# Unidad 1
# El dominio de los números racionales

**Introducción**

No es preciso buscar casos excepcionales para encontrar números gigantes o extremadamente pequeños. Se encuentran en todas partes, en torno a nosotros, e incluso en el interior de nosotros mismos, únicamente hay que saber descubrirlos.

***Un número gigante se oculta en el aire que respiramos. Cada centímetro cúbico de aire contiene 27 trillones de moléculas por lo que podemos inferir que el tamaño de estas moléculas es extremadamente pequeño.***

Si observamos al microscopio una gótica de nuestra sangre podemos encontrar aproximadamente 5 millones de glóbulos rojos, podrás imaginar entonces cuán ínfimo es su tamaño.

En este grado aprenderás a representar estos números de una forma más simple utilizando la notación científica que estudiarás cuando amplíes tus conocimientos en cuanto a las propiedades de las potencias.

Continuarás el trabajo con los números racionales aplicándolos a la resolución de problemas y al procesamiento y análisis de datos. Además conocerás los números irracionales que te permitirán ampliar el universo numérico conocido por ti con la introducción del **conjunto de los números reales.**

## 1.1 Relación de inclusión entre números naturales, enteros y racionales. Su utilización en el análisis e interpretación de datos de carácter estadístico.

En este epígrafe haremos una sistematización sobre los diferentes dominios numéricos que has estudiado en grados anteriores, las operaciones que se efectúan en ellos y su orden, todo lo cual te permitirá resolver diversos problemas de la vida.

Además ampliarás y profundizarás los conocimientos que sobre estadística has recibido en la escuela.

Recordarás que:

$N \rightarrow$ simboliza el conjunto de los números naturales.

$N = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; \ldots\ldots\}$

$Q_+ \rightarrow$ simboliza el conjunto de los números fraccionarios y está formado por todas las fracciones de la forma $\frac{a}{b}$ ; $a, b \in N$; $b \neq 0$, las cuales pueden escribirse como expresiones decimales sean finitas o infinitas periódicas.

Ejemplos: $\frac{1}{3}$ ; $\frac{5}{2}$ ; 4,7; 3,22222... ; $5,\overline{4}$ .

Todo número natural es un número fraccionario.

$Z \rightarrow$ simboliza el conjunto de los números enteros y está formado por el conjunto de los números naturales y sus opuestos.

$Z = \{.....-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\ldots\}$

$Q \rightarrow$ simboliza el conjunto de los números racionales y está formado por los números fraccionarios y sus opuestos.

Se cumplen entonces las relaciones siguientes:

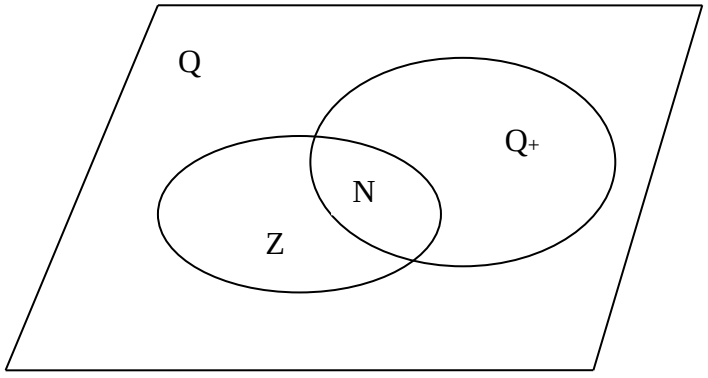
$N \subset Q_+ \subset Q$ el conjunto de los números naturales es un subconjunto del conjunto de los números fraccionarios y este a su vez es un subconjunto del conjunto de los números racionales.

$N \subset Z \subset Q$ de igual forma ocurre entre el conjunto de los números naturales, enteros y racionales.

$Q_+ \cap Z = N$ la intersección entre los conjuntos de los números fraccionarios y los enteros es el conjunto de los números naturales.

Gráficamente sería:

Diagrama de Venn



Recordarás también que:

- Los números racionales se escriben como expresiones decimales, cuyo desarrollo es finito o infinito periódico y se pueden representar en la forma $\frac{p}{q}$ donde $q \neq 0$ y p y q números enteros.
- El valor absoluto o módulo de un número racional se determina de la forma siguiente:
  - Si el número racional es positivo, su módulo es el propio número.
  - Si el número racional es negativo, su módulo es el opuesto del propio número.
  - El módulo de cero es cero.
- El módulo de cualquier número racional nunca es negativo.
- Dos números racionales opuestos tienen el mismo módulo.
- El conjunto de los números racionales es denso porque entre dos números racionales cualesquiera existen infinitos números racionales.
- Para comparar dos números racionales debes tener en cuenta que:
  - Los números racionales no negativos se comparan como los números
  - fraccionarios.
  - Los números racionales negativos son menores que los números racionales
  - no negativos.
  - De dos números negativos es menor el que tenga mayor módulo.
  - Para comparar a y b

    Si $a - b < 0$ ,entonces $a < b$ ; si $a - b > 0$ , entonces $a > b$ ; si a – b = 0, entonces a = b
  - Para a y b racionales y b positivo, si $\frac{a}{b} < 1$ entonces $a < b$ ; si $\frac{a}{b} > 1$ entonces $a > b$ ; si $\frac{a}{b} = 1$, entonces a = b.

Para adicionar dos números racionales.

- Si ambos son positivos, se utiliza el mismo procedimiento de la adición de números fraccionarios.
- Si ambos son negativos:

Se adicionan los módulos y al resultado se le pone el signo negativo.

- Si tienen signos diferentes:

  Se restan los módulos de ambos números y al resultado se le pone el signo del que tiene mayor módulo.

- La suma de dos números racionales opuestos es igual a cero.
- La adición de números racionales cumple las propiedades conmutativa y asociativa.

a + b = b + a podemos intercambiar el orden de los sumandos y no se altera la suma.

a+b+c = (a+b)+c = a+(b+c) podemos asociar sumandos diferentes y se obtiene el mismo resultado.

- La sustracción de números racionales es la operación inversa a la adición.
- La sustracción de números racionales puede reducirse a la adición. Para sustraer un número racional de otro, adicionamos al minuendo el opuesto del sustraendo.
- La sustracción de números racionales siempre puede realizarse.

**Por ejemplo**:

Calcular $7{,}5-10$ equivale a encontrar un número x tal que $x+10=7{,}5$. Este número es $-2{,}5$ de ahí que: $7{,}5-10=-2{,}5$ ya que $-2{,}5+10=7{,}5$

- Para multiplicar dos números racionales
  - Se multiplican sus módulos.
  - Si los factores tienen signos iguales, el producto es positivo y si los factores tienen signos diferentes, el producto es negativo.
- La multiplicación de números racionales cumple con las propiedades:

  conmutativa a.b = b.a

  asociativa a.b.c = (a.b).c = a.(b.c)

  y distributiva respecto a la adición $a.(b \pm c) = a.b \pm a.c$
- La división de números racionales es la operación inversa a la multiplicación.
- Para dividir dos números racionales.
  - Se halla el cociente de sus módulos.
  - Si el dividendo y el divisor tienen signos iguales, el cociente es positivo y si el dividendo y el divisor tienen signos diferentes, el cociente es negativo.

**Por ejemplo:**

Calcular $-14{,}4 : 2$ equivale a encontrar un número $x$ tal que $x \cdot 2 = -14{,}4$, este número es $-7{,}2$ de ahí que: $-14{,}2 : 2 = -7{,}2$ ya que $-7{,}2 \cdot 2 = -14{,}2$.

- Para todo número racional a, diferente de cero, existe el número racional $\frac{1}{a}$, denominado recíproco de $a$.
- Para resolver operaciones combinadas con números racionales:
  - Se resuelven las operaciones encerradas entre paréntesis.
  - Se realizan la potenciación y la radicación en el orden en que aparezcan.
  - Se efectúan las multiplicaciones y divisiones en el orden en que aparecen.
  - Se realizan las sumas algebraicas que resulten al final.

**Ejercicios:**

1. Resolver el ejercicio 1 del LT. 9no grado página 202.
2. Di si son verdaderas o falsas las proposiciones siguientes. En caso de ser falsas escríbalas como proposiciones verdaderas.

_____ $4{,}0101\ldots \in Q$

_____ $-18{,}25$ es un número fraccionario y racional

_____ $-945$ es un número racional

_____ $48{,}25$ es una expresión decimal periódica finita

_____ $-3{,}01103\ldots$ es un número irracional

_____ $2028$ es un número entero

_____El resultado de dividir dos números enteros es siempre un número entero.

_____ $5{,}\overline{01} \in Q$

5. Sea el conjunto:

$$A = \left\{ -\sqrt{36}\ ;\ -2\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ 7{,}0101\ldots\ ;\ 5\tfrac{1}{2}\ ;\ 2{,}53\ ;\ 1{,}\overline{7}\ ;\ \frac{1}{3} \right\}$$

a) Forma a partir del conjunto A los siguientes conjuntos:

M: Es el conjunto formado por los números que sean naturales.

D: Es el conjunto formado por los números que no sean enteros.

T: Es el conjunto formado por los números que sean racionales.

H: Es el conjunto formado por las expresiones decimales periódicas.

b) Encuentra si existe:

- El conjunto formado por los elementos comunes a los conjuntos M y T.
- El conjunto formado por los elementos que están en el conjunto T y que no están en el conjunto M.
- El conjunto formado por los elementos que están en el conjunto H y que no están en el conjunto T.

4. En la tabla se muestran las temperaturas de fusión de algunas sustancias:

| **Sustancias** | **Temperatura de fusión** |
|---|---|
| Agua | $0^oC$ |
| $CO_2$ | $- 11,2^o C$ |
| Éter | $- 14^oC$ |
| Parafina | $70^oC$ |

a) Entre qué números enteros se halla la temperatura de fusión del $CO_2$.

b) Ordena las temperaturas de fusión en forma descendente.

c) Entre el agua y el éter ¿Cuál tiene menor temperatura de fusión?

5. En cuál de estos pares de números, el número 2,25 es mayor que el primer número y menor que el segundo número. Fundamenta tu respuesta.

1 y 2 2 y $\frac{5}{2}$ $\frac{11}{4}$ y 3

6. Selecciona cuál de las siguientes fracciones está:

a) más lejos de $\frac{1}{4}$

1) $\frac{7}{15}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{7}{12}$ 4) $\frac{13}{20}$

b) más cerca de $\frac{1}{3}$

1) $\frac{7}{16}$ 2) $\frac{8}{15}$ 3) $\frac{5}{12}$ 4) $\frac{11}{20}$

Fundamenta en cada caso tu respuesta.

7. En cuál de estos pares de números, el número - 4,05 es mayor que el primer número y menor que el segundo número. Fundamenta tu respuesta.

- 4 y - 3 $-\frac{9}{2}$ y $-4{,}15$ $-\frac{23}{5}$ y -4

8. Selecciona cuál de los números racionales siguientes está:

a) más lejos de $-\frac{3}{8}$

1) $-\frac{1}{2}$ 2) $-\frac{37}{10}$ 3) $-\frac{4}{5}$ 4) 0,01

b) más cerca de $-\frac{5}{2}$

1) $-3$ 2) $-\frac{23}{9}$ 3) $\sqrt{\frac{1}{16}}$ 4) $-2{,}51$

9. Calcula:

a) $8\,705 - 497$ b) $4{,}07 \cdot 6{,}8$ c) $56\,832 : 24$

d) $6\,936 : 0{,}34$ e) $3\,569 - 2\,839$ f) $40{,}3 : 7{,}8$

g) $349\,595 : 85$ h) $54{,}6 : 1{,}3$ i) $-78{,}9 - 3{,}16$

j) $-1{,}4 + \frac{4}{5}$ k) $7{,}548 : (-3{,}7)$ l) $3\frac{1}{5} : \frac{8}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)$

9.1 Elabora un ejercicio de multiplicación que tenga el mismo resultado que el inciso b)

9.2 Elabora un ejercicio de división que tenga el mismo resultado que el inciso h)

10. Resuelve los ejercicios 4 y 5 L/T 9no página 203.

11. Escribe dos ejemplos de números que cumplan las siguientes condiciones:

a) Que sean números racionales no naturales.

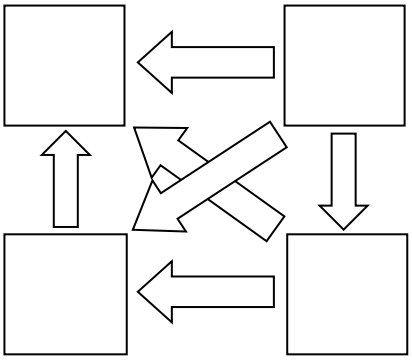
b) Que sean números enteros no negativos.

c) Que sean números racionales fraccionarios.

12. Coloca en cada cuadrado de la figura de la derecha, los números de la tabla de modo que la punta de la flecha siempre apunte:

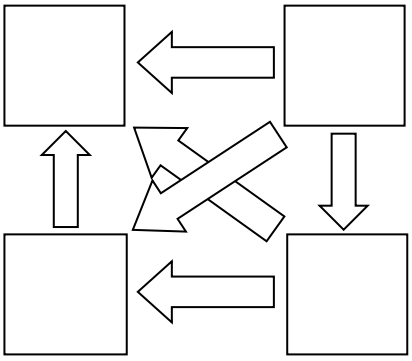
a) hacia el mayor entre los dos.

| | | | |
|---|---|---|---|
| - 1,52 | - 1,602 | $-\frac{16}{10}$ | - 1,5 |



b) hacia el menor entre los dos

| | | | |
|---|---|---|---|
| $0{,}3$ | $-\frac{15}{50}$ | $\frac{1}{3}$ | $-0{,}\overline{3}$ |



13. En el cuadrado mágico la suma de los números de cada fila es igual a la suma de los números de cada columna y a la suma de los números de las diagonales.

En los cuadrados mágicos siguientes escribe los números que faltan

| | | |
|---|---|---|
| 139 | 132 | |
| | 136 | |
| | | 223 |

| | | |
|---|---|---|
| 9 | | 5 |
| | 3 | |
| | | -3 |

| | | |
|---|---|---|
| -5 | | |
| 5 | 1 | |
| | | |

Su suma es 3

| | | |
|---|---|---|
| 1 | | |
| | | |
| -10 | | -5 |

Su suma es - 6

14. El resultado de calcular $(9 + 10 \cdot 0{,}62) : 12$ es

0,57 1,5 1,05 ninguna de las anteriores

15. Al calcular $\left(0{,}16 + 10 \cdot \sqrt{0{,}16}\right) : 4$ se obtiene como resultado:

1,016 1,2 1,02 ninguna de las anteriores

16. Sean:

$A = 5 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 3$

*B:* Es el número formado por cinco unidades de millar y cuatro unidades

*C:* Es el número cinco mil nueve

*D:* Veinticinco diezmilésimas

*E:* La octava parte de - 24

*F:* El quíntuplo de $-\frac{8}{5}$

a) Ordénelos de mayor a menor.

b) Escribe el conjunto M formado por los elementos encontrados anteriormente.

17. Para un entrenamiento de Matemática Juan, Raúl y Luis realizan individualmente cada mes la misma cantidad de ejercicios durante 3 meses. Se sabe que entre Juan y Luis hicieron 270 ejercicios el primer mes, Luis y Raúl hicieron 220 ejercicios el segundo mes y entre Raúl y Juan realizaron 250 ejercicios el último mes. Entonces los ejercicios realizados por Raúl cada mes fueron:

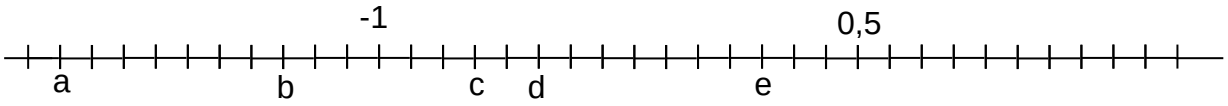
110 125 100 120

18. Tenemos 60 m de cinta y damos cuatro cortes para dividirla en partes iguales. El primer pedazo se vende a $4,50 pesos cada metro, el segundo pedazo a $6,00

pesos el metro y el resto a $5,50 pesos el metro. ¿Cuánto se obtiene por la venta?. Selecciona la respuesta correcta.

$ 3 225,00 $ 324,00 $ 322,50 $ 3 224,00

19. Partiendo de la representación gráfica, diga si son verdaderas o falsas las proposiciones siguientes:



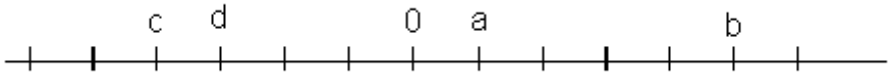

_____ d = 0 _____ $a = -1,1$

_____ $-b < e$ _____ $|a| > 0,5$

_____ $d \in Z$ _____ $0 < e < 0,2$

_____ $a < -2$ _____ c y d son negativos

20. En la siguiente recta están representados los números 0, a, b, c y d.




a) Responde verdadero o falso.

_____ $-2c > b$ _____ $-d > a$

_____ $d > a$ _____ $3a < b$

b) Decide si es posible que se cumpla:

_____ $b = 2a + c$ _____ $b \neq a - 3$

_____ $d = c + a$ _____ $-c - d = 2a + b$

En caso de que no se cumpla, ejemplifique.

21. Efectúa los siguientes cálculos:

a) $3 \cdot 2^3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 + 6 \cdot 3 - 20 : 5$

b) $2\,(-3 \cdot 2 + 4^2 : 8) : 6 + 4 \cdot 2^3 - 3^3$

c) $\frac{4}{5}\,(2 + 3) : \sqrt{25} + 2 \cdot 5^2 - 3^2\,(7 \cdot 2 - 10) - 4,6$

d) $42 + 16{,}8 : \sqrt{1{,}44} + (-3)^3 \cdot \frac{1}{3}$

e) $4{,}2 . 3^2 . \frac{2}{9} - 4 . 0{,}5 - \sqrt{125}$

f) $10{,}6 : 0{,}2 + 1{,}2^2 - 1\frac{2}{5}$

22. El resultado de calcular

$96 - 64 : 4^2 + \frac{15}{2} - \frac{7}{5}$ es:

98,1 8,1 92,8 94,1

23. El promedio de M y N donde $M = 64 - 18 : 3^1$ y $N = \frac{5}{4} + \frac{33}{12}$ es:

33 66 4 ninguno de los anteriores.

24. Si $x = \frac{1}{3}$ y $y = \frac{9}{7}$ entonces el valor numérico de la expresión $x : y - 2x^2 + 1$ es:

$\frac{2}{3}$ $\frac{24}{31}$ $\frac{2}{27}$ ninguno de los anteriores

25. Sean los números a y b, de ellos se sabe que su suma es un número negativo. ¿Cuál de las siguientes respuestas es correcta?

a) Tanto a como b son siempre negativos.
b) Si a es negativo, entonces b también lo es.
c) Si a es positivo, b es negativo.
d) No es posible que a y b sean positivos simultáneamente.

26. Un artículo cuesta $ 474,00 pesos. Se puede comprar a plazos entregando en el primer plazo $\frac{2}{3}$ de su importe, en el segundo plazo la mitad de lo restante y en el tercero lo que le falta para completar el precio. ¿Cuánto ha de pagar en cada plazo?

27. De una pieza de tela de 12 m una señora compra las $\frac{3}{4}$ partes de la misma. De aquí corta los $\frac{2}{3}$ para hacer una sábana. ¿Cuántos metros utilizó para la sábana? ¿Qué parte o fracción de la pieza ha usado?

28. Sustituye las figuras por números de forma que no existan contradicciones entre los resultados.

a) $-18 + \bigcirc = \square$ b) $2 \cdot \square = \bigcirc$

$3 + \square = \hexagon$ $1\frac{2}{3} + \bigcirc = \hexagon$

$\hexagon \cdot 2 = \triangle$ $\hexagon - \frac{43}{24} = \triangle$

$\triangle : 13 = -2$ $-\frac{25}{6} : \triangle = \frac{20}{3}$

**Nociones de estadística.**

En grados anteriores iniciaste el estudio de las nociones elementales de estadística descriptiva y pudiste darte cuenta de la importancia que tiene en la vida el análisis y procesamiento de datos.

Recordemos que:

**La población** es el conjunto de seres, entes, individuos o sucesos a los que vamos a estudiar una o varias características.

Ejemplo: los alumnos de una escuela; las viviendas de una circunscripción; los integrantes de un equipo de pelota.

**La muestra** es la parte de la población que estudiamos. Es un subconjunto de la población.

Ejemplo: los alumnos de 7mo grado de la escuela; las viviendas de una cuadra; los integrantes del equipo de pelota menores de 20 años.

**Frecuencia absoluta** es el número de veces que se repite el valor de una variable, o la cantidad de veces que se repite un suceso.

**Frecuencia relativa** es el resultado de dividir la frecuencia absoluta por el tamaño de la muestra.

Para describir datos utilizamos las tablas y gráficos, siendo los más utilizados, los de barras, poligonales, circulares y pictogramas, entre otros.

También utilizamos las medidas de tendencia central: media, moda y mediana te recordamos que:

**La moda** es el valor o los valores de la variable de mayor frecuencia. Es el suceso o los sucesos que más se repite.

**La media** es el valor alrededor del cual se encuentran los datos de una lista. Se calcula hallando la suma de todos los productos de cada valor de la variable por su frecuencia absoluta, la cual se divide por el tamaño de la muestra.

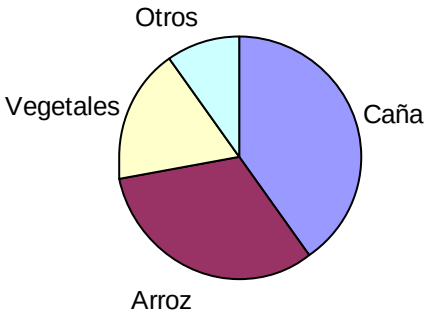
Esta medida de tendencia central es extremadamente susceptible a los valores extremos por eso en ocasiones no es recomendable su utilización en el análisis de datos pues el mismo se desvirtúa.

**La mediana** de un grupo de datos ordenados, es el valor central de la lista. Para calcularla:

- Si el tamaño de la muestra es impar la mediana es el dato del centro.
- Si el tamaño de la muestra es par, es la media de los valores del centro.

**Ejercicios.**

1. El gráfico muestra la distribución de los productos cultivados en un país determinado.




De acuerdo a la información del gráfico, ¿Cuál de estas afirmaciones es verdadera?

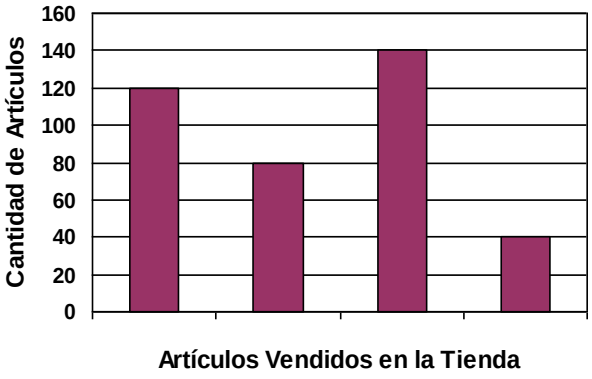
___ Se cultiva más vegetal que arroz.

___ Más de la mitad de los cultivos del país son de caña.

___ Más de un tercio de los cultivos del país son de vegetales.

___ El total de los cultivos de vegetales y arroz es mayor que el cultivo de caña.

2. El gráfico muestra el número de bolígrafos, lápices, reglas y gomas de borrar vendidas en una tienda en una semana.




El nombre de los artículos no está incluido en el gráfico. Los bolígrafos fueron los artículos que más se vendieron y las gomas de borrar fueron los artículos que menos se vendieron. Se vendieron más lápices que reglas. ¿Cuántos lápices se vendieron?

Seleccione la respuesta correcta:

40 80 120 140

3. Se realiza una encuesta a un grupo de jóvenes sobre su preferencia en materia de deportes y se obtienen los datos siguientes.

| Deportes | Preferencias |
|---|---|
| Pelota | 40% |
| Voleibol | 25% |
| Baloncesto | 25% |
| Otros deportes | 5% |
| Ningún deporte | |

a) Completa la tabla.
b) Representa mediante una gráfica circular los datos.
c) Sabiendo que la encuesta se realizó a 800 jóvenes. ¿Cuántos estudiantes prefieren cada deporte?

4. El profesor ha pedido que calculen la mediana de los siguientes datos:

16; 18; 5; 3; 12; 15.

Elena calcula y responde 4

Marcos calcula y responde 19.

¿Cuál de los dos tiene la respuesta correcta? Responde sin hacer cálculos

5. Determina la moda de los datos siguientes.

a) 12; 11; 11; 15; 9; 11; 9; 6; 9; 9; 4; 5; 5.

b) b + 1; c; n; a; y; a; a + 1; b + 1.

c) n; n + 1; n; 2 – n; n + 1; 1 + n.

6. Determina la mediana de los datos siguientes.

a) 0,84; 1,3; 18; 0,7; 1,26; 15,09; 15,2; 0,82.

b) $\frac{3}{8}a$;  6 a;  $\frac{2}{3}a$;  a;  2 a.

c) a + 7;  a + 1;  a + 12;  a – 1;  a – 3.

7. Indica si son verdaderas o falsas las proposiciones siguientes:

___ La moda es siempre igual a la mediana.

___ La media aritmética es siempre distinta de la mediana.

___ La moda es siempre distinta de la mediana y de la media.

___ Moda, media y mediana pueden ser iguales.

8. En la tabla aparecen las calificaciones de 15 alumnos de un grupo de 9no grado en Matemática.

| **Calificaciones** | **Cantidad de alumnos** |
|---|---|
| 6 | 1 |
| 7 | 2 |
| 8 | 2 |
| 9 | 4 |
| 10 | 1 |

a) El promedio de las calificaciones obtenidas por los alumnos fue de:

8,2 puntos  8 puntos  9 puntos  9,5 puntos

b) ¿Qué tanto por ciento de los alumnos tiene notas iguales o inferiores a 8?

c) ¿Qué tanto por ciento de los alumnos tiene notas superiores a 7?

d) Determine la moda y la mediana.

9. Se pregunta a varios estudiantes de un IPUEC por el número de calzado que llevan en esos momentos y se recogen los datos siguientes:

**41  39  40  43  36  37  42  35  38  40**

**38  36  39  37  41  38  34  37  42  41**

**37  38  35  39  42  39  38  39  39  40**

a) ¿Cuál es la población?

b) Confecciona la tabla de frecuencias.

c) ¿Cuántos alumnos calzan el 38?

d) Determina cuántos alumnos calzan menos de un 40, y de ellos cuántos calzan un número menor o igual que 38.

e) ¿Cuál es el tamaño de la muestra?

f) ¿Qué tanto por ciento de estudiantes calzan el 39, el 40 y el 41?

g) Determina la media, la moda y la mediana.

h) Construye el gráfico de barras correspondiente.

10. La media de las edades de Ángel y José es 24 años. Si José tiene 18 años, entonces Ángel tiene:

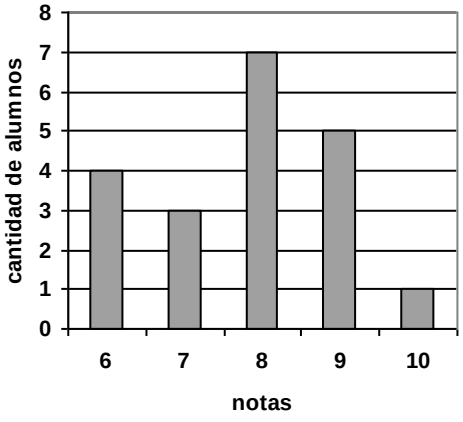
    6 años  30 años  13 años

11. La media de las edades de Carlos y Roberto es 15 años. La media de las edades de Carlos y Ana es 26 años. La media de las edades de Ana y Roberto es 18 años.

    Entonces Carlos tiene:

    18 años  23 años  13 años

12. A partir de la gráfica que aparece, donde se muestran las calificaciones obtenidas por un grupo de alumnos de Secundaria Básica que participaron en un concurso de Matemática ,responde:




a) Identifica el tipo de gráfica

b)¿Cuántos alumnos participaron en el concurso?

c) ¿Cuál es la moda?

d) Construye una tabla de frecuencias.

e) Halla el promedio de notas.

f) Determina la mediana.

g) ¿Qué por ciento de alumnos obtuvo notas superiores a 8 puntos?

13. La tabla representa los datos por grupos de edades y sexo de las personas de una cierta localidad que han sufrido un accidente doméstico.

| Edades de | Hombres | Mujeres |
|---|---|---|
| 0 - 4 | 843 | 628 |
| 5 – 9 | 623 | 566 |
| 10 – 14 | 422 | 641 |
| 15 – 24 | 1140 | 698 |
| 25 – 44 | 1430 | 1525 |
| 45 - 54 | 1028 | 901 |
| 55 – 64 | 1180 | 2405 |
| 65 – 74 | 892 | 1014 |
| 75 ó más | 1390 | 3041 |

a) Representa los datos correspondientes a las mujeres en una gráfica poligonal y los datos de los hombres en una gráfica de barras.
b) Representa ambos datos en una misma gráfica de barras (representando los datos en por ciento)
c) ¿En qué grupos de edades las mujeres sufren menos accidentes que los hombres?
d) ¿Qué tanto por ciento representan las mujeres accidentadas respecto al total de accidentados?

14. Los datos siguientes fueron extraídos del tabloide de Geografía Universal.

| País | Población Año 2000 | Mortalidad infantil | Área en $km^2$ |
|---|---|---|---|
| Cuba | 11 217 000 | 7,1 | 110 920 |
| E. Unidos | 275,6 millones | 7,3 | 9 372 814 |
| Perú | 27 136 000 | 43 | 1 285 815 |
| El Salvador | Seis millones trescientos ochenta mil | 35 | 21 041 |
| Haití | 6 420 000 | 103 | 27 750 |

a) Escribe con cifras la población de El Salvador.

b) Escribe como se lee la extensión territorial de El Salvador y la tasa de mortalidad infantil de Cuba.

c) Ordena de menor a mayor los países según su extensión territorial.

d) ¿Cuántas veces es mayor la mortalidad infantil de Haití respecto a la de Cuba?

e) ¿Cuántas veces está contenido el territorio de Cuba en el de Estados Unidos?

f) ¿En cuánto excede la población de Haití a la de El Salvador?

g) ¿En cuánto excede el área territorial de Perú a la de Cuba?

h) Representa los índices de mortalidad infantil en un gráfico de barras.

15. Analiza los datos de la tabla siguiente, ellos corresponden al año 2000.

| **País** | **Población** | **Mortalidad infantil** | **Superficie en km²** |
|---|---|---|---|
| Cuba | 11 217 000 | 7,1 | |
| Angola | 12 870 000 | 19 | 1 245 700 |
| Japón | 128 876 000 | 8 | |
| Grecia | 10 596 000 | 10,4 | 131 957 |

a) Revisa en la biblioteca y completa los datos.

b) Escribe con palabras la cantidad de habitantes de Japón

c) Se sabe que el tanto por ciento de analfabetismo es de 59 en Angola y de 0,01 en Japón, esto significa que:

En Angola son analfabetos:

___1 por cada 59 habitantes ___ 59 de cada 100 habitantes

___ 59 por cada 1000 habitantes ___ ninguno de los anteriores

En Japón son analfabetos:

___1 de cada 10 habitantes ___ 10 de cada 1000 habitantes

___10 de cada 100 habitantes ___ ninguno de los anteriores

d) Ordena los países por población de menor a mayor.

e) Investiga a qué se llama densidad de población.

f) Analiza la densidad de población de los países que aparecen en la tabla y extrae conclusiones.

g) Construye una gráfica de barras donde se refleje la mortalidad infantil de los países de la tabla.

## 1.2 Potenciación y radicación en los números racionales.

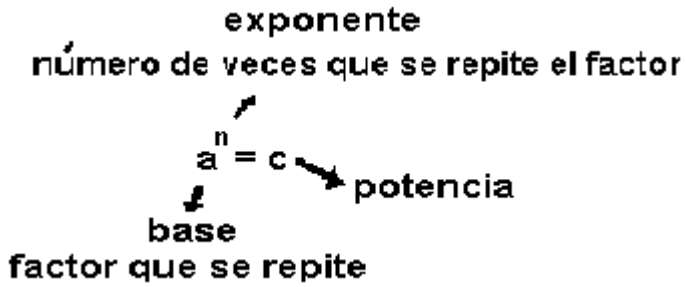
En este epígrafe ampliarás tus conocimientos sobre las potencias al caso de exponente entero; también conocerás otras propiedades de las potencias y la notación científica. Aprenderás cómo utilizar las tablas para calcular los cuadrados, cubos, raíces cuadradas y cúbicas de números mayores que 100 y entre cero y uno.

Como elemento central en este epígrafe se hace otra ampliación de los dominios numéricos; se introducen los números irracionales y se define el conjunto de los números reales.

Recordarás de grados anteriores que:

La operación de calcular la potencia se llama potenciación

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n factores}}$ y si $n = 1$ entonces $a^1 = a$.




Una potencia de base positiva siempre es positiva.

Una potencia de base negativa, es positiva si el exponente es par y es negativa si el exponente es impar.

Ejemplos

$3^3 = 27 \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \qquad (-2)^3 = -8 \qquad (-1{,}2)^2 = 1{,}44$

Propiedades de las potencias.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n} \qquad a \neq 0$

También se cumplen otras propiedades tales como:

$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \qquad a \in Q, m, n \in Z$

$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m \quad a, b \in Q\ ;\ m \in Z$

$a^m : b^m = (a:b)^m \quad a,b \in Q; b \neq 0;\ m \in Z$

$a^0 = 1 \qquad (a \in Q;\ a \neq 0) \qquad a^0 = a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} = 1 \qquad (a \in Q;\ a \neq 0)$

$a^{-K} = \frac{1}{a^k} \qquad (a \in Q;\ a \neq 0;\ k \in N) \quad a^{-K} = a^{0-k} = \frac{a^0}{a^k} = \frac{1}{a^k} \qquad (a \in Q;\ a \neq 0;\ k \in N)$

Ejemplos:

- $\left(-2^3\right)^2 = (-2)^6 = 64$
- $(0{,}5)^2 . 3^2 = (1{,}5)^2 = 2{,}25$
- $10^3 : (-2)^3 = (-5)^3 = -125$
- $\left(\frac{1}{8}\right)^0 = 1$
- $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
- $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 3^2 = 9$

Para escribir números muy grandes o muy pequeños “en una forma breve” utilizaremos la llamada **notación científica ó exponencial**.

Se expresa como el producto de un número mayor ó igual que 1 y menor que 10 y una potencia de 10.

$a \,.\, 10^k \qquad 1 \leq a < 10 \qquad k \in Z$

Por ejemplo:

a) $574{,}72 = 5{,}7472 \cdot 10^2$

b) $0{,}0053 = 5{,}3 \cdot 10^{-3}$

Observa que se corre la coma decimal (hacia la izquierda o hacia la derecha) todos los lugares que se necesitan para obtener el número mayor o igual que 1 y menor que 10 y se multiplica ese número por una potencia de 10.

**Cálculo de cuadrados, cubos, raíces cuadradas y cúbicas**

Ya conoces cómo encontrar los cuadrados y cubos de los números del 1,00 al 9,99 lo cual estudiaste en 7mo grado y sabes que la mayoría de ellos son valores aproximados que tienen cuatro cifras correctas en la tabla.

En la práctica se nos presentan situaciones en las cuales los números que trabajamos son mayores que 10 o que están entre 0 y 1 y queremos calcular su cuadrado o cubo. Para resolver esta situación tenemos que hacer uso de la notación científica y de las propiedades de la potencia.

Ejemplo:

$(42,8)^2$ se escribe en notación científica $(4,28 \cdot 10)^2$

aplicando propiedades de las potencias $(4,28)^2 \cdot 10^2$

pero $(4,28)^2 \approx 18,23$ luego $(4,28)^2 \cdot 10^2 \approx 18,23 \cdot 100 \approx 1823$

Para determinar el cubo de un número, con las características anteriores, se procede en forma análoga.

Analicemos ahora el procedimiento para determinar la raíz cuadrada de números que son mayores que 10 y que están entre 0 y 1.

Debemos descomponer el número como el producto de un número que aparezca en la tabla por una potencia de 10 que sea de exponente par y luego aplicamos las propiedades de las potencias.

Ejemplo:

$$\sqrt{0,1843} = \sqrt{18,43.10^{-2}} = \sqrt{18,43}.\sqrt{10^{-2}} \approx 4,29.10^{-1} \approx 0,429$$

ya que $\sqrt{18,43} \approx 4,29$ y $\sqrt{10^{-2}} = \sqrt{\frac{1}{10^2}} = \frac{1}{10} = 10^{-1}$

Observa que si lo que tienes que determinar es la raíz cúbica, entonces escribirás el número como el producto de un número que aparezca en la tabla por una potencia de 10 cuyo exponente sea divisible por 3.

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{0,1431} = \sqrt[3]{143,1.10^{-3}} = \sqrt[3]{143,1}.\sqrt[3]{10^{-3}} \approx 5,23.10^{-1} \approx 0,523$$

Ya estás en condiciones de calcular los cuadrados, cubos raíces cuadradas y cúbicas siguientes:

$(52,4)^2$ ; $(743,5)^2$ ; $(81,4)^3$ ; $(0,471)^3$ ; $(-3,25)^2$ ; $(-5,1)^3$

$\sqrt{538,4}$ ; $\sqrt{0,048}$ ; $\sqrt[3]{9748}$ : $\sqrt[3]{-18,19}$ ; $\sqrt[3]{-0,1283}$

Recuerda que para calcular harás uso de la notación científica para localizar las cifras en la tabla, también ya puedes calcular potencias de base negativa y raíces cúbicas de números negativos, no así las raíces cuadradas de números negativos pues en R no puede realizarse la operación de radicación constituyendo esto una limitación de este conjunto numérico.

También habrás llegado a la conclusión de que:

- La potenciación y la radicación son operaciones inversas.
- Existen raíces de números racionales que no son números racionales, pues son números que se representan mediante expresiones decimales infinitas no periódicas, como por ejemplo: $\sqrt{2}=1{,}4142136662\ldots$, $\sqrt{3}$ ; $\sqrt{7}$ , entre otros.
- La unión del conjunto de los números representados por las expresiones decimales infinitas no periódicas se denomina conjunto de los números **irracionales** y se simboliza por $\mathrm{I}$.
- Los números racionales y los números irracionales forman el conjunto de los números reales R. Este es el conjunto numérico más amplio que estudiarás en la Secundaria Básica.
- Se cumple que:

$$\mathrm{N} \subset \mathrm{Q}_{+} \subset \mathrm{Q} \subset \mathrm{R}$$

$$\mathrm{N} \subset \mathrm{Z} \subset \mathrm{Q} \subset \mathrm{R}$$

$$\mathrm{I} \subset \mathrm{R}$$

- Los números reales cubren toda la recta numérica, es decir, a cada punto de la recta corresponde exactamente un número real que puede ser racional o irracional y viceversa.

**Ejercicios**

1. Calcula:

a) $\dfrac{2^{-3}\cdot 2^{8}}{\left(2^{2}\right)^{3}}$ b) $\dfrac{\left(0{,}2^{2}\right)^{-3}\cdot 0{,}2^{10}}{0{,}2^{5}}$ c) $3^{0}\left(\dfrac{3^{15}}{3^{16}}\right)^{2}$ d) $\dfrac{2{,}5^{-3}\cdot\left(2^{-1}\right)^{3}}{5^{-2}}+3^{0}$

e) $\dfrac{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2}\cdot 9}{27}$ f) $\dfrac{7{,}5\cdot 10^{96}}{4^{-1}\cdot 10^{97}}$ g) $9+10\dfrac{(0{,}6)^{421}}{(0{,}6)^{419}}$ h) $\left(10^{-1}\right)^{2}+7\left(10^{-1}\right)$

2. Ejercicio 6 LT. 9no grado página 204.
3. Selecciona en cada caso la respuesta correcta.

a) Al simplificar la fracción $\dfrac{10^{3}\cdot 3}{4^{3}\cdot 25^{2}}$ se obtiene la fracción irreducible:

$\frac{2^3 \cdot 5^3 \cdot 3}{2^6 \cdot 5^4}$ $\frac{3}{40}$ $\frac{3}{2^5 \cdot 5}$ No se puede simplificar porque los factores que intervienen son distintos.

b) $\frac{10^6 - 10^4}{10^4}$ es igual a:

$10^2 - 10$ $10^2 - 10^4$ 99 $10^6$

c) El resultado de calcular $\frac{10^6 - 10 \cdot 10^5}{10^2}$ es igual a:

$10^{-2}$ $10^0$ $\frac{1}{100}$ 0

d) Al simplificar la fracción $\frac{3^8 \cdot 2^2 - 3^8}{3}$ se obtiene:

$3^8$ $3^7 \cdot 2^2 - 3^7$ $\frac{2^2}{3}$ 0

4. Simplifica las expresiones siguientes dando el resultado.

i. De forma que todos los exponentes sean positivos.

ii. De forma que no aparezca cociente de potencias.

a) $\frac{6 \cdot 3^3 \cdot 35^2}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^7 \cdot 7^3}$ b) $\frac{a^2 \cdot b^{-3} \cdot c^{-4}}{a^{-1} \cdot b^{-2} \cdot c^{-6}}$

5. Escribe en notación científica las distancias siguientes:

| | |
|---|---|
| Tierra – Sol | ciento cincuenta millones de kilómetros. |
| Tierra – Alfa Centauro | $40 \cdot 10^5$ m |
| Tierra – Galaxia Audio Media | $760 \cdot 10^{16}$ Km |
| Radio medio de La Tierra | 6 370 000 m |

6. El diámetro de la Luna es aproximadamente $0{,}34 \cdot 10^7$ m, y el de la Tierra es $12{,}7 \cdot 10^6$ m. Escribe los datos en notación científica. ¿Cuántas veces mayor es el diámetro de la Tierra que el de la Luna?

7. Si calculamos el valor numérico de $A = \frac{987 : 1{,}4}{2^{-62} \cdot 5^{-62}}$ y lo expresamos en notación científica, obtenemos:

$7{,}5 \cdot 10^{60}$ $7{,}05 \cdot 10^{60}$ $7{,}5 \cdot 10^{62}$ $7{,}05 \cdot 10^{64}$

8. Calcula:

a) $\frac{-2{,}5 \cdot 10^{-5}}{0{,}000015}$ b) $\frac{0{,}000002}{10^{-3} \cdot 10^{-2}}$ c) $\frac{7{,}2 \cdot 10^{-2} - 36 \cdot 10^{-3}}{0{,}0018}$ d) $\frac{0{,}02 \cdot 10^{-6} \cdot 48 \cdot 10^{5}}{4000 \cdot 50 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}6 \cdot 10^{-5}}$

9. Sean:

a) m = 6956 n = 0,785 p = 4627 Calcula $\sqrt{m} + 2\sqrt{n} - \sqrt[3]{p}$

b) x = 840 y = 8357 z = 0,4137 Calcula $\frac{x^2 - \sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}$

10. Avogadro descubrió que en $22{,}4$ L de cualquier gas en condiciones normales, hay $6{,}02 \cdot 10^{23}$ moléculas de ese gas.

a. ¿Cuántas moléculas de gas puede contener una pelota de tenis de $112$ $cm^3$?

b. Una persona inspira $3{,}36$ L de aire y tarda en la inspiración 2 segundos. ¿Cuántas moléculas de aire ha inspirado por cada segundo, suponiendo que esta se realiza de forma uniforme?

11. Si en un rectángulo la base mide $\sqrt{5}$ cm y su altura mide $2\sqrt{5}$ cm, entonces la medida de la diagonal es un número:

entero positivo irracional positivo diferente de cero

12. Dibuja rectángulos y cuadrados cuya diagonal mida en centímetro:

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{4} = 2$ d) $\sqrt{8}$

13. Si la diagonal de un cuadrado mide $5$ m, entonces el lado tiene como medida en metros:

un número irracional positivo. el lado y la diagonal miden lo mismo. no se puede trazar dicho cuadrado.

14. La superficie de Brasil es de 8,5 . $10^6$ $Km^2$. En el año 1980 la población era de 12. $10^7$ personas. En un reparto equitativo de la superficie le correspondería:

A cada persona $\frac{8{,}5}{120}$ $Km^2$. A cada persona $\frac{85}{12}$ $Km^2$.

A cada kilómetro $\frac{85}{12}$ personas. A cada $Km^2$ $\frac{120}{8{,}5}$ personas.

15. Dí a qué conjunto numérico más restringido pertenecen los siguientes números:

a) $-\frac{3}{4}$ e) 1000 i) $\pi$ n) 12741

b) $\sqrt{7}$ f) $-\frac{10}{2}$ j) $1\frac{4}{5}$ m) 3,3166247….

c) 8,33 g) -12,73737373…. k) - 5,2 ñ) - $\sqrt{25}$

d) $2,\overline{7}$ h) 0,43 l) $\sqrt{16}$ o) - 32678

16. El desarrollo de la expresión $\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^6\left[\left(\frac{1}{a}\right)^{-1}\right]^2}{\left(\frac{0,001}{1,5}\right)^0\left(\frac{1}{a}\right)^5}$ siendo $a \neq 0$ es igual a:

$a^9$ a $\frac{1}{a}$ 0,006a

17. Sabiendo que si $a^x = b^x$ es porque a = b y además que si $a^x = a^y$ es porque x = y

$a > 0$, $b > 0$ y ambos diferentes de 1.

Halle el valor de la variable en cada caso:

a) $\frac{2^8.2^3}{8^4}\cdot a = 4$ b) $\frac{\left(m^2\right)^3.m^{-4}}{m^4} = \frac{1}{16}$

c) $\left(5^2\right)^x = 5^{-3}\cdot 5^4$ d) $\frac{m^{120}\cdot\left(m^{-2}\right)^{35}}{m^{29}} = \left(1-\frac{2}{5}\right)\left(\frac{0,0000000025}{10^{-9}}\right)$

18. Se sabe que la media de tres números es $2,5 . 10^4$. Siendo dos de los números $1,2. 10^4$ y $5,6 . 10^4$, entonces el tercer número escrito en notación científica es:

$0,7.10^4$ $1,8 .10^4$ $7,0.10^3$ Ninguno de los anteriores

# Unidad 2

# Proporcionalidad, función y ecuación

## Introducción

Un poco de historia a cerca de las proporciones, las funciones y las ecuaciones cuadráticas...

La teoría de las proporciones fue desarrollada por el gran matemático griego Eudoxio, que nació en la ciudad de Cnido en el Asia Menor en el año 408 a.n.e. Su obra original no llegó hasta los tiempos actuales, pero gracias a uno de los más ilustres sucesores, Euclides de Alejandría se pudo conocer dicha teoría, pues la recogió en su libro V de los Elementos.

Igualmente el concepto de función está implícito en las matemáticas de las primeras civilizaciones y ello puede inferirse del estudio de las tablillas de barro babilónicas de la colección Plimpton, que datan del año 1900 a.n.e. Este concepto se conserva a lo largo de la historia de la matemática, así René Descartes (1596- 1652) en su geometría muestra que tiene la idea intuitiva de función. Sin embargo la palabra función no surge hasta que el matemático alemán W. G. Leibniz (1646- 1716) la utilizara para designar la dependencia entre los valores de las abscisas y los puntos de la representación gráfica.

Los problemas que conducen a ecuaciones cuadráticas, datan de fechas muy remotas, y así consta en las tablillas aritméticas de los babilonios en el año 2000 a.n.e y en los papiros egipcios del año 1650 a.n.e. Los babilonios resolvían estas ecuaciones mediante completamiento del cuadrado y con el uso de ciertas fórmulas generales, ya en el siglo VI a.n.e., la escuela de Pitágoras aplicaba el método griego del álgebra geométrica a través del cálculo de áreas y luego los discípulos del filósofo Plaska (424-347) a.n.e. los resolvían utilizando proporciones. Todos estos métodos fueron evolucionando hasta los que se utilizan hoy en día.

En esta unidad repasarás los conceptos de proporción, proporcionalidad directa e inversa los cuales aplicarás a la resolución de problemas, también conocerás el concepto de función y profundizarás en la función lineal, sus características y propiedades las cuales aplicarás en la interpretación de situaciones de la vida que se grafican a través de funciones lineales. También profundizarás en el tecnicismo

algebraico el cual aplicarás a la resolución de ecuaciones de segundo grado y problemas.

**2.1 La proporcionalidad directa e inversa.**

En este epígrafe recordaremos aquellos conceptos y propiedades relacionadas con la proporcionalidad directa e inversa, que bien aplicados permiten resolver diversos problemas prácticos.

En grados anteriores estudiaste que:

La razón de dos cantidades no es más que una **división indicada** *o* **fracción** y para hallar la razón de dos cantidades, formas el cociente entre ellas y lo puedes simplificar tanto como sea posible. La razón entre a y b es $\frac{a}{b}$ ó es a : b ($b \neq 0$).

Además recordarás que:

> La igualdad entre dos razones, recibe el nombre de proporción.

Y que en toda proporción se cumple que:

> El producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Por ejemplo:

$\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$ forman una proporción porque $\begin{array}{c} 3 \bullet 15 = 9 \bullet 5 \\ 45 = 45 \end{array}$

Esta propiedad te será muy útil para calcular un término, conocidos los tres restantes.

Por ejemplo:

Para hallar el valor de x en: $\frac{x}{9} = \frac{6}{27}$ ; basta aplicar la propiedad anterior, denominada, **propiedad fundamental de las proporciones** y despejar la variable x, como se muestra a continuación:

$$x \bullet 27 = 9 \bullet 6$$
$$x = \frac{54}{27}$$
$$x = 2$$

En grados anteriores, también analizaste muchas situaciones de la vida práctica en las que el valor o cantidad de una magnitud depende del valor de otra, lo cual te fue útil para comprender los conceptos de proporcionalidad directa e inversa

Por ejemplo:

La siguiente tabla, muestra la variación del costo (en pesos) del arroz liberado en los mercados estatales:

| Libras de arroz | 1 | 2 | $3\frac{1}{2}$ | 5 |
|---|---|---|---|---|
| Costo (en pesos) | 3,50 | 7,00 | 12,25 | 17,50 |

Si observas la tabla anterior, verás que cuando **aumenta** la cantidad de libras de arroz **aumenta** el costo, y que las razones entre dos cantidades y sus correspondientes son iguales luego:

Recordemos que:

Cuando dos magnitudes están relacionadas de modo que los valores de una de ellas se obtienen multiplicando por un mismo número los valores correspondientes de la otra, se dice que son **directamente proporcionales**:

En una proporcionalidad directa dos cantidades cualesquiera de una magnitud y sus correspondientes en la otra, forman una proporción.

Recordarás también, que en este ejemplo, el factor de proporcionalidad es 3,50 pues es el número por el cual se multiplica cada cantidad de libras de arroz para obtener su costo. Observa que el factor de proporcionalidad **es el valor correspondiente al 1** y lo puedes obtener dividiendo cualquier cantidad de la segunda magnitud entre su correspondiente de la primera.

Por ejemplo: $\frac{3,50}{1} = 3,50$ $\frac{7,00}{2} = 3,50$

También recordarás que existen otras formas de relaciones entre magnitudes, en las que el comportamiento es diferente al del ejemplo anterior dado de proporcionalidad directa.

Por ejemplo:

La siguiente tabla muestra la variación del tiempo (en horas) que demora un móvil en realizar un viaje para diferentes valores de la velocidad:

| Velocidad a la que viaja un móvil (km/h) | 20 | 40 | 64 | 80 |
|---|---|---|---|---|
| Tiempo que demora el viaje (en horas) | 4 | 2 | 1,25 | 1 |

Si observas la tabla anterior, verás que en este caso al **aumentar** la velocidad del móvil, el tiempo que demora en llegar a su destino **disminuye,** y si **duplica** su velocidad, el tiempo **se reduce a la mitad**. Además los valores del tiempo se obtienen multiplicando por 80 los recíprocos de la velocidad.

De ahí que:

Cuando dos magnitudes están relacionadas de modo que los valores de una de ellas se obtienen multiplicando por un mismo número los recíprocos de los valores correspondientes de la otra magnitud, se dice que son **inversamente proporcionales**.

Recordarás también, que el número por el cual se multiplica cada recíproco se llama **factor de proporcionalidad inversa.** En el ejemplo anterior el factor es 80 y para calcularlo basta multiplicar dos valores correspondientes cualesquiera y por ello es el valor que corresponde a 1.

También podrás observar que la razón entre dos valores de una magnitud y el recíproco de la razón de sus correspondientes forman una proporción.

Por ejemplo: $\frac{20}{40} = \frac{2}{4}$ ; $\frac{40}{80} = \frac{1}{2}$

Diversos problemas de la vida, de otras ciencias, en arte y la técnica, se resuelven aplicando los conceptos de proporcionalidad directa e inversa; por ejemplo:

1) Un ómnibus interprovincial Habana- Santiago de Cuba, recorre 200km en dos horas y media con una velocidad constante. ¿Qué distancia recorrerá en 6 horas manteniendo las mismas condiciones?

Para resolver el problema primeramente vamos a ser un análisis del texto para valorar que se trata de una proporcionalidad directa de acuerdo a las condiciones que plantea el texto y a partir de ahí, denotar por x la distancia que debe recorrer el ómnibus en 6 horas.

Esta situación la podemos presentar en una tabla como la siguiente:

| | | |
|---|---|---|
| Distancia (Km) | 200 | x |
| Horas (h) | 2,5 | 6 |

Como dos valores de una magnitud y sus correspondientes en la otra, forman una proporción, podemos plantear la siguiente igualdad y calcular el término desconocido.

$$\frac{200}{x} = \frac{2,5}{6}$$

$$x \cdot 2,5 = 200.6$$

$$x = \frac{1200}{2,5}$$

$$x = 480$$

Respuesta: En 6 horas, el ómnibus recorre 480km.

Analicemos ahora otra situación muy parecida, pero en condiciones diferentes.

1) Un ómnibus interprovincial Habana- Santiago de Cuba, que se desplaza con una velocidad constante de 70 km./h, demora en llegar a su primer punto de reabastecimiento de combustible, 5 horas, ¿Qué tiempo demoraría en llegar al mismo punto, si se desplazara a una velocidad de 100 km/h?

De la misma forma que en el ejemplo 1 primeramente vamos a hacer un análisis preliminar y valorar que se trata de una proporcionalidad inversa, denotar por x, el tiempo que demorará en llegar el ómnibus al mismo punto si se desplazara a una velocidad de 100 Km./h

Esta situación también la podemos presentar en una tabla como la siguiente

| | | |
|---|---|---|
| Velocidad (Km/h) | 70 | 100 |
| Tiempo(h) | 5 | x |

Formamos la proporción igualando la razón entre los valores de una magnitud con el recíproco de la razón entre sus valores correspondientes, como lo indican las flechas.

$$\frac{70}{100} = \frac{x}{5}$$

$$x = \frac{70 \bullet 5}{100}$$

$$x = \frac{350}{100} = 3{,}5$$

Respuesta: A una velocidad de 100 km/h el ómnibus llegará en tres horas y media.

Es importante que compares ambos procedimientos y antes de resolver el problema identifiques de acuerdo a la relación que se establece entre las magnitudes, si debes aplicar la proporcionalidad directa o inversa.

**Ejercicios:**

1. Halla la razón entre:

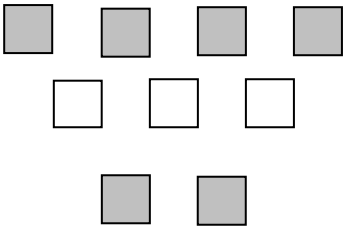
a) 40 y 5 b) 8,4 y 0,2 c) $\frac{1}{4}$ y 8

2. Busca tres pares de números que estén en la razón

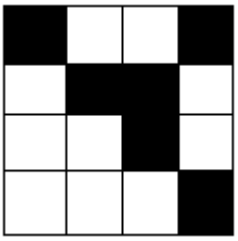
a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{12}{3}$

3. Halla la razón entre el número de cuadraditos blancos y el de cuadraditos negros.

a)



b)



4. En qué razón se encuentran:

a) Las edades de dos jóvenes de 16 y 18 años respectivamente.

b) Las longitudes de dos segmentos $\overline{AB} = 15\,\text{cm}$ y $\overline{CD} = 5{,}0\,\text{cm}$

c) El área de dos triángulos que miden 20 $dm^2$ y 4000 $mm^2$.

d) Las amplitudes entre los ángulos $\alpha$ y $\beta$, si $\alpha$ es un ángulo llano y $\beta$ un ángulo recto.

5. Selecciona cuáles de los pares de números dados están en la razón 5 es a 1.

   a) 7 y 2  b) 15 y 3  c) 20 y 5

6. Selecciona cuáles de los pares de razones siguientes forman una proporción.

   a) $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{5}$  b) 30: 2 y 15: 3  c) $\frac{5}{10}$ y $\frac{0,2}{0,4}$

7. Calcula el valor de a en las siguientes proporciones.

   a) $\frac{a}{4} = \frac{5}{2}$  b) 1,2 : 0,4 = a : 2,5  c) $\frac{0,7}{4} = \frac{3\frac{1}{2}}{a}$  d) $\frac{80}{a} = \frac{a}{20}$

8. En una secundaria básica hay 280 pioneros categorizados como pioneros Mambí. Si la razón entre los categorizados como Mambí y Rebelde es 4: 3. ¿Cuántos pioneros están categorizados como Rebeldes?

9. En una acampada pioneril, la razón del número de varones y de hembras es de $\frac{5}{6}$. Si hay 126 hembras. ¿Cuántas hembras más que varones hay en la acampada?

10. En un juego de baloncesto por cada 7 tiros se anotaron 3 canastas. Si en total hubo 63 tiros. ¿Cuántas canastas se dejaron de anotar?

11. Cinco de cada seis personas que asistieron a una base de campismo son adultos. Si asistieron 55 adultos. ¿Cuántas personas asistieron al campismo?

12. Cuando María abrió su alcancía encontró que tenía 63 monedas entre medios y pesetas. Si por cada 7 monedas hay 4 medios. ¿Qué cantidad de dinero había en la alcancía? (ten en cuenta que todas las pesetas son de 20 centavos).

13. Identifica si en las siguientes tablas, se representan magnitudes directamente o inversamente proporcionales. Justifica en cada caso y de ser posible halla el factor de proporcionalidad:

a)

| Velocidad( en km/h) | 100 | 50 | 40 | 33 1/3 | 25 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tiempo (en h) | 1 | 2 | 2,5 | 3 | 4 | 5 |

b)

| Distancia (en km) | 2 | 3,5 | 4 | 10 | 13 | 15,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| tiempo (en horas) | 0,5 | 1 | 2 | 3 | 4,5 | 5 |

c)

| Resistencia (Ω) | 0,5 | 1 | 2 | 5 | 10 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Intensidad (A) | 400 | 200 | 100 | 50 | 20 | 5 |

d)

| Salario(en $) | 7.50 | 30 | 82.50 | 105 | 150 | 180 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| tiempo de trabajo (h) | 5 | 20 | 55 | 70 | 100 | 120 |

14. Selecciona en cada caso la respuesta correcta.

a) Un cuerpo de cobre de $1dm^3$ de volumen tiene una masa de 8,9kg. Un objeto de cobre con una masa de 53,4kg, tiene un volumen de:

$6,0dm^3$ $475,26dm^3$ $60dm^3$ $47526dm^3$

b) Una escuela se reparó por 10 hombres en 6 días. Se necesita pintarla en 4 días laborando al mismo ritmo de trabajo, entonces la cantidad de hombres que se necesita para pintarla es:

2 8 12 15

c) Un niño recorre del brazo de su padre cierta distancia. La tabla siguiente muestra la longitud del paso de cada uno de ellos al caminar y la cantidad de pasos que dio el niño

| | Longitud del paso | Cantidad de pasos |
|---|---|---|
| Niño | 20 cm | 120 |
| Padre | 50 cm | |

El dato que faltó en la tabla es:

300 48 480 60

d) Un ciclista recorre 54km en 3 horas, si le faltan por recorrer 72km. ¿Cuántas horas en total se tardará?

4h 1,28h 7h 2268h

e) Una Brigada de 9 mecánicos puede realizar un trabajo en 45 horas. ¿En qué tiempo pueden realizar este trabajo con 6 mecánicos más?

27h 75h 67,5h 30h

## 2.2 La función lineal

En este epígrafe se introduce uno de los conceptos más importantes entre todos los conceptos matemáticos que se estudian en la escuela, **el concepto de función** que bien comprendido te permitirá aplicarlo para explicar y describir determinados fenómenos que se dan en la Economía, la Física, la Química, las Ciencias Sociales, el Arte, la Técnica y otras.

Una **función f** es una correspondencia que a cada elemento de un conjunto A, asocia un único elemento de un conjunto B. Se denota f: A ⟶ B

Al conjunto A se le denomina **dominio** de la función y a sus elementos se les llama argumentos o preimágenes. A los elementos de B que son correspondientes de algún elemento de A se les llama **imágenes y** al conjunto de ellos se le denomina **conjunto imagen o codominio**

x es el argumento o preimagen

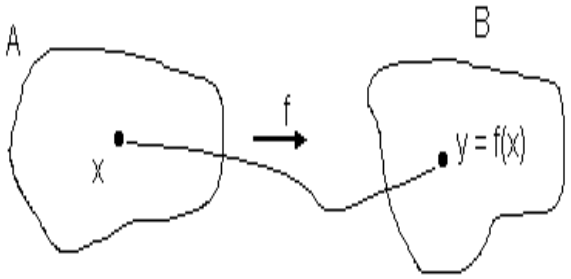
f (x ) = y es la imagen

La variable **y** depende de la variable **x**.

De donde podemos decir que:

**x** es la variable independiente.

**y** es la variable dependiente.




Las funciones se pueden representar a través de:

Diagramas de Venn; tablas; gráficos cartesianos; ecuaciones y en forma descriptiva.

### La función como un proceso

Una función es algo como una máquina donde entra un objeto x del dominio de la función (conjunto de partida), el cual es transformado de acuerdo con una **ley** y después sale la correspondiente imagen f (x).

En esta máquina resulta que:

- siempre que se introduce un objeto tiene que salir una imagen.
- siempre que se repite la introducción del mismo objeto tiene que salir la misma imagen.

**Ejercicios**

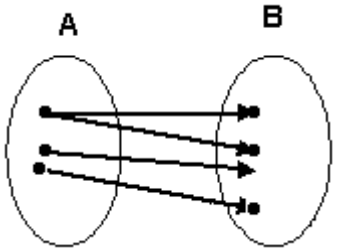
1. Identifica cuáles de las siguientes correspondencias son funciones. Fundamenta tu respuesta.

a) La correspondencia definida de R en A = {-3; -2; 0; $\frac{1}{2}$} por la ecuación y = $\frac{x}{2}$ con $x \in R$; $y \in A$.

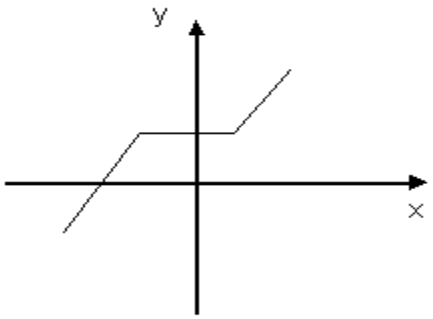
b)

| x | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| y | 0 | 1 | 2 | 3 |

c)




d)




2. De las siguientes afirmaciones di cuales son falsas. Justifica tu respuesta.

a) Una función está definida si se conoce la ecuación que la define.

b) La tabla siguiente representa una función.

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

c) Cualquier gráfico representado en un sistema de ejes de coordenadas, representa una función.

d) La ecuación $y = x^2$, puede definir una función en que x es la variable independiente y, y la variable dependiente.

e) La correspondencia definida en el dominio de los números naturales en que a cada número natural se la hace corresponder su opuesto.

f) El dominio de la función f dada por la ecuación $f(x)=\frac{1}{x}$ es R

3. La siguiente tabla muestra el tiempo t (en minutos) empleado por una máquina textil para producir x centímetros de tejido.

| t | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 3 | 6 | | | |

a) Completa la tabla, suponiendo que se mantiene el ritmo en la producción.

b) ¿Consideras la correspondencia representada en la tabla una función? Justifica tu respuesta.

c) ¿Cuál es la variable independiente y cuál la dependiente?

d) Escribe la ecuación que relaciona la dependencia entre x y t

4. Considera el conjunto de rectángulos con área igual a $20cm^2$, a y b son las dimensiones (en cm.) de un rectángulo de ese conjunto.

a) Escribe b en términos de a y fundamenta por qué define una función.

b) ¿Cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente?

c) Calcula el perímetro del rectángulo si a = 2,5cm.

5. Un móvil se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme a una velocidad de 60km/h.

a) Escribe la ecuación que define la correspondencia entre la distancia (d) recorrida y el tiempo (t) transcurrido y fundamenta por qué es una función.

b) Calcula d (t) si t = 1,5h ; 2h,

c) Determina t si d (t) = 120km ; 30km.

6. Escribe como una ecuación cada una de las correspondencias que te damos a continuación y di en cada caso cuál es la variable dependiente y la independiente.

a) El volumen V de un cubo (en $cm^3$) en función de la longitud de su arista a (en cm.).

b) La distancia d (en Km.) recorrida por un móvil a velocidad media de 30km/h en función del tiempo (en h).

c) La longitud a del lado de un cuadrado en función de su perímetro p.

d) La cantidad C de agua (en litros) contenida en un tanque que tiene 15L de agua, en función del tiempo t (en min.), si por cada minuto que transcurre entran al tanque 3L de agua.

e) La velocidad v (en km. /h) de un móvil a las 2h de haber iniciado su recorrido en función de la distancia d (en h).

f) La altura h de un paralelogramo de $35cm^2$ de área en función de su base b.

g) La longitud b (en cm.) de la base de un triángulo isósceles en función de su área A, si la altura h mide 5,0cm.

7. Dada la correspondencia que a cada número del conjunto $M = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ le hace corresponder su triplo aumentado en cinco.

a) Representa esta correspondencia mediante una tabla.

b) Representa la correspondencia en un sistema de coordenadas.

c) Escribe la ecuación que define esta correspondencia y fundamenta por qué es una función.

d) ¿Cuál es el dominio y el conjunto imagen de la función?

8. Dadas las funciones f, g y h tales que:

$f(x) = -2x + 3$ $\quad g(x) = x^2 - 1$ $\quad h(x) = \dfrac{x-1}{x}$ $\quad x \neq 0$

a) Comprueba que: $\dfrac{f\left(\frac{1}{2}\right) + 2h\left(\frac{1}{3}\right)}{g(0)} = 2$

b) ¿Para qué valor de x se cumple que $f(2x + 1) + g(x) - x^2 = 0,5$?

¿Cómo se define una función lineal?

La función que a cada $x \in R$ le hace corresponder el número real $f(x) = m x + n$, donde m y n son números reales dados, se denomina **función lineal.**

El dominio y la imagen de una función lineal es el conjunto R.

La gráfica de una función lineal es una recta.

Si $m > 0$ la recta se inclina hacia arriba.

Si $m < 0$ la recta se inclina hacia abajo.

Si $m = 0$ la recta es paralela al eje x.

¿Cómo representamos gráficamente una función lineal?

Como ya sabes su representación gráfica es una recta por lo tanto para trazar una recta basta determinar dos puntos por los que ella pasa. Por lo general son cómodos los puntos de coordenadas (0; y) y (x; 0) que son los puntos donde la recta interseca a

los ejes de coordenadas **y** y **x** respectivamente y donde **y** toma el valor de n y **x** es el valor para el cual la imagen de la función es cero.

Las funciones lineales en que m = 0 tienen la forma y = n; $n \in R$ y se llaman **funciones constantes.**

El elemento del dominio de la función lineal definida por la ecuación y = m x + n ($m \neq 0$) cuya imagen es cero, se denomina **cero** de la función.

¿Cómo calculamos el cero de la función?

Lo calculamos igualando la ecuación de la función a cero y resolviendo la ecuación lineal correspondiente.

Ese valor de x calculado será el cero de la función dada.

Ejemplo:

Para calcular el cero de la función f (x) = 2x - 6 basta seguir el procedimiento descrito:

$2x - 6 = 0$ igualando la función a cero

$2x = 6$ adicionando 6 a ambos miembros de la ecuación

$x = \frac{6}{2}$ dividiendo por 2 ambos miembros de la ecuación

$x = 3$ calculando

donde podemos decir que 3 es el cero de la función porque:

$f(3) = 2 \bullet 3 - 6 = 6 - 6 = 0$

También viste anteriormente la influencia del valor de **m** en la recta. Al valor de **m** lo denominamos **pendiente** de la recta y el mismo nos indica, como ya sabes, la inclinación de la recta respecto al eje x.

La pendiente m de una recta que pasa por los puntos $P_1 (x_1 ; y_1)$ y $P_2 (x_2 ; y_2)$ se calcula por la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad , \quad x_2 \neq x_1$$

Como anteriormente viste si $m > 0$ la recta se eleva de izquierda a derecha y en este caso notamos que los valores de la función correspondiente aumentan a medida que aumentan los valores de x. En este caso se dice que la función es **creciente**.

Por el contrario, si m $<$ o la recta desciende de izquierda a derecha y en este caso notamos que los valores de la función correspondientes disminuyen a medida que aumentan los valores de la variable x. En este caso se dice que la función es **decreciente**.

El estudio del crecimiento o decrecimiento de una función, te permite realizar análisis del comportamiento de distintos fenómenos de la vida real.

**Ejercicios:**

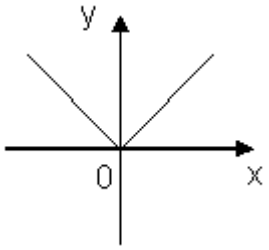
1. Las ecuaciones, gráfica y tabla que te damos a continuación definen funciones. Identifica cuáles son funciones lineales.

a) f (x) = -5x + 1

b) $y = x^2 - 4$

c) f (x) = -6

d)




e)

| x | 0 | 1 | 4 | 9 |
|---|---|---|---|---|
| y | 0 | 1 | 2 | 3 |

f) La función que describe la relación entre la distancia d (en km) recorrida por un móvil a velocidad media de 30 km/h y el tiempo transcurrido t (en horas).

2. Selecciona la respuesta correcta:

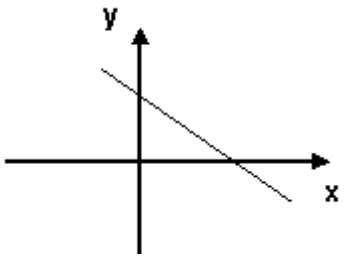
a) La representación gráfica de la función f dada por la ecuación f (x) $= -\frac{2}{3}x + 4$ interseca al eje x en el punto de coordenadas:

(0 ; 4) (0 ; 0) (6 ; 0) (0 ; 6)

b) La gráfica corresponde a la representación gráfica de una función lineal definida por y = mx + n.

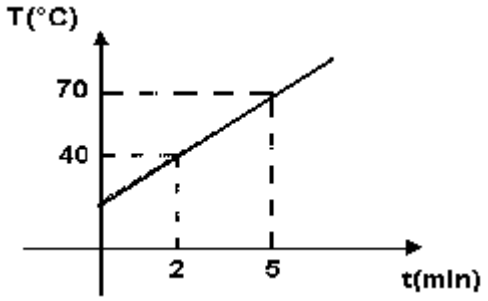
De acuerdo al gráfico podemos decir que:

$m > 0$ $m = 0$ $m < o$




3. El siguiente gráfico corresponde al proceso de calentamiento de una sustancia con el transcurso del tiempo.

a) Escribe la ecuación de la función que define el proceso.
b) ¿Cuál era la temperatura inicial de la sustancia?
c) ¿A los cuántos minutos la temperatura alcanzará el valor de 100 $^0$C?
d) ¿Qué temperatura había alcanzado la sustancia a los 4 minutos de haberse iniciado el proceso?




4. Dada la ecuación de la función lineal definida por f(x) = –5 + 2x. Selecciona la respuesta correcta:

a) El cero de la función es:

-5 $\frac{5}{2}$ 0 2

b) El valor de la pendiente es:

m = 2 m = 5 m = –5 m = $\frac{5}{2}$

c) La función es:

creciente decreciente constante

5. El gráfico representado en el sistema de coordenadas rectangulares, corresponde a una función lineal f cuya ecuación es y = mx + n.

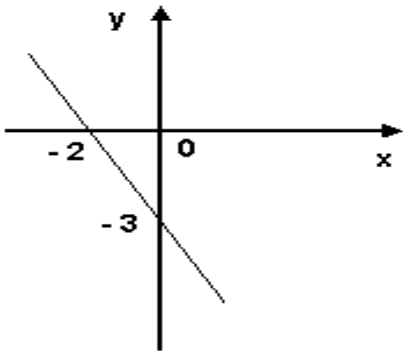
De las siguientes afirmaciones di cuáles son verdaderas o falsas, justificando por qué son falsas.

a) El cero de la función es el par (–2 ; 0).

b) La función es creciente.

c) El valor de n en la función es –3.

d) La pendiente de la recta representada es m = $-\frac{2}{3}$




e) El dominio de la función f es y $\in$R.

f) El punto (–1;–2) pertenece al gráfico de la función f.

6. La fórmula F = $\frac{9}{5}$C + 32 permite convertir de grados Celsius a grados Fahrenheit.

a) Utiliza la fórmula para completar la tabla.

| C | 5 | 10 | 15 |
|---|---|---|---|
| F | | | |

b) ¿Cuál es la variable dependiente y cuál la independiente?

c) ¿Serán las variables C y F directamente proporcionales? Justifica.

d) Construye el gráfico que te sugiere la fórmula dada. ¿Será una función? ¿Por qué?

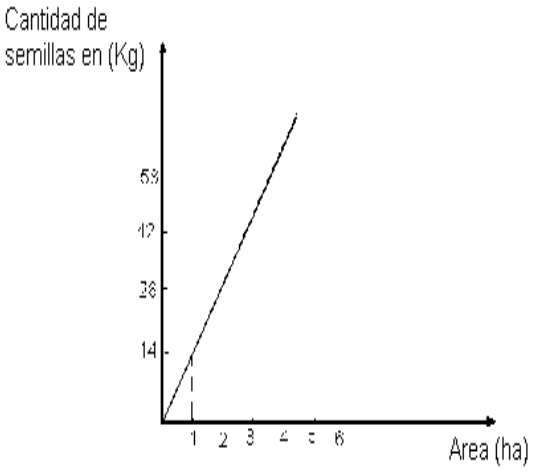
7. Construye una función lineal que sea positiva para valores mayores que -2 de la variable independiente y tal que el valor de su pendiente sea igual a $\frac{3}{2}$.

8. Un recipiente cilíndrico, se llena con agua a razón constante. Inicialmente el recipiente estaba vacío y t segundos después de abierta la llave, la altura del agua en el recipiente es de h centímetros. Halla la ecuación funcional que describe esta situación. Traza el gráfico aproximado de la función que describe la situación planteada.

9. En el sistema de coordenadas siguiente, se ha representado la cantidad de semillas de cilantro que se necesitan en función del área a cultivar.

En el eje de las abscisas (x) se ha indicado el área de la superficie en hectáreas (ha) y en el eje de las ordenadas (y), la cantidad de semillas en kilogramos (kg).

Selecciona la respuesta correcta:




a). La ecuación que define la función representada gráficamente es:

y =14x  y =- $\frac{1}{14}$x

y = x+14  y = x+ $\frac{1}{14}$

b) El área que puede sembrarse con 70kg de semillas es:

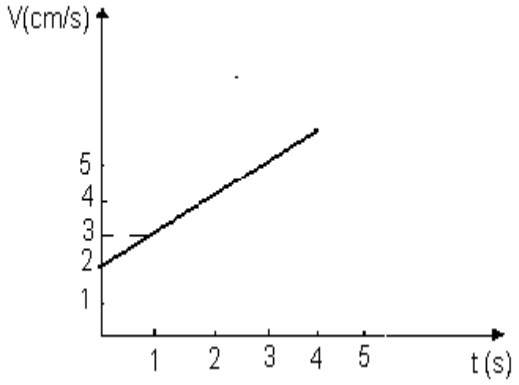
7ha  4ha  5ha

no se puede determinar

10. En el sistema de coordenadas, se ha representado el resultado de una práctica de laboratorio. En la misma se realizaron mediciones de la velocidad de un carrito que se movía con movimiento acelerado por una superficie horizontal.

En el eje de las abscisas se ha indicado el tiempo t transcurrido (en s) y en el eje de las ordenadas la velocidad v (en cm/s)

Selecciona la respuesta correcta:




a) La ecuación que define la función representada gráficamente es:

v=2t  v=$\frac{1}{2}$ t  v=t+2  v= $\frac{1}{2}$t+2

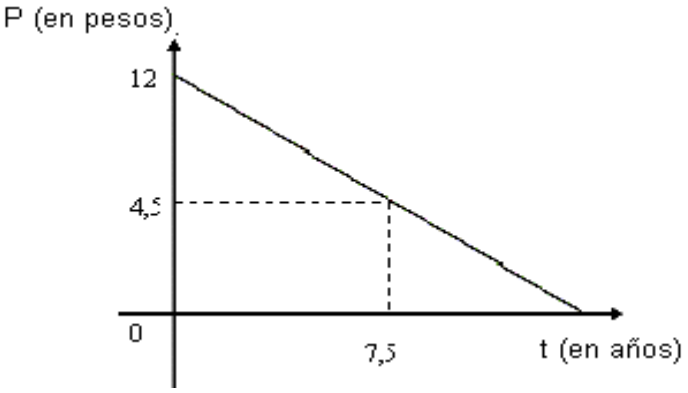
b) Si se comenzó el experimento cuando el carrito llevaba una velocidad de 2m/s. Al cabo de los 4 segundos la velocidad que tenía era:

6m/s  2m/s  9m/s

no se puede determinar.

11. El valor de un artículo disminuye con el paso del tiempo según indica el gráfico de una función lineal, donde en el eje de las abscisas se ha representado el tiempo t transcurrido (en años) y en el eje de las ordenadas el precio p( en pesos).

¿Al cabo de cuántos años dicho artículo no tendría valor alguno?



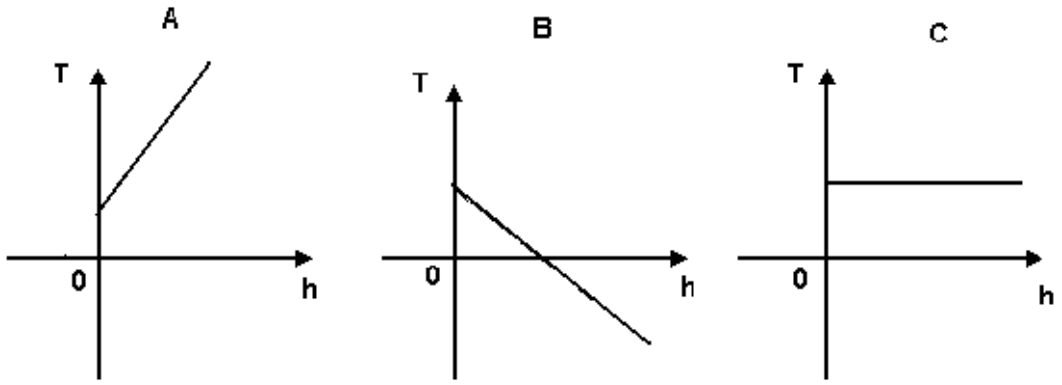

12. La ecuación l = $\frac{1}{10}$ t +1,8 representa el crecimiento de camarones juveniles en una etapa de su vida.
    a) Representa, en un sistema de coordenadas, el crecimiento de los camarones durante los 15 primeros días de vida, sabiendo que en el eje de las abscisas puedes indicar el tiempo t (en días) y en el de las ordenadas, la longitud total l de los camarones (en mm).
    b) ¿Cuántos días tendrán que transcurrir para que la longitud de los camarones sea de 3,0mm?
    c) ¿Qué longitud tenían los camarones en el momento de nacer? ¿y a los 5 días de nacidos?
13. La administración de una empresa paga a sus trabajadores un salario mensual de P pesos ($P). Este salario es el resultado de una asignación fija de $240.00, más $1,80 por cada una de las horas (h) extras que trabaja.
    a) Escribe la ecuación de la función que relaciona el salario P con la cantidad h de horas extras realizadas por un trabajador.
    b) Calcula el salario devengado por un trabajador en un mes si trabajó 30 horas extras.
    c) Al finalizar otro mes el trabajador devengó $276,00. ¿Cuántas horas extras trabajó ese mes?

14. El perímetro de un polígono regular depende de la longitud de su lado. Representa gráficamente en un mismo sistema de coordenadas el perímetro p en función de lado l de un triángulo equilátero y de un cuadrado.

15. A medida que el aire seco se mueve hacia arriba, se expande y se enfría.

La temperatura T (en grados centígrados) del aire a una altura h (en kilómetros) está dada aproximadamente por una ecuación que define una función lineal.

a) Selecciona cuál es el gráfico que le corresponde a la situación planteada:




16. La ecuación y = 50 t + 60, describe el proceso de llenado de una piscina desde el momento en que se abren las llaves para llenarlas.

y: cantidad de agua (en miles de litros)

t: tiempo transcurrido (en horas)

a) Representa gráficamente, el proceso de llenado de la piscina, durante las cuatro primeras horas.

b) ¿Qué cantidad de agua tenía la piscina, cuando se abrieron las llaves?

c) Si se comenzó a llenar la piscina a las 8:00 PM, ¿qué cantidad de agua tenía a la 1:00AM?

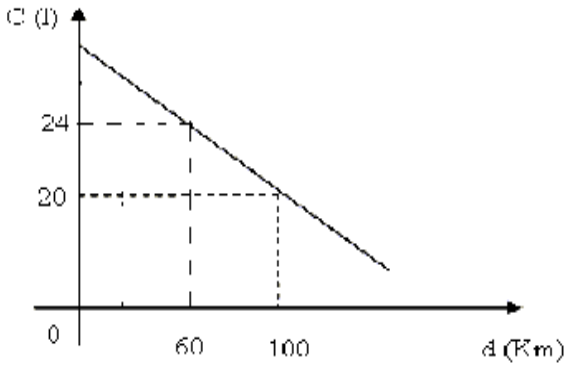
d) Si el tiempo en llenarse totalmente la piscina fue de 8 horas, ¿qué capacidad tiene la piscina?

17. La gráfica muestra, la relación entre la cantidad de combustible que va quedando en el tanque de un automóvil, y la distancia recorrida por él, durante un viaje (el automóvil se desplaza con MRU y consume la misma cantidad de combustible por kilómetro recorrido).

C: cantidad de combustible (en litros)

d: distancia recorrida (en km.)

a) Expresa mediante una ecuación la correspondencia entre la cantidad de combustible que va quedando en el tanque y la distancia recorrida por el automóvil.




b) ¿Qué cantidad de combustible tenía el tanque al comenzar el viaje?

c) ¿Qué cantidad de combustible había consumido el automóvil después de haber recorrido 80km?

d) Cuando el automóvil ya había consumido 12 litros de combustible, ¿cuántos km había recorrido?

e) ¿A los cuántos km de recorrido el tanque quedó totalmente vacío?

18. A medida que el tiempo pasa, desde el momento de compra hasta el momento de venta, una máquina se desvaloriza.

Una empresa calculó que el valor de una máquina, al finalizar t años, estaba dada por la ecuación $y = 15000 - 1500t$, donde y representa el precio de la máquina en pesos.

a) ¿Cuál fue el costo inicial de la máquina?

b) ¿Cuál es el precio de la máquina a los dos años de haber sido comprada?

c) Representa gráficamente la función que representa la relación precio -tiempo transcurrido.

d) ¿Qué tiempo debe transcurrir desde la compra de la máquina, para que esta no tenga valor alguno?

19. Dos ómnibus, salen a las 8:00AM, uno del Capitolio y otro de Varadero. El que sale del Capitolio viaja a una velocidad media de 90km/h y el que sale de Varadero viaja a una velocidad media de 70 km/h. Suponiendo que los ómnibus no paran y que la distancia aproximada del Capitolio a Varadero es de 150 km.

a) Escribe la ecuación que nos permite calcular la distancia a que se encuentra cada ómnibus de Varadero en función del tiempo t.

b) Representa gráficamente las funciones y explica el significado de cada una de las coordenadas del punto de intersección de las rectas que las representan.

**Representación gráfica e interpretación de datos a partir de funciones definidas por tramos de funciones lineales**

Innumerables fenómenos de la vida, ya sean de carácter natural o social se pueden representar a través de funciones definidas por tramos mediante funciones lineales. Su representación gráfica nos permite hacer estudios de tales fenómenos y arribar a conclusiones sobre su comportamiento.

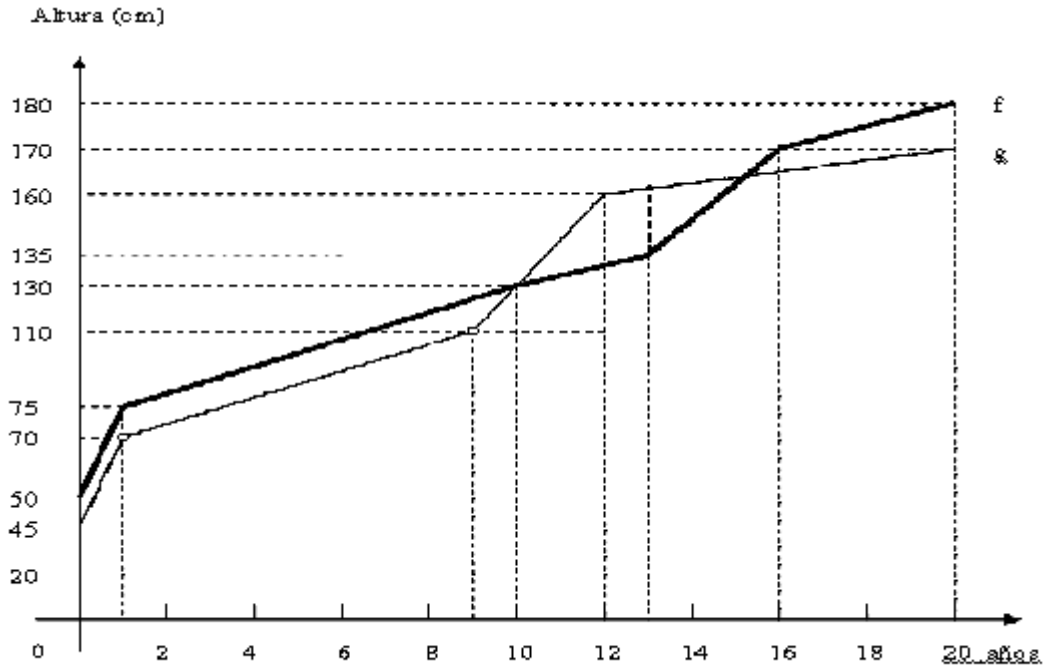
Utilizando tus conocimientos sobre la función lineal, su representación gráfica y sabiendo cómo realizar la determinación de la ecuación que la define, el cálculo de su cero y el análisis de su crecimiento y decrecimiento, podrás resolver variados ejercicios y problemas sobre fenómenos naturales y sociales relacionados con la vida económica, política y social del país.

Veamos un ejemplo:

Se desea hacer un estudio sobre el crecimiento de los jóvenes durante los primeros 20 años de vida, con el objetivo de analizar su comportamiento por sexo y arribar a conclusiones. Después de finalizado el estudio, se hizo la representación gráfica de este comportamiento, tomando como punto de partida los datos obtenidos.

Las gráficas siguientes representan el crecimiento medio de los jóvenes en función de la edad durante los 20 primeros años de vida.

(la gráfica f corresponde al crecimiento de los jóvenes de sexo masculino y la g a los de sexo femenino)




Tomando como punto de partida la representación gráfica, es posible hacer un estudio y arribar a conclusiones. Como guía te proponemos un sistema de preguntas que te permitirán arribar a tus propias conclusiones.

De acuerdo a los estudios sobre Estadística que has hecho de grados anteriores. ¿A qué tipo de gráfico corresponde la situación representada?

¿Qué variables se relacionan en el gráfico?

¿A qué variable corresponde el eje de las abscisas,¿y el de las ordenadas?

De las variables en estudio, ¿cuál es la variable independiente y cuál la dependiente?

¿Cómo será la evolución de ambos gráficos, si consideramos edades superiores a los 20 años?

¿Qué altura tienen como promedio los jóvenes del sexo masculino a los 4 años?

¿A qué edad aproximada una joven mide 100cm?

¿Quienes tienen mayor tamaño (longitud) al nacer, las niñas o los niños?

¿A los 16 años quien es más alto, una joven o un joven?, ¿y a los 13 años?

¿A qué edad los jóvenes de diferente sexo tienen aproximadamente la misma altura?

¿Entre que edades las jóvenes son más altas que los jóvenes?

Compara el crecimiento de las jóvenes y los jóvenes entre los 9 y los 12 años

¿Entre qué edades el crecimiento de las jóvenes es más rápido? , ¿y en los jóvenes?

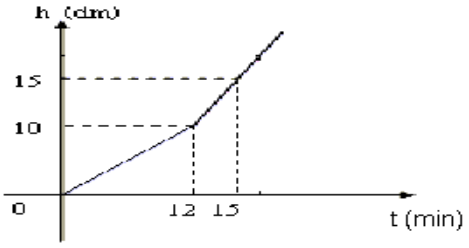
¿A qué conclusiones puedes arribar después de responder estas preguntas?. Redacta un párrafo con tus conclusiones.

**Ejercicios**

1. La gráfica muestra el proceso de llenado de un tanque de agua durante cierto tiempo hasta que se llena totalmente.

h :altura que alcanza el tanque en dm

t :tiempo transcurrido en min.



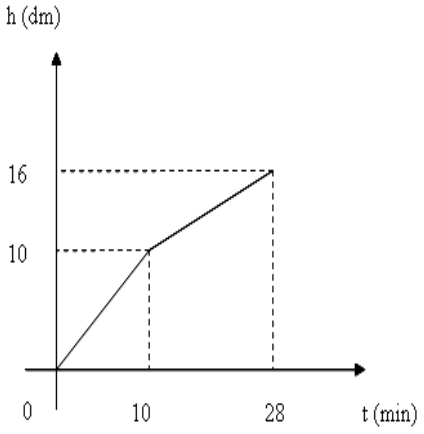

a) Escribe la ecuación que describe el proceso de llenado durante los primeros 12 minutos.

b) Calcula la altura que había alcanzado el agua a los 10 minutos de iniciado el proceso.

c) ¿Si la altura máxima que alcanzó el agua en el tanque fue de 20dm?,¿qué tiempo demoró en llenarse totalmente?

d) ¿En qué tramo aumentó la presión del agua? Justifica esta situación mediante cálculos.

2. La siguiente gráfica representa la altura que alcanza el agua en cada instante, durante el proceso de llenado de un recipiente.



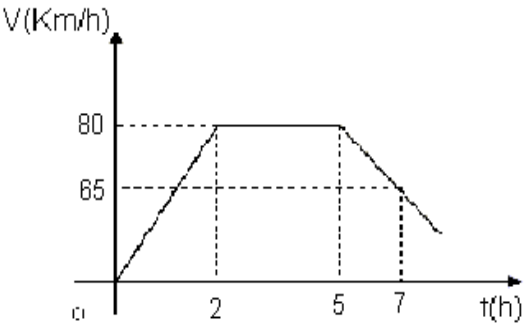

a) ¿Qué altura alcanzó el agua una vez finalizado el proceso?

b) ¿Durante qué tiempo estuvo subiendo el nivel de agua más rápidamente? Fundamenta tu respuesta mediante cálculos.

c) Determina mediante cálculos a qué altura se encontraba el agua a los 22 minutos.

3. La gráfica muestra la velocidad de un móvil en cada momento durante las primeras horas de recorrido en una autopista.

V:(velocidad en kilómetros por hora)
t:(tiempo en horas)




a) ¿Cómo se comportó la velocidad del móvil de las 2 a las 5 horas? Escribe la ecuación que define esta correspondencia en este tramo.

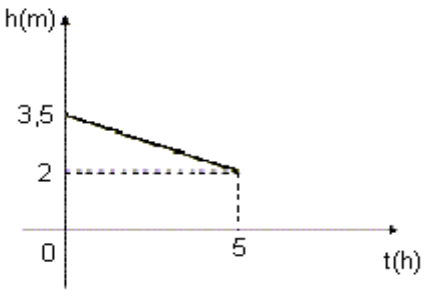
b) Si la ecuación, que define la velocidad durante las primeras 2 horas, está dada por la expresión v = 40t. ¿Qué velocidad tenía el móvil a la hora y media de haber iniciado el recorrido?

c) Si después de las 5 primeras horas, la variación de la velocidad se mantiene igual hasta detenerse, calcula el tiempo que duró el desplazamiento del móvil desde que se inició el recorrido.

4) Como parte de la campaña contra el mosquito Aedes aegypti en la capital del país, se procedió a extraer el agua estancada de una piscina que no estaba funcionando.

La figura muestra, a través del gráfico de una función lineal f(t) = m t + n, la disminución de la altura del agua en la piscina por el funcionamiento de una bomba de extracción. Al cabo de 5 horas el agua había descendido hasta los 2,0m y en ese instante comenzaron a funcionar otras dos bombas, de modo que entre todas continuaron la extracción del agua según la función g de ecuación

$g(t) = -\frac{4}{3}t + \frac{26}{3}$ hasta vaciar totalmente la piscina.




a) ¿Qué altura alcanzaba el agua antes de comenzar la extracción?

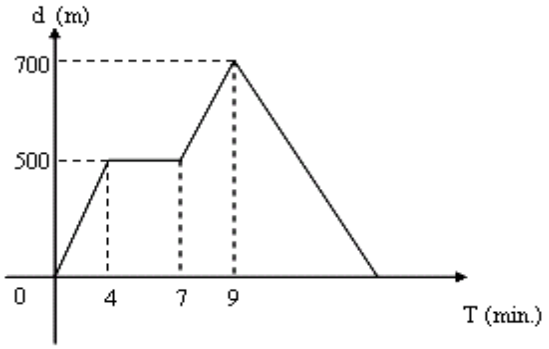
b) Determina mediante cálculos, ¿a qué altura estaba el agua a las tres horas de haberse iniciado el proceso de extracción?

c) ¿En qué tiempo se logró vaciar la piscina totalmente?

d) Representa en el gráfico dado cómo se fue vaciando la piscina después de las cinco primeras horas.

5. El gráfico muestra el desplazamiento de una bicicleta desde el momento que sale de su casa hasta que regresa nuevamente a ella.

Selecciona la respuesta correcta.




a) La bicicleta estuvo detenida durante:

4 min 18 seg 9 min 500 m

b) Escribe la ecuación de la función que describe el tiempo en que la bicicleta estuvo detenida.

c) Si el ciclista salió de su casa a las 10:20 AM, entonces llegó a su punto más distante a las:

10:24 AM 10:27 AM 10:29 AM

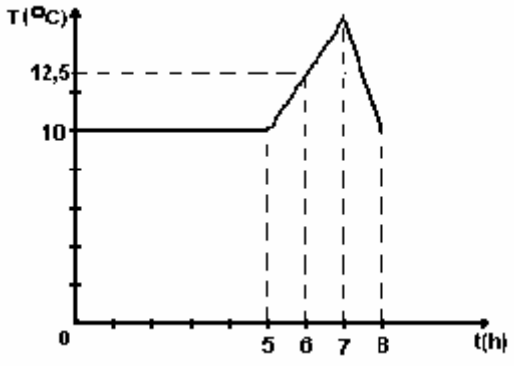
d) Escribe la ecuación de la función lineal que describe el tramo correspondiente desde que salió, hasta el momento en que se detuvo.

e) Si la ecuación que describe la función correspondiente al tramo a partir de los 9 minutos (de recorrido) es d = -100t + 1600 ¿A qué hora el ciclista llegó a su casa?

6. En el sistema de coordenadas se ha representado la variación de la temperatura en una cámara refrigerada, desde las 12:00 M hasta las 8:00 PM.

**T**: Temperatura en grados Celsius.

t: tiempo transcurrido en horas




6.1 Completa el espacio en blanco.

A las 6:00 PM la cámara refrigerada había alcanzado la temperatura de: _____

6.2 Selecciona la respuesta correcta.

a) La temperatura se mantuvo constante durante:

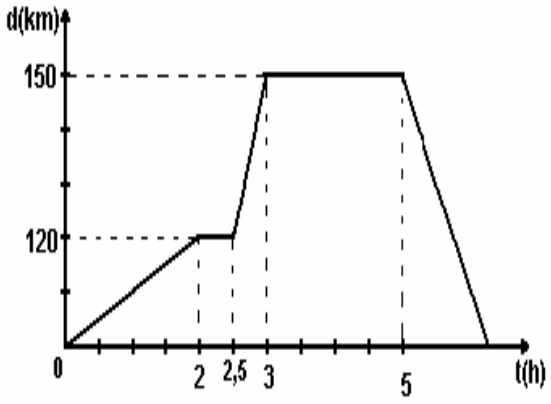
7 horas 10 horas 300 minutos 7200 segundos

b) La ecuación de la función lineal que describe el aumento de la temperatura desde las 5:00 PM hasta las 7:00 PM es:

T=2,5t+2,5  T= 2,5t – 2,5  T= –2,5t+2,5  T= – 2,5t – 2,5

6.3 Si a partir de las 8:00 PM la temperatura continuó descendiendo, según la función cuya ecuación es T = −5t+50. Determina mediante cálculos a qué hora la temperatura alcanzó 0ºC.

7. En el sistema de coordenadas se ilustra el recorrido de un automóvil, que se desplaza con movimiento uniforme (MRU), desde que sale de un punto de Ciudad de La Habana hasta que regresa nuevamente al punto de partida




**t :** tiempo transcurrido en horas.

**d:** distancia a que se encuentra del punto de partida en kilómetros.

7.1 Completa el espacio en blanco.

El automóvil inició su recorrido de regreso a las: _____ de haber salido del punto de partida

7.2 Selecciona la respuesta correcta.

a) Si el automóvil inició el recorrido a las 10:30 am, hizo su primera parada para descansar a las:

2:00 pm  12:30 pm  12:00 m  1:30 pm

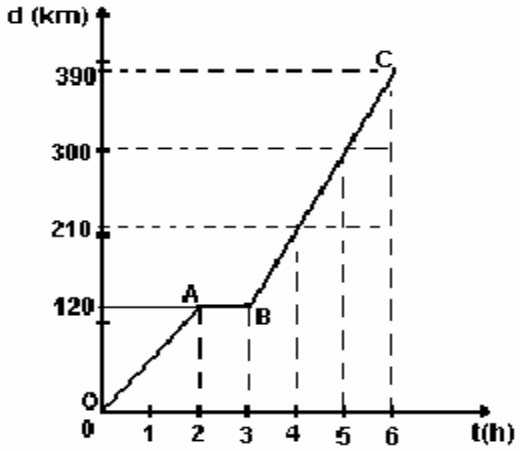
b) Si la ecuación de la función lineal, que describe el recorrido de regreso del automóvil es d = –60t + 450 entonces el tiempo que demoró en el recorrido fue de:

5 horas  2,5 horas  15 horas  7,5 horas

7.3 Escribe la ecuación de la función lineal que describe el recorrido del automóvil desde que salió hasta el momento que hizo su primera parada.

8. En el sistema de coordenadas, los segmentos, $\overline{OA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ trazados, ilustran los kilómetros recorridos por un móvil en las seis primeras horas de un viaje.

**t**: tiempo transcurrido en horas; **d**: kilómetros recorridos




8.1 Completa el espacio en blanco.

Después de iniciado el recorrido, el móvil estuvo detenido durante: _____

8.2 Selecciona la respuesta correcta.

a) En recorrer los últimos 180 kilómetros el móvil demoró:

3 horas 1,5 horas 2 horas 2,5 horas

b) Si después de las 6 primeras horas transcurridas, el desplazamiento del móvil se describe por la función lineal de ecuación d = 50 t + 90; entonces había recorrido 540 Km. al cabo de:

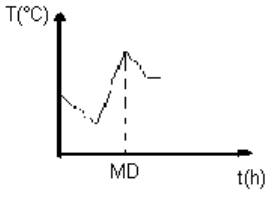
6,5 horas 8 horas 9 horas 10 horas

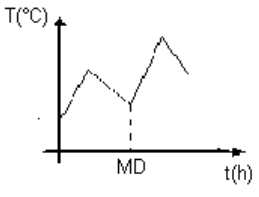
8.3 Escribe la ecuación de la función lineal que describe el desplazamiento del móvil representado por el segmento $\overline{BC}$.

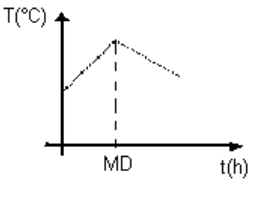
9. La tabla muestra la temperatura a distintas horas de un día determinado.

| Hora | 6 | 9 | Medio día | 15 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|
| temperatura | 12 | 17 | 14 | 18 | 15 |

De los siguientes gráficos ¿Cuál pudiera ser la gráfica que muestra la información de la tabla?

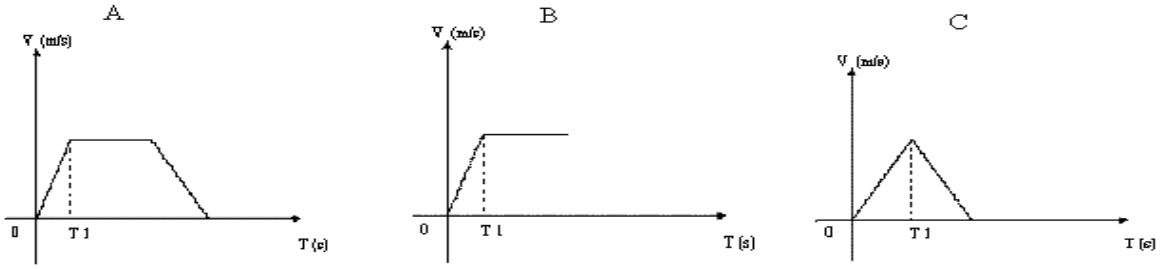


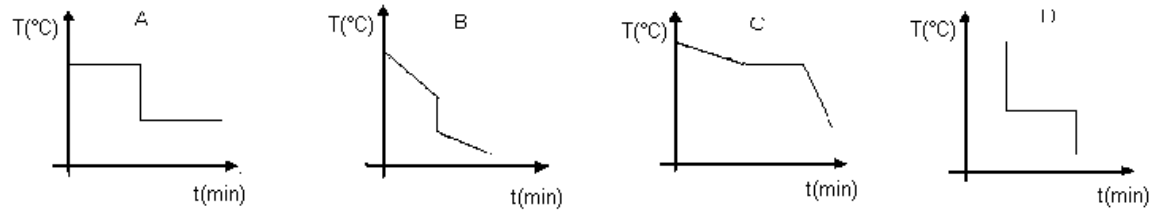



10. Un ómnibus escolar debe transportar estudiantes de una secuandaria básica para vistar un lugar de interés histórico - cultural. Si se conoce que el ómnibus inició el recorrido a la hora prevista y después de transcurrido cierto tiempo alcanzó la velocidad máxima que mantiene hasta que inició el proceso de detención.

De las siguientes gráficas que se dan a continuación. ¿Cuál es la que representa la situación anteriormente descrita?




11.Al medir la temperatura de 5,0 kg de cobre en estado líquido, se observa que esta baja durante cierto período de tiempo. Después, se aprecia que permanece constante y finalmente en un tercer momento, se observa que la temperatura vuelve a descender.¿En cuál de los siguientes gráficos se refleja esa situación si en el eje de las abscisas se ha indicado el tiempo t transcurrido (en minutos) y en el eje de las ordenadas, la temperatura T (en $^0$C)?




12.Un pionero sale de recorrido desde un parque que se encuentra a cierta distancia de su casa, con el objetivo de ir a visitar a un amigo,donde permanece cierto tiempo, una vez finalizada su visita se dirige nuevamente a su casa. Si el pionero realiza el desplazamiento siempre con movimiento rectilineo uniforme.

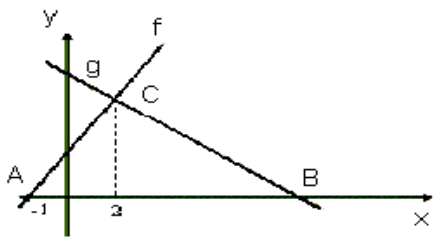
Representa gráficamente la distancia recorrida por el pionero en función del tiempo desde que sale del parque hasta que regresa a su casa.

13. En la gráfica están representadas las funciones f y g y un triángulo ABC, cuya base $\overline{AB}$ esta sobre el eje de las abscisas.

a)Si g(x) = −2x + 9. Calcula el área del triángulo ABC.

b)Escribe la ecuación que define la función f

c)Halla el valor de x si: g(x + 1) – 2x = 5

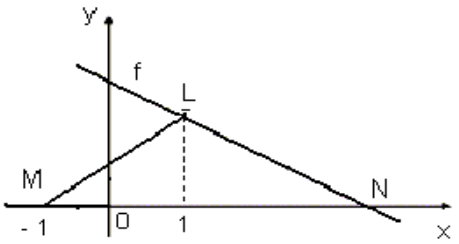



14. En la figura aparecen representado en un sistema de coordenadas rectangulares, un triángulo MNL y la función f de ecuación $f(x) = -\frac{3}{4}x+\frac{15}{4}$ cuyo gráfico contiene al lado NL. Si M y N están sobre el eje x, y la abscisa de L es igual a 1

a) Determina las coordenadas del punto N.

b) Halla el área del triángulo MNL.

c) Determina las coordenadas de un punto K, de forma tal que el área del cuadrilátero convexo MKNL (en ese orden) triplique el área del triángulo MNL.




15. En la gráfica aparecen las representaciones gráficas de las funciones lineales f y g, las cuales cortan a los ejes de coordenadas en los puntos A, B y C. Si se sabe que $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ y que el ángulo OBC mide $45^0$

a) Determina las coordenadas del punto A.

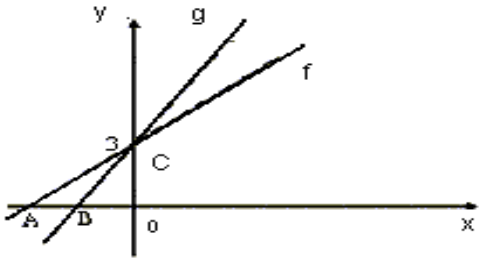
b) Escribe la ecuación de la función g.

c) Clasifica el triángulo BOC según sus lados y ángulos.

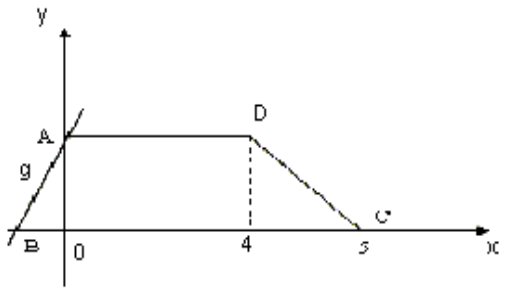
d) Comprueba que:

$F(2x – 1) - (9x^2 -1)+ x(9x -1) = 0,5$

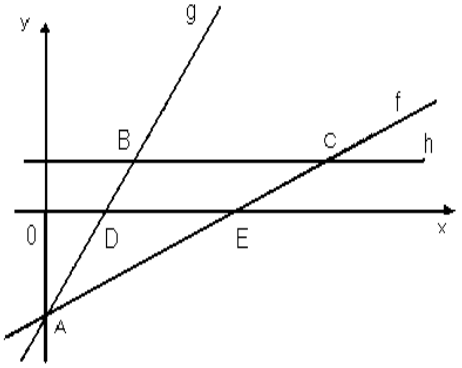
e) Halla el área y perímetro del triángulo ABC si $\overline{AC}$ = 6,71cm.



16. En la gráfica aparece representado el gráfico de una función g, cuya ecuación es g(x) = 3x+2 y un trapecio ABCD de bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ en que la base $\overline{BC}$ está sobre el eje de las abscisas. Halla el área del trapecio.




17. Los gráficos de las funciones f y g se cortan en el punto A, situado sobre el eje y e intersecan al eje x en los puntos E y D respectivamente. La gráfica de la función constante h corta a las representaciones gráficas de f y g en los puntos B y C respectivamente. Sí f(x) = $\frac{4}{5}$ x – 4; g(2) = 0 y h(x) =2.




Prueba que la razón entre las áreas del triángulo ABC y el cuadrilátero DECB es igual a 1,8.

**Interpretación geométrica de la solución de los sistemas de ecuaciones lineales**

En octavo grado, aprendiste los métodos analíticos para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables, pero no estudiaste su interpretación geométrica.

Recordemos que:

Llamamos **sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables** a dos ecuaciones de este tipo que pueden reducirse a la forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1\,y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

y que las soluciones de los sistemas de dos ecuaciones con dos variables son las **soluciones comunes** a las dos ecuaciones que lo forman, es decir, son los pares ordenados (x ; y) que satisfacen a ambas ecuaciones.

También recordarás que un sistema podía tener **una única solución, no tener soluciones, o tener infinitas soluciones**

En este epígrafe estudiarás lo relativo a la función lineal y su representación gráfica en un sistema de coordenadas rectangulares.

Una recta en el plano puede representarse por la ecuación $ax + by + c = 0$ (con $x, y \in R$ ; a y b no simultáneamente nulos) despejando y obtenemos $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ , que es precisamente la ecuación de la función lineal.

Si relacionamos las soluciones que tiene un sistema con su interpretación geométrica, concluimos que:

Si el sistema tiene **solución única** entonces podemos decir que **las rectas se intersecan en un punto.**

Si el sistema **no tiene solución** entonces podemos decir **que las rectas son paralelas.**

Si el sistema tiene **infinitas soluciones** entonces las **rectas coinciden.**

¿Recuerdas cómo analizaste sí un sistema tenia una, ninguna o infinitas soluciones?

Teniendo ahora como recurso lo aprendido sobre la función lineal y su representación gráfica, te proponemos un procedimiento mucho más rápido para determinar si un sistema tiene o no solución.

Basta transformar ambas ecuaciones del sistema a la forma $y = mx + n$ y analizar las pendientes de cada una de ellas. Si ellas te son iguales, entonces comparamos los términos independientes.

Sea el sistema $\begin{cases} y = m_1x + n_1 \\ y = m_2x + n_2 \end{cases}$

Si $\mathbf{m_1 \neq m_2}$ el sistema tiene una **única solución** y las **rectas se intersecan.**

En el caso de ser $\mathbf{m_1 = m_2}$ **y** $\mathbf{n_1 = n_2}$ el sistema tiene **infinitas soluciones** y las **rectas son coincidentes** y en el caso de ser $\mathbf{m_1 = m_2}$ **y** $\mathbf{n_1 \neq n_2}$ el sistema **no tiene solución** y **las rectas son paralelas.** Ten presente que para que $\mathbf{m_1 = m_2}$, tiene que ser $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$.

También en este epígrafe aprenderás el método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones, el cual consiste en representar gráficamente las rectas cuyas ecuaciones

forman el sistema y así podemos determinar las coordenadas de los puntos comunes (en caso que existan).

Por lo general las soluciones que se obtienen por este procedimiento son valores aproximados.

**Ejercicios**

1. Selecciona la respuesta correcta.

a) El sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x + 5y = -2 \\ \frac{1}{2}x - y = 6 \end{cases}$

no tiene solución  tiene infinitas soluciones  tiene una única solución

b) El sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x + 6y = -2 \\ \frac{1}{2}x + y = 6 \end{cases}$

no tiene solución  tiene infinitas soluciones  tiene una única solución

c) El sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x + 6y = -2 \\ \frac{1}{2}x + y = -\frac{1}{3} \end{cases}$

no tiene solución  tiene infinitas soluciones  tiene una única solución

d) De dos rectas $r_1$ y $r_2$ conocemos que $m_1=m_2$ y $n_1=n_2$. Luego podemos afirmar que las rectas:

son paralelas  se cortan en un punto  son coincidentes

e) Si x + 5y = 15 corresponde a la ecuación de una recta. La ecuación que se puede seleccionar entre las siguientes para que el sistema tenga solución única es:

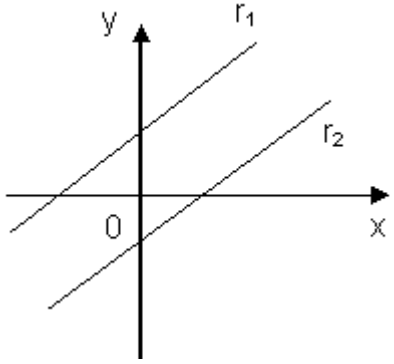
2x +10y =30  $y = -\frac{1}{5}x + 8$  5x – y = 15

f) Las coordenadas de el punto de intersección de las rectas dadas en el sistema

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ y = \frac{7}{8}x \end{cases}$$

es: (5;4) (8;7) (7;8)

g) Dada la representación gráfica de las rectas $r_1$ y $r_2$ en el sistema de coordenadas rectangulares.




1. El sistema de las dos ecuaciones lineales que lo forman tiene:
2. una única solución
3. no tiene solución
4. tiene infinitas soluciones

2. Comprueba gráficamente que el par (2 ;1) es la solución del sistema

$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 4x - 3y = -11 \end{cases}$$

3. Comprueba gráficamente si los sistemas de ecuaciones siguientes tienen una, infinitas o ninguna solución.

a) $\begin{cases} \frac{1}{5}x + 5y = 1 \\ -x + 2y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x + 0{,}2y = \frac{1}{2} \\ y = -30x + \frac{5}{2} \end{cases}$

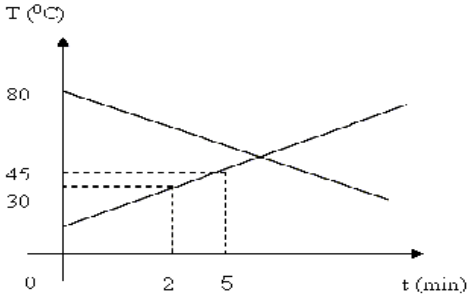
4. Sean $r_1$ y $r_2$ dos rectas cuyas ecuaciones respectivas son **ax + 4y =8** y **−2x + 2y = −3**. Determina el valor de a, para que el sistema tenga una o ninguna solución.

5. En la gráfica se ha representado la variación de temperatura T (°C) en función del tiempo t (min.) de dos sustancias A y B. La ecuación que describe el comportamiento de la variación de temperatura de la sustancia B es

T (t) = –5t+80.

a) Identifica en el gráfico con A o B la representación gráfica de la variación de temperatura que corresponde a cada una de las sustancias.

b) ¿La sustancia A se calienta o se enfría? Justifica tu respuesta.



c) ¿Cuál de las dos sustancias es susceptible de alcanzar la temperatura de $0^0$C de mantenerse las condiciones que provocan la variación de temperatura de ambas sustancias? ¿A los cuántos minutos de iniciada la medición alcanzará esta temperatura?

d) ¿A los cuántos minutos de iniciada la medición las dos sustancias alcanzarán la misma temperatura? ¿Cuál será esta?

e) ¿Qué diferencia de temperatura tendrán las sustancias a los 16 min. de iniciada la medición?

## 2.3 Trabajo con variables

En este epígrafe repasarás algunos conceptos y propiedades sobre el trabajo con variables que iniciaste en grados anteriores y ampliarás tus conocimientos, tomando como punto de partida el estudio de las operaciones con polinomios, los productos notables y la descomposición factorial.

**Recordarás que:**

- Con los términos se efectúan las mismas operaciones ya estudiadas con los números racionales y se cumplen las mismas propiedades. Los términos semejantes se reducen operando con sus coeficientes y manteniendo la parte literal.
- Los signos de agrupación precedidos de signo **+** se eliminan conservando el signo de cada término incluido dentro de ellos. Si están precedidos de signo **-**, el signo de cada término cambia.
- Las multiplicaciones pueden abreviarse si se utilizan los llamados **productos notables.**

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

Ver los recuadros y ejemplos de las páginas 85 a 87 del LT de noveno grado

**Ejercicios**

1. Traducir del lenguaje común al lenguaje algebraico.
   a) El duplo de un número aumentado en tres.
   b) El cuadrado de un número disminuido en cinco.
   c) El cuadrúplo del cuadrado de un número disminuido en cuatro.
   d) El cuadrado de un número excede en tres a su duplo.
   e) El producto de dos números enteros consecutivos.
   f) El cuadrado de la suma de dos números.
   g) El producto de la suma por la diferencia de dos números.
   h) El cuadrado de una suma.
   i) La suma de los cuadrados de dos números.
   j) El perímetro de un rectángulo de lados **a** y **b.**
   k) La suma de los cuadrados de dos números enteros consecutivos es igual al mayor aumentado en diez veces el número.
   l) La suma de un número y su recíproco es $\frac{25}{6}$.
   m) El cuadrado de un número es equivalente al 25% del mismo número.
   n) El área de un terreno de forma cuadrada cuyo lado es x, disminuido en 25 $m^2$.
2. La teleprofesora de Matemática propone el siguiente ejercicio:
   Introduce en un paréntesis precedido de signo – los tres últimos términos de la siguiente expresión, $2x^3 – 6x^2 + 3x –9$.
   Al resolverlo, Yissel da la siguiente respuesta: $2x^3 – (6x^2 + 3x –9)$.
   ¿Estás de acuerdo con ella? Fundamenta tu respuesta.
3. Calcula y reduce.

a) $–3x\ (0,5y –0,6z)$ b) $\frac{7}{8}a\left(2b-2,1a^2+0,5ab\right)$ c) $-\frac{5}{2}p-\left[(2s+4p)+(3s-3p)\right]$

d) $7b^2-\left\{-8b-\left[b^2+(9-b)\right]+5\right\}+\left[-8b^2-(3b-4)\right]$

e) $-9y^2z-\left\{5yz+\left[-yz^2-yz(4-3z)+yz\right]-2y^2z\right\}$

3. Dados los términos:

A = 3a; B = 3a – x; C = a + 2x; D = $\frac{1}{2}a - x - 2$

Calcula y reduce:

a) B – C b) C – B c) B + C – D d) A.B - 4D

4. Sea M = $\frac{1}{2}x^2 - 3$; N = 2x + 1; P = x – 5

a) Calcula 4M – NP

b) Determina para qué valor de x se cumple que el resultado anterior es igual a 20.

5. Transforma los siguientes productos en suma.

a) (4y – 5 ) (4y + 5 )

b) (m + $\sqrt{3}$ )(m - $\sqrt{3}$ )

c) $(d + e)^2$

d) $(-x + y)^2$

e) $(2r - e)^2$

f) $(m + \sqrt{3})^2$

g) $(a + \sqrt{-4})^2$

h) $(\frac{x}{2} + y^3)^2$

i) $(\frac{a}{b} + 2a)^2$

j) (s – 6 )(s + 7 )

k) (2x + 1)( 3x – 3)

l) $(x^2 + 8)(x^2 - 3)$

6. Reduce las siguientes expresiones tanto como sea posible.

a) $13b^2 - \{(2b+5)(2b-5) - [-12b - (3b-2)^2] - 19\}$

b) $(y + 7)(y - 7) - [(2y+3)(2y-3) - 3(y+5)^2 + 63]$

7. Dadas las expresiones: $P = 2x^2 - y$; $Q = x^4 - 4x^2y$

a) Calcula $P^2 - Q$

b) Halla el valor numérico del resultado obtenido para x = -1, y = $\frac{1}{2}$

8. Si $N = x^2 - 2$; $M = x(x - 3)$

a) Halla M - N

b) Evalúa el resultado para x = -1

9. Sea (3x + 2) la expresión que representa la longitud en metros de un lado de un terreno de forma cuadrada de una CPA. Si el área de este terreno está dada por la expresión $(9x^2 + 166)$.

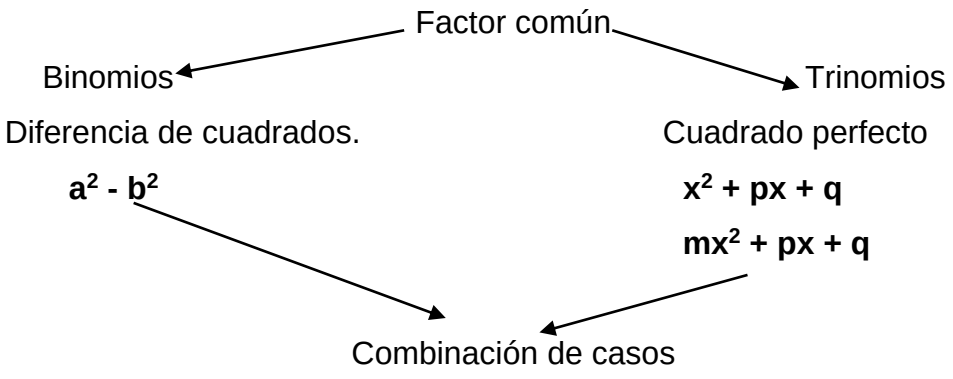
a) ¿Cuántos árboles frutales se podrán sembrar si cada uno necesita un área de 2, 5 $m^2$?

b) ¿Qué tanto por ciento del área del terreno puede dedicar a otros cultivos?

Sabías que:

Para descomponer en factores, o sea, transformar sumas en productos, se utiliza el factor común, los productos notables y otros conocimientos sobre la multiplicación.

El siguiente cuadro, resume el orden en que debe procederse para descomponer en factores:




Para resolver los ejercicios que te proponemos a continuación puedes repasar los recuadros que aparecen en el libro de texto de noveno grado, así como los ejemplos resueltos, en las páginas: 91, 92, 94, 96, 97, 98 y 99.

**Ejercicios:**

1. Al calcular $2a^2 + 3a$ se obtiene:

   $5a^2$ $5a^3$

   $a(2a + 3)$ Ninguna de las anteriores.

2. La expresión $2a^3 – 4a^2 + 2a$ es equivalente a:

   $2(a^3 – 2a^2 + a)$ $2a(a^2 – 2a + 1)$

   $a(2a^2 – 4a + 2)$ $2a(a^2 – 2a)$

3. La expresión $4a^2b - 2a^2b^2 + 6b^3$ se convierte extrayendo factor común en:

$ab(4a - 2ab + 6b^2)$ $2ab(2a^2 - a^2b + 3b^2)$

$6ab(-2a^2 + 4a^2b + b^2)$ $2a^2b^2\left(\frac{2}{b} - 1 + \frac{3b}{a^2}\right)$

4. Rudy plantea que la siguiente expresión $25x^2 - 10xy + 4y^2$, se expresa como producto así: $(5x - 2y)^2$. ¿Estás de acuerdo con Rudy? Fundamenta tu respuesta.

5. Expresa como producto:

1) $14x^2y^2 - 28x^3 + 56x^4$
2) $55m^2n^3x + 110\, m^2n^3x^2 - 220m^2g^2$
3) $m(a - b) + (a - b)r$
4) $4x(m - n) + n - m$
5) $x^2 - 10x + 25$
6) $\frac{x^2}{4} + x + 1$
7) $ay^2 - 10ay + 25a$
8) $m^2 + 28m - 165$
9) $\frac{x^2}{2} + \frac{5}{2}x - 7$
10) $2h^2 - 2h - 3$
11) $6x^2 - 11ax - 7a^2$
12) $\frac{2}{3}ah^2 - \frac{2}{3}ah - a$
13) $\frac{1}{4}(a - b)^2 - (a - b)^2$
14) $81 - y^2$
15) $x^2 - 36$
16) $y^2 + 4$
17) $p^2 - 49q^2$
18) $\frac{1}{36}u^2 - v^4$
19) $2a^2 - 8$
20) $100t - 4ta^2$
21) $3a(p - q) + 2p - 2q$
22) $mx^2 + 9xm + 20m$
23) $x^2 - 7xy + 10y^2$
24) $y^2 + 2\sqrt{3}y + 3$
25) $4x^3y + 10x^2y^2 - 24xy^3$
26) $\frac{6}{5}xy^4 - \frac{4}{5}xy^2 - \frac{2}{5}x$

6. Sabiendo que: $Y = 3x + 7$ y $J = 5x^2 + 22x + 24$

a) Expresa el resultado $Y^2 - J$ como producto.

c) Verifica que el valor del resultado anterior para $x = 0{,}5$ es un múltiplo de 12.

7. Sean $P = (2m - 5)$; $Q = (m + 3)(m - 3)$ y $R = 13 - 4m$.

a) Calcula $P^2 + Q - R$.

14) Descompón en factores el resultado obtenido.

15) Halla el valor numérico de dicho resultado para $m = -2$.

8. Si $S = (3x + y)(3x – y)$ y $P = 6xy + 2y^2$

a) Calcula P + S

b) Expresa el resultado como un producto.

c) Comprueba que el valor numérico de la expresión resultante para

$x = -\frac{1}{3}$; $y = \sqrt[3]{-125}$ es el mínimo común múltiplo de 12 y 18.

9. Dadas las expresiones algebraicas $M = x$; $N = x + 5$; $P = 10x^2 + 41x$

a) Calcula $M \cdot N^2 – P$ y expresa el resultado como producto.

10. Demuestra que las siguientes proposiciones son verdaderas.

a) El cuadrado de un número natural impar es un número impar.

b) La diferencia de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es un número impar.

c) La diferencia entre un número de dos lugares y el número que se forma invirtiendo el orden de sus cifras básicas, es divisible por 9.

## 2.4 La ecuación de segundo grado

En este epígrafe repasarás lo aprendido sobre la traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico y viceversa lo cual aplicarás para modelar situaciones de la vida que te ayudarán a resolver los problemas que conducen al planteamiento y resolución de ecuaciones de segundo grado. Este tipo de ecuaciones aprenderás a resolverlas aplicando distintos procedimientos.

Sabías que:

- Las ecuaciones del tipo $ax + b = c$ ($a \neq 0$) se denominan lineales en una variable y se resuelven despejando la x.
- Las ecuaciones del tipo $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in R, a \neq 0$) se denominan ecuaciones de segundo grado o cuadráticas.

Una ecuación de segundo grado puede tener hasta dos soluciones.

Si $x_1$ y $x_2$ son soluciones de una ecuación cuadrática, se cumple que ambas soluciones anulan la ecuación y a los valores $x_1$ y $x_2$ se les llama raíces de la ecuación

Algunas ecuaciones cuadráticas se pueden resolver fácilmente aplicando la descomposición factorial y la siguiente propiedad:

**Para todos los números a y b se cumple a . b = 0 si y solo si a = 0 ó b = 0.** (puedes ver el ejemplo 1 página 141, del LT noveno grado)

Estas ecuaciones también pueden ser resueltas utilizando la fórmula general:

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, donde D = $b^2 - 4ac$, es el discriminante.

Si D > 0, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales:

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Si D = 0, entonces la ecuación tiene una sola solución real:

$x_1 = \frac{-b}{2a}$

Si D < 0, como no es posible extraer la raíz cuadrada de un número negativo en el conjunto de los números reales, entonces la ecuación no tiene soluciones reales: (Ver ejemplo 1a y 1b página 148, del LT noveno grado).

**Ejercicios**

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:
   a) $2x^2 - 4x = 0$
   b) $5z^2 = 8z$
   c) $m^2 + 7m - 44 = 0$
   d) $x^2 + 16 = 0$
   e) $x(x + 1) = 1$
   f) $x^2 = 6x - 7$
   g) $(x - 2)^2 - (3 - x)^2 = 1$
   h) $(x + 2)(5x - 8) = (7x - 4)(x - 1)$
   i) $-10(2x - 3) = x^2 + 3x - 10$
   j) $(x + 3)^2 + (x - 3)^2 = 10$
   k) $(x + 2)^2 = 2x(x + 2) - 5$
   l) $2(3x^2 + x - 0{,}5) = x(3x + 1)$
   m) $(m^2 - n^2)x^2 - 4mnx = m^2 - n^2$
   n) $(2x - 3)^2 - (x + 5) = -23$
2. Si una de las soluciones de la ecuación $4x^2 - 13x = -m$ es 4. ¿Cuál es la otra solución?
3. La profesora propone al grupo el siguiente ejercicio:
   Determina para qué valor de **q** la ecuación $x^2 + qx = -144$ tiene una sola solución.

Al revisar el ejercicio obtiene las siguientes respuestas. ¿Con cuál de ellas estás de acuerdo?

24 12 -24 No tiene solución.

Explica por qué.

4. Escribe una ecuación cuadrática que tenga las siguientes soluciones.

a) $x_1 = 0$ $x_2 = -3$ b) $x_1 = 1,05$ $x_2 = -0,3$

5. Determina para qué valores de k la ecuación: $x^2 + kx + 9 = 0$ tiene:

a) Dos soluciones. b) Una solución. c) Ninguna solución

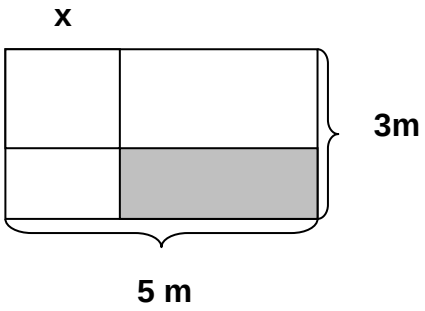
6. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones plantea la igualdad entre el área del cuadrado de lado **x** y el área del rectángulo sombreado?

$x^2 = (5 – x)(3 – x)$

$2x = 15$

$2x = (5 – x ) + ( 3 - x )$

$4x = 16 – 4x$



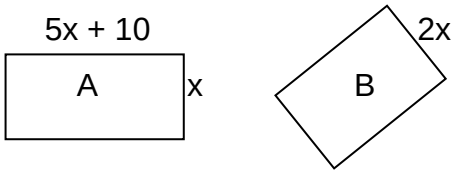

7. Samuel quiere construir un triángulo donde las medidas de las longitudes de sus lados están dadas por las expresiones, $x^2$; $2x + 3$; $x + 2$. Si su perímetro es igual a 23cm, entonces el triángulo que quiere construir Samuel es:

Equilátero. Escaleno

Isósceles. No se puede construir un triángulo con esas medidas.

8. En un número de dos cifras, la cifra de las decenas es equivalente al cuadrado de las cifras de las unidades. Si al número se le sustrae 54, se obtiene otro número con las mismas cifras pero en orden inverso. ¿Cuál es el número?

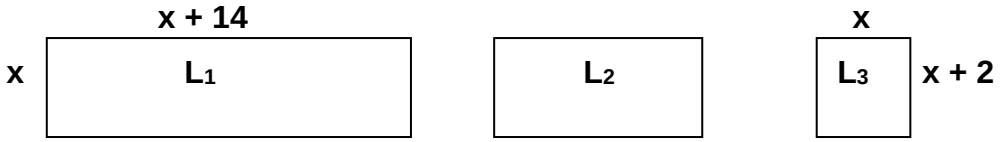
9. Observa estos dos rectángulos:



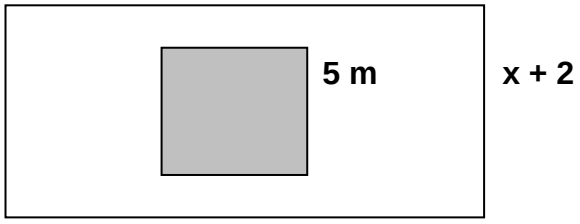

a) ¿Para qué valor de x las áreas de los dos rectángulos son iguales?

b) ¿En qué razón se encuentran los perímetros de los rectángulos A y B?

10. Los rectángulos siguientes se corresponden con áreas de locales de un policlínico que se está reparando, cada local tiene la mitad del área anterior. Si el $m^2$ de losa cuesta $10,35, ¿Cuánto costará cambiar totalmente el piso del local?




11. El largo del frente de un edificio de forma rectangular es el doble del ancho. Si el largo se aumentara en 40 m y el ancho en 6 m, el área se duplica. Si con 1 galón de vinyl se pintan 32 $m^2$, ¿cuántos galones serán necesarios para pintar el frente del edificio, si se produce una pérdida del 2% de los galones de pintura a utilizar?
12. La suma de los cuadrados de dos números consecutivos disminuido en 21 es igual a 200. Halla los números.
13. En un hidropónico la parcela dedicada al cultivo de hortalizas tiene forma rectangular y ocupa un área de 3 854 $m^2$.
    a) ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela si se conoce que el largo excede en 35 m al ancho?
    b) ¿Qué área tendrá una parcela que se quiere dedicar a la siembra de frutales, si sus dimensiones son iguales al 30% de la del área dedicada a las hortalizas?
14. Juan posee un terreno de forma rectangular como indica la figura y en el centro hay un estanque cuadrado que no es de su propiedad. Calcula el área del terreno que es propiedad de Juan, sabiendo que es 4 veces el área del estanque.



# Unidad 3

# Circunferencia y círculo

**Introducción**

¿Conoces cómo se trazaba la circunferencia en la antigüedad, y cómo se hacían los cálculos de la longitud de la circunferencia y del área del círculo?

Al principio el trazado de la circunferencia se realizaba utilizando una cuerda estirada que tenía uno de sus extremos fijos a una estaca. La necesidad de hacer cálculos en la circunferencia y el círculo, surgió en una región situada entre los ríos Eufrates y Tigris hace ya unos 3500 años a.n.e. En el proceso de encontrar una relación entre la longitud de una circunferencia y la longitud de su diámetro, se obtuvo que esta razón era constante, representada por el símbolo $\pi$, resultando el proceso de encontrar este valor, una tarea muy difícil para los filósofos de la antigüedad.

En esta unidad, profundizarás en el estudio de la circunferencia y el círculo, sus elementos y propiedades, así como aprenderás las fórmalas para calcular la longitud de la circunferencia y el área de círculo; las cuales utilizarás con frecuencia en la resolución de problemas de la vida. También en esta unidad ampliarás tus conocimientos sobre Estadística al estudiar la construcción de los gráficos circulares o de pastel.

## 3.1. La longitud de la circunferencia

En este epígrafe estudiarás los conceptos de circunferencia y de círculo, sus elementos principales y las relaciones que se establecen entre ellos, a través de un grupo de teoremas que te serán muy útiles para resolver ejercicios sencillos de cálculo y demostración, aplicando propiedades de la circunferencia.

Además estudiarás las fórmulas para calcular la longitud de la circunferencia y la de sus arcos; las que bien aplicadas, te permitirán resolver diversos problemas de la vida.

La **circunferencia** es el conjunto de todos los puntos del plano situados a la misma distancia de un punto fijo de dicho plano.

Entendemos por distancia entre dos puntos la longitud del segmento que los une.

Los elementos de la circunferencia son su **centro**, que es el punto fijo del plano, y que denotamos por la letra O; el **radio,** que es la distancia entre el centro y los puntos de la circunferencia, al cual denotamos por la letra r.

Otros elementos importantes de la circunferencia son: el **diámetro**, la **cuerda** y el **arco**.

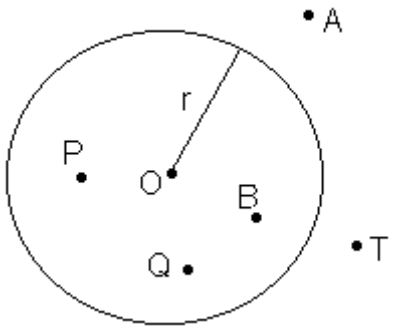
La **cuerda** es el segmento cuyos extremos son puntos de la circunferencia; si ese segmento contiene al centro se le denomina **diámetro**, que es la mayor de las cuerdas en una circunferencia.

Dos puntos cualesquiera de una circunferencia la dividen en dos partes, a cada una de ellas se les da el nombre de **arco**.

Si los puntos que determinan los arcos son extremos de un mismo diámetro, entonces dichos arcos son **semicircunferencias**.

El arco completo de circunferencia tiene una amplitud de 360º.

Se ha representado una circunferencia de centro O y radio r; ella divide los infinitos puntos del plano que no le pertenecen en dos partes. Una parte esta formada por los puntos que se encuentran a una distancia del centro menor que r, entre los que hemos señalados B, P y Q a estos puntos se les llama **puntos interiores**. La otra parte que esta formada por los infinitos puntos del plano que se encuentran a una distancia del centro que es mayor que r, entre los que hemos señalados A y T, a estos puntos se les llama **puntos exteriores.**




El **círculo** es el conjunto formado por todos los puntos de una circunferencia y sus puntos interiores.

La circunferencia es axialmente simétrica con respecto a cualquier recta diametral (recta que contiene al diámetro) y centralmente simétrica y su centro de simetría es su propio centro.

Existen en el plano relaciones de posición entre una circunferencia y una recta, las cuales se analizan a partir de la comparación entre el radio de la circunferencia (**r**) y la distancia del centro de la misma a la recta (**d**). La distancia de un punto a una recta es

la longitud del segmento de perpendicular trazado del punto a la recta dada, lo que ya conoces de la asignatura de Dibujo Técnico.

Estas relaciones son:

1) Si **d > r** todos los puntos de la recta son exteriores respecto a la circunferencia. La recta y la circunferencia no tienen puntos comunes, en este caso la recta es **exterior** a la circunferencia. (Figura 1).

2) Si **d = r**, hay exactamente un punto común entre la recta y la circunferencia, los demás puntos de la recta son exteriores a la circunferencia. En este caso la recta es **tangente** a la circunferencia y el punto común T recibe el nombre de **punto de tangencia**. (Figura 2).

3) Si **d < r**, la recta interseca a la circunferencia en dos puntos (A y B). En este caso a la recta se le llama **secante** a la circunferencia. (Figura 3).

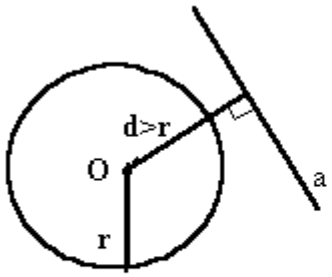



Figura 1

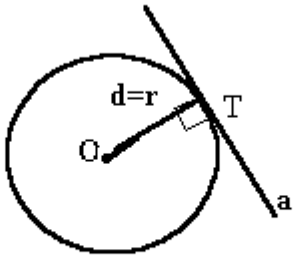



Figura 2

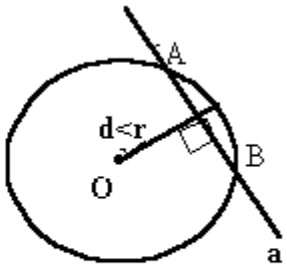



Figura 3

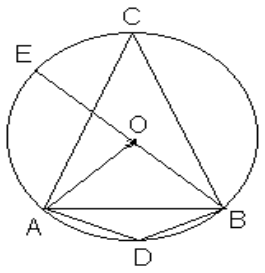
Existen propiedades que cumplen estas rectas las cuales se aplican a las demostraciones y ejercicios de cálculo y que te mostramos como teoremas.

- La recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que tiene como extremo el punto de tangencia. El recíproco de este teorema es válido. Formúlalo.
- La recta perpendicular a un radio, en el extremo de este que pertenece a la circunferencia, es tangente a dicha circunferencia.
- Si un radio (diámetro) es perpendicular a una cuerda, la divide en dos segmentos iguales.
- Si un radio (diámetro) interseca a una cuerda, dividiéndola en dos segmentos iguales, entonces la cuerda es perpendicular al radio.

También existe en el plano la relación de posición entre dos circunferencias; esta depende de la relación existente entre los radios de las circunferencias y la distancia entre sus centros. De esto resulta que las circunferencias pueden ser: exteriores, tangentes exteriores, secantes, tangentes interiores y concéntricas.

**Ejercicios**

1. En la figura A, B, C, D y E son puntos de la circunferencia de centro O, O punto de $\overline{EB}$ .




a) Di cuáles de los segmentos son: radios, diámetros y cuerdas.

b) Di cuáles de los arcos que aparecen son: menores que 180º, iguales a 180º y mayores que 180º.

2. Construye una circunferencia de centro O y radio 2,0 cm.

a) Traza en ella un radio, un diámetro y una cuerda y denótalos.

b) Ubica un punto que se encuentre a 0,28 dm del centro O. ¿Estará situado dentro de la circunferencia? Fundamenta.

c) Ubica un punto que se encuentre a 15 mm del centro O. ¿Cómo se le llama a este punto según su posición respecto a la circunferencia? Fundamenta.

d) Ubica un punto que se encuentre a 0,02 m del centro O. ¿Cómo se le llama a este punto según su posición respecto a la circunferencia? Fundamenta.

3. Di si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones y fundamenta tu respuesta:

a) Si dos circunferencias tienen el mismo centro, entonces son iguales.

b) Si la distancia entre los centros de dos circunferencias es menor que la suma de sus radios, entonces ellas tienen puntos interiores comunes.

c) Si dos cuerdas de una circunferencia pasan por su centro, entonces ellas son iguales.

d) Los extremos de una cuerda cualesquiera de una circunferencia son centralmente simétricos con respecto al centro de esta circunferencia.

e) El centro de una circunferencia no siempre equidista de los extremos de sus cuerdas.

Existen también como elementos importantes en la circunferencia los ángulos centrales y los ángulos inscritos.

Se llama **ángulo central** al ángulo que tiene su vértice en el centro de la circunferencia.

A cada ángulo central le corresponde un arco y una cuerda y entre ellos se establecen ciertas relaciones:

- La amplitud del ángulo central es igual a la amplitud de su arco correspondiente.
- En una misma circunferencia, o en circunferencias iguales, a ángulos centrales iguales corresponden arcos iguales y viceversa.
- En una misma circunferencia, o en circunferencias iguales, a ángulos centrales (arcos) iguales corresponden cuerdas iguales y viceversa.
- En una misma circunferencia, o en circunferencias iguales, a mayor cuerda corresponde un mayor arco.

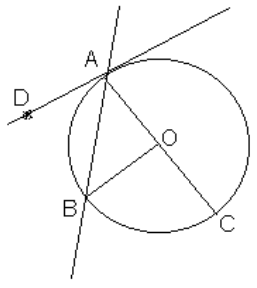
Se llama **ángulo inscrito** al ángulo cuyo vértice pertenece a la circunferencia y cuyos lados la intersecan además, en otros dos puntos.

A cada ángulo inscrito le corresponde un arco y una cuerda que se relacionan entre sí de la siguiente manera:

- La amplitud del ángulo inscrito es igual a la mitad de la amplitud de su arco correspondiente.
- Los ángulos inscritos en una circunferencia a los cuales les corresponde el mismo arco (la misma cuerda) son iguales.
- Si a un ángulo inscrito en una circunferencia le corresponde un arco que es una semicircunferencia, entonces es un ángulo recto. (Teorema de Tales). El teorema recíproco también se cumple.
-

**Ejercicios**

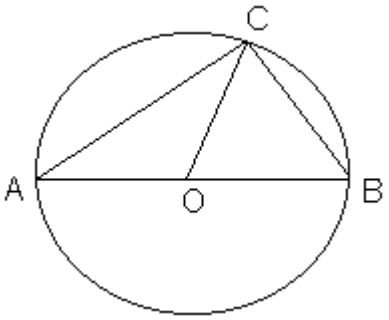
1. En la circunferencia de centro O, A, B y C puntos de la circunferencia.




Enlaza los elementos de la columna A con los de la columna B según corresponda:

| A | B |
|---|---|
| Diámetro | $\angle BOC$ |
| Arco | $\overline{AB}$ |
| Ángulo central | O |
| Radio | $\angle DAB$ |
| Recta tangente | $\overline{AC}$ |
| Secante | $\overline{OB}$ |
| Ángulo inscrito | $\overset{\frown}{AB}$ |
| Punto exterior | $\angle BAC$ |
| Cuerda | DA |
| Centro | D |
| | AB |

2. En la figura A, B y C puntos de la circunferencia de centro O, $\overset{\frown}{CB} = 50º$, Selecciona de las siguientes afirmaciones cuál es la verdadera.



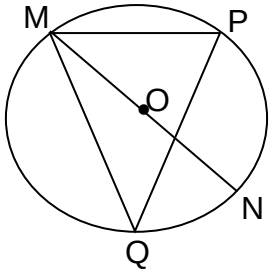

a) $\angle ACB = 90º$ por teorema de Tales.

b) $\angle COB = 25º$ por teorema de Tales.

c) $\angle COB$ es equilátero.

d) $\angle BAC = 25º$ porque es un ángulo inscrito sobre el arco $\overset{\frown}{CB}$ .

3. En la figura $\overline{MN}$ diámetro, P y Q puntos de la circunferencia de centro O y $\angle MQP = 40º$.




Selecciona la respuesta correcta:

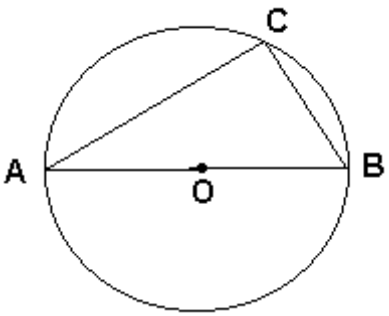
a) El triángulo MNP es:

acutángulo obtusángulo rectángulo.

b) La amplitud del $\angle PMN$ es:

40º 90º 50º

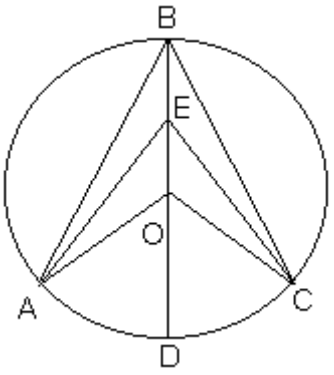
4. En la figura A, B y C puntos de la circunferencia, $\overline{AB}$ diámetro; $\overset{\frown}{BC} = 70º$.




¿Cuál de las siguientes proposiciones es verdadera

$\angle B = 55º$ $\angle B = 20º$ $\angle B = 70º$

5. En la figura A, B, C y D puntos de la circunferencia de centro O; B, E, O y D puntos alineados.




a) Di cuáles de los ángulos que aparecen son:

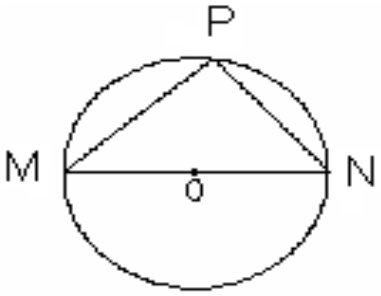
- centrales
- inscritos.

b) Si el $\angle AOC = 110º$, el $\overset{\frown}{ABC}$ tiene una amplitud de:

55º 110º 250º No se puede determinar.

c) Si D es punto medio de $\overset{\frown}{AC}$ y la amplitud del $\angle DBC$ está dada por la expresión $3x + 14º$, halla el valor de x.

6. En la figura P es un punto de la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{MN}$.

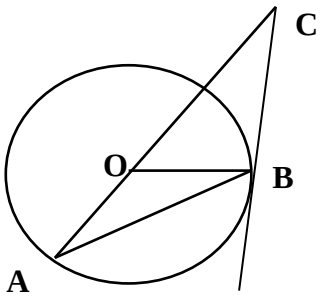



Si el $\angle PMN = 3x + 15º$ y $\angle MNP = 5x – 5º$.

a) Halla la amplitud del arco $\overset{\frown}{NP}$.

b) Clasifica el triángulo MNP segun la longitud de sus lados.

7. En la figura se tiene una circunferencia de centro O, $\overline{AB}$ es una cuerda de 4,0 cm. de longitud, la semirrecta CB es tangente a la circunferencia en el punto B, el punto O pertenece a $\overline{AC}$ y $\angle COB = 60º$.

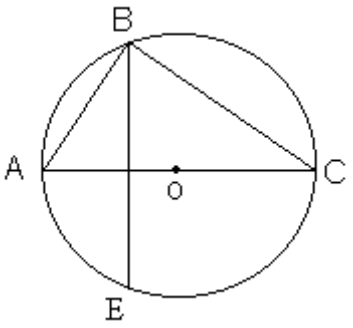



a) Calcula la amplitud de $\angle OAB$ y $\angle ABC$.

b) Calcula $\overline{CB}$.

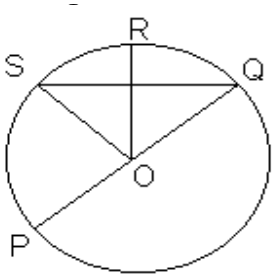
8. En la figura $\overline{AC}$ es un diámetro de la circunferencia, B y E puntos de la misma, $\overset{\frown}{EC} = 100^{\circ}$ y $\overline{AC} \perp \overline{BE}$.

Calcula $\angle ABE$, $\angle ABC$ y $\overset{\frown}{BC}$




9. En la figura: $\overline{OR} \perp \overline{SQ}$ y $\angle SOQ = 70^{\circ}$.

Calcula $\overset{\frown}{PR}$, si $\overline{SQ}$ es una cuerda y $\overline{PQ}$ es diámetro.

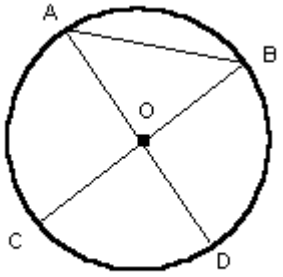



10. En la figura $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$ diámetros de la circunferencia de centro O

$\overset{\frown}{AB} = 60^{\circ}$ y $\overline{AD} = 4{,}2$ cm.

a) Calcula la amplitud de los arcos $\overset{\frown}{CD}$ y $\overset{\frown}{DB}$.

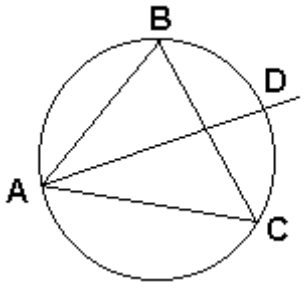
b) Calcula el perímetro del $\Delta AOB$.



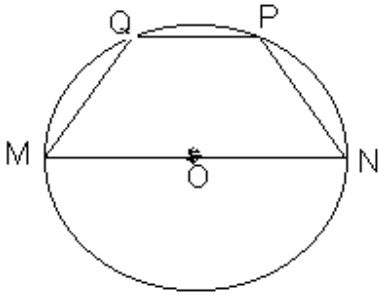

11. En la figura A, B, C y D puntos de la circunferencia, AD bisectriz del $\angle A$, $\overset{\frown}{AC} = 140^{\circ}$ y $\angle C = 50^{\circ}$.

a) Calcula la amplitud del $\angle BAC$ y de los arcos $\overset{\frown}{BDC}$ y $\overset{\frown}{ABD}$.

b) ¿Puede ser $\overline{AD}$ un diámetro de la circunferencia? Fundamenta.



12. En la figura $\overline{MN}$ diámetro de la circunferencia de centro O, $\overline{QP}$ cuerda paralela a $\overline{MN}$, $\overline{MN}$ =10 cm y $\overset{\frown}{MQ} = \overset{\frown}{QP} = \overset{\frown}{PN}$. Calcula el perímetro del cuadrilátero MNPQ.




En este epígrafe estudiarás también el teorema de Pitágoras por la aplicación que este tiene en la resolución de ejercicios relacionados con el teorema de Tales.

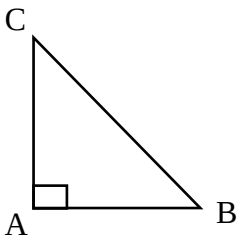
Para que puedas profundizar en este teorema, puedes leer del Libro de texto 7mo grado pág 178 – 180 lo que en estas se plantea y analizar los ejemplos que se desarrollan.

**Teorema de Pitágoras**: En todo triángulo rectángulo se cumple que el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Y el **teorema recíproco**: Si en un triángulo se cumple que el cuadrado de la longitud del lado mayor es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, entonces el triángulo es rectángulo.

Este teorema nos permite calcular la longitud de cualquier lado del triángulo rectángulo conocido los otros dos.

Ejemplo: En un triángulo ABC, rectángulo en A, $\mathbf{\overline{AB}}$ = 3,0 cm y $\mathbf{\overline{AC}}$ = 4,0 cm. Calcula la longitud de $\mathbf{\overline{BC}}$.




Como el triángulo es rectángulo en A, para calcular la longitud de la hipotenusa conocidas las de sus catetos, aplicamos el teorema de Pitágoras.

$\mathbf{\overline{CB}}^2 = \mathbf{\overline{AC}}^2 + \mathbf{\overline{AB}}^2$

$\mathbf{\overline{CB}}^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$ ; $\mathbf{\overline{CB}} = \sqrt{\mathbf{25}}$ ; $\mathbf{\overline{CB}}$ =5,0 cm

Cuando conocemos las longitudes de la hipotenusa y uno de los catetos para hallar la longitud del otro es necesario despejar. Por ejemplo, en este triángulo ABC para hallar la longitud de los catetos nos quedaría el despeje de esta manera:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{CB^2} - \overline{AC^2}}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{CB^2} - \overline{AB^2}}$$

**Ejercicios**

1. Se tiene un triángulo MNP rectángulo en M, calcula la longitud del lado que falta si:

a) $\overline{MN}$ = 15 cm y $\overline{PM}$ = 20 cm.

b) $\overline{MN}$ = 48 dm y $\overline{PN}$ = 52 dm.

c) $\overline{MN}$ = $\overline{PM}$ = 4,2 cm.

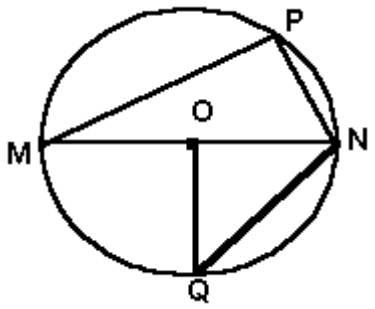
d) $\overline{MN}$ = $\overline{PM}$ y $\overline{NP}$ = 10 mm.

2. Calcula el área y el perímetro de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 60 cm y 25 cm.

3. En la figura P y Q puntos de la circunferencia de centro O y $\overline{MN}$ diámetro; $\overline{MP}$ = 12 mm y $\overline{MN}$ = 1,5 cm.

a) ¿Qué tanto por ciento representa el perímetro del $\Delta$MNP respecto a la longitud de la circunferencia?

b) Calcula el perímetro del pentágono MPNQO.




Para que profundices sobre como se obtuvo la fórmula para calcular la longitud de la circunferencia y del un arco de circunferencia, te remitimos a que leas en el LT 8vo grado, las páginas 36, 37 y 38; analiza el ejemplo 1 de la página 38.

En este epígrafe también aprenderás algunas fórmulas que te ayudarán a calcular la longitud de la circunferencia y la de un arco de circunferencia.

Para calcular la longitud de la circunferencia utilizamos la fórmula $L = 2\pi r$, donde $\pi \approx 3{,}14$. También es conocido que $d = 2r$, entonces esta fórmula se puede escribir así $L = \pi d$.

Para calcular la longitud de un arco de circunferencia se utiliza la siguiente proporción $\frac{b}{L} = \frac{\alpha}{360}$ que relaciona la longitud b de un arco de $\alpha^o$ de la circunferencia con la longitud L de la circunferencia.

En esta proporción conociendo el valor de dos de sus tres variables podemos calcular el valor de la tercera.

**Ejercicios**

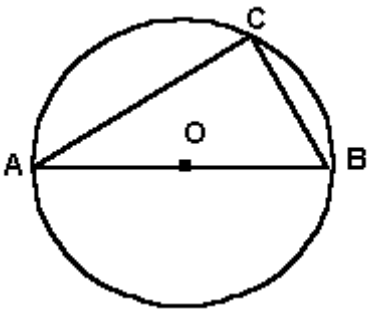
1. Calcula la longitud de una circunferencia de:

a) r = 2,0 cm. b) r = 4,5 mm c) d = 10 dm d) d = 1,0 km.

2. Calcula el radio de una circunferencia si:

a) L = 94,2 cm. b) L = 3,14 m. c) L = $5\pi$ dm.

3. En la figura A, B y C puntos de la circunferencia, $\overset{\frown}{AC} = 120^o$, $\angle CAB = 30^o$.




a) Clasifica el ΔABC según la amplitud de sus ángulos.

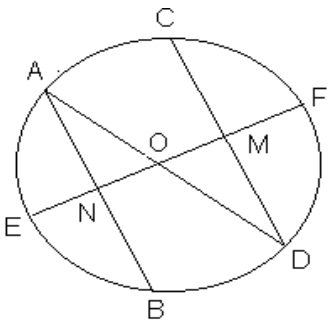
b) ¿Qué representa la cuerda $\overline{AB}$ para la circunferencia? Argumenta.

c) Si $\overline{AB} = 2,4$ cm, calcula la longitud de la circunferencia.

4. Una rueda tiene un diámetro de 20 cm. ¿Cuántos metros recorrerá al dar 100 vueltas?

5. Una rueda de bicicleta recorre $420\pi$ cm cuando da 15 vueltas. Determina el diámetro de la rueda.

6.En la figura se tiene una circunferencia de centro O. $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ cuerdas, N y M pertenecen a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ respectivamente, $\overline{EF}$ y $\overline{AD}$ diámetros, $\overline{AD}$ y $\overline{EF}$ se cortan en O y $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{AC}$



a) Probar que ΔANO = ΔDMO.

b) Si el ∠ADC = 47º, ¿qué amplitud tiene el arco $\overset{\frown}{AC}$ ?

c) Si $\overset{\frown}{CF}$ = 18º, ¿qué amplitud tiene $\overset{\frown}{AE}$ ? Justifica.

d) Clasifica el ∠AOE según su posición en la circunferencia. ¿Cuál es su amplitud? Justifica.

e) Traza el ∠EDF, ¿cuál es su amplitud?

f) Si $\overline{EF}$ = 4,0 cm, calcula la longitud de la circunferencia.

8. a) Dados $\alpha$ = 30º y L = 96 cm, calcula b.

   b) Dados b = 2,5 m y $\alpha$ = 60º, calcula L.

   c) Dados b = 15 dm y L = 120 dm , calcula $\alpha$.

9. El minutero de un reloj tiene 6,0 cm de longitud. ¿Cuántos metros recorre su extremo libre al avanzar 20 minutos?

## 3.2 Área del círculo

En este epígrafe conocerás las fórmulas para calcular el área de un círculo, del anillo y del sector circular las cuales aplicarás a la resolución de ejercicios y problemas.

Para que conozca como se obtuvo la relación que nos permite calcular el área de un círculo, del anillo o corona circular y del sector circular te proponemos que veas el LT 8vo grado de la página 39 a la 41 y analices el ejemplo que aparece en la página 41.

El área del círculo se calcula mediante la fórmula: $A = \pi r^2$ si conoces el radio o también $A = \pi \frac{d^2}{4}$ si conoces el diámetro.

La porción del plano limitada por dos circunferencias concéntricas, incluyendo estas, se llama **anillo o corona circular** y su área se calcula por la siguiente fórmula:

$A = A_{C_2} - A_{C_1}$, donde $A_{C_2}$ es el área de la circunferencia mayor y $A_{C_1}$ el área de la menor.

Si sustituimos y extraemos a pi ($\pi$) como factor común nos queda la fórmula:

$A = \pi(r_2^2 - r_1^2)$, donde $r_1$ y $r_2$ son los radios de las circunferencias concéntricas.

**Sector Circular**: es la parte del círculo limitada por un arco y los lados del ángulo central correspondiente.

El área del sector circular se calcula por la fórmula:

$A_{sc} = \frac{A_c . \alpha}{360}$ , donde $A_c$ es el área del círculo y $\alpha$ la amplitud del ángulo del sector.

Mediante esta relación se puede escribir también una proporción que nos permita utilizarla para calcular también el área del círculo (A) o la amplitud de $\alpha$.

**Ejercicios**

1. Calcula el área de un círculo si:

a) r = 2,5 cm.

b) d = 8,4 mm.

c) L = 62,8 dm.

2. Dado el área del círculo, halla el elemento pedido:

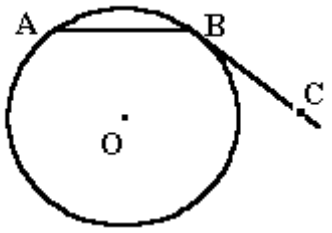
a) A = 314 $cm^2$, halla r.

b) A = 19,6 $dm^2$, halla d.

c) A = 0,785 $mm^2$, halla r.

d) A = 36$\pi$ $m^2$, halla d.

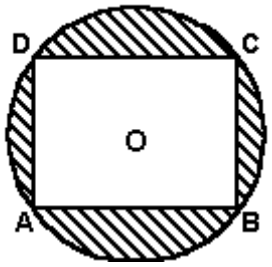
3. En la figura A y B puntos de la circunferencia de centro O, la semirrecta BC es tangente a la circunferencia en B y la cuerda $\overline{AB}$ tiene una longitud igual al radio de la circunferencia.




a) Determina la amplitud del $\angle ABC$.

b) Si el área del círculo es igual a 81$\pi$ $cm^2$, calcula el perímetro del $\Delta AOB$.

4. El rectángulo ABCD está inscrito en la circunferencia de centro O.



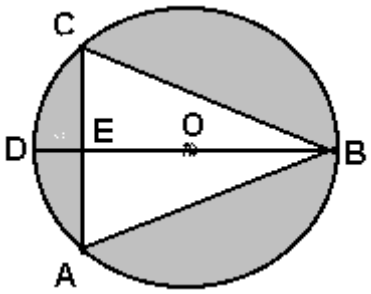

a) ¿Dónde está ubicado el centro de la circunferencia? Fundamenta.

b) Si $\overline{AB}$ = 8,0 cm y $\overline{BC}$ = 6,0 cm, calcula el área sombreada.

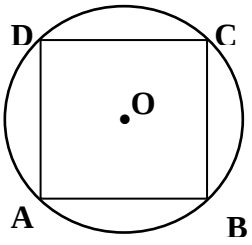
5. ¿Se podrán colocar, a la vez, 10 vasos cuyo diámetro de la base es de 8,0 cm sobre una bandeja circular de 20$\pi$ cm de longitud? Fundamenta mediante cálculos

6. Una moneda tiene una superficie de $4\pi$ $cm^2$. ¿Cuántas monedas se podrán fabricar con una placa rectangular de 4,0 cm de ancho y 480 $cm^2$ de superficie?

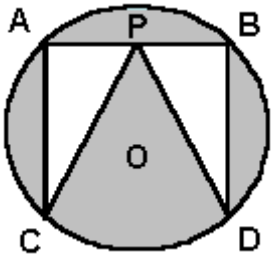
7. En la figura A y C puntos de la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{DB}$, $\overline{AC} \perp \overline{DB}$ en E, $\overline{CB} = 4{,}5$ dm, $\overline{DB} = 4{,}8$ dm y $\overline{DE} = \overline{EO}$.
Calcula el área sombreada.



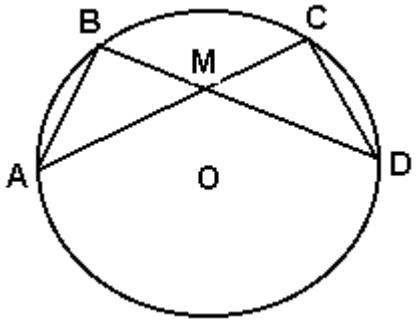

8. El cuadrado ABCD de 196 $mm^2$ de área está inscrito en la circunferencia de centro O.
a) Calcula el perímetro del triángulo ADC.
b) ¿Qué tanto por ciento representa el área del cuadrado con respecto al área del círculo?




9. En la figura O centro de la circunferencia, $\overline{OP} \perp \overline{AB}$, $\overline{PC} = \overline{PD}$ y $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$.
a) Demuestra que $\angle ACP = \angle BDP$.
b) Si C, O y B puntos alineados, $\overline{AB} = 0{,}06$ m y $\overline{CP} = 5{,}0$ cm, calcula el área sombreada.




10. En la figura A, B y C puntos de la circunferencia de centro O. Las cuerdas $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$ se intersecan en M y además $\overline{BM} = \overline{MC}$.
a) Prueba que los triángulos ABM y CDM son iguales.



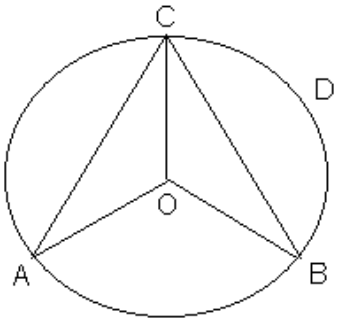
b) Si el $\angle$ABD = 52º, ¿Cuánto mide $\overset{\frown}{AD}$ ?

c) Traza el $\angle$AOD. ¿Cuál es su amplitud?

d) Si el $\overset{\frown}{BAD}$ = 202º, ¿cuál es la amplitud de $\overset{\frown}{AB}$ ? Justifica tu respuesta.

e) Si la razón $\frac{Ac}{A(ABM)}$ = 4 y A($\Delta$MCD) = 25 dm$^2$, calcula la longitud de la circunferencia.

11. En la figura se tiene C(O, $\overline{OA}$), $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB}$.




a) Probar que $\Delta$AOC = $\Delta$COB.

b) Si $\angle$AOB = 124º, ¿cuánto mide $\overset{\frown}{AB}$ ?

c) Traza el $\angle$ADB. ¿Cuál es su amplitud? Justifica tu respuesta.

d) Si $\overset{\frown}{CB}$ = 118º y $\overset{\frown}{CD}$ = 70º,
¿Cuál es la amplitud de $\overset{\frown}{DB}$ ? Justifica tu respuesta.

e) Si el perímetro del $\Delta$AOC es igual a 11,1 cm y $\overline{AC}$ = 5,1 cm. Calcula el área del círculo.

12. a) Dados $\alpha$ = 30º y $A_c$ = 120 cm$^2$, calcula $A_{sc}$.

b) Dados $\alpha$ = 60º y $A_{sc}$ = 15,6 mm$^2$, calcula $A_c$.

c) Dados $A_c$ = 100 m$^2$ y $A_{sc}$ = 25 m$^2$, calcula $\alpha$.

13. Se tienen dos figuras de cartulina con forma de sector circular. Una tiene 2,0 cm de radio y un ángulo de 60º y la otra tiene 3,0 cm de radio y un ángulo de 30º. Halla la razón entre sus superficies.

14. Se trazan tres circunferencias concéntricas de radios $r_1$ = 4,0 cm, $r_2$ = 6,0 cm y $r_3$ = 9,0 cm. ¿Cuántas veces es mayor la superficie comprendida entre las circunferencias 2 y 3 que la superficie comprendida entre las circunferencias 1 y 2.

15. Una pizza familiar circular es cortada en varios trozos (sectores) iguales con un ángulo central igual a 45º.

a) ¿En cuántos trozos (sectores) se cortó la pizza?

b) Si la superficie de uno de los trozos es de aproximadamente 88,3 cm$^2$, ¿cuál es la longitud aproximada de la pizza?

**Construcción de gráficos circulares o de pastel**

En este epígrafe juega un papel importante la interpretación de datos a través de gráficos circulares o de pastel y su construcción.

Estos gráficos se utilizan cuando se quiere analizar el comportamiento de las partes respecto a un todo.

**Ejemplo:**

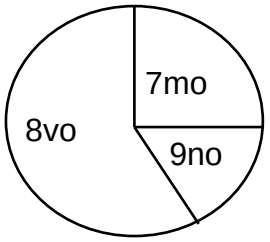
En una secundaria básica el 25% de la matrícula cursa el 7mo grado y el 60% cursa el 8vo grado. Representa en un gráfico circular la distribución por grados de la matrícula de la escuela.

1) Calculemos la amplitud de los ángulos correspondientes a cada sector.

Matrícula de 7mo grado: 25%

Matrícula de 8vo grado: 60%

Matrícula de 9no grado: 15% (100 – 25 – 60)




$\frac{25}{100} = \frac{\alpha_1}{360}$ $\alpha_1 = \frac{25.360}{100}$ $\alpha_1 = 90^o$

$\frac{60}{100} = \frac{\alpha_2}{360}$ $\alpha_2 = \frac{60.360}{100}$ $\alpha_2 = 216^o$

Como la circunferencia completa tiene una amplitud de 360º no es necesario aplicar la proporción para calcular el ángulo central correspondiente a la matrícula de 9no grado, puede hacerse de la siguiente manera:

$s_3 = 360^o - 216^o - 90^o = 54^o$

2) Comprobamos que la suma da 360º:

$90^o + 216^o + 54^o = 360^o$

3) Trazamos el círculo y representamos en él cada sector.

Pasos para construir un gráfico de pastel:

1) Calcular la amplitud del ángulo central correspondiente a cada sector.
2) Comprobar si la suma de las amplitudes obtenidas es igual a 360º.

3) Trazar un círculo y dividirlo en sectores utilizando los resultados obtenidos para cada ángulo central.

Si los datos están expresados mediante la cantidad de alumnos, para hallar la amplitud de cada ángulo central se calcula la frecuencia relativa de cada grado y se multiplica el resultado obtenido por 360º.

**Ejercicios:**

1. En la tabla siguiente se muestran los resultados de la actuación de Cuba en los juegos olímpicos de Atenas.

| MEDALLAS | CANTIDAD |
|---|---|
| **Oro** | **9** |
| **Plata** | |
| **Bronce** | **10** |
| **TOTAL** | **26** |

a) ¿Cuántas medallas de plata obtuvo Cuba?

b) Calcula la frecuencia relativa en cada caso.

c) Representa la información en un gráfico de pastel.

2. En la tabla siguiente se muestra el tanto por ciento de alumnos de una Secundaria Básica incorporados a Círculos de Interés.

| Círculos de Interés | % de incorporados |
|---|---|
| Gastronomía | 20 |
| Salud Pública | 33 |
| Deportes | 27 |
| No incorporados | |

a) ¿Qué tanto por ciento de la matrícula está aún sin incorporarse a los Círculos de Interés?

b) Si la matrícula de la escuela es de 520 alumnos, ¿cuántos de ellos prefieren el círculo de interés de Gastronomía?

c) Representa la información en un gráfico de pastel.

# Unidad 4

# Los cuerpos y sus magnitudes

**Introducción**

La geometría de los sólidos, como toda la geometría, tiene su origen en las primeras civilizaciones. Los egipcios y los babilonios dejaron huellas de sus conocimientos estereométricos en sus tablillas de barro al igual que los griegos que comenzaron el estudio geométrico de los sólidos en la escuela de Pitágoras.

La geometría de los sólidos adquiere su fisonomía actual en los libros XI. XII y XIIII de los Elementos. Dedica Euclides estos tres libros de su famosa obra a construir la geometría del espacio y con excepción de la esfera, la desarrolla tal como se estudiaba hasta casi mediados del siglo XX. La estereometría se completa tal como la conocemos hoy con los trabajos del gran Arquímedes.

Recuerdas que desde la enseñanza primaria te has ido familiarizando con los distintos cuerpos geométricos a través de la observación de objetos reales y de modelos que te han ayudado a conocer algunas de sus características, pues en esta unidad iniciarás el estudio formal de los siguientes cuerpos geométricos: el prisma, la pirámide, el cilindro, el cono y la esfera, sus definiciones, elementos y las fórmulas que te permitirán calcular sus áreas y volúmenes.

## 4.1 El prisma y la pirámide

Específicamente en este epígrafe se definirán los conceptos de prisma y pirámide y sus elementos, así como sus propiedades, relaciones y las magnitudes que lo caracterizan para aplicarlos en la resolución de problemas que conduzcan al análisis de estos y contribuyan a una mejor orientación espacial. Para que profundices en este tema te remitimos que consultes lo tratado sobre el mismo el cual aparece en el libro de texto de 7mo grado pág 171-173.

A las regiones del espacio limitadas por superficies planas, curvas, o por la combinación de estos tipos de superficies, incluidas estas, se les llama **cuerpos geométricos.** Entre ellos encontramos los **Prismas** y las **Pirámides.**

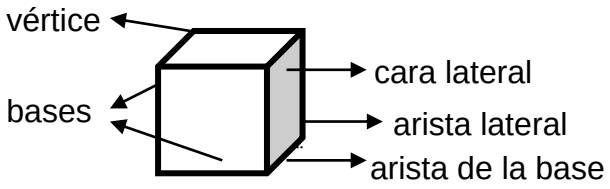
**Prisma:** cuerpo geométrico limitado por dos polígonos iguales y paralelos llamados **bases**, y por paralelogramos cuyo número coincide con el número de lados que tengan las bases.

A los paralelogramos se les denomina **caras laterales** y a las bases y caras laterales en general, se les llama **caras del prisma**.

Los lados de las caras reciben el nombre de **aristas** (en particular, las correspondientes a las caras laterales se nombran **aristas laterales**) y sus extremos son los **vértices**.

Se llama **altura** del prisma al segmento de una recta perpendicular a los planos de las bases, determinado también por ambos (también se denomina altura a la longitud de este segmento).

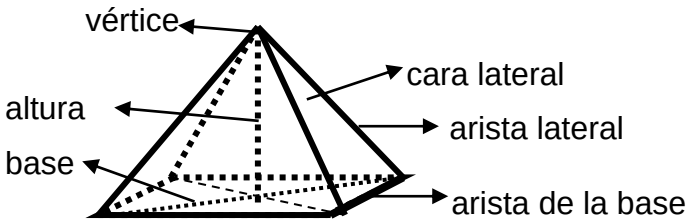
Si la altura del prisma coincide con la arista lateral el prisma es **recto** (como el de la figura), por lo contrario, si la altura es menor que la arista lateral, el prisma se llama **oblicuo**.




Si consideramos un polígono cualquiera en un plano y un punto exterior a este plano, denominaremos **pirámide** al cuerpo limitado por el propio polígono y las superficies determinadas por los segmentos que unen a dicho punto con cada vértice del polígono.

Los elementos de la pirámide son:

- una base,
- caras laterales que son triángulos,
- vértices que incluyen al superior,
- aristas de la base y laterales.




La **altura** de la pirámide es el segmento de una recta perpendicular a la base y determinado por el vértice superior y la propia base (también se llama altura a la longitud de este segmento).

Si la altura de una pirámide coincide con el centro de su base, decimos que la pirámide es **recta** (como en la figura).

Para esbozar un prisma o una pirámide en perspectiva debes considerar los siguientes pasos:

1) Los segmentos en dirección del ancho se dibujan horizontalmente y los correspondientes a la altura en forma vertical. Estos segmentos se dibujan con las mismas longitudes que tiene el cuerpo.
2) Los segmentos en dirección de la profundidad se trazan formando un ángulo de 45º con la horizontal y con una longitud igual a la mitad de la que tienen ellos en el cuerpo.

**Ejercicio**

1. Esboza prismas rectos y pirámides rectas de diferentes bases. Nómbralos y señala en ellos sus elementos principales.

a) Di la cantidad de vértices y caras laterales que tienen en cada caso.

Para poder resolver innumerables problemas es necesario que conozcas y apliques determinadas relaciones (fórmulas) que te permitan calcular sus áreas y volúmenes.

**Área total de un prisma.**

Para calcular el área total de un prisma utilizamos la fórmula siguiente:

$\mathbf{A_T = 2A_B + A_L}$, donde $\mathbf{A_B}$ es el área de la figura que esté en la base del prisma y $\mathbf{A_L}$ el área lateral que se calcula por la fórmula $\mathbf{A_L = A_1 + A_2 + \ldots + A_n}$, o sea sumando las áreas de los paralelogramos que componen sus caras laterales.

También el área lateral se puede calcular en un prisma recto como el producto del perímetro de una de sus bases por la altura del prisma:

$\mathbf{A_L = p \bullet h}$

**Área total de la pirámide.**

Para calcular el área lateral de la pirámide utilizamos la fórmula:

$\mathbf{A_L = A_B + A_L}$ , donde $\mathbf{A_B}$ es el área del polígono que esté en la base y $\mathbf{A_L}$ es el área lateral; que se calcula como la suma de las áreas de las caras laterales que forman la pirámide que son triángulos.

**Volumen del prisma.**

Recordarás que en grados anteriores estudiaste cómo calcular el volumen de un cubo y de un ortoedro. Tanto uno como el otro son casos particulares de prismas.

En general el volumen de un prisma se calcula mediante el producto del área de una de sus bases ($A_B$) por la altura del prisma (h):

$$V_{prisma} = A_B \bullet h$$

**Volumen de la pirámide.**

El volumen de una pirámide es igual a la tercera parte del producto del área de su base por su altura: $V_{pirámide} = \frac{1}{3} A_B\, h$

Observa que el volumen de la pirámide es igual a la tercera parte del volumen de un prisma que tenga igual base y altura que ella. Para mejor comprensión lee la descripción del experimento que aparece en el LT de 7mo grado pág184.

**Ejercicios**

1. Un prisma recto de base rectangular cuya base mide 12 cm de largo, 8,2 cm de ancho y su altura mide 150 mm.

a) Calcula la tercera parte de su área total.

b) Calcula el 25% de su volumen.

2. El área lateral de un prisma recto de base cuadrada es de 204 $cm^2$ y el área de la base es igual a 36 $cm^2$. Halla su volumen.
3. La superficie total de un dado de madera es de 216 $dm^2$. Su volumen es:

   36 $dm^3$ 216 $dm^3$ no se puede determinar
4. Una piscina cuya forma es de prisma recto de base rectangular tiene 50 m de largo, 25 m de ancho y 400 cm de profundidad.

a) ¿Cuál es, en litros, su capacidad?

b) Si está azulejeada completamente con azulejos cuadrados de 0,04 $m^2$ de superficie, ¿cuántos azulejos se utilizaron?

5. Halla el área lateral de una pirámide recta de base cuadrada cuya superficie mide 196 $mm^2$ de área y la longitud de las alturas de sus caras representan las tres séptimas partes de la de las aristas de su base.
6. Una pirámide recta de base rectangular tiene 12 cm y 8,0 cm de longitud en las aristas de la base y una altura cuya longitud es 1,5 veces la de la arista mayor. Calcula el 80% de su volumen.
7. La altura de un prisma recto mide 6,0 m, su base es un rectángulo en el que uno de sus lados es el doble del otro y el área total del cuerpo es de 144 $m^2$. Halla su volumen.
8. Halla el área total y el volumen de un cubo sabiendo que la suma de las longitudes de todas sus aristas es igual a 96 dm.
9. La altura de una pirámide recta es igual a 12 dm y la base es un rombo cuyas diagonales miden 18 dm y 32 dm.

a) Calcula su volumen.

b) ¿Cuánto miden las aristas laterales de la pirámide?

10. El área lateral de un prisma recto es igual a 300 $cm^2$ y tiene una altura de 5,0 cm. Si la base es un polígono regular, determina la cantidad de lados que tiene.
11. Las diagonales de la base rectangular de una pirámide recta miden 20 cm y una arista de dicha base excede en 4 cm a la otra. Si la altura del cuerpo es de 15 cm, calcula su volumen.
12. Una pecera con forma de prisma recto de base rectangular contiene 40 litros de agua que representan las dos terceras partes de su capacidad. Si las longitudes de las aristas de la base miden 5,0 dm y 3,0 dm,

a) ¿Cuánto mide la altura de la pecera?

b) ¿Qué cantidad de cristal se habrá utilizado para construirla, incluyendo su fondo?

## 4.2 El cilindro, el cono y la esfera

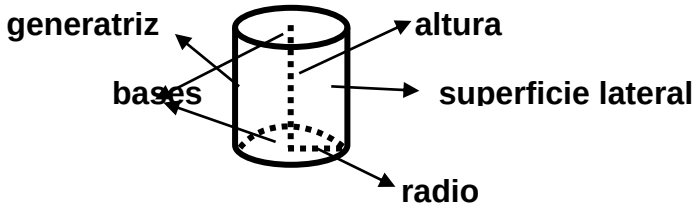
En este epígrafe continuarás profundizando en otros cuerpos geométricos, los llamados **cuerpos redondos**, se definirán, se estudiarán sus elementos principales, así como sus propiedades, relaciones y las magnitudes para su aplicación a la resolución de

problemas**.** Para que profundices en este tema te remitimos que consultes lo tratado sobre el mismo el cual aparece en el libro de texto de 8vo grado páginas 158-160.

El cilindro, el cono y la esfera son cuerpos de revolución.

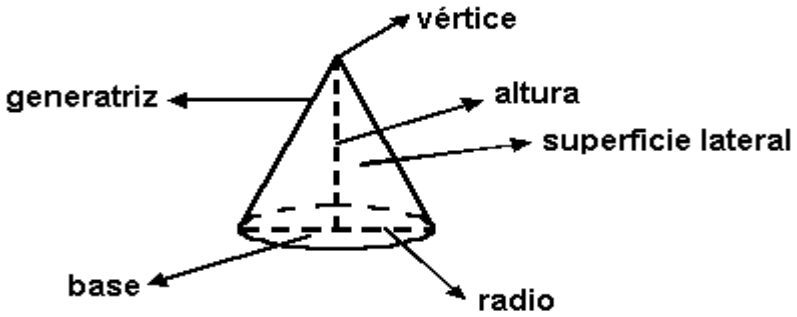
El **cilindro circular recto** se obtiene al rotar un rectángulo alrededor de uno de sus lados. Está limitado por dos círculos llamados **bases** y una **superficie lateral curva**. Los **radios** de las bases son sus radios y la **altura** es la distancia entre ellas.

A cualquier segmento que es perpendicular a las bases y cuyos extremos pertenecen a las circunferencias que las limitan se le denomina **generatriz** y su longitud es igual a la altura del cilindro.

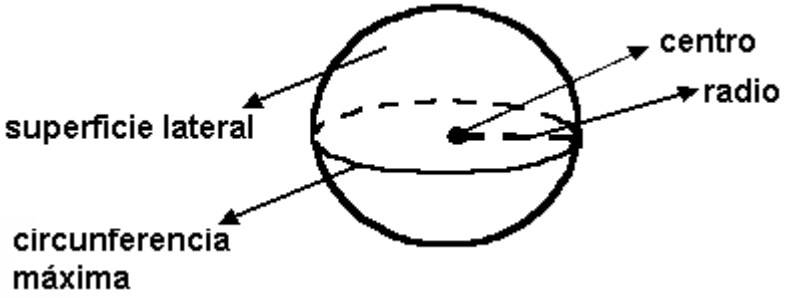



El **cono circular recto** se obtiene a partir de la rotación de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. Está limitado por un círculo llamado **base** y por una **superficie curva**. El **radio** del cono es el de su base y su **altura** es la distancia del vértice a la base.

Se denomina **generatriz** del cono a cualquier segmento que tiene como extremos el vértice del cono y un punto de la circunferencia que limita la base.



La **esfera** se obtiene por la rotación de un semicírculo alrededor de su diámetro. Está limitada por una **superficie curva**. Sus elementos principales son el **centro**, el **radio** y los **círculos** y las **circunferencias máximas.**




**Esbozo de cilindros, conos y esfera.**

La representación de estos cuerpos se hace a través del siguiente procedimiento:

1) Los segmentos en la dirección del ancho se dibujan horizontalmente y los que tengan la misma dirección de la altura en forma vertical.
2) Los segmentos en la dirección de la profundidad se trazan formando un ángulo de 90º con la dirección horizontal y con una longitud igual a la mitad de la que tienen ellos en el cuerpo.

Para esbozar las circunferencias de la base es necesario trazar un diámetro en la dirección del ancho y uno en la dirección de la profundidad (este último con una longitud igual a la mitad de la longitud original) y unir sus extremos con una curva que es la representación de la circunferencia.

**Área total del cilindro.**

La fórmula general para calcular el área total del cilindro es igual a la del prisma: $A_T = 2A_B + A_L$, donde el $A_B = \pi r^2$ y el $A_L = 2\pi rh$. Sustituyendo se obtiene que: $A_T = 2\pi r ( h + r )$.

**Área Total del cono.**

La fórmula general para calcular el área total del cono es igual a la de la pirámide: $A_T = A_B + A_L$, donde el $A_B = \pi r^2$ y el $A_L = \pi rg$. Sustituyendo se obtiene que: $A_T = \pi r ( g + r )$.

**Área total de la esfera.**

El área total de la esfera es $A_T = 4\pi r^2$, o sea, cuatro veces el área de uno de sus círculos máximos.

**Volumen del cilindro.**

Para calcular el volumen del cilindro se utiliza la misma fórmula general que para calcular el volumen de un prisma, o sea, $V_{cil.} = A_B \bullet h$, pero como las bases del cilindro son círculos la misma queda $V_{cil.} = \pi r^2 h$.

**Volumen del cono.**

Para calcular el volumen del cono se utiliza la misma fórmula general que para calcular el volumen de una pirámide, o sea, $V_{cono.} = \frac{1}{3} A_B\, h$, pero como la base del cono es un círculo la misma queda $V_{cono.} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Observa que al igual que ocurre con la pirámide y el prisma, el volumen del cono es igual a la tercera parte del volumen de un cilindro de iguales base y altura.

**Volumen de la esfera.**

Para calcular el volumen de la esfera se utiliza la fórmula: $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$. Para mejor comprensión lee la descripción del experimento que aparece en el LT de 8vo grado pág171.

**Ejercicios**

1. El área de un círculo base de un cilindro circular recto tiene $9\pi$ $m^2$ de área y una altura de 100 cm. Calcula la longitud de su radio y su área lateral.
2. Un cilindro circular recto tiene 3,0 m de radio y 40 dm de altura,
   a) Calcula su volumen.

b) Determina su área total.

3. Se desea construir un tanque cilíndrico con tapa de 2,0 m de diámetro.

a) ¿Qué altura necesita tener para almacenar 15 700 litros de agua?

b) ¿Qué cantidad de material se necesita para fabricarlo?

4. ¿Qué cantidad de plástico se necesita para fabricar un pomito de pastillas cilíndrico de 3,6 cm de diámetro y 0,04 m de altura?

a) Si cada pomito debe contener 100 pastillas y en el almacén hay 9 240 $cm^2$ de plástico, ¿alcanzará dicha cantidad para fabricar los pomitos necesarios para envasar un lote de 15 000 pastilla?

5. Se tienen 200 latas de conserva cilíndricas de 3,0 cm de radio y 1,5 cm de altura. Si se quiere colocar una etiqueta que cubra todo su borde lateral, ¿qué cantidad de papel se necesitará?
6. 6. El área del círculo de la base de un cono circular recto es de $64\pi$ $cm^2$ y su altura mide 3,0 cm. Calcula la longitud de su radio y la de su generatriz.
7. Un cono circular recto tiene 10 cm de diámetro y 12 cm de altura,

a) Calcula su volumen.

b) Calcula su área total.

8. La generatriz de un vaso cónico de cartón de 8,0 cm de altura mide 10 cm.

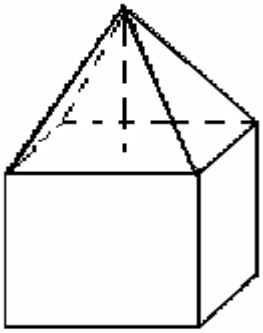
a) ¿Qué cantidad de líquido puede almacenar?

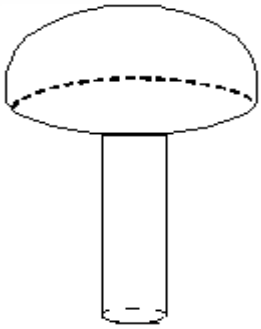
b) ¿Qué cantidad de cartón se necesita para fabricar 95 vasos como este?

9. Un vaso cilíndrico tiene agua hasta los ¾ de su capacidad. Si contiene $0{,}56\pi$ litros de agua y su base tiene 0,5 dm de diámetro, halla la altura del vaso.
10. Se quieren confeccionar 60 gorritos cónicos iguales para un cumpleaños, si sus medidas son 9,0 cm de radio y 12 cm de altura. ¿Qué cantidad de cartulina es necesario utilizar?
11. Un cono tiene 3,0 dm de radio y 4,0 dm de altura. Si se construye otro con igual base y un volumen de $36\pi$ $dm^3$, ¿en cuántos decímetros será mayor la generatriz del segundo cono respecto al primero?
12. Una pelota esférica tiene $2\,304\pi$ $cm^3$ de volumen. Determina su superficie en $dm^2$.
13. Un globo completamente esférico con 20 cm de diámetro contiene solamente el 60% del aire que puede admitir. ¿Cuántos $dm^3$ de aire contiene el globo?
14. Un pozuelo para dulce tiene forma de semiesfera de 10 cm de diámetro. ¿Qué cantidad de plástico se necesitará para fabricar 1 000 pozuelos de este tipo?

**Ejercicios y problemas sobre cuerpos compuestos:**

1. Calcula el área total del siguiente cuerpo compuesto por un cubo de arista 6,0 dm y una pirámide recta la cual se encuentra superpuesta al cubo. La altura de la pirámide es de 4,0 dm y el área de una de sus caras es igual a 15 $dm^2$.
2. Un tornillo está compuesto por una semiesfera y un cilindro circular recto, como muestra la figura. El diámetro de la parte semiesférica mide el doble que el de la parte cilíndrica y la altura del cilindro es de 8,0 cm. Calcula la cantidad aproximada de material que se necesitará para fabricar 200 tornillos como este.





3. A un dado macizo de madera cuya arista es de 2,0 dm se le han perforado cada una de sus caras para marcar los números correspondientes. Las perforaciones tienen forma semiesférica de 0,2 mm de radio cada una. ¿Qué cantidad de $mm^3$ se le extrajeron al dado?
4. Un recipiente plástico hueco está formado por tres piezas, un cilindro circular recto, un cono circular recto y una semiesfera. El cilindro tiene base común con la semiesfera y el cono. El diámetro de la base y la altura del cono miden 2,0 m y el largo total del recipiente es de 12 m.

a) ¿Cuál es la capacidad del recipiente?

b) ¿Qué tanto por ciento de la capacidad total corresponde a la pieza cilíndrica?