9U-042 cap 1.qxp 30/10/09 12:39 Página I

Matemática 7mo. grado

Cuaderno Complementario
Soluciones y Respuestas

M. Sc. Aurelio Quintana Valdés
M. Sc. Mayra Rodríguez Aruca
M. Sc. Mirian Ibáñez Fernández
M. Sc. Lourdes Báez Arbesú
Lic. Mirta Capote Jaume
Lic. Frank Michel Enrique Hevia
Dra. Martha Álvarez Pérez
Dr. Eduardo Villegas Jiménez

Editorial
Pueblo y Educación

50 DE LA REVOLUCIÓN
ANIVERSARIO 50 DEL TRIUNFO

Edición: Lic. Laura Herrera Caseiro
Diseño: Airam Expósito Fernández
Ilustración: María Elena Duany Alayo
Corrección: Carmen Lidia González Carballo
Emplane: Alex Lacke Cairo

ISBN 978-959-13-1937-1

EDITORIAL PUEBLO Y EDUCACIÓN
Ave. 3ra. A No. 4605 entre 46 y 60,
Playa, Ciudad de La Habana,
Cuba. CP 11300.

A los profesores

La observación de la práctica escolar demuestra constantemente la necesidad de incorporar nuevas ideas que permitan mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Precisamente la presente publicación tiene como objetivo contribuir a facilitar el trabajo del profesor general integral de Secundaria Básica.

A través de esta publicación se pretende poner en sus manos un material que le sirva para verificar la corrección de las soluciones y respuestas obtenidas por sí mismo a los ejercicios propuestos en el Cuaderno Complementario de Matemática de séptimo grado y obtener sugerencias valiosas en relación con algunas de sus posibles vías de resolución. Es, por tanto, un material que puede utilizar en el proceso de planificación de sus clases.

En algunos casos, se ofrecen explicaciones más detalladas acerca de las soluciones de los ejercicios y problemas que se consideran de mayor dificultad y complejidad; además, se incluye la fe de erratas de algunos ejercicios propuestos en el Cuaderno Complementario.

El colectivo de autores agradece altamente cualquier sugerencia que se considere necesaria con vista a su ulterior reedición.

Índice

1
CAPÍTULO

El significado de los números

1.1 El orden de los números y su utilización en la interpretación de datos cuantitativos

1. a) El número que indica la producción de azúcar representa:
   - Una cantidad de magnitud.

   b) La producción de azúcar del año 2002 fue:
   - Mayor que la producción del año 2001.
2. a) El número que indica el año representa:
   - Una identificación.

   b) El número 76,8 representa la relación de:
   - Los gramos de proteínas consumidas cada día, por cada persona en nuestro país.
3. a) El número de teléfonos instalados hasta el 2002 representa:
   - Una relación entre dos cantidades.

   b) Que las tres cuartas partes de estos teléfonos estén digitalizados significa que:
   - Tres teléfonos estén digitalizados de cada cuatro instalados.

4.

A	B
Cantidad contable	El archipiélago cubano tiene una superficie de 110 860 km^2.
Cantidad de magnitud	La población de Cuba es de 11 247 200 habitantes, aproximadamente.
Relación entre cantidades	El 1er. territorio libre de analfabetismo en Cuba fue Melena del Sur.
Ordinal	En Cuba la población urbana es de un 75,4 %.

Los números naturales. Lectura y escritura

El grupo de respuestas que se dan a continuación corresponden a los ejercicios de la página 7 que en el cuaderno están indicados como ejemplos, pero son ejercicios a resolver.

1. a) ciento veintitrés.
   b) cinco mil novecientos cincuenta.
   c) cuarenta mil seiscientos treinta y uno.
   d) cuarenta y tres millones doscientos sesenta y siete mil quinientos veintitrés.
   e) sesenta y cinco mil trescientos veinte.
   f) cuarenta y cinco millones seiscientos mil quinientos.
   g) ciento treinta mil millones quinientos sesenta mil.
   h) veintitrés millones setecientos mil uno.
2. a) 43 000 108.
   b) 25 000 000 001.
3. a) De 830 425 303 es el 2.
   De 314 328 es el 1.
   De 1 834 205 333 es el 0.
   b) El número 830 425 303 tiene 830 42 decenas de millar.
   El número 314 328 tiene 31 decenas de millar.
   El número 1 834 205 333 tiene 183 420 decenas de millar.
   c) En el número 830 425 303 ocupa la posición de las centenas de millar.
   En el número 314 328 ocupa la posición de las centenas.
   En el número 1 834 205 333 ocupa la posición de las unidades de millón.
4. a) Tiene 7 392 centenas.
   b) Es 1.
5. a) Verdadera.
   b) Falsa, porque tiene 518 821 decenas.
   c) Falsa, porque tiene 164 decenas de millar.
   d) Verdadera.
6. a) Trece mil quinientos setenta y nueve.
   b) Treinta y dos mil.
7. a) 990.
   b) 9 870.
   c) 1 023.
8. Es 999.
9. a) Soy el número 91 004.
   b) noventa y un mil cuatro.

10. Daniela escogió el número 1 357.
11. El número es: 11 012 246.
12. El número es: 7 995.

Las fracciones comunes. Lectura y escritura. Los números fraccionarios como expresión decimal

1. a) Cuatro coma uno o cuatro unidades y una décima o cuarenta y una décimas.
   b) Cero coma cuatro, cinco o cero unidades y cuarenta y cinco centésimas o cuarenta y cinco centésimas.
   c) Ochenta y dos coma cero, cuatro, cinco u ochenta y dos unidades y cuarenta y cinco milésimas u ochenta y dos mil cuarenta y cinco milésimas.
   d) Treinta y ocho coma dos, cero o treinta y ocho unidades y veinte centésimas o tres mil ochocientas veinte centésimas.
   e) Ochocientos treinta y seis coma dos, cero, cero u ochocientas treinta y seis unidades y doscientas milésimas u ochocientos treinta y seis mil doscientas milésimas.
   f) Ochocientos treinta y dos mil quinientos sesenta y siete coma cuatro, dos u ochocientas treinta y dos mil quinientos sesenta y siete unidades y cuarenta y dos centésimas u ochenta y tres millones doscientos cincuenta y seis mil setecientas cuarenta y dos centésimas.
2. a) 48,28.
   b) 0,150.
   c) 170,5.
3. a) 23,57. b) 0,123.
   c) 10,25. d) 5,012.
4. a) 8 910,5.
   b) 891,05.
   c) 8,910 5.

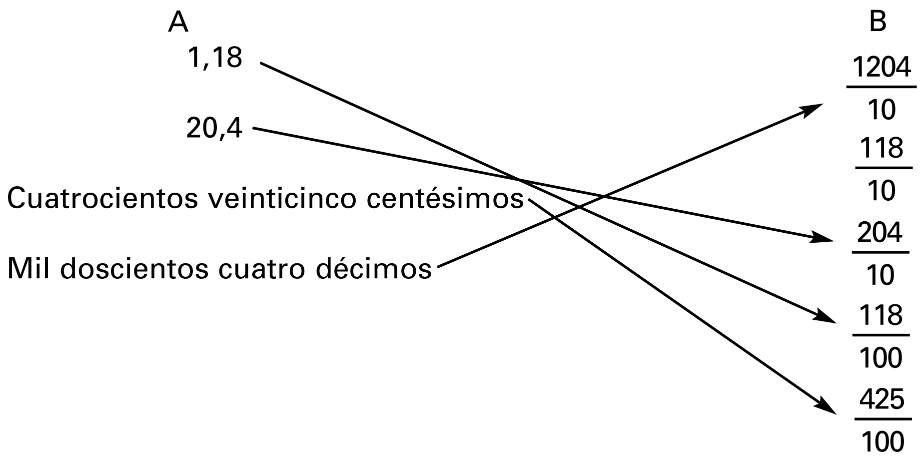
   a) Ocho mil novecientos diez coma cinco u ocho mil novecientas diez unidades y cinco décimas u ochenta y nueve mil ciento cinco décimas.
   b) Ochocientos noventa y uno coma cero, cinco u ochocientos noventa y una unidades y cinco centésimas u ochenta y nueve mil ciento cinco centésimas.
   c) Ocho coma nueve, uno, cero, cinco u ocho unidades y nueve mil ciento cinco diez milésimas u ochenta y nueve mil ciento cinco diez milésimas.
5. a) El 6.
   b) Tiene 3 845 623 milésimas (tres millones ochocientos cuarenta y cinco mil seiscientas veintitrés milésimas).
   c) Las centésimas.

6. a) 999,994. b) 10 234 567,89.
7. a) 0,45

   b) 0,125

   c) $4,\overline{6}$

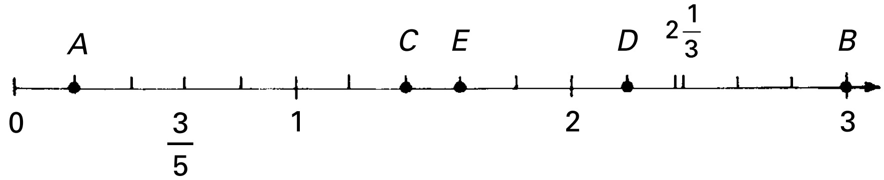
8.



Nota: En el cuaderno aparece Cuatrocientas veinticinco centésimas y mil doscientas cuatro décimas cuando debe ser Cuatrocientos veinticinco centésimos y mil doscientos cuatro décimos.

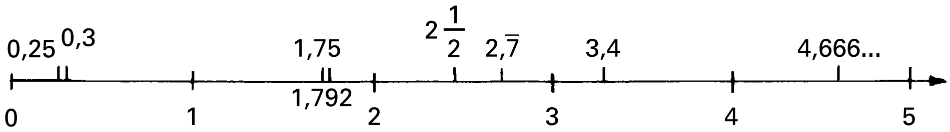
Representación en el rayo numérico de números naturales y fraccionarios

1. a) 1 cm = 100 unidades.
   b) 1 cm = 1 unidad.
2. B = 1,1; C = 1,5; D = 1,9; E = 2,3; F = 2,6.
3. a) $A = \frac{1}{5}; B = \frac{15}{5}; C = \frac{7}{5}; D = 2\frac{1}{5}; E = 1\frac{3}{5}.$
   b)



4. a) Divido cada unidad en tres partes y tomo ocho.
   b) Señalo 37 mm en el rayo.

5.



Orden y comparación de números naturales y fraccionarios

1. a) 53 083 > 2 525. b) 1 437 < 105 430 000. c) 36 825 003 = 36 825 003.

   d) 5,47 < 8,47. e) 0,143 > 0,0143. f) $\frac{5}{10} = 0,5$.

   g) $\frac{3}{5} < \frac{8}{3}$. h) $\frac{2}{9} < \frac{7}{9}$. i) $\frac{4}{5} > \frac{4}{9}$.

   j) $4\frac{1}{5} < \frac{18}{4}$. k) $1\frac{1}{3} < \frac{5}{3}$. l) $\frac{5}{2} > 2,41$.

2. a) $3\frac{1}{2}$ 4,5 cm > $\frac{4}{5}$ cm. b) $\frac{6}{5}$ L < 1,5 kL.

   c) $3\frac{1}{2}$ km^2 < 3,8 km^2. d) 0,48 g > 0,5 dg.

   e) 4 m > $\frac{16}{7}$ dm. f) 0,25 m^3 > $\frac{1}{5}$ dm^3.

   g) 0 dm < $\frac{1}{4}$ cm. h) 1 mL < $\frac{3}{5}$ L.

3. a) 10 425 < 500 232 < 2 125 032 < 12 345 135.

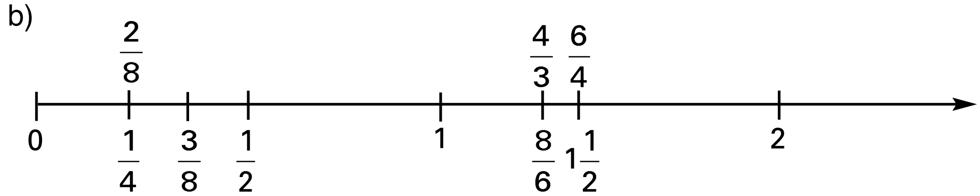
   b) 0,01 < 0,5 < 1,03 < 1,3 < 2,01.

   c) $\frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4} < \frac{7}{8} < \frac{5}{2}$.

   d) $\frac{1}{4} < 0,5 < \frac{4}{5} < 1\frac{1}{5} < 2,3 < 2\frac{3}{5}$.

4. a) $\frac{2}{8}$ y $\frac{1}{4}$; $\frac{6}{4}$ y $1\frac{1}{2}$; $\frac{4}{3}$ y $\frac{8}{6}$.

   b)



5. La otra fracción es $\frac{1}{2}$.

6. Habitantes — Orden

Habitantes		Orden
1 037 737	→	2do.
837 206	→	3ro.
1 043 144	→	1ro.
517 439	→	4to.

7. a) Educación. b) Salud Pública, Seguridad Social, Educación.

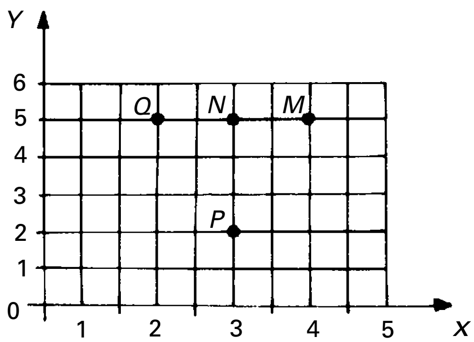
8. a) *A:* 135 (recuerda que el cero es considerado como un número par); *B:* 4 801; *C:* 4 999.
   b) 4 802.
   c) 4 998.
   d) *C*: 4 999.
   e) *C*: 4 999, porque tiene 49 centenas.
   f) $C > B > A$ o $4\,999 > 4\,801 > 135$.
9. a) Hortalizas.
   b) Las producciones de viandas y de cítricos.
   c) Maíz: doscientos noventa y ocho coma nueve o doscientos noventa y ocho unidades y nueve décimas o dos mil novecientos ochenta y nueve décimas.
   Frijoles: noventa y nueve coma uno o noventa y nueve unidades y una décima o novecientos noventa y una décimas.
   d) La supera en 440,9 miles de toneladas.
   e) Frijoles, Maíz, Cítricos, Viandas, Hortalizas.
10. a) La provincia Granma.
   b) Significa que hay 83,1 habitantes por cada un km^2, hay 831 habitantes por cada 10 km^2.
11. a) Entre 6 y 7. b) Entre 8 y 9.
   c) Entre 0 y 1. d) Entre 1 y 2.
   e) Entre 3 y 4. f) Entre 4 y 5.
   g) Entre 1 y 2. h) Entre 101 y 102.
   i) Entre 0 y 1. j) Entre 0 y 1.
12. El asterisco (*) puede ser igual a:
   a) 0; 1; 2; 3; 4. b) 4; 5; 6; 7; 8; 9. c) 1.
   d) 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. e) 1; 2. f) 6; 7; 8; 9.
   g) 5; 6; 7; 8; 9. h) 1; 2. i) 3.
   j) 3. k) 5. l) 4.
13. El asterisco (*) puede ser:
   a) 9. b) 5. c) 0.

14. a) El *B*.
   b) En el *D*.
15. La fracción es $\frac{35}{84}$, porque $\frac{5 \cdot 7}{12 \cdot 7} = \frac{35}{84} = \frac{5}{12}$.

16. A la siembra de plátanos debe dedicar nueve partes para igualarse a su compañero.
17. a) 3,50 y 3,05.
    b) 0,35.
    c) 0,53 y 0,35.
18. 0,570; 0,057; 0,075; 0,750; 0,507; 0,705.
19. En $\frac{7}{10}$ y 2.
20. Pueden ser $\frac{9}{25}$ y 0,399 9.
21. El 0,60.
22. $\frac{9}{10}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{1}{2}$ respectivamente.
23. Luis leyó más rápido.
24. Ninguna de ellas.

Representación de puntos en un sistema de coordenadas

1. a)



   b) Triángulo *PNQ* y triángulo *PNM*.
   c) *R* (2;2).

2. a) El punto *C* (1;0).
   b) Los puntos *B* (3;4) y *D* (0;4).
   c) El punto *F* debe tener abscisa 1 y ordenada 4, es decir, *F* (1;4).

Importancia del trabajo con datos para la sociedad

1.

Área protegida	Extensión
Península de Guanahacabibes	4(25 000 ha) + 1 500 ha = 101 500 ha
Sierra del Rosario	25 000 ha

Área protegida	**Extensión**
Ciénaga de Zapata	5(88 860 ha) + 35 500 ha = 479 800 ha
Buenavista	88 860 ha
Baconao	77 760 ha
Cuchillas del Toa	49 740 ha + 77 760 ha = 127 500 ha

2. a) El gráfico de barras, porque permite comparar la distribución de los candidatos a diputados en el año 2000.
   b) Ciudad de La Habana.
   c) Isla de la Juventud; Sancti Spíritus; Ciego de Ávila; Las Tunas; Guantánamo; Pinar del Río; Matanzas; La Habana; Villa Clara; Granma; Camagüey; Santiago de Cuba; Holguín; Ciudad de La Habana.
   d) El promedio de diputados en la parte Oriental es de aproximadamente 42.
   e) Representa el 8,87 %.
   f) Excede en 68 diputados, ya que 112 – 44 = 68.
3. a) La gráfica de barras.
   b) Aumentó en 295,4 (millones de pesos).
   c) El sector educacional.
   d) La diferencia es de 172,9 (millones de pesos), ya que
   1 726,0 – 1 553,1 = 172,9.
4. a) La gráfica poligonal o de líneas.
   b) El CDR 3.
   c) En el 2000 se hicieron 82 donaciones de sangre.
   En el 2001 se hicieron 76 donaciones de sangre.
   En el 2002 se hicieron 68 donaciones de sangre.
   d) El CDR 1 tiene 26 donaciones como promedio.
   El CDR 2 tiene 19,3 donaciones como promedio.
   El CDR 3 tiene 30 donaciones como promedio.
   1er. lugar el CDR 3, 2do. lugar el CDR 1 y 3er. lugar el CDR 2.
   e) Representa aproximadamente el 30,1 %.
5. a) Gráfica de barras.
   b) Participaron 17 alumnos más.
   c) Asistieron en total 82 alumnos a los concursos.
   d) Fue de 45,12 %.
6. a) Gráfica de barras.
   b) De Ucrania.
   c) En 2 502 niños, ya que 2 715 – 213 = 2 502.
   d) De Bielorrusia.

7. a) Gráfica de barras.
   b) La cantidad de miles de visitantes que han llegado como turistas en los años 1960, 1965, 1990, 1995 y 2000.
   c) Llegaron 1 774 miles de visitantes al país.
   d) El turismo internacional en nuestro país ha aumentado considerablemente.
   e) Representa el 19,2 %.
8. a) Pictograma.
   b) Área de la cuenca de ríos importantes de Cuba.
   c) Cuyaguateje: 700 km^2; Hondo: 600 km^2; Almendares: 400 km^2; La Palma: 900 km^2; Canímar: 400 km^2.
   d) El río de mayor cuenca es La Palma y los de menor son Almendares y Canímar.
   e) Tiene 4 centenas de km^2.
9. a) Gráfica circular o de pastel.
   b) Porcentaje de embarazadas por edades.
   c) De 25 a 40 años.
   d) El total es de 25 embarazadas en esta zona.
10. a) Gráfica poligonal o de líneas.
    b) La extracción de petróleo en Cuba en miles de toneladas del año 1998 al 2002.
    c) A aumentar cada año.
    d) Se extrajeron 3 500 toneladas.
    e) En 559 toneladas, ya que 2 695 – 2 136 = 559.
11. a) Cuatro conejas.
    b) 10 conejos en camadas de 2 crías y 35 conejos en camadas de 7 crías.
    c) Hay en total 88 conejos recién nacidos.
12. a)

Institución	**Población Infantil (de 0 a 6 años)**
Círculos infantiles	146 700 niños
Grado preescolar en las primarias	106 337 niños
Vías no formales (programa *Educa a tu Hijo*)	616 180 niños
Otras	4 799 niños
Total	874 016 niños

b) En 469 480 niños, ya que 616 180 – 146 700 = 469 480.
c) Son atendidos por las vías no formales el 70,50 % de los niños aproximadamente.

13. a)

Cantidad de Especialistas			Doctores		Másteres	
Profesionales	Técnicos		Formados	En Formación	Formados	En Formación
	Hombres	Mujeres				
714	253	608	55	17	65	45

(hasta el 13 de mayo de 2003).

b) De los técnicos, son mujeres el 70,62 %.
c) Habrá 72 doctores y 110 másteres.
d) Los profesionales representan el 45,3 % del total de especialistas.

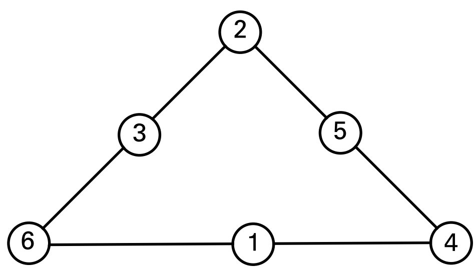
1.2 Operaciones con números naturales, fraccionarios y expresiones decimales

Operaciones con números naturales

1. a) 10 000.
   b) 10 000.
   c) 100 000.
   d) 50.
2. a) 485 648. b) 13 168 c) 2 234 891.
   d) 120 214. e) NS en el conjunto de los números naturales.
   f) 23 874 078. g) 876 999. h) 5 332.
   i) 503 064. j) 5 295. k) 5 411.
   l) 402 con resto 16. m) 603.
   n) NS en el conjunto de los números naturales.
   ñ) 2 135 677 con resto 126.
3. a) 10 747. b) 5 451.
   c) 232. d) 3 686.
4. a) 14 – (10 – 4) = 8. b) (16 – 4) : 2 = 6. c) (9 + 3) · (2 + 3) = 60.
5. a) (2 · 30) : (4 · 15) = 1, verdadera.
   b) (4 · 7) – (16 : 4) = 24, verdadera.

6. a) 385 +1**43** 528	b) 8**91**5 + 215 9130 En el cuaderno aparece como resultado 8 130 y debe ser 9 130.	c) 7**0**3 + **8**25 152**8**	d) **1000** − **999** 1	e) 521 · **2**0 10420	f) 125 · 1**3** **12**5 375 16**2**5

7. En 9 305.
8. Esteban tiene 3 monedas de 20 ¢ y 4 monedas de 5 ¢.
9. 918.
10. a) Soy el 72. b) Somos el 35 y el 14.
11. En este ejercicio existen varias formas de dar la respuesta, en este caso solo se ilustra una de estas:
    a) (6 – 2) : 1 = 4.
    b) 9 – 5 : 1 = 4.
    c) 9 – (6 – 1) = 4.
12. Para el ejemplo dado, se obtiene al final el número 123. En general, siempre se obtiene el número seleccionado después de formar el número de 6 cifras con las condiciones dadas y aplicar las operaciones que se indican.
13.



14. La caja contiene 40 pastillas.

Operaciones con números fraccionarios

1.

X	*Y*	*X + Y*	*X – Y*	*X : Y*
$\frac{8}{9}$	$\frac{5}{9}$	$1\frac{4}{9}$	$\frac{1}{3}$	$1\frac{3}{5}$

X	Y	$X+Y$	$X-Y$	$X:Y$
$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{7}$	$2\frac{3}{20}$	NS en el conjunto de los números fraccionarios	$\frac{15}{28}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{9}$	$1\frac{1}{2}$
$1\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$1\frac{11}{15}$	$\frac{14}{15}$	$3\frac{1}{3}$

2. a) Ninguna de las anteriores.
   b) 38.
3. a) El atleta recorrió en el entrenamiento de ese día $12\frac{1}{12}$ km.
   b) El atleta debe recorrer en bicicleta al noveno día de entrenamiento $8\frac{1}{3}$ km.
4. $\frac{1}{4}$
5. Jorge Luis.
6. *Nota:* La redacción de este problema se debe arreglar como sigue:

   Una caja de galletas está solo llena hasta sus $\frac{3}{5}$ partes. Si le añadimos $\frac{3}{5}$ kg más de galletas, entonces se llena totalmente. Luego la caja llena pesa:

   $\frac{3}{5}$ kg   1 kg   400 g   1,5 kg

   Observa que si la caja está llena hasta sus $\frac{3}{5}$ partes, entonces para llenarse totalmente faltan $\frac{2}{5}$ partes. Luego estas $\frac{2}{5}$ partes tienen una masa de $\frac{3}{5}$ kg que equivale a 0,6 kg por lo que las $\frac{3}{5}$ partes tienen una masa equivalente a 0,9 kg, por tanto, 0,6 kg + 0,9 kg = 1,5 kg.

   La respuesta correcta es 1,5 kg.
7. El tramo 1. (Observa que si en el segundo tramo recorrió $\frac{1}{4}$ del total y en el tercero $\frac{1}{6}$ de $\frac{3}{4}$ que es el resto, entonces en este tercer tramo recorrió un $\frac{1}{8}$ del total. Si se compara lo recorrido en el segundo y tercer tramos con lo que debió recorrer en el primer tramo, te darás cuenta que el tramo 1 resultó ser el mayor.)
8. a) La segunda rabirrubia pesa $1\frac{3}{4}$ kg.
   b) Si llevas las dos debes pagar $ 20,00.
9. 1,4 L.

10. La redacción de este problema se debe arreglar como sigue:

Una caja de caramelos está llena solo hasta sus $\frac{3}{5}$ partes. Si se le echan 400 g más de caramelos, esta se llena. La caja llena pesa:

$\frac{3}{5}$ kg 600 g 2,5 kg 1 kg

La respuesta correcta es 1 kg.

Operaciones con expresiones decimales

1.

Operación	Valor estimado	Valor exacto
5,82 + 0,03 + 31,5	37	37,35
91,6 + 1,75 + 0,6	93	93,95
9,7 – 5,1 – 2	3	2,6
390,9 – 91,2	300	299,7
6,01 · 7,92	48	47,599 2
10,87 · 2,01	22	21,848 7
18,04 : 8,75	2	2,061 714 286
98,93 : 5,1	20	19,594 117 65

2. En el cuaderno aparecen los incisos d, e y f con los mismos números que el a, b y c, se debe cambiar la posición de la coma decimal como se presenta a continuación.
   a) 141,45.
   b) 737,83.
   c) 735,5.
   d) 83,45 + 5,8 = 89,25.
   e) 69,83 + 66,8 = 136,63.
   f) 77,9 – 43,5 = 34,4.
   g) 412,2.
   h) 4 562,4.
   i) 2,1.
   j) 3,29.
   k) 6 763,9.
   l) $7{,}7\overline{6}$.
   m) 4,280 263 158.
   n) 234.
   ñ) 650.
3. a) 38,7. b) 83,7. c) 19,2.
4. a) Laboran en este centro 25 trabajadores.
   b) La cuota anual será de $ 21,00.
   c) Se recaudó en ese mes $ 63,50.
5. a) Un rectángulo equivale a 4 cuadraditos.
   b) Menos de una libra.

6. a) 50 – 6 (0,50 + 4,50) – 2 · 2,50.
   b) Sí, le alcanza el dinero.
7. a) Le fueron suministrados 1 655 cc.
   b) Demoró 180 minutos o 3 horas.
8. a) Estimación 5 cm, longitud del tercer lado 4,4 cm.
   b) 12,5 – (3,8 + 4,3) o 12,5 – 3,8 – 4,3.
9. a) La población y los índices de mortalidad infantil en los años 2000 y 2001 de las provincias de la Región Occidental.
   b) Pertenece al conjunto de los Números Naturales: $\mathbb{N}$.
   c) Seiscientos cincuenta y ocho mil setenta y ocho.
   d) 734 864.
   e) Pinar del Río, Matanzas, Ciudad de La Habana, La Habana.
   f) En 43 689 habitantes.
10. a) Relaciones entre cantidades.
    b) En Santiago de Cuba residen 163,2 personas por kilómetro cuadrado, aproximadamente.
    c) Treinta centenas.
    d) $\frac{805}{10}$.
    e) Ciudad de La Habana, Villa Clara, Pinar del Río, Santiago de Cuba, Las Tunas.
    f) Entre 13 y 14.
11.

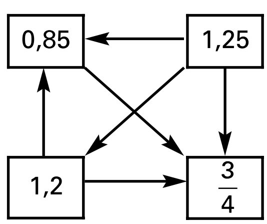
2,1	**5,9**	3,1
4,7	3,7	**2,7**
4,3	1,5	5,3

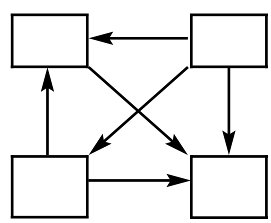
4,2	**3,5**	4
3,7	3,9	**4,1**
3,8	4,3	**3,6**

12. Arreglar las saetas del ejercicio como se indica a continuación:

    Coloca en cada cuadrado de la figura de la derecha cada uno de los números de la tabla; de manera que la punta de la flecha (la saeta) siempre apunte hacia el menor entre los dos.

1,2	$\frac{3}{4}$	1,25	0,85





13. 140 kWh.

14. $a = \frac{1}{5}; b = \frac{13}{15}; c = \frac{13}{6}$.

15. a) 3 · (40 – 15).
    b) 2 · 7 + 7 · 12.

Potenciación de números naturales. Producto y cociente de potencias de igual base

1. a) 243. b) $\left(\frac{25}{16}\right)$. c) 2,744.

2. a) 6^6. b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{11}$ c) 1,211.

   d) $2^5 \cdot 2^4 = 2^9$. e) $\frac{150}{100} = 1{,}5 \cdot 1{,}5^6 = 1{,}5^7$ f) $0{,}25^4$.

3. a) 8^{13}. b) $1{,}4^4$. c) $\left(\frac{3}{5}\right)^6$

   d) x^3. e) 2. f) $0{,}07^2$.

4. a) 0,25.

   b) $\frac{16}{625}$

   c) 4^6.

5. a) F, porque la potenciación no cumple la propiedad conmutativa.
   b) V.
   c) V.
   d) F, porque por definición la base tiene que ser diferente de cero.
   e) F, porque es una suma de potencias y no un producto de potencias de igual base.
   f) V.
   g) V.
   h) F, porque es una diferencia de potencias y no un cociente de potencias de igual base.

6. a) 6. b) 5,1.
   c) 1,5. d) 3.

7. a) 27. b) $\left(\frac{1}{64}\right)$

   c) 2^{12}. d) 27,29.

   e) 7 (para llegar a la respuesta, puede aplicar la propiedad distributiva como sigue: $\frac{6^4}{6^3} + \frac{6^3}{6^3} = 6 + 1 = 7$) .

8. a) $x = 5$. b) $x = \frac{1}{4}$.

   c) $x = 4$ (puedes transformar el 16 como una potencia de base 2 y así obtienes 2^4, luego si son potencias iguales, que tienen bases iguales, necesariamente sus exponentes deben ser iguales, por tanto, $x = 4$).

   d) $x = 2$. e) $x = \frac{1}{2}$

Operación de elevar al cuadrado y elevar al cubo.
Extracción de la raíz cuadrada y la raíz cúbica.
Uso de las tablas de cuadrados y cubos.
Extracción de la raíz cuadrada y la raíz cúbica utilizando la tabla

1. a) $\frac{399}{8}$ o $48{,}875$. b) $\frac{761}{25}$ o $30{,}44$.
2. a) $A > B$.
   b) $2{,}5^2 = 6{,}25$.
   c) 21,16.
3. a) 11,16. b) 68,51. c) 87,25. d) 89,5.
4. a) 35,93. b) 6,33.
5. a) 19,04.
   b) 41,86.
   c) 7.
   d) 65,85.
6. 6,2 cm.
7. 17 dm^2.
8. $x = 8$; $y = 1{,}5$; $z = 5$.
9. Los números son: 10; 11 y 12.
   $10^2 + 11^2 + 12^2 = 100 + 121 + 144 = 365$
   13 y 14
   $13^2 + 14^2 = 169 + 196 = 365$.

1.3 El significado de comparaciones a través del tanto por ciento

1. a) Aprobaron 95 de cada cien estudiantes.
   b) Dividir el número entre 2.
   c) 20 %.

d) 900.
e) 450.
f) La razón entre el bateo efectivo y las veces al bate fue de 0,95.
g) 608 700.
h) 150º (sean α y β dos ángulos adyacentes, luego la suma de sus amplitudes es de 180º, si α mide el 20 % de β, entonces la amplitud de α es igual a $\frac{1}{5}\beta$, luego de $\frac{1}{5}\beta + \beta =$ 180º, se obtiene que β = 150º).

2. a) 17,425.
b) 19,3 %.
c) 500.
d) 36.
e) 24.
f) 300 (si 50 es el 20 % del número buscado, 50 es la quinta parte del número 250 al cual se le debe calcular el 120 %, lo que se reduce al cálculo de $\frac{6}{5}$ de 250 que es igual a 300).

3. El tanto por ciento de afectación fue del 35,4 %.

4. Brigada 3 (puede resolverse muy fácilmente haciendo el análisis gráfico a través de un segmento, el cual se divide en 4 partes iguales donde cada parte represente la cuarta parte del segmento representado).

5. La longitud del otro lado del rectángulo es 5,0 cm. (Una vía puede ser la siguiente: Si el 70 % del área del rectángulo es 70 se puede expresar $\frac{7}{10} a \cdot b =$ 70 y como la longitud de uno de sus lados es 20 cm, se puede sustituir y despejar en la ecuación el valor que representa la longitud del otro lado.)

6. El área del rectángulo es de 144 cm^2.

7. a) De cada cien enfermos de SIDA en ese momento, 79 eran varones.
b) Había aproximadamente, con esta enfermedad, 239 mujeres.

8. a) El índice de mortalidad infantil fue de 98,3 %.
b) La cifra de niños fallecidos asciende a 11 400 000.

9. No son contagiados por esta vía congénita 58 500 niños.

10. 87 por cada cien niños de la muestra.

11. La producción de crudo nacional en el 2002 sobrepasó a la del año 2001 en un 26 %.

12. Los derechos de importación en el año 2001 fueron superiores en 8,3 % respecto al año 2002.
13. El 75 % de los tornillos.
14. El 76 % de los sellos.
15. La persona debe recorrer 490 km.
16. La capacidad del tanque es 102 galones.
17. Debe disminuirse el 20 % de la altura del triángulo.
18. Tenía al principio 80 m de cordel.
19. Los lados de la parcela miden 15 m y 25 m.
20. El perímetro aumenta en un 20 %.

Razones y proporciones

1. $A = 36$; $B = 4$; $C = 21$.
   a) 21. b) 6. c) 4.
2.

A	B
• Un trabajador abona 16 surcos en dos jornadas de trabajo. ¿Cuántas jornadas debe trabajar para terminar de abonar los 48 surcos del huerto?	$\frac{16}{48} = \frac{2}{x}$
• Un trabajador abona 16 surcos en dos jornadas de trabajo. ¿Cuántas jornadas debe trabajar para abonar los 48 surcos del huerto?	$\frac{2}{x} = \frac{16}{144}$
• Un trabajador abona 16 surcos en dos jornadas de trabajo. ¿Cuántas jornadas debe trabajar para realizar los 3 pases de abono que llevan los 48 surcos del huerto?	$\frac{16}{2} = \frac{32}{x}$

3. Harán falta 375 posturas.
4. 2.
5. 3 h y 30 m.
6. 450 km.
7. a) Los fallecidos representan el 66,6 %.
   b) Por causas relacionadas con el embarazo y el parto pueden fallecer 2 500 000 mujeres y víctimas de la desnutrición y de anemia 1 666 665.
8. El cuádruplo del combustible utilizado anteriormente.
9. La habitación tiene una superficie de 56 m².

2
CAPÍTULO

El lenguaje de las variables

2.1 Traducción de situaciones de la vida al lenguaje algebraico

1. a) $3x$; x: un número. b) $y + 3$; y: un número.
   c) $5t$; t: un número. d) $\frac{2}{3}a$; a: un número.
   e) $\frac{y}{2} - 1$; y: un número. f) $x - 3 = y$; x: un número, y: otro número.

2. a) La tercera parte de un número.
   b) El quíntuplo de un número.
   c) Un número aumentado en dos.
   d) Un número disminuido en cinco.
   e) La diferencia de dos números es ocho.
   f) La cuarta parte de un número disminuida en tres.

3. a) $\frac{1}{2}x + 1$. b) $2n + 6$. c) $n - 5 = m$. d) $3t - 2$.

4. a) Traducción al lenguaje común: Un número.
   Situación práctica: La cantidad de alumnos de una escuela.
   b) Traducción al lenguaje común: Cuatro veces un número.
   Situación práctica: El perímetro de un cuadrado.
   c) Traducción al lenguaje común: La octava parte de un número.
   Situación práctica: La octava parte de la cantidad de alumnos de un grupo de séptimo grado prefieren la asignatura Matemática.
   d) Traducción al lenguaje común: Un número aumentado en cinco.
   Situación práctica: Las temperaturas durante el día ascenderán cinco grados Celsius con respecto a la temperatura al amanecer.
   e) Traducción al lenguaje común: Un número disminuido en dos.
   Situación práctica: El lado menor de un rectángulo mide dos centímetros menos que el lado mayor.
   f) Traducción al lenguaje común: El 42 % de un número.
   Situación práctica: La diarrea y la neumonía causan el 42 % de los fallecimientos de niños menores de cinco años en África.

g) Traducción al lenguaje común: La diferencia de dos números es dos.
Situación práctica: Las edades de los hermanos Gabriela y Camilo tienen dos años de diferencia.
h) Traducción al lenguaje común: Un número excede en cinco a otro número.
Situación práctica: La cantidad de hembras que tiene un grupo de séptimo grado excede en cinco a la cantidad de varones.

Nota: Para la situación práctica dada en cada caso las variables tienen el siguiente significado:

a) *x:* cantidad de alumnos de la escuela.
b) *y:* longitud del lado del cuadrado.
c) *z:* cantidad de alumnos del grupo.
d) *t:* temperatura al amanecer.
e) *m:* longitud del lado mayor.
f) *x:* fallecimientos de niños menores de cinco años en África.
g) *x:* edad de Gabriela; *y*: edad de Camilo.
h) *a:* cantidad de hembras; *b*: cantidad de varones.

5. a) $\frac{1}{3}x$: ingresos del país provenientes del polo turístico Varadero.
x: ingresos del país por el concepto de Turismo.
b) $m - 1\,500\,000\,000$: cantidad de agua en las presas en abril de 2004.
m: cantidad de agua acumulada en las presas en el 2003.
c) $20y$: producto interno bruto de los países desarrollados.
y: producto interno bruto de los países pobres.
d) $12a$: mortalidad infantil en menores de un año de los países pobres.
a: mortalidad infantil en menores de un año de los países ricos.
e) $\frac{85}{100}t$: cantidad de personas que viven en los países pobres.
t: población mundial.
f) $\frac{3}{10}x = \frac{30}{100}x$: consumo de energía de los países pobres.
x: consumo de energía en el mundo.
$\frac{1}{4}y = \frac{25}{100}y$: consumo de metales en los países pobres.
y: consumo de metales en el mundo.
$\frac{3}{20}z = \frac{15}{100}z$: consumo de madera en los países pobres.
z: consumo de madera en el mundo.

g) $x - 620 = y$.
   x: cantidad de atletas femeninas en los Juegos Olímpicos del 2000.
   y: cantidad de atletas femeninas en los Juegos Olímpicos de 1996.

h) $\frac{15}{100}n$: cantidad de cubanos con 60 años o más; *n:* cantidad de cubanos.

i) $x - 62 = y$.
   x: cantidad de votos a favor obtenidos por Cuba en 2004.
   y: cantidad de votos a favor obtenidos por Cuba en 1994.

6. a) $\frac{x}{2}$: cantidad de seres humanos en extrema pobreza en el 2015.
   x: cantidad de seres humanos en extrema pobreza en 1990.

   b) $\frac{m}{2}$: cantidad de hambrientos en el mundo para el 2015.
   m: cantidad de hambrientos registrados en el mundo en 1990.

   c) $\frac{1}{3}x$: mortalidad en menores de cinco años para el 2015.
   x: mortalidad en menores de cinco años en 1990.

Nota: Reducir en no significa lo mismo que *reducir a.* Cuando se *reduce en dos terceras partes el total* quiere decir que al total se le disminuyen sus dos terceras parte, luego del total queda un tercio $\left(T - \frac{2}{3}T = \frac{3T - 2T}{3} = \frac{1}{3}T\right)$. En cambio cuando *se reduce a las dos terceras partes del total,* significa que del total quedan sus dos terceras partes $\left(\frac{2}{3}T\right)$.

7. a) $x + y + z = 180°$.
   x, y, z: amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo.

   b) $a < b + c$.
   a, b, c: longitudes de los lados de un triángulo.

   c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
   a, b, c, d: números naturales con b ≠ 0 y d ≠ 0.

   d) $x + y = 180°$.
   x, y: amplitudes de dos ángulos adyacentes.

   e) $a + b = 90°$.
   a, b: amplitudes de dos ángulos complementarios.

   f) $c + d = 180°$.
   c, d: amplitudes de dos ángulos suplementarios.

g) $x = y + z$.
x: amplitud de un ángulo exterior a un triángulo.
y, z: amplitudes de los ángulos interiores no adyacentes al ángulo exterior.

h) $x + y + z + w = 360°$.
x, y, z ,w: amplitudes de los ángulos interiores del cuadrilátero convexo.

8.

x	0	$\frac{1}{5}$	0,8	1	$1\frac{1}{2}$	2,5
$3x + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{10}$	2,9	$\frac{7}{2}$	5	8

9. a) $x + 9\ 237 = 7\ 085 + 9\ 237 = 16\ 322$.
b) $x - 384 = 7\ 085 - 384 = 6\ 701$.
c) $206 + 2x - 7\ 025 = 206 + 2\ (7\ 085) - 7\ 025 = 7\ 351$.

10.

x	$x + 2$	$2x - \frac{2}{5}$	$3x + 1$
3	5	5,6	10
$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{5}$	0	$\frac{8}{5}$
1,5	3,5	$\frac{13}{5} = 2,6$	5,5

11.

Expresión algebraica	**Valor numérico para $a = 2$**	**Valor numérico para $a = \frac{5}{2}$**
$\frac{5}{4}a - 2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{8}$
$7{,}2a + 4{,}9$	19,3	22,9

$2a + 3a - 5$	5	7,5
$\frac{4}{3}a + \frac{3}{4}a - \frac{1}{2}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{113}{24}$

12. a) $2m - 3 = 2\ (4) - 3 = 5.$

 b) $\frac{3}{5}a + 2\frac{1}{5} = \frac{3}{5}\left(\frac{4}{3}\right) + 2\frac{1}{5} = \frac{4}{5} + \frac{11}{5} = 3.$

 c) $7y - y - 2y + 5 = 4y + 5 = 4\ (6) + 5 = 29.$

 d) $0{,}3t + 5t + 5{,}1 = 5{,}3t + 5{,}1 = 5{,}3\ (1{,}24) + 5{,}1 = 11{,}672.$

 e) $\frac{1}{8}n + \frac{5}{8}n - \frac{3}{8}n - \frac{3}{4} = \frac{3}{8}n - \frac{3}{4} = \frac{3}{8}(2) - \frac{3}{4} = 0.$

 f) $\frac{5}{4}x + 2{,}7x + \frac{1}{2} = 3{,}95x + \frac{1}{2} = 3{,}95(0{,}5) + \frac{1}{2} = 2{,}475.$

 g) $8{,}1z - 0{,}5z - 9{,}3 = 7{,}6z - 9{,}3 = 7{,}6\left(\frac{5}{2}\right) - 9{,}3 = 9{,}7.$

Nota: En todos los casos antes de sustituir la variable por el valor indicado se realizó primero la reducción de términos semejantes. Aunque se puede resolver el ejercicio sustituyendo primero todas las variables, es recomendable enseñar al estudiante a proceder de esta manera.

13. $A \cdot B - 2C = 8{,}2 \cdot 2m - 2\left(\frac{3}{2}m\right) = 13{,}4m.$

14. $12g + 5g - 9g - 11 = 8g - 11 = 8 \cdot 2 - 11 = 5.$

15. a) $P = Mx + N = 2x + \frac{5}{2}x - 5{,}75 = 4{,}5x - 5{,}75.$

 b) $P = Mx + N = 4{,}5\left(\frac{3}{2}\right) - 5{,}75 = 1.$

16.

m	n	$m + n - 5$	$m - n + 6$
8	3	6	11
5,4	2,6	3	8,8
8,5	6	9,5	8,5
9	4	8	11

Nota: En la última fila hay que calcular los valores de m y n. Para eso basta encontrar dos números m y n tales que su suma sea 13 y su diferencia 5.

17.

Situación matemática	**Expresión algebraica**	**Valor numérico de la expresión para $x = 5$**
El duplo de un número aumentado en 7.	$2x + 7$	$2 \cdot 5 + 7 = 10 + 7 = 17$
La quinta parte de un número aumentado en su triplo.	$\frac{x}{5} + 3x$	$1 + 3 \cdot 5 = 16$
Un número disminuido en su mitad.	$x - \frac{x}{2}$	$5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$
La novena parte de un número.	$\frac{x}{9}$	$\frac{5}{9}$

18. a) $\underline{2m} - \underline{\underline{7}} + \underline{5m} + \underline{\underline{2}}.$

b) $\underline{17n} + \underline{n} - 8.$

c) $\underline{\underline{\underline{3t}}} - \underline{\underline{t}} + \underline{6} + 9s + \underline{\underline{t}} - \underline{5}.$

d) $\underline{12r} + \overline{\overline{5}} - \underline{\underline{2u}} - \underline{9r} - \overline{\overline{2}} + \underline{\underline{12u}}.$

e) $y - \underline{3,2} + \underline{\underline{z}} - \underline{\underline{6,9z}} - \underline{\frac{7}{8}} + \underline{22}.$

f) $\overline{\overline{1}} + \underline{7\frac{1}{3}k} + \overline{\overline{\frac{3}{8}}} - \underline{8,5k} + \overline{\overline{0,5}} + h.$

g) $\underline{2,7} + \underline{\underline{0,3x}} + \underline{5} + \underline{\underline{2,1x}} + \underline{\underline{7,2x}} + \underline{8,9}.$

19. a) $8y$.

b) $\frac{7}{4}x$.

c) $19{,}05a$.

d) $7m + 5$.

e) $1{,}125b - 1{,}07$.

f) $\frac{9}{4}t + \frac{21}{8}$.

20. $A - B + C = 6x - \frac{2}{5}x + 8 + 2x = 7{,}6x + 8.$

21. $5x + 2 = 14.$

22. $\frac{x}{3} - 150 = 120.$

23. $\frac{x}{5} - 9 = 11.$

24. $3{,}5x + 4x + 8{,}50 = 34{,}75$.

Nota: El significado de la variable, en este caso, es el precio de la libra de malanga y la de arroz, que en el texto del problema se dice que es el mismo.

25. $2x + 148^{\circ} = 180^{\circ}$.

Nota: En este caso el significado de la variable x es la amplitud del ángulo A, entonces $\angle C = x + 100^{\circ}$; por tanto, $\angle A + \angle B + \angle C = x + 48^{\circ} + x + 100^{\circ}$ de donde se obtiene $2x + 148^{\circ}$ por propiedad de los ángulos interiores de un triángulo.

26. 1 842.

27. 238.

28. 1 193.

29. 28.

30. 124.

31. 6 348.

2.2 Resolución de problemas que conducen a ecuaciones lineales

1. a) V .
   b) F, porque todo número multiplicado por cero es igual a cero, luego no existe un número fraccionario que sea solución de esta ecuación.
   c) V.
   d) F, porque cualquier número fraccionario es solución de esta ecuación, es decir, tiene infinitas soluciones.
   e) F, porque el único número que multiplicado por 2 es igual a cero es el cero, luego la ecuación tiene una única solución $x = 0$.
   f) F, porque toda ecuación lineal cuando es soluble, o tiene una única solución o tiene infinitas soluciones.
   g) F, porque al sustituir la variable x por $\frac{4}{3}$ no se obtiene una proposición verdadera.
   h) F, porque una ecuación lineal no puede tener dos soluciones.

2.

Ecuaciones	Solución en el dominio de los números naturales	Solución en el dominio de los números fraccionarios
$3y = 8$	$S = \phi$	$S = \left\{\frac{8}{3}\right\}$
$7a = 21$	$S = \{3\}$	$S = \{3\}$
$2m + 1 = 5$	$S = \{2\}$	$S = \{2\}$
$x + 7 = 3$	$S = \phi$	$S = \phi$
$\frac{7}{2}y = 14$	$S = \{4\}$	$S = \{4\}$

Nota: En la ecuación $x + 7 = 3$, tanto en el caso en que el dominio de la variable es el conjunto de los números naturales como en el de los números fraccionarios, el conjunto solución es el conjunto vacío (ϕ), pues no existe ningún número natural ni fraccionario que sumado con siete sea igual a tres.

3. En el dominio de los números naturales, porque el valor de la variable que satisface la ecuación es $\frac{10}{3}$ que no pertenece al conjunto de los números naturales.

4. a) $x = 2$. b) $m = 102$. c) $x = \frac{11}{7}$. d) $t = 8$.
   e) $x = 30$. f) $a = 0{,}405$. g) $x = \frac{1}{2}$. h) $a = \frac{3}{2}$.
   i) $x = \frac{2}{3}$. j) $y = \frac{21}{19}$. k) $x = 2$.

5. a) $S = \phi$, pues $x = x = \frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$ b) $S = \phi$. c) $S = \{1{,}575\}$.
   d) $S = \phi$, pues $x = x = \frac{5}{9} \notin \mathbb{N}$ e) $S = \{0\}$. f) $S = \mathbb{Q}+$.
   g) $S = \{3\}$.

Nota: En el inciso b) la ecuación se transforma en la proposición falsa $0 = \frac{1}{5}$, luego la ecuación no tiene solución y en el inciso f) la ecuación se transforma en una proposición verdadera, la igualdad 0,5 = 0,5, luego tiene infinitas soluciones y, por lo tanto, su conjunto solución es el domino básico de la variable.

6. a) $z = \frac{5}{2}$. b) $y = \frac{10}{9}$.

c) Ningún número fraccionario satisface esta ecuación, pues en el conjunto de los números fraccionarios las ecuaciones de la forma $ax + b = c$ con *a, b, c* números fraccionarios, y $b > c$ no tienen solución.

Nota: En $3x = 2 - 5$ no se puede calcular la diferencia en el conjunto de los números fraccionarios.

d) $t = 3$.

e) Todos los números fraccionarios satisfacen esta ecuación, porque al sustituir la variable por cualquier número fraccionario la ecuación se transforma en una proposición verdadera.

Nota: Al resolver la ecuación se obtiene la igualdad 1,7 = 1,7, luego tiene infinitas soluciones y, por lo tanto, su conjunto solución es el domino básico de la variable.

f) $a = 0{,}72$.

g) $x = \frac{1}{3}$.

7. a) $a = 3{,}1$. b) $b = \frac{1}{12}$. c) $c = 3{,}9$.

d) $m = 43{,}8$. e) $n = 59$.

8. a) $x = \frac{4}{3}$. b) $x = \frac{2}{5}$. c) $x = \frac{24}{11}$.

9. $8x = 16$.

Nota: Este ejercicio tiene múltiples respuestas, pues todas las ecuaciones de la forma $mx = 2m$, con $m \neq 0$, tienen como conjunto solución S = {2}.

10. a) $a = \frac{23}{2}$. b) $b = \frac{1}{3}$.

11. Este ejercicio tiene múltiples respuestas, por ejemplo, $5x + 4 = 6$ es una ecuación de la forma $ax + b = c$ ($a \neq 0$), al igual que todas las ecuaciones de esta forma, en las que $2a = 5(c - b)$ con $c > b$.

12. a) $3x = 12$. b) $9x = 3$. c) $4x - 10 = 0$. d) $5x + 7 = 7$.

Nota: Existen infinitas ecuaciones que tienen como solución los números dados.

13. $d - 151 = 228$.
14. $x - 672 = 2\,537$.
15. $2\alpha + 100^\circ = 180^\circ$.

Nota: α, β son ángulos conjugados entre paralelas, luego $\alpha + \beta = 180^\circ$ y $\beta = 100^\circ + \alpha$.

16. $2x + 7 = 28$.
17. a) Tres mil treinta y dos. b) Doscientos ocho.
    c) Setenta y seis décimas. d) Dos mil trescientos dieciséis centésimas.
    e) Ciento doce.
18. 23.
19. 24,5 cm.
20. Un ángulo tiene una amplitud de 30º y el otro 150º.
21. La longitud del lado del cuadrado es 8,5 cm.
22. Los ángulos bases tienen una amplitud de 45º y el ángulo principal del triángulo isósceles tiene una amplitud de 90º.
23. Las dimensiones de los lados del rectángulo son 6,2 cm y 9,2 cm.
24. El grupo tiene 11 varones.
25. Los números son 183 y 184.
26. Los números consecutivos son 9, 10 y 11.
27. En Pinar del Río el huracán Charley tumbó 1 400 postes.
28. De la ciudad de Cienfuegos a la ciudad de Matanzas hay 180 km.
29. La delegación cubana en los Juegos Olímpicos de Atenas obtuvo 9 medallas de oro, 7 de plata y 11 de bronce.
30. El deporte boxeo aportó 9 medallas al total de medallas alcanzadas por Cuba en los Juegos Olímpicos de 2004.
31. Las medallas obtenidas por Cuba representan el 48,2 % de las alcanzadas por los países de América Latina.
32. Por el huracán Charley se afectaron 291 transformadores.
33. 30 alumnos.
34. Patricia visitó seis casas, Gabriela, cinco y Camilo, tres.
35. El número es 963.

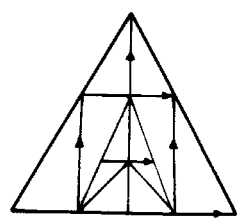
3
CAPÍTULO

El mundo de las figuras planas

3.1 Las figuras planas

1. a) V.
   b) F, porque por un punto pasan infinitas rectas.
   c) F, porque solo determinan un plano si no están alineados.
   d) V.
   e) F, porque la recta es ilimitada.
   f) V.
2. a) Mayor que 90º y menor que 180º.
   b) Obtuso.
   c) Isósceles.
   d) 60º.
3. Considerando que las saetas en el mismo sentido indican el paralelismo entre esos segmentos, es posible encontrar:

   23 triángulos, 10 trapecios, 3 rectángulos. (Téngase en cuenta que los rectángulos son casos especiales de trapecios isósceles.)



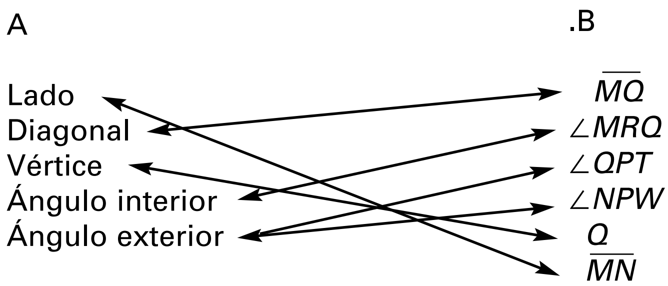
4. a) El ángulo que se indica mide 48º.
   b) El ángulo que se indica mide 103º.
   c) El ángulo que se indica mide 90º.
5. La amplitud del $\angle QOR$ es 60º, ya que se cumple:
   (1) $\angle POS = \angle POQ + \angle QOR + \angle ROS$ por suma de ángulos consecutivos.
   Además, $\angle POR = 110º$ por datos, pero $\angle POR = \angle POQ + \angle QOR$ por suma de ángulos consecutivos, luego $\angle POQ + \angle QOR = 110º$, entonces $\angle POQ = 110º - \angle QOR$.
   $\angle QOS = 90º$ por datos, pero $\angle QOS = \angle QOR + \angle ROS$ por suma de

ángulos consecutivos, luego $\angle QOR + \angle ROS = 90°$, entonces $\angle ROS =$
$= 90° - \angle QOR$.
Sustituyendo en (1) las medidas de los ángulos $\angle POS$, $\angle POQ$ y $\angle ROS$, se tiene:

$140° = 110° - \angle QOR + \angle \cancel{QOR} + 90° - \angle \cancel{QOR}$.

$140° = 200° - \angle QOR$ de donde, $\angle QOR = 200° - 140° = 60°$.

6.



7. a) (3;5).
   b) (3;0), (3;1), (3;3), (3;4) y (3;6).
8. a) Para que *ABCD* sea un paralelogramo, el punto *D* debe tener como coordenadas (2;4).
   b) Para que *ABCD* sea un trapecio, *D* puede tener las coordenadas (3;4).

   Nota: Esta no es la única posibilidad para responder el inciso b); en este caso hay que garantizar que dos lados opuestos sean paralelos.

3.2 Ángulos y relaciones entre figuras

1. a) V.
   b) F, porque existen otros pares de ángulos que pueden sumar 180° y no ser adyacentes como, por ejemplo, los conjugados entre paralelas.
   c) F, porque existen ángulos consecutivos que tienen vértice común y no son opuestos por el vértice.
   d) F, porque tienen que ser correspondientes entre rectas paralelas.
   e) F, porque, además de pasar por el punto medio del segmento, tiene que intersecar perpendicularmente a este.
   f) V.
   g) F, porque por un punto exterior a una recta se puede trazar exactamente una recta paralela a ella.
   h) V.
2. a) $\beta = 152°$.
   b) α es agudo.

c) Los ángulos *ABP* y *PBC* son iguales.
d) *ABP* es un triángulo isósceles.

3. a) El $\angle 8$ es correspondiente con el $\angle 4$ y este a su vez es opuesto por el vértice con el $\angle 2$.
   b) El $\angle 16$ es correspondiente con el $\angle 12$ y opuesto por el vértice con el $\angle 14$.
   c) El $\angle 3$ es conjugado con el $\angle 6$ y a la vez alterno con el $\angle 5$.
   d) El $\angle 11$ es conjugado con el $\angle 14$ y este a su vez correspondiente con el $\angle 6$.
   e) El $\angle 7$ es alterno con el $\angle 1$ y a su vez conjugado con el $\angle 16$.
4. a) $\angle ABF = \angle EFJ$ por correspondientes entre las paralelas *AD* y *EH* con *FB* secante.
   b) $\angle FBC + \angle BFG = 180°$ por conjugados entre las paralelas *AD* y *EH* cortadas por la secante *FB.*
   c) $\angle EFB = \angle FBC$ por alternos entre las paralelas *AD* y *EH* cortadas por la secante *FB.*
   d) $\angle BCG + \angle GCD = 180°$ por adyacentes.
   e) $\angle IGH = \angle FGC$ por ser ángulos opuestos por el vértice.
5. Como $\angle ABE + \angle ABC = 180°$ y $\angle DBE + \angle CBD = 180°$ por ser respectivamente ángulos adyacentes y como por datos, $\angle ABC = \angle CBD$, entonces $\angle ABE = \angle DBE$ por la unicidad de la adición de ángulos.
   Otra vía: Los ángulos $\angle ABE = \angle DBE$ por tener suplementos de ángulos iguales, ya que *C*, *B* y *E* son puntos alineados.
6. Considerando que las tres rectas pasan por el mismo punto y uno cualquiera de los ángulos opuestos por el vértice a los dados, se puede justificar que estos suman 180°, pues los ángulos opuestos por el vértice son iguales y se determinan tres ángulos consecutivos a un mismo lado de una recta.
7. Como las rectas *AC* y *BD* se cortan en el punto *O* se puede plantear que:
   $\angle 1 = \dfrac{\angle AOD}{2} = 17{,}5°$ por ser *OE* bisectriz del $\angle AOD = 35°$.
   $\angle 2 = \angle AOD = 35°$ por ser opuestos por el vértice.
   $\angle 1 + \angle 3 = 180°$ por ser adyacentes, luego $\angle 3 = 162{,}4°$.
8. a) $\angle\alpha = 67°$ y $\angle\gamma = 48°$ por ser respectivamente ángulos alternos entre rectas paralelas.

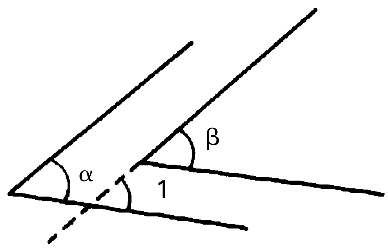
   $\angle\beta = 65°$ por ser $\angle\alpha + \angle\beta + \angle\gamma = 180°$ por ser ángulos consecutivos a un mismo lado de una recta (o por el teorema sobre la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo).
   b) $\angle b = 53°$ por la propiedad sobre ángulos alternos entre rectas paralelas.
   $\angle c = 61°$ por la propiedad sobre ángulos correspondientes entre rectas paralelas.

$\angle a = 66°$ por ser $\angle a + \angle b + \angle c = 180°$, ya que estos ángulos son consecutivos y están a un mismo lado de una recta (o por el teorema sobre la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo).

9. $\angle\alpha = 41°$ y $\angle\beta = 58°$ por ser ángulos alternos con los ángulos que miden 41° y 58° respectivamente entre las rectas paralelas *MN* y *AB*.

   $\angle\gamma = 81°$ al cumplirse que $\angle\gamma + 41° + 58° = 180°$ por ser ángulos consecutivos a un mismo lado de una recta (o por el teorema sobre la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo).

10. Haciendo una prolongación de uno de los lados de uno de los ángulos, como, por ejemplo, se muestra en la ilustración, se tiene:



   $\angle\alpha = \angle 1$ y $\angle 1 = \angle\beta$ por correspondientes entre rectas paralelas; por tanto,

   $\angle\alpha = \angle\beta$ por la propiedad transitiva.

11. Se tiene que $\angle EFB = \angle AFG = 4x + 60°$ por ser ángulos opuestos por el vértice.
   $\angle AFG + \angle FGC = 180°$ por ser ángulos conjugados entre las rectas paralelas *AB* y *CD* cortadas por la secante *FG*, luego $4x + 60° + 80 =$ $= 180°$, de donde, $x = 10°$.
   $\angle EFB = 100°$ por sustitución del valor de x en $4x + 60°$.
   $\angle EFA = 80°$ por correspondiente con el $\angle FGC$ entre las rectas paralelas *AB* y *CD* cortadas por la secante *FG*.
   $\angle FGD = 100°$ por correspondiente con el $\angle EFB$ entre las rectas paralelas AB y CD cortadas por la secante *FG*.
   $\angle AFG = 100°$ por el ángulo opuesto por el vértice al $\angle EFB$.

12. El $\angle MOC = 40°$, pues *OM* es la bisectriz del $\angle BOC$. Además, los ángulos $\angle AOC$ y $\angle BOC$ son adyacentes, por lo que se cumple que $\angle AOC = 100°$, y se puede afirmar que $\angle x = 50°$, ya que por datos, *ON* es la bisectriz del $\angle AOC$.

13. $\angle ABF = 66°$ por ser adyacente con el $\angle ABG = 114°$ por datos.

   $\angle HCD = \dfrac{\angle ECD}{2} = 57°$ por ser *CH* bisectriz del $\angle ECD = 114°$ que es alterno con el $\angle ABG$ entre las rectas paralelas *FG* y *EC* cortadas por la secante *AD*.

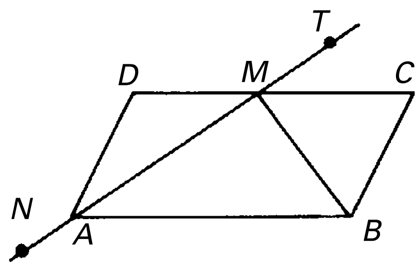
14. $\angle\alpha = 35°$, por tener sus lados respectivamente paralelos con el ángulo *BAC*.

   $\angle\beta = 80°$, por ser alterno con el ángulo *ACF* entre las rectas paralelas *AC* y *DE* con *BF* secante y $\angle ACF = \angle BAC + \angle ABC =$ $= 35° + 45° = 80°$ (por el teorema del ángulo exterior).
   Otra vía: Aplicando el teorema sobre la suma de las amplitudes de los

ángulos interiores de un triángulo, se cumple en el triángulo ABC que $\angle ACB = 100°$. Además, como los ángulos $\angle ACB$ y $\angle CED$ son alternos entre las rectas paralelas AC y DE cortadas por la secante BF, se tiene que $\angle CED = 100°$. Los ángulos $\angle\beta$ y $\angle CED$ son adyacentes, luego $\angle\beta = 80°$. Como los ángulos $\angle ABC$ y $\angle DCE$ son ángulos correspondientes entre las rectas paralelas AB y DC cortadas por la secante BF; se cumple que $\angle DCE = 45°$. Los ángulos $\angle\beta$ y $\angle CED$ son adyacentes, por tanto, $\angle CED = 100°$. Finalmente, al aplicar el teorema sobre la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo en el triángulo CDE, se obtiene que $\alpha = 45°$.

15. a) Cada bisectriz divide al ángulo que le corresponde en dos ángulos iguales.

b) $\angle DAM = \angle MAB$ por ser AM la bisectriz de $\angle BAD$, $\angle MBC = \angle ABM$ por ser BM la bisectriz de $\angle ABC$.
$\angle MAB = \angle AMD$ por ser ángulos alternos entre las rectas paralelas AB y CD cortadas por la secante AM.
$\angle ABM = \angle BMC$ por ser ángulos alternos entre las rectas paralelas AB y CD cortadas por la secante AM.
Aplicando la propiedad transitiva se puede llegar a afirmar que $\angle DAM = \angle AMD$ y que $\angle CBM = \angle BMC$.



c) $\angle NAB = \angle DMT$ por ser ángulos alternos entre las paralelas AB y CD cortadas por la secante NT.

d) Considerando que los ángulos tengan siempre un lado que contenga a los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$; se obtienen las parejas de ángulos: $\angle DMT$ y $\angle NAB$.

e) En la figura se forman los triángulos ADM, ABM y CBM. Según los ángulos determinados en el inciso b), se puede concluir que los triángulos isósceles son: ADM y CBM de bases AM y BM respectivamente.

16. El triángulo rectángulo ABC es isósceles de base $\overline{BC}$, ya que: $\angle ACE + \angle CED = 180°$ por ser ángulos conjugados entre las rectas paralelas $\overline{AC}$ y $\overline{DF}$ cortadas por la secante BC (las rectas $\overline{AC}$ y $\overline{DF}$ son paralelas entre sí, porque son perpendiculares a un mismo segmento ($\overline{AB}$). El ángulo $\angle CED = 2x + 45°$ por ser opuesto por el vértice con el $\angle FEB$; luego sustituyendo se tiene que $\angle ACE = 135° - \angle\ 2x$. Como el triángulo ABC es rectángulo, entonces $\angle ACE + \angle CBA = 90°$ y al sustituir se tiene que $135° - 2x + x = 90°$, de donde se obtiene finalmente que $x = 45°$, por lo cual $\angle ACE = \angle CBA$; lo que significa que el triángulo ABC es rectángulo en A e isósceles de base $\overline{BC}$.

17. $\overline{BC}$ es bisectriz del $\angle DBF$.
    BDE triángulo isósceles de base $\overline{DB}$.
18. $\angle NPR = 72{,}3^\circ$.
    El ΔMNP es isósceles de base $\overline{MN}$.
19. a) $\angle \overline{FEB} = 36^\circ$, ya que $\angle FBE = \angle BED = 36^\circ$ por alternos entre paralelas.
    $\angle FEB = \angle BED = 36^\circ$ por ser $\overline{EB}$ bisectriz del $\angle FED$.
    $\angle GFB = 72^\circ$ por ser correspondiente entre paralelas con el $\angle FED$.
    Como $\angle FED = \angle FEB + \angle BED$ por ser $\overline{ED}$ bisectriz del $\angle FED$, se tiene al sustituir que $\angle FED = 36^\circ + 36^\circ = 72^\circ$.
    $\angle AFE = 72^\circ$ por ser opuesto por el vértice con el $\angle GFB$.
    b) ΔAFE isósceles y acutángulo, ya que $\overline{AF} = \overline{EF} = 4{,}0$ cm y $\angle AFE = 72^\circ$, $\angle AEF = \angle EAF = 54^\circ$.
    ΔEFB isósceles y obtusángulo, ya que $\overline{FB} = \overline{EF} = 4{,}0$ cm y $\angle EFB = 108^\circ$, $\angle FEB = \angle FBE = 36^\circ$.
20. Los ángulos interiores del ΔDBE tienen las siguientes amplitudes:
    $\angle DBE = 66^\circ$ por ser adyacente con el $\angle EBH = 114^\circ$.
    $\angle EDB = \angle DBE = 66^\circ$ por ser ángulos base del ΔDBE isósceles.
    $\angle DEB = 48^\circ$ por ser correspondiente con el $\angle ACE$ entre las rectas paralelas AC y DE cortadas por la secante BC.
21. $\angle CBF = 19{,}2^\circ$ por ser $\angle DCA = \angle CAB = 38{,}4^\circ$ por alternos entre las rectas paralelas $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ cortadas por la secante AC, $\angle CAB =$ $= \angle CBA = 38{,}4^\circ$ por ser ángulos base del ΔABC isósceles y $\angle CBF = \dfrac{38{,}4^\circ}{2} = 19{,}2^\circ$ por ser bisectriz del $\angle CBA$.
    $\angle ACB = 103{,}2^\circ$ por ser $\angle CBA = \angle BCE = 38{,}4^\circ$ por alternos entre las rectas paralelas AB y DE cortadas por la secante BC; $\angle DCA + \angle ACB + \angle BCE = 180^\circ$ por ser ángulos consecutivos a un mismo lado de una recta. Además, $\angle DCA = 38{,}4^\circ$ por ser alterno con $\angle CAB$ entre las rectas paralelas $\overline{AB}$ y DE cortadas por la secante AC, y ser el ΔABC isósceles de base $\overline{AB}$.
22. a) $\angle MKL = 23{,}6^\circ$ por ser $\angle LKN = 47{,}2^\circ$ correspondiente con el ángulo dado que mide $47{,}2^\circ$ entre las rectas paralelas MN y KL cortadas por la secante KN, y además, ser KM la bisectriz del $\angle LKN$.
    b) $\angle MNK = 132{,}8^\circ$ por ser adyacente con el ángulo que por datos mide $47{,}2^\circ$.
23. a) P es un punto situado sobre la intersección de la mediatriz del segmento $\overline{AD}$ y el segmento paralelo a $\overline{BC}$ que pasa por el punto medio de $\overline{AB}$.

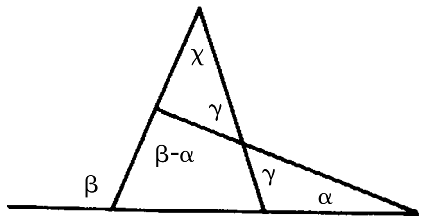
b) X es el punto que se encuentra en la intersección de la bisectriz del $\angle BAD$ con la mediatriz del segmento $\overline{AD}$.

3.3 Relaciones entre los elementos de un triángulo y los de un cuadrilátero

1. a) V.
   b) F, porque las alturas de un triángulo son los segmentos trazados de cada vértice y perpendicularmente al lado opuesto.
   c) F, ya que no se cumple con la propiedad de la desigualdad triangular.
   d) V.
   e) F, porque un triángulo no puede tener más de un ángulo recto y para ser equilátero los tres ángulos deben ser iguales.
   f) V.
   g) F, en el caso del triángulo obtusángulo el circuncentro es un punto exterior al triángulo.
   h) F, ya que la amplitud de cada ángulo exterior a un triángulo es igual a la suma de las amplitudes de los ángulos interiores no adyacentes a él.
   i) F, pues un triángulo solo puede tener un ángulo obtuso, ya que la suma de las amplitudes de sus ángulos interiores es igual a 180º.
2. a) m y n son rectas que se cortan. (Con los datos dados se pueden calcular las amplitudes de los tres ángulos interiores de cada triángulo y comprobar que existe, al menos, una pareja de ángulos alternos que no son iguales entre sí, por lo tanto, es posible afirmar que las rectas m y n no son paralelas.)
   b) 55º. (Para calcular este valor se aplica el teorema sobre la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo.)
3. $\angle DAB = 84º$ por ser un ángulo exterior al ΔABC isósceles. Los ángulos de la base del triángulo ABC son no adyacentes al $\angle DAB$ y cada uno mide 42º.
4. Isósceles. Es fácil comprobar que 75º + 30º + 75º = 180º (teorema sobre la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo).
5. Rectángulo. Según los datos, $\angle OMN = 30º$ y como $\angle MNO = 60º$, se cumple en virtud del teorema sobre la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo, que $\angle MON = 90º$; lo que significa que el triángulo MNO es rectángulo.

6. Un trapecio rectángulo. Como por datos dos ángulos consecutivos son rectos, entonces es posible que los restantes ángulos midan 70° y 110°, ya que se verifica que $90° + 90° + 70° + 110° = 360°$.
7. Isósceles. Aplicando el teorema sobre el ángulo exterior de un triángulo es posible afirmar que se cumple $\angle BAC = \angle ACB = x$; esto permite asegurar que el triángulo ABC es isósceles de base $\overline{AC}$.
8. Rectángulo. Es fácil reconocer que $\overline{ED}$ es perpendicular a $\overline{FG}$ (en un triángulo isósceles coinciden la altura y la mediana trazadas a la base del triángulo, así como la bisectriz del ángulo principal).
9. Acutángulo, ya que las amplitudes de sus tres ángulos interiores (70°, 70° y 40°) son menores que 90°.
10. Isósceles de base $\overline{PQ}$. Dados los datos es posible calcular las amplitudes de los tres ángulos interiores del triángulo YPQ: $\angle YPQ = 50°$, $\angle PQY = 50°$ y $\angle PYQ = 80°$.
11. $\angle MNP = 78°$, por ser adyacente al $\angle PNO$.
    $\angle MPN = 72°$ y $\angle NMP = 30°$, por ser $\angle MPN + \angle NMP = \angle PNQ$ por la propiedad del ángulo exterior a un triángulo; al sustituir en $4x \angle 8° + x + 10° = 102°$ y realizar los cálculos indicados se obtiene que $x = 20°$.
12. Las amplitudes de los ángulos interiores del triángulo son 48°, 42° y 90° y se obtienen al resolver la ecuación $2x + 30° + 3x + 15° + 90° = 180°$ y sustituir el valor de x en las expresiones dadas.
13. $\alpha = 60°$, $\beta = 80°$ y $\gamma = 40°$, se obtiene al expresar α y γ en función de β ($\alpha = 140° - \beta$; $\gamma = 120° - \beta$) y al sustituir en la ecuación $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ (teorema sobre la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo).
14. $\angle BAD = 40°$, por ser $\angle BDA = 120°$, ya que es adyacente a uno de los ángulos interiores del triángulo equilátero. En virtud del teorema sobre la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo y considerando que $\angle ABD = 20°$ (por datos) y que $\angle BDA = 120°$; se obtiene que $\angle BAD = 40°$.
15. $\angle ABF = 57{,}3°$. Se cumple que $\angle DCA = \angle FAB = 32{,}7°$ por ser ángulos alternos entre las rectas paralelas AB y DC cortadas por la secante AC. De $\overline{BF} \perp \overline{AC}$ resulta que el triángulo ABF es rectángulo en F y por el teorema sobre la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo, se obtiene que la amplitud del ángulo ABF es igual a 57,3°.
16. $\angle X = 123°$. El ángulo $\angle A = 66°$ por el teorema sobre la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo. Como $\overline{AE}$ es su bisectriz del ángulo $\angle CAB$, entonces $\angle EAD = 33°$. El valor del $\angle X$ se obtiene por la propiedad del ángulo exterior a un triángulo.

17. ΔNOB es escaleno, ya que la amplitud de sus ángulos interiores son diferentes $\angle NBO = 60°$, $\angle ONB = 50°$ y $\angle NOB = 70°$.
Estos valores se obtienen aplicando la propiedad de ángulo exterior a un triángulo ($\angle BAC + \angle ACB = 70°$, luego $\angle ACB = 40°$), la propiedad de la bisectriz de un ángulo ($\angle ACN = \angle NCB = 20°$), el teorema sobre la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo, y la propiedad sobre las amplitudes de los ángulos opuestos por el vértice.
18. $\angle ABD = 46°$ por la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo.
19. $\angle ABD = 46°$ por la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo.
20. c) $\beta - \alpha - \gamma$, según el teorema, el ángulo exterior y la propiedad de los ángulos opuestos por el vértice en relación con sus amplitudes, se obtienen las relaciones que se observan en la figura.



21. 3. $\angle C = \angle D = 85°$.
  4. 90°.
  5. a) F; porque al sumar las amplitudes de cuatro ángulos agudos se obtiene una amplitud menor de 360°.
     b) F; porque al sumar las amplitudes de cuatro ángulos obtusos no se obtiene una amplitud mayor que 360°.
     c) V.
  6. $\angle NMQ = 50°$; $\angle MNP = 130°$; $\angle NPQ = 92°$; $\angle PQM = 88°$.
22. 2. Dos ángulos opuestos miden 155° y los otros dos 25°.
  3. a) $\angle 1 = \angle 2$ por ser ángulos alternos, entonces $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.
     $\angle 1 = \angle 4$ por ser ángulos correspondientes, entonces $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Por lo anterior resulta que el cuadrilátero *ABCD* es un paralelogramo.

     b) $\angle 2 \neq \angle 4$, entonces sus ángulos suplementarios son también diferentes y como estos ángulos son ángulos opuestos del cuadrilátero, se puede afirmar que *ABCD* no es un paralelogramo.
23. 1. Las amplitudes de los ángulos del rombo son: 80°, 80°, 100° y 100°.
  2. Las amplitudes de los ángulos del rombo son: 60°, 60°, 120° y 120°.
  4. $P_{\Delta COB} = 12$ cm. Sugerencia: Las diagonales de un rombo se cortan en su punto medio perpendicularmente.
  5. Las amplitudes de los ángulos del rombo son: 60°, 60°, 120° y 120°.
     El perímetro de *DPBQ* es igual a 32 cm.
     Para calcular el perímetro de *DPBQ* que es un rombo, por datos, basta determinar la longitud de uno de sus lados y multiplicarlo por 4. Según los datos se puede aplicar el resultado de un ejercicio portador de infor-

mación que relaciona en un triángulo rectángulo a la amplitud del ángulo de 30º con la longitud del cateto opuesto a este y la hipotenusa: *La longitud del cateto que se opone al ángulo de 30º en un triángulo rectángulo es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa.*

6. a) V.
   b) V.
   c) V.
7. $\angle BDE$ = 135º, $\angle DBE = \angle DEB$ = 22,5º.
8. El ejercicio se puede resolver aplicándole a uno de los triángulos la reflexión cuyo eje contiene al punto *E* y es paralelo al lado $\overline{AD}$.

24. 1. Porque son ángulos conjugados entre paralelas.
2. $\angle ADC$ = 60º, $\angle A$ = 120º y $\angle B$ = 130º.
3. $\angle ADC = \angle BCD$ = 80º; $\angle BAD = \angle ABC$ = 100º.
4. a) Dos ángulos miden 90º y los otros dos, 75º y 105º.
   b) No puede ser ya que si es rectángulo los lados no paralelos no pueden ser iguales. Considerando que el rectángulo es un caso particular de un trapecio isósceles se puede contestar afirmativamente la pregunta.
5. Para responder este ejercicio se necesita demostrar la igualdad de dos triángulos y este contenido se imparte en octavo grado, por lo que este ejercicio no debe ser indicado en el séptimo grado.
6. L_{PM} = 35 cm. Sugerencia: aplicar propiedad de la paralela media. (Este es un ejercicio portador de información.)
7. $P = x + x + B + b$ (*B*: longitud de la base mayor y *b*: longitud de la base menor); pero $B = b$ y *x*: longitud de los lados no bases). Al resolver la ecuación $2x + 24 = 34$, se obtiene, x = 5,0 cm.
8. Según el teorema sobre la paralela media de un trapecio, se tiene que:
   $12 = \frac{B+b}{2}$ de donde $B + b$ = 24 cm. Por consiguiente, el perímetro del trapecio es igual a (10 + 18 + $B + b$) cm = (28 + 24) cm = 52 cm.
9. a) Sí, el trapecio rectángulo.
   b) No, porque el cuarto ángulo también sería recto, luego puede ser un cuadrado o un rectángulo.

25. a) F, porque los ángulos opuestos de un paralelogramo pueden tener una amplitud mayor que 90º.
b) V.
c) F, porque puede ser un paralelogramo, un cuadrado o un rectángulo.
d) F, porque pudiera ser un rombo y un rombo no es necesariamente un rectángulo. (El cuadrado es un caso particular de rectángulo.)
e) V.
f) V.

g) F, pues las diagonales de un cuadrado o de un rectángulo son iguales. (Hay rombos que no son cuadrados.)
h) V.
i) F, porque el único rombo que cumple estas condiciones es el cuadrado.
j) V.

26. $\angle M = 76°$, $\angle N = 114°$, $\angle P = 76°$ y $\angle Q = 94°$, aplicando el teorema sobre la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un cuadrilátero, se obtiene que $x = 38°$ al sustituir y resolver la ecuación: $x + 38° + 3x + 2x + 2x + 18° = 360°$.
27. $\angle ABC = 144°$, $\angle BAF = 81°$, $\angle BCE = 81°$, $\angle CEF = 117°$ y $\angle AFE = 117°$, como AGFH y CDEH son cuadrados iguales, por lo que el triángulo EHF es isósceles de base *EF*. También las diagonales de un cuadrado determinan ángulos de 45°. Además, $\beta = 2\alpha$ luego $\angle AFE = \angle CEF = 45° + 2\alpha$; como ABCH es un rombo, los ángulos opuestos son iguales; luego $\angle ABC = \angle AHC = 360° - 180° + \alpha$ (tomando la amplitud de los ángulos alrededor de un punto); $\angle BCH = \angle BAH = \alpha$; se tiene $\angle BCE = \angle BAF = 45° + \alpha$. Como la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un polígono de *n* lados es $180°(n - 2)$ y en este caso es 540°, entonces se obtiene que $\alpha = 36°$ y sustituyendo se calculan las amplitudes de los ángulos.

3.4 Estimación de magnitudes en figuras planas

1. a) $P_{\text{cuadrado}} = 24$ cm.
   b) $A_{\text{trapecio}} = 27\ \text{cm}^2$.
2. b) $27\ \text{m}^2$.
3. a) $\angle ABE = \angle EAB = 74°$ por ser ángulos base del triángulo isósceles *ABE* y:
   $\angle FCA = \angle CAB = 37°$ por ser ángulos alternos entre las rectas paralelas *AB* y *FC* cortadas por la secante $\overline{AC}$.
   $\angle CAB = \angle CAF = 37°$ por ser $\overline{AC}$ bisectriz del $\angle A$.
   Según el teorema sobre la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo, se obtiene que $\angle AEB = 32°$.
   b) Trapecio rectángulo.
   $A = 69\ \text{cm}^2$.
4. Sugerencia: Calcular el perímetro de la figura para determinar el valor de *x*. Perímetro de la figura $= 30x = 60$ m, de donde, $x = 2{,}0$ m.
   Altura total: 22 m.
   Ancho: 12 m.
5. $69\ \text{cm}^2$. Sugerencia: Descomponer la figura en un cuadrado y un rectángulo.
6. $18\ \text{cm}^2$.

7. 50 %. Obsérvese que en el interior del cuadrado *ABCD* quedan determinados 8 triángulos iguales. Como 4 son los que están sombreados, entonces el 50 % del área del cuadrado es la que aparece sombreada.
8. $\frac{3}{8}$ cm². Sugerencia: Igual al ejercicio 6.
9. El área del rectángulo sombreado es 20 cm².
10. 147 cm². Observación: En el texto del ejercicio se deben añadir los datos siguientes: Las dimensiones del rectángulo son números enteros y el largo excede al ancho en 2,0 cm.
11. 2 m².
12. 160 losas.
13. La suma de las áreas de los triángulos *MNS* y *QRS*.

    Observación: No es difícil reconocer que el cuadrado puede ser descompuesto en cuatro triángulos iguales a los sombreados, por tanto, quedará por sombrear un área igual a la suma de las áreas de los triángulos *MNS* y *QRS*.
14. El perímetro del rectángulo es 16 cm y su área 15 cm².
15. a) P = 170 cm = 1,7 m.

    b) El mayor número de cuadraditos que puede cortar es 71.
16. P = 30 cm; A = 36 cm².
17. P_{EBCDF} = 44 dm = 440 cm; A_{EBCDF} = 120 dm².
18. Andrés y Mario necesitan la misma cantidad de pintura.
19. Considerando que a sea la longitud de un lado de cada uno de los 8 "cuadraditos" y que, además, sea un número entero, se cumple que el perímetro del rectángulo es $12a = 24$, con lo cual a es igual a 2,0 cm y las dimensiones del rectángulo son 8,0 cm y 4,0 cm. El área del rectángulo es igual a 32 cm² y como cada cuadradito tiene un área de 4,0 cm², el área sombreada es igual a 8,0 cm². El área sombreada representa el 25 % del área del rectángulo.
20. a) El área sombreada es 128 cm².

    b) El perímetro del rectángulo 80 cm.
21. P = 20 cm. Sugerencia: Determinar el valor de la suma de los dos lados $\overline{DB}$ y $\overline{BC}$ considerando el perímetro del triángulo *CDB* y a partir de las condiciones dadas en el ejercicio, se obtiene la relación: $\overline{DB} + \overline{BC} = \overline{AD} + \overline{AC}$.
22. a) $A_{\text{cuadrilátero}}$ = 18 cm²; $P_{\text{cuadrilátero}}$ = 20 cm.

    b) $A_{\text{triángulo}}$ = 6,0 cm².

    c) Representa el 12,5 %.

23. a) $A_{sombreada} \approx 18\ cm^2$. Sugerencia: Calcular el área sombreada sustrayendo del área del cuadrado *ABCD*, el valor de las áreas de los dos triángulos.

    b) $\frac{A_C}{A_S} = \frac{10}{7}$.

24. $A = 30\ cm^2$. Sugerencia: Calcular el área sombreada sustrayendo del área del rectángulo *PQRS*, el valor de las áreas de los dos triángulos y del trapecio.

25. $\frac{A_S}{A_\Delta} = \frac{1}{4}$.

26. $\frac{A_S}{A_{NS}} = \frac{13}{12}$.

27. 45.

28. $64\ m^2$.

29. El área de la figura sombreada es el 62,5 % de la del cuadrado mayor.