Capítulo 1
El significado de los números

Introducción

Los fenómenos de la naturaleza obligaron al **hombre** a vivir cambiando de lugar, para poder tener con qué alimentarse y protegerse de las inclemencias del tiempo.

A partir de ese momento, nace en él la idea del **número**; reconoce la **cantidad** y la asocia a la cantidad de miembros que tiene su familia, a la cantidad de alimentos que necesita para sustentarlos, a la cantidad de animales que se ha propuesto tener como suyos, etcétera.

A estas cantidades, primeramente, las asocia con sonidos y, posteriormente, con símbolos.

Aproximadamente desde el año 300 a.n.e., los egipcios empleaban jeroglíficos o imágenes para representar números. En su sistema podían representar cantidades muy grandes, pero para cada cantidad tenían un símbolo. Esto los obligaba a dominar tantos símbolos como cantidades podía el hombre imaginar.

No es hasta alrededor del año 200 antes de nuestra era que el hombre comienza a agrupar las unidades para facilitarse la lectura y escritura de cantidades. Formaba grupos de 3, de 5, de 10, etc. El número de elementos que forma cada grupo se denomina base.

Nuestro sistema de numeración fue desarrollado primeramente en la India y luego los árabes lo introdujeron en España, de donde se extendió a América con la conquista.

Este sistema es el más usado en la actualidad por ser el más completo, su base es diez y por esta razón se le llama también sistema de numeración decimal.

En esta unidad sistematizarás los contenidos adquiridos por ti en la primaria sobre el cálculo con números naturales y fraccionarios los cuales aplicarás en la resolución de ejercicios y problemas relacionados con la vida política y social de nuestro país y del mundo y darás tus primeros pasos en la recopilación, organización y análisis de datos cuantitativos lo cual te será de gran utilidad para analizar e interpretar los diferentes fenómenos de la vida cotidiana.

1.1 El orden de los números y su utilización en la interpretación de datos cuantitativos

En este epígrafe recordarás muchos de los conceptos y propiedades relacionadas con los números naturales y fraccionarios que estudiaste en la escuela primaria, los cuales aplicarás a la resolución de nuevos ejercicios y problemas de la vida, donde podrás darte cuenta de su utilización e importancia. También estudiarás específicamente cómo se utilizan en la interpretación de datos cuantitativos lo cual te permitirá iniciar tus estudios en una nueva rama de la Matemática llamada Estadística.

Para que puedas apreciar la importancia que tienen los números en la vida te propongo que analices la siguiente situación para que puedas arribar a tus propias conclusiones.

Al llegar a un Consultorio del Médico de la Familia me detuve a observar el mural y entre propagandas para erradicar el hábito de fumar, protección contra el SIDA y otras, aparecían informaciones que llamaron mi atención:

1er Lugar en el Policlínico por haber efectuado 18 donaciones de sangre.

Total de niños: 28
Niños menores de 1 año: 6
Niños vacunados: 100 %

Mujeres en edad fértil: 48
Prueba citológica: 95,5 %
Mujeres embarazadas: 3

En nuestro Consultorio tres cuartos de los pacientes de la TERCERA EDAD se encuentran vinculados al Círculo de Abuelos.

Posteriormente, en la receta que me entregaba el médico, aparecía aparte de mi nombre, el número de mi historia clínica (630 843) y el medicamento indicado (Vitamina C 500 mg 30 tabletas).

Me percaté de que en todas estas informaciones aparecían números expresados de diferentes formas y con diferentes significados, los cuales fueron utilizados para indicar **cantidades contables**, **relaciones** entre cantidades que resultan de una comparación respecto a un todo, cantidades de **magnitud** e incluso datos indicando la **posición u orden** que ocupa un elemento en un conjunto. Pero además en estas informaciones observé que aparecían números naturales y fraccionarios.

De aquí la importancia de saber el significado de los números.

Analicemos las siguientes situaciones:

- El grupo A tiene 15 alumnos.
- La escuela Raúl Gómez tiene 15 alumnos por grupo.
- En la escuela Raúl Gómez el 15 % de los alumnos son tiradores expertos.
- El área de formación de la escuela tiene una superficie de 15 m^2.
- El receso es de 15 min.
- La escuela obtuvo el 15^{to} lugar en el encuentro de monitores a nivel provincial.

Como puedes apreciar en todas las situaciones se ha utilizado el mismo número y en todas tiene un significado diferente.

En la primera, se indica la cantidad de alumnos de un aula representando este dato una **cantidad contable**, en la segunda, representa la **relación** de la cantidad de alumnos que debe tener cada uno de los grupos de la escuela, la tercera, nos indica otra **relación** esta vez a través del tanto por ciento indicándonos que **15 de cada 100 alumnos son tiradores expertos**, en la cuarta y quinta, se están refiriendo a cantidades de **magnitud** utilizando magnitudes, como son la **superficie** y el **tiempo;** mientras que en la última se está refiriendo al número de **orden** que ocupó la escuela en el encuentro de monitores.

Ejercicios

Lee detenidamente las siguientes informaciones y selecciona la respuesta correcta:

1. En el año 2002 se alcanzó una producción de 3 605 000 t de azúcar, excediendo en un 2 % a la producción de la zafra anterior.
   a) El número que indica la producción de azúcar representa:

      - Una cantidad contable.
      - Una cantidad de magnitud.
      - Una relación entre cantidades.

- Un ordinal.

b) La producción de azúcar del año 2002 fue:

- Mayor que la producción del año 2003.
- Mayor que la producción del año 2001.
- M enor que la producción del año 2001.

2. Al cierre del año 2002 se comprobó que la población cubana alcanzó un consumo de 76,8 g de proteínas per cápita diario por las mejoras en la calidad de los alimentos.

a) El número que indica el año representa:

- Una cantidad contable.
- Una cantidad de magnitud.
- Una relación entre cantidades.
- Un ordinal.

b) El número 76,8 representa la relación de:

- Los gramos de proteínas consumidas.
- Los gramos de proteínas consumidas por cada persona en nuestro país.
- Los gramos de proteínas consumidas cada día, por cada persona en nuestro país.

3. Durante el año 2002 se llegó a digitalizar las tres cuartas partes de los 811,1 mil teléfonos instalados

a) El número de teléfonos instalados hasta el 2002 representa:

- Una cantidad contable.
- Una cantidad de magnitud.
- Una relación entre dos cantidades.
- Un ordinal.

b) Que las tres cuartas partes de estos teléfonos esté digitalizado significa que:

- Tres teléfonos estén digitalizados del total instalado.
- Tres teléfonos estén digitalizados de cada cuatro instalados.
- Menos de la mitad de los teléfonos instalados están digitalizados.

4. Enlaza los elementos de la columna **A** con los de la columna **B** según el significado del número que aparezca en el texto:

A	**B**
Cantidad contable	El archipiélago cubano tiene una superficie de 110 860 Km^2.
Cantidad de magnitud	La población de Cuba es de 11 247 200 habitantes, aproximadamente.
Relación entre cantidades	El 1er. territorio libre de analfabetismo en Cuba fue Melena del Sur.
Ordinal	En Cuba la población urbana es de un 75,4 %.

Los números naturales. Lectura y escritura

Los números naturales los utilizamos, generalmente, para enumerar los elementos de conjuntos contables.

Recordarás que a pesar de existir diferentes sistemas de numeración el utilizado por nosotros es el sistema de numeración decimal, el mismo consta de 10 dígitos:

O	1	2	3	4	5	6	7	8	9
cero	uno	dos	tres	cuatro	cinco	seis	siete	ocho	nueve

Con estos diez dígitos podemos escribir todos los números.

Este sistema se llama decimal porque con cada 10 unidades de un orden se forma una unidad del orden inmediato superior; o sea:

1 decena = 10 unidades
1 centena = 10 decenas
1 unidad de millar = 10 centenas
1 decena de millar = 10 unidades de millar
1 centena de millar = 10 decenas de millar

1 unidad de millón = 10 centenas de millar

1 decena de millón = 10 unidades de millón

1 centena de millón = 10 decenas de millón

1 unidad de millar de millón = 10 centenas de millón

1 decena de millar de millón = 10 unidades de millar de millón

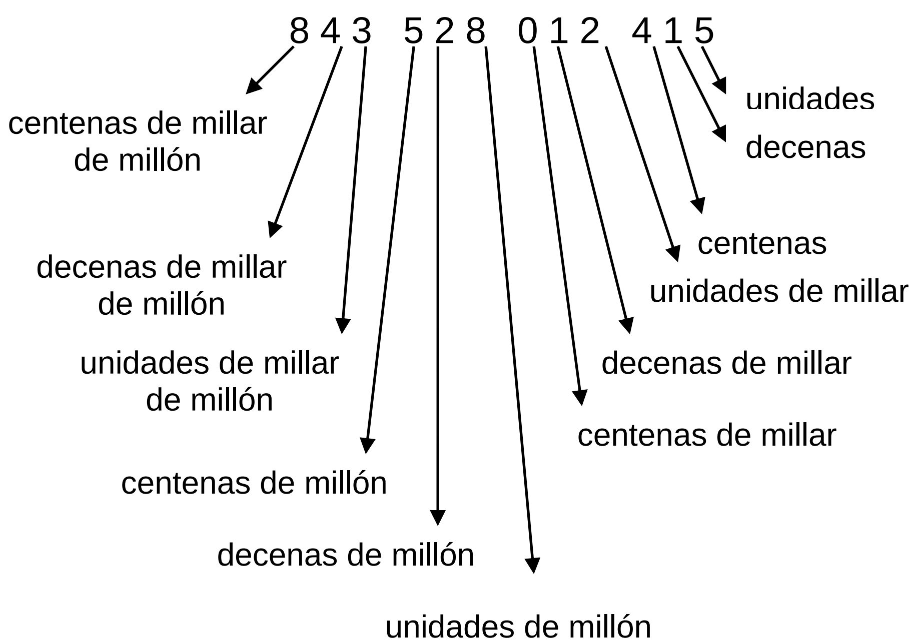
1 centena de millar de millón = 10 decenas de millar de millón

y así sucesivamente.

Para tener éxito en la lectura y escritura de números naturales es imprescindible dominar la tabla posicional la cual te recordaré a través del siguiente ejemplo:

¿Cómo leerías el número 843528012415?

Observemos el significado de cada una de sus cifras.



Para que puedas leer con mayor facilidad un número puedes separarlo de tres en tres cifras comenzando por la derecha, luego lo leemos: ochocientos cuarenta y tres mil quinientos veintiocho millones, doce mil cuatrocientos quince.

Ejemplos

a) 58356

Lo escribimos: 58 356

Lo leemos: cincuenta y ocho mil trescientos cincuenta y seis.

b) 28463546

Lo escribimos: 28 463 546

Lo leemos: veintiocho millones cuatrocientos sesenta y tres mil quinientos cuarenta y seis.

Es importante que sepas diferenciar entre el significado de una cifra en un número y el valor que tiene la misma por la posición que ocupa.

Ejemplo:

En el número 4 853 261:

a) ¿Cuál es la cifra de las centenas?

b) ¿Cuántas centenas tiene este número?

Para responder el inciso a) basta con identificar en el número el orden a que se hace alusión y seleccionar la cifra que corresponde.

a) 4 853 <u>2</u>61 La cifra de las centenas es 2.

Sin embargo, para responder el inciso b) en la práctica podemos señalar en el número las cifras desde la primera hasta la cifra del orden que nos piden y leer el número señalado.

b) <u>4 853 2</u>61   Este número tiene 48 532 centenas.

Así mismo podríamos decir que la cifra de las decenas de millar es 5 y que este número tiene 485 decenas de millar o que la cifra de las unidades de millón es 4 y que el número tiene 4 unidades de millón.

Ejercicios

1. Escribe cómo se leen los siguientes números:

a) 123	b) 5 950	c) 40 631	d) 43 267 523
e) 65 320	f) 45 600 500	g) 130 000 560 000	h) 23 700001

2. Selecciona el número que corresponde a la siguiente lectura:

a) cuarenta y tres millones ciento ocho

43 108   43 108 000   43 000 108

b) veinticinco mil millones uno

25 000 100 000 25 000 000 001 25 000 001

3. De cada uno de los números de la siguiente lista, responde:

830 425 303 314 328 1 834 205 333

a) ¿Cuál es la cifra de las decenas de millar?

b) ¿Cuántas decenas de millar tiene?

c) ¿Qué posición ocupa la cuarta cifra de izquierda a derecha?

4. Lee la siguiente información y selecciona la respuesta correcta:

Hasta el 31 de diciembre de 2003 la población residente en Cuba con menos de 5 años era de 739 250 habitantes mientras que la de 65 años o más era de 1 108 211.*

a) El número que indica la población con menos de 5 años tiene:

2 centenas 739 centenas 7 392 centenas

b) La cifra de las decenas del número que indica la cantidad de habitantes de 65 años o más es:

1 11 082 110 821

5. Determina las proposiciones verdaderas (V) o falsas (F) atendiendo a la información que te ofrece la tabla y en caso de que sean falsas escribe lo correcto.

Provincias	Consultas Estomatológicas (año 2001)
Pinar del Río	1 646 481
La Habana	1 850 333
Ciudad de La Habana	5 188 216

a) La cifra de las decenas del número que indica las consultas de Pinar del Río coincide con la que ocupa el lugar de las decenas de millar del número de consultas en Ciudad de La Habana.

b) El número que indica las consultas en Ciudad de La Habana tiene 3 decenas.

* Datos tomados del Anuario Estadístico de Cuba.

c) El número que indica las consultas en Pinar del Río tiene 16 decenas de millar.

d) El número que indica las consultas en La Habana se lee: un millón ochocientos cincuenta mil trescientos treinta y tres.

6. Escribe cómo se leen los números que cumplen las condiciones que se indican en cada inciso:

a) Número de cinco cifras todas desiguales e impares, organizadas de menor a mayor de izquierda a derecha.

b) Número de cinco cifras que tiene un tres en las decenas de millar, un dos en las unidades de millar y el resto de las cifras son ceros.

7. Escribe el número dado por las siguientes condiciones.

a) El mayor número de tres cifras que tenga un dígito cero.

b) El mayor número de cuatro cifras no repetidas que tenga un dígito cero.

c) El menor número de cuatro cifras no repetidas que tenga un dígito tres.

8. Selecciona la respuesta correcta:

El antecesor del menor número de cuatro cifras es:

1 000   1 001   9 99   9 999

9. Soy un número de cinco dígitos (cifras) que tiene el cuatro en el lugar de las unidades, un cero en el lugar de las decenas y un uno en el lugar de las unidades de millar y la cifra que ocupa el lugar de las centenas es el antecesor de la cifra que ocupa la unidad de millar. ¡Ah! También soy el mayor de los números que puede escribirse con estos dígitos.

a) ¿Qué número soy?

b) Escribe cómo tú me leerías

10. Elena le dice a Daniela:

Piensa en un número de cuatro dígitos (cifras) diferentes que cumple las condiciones siguientes:

- Cada uno de los dígitos es un número impar
- Es el menor número que se puede formar con esos dígitos

Daniela responde correctamente. ¿Qué número crees que escogió Daniela? Señala la respuesta correcta.

1 327 1 357 1 5 37 1 137

11. Escribe el número ★ millones ♥ mil ♦ si conoces que:

★ es el menor número de dos cifras repetidas.

♥ número de tres cifras consecutivas ordenadas que tiene un dígito cero.

♦ menor número de tres cifras pares no repetidas.

12. Determina el número natural que cumpla con todas las condiciones siguientes:
    - Su primera cifra, de izquierda a derecha, coincide con la última del mínimo común múltiplo de 9, 13 y 117.
    - No es un número divisible por 2.
    - Es el mayor número natural de cuatro cifras divisible a la vez por 5 y por 3.

Las fracciones comunes. Lectura y escritura

Durante la primaria conociste el concepto de fracción y su significado práctico, así como de la necesidad de su surgimiento cuando en el conjunto de los números naturales no era posible realizar operaciones como 25 : 40.

El surgimiento de las fracciones trajo consigo la ampliación del conjunto de los números naturales. Conociste entonces el conjunto de los números fraccionarios.

Recordemos a través de ejemplos otros aspectos sobre este nuevo conjunto.

Primeramente, recordemos que los números fraccionarios se pueden escribir como fracción común o como expresión decimal.

Veamos entonces que cuando hablamos de una fracción común nos estamos refiriendo en la práctica a una división que escribimos de otra forma.

$$\underset{\text{división}}{\underset{\downarrow}{5 : 4}} = \underset{\text{fracción}}{\underset{\downarrow}{\frac{5}{4}}}$$

En general podemos decir que una fracción se representa en la forma $\frac{a}{b}$ donde …b $\neq 0$ y se lee a sobre b.

$$\frac{a \;\rightarrow \text{numerador}}{b \;\rightarrow \text{deno min ador}}$$

El numerador: Indica cuántas de las partes en que se ha dividido el todo se toman.

El denominador: Indica en cuántas partes iguales se divide el todo.

Si la comparamos con la operación de división veremos que el numerador coincide con el dividendo y el denominador con el divisor.

A veces para simplificar el vocabulario leemos, la fracción $\frac{3}{4}$ como tres cuartos en vez de tres sobre cuatro. Puedes remitirte al libro de texto de 5to. grado p. 55 para que recuerdes cómo se nombran algunas fracciones que reciben nombres especiales según su denominador.

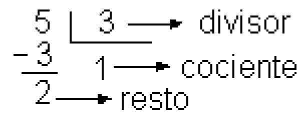
Es importante para el trabajo con fracciones recordar que:

- Las fracciones cuyo numerador es menor que el denominador se llaman **fracciones propias**. Ejemplos: $\frac{3}{4}$; $\frac{8}{12}$; $\frac{3}{100}$; etcétera.
- Las fracciones cuyo numerador es mayor o igual que el denominador se llaman **fracciones impropias**. Ejemplos: $\frac{7}{3}$; $\frac{4}{2}$; $\frac{18}{5}$; etcétera.

Toda fracción impropia puede representarse también como un **número mixto**.

Ejemplo Para representar $\frac{5}{3}$ como un número mixto procedemos de la siguiente manera:

1. Dividimos el numerador entre el denominador.



2. El cociente será la parte entera del número mixto, el resto el numerador de la fracción propia acompañante y el divisor su denominador.

$$1\tfrac{2}{3}$$

El procedimiento inverso también es posible, o sea, para representar un número mixto como una fracción impropia.

Ejemplo $4\frac{2}{5}$

1. Multiplicamos el denominador de la fracción propia por la parte entera acompañante y le adicionamos el numerador, siendo este el numerador de la fracción impropia.

$$4 \cdot 5 + 2 = 22$$

2. La fracción impropia obtenida mantiene el mismo denominador de la fracción propia que acompaña a la parte entera del número mixto.

$$4\tfrac{2}{5} = \frac{4 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{22}{5}$$

Los números fraccionarios como expresión decimal

Las fracciones comunes cuyos denominadores sean potencias de 10 por ejemplo $\left(\frac{1}{10}, \frac{4}{100}, \frac{8}{1000}, \text{etc}\right)$. se llaman fracciones decimales y se pueden representar como expresiones decimales (0,1; 0,04; 0,008; etc.)

Otras fracciones comunes, como $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{3}{8}$ que no tengan como denominador una potencia de 10 se pueden convertir en fracciones decimales equivalentes como, por ejemplo:

$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10}$ En este caso ampliamos la fracción $\frac{1}{2}$ por 5 y nos queda $\frac{5}{10}$ (cinco décimos); que se puede escribir como la expresión decimal 0,5 (cinco décimas). Fíjate que como en el denominador de la fracción decimal hay un cero la expresión decimal debe tener un lugar decimal.

$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{75}{100}$ Aquí para transformar la fracción $\frac{3}{4}$ a expresión decimal debemos, primeramente, ampliarla por 25, obteniendo la fracción $\frac{75}{100}$ (setenta y cinco centésimos). Fíjate que como el denominador es 100 la expresión decimal debe tener dos lugares decimales, en este caso 0,75 (setenta y cinco centésimas)..

$\frac{3}{8}$

Esta fracción no es fácil convertirla en una que sea equivalente a ella y que tenga como denominador una potencia de 10 aunque sí es posible, en estos casos es más fácil realizar la división del numerador entre el denominador.

Recordemos cómo se divide:

Como $3 < 8$ colocamos cero en el cociente y a continuación la coma decimal.

$$\begin{array}{l|l} 3 & 8 \\ \cline{2-2} & 0, \end{array}$$

30 | 8
24   0,375
60
56
40
40
0

Añadimos un cero al dividendo y continuamos la división como procedíamos en los números naturales.
En este caso la expresión decimal es finita porque al realizar la división el resto es cero.

Sin embargo, existen otras fracciones comunes en que al dividir el numerador entre el denominador el cociente da un número que tiene desarrollo decimal infinito periódico como $\frac{2}{3}$, para ello procedemos como en el caso anterior.

2´0 | 3
18   0, 66…
20
18
2
....

Como $2 < 3$ colocamos cero en el cociente y a continuación la coma decimal para indicar que comenzamos con la parte decimal. Al continuar la división observamos que comienza a repetirse el mismo resto y, por tanto, el mismo valor en el cociente de forma repetida, entonces se escribe $\frac{2}{3} = 0,\bar{6}$ y leemos cero coma seis con período seis.

En un número escrito como expresión decimal, a la izquierda de la coma se escribe la parte entera (unidades, decenas, centenas, etc.) y a la derecha de la coma la parte decimal que no completa la unidad (décimas, centésimas, milésimas, en ese orden).
Al leer el número 48,525 podemos hacerlo de tres formas diferentes:

1ra. Cuarenta y ocho coma cinco, dos, cinco.
2da. Cuarenta y ocho unidades y quinientas veinticinco milésimas
3ra. Cuarenta y ocho mil quinientas veinticinco milésimas

Ejercicios

1. Escribe como se leen los siguientes números:

   a) 4,1 b) 0,45 c) 82,045 d) 38,20 e) 836,200 f) 832567,42

2. Selecciona el número que corresponde a las siguientes lecturas:

   a) Cuatro mil ochocientas veintiocho centésimas.

   4,828 48,28 482,8

   c) Ciento cincuenta milésimas.

   150,000 0,150 1,50

   d) Mil setecientas cinco décimas.

   1705,0 170,5 17,05

3. Escribe los siguientes números, usando la representación con la coma decimal:

   a) 2 357 centésimas c) 10 unidades y 25 centésimas

   b) 123 milésimas d) 5 unidades y 12 milésimas

4. Considera el número 89 105 y coloca la coma de modo que obtengas:

   a) Un número mayor que 1 000 y menor que 10 000.

   b) Un número menor que 1 000 y mayor que 100.

   c) Un número mayor que 1 y menor que 10.

Escribe cómo se lee cada uno de ellos.

5. Del número 3 845,623

   a) ¿Cuál es la cifra de las décimas?

   b) ¿Cuántas milésimas tiene el número?

   c) ¿Qué orden ocupa la cifra 2?

6. Selecciona el número determinado por las siguientes condiciones:

   a) El mayor de los números de tres cifras enteras y tres decimales que tiene un cuatro en el orden de las milésimas.

   999,994 999,004 999,400

b) Es el menor número que se puede formar con todos lo dígitos sin repetir ninguno y que tiene dos cifras decimales.

12 345 678,90 10 234 567,89

7. Circula la expresión decimal que corresponde a cada fracción:

a) $\frac{45}{100}$ 0,45 4,5 45,0

b) $\frac{1}{8}$ 1,8 0,125 1,25

c) $\frac{14}{3}$ 14,3 $4{,}6\overline{6}$ $4{,}\overline{6}$

8. Enlaza las expresiones decimales de la columna **A** con las fracciones decimales que le corresponden en la columna **B**.

A	B
1,18	$\frac{1204}{10}$
20,4	$\frac{118}{10}$
Cuatrocientas veinticinco centésimas	$\frac{204}{10}$
Mil doscientas cuatro décimas	$\frac{118}{100}$
	$\frac{425}{100}$

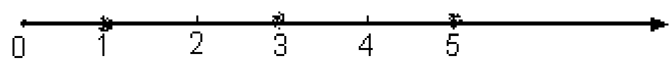
Representación en el rayo numérico de números naturales y fraccionarios

Como aprendiste en la primaria la representación de los **números naturales** en el rayo numérico, coincide con las unidades enteras trazadas en él.

Para ubicarlos correctamente debes primeramente prefijar el segmento unidad que vas a considerar; este dependerá de los números que vas a representar o de la orden del ejercicio.

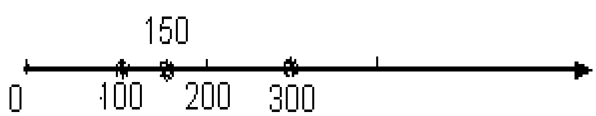
Ejemplo

a) Ubica en un rayo numérico los números 1; 3; 5.



Como en este caso no prefijan el segmento unidad en el ejercicio y los números son pequeños podemos considerarlo de 1,0 cm.

b) Representa en el rayo numérico 100; 150 y 300.



Aquí los números son grandes por lo que el segmento unidad lo tomamos con una escala:

1,0 cm = 100 unidades.

Por lo que el 150 está ubicado en el punto medio del segmento determinado por los extremos en que se encuentra el 100 y 200.

Al representar en un rayo numérico las **expresiones decimales**, debes recordar que el instrumento con que trabajes (regla o cartabón) está dividido en centímetros y milímetros, luego si utilizas como unidad el centímetro podrás ubicar con exactitud medidas hasta con un lugar decimal, si el número tiene más de un lugar decimal la ubicación será aproximada.

Ejemplo

En un rayo numérico donde el segmento unidad es de 1,0 cm. Representa los números 3,2; 0,5 y 1,62.

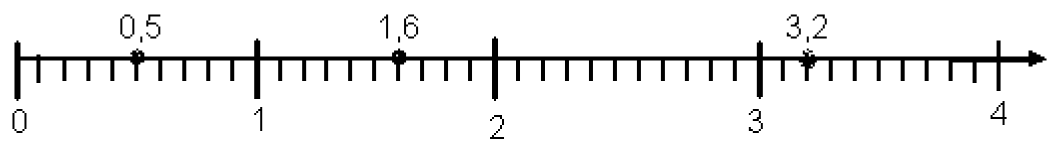
Primeramente, dibujamos el rayo teniendo en cuenta que todas las unidades midan un centímetro.

3,2 tiene tres unidades enteras y dos décimas de la próxima unidad (equivalente a 3 cm. y 2 mm).

0,5 tiene su parte entera cero y cinco décimas de la unidad contigua a cero (equivalente a 5 mm de la primera unidad).

1,62 tiene una unidad entera y 62 centésimas de la próxima unidad (representa un centímetro y la próxima unidad habría que dividirla en 100 partes y tomar 62); como esto es de gran dificultad con los instrumentos que utilizamos, hacemos una aproximación de este número a una cifra decimal.

Observa el siguiente gráfico para que compruebes cómo pueden ubicarse los números.



Vista ampliada del rayo

Si el número tiene muchos lugares decimales para representarlo en el rayo puede redondearse a uno o a dos, por ejemplo, $\frac{5}{8} = 0{,}625 \approx 0{,}6$.

Si el número tiene una representación infinita se acostumbra a representar una aproximación finita haciendo un redondeo, por ejemplo, $\frac{7}{3} = 2{,}\ 3\ 3\ 3\ 3 \ldots \approx 2{,}\ 3$.

Es importante que recuerdes que los números fraccionarios expresados como fracción común al igual que los números naturales se pueden representar en un rayo numérico.

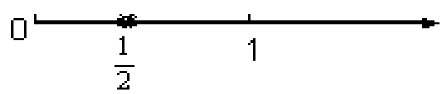
Ejemplo

Representa en un rayo numérico los números fraccionarios:

$\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{2}$; $1\frac{1}{5}$

Para que puedas entender mejor representaremos cada uno de los números dados en un rayo numérico.

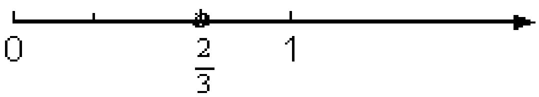
$\frac{1}{2}$ El denominador indica que la unidad debe



ser dividida en dos partes y el numerador que debemos tomar una.

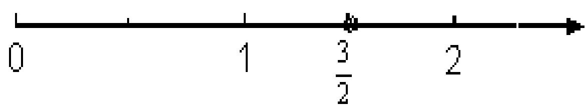
$\frac{2}{3}$

El denominador indica que la unidad debe ser dividida en tres partes y el numerador que debemos tomar dos.



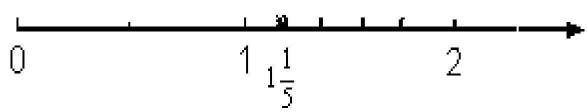
$\frac{3}{2}$

El denominador indica que la unidad debe ser dividida en dos partes y el numerador que debemos tomar tres, por lo que no basta con una unidad, debemos entonces dividir en dos partes la unidad siguiente.



$1\frac{1}{5}$

Cuando la fracción está representada por un número mixto, primero se representa la parte entera y a continuación la parte fraccionaria en la unidad siguiente. O sea, tomamos una unidad (un entero) y dividimos en cinco partes la unidad que le sigue tomando una de ellas.



Otra forma de hacerlo sería expresando $1\frac{1}{5}$ como fracción impropia $\frac{6}{5}$ y procediendo como en el caso anterior.

Ejercicios

1. En cada una de las situaciones siguientes selecciona la equivalencia más apropiada para representar en tu libreta los números dados:

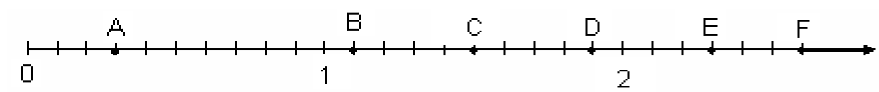
   a) 120; 150; 400

   1 cm = 100 unidades   1 cm = 20 unidades   1 cm = 1 unidad

   b) 0,2; 1,4; 0,8

1 cm = 0,1 unidad   1 cm = 1 unidad   1 cm = 0,2 unidades

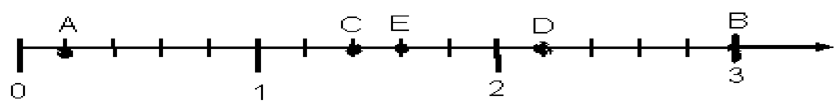
2. Al punto **A** del rayo numérico corresponde el número 0,3. ¿Cuáles son los números que corresponden a los puntos *B, C, D, E y F?*



3. Dada la siguiente lista de números:

   $\frac{3}{5}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{7}{5}$; $2\frac{1}{3}$; $1\frac{3}{5}$; $\frac{15}{5}$; $2\frac{4}{5}$

   a) Determina el número de la lista que corresponde a cada letra representada en el rayo numérico.

   b) Representa en este rayo los números fraccionarios que no correspondan a ninguna de las letras.

4. Selecciona la respuesta correcta que más racionalice el trabajo:

   a) Para representar en el rayo numérico el número $\frac{8}{3}$:

   - Divido cada unidad en tres partes y tomo ocho.
   - Divido la unidad en tres partes y tomo tres.
   - Divido el rayo en ocho unidades y tomo tres.

   b) Al representar 3,7 en un rayo numérico donde el segmento unidad tenga una longitud de un centímetro:

   - Señalo 37 mm en el rayo.
   - Señalo 4 unidades en el rayo, divido la tercera unidad en 10 partes iguales y tomo 7.
   - Señalo 4 unidades en el rayo, divido la cuarta unidad en 10 partes iguales y tomo 7.

5. Representa en el rayo numérico los siguientes números fraccionarios

   0,3; $\frac{1}{4}$; $2\frac{1}{2}$; 3,4; 1,75; $\frac{5}{2}$; 1,792; 4,666…; 2,$\overline{7}$

Orden y comparación de números naturales y fraccionarios

De gran utilidad ha resultado la comparación de **números naturales**, esto lo hemos comprobado a diario en las actividades de nuestra vida cotidiana.

Al comparar **números naturales** que estén representados en un rayo numérico el que esté ubicado más a la izquierda (más cerca de cero) será el menor.

Recordemos mediante algunos ejemplos los procedimientos que utilizamos para compararlos y ordenarlos.

Ejemplo

Compara los números en cada una de las siguientes parejas:

a) 525 y 1 832 c) 2 873 y 1 853

b) 423 y 21 d) 28 435 432 y 28 437 003

En los dos primeros incisos es fácil la comparación ya que el número que tenga mayor cantidad de cifras será el mayor.

a) 525 $<$ 1 832 b) 423 $>$ 21

En los incisos c) y d) que tienen la misma cantidad de cifras se van comparando de izquierda a derecha cada una de las cifras correspondientes a un mismo orden hasta encontrar la diferencia.

c) $\underline{2}$ 873 $>$ $\underline{1}$ 853 porque $2 > 1$

d) 28 43$\underline{5}$ 432 $<$ 28 43$\underline{7}$ 003 porque $5 < 7$

Es importante que recuerdes algunos conceptos que te serán muy necesarios en este conjunto numérico.

El **antecesor** de un número natural n es $n - 1$; $n \neq 0$.

El **sucesor** de un número natural n es $n + 1$.

Un número es **par** si termina en 0, 2, 4, 6 u 8. Y se representa en general como 2n.

Un número es **impar** si no es par. Y se representa en general como 2n + 1.

Al comparar las **expresiones decimales**, si están representadas en un rayo numérico la comparación se realiza igual que en los números naturales.

Para comparar expresiones decimales se procede de la siguiente forma:

1ro. Compara su parte entera y será mayor la expresión decimal que mayor parte entera tenga.

2do. Si tienen igual parte entera, compara sus partes decimales y será mayor la expresión decimal que tenga mayor la primera cifra comenzando por la izquierda (décimas). Si las primeras cifras son iguales se analizan las siguientes (centésimas) y así sucesivamente.

Ejemplo

Compara:

a) 3,85 y 2,53 b) 0,21 y 0,315 c) 3,41 y 3,405

Siguiendo el procedimiento descrito en el inciso a) podemos decir que 3,85 $>$ 2,53; porque 3 $>$ 2 (aquí comparamos la parte entera).

En el inciso b) 0,21 $<$ 0,315, porque 2 $<$ 3 (aquí coincide la parte entera de ambas expresiones y pasamos a comparar la décimas).

En el inciso c) 3,41 $>$ 3,405 porque 1$>$ 0 (en estas expresiones coincide la parte entera y la cifra de la décimas por lo que comparamos las cifras de las centésimas).

Al comparar **fracciones comunes** si las representas en un rayo numérico, se procede de forma similar a los naturales y expresiones decimales.

De no estar representadas en un rayo numérico se procede como aparece a continuación, teniendo en cuenta los siguientes casos:

1ro. Si las fracciones tienen igual denominador será mayor la que mayor numerador tenga.

Ejemplo

$\frac{2}{5} \langle \frac{4}{5}$ porque 2 $<$ 4 (en ambas fracciones la unidad ha sido dividida en igual número de partes).

2do. Si las fracciones tienen igual numerador será mayor la que menor denominador tenga.

Ejemplo

$\frac{3}{5} \rangle \frac{3}{8}$ porque $5 < 8$ (en este caso la primera fracción ha sido dividida en menos partes que la segunda y en ambas se ha tomado la misma cantidad de partes).

3ro. Si las fracciones tienen diferentes numeradores y denominadores. Se procede como sigue:

Para comparar las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ realizamos la siguiente operación:

Multiplicamos $a \cdot d$ y $b \cdot c$, o sea $\frac{a}{b} \quad \frac{c}{d}$

$\frac{a}{b} \langle \frac{c}{d}$	si	$a \cdot d < b \cdot c$
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	si	$a \cdot d = b \cdot c$
$\frac{a}{b} \rangle \frac{c}{d}$	si	$a \cdot d > b \cdot c$

Esta es la forma más general para comparar dos fracciones comunes.

En el caso en que las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ cumplan la condición $a \cdot d = b \cdot c$, entonces decimos que son **fracciones equivalentes**.

A partir de una fracción podemos obtener infinitas fracciones equivalentes a ella mediante la ampliación o la simplificación de la misma.

Por supuesto que también podemos realizar **comparaciones entre números fraccionarios en sus diferentes formas de representación y números naturales**.

Ejemplo

Ordena de menor a mayor los siguientes números.

$\frac{4}{5}$; 0,4; 4,3; 0,3; $3\frac{1}{5}$; $\frac{15}{2}$

Para ordenar estos números debemos compararlos, primeramente, comparamos los que son mayores que cero y menores que uno:

0,4; 0,3 y $\frac{4}{5}$

Comparando las expresiones decimales podemos plantear que 0,3 $<$ 0,4 por lo que nos quedaría comparar las con $\frac{4}{5}$ y podemos hacerlo convirtiendo esta fracción común a expresión decimal $\frac{4}{5}$ = 0,8, entonces podemos ordenar estas tres expresiones como sigue 0,3 $<$ 0,4 $<$ 0,8.

Ordenaremos ahora los números que son mayores que uno (4,3; $3\frac{1}{5}$ y $\frac{15}{2}$).

Aquí podemos plantear que: $3\frac{1}{5}$ $<$ 4,3 (comparando la parte entera de ambos 3 $<$ 4) nos queda entonces compararlo con $\frac{15}{2}$ que lo podemos expresar como número mixto $\left(7\frac{1}{2}\right)$ o como expresión decimal (7,5) y, finalmente, nos quedaría.

$$0{,}3 < 0{,}4 < \frac{4}{5} < 3\frac{1}{5} < 4{,}3 < \frac{15}{2}$$

Luego los números dados quedarán ordenados de la siguiente manera: 0,3; 0,4; $\frac{4}{5}$; $\frac{31}{5}$ 4,3; $\frac{15}{2}$.

Ejercicios

1. Compara los siguientes números:

   a) 53 083 y 2 525

   b) 1 437 y 105 430 000

   c) 36 825 003 y 36 825 003

   d) 5,47 y 8,47

   e) 0,143 y 0,0143

   f) $\frac{5}{10}$ y 0,5

   g) $\frac{3}{5}$ y $\frac{8}{3}$

   h) $\frac{2}{9}$ y $\frac{7}{9}$

   i) $\frac{4}{5}$ y $\frac{4}{9}$

   j) $4\frac{1}{5}$ y $\frac{18}{4}$

   k) $1\frac{1}{3}$ y $\frac{5}{3}$

   l) $\frac{5}{2}$ y 2,41

2. Completa los espacios en blanco utilizando los signos de $>$; $<$; $=$.

a) 4,5 cm ___ $\frac{4}{5}$ cm

b) $\frac{6}{5}$ L ___ 1,5 kL

c) $3\frac{1}{2}$ km^2___ 3,8 km^2

d) 0,48 g ___ 0,5 dg

e) 4 m___ $\frac{16}{7}$ dm

f) 0,25 m^3___ $\frac{1}{5}$ dm^3

g) 0 dm ___ $\frac{1}{4}$ cm

h) 1 mL___ $\frac{3}{5}$ L

3. Ordena de menor a mayor los números:

   a) 500 232; 10 425; 2 125 032; 12 345 135

   b) 1,3; 1,03; 0,5; 2,01; 0,01

   c) $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{7}{8}$

   d) 2,3; $2\frac{3}{5}$; $\frac{4}{5}$; 0,5; $\frac{1}{4}$; $\frac{7}{10}$; $1\frac{1}{5}$

4. Dadas las siguientes fracciones:

   $\frac{6}{4}$; $\frac{3}{8}$; $1\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{2}{8}$; $\frac{8}{6}$; $\frac{1}{4}$

   a) Determina en la lista todas las parejas de fracciones equivalentes.

   b) Representa estas fracciones en un rayo numérico (segmento unidad de 4,0 cm de longitud).

5. La fracción $\frac{9}{18}$ se obtiene de ampliar otra cuyo denominador es dos. Escribe la otra fracción.

6. La siguiente tabla muestra la cantidad de habitantes de cuatro de las provincias del país. Enlaza las tres provincias que faltan según la cantidad de habitantes con el orden que ocupan:

Provincia	*Habitantes*	*Orden*
Holguín →	1 037 737	1ro.
Granma →	837 206	2do.
Santiago de Cuba →	1 043 144	3ro.
Guantánamo →	517 439	4to.

7. Según el Ministerio de Finanzas y Precios al finalizar el año 2001 del presupuesto del Estado se dedicaron a la Educación $ 2 368 500 000, a la Salud Pública $ 1 796 500 000 y a la Seguridad Social $ 1 870 300 000.

   a) ¿Cuál fue el sector más beneficiado con el presupuesto del Estado en ese año?

   b) Organiza en forma creciente los diferentes sectores según el presupuesto.

8. Sean:

A: menor número de tres cifras no repetidas todas impares.

B: sucesor del menor número que tiene 48 centenas.

C: mayor número de cuatro cifras que tiene un cuatro en el lugar de las unidades de millar.

   a) Escribe los números representados por A, B y C.
   b) Determina el sucesor de B.
   c) Determina el antecesor de C.
   d) ¿Cuál de estos números tiene mayor la cifra de las centenas?
   e) ¿Cuál de estos números tiene mayor cantidad de centenas?
   f) Ordena los números comenzando por el mayor.

9. Dada la siguiente tabla:

Productos	Producción en miles de toneladas	
	2001	2002
Viandas	2 348,6	2 135,5
Hortalizas	2 676,5	3 116,9
Maíz	298,9	300
Frijoles	99,1	107,3
Cítricos	957,1	487,7

   a) ¿Cuál fue el producto de mayor producción en el año 2002?
   b) ¿Cuáles de estas producciones decreció del 2001 al 2002?
   c) Escribe cómo se leen los números que representan las producciones de maíz y de frijoles del año 2001.

d) ¿En cuánto supera la producción de hortalizas del 2002 a la del 2001?

e) Ordena los productos en forma creciente según la producción del 2001.

10. La tabla representa la densidad poblacional de algunas provincias de Cuba en el año 2000.

Provincias	Densidad poblacional (hab./km^2)
Guantánamo	83,1
Holguín	111
Santiago de Cuba	168,2
Granma	99,4

a) Si la densidad poblacional del país fue de 101,2; ¿cuál de estas provincias se acercó más a este índice?

b) ¿Qué significa que la densidad poblacional de Guantánamo es de 83,1 hab./km^2?

11. Entre qué números naturales consecutivos se encuentran los siguientes números:

a) 6,25

b) 8,3

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{5}{3}$

e) $\frac{7}{2}$

f) $4\frac{1}{3}$

g) 1,305

h) 101,94

i) 0,002

j) $\frac{5}{102}$

12. Sustituye el asterisco por un número de forma tal que se cumplan las siguientes proposiciones:

a) $1{,}25 > 1{,}2*$

b) $0{,}36 < 0{,}*6$

c) $\frac{1}{*} > \frac{1}{2}$

d) $3{,}* > 3\frac{1}{4}$

e) $*\frac{2}{3} < 3\frac{2}{3}$

f) $\frac{*}{6} > \frac{5}{6}$

g) $\frac{*}{4} > 1$

h) $\frac{6}{*} > 2$

i) $3\frac{1}{5} = *{,}2$

j) $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{*}$ k) $3{,}2* = 3\frac{1}{4}$ l) $*\frac{4}{5} = \frac{24}{5}$

13. Selecciona la respuesta correcta:

a) Si $3{,}78 < 3{,}7\,*$; entonces $*$ tomará el valor:

9 0 8

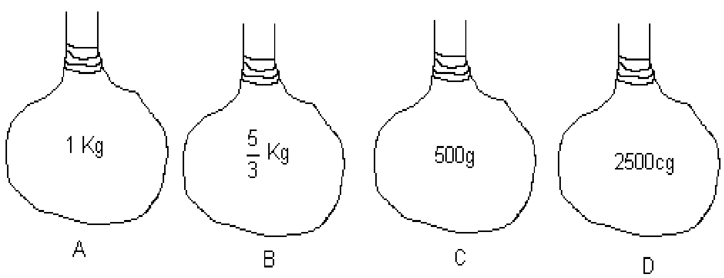
b) Para que $9{,}57 < 9{,}\,*$; entonces $*$ tiene que cumplir la siguiente condición:

$* > 5$ $* < 5$ $* = 5$

c) Para que $0{,}125 > 0{,}\,*25$; entonces:

$* = 2$ $* = 1$ $* = 0$

14. En estos sacos están guardados iguales cantidades de productos diferentes.



a) ¿Cuál de estos sacos es más pesado?

b) ¿En qué saco se encuentra el producto menos pesado?

15. Halla la fracción de numerador 35 que se obtiene de ampliar otra cuyo numerador es 5 y su denominador es el menor número de dos cifras no repetidas y diferentes de cero.

16. En una cooperativa dos campesinos tienen parcelas iguales. El primero, la ha dividido en cinco partes iguales y dedica tres de ellas a la siembra de plátanos. Si el otro divide la suya en quince partes iguales. ¿Cuántas partes debe dedicar a la siembra de plátanos para igualarse a su compañero?

17. Escribe con las cifras 0; 3 y 5:

a) Un número comprendido entre 3 y 4.

b) Un número comprendido entre 0,3 y 0,4.

c) Un número menor que la unidad.

18. Escribe todos los números que satisfagan simultáneamente las siguientes condiciones:

- La parte entera es cero.
- La parte decimal tiene tres cifras.
- En la parte decimal solo aparecen las cifras 5 y 7.

19. ¿En cuál de estos pares el número $\frac{7}{4}$ es mayor que el primer número pero menor que el segundo?

1 y 1,5 1,75 y $\frac{5}{2}$ $\frac{17}{10}$ y 2 $\frac{9}{4}$ y 3

20. Se buscan dos números fraccionarios que sean mayores que 0,35 y menores que $\frac{2}{5}$. ¿Cuáles de los siguientes pueden ser?

0,351 y 0,41 0,36 y $\frac{2}{5}$ 0,349 y $\frac{9}{25}$ $\frac{9}{25}$ y 0,399 9

21. ¿Cuál de los siguientes números fraccionarios está más cerca de $\frac{1}{2}$?

$\frac{1}{3}$ $\frac{3}{10}$ 0,60 0,05

22. Orlando, Juan y Alberto participan en una competencia de tiro obteniendo el primer, segundo y tercer lugar, en ese orden, haciendo la misma cantidad de disparos. Entonces la relación de los tiros certeros respecto a los disparos hechos debió ser:

- $\frac{7}{10}$; $\frac{8}{10}$; $\frac{9}{10}$; respectiva mente
- $\frac{8}{10}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{4}{5}$; respectiva mente
- $\frac{9}{10}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{1}{2}$; respectivamente

23. María leyó 280 palabras en 115 s y Luis 240 en 98 s. ¿Quién leyó más rápido?

24. Tania comenta con otras dos pioneras:

- Para llegar a la escuela recorro $\frac{3}{4}$ km, y soy la que más lejos vive.

A lo que Mireya responde:

- Yo recorro un kilómetro y medio, por tanto vivo más lejos.

Manuela acota por su parte:

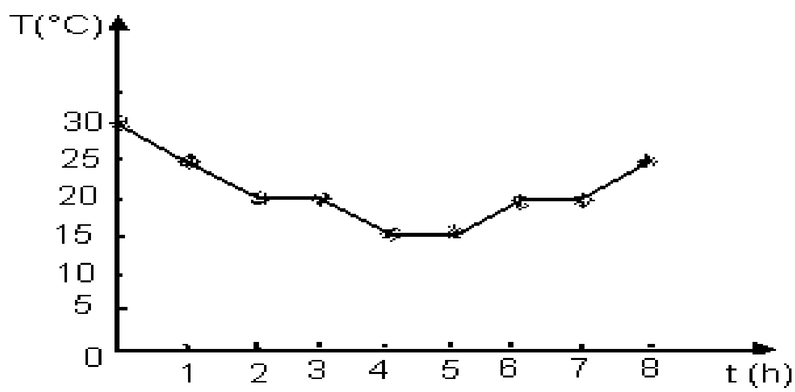
- Yo soy la que más camino, pues mi casa se encuentra a 1,5 km.

Si las distancias son correctas, ¿cuál de ellas tiene la razón?

Manuela Tania Mireya Ninguna de ellas

Representación de puntos en un sistema de coordenadas

En un centro de trabajo se conecta el aire acondicionado al llegar los trabajadores y la variación de la temperatura del local durante el transcurso de la jornada laboral se representa en el siguiente gráfico:



Si nos preguntaran ¿qué temperatura existía en el local al comenzar la jornada laboral? pudiéramos responder que había 30 °C en ese momento; sin embargo, si nos preguntaran ¿en qué hora de la jornada en el local había una temperatura de 25 °C?, diríamos entonces que en la primera o en la octava hora.

Para dar respuestas a estas preguntas fue necesario utilizar los conocimientos que tenemos de la primaria sobre la lectura de puntos en un sistema de coordenadas.

Recordemos que un sistema de coordenadas se construye con dos rayos numéricos de origen común que son perpendiculares entre sí.

El eje horizontal se denota por **x** (eje de las abscisas) y al eje vertical por **y** (eje de las ordenadas).

Los puntos representados en este sistema se llaman **puntos coordenados** y se denotan por **(x; y)** en ese orden, donde *x* es la primera coordenada (abscisa) y *y* la segunda coordenada ordenada).

El punto de intersección de los semirrectos se denomina origen de coordenadas y se le asigna las coordenadas (0; 0).

Ejemplo

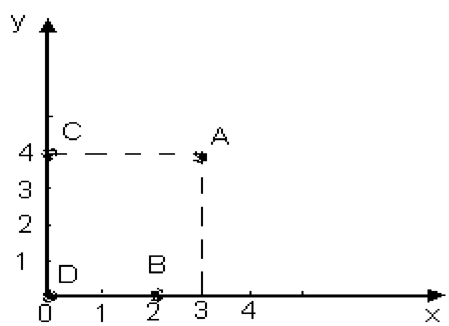
Sean los puntos *A, B, C* y *D* dados por sus coordenadas:

A(3; 4) *B*(2; 0) *C*(0; 4) *D*(0; 0)

a) Represéntalos en un sistema de ejes coordenados.

b) Clasifica el triángulo que se forma al unir los puntos *B, C* y *D.*

Para dar respuesta al inciso a) debemos garantizar que al trazar el sistema de coordenadas los ejes sean perpendiculares entre sí y con la misma medida determinar los números de ambos rayos.

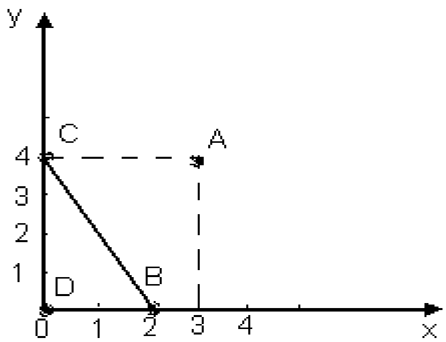


Para ubicar el punto *A,* trazamos una paralela al eje *y* que pase por 3 que es la abscisa del punto A y una paralela al eje *x* que pase por 4 que es la ordenada de este punto donde estas se intersecan se encuentra el punto *A*.

El punto *B* quedará ubicado sobre el eje *x* ya que su ordenada es cero, mientras que el punto *C* quedará representado sobre el eje *y* ya que su abscisa es cero.

El punto *D* tiene como abscisa y como ordenada al cero, por lo que su ubicación está en el origen de coordenadas.

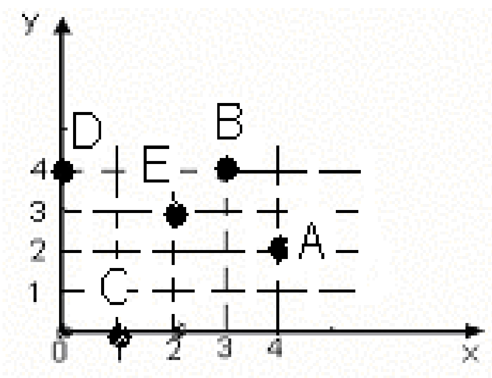
En el inciso b) para unir los puntos debemos trazar segmentos $\overline{BC}$; $\overline{CD}$ y $\overline{BD}$, que serán los lados del triángulo.



El triángulo *CDB* es rectángulo en *D,* que es el punto donde se cortan los ejes que al ser perpendiculares forman un ángulo recto (90°), y es escaleno ya que las longitudes de sus lados son diferentes.

Ejercicios

1. Dados los puntos *M* (4; 5) , *N* (3; 5) , *P* (3; 2) y *Q* (2; 5):
   a) Represéntalos en un sistema de coordenadas.
   b) Nombra todos los triángulos rectángulos que se pueden formar con ellos.
   c) ¿Qué coordenadas debe tener el punto *R* para que el cuadrilátero *PNQR* sea un rectángulo?
2. Dado el siguiente sistema de coordenadas rectangulares:



a) ¿Cuál de estos puntos tiene menor valor en las abscisas?

b) ¿Cuáles de estos puntos tiene igual la ordenada?

c) Ubica un punto F de manera tal que el triángulo *CDF* sea rectángulo en F.

Importancia del trabajo con datos para la sociedad

En el transcurso del desarrollo de la sociedad el hombre se ha visto precisado a recopilar y procesar datos numéricos para estudiar el comportamiento de determinados hechos y fenómenos de la naturaleza y la sociedad.

El hombre, en su formación, valorando la importancia que tiene para la sociedad la recopilación, el procesamiento y el análisis de datos, debe adquirir algunos conocimientos básicos sobre las diferentes formas de recopilar, procesar y representar la información. De esta forma estaremos comenzando a trabajar con la **estadística**.

En este curso aprenderás a recopilar datos y a analizarlos Mediante tablas y gráficos que te ayudarán a comprender eventos sociales, meteorológicos y de otra índole que están presentes en la vida cotidiana.

Existen dos formas diferentes de recopilar datos:

- Directamente, mediante la observación, aplicación de encuestas, test, etcétera.
- Consultando documentos, los cuales pueden ser libros, revistas, periódicos, leyes, y otros.

Los datos que se obtienen del suceso o fenómeno objeto de estudio se representan mediante **tablas** y **gráficos,** los cuales nos muestran la información que tenemos que aprender a interpretar y analizar para arribar a conclusiones, hacer valoraciones y tomar decisiones.

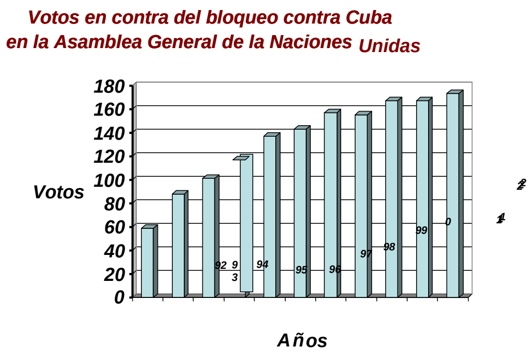
Seguramente en el noticiero, en revistas, en periódicos, etc. has visto diferentes tipos de gráficos. ¿Sabes qué nombre reciben y para qué se utilizan?

Entre los tipos de gráficos más utilizados tenemos los gráficos de barras, los poligonales, los circulares y los pictogramas.

Los **gráficos de barras** permiten realizar comparaciones mediante rectángulos (barras) paralelos colocados en el plano cartesiano en forma vertical u horizontal.

En el gráfico que aparece a continuación, a partir del análisis de la información que aparece representada en él, se puede hacer una comparación del comportamiento de las votaciones a favor de Cuba y en contra del bloqueo, en las Naciones Unidas, y arribar a conclusiones.

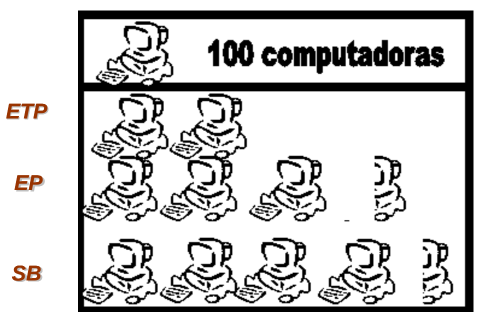
Gráfico de barras



El **pictograma** es una forma muy atractiva para visualizar la información mediante símbolos alusivos al fenómeno. Cada dibujo representa la misma cantidad. La mitad del dibujo equivale a una parte de esa cantidad.

Por ejemplo, el gráfico muestra la distribución de computadoras por enseñanza en un municipio*.*

Pictograma

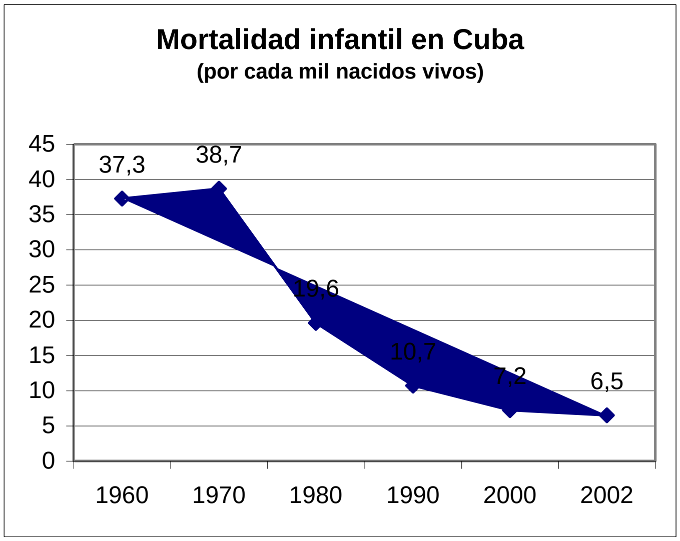


En el ejemplo que se muestra se puede determinar de forma muy rápida a qué enseñanza se le asignó mayor cantidad de computadoras, pero la cantidad exacta no se puede precisar a través de él.

La **gráfica poligonal** o de líneas se construye sobre la base de líneas poligonales, de ahí su nombre. Permite realizar el análisis de la tendencia de determinado fenómeno analizando el comportamiento de la línea.

Por ejemplo el siguiente gráfico muestra los índices de mortalidad en Cuba durante seis años.

Gráfica poligonal o de líneas



Los números que aparecen en el eje horizontal representan los años y los del eje vertical representan los índices de mortalidad infantil, dada en tanto por mil. Es decir tantos de cada mil nacidos vivos.

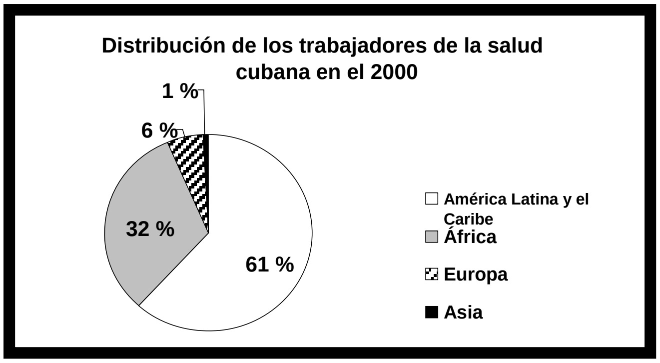
A partir del análisis del gráfico que se muestra se puede llegar a conclusiones sobre los logros de la Revolución cubana en el terreno de la salud. Se puede observar que la tasa de mortalidad infantil tiende a disminuir como consecuencia de la atención que se les brinda en el sistema de salud cubano a la madre y al niño.

Los **gráficos circulares o de pastel** son representados por un círculo que está divido en partes (sectores). Tiene gran impacto visual y es muy útil cuando el análisis de las partes con respecto a un todo es más importante que el valor real.
En este caso el gráfico muestra la información de que los trabajadores de la salud cubana se encuentran mayoritariamente en el área de América Latina y el Caribe.

.

Los números que aparecen en este gráfico son porcentajes y representan la relación entre la parte y el todo, exactamente tantos de cada 100.

Gráfico circular o de pastel.



Ejercicios

1. Completa la siguiente tabla de la extensión territorial de las seis áreas protegidas de recursos manejados existentes en nuestro país si se conoce que:

   - El área de la Ciénaga de Zapata es el quíntuplo del área de Buenavista aumentado en 35 500 ha.
   - El área de la península de Guanahacabibes excede en 1 500 ha al cuádruplo del área de la Sierra del Rosario.
   - La diferencia entre el área de las Cuchillas del Toa y Baconao es 49 740 ha y el duplo del área de Baconao disminuido en 28 020 ha es igual al área de las Cuchillas del Toa.

Área protegida	Extensión territorial
Península de Guanahacabibes	
Sierra del Rosario	25 000 ha
Ciénaga de Zapata	
Buenavista	88 860 ha
Baconao	
Cuchillas del Toa	

2. La tabla muestra la distribución por provincias y el municipio especial Isla de la Juventud de los candidatos a diputados en el año 2000:

Pinar del Río	39	Camagüey	45

Ciudad de La Habana	112	Las Tunas	27
La Habana	42	Holguín	54
Matanzas	40	Granma	44
Villa Clara	44	Santiago de Cuba	52
Santi Spíritus	25	Guantánamo	32
Ciego de Ávila	26	Isla de la Juventud	4

a) ¿Qué gráfico utilizarías para representar los datos que aparecen en la tabla? ¿Por qué?
b) ¿Cuál es la provincia de mayor representación?
c) Ordena las provincias según la cantidad de diputados en orden creciente.
d) ¿Cuál es el promedio de diputados por provincias en la parte oriental del país?
e) ¿Qué tanto por ciento representa la cantidad de diputados de Santiago de Cuba del total de diputados del país?
f) ¿En cuánto excede la cantidad de diputados de Ciudad de La Habana a los de Villa Clara?

3. Observa la siguiente tabla y responde:

Gastos del presupuesto Estatal

Millones de pesos

Sector	1999	2000
Educación	**1 829,6**	**2 125,0**
Salud pública	**1 553,1**	**1 726,0**
Seguridad social	**1 785,7**	**1 786,0**

a) ¿Qué gráfica utilizarías para representar los datos que se representan en la tabla?
b) ¿En cuánto aumentó el gasto del presupuesto de Educación del año 1999 al 2000?
c) ¿Cuál es el sector de mayor cantidad de gastos en el presupuesto estatal?
d) Calcula la diferencia entre los gastos en salud pública entre el año 2000 y el 1999.

4. La tabla muestra la cantidad de donaciones de sangre en tres CDR diferentes en los años 2000, 2001 y 2002.

Donaciones de sangre

	CDR # 1	CDR # 2	CDR # 3
2000	25	25	32
2001	36	15	25
2002	17	18	33

a) ¿Qué gráfica utilizarías para representar estos datos de manera que puedas analizar la tendencia de la cantidad de donaciones por año?

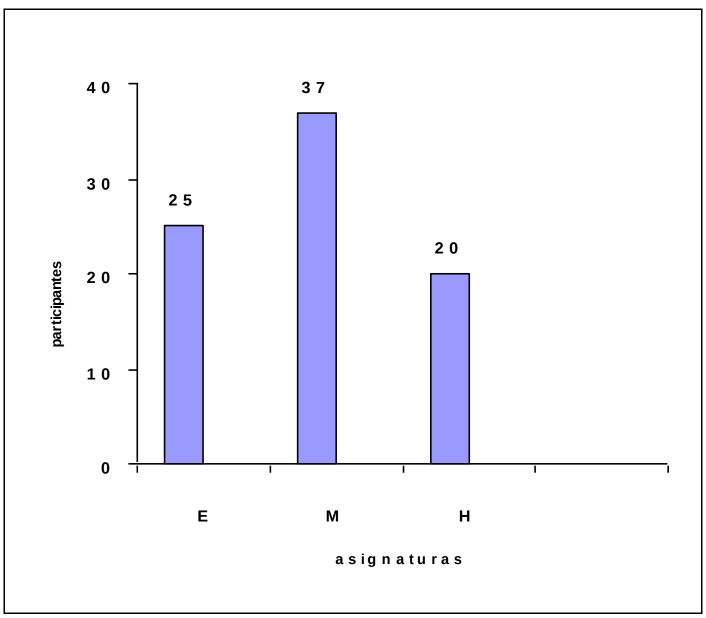
b) ¿Qué CDR tiene mayor cantidad de donaciones?

c) Calcula la cantidad de donaciones que se hicieron entre todos los CDR en cada uno de los años.

d) Calcula el promedio de donaciones por año para cada CDR durante los tres años y ordénalos según resultados de la emulación en cuanto a la cantidad donaciones de sangre.

e) ¿Qué tanto por ciento representa la cantidad de donaciones hechas por los CDR en el año 2002 del total de donaciones hechas durante los tres años?

5. La gráfica muestra la cantidad de alumnos participantes en el concurso municipal de Matemática, Español e Historia en un municipio de la provincia.



a) Identifica el tipo de gráfica que representa los datos.

b) ¿Cuántos alumnos más participaron en Matemática que en Historia?

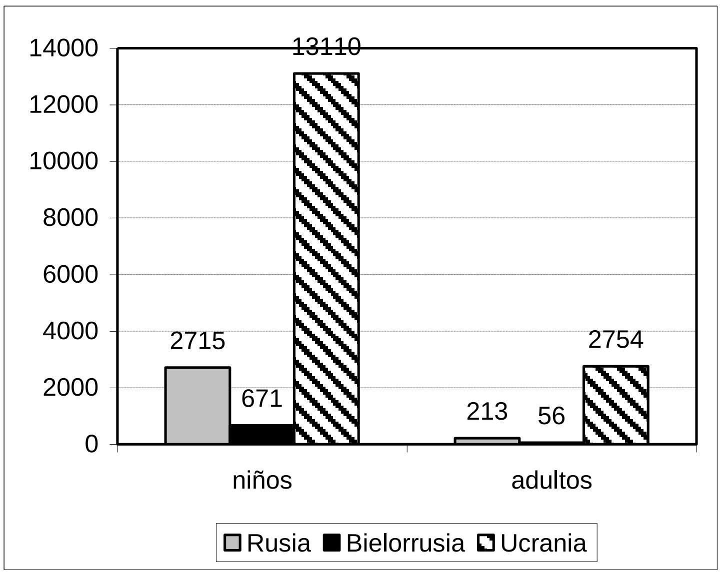
c) ¿Cuántos alumnos en total asistieron al concurso?

d) El porcentaje de alumnos participantes en el concurso de matemática fue:

37 %   80 %   96,25 %   91,15 %

6. En la gráfica se representa la cantidad de pacientes relacionados con el accidente de Chernobil atendidos en el Hospital Pediátrico de Tarará (periódico *Granma,*:19-9-02; p. 3).

Obsérvala y responde:



a) Identifica el tipo de gráfica.

b) ¿De qué lugar se recibió la mayor cantidad de pacientes?

c) ¿En cuánto superan los niños recibidos de Rusia a los adultos recibidos del mismo lugar?

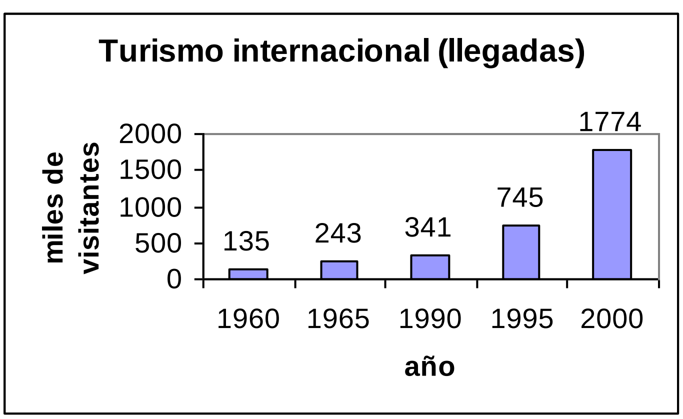
d) ¿De qué lugar se recibió la menor cantidad de adultos?

7. Responde atendiendo a la gráfica que te presentamos:

a) ¿Qué tipo de gráfica estas observando?

b) ¿Qué información nos brinda la gráfica?

c) ¿Qué cantidad de visitantes llegaron al país en el año 2000?



d) Analiza la tendencia del turismo internacional en nuestro país y llega a conclusiones.

e) Calcula qué porcentaje representa la cantidad de visitantes correspondientes al año 1980 con respecto a los del año 2000.

8. Observa el gráfico siguiente y responde:

a) ¿Qué tipo de gráfico estas observando?

b) ¿Qué información nos brinda el gráfico?

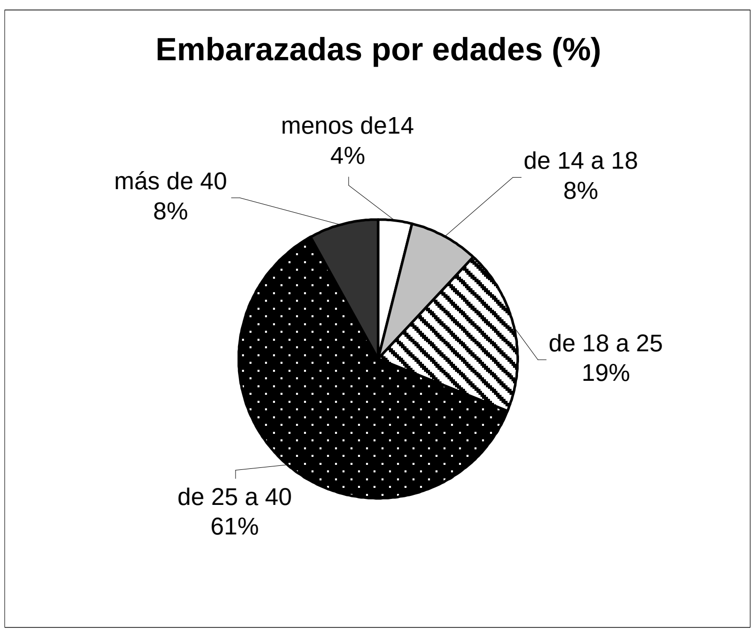
c) Determina el área de la cuenca en cada caso.

d) Analiza y responde cuál es el río de mayor cuenca y cuál es de menor.

e) ¿Cuántas centenas de kilómetros cuadrados tiene la cuenca del río Canimar?

e)

9. Observa el gráfico siguiente y responde:



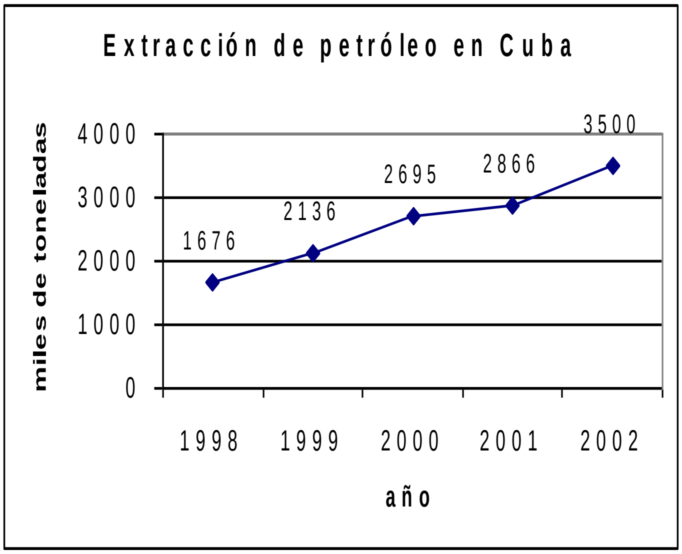
a) ¿Qué tipo de gráfica estás observando?

b) ¿Qué información nos brinda la gráfica?

c) ¿Entre qué edades hay la mayor cantidad de embarazadas?

d) Si de catorce a dieciocho años hay dos embarazadas, ¿cuál es el total de embarazadas en esta zona?

10. Observa y responde:



a) ¿Qué tipo de gráfica estás observando?

b)¿Qué información nos brinda la gráfica?

c) Cuál es la tendencia de las extracciones de petróleo?

d) ¿Qué cantidad de toneladas se extrajeron en el año 2002?

e) ¿En qué cantidad superan las extracciones del año 2000 a las de 1999?

11. Lee detenidamente la siguiente información y represéntala en una tabla.

Cantidad de conejos recién nacidos en 20 camadas

5	**6**	**7**	**2**	**5**
6	**2**	**5**	**1**	**3**
7	**7**	**2**	**2**	**7**
5	**6**	**1**	**2**	**7**

a) Determina cuántas conejas tuvieron camadas de 5 crías.

b) Determina la cantidad de conejos en una misma camada que se presentó con mayor frecuencia.

c) Calcula la cantidad total de conejos recién nacidos.

12. Lee detenidamente la siguiente información:

En Cuba, con una población infantil de cero a seis años de 874 016 niños, acuden a los círculos infantiles 146 700 niños, 106 337 asisten al grado preescolar instituido en todas las escuelas primarias del país, mientras que 616 180 infantes son atendidos a través de las vías no formales del programa “Educa a tu hijo”. La suma de todos estos datos confirma una cobertura del 99,5 % (periódico *Juventud Rebelde,* 30-1-03, p. 8).

a) Construye una tabla con esta información.

b) En cuánto supera la cantidad de niños que asisten al círculo infantil a los que son atendidos por las vías no formales.

c) ¿Qué tanto por ciento de los niños son atendidos por las vías no formales?

13. Lee la siguiente información:

En el Polo Científico de Santiago de Cuba laboraban hasta el 13 de mayo de 2003 1 575 especialistas; de ellos 714 profesionales y 861 técnicos; de estos 608 son mujeres. Los 55 doctores y 65 máster que había más los que están en formación en ambas categorías (17 y 45 respectivamente) son una muestra del esfuerzo realizado por la superación (periódico *Granma,* 13-5-03, p. 2).

a) Construye una tabla con esta información.

b) ¿Qué tanto por ciento de los técnicos son mujeres?

c) ¿Cuántos master y doctores habrá cuando alcancen su título los que están en formación.

d) ¿Qué tanto por ciento representan los profesionales del total de especialistas?

1.2 Operaciones con números naturales, fracciones y expresiones decimales

En este epígrafe repasarás las operaciones fundamentales con números naturales y fraccionarios que estudiaste en la primaria, así como sus propiedades lo cual podrás aplicar a la resolución de ejercicios y problemas de la vida económica, política y social del país, además podrás comprender el significado de estas operaciones y la necesidad de ellas en la vida. Además aprenderás el uso de algunos medios auxiliares de cálculo como las tablas de cuadrados y cubos, las que también utilizarás para calcular cuadrados cubos, raíces cuadradas y cúbicas.

Para que puedas comprender la importancia del trabajo con las operaciones te proponemos que analices la siguiente situación:

Para el Plan Vacacional ocho jóvenes deciden ir al campismo. Al reservar el transporte tienen en cuenta que tres de ellos irán con sus novias, dos serán acompañados por dos amigos y el resto irá solo. Al llegar el transporte faltan por cubrir dos asientos de los que había reservados. ¿Cuántos de ellos fueron al campismo?

Situaciones como esta nos hacen pensar en la necesidad de calcular con números naturales.

Recordemos los procedimientos de cálculo con números naturales para las cuatro operaciones fundamentales.

Adición de números naturales

$$\underbrace{a + b}_{\text{sumandos}} = \underbrace{c}_{\text{suma}}$$

La adición de números naturales siempre es posible realizarla. Para ello basta con ubicar los sumandos uno debajo del otro haciendo coincidir las cifras de cada orden una debajo de la otra (unidades, decenas, centenas, etc.) y comenzando la suma por las unidades.

Ejemplos

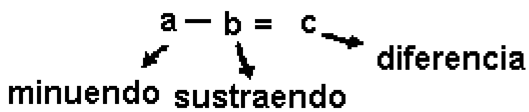
Calcula:

a) 2485 + 312 b) 8346 + 58348

a) $\begin{array}{r} 2\,485 \\ +\ \ 312 \\ \hline 2\,797 \end{array}$ En el inciso a) es una adición sin sobrepaso.

b) $\begin{array}{r} 8\,346 \\ +\ 58\,348 \\ \hline 66\,694 \end{array}$ En el inciso b) existe sobrepaso en las unidades por lo que se adiciona una unidad al orden de las decenas. También existe sobrepaso en las unidades de millar, adicionamos uno al orden de las decenas de millar.

Sustracción de números naturales



La sustracción es la operación inversa a la adicción.

La sustracción de dos números naturales solo es posible realizarla si el minuendo es mayor o igual que el sustraendo.

Para ello se ubica el sustraendo debajo del minuendo haciendo coincidir las cifras de cada orden una debajo de la otra y comenzando por las unidades.

Ejemplos

Calcula:

a) 8 325 – 7 213 b) 4 835 – 3 926 c) 423 000 – 632 500

a)
$$\begin{array}{r} 8\,325 \\ \underline{-\,7\,213} \\ 1\,112 \end{array}$$

En el cálculo mental decimos “de 3 para llegar a 5; 2” (en el orden de las unidades); “de 1 para llegar a 2; 1” (en el orden de las decenas); “de 2 para llegar a 3; 1” (en el orden de las centenas); “de 7 para llegar a 8; 1” (en el orden de las unidades de millar).

b)
$$\begin{array}{r} 4\,835 \\ \underline{-3\,926} \\ 0\,909 \end{array}$$

En el cálculo mental **no podemos decir** en este caso “de 6 para llegar a 5” (ya que en el orden de las unidades la cifra en el minuendo es menor que la del sustraendo); **debemos decir** “de 6 para llegar a 15; 9” (en el orden de las unidades) y adicionamos uno a la cifra de las decenas del sustraendo; diciendo entonces “de 3 para llegar a 3; 0” (en el orden de las decenas); en el caso de las centenas **no podemos decir** “de 9 para llegar a 8” (ya que en las centenas la cifra en el minuendo es menor que en el sustraendo); **debemos decir** “de 9 para llegar a 18; 9” (en el orden de las centenas) y adicionamos uno a la cifra de las unidades de millar del sustraendo; diciendo entonces “de 4 para llegar a 4; 0” (en el orden de las unidades de millar).

En este caso el resultado es 909, ya que el cero a la izquierda en un número natural no tiene valor.

c) No existe la solución de este ejercicio en el dominio de los números naturales ya que el minuendo es menor que el sustraendo.

Para **comprobar** si la sustracción está bien realizada se adiciona al sustraendo la diferencia y el r4esultado debe dar el minuendo

Multiplicación de números naturales

$$a \cdot b = c$$

factores producto

La multiplicación de números naturales siempre es posible realizarla. Recordemos el procedimiento mediante los siguientes ejemplos.

Ejemplos

Calcula:

a) 835 · 2 b) 835 · 23

a) 835 · 2 = 1 670

$$\begin{array}{r} 835 \cdot 2 \\ \hline 1670 \end{array}$$

En el caso del inciso a) uno de los factores tiene una sola cifra la cual se multiplica por cada una de las cifras del otro factor, comenzando por la de las unidades pudiendo ubicar el resultado al lado del producto planteado o debajo, poniendo la cifra de las unidades del producto debajo del factor de una sola cifra.

Si los factores tienen más de una cifra entonces multiplicamos cada una de las cifras de uno de los factores por el otro factor (procediendo como en el inciso a) ubicando la cifra de las unidades del resultado debajo de la cifra por la cual multiplicamos, para finalizar adicionamos estos resultados y de esta forma obtenemos el producto final.

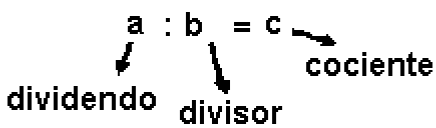
b) 835 · 23
1670

835 · 23
1670
2505

835 · 23
1670
+ 1055
19205

Es conveniente antes de comenzar a multiplicar hacer mentalmente un estimado de la respuesta.

División de números naturales



La división es la operación inversa de la multiplicación.

La división de números naturales solo puede realizarse si el dividendo es mayor que el divisor y si el divisor es diferente de cero, pues la división por cero no se puede realizar.

Para realizar una división debemos seguir los siguientes pasos:

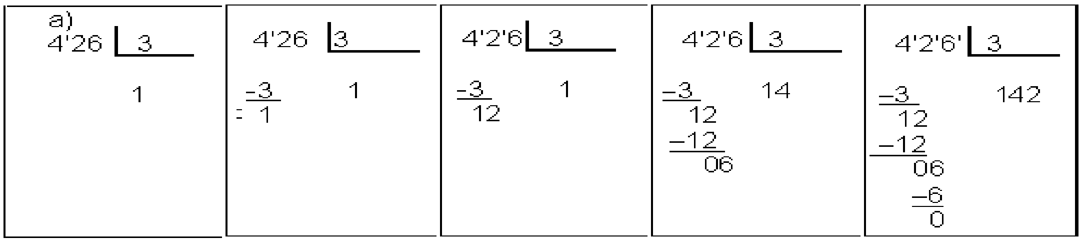
- Se toman del dividendo tantas cifras como tenga el divisor y se realiza la división si el número que determinan estas es igual o mayor que el divisor; de no ser así se tomará otra cifra más del dividendo.
- Al efectuar la división se pone el resultado en el cociente que se multiplica a su vez por el divisor, este resultado se resta del número determinado por las cifras que habíamos tomado del dividendo, obteniendo el resto.
- Si en el dividendo quedaran cifras con las que no hayamos trabajado se van colocando junto al resto y se repite todo el procedimiento hasta obtener en el resto un número menor que el divisor.

Ejemplos

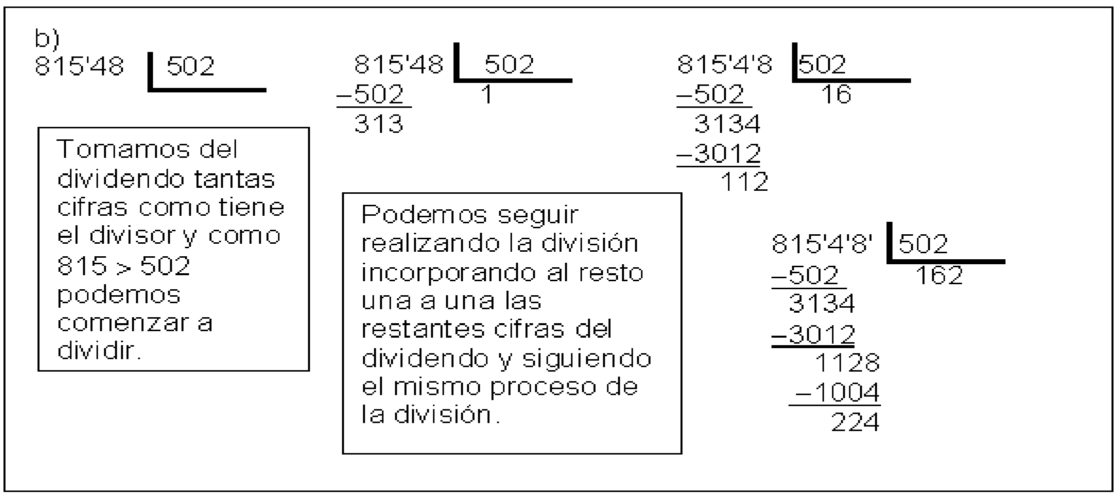
Calcular:

a) 426 : 3　　b) 20 502 : 51　　c) 81 548 : 502　　d) 253 : 8 250

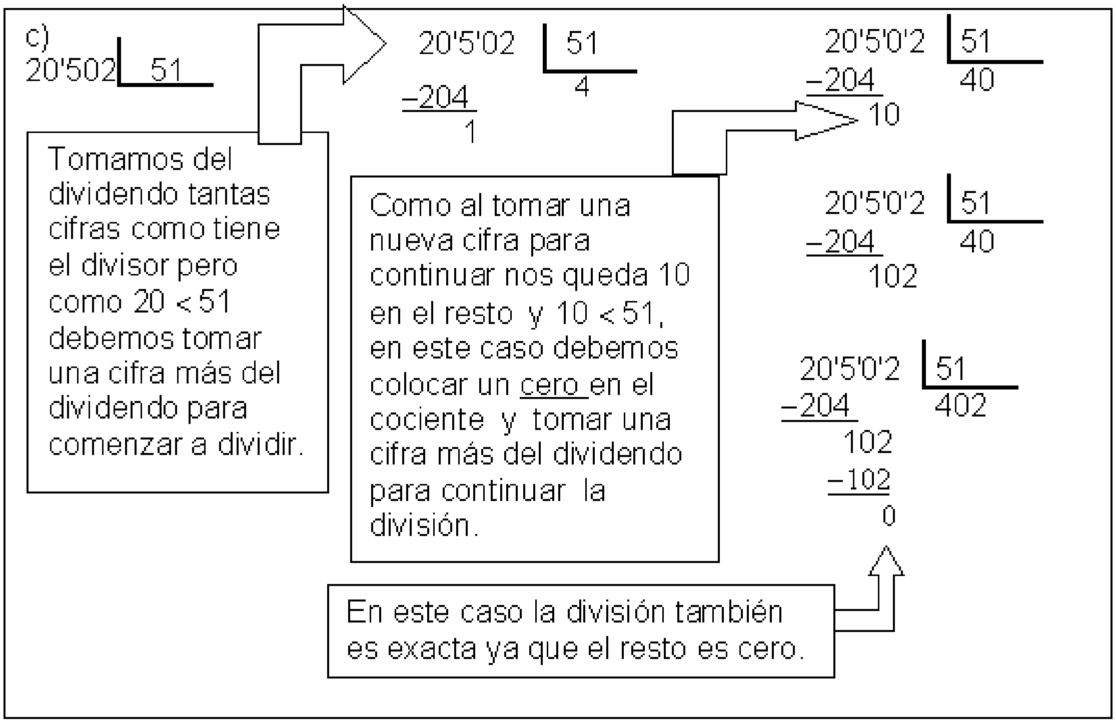
Para realizar estas divisiones utilizaremos la galera e iremos haciéndote algunas explicaciones.



En este primer ejemplo el cociente es 142 y como el resto es cero decimos que la división es **exacta.**



En este segundo ejemplo el cociente es 162 y el resto es 224 y decimos que la división es **inexacta.**



d) 253 : 8 250 No es posible solucionar esta operación en el dominio de los números naturales ya que el dividendo es menor que el divisor.

Para **comprobar** si la división está bien realizada se multiplica el cociente por el divisor y el resultado debe ser el dividendo.

Para dividir primero debes hacer un estimado de la posible respuesta.

Es importante recordar algunas reglas de divisibilidad que te serán muy útiles para el cálculo:

- Un número **es divisible por 2** si termina en 0, 2, 4, 6 u 8.
- Un número *es divisible por 3* si la suma de sus cifras es un múltiplo de 3.
- Un número **es divisible por 5** si termina en 0 ó 5.
- Un número **es divisible por 10** si termina en 0.

¿Puedes formular una regla para determinar la divisibilidad por 6?
Todas estas operaciones que hemos recordado hasta ahora puedes hacerlas también de forma combinada, para ello debes recordar el **orden operacional.**

1ro. Resuelve las operaciones que se encuentren dentro de paréntesis.

2do. Resuelve las multiplicaciones y divisiones en el orden en que aparezcan.

3ro. Resuelve las adiciones y sustracciones en el orden en que aparezcan.

Pasemos entonces a ejercitar el cálculo.

Ejercicios

1. Indica cual de los siguientes números está más próximo del resultado de:

a) 8 970 + 104	100	1 000	10 000
b) 14 899 – 5 020	100	1 000	10 000
c) 1 002 · 99	1 000	10 000	100 000
d) 5 007 : 99	5	50	500

2. Calcula:

a) 128 324 + 357 324	b) 12 345 + 823	c) 1 234 567 + 1 000 324
d) 432 325 – 312 111	e) 1 234 – 2 345	f) 23 876 423 – 2 345
g) 1 000 453 – 123 454	h) 124 · 43	i) 2 466 · 204
j) 4 236 : 8	k) 64 932 : 12	l) 20 518 : 51
m) 78 993 : 131	n) 23 456 : 234 567	o) 435 678 234 : 204

3. Calcula:

a) 1 345 + 432 · 23 – 534 b) 233 – 2 + 12 · 435

c) (146 – 138) · (23 + 6) d) 3 941 – (12 · 5 · 10) + 345

4. Coloca paréntesis donde fuera necesario de modo que las igualdades sean ciertas:

a) 14 – 10 – 4 = 8 b) 16 – 4 : 2 = 6 c) 9 + 3 · 2 + 3 = 60

5. Escribe las igualdades numéricas que traducen las siguientes afirmaciones y di si son falsas o verdaderas.

a) El cociente del doble de treinta por el cuádruplo de quince es una unidad.

b) La diferencia entre el cuádruplo de siete y el cociente de dieciséis por cuatro es veinticuatro.

6. Sustituye cada asterisco (*) por un dígito de manera que los cálculos resulten correctos:

a) $\begin{array}{r} 385 \\ +\ \ast 4 \ast \\ \hline 528 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 8 \ast \ast 5 \\ -\ \ 215 \\ \hline 8\,130 \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 7 \ast 3 \\ +\ \ \ast 25 \\ \hline 1\,52\ast \end{array}$ d) $\begin{array}{r} \ast\ast\ast\ast \\ -\ast\ast\ast \\ \hline 1 \end{array}$ e) $\begin{array}{c} 521 \cdot \ast 0 \\ \hline 10420 \end{array}$ f) $\begin{array}{r} 125 \cdot 1\ast \\ \hline \ast\ast 5 \\ 375 \\ \hline 16\ast 5 \end{array}$

7. ¿En cuánto excede 10 258 a 953?
8. Esteban tiene 80 ¢ distribuidos en 7 monedas de 20 ¢ y 5 ¢. ¿Cuántas monedas tiene de cada tipo?
9. Escribe el mayor número de tres cifras que tenga un uno en el lugar de las decenas y que sea divisible por tres.
10. Adivina quien soy:

a)
- Soy múltiplo común de 3, de 4 y de 8,
- soy menor que 100, y
- la suma de mis cifras es 9.

b)
- Somos dos múltiplos de 7,
- nuestra suma es 49, y
- nuestra diferencia es 21.

11. Coloca en cada espacio en blanco un dígito diferente de manera que se cumplan las igualdades:

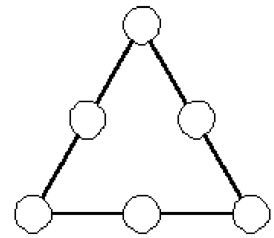
a) (___ – ___) : ___ = 4

b) ___ – ___ : ___ = 4

c) ___ – (___ – ___) = 4

12. Selecciona un número de tres cifras y forma uno de seis cifras repitiendo el primero. Por ejemplo, 123 123. Divide ahora este número entre 13, el resultado entre 11 y lo que obtengas entre 7. ¿Qué número obtienes al final? Fundamenta por qué siempre ocurre así.

13. Con los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6 llena los círculos de la siguiente figura, de manera que la suma de cada lado sea 11 y que cada cifra se utilice una sola vez.



14. En una empresa farmacéutica se producen pastillas. Una caja llena pesa 115 g y vacía 35 000 mg. ¿Cuántas pastillas contiene la caja, si cada pastilla pesa 2 g?

Operaciones con números fraccionarios

Un médico cubano que cumple misión internacionalista en Venezuela hace el siguiente recorrido en una jornada de trabajo. Sale de su casa para el consultorio, de aquí caminó $\frac{3}{4}$ de km para llegar a casa de una embarazada, posteriormente, recorre 6,5 km a caballo para visitar a un recién nacido, regresa al consultorio por el mismo camino y se dirige al hospital que se encuentra a una distancia de 0,5 km.

¿Qué recorrido ha hecho el médico durante el día si del consultorio a su residencia hay 1 km?

Es evidente que para resolver este ejercicio debemos dominar el cálculo con fracciones.

Para trabajar las operaciones de cálculo con fracciones es necesario recordar algunos conceptos aprendidos en la primaria.

El **mínimo común múltiplo** de números naturales (mcm). Es el menor múltiplo común de dos o más números.

Recuerdas cómo se determina? Recordemos el procedimiento por descomposición en factores primos.

Ejemplo

Determina el mcm de 6, 8 y 15.

1ro. Se realiza la descomposición en factores primos de estos números.

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$6 = 2 \cdot 3 \qquad 8 = 2^3 \qquad 15 = 3 \cdot 5$$

2do El m.c.m será el producto de aquellos factores que se repitan y que no se repitan elevados al mayor exponente.

m.c.m (6; 8; 15) = $2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 8 \cdot 15 = 120$

El **recíproco de una fracción**

El recíproco de una fracción $\frac{a}{b}$ es la fracción $\frac{b}{a}$ $(a \neq 0;\ b \neq 0)$.

Como puedes observar basta con invertir el numerador y el denominador de la fracción original.

Adición y sustracción de fracciones

La adición de fracciones siempre se puede realizar, en el caso de la sustracción tiene la misma limitante que en los números naturales, el minuendo tiene que ser mayor o igual que el sustraendo.

Recordemos entonces el procedimiento para realizar estas operaciones.

Ejemplo

Calcula:

a) $\frac{4}{5} + \frac{3}{5}$ b) $\frac{8}{10} \quad \frac{3}{10}$ c) $\frac{4}{5} + \frac{5}{6}$ d) $\frac{9}{4} \quad \frac{2}{3}$ e) $5 + \frac{3}{4}$ f) $\frac{8}{3} \quad 1\frac{1}{2}$

Como aprendiste en la primaria, en la adición (sustracción) de fracciones de igual denominador basta con adicionar (sustraer) los numeradores y colocar el mismo denominador.

a) $\frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$ $4 + 3 = 7$ (cálculo mental)

b) $\frac{8}{10} - \frac{3}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ $8 - 3 = 5$ (cálculo mental), al obtener $\frac{5}{10}$ simplifica por 5.

Es obligatoria la simplificación de la fracción resultante siempre que sea posible.

En los incisos c) y d) donde los denominadores no son iguales debemos:

1ro. Determinar el mcm de los denominadores.

2do. Ampliar los numeradores de las fracciones que intervienen en la adición (sustracción).

3ro. Realizar la adición (sustracción) de los numeradores ampliados.

4to. Realizar la simplificación de la fracción resultante siempre que sea posible.

c) $\frac{4}{5} + \frac{5}{6} = \frac{24 + 25}{30} = \frac{49}{30}$ d) $\frac{9}{4} - \frac{2}{3} = \frac{27 \quad 8}{12} = \frac{19}{21}$

Cuando en la adición (sustracción) uno de sus términos sea un número natural o un número mixto, lo expresamos como fracción común y aplicamos el mismo procedimiento.

e) $5 + \frac{3}{4} = \frac{5}{1} + \frac{3}{4} = \frac{20 + 3}{4} = \frac{23}{4}$

f) $\frac{8}{3} \quad 1\frac{1}{2} = \frac{8}{3} \quad \frac{3}{2} = \frac{16 \quad 9}{6} = \frac{7}{6}$

Multiplicación de fracciones

La multiplicación de fracciones siempre es posible realizarla, y el producto será la fracción cuyo numerador resulte de multiplicar los numeradores de las fracciones y el denominador de multiplicar los denominadores.

Ejemplo

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{8}{5}$ b) $4 \cdot \frac{2}{3}$ c) $1\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}$ d) $\frac{16}{8} \cdot \frac{15}{24}$

Es importante recordar que al igual que en la adición (sustracción) todo número natural y todo número mixto debe convertirse en una fracción común. También debe recordar que siempre que exista simplificación en una o más fracciones de la multiplicación debe realizarse antes de efectuar la misma.

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{8}{5} = \frac{24}{25}$ b) $4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

c) $1\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5} \quad \frac{2}{1} = \frac{2}{5} \quad \frac{2}{1} = \frac{4}{5}$

En este caso después de expresar el número mixto como fracción común procedemos a simplificar el numerador de la primera fracción con el denominador de la segunda, ya que ambos son divisibles por 3.

d) $\frac{2}{1} \quad \frac{5}{8} = \frac{1}{1} \quad \frac{5}{4} = \frac{1}{1} \quad \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$

En este inciso simplificamos el numerador y el denominador de la primera fracción por 8 y el numerador y el denominador de la segunda fracción por 3, quedándonos una nueva simplificación del numerador de la primera fracción con el denominador de la segunda por 2.

Esta simplificación se puede hacer de otra forma, investígalo.

División de fracciones

Para resolver una división de fracciones debemos garantizar que la fracción que ocupa el lugar del divisor sea diferente de cero.

El procedimiento para resolverla es sencillo:

1ro. Se expresa la división como una multiplicación del dividendo por el recíproco del divisor.

2do. Se efectúa la multiplicación siguiendo el procedimiento ya aprendido.

Ejemplos

1. Calcula:

a) $\frac{3}{5} : \frac{4}{3}$ b) $\frac{2}{5} : \frac{4}{25}$ c) $5 : \frac{4}{3}$ d) $\frac{3}{2} : 4$ e) $2\frac{1}{2} : 4\frac{1}{3}$

Aplicando lo aprendido nos queda:

a) $\frac{3}{5} : \frac{4}{3} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$ b) $\frac{2}{5} : \frac{4}{25} = \frac{2}{5} \cdot \frac{25}{4} = \frac{1}{1} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$

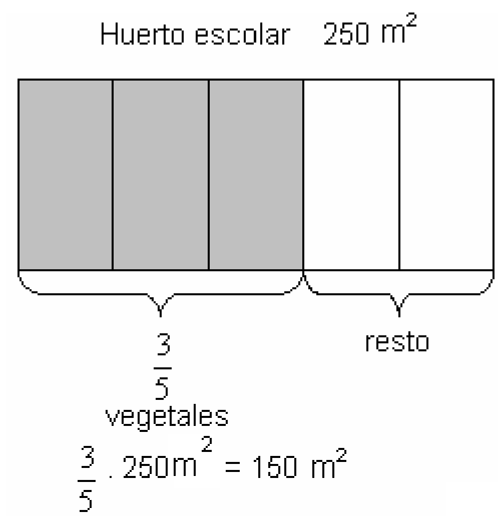
En el inciso b) después de expresar la división como producto, realizamos la simplificación del numerador de la primera fracción con el denominador de la segunda por 2 y la del numerador de la segunda fracción con el denominador de la primera por 5, antes de resolver la multiplicación.

c) $5 : \frac{4}{3} = \frac{5}{1} \quad \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$ d) $\frac{3}{2} : 4 = \frac{3}{2} \quad \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$ e) $2\frac{1}{2} : 4\frac{1}{3} = \frac{5}{2} : \frac{13}{3} = \frac{5}{2} \quad \frac{3}{13} = \frac{1}{2}$

Todos estos cálculos podemos combinarlos y aplicarlos para resolver situaciones que se presentan en la vida cotidiana.

2. En un huerto escolar de 250 m^2 se dedican las $\frac{3}{5}$ partes a la siembra de vegetales, la cuarta parte del resto a la siembra de frutales y se sembraron 45 m^2 de viandas.¿Qué superficie queda disponible para la siembra de plantas medicinales?

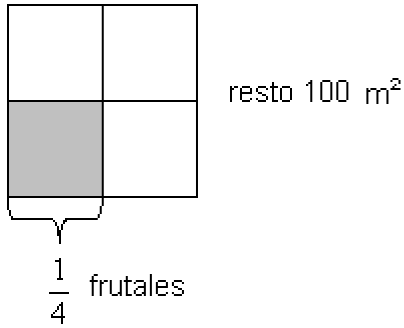
Para resolver este problema recomendamos realizar un análisis gráfico de la situación.



Para calcular el resto podemos proceder de dos formas diferentes:

Primera: $\frac{2}{5}$ $250\ m^2 = 100\ m^2$ ya que a los vegetales se había dedicado $\frac{3}{5}$ del huerto faltando $\frac{2}{5}$ para completar la unidad.

Segunda: $250\ m^2 - 150\ m^2 = 100\ m^2$ restando del total de metros cuadrados de huerto lo que se dedicó a la siembra de vegetales.



Como nos dicen que la cuarta parte del resto corresponde a la siembra de frutales podemos plantear $\frac{1}{4}\ 100\,m^2 = 25\,m^2$.

Si adicionamos las cantidades utilizadas en cada tipo de siembra y lo restamos de la superficie del huerto obtenemos la superficie que queda disponible para plantas medicinales, lo que podemos plantear de la siguiente forma:

$$250\ m^2 – (150\ m^2 + 25\ m^2 + 45\ m^2) = 250\ m^2 – 220\ m^2 = 30\ m^2$$

Según el orden operacional realizamos primero las operaciones que aparecen dentro del paréntesis y, posteriormente, la sustracción indicada.

Al finalizar debemos dar la respuesta.

Quedan disponibles para la siembra de plantas medicinales 30 m^2 del huerto escolar.

Ejercicios

1. Completa la siguiente tabla:

X	Y	X + Y	X – Y	X : Y
$\frac{8}{9}$	$\frac{5}{9}$			
$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{5}$			
$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{18}$			
$1\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$			

2. Selecciona la respuesta correcta:

a) El promedio de M y N, donde M = 64 – 18 : 3^2 y N = $\frac{5}{4}+\frac{33}{12}$ es

33 66 4 ninguna de las anteriores

b) La tercera parte de la suma de P y Q donde P = 114 – 50 : 5^2 y $Q = \frac{8}{9} + \frac{30}{27}$ es

38 114 2 ninguna de las anteriores

3. Un atleta que se prepara para una competencia de triatlón hace en el primer día el siguiente entrenamiento, corre $5\frac{1}{4}$ km, nada $2\frac{1}{2}$ km y recorre en bicicleta $4\frac{1}{3}$ km.
   a) ¿Cuántos kilómetros recorrió el atleta en el entrenamiento de ese día?
   b) Si su entrenador le indica que para seguir el entrenamiento debe aumentar diariamente medio kilómetro por cada modalidad, ¿cuántos kilómetros debe recorrer en bicicleta al noveno día de entrenamiento?

4. Las filas, las columnas y las diagonales de la tabla suman lo mismo. El valor de X es:

	X	$\frac{5}{6}$
0,75		
$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{12}$	0,5

$\frac{7}{4}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$ No hay datos suficientes

5. En las elecciones pioneriles Claudia obtuvo el 25 % de los votos, Leonardo las tres quintas partes del resto y Jorge Luis los demás. ¿Cuál de los tres obtuvo mayor cantidad de votos?

   Claudia Leonardo Jorge Luis

6. Una caja llena de galletas pesa lo mismo si está solo llena las $\frac{3}{5}$ partes de ella y le echamos $\frac{3}{5}$ kg. más de galletas. La caja llena pesa entonces:

   $\frac{3}{5}$ kg 1 kg 400 g 1,5 kg

7. Un ómnibus urbano que viaja de La Habana a Santiago de Cuba hace el recorrido por tramos. En el segundo tramo recorrió la cuarta parte del recorrido total y en el tercero la sexta parte del resto. ¿Cuál de los tres tramos resultó el mayor?

   Tramo 1 Tramo 2 Tramo 3 No se puede decidir

8. Haz llegado a una pescadería y en la tablilla de precios observas que el kilogramo. de rabirrubia cuesta $ 8,00. Al pesar una, la balanza te indica $\frac{3}{4}$ kg y al echar otra el peso aumentó a $2\frac{1}{2}$ kg.

   a) ¿Cuánto pesó la segunda rabirrubia?

   b) ¿Cuánto debes pagar si llevas las dos?

9. Una jarra de jugo contiene solo hasta sus $\frac{3}{7}$ partes. Si le adicionamos 800 mL más de jugo se llena la jarra, entonces la jarra llena contiene:

   $\frac{4}{7}$ L 800 mL 3,42 L 1,4 L

10. Una caja de caramelos está llena solo hasta sus $\frac{3}{5}$ partes. Si se le echan 400g más de caramelos la caja se llena. La caja llena pesa:

   $\frac{3}{5}$ Kg 600 g 2,5 Kg 1 Kg

Operaciones con expresiones decimales

Un PGI quiere calcular el promedio de estatura de sus alumnos y el profesor de educación física le informa que de sus 15 alumnos hay 6 que miden 1,45 m.; 2 miden 1,60 m; 3 miden 1,62 m y los restantes 1,70 m.

Con los datos ofrecidos el profesor escribió en su libreta:

$$\frac{6 \cdot 1{,}45 + 2 \cdot 1{,}60 + 3 \cdot 1{,}62 + 4 \cdot 1{,}70}{15}$$

Para resolver esta situación el profesor debe hacer uso de las operaciones con expresiones decimales que estaremos recordando a continuación.

Adición y sustracción de expresiones decimales

Recordemos que las expresiones decimales se adicionan ubicando los sumandos uno debajo del otro y de manera que la coma quede debajo de la coma.

Ejemplo:

Calcula:

a) 0,185 + 3,1   b) 316,01 + 48

a) 0,185 + 3,1 3,285	Después de haber colocado los sumandos como indicamos, adicionamos como lo hacemos con los números naturales y mantenemos la coma decimal en el mismo lugar.
b) 316,01 + 48,00 364,01	Como en este caso uno de los sumandos es un número natural, debe escribirse en la posición de la parte entera. Para facilitar el trabajo puedes añadir ceros en la parte decimal.

c)

En la sustracción después de verificar que el minuendo es mayor o igual que el sustraendo los ubicamos de la misma forma que hicimos en la adición y desarrollamos la sustracción como verás en los siguientes ejemplos.

Calcula:

a) 38,5 – 16,8   b) 42,56 – 13   c) 58,2 – 60,3

a) 38,5 – 16,8 21,7	Después de ubicar el minuendo y el sustraendo como indicamos, procedemos como en la sustracción de los números naturales, respetando el lugar de la coma decimal.
b) 42,56 – 13,00 29,56	En el caso en que el minuendo (sustraendo) sea un número natural, lo escribimos añadiendo a la parte decimal del mismo tantos ceros como lugares decimales tenga el otro término de la sustracción.

c) Este inciso no tiene solución en el dominio de los números fraccionarios, porque el minuendo es menor que el sustraendo.

Multiplicación de expresiones decimales

Para multiplicar expresiones decimales lo hacemos como en los números naturales y el producto tendrá tantos lugares decimales como tengan los dos factores juntos.

Ejemplo

Calcular:

a) 3,12 · 1,3

```
 3,12 · 1,3
    312
     936
   4,056
```

3,12 tiene dos cifras decimales y 1,3 una cifra decimal, por tanto el producto debe tener tres cifras decimales.

División de expresiones decimales

Tradicionalmente con esta operación has confrontado dificultades por lo que te mostramos algunos ejemplos que te ilustren cómo proceder.

Ejemplo

Calcular:

a) 84,32 : 2	b) 0,054 : 5	c) 4 : 0,5
d) 6,8 : 0,23	e) 29,133 8,3	f) 5,12 : 0,3

a) 84,32 : 2

Aquí divides como en los números naturales. Recuerda que debes colocar en el cociente la coma después de dividir las unidades del dividendo.

```
8´4´,3´2´ |  2
8           42,16
04
 4
 03
  2
  12
  12
   0
```

b) 0,054 : 5

En este caso procedemos de igual forma que en el inciso anterior.

```
0´, 0´5 ´4´ |____5____
    5         0,0108
   ---
   040
    40
   ---
     0
```

En general al dividir una expresión decimal entre un número natural se resuelve como si se tratara de una división de números naturales, colocando la coma decimal en el cociente cuando se termine de dividir la parte entera del dividendo.

c) 4 : 0,5

```
40 |__5__
40    8
--
 0
```

Aquí se planteará la división de 40 entre 5, ya que como el divisor tiene una cifra decimal se multiplican el dividendo y el divisor por 10 y se resuelve la división.

d) 6,8 : 0,23

```
68´0 |_____23______
46      29,5652.....
220
207
----
 130
 115
 ---
  150
  138
  ---
   120
   115
   ---
    50
   ....
```

En este caso realizamos la división después de haber multiplicado por 100 el dividendo y el divisor ya que el divisor tiene dos cifras decimales; al dividir observemos que se puede realizar infinitamente esta operación y no obtener el resto 0, por lo que podemos decir que el resultado de la división es una expresión decimal infinita y su resultado se da aproximado en este caso con dos cifras decimales, o sea; 29, 57.

e) 29,133 8,3

```
291´,3´3´ |_____83_____
249            3,51
---
 423
 415
 ---
  83
  83
  --
   0
```

Como el divisor tiene una cifra decimal, multiplicamos el dividendo y el divisor por 10 y resolvemos la división.

En general al realizar una división donde el divisor sea un número decimal, se multiplica el dividendo y el divisor por la unidad seguida de tantos ceros como tenga el divisor. De esta forma el divisor se convierte en un número natural.

f) 5,12 : 0,3 En este caso al realizar la división comienza a

```
5´1´,2´ |_3__________
3          17,0666.....
--
21
21
---
 020
  18
  --
   20
   18
   --
    2
  ......
```

repetirse el mismo resto, y por tanto a repetirse cifras en el cociente.

Es una división cuyo resultado es una expresión decimal infinita periódica y su resultado se expresa como $17{,}0\overline{6}$.

Mediante el procedimiento de la división, a toda fracción le puedes hacer corresponder una expresión decimal finita o una infinita periódica.

También podemos realizar operaciones combinadas con los números fraccionarios expresados como fracción común o como expresión decimal.

Propiedades de las operaciones de adición y la multiplicación

El guía base de la escuela al reportar el resultado de la emulación por la recogida de materia prima en septiembre, octubre y noviembre, dice que los grupos están empatados:

Meses / Grupos	septiembre	octubre	noviembre
7mo. 1	45	12	25
7mo. 2	12	45	25
7mo. 3	25	12	45

Tanto en los números naturales como en los fraccionarios comprobamos de grados anteriores que en las operaciones de adición y multiplicación se cumplían algunas propiedades.

La **propiedad conmutativa** que nos permitía intercambiar los sumandos (factores) sin alterar la suma (producto).

$a + b = b + a$

$a \cdot b = b \cdot a$

La **propiedad asociativa** que nos permitía asociar de forma diferente los sumandos (factores), sin alterar la suma (producto)

$(a + b) + c = a + (b + c)$

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

La **propiedad distributiva** de la multiplicación con respecto a la adición que nos permitía, convenientemente, realzar primero la suma y, posteriormente, la multiplicación o resolver la multiplicación por cada sumando y después la suma.

$a (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Estas propiedades nos permiten calcular de una forma más ventajosa

Con estas propiedades y el contenido que has visto te propongo ahora realizar ejercicios donde apliques estos conocimientos.

Ejercicios

1. Completa la siguiente tabla colocando en la primera columna el resultado estimado de la operación dada y en la segunda el valor exacto. Compara los dos valores registrados para verificar si hiciste una buena estimación.

Operación	Valor estimado	Valor exacto
5,82 + 0,03 + 31,5		
91,6 + 1,75 + 0,6		
9,7 – 5,1 – 2		
390,9 – 91,2		
6,01 · 7,92		
10,87 · 2,01		
18,04 : 8,75		
98,93 : 5,1		

2. Calcula:

a) 83,45 + 58
b) 69,83 + 668
c) 779 – 43,5
d) 83,45 + 58
e) 69,83 + 668
f) 779 – 43,5
g) 445 – 32,8
h) 380,2 · 12
i) 0,25 · 8,4
j) 0,35 · 9,4
k) 520,3 · 13
l) 72,23 : 9,3
m) 32,53 : 7,6
n) 1 053 : 4,5
o) 5 785 : 8,9

3. Calcula:

a) $4,5 + (3,6 + 7,8 \cdot 3$ b) $(8,5 \cdot 2) \cdot 4 + 7,2 + 8,5$

c) $\left(\frac{1}{3} \cdot 4\right) \cdot 9 + 8,6 - 1,4$

4. La siguiente tabla representa la relación entre la cantidad de trabajadores de un centro laboral y la cuota sindical mensual que cada uno de ellos debe pagar.

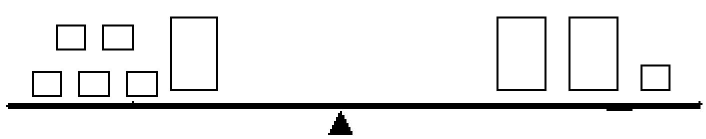
Cantidad de trabajadores	Cuota sindical ($)
6	1,75
8	2,50
5	3,00
6	4,50

a) ¿Cuántos trabajadores laboran en este centro?

b) ¿Cuál será la cuota anual que debe pagar un trabajador cuya cuota sindical es de $ 1,75?

c) Si durante el mes de marzo dos trabajadores de la máxima cuota no entregaron en tiempo la misma, ¿cuánto se recaudó en ese mes?

5. La siguiente balanza está en equilibrio:



a) ¿A cuántos cuadraditos equivale un rectángulo?

b) Si un cuadradito pesa 6 g; en uno de los brazos de la balanza hay:

- más de una libra.
- menos de una libra.
- una libra.

6. La tabla representa los precios de diferentes productos en el agro.

Producto	Precio por libra ($)
Boniato	0,50
Frijol negro	4,50
Ají	2,50
Cebolla	8,00

a) Si una persona compra 6 lb de boniato, 6 de frijol y 2 de ají, entonces para saber lo que deben devolverle al pagar con un billete de $ 50,00 puede calcularlo utilizando la siguiente operación combinada:

– 50 – 6 (0,50 + 4,50) – 2 · 2,50

– 6 (0,50 + 4,50) + 2 · 2,50 – 50

– 50 – 6 (0,50 + 4,50) + 2 · 2,50

b) ¿Le alcanzará el dinero para comprar una libra de cebolla?

7. A un paciente que ha sido operado, le han puesto unos sueros en su etapa de recuperación.

El 1er. día le pusieron un suero completo.

El 2do. día las tres cuartas partes de un suero.

El 3er. día un suero y medio.

a) Si cada pomo de suero tenía 500 cc del medicamento, ¿cuántos cc le fueron suministrados?

b) ¿Qué tiempo demoró el suero suministrado el 3er. día, si cada cc equivale a 6 gotas y en cada minuto se le suministran 25 gotas?

8. El perímetro de un triángulo es 12,5 cm. Dos de sus lados miden 3,8 y 4,3 cm, respectivamente.

a) Estima y después calcula la longitud del tercer lado.

b) Escribe la expresión numérica que traduce el proceso que utilizaste para calcular la longitud de ese lado.

9. Dada la siguiente tabla:

Provincia	Población	Mortalidad infantil ($^{0}\!/_{00}$)

		2000	2001
Pinar del Río	Setecientos treinta y cuatro mil ochocientos sesenta y cuatro	5,9	5,8
La Habana	701 767	7,6	6,6
Ciudad de La Habana	2 170 089	7,5	6,7
Matanzas	658 078	6,4	4,4

a) ¿Qué información te ofrece esta tabla?

b) ¿A qué conjunto numérico más restringido pertenece el número que representa la población de Ciudad de La Habana?

c) Escribe cómo se lee el número que representa la población de Matanzas.

d) Escribe el número que representa la población de Pinar del Río.

e) Ordena las provincias en forma decreciente atendiendo al índice de mortalidad infantil de las mismas en el año 2000.

f) ¿En cuánto excede la población de La Habana a la de Matanzas?

10. Observa la siguiente tabla y responde; seleccionando en cada caso la respuesta correcta:

Provincia	Densidad poblacional hab./km^2	Tasa de natalidad (por cada mil habitantes)
Pinar del Río	67,5	13,4
Ciudad de La Habana	3 006,1	11,5
Villa Clara	96,5	11,9
Las Tunas	80,5	15,7
Santiago de Cuba	163,2	14,3

a) Los datos que aparecen en la tabla corresponden a:

- cantidades contables
- relaciones entre cantidades
- cantidades de magnitud
- ordinal

b) Que la densidad poblacional en Santiago de Cuba sea 163,2 significa que:

- En Santiago de Cuba residen 163,2 personas, aproximadamente.

- En Santiago de Cuba residen 163,2 personas por kilómetro cuadrado, aproximadamente.
- En Santiago de Cuba 163,2 por cada mil personas, residen por kilómetro cuadrado, aproximadamente.

c) Determina cuántas centenas tiene el número que representa la densidad poblacional de Ciudad de La Habana.

d) Escribe como fracción decimal el número que expresa la densidad de población en Las Tunas.

e) Ordena las provincias en forma ascendente según su tasa de natalidad.

f) Entre qué números naturales consecutivos se encuentra el número que expresa la tasa de natalidad de Pinar del Río.

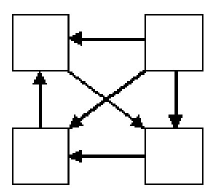
11. Completa los siguientes cuadrados de forma tal que logres obtener resultados iguales al sumar horizontal, vertical y diagonalmente.

2,1		3,1
	3,7	
	1,5	5,3

4,2		4
	3,9	
3,8	4,3	

12. Coloca en cada cuadrado de la figura de la derecha cada uno de los números de la tabla; de manera que la punta de la flecha (la saeta) siempre apunte hacia el menor entre los dos

1,2	$\frac{3}{4}$	**1,25**	**0,85**



13. Susana ha llevado la cuenta del consumo eléctrico de su vivienda durante tres meses consecutivos y los mismos han sido de 120; 180 y 150 kwh, respectivamente. Si se propone hacer un ahorro de 10 kwh durante el cuarto mes respecto al promedio del trimestre anterior entonces el consumo de ese mes debe ser:

110 kwh. 140 kwh. 150 kwh.

14. ¿Qué valor deben tomar las variables para que se cumpla la secuencia de igualdades planteada:

$\frac{2}{3} + a = b \longrightarrow \quad b \cdot \frac{5}{2} = c \qquad c - \frac{1}{6} = 2$

15. Escribe la operación matemática que traduce la siguiente situación:

a) El triplo de la diferencia de cuarenta y quince.

b) La suma del doble de siete con el producto de siete por doce.

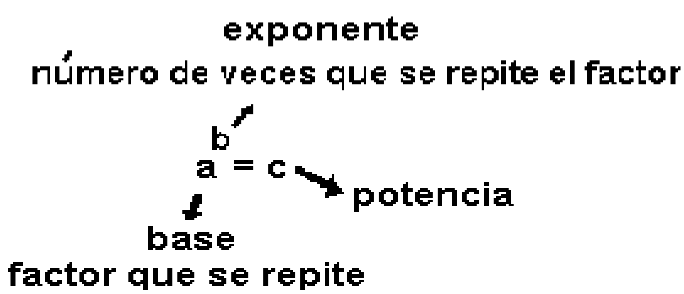
Potenciación de números naturales

En la primaria aprendiste que la potenciación no es más que una multiplicación donde todos los factores son iguales.

Ejemplo

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$

La operación de potenciación de base y exponente natural siempre que la base sea diferente de cero se puede realizar.



Debemos saber que en la potencia la base también puede ser un número fraccionario por ejemplo:

·$3{,}5 \cdot 3{,}5 \cdot 3{,}5 = 3{,}5^3$ el factor 3,5 se repite tres veces.

·$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$ el factor $\frac{2}{3}$ se repite cuatro veces.

Producto y cociente de potencias de igual base

En este grado aprenderás algunas propiedades de las potencias que te servirán para realizar los cálculos de las mismas con mayor facilidad; estas propiedades podrán ser encontradas por ti si desarrollas varios ejemplos como los que se muestran a continuación:

Representa como potencia los siguientes productos.

a) $2^3 \cdot 2^4$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$ c) $(2{,}1)^2 \cdot (2{,}1)^3$

Para expresar estos productos como potencias debemos saber en cada caso cuál es el factor que se repite y cuántas veces aparece el mismo, por lo que te proponemos descomponer cada una de las potencias factores en el producto que las originó.

a) $2^3 \cdot 2^4 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3\text{ veces}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{4\text{ veces}}$ si observas el factor 2 se repite 7 veces por lo que se puede expresar como 2^7

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{4\text{ veces}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{2\text{ veces}} = \left(\frac{1}{2}\right)^6$

c) $2{,}1^2 \cdot 2{,}1^3 = \underbrace{2{,}1 \cdot 2{,}1}_{2\text{ veces}} \cdot \underbrace{2{,}1 \cdot 2{,}1 \cdot 2{,}1}_{3\text{ veces}} = 2{,}1^5$

Si eres buen observador en todos estos ejemplos los productos planteados tienen como factores potencias de igual base. La potencia resultante tiene la misma base de las potencias factores y como exponente la suma de los exponentes de los factores.

Al multiplicar potencias de igual base el resultado es una potencia de la misma base y cuyo exponente es la suma de los exponentes.

Si lo representamos con variables:

$$\mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad a \in Q_{+};\ a \neq o\ \ m, n \in N}$$

Representa como una potencia los siguientes cocientes:

a) $\frac{2^5}{2^3}$ b) $(3{,}5)^4 : (3{,}5)^2$

Se procede análogamente al caso anterior.

a) $\frac{2^5}{2^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2^2$

b) $(3{,}5)^4 : (3{,}5)^2 = \frac{3{,}5 \cdot 3{,}5 \cdot 3{,}5 \cdot 3{,}5}{3{,}5 \cdot 3{,}5} = (3{,}5)^2$

En este ejemplo procedemos de forma análoga al anterior y al hacer las simplificaciones que son posibles nos damos cuenta al finalizar que la potencia resultante tiene la misma base y el exponente se puede calcular restando al exponente del dividendo el exponente del divisor.

Si lo representamos con variables:

$a^m : a^n = a^{m-n}$ $\quad$ $a \in Q_+$; $a \neq 0$; $m, n \in N$; $m > n$

En grados posteriores conocerás otras propiedades de las potencias.

Ejercicios

1. Calcula:

a) 3^5 $\qquad$ b) $\left(\frac{5}{4}\right)^2$ $\qquad$ c) $(1{,}4)^3$

2. Expresa como potencias.

a) $6^2 \cdot 6^4$ $\qquad$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$ $\qquad$ c) $1{,}2^5 \cdot 1{,}2^6$

d) $32 \cdot 2^4$ $\qquad$ e) 150 % de $1{,}5^6$ $\qquad$ f) 25 % de $0{,}25^3$

3. Calcula la potencia resultante.

a) $8^{15} : 8^2$ $\qquad$ b) $1{,}4^6 : 1{,}4^2$ $\qquad$ c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{96} : \left(\frac{3}{5}\right)^{90}$

d) $x^{10} : x^7$ $\qquad$ e) $64 : 2^5$ $\qquad$ f) $\left(\frac{0{,}7}{10}\right)^5 : 0{,}07^3$

4. Selecciona la respuesta correcta:

a) $0,5^2$ es igual a | 1,0 | 0,25 | 25

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)$ es igual a | $\left(\frac{2}{5}\right)^2$ | $\left(\frac{2}{5}\right)^3$ | $\frac{32}{125}$

c) $4^5 : 4^3 \cdot 4^4$ es igual a | 4^{12} | 4^4 | 4^6

5. Determina si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique las falsas.

a) $3^2 = 2^3$

b) $1,5^4 \cdot 1,5^3 = 1,5^7$

c) $4^3 : 4^5 = 4^2$

d) $0^7 : 0^5 = 0^2$

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^8$

f) $\left(\frac{3}{4}\right)^{10} : (0,75)^7 = \left(\frac{3}{4}\right)^3$

g) $\frac{16 \cdot 2^5}{64} = 2^3$

h) $10^5 - 10^3 = 10^2$

6. Sustituye el símbolo ∇ por el número que haga cierta cada una de las siguientes proposiciones:

a) $6^2 : 6^4 = \nabla^6$

b) $\nabla^3 \cdot \nabla^5 = 5,1^8$

c) $1,5^7 : \nabla^4 = 1,5^3$

d) $\left(\frac{1}{5}\right)^9 : \left(\frac{1}{5}\right)^6 = \left(\frac{1}{5}\right)^\nabla$

7. Calcula aplicando las propiedades de las potencias de ser posible:

a) $\frac{3^2 \cdot 3^5}{3^4}$

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^7 : \left(\frac{1}{4}\right)^6 \cdot (0,25)^2$

c) $8^2 \cdot \frac{2^3 \cdot 2^6}{8}$

d) $\frac{5,2^{10} : 5,2^6}{5,2^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$

e) $\frac{6^4 + 6^3}{6^3}$

8. Halla el valor de x en:

a) $6,5^2 \cdot 6,5^x = 6,5^7$

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot x^6 = \left(\frac{1}{4}\right)^9$

c) $2^x = 16$

d) $10^{x+1} = 1\,000$

e) $\dfrac{\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{4}}{\left(\frac{2}{5}\right)^{3}} = \dfrac{4}{25}$

Operación de elevar al cuadrado y elevar al cubo

Andrés va a hacer la instalación de la antena de su televisor para lo cual necesita 3,50 m de bajante. Si el metro tiene un precio de $ 3,50. ¿Qué dinero debe gastar?

Estarás de acuerdo conmigo que para resolver esta situación basta multiplicar el precio de un metro de bajante por la cantidad de metros que tiene que comprar.

(3,50 · 3,50) que al ser los dos factores iguales podemos expresarlo como $3{,}50^2$ y leemos tres como cinco cero al cuadrado.

> A la operación que consiste en determinar el cuadrado de un número se llama **elevación al cuadrado.**

Al resultado de elevar al cuadrado un número natural se le llama **cuadrado perfecto.**

En saludo a la conmemoración del 1er. trabajo voluntario convocado por el Ché los tres grupos de cada uno de los tres grados de una secundaria básica acordaron recolectar tres sacos de laticas de aluminio y cumplieron con su compromiso. ¿Cuántos sacos lograron recolectar?

El procedimiento para resolver esta situación nos lleva a plantear la multiplicación de los 3 grupos por los 3 grados por los 3 sacos o sea:

(3 · 3 · 3) que se puede expresar como 3^3 y leemos tres al cubo.

> A la operación mediante la cual determinamos el cubo de un número se le denomina **elevación al cubo.**

Al resultado de elevar al cubo un número natural se le llama **cubo perfecto**.

Extracción de la raíz cuadrada y raíz cúbica

Un terreno de forma cuadrada tiene un área de 25 m^2 y se quiere cercar con una vuelta de alambre. ¿Cuántos metros de alambre se necesitan?

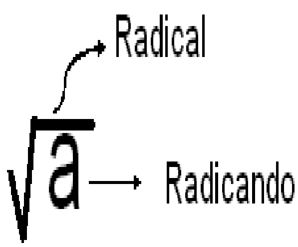
Coincidirás conmigo que estamos buscando el perímetro del terreno que como es cuadrado esta dado por la fórmula $P = 4 \cdot a$; donde **a** representa el lado del terreno.

Del terreno me dan su área (25 m^2) y el área de un cuadrado está dado $A = a^2$, donde a también representa el lado del terreno.

De aquí podemos establecer la relación $25 = a^2$ y al buscar el número que elevado al cuadrado nos de 25, en este caso estamos buscando la raíz cuadrada de 25.

Luego:

La raíz cuadrada de un número fraccionario *a*, es un número cuyo cuadrado es *a* y se denota por $\sqrt{a}$.



El radicando es el número al cual se le halla la raíz cuadrada.

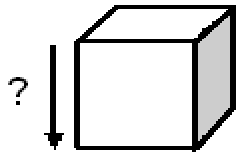
La extracción de la raíz cuadrada es la operación mediante la cual se determina la raíz cuadrada de un número.

La $\sqrt{36} = 6$ porque $6^2 = 36$; $\sqrt{64} = 8$ porque $8^2 = 64$; $\sqrt{100} = 10$ porque $10^2 = 10$ podemos decir que:

La extracción de la raíz cuadrada, es la operación inversa de la elevación al cuadrado.

Aplicando estas ideas llegamos a que el lado del terreno mide 5 m y con este dato podemos calcular el perímetro del mismo para determinar la cantidad de cerca necesaria.

Para un edificio que se terminó se va a realizar la excavación para construir su cisterna que tiene forma cúbica y debe tener una capacidad de 27 m^3. ¿Qué profundidad debe tener la misma?



Como la cisterna tiene forma cúbica sabemos que sus aristas son iguales y la medida que indica la profundidad de la cisterna coincide con la medida de cualquiera de sus aristas.

También conocemos que el volumen de un cubo de arista **a** se determina por la fórmula $V = a^3$ y sabemos en este caso que el volumen es 27 m^3.

Luego para dar respuesta a nuestro problema bastará con buscar el número **a** que elevado al cubo sea 27.

Este número será la raíz cúbica de 27.

La raíz cúbica de un número fraccionario *a*, es un número cuyo cubo es *a* y se denota por $\sqrt[3]{a}$

La $\sqrt[3]{8} = 2$ porque $2^3 = 8$; $\sqrt[3]{125} = 5$ porque $5^3 = 125$; etc., podemos decir que:

La extracción de la raíz cúbica, es la operación inversa de la elevación al cubo.

Uso de las tablas de cuadrados y cubos

En el presente curso aprenderás a trabajar con un nuevo medio que te facilitará el cálculo de cuadrados y cubos de aquellos números fraccionarios entre 1 y 10; de las raíces cuadradas de números fraccionarios entre 1 y 100 así como de las raíces cúbicas de números fraccionarios entre 1 y 1 000. Este medio se encuentra en el Libro de texto de 7mo. grado y recibe el nombre de Tabla de cuadrados (Tabla de cubos). Veamos a través de un ejemplo cómo utilizarla.

Calcula utilizando la tabla:

a) $1{,}34^2$ b) $1{,}341^2$ c) $(1{,}34\ \text{cm})^3$

Observemos que 1,34 no es un número natural por lo que su cuadrado no es un cuadrado perfecto, luego para determinar el cuadrado de 1,34 utilizando la tabla de cuadrados anteriormente mencionada, procedemos de la manera siguiente:

1ro. Localizar en la tabla de cuadrados la fila que corresponda a las dos primeras cifras del número, en este caso 1,3.

2do. Localizar la columna que corresponda a la tercera cifra del número, en este caso 4.

3ro. El cuadrado del número se encuentra en la intersección de la fila con la columna correspondiente.

La siguiente figura te ilustrará el procedimiento:

TABLA DE CUADRADOS

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1,0	1,000	1,020	1,040	1,061	1,082	1,103	1,124	1,145	1,166
1,1	1,210	1,232	1,254	1,277	[illegible]	1,323	1,346	1,369	1,392
1,2	1,440	1,464	1,488	1,513	[illegible]	1,563	1,588	1,613	1,638
1,3	[illegible]	1,716	1,742	[illegible]	1,796	1,823	1,850	1,977	1,904
1,4	1,960	1,988	2,016	2,045	2,074	2,103	2,132	2,161	2,190
1,5	2,250	2,280	2,310	2,341	2,372	2,403	2,434	2,465	2,496
1,6	2,560	2,592	2,624	2,657	2,690	2,723	2,756	2,789	2,822
1,7	2,890	2,924	2,958	2,993	3,028	3,063	3,098	3,133	3,168
1,8	3,240	3,278	3,312	3,349	3,386	3,423	3,460	3,497	3,534
1,9	3,610	3,648	3,686	3,725	3,764	3,803	3,842	3,881	3,920
2,0	4,000	4,040	4,080	4,121	4,162	4,203	4,244	4,285	4,326

$$1{,}34^2 \approx 1{,}796$$

b) 1, 341^2

En este ejemplo el número tiene más de tres cifras por lo que antes de localizar su cuadrado en la tabla debes redondearlo a tres cifras, en este caso 1,341 ≈ 1,34; la respuesta del cuadrado deberá tener tantas cifras significativas como el dato redondeado.

$1{,}341^2 \approx 1{,}34^2 \approx$ 1, 80 (observa que la respuesta ha sido redondeada a tres cifras, ya que el dato inicial fue redondeado a tres cifras para poder buscarlo en la tabla).

Esta regla del cálculo aproximado es válida para los datos que sean aproximados o que sean resultado de alguna medición.

c) $(1{,}34\ \text{cm})^3$

En este caso estamos elevando al cubo un número fraccionario de tres cifras que se encuentra entre 1 y 10, luego buscamos su cubo en la tabla.

$(1{,}34\ \text{cm})^3 \approx 2{,}41\ \text{cm}^3$ (la respuesta se dará con tres cifras significativas ya que el dato procede de una medición).

Extracción de la raíz cuadrada y la raíz cúbica utilizando la tabla

Como ya sabes la extracción de la raíz cuadrada es la operación inversa de elevar al cuadrado, como te indicamos al principio podrás determinar la raíz cuadrada de los números fraccionarios que se encuentren entre 1 y 100 utilizando la tabla de cuadrados.

De igual forma podremos utilizar la tabla de cubos para determinar la raíz cúbica de números fraccionarios que se encuentren entre 1 y 1 000.

El procedimiento para determinar la raíz cuadrada (cúbica) de un número será inverso al utilizado para determinar el cuadrado (cubo) de un número.

Observemos este procedimiento a través de un ejemplo.

Ejemplo

Calcula:

a) $\sqrt{1,796}$ b) $\sqrt[3]{25,68}$

En el caso del inciso a)

$1 < 1,796 < 4$

$\sqrt{1} < \sqrt{1,796} < \sqrt{4}$

$1 < \sqrt{1,796} < 2$

1ro. Hacemos el cálculo estimado, buscando entre qué cuadrados perfectos más próximos se encuentra 1,796; de esta forma al determinar las raíces cuadradas de los mismos sabremos entre qué números se encontrará la raíz cuadrada del número.

2do. Buscamos en el cuerpo de la tabla de cuadrados el número 1,796.

3ro. Localizamos la fila (1,3) y la columna (4) que corresponden a dicho valor.

$\underbrace{1,3}_{\text{fila}}\underbrace{4}_{\text{columna}}$

$\sqrt{1,796} \approx 1,34$

4to. La raíz cuadrada del número estará determinada por un número fraccionario de tres cifras donde las dos primeras corresponden a la fila y la tercera a la columna.

Veamos este trabajo representado en el siguiente esquema:

Estimado

$\boxed{\begin{array}{l}\sqrt{1}=1\\ \sqrt{4}=2\end{array}}$

$\sqrt{1,796}\approx 1,34$

Tablas de cuadrados:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1,0	1,000	1,020	1,040	1,061	1,082	1,103	1,124	1,145	1,166
1,1	1,210	1,232	1,254	1,277	1,300	1,323	1,346	1,369	1,392
1,2	1,440	1,464	1,488	1,513	1,538	1,563	1,588	1,613	1,638
1,3	1,690	1,716	1,742	1,769	1,796	1,823	1,850	1,877	1,904
1,4	1,960	1,988	2,016	2,045	2,074	2,103	2,132	2,161	2,190
1,5	2,250	2,280	2,310	2,341	2,372	2,403	2,434	2,465	2,496
1,6	2,560	2,592	2,624	2,657	2,690	2,723	2,756	2,789	2,822
1,7	2,890	2,924	2,958	2,993	3,028	3,063	3,098	3,133	3,168
1,8	3,240	3,276	3,312	3,349	3,386	3,423	3,460	3,497	3,534
1,9	3,610	3,648	3,686	3,725	3,764	3,803	3,842	3,881	3,920
2,0	4,000	4,040	4,080	4,121	4,162	4,203	4,244	4,285	4,326

b) $\sqrt[3]{25,68}$

$8 < 25,68 < 27$

$\sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{25,68} < \sqrt[3]{27}$

$2 < \sqrt[3]{25,68} < 3$

1ro. Hacemos el cálculo estimado, buscando entre qué cubos perfectos más próximos se encuentra 25,68; de esta forma al determinar las raíces cúbicas de los mismos sabremos entre qué números se encontrará la raíz cúbica del número.

2do. Buscamos en el cuerpo de la tabla de cubos el número 25,68; en este caso no aparece por lo que buscamos el número que aparezca en la tabla que sea más próximo a él, en este caso 25,67.

3ro. Localizamos la fila (2,9) y la columna (5) que corresponden a dicho valor.

$\underbrace{2,9}_{\text{fila}}\underbrace{5}_{\text{columna}}$

$\sqrt[3]{25,68} \approx 2,95$

4to. La raíz cúbica del número estará determinada por un número fraccionario de tres cifras donde las dos primeras corresponden a la fila y la tercera a la columna.

Ejercicios

1. Calcula:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \sqrt{25} : \frac{1}{10} - 0{,}25$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \sqrt[3]{27} : \frac{1}{10} + 0{,}4$

2. Sean:

A = $1{,}25^3 + \sqrt[3]{7{,}53}$ B = $\frac{1}{4} \cdot \frac{28}{5}$ C es el 250 % de 2,5 D = $\frac{4{,}6^5 \cdot 4{,}6^4}{4{,}6^7}$

a) Compara A y B.

b) Expresa el resultado de C como potencia y calcúlala.

c) El resultado de calcular D es:

97,34 9,2 21,16

3. Calcula:

a) $(2{,}1)^2 + \sqrt[3]{27} : \frac{2}{3} - 0{,}75 + 0{,}4$

b) $\left(7{,}78^2 + \sqrt[3]{63{,}45}\right) : 97{,}18$

c) $9{,}45^{10} : 9{,}45^8 - \sqrt{68{,}36} : \sqrt[3]{65{,}43}$

d) $\frac{9{,}47^2 - \sqrt{40{,}88}}{3{,}28 \cdot 3{,}28^2}$

4. Dados

x = $3^2 \cdot 3$ y = $\sqrt[3]{736{,}3}$ z = $\frac{4}{15} : \frac{8}{3}$

Calcula:

a) x + y - z b) y x • z

5 a) El resultado de calcular $\sqrt{225} \quad \frac{2}{3} : \frac{5}{6} + (2{,}2)^2$ es:

18,6 19,04 22,04 Ninguno de los anteriores

b) El resultado de calcular $(5,6)^2 - \frac{5}{7} : \frac{10}{21} + \sqrt{144}$ es:

42,74 77,97 41,86 Ninguno de los anteriores

c) El resultado de calcular $(1,1)^2 + \sqrt{81} : \frac{3}{2} - 0{,}21$ es:

7 6,9 5,59 Ninguno de los anteriores

d) El resultado de calcular $72 - 54 : 3^2 + \frac{15}{12} - \frac{7}{5}$ es:

72,1 69,1 8,1 63,8

6. Si los lados de un rectángulo miden 4,5 y 8,4 cm, respectivamente. Entonces el lado de un cuadrado que tenga la misma área que este rectángulo debe medir aproximadamente:

   6,15 cm 6,2 cm 6,2 cm^2

7. Una pecera que está llena al 75 % de su capacidad, contiene 54 L de agua; la misma se encuentra empotrada a una pared dejando visible solo el cristal que ocupa la parte delantera que tiene una superficie aproximada de:

   4,16 cm^2. 17,31 cm^2. 17 cm^2

8. ¿Qué valor deben tomar las variables *x, y, z,* para que se cumpla la secuencia de igualdades siguiente?

$$x : 6 = y \longrightarrow y + 3{,}5 = z \longrightarrow \sqrt[3]{z} = 2$$

9. Un año común tiene 365 días. Este es un número muy peculiar. Es el único número que es la suma de tres cuadrados de números consecutivos y que además es también suma de los cuadrados de los dos siguientes. Investiga cuáles son estos números.

1.3 Significado de comparaciones a través del tanto por ciento

En este epígrafe se profundizará en el significado del tanto por ciento, se recordarán los tres casos estudiados en la enseñanza primaria; se introducirá el tanto por mil y se sistematizarán los conceptos y propiedades fundamentales de las proporciones para su aplicación a la resolución de problemas donde se apliquen estos contenidos.

En la información sobre el Panorama Económico y Social de Cuba del 2002, podemos leer la siguiente información:

"El sector industrial no azucarero muestra un crecimiento en diez de las veintiuna ramas que lo integran, la Industria Electrónica crece 10,8 %, la Industria Forestal y de Elaboración de la Madera un 16,6 %, la Química un 7,3 %, Comunicaciones 10,1 % y Comercio 3,1 %; así como la esfera de los Servicios un 4,1 %".

Podrías entonces responder cuál de estas industrias tuvo mayor crecimiento.

De aquí inferimos que también podemos hacer comparaciones utilizando el tanto por ciento.

¿Y cuál es el significado del tanto por ciento?

Pues no es más que **un tanto de cada cien.**

Recuerda que el 1 % escrito como fracción común es $\frac{1}{100}$.

Ejemplo

El 57 % de los alumnos de una escuela son hembras.

Esta información podríamos interpretarla como la fracción $\frac{57}{100}$, lo cual nos indica que 57 de cada 100 alumnos son hembras.

Por otra parte podemos recordar, que si al plantear el tanto por ciento como fracción, la misma tiene simplificación, entonces debemos hacerla.

Ejemplo:

El 75% de los adultos mayores de un Consultorio del Médico de la Familia pertenecen a un Círculo de Abuelos.

$\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$ Al plantear el 75 % como fracción y simplificarla, podemos también decir que **tres de cada cuatro** adultos mayores pertenecen al Círculo de Abuelos.

Existen tantos por ciento de este tipo que conocemos como **porcentajes cómodos** porque conducen a cálculos aritméticos más ventajosos.

Porcentaje	Fracción	Operación a que se reduce
10 %	$\frac{1}{10}$	Determinamos la décima parte del total lo que equivale a dividir por 10.
20 %	$\frac{1}{5}$	Determinamos la quinta parte del total lo que equivale a dividir por 5.
25 %	$\frac{1}{4}$	Determinamos la cuarta parte del total lo que equivale a dividir por 4.
50 %	$\frac{1}{2}$	Determinamos la mitad del total lo que equivale a dividir por 2.
75 %	$\frac{3}{4}$	Determinamos las tres cuartas partes del total lo que equivale a multiplicar por $\frac{3}{4}$.

En la enseñanza primaria resolviste problemas que conducían a los tres casos del tanto por ciento, te sugiero recordar los mismo a través de ejemplos.

Ejemplo 1

El 25 % de los 120 jóvenes de una Casa de Cultura están vinculados a la manifestación de teatro.

¿Cuántos jóvenes están vinculados a esta manifestación?

Estamos buscando en este caso un número **(la parte)** que representa un **tanto por ciento** (25 %) de un número conocido; que en este caso es (120) y representa el **total**, y para encontrarlo basta con calcular el tanto por ciento del número conocido (25% de 120).

Planteamos entonces la siguiente operación:

$$\frac{25}{100} \cdot 120 = 30$$

Respuesta: Están vinculados a la manifestación de teatro 30 jóvenes.

Ejemplo 2

Al realizar una competencia de tiro, 80 pioneros de los 240 de una escuela obtuvieron la categoría “Experto Tirador”.

¿Qué tanto por ciento de la matrícula obtuvo esa categoría?

En este caso estamos determinando qué tanto por ciento es un número de otro, (qué tanto por ciento representa 80 de 240).

Para resolver esta situación en la práctica dividimos **la parte** (80), entre **el total** (240) y como queremos esta relación en tanto por ciento se multiplica el resultado obtenido por 100.

El planteamiento podría quedar:

$\frac{80}{240} \cdot 100 \approx 0{,}33 \cdot 100 \approx 33\,\%$ (en este caso el resultado es aproximado)

Respuesta: Los tiradores expertos representan aproximadamente el 33 % de la matrícula de la escuela.

Ejemplo 3

Un dúo de pioneros perteneciente a las BELCA han visitado 18 viviendas, lo que representa el 20 % de las viviendas a visitar por su grupo.

¿Cuántas viviendas debe visitar el grupo?

Aquí estamos buscando el número del cual conocemos un tanto por ciento de él (¿cuál es el número del cual 18 es el 20 %)?

Procedemos entonces dividiendo **la parte** (18) por el **tanto por ciento** que ella representa, expresado como fracción $\left(\frac{20}{100}\right)$.

El planteamiento quedaría:

$$18 : \frac{20}{100} = 18 \cdot \frac{100}{20} = 90$$

Respuesta: El grupo debe visitar 90 viviendas.

Veamos entonces otras formas de comparación utilizando porcentajes.

Debemos tener mucho cuidado al interpretar las informaciones donde se utilizan comparaciones a través del tanto por ciento, veamos algunos ejemplos.

Ejemplos

1. Interpreta las siguientes informaciones:
   a) En el año 2002 la tasa de desempleo se redujo a 3,3 %.

En esta información podemos interpretar que en el 2002 existieron, aproximadamente, 3,3 desempleados por cada 100 personas en edad laboral.

   b) En una escuela se comprobó que en este mes hubo una reducción del 3,3 % de casas sin visitar por las BELCA.

En esta información podemos interpretar que el porcentaje de casas sin visitar en este mes fue menor en 3,3 % que el tanto por ciento de casas sin visitar que hubo anteriormente (por ejemplo si anteriormente hubo un 12 % de casas sin visitar, este mes quedó sin visitar 8,7 %)

2. En el Panorama Económico y Social de Cuba del 2002 nos informan que en ese año se alcanzó una producción de 3 605 000 t de azúcar, superior en 2 % a la zafra precedente. ¿Cuál fue la producción de azúcar en el 2001?

Para averiguar la producción del año anterior tendríamos que determinar el número del cual 3 605 000 es el 102 %, ya que nos están informando que la producción de este año (3 605 000 t) fue superior a la del año anterior en 2 %.

El cálculo quedaría planteado de la siguiente forma:

$$3\ 605\ 000 \quad \frac{100}{102} \approx 3\ 534\ 314$$

La producción de azúcar del año 2001 fue aproximadamente de 3 534 314 t de azúcar.

El tanto por mil

Debes conocer que no solo el **100** se toma como número para comparar, en la estadística también se utiliza el **1 000**, por ejemplo, en algunos índices demográficos como la Tasa de Mortalidad Infantil, la Tasa de Fecundidad, etc. También podemos encontrar el average de un bateador y la simbología que se utiliza es $^{0}/_{00}$.

Luego si nos dicen que la Tasa de Mortalidad de un país es de 4; podemos interpretar que fallecieron 4 por cada mil nacidos vivos.

Para calcular el tanto por mil se procede de forma análoga al cálculo del tanto por ciento.

Ejemplo

En una provincia hubo en un mes 118 nacimientos y producto de una enfermedad congénita falleció un niño. ¿Cuál fue el índice de mortalidad infantil en esa provincia en ese mes?

Para resolver este ejercicio dividimos la cantidad de fallecidos entre la cantidad de nacimientos y multiplicamos el resultado por mil. Nos quedaría entonces de la siguiente forma:

$$\frac{1}{118} \cdot 1\,000 \approx 8{,}5$$

Respuesta: La mortalidad infantil en esa provincia fue aproximadamente de 8,5 por cada mil nacidos vivos.

Ejercicios

1. Selecciona la respuesta correcta, dejando por escrito los cálculos que sean necesarios.
   a) Que en una escuela el 95 % de los estudiantes están aprobados significa que:
      - Aprobaron 95 estudiantes.
      - Aprobaron 95 de cada mil estudiantes.
      - Aprobaron 95 de cada cien estudiantes.

   b) Para determinar el 50 % de un número basta con:
      - Multiplicar el número por 2.
      - Dividir el número entre 2.
      - Multiplicar el número por 50.

   c) El tanto por ciento que representa 75 de 375 es:

      75 %   20 %   5 %

   d) El número que representa el 75 % de 1 200 es:

1 600 9 000 900

e) El número del cual 135 es el 30 % es:

40,5 450 45

d) El average de un bateador es 950, esto significa que:·

- El bateo fue efectivo 950 veces.
- El bateador tuvo 950 oportunidades de bateo.
- La razón entre el bateo efectivo y las veces al bate fue de 0,95.

g) De los 811 600 teléfonos instalados en el país en el año 2000 el 75 % se encontraban digitalizados, por lo que podemos afirmar que de los teléfonos instalados había digitalizados:

68 700 608 700 608,7

h) De dos ángulos adyacentes uno mide el 20 % de la amplitud del otro. Entonces el mayor ángulo mide:

36º 144º 150º

2. Calcula:

a) El 85 % de 20,5.

b) El tanto por ciento que representa 58 de 300.

c) El número del cual 450 es el 90 %.

d) El 120 % de 30.

e) El número, del cual 20 es el 120 %.

f) El 120 % de un número, si 50 representa el 20 % de ese número.

3. Debido al bloqueo de los Estados Unidos contra Cuba una de las ramas más afectadas ha sido el transporte marítimo, que en el año 2002 tuvo una reducción de 3 463 000 t transportadas por este medio con respecto a las 9 789 000 transportadas en el 2001.

¿Cuál fue el tanto por ciento de afectación?

4. Un grupo de 7mo. grado se divide en tres brigadas para visitar casas por las BELCA. La brigada 1 visitó el 25 % y la brigada 2 la tercera parte del resto.

¿Cuál de las brigadas visitó mayor cantidad de viviendas?

Brigada 1 Brigada Brigada 3 No se puede decidir

2

5. Un rectángulo tiene un lado que mide 20 cm de longitud y el 70 % de su área es de 70 cm^2. Determina la longitud del otro lado del rectángulo.
6. El perímetro de un cuadrado **A** es de 60 cm. ¿Cuál es el área de un cuadrado **B** cuyos lados miden el 80 % del lado del cuadrado **A**?
7. A finales del año 2000 el periódico *Granma* publicó un artículo que se titulaba “Los hombres marcan la diferencia”. En el mismo se planteaba que en esa fecha en nuestro país había 1 138 enfermos de SIDA, de los cuales el 79 % eran varones.
   a) De esta información podemos deducir que:
      - Del total de enfermos de SIDA en ese momento, 79 eran varones.
      - De cada cien varones, 79 eran portadores de la enfermedad.
      - De cada cien enfermos de SIDA en ese momento, 79 eran varones.

   b) ¿Cuántas mujeres había en ese momento con esta enfermedad?
8. Según datos de la UNICEF, de los 122 millones de niños nacidos en 1980, 12 millones murieron antes de cumplir el año y el 95 % de ellos en los países subdesarrollados.
   a) Determina el índice de mortalidad infantil del mundo en ese año.
   b) ¿A cuánto asciende la cifra de los niños fallecidos en ese año pertenecientes a países subdesarrollados?
9. La Organización Mundial de la Salud advierte en uno de sus informes, que 65 000 niños se infectan cada año con el VIH-SIDA, de los cuales el 90 % son contagiados por su propia madre. Determina cuántos de estos niños no son contagiados por la vía congénita.
10. En el discurso pronunciado por nuestro Comandante en Jefe en el Acto de inauguración del curso 2003-2004 al referirse al programa social “Educa a tu hijo” manifestó que la evaluación realizada en el año 1999 demostró que el 87 % de la muestra alcanzó todos los indicadores previstos.

    Esto significa que alcanzaron todos los indicadores:
    - 1 de cada 87 niños de la muestra.
    - 87 niños de la muestra.

- 87 por cada mil niños de la muestra.
- 87 por cada cien niños de la muestra.

11. En los datos ofrecidos por el Panorama Económico y Social de Cuba del 2003 nos informan que al concluir el año 2002 la producción del crudo nacional creció en un 26 %. Lo que significa que:
    - Se produjeron 26 t más de crudo nacional que en el año 2001.
    - La producción de crudo nacional en el 2002 llegó a ser del 26 %.
    - La producción de crudo nacional en el 2002 sobrepasó a la del año 2001 en un 26 %.
12. Producto del bloqueo de los Estados Unidos contra Cuba los derechos de importación en nuestro país se redujeron del año 2001 al 2002 al 91,7 %. Esto significa que:
    - Los derechos de importación en el año 2002 se redujeron en un 91,7 % respecto al año anterior.
    - Los derechos de importación en el año 2001 fueron superiores en 8,3 % respecto al año 2002.
    - Los derechos de importación en el año 2002 se redujeron en 8,7 % respecto al año anterior.
13. Orlando entrega a un amigo el 5 % de los tornillos que contiene una caja y él utilizó después el 20 %, quedando en la caja:
    - Un porcentaje que no se puede determinar.
    - El 25 % de los tornillos.
    - El 75 % de los tornillos.
14. Mariana entrega a una amiga el 5 % de los sellos de su colección y a su hermana el 20 % del resto, quedándose con:
    - El 24 % de los sellos.
    - El 25 % de los sellos.
    - El 76 % de los sellos.

15. Una persona debe recorrer $\frac{2}{9}$ de una determinada distancia en automóvil; el 50 % del resto en ómnibus y los 245 km restantes en tren. ¿Cuál es la distancia total que debe recorrer la persona?
16. Entre David, Evaristo y Fabián deben llenar un tanque de agua. David llena el 60% de la capacidad del tanque; Fabián $\frac{1}{4}$ del resto y Evaristo termina de llenarlo depositando 30,6 g de agua. ¿Cuál es la capacidad del tanque en galones?
17. Un triángulo tiene una base de 8,0 cm y un área de 20 cm^2. Si la base aumenta en un 25 %; ¿qué porcentaje de la altura debe disminuirse para que se mantenga igual a su área?
18. Un niño tenía cierta cantidad de cordel y utilizó el 25 % para empinar un papalote. De lo que le quedó, le regaló el 50 % a un amigo y luego le dio 30 m a su mamá para que tejiera. ¿Cuántos metros de cordel tenía al principio?
19. Una parcela de tierra de 375 m^2 tiene forma rectangular, la longitud de uno de sus lados es el 60 % de la del otro. Hallar la longitud de los lados de la parcela.
20. Si un lado de un cuadrado aumenta en un 20%, determina en qué tanto por ciento aumenta su perímetro.

Razones y proporciones

Lee detenidamente la siguiente información:

En una secundaria básica se recolectaron en el mes de septiembre 250 kg de aluminio y en octubre 450 kg.

Mediante qué operaciones puedes realizar la comparación de estas cantidades.

Una de las formas sería calculando la **diferencia** entre estas cantidades (450 – 250 = 200) y plantear: en octubre la recolección de aluminio excedió en 200 kg a lo recolectado en septiembre.

Otra forma sería a través del **tanto por ciento,** calculando qué tanto por ciento representa 450 de 200 ($\frac{450}{200} \cdot 100 = 180$ %) y plantear que: en octubre la recogida de aluminio superó en un 80 % a la del mes de septiembre.

Pero podemos también compararla utilizando la **razón** entre ellas ($\frac{450}{200} = 2{,}25$) y en este caso podemos decir que: la recolección de aluminio en el mes de octubre fue 2,25 veces superior a la de septiembre.

Recordemos entonces ¿**qué es una razón**?

La **razón** entre dos números **a** y **b** es la fracción $\frac{a}{b}$ (a; $b \in Q_+$; $b \neq 0$) que también se puede escribir **a : b** y se lee **a** es a **b**.

Para buscar otra pareja de números que estén en la misma razón que $\frac{a}{b}$ basta con ampliar o reducir esta razón.

Ejemplo 1

Selecciona de las siguientes parejas de números las que estén en la misma razón de $\frac{22}{108}$:

a) 44 y 148   b) 11 y 54   c) 220 y 1 080

El inciso a) no debe ser seleccionado pues la razón $\frac{44}{148}$ no se obtiene de ampliar ni de simplificar a la razón $\frac{22}{108}$.

En el inciso b) los números 11 y 54 están en la misma razón que la razón dada, ya que $\frac{11}{54}$ podemos obtenerla al simplificar por 2 la razón original.

En el inciso c) los números 220 y 1 080 están en la misma razón que $\frac{22}{108}$ en este caso ampliando la razón original por 10.

Debemos entonces recordar que:

La igualdad entre dos razones recibe el nombre de **proporción.**

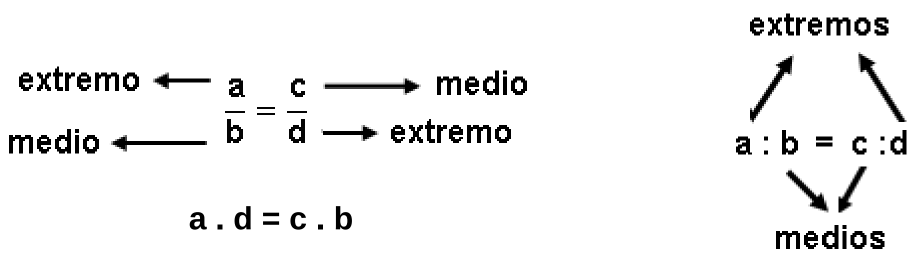
Una proporción se escribe $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ o *a* : *b* **=** *c* **:** *d* y se lee *a* es a *b* como *c* es a *d*, y siempre debemos tener en cuenta que:

a; b; c; d $\in$ Q_+ ; *b* $\neq$ 0 ; *d* $\neq$ 0.

También recordaremos de la primaria la propiedad fundamental de las proporciones.

En toda proporción se cumple que:

El producto de los extremos es igual al producto de los medios.



Esta propiedad fundamental es de gran utilidad para determinar uno de los elementos de una proporción conocidos los otros.

Ejempl

Una fábrica produce 1 200 piezas en 3 h de trabajo. ¿Cuántas piezas debe producir en una jornada de 8 h?

Para resolver el problema debemos plantear la proporción que se puede establecer entre la cantidad de piezas y el tiempo en que se fabrican.

$$\frac{1200}{x} = \frac{3}{8}$$

$1200 \cdot 8 = 3 \cdot x$ Aplicando la propiedad fundamental de las proporciones.

$\frac{1\,200 \cdot 8}{3} = x$ Despejando la variable.

3 200 = *x* Calculando.

Respuesta: En una jornada de 8 h se fabricarán 3 200 piezas.

Ejercicios

1. Sean A = 20 % de 180 $B = \dfrac{2^3 \cdot 2^5}{2^6}$ C = 10,5 : 0,5

   sustituye el símbolo ∇ por el valor de A, B o C de manera que las siguientes proporciones sean verdaderas.

   a) $\dfrac{88}{168} = \dfrac{11}{\nabla}$ b) $\dfrac{\nabla}{945} = \dfrac{4}{105}$ c) $\dfrac{164}{\nabla} = 41$

2. Enlaza la situación planteada en la columna **A** con la proporción dada en la columna **B** que le pueda dar solución.

A	B
• Un trabajador abona 16 surcos en dos jornadas de trabajo. ¿Cuántas jornadas debe trabajar para terminar de abonar los 48 surcos del huerto?	$\dfrac{16}{48} = \dfrac{2}{x}$
• Un trabajador abona 16 surcos en dos jornadas de trabajo. ¿Cuántas jornadas debe trabajar para abonar los 48 surcos del huerto?	$\dfrac{2}{x} = \dfrac{16}{144}$
• Un trabajador abona 16 surcos en dos jornadas de trabajo. ¿Cuántas jornadas debe trabajar para realizar los 3 pases de abono que llevan los 48 surcos del huerto?	$\dfrac{16}{2} = \dfrac{32}{x}$

3. En un terreno cuadrado de 25 m de largo deben sembrarse 9 árboles por cada 15 m^2. ¿Cuántas posturas harán falta para dar cumplimiento a esta tarea?

4. Selecciona de los cuatro números dados el que completa la proporción:

$\dfrac{\triangle\triangle\triangle\triangle}{\begin{array}{c}\triangle\triangle\triangle\\ \triangle\triangle\end{array}} = \dfrac{\_\_\_\_}{2{,}5}$	3,5 1,5 2 4,2

5. Un auto se mueve a una velocidad constante y recorre 120 km en 1,5 h. ¿Qué tiempo requerirá otro auto que se mueve a la misma velocidad para recorrer 280 km?

   3 h y 5 m 3 h y 50 m

   3 h y 30 m 0,64 h

6. Dos ciudades que distan una de otra 210 km se encuentran en el mapa a 7,0 cm de distancia. La distancia real entre otras dos ciudades que distan 1,5 dm en el mismo mapa es:

   98 km   45 km.   450 km.   No existen datos suficientes

7. Datos de la UNICEF estiman que 500 000 mujeres mueren cada año en Asia y África por causas relacionadas con el embarazo y el parto. Las dos terceras partes de ellas víctimas de la desnutrición y la anemia.
   a) ¿Qué tanto por ciento representan las fallecidas por desnutrición y anemia del total de decesos relacionados con el embarazo y el parto?
   b) Determina la cantidad de mujeres que pueden fallecer en estos continentes en un quinquenio por estas causas.
8. Si un auto consume 6 L de gasolina al recorrer 72 km, al recorrer 216 km más manteniendo la misma velocidad debe consumir en total:
   - La tercera parte del combustible utilizado anteriormente.
   - El triplo del combustible utilizado anteriormente.
   - El cuádruplo del combustible utilizado anteriormente.
9. En las instrucciones de un envase de pintura se puede leer. “Rendimiento: 8 m^2 por litro”. Si se utilizó 3,5 envases de 4 L cada uno y se dieron dos manos a la misma habitación, ¿qué superficie tiene dicha habitación.

Capítulo 2
Lenguaje de las variables

Introducción

¿Sabes desde cuando aparecieron los primeros indicios sobre variables? Según recoge la historia, en un pueblo que existió en el Asia Menor. Estas ideas sobre las variables permanecieron ocultas en las tablillas de barro durante miles de años. En el siglo III a.n.e surgió un matemático griego, Diofanto de Alejandría, que usó métodos del trabajo con variables para resolver maravillosamente problemas y ejercicios diversos.

En este capítulo sistematizarás lo estudiado por ti en la escuela primaria. Primeramente, utilizarás las variables para expresar situaciones de la vida en las que aparecen relaciones entre números, después trabajarás con los términos y expresiones algebraicas y recordarás cómo se resuelven las ecuaciones estudiadas por ti en grados anteriores. Por último, encontrarás la solución a problemas relacionados con la escuela, con las actividades que realizan los pioneros, con la vida económica, política y social del país, en los que para resolverlos deberás plantear y resolver ecuaciones.

2.1 Traducción de situaciones de la vida al lenguaje algebraico

Desde los primeros grados de la escuela primaria has utilizado las variables, que no son más que letras que representan números cualesquiera.

Una variable, un número o las combinaciones de variables y números mediante las operaciones de multiplicación, división y potenciación se llaman **términos.**

Las expresiones algebraicas son términos relacionados mediante la adición y la sustracción. Por ejemplo: 8, $3t$, $5mn$, $2x^2y$ son términos y $3t + 5mn - 8$ es una expresión algebraica.

Cuando en una expresión algebraica se sustituyen las variables por números y se efectúan las operaciones indicadas, al número que se obtiene se le denomina valor numérico de la expresión algebraica. Por ejemplo, la expresión algebraica $4a + 7$ para $a = \frac{1}{4}$ tiene como valor numérico al número 8, pues $4 \cdot \frac{1}{4} + 7 = 1 + 7 = 8$.

Muchas situaciones de la vida diaria pueden escribirse empleando las variables. En este caso decimos que realizamos una traducción del lenguaje común al lenguaje de las variables. También las expresiones algebraicas pueden leerse o escribirse empleando la lengua materna, en este caso traducimos del lenguaje de las variables al lenguaje común.

Al realizar traducciones del lenguaje común al de las variables te recomendamos que leas detenidamente el texto a traducir, identifiques las palabras claves y busques en el diccionario su significado, así como sinónimos de las mismas que te ayudarán a interpretar la situación que aparece en el texto. Por último, te recordamos que debes señalar el significado de las variables que emplearás en la traducción.

Ejercicios

1. Expresa en el lenguaje de las variables:
   a) El triplo de un número.
   b) Un número aumentado en tres.
   c) Cinco veces un número.
   d) Las dos terceras partes de un número.
   e) La mitad de un número disminuida en 1.
   f) Un número excede en tres a otro número.
2. Traduce al lenguaje común:

   a) $\frac{1}{3}x$ b) $5t$ c) $m + 2$

   d) $n - 5$ e) $x - y = 8$ f) $\frac{1}{4}t - 3$

3. Selecciona la respuesta correcta:
   a) Un monitor de Matemática quiere representar en el lenguaje de las variables la siguiente situación:

La mitad de los ejercicios realizados en clases aumentado en uno fueron resueltos correctamente. Señala cómo escribiría el monitor esta situación, SI *x* representa la cantidad de ejercicios realizados.

$2x$ $\frac{1}{2}x$ $\frac{1}{2}x + 1$ $2x + 1$

b) Emilio tiene *n* años y su papá tiene el doble de su edad aumentada en seis años. Indica cómo se puede representar en el lenguaje de las variables la edad del papá de Emilio.

$2n$ $2n + 6$ n $n + 6$

c) Un número *n* excede en 5 a otro número *m*. ¿Cómo se puede representar en el lenguaje de las variables la relación existente entre los números *n* y *m*? Señala la respuesta correcta.

$n + 5 = m$ $n – 5 = m$ $m + n = 5$ $m – 5 = n$

d) Ernesto tiene *t* años y su papá tiene tres veces su edad disminuida en dos años. Selecciona cómo se representa la edad del papá de Ernesto en el lenguaje de las variables:

$t + 3$ $3t$ $t – 2$ 3t - 2

4. Dadas las siguientes expresiones algebraicas tradúcelas al lenguaje común y redacta una situación práctica que le corresponda señalando el significado de la variable en cada caso:

a) x b) $4y$ c) $\frac{1}{8}z$ d) $t + 5$

e) $m – 2$ f) $\frac{42}{100}x$ g) $x – y = 2$ h) $a – 5 = b$

5. Escribe en el lenguaje de las variables las siguientes situaciones prácticas señalando en cada caso el significado de la variable:

a) La tercera parte de los ingresos del país por el concepto de turismo provienen del Polo Turístico de Varadero.

b) Al cierre del año hidráulico de mayo de 2003 a abril de 2004 la situación de los embalses del país era la peor del último decenio. Las presas acumulaban mil quinientos millones de metros cúbicos de agua menos que el año pasado en esta fecha.

c) El producto interno bruto de los países desarrollados es veinte veces superior al de los países pobres.

d) En los países pobres la mortalidad infantil en menores de un año es doce veces superior que en los países ricos.

e) El 85 % de la población mundial lo constituyen los países pobres.

f) Los países pobres consumen el 30 % de la energía, el 25 % de los metales y el 15 % de la madera del mundo.

g) El número de atletas femeninas que participaron en los juegos olímpicos del 2000 excede en 620 a las que participaron en los juegos olímpicos de 1996.

h) El 15 % de los cubanos tienen hoy 60 años o más.

i) En la rotación en la ONU del año 2004 sobre la resolución de condena al bloqueo, la cantidad de votos a favor obtenidos por Cuba excedió en 62 a los obtenidos hace una década.

6. El 24 de septiembre de 2004, ante el 59 período ordinario de sesiones de la Asamblea General de Naciones Unidas, el compañero Felipe Pérez Roque, Ministro de Relaciones Exteriores de nuestro país, analizó que los objetivos de la Declaración del Milenio no serán cumplidos. Expresa en el lenguaje de las variables los siguientes objetivos de la Declaración del Milenio y señala el significado de la variable en cada caso:

a) Disminuir a la mitad para el 2015 los seres humanos en pobreza extrema que había en 1990.

b) Disminuir a la mitad para el 2015 los hambrientos que había registrados en 1990 en el mundo.

c) Reducir en dos terceras partes la mortalidad en menores de cinco años que había en 1990 para el 2015.

7. Expresa en el lenguaje algebraico:

a) Las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo suman 180°.

b) En todos los triángulos cada lado es menor que la suma de los otros dos lados.

c) La multiplicación de fracciones se realiza multiplicando los numeradores y los denominadores.

d) Las amplitudes de dos ángulos adyacentes suman 180°.

e) Las amplitudes de dos ángulos complementarios suman 90°.

f) Las amplitudes de dos ángulos suplementarios suman 180°.

g) La amplitud de cada ángulo exterior es igual a la suma de las amplitudes de los ángulos interiores no adyacentes a él.

h) La suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un cuadrilátero es igual a 360˚.

8. Completa la siguiente tabla:

x	0	$\frac{1}{5}$	0,8	1	$1\frac{1}{2}$	2,5
$3x + \frac{1}{2}$						

9. Halla el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para x = 7 085.

a) $x + 9\,237$ b) $x - 384$ c) $206 + 2x - 7\,025$

10. Completa la siguiente tabla:

x	$x + 2$	$2x - \frac{2}{5}$	$3x + 1$
3			

$\frac{1}{5}$			
1,5			

11. Completa la siguiente tabla:

Expresión algebraica	Valor numérico para $a = 2$	*Valor numérico para* $a = \frac{5}{2}$
$\frac{5}{4}a - 2$		
$7{,}2a + 4{,}9$		
$2a + 3a – 5$		
$\frac{4}{3}a + \frac{3}{4}a – \frac{1}{2}$		

12. Halla el valor numérico de las siguientes expresiones:

a) 2m – 3; para m = 4

b) $\frac{3}{5}a + 2\frac{1}{5}$; para $a = \frac{4}{3}$

c) 7y – y – 2y +5; para y = 6

d) 0,3 t + 5t + 5,1; para t = 1,24

e) $\frac{1}{8}n + \frac{5}{8}n – \frac{3}{8}n – \frac{3}{4}$; para n = 2

f) $\frac{5}{4}x + 2{,}7x + \frac{1}{2}$; para x = 0,5

g) 8,1z – 0,5z – 9,3; para $z = \frac{5}{2}$

13. Prueba que $A \cdot B - 2C = 13{,}4m$; para $A = 8{,}2$, $B = 2m$ y $C = \frac{3}{2}m$.

14. Comprueba que $12g + 5g - 9g - 11 = 5$; para $g = 2$.

15. Si $M = 2$, $N = \frac{5}{2}x - 5{,}75$

a) Calcula la expresión algebraica P tal que $P = M\,x + N$

b) Comprueba que para $x = \frac{3}{2}$ se cumple que $P = 1$.

16. Completa los espacios en blanco:

m	n	m + n – 5	m – n + 6
8	3		
5,4		3	
	6		8,5
		8	11

17. Completa la siguiente tabla:

Situación matemática	Expresión algebraica	Valor numérico de la expresión para x = 5
El duplo de un número aumentado en 7.	$2x + 7$	$2 \cdot 5 + 7$ $10 + 7 = 17$
	$\frac{x}{5} + 3x$	
Un número disminuido en su mitad.		
	$\frac{x}{9}$	

18. Señala los términos semejantes en las siguientes expresiones:

a) $2m - 7 + 5m + 2$

b) $17n + n - 8$

c) $3t - t + 6 + 9s + t - 5$

d) $12r + 5 - 2u - 9r - 2 + 12u$

e) $y - 3{,}2 + z - 6{,}9z - \frac{7}{8} + 22$

f) $1 + 7\frac{1}{3}k + \frac{3}{8} - 8{,}5k + 0{,}5 + h$

g) $2{,}7 + 0{,}3x + 5 + 2{,}1x + 7{,}2x + 8{,}9$

19. Reduce términos semejantes en:

a) $2y + y + 5y$

b) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}x$

c) $7{,}2a + 9a + 2{,}85a$

d) $3m + 12 - m - 7 + 5m$

e) $\frac{5}{8}b + 0{,}5b - 1{,}07$

f) $\frac{3}{4}t + \frac{1}{8} + \frac{1}{4}t + \frac{1}{4} + \frac{5}{4}t + 2\frac{1}{4}$

20. Sean $A = 6x$, $B = \frac{2}{5}x$, $C = 8 + 2x$. Calcula $A - B + C$.

21. El quíntuplo de un número x aumentado en dos es igual a catorce. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones representa esta relación?

a) $5x - 2 = 14$ b) $5x \cdot 2 = 14$ c) $5x + 2 = 14$ d) $\frac{1}{5}x + 2 = 14$

22. El Guía Base de una escuela quiere mediante una ecuación representar la información siguiente:

La tercera parte de los pioneros de la escuela excede en 15 a los 120 pioneros que integran la tabla gimnástica. ¿Cómo representa el Guía Base la ecuación? Si *x* representa la cantidad de pioneros de la escuela.

a) $\frac{x}{3} + 15 = 120$ b) $3x - 15 = 120$ c) $x + 15 = 120$ d) $\frac{x}{3} - 15 = 120$

23. La Jefa de Colectivo necesita escribir la ecuación que le corresponde a la información siguiente:

La quinta parte de las hembras del grupo 1 excede en 9 a las 11 alumnas del grupo 2.

Señala cuál es la ecuación que escribiría la Jefa de Colectivo.

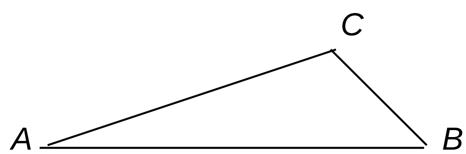
a) $x + 9 = 11$ b) $\frac{x}{5} - 9 = 11$ c) $\frac{x}{5} + 9 = 11$ d) $5x - 9 = 11$

24. Una persona al entrar a un agro gasta primeramente \$ 8,50; después compra tres libras y media de arroz y cuatro libras de malanga al mismo precio. Al salir del agro había gastado \$ 34,75.
La ecuación mediante la cual podemos calcular el precio de estos productos es:

- $3{,}5x + 4y + 8{,}50 = 34{,}75$
- $3{,}5x + 4x + 8{,}50 = 34{,}75$
- $3{,}5x + 4x = 34{,}75$

25 el Δ *ABC* la amplitud del ángulo *C* excede en 100° a la amplitud del ángulo *A* y el ángulo *B* mide 48°. Luego para calcular la amplitud del ángulo *A* podemos hacerlo con la ecuación:

- $x + 148° = 180°$
- $2x + 148° = 180°$
- $2x + 100° = 48°$



26 Escribe el número de cuatro cifras que tiene dieciocho centenas, en el lugar de las decenas tiene la mitad de la cifra de las centenas y en el lugar de las unidades el duplo de las unidades de millar.

27 Escribe el número de tres cifras que tiene veintitrés decenas y la cifra de las unidades excede en cinco a la cifra de las decenas.

28 Escribe el número de cuatro cifras que tiene tres en la cifra de las unidades, en las decenas el triplo de la cifra de las unidades, y la cantidad de centenas excede en dos a la cifra de las decenas.

29 Escribe el número de dos cifras que tiene dos decenas y la cifra de las unidades excede en seis a la cifra de las decenas.

30 De un número de tres cifras se conoce que tiene doce decenas y que la cifra de las unidades es la tercera parte de la cantidad de decenas. ¿Cuál es el número?

31 Un número de cuatro cifras tiene seis unidades de millar, en la cifra de las centenas tiene la mitad de las unidades de millar, en las decenas tiene la cifra de las centenas aumentada en uno y en las unidades el doble de las decenas. ¿Cuál es el número?

2.2 Resolución de problemas que conducen a ecuaciones lineales

Ya conoces que las ecuaciones son igualdades que contienen variables. En las ecuaciones, a las expresiones que se encuentran a la izquierda y a la derecha del signo igual a se les denominan miembros de la ecuación. Por ejemplo: $7{,}2x - 3{,}45 = 8{,}9$ es una ecuación en la cual el miembro izquierdo es la expresión $7{,}2x - 3{,}45$ y el miembro derecho es 8,9.

Las proposiciones son afirmaciones para las que se puede determinar si son verdaderas o falsas. En las igualdades que no contienen variables podemos establecer si son verdaderas o falsas, entonces estas igualdades son proposiciones. Por ejemplo: la igualdad $5{,}4 + 2 = 7{,}4$ es una proposición verdadera, en cambio la igualdad $23 + 8 = 41$ es una proposición falsa.

En las ecuaciones, las variables se sustituyen por valores de los conjuntos numéricos. A estos dominios numéricos se les denomina dominio de la variable. Si al sustituir la variable por un valor de su dominio, la ecuación se transforma en una proposición verdadera entonces se dice que ese número por el que sustituyó la variable, es una solución de la ecuación. Por ejemplo: la ecuación $8x = 24$ tiene como solución al número 3, porque al sustituir la variable x por 3 se obtiene la proposición $8 \cdot 3 = 24$, que es verdadera.

Las ecuaciones pueden tener solución (ser solubles) o no tener solución (insolubles). Las ecuaciones solubles pueden tener una solución única o infinitas soluciones. El conjunto formado por todas las soluciones de la ecuación se denomina conjunto solución.

Como la solución de la ecuación depende del dominio de la variable, hay ecuaciones que pueden ser solubles en un dominio numérico e insoluble en otro. Por ejemplo, la ecuación $4x = 3$ no tiene solución en el dominio de los números naturales, pues no existe ningún número natural que multiplicado por 4 sea igual a 3 (nota que 3 no es un múltiplo de 4). En cambio, en el dominio de los números fraccionarios la ecuación es soluble, pues $4 \cdot \frac{3}{4} = 3$, luego $\frac{3}{4}$ es solución de la ecuación.

Existen ecuaciones que no tienen solución en ninguno de los dominios numéricos que hasta ahora conoces. Por ejemplo, la ecuación $x + 5 = 3$, no tiene solución ni en N ni en Q_+, porque no existe ningún número natural ni fraccionario que sumado con 5 sea igual a 3.

Existen también ecuaciones que tienen infinitas soluciones. Por ejemplo: la ecuación $0{,}3\,x + 7 - \frac{3}{10}x = 7$ tiene infinitas soluciones, pues al sustituir la variable x por cualquier valor la ecuación se transforma en una proposición verdadera.

Nota que para $x = 0$ se obtiene $0{,}3 \cdot 0 + 7 - \frac{3}{10} \cdot 0 = 0 + 7 - 0 = 7$, luego 0 es una solución, para $x = 5$ resulta que $0{,}3 \cdot 5 + 7 - \frac{3}{10} \cdot 5 = 1{,}5 + 7 - 1{,}5 = 7$, y por tanto 5 también es solución de la ecuación, y para $x = \frac{2}{5}$ ocurre que: $0{,}3 \cdot \frac{2}{5} + 7 - \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{5} = 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 7 - \frac{3}{25} = 0{,}12 + 7 - 0{,}12 = 7$, lo que quiere decir que $\frac{2}{5}$ satisface esta ecuación. En este caso el conjunto solución de la ecuación es el dominio básico de la variable. Siempre que no se indique cuál es el dominio de la variable se tomará el conjunto de los números fraccionarios.

En esta unidad resolverás ecuaciones lineales de la forma $ax = b$ $(a \neq 0)$; $ax + b = c$ $(a \neq 0,\ c > b)$; $ax + bx + c = d$ $(a \neq 0,\ b \neq 0,\ d>c)$ con a, b, c y d números fraccionarios.

Veamos mediante un ejemplo el procedimiento para resolver una ecuación lineal.

Procedimiento de resolución de la ecuación	**Ejemplo** $\mathbf{5m - 2m + m + 3 = 7}$	**Explicación**
Agrupar los términos semejantes en cada miembro de la ecuación.	$5m - 2m + m = 7 - 3$	Los términos semejantes son aquellos que tienen la misma parte literal. Debes recordar que al pasar un término de un miembro a otro se pasa con la operación inversa.
Reducir términos semejantes.	$4m = 4$	Para reducir términos semejantes calculamos las operaciones indicadas con los coeficientes y se mantiene la parte literal del término.
Despejar la variable.	$m = \frac{4}{4}$	Para despejar la variable hay que pasar al otro miembro el coeficiente de la variable, como el coeficiente de la variable está multiplicando a la variable pasa al otro miembro con la operación inversa, o sea, dividiendo.
Calcular el valor de la variable.	$m = 1$	Efectuamos la división indicada.

Comprobar que el valor obtenido satisface la ecuación.	M_I: $5 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 1 + 3$ M_D: 7 $= 5 - 2 + 1 + 3$ $= 7$ $7 = 7$	Se calcula el valor numérico de la expresión algebraica para el valor hallado de la variable y se comparan los resultados de los dos miembros de la ecuación.
Escribir el conjunto solución.	S = {1}	Escribimos en notación tabular el conjunto cuyo elemento es la solución de la ecuación. Si la ecuación no tiene solución escribimos S = Ø.

Numerosos problemas se resuelven empleando ecuaciones de esta forma. Debes al resolver un problema:

- Leer el texto.
- Señalar el significado de la variable.
- Traducir del lenguaje común al algebraico las relaciones que se plantean en el texto del problema.
- Plantear la ecuación.
- Resolver la ecuación.
- Comprobar que la solución de la ecuación satisface las condiciones que aparecen en el texto del problema.
- Redactar la respuesta de la pregunta del problema.

Ejercicios

1. Analiza si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas cuando el dominio. Fundamenta las falsas.

   a) El conjunto solución de la ecuación 5 x = 19 en lN es vacío.

   b) La ecuación o · x = $\frac{7}{8}$ tiene solución.

   c) La ecuación 2x + 3 = 5 tiene una única solución.

d) La ecuación $\frac{1}{2}$ x = 0,5 x tiene una única solución.

e) La ecuación 2x = 0 tiene infinitas soluciones.

f) La ecuación lineal en una variable tiene dos soluciones.

g) La solución de la ecuación $\frac{1}{3}x - 4 = 0$ es $x_1 = \frac{4}{3}$.

h) $x_1 = 2$ y $x_2 = 5$ son soluciones de la misma ecuación lineal.

2. Completa la tabla:

Ecuaciones	Solución en el dominio de los números	
	naturales	fraccionarios
3y = 8		
7a = 21		
2m + 1 = 5		
x + 7 = 3		
$\frac{7}{2}y = 14$		

3. ¿En cuál dominio básico la ecuación 3x – 2 = 8 no tiene solución?

4. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) 5x = 10 b) 2 3m =2 346 c) 7x – 3 = 8

d) 3t + 19 = 43 e) 0,11x + 2 = 5,3 f) 10a – 3,8 = 0,25

g) 3x – 2x + 5x = 3 h) $2\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}a = 4$ i) x + 2x – 1 = 1

j) $\frac{5}{6}y + \frac{3}{4}y - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{4}$ k) $\frac{5}{2}x + 2{,}5x + 3 = 13$

5. Determina el conjunto solución de las siguientes ecuaciones para el dominio de la variable que se indica.

a) 2x + 1 = 4 $(x \in N)$ b) $0{,}6x - \frac{3}{5}x = \frac{1}{5}$ $(x \in Q_+)$

c) 6,3 + 4x = 12,6 $(x \in Q_+)$ d) $\frac{1}{3}x + 2\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ $(x \in N)$

e) 5x + 2x + 3 = 3 $(x \in N)$ f) $\frac{3}{2}x + 0{,}5 - 1{,}5x = 0{,}5$ $(x \in Q_+)$

g) $8{,}2\ x + 2{,}9x - 0{,}3x - 17{,}2 = 15{,}2$ $(x \in N)$

6. ¿Qué números fraccionarios satisfacen las ecuaciones siguientes?:

a) $2z = 5$

b) $\frac{3}{2}y = \frac{5}{3}$

c) $3x + 5 = 2$

d) $6t + 2t - t = 21$

e) $\frac{3}{5}x + 1{,}7 + 3{,}5x - 4{,}1x = 1{,}7$

f) $7{,}2 + 0{,}54a + 0{,}21a = 7{,}74$

g) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{4}x + \frac{7}{6} = \frac{7}{3}$

7. ¿Para qué valor de la variable las siguientes ecuaciones se transforman en proposiciones verdaderas?

a) $7{,}82a - 1{,}06 = 23{,}182$

b) $1\ \frac{1}{2}b + \frac{3}{4} = \frac{7}{8}$

c) $\frac{4}{5}c - 1{,}7 = 1{,}42$

d) $17m + 8m + 789 = 1\ 884$

e) $\frac{2}{5}n - \frac{1}{3}n - \frac{3}{5} = 2\ \frac{4}{3}$

8. De las siguientes ecuaciones señala cuál de los valores que se indican es la solución:

a) $3x - 2 = 2$

$x = \frac{4}{3}$ $\qquad$ $x = 0$ $\qquad$ $x = 12$

b) $3x + 7x - 3 = 1$

$x = \frac{1}{7}$ $\qquad$ $x = \frac{2}{5}$ $\qquad$ $x = 40$

c) $\frac{2}{3}x - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}x = \frac{5}{4}$

$x = \frac{11}{24}$ $\qquad$ $x = \frac{24}{11}$ $\qquad$ $x = \frac{6}{11}$

9. Escribe una ecuación de la forma $a \cdot x = b\ (a \neq 0)$ cuyo conjunto solución sea $S = \{2\}$.

10. ¿Qué valor deben tomar *a* y *b* en cada caso para que la solución de las ecuaciones que se indican sea $x = \frac{2}{3}$?

    a) $ax + \frac{1}{3} = 8$

    b) $\frac{23}{2}x + b = 8$

11. Escribe una ecuación de la forma ax + b = c (a ≠ 0) que tenga en el dominio de los números fraccionarios al número $\frac{2}{5}$ como solución.

12. Construye ecuaciones de las estudiadas en el 7mo. grado que tengan los siguientes números como solución:

    a) 4 b) $\frac{1}{3}$ c) 2,5 d) 0

13 Hasta abril de 2002 el número de técnicos deportivos cubanos que laboraban en la República Bolivariana de Venezuela excedía en 151 a la cantidad de técnicos de la salud de nuestro país que allá prestan servicios. Si en esos momentos se encontraban en Venezuela 228 técnicos de la salud, selecciona la ecuación que permite obtener el número de técnicos deportivos, (la variable d representa el número de técnicos deportivos):

a) $d + 151 = 228$
b) $d + 151 = 228$
c) $d - 151 = 228$
d) $d + 228 = 151$

14 La longitud de la costa norte de Cuba excede en 672 km a la longitud de la costa sur. Selecciona cuál de las siguientes ecuaciones permite hallar la longitud en kilómetros de la costa norte de Cuba, si se conoce que la costa sur tiene una longitud de 2 537 km (la variable x representa la longitud en kilóletros de la costa norte):

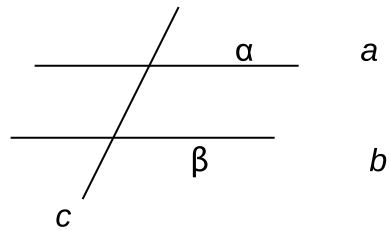
- $x + 672 = 2\,537$
- $x + 2\,537 = 672$
- $x - 672 = 2\,537$
- $x = 672 + 2\,537$

15 En la figura *a* y *b* son rectas paralelas cortadas por la secante *c*. La amplitud del ángulo *β* excede en 100° a la amplitud del ángulo *α*. Luego para calcular la amplitud de *α* podemos hacerlo resolviendo la ecuación:

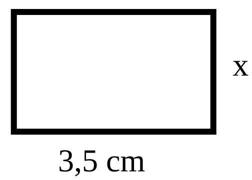
$\alpha = \alpha + 100°$

$2\ \alpha + 100° = 180°$

$\alpha + 100° = 180$



16. En la figura aparece un rectángulo cuyo perímetro es de 28 cm. Luego para calcular la longitud del lado denotado por la letra x podemos hacerlo con la ecuación:



- $2x + 3{,}5 = 28$
- $2x + 7 = 28$
- $x + 3{,}5 = 28$

17 Escribe cómo se lee el número que:

a) Aumentado en 2 069 es igual a 5 101.

b) Multiplicado por 32 es 6 656.

c) Su mitad es 3,8.

d) Disminuido en 5,78 es 17,38.

e) Excede en 15 a 97.

18 Si un número x es multiplicado por 7 y se le adiciona 3, el resultado es 164. ¿Cuál es el número?

19 El perímetro de un triángulo equilátero es igual a 73,5 cm, ¿qué longitud tienen los lados del triángulo?

20 Calcula las amplitudes de dos ángulos adyacentes, si se sabe que la amplitud de uno es el quíntuplo de la amplitud del otro.

21 El perímetro de un cuadrado es igual a 34 cm, ¿cuál es la longitud del lado del cuadrado?

22 Sea un triángulo isósceles. Si la amplitud del ángulo principal es dos veces la amplitud de un ángulo base, ¿cuál es la amplitud de los ángulos del triángulo?

23 En un rectángulo cuyo perímetro es igual a 30,8 cm, uno de los lados es 3 cm más largo que el otro. Calcula las dimensiones del rectángulo.

24 En un grupo de 30 alumnos la cantidad de hembras es igual a la mitad de la matrícula aumentada en 4. ¿Cuántos varones tiene el grupo?

25 La suma de dos números consecutivos es 367, ¿cuáles son los números?

26 La suma de tres números consecutivos es 30, ¿conoces cuáles son esos números?

27 El huracán Iván dejó apagados catorce municipios de Pinar del Río. Este meteoro derribó la mitad de los postes que el huracán Charley aumentado en 97. Si Iván derribó 797 postes del tendido eléctrico, ¿cuántos postes tumbó en Pinar del Río el huracán Charley?

28 La distancia entre la ciudad de Cienfuegos y la ciudad de Pinar del Río es de 421 km. El doble de la distancia de Cienfuegos a Matanzas aumentado en 61 es igual a la distancia de Cienfuegos a Pinar del Río. Calcula cuántos kilómetros hay de Cienfuegos a Matanzas.

29 En los Juegos Olímpicos de Atenas, Cuba ocupó el décimo primer lugar entre los 292 países participantes al obtener 27 medallas. Si se obtuvieron dos medallas de plata menos que de oro y dos medallas más de bronce que de oro, ¿cuántas medallas de oro, plata y bronce obtuvo la delegación cubana a estos Juegos Olímpicos?

30 El total de medallas obtenidas por Cuba en los Juegos Olímpicos de 2004 es igual al triplo de las medallas obtenidas por el deporte boxeo, ¿cuántas medallas aportó este deporte al total de medallas alcanzadas por Cuba?

31 Si las medallas obtenidas por Cuba en los Juegos Olímpicos de Atenas de 2004 es la mitad de las obtenidas por los países de América Latina disminuida en 1, ¿qué tanto por ciento de las medallas de esta región representan las obtenidas por Cuba?

32 El desastroso curso del huracán Charley dejó en Cuba un saldo de pérdidas materiales que se calculan en más de mil millones de dólares. El cuádruplo del número de transformadores derribados aumentado en 236 es igual al número de postes en el suelo. Si se sabe que el ciclón derribó 1 400 postes, ¿cuántos transformadores fueron afectados por este ciclón?

33 En una secundaria básica, el doble de los alumnos del séptimo1 excede en 15 a los 45 alumnos del grupo 2, ¿cuántos pioneros tiene el grupo 1?

34 Los pioneros Gabriela, Patricia y Camilo visitaron con las Brigadas Estudiantiles de Lucha Contra el Aedes (BELCA) 14 casas de su Consejo Popular. Patricia visitó el doble de casas que Camilo y Gabriela dos casas más que Camilo, ¿cuántas casas visitó cada pionero?

35 La suma de los dígitos de un número de tres cifras es 18. Si la cifra de las centenas es el triplo de la cifra de las unidades y la cifra de las decenas excede en tres a la cifra de las unidades, ¿cuál es el número?

Capítulo 3

El mundo de las figuras planas

Introducción

¿Alguna vez te preguntaste cómo surgió la geometría?

Es bueno que sepas que la geometría nació gracias a necesidades prácticas que tuvo el hombre al enfrentarse a los problemas que la naturaleza y su quehacer diario le impusieron. La mayor parte de las propiedades geométricas que permiten resolver problemas prácticos, datan de siglos a.n.e. La Geometría que estudiamos proviene de una de las obras más famosa de todos los tiempos, *Los elementos,* que fue escrita por el gran matemático griego Euclides de Alejandría. En esta obra se aborda la geometría de modo lógico y riguroso, de manera tal que su contenido ha dominado universalmente la enseñanza de esta ciencia durante más de dos milenios.

En este capítulo te presentamos un resumen de las principales definiciones, conceptos y propiedades de la geometría plana que ya conociste durante tus estudios en la enseñanza primaria; por lo que en este grado se ha creído conveniente profundizar y sistematizar tus conocimientos sobre el tema. Estos aspectos teóricos serán retomados en su mayor parte en la medida en que se desarrolle el programa de la asignatura.

Es muy importante que domines cada concepto, que interpretes cada propiedad o teorema, que analices las representaciones gráficas que los acompañan para que puedas aplicarlos en la resolución de los ejercicios que te proponemos y puedas fundamentar los resultados obtenidos.

Una parte de la colección de ejercicios que resolverás te servirán para reafirmar los conceptos y propiedades esenciales sobre las figuras geométricas; en otros casos deberás aplicarlos convenientemente para hallar las soluciones o justificar adecuadamente tus razonamientos. En los ejercicios que se exponen verás también que para determinar su solución deberás combinar tus conocimientos geométricos con los aritméticos y algebraicos.

3.1 Las figuras planas

En este epígrafe recordaremos aquellos conceptos y propiedades de las figuras planas que te servirán de base para la resolución de los ejercicios que en él se proponen.

Puntos, planos, rectas, semirrectas, segmentos y semiplanos

Los conceptos de *punto*, *recta* y *plano* no se definen por ser estos los denominados conceptos básicos, primarios o intuitivitos, los cuales son parte esencial en la construcción de la Geometría. En la realidad no existen ejemplos de estos objetos, sino representaciones de los mismos. Es importante tener una idea de cómo estos se pudieran representar.

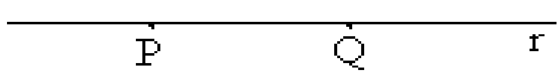
Punto: Para ilustrar este concepto debes imaginarte, por ejemplo, el orificio que hace una aguja al perforar una hoja de papel. Los puntos se denotan por letras mayúsculas del alfabeto arábigo: *A, B, C,* …, *P, Q,* etcétera.

Recta: Las rectas se forman por puntos, específicamente, es un conjunto infinito de puntos, y la idea que debes tener de ella es la de un hilo bien tenso que se prolonga indefinidamente por sus dos extremos. Las rectas se denotan con letras minúsculas del alfabeto arábigo: *a, b,* …, *r, s, t,* etcétera.

Plano: Para imaginarte la representación de un plano debes pensar, por ejemplo, en una hoja de papel la cual se extiende ilimitadamente por cada uno de sus lados. El plano está formado por infinitos puntos y, por supuesto por infinitas rectas. Los planos se denotan generalmente por letras griegas: α, β, γ, …, etcétera.

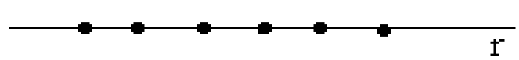
Algunas propiedades fundamentales

- Por dos puntos pasa una y solo una recta.

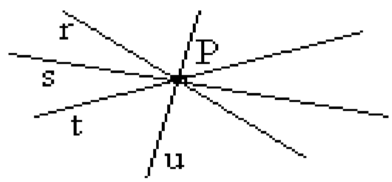


r: recta PQ

- En una recta hay infinitos puntos.



- La recta no tiene ni primer ni último punto; es una figura ilimitada.
- Entre dos puntos cualesquiera siempre existe un tercer punto.
- Por un punto pasan infinitas rectas.



Notación:

P ∈ r

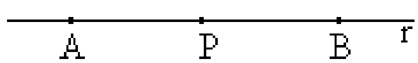
P ∈ s

P ∈ t

P ∈ u

- Tres puntos distintos no alineados determinan un plano.

Semirrecta: Si en una recta señalamos un punto P, este punto la divide en dos partes o subconjuntos. Cada una de estas partes se llama *semirrecta* o *rayo*. Al punto P se le llama *origen* de las semirrectas.



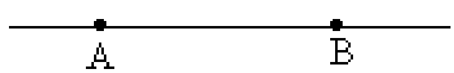
Notación:

Semirrecta PA

Semirrecta PB

Nota: La semirrectas PA y PB son semirrectas opuestas.

Segmento: Es una parte de una recta determinada por dos puntos no coincidentes. Estos puntos pertenecen al segmento y son sus *extremos*.



Los segmentos se denotan con dos letras mayúsculas que corresponden a los extremos: $\overline{AB}$

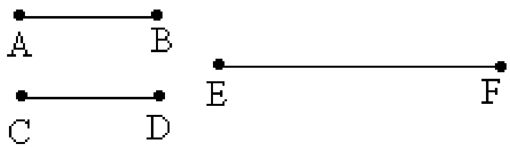
Algunas propiedades relativas a los segmentos

Longitud de un segmento es la medida de la distancia entre sus extremos.

Todo segmento tiene una longitud determinada mayor que cero.

Para medir un segmento se utilizan diversos instrumentos de medición. El instrumento más sencillo es la regla graduada. Las mediciones que hacemos con la regla son ***valores aproximados*** de la verdadera longitud del segmento.

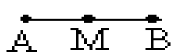
Dos segmentos son ***iguales*** únicamente cuando tienen la misma longitud o si al superponerlos coinciden sus extremos; cuando esto no sucede son ***desiguales***.



$\overline{AB} = \overline{CD}$; $\overline{AB} \neq \overline{EF}$; $\overline{CD} \neq \overline{EF}$

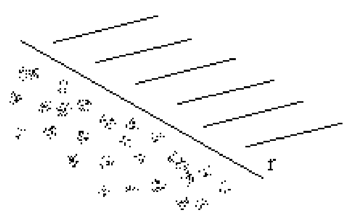
Dado cualquier número positivo m, es posible construir sobre una semirrecta dada, a partir de su origen, exactamente un segmento de longitud m.

Punto medio de un segmento: Es el punto situado en él y que lo divide en dos segmentos iguales.



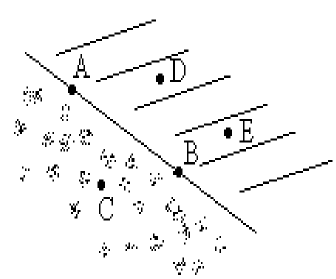
$$\left.\begin{array}{l} M \in \overline{AB} \\ \overline{AM} = \overline{MB} \end{array}\right\} M \text{ punto medio de } \overline{AB}$$

Semiplano: Toda recta r trazada en un plano lo divide en dos regiones llamadas *semiplanos*. A la recta r se le llama borde de cada uno de los semiplanos.



Nota:

Sobre la base de la figura:



- La recta AB es borde de los semiplanos.
- Los puntos D y E están en el mismo semiplano.
- Los puntos C y D están en diferentes semiplanos. También se puede decir que los puntos C y D están en semiplanos opuestos.
- El segmento $\overline{CD}$ corta a la recta AB

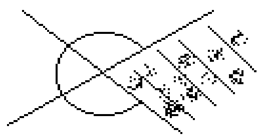
($\overline{CD} \cap r \neq \varnothing$)

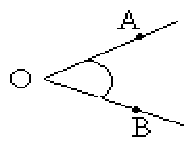
- El segmento $\overline{DE}$ no corta a la recta AB

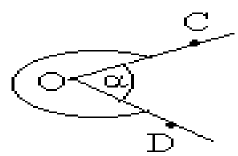
  ($\overline{DE} \cap r = \varnothing$)

Ángulos

Ángulo: Es la unión o intersección de dos semiplanos cuyos bordes se cortan o intersecan.



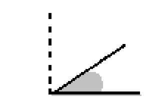
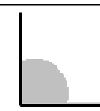
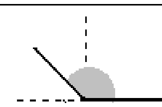
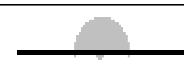
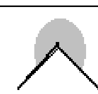
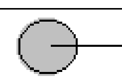
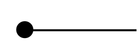




Notación: $\angle$ O; $\angle$ AOB; $\angle$ 1; $\angle$ α

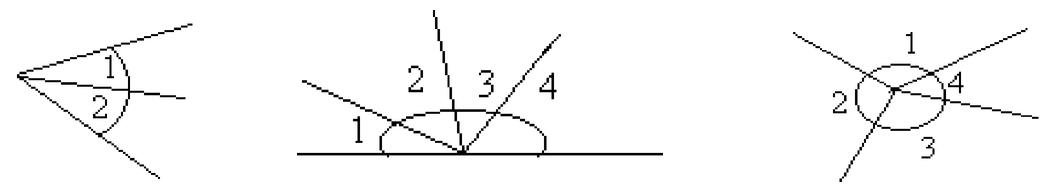
Elementos: *vértice*: O; *lados*: OA y OB.

Clasificación de los ángulos según su amplitud

Ángulo agudo	Menor que 90º	
Ángulo recto	90º	
Ángulo obtuso	Mayor que 90º y menor que 180º	
Ángulo llano	180º	
Ángulo sobreobtuso	Mayor que 180º y menor que 360º	
Ángulo completo	360º	
Ángulo completo	0º	

Otros tipos de ángulos

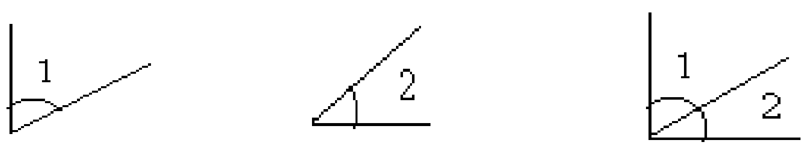
Ángulos consecutivos: Son aquellos que están ubicados uno a continuación de otro, de modo que sólo tienen en común el vértice y un lado.



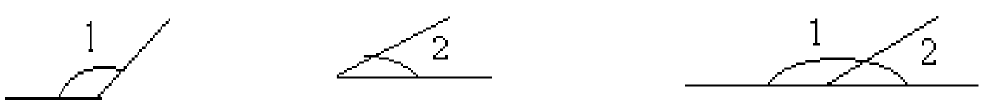
Los ángulos consecutivos de vértice común determinados a un lado de una recta forman un ángulo llano, es decir, suman 180º.

Los ángulos consecutivos alrededor de un punto forman un ángulo completo, es decir, suman 360º.

Ángulos complementarios: Son los que suman 90º.

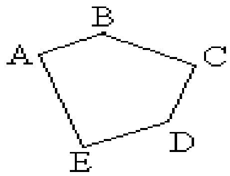


Ángulos suplementarios: Son los que suman 180º.

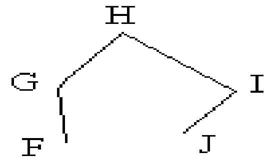


Línea poligonal: Es la figura formada por un conjunto de segmentos situados uno a continuación de otro, de modo que cada dos de ellos estén unidos por un extremo común.

Línea poligonal cerrada: Es aquella línea poligonal en la que el origen de un lado cualquiera, que se ha considerado como primero, coincide con el extremo del último. En el caso que no coincidan se dice que la poligonal es abierta.



Línea poligonal cerrada



Línea poligonal abierta

Polígono: Es la región del plano limitada por una línea poligonal cerrada que incluye a esta.

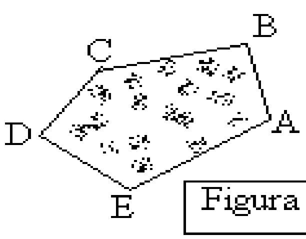


Figura 1

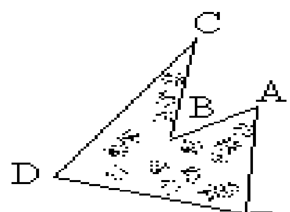


Figura 2

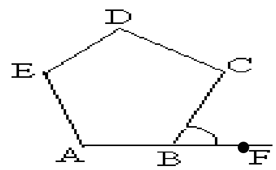
Polígono convexo: Es el polígono que al prolongar cualquiera de los lados de la poligonal que lo limita, el resto de la figura queda en uno de los dos semiplanos determinados por la recta que contiene al lado considerado.

Ejemplo:

Polígono convexo: figura 1; polígono no convexo: figura 2.

Elementos de un polígono convexo (según figura 1):

- *Lados:* $\overline{AB}$; $\overline{BC}$; $\overline{CD}$; $\overline{DE}$ *y* $\overline{EA}$.
- *Ángulos interiores*: $\angle$ A; $\angle$ B; $\angle$ C; $\angle$ D y $\angle$ E.
- *Vértices*: A; B; C; D y E.
- *Diagonales*: $\overline{AC}$; $\overline{AD}$; $\overline{BD}$; $\overline{BE}$ *y* $\overline{CE}$ (es el segmento que une dos vértices no consecutivos).
- *Ángulos exteriores del polígono:* Son los formados en cada vértice por un lado y la prolongación del lado que también tiene como extremo a ese vértice.



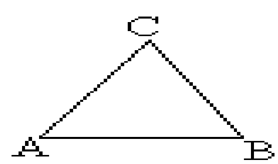
$\angle$ CBF: ángulo exterior

Clasificación de polígonos según el número de lados

Triángulos	(3 lados)	Cuadriláteros	(4 lados)
Pentágonos	(5 lados)	Exágonos	(6 lados)
Eptágonos	(7 lados)	Octágonos	(8 lados)
Eneágonos	(9 lados)	Decágonos	(10 lados)

Triángulos

Definición: Un triángulo es el polígono que tiene tres lados.



Notación: Δ ABC

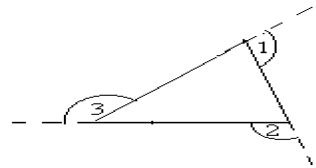
Elementos del triángulo

- Vértices: A, B y C.
- Lados: $\overline{AB}$; $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.
- Ángulos (o ángulos interiores): $\angle$ A; $\angle$ B y $\angle$ C.

  $\overline{\text{AB}}$ es el *lado opuesto* al $\angle$ C, y recíprocamente.

  $\overline{\text{BC}}$ es el *lado opuesto* al $\angle$ A, y recíprocamente.

  $\overline{\text{AC}}$ es el *lado opuesto* al $\angle$ B, y recíprocamente.
- Ángulos exteriores: $\angle$ 1, $\angle$ 2 y $\angle$ 3.

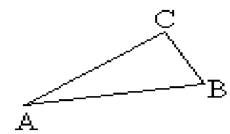


Clasificación de los triángulos según las longitudes de sus lados

Escaleno: Si tiene sus tres lados diferentes.

Ejemplo: El triángulo ABC es escaleno pues

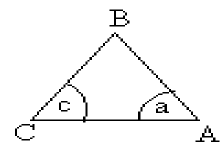
$$\overline{AB} \neq \overline{BC} \neq \overline{AC} \neq \overline{AB}$$



Isósceles: Si tiene dos de sus lados iguales.

Ejemplo: El triángulo ABC es isósceles pues

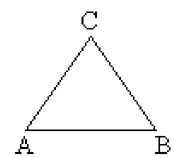
$\overline{AB} = \overline{BC}$ lados laterales y $\overline{AC}$ base y $\angle$ A = $\angle$ C ángulos bases.



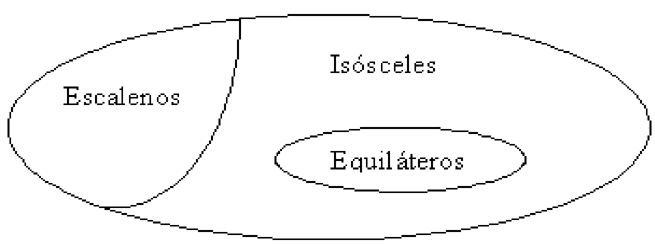
Equilátero: Si tiene sus tres lados iguales.

Ejemplo: El triángulo ABC es equilátero pues

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}.$$

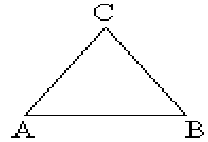


Nota: Un triángulo equilátero es isósceles.

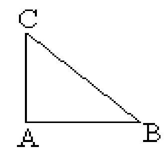


Clasificación de los triángulos según las amplitudes de sus ángulos

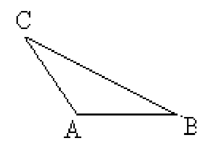
Acutángulo: Si tiene los tres ángulos agudos (es decir, sus tres ángulos interiores tienen amplitudes menores que 90º).

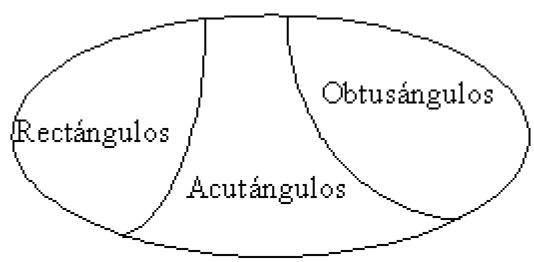


Rectángulo: Si tiene un ángulo recto (es decir, un ángulo de amplitud igual a 90º).



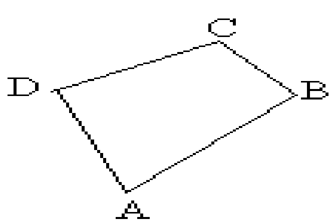
Obtusángulo: Si tiene un ángulo obtuso (es decir, tiene un ángulo de amplitud mayor que 90º y menor que 180º).

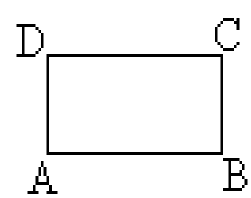




Cuadriláteros convexos

Definición: Se llama cuadrilátero convexo al polígono convexo de cuatro lados.





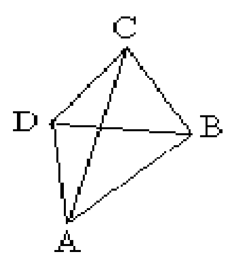
Elementos de un cuadrilátero

Lados: $\overline{AB}$; $\overline{BC}$; $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ **.**

Ángulos interiores: $\angle$ A; $\angle$ B; $\angle$ C y $\angle$ D.

Vértices: A, B, C y D.

Diagonales: $\overline{\mathrm{AC}}$ y $\overline{\mathrm{BD}}$.



Lados opuestos de un cuadrilátero: Son aquellos lados que no tienen ningún vértice común: $\overline{AB}\ y\ \overline{CD};\ \overline{BC}\ y\ \overline{AD}$.

Lados consecutivos: Son dos lados que tienen un vértice común: $\overline{AB}\ y\ \overline{BC};\ \overline{BC}\ y\ \overline{CD};\ \overline{CD}\ y\ \overline{AD};\ \overline{DA}\ y\ \overline{AB}.$

Diagonales: Son aquellos segmentos que unen dos vértices no consecutivos: $\overline{AC}\ \ y\ \ \overline{BD}.$

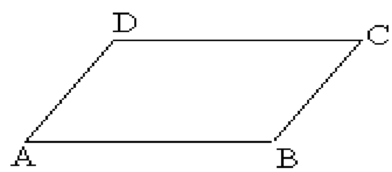
Ángulos opuestos: Son dos ángulos interiores cuyos vértices son extremos de una misma diagonal: $\angle A$ y $\angle C$, $\angle B$ y $\angle D$.

Ángulos consecutivos: Son dos ángulos interiores cuyos vértices son extremos de un mismo lado: $\angle$ A y $\angle$ B; $\angle$ B y $\angle$ C; $\angle$ C y $\angle$ D; $\angle$ D y $\angle$ A.

Atendiendo al paralelismo de sus lados los cuadriláteros convexos se clasifican en: ***paralelogramos*** y ***trapecios.***

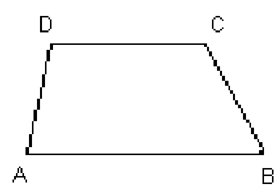
Paralelogramo

Definición: Es el cuadrilátero convexo que tiene sus lados opuestos paralelos.



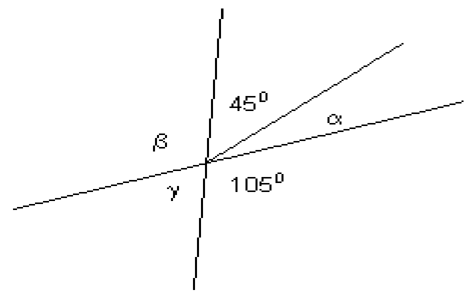
Trapecio

Definición: Es el cuadrilátero convexo que tiene un par de lados opuestos paralelos.



Ejercicios resueltos:

1. Sean r y r' dos rectas que se cortan. Calcula los valores de los ángulos α, β y γ según la figura dada a continuación y diga cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:



- α es agudo.
- β es sobreobtuso.
- $\lambda = \alpha + 45^o$ por ser consecutivos.
- $\lambda + \beta \neq 180^o$.

Para resolver este ejercicio debes tener claro los conceptos de ángulos consecutivos a un lado de una recta y alrededor de un punto, así como las propiedades que estos cumplen.

Por lo que podemos plantear lo siguiente:

$45^o + \alpha + 105^o = 180^o$ por ser ángulos consecutivos a un lado de una recta.

$$\alpha = 180^o - 105^0 - 45^0$$

$$\alpha = 30^o$$

$\gamma + 105^o = 180^o$ por ser ángulos consecutivos a un lado de una recta.

$$\gamma = 180^o - 105^o$$

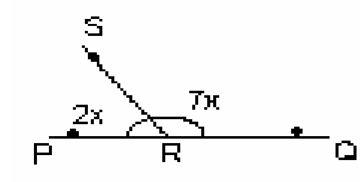
$$\gamma = 75^o$$

$\beta + \gamma + 105^o + \alpha + 45^o = 360^o$ por ser ángulos consecutivos alrededor de un punto, luego $\beta = 105^o$. Del análisis anterior se tiene que las afirmaciones correctas son la primera y la tercera.

Es bueno señalar que este ejercicio se puede también resolver aplicando otros conceptos como el de ángulos opuestos por el vértice y ángulos adyacentes que se estudiarán en el próximo epígrafe.

2. En la figura PQ es una línea recta. ¿Cuál es la medida en grados del ángulo PRS?

10º 20º 40º 70º 140º



Te será fácil reconocer que los ángulos $\angle$ PRS y $\angle$ QRS son ángulos consecutivos a un lado de la recta, por lo que su suma es igual a 180º, o sea, $\angle$ PRS + $\angle$ QRS = 180º. Si sustituimos cada ángulo por su medida, es decir, por su amplitud, tenemos entonces que:

2x + 7x = 180º. Reconocerás que estas en presencia de una ecuación lineal del tipo de las que estudiaste en la enseñanza primaria, luego al resolverla, se obtiene:

$2x + 7x = 180^\circ$

$9x = 180^\circ$

$x = \frac{180^\circ}{9}$

$x = 20^\circ$

Como el ángulo $\angle$ PRS = 2x, se obtiene finalmente que $\angle$ PRS = 40º.

Ejercicios

1. Di de las siguientes proposiciones cuáles son verdaderas o falsas. Fundamenta las falsas:
   a) Dos puntos determinan una recta única.
   b) Por un punto pasa una y solo una recta.
   c) Tres puntos determinan un plano.
   d) La semirrecta tiene principio pero no tiene fin.
   e) La recta es limitada.
   f) Un segmento es una porción de recta limitada por dos puntos.

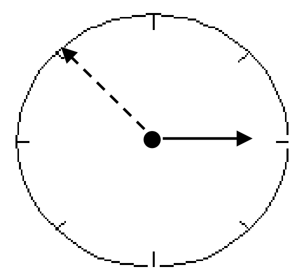
2. Selecciona en cada caso la respuesta correcta

a) Un ángulo obtuso tiene una amplitud:

- Menor que 90º.
- Mayor que 90º y menor que 180º.
- Mayor que 180º y menor que 360º.

b) Según se ilustra en la figura, las manecillas del reloj marcan las 2:50 p.m., entonces el ángulo que ellas forman es:

- Ágalthough
- Obtuso
- Sobreobtuso

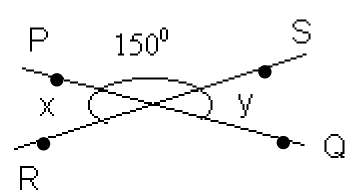


c) De un triángulo ABC se sabe que sus lados miden $\overline{AB} = \frac{11}{4}\ cm$, $\overline{BC} = 2{,}75\ cm$ y $\overline{AC} = 2{,}0\ cm$, entonces el triángulo ABC es:

- Equilátero.
- Escaleno.
- Isósceles.

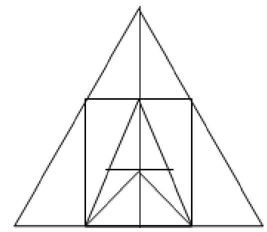
d) En la figura PQ y RS son líneas rectas que se intersecan. ¿Cuál es el valor de $\angle x + \angle y$?

15º 30º 60º 180º 300º

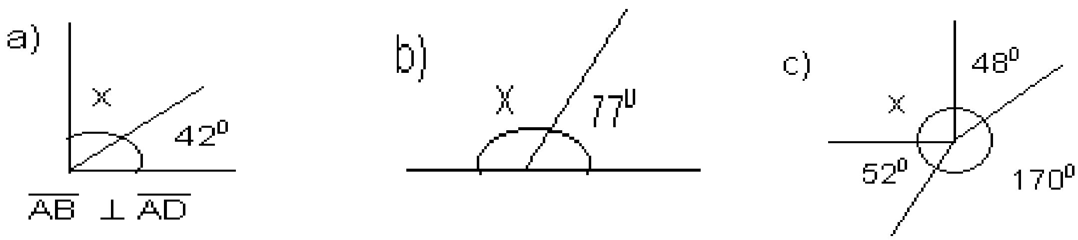


3. El logotipo de un destacamento pioneril tiene en su parte central la figura que aparece a continuación.

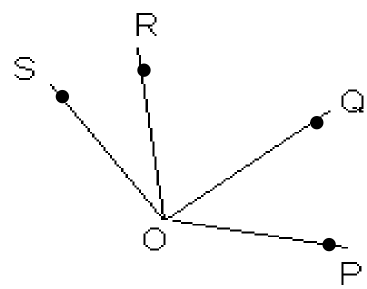
¿Cuántas figuras geométricas planas conforman este logotipo? Clasifícalas según la cantidad lados.



4. En las siguientes figuras calcula la amplitud de los ángulos que se indican y clasifícalos según su amplitud.



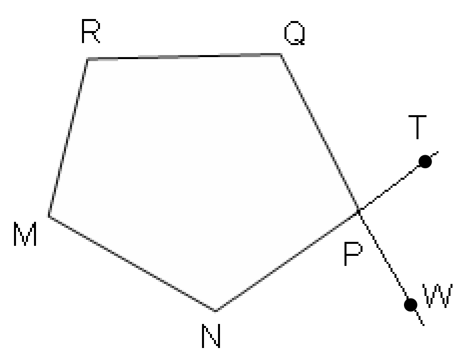
5. En la figura la amplitud del $\angle$ POR es 110º, la del $\angle$ QOS es 90º y la del $\angle$ POS es 140º. ¿Cuál es la amplitud del $\angle$ QOR?



6. La figura muestra un polígono MNPQR.

N, P, T y Q, P, W son dos tríos de puntos alineados.

Enlaza los elementos de la columna A con los de la columna B según corresponda:



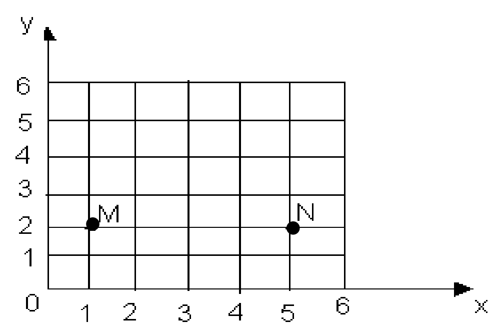
A	**B**
Lado	$\overline{MQ}$
Diagonal	$\angle$ MRQ
Vértice	$\angle$ QPT
Ángulo interior	$\angle$ NPW
Ángulo exterior	Q
	$\overline{MN}$

7. La figura representa el primer cuadrante de un sistema de coordenadas rectangulares, en él hay dos puntos M y N como se muestra en la figura. Juan está buscando un punto P de manera que se forme un triángulo MNP isósceles.

a) ¿Cuál de estos pares podría representar las coordenadas del punto P?

(3; 5) , (3; 2) , (1; 5) , (5; 1)

b) Menciona otros pares que podrían representar las coordenadas del punto P para que el triángulo MNP sea isósceles.



8. En un sistema de coordenadas ubica los puntos A(1; 2) , B(5; 2) y C(6; 4). Determina las coordenadas del punto D para que:

a) ABCD sea un paralelogramo.
b) ABCD sea un trapecio.

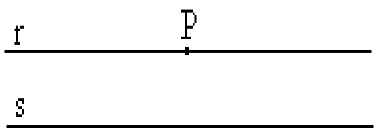
3.2 Ángulos y relaciones entre figuras

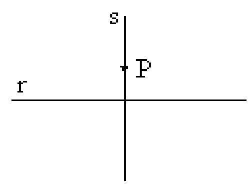
En este epígrafe profundizarás tus conocimientos sobre las relaciones de posición entre rectas y estudiarás sus propiedades fundamentales. Así mismo, recordarás las relaciones de posición entre los ángulos determinados entre rectas, profundizando en el caso en que dos rectas paralelas sean cortadas por una tercera, donde las amplitudes de estos ángulos cumplen condiciones muy particulares. También reactivarás los conceptos de mediatriz de un segmento y bisectriz de un ángulo.

Recordemos algunas definiciones y propiedades que te serán útiles para comprender el contenido de este epígrafe.

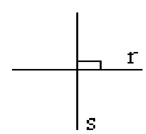
- Dos rectas en el plano pueden cortarse, ser paralelas o ser coincidentes.
- **Rectas paralelas:** Dos rectas son *paralelas* si coinciden o no tienen puntos comunes.

  $r \parallel s$ si , y solo si, $r = s$ o $r \cap s = \varnothing$
- Por un punto exterior a una recta se puede trazar una y solo una recta paralela (perpendicular) a ella.



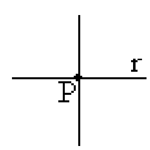


Rectas perpendiculares: Dos rectas r y s son perpendiculares si se cortan formando un ángulo recto.

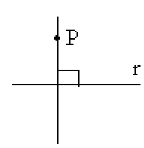


Propiedades

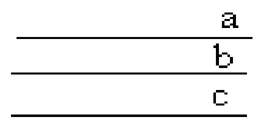
- Si dos rectas son perpendiculares, entonces entre ellas se forman cuatro ángulos rectos.
- Por un punto de una recta solo se puede trazar una recta perpendicular a la recta dada.



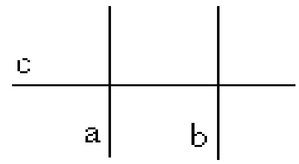
- Por un punto exterior a una recta, solo se puede trazar una recta perpendicular a la recta dada.



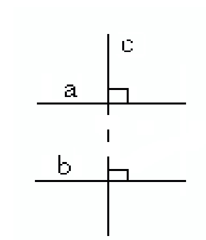
- Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí.
  (Si **a**$\parallel$**c** y **b**$\parallel$**c**, entonces **a**$\parallel$**b**)



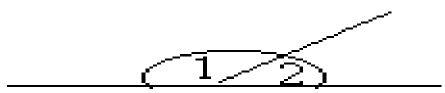
- Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí.
  (Si **a**$\perp$**c** y **b**$\perp$**c**, entonces **a**$\parallel$**b**)



- Si una recta es perpendicular a una de dos rectas paralelas, entonces es perpendicular a la otra.
  (Si **a**$\parallel$**b** y **c**$\perp$**a**, entonces **c**$\perp$**b**)

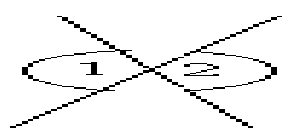


Ángulos adyacentes: Son dos ángulos consecutivos de vértice común situados a un lado de una recta.



Si dos ángulos son adyacentes, entonces suman 180º.

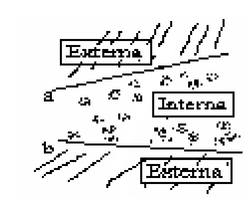
Ángulos opuestos por el vértice: Son dos ángulos que tienen el mismo vértice y sus lados están formados por semirrectas opuestas.



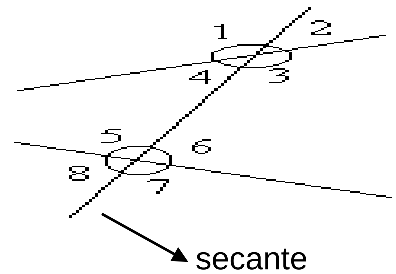
Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

Ángulos entre dos rectas cortadas por una tercera

Si dos rectas no coinciden (como las rectas a y b de la figura), estas determinan tres regiones en el plano; dos de esas regiones conforman la **parte externa** y la otra la **parte interna**.



En la ilustración siguiente se ha considerado una tercera recta que corta a las dos rectas trazadas anteriormente. Esta tercera recta recibe el nombre de **recta secante**. Observa que forman cuatro ángulos ubicados en la región interna ($\angle$ 3; $\angle$ 4; $\angle$ 5; $\angle$ 6), y cuatro situados en la región externa ($\angle$ 1; $\angle$ 2; $\angle$ 7; $\angle$ 8).



Ángulos correspondientes: Son los que están situados al mismo lado de la secante, uno en la región interna y otro en la externa, pero que no tienen vértice común.

Ejemplo: $\angle$ 1 y $\angle$ 5; $\angle$ 4 y $\angle$ 8; $\angle$ 2 y $\angle$ 6; $\angle$ 3 y $\angle$ 7.

Ángulos alternos: Son los que están situados a distintos lados de la secante y en la misma región (interna o externa) pero que no tienen vértice común.

Ejemplo: $\angle$ 3 y $\angle$ 5; $\angle$ 4 y $\angle$ 6; $\angle$ 1 y $\angle$ 7; $\angle$ 2 y $\angle$ 8.

Ángulos conjugados: Son los que están situados a un mismo lado de la secante y en la misma región (interna o externa).

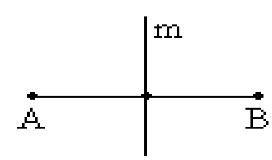
Ejemplo: $\angle$ 1 y $\angle$ 8; $\angle$ 4 y $\angle$ 5; $\angle$ 2 y $\angle$ 7; $\angle$ 3 y $\angle$ 6.

Si las dos rectas son paralelas y están cortadas por una secante, los ángulos que se forman cumplen determinadas propiedades.

a) Los ángulos correspondientes (alternos) son iguales.
b) Los ángulos conjugados suman 180°.

Si dos rectas son cortadas por una tercera y dos ángulos alternos (correspondientes) son iguales o dos ángulos conjugados suman 180º entonces las rectas que lo forman son paralelas.

Mediatriz de un segmento: Es la recta perpendicular al segmento y que pasa por su punto medio.

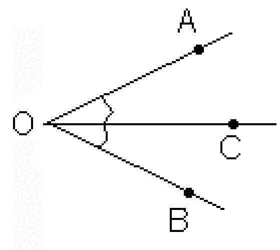


Todo punto de la mediatriz de un segmento equidista (igual distancia) de sus extremos.

Bisectriz de un ángulo: Es la semirrecta que tiene su origen en el vértice del ángulo y divide a este en dos ángulos iguales.

Ejemplo:

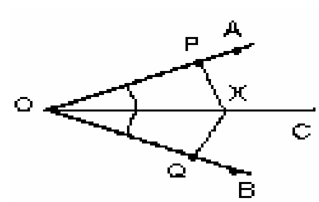
La semirrecta OC es bisectriz del $\angle$ AOB, luego $\angle$ AOC = $\angle$ BOC.



Si un punto está situado en la bisectriz de un ángulo, entonces sus distancias a los lados del ángulo son iguales.

Ejemplo:

La semirrecta OC es bisectriz del $\angle$ AOB; X es un punto de la semirrecta OC; $\overline{XP}$ y $\overline{XQ}$ distancias de X a los lados del ángulo, entonces se cumple que $\overline{XP} = \overline{XQ}$.



Ejercicios resueltos:

1. Si r es la mediatriz de un segmento $\overline{AB}$ y N es un punto que está situado sobre la recta r. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?:

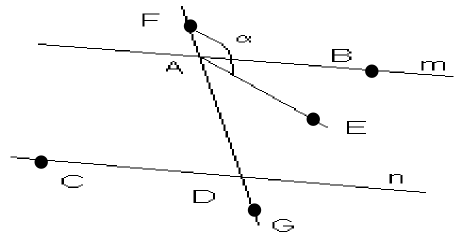
a) ABN es un triángulo escaleno.

b) $\overline{AN} = \overline{BN}$.

c) Los ángulos NAB y ABN son diferentes.

Para resolver este ejercicio debes tener claridad en el concepto de mediatriz de un segmento y en la propiedad que plantea que todo punto situado sobre la mediatriz de un segmento equidista de sus extremos; por lo cual los segmentos que se forman al unir un punto de la mediatriz con los extremos del segmento son iguales, de ahí que la respuesta correcta es la b), ya que al cumplirse esto, el triángulo ABN es, al menos, isósceles por lo que no puede ser escaleno y los ángulos bases de este triángulo son iguales.

2. Si las rectas m y n son paralelas, $\overline{AE}$ es bisectriz del ángulo BAD, $\angle$ ADC = 40º. Halla la amplitud del ángulo α.



Debemos analizar los datos que nos da el ejercicio para concluir que:

- Como m y n son rectas paralelas, entonces los ángulos correspondientes y alternos son iguales.
- Como $\overline{AE}$ es bisectriz del ángulo BAD, entonces divide a este en dos ángulos iguales.

  Por lo anterior podemos plantear que:

  $\angle$ ADC = $\angle$ BAD = 40º por alternos entre las paralelas m y n y $\overline{FG}$ secante.

  $\angle$ EAD = $\angle$ EAB = 20º por ser AE bisectriz del ángulo BAD.

  Al observar la figura podemos plantear que α = $\angle$ BAF + $\angle$ EAB por ser ángulos consecutivos, por lo que debemos calcular la amplitud del ángulo BAF para poder hallar la amplitud de α. Una vía sería plantear que:

  $\angle$ BAD + $\angle$ BAF = 180º por ser ángulos adyacentes, luego $\angle$ BAF = 140º. Al sustituir en α = $\angle$ BAF + $\angle$ EAB, se obtiene que α = 140º + 20º, es decir,

  α = 160º.

  Analiza otra forma de hallar la amplitud del ángulo α.

Ejercicios

1. Determina si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Fundamenta en caso de ser falsa.

a) Los ángulos conjugados entre dos rectas paralelas cortadas por una tercera siempre suman 180º.
b) Todo par de ángulos que sumen 180º son adyacentes.
c) Si dos ángulos tienen un vértice común son opuestos por el vértice.
d) Los pares de ángulos correspondientes siempre son iguales.
e) Se llama mediatriz de un segmento a la recta que pasa por el punto medio de un segmento.
f) Por un punto de una recta solo puede trazarse una recta perpendicular a ella.
g) Por un punto exterior a una recta pueden trazarse infinitas rectas paralelas a ella.
h) Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí.

2. Selecciona la respuesta correcta:

a) Sean α y β dos ángulos adyacentes y $\alpha = 28º$, entonces:

$\beta = 82º$ $\beta = 28º$ $\beta = 152º$

b) Sean α y β dos ángulos opuestos por el vértice y β es agudo, entonces:

α es obtuso α es agudo α es recto

c) Sea el ángulo ABC agudo y P un punto cualquiera de su bisectriz, entonces:
- La distancia de P a los lados del ángulo ABC es diferente.
- Los ángulos ABP y PBC son iguales.
- El ángulo ABP es la tercera parte del ángulo ABC.

d) Si m es la mediatriz de un segmento $\overline{AB}$ y P es un punto que está situado sobre la recta m, entonces:
- ABP es un triángulo isósceles.
- $\overline{AP} \neq \overline{BP}$.
- Los ángulos PAB y ABP son diferentes.

3. Dada la siguiente figura, completa los espacios en blanco para obtener una proposición verdadera.

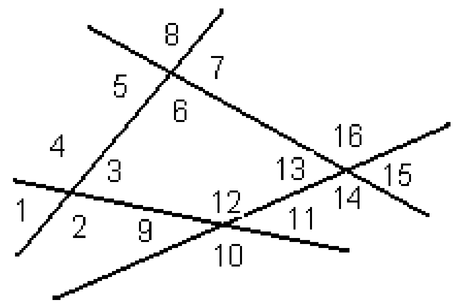
a) El $\angle$ 8 es ____________ con el $\angle$ 4 y este a su vez es_______________ con el ∠ 2.

b) El ___ es correspondiente con el ∠ 12 y opuesto por el vértice con el ∠ 14.

c) El ∠ 3 es _______________ con el ∠ 6 y a la vez alterno con ____.

d) El ∠ 11 es conjugado con el ____ y este a su vez correspondiente con el ∠ 6.

e) El ___ es alterno con el ∠ 1 y a su vez conjugado con el ∠ 16.

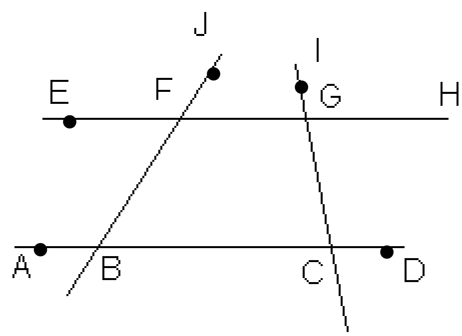


4. Completa los espacios en blanco, si se sabe que AD ││EH.

a) ∠ ABF = ______ por correspondientes entre las paralelas $\overline{AD}$ y $\overline{EH}$ con $\overline{FB}$ secante.

b) ∠ FBC + ∠ BFG = 180º por ______________________________.

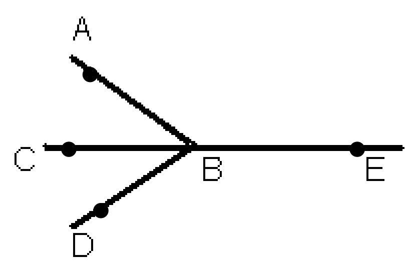
c) ∠ EFB = ∠ FBC por ______________________________.



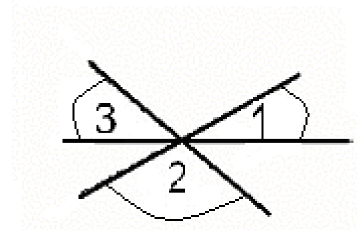
d) ∠ BCG + _____ = 180º por adyacentes.

e) ∠ IGH = ∠ FGC por ______________________.

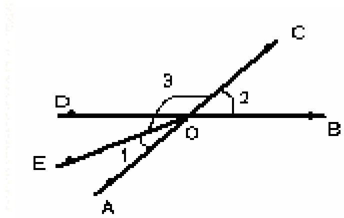
5. En la figura se cumple que ∠ ABC = ∠ CBD. Explica por qué se cumple también que ∠ ABE = ∠ DBE



6. Explica por qué los ángulos 1, 2 y 3 representados en la figura suman 180º.

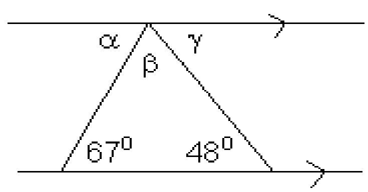


7. Dada la siguiente figura, se tiene que OE bisectriz del ∠ AOD, ∠ AOD = 35º.
Halla la amplitud de ∠ 1, ∠ 2 y ∠ 3.

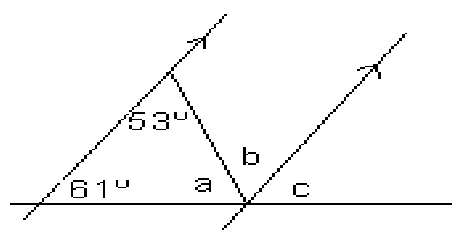


8. En las siguientes figuras las saetas indican rectas paralelas. Calcula los ángulos denotados por letras.

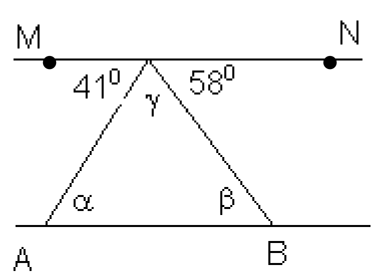
a)



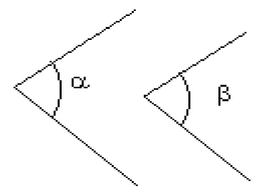
b)



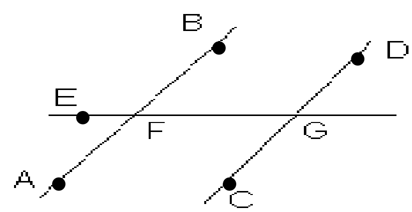
9. En la siguiente figura las rectas MN y AB son paralelas.
Halla la amplitud de los ángulos α, β, γ y el valor de $\alpha + \beta + \gamma$.



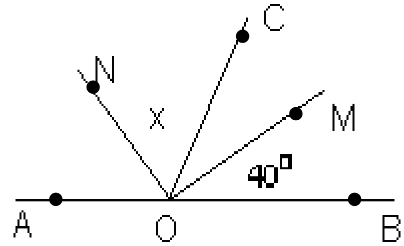
10. En la figura aparecen los ángulos α y β de lados respectivamente paralelos.
Demuestra que son iguales.



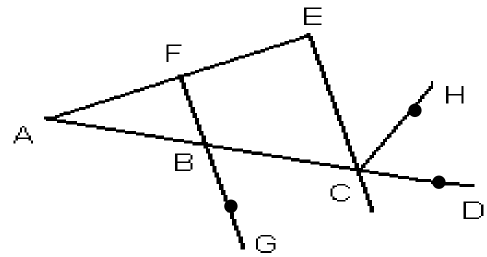
11. En la figura AB | | CD, ∠ EFB = 4x + 60º y ∠ FGC = 80º.
Halla el valor de x y las amplitudes de los ángulos EFA, FGD y AFG.



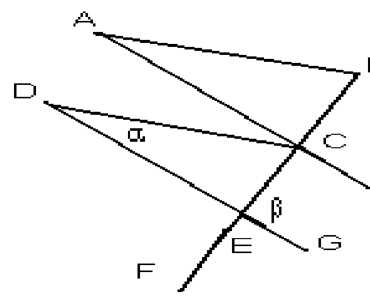
12. En la figura los puntos A, O y B están sobre una misma recta, OM es bisectriz del ángulo BOC y ON es bisectriz del ángulo AOC.
¿Cuál es la amplitud del ángulo x?



13. En la figura $\overline{BF}$ | | $\overline{CE}$, ∠ ABG = 114º, CH es la bisectriz del ∠ ECD.
A, B, C y D puntos alineados. Halla la amplitud de los ángulos ∠ ABF y ∠ HCD.

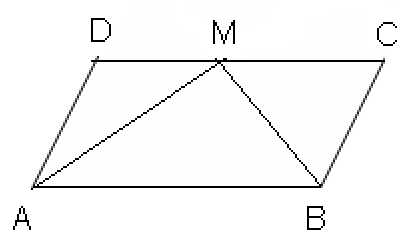


14. En la figura $\overline{AB} \,||\, \overline{CD}$, $\overline{AC} \,||\, \overline{DG}$, $\angle$ A = 35º, $\angle$ B = 45º.
Calcula la amplitud de los ángulos α y β.



15. La figura muestra el paralelogramo ABCD donde $\overline{AM}$ y $\overline{BM}$ son las bisectrices de los ángulos DAB y CBA, respectivamente.

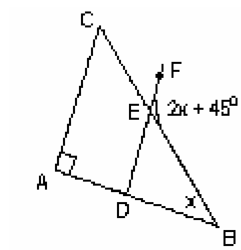
a) ¿Qué información aporta el dato de que $\overline{AM}$ y $\overline{BM}$ son las bisectrices de los ángulos DAB y CBA?



b) Nombra los pares de ángulos que tengan igual amplitud.
c) Prolonga el segmento $\overline{AM}$ y localiza otros pares de ángulos iguales.
d) Para los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ identifica los pares de ángulos cuyas amplitudes suman 180º.
e) Identifica los triángulos que se forman en la figura y cuáles de ellos son isósceles. Justifica tu respuesta.

16. En la figura triángulo ABC rectángulo en A, $\overline{DE} \perp \overline{AB}$.

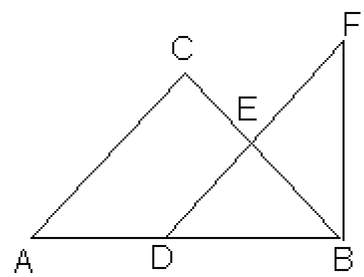
Clasifica el triángulo ABC según la longitud de sus lados.



17. En la figura se tiene que $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$ y triángulo ABC isósceles de base $\overline{AB}$, $\angle$ DBF = 2 $\angle$ DBE.

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

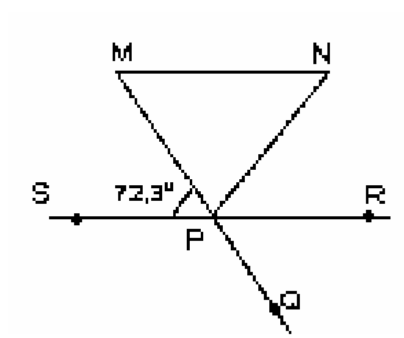
- $\angle$ACB = $\angle$ DFB por correspondientes.
- $\overline{BC}$ es bisectriz del $\angle$ DBF.
- BDE triángulo isósceles.
- $\angle$ ACB $\neq$ $\angle$ CEF.



18. En la figura, se tiene Δ MNP; M, P y Q puntos alineados, $\overline{MN} \parallel \overline{SR}$, PR es la bisectriz del $\angle$ NPQ.

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

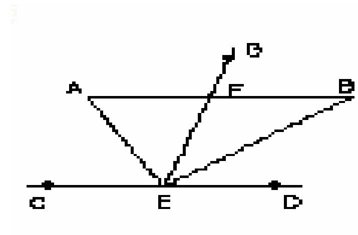
- $\angle$ NPR = 72,3º.
- $\angle$ PMN = 144,6º.
- $\angle$ NPR $\neq$ $\angle$ RPQ
- El Δ MNP es isósceles.



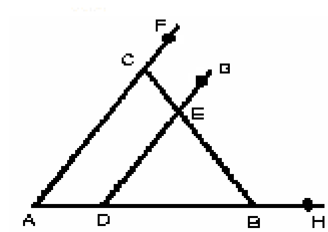
19. En la figura $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, F es punto medio de $\overline{AB}$; $\overline{AB}$ = 8,0 cm; $\angle$ FBE = 36º y EB es la bisectriz del $\angle$ FED; $\overline{AB}$ y $\overline{EG}$ se cortan en F.

a) Halla la amplitud de los ángulos FEB, GFB y AFE.

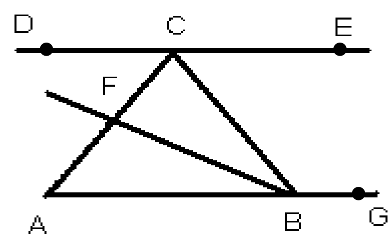
b) Clasifica los triángulos AFE y EFB según la longitud de sus lados y la amplitud de sus ángulos.



20. En la figura $\overline{AF} \parallel \overline{DG}$, $\angle$ ACE = 48º y $\angle$ EBH = 114º, el triángulo DBE es isósceles de base $\overline{DB}$, A, D, B y H puntos alineados. Halla la amplitud de los ángulos interiores del triángulo DBE.



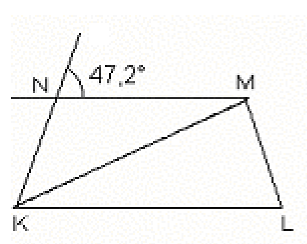
21. En la figura se tiene que $\overline{AB} \parallel$ DE, Δ ABC isósceles de base $\overline{AB}$, BF es la bisectriz del ángulo B y $\angle$ DCA = 38,4º. Halla la amplitud de los ángulos CBF, ACB y CBG.



22. En la figura $\overline{MN} \parallel \overline{KL}$; $\overline{KM}$ bisectriz del $\angle$ LKN.

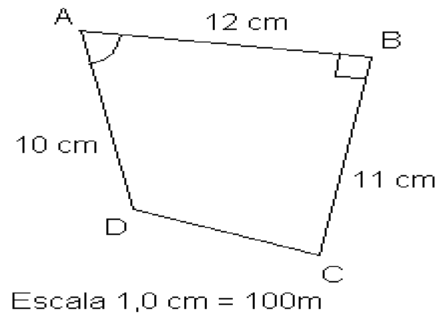
a) Halla la amplitud de los ángulos MKL y MNK.

b) Clasifica el cuadrilátero KLMN.



23. Una de las actividades a desarrollar por los pioneros en la acampada pioneril, es la carrera de orientación. Considera que el cuadrilátero ABCD representa el terrero en que se debe efectuar dicha carrera.

Cada pionero debe partir del punto A y llegar a un punto X dentro del terreno, y esta maniobra es evaluada por el guía que se encuentra en un punto P situado también en el interior del terreno.



Con el uso de una regla o un cartabón ayuda al primer pionero y al guía a encontrar sus respectivas ubicaciones si se cumple que:

a) El punto P esta situado a 600 m de $\overline{BC}$ y equidista de A y D.

b) El punto X se encuentra a 600 m del punto A y equidista de $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$.

3.3 Relaciones entre los elementos de un triángulo y los de un cuadrilátero

En este epígrafe recordaremos las propiedades fundamentales de los triángulos, así como las rectas y puntos notables de los mismos. Estos contenidos te serán muy útiles en la resolución de ejercicios y problemas.

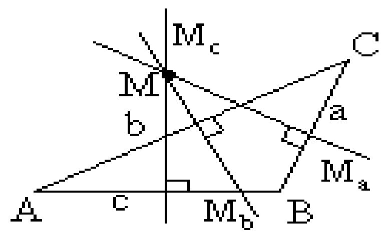
Algunas propiedades de los triángulos

En todo triángulo se cumple:

- La suma de las amplitudes de los ángulos interiores es igual a 180º.
- La amplitud de cada ángulo exterior es igual a la suma de las amplitudes de los ángulos interiores no adyacentes a él.
- A lados iguales se oponen ángulos iguales y viceversa.
- A mayor lado se opone mayor ángulo y viceversa.
- La suma de dos lados cualesquiera es mayor que el tercer lado **(desigualdad triangular).** Esta propiedad es muy importante, pues si tres segmentos no cumplen esta condición con ellos no se puede formar un triángulo.

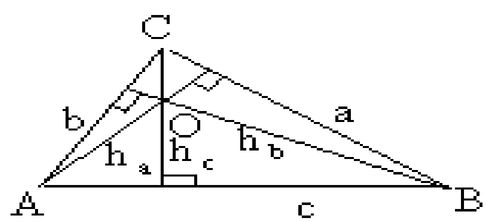
Mediatrices, alturas, medianas y bisectrices de un triángulo

Las **mediatrices** de un triángulo ABC son las mediatrices **M_a, M_b** y **M_c** de los lados a, b y c de dicho triángulo.



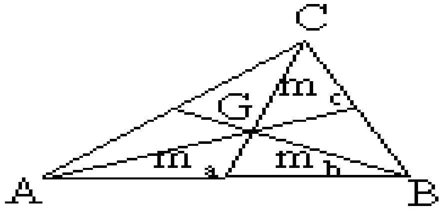
- La mediatrices de un triángulo no necesariamente pasan por los vértices.
- $M_a \cap M_b \cap M_c = \{M\}$.
- En todo triángulo las mediatrices se cortan en un punto llamado circuncentro y se denota por M.
- El circuncentro está dentro del triángulo si este es **acutángulo**, fuera si es **obtusángulo** o sobre la hipotenusa si es **rectángulo**.

Se llaman **alturas** de un triángulo ABC a los segmentos **h_a, h_b** y **h_c** de las perpendiculares trazadas desde los vértices del triángulo a las rectas que contienen los lados opuestos. Los pies de dichas perpendiculares se llaman pie de la altura.



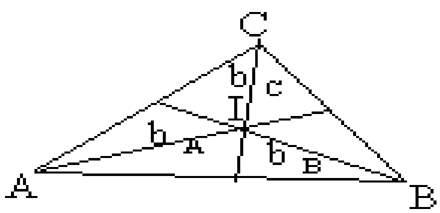
- La distancia del vértice al pie de la altura se llama longitud de la altura.
- $h_a \cap h_b \cap h_c = \{H\}$.
- Las alturas de un triángulo se cortan en un punto llamado ortocentro.
- El ortocentro puede estar dentro del triángulo si este es **acutángulo**, fuera si es **obtusángulo** o coincidir con el vértice del ángulo recto si el triángulo es **rectángulo**.

Se llaman **medianas** de un triángulo ABC a los segmentos **m_a, m_b** y **m_c** determinados por los vértices del triángulo y el punto medio de sus lados opuestos.



- $m_a \cap m_b \cap m_c = \{G\}$.
- En todo triángulo las medianas se cortan en un punto llamado baricentro y se denota por G.
- El baricentro en el centro de gravedad del triángulo. Este punto siempre se encuentra en el interior del triángulo para cualquier tipo de triángulo.

Se llaman **bisectrices** de un triángulo ABC a los segmentos **b_A, b_B** y **b_C** de las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo A, B y C, determinados por los vértices y por el punto de intersección de ella con el lado opuesto a dichos vértices.



- $b_A \cap b_B \cap b_C = \{I\}$
- En todo triángulo las bisectrices se cortan en un punto llamado incentro y se denota por I.
- Este punto siempre se encuentra en el interior del triángulo para cualquier tipo de triángulo y equidista de los lados del triángulo.

Cuadriláteros convexos

Del epígrafe 3.1 recordamos que:

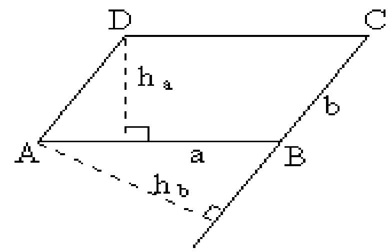
Atendiendo al paralelismo de sus lados los cuadriláteros convexos se clasifican en: ***paralelogramos*** y ***trapecios***.

Propiedades de los paralelogramos

Si un cuadrilátero convexo es un paralelogramo, entonces:

1. Los lados opuestos son iguales.
2. Los ángulos opuestos son iguales.
3. Las diagonales se cortan en su punto medio.
4. Los ángulos consecutivos suman 180°.

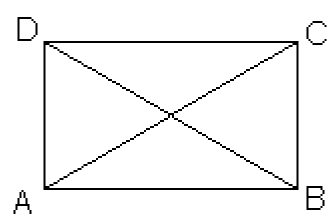
La **altura** de un paralelogramo correspondiente a un lado es el segmento de perpendicular trazado desde un vértice al lado opuesto o a su prolongación; su longitud es igual a la distancia del vértice a su lados opuesto.



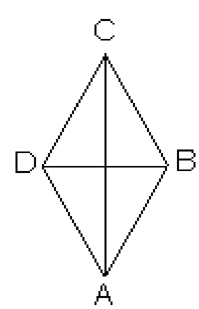
Del libro de texto de 7mo. grado, pp. 92 y 93; estudia los teoremas 5, 6 y 7 que constituyen los recíprocos de los teoremas dados por las propiedades 1, 2 y 3, antes mencionados.

Paralelogramos especiales

El rectángulo: Es el paralelogramo que tiene sus cuatro ángulos rectos.
Las diagonales de un rectángulo son iguales.

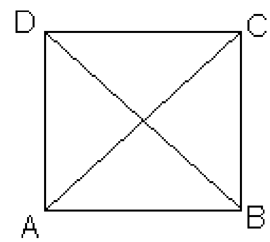


El rombo: Es el paralelogramo que tiene sus cuatro lados iguales.
Las diagonales de un rombo se intersecan perpendicularmente y cada una es bisectriz de los ángulos cuyos vértices unen.



El cuadrado: Es el paralelogramo que tiene sus cuatro ángulos y sus cuatro lados iguales.
Las diagonales de un cuadrado son iguales, se intersecan perpendicularmente son bisectrices de

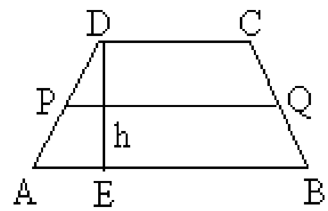
los ángulos cuyos vértices unen.



Trapecios

Elementos del trapecio

- ***Bases**:* Son los lados paralelos ($\overline{AB}$ y $\overline{CD}$).
- **Altura:** Es el segmento DE perpendicular trazado desde un vértice a la base opuesta o a su prolongación y su longitud es igual a la distancia del vértice a la base opuesta.



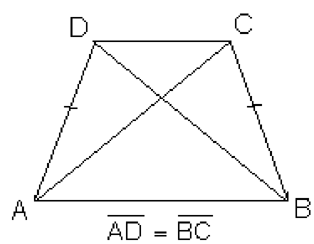
- **Paralela media**: Es el segmento $\overline{PQ}$ que une los puntos medios de los lados no paralelos.

  Es paralelo a las bases del trapecio y su longitud es igual a la semisuma de las longitudes de ellas.

El trapecio isósceles: Es aquel cuyos lados no paralelos tienen la misma longitud.

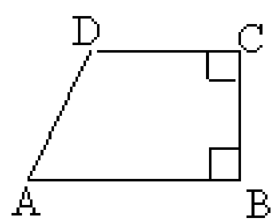
1. Los ángulos adyacentes a una misma base son iguales.

2. Las diagonales son iguales.

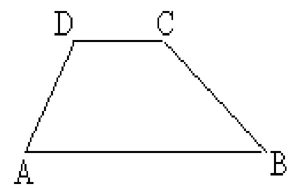


El trapecio rectángulo: Es aquel que tiene dos ángulos rectos.

$\overline{CB} \perp \overline{AB}$ y $\overline{BC} \perp \overline{DC}$, es decir, $\angle$ B = $\angle$ C = 90º.



El trapecio escaleno: Es aquel cuyos lados no paralelos son desiguales.



$\overline{AD} \neq \overline{BC}$

Resumen de las propiedades generales

1. La suma de los ángulos interiores es igual a 360º.
2. Los lados y ángulos opuestos son iguales.
3. Las diagonales se intersecan en su punto medio.
4. Las diagonales son iguales.
5. Las diagonales son perpendiculares y son bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen.
6. La paralela media es paralela a las bases y su longitud es igual a la semisuma de las longitudes de las bases.

A continuación se indica qué propiedades de las anteriores cumplen cada uno de los cuadriláteros estudiados.

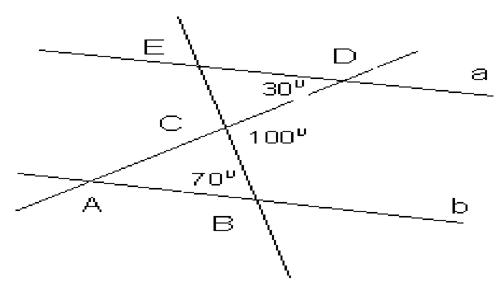
$$\text{Paralelogramos} \left\{ \begin{array}{l} \text{Paralelogramo más general } (1, 2, 3, 6) \\ \text{Rectángulo } (1, 2, 3, 4, 6) \\ \text{Rombo } (1, 2, 3, 5, 6) \\ \text{Cuadrado } (1, 2, 3, 4, 5, 6) \end{array} \right.$$

Trapecios (1, 6)

Ejercicios resueltos

1. Dadas la siguiente figura, *AD y EB* se cortan en C.

Fundamenta por qué la recta a es paralela a la recta b.

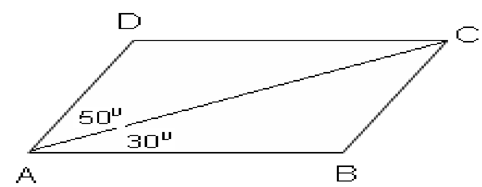


Al analizar la figura observamos que el ángulo BCD es exterior a los triángulos ABC y CDE, por lo que podemos plantear que $\angle$ BCD = $\angle$ ABC + $\angle$ BAC por la propiedad del ángulo exterior respecto al triángulo ABC, de ahí que según los datos y operando se tiene que:

$\angle$ BAC = 30º, pero $\angle$ BAC es alterno con el $\angle$ CDE entre las rectas a y b, cortadas por la secante AD; y como $\angle$ CDE = $\angle$ BAC = 30º.

Podemos concluir que las rectas a y b son paralelas, ya que encontramos un par de ángulos iguales que ocupan la posición de alternos entre las rectas a y b y la semirrecta AD.

2. Una diagonal de un paralelogramo forma con dos de sus lados ángulos de 30º y 50º como se muestra en la figura. Selecciona cuál de las amplitudes de los ángulos interiores son del paralelogramo ABCD.



- 50º, 30º, 50º, 30º.
- 80º, 100º, 80º, 100º.
- 30º, 60º, 30º, 60º.

Para seleccionar la respuesta correcta debemos realizar un análisis gráfico, de la forma siguiente:

Sabemos que por propiedades de los paralelogramos, sus ángulos opuestos son iguales y que la suma de todos sus ángulos interiores es igual a 360º, por lo que tenemos que:

$\angle$ CAD + $\angle$ CAB = $\angle$ BAD = 80º por suma de ángulos consecutivos.

Pero $\angle$ BAD = $\angle$ BCD = 80º por ser ángulos opuestos en el paralelogramo ABCD.

Como los ángulos consecutivos de un paralelogramo suman 180 º, entonces $\angle$ ABC = 100 º.

Teniendo en cuenta lo anterior podemos concluir que la respuesta correcta es la segunda alternativa.

Ejercicios

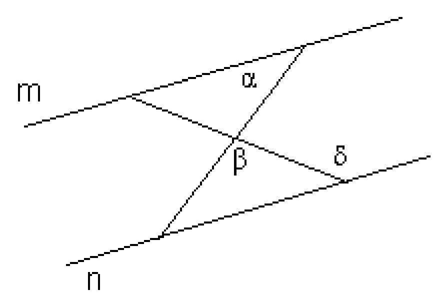
1. Determina si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Fundamenta en caso de ser falsa.

a) En un triángulo a mayor lado se opone mayor ángulo.
b) Las alturas de un triángulo son los segmentos determinados por el vértice y el punto medio del lado opuesto.
c) Con tres segmentos de longitudes 10 cm, 5,0 cm y 4,0 cm se puede construir un triángulo.
d) Todo triángulo equilátero es isósceles.
e) Un triángulo rectángulo puede ser equilátero.
f) En un triángulo isósceles la altura relativa al lado base coincide con la mediana.
g) El circuncentro siempre es un punto interior del triángulo.
h) La amplitud del ángulo exterior de un triángulo es igual a la amplitud del ángulo interior adyacente a él.
i) Un triángulo puede tener dos ángulos obtusos.

2. Selecciona la respuesta correcta:

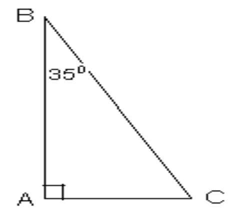
a) En la figura se representan dos rectas m y n, y los ángulos $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 70^\circ$ y $\delta = 135^\circ$.

- m y n son rectas que se cortan.
- m y n son rectas paralelas.
- No se puede dar una conclusión por falta de datos.

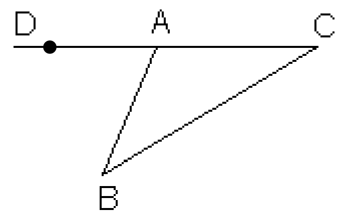


b) En la figura siguiente se tiene el triángulo ABC rectángulo en A. ¿Cuál es la medida del ángulo C en este triángulo?

45º 55º 65º 145º



3. El triángulo ABC de la figura es isósceles de base $\overline{BC}$, si el ángulo B tiene una amplitud de 42º. ¿Cuál es la amplitud del ángulo DAB?



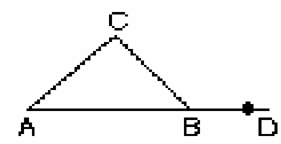
4. Si en un triángulo dos de los ángulos interiores tienen una amplitud de 75º y 30º, entonces el triángulo es:
   - Equilátero.
   - Rectángulo.
   - Isósceles.

5. Sea un triángulo MNP equilátero, O punto de PN y $\overline{MO}$ bisectriz del ángulo NMP, entonces el triángulo MNO atendiendo a las amplitudes de sus ángulos es:
   - Obtusángulo.
   - Rectángulo.
   - Acutángulo.

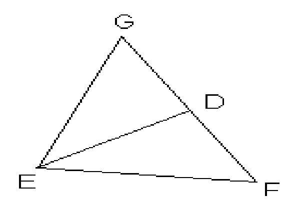
6. Si en un cuadrilátero dos de sus ángulos interiores consecutivos son rectos y los otros dos tienen una amplitud de 70º y 110º, entonces el cuadrilátero es:

- Un paralelogramo.
- Un cuadrado.
- Un trapecio rectángulo.

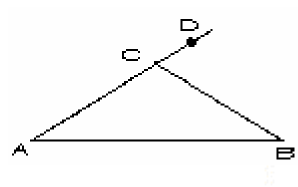
7. En la figura ABC es un triángulo al cual se le ha prolongado el lado $\overline{AB}$, $\angle$ CBD = 2 $\angle$ BAC, entonces el triángulo ABC es:
    - Equilátero.
    - Escaleno.
    - Isósceles.



8. La figura EFG es un triángulo isósceles de base $\overline{FG}$, D es punto medio de $\overline{FG}$ y genera el triángulo DEF. ¿Qué tipo de triángulo es DEF atendiendo a la amplitud de sus ángulos?

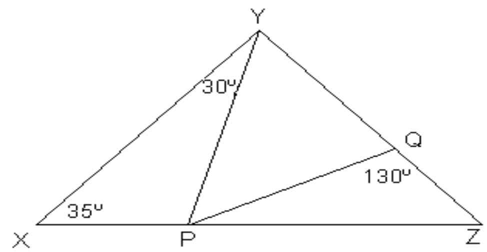


9. El ángulo DCB de la figura tiene una amplitud de 110º y $\angle$ A = 70º. Clasifica el triángulo ABC según la amplitud de sus ángulos.

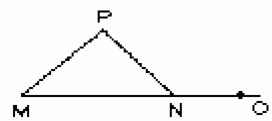


10. En el triángulo isósceles XYZ de base $\overline{XZ}$, P y Q son puntos de los lados $\overline{XZ}$ y $\overline{YZ}$, respectivamente, que determinan al triángulo YPQ según se ilustra en la figura, entonces el triángulo YPQ es:

- Equilátero.
- Isósceles.
- Escaleno.



11. En la figura el ángulo PNO tiene una amplitud de 102º.
¿Cuál es la amplitud de los ángulos interiores del triángulo MNP si $\angle$ MPN = 4x – 8º y $\angle$ NMP = x + 10º?

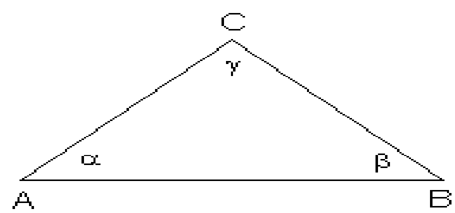


12. Si los ángulos agudos de un triángulo rectángulo miden respectivamente 2 x + 30º y 3 x + 15º. Calcula el valor de dichos ángulos.

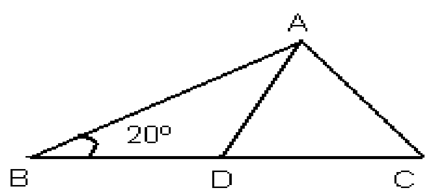
13. En la figura α, β y γ son los ángulos interiores del triángulo ABC que cumplen las siguientes condiciones:

$\alpha + \beta = 140º$ y $\gamma + \beta = 120º$

Halla las amplitudes de α, β y γ.

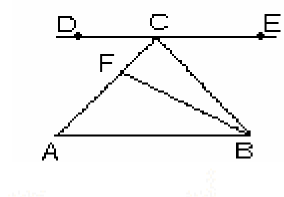


14. En la figura se tiene un triángulo ABC y un punto D que se encuentra sobre el lado $\overline{CB}$, la amplitud del $\angle$ ABD = 20º y el triángulo ADC es equilátero.
Halla la amplitud del $\angle$ BAD.

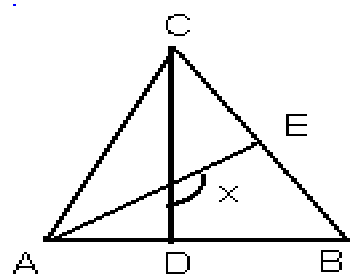


15. En la figura $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$, $\overline{BF} \perp \overline{AC}$ y el ángulo DCA tiene una amplitud de 32,7º.

Halla la amplitud del ángulo ABF.

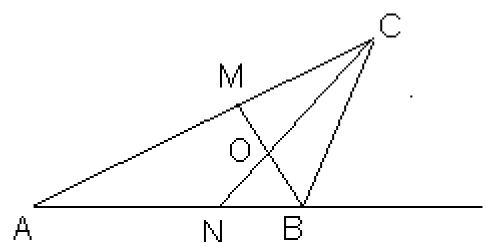


16. En la figura se tiene el Δ ABC. Halla el valor del $\angle$ x; si E punto de $\overline{CB}$, $\overline{AE}$ es la bisectriz del $\angle$ A, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$, $\angle$ B = 68º y $\angle$ C = 46º.



17. En la figura $\overline{CN}$ es la bisectriz del ángulo ACB, $\overline{BM}$ es la altura correspondiente al lado $\overline{AC}$ del triángulo ABC, el ángulo BAC tiene una amplitud de 30º y el ángulo exterior del triángulo adyacenteal ángulo ABC mide 70º.

Verifica que el triángulo NOB es escaleno.



18. En la figura N y M puntos de $\overline{AB}$ y $\overline{BD}$ respectivamente, $\overline{AD} \perp \overline{BD}$ y $\overline{DC} \perp \overline{BC}$

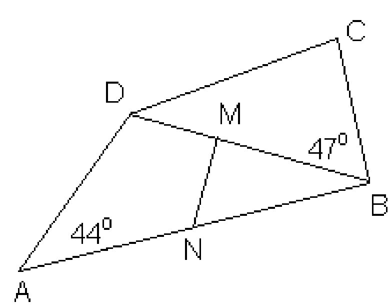
Analiza cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

a) $\angle$ MNB = 44º por correspondiente con $\angle$ DAB.

b) $\angle$ CDB = 47º por ser Δ CBD isósceles de base $\overline{BD}$.

c) $\angle$ ABD = 47º por ser $\overline{BD}$ bisectriz del $\angle$ ABC.

d) $\angle$ ABD = 46º por suma de ángulos interiores de un triángulo.



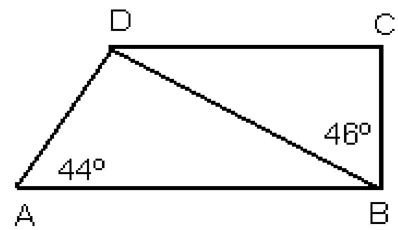
19. En la figura $\overline{AD}$ es perpendicular a $\overline{DB}$ y $\overline{DC}$ es perpendicular a $\overline{CB}$, entonces:

a) $\angle$ ADB = 46º por alterno con $\angle$ CBD.

b) $\angle$ CDB = 46º por triángulo CDB isósceles.

c) $\angle$ ABD = 46º por ser $\overline{BD}$ bisectriz del $\angle$ ABC.

d) $\angle$ ABD = 46º por suma de ángulos interiores de un triángulo.



20. Dados los ángulos α, β y γ según se muestra en la figura. Determina cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta:

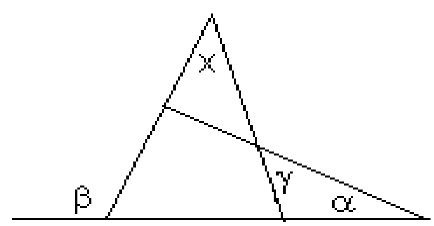
La amplitud del ángulo x esta dada por:

a) $\alpha + \beta + \gamma$

b) $\alpha - \gamma - \beta$

c) $\beta - \alpha - \gamma$

d) No se puede plantear por falta de datos.

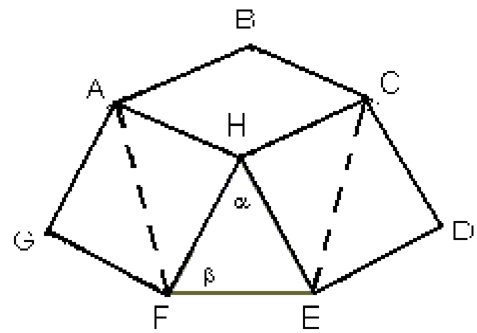


21. Resuelve los ejercicios del 1 al 6, libro de texto de 7mo. grado, p. 89.
22. Resuelve los ejercicios del 2 al 3, libro de texto de 7mo. grado, pp. 93 y 94.
23. Resuelve los ejercicios 1, 2, 4 al 8, libro de texto de 7mo. grado, pp. 97-99.
24. Resuelve los ejercicios del 1 al 9, libro de texto de 7mo. grado, pp. 101 y 102.
25. Determina si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Fundamenta en caso de ser falsa.
    a) Los ángulos opuestos de un paralelogramo suman 180º.
    b) Las diagonales de 7un paralelogramo se cortan en su punto medio.
    c) Un cuadrilátero con sus ángulos opuestos iguales es un rombo.
    d) Un rectángulo es un paralelogramo que tiene sus lados consecutivos iguales.

e) Un rectángulo con las diagonales perpendiculares se considera cuadrado.
f) Un cuadrado es un rombo con un ángulo recto.

26. En un cuadrilátero MNPQ se sabe que: $\angle M = x + 38^o$, $\angle N = 3x$, $\angle P = 2x$ y $\angle Q = 2x + 18^o$. Calcula las amplitudes de los ángulos interiores del cuadrilátero.

27. El heptágono está formado por dos cuadrados iguales (AGFH y CDEH), un triángulo EFH y un rombo ABCH. Si $\alpha = \frac{\beta}{2}$, $\overline{AF}$ y $\overline{CE}$ diagonales de los cuadrados. Halla la amplitud de los ángulos interiores del pentágono ABCEF.



3.4 Estimación de magnitudes en figuras planas

En este epígrafe recordarás algunas fórmulas que te permitirán calcular el área y el perímetro de diferentes figuras planas; además ampliarás tus conocimientos porque conocerás cómo calcular, por ejemplo, el área de un paralelogramo y de un trapecio.

Las fórmulas que a continuación te relacionamos son aplicables a ejercicios y problemas donde se calculan áreas y perímetros de diferentes regiones representadas por figuras geométricas conocidas por ti. En otros casos deberás descomponer la figura dada en partes, de manera tal que a las figuras que determines por la descomposición te sea posible calcularle su área y su perímetro.

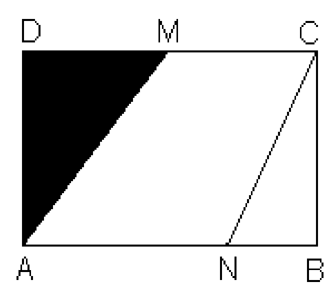
Debes tener cuidado con las unidades de medidas que se te dan teniendo siempre presente, que para calcular áreas o perímetros todas las longitudes de los elementos de las figuras geométricas deben tener la misma unidad de medida, además recuerda que las áreas se dan en unidades cuadradas (cm^2, m^2, etc.) y los perímetros en unidades lineales (cm, m, etcétera).

Áreas y perímetros de polígonos

Polígonos	Área (A)	Perímetro (P)	
Triángulo	$\frac{b\,.\,h}{2}$	a + b + c	a, b, c ---- lados del triángulo h ---- altura
Paralelogramo	b . h	2(b + h)	b ---- base h ---- altura
Rectángulo	l . a	2(l + a)	l ---- largo a ---- ancho
Rombo	$\frac{d_1 . d_2}{2}$	4 a	d_1, d_2 ------ diagonales a ----- ancho
Cuadrado	l^2	4 l	l ------- lado
Trapecio	$\frac{(B+b)h}{2}$	a + b + c + d	B ---- base mayor d ---- base menor h ---- altura a, b, c, d ----- lados del trapecio

Ejercicios resueltos

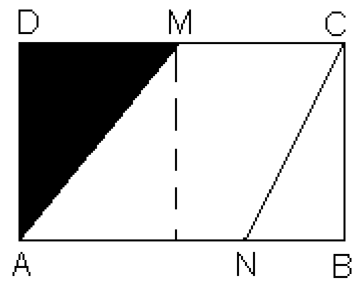
1. En la figura ABCD es un rectángulo y M es el punto medio de $\overline{CD}$. El área de ABCM es igual a:
   a) La del cuadrilátero ANCD.
   b) El triplo del área del triángulo BCN.
   c) Al 75 % del área del rectángulo ABCD.
   d) No se puede determinar por falta de datos numéricos.



En este ejercicio aunque al leerlo te parezca muy complicado, la respuesta la obtienes sin dificultad siguiendo el razonamiento siguiente:

Observa que es posible descomponer la superficie del rectángulo en tres figuras planas conocidas por ti, pero por nuestro interés la dividiremos en el triángulo ADM y el cuadrilátero ABCM, es decir, $A_{ABCD} = A_{\Delta ADM} + A_{ABCM}$.

Como M es punto medio de $\overline{CD}$ podemos trazar por el punto M el segmento paralelo al lado $\overline{AD}$, con cual el rectángulo ha quedado dividido en dos parte iguales y el área del triángulo ADM representa la mitad de una de esas partes por lo que será la cuarta parte del área del rectángulo.



Finalmente se tiene que: $A_{\Delta ADM} = \frac{1}{4} A_{ABCD}$.

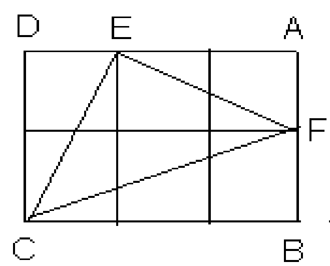
En otras palabras, el área del triángulo es el 25 % del área del rectángulo ABCD, por lo que el área de ABCM será el 75 % del área del rectángulo ABCD, obteniendo así la respuesta correcta.

2. Seis cuadrados iguales se unen formando un rectángulo ABCD, según se muestra en la figura. Si F y E son vértices de cuadrados pequeños. Di cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

a) El triángulo CEF es equilátero.

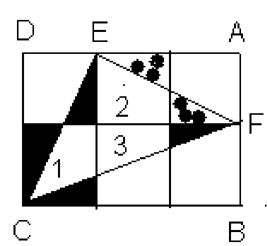
b) El triángulo CEF es isósceles.

c) El área del triángulo CEF es aproximadamente el 42 % del área del rectángulo.



d) $\angle$ ECF $\neq$ $\angle$ EFC.

En este ejercicio debes tener en cuenta que si los seis cuadrados son iguales, los rectángulos formados por dos de ellos también son iguales, luego sus diagonales serán iguales y en la figura se puede observar que, $\overline{CE} = \overline{EF}$ por ser diagonales de dos rectángulos formados por dos cuadrados iguales; observa que $\overline{CF}$ es la diagonal de un rectángulo formado por tres cuadrados.



Del análisis anterior se puede concluir que el triángulo CEF tiene dos lados iguales; de ahí que podemos afirmar que es un **triángulo isósceles**, ya que el tercer lado es mayor que los lados iguales (lado base del triángulo isósceles).

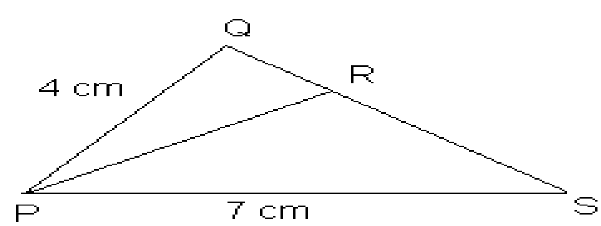
El área del rectángulo que se forma es seis veces el área de uno de los cuadrados pequeños y observando la figura, podemos ver que el triángulo cubre dos cuadrados y la mitad del otro. En la siguiente figura se han representado las partes iguales que conforman los cuadrados.

Puedes observar que las superficies pintadas de negro completan la superficie del cuadrado 1 y las superficies punteadas completan la superficie del cuadrado 2, la superficie señalada con el número 3 representa la mitad de la superficie de un cuadrado, por lo que se puede concluir que si los seis cuadrados representan el 100 % del área del rectángulo, 2,5 cuadrados representan el $41,\overline{6}$ % del área del rectángulo que aproximadamente es el 42 %.

Por último si el triángulo es isósceles los ángulos ECF y EFC son los ángulos base por tanto tienen que ser iguales.

Luego podemos concluir que las afirmaciones verdaderas son la segunda y la tercera.

3. En el triángulo PQS de la figura, R es un punto del lado $\overline{QS}$ que genera el triángulo PRS con los ángulos RPS y RSP iguales. Si la medida del perímetro del triángulo PQR es 12 cm. ¿Cuál es la medida del perímetro del triángulo PQS?



Observa que en este ejercicio nos piden calcular el perímetro del triángulo PQS del cual conocemos la longitud de dos de sus lados ($\overline{PQ} = 4\,cm$ y $\overline{PS} = 7\ cm$), luego tenemos que determinar la longitud del tercer lado, es decir, de $\overline{QS}$. Según los datos podemos plantear que $\overline{QS} = \overline{QR} + \overline{RS}$ y que el triángulo PRS es isósceles de base $\overline{PS}$, ya que $\angle$ RPS = $\angle$ RSP, luego los lados $\overline{PR}$ y $\overline{RS}$ son iguales.

Además, se nos dice que el perímetro del triángulo PQR es 12 cm, es decir:

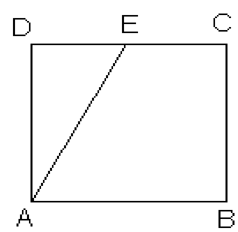
$P_{\Delta PQR} = \overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{PR} = 12\ cm$, pero $\overline{PR} = \overline{RS}$, entonces podemos plantear que la suma de los segmentos $\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RS} = 12\ cm$ y como $\overline{PQ} = 4\ cm$, queda que $\overline{QR} + \overline{RS} = 8\ cm$, o sea, $\overline{QS} = 8$ cm.

Por lo que podemos concluir que:

$P_{\Delta PQS} = \overline{PQ} + \overline{QS} + \overline{PS} = 19\ cm$.

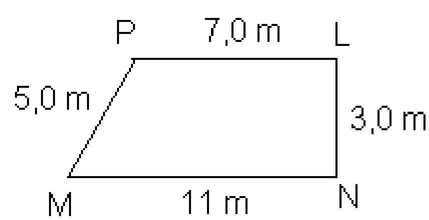
Ejercicios

1. En la figura ABCD cuadrado, E es el punto medio de $\overline{DC}$, $\overline{AB}$ = 6,0 cm.
   a) Halla el perímetro del cuadrado.
   b) Determina el área del trapecio ABCE.

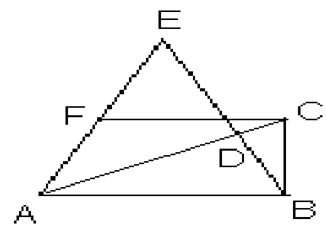


2. En el trapecio MNLP que se muestra $\overline{NL} \perp \overline{MN}$ y $\overline{NL} \perp \overline{PL}$. Señala la respuesta correcta.

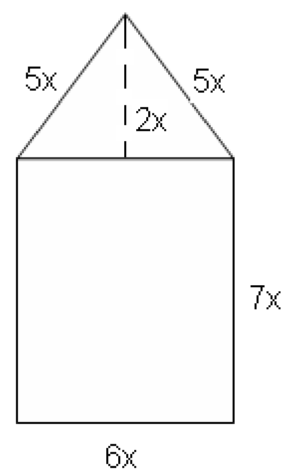
   Su área es:
   a) 26 m^2.
   b) 27 m^2.
   c) 33 m^2.
   d) 84 m^2.



3. En la figura ABCF es un cuadrilátero y ABE un triángulo isósceles de base $\overline{AB}$, $\overline{FC} \parallel \overline{AB}$; $\overline{AC}$ bisectriz del $\angle$ A; $\overline{AB} \perp \overline{BC}$; $\angle$ ACF = 37º.
    a) Calcula la amplitud de los ángulos interiores del triángulo ABE.
    b) Clasifica el cuadrilátero ABCF y calcula su área sabiendo que $\overline{AB} = 10\ cm$; $\overline{BC} = 7{,}5\ cm$; $\overline{FC} = 78\ mm$

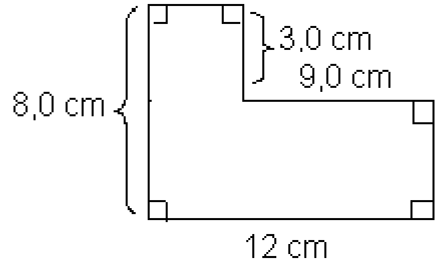


4. La figura muestra la pared delantera de una casa de tabaco. Sabiendo que el perímetro de la pared es de 60 m. Determina la altura total y el ancho de la casa de tabaco.



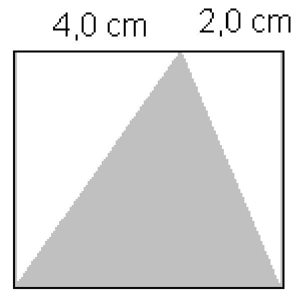
5. ¿Cuál es el área en centímetros cuadrados de la figura que se muestra?

    a) 66 cm^2.
    b) 69 cm^2.
    c) 81 cm^2.
    d) 96 cm^2.



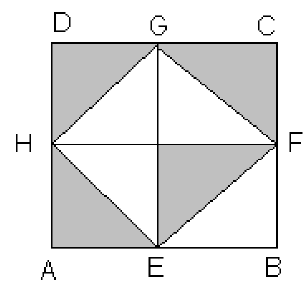
6. La figura muestra un triángulo dentro de un cuadrado.

¿Cuánto mide el área del triángulo?



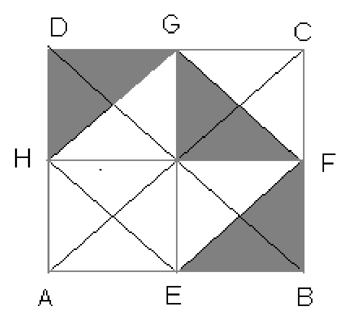
a) 36 cm^2.
b) 18 cm^2.
c) No se puede calcular por falta de datos.

7. En la figura se tiene un cuadrado ABCD, con $\overline{AB}$ = 4,0 cm. Si E, F, G y H son los puntos medios de sus lados. El área sombreada es:



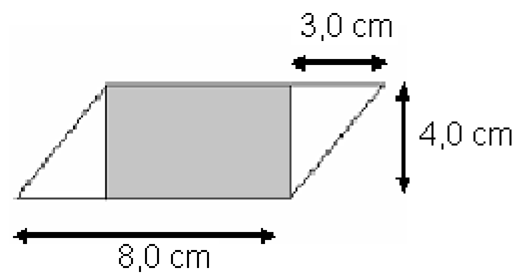
a) 2 % del área del cuadrado ABCD.
b) 12,5 % del área del cuadrado ABCD.
c) 25 % del área del cuadrado ABCD.
d) 50 % del área del cuadrado ABCD.

8. En el cuadrado ABCD de la figura E, F, G y H son puntos medios de sus lados. Si $\overline{AB}$ = 4,0 cm, entonces el área sombreada es:

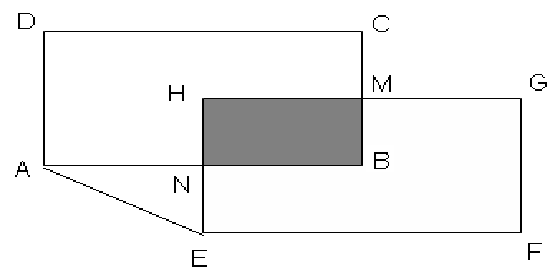


a) 10 cm^2.
b) 6,0 cm^2.
c) $\frac{3}{8}$ cm^2.
d) 6,0 dm^2.

9. La figura muestra un rectángulo sombreado contenido en un paralelogramo. ¿Cuál es el área del rectángulo sombreado?



10. En la figura se muestran dos rectángulos iguales ABCD y EFGH, M y N son los puntos medios de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$, respectivamente. Si se sabe que el área sombreada es igual a 42 cm^2.



a) El área del hexágono AEHMCD es igual a 126 cm^2.
b) El área del hexágono AEHMCD es igual a 148 cm^2.
c) El área del hexágono AEHMCD es igual a 168 cm^2.
d) No se puede calcular el área del hexágono AEHMCD por falta de datos.

11. Si en una sala rectangular de 6,5 m de largo y 40 dm de ancho se coloca una alfombra cuadrada de 2,0 m de lado. La superficie al descubierto es:

a) 6,5 m^2.
b) 256 m^2.
c) 22 m^2.

No se puede calcular.

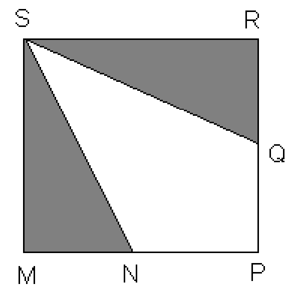
12. Si una habitación rectangular de 80dm de largo y 5,0 m de ancho se cubre su piso con losas cuadradas de 0,5 m de lado, entonces se requieren al menos:

a) 160 losas.
b) 200 losas.
c) 40 losas.

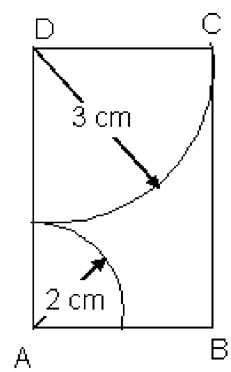
13. En la figura MPRS es un cuadrado; N punto medio de $\overline{MP}$ y Q punto medio de $\overline{PR}$.

El área de NPQS es igual a:

a) La tercera parte del área del cuadrado MPRS.
d) El 60 % del área del cuadrado MPRS.
e) La suma de las áreas de los triángulos MNS y QRS.
f) No se puede determinar por falta de datos.

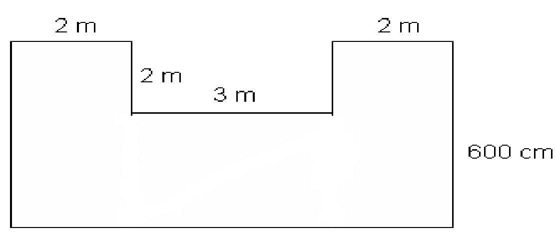


13. En el rectángulo ABCD, se han representados dos cuartos de círculo cuyos radios se indican. ¿Cuál es el perímetro y el área del rectángulo ABCD?

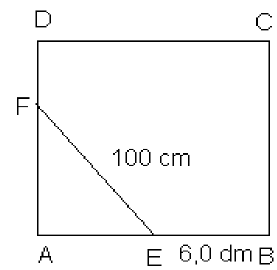


15. Un niño tiene una pieza de cartón rectangular de 48 cm de largo y 37 cm de ancho.
    a) Calcula el perímetro de la pieza en metros y en centímetros.
    b) El niño desea cortarla en cuadraditos que tengan 5 cm de lado. ¿Cuál es el mayor número de cuadraditos que puede cortar?
16. La siguiente figura representa el piso de un salón. Calcula:

a) Su perímetro.
b) Su área.

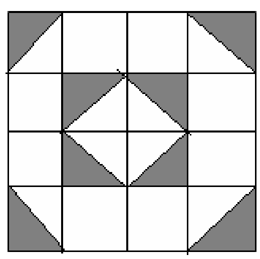


17. En la figura se muestra un cuadrado ABCD cuyo perímetro mide 48 dm, E punto medio de $\overline{AB}$, F punto del lado $\overline{AD}$ tal que $\overline{AF} = \frac{2}{3}\overline{AD}$. Calcula el perímetro y el área del pentágono EBCDF.

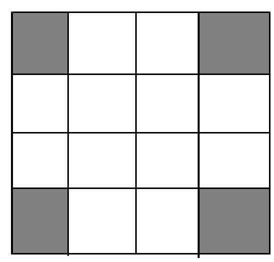


18. Andrés y María deben realizar un trabajo independiente para Artes Plásticas, que consiste en pintar dos cartulinas iguales de forma cuadrada utilizando figuras geométricas. Los dos decidieron dividir sus respectivas cartulinas en 16 cuadrados iguales y el resultado del trabajo fue el siguiente:

María



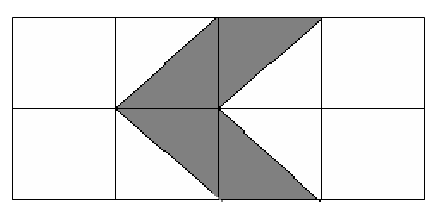
Andrés



¿Cuál de los dos necesitó más pintura para realizar el trabajo?

19. En la figura se tiene un rectángulo cuyo perímetro es de 24 cm y se ha dividido en cuadrados iguales.

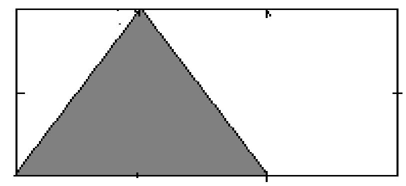
Calcula el área del rectángulo y el área de la figura sombreada. ¿Qué tanto por ciento del área del rectángulo representa el área de la región sombreada?



20. En la figura se representa un rectángulo de 384 cm^2 de área. Las marcas determinan distancias iguales. Halla:

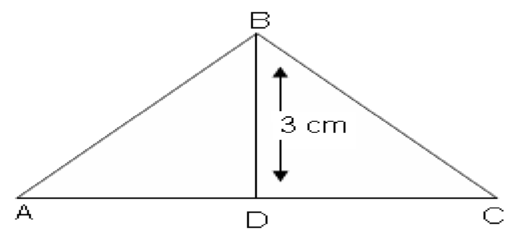
a) El área sombreada.

b) El perímetro del rectángulo.



21. En la figura el triángulo ABC isósceles de base $\overline{AC}$; D es el punto medio de $\overline{AC}$. Si el perímetro del triángulo ABD es de 13 cm.

¿Cuál es el perímetro del triángulo ABC?

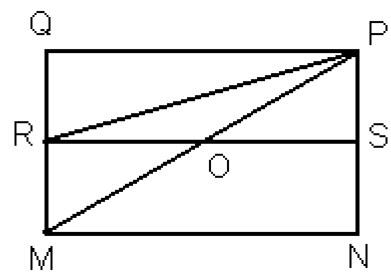


22. En la figura MNPQ rectángulo; $\overline{RS} \parallel \overline{MN}$; S y O son los puntos medios de $\overline{PN}$ y $\overline{RS}$, respectivamente. Además, $\overline{PS}$ = 3,0 cm, $\overline{PO}$ = 5,0 cm y $\overline{OS}$ = 4,0 cm.

a) Calcula el área y el perímetro del cuadrilátero MNSO.

b) Halla el área del triángulo ROP.

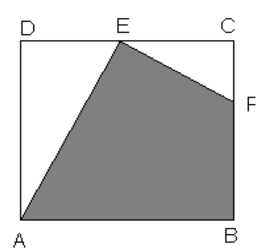
c) ¿Qué tanto por ciento representa el área del triángulo ROP del área del rectángulo MNPQ?



23. En la figura ABCD es un cuadrado; E es el punto medio de $\overline{CD}$; $\overline{AB}$ = 5,0 cm y $A_{\Delta ECF}$ = 1,25 cm^2.

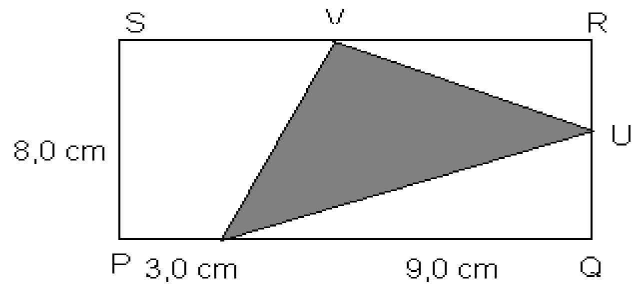
a) Halla el área sombreada.

b) Halla la razón entre el área del cuadrado ABCD y el área del polígono ABFE.



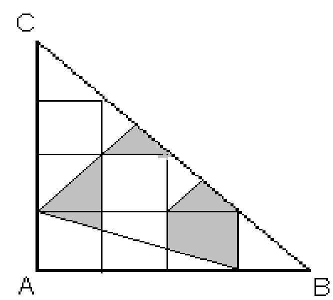
24. En la figura PQRS es un rectángulo; U y V son los puntos medios de $\overline{QR}$ y $\overline{RS}$ respectivamente.

Determina el área sombreada.



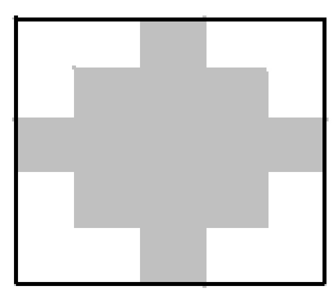
25. En la figura Δ ABC isorectángulo (isósceles y rectángulo). Los cuadraditos tienen un perímetro de 8,0 cm. Los triángulos adyacentes a la hipotenusa tienen cada uno una superficie equivalente al 50 % de la de los cuadraditos.

Halla la razón entre el área sombreada y el área del triángulo.



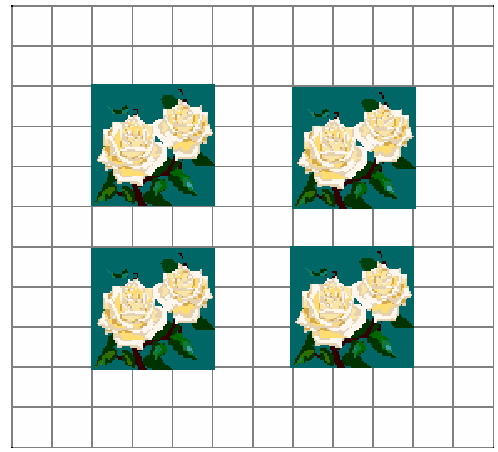
26. El área del cuadrado grande que se representa en la figura es igual a 625 cm^2. Como se muestra en el gráfico el cuadrado ha sido dividido en cuadraditos iguales.

¿Cuál es la razón entre el área sombreada y el área no sombreada?



27. En la figura se muestra un terreno en el cual se quiere construir un jardín de forma

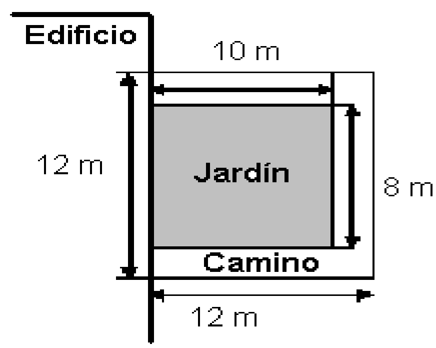
cuadrada de 9,0 m de lado. Se quiere cubrir con baldosas toda su área, excepto cuatro cuadrados interiores iguales de 3,0 m de lado dedicados a jardineras. El terreno esta cuadriculado por cuadrículas de 1,0 m^2 de área. ¿Cuántas baldosas de 1,0 m^2 se necesitan para construir el jardín?



96 81 45 No se puede calcular

28. Un jardín rectangular que está próximo a un edificio tiene un camino alrededor de los otros tres lados, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el área del camino?

144 m^2 64 m^2 44 m^2 16 m^2



29. El cuadrado de la figura está formado por cuadraditos de un centímetro cuadrado de área y cada uno de ellos se ha dividido en dos triángulos iguales.

Indica cuál de las siguientes proposiciones es verdadera:

- La razón entre el área de la figura sombreada y la de la no sombreada es $\frac{5}{4}$.
- El área de la figura sombreada es el 62,5 % de la del cuadrado mayor.
- La parte sombreada tiene tantos triángulos pequeños como la no sombreada.
- El área de la parte no sombreada es 12 cm^2.