Unidad I
Los números con signos

Introducción

¿Recuerdas cómo surgieron los números naturales y fraccionarios?

Seguramente responderás que surgieron por necesidades del hombre para dar respuesta a situaciones de la vida como fue la necesidad de contar y la necesidad de repartir la cosecha en partes.

¿Conoces los números negativos?, ¿sabes por qué surgieron?

En las operaciones de los comerciantes de la antigüedad figuraban lo que tendrían que pagar y todo aquello que obtenían, pero no contaban con ningún recurso que, mediante signos, simplificará su trabajo: ¿cuánto di?, ¿cuánto recibí?, ¿qué ganancias alcancé?, ¿he tenido pérdidas? ¡Menudo problema a la hora del balance!

Mucho tiempo hubo que esperar para que apareciera la solución: ¡el número negativo!

En esta unidad conocerás dos nuevos conjuntos de números: el conjunto de los números enteros y el conjunto de los números racionales, de ellos sus elementos, conceptos y definiciones, relaciones y propiedades que bien aplicadas te permitirán resolver diversas situaciones de la vida práctica, además podrás ver su aplicación en el análisis y procesamiento de datos cuantitativos.

1.1 Los números naturales y sus opuestos

En nuestro entorno natural y social coexisten variados problemas que se resuelven fácilmente estableciendo relaciones entre números, operando con ellos y/o aplicando propiedades que pueden extenderse al campo de la Geometría y el Álgebra. En este epígrafe estudiaremos algunos conceptos básicos que te serán muy útiles para la comprensión y formulación de estos problemas a partir del conocimiento de los números negativos y de un nuevo conjunto de números denominado **Conjunto de los números enteros**; es por ello que te recordaremos algunos aspectos fundamentales sobre la teoría de conjuntos.

Desde muy temprana edad tienes la idea o noción de conjunto como un grupo de objetos, los cuales denotamos generalmente con letras mayúsculas del alfabeto latino, y para denotar los elementos que lo forman, empleamos letras minúsculas.

Ejemplo: A = {a, b, c}

Los conjuntos se expresan de diferentes formas:

- Describiendo las características y propiedades más generales de sus elementos (forma descriptiva):
  - Con palabras
  - Con símbolos (forma constructiva)
- Expresando cada uno de sus elementos (por extensión):
  - Con palabras
  - Con símbolos (notación tabular)
- Graficándolos mediante los llamados diagramas de Euler – Venn.

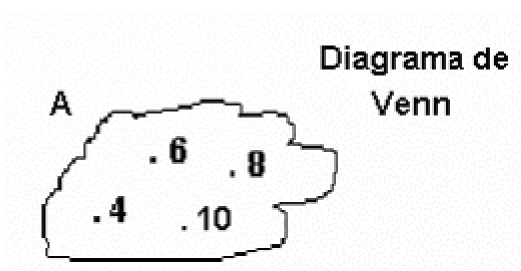
Por ejemplo a continuación te mostramos las diferentes formas en que se puede escribir un conjunto:

A: Conjunto formado por los números naturales pares, menores que 12 y mayores que 3 (forma descriptiva)

A = $\{n \in N$**:** n es par y $3 < n < 12\}$ (notación constructiva)

A: Conjunto formado por el 4, el 6, el 8 y el 10 (por extensión)

A = {4, 6, 8, 10} (notación tabular)



Recuerda también que existen conjuntos finitos e infinitos, por ejemplo:

a) Conjunto D formado por los divisores de 12. (finito)

b) Conjunto P de todos los puntos de una recta. (infinito)

También se pueden establecer, relaciones de pertenencia y de inclusión en los conjuntos.

La relación de pertenencia es la que se establece entre elementos y conjuntos y se utilizan los símbolos $\in$ (pertenece) y $\notin$ (no pertenece), y la de inclusión es la que se establece entre conjuntos y se utilizan los símbolos $\subset$ (subconjunto) y $\not\subset$ (no subconjunto).

Por ejemplo:

1. Sea el conjunto $V = \{a, e, i, o, u\}$.

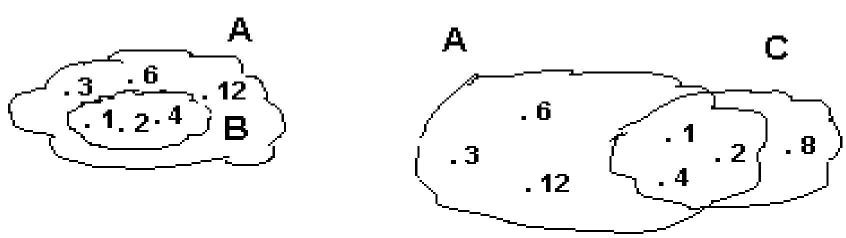
Se puede decir que $a \in V$; $o \in V$; $m \notin V$; $q \notin V$.

2. Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ $B = \{1, 2, 4\}$ y $C = \{1, 2, 4, 8\}$; entonces se pueden establecer, entre otras, las relaciones siguientes:

$B \subset A$ y $C \not\subset A$.

Con palabras diríamos que el conjunto B es un subconjunto del conjunto A y que el conjunto C no es un subconjunto del conjunto A.

Gráficamente:



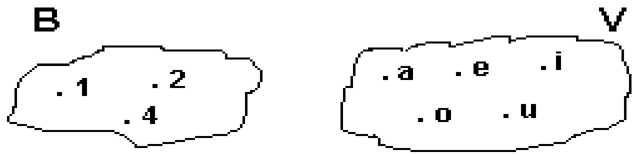
Los conjuntos que carecen de elementos se denominan conjuntos vacíos y se simboliza con la letra del alfabeto griego Φ que se nombra fi.

C**:** Conjunto de todos los niños cubanos que no tienen derecho a la educación ni a la atención médica.

¿Qué puedes decir de los elementos de este conjunto?

Seguramente responderás que carece de elementos, por lo tanto se puede escribir así: $C = \Phi$ y se lee: el conjunto C es igual al conjunto vacío.

Si observamos los elementos del conjunto V definido anteriormente y los del conjunto B podemos plantear que no tienen elementos comunes; estos se denominan *conjuntos disjuntos.*



Puedes decir también que la intersección de estos conjuntos es el conjunto vacío Simbólicamente V ∩ B = Φ

La intersección de dos conjuntos A y B, en símbolos, (A ∩ B) es el conjunto de los elementos que pertenecen al conjunto A y a B simultáneamente, es decir, tanto a A como a B.

La unión de dos conjuntos A y B, en símbolos, (A ∪ B) es el conjunto de los elementos que pertenecen a uno u otro conjunto, es decir, bien a A o a B.

En grados anteriores, estudiaste el **conjunto de los números naturales** y de los **números fraccionarios**. La imposibilidad de resolver diversas situaciones que se presentaron en la vida, utilizando solamente números naturales, generó la ampliación de este conjunto, surgiendo así el **conjunto de los números enteros,** el cual representamos por ($\mathbb{Z}$) y está **formado por los números naturales y sus opuestos.**

Los números enteros satisfacen la necesidad de expresar la relatividad entre fenómenos que tienen lugar en nuestro entorno, tales como: descensos de temperaturas hasta niveles inferiores a 0 º C, incumplimientos de normas y planes de producción, retrasos en trayectorias que describe un móvil, y muchos otros.

- Todos los números enteros mayores que cero se consideran positivos, y sus opuestos, se consideran negativos.
- El cero no es positivo, ni negativo, luego el opuesto del cero es el propio cero.
- El conjunto formado por el cero y todos los números enteros positivos, se denomina conjunto de los números enteros no negativos. T
- El conjunto formado por el cero y todos los números enteros negativos, se denomina conjunto de los números enteros no positivos. T
- Los números opuestos están situados en la recta numérica simétricamente respecto al cero.

- Los números enteros que solo se diferencian en el signo, se llaman opuestos, por ejemplo, 20 y –20 son números opuestos.
- El módulo o valor absoluto de cualquier número entero nunca es negativo. Dos números enteros opuestos tienen el mismo módulo, por ejemplo:

$|-20| = 20$ y $|20| = 20$; luego, $|-20| = |20|$.

Ejercicios:

1. Consulta la Encarta y revisa las características esenciales de los mamíferos, aves e insectos.

Indica en la tabla la clase a que pertenece cada uno de los animales relacionados en la columna 1.

Utiliza los signos: ($\in$; $\notin$) para establecer la relación entre los elementos y los conjuntos que aparecen en la tabla.

Animales	Mamíferos	Aves	Insectos
mariposa			
tigre			
serpiente			
paloma			
tortuga			
mosca			
anguila			
hombre			

2. Considera los conjuntos $A = \{ -4; -2; 3; 7 \}$, $B = \{ 3; -2 \}$ y $C = \{-10; -4; -1; 7 \}$

Analiza cada una de las de las afirmaciones siguientes y represéntala simbólicamente o mediante un diagrama.

a) El conjunto B no es subconjunto del conjunto A

b) −2 es un elemento del conjunto B

c) – 4 y 7 son elementos comunes a los conjuntos A y C.

d) La intersección de los conjuntos B y C es vacía.

e) La unión de los conjuntos A y B es el conjunto A.

3. En el espacio en blanco, coloca el signo que corresponda de forma tal que obtengas proposiciones verdaderas: ($\in$; $\notin$; $\subset$; $\not\subset$)

–1 ___ N, N___ Z, 0___ Z, –100 ___ N,

4___ N, $-\frac{1}{8}$___ Z, 4 ___ Z, 1,234556... ___ Q

4. Dado el siguiente listado de números:

15; – 3; $\frac{3}{4}$; 1; –9; 0; $-\frac{1}{2}$; –1; 2

a) Circula los números enteros comprendidos entre – 8 y 2.

b) Selecciona un número negativo y otro positivo. Escribe el opuesto de cada uno de ellos.

c) Determina $|15|$ y $|-9|$.

d) ¿Para qué valores de x se cumple la siguiente igualdad $|x| = 15$?

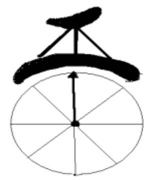
e) Determina los valores que debe tomar la variable y para que la igualdad $|y + 3| = 1$ sea verdadera.

5. Analiza las siguientes proposiciones e indica cuáles son falsas. Justifícalas
 a) Todo número negativo es un número entero.
 b) El conjunto de los números enteros forma un subconjunto del conjunto de los números naturales.
 c) El número – 32 es un número negativo y es un número entero.
 d) El opuesto de – 6 es – 6.
 e) 45 y – 45 tienen igual valor absoluto.

6. Una estudiante lleva un régimen de dieta que le permite perder 2 Kg. al mes. ¿Cuántas libras más pesaba hace tres meses? ¿Cuántas libras menos pesará dentro de dos meses?

7. Observa la rueda de la figura donde se ha destacado uno de los rayos. Se considera el movimiento en sentido positivo cuando la rueda gira hacia la derecha y

negativo si lo hace a la izquierda. Dibuja en tu cuaderno la figura e indica la posición que toma el rayo señalizado cuando gira a partir de ese punto:



a) 2 vueltas hacia la derecha.

b) 3 vueltas hacia la izquierda.

c) $\frac{3}{4}$ de vuelta hacia a derecha.

d) $\frac{1}{2}$ vuelta hacia la derecha.

e) $\frac{3}{4}$ de vuelta hacia la izquierda.

Ubica en la recta numérica el número que representa la posición final que toma el rayo en cada giro.

8. Indica para qué valores de **a** se cumplen las siguientes condiciones, sabiendo que **a** toma valores enteros.

   a) $-8 < a$ y $a < 6$ b) $10 < a$ y $a < 11$ c) $3 < a$ y $a = 5$

   d) $0 < a$ y $a < 2$ e) $a > 15$ y $a < 0$ f) $/a/ > 7$ y $a > -3$

9. En una estación experimental se registraron los siguientes cambios de temperatura por varios días. Analiza las anotaciones que se realizaron:

Temperatura inicial: 15º C.

Cambios ocurridos: sube 8 ºC; baja 9 ºC; sube 12 ºC; sube 6 ºC; baja 3 ºC; sube 2 ºC; sube a 9 ºC; aumenta en 3 ºC y baja 13 ºC.

¿Qué temperatura marcaba la columna de mercurio al concluir el experimento?

10. Un pasajero, está sentado en la cubierta de un barco a 6,0 metros sobre el nivel del mar. (Si el pasajero, un pez, un marinero, una ventana y un submarino están alineados sobre una recta imaginaria perpendicular a la que describe el nivel del mar)

¿A qué distancia se encuentra el pasajero de:

- Un pez que nada a 5,0 m de profundidad?
- La ventana de un camarote situada a 2,0 m sobre el nivel del mar?

- Un marinero subido en el puente de mando construido a 8,0 m sobre cubierta?
- Un submarino a 150 m de profundidad?

11. Un pionero se percata de que su reloj de pulsera marca las 12:15 pm cuando en realidad son las 9:15 am. Como tiene prisa gira las manecillas del reloj buscando el menor recorrido para ponerlo en hora. Escribe con números la cantidad de vueltas que dió al horario y al minutero al concluir el recorrido.

1.2 <u>Los números racionales y sus opuestos. Su utilización en el análisis e interpretación de datos cuantitativos.</u>

En este epígrafe conocerás un nuevo conjunto numérico: **el conjunto de los números racionales,** sus elementos, relaciones y cómo operar con ellos, lo cual te pondrá en condiciones de resolver diversos problemas, además ampliarás tus conocimientos sobre el análisis y procesamiento de datos que iniciaste en el séptimo grado.

Desde grados anteriores aprendiste el significado de la palabra fracción, que en Matemática se ajusta a la posibilidad de dividir en partes iguales una unidad o un conjunto. Sabes también que todo número natural puede escribirse en forma de fracción común cuyo denominador es uno luego; te será fácil comprender que **el conjunto de números naturales es un subconjunto del conjunto de los números fraccionarios**.

El conjunto de los números fraccionarios y sus opuestos forman el conjunto de los **números racionales** el cual denotamos por (**Q**).

El surgimiento de los conjuntos numéricos Z y Q como ampliaciones del conjunto de los números naturales (N) y del conjunto de los números fraccionarios (Q_+), respectivamente, conduce a la conclusión de que N, Z y Q_+ son subconjuntos de Q.

Ahora te recordaremos algunos aspectos importantes sobre los números racionales:

- La generalización de la forma que tienen de escribirse los números racionales ($\frac{p}{q}$; $p \in Z$; $q \in Z$; $q \neq 0$) permite que puedan escribirse como fracción común (parte de una unidad) y como expresión decimal, sea finita o infinita periódica.
- El conjunto de los números racionales es un conjunto denso, porque entre dos números racionales siempre es posible encontrar otro número racional.

- A todo número racional le corresponde un punto de la recta numérica.
- Los signos más y menos de los números racionales, toman significación según el contexto.
- El módulo de cualquier número racional nunca es negativo.
- Para ordenar un grupo de números racionales debes tener en cuenta que:
  - ✓ De dos números racionales cualesquiera es menor, el que esté más a la izquierda en la recta numérica;
  - ✓ de dos números racionales positivos es mayor el que tiene mayor módulo;
  - ✓ de dos números racionales negativos es mayor, el que tiene menor módulo;
  - ✓ el cero es mayor que cualquier número negativo y menor que cualquier número positivo.

Por ejemplo:

En la colección de números: –3; 1,5; $\frac{1}{3}$; $-\frac{5}{8}$; –9; 0

- El número – 9 es el menor, pues está más a la izquierda en la recta numérica respecto al resto de los números.
- $1,5 > \frac{1}{3}$ porque tiene mayor valor absoluto. (1,5 está más a la derecha en la recta numérica).
- $-3 < -\frac{5}{8}$ porque tiene mayor módulo. (–3 está más a la izquierda en la recta numérica).
- $0 > -\frac{5}{8}$ porque $-\frac{5}{8}$ es negativo. El cero es mayor que cualquier número racional negativo. (0 está más a la izquierda en la recta numérica).
- $0 < \frac{1}{3}$ porque $\frac{1}{3}$ es positivo. El cero es menor que todo número racional positivo. ($\frac{1}{3}$ está más a la derecha en la recta numérica).

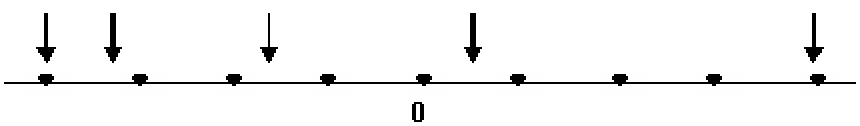
Ejercicios:

1. Ubica los números:

$\frac{3}{8}$; 0 ; $0,\overline{3}$; $-\frac{8346}{100}$; -11 ; 10^3; $-\frac{10}{5}$; 870000 ; $-0,4$, en el diagrama de Venn que se presenta a continuación:

2. ¿A qué números racionales corresponden cada uno de los puntos señalizados?

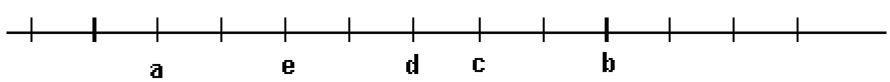
   Nota: La distancia entre dos puntos consecutivos es igual a la unidad de medida **u** que se ha considerado.



   ¿Cuál es el mayor número? ¿Y el menor?

3. En esta recta numérica se ubicaron varios números racionales representados por letras.

   Nota: La distancia entre dos puntos consecutivos es igual a la unidad de medida **u** que se ha considerado.



Subraya las proposiciones verdaderas

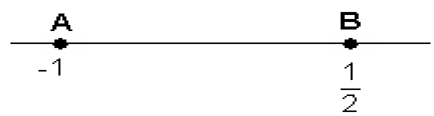
$a > d$; $a < e$; $b > c$; $c > e$; $a < b$; $d > c$

4. Completa los espacios en blanco.

- $\frac{3}{4} < \frac{6}{5}$ porque ____
- el número – 100 pertenece al conjunto de los números ______________
- $-\frac{1}{21}$ _____ $-\frac{2}{42}$ porque tienen igual módulo.

- El conjunto de los números fraccionarios es un subconjunto del ________________.
- $0 > -\frac{1}{2}$ porque____.
- el módulo de –2,45 es_________.

5. Observa la representación de los puntos A y B y después circula las proposiciones verdaderas.
   a) 0 está ubicado entre A y B.
   b) $-\frac{1}{4}$ está situado entre A y B.



   c) 3/2 se localiza antes de B.
   d) 1 se ubica después de A y antes de B.
6. Utiliza los signos <,=, > según corresponda para completar los espacios en blanco, de forma tal que las proposiciones sean verdaderas.

a) $-\frac{3}{2}$ ____ –1,5 b) – 0,781 __ – 0,7816 c) $\frac{1}{3}$ ___0,25 d) $\frac{7}{3}$ __ $\frac{7}{5}$

e) 0 __ –10 000 f) $\sqrt[3]{83}$ __ $\sqrt{43}$ g) $-\frac{8}{9}$ __ $\frac{10}{9}$ h) $\frac{16}{64}$ __ $-\frac{4}{32}$

7. Enlaza los números racionales que se dan en la columna A según las letras del alfabeto nuestro que se dan en la columna B, comienza enlazando el número menor con la letra **a** y continua en ese orden.

Columna A	Columna B
0	a
$\frac{3}{7}$	b
$-\frac{2}{5}$	c
0,75	d
$\frac{4}{3}$	e
$-\frac{1}{6}$	f

8. Ordena los siguientes números racionales en forma descendente.

-1; 0; $-3{,}2$; $-\frac{5}{10}$; $|-4|$; $\frac{1}{4}$

9. Se buscan dos números racionales que sean mayores que $-\frac{1}{4}$ y menores que 0,1.

   Selecciona cuál de las parejas de números siguientes cumple la condición dada:

   $-0{,}25$ y 0 $-\frac{1}{3}$ y $0{,}02$ $-0{,}2$ y $\frac{1}{100}$ $-0{,}15$ y $0{,}2$

10. Existen infinitos números racionales que se encuentran entre –7/8 y –1/2. Selecciona tres, escríbelos e indica cuál es el menor.

11. ¿Cuál de los siguientes números racionales está más cerca de $-\frac{1}{2}$? Selecciona la respuesta correcta:

    $-\frac{1}{3}$ $-\frac{3}{10}$ $-0{,}600$ $-0{,}05$

12. Escribe en notación tabular el conjunto formado por tres números negativos que sean:

    menores que $-0{,}4$ mayores que $-\frac{3}{2}$ divisibles por 2

13. A continuación se relaciona, el nombre de algunos ilustres matemáticos y la fecha aproximada de su nacimiento.

a) Ubica la letra inicial del nombre en el punto de la recta numérica que corresponda según el año de su nacimiento. (**a.n.e.** significa antes de nuestra era)

Arquímedes: 1ra mitad del siglo III a.n.e.	**Tales:1ra mitad del siglo VI**
Cantor: 1ra mitad del siglo XIX.	**Euler: 1ra mitad del siglo**
Cavalieri: 2da mitad del siglo XV.	**Pitágoras: 532 años a.n.e.**
Euclides: 300 años a.n.e	

Sistemas de coordenadas rectangulares

En grados anteriores aprendiste a representar y leer puntos en un sistema de coordenadas, solo que su representación se limitaba al primer cuadrante. Como ya ampliaste tus conocimientos y conociste los números racionales, tuviste la posibilidad de representarlos en la recta numérica; de igual forma podrás representar ahora puntos en el sistema de coordenadas, pero en los **cuatro cuadrantes**

En el sistema de coordenadas rectangulares los números se ubican en el eje de las abscisas (horizontal), ubicando los números negativos a la izquierda del cero y los positivos a la derecha; igualmente se ha convenido situar en el eje de las ordenadas (vertical) a los números positivos por encima del cero y a los negativos por debajo de este.

Las coordenadas de un punto en el plano tienen el orden (x ; y) donde el valor de la abscisa lo representa **x** y el valor de la ordenada está representado por **y**.

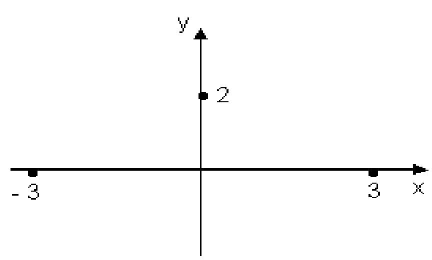
Ejercicios:

1. En el sistema de coordenadas siguiente se han destacado tres puntos:

a) Escribe las coordenadas de estos puntos y nómbralos.

b) Traza dos rectas que contengan estos puntos y se intercepten en el punto señalado en el eje de las ordenadas.

c) Nombra y clasifica las figuras geométricas que se forman y halla el área de la que ocupa mayor superficie.



2. Después de la video-clase, el profesor orienta una actividad independiente que revisará en la sala de computación, por lo que escribe en la pizarra las siguientes órdenes y datos:

a) Traza en un sistema de coordenadas rectangulares dos polígonos dadas las coordenadas de sus vértices.

1) A (3 ; 3) , B (3 ; – 3) , C (2 ; – 3)

2) L (2 ; 2) , M (– 2 ; – 2) , N (– 2 ; 2) , C (2 ; – 3)

b) Clasifica cada una de las figuras, sombréalas y calcula el área total que ocupan en el plano.

c) Guarda el trabajo en una carpeta con tu nombre en Mis documentos.

3. Traza un sistema de coordenadas rectangulares y ubica los siguientes pares ordenados.

Tabla1

x	y
2	– 3
– 1	– 5

Tabla 2

y	x
5	– 1
3	2

a) Traza una recta que contenga los puntos de la tabla 1 y una recta que contenga los de la tabla 2

b) Traza los segmentos que unen los puntos A(–3 ; –5) y C(–1 ; 5) con el punto B que es donde se intersecan las rectas trazadas. Identifica las figuras geométricas que se han formado.

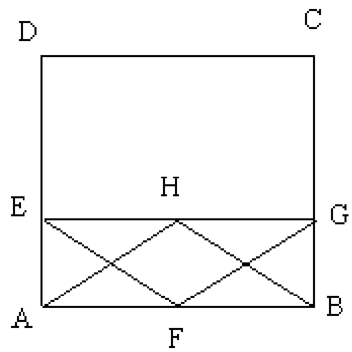
c) Escribe las coordenadas del punto B y calcula el área de la región limitada por los puntos A, B y C.

4. Esta figura se ha construido en la computadora, sobre un sistema de coordenadas rectangulares, que ha sido borrado. Se sabe que:

- el origen del sistema estuvo en F, punto medio de $\overline{AB}$,
- H es el punto medio de $\overline{EG}$.
- AB está contenido en el eje de las abscisas,
- H está sobre el eje semieje positivo de las ordenadas,
- ABCD es un cuadrado de 12 centímetros de lado,
- $\overline{DE} = 2\overline{AE}$,
- para construir el sistema se tomó como unidad un centímetro.

a) Determina las coordenadas de cada punto nombrado en la figura.

b) Calcula su área y el perímetro del cuadrilátero EGCD.



4. Observa la tabla. Al unir los puntos (x;y) que representarás en un sistema de coordenadas rectangulares descubrirás la forma aproximada que tiene la trayectoria recorrida por un arpón, disparado por un aficionado debajo del agua en dirección a la superficie, y podrás decir rápidamente a que distancia del nivel del mar se realizó el disparo.

x	**$y = -x^2$**
0	
1	
–1,5	
– 2,5	

Análisis e interpretación de datos cuantitativos

En 7mo grado aprendiste a recopilar y procesar información, así como interpretar tablas y gráficos. En este grado ampliarás tus conocimientos sobre este tema para lo cual te presentamos un resumen de los conceptos fundamentales que debes aplicar en la resolución de los ejercicios.

Población o universo: conjunto de elementos (entes, objetos, acontecimientos, etc) con una característica común.

Muestra: subconjunto finito de la población

Frecuencia absoluta: número de veces que se repite un mismo dato en la muestra.

Frecuencia relativa: es el cociente de la frecuencia absoluta por el tamaño de la muestra.

Media aritmética: es el valor alrededor del cual se encuentran los datos de una lista.

Esta se calcula hallando el cociente de la suma de todos los datos por el número de datos.

Moda: es el valor más común dentro una lista de datos. Es el valor que más se repite.

También conociste que los datos se pueden representar a través de tablas y gráficos. Entre los diferentes tipos de gráficos conociste, los de **barras**, los **poligonales,** los **circulares** y los **pictogramas**

Te recomendamos que analices los ejemplos que aparecen en el Cuaderno de tareas, ejercicios y problemas de Matemática Séptimo Grado, así como que resuelvas los ejercicios que en este se proponen.

Ejercicios

1. La siguiente tabla presenta algunos datos de interés de cinco países de América en el año 2000.

País	Área (Km^2)	Densidad Hab. / Km^2	%Crecimiento anual	Esperanza de vida
Argentina	Tres millones setecientos sesenta y un mil doscientos setenta y cuatro	9,85	1,1	73
Cuba	110920	101,13	Seis décimas	75
El Salvador	21041	298,46	2,40	70
México	1958201	50,88	2,0	72
Trinidad y Tobago	5123	252,78	0,7	71

a) ¿A qué conjunto numérico más restringido pertenecen los números que representan los datos del % de crecimiento anual?

b) Escribe como se lee el número que representa el área en Km^2 de México y el % de crecimiento anual en El Salvador.

c) Escribe con cifras el número que representa el área en Km^2 de Argentina y el % de crecimiento anual de Cuba.

d) Escribe como fracción decimal el número que representa la densidad de población de Trinidad y Tobago. ¿Cómo se lee ese número?

e) Ordena los países según su densidad poblacional en orden decreciente.

f) ¿En cuánto supera la extensión territorial de México a la de Cuba?

g) ¿Cuál es el promedio de Esperanza de Vida de los cinco países representados en la tabla?

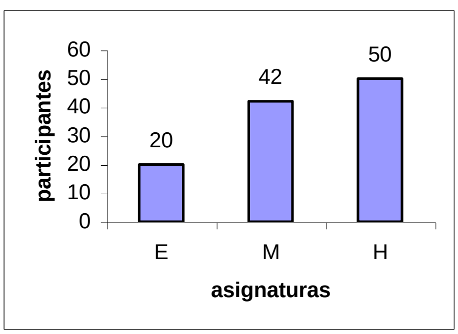
h) Representa en un gráfico de barras los datos que expresan la esperanza de vida de estoa cinco países.

2. Se desea hacer un estudio de las calificaciones obtenidas por los alumnos de una Secundaria Básica que participaron en el concurso de Matemática. Para ello se seleccionaron al azar 20 alumnos para analizar sus calificaciones, recogiéndose las mismas de la siguiente forma.

a) ¿Cuál es la población y la muestra analizada?
b) Construye la tabla de frecuencias absoluta y relativa.
c) Representa gráficamente los resultados del estudio en un gráfico de barras.
d) Determina la media de las calificaciones y la moda.
e) ¿Qué porcentaje de alumnos obtuvo nota inferior a 8 puntos?

9	5	9	7	4	6	8	7	8	7
10	9	8	7	9	5	8	7	9	7

3. La gráfica muestra la cantidad de alumnos que participan en el concurso Municipal de Matemática, Español e Historia en un municipio de la provincia.



a) La media de la cantidad de alumnos que participaron en el concurso por asignaturas es:
50 37,3 42 56

b) ¿Cuál es la moda?

c) ¿Qué tanto por ciento de los alumnos participaron en Matemática?

4. De una investigación realizada por los trabajadores sociales en un Consejo Popular en un municipio habanero, pudimos obtener el siguiente resumen sobre el nivel de enseñanza en que se encuentra estudiando parte de esta población.

Enseñanza	Porcentaje
Pre-Escolar	14,3
Primaria	36,4
Secundaria	22,29
Media Superior	9,64
Universitaria	14,43
Especial	?
Escuela de Superación	0,4
Adulto Mayor	0,04

Sabiendo que la cantidad de personas matriculadas en ese Consejo Popular es igual a 12572

a) Representa en una gráfica de barras la cantidad de estudiantes por enseñanza.

b) ¿En cuántos estudiantes excede la matrícula se Secundaria a la de primaria?

5. En la tabla se han recopilado datos que son el resultado de medir la temperatura ambiental durante diez horas consecutivas de un día invernal en Chile.

Hora (p.m.)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ºC	5,5	5	4,5	3	1	0	–1	– 0,5	–2	–3

a) Representa la variación de temperatura en una gráfica poligonal.

b) ¿Cuándo hubo más frío, a las 8:00 pm ó a las 10:00 pm?

c) ¿Cuántos grados descendió la temperatura desde la 1:00 pm hasta las 10:00 pm?

6. En los observatorios meteorológicos se mide la temperatura 4 veces en el día y se determina la temperatura media diaria. Halla la temperatura media en cada uno de los días que aparecen en una muestra de un país asiático.

1er día: 11,8 º C ; 22,5 º C ; 16,3 º C ; 9,7 º C

2do día: – 3,9 º C ; 8,4 º C ; 6,6 º C ; – 2.8 º C

3er día: – 6,1 º C ; 2,0 º C ; 0 º C ; – 4,2 º C

4to día: 12,3 º C ; – 10,5 º C ; – 7,4 º C ; – 9,6 º C

7. Para un estudio de las causas del incumplimiento de los alumnos con respecto a la realización de la tarea extra clase, el Jefe de grado confecciona una tabla con la cantidad de tareas que han dejado de hacer los 40 alumnos de 8vo. grado en un período de 30 días.

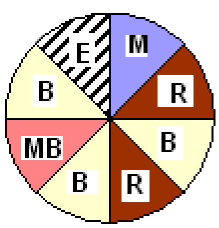
a) Confecciona una tabla de frecuencias absolutas y relativas.

b) ¿Cuál es el promedio de tareas sin hacer en dicho grupo?

c) ¿Cuántos alumnos tienen mayor incidencia en el problema que se valora? ¿Qué tanto por ciento representan?

4	2	5	6	6	5	6	6	6	7
5	5	4	4	2	0	4	6	8	1
5	2	2	5	5	4	3	6	0	2
6	0	5	5	6	5	4	6	1	0

8. En el siguiente gráfico se ha divido el círculo en partes iguales para representar los resultados de la evaluación en la asignatura Matemática, de los 1200 pioneros de una Secundaria Básica.



Observa la figura y realiza todos los cálculos mentalmente.

a) ¿Cuántos pioneros quedaron agrupados en cada categoría?

b) ¿Qué tanto por ciento representan los aprobados (evaluados de E, MB, B, R) del total de pioneros evaluados?, ¿y los desaprobados?

c) ¿Cuál es la moda?, ¿por qué?

d) Confecciona una tabla de frecuencias absoluta y relativa.

e) Enuncia tres medidas que tú tomarías para alcanzar buenos resultados.

9. La siguiente tabla presenta la relación de algunos de los principales emisores de visitantes a Cuba:

Principales emisores	1998	1999	2000	2001	2002
Canadá	215 644		307 725	350 426	348 468
Alemania	148 987	182 159	203 403	171 851	152 662
Italia	186 688	160 843		159 423	147 750
España	140 435	146 978	153 197	140 125	138 609

a) En el año 2000 visitaron nuestro país ciento setenta y cinco mil seiscientos sesenta y siete italianos. Escribe con cifras este número en la tabla.

b) Determina cuantas centenas tiene el número que representa la cantidad de españoles que nos visitaron en el año 2000.

c) ¿En cuánto excede la cantidad de alemanes que nos visitaron en el año 2000 a los de esa misma nacionalidad que nos visitaron en 1999?

d) Determina la media por año de visitantes españoles durante ese tiempo.

e) Construye un gráfico poligonal en el cual representes la cantidad de visitantes alemanes a nuestro país durante estos años. ¿A qué conclusión puedes arribar a partir del comportamiento de los datos en el gráfico?

f) Si la media de visitantes canadienses en esos años fue de 299 721,8. ¿Cuántos canadienses nos visitaron aproximadamente en el año 1999? Escríbelo en la tabla cuando tengas 70 años?

10. Dada la tabla siguiente:

a) Representa los datos en una gráfica de barras doble.

b) Escribe con palabras como se leen los datos que expresan la población de cada uno de los países.

c) Escribe los países en orden creciente según su extensión territorial.

d) ¿En cuanto supera la población de Asia a la de África?

Continentes	Extensión en km²	Población (habitantes)
Europa	10 422 000	671 000 000
Asia	44 808 000	2 602 000 000
África	30 109 000	437 000 000
América	42 080 000	588 000 000
Oceanía	7 960 500	17 343 000

11. En una Secundaria Básica se realiza un estudio sobre la tendencia del componente académico en la asignatura Matemática. Para ello se tomó una muestra de tres grupos (uno de cada grado) con resultados altos, medios y bajos, según se refleja en la tabla siguiente.

Nota: Los alumnos se han identificado con el número 1 hasta el 15.

Número de alumnos (Notas)

Grado	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Séptimo	8	9	4	8	5	9	9	7	8	7	8	6	9	8	7
Octavo	6	7	8	9	7	8	6	6	9	7	6	8	9	6	8
Noveno	8	6	6	8	8	6	9	9	5	6	8	8	9	8	9

a) Confecciona una tabla de frecuencias absolutas con estos datos por grados.

b) Determina el promedio de notas en séptimo y octavo grados.

c) ¿Cuál es la media en noveno grado?

d) ¿Qué tanto por ciento de los alumnos tienen calificaciones por encima de 6 puntos en 8vo. grado?

e) Encuentra la nota más frecuente en cada grado.

f) ¿Qué frecuencia relativa tiene el dato de mayor frecuencia absoluta en noveno grado?

g) Haz un gráfico de barras que refleje la calificación media de los tres grados.

h) Haz un análisis valorativo del comportamiento de las notas en el grado terminal.

12. Los siguientes valores corresponden al crecimiento en centímetros de una muestra de 50 plantas, que fueron tratadas con un abono ecológico especial en un organopónico de Ciudad Habana. Se conoce que el crecimiento promedio sin la aplicación de abonos es de 10 cm entre la siembra y la cosecha.

46	39	34	33	36	41	26	32	36	32
43	28	30	27	42	30	31	35	41	32
28	30	26	21	39	25	33	34	28	37
26	23	30	43	36	20	38	47	31	40
29	30	48	47	31	24	38	38	36	23

e) Determina el crecimiento medio de las plantas para valorar si con este tipo de abono puede confeccionarse un plan de siembra y cosecha que permita obtener una mayor crecimiento de estas plantas.

f) ¿Cuántas plantas alcanzaron un crecimiento entre 20 y 30 centímetros?

g) ¿Cuál es el valor que muestra el crecimiento más frecuente al aplicarle el abono?

13. Al Parque Lenin asisten muchas personas todos los días; el pasado mes se tomó una muestra de la asistencia a una de las cafeterías para realizar la estimación del total de comensales en tres horarios diferentes del día.

	9: 00 – 10: 00 am	12: 00 – 1: 00 pm	2: 00 – 3: 00 pm
Hombres	80	30	61
Mujeres	172	49	104
Niños	105	96	262

a) Construye una tabla de frecuencias absolutas y relativas que resuma la cantidad de comensales por hombres, mujeres y niños en el día.

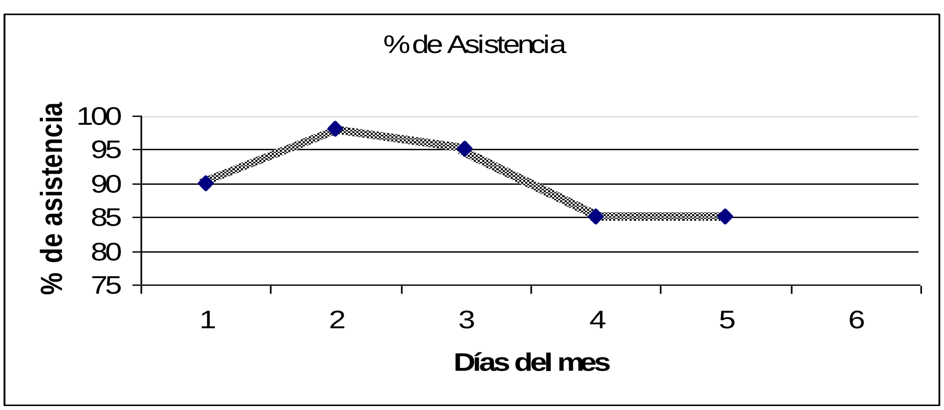
b) Compara la asistencia de hombres, mujeres y niños.

c) ¿En cuánto supera la cantidad de mujeres comensales a la cantidad de hombres?

d) Construye una gráfica de barras donde pueda analizarse el comportamiento de la asistencia ese día de hombres, mujeres y niños. Utiliza colores.

e) Enuncia tres medidas que tú tomarías para alcanzar buenos resultados.

14. La gráfica muestra el comportamiento de la asistencia de los alumnos de un grupo de 8vo grado que tiene una matrícula de 30 alumnos durante los cinco primeros días de un mes .



a) Identifica el tipo de gráfica.

b) ¿Con qué finalidad consideras tú que se utilizó este tipo de gráfico para reflejar estos datos?
c) ¿Cuál fue el día de mejor asistencia?
d) Determina la media aritmética de la cantidad de alumnos que asistieron diariamente.
e) Calcula el tanto por ciento de asistencia alcanzado el noveno día, conociendo que hubo una ausencia por enfermedad.
f) Investiga cuántos alumnos faltaron a tu escuela durante esta semana y calcula que tanto por ciento representa de la matrícula del centro.

15. Una empresa que fabrica baterías tomó una muestra de 13 piezas de la producción de un día y las utilizó de forma continua hasta que comenzaron a fallar. El resultado en horas de funcionamiento fue el siguiente:

342 426 317 545 264 451 1046 631 512 266 492 562

a) Determina la media, y la moda ¿Cuál de estas dos medidas es la más representativa de los datos dados? Fundamenta tu respuesta.

b) ¿Podrá esta empresa divulgar un comercial diciendo que sus baterías tienen una duración promedio de más de 400 horas

16. El número de seres humanos y la cantidad de recursos que necesitan para vivir tienen que equilibrarse. El AHORRO es una base ineludible de la supervivencia y el mejoramiento de la calidad de vida.

CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN	
AÑO	POBLACIÓN HUMANA
Año 1 de nuestra era	200 000 000
Hacia 1650	500 000 000
Hacia 1830	1 000 000 000
Decenio de 1920	2 000 000 000
1960	3 000 000 000
1975	4 000 000 000
1987	5 000 000 000
1992	5 500 000 000
2025 (proyección)	8 500 000 000
2050 (proyección)	10 000 000 000

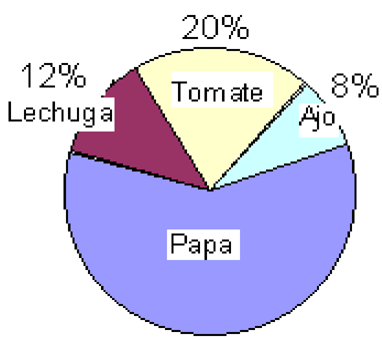
a) Confecciona un gráfico que muestre el crecimiento de la población mundial hasta el año 2000.

c) ¿Cuánto tiempo tardó la población mundial en duplicarse a partir del año1?

d) ¿Cuántas veces se ha duplicado la población mundial desde esa fecha?

e) La población mundial aumenta actualmente a razón de 97 millones de personas al año. En el año 1992 la población mundial fue de 5 500 millones de personas. El planeta lo habitaron 6 mil millones de personas al final del pasado milenio. Si la población sigue creciendo a ese ritmo, ¿Cuántas personas habrá en el mundo cuando tengas 70 años?

17. Una empresa de cultivos varios en Melena del Sur tiene una extensión de 480 hectáreas de tierra cultivables. Responde cada inciso mediante el análisis del gráfico, donde se ha representado la cantidad de tierras que ocupa cada cultivo.



Cantidad de hectáreas

57,60

38,40

278, 0

96,00

288,0

a) Enlaza cada cultivo con la cantidad de hectáreas sembradas.
b) ¿En cuántas hectáreas supera la siembra de papas al resto de los cultivos?

1.3 Operaciones con números racionales

En este epígrafe, aprenderás como operar con los números racionales y resolver problemas en los cuales aparezcan los números negativos, para lo cual tendrás que aprender determinadas reglas y nuevos algoritmos para las operaciones de cálculo. También extenderás propiedades de las operaciones conocidas por ti al trabajo con los números racionales las cuales te serán muy útiles en el cálculo combinado.

Veamos ahora cómo calcular con los números racionales. Ante todo te ayudamos a recordar lo siguiente:

- Si los dos números tienen signos iguales, adiciona sus módulos, y al resultado le colocas el mismo signo.

  Por ejemplo: 2,51 + 0,5 = 3,01 y −7 + (− 6,8) = −13,8
- Si los dos números tienen signos diferentes, sustrae del de mayor módulo el de menor módulo y al resultado le colocas el signo del número que tenga mayor módulo.

  Por ejemplo: –14 + (5,37) = – 8,63
- La suma de dos números racionales opuestos es cero.
- La sustracción es la operación inversa de la adición, y en el conjunto de los números racionales puede efectuarse sin restricción, adicionando al minuendo el opuesto del sustraendo para pasar a ser una suma algebraica.

  Por ejemplo: 8,6 – (–15,9) = 8,6 + 15,9 = 24,5

Toda adición de números racionales (independiente de los signos que tengan los sumandos) la denominamos **suma algebraica.**

Por ejemplo: $-\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = -\frac{9}{20} + \frac{5}{6} = -\frac{23}{60}$

Recuerda que para efectuar esta suma algebraica debes aplicar la forma más ventajosa.

Ejercicios

1. Completa el cuadro siguiente

A	B	C	A + B	B - C	|C –B –A|
7	– 5	– 3			
– 2/5	0,6	– 3,5			
– 5/8	– 0,15	– 4			
0,3	2,34	–1/4			

2. Encuentra el término desconocido en:

a) – 18 + $\boxed{}$ = 29 b) $\boxed{}$ –115 = 92.5 c) 64 + $\boxed{}$ = – 31.1

d) $\frac{77}{11} - \frac{12}{3} = \square$ e) $\square - (-45.8) = 0$

3. La tabla muestra las temperaturas máximas y mínimas de un día del pasado año en cinco países.

Temperatura en grados Celsius (°C)

Países	**Máxima**	**Mínima**	**Diferencia**
Cuba	22	34	
España	12	4	
Italia	– 4	–1	
Rusia	– 3	– 7	
Francia	16	8	

a) Calcula los datos de la última columna.

b) Nombra la capital de cada país y el continente a que pertenece.

4. Verifica si la siguiente suma es mayor que 10.

$$7\frac{1}{8} + 3{,}51 - 12 + 3\frac{7}{8} + 7\frac{1}{4} - \frac{2}{3}$$

5. Determina con ayuda del cálculo, cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas:

a) $-97{,}75 - 1642{,}25 > -7868 - 5846$

b) $-76 + 57 + 4{,}5 + 31 < 35 + 54 - 18 + \frac{3}{2}$

c) $12 + \frac{3}{4} - \frac{7}{3} - \frac{5}{5} < \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{5}{6} - 0{,}45$

6. Se ha construido un edificio de 20 plantas con un sótano que tiene una profundidad equivalente a tres pisos (considera la planta baja como el piso cero) Estima la distancia recorrida por un ascensor cuando viaja desde el:

a) Último piso del sótano hasta el piso 18.

b) Penúltimo piso del sótano hasta la planta baja.

c) Cuarto piso hasta el piso décimo tercero.

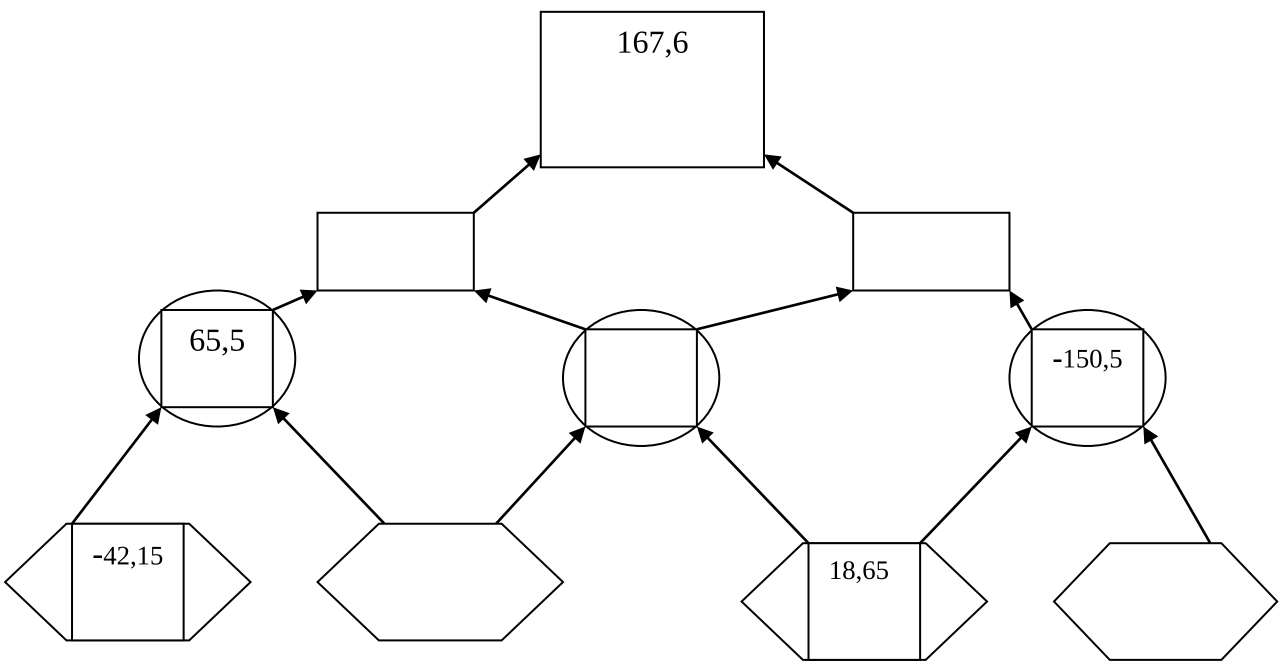
d) Vigésimo piso hasta el último piso del sótano

7. Un cajero automático de un banco registra los depósitos con números positivos y las extracciones con números negativos. Realiza los cálculos necesarios para conocer el saldo por hora y el saldo total. Observa los registros:

Hora	**Registros**
9 – 10	- 15000 + 7250 – 14000 – 27,78 + 17619 – 36,72 – 41,85 + 4145 - 3000
10 – 11	- 12000 – 11245 + 12185 + 142,34 – 19,72 – 45,00 – 21740 + 5000
11 - 12	+ 2148 – 34,728 – 17,29 + 11758 – 67192 – 9,128 – 15,172 + 1472 – 10,00

8. Un alpinista desea alcanzar una cumbre de 2100 metros de altura, los dos primeros días sube 500 metros, pero cada noche desciende 200 para buscar refugio. El tercer día a causa de una tormenta solo sube 100 metros. El cuarto día se fortalece y sube 600. En la mañana del 5to día, ¿qué distancia le faltaba por recorrer para llegar a la cumbre?

9. Completa solo utilizando la adición.



10. Investiga si el cuadro es mágico.

6	-8	-7	3
-5	1	0	-2
-1	-3	-4	2
-6	4	5	-9

11. En el cuadro mágico siguiente cada casilla representa un grupo-clase (45 alumnos) del grado octavo, en una Secundaria Básica. El jefe de grado ha controlado el % de inasistencia de alumnos, al tiempo de máquina para consultar la colección El Navegante:

Observa detenidamente el cuadro.

¿Por qué el jefe de grado ha colocado signos negativos a todos los números que aparecen en el cuadro?

¿Cuál es el grupo de mejor comportamiento en esta actividad?

Calcula la asistencia aproximada del grado, en cantidad de alumnos

$-\frac{66}{3}$	$-\frac{21}{3}$	-12
	-9	$-\frac{15}{3}$
-6	$-\frac{96}{3}$	

12. Convierte los siguientes cuadros en mágicos. Auxíliate de la calculadora

4,2		4
	3,9	
3,8	4,3	

4,5		2,5
	1,5	
0,5		-2,5

54	A	-24	36
-12	B	C	6
E	0	-6	F
G	42	H	-36

Cada suma debe dar 36

13. A continuación aparece el comportamiento del consumo eléctrico en kWh respecto al plan de las viviendas de cinco pioneros del destacamento en un mes.

Pioneros	**Consumo (en kWh)**	**Plan (en kWh)**	**Diferencia (en kWh)**	**Importe ($)**
Sergio Ariel	186	140	46	26,20
Cristian Daniel		120	- 2	12,20
Ricardo Viere	142	142	0	
Lisbet	108	122		10,60
Lismary	126	100		

Observa la información y analiza antes de responder los incisos siguientes

a) Completa las columnas 1, 3 y 4
b) Nombra los pioneros que en cuyas familias se aplican medidas de ahorro energético.
c) Investiga el costo del kWh y calcula el importe del consumo en las casas de Ricardo Viere y Lismary.

Recuerda que:

En la multiplicación y división:

Si los dos números tienen signos iguales, efectúa la operación indicada con los módulos y al resultado colócale signo positivo.

Si dos números tienen signos diferentes, efectúa la operación indicada con los módulos y al resultado colócale el signo negativo.

Por ejemplo

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{20} \quad ; \quad -\frac{3}{4} : \frac{1}{5} = -\frac{3}{4}\cdot 5 = -\frac{15}{4} \quad ; \quad -\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{20}$$

En la potenciación:

Una potencia de base positiva siempre es positiva.

Una potencia de base negativa, es positiva si el exponente es par y negativa si el exponente es impar.

Al multiplicar potencias de igual base, se obtiene una potencia de la misma base, cuyo exponente es la suma de los exponentes.

Al dividir potencias de igual base, se obtiene una potencia de la misma base, cuyo exponente es la diferencia de los exponentes.

Para el cálculo de cuadrados, cubos, raíces cuadradas y cúbicas puedes utilizar las tablas elaboradas para ello, las cuales encontrarás al final del libro de texto de 7mo y 8vo grado.

Al resolver operaciones combinadas, no olvides respetar el orden operacional:

- ★ Primero se resuelven las operaciones encerradas en los signos de agrupación (paréntesis corchetes y llaves)
- ★ Segundo se calculan las potencias y raíces en el orden que aparezcan.
- ★ Tercero se realizan las multiplicaciones y divisiones en el orden en que aparecen.
- ★ Cuarto se realizan las sumas algebraicas que resultan al final.

Ejercicios

1. Completa la siguiente tabla:

A	B	C	A . C	C : B	B – C : A	C – 3A : 2B
7	- 5	- 3				
- 2/5	0,6	- 3,5				
- 5/8	- 0,15	- 4				
0,3	2,34	- 1/4				

2. Completa el cuadro siguiente realizando las operaciones indicadas.

1/2	**.**	**-4**	
-	**//////**	**.**	**:**
0,9	**//////**	**24/10**	
	+		**-10**

3. Sustituye y calcula.

   3 |a|+ 5 |b| - |c| para a = - 2; b = - 1; c = - 8

4. Selecciona los resultados incorrectos. Justifica mediante el cálculo escrito.

   a) – 3,6 – (14 – 3,1) = - 20,7

b) $15 - 32\,(-\ 8) - 209 = 62$

c) $-\,4\,[\,15{,}6 - (-\ 36{,}8)] - 21 : \tfrac{3}{4} = 125{,}6$

5. El valor numérico de la expresión n – p . q para n = – 0,02, p = $\frac{1}{4}$ y q = – 2 es:

   0,52   – 0,12   0,46   0,48

6. El valor numérico de la expresión a – b : c para a = 1, b = 3,2 y c = $\frac{1}{2}$ es:

   – 4, 4   5,6   – 5,4   0,6

7. Determinar el conjunto numérico más restringido al cual pertenecen los números obtenidos al calcular los valores de **a** y **b** si:

$\mathbf{a} = -4{,}72 - 6{,}8 \,.\, 7{,}1 + 4{,}8 : 0{,}2$ y $\mathbf{b} = 3\frac{1}{5} - \frac{4}{3} : 6\ \frac{4}{3} - \frac{3}{5} + 0{,}7$

8. El valor numérico de la expresión $\dfrac{m - n^2 \cdot p}{q}$ para m = – 2, n = – $\frac{1}{4}$, p = 16

y q = 3 es:

   $\frac{4}{3}$ $\frac{1}{3}$ – 11   – 1

9. El valor numérico de la expresión $a^3 - \dfrac{b \cdot c}{d}$ para a = – 1, b = $\frac{1}{2}$, c = 8 y d = – 2 es:

   -3   -1   1   4

10. En las siguientes expresiones algebraicas, sustituye en cada caso la **x** por números racionales para que se cumpla:

    a) que el resultado sea positivo.

    b) que el resultado sea negativo.

    c) que el resultado sea cero.

    1) $-\,2x$ 2) $\dfrac{x-1}{2}$ 3) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{3}$

11. ¡Piensa y adivina! ¿Cuál es el número?

- Que al sumarlo con – 9 se obtiene 36.
- Que dividido por 6 nos da como resultado – 8.
- Que al multiplicarlo por – 16 y sumarle 44 se obtiene 108.
- Que si calculo su diferencia con el doble de – 5 obtengo como resultado 24.

- Que al sustraerlo de 150,2, obtengo el número 138,56
- Que excede a $-\frac{3}{4}$ en $\frac{5}{6}$

12. Calcula los cuadrados y cubos mentalmente y efectúa:

a) $12^2 \,.\, 3^3$ b) $14^2 \,.\, 7^3$ c) $15^2 + 4^3$

d) $3^2 \,.\, 8^3$ e) $12^3 - 11^3$ f) $\sqrt{3^2 + 4^2}$

g) $\sqrt{13^2 - 8^2 + 1{,}2.10^2}$ h) $(-3)^2 + (-2)^3$ i) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot (-3)^3$

j) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 - (0{,}5)^2$ k) $\sqrt{(-10)^2 + 8^2}$

13. Verifica si las siguientes igualdades son verdaderas.

a) $(-5)^2 : (-5)^5 = -15$ b) $(0{,}75)^2 = \frac{9}{16}$ c) $(-4)^2 + (-4)^3 = (-4)^5$

d) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} . \left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{1}{5}$ e) $\left(-\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$ f) $\frac{-3^5}{27} = 9$

g) $\frac{9^{-2}}{9^{-4}} = 81$ h) $\frac{-3^2}{3^{-4}} + \frac{1}{3^{-4}} = 810$ i) $\frac{20^{10} : 20^7 + 9^2.9}{16^2 - (13^2 - 12^2)} \approx -4{,}\ 85$

14. Escribe en notación tabular el conjunto E formado por los valores de x que sean números naturales y que satisfagan cada una de las relaciones siguientes.

a) $8^x = 8^6 \,.\, 8^3$ b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} : \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{3}{4}$ c) $3^5 - 2^5 + 9^0 = x$

d) $\frac{3{,}41 : 3{,}41}{2{,}393} = x$ e) $3{,}6^x + 3{,}6^3 = 50{,}\ 256$ g) $\frac{2}{8}^{5x-2} = 32$

15. Si se sabe que P es el 85% de 632,8. Calcula el valor de A.

$$A = \frac{P + 6{,}3}{3\frac{4}{20} - (38{,}2)^2} - 10^3$$

16. Calcula:

a) $(-3{,}42)^{15} : (-3{,}42)^{12}$ b) $\frac{1{,}52^3 . 1{,}52^4}{1{,}52^5}$ c) $\sqrt{-66{,}26}$

d) $\sqrt{18{,}71}+\sqrt[3]{-22{,}43}$

e) $\dfrac{6{,}75^2+8{,}37}{-\sqrt{8{,}585}}$

f) $\dfrac{5{,}25^8:5{,}25^6-2{,}32^2 . 2{,}32^3}{\sqrt{904{,}6}-7{,}436^3}$

g) $\left(\dfrac{\frac{1}{4}+15{,}.38}{10}\right)^2$

h) $\sqrt[3]{\dfrac{(-3)^3+10}{1{,}2^2}}$

17. Sean **A** = 43,8 **:** (- 65,76) **B** = $9{,}04^4$ **:** 9,04

C = $\sqrt{77{,}86}+\sqrt{49{,}51}$ **D** = $\dfrac{943781567 . 98{,}43}{956{,}343}$

Calcula $\dfrac{B+C}{D-A} \mathbf{.}\ 10^3$

18. Selecciona la respuesta correcta:

El resultado de calcular; $-720+360:-(3)^2-\dfrac{7}{2}+\dfrac{30}{50}-\sqrt{47{,}36}$ es:

– 689,78 – 30,22 110,22 690,98

20. El agua al congelarse aumenta su volumen en un 10%. ¿Qué cantidad de agua puede congelarse como máximo en un depósito con una capacidad de 360 litros?

315000 ml 350 L 325 L 315 L

21. Una finca dedicada a la siembra de cítricos tiene una extensión de 853 hectáreas y 13 áreas. Por cada m^2 se cosechan 205 toronjas para la exportación y se desechan 9 de cada ciento. ¿Cuántas unidades se comercializan?

22. En uno de los pozos del municipio Diez de Octubre la columna de agua alcanza 240 decímetros de altura, en tiempos normales. En los días del ciclón, al faltar el suministro de agua corriente, este llegó a tener solo 3/8 de su altura máxima. ¿A cuántos metros descendió la columna de agua?

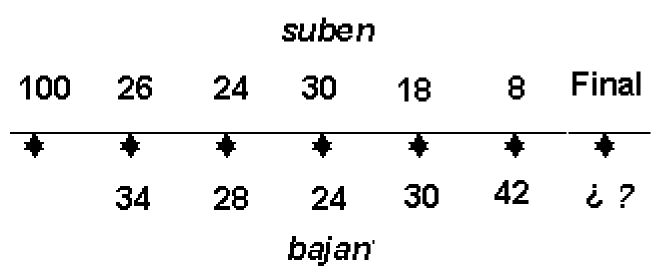
23. Al tostarse el café se pierde $\dfrac{1}{5}$ de su peso. En casa hemos tostado este año 3,8 Kg. de café seco ¿Cuántas lbs perdimos? Selecciona la respuesta correcta.

0,8 1,7 0,17 6,7

24. Cada vez que una pelota cae al piso rebota $\frac{2}{3}$ de la altura desde la cual cayó. Si se quiere que a la cuarta vez rebote 64 cm. ¿Desde qué altura debe caer la primera vez? Selecciona el resultado que corresponda.

216 cm 3240 cm 486 cm 2160 cm

25. Compré 20 metros de tela de lienzo para cumplir el encargo de confeccionar cortinas para las ventanas de quince oficinas, pero en el lavado inicial la tela se redujo 20 milímetros por cada metro, entonces me pregunté ¿Qué cantidad de tela debo comprar para que después de lavada sea suficiente? Comencé a realizar mediciones y descubrí que todas las ventanas son iguales, que cada una tiene 112 cm de largo y cada local tiene dos ventanas. ¿Podrás ayudarme a responder la pregunta anterior?
26. ¿Cuál es la mitad de 2^{20} y la novena parte de 3^{20}? Comprueba el resultado utilizando la calculadora.
27. Expresa de tres formas diferentes el número 96 utilizando solamente diferencias de cuadrados perfectos.
28. El grafico muestra la cantidad de personas que suben y bajan en cada una de las seis últimas paradas de un camello. En el momento que se inicia el conteo se encuentran dentro del vehículo, 100 personas. ¿Cuántos pasajeros llegan al final del recorrido?



29. Dadas las cifras 1; 6; 9; 8; y 5.

a) ¿Cuántos números de 4 cifras podrías formar? Escríbelos

b) Escribe cómo se leen los números n que cumplan la condición $1500 < n < 1800$.

c) Calcula el producto del opuesto del mayor y el menor número que hallaste.

d) Halla la diferencia del mayor y el opuesto del menor de los números que escribiste.

30. ¿Se puede pasar por una ventana rectangular que mide 2,5 metros de largo por 2 ,0 metros de ancho, un espejo circular cuyo radio mide 1,5 metros? Justifica tu respuesta.

31. Se tiene el conjunto X = {1; 3; 5; 7; 9} y combinando sus elementos, puedes formar números de tres cifras.

a) Escribe todas las posibilidades.
b) Escribe el opuesto de todos los números que cumplen la condición de ser mayores que 350 y menor que 500.
c) Calcula la suma de todos los números u escribe cómo lo leerías.
d) Escribe en notación tabular el conjunto C formado por los cuadrados de los elementos de X.
e) Escribe una expresión general que represente los cinco elementos del conjunto X.
f) Analiza la veracidad de las proposiciones siguientes.
g) a) $X \subset C$ b) $X \cap C = \Phi$ c) $X \cap C = \{1\}$
h) Representa en un diagrama de Venn la relación entre los conjuntos X y C.

32. Dados los números : 9; − 4; 2; −6 y −7

Coloca sus opuestos en los cuadrados de forma que:

a) Se obtenga el mayor resultado.
b) Se obtenga el menor resultado.

$$\square\square \bullet \left(\square + \square \right) - \square = ?$$

33. El cuerpo humano contiene aproximadamente 32000 microlitros de sangre por cada libra de peso corporal y cada microlitro contiene $5 .10^{6}$ glóbulos rojos.

a) Investiga cuántos hematíes hay en el cuerpo de una persona que pesa 70kg.
b) Escribe como leerías el mayor de los números que utilizaste para realizar el cálculo.
c) Utiliza la calculadora para comprobar los resultados obtenidos.

Unidad 2

Igualdades que contienen variables

Introducción

Los métodos para resolver ecuaciones se remontan a los babilonios (2000 a.n.e), quienes los describían con palabras, en lugar de con símbolos o variables, como x, y etc., como lo hacemos hoy.

En Italia, en el siglo XVI, se efectuaron grandes progresos en la obtención de soluciones de ecuaciones y los avances continuaron en todo el mundo hasta mediados del siglo XIX.

En la actualidad se emplean computadoras para obtener soluciones aproximadas de ecuaciones muy complejas, como por ejemplo: $6,8x5 - 2,4x^4 + 2x^3 - x^2 + 1,5x + 5 = 0$, que tiene 5 soluciones.

En esta unidad ampliarás tus conocimientos sobre las variables con el estudio de algunas de las operaciones que se realizan con ellas, lo cual te servirá de base para la resolución de otros tipos de ecuaciones lineales más complejas, además aprenderás a resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos variables y serás capaz de aplicar estos conocimientos a la resolución de problemas de la vida.

2.1 Situaciones que se resuelven con ecuaciones lineales.

En este epígrafe repasarás algunos conceptos relacionados con las variables y los procedimientos para la resolución de ecuaciones lineales, además aprenderás a resolver ecuaciones y problemas de mayor grado de complejidad que exigirán de ti mayor nivel de aplicación de tus conocimientos.

Primeramente es necesario que repases los contenidos sobre conjuntos, que estudiaste en la primera unidad.

Desde la enseñanza primaria y en 7mo grado has trabajado con variables y la has utilizado indistintamente, pero: ¿Recuerdas a qué llamabas variable?

> Llamaremos variable a una letra, que representa a un elemento cualquiera de un conjunto, los elementos de este conjunto pueden ser números, figuras geométricas u objetos de diversas índole.

Recordemos que:

- Todo número, variable o cualquier combinación de números y variables relacionados por una o varias operaciones de multiplicación, división y potenciación, se denomina <u>término o monomio</u>.

Por ejemplo:

-12 ; z ; $4y^2$; $2x - \frac{5}{6}$; $\frac{c}{m+n}$; $0{,}72\ m^3n^4p^8$

- Las expresiones algebraicas son aquellas donde los números y las variables aparecen relacionados por cualquiera de las operaciones de cálculo.

Por ejemplo:

$2x - 3$; $0{,}3m + p$; $3x + 2y$; $3x - 0{,}5y + \frac{1}{5}z$; $\frac{2x^2 - y}{z}$

- El valor numérico de una expresión algebraica, es el número que se obtiene cuando las variables se sustituyen por valores admisibles dados y se efectúan las operaciones indicadas.

Por ejemplo:

Determina el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para los valores de las variables dados:

a) $-3x + 5$ para $x = 1$

$-3x + 5 = -3\,(1) + 5$ (sustituyendo $x = 1$)

$= 2$ que es el valor numérico de esa expresión para $x = 1$

b) $\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}y$ para $x = 1\tfrac{1}{8}$; $y = -3{,}6$

$= \frac{4}{3}\left(1\tfrac{1}{8}\right) + \frac{2}{3}(-3{,}6)$ (sustituyendo los valores de las variables)

$= \frac{4}{3}\left(\frac{9}{8}\right) + \frac{2}{3}\left(-\frac{18}{5}\right)$ (Observa que $1\tfrac{1}{8} = \frac{9}{8}$ y $3{,}6 = \frac{36}{10}$

$= \frac{3}{2} - \frac{12}{5}$ (calculando las multiplicaciones)

$= \dfrac{15 - 24}{10}$ (calculando la sustracción)

$= -\dfrac{9}{10} = -0{,}9$

c) $a^2 - \dfrac{b}{c}$ para a = -2 b = -3 y c = 2

$$a^2 - \frac{b}{c} = (-2)^2 - \left(\frac{-3}{2}\right) = 4 + \frac{3}{2} = \frac{8+3}{2} = \frac{11}{2} = 5\tfrac{1}{2} = 5{,}5$$

Como sabes, variadas situaciones de la vida diaria pueden ser expresadas mediante el uso de las variables, en estos casos decimos que hacemos una traducción del lenguaje común al lenguaje simbólico, de las variables o algebraico. También las expresiones algebraicas pueden describir diversas situaciones:

Por ejemplo:

Representa, mediante variables, las situaciones siguientes, declarando el significado de la variable empleada:

a) El triplo de un número disminuido en su mitad.

Sea x el número, su triplo 3x, su mitad $\dfrac{x}{2}$, luego la situación dada se representa por la expresión algebraica: $3x - \dfrac{x}{2}$.

b) El 60% de la producción de una fábrica hace 2 años, aumentada en los $\dfrac{3}{4}$ de la producción del año actual.

Producción actual de la fábrica: x , la producción hace 2 años: (x – 2) , el 60% de esta producción: $\dfrac{60}{100}(x - 2) = \dfrac{3}{5}(x - 2)$ y los $\dfrac{3}{4}$ de la producción actual $\dfrac{3}{4}x$, luego la expresión algebraica es: $\dfrac{3}{5}(x - 2) + \dfrac{3}{4}x$.

c) El perímetro de un rectángulo cuyas dimensiones son números enteros consecutivos.

En un rectángulo, sus dimensiones son: su largo (l) y su ancho (a), se tiene que ($l > o$, $a > o$). Entonces, $a = x$ y $l = x + 1$

P =2 (l + a) (perímetro del rectángulo)

P = 2 [(x + 1) + x] (sustituyendo)

P = 2 (2x + 1) (reduciendo términos semejantes)

En otras ocasiones se dan las expresiones algebraicas para describir una situación de la vida práctica, que se modela por dichas expresiones.

Por ejemplo:

Escribe con palabras, una situación que pueda describirse por las siguientes expresiones algebraicas:

a) $4x + \frac{x}{5}$

- El cuádruplo de un número aumentado en su quinta parte.

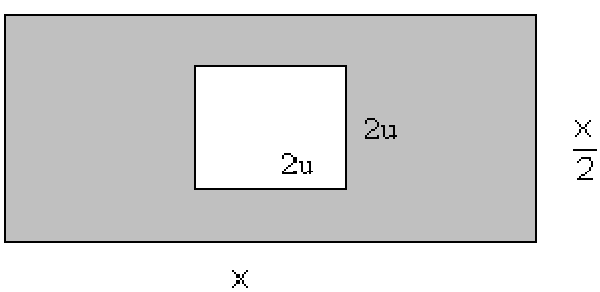
Pero la descripción con palabras no es única, por ejemplo, otras pudieran ser las siguientes:

- El perímetro de un cuadrado aumentado en el 20% de la longitud de su lado.
- En un CDR, en el presente año, los cederistas han donado cuatro veces el número de donaciones de sangre aumentada en su quinta parte, que en igual período del año anterior.

b) $\frac{x^2}{2} - 4$

- La mitad del cuadrado de un número disminuido en 4.
- El área comprendida, entre un rectángulo cuyo ancho es la mitad de su largo y un cuadrado de lado igual a 2 unidades lineales, situado en el interior del rectángulo.

Ilustremos lo anterior mediante la figura:



Ejercicios

1. Representa en el lenguaje de las variables:

a) La octava parte de un número.

b) El 25% de un número.

c) El quíntuplo de un número disminuido en 6.

d) El cuadrado de un número aumentado en su mitad.

e) El triplo de un número aumentado en la mitad de otro número.

f) El precio de un artículo en el mercado disminuyó en un 10%.

g) El séxtuplo de la quinta parte de un número aumentado en el 80% del mismo.

h) El cuadrúplo de un número aumentado en tres es igual a veinte.

i) La tercera parte de un número x excede en dos a quince.

j) En un grupo de 8vo. grado de 45 alumnos hay 12 hembras más que varones.

k) La edad del papá de María, si María tiene t años y su papá tiene tres veces la edad de María disminuida en dos años.

l) La cantidad de jóvenes que asistieron al campismo, si la quinta parte de los jóvenes que asistieron al campismo excede en diez a los treinta adultos participantes.

2. Traduce al lenguaje común.

a) $\frac{1}{7}m$ b) $x + 3$ c) $5x - 2 = 3$ d) $x - 4 = y$

3. Señala la respuesta correcta:

a) José le dice a Susana, que su papá tiene n años cumplidos y que él tiene dos años menos que la tercera parte de los años de su papá. ¿Cómo se representará la edad de José?

a) $\frac{n}{3}$ b) $\frac{n}{3} - 2$ c) $3n - 2$ d) $\frac{n}{3} + 2$

b) El ancho de un rectángulo es x dm y su largo excede al 20% de su ancho en 16,0dm. El perímetro del rectángulo se representa por la expresión:

$\left(\frac{6}{5}x + 16\right)$ $2\left(\frac{6}{5}x - 16\right)$ $x\left(\frac{1}{5}x + 16\right)$ $2\left(\frac{6}{5}x + 16\right)$

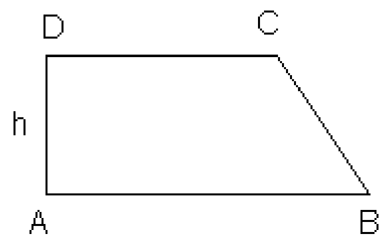
c) La edad de María se representa por x, la edad de Margot, es el 60% del triplo de la edad de María disminuida en 6 años, entonces la edad de Margot, se representa por la expresión:

$1{,}8x - 36$ $\qquad$ $1{,}8x + 36$ $\qquad$ $\frac{3}{5}(3x + 6)$ $\qquad$ $\frac{3}{5}\left(\frac{x}{3} - 6\right)$

d) En la figura se ha representado un trapecio rectangular ABCD y de altura h = 3,0 cm. Se conoce que la longitud de la base mayor $\overline{AB}$ excede en 4,0 dm a la longitud de la base menor $\overline{CD}$ y que al dividir la longitud de la base menor por la del lado $\overline{BC}$, se obtiene como cociente 1 y resto 2. ¿Cuál es la expresión que representa al perímetro del trapecio dado?

$3\left(\frac{2x + 4}{2}\right)$dm $\qquad$ $(3x + 9)$ dm

$(3x + 5)$ dm $\qquad$ Ninguna de las anteriores.



4. Selecciona la respuesta correcta:

La expresión algebraica $\frac{3}{4}n - 2n + 5$, significa:

- El 75% de un número n, disminuido en su duplo.

-El 75% de un número n, disminuido en su mitad y aumentado en 5.

- El 75% de un número n, disminuido en su duplo más 5.

5. Dadas las siguientes expresiones algebraicas, redacta una situación práctica que le corresponda, señalando el significado de las variables:

a) $x - 3 = y$ $\qquad$ b) $x^2 - 4x$ $\qquad$ c) $\left(\frac{x}{5} + \frac{x}{4}\right) - 2x$

d) $3a + 4b$ $\qquad$ e) $2(4x + x)$ $\qquad$ f) $\frac{3z - \frac{z}{3}}{2}$

6. Determinar el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para el valor de la variable que se indica.

a) $-2x + 3$ para $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 0{,}7$

b) $0{,}4\,a + \frac{1}{2}$ para $a = \sqrt{9}$ y $a = -\frac{1}{4}$

c) $\frac{2}{5}x + \frac{3}{4}y - 1$ $\begin{cases} \text{para } x = -5 \;;\; y = 16 \\ \text{para } x = \frac{1}{9} \;;\; y = -4 \end{cases}$

d) $-2{,}5a^2 + 4b - 0{,}5$ $\begin{cases} \text{para } a = 0{,}1 \;;\; b = -\frac{1}{2} \\ \text{para } a = 2 \;;\; b = 2\frac{1}{4} \end{cases}$

e) $m - \frac{t}{q}$ para $m = -25$; $t = 0{,}4$; $q = \frac{1}{8}$

7. Completa la tabla siguiente:

x	-5	$-1\frac{1}{2}$	0	$\frac{7}{4}$	2,5
$-2x + \frac{1}{3}$					
$\frac{1}{4}x - 4{,}5$					

8. Completa los espacios en blanco:

x	y	$x + y - 3$	$x - y + 2$
10	-3		
$\frac{5}{4}$		-2	
	$-0{,}8$		$\frac{1}{10}$
		2	-5

Resolución de ecuaciones

Antes de iniciar el tema sobre resolución de ecuaciones, es necesario tratar las operaciones de adición y multiplicación de expresiones algebraicas, lo cual aplicarás a la resolución de los nuevos tipos de ecuaciones que resolverás.

Con los términos y expresiones algebraicas también se realizan las mismas operaciones que con los números racionales.

Ejemplo:

Calcula:

a) $4x - 3{,}5x - 20 + x - 8x + 11$

Para realizar el cálculo propuesto basta identificar aquellos términos que sean semejantes (puedes señalizarlos) y resolver las operaciones indicadas, sean con variables o con números (términos independientes).

$\underline{4x} - \underline{3{,}5x} - \underline{\underline{20}} + \underline{x} - \underline{8x} + \underline{\underline{11}} = 1{,}5x - 9$

b) $6a - \left\{2a + \left[3\left(a - \frac{4}{3}\right) - a\right] + 10\right\}$

En esta expresión aparecen distintos signos de agrupación: paréntesis (), corchetes [ ] y llaves { }, los cuales tienen todos la misma función, que es la de considerar como un solo término, la expresión que ellos encierran.

Observa que en el interior de las llaves, hay corchetes y paréntesis y que en el interior de los corchetes hay paréntesis; se dice que estos signos están superpuestos.

Es más cómodo eliminar estos signos de adentro hacia fuera, debes tener presente que si está precedido de signos (+), no se le cambia el signo a los términos que están en su interior, y si está precedido de signo (−), se le cambia el signo a estos términos.

- Eliminado el paréntesis, para esto realizamos la multiplicación, aplicando la propiedad distributiva.

$= 6a - \{2a + [3a - 4 - a] + 10\}$

- Eliminando el corchete, precedido de signo (+), no hay cambio de signo:

$= 6a - \{2a + 3a - 4 - a + 10\}$

Eliminando la llave precedida de signos menos; si hay cambio de signo:

$= 6a - 2a - 3a + 4 + a - 10$

- Reduciendo términos semejantes:

$= 2a - 6$

c) $(3z - 5{,}5)\,(z - 2{,}4)$

Para calcular el producto de estos dos binomios, aplicaremos la propiedad distributiva de la multiplicación, o sea, multipliquemos cada término del primer binomio por todos los términos del segundo, como se indica a continuación:

$$(3z - 5{,}5)\,(z - 2{,}4) = (3z)\,(z) + (3z)\,(-2{,}4) + (-5{,}5)\,(z) + (-5{,}5)\,(-2{,}4)$$

$$= 3z^2 - 7{,}2z - 5{,}5z + 13{,}2$$

$$= 3z^2 - 12{,}7 + 13{,}2$$

Debes recordar, que el producto de términos de iguales signos es positivo y de signos distintos, es negativo.

Para ejercitarte en estas operaciones, antes de comenzar la resolución de ecuaciones puedes resolver los siguientes ejercicios del libro de texto de 8vo grado:

Ejercicio 3 incisos a), b), c), d) y e); página 64.

Ejercicio 4 incisos a), b) y c); página 64.

Ejercicio 1 incisos a), b) y c); página 66.

Ejercicio 1 incisos a), b), c), h), i) y j); página 71.

En tus estudios de Matemática, en los grados precedentes, ya te has encontrado y trabajaste con igualdades que contienen variables, por ejemplo:

a) $\frac{x}{3} = \frac{4}{5}$ (proporción)

b) $d = v\,t$ (distancia d recorrida por un cuerpo, que se mueve con una velocidad constante v, durante un tiempo t)

c) $A = \frac{(B + b)h}{2}$ (área de un trapecio de bases B y b y altura h)

También has visto situaciones de la vida que se modelan mediante ecuaciones lineales o de primer grado en una variable como en el inciso b) cuando se asignan valores a dos de las variables y en c) cuando se asignan valores a tres de ellas.

Recuerda que:

> Una ecuación lineal o de primer grado en una variable es aquella que tiene la forma $ax + b = 0$ ($a \in Q$, $b \in Q$, $a \neq 0$), o puede reducirse a ella. Observa que la variable aparece elevada al exponente uno.

Ejemplos:

1) $3\,x - \frac{2}{5} = 0$; siendo a = 3 y $b = -\frac{2}{5}$

2) $-2{,}5\,x + 0{,}8 = 0$, siendo $a = -2{,}5$ y $b = 0{,}8$

Sea la ecuación 4x + 20 = 0, puedes observar que esta igualdad se cumple para x = - 5, luego se dice que este valor satisface a la ecuación y se denomina solución o raíz de la ecuación y al conjunto S = {− 5} se le denomina conjunto solución de la ecuación dada. Puedes observar por simple inspección que la ecuación 3x + 12 = − 3, también tiene por solución x = − 5.

Nota: Si adicionamos 3 a ambos miembros de la ecuación 3x + 12 = -3 se obtiene 3x +15 = 0 y si multiplicamos ahora ambos miembros de esta ecuación por $\frac{4}{3}$ observa que se obtiene 4x + 20 = 0 Las transformaciones que conducen de una a otra se llaman transformaciones equivalentes. Este es el caso cuando adicionamos o sustraemos un mismo término a ambos miembros de una ecuación o cuando multiplicamos o dividimos ambos miembros por un término diferente de cero.

Dos ecuaciones con iguales soluciones se dicen que son **equivalentes**.

> Toda ecuación lineal ax + b = 0 en una variable x, tiene en Q, una única solución,
> $x = -\frac{b}{a}$ $(a \neq 0)$

También se puede restringir el dominio de definición de la ecuación y obtener una ecuación sin solución, o sea de conjunto solución vacío. (S = ∅).

Por ejemplo, al resolver la ecuación:

$$\frac{2}{3}(x-4) = \frac{5}{9} \qquad (x \in N)$$

Obtenemos como solución el número fraccionario $x = \frac{29}{6}$ que satisface la igualdad, pero como este valor no pertenece al dominio en el cual se define la ecuación, el conjunto S = ∅. Además hay ecuaciones que no tienen solución en cualquier dominio numérico, por ejemplo: -1 + x = 2 + x, también hay otras que se cumplen para todo valor de la variable en cualquier dominio como por ejemplo: $x + 1 = 1 + x$, a estas se les llama identidades.

Has ampliado en este epígrafe tus conocimientos sobre ecuaciones lineales.

En 7mo grado resolviste ecuaciones en las que los términos con variables se encontraban en un solo miembro, veremos ahora otras ecuaciones donde no es así:

Por ejemplo:

Determina la solución de las ecuaciones siguientes:

a) $7x - 5 = 2(x - 10)$

Como puedes observar, la variable x aparece en los dos miembros. En estos casos es necesario transformar la ecuación a una de las ya conocidas; para ello es necesario:

1ro. Resolver el producto indicado que aparece en el segundo miembro, se obtiene:

$$7x - 5 = 2x - 20$$

2do. Transponer a un miembro los términos que contienen la variable y al otro los términos independientes, es decir, adicionando a ambos miembros de la ecuación 5 y sustrayendo a ambos miembros 2x se obtiene:

$$7x - 2x = 5 - 20$$

3ero. Reducir los términos semejantes en cada uno de los miembros.

$$5x = -15$$

4to. Despejar la variable y se tiene:

$$x = -\frac{15}{5} = -3$$

5to. Comprobar que el valor obtenido satisface la ecuación original.

Aunque teóricamente no es necesario hacer la comprobación de las ecuaciones lineales, por la cadena de transformaciones equivalentes que se origina en el procedimiento de resolución, sin embargo la comprobación puede utilizarse como un elemento para controlar tu trabajo.

Observa cómo se comprueba:

Comprobación: Para $x = -3$

MI: $7x - 5$	MD: $2(x - 10)$	
$= 7(-3) - 5$	$= 2(-3 - 10)$	
$= -21 - 5$	$= 2(-13)$	
$= -26$	$= -26$	MI = MD

6to. Escribir el conjunto solución: S = $\{-3\}$

A veces se cometen errores, no en la resolución de la ecuación, sino en la comprobación que en ocasiones es más complicada que la propia resolución.

b) $3z - [5z + (0{,}5z - 1)] = z + \frac{2}{5}$

En este caso como observas se deben eliminar primero los signos de agrupación y luego proceder como se ilustró en el caso anterior.

$3z - [5z + 0{,}5z - 1] = z + \frac{2}{5}$ (Eliminando el paréntesis)

$3z - 5z - 0{,}5z + 1 = z + \frac{2}{5}$ (Eliminando el corchete)

$3z - 5z - 0{,}5z - z = -1 + \frac{2}{5}$ (Transponiendo términos)

$-3{,}5z = -\frac{3}{5}$ (Reduciendo términos semejantes)

$z = \frac{-\frac{3}{5}}{-3{,}5} = \frac{0{,}6}{3{,}5} = 0{,}1\overline{714285}$ (Despejando z)

No siempre se obtienen soluciones exactas, en el caso anterior z es una expresión decimal infinita periódica, por lo que en este caso se representa la solución como una fracción y en caso de tener necesidad de continuar los cálculos, se opera con esta notación

c) $\frac{x-3}{2} - \frac{1-3x}{4} = 2 + \frac{5x}{4}$

En este caso estamos en presencia de una ecuación con denominadores numéricos, o lo que es equivalente con coeficientes fraccionarios. Para resolver esta ecuación hallemos el m.c.m de los denominadores y lo multiplicamos por ambos miembros de la ecuación, esto equivale a dividir el m.c.m por cada denominador y multiplicar el resultado por el numerador respectivo.

m.c.m (2,4) = 4

$2(x - 3) - (1 - 3x) = 8 + 5x$

$2x - 6 - 1 + 3x = 8 + 5x$

$$2x + 3x - 5x = 8 + 6 + 1$$
$$0x = 15$$
$$0 = 15$$ (como se puede observar esta igualdad es falsa)

Luego, para ningún valor racional de x, se cumple la igualdad planteada, entonces

$S = \varnothing$.

Como parte de las aplicaciones de la resolución de ecuaciones lineales podrás encontrarte el **despejo en fórmulas.**

Una fórmula no es más que una igualdad entre expresiones algebraicas que expresan algún principio, regla o resultado general de índole matemático, físico o relativo a cualquier otra ciencia.

Por ejemplo: Analiza del LT. 8vo grado los ejemplos resueltos que aparecen en la página 81 incisos a, b y c.

Observa que para despejar no sigues el orden operacional, sino todo lo contrario, sigues el orden inverso al que normalmente empleas para calcular, por ejemplo; si quieres despejar b en $y = (a + b) : c$ ó $y = \frac{a+b}{c}$ con $c \neq 0$, debes notar que la división por c es la operación que se realiza al final; luego debes comenzar multiplicando ambos miembros de la ecuación por c y después sustraer a en ambos miembros quedando de esta forma despejada b:

Ejercicios

En el libro de texto Matemática 8vo, páginas 80, 81 y 96 podrás disponer de una amplia colección de ejercicios y problemas.

1. Escribe una ecuación de la forma $ax + b = 0$ $(a \neq 0)$, en la que se cumple que:

a) $a \in N$, b: fraccionario positivo.

b) a: entero negativo, b: fraccionario negativo.

c) $a \in Q_+$; b: natural.

2. Di, si las proposiciones siguientes son verdaderas (V) o falsas (F). Justifica tu respuesta, en el caso de las falsas.

a) La solución de la ecuación $3 - 2x = 0$, es $x = -\frac{3}{2}$.

b) Una ecuación lineal en una variable tiene dos soluciones.

c) La ecuación $x(x - 4) + 3x = x^2 - 4$ no es lineal.

d) La ecuación $\frac{1}{5}x = 50$, carece de solución en N.

e) Si $ax + 4 = 0$ y $a = 2$ entonces $x = -0{,}5$.

f) Las ecuaciones $2x - 1 = 0$ y $\frac{x}{4} = \frac{1}{8}$, son equivalentes.

g) Las edades de Yanet e Ileana suman actualmente 65 años, si la edad de Yanet es **x** años, el triplo de la edad de Ileana hace 10 años, aumentada en 10 años, se representa por la expresión: $\left[\frac{1}{3}(65 - x) + 10\right]$ años.

h) Sea $N = \overline{cdu}$, un número de tres cifras en el sistema decimal, entonces:

$N = 100c + 10d + u$.

3. Construye una ecuación lineal:

a) cuya solución sea $x = -\frac{2}{3}$.

b) en la que su conjunto solución sea $S = \{-4\}$.

c) sin solución en Z.

d) equivalente a la ecuación $2(x -1) = 3x - [4 + (-7x + 14)]$.

e) que tenga solución en Q_+.

f) cuyo conjunto solución sea $S = \varnothing$.

g) cuyo conjunto solución sea $S = \{1 ; -2\}$.

4. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $6x - 7 = 2x + 5$

b) $\frac{5}{3}z - 1 = 4 + \frac{2}{3}z$

c) $1{,}5x - 0{,}7 = 4(3 - 5x)$

d) $0{,}3(3 + 2y) + 1{,}2 = 3{,}2$

e) $\frac{3}{4}x - 0{,}5 = 2(x + 1) - \frac{1}{3}$

f) $\frac{3 + 5x}{5} = \frac{4 - x}{7}$

g) $\frac{3}{2}x - \frac{7}{10} = \frac{2}{5}(3 - 5x)$

h) $\frac{x}{2} - 5\frac{x}{6} = 2 - \frac{x - 2}{9}$ $(x \in N)$

Nota: $5\frac{x}{6}$ representa un número mixto.

i) $(2x + 9)(4x - 3) - 4(2x^2 - 3)$

j) $(x + 5)^2 + 3 = (x - 2)^2$

k) $(2x - 1)(x + 1) = 2\left[x + (x+1)(x-1)\right]$

l) $(x + a)(x + b) - a(b + c) = x^2 + bx + 2ac \quad (a \neq 0)$

m) $\frac{x+3}{2} - \frac{x-1}{3} = \frac{x+5}{6} + 1$ n) $\frac{2t+1}{3} - \frac{7t-2}{15} - \frac{t-1}{5} = 0$

ñ) $\frac{3t+1}{4} - \frac{2t-1}{5} = 5 - \frac{1-t}{2} \quad (t \in Q_+)$ o) $\left(\frac{x-7}{5} - \frac{x+2}{5}\right)\left(4x - 6 + \frac{x+1}{2}\right) = 0$

p) $1 - \frac{3-x}{4} - \left[\frac{1-x}{3} - \left(1 + \frac{3+x}{6}\right)\right] = 0 \quad (x \in N)$

5. Una sola de las siguientes alternativas es válida; selecciona en cada caso la respuesta correcta.

a) ¿Cuál de las ecuaciones dadas representa la siguiente afirmación?

La tercera parte de los alumnos del grupo A excede en 6 a los 30 alumnos del grupo B.

a) $x + 6 = 30$ b) $\frac{x}{3} - 6 = 30$ c) $\frac{x}{3} + 6 = 30$ d) $3x - 6 = 30$

b) ¿Cuál de las siguientes ecuaciones tiene como solución el número 4?

a) $\frac{3x}{8} = 2x - 5$ b) $\frac{x+2}{3} = x - 2$ c) $x + 3 = 1$ d) Ninguna de las dadas.

c) Las costas de Cuba tienen una longitud total de 5746 Km. El triplo de la longitud de la costa sur excede en 1193 Km. al duplo de la longitud de la costa norte. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones permite hallar la longitud en Km. de cada una de las costas de Cuba, si la variable **x** representa la longitud en Km. de la costa sur?

a) $3x = 2(x - 5746) + 1193$ b) $3x + 1193 = 2(5746 - x)$

c) $3x - 1193 = 2(5746 - x)$ d) $2(x - 5746) + 1193 = 3x$

d) El conjunto solución de la ecuación

$(x + 3)(2x + 12) - (2x^2 + 18) = x + 2(x - 3) \quad (x \in Z)$ es:

a) $S = \{-1, 6\}$ b) $S = \left\{\frac{8}{5}\right\}$ c) $S = \left\{\frac{3}{5}\right\}$ d) Ninguno de los conjuntos dados.

e) ¿Cuál de las siguientes ecuaciones tiene como solución el número 15?

a) $x + 14 = 1$ b) $2(x - 7) = x + 1$ c) $\frac{x+1}{4} + \frac{x}{3} = 7$ d) Ninguna.

f) El crecimiento de un feto de más de 12 semanas, se puede calcular aproximadamente mediante la fórmula L = 1,53 t – 6,7; en la cual L es la longitud en cm y t el tiempo en semanas.

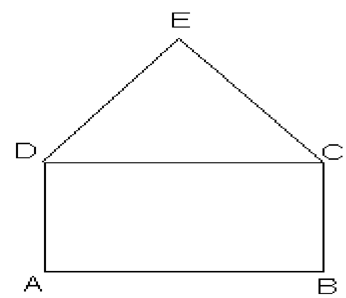
La longitud prenatal puede determinarse en la vida práctica, mediante ultrasonido. Entonces, el tiempo aproximado en semanas, de un feto cuya longitud mide 28 cm es:

a) 2,3 semanas b) 14 semanas c) 23 semanas d) 28 semanas

g) En la siguiente figura ABCD es un rectángulo; DCE triángulo equilátero. Se conoce que el largo (en cm) del rectángulo es el 75% del ancho (en cm) aumentado en 8,0 cm, entonces, el perímetro del pentágono ABCED (en dm) es:

a) $P = \frac{17}{4}x + 24$ b) $P = 5x + 32$

c) $P = \frac{17}{40}x + \frac{12}{5}$ d) Ninguna



6. Indica un conjunto numérico donde la ecuación 35 − 22x + 6(1–3x) = 46–30x no tenga solución.
7. ¿Para qué valor del parámetro b ($b \in Q$) la ecuación 4(x – 2) – 2b = x tiene por raíz o solución $x = -\frac{3}{2}$?
8. Ejercicio 14 de la página 21, Libro de Texto 8vo grado.
9. En 1984, al perforar el pozo más profundo del mundo, en la extinta URSS, se encontró que la temperatura, a **x** kilómetros de profundidad de la Tierra estaba dada por:

$$T = 30 + 25(x - 3) \quad (3 \leq x \leq 15)$$

¿A qué profundidad la temperatura es de 200 ^{0}C?

10. Un método aproximado para convertir una temperatura en grados Celsius (^{0}C) a grados Fahrenheit (^{0}F) es aplicar la temperatura en ^{0}C y añadir 30. De acuerdo con la información anterior, escriba una fórmula para expresar ^{0}F en términos de ^{0}C.

Sabiendo que la fórmula exacta es: ${}^0F = \frac{9}{5}\,{}^0C + 32^0$.

a) Encuentra el valor en ${}^0C$ para el cual ambas fórmulas dan el mismo resultado.

b) Encuentra para este valor en ${}^0C$, el valor en ${}^0F$.

11. Por procedimientos teóricos, un físico ha obtenido que la temperatura de ebullición de un líquido debe satisfacer la ecuación $\frac{T}{6} + \frac{T}{8} = \frac{T-40}{4} + \frac{T-30}{6}$, siendo T la temperatura de ebullición en grados centígrados. Calcúlala, tu mismo resolviendo esta ecuación.

12. ¿Para qué valores de la variable, las siguientes ecuaciones se transforman en una proposición verdadera?

a) $-\frac{1}{2}x + 3 = x + 1$ b) $0{,}3x + 2(x - 1) = x + 2$

13. ¿Para qué valores de la variable, las siguientes ecuaciones se transforman en una proposición falsa?

a) $\dfrac{\frac{1}{2}x + 4}{3} = 6$ b) $3x - \{2(x+1) + (4-3x)\} = x$

14. a) La ecuación $-\frac{x}{4} + \frac{1}{3} = 2x - \frac{26}{3}$, tiene por solución x = 4. Resta $\frac{1}{3}$ a los dos miembros y comprueba que obtienes una ecuación equivalente.

b) Sea la ecuación $\frac{4}{5}z - \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$, multiplica por $\frac{5}{12}$ los dos miembros de esta ecuación y comprueba que obtienes una ecuación equivalente.

c) Dada la ecuación $2x - 1 = 3$, multiplica los dos miembros por $x - 1$.¿Es de primer grado o lineal la ecuación que obtienes? Comprueba que $x = 2$ y $x = 1$ son sus soluciones e indica si son válidas para la ecuación $2x - 1 = 3$. Fundamenta tu respuesta.

15. Completa la siguiente proposición:

Sean las ecuaciones lineales en x:

$2x - [3(x+2) - 4x] = x - 2$

$kx + 3 = \frac{2}{3}x + 2\frac{2}{3}$ $(k \in Q)$

El valor de k para que las ecuaciones sean equivalentes es _______________.

16. Sean las ecuaciones lineales en x:

i) $2(a - x) = \frac{3x}{2} + 5 \qquad (a \in Q)$

ii) $\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{3}\right) = \frac{x}{4} - \frac{1}{12}$

Determina qué valor ha de tomar a para que las ecuaciones dadas sean equivalentes.

17. Sea la ecuación lineal en x:

$2(p - 1)x - p(x - 1) = 2p + 3 \qquad (p \in Q)$

a) ¿Para qué valor de p, la ecuación dada no tiene solución en Q?

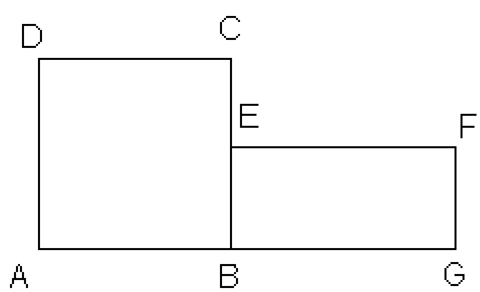
b) Halla tres valores de p, de manera que la ecuación dada tenga solución en N.

c) Determina el valor de p, para que el conjunto solución de la ecuación sea $S = \left\{-\frac{3}{4}\right\}$.

18. En la figura: ABCD cuadrado de perímetro igual a x cm. BEFG rectángulo; E punto medio de $\overline{BC}$ y B es un punto de $\overline{AG}$.

a) ¿Cuál es la expresión que representa al perímetro P de la figura?

b) Calcula el perímetro P y el área A de la figura, si x = 48 cm.



19. LT. 8vo grado página 82-83, ejercicios 1, 2 3 y 4.

Problemas que conducen a ecuaciones lineales con una variable

Desde tus estudios primarios has resuelto diversos tipos de problemas, los nuevos conocimientos que has adquirido sobre resolución de ecuaciones lineales te permitirán seguir profundizando en la resolución de problemas, que es un objetivo muy importante en Matemática y el que se mantiene a través del estudio de esta asignatura.

Podrás ver como podemos aplicar estos conocimientos en otros campos del saber.

Cuando vamos a resolver un problema por la vía algebraica nos proponemos la determinación del valor o valores de una o varias variables, que pertenecen a un dominio dado, conociendo de antemano un determinado número de datos, los cuales se relacionan con dichas variables. Al enfrentarnos al problema, desconocemos la vía para su solución.

Existe una amplia variedad de problemas, por esto es difícil enunciar reglas específicas para obtener sus soluciones; no obstante veamos algunas recomendaciones o reglas para resolver problemas:

- Leer el problema con cuidado las veces necesarias y analizar detenidamente el texto.
- Determinar la variable o variables, así como los datos y su relación con las variables, es muy importante precisar el significado de estas y en ocasiones se necesitan gráficos, figuras o croquis para la mejor compresión.
- Plantear la ecuación (o ecuaciones) que expresen las condiciones establecidas en el problema, entre los datos y las variables. Su éxito depende de la correcta interpretación del problema, así como del conocimiento de ciertas relaciones matemáticas no declaradas explícitamente en el texto del problema.
- Resolver la ecuación de acuerdo con el procedimiento algorítmico conocido por ti. Esta etapa requiere de mucha seguridad en el cálculo con números y variables.
- Comprobar si la solución obtenida satisface las exigencias del problema. Esta se realizará en el texto del problema y nunca en la ecuación planteada, ya que por error de interpretación esta puede no responder a las condiciones dadas en el texto del problema y estar correctamente resuelta. No es necesario dejar escrita la comprobación del problema.
- Dar la respuesta, esta debe ser breve y en correspondencia con las preguntas formuladas en el problema, se tendrá en cuenta las unidades de medidas (si se dan), y que la respuesta no sea absurda, ni contradictoria.

Te presentamos algunos problemas de aplicación en los que las recomendaciones precedente te serán muy útiles, antes quisiéramos destacar que además de las indicaciones dadas es necesario que muestres habilidades en la resoluciones de ecuaciones lineales, así como en la traducción de la lengua materna, en situaciones dadas, al lenguaje de las variables o algebraico.

Ejemplos:

1. El huracán Charley, que en el mes de agosto de 2004 azotara a nuestro país, dejo perdidas por más de mil millones de dólares. Ha consecuencia del mismo fueron afectadas un total de 73 584 viviendas. El séxtuplo de las viviendas que sufrieron derrumbes totales es excedido, en 44 345 por el número de viviendas que sufrieron derrumbes parciales. ¿Cuántas viviendas sufrieron derrumbes totales y parciales?

Datos:

Total de viviendas afectadas: 73584

Cantidad de viviendas que sufrieron derrumbes totales: x

Cantidad de viviendas que sufrieron derrumbes parciales: 73584 − x

Séxtuplo de las que sufrieron derrumbes totales: 6x

Planteo de la ecuación:

$6x - 44345 = 73584 - x$ ó $6x = (73584 - x) + 44345$

Resolución de la ecuación:

$$6x = (73584 - x) + 44345$$
$$6x = 73584 - x + 44345$$
$$6x + x = 73584 + 44345$$
$$7x = 117929$$
$$x = 117929 : 7$$
$$x = 16847$$

Cantidad de viviendas que sufrieron derrumbes totales: 16847

Cantidad de viviendas que sufrieron derrumbes parciales: 73584 − 16847 = 56737

Comprobación:

La cantidad de viviendas que sufrieron derrumbes totales es 16847 y las que sufrieron derrumbes parciales son 56737. La suma de estas dos cantidades es igual a 73584, por lo tanto se cumple la primera condición que se exige en el problema.

El séxtuplo de la cantidad que sufrieron derrumbes totales es $6 \cdot 16847 = 101082$, y esta cantidad excede en 44345 al número 56737 que representa la cantidad de viviendas que sufrieron derrumbes parciales.

Respuesta:

Fueron afectadas por derrumbes totales 16847 viviendas y por derrumbes parciales 56737.

2. La diferencia entre las longitudes de las bases de un trapecio es de 2,0 dm, su altura mide 40 cm y el número que expresa su área es igual al triplo del número que representa la longitud de la base mayor aumentada en la longitud de la altura.

Hallar la razón r (r< 1), entre las longitudes de las bases.

Datos:

B (base mayor) = (x + 2) dm

b (base menor) = x dm

h (altura) = 40 cm = 4,0 dm

Que la diferencia entre las longitudes de las bases es 2,0 dm, equivale a expresar que la longitud de la base mayor, excede en 2,0dm a la longitud de la base menor. Podríamos haber representado a la longitud de la base mayor B por x, entonces la longitud de la menor se representaría por x – 2.

Planteo de la ecuación:

Debes recordar que:

$$A = \frac{(B+b)h}{2} \quad \text{(Área del trapecio)}$$

$$\frac{[(x+2)+x]4}{2} = (3x+6)+4$$

Resolución de la ecuación

$$\frac{(2x+2)4}{2} = 3x + 10$$

$$2(2x + 2) = 3x + 10$$

$4x + 4 = 3x + 10$

$4x - 3x = 10 - 4$

$x = 6$

Luego b = 6,0 dm y B = (x + 2) dm = 8 dm

Recuerda que la razón entre dos números a y b es el cociente entre los mismos, o sea $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$, como r debe ser menor que 1, según aparece en el enunciado, entonces.

$$r = \frac{b}{B} = \frac{6\,dm}{8\,dm} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

<u>Nota</u>: Hemos omitido la comprobación para que el propio alumno la realice.

3. Un químico tiene 10 mL de una solución que contiene H_2SO_4 (ácido sulfúrico), con una concentración del 30%. ¿Cuántos mL de ácido puro se debe agregar para aumentar la concentración al 50%?

Tú puedes ayudar al químico a solucionar el problema planteado:

Sea x: número de ml de ácido puro que debe agregarse.

Para ayudar a entender el problema, veamos el siguiente esquema:

Mezcla original al 30%	Ácido puro	Nueva mezcla, al 50%
↓	↓	↓
10 10 mL de solución 30% de 10 = 0,30 (10) = 3ml de ácido puro	x mL	*(10 + x) mL de solución.* ácido puro: 50% de (10 + x) [0,50 (10 + x)] mL de ácido puro

Resulta la ecuación:

$3 + x = 0{,}50\ (10 + x)$

Resuelve esta ecuación y llegarás a la solución x = 4

<u>Respuesta</u>: Se necesita agregar 4 mL H_2SO_4 puro.

4. La distancia de la Cuidad de La Habana a la Ciudad de Matanzas, es aproximadamente 100km.Un automóvil sale de La Habana a la 1:35 pm y viaja hacia Matanzas a una velocidad constante de 50 km/h hacia Matanzas. Treinta minutos después, otro automóvil sale de La Habana hacia Matanzas a una velocidad constante 75 km/h. Si no se tiene en cuenta las longitudes de los automóviles.

a) ¿A qué hora alcanzara el segundo automóvil al primero?

b) ¿A qué distancia aproximadamente de Matanzas, se encontraban los automóviles en el instante del encuentro?

a) Sea t el número de horas, después de la 1:35 pm, que viaja el primer automóvil, el segundo sale de La Habana 30 minutos después, o sea, a las 2:05 pm, viaja media hora menos que el primero, entonces el número de horas que viaja es $t - \frac{1}{2}$

Debes recordar de tus estudios de Física, la ecuación del movimiento rectilíneo uniforme: $d = vt$

Donde, d es la distancia recorrida por un cuerpo que se mueve a una velocidad constante v, un tiempo t. Lo anterior conduce a la siguiente tabla:

automóvil	Velocidad km/h	Horas de viaje (en horas)	Distancia recorrida (km.)
Primero	50	t	$50\,t$
Segundo	75	$t - \frac{1}{2}$	$75\left(t - \frac{1}{2}\right)$

Puedes observar que la última columna de la tabla, se ha formado teniendo en cuenta que:

Distancia = velocidad por el tiempo.

El segundo automóvil alcanza al primero cuando el número de kilómetros recorridos por los dos automóviles son iguales, resulta:

$$50\,t = 75\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

$$50\,t = 75t - \frac{75}{2}$$

$$25t = \frac{75}{2}$$

$t = 1\frac{1}{2}$ h, o sea una hora y 30 minutos, el segundo automóvil alcanza al primero a las 3:05pm.

b) Como el encuentro se produce cuando $t = 1\frac{1}{2}$ h, es el camino recorrido por ambos automóviles es de $50t = 50.\ 1\frac{1}{2} = 75$, luego se encuentra a 100km – 75 km = 25km de Matanzas.

En el libro de texto de 8vo grado, aparece en las páginas 87-92 y 97-98 una apreciable cantidad de problemas que puedes solucionar en un tiempo determinado. No obstante, te presentamos otros, los mismos deben resolverse mediante una ecuación lineal en una variable.

1. La suma de dos números es 102 y su diferencia 32.Hallar los números.
2. La diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos es igual a 29. Hallar los números.
3. Una persona ha gastado la décima parte, los dos quintos y el 25% de su dinero, y además, 25 pesos, después de lo cual no le queda nada. ¿Cuánto tenia?
4. Un padre tiene 40 aňos, y su hijo 15 aňos. ¿Dentro de cuánto tiempo será la edad del padre el doble de la de su hijo?(se supone que ambos estén vivos)
5. ¿Cómo se pagaría una deuda de 700 pesos con 52 billetes de 20 pesos y 10 pesos?
6. El triplo del ancho de un rectángulo excede en 9,0 dm al largo. Determina el área del rectángulo si se conoce que su perímetro mide 460cm.
7. El aňo en que nació José Martí, nuestro Héroe Nacional, (siglo XIX), esta representado por un número de 4 cifras cuya suma es de 17 y las cifras de las decenas excede en 2 a la de las unidades. ¿En que aňo nació José Martí?
8. En un triángulo la amplitud del ángulo menor es el 75% de la amplitud del ángulo mediano y la del ángulo mayor excede en 100^0 a la diferencia de las amplitudes de los otros dos ángulos Halla la amplitud de los ángulos del triángulo.

9. Un segmento de recta AB de 48 dm de longitud, queda dividido en tres segmentos por sus puntos interiores C y D, de forma tal que la longitud de estos segmentos vienen dadas por números consecutivos pares. Calcula la longitud de los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$.

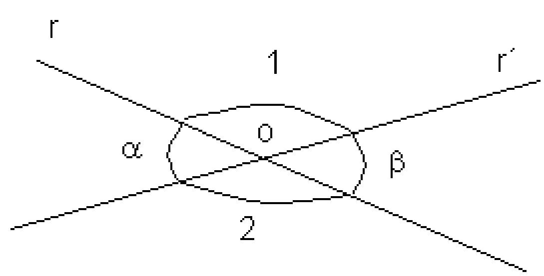
10. En una brigada compuesta por 27 alumnos que laboran en la recogida de papas y tomates, en el Plan de la Escuela al Campo, se tiene la siguiente situación:

Si el duplo de la cantidad de estudiantes que están recogiendo papas se le sustrae 18, entonces la cantidad de estudiantes que están recogiendo tomates excede en 12 a dicha diferencia. ¿Qué cantidad de estudiantes está recogiendo papas?

11. Me faltan tres pesos para comprar un estuche de dibujo; si costara $\frac{1}{3}$ menos, me sobrarían 16 pesos, ¿Cuánto vale el estuche?

12. Dados los productos P = 72 · 43 y P' = 124 · 27. ¿Qué número debemos sumar a cada factor para que los productos sean iguales?

13. Las rectas r y r' se cortan en el punto 0. Si $\alpha = 2x° + \frac{2}{3}(x° + 10°)$ y $\beta = \frac{1}{4}x° + \frac{5}{8}(3x° - 36°) + 40°$. Calcula la amplitud de los ángulos 1 y α.



14. ¿Cuál es el número que aumentado en su sexta parte y después en 10 y disminuido en su mitad, da como resultado el duplo de la suma del $33\frac{1}{3}\%$ del número y el número aumentado en 5?

15. En los Campeonatos Mundiales de diferentes deportes, en el año 2001, Cuba conquistó un total de 37 medallas, con una población (estimado) de 11 millones de habitantes. Si la cantidad de medallas de plata es $\frac{2}{7}$ de las de oro y la

cantidad de medallas de bronce excede en 1 a la cantidad de medallas de oro y plata juntas:

a) ¿Qué cantidad de medallas de cada clase alcanzó Cuba en estas competencias?

b) Si en 1997 se ganaron un total de 30 medallas en qué por ciento ascendió la cifra de medallas ganadas respecto al año 2001.

16. En un frigorífico hay papas almacenadas, de ellas la tercera parte es para el consumo de hospitales, el 25% del resto para el consumo de escuelas y círculos infantiles y las 150 000 toneladas restantes para el consumo de la población. ¿Cuántas toneladas de papas fueron destinadas al consumo de hospitales?

17. La suma de las profundidades (en metros) de los océanos Pacifico, Atlántico e Indico es igual a 11 263 m. La profundidad del océano Atlántico es de 3 314 m y los $\frac{5}{4}$ de la profundidad media del océano Indico excede en 826 m a la profundidad media del océano Pacifico. ¿Cuál de los océanos es el más profundo?

18. En el año 2001, ocurrieron en Cuba un total de 79 395 defunciones. El 25% de los hombres fallecidos excedió en 1197 a los $\frac{5}{19}$ de las mujeres. ¿Cuántos varones y hembras murieron en el año 2000, si se conoce que este año fallecieron 991 hombres y 1941 mujeres más que en el año 2001? Nota: Datos tomados del Anuario Estadístico del 2002.

19. El tiempo máximo de minutos, que debe tardarse un alumno para resolver el presente problema se descompone del modo siguiente: $\frac{1}{15}$ del total en leerlo; 2 minutos en plantearlo y el 75% del tiempo restante en resolverlo. ¿Qué tiempo tiene disponible para su comprobación si se conoce que el mismo excede en 2 minutos al tiempo empleado en su lectura?

20. Un depósito A tiene un volumen de agua igual a $\frac{2}{3}$ de su capacidad y otro B cuya capacidad excede a la de A en 60 litros, tiene un volumen de agua igual a

$\frac{7}{12}$ de su capacidad. Si entre ambos tienen 860 litros de agua. ¿Cuántos litros de agua contiene cada depósito? ¿Qué cantidad de agua le falta al depósito A para llenarse?

21. Uno de los hechos mas trascendentales y dignos de nuestra Historia tuvo lugar en el siglo XIX, el año en que ocurrió el mismo es tal que la suma de sus cifras es 24, siendo las cifras de las decenas y de las unidades números consecutivos. ¿A qué hecho histórico nos referimos?

    Nota: Para resolver el presente problema el alumno deberá tener conocimientos de Historia de Cuba, ya que resuelta la parte matemática y determinar el año, el alumno tendrá que realizar un rastreo para hallar el hecho histórico más importante acaecido en el referido año.

22. El 20% del área de las tierras de una UBPC, está dedicada al pastoreo, la mitad de su extensión al cultivo de caña, $\frac{3}{5}$ del resto se destinan a la cosecha de viandas y las cuatro caballerías restantes se dedican al autoconsumo. ¿Cuántas caballerías se emplearon al cultivo de caña y cuántas a viandas?

Nota: El profesor puede aprovechar el problema anterior para explicar a los alumnos lo que es una caballería (cab.), es una unidad de uso en Cuba para medir extensiones de tierras.

$$\boxed{1 \text{ cab} \approx 13.4 \text{ ha} = 13.4 \text{ hm}^2}$$

Una hectárea (ha), es la extensión de una manzana de casas, o sea, un cuadrado que tiene 100 metros de lado.

En Cuba existían latifundios que tenían más de 3000 cab de tierra, las cuales fueron nacionalizadas por la Revolución, en beneficio de todo el pueblo.

23. En un recipiente se tiene cierta cantidad de refrescos (en litros) para una fiesta por el día del estudiante, para repartirlo primero se saca la tercera parte del total, y después se saca el 20% de lo que quedó. Si el duplo de la cantidad que se

repartió es igual a la sexta parte del total de refresco aumentada en 23 litros, ¿Cuántos litros se sacaron en a segunda extracción?

24. Armando va al circo con sus hijos, y al sacar entradas de a 3 pesos, observa que le falta dinero para tres de ellas y tiene que sacarlas de a 1.50 pesos. Así, entran todos y le sobran 3 pesos. ¿Cuántos hijos tiene Armando?
25. Descomponer el número 440 en dos sumandos, tal que las dos quintas partes del primero exceda en 15 unidades al 75% del segundo.
26. Un fabricante tiene para la venta un cierto número de tubos de barro. Vende primero las tres quintas partes, y después se le hace un pedido de las siete octavas partes de los que quedaban; pero antes de servir el pedido, se le inutilizan 240 tubos, y no puede entregar más que las cuatro quintas partes de la cantidad pedida. ¿Qué número de tubos se vendieron?
27. Si en una Secundaria Básica se ubicaran 8 alumnos en cada banco, 4 de ellos quedarían sin asiento; si se ubicaran 9 en cada banco, quedarían dos asientos sin ocupar. ¿Cuántos son los alumnos y cuantos los bancos?
28. En Canadá, el radiador de un carro tiene una capacidad de 12 litros. Está lleno de una solución anticongelante al 30%. ¿Cuánto debe sacársele y reemplazarlo con anticongelante puro para que en la solución quede el 40% de anticongelante?
29. En una cooperativa se cosecharon 160 qq entre plátano burro y plátano fruta. Una empresa compró el 25% de los plátanos frutas y la mitad de los plátanos burros. Si quedaron las tres quintas partes del total, ¿qué cantidad de plátanos de cada tipo compró la empresa?
30. Tres alumnos realizaron una competencia recogiendo cajas de tomates. El que quedó en segundo lugar recogió una caja menos que el ganador, mientras que al que quedó en tercer lugar le faltaron 11 cajas para duplicar la cantidad que recogió el ganador. Si las cajas recogidas por el ganador representa el 60% de lo que recogieron los otros dos juntos, determina:
    a) ¿Cuántas cajas de tomates recogió cada uno?
    b) ¿Qué por ciento del total recogió el ganador?

31. En una granja se tienen 250 reses repartidas en tres potreros. En el primero se tiene el doble de las reses que hay en el segundo. Si se pasan al segundo potrero la mitad de las reses del tercero, entonces en el primer potrero hay 25 reses menos que en el segundo. ¿Cuántas reses hay en el tercer potrero?
32. En un mercado agropecuario hay dos sacos de arroz que contienen en total 174 kilogramos de arroz. Si al saco más pesado se le sacase el 25% del arroz que contiene y se echa en el otro saco, ambos tendrían la misma cantidad. ¿Cuántos kilogramos de arroz contiene cada saco?
33. Los alumnos de dos brigadas de un IPUEC realizaron un trabajo voluntario, en el que recogieron 555 cajas de tomates. Los integrantes de la primera brigada recolectaron un promedio de 15 cajas cada uno, mientras los de la segunda brigada recolectaron un promedio de 20 cajas cada uno. Si la primera brigada recolectó 45 cajas menos que la segunda brigada. ¿Cuántos alumnos hay en cada brigada?
34. Juan es un farmacéutico de un hospital y tiene el siguiente problema:
Necesita preparar 15mL de gotas especiales para un paciente que padece de glaucoma. La solución debe tener 2% de ingrediente activo, pero solo tiene disponible soluciones al 10% y 1%. ¿Qué cantidad, se pregunta Juan, debo usar de cada solución para completar la receta? Tú puedes ayudar a Juan en este trabajo. Hazlo.
35. En un recipiente hay 10kg de una mezcla de alcohol y agua. Se añade cierta cantidad de agua de forma que la cantidad de alcohol representa el 30% del total, después se añade otra cantidad de agua y entonces el alcohol representa $\frac{1}{5}$ del total. ¿Qué cantidad de agua se añadió en total?
36. La política hostil de los Estados Unidos y su amenaza contra Cuba, trajo consigo un extraordinario esfuerzo en la preparación combativa de nuestro pueblo. Esta situación ocasionó, en los primeros 38 años de Revolución, daños humanos a 4 187 personas (entre fallecidos e incapacitados). El número de fallecidos excedió en 1 743 a la tercera parte de los incapacitados.

a) ¿Cuál fue la cantidad de personas fallecidas?

b) ¿Qué % del total de personas que sufrieron daños humanos representan las personas incapacitadas?

37. Un organopónico siembra dos canteros, uno de tomate y otro de pimiento. En cada cantero han crecido 600 matas de cada variedad y se sabe que cada mata de tomate produce como promedio, 15 unidades más que las de pimiento. En total se recolectaron 39 000 unidades. Los tomates y pimientos producidos por dos matas (una de tomate y otra de pimiento) se envasan conjuntamente en bolsas plásticas adecuadas, obteniéndose un número exacto en bolsas y con la mayor cantidad posible de tomates y pimientos.

a) ¿Cuántas bolsas se obtienen con estas dos matas?

b) ¿Cuántos tomates y pimientos se ponen en cada bolsa?

c) ¿Cuántas bolsas se logran con la totalidad de la cosecha?

38. Para elegir al jefe de destacamento de un grupo, son propuestas Yanet e Ileana. Yanet obtuvo el triple de los votos obtenidos por Ileana. Si Ileana hubiese obtenido 10 votos más y Yanet 14 votos menos, entonces la votación hubiese sido pareja. Si se conoce que ejercieron el voto el 96% de los alumnos, calcula la matrícula del grupo.

39. Un número de tres cifras es tal que la cifra de las decenas es la mitad de la cifra de las centenas, y la cifra de las unidades es excedida en 1 por la suma de las cifras restantes. Si el número se divide por la suma de su cifra el cociente es 38 y el resto 7. Calcula el 60% del número.

Nota: En una división de dividendo (D), divisor (d), cociente (q) y resto (r) se cumple que:

$$\boxed{D = q \cdot d + r}$$

40. Con la finalidad de determinar la sede de las olimpiadas en el 2012, el Comité Olímpico Internacional esta realizando encuestas en las ciudades que optan por las mismas. Los resultados de las realizadas en nuestro país, arrojaron un notable respaldo de los habaneros a la celebración de los juegos olímpicos en su ciudad. Fueron encuestadas entre mujeres y hombres un total de 320 personas. Si se

hubiese encuestado el 75% de esas mujeres y el duplo de esos hombres, entonces el total de personas encuestadas hubiera sido 405. ¿Cuántas mujeres y cuántos hombres fueron encuestados realmente en nuestra ciudad?

(Datos tomados del Periódico Granma, 2 de marzo 2004)

41. a) Buscar datos actualizados en la prensa, revistas y enciclopedias y redactar tres problemas, cuya solución conduzca a una ecuación lineal en una variable. Resuelva los problemas redactados.

b) Investiga en centros de trabajos, fábricas o en otras instituciones sobre la aplicación de las ecuaciones lineales en una variable. A partir de estos datos elaboran tres problemas referido a lo investigado.

c) Elabora tres problemas, que conduzcan a una ecuación lineal en una variable y que estén vinculadas con la Geometría Plana.

42. a) Enuncie un problema cuya resolución conduzca a la ecuación dada, y que tenga relación con la situación señalada:

- $2[(3x + 5) + x] = 58$ (perímetro de una figura geométrica)
- $\frac{5[x + (2x + 8)]}{2} = 65$ (área de una figura geométrica
- $\left(x + \frac{2}{3}x\right) - \frac{4}{5}x = 3x - 32$ (propiedades de un número, en la que intervenga cálculo porcentual)
- $[10 (4x) + x] =(10x + 4x) + 54$ (propiedades de un número de dos cifras)
- $\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}\left(\frac{2}{3}x\right) + 210 = x$ (actividad agrícola de recogida de vegetales de un grupo de estudiantes)

b) Resuelve los problemas planteados.

43. ¿Cuántos litros de una solución alcohólica al 45 % debe mezclarse con 15 litros de una solución al 80% para que resulte una mezcla al 60%? (No se considera la contracción de volumen que experimentan las soluciones alcohólicas)

44. En un encuentro científico participaron 250 estudiantes y se premiaron una cierta cantidad de ponencias. Se conoce que el número de menciones y trabajos

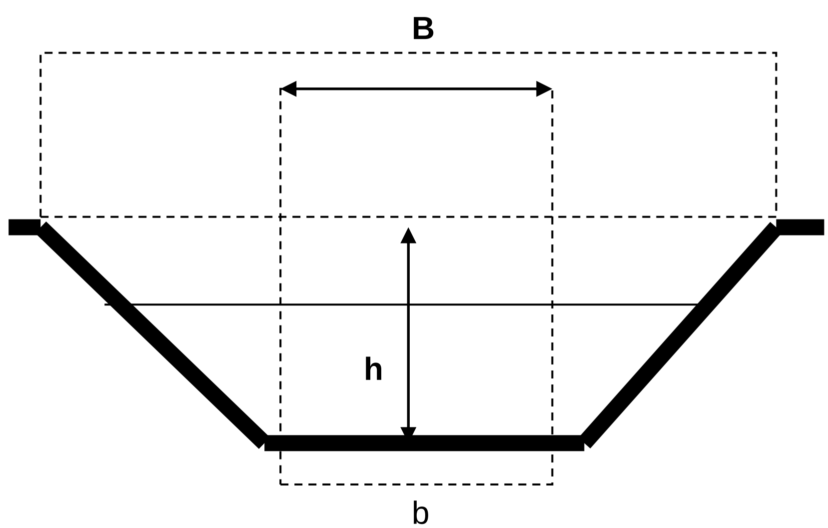
destacados es 88 y el número de trabajos relevantes es igual a $\frac{5}{12}$ del número de menciones disminuidos en el 20% del número de trabajos destacados.

a) ¿Cuántos trabajos más fueron categorizados de destacados que de relevantes?
b) ¿Qué tanto por ciento del número de participantes representan el total de trabajos premiados?

45. Entre dos apartamentos consumen mensualmente 426 kw-h de energía eléctrica. Después de aplicarse medidas de ahorro, el apartamento A redujo su consumo al 75% y el apartamento B lo disminuyó en 21 kw-h. Si ahora entre ambos consumen el doble de lo que consumía el apartamento A. ¿Cuál era el gasto de energía de cada apartamento?

46. Entre dos escuelas, se recogieron el curso pasado 720 quintales de tomates. Este curso lo primera escuela debe incrementar la recolección en un 15%, y la segunda, en un 10% de manera que entre ambas recolecten 95 quintales más de tomate que el curso pasado. ¿Cuántos quintales de tomate debe recolectar cada escuela?

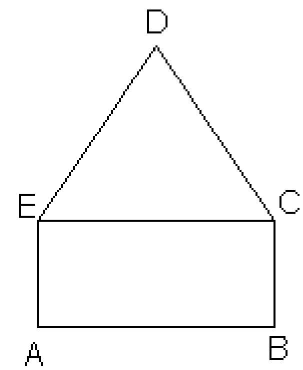
47. En la figura se representa la sección transversal de un canal de drenaje, la cual tiene forma de un trapecio isósceles, con una base menor de 1.5m y una altura de 80 cm. ¿Qué longitud debe tener su base mayor para que el área de la sección transversal del canal sea de $2m^2$?



Sección transversal
del canal

48. Dos hombres tienen radio comunicador cuyo alcance máximo es de 2km. Uno de ellos sale de determinado lugar a la 1:00 pm y camina hacia el norte con una velocidad de 4 km/h. El otro sale del mismo punto, a la 1:15 pm, caminando hacia el sur, a 6km/h ¿A qué hora ya no podrán comunicarse entre sí?

49. En la figura se representa al pentágono ABCDE. Su diagonal $\overline{EC}$, lo divide en el triángulo equilátero CDE y el rectángulo ABCE. Si se conoce que la longitud de la base del rectángulo, supera al triplo de la longitud de su altura, en el 40% de la longitud de la misma y que el perímetro del pentágono es de 97.6 cm.
Calcular el perímetro y el área del rectángulo ABCE.



2.2 <u>Introducción a los sistemas de ecuaciones lineales.</u>

El estudio de los sistemas lineales es muy importante en Matemática, por su gran aplicación práctica dentro de esta ciencia y en otras disciplinas.

Te sorprenderá saber en la construcción del edificio **Focsa**, sito en la calle M y 17 en el Vedado y que además es una de la obras insigne de la Ingeniería Cubana, se plantearon sistemas de ecuaciones lineales compuestos por una gran cantidad de ecuaciones y variables para realizar su cálculo estructural.

En este epígrafe estudiarás que forma tiene un sistema de ecuaciones lineales con dos variables y los métodos que te permiten determinar las soluciones de los mismos y resolverás problemas donde tengas que aplicar estos sistemas.

Yolanda, va a un mercado y compra cierta cantidad de libras de ajo a 2,50 pesos la libra y otra cierta cantidad de libras de carne de cerdo a 21 pesos la libra. En total realizó un gasto de 146,50 pesos. Representa mediante variables la situación planteada.

Te puedes percatar enseguida, que no basta una sola variable para representar esta situación, es evidente que se necesitan dos variables, una para representar la cantidad de ajos comprados y la otra para representar la cantidad de carne de cerdo.

x: libras de ajos compradas.

y: libras de carne de cerdo compradas.

De acuerdo con el precio de la libra de cada producto y el gasto realizado, tendremos la igualdad siguiente:

$2{,}50\,x + 21{,}00\,y = 146{,}50 \quad (1)$

De una situación real, hemos obtenido una ecuación lineal de la forma ax + by = c, donde a = 2,50 , b = 21,00 y c = 146,50 en las variables **x** y **y.**

Las ecuaciones que puedan reducirse a la forma ax + by = c donde **x** y **y** son variables con a, b y c números racionales dados, tales que a y b no sean nulos simultáneamente, se llaman **ecuaciones lineales con dos variables.**

Se llama solución de una ecuación lineal con dos variables, **al par de valores** para los cuales la ecuación se transforma en una igualdad verdadera. En general toda ecuación lineal con dos variables admite infinitas soluciones.

Si quisiéramos saber realmente la cantidad de libras que compró Yolanda de cada producto, ¿podríamos determinarla con los datos que se dan? Seguramente responderías que no, luego, tendríamos que tener una información adicional, donde estuvieran presente las mismas variables **x** y **y**, la representación de la misma sería otra ecuación de la forma ax + by = c, esta información podría ser la siguiente:

Se conoce que el número total de libras compradas por Yolanda es 10,5 libras.

De lo cual resulta la ecuación: x + y = 10,50 (2).

Entonces este par de ecuaciones lineales con dos variables (incógnitas), pueden ser dispuestas en la forma siguiente:

$$\begin{cases} 2{,}50x + 21{,}00y = 146{,}50 & (1) \\ \quad x + y = 10{,}50 & (2) \end{cases}$$

Estamos en presencia de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables.

En forma general se puede plantear que:

Llamamos sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables a dos ecuaciones de este tipo que puedan reducirse a la forma siguiente:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales con dos variables son las soluciones comunes a las dos ecuaciones que lo forman, y el conjunto de estas soluciones recibe el nombre de conjunto solución del sistema.

Un sistema puede: tener solución única, no tener soluciones o tener infinitas soluciones. En caso de tener una solución única la misma la representamos como un par ordenado de la forma (x ; y).

Para determinar analíticamente, si un sistema tiene solución única, no tiene soluciones, o tiene infinitas soluciones si $b_1 \neq 0$ y $b_2 \neq 0$ puedes despejar la y en cada una de las ecuaciones y representarla en la forma:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{a_1}{b_1}x - \dfrac{c_1}{b_1} \\ y = -\dfrac{a_2}{b_2}x - \dfrac{c_2}{b_2} \end{cases}$$

1) Si: $-\dfrac{a_1}{b_1} \neq -\dfrac{a_2}{b_2}$, entonces el sistema tiene una única solución.

2) Si: $-\dfrac{a_1}{b_1} = -\dfrac{a_2}{b_2}$ y $-\dfrac{c_1}{b_1} \neq -\dfrac{c_2}{b_2}$ el sistema no tiene solución.

3) Si: $-\dfrac{a_1}{b_1} = -\dfrac{a_2}{b_2}$ y $-\dfrac{c_1}{b_1} = -\dfrac{c_2}{b_2}$, entonces tiene infinitas soluciones.

Si dos sistemas tienen la misma solución, se llaman equivalentes.

Métodos analíticos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

La esencia de estos métodos analíticos consiste en la obtención de una ecuación con una sola variable a partir de las dos ecuaciones que forman el sistema. Al resolver esta ecuación estamos determinando el valor numérico de una de las variables, lo cual permitirá determinar el valor de la otra sustituyendo en una de la ecuaciones del sistema.

Estudiaremos dos:

1. El método de sustitución.
2. El método de adición y sustracción (también denominado método de reducción).

Ejemplos:

Primeramente te orientamos que analices los ejemplos 1 y 2 del Libro de texto 8vo grado pág. 142 y los que te proponemos a continuación:

Resolvamos el sistema de la situación inicial:

$$\begin{cases} 2{,}50x + 21{,}00y = 146{,}50 & (1) \\ \quad x + y = 10{,}50 & (2) \end{cases}$$

Aplicaremos el **método de sustitución** para hallar la solución del sistema, para ello debemos:

1ero. Despejar en una de las ecuaciones del sistema una de las variables (se debe tomar la ecuación más simple):

En este caso escojamos la segunda ecuación x + y = 10,50 y despejando la variable y nos queda y = 10,50 – x (3)

2do. Sustituimos el valor de y en la primera ecuación y de esta forma obtenemos una ecuación que tiene una sola variable x:

2,50 x + 21,00(10,50 – x) = 146,50

3ro. Resolvemos la ecuación obtenida anteriormente para obtener el valor de la variable x.

2,50 x + 21,00(10,50 – x) = 146,50

2,50 x + 220,50 – 21,00x = 146,50

2,50 x – 21,00x = 146,50 - 220,50

- 18,50x = - 74,00

$$x = \frac{-74{,}00}{-18{,}50}$$

$$x = 4$$

4to. Se sustituye el valor hallado de la variable (en este caso x), en la ecuación obtenida, cuando se despejó la otra variable (en este caso y) para obtener su valor.

Sustituyendo x = 4 en la ecuación (3) se obtiene:

y = 10,50 – x

y = 10,50 – 4 = 6,50.

Luego ahora podemos conocer que Yolanda compró 4 libras de ajos y 6 libras y media de carne de cerdo.

Resolvamos ahora el sistema de la situación inicial $\begin{cases} 2{,}50x + 21{,}00y = 146{,}50 & (1) \\ \quad\; x \;+\; \quad y = 10{,}50 & (2) \end{cases}$, l

Método de adición y sustracción.

Antes de estudiar este método es conveniente que veas en el libro de Matemática 8vo, el Teorema 1 que aparece en la página 142.

Para resolver el sistema por el método de adición y sustracción debemos:

1ero. Transformar convenientemente las ecuaciones del sistema de manera que obtengamos dos ecuaciones donde los coeficientes de una de las variables sean iguales u opuestos.

En nuestro caso si multiplicamos la segunda ecuación por – 2,50 obtenemos:

$$\begin{cases} \;\; 2{,}50x + 21{,}00y = 146{,}50 \\ -2{,}50x - 2{,}50y = -26{,}25 \end{cases}$$

2do. Restar o sumar según convenga, miembro a miembro las ecuaciones del sistema transformado anteriormente, para obtener una ecuación en una sola variable.

Al sumar las ecuaciones queda:

18,5 y = 120,25

3ro. Hallar la solución de la ecuación anterior.

18,5 y = 120,25

$$y = \frac{120{,}25}{18{,}5}$$

y = 6,5

4to. Se sustituye el valor de la variable obtenida en una de las ecuaciones del sistema original según convenga.

Sustituyendo y = 6,5 en la ecuación (2)

$$x + y = 10{,}50$$
$$x + 6{,}5 = 10{,}50$$
$$x = 10{,}50 - 6{,}5$$
$$x = 4$$

Como puedes observar hemos llegado a la misma respuesta, que aplicando el método por sustitución, por lo que para determinar la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos variables se puede aplicar cualquiera de estos métodos; el seleccionar uno u otro depende de las forma en que estén dadas las ecuaciones que forman el sistema.

Ejemplos:

a) Ejemplo 1 y 2 Libro de texto 8vo grado página 142.

b) Resuelve el siguiente sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{4x + y + 1}{3} - 3 = 0 & (1) \\ \dfrac{2(x - y)}{3} - \dfrac{3x - y}{9} = 2\tfrac{1}{3} & (2) \end{cases}$$

Observa que la ecuaciones que constituyen este sistema no están dadas en la forma ax + by = c, por lo que debemos transformarlas para después aplicar uno de los métodos estudiados.

Transformando la primera ecuación se tiene:

$$\frac{x}{2} + \frac{4x + y + 1}{3} - 3 = 0$$

$$3x + 2(4x + y + 1) - 18 = 0 \quad \left(\begin{array}{l}\text{multiplicando ambos miembros de la ecuación por 6, que} \\ \text{es el m.c.m entre 2 y 3}\end{array}\right)$$

$$3x + 8x + 2y + 2 - 18 = 0 \quad \left(\begin{array}{l}\text{aplicando propiedad distributiva de la multiplicación con} \\ \text{respecto a la adición}\end{array}\right)$$

$$11x + 2y - 16 = 0 \quad (\text{reduciendo términos semejantes})$$

$$11x + 2y = 16 \quad (\text{transponiendo})$$

De forma similar procedemos a transformar la segunda ecuación, quedando:

$$\frac{2(x-y)}{3} - \frac{3x-y}{9} = 2\tfrac{1}{3}$$

$$\frac{2(x-y)}{3} - \frac{3x-y}{9} = \frac{7}{3} \quad (\text{expresando el número mixto como fracción impropia})$$

$$6(x-y) - (3x-y) = 21 \quad \left(\begin{array}{l}\text{multiplicando ambos miembros de la ecuación por 9 que} \\ \text{es el m.c.m entre 3 y 9}\end{array}\right)$$

$$6x - 6y - 3x + y = 21 \quad \left(\begin{array}{l}\text{aplicando propiedad distributiva de la multiplicación con} \\ \text{respecto a la adición}\end{array}\right)$$

$$3x - 5y = 21 \quad (\text{reduciendo términos semejantes})$$

Luego debemos resolver entonces el sistema:

$$\begin{cases} 11x + 2y = 16 & (1) \\ 3x - 5y = 21 & (2) \end{cases}$$

El cual puede ser resuelto por cualquiera de los métodos vistos; apliquemos de de adición y sustracción.

1er. Multipliquemos por 5 la ecuación (1) y por 2 la ecuación (2), quedándonos:

$$\begin{cases} 55x + 10y = 80 & (3) \\ 6x - 10y = 42 & (4) \end{cases}$$

2do. Sumando miembro a miembro las ecuaciones (3) y)4) obtenemos:

$$61x = 122$$

3er. Resolviendo esta ecuación en la variable x, nos da:

$$61x = 122$$

$$x = \frac{122}{61}$$

$$x = 2$$

4to. Sustituyendo el valor de x = 2 en la ecuación (1) tenemos que:

$$11x + 2y = 16$$

$$´11 \cdot 2 + 2y = 16$$

$$22 + 2y = 16$$

$$2y = -6$$

$$y = -3$$

Por lo que el conjunto solución de este sistema es: $S = \{(2\,;-3)\}$

Ejemplo:

Sea el sistema:

$$\begin{cases} x = 0{,}5\ ay - (b + 4) \\ a - y = bx \end{cases} \qquad (a \in Q,\ b \in Q)$$

Determina el valor de los parámetros a y b, para que el conjunto solución del sistema sea S = $\left\{\left(\frac{1}{4}; -2\right)\right\}$.

Como nos dan el conjunto solución del sistema, entonces los valores numéricos de las variables son x = $\frac{1}{4}$ y y = −2, los cuales deben satisfacer simultáneamente a las dos ecuaciones del sistema, sustituyendo estos valores en las ecuaciones y realizando las operaciones indicadas, se obtiene:

$$\begin{cases} a + b = \dfrac{15}{4} & (1) \\ a - \dfrac{1}{4}b = -2 & (2) \end{cases}$$

que es otro sistema de ecuaciones lineales en las variables, a y b.

Al resolver el sistema se obtiene a = − 0,85 y b = 4,6.

Luego la respuesta será:

Para que el sistema tenga como conjunto solución S = $\left\{\left(\frac{1}{4}; -2\right)\right\}$, se debe cumplir que:

a = − 0,85 y b = 4,6.

Ejercicios

1. Realiza las siguientes actividades:
   a) Escribe dos ecuaciones lineales con dos variables.
   b) De los pares (1 ; 1) , (2 ; 0) , (5 ; 1) , (1 ; 3) ; (3 ; -1) y $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right)$, indica cuáles son soluciones de la ecuación 3 x – y = 14
   c) De los pares (−1 ; 4) , (2 ; 0) , (3 ; 1) , (0 ; 0) , (−2 ; 10), indica cual es solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x - y = 11 \end{cases}$$

d) De los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, determina el que tiene como solución el par $\left(\frac{1}{2};-1\right)$.

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x + y = 1 \end{cases}$$

e) Ejercicio 2 y 3 pág. 140 L/T 8vo

f) El par (4 ; k) es solución del sistema: $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$. Calcula el valor de k.

g) Calcula a y b para que el conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases} ax + y = 3 \\ x + by = 5 \end{cases} \qquad \text{sea } S = \{(1;2)\}$$

h) Escribe un sistema de ecuaciones lineales en dos variables que no tenga solución.

i) Escribe un sistema lineal de dos ecuaciones en la que una ecuación sea: 3 x – y = 8 y que tenga solución única.

j) Escribe un sistema de ecuaciones lineales cuya solución sea el par:(2 ; -4)

k) Escribe un sistema de ecuaciones lineales que sea equivalente al sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{2} + \dfrac{y-3}{3} = 0 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

l) Redacta un problema cuya solución conduzca a un sistema de ecuaciones lineales con dos variables.

2. Di si las proposiciones siguientes son verdaderas (V) o falsas (F). Justifica tu respuesta, en el caso que sean falsas.

   a) La ecuación 2x – 7y = 25 tiene dos soluciones.

   b) El par $\left(-\frac{1}{2}; 4\right)$ es solución de la ecuación 2x – 3y + 13 = 0

   c) El par (- 3 ; 4) es solución del sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x - y = 13 \end{cases}$$

d) De los siguientes pares (0 ; 0), (-2 ; 0), (-2 ; 4),(2 ; 4), (4 ; - 6) ninguno es solución del sistema: $\begin{cases} \frac{1}{2}a - b + 5 = 0 \\ 4a + b = -4 \end{cases}$

e) Los sistemas $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ y = x + 2 \end{cases}$ y $\begin{cases} x + y = 4 \\ y - x = 2 \end{cases}$ son equivalentes.

f) Sí el par $\left(-3\,;\,\frac{1}{2}\right)$ es solución de un sistema lineal de dos ecuaciones con dos variables también lo es el par $\left(\frac{1}{2}\,;-3\right)$

3. Solo una de las alternativas dadas es la correcta; selecciónala ¿cuál es?

a) La ecuación 3 x – y = 4 tiene por solución:

$\left(\frac{1}{3}\,;1\right)$ (2; -2) (0; 0) (80; 236)

b) El sistema $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 5y = -14 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ tiene por solución:

(3;-2) (2;-3) (-2;3) (-3;2)

c) Sí la solución del sistema: $\begin{cases} x = m + y \\ 3x + y = 5 \end{cases}$ es (2 ; 1) entonces el valor de m es:

5 2 –1 3

d) Sea el sistema: $\begin{cases} 2x - y = \frac{1}{2} \\ 4x - 2y = c \end{cases}$ el valor de c para que el tenga infinitas soluciones es:

$\frac{1}{2}$ 2 1 ninguno de los anteriores

e) La base de un rectángulo excede en 2,0 dm al triplo de su altura y su perímetro es 36 dm. El sistema que modela al problema dado, donde **x** representa la longitud de la base, y la longitud de su altura se representa por **y**, es:

$$\begin{cases} x+2=3y \\ 2(x+y)=36 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2=\dfrac{y}{3} \\ 2(x+y)=36 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2=3y \\ x+y=36 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2=3y \\ 2(x+y)=36 \end{cases}$$

4. Resuelve los sistemas que aparecen en L/T 8vo páginas 143 a 145 ejercicios 1, 2, 3 y además los que te indicamos a continuación

a) $\begin{cases} 5x+3y=11 \\ 2x-y-11=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 1\frac{1}{2}x+5y=5 \\ 5x+3\frac{1}{3}y=23\frac{1}{3} \end{cases}$ c) $\begin{cases} 0{,}6x+5y=1{,}3 \\ 2x-0{,}3y=0{,}94 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}\right)=\dfrac{1}{6} \\ 6\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}\right)=3\frac{1}{2} \end{cases}$ e) $\begin{cases} 0{,}5x-0{,}7y+0{,}54=0 \\ 2x+0{,}5y-3{,}45=0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{4}+\dfrac{y+2}{10}=\dfrac{2(y-x)}{5} \\ \dfrac{x-1}{4}-\dfrac{y-2}{12}=\dfrac{3y-8x}{18} \end{cases}$

g) $\begin{cases} (u+3)(v-2)=4+v(u+1) \\ (u+2)(v-1)=uv+a+5 \end{cases} \quad (a\in Q)$ h) $\begin{cases} -0{,}1x-\dfrac{1}{5}y=-0{,}45 \\ 6(x-2)+7(y+1)=0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{6}-\dfrac{2-13x}{12}=\dfrac{1-2y}{4} \\ \dfrac{x}{3}+0{,}2y=0 \end{cases}$ j) $\begin{cases} \dfrac{x-y+2}{3}-\dfrac{y-2x}{2}=\dfrac{x+1}{2}-1 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ k) $\begin{cases} \dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=18 \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}+5=0 \end{cases}$

Nota: El sistema k) no es lineal, pero puede ser reducido a un sistema de este tipo si sustituimos $\frac{1}{x}=a$ y $\frac{1}{y}=b$, resulta entonces un sistema lineal de variables a y b, con estos valores podemos entonces hallar **x** y **y**.

5. Si a x + b y = 1, y = 7 cuando x = 2; y = 16 cuando x = 4.
   a) Halla los valores de a y b.
   b) Halla el valor de y si x = 6

6. Sean: $\begin{cases} x+y=\dfrac{3}{4}x \\ x-1{,}5=2y \end{cases} \qquad \begin{cases} 2m(4-x)=4n+\dfrac{2}{3} \\ mx-\dfrac{1}{2}=2ny \end{cases}$

   Determina el valor de m y n, para que los sistemas dados sean equivalentes.

7. Sea el sistema de ecuaciones lineales de variables x e y siguiente:

$$\begin{cases} 7x - m = 4y \\ 3x + 2y = m \end{cases} \qquad (m \in N)$$

Determina el valor de m, para que el valor de x exceda en 4 al valor de y.

Problemas que conducen a un sistema de dos ecuaciones con dos variables.

Como ya hemos expuesto son diversas las aplicaciones de los sistemas lineales con dos variables, a la ciencia y a la técnica. El tratamiento de los problemas que conducen a sistemas lineales no es muy diferente al que hicimos con los problemas que conducen a ecuaciones lineales en una variable, de hecho existe una amplia gama de problemas de este tipo que se pueden modelar mediante un sistema de ecuaciones, resultando a veces más fácil para el alumno, no obstante podemos encontrar otros problemas cuya solución solo puede realizarse por medio de los sistemas de ecuaciones.

Proponemos analizar los tres ejemplos de problemas resueltos que aparecen en el L/T 8vo página 146 a 148 y los que te explicamos a continuación.

Ejemplo 1:

Una empresa papelera vende al por mayor dos tipos de cuadernos de notas a las librerías, la primera en 50¢ y la segunda en 70¢. La empresa recibe un pedido de 500 cuadernos, junto con un cheque de $ 286. Si el pedido no menciona la cantidad de cada tipo de cuadernos, ¿cómo debe entregar el pedido la papelera?

Solución:

Designemos por x la cantidad de cuadernos del tipo I y por y la cantidad de cuadernos del tipo II.

Tipo de cuadernos	Cantidad de cuadernos	Precio de cada cuaderno	Costo
I	x	50¢ = $ 0,50	0,50 x
II	y	70¢ = $ 0.70	0,70 y

Como el número total de cuadernos es 500, resulta:

$$x + y = 500 \quad (1)$$

El cheque es de $ 286, luego:

$$0{,}50\,x + 0{,}\,70\,y = 286 \quad (2)$$

Formemos el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 500 & (1) \\ 0,50\,x + 0,70\,y = 286 & (2) \end{cases}$$

Resolvamos el sistema lineal de ecuaciones: multiplicando por – 0,50 la primera ecuación y sumándola con la segunda ecuación:

$$\begin{array}{l} -0,50x \;-\; 0,50y \;=\; -250 \\ \;\;\;0,50x \;+\; 0,70y \;=\; 286 \\ \hline \end{array}$$

$$0,20\,y = 36$$

$$y = \frac{36}{0,20} = 180$$

Sustituyendo en (1):

$$x + 180 = 500$$

$$x = 500 - 180$$

$$x = 320$$

Te dejamos para que realices la comprobación del problema.

Respuesta: Deben enviarse 320 cuadernos del tipo I y 180 cuadernos del tipo II.

Ejemplo 2:

La razón entre las longitudes de la base menor y mayor de un trapecio, cuya altura mide 6,0 dm, es igual a $\frac{3}{7}$. Si el área del trapecio es igual a 60 dm^2, calcula el promedio entre las longitudes de las bases del trapecio.

Solución:

Representemos por x a la longitud de la base mayor y por y a la longitud de la base menor, entonces la razón entre sus longitudes es $\frac{3}{7}$, de donde resulta la proporción:

$$\frac{y}{x} = \frac{3}{7} \qquad (1)$$

Como la altura h = 6,0 dm y el área del trapecio se calcula por la fórmula $A = \frac{(B + b)\,h}{2}$

resulta la ecuación:

$$\frac{6(x + y)}{2} = 60 \qquad (2)$$

Formemos el sistema:

La ecuación (1) se transforma de la manera siguiente:

$$\frac{y}{x} = \frac{3}{7}$$

3x = 7y (el producto de los extremos es igual al producto de los medios)

En la ecuación (2), simplificando el 1er miembro resulta:

3 (x + y) = 60

Si dividimos ahora ambos miembros por 3, entonces: x + y = 20

Finalmente el sistema queda reducido:

$$\begin{cases} 3x = 7y \\ x + y = 20 \end{cases}$$

Resolvamos el sistema:

$$\begin{cases} 3x - 7y = 0 & (1) \\ x + y = 20 & (2) \;|\; .7 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3x - 7y &= 0 \\ \underline{7x + 7y} &\underline{= 140} \\ 10x &= 140 \\ x &= 14 \end{aligned}$$

Sustituyendo en (2) resulta:

$$14 + y = 20$$

$$y = 20 - 14 = 6$$

Luego la base mayor mide 14 dm y la menor 6,0 dm

El alumno debe comprobar el problema en su enunciado.

Por tanto el promedio entre las bases es:

$$\frac{B+b}{2} = \frac{14\,dm + 6{,}0\,dm}{2} = 10\,dm$$

El valor hallado es la longitud del segmento, que une los puntos medios de los lados no paralelos del trapecio, este segmento se denomina **paralela media o base media del trapecio.**

Ejemplo 3:

Un experimento consiste en dar una dieta estricta a algunos animales. Cada animal va a recibir entre otros alimentos 20g de proteínas y 6g de grasa. El técnico de laboratorio debe utilizar simultáneamente 2 mezclas de alimentos que tienen la composición que aparece en la siguiente tabla:

Mezcla	Contenido de proteínas	Contenido de grasas
A	10%	6%
B	20%	2%

Utilizando las mezclas A y B, ¿cuántos gramos de cada una se deben usar para obtener exactamente los gramos de proteínas y grasa requeridas?

Solución:

Este es un problema real que se presenta en Dietética Animal

x: cantidad de gramos de mezcla A

y: cantidad de gramos de mezcla B

Conocemos que:

$$10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} \qquad 20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} \qquad 6\% = \frac{6}{100} = \frac{3}{50} \qquad 2\% = \frac{2}{100} = \frac{1}{5}$$

Resulta:

$$\begin{pmatrix} \text{Proteínas en x gramos} \\ \text{de la mezcla A} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \text{Proteínas en y gramos} \\ \text{de la mezcla B} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \text{Total de proteínas} \\ \text{necesarias} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{10}x \qquad + \qquad \frac{1}{5}y \qquad = \qquad 20$$

$$\begin{pmatrix} \text{Grasas en x gramos} \\ \text{de la mezcla A} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \text{Grasas en y gramos} \\ \text{de la mezcla B} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \text{Total de grasas} \\ \text{necesarias} \end{pmatrix}$$

$$\frac{3}{50}x \qquad + \qquad \frac{1}{50}y \qquad = \qquad 6$$

Resolvamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{1}{10}x + \frac{1}{5}y = 20 & (1) \\ \frac{3}{50}x + \frac{1}{50}y = 6 & (2) \end{cases}$$

Multiplicando la ecuación (1) por $\left(-\frac{1}{10}\right)$:

$$\begin{cases} -\frac{1}{100}x - \frac{1}{50}y = -2 \\ \frac{3}{50}x + \frac{1}{50}y = 6 \end{cases}$$

Sumando ordenadamente queda:

$$\frac{1}{20}x = 4$$

$$x = 4 \bullet 20 = 80$$

Sustituyendo en (1) para hallar y:

$$\frac{1}{10}(80) + \frac{1}{5}y = 20$$

$$8 + \frac{1}{5}y = 20$$

$$\frac{1}{5}y = 12$$

$$y = 12 \bullet 5 = 60$$

Hagamos la comprobación en el texto del problema, veamos la siguiente tabla:

Mezcla	Cantidad	Proteína	Grasa
A	80g	10% de 80 = 8	6% de 80 = 4,8
B	60g	20% de 60 = 12	2% de 60 = 1,2
Totales	140g	20g	6g

Respuesta:

Se debe tomar 80 gramos de la mezcla A y 60 gramos de la mezcla B, para cumplir con los requerimientos de la dieta.

Además de los problemas propuestos en el texto de Matemática 8, en las páginas 148 – 151 y 153 – 154, te proponemos a continuación la siguiente colección:

1. La suma de dos números es 7 y la tercera parte de su diferencia es igual a la unidad. Halla los números.
2. Hallar dos números conociendo que su diferencia es 131 y que si se divide el mayor por el menor, el cociente es 4 y el resto es 5.

   Nota: Ten presente que la división se cumple que D = dq + r, o sea, el dividendo (D), es igual a la multiplicación del cociente (q) por el divisor (d) más el resto (r).
3. Dos brigadas A y B cortan caña durante una jornada de trabajo voluntario. La brigada A cortó 100@ de caña más que la B y entre las dos cortaron 20 000@. Si el rendimiento de la caña es de 12,5@ de azúcar por cada 100@ de caña. ¿Cuál fue el aporte en azúcar de cada brigada?
4. En un número de dos cifras la suma de las mismas es 9, y escribiendo las cifras en orden inverso, se obtiene un número que excede al primero en 45. ¿Cuál es el número?
5. Dos recipientes A y B contienen leche. Si extraigo 2 litros de leche del recipiente B y los vierto en A, éste contiene 6 litros más que B. Si por el contrario, retiro 3 litros de A y los vierto en B, este contiene 4 litros más que A. ¿Puedes calcular cuántos litros tiene cada recipiente?
6. Un ganadero prepara una mezcla de avena y maíz como alimento para su ganado. Cada onza (28g) de avena produce 4g de proteína y 18g de carbohidratos y cada onza de maíz produce 3g de proteína y 24g de carbohidratos. ¿Cuántas onzas de cada grano se pueden usar para cubrir las necesidades nutritivas de 200g de proteínas y 1320g de carbohidratos por ración?

7. Un bebé pesa aproximadamente 7 libras al nacer y 3 años después su peso es de 21 libras. Si el peso W (en libras) del bebé está relacionado con la edad t (en años), mediante la expresión **W = at + b**, donde a y b son constantes.
   a) Calcula los valores de a y b.
   b) ¿Cuál es el peso aproximado del niño al sexto año de vida?
   c) ¿A qué edad el niño pesará 50 libras?
8. El costo $ C del uso de un teléfono esta dado por la fórmula:
   C = a +bn, donde n, es el número de unidades de tiempo y a y b son constantes.
   El uso de 200 unidades de tiempo origina el costo de $49.00 y el uso 500 unidades de tiempo origina un costo de $85.00
   a) Usando la información anterior escribe un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables
   b) Resuelve este sistema de ecuaciones y determina los valores de a y b
   c) Calcula el costo que origina el uso de 100 unidades de tiempo
9. En una Asamblea, se aprobó un proyecto por una mayoría que fue igual al 25% del número de votos de la minoría; pero, si con el mismo número de votos, los de la minoría hubieran contado con 12 votos más, la propuesta se habría aprobado con una mayoría de dos votos. ¿Cuántos votos a favor y cuántos en contra hubo en la asamblea?
10. En un centro deportivo hay 400 atletas varones mas que hembras. Se decidió trasladar al 70% de los varones y al 20% de las hembras, quedando en el centro 100 hembras más que varones. ¿Cuántos atletas de cada sexo quedaron en el centro?
11. En un taller de piezas de repuesto había un total de 120 piezas de dos tipos. Una empresa adquirió la mitad de las piezas del tipo A y tres cuarto de las piezas de tipo B si lo que quedó es el 40% de las piezas que había al principio. Calcula cuántas piezas de cada tipo había al principio.
12. En un mercado agropecuario hay dos sacos que contienen un total 174 kg. de arroz. Si del saco mas pesado se sacase el 25% de arroz que contiene y se echase en el otro, entonces ambos tendrían la misma cantidad de arroz. ¿Cuántos kg. de arroz contiene cada saco?

13. Al dividir un número de dos cifras por el triplo de las cifras de sus unidades se obtiene 7 por cociente y 10 por resto. Di cuál es el número, si se sabe que la diferencia entre el triplo de la cifra de las decenas y el duplo de las unidades es 19.
14. Osvaldo adquirió un reloj y una mesa invirtiendo en la compra 210 pesos. Pasado el tiempo decidió vender cada artículo, perdiendo en el reloj el 20% y ganando en la mesa el 25% de lo que pagó por cada uno. Si obtuvo en la venta una ganancia de 120 pesos ¿En que cantidad de dinero vendió cada artículo?
15. Durante el primer semestre del año anterior asistieron a una biblioteca municipal 6503 personas. En el mes de enero asistieron 2180 y el número de personas que asistieron en febrero excedió en 214 al 75% de los que asistieron en Marzo. ¿Cuantas personas más asistieron en marzo que en febrero?
16. Amanda y Alejandro son estudiantes de una Secundaria Básica que contestaron una selección de preguntas de Historia. El duplo de las preguntas que contestó Amanda excedió en 8 a las que contestaron los dos juntos. Si Amanda hubiera contestado la tercera parte de las preguntas que contestó, ese número seria igual a la mitad de las preguntas que contestó Alejandro. ¿Cuántas preguntas tenía la colección?
17. Una cooperativa tiene sembrada 456 ha de malanga y boniato. El 60% de las hectáreas sembradas de malanga excede en 58 ha a la tercera parte de las sembradas de boniato. ¿Cuántas hectáreas están sembradas en cada cultivo?
18. Un obrero desea comprar artículos que importan $1750. Puede adquirirlos al contado o a crédito. Por pagar al contado, consigue un descuento del 10% para el primer artículo y un 5% para el segundo y de esta manera paga solo $1660. ¿Cuál era el precio original de cada artículo?
19. Un fotógrafo tiene dos frascos de revelador diluido. En el frasco A, el 10% de su contenido es revelador y el resto agua. En el frasco B, la mezcla es mitad y mitad. ¿Cuánto debe tomar de cada frasco para obtener 80g de mezcla en la cual halla un 25% de revelador?
20. Un padre tiene 7 hijos. Cada muchacho tiene doble número de hermanas que hermanos. ¿Cuántos varones y cuántas hembras son?
21. Una empresa emplea dos máquinas A y B para fabricar un determinado tipo de tornillo. El número total de tornillos defectuosos producidos en un día ha sido 315 y

el 75 % de los tornillos defectuosos producidos por A excede en 45 a los 2/3 de los tornillos defectuosos producidos por B. ¿Cuántos tornillos defectuosos produjo cada máquina?

22. Justo va a un mercado y compra 8 libras de malanga y 4 libras de arroz y paga por esta mercancía 36 pesos, en el mismo mercado otra persona compra 5,5 libras de malanga y 6 libras de arroz y gasta 37,75 pesos. Si se supone que el precio de la libra de cada mercancía no ha variado. ¿Cuánto cuesta en ese mismo mercado una libra de cada producto?
23. EL ángulo A de un triángulo mide 30° y los otros dos, B y C están en la razón de 2:3. ¿Cuánto miden los ángulos B y C?
24. La razón de los lados de un rectángulo es $\frac{11}{7}$, si cada uno aumenta en 3,0 cm, el área aumenta 117cm^2. Calcula el perímetro del rectángulo.
25. Una empresa compra dos piezas por 2100 pesos y las vende posteriormente en 2 202 pesos. SI en la venta de una de ellas ganó el 10% y en la otra perdió el 8 %. ¿Qué cantidad pagó por cada una de dichas piezas?
26. En un circuito eléctrico, el voltaje es de 15 v. Si la corriente se incrementa en dos amperes y la resistencia disminuye en 1Ω, el voltaje se aumenta en 5 v. Calcula:
    a) la corriente inicial
    b) la resistencia inicial

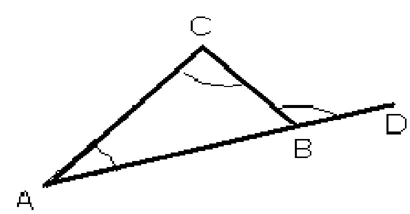
Nota: La letra griega Ω (omega) se usa para denotar la unidad de resistencia eléctrica denominada ohm.

27.

En la figura: ABC: Triángulo

B es un punto de $\overline{AD}$

- El ángulo C mide 75^0
- El 60% de la amplitud del ángulo DBC excede en 27^0 a la amplitud del ángulo A.



Determina las amplitudes de los ángulos CAB y DBC.

28. Una empresa agrícola debe utilizar simultáneamente dos tipos de fertilizante A y B en una plantación de naranjas. En la composición de cada saco intervienen

nitrógeno y ácido fosfórico, además de otros componentes. En la siguiente tabla aparecen las cantidades de nitrógeno y ácido fosfórico que hay en cada saco, utilizando de los dos tipos de fertilizantes A y B. ¿Cuántos sacos de cada uno debe usar la empresa para utilizar exactamente 560 kg de nitrógeno y 300 kg de ácido fosfórico que son los que necesitan la plantación de naranja?

Fertilizante	**Nitrógeno**	**Ácido Fosfórico**
A	4 kg	2 kg
B	3 kg	3 kg

29. Cuando dos albañiles trabajan por separados, A coloca en una obra dos ladrillos por minutos más que B. Cuando trabajan juntos sin interferirse, ponen 12 ladrillos por minuto, pero se conoce que esta cantidad es las tres cuartas partes de los ladrillos colocados, si hubieran trabajado por separado. Calcular el ritmo de trabajo de cada uno cuando trabajan por separados.
30. Dos pueblos A y B distan 80 km, por el camino entre ellos el cual presenta un tramo ascendente, otro horizontal y otro descendente. Halla la longitud de cada tramo, sabiendo que un ciclista tarda 3 horas en ir de A a B y 4 horas en ir de B a A. La velocidad del ciclista es de 12 km/h cuesta arriba, 24 km/h en terreno horizontal y 30km/h en terreno descendente.
31. La siguiente tabla muestra la cantidad de vitaminas A y C (en unidades) que posee cada uno de los productos P y Q (en hectogramos)

	A	**C**
P	3	2
Q	4	5

Se quiere elaborar una dieta en la estén presente ambos productos de manera que contenga 20 unidades de vitamina A y 18 unidades de vitamina C.

¿Cuántos kg de cada producto se necesita para cumplir con los requisitos de la dieta?

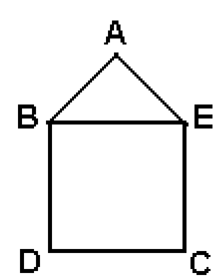
32. Una empresa farmacéutica distribuye un producto en dos tipos de envases A y B cuyos precios y pesos aparecen en la siguiente tabla:

	Peso (g)	Precio (en pesos)

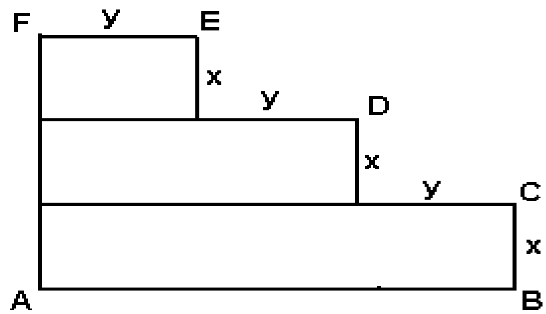
A	260	18,25
B	500	36,00

Se le vendió a una unidad un pedido que incluía envases de ambos tipos y cuyo peso total es 27,9 kg, el importe de la venta ascendió a 1990 pesos. ¿Cuántos envases de cada tipo se vendieron?

33. Si el mayor de dos números se divide entre el menor el cociente es 2 y el resto 1. Si el mayor se divide entre el menor aumentado en 20, el cociente es 1 y el resto es 15. Hallar los números.
34. Un bote motor, trabajando con el acelerador a fondo, hizo un viaje 4 km. corriente arriba (contra una corriente constante), en 15 minutos. El viaje de regreso y con el acelerador a fondo, tardó 12 minutos. Calcule la velocidad de la corriente y la velocidad del bote en aguas tranquilas.
35. En un triángulo isósceles, la razón entre la amplitud de uno de los ángulos de la base y la amplitud del ángulo opuesto a ella es 5:8. Calcula la amplitud de los ángulos interiores del triángulo.
36. Por el alquiler de dos locales comerciales una empresa recibe 306 000 pesos al año. El local más caro estuvo tres meses desocupado y es 6000 pesos más caro mensualmente que el más barato. Calcular el alquiler mensual de cada local.
37. Carlos compra 5 litros de vino blanco y 12 litros de vino tinto pagando en total 360 pesos. ¿Cuánto vale el litro de cada uno si el vino blanco es 4 pesos más caro por litro que el vino tinto?
38. La figura dada esta compuesta por él triangulo equilátero ABE y el rectángulo DCEB y representa una pared lateral de una casa de tabaco. Si se conoce que el perímetro de la figura es de 34 m y que 75% de la longitud de la altura del rectángulo es igual a la longitud de su ancho, calcular:
    a) el perímetro del triángulo AEB.
    b) el área del rectángulo DCEB.
    c) eL área del pentágono ABDCE, si se conoce que el área del triángulo ABE es igual a 15,8 m^2.



39. En el diagrama siguiente se muestra un corte transversal de los tres primeros escalones de una escuela Secundaria Básica, el perímetro de la figura es de 300cm y la razón entre la longitud del ancho del escalón (huella) y la longitud de su alto (contrahuella) es de 2:3. Calcula el área limitada por la figura dada, la cual esta formada por tres rectángulos.



40. Un profesor de Educación Física cuenta con 196 alumnos para realizar una tabla gimnástica. Se quiere formar 6 círculos y 4 estrellas con estos alumnos. Para formar un círculo y una estrella se necesitan 40 alumnos. ¿Con cuántos alumnos se forma un círculo y con cuántos una estrella?
41. El precio de un parqueo tiene un precio fijo las dos primeras horas y un pago adicional por cada hora siguiente. Si a una persona que parquea su automóvil le cobraron 5 pesos por tres horas, y a otra que estuvo cinco horas le cobraron 7 pesos. ¿Cuánto tendrá que pagar uno que parquee su automóvil ocho horas?
42. Dos recipientes contienen leche, la leche de uno contiene 3% de grasa y la del otro contiene el 7% de grasa. ¿Qué cantidad de leche de cada recipiente se necesita para producir 100 litros de una mezcla que contenga 4,5% de grasa?
43. El uso de la soya para la alimentación data del año 164 a.n.e. por los países asiáticos. Hoy forma parte de las fórmulas alimentarías de diferentes productos y es codiciada por diferentes culturas. El 85% de su composición la conforman las proteínas, las grasas y los glúcidos. El contenido de grasa es de un 20% y el de glúcido excede en 5% a la tercera parte del tanto por ciento que representan las proteínas y las grasas juntas.
    a) ¿Qué tanto por ciento de cada uno de los restantes componentes contiene la soya?
    b) ¿Qué cantidad de proteína hay en 2,5 kg. de soya?

44. Un avión sale de la Ciudad La Habana rumbo a una región oriental, recorriendo 750 km en 3 horas con viento a favor, pero si el vuelo se hubiese realizado con el viento en contra el viaje duraría 3 horas y 45 minutos. Calcula la velocidad del avión y del viento.

45. La carga (W), levantada con un esfuerzo (E), esta dada por la formula: $W = mE - c$

Donde m y c son constantes.

Teniendo en cuenta los datos de la siguiente tabla:

Carga (W)	35	87	w	95
Esfuerzo (E)	4	8	10	E

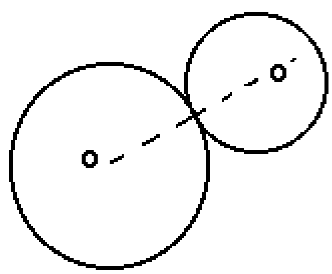
a) Hallar los valores de m y c.

b) Calcula W.

c) Calcula E.

46. La longitud (L) de una circunferencia, de radio r, se calcula por la fórmula: $L = 2\pi r$, donde π es una constante, cuyo valor aproximado es $\frac{22}{7}$ o sea 3,14159...

En la figura se representan dos circunferencias tangentes exteriormente, tales que la longitud de una es el duplo de la longitud de la otra y la distancia entre sus centros es 15cm (línea de centros). Calcula los radios de las circunferencias dadas.



47. Por decimotercera ocasión la abrumadora mayoría de Naciones Unidas, aprueba una resolución sobre la necesidad de poner fin al bloqueo económico, comercial y financiero impuesto por los Estados Unidos contra Cuba. Se conoce que en el año 2004, los votos en contra superaron en uno a la moda de las votaciones en contra en el periodo 1992 – 2003. Si dividimos el número que representa la votación a favor en el año 2004 por el número que representa la mayor abstención en el mencionado periodo, el cociente es igual al número de abstenciones en el año 2004, aumentado

en 1 y el resto es 37. Si votaron en total 184 países en el 2004, completa la columna de la siguiente tabla correspondiente a ese año.

Votación Bloqueo	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
FAVOR	59	88	101	117	137	143	157	155	167	167	173	179	
CONTRA	3	4	2	3	3	3	2	2	3	3	3	3	
ABSTENCIÓN	71	57	48	38	25	17	12	8	4	3	4	2	
AUSENCIAS	46	35	33	27	20	22	14	23	15	16	11	7	7

Nota: Se exige la solución del problema mediante ecuaciones.

48. La resistencia R (en ohm) de un elemento de calefacción y su temperatura t (en °C), están relacionados por la formula: $R = a + bt$ donde a y b son constantes.

La resistencia del mencionado elemento es de 2,7Ω (ohm) cuando su temperatura es de 20° y de 3,5Ω, cuando la temperatura del elemento asciende 80 °C. Calcula qué temperatura tendrá el elemento, si al medir la resistencia se obtuvo 5Ω. Puedes auxiliarte de una computadora del laboratorio de tu escuela o una calculadora electrónica para realizar los cálculos necesarios.

Unidad 3

Igualdad y proporciones en las figuras

Introducción

Debes conocer que la geometría se originó en las antiguas civilizaciones egipcias y babilónicas en los intentos del hombre por resolver los problemas que se le presentaban en la vida. Después de transcurridos más de 2000 años de haberse dado a conocer la obra del notable geómetra griego Euclides (aproximadamente 300 a. n. e.), a través de su obra principal “Los Elementos”, esta conserva su vigencia a tal punto que, a pesar del desarrollo alcanzado por esta ciencia, aún se mantiene como base de la geometría que se estudia en la escuela. Disímiles problemas de la vida se siguen resolviendo actualmente considerando los resultados alcanzados por Euclides. En este curso estudiarás ejemplos de problemas de la vida práctica que se resolverán aplicando resultados de la geometría euclidiana.

En esta unidad continuarás ampliando tus conocimientos geométricos y específicamente comenzarás recordando los movimientos del plano que estudiaste en la enseñanza primaria, así como profundizando en lo que conoces sobre las figuras iguales; llegando a conocer *tres teoremas* que te permitirán demostrar que *dos triángulos son iguales*. Aquí comenzarás a realizar por primera vez ejercicios sencillos de demostración en los cuales deberás fundamentar cada paso que realices. La realización de ejercicios de este tipo te ayudará a reflexionar con mayor certeza, pues ellos favorecen el desarrollo del pensamiento lógico.

Para poder tener éxito ante los ejercicios de igualdad de triángulos deberás repasar las definiciones y propiedades fundamentales de las figuras geométricas que conoces hasta este momento.

Otro teorema muy importante que estudiarás aquí, será el *teorema de las transversales* que consta de tres partes. Este teorema te será de gran utilidad para resolver variados problemas prácticos en los que debes calcular la longitud de un segmento y no tienes la posibilidad de medirlo directamente.

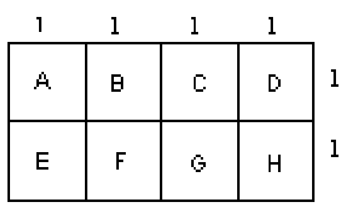
Para la buena comprensión de este contenido deberás reactivar los conocimientos que has adquirido sobre *las razones y proporciones* que estudiaste por primera vez en sexto grado.

3.1 Igualdad de figuras geométricas.

Un aspecto esencial que tratarás en este epígrafe es la *igualdad de triángulos* a partir de la igualdad geométrica que estudiaste en la enseñanza primaria. Aquí conocerás los teoremas que te permitirán demostrar que dos triángulos son iguales, comenzando con este contenido a realizar ejercicios geométricos de demostración. Conjuntamente con estos, resolverás también ejercicios geométricos de cálculo aplicando las definiciones y las propiedades fundamentales de los triángulos y los cuadriláteros.

En la enseñanza precedente, específicamente en quinto grado, estudiaste el concepto de *figuras iguales*; entendiendo por ello las figuras que al superponerse coinciden. En particular, se analizó que si dos segmentos son iguales, entonces coinciden sus longitudes; así mismo que si dos ángulos son iguales tienen la misma amplitud.

En la figura que se representa a continuación aparece representado un rectángulo, el cual ha sido dividido en ocho partes iguales. Para identificar las diferentes figuras que se han formado en ese rectángulo hemos considerado la leyenda siguiente: Cuando se escribe AB nos referimos al rectángulo formado por los “cuadraditos” A y B. Análogamente, cuando aparece escrito BCGF se hace referencia al cuadrado determinado por los “cuadraditos” B, C, G y F.



Observa bien la figura y, sobre la base del concepto de figuras iguales, coincidirás con nosotros en que en ella hay:

- 8 cuadrados iguales de área igual a 1 u^2. (A, B, C, D, E, F, G y H)
- 10 rectángulos iguales de área igual a 2 u^2. (AB, BC, CD, EF, FG, GH, AE, BF, CG y DH)
- 3 cuadrados iguales de área igual a 4 u^2. (ABFE, BCGF y CDHG)
- 4 rectángulos iguales de área igual a 3 u^2. (ABC, BCD, EFG y FGH)
- 2 rectángulos iguales de área igual a 4 u^2. (ABCD y EFGH)
- 2 rectángulos iguales de área igual a 6 u^2. (ABCGFG y BCDHGF)

Ejercicios

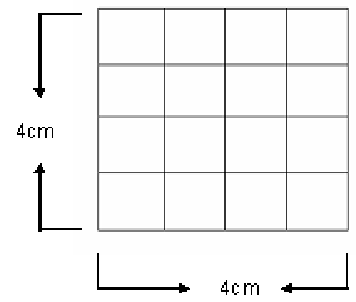
1. Observa las siguientes figuras y responde los incisos que se indican completando los espacios en blanco.

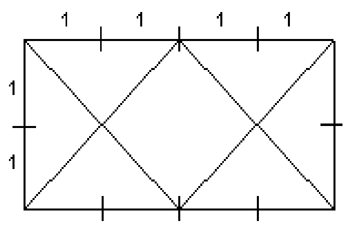
1.1 En la figura se observan:

a) _________ cuadrados iguales de 1 cm^2 de área.

b) _________ cuadrados iguales de 4 cm^2 de área.

c) _________ cuadrados iguales de 9 cm^2 de área.





1.2 En la figura se observan:

a) ____ triángulos iguales de 1 u^2 de área.

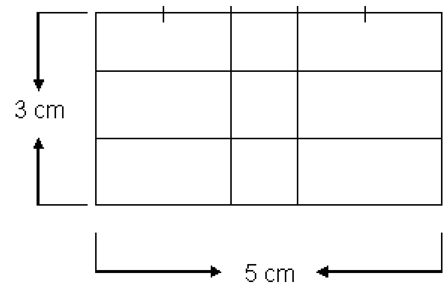
b) ____ triángulos iguales de 2 u^2 de área.

c) ____ triángulos iguales de 4 u^2 de área.

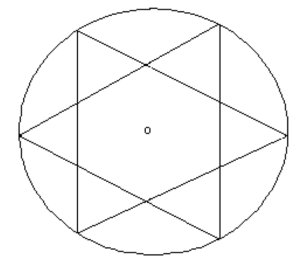
1.3

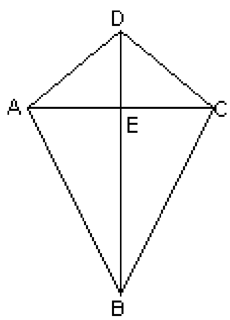
a) En la figura se observan _________ conjuntos formados por rectángulos iguales y _________ conjuntos formados por cuadrados iguales.

b) Determina qué longitudes tienen los lados de los rectángulos de cada conjunto; así como los cuadrados.



2. En la figura dada se muestra una circunferencia que se ha dividido en seis arcos iguales; quedando determinados 8 triángulos. ¿Cuáles son iguales entre sí?





3. En el trapezoide simétrico ABCD se han trazado sus diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

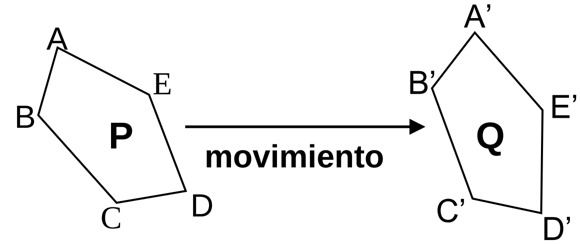
¿Cuántos triángulos aparecen representados en el trapezoide simétrico?

¿Cuántas parejas de triángulos iguales existen en la figura? Denótalos.

Al estudiar el concepto de figuras iguales viste que, siempre es posible “mover” una figura P en el plano hasta que coincida (se superponga) con otra figura Q igual a ella; observando que a cada punto de la figura original (en este caso P), se le puede hacer corresponder un único punto en la figura imagen (figura Q). A partir de este análisis llamamos *movimiento* a toda correspondencia de puntos del plano, en la cual a cada punto original le corresponde exactamente un punto imagen, y viceversa, con la propiedad de que cada figura formada por puntos originales es igual a la figura formada por sus imágenes respectivas (estas figuras superpuestas coinciden).

Recuerda que siempre se cumple que una figura y su imagen son iguales.

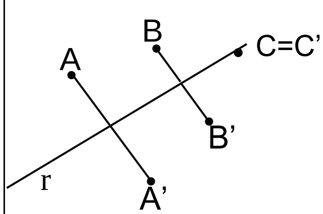
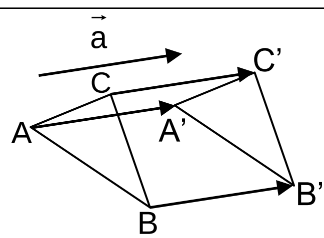
En esta ilustración los puntos A’, B’, C’, D’ y E’ son las imágenes respectivas de los vértices A, B, C, D y E del pentágono original P por un determinado movimiento del plano.

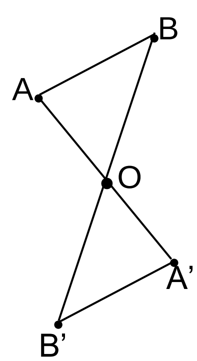


Los movimientos del plano que estudiaste en la enseñanza primaria son:

- la reflexión respecto a una recta,
- la traslación en el plano,
- la simetría con respecto a un punto.

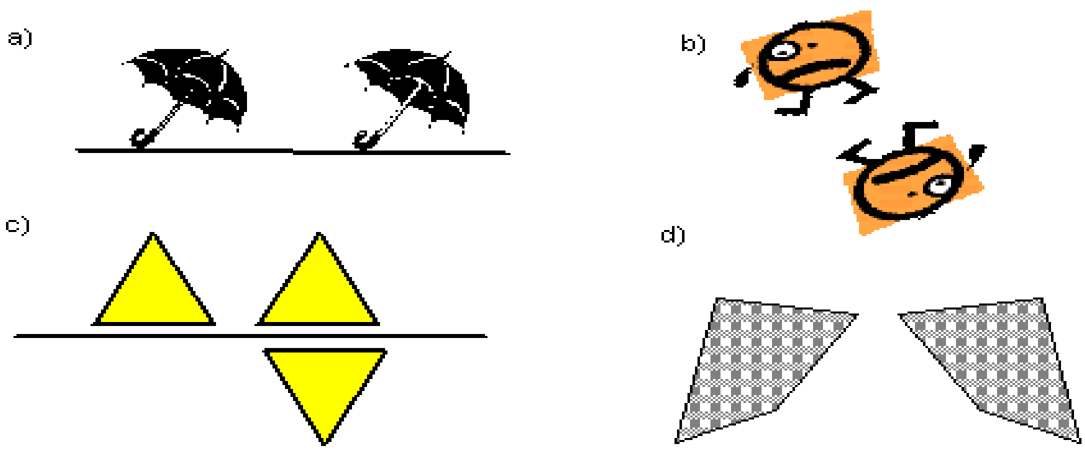
En la tabla siguiente aparecen resumidos los aspectos esenciales que debes tener en cuenta para reconocer los movimientos estudiados, así como para construir la imagen de puntos mediante cada uno de ellos.

Movimientos	**Representación Gráfica**	**Determinación de la imagen de un punto**	**Propiedades fundamentales**
Reflexión del plano en una recta o simetría axial	 r: Eje de reflexión. Para que se pueda realizar la reflexión es necesario conocer el eje de reflexión o también conocer un punto y su imagen.	Dado el eje de reflexión r y un punto original (ver en el ejemplo los puntos A, B, C), se construye su imagen trazando una recta perpendicular al eje r y ubicando en ella la imagen del punto a la misma distancia del eje de reflexión que la que hay del eje de reflexión al punto original. Si el punto original está en el eje, coincide con su imagen.	El eje de reflexión es la mediatriz de todo segmento determinado por un punto y su imagen. Una recta y su imagen se cortan en un punto que se encuentra sobre el eje de la simetría axial.
Traslación en el plano.	 $\vec{a}$: Vector de	Dado el vector de traslación $\vec{a}$ y un punto original (ver en el ejemplo los puntos A, B, C), se construye su imagen trazando un rayo de origen en el punto original; paralelo al vector de traslación y de igual sentido.	Un punto y su imagen por una traslación determinan un vector igual al vector de traslación.

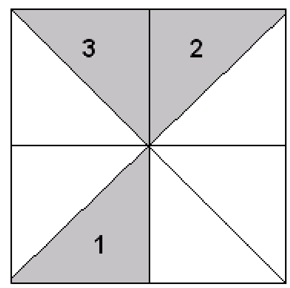
	traslación. Para que se pueda realizar la traslación es necesario conocer el vector según el cual se produce el desplazamiento o también conocer un punto y su imagen.	Se determina sobre el rayo, a partir del origen, un segmento de igual longitud que la del vector de traslación. El extremo de ese segmento es la imagen del punto.	En una traslación, una recta y su imagen son paralelas.
Simetría con respecto a un punto o simetría central	 O: Centro de simetría. Para que se pueda realizar la simetría central es necesario conocer el centro de simetría o también conocer un punto y su imagen.	Dado el centro de simetría O y un punto original (ver en el ejemplo los puntos A, B), se construye la imagen, trazando por dicho punto un rayo que pase por el centro O de la simetría y sobre el rayo, a partir del punto O, se determina la imagen correspondiente de forma tal que su distancia al punto O sea la misma que la distancia de O al punto original.	El centro de simetría es el punto medio de todo segmento determinado por un punto y su imagen. Si el punto B es la imagen del punto A, entones el punto A es la imagen del punto B. Cada recta por una simetría central y su imagen son paralelas.

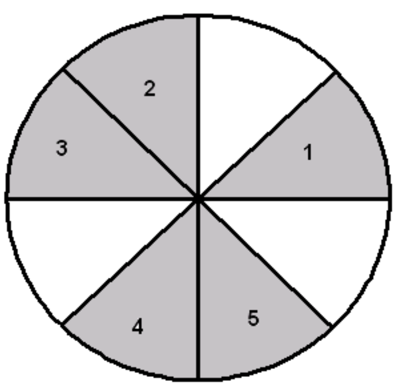
Ejercicios

1. ¿Mediante qué movimientos de transforman estas figuras?



2. ¿Mediante qué movimientos se transforma el triángulo 1 en el 3 pasando primeramente por la posición del triángulo 2?





3. ¿Mediante qué movimientos se transforma:

a) el sector circular 1 en el sector circular 3,

b) el sector circular 2 en el sector circular 3,

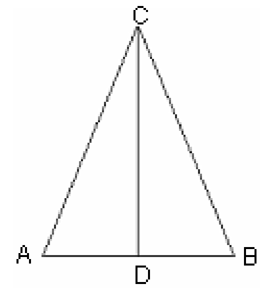
c) el sector circular 2 en el sector circular 5,

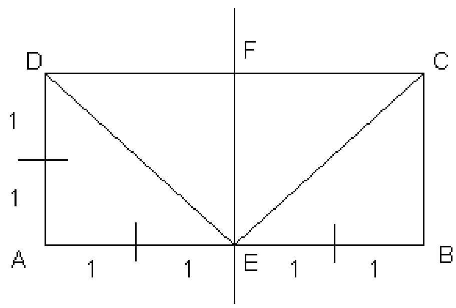
d) el sector circular 1 en el sector circular 5,

e) el sector circular 4 en el sector circular 1,

f) el sector circular 2 en el sector circular 4?

4. En la figura se da el triángulo ABC isósceles de base $\overline{AB}$. El segmento $\overline{CD}$ es la altura relativa a la base. ¿Mediante qué movimiento se ha transformado el triángulo ACD en el triángulo BCD? Justifica.





5. Observa la figura y completa los espacios en blanco especificando qué movimiento del plano se ha realizado.

a) El triángulo ADE se transforma en el triángulo DEF por ____________________

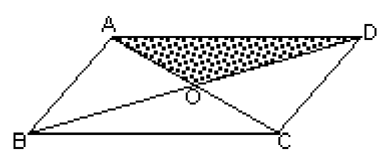
b) El triángulo DEF se transforma en el triángulo CEF por _______________

c) El triángulo ADE se transforma en el triángulo BCE por ________________________

d) El triángulo ADE se transforma en el triángulo CEF por_________________________

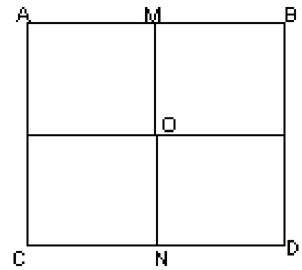
e) El triángulo DEF se transforma en el triángulo BCE por_________________________

6. En la figura se representa el paralelogramo ABCD al que se le han trazado sus diagonales. Si al triángulo AOD se le aplica la simetría central de centro O, entonces su imagen por dicho movimiento es el triángulo:



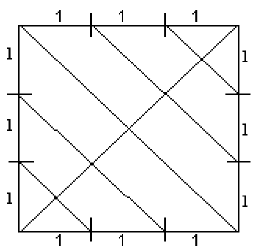
1) Δ AOB   2) Δ BOC   3) Δ COD

7. El cuadrado ABCD está formado por 4 “cuadraditos” iguales. Si se le aplica una simetría de centro O y una reflexión de eje $\overline{MN}$, entonces el vértice A va a superponerse con el vértice:

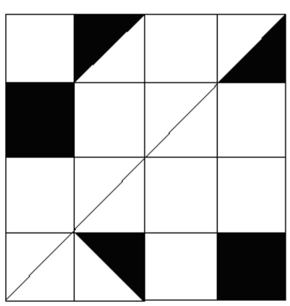


1) _______ A: 3) _______ C

2) _______ B: 4) _______ D



8. ¿Cuántas parejas de triángulos iguales existen y mediante qué movimiento se puede trasformar un triángulo en su igual?



9. La figura representa un cuadrado que ha sido dividido en 16 partes iguales y al que se le ha trazado una de sus diagonales.

Destaca con un color las figuras simétricas a las destacadas en color negro respecto a la simetría axial que tiene como eje a la diagonal trazada.

10. Responde verdadero o falso y justifica cada una de tus respuestas.

a) ______ Sea ABCD un rectángulo y r una recta que pasa por los puntos medios de los lados de mayor longitud, entonces la imagen del rectángulo por la reflexión de eje r es un cuadrado.

b) ______Si $\overline{MN}$ es un segmento y R su punto medio, entonces la imagen del punto M por la simetría central de centro R es el punto N y viceversa.

c) ______Si dos rectas a y b son perpendiculares y se les aplica una traslación de vector $\vec{a}$, entonces las rectas imágenes de a y b son paralelas.

d) ______Si al triángulo equilátero ABC se le aplica una reflexión con respecto a la recta que contiene a la altura relativa al lado $\overline{BC}$, entonces el punto A se transforma en el punto B, el punto C se transforma en el punto C el punto B se transforma en el punto A.

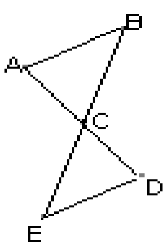
e) ______Si a una circunferencia de centro O se la aplica una simetría con centro en dicho punto O, entonces la circunferencia se transforma en si misma.

Recuerda que, como mismo ocurre con figuras cualesquiera, se puede decir que dos triángulos son iguales si al superponerlos coinciden, es decir, que tienen sus tres lados y sus tres ángulos respectivamente iguales; pero , ¿es necesesario demostrar la igualdad entre esos seis pares de elementos? Ten presente que esto no es necesario, pues mediante la utilizacion de los tres criterios sobre igualdad de triangulos, solamente hay que probar la igualdad entre tres parejas de elementos debidamente seleccionados.

Dos triángulos son iguales si tienen :	**Criterio**
dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales.	l.a.l.
un lado y los ángulos adyacentes a dicho lado respectivamente iguales.	a.l.a.
sus tres lados respectivamente iguales.	l.l.l.

El siguiente ejercicio de demostración sobre igualdad de triángulos te mostrará la forma en que debes escribir la demostracion.

Ejemplo:



En la figura se tiene que $\overline{AB} \| \overline{ED}$ y que C es el punto medio de $\overline{BE}$. Además se conoce que los puntos A, C y D son alineados, asi como los puntos B, C y E. Demuestra que Δ ABC = Δ CDE.

En los triángulos ABC y CDE se tiene que:

(1) $\overline{BC} = \overline{EC}$ — por ser C el punto medio de $\overline{BE}$,

(2) $\angle$ ACB = $\angle$ DCE — por ser ángulos opuestos por el vértice,

(3) $\angle$ ABC = $\angle$ CED — por ser ángulos alternos entre las paralelas $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$, y la secante $\overline{BE}$.

De (1), (2) y (3) resulta que los triángulos ABC y CDE son iguales por tener un lado y los ángulos adyacentes a dicho lado respectivamente iguales.(a.l.a.).

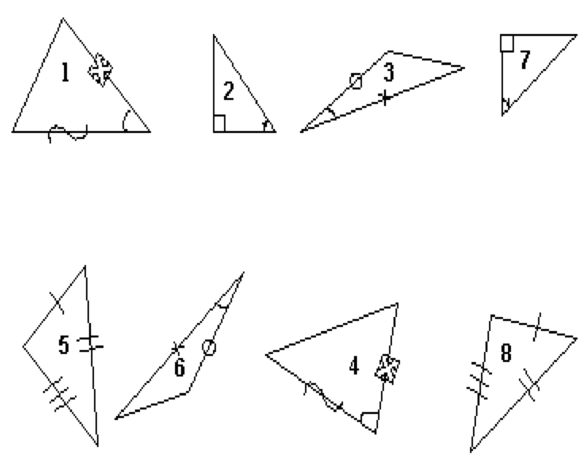
Observaciones :

1. A la afirmación $\angle$ABC = $\angle$CED se podía haber llegado justificando primeramente que $\angle$BAC = $\angle$CDE por ser ángulos alternos entre las paralelas $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$, y la secante $\overline{AD}$, y finalmente , como los dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente iguales, se puede concluir que sus terceros ángulos también los son pues, la suma de los ángulos interiores de un triángulo siempre es igual a 180°.

2. La demostración debes escribirla siempre en dos columnas, reflejando los **pasos** que has seguido en la columna izquierda y las correspondientes **fundamentaciones** en la columna de la derecha.

Ejercicios

1. En la figura los elementos iguales de los diferentes triángulos se han señalado de la misma forma.



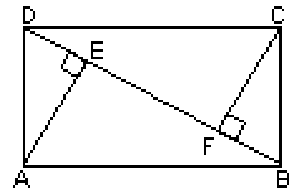
a) Selecciona las parejas de triángulos que no puedas garantizar que son iguales.

___ 1 y 4; ___ 5 y 6

___ 2 y 7; ___ 5 y 8

b) ¿Cuántas parejas de triángulos iguales se han representado? Nómbralas y justifica tu respuesta.

2. En la figura se muestra un rectángulo ABCD y en su interior han quedado representados seis triángulos determinándose tres parejas de triángulos iguales. Se cumple además que $\overline{AE} \perp \overline{BD}$ y $\overline{CF} \perp \overline{BD}$.

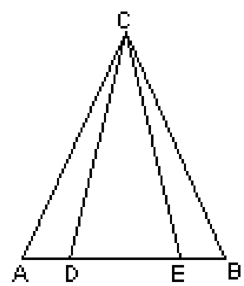


a) Nombra las tres parejas de triángulos iguales.

b) Completa los espacios en blanco atendiendo a los elementos homólogos en las parejas de triángulos iguales.

- El lado homólogo al lado $\overline{DE}$ es el lado ___ .
- El lado homólogo al lado ___ es el lado $\overline{AB}$.
- El lado homólogo al lado $\overline{AE}$ es el lado ___ .
- El lado homólogo al lado ___ es el lado $\overline{BD}$.
- El lado homólogo al lado $\overline{AD}$ es el lado ___ .

3. En la figura se tiene el triángulo ABC isósceles de base $\overline{AB}$ y que $\overline{AD} = \overline{EB}$; además se cumple que D, E $\in \overline{AB}$. Completa los espacios en blanco (pasos o fundamentaciones), según corresponda para demostrar que Δ ACD = Δ BCE.

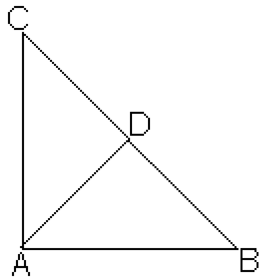


En los triángulos ACD y BCE se tiene que:

	Pasos	Fundamentación
(1)	$\overline{AC} = \overline{BC}$	
(2)		por ser el triángulo ABC isósceles de base $\overline{AB}$,
(3)	$\angle$ CAD = $\angle$ CBE	

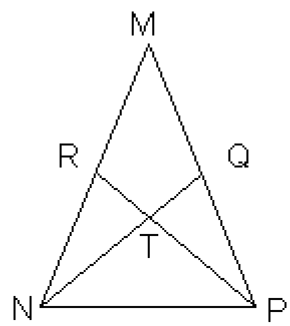
Conclusión:

Δ ACD =Δ BCE



4. El triángulo ABC es isorectángulo con ángulo recto en A; $\overline{AD}$ es la altura relativa al lado $\overline{BC}$.
   a) Demuestra que Δ ABD =Δ ACD.
   b) Si el perímetro del triángulo ABC es igual a 20,5 cm, $\overline{AC}$ = 0,6 dm y $\overline{AD}$ = 42,4 mm. Calcula el perímetro del triángulo ABD.
   c) ¿Qué tanto por ciento representa el perímetro del triángulo ABD con respecto al perímetro del triángulo ABC?

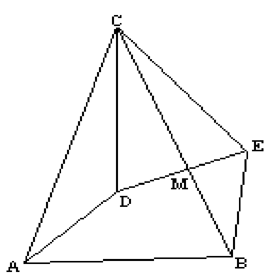
5. En la figura se muestra el triángulo MNP isósceles de base $\overline{NP}$. Los segmentos $\overline{PR}$ y $\overline{NQ}$ representan las medianas relativas a los lados $\overline{MN}$ y $\overline{MP}$ respectivamente.



a) Prueba que Δ PRN =Δ PQN.

b) Prueba que Δ RNT =Δ PQT.

c) Si $\angle$PMN = 50° y $\angle$TNP = 48°; calcula las amplitudes de los ángulos $\angle$NTP, $\angle$QPN, $\angle$NTR y $\angle$ NQP.

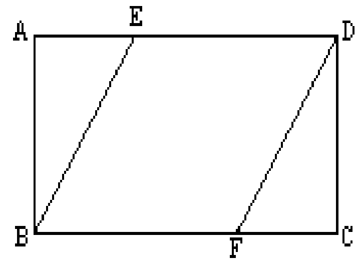


6. Los triángulos ABC y CDE que se representan en la figura son isósceles de bases $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ respectivamente; además $\angle$ ACB = $\angle$ DCE y $\{M\}$= $\overline{CB} \cap \overline{DE}$.

a) Prueba que Δ ACD = Δ BCE.

b) Justifica por qué el cuadrilátero ABED tiene dos lados iguales.

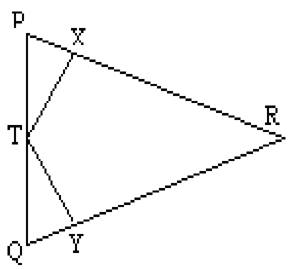
7. En el interior del rectángulo ABCD se han trazado los segmentos paralelos $\overline{BE}$ y $\overline{DF}$ como se muestra en la figura.



a) Demuestra que:

Δ ABE = Δ CDE.

b) Si se conoce que $\frac{\overline{BF}}{\overline{BC}} = \frac{2}{3}$; determina la razón en la que se encuentra el área del rectángulo ABCD con respecto al área del cuadrilátero BFDE.



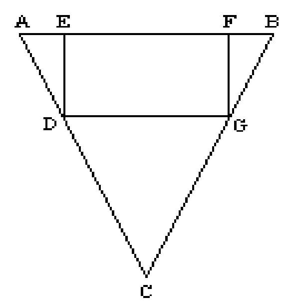
8. En la figura se tiene que el triángulo PQR es isósceles de base $\overline{PQ}$, T es el punto medio de $\overline{PQ}$, $\overline{TX} \perp \overline{PR}$ y $\overline{TY} \perp \overline{QR}$.

a) Prueba que $\overline{XR} = \overline{YR}$.

b) Si $\angle PQR = 58°$, calcula las amplitudes de los ángulos interiores del cuadrilátero XTYR.

c) Clasifica el cuadrilátero XTYR. Fundamenta tu respuesta.

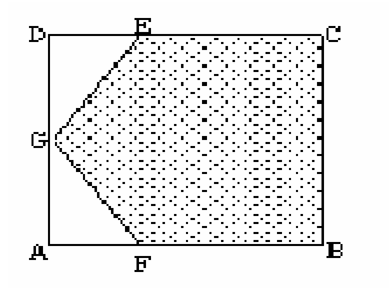
9. Sean ABC un triángulo isósceles de base $\overline{AB}$ y EDGF un rectángulo situado en el interior del triángulo como se muestra en la figura.



a) Prueba que Δ ADE = Δ BFG.

b) Demuestra que el triángulo DGC es isósceles de base $\overline{DG}$.

10. En la figura ABCD es un cuadrado, G es el punto medio de $\overline{AD}$ y $\overline{EC} = \overline{FB}$ con E $\in$ $\overline{CD}$ y F $\in$ $\overline{AB}$.



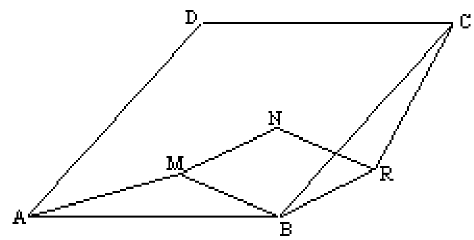
a) Si el área del triángulo AFG es igual a 3,0 cm^2; calcula el área de la región sombreada si $\overline{BC}$ = 6,0 cm.

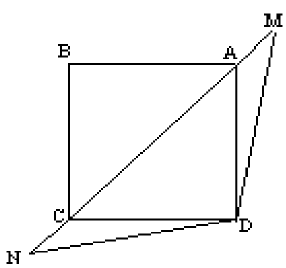
b) Determina la longitud de los segmentos $\overline{AF}$ y $\overline{EC}$.

c) Si $\overline{EG}$ = 3,6 cm; calcula el perímetro del pentágono BCEGF.

11. Sean ABCD y BRNM dos rombos tales que $\angle$ ABC = $\angle$ MBR.

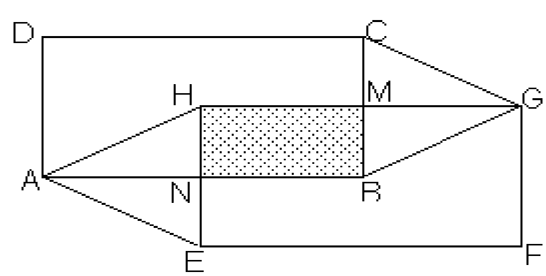
Prueba que $\overline{AM} = \overline{CR}$.





12. En la figura ABCD es un cuadrado y MND un triángulo isósceles de base $\overline{MN}$; además se conoce que los puntos N, C, A y M están alineados y que $\overline{AM} = \overline{CN}$. Demuestra que $\angle$CDM = $\angle$ADN.

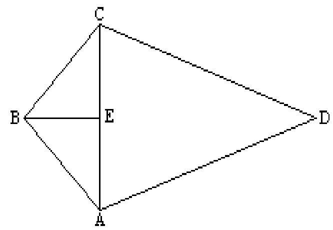
13. En la figura se muestran dos rectángulos iguales ABCD y EFGH. M y N son los puntos medios de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente.



a) Prueba que Δ AEH = Δ BCG.

b) Calcula el área del cuadrilátero ABGH si se sabe que el área de la región sombrada es igual a 42 cm^2. Fundamenta tu respuesta.

c) ¿Qué nombre recibe el cuadrilátero ABGH? Justifica.



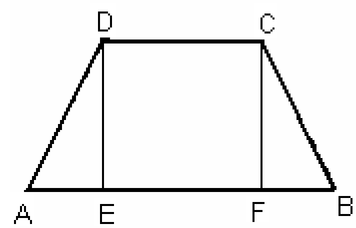
14. Sea ABCD un trapezoide simétrico, E es el punto medio de $\overline{AC}$ y $\overline{BE} \perp \overline{AC}$.

a) Prueba que $\angle$ BAC = $\angle$ ACB.

b) Si $\angle$ABE = 38° y $\angle$BAD = 116°; calcula la amplitud de cada uno de los ángulos siguientes:

$\angle$ABC, $\angle$ AD, $\angle$ACD, y $\angle$ADC.

15. Sea ABCD un trapecio isósceles de bases $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$. Los segmentos $\overline{DE}$ y $\overline{CF}$ son perpendiculares a la base $\overline{AB}$ del trapecio; el área de este trapecio es igual 45,1 cm^2, y su altura es de 5,5 cm.

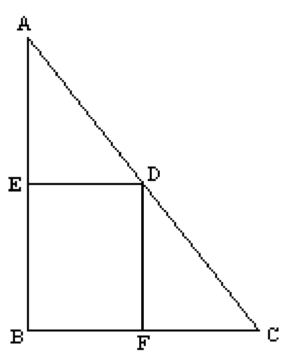


a) Si se conoce que $\overline{AE}$ =1,8 cm.; calcula el área y el perímetro del rectángulo EFCD.

b) Clasifica el cuadrilátero DEBC y fundamenta.

c) Calcula el área del cuadrilátero DEBC.

d) Calcula la longitud del segmento $\overline{AD}$, si se conoce que el perímetro del trapecio es igual a 2,8 dm.



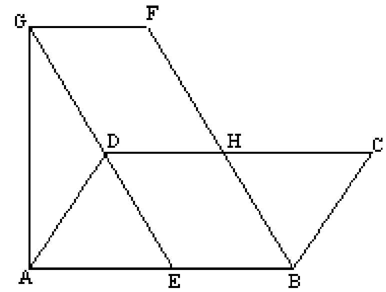
16. En la figura se representa el triángulo ABC rectángulo en B. El punto D es el punto medio de $\overline{AC}$, $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, y $\overline{DF} \parallel \overline{AB}$.

a) Determina qué tipo de cuadrilátero es BFDE. Justifica.

b) ¿Qué representa el punto F para el segmento $\overline{BC}$?

c) Si el área del triángulo AED es igual a 14,7 cm^2; determina las dimensiones, el perímetro y el área del cuadrilátero BFDE, conociendo además que $\overline{BF}$ = 4,2 cm.

17. La figura muestra dos paralelogramos ABCD y EBFG con $\overline{DC} \cap \overline{BF} = \{H\}$, $\overline{EG} \cap \overline{AD} = \{D\}$, y $\overline{AG} \perp \overline{AB}$.



a) Demuestra que Δ ADE = Δ BCH.

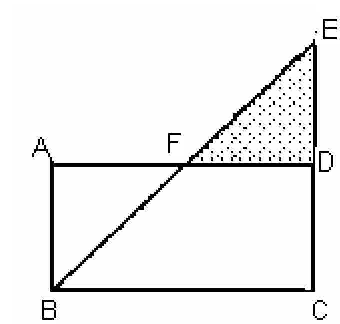
b) Clasifica el cuadrilátero DEBH. Fundamenta.

c) Clasifica el cuadrilátero ABFG. Justifica.

d) Si $\overline{EB}$ = 3,2 cm., $\overline{DC}$ = 50 mm y el área del triángulo AEG es igual a 6,3 cm^2; calcula el área del paralelogramo EBFG y el área del cuadrilátero ABFG.

e) Si se conoce que $\overline{EG}$ = 0,71 dm; calcula el perímetro del cuadrilátero ABFG.

18. Sea ABCD un rectángulo, F es el punto medio de $\overline{AD}$ y $r_{BF} \cap r_{CD} = \{E\}$.



a) Prueba que F es también el punto medio de $\overline{BE}$.

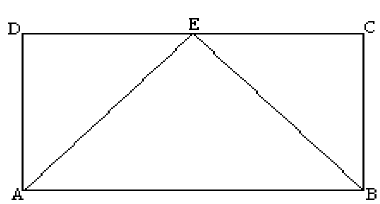
b) Si $\overline{DF}$ = 4,4 cm. y $\overline{DC}$ = 3,5 cm.; calcula el área del trapecio BCDF.

c) Clasifica el triángulo BCE según sus lados y según sus ángulos. Fundamenta.

d) ¿Qué tanto por ciento del área del triángulo BCE se ha sombreado en la figura?

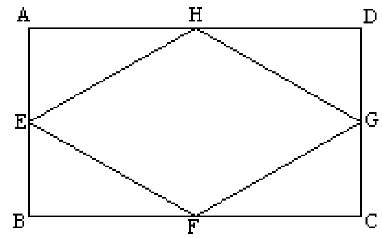
e) Justifica el resultado obtenido en el inciso d) desde el punto de vista geométrico.

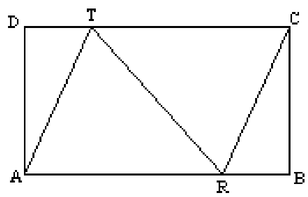
f) El perímetro del trapecio BCDF es igual a 2,23 dm; calcula la longitud de la mediana relativa al lado $\overline{BE}$ del triángulo BCE. Fundamenta tu respuesta.



19. Sea ABCD un rectángulo y E el punto medio de $\overline{DC}$. Demuestra que el triángulo ABE es isósceles de base $\overline{AB}$.

20. En la figura ABCD es un rectángulo y E, F, G y H son los puntos medios de sus lados. Demuestra que el cuadrilátero EFGH es un rombo.

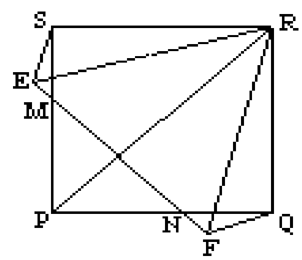




21. Sea ABCD un rectángulo; T y R dos puntos tales que T $\in \overline{CD}$ y R $\in \overline{AB}$ con $\overline{DT} = \overline{BR}$.

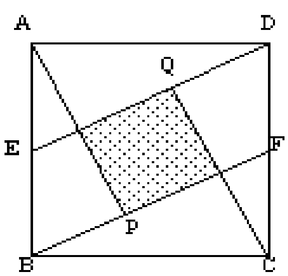
Demuestra que Δ ART = Δ TRC.

22. En la figura se representan el cuadrado PQRS y el triángulo equilátero EFR; PR es la mediatriz del lado $\overline{EF}$ de dicho triángulo; $\{M\} = \overline{EF} \cap \overline{PS}$ y $\{N\} = \overline{EF} \cap \overline{PQ}$.



a) Prueba que $\overline{ES} = \overline{FQ}$.

b) Calcula la amplitud del $\angle$EMS.

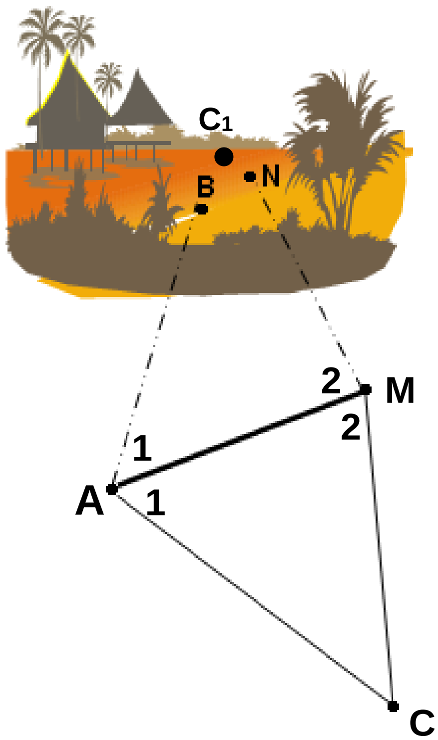


23. En la figura ABCD es un cuadrado con E y F los puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ respectivamente; además P $\in \overline{BF}$, Q $\in \overline{DE}$ y $\angle$APB = $\angle$CQD = 90°.

a) Prueba que el cuadrilátero EBFD es un paralelogramo.

b) ¿Qué nombre recibe el cuadrilátero sombreado? Fundamenta.

c) Demuestra que $\overline{AP} = \overline{CQ}$.



24. La distancia entre los puntos A y M es conocida. Se deben considerar dos caminos en las direcciones señaladas por la recta r_{AB} y r_{MN} respectivamente los que deben encontrarse en un punto inaccesible por la vegetación. Calcula la distancia del punto C_1 a los puntos A y M.

A continuación se expone la solución aplicando los *criterios de igualdad de triángulos,* es particular, aquí se considera el criterio *(a. l. a.).*

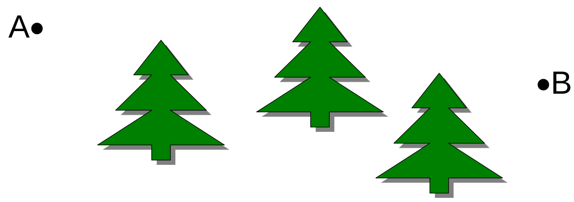
Se transportan los ángulos $\angle MAB$ y $\angle AMN$ como se muestra en el gráfico. De esa manera se construye el triángulo AMC que tiene un lado común con el triángulo AMC_1 y los ángulos adyacentes a este lado son, en ambos triángulos, respectivamente iguales. Según el criterio de igualdad de triángulos **(a. l. a)**, los triángulos CAM y C_1AM son iguales, y en particular, (por elementos homólogos en triángulos iguales), se tiene que: $\overline{AC} = \overline{AC_1}$ y $\overline{MC} = \overline{MC_1}$. Como los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{CM}$ si se pueden medir, entonces se puede concluir que el problema ha sido resuelto.

25. Determine la distancia entre los puntos A y B si el punto A está en una posición inaccesible desde el punto B.

26. Dos pueblos representados por los puntos A y B respectivamente están separados por un bosque. Se debe tirar un tendido telefónico desde un pueblo hasta el otro.

a) ¿Cómo determinar la longitud del cable sin atravesar el bosque?

b) ¿Qué criterio de igualdad de triángulos justifica tu respuesta?



27. Divide el segmento $\overline{AB}$ en dos partes iguales sin emplear el compás.

3.2 Proporcionalidad entre segmentos.

En este epígrafe profundizarás los conocimientos que posees sobre las razones y las proporciones que estudiaste en la enseñanza primaria; llegando a establecer proporciones entre las longitudes de segmentos. El objetivo esencial es el estudio de un teorema muy importante sobre segmentos proporcionales (*teorema de las transversales*), que te permitirá resolver variados problemas de la vida práctica como por ejemplo, calcular la distancia entre dos puntos cuando no te es posible medirla directamente.

En sexto grado conociste que dos números se pueden comparar calculando la diferencia o el cociente entre ellos. Así, podemos comparar los números 12 y 3, planteando que 12 – 3 = 9 ó que $\frac{12}{3}$ = 4; la forma más usual de compararlos es la segunda; en este sentido se dice que el número 12 es el cuádruplo del número 3 ó también, que **la razón** entre 12 y 3 es 4. En general, la razón entre dos números a y b ($b \neq 0$) es la fracción $\frac{a}{b}$ y se lee "**a** es a **b**" (también puede escribirse a : b).

Resumiendo podemos decir que para determinar la razón entre dos números, se forma el cociente y se simplifica tanto como sea posible.

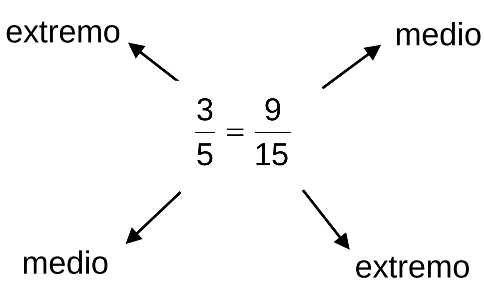
Ejemplos:

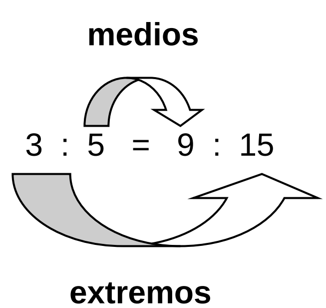
- La razón entre 10 y 2 es 5.
- La razón entre 18 y 12 es $\frac{3}{2}$.
- La razón entre $\frac{15}{7}$ y $\frac{5}{13}$ es $\frac{3}{\frac{7}{13}}$, es decir, la razón es $\frac{39}{7}$.
- La razón entre 0,8 y 1,6 es $\frac{1}{2}$.

Coincidirás con nosotros en que $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} = \frac{8}{20} = \frac{10}{25} = \ldots$, pues existen infinitas fracciones equivalentes a una fracción irreducible dada; las que se obtienen por la ampliación de dicha fracción (en este caso $\frac{2}{5}$).

Cuando escribimos $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$, estamos en presencia de una *proporción*; que no es más que una igualdad entre dos razones. También se puede escribir 2 : 5 = 4 : 10. En ambos casos se lee “2 es a 5 como 4 es a 10”.

Recuerda que en una proporción los términos que intervienen en ella reciben nombres especiales; veamos esto en el ejemplo siguiente:





De $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$, se obtiene que $3 \cdot 15 = 5 \cdot 9$, pues en toda igualdad de fracciones se cumple que los productos cruzados de sus términos son iguales. Esta propiedad también se cumple en las proporciones y se conoce como la *propiedad fundamental de las proporciones*.

> En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Ejemplos: a) $\frac{x}{6} = \frac{20}{12}$ significa que x = 10, ya que

$$12 \cdot x = 6 \cdot 20$$
$$12x = 120$$
$$x = \frac{120}{12}$$
$$x = 10$$

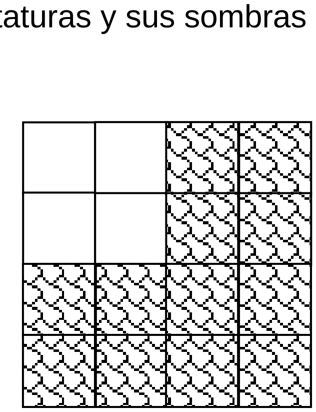
b) $\frac{10}{24} = \frac{x}{12}$ significa que x = 5,

c) $\frac{5}{x} = \frac{10}{0{,}1}$ significa que x = 0,05,

d) $\frac{2}{x} = \frac{x}{32}$ significa que x = 8.

Ejercicios

1. Completa los espacios en blanco según corresponda:
   a) La razón entre 20 y 5 es ____.
   b) La razón entre ____ y 3 es 6.
   c) La razón entre 2 y 7 es ____.
   d) La razón entre 10 y ____ es 4.
   e) La razón entre ____ y 25 es $\frac{16}{5}$.
2. La altura de un hombre es de 180 cm y la longitud de su sombra es de 120 cm. La altura de un niño es igual a 60 cm y la longitud correspondiente a su sombra es de 40 cm. ¿Qué puedes decir respecto a las razones entre las estaturas y sus sombras respectivas? Fundamenta tu respuesta.
3. Determina la razón entre:
   a) cada cuadrado "pequeño" con respecto a todo el cuadrado "mayor",
   b) el área determinada por los cuadrados en blanco con respecto a la parte sombreada.



4. Alexander y Ana recogen latas de refresco vacías motivadas por la recuperación de materias primas para su CDR. Ana recogió 118 latas, y se sabe que la razón entre lo que recogió Alexander y las que recolectó Ana es $\frac{2}{3}$.
   a) Sin realizar ningún cálculo, determina cuál de los dos recogió mayor cantidad de latas de refresco.
   b) ¿Cuántas latas recolectó Alexander?
5. La edad del padre de Raúl es 38 años; se sabe que la razón entre la edad de Raúl y la de su padre es $\frac{5}{19}$. ¿Qué edad tiene Raúl?

A continuación vamos a referiremos a un tipo de razón especial; l**a razón entre segmentos**. Se entiende por *razón entre segmentos* a la razón entre sus medidas, expresadas estas en la misma unidad de medida.

Ejemplos:

1. Si $\overline{AB}$ = 4,0 cm y $\overline{CD}$ = 8,0 cm, entonces la razón entre estos segmentos se expresa así: $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ y es igual a $\frac{1}{2}$, es decir, $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{1}{2}$. Esta relación se lee “la razón entre los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ es $\frac{1}{2}$” ó “el segmento $\overline{AB}$ es al segmento $\overline{CD}$ como 1 es a 2.

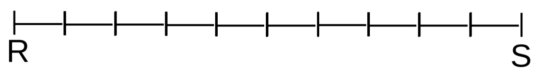
2. Determinemos ahora la razón entre dos segmentos dados por sus longitudes.
   - La razón entre $\overline{AB}$ = 6,0 cm y $\overline{CD}$ = 4,0 cm es igual a $\frac{3}{2}$.
   - La razón entre $\overline{MN}$ = 10 m y $\overline{PQ}$ = 5 m es igual a 2.
   - La razón entre $\overline{CD}$ = 9,0 cm y $\overline{ZW}$ = 1,5 dm es igual a 6.
   - La razón entre $\overline{EF}$ = 24 cm y $\overline{GH}$ = 16 cm es igual a $\frac{3}{2}$.

3. La razón entre los segmentos $\overline{MN}$ y $\overline{PQ}$ es igual a $\frac{3}{2}$; si se quiere calcular la longitud del segmento $\overline{MN}$ sabiendo que $\overline{PQ}$ = 5,8 cm se procede de la forma siguiente:

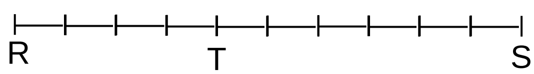
Como que la razón entre los segmentos $\overline{MN}$ y $\overline{PQ}$ sea igual a $\frac{3}{2}$, se puede escribir, $\frac{\overline{MN}}{\overline{PQ}} = \frac{3}{2}$; ahora al sustituir $\overline{PQ}$ por su medida, es decir, por 5,8 cm, y se obtiene la proporción $\frac{\overline{MN}}{5{,}8} = \frac{3}{2}$; de donde

$\overline{MN} = \frac{3 \bullet 5{,}8}{2} = \frac{17{,}4}{2} = 8{,}7$; lo que significa que la longitud del segmento $\overline{MN}$ es igual a 8,7 cm.

4. El segmento $\overline{RS}$ = 10 u. Se debe situar un punto T en dicho segmento de forma tal que $\frac{\overline{RT}}{\overline{TS}} = \frac{2}{3}$.



Para ubicar el punto T en el segmento $\overline{RS}$ hay que tener en cuenta que él determina en dicho segmento, dos segmentos consecutivos que están en la razón $\frac{2}{3}$. Coincidirás con nosotros en que el punto T debe situarse en la cuarta subdivisión de izquierda a derecha; de esta forma se tiene que $\overline{RT}$ = 4,0 cm y $\overline{TS}$ = 6,0 cm y con ello $\frac{\overline{RT}}{\overline{TS}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. (Observa que 2 + 3 = 5; pero 10 = 4 + 6, por lo que la ubicación del punto T debe determinar dos segmentos $\overline{RT}$ y $\overline{TS}$ con $\overline{RT}$ = 4,0 cm y $\overline{TS}$ = 6,0 cm.).



Como observarás, los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, así como los segmentos $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$, del ejemplo 2, están en la misma razón, es decir, $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}} = \frac{3}{2}$. En este caso se dice que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son respectivamente **proporcionales** a los segmentos $\overline{EF}$ y

$\overline{GH}$. La igualdad $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}}$ se lee "el segmento $\overline{AB}$ es al segmento $\overline{CD}$ como el segmento $\overline{EF}$ es al segmento $\overline{GH}$.

Ejemplo:

Sean $\overline{RS}$ = 20 cm; $\overline{PQ}$ = 4,0 dm; $\overline{AB}$ = 3,0 cm y $\overline{CD}$ = 6,0 cm. Como se cumple que $\frac{20}{40} = \frac{3}{6}$; se tiene que $\frac{\overline{RS}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$, es decir, los segmentos $\overline{RS}$ y $\overline{PQ}$ son proporcionales a los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

Ejercicios

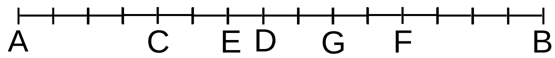
1. Carlos tiene tres varillas a, b y c que miden 2 cm, 15 cm y 5 cm respectivamente. ¿Qué longitud debe tener una cuarta varilla d para que se cumpla la proporción $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$?

2. Completa la siguiente tabla de forma tal que los segmentos $\overline{MN}$ y $\overline{PQ}$ sean proporcionales a los segmentos $\overline{RT}$ y $\overline{EF}$ respectivamente.

	Longitud de $\overline{MN}$	**Longitud de** $\overline{PQ}$	**Longitud de** $\overline{RT}$	**Longitud de** $\overline{EF}$
a)	15 cm	3 cm	4,5 cm	
b)	2,8 cm	1,4 dm		3,2 dm
c)		2,5 cm	42 mm	0,7 cm
d)	180 mm		3,6 dm	12 cm
e)		12 cm	18 cm	
f)	35 cm			15 cm

3. A continuación aparecen dados seis segmentos con sus respectivas longitudes: $\overline{AB}$ = 2,0 cm, $\overline{CD}$ = 3,0 cm, $\overline{EF}$ = 3,0 cm, $\overline{MN}$ = 6,0 cm, $\overline{PR}$ = 9,0 cm, y $\overline{QS}$ = 15 cm. Escribe todas las parejas de segmentos proporcionales entre si respectivamente.

4. El segmento $\overline{AB}$ que se representa en la figura se ha dividido en 15 segmentos iguales. En él se han ubicado los puntos C, D, E, F y G.



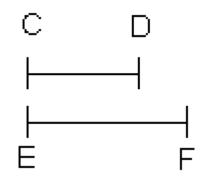
a) Determina la razón entre los segmentos:

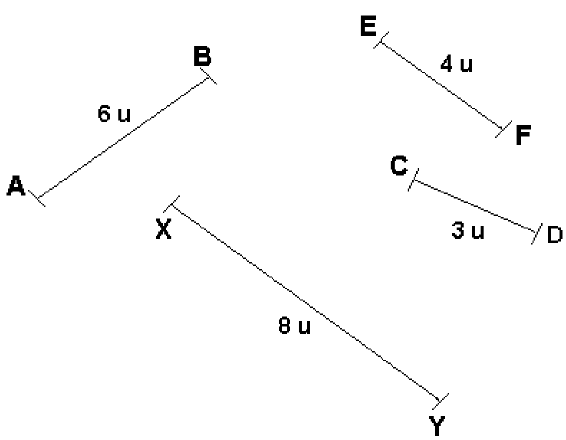
$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$; $\overline{BG}$ y $\overline{CE}$; $\overline{AG}$ y $\overline{CD}$; $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$; $\overline{ED}$ y $\overline{FB}$

$\overline{EG}$ y $\overline{CF}$; $\overline{CE}$ y $\overline{AC}$; $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$; $\overline{CG}$ y $\overline{EF}$.

b) Analiza los resultados obtenidos en el inciso anterior y determina si existen parejas de segmentos proporcionales entre si respectivamente. En caso afirmativo nómbralas.

5. Construya un segmento $\overline{AB}$ y otro $\overline{MN}$ que sean proporcionales a los segmentos $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$ respectivamente.





6. En la figura hay dos parejas de segmentos proporcionales. Determina cuáles son estas parejas y determina la razón en que ellos se encuentran.

7. Se tienen dos cuadrados cuyas áreas son iguales a a^2 y $4a^2$.

a) ¿Cuál es la razón entre los lados de los dos cuadrados?

b) ¿Cuál es el perímetro de cada cuadrado?

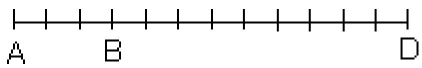
c) ¿Es posible "cubrir" el área de uno de los cuadrados dados utilizando un número entero de veces el área del otro cuadrado? Fundamenta tu respuesta.

8. En la figura se representa el segmento $\overline{AD}$ y en su interior se ha ubicado el punto B.

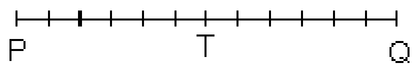
a) Determina la razón en la que el punto B divide al segmento $\overline{AD}$.

b) Ubica el punto C en el segmento $\overline{AD}$ de forma tal que se cumpla

$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}}$.



9. El segmento $\overline{PQ}$ ha quedado dividido en 12 partes iguales; el punto T se ha ubicado en la sexta subdivisión. Representa el punto R en el segmento $\overline{PQ}$ de forma tal que $\frac{\overline{PR}}{\overline{RT}} = \frac{\overline{PT}}{\overline{PQ}}$.



10. Se tienen cuatro varillas de madera que miden 2,0 cm, 4,0 cm, 5,0 cm, y 7,0 cm.

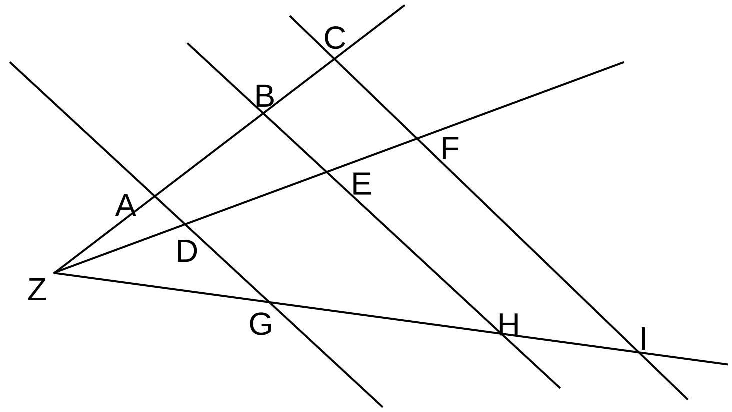
a) ¿Cuántos triángulos diferentes se pueden formar con las cuatro varillas? Fundamenta tu respuesta.

b) Nombra cada uno de los triángulos que determinaste en el inciso a) y calcula sus respectivos perímetros.

c) Determina las longitudes de los lados de un triángulo de forma tal que estos sean respectivamente proporcionales a los lados de cada triángulo determinado en el inciso a). Para ello considera que la longitud del lado que no se tomó para formar al triángulo, sea el que le corresponde al lado de menor longitud para cada uno de los triángulos que se puedan formar.

Un teorema muy importante sobre segmentos proporcionales que has estudiado en octavo grado es el conocido *teorema de las transversales*. Este teorema tiene tres partes y, para la mejor comprensión del mismo, tienes que tener bien claro los conceptos siguientes: *haz de semirrectas, haz de rectas paralelas, segmentos de semirrectas, segmentos correspondientes, segmentos de paralelas y razón entre segmentos.* Estos conceptos los hemos ilustrado en la figura siguiente, donde se han considerado tres semirrectas de origen común Z y tres rectas paralelas.

- Haz de semirrectas: Conjunto de todas las semirrectas que tienen un mismo origen común.



- Haz de rectas paralelas: Conjunto de todas las rectas paralelas entre si.
- Segmentos de semirrectas: Son los segmentos que están contenidos en las semirrectas cuyos extremos están sobre las rectas paralelas. ($\overline{ZA}$, $\overline{ZB}$, $\overline{ZC}$, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{ZD}$, $\overline{ZE}$, $\overline{ZF}$, $\overline{DE}$, $\overline{DF}$, $\overline{EF}$, $\overline{ZG}$, $\overline{ZH}$, $\overline{ZI}$, $\overline{GH}$, $\overline{GI}$, $\overline{HI}$)
- Segmentos correspondientes: Son los segmentos que están sobre las semirrectas y están determinados por las mismas rectas paralelas. ($\overline{ZA}$, $\overline{ZD}$ y $\overline{ZG}$; $\overline{ZB}$, $\overline{ZE}$ y $\overline{ZH}$ $\overline{ZC}$, $\overline{ZF}$ y $\overline{ZI}$; $\overline{AB}$, $\overline{DE}$ y $\overline{GH}$; $\overline{AC}$, $\overline{DF}$ y $\overline{GI}$; $\overline{BC}$, $\overline{EF}$ y $\overline{HI}$)
- Segmentos de paralelas: Son los segmentos que están contenidos en las rectas paralelas y determinados por las semirrectas. ($\overline{AD}$, $\overline{AG}$, $\overline{DG}$, $\overline{BE}$, $\overline{BH}$, $\overline{EH}$, $\overline{CF}$, $\overline{CI}$, $\overline{FI}$)

Observación: Recuerda que los segmentos correspondientes no tienen que estar siempre determinados por rectas paralelas; esta exigencia **SI** es necesaria para poder plantear el teorema de las transversales.

Según las tres partes del teorema de las transversales, y considerando las mismas condiciones que se expresan en el gráfico anterior, se ha confeccionando el resumen siguiente: (solamente aparecen algunos ejemplos de segmentos proporcionales para cada una de las partes del teorema).

Primara Parte	$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}=\frac{\overline{ZD}}{\overline{ZE}}$; $\frac{\overline{ZB}}{\overline{ZC}}=\frac{\overline{ZH}}{\overline{ZI}}$ $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$	La razón entre dos segmentos de una semirrecta es igual a la razón entre los dos segmentos correspondientes en otra semirrecta.

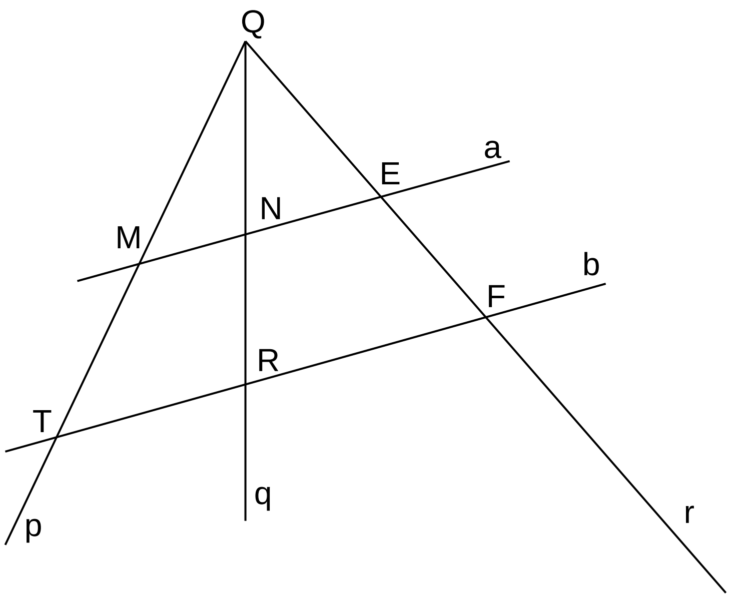
Segunda Parte	$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BE}}$; $\frac{\overline{ZE}}{\overline{ZF}} = \frac{\overline{EH}}{\overline{FI}}$ $\frac{\overline{ZB}}{\overline{ZC}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{CI}}$	La razón entre dos segmentos de una semirrecta es igual a la razón entre los segmentos de paralelas correspondientes. (Los segmentos de semirrectas tienen que tener siempre un extremo que coinciada con el origen de las semirrectas)
Tercera Parte	$\frac{\overline{AD}}{\overline{DG}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{EH}}$; $\frac{\overline{AD}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{CI}}$ $\frac{\overline{BE}}{\overline{EH}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{FI}}$	La razón entre dos segmentos de paralelas es igual a la razón entre los dos segmentos de paralelas correspondientes.

Después de estudiado el teorema de las transversales, reflexionaste sobre el recíproco de la primera parte llegando a obtener un teorema muy apropiado para demostrar el paralelismo entre dos rectas. Este teorema plantea:

> Si dos semirrectas de origen común son cortadas por varias rectas de manera que la razón entre dos segmentos de una de ellas es igual a la razón entre los dos segmentos correspondientes en la otra, entonces las rectas son *paralelas*.

Ejemplo:

En la figura p, q y r son tres semirrectas de origen común Q, y a, b son rectas con $a \| b$; además M, N, E$\in$ a; T, R, F$\in$ b; M, T$\in$ p; N, R $\in$ q; E, F $\in$ r.



Entre los segmentos de semirrectas que se pueden señalar los siguientes: $\overline{QM}$, $\overline{QT}$, $\overline{MT}$, $\overline{QN}$, $\overline{QR}$, $\overline{NR}$, $\overline{QE}$, $\overline{QF}$ y $\overline{EF}$, y los segmentos de paralelas son: $\overline{MN}$, $\overline{NE}$, $\overline{ME}$, $\overline{TR}$, $\overline{TF}$ y $\overline{RF}$.

Observa que se cumple además que:

- Al segmento $\overline{QM}$ corresponde el segmento $\overline{QN}$ en la semirrecta q.
- Al segmento $\overline{MT}$ de la semirrecta p corresponde el segmento $\overline{EF}$.
- Al segmento $\overline{MT}$ corresponde el segmento $\overline{NR}$ en la semirrecta q.
- Al segmento $\overline{QN}$ corresponde el segmento $\overline{QE}$ en la semirrecta r.

Si quisiéramos completar los espacios en blanco que aparecen a continuación, obtendríamos los resultados siguientes:

- $\frac{\overline{MN}}{\overline{TR}} = \frac{?}{\overline{QR}}$; $\overline{QN}$ (segunda parte),
- $\frac{\overline{QN}}{?} = \frac{\overline{QE}}{\overline{EF}}$; $\overline{NR}$ (primera parte),
- $\frac{\overline{MN}}{\overline{NE}} = \frac{?}{\overline{RF}}$; $\overline{TR}$ (tercera parte),

Ejercicios

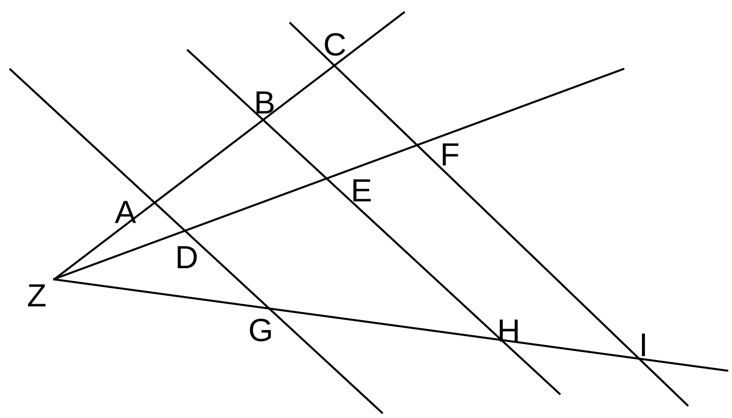
1. Sean m y n dos semirrectas de origen común O, con A, B, C, D $\in$ m, y E, F, G, H $\in$ n.

a) Nombra todos los segmentos de semirrectas que aparecen representados en la figura.

b) Completa los espacios en blanco.

- $\overline{OA}$ es el segmento correspondiente al segmento _____.
- _____ es el segmento correspondiente al segmento $\overline{BD}$.
- $\overline{AC} + \overline{CD}$ es el segmento correspondiente al segmento _____.
- _____ es el segmento correspondiente al segmento $\overline{EH} - \overline{EG}$.
- $\overline{EG}$ es el segmento correspondiente al segmento _____.

2. Sustituye el signo de interrogación por el segmento apropiado en las siguientes proporciones y plantea la justificación correspondiente, especificando qué parte del teorema de las transversales has utilizado.

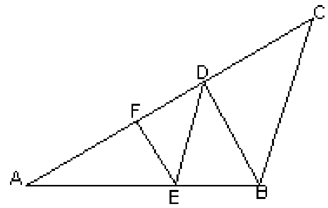


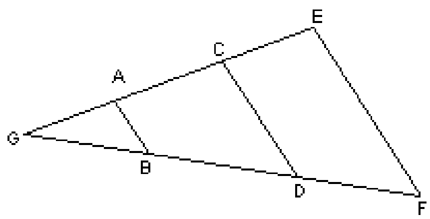
a) $\dfrac{\overline{GH}}{\overline{HI}} = \dfrac{?}{\overline{DC}}$ b) $\overline{EH} : \overline{EB} = \overline{FI} : ?$ c) $\dfrac{\overline{ZA}}{?} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{CF}}$

d) $? : \overline{ZG} = \overline{BH} : \overline{AG}$ e) $\overline{AD} : ? = \overline{BE} : \overline{BH}$ f) $\dfrac{?}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{HZ}}{\overline{GI}}$

g) $\dfrac{\overline{DE}}{?} = \dfrac{?}{\overline{BC}}$ h) $\overline{CF} : ? = ? : \overline{EH}$ i) $\dfrac{\overline{AG}}{\overline{CI}} = \dfrac{?}{?}$

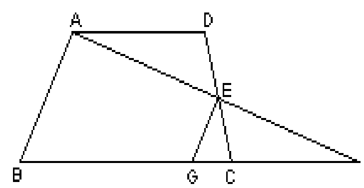
3. En la figura ABC es un triángulo y en su interior se han trazado los segmentos $\overline{EF}$, $\overline{ED}$ y $\overline{BD}$ tales que $\overline{EF} \parallel \overline{BD}$ y $\overline{DE} \parallel \overline{CB}$. Escribe todas las proporciones posibles y di en cada caso qué parte del teorema de las transversales has utilizado.





4. La figura muestra un triángulo EFG y $\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$, con G, A, C y E alineados; así como los puntos G, B, D y F. Si $\overline{AC} = 2{,}0$ cm, $\overline{GB} = 3{,}0$ cm, $\overline{BD} = 4{,}0$ cm, $\overline{EF} = 7{,}84$ cm y $\overline{AB} = 2{,}4$ cm; calcula las longitudes de los segmentos $\overline{AG}$, $\overline{CD}$, $\overline{GF}$, $\overline{DF}$, $\overline{CE}$ y $\overline{GE}$.

5. En la figura ABCD es un trapecio de bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, E es el punto medio de $\overline{CD}$, $\overline{AB} \parallel \overline{EG}$ y $\overline{CF} = \overline{AD}$. Además se cumple que B, G, C y F están alineados; así como A, E y F.



a) Prueba que Δ ADE = Δ EFG.

b) Calcula la longitud de $\overline{EF}$, $\overline{EG}$, $\overline{BG}$ y $\overline{BF}$ si,

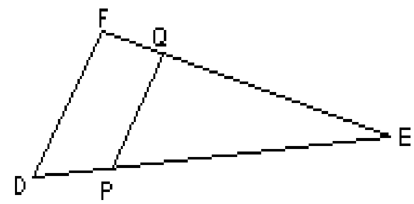
$\overline{AB}$ = 6,0 cm, $\overline{AE}$ = 4,0 cm y $\overline{FG}$ = 5,0 cm.

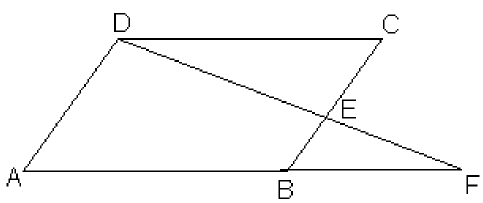
6. Sea DEF un triángulo rectángulo en F y $\overline{PQ} \parallel \overline{DF}$.

a) Si se sabe que $\overline{DE}$ = 8,0 cm, $\overline{EF}$ = 6,0 cm y $\overline{FQ}$ = 2,5 cm; calcula el área del triángulo EPQ.

b) Si el perímetro del cuadrilátero DPQF es igual a 19,2 cm: calcula la longitud de $\overline{EP}$.

c) ¿Qué tanto por ciento del área del triángulo DEF representa el área del triángulo PQE?



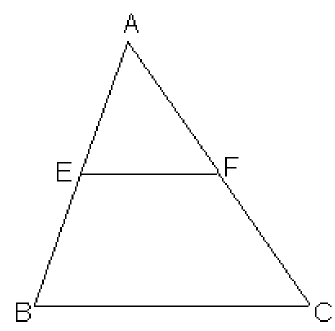


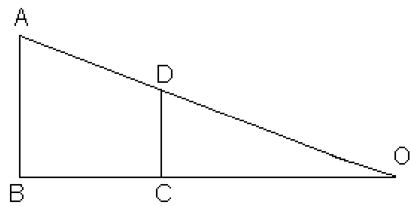
7. En la figura ABCD es un paralelogramo, E es un punto de $\overline{BC}$ y F es el punto de intersección de las rectas AB y DE. Se cumple además que $\dfrac{\overline{EF}}{\overline{ED}} = \dfrac{2}{3}$. Calcula las dimensiones del paralelogramo ABCD se $\overline{AF}$ = 20 cm y $\overline{BE}$ = 3,0 cm.

8. Sea ABC un triángulo; E y F son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente; además se cumple que $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$.

a) Calcula la longitud de $\overline{EF}$ si se conoce que $\overline{AB}$ = 7,0 cm y $\overline{BC}$ = 6,0 cm.

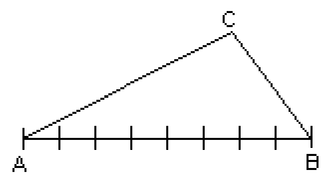
b) ¿Qué relación existe entre las medidas de los segmentos $\overline{EF}$ y $\overline{BC}$? ¿Se cumplirá siempre esta relación para triángulos cualesquiera? Fundamenta.

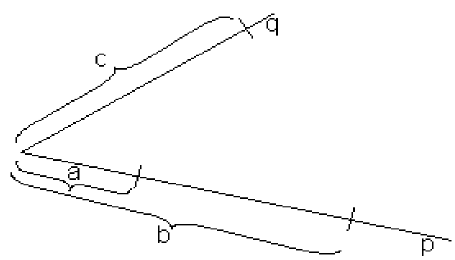




9. En la figura se representa el trapecio ABCD de bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. Se conoce que la base mayor $\overline{AB}$ tiene la misma longitud que la altura del trapecio (8,0 cm), y además que su perímetro es P = 24 cm, su área es A = 54 cm^2 y que el lado $\overline{AD}$ mide 10 cm. ¿A qué distancia de los puntos D y C se cortan las rectas AD y BC?

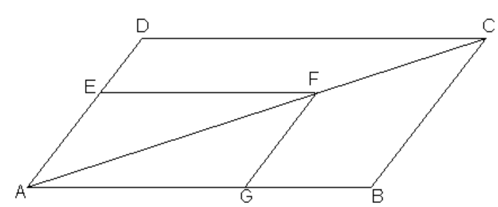
10. Sea ABC un triángulo. Ubica el punto D en $\overline{AB}$ y el punto E en $\overline{AC}$ tal que: $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = \frac{3}{5}$.





11. Dados tres segmentos a, b y c sobre las semirrectas p y q como se muestra en la figura; construye sobre q el segmento d tal que d = $\frac{a \cdot c}{b}$. Sugerencia: De $\frac{a}{b} = \frac{x}{c}$, resulta $x = \frac{ac}{b}$.

12. Sean ABCD y AGFE dos paralelogramos dispuestos como muestra la figura. Se cumple también que $\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{3}{4}$.

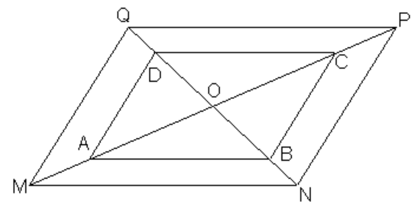


a) Prueba que $\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{AB}}$.

b) Si los lados del paralelogramo AGFE miden $\overline{AG}$ = 6,0 cm y $\overline{AE}$ = 4,2 cm; calcula las longitudes de los lados del paralelogramo ABCD.

13. En la figura MNPQ y ABCD son dos

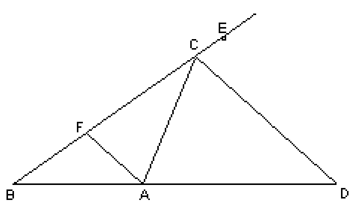
paralelogramos y el punto O coincide con el punto en que se cortan las diagonales de dichos paralelogramos.



a) Escribe todas las proporciones posibles y justifica cada una de ellas especificando la parte del teorema de las transversales que has utilizado.

b) Prueba que $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OM}} = \dfrac{\overline{OC}}{\overline{OP}}$.

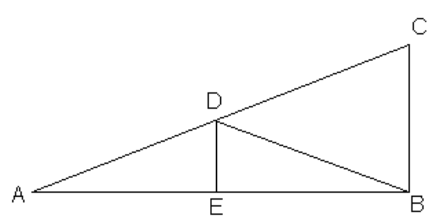
c) Prueba que $\dfrac{\overline{OD}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{OQ}}{\overline{MQ}}$.



14. Sea ABC un triángulo, CD la bisectriz del ángulo exterior $\angle ACE$ y los puntos B, A y D son alineados. Además se cumple que $\overline{AF} \parallel \overline{CD}$.

Demuestra que: $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{CA}} = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{AD}}$.

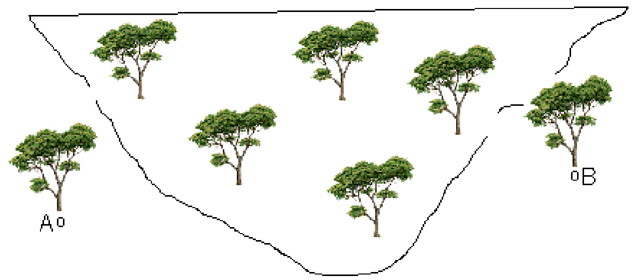
15. En la figura se ha representado el triángulo ABC rectángulo en B; D es el punto medio del lado $\overline{AC}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$.



Justifica por qué E es el punto medio de $\overline{AB}$.

Prueba que: $\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{BD}$.

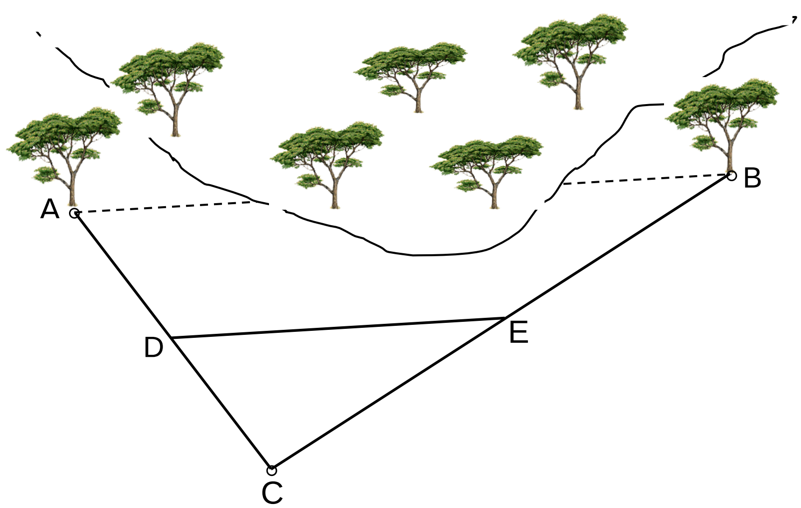
16. Determina la distancia entre dos árboles dados a través de los puntos A y B, los que aparecen dispuestos en el terreno de forma tal que no se observa uno del otro. Emplea para ello la segunda parte del teorema de las transversales.



A continuación, y a modo de ejemplo, se expone la solución a este problema práctico.

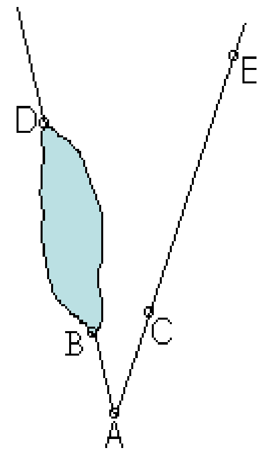
Se selecciona un punto C desde el cual sean visibles los puntos A y B. Para garantizar el paralelismo entre el segmento $\overline{AB}$ y otro segmento, por ejemplo, $\overline{DE}$, y además trabajar con más comodidad; se seleccionan los puntos medios de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, los que se denotarán por D y E respectivamente.

Garantizadas las condiciones para aplicar el teorema de las transversales, se puede plantear que $\frac{\overline{CD}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}}$. Como la medida de cada segmento $\overline{CD}$, $\overline{CA}$ y $\overline{DE}$, es calculable, se obtiene finalmente que, $\overline{AB} = \frac{\overline{CA} \cdot \overline{DE}}{\overline{CD}}$.



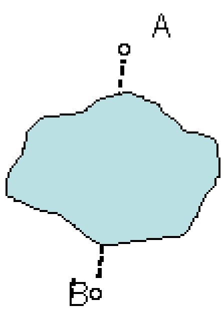
OBSERVACIÓN: Con las consideraciones realizadas, se podía haber obtenido directamente que $\overline{AB} = 2\overline{DE}$ (teorema de la paralela media en un triángulo).

17. En una actividad de exploración y campismo un grupo de pioneros de 9no. grado quiere medir la distancia entre dos puntos B y D separados por una laguna artificial.



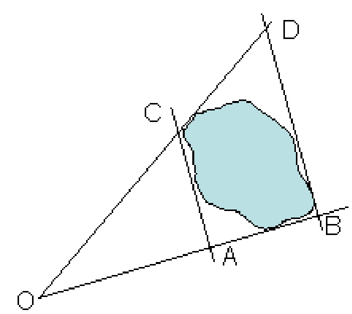
Algunos de ellos plantean que si se sitúan los puntos A, C y E (a los cuales es posible acceder, y que están dispuestos en el terreno como muestra la figura), se podría determinar la distancia buscada. El profesor que los acompaña les dice: –Ustedes tienen razón, pero, para garantizar la veracidad del cálculo deben hacer otra consideración importante al ubicar esos puntos.

¿Cuál es la consideración a la que se refiere el profesor? Argumenta.



18. Describe y fundamenta los pasos a seguir para, aplicando la primera parte del teorema de las transversales, calcular la distancia que separa a los dos puntos inaccesibles A y B.

19. Alejandro y Joan se encuentran en una base de campismo y al recorrer sus alrededores se percatan de la existencia de un terreno limpio muy apropiado para acampar. De inmediato se proponen calcular el área aproximada de ese terreno para saber si el grupo de amigos que lo acompañan puede instalarse en ese lugar. Para eso sitúan una estaca en la tierra que se identifica en el gráfico por el punto O. Alejandro le dice a Joan que solamente necesitan medir las distancias, $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{AC}$; lo cual realizan utilizando una soga y considerando que un



metro es aproximadamente igual a cuatro pasos consecutivos de Joan. Este último agrega: – se debe considerar además que $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ sean perpendiculares a $\overline{OA}$.

a) ¿Tiene razón Alejandro en su planteamiento? Justifica.

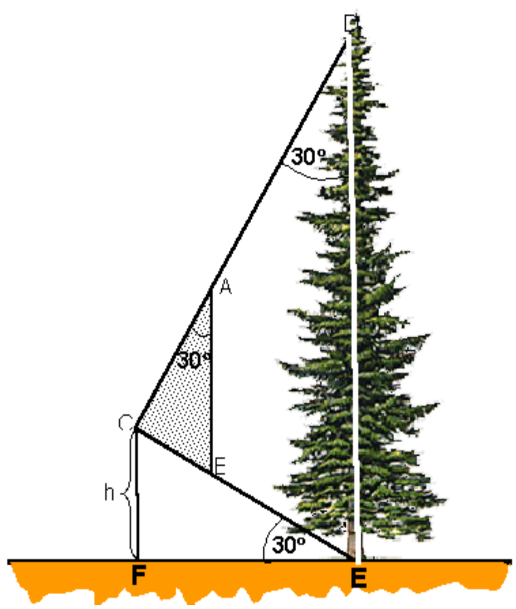
b) ¿Es necesaria la observación que hace Joan? ¿Por qué?

c) Si las mediciones realizadas son:

- de O a A hay 130 pasos,
- de O a B hay 200 pasos, y
- de A a C hay 55 pasos;

Calcula el área aproximada del terreno.

20. Un estudiante de un IPUEC desea medir la altura de un árbol que se encuentra en los jardines de su escuela. Después de reflexionar llega a la conclusión que solamente utilizando un cartabón de 30° puede solucionar el problema que se ha planteado, si coloca la hipotenusa del mismo perpendicular a la tierra, como se muestra en el gráfico, y si calcula las longitudes de los segmentos $\overline{CB}$, $\overline{CE}$ y $\overline{AB}$.



a) Explica por qué el procedimiento seguido permite determinar la altura del árbol.

b) Si las medidas obtenidas fuesen:

- $\overline{AB}$ = 30 cm, $\overline{CB}$ = 15 cm, $\overline{CE}$ = 6 m;

Calcula la altura aproximada del árbol.

c) Si te encontraras en una situación similar y no tuvieses el cartabón, ¿cómo propones resolver este problema aplicando lo que conoces sobre el teorema de las transversales?

d) Te proponemos que con la ayuda de tu profesor pruebes que, bajo las condiciones descritas, $\overline{DE} = 4\overline{CF} = 4h$.

3.3 Semejanza de figuras geométricas.

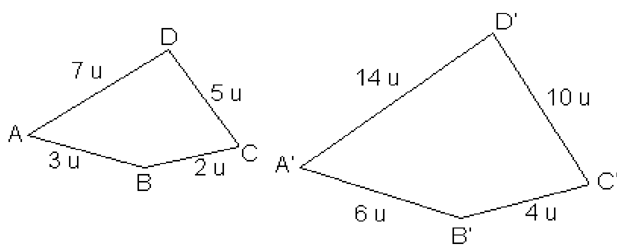
En el epígrafe 3.1 estudiaste la igualdad entre dos triángulos sobre la base de la igualdad geométrica, llegando a conocer que dos polígonos son iguales si coinciden las amplitudes de sus ángulos y las longitudes de sus lados correspondientes. En este tópico conocerás figuras que también se relacionan entre si, pero que a pesar de tener la misma forma, no coinciden en el tamaño. Con los conocimientos que adquirirás aquí podrás resolver problemas prácticos entre los que se encuentran la lectura de mapas y la confección de croquis considerando la escala de transformación.

En este grado has profundizado tus conocimientos sobre las figuras iguales; en particular, estudiaste tres teoremas que te permiten probar la igualdad entre dos triángulos. También viste que existen otras figuras que tienen la misma forma, pero distintas dimensiones y que reciben el nombre de *figuras semejantes.*

Particularmente podemos decir que dos *polígonos* son semejantes si tienen sus ángulos iguales y sus lados homólogos son respectivamente proporcionales.

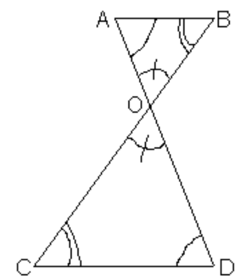
Ejemplos:

1. Para los cuadriláteros ABCD y A’B’C’D’ se cumple que $\angle A = \angle A'$; $\angle B = \angle B'$; $\angle C = \angle C'$ y $\angle D = \angle D'$ y además $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}} = \frac{1}{2}$. Se puede decir que estos dos cuadriláteros son semejantes porque tienen sus cuatro ángulos iguales y sus lados son respectivamente proporcionales.



Observa que aquí el coeficiente de proporcionalidad es $\frac{1}{2}$; es decir, la figura A’B’C’D’ se obtiene de la figura ABCD por una “ampliación” o “dilatación” de coeficiente de proporcionalidad k = 2; así como la figura ABCD se obtiene de la figura A’B’C’D’ por una “contracción” de la figura ABCD de coeficiente de proporcionalidad k = $\frac{1}{2}$. Si el coeficiente de proporcionalidad fuese k = 1, significara que las figuras son iguales. De esto último se puede plantear que dos figuras iguales siempre son semejantes, mientras que figuras semejantes de manera general no son figuras iguales.

2. Sean AOB y COD dos triángulos tales que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$; A, O y D son puntos alineados, así como los puntos B, O y C. Además $\frac{\overline{OA}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \frac{1}{3}$.



Te será fácil reconocer que $\angle$ ABO = $\angle$ OCD y $\angle$ BAO = $\angle$ CDO por ser ángulos alternos entre las paralelas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ y las secantes $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ respectivamente; así como que $\angle$ AOB = $\angle$ COD por ser ángulos opuestos por el vértice. Del análisis anterior resulta que ambos triángulos tienen sus tres ángulos iguales y como por datos $\frac{\overline{OA}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \frac{1}{3}$ se puede concluir que estos dos triángulos son semejantes por tener sus ángulos iguales y sus lados respectivamente proporcionales.

Un teorema muy importante que estudiaste en clases relaciona el perímetro y el área de figuras semejantes.

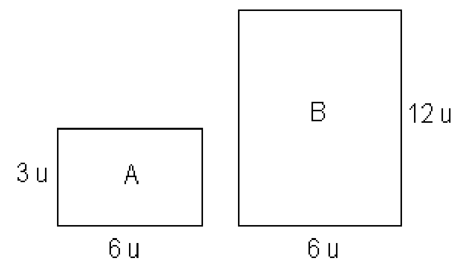
> Si dos figuras F y F' son semejantes y el coeficiente de proporcionalidad es k, entonces se cumple para sus perímetros que p'= k ▪ p y para sus áreas A'= k^2 ▪ A; donde p y A son el perímetro y el área de la figura F respectivamente, y p' y A' son el perímetro y el área de la figura F' respectivamente.

Ejemplo: Si retomamos el ejemplo 1, citado anteriormente, se observa que el perímetro del cuadrilátero ABCD es igual a 17 u; mientras que el perímetro del cuadrilátero A'B'C'D' es igual a 34 u (2 • 17 = 34). Si en el ejemplo 2, el área del triángulo AOB hubiese sido igual a 12 u^{2,} entonces el área del triángulo COD sería igual 108 u^2

($12 \cdot 3^2 = 12 \cdot 9 = 108$).

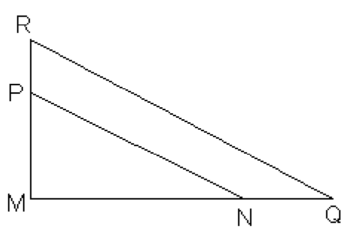
Ejercicios

1. En la figura se muestran dos rectángulos A y B cuyas dimensiones son 3u y 6u, y 6u y 12u respectivamente.



a) ¿Son esos rectángulos semejantes? Fundamenta tu respuesta.

b) ¿Qué relación existe entre sus perímetros y sus áreas?

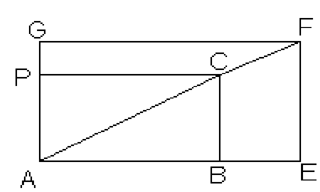


2. En la figura aparecen representados dos triángulos MNP y MQR; además $\overline{PN} \parallel \overline{QR}$.

a) Justifica por qué los triángulos MNP y MQR son semejantes.

b) SI $\dfrac{\overline{MN}}{\overline{NQ}} = \dfrac{2}{3}$ y el perímetro del triángulo MNP es igual a 12,6cm; calcula el perímetro del triángulo MQR. Fundamenta tu respuesta.

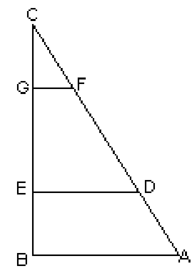
3. En la figura se tienen dos rectángulos ABCD y AEFG con $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$, $\overline{DC} \parallel \overline{GF}$ y los tres tríos de puntos A, B, E; A, C, F y A, D, G son alineados.



a) ¿Son semejantes los rectángulos ABCD y AEFG? Justifica tu respuesta.

b) Calcula el perímetro y el área de ambos rectángulos si se sabe que $\overline{AB} = 5{,}0$ cm y $\overline{AD} = \overline{BE} = 3{,}0$ cm.

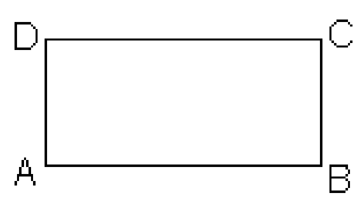
4. En la figura ABC es un triángulo rectángulo en B; $\overline{DE} \mid\mid \overline{FG} \mid\mid \overline{AB}$ con A, D, F, C puntos alineados; así como los puntos B, E, G y C. Se conoce además que $\overline{BE} = 4{,}0\,\text{cm}$, $\overline{BG} = 9{,}0\,\text{cm}$, $\overline{AD} = 6{,}0$ cm y $\overline{DF}$ = 8,0 cm. ¿Serán semejantes los trapecios rectángulos ABED y DEGF? Fundamenta tu respuesta.



5. Responde Verdadero o Falso y realiza la justificación en cada caso.
   a) _____ Todos los cuadrados son semejantes entre si.
   b) _____ Todos los rectángulos son semejantes entre si.
   c) _____Si dos triángulos son semejantes y el coeficiente de proporcionalidad es $\frac{1}{2}$ y el área de uno de ellos es igual a 18 u^2, entonces el área del otro es igual a 6 u^2.
   d) _____Si la figura A es semejante a la figura B y el coeficiente de proporcionalidad que permite obtener la figura B en la figura A es $\frac{5}{3}$, entonces el área de la figura A es mayor que el área de la figura B.
   e) _____Si dos paralelogramos son semejantes entre si y los lados de uno miden 4,0 cm y 6,0 cm, y los lados del otro son iguales a 8,0 cm y 12 cm, entonces el coeficiente de proporcionalidad es igual a 2.

6. Construye un rectángulo semejante al dado en la figura, utilizando como coeficientes de proporcionalidad:

   a) k = 2; b) k = $\frac{1}{2}$; c) k = 3,5; d) k = $\frac{2}{3}$

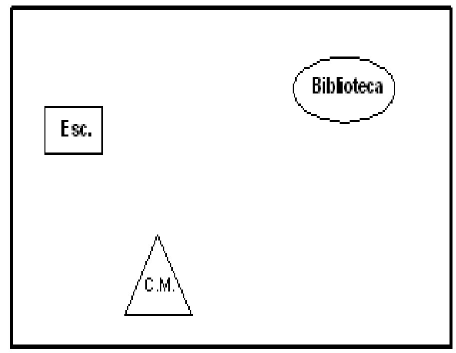


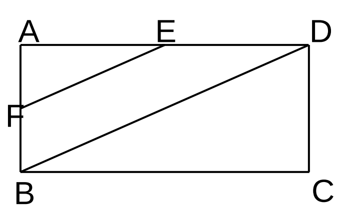
7. Dos polígonos A y B son semejantes y el coeficiente de proporcionalidad entre ellos es igual a $\frac{4}{5}$; calcula el perímetro y el área de ellos si el perímetro y el área del menor son iguales a 16u y 36u^2 respectivamente.

8. El polígono D es mayor que el polígono C y se conoce que sus áreas son iguales a 20 cm^2 y 12,8 cm^2 respectivamente; además se sabe que el perímetro del polígono D es igual a 15 cm. Calcula el perímetro del polígono C.

9. Los perímetros de dos triángulos semejantes miden 20 cm y 35 cm. Si los lados del triángulo mayor miden 14 cm, 7,0 cm y 16,1 cm; ¿cuánto miden los lados del otro triángulo? Justifica tu respuesta.

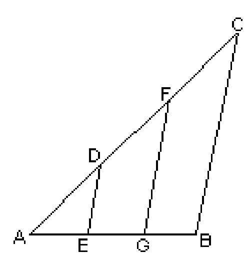
10. A continuación aparece un croquis que realizaron unos alumnos de 7mo. grado sobre la ubicación de su escuela, el consultorio del médico de la familia más cercano a la escuela y la biblioteca municipal. Si la escala que emplearon es 1 cm : 100 m, determina aproximadamente la distancia que separa a estos tres lugares entre si.





11. En la figura ABCD es un rectángulo, E y F son los puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{AB}$ respectivamente. Prueba que los triángulos AEF y BCD son semejantes.

12. El lado $\overline{AC}$ del triángulo ABC se ha dividido en tres partes iguales por los puntos D y F; además $\overline{DE} \parallel \overline{FG} \parallel \overline{BC}$ con A, E, G y B puntos alineados.



a) Fundamenta por qué los triángulos ADE, AFG y ABC son semejantes entre si.

b) Si el perímetro del triángulo ADE es igual a 12,8 cm y su área mide 21,4 cm^2; calcula el perímetro y el área de cada uno de los triángulos AFG y ABC.