dom:  $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right\}$

c) Dom:  $\mathbb{R} \setminus \left\{-1; 1; 3; \frac{1}{2}\right\}$     d) Dom:  $\mathbb{R} \setminus \{1; -1\}$  ; 0,624

e) Dom:  $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$  ; 0,567; -1,26

- f) Dom:  $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$  ; no definida.  
 g) Dom:  $[1, 54; +\infty)$   
 h) Dom:  $(-\infty; -2, 25) \cup (-1, 53; 0, 13) \cup (2, 25; +\infty)$   
 i)  $\emptyset$       j) Dom:  $(-\infty; -3) \cup (5; +\infty)$   
 k) Dom:  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$   
 l) Dom:  $\left\{ x \in \mathbb{R}; 2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$   
 m) Dom:  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$  ;  $\sqrt{\frac{2}{4}} \approx 3,53 \cdot 10^{-1}$   
 n) Dom:  $[-1; 1]$  ;  $0,939$       ñ) Dom:  $\mathbb{R}$  ;  $10,1$   
 o) Dom:  $(-1; 1)$  ; no definida.    p) Dom:  $\mathbb{R}^*$  ; no definida.  
 q) Dom:  $\mathbb{R}$

- 11** a)  $x \leq 0$  ;  $x = 1$     b)  $x \leq -3$   
 c)  $x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}; \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \right\}$     d)  $2 \leq x \leq 5$   
 e)  $x \in \left\{ k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}$  ;  $0,300$   
 f)  $x \in \left\{ k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right\}$  ;  $0,932$   
 g)  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$  ;  $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$  ; no definida.  
 h)  $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$  ;  $k \in \mathbb{Z}$  ;  $-7,55$     i)  $x < \sqrt{5}$  ;  $1 + \sqrt{7} \approx 3,65$   
 j)  $x < -3$  ;  $3,56$  ;  $-0,562$

- 12** a) Im:  $\left[ \frac{3}{4}; +\infty \right]$  ; no tiene ceros.  
 b) Im:  $[-5; +\infty]$  ; ceros:  $\pm\sqrt{5} \approx \pm 2,24$   
 c) Im:  $\mathbb{R}$  ; ceros:  $-\frac{3}{2} = -1,5$   
 d) Im:  $(-\infty; -2\sqrt{2}) \cup [2\sqrt{2}; +\infty)$  ; ceros: no tiene.  
 e) Im:  $[-2, 125; +\infty)$  ; ceros:  $0,281$  ;  $-1,78$   
 f) Im:  $\mathbb{R}$  ; ceros:  $\frac{4}{3} \approx 1,33$   
 g) Im:  $\mathbb{R}^*$  ; ceros: no tiene.  
 h) Im:  $\{1\}$  ; ceros: no tiene  
 i) Im:  $[4; +\infty)$  ; ceros: no tiene.  
 j) Im:  $\mathbb{R}_+$  ; ceros:  $-0,55$  ;  $-5,45$   
 k) Im:  $y \geq 1$  ; No tiene ceros.  
 l) Im:  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  ; ceros:  $-5$     m) Im:  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  ; ceros:  $3$   
 n) Im:  $\mathbb{R}$  ; ceros:  $\frac{7}{3} \approx 2,33$

- fi) Im:  $[-5; 13]$  ; ceros:  $0,365 + 2k\pi$  ;  $1,21 + 2k\pi$  ;  $k \in \mathbb{Z}$   
 o) Im:  $[-4; 6]$  ; ceras:  $\pm 1,77 + 2k\pi$  ;  $k \in \mathbb{Z}$   
 p) Im:  $\mathbb{R}^*$  ; ceras: no tiene  
 q) Im:  $\mathbb{R}_-$  ; ceros:  $(4k+1)\frac{\pi}{2}$  ;  $k \in \mathbb{Z}$

### Epigrafe 2

**1** a)  $(f+g)(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + x$  ;  $(f-g)(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - x$  ;  
 $(f \circ g)(x) = 1 + \frac{x}{x+1}$  ; Dom:  $(f \circ g) = \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$  ;

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x(x+1)}$$

b)  $(f+g)(x) = \frac{1}{x}$  ; Dom  $(f+g) = \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$  ;

$$(f-g)(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} ; (f \circ g)(x) = \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2} ;$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{1}{x} ; \text{Dom } \frac{f}{g} = \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$$

c)  $(f+g)(x) = 3\sqrt{x+1}$  ;  $(f-g)(x) = -\sqrt{x+1}$  ;

$$(f \circ g)(x) = 2(x+1) ; \text{Dom } (f \circ g) = [-1; +\infty) ;$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{1}{2} ; \text{Dom } \frac{f}{g} = (-1; +\infty)$$

d) No existen pues  $\text{Dom } f \cap \text{Dom } g = \emptyset$

e)  $(f+g)(x) = \text{sen}2x + \text{tan}x$  ;  $(f-g)(x) = \text{sen}2x - \text{tan}x$  ;

$$(f \circ g)(x) = 2\text{sen}^2x ; \text{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z} \right\} ;$$

$$\frac{f}{g}(x) = 2\cos^2x ; \text{Dom } \frac{f}{g} = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

f)  $(f+g)(x) = |x| + \cos x$  ;  $(f-g)(x) = |x| - \cos x$  ;

$$(f \circ g)(x) = |x| \cdot \cos x ; \frac{f}{g}(x) = \frac{|x|}{\cos x} \text{ Dom: } \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$$

g)  $(f+g)(x) = 1,1 \cdot 10^x$  ;  $(f-g)(x) = -0,9 \cdot 10^x$  ;

$$(f \circ g)(x) = 10^{2x-1} ; \frac{f}{g}(x) = 10^{-1}$$

h)  $(f+g)(x) = |x+1| + (x+1)$  ;  $(f-g)(x) = |x+1| - (x+1)$  ;

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si } x \geq -1 \\ -(x+1)^2 & \text{si } x < -1 \end{cases} ; \frac{f}{g}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > -1 \\ -1 & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

i)  $(f+g)(x) = x^2 + 7x + 1 - \frac{x+1}{x^2-x+1}$  ;

$$(f-g)(x) = x^2 + 7x + 1 - \frac{x+1}{x^2-x+1} ;$$

$$(f \circ g)(x) = \frac{(x^2 + 7x + 1)(x+1)}{x^2-x+1} ;$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{(x + 7x + 1)(x^2 - x + 1)}{x + 1}$$

$$j) (f \pm g)(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 3x + 2} \pm \frac{x^2 + 1}{x - 2};$$

$$(f \circ g)(x) = \frac{(x + 2)(x^2 + 1)}{(x - 1)(x - 2)^2};$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x^2 + 1)(x - 1)(x - 2)}$$

$$k) (f \pm g)(x) = \frac{x^2 + 3}{x^3 - 5x^2 + 6x} \pm \frac{x}{x + 1};$$

$$(f \circ g)(x) = \frac{x^2 + 3}{(x - 3)(x + 1)(x - 2)};$$

$$\text{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R} \setminus \{0; 3; 2; -1\};$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{(x^2 + 3)(x - 1)}{(x - 3)(x - 2)}; \text{Dom} \frac{f}{g} = \mathbb{R} \setminus \{0; 3; 2; -1\}$$

$$l) (f + g)(x) = \frac{2(x^2 + 2)}{(x - 1)(x + 1)(x + 2)};$$

$$(f - g)(x) = \frac{2x}{(x - 1)(x + 1)(x + 2)};$$

$$(f \circ g)(x) = \frac{x - 2}{(x - 1)(x + 1)(x + 2)};$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{(x + 2)(x - 1)}{(x + 1)(x - 2)}; \text{Dom} \frac{f}{g} = \mathbb{R} \setminus \{1; -1; 2; -2\}$$

$$\boxed{2} \text{ a) } (f \circ g)(x) = \frac{2(x^4 + 2x + 1)^3 + 1}{(x^4 + 2x + 1)^2};$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{(2x^3 + 1)^4 + 2x^6(2x^3 + 1) + x^9}{x^9}$$

$$b) (f \circ g)(x) = \log \sqrt{\sin x}; (g \circ f)(x) = \sqrt{\sin(\log x)}$$

$$c) (f \circ g)(x) = \sqrt{x}; (g \circ f)(x) = \sqrt{|x|}$$

$$d) (f \circ g)(x) = \sin^2 \sqrt{x - 1}; (g \circ f)(x) = 0; x \in \left\{ \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$e) (f \circ g)(x) = (x + 5)^2; (g \circ f)(x) = x^2 + 5$$

$$f) (f \circ g)(x) = 10^{-\sin^2 x}; (g \circ f)(x) = \cos^2 10^{x-1}$$

$$g) (f \circ g)(x) = |\cos 2x|; (g \circ f)(x) = \sin 2\sqrt{1 - x^2}$$

$$h) (f \circ g)(x) = 2 \frac{2x - 1}{1 - x}; (g \circ f)(x) = \frac{x - 2}{4 - x}$$

$$i) (f \circ g)(x) = \log \sqrt{x^2 - 1}; (g \circ f)(x) = \sqrt{(\log x)^2 - 1}$$

- 4) a) 4   b) -1   c) 3   d)  $\frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2,12$    e) 3   f) 4  
 g)  $\sqrt{2} \approx 1,41$    h) No existe.   i)  $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$    j) 1,25  
 k) 0,866   l) 2,48   m) 0,755   n) No existe.   ñ) 1,8  
 o) 1,19   p) 0,693   q) 1,25

#### Epígrafe 4

- 1) a) 9   b) 0,75   c) No existe.   d) 0   e)  $4,66 \cdot 10^{-2}$   
 f) -0,328   g)  $\frac{3(1+\sqrt{3})}{5} \approx 1,64$    h) No existe.  
 i)  $\frac{96}{11} \approx 8,73$    j) No existe.
- 2) a) 0   b) -1   c)  $\sqrt{5} \approx 2,24$    d) 0   e) 0   f) 0  
 g) No existe.   h) 6,80   i) 1 (epígrafe 5)   j) No existe.  
 k) -0,301   l) No existe.   m) -1   n) 6
- 3) a) 0,842   b)  $\frac{2\sqrt{35}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{7} \approx 5,32$    c) 12,0   d) 0,754  
 e)  $(3-2\sqrt{3})^2 \approx -0,071$  f) No existe.   g)  $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2 \approx 7,88$   
 h) 1   i)  $\frac{7}{5}$    j) No existe.   k) 1   l) 1   m) 0  
 n)  $\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{2} \approx 0,127$    ñ) 0   o) No existe.  
 p)  $\frac{2}{\pi} \approx 0,637$  (epígrafe 5)   q) No existe.   r) 0

#### Epígrafe 5

- 1) a)  $e^{3/2} \approx 4,49$    b) 6   c)  $e^3 \approx 20,1$    d)  $e^{-5} \approx 6,74 \cdot 10^{-3}$   
 e)  $\frac{5}{3} \approx 1,67$    f)  $\frac{1}{3} \approx 0,333$    g) 1   h)  $e^{-1/5} \approx 0,819$   
 i)  $e^{2/3} \approx 1,95$    j)  $\sqrt{2}e^{-1/2} \approx 0,858$
- 2) a) 3   b)  $\frac{1}{\sin 1} \approx 1,19$    c) 5   d)  $\frac{1}{2} = 0,5$    e) 0  
 f)  $e^{-3} \approx 4,98 \cdot 10^{-2}$    g) 1   h) 1   i) 0   j)  $e \approx 2,72$   
 k)  $e^{-1} \approx 0,368$    l)  $\frac{1}{\log_a e}$

- 4)  $3\sqrt{2} \approx 4,24$    ó    $3(1+\sqrt{2}) \approx 7,24$  según cada parte sea un cateto o la hipotenusa.

- 5) 4

#### Epígrafe 6

- 1) a) 2,73   b)  $1,48 \cdot 10^3$    c) -1,88   d) 1,96   e) 2,51

f) 5,03    g) 4,27    h) 1,03    i)  $2,87 \cdot 10^{18}$

2) a) 0    b) No tiene solución.    c) 0    d) 2,45 ; 0,019  
e) 0    f) 0,24

3) a)  $e^2 \approx 7,39$     b)  $\ln 3 \approx 1,10$     c) 5,98    d) -2,16  
e) 31,4    f)  $e^4 \ln 2 \approx 37,8$     g)  $e^{2\sqrt{9}} - \ln 4 \approx 30,6$   
h)  $\ln 3 - 3 \approx -1,90$

### Epígrafe 7

1) a) Continua.    b) Continua para todo  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

a) Discontinua.    b) Discontinua.    c) Continua si  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

a) No; no es posible,    b) No; no es posible.

c) Sí;  $y(0)=1$     d) Sí;  $y(0) = 1$

e) No; no es posible.    f) No; no es posible,

4) a) 23    b) 5    c)  $\frac{8}{23} \approx 0,345$     d) -1    e) No existe.  
f) No existe.

5) a)  $\ln 7 \approx 1,95$     b)  $e^{-1/4} \approx 0,779$     c) No existe.

d)  $\ln 2 \approx 0,693$     e)  $e^9 \operatorname{sen} \sqrt{17} \approx 905$     f) No existe.

f)  $\ln 3 \approx 1,10$     g)  $e^{51} \approx 1,21 \cdot 10^{22}$     h)  $\operatorname{sen} \sqrt{2} \approx 0,988$

i)  $\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 1 \approx -1,05$

6\*) a) 1    b)  $\frac{\operatorname{sen} 20}{20} \approx 4,57 \cdot 10^{-2}$     c)  $\sqrt{\frac{2}{8}} \approx 0,177$     d)  $\frac{1}{2}$   
e)  $\frac{1}{2}$     f) 1    g) No existe.    h) No existe.

7) a)  $A(x) = \begin{cases} 3x & 0 \leq x \leq 1 \\ 3 & 1 \leq x \leq 2 \\ 2x-1 & 2 \leq x \leq 3 \\ 5 & 3 \leq x \leq 4 \\ 1+x & 4 \leq x \leq 5 \end{cases}$     b) Es continua.

### Epígrafe 8

1) a) Cero: 0 ; polos:  $\pm 1$ ; A:  $x = \pm 1$

b) Ceros: 2; 35; -0,851 ; polos: no tiene; A: no tiene.

c) Ceros: 4,79; -0,209 ; polos:  $\frac{7}{3} \approx 2,33$  ; A:  $x = \frac{7}{3}$

d) Ceros: no tiene; polos: 1; 1,79; -2,79; A:  $x = 1$ ;  
 $x = 1,79$ ;  $x = -2,79$ .

e) Ceros: no tiene; polos: -1; A:  $x = -1$

f) Ceros: 2; -1 ; polos:  $\pm 3$  ; A:  $x = \pm 3$

g) Ceros: 1 ; polo: -2; A:  $x = -2$

- h) Ceros:  $-2$  ; polos: no tiene ; A: no tiene.  
 i) Ceros:  $10$  ; polos:  $-2; 19,8; 2,33$ ; A:  $x = -2$  ;  
 $x = 19,8$  ;  $x = 2,33$ .  
 j) Ceros:  $-\frac{5}{3} \approx -1,67$  ; polos:  $-\frac{7}{2} = -3,5$ ; A:  $x = -3,5$   
 k) Ceros: no tiene; polos: no tiene; A: no tiene.  
 l) Ceros:  $\pm 4$ ; polos: no tiene; A: no tiene.  
 m) Ceros:  $\pm 1$ ; polos: no tiene; A: no tiene.  
 n) Ceros: no tiene; polos: no tiene; A: no tiene.  
 ñ) Ceros:  $1,5$  ; polos: no tiene; A: no tiene.  
 o) Ceros:  $2; 1,5$  ; polos: no tiene; A: no tiene.  
 p) Ceros:  $-4; -1$  ; polos: no tiene; A: no tiene.  
 q) Ceros:  $(4k+3)\frac{\pi}{2}$ ; polos: no tiene; A: no tiene.  
 r) Ceros:  $3$  ; polos: no tiene; A: no tiene.  
 s) Ceros:  $0,387; -1,72$  ; polos:  $-2$  ; A:  $x = -2$ .  
 t) Ceros:  $5$  ; polos:  $-3$  ; A:  $x = -3$ .  
 u) Ceros: no tiene ; polos:  $(2k+1)\pi$  ; A:  $x = (2k+1)\pi$ .  
 v) Ceros: no tiene; polos: no tiene; A: no tiene.

[2]

- |  |  |
|--|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ ; A: $y = 0$           | b) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 2$ ; A: $y = 2$                     |
| c) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$ ; A: no tiene. | d) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ ; A: $y = 0$                     |
| e) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$ ; A: no tiene. | f) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ ; A: $y = 0$                     |
| g) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$ ; A: $y = 1$           | h) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ ; A: $y = 0$                     |
| i) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$ ; A: $y = 1$           | j) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \frac{3}{2}$ ; A: $y = \frac{3}{2}$ |
| k) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$ ; A: $y = 1$           | l) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ ; A: $y = 0$                     |
| m) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$ ; A: $y = 1$           | n) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = +\infty$ ; A: no tiene.             |
| ñ) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ ; A: $y = 0$           | o) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = +\infty$ ; A: no tiene.             |
| p) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$ ; A: $y = 1$           | q) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y$ no existe;<br>A: no tiene,           |
| r) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$ ; A: no tiene. | s) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$ ; A: no tiene.           |
| t) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$ ; A: $y = 1$           | u) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y$ no existe;<br>A: no tiene.           |
| v) $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$ ; A: no tiene. |  |

## Ejercicios del capítulo

Los alumnos que no han estudiado el epígrafe  $\theta$  no tienen que contestar las 5 preguntas relativas a los límites infinitos y las asíntotas. Cuando en la respuesta aparece un límite infinito entenderán que no existe el límite.

- 1) a) Dom:  $\mathbb{R}$  ; Im:  $\mathbb{R}$  ; ni par, ni impar ;  
ceros:  $-\frac{5}{3} \approx -1,67$  ; inversa:  $y = \frac{x-5}{3}$  ; no tiene polos ni asíntotas.
- b) Dom:  $\mathbb{R}$  ; Im:  $[1; +\infty)$  ; par ; ceros: no tiene ; inversa: no tiene ; no tiene polos ni asíntotas.
- c) Dom:  $\mathbb{R}$  ; Im:  $(-\infty; \frac{3}{2}]$  ; par ; ceros:  $\pm \frac{\sqrt{3}}{2} \approx \pm 0,866$  ; inversa: no tiene ; no tiene polos ni asíntotas.
- d) Dom:  $\mathbb{R}$  ; Im:  $\mathbb{R}$  ; ni par, ni impar ; ceros:  $\sqrt[3]{-3} \approx -1,44$  ; inversa:  $y = \sqrt[3]{x-3}$  ; no tiene polos ni asíntotas.
- e) Dom:  $\mathbb{R}$  ; Im:  $[-2; 2]$  ; ni par ni impar ;  
ceros:  $\frac{2\pi}{3} + k\pi$  ; no tiene inversa ; no tiene polos ni asíntotas.
- f) Dom:  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  ; Im:  $\mathbb{R}$  ; ni par, ni impar ; ceros: 2 ; -1 ; inversa: no tiene ; polos: 1 ; asíntotas:  $x = 1$  ;  $y = 0$
- g) Dom:  $\mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$  ; Im:  $\mathbb{R}_+^* \cup (-\infty; -\frac{1}{3}]$  ; ni , ar, ni impar ;  
ceros: no tiene ; inversa: no tiene ; polos:  $\pm 3$  ;  
asíntotas:  $x = \pm 3$  ;  $y = 0$
- h) Dom:  $\mathbb{R}$  ; Im:  $[-1; 1]$  ; impar ; ceros:  $\frac{k\pi}{2}$  ; inversa: no tiene ; no tiene polos ni asíntotas.
- i) Dom:  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \pm 2 \right\}$  ; Im:  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  ; ni par ni impar ;  
ceros:  $\sqrt[3]{-\frac{3}{2}} \approx -1,15$  ; inversa:  $y = \sqrt[3]{\frac{2x-3}{2-x}}$   
polos:  $\sqrt[3]{-2} \approx -1,26$  ; asíntotas:  $x = \sqrt[3]{-2}$  ;  $y = 2$
- j) Dom:  $\mathbb{R}$  ; Im:  $(1; +\infty)$  ; ni par, ni impar ; ceros: no tiene ; inversa:  $y = \ln \frac{x-1}{2}$  ; polos: no tiene ; asíntota:  $y = 1$
- k) Dom:  $\mathbb{R}_+^*$  ; Im:  $\mathbb{R}$  ; ni par, ni impar ; ceros: 0,135 ;

- inversa:  $y = e^{x-2}$ ; polos: no tiene; asíntota:  $x = 0$
- l) Dom:  $(1; +\infty)$ ; Im:  $\mathbb{R}$ ; ni par, ni impar; ceros: 0 ;  
inversa:  $y = e^x - 1$ ; polos: no tiene; asíntota:  $x = 1$
- m) Dom:  $\mathbb{R}$ ; Im:  $[-0,779; +\infty)$ ; ni par, ni impar, ceros: no  
tiene; inversa: no tiene; no tiene polos ni asínto-  
totas,
- n) Dom:  $\mathbb{R}$ ; Im:  $[-1; +\infty)$ ; par ceras:  $\pm \sqrt{5}$ ; inversa: no  
tiene; no tiene polos ni asíntotas.
- ñ) Dom:  $[1; +\infty)$ ; Im:  $\mathbb{R}_+$ ; ni par, ni impar; ceros: 1;  
inversa:  $y = x^2 + 1$  ( $x \geq 0$ ); no tiene polos ni asínto-  
tas.
- o) Dom:  $[-1; +\infty)$ ,  $x \neq 0$ ; Im:  $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$ ; ni par, ni impar;  
ceras:  $x = 3$ ; inversa:  $y = \left[ \frac{x-2}{x-1} \right]^2 - 1$ ,  $x \notin (1; 2]$ ;  
polos:  $x = 0$ ; asíntota:  $y = 1$ ;  $x = 0$
- p) Dom:  $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$ ; Im:  $\mathbb{R}^* \setminus \{1/2\}$ ; ni par, ni impar;  
ceras: no tiene; inversa:  $y = \frac{2(2x+1)}{2x-1}$  ( $x \neq 0$ );  
polos:  $x = 2$ ; asíntota:  $x = 2$
- q) Dom:  $\mathbb{R} \setminus \{5/2\}$ ; Im:  $\mathbb{R} \setminus \{1/2\}$ ; ni par, ni impar;  
ceros:  $-3$ ; inversa:  $y = \frac{5x+3}{2x-1}$ ; polos:  $\frac{5}{2}$ ,  
asíntota:  $x = \frac{5}{2}$
- r) Dom:  $[7; +\infty)$ ; Im:  $[0; 1)$ ; ni par, ni impar;  
ceros: 7; inversa:  $y = \frac{2x^2+7}{1-x^2}$  ( $0 \leq x < 1$ ); polos:  
no tiene; asíntota:  $y = 1$
- s) Dom:  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ ; Im:  $(-\infty; -\frac{2}{9}] \cup (1; +\infty)$ ; ni par, ni impar  
ceros: no tiene; inversa:  $y = \left[ \frac{\sqrt{3x+2}}{x-1} \right]^2$   $x \notin (-\frac{2}{3}; 1]$   
polos:  $x = 3$ ; asíntota:  $x = 3$
- t) Dom:  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ ; Im:  $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ ; ni par, ni  
impar; ceros:  $(2k+1)$ ;  $k \in \mathbb{Z}$ ; inversa: no tiene;  
polos: no tiene; asíntotas: no tiene.
- u) Dom:  $\mathbb{R} \setminus \left\{ 4; \frac{5}{3} \right\}$ ; Im:  $\left\{ y \in \mathbb{R}; y \neq \frac{15}{7}; y \notin \left( \frac{1}{9}; 1 \right) \right\}$ ; ni par, ni  
impar; ceros: 1;  $\frac{3}{2}$ ; inversa: no tiene.

$x \neq \left(\frac{1}{9}; 1\right)$ ,  $x \neq \frac{15}{7}$ ; polos:  $\frac{5}{3} \approx 1,67$ ; asíntota:  $x = \frac{5}{3}$

- [2] a)  $\infty$    b) 0   c)  $\frac{\sqrt{2}-2}{2}$    d) 0   e)  $-\infty$    f)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$   
 g) 2 coi, a   h) 0   i) no existe   j)  $\frac{1}{8} = 0,125$   
 k)  $-\frac{3}{2} = -1,5$    l)  $\frac{24}{5} = 4,8$    m)  $-\infty$    n) 0,181  
 ñ) 0,994   o)  $\frac{5\sqrt{2}(3+\sqrt{3})}{6} \approx 5,58$    p)  $\frac{1}{2} = 0,5$   
 q)  $e \approx 2,72$    r) no existe   s)  $-\sin a$   
 t)  $\frac{3}{2} = 1,5$    u)  $\frac{57+70\sqrt{3}}{33} \approx 5,40$    v)  $e^8 \approx 2981$   
 w)  $7,03 \cdot 10^9$    x)  $\frac{220}{81} \approx 2,72$    y)  $-\frac{1}{4a}$    z)  $\frac{7}{25} = 0,36$

[3] a) no existe   b)  $y = \cos x$    c)  $y = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$

d)  $y = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$    e)  $y = \begin{cases} \frac{\tan x - \sin x}{x^9} & x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$

f)  $y = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} & x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$

## CAPÍTULO 5

### Epígrafe 1

[1] a) 0,001   b) 0.44   c) -0,08   d) 0

[2] a) 0,21; 2,1   b) 624; 1560  
 c) 0,01; 100   d) -1; 0,000 011

[3]  $Ay = 10$ . No, para la función lineal  $y = mx + n$  se cumple  $Ay = m \cdot \Delta x$  por lo que basta conocer  $Ax$  para hallar  $Ay$ , pero para la función  $y = x^2$  se cumple  $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2$  y por tanto para calcular  $Ay$  es necesario conocer también el valor de  $x$ .

[4] a) 2   b) -3   c)  $\frac{1}{2}$    d) m

[5] Rectas. El valor de la pendiente no depende del punto seleccionado, pues la pendiente de una recta es la misma en todos sus puntos.

6) a) 0 b) No existe. c) -2 d) No existe. e) 3 f) 5

7) Si. El valor del  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  depende de  $x_0$ .

8) a, b y d. Todas. 9) 2 10) 1

11) a)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  b)  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$  12)  $2x - y + 1 = 0$

13)  $P_3, P_4$  y  $P_5$

14) a)  $8x + y + 4 = 0$  b)  $3x + y - 3 = 0$  c)  $x - y + 2 = 0$

### Epígrafe 2

1) a) 4 b) -2 c) -4 d) 4 e) 4 f)  $-\frac{3}{2}$  g) 3  
h) 17 i)  $\frac{4}{9}$  j) 0,02 k)  $2a + b$

2) 5 3) -1 4) a)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  b)  $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

5)  $5x - y - 23 = 0$

6) a)  $y' = 5$  b)  $y' = A$  c)  $y' = 2x + 1$  d)  $y' = -2x$   
e)  $y' = -\frac{1}{x^2}$  f)  $y' = -\frac{A}{x^2}$  g)  $y' = 2ax + b$   
h)  $y' = 6x^5$  i)  $f'(x) = 5x^4$  j)  $y' = 9x^8$

7)  $f'(0) = -1$ ,  $f'(1)$  no existe. a) No, pues no lo es en cada punto de su dominio. b) Sí

8) a) En  $x_4$  b) -1 ; 0

9) La derivada de una función en un punto, si existe, es un número y la función derivada, si existe es una función.

10) a) (0;0) b)  $(\frac{1}{2}; \frac{1}{4})$  c) (1;0)

11) a)  $0^\circ$  b)  $88,2^\circ$  c)  $81,9^\circ$

### Epígrafe 3

1) a)  $y' = 8x^7$  b)  $y' = 54x^{17}$  c)  $y' = \frac{-6}{x^7}$

d)  $y' = \frac{-20}{x^6}$  e)  $y' = 10x^6 + 42x^6 + 20x^9$  f)  $y' = x^7 - 11$

g)  $y' = 5x^4 - 20x^9 + 18x^2$  h)  $y' = \frac{x^2 - 12x + 5}{(x-6)^2}$  i)  $y' = \frac{x^2 - 1}{2x^2}$

j)  $y' = 6x^5 + 8x^9 + 6x^2 + 2x + 2$  k)  $y' = 18x^2 + 50x - 24$

l)  $y' = 3x^2 - 6x$  m)  $f'(x) = 3x^2 - 2x + 6$  n)  $y' = 14x + 20$

ñ)  $y' = 2x$  o)  $y' = 4x^9 + 2x$  p)  $y' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$

$$\begin{array}{lll} \text{q)} y' = \frac{-2}{x^2} & \text{r)} y' = \frac{-2}{x^9} & \text{s)} y' = \frac{-8x}{(x^2+3)^2} \\ \text{t)} y' = \frac{-1}{(x-2)^2} & \text{u)} y' = \frac{3}{5} & \text{v)} y' = \frac{-10x}{(1+x^2)^2} \end{array}$$

$$\text{w)} y' = \frac{-1}{(x+1)^2} \quad \text{x)} y' = \frac{-12x^5+9x^4-4x^2-28x+7}{(3x^4-2x-7)^2}$$

$$\text{y)} y' = \frac{-2-2x^2}{(1-x^2)^2} \quad \text{z)} y' = \frac{-3x^2+8x-12}{(x^2-4)^2}$$

$$\boxed{2} \text{ a)} y' = 9x^2 - 4x + 5; 18 \quad \text{b)} y' = 2\sqrt{2x} + \sqrt{3}$$

$$\text{c)} y' = \frac{1}{2}x^9 - 6x^2 + 7 \quad \text{d)} y' = 8x - \frac{2}{5}; 10$$

$$\text{e)} y' = -10x + \frac{5}{6}x^4 + \frac{14}{3}x^6 \quad \text{f)} y' = 20x^9 + 5x^4 - 2x; -0,2$$

$$\text{g)} y' = \frac{2x}{(3x-x^2)^2}; \frac{27}{49} \quad \text{h)} y' = \frac{2}{x^2}; 8$$

$$\text{i)} y' = \frac{x^2+12x}{(x+6)^2} \quad \text{j)} y' = \frac{-3x^2+4x+8}{(x^2-5x+6)^2}; \frac{9}{4}$$

$$\text{k)} y' = \frac{ax^4+2ax^3-51ax^2}{(x^2+x-17)^2} \quad \text{l)} y' = \frac{acx^2+2adx}{(bx^2+cx+d)^2}$$

$$\boxed{3} \quad x = 0, x = 3 \quad \boxed{4} \quad g'(x) = 20x - 12$$

$$\boxed{5} \quad g'(x) = 6x^2 + 10x + 2 \quad \boxed{7} \quad f'(x) = 2, g'(x) = 2$$

$\boxed{8}$  b)  $c=1$  c) Las funciones se diferencian en una constante.

$$\boxed{9} \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \boxed{10} \quad f'(x) = \frac{-2x-5}{(x^2+5x+6)^2}$$

$$\boxed{11} \quad y' = \frac{-f'(x)-g'(x)}{(f(x)+g(x))^2}$$

$$\boxed{12} \text{ a)} f(x) = x^9 \quad \text{b)} f(x) = x^9 + 2 \quad \text{c)} f(x) = x^4 + \frac{1}{5}x^9$$

$$\text{d)} f(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{5}x^5 + x^2 - 3 \quad \text{e)} f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^4} + 1$$

$$\text{f)} f(x) = x^4 + 2x^3 - 5x + 4 \quad (x \neq 0)$$

$$\boxed{13} \text{ a)} -2 \quad \text{b)} \frac{17}{4} \quad \text{c)} -3 \quad \text{d)} \frac{19}{8} \quad \text{e)} 1 \quad \text{f)} -7$$

$$\boxed{14} \text{ a)} 2x + y - 5 = 0 \quad \text{b)} 17x - 4y - 16 = 0$$

$$\text{c)} 3x + y - 8 = 0 \quad \text{d)} 38x - 16y - 58 = 0$$

$$\text{e)} x - y - 1 = 0 \quad \text{f)} 7x + y + 43 = 0$$

$$\boxed{15} \text{ a)} y'' = 96x^2 \quad \text{b)} y'' = 30x^4 + 14$$

$$c) y'' = \frac{-8}{(x+2)^3}$$

$$d) f''(t) = 0$$

$$e) g''(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2$$

$$f) y'' = 12x^2 + 2$$

$$g) y'' = \frac{2}{x^3} - \frac{6}{x^4}$$

$$h) h''(r) = \frac{4}{(1+r)^3}$$

$$16) g'' = f''g + 2f'g' + fg''$$

$$18) a) y''' = 720x^2 - 18x \quad b) y^{(4)} = \frac{24}{x^5} \quad c) y^{(6)} = \frac{2160}{x^7}$$

$$19) n = 18$$

$$20) a) f(x) = x^2 - 7x + 12$$

$$b) f(x) = x^2 + 5$$

$$c) f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 7x + 3 \quad d) f(x) = 10x^3 - 102x^2 + 355x - 403$$

$$21) 2x - 5y - 5 = 0$$

$$22) 9x + y + 18 = 0, \quad 9x - y - 9 = 0$$

$$23) y = x^2 - x + 1$$

$$24) y' = 2$$

$$25) (1; -3)$$

Epigrafe 4  $26)$  No necesariamente.  $27)$  Sí

$$1) a) y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$b) y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$c) y' = \frac{1}{\sqrt{x}} + 1$$

$$d) y' = 4x^3 + \frac{9}{2}x^3\sqrt{x}$$

$$e) y' = \frac{x}{2\sqrt{x}(x+\sqrt{x})^2}$$

$$f) y' = \frac{1+x}{2\sqrt{x}(1-x)^2}$$

$$2) a) y' = 6(2x+1)^2$$

$$b) y' = 5(3x^2 + 5x - 1)^4(6x + 5)$$

$$c) y' = -2(1-6t-t^2)(2t+6)$$

$$d) y' = 15x\left(\frac{5}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{7}{4}\right)^2(x-1)$$

$$e) y' = \frac{9}{2\sqrt{9x+4}}$$

$$f) y' = \frac{3-2x}{2\sqrt{3x-x^2}}$$

$$g) y' = \frac{-5x}{4\sqrt{16-x^2}}$$

$$h) f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$i) y' = 4\left(2x - \frac{1}{3}x^2 + x^3\right)^3 \left(2 - \frac{2}{3}x + 3x^2\right)$$

$$j) y' = 6\left(\frac{2}{5}x^5 - 0,03x^4 + 12x - x^3\right)^5 (2x^4 - 0,12x^3 + 12 - 3x^2)$$

$$k) y' = 12x(2x^2 - \frac{1}{2})^2$$

$$l) y' = \frac{12(x-1)^2}{(x+3)^4}$$

$$m) y' = \frac{2(x^2-3)(x^2-x+3)}{(x^2+3)^2}$$

$$n) y' = \frac{9x^2 - \frac{64}{3}x^3 - 5x^4}{2\sqrt{3x^3 - \frac{16}{3}x^4 - x^5}}$$

$$n) y' = \frac{6x - 6x^2}{\sqrt{3x^2 - 2x^3 + 5}}$$

$$o) y' = \frac{7}{2(x+4)^2 \sqrt{\frac{2x+1}{x+4}}}$$

$$p) y' = \frac{5 - x^2}{2(x^2+5)^2 \sqrt{\frac{x}{x^2+5}}}$$

$$q) y' = \frac{3x^2}{2(x^3+1)^2 \sqrt{\frac{x^3}{x^3+1}}}$$

3) a) 4   b) 0   c)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$    d)  $\frac{202}{384}$    e) -1,58   f) 0,904

4)  $f'(x) = 2a^2x + 2ab$

6) a)  $f''(x) = 2(2x+1)(40x^2+16x+1)$

b)  $y'' = \frac{-8x-1}{4x(2x+1)\sqrt{x(2x+1)^3}}$

7)  $y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

8)  $12x + 5y - 41 = 0$

9)  $4x + 3y - 7 = 0$

10)  $2x + 9y - 20 = 0$  ,  $2x + 9y + 20 = 0$

11)  $4x + 3y - 25 = 0$  ,  $4x + 3y + 25 = 0$

12)  $78,7^\circ$

15) a)  $0^\circ$  en  $(0;0)$  ,  $8,1^\circ$  en  $(1;1)$    b)  $40,6^\circ$    c)  $71,6^\circ$

16)  $45^\circ$

### Epígrafe 5

1) a)  $y' = 3 \cos x$

b)  $y' = -\frac{1}{3} \operatorname{sen} x$

c)  $y' = \frac{2}{3}x - 2$

d)  $y' = \frac{\sqrt{2}}{\cos^2 x}$

e)  $y' = \cos x + 3x^2$

f)  $y' = \operatorname{sen} x + \frac{\tan x}{\cos x}$

g)  $y' = \frac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{sen} x$

h)  $y' = 2 \cos x - 2$

i)  $y' = \cos x - \operatorname{sen} x$

2) a)  $y' = 2 \operatorname{sen}(5-2x)$

b)  $y' = \frac{8}{\cos^2 x}$

c)  $y' = a \cos(ax+b)$

d)  $y' = -m \operatorname{sen}(mx+n)$

e)  $y' = 9 \cos(3x+5)$

f)  $y' = 4x \cos(2x^2-3)$

g)  $y' = -\frac{x \operatorname{sen} x + \cos x}{x^2}$

h)  $y' = \sqrt{x} \left( \frac{\operatorname{sen} x}{2x} + \cos x \right)$

- i)  $y' = 3 \cos 3x + 2 \operatorname{sen} 2x$       j)  $y' = \cos t - \operatorname{sen} t$   
 k)  $y' = \frac{-1}{x^2} - \frac{4}{x^3} - 3 \cos 3x$       l)  $y' = -\operatorname{sen} 2x$   
 m)  $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \operatorname{sen} x$       n)  $y' = \frac{-2}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2}$   
 ñ)  $y' = \frac{2x \operatorname{sen} x + \cos x}{2x\sqrt{x}}$       o)  $y' = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$   
 p)  $y' = \frac{-x}{\operatorname{sen}^2 x} + \cot x$       q)  $y' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} + 4 \frac{\cot 4x}{\operatorname{sen} 4x}$   
 r)  $y' = 4 \cos 2x (1 + \operatorname{sen} 2x)$   
 s)  $y' = 3 \cos 3x \cdot \cos^2 x - \operatorname{sen} 2x \cdot \operatorname{sen} 3x$   
 t)  $y' = 4x (x^2 - 1) \cos(x^2 - 1)^2$   
 u)  $y' = (4 - x^2) \operatorname{sen} x$

3)  $y' = \tan x \cdot \sec x$

4) a)  $10$  ;  $2y - 20x - 5\pi = 0$

b)  $2$       c)  $-0,516$

d)  $0$  ;  $y = 0$       e)  $2,44$

f)  $3,98$       g)  $-0,643$

5) a)  $f(x) = -\operatorname{sen} x$

b)  $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

c)  $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x + 4$

d)  $f(x) = 5 \operatorname{sen} x$

e)  $f(x) = x^2 + \cos x - \frac{1}{x}$

f)  $f(x) = \tan x + x + 1$

7) a)  $x_1 = (2k+1)\frac{\pi}{2}$  ,  $x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$  ,  $x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

b)  $x = k \frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

8)  $x = 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

9) a)  $x - y - \pi = 0$

b)  $y = -1$

c)  $x + y - \frac{1}{\pi} = 0$

d)  $y = 4,58x - 0,231$

e)  $y = 1,8x + 0,03$

10) a)  $y'' = 4 \cos 2x$

b)  $y'' = 2 \tan x \cdot \sec^2 x$

11) a)  $y''' = 8 \operatorname{sen} 2x$

b)  $y''' = -3 \operatorname{sen} x - x \cos x$

### Epígrafe 6

1) a)  $y' = \frac{2}{x}$

b)  $y' = 4e^x$

c)  $y' = 2+e^x$

d)  $y' = \frac{x+1}{x^2}$

e)  $y' = e^x \left( \frac{1}{x} + \ln x \right)$

f)  $y' = e^x (2e^x + 1)$

g)  $y' = \frac{-\ln x}{x^2}$

2) a)  $y' = \frac{1}{x+1}$

b)  $y' = \frac{1}{x}$

c)  $y' = \frac{3}{3x+1}$

d)  $y' = \frac{6x}{3x^2+1}$

$$e) y' = \frac{10x - 1}{5x^2 - x + 1}$$

$$f) y' = \frac{2}{2x-1}$$

$$g) y' = 1 + \ln x$$

$$h) y' = \frac{\sqrt{\frac{k}{x}}}{\frac{k}{x}} \left( \frac{1}{2} \ln x + 1 \right)$$

$$i) y' = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$

$$j) y' = \frac{2}{x} \ln x$$

$$k) y' = 3x^2 \ln x$$

$$l) y' = \frac{2}{x} - \frac{1}{y^2} + \frac{\ln x - 1}{x^2}$$

$$m) y' = \frac{1}{x \ln x}$$

$$n) y' = 5x^4 + \frac{1}{x}$$

$$p) y' = \frac{1}{2} \sqrt{e^x}$$

$$o) y' = \cot x$$

$$q) y' = \cos x + \frac{1}{x} \cos \ln x + \cot x + \frac{1}{x}$$

$$r) y' = 2(1 + \ln \operatorname{sen} x) \cot x$$

$$\boxed{3} \quad a) y' = e^x + 2e^{2x}$$

$$b) y' = e^{x+9}$$

$$c) y' = 3e^{3x+1} + 3$$

$$d) y' = -e^{-x}$$

$$e) y' = -2e^{-2x}$$

$$f) y' = 5e^x - 3e^{3x}$$

$$g) y' = -10xe^{-x^2}$$

$$h) y' = \frac{e+1}{2\sqrt{x}}$$

$$i) y' = 3(x^2-1)e^{x^3-3x+1}$$

$$j) y' = \cos x$$

$$k) y' = ex^{e-1+2}$$

$$\boxed{4} \quad a) 1 \quad b) \frac{3}{5}, 3x-5y+5=0$$

$$c) 8e+2, (8e+2)x-y-4e-2=0$$

$$\boxed{5} \quad a) x + 4y - 18 = 0$$

$$b) x + 15y - 1 = 0$$

$$\boxed{6} \quad 2u^2$$

$$\boxed{7} \quad a) x = -3, x = -1, x = \frac{3}{4}$$

$$b) x = \frac{1}{5}$$

$$\boxed{8} \quad a) y'' = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$b) y'' = 2e^{x^2} (1 + 2x^2)$$

$$\boxed{9} \quad a) y''' = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$b) y^{(5)} = 32 e^{2x}$$

$$c) y'' = e^x \left( \frac{2}{x} + \ln x - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$\boxed{10} \quad 0; 1; 2; 2$$

$$\boxed{11} \quad -x$$

$$\boxed{12} \quad 3x - y - \ln 3 - 1 = 0$$

$$\boxed{13} \quad a) f(x) = 4 \ln x$$

$$b) f(x) = 3 \ln x + 2$$

$$c) f(x) = e^x$$

$$d) f(x) = 2e^x$$

$$e) f(x) = 5e^x + 3$$

$$f) f(x) = x + \ln x$$

### Epigrafe 7

$$\boxed{1} \quad a) y' = 6x + \frac{1}{x^2}$$

$$b) y' = 13 \cos(13x-1)$$

$$c) y' = \frac{3}{2\sqrt{x}} + 2x$$

$$d) y' = \frac{2}{x}$$

$$e) y' = \frac{x^2 + 6x + 1}{(x+3)^2}$$

$$f) y' = -12x \operatorname{sen} 3x^2$$

$$g) y' = 5e^{x+11}$$

$$h) y' = \frac{10x}{\sqrt{10x^2+3}}$$

- f) crec:  $(-2; -\frac{1}{2})$ ,  $(1; \infty)$     dec:  $(-\infty; -2)$ ,  $(-\frac{1}{2}; 1)$   
g) Creciente    h) dec:  $(-\infty; 2)$ ,  $(2; \infty)$   
i) **Creciente**    j) crec:  $(0; \frac{4}{5})$     dec:  $(-\infty; 0)$ ,  $(\frac{4}{5}; \infty)$   
k) crec:  $(-\infty; \frac{3}{2})$ ,  $(6; \infty)$     dec:  $(\frac{3}{2}; 6)$   
l) crec:  $(-\infty; -1)$ ,  $(5; \infty)$     dec:  $(-1; 5)$   
m) crec:  $(2; \infty)$     dec:  $(-\infty; 2)$   
n) crec:  $(-\infty; -0,5)$ ,  $(7; \infty)$     dec:  $(-0,5; 7)$   
ñ) crec:  $(-\infty; -8)$ ,  $(-\frac{2}{3}; \infty)$     dec:  $(-8; -\frac{2}{3})$   
o) crec:  $(1; 2)$ ,  $(6; \infty)$     dec:  $(-\infty; 1)$ ,  $(2; 6)$   
p) Creciente
- 2** a) crec:  $x > 1$     dec:  $x < 1$   
b) crec:  $x < -1$ ,  $x > 1$     dec:  $-1 < x < 1$   
c) crec:  $x < -2$     dec:  $x > -2$   
d) crec:  $x > 2$     dec:  $x < 2$     e) Creciente.  
f) crec:  $x < 0$ ,  $x > 2$     dec:  $0 < x < 2$   
g) dec:  $x < 2$ ,  $x > 2$     h) crec:  $x < 1$     dec:  $x > 1$   
i) dec:  $x < -2$ ,  $-2 < x < 8$ ,  $x > 8$   
j) crec:  $x > 1$     dec:  $0 < x < 1$   
k) crec:  $x < -1$ ,  $x > 1$     dec:  $-1 < x < 1$     l) Creciente  
m) crec:  $x > \frac{1}{e}$     dec:  $0 < x < \frac{1}{e}$   
n) crec:  $x > 2$     dec:  $x < 2$     ñ) dec:  $x < 3$ ,  $x > 3$   
o) crec:  $x > 1$     dec:  $x < 0$ ,  $0 < x < 1$   
p) crec:  $x < -\sqrt{2}$ ,  $x > \sqrt{2}$     dec:  $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$   
q) crec:  $x < \frac{1}{e^2}$ ,  $x > 1$     dec:  $\frac{1}{e^2} < x < 1$   
r) crec:  $0 < x < 2$     dec:  $x < 0$ ,  $x > 2$   
s) crec:  $0 < x < 5$     dec:  $5 < x < 10$   
t) crec:  $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$     dec:  $0 < x < \frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$   
u) crec:  $x < 0,21$ ,  $x > 7,29$     dec:  $0,21 < x < 7,29$   
v) crec:  $5,83 < x < 0,17$ ,  $x > 3$     dec:  $x < 5,83$ ,  $0,17 < x < 3$
- 5** crec:  $(-\infty; -1)$ ,  $(2; 3)$ ,  $(4; \infty)$     dec:  $(-1; 2)$ ,  $(3; 4)$
- 6** a) Si    b) No    c) Si

7) a) Sí      b) No      c) Sí

**Epígrafe 9**

- 1) a) max:  $f(2) = 128$       min:  $f(6) = 0$   
 b) min:  $f(5) = 75$       c) min:  $f(-1) = -4$   
 d) max:  $f(1) = 4$       e) min:  $f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{256}{27}$   
 f) max:  $f(1) = -4$       min:  $f(3) = -8$       g) No tiene.  
 h) max:  $f(0) = 16$       min:  $f(2) = f(-2) = 0$   
 i) max:  $f(-2) = -32$       min:  $f(2) = 32$       j) No tiene.

- 2) a) max en  $x = 2$       b) max en  $x = 0$   
 c) max en  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ,      min en  $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$   
 d) rmax en  $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ,      rmin en  $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$   
 e) rmin en  $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$       f) No tiene.      g) No tiene,  
 h) max en  $x = 2k\pi$ ,      rmin en  $x = (2k+1)\pi$   
 i) min en  $x = 2k\pi$   
 j) max en  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ,      min en  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$   
 k) max en  $x = -1$       l) min en  $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$

- 3) a) crec:  $(-\infty; -3)$ ,  $(2; \infty)$       dec:  $(-3; 2)$   
 max:  $f(-3) = \frac{43}{2}$       min:  $f(2) = \frac{2}{9}$   
 b) crec:  $(-2; -\frac{1}{2})$ ,  $(1; \infty)$       dec:  $(-\infty; -2)$ ,  $(-\frac{1}{2}; 1)$   
 max:  $f(-\frac{1}{2}) = \frac{81}{16}$       min:  $f(-2) = f(2) = 0$   
 c) crec:  $(-\infty; -\frac{1}{3})$ ,  $(2; \infty)$       dec:  $(-\frac{1}{3}; 2)$   
 max:  $f(-\frac{1}{3}) = -\frac{322}{27}$       min:  $f(2) = -63$   
 d) crec:  $(-\infty; -0,5)$ ,  $(0,25; \infty)$       dec:  $(-0,5; 0,25)$   
 max:  $f(-0,5) = \frac{197}{12}$       min:  $f(0,25) = \frac{761}{48}$

- 4) a) max en  $x = \frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{5\pi}{4}$       rmin en  $x = \frac{3\pi}{4}$ ,  $\frac{7\pi}{4}$   
 b) max en  $x = 0$ ,  $\pi$       min en  $x = \frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{5\pi}{3}$   
 c) max en  $x = \frac{5\pi}{3}$       min en  $x = \frac{\pi}{3}$   
 d) max en  $x = \frac{\pi}{3}$       min en  $x = \frac{5\pi}{3}$   
 e) max en  $x = 0$ ,  $\frac{2\pi}{3}$ ,  $\frac{4\pi}{3}$       rmin en  $x = \frac{\pi}{3}$ ,  $\pi$ ,  $\frac{5\pi}{3}$   
 f) No tiene      g) min en  $x = 2,21$  y en  $x = 5,35$

h) min en  $x = 0,57$

5) max en  $x = 1$       min en  $x = 3$       6) Si

9)  $(-\frac{p}{2}; q - \frac{p^2}{4})$       10)  $c - \frac{b^2}{4a}$ . Del signo de  $a$ .

11)  $p = -2$        $q = 4$       12)  $a = 2$ , máximo.

13)  $a = -\frac{2}{3}$        $b = -\frac{1}{6}$

### Epígrafe 10

1) a) 0,485      b) 0,965      c) 1,2      d) 2,03  
e) 0,515      f) 2,025      g) 0,50256      h) 0,50226

2) a) 5      b) 1,1      c) 0,90      3) 1,0019

### Epígrafe 11

1) 5 y 5      2) 1      3) 2      4) 6 y 12      5) 6 y 18

6) a) 4 y 4      b) 8 y 2      7) Cada sumando igual a  $\frac{a}{2}$

8) 6, 6 y 6      9)  $\frac{1}{3}$       10) 10 cm

11) Cuadrado de 12 cm de lado.

12) Cuadrado de lado  $\frac{L}{4}$

13) Lado de la base: 6 dm,      altura: 3 dm

14) 3 cm      15) 3,46 m x 0,58 m      16) 1:2

17) 10 cm x 5 cm      18) a)  $20\sqrt{2}$  x  $15\sqrt{2}$       b) 32 x 18

19)  $\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{e}}$       20)  $2\sqrt{3}$  m      21)  $2\sqrt{2}$  m

22) a) 4 cm      b) 3 cm      23)  $h = r = 8\sqrt{2}$  cm

24)  $\frac{4}{3} R$       25)  $A(\frac{b}{6}; \frac{b}{6})$

26) Hay dos puntos  $P_1(-2\sqrt{2}; 2)$  y  $P_2(2\sqrt{2}; 2)$

27)  $45^\circ$       28)  $\frac{v_o^2 \sin^2 \alpha}{2g}$

### Epígrafe 12

1) a) 1,0 cm/s; 2,0 cm/s<sup>2</sup>      b) 10 cm/s; 10 cm/s<sup>2</sup>      c) 4,0 cm/s  
6,0 cm/s<sup>2</sup>      d) 3,0 cm/s; 4,0 cm/s<sup>2</sup>      e) 2,0 cm/s; 10 cm/s<sup>2</sup>

f) 0,52 cm/s ; -0,95 cm/s<sup>2</sup>      g) -9,1 cm/s ; -5,5 cm/s<sup>2</sup>

2) a)  $v_o = 3$  m/s       $a_o = 0$  m/s<sup>2</sup>      b)  $v_o = 8$  m/s       $a_o = -32$  m/s<sup>2</sup>

3) a) -20 m ; 4 m/s ; 6 m/s<sup>2</sup> ; 2,3 km ; 0,66 km/s ;

0,13 km/s<sup>2</sup>      b) 1 m ; 16 m/s ; -0,62 m/s<sup>2</sup> ; 20 m ;

$$- 0,78 \text{ m/s} ; - 12 \text{ m/s}^2$$

4 Al cabo del tiempo  $t = 24$  de iniciado el movimiento, a una distancia  $s = 592$  del punto de partida.

Al cabo del tiempo  $t = 0,5$  a una distancia  $s = a$ .

6 a)  $v = 36 - 9,8t$      $a = -9,8$     b)  $t \approx 3,67$     c)  $66,12$

7  $86 \text{ Km/h}$     8  $v = 4 - \frac{2}{t^2}$ ,  $t = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ s}$     9  $15 \text{ cm/s}$

10  $0,4 \text{ unidades/s}$

11  $3,7 \text{ cm/s}$ ,  $40 \text{ cm}^2/\text{s}$

12  $-1,5 \text{ m/s}$

### Ejercicios del capítulo

1 a)  $y' = 3x^2 - 3$

b)  $y' = -\frac{1}{3} + \frac{4}{x^3}$

c)  $y' = 4\left(\frac{1}{3}x - x^3\right)^3 \left(\frac{1}{3} - 3x^2\right)$

d)  $y' = \frac{11}{(3-5x)^2}$

e)  $y' = e^{-x}(1-x)$

f)  $y' = \frac{1}{3}(3x^4 - 2)e^{\frac{3}{5}x - 2x}$

g)  $y' = \frac{2x}{x^2 - 9}$

h)  $y' = \cot x - \tan x$

i)  $y' = \frac{3x^2 + 16x + 16}{x^3 + 8x^2 + 16x}$

j)  $y' = \frac{4x}{1-x^4}$

k)  $y' = 1 - 2\text{sen } 2x$

l)  $y' = \frac{1}{\cos^3 x} - \frac{1}{\text{sen } x}$

3 a)  $y' = 3x^2 + 8x + 8$

b)  $y' = \frac{-4}{(x-3)^2}$

c)  $y' = \frac{-10}{(x-3)^2}$

4 a) dec:  $(-\infty; 0)$ ,  $(0; \infty)$

b) crec:  $(-\infty; 3)$ ,  $(3; \infty)$

c) crec:  $(-\infty; 0)$ ,  $(2; \infty)$

dec:  $(0; 2)$

d) crec:  $(-2; 0)$ ,  $(1; \infty)$

dec:  $(-\infty; -2)$ ,  $(0; 1)$

e) crec:  $(-\infty; -3)$ ,  $(-3; 0)$

dec:  $(0; 3)$ ,  $(3; \infty)$

f) crec:  $(-\infty; -2)$ ,  $(2; \infty)$

dec:  $(-2; 0)$ ,  $(0; 2)$

g) crec:  $(-\infty; 2)$

dec:  $(2; \infty)$

h) crec:  $(0; \infty)$

dec:  $(-\infty; 0)$

i) crec:  $\left(\frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{5\pi}{12} + k\pi\right)$

dec:  $\left(k\pi; \frac{\pi}{12} + k\pi\right)$ ,  $\left(\frac{5\pi}{12} + k\pi; (k+1)\pi\right)$

j) crec:  $\left(k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

dec:  $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi; (k+1)\pi\right)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

k) crec:  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

dec:  $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

l) crec:  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$

dec:  $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$

5)  $(2; \ln 2)$       6)  $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

8) a) Creciente. No tiene.

b) dec:  $(-\infty; -1), (-1; 0)$       crec:  $(0; 1), (1; \infty)$   
 min:  $f(0) = 3$

c) crec:  $(-\infty; -1), (-1; 0)$       dec:  $(0; 1), (1; \infty)$   
 max:  $f(0) = -4$

d) crec:  $(0; \frac{\pi}{2}), (\pi; \frac{3\pi}{2})$       dec:  $(\frac{\pi}{2}; \pi), (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$   
 max:  $f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{3\pi}{2}) = 3$       min:  $f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = 0$

e) crec:  $(0; \frac{\pi}{2}), (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$       dec:  $(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$   
 max:  $f(\frac{\pi}{2}) = 2e$       min:  $f(\frac{3\pi}{2}) = \frac{7}{e}$

f) Creciente. No tiene

g) crec:  $(0; \frac{\pi}{2})$       dec:  $(\frac{\pi}{2}; \pi)$   
 max:  $f(\frac{\pi}{2}) = 1$

h) crec:  $(0; \frac{\pi}{4}), (\frac{5\pi}{4}; 2\pi)$       dec:  $(\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4})$   
 max:  $f(\frac{\pi}{4}) = 3\sqrt{2}$       min:  $f(\frac{5\pi}{4}) = -3\sqrt{2}$

i) dec:  $(-\infty; \ln 2)$       crec:  $(\ln 2; \infty)$   
 min:  $g(\ln 2) = 2 - \ln 3$

10) a) Cualquier función del tipo  $f(x) = \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} x + c$  ( $c \in \mathbb{R}$ )

b) Cualquier función del tipo  $f(x) = x^2 + e$  ó del tipo  $f(x) = \frac{1}{2} x^2 + c$  ( $c \in \mathbb{R}$ )

11) a) Cualquier par de funciones  $f$  y  $g$  tales que  $f(x) = x + a$  y  $g(x) = \frac{1}{2} x + b$  ( $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ )

b) Cualquier par de funciones  $f$  y  $g$  tales que  $f(x) = x^2 + x + a$  y  $g(x) = \frac{1}{2} x^2 - x + b$  ( $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ )

12) a)  $g(x) = x^2 + 6x + 5$       c) 572

13) Cuando  $t = 1$  s y su valor es  $v = 7$  m/s

14)  $\frac{16}{9} \sqrt{3} v^2$

## CAPÍTULO 6

### Epígrafe 1

1) a) No      b) Sí      c) No      d) Sí

2) a) Sí      b) No      c) Sí      d) Sí      e) Sí      f) No      g) Sí

e)  $\frac{x^9}{3}$       f)  $e^x$       g)  $\ln x$       h)  $\sin x$

3) a)  $\frac{x^4}{4}$       b)  $-\cos x$       c)  $-\frac{1}{2x^2}$       d)  $\sin x$   
 e)  $\frac{x^9}{9}$       f)  $e^x$       g)  $\ln x$       h)  $\sin x$

4) a)  $\sin x + c$       b)  $-\frac{1}{6x^6} + c$       c)  $e^x + c$   
 d)  $-\cos x + c$       e)  $3x + c$       f)  $e^x + c$   
 g)  $-\cos x + c$       h)  $-\frac{x^4}{2} + c$       i)  $\sin x + c$   
 j)  $\sin x + c$       k)  $2x + c$       l)  $-\frac{x}{2} + c$

a)  $f(x) = 6x + 5$       b)  $f(x) = e^x - \sin x$   
 c)  $f(x) = 6x + \frac{1}{2}$       d)  $f(x) = 4\cos x - 12x^2 + \frac{1}{5} + \frac{-9}{x^2}$   
 e)  $f(x) = 5 + \frac{x}{2} - 3x^2 + \sqrt[3]{x}$       f)  $f(x) = e^x + \frac{1}{2} - 18$

6) a)  $G(x) = \frac{1}{3}x^5 + 1$       b)  $G(x) = \dots$       c)  $G(x) = \dots$   
 d)  $G(x) = -\cos x + 2$       e)  $e^x$       f) No existe

7) a)  $F(x) = \frac{x^2}{2}$       b)  $F(x) = \sin x$       c)  $F(x) = \sin x + \pi$   
 d)  $F(x) = \dots$       e)  $F(x) = \frac{x^2}{2} + 1$       f)  $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2$   
 g)  $F(x) = -\cos x + 2$       h)  $F(x) = 1 + \ln x$

**Epigrafe 2**

1) a)  $\frac{x^7}{7} + c$       b)  $x^4 + c$       c)  $-\frac{1}{2}x^{-2} + c$   
 d)  $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + c$       e)  $-6\cos x + c$   
 f)  $-\cos x + \sin x + c$       g)  $3\ln x + c$   
 h)  $x^3 - 2x^2 + 7x + c$       i)  $e^x + 6x + c$   
 j)  $2x^3 + \frac{x^2}{2} + \ln x + c$       k)  $x^2 + e^x + c$   
 l)  $2x^3 + 4x^2 + \cos x + c$       m)  $\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c$   
 n)  $\frac{x^3}{3} - 5x^2 + 25x + c$       p)  $\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + c$   
 o)  $\frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{4} - 6\ln x - \frac{1}{x} + c$       q)  $\frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} + \frac{5x}{2} + c$   
 r)  $\frac{x^4}{4} - \frac{1}{x} + \frac{x}{5} + \frac{3x^{\frac{9}{4}}}{8} + c$   
 s)  $e^x - \cos x + c$       t)  $x - \cos x + c$

2) a)  $\frac{1}{9}(3x-1)^9 + c$       b)  $-\frac{1}{3}\cos 3x + c$

- c)  $\frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{6} \cos 6x + c$       d)  $-e^{-x} + \frac{1}{6} (2x - 1)^3 + c$   
 e)  $\frac{1}{2} \operatorname{sen} (2x + 1) + c$       f)  $2 \ln (2x + 3) + c$   
 g)  $x + \frac{1}{4} e^{-4x} + c$

- 3) a) No      b) Sí      c) No      d) Sí  
 e) Sí      f) Sí      g) Sí      h) No

4) En cada inciso la  $c$  debe darse con dos valores particulares cualesquiera.

- a)  $-3x + c$       b)  $2x^2 + c$       c)  $\frac{1}{9} x^3 + c$       d)  $-\frac{1}{2} x^{-2} + c$   
 e)  $\frac{5a^2}{4} x^4 + c$       f)  $2x^3 + 4x^2 + 3x + c$   
 g)  $\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + c$       h)  $\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} + 10x + c$   
 i)  $a^2 x + \frac{2}{3} abx^3 + \frac{1}{5} b^2 x^5 + c$       j)  $\frac{3}{4} x^4 + c$   
 k)  $(5t-3)x + c$       l)  $\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{3} \cos 3x + c$   
 m)  $-8 \cos x + c$       n)  $\frac{1}{2} x^2 - 7x + c$   
 ñ)  $-\frac{5}{3} e^{-3x} - \cos x + c$       o)  $\ln |x| + c; x \neq 0$

### Epígrafe 3

1) Analogía: En ambos casos para calcularlas se buscan primitivas.

Diferencia: La integral indefinida da como resultado funciones y la definida es un número.

2) No, porque no es continua en el intervalo dado.

3) a) Correcta.      b) Correcta.      c) Correcta.  
 d) Incorrecta.      e) Correcta.

- 4) a)  $\frac{32}{3}$       b)  $\frac{8}{9}$       c) 0      d) 2      e) 1  
 f)  $e^{-1} \approx 1,72$       g)  $\frac{13}{3}$       h) 1      i)  $-\frac{5}{2}$   
 j) 7,83      k)  $2(\sqrt{e} - 1) \approx 1,30$       l)  $\frac{1}{3} e^3 + e - \frac{1}{3} \approx 9,10$   
 m)  $\frac{1}{2}$       n)  $\pi$       ñ)  $\frac{1}{4}(e^2 + e^{-2} - 2) \approx 1,38$       o) 6

Nota: Se usó  $e = 2,72$

5) a)  $12 - \frac{3\pi}{2} \approx 7,29$       b) No se puede calcular pues  $1^a$



$$f) K(x) = 9x - 9x^{\frac{3}{2}} + 2x^2 + c$$

$$\boxed{2} \quad a) F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4} \quad b) G(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{4}{3}$$

$$c) H(x) = e^x + 3x - 4,4$$

$$d) T(x) = -\frac{1}{2} \cos 4x + \sin x + \frac{1}{2}$$

$$\boxed{3} \quad a) f(x) = 3e^{3x} - \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}x$$

$$b) f(x) = 12,5e^{2,5x} + 3 \sin 3x + \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$$

$$c) f(x) = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} + \frac{3}{8}e^{\frac{1}{2}x} + 1$$

$$d) f(x) = -\frac{8}{x^3} - \frac{3}{(3x-1)^2} - 2 \cos \sqrt{2}x$$

$$\boxed{4} \quad a) -e^{-t+2} + c$$

$$b) \frac{x^2}{2} + x - \ln|x| + c$$

$$c) x(e^{9y+1}) - \ln|x| + c$$

$$d) \frac{2}{5} \sin 2x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$e) -\frac{1}{9} \cos(3x+1) - 4e^x + c \quad f) 3 \ln|x| + \frac{1}{96}e^{6x} + c$$

$$g) \frac{2}{5} \ln|5z-3| - \frac{1}{3} \sin(3z+2) + \frac{3}{5}z^{\frac{5}{3}} + c$$

$$h) \frac{1}{7}e^{7x+6} - \frac{3}{32}(8x+40)^{\frac{4}{3}} + x^2 + c$$

$$i) \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2} \ln|x| + 6 \sin \frac{x}{2} + c$$

$$j) \frac{1}{6} \sin 2x + x + c$$

$$k) \frac{2}{3} \ln|x| + c$$

$$l) \frac{1}{3}e^{ax} + c \quad m) \frac{2}{3a}(ax+1)^{\frac{3}{2}} + a^2x + c \quad n) \frac{y^2}{2} - y + c$$

$$\boxed{5} \quad a) -\frac{1}{6} \cos 6x + e^x + \sin x + c \quad b) \ln|x| - x^{-1} + c$$

$$c) x - e^{-x} + c \quad d) \frac{x^2}{2} - 4x + c \quad e) y e^{-t+2} + c$$

$$f) \frac{13}{4} \quad g) -\frac{x^{-2}}{2} + c \quad h) -4$$

$$i) 21 \quad j) 20 \quad k) \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$l) 1 + c \quad m) \frac{m}{m+n}x^{\frac{n+m}{m}} + c \quad n) \left(\frac{1-z}{2}\right)^z x + c$$

$$p) -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - e^x + \ln|x| + c \quad o) \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + x + c$$

$$\boxed{6} \quad a) \frac{1}{2}x^2 - 3x + 13 \quad b) -\cos x + \sin x + 1 \quad \boxed{7} \quad 0$$

**8** a) 8                      b)  $-\frac{4}{3}$                       c) 27                      d) 16                      e)  $\frac{1}{2}$

f)  $\frac{3}{2}(\sqrt{3} - 1) \approx 1,10$                       g)  $-\frac{8}{3}$                       h)  $\frac{2}{3} \ln 2 \approx 0,4693$

**9** a)  $\frac{9}{2} u^2$                       b)  $F(x) = \frac{1}{3} x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3}$

c)  $G(x) = -\frac{3}{2} x^2 + 8x - \frac{3}{2}$

**10** a)  $\frac{1}{6} u^2$                       b)  $\frac{3}{2} u^2$                       c)  $\frac{7}{6} u^2$                       d)  $\frac{4}{3} u^2$

**11** 5                      **12** a)  $(e - 1) \approx 1,72 u^2$                       b)  $1 u^2$

**13**  $\frac{1}{3}$                       **14**  $\frac{5}{2} u^2$                       **15**  $\frac{99}{2} u^2$

# Anexo

Tabla de cuadrados

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,020	1,040	1,061	1,082	1,103	1,124	1,145	1,166	1,188
1,1	1,210	1,232	1,254	1,277	1,300	1,323	1,346	1,369	1,392	1,416
1,2	1,440	1,464	1,488	1,513	1,538	1,563	1,588	1,613	1,638	1,664
1,3	1,690	1,716	1,742	1,769	1,796	1,823	1,850	1,877	1,904	1,932
1,4	1,960	1,988	2,016	2,045	2,074	2,103	2,132	2,161	2,190	2,220
1,5	2,250	2,280	2,310	2,341	2,372	2,403	2,434	2,465	2,496	2,528
1,6	2,560	2,592	2,624	2,657	2,690	2,723	2,756	2,789	2,822	2,856
1,7	2,890	2,924	2,958	2,993	3,028	3,063	3,098	3,133	3,168	3,204
1,8	3,240	3,276	3,312	3,349	3,386	3,423	3,460	3,497	3,534	3,572
1,9	3,610	3,648	3,686	3,725	3,764	3,803	3,842	3,881	3,920	3,960
2,0	4,000	4,040	4,080	4,121	4,162	4,203	4,244	4,285	4,326	4,368
2,1	4,410	4,452	4,494	4,537	4,580	4,623	4,666	4,709	4,752	4,796
2,2	4,840	4,884	4,928	4,973	5,018	5,063	5,108	5,153	5,198	5,244
2,3	5,290	5,336	5,382	5,429	5,476	5,523	5,570	5,617	5,664	5,712
2,4	5,760	5,808	5,856	5,905	5,954	6,003	6,052	6,101	6,150	6,200
2,5	6,250	6,300	6,350	6,401	6,452	6,503	6,554	6,605	6,656	6,708
2,6	6,760	6,812	6,864	6,917	6,970	7,023	7,076	7,129	7,182	7,236
2,7	7,290	7,344	7,398	7,453	7,508	7,563	7,618	7,673	7,728	7,784
2,8	7,840	7,896	7,952	8,009	8,066	8,123	8,180	8,237	8,294	8,352
2,9	8,410	8,468	8,526	8,585	8,644	8,703	8,762	8,821	8,880	8,940
3,0	9,000	9,060	9,120	9,181	9,242	9,303	9,364	9,425	9,486	9,548
3,1	9,610	9,672	9,734	9,797	9,860	9,923	9,986	10,05	10,11	10,18
3,2	10,24	10,30	10,37	10,43	10,50	10,56	10,63	10,69	10,76	10,82
3,3	10,89	10,96	11,02	11,09	11,16	11,22	11,29	11,36	11,42	11,49
3,4	11,56	11,63	11,70	11,76	11,83	11,90	11,97	12,04	12,11	12,18
3,5	12,25	12,32	12,39	12,46	12,53	12,60	12,67	12,74	12,82	12,89
3,6	12,96	13,03	13,10	13,18	13,25	13,32	13,40	13,47	13,54	13,62
3,7	13,69	13,76	13,84	13,91	13,99	14,06	14,14	14,21	14,29	14,36
3,8	14,44	14,52	14,59	14,67	14,75	14,82	14,90	14,98	15,05	15,13
3,9	15,21	15,29	15,37	15,44	15,52	15,60	15,68	15,76	15,84	15,92
4,0	16,00	16,08	16,16	16,24	16,32	16,40	16,48	16,56	16,65	16,73
4,1	16,81	16,89	16,97	17,06	17,14	17,22	17,31	17,39	17,47	17,56
4,2	17,64	17,72	17,81	17,89	17,98	18,06	18,15	18,23	18,32	18,40
4,3	18,49	18,58	18,66	18,75	18,84	18,92	19,01	19,10	19,18	19,27
4,4	19,36	19,45	19,54	19,62	19,71	19,80	19,89	19,98	20,07	20,16
4,5	20,25	20,34	20,43	20,52	20,61	20,70	20,79	20,88	20,98	21,07
4,6	21,16	21,25	21,34	21,44	21,53	21,62	21,72	21,81	21,90	22,00
4,7	22,09	22,18	22,28	22,37	22,47	22,56	22,66	22,75	22,85	22,94
4,8	23,04	23,14	23,23	23,33	23,43	23,52	23,62	23,72	23,81	23,91
4,9	24,01	24,11	24,21	24,30	24,40	24,50	24,60	24,70	24,80	24,90
5,0	25,00	25,10	25,20	25,30	25,40	25,50	25,60	25,70	25,81	25,91
5,1	26,01	26,11	26,21	26,32	26,42	26,52	26,63	26,73	26,83	26,94
5,2	27,04	27,14	27,25	27,35	27,46	27,56	27,67	27,77	27,88	27,98
5,3	28,09	28,20	28,30	28,41	28,52	28,62	28,73	28,84	28,94	29,05
5,4	29,16	29,27	29,38	29,48	29,59	29,70	29,81	29,92	30,01	30,14

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	30.25	30.36	30.47	30.58	30.69	30.80	30.91	31.02	31.14	31.25
5.6	31.36	31.47	31.58	31.70	31.81	31.92	32.04	32.15	32.26	32.38
5.7	32.49	32.60	32.72	32.83	32.95	33.06	33.18	33.29	33.41	33.52
5.8	33.64	33.76	33.87	33.99	34.11	34.22	34.34	34.46	34.57	34.69
5.9	34.81	34.93	35.05	35.16	35.28	35.40	35.52	35.64	35.76	35.88
6.0	36.00	36.12	36.24	36.36	36.48	36.60	36.72	36.84	36.97	37.09
6.1	37.21	37.33	37.45	37.58	37.70	37.82	37.95	38.07	38.19	38.32
6.2	38.44	38.56	38.69	38.81	38.94	39.06	39.19	39.31	39.44	39.56
6.3	39.69	39.82	39.94	40.07	40.20	40.32	40.45	40.58	40.70	40.83
6.4	40.96	41.09	41.22	41.34	41.47	41.60	41.73	41.86	41.99	42.12
6.5	42.25	42.38	42.51	42.64	42.77	42.90	43.03	43.16	43.30	43.43
6.6	43.56	43.69	43.82	43.96	44.09	44.22	44.36	44.49	44.62	44.76
6.7	44.89	45.02	45.16	45.29	45.43	45.56	45.70	45.83	45.97	46.10
6.8	46.24	46.38	46.51	46.65	46.79	46.92	47.06	47.20	47.33	47.47
6.9	47.61	47.75	47.89	48.02	48.16	48.30	48.44	48.58	48.72	48.86
7.0	49.00	49.14	49.28	49.42	49.56	49.70	49.84	49.98	50.13	50.27
7.1	50.41	50.55	50.69	50.84	50.98	51.12	51.27	51.41	51.55	51.70
7.2	51.84	51.98	52.13	52.27	52.42	52.56	52.71	52.85	53.00	53.14
7.3	53.29	53.44	53.58	53.73	53.88	54.02	54.17	54.32	54.46	54.61
7.4	54.76	54.91	55.06	55.20	55.35	55.50	55.65	55.80	55.95	56.10
7.5	56.25	56.40	56.55	56.70	56.85	57.00	57.15	57.30	57.46	57.61
7.6	57.76	57.91	58.06	58.22	58.37	58.52	58.68	58.83	58.98	59.14
7.7	59.29	59.44	59.60	59.75	59.91	60.06	60.22	60.37	60.53	60.68
7.8	60.84	61.00	61.15	61.31	61.47	61.62	61.78	61.94	62.09	62.25
7.9	62.41	62.57	62.73	62.88	63.04	63.20	63.36	63.52	63.68	63.84
8.0	64.00	64.16	64.32	64.48	64.64	64.80	64.96	65.12	65.29	65.45
8.1	65.61	65.77	65.93	66.10	66.26	66.42	66.59	66.75	66.91	67.08
8.2	67.24	67.40	67.57	67.73	67.90	68.06	68.23	68.39	68.56	68.72
8.3	68.89	69.06	69.22	69.39	69.56	69.72	69.89	70.06	70.22	70.39
8.4	70.56	70.73	70.90	71.06	71.23	71.40	71.57	71.74	71.91	72.08
8.5	72.25	72.42	72.59	72.76	72.93	73.10	73.27	73.44	73.62	73.79
8.6	73.96	74.13	74.30	74.48	74.65	74.82	75.00	75.17	75.34	75.52
8.7	75.69	75.86	76.04	76.21	76.39	76.56	76.74	76.91	77.09	77.26
8.8	77.44	77.62	77.79	77.97	78.15	78.32	78.50	78.68	78.85	79.03
8.9	79.21	79.39	79.57	79.74	79.92	80.10	80.28	80.46	80.64	80.82
9.0	81.00	81.18	81.36	81.54	81.72	81.90	82.08	82.26	82.45	82.63
9.1	82.81	82.99	83.17	83.36	83.54	83.72	83.91	84.09	84.27	84.46
9.2	84.64	84.82	85.01	85.19	85.38	85.56	85.75	85.93	86.12	86.30
9.3	86.49	86.68	86.86	87.05	87.24	87.42	87.61	87.80	87.98	88.17
9.4	88.36	88.55	88.74	88.92	89.11	89.30	89.49	89.68	89.87	90.06
9.5	90.25	90.44	90.63	90.82	91.01	91.20	91.39	91.58	91.78	91.97
9.6	92.16	92.35	92.54	92.74	92.93	93.12	93.32	93.51	93.70	93.90
9.7	94.09	94.28	94.48	94.67	94.87	95.06	95.26	95.45	95.65	95.84
9.8	96.04	96.24	96.43	96.63	96.83	97.02	97.22	97.42	97.61	97.81
9.9	98.01	98.21	98.41	98.60	98.80	99.00	99.20	99.40	99.60	99.80

Tabla de cubos

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,030	1,061	1,093	1,125	1,158	1,191	1,225	1,260	1,295
1,1	1,331	1,368	1,405	1,443	1,482	1,521	1,561	1,602	1,643	1,685
1,2	1,728	1,772	1,816	1,861	1,907	1,953	2,000	2,048	2,097	2,147
1,3	2,197	2,248	2,300	2,353	2,406	2,460	2,515	2,571	2,628	2,686
1,4	2,744	2,803	2,863	2,924	2,986	3,049	3,112	3,177	3,242	3,308
1,5	3,375	3,443	3,512	3,582	3,652	3,724	3,796	3,870	3,944	4,020
1,6	4,096	4,173	4,252	4,331	4,411	4,492	4,574	4,657	4,742	4,827
1,7	4,913	5,000	5,088	5,178	5,268	5,359	5,452	5,545	5,640	5,735
1,8	5,832	5,930	6,029	6,128	6,230	6,332	6,435	6,539	6,645	6,751
1,9	6,859	6,968	7,078	7,189	7,301	7,415	7,530	7,645	7,762	7,881
2,0	8,000	8,121	8,242	8,365	8,490	8,615	8,742	8,870	8,999	9,129
2,1	9,261	9,394	9,528	9,664	9,800	9,938	10,08	10,22	10,36	10,50
2,2	10,65	10,79	10,94	11,09	11,24	11,39	11,54	11,70	11,85	12,01
2,3	12,17	12,33	12,49	12,65	12,81	12,98	13,14	13,31	13,48	13,65
2,4	13,82	14,00	14,17	14,35	14,53	14,71	14,89	15,07	15,25	15,44
2,5	15,63	15,81	16,00	16,19	16,39	16,58	16,78	16,97	17,17	17,37
2,6	17,58	17,78	17,98	18,19	18,40	18,61	18,82	19,03	19,25	19,47
2,7	19,68	19,90	20,12	20,35	20,57	20,80	21,02	21,25	21,48	21,72
2,8	21,95	22,19	22,43	22,67	22,91	23,15	23,39	23,64	23,89	24,14
2,9	24,39	24,64	24,90	25,15	25,41	25,67	25,93	26,20	26,46	26,73
3,0	27,00	27,27	27,54	27,82	28,09	28,37	28,65	28,93	29,22	29,50
3,1	29,79	30,08	30,37	30,66	30,96	31,26	31,55	31,86	32,16	32,46
3,2	32,77	33,08	33,39	33,70	34,01	34,33	34,65	34,97	35,29	35,61
3,3	35,94	36,26	36,59	36,91	37,26	37,60	37,93	38,27	38,61	38,96
3,4	39,30	39,65	40,00	40,35	40,71	41,06	41,42	41,78	42,14	42,51
3,5	42,88	43,24	43,61	43,99	44,36	44,74	45,12	45,50	45,88	46,27
3,6	46,66	47,05	47,44	47,83	48,23	48,63	49,03	49,43	49,84	50,24
3,7	50,65	51,06	51,48	51,90	52,31	52,73	53,16	53,58	54,01	54,44
3,8	54,87	55,31	55,74	56,18	56,62	57,07	57,51	57,96	58,41	58,86
3,9	59,32	59,78	60,24	60,70	61,16	61,63	62,10	62,57	63,04	63,52
4,0	64,00	64,48	64,96	65,45	65,94	66,43	66,92	67,42	67,92	68,42
4,1	68,92	69,43	69,93	70,44	70,96	71,47	71,99	72,51	73,03	73,56
4,2	74,09	74,62	75,15	75,69	76,23	76,77	77,31	77,85	78,40	78,95
4,3	79,51	80,06	80,62	81,18	81,75	82,31	82,88	83,45	84,03	84,60
4,4	85,18	85,77	86,35	86,94	87,53	88,12	88,72	89,31	89,92	90,52
4,5	91,13	0	92,35	92,96	93,58	94,20	94,82	95,44	96,01	96,70
4,6	97,34	97,97	98,61	99,25	99,90	100,5	101,2	101,8	102,5	103,2
4,7	103,8	104,5	105,2	105,8	106,5	107,2	107,9	108,5	109,2	109,9
4,8	110,6	111,3	112,0	112,7	113,4	114,1	114,8	115,5	116,2	116,9
4,9	117,6	118,4	119,1	119,8	120,6	121,3	122,0	122,8	123,5	124,3
5,0	125,0	125,8	126,5	127,3	128,0	128,8	129,6	130,3	131,1	131,9
5,1	132,7	133,4	134,2	135,0	135,8	136,6	137,4	138,2	139,0	139,8
5,2	140,6	141,4	142,2	143,1	143,9	144,7	145,5	146,4	147,2	148,0
5,3	148,9	149,7	150,6	151,4	152,3	153,1	154,0	154,9	155,7	156,6

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.4	157.5	158.3	159.2	160.1	161.0	161.9	162.8	163.7	164.6	165.5
5.5	166.4	167.3	168.2	169.1	170.0	171.0	171.9	172.8	173.7	174.7
5.6	175.6	176.6	177.5	178.5	179.4	180.4	181.3	182.3	183.3	184.2
5.7	185.2	186.2	187.1	188.1	189.1	190.1	191.1	192.1	193.1	194.1
5.8	195.1	196.1	197.1	198.2	199.2	200.2	201.2	202.3	203.3	204.3
5.9	205.4	206.4	207.5	208.5	209.6	210.6	211.7	212.8	213.8	214.9
6.0	216.0	217.1	218.2	219.3	220.3	221.4	222.5	223.6	224.8	225.9
6.1	227.0	228.1	229.2	230.3	231.5	232.6	233.7	234.9	236.0	237.2
6.2	238.3	239.5	240.6	241.8	243.0	244.1	245.3	246.5	247.7	248.9
6.3	250.0	251.2	252.4	253.6	254.8	256.0	257.3	258.5	259.7	260.9
6.4	262.1	263.4	264.6	265.8	267.1	268.3	269.6	270.8	272.1	273.4
6.5	274.6	275.9	277.2	278.4	279.7	281.0	282.3	283.6	284.9	286.2
6.6	287.5	288.8	290.1	291.4	292.8	294.1	295.4	296.7	298.1	299.4
6.7	300.8	302.1	303.5	304.8	306.2	307.5	308.9	310.3	311.7	313.0
6.8	314.4	315.8	317.2	318.6	320.0	321.4	322.8	324.2	325.7	327.1
6.9	328.5	329.9	331.4	332.8	334.3	335.7	337.2	338.6	340.1	341.5
7.0	343.0	344.5	345.9	347.4	348.9	350.4	351.9	353.4	354.9	356.4
7.1	357.9	359.4	360.9	362.5	364.0	365.5	367.1	368.6	370.1	371.7
7.2	373.2	374.8	376.4	377.9	379.5	381.1	382.7	384.2	385.8	387.4
7.3	389.0	390.6	392.2	393.8	395.4	397.1	398.7	400.3	401.9	403.6
7.4	405.2	406.9	408.5	410.2	411.8	413.5	415.2	416.8	418.5	420.2
7.5	421.9	423.6	425.3	427.0	428.7	430.4	432.1	433.8	435.5	437.2
7.6	439.0	440.7	442.5	444.2	445.9	447.7	449.5	451.2	453.0	454.8
7.7	456.5	458.3	460.1	461.9	463.7	465.5	467.3	469.1	470.9	472.7
7.8	474.6	476.4	478.2	480.0	481.9	483.7	485.6	487.4	489.3	491.2
7.9	493.0	494.9	496.8	498.7	500.6	502.5	504.4	506.3	508.2	510.1
8.0	512.0	513.9	515.8	517.8	519.7	521.7	523.6	525.6	527.5	529.5
8.1	531.4	533.4	535.4	537.4	539.4	541.3	543.3	545.3	547.3	549.4
8.2	551.4	553.4	555.4	557.4	559.5	561.5	563.6	565.6	567.7	569.7
8.3	571.8	573.9	575.9	578.0	580.1	582.2	584.3	586.4	588.5	590.6
8.4	592.7	594.8	596.9	599.1	601.2	603.4	605.5	607.6	609.8	612.0
8.5	614.1	616.3	618.5	620.7	622.8	625.0	627.2	629.4	631.6	633.8
8.6	636.1	638.3	640.5	642.7	645.0	647.2	649.5	651.7	654.0	656.2
8.7	658.5	660.8	663.1	665.3	667.6	669.9	672.2	674.5	676.8	679.2
8.8	681.5	683.8	686.1	688.5	690.8	693.2	695.5	697.9	700.2	702.6
8.9	705.0	707.3	709.7	712.1	714.5	716.9	719.3	721.7	724.2	726.6
9.0	729.0	731.4	733.9	736.3	738.8	741.2	743.7	746.1	748.6	751.1
9.1	753.6	756.1	758.6	761.0	763.6	766.1	768.6	771.1	773.6	776.2
9.2	778.7	781.2	783.8	786.3	788.9	791.5	794.0	796.6	799.2	801.8
9.3	804.4	807.0	809.6	812.2	814.8	817.4	820.0	822.7	825.3	827.9
9.4	830.6	833.2	835.9	838.6	841.2	843.9	846.6	849.3	852.0	854.7
9.5	857.4	860.1	862.8	865.5	868.3	871.0	873.7	876.5	879.2	882.0
9.6	884.7	887.5	890.3	893.1	895.8	898.6	901.4	904.2	907.0	909.9
9.7	912.7	915.5	918.3	921.2	924.0	926.9	929.7	932.6	935.4	938.3
9.8	941.2	944.1	947.0	949.9	952.8	955.7	958.6	961.5	964.4	967.4
9.9	970.3	973.2	976.2	979.1	982.1	985.1	988.0	991.0	994.0	997.0

Tabla de senos y cosenos

Grad.	seno											Grad.
	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	(1.0)	
0	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175	89
1	0,0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	88
2	0,0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	0523	87
3	0,0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	0698	86
4	0,0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	0872	85
5	0,0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028	1045	84
6	0,1045	1063	1080	1097	1115	1132	1149	1167	1184	1201	1219	83
7	0,1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374	1392	82
8	0,1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547	1564	81
9	0,1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719	1736	80
10	0,1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	1908	79
11	0,1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	2079	78
12	0,2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2233	2250	77
13	0,2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	2419	76
14	0,2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	2588	75
15	0,2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	2756	74
16	0,2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	2924	73
17	0,2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3090	72
18	0,3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3256	71
19	0,3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	3420	70
20	0,3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3584	69
21	0,3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3746	68
22	0,3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3907	67
23	0,3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	4067	66
24	0,4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	4226	65
25	0,4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	4384	64
26	0,4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	4540	63
27	0,4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	4695	62
28	0,4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	4848	61
29	0,4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	5000	60
30	0,5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	5150	59
31	0,5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	5299	58
32	0,5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	5446	57
33	0,5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	5592	56
34	0,5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	5736	55
35	0,5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	5878	54
36	0,5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	6018	53
37	0,6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	6157	52
38	0,6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	6293	51
39	0,6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	6428	50
40	0,6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	6561	49
41	0,6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	6691	48
42	0,6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	6820	47
43	0,6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	6947	46
44	0,6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	7071	45
	(1.0)	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.0	

coseno

Tabla de senos y cosenos (continuación)

seno												
Grad.	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	(1.0)	
45	0.7071	7083	7096	7108	7120	7133	7145	7157	7169	7181	7193	44
46	0.7193	7206	7218	7230	7242	7254	7266	7278	7290	7302	7314	43
47	0.7314	7325	7337	7349	7361	7373	7385	7396	7408	7420	7431	42
48	0.7431	7443	7455	7466	7478	7490	7501	7513	7524	7536	7547	41
49	0.7547	7559	7570	7581	7593	7604	7615	7627	7638	7649	7660	40
50	0.7660	7672	7683	7694	7705	7716	7727	7738	7749	7760	7771	39
51	0.7771	7782	7793	7804	7815	7826	7837	7848	7859	7869	7880	38
52	0.7880	7891	7902	7912	7923	7934	7944	7955	7965	7976	7986	37
53	0.7986	7997	8007	8018	8028	8039	8049	8059	8070	8080	8090	36
54	0.8090	8100	8111	8121	8131	8141	8151	8161	8171	8181	8192	35
55	0.8192	8202	8211	8221	8231	8241	8251	8261	8271	8281	8290	34
56	0.8290	8300	8310	8320	8329	8339	8348	8358	8368	8377	8387	33
57	0.8387	8396	8406	8415	8425	8434	8443	8453	8462	8471	8480	32
58	0.8480	8490	8499	8508	8517	8526	8536	8545	8554	8563	8572	31
59	0.8572	8581	8590	8599	8607	8616	8625	8634	8643	8652	8660	30
60	0.8660	8669	8678	8686	8695	8704	8712	8721	8729	8738	8746	29
61	0.8746	8755	8763	8771	8780	8788	8796	8805	8813	8821	8829	28
62	0.8829	8838	8846	8854	8862	8870	8878	8886	8894	8902	8910	27
63	0.8910	8918	8926	8934	8942	8949	8957	8965	8973	8980	8988	26
64	0.8988	8996	9003	9011	9018	9026	9033	9041	9048	9056	9063	25
65	0.9063	9070	9078	9085	9092	9100	9107	9114	9121	9128	9135	24
66	0.9135	9143	9150	9157	9164	9171	9178	9184	9191	9198	9205	23
67	0.9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9265	9272	22
68	0.9272	9278	9285	9291	9298	9304	9311	9317	9323	9330	9336	21
69	0.9336	9342	9348	9354	9361	9367	9373	9379	9385	9391	9397	20
70	0.9397	9403	9409	9415	9421	9426	9432	9438	9444	9449	9455	19
71	0.9455	9461	9466	9472	9478	9483	9489	9494	9500	9505	9511	18
72	0.9511	9516	9521	9527	9532	9537	9542	9548	9553	9558	9563	17
73	0.9563	9568	9573	9578	9583	9588	9593	9598	9603	9608	9613	16
74	0.9613	9617	9622	9627	9632	9636	9641	9646	9650	9655	9659	15
75	0.9659	9664	9668	9673	9677	9681	9686	9690	9694	9699	9703	14
76	0.9703	9707	9711	9715	9720	9724	9728	9732	9736	9740	9744	13
77	0.9744	9748	9751	9755	9759	9763	9767	9770	9774	9778	9781	12
78	0.9781	9785	9789	9792	9796	9799	9803	9806	9810	9813	9816	11
79	0.9816	9820	9823	9826	9829	9833	9836	9839	9842	9845	9848	10
80	0.9848	9851	9854	9857	9860	9863	9866	9869	9871	9874	9877	9
81	0.9877	9880	9882	9885	9888	9890	9893	9895	9898	9900	9903	8
82	0.9903	9905	9907	9910	9912	9914	9917	9919	9921	9923	9925	7
83	0.9925	9928	9930	9932	9934	9936	9938	9940	9942	9943	9945	6
84	0.9945	9947	9949	9951	9952	9954	9956	9957	9959	9960	9962	5
85	0.9962	9963	9965	9966	9968	9969	9971	9972	9973	9974	9976	4
86	0.9976	9977	9978	9979	9980	9981	9982	9983	9984	9985	9986	3
87	0.9986	9987	9988	9989	9990	9990	9991	9992	9993	9993	9994	2
88	0.9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	9997	9998	9998	9998	1
89	0.9998	9999	9999	9999	9999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0
	(1.0)	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.0	Grad

coseno

Tabla de tangentes y cotangentes

tangente												
Grad.	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	(1,0)	
0	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175	89
1	0,0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	88
2	0,0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507	0524	87
3	0,0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682	0699	86
4	0,0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857	0875	85
5	0,0875	0892	0910	0928	0945	0963	0981	0998	1016	1033	1051	84
6	0,1051	1069	1086	1104	1122	1139	1157	1175	1192	1210	1228	83
7	0,1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388	1405	82
8	0,1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566	1584	81
9	0,1584	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745	1763	80
10	0,1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	1944	79
11	0,1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	2126	78
12	0,2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	2309	77
13	0,2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	2493	76
14	0,2493	2512	2530	2549	2568	2586	2605	2623	2642	2661	2679	75
15	0,2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	2867	74
16	0,2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3057	73
17	0,3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3249	72
18	0,3249	3269	3288	3307	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3443	71
19	0,3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	3640	70
20	0,3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3839	69
21	0,3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	4040	68
22	0,4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	4245	67
23	0,4245	4265	4286	4307	4327	4348	4369	4390	4411	4431	4452	66
24	0,4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	4663	65
25	0,4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4877	64
26	0,4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	5095	63
27	0,5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	5317	62
28	0,5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	5543	61
29	0,5543	5566	5589	5612	5635	5658	5681	5704	5727	5750	5774	60
30	0,5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	6009	59
31	0,6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	6249	58
32	0,6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	6494	57
33	0,6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	6745	56
34	0,6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	7002	55
35	0,7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239	7265	54
36	0,7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	7536	53
37	0,7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	7813	52
38	0,7813	7841	7869	7898	7926	7954	7983	8012	8040	8069	8098	51
39	0,8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	8391	50
40	0,8391	8421	8451	8481	8511	8541	8571	8601	8632	8662	8693	49
41	0,8693	8724	8754	8785	8816	8847	8878	8910	8941	8972	9004	48
42	0,9004	9036	9067	9099	9131	9163	9195	9228	9260	9293	9325	47
43	0,9395	9358	9391	9424	9457	9490	9523	9556	9590	9623	9657	46
44	0,9657	9691	9725	9759	9793	9827	9861	9896	9930	9965	1,000	45
	(1,0)	,9	,8	,7	,6	,5	,4	,3	,2	,1	,0	Grad.

cotangente

Tabla de tangentes y cotangentes (continuación)

tangente												
Grad.	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	(1.0)	
45	1,000	003	007	011	014	018	021	025	028	032	036	44
46	1,036	039	043	046	050	054	057	061	065	069	072	43
47	1,072	076	080	084	087	091	095	099	103	107	111	42
48	1,111	115	118	122	126	130	134	138	142	146	150	41
49	1,150	154	159	163	167	171	175	179	183	188	192	40
50	1,192	196	200	205	209	213	217	222	226	230	235	39
51	1,235	239	244	248	253	257	262	266	271	275	280	38
52	1,280	285	289	294	299	303	308	313	317	322	327	37
53	1,327	332	337	342	347	351	356	361	366	371	376	36
54	1,376	381	387	392	397	402	407	412	418	423	428	35
55	1,428	433	439	444	450	455	460	466	471	477	483	34
56	1,483	488	494	499	505	511	517	522	528	534	540	33
57	1,540	546	552	558	564	570	576	582	588	594	600	32
58	1,600	607	613	619	625	632	638	645	651	658	664	31
59	1,664	671	678	684	691	698	704	711	718	725	732	30
60	1,732	739	746	753	760	767	775	782	789	797	804	29
61	1,804	811	819	827	834	842	849	857	865	871	881	28
62	1,881	889	897	905	913	921	929	937	946	954	963	27
63	1,963	971	980	988	997	*006	*014	*023	*032	*041	*050	26
64	2,050	059	069	078	087	097	106	116	125	135	145	25
65	2,145	154	164	174	184	194	204	215	225	236	246	24
66	2,246	257	267	278	289	300	311	322	333	344	356	23
67	2,356	367	379	391	402	414	426	438	450	463	475	22
68	2,475	488	500	513	526	539	552	565	578	592	605	21
69	2,605	619	633	646	660	675	689	703	718	733	747	20
70	2,747	762	778	793	808	824	840	856	872	888	904	19
71	2,904	921	937	954	971	989	*006	*024	*042	*060	*078	18
72	3,078	096	115	133	152	172	191	211	230	251	271	17
73	3,271	291	312	333	354	376	398	420	442	465	487	16
74	3,487	511	534	558	582	606	630	655	681	706	732	15
75	3,732	758	785	812	839	867	895	923	952	981	*011	14
76	4,011	041	071	102	134	165	198	230	264	298	331	13
77	4,331	366	402	437	474	511	548	586	625	661	705	12
78	4,705	745	787	829	872	915	959	*005	*050	*097	*145	11
79	5,145	193	242	292	343	396	449	503	558	614	671	10
80	5,671	5,730	5,789	5,850	5,912	5,976	6,041	6,107	6,174	6,243	6,314	9
81	6,314	6,386	6,460	6,535	6,612	6,691	6,772	6,855	6,940	7,026	7,115	8
82	7,115	7,207	7,300	7,396	7,491	7,596	7,700	7,806	7,916	8,028	8,144	7
83	8,144	8,264	8,386	8,513	8,643	8,777	8,915	9,058	9,205	9,357	9,514	6
84	9,514	9,677	9,845	10,0	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	5
85	11,43	11,66	11,91	12,16	12,43	12,71	13,00	13,30	13,62	13,95	14,30	4
86	14,30	14,67	15,06	15,46	15,89	16,35	16,83	17,34	17,89	18,46	19,08	3
87	19,08	19,74	20,45	21,20	22,02	22,90	23,86	24,90	26,03	27,27	28,64	2
88	28,64	30,14	31,82	33,69	35,80	38,19	40,92	44,07	47,74	52,08	57,29	1
89	57,29	63,66	71,62	81,85	95,49	114,6	143,2	191,0	286,5	573,0	- - -	0
	(1,0)	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.0	Grad.

cotangente

TABLEA DE LOGARITMOS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

TABLA DE LOGARITMOS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

# MEMENTO

## ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

### Números reales

#### 1 Dominios numéricos

El dominio de los números enteros está formado por los naturales y sus opuestos:  $\mathbb{Z} = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots\}$

El dominio de los números racionales está formado por los cocientes de dos enteros:  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}; q \neq 0 \right\}$

El dominio de los números reales,  $\mathbb{R}$ , está formado por los racionales y los irracionales; todo número real se representa como una expresión decimal. Si la expresión es periódica el número es racional, en caso contrario irracional.

#### 2 Subconjuntos de $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ;  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$  ;  $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$

$[a ; b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$      $(a ; b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

$[a ; b[ = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$      $(a ; b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

$(-\infty ; a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$      $(-\infty ; a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$

$[a ; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$      $[a ; +\infty] = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$

#### 3 Potencias

Para todo número real positivo  $a \neq 1$  y todo número real  $c$ , existe un único número real  $b > 0$  tal que:  $a^c = b$  y recíprocamente  $a^c$  es la potencia de base  $a$  y exponente  $c$ .

La potenciación tiene las propiedades siguientes:

Si  $a > 0$ ,  $b > 0$  y  $s, r \in \mathbb{R}$

1.  $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

4.  $a^r : b^r = (a : b)^r$

2.  $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$

5.  $(a^r)^s = a^{rs}$

3.  $a^r : a^s = a^{r-s}$

6.  $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$

#### 4 Notación científica

Un número está expresado en notación científica si se escribe  $a = a_0 \cdot 10^k$  con  $1 \leq a_0 < 10$  y  $k \in \mathbb{Z}$

Ejemplo:  $1364 = 1,364 \cdot 10^3$ ;       $0,098 = 9,8 \cdot 10^{-2}$

**5** Módulo de un número real

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

**6** Reglas de redondeo

Si el orden al cual se va a redondear (señalado con una flecha en los ejemplos) está seguido de 0; 1; 2; 3; 4 se redondea por defecto. Ejemplo:

$$\downarrow \\ 1842 \approx 1800$$

$$\downarrow \\ 1847 \approx 1800$$

Si está seguido de 5; 6; 7; 8; 9 se redondea por exceso.

$$\downarrow \\ \text{Ejemplo: } 1751 \approx 1800$$

$$\downarrow \\ 1650 \approx 1700$$

$$\downarrow \\ 1980 \approx 2000$$

**7** Valores aproximados

En un valor aproximado se llaman cifras significativas, todas las que se encuentran a partir de la primera cifra diferente de cero; si un número está en notación científica, los ceros de la potencia de 10 no son cifras significativas.

Ejemplo:      1200      tiene 4 cifras significativas.  
                 0,0240      tiene 3 cifras significativas.  
                 0,01034      tiene 4 cifras significativas.  
                 0,000001      tiene 1 cifra significativa.  
                  $1,2 \cdot 10^4$       tiene 2 cifras significativas.

Un valor aproximado que se obtiene de uno exacto aplicando las reglas del redondeo, tiene todas sus cifras significativas correctas. Ejemplo:

1      es un valor aproximado de  $\sqrt{2}$  con 1 cifra correcta.

0,333      es un valor aproximado de  $\frac{1}{3}$  con 3 cifras correctas.

$1,4 \cdot 10^2$       es un valor aproximado de  $\sqrt{20\,000}$  con 2 cifras correctas.

**8** Regla fundamental del cálculo aproximado

Quando se calcula con valores aproximados el resultado debe darse con tantas cifras significativas como el dato que tenga menor número de cifras significativas. Los cálculos intermedios se realizan con una cifra significativa más que las que debe tener la respuesta; en caso de que esto

sea demasiado engorroso, se calcula con tantas cifras como debe tener la respuesta; nunca con menos.

### Expresiones algebraicas

[9] Polinomio es una suma algebraica de monomios, se representa  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ ;  $a_n \neq 0$ , grado:  $n$

Fracción algebraica es un cociente de polinomios:

$$H(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Si se multiplican o dividen el numerador y el denominador de la fracción por un mismo factor (diferente de cero) la fracción no cambia. Si se divide, la fracción se simplifica; es conveniente operar con fracciones lo más simplificadas posible.

Ejemplo:  $\frac{(x-2)^2(x+1)^2}{(x-2)^2(x-5)} = \frac{(x-2)(x+1)^2}{x-5}$ ; se simplificó  $(x-2)^2$

### [10] Productos notables

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

$$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$$

### [11] Descomposición factorial

Factor común:  $ax + bx = (a + b)x$

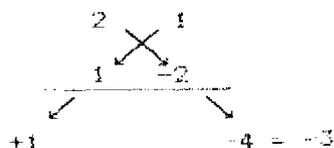
Diferencia de cuadrados:  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Trinomios: cuadrado perfecto:  $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

$x^2 + px + q$ :  $x^2 + px + q = (x+a)(x+b)$ ; con  $a+b = p$  y  $ab = q$

$mx^2 + px + q$ :  $mx^2 + px + q = (ax+b)(cx+d)$ ; con  $m=ac$ ;  $p=ad+bc$ ;  $q=bd$

Ejemplo:  $2x^2 - 3x - 2 = (2x+1)(x-2)$



Ruffini:  $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = (x-a)(x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots + b_n)$

	1	$a_1$	$a_2$	.....	$a_n$
$a$		$a$	$ab_2$	.....	$ab_{n-1}$
	1	$a+a_1=b_1$	$a_2+ab_2=b_2$	.....	$a_n+ab_{n-1}=0$

	1	-2	-4	3
3		3	3	-3
	1	1	-1	0

Ejemplo:  $x^3 - 2x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x^2 + x - 1)$

## [12] Radicales

Radicales semejantes son los que tienen el mismo índice y la misma expresión subradical; se reducen como los términos semejantes. Ejemplo:

$$2\sqrt{a} - \sqrt{a} + \sqrt{4a} = 2\sqrt{a} - a\sqrt{a} + 2\sqrt{a} = (4-a)\sqrt{a} \quad (a \geq 0)$$

Racionalizar es eliminar los radicales del denominador.

Ejemplo:  $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$

$$\frac{2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{2(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b} \quad (a, b > 0; a \neq b)$$

## Ecuaciones. Sistemas. Inecuaciones

### [13] Ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0)$$

$D = b^2 - 4ac$  es el discriminante. Si  $D > 0$ , la ecuación tiene dos soluciones; si  $D = 0$ , una solución y si  $D < 0$ , no tiene.

Las soluciones son:  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

### [14] Ecuaciones con radicales

Para resolverlas es necesario racionalizar: se aísla el radical y se elevan al cuadrado ambos miembros; después se resuelve la ecuación obtenida. Es necesario comprobar.

Ejemplo:  $\sqrt{x+3} - 1 = x;$

aislamos el radical:  $\sqrt{x+3} = x + 1$

racionalizamos:  $x+3 = x^2 + 2x + 1$

raíces:  $x_1 = 1; x_2 = -2$

-2 es una raíz extraña, pues:  $\sqrt{-2+3} - 1 = 0 \neq -2$

### [15] Sistemas de ecuaciones

Los sistemas de ecuaciones pueden resolverse por adición y sustracción (o sea, por eliminación de variables) y por sustitución.

Los sistemas de ecuaciones lineales pueden ser determinados (tienen una solución única), indeterminados (tienen infinitas soluciones) o imposibles (no tienen solución).

Ejemplos:

(1)  $2x + y = 5$       Adicionando conduce a  $x = 2$ ; luego  $y = 1$ .

(2)  $x - y = 1$       Es determinado su única solución es  $(2;1)$ .

(1)  $2x + 2y = 6$       Sustituyendo (2) en (1) se obtiene:

(2)  $y = 3 - x$        $2x + 2(3-x) = 6$ ; o sea  $6 = 6$ . Indeterminado.

(1)  $x + y = 3$       Multiplicando (1) por 2 y restándole (2)

(2)  $2x + 2y = 5$       resulta:  $0 = 1$ . Imposible.

(1)  $x^2 + y^2 = 9$       Sustituyendo (2) en (1) resulta:  $x^2 + x^2 = 8$

(2)  $y = x$       o  $2x^2 = 8$ ;  $x = \pm 2$  luego  $y = \pm 2$ .

Soluciones:  $(2;2)$ ;  $(-2;-2)$ .

### [16] Inecuaciones

Para resolver una inecuación lineal se transponen las constantes a un miembro y las variables a otro (al transponer se cambia el signo del término). Si se multiplica o divide por un número negativo, se invierte el sentido de la desigualdad.

Ejemplos: a)  $2x + 3 > x + 4$       b)  $-3x - 1 > 4$

$$2x - x > 4 - 3$$

$$x > 1$$

$$-3x > 5$$

$$x < -\frac{5}{3}$$

Conjunto solución:  $(1; +\infty)$

$(-\infty; -5/3)$

Para resolver inecuaciones fraccionarias se expresan en la

forma:  $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$       ó       $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$

Se descomponen en factores  $P(x)$  y  $Q(x)$  y se marca el signo de la fracción en cada uno de los intervalos en que *dividen* a la recta real los ceros de  $P(x)$  y  $Q(x)$ . Los ceros del denominador no pertenecen al conjunto solución, los del numerador pertenecen si la desigualdad no es estricta.

Ejemplo: Resolver  $\frac{(x-2)(x+1)(x-1)}{(x+\frac{1}{2})(x-3)} > 0$

Se marcan los ceros en la recta (fig.M1).



Fig.M1

$x > 3$  la fracción es positiva y cambia de signo al pasar por cada punto de división (todos los exponentes son impares), se marcan esos signos en la recta.

Conjunto solución:  $(-1; -\frac{1}{2}) \cup (1; 2) \cup (3; +\infty)$

## Funciones

### [17] Función

Una función,  $f$ , es una correspondencia que a cada elemento de un conjunto,  $A$ , le hace corresponder exactamente un elemento de otro conjunto,  $B$ . El conjunto  $A$  es el dominio de la función y se denota:  $\text{Dom}(f)$ .

El elemento de  $B$  que corresponde a un elemento  $x \in \text{Dom}(f)$  se llama imagen de  $x$  y se denota  $f(x)$ ; el conjunto de todas las imágenes es la imagen de la función y se denota  $\text{Im}(f)$ .

### [18] Función inyectiva.

Una función es inyectiva si elementos diferentes tienen imágenes diferentes, en la práctica es cómodo utilizar el con trarrecíproco: es inyectiva si de  $f(x_1) = f(x_2)$  se deduce que  $x_1 = x_2$ . Geométricamente esto significa que las paralelas al eje "x" cortan a la gráfica de  $f$  en un único punto.

### [19] Función inversa

Si una función  $f$  es inyectiva, se puede definir otra función,  $f^{-1}$ , llamada inversa de  $f$  que tiene como dominio la imagen de  $f$  y como imagen el dominio de  $f$ :

$$\text{Dom}(f^{-1}) = \text{Im}(f) \quad \text{Im}(f^{-1}) = \text{Dom}(f)$$

y tal que  $f^{-1}(y) = x$  cuando  $f(x) = y$ ; es decir:

$$f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$$

La gráfica de  $f^{-1}$  es simétrica de la gráfica de  $f$  respecto a la recta  $y = x$ .

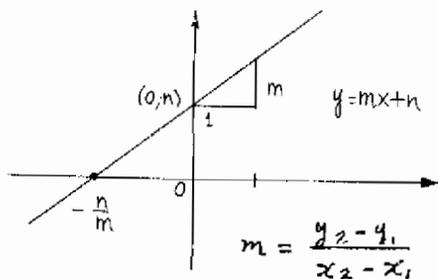
### [20] Gráficas de funciones conocidas. Propiedades

Las gráficas permiten recordar las propiedades de las funciones:

- Son crecientes (decrecientes) donde la gráfica asciende (desciende) de izquierda a derecha.
- Tienen ceros donde la gráfica corta al eje "x".
- Son pares (impares) si la gráfica es simétrica respecto al eje "y" (al origen de coordenadas).

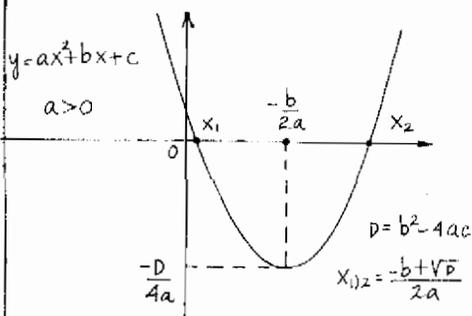
Si  $f$  es par se cumple  $f(x) = f(-x)$  y si es impar  $f(x) = -f(-x)$

Función lineal (fig.M2)



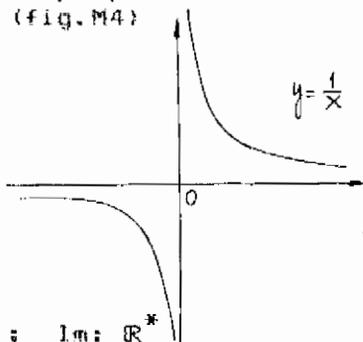
Dom:  $\mathbb{R}$  ; Im:  $\mathbb{R}$

Función cuadrática (Fig. M3)



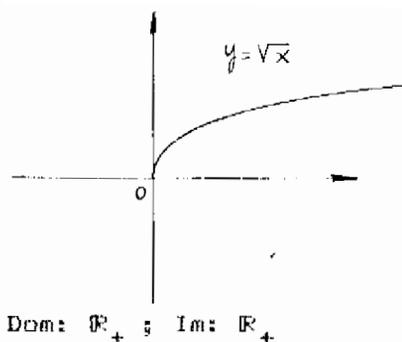
Dom:  $\mathbb{R}$  ; Im:  $y \geq -D/4a$

Función de proporcionalidad inversa (fig.M4)



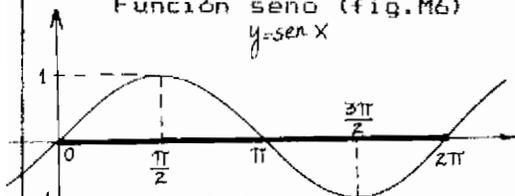
Dom:  $\mathbb{R}^*$  ; Im:  $\mathbb{R}^*$

Función radical (fig.M5)



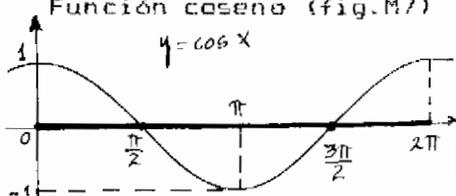
Dom:  $\mathbb{R}_+$  ; Im:  $\mathbb{R}_+$

Función seno (fig.M6)



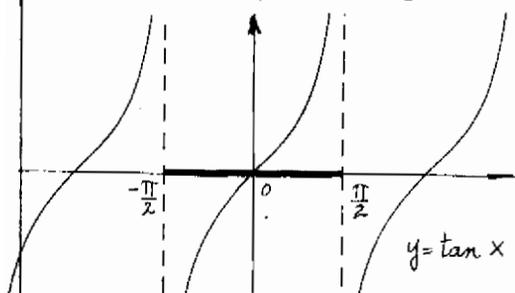
Dom:  $\mathbb{R}$  ; Im:  $[-1 ; 1]$

Función coseno (fig.M7)



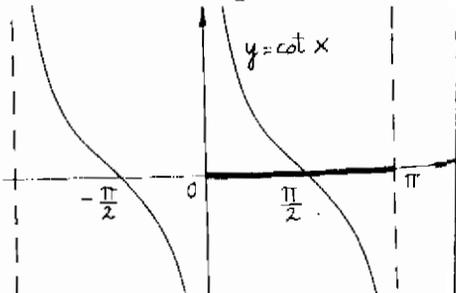
Dom:  $\mathbb{R}$  ; Im:  $[-1 ; 1]$

Función tangente (fig.M8)



Dom:  $\mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z} \right\}$  ; Im:  $\mathbb{R}$

Función cotangente (fig.M9)



Dom:  $\mathbb{R} \setminus \{ k\pi ; k \in \mathbb{Z} \}$  ; Im:  $\mathbb{R}$

[21] Funciones elementales

Función polinómica: Es la que a cada  $x \in \mathbb{R}$  asocia  $P(x)$ , donde  $P(x)$  es un polinomio.

Función racional: Es la que a cada  $x \in \mathbb{R}$ , con  $Q(x) \neq 0$ , asocia  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  donde  $P(x)$  y  $Q(x)$  son polinomios. Las funciones polinómicas son un caso particular de función racional.

Se llaman funciones elementales las que se obtienen al realizar un número finito de operaciones aritméticas y de composición con las funciones racionales, trigonométricas, exponenciales y sus inversas.

GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA

Ángulos y rectas

[22] Paralelas y perpendiculares

Las rectas paralelas tienen la misma dirección

Las rectas perpendiculares forman ángulo de  $90^\circ$

Por cada punto de un plano se pueden trazar exactamente una paralela y una perpendicular a una recta dada.

[23] Distancia de un punto a una recta

Si desde un punto exterior a una recta se trazan una perpendicular y varias oblicuas, la perpendicular es menor que las oblicuas. La longitud del segmento de perpendicular es la distancia del punto a la recta.

[24] Ángulos complementarios

Son aquellos cuya suma es  $90^\circ$ .

[25] Ángulos entre paralelas

En la fig. M10  $r \parallel p$  y  $s$  secante.

alternos:  $\alpha$  y  $\rho$ ;  $\beta$  y  $\omega$ ;  $\gamma$  y  $\theta$ ;  $\delta$  y  $\phi$

correspondientes:  $\alpha$  y  $\theta$ ;  $\beta$  y  $\phi$ ;

$\delta$  y  $\omega$ ;  $\gamma$  y  $\rho$ .

conjugados:  $\alpha$  y  $\omega$ ;  $\beta$  y  $\rho$ ;  $\gamma$  y  $\phi$ ;  $\delta$  y  $\theta$

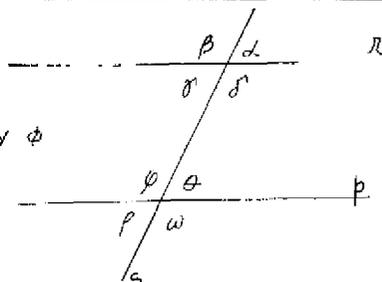


Fig. M10

Los ángulos alternos y los correspondientes entre paralelas son iguales.

Los ángulos conjugados entre paralelas son suplementarios.

**26** Los ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos o perpendiculares son iguales o suplementarios.

### Triángulos

**27** Rectas notables de un triángulo

**Alturas:** son los segmentos de perpendicular trazados desde los vértices hasta los lados opuestos. (Los pies de las perpendiculares se llaman pies de las alturas.)

**Medianas:** son los segmentos determinados por los vértices y el punto medio del lado opuesto.

**Mediatrices:** son las mediatrices de cada uno de los lados de un triángulo.

**Bisectrices:** son los segmentos de bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo, comprendidos entre cada vértice y el lado opuesto.

**28** Puntos notables en un triángulo

En todo triángulo:

- Las alturas se cortan en un punto llamado ortocentro.
- Las medianas se cortan en un punto llamado baricentro (centro de gravedad).
- Las mediatrices se cortan en un punto que es el circuncentro (centro de la circunferencia circunscrita).
- Las bisectrices se cortan en un punto que es el incentro (centro de la circunferencia inscrita).

**29** Suma de ángulos interiores de un triángulo

Los ángulos interiores de un triángulo suman  $180^\circ$ .

**30** Triángulos isósceles

Un triángulo es isósceles si tiene dos lados iguales. En todo triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados iguales (lados) son iguales y se llaman ángulos de la base. El vértice del otro ángulo es el vértice principal.

En todo triángulo isósceles la altura, mediana, mediatriz y bisectriz relativas al vértice principal coinciden.

### [31] Triángulo equilátero

Un triángulo equilátero tiene iguales sus tres lados y sus tres ángulos.

En todo triángulo equilátero las medianas, mediatrices, bisectrices y alturas relativas a cada vértice coinciden.

### [32] Triángulo rectángulo

Triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo recto (fig. M11). El lado opuesto al ángulo recto es la hipotenusa y los otros dos son los catetos (a: hipotenusa, b y c: catetos).

En todo triángulo rectángulo se cumple:

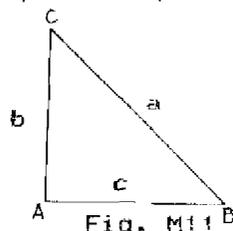
$$b^2 + c^2 = a^2 \quad (\text{Teorema de Pitágoras})$$

$$\frac{b}{a} = \text{sen } B$$

$$\frac{c}{a} = \text{cos } B$$

$$\frac{b}{c} = \text{tan } B$$

$$\frac{c}{b} = \text{cot } B$$



### [33] Paralela media de un triángulo

El segmento que une los puntos medios de la base de un triángulo es paralela a la base e igual a su mitad.

### [M] Criterios de igualdad de triángulos

Dos triángulos son iguales si tienen respectivamente iguales:

- Un lado y los ángulos adyacentes (a.l.a.).
- Dos lados y el ángulo comprendido (l.a.l.).
- Sus tres lados (l.l.l.).

### [35] Criterios de semejanza de triángulos

Dos triángulos son semejantes si:

- Tienen dos ángulos respectivamente iguales (a.a.).
- Tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos respectivamente igual (l.a.l.).
- Tienen los tres lados proporcionales (l.l.l.).

## 36 Clasificación y propiedades de los cuadriláteros

### Paralelogramos

• Los paralelogramos tienen sus lados opuestos iguales y paralelos. Sus ángulos opuestos son iguales y los consecutivos suman  $180^\circ$ . Las diagonales se cortan en su punto medio (fig.M12).

Los rectángulos y los rombos son paralelogramos especiales

#### Rectángulo

- Sus cuatro ángulos son rectos
- Sus diagonales son iguales

#### Rombo

- Sus cuatro lados son iguales
- Sus diagonales son perpendiculares y bisecan el ángulo de donde parten

- El cuadrado es un paralelogramo que es a la vez rectángulo y rombo.

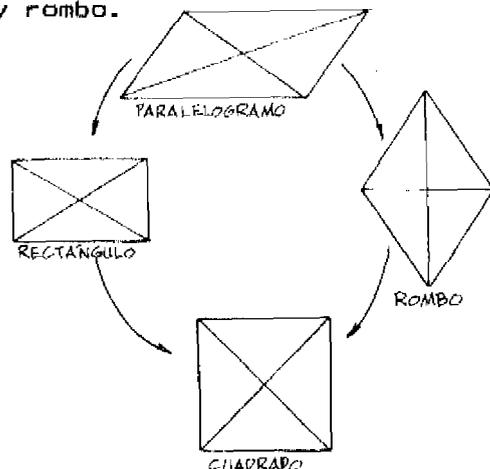


Fig. M12

### Trapezio

• Los trapecios son cuadriláteros que tienen un par de lados paralelos. Los lados paralelos se llaman bases del trapecio (fig.M13).

• El segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio (paralela media) es paralelo a las bases y su longitud es igual a la semisuma de las longitudes de ellas.

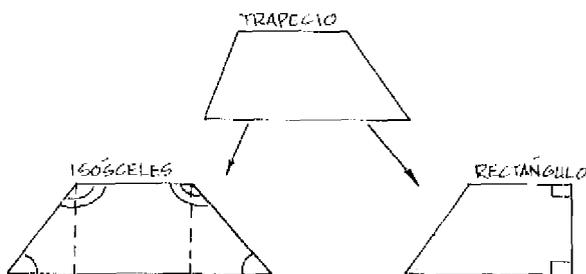


Fig. M13

### Circunferencia

[37] La circunferencia es un conjunto de puntos que equidistan de uno llamado centro. La distancia de cualquier punto al centro es el radio.

El segmento determinado por dos puntos en una circunferencia es una cuerda, si el centro está en la cuerda es un diámetro.

Si una recta corta a la circunferencia en dos puntos es secante a la circunferencia y si la toca en un solo punto tangente. Las tangentes trazadas desde un punto a la circunferencia (son dos) son iguales y cada tangente es perpendicular al radio en el punto de contacto.

Por tres puntos no alineados pasa una circunferencia y solo una; su centro es el punto de intersección (circuncentro) de las mediatrices del triángulo que determinan.

### Operaciones con vectores

#### [38] Vectores

Un vector tiene dirección, sentido y módulo; se representa por un segmento orientado. La dirección del vector es la dirección de la recta que lo contiene, el sentido es el de la semirrecta cuyo origen es el origen del vector y lo contiene y su módulo la longitud del segmento (fig. M 14).

Dos vectores opuestos tienen igual

dirección y módulo, pero sentidos

opuestos, se denota  $\vec{AB} = -\vec{BA}$ .

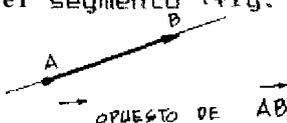


Fig.

**[39]** Adición de vectores

Para sumar dos vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , se coloca en un punto del plano un vector  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$  y a partir de B un vector  $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ , entonces (fig. M 15):

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

El mismo resultado se obtiene si se colocan los vectores  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$  y  $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$  con origen común y se completa el paralelogramo ABCD, la diagonal  $\overrightarrow{AD}$  es la suma  $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$  (fig. M 16).

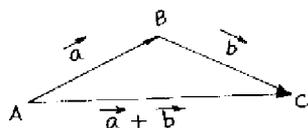


Fig. M 15

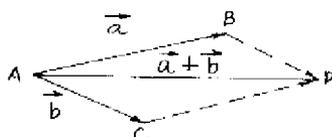


Fig. M 16

**[40]** Sustracción de vectores

Para restar vectores, se suma al primero el opuesto del segundo. Se puede comprobar que si se construye el paralelogramo determinado por  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , la diferencia  $\vec{a} - \vec{b}$  es la diagonal  $\overrightarrow{CB}$  (fig. M 16).

**[41]** El producto de un vector  $\vec{a}$  por un número real  $\alpha$ , es un vector  $\alpha\vec{a}$  (fig. M 17) que

tiene igual dirección y sentido que  $\vec{a}$  si  $\alpha > 0$ , igual dirección y sentido opuesto si  $\alpha < 0$  y cuyo módulo es  $|\alpha| |\vec{a}|$

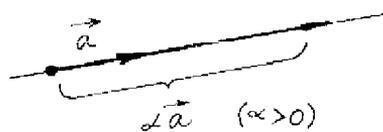


Fig. M 17

**[42]** Descomposición de un vector

Todo vector  $\vec{a}$  se puede expresar como la suma de dos vectores de direcciones perpendiculares entre sí (fig. M 18), estos dos vectores se llaman componentes del vector  $\vec{a}$ :

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y ; |\vec{a}_x| = |\vec{a}| \cos \theta ; |\vec{a}_y| = |\vec{a}| \sin \theta$$

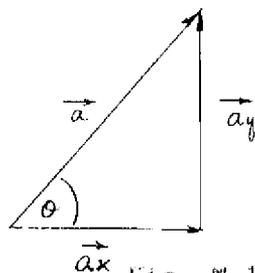


Fig. M 18

**43** Trabajo de una fuerza

Si una fuerza  $\vec{F}$  se desplaza según un vector  $\vec{s}$  (fig. M 19), el trabajo realizado por  $\vec{F}$  se calcula por la fórmula  $W = |\vec{F}| |\vec{s}| \cos \alpha$

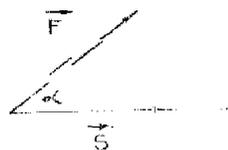


Fig. M 19

**Áreas y Perímetros**

**44** Perímetros

Triángulo:  $a + b + c$

Paralelogramo:  $2a + 2b$

Longitud de la circunferencia:  $2\pi r$

Longitud del arco de amplitud  $\alpha^\circ$ :  $l = \frac{\pi r \alpha^\circ}{180^\circ} = \pi r \alpha$

( $\alpha$  medida en radianes)

**45** Áreas

Triángulo:  $A = \frac{1}{2} bh = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$  Fórmula de Herón.  
 $= \frac{1}{2} ab \sin \gamma$

Rectángulo:  $A = ab$

Cuadrado:  $A = a^2$

Rombo:  $A = \frac{1}{2} ab$  (a y b longitudes de las diagonales).

Trapezio:  $A = \left[ \frac{b + b'}{2} \right] h$  (b y b' bases).

Circunferencia:  $A = \pi r^2$

$A_{\text{sector}} = \frac{\pi r^2 \alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi r^2 (\alpha_r)}{2\pi}$  ( $\alpha_r$  medida en radianes).

**Trigonometría**

**46** Signo de las razones trigonométricas

Razón	Cuadrantes			
	I $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	II $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	III $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	IV $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
seno	+	+	-	-
coseno	+	-	-	+
tangente	+	-	+	-
cotangente	+	-	+	-

**47** Identidades trigonométricas

$$\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1 \quad \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \tan \alpha \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\text{cos}^2 \alpha}$$

$$\text{cos}(\alpha \pm \beta) = \text{cos} \alpha \text{cos} \beta \mp \text{sen} \alpha \text{sen} \beta$$

$$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen} \alpha \text{cos} \beta \pm \text{cos} \alpha \text{sen} \beta$$

$$\text{sen } 2\alpha = 2 \text{sen} \alpha \text{cos} \alpha \quad \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\text{cos} 2\alpha = \text{cos}^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha = 2\text{cos}^2 \alpha - 1 = 1 - 2\text{sen}^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad \text{sen } \alpha - \text{sen } \beta = 2 \text{cos} \frac{\alpha + \beta}{2} \text{sen} \frac{\alpha - \beta}{2}$$

**48** Fórmulas de reducción

	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$-\alpha$
sen	sen $\alpha$	-sen $\alpha$	-sen $\alpha$
cos	-cos $\alpha$	-cos $\alpha$	cos $\alpha$
tan	-tan $\alpha$	tan $\alpha$	-tan $\alpha$
cot	-cot $\alpha$	cot $\alpha$	-cot $\alpha$

**49** Relaciones entre las funciones de ángulos complementarios

$$\text{sen} \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \text{cos } \alpha \quad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$$

$$\text{cos} \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \text{sen } \alpha \quad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$$

$$\tan \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \text{cot } \alpha \quad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$$

$$\text{sen} \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) = \text{cos } \alpha \quad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$$

$$\text{cos} \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\text{sen } \alpha \quad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$$

$$\tan \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\text{cot } \alpha \quad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$$