MATEMÁTICA

octavo grado

MATEMÁTICA

octavo grado

M. Sc. Susana Acosta Hernández
M. Sc. Oscar Domínguez Escobar
M. Sc. Margarita Gort Sánchez
M. Sc. Lourdes Báez Arbesú
Dr. C. Aurelio Quintana Valdés

EDITORIAL
PUEBLO Y EDUCACIÓN

Edición y corrección:

- M. Sc. Susana Acosta Hernández

Diseño y cubierta:

- Instituto Superior de Diseño (ISDi)
- Anelís Simón Sosa ♦ María Paula Lista Jorge ♦ Sara Sofía Delgado Méndez ♦ Isell Rodríguez Guerra ♦ Daniela Domínguez Ramírez ♦ Amanda Serrano Hernández ♦ Rocío de la C. Ruiz Rodríguez ♦ Evelio de la Sota Ravelo ♦ Ana Laura Seco Abreu ♦ Arianna Ruenes Torres ♦ Reynier Polanco S omohano ♦ Celia Carolina Céspedes Pupo ♦ Elizabeth Diana Fajardo Céspedes ♦ Laura Rosa Armero Fong ♦ Elizabeth Blanco Galbán ♦ Laura Reynaldo Jiménez ♦ Daniela Arteaga Martínez ♦ Daniela Alpízar Céspedes ♦ Roberto Pérez Curbelo ♦ Ariel Abreu Ulloa ♦ M. Sc. Maité Fundora Iglesias ♦ Dr. C. Ernesto Fernández Sánchez ♦ D.I. Eric Cuesta Machado ♦ D.I. Julio Montesino Carmona

Ilustración:

- Dariel A. Hernández Pérez

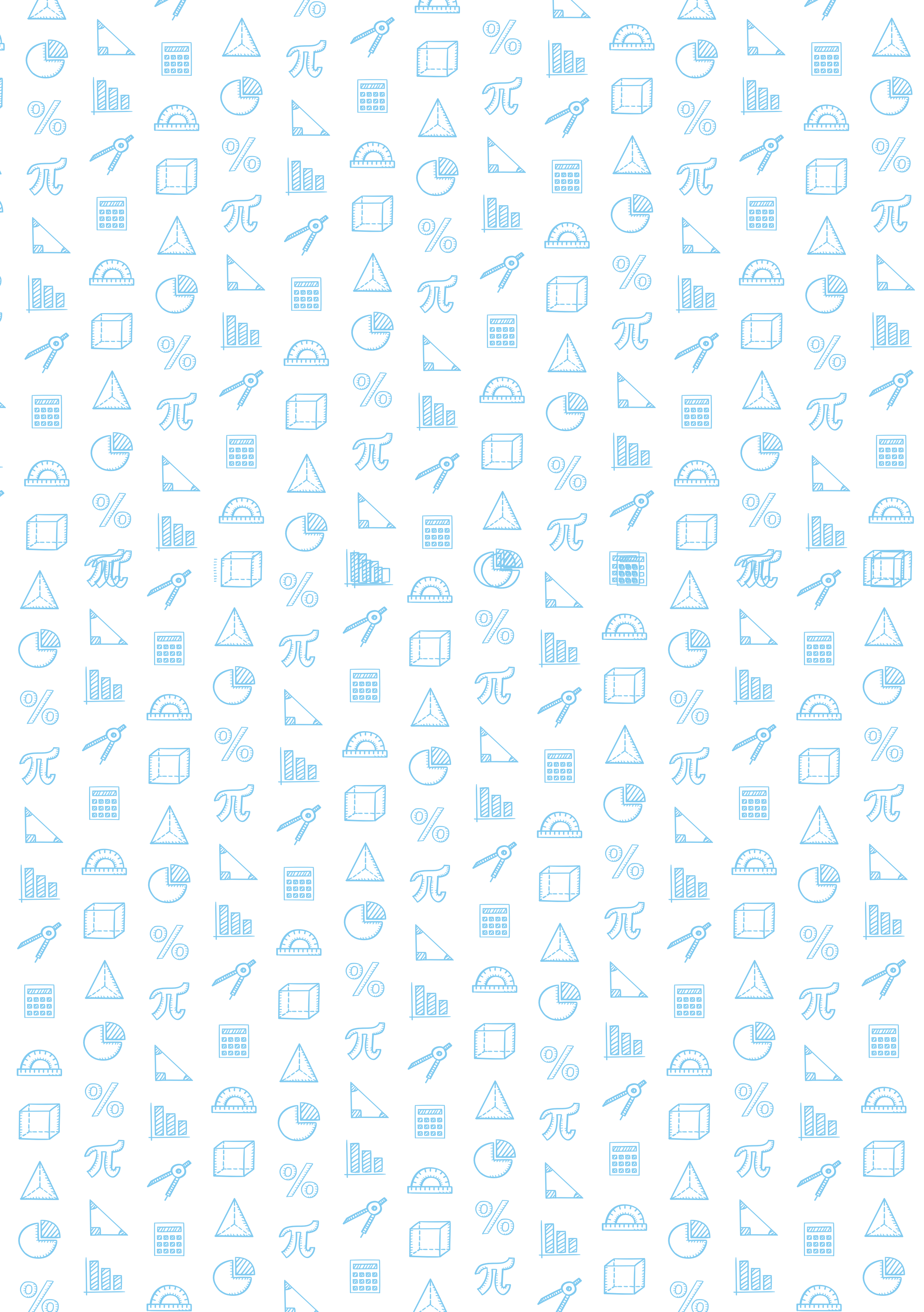
Emplane:

- Yaneris Guerra Turró

ISBN 978-959-13-4758-9 (Versión impresa)
ISBN 978-959-13-4759-6 (Versión digital)

EDITORIAL PUEBLO Y EDUCACIÓN
Ave. 3.ª A No. 4601 entre 46 y 60,
Playa, La Habana, Cuba. CP 11300.
epueblo@epe.gemenide.cu

ÍNDICE



CAPÍTULO 1

El conjunto de los números reales, la estadística y estadística descriptiva

"Con el inicio del curso"

¡Qué vacaciones! ¡Las mejores de mi vida, pues me ocurrieron cosas maravillosas! Y, además, las primeras desde que estoy en secundaria. Ahora, que dentro de poco comenzará el curso escolar, pienso que tendré nuevas asignaturas y se mantendrán otras; entre estas la Matemática, asignatura que siempre me preocupa, aunque en séptimo grado obtuve buenos resultados y espero que también sea así en octavo grado; haré todo lo posible para lograrlo".

¡Ya estás en octavo grado! Comienza este capítulo reactivando lo estudiado de aritmética en séptimo grado; después, conoceremos peculiares números y ampliaremos lo estudiado sobre la estadística descriptiva.

¡Claro está!, que no faltarán momentos con la Historia, con la cual, pretendemos, y esperamos que así se logre, hacerte más placentero tu aprendizaje y enriquecer tu cultura, lo que implica que serás un estudiante mejor.

¡Bienvenido seas a este nuevo curso escolar! ¡Éxitos para ti! Esta frase de nuestro José Martí te llenará de aliento cuando lo necesites: "[…] los estudios hechos no inspiran más que una profunda vergüenza por lo que todavía nos queda que estudiar".[1]

1.1 Repaso sobre los números racionales

Recordemos algunas de las características más importantes de estos números.

[1] Ramiro Valdés Galarraga: *Diccionario del pensamiento martiano*, Editorial de Ciencias Sociales, La Habana, 2012, p. 198.

En séptimo grado, estudiaste el conjunto de los números racionales, los cuales se pueden representar en la forma $\frac{a}{b}$, donde: a, $b \in \mathbb{Z}$; $b \neq 0$.

Pensemos, mediante el conocido diagrama de Venn[2] (fig. 1.1), qué conjuntos son subconjuntos del conjunto de los números racionales, por ejemplo:

$\{-0{,}\overline{3}; -4\} \subset \mathbb{Q}$; $\{5; -1\} \not\subset \mathbb{N}$; $\mathbb{Q}^{+} \subset \mathbb{Q}$; $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$; $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

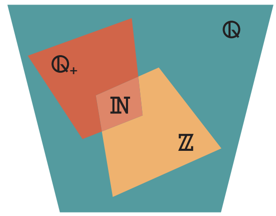


Fig. 1.1

El conjunto de los números racionales es infinito, pero ya debes haber recordado algunos elementos que pertenecen a dicho conjunto.

De dos números racionales diferentes, es menor el que está situado más a la izquierda en la recta numérica.

Por ejemplo, en el fragmento de recta numérica de la figura 1.2 es fácil percatarse de que:

$$1\frac{2}{5} < 2;\ -\frac{16}{10} < -\frac{4}{5};\ 1 > -2;\ 0 > -2;\ 0 < 1.$$

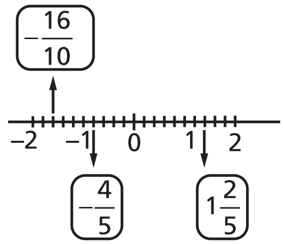


Fig. 1.2

En el conjunto de los números racionales:

- la adición, la sustracción, la multiplicación, la división (excepto la división por cero) y la potenciación (con las restricciones que ya conoces), siempre se pueden realizar; por ejemplo:

  $\frac{1}{4} - \frac{1}{2}$; $-7 : 3$; $-90 : (-2)$ tienen solución en $\mathbb{Q}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81} \in \mathbb{Q}$; si el exponente es cero, la base tiene que ser diferente de cero para poder efectuar la potenciación; ($b^0 = 1$, con $b \neq 0$).

- la extracción de las raíces cuadrada y cúbica no siempre puede realizarse, pues como sabes la raíz cuadrada de un número racional negativo no existe en el conjunto de los números racionales, también sucede que la raíz cuadrada de un número racional no siempre es un número racional, algo que también puede ocurrir al extraer la raíz cúbica, por ejemplo: las raíces cuadradas de 144 son 12 y –12, $\{12; -12\} \subset \mathbb{Q}$, pero $\sqrt{17} \notin \mathbb{Q}$, así como $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$; la raíz cúbica de –125 es $-5 \in \mathbb{Q}$; $\sqrt[3]{7} \notin \mathbb{Q}$.

[2] John Venn (1834-1923) matemático británico. Se destacó por sus investigaciones en la rama de la Lógica Matemática. Es especialmente conocido por su método de representación gráfica de proposiciones (según su cualidad).

- Las operaciones de adición y de multiplicación en $\mathbb{Q}$ son conmutativas y asociativas; por ejemplo: $\frac{1}{5}-\frac{3}{8}=-\frac{3}{8}+\frac{1}{5}$ y $-2,7\cdot 5\frac{1}{2}=5\frac{1}{2}\cdot(-2,7)$.
- La operación de multiplicación en $\mathbb{Q}$ es distributiva con respecto a la adición, por ejemplo, $-\frac{2}{15}\left(1,3+\frac{5}{4}\right)=\left(-\frac{2}{15}\cdot 1,3\right)+\left(-\frac{2}{15}\cdot\frac{5}{4}\right)$.

Recuerda que...

En ejercicios donde aparecen operaciones combinadas con números racionales, hay que tener en cuenta el orden en que se realizan, así como si intervienen signos de agrupación:

- Primero se calculan las potencias y raíces en el orden en que aparecen.
- Segundo se realizan las multiplicaciones y divisiones en el orden en que aparecen.
- Tercero se realizan las sumas algebraicas que resultan al final.
- Si intervienen signos de agrupación (paréntesis, corchetes y llaves) se resuelven estos primero manteniendo el orden establecido anteriormente.

Por ejemplo:

Calcula:

a) 3 22 : (–0,12) + 1

= 3 4 : (–0,12) + 1

= 12 : (–0,12) + 1

= –100 + 1

= –99

b) $\left(\sqrt[3]{-64}-1\right)\cdot\frac{1}{15}$

$=\left(-4-1\right)\cdot\frac{1}{15}$

$=-5\cdot\frac{1}{15}$

$=-\frac{1}{3}$

c) 32 – 12 : 6 + 7

= 9 – 2 + 7

= 7 + 7

= 14

Si coleccionaste porcentajes, tal y como te sugerimos en el capítulo 1 del libro de séptimo grado, debes tener una buena cantidad de estos; pues en incontables circunstancias ilustran y ayudan a comprender fenómenos.

Es muy valioso que tú sepas interpretar la *información* que se expresa en *tanto por ciento* y que significa *tantos de cada 100,* es decir, *la cantidad* *de elementos que se toman de cada conjunto de 100.* Esta es otra oportunidad de comprenderla ¡No la desperdicies!

Hallar el tanto por ciento de un número.

Ejemplo 1:
En mi grupo de séptimo grado, el 95 % de los estudiantes aprobó la prueba final de Matemática. Si en total éramos 40, ¿cuántos aprobamos?

$$95\ \%\ \text{de}\ 40 = \frac{95}{100} \cdot 40$$

$$= \frac{19}{20} \cdot 40$$

$$= 38$$

Respuesta: Aprobaron 38 estudiantes

¿Qué tanto por ciento es un número de otro?

Ejemplo 2:
Mi grupo de séptimo grado tenía una matrícula de 35 estudiantes y 28 obtuvimos la máxima puntuación en la pregunta de Geometría en la prueba final. ¿Qué porcentaje de la matrícula logró ese buen resultado?

$$\frac{28}{35} \cdot 100 = 80 \cdot$$

Respuesta: El 80 % de los estudiantes alcanzó la máxima calificación en dicha pregunta.

Hallar el número, conocido un tanto por ciento de él.

Ejemplo 3:
En mi grupo de séptimo grado, 16 estudiantes, lo que representa el 40 % de la matrícula, tuvieron faltas de ortografía en la prueba final de Matemática. ¿Cuántos estudiantes tenía mi grupo de séptimo grado?

$$16 : \frac{40}{100} = \frac{16 \cdot 100}{40} = 40 \cdot$$

Respuesta: Mi grupo tenía 40 estudiantes.

Con lo estudiado sobre números racionales, puedes resolver los más variados problemas, proponerte solucionar aquellos que te representen un mayor reto, pensando en estos todo el tiempo que necesites; ese tiempo será muy provechoso para mejorar tu sagacidad, por eso:

- Antes de hacer, trata de entender.
- Busca tu estrategia y llévala adelante.
- Examina a fondo el resultado obtenido.
- Reflexiona acerca de la manera en que pensaste y llega a conclusiones para el futuro.

Ejercicios

1. El pequeñísimo gusano del diablo es el organismo terrestre pluricelular que vive a más profundidad en el planeta; esta especie fue descubierta a 1,3 km bajo tierra en una mina de oro en Sudáfrica, […], a lo mejor algún día se encuentre ese u otro organismo en la mina más profunda del mundo con sus 3 377 m bajo tierra y que también es sudafricana.[3]

a) Escribe el texto de forma tal que aparezcan números negativos, representados en una recta numérica vertical que apoye la información.

b) ¿Cuántos metros tendría que trasladarse ese raro gusano para llegar al punto más bajo de la mina más profunda?
Nota: supón que están dadas todas las condiciones y que va en línea recta.

c) La catarata más alta de África está en Sudáfrica, es Tugela con 948 m, ¿cuál será la distancia entre el punto en que se ubica el curioso gusano y el más alto de esta impresionante caída de agua?
Nota: considera que están en una línea recta perpendicular al nivel del mar.

2. Si diez niños de cada 100 usan espejuelos, ¿cuántos no usan espejuelos en un grupo de 400 niños?

3. Una botella y un tapón cuestan \$1,10. La botella cuesta \$1,00 más que el tapón. ¿Cuánto cuesta la botella?

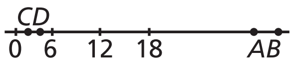
4. Sean $A = -2^4 + 35{,}3$ $\quad B = 18{,}1 - 3{,}85 \cdot 6$

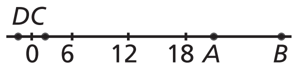
$C = \frac{3}{16} + \frac{5}{8} - \frac{7}{10}$ $\quad D = \frac{1}{3} - \sqrt[3]{-729} : \left(-\frac{81}{7}\right)$

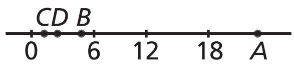
[3] Ríos Rodríguez, Marta y Rosa Leiva Gutiérrez: El mundo. Sus banderas, 2009 y Órgano de prensa *Juventud Rebelde*, 1.º de junio de 2012.

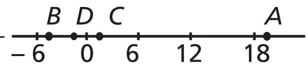
Selecciona la respuesta correcta y márcala con una cruz (X) en la línea dada.

4.1. En la recta numérica A, B, C y D quedan ubicados aproximadamente como se muwestra en la figura 1.3.

a) ___ 

b) ___ 

c) ___ 

d) ___ 

4.2. El conjunto formado por A, B, C y D:

a) ___ es subconjunto de los números enteros,
b) ___ solo tiene dos elementos que son números racionales,
c) ___ es infinito,
d) ___ es subconjunto del conjunto de los números racionales.

4.3 Entre los valores de B y D hay:

a) ___ nada más cuatro números racionales,
b) ___ infinitos números racionales menores que –6,
c) ___ solamente cuatro números racionales mayores que –5,
d) ___ cuatro números enteros.

4.4 El opuesto de A y el de C son dos números:

a) ___ racionales mayores que –20
b) ___ racionales menores que –20
c) ___ racionales positivos d) ___ enteros.

5. Sean $E = \left(\left(-2\right)^{16}\right)^{3} \cdot \left(-2\right)^{-45} + 17^{0}$; $F = (-73{,}44)^2 : 4{,}08^2 - 331$;

$$G = -\frac{17}{16} + \left(2\frac{1}{3}\right)^{2} \cdot \left(-\frac{3}{28}\right)^{2}$$

Completa de forma tal que se obtenga una proposición verdadera.

a) El conjunto numérico más restringido al que pertenecen los valores de E, F y G es el de los números ________________.
b) El conjunto formado por los valores de E, F y G es ________________ conjunto de los números __________________.
c) Al compararlos podemos afirmar que E y F son números_____________.
d) De E, F y G, el mayor valor es el de ___ porque ______________________.
e) El antecesor de E es _____.
f) El sucesor de F es ______.

g) El valor de *F* se ubica entre los números enteros consecutivos ____ y ____.

h) El opuesto de *E* es igual al ________ de *F*.

i) Una propiedad de la potencia utilizada para hallar *E* es ________________.

j) Entre los valores de *F* y *G* hay ____ números enteros.

6. ¿Cuál es el valor de la expresión: 25 % de 14?

7. Sean: $A = -8{,}5 + \left(-\dfrac{5}{12}\right) \cdot \sqrt{144}$ y $B = \dfrac{2^{17} \cdot 3^{5} \cdot \left(3^{3}\right)^{4}}{6^{18}}$

a) Calcula A + B

b) ¿A qué dominio numérico más restringido pertenece el resultado obtenido?

8. Sean: $A = \left\{2; \dfrac{2}{3}; -\dfrac{3}{2}; -2{,}3; 3{,}2; -3;\ 3^{-2}; -3^{2}\right\}$

$B = 1{,}3^{2} - 12{,}986 : 4{,}3 + \sqrt{\dfrac{49}{4}}$ y $C = \dfrac{\left(3^{-27}\right) \cdot 4^{4} \cdot 3^{32}}{12^{\sqrt{2\left(\frac{7}{4}+4^{0}\right)+19\frac{1}{2}}}}$

8.1 Ordena los elementos del conjunto A de manera decreciente y determina:

a) Las parejas de números que multiplicados sean igual al mayor número entero negativo.

b) La diferencia entre el primer y último número.

c) La base de la potencia que resulta del producto entre los dos últimos números.

d) El resultado de sustraer el menor negativo no entero del mayor positivo.

8.2 ¿Entre qué números naturales consecutivos se encuentra el valor de B?

8.3 ¿Qué fracción hay que adicionarle al valor de C para completar la unidad?

9. Las rosas del Ecuador son sus bellas embajadoras ante el mundo. El sector florícola ecuatoriano ingresó en 2016 cerca de 802 461,25 miles de dólares, resultado de sus exportaciones. Rusia fue la segunda mejor compradora con el 14,24 %, aproximadamente 114 246, 96 USD.[4] Verifica la información subrayada con los recursos que te brinda el cálculo porcentual.

10. Desde que, en 2010, en Cuba se amplió el trabajo no estatal, suman 385 775 los trabajadores en este sector, de los cuales 73 118 son jóvenes de entre 18 y 35 años.[5] ¿Qué porcentaje representa dicha cifra del total?

11. El comercio exterior de China aumentó un 9,7 % interanual en 2018 y llegó a un récord histórico de 30,51 billones de yuanes (4,5 billones de dólares) por encima del resultado del año 2017.[6]
¿Cuánto sumó el comercio exterior chino en el año 2017?

12. Francia contaba con sesenta y siete millones doscientos mil habitantes al concluir el año 2017 y la tasa de empleo de la población de entre 15 y 64 años de edad se establecía en el 65,7 %.[7] ¿Cuántas personas estaban laborando en el país al concluir el año 2017?

13. Imagina que eres dueño(a) de una cafetería y parte del anuncio es como se muestra en la figura 1.4.

a) Si el viernes se paga más que el sábado y el sábado menos que el domingo; propón valores para cada uno de los espacios.

b) ¿Cómo quedaría tu idea si en vez de decir *se reduce a,* dijera *se reduce en?*

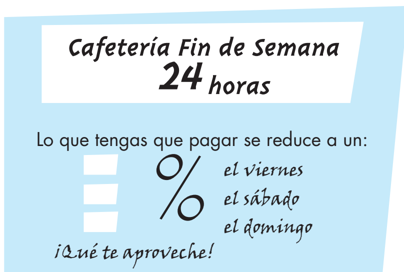


Fig. 1.4

[4] Banco Central del Ecuador. Elaborado por Subgerencia de Análisis e Información. Google, 20 de marzo de 2019.

[5] Órgano de prensa *Juventud Rebelde*, 17 de junio de 2012.

[6] Buscado en Google, 20 de marzo de 2019 (http://spanish.peopledaily.com.cn).

[7] Buscado en Google, 20 de marzo de 2019 (http://www.mitramiss.gob.es/es/mundo/consejerias/francia/trabajar/contenidos/DatosEst.htm).

14. a) Un dependiente vende en la primera hora de trabajo el 20 % de los 60 pomos de perfume que tiene exactamente una caja; si en la segunda hora vende las dos terceras partes del resto, ¿cuántos pomos quedan en la caja?

b) Si en dos meses se han vendido 320 pomos de perfume, ¿cuántas cajas se han abierto durante ese tiempo?

15. Una maestra jubilada tenía 196 libros, el 25 % lo entregó a la biblioteca de la secundaria básica más cercana y la tercera parte del resto la donó a un preuniversitario de la localidad. ¿Con cuántos libros se quedó?

a) Di si la proposición siguiente es verdadera (V) o falsa (F).
A la secundaria y al preuniversitario la profesora entregó igual cantidad de libros.

b) Completa para que la proposición sea verdadera:
La profesora se quedó con el ____ % de los libros que tenía.

16. En una lámina de metal se corta un trozo que constituye el 60 % de dicha lámina. Si el pedazo que queda tiene una masa de 24,2 kg, ¿cuál es la masa del trozo cortado?

17. Eduardo tiene cuatro botellones de 30 litros cada uno y los quiere llenar en una fuente que arroja 20 litros por minuto. ¿Cuántos minutos tardará en hacerlo?

18. Una fábrica produce 24 000 instrumentos agrícolas en un mes. El 30 % de esta producción es de machetes, las tres cuartas partes del resto en guatacas y lo que queda en otros instrumentos.

a) ¿Cuántos instrumentos de cada tipo se producen en un mes?

b) ¿Qué porciento del total de instrumentos producidos en el mes corresponden a las guatacas?

c) ¿En qué razón se encuentran el total de otros instrumentos con respecto al total de guatacas?

19. Cristina dice estar cumpliendo 18 años. Si sabemos que Cristina se rebaja la cuarta parte de su edad, menos un año, ¿qué edad en años y meses tiene Cristina?

20. Un trabajador por cuenta propia vende a singulares precios; él tiene 432 dulces, si la cuarta parte son tartaletas y la novena parte del resto son pasteles, ¿cuántos dulces no son ni tartaletas ni pasteles?

a) Si compra las tartaletas a $15,00 y logra vender todas las que tiene a $20,00, ¿cuál es su ganancia?

b) Un día tuvo una ganancia de $180,00 por la venta de cierta cantidad de pasteles que compró a $15,00. Halla la cantidad de pasteles, si los vendió a $25,00.

21. En un quiosco de mi barrio hay 140 revistas; el vendedor, un profesor de Matemática jubilado, ha querido medir mi habilidad para resolver problemas, por eso me ha dicho:
"Las dos séptimas partes de las revistas que tengo son *Somos Jóvenes,* el 20 % de las que quedan son *Juventud Técnica* y me quedan 80 revistas".
¿Tendrá sentido lo que dice?

22. El 75% de los 40 integrantes de un círculo de interés pedagógico quiere ser maestro primario, la quinta parte del resto, profesores de matemática y los otros profesores de inglés.

a) ¿Cuántos quieren ser profesores de inglés?

b) ¿Qué porcentaje representa del total, los que quieren ser profesores de matemática?

23. Forma el número 68, sumando, restando, multiplicando y dividiendo con estos cinco números: 1 2 3 14 32

24. ¿Cuántas bolas de 10 cm de diámetro pueden introducirse en una caja vacía de 100 cm de lado?

1.2 Nuevos números

¿Hay más números? ¿Cuáles son? ¿Para qué?

Reflexiona un instante

No se sabe cuándo ni dónde sucedió esta historia, [8] lo más seguro es que nunca ocurrió, pero… sea un hecho real o producto de la imaginación, esta historia que vamos a relatar es casi una fábula y vale la pena conocerla:

[8] Elaborada por la M. Sc. Rita María Cantero Pérez, 2013.

Dicen que sucedió en un lejano pueblito, que cuentan, se distinguía por sus recursos naturales y el buen uso que se hacía de estos; la belleza del entorno y el nivel cultural de sus habitantes adultos; nivel cultural entre comillas, pues de Matemática solo querían saber de: adicionar, sustraer, multiplicar y dividir números racionales, algo de tanto por ciento, otro poco de figuras geométricas y de mediciones, nada más. ¿Te imaginas, qué sabrían los niños? Comentaban que con eso bastaba, tratándose de Matemática. En múltiples ocasiones tuvieron que pedir colaboración a especialistas de los pueblos vecinos para solucionar problemas cotidianos que se presentaban, siempre salían victoriosos, pues todos quedaban resueltos; de ahí que, al oír hablar un poquito más de esta ciencia, decían:

–¿Y eso para qué sirve?

Hasta que un día… llegó al pueblo un pícaro que conocía de los saberes matemáticos de los que vivían en ese peculiar pueblito; por eso, puso en el lugar más concurrido un cartel como se muestra en la figura 1.5.

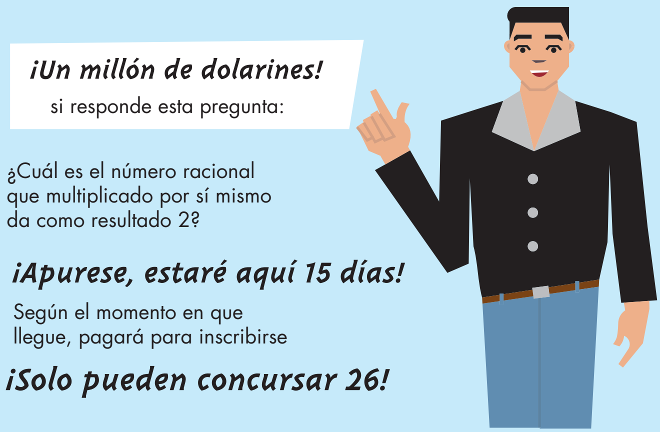


Fig. 1.5

Expresó ser un filántropo y enamorado de la Matemática y difundió su propuesta por todos los medios que pudo; no pocos quedaron seducidos por el fascinador anuncio.

Dadas las condiciones no era fácil concursar; había pocas cuotas y las últimas eran muy costosas, el primero en inscribirse pagó 0,02 D; el segundo, 0,04 D; el tercero, 0,08 D; pero el vigésimo sexto, abonó 671 088,64 D, sin embargo, era una excelente oferta la del millón de dolarines (D).[9]

[9] Dolarín (D): Moneda del pueblito, válida en las cinco naciones más cercanas.

Todos, concursantes o no, buscaban día y noche con sus escasos conocimientos matemáticos, el dichoso número, a veces creían tenerlo porque se aproximaban, más se exigía exactitud en el resultado, dos y no otro.
Quien no concursaba y encontrara la respuesta, podía darla a un participante que estuviera dispuesto a compartir el premio; de ahí que el apasionamiento fue general.
No, no pidieron ayuda, todos creían poder encontrar la solución.
Así transcurrieron los días, en los que nadie se daba cuenta de la aritmética burla, nadie imaginó que el pícaro al decimocuarto día huyera con la fastuosa cifra de: ¡1 342 177,26 D!, resultado de su concurso, eso sí, de la respuesta nada; él sabía que su astuto acertijo no tenía solución.
Al enterarse, todos se sintieron estafados, veintiséis perdieron su dinero y todos, su tiempo. Nunca más supieron de él.
Tres días después, llegó al pueblo un director de cine con el propósito de crear condiciones para la filmación de un documental sobre aquel lugar; el alcalde de allí, por cierto, uno de los más burlados, le contó lo sucedido y Félix Andrés, el hijo del cineasta, al escucharlo, explicó:
No existe número racional que multiplicado por sí mismo, dé como resultado dos. Mi profesor lo ha dicho en las clases de séptimo grado, ha comentado otros ejemplos parecidos y ha dicho, además, que pronto sabremos el porqué.
Ustedes fueron engañados por no saber nada del cuadrado y la raíz cuadrada de un número racional no negativo, espero que hayan aprendido la lección y que ya tengan una buena cantidad de respuestas a la pregunta: Y eso, ¿para qué sirve?

Reflexiona un instante

Seguramente leíste esta historia con todo esmero, por eso ahora queremos que pienses un minuto en un vocablo que te permita caracterizarla.

El vocablo que pensaste para caracterizar la historia tiene que ver por lo que comprendiste de esta. A propósito, algunos comentarios que valen la pena:

Al hallar el valor numérico del término $0{,}01 \cdot 2^x$, siendo x el número que indica el lugar que se ocupó para concursar, se hallaba el dinero que se debía entregar al rufián ¡claro está!, aquella gente no lo sabía y el vil ladrón se valió de otro recurso para explicar cuánto tenían que abonar cada uno de los veintiséis participantes, y no por gusto hizo la aclaración, el veintisiete tenía que abonar ¡1 342 177,28 D!

¡Más de lo que él ofrecía como premio!

Y sí, lo que estafó el promotor es la suma de todos los abonos.

¡Compruébalo tú mismo(a)!

Félix Andrés convenció a todos del papelazo que habían hecho, se valió de sus conocimientos y le sirvió, además, para hacerles ver que la matemática que nos enseñan en la escuela, provee de conceptos, teoremas, reglas, relaciones y procedimientos que nos sirven en esa etapa y en el futuro.

Tú también puedes dar una respuesta correcta ante una situación como esa, pues ya en séptimo grado resolviste ejercicios en los que te enfrentaste a la búsqueda de raíces cuadradas y/o cúbicas de un número racional y en varias ocasiones seguro que tu profesor o profesora, o tu monitor o monitora te puntualizaron:

"En este caso la raíz cuadrada no es un número racional, busquemos la raíz cuadrada de dos y verás que posee infinitas cifras no periódicas"

Si tienes alguna duda, piensa en los números racionales más próximos al valor dado, cuyas raíces cuadradas sean exactas.

Los números racionales no cubren totalmente la recta numérica.

También encontraste advertencias parecidas a esas al hallar las raíces cúbicas.

Recuerda que...

- A todo número racional le corresponde un punto en la recta numérica, sin embargo, no a todo punto de la recta numérica le corresponde un número racional.
- La extracción de la raíz cuadrada de un número racional no negativo, no siempre puede realizarse dentro del conjunto de los números racionales.

Y a lo mejor tuviste que resolver el famoso ejercicio del charlatán:

$x \cdot x = 2$ $\qquad$ x: número racional buscado

$x^2 = 2$

$x = \sqrt{2}$

Respuesta: No existe número racional que multiplicado por sí mismo dé como resultado dos.

Piensa que $\sqrt{1}=1$ y que $\sqrt{4}=2$, por tanto, ¿dónde hallar un número racional que elevado al cuadrado dé dos?, $\sqrt{2}$ no es un número racional, es una expresión decimal infinita no periódica $\left(\sqrt{2}=1,4142135623730950488016887242096 9\ldots\right)$.Gracias a las reglas de redondeo, que ya estudiaste, se puede adoptar la aproximación $\sqrt{2}\approx \mathbf{1,41}$..

¡Con ustedes el burlador hubiese salido burlado!

Ha llegado el momento de conocer qué números son esos, de ampliar tus horizontes matemáticos, de conocer nuevos números.

Saber más

Los números que se representan mediante expresiones decimales infinitas no periódicas, reciben el nombre de números irracionales, se denotan por $\mathbb{I}$, por ejemplo: $\pi = 3,14159265358979323846264338327 95\ldots$

$\sqrt{11}=3,31662479035539984911493273667\ldots$.

De la historia

Teodoro de Cirene (siglo v a.n.e), famoso geómetra, uno de los maestros de Platón, fue uno de los primeros en plantear una teoría de los números irracionales que sería recogida en los Elementos de Euclides.

De su autoría es la conocida espiral que representa longitudes irracionales como hipotenusas de triángulos rectángulos (fig. 1.6), cuyas longitudes de catetos fueron seleccionadas inteligentemente.[10] ¿Te diste cuenta? Atrévete y complétala, llegarás hasta la raíz cuadrada de 17.

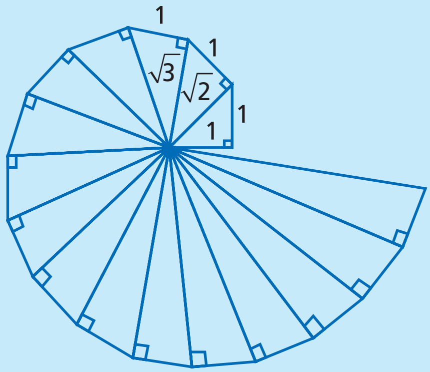


Fig. 1.6

Ejemplos tienes muchísimos, pero aquí te proponemos otros:

[10] Carlos Sánchez Fernández y Rita Roldán Inguanzo: *Números y figuras en la historia, primera parte*, Curso Universidad para todos, Editora Política, p. 14.

$\frac{\sqrt{19}}{2}$; $\sqrt[3]{-25}$; $-\sqrt{0,\overline{3}}$; $\sqrt[3]{\frac{7}{8}}$; $-\sqrt[3]{1,1}$.

¡Embúllate y busca sus aproximaciones!

Son múltiples los ejemplos que corroboran la necesidad de introducir un nuevo conjunto numérico.

Reflexiona un instante

¿Cuál es el número del conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ que satisface la igualdad $a^3 = -12$?
La longitud (en centímetros) del lado de un cubo cuya área total es 12 cm^2, ¿es un número que pueda ser ubicado en la recta numérica?

De la historia

Pitágoras de Samos (582-501 a.n.e.) (fig. 1.7) es un famoso filósofo y también un notable matemático, de la antigüedad, vasta fue su obra.
En Crotona, ciudad al sur de Italia, crea la Escuela Filosófica de los Pitagóricos; en esta, enseña entre otras materias Aritmética y Geometría.
El conocimiento para el maestro significa matemática. Todo es número, era la idea primordial de Pitágoras y para sus discípulos, número expresaba número racional positivo. A todo lo físico o espiritual, los pitagóricos le asignaban un número y una forma.

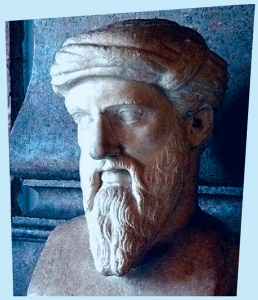


Fig. 1.7

Los pitagóricos partían de la idea de que la razón entre las longitudes de dos segmentos cualesquiera es siempre un número racional, lo cual resumían con el planteamiento de que: todos los segmentos son conmensurables; es decir, que se puede encontrar una unidad común a ambas longitudes, siendo estas múltiplos de dicha unidad, para ellos su existencia estaba garantizada siempre.
Por ejemplo: Los segmentos de longitud 6,0 cm y 12,0 cm tienen como unidad común el segmento de longitud 6,0 cm.
Los segmentos de longitud 24,0 dm y 60,0 dm tienen como unidad común el segmento de longitud 12,0 dm.

Irónicamente, se supone que son los propios pitagóricos, en la figura de Hípaso de Metaponto[11] (fig. 1.8), quienes descubren los inconmensurables (entre 450 a.n.e. y 375 a.n.e.) y con estos números que no eran racionales.

Fig. 1.8

No se sabe con exactitud en qué objeto matemático se realizó este descubrimiento, que fue el más difícil para Pitágoras y los geómetras griegos; es este hallazgo el que desmoronará toda su teoría. Cuenta la leyenda que a Hípaso le costó la vida, sus disgustados compañeros lo lanzaron al mar, por hacer público tan demoledor descubrimiento, lo cual violaba las estrictas leyes de esta hermandad y como si fuera poca su deslealtad, se valió de cierto recurso que en nuestras pinceladas históricas conocerás.

Hípaso descubrió que no todos los segmentos son conmensurables, lo dio a conocer y contribuyó, quizás sin quererlo, a la destrucción de la famosa asociación; pero dejó un legado al desconocido mundo de los números. Ya verás por qué.[12]

Saber más

Los números racionales y los números irracionales forman el ***conjunto de los números reales,*** que se denota por $\mathbb{R}$.

Al retomar lo estudiado sobre conjuntos, tenemos que:

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$

El diagrama de Venn de la figura 1.9 muestra la relación entre los conjuntos numéricos estudiados.

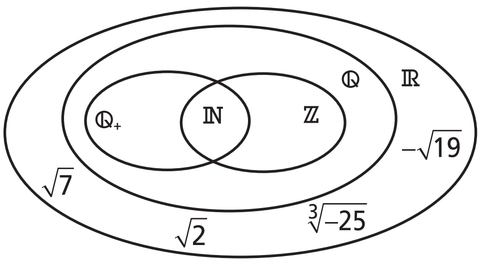


Fig 1.9

[11] Hípaso de Metaponto (siglo VI a.n.e.) fue un matemático, teórico de la música y filósofo presocrático, miembro de la Escuela pitagórica. Se encuentra entre los más renombrados de los pitagóricos de la época más temprana.

[12] Turnbull, Herbert W.: *Grandes matemáticos*, Editorial Científico-Técnica, La Habana, 1984.

Ahora sabemos que el número para el que tiene sentido la igualdad $a^3 = -12$, es el número irracional $\sqrt[3]{-12}$.

Para responder la segunda reflexión, es necesario conocer que:

A los números irracionales se les puede hacer corresponder un punto en la recta numérica.

Como verás a continuación, al número irracional $\sqrt{2}$ se le hace corresponder un punto en la recta numérica; para esto transportaremos sobre una recta numérica la longitud del lado $x = \sqrt{2}$ de un triángulo rectángulo e isósceles, tal como se ilustra en la figura 1.10.

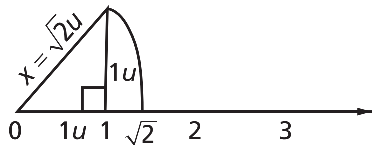


Fig 1.10

De la historia

El filósofo Aristóteles sugiere que la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ se realizó al asumir como hipótesis que es un número racional y llegar a una contradicción. Un número es par e impar a la vez. Esta es una inteligente manera de probar proposiciones matemáticas verdaderas.[13] Cuando se llegó a la conclusión de que este número no se podía expresar como cociente de dos números enteros, se quedaron espantados y les pareció tan contrario a toda lógica que lo llamaron algo así como: improcedente, incierto, o sea, irracional.

Los babilonios utilizaron la relación pitagórica en triángulos con hipotenusa irracional, y sus aproximaciones a las raíces cuadradas pueden considerarse pasos hacia el descubrimiento que nunca hicieron. En una tablilla que se conserva en la Universidad de Yale aparece la aproximación (muy parecida al valor que hoy conocemos):[14]

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^3} \approx 1{,}414\,213$$

Los griegos encontraron la forma de descubrir una expresión para los números irracionales; aunque no tenían un sistema de numeración decimal, emprendieron esa colosal tarea y nos regalaron un maravilloso ejemplo de aritmética antigua.

[13] Herbert W. Turnbull: Ob. cit.

[14] Sánchez Fernández, Carlos y Rita Roldán Inguanzo: Ob cit, p. 14.

Saber más

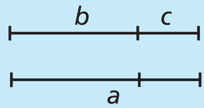
En la recta numérica existen puntos a los cuales se les puede hacer corresponder números irracionales, a estos los denominaremos **puntos irracionales.**

De la historia

Sabemos que no se conoce con certeza cómo tuvo lugar el descubrimiento de los irracionales, aunque pueden citarse dos primitivos ejemplos:

1. Si un segmento es el lado de un cuadrado y el otro es una de las diagonales, no tiene sentido la búsqueda de la medida común, eso bien lo sabes.

2. Si el segmento a es dividido en dos partes b y c (fig. 1.11) de forma tal que $a:b=b:c$, aparece que: $a:b=\left(\sqrt{5}+1\right):2$, y ya sabes que esa no puede ser la medida común, pues $\sqrt{5}$ es un número irracional.



$a = b + c$

Fig. 1.11

Dicen que Hípaso descubrió lo inconmensurable al ver las longitudes de a, b y c en las tres partes en que quedan divididas las cinco líneas del pentagrama (fig. 1.12), símbolo de la orden de los pitagóricos.[15]

Fig. 1.12

Este irracional: $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, se llama número de oro, por eso, los números *a* y *b* del segundo ejemplo están en proporción o razón áurea. Desde principios del siglo XX se denota con la letra griega φ (Fi) en homenaje al escultor griego Fidias (siglo V a.n.e.), quien la usó sistemáticamente en sus obras; una evidente muestra de ello lo tenemos en el hecho de que es un rectángulo áureo el frente del Partenón, obra majestuosa ideada y supervisada por ese creativo escultor.

El dorado número es sinónimo de belleza, perfección, equilibrio y valor estético máximo; por eso muchas construcciones antiguas y modernas siguen cánones áureos.[16]

Investiga y aprende

Cómo construir un rectángulo de dimensiones $\left(\sqrt{5}+1\right)$ cm y 2,0 cm.

No es complicado, manos a la obra.

[15] Herbert W. Turnbull: Ob. cit.

[16] Sánchez Fernández, Carlos y Rita Roldán Inguanzo: Ob. cit., p. 15.

Reflexiona un instante

¡El conjunto de los números reales es denso! ¿Por qué?

En disímiles ocasiones has operado, sin saberlo, con números reales, para resolver problemas propios de la asignatura y de la práctica, para esto, los has aproximado, siguiendo las reglas correspondientes y has utilizado todo lo estudiado sobre los números racionales, así seguirás trabajando en octavo grado.

Los números irracionales que has estudiado en este epígrafe, aparecen por la extracción de raíces cuadradas y cúbicas, y son ejemplos de irracionales algebraicos.[17]

Saber más

En los números irracionales no siempre se cumple que al multiplicar dos números irracionales se obtenga un número irracional, por ejemplo, $\sqrt{2}$ y $\sqrt{8}$ son números irracionales, pero $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ y cuatro no es un número irracional.

Existe otro tipo de expresiones decimales infinitas no periódicas, se les llama números trascendentes, uno de los más conocidos de esta excepcional familia lo conocerás en el capítulo dos de este libro.

Los números reales harán más atractivo tu quehacer matemático y están muy cerca de nosotros, ¡más de lo que te imaginas!

George Cantor (1845-1908) (fig. 1.13) y Richard Dedekind (1831-1916) (fig. 1.14), matemáticos alemanes, con sus diferentes maneras de introducir el conjunto de los números reales, son los verdaderos responsables de que los números irracionales adquirieran el permiso de residencia en el reino de los números.[18]

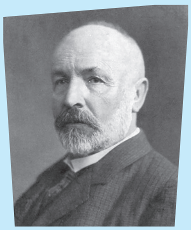


Fig. 1.13.

Fig. 1.14.

[17] Los números irracionales algebraicos surgen de resolver alguna ecuación algebraica y se escriben con un número finito de radicales libres o anidados. En general, las raíces no exactas de cualquier orden se encuentran dentro de este conjunto, es decir las raíces cuadradas, cúbicas, etc. (Buscado en Google, 23 de mayo de 2019)

[18] Sánchez Fernández, Carlos y Rita Roldán Inguanzo: Ob. cit., p. 14.

Ejercicios

1. Rodrigo dice que un número irracional es un número que no puede ser expresado como una fracción $\frac{x}{y}$, donde $x, y \in \mathbb{Z}$, con $y \neq 0$; ¿Tendrá razón? ¿Por qué?

2. Coloca, en el espacio en blanco, según convenga: $\in, \notin, \subset, \not\subset, \cap, \cup$.

a) $\mathbb{Z}$ ___ $\mathbb{R}$ b) $\sqrt{15}$ ___ $\mathbb{N}$ c) $\mathbb{R}$ ___ $\mathbb{Q}$ d) $\sqrt{5}$ ___ $\mathbb{R}$

e) $\mathbb{N}$ ___ $\mathbb{R}$ f) $-3,2\overline{17}$ ___ $\mathbb{I}$ g) $2,\overline{0}$ ___ $\mathbb{N}$ h) $\sqrt[3]{19}$ ___ $\mathbb{Q}$

i) $\mathbb{Q}+$ ___ $\mathbb{R}$ j) 6,2830 ___ $\mathbb{Q}+$ k) $\mathbb{R}$ ___ $\mathbb{I} = \mathbb{I}$ l) Q ___ $\mathbb{R} = \mathbb{Q}$

m) $\sqrt{-25}$ ___ $\mathbb{R}$ n) $\sqrt[3]{-8}$ ___ $\mathbb{Z}$ ñ) $\left\{\frac{1}{2}; -0,\overline{19}; 0\right\}$ ___ $\mathbb{I} = \varnothing$

3. Clasifica las proposiciones siguientes en verdaderas (V) o falsas (F). De las que consideres falsas, justifica por qué lo son.

a) ___ $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ b) ___ $\mathrm{I} \in \mathbb{R}$ c) ___ $F = \left\{\sqrt{2}; \sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{9}\right\} \in \mathbb{R}$

d) ___ $\sqrt{145} \in \mathbb{I}$ e) ___ $\frac{\sqrt[3]{7}}{7} \not\subset \mathbb{I}$ f) ___ $\frac{22}{7} \notin \mathbb{R}$ g) ___ $\mathbb{Q} \cap \mathbb{III} = \{\ \}$

h) ___ Cualquier expresión decimal infinita es un número racional.

i) ___ $1,414\,2\ldots \in Q_+$ j) ___ $\{1,73\} \subset \mathbb{I}$ k) ___ $2,71 \in \mathbb{R}$

l) ___ Si la raíz cuadrada aritmética de un número racional, es irracional, la raíz cúbica también lo es.

m) ___ Si r es un número real, entonces r es racional o es irracional.

n) ___ $\mathbb{I} \in \mathbb{R}$

ñ) ___ El cubo de un número irracional nunca es un número racional.

o) ___ El cuadrado de un número irracional puede ser un número racional.

p) ___ La suma algebraica de dos números irracionales, siempre es un número irracional.

q) ___ El conjunto de los reales es denso.

4. Indica el dominio numérico más restringido al cual pertenece cada uno de los números siguientes:

a) $-0,37$ ___ b) 89 ___ c) $4\frac{3}{7}$ ___

d) –2,44 ___ e) – 91 ___ f) $\dfrac{\sqrt{21}}{5}$ ___

g) 2,71 ___ h) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{125}}$ ___ i) $1,1\overline{12}$ ___

5. Sea el conjunto $A=\left\{-\dfrac{2}{3}; 3; \sqrt{5}; 0{,}4; 4; \sqrt{4}; 0;6, 0;1\dfrac{1}{3}; -5{,}\overline{6}\right\}$

a) Determina el conjunto numérico más restringido de cada uno de los elementos que forman el conjunto *A*.

b) Ordena los elementos de A de manera decreciente, conociendo que: $\sqrt{5} \approx 2{,}23607$

c) Forma:

- El conjunto *B* que contiene a todos los números racionales que están en el conjunto A.
- El conjunto *C* formado por todos los números fraccionarios negativos que están en el conjunto *A*.
- El conjunto *D* integrado por los elementos que están en el conjunto A y sean, a la vez, enteros y fraccionarios.
- El conjunto *E* integrado por los elementos del conjunto A, formado por todos los números enteros que sean mayores que el menor elemento del conjunto *A* y menores que el mayor elemento de dicho conjunto.

d) Con el conjunto *A* y los conjuntos *B*, *C*, *D* y *E* formados anteriormente y con la utilización de las relaciones entre conjuntos; completa los espacios en blanco de manera que obtengas proposiciones verdaderas:

1) *B*__*A* 2) *C*__*D* 3) *E*__*D* 4) *D*__*B* 5) *C*__*B*

e) Cuántos números reales hay entre los dos menores números naturales del conjunto *A*. Fundamenta

6. ¿Qué harías para ubicar en la recta numérica el número real $-\sqrt{17}$?

7. La diferencia de los conjuntos *A* y *B* es el conjunto de elementos que pertenecen a *A*, pero no a *B*. Se denota la diferencia de *A* y *B* por *A* \ *B* (*A* – *B*), que se lee "*A* diferencia *B*" o simplemente "*A* menos *B*". Halla: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $\mathbb{R} \setminus \mathbb{I}$ $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{I}$ $\mathbb{I} \setminus \mathbb{Q}$

8. En el siglo XX se han estudiado otros números irracionales que por la forma que se definen constituyen una generalización del número de oro. Son los llamados *números metálicos* que son determinados por la ecuación $\delta_n = \frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$.[19] Verifica que para $n = 1$, obtienes el número áureo y halla el número de plata y el de bronce sustituyendo por $n = 2$ y $n = 3$ respectivamente en la ecuación dada.

9. Gilberto y Estefanía participan en el concurso "Unámonos a favor del PAURA" con la caricatura de la figura 1.15. Emite tu criterio sobre esta.

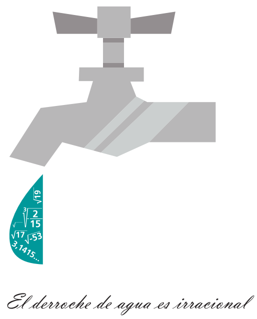


Fig. 1.15

10. Elabora un texto que responda al contenido de esta cuarteta; debe tener como mínimo 150 palabras y puedes utilizar la bibliografía de los aspectos históricos dados.

Al de Metaponto
Pitágoras en su escuela,
una verdad defendía,
pero un día el sabio Hipaso,
la verdad destruiría.

11. Si tuvieras la posibilidad de tener un cubo de 3,0 cm^3 de volumen, ¿qué harías para representar en la recta numérica, $\sqrt[3]{3}$?

12.* Busca tríos de valores (l, a, h) de números racionales para las dimensiones del ortoedro (fig. 1.16), de forma tal, que el segmento $\overline{PQ}$, en centímetro, tenga:

a) Un número racional de centímetros.
b) Un número irracional de centímetros.

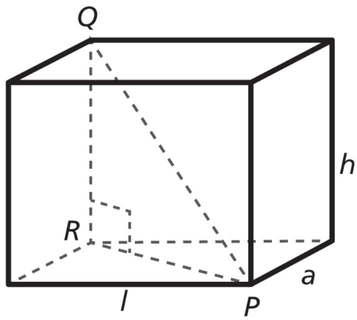


Fig 1.16

[19] Carlos Sánchez Fernández y Rita Roldán Inguanzo: Ob. cit., p. 16.

1.3 Estadística descriptiva

En séptimo grado estudiaste aspectos relacionados con el *procesamiento de datos,* conociste sobre sus orígenes en las civilizaciones antiguas, sobre su historia en diferentes regiones del mundo y cómo ha ido evolucionando hasta nuestros días.

Aplica tus conocimientos

La gráfica muestra el medallero de los cuatro primeros lugares en el XVII Campeonato Mundial de Atletismo celebrado en la capital de Catar, desde el 27 de septiembre al 6 de octubre de 2019.

a) ¿Qué países alcanzaron la misma cantidad de medallas de oro y plata?
b) ¿Cuál fue el número de medallas que más se alcanzó?
c) ¿Qué países no obtuvieron algún tipo de medalla?
d) ¿Qué tanto porciento representa la cantidad de medallas alcanzadas por China con relación a las 25 medallas de Oro que en total se alcanzaron en el mundial de atletismo?
e) ¿Cómo calcular la media aritmética del total de medallas alcanzadas por China?
f) Identifica el tipo de gráfica utilizada (fig. 1.17)

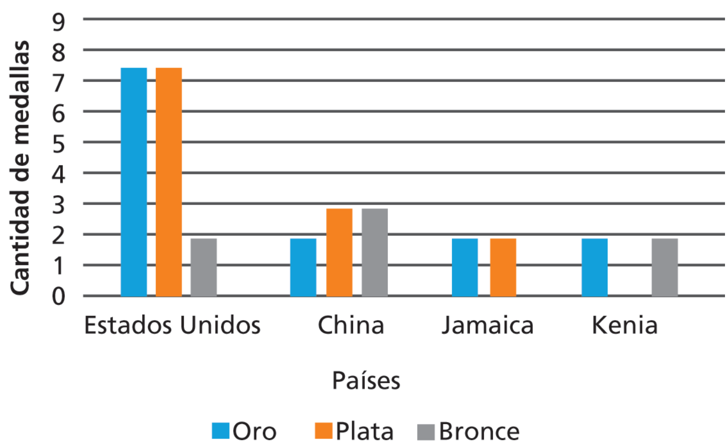


Fig. 1.17

De la historia

En China aparecen innumerables documentos con referencias a poblaciones, censos, recuentos bienes agrícolas, ganaderos, de origen militar. Por ejemplo, en uno de sus clásicos "Shu-King" escrito hacia el año 550 a.C., nos narra cómo el Rey Yao en el año 2238 mandó hacer una estadística agrícola, industrial y comercial en todos sus dominios.

En muchos monumentos egipcios se encontraron interesantes estelas, jeroglíficos, en una palabra, “documentos” en los que se puede interpretar una gran organización y administración estatal en lo que se refiere a contabilización de riqueza, movimientos poblacionales, censos, etcétera.

Grecia, la cuna del pensamiento occidental, también tuvo importantes observaciones estadísticas en lo que refiere a distribución de terreno, servicio militar, etcétera. Es en Roma donde puede decirse que la Estadística adquiere un gran desarrollo. La burocracia romana utiliza la Estadística como instrumento de apoyo a la gran capacidad organizativa política, jurídica y administrativa del imperio. Una muestra es el Census que se realizaba cada 5 años y que tenía por objeto no sólo saber el número de habitantes, sino también su cantidad de bienes.[20]

Los hechos anteriores demuestran que, desde los tiempos más remotos, los pueblos sintieron la necesidad de contar sus pobladores y sus recursos para organizar su vida.

Con el transcurso de los siglos, la organización de los pueblos y sus modos de contar se fueron perfeccionando. Los pueblos se convirtieron en estados y nació una parte importante de las matemáticas, la *estadística,* que se ocupó, principalmente, de enumerar y describir las situaciones de interés para el Estado.

Saber más

El nombre *estadística* se derivó del latín *status* en sus dos sentidos:

- el estado en cuanto a la situación geográfica,
- y el estado en cuanto a entidad política.

En la actualidad la estadística está muy difundida; su uso es inevitable y se manifiesta en la recopilación, procesamiento y análisis de la información relacionada con datos económicos, políticos, sociales, biológicos, geográficos, psicológicos, físicos, químicos, en las investigaciones, etc.; procesos estos que se han ido perfeccionando con el desarrollo de la informática y las posibilidades crecientes de comunicación, a la vez que se dispone de eficaces sistemas, tabuladores electrónicos y asistentes matemáticos para el procesamiento estadístico.

[20] https://proyectodescartes.org. Buscado en Google, 18 de octubre de 2019.

La estadística es la ciencia que provee de métodos que permiten recolectar, organizar, resumir, presentar y analizar datos relativos a un conjunto de individuos u observaciones, con la finalidad de extraer conclusiones válidas y tomar decisiones lógicas basadas en los análisis.
La estadística de cualquier naturaleza se caracteriza por:

- No estudia hechos aislados, como la edad de una persona, el precio de un artículo en un día determinado, las calificaciones de un estudiante en un examen, entre otros.
- Trabaja con datos relativos a conjuntos de datos, individuos u observaciones (de personas, objetos, hechos, etc.) lo más numerosos posible y ocurridos en diferentes instantes de tiempo.

Reflexiona un instante

Al estudiar:

- La calidad de las piezas producidas por una fábrica durante un año de trabajo.
- Los índices de natalidad de un país durante los diez últimos años.
- Las características personales de los pobladores de una determinada región de un país.
- La preferencia de los jóvenes por la práctica de deportes.
- La temperatura promedio en los meses de verano en una zona determinada de un país.
- La frecuencia con que una parte de la población asiste a los teatros.

¿Las características del estudio son iguales?

Definición de estadística descriptiva

La **estadística descriptiva** es la parte de la estadística que se ocupa de recolectar, organizar, resumir, presentar y analizar datos relativos a un conjunto de individuos u observaciones con el objetivo de describirlos o caracterizarlos, para poner de manifiesto, de forma gráfica o analítica, sus propiedades.

Atención

La estadística descriptiva, estudia una población a partir de considerar todos los elementos que la integran, sin derivar conclusiones sobre un grupo mayor que esta.

1.3.1 Conceptos básicos

Reflexiona un instante

En la asamblea de rendición de cuentas de una circunscripción, los electores manifestaron opiniones y solicitudes sobre la atención médica que reciben en el consultorio. ¿Cómo realizarías el estudio que te permita hacer una valoración sobre los criterios manifestados por los electores en esa asamblea?

Recuerda que...

Para realizar el estudio de una problemática o analizar una situación o fenómeno, el procedimiento general para el procesamiento de los datos es:

1. Analizar la situación inicial que es objeto de estudio.
2. Obtener los datos
3. Simplificar los datos.
4. Comunicar los resultados

Para simplificar los datos debes primero organizar los datos recopilados, tabularlos, cuantificarlos y representarlos en tablas y gráficos

- La ***distribución de frecuencia*** es la organización de los datos en una tabla convenientemente preparada, de manera que exprese un conjunto de puntuaciones ordenadas en un grupo de categorías establecidas.
- La ***frecuencia absoluta*** de un dato es el número de veces que aparece repetido este.
- La ***frecuencia relativa*** es el cociente de la frecuencia absoluta entre el tamaño de la muestra.

Reflexiona un instante

Para realizar el procesamiento de datos, podrás recopilar la información de todas las personas que pertenecen a tu consultorio del médico de la familia, ¿entrevistarás a todos?

Definición de población y de muestra:

- **Población** es el conjunto de individuos (objetos, sucesos o procesos) que poseen entre sus características una común y que va hacer objeto de estudio.
- **Muestra** es cualquier subconjunto de una población, o sea la parte de la población que se estudia.

Atención

La muestra tiene que ser representativa de la población, no solo por su tamaño, sino porque realmente representa todas las características de la población.

Ejemplo 1:
En una fábrica de la industria ligera se producen 30 400 unidades diariamente de jabones de tocador. Para efectuar un control de calidad se analizan 7 600 unidades de la producción registrada en un día.

Solución:
Población: la producción diaria de jabones que, en este caso, es de 30 400 unidades.

Muestra: unidades seleccionadas para realizar el control que, en este caso, son 7 600, como tamaño de la muestra.

Al estudiar distintos hechos o fenómenos seguramente te has dado cuenta que están relacionados con características que tienen los elementos (individuos) de una población, las que son de diferentes tipos y que no necesariamente son valores numéricos; por ejemplo, cuando realizamos el estudio del sexo de un grupo de personas, determinamos como característica que sean masculinos o femeninos; al realizar el estudio del comportamiento de la temperatura durante un día en una región de Cuba, la característica es el valor de la temperatura en la mañana y en la tarde.

Definición de variable estadística

Variable estadística es cualquier característica o propiedad de los miembros de una población susceptible de tomar determinados valores mediante un procedimiento de medición, de modo que dichos valores pueden ser clasificados de forma exhaustiva en un cierto número de categorías posibles.

Ejemplo 2:
Son variables estadísticas las siguientes:

a) La profesión de las personas (profesor, médico, mecánico, etcétera).
b) La cantidad de estudiantes de un grupo o de una escuela (15, 30, 230, 400, 500, ...).
c) El color de los ojos de un grupo de personas (verdes, azules, pardos).

d) El promedio de la cantidad de lluvia caída en una determinada zona de un país durante los 12 meses del año (cualquier valor real no negativo).
e) El número de habitantes en determinadas regiones de un país o de un país (35 550; 150 800; 10 835 500; 150 200 100; ...).
f) El rendimiento académico de un grupo de estudiantes de una escuela (bajo, medio, alto).
g) La magnitud de los terremotos en la escala de Richter (cualquier valor real mayor que cero) ocurridos en los últimos diez años en el continente asiático.

Reflexiona un instante

¿En qué se diferencian las características de las variables estadísticas descritas en el ejemplo dos?

Definición de variable estadística cualitativa

Las variables estadísticas que se refieren a las características o atributos que expresan una cualidad se denominan **variable estadística cualitativa**.

Ejemplo 3:
Son variables estadísticas cualitativas las variables estadísticas de los incisos a), c) y f) del ejemplo dos.

Definición de variable estadística cuantitativa

Las variables estadísticas que se refieren a las características o atributos que expresan una cantidad o cantidad de magnitud (valores numéricos) se denominan **variable estadística cuantitativa**.

Ejemplo 4:
Son variables estadísticas cuantitativa las variables estadísticas de los incisos b), d), e), g) del ejemplo dos.

Reflexiona un instante

Observa los valores numéricos que pueden tomar las variables cuantitativas del ejemplo cuatro, todos los valores tienen las mismas características.

Definición de variable estadística discreta

Las variables estadísticas que alcanzan un número finito o a lo sumo numerable de valores que suelen coincidir con números enteros se denominan **variables estadísticas discretas.**

Ejemplo 5:

Son variables estadísticas cuantitativas discretas las variables estadísticas de los incisos b) y e) del ejemplo dos.

Ejercicios

1. Selecciona cuáles de las proposiciones siguientes corresponden a estudios realizados dentro de la estadística descriptiva y fundamenta tu selección en cada caso.

a) La calidad de la producción de huevos de una granja avícola en un día.
b) La nota promedio de los estudiantes de un grupo de octavo grado en la asignatura Matemática es superior a 85 puntos.
c) La cantidad de países que votan a favor por poner fin al bloqueo contra Cuba aumentó en el período comprendido del año 1990 al 2013.
d) La preferencia por los programas musicales de un estudiante de Secundaria Básica.
e) La cantidad de lluvia caída como promedio en La Habana durante los 12 meses del año 2012 fue de 185 mL de agua.

2. Determina la población y la muestra en cada caso:

a) Del total de estudiantes de octavo grado de una escuela secundaria básica, se seleccionaron 40 para hacer un estudio sobre sus preferencias en materia de deportes.
b) En una fábrica de lámparas LED se producen 12 100 unidades diariamente. Para efectuar un control de calidad de estas, se analizan 3 025 unidades de la producción registrada en un día.
c) En las viviendas de un consejo popular se realiza un estudio del consumo eléctrico durante un mes con el objetivo de reducirlo; para esto, se realizan controles al reloj tres veces por semana al 20 % del total de las viviendas.

d) En agosto ingresaron en un hospital 540 pacientes por diferentes motivos y 135 de estos fueron seleccionados para hacer un estudio sobre el colesterol en sangre.

e) Una prueba hecha en Pensilvania por científicos pertenecientes a la Escuela de Medicina de la Universidad de esta localidad a 200 personas que practican el mal hábito de fumar, demostró que el 80 % concentró su atención por mucho tiempo en imágenes de enfermedades, resultado de esa adicción.[21]

3. Menciona tres ejemplos de cada tipo de variables estadísticas estudiadas (cualitativas, cuantitativas, y cuantitativa discreta).

4. En el periódico Juventud Rebelde se destacó la información siguiente: "De los 760 074 niños nacidos en Cuba desde 2010 hasta 2015, un total de 10 052 fueron resultado de partos o cesáreas gemelares, es decir, 5 026 pares de gemelos en ese período".[22]

a) ¿La cantidad de gemelos referida en la información corresponde a la población o a la muestra? Justifica tu respuesta.

b) Investiga en tu consultorio del médico de la familia, la cantidad de partos en los últimos cuatro años.

c) Investiga cuales son las causas biológicas que propician este tipo de embarazo desde el punto de vista genético.

5. Analiza y escribe en la línea dada si estás de acuerdo o no con las proposiciones siguientes, si no estás de acuerdo, fundamenta tu respuesta.

a) ___ La edad es una variable estadística cuantitativa.

b) ___ La cantidad de estudiantes que asisten a una escuela en la sesión de la mañana no es una variable cuantitativa discreta.

c) ___ La variable cantidad de juegos ganados y perdidos por un equipo de béisbol en las últimas cuatro series nacionales es una variable cualitativa.

d) ___ Es una variable cualitativa la preferencia por las carreras pedagógicas de los estudiantes de noveno grado de un municipio.

e) ___ La efectividad de un medicamento en el tratamiento de una determinada enfermedad a un grupo de individuos es una variable cualitativa.

[21] Semanario *Orbe*, 23 al 29 de junio de 2012.

[22] Órgano de Prensa *Juventud Rebelde*, 14 de diciembre de 2016.

f) ___ La calidad de las clases que imparten los monitores de Matemática de una escuela es una variable cuantitativa.

6. En una granja avícola trabajan 25 personas, diariamente se recogen aproximadamente 6 000 huevos; si se quiere hacer un estudio de la eficiencia de la granja durante el primer trimestre del año selecciona cuál de los índices siguientes es el adecuado:

- Promedio de la cantidad de huevos que ponen diariamente las gallinas durante el trimestre.
- Nivel cultural de los trabajadores.
- Cantidad de ausencias de cada trabajador durante el trimestre.
- Organización de los trabajadores por turnos de trabajo.

a) ¿Cuál será la población y la muestra que seleccionarías para el estudio que se va a realizar?

b) Completa la tabla 1.1 identificando la variable estadística en cada caso, el tipo de variable y los valores que puede tomar cada variable.

Tabla 1.1

Variable	Tipo de variable	Valores de la variable
Promedio de la cantidad de huevos diarios que ponen las gallinas en el trimestre		
Nivel cultural de los trabajadores		
Cantidad de ausencias de cada trabajador durante el trimestre		
Organización de los trabajadores por turno de trabajo		

c) Investiga cuáles son las variables que se analizan para determinar la calidad de la producción de huevos en una granja avícola y los criterios para seleccionar la muestra a la cual se le aplicarán los parámetros de calidad.

7. Identifica cuáles de las proposiciones siguientes son falsas. Conviértelas en verdaderas.

a) ___ Las distribuciones de frecuencia se clasifican en numéricas y categóricas.

b) ___ La frecuencia absoluta de un dato es el cociente del número de veces que se repite el dato por la cantidad total de estos.
c) ___ La suma de las frecuencias absolutas coincide con el número de veces que aparece este dato en la población.
d) ___ La frecuencia relativa de un dato es el número de veces que aparece repetido este dato.
e) ___ La suma de las frecuencias relativas es igual a la cantidad total de datos.
f) ___ La suma de las frecuencias relativas es igual a la unidad cuando se expresa en porcentaje.
g) ___ Las distribuciones de frecuencia se confeccionan con el propósito de condensar grandes grupos de datos y mostrarlo de una manera fácil de interpretar.

8. Clasifica la distribución de frecuencia en las situaciones siguientes. Escribe su nombre en la línea dada.

a) El estudio que realiza un director del rendimiento académico de los estudiantes de un grupo. ____________________
b) El estudio de la cantidad de estudiantes que asisten a los concursos de conocimientos y habilidades en un municipio. ____________________
c) El estudio de la calidad de los helados que produce la fábrica de helados Coppelia. ____________________
d) El estudio de la cantidad de puntos anotados por un equipo de baloncesto, en cada uno de los juegos celebrados en un torneo. ____________________
e) El estudio del nivel cultural de las personas que viven en tu cuadra de acuerdo al título académico que poseen. ____________________
f) El estudio de la estatura promedio de los integrantes de los equipos de voleibol que participan en un torneo. ____________________

9. Un estudiante realiza un estudio sobre la cantidad de hermanos que tienen los compañeros de su grupo. La información la recoge en una hoja donde aparecen los valores referidos por cada uno como muestra la lista siguiente:

2 0 0 1 2 5 2 2 4 4 1 0 1 2 2 2 3 1 1 0 5 2 2 3 0 4 6 2 1 4

a) Construye una tabla de distribución de frecuencia.

b) ¿Cuántos estudiantes tienen más de dos hermanos? ¿Qué porciento representan estos?

10. La tabla 1.2 muestra información sobre la trayectoria del deportista cubano Javier Sotomayor (fig. 1.18) el ser humano que más ha saltado con sus propios pies.[23]

Fig. 1.18

a) ¿Qué acciones de la construcción de una tabla de frecuencia se muestran en esta tabla?
b) Completa la tabla 1.2.
c) ¿Cuál es el salto que realizó con más frecuencia?
d) ¿Cuál es la altura promedio de los saltos realizados?
e) Investiga cuántas medallas de oro, plata y bronce obtuvo en su trayectoria deportiva y en que evento alcanzó su récord mundial el príncipe de las alturas.

Tabla 1.2. Historia de un recordista

Salto de altura (m)	Conteo	Frecuencia absoluta (F_i)	Frecuencia relativa decimal (f_i)	Frecuencia relativa porcentual (f_i%)
2,30	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 /			
2,31	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 /	-		

[23] Velázquez Videaux, Juan: "Mis estadísticas y las otras", en *Sotomayor el saltanubes,* Editora Política, La Habana, 1997, pp. 103-111.

Salto de altura (m)	Conteo	Frecuencia absoluta (F_i)	Frecuencia relativa decimal (f_i)	Frecuencia relativa porcentual (f_i%)
2,32	~~IIII~~ ~~IIII~~ IIII			
2,33	~~IIII~~ ~~IIII~~ III			
2,34	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ III			
2,35	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ I			
2,36	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ II			
2,37	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~			
2,38	~~IIII~~ II			
2,40	~~IIII~~ ~~IIII~~ III			

11. La cantidad de flores que tenían los ramos vendidos, el Día de las Madres, en una florería se muestra en la lista siguiente:

24 6 12 18 24 12 10 18 24 6 12 10 12 18 12
10 10 6 10 10 12 12 24 18 12 10 6 10 18 12

a) Identifica la variable estadística objeto de estudio. Clasifícala.
b) Clasifica el tipo de distribución de frecuencia.
c) Organiza la información en una tabla de distribución de frecuencias, donde aparezcan la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa (expresada como expresión decimal).
d) ¿Cuál de los tipos de ramos fue el más vendido?
e) ¿Qué tanto por ciento representa la cantidad de ramos que tenían una docena de flores del total de ramos vendidos?
f) Si fueras a representar la distribución de frecuencia en un gráfico, ¿cuál utilizarías? ¿Por qué?

12. La tabla 1.3 muestra la distribución de frecuencias por edades de un grupo de jóvenes que asistieron el fin de semana a una base de campismo. Marca con una X cuáles de las proposiciones siguientes consideras correcta.

Tabla 1.3

Edades (años)	Cantidad de jóvenes
13	20
14	15
15	30
16	40
17	55

a) ___ La variable estadística objeto de estudio es la cantidad de jóvenes que asistieron a la base de campismo.
b) ___ La edad media de los jóvenes que asistieron es de 32 años.
c) ___ La frecuencia relativa correspondiente a la edad de 16 años es el 25 %.
d) ___ La distribución de frecuencia se clasifica como categórica.

13. En una secundaria básica que tiene una matrícula de 500 estudiantes se quiere investigar acerca de la motivación que sienten los estudiantes por el estudio de las matemáticas; entre otros instrumentos, se aplicó una encuesta en la que, aparece en una de las preguntas: ¿Te sientes motivado por el estudio de las matemáticas? Para responder la pregunta se dan los ítems siguientes:

Siempre (S) Casi siempre (CS) A veces (AV) Casi nunca (CN) Nunca(N)

El registro de las respuestas fue el siguiente:

CS	CN	CS	AV	AV	AV	N	CN	S	S
AV	CS	S	CN	CS	S	AV	CN	N	AV
CN	AV	AV	S	CS	AV	CN	CN	S	AV
AV	AV	CN	S	CN	CN	AV	CN	CS	AV

a) Determina la población y la muestra de la situación anterior
b) Identifica la variable objeto de estudio. Clasifícala.
c) Construye una tabla de distribución de frecuencias donde la frecuencia relativa este expresada en tanto por ciento.
d) Clasifica la distribución de frecuencias en correspondencia con la característica de la variable.
e) ¿Cuál es la categoría más y menos frecuente?

f) ¿Es posible calcular el promedio del conjunto de datos? Fundamenta tu respuesta.

g) Analiza los resultados obtenidos y escribe tu valoración en cuanto a la motivación que sienten los estudiantes encuestados por el estudio de la Matemática.

h) Realiza una Investigación en tu grupo sobre la problemática planteada y compara los resultados con la información ofrecida anteriormente. Sugiere recomendaciones para elevar la motivación por el estudio de esta ciencia.

14. En un concurso de conocimientos de habilidades matemáticas, contra reloj, se aplicaron 20 problemas. La tabla 1.4 muestra la frecuencia relativa de la cantidad de problemas resueltos por los 20 concursantes.

Tabla 1.4

Problemas resueltos	f_i
20	$\frac{3}{20}$
15	$\frac{7}{20}$
12	
10	$\frac{1}{10}$
5	$\frac{3}{20}$

a) Cuál es la variable objeto de estudio? Clasifícala.

b) ¿Cuál es la frecuencia absoluta correspondiente a los concursantes que resolvieron 15 problemas? Fundamenta tu respuesta.

c) ¿Cuántos estudiantes resolvieron 12 problemas? Explica el procedimiento que aplicaste para llegar a la respuesta.

d) Completa la tabla.

e) ¿Qué parte del total de concursantes resolvió menos de 12 problemas?

f) Si para aprobar se necesitaba tener 12 problemas resueltos, ¿qué tanto por ciento de los participantes aprobó?

g) ¿Cuál fue el promedio de la cantidad de problemas resueltos por los concursantes?

1.3.2 Construcción de gráficos (de barras y poligonales)

Investiga y aprende

Sofía necesita representar en un gráfico la información relacionada con las edades de los estudiantes de su secundaria básica y otro con la asistencia de los estudiantes de su grupo en una semana, puedes ayudarla, qué algoritmo de trabajo debe realizar para la construcción de estos gráficos.

Recuerda que...

- Una de las formas de presentar la distribución de frecuencias es mediante gráficos los cuales permiten una fácil e inmediata captación visual que facilita describir inmediatamente las características del fenómeno que es objeto de estudio.
- Los gráficos, se confeccionan con el propósito de condensar grandes grupos de datos.
- El gráfico de barras es recomendable para la comparación de datos organizados por categorías y consiste en un conjunto de columnas o rectángulos en los cuales cada categoría se representa por una columna.
- El gráfico poligonal es recomendable para el análisis de tendencias de un determinado fenómeno y consiste en una gráfica de segmentos en que las categorías aparecen en el eje horizontal y en el vertical, la frecuencia.

Ejemplo 1:

Construye una gráfica de barras que ilustre los resultados de una encuesta aplicada a los 390 estudiantes de una secundaria básica, con el objetivo de conocer su opinión sobre la transmisión televisiva de la Serie Nacional de Béisbol en el horario de la telenovela, los que se describen en la tabla 1.5 de frecuencia absoluta.

Tabla 1.5

Categoría	F_i
A favor	120
En contra	180
Indiferentes	60
No respondieron	30

Solución:

Pasos para construir un gráfico de barras con el uso de los instrumentos de trazado:

1. Construir un sistema de coordenadas rectangular en el primer cuadrante.
2. Colocar en el eje de las abscisas las diferentes categorías de la característica medible.
3. Ubicar en el eje de las ordenadas los valores de las frecuencias absolutas en una escala adecuada.
4. Trazar barras perpendiculares, todas de igual ancho, cuya altura sea igual al valor de la frecuencia absoluta.
5. Escribir el nombre de los ejes en correspondencia con la información de la tabla y el título de la gráfica de acuerdo a la variable.

En la gráfica mostrada en la figura 1.19, se puede observar que las cuatro categorías fueron ubicadas en el eje de las abscisas y que la frecuencia absoluta (cantidad de estudiantes que dan su opinión por categorías) fue ubicada en el eje de las ordenadas.

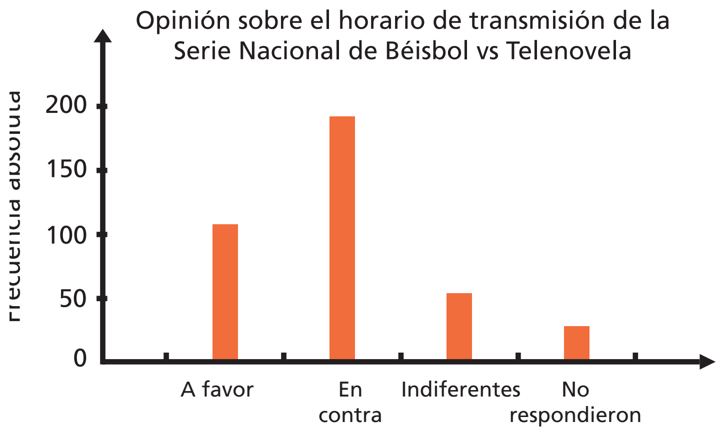


Fig. 1.19

Aplica tus conocimientos

Construye un gráfico de barras con los datos del ejemplo uno, utilizando aplicaciones informáticas o un asistente matemático.
Es importante que sepas que la disposición de los ejes puede variar de acuerdo con la posición que se elija para las barras (vertical u horizontal).

Ejemplo 2:

Construye una gráfica poligonal que ilustre el indicador de natalidad de Cuba en los años del período comprendido de 2015-2020, los cuales se describen en la tabla 1.6. [24]

Tabla 1.6

Año	Natalidad por 1000 habitantes
2015	11,1
2016	10,4
2017	10,2
2018	10,4
2019	9,8
2020	9,4

Solución:

Pasos para construir una gráfica poligonal:

1. Construir un sistema de coordenadas rectangular en el primer cuadrante.
2. Colocar en el eje de las abscisas las diferentes categorías de la característica medible.
3. Ubicar en el eje de las ordenadas los valores de las frecuencias absolutas en una escala adecuada.
4. Asociar cada categoría con su frecuencia absoluta correspondiente mediante pares ordenados de la forma (x; y), (x: representa la categoría, y: la frecuencia absoluta correspondiente) y así se ubica el punto que determina cada par ordenado en el sistema de coordenadas rectangular.
5. Trazar los segmentos rectilíneos que se forman de la unión de los puntos representados y así queda construida la línea poligonal.
6. Escribir el nombre de los ejes en correspondencia con la información de la tabla y el título de la gráfica de acuerdo a la variable.

Puedes observar en la gráfica de la figura 1.20 que fueron ubicadas en el eje de las abscisas los años que se analizan y en el eje de las ordenadas, los índices de natalidad.

[24] Anuario estadístico de salud, 2020.

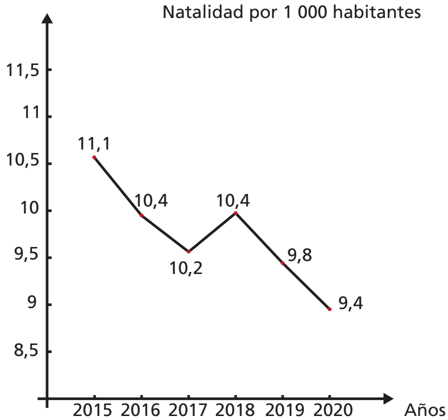


Fig. 1.20

Ejercicios

1. En la tabla 1.7 se muestra información sobre las tasas de mortalidad infantil de seis países de Las Américas al finalizar el año 2017.[25]

Tabla 1.7

País	Tasa de Mortalidad
Colombia	13,6
Cuba	4,4
Estados Unidos	5,8
Haití	46,8
México	11,6
República Dominicana	17,5

a) Identifica la variable estadística y clasifícala.
b) Investiga cómo se calcula la tasa de mortalidad infantil.
c) ¿Por qué nuestro país es el que menor tasa de mortalidad tiene? Responde con tres elementos.
d) Construye un gráfico de barra que muestre la información que se brinda en la tabla.

[25] www.indexmundi.com, Google, 1 de abril de 2019

2. La tabla 1.8 corresponde a la cantidad de plazas ofertadas por el Ministerio de Educación Superior para el curso escolar 2020-2021.[26]

Tabla 1.8

Carreras	Curso diurno
Ciencias Pedagógicas	8 818
Ciencias Médicas	11 487
Ciencias Técnicas	6 001
Ciencias Económicas	1 850
Ciencias Sociales y Humanidades	2 470
Ciencias Agropecuarias	1 554
Ciencias Naturales y Matemática	1 415
Cultura Física	1 548
Arte	166
Relaciones Internacionales	35
Carreras Militares	3 400

a) ¿Cuál es el total de plazas ofertadas en este curso?
b) ¿De cuál carrera se ofertó mayor cantidad de plazas? ¿Por qué?
c) ¿Qué tanto por ciento representan las carreras brindadas para las ciencias médicas del total de carreras ofertadas en este curso?
d) Ilustra en una gráfica la información que se brinda en la tabla.
e) Actualiza la información que se brinda en la tabla.

3. En la tabla 1.9 se muestran los datos que se han recopilado como el resultado de medir la temperatura ambiental durante diez horas consecutivas de un día invernal en Chile.

Tabla 1.9

Hora (p.m.)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temperatura °C	5,5	5	4,5	3	1	0	–1	– 0,5	–2	–3

[26] www.mes.gob.cu Google, 8 de abril de 2022.

a) Representa la variación de temperatura en una gráfica poligonal.
b) ¿Cuándo hubo más frío, a las 8:00 p.m. o a las 10:00 p.m.? Fundamenta tu respuesta.
c) ¿Cuántos grados descendió la temperatura desde la 1:00 p.m. hasta las 10:00 p.m.?

4. La tabla 1.10 muestra las temperaturas, en grado Celsius, registradas en una ciudad durante distintas horas del día.

Tabla 1.10

Temperatura	F_i
38	2
37	6
36	10
35	8
34	4

Marca con una X la respuesta correcta.

4.1. Se puede afirmar que:

a) ___ La variable objeto de estudio es la ciudad en que registró la temperatura
b) ___ La temperatura se registró cinco veces en el día.
c) ___ La frecuencia relativa correspondiente a los 37 °C es 0,2.
d) ___ La temperatura promedio fue 36 °C.

4.2. ¿Qué significado tiene la frecuencia absoluta correspondiente a la temperatura de 38°C?

4.3. Construye un gráfico poligonal que represente la información de la tabla

5. Únete con un grupo de compañeros de tu aula y crea un equipo de no más de cinco estudiantes para que investiguen en la escuela y en su comunidad: *¿Por qué comienzan a fumar los jóvenes?* Te sugerimos que cada uno de los integrantes del equipo entreviste a 20 jóvenes y complete la tabla 1.11 en correspondencia con la respuesta que den los jóvenes entrevistados.

Tabla 1.11

Motivos[27]	Cantidad de estudiantes
Estímulo y desafío: rebelión contra los padres o la sociedad, curiosidad, emoción y placer.	
Formación de la propia identidad y necesidad de autoestima: sentirse bien, parecer más adulto y moderno, creer tener mejor apariencia.	
Pertenecer a un grupo: necesidad de ser apr obado y aceptado, de evitar desaprobación o rechazo.	

Seleccionen un responsable del equipo que reúna la información en una tabla de frecuencia absoluta y relativa.

Una vez recogidos los datos:

5.1. Completen los espacios en blanco:

a) La variable estadística es: ______________________

b) Se clasifica como: _____________________

c) El motivo más frecuente es: ______________________

5.2. ¿Qué tanto por ciento de los encuestados refiere que es por la necesidad de *pertenecer a un grupo?* ¿Cuál es tu opinión al respecto?

5.3. Construyan un gráfico que ilustre los resultados anteriores.

6. Haciendo uso de los recursos informáticos construye:

a) Un gráfico de barras que ilustre en porcentaje los resultados de las pruebas de ingreso de Matemática al Instituto Preuniversitario Vocacional de Ciencias Exactas en tu escuela durante los últimos cinco años.

b) Un gráfico poligonal que ilustre en porcentaje el comportamiento de la asistencia de los estudiantes de octavo grado de lunes a viernes de la semana pasada.

[27] Plegable del Centro Nacional de Promoción y Educación para la Salud, Mayo 2013.

1.3.3 Medidas de tendencia central (media, moda y mediana)

Reflexiona un instante

Utiliza en las dos situaciones siguientes los conceptos de media aritmética y moda que estudiaste en grados anteriores en la resolución de ejercicios y problemas sencillos que te exigían hacer descripciones y análisis del comportamiento de datos.

Situación A

El director de una secundaria básica con la finalidad de evaluar el rendimiento de los estudiantes de dos grupos de octavo grado, aplicó una prueba diagnóstico en la asignatura Matemática, a 17 estudiantes del grupo 8º.1 y a 24 del grupo 8º.2. La calificación se registró con las categorías de MB (muy bien), B (bien), R (regular) y M (mal). Los resultados de cada estudiante se corresponden con los datos siguientes:

Grupo 8º.1

Estudiante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Calificación	MB	MB	M	M	R	B	R	B	M	M	MB	B	R	MB	M	R	R

Grupo 8º.2

Estudiante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Calificación	M	M	R	R	B	B	MB	MB	M	M	M	R	R	R	MB	MB	M
Estudiante	18	19	20	21	22	23	24										
Calificación	R	R	MB	MB	MB	MB	B										

- ¿Cuál grupo consideras obtuvo mejor rendimiento? ¿Por qué?

Para responder esta pregunta se analiza el comportamiento de las calificaciones obtenidas por cada estudiante en cada grupo.

En el primer grupo cuatro estudiantes fueron evaluados de MB, dos de B, cinco de R y también cinco de M, por tanto, los valores más frecuentes, o sea, la moda de los datos son las calificaciones de R y M. En el segundo grupo ocho estudiantes fueron evaluados de MB, tres de B, siete de R y seis de M, por tanto, la moda de los datos es la calificación de MB.

La media aritmética de las calificaciones no es posible calcularla porque los datos son variables cualitativas.

- ¿Consideras que con el análisis de la moda en ambos grupos es suficiente para dar un criterio sobre el grupo de mejor rendimiento? Fundamenta tu respuesta.

Situación B

Con la finalidad de evaluar los conocimientos sobre Historia de Cuba de los estudiantes de los grupos 8º.3 y 8º.4 el director de la misma escuela aplicó una prueba de conocimientos y habilidades a los 23 estudiantes del grupo 8º.3 y a los 30 estudiantes del grupo 8º.4, pero en este caso calificó la prueba de los estudiantes en una escala de cero (0) a diez (10). Una vez calificados los trabajos, registró en su libreta de control las calificaciones obtenidas por cada estudiante de la forma siguiente:

Grupo 8º.3

Estudiante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Calificación	10	5	6	10	4	5	10	4	4	5	10	5	6	5	4
Estudiante	16	17	18	19	20	21	22	23							
Calificación	5	7	5	8	4	8	7	6							

Grupo 8º.4

Estudiante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Calificación	6	5	8	3	9	7	9	4	10	6	3	8	5	4	3
Estudiante	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Calificación	4	7	6	9	3	9	5	9	4	8	3	9	6	5	4

Analiza el comportamiento de las calificaciones obtenidas a los estudiantes de los grupos 8º.3 y 8º.4 de manera análoga al realizado en la situación A.

- ¿Qué grupo consideras tú que obtuvo mejores calificaciones?
- ¿Cuál es el valor de la media aritmética de las calificaciones obtenidas en cada grupo?
- ¿Cuál es el valor de la moda en cada grupo?

Para dar respuesta a las interrogantes anteriores se calcula el valor de la media aritmética y determinas la moda de cada grupo. En el grupo 8º.3 el valor de la media aritmética es la calificación de seis puntos, pero más del 50 % de los estudiantes están desaprobados (12 estudiantes), por haber obtenido una calificación inferior a seis puntos y la moda es la calificación de cinco puntos, mientras en el grupo 8º.4 el valor de la media aritmética es, aproximadamente, la calificación seispuntos, sin embargo, 16 de los estudiantes del grupo (más del 50%) están aprobados y la moda es la calificación de nueve puntos.

¿Cuál es tu criterio sobre el conocimiento de la Historia de Cuba en estos dos grupos después de analizar el comportamiento de la media aritmética y de la moda? Fundamenta tu respuesta.

¿Serán los resultados obtenidos de la media aritmética y la moda valores suficientes para demostrar cuál de los grupos posee más conocimiento sobre la Historia de Cuba?

Investiga y aprende

Investiga si existe otra medida de tendencia central que te permita emitir un criterio más certero sobre cuál de los dos grupos obtuvo mejores calificaciones. La mediana es otra de las medidas de tendencia central que te permite realizar un análisis de los datos para que tu criterio sobre las situaciones anteriores sea más certero.

Definición de mediana

La **mediana** M_e de un conjunto de datos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ dispuestos en orden creciente (o decreciente) es:

- el valor que equidista de los extremos, si n es impar,
- la media aritmética de los valores centrales, si n es par.

Pasos para calcular la mediana de un conjunto de datos simples

1. Ordenar los datos en forma creciente o decreciente atendiendo a la presencia o intensidad de la característica medible.
2. Contar la cantidad de datos.
   - Si la cantidad de datos es un número *impar,* el dato que representa la mediana tendrá la misma cantidad de elementos delante y detrás de este y es el que ocupa la posición $\frac{n+1}{2}$.
   - Si la cantidad de datos es un número *par y:*
     a) expresan una cantidad o cantidad de magnitud (valores numéricos), la mediana es la media aritmética de los dos datos centrales.
     b) expresan una cualidad, se le hace corresponder a cada valor de los datos un número de orden de manera tal que se forme una sucesión ordenada de números. La mediana en este caso es la media aritmética de los dos valores centrales.

Ejemplo1:

En las situaciones dadas a continuación, calcula la mediana de los datos en cada caso.

a) La cantidad de personas que asistieron a un bufete colectivo de lunes a viernes por día fue:

Día de la semana:	L	M	M	J	V
Cantidad de personas:	25	23	22	30	28

b) En la lista siguiente se muestra la masa en Kg de un grupo de niños de un Consejo Popular

Nombre del niño:	David	Ana	Oscar	Luisa	Raúl	Félix
Masa (Kg):	48	43	46	40	51	45

c) Para conocer la frecuencia con que las personas que integran un núcleo familiar observan el Noticiero Dominical, se aplicó una encuesta de opinión, donde los participantes debían seleccionar una de las categorías siguientes: Siempre (S), Frecuentemente (F), A veces (AV), Casi nunca (CN) y Nunca(N.

Los resultados de la encuesta fueron:

S S F CN N N

Solución:

a) Los datos ordenados son: 22 23 25 28 30

la cantidad de datos $n = 5$ (impar)

22 23 25 28 30

Entonces la mediana del conjunto de datos es $M_e = 25$.

b) Los datos ordenados son: 40 43 45 46 48 51

la cantidad de datos $n = 6$ (par)

La mediana del conjunto de datos se calcula de la forma siguiente:

$$M_e = \frac{45+46}{2} = 45,5$$

c) En este caso para determinar la mediana, se hace corresponder a cada uno de los valores de los datos, una sucesión ordenada de números:

Siempre ---5; Frecuentemente ---4; A veces ---3; Casi nunca ---2; Nunca ---1

Se sustituye los datos cualitativos por su correspondiente número.

S	S	F	CN	N	N
5	5	4	2	1	1

Los datos ordenados son: 5, 5, 4, 2, 1, 1 y la cantidad de datos es seis (par), por tanto, se calcula la media aritmética de los dos valores centrales.

$$M_e = \frac{4+2}{2} = 3$$

Como la media de los valores centrales es tres, entonces de acuerdo con la sucesión ordenada de números que se le hizo corresponder a cada categoría, la mediana es la categoría **A veces.**

Saber más

La mediana de un conjunto de datos se caracteriza por:

- Es aplicable a cualquier tipo de datos que puedan ser ordenados.
- Se puede utilizar en distribuciones de frecuencias numéricas y categóricas.
- Siempre que existe, es única.
- No varía fácilmente al modificar los valores extremos.
- Es apropiada para un grupo pequeño de datos.
- Es fácil de determinar.

Aplica tus conocimientos

Determina la mediana de las situaciones A y B que aparecen en la sección "Reflexiona un instante", al inicio de este epígrafe.

Atención

La media aritmética, la moda y la mediana son medidas necesarias que de cierto modo caracterizan o representan al conjunto de datos, son valores que tienden a ocupar una posición alrededor de la cual se agrupa el mayor número de datos que facilitan la descripción de la variable (o variables) que es objeto de estudio. Estas medidas son llamadas **medidas de tendencia central o de posición.**

Ejercicios

1. Clasifica las proposiciones siguientes en verdaderas o falsas. Justifica las que sean falsas.

a) ___ La media aritmética es el valor promedio alrededor del cual se encuentran los datos de un conjunto de datos.
b) ___ La media aritmética se puede calcular cuando la distribución de frecuencia es categórica.
c) ___ La moda es el dato que tiene mayor frecuencia absoluta en un conjunto de datos.
d) ___ La moda siempre existe en un conjunto de datos.
e) ___ La media aritmética se calcula sumando los valores medidos en un conjunto de datos y dividiéndolos por dos.
f) ___ La mediana siempre ocupa el valor central de un conjunto de datos.
g) ___ La media aritmética es única.
h) ___ La moda puede no ser única.
i) ___ La moda se calcula adicionando la frecuencia absoluta de cada uno de los datos y dividiéndola por el total de estos.
j) ___ La moda se utiliza únicamente en el análisis de situaciones en que intervienen variables cualitativas

2. Formula tres problemas en los que, para resolverlos, sea necesario calcular la media aritmética, y otros tres donde sea preciso determinar la moda.

3. Un estudiante sabe que la media de sus calificaciones en los concursos a nivel de escuela en Historia, Matemática, Español, Biología y Física es 94,8 y que los resultados en las cuatro primeras asignaturas son, 100, 95, 97 y 92 puntos respectivamente. Su calificación en el concurso de Física es:

a) ___ 57,84 puntos   b) ___ 72,3 puntos
c) ___ 90 puntos   d) ___ 96 puntos

4. En una secundaria básica fueron encuestados 30 estudiantes de noveno grado para conocer su interés en relación con la continuidad de estudios de acuerdo a las especialidades del nivel medio superior y del nivel de educación técnica profesional. Las categorías utilizadas para conocer los resultados se agruparon en: Instituto Preuniversitario Vocacional de Ciencias Exactas (IPVCE), Instituto Preuniversitario del MININT (IPM), Instituto Preuniversitario Urbano

(IPU), Escuelas Militares Camilo Cienfuegos (EMCC), Instituto Politécnico (ETP).

Los resultados obtenidos en la encuesta fueron:

IPVCE	IPVCE	EMCC	ETP	ETP	IPU
ETP	IPM	IPVCE	IPU	IPM	IPM
IPM	ETP	IPVCE	IPVCE	EMCC	EMCC
IPVCE	PVCE	EMCC	PU	EMCC	IPM
IPVCE	ETP	ETP	EMCC	EMCC	IPVCE

a) ¿Será posible calcular la media aritmética para conocer sus preferencias en relación con la continuidad de estudios? Fundamenta tu respuesta.

b) Construye una tabla de distribución de frecuencias.

c) Determina la moda. Justifica tu respuesta.

d) Representa los datos en un gráfico.

5. Se desea conocer la preferencia que tiene un grupo de jóvenes por la música. Para esto se aplica una encuesta de opinión y se tabulan los resultados.

¿De la media aritmética y la moda, cuál sería la que utilizarías para hacer el análisis de estos resultados? Fundamenta tu respuesta.

6. Analiza la situación propuesta en el ejercicio tres y di si es posible determinar la moda. Argumenta tu respuesta.

7. Un profesor propone analizar los resultados del aprendizaje en las pruebas finales de Matemática del curso anterior de 15 de sus estudiantes y los registra en la pizarra de la forma siguiente:

100; 70; 50; 90; 90; 80; 60; 60; 90; 70; 90; 60; 50; 50; 70

A continuación, le propone a los estudiantes que hagan algunas reflexiones sobre la media y la moda de los resultados anteriores.

- María considera que la moda es 100 porque es la mayor nota que se obtuvo.
- Luis supone que la media aritmética es 60 porque es el valor central.
- José responde que la moda es 90 porque es la nota más frecuente.
- Beatriz plantea que la media aritmética no es representativa para hacer el análisis de las notas.

¿Cuál de los cuatro estudiantes tiene la razón?

a) ___ Beatriz b) ___ María c) ___ José d) ___ Luis

8. Elena y Marcos respondieron la tarea evaluativa de Matemática donde tenían que calcular la mediana de los datos siguientes: 16; 18; 5; 3; 12; 15.
Selecciona cuál de ellos respondió correctamente, sin hacer los cálculos.
Elena, responde que la mediana de los datos es cuatro.
Marcos expresa que la mediana de los datos es 13,5.

9. Determina la mediana de los datos siguientes:
a) 2,84; 1,3; 18; 0,7; 1,26; 15,09; 15,2; 0,82.
b) $\frac{3}{8}a$; $6a$; $\frac{2}{3}a$; a; $2a$.
c) $a + 7$; $a + 1$; $a + 12$; $a - 1$; $a - 3$.

10. Escribe tres ejemplos de situaciones de la vida donde sea necesario la determinación de la mediana y no del cálculo de la media aritmética.

11. Identifica las proposiciones verdaderas y escribe un ejemplo en que se cumpla.
a) ___ La mediana es siempre igual a la moda.
b) ___ La mediana es siempre distinta de la media aritmética.
c) ___ La mediana es siempre distinta de la moda y de la media aritmética.
d) ___ Mediana, media aritmética y moda pueden ser iguales.

12. El Comité Estatal de Finanzas, realiza un estudio de los salarios mensuales de los médicos, estomatólogos y enfermeras de un policlínico según su categoría, los que se relacionan a continuación:
\$5 810; \$5 560; \$5 310; \$5 060; \$4 810; \$4 610; \$4 410; \$4 610; \$4 410; \$4 010; \$3 810
Si tuvieras que identificar cuál es el salario más representativo de los trabajadores de este policlínico, ¿cuál seleccionarías? ¿Por qué? ¿En qué medida de tendencia central te auxiliaste para tomar tu decisión?

13. Una encuesta para saber el uso de aplicaciones matemáticas Geómetra y GeoGebra en las clases, se aplicó a estudiantes de octavo grado escogidos al azar de cinco secundarías básicas; se pudo constatar que, de los encuestados, 45 estudiantes respondieron que casi nunca lo usan, 22 refirieron que lo usaban frecuentemente,

25 que nunca lo usaban, diez que lo usaban siempre y 35 que lo utilizaban a veces.
¿Cuál es tu opinión sobre el uso de estas aplicaciones matemáticas en las clases en estas cinco escuelas? Justifica tu respuesta basándote en el cálculo de alguna medida de tendencia central.

Ejercicios del capítulo

1. En la recta numérica de la figura 1.21 están representados los números d, c, cero, a y b (todas las subdivisiones son iguales).

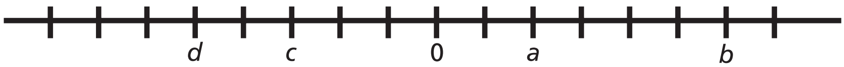


Fig. 1.21

Señala cuál de las relaciones dadas es la que se cumple:

a) ___ $b = d$ b) ___ $2a < d$ c) ___ $-c > a$ d) ___ $c + d > 0$

2. En una competencia de pioneros exploradores de una secundaria básica se enfrentaron dos tropas de noveno grado. La tropa Avispa obtuvo $\frac{3}{5}$ del total de puntos, entonces esta tropa obtuvo el:

__ 40 % __ 60 % __ 20 % __ Ninguno de los anteriores

3. De un tanque que contiene agua y se encuentra lleno completamente, se saca $\frac{1}{3}$ de su capacidad para cocinar, el 50 % del resto para lavar y el resto del agua para limpiar.
Se puede afirmar que:

a) ___ Se utilizó mayor cantidad de agua para limpiar que para lavar y cocinar.
b) ___ Se utilizó la mitad de la cantidad de agua para limpiar y cocinar.
c) ___ Se utilizó la misma cantidad de agua para las tres actividades.
d) ___ Se utilizó mayor cantidad de agua para lavar que para limpiar.

4. En una Cooperativa de Producción Agropecuaria (CPA) un campesino separó las guayabas buenas de las que se echaron a perder. De las buenas la tercera parte estaban maduras y el resto pintonas. Si entre las guayabas buenas y las que se echaron a perder había 180 guayabas y de ellas el 20 % estaban echadas a perder, la cantidad de guayabas pintonas es:

a) ___ 36 b) ___ 48 c) ___ 96 d) ___ 144

5. Para la limpieza de una piscina que contiene aproximadamente 3 750,3 m^3 de agua se programa hacer tres extracciones. En la primera extracción se desagua la tercera parte del agua contenida en la piscina y en la segunda se desaguan 387 400 dm^3 más. La cantidad de agua que quedó en la piscina previo a la tercera extracción fue de:

a) ___ 2 112,8 m^3 b) ___ 2 112,8 dm^3

c) ___ 21 128 dm^3 d) ___ ninguna de las anteriores

6. Una fuente ha tardado 10 minutos en llenar un barril de 300 litros. ¿Cuánto tardará en llenar una cisterna de 12 000 litros?

7. Un camión sin carga tiene una masa de 3 950 kg. ¿Cuál será su peso total si se cargan 180 sacos de 46 kg cada uno? ¿Cuál será su masa después que hayan bajado el 70 % de la cantidad de sacos?

8. Un ómnibus sale de su primera parada con 60 pasajeros. En la segunda parada se baja el 5 % de las personas que estaban en el ómnibus y suben la tercera parte de los que se mantuvieron en el ómnibus. La cantidad de pasajeros que se bajan en la tercera parada excede en uno a los que se bajaron en la parada anterior y sube entonces el 12,5 % de los pasajeros que quedaron en el ómnibus.

a) ¿Cuántos pasajeros viajaban en el ómnibus de la tercera a la cuarta parada?
b) ¿Qué por ciento representan los pasajeros que viajaban al término de la tercera parada con relación a los que salen en la primera parada?

9. Sean: $P = \dfrac{13{,}2 - 2{,}5 \cdot \dfrac{6}{5}}{\sqrt[3]{125}}$ y $Q = \dfrac{2\,400\,000\,000}{1000^3}$

a) Compara los valores numéricos de P y Q.
b) El promedio de P y Q es:

___ 2,22 ___ 2,4

___ 4,44 ___ Ninguno de los anteriores

10. Por cada minuto que pasa, una araña estira su hilo 10 mm, pero el hilo se encoge 2,0 mm. Su hilo habrá sobrepasado los 3,0 m, al cabo de ____ horas.[28]

11. Determina el valor numérico de la expresión $D=3\left(\dfrac{9^{50}\cdot 3^{20}}{3^{121}}\right)^2-9\left(\dfrac{9^{50}\cdot 3^{20}}{3^{121}}\right)$ y di a qué conjunto numérico más restringido pertenece el resultado obtenido.

12. Selecciona la respuesta correcta marcando con una cruz (X).

Si $A=\left(3\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}\right):\dfrac{15}{6}-\dfrac{2}{3}$ y $B=\dfrac{0{,}2^{36}\cdot 0{,}2^{64}}{\left(\dfrac{1}{5}\right)^{100}}$, entonces se cumple que:

___ $A > B$ ___ $A < B$ ___ $A = B$

13. Simplifica las expresiones siguientes:

a) $\dfrac{6\cdot 3^3\cdot 35^2}{2^5\cdot 3^2\cdot 5^7\cdot 7^3}$ y b) $\dfrac{a^2\cdot b^{-3}\cdot c^{-4}}{a^{-1}\cdot b^{-2}\cdot c^{-6}}$, dando el resultado:

13.1 De forma que todos los exponentes sean positivos.
13.2 De forma que no aparezca cociente de potencias.

14. Sean $A=3\dfrac{1}{3}+\sqrt{1{,}44}:0{,}4$ y $B=\dfrac{15^{-23}\cdot\left(5^7\right)^2\cdot 3^{14}}{15^{-\sqrt{8^2+6^2}}}$

14.1 Representa en la recta real el valor obtenido al calcular A.
14.2 Determina el valor de B. ¿A qué conjunto numérico más restringido y más amplio pertenece este resultado?

15. Se conoce que la media aritmética de tres números es $2{,}5\cdot 10^4$, siendo dos de los números $1{,}2\cdot 10^4$ y $5{,}6\cdot 10^4$; entonces el tercer número escrito en notación científica es:

___ $1{,}82\cdot 10^4$ ___ $0{,}7\cdot 10^4$
___ $7{,}02\cdot 10^4$ ___ Ninguno de los anteriores

[28] Cantón Arenas, Jesús: *Ejercicios y problemas integradores de Matemática para los estudiantes de Secundaria Básica,* Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2011, p. 110.

16. Si $X = \frac{2^{15} \cdot 2^{-45}}{4^{-29}}$, $Y = \frac{2^{29} \cdot 5^{11}}{10^{30}}$ y $Z = \frac{22,5}{5} + \sqrt[3]{8}$; entonces se cumple que:

a) ___ $Z > Y > X$ ___ $Y < Z < X$ ___ $Z = Y > X$ ___ $X = Y = Z$

b) El conjunto numérico más restringido al que pertenece el valor de X es: ___

17. Dados los conjuntos $M = \{x \in \mathbb{R};\ x \geq -3\}$; $N = \{x \in \mathbb{R};\ x\ -\sqrt{3} < x < 2\}$ y P: conjunto de los números naturales pares.
Completa los espacios en blanco, utilizando los símbolos $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$; de forma tal que se obtenga una proposición verdadera.

a) 2 ___ P b) 6 ___ M c) M ___ N d) –2 ___ M e) P ___ M

f) $\sqrt{2}$ __ N g) 5 ___ P h) $\sqrt{3}$ ___ N i) N ___ P

18. Lee detenidamente la información que muestra la tabla 1.12.[29]

Tabla 1.12

Medallero Juegos olímpicos Tokio 2020				
Países	**Oro**	**Plata**	**Bronce**	**Total**
Estados Unidos	39	41	33	113
China	38	32	18	88
Japón	27	14	17	58
Reino Unido	22	21	22	65
ROC	20	28	23	71
Australia	17	7	22	46
Países Bajos	10	12	14	36
Francia	10	12	11	33
Alemania	10	11	16	37
Italia	10	10	20	40
Canadá	7	6	11	24
Brasil	7	6	8	21
Nueva Zelanda	7	6	7	20
Cuba	7	3	5	15
Hungría	6	7	7	20

[29] Buscado en Google. 20 de septiembre de 2022. https://es.wikipedia.org/wiki/Anexo:Medallero_de_los_Juegos_Ol%C3%ADmpicos_de_Tokio_2020.

18.1 Completa los espacios en blanco de forma tal que se obtenga una proposición verdadera para cada caso:

a) El total de medallas doradas de China excede en ___ a las de Oro de Francia.

b) El porciento que representa el total de medallas de plata con respecto al total de medallas obtenidas por estos 15 países es______.

c) Los países que tienen una cantidad impar de preseas de oro son _____.

d) Si Brasil hubiera obtenido tres medallas de plata menos, entonces representaría la ___________ parte del total de medallas brasileñas.

e) Cuba obtuvo el ___% de medallas de plata.

f) El total de medallas de Cuba es al total de medallas de bronce de los cuatro primeros países como uno es a ____.

18.2 Haciendo uso de los recursos informáticos construye:

a) Un gráfico de barras que ilustre la cantidad de medallas de Oro de los 15 países.

b) Un gráfico poligonal que ilustre la cantidad de medallas de Plata de los 15 países.

Para la autoevaluación

Reflexiona sobre lo aprendido

1. ¿Qué es un número irracional?
2. ¿Qué es un número real?
3. ¿Qué conjuntos numéricos son subconjuntos del conjunto de los números reales?
4. ¿Qué operaciones sabes hacer con números reales?
5. ¿Conoces los pasos que se deben seguir para resolver un ejercicio de operaciones combinadas de números reales?
6. ¿Sabes qué es la estadística?
7. ¿Qué importancia tiene la estadística para la sociedad?

8. ¿Sabes identificar cuando una variable estadística es cuantitativa o cualitativa? ¿Qué características tiene cada una?

9. ¿Consideras más ventajoso presentar datos en forma gráfica que en forma de tablas? ¿Por qué?

10. ¿Será posible calcular la mediana en cualquier tipo de distribución?

11. ¿Qué información te aporta la mediana al hacer el análisis de un conjunto de datos?

12. ¿Cómo calcular la mediana cuando los datos están representados en una tabla de frecuencias?

13. ¿Por qué es importante dominar el procedimiento general para el procesamiento de datos?

Ponte a prueba

1. Después de un tornado, los trabajadores de la Empresa de Telecomunicaciones de Cuba S. A. (ETECSA) arreglaron una buena cantidad de líneas telefónicas en una localidad afectada, exactamente, 165. El primer día repararon el 20 % de los números afectados; el segundo día $\frac{5}{12}$ del resto y el tercer día las dos terceras partes de lo que se hizo el primer día.

a) Si la reparación duró cuatro días, ¿cuántos números telefónicos hubo que reparar el último día?

b) ¿Qué porcentaje del total representa el trabajo realizado el segundo día?

2. Calcula $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}+\sqrt{\dfrac{8^{10}}{2^{30}}-(-2)^3}+(1{,}5)^2$

a) Indica el dominio numérico más restringido al cual pertenece el resultado obtenido.

3. Escoge el conjunto de datos que se ajustan a la descripción dada. La media aritmética es tres; no tiene moda, la mediana es tres.

$A = \{3; 3; 3; 3\}$
$B = \{5; 4; 3; 0\}$
$C = \{0; 3; 6\}$
Describe las medidas de tendencia central que caracterizan los conjuntos de datos que no cumplen la condición dada.

4. Un profesor propone analizar en su grupo de entrenamiento, la cantidad de respuestas correctas que los 15 estudiantes que se entrenan para participar en las olimpiadas populares de Matemática respondieron y para eso las registra en la pizarra de la forma siguiente:
10; 7; 5; 9; 9; 8; 6; 6; 9; 7; 9; 6; 10; 5; 7
Pide a sus estudiantes que analicen las medidas de tendencia central.

- María dice que la mediana es seis.
- Luis dice que la moda es cuatro.
- José responde que la moda es 9 y que la media aritmética está muy próxima a 7,5.
- Beatriz plantea que la mediana es siete y que la media aritmética es ocho.

¿Cuál de los cuatro estudiantes tiene la razón?

5. La mediana de los resultados de María en las tres pruebas realizadas para su ingreso al Instituto Preuniversitario Vocacional de Ciencias Exactas fue 90 puntos. Si su promedio fue de 92 puntos y no hubo coincidencia en ninguna de las calificaciones. Determina las posibles calificaciones obtenidas por María en las tres pruebas realizadas. (Las calificaciones se otorgan en números enteros).

CAPÍTULO 2

Geometría plana y cálculo de cuerpos

En este capítulo vas a *ampliar* el estudio de algunas de las figuras planas que conoces desde la Educación Primaria, nuevos conceptos de ángulos relacionados con la circunferencia, así como otras figuras que te permitirán resolver diferentes problemas geométricos de cálculo, demostración y construcción.

Consejos útiles

Para estar en condiciones de enfrentar con éxito el estudio de los ángulos en la circunferencia, te proponemos repasar los elementos de la circunferencia que estudiaste en séptimo grado, tales como el centro, el radio, el diámetro, los arcos y todas las propiedades relacionadas con estos. Después completarás tu estudio resolviendo los cinco primeros ejercicios del primer epígrafe u otros similares que te oriente tu profesor.

2.1 Ángulos en la circunferencia

Investiga y aprende

Claudia invita a los estudiantes de su grupo a su cumpleaños, Vivian se detiene a observar el *cake* de la fiesta y piensa si la parte superior del cake es semejante a una circunferencia, ¿existirá alguna propiedad geométrica para cortar este en ángulos como los que se ilustran en la figura 2.1?

Fig. 2.1

El estudio de nuevos conceptos de ángulo, relacionados con la circunferencia, que ahora iniciaremos te permitirá responder esta y otras muchas interrogantes.

Reflexiona un instante

¿Cuántas posibilidades existen de que dos rectas se corten y que al mismo tiempo sean secantes a una circunferencia? ¿Puedes dibujar todos los casos?

Estarás de acuerdo con que hay cuatro posibilidades y en cada una de estas existe un ángulo particular (fig. 2.2).

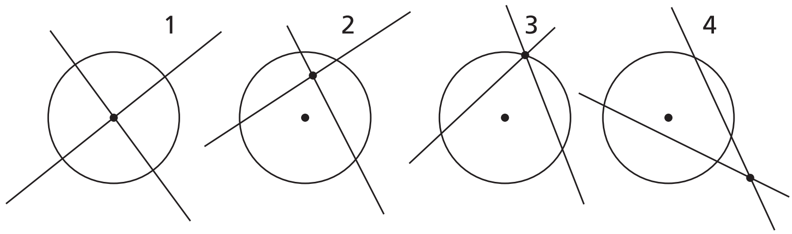


Fig. 2.2

2.1.1 Ángulos centrales en la circunferencia

Investiga y aprende

Observa la figura 2.2. ¿Qué distingue al ángulo determinado en el caso 1? ¿Cuál es la posición de su vértice respecto a la circunferencia trazada?

Definición de ángulo central:

Cualquier ángulo que tenga su vértice en el centro de la circunferencia y las semirrectas que constituyen sus lados tengan origen común en el centro de la circunferencia se denomina **ángulo central**.

Ejemplo 1:

En la figura 2.3, el ángulo *AOB* es un ángulo central de la circunferencia dada.

Observa que su vértice *O* coincide con el centro de la circunferencia y que los puntos *A* y *B* de intersección de sus lados con la circunferencia determinan su arco correspondiente $\overline{AB}$ situado en el interior de dicho ángulo y también su cuerda correspondiente $\overline{AB}$.

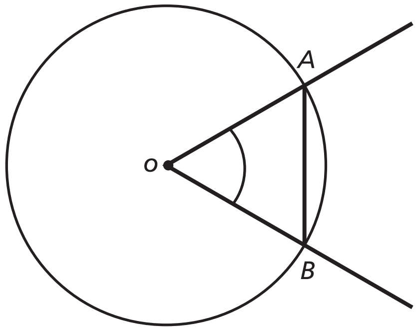


Fig. 2.3

Ejemplo 2:

En la figura 2.4, aparece señalado el ángulo central *COD*. Observa que *C* y *D* son los puntos de intersección de sus lados con la circunferencia y que determinan su arco correspondiente *CMD*, situado en el interior de dicho ángulo y su cuerda correspondiente $\overline{CD}$.

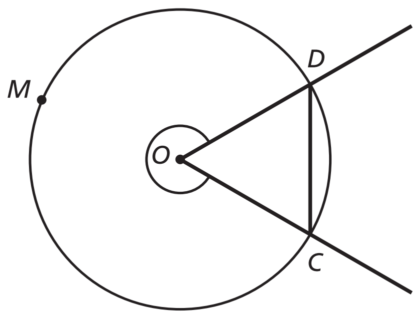


Fig. 2.4

Definición de arco y de cuerda correspondiente a un ángulo central y amplitud del ángulo central:

El **arco correspondiente** a un ángulo central es el arco que determinan sus lados al cortar la circunferencia a la cual pertenece el ángulo y cuyos puntos están contenidos en el interior de dicho ángulo.
La **cuerda correspondiente** a un ángulo central es el segmento que determinan los puntos de intersección de sus lados con la circunferencia a la cual pertenece el ángulo.

La **amplitud de un ángulo central** es la amplitud de su arco correspondiente y recíprocamente la amplitud de un arco de circunferencia es la misma que la de su ángulo central.

Con las amplitudes de los arcos puedes operar de la misma forma que sabes hacerlo con las amplitudes de los ángulos.

Ejemplo 3:

En la figura 2.5, los puntos *A*, *D*, *C* y *B* están dispuestos consecutivamente en una de las semicircunferencias de la circunferencia de centro *O* y diámetro $\overline{AB}$ $\sphericalangle AOD = 30°$; $\sphericalangle DOC = 120°$; $\overset{\frown}{CB} = 30°$.

Calcula la amplitud del $\overset{\frown}{AC}$.

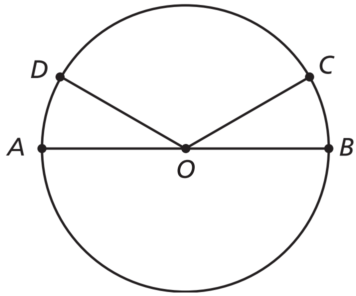


Fig. 2.5

Solución:

Primera vía de solución (por suma de amplitudes de arcos: $\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DC} = \overset{\frown}{AC}$

$\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DC} = \overset{\frown}{AC} = 30° + 120$ porque la amplitud del arco es la de su ángulo central

$= 150°$

$\overset{\frown}{AC} = 150°$

Segunda vía de solución (por diferencia de amplitudes de arcos: $\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{AB}$)

$\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CB} = 180° - 30°$

$\overset{\frown}{AC} = 150°$

Respuesta: La amplitud del arco $\overset{\frown}{AC} = 150°$.

Ejemplo 4:

En un informe del *CITMA*[1] aparece reflejado que cuando los colonialistas españoles llegaron a Cuba aproximadamente el 85 % de su superficie estaba constituida por bosques y que al triunfo de la Revolución el área de bosques había descendido al 12 % del total de nuestra superficie.

a) Identifica el tipo de gráfica donde se representan los datos.
b) ¿Cuál es aproximadamente la amplitud del ángulo central correspondiente a la superficie que representan los bosques en 1492?
c) Reflexiona, ¿cómo puedes contribuir a preservar los árboles de la comunidad en que está ubicada tu escuela?

[1] *CITMA*: Ministerio de Ciencia Tecnología y Medio Ambiente.

Área de bosques en 1942

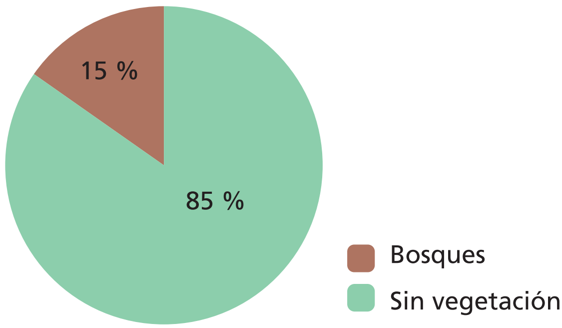


Fig. 2.6

Solución:

a) El tipo de gráfica utilizada es gráfica circular o de pastel.

b) <u>Primera vía de solución (por tanto por ciento)</u>.

Determinar el 85 % de 360° : $\frac{85}{100} \cdot 360° = 306°$

<u>Segunda vía de solución (por proporcionalidad).</u>

Si denotamos por x° la amplitud del ángulo central que corresponde al ángulo del sector angular que representa el 85 % de la superficie de bosques en 1492, entonces:

$$\left.\begin{array}{r} 100\,\% \rightarrow 360'' \\ 85\,\% \rightarrow x'' \end{array}\right\} \text{de donde } x = \frac{85 \cdot 360''}{100} = 306''$$

<u>Tercera vía de solución (por tanteo).</u>

A un 75 % de la gráfica le correspondería un arco de:

$$\begin{array}{ccccc} 50\,\% & + & 25\,\% & = & 75\,\% \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 180'' & + & 90'' & = & 270'' \end{array}$$

Del 25 % restante, que representa 90°, $\frac{1}{5}$ es el 5 % de la gráfica total y su doble es el 10 %, que debemos calcular para sumarlo al 75 % y obtener el 85 %, por tanto: $2\left(\frac{1}{5} \cdot 90°\right) = 2(18°) = 36°$.

Así, al 85 % de la gráfica correspondería un arco de (270° + 36°) = 306°.

<u>Cuarta vía de solución (por porcentajes cómodos).</u>

85 % = 75 % + 10 %

Luego, como: $75\% = \frac{3}{4}$ y $10\% = \frac{1}{10}$

$85\% \cdot 360° = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{10}\right) \cdot 360°$,

= 270° + 36° = 306°

pues: $\frac{3}{4} \cdot 360° = 270°$ y $\frac{1}{10} \cdot 360° = 36°$

Respuesta: El ángulo central correspondiente al 85 % de la gráfica es de 306º.

Teoremas sobre relaciones entre ángulos centrales, arcos y cuerdas

Teorema sobre la relación entre ángulos centrales y arcos iguales

En una circunferencia o en circunferencias iguales a ángulos centrales iguales corresponden arcos iguales.

Demostración del teorema

Premisa: En la *C*(*O*;*OB*), ∢*AOB* y ∢*COD* ángulos centrales tales que: *A, D* y *C* pertenecen a la circunferencia y ∢*AOB* = ∢*COD* (fig. 2.7 a)).

Tesis: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

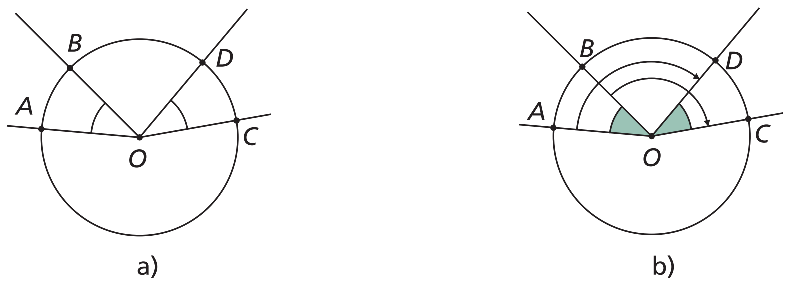


Fig. 2.7

Demostración:

∢*AOB* = ∢*DOC* por lo tanto existe un movimiento mediante el cual ∢*AOB* se transforma en el ∢*DOC*. Consideremos que este movimiento es una rotación de centro *O* y ángulo de rotación de amplitud α = ∢*BOC*.

Por este movimiento se tiene que:

- El punto *O es el* vértice común de esos dos ángulos y su imagen coinciden.
- La semirrecta $\overline{OB}$ al recorrer el ángulo de rotación $\sphericalangle BOC$ se transforma necesariamente en la semirrecta $\overline{OC}$.

Como además se cumple que:

$\sphericalangle BOC = \sphericalangle BOD + \sphericalangle DOC$ por suma de amplitudes de ángulos

$= \sphericalangle BOD + \sphericalangle AOB$ sustituyendo $\sphericalangle AOB = \sphericalangle DOC$

$= \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOD$ por propiedad conmutativa de la adición de amplitudes de ángulos

$= \sphericalangle AOD$ por suma de amplitudes de ángulos

Es decir: $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC$. De esta igualdad de ángulos: $\sphericalangle AOD$ se transforma en $\sphericalangle BOC$ por el movimiento considerado y como sabemos que la semirrecta $\overline{OB}$ se transforma por ese movimiento en la semirrecta *OC*, se puede afirmar que la semirrecta $\overline{OA}$ se transforma en la semirrecta $\overline{OD}$ (fig. 2.7 b). Así:

A se transforma en un punto de la semirrecta *OD.* ¿En cuál?

B se transforma en un punto de la semirrecta *OC.* ¿En cuál?

- Como $\overline{OA} = \overline{OD}$ y $\overline{OB} = \overline{OC}$ por ser radios de la circunferencia, la imagen del punto *A* es el punto *D* y la imagen del punto *B* es el punto *C*.
- Luego por el movimiento considerado, $\overset{\frown}{CD}$ es imagen de $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

Recíproco del teorema sobre la relación entre ángulos centrales y arcos iguales

> En una circunferencia o en circunferencias iguales, a arcos iguales corresponden ángulos centrales iguales.

Te proponemos que realices la demostración del teorema de manera análoga a la del teorema anterior.

Ejemplo 5:

En la figura 2.8, las circunferencias $C_1\ (O_1\ ;\ \overline{O_1A})$ y $C_2\ (O_2\ ;\ \overline{O_2C})$ son iguales y

$\sphericalangle AO_1B = \sphericalangle CO_2D$

Entonces se cumple que: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

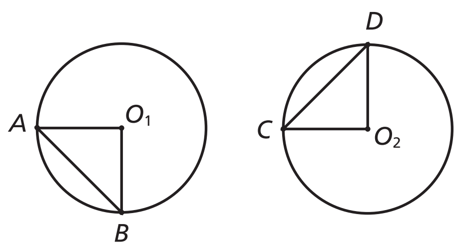


Fig. 2.8

Teorema sobre la relación de ángulos centrales y cuerdas iguales

En una misma circunferencia o en circunferencias iguales, a ángulos centrales iguales corresponden cuerdas iguales.

Recíproco del teorema sobre la relación entre ángulos centrales y cuerdas iguales

En una misma circunferencia o en circunferencias iguales, a cuerdas iguales corresponden ángulos centrales iguales.

Atención

El teorema y el recíproco *sobre la relación entre ángulos centrales y arcos iguales*, podrás demostrarlos fácilmente cuando estudies el epígrafe de igualdad de triángulos.

Ejemplo 6:

En la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{BD}$ de la figura 2.9: $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$

Entonces se cumple que: $\overline{AB} = \overline{CD}$

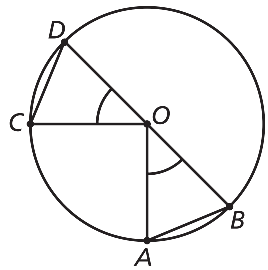


Fig. 2.9

Aplica tus conocimientos

Formula ahora de manera análoga a las parejas de teoremas anteriores, el teorema sobre la relación entre arcos y cuerdas iguales y su recíproco. Como no siempre los arcos o las cuerdas son iguales vamos a formular también un teorema que te permitirá comparar los arcos o las cuerdas; veámoslo a continuación.

Teorema sobre la relación de comparación entre arcos y cuerdas

En una misma circunferencia o en circunferencias iguales, al arco del mayor de dos ángulos centrales corresponde la mayor cuerda.

Ejemplo 7:

En la figura 2.10:

A, *B* y *C* son puntos de la circunferencia de centro *O* y diámetro $\overline{AB}$ $\sphericalangle AOC = 75°$.

Fundamenta que: $\overline{BC} > \overline{AC}$

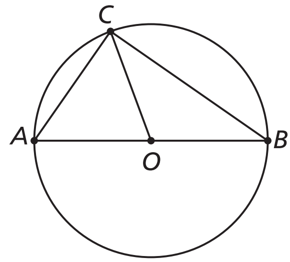


Fig. 2.10

Solución:

$\sphericalangle AOC = 75°$ por datos

$\sphericalangle COB = 105°$ por ser ángulo adyacente con el ángulo $\sphericalangle AOC$

$\sphericalangle COB > \sphericalangle AOC$

Como en una circunferencia, a mayor ángulo central corresponde mayor arco: $\overset{\frown}{BC} > \overset{\frown}{AC}$ y por este teorema le corresponde también la mayor cuerda: $\overline{BC} > \overline{AC}$.

Ejercicios

1. En la figura 2.11 aparecen una circunferencia y los puntos *A*, *B*, *C* y *D* puntos que pertenecen a esta; $O \in \overline{AF}$; *O* punto medio del diámetro $\overline{DB}$.

Enlaza la columna A con la B según corresponda.

A	B
Radio	O
Arco	$\overline{AF}$
Diámetro	$\overline{AC}$
Recta tangente	$\overline{AD}$
Recta secante	$\overline{AO}$
Cuerda	$\overset{\frown}{AB}$
Centro	ED

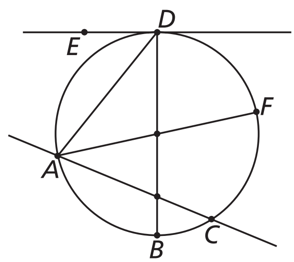


Fig. 2.11

2. En la figura 2.12: *A*, *B* y *C* puntos de la circunferencia de centro *O* y radio $\overline{AO}$; *O* punto de $\overline{AC}$, $\overline{OC} \perp \overline{CD}$.

Completa los espacios en blanco de forma tal que obtengas una proposición verdadera:

a) Son radios de la circunferencia, ____, ____ y ____.

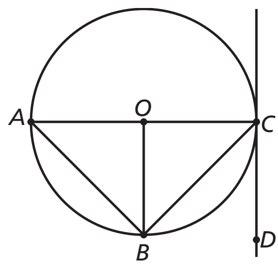


Fig. 2.12

b) Son cuerdas de la circunferencia, ___, ___ y ___.

c) La cuerda ____ es el doble del radio.

d) El arco que mide 180° es _____.

e) Los arcos que miden menos de 180° son ___ y ___.

f) La recta que contiene los puntos *C* y *D* recibe el nombre de ______________.

3. Forma proposiciones verdaderas aplicando los conceptos estudiados al completar los espacios en blanco.

a) La longitud de la cuerda mayor de una circunferencia de radio igual a 1,5 cm es ____________.

b) La tangente a una circunferencia en un punto A y el radio de contacto en este punto forman un ángulo de amplitud igual a _______.

c) La recta que no tiene puntos comunes con una circunferencia se denomina recta _______________.

d) La recta que tiene dos puntos comunes con una circunferencia se denomina recta _______________.

4. Di si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones y fundamenta tu respuesta en caso de ser falsas.

a) ___ Si dos circunferencias tienen el mismo centro, entonces son iguales.

b) ___ Dos puntos cualesquiera de una circunferencia son centralmente simétricos con respecto al centro de esta circunferencia.

c) ___ La longitud del radio de una circunferencia es igual al 50 % de la longitud del diámetro de esta circunferencia.

d) ___ Una circunferencia es simétrica respecto a cualquier recta que pase por su centro.

5. Construye una circunferencia de 0,2 dm de radio e indica dos puntos *A* y *B*, que pertenezcan a esta. Traza la cuerda $\overset{\frown}{AB}$, la secante $\overline{OB}$ y una tangente por el punto *A*.

6. En la figura 2.13, los puntos *C* y *D* pertenecen a la circunferencia de centro *O* y diámetro $\overline{AB}$ Enlaza con una flecha, el arco de la columna I con el ángulo central que le corresponde de la columna *II*.

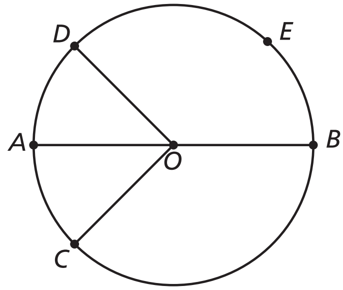


Fig. 2.13

I	II
$\overset{\frown}{CBD}$	$\sphericalangle COA$
$\overset{\frown}{AC}$	$\sphericalangle DOB$
$\overset{\frown}{CD}$	$\sphericalangle AOD$
$\overset{\frown}{BD}$	$\sphericalangle DOC$

7. La circunferencia de centro O y radio $\overline{AO}$ de la figura 2.14 contiene los puntos B, C y D, con:

$\overline{AB} = \overline{CD}$, $\sphericalangle BOC = 38°$ y $\sphericalangle AOD = 82°$

Completa los espacios en blanco de forma tal que se obtenga una proposición verdadera.

a) Los arcos $\overset{\frown}{AD}$ = ___ y $\overset{\frown}{BC}$ = ____

b) Los arcos $\overset{\frown}{AB}$ = ___ y $\overset{\frown}{CD}$ = ____

c) La amplitud de $\sphericalangle AOB$ = ___ y $\sphericalangle COD$ = ___

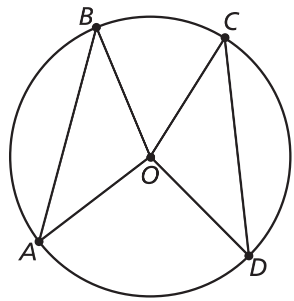


Fig. 2.14

8. En la figura 2.15, los puntos A, B, C y D pertenecen a la circunferencia de centro O y radio $\overline{OD}$ que también cumple que:

- $\overline{AB} = \overline{CD}$
- $\sphericalangle AOB = 65{,}7°$

Calcula las amplitudes del $\sphericalangle COD$ y $\overset{\frown}{AB}$.

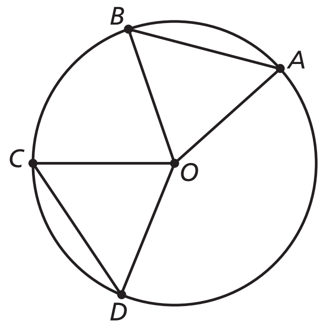


Fig. 2.15

9. En la figura 2.16, se tiene una circunferencia de centro O y de 2,0 cm de radio, $\overline{AB}$ es una cuerda, la semirrecta $\overline{CB}$ es tangente a la circunferencia en el punto B, los puntos A, O, D y C están alineados y $\sphericalangle OCB = 30°$.

a) Calcula las amplitudes de $\sphericalangle COB$, $\sphericalangle DAB$, $\sphericalangle ABO$, $\sphericalangle ABC$ y $\overset{\frown}{BDA}$.

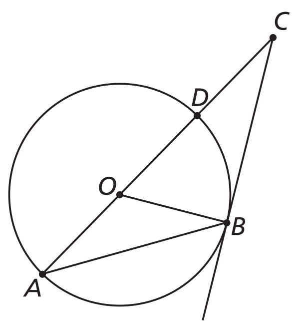


Fig. 2.16

10. En la figura 2.17, S, Q y P son puntos de la circunferencia de centro O y radio $\overline{OR}$, $\overline{OR} \perp \overline{SQ}$ y $\sphericalangle SOQ = 70°$.

Selecciona la respuesta correcta:

a) El triángulo OSQ es:
acutángulo obtusángulo rectángulo

b) $\overset{\frown}{SR} < \overset{\frown}{RQ}$, $\overset{\frown}{SR} = \overset{\frown}{RQ}$, $\overset{\frown}{SR} > \overset{\frown}{RQ}$

c) La amplitud de $\overset{\frown}{PR}$ es:
105° 140° 175° Otra amplitud

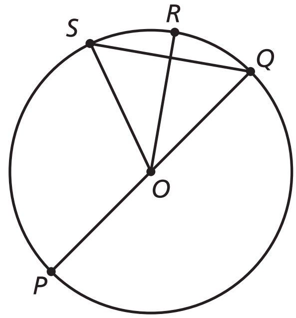


Fig. 2.17

11. En la figura 2.18:

$C_1\left(O_1 ; \overline{O_1B}\right) = C_2\left(O_2 ; \overline{O_2C}\right)$

A punto de $C_1\left(O_1 ; \overline{O_1B}\right)$

D punto de $C_2\left(O_2 ; \overline{O_2C}\right)$

A, B, C y D puntos de los lados del triángulo O_1RO_2 isósceles de base $\overline{O_1O_2}$.

Si $\sphericalangle R = 40°$, calcula $\overline{AB}$ y CD.

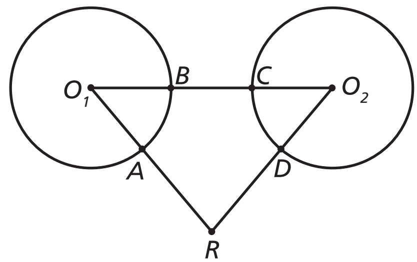


Fig. 2.18

12. En la figura 2.19, dada una circunferencia de centro O y radio $\overline{OD}$

$AB \parallel \overline{CD}$; $\overset{\frown}{BD} = 30°$ y $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

Determina las amplitudes de:

$\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{DC}$, $\overset{\frown}{ABC}$ y $\sphericalangle DOC$.

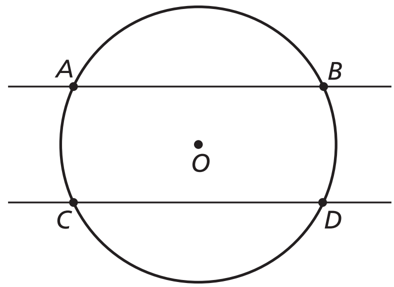


Fig. 2.19

13. En la figura 2.20 se han trazado una circunferencia de centro O, radio OC, cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ iguales y $\overset{\frown}{AB} = 140°$.

a) Calcula $\overset{\frown}{AC}$.

b) Clasifica el ΔABC según la longitud de sus lados.

14. ¿Qué amplitud tiene el ángulo menor formado por las agujas del reloj a las 8:00 a.m.?

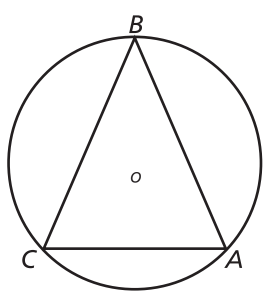


Fig. 2.20

15. En la figura 2.21, los puntos A, B, D y E pertenecen a la circunferencia de centro O y radio $\overline{OC}$, tal que se cumple: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} = 36°$ y $\overset{\frown}{AED} = 3\overset{\frown}{AB}$
Entonces la amplitud del $\sphericalangle AOC$ es: 144º 108º 72º 216º Otra amplitud.

16.* En la figura 2.22: $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ son cuerdas de la circunferencia de centro O y radio $\overline{OC}$, $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$.
Demuestra que son iguales $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

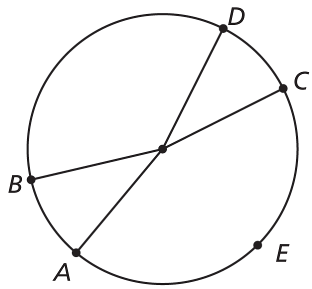


Fig. 2.21

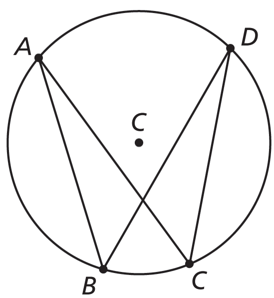


Fig. 2.22

2.1.2 Ángulos inscritos en la circunferencia

Reflexiona un instante

Piensa de nuevo en las **posibilidades** que dibujaste al inicio del epígrafe sobre dos rectas que se corten y al mismo tiempo sean secantes a una circunferencia (fig. 2.2).

- No es difícil para ti identificar en el primer caso dos parejas de ángulos centrales.
- ¿Qué distingue al ángulo determinado en el tercer caso?
- ¿Cuál es la posición del vértice del ángulo determinado en este caso?

Definición de ángulo inscrito:

Cualquier ángulo que tenga su vértice en la circunferencia y las semirrectas que constituyen sus lados son secantes de la circunferencia se denomina **ángulo inscrito a la circunferencia**.

Ejemplo 1:

En la figura 2.23, el $\sphericalangle ABC$ es un ángulo inscrito en la circunferencia de centro O. Observa que su vértice es el punto B que pertenece a la circunferencia y los lados la intersecan en los puntos A y C, entonces el arco $\overset{\frown}{AC}$ es el arco

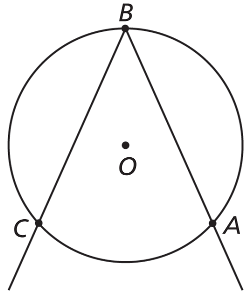


Fig. 2.23

correspondiente al ángulo inscrito *ABC*. Es correcto decir que, al ángulo inscrito *ABC* le corresponde la cuerda $\overline{AC}$ o el arco $\overset{\frown}{AC}$, también se puede expresar que a la cuerda $\overline{AC}$ o el arco $\overset{\frown}{AC}$ le corresponde el ángulo inscrito *ABC.*

Ejemplo 2:

¿Cuál es la posición del centro de una circunferencia con respecto a sus ángulos inscritos? Dibuja todos los casos posibles.

Solución:

Los casos posibles puedes observarlos en la figura 2.24.

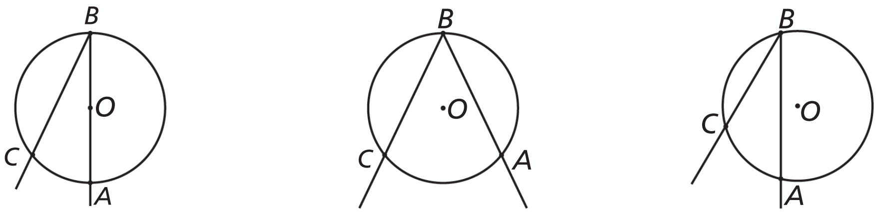


Fig. 2.24

Teorema sobre la amplitud de un ángulo inscrito

La amplitud de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad de la amplitud de su arco correspondiente.

Demostremos este teorema, para lo cual consideremos un ángulo inscrito *ABC* en una circunferencia cualquiera de centro *O*, cuyo arco correspondiente es $\overset{\frown}{AC}$.

Tesis: $\measuredangle ABC = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$

Atención

Este ángulo puede ocupar diferentes posiciones en la circunferencia, por lo que es conveniente ahora hacer una diferenciación de casos, como la que aparece en la figura 2.24 del ejemplo dos y demostrar por separado cada caso.

Caso A

El centro de la circunferencia está sobre un lado del ángulo.

Demostración (Fig. 2.25).

Tracemos el radio OC y obtenemos el ΔOBC.
$\overset{\frown}{AC}$ y $\sphericalangle AOC$ tienen la misma amplitud por tratarse de un ángulo central y su arco correspondiente.
$\sphericalangle AOC = \sphericalangle OBC + \sphericalangle OCB$ por la propiedad del ángulo exterior en el ΔOBC
$\sphericalangle AOC = 2\sphericalangle OBC$ porque $\sphericalangle OCB = \sphericalangle OBC$ por ángulos base del ΔOBC isósceles
$\sphericalangle AOC = 2\,\sphericalangle ABC$ porque $\sphericalangle OBC = \sphericalangle ABC$, *porque* $O \in \overline{AB}$

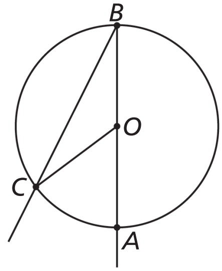


Fig. 2.25

De donde: $\dfrac{\sphericalangle AOC}{2} = \sphericalangle ABC$.

Y, por tanto, $\sphericalangle ABC = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$

Caso B

El centro de la circunferencia es un punto interior del ángulo *ABC*

Demostración (Fig. 2.26):
Haremos la demostración basándonos en el caso A.
Trazamos la semirrecta BD que pasa por O, el $\sphericalangle ABC$ queda dividido en dos ángulos: $\sphericalangle ABD$ y $\sphericalangle DBC$ y el arco $\overset{\frown}{AC}$ en los arcos $\overset{\frown}{AD}$ y $\overset{\frown}{DC}$.

Luego: $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DC}$ y $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD + \sphericalangle DBC$ (I)

$\sphericalangle ABD = \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{2}$ (II) y $\sphericalangle DBC = \dfrac{\overset{\frown}{DC}}{2}$ (III) por el caso A

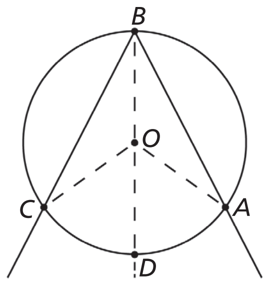


Fig. 2.26

ya demostrado.

Sustituyendo (*II*) y (*III*) en (I) se llega a la tesis por suma de arcos:

$\sphericalangle ABC = \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{2} + \dfrac{\overset{\frown}{DC}}{2} = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$ luego $\sphericalangle ABC = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$.

Caso C
El centro de la circunferencia es un punto exterior al ángulo *ABC*.

Demostración (Fig. 2.27):

La demostración podemos hacerla también basándonos en el caso A.

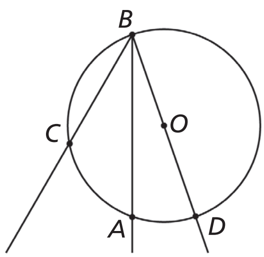


Fig. 2.27

Traza el diámetro $\overline{BD}$ y prolóngalo para formar los $\sphericalangle ABD$ y $\sphericalangle CBD$, ambos inscritos.

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle CBD - \sphericalangle ABD$ (I) por diferencia de amplitudes de ángulos.

Se cumple, por el caso A ya demostrado: $\sphericalangle CBD = \dfrac{\overset{\frown}{CD}}{2}$ (II)

Se cumple, por el caso A ya demostrado: $\sphericalangle ABD = \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{2}$ (III)

Sustituyendo (*II*) y (*III*) en (I): $\sphericalangle ABC = \dfrac{\overset{\frown}{CD}}{2} - \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{2} = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$ por diferencia de arcos

Se llega a la tesis: $\sphericalangle ABC = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$.

Investiga y aprende

La profesora de Matemática dejó de tarea una actividad para investigar, en la cual pidió construir una circunferencia, determinar en esta un arco cualquiera y trazar algunos ángulos inscritos correspondientes a él.

Para medir todos los ángulos trazados y a partir de esto arribar a una conclusión con respecto a sus amplitudes, Alicia construyó una figura similar a la figura 2.28, en la cual $\sphericalangle ABE$, $\sphericalangle ACE$ y $\sphericalangle ADE$ son inscritos correspondientes al arco $\overset{\frown}{AE}$.

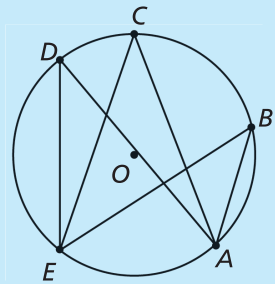


Fig. 2.28

Raúl dijo que no era necesario hacer mediciones porque se podía aplicar directamente a los tres ángulos el teorema de la amplitud de un ángulo inscrito. Haz tú también una figura similar a la de Alicia y compara el procedimiento seguido por ella con la idea dada por Raúl y saca tu propia conclusión.

Teorema sobre ángulos inscritos en el mismo arco

Los ángulos inscritos en una circunferencia a los cuales les corresponde el mismo arco son iguales.

Respuesta: Cuando se revisó la tarea, se pudo apreciar que este teorema confirma los resultados que obtuvo Alicia al resolver la tarea de Matemática.

Esteban también llegó a igual resultado que Alicia, pero la profesora le dijo que, sin proponérselo, al mismo tiempo encontró otro teorema, ¿saben por qué? Pues, porque el arco que corresponde a los ángulos inscritos que dibujó Esteban es una semicircunferencia. El teorema siguiente es al que se refería la profesora y cuando lo leas podrás entender mejor lo que ella dijo.

Teorema de Tales

Si a un ángulo inscrito en una circunferencia le corresponde un arco que es una semicircunferencia o su cuerda correspondiente es un diámetro, entonces es un ángulo recto.

Observa que el teorema de Tales es un caso particular del teorema sobre la amplitud de un ángulo inscrito.

Ejemplo 3:

En la figura 2.29, el $\measuredangle ACB$ está inscrito en la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB}$: Halla la amplitud del $\measuredangle ACB$.

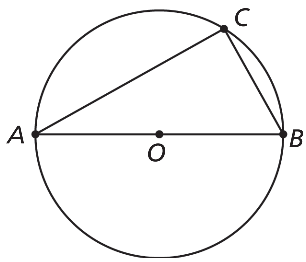


Fig. 2.29

Solución:

$\measuredangle ACB = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$ por ser un ángulo inscrito, pero el arco $\overset{\frown}{AB}$ es una semicircunferencia, luego $\overset{\frown}{AB} = 180°$ y $\measuredangle ACB = 90°$

Recíproco del teorema de Tales

Si un ángulo inscrito en una circunferencia es recto, entonces su arco correspondiente es una semicircunferencia y la cuerda correspondiente es un diámetro.

De la historia

¿Quién fue Tales?

Tales de Mileto (625-546 a.n.e.) (Fig. 2.30) nació en Mileto. Hijo de un rico comerciante, realizó en su juventud muchos viajes por Egipto y Babilonia, quizás sea esta una de las principales fuentes de sus conocimientos matemáticos.

Fig. 2.30

Se consideró por los helenos como un hombre de inteligencia superior. Entre sus principales aportes científicos están: el cálculo de la altura de la pirámide de Keops, el cálculo de la distancia de una nave en el mar respecto a la costa, el teorema que acabas de estudiar, entre otros.
Fue también un excelente astrónomo, pues predijo el eclipse solar que ocurrió en el año 585 a.n.e.[2] Por todos estos motivos se le califica como el primero de los siete sabios de la Antigua Grecia.

Reflexiona un instante

Traza en tu cuaderno de trabajo, un ángulo central y un ángulo inscrito que les corresponda el mismo arco, como puedes observar en la figura 2.31, luego mide sus amplitudes con el semicírculo graduado y compáralas. ¿A qué conclusión llegaste? ¿Se cumplirá siempre esta relación?

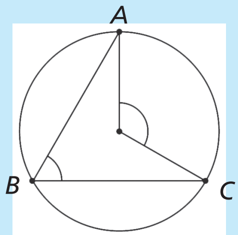


Fig. 2.31

Teorema sobre la relación entre ángulo central y ángulo inscrito

Si a un ángulo central y a un ángulo inscrito en una circunferencia les corresponde el mismo arco, entonces la amplitud del ángulo inscrito es igual a la mitad de la amplitud del ángulo central.

Ejemplo 4:

En la circunferencia de la figura 2.32, el $\sphericalangle ABC = 68°$. Determina la amplitud del $\sphericalangle ADC$.

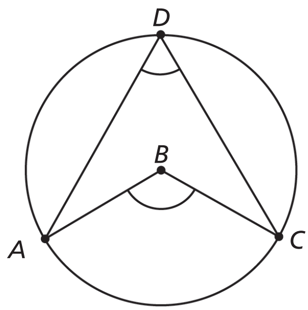


Fig. 2.32

Solución:

Por el teorema anterior su amplitud es igual a la amplitud del ángulo central que le corresponde el mismo arco:

$$\sphericalangle ADC = \frac{\sphericalangle ABC}{2} = \frac{68°}{2} = 34°$$

Respuesta: La amplitud del $\sphericalangle ADC$ es 34°.

[2] Davidson San Juan, Luis J.: *Ecuaciones y matemáticos*. Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2008.

Analiza de nuevo la figura 2.2 del inicio del epígrafe sobre las posibilidades de dos rectas que se cortan y al mismo tiempo son secantes a una circunferencia.

¿Qué distingue al ángulo determinado en el segundo y cuarto caso? ¿Cuál es la posición del vértice del ángulo determinado en estos casos respecto a la circunferencia?

¿Puedes clasificar los ángulos en el segundo y cuarto caso como uno de los ángulos estudiados? Por supuesto que no.

Ejercicios

1. En la figura 2.33: A, B, C y D son puntos de la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AC}$ y $\overset{\frown}{AD} = 94°$. Selecciona de las afirmaciones siguientes cuál es la verdadera.

a) ___ $\measuredangle ABC = 94°$
b) ___ $\measuredangle ACD = 94°$
c) ___ $\measuredangle ACD = 47°$

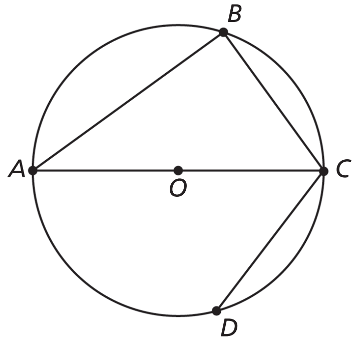


Fig. 2.33

2. En la figura 2.34, $\measuredangle ACB$ y $\measuredangle ADB$ están inscritos en la circunferencia de centro O y radio $\overline{OC}$, $\measuredangle ACB = 35°$. Enlaza los ángulos de la columna I con la amplitud que les corresponde en la columna *II* de forma tal que se obtenga la respuesta correcta.

I	II
$\measuredangle AOB$	35°
$\overset{\frown}{AB}$	70°

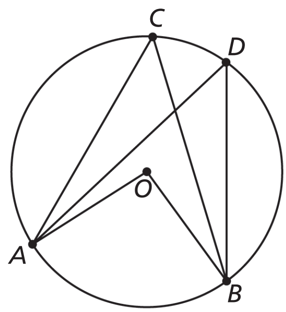


Fig. 2.34

3. En la figura 2.35, los puntos A, B, C, D y E pertenecen a la circunferencia de centro O y radio $\overline{OB}$.
$\measuredangle ABE + \measuredangle ACE + \measuredangle ADE = 84°$, entonces $\overset{\frown}{AE}$ es igual a:

a) ___ 84° b) ___ 28° c) ___ 56° d) ___ Falta información

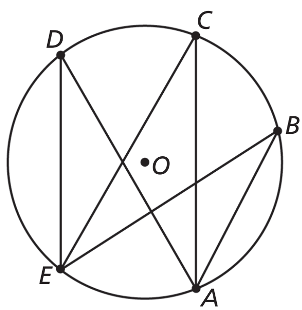


Fig. 2.35

4. En la figura 2.36, P y Q son puntos de la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{MN}$; $\sphericalangle MQP = 40°$.
Selecciona la respuesta correcta:
a) El triángulo MNP es:
Acutángulo obtusángulo rectángulo
b) La amplitud del $\sphericalangle PMN$ es:
40° 90° 50°

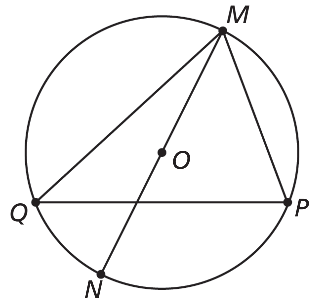


Fig. 2.36

5. En la figura 2.37, los puntos S y R pertenecen a la circunferencia de centro O y radio $\overline{OP}$, $QROP$ es un cuadrado.
La amplitud del $\sphericalangle RSP$ es igual a:
a) ___ 22,5° b) ___ 45°
c) ___ 90°

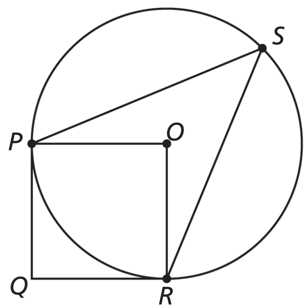


Fig. 2.37

6. En la figura 2.38, C y B; pertenecen a la circunferencia de centro O y radio $\overline{OA}$; $\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle ABO$, entonces la amplitud del $\sphericalangle ACB$ es igual a:
a) ___ 92° b) ___ 60°
c) ___ 45° d) ___ Otra amplitud

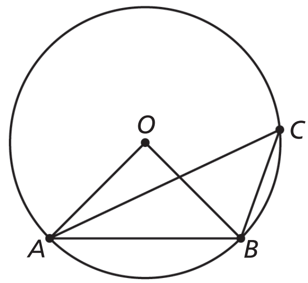


Fig. 2.38

7. En la figura 2.39, A, B, C y D son puntos de la circunferencia de centro O y radio $\overline{OE}$; C punto medio de $\overset{\frown}{AE}$ y $\sphericalangle A = \sphericalangle E$.
Si el $\sphericalangle B = 40°$, calcula $\sphericalangle AOE$.

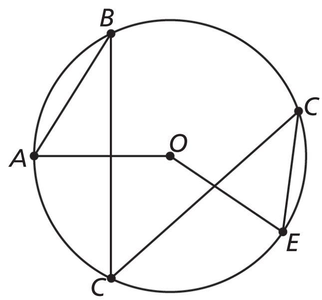


Fig. 2.39

8. En la figura 2.40: B, C y D son puntos de la circunferencia de centro O y radio $\overline{OAB}$, E, O, D puntos alineados.

8.1. Completa el espacio en blanco:

a) Un ángulo central es $\sphericalangle$_____

b) Un ángulo inscrito es $\sphericalangle$_____

8.2. Selecciona la respuesta correcta:

Si el $\sphericalangle AOC = 110º$, entonces $\overset{\frown}{ABC}$ tiene una amplitud de:

a) 55º b) 110º

c) 250º d) No se puede determinar

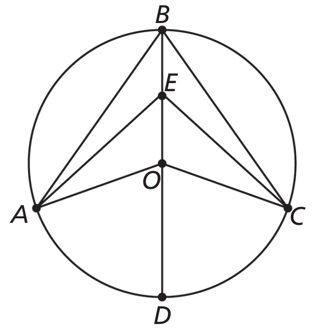


Fig. 2.40

9. En la figura 2.41, P es un punto de la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{MN}$. Si $\sphericalangle PMN = 3x + 15º$ y $\sphericalangle MNP = 5x - 5º$

a) Halla la amplitud del arco NP.

b) Clasifica el triángulo MNP según la longitud de sus lados.

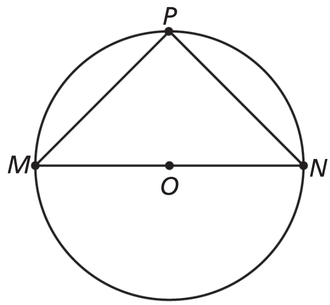


Fig. 2.41

10. En la figura 2.42, se trazó una circunferencia de centro O y radio $\overline{OB}$; $\overline{AB}$ es una cuerda de 0,4 dm de longitud, la semirrecta $\overline{CB}$ es tangente a la circunferencia en el punto B, el punto O pertenece a $\overline{AC}$ y $\sphericalangle COB = 60º$.

a) Calcula la amplitud de $\sphericalangle OAB$ y $\sphericalangle ABC$.

b) Calcula la longitud de $\overline{CB}$.

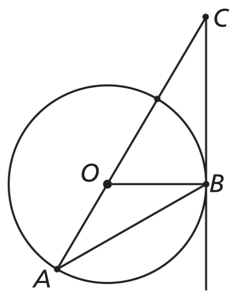


Fig. 2.42

11. En la figura 2.43, $\overline{AC}$ es un diámetro de la circunferencia de centro O; $\overline{EB}$ es una cuerda.

$\overset{\frown}{EC} = 100°$ y $\overline{AC} \perp \overline{BE}$

Calcula $\sphericalangle ABE$, $\sphericalangle ABC$ y $\overset{\frown}{BC}$.

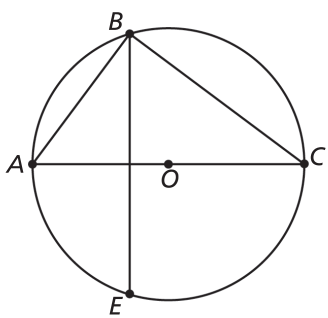


Fig. 2.43

12. En la circunferencia de centro O y radio $\overline{OR}$ de la figura 2.44: $\overline{OR} \perp \overline{SQ}$ y $\sphericalangle SOQ = 70°$. Calcula $\overset{\frown}{PR}$ si $\overline{SQ}$ es una cuerda y $\overline{PQ}$ es un diámetro.

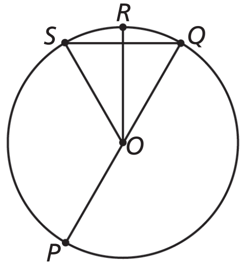


Fig. 2.44

13. En la figura 2.45: $\overline{AD}$ y $\overline{CB}$ son diámetros de la circunferencia de centro O y radio $\overline{OC}$, $\overline{AB}$ $\overset{\frown}{AB} = 60°$ y $\overline{AD} = 4{,}2$ cm

a) Calcula la amplitud de los arcos $\overset{\frown}{CD}$ y $\overset{\frown}{DB}$.

b) Calcula el perímetro del ΔAOB.

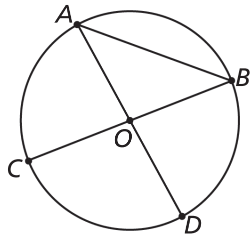


Fig. 2.45

14. En la figura 2.46: A, B y C puntos de la circunferencia de centro M y radio $\overline{MD}$, $\overline{AD}$ bisectriz de $\sphericalangle A$; $\overset{\frown}{AC} = 140°$ y $\sphericalangle C = 50°$.

a) Calcula la amplitud del $\sphericalangle BAC$ y los arcos $\overset{\frown}{BDC}$ y $\overset{\frown}{ABD}$.

b) ¿Puede ser $\overline{AD}$ un diámetro de la circunferencia? Fundamenta.

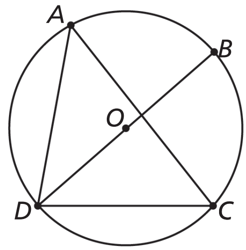


Fig. 2.46

15. En la figura 2.47: B y D son puntos de la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AC}$; $\sphericalangle ACB = 50°$ y $\overset{\frown}{AD} = 80°$.

a) Halla la amplitud del $\sphericalangle$B.

b) Prueba que $\overline{DB}$ es un diámetro de la circunferencia.

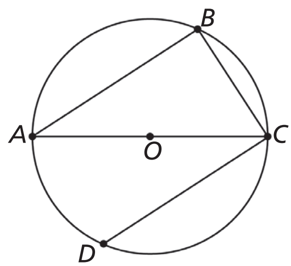


Fig. 2.47

16. En la figura 2.48:
P, R son puntos de la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{MN}$.

a) Si $\overset{\frown}{MR} = 90°$, demuestra que $\overline{PR}$ es la bisectriz del $\sphericalangle MPN$

b) Si $\overline{MN}$ = 4,0 cm y $\overline{NP}$ = 3,0 cm, calcula el área del triángulo MNP

c) Calcula el perímetro del triángulo MNP.

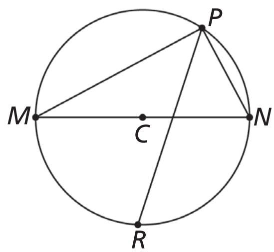


Fig. 2.48

17. En la figura 2.49: C y D son puntos de la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB}$, $\overline{OD} \perp \overline{AB}$, $\sphericalangle OBC = 70°$.
Halla la amplitud de los $\sphericalangle ODC$ y $\sphericalangle BCD$.
Sugerencia: traza el radio $\overline{OC}$

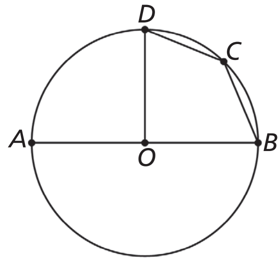


Fig. 2.49

18. En la figura 2.50, los puntos A, B y C pertenecen a la circunferencia de centro O y radio $\overline{AO}$, las intersecciones de la recta $\overline{AB}$ con las semirrectas $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ son respectivamente los puntos A y B, que determinan los ángulos $\alpha = 80°$ y $\beta = 50°$.
Halla la amplitud del ángulo AOB.

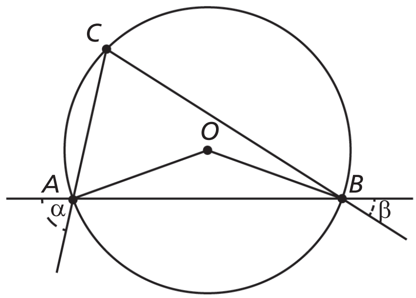


Fig. 2.50

2.1.3 Ángulos seminscritos

Investiga y aprende

Dibuja todos los casos posibles en que dos rectas se corten y que a su vez corten a una circunferencia dada y al menos una de las rectas que se cortan sea también tangente a la circunferencia dada.

Analicemos los casos que dibujaste.

Existen cinco posibilidades:

Caso 1: Ambas rectas tangentes a la circunferencia

Observa la ilustración del caso 1 en la figura 2.51 ¿Cuál es aquí la posición del vértice del ángulo formado respecto a la circunferencia?

En el resto de los casos posibles, que están representados en la figura 2.52, solamente una de las rectas es tangente a la circunferencia.

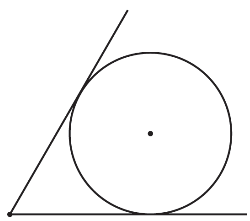


Fig. 2.51

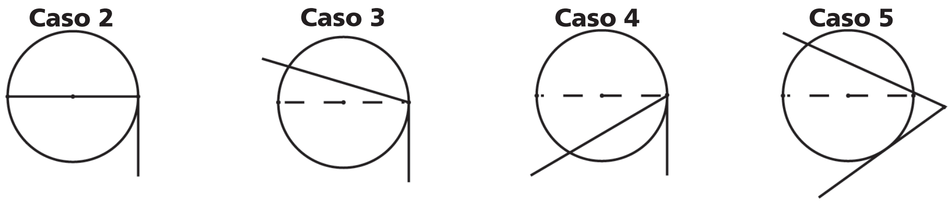


Fig. 2.52

¿Cuál es la posición del vértice del ángulo formado en cada uno de estos casos respecto a la circunferencia? ¿Qué propiedades geométricas aparecen en estos?

En los casos dos, tres y cuatro, el ángulo formado tiene como vértice a un punto de la circunferencia, uno de sus lados es tangente a la circunferencia y el otro lado secante. Este tipo de ángulo se define a continuación:

***Definición de ángulo seminscrito**:*

Cualquier ángulo que tenga su vértice en la circunferencia y las semirrectas que constituyen sus lados una de estas sea tangente a la circunferencia y la otra sea secante se denomina **ángulo seminscrito**.

Ejemplo 1:

En la figura 2.53:

$\overline{BC}$ es tangente a la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB}$ en el punto B.

El ángulo ABC es seminscrito y el $\overset{\frown}{AB}$ es su arco correspondiente, ya que el arco correspondiente a un ángulo seminscrito es el que está en su interior, comprendido desde su vértice hasta el punto de intersección de la circunferencia con el lado secante del ángulo.

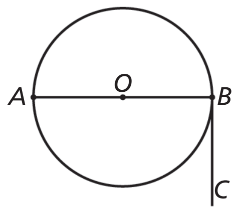


Fig. 2.53

En la figura 2.52 identifica todos los casos de ángulos seminscritos que se han representado.

Ejemplo 2:

¿Cuál es la posición del centro de una circunferencia con respecto a todos los casos de ángulos seminscritos que se pueden presentar?

Solución (fig. 2.54).

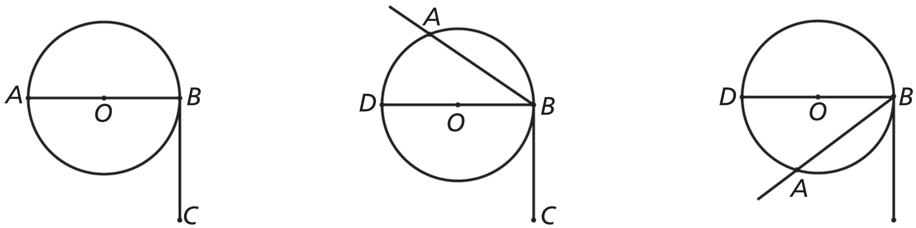


Fig. 2.54

Teorema sobre la amplitud del ángulo seminscrito

La amplitud de un ángulo seminscrito en una circunferencia es igual a la mitad de la amplitud de su arco correspondiente.

Vamos a demostrar este teorema, para lo cual consideremos en una circunferencia cualquiera de centro O y radio $\overline{OB}$ un ángulo seminscrito ABC, de arco correspondiente AB.

Premisa: $\sphericalangle ABC$ seminscrito *Tesis:* $\sphericalangle ABC = \dfrac{AB}{2}$

Como este ángulo seminscrito puede ser de tres tipos diferentes según analizamos en el ejemplo dos, vamos a realizar la demostración por separado para cada uno de esos casos, en los que se añade otra condición a la premisa.

Caso A (Ver figura 2.54 a)
El centro de la circunferencia está en el lado $\overline{AB}$ del $\sphericalangle ABC$ que es una cuerda, por eso este es un diámetro.
Premisa: $\sphericalangle ABC$ seminscrito; $O \in \overline{AB}$.
Demostración:
$\sphericalangle ABC = 90°$ (I) por propiedad de la tangente
$\overline{AB} = 180°$ por ser una semicircunferencia
$\overline{AB} = 2 \cdot 90°$ descomponiendo el producto
$\dfrac{AB}{2} = 90°$ (*II*) despejando.
Luego, de I y *II*: $\sphericalangle ABC = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$

Caso B (Ver figura 2.54 b)
El centro de la circunferencia es un punto interior al ángulo.
Premisa: $\sphericalangle ABC$ seminscrito
O punto interior del $\sphericalangle ABC$

Demostración:

Vamos a trazar un diámetro por el vértice *A* para reducir este al caso anterior.

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD + \sphericalangle DBC$ (I) por suma de amplitudes de ángulos

Pero $\sphericalangle ABD = \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{2}$ (*II*) por ángulo inscrito y $\sphericalangle DBC = \dfrac{\overset{\frown}{DB}}{2}$ (*III*) por el caso A.

Luego sustituyendo (*II*) y (*III*) en (I): $\sphericalangle ABC = \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{2} + \dfrac{\overset{\frown}{DB}}{2} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$

Por suma de arcos: $\sphericalangle ABC = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$

Para demostrar el caso C te recomendamos considerar un diámetro por el vértice del ángulo, para reducirlo al caso A y aplicar diferencia de amplitudes de los arcos correspondientes para llegar a la tesis. ¿Te atreves?

Teorema sobre la relación entre ángulo inscrito-seminscrito y central

- Si a un ángulo inscrito y a un ángulo seminscrito en una circunferencia les corresponde el mismo arco, entonces sus amplitudes son iguales.
- Si a un ángulo inscrito o a un ángulo seminscrito en una circunferencia les corresponde el mismo arco que a un ángulo central, entonces la amplitud del ángulo inscrito o seminscrito es igual a la mitad de la amplitud del ángulo central.

En los ejemplos siguientes podrás aplicar el teorema anterior:

Aplica tus conocimientos

Davel y sus amigos pertenecen al grupo de educación energética; ellos han construido nada menos que un ventilador casero que quieren acoplar a un panel solar. Para presentar el diseño del enrejado de las aspas, que puedes apreciar en la figura 2.55, necesitan calcular la amplitud de algunos ángulos. ¿Puedes ayudarlos en este empeño?

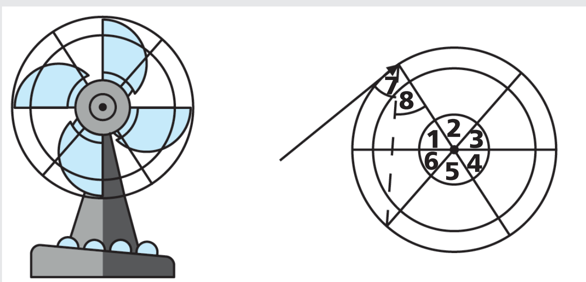


Fig. 2.55

Se sabe que en el dibujo:

∢1 = ∢2 = ∢3, que la flecha representa una línea tangente y que las líneas continuas son diámetros.

La línea discontinua es una cuerda que parte del punto de tangencia hasta el extremo de uno de los diámetros trazados.

Solución:

Los ángulos 1, 2, 3, 4, 5, 6 son iguales (por datos y porque forman parejas de ángulos opuestos por el vértice). A su vez cada uno mide 60º, ya que son seis ángulos centrales consecutivos: $\frac{360°}{6} = 60°$

Al ∢7 le corresponde el mismo arco que un ángulo central α = ∢1 + ∢6 = 120º y $∢7 = \frac{120°}{2} = 60°$ por ser ángulo seminscrito. Al ∢8 le corresponde el mismo arco que al ángulo central ∢5, luego: $∢8 = \frac{60°}{2} = 30°$ por ser un ángulo inscrito.

Respuesta: Los ángulos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 son iguales a 60º y el ∢8 = 30º.

Aplica tus conocimientos

En la figura 2.56, la recta $\overline{RQ}$ es tangente a la circunferencia de centro *T* y radio $\overline{TP}$; los puntos *P*, *S* y *Q* están alineados. Demuestra que los triángulos *PQR* y *SQR* son equiángulos.

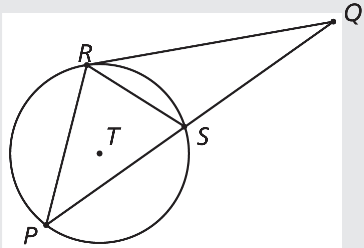


Fig. 2.56

Saber más

La palabra *equiángulo* se forma añadiendo a la palabra *ángulo* el prefijo: *equi*, que significa *igual,* por eso *equiángulo* significa *de iguales ángulos.* Por tanto, debemos probar que ambos triángulos tienen respectivamente iguales sus ángulos.

Solución:

∢*PQR* = ∢*SQR* (por ser ángulo común).

∢*RPQ* = ∢*QRS* (por inscrito y seminscrito correspondientes al mismo arco).

∢*QRP* = ∢*RSQ* (por terceros ángulos).

De las tres igualdades anteriores se cumple que ambos triángulos tienen sus ángulos respectivamente iguales, es decir, son equiángulos.

Ejercicios

1. En la figura 2.57, los puntos D y G pertenecen a la circunferencia de centro M y diámetros $\overline{EB}$ y $\overline{CF}$. Las rectas $\overline{CH}$ y $\overline{BI}$ son tangentes a la circunferencia dada respectivamente en los puntos C y B.

a) Nombra los ángulos inscritos.

b) Nombra los ángulos seminscritos.

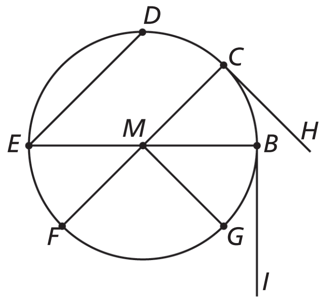


Fig. 2.57

2. En la figura 2.58, la recta $\overline{AD}$ es tangente a la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{CB}$ en el punto A; $\sphericalangle M = 50°$ y $\overline{AM} = \overline{MB}$ cuerdas. Calcula la amplitud de los ángulos: $\sphericalangle DAB$; $\sphericalangle AOB$; $\sphericalangle CAB$.

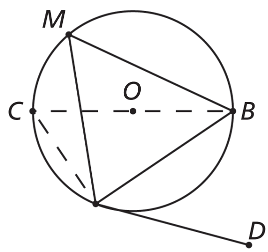


Fig. 2.58

3. Fundamenta o refuta la afirmación siguiente: "*Un ángulo seminscrito cuyo arco correspondiente es una semicircunferencia es recto*". Utiliza una figura análoga a la 2.59 en tu análisis.

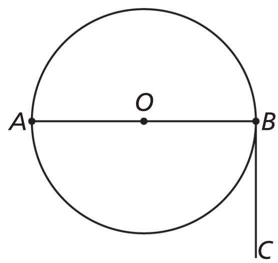


Fig. 2.59

4. En la figura 2.60, las rectas $\overline{ON}$ y $\overline{NP}$ que se cortan en un punto N, exterior a la circunferencia de centro Q y radio $\overline{PQ}$ son al mismo tiempo tangentes a dicha circunferencia, en los puntos O y P respectivamente. Fundamenta que el cuadrilátero $NPQO$ tiene dos ángulos iguales.

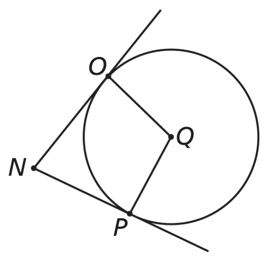


Fig. 2.60

5. El punto M pertenece a la circunferencia de centro P y radio $\overline{PB}$ de la figura 2.61; la recta $\overline{AT}$ es tangente a dicha circunferencia en el punto A y $\sphericalangle TAB = 70°$.
Calcula la amplitud del $\overset{\frown}{AB}$ y del $\sphericalangle AMB$.

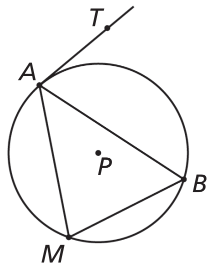


Fig. 2.61

6. En la figura 2.62, los puntos B, C y D pertenecen a la circunferencia de centro O y radio $\overline{OA}$
$\sphericalangle ADB = 2x + y$; $\sphericalangle DCA = x + y - 9°$
$\sphericalangle DBA = 2x + y - 34°$; $\sphericalangle ACB = 2x - y + 40°$
$\sphericalangle AMB = 5x - y - 1°$
Calcula las amplitudes del $\sphericalangle AMB$ y del $\sphericalangle AOB$.
¿Qué tipo de ángulo es cada uno de estos?

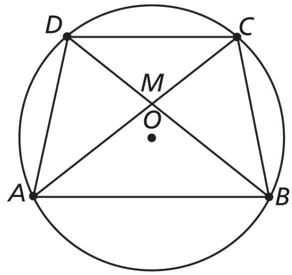


Fig. 2.62

7. Demuestra que en una circunferencia cualquiera de centro O y radio $\overline{OB}$, todo ángulo seminscrito ABC de arco correspondiente $\overset{\frown}{AB}$, con el centro de la circunferencia punto exterior al ángulo ABC, cumple que: $\sphericalangle ABC = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$ (ver figura 2.54 c)

8. En la figura 2.63, la recta $\overline{AT}$ es tangente a la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{CB}$, en el punto A, $\sphericalangle M = 46°$ y $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AM}$.
Calcula la amplitud de los ángulos:
$\sphericalangle ABM$; $\sphericalangle BAT$; $\sphericalangle MAB$; $\sphericalangle AOB$

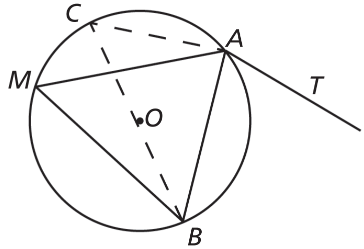


Fig. 2.63

9. Demuestra que, si a un ángulo inscrito o a un ángulo seminscrito en una circunferencia les corresponde el mismo arco que a un ángulo central, entonces la amplitud del ángulo inscrito o seminscrito es igual a la mitad de la amplitud del ángulo central, fig. 2.64.

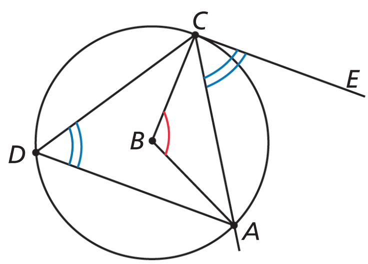


Fig. 2.64

10. En la figura 2.65, se han trazado desde el punto R dos tangentes a la circunferencia de centro A y radio $\overline{AK}$, en los puntos Q y K, respectivamente.
¿Quién hizo la afirmación correcta Rosa o Pepe? ¿Por qué?
Rosa: $\sphericalangle RQH = 90^\circ$ porque $\overline{RQ}$ es tangente a la circunferencia en Q, según los datos.
Pepe: $\sphericalangle RQH \neq 90^\circ$ porque, aunque $\overline{RQ}$ es tangente a la circunferencia en Q, el ángulo recto se forma con el radio en el punto de tangencia y el lado $\overline{QH}$ del ángulo no contiene un radio

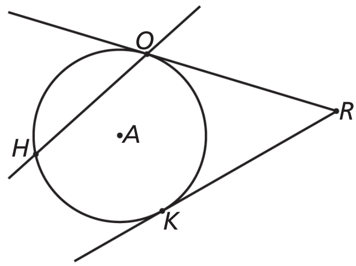


Fig. 2.65

2.2 Longitud de la circunferencia y área del círculo

De la historia

Hace mucho tiempo los hombres se esforzaron por calcular el perímetro y el área de figuras planas, entre las que se encontraba la circunferencia, por la importancia en la vida práctica de distintos objetos circulares, tales como el torno de alfarero, la rueda de hilar, la rueda de las carretillas u otros objetos rodantes.
Estos cálculos se remontan aproximadamente a 2000 años a.n.e. en el Antiguo Egipto, según se pudo conocer en los papiros egipcios con contenidos matemáticos, como el denominado Papiro de Rhind, nombre que le fue dado por el científico inglés que lo descubrió y que se encuentra actualmente en el Museo de Londres. Este papiro contiene 84 problemas de aplicación práctica, entre los que aparece el cálculo del área del círculo.
La cultura babilónica aplicó también el cálculo en la circunferencia y el círculo. Babilonia era una región situada entre los ríos Tigris y Éufrates, aproximadamente donde se encuentra actualmente la República de Irán. Los aportes científicos de los babilónicos llegaron a nuestra época por tablillas de barro de contenido matemático, que se conservan diseminadas en famosos museos del mundo y muchas de las cuales aún no han sido descifradas.

En este epígrafe aprenderás cómo calcular la longitud de la circunferencia y el área del círculo, procedimientos que están basados en las ideas básicas que sobre esto tuvieron estas antiguas civilizaciones.

2.2.1 Polígonos inscritos y circunscritos

Investiga y aprende

La inscripción de polígonos fue una de las primeras ideas del hombre para determinar la longitud de la circunferencia.
¿Qué significa esta idea? ¿Cuándo está inscrito un polígono en una circunferencia?

Definición de polígono inscrito:

Un polígono está **inscrito en una circunferencia** cuando todos sus vértices son puntos de dicha circunferencia.
Si un polígono está inscrito en una circunferencia, entonces se dice que **la circunferencia está circunscrita** al polígono.

Ejemplo 1:

Juan Pablo observa la figura 2.66 y le dice a Rosario: "En la figura existen dos polígonos y están inscritos en la circunferencia". Pero Rosario le refuta:
"Te equivocas, hay tres polígonos, pero solo el pentágono *ABCDE* está inscrito en esta, el cuadrilátero *AODE* y el pentágono *ABCDO* no lo están, porque su vértice *O* no es un punto de la circunferencia".
¿Quién hizo la afirmación correcta? ¿Por qué?

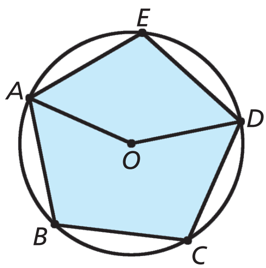


Fig. 266

Solución:
Rosario hizo la afirmación correcta, porque solamente está inscrito el pentágono *ABCDE*, en los otros dos el punto *O* no pertenece a la circunferencia, por lo cual el cuadrilátero *AODE* y el pentágono *ABCDO* no están inscritos en la circunferencia.

Definición de polígono circunscrito:

Un polígono está circunscrito a una circunferencia si sus lados son tangentes a dicha circunferencia.
Si un polígono está circunscrito a una circunferencia, entonces se dice que la circunferencia está inscrita en el polígono.

Ejemplo 2:

En la figura 2.67, el polígono *ABCD* está circunscrito a la circunferencia de centro *O* y radio $\overline{OB}$. Podemos también, en este caso, decir que la circunferencia está inscrita en el polígono.

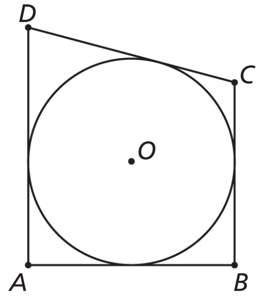


Fig. 2.67

Reflexiona un instante

¿Cómo inscribir o circunscribir un polígono?
Si pensamos en el polígono más sencillo: el triángulo, siempre es posible inscribir o circunscribir un triángulo cualquiera. Un procedimiento para esto se basa en el estudio de sus rectas notables. Veamos cómo.

Ejemplo 3:
Dado un triángulo cualquiera *ABC* inscribe una circunferencia en él.

Solución:

1. Traza las bisectrices de dos de sus ángulos, del $\measuredangle B$ y del $\measuredangle C$. Sea *I* el punto de intersección de ambas bisectrices.
2. Construye la perpendicular desde *I* a uno de los lados del triángulo. Es este el radio *r* de la circunferencia inscrita, porque *I* equidista de los lados del triángulo.
3. Construye la circunferencia inscrita al ΔABC, con centro en *I* y radio *r* (fig. 2.68).

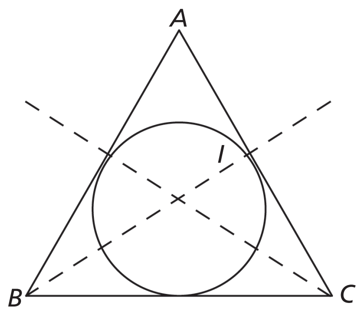


Fig. 2.68

El trazado de las bisectrices te permite inscribir una circunferencia en un triángulo, pues el punto en que estas se cortan es el centro de la circunferencia inscrita, cuyo radio está determinado por la distancia de este punto a uno de los lados del triángulo. Con el centro y el radio ya está determinada de manera única la circunferencia inscrita y puedes trazarla.

Ejemplo 4:
Dado un triángulo cualquiera *ABC* traza la circunferencia que lo circunscribe.

Solución:

1. Traza las mediatrices de dos de sus lados, del lado $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Sea M el punto de intersección de ambas mediatrices.
2. Determina el radio r de la circunferencia circunscrita desde M a uno cualquiera de los vértices del triángulo.
3. Construye la circunferencia circunscrita al ΔABC, con centro en M y radio r (fig. 2.69).

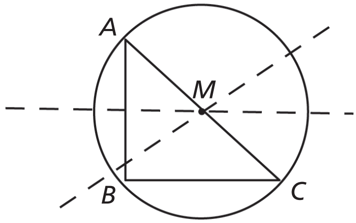


Fig. 2.69

El trazado de las mediatrices te permite circunscribir una circunferencia a un triángulo, pues el punto en que estas se cortan es el centro de la circunferencia circunscrita, cuyo radio está determinado por la distancia de este punto a uno de los vértices del triángulo. Con el centro y el radio ya está determinada de manera única la circunferencia circunscrita y puedes trazarla.

Aplica tus conocimientos

¿Cómo inscribir o circunscribir otros polígonos?

Nuestro estudio estará limitado a inscribir o circunscribir solamente polígonos regulares.

A continuación, te presentaremos algunos ejemplos sobre esto, pero antes vamos a definir algunos elementos importantes sobre los polígonos regulares inscritos o circunscritos y a enunciar algunas de sus propiedades.

Ejemplo 4:

En la figura 2.70 se han trazado las circunferencias **inscrita** y **circunscrita** de un polígono regular $ABCD$ de cuatro lados, por supuesto, se trata de un cuadrado. En este se destacan el centro O, el radio r y la apotema a.

Elementos	Descripción
Centro	Punto en que coinciden los centros de la circunferencia inscrita, la circunscrita y del polígono regular.
Apotema	Segmento que une el centro del polígono regular con uno cualquiera de sus vértices. Es también el radio de la circunferencia circunscrita al polígono.

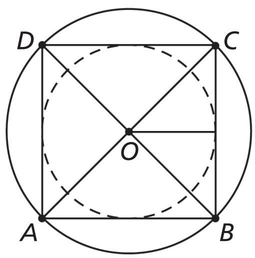


Fig. 2.70

Radio	Segmento perpendicular a un lado trazado desde el centro. La apotema es el radio de la circunferencia inscrita a un polígono.

¿Cuál es la amplitud de los ángulos centrales que se asocian al cuadrado *ABCD*, inscrito en la circunferencia trazada con la línea continua en la figura 2.70?

Recuerda el procedimiento que aplicaste para determinar esta amplitud, porque lo vamos a utilizar en el ejemplo 5.

Teorema sobre la existencia de polígonos regulares inscritos y circunscritos a una circunferencia

Dada una circunferencia cualquiera, siempre se puede inscribir o circunscribir en esta un polígono regular.

El problema de construir un polígono regular de n lados inscrito a una circunferencia de centro O y de radio r dada, se reduce a dividir la circunferencia en arcos iguales, utilizando el semicírculo. Para esto solo basta hallar la amplitud de un ángulo central α de la circunferencia dada, cuya amplitud se calcula de la forma: $\pm = \dfrac{360°}{n}$

Con este valor no hay más que tomar este ángulo sucesivamente n veces alrededor del centro de la circunferencia. Los radios trazados dividirán a la circunferencia en n arcos iguales cuyos extremos son los vértices del polígono deseado.

Ejemplo 5:

Construye un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 2,0 cm de radio.

Solución:

Describiremos los pasos de esta construcción:

1. Trazar la circunferencia con centro en O y radio igual a 2,0 cm.
2. Calcular la amplitud de los ángulos centrales α para: $n = 5$ en la expresión: $\dfrac{360°}{n}$.

   Luego: $\alpha = \dfrac{360°}{5} = 72°$

3. Trazar consecutivamente con centro *O* cinco ángulos centrales de 72°, para esto puedes utilizar el semicírculo. De este modo, el ángulo completo en *O* quedará dividido en cinco ángulos iguales, cuyos lados al cortar la circunferencia determinarán cinco puntos.
4. Unir mediante segmentos los cinco puntos obtenidos sobre la circunferencia, que son los vértices del polígono inscrito que se desea construir. Así, queda determinado el pentágono *ABCDE* de la figura 2.71.

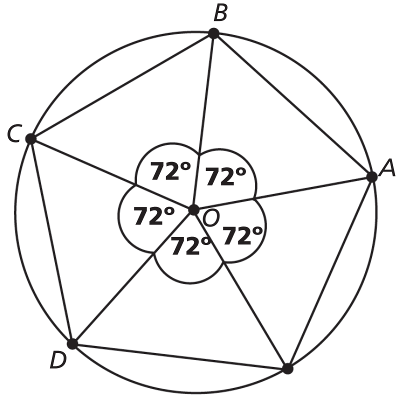


Fig. 2.71

Ejemplo 6:

Construye un pentágono regular circunscrito a una circunferencia de 2,0 cm de radio.

Solución:

De forma análoga al ejemplo 5, para trazar un pentágono, describiremos los pasos de esta construcción, que puedes apreciar en la figura 2.72:

1. Por los puntos *A*, *B*, *C*, *D* y *E* trazar las tangentes a la circunferencia de centro *O* y radio $\overline{OA}$.

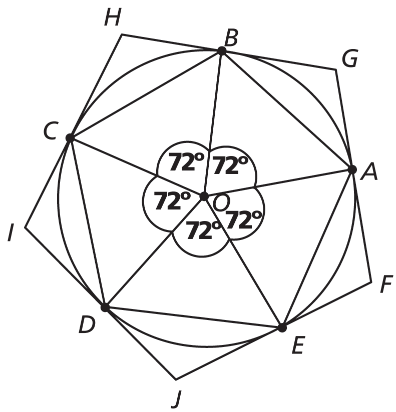


Fig. 2.72

2. Donde se cortan las tangentes se determinan cinco puntos que son los vértices del pentágono *FGHIJ*.

Aplica tus conocimientos

Utiliza algún asistente matemático, por ejemplo, el *GeoGebra,* para realizar las construcciones de los ejemplos 5 y 6; comprueba que el lado del hexágono([1]) regular es igual al radio de la circunferencia circunscrita.

[1] La Real Academia de la Lengua Española, adoptó la acepción hexágono para el polígono de 6 lados, aunque aún se acepta exágono, como aparece en el libro de texto de séptimo grado (*N. del E.*)

Ejercicios

1. Identifica el término que se define en cada afirmación y escríbelo en las cuadrículas horizontales del acróstico (fig. 2.73).

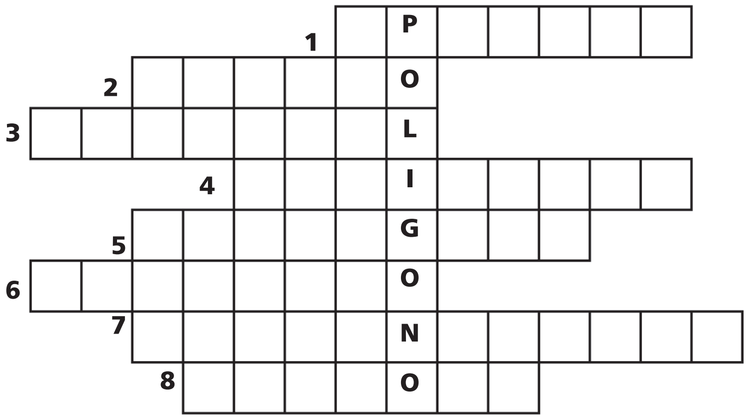


Fig. 2.73

1) Segmento perpendicular trazado desde el centro de un polígono regular a uno de sus lados.
2) Paralelogramo que tienen cuatro lados iguales.
3) Segmento que une dos vértices no consecutivos de un polígono.
4) Recta perpendicular que pasa por el punto medio de un segmento.
5) Nombre del polígono de cinco lados.
6) Nombre del polígono cuando sus vértices son puntos de una circunferencia.
7) Nombre del polígono cuando sus lados son tangentes a una circunferencia.
8) Nombre del polígono de seis lados.

2. De las siguientes proposiciones, determina cuáles son falsas y conviértelas en verdaderas.

a) Todo pentágono es un polígono regular.
b) Los ángulos centrales de los polígonos de 10 lados miden 36°.
c) Un triángulo es un polígono regular si todos sus ángulos son iguales.
d) Todo polígono se puede inscribir a una circunferencia.
e) Todo polígono regular se puede circunscribir a una circunferencia.

3. Construye polígonos regulares inscritos en una circunferencia como se te indica en cada inciso.

a) Un triángulo equilátero en una circunferencia de radio igual a 2,0 cm.

b) Un cuadrado y un octágono en una circunferencia de diámetro igual a 25 mm.

c) Un hexágono de perímetro igual a 1,2 dm.

4. Construye la circunferencia circunscrita al hexágono del ejercicio 3 c).

5. Trabaja con el asistente matemático *Geómetra,* construye varios polígonos inscritos y circunscritos a una circunferencia de radio *r*.

6. Completa los espacios en blanco de manera que se obtenga una proposición verdadera:

a) La suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un polígono regular de 11 lados es _______________.

b) La suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un polígono regular es igual a 1 260°, entonces el número de sus lados es _____________.

c) La amplitud de un ángulo interior de un polígono regular de 15 lados es _____________.

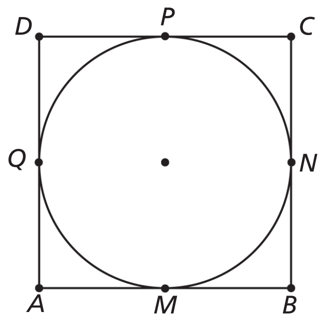


Fig. 2.74

7. En la figura 2.74, los lados del cuadrado *ABCD* son tangentes a la circunferencia de centro *O* y radio $r = 3{,}0$ cm en los puntos *M*, *N*, *P* y *Q*.

Selecciona la respuesta correcta:

a) La longitud de la apotema $\overline{OM}$ es:
___ 1,5 cm ___ 3,0 cm ___ 6,0 cm

b) El perímetro del cuadrado *ABCD* es:
___ 12 cm ___ 24 cm^2 ___ 24 cm

c) El área del cuadrado *ABCD* es:
___ 9,0 cm^2 ____ 24 cm^2 ____36 cm^2

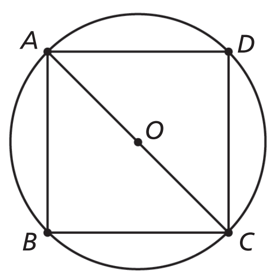


Fig. 2.75

8. En la figura 2.75, el cuadrado *ABCD* está inscrito en la circunferencia de centro *O* y diámetro $\overline{AC} = 10{,}0$ cm Calcula el área del cuadrado *ABCD.*

9.* Demuestra que la longitud de la diagonal de un cuadrado inscrito a una circunferencia es igual al diámetro de esta.

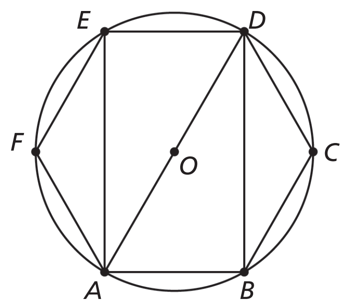


Fig. 2.76

10. En la figura 2.76 está inscrito un polígono regular en la circunferencia de centro *O* y diámetro $\overline{AD} = 10{,}0$ cm.

11. Completa los espacios en blanco de forma que se obtenga una proposición verdadera.

a) El triángulo *AEF* según sus lados se clasifica en ________________

b) El triángulo *ADE* según sus ángulos se clasifica en: _______________.

c) La amplitud del arco *AFD* es igual a: _______.

d) La amplitud del arco *ACE* es igual a: _______.

El perímetro del polígono *ABCDEF* es igual a: _______.

2.2.2 Longitud de la circunferencia

Saber más

La palabra perímetro proviene de las voces griegas *peri* que quiere decir **alrededor** y *metron* que quiere decir **medida**, esto se traduce como **la medida del borde**. En el caso de la circunferencia, que estudiaremos en este epígrafe, al perímetro se le denomina *longitud de la circunferencia.*

Investiga y aprende

Desde la Antigüedad el hombre se percató que en la medida que una circunferencia era mayor se hacía también mayor su diámetro, lo que los llevó a pensar que seguramente existía determinada relación entre ambos. Te proponemos indagar sobre esa relación.

Reflexiona un instante

Enrique y Ricardo tomaron diferentes objetos de la vida cotidiana en forma de círculo como los que aparecen en la figura 2.77, para indagar lo que mide la longitud de su borde. ¿Cómo lo hicieron? Rodearon cada uno de estos objetos con un hilo, que después estiraban cuidadosamente sobre una regla para medir su longitud.

Ricardo tomó la moneda de un peso y al estirar el hilo obtuvo un segmento de 8 cm de longitud, que consideró la longitud de la circunferencia de la moneda. Enrique tomó la moneda de 5 centavos y obtuvo que la longitud de la circunferencia descrita por esa moneda es 6,8 cm (Fig. 2.78).

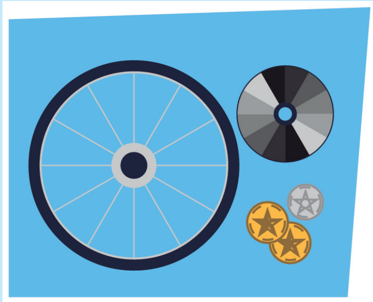


Fig. 2.77

Al comprobar que en la medida que se tomaba una circunferencia de mayor diámetro la longitud de la circunferencia era mayor, les hizo suponer que la longitud de una circunferencia depende de la longitud de su diámetro y decidieron determinar cuántas veces está contenido el diámetro de una circunferencia en su longitud.

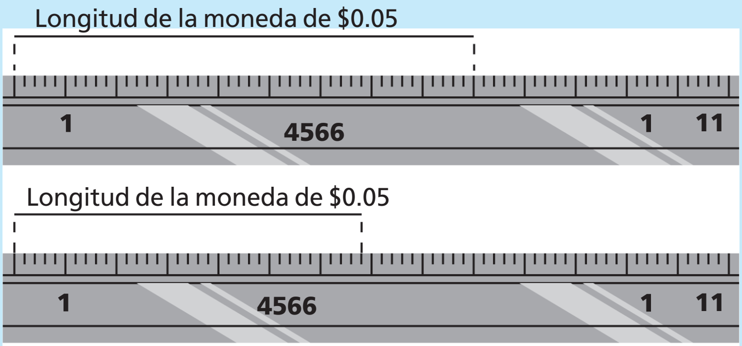


Fig. 2.78

Así verificaron que en cada circunferencia que midieron el diámetro está contenido completamente tres veces en su longitud y sobraba un pedazo pequeño, como puedes observar en la figura 2.79.

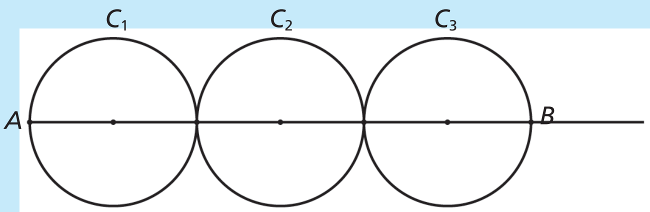


Fig. 2.79

Siguiendo este procedimiento, al dividir la longitud de la moneda de $1,00, que es 8,0 cm, entre su diámetro de 2,55 cm obtuvieron:

$$\frac{L}{d} \approx \frac{8}{2{,}55} \approx 3{,}137254901\ldots \approx 3{,}14$$

Aplica tus conocimientos

Las circunferencias construidas con un asistente *matemático* de la figura 2.80, también cumplen la misma relación.

Longitud $C_1(O;\overline{OB}) = 8{,}00\,\text{cm}$ Longitud $C_2(O;\overline{OD}) = 10{,}00\,\text{cm}$

$\overline{AB} = 2{,}55$ cm $\overline{CD} = 3{,}18$ cm

$\frac{LC_1}{\overline{AB}} = \frac{8}{2{,}55} \approx 3{,}14$ $\frac{LC_2}{\overline{CD}} = \frac{10{,}00}{3{,}18} \approx 3{,}14$

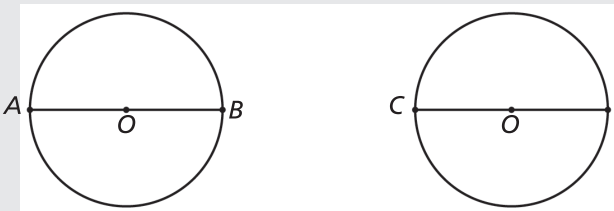


Fig. 2.80

Utiliza un asistente matemático para comprobar esta relación en otras circunferencias.
¿Se obtendrán los mismos resultados?

De la historia

En Grecia, allá por los años 287-212 a.n.e., el más genial de los matemáticos de la Antigüedad, Arquímedes de Siracusa (fig. 2.81), utilizó este mismo procedimiento para calcular la longitud de la circunferencia, según el cual el cociente de la longitud de una circunferencia cualquiera y la longitud de su diámetro es siempre el mismo. Arquímedes también se percató, que el diámetro de una circunferencia estaba contenido en estas

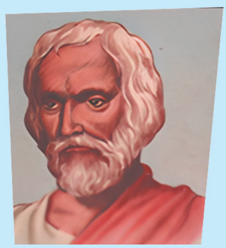


Fig. 2.81

tres veces y un "pedacito" y que ese pedacito es un séptimo del diámetro. Estos fueron aproximadamente sus cálculos (fig. 2.82).

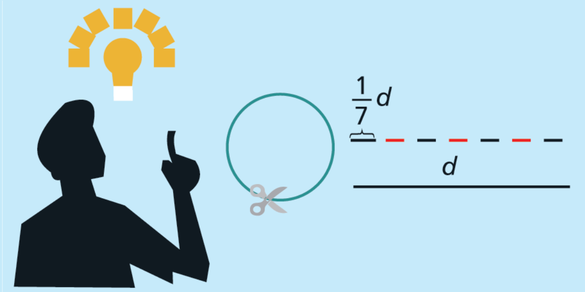


Fig. 2.82

$$\frac{L}{d} = 3 + \frac{1}{7};\ 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} \approx 3{,}14159 \qquad \frac{L}{d} \approx 3{,}14159...$$

De aquí surgió la idea para la ecuación de la longitud de la circunferencia.

La razón $\frac{L}{d}$ es un número que universalmente se designa con la letra griega π.

Este número es una constante que representa una expresión decimal infinita no periódica: $\pi \approx 3{,}141\ 59\ldots$, por tanto, este número es irracional. En los cálculos en que interviene lo tomaremos con un valor aproximado $\pi \approx 3{,}14$.

De esta expresión: $\frac{L}{d} \approx \pi$ se deduce que: $L = \pi \cdot d = \pi \cdot 2r = 2\pi r.$

Aplica tus conocimientos

Para calcular la longitud L de una circunferencia de centro O, diámetro d y radio r, podemos utilizar cualquiera de las expresiones del recuadro siguiente, ¿por qué?

$$L = \pi \cdot d$$
$$L = \pi \cdot (2r)$$
$$L = 2\pi r$$

Ejemplo 1:

Calcula la longitud de una circunferencia de centro A, cuyo radio tiene una longitud $r = 2{,}5$ cm.

Solución:

$L = 2\pi r$

$L = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}5$

$L = 15{,}7$ cm

$L \approx 16$ cm

Respuesta: La circunferencia mencionada tiene aproximadamente 16 cm de longitud.

Ejemplo 2:

La longitud de una circunferencia es igual 31,4 cm. Calcula la longitud del radio.

Solución:

$L = 2\pi r$

$31{,}4 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot r$

$31{,}4 = 6{,}28 \cdot r$

$$r = \frac{31{,}4}{6{,}28} = 5{,}00 \text{ cm}$$

Respuesta: La longitud del radio de la circunferencia es igual a 5,00 cm.

Ejemplo 3:

El tronco de un árbol tiene 4,0 m de diámetro. ¿Cuántos hombres se necesitan para abrazarlo, si cada hombre con las manos extendidas abarca 1,60 m aproximadamente?

Solución:

$L = \pi \cdot d = 3{,}14 \cdot 4{,}0$ m $= 12{,}56$ m

$12{,}56 : 1{,}60 = 7{,}85$

Respuesta: Se necesitan ocho hombres para abrazar el árbol con las manos extendidas.

Longitud de un arco de circunferencia

Reflexiona un instante

Beatriz mece a su hermanita en un columpio con mucho cuidado, siempre tratando de recorrer un pequeño arco para que no ocurra un accidente (fig. 2.83).

Fig. 2.83

¿Cómo se podrá calcular aproximadamente la longitud del arco recorrido por el columpio?

Para calcular esta longitud, se debe determinar una relación entre la longitud del arco que recorre el columpio y la longitud de la circunferencia correspondiente a este arco. Representemos esta situación geométrica en una circunferencia de centro *O* y radio *r* (fig. 2.84), en la cual:

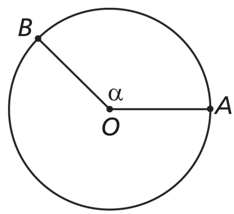


Fig. 2.84

- La longitud del arco considerado α se denota como *b*.
- La amplitud del ángulo central correspondiente al arco de longitud *b,* como α.
- La longitud de la circunferencia dada, con la letra *L* y la amplitud del ángulo completo de toda la circunferencia, como 360º.

La longitud *b* de un arco de circunferencia que corresponde a un grado de amplitud es: $b = \frac{L}{360°}$.

Luego para un arco de amplitud αº su longitud sería: $b = \frac{L}{360°} \cdot \alpha°$.

De lo anterior podemos formar la proporción: $\frac{b}{L} = \frac{\alpha°}{360°}$.

Ahora, Beatriz podrá calcular aproximadamente la longitud del arco recorrido por el columpio utilizando la proporción anterior.

Ejemplo 4:

¿Cuál es la longitud de un arco correspondiente a un ángulo central de amplitud 60º en una circunferencia de radio 12,0 cm?

Solución:

Se conocen la amplitud del ángulo α y la longitud del radio; luego, para aplicar la proporción $\frac{b}{L} = \frac{\alpha°}{360°}$ hay que calcular la longitud de la circunferencia (L).

$L = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 12 = 6{,}28 \cdot 12 = 75{,}36$ cm

Sustituyendo en la proporción para calcular la longitud de b, obtenemos:

$$\frac{b}{75{,}36} = \frac{60}{360}$$

$$b = 75{,}36 \cdot \frac{60}{360} = 12{,}56 \cdot b \approx 12{,}6 \text{ cm}$$

Respuesta: La longitud de un arco correspondiente para ese ángulo central de 60° es de aproximadamente 12,6 cm.

Aplicación práctica de la relación longitud de la circunferencia-radio

Investiga y aprende

En el desplazamiento de los vehículos rodantes se establece una determinada relación entre la longitud de las circunferencias de sus ruedas y sus respectivos radios.

Veamos algunos ejemplos. El primero con las ruedas de un tractor, equipo motorizado de suma importancia para el desarrollo de la agricultura en nuestro país. Fíjate en la figura 2.85 que sus ruedas traseras no tienen igual diámetro que las delanteras.

Fig. 2.85

¿Dan la misma cantidad de vueltas ambos tamaños de ruedas cuando el tractor ha avanzado un trayecto de 100 m?

Con el estudio que vamos a realizar podemos darle respuesta a la interrogante antes planteada; vamos a realizar el análisis a partir del cálculo de la longitud de diferentes circunferencias.

Ejemplo 5:

Observa en la tabla 2.1 la variación de la longitud de la circunferencia, cuando la longitud de su radio varía. O sea, a medida que la longitud del radio aumenta, la longitud de la circunferencia aumenta, por lo cual, a mayor diámetro, será mayor también la longitud de la circunferencia.

Tabla 2.1

Circunferencias	Longitud del radio	Longitud de la circunferencia
C1	1,0 cm	2π
C2	2,0 cm	4π
C3	3,0 cm	6π
C4	4,0 cm	8π

Recuerda que...

Cuando dos magnitudes están relacionadas de modo que los valores de una de estas se obtienen multiplicando por un mismo número los valores correspondientes de la otra, se dice que son directamente proporcionales. En una proporcionalidad directa, dos cantidades cualesquiera de una magnitud y su correspondiente en la otra, forman una proporción.

Ejemplo 6:

Observa que en la ecuación $L = 2\pi r$, si hacemos $k = 2\pi$, obtenemos la ecuación $L = kr$, donde el factor de proporcionalidad es 2π.

Luego decimos que la longitud de la circunferencia es directamente proporcional a la longitud de su radio. Esta relación se puede representar en un sistema de coordenadas rectangulares, toma para esto las cantidades proporcionales de la tabla 2.1 y confecciona una gráfica en la figura 2.86.

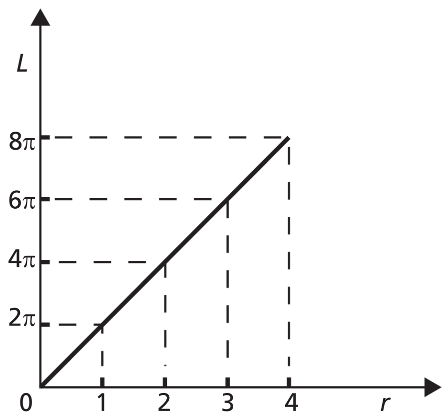


Fig. 2.86

Ejemplo 7:

El radio de la rueda delantera de una bicicleta de circo mide 20 cm y de la rueda trasera 30 cm.

a) Al recorrer una determinada distancia, ¿qué rueda habrá dado más vueltas? Argumenta.
b) Cuando la rueda trasera da una vuelta completa, ¿cuántas habrá dado la rueda delantera?

Solución:
a) Habrá dado más vueltas la rueda delantera por tener menor radio.
b) $L_d = 2\pi \cdot 20 = 40\pi$.

$L_t = 2\pi \cdot 30 = 60\pi$

$$\frac{L_t}{L_d} = \frac{60\pi}{40\pi} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Respuesta: La rueda delantera habrá dado 1,5 vueltas.

Ahora podrás responder el problema relacionado con las ruedas de un tractor.

Solución: Las ruedas delanteras del tractor darán mayor cantidad de vueltas que las traseras en un trayecto de 100 m.

Ejercicios

1. Calcula la longitud de una circunferencia cuyo diámetro mide:
a) 3,5 cm b) 4,0 dm c) 60,0 mm

2. Calcula la longitud de una circunferencia cuyo radio es igual a:
a) 1,0 km b) 6,0 dm c) 1,4 m

3. Calcula el radio de una circunferencia cuya longitud es igual a:
a) 6,28 m b) 22 km c) 125,6 cm

4. El radio de la esfera terrestre tiene 6 370 km. Determina la longitud aproximada del arco del horizonte correspondiente a un ángulo de 30° de la circunferencia que se obtendría al proyectar paralelamente la esfera terrestre en un plano, como se representa en la figura 2.87.

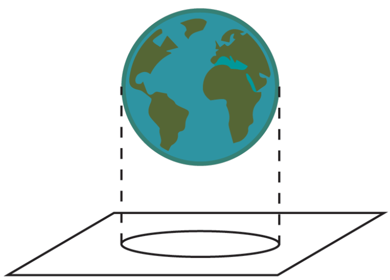


Fig. 2.87

5. La longitud del radio de las ruedas traseras de un tractor mide 0,60 m. ¿Cuántos kilómetros avanza el tractor cuando cada rueda ha dado 400 vueltas?

6. Las ruedas de un auto tienen 25 cm de radio. ¿Cuántas vueltas tiene que dar cada rueda para recorrer 78,5 m?

7. Una parte de la lona de la caseta que utilizaron los pioneros en la acampada aparece sombreada en la figura 2.88 de manera que:
— Los puntos *A*, *B*, *C* y *D* donde se fijó al suelo están alineados, siendo *C* el punto medio del segmento *AD* y $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2}$.

8. Los puntos *E* y *F* en que se fijó al techo, se ubicaron en estacas a una altura de 2,0 m formando el cuadrado *CDEF*.
También está representada la puerta ajustada al marco *ED*.
Calcula la suma de las longitudes de los cinco arcos que aparecen en la figura.

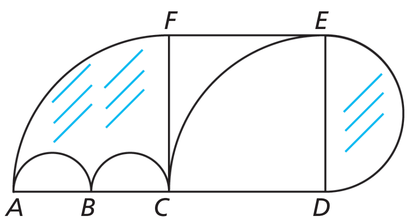


Fig. 2.88

9. Completa la tabla 2.2 sabiendo que los datos de cada fila corresponden a la misma circunferencia.
L: longitud de la circunferencia.
d: diámetro de la circunferencia
r: radio de la circunferencia
b: longitud de un arco
α: amplitud de un ángulo central al que le corresponde el arco de longitud *b*

Tabla 2.2

L	***d***	***r***	***b***	α
13,2 cm				50°
	7,8 cm			200°
	5,00 m		3,93 m	
14,8 cm			10,0 cm	
			2,5 m	60°
		0,43 cm		30°

10. Calcula la longitud de una circunferencia conociendo que uno de sus arcos cuya amplitud es igual a 20° tiene una longitud de 5,4 cm.

11. En la figura 2.89, el triángulo *ABC* es equilátero y está inscrito en la circunferencia de centro *O* y radio igual a 9,0 cm. Selecciona la respuesta correcta.

La longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$ es igual a

a) __ 120° b) ___ 19 cm

c) __ 9,4 cm d) ___ No se puede determinar por falta de datos.

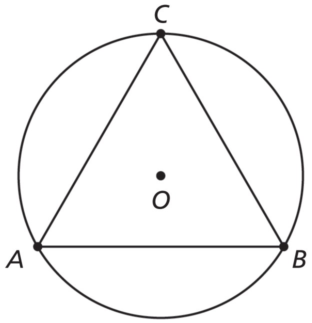


Fig. 2.89

12. En la figura 2.90, el triángulo *ABC* está inscrito en la circunferencia de centro *O*, diámetro $\overline{AB}$ = 4,0 dm y la amplitud del ángulo *CAB* es igual a 36°.

Selecciona la respuesta falsa y conviértela en verdadera.

a) La longitud del radio es igual a 20 cm.

b) El ángulo *ACB* tiene amplitud igual a 90°.

c) La longitud del arco $\overline{BC}$ es igual a 1,256 dm.

d) La amplitud del arco $\overset{\frown}{AC}$ es igual a 108°

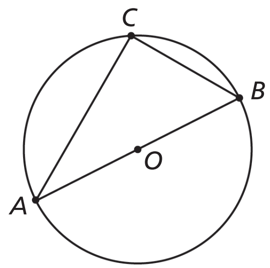


Fig. 2.90

13. En la figura 2.91, *A*, *B* y *C* son puntos de la circunferencia, $\overset{\frown}{AC}$ = 120° y ∢*CAB* = 30°.

a) Clasifica el ∆*ABC* según la amplitud de sus ángulos.

b) ¿Qué representa la cuerda $\overset{\frown}{AB}$ para la circunferencia? Argumenta.

c) Si $\overline{AB}$ = 2,4 cm, calcula la longitud de la circunferencia.

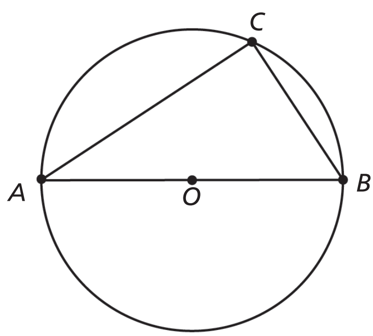


Fig. 2.91

14. Los brazos de un columpio miden 1,8 m de largo y pueden describir como máximo un ángulo de 120° (fig. 2.92). ¿Cuál es el recorrido del asiento del columpio cuando el ángulo es máximo?

Fig. 2.92

15. El minutero de un reloj tiene 6,0 cm de longitud. ¿Cuántos centímetros recorre su extremo libre al avanzar 20 min?

2.2.3 Área del círculo

Reflexiona un instante

El disco es un implemento deportivo que se emplea desde la Antigüedad en uno de los eventos de lanzamiento del atletismo. Su masa es de 2,0 Kg y su sección circular, similar a la que se ilustra en la figura 2.93 con un diámetro de 219 a 221 mm en la categoría masculina y en la femenina, de 180 a 182 mm.

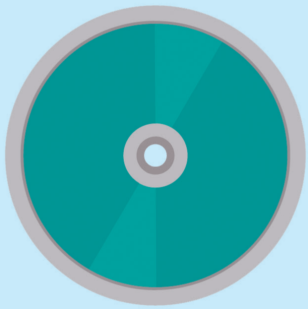


Fig. 2.93

¿Cuál es el área que ocupa un disco de lanzamiento de diámetro 220 mm sobre el terreno?

El estudio de este epígrafe te permitirá responder esta interrogante.

Área de un polígono regular de *n* lados

Aplica tus conocimientos

¿Cómo calcular el área de un hexágono regular de *n* lados?

Considera un hexágono regular de lado *l*; para calcular el área de este polígono, puedes descomponerlo en triángulos y obtener seis triángulos equiláteros cuya altura es la apotema del polígono y de base uno de los lados iguales. El área del polígono *ABCDEF* es la suma de las áreas de los seis triángulos formados como se muestra en la figura 2.94.

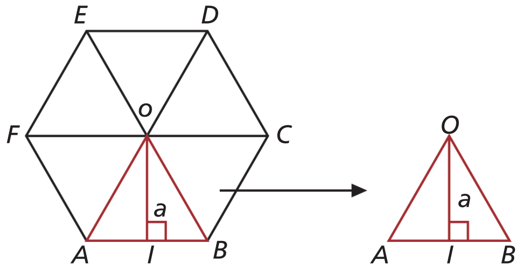


Fig. 2.94

Área del hexágono *ABCDEF*:

$A_E = 6 \cdot A_{\Delta ABC}$

Área del triángulo *ABO*: $A_{\Delta ABC} = \dfrac{l \cdot a}{2}$

Se sustituye la ecuación para calcular el área del triángulo *ABC* en la ecuación para calcular el área del hexágono y obtenemos:

$A_E = 6 \cdot \dfrac{l \cdot a}{2}$

El perímetro del hexágono es igual a: $P_E = 6 \cdot l$

Al sustituir la ecuación del perímetro del hexágono en la ecuación para calcular su área, obtenemos una nueva relación: $A_E = P \cdot \dfrac{a}{2}$.

Como se puede apreciar esta última ecuación depende de la apotema y del perímetro del polígono cuya área se desea calcular, de lo cual se deduce la ecuación para calcular el área de cualquier polígono regular.

Ecuación del área de un polígono regular:

El área de un polígono regular es igual al semiproducto[3] del perímetro por la apotema: $A_{Pr} = \dfrac{P \cdot a}{2}$

[3] Semiproducto: significa en matemática que es la mitad del producto, o sea el producto se divide por dos.

Área del círculo

Para obtener una ecuación para calcular el área del círculo, considera varios polígonos regulares inscritos en una circunferencia de radio ***r*** y apotema *a*, como se muestra en la figura 2.95.

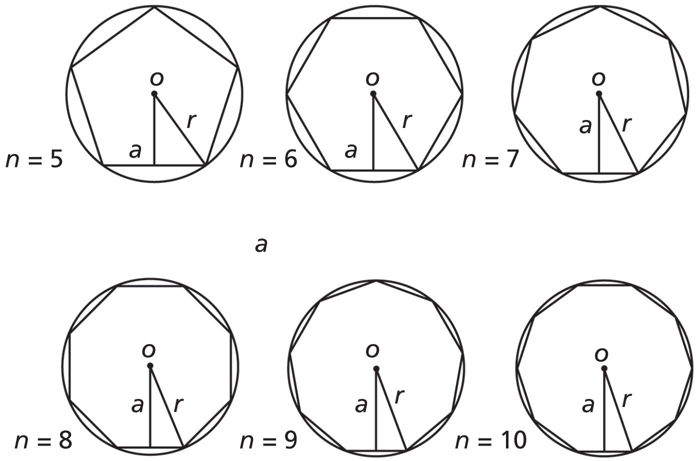


Fig. 2.95

Aplica tus conocimientos

Observa qué sucede con la circunferencia y el polígono regular inscrito en esta, si continúas aumentando cada vez más el número *n, de lados del polígono, responde después las interrogantes siguientes:*

1. ¿Qué relación existe entre la longitud de la apotema y la longitud del radio?
Respuesta: La longitud de la apotema a se aproxima cada vez más a la longitud del radio r, hasta llegar a ser la apotema igual a la longitud del radio de la circunferencia.

2. ¿Qué relación existe entre el perímetro del polígono inscrito de n lados y la longitud de la circunferencia?
Respuesta: El perímetro n·l del polígono se aproxima cada vez más a la longitud L de la circunferencia hasta llegar a ser el perímetro del polígono igual a la longitud de la circunferencia.

3. ¿Qué relación existe entre el área del polígono inscrito y el área del círculo?
Respuesta: El área del polígono se aproxima también cada vez más al área del círculo hasta llegar a ser: $\overline{AP} = AC$.

¿Cómo calcular el área del círculo?

Sabes que el área del polígono A_p se aproxima cada vez más al área del círculo A_c, por eso podemos utilizar la ecuación del área de un polígono de *n* lados para calcular el área del círculo:

$$A_P = \frac{P \cdot a}{2} \quad \text{pero } P = L$$

$$A_P = \frac{L \cdot a}{2} \quad \text{pero } a = r \text{ y } L = 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$A_P = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot r}{2}$$

$$A_C = \pi \cdot r^2$$

Ecuación del área de un círculo:

$$A_c = \pi \cdot r^2$$

Si sustituimos el radio por la expresión: $r = \frac{d}{2}$, obtenemos otra ecuación que no es necesario que memorices, porque puedes obtenerla fácilmente, cuando tengas en los datos el diámetro en lugar del radio. ¿Te atreves a intentarlo?

Ejemplo 1:

a) Calcula el área de un círculo de radio igual a 10,0 dm.

Solución:

Sustituimos r = 10,0 dm en la ecuación estudiada:

$A_c = \pi \cdot r^2$

$A_c = 3{,}14 \cdot 10^2$

$A_c = 3{,}14 \cdot 100$

$A_c = 314\ \text{dm}^2$

Respuesta: El área del círculo es 314 dm².

Ejemplo 2:

a) Halla el radio del círculo cuya área es igual a 78,5 dm².

$A_c = 78{,}5\ \text{dm}^2$

$A_c = \pi \cdot r^2$

$78{,}5 = 3{,}14 \cdot r^2$

$$r^2 = \frac{78{,}5}{3{,}14}$$
$$r^2 = 25$$
$$r = 5{,}00 \text{ dm}$$

Respuesta: El radio del círculo es 5,00 dm.

Consejos útiles

No olvides que el resultado final del cálculo de áreas de figuras planas y longitudes de segmentos se debe expresar con el menor número de cifras significativas que posean los valores de los datos.

Solución del problema planteado para calcular el área de un disco de lanzamiento de diámetro igual a 220 mm:

Datos

d = 220 mm

Utilicemos la ecuación: $A_C = \pi \cdot \frac{d^2}{4}$

Sustituyendo:

$$A_c = 3{,}14 \cdot \frac{220^2}{4}$$
$$A_c = 3{,}14 \cdot \frac{48\,400}{4}$$
$$A_c = 3{,}14 \cdot 12\,100$$
$$A_c = 37\,994 \text{ mm}^2$$
$$A_c \approx 380 \text{ cm}^2$$

Respuesta: El área del disco de lanzamiento del atletismo es aproximadamente 380 cm^2.

Área de la corona circular

Reflexiona un instante

De una pieza metálica en forma de círculo, de diámetro igual a 8,0 mm, como se muestra en la figura 2.96 se quiere fabricar una arandela para un tornillo de diámetro igual a 2,0 mm. ¿Qué área ocupará la arandela sobre una superficie plana? ¿Qué forma geométrica tiene la arandela fabricada?

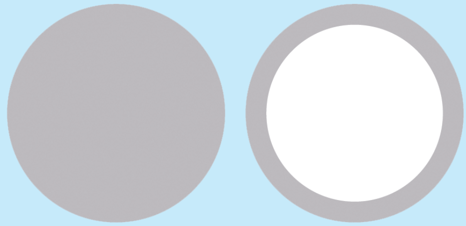


Fig. 2.96

Esta forma geométrica, nueva para ti, se denomina **anillo**; veamos su definición.

Definición de corona circular:

El conjunto de puntos del plano limitado por dos círculos concéntricos de diferentes radios, en el cual también se incluyen sus circunferenciasborde, se llama **corona circular**.

Aplica tus conocimientos

Busca qué ecuación te permite calcular el área de la corona circular utilizando la ecuación estudiada para determinar el área del círculo.

Ejemplo 3:

En la figura 2.97, tenemos que: r_1 es el radio del círculo uno y r_2 es el radio del círculo dos. Entonces, se expresan las ecuaciones para calcular las áreas de los dos círculos en función de r_1 y r_2, con $r_2 > r_1$.

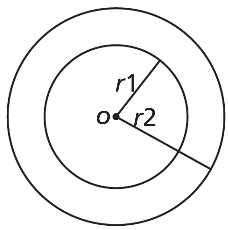


Fig. 2.97

$$A_{C_1} = \pi \; r_1^2 \;\; ; \;\; A_{C_2} = \pi \; r_2^2$$

$$A_{\text{corona}} = A_{C_2} - A_{C_1}$$

$$A_{\text{corona}} = \pi A_{\text{corona}} = \pi \left(r_2^2 - r_1^2 \right)$$

$$A_{\textit{corona}} = \pi \left(r_2^2 - r_1^2 \right)$$

Así, se obtiene que el área de la corona circular es igual a la diferencia entre el área del círculo mayor y el área del círculo menor: $A_{\text{corona}} = \pi \left(r_2^2 - r_1^2 \right)$.

Solución del problema relacionado con la arandela para un tornillo utilizando la ecuación del área de la corona circular:

Datos:

$r_2 = 4,0$ mm

$r_1 = 1,0$ mm

$A_{arandela} = 3,14\cdot(42 - 12)$

$A_{corona} = \pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)$

$A_{arandela} = 3,14 \cdot (16 - 1)$

$A_{arandela} = 3,14 \cdot 15$

$A_{arandela} = 47,1\ mm^2$

$A_{arandela} \approx 47\ mm^2$

Respuesta: El área de la arandela será aproximadamente 47 mm^2.

Ejemplo 4:

Calcula el área de un anillo circular determinado respectivamente por las circunferencias de radio $r_1 = 2,0$ dm y $r_2 = 30,0$ cm.

Datos:

$r_1 = 2,0$ dm $= 20$ cm

$r_2 = 30$ cm

$A_{corona} = \pi\ (r_2^2 - r_1^2)$

$A_{corona} = 3,14\ (30^2 - 20^2)$

$A_{corona} = 3,14\ (900 - 400)$

$A_{corona} = 3,14 \cdot 500$

$A_{corona} = 157,0\ cm^2$

$A_{corona} = 15,70\ dm^2$

$A_{corona} \approx 16\ dm^2$

Respuesta: El área del anillo circular determinado es aproximadamente 16 dm^2.

Área del sector circular

Reflexiona un instante

En la figura 2.98 se tiene un círculo de centro O y radio $\overline{OA} = 2,0$ cm, los radios $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ forman un ángulo de 120°.¿Puedes identificar la figura geométrica que representa la parte sombreada en el círculo? ¿Cuál será su área?

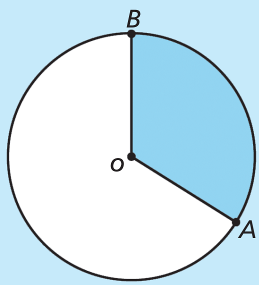


Fig. 2.98

Definición de sector circular:

Se llama **sector circular** al conjunto de puntos del círculo limitado por los lados de un ángulo central y su arco correspondiente, que incluye también a los puntos contenidos en estos.

Para calcular el área de un sector circular (A_{sc}) de un ángulo de amplitud α en un círculo de área (A_c), planteamos la proporción que representa la igualdad entre la razón de las áreas de dos sectores circulares en la misma unidad de medida y la razón entre sus amplitudes correspondientes expresadas en grados.

Como en toda proporción, conociendo el valor de tres de sus cuatro términos puedes hallar el cuarto término (fig. 2.98).

$$\frac{A_{sc}}{A_c} = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$$

$$A_{sc} = A_c \cdot \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$$

$$A_{sc} = \pi \cdot r^2 \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$$

Ejemplo 5:

En un círculo de radio igual a 4,0 dm se ha trazado un sector circular de 60º de amplitud. Halla su área.

Solución:

$$\frac{A_{sc}}{A_c} = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$$

$$A_{sc} = A_c \cdot \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$$

$$A_{sc} = 50{,}24 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ}$$

$$A_{sc} = 50{,}24 \cdot \frac{1}{6}$$

$$A_{sc} = 8{,}4\ \text{dm}^2$$

Cálculo auxiliar:

A_c = Área del círculo

$A_c = \pi r^2$

$A_c = 3{,}14 \cdot 4^2$

$A_c = 3{,}14 \cdot 16$

$A_c \approx 50{,}24\ \text{dm}^2$

Respuesta: El área del círculo es aproximadamente 8,4 dm^2.

En la figura 2.98 puedes identificar que la parte que aparece sombreada es un sector circular y determinar su área.

Datos:

r = 2,0 cm

$$\frac{A_{SC}}{A_C} = \frac{\alpha}{360}$$

$$A_{SC} = A_C \frac{\alpha}{360}$$

$$A_{SC} = 12{,}56 \cdot \frac{120}{360}$$

$$A_{SC} = 12{,}56 \cdot \frac{1}{3}$$

$$A_{SC} = 4{,}2 \text{ cm}^2$$

Cálculo auxiliar:

Área del círculo

$A_c = \pi r^2$

$A_c = 3{,}14 \cdot 2^2$

$A_c = 3{,}14 \cdot 4$

$A_c = 12{,}56 \text{ cm}^2$

Aplica tus conocimientos

Construye el gráfico que aparece en la figura 2.99 con instrumentos de dibujo o con alguna aplicación informática.

La composición de la superficie terrestre es (fig. 2.99):

- Las tres cuartas partes corresponden a agua.
- La cuarta parte corresponde a tierra.

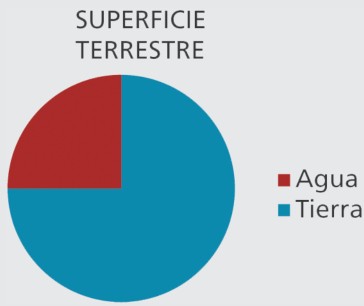


Fig. 2.99

Consejos útiles

Observa que los datos que se muestran en la figura 2.99 son fracciones con igual denominador, por tanto, es fácil representarlos en un gráfico circular, solo basta dividir el círculo en cuatro partes iguales, trazando dos diámetros perpendiculares, luego se selecciona la cuarta parte que le corresponde a la tierra y las tres cuartas partes que le corresponden al agua.

Reflexiona un instante

¿Cómo proceder para construir un gráfico circular o de pastel cuando los datos son fracciones con diferentes denominadores?

Ejemplo 6:

En una secundaria básica la matrícula es de 600 estudiantes, 150 cursan el séptimo grado, 200, el octavo grado y 250, el noveno grado. Representa la información en un gráfico circular (Ver figura 2.100).

Solución:

Séptimo grado:

$$\frac{150}{600} \cdot 360° = \frac{1}{4} \cdot 360° = 90°$$

Octavo grado:

$$\frac{200}{600} \cdot 360° = \frac{1}{3} \cdot 360° = 120°$$

Noveno grado:

$$\frac{250}{600} \cdot 360° = \frac{5}{12} \cdot 360° = 150°$$

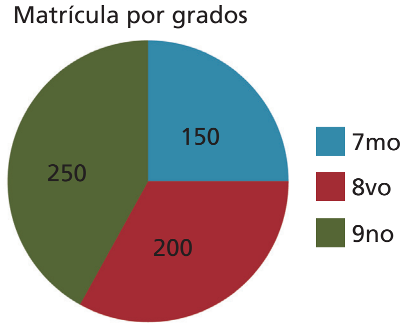


Fig. 2.100

Pasos para construir un gráfico de pastel

1. Determinar la medida del ángulo central correspondiente al sector multiplicando la frecuencia relativa por 360º.
2. Comprobar que las amplitudes obtenidas suman 360º.
3. Trazar un círculo de radio *r*.
4. Trazar en el círculo los sectores circulares obtenidos con ayuda de un semicírculo.
5. Identificar en el gráfico los datos objeto de análisis en el problema.

Se puede construir fácilmente una gráfica de pastel utilizando aplicaciones informáticas o un asistente matemático, para insertarla en un documento con los recursos informáticos. Para esto sigue los pasos que se describen a continuación.

Ejemplo 7:

a) Abre el documento en el que vas a insertar la gráfica o un nuevo documento en un procesador de texto.
b) Da clic con el *mouse* en la opción: **Insertar** (fig. 2.101).

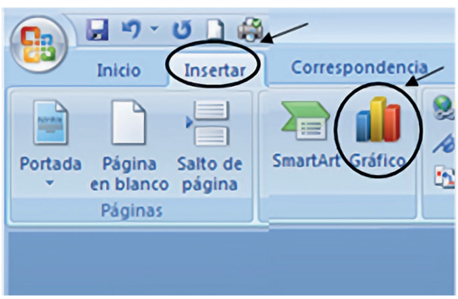


Fig. 2.101

c) Después en la opción: **Gráfico**.

d) Selecciona ahora: **Circular** y allí el tipo de gráfico circular que deseas y a seguidas: **Aceptar** (fig. 2.102).

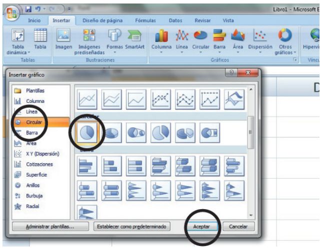


Fig. 2.102

e) Rellena la tabla que se abre en *la hoja de cálculo* con los datos necesarios, (fig. 2.103); para cada dato toma una fila. En el caso del ejemplo 6, estos datos serían: 150, 200 y 250, que son las cantidades de educandos de cada grado y reescribe el nombre del gráfico.

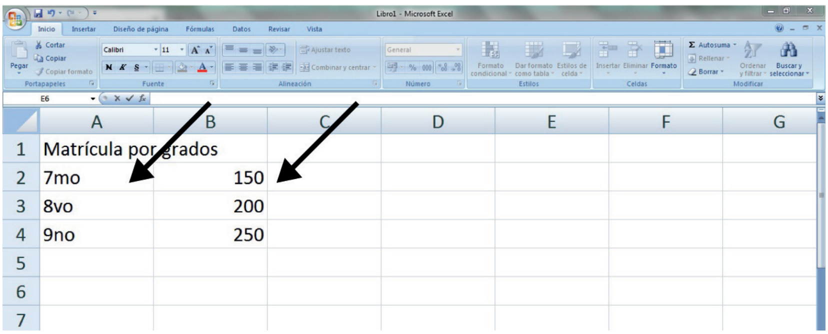


Fig. 2.103

Aplica tus conocimientos

En una secundaria básica la matrícula es de 600 educandos, 150 cursan el séptimo grado, 200 el octavo grado y 250 el noveno grado. Representa la información en un gráfico circular utilizando un asistente matemático (GeoGebra).

Ejercicios

1. Enlaza la ecuación de la columna *II* para calcular la longitud o área que se muestra en la columna I.

I	II
► Área del sector circular	$\pi \cdot d$
► Longitud del arco de circunferencia	$\pi \cdot \frac{d^2}{4}$
► Longitud de una circunferencia	$\pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)$
► Área de un círculo	$L \cdot \frac{\alpha}{360°}$
► Área de un anillo circular	$\alpha = L \cdot \frac{b}{360°}$
► Amplitud de un arco de circunferencia	$A_c \cdot \frac{\alpha}{360°}$

2. Identifica cuál de las proposiciones siguientes es verdadera.

a) ___ El número irracional p = 3,14.

b) ___ La parte del círculo limitada por un arco y los lados del ángulo central correspondiente se calcula utilizando la relación.

c) ___ El área del círculo se puede calcular utilizando la relación $\pi \cdot \frac{d^2}{4}$.

d) ___ La longitud de la circunferencia se puede calcular utilizando la relación: $L = 2\pi d$.

3. Calcula el área de un círculo cuyo radio es igual a:

a) $r = 7{,}00$ cm b) $r = 5{,}0$ m c) $r = 100$ mm

4. Dada la longitud del diámetro de un círculo, calcula su área.

a) $d = 30{,}0$ cm b) $d = 1{,}7$ m c) $d = 13{,}0$ mm

5. Determina la longitud de los elementos del círculo indicados entre paréntesis conocido el valor de su área en cada inciso:

a) $A = 24$ mm^2, (r)

b) $A = 314$ cm^2, (d)

c) $A = 19{,}6$ dm^2, (r y d)

6. Si conoces las longitudes de los radios de dos circunferencias concéntricas. ¿Cuál será el área de la corona circular que se forma en cada caso?

a) $r_1 = 1{,}0$ dm y $r_2 = 12{,}0$ cm

b) $r_1 = 0{,}30$ m y $r_2 = 4{,}5$ dm

7. Halla las longitudes y áreas indicadas, utilizando los datos dados en cada caso.

a) Dados $A_c = 36p\ m^2$ y a = 45°, (r, d y A_{sc})

b) Dados $L = 14{,}8$ cm y $b = 120$ mm, (r, d, A_c y α)

c) Dados $r = 5{,}0$ cm y $b = 60$ mm, (α, A_c, A_{sc} y L)

8. En la figura 2.104, la circunferencia de centro O y radio r está inscrita al cuadrado $ABCD$ de lado igual a 4,0 cm. Calcula el área de la parte sombreada.

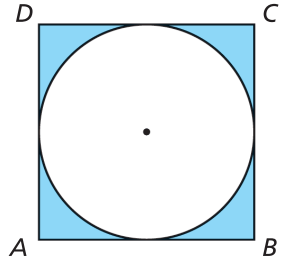


Fig. 2.104

9. En la figura 2.105, el cuadrado $ABCD$ de 5,00 cm de lado está inscrito en una circunferencia de 70 mm de diámetro. Calcula el área sombreada.

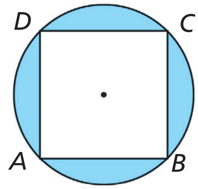


Fig. 2.105

10. En la figura 2.106, la circunferencia de centro O y radio r_1 está inscrita al cuadrado $MNPQ$ de lado igual a 8,0 cm. La circunferencia menor tiene su centro en O y su radio es $r_2 = 2{,}0$ cm. Calcula el área sombreada.

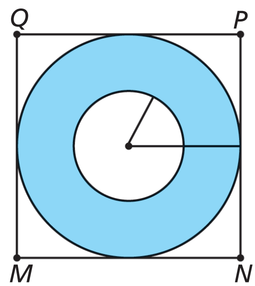


Fig. 2.106

11. En la circunferencia de centro O y radio $\overline{ON} = 2{,}2$ m (fig. 2.107), el ángulo $\sphericalangle MON = 90°$. Calcula el área sombreada.

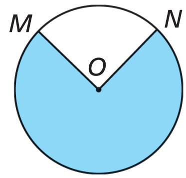


Fig. 2.107

12. La superficie de una mesa está formada por una parte central cuadrada y dos semicírculos adosados en dos lados opuestos (fig, 2.108). Calcula el área de la superficie de la mesa.

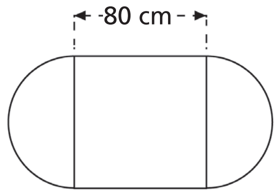


Fig. 2.108

13. El minutero de un reloj tiene 12 mm de largo. ¿Qué parte de la superficie barre al pasar de las 2:00 p.m. a las 2:35 p.m.?

14. En un parque infantil de forma circular de 50 m de radio, hay situada una fuente concéntrica a él de forma circular de 5,0 m de radio. ¿Cuál es el área que disponen los niños para jugar?

15. Se tienen dos figuras S_1 y S_2 de cartulina con forma de sector circular. S_1 tiene 2,0 cm de radio y un ángulo de 60° y S_2 tiene 3,0 cm de radio y un ángulo de 30°. Halla la razón entre las superficies de S_1 y S_2.

16. Se trazan tres circunferencias concéntricas cuyos respectivos radios tienen longitud: r_1 = 4,0 cm, r_2 = 6,0 cm y r_3 = 9,0 cm. ¿Cuántas veces es mayor la superficie comprendida entre las circunferencias dos y tres que la superficie comprendida entre las circunferencias uno y dos?

17. Una *pizza* familiar circular es cortada en varios trozos (sectores) iguales con un ángulo central igual a 45°.

a) ¿En cuántos trozos (sectores) se cortó la *pizza*?

b) Si la superficie de uno de los trozos es de aproximadamente 88,3 cm^2, ¿cuál es la longitud aproximada de la *pizza*?

18.* En la figura 2.109, se tiene un hexágono regular de 6,9 cm de apotema inscrito en una circunferencia de 8,0 cm. Calcula el área sombreada.

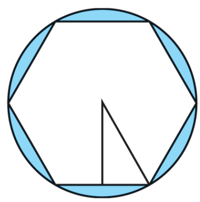


Fig. 2.109

19.* En la figura 2.110, se tiene una circunferencia de longitud igual a L = 12,56 cm inscrita en un triángulo equilátero. Calcula el área de la parte sombreada.

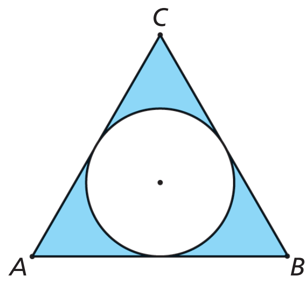


Fig. 2.110

20.* En la figura 2.111, se tienen tres circunferencias iguales, tangentes entre sí, de centros en O_1, O_2 y O_3 de radio igual a r = 20 mm. Calcula el área de la parte sombreada.

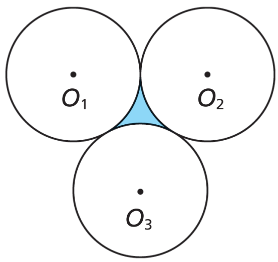


Fig. 2.111

21.* En la figura 2.112, $\overline{AB}$ es una cuerda de la circunferencia de centro O; $\overline{AO} \perp \overline{OB}$.
Calcula el radio de la circunferencia si el área sombreada es de 1,14 cm^2.

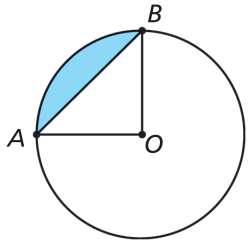


Fig. 2.112

22. En la figura 2.113, $\overline{AD}$ es diámetro y E es un punto de la circunferencia de centro O. La recta $\overline{BC}$ es tangente a la circunferencia en el punto F. $ABCD$ es un rectángulo. Calcula el área sombreada si se conoce que $\overline{AE}$ = 1,6 dm y $\overline{DE}$ = 12 cm

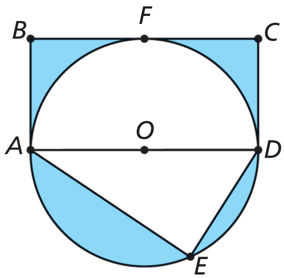


Fig. 2.113

23. En la tabla 2.3 se muestran los resultados de la actuación de Cuba en los juegos panamericanos de Lima 2019.

Tabla 2.3

Medallas	Cantidad
Oro	
Plata	27
Bronce	38
Total	**98**

a) ¿Cuántas medallas de oro obtuvo Cuba?
b) Calcula la frecuencia relativa en cada caso.
c) Representa la información en un gráfico de pastel.

24. En la tabla 2.4 se muestra el tanto por ciento de estudiantes de una secundaria básica incorporados a círculos de interés.

Tabla 2.4

Círculos de interés	Porciento de incorporados
Gastronomía	20
Salud Pública	33
Deportes	27
No incorporados	

a) ¿Qué tanto por ciento de la matrícula está aún sin incorporarse a los círculos de interés?
b) Si la matrícula de la escuela es de 520 estudiantes, ¿cuántos de ellos prefieren el círculo de interés de gastronomía?
c) Representa la información en un gráfico de pastel.

25. En un trabajo práctico de Matemática relacionado con los datos de un consultorio médico de la familia aparece una gráfica como la que muestra la figura 2.114, sobre la distribución de sus pacientes.
Obsérvala y responde cada una de las preguntas siguientes:
a) Selecciona la respuesta correcta.

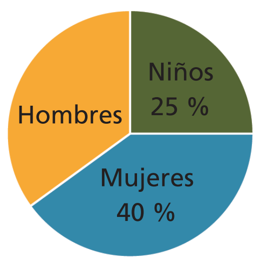


Fig. 2.114

- La mayor cantidad de pacientes está representada por:

  ___ Mujeres ___ Hombres ___ Niños

- La expresión: "Los niños representan el 25 %" significa que:

  __ En el consultorio atienden a 25 niños.

  __ La cuarta parte de los pacientes que se atienden son niños.

  __ De cada 1 000 pacientes que se atienden, 25 son niños.

b) Si en el consultorio se atienden 240 pacientes, determina la cantidad de pacientes que corresponde a niños, mujeres y hombres.

26. Investiga en tu consultorio médico de la familia la cantidad de personas de la tercera edad que:

a) Padecen de hipertensión arterial.

b) Son diabéticos.

c) Son cardiópatas.

27. Construye un gráfico de pastel con los datos recopilados con el uso de una aplicación informática o un asistente matemático.

2.3 Igualdad de figuras geométricas en el plano

Reflexiona un instante

En séptimo grado aprendiste cómo dada una figura geométrica puedes construir otras figuras iguales a partir de los diferentes movimientos del plano y de las construcciones geométricas. Ahora tenemos ante nosotros otra nueva interrogante:

¿Si se tienen dos figuras geométricas, cómo podremos determinar si son iguales?

Atención

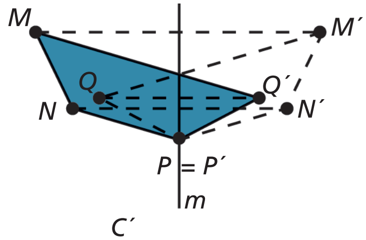
La veracidad de una proposición no debe asegurarse por "lo que parezca", solamente podemos afirmar que una proposición matemática es verdadera si puede ser fundamentada o demostrada a partir de los axiomas considerados o de otras proposiciones verdaderas.

Resolver la interrogante anterior es el propósito fundamental de este epígrafe; recordemos antes las propiedades fundamentales de los movimientos del plano.

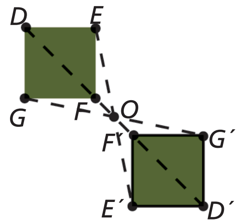
2.3.1 Sistematización de los movimientos del plano

Observa los cuatro ejemplos de diferentes figuras que fueron construidas aplicando los movimientos del plano que estudiaste en séptimo grado (fig. 2.115).

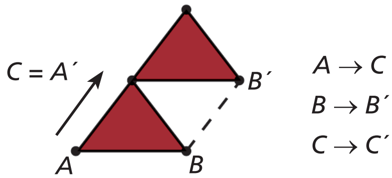
I. Simetría axial o reflexión de eje *m*



II. Simetría central o reflexión de centro *O*



III. Traslación de vector $\overrightarrow{AC}$



IV. Rotación de centro *O* y ángulo α

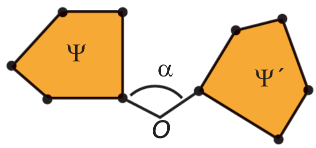


Fig. 2.115

Recuerda que...

Cada movimiento del plano posee una propiedad fundamental:

- Reflexión respecto a una recta: el eje de simetría es la mediatriz de todo segmento determinado por un punto y su imagen.
- Reflexión respecto a un punto: el centro de simetría es el punto medio de todo segmento determinado por un punto y su imagen.
- Traslación: todo punto del plano y su imagen en una misma traslación determinan segmentos paralelos, de igual longitud y sentido.
- Rotación: todo punto P y su imagen P′ equidistan del centro de rotación O y al unir estos puntos con el centro de rotación se determinan ángulos iguales de la forma $\sphericalangle POP'$, con vértice en el centro de rotación. Orientamos los ángulos de rotación siempre en sentido antihorario.

Ejercicios

1. Identifica en cada uno de los cuatro ejemplos de movimiento de la figura 2.115 los elementos siguientes:
- Los puntos fijos
- Una recta y su imagen
- Un segmento y su imagen
- Un ángulo y su imagen.

2. Construye la imagen de las figuras que se describen en cada inciso por el movimiento que se indica:

a) La mediana del lado $\overline{AB}$ en un triángulo acutángulo ABC; su imagen por la simetría axial de eje r, donde r es la recta que contiene al lado $\overline{AB}$.

b) Un triángulo MNP rectángulo en el vértice M; su imagen por la simetría central con centro en el ortocentro de dicho triángulo.

c) La bisectriz del ángulo agudo $\measuredangle QPR$; su imagen por la traslación que transforma el punto P en el punto Q.

3. Traza el eje s de la simetría axial que transforma al segmento $\overline{MN}$ en el segmento $\overline{PQ}$, de modo que Q es la imagen de M (fig. 2.116).

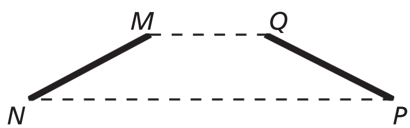


Fig. 2.116

2.3.2 Figuras iguales

Reflexiona un instante

En la vida cotidiana aplicamos movimientos para obtener otras figuras iguales, pero también comprobamos si dos figuras son iguales, tratando de "mover" una figura hasta que coincida con la otra.

Por ejemplo:

a) En la figura 2.117 se observa cómo un artesano pudo, con la plantilla que se encuentra a la derecha, dibujar otras figuras iguales en una pieza de tela, es decir, "movió" la figura para obtener otras figuras iguales en la tela.

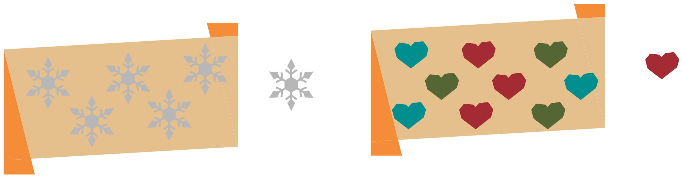


Fig. 2.117

b) Si "movemos" la palma de la mano hasta hacerla coincidir con la otra, comprobamos que son iguales (fig. 2.118).

Fig. 2.118

c) Construimos figuras iguales para los diagramas de bloque (fig. 2.119).

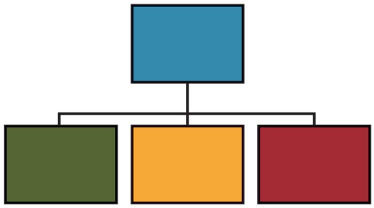


Fig. 2.119

d) Los pasteles de la dulcería se confeccionan también a partir de moldes iguales (fig. 2.120).

Fig. 2.120

Cuando "movemos" una figura del plano utilizando una hoja de papel transparente, obtenemos una figura igual a la original y en ese caso se hace corresponder a cada punto de esta, un único punto en la figura imagen y viceversa, decimos entonces que ambas figuras son iguales.

En los casos anteriores, dada una figura se obtuvo otra igual aplicando un movimiento. Ahora tenemos ante nosotros una problemática diferente, tenemos dos figuras y debemos determinar si son iguales.

Definición de figuras iguales:

Dos figuras son iguales si existe un movimiento que transforma una en la otra.

Observa los dos polígonos dados en la figura 2.121.

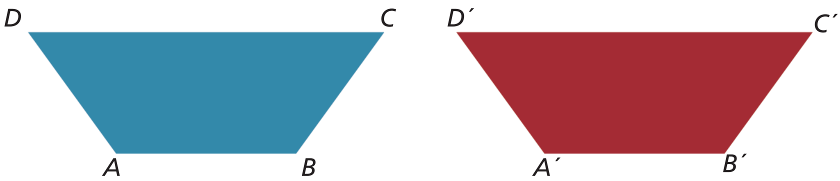


Fig. 2.121

Parecen iguales, pero no se debe decir que lo son a partir de una simple apreciación visual, tampoco se tiene información acerca de algún movimiento que haga que estas figuras coincidan ni podemos recortar o doblar la página del libro para comprobarlo porque esto es inadmisible.

Al superponer dos polígonos iguales por un movimiento podemos apreciar que sus lados tienen respectivamente la misma longitud y sus ángulos tienen respectivamente la misma amplitud, porque los movimientos conservan la distancia entre dos puntos y las amplitudes de los ángulos. Esta idea conduce a definir en particular, la igualdad de polígonos.

Definición de polígonos iguales:

Dos polígonos son iguales si sus ángulos interiores tienen respectivamente la misma amplitud y si los lados opuestos a estos ángulos tienen respectivamente la misma longitud.

Resulta de interés para esta temática de la igualdad de figuras, cómo fundamentar si son diferentes dos segmentos o dos ángulos. Por supuesto, en el caso de los segmentos, sucede si sus longitudes son diferentes y en el caso de los ángulos, si sus amplitudes son diferentes.

Reflexiona un instante

¿Y si no conocemos sus longitudes o amplitudes cómo justificar si son diferentes dos segmentos o dos ángulos? Veamos.

Comparación de longitudes de segmentos y amplitudes de ángulos

a) Si un punto B pertenece a un segmento $\overline{AC}$, determina el segmento $\overline{AB}$ en él (fig. 2.122); y para las longitudes de estos segmentos se cumple que: $\overline{AB} < \overline{AC}$

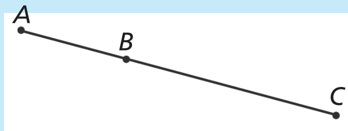


Fig. 2.122

b) Si una semirrecta $\overline{BD}$ está contenida en el interior de un ángulo ABC, determina en él al ángulo ABD (fig. 2.123); y para las amplitudes de estos ángulos se cumple que:

$\sphericalangle ABD < \sphericalangle ABC$

Una semirrecta *está contenida en el interior* de un ángulo si su origen coincide con el vértice del ángulo y existe un segmento que corta a los lados del ángulo que corta también a esa semirrecta.

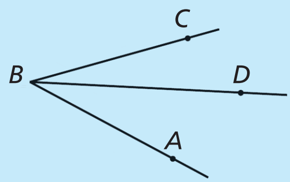


Fig. 2.123

Para un ángulo llano basta con que el origen de la semirrecta coincida con el vértice del ángulo y que la semirrecta esté contenida en el semiplano que ese ángulo llano determina.

Esta propiedad se aplicará en demostraciones que realizaremos en los próximos epígrafes.

Ejercicios

1. Cita ejemplos de figuras iguales a tu alrededor y cómo compruebas en la práctica que realmente lo son.

2. Confecciona un resumen con todas:

a) Las propiedades geométricas que conozcas y que te permitan asegurar que dos segmentos son iguales.

b) Las propiedades geométricas que conozcas y que te permitan asegurar que dos ángulos son iguales.

c) Las propiedades de los triángulos.

2.3.3 Igualdad de triángulos

Sabes lo importante que son los triángulos para la vida práctica y también para la matemática, por ejemplo, para el cálculo de áreas de figuras planas y en la demostración de propiedades geométricas.

Aplica tus conocimientos

Estudiaste cuándo dos polígonos son iguales, entonces puedes definir cuándo dos triángulos son iguales.

Definición de triángulos iguales:

Dos triángulos son iguales si sus ángulos interiores tienen respectivamente la misma amplitud y si los lados opuestos a estos ángulos tienen respectivamente la misma longitud.

Investiga y aprende

El significado del vocablo homólogos. Busca sus sinónimos

Elementos homólogos de triángulos iguales:

- Los **lados y ángulos homólogos** de dos triángulos iguales son los elementos que se corresponden por el movimiento que generó estos triángulos iguales y son siempre respectivamente iguales.
- Se cumple siempre que, en triángulos iguales, a lados respectivamente iguales (**lados homólogos**) se oponen ángulos respectivamente iguales (**ángulos homólogos**) y recíprocamente, a ángulos respectivamente iguales (**ángulos homólogos**) se oponen lados respectivamente iguales (**lados homólogos**).

Reflexiona un instante

De la definición anterior se deduce que para fundamentar que dos triángulos son iguales deben justificarse seis igualdades geométricas: las tres igualdades referidas a sus lados y las tres igualdades referidas a sus ángulos. ¿Existirá una vía más racional para fundamentar que dos triángulos son iguales?

Esta vía se concreta en los denominados *criterios de igualdad de triángulos*, pero queremos que tú mismo llegues a encontrar las exigencias que estos plantean, a partir de la búsqueda de relaciones entre sus elementos.

Investiga y aprende

Confecciona plantillas de varios triángulos de diferentes tipos, agrúpalas según tengan iguales:

- Un lado, dos lados y tres lados
- Un ángulo, dos ángulos y tres ángulos
- Combinaciones de lados iguales con ángulos iguales.

Consejos útiles

Comprueba ahora que la exigencia declarada para formar cada grupo basta para asegurar que todos los triángulos del grupo son iguales, es decir, que al superponer los triángulos con tal exigencia coinciden, lo cual significa que el resto de sus lados y ángulos son también respectivamente iguales.

Este análisis es el mismo que se plantea a continuación, en el cual los elementos iguales se señalaron en los triángulos dados con la misma marca.

Caso 1: *Exigencias respecto a igualdades de ángulos.*

a) Triángulos con un ángulo respectivamente igual. ¿Es suficiente esta condición para plantear la igualdad de los triángulos dados en la figura 2.124?

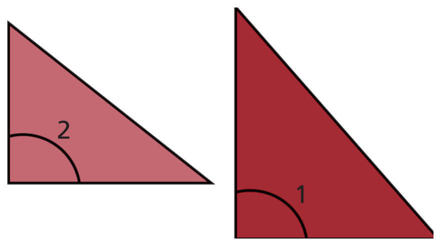


Fig. 2.124

b) Triángulos con dos ángulos respectivamente iguales. ¿Es suficiente esta condición para que los triángulos dados en la figura 2.125 sean iguales?

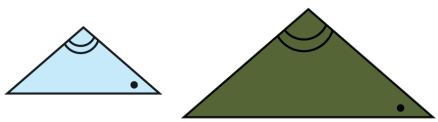


Fig. 2.125

c) Triángulos con tres ángulos respectivamente iguales, es la misma situación que el caso anterior. ¿Por qué?
Primera conclusión: no es suficiente tener los ángulos respectivamente iguales para que los triángulos dados sean iguales.

Caso 2: *Exigencias respecto a igualdades de lados.*

a) Triángulos con un lado respectivamente igual. ¿Es suficiente esta condición para plantear la igualdad de los triángulos dados en la figura 2.126

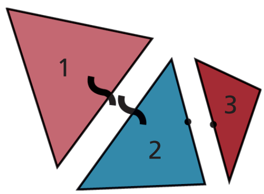


Fig. 2.126

b) Triángulos con dos lados respectivamente iguales. ¿Es suficiente esta condición para plantear la igualdad de los triángulos dados en la figura 2.127?

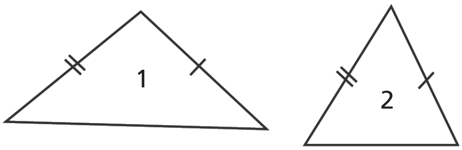


Fig. 2.127

c) Triángulos con tres lados respectivamente iguales. ¿Es suficiente esta condición para plantear la igualdad de los triángulos dados en la figura 2.128?*Segunda conclusión:* Parece que los triángulos dados son iguales cuando tienen respectivamente iguales sus tres lados.

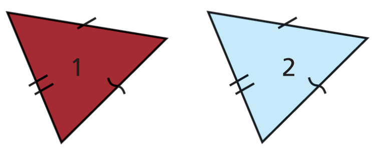


Fig. 2.128

Caso 3: *Exigencias respecto a igualdades de lados y ángulos.*

a) Triángulos con un lado y un ángulo respectivamente iguales.

b) Triángulos con dos lados y un ángulo respectivamente iguales.

c) Triángulos con un lado y dos ángulos respectivamente iguales.

Combina plantillas de triángulos con las exigencias planteadas en el caso tres y arriba tú mismo a la tercera conclusión. Resume todas las conclusiones y responde:

¿En qué casos se pudo afirmar que los dos triángulos dados son iguales?

Atención

De las conclusiones a que arribamos en el análisis anterior se obtienen *los criterios de igualdad de triángulos,* conocidos también como *teoremas de igualdad de triángulos,* pero hasta el momento, para nosotros son solamente suposiciones porque han sido planteadas sobre la base del análisis con dos o tres triángulos particulares y eso no es suficiente para afirmar que se cumplirán para todos los triángulos. Es necesario para hacer esta afirmación demostrar las suposiciones planteadas, lo cual veremos a continuación.

Criterios o Teoremas de igualdad de triángulos

- Si dos triángulos tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo comprendido entre estos, entonces son iguales.
- Si dos triángulos tienen respectivamente iguales un lado y los dos ángulos adyacentes a ese lado, entonces son iguales.
- Si dos triángulos tienen respectivamente iguales tres lados, entonces son iguales.

Sobre la demostración de los criterios de igualdad de triángulos

En el recuadro anterior vamos a adoptar el primer criterio como un nuevo axioma, es decir, la igualdad de dos triángulos cuando tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo comprendido entre estos y que vamos a incluir en nuestro grupo de axiomas, que formulamos en séptimo grado.[4]

[4] En otras teorías este axioma se asume como teorema y se le reconoce como Teorema *lal.* La decisión de seleccionar un determinado sistema de axiomas para desarrollar una teoría no es arbitraria, puesto que los sistemas de axiomas deben cumplir determinados requisitos. El sistema de axiomas aquí considerado es del texto *Geometría elemental* del autor A. V. Pogorelov, Editorial *MIR*.

Esto significa que su veracidad se acepta en la teoría geométrica sin demostración. A partir de este se demuestran los dos teoremas restantes de igualdad de triángulos.

Aquí se presentará solamente la demostración del teorema de la igualdad de triángulos: por tener respectivamente iguales un lado y los dos ángulos adyacentes a ese lado o *criterio a.l.a*, pero de la misma forma se demuestra también el teorema de la igualdad de triángulos: por tener respectivamente sus tres lados iguales o *criterio l.l.l.* Para la demostración emplearemos el método indirecto, que conoces de séptimo grado y el *axioma l.a.l.*

Criterio de igualdad de triángulos a.l.a

Tesis: $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$

Demostración (del teorema):

Sean $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$, dos triángulos cualesquiera (fig. 2.129).

Premisa: $\overline{AB} = \overline{A'B'}$; $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$ y $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$

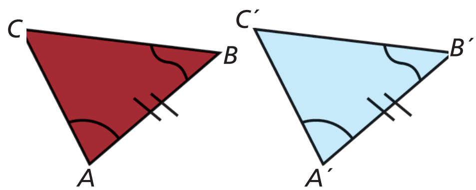


Fig. 2.129

Para probar la igualdad de los dos triángulos a partir del *teorema lal,* son necesarias, de las premisas, las que se relacionan con una pareja de ángulos iguales y con los lados en que están comprendidos los ángulos, en ese caso están dos de las premisas dadas: $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ y $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$

Por lo cual, bastaría probar que es igual la otra pareja de lados en que está comprendido respectivamente cada ángulo que es igual, o sea, bastaría probar A´B solamente que: $\overline{CA} = \overline{C'A'}$.

Vamos a probarlo por el *método indirecto,* supongamos: $\overline{CA} \neq \overline{C'A'}$, entonces: $\overline{CA} > \overline{C'A'}$ o $\overline{CA} < \overline{C'A'}$. Supongamos que: $\overline{CA} > \overline{C'A'}$

Transportemos $\overline{C'A'}$ (supuesto como el menor de los dos lados considerados) sobre $\overline{CA}$ y así, queda determinado el punto C'' tal que: $C'' \in \overline{CA}$ y $\overline{C'A'} = \overline{C''A}$

Esto se ilustra en la figura de análisis 2.130. Unamos los puntos C'' y B, de esta forma queda determinado otro triángulo: $\triangle ABC''$, que vamos a comparar con el $\triangle A'B'C'$.

En esos triángulos se cumple que: $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ y $\measuredangle C'A'B' = \measuredangle CAB$ (por premisa) y $\overline{C'A''} = \overline{C''A}$ (por el transporte del segmento realizado entonces $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ por *teorema l.a.l*

De esta igualdad de triángulos se obtiene que: $\measuredangle ABC'' = \measuredangle A'B'C'$

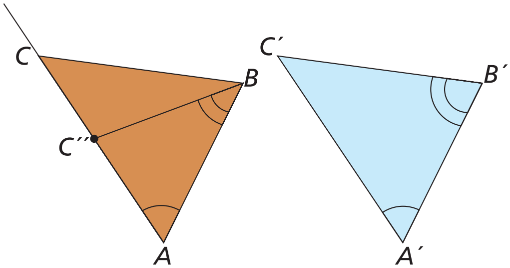


Fig. 2.130

por elementos homólogos y como $\measuredangle A'B'C' = \measuredangle ABC$ por premisa, se cumple que: $\measuredangle ABC'' = \measuredangle ABC$ por transitividad (1)

Pero también $\measuredangle ABC'' < \measuredangle ABC$ porque el primero de estos ángulos tiene un lado contenido en el interior del segundo ángulo. ¡Contradicción con (1)! De igual forma se prueba que es falsa la segunda desigualdad: $\overline{CA} > \overline{C'A'}$ por lo cual se cumple el teorema.

¿Cómo aplicamos los criterios de igualdad de triángulos?

Ejemplo 1:

En la figura 2.131: R punto medio de $\overline{AB}$; $\measuredangle ARP = \measuredangle QRB$ y $\triangle PRQ$ isósceles de base $\overline{PQ}$. Si $P \in \overline{AC}$ y $Q \in \overline{BC}$. Demuestra que $\triangle ABC$ es isósceles.

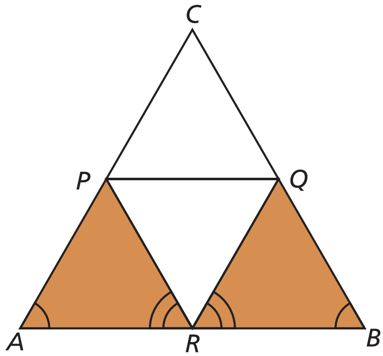


Fig. 2.131

Solución:

- Si los triángulos *ARP* y *RBQ* fueran iguales sus ángulos $\measuredangle A$ y $\measuredangle B$ serían respectivamente iguales y con esto $\triangle ABC$ es isósceles. Probémoslo:

En los triángulos *ARP* y *RBQ* se cumple que:
(1) $\overline{AR} = \overline{RB}$ porque R es punto medio de $\overline{AB}$
(2) $\overline{PR} = \overline{RQ}$ porque $\triangle PRQ$ es isósceles de base $\overline{PQ}$
3) $\measuredangle ARP = \measuredangle QRB$ por datos

Por tanto: $\triangle ARP = \triangle RBQ$ por tener dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales.

Como $\measuredangle A = \measuredangle B$ son elementos homólogos por ser ángulos opuestos a lados iguales, entonces $\triangle ABC$ es isósceles.

Ejemplo 2:

Dania y Maritza han dibujado cada una en el croquis de la figura 2.132 dos recorridos diferentes. El recorrido de Dania va desde el punto B hasta el punto P y está representado por la poligonal $BDCP$ en línea discontinua. El recorrido de Maritza va desde el punto A hasta el punto C y está representado por la poligonal $ABPC$ con una línea continua fina. Ellas necesitan saber si estos recorridos están determinados por segmentos de la misma longitud y solamente conocen que: O es punto medio de $\overline{CP}$ y $\overline{DB}$; D, P, A alineados y $\triangle DBA$ isósceles de base $\overline{DA}$, trazado con línea continua más oscura. ¿Puedes ayudarlas a resolver esta interrogante con los datos dados?

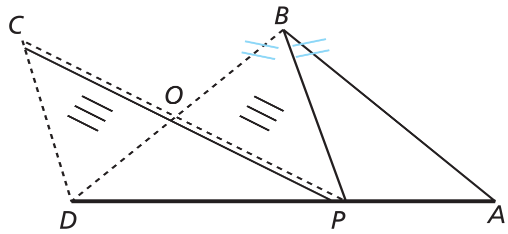


Fig. 2.132

Solución:

Si comparas los segmentos que forman ambos recorridos puedes apreciar que tienen un segmento común: $\overline{CP}$ y un par de segmentos respectivamente iguales: $\overline{DB} = \overline{AB}$ porque constituyen los lados iguales del triángulo isósceles $\triangle DAB$ según los datos.

Descontando estas partes, la comparación de los recorridos depende de la relación entre los segmentos $\overline{DC}$ y $\overline{PB}$. Vamos a probar que estos son elementos homólogos de los triángulos iguales DOC y OPB y, por tanto, son también iguales.

En $\triangle$ DOC y $\triangle OPB$ se cumple que:

(1) $\overline{CO} = \overline{OP}$ y (2) $\overline{DO} = \overline{OB}$ porque O es punto medio de $\overline{CP}$ y de $\overline{DB}$ por datos.

(3) $\sphericalangle DOC = \sphericalangle BOP$ por opuestos por el vértice.

Por tanto: $\triangle ARP = \triangle RBQ$ por tener dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales y como $\overline{DC}$ y $\overline{PB}$ se oponen a ángulos iguales, entonces son elementos homólogos.

Respuesta: Ambos recorridos son iguales porque el último tramo también es igual debido a la igualdad de los triángulos que contienen estos segmentos.

Ejemplo 3:

Para medir la distancia entre los puntos F y G entre los cuales hay un obstáculo que impide medirla, los pioneros exploradores del destacamento de 8.°A clavaron unas estacas en esos puntos y amarraron a estas unos cordeles dispuestos como se observa en la figura 2.133, de manera que: $\overline{CD} = \overline{FC}$ y $\overline{EC} = \overline{CG}$. Así, fijaron los extremos restantes a otras estacas en los puntos E y D, respectivamente. Alberto, el jefe de Destacamento asegura que la longitud de $\overline{FG}$ es la misma que la de $\overline{ED}$.

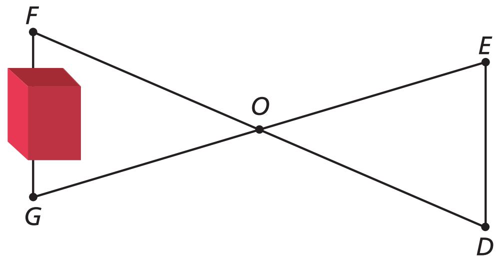


Fig. 2.133

¿Puedes explicar por qué Alberto hizo esta afirmación y en qué se fundamenta esta?

Solución:

Puede probarse con los datos dados que los triángulos GFC y CDE son iguales. De esta forma los segmentos $\overline{FG}$ y $\overline{ED}$ serían iguales por elementos homólogos y quedaría resuelta la problemática planteada.

Respuesta: La igualdad de los triángulos GFC y CDE es el fundamento de que las longitudes de los segmentos $\overline{FG}$ y $\overline{ED}$ sean iguales.

Ejercicios

1. En la figura 2.134 los elementos iguales de los diferentes triángulos se han señalado con la misma marca.

Identifica todas las parejas de triángulos que consideres iguales y fundamenta qué criterio de igualdad de triángulos te permite hacer esa afirmación.

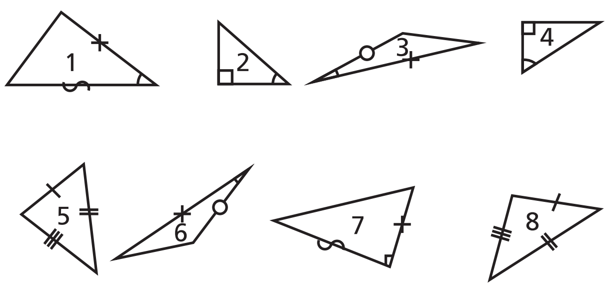


Fig. 2.134

2. Considera en los triángulos dados en la figura 2.135 que los elementos iguales tienen la misma marca y señala las parejas de triángulos que no cumplen ninguno de los criterios de igualdad de triángulos. Fundamenta tu respuesta

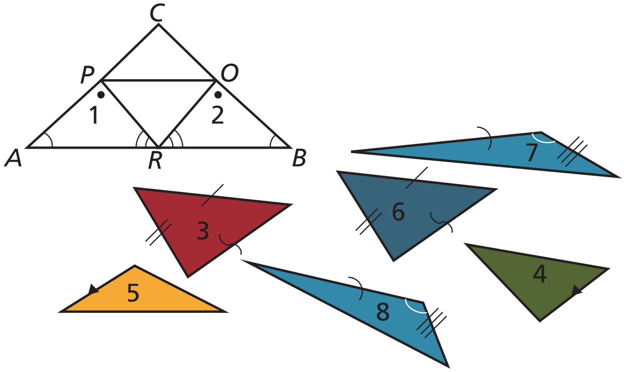


Fig. 2.135

3. Selecciona entre las igualdades dadas a continuación, las que sean a tu juicio necesarias, para que los triángulos de la figura 2.136 sean iguales. Fundamenta qué criterio de igualdad de triángulos aplicaste en cada caso.

a) ☐ $= \overline{PQ} = \overline{EM}$

b) ☐ $= \overline{PR} = \overline{ET}$

c) ☐ $\sphericalangle Q = \sphericalangle M$

d) ☐ $\overline{RQ} = \overline{MT}$

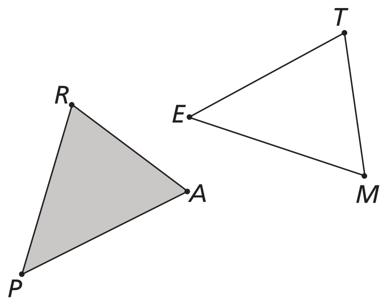


Fig. 2.136

4. ¿Cuáles de las igualdades siguientes seleccionarías para probar que los triángulos $\triangle ADC$ y $\triangle DBC$ de la figura 2.137 sean iguales? Si $D \in \overline{AB}$.

a) ☐ $\overline{AD} = \overline{DB}$

b) ☐ $\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCB$

c) ☐ $\overline{AB} = \overline{BC}$

d) ☐ $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD$

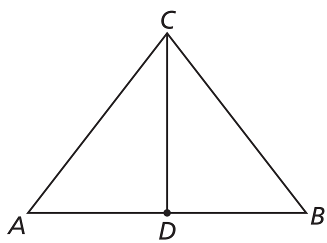


Fig. 2.137

5. En la figura 2.138: *MNPQ* es un trapecio isósceles, *RSPQ* es un rectángulo y $\overline{MS} = \overline{RN}$. Completa los espacios en blanco para demostrar que: $\triangle MRQ = \triangle SNP$.
Demostración: En los triángulos *MRQ* y *SNP* se tiene que:

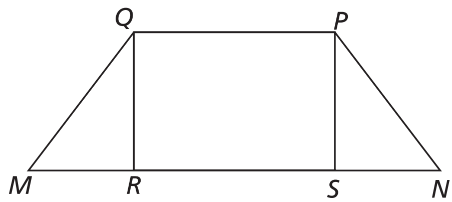


Fig. 2.138

Igualdades	Fundamentación
(a) $\overline{MQ} = \overline{PN}$	______________________
(b) ________	por ser lados opuestos en el rectángulo *RSPQ*.
(c) ________	porque son segmentos que tienen como longitud, la diferencia de las longitudes de segmentos respectivamente iguales.
(d) *Por tanto:* $\triangle MRQ = \triangle SNP$	por: ____________________

6. El triángulo *EFG* de la figura 2.139 es isósceles rectángulo de base $\overline{FG}$ y con ángulo recto en *E*, $\overline{EH}$ es la mediana relativa del lado $\overline{FG}$.
Llena los espacios en blanco para completar las igualdades o fundamentaciones necesarias para demostrar que: $\triangle EFH = \triangle GEH$
Demostración: En los triángulos *EFH* y *GEH* se cumple que:

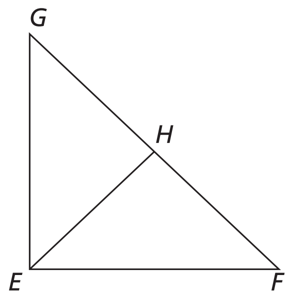


Fig. 2.139

Igualdades	Fundamentación
a) $HGE = \sphericalangle EFH$	__________________________
b) $\overline{GH} = \overline{HF}$	__________________________
c) __________	porque son lados iguales del $\triangle EFG$ isósceles
d) *Por tanto:* $\triangle EFH = \triangle GEH$	por el teorema: ________________

7. Gretel observó la figura 2.140, en la cual *ABCD* es un rectángulo; $\overline{AE} \perp \overline{BD}$; $\overline{CF} \perp \overline{BD}$ y afirmó: "Hay tres parejas de triángulos iguales".
Nombra las tres parejas de triángulos iguales que vio Gretel y explica por qué son iguales.

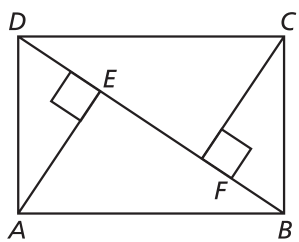


Fig. 2.140

8. En la figura 2.141:
$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{AD} = \overline{BC}$. O punto medio de $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$.

a) Prueba que $\triangle AOD = \triangle COB$.

b) ¿Qué otros criterios de igualdad de triángulos diferentes puedes aplicar para resolver este ejercicio?

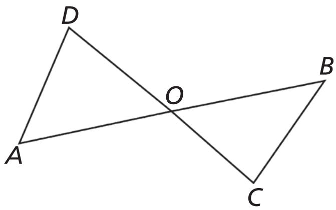


Fig. 2.141

9. Completa los espacios en blanco convenientemente, según los elementos homólogos de las parejas de triángulos iguales que señaló en el ejercicio 7.

a) El lado homólogo al lado $\overline{BC}$ es el lado ___ en los triángulos ___ y ___.

b) El lado $\overline{AE}$ es homólogo al lado ___ en los triángulos ____ y _____.

10. En la figura 2.142, $MNPQ$ rectángulo, $\triangle MNR$ isósceles de base $\overline{MN}$ y R punto de $\overline{QP}$.

a) Demuestra que $\triangle MQR = \triangle NPR$.

b) Demuestra que R es punto medio de $\overline{QP}$

c) Si el área del $\triangle MNR$ es de $12\,\text{cm}^2$ y $\overline{MN} = 60$ mm, calcula el perímetro del rectángulo $MNPQ$.

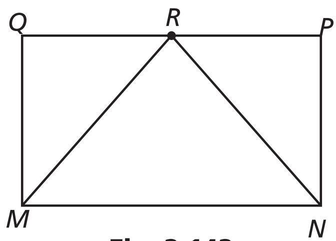


Fig. 2.142

11. En la figura 2.143, $ABCD$ rectángulo, E y F puntos de $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ respectivamente, $\overline{EB} = \overline{DF}$ y $AECF$ paralelogramo.

a) Demuestra que $\triangle ADF = \triangle BCE$.

b) Clasifica el triángulo ADF de acuerdo con la amplitud de sus ángulos.

c) Si $\overline{AD} = 4{,}0$ cm, $\overline{AB} = 7{,}0$ cm y $\overline{AE} = 5{,}0$ cm, calcula el área del triángulo ADF.

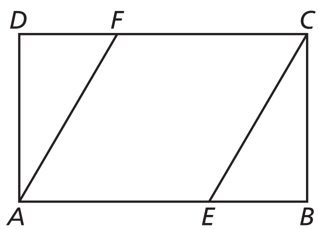


Fig. 2.143

12. En la figura 2.144 se tiene que:

- $ABCD$ es un rectángulo.
- $ABEC$ es un paralelogramo.
- D, C y E punto alineados.

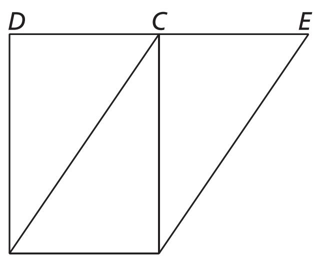


Fig. 2.144

a) Prueba que $\triangle ADC = \triangle BCE$.

b) Si $\overline{AB} = 8{,}0$ dm y el área del paralelogramo $ABEC$ es igual 72 dm^2, calcula la longitud de $\overline{BC}$

13. En la figura 2.145, se cumple que:

- C pertenece a la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB}$
- $D \in \overline{AB}$
- $\overline{AF}$ tangente a la circunferencia en el punto A
- $\overline{FD} \parallel \overline{AC}$
- $\overline{AC} = \overline{AD}$

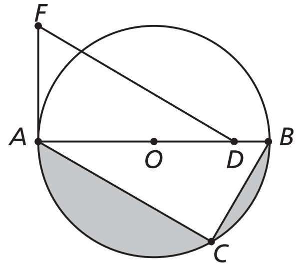


Fig. 2.145

a) Prueba que $\overline{AF} = \overline{BC}$

b) Si la longitud d la circunferencia es igual a 10π dm y $\overline{AC} = 8{,}0$ dm, calcula el área sombreada.

14. En la figura 2.146, $MNPQ$ paralelogramo, S punto de $\overline{QP}$, R punto de $\overline{MN}$ y $\sphericalangle MRQ = \sphericalangle PSN$

a) Prueba que $\overline{QR} = \overline{NS}$

b) Si $\sphericalangle SNR = 72°$ y $\sphericalangle MQR = 28°$, halla la amplitud de los ángulos interiores del paralelogramo $MNPQ$.

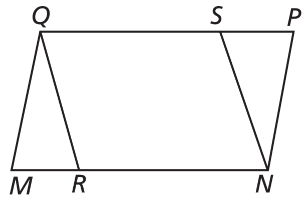


Fig. 2.146

15. En la figura 2.147, se cumple que:

- Triángulo ABC equilátero
- Los puntos C, D, E y B están alineados
- $\sphericalangle CAE = \sphericalangle DAB$

a) Prueba que $\triangle ABE = \triangle ACD$

b) Calcula el área del triángulo ABC si conocemos que su perímetro es igual a 6,0 dm y su altura mide 17 cm.

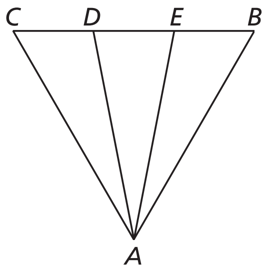


Fig. 2.147

16. En la figura 2.148 se cumple que:

- B y D puntos de la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AC}$
- $\overline{AC}$ bisectriz del $\sphericalangle BAD$

a) Prueba que $\triangle ABC = \triangle ADC$

b) Selecciona la respuesta correcta:

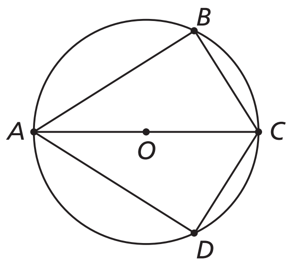


Fig. 2.148

Si $\sphericalangle BAC = 32{,}5°$, entonces la amplitud del arco $\overset{\frown}{AB}$ es:

a) ___ 32,5º b) ___ 65º
c) ___ 115º d) ___Ninguna de las anteriores

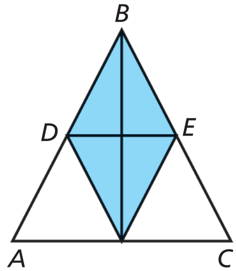


Fig. 2.149

17. En la figura 2.149:

- $\triangle ABC$ isósceles de base $\overline{AC}$
- $\overline{BF}$ altura del $\triangle ABC$ relativa al lado $\overline{AC}$
- $\overline{DE}$ paralela media de del $\triangle ABC$

a) Prueba que $\triangle AFD = \triangle CFE$

b) Si $\overline{AC} = \overline{BF} = 4{,}0$ cm, halla el área del rombo $BDFE$.

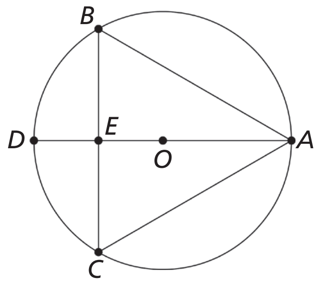


Fig. 2.150

18. En la figura 2.150, se cumple que:
B y C puntos de la circunferencia de centro O.
$\overline{AD}$ diámetro.
$\overline{BC} \perp \overline{AD}$ en el punto E.

a) Prueba que las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son iguales.

b) Si la amplitud del arco $\overset{\frown}{BD}$ es igual a 60º, entonces el triángulo ABC es equilátero. Argumenta esta afirmación.

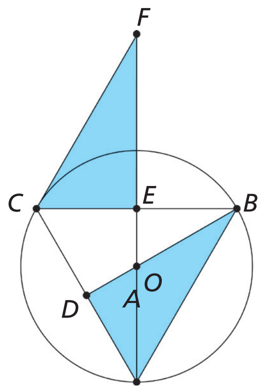


Fig. 2.151

19. En la figura 2.151, $\triangle ABC$ equilátero, inscrito en la circunferencia de centro O y radio , además se cumple:

- $\overline{BD}$ mediana del $\triangle ABC$ relativa al lado $\overline{AC}$.
- $\overline{AF}$ mediatriz del segmento $\overline{BC}$
- A, O, E y F puntos alineados.
- $\sphericalangle F = 30°$

a) Prueba que $\triangle ABD = \triangle CEF$

b) *Demuestra que el polígono $ABFC$ es un rombo.

20. Formula un ejercicio de igualdad de triángulos en que se aplique la propiedad de la bisectriz y el teorema *ala.*

21. Investiga los criterios de igualdad de triángulos rectángulos.

2.4 Prisma y pirámide

Reflexiona un instante

En séptimo grado comenzaste el estudio de los cuerpos geométricos, aprendiste a calcular el volumen del cubo y el ortoedro; ahora trabajaremos, además, con otros cuerpos geométricos.

Pero, ¿qué es un cuerpo geométrico?

Definición de cuerpo geométrico:

Llamamos cuerpo geométrico a la región del espacio limitada por superficies planas o curvas o por la combinación de estas superficies.

Ejemplo 1:

Desde la Antigüedad el hombre ha utilizado los cuerpos geométricos en sus construcciones. Observa las imágenes de la figura 2.152.

Fig. 2.152

Otros ejemplos de cuerpos geométricos pueden ser: tu lápiz, el libro de *Matemática,* la caja de tizas de tu profesor, los edificios y otros muchos que tú y tus compañeros pueden encontrar.

En este grado nos ocuparemos del estudio de dos cuerpos geométricos particulares: el prisma y la pirámide.

Definición de prisma

Llamamos **prisma** al cuerpo geométrico limitado por dos polígonos iguales de *n* lados situados en planos paralelos, llamados bases, y por n paralelogramos, llamados caras laterales.

De los cuerpos de la figura 2.152 del ejemplo uno, ¿cuáles, según la definición dada, representan prismas? Te darás cuenta que son: el libro de Matemática, la caja de tizas de tu profesora, la computadora, la caja de colores, los bloques de letras y el tipo de lápiz que aparece dibujado en la figura.

Los prismas se denominan por el número de lados de los polígonos de sus bases. Así si las bases son triángulos, se llama prisma de base *triangular;* si son cuadrados prisma de base *cuadrada;* si son pentágonos, prima de base *pentagonal,* etcétera.

Investiga y aprende

Observa las alturas de los cuerpos de la figura 2.153, ¿notas alguna diferencia entre estas?

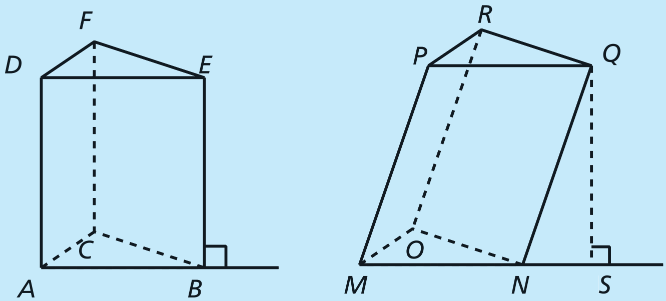


Fig. 2.153

En efecto, en el prisma *ABCDEF* las alturas coinciden con las aristas laterales, mientras que no ocurre así en el prisma *MNOPQR*. ¿Por qué crees que pasa esto?

Recuerda que en un polígono la *altura* es el *segmento de perpendicular que parte de uno de los vértices y llega hasta el lado opuesto.*

Elementos del prisma (tabla 2.5)

Tabla 2.5

		Prisma *ABCDEF*	Prisma *MNOPQR*
Bases		*ABC, DEF*	*MNO, PQR*
Caras laterales		*ABED, BCFE, ACFD*	*MNQP, NORQ, MORP*
Aristas	de la base	$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FD}$	$\overline{MN}$, $\overline{NO}$, $\overline{OM}$, $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RP}$
	laterales	$\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$	$\overline{MP}$, $\overline{NQ}$, $\overline{OR}$
Vértices		*A, B, C, D, E, F*	*M, N, O, P, Q, R*
Altura		$\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF}$	$\overline{QS}$

Analicemos, ¿por qué en el prisma *MNOPQR* la altura no coincide con las aristas laterales? Claro que esto se debe a que en este prisma las aristas laterales no son perpendiculares a la base, en este caso decimos que es un *prisma oblicuo* y en caso contrario, *prisma recto.*

Ejemplo 2:

¿Qué tipo de paralelogramo serán las caras de un prisma recto? Observemos la figura 2.154: por ejemplo, la arista lateral $\overline{AD}$ es perpendicular al plano de la base *ABC* y por tanto, es también perpendicular a la arista $\overline{AB}$, luego el ángulo $\measuredangle DAB = 90°$. De aquí podemos afirmar que el paralelogramo *ABDE* es un rectángulo, pues es un paralelogramo con un ángulo recto.

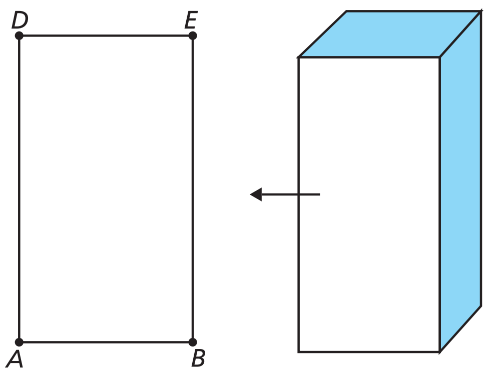


Fig. 2.154

Definición de prisma regular:

Un **prisma regular** es un prisma recto cuyas bases son polígonos regulares.

Recuerda que...

Un polígono regular tiene todos sus lados de igual longitud y todos sus ángulos interiores de igual amplitud (por ejemplo: un triángulo equilátero, un cuadrado, un pentágono regular, etcétera).

Las caras de un prisma regular son rectángulos iguales, pues todas las aristas de las bases son iguales y también lo son las aristas laterales.

Definición de ortoedro

Un prisma recto de base rectangular se denomina **ortoedro**.

Ejemplo 3:

a) Observa en la figura 2.155a un ortoedro.

Para nombrarlo primero planteas los vértices de la base inferior y después en ese mismo orden sus vértices correspondientes en la base superior.

Así el ortoedro de la figura lo nombramos *MNOPQRST*.

¿Conoces qué nombre recibe el prisma recto formado por seis cuadrados iguales?

Efectivamente, es el *cubo.*

El cubo de la figura 2.155b lo denotamos *MNOPQRST*.

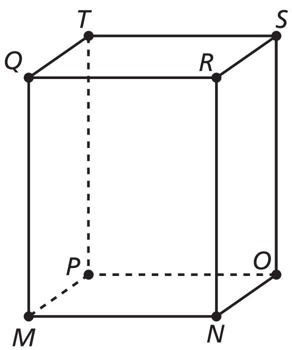


Fig. 2.155 a

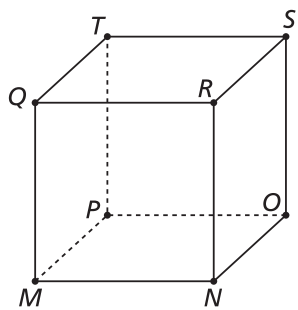


Fig. 2.155b

Veamos ahora la pirámide.

La Gran Pirámide de Keops en Gizéh, fue construida hace más de 5000 años. En esta se empleó el trabajo de más de 100 000 hombres y su construcción duró treinta años (Figura 2.156).

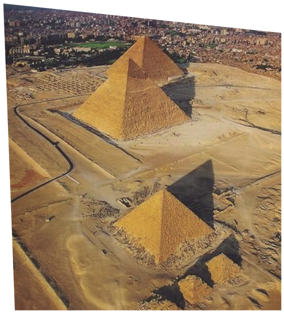


Fig. 2.156

Definición de pirámide:

Denominamos **pirámide** al cuerpo limitado por un polígono cualquiera de *n* lados contenido en un plano α y por n triángulos, uno por cada lado del polígono, los cuales concurren en un vértice común que no pertenece al plano α.

Ejemplo 4:

Observa en la figura 2.157 ejemplos de pirámides.

Para nombrarlas, primero planteas los vértices de la base y después el vértice en que concurren sus aristas laterales.

Así, las pirámides de la figura las nombramos *ABCDE* y *HIJKN*.

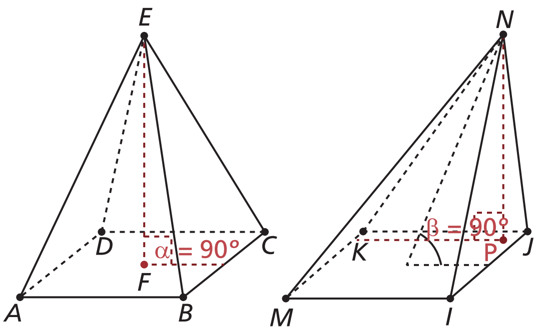


Fig. 2.157

Elementos de la pirámide (tabla 2.6)

Tabla 2.6

		Pirámide *ABCDE*	**Pirámide *HIJKN***
Base		*ABCD*	*HIJK*
Caras laterales		*ABE, BCE, CDE, DAE*	*HIN, IJN, JKN, KHN*
Aristas	de la base	$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$	$\overline{HI}$, $\overline{IJ}$, $\overline{JK}$, $\overline{KH}$
	laterales	$\overline{AE}$, $\overline{BE}$, $\overline{CE}$, $\overline{DE}$	$\overline{HN}$, $\overline{IN}$, $\overline{JN}$, $\overline{KN}$
Vértice		*E*	*N*
Altura		*EF*	*NP*

Analicemos, como en el caso del prisma, las diferentes posiciones que puede ocupar la altura. En la pirámide *ABCDE* su altura parte del vértice *E* y llega hasta el centro de la base *ABCD*, el punto *F*, que es su circuncentro. En este caso decimos que es una *pirámide recta.* No ocurre así, en la pirámide *HIJKN*, donde la altura corta a la base *HIJK* en un punto diferente al centro de la base; entonces decimos que se trata de una *pirámide oblicua.*

Definición de pirámide regular

Una pirámide regular es una pirámide recta cuya base es un polígono regular.

Saber más

Las caras de una pirámide regular son triángulos isósceles iguales. La altura de estos triángulos recibe el nombre de *apotema* (fig. 2.158).

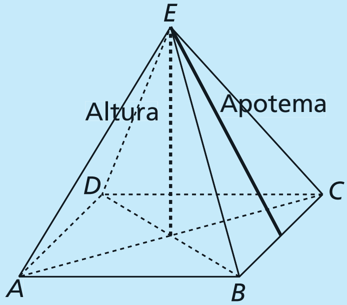


Fig. 2.158

Se denomina *tetraedro* a una pirámide de cuatro triángulos, que puedes ver representada en la figura 2.159. El prefijo *tetra* significa cuatro, es decir, el nombre está relacionado con el número de caras del cuerpo.

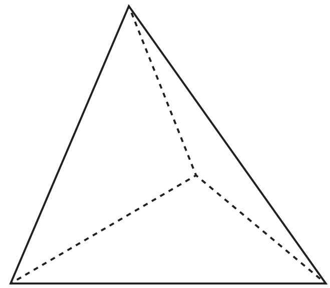


Fig. 2.159

2.4.1 Representación geométrica del prisma y la pirámide

Como te habrás dado cuenta, la representación de los cuerpos del espacio no refleja de forma exacta todas sus características, por ejemplo, en la figura 2.155a la cara *NORS* es un rectángulo, pero en la figura se ha representado como un paralelogramo. Esto hace necesario precisar una forma para representar los cuerpos en el plano, una de las más usadas es la *perspectiva caballera.*

Procedimiento para representar cuerpos en perspectiva caballera
Para representar un cuerpo en perspectiva caballera debes seguir las indicaciones siguientes:

1. Los segmentos en la dirección del ancho y la altura se representan con la misma dirección y longitud que tienen en el cuerpo que queremos representar.
2. Los segmentos en la dirección de la profundidad se trazan formando un ángulo de 45º con la horizontal y con la mitad de la longitud que tienen en el cuerpo (fig. 2.160 a) y b)).

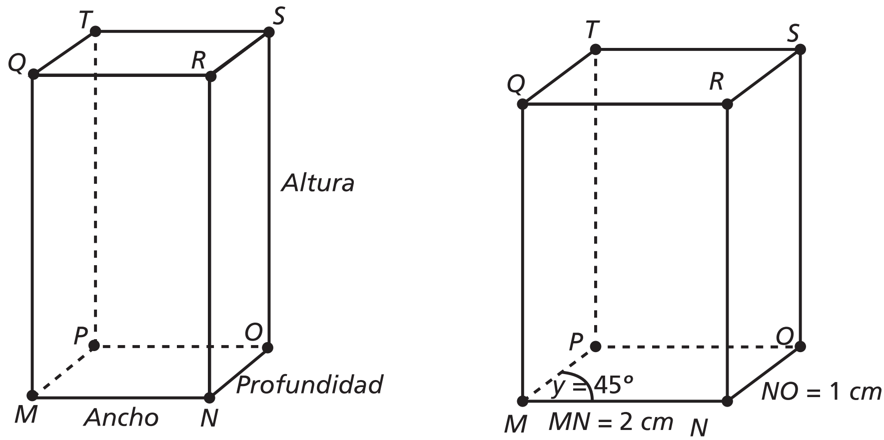


Fig. 2.160 a y b

Ejemplo 1:

Representa en perspectiva caballera un ortoedro de base cuadrada si sabes que las aristas de las bases miden 2 u y la altura 4,5 u.

Solución:

Denotemos por $ABCD$ y $EFGH$ las bases del ortoedro (fig. 2.161).

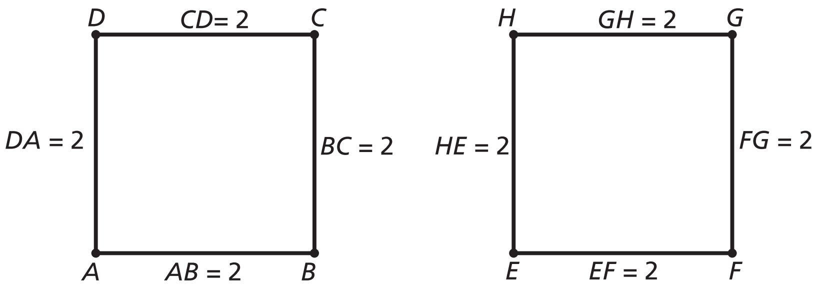


Fig. 2.161

1. Representemos la arista $\overline{AB}$ (ancho) (fig. 2.162).

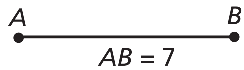


Fig. 2.162

2. Construyamos a partir del segmento $\overline{AB}$ un ángulo de 45° de vértice A (fig. 2.163).

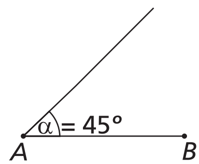


Fig. 2.163

3. Determinemos en la semirrecta obtenida el punto D, tal que $\overline{AD}$ = 1 cm (fig. 2.164).

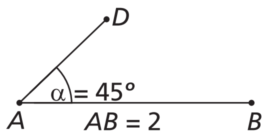


Fig. 2.164

4. Tracemos la paralela a $\overline{AB}$ por el punto D (fig. 2.165).

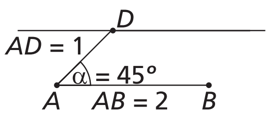


Fig. 2.165

5. Tracemos la paralela a $\overline{AD}$ por el punto B (fig. 2.166).

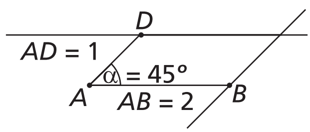


Fig. 2.166

6. Denotemos por C el punto de intersección de ambas paralelas (fig. 2.167).

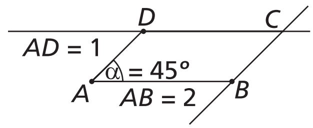


Fig. 2.167

7. Tracemos la recta perpendicular a $\overline{AB}$ que pasa por A (fig. 2.168).

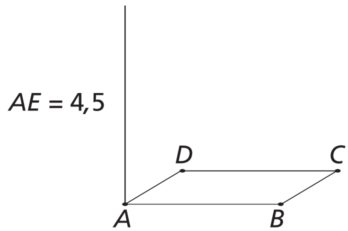


Fig. 2.168

8. Determinemos en la recta obtenida el punto E, tal que $\overline{AE}$ = 4,5 u (fig. 2.169).

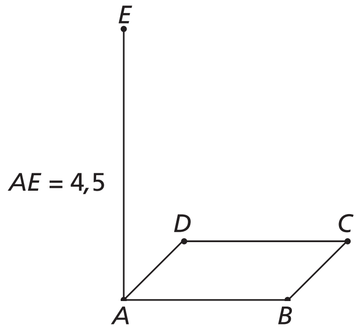


Fig. 2.169

9. Tracemos la recta perpendicular a $\overline{AB}$ que pasa por B (fig. 2.170).

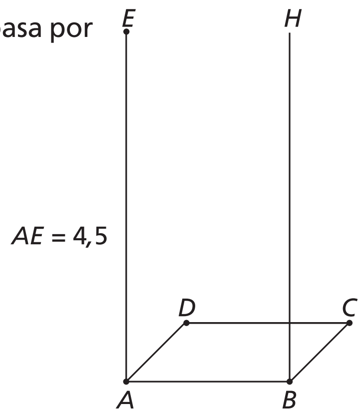


Fig. 2.170

10. Determinemos en la recta obtenida el punto F, tal que $\overline{BF} = 4{,}5$ u (fig. 2.171).

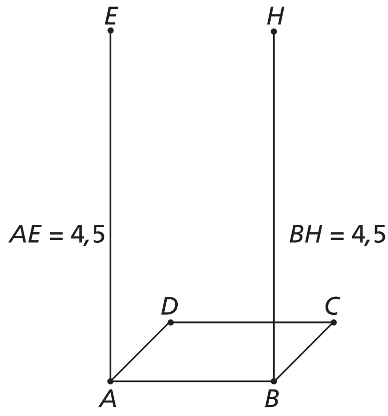


Fig. 2.171

11. Tracemos la recta perpendicular a $\overline{DC}$ que pasa por C (fig. 2.172).

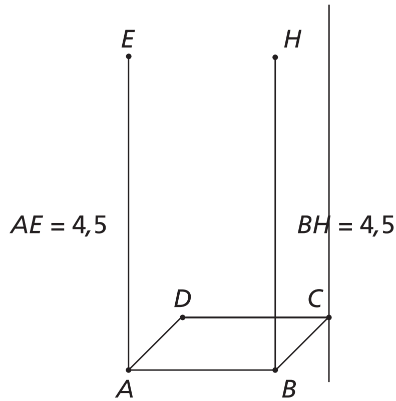


Fig. 2.172

12. Determinemos en la recta obtenida el punto G, tal que $\overline{CG} = 4{,}5$ u (fig. 2.173).

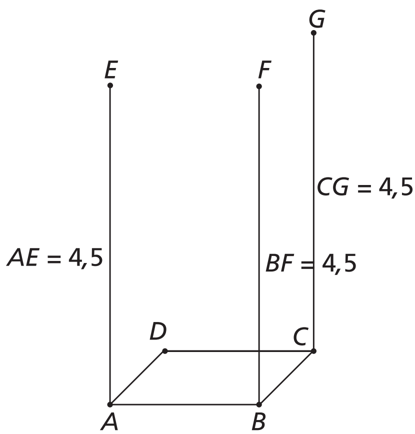


Fig. 2.173

13. Tracemos la recta perpendicular a $\overline{CD}$ que pasa por D (fig. 2.174).

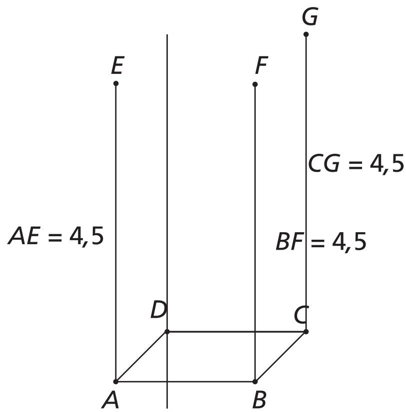


Fig. 2.174

14. Determinemos en la recta obtenida el punto H, tal que $\overline{DH} = 4{,}5$ u (fig. 2.175).

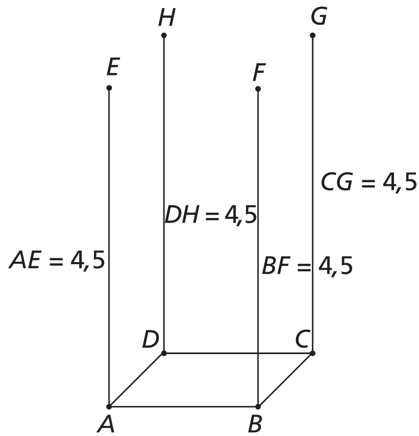


Fig. 2.175

15. Unimos los puntos que determinan el cuadrilátero $EFGH$ (fig. 2.176).

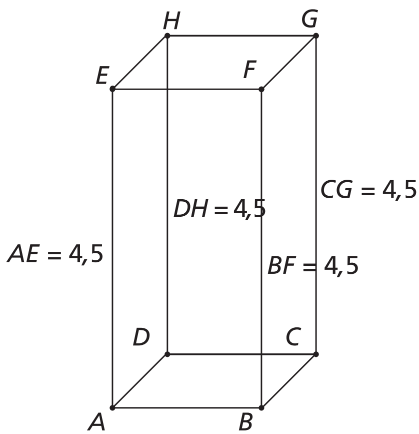


Fig. 2.176

16. Como las aristas $\overline{AD}$, $\overline{DC}$ y $\overline{DH}$ no son visibles, se representan con líneas discontinuas (fig. 2.177).

Hemos representado el ortoedro *ABCDEFGH*.

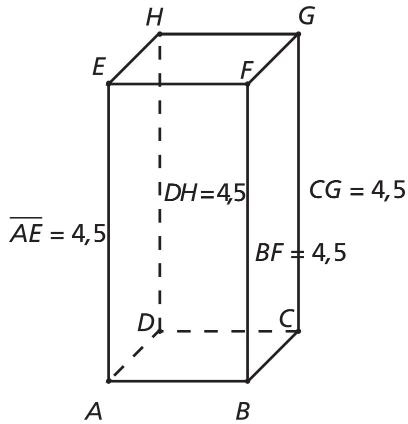


Fig. 2.177

Ejemplo 2:

Representa en perspectiva caballera una pirámide recta de base rectangular que tiene 6 u de ancho, 4 u de profundidad y 5 u de altura.

Solución:

Sea *MNOP* la base de la pirámide.

1. Representemos la arista $\overline{MN}$ (ancho) (fig. 2.178).

Fig. 2.178

2. Construyamos a partir del segmento $\overline{MN}$ un ángulo de 45° de vértice *M* (fig. 2.179).

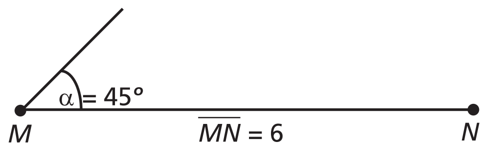


Fig. 2.179

3. Determinemos en la semirrecta obtenida el punto *P*, tal que $\overline{MP} = 2$ u (fig. 2.180).

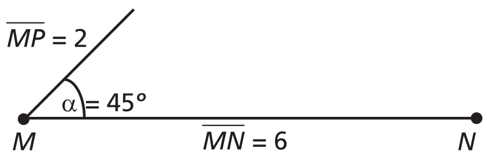


Fig. 2.180

4. Tracemos la paralela a $\overline{MN}$ por el punto *P* (fig. 2.181).

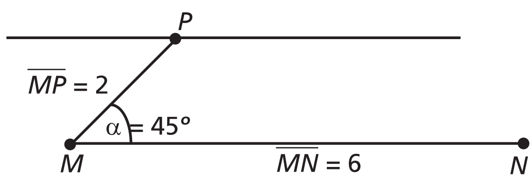


Fig. 2.181

5. Tracemos la paralela a $\overline{MP}$ por el punto N (fig. 2.182).

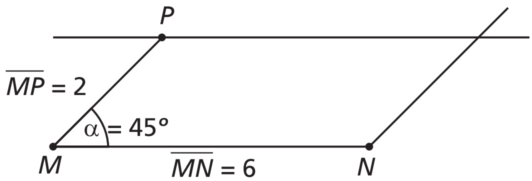


Fig. 2.182

6. Denotemos por O el punto de intersección de ambas paralelas (fig. 2.183).

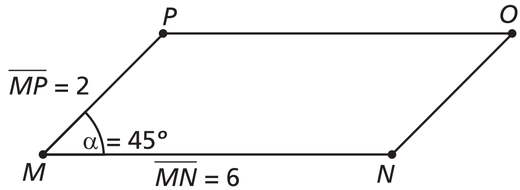


Fig. 2.183

7. Tracemos las diagonales del rectángulo *MNOP* (fig. 2.184).

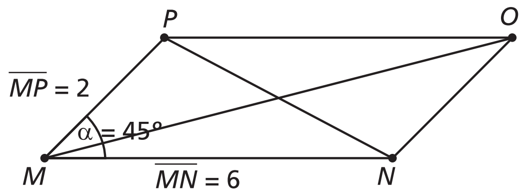


Fig. 2.184

8. Determinemos el punto S de intersección de las diagonales (fig. 2.185).

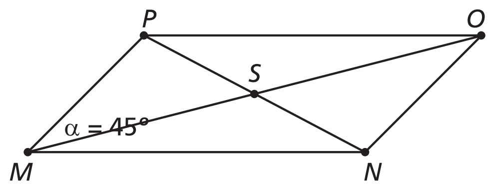


Fig. 2.185

9. Tracemos la recta perpendicular a $\overline{MO}$ que pasa por S (fig. 2.186).

10. Determinemos en la perpendicular trazada el punto Q tal que $\overline{SQ} = 5$ u (Fig. 2.187)

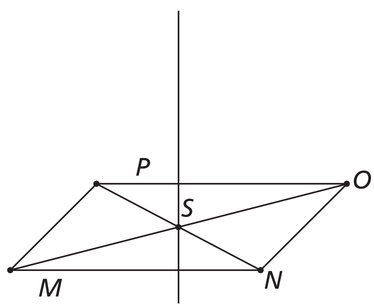


Fig. 2.186

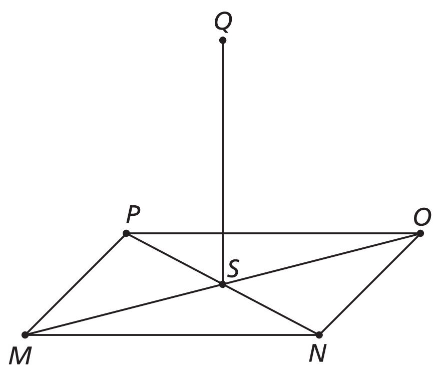


Fig. 2.187

11. Tracemos las aristas laterales del prisma (fig. 2.188).

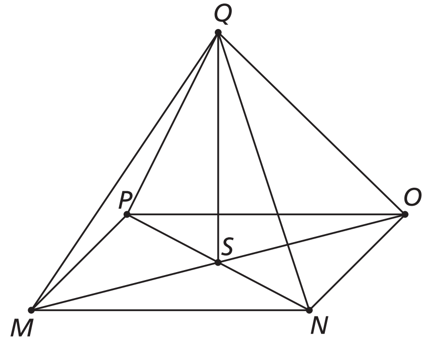


Fig. 2.188

12. Representemos con líneas discontinuas los segmentos no visibles: $\overline{OP}$, $\overline{PM}$, $\overline{NP}$, $\overline{MO}$, $\overline{SQ}$, $\overline{MQ}$ (fig. 2.189).

Hemos representado la pirámide *MNOPQ*.

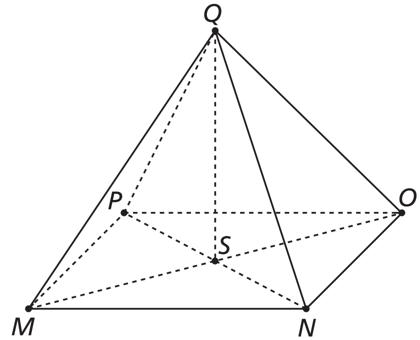


Fig. 2.189

Cuando la base del cuerpo geométrico es un polígono que no contiene ángulos rectos, nos auxiliamos del trazado de su altura, por ejemplo, ¿cómo construir un prisma triangular regular?

Ejemplo 3:

Construye un prisma recto cuya base es un triángulo equilátero de 4 u de lado si su altura tiene una longitud de 3,5 u.

Solución:

Sean *HIJKLM* el prisma y *HIJ* la base inferior.

1. Representemos el triángulo *HIJ* (fig. 2.190).

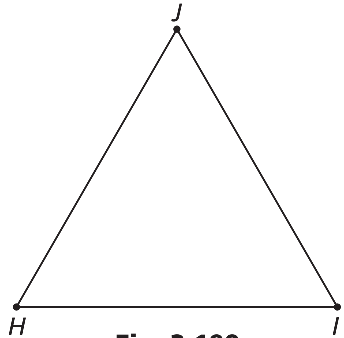


Fig. 2.190

2. Tracemos la altura relativa al lado *HI*, como el triángulo es equilátero, esta pasa por el punto medio del lado *HI*. Denotemos este punto por *X* (fig. 2.191).

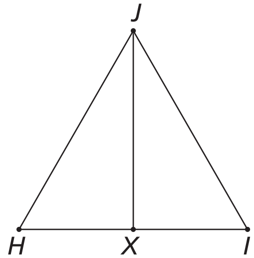


Fig. 2.191

3. Representemos en perspectiva caballera el triángulo *HIJ*. Tracemos el segmento $\overline{HI} = 4$ u y determinemos su punto medio *X* (fig. 2.192).

Fig. 2.192

4. Representemos la altura del triángulo *HIJ*. Para esto comenzamos por construir el ángulo $\sphericalangle IXJ = 45°$ (fig. 2.193).

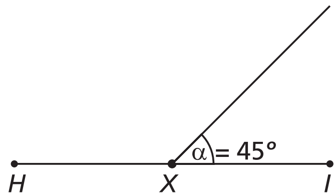


Fig. 2.193

5. Determinemos el punto *J*. Para esto necesitamos medir la longitud del segmento $\overline{XJ}$ (fig. 2.194).
   - ▶ $\overline{XJ} = 3{,}46$ u
   - ▶ $\frac{1}{2}(3{,}46\text{ u}) = 1{,}73\text{ u}$

   Luego, la representación del segmento $\overline{XJ}$ en perspectiva caballera debe medir 1,73 u.

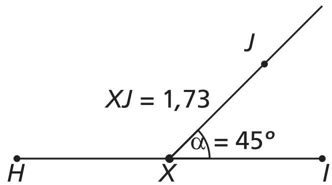


Fig. 2.194

6. Tracemos los segmentos $\overline{IJ}$ y $\overline{HJ}$ (fig. 2.195).

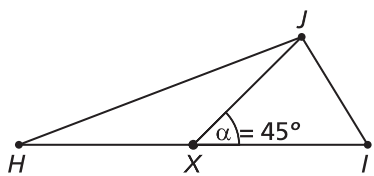


Fig. 2.195

7. Tracemos las aristas laterales del prisma (fig. 2.196).

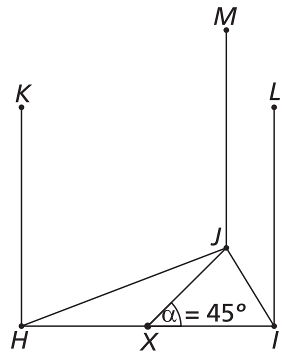


Fig. 2.196

8. Tracemos la base superior *KLM* (fig. 2.197).

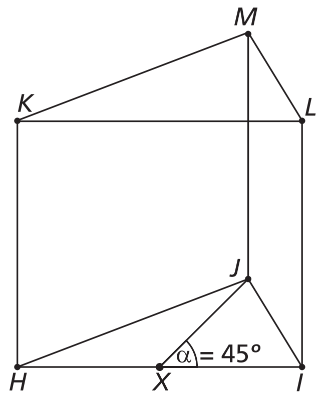


Fig. 2.197

9. Representemos en líneas discontinuas los segmentos no visibles: $\overline{HJ}$, $\overline{XJ}$, $\overline{IJ}$, $\overline{MJ}$ (fig. 2.198).

Hemos representado el prisma *HIJKLM*.

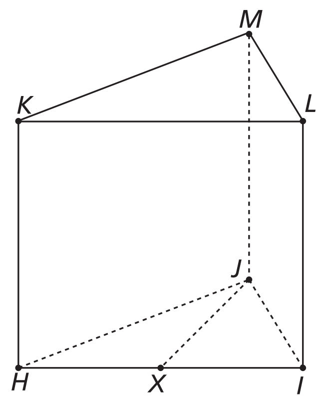


Fig. 2.198

Aplica tus conocimientos

Construye los cuerpos geometricos que realizamos en perspectiva caballera con el uso de un asistente matemático, utilizando un asistente matemático.

Ejercicios

1. Determina cuáles de las proposiciones siguientes son falsas. Fundamenta tu respuesta.
a) Las caras laterales de una pirámide son cuadrados.
b) El número de caras laterales de un prisma coincide con el número de lados de que tengan sus bases.
c) Los lados de las caras de un prisma se denominan aristas.
d) Las aristas de las caras laterales de una pirámide reciben el nombre de apotema.
e) En un prisma oblicuo la altura es menor que la arista lateral.

2. ¿Cuál es el menor número de caras laterales que puede tener una pirámide? ¿Por qué?

3. El número de caras que tiene una pirámide con siete vértices es:
a) Ocho caras b) Seis caras c) Siete caras

4. Dibuja en perspectiva caballera:
a) Un prisma de base cuadrada de 2,4 cm de lado, cuya altura mide 5,2 cm.
b) Una pirámide de 4,0 cm de altura, cuya base es un triángulo isósceles de lados *a*, *b*, *c* ($a = b = 5{,}0$ cm; $c = 3{,}0$ cm).

2.4.2 Cálculo de áreas de prismas y pirámides

Reflexiona un instante

Para regalarle a una amiga un pomo de perfume por su cumpleaños, Gabriela necesita saber si el pliego de papel de colores que su hermana le proporcionó le alcanza para forrar el estuche del perfume que tiene la forma de la figura 2.199. ¿Qué debe calcular Gabriela para saber si el pliego de papel le alcanza?

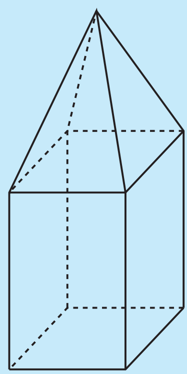


Fig. 2.199

Gabriela debe determinar el área del cuerpo geométrico que posee el pomo de perfume para saber la cantidad de papel que necesitará y poder responder.

¿Cómo calcular las áreas de estos cuerpos geométricos, si estos poseen caras laterales y bases?

Definición de área lateral de un cuerpo geométrico:

El **área lateral** de un cuerpo geométrico es la suma de las áreas de cada una de sus caras laterales.

Resulta muy útil el desarrollo de un cuerpo para calcular su área; esto no es más que el resultado de "abrir" el cuerpo y extenderlo en un plano, lo cual aplicaremos en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 1:

Representa el desarrollo de la pirámide *MNOPQ* de base rectangular (fig. 2.200).

Solución:

$A_L = A_{MNQ} + A_{NOQ} + A_{OPQ} + A_{PMQ}$

Como la base es un rectángulo, las caras *MNQ* y *OPQ* son triángulos iguales, lo mismo ocurre con las caras *NOQ* y *PMQ* (fig. 2.201), luego:

$A_L = 2\,A_{MNQ} + 2\,A_{NOQ}$

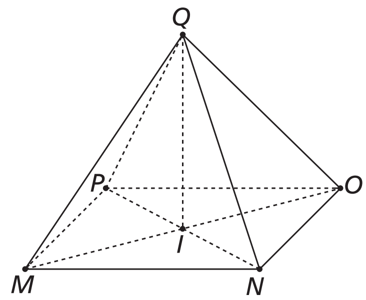


Fig. 2.200

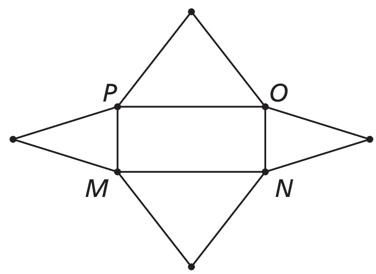


Fig. 2.201

Ejemplo 2:

Representa el desarrollo del prisma *HIJKLM* donde la base es un triángulo equilátero (fig. 2.202).

Solución:

$A_L = A_{HILK} + A_{IJML} + A_{JHKM}$

En este caso, como las bases son triángulos equiláteros, las caras laterales son rectángulos iguales.

$A_L = 3\,A_{HILK}$

El desarrollo del prisma *HIJKLM* queda como se muestra en la figura 2.203.

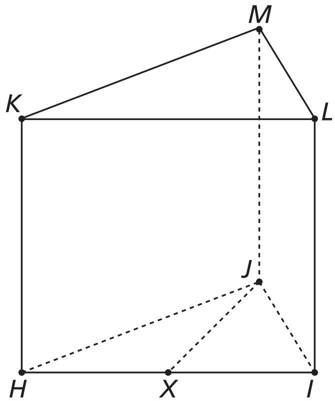


Fig. 2.202

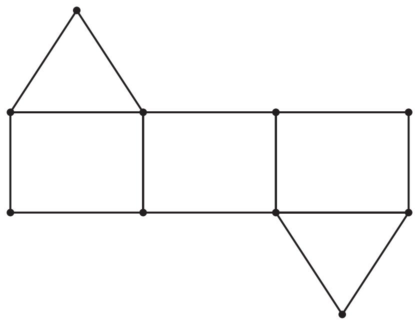


Fig. 2.203

Definición de área total de un cuerpo geométrico

El **área total** de un cuerpo geométrico es igual a la suma del área lateral y el área de las bases.

Ejemplo 2:

¿Mediante qué ecuación se puede calcular el área total de una pirámide?

Solución:

Se calcula mediante la ecuación:

$A_T = A_B + A_L$

En el caso de la pirámide *MNOPQ* (fig. 2.204), que la base es un paralelogramo sería:

$A_T = A_{MNOP} + A_L$

$A_T = A_{MNOP} + 2\,A_{MNQ} + 2\,A_{NOQ}$

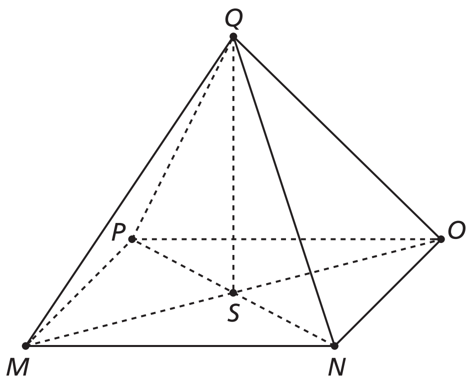


Fig. 2.204

Ejemplo 3:

¿Mediante qué ecuación se puede calcular el área total de un prisma?

Solución:

Observa que los prismas tienen dos bases (por ejemplo, ver fig. 2.177), que son polígonos iguales, por eso su área total se calcula mediante la ecuación: $A_T = 2\ A_B + A_L$.

En el caso del prisma *HIJKLM* (ver figura 2.202) cuya base es un triángulo equilátero, sería:

$A_T = 2\ A_{HIJ} + 3\ A_{HILK}$

Como puedes apreciar, el cálculo de las áreas de prismas y pirámides se reduce al cálculo del área de figuras planas, que ya conoces de grados anteriores.

Ejemplo 4:

Dado el prisma *ABCDEFGH*, si conoces que sus bases son rectángulos de lados iguales a 3,5 cm y 2,0 cm respectivamente y su altura tiene una longitud de 5,0 cm, represéntalo en perspectiva caballera y calcula su área lateral y su área total.

Solución (fig. 2.205):

$A_L = A_{ABFE} + A_{BCGF} + A_{CDHG} + A_{DAEH}$

$A_L = 2\ A_{ABFE} + 2\ A_{BCGF}$ (Como la base es un rectángulo $ABFE = CDHG$ y $BCGF = DAEH$)

$A_{ABFE} = \overline{AB} \cdot \overline{AE}$

$A_{ABFE} = 3{,}5\ \text{cm} \cdot 5\ \text{cm}$

$A_{ABFE} = 17{,}5\ \text{cm}^2$

$A_{BCGF} = \overline{BC} \cdot \overline{BF}$

$A_{BCGF} = 2\ \text{cm} \cdot 5\ \text{cm}$

$A_{BCGF} = 10\ \text{cm}^2$

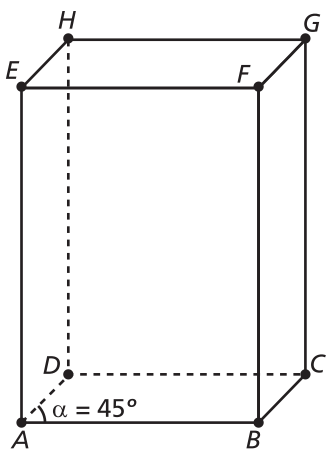


Fig. 2.205

$A_L = 2\ A_{ABFE} + 2\ A_{BCGF}$

$A_L = 2 \cdot 17{,}5\ \text{cm}^2 + 2 \cdot 10\ \text{cm}^2$

$A_L = 35\ \text{cm}^2 + 20\ \text{cm}^2$

$A_L = 55\ \text{cm}^2$

$A_B = A_{ABCD}$

$A_B = \overline{AB} \cdot \overline{AD}$

$A_B = 3{,}5\ \text{cm} \cdot 2\ \text{cm}$

$A_B = 7{,}0\ \text{cm}^2$

Como $A_{ABCD} = A_{EFGH}$, entonces:

$2\ A_B = 2\ A_{ABCD}$

$2\ A_B = 2 \cdot 7{,}0\ \text{cm}^2$

$2\ A_B = 14\ \text{cm}^2$

$A_T = 2\ A_B + A_L$

$A_T = 14\ \text{cm}^2 + 55\ \text{cm}^2$

$A_T = 69\ \text{cm}^2$

Ejemplo 5:

Dada la pirámide cuadrangular regular *RSTUV*, cuya arista de la base tiene 2,0 cm de longitud y la altura de cada cara es de 5,1 cm, represéntala en perspectiva caballera y calcula su área lateral y su área total.

Solución:

$A_L = A_{RSV} + A_{STV} + A_{TUV} + A_{URV}$

$A_L = 4\ A_{RSV}$ (como la base es un cuadrado, todas sus caras son iguales) (fig. 2.206).

$A_{RSV} = \frac{1}{2}\overline{RS} \cdot \overline{XV}$

$A_{RSV} = \frac{1}{2} \cdot 2\ \text{cm} \cdot 5{,}1\text{cm}$

$A_{RSV} = 5{,}1\ \text{cm}^2$

$A_L = 4\ A_{RSV}$

$A_L = 4 \cdot 5{,}1\ \text{cm}^2$

$A_L = 20{,}4\ \text{cm}^2 \quad A_B = A_{RSTU}$

$A_B = \overline{RS}^2$

$A_B = (2\ \text{cm})^2$

$A_B = 4\ \text{cm}^2 \qquad A_T = A_B + A_L$

$A_T = 4\ \text{cm}^2 + 20{,}4\ \text{cm}^2$

$A_T = 24{,}4\ \text{cm}^2$

$A_T \approx 24\ \text{cm}^2$

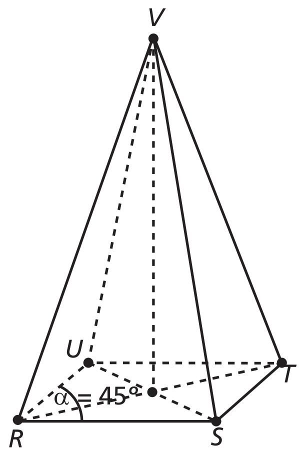


Fig. 2.206

Ejemplo 6:

Calcula el área total de los cuerpos representados en las figuras 2.207 y 2.208.

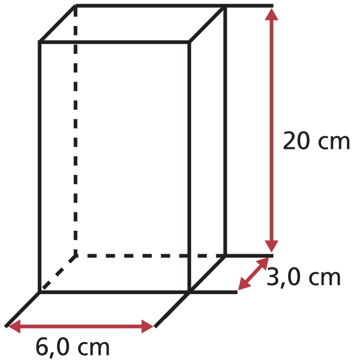
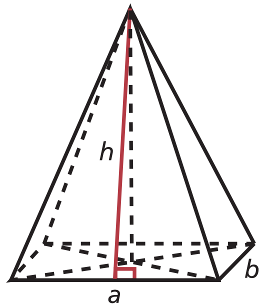


Fig. 2.207



a = b = 4,2 cm
h = 10,2 cm

Fig. 2.208

Solución:

La figura 2.207 representa un ortoedro cuyas dimensiones son:
a = 6,0 cm; b = 3,0 cm y c = 20 cm, entonces:

$A_T = 2\,A_B + A_L$

Calculemos primero el área de la base. Como es un rectángulo utilizaremos la ecuación:

$A_B = a \cdot b = 6{,}0 \cdot 3{,}0$

$A_B = 18\ \text{cm}^2$

Para calcular el área lateral debemos tener en cuenta que las caras son rectángulos y que las caras opuestas son iguales, por consiguiente:

$A_L = 2\,(a \cdot c) + 2\,(b \cdot c)$
$A_L = 2\,(a \cdot c + b \cdot c)$
$A_L = 2\,(6{,}0 \cdot 20 + 3{,}0 \cdot 20)$
$A_L = 2\,(120 + 60)$
$A_L = 2 \cdot 180$
$A_L = 360\ \text{cm}^2$

Solución:

En este caso se trata de una pirámide recta de base cuadrada (fig. 2.208). Las aristas de la base miden 4,2 cm y la apotema de las caras mide 10,2 cm. Utilizaremos la ecuación:

$A_T = A_B + A_L$

La base es un cuadrado, luego:

$A_B = a^2$
$A_B = (4{,}2)^2$

Las caras laterales son triángulos isósceles iguales, entonces el área lateral será igual a cuatro veces el área de una de las caras.

$A_L = 4\,A_{cara}$

$$A_L = 4\left(\frac{1}{2} b \cdot h\right)$$

$$A_L = 4\left(\frac{1}{2} \cdot (4{,}2 \cdot 10{,}2)\right)$$

$$A_L = 4\left(\frac{1}{2} \cdot 42{,}84\right)$$

$A_L = 4(21{,}42)$

$A_L = 85{,}68\ \text{cm}^2$

$A_T = 2\ A_B + A_L$

$A_T = 2 \cdot 18 + 360$

$A_T = 36 + 360$

$A_T = 384\ cm^2$

$A_T \approx 4,0\ dm^2$

$A_T = A_B + A_L$

$A_T = 17,64 + 85,68$

$A_T = 103,32\ cm^2$

$A_T \approx 1,0\ dm^2$

Ejemplo 7*:*

Halla el área lateral de un prisma recto cuya altura mide 5,4 m si la base es un rombo cuyas diagonales miden 6,0 m y 8,0 m.

Solución:

Para calcular el área lateral necesitamos conocer la longitud del lado del rombo (fig. 2.209).

Las diagonales d_1 y d_2 dividen la figura en cuatro triángulos rectángulos iguales, donde la hipotenusa es el lado a del rombo y los catetos corresponden a la mitad de cada una de las diagonales.

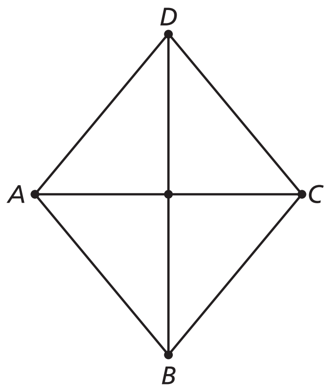


Fig. 2.209

Entonces, aplicando el teorema de Pitágoras se tiene:

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$$

$$a^2 = \left(\frac{6,0}{2}\right)^2 + \left(\frac{8,0}{2}\right)^2$$

$a^2 = 3,0^2 + 4,0^2$

$a^2 = 9,0 + 16$

$a^2 = 25$

$a = 5,0$ m

El área lateral será:

$A_L = 4 \cdot ah$

$A_L = 4 \cdot 5 \cdot 5,4 = 108\ m^2$

$A_L \approx 1,1\ dm^2$

Ejercicios

1. El área lateral de un prisma recto de 2,5 dm de altura, cuya base es un rectángulo de 1,6 m por 90 cm es igual a:

a) 125 cm^2 b) 1,2 m^2

c) $1,25 \cdot 10^{-3}$ km^2 d) Ninguno de los anteriores

2. Un prisma recto de base rectangular tiene una altura de 6,8 cm y las dimensiones de la base son 3,2 cm y 4,1 cm. Calcula su área lateral.

3. Calcula el área total de un prisma recto de 2,0 m de altura, cuya base es un cuadrado de 50 cm de lado.

4. Halla el área total de una pirámide cuadrangular regular si la altura de cada cara mide 8,15 dm y cada lado de la base mide 52,0 cm.

5. Determina el área total de un prisma cuya base rectangular tiene 90,00 cm de perímetro y 450,00 cm^2 de área y cuya altura mide 25,00 cm.

6. Las áreas total y lateral de un prisma son 3,629 cm^2 y 0,201 dm^2 respectivamente. ¿Cuál es el área de la base?

7. Las áreas total y lateral de una pirámide de base cuadrada miden 435 cm^2 y 2,91 dm^2 respectivamente. Calcula la longitud del lado de la base.

8. Si la altura de un prisma es de 6,6m y su base es un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 5,0 m y uno de sus catetos mide 3,0 m. Calcula el área de este cuerpo geométrico.

9. ¿Cuál es el área lateral de una pirámide triangular si cada lado de la base mide 10,0 m y la altura de cada cara es de 14,82 m?

10. Las aristas de un ortoedro miden 32, 54 y 8 cm. Calcula la diferencia entre el área total del ortoedro dado y la de un cubo que tenga el mismo volumen que el ortoedro.

11. Obtén una ecuación para calcular el área total de un cubo cuya arista es de longitud *a*.

2.4.3 Volumen del prisma

Investiga y aprende

¿Qué volumen tendrá el acuario más pequeño del mundo, si conoces que este acuario lo creó el artista ruso Anatoly Konenko, especialista en la construcción de réplicas a menor escala, con un tanque de 30,0 mm de longitud, 14,0 mm de ancho y 24,0 mm de altura[5]?

Fig. 2.210

En séptimo grado estudiaste el volumen del cubo y del ortoedro. El volumen del cubo se calcula mediante la ecuación $V = a \cdot a \cdot a = a^3$, donde a representa la longitud de una cualquiera de las aristas del cubo (fig. 2.211).

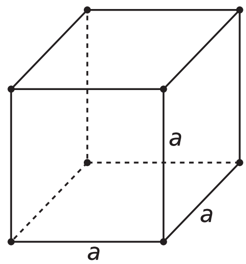


Fig. 2.211

Para calcular el volumen del ortoedro se utiliza la ecuación $V = a \cdot b \cdot c$, donde a, b y c representan las longitudes del largo, el ancho y la altura del ortoedro (fig. 2.212).

En ambos casos el producto de los dos primeros factores corresponde al área de la base de los cuerpos correspondientes; la base del cubo es un cuadrado y el producto $a \cdot a = a^2$ representa su área; análogamente el producto $a \cdot b$ es el área del rectángulo determinado por el largo y el ancho del ortoedro, es decir, su base.

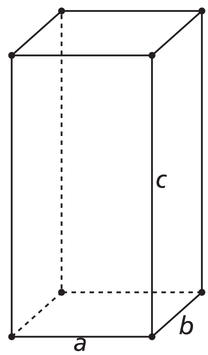


Fig. 2.212

El último factor de cada ecuación representa la longitud de la altura, para el cubo es a y para el ortoedro es c.

Estos cuerpos son prismas rectos y, en general, podemos utilizar la misma ecuación para calcular el volumen de cualquier

[5] Google, 16 de abril de 2012 y órgano de prensa *Juventud Rebelde*, 25 de septiembre de 2011

prisma. El área de la base se calcula en dependencia de cuál es el polígono de la base del prisma.[6] Por consiguiente en ambos casos la ecuación para calcular el volumen puede escribirse como:

Ecuación del volumen del prisma:

$$V = A_B \cdot h$$

Ejemplo 1:
Halla el volumen de un cubo de 3,5 cm de arista.

Solución:
$V = a^3 = (3{,}5 \text{ cm})^3 \approx 42{,}88 \text{ cm}^3$
$V \approx 43 \text{ cm}^3$

Ejemplo 2:
Halla el volumen de un ortoedro que tiene 4,00 cm de ancho, 6,00 cm de profundidad y 8,00 cm de altura.

Solución:
$V = a \cdot b \cdot c$
$= (4{,}0 \text{ cm}) \cdot (6{,}0 \text{ cm}) \cdot (8{,}0 \text{ cm})$
$= 192 \text{ cm}^3$
$= 0{,}19 \text{ dm}^3$

Ejemplo 3:
El área total de un cubo es igual a 96 cm². Halla su volumen.

Solución:

$A_T = 6\,a^2 = 96 \text{ cm}^2$	$V = a^3$
$a^2 = 96 \text{ cm}^2 : 6 = 16 \text{ cm}^2$	$V = (4 \text{ cm})^3$
$a = 4 \text{ cm}$	$V = 64 \text{ cm}^3$

Ejercicios

1. Halla el volumen de un prisma de 10,0 cm de altura, que tiene por base un cuadrado de 12,0 cm de lado.

[6] Colectivo de autores: *Matemática 7º grado*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1989, p. 183.

2. ¿Cuánto mide la altura de un prisma cuyo volumen es de 6,75 dm^3 si el área de la base es de 15 dm^2?

3. La base de un prisma recto es un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6,0 cm y 8,0 cm respectivamente. Halla el volumen del prisma sabiendo que su arista lateral mide 20 cm.

4. ¿Qué volumen de aire hay en una habitación herméticamente cerrada de 7,50 m de largo, 5,40 m de ancho y 3,20 m de altura?

5. ¿Cuántos metros cúbicos de hormigón serán necesarios para construir una cisterna de forma cúbica con capacidad para 8 000 L de agua si las paredes han de tener 0,20 m de grueso y el fondo, 0,12 m?

6. ¿Qué cantidad de arena se necesita para cubrir un parque rectangular de 15 m de largo y 38 m de perímetro con una capa de 1,0 dm de altura?

7. Un ortoedro tiene 12 in[7] de largo y su ancho y altura están en la razón 4:3. Halla su área total si se conoce que su volumen es de 576 in^3.

8. Se quiere construir un estanque en forma de prisma cuya base tenga 6,0 m^2 de área. ¿Qué altura debe tener el estanque si este debe almacenar hasta 15 m^3 de agua?

9. *Un cubo de 5,0 cm de arista ha sido construido con una cierta cantidad de cubos blancos de 1,0 cm de arista. Luego se pinta de negro el cubo construido.
a) ¿Cuántos cubos blancos forman el cuerpo?
b) ¿Cuántos cubos hay totalmente blancos?
c) ¿Cuántos cubos hay con una sola cara negra?
d) ¿Cuántos cubos hay con dos caras negras?
e) ¿Cuántos cubos hay con tres caras negras?

2.4.4 Volumen de la pirámide

Para obtener una relación entre el volumen de la pirámide y el del prisma podemos realizar el experimento siguiente:

[7] En el Sistema Internacional de Unidades la pulgada se representa por in, del inglés *inch.*

Aplica tus conocimientos

Construyamos un prisma y una pirámide de igual base y altura, de modo que podamos llenarlos de arena.

Llenamos de arena la pirámide y la vertemos en el prisma, así comprobaremos que será necesario hacer esta operación tres veces para que el prisma quede totalmente lleno.

Esto significa que el volumen del prisma es tres veces el volumen de la pirámide:

$V_{prisma} = 3 \cdot V_{pirámide}$, de donde: $V_{\text{pirÆmide}} = \frac{1}{3} V_{prisma}$[8]

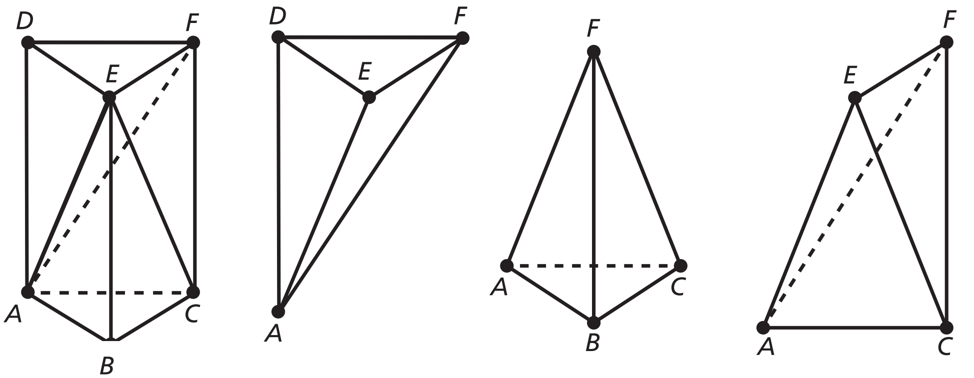
Podemos obtener así una expresión para calcular el volumen de la pirámide.

Ecuación del volumen de la pirámide:

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot h$$

Veamos ahora otra forma de obtener esta relación:

En el prisma recto *ABCDEF* de base triangular, tracemos la diagonal $\overline{AE}$ de la cara *ABED*, la diagonal $\overline{CE}$ de la cara *BCFE* y la diagonal $\overline{AF}$ de la cara *ACFD*. De esta manera el prisma se descompone en las pirámides oblicuas *AFDE*, *ABCE* y *ACFE* (fig. 2.213).



a) b) c) d)

Fig. 2.213

[8] Colectivo de autores: *Matemática* 7°. *grado,* Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1989, p. 184.

El volumen de la pirámide *AFDE* es igual al volumen de la pirámide *ABCE*, ya que sus caras *ABC* y *DEF* son iguales, según la definición de pirámide, y sus alturas *AD* y *BE* también son iguales, por ser aristas laterales del prisma recto (fig. 2.214).

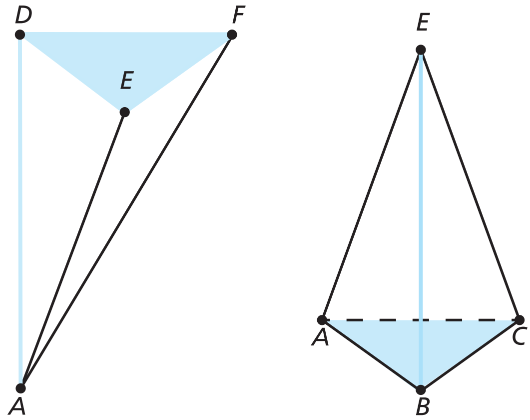


Fig. 2.214

Además, el volumen de la pirámide *ABCE* es igual al volumen de la pirámide *ACFE*, porque sus caras *BCE* y *CFE* son iguales, ya que la diagonal $\overline{CE}$ divide al rectángulo *BCFE* en dos triángulos iguales, como puedes observar en la figura 2.213 (a) y la altura $\overline{AC}$ es común a ambas pirámides (fig. 2.215).

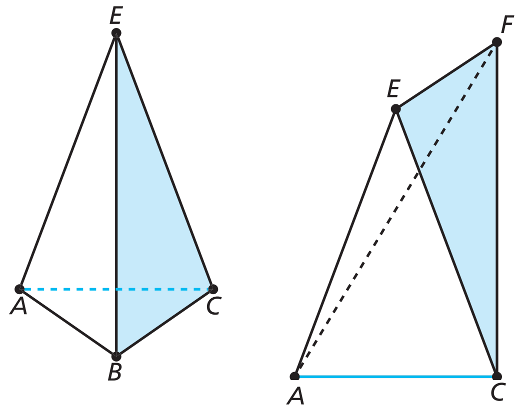


Fig. 2.215

Por consiguiente, según la propiedad transitiva se cumple que el volumen de la pirámide *AFDE* es igual al volumen de la pirámide *ACFE*, es decir, las tres pirámides tienen igual volumen.

El volumen del prisma *ABCDEF* es igual a la suma de los volúmenes de las tres pirámides, o sea, es igual al triplo del volumen de cualquiera de estas y, por tanto, el volumen de una de estas pirámides es la tercera parte del volumen del prisma.

$$V_{AFDE} = V_{ABCE} = V_{ACFE} = \frac{1}{3}V_{ABCDEF}$$

Este resultado puede ser generalizado para pirámides cuya base sea cualquier polígono, lo cual podrás demostrar en grados posteriores, es decir:

$$V_{\text{pirÆmide}} = \frac{1}{3}V_{\text{prisma}} \qquad\qquad V = \frac{1}{3}A_B \cdot h$$

Ejemplo 1:

Halla el volumen de una pirámide regular cuya base es un cuadrado de 4,0 m de lado y cuya altura mide 12 m.

Solución:

$$V = \frac{1}{3}A_B \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3}a^2 \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3}(4{,}0\ \text{m})^2 \cdot 12\ \text{m}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 12$$

$$V = 64\ \text{m}^3$$

Ejemplo 2:

Sobre dos caras opuestas de un cubo de 4,0 cm de arista se construyen dos pirámides regulares de 2,7 cm de altura. Halla el volumen del sólido formado (fig. 2.216).

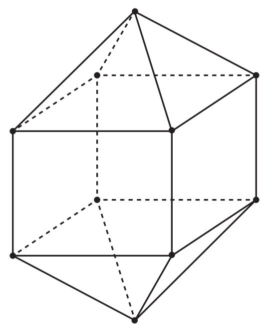


Fig. 2.216

Solución:

El volumen del sólido formado es la suma de los volúmenes del cubo y de las dos pirámides; estas tienen igual volumen, pues sus bases son iguales (por ser caras del cubo) y sus alturas tienen igual longitud.

$V_{cubo} = a^3 = (4{,}0)^3 = 64\ \text{cm}^3$

$$V_{\text{pirÆmide}} = \frac{1}{3}a_B \cdot h = \frac{1}{3}a^2 \cdot h = \frac{1}{3}4^2 \cdot 2{,}7 = 14{,}4\ \text{cm}^3$$

$V_{sólido} = V_{cubo} + 2\ V_{pirámide}$

$V_{sólido} = 64 + 14{,}4 = 78{,}4\ \text{cm}^3$

$V_{sólido} \approx 78\ \text{cm}^3$

Ejemplo 3:

De un cubo de 6,0 cm de arista se corta la porción *ABCD*. Halla el volumen de la porción restante del cubo (fig. 2.217).

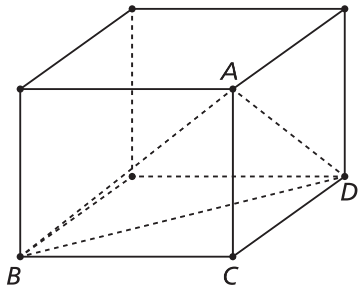


Fig. 2.217

Solución:

El volumen del cuerpo restante es igual a la diferencia entre el volumen del cubo y el volumen de la pirámide *ABCD*. La base de esta pirámide es el triángulo *BCD*, rectángulo en *C*, ya que $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ son aristas consecutivas del cubo.

Entonces:

$$A_B = \frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{CD} = \frac{1}{2}\cdot 6{,}0\cdot 6{,}0 = 18\ \text{cm}^2$$

Otra forma de calcular el área de la base es teniendo en cuenta que el triángulo *BCD* es la mitad de una cara del cubo, cuya área es igual a $a^2 = 36\ \text{m}^2$, con lo cual se tiene que $A_B = 18\ \text{cm}^2$.

$$V_{pir\acute{a}mide} = \frac{1}{3}A_B\cdot h = \frac{1}{3}18\ \text{m}^2\cdot 6{,}0 = 36\ \text{cm}^3$$

$$V_{cubo} = a^3 = (6{,}0)^3 = 216\ \text{cm}^3$$

$$V_{resultante} = 216 - 36 = 180\ \text{m}^3 = 1{,}80\ \text{dm}^3 \approx 1{,}8\ \text{dm}^3$$

Ejercicios

1. El volumen de una pirámide de 9,60 m de alto, siendo el área de su base de 5,0 m² es:

a) $48{,}0\ \text{m}^3$ b) $16\ \text{m}^3$ c) $24\ \text{m}^3$ d) $1.6\ \text{m}^3$

2. Una pirámide de base triangular posee una altura de 2,10 m, si las dimensiones del triángulo son base 0,40 m y altura 0,36 m. Calcula el volumen de la pirámide.

3. Calcula el volumen de una pirámide hexagonal regular de arista lateral 26,0 dm y lado de la base, 10,0 dm.

4. La base de una pirámide es un trapecio cuyas bases miden 4,0 y 2,5 dm respectivamente, y la altura 30 cm. La altura de la pirámide es de 5,0 m. Halla su volumen.

5. A una pirámide de 72,2 cm^3 de volumen se le da un corte paralelo a su base, de forma tal que se obtienen dos cuerpos (fig. 2.218). Si uno de estos es una pirámide de 4,3 cm de altura, cuya área de la base mide 12,6 cm^2, calcula el volumen del otro cuerpo.

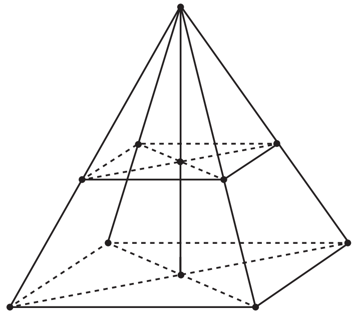


Fig. 2.218

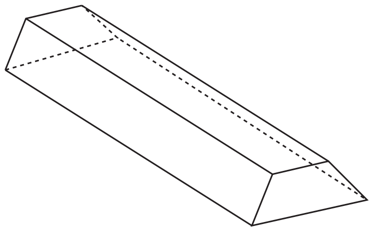


Fig. 2.219 (2)

6. Al preparar una línea de ferrocarril se levantó un terraplén de 80 m de largo y 3,0 m de altura. Su ancho superior es de 5,0 m y el inferior mide 10 m (fig. 2.219). Halla el volumen de tierra acumulada en el terraplén.

7. Un monumento está formado por un prisma de base cuadrada de 2,5 m de lado y 6,00 m de altura y por una pirámide apoyada sobre la base superior del prisma de modo que ambas bases coinciden. Halla el volumen del si su altura es de 15,5 m (fig. 2.20).

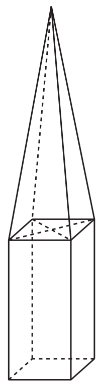


Fig. 2.220

8. Una pieza en forma de pirámide tiene un agujero cúbico de 20 mm de arista. La base de la pirámide es un cuadrado de 5,3 cm de lado y la altura de la pieza es de 8,0 cm (fig. 2.221). ¿Cuál es el volumen de la pieza?

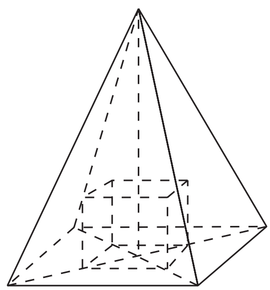


Fig. 2.221

9. Una cisterna mide 15 dm de largo, 12 dm de ancho y 75 cm de altura. Si usamos un recipiente de 12 L para extraer el agua, ¿cuántas veces será posible llenar el recipiente?

10. Una de las famosas pirámides de Egipto tiene una altura de 1,38 hm y uno de los lados de su base cuadrada mide 2,24 hm. ¿Cuál es su volumen?

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO

1. El ojo humano abarca horizontalmente un ángulo de 120°. Imagina una persona situada en el vértice de un pentágono regular. Haz la construcción y responde:
   a) ¿Cuántos de entre los demás vértices sería capaz de ver simultáneamente?
   b) ¿Y si se sitúa en el vértice de un hexágono regular?

2. Construye las tres mediatrices de un triángulo rectángulo inscrito en una circunferencia.
   a) ¿Dónde se cortan estas mediatrices?
   b) Observa detenidamente la construcción que realizaste y menciona todas las propiedades geométricas que se evidencian en esta.

3. Traza una circunferencia.
   a) Ubica en esta, cinco puntos que formen cinco arcos iguales.
   b) Une cada punto para formar un polígono.
   c) Nombra el polígono obtenido y calcula la amplitud de sus ángulos y de los arcos que determinan las cuerdas que forman sus lados.

4. Selecciona la respuesta correcta.

   4.1. Observa la esfera de un reloj, si el horario señala al número 12 y el minutero al número cinco, la amplitud del ángulo comprendido entre las agujas del reloj es:

   a) ___ 180° b) ___ 120° c) ___ 150° d) ___ 210°

   4.2. La amplitud del arco correspondiente al ángulo determinado anteriormente es de:

   a) ___ 30° b) ___ 210° c) ___ 150° d) ___ 300°

5. La figura 2.222 representa una instalación para practicar atletismo, los puntos *A* y *B* son los centros respectivamente de dos semicircunferencias concéntricas iguales donde el radio de la semicircunferencia exterior es de 49,70 m.

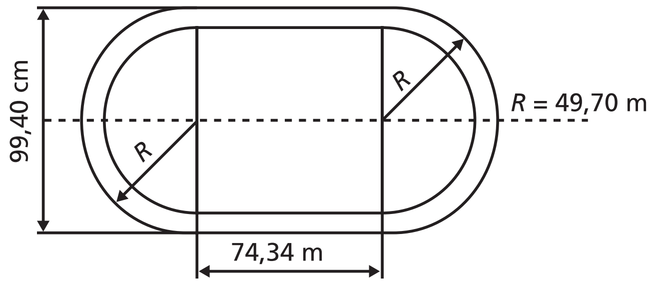


Fig. 2.222

a) ¿Qué longitud recorre un deportista que se mueva de *C* a *D, sobre el borde de la semicircunferencia mayor*?

b) ¿Cuál es el área de superficie que ocupa la instalación?

6. Sabiendo que el radio terrestre mide $6{,}378 \cdot 10^3$ km, calcula la longitud del Ecuador de la Tierra.

7. En un segmento $\overline{AB}$ con centro en *A* se traza una circunferencia de 5,0 cm de radio y con centro en *B* otra de 4,0 cm de radio. Completa este problema para que resulten dos problemas diferentes y resuélvelos.

8. Traza una circunferencia con un vaso. Determina el radio de esta circunferencia y elabora un problema.

9. Alberto no conoce la cantidad de cartulina que necesita para confeccionar un juego de fichas que tengan la misma superficie que las monedas de un peso. Completa los datos que le faltan a Alberto, elabora con estos un problema y resuélvelo.

10. La rueda de un camión tiene 90 cm de radio. ¿Cuánto avanza el camión cuando la rueda ha dado 100 vueltas?

11. En la cocina de la casa de Mariana hay un estante de 2,0 m de longitud para colocar platos como muestra la figura 2.223. ¿Cuantos platos cuyo diámetro es de 25 cm se pueden colocar en este estante?

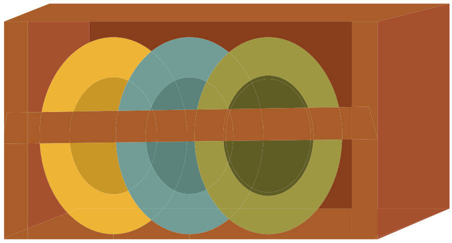


Fig. 2.223

12.* Laura, Raúl y Alex están sentados en el borde de una piscina circular. Raúl y Alex se encuentran en puntos diametralmente opuestos. Ambos se lanzan a nadar en línea recta en dirección a Laura. Cuando ya han nadado 10 m, Raúl está junto a Laura y a Alex aún le faltan 14 m. ¿Qué longitud tiene el borde de la piscina?

13. De las proposiciones siguientes marca las que son falsas y enuncia la propiedad verdadera para cada una.

a) ___ Dos triángulos cualesquiera son iguales si tienen respectivamente iguales sus tres ángulos.

b) ___ El diámetro es la mayor de todas las cuerdas de una circunferencia.

c) ___ El sector circular es la porción del círculo determinada por un ángulo inscrito.

d) ___ En una circunferencia las cuerdas que equidistan de su centro son diferentes.

e) ___ Desde un punto exterior a una circunferencia se trazan dos tangentes a la circunferencia y los segmentos determinados por el punto exterior y los puntos de tangencia son iguales.

f) ___ El volumen de un prisma de base rectangular es igual a la suma del doble del área de la base más el área lateral.

g) ___ Dos triángulos rectángulos son iguales si tienen respectivamente iguales los catetos.

h) ___ La amplitud de todo ángulo inscrito o seminscrito es igual a la del arco que determinan.

i) ___ La longitud de una circunferencia se determina por la ecuación $L = 2\pi d$.

j) ___ El centro de la circunferencia circunscrita a un polígono regular es el centro del polígono.

14. En la figura 2.224, aparecen representados diferentes elementos de una circunferencia.

Define cada uno de los que se mencionan a continuación:
Cuerda, diámetro, ángulo central, arco, ángulo inscrito, ángulo seminscrito, recta tangente.

Nombra también algunos ejemplos de estos.

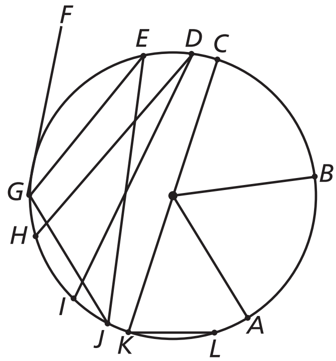


Fig. 2.224

15. Para inscribir un círculo en un triángulo se trazan sus:

a) ___ bisectrices b) ___ alturas c) ___ medianas
d) ___ diagonales e) ___ mediatrices

16. Completa los espacios en blanco, analizando los datos de la figura en cada caso:

a) *R* centro de la circunferencia (fig. 2.225).
P, *Q* están en la circunferencia
Si $\sphericalangle PRQ = 145°$, entonces $\widehat{PQ}$ = _____

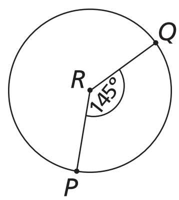


Fig. 2.225

b) *A*, *B*, *C* están en la circunferencia (fig. 2.226).
Si $\sphericalangle ACB = 60°$, entonces = $\widehat{AB}$_____

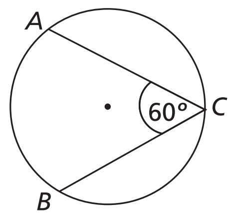


Fig. 2.226

c) *P*, *R* están en la circunferencia (fig. 2.227).
R es también un punto de la recta $\overline{RQ}$
Si $\widehat{PR} = 50°$, entonces $\sphericalangle PRQ$ = _____

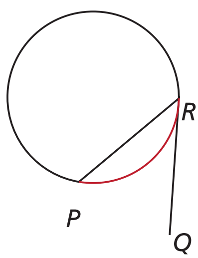


Fig. 2.227

d) *A*, *B*, *C* están en la circunferencia (fig. 2.228).

Si $\overset{\frown}{AB} = 42°$ entonces $\sphericalangle ACB =$ ____

e) *R* centro de la circunferencia (fig. 2.229).

P, *Q* están en la circunferencia

Si $\overset{\frown}{PQ} = 240°$ entonces $\sphericalangle PRQ =$ ____

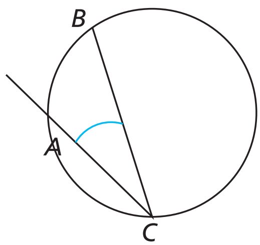


Fig. 2.228

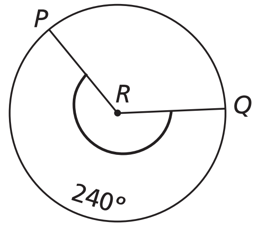


Fig. 2.229

16.1. Nombra el tipo de ángulo representado en la figura de cada inciso.

17. En la circunferencia (fig. 2.230) de centro *O* y diámetro $\overline{BC}$, $\overline{AH}$ y $\overline{AM}$ altura y mediana relativa a $\overline{BC}$ y $\overline{BH}$ respectivamente, ΔAMC isósceles de base $\overline{AC}$

Calcula la amplitud de los ángulos 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

18. La $C(O; \overline{OC})$ (fig. 2.231), $\overline{AB}$ diámetro, $\overline{BC} = \overline{OC}$, $\overline{BD}$ tangente a la circunferencia en *B*.

a) *Demuestra que:* $\Delta ACO = \Delta BCD$.

b) Si $\overline{AB} = 8{,}2$ cm calcula el área sombreada.

19. En la $C(O; \overline{OA})$ (fig. 2.232), $P, Q \in C$, $\overline{AB}$: diámetro; $\overline{MN}$: tangente en

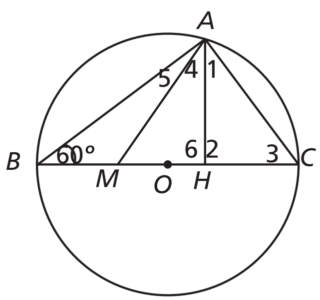


Fig. 2.230

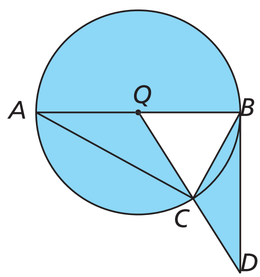


Fig. 2.231

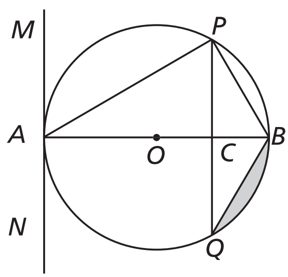


Fig. 2.232

A a la circunferencia dada y $\overline{PQ} \parallel \overline{MN}$.

Prueba que: ΔBPQ es isósceles.

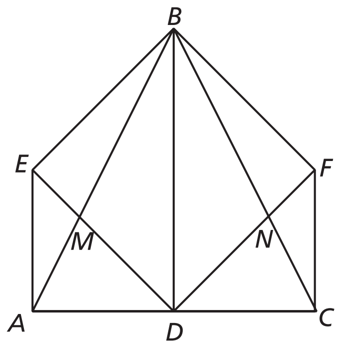


Fig. 2.233

20. En la figura 2.233, ΔACB isósceles de base $\overline{AC}$, $DFBE$ es un cuadrado cuya diagonal $\overline{BD}$ es altura del ΔACB y $\overline{AM} = \overline{CN}$.
Prueba que:
a) $\overline{EA} = \overline{CF}$
b) $\Delta DBM = \Delta DNB$

21. Demuestra que en todo paralelogramo los lados opuestos son iguales.

22. Demuestra que en todo paralelogramo los ángulos opuestos son iguales.

23. Demuestra que en todo paralelogramo las diagonales se bisecan.

24. Demuestra que si un triángulo ABC es isósceles de base $\overline{AB}$, entonces los ángulos de la base son iguales.

25. Demuestra que si un triángulo ABC es isósceles de base $\overline{AB}$, entonces la mediana de $\overline{AB}$ es bisectriz del ángulo ACB y también altura de dicho lado $\overline{AB}$.

26. Sea $ABCD$ un rectángulo, F es el punto medio de $\overline{AD}$ y $r_{BF} \cap r_{CD} = \{E\}$ (fig. 2.234).
a) Prueba que F es también el punto medio de $\overline{BE}$.
b) Si $\overline{DF} = 4{,}4$ cm y $\overline{DC} = 3{,}5$ cm, calcula el área del trapecio $BCDF$.
c) Clasifica el triángulo BCE según sus ángulos. Fundamenta tu respuesta.

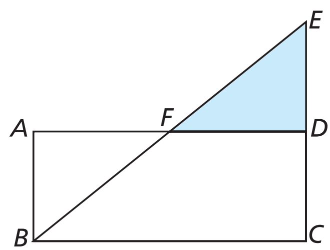


Fig. 2.234

27. Una de las técnicas que comúnmente se usan para el tratamiento del cultivo del tabaco consiste en protegerlo con una tela que se coloca sobre el campo de modo semejante a un mosquitero en forma de prisma.

Halla la cantidad de tela necesaria para cubrir un campo de 104 m de largo y 78 m de ancho si la tela debe alcanzar una altura uniforme de 2,5 m.

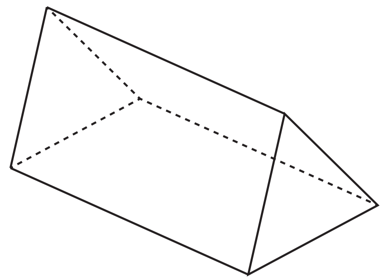


Fig. 2.235

28. Un pionero explorador ha levantado una tienda de campaña cuya forma aparece representada en la figura 2.235. La tienda de campaña tiene dos caras triangulares iguales de 1,8 m de base y 1,2 m de altura. Las otras caras son rectangulares y miden ambas 2,4 m de largo y 1,5 m de ancho. Halla la cantidad de lona que se necesitó para confeccionar la tienda.
(Fig. 2.235)

29. Halla el área total de un cubo equivalente a un ortoedro de 18 cm de largo, 16 cm de ancho y 6,0 cm de alto.

30. ¿Qué cantidad de tierra hay que extraer para abrir una cisterna en forma de ortoedro de 8,10 m de largo, 5,40 m de ancho y 1,80 m de profundidad?

31. Dos pirámides tienen igual altura. Sus bases son cuadradas, siendo el lado de uno de los cuadrados el doble que el lado del otro. ¿Qué relación existe entre sus volúmenes?

32. En La Habana hay una piscina llamada Complejo Baraguá que su base tiene forma rectangular, su perímetro es 150 m y uno de sus lados tiene un largo de 50 m. Diga cuál de las siguientes respuestas corresponde al ancho de la base de la piscina.
a) 100 m b) 25 m c) 50 m d) 150 m

33. Una piscina cuya forma es de prisma recto de base rectangular tiene 50 m de largo, 25 m de ancho y 400 cm de profundidad.
a) ¿Cuál es, en litros, su capacidad?
b) Si está hecha completamente con azulejos cuadrados de 0,04 m^2 de superficie, ¿cuántos azulejos se utilizaron?

34. Se quiere construir una columna de 20 m de altura y base h exagonal. Si los lados del hexágono miden 1 m, calcula, en metros cúbicos, el cemento necesario para construirla.

Para la autoevaluación

Reflexiona sobre lo aprendido

1. ¿Cuáles son los tipos de ángulos que respecto a una circunferencia puedes trazar?

2. ¿Qué características tienen cada uno de los ángulos que trazaste?

3. ¿Qué ecuación se utiliza para calcular la longitud de una circunferencia?

4. ¿Qué ecuación se utiliza para calcular el área de un círculo?

5. ¿Qué expresión matemática empleamos para determinar la longitud de un arco de circunferencia?

6. ¿Qué expresión matemática empleamos para determinar el área de un sector circular?

7. ¿Cuáles son los criterios de igualdad de triángulos que estudiaste?

8. ¿Qué ecuación se utiliza para calcular el volumen de todo prisma? ¿Y cuál para su área total?

9. ¿Qué ecuación se utiliza para calcular el volumen de toda pirámide? ¿Y cuál para su área total?

Autoexamen

1. La circunferencia de un círculo cuyo diámetro tiene el valor de 1 cm es de longitud:
   a) 1 cm   b) 6,48 cm   c) 3,14 cm

2. Se desea rodear de coníferas un jardín circular. El terreno ocupa una superficie de 314 m^2. ¿Cuántos pinos se pueden sembrar a una dis-

tancia de 6,28 m cada uno? Considere un punto el lugar que ocupará cada pino.

a) 50 pinos b) 20 pinos c) 100 pinos d) 10 pinos

3. Demuestra que los puntos medios de los lados de un triángulo isósceles ABC de base $\overline{AB}$ son vértices de otro triángulo isósceles.

4. Sea O el centro de una circunferencia C de radio $\overline{OQ}$. Q, P son puntos de C; N punto exterior de C donde se cortan las rectas QP y MO con $\overline{PN} = OP$; $\sphericalangle N = 40°$ (fig. 2.236).

a) Calcula la amplitud de $\sphericalangle PON$, $\sphericalangle OQP$.

b) Determina la amplitud del arco QP.

c) ¿Cuál es la amplitud del $\sphericalangle MOQ$?

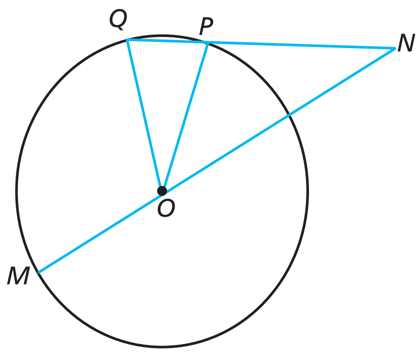


Fig. 2.236

5. Una cisterna mide 15 dm de largo, 12 dm de ancho y 7,5 dm de altura. Si usamos un recipiente de 12 L para llenarla, ¿ cuantas veces será necesario rellenar este recipiente?

CAPÍTULO 3

Variables, ecuaciones y funciones

3.1 Sistematización de la traducción de situaciones de la vida al lenguaje algebraico y viceversa

Reflexiona un instante

Lee detenidamente la información siguiente y traduce las situaciones de la vida al lenguaje algebraico:

Los Objetivos de Desarrollo del Milenio (ODM) se establecieron en el año 2000 en la llamada Cumbre del Milenio que organizó la ON*U* y fueron ocho en total: *reducir* a la *mitad* la pobreza extrema y el hambre; lograr la *enseñanza primaria* universal, *igualdad* de género y la *autonomía* de la mujer; *disminuir* la mortalidad infantil *en dos tercios*, *mejorar* la salud materna y *combatir* efectivamente el sida, el paludismo y otras enfermedades.[1]

Recuerda que...

Para realizar la traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico se deben identificar las palabras claves en el texto para expresarlas en el código de las variables, designando una variable a cada incógnita.

Para traducir del lenguaje algebraico al común se le debe asignar a las variables un significado.

Ejemplo 1:

Escribe en el lenguaje algebraico las situaciones prácticas siguientes señalando en cada caso el significado de la variable utilizada:

[1] Tomado de *Cubadebate*, 13 de junio de 2013.

a) La cantidad de estudiantes que solicitan ingresar a las escuelas pedagógicas es cuatro veces la cantidad de los estudiantes que solicitan gastronomía.
b) La tercera parte de los asistentes a una asamblea pioneril son hembras.
c) La cantidad de especies de anélidos aumentado en 81 500 representa la cantidad de especies de moluscos.
d) El 70 % de la población mundial se encuentra en Eurasia.
e) La cantidad de hembras de un grupo excede en 10 a la cantidad de varones.

Solución:

a) Palabras claves: cuatro veces
Traducción al lenguaje algebraico:
cantidad de estudiantes que solicitan gastronomía: $4x$
cantidad de estudiantes que solicitan ingresar a las escuelas pedagógicas: $4x$

b) Palabras claves: tercera parte
Traducción al lenguaje algebraico:
Asistentes a una asamblea pioneril: y
Cantidad de asistentes son hembras: $\frac{1}{3}y$ o $\frac{y}{3}$

c) Palabra clave: aumentado en
Cantidad de especies de anélidos: a
Cantidad de especies de moluscos: m
Traducción al lenguaje algebraico: $a + 81\,500 = m$

d) Palabra clave: 70 %
Población mundial: p
Traducción al lenguaje algebraico:
Población en Eurasia: .$\frac{70}{100}p$ o $\frac{7}{10}p$.

e) Palabras claves: excede en
Cantidad de hembras: h
Cantidad de varones: v
Traducción al lenguaje algebraico:
$h - 10 = v$
$h = v + 10$
$h - v = 10$

Ejemplo 2:

Traduce al lenguaje común las expresiones algebraicas siguientes:

a) $x + 5$ b) $2(a+b)$ c) $\frac{w}{10} + 5$ d) $3e$

Solución:

a) x: la cantidad de municipios de la provincia Cienfuegos
Traducción al lenguaje común: La cantidad de municipios de la provincia Cienfuegos aumentado en cinco.
Otro ejemplo: la estatura de Luis aumentada en cinco.

b) a: longitud del ancho de un rectángulo
b: longitud del largo de un rectángulo
Traducción al lenguaje común: la ecuación del perímetro de un rectángulo.
Otro ejemplo:
a: edad de un hermano
b: edad de otro hermano
Traducción al lenguaje común: el duplo de la suma de las edades de dos hermanos.

c) w: cantidad de árboles sembrados
Traducción al lenguaje común: la décima parte de los árboles sembrados aumentada en cinco.
Otro ejemplo: w: es un número
Traducción al lenguaje común: el 10% de un número aumentado en cinco.

d) e: consumo de electricidad de febrero
Traducción al lenguaje común: El triplo de electricidad consumida en febrero.
Otro ejemplo: El triplo de la cantidad de latas de mermeladas producidas por una Mipyme.

Ejercicios

1. Expresa utilizando variables las situaciones siguientes:

a) El cuádruplo de un número.
b) Seis veces un número.
c) Las tres quintas partes de un número.
d) El antecesor de un número natural.
e) Un número impar.
f) El 25 % de un número.
g) Dos números naturales consecutivos.

h) Un múltiplo entero de ocho.
i) Un número excede en cinco a otro número.
j) El triplo de un número aumentado en el 40 % de otro.

2. Traduce al lenguaje algebraico las situaciones prácticas siguientes:
a) La cantidad de piezas producidas por una fábrica.
b) Reducir a la mitad de la pobreza extrema y el hambre.
c) La quinta parte del área de un terreno se dedica al cultivo de cebollas.
d) La suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo isósceles.
e) El perímetro de un rombo.
f) La empresa provincial de construcción y mantenimiento (EPCOMA) de Guantánamo cerró el 2012 con una ganancia un 6 % superior a lo que había planificado.[2]
g) La cantidad de playas arenosas de la costa norte de Cuba excede en 61 a la cantidad de playas de la costa sur
h) El área de un triángulo rectángulo.
i) El 80 % de los gastos de una empresa.
j) Los índices de desocupación han crecido en Portugal en cinco años en un 10 %.[3]
k) El incremento de la promoción de una escuela en un 20 %.
l) El 90 % de los fumadores empiezan a fumar antes de los 19 años.[4]
m) Las dos terceras partes de los estudiantes de una escuela secundaria saben jugar ajedrez.
n) Al 60 % de los estudiantes de un grupo les gusta la asignatura Matemática.

3. En cada uno de los incisos siguientes selecciona, marcando con una X, la expresión algebraica correcta que refleja la situación planteada:

3.1 Si *y* es la longitud en centímetros de un segmento $\overline{MN}$, ¿cómo puedes representar la longitud de otro segmento que excede en 3,0 cm a la mitad de la longitud del segmento $\overline{MN}$?

a) ___ $2y + 3$ b) ___ $\frac{y}{2} + 3$

[2] Órgano de Prensa *Trabajadores*, 25 de marzo de 2013.
[3] Ibidem, 20 de mayo de 2013.
[4] Ibidem, 27 de mayo de 2013.

c) ___ $2y - 3$ d) ___ $\frac{y}{2} - 3$

3.2 Si p es el perímetro en metros de un terreno rectangular, ¿cómo puedes representar el perímetro de otro terreno que es mayor en 2,5 metros a la tercera parte de l perímetro del terreno rectangular?

a) ___ $3p + 2{,}5$ b) ___ $3p - 2{,}5$

c) ___ $\frac{p}{3} - 2{,}5$ d) ___ $\frac{p}{3} + 2{,}5$

3.3. Si x es la cantidad de lápices que tiene Daniel, ¿cómo puedes representar la cantidad de lápices que tiene Laura, si sabes que tiene cuatro lápices menos que el triplo de los que tiene Daniel?

a) __ $x - 4$ b) __ $3x + 4$ c) __ $3x - 4$ d) __ $4x - 3$

3.4 Tres paquetes de caramelos pesan 9 lb, el paquete (y) pesa el doble de lo que pesa el paquete (x), disminuido en media libra, y el paquete (z) pesa 1,5 lb más de lo que pesa el x. Si asumes que x, y, z son los pesos respectivos de los paquetes, la afirmación correcta es:

a) ___ $x = y = z$ b) ___ $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

c) ___ $z = x + \frac{1}{5}$ d) ___ $y = 2x - 0{,}5$

3.5 La edad de Josefina es x años, la edad de Pedro excede en cinco años al triplo de la edad de Josefina. La edad de Pedro puede expresarse como:

a) ___ $3x + 5$ b) ___ $3x - 5$ c) ___ $x - 5$ d) ___ $x + 5$

3.6 Carlos necesita representar utilizando el lenguaje algebraico el quíntuplo de la cuarta parte de un número aumentada en uno. Si x representa el número, ¿cuál de las expresiones siguientes debe utilizar?:

a) ___ $\frac{5}{4}x + 1$ b) ___ $5\left(\frac{x}{4} + 1\right)$

c) ___ $5\left(\frac{x+1}{4}\right)$ d) ___ Ninguna de las anteriores

3.7 La expresión algebraica, que significa el 75 % de un número n, disminuido en su duplo más cinco:

a) __ $\frac{3}{4}n - 2n + 5$ b) __ $\frac{3}{4}n - 2(n + 5)$

c) ___ $\frac{3}{4}n - \frac{1}{2}n + 5$ d) ___ $\frac{3}{4}n - (2n + 5)$

3.8 La tercera parte de un número es 36. Esta afirmación puede expresarse como:

a) ___ $\frac{1}{3}x = 36$ b) ___ $\frac{36}{3} = x$

c) ____ $x = 36$ d) ___ $3x = 36$

3.9 El sucesor del cuádruplo de un número natural puede expresarse como:

a) ____ $4x - 1$ b) ___ $4x + 1$

c) ____ $\frac{1}{4}x + 1$ d) ___ $\frac{1}{4}x - 1$

4. Completa la tabla siguiente:

Tabla 3.1

Situación matemática	Significado de la variable *m*	Expresión algebraica en función de la variable *m*	Valor numérico de la expresión para *m* = 5
Área de un cuadrado	*m*: longitud del lado del cuadrado	m^2	
El perímetro de un triángulo equilátero		$\frac{3}{5}m$	
El producto de un número natural y su sucesor			
		$\frac{1}{2}m + 3$	

3.1.1 Sistematización y profundización sobre las expresiones algebraicas

Aplica tus conocimientos

Por el Día del amor y la amistad el grupo de octavo grado, se propuso elaborar un buzón para que los estudiantes depositaran sus mensajes de felicitación a la persona deseada. Un estudiante trajo de su casa una caja como la que aparece en la figura 3.1 para forrarla con papeles de colores.

a) ¿Cómo puede saber el estudiante la cantidad de papel que tendría que utilizar para forrar la caja?

b) Escribe la expresión algebraica que le permita al estudiante calcular la cantidad de papel necesaria.

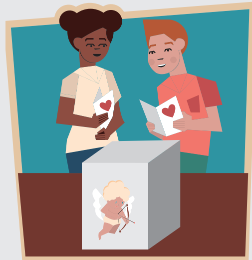


Fig. 3.1

Para saber la cantidad de papel que tendría que utilizar para forrar la caja, el estudiante tiene que calcular el área total de la caja, que en este caso es un ortoedro (fig. 3.1), luego, necesita calcular primero el área de la base y el área lateral.

Para escribir la expresión algebraica que le permite calcular el área total de la caja tiene primero que designar variables a las dimensiones del ortoedro o sea a las incógnitas o datos desconocidos.

a: longitud del ancho del ortoedro

b: longitud del largo del ortoedro

h: longitud de la altura del ortoedro

La expresión algebraica para calcular el área total es: $2ab + 2ah + 2bh$

Recuerda que...

- Una variable o combinaciones de variables y números por una o varias operaciones suelen llamarse expresiones algebraicas.
- Un monomio es un número, una variable o cualquier combinación de números y variables relacionados por las operaciones de multiplicación y potenciación, en la que las variables solo están elevadas a un exponente natural.
- Un polinomio es la suma de dos o más monomios que no son semejantes.

La expresión algebraica que permite calcular el área total de la caja que utilizarán como buzón los estudiantes está formada por tres monomios, si observas estos monomios recordarás que tienen un coeficiente y una parte literal, por ejemplo, en el monomio $2ab$, el coeficiente es 2 y la parte literal es ab.

Investiga y aprende

Observa los exponentes de las variables que aparecen en la parte literal de los monomios siguientes:

Determina si todos tienen los mismos valores.

Adiciona los exponentes de las variables que aparecen en la parte literal de cada monomio y averigua qué nombre recibe la suma obtenida.

a) $2ab$ b) $-3{,}75m^2n$ c) 97

Atención

La suma de los exponentes de las variables que aparecen en la parte literal de un monomio se le denomina grado del monomio.

Ejemplo 1:

Determina el grado de los monomios siguientes.

a) $-5{,}8t$ b) $4\frac{2}{3}m^2$ c) xy^2z d) 17

Solución:

a) Como la parte literal solo está conformada por la variable t que está elevada al exponente uno, entonces el monomio es de grado uno o de primer grado.
b) El grado del monomio es dos o de segundo grado.
c) En este monomio como la parte literal tiene tres variables adicionamos sus exponentes. Luego, el monomio xy^2z es de grado cuatro o de cuarto grado.
d) El monomio 17 es de grado cero.

Atención

El monomio que no tiene parte literal su grado es cero, pues la parte literal se considera que está elevada al exponente cero, recuerda que $x^0 = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$.

En general todos los números reales son monomios de grado cero.

Cuando los monomios tienen más de una variable puede determinarse su grado con respecto a una variable, por ejemplo, para el monomio $\frac{2p^4r^3}{3}$ su grado es cuatro con respecto a la variable p y tres con respecto a la variable r.

Reflexiona un instante

¿Cuál será el grado de la expresión algebraica siguiente?

$4p^2 + 8q^5 - 16m^3$

En este caso la expresión algebraica está formada por tres monomios que no son semejantes, el monomio $4p^2$ es de segundo grado, el monomio $8q^5$ es de quinto grado, el monomio $16m^3$ es de tercer grado; entonces, el grado de esta expresión algebraica que constituye un polinomio será el mayor grado de los monomios que lo componen. En este caso, el polinomio es de quinto grado.

Ejemplo 2:

Determina el grado de los polinomios siguientes:

a) $5x + 2$ b) $2m^2 + m - 5$

c) $6p - 3 + 11p^5 - p^3$ d) $7xy - x^2y^2 + 1 + 8xy^2 - 3x$

Solución:

a) **Tabla 3.2 (a)**

Monomio	Grado
$5x$	1
2	0

Luego, el término de mayor grado es $5x$, por tanto, el polinomio es de grado uno o de primer grado.

b) **Tabla 3.2 (b)**

Monomio	Grado
$2m^2$	2
m	1
-5	0

El término de mayor grado es $2m^2$, luego el grado del polinomio es dos o es un polinomio de segundo grado.

c) **Tabla 3.2 (c)**

Monomio	Grado
$6p$	1
-3	0
$11p^5$	5
p^3	3

El monomio de mayor grado es $11p^5$, luego el grado del polinomio es cinco o es un polinomio de quinto grado.

d) **Tabla 3.2 (d)**

Monomio	Grado
$7xy$	1
$-x^2y^2$	2
1	1
$8xy$	1
$-3x$	0

Observa que en este caso los monomios que conforman el polinomio tienen más de una variable, luego para determinar el grado de cada uno de estos hay que adicionar los exponentes de las variables.
Luego, el polinomio es de cuarto grado.

Atención

El grado de un polinomio es el mayor grado de los monomios que lo componen.

De la historia

El álgebra simbólica es la fase moderna del desarrollo del álgebra que se inicia con los trabajos del matemático francés Francoise Viéte (1540-1603) (fig. 3.2) al ser el primero en utilizar las letras para las incógnitas y desarrollar una notación que combinaba símbolos con abreviaturas y letras, llevando al álgebra a su fase simbólica tal y como hoy se emplea.

Fig. 3.2

Aplica tus conocimientos

Si las dimensiones de la caja para el buzón del día del amor de la situacion inicial fueran: 20,0 cm de ancho, 35,0 cm de largo y 50,0 cm de altura, ¿qué cantidad de papel necesitaría el estudiante para forrar la caja?

Para calcular la cantidad de papel necesario, determinaste el valor numérico de la expresión algebraica que se utiliza para determinar el área total del ortoedro (caja).

Ejemplo 3

Calcula el valor numérico de las expresiones algebraicas siguientes, para los valores de la variable que se indican.

a) $5mn^2$ para $m = 5$, $n = -1$

b) $\frac{3}{5}a - 5a$ para $a = -5a$

c) $2xy^2 + x^2y - 11$ para $x = 2$, $y = -3$

d) $\frac{p}{3q} - \frac{r}{s}$ para $p = 4$, $q = -1$, $r = \frac{2}{3}$, $s = -2$

Solución:

a) $5mn^2$ — Sustituir las variables por el valor asignado y efectuar las operaciones indicadas.

$= 5 \cdot 5 \cdot (-1)^2$

$= 25$

b) $\frac{3}{5}a - 5a$ — Sustituir las variables por el valor asignado. Efectuar las operaciones indicadas.

$= \frac{3}{5} \cdot (-5) - 5 \cdot (-5)$

$= -3 + 25$

$= 22$

c) $2xy^2 + x^2y - 11$ — Sustituir las variables por el valor asignado. Efectuar las operaciones indicadas.

$= 2 \cdot 2 \cdot (-3)^2 + 2^2 \cdot (-3) - 11$

$= 36 - 12 - 11$

$= 13$

d) $\frac{p}{3q} - \frac{r}{s}$ — Sustituir las variables por el valor asignado. Efectuar las operaciones indicadas.

$$= \frac{4}{3(-1)} - \frac{\frac{2}{3}}{-2} \qquad -\frac{\frac{2}{3}}{-2} = -\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$$

$$= -\frac{4}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{4}{3} + \frac{1}{3} = -1$$

Ejercicios

1. Determina el valor numérico de las expresiones algebraicas siguientes para los valores de las variables que se indican.

a) $3{,}5xy$ para $x = 3$, $y = -1$

b) $-2x + 3$ para $x = 8$

c) $0{,}4a + \frac{1}{2}$ para $a = -\frac{1}{4}$

d) $5a + b - 1$ para $a = -4$, $b = 2$

e) $-2{,}5c^2 + 4b - 0{,}5$ para $c = 2$, $b = 2\frac{1}{4}$

f) $3(x + 5) - x$ para $x = 2{,}7$

g) $6s^3t^2 - 3ts^2 + s$ para $s = -1$, $t = 2$

h) $5pq + r - 2$ para $p = \frac{2}{5}$, $q = -3$, $r = 1$

i) $2m - n^2$ para $m = \frac{1}{4}$, $n = -2$

j) $\frac{z^2 - 8z}{2}$ para $z = -4$

k) $36a^2b^2 - \frac{1}{2}a^{-1}b$ para $a = \frac{1}{2}$, $b = -3$

2. Completa la tabla siguiente:

Tabla 3.3

Expresión algebraica	$m = 2$	$m = -1$	$m = \frac{1}{4}$	$m = 1{,}5$
$-3m$				
$2m - 7$				
$4m^2 - 1$				
$m^2 + 3m + 2$				

3. Marca en cada uno de los incisos siguientes con una X, la *respuesta* correcta.

a) El valor numérico del polinomio $4x + 5y^2z$ para $x = 4$, $y = -1$, $z = 2$, es:

_____ 6 _____ 76 _____ 26 _____ 36

b) Si $m = 7$ y $n = -7$, entonces el valor numérico de $\frac{m}{m - n}$ es:

____ 0 ____ 2 ____ $\frac{1}{2}$ ____ No se puede calcular

c) Para $p = -1$, $q = 2$ el valor numérico de $\frac{q-2}{pq}$ es:

____ 1 ____ 0 ____ $\frac{3}{2}$ ____ $-\frac{3}{2}$

d) Cuando $-y = \frac{1}{2}$ el valor numérico de $-6\,(y^2 - y)$ es:

____ $\frac{3}{2}$ ____ $\frac{9}{2}$ ____ $-\frac{3}{2}$ ____ $-\frac{9}{2}$

4. Calcula el valor numérico de las expresiones algebraicas siguientes para los valores dados de las variables y determina al conjunto numérico más restringido al que pertenece.

a) $5mn^2 - 10$ para $m = -2{,}5$ y $n = 0{,}5$

b) $\left(\frac{xy}{8}\right)^2 + 7{,}8$ para $x = 3$, $y = -4$

c) $3(ab - 1) + a^2b - 2{,}2$ para $a = 1{,}2$; $b = 3{,}4$

d) $8rs + t - 5$ para $r = \frac{1}{4}$; $s = \frac{1}{3}$; $t = -\frac{2}{3}$

5. ¿Cuál es el valor numérico de la expresión algebraica $8mn + 4m^2 + 4n^2$ si $m = 0{,}75$ y $n = -0{,}25$?

6. Comprueba que el valor numérico del polinomio $9x^2 + 6xy + y^2$ para $x = -\frac{1}{3}$, $y = -5$, es un múltiplo de cuatro.

7. Determina el grado de los monomios siguientes:

a) $-5x^2$ b) $\frac{3}{5}a$ c) $8xy$ d) $2{,}7$

e) $2m^2n$ f) $a^3b^2c^4$ g) $11pq^3r^2$ h) $-2\frac{4}{7}w^3r^5$

8. Selecciona el monomio de mayor grado. Fundamenta tu respuesta.

a) ____ $7b^8$ b) ____ $-3{,}2x^2y^2z^3$

c) ____ $\frac{5}{11}m^2n^4$ d) ____ $4a^2b^4c^3$

9. Determina el grado de los polinomios siguientes:

a) $5p - 1$ b) $p^2 + 3p - 1$ c) $5m^2 - 7m + 8$

d) $2{,}8a^3 + 1{,}5a + 3$ e) $4x^2 + 4xy + y^2$

f) $-r^2t^2 + 6rt^2 + 9t^2$ g) $m^2n^2ñ^3 - 8mnñ^2 + 16ñ$

10. Escribe un polinomio y argumenta tu respuesta:

a) de primer grado   b) de segundo grado   c) de tercer grado

3.2 Operaciones con monomios y polinomios

Investiga y aprende

¿Cómo encontrar la expresión algebraica que se obtiene al dividir el área lateral y el perímetro de la base de un cuerpo geométrico como el que aparece en la figura 3.3 que permite calcular la longitud de su altura?

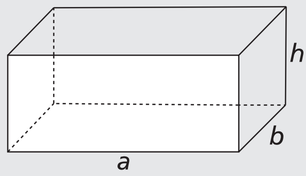


Fig. 3.3

Para buscar la idea de la solución te sugerimos escribir el área lateral de este cuerpo geométrico y su perímetro como una expresión algebraica e investigar cómo se pueden dividir los polinomios que se obtienen.

3.2.1 Adición y sustracción de polinomios

Aplica tus conocimientos

Escribe la expresión algebraica más reducida que te permite calcular el perímetro de la figura 3.4 formada por un rectángulo, un cuadrado y un triángulo rectángulo, si se conoce que: la longitud del lado más pequeño del rectángulo es dos unidades menor que la longitud del lado del cuadrado, la longitud de la hipotenusa del triángulo es una unidad mayor que el lado del cuadrado y la longitud del cateto menor es una unidad menos que la longitud del lado del cuadrado.

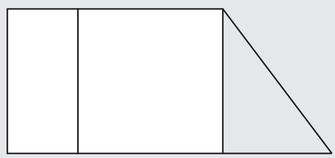


Fig. 3.4

Recuerda que...

Los términos o monomios semejantes tienen su parte literal igual.

Para reducir polinomios debes primero identificar los términos o monomios semejantes y luego reducirlos, o sea operar con estos.

Ejemplo 1

Reduce las expresiones algebraicas siguientes:

a) $2{,}4c + 5 - 1{,}2c$

b) $5y - 4z + 0{,}7z - 8y + y$

c) $4m^2n^3 + m^3n^3 - 4m^2n^3 + 3\frac{1}{2}n^3m^3$

d) $-5{,}3a + 3b - 7c + 2{,}5a + 1{,}7c - 8b + abc$

Solución:

a) $\underline{2{,}4c} + 5 \underline{- 1{,}2c} = 1{,}2c + 5$

b) $\underline{5y} \underline{- 4z} + \underline{0{,}7z} - \underline{8y} + \underline{y} = -2y - 3{,}3z$

c) $\underline{4m^2n^3} + \underline{\underline{m^3n^3}} - \underline{4m^2n^3} + \underline{\underline{3\frac{1}{2}n^3m^3}} = 4\frac{1}{2}m^3n^3$

d) $\underline{-5{,}3a} + \underline{\underline{3b}} - \underline{\underline{7c}} + \underline{2{,}5a} + \underline{\underline{1{,}7c}} - \underline{\underline{8b}} + abc$

$= \underline{-2{,}71a} \underline{\underline{- 5b}} \underline{\underline{- 5{,}3c}} + abc$

Reflexiona un instante

¿Cómo adicionar o sustraer dos o más polinomios, si en séptimo grado aprendiste a reducir términos de una expresión algebraica con la aplicación de los procedimientos para adicionar y sustraer números racionales, que constituyen el coeficiente de cada término semejante?

Ejemplo 2:

Adiciona los polinomios siguientes:

a) $(3m + n) + (m - 2n)$
b) $(2ab + c - 1) + (ab + 3c + 5)$
c) $(5y^2 + 2y - 3) + (5y + 3)$
d) $(zt - 3t) + (2zt + t - z) + (3zt + 5t + 2z - 3)$

Solución:

a) $(\underline{3m} + \underline{n}) + (\underline{m} - \underline{2n}) = 3m + n + m - 2n = 4m - n$
b) $(\underline{2ab} + \underline{c} - \underline{1}) + (\underline{ab} + \underline{3c} + \underline{5}) = 2ab + c - 1 + ab + 3c + 5 = 3ab + 4c + 4$
c) $(5y^2 + \underline{2y} \underline{- 3}) + (\underline{5y} + \underline{3}) = 5y^2 + 2y - 3 + 5y + 3 = 5y^2 + 7y$
d) $(\underline{zt} \underline{- 3t}) + (\underline{2zt} + \underline{t} \underline{- z}) + (\underline{3zt} + \underline{5t} + \underline{2z} - 3)$

Cuando los polinomios tengan más de tres monomios o términos, puedes colocar los sumandos en columna, ubicando los términos que son semejantes en la misma columna:

$$\begin{array}{l} \;\;zt - 3t \\ 2zt + \;\;t - \;\;z \\ \underline{3zt + 5t + 2z - 3} \\ 6zt + 3t + \;\;z - \;\;3 \end{array}$$

Atención

Para adicionar polinomios se reducen los términos semejantes.

La adición de polinomios es asociativa y conmutativa, es decir, los paréntesis en la adición de tres polinomios se pueden colocar indistintamente y el orden en que se tomen los sumandos no altera el resultado, es decir, para A, B y C polinomios se cumple que $(A + B) + C = A + (B + C)$ y $A + C = C + A$.

Para **sustraer dos polinomios** se procede de manera análoga a la sustracción de números racionales, es decir **al polinomio que es el minuendo se le adiciona el polinomio que es el sustraendo cambiándole el signo a cada uno de sus términos y después se reducen los términos semejantes.**

Ejemplo 3:

Sustrae los polinomios siguientes:

a) $(2m + 3n) - (m + n)$
b) $(5x + 3) - (x - 6)$
c) $(3x^3y^2 + 5x^2y - 2x) - (x^3y^2 + 2x^2y - x)$
d) $(abc - 3ab + bc - 8) - (-4abc + 2ab - 3bc + 3)$

Solución:

a) $(2m + 3n) - (m + n)$
$= 2m + 3n - m - n$ (se cambia el signo de los términos del sustraendo)
$= m + 2n$ (se reducen los términos semejantes).

b) $(5x + 3) - (x - 6)$
$= 5x + 3 - x + 6 = 4x + 9$

c) $(3x^3y^2 + 5x^2y - 2x) - (x^3y^2 + 2x^2y - x)$
$= 3x^3y^2 + 5x^2y - 2x - x^3y^2 - 2x^2y + x$
$= 2x^3y^2 + 3x^2y - x$

d) $(abc - 3ab + bc - 8) - (-4abc + 2ab - 3bc + 3)$

$= abc - 3ab + bc - 8 + 4abc - 2ab + 3bc - 3$

$= 5abc - 5ab + 4bc - 11$

Investiga y aprende

Conoces que la adición de polinomios es conmutativa, ¿será la sustracción de polinomios también conmutativa? Te sugiero investigar con la comprobación de varios ejemplos.

Atención

Observa que los polinomios se encuentran escritos entre paréntesis; en la práctica se están eliminando los paréntesis, para lo que siempre debes tener en cuenta que cuando los paréntesis están precedidos de:

- un signo más (+) se eliminan dejando cada término del polinomio con el mismo signo.
- un signo menos (–) se eliminan cambiando el signo de cada término del polinomio.

Ejemplo 4:

Calcula:

$8x^2 - (7xy - x^2 + 3xy^2) + (xy - 2y^2)$

Cambia el signo de cada término

$= 8x^2 \underline{- 7xy + x^2 - 3xy^2} \underline{+ xy - 2y^2}$

No hay cambio de signo de cada término

$= 9x^2 + 6xy - 3xy^2 - 2y^2$

De la historia

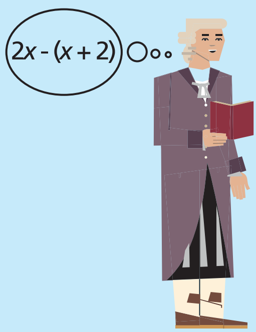


Fig. 3.5

El uso de los paréntesis en Matemática fue introducido por primera vez por el francés Albert Girard (1595-1632) en su libro *Invention Nouvelle en Algebre* (Fig. 3.5), donde también enuncia el teorema fundamental del álgebra, y usa la raya colocada entre el numerador y el denominador.

Los paréntesis se utilizan en Matemática, entre otras cosas, para el cálculo numérico y con variables donde es importante el orden operacional. También se utilizan otros signos de agrupación como el corchete y la llave.

Ejemplo 5:

Elimina los paréntesis y reduce términos semejantes.

a) $x^2y + (3x^2y + xy^2)$

b) $2rt - (5 + rt)$

c) $(7b - 2) - (3b - 5)$

d) $3ab + (7 - 4ab) - 5ab - (2ab + 3)$

Solución:

a) $x^2y + (3x^2y + xy^2) = x^2y + 3x^2y + xy^2 = 4x^2y + xy^2$

b) $2rt - (5 + rt) = 2rt - 5 - rt = rt - 5$

c) $(7b - 2) - (3b - 5) = 7b - 2 - 3b + 5 = 4b + 3$

d) $3ab + (7 - 4ab) - 5ab - (2ab + 3) = 3ab + 7 - 4ab - 5ab - 2ab - 3 = -8ab + 4$

Para facilitar la realización de las operaciones con polinomios, en ocasiones es conveniente asociar algunos de sus términos con la utilización de los paréntesis, que pueden estar precedidos de signo "+" o de signo "–". En este caso se dice que se introducen los paréntesis.

Atención

Si se introduce un paréntesis que estará precedido por el signo:

- más (+) los términos que se colocan dentro del paréntesis mantienen su signo.
- menos (–) los términos que se colocan dentro del paréntesis cambian su signo.

La introducción de paréntesis es el procedimiento inverso de la eliminación de paréntesis.

Eliminación de paréntesis

$$8x^2 - (7xy - x^2 + 3y^2) + (xy - 2y^2)$$
$$= 8x^2 - \underbrace{7xy + x^2 - 3y^2}_{\text{Cambia el signo de cada término}} + \underbrace{xy - 2y^2}_{\text{No hay cambio de signo}}$$

Introducción de paréntesis

$$8x^2 - 7xy + x^2 - 3y^2 + xy - 2y^2$$
$$= 8x^2 - \underbrace{(7xy + x^2 - 3y^2)}_{\text{Cambia el signo de cada término}} + \underbrace{(xy - 2y^2)}_{\text{No hay cambio de signo}}$$

Ejemplo 6:

En el polinomio $3x^3 + 5x^2 - x + 2$

a) Introduce en un paréntesis, que esté precedido por el signo +, al segundo y tercer término del polinomio.

b) Encierra en un paréntesis, que esté precedido por el signo –, al tercero y cuarto términos del polinomio.

Solución:

a) $3x^3 + 5x^2 - x + 2 = 3x^3 + (5x^2 - x) + 2$

b) $3x^3 + 5x^2 - x + 2 = 3x^3 + 5x^2 - (x - 2)$

Reflexiona un instante

En la práctica muchas veces es necesario que polinomios que se encuentran entre paréntesis se incluyan dentro de otros paréntesis; para evitar confusiones se emplean otros signos de agrupación como son los corchetes ([ ]) y las llaves ({ }), incluidos unos dentro de otros, pero ¿cómo eliminar estos signos de agrupación? ¿Consideras que el procedimiento sea análogo al que se utiliza con los paréntesis, por cual signo de agrupación se debe comenzar a eliminar?

Te propongo eliminar los signos de agrupación del ejercicio siguiente, de manera que comiences por el signo de agrupación interior o el que se encuentra adentro y otro estudiante de tu grupo lo haga comenzando por el signo de agrupación exterior o el que se encuentra afuera.

Procedimiento para eliminar los signos de agrupación "de adentro hacia afuera"

$7q + \{3p - [2q - (q + p)] - 11\}$	Eliminar paréntesis
$= 7q + \{3p - [2q - q - p] - 11\}$	Reducir términos semejantes
$= 7q + \{3p - [q - p] - 11\}$	Eliminar corchetes
$= 7q + \{3p - q + p] - 11\}$	Reducir términos semejantes
$= 7q + \{4p - q - 11\}$	Eliminar llaves
$= 7q + 4p - q - 11$	Reducir términos semejantes
$= 6q + 4p - 11$	

Procedimiento para eliminar los signos de agrupación "de afuera hacia adentro"

$7q + \{3p - [2q - (q + p)] - 11\}$	Eliminar llaves
$= 7q + 3p - [2q - (q + p)] - 11$	Eliminar corchetes
$= 7q + 3p - 2q + (q + p) - 11$	Reducir términos semejantes
$= 5q + 3p + (q + p) - 11$	Eliminar paréntesis
$= 5q + 3p + q + p - 11$	Reducir términos semejantes
$= 6q + 4p - 11$	

Atención

Las expresiones algebraicas que contienen varios signos de agrupación incluidos uno dentro de otros suele decirse que tienen paréntesis superpuestos.

Los signos de agrupación superpuestos sucesivamente se pueden eliminar de adentro hacia afuera o de afuera hacia dentro, siempre observando el signo ("+" , "–") que precede al signo de agrupación que se va a eliminar. También es conveniente que reduzcas los términos semejantes que aparecen dentro del signo de agrupación antes de eliminarlo, porque reduce el número de términos que hay que extraer y facilita el trabajo.

Ejemplo 7:

Simplifica las expresiones algebraicas siguientes:

a) $m - [2n + (5n + m)]$
b) $3xy + [5 - (2xy + 3)]$
c) $5p + [2p - (p - 1)\quad]$
d) $7 - [2a - (3b - 5)] + 8a$

Solución:

a) $m - [2n + (5n + m)] = m - [2n + 5n + m] = m - [7n + m]$
$= m - 7n - m = -7n$

b) $3xy + [5 - (2xy + 3)] = 3xy + [5 - 2xy - 3]$
$= 3xy + [2 - 2xy]$
$= 3xy + 2 - 2xy$
$= xy + 2$

c) $5p + [2p - (p - 1)] = 5p + [2p - p + 1] = 5p + [p + 1]$
$= 5p + p + 1] = 6p + 1$

d) $7 - [2a - (3b - 5)] + 8a = 7 - [2a - 3b + 5] + 8a$
$= 7 - 2a + 3b - 5 + 8a$
$= 2 + 6a + 3b$

Ejemplo 8:

Sea la expresión algebraica $7uv^2 - [5 - (2uv^2 - 3u) - 7u]$.

a) Elimina los signos de agrupación en la expresión algebraica.
b) Calcula el valor numérico de la expresión obtenida para $v = 0{,}5$ y $u = -2$.

Solución:

a) $7uv^2 - [5 - (2uv^2 - 3u) - 7u] = 7uv^2 - [5 - 2uv^2 + 3u - 7u]$

$= 7uv^2 - [5 - 2uv^2 - 4u]$

$= 7uv^2 - 5 + 2uv^2 + 4u$

$= 9uv^2 - 5 + 4u$

b) $9uv^2 - 5 + 4u$

$= 9 \cdot (-2) \cdot (0{,}5)^2 - 5 + 4 \cdot (-2)$

$= -18 \cdot 0{,}25 - 5 - 8$

$= -17{,}5$

Ejemplo 9:

Sean $H = 11m^3n^2p + 7n^2p - 3$ y $K = 5m^3n^2p - 13$.

Calcula: H – K.

Solución:

$H - K$

$= (11m^3n^2p + 7n^2p - 3) - (5m^3n^2p - 13)$

$= 11m^3n^2p + 7n^2p - 3 - 5m^3n^2p + 13$

$= 6m^3n^2p + 7n^2p + 10$

(Para sustituir las letras por los polinomios se introducen paréntesis porque es una sustracción de polinomios y se debe diferenciar el minuendo del sustraendo)

Ejercicios

1. Reduce los términos semejantes en las expresiones algebraicas siguientes:

a) $7p - 3p + 5p$

b) $\frac{2}{3}d - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}d - \frac{2}{3} + 3d$

c) $4jk + 8 + 2jk - 6 - 7jk$

d) $q^3 + 2q^2 - 2q^3 + 7q - 5q^2 + 1$

e) $2w^2 - 6wv + wv - v^2$

f) $a^2b - ab + a^2b + 3ab - 6ab^2$

g) $12x^3y^2 - 4x^2y + x^3y^3 - 3x^3$

h) $5{,}6\ e^2g^2h + 0{,}3\ eg^2h + 1{,}2\ e^2g^2h - 7{,}8\ eg^2h$

i) $-st + 8s^2t - 5st + 3st^2 + 2st - 10st$

j) $\frac{2}{5}a^3bc^2 - 5 + 3a^3b^2c - \frac{1}{5}a^3bc^2 + 2a^3b^2c + 10 - a^3b^3c^3$

2. Elimina los signos de agrupación en las expresiones algebraicas siguientes:

a) $2st + [3st - (2 + 8st)]$

b) $3z - [4 + (7z - 3)]$

c) $-5q-[2q+8-(p-3)]$ d) $8x-\left[4xy-\left(x^2-xy\right)+2x^2\right]$

e) $3mn^2-\left\{mn+\left[mn^2-\left(mn+5\right)+8mn^2\right]\right\}$

f) $7p^2q-\left\{2pq^3+\left[3p^2q-\left(8p^2q+5pq^3-5\right)\right]-p^2q\right\}$

g) $14+\left\{\left[9{,}5z^2-8{,}3-\left(5{,}75z^2-10\right)\right]-7{,}25z^2-\left(3-z^2\right)\right\}$

h) $5{,}4a^2-\left[-2ab-3{,}8a\left(a-b\right)+1{,}2a^2\right]$

i) $5p+3[(p+2)-(p-2)+(2p+1)]$

3. Simplifica las expresiones algebraicas siguientes y calcula su valor numérico para los valores indicados de las variables:

a) $11{,}8g-[-2{,}3g+(5{,}5g-7)]$ para $g=-1$.

b) $4hkj+[5-(9hkj+3)]$ para $h=2$, $k=-2$, $j=3$.

4. Comprueba que se cumplen las igualdades siguientes:

a) $w+[5w-(v-w)+2v]=7w+v$

b) $8+15zt-[5+(2-3zt)+18zt]=1$

5. Si $A=2a-7b+5$, $B=1{,}3a-3b+1{,}5$, $C=11a-3{,}2b+2$ y $D=1{,}4a+b-7$, calcula:

a) $A+B$ b) $C-D$ c) $B+D$

d) $D-A-B$ e) $A+C-D$ f) $A-B+C$

6. Dados los polinomios:

$H=-\dfrac{3}{4}x^3+x^2-3x+3$, $K=x-7$ y $J=4x^4+x^3+x^2-x-3$, calcula:

a) $H+(K-J)$ b) $H-(K-J)$

7. Sean $M=5pq^2$, $N=pq^2-2$, $Q=-3pq^2+5$.

a) Calcula $M-(N+Q)$.

b) Halla el valor numérico de $M-(N+Q)$ para $p=\dfrac{1}{5}$, $q=-5$.

8. En la figura 3.6, *ABCD* es un cuadrado de perímetro igual a *x* centímetros, *A*, *B*, *G* puntos alineados, *BEFG* rectángulo con *E* punto medio de $\overline{BC}$ y *B* punto medio de $\overline{AG}$.

a) Expresa en el lenguaje algebraico el perímetro de la figura *AGFECD*.

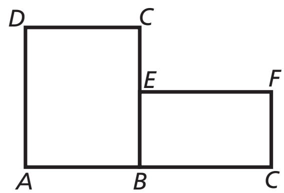


Fig. 3.6

b) Si $x = 48{,}0$ cm halla el perímetro y el área de la figura *AGFECD*.

9. Sean $A = 2x^3 - 7x^2 + 2x - 1$ y $B = 4x^2 + 3$.

a) Halla un polinomio C para que se cumpla que $A - C = B$.

b) ¿Qué grado tiene el polinomio resultante C?

10. Escribe dos polinomios R y S tal que:

a) $R + S = x^2 - 2x + 1$

b) $R + S = x^3$

c) $R + S$ sea un polinomio de grado uno.

11. Dados los polinomios $P = 2x^3 - 3x + 4$ y $Q = 5x - 7 + 2x^2$.

a) Calcula $S = P - Q$.

b) Indica el grado del polinomio resultante S.

c) Halla el valor numérico de S para $x = -3{,}5$

12. Sean $M = x^3 - 2x^2 + 7$ y $N = x^3 - 2x + 1$.

a) Encuentra un polinomio P tal que $P + M = N$.

b) ¿Cuál es el grado de P?

3.2.2 Multiplicación de polinomios

Aplica tus conocimientos

Las páginas del libro de Física de Sofía tienen 5,0 cm más de ancho que de largo, las dimensiones de las páginas del libro de Educación Laboral son tres centímetros más grandes que las del libro de Física.

Escribe las expresiones algebraicas que le permitirán a Sofía calcular las superficies de las páginas de los dos libros.

Para escribir las expresiones que te permiten calcular las superficies de las páginas de los libros, aplicarás los conocimientos adquiridos en la multiplicación de polinomios en séptimo grado.

Recuerda que...

Para multiplicar monomios por monomios y polinomios por monomios se aplica:

- el producto de números racionales para multiplicar los coeficientes y el producto de potencias de igual base para multiplicar la parte literal.
- la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición.

Ejemplo 1:

Calcula:

a) $2(a + b)$ b) $5a(a+ 2)$ c) $(p + 2)(3 + 2p)$

d) $(4m - 7)(m + 2)$ e) $(x - 2)^2$ f) $(2q^2 + 3qt + t)(2q + 3)$

g) $(x^2 + x^3)(x^2 - 5x + 1)$ h) $(w^2 + v^2 + wv)(w^2 - wv + v^2)$

Solución:

a) $2(a + b) = 2a + 2b$ b) $5a(a+ 2) = 5a^2 + 10a$

c) $(p + 2)(3 + 2p)$

$= (p + 2)(3 + 2p)$

$= 3p + 2p^2 + 6 + 4p = 7p + 2p^2 + 6$

$= 2p^2 + 7p + 6$

(Multiplicar el monomio p por cada uno de los términos del binomio $(3 + 2p)$ y multiplicar el monomio 2 por cada uno de los términos del binomio $(3 + 2p)$)

d) $(4m - 7)(m + 2) = 4m^2 + 8m - 7m - 14 = 4m^2 + m - 14$

e) $(x - 2)^2 = (x - 2)(x - 2) = x^2 - 2x - 2x + 4 = x^2 - 4x + 4$

f) $(2q^2 + 3qt + t)(2q + 3)$

$= (2q^2 + 3qt + t)\ 2q + (2q^2 + 3qt + t)\ 3$

$= 2q^2 \cdot 2q + 2q^2 \cdot 3 + 3qt \cdot 2q + 3qt \cdot 3 + t \cdot 2q + t \cdot 3$

$= 4q^3 + 6q^2 + 6q^2t + 9qt + 2qt + 3t$

$= 4q^3 + 6q^2 + 6q^2t + 11qt + 3t$

g) $(x^2 + x^3)(x^2 - 5x + 1$

$= x^2 \cdot x^2 + x^2(-5x) + x^2 + x^3\, x^2 + x^3(-5x) + x^3$

$= x^4 - 5x^3 + x^2 + x^5 - 5x^4 + x^3$

$= x^5 - 4x^4 - 4x^3 + x^2$

h) $(w^2 + v^2 + wv)(w^2 - wv + v^2)$.

$$\begin{array}{llllll}
w^2 & +v^2 & +wv & & & \\
w^2 & -wv & +v^2 & & & \\
\hline
w^4 & +w^2v^2 & +w^3v & & & \\
 & -w^2v^2 & -w^3v & -wv^3 & & \\
 & w^2v^2 & & +wv^3 & +v^4 & \\
\hline
w^4 & +w^2v^2 & & & +v^4 &
\end{array}$$

Cuando los polinomios tienen muchos términos es más aconsejable al efectuar la multiplicación realizar la operación en columna. Colocas en cada fila los productos de los términos del primer polinomio por los términos del segundo, polinomio de manera tal que en cada columna queden ubicados los términos que son semejantes.

Luego, $(w^2 + v^2 + wv)(w^2 - wv + v^2) = w^4 + w^2v^2 + v^4$

g) $(x^2 - 9)(3x + 1)$

$$\begin{array}{l} x^2 - 9 \\ 3x + 1 \\ \hline 3x^3 \quad - \quad 27x \\ \qquad x^2 \qquad\quad - 9 \\ \hline 3x^2 + x^2 - 27x - 9 \end{array}$$

Por tanto: $(x^2 - 9)(3x + 1) = 3x^3 + x^2 - 27x - 9$.

Atención

Al multiplicar dos polinomios efectuamos la multiplicación de cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio.

La multiplicación de polinomios también es asociativa y conmutativa, es decir, para A, B y C polinomios se cumple que:

$(A \cdot B)C = A \cdot (B \cdot C)$ y $A \cdot B = B \cdot A$.

Ejercicios

1. Efectúa:

a) $3hk^2 \cdot 5hk$

b) $2{,}8g^3 \cdot (-1{,}7g^4s^2)$

c) $5k(k + 2)$

d) $3v^5(x^2 - 9)$

e) $-2zp(z + zp)$

f) $8{,}3n(n^2 - 3n + 2)$

g) $3w(w^3 + 2w^2 - 4)$

h) $h^2k^2(h^2k + hk^2 - 3hk)$

i) $(h + 9)(5 + h)$

j) $(a - 7)(a + b)$

k) $(8m + 2n)(m + n)$

l) $(2q - r)(q^2r - 2r^3)$

m) $(xy + 3z)(xy + 3z)$

n) $(k + 5)(k^2 + k + 1)$

ñ) $(v - 1)(v^2 + 3v + 2)$

o) $(5m + 2)(m^2 - 2m + 4)$

p) $(3ab + 5)(a^2 + 2ab + b^2)$

q) $(2d^2c + 1)(c^2d^2 - 2cd + 5)$

r) $(1{,}4x^2 - 0{,}2)(5x^2 + 2x - 5)$

s) $(4p^2 + 3p - 2)(2p^3 - p + 2)$

t) $(2q^3 - q + 2p)(q - p)$

u) $(4z - 2t)(z^2 - t^2 - 3)$

v) $(3x + 4)(x - 2y + 1)$

w) $(2x^3 - x + 2)(4x^2 - 1)$

2. Completar la tabla siguiente:

Tabla 3.4

A	**B**	**C**	**A – (B + C)**	**(A + B)C**	**A + B · C**	**A · C + B**
$x^2 + 7x + 10$	$x^2 + 10x + 25$	$x + 5$				
$x^2 - 6x - 7$	$x^2 - 9x + 14$	$x - 7$				
$2x^2 + 3x - 2$	$2x^3 - x^2 - 8x + 4$	$2x - 1$				
$5x^2 + 23x + 12$	$10x^2 + 11x + 3$	$5x + 3$				
$-x^2 + 12x - 11$	$-x^2 - x + 2$	$1 - x$				

3. Sean las expresiones algebraicas siguientes:
$N = 7a(2 - b + 3ab)$, $T = 5ab$, $Q = 32a^2b + b - 12$.

a) Calcula $N + T$. b) Efectúa $T \cdot Q$

c) Halla el valor numérico de la expresión Q para $a = -\frac{1}{4}$, $b = 0{,}5$.

4. Si $P = x - 2y$, $W = x^2 - 2xy + y^2$, $R = x + 3y$, calcula:

a) $P \cdot R$ b) $W \cdot R$ c) $P \cdot W$

d) $P \cdot W + R$ e) $(P - R)W$

5. Sea $A = 7k^2 - 1$, $B = 3k + 7$, $C = 2k^2 + 3k$. Halla:

a) $B - C$ b) $3A + C$ c) $C - 2A$ d) $(A + B) - C$ e) $C + A \cdot B$

6. Prueba que:

a) $(p - q)(p + q) = p^2 - q^2$ b) $(p - 1)(p + 2) = p^2 + p - 2$

c) $(p + q)(p + q) = p^2 + 2pq + q^2$ d) $(3p + 1)(p + 2) = 3p^2 + 7p + 2$

7. Fundamenta que: $\frac{t}{3}(3t + 9) + (t + 2)(t - 7) - 2(t^2 - t - 7) = 0$

8. Demuestra que $A + 2a \cdot A = A \cdot B$ si $A = a - 3b$ y $B = 2a + 1$.

9. Determina el polinomio que adicionado a $3x^2y^2 + 5xy^2 - x^2y$ da como resultado $2x^2y^2 + 7xy^2 - 4x^2y$.

3.2.3 División de polinomios

Recuerda que...

El cociente de dos monomios es otro monomio que resulta de dividir el coeficiente del monomio dividendo por el del divisor y sus partes literales aplicando la propiedad del cociente de potencias de igual base.

Ejemplo 1:

Halla el resultado de las divisiones siguientes:

a) $\dfrac{21m}{7m}$ b) $\dfrac{11d^5c^3}{44d^5c^5}$ c) $\dfrac{2bh+2ah}{h}$

d) $\dfrac{7{,}5w^3k^6-3{,}5w^2k^4}{0{,}5w^2k^4}$ e) $(24p^5q^3r^2 - 56\,p^3q^2r + 72\,p^2q){:}(8pq)$

Solución:

a) $\dfrac{21\,\mathrm{m}}{7\,\mathrm{m}}=3$

b) $\dfrac{11d^5c^3}{44d^5c^5}=\dfrac{1}{4}c^{-2}=\dfrac{1}{4c^2}\quad\left(\dfrac{c^3}{c^5}=c^{3-5}=c^{-2}=\dfrac{1}{c^2}\text{ y }\dfrac{d^5}{d^5}=d^0=1,\text{ para } d\neq 0,\ c\neq 0\right)$

c) $\dfrac{2bh+2ah}{h}=\dfrac{2bh}{h}+\dfrac{2ah}{h}=2b+2a=2(b+a)$

d) $\dfrac{7{,}5w^3k^6-3{,}5w^2k^4}{0{,}5w^2k^4}$

$=\dfrac{7{,}5w^3k^6}{0{,}5w^2k^4}-\dfrac{3{,}5w^2k^4}{0{,}5w^2k^4}$

$=15wk^2-7$

e) $(24p^5q^3r^2 - 56p^3q^2r + 72p^2q) : (8pq)$

$= 24p^5q^3r^2 : 8pq - 56p^3q^2r : 8pq + 72p^2q : 8pq$

$= 3p^4q^2r^2 - 7p^2qr + 9p$

Reflexiona un instante

Un grupo de estudiantes pertenecientes al círculo de interés Amigos del medio ambiente se propusieron hacer una recogida de botellas vacías para reciclarlas y devolverlas a la industria. En total recogieron 519 botellas y disponen de cajas en las que se pueden envasar 24 botellas solamente y quieren saber cuántas cajas se podrán llenar con las botellas recogidas. Para esto se auxiliaron de la matemática y calcularon:

$$\begin{array}{rrl} \text{dividendo} \rightarrow & 519 & \underline{|24} \ \rightarrow \text{divisor} \\ & -48 & \ \ 21 \\ & 39 & \\ & \underline{-24} & \\ & 15 & \rightarrow \text{resto} \end{array}$$

En esta división 519 es el **dividendo**, 24 es el **divisor**, 21 es el **cociente** y 15 el **resto** o residuo.

- Conoces la relación entre estos componentes de la división:
- Dividendo es igual a la suma del producto del cociente por el divisor más el resto, donde el resto es menor que el divisor.
- En este caso 519 = 21 · 24 + 15.
- Luego, pueden llenar 21 cajas y quedarían 15 botellas.

Recuerda que...

La relación entre el dividendo, divisor, cociente y resto nos permite comprobar que el resultado de la división es correcto ($D = d \cdot c + r$).

Investiga y aprende

¿Será posible efectuar la división de polinomios por binomios aplicando este mismo procedimiento?

Probemos efectuar la división de (x^2 + 5x +8) por (x + 3).

$$\begin{array}{rl} x^2+5x+8 & \underline{|\,x+3} \\ \underline{-(x^2+3x)} & \quad x \\ 2x & \end{array}$$

Dividendo — Divisor

$$\begin{array}{rl} x^2+5x+8 & \underline{|\,x+3} \\ \underline{-x^2+3x} & \quad x+2 \leftarrow \text{Cociente} \\ 2x+8 & \\ \underline{-(2x+6)} & \\ 2 \leftarrow \text{Cociente} & \end{array}$$

1. Se divide x^2 por x y el resultado es x.
2. Se coloca el resultado x en el cociente.
3. Se multiplica x por todo el divisor (x+ 3) y se obtiene x^2+3x.
4. Se realiza la sustracción (x^2+ 5x) – (x^2+3x) y se obtiene 2x.
5. Se considera como dividendo a 2x + 8.
6. Se divide 2x por x y se obtiene 2.
7. Se coloca el resultado de esta división en el cociente.
8. Se multiplica 2 por todo el divisor (x+ 3) y se obtiene 2x + 8.
9. Se realiza la sustracción (2x + 8) – (2x + 6) y se obtiene 2.
10. Como el resultado de la sustracción, es decir, el resto, es un polinomio constante su grado es cero, por lo tanto, es de un grado menor que el divisor y se termina la división.

En esta división el dividendo es el polinomio (x^2 + 5x +8), el divisor es (x +3), el cociente es (x + 2) y el resto es 2.

Luego para comprobar que la división está correcta se verifica que $D = d \cdot c + r$, por tanto: $(x + 3)(x + 2) + 2 = x^2 + 2x + 3x + 6 + 2 = x^2 + 5x + 8$.

Ejemplo 2:

Calcula:

a) $(5x^2 + 4x - 3) : (x + 2)$
b) $(3x^2 + x - 10) : (x + 2)$
c) $(8a^2 + 14a + 10) : (2a + 3)$
d) $(2b^3 - 5b^2 - 2b + 12) : (b - 3)$
e) $(5b^4 + 11b^2 - 8) : (b + 1)$

Solución:

a) $(5x^2 + 4x - 3):(x + 2)$

$$\begin{array}{rrr|l} 5x^2 & +4x & -3 & \underline{x+2} \\ \underline{-5x^2} & \underline{-10x} & & 5x \\ & -6x & & \end{array}$$

Observa que al dividir el primer término del dividendo por el primer término del divisor obtienes $5x$. Multiplicas $5x$ por el divisor y se obtiene $5x^2 + 10x$. Ahora debes sustraer al dividendo el binomio $5x^2 + 10x$, para esto se coloca el opuesto de este binomio, es decir, $-5x^2 - 10x$ debajo del dividendo. Como el resto que obtienes en esta sustracción es $-6x$ y el grado de este monomio es igual al grado del divisor tienes que continuar el procedimiento, repitiendo los mismos pasos.

$$\begin{array}{rrr|l} 5x^2 & +4x & -3 & \underline{x+2} \\ \underline{-5x^2} & \underline{-10x} & \downarrow & 5x \\ & -6x & -3 & \\ & \underline{6x} & \underline{+12} & \\ & & 9 & \end{array}$$

Divides el primer término del resto $-6x$ por el primer término del divisor y se obtiene -6. Se multiplica -6 por el divisor y el resultado es $-6x - 12$ y como tienes que sustraer al resto este resultado, colocas debajo del resto obtenido el opuesto del binomio que es $6x + 12$. Al efectuar la sustracción obtienes como resto un monomio de grado cero, por lo que se concluye la división.

Comprobación:

$(x + 2)(5x - 6) + 9$

$= 5x^2 - 6x + 10x - 12 + 9$

$= 5x^2 + 4x - 3$

b) $(3x^2 + x - 10) : (x + 2)$

$$
\begin{array}{rrr|l}
3x^2 & +\ x & -10 & x+2 \\ \cline{4-4}
-3x^2 & -6x & \downarrow & 5x \\ \cline{1-2}
 & -5x & -10 & \\
 & 5x & +10 & \\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}
$$

Al igual que en la división de números naturales cuando el resto es cero significa que el dividendo es un múltiplo del divisor y se dice que el polinomio del dividendo es divisible por el polinomio del divisor. En este caso el polinomio $3x^2 + x - 10$ es divisible por $x + 2$

Comprobación:

$(x + 2)(3x - 5) = 3x^2 - 5x + 6x - 10 = 3x^2 + x - 10$

c) $(8a^2 + 14a + 10) : (2a + 3)$

$$
\begin{array}{rrr|l}
8a^2 & +14a & +10 & 2a+3 \\ \cline{4-4}
-8a^2 & -12a & \downarrow & 4a+1 \\ \cline{1-2}
 & 2a & +10 & \\
 & -2a & -\ \ 3 & \\ \cline{2-3}
 & & 7 &
\end{array}
$$

Comprobación:

$(2a + 3)(4a + 1) + 7 = 8a^2 + 2a + 12a + 3 + 7$

$= 8a^2 + 14a + 10$

d) $(2b^3 - 5b^2 - 2b + 12):(b - 3)$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
8b^3 & -5b^2 & -8b & +12 & b-3 \\ \cline{5-5}
-2b^3 & +6b^2 & \downarrow & \downarrow & 4a+1 \\ \cline{1-2}
 & b^2 & -8b & \downarrow & \\
 & -b^2 & +3b & \downarrow & \\ \cline{2-3}
 & & -5b & +12 & \\
 & & 5b & -15 & \\ \cline{3-4}
 & & & -3 &
\end{array}
$$

Comprobación:

$(b - 3)(2b^2 + b - 5) \qquad - 3 = 2b^3 + b^2 - 5b -$
$6b^2 - 3b + 15 - 3$
$= 2b^3 - 5b^2 - 8b + 12$

e) $(5b^4 + 11b^2 - 8):(b + 1)$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
5b^4 & & +11b^2 & & -8 & b+1 \\ \cline{6-6}
-5b^4 & +5b^3 & \downarrow & & & 5b^3 - 5b^2 + 16b - 16 \\ \cline{1-2}
 & -5b^3 & +11b^2 & & & \\
 & 5b^3 & +5b^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & 16b^2 & & & \\
 & & -16b^2 & -16b & & \\ \cline{3-4}
 & & & -16b & -8 & \\
 & & & 16b & +16 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 8 &
\end{array}
$$

Cuando no aparecen en el dividendo todas las potencias consecutivas de la variable debe dejarse el espacio en el lugar que le corresponda

Comprobación:

$(b + 1)(5b^3 - 5b^2 + 16b - 16) + 8$

$= 5b^4 - 5b^3 + 16b^2 - 16b + 5b^3 - 5b^2 + 16b - 16 + 8$

$= 5b^4 + 11b^2 - 8$

En la división de polinomios el grado del dividendo es mayor o igual que el grado del divisor porque, de lo contrario, el cociente tendría exponentes negativos y entonces no sería un polinomio.

Pasos para dividir un polinomio por un binomio:

1. Ordenar el dividendo y el divisor en potencias decrecientes de la misma variable.
2. Dividir el primer término del dividendo por el primer término del divisor. Colocar el resultado en el lugar del cociente.
3. Multiplicar el divisor por el resultado obtenido en el paso previo (el primer término del cociente). Escribir el resultado debajo de los primeros dos términos del dividendo.
4. Sustraer a los términos correspondientes del dividendo original el producto obtenido en el paso anterior y escribir el resultado.
5. Agregar al resto obtenido el próximo término del dividendo.

Repetir los pasos dos, tres y cuatro, utilizando como dividendo el resultado obtenido en el paso anterior, hasta obtener un resto cuyo grado sea menor que el grado del divisor.

De la historia

La división por galera (o por el método de la galera) es un antiguo algoritmo de división, utilizado de manera corriente por lo menos hasta el siglo XVII, y que fue sustituido progresivamente por el método actual de la división larga.

El nombre deriva del parecido gráfico que se genera con este método y una galera (fig. 3.7).

Fig. 3.7

Una versión primitiva de este método fue utilizada en el año 825 por Al-Khwarizmi, por lo que se cree que su origen puede ser árabe o hindú; sin embargo, las investigaciones de Lam Lay Yong señalan que el método de división por galera se originó en la antigua China. El matemático italiano Tartaglia (siglo xvi) lo describe en su *Trattato di numeri et misure*.

¿Sabías que...?

Se pueden efectuar operaciones combinadas con polinomios en las que debes tener en cuenta el orden en que se realizan las operaciones al igual que con la adición, sustracción, multiplicación y división de números racionales.

Ejemplo 3:

Sea $H = -2\,w^3\,t^2$, $K = 5wt^3 - 4w^2t$, $L = 9w^4t^5 - 4w^5t^3 + 3w^2$. Calcula $L + H\cdot K$

Solución:

$L + H \cdot K$

$= (9w^4t^5 - 4w^5t^3 + 3w^2) + (-2w^3\,t^2) \cdot (5wt^3 - 4w^2t)$

$= (9w^4t^5 - 4w^5t^3 + 3w^2) + (-10w^4\,t^5 + 8w^5t^3)$

$= 9w^4t^5 - 4w^5t^3 + 3w^2 - 10w^4\,t^5 + 8w^5t^3$

$= -w^4t^5 + 4w^5t^3 + 3w^2$

Nota que al sustituir L, H y K por las expresiones dadas se colocaron paréntesis y que el resultado de la multiplicación está entre paréntesis.

Ejemplo 4:

Prueba que $3m(m+2)-(m+2)(2m-1)-m^2 = 3m+2$

Solución:

$3m(m+2)-(m+2)(2m-1)-m^2$

$= 3m^2 + 6m - (2m^2 - m + 4m - 2) - m^2$

$= 3m^2 + 6m - (2m^2 + 3m - 2) - m^2$

$= 3m^2 + 6m - 2m^2 - 3m + 2 - m^2$

$= 3m + 2$

Es necesario introducir un paréntesis, porque delante de la multiplicación de binomios existe un signo menos.

Ejemplo 5:

Simplificar la expresión algebraica $\dfrac{12x^3y^2 - 6x^2y}{3xy} + 5x^2y - 3x(xy-1)$ y calcular su valor numérico para los valores de las variables $x = \dfrac{1}{3}$; $y = -2$.

Solución:

$$\frac{12x^3y^2 - 6x^2y}{3xy} + 5x^2y - 3x(xy-1)$$

$$= \frac{12x^3y^2}{3xy} - \frac{6x^2y}{3xy} + 5x^2y - 3x^2y + 3x$$

$$= 4x^2y - 2x + 2x^2y + 3x = 6x^2y + x$$

Para calcular el valor numérico:

$$6\left(\frac{1}{3}\right)^2(-2)+\frac{1}{3}=6\cdot\frac{1}{9}\cdot(-2)+\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}=-1$$

Ejemplo 6:

Sean los polinomios $A = 4x^2+19x-10$, $B = 4x-2$, $C = 2x^2+3x+8$.

Calcula $A : B - B \cdot C$.

Solución:

$A : B - B \cdot C$

$= \left(4x^2+19x-10\right):(4x-2) - (4x-2)\cdot(2x^2+3x+8)$

$= \left(x^2+\frac{1}{2}x+5\right)-\left(8x^3+8x^2+26x-16\right)$

$= x^2+\frac{1}{2}x+5-8x^3-8x^2-26x+16$

$= -8x^3-7x^2-25{,}5x+21$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{array}{rrr|l}
4x^3 & & +19x-10 & 4x-2 \\ \cline{4-4}
\underline{-4x^3+2x^2} & & & x^2+\frac{1}{2}x+5 \\
& 2x^2+19x & & \\
& \underline{-2x^2+\quad x} & & \\
& & 20x-10 & \\
& & \underline{-20x+10} & \\
& & 0 &
\end{array}$$

$(4x-2)(2x^2+3x+8)$

$= 8x^3+12x^2+32x-4x^2-6x-16$

$= 8x^3+8x^2+26x-16$

Ejercicios

1. Calcula

a) $14p^2 : 2p$ b) $32m^3n^2 : (-8mn)$ c) $10{,}58w^5v^3 : 2{,}3w^2v^3$

d) $(8p^2+12p) : 4p$ e) $(9x^3+6x) : 3x$ f) $(a^2+a^4+a^3) : a^2$

g) $(c-3d^2) : 2c$ h) $(2a^3b-2ab^3) : 3ab$ i) $(10z^2-5z) : 5z$

j) $(2h^3k^2-h^5k-h^2k^3) : (-h^3k^2)$

k) $(10q^4p^5-5q^3p^6-q^4p^5) : 5q^4$

l) $(6x^3y^3+12x^2y^3-4x^4y^2+3x^2y^2) : 12xy$

2. Halla el cociente y el resto de las divisiones siguientes:

a) $(m^2+5m-14) : (m+7)$ b) $(w^2+w-2w^3+5) : (w-2)$

c) $(t^2-t+9) : (t+2)$ d) $(2d^2+7d+13) : (d-3)$

e) $(2q^2+11q+5) : (2q+1)$ f) $(a^3+5a^2+10a+14) : (a+3)$

g) $(2x^3+x^2-2x-8) : (x-1)$ h) $(6p^2-7p-6) : (2p-1)$

i) $(k^3 - 2k - 4):(k - 2)$

j) $(8y^2 + 3y^3 + 13y + 7):(3y + 2)$

k) $\left(\frac{4}{5}x^3 - \frac{8}{5}x^2 - \frac{9}{5}x - 6\right):\left(\frac{2}{5}x + 1\right)$

3. Completar los cuadrados en blanco según convenga:

a) $4(\square + \square) = 4x^2 + 4x$

b) $x(\square + \square) = 6x^2 + 2x$

c) $2y(\square + \square) = 6xy + 4y$

d) $(x + 3)(\square - \square) = x^2 - 2x - 15$

e) $(2x + 1)(\square - \square + \square) = 4x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x + 2$

f) $(\square - \square)(3x + 2) = 3x^4 + 2x^3 - 15x - 10$

4. Halla la expresión algebraica que multiplicada por $2ab^2c^3$ dé como resultado $14a^3b^3c^5 - 6a^3b^4c^4 + 18ab^2c^3$.

5. Encontrar el polinomio que multiplicado por $m - 5$ da como resultado $m^2 - m - 20$.

6. ¿Cuál es el resto de la división del polinomio $2x^2 + 3x - 11$ por $x - 2$?

7. Si se sabe que el dividendo en una división es $10x^2 + 11x - 1$, el cociente es $5x - 2$ y el resto es 5, ¿cuál es el divisor?

8. Sean $A = x^3 - 2x^2 + x - 2$ y $B = x - 2$.
Halla el polinomio C tal que $C \cdot B = A$.

9. Completa la tabla 3.5 siguiente:

Tabla 3.5

Dividendo	Divisor	Cociente	Resto
$x^2 - x + 8$	$x - 2$		
$2x^2 + 7x + 3$		$2x + 1$	0
$x^3 + 1$	$x + 2$		
	$x - 1$	$x + 3$	2

10. Sean los polinomios $M = 2x^3 + 3x^2 - 32x + 15$, $P = 3x^2 - 7x + 8$, $N = 2x - 1$.
Halla:

a) $M : N + P$

b) $(M - N) - P$

c) $N \cdot P - M$

d) $N^2 - P$

e) $M - N \cdot P$

11. Completa la tabla 3.6:

Tabla 3.6

A	B	C	A + B · C	A · C + B
$x^2 + 7x + 10$	$x^2 + 10x + 25$	$x + 5$		
$x^2 - 6x - 7$	$x^2 - 9x + 14$	$x - 7$		
$2x^2 + 3x - 2$	$2x^3 - x^2 - 8x + 4$	$2x - 1$		
$5x^2 + 23x + 12$	$10x^2 + 11x + 3$	$5x + 3$		
$-x^2 + 12x - 11$	$-x^2 - x + 2$	$1 - x$		

12. Halla el polinomio A si $\dfrac{A}{x-3} = 2x + 1$.

a) Indica el grado del polinomio A.

13. Sean $M = \dfrac{x^2 - 7x - 8}{x - 8}$ y $N = (x + 2)(x - 2)$

a) Calcula: $M - N + 3$.

b) Indica el grado del polinomio resultante.

c) Halla el valor numérico del resultado obtenido para $x = -1{,}5$.

14. Prueba que en un prisma recto de base rectangular el producto del perímetro de una de las bases por su altura es igual al área lateral.

3.3 Profundización sobre las ecuaciones lineales

Aplica tus conocimientos

En un triángulo isósceles, la longitud del lado base es igual al triplo de la longitud de los lados no base disminuido en 15 cm, si el perímetro del triángulo es de 40 cm, escribe la ecuación que te permite calcular la longitud de cada lado.

¿Es la ecuación obtenida una ecuación lineal? Fundamenta tu respuesta.

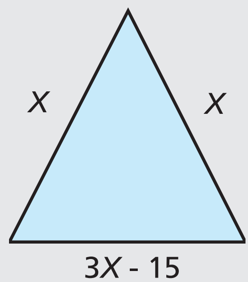


Fig. 3.8

Si designas por x la longitud de los lados no base del triángulo isósceles, entonces al traducir del lenguaje común al algebraico la relación "la longitud del lado base es igual al triplo de la longitud de los lados iguales disminuido en 15 cm", se obtiene que la longitud de lado base es $3x - 15$. Como el perímetro de un triángulo es igual a la suma de las longitudes de sus tres lados y el de este triángulo es 40 cm, entonces obtienes la ecuación $x + x + 3x - 15 = 40$.

Definición de ecuación lineal con una variable:

Una ecuación se denomina **ecuación lineal con una variable o de primer grado con una variable** si y solo si puede reducirse mediante las transformaciones equivalentes a la forma $ax + b = 0$ con a, b números racionales y $a \neq 0$.

Atención

Las transformaciones equivalentes que se realizan en una ecuación permiten obtener una ecuación equivalente. Son transformaciones equivalentes: intercambiar los miembros de la ecuación, adicionar (sustraer) el mismo término a ambos miembros de la ecuación y multiplicar (dividir) ambos miembros de la ecuación por un número distinto de cero.

Reflexiona un instante

¿Cómo transformar las ecuaciones:

a) $(2x - 1)(3x + 2) = 6x(x - 4) + 28$ b) $3x + \{4x + 5[3 - (2x + 1)]\} = 4x + 10$

para que se obtenga una ecuación de la forma $ax + b = 0$ con a, b números racionales y $a \neq 0$?

Atención

La eliminación de los signos de agrupación y la reducción de términos semejantes tambien son transformaciones equivalentes.

Cualquier término de una ecuación se puede transponer de un miembro a otro cambiándole el signo.

Ejemplo 1:

Determina cuáles de las ecuaciones siguientes son lineales en una variable.

a) $x + x + 3x - 15 = 40$ b) $3m + 5 = 2m - 7$ c) $x^2 + 3x - 4 = x(x-2)$

d) $8x + 2(x-1) = 3x(x+1)$ e) $(2y - 3)(y + 2) + 5y = 12 + y(2y + 1)$

f) $3x + \{4x + 5[3 - (2x+1)]\} = 4x + 10$

Solución:

a) $x + x + 3x - 15 = 40$
$5x - 15 = 40$
$5x - 55 = 0$

Reducir los términos semejantes en el miembro izquierdo

Adicionar -40, a ambos miembros de la ecuación luego, $x + x + 3x - 15 = 40$ es una ecuación lineal en una variable pues se transforma en la ecuación equivalente $5x - 55 = 0$

b) $3m + 5 - 2m + 7 = 0$

Adicionar $-2m$ y 7, a ambos miembros de la ecuación.

$m + 12 = 0$

Reducir los términos semejantes en el miembro izquierdo.

Por tanto, $3m + 5 = 2m - 7$ es una ecuación lineal en una variable pues se transforma en la ecuación equivalente $m + 12 = 0$

c) $x^2 + 3x - 4 = x(x-2)$
$x^2 + 3x - 4 = x^2 - 2x$
$x^2 + 3x - 4 - x^2 + 2x = 0$
$5x - 4 = 0$

Eliminar el paréntesis en el miembro derecho aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación.

Adicionar $-x^2$ y $2x$ a ambos miembros de la ecuación.

Reducir los términos semejantes en el miembro izquierdo.

Entonces, $x^2 + 3x - 4 = x(x-2)$ es una ecuación lineal en una variable pues se transforma en la ecuación equivalente $5x - 4 = 0$.

Consejos útiles

Cuando aparecen términos iguales (sus signos son iguales) en los dos miembros de la ecuación, estos se pueden eliminar para racionalizar el procedimiento.

d) $8x+2(x-1)=3x(x+1)$ Eliminar paréntesis en ambos miembros

$8x+2x-2=3x^2+3x$ Reducir los términos semejantes en el miembro izquierdo.

$10x-2=3x^2+3x$ Adicionar $-3x^2$ y $-3x$, a ambos miembros de la ecuación o transponer los términos del miembro derecho con signo opuesto para el miembro izquierdo. Reducir los términos semejantes.

$10x-2-3x^2-3x=0$

e) (2y - 3)(y + 2) + 5y = 12 + y(2y + 1)

$2y^2 + 4y - 3y - 6 + 5y = 12 + 2y^2 + y$ Efectuar las multiplicaciones indicadas en cada miembro.

$2y^2 + 6y - 6 = 12 + 2y^2 + y$ Reducir los términos semejantes.

$2y^2 + 6y - 6 - 12 - 2y^2 - y = 0$ Adicionar -12, $-2y^2$, $-y$, a ambos miembros de la ecuación o transponer los términos del miembro derecho con signo opuesto para el miembro izquierdo

$5y - 18 = 0$ Reducir los términos semejantes

Por tanto, la ecuación $(2y-3)(y+2)+5y=12+y(2y+1)$ es una ecuación lineal en una variable pues se transforma en la ecuación equivalente $5y - 18 = 0$.

f) $3x+\{4x+5[3-(2x+1)]\}=4x+10$

$3x+\{4x+5[3-2x-1]\}=4x+10$ Eliminar el paréntesis

$3x+\{4x+5[2-2x]\}=4x+10$ Reducir términos semejantes dentro del corchete

$3x+\{4x+10-10x\}=4x+10$ Eliminar el corchete.

$3x+\{-6x+10\}=4x+10$ Reducir términos semejantes dentro de la llave.

$3x + 10 - 6x = 4x + 10$ Eliminar la llave.

$3x + 10 - 6x - 4x - 10 = 0$ Reducir los términos semejantes.

$-7x = 0$

Entonces la ecuación $3x+\{4x+5[3-(2x+1)]\}=4x+10$ es una ecuación lineal en una variable pues se transforma en la ecuación equivalente $-7x = 0$.

Recuerda que...

La solución de una ecuación depende del conjunto numérico al que pertenece la variable, pues hay ecuaciones que tienen solución en un conjunto numérico y en otros no.

Ejemplo 2:

Determina el conjunto solución de las ecuaciones lineales siguientes para cada conjunto numérico al que pertenece la variable como se indica.

Tabla 3.7

Ecuación	Dominio de la variable	
a) $5x+7=3(x+1)$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$
b) $4(x+1)-x=2x+3-x$	$\mathbb{Q}+$	$\mathbb{Q}$
c) $\frac{5}{3}+\frac{1}{3}(m+2)=-\frac{2}{3}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}_+$
d) $2a-(a+2)(a+5)=6-a(a-3)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$

Solución:

a) $5x+7=3(x+1)$

$$5x+7=3x+3$$
$$5x-3x=3-7$$
$$2x=-4$$
$$x=\frac{-4}{2}$$
$$x=-2$$

Como $-2\notin\mathbb{N}$ entonces el conjunto solución de la ecuación es $S=\emptyset$ para cuando la variable pertenece al conjunto de los números naturales. Pero como $-2\in\mathbb{Z}$, entonces para el conjunto de los números enteros la ecuación tiene como conjunto solución a S= {–2}.

b) $4(x+1)-x=2x+3-x$

$$4x+4-x=2x+3-x$$
$$3x+4=x+3$$
$$3x-x=3-4$$
$$2x=-1$$
$$x=-\frac{1}{2}$$

Cuando el conjunto numérico de la variable es el de los números fraccionarios, como $-\frac{1}{2}\notin Q_+$, entonces el conjunto solución de la ecuación es $S=\emptyset$. Pero como $-\frac{1}{2}\in\mathbb{Q}_+$, entonces en el conjunto de los números racionales el conjunto solución de la ecuación es $-\frac{1}{2}$.

c) $\frac{5}{3}+\frac{1}{3}(m+2)=-\frac{2}{3}$

$\frac{5}{3}+\frac{1}{3}m+\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}$

$\frac{7}{3}+\frac{1}{3}m=-\frac{2}{3}$

$\frac{1}{3}m=-\frac{2}{3}-\frac{7}{3}$

$\frac{1}{3}m=-\frac{9}{3}$

$m=-\frac{9}{3}\cdot 3$

$m=-9$

Cuando el conjunto numérico de la variable es el de los números enteros el conjunto solución de la ecuación es $S=\{-9\}$, pero cuando el conjunto numérico de la variable es el de los números fraccionarios el conjunto solución de la ecuación es $S = \emptyset$.

d) $2a-(a+2)(a+5)=6-a(a-3)$

$2a-(a^2+7a+10)=6-a^2+3a$

$2a-a^2-7a-10=6-a^2+3a$

$-a^2-5a-10=6-a^2+3a$

$-a^2-5a+a^2-3a=6+10$

$-8a=16$

$a=-2$

Entonces, el conjunto solución de la ecuación es $S = \{-2\}$ para cuando el conjunto numérico de la variable es el de los números enteros, como el de los números racionales porque $-2 \in \mathbb{Z}$ y $-2 \in \mathbb{Q}$.

Atención

Siempre que en un ejercicio no se especifique cuál es el conjunto numérico al que pertenece la variable se asume que la variable pertenece al conjunto numérico de los números reales.

El procedimiento para resolver las ecuaciones lineales lo aprendiste en séptimo grado, ahora solo debes aplicar las nuevas transformaciones equivalentes para determinar la solución de estas ecuaciones.

Ejemplo 3:

Resuelve la ecuación siguiente: $5y^2-(y+2)(y-6) \quad -4y^2=4-7(y-2)$

Solución:

$5y^2-(y+2)(y-6)-4y^2=4-7(y-2)$

$5y^2-(y^2-6y+2y-12)-4y^2=4-7y+14$ Multiplicar los polinomios

$5y^2-(y^2-4y-12)-4y^2=18-7y$ Reducir los términos semejantes

$5y^2-y^2+4y+12-4y^2=18-7y$ Eliminar paréntesis

$4y+12=18-7y$	Reducir términos semejantes
$4y+7y=18-12$	Adicionar $7y$ y -12, a ambos miembros de la ecuación
$11y=6$	Reducir términos semejantes
$y=\dfrac{6}{11}$	Dividir ambos miembros de la ecuación por 11

Recuerda que...

Cuando se resuelven ecuaciones lineales no es obligatorio realizar la comprobación siempre que se apliquen correctamente las transformaciones equivalentes, aunque es importante para estar seguro de que no se cometen errores en la solución de la ecuación.

Investiga y aprende

¿Por qué cuando el conjunto numérico de la variable es el conjunto de los números racionales o reales toda ecuación lineal tiene una única solución?

Ejemplo 4:

Sea la ecuación $2(a-1)x+2=ax-1$ con $a \in \mathbb{Q}$ y $a \neq 0$. Halla el valor de a si la solución de la ecuación es $x=\dfrac{1}{2}$.

Solución:

$$2(a-1)\frac{1}{2}+2=a\cdot\frac{1}{2}-1$$

Sustituir la variable x por $\dfrac{1}{2}$ y resolver la ecuación resultante para la variable a.

$$a-1+2=\frac{a}{2}-1$$

$$a+1=\frac{a}{2}-1$$

$$a-\frac{a}{2}=-1-1$$

$$\frac{2a-a}{2}=-2$$

$$\frac{a}{2}=-2$$

$$a=-4$$

Ejercicios

1. Clasifica las proposiciones siguientes en verdaderas o falsas. Escribe (*V* o F) en la línea dada. Justifica las que sean falsas.

a) ___ Toda ecuación lineal admite solo una solución.

b) ___ La ecuación $4x + 2 = 0$ tiene solución en el conjunto de los números naturales.

c) ___ La ecuación $\frac{1}{2}x = 0{,}5x$ tiene solución.

d) ___ La ecuación $0 \cdot x = 2$ tiene infinitas soluciones.

e) ___ La solución de la ecuación $\frac{1}{3}x - 4 = 0$ es $x = 12$.

f) ___ Existen ecuaciones lineales que no tienen solución en el conjunto de los números reales.

g) ___ La ecuación $-2x + 5 = 8$ tiene solución en el conjunto de los números fraccionarios.

h) ___ La ecuación $x^2 - 3x = 2 + \left(x^2 - 4\right)$ es una ecuación lineal en una variable.

i) ___ Toda ecuación de la forma $ax + b = 0$ con $a, b \in Q$ y $a \neq 0$ tiene solución **única** en el conjunto de los números racionales.

j) ___ El conjunto solución de la ecuación $5 - \frac{1}{3}x = 2\frac{1}{2}$ es $S = \left\{-\frac{15}{2}\right\}$

2. Resuelve las ecuaciones lineales siguientes:

a) $4m + 1 - 8m = 5$

b) $0{,}4p + 0{,}2p = -1{,}2$

c) $5x + 3 - 7x = 4 - 5x$

d) $2a - (a + 1) = 3a - 5$

e) $2x + 2(x - 3) = 14$

f) $\frac{5}{2}x - \frac{1}{2} = 2{,}5$

g) $2q + 3(3 + q) = 24$

h) $5 - (x + 3) = 10 - 2x$

i) $5x - (3x - 8) = 15 - 2x$

j) $1 - (t + 6) = 6t - (15 + t)$

k) $b - (3b - 8) = 2b + 5(b - 2)$

l) $p + 2(p - 8) + 14 = 5(p + 2) - 17p$

m) $n - 5(n + 2) = 3(n + 5) - 2n$

n) $7(1{,}4y - 2) - 6 = 4y - (-2{,}4y + 3)$

ñ) $4(17m + 8) + 9(3 - 2m) = 5m - 12(2m - 3)$

o) $d(d - 3) + 2d - 15 = 8d + (d - 7)(d - 1)$

p) $(w + 5)(w + 1) + 2w - 3 = w(w - 2) + 4$

3. Halla el conjunto solución de las ecuaciones lineales siguientes:

a) $14 - (3p + 6) = 0$

b) $3(x + 5) - 8x = 5 - 8(2 - x)$

c) $y(y+2)+5=(y+1)(y-3)$

d) $8(b-1)+5=3(2b+1)$

e) $1-(5s+6)=6s-(15+s)$

f) $4b-(9+12b)=2-(10b-1)$

g) $6a+[2-(a-1)-3]=a$

h) $6(n+10)+3(n-1)=60$

i) $2t+2(t-1)=-1-3(2t+9)$

j) $8+(5x-1)(x-2)+9x=x(5x+3)-2x+1$

k) $-5w+(w-3)^2+6=2w(2-w)+3w^2$

l) $4p(p+2)-(p+1)(3+4p)=6$

m) $(m+6)(2m-1)-3(4m-3)-10m=2m(m+3)+3(1-2m)$

4. Encuentra los valores de la variable que satisfacen las ecuaciones lineales siguientes:

a) $5{,}6p-2{,}11p=1{,}5$

b) $4(x-5)+2x=100$

c) $8(b+1)=7(b+2)+2$

d) $4a-[a-(a+5)]=3$

e) $0=6q+11-q+2(q-2)$

f) $3x+2(x-1)=x+2$

g) $(3x+1)(x-2)=3x(x+1)-(x+2)$

h) $3n+[-2-2(n-4)+n]=n+1$

i) $2p-\{3+[4p-(5-5p)+2p]\}=11$

j) $2y^2+(8-y)=(2y+3)(y-4)$

k) $7d-(2d+1)(3d-2)+12=3d(5-2d)-9d$

l) $4m^2+m-(2m+1)^2=2(m+2)+5m$

5. Enlaza la ecuación de la columna *A* con su solución correspondiente en la columna *B*.

A	**B**
$\frac{3}{4}x-5=4$	$S=\{1\}$
$4(x+1)+12=8+5(x+1)$	$S=\{12\}$
$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=5$	$S=\{3\}$
$3(x-3)=5(x-3)$	$S=\{6\}$
$3x-(x-3)(x+2)=5(x-1)-x^2$	$S=\left\{\frac{27}{4}\right\}$
	$S=\{11\}$

7. ¿Para qué valores de la variable la ecuación $-\frac{1}{2}x + 3 = x + 1$ se transforma en una proposición verdadera?

8. ¿Para qué valores de la variable la ecuación $3x - \{2(x+1) + (4-3x)\} = x$ se transforma en una proposición falsa?

9. Escribe una ecuación que se pueda transformar a la forma $ax + b = 0$ con a, b números reales y $a \neq 0$ que su solución sea $x = -\frac{1}{4}$.

10. Construye una ecuación que se pueda transformar a la forma $ax + b = 0$ con a, b números reales y $a \neq 0$ y que su conjunto solución sea:

a) $S = \{8\}$ b) $S = \{-2\}$

c) $S = \left\{-3\frac{1}{3}\right\}$ d) $S = \{1{,}5\}$

11. Encuentra una ecuación que se transforme en la forma $ax + b = c$ con a, b, c números racionales y $a \neq 0$, tal que:

a) su solución sea $x = -\frac{2}{3}$.

b) el conjunto solución sea $S = \{-4\}$.

c) no tenga solución en Z.

d) el conjunto solución sea $S = \emptyset$.

12. ¿Qué valor debe tomar a para que la solución de la ecuación $ax + \frac{1}{3} = 8$ sea $x = \frac{2}{3}$?

13. ¿Para qué valor de b, con b un número racional, la ecuación $2(x-2) - b = x$ tiene la solución $x = -\frac{3}{2}$?

14. Selecciona la respuesta correcta, marcándola con una X.

13.1 La solución de la ecuación $5(x + 2) = 5 + 4x$ es:

a) __ – 3,5 b) __ – 5 c) __ – 2 d) __ 1

13.2 El conjunto solución de la ecuación $2(3-x)+7=5-x$ es:

a) __ $S=\{-18\}$ b) __ $S=\{-8\}$ c) __ $S=\{8\}$ d) __ $S=\{6\}$

13.3 De las ecuaciones siguientes cuál es la que tiene como solución al número 47,4:

a) ___ $1-x=3{,}74$ b) ___ $2(x+0{,}005)=9{,}45$

c) ___ $4(x+1)=10$ d) ___ $\frac{x}{0{,}5}=94{,}8$

13.4 Cuál de las ecuaciones siguientes tiene como conjunto solución $S = \{-1\}$:

a) ___ $2(a-4)=3a-(6-a)$ b) ___ $4(a-4)=a+(a+1)$

c) ___ $2a-8=3(a-2)-a$ d) ___ $a-4=5a+2(3a-1)$

12. Determina el número que satisface la ecuación $2(x+3)+1=5$ que pertenezca al conjunto de números:

a) naturales. b) fraccionarios. c) racionales.

15. ¿Qué número fraccionario satisface la ecuación $5x+2(4-x)=4x+9$? Fundamenta tu respuesta.

16. Completa la tabla siguiente:

Tabla 3.8

Ecuación	**Conjunto solución para el dominio de la variable**			
	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Q}_+$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$
$5x-2=3(x+2)$				
$4(2-a)+5a=2a+9$				
$2(y+3,1)=2(1,1-4y)+2y$				
$(3d+1)(d-2)=3d^2+7d-26$				
$(2p+3)(p-4)-8=2p(p-1)$				

17. Determina tres ecuaciones equivalentes a la ecuación $y-16=32$.

18. Verifica si las dos ecuaciones tienen el mismo conjunto solución. Fundamenta tu respuesta.

a) $4x+3=x-3$
$3x=-6$

b) $4x=4x+2$
$x=2$

c) $7(x-5)-7x+5=x+3$
$0=x+3$

19. Sea la ecuación $2(p-1)x-p(x-=2p+3$ $(p \in \mathbb{Q})$

a) ¿Para qué valor de p, la ecuación dada no tiene solución en $\mathbb{Q}$?

b) Halla tres valores de p, de manera que la ecuación dada tenga solución en $\mathbb{N}$.

c) Determina el valor de p, para que el conjunto solución de la ecuación sea $S = \left\{-\frac{3}{4}\right\}$.

20. Sean las ecuaciones $2(a-x) = \frac{3x}{2} + 5$ con $a \in Q$ y $\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{3}\right) = \frac{x}{4} - \frac{1}{12}$

¿Para qué valor de a estas ecuaciones son equivalentes?

3.3.1 Despeje de variables en ecuaciones

Reflexiona un instante

Los científicos y tecnólogos utilizan diferentes medios para realizar sus investigaciones, uno de estos son las ecuaciones. Las ciencias utilizan ecuaciones para calcular los valores de diferentes magnitudes; en la asignatura Física estudiaste la ecuación que relaciona las magnitudes distancia y tiempo para determinar el valor de la velocidad de un cuerpo que su movimiento es rectilíneo uniforme.

Analiza y responde:

Si conoces los valores de la velocidad del cuerpo y el tiempo transcurrido para recorrer una determinada distancia, puedes calcular el valor de la distancia recorrida. Fundamenta tu respuesta.

Aplica tus conocimientos

El papá de Andrés asistirá a un evento científico en el Palacio de las Convenciones de la provincia La Habana que comienza a las 2:00 p.m. Si su centro de trabajo se encuentra a 50 km del lugar del evento y la velocidad máxima a la que puede viajar por la carretera, teniendo en cuenta las regulaciones del tránsito y el tipo de automóvil que posee, es de 75 km/h, ¿qué tiempo empleará el papá de Andrés, para llegar a este evento? ¿Para asistir puntualmente al evento, cuál es la hora más tarde que puede salir de su centro laboral el papá de Andrés?

Consejos *útiles*

Aplica las transformaciones equivalentes para obtener las ecuaciones que te permiten calcular los valores de las magnitudes en las situaciones anteriores.

En la práctica es necesario en muchas ocasiones aislar una variable de una ecuación para calcular su valor; a este procedimiento se le denomina despejar una variable de la ecuación

Ejemplo 1:

a) En la ecuación del área de un triángulo $A = \frac{b.h}{2}$, donde la variable *b* tiene el significado de la longitud de la base del triángulo y *h* la longitud de la altura, despeja la altura.

b) La ecuación para calcular la energía cinética E_c que posee un cuerpo en movimiento es: $E_c = \frac{1}{2}mv^2$, donde la variable *m* tiene el significado de la masa del cuerpo, la variable *v* el valor de su velocidad, despeja la masa.

c) En la ecuación del perímetro del rectángulo $P = 2(a + b)$, donde la variable *a* tiene el significado de la longitud del lado mayor y la variable *b* la longitud del lado menor, despeja la variable *b*.

d) En la ecuación del **área** del trapecio $A = \frac{(a+c)h}{2}$, en la que *a* y *c* son las bases del trapecio y *h* su altura, despeja *a*.

Solución:

a) $A = \frac{b\,.\,h}{2}$ Identificar en la ecuación la variable que se despejará.

$2A = b \bullet h$ Multiplicar ambos miembros de la ecuación por dos.

$\frac{2A}{b} = h$ Dividir ambos miembros de la ecuación por b, que es distinto de cero por ser la longitud de un lado de un triángulo.

b) $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ Identificar en la ecuación la variable que se despejará

$2E_c = mv^2$ Multiplicar ambos miembros de la ecuación por dos.

$\frac{2E_c}{v^2} = m$ Dividir ambos miembros de la ecuación por v^2, que es distinto de cero por ser la velocidad respecto al cuerpo tomado como referencia.

c) $P = 2(a + b)$ Identificar en la ecuación la variable que se despejará.

$P = 2a + 2b$ Eliminar paréntesis aplicando propiedad distributiva.

$P - 2a = 2b$ Adicionar a ambos miembros de la ecuación el término $-2a$ o transponer con signo opuesto al otro miembro el término 2a.

$\frac{P - 2a}{2} = b$ Dividir ambos miembros de la ecuación por dos.

$$\frac{P}{2} = a + b$$

$$\frac{P}{2} - a = b$$

Observa que también puedes realizar el despeje de la variable b de la manera siguiente: $P = 2(a+b)$.

d) $A = \dfrac{(a+c)\cdot h}{2}$ Identificar en la ecuación la variable que se despejará.

$A = \dfrac{a\cdot h + c\cdot h}{2}$ Eliminar paréntesis.

$2A = a\cdot h + c\cdot h$ Multiplicar ambos miembros de la ecuación por dos.

$2A - c\cdot h = a\cdot h$ Sustraer a ambos miembros de la ecuación el término c · h.

$\dfrac{2A - c\cdot h}{h} = a$ Dividir ambos miembros de la ecuación por *h.*

Observa que también puedes despejar de la manera siguiente:

$$A = \frac{(a+c)\cdot h}{2}$$

$$2A = (a+c)\cdot h$$

$$\frac{2A}{h} = a + c$$

$$\frac{2A}{h} - c = a$$

Atención

Para despejar una variable en una ecuación primeramente identificamos la variable que vamos a despejar y después aplicamos las transformaciones equivalentes, respetando el orden operacional.

Ejercicios

1. Despeja la variable que se indica en las ecuaciones siguientes:

a) $F_g = g\cdot m$; (g) b) $\Delta_t = \dfrac{Q}{m}$; (Q) c) $A = l^2$; (l) d) $P = \dfrac{W}{t}$; (t)

e) $A_L = 2\pi\cdot r\cdot h$; (h) f) $V = \dfrac{1}{3}A_B\cdot h$; (h) g) $s = s_0 + Vt$; (t)

h) $L = 2\pi r$; (r) i) $D = c.d + r$; (d) j) $v = v_0 + at$; (t)

k) $A = 2ab + 2(a+b)\cdot h$; (h) l) $a_n = a_l + (n-1)\cdot d$; (d)

m) $A = \dfrac{d_1\cdot d_2}{2}$; (d_1) n) $A = \pi\, r(g+r)$; (g)

2. Selecciona la respuesta correcta, marcándola con una X.

2.1 En la ecuación $M = \frac{at+c}{b}$ si despejamos la variable t, se obtiene:

a) __ $t = bM - c - a$ b) __ $t = \frac{Mb}{a+t}$

c) __ $t = \frac{(M-c)b}{a}$ d) __ $t = \frac{bM-c}{a}$

2.2. Al despejar la variable t en la ecuación $s = v_0 t + s_0$, se obtiene:

a) __ $t = \frac{s}{v_0} - s_0$ b) __ $t = s - s_0 - v_0$

c) __ $t = \frac{s - s_0}{v_0}$ d) __ $t = \frac{s}{v_0 + s_0}$

2.3. Si despejamos la variable d en la ecuación $A = \frac{b(n-1)}{b-d}$, obtenemos la expresión:

a) __ $\frac{b(A-n+1)}{A}$ b) __ $\frac{b(n-1)}{Ab}$

c) __ $b - \frac{A}{b(n-1)}$ d) __ $\frac{b(A-n)}{A}$

3. ¿Cuál es la longitud del radio de una circunferencia que tiene 25,0 cm de longitud?

4. Completa los espacios en blanco de manera que obtengas una proposición verdadera:

4.1 Al despejar la variable q en $A = \frac{1}{2}h(p+q+r)$ se obtiene

____

4.2 Cuando despejamos en la ecuación $\frac{C}{5} = \frac{F-32}{9}$ la variable F se obtiene _______________.

4.3 En la ecuación $\frac{b}{L} = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$ al despejar la variable L se obtiene __________.

5. Despeja la variable que se indica en las expresiones algebraicas siguientes:

a) $c = a + (c+3)d$; (d) b) $m - 2 = (m+5)a$; (a)

c) $p = \frac{3(m-n)}{5} + n$; (n)

3.3.2 Sistematización y profundización en la resolución de problemas que conducen a ecuaciones lineales

Aplica tus conocimientos

Un arquitecto debe realizar el plano de dos habitaciones de igual superficie, pero en la primera habitación la longitud del largo debe tener el doble de la longitud del ancho, mientras en la segunda habitación la longitud de su largo debe ser seis unidades menos que el largo de la primera habitación y la longitud del ancho debe medir cuatro unidades más que el ancho de la primera habitación. ¿Cuáles serán las dimensiones de cada habitación?

Recuerda que...

Para resolver un problema que conduce a una ecuación lineal con una variable debes seguir los pasos siguientes:

1. Leer el texto detenidamente cuantas veces te sea necesario.
2. Identificar lo dado y lo buscado, designando una variable a la incógnita.
3. Traducir al lenguaje algebraico las relaciones que se plantean en el texto (palabras claves).
4. Plantear una ecuación.
5. Resolver la ecuación planteada.
6. Comprobar que la solución de la ecuación satisface las condiciones que aparecen en el texto del problema.
7. Redactar la respuesta a la pregunta del problema.

Ejemplo 1:

La suma de dos números es 38 y la diferencia de sus cuadrados es 532. ¿Cuáles son los números?

Solución:

El problema trata sobre la búsqueda de dos números que cumplen dos relaciones entre sí.

La primera relación es que la suma de los dos números es 38, pero como no conoces cuáles son los números, entonces debes designar una variable a uno de los números, por ejemplo, si al primer número le asignas la variable x, entonces el segundo número sería: $38 - x$, según plantea esta relación.

Los datos del problema pueden quedar de la manera siguiente:
Valor del primer número: x
Valor del segundo número: $38 - x$

La segunda relación se refiere a que la diferencia de los cuadrados de estos números es 532, por tanto, el cuadrado del primer número es x^2 y el del otro número es: $(38 - x)^2$, además como la diferencia de los cuadrados es 532, la ecuación resultante es: $x^2 - (38 - x)^2 = 532$.

Ahora se resuelve la ecuación:

$$x^2 - (38 - x)^2 = 532$$
$$x^2 - (38 - x)(38 - x) = 532$$
$$x^2 - 1\,444 + 76x - x^2 = 532$$
$$-1444 + 76x = 532$$
$$76x = 532 + 1\,444$$
$$76x = 1\,976$$
$$x = 1\,976 : 76$$
$$x = 26$$

Como x = 26 entonces, para calcular el otro número efectúas 38 – 26 = 12.

Después debes comprobar en el texto del problema que los números obtenidos cumplen las dos relaciones:

La suma de dos números es 38: 26 + 12 = 38
La diferencia de sus cuadrados es 532:
$(26)^2 = 676$, $(12)^2 = 144$ y $676 - 144 = 532$.

Respuesta: Los números son 26 y 12.

Ejemplo 2:

<u>Un huerto dedicado a la siembra de vegetales de forma rectangular tiene 5,0 metros más de largo que de ancho</u>. Se quiere para la próxima cosecha aumentar la producción de vegetales, para esto es necesario ampliar las dimensiones del terreno. Si se <u>incrementa en cuatro metros el largo y el ancho del terreno, entonces el área del terreno aumentaría en 72 metros cuadrados</u>. ¿Cuáles serían las dimensiones del huerto en la próxima cosecha?

Solución:

Este problema se refiere al aumento de las dimensiones de un huerto de forma rectangular para incrementar la producción de vegetales. En el texto del problema se explica la relación que existe entre el largo y el ancho del huerto y que al aumentar el largo y ancho respectivamente, se incrementará su área. Aparecen las palabras claves **más que**, **incrementa en, aumentaría en** y **área.**

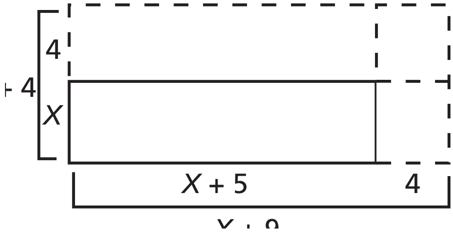


Fig. 3.8a

Para facilitar la búsqueda de la solución del problema te puedes auxiliar de un esbozo del huerto (fig. 3.8a).

a) Si designas por la variable x a la longitud del ancho del huerto entonces su largo tiene de longitud $x + 5$. Como el largo y el ancho se incrementan en cuatro metros, entonces las dimensiones del huerto para la próxima cosecha serán $(x + 4)$m de ancho y $(x + 9)$m de largo.

En el texto del problema se plantea una relación entre el área del huerto inicial y el área del huerto que se utilizará para la próxima cosecha.

Para escribir la ecuación que solucionará el problema debes utilizar la ecuación que permite calcular el área de un rectángulo. El área del huerto inicial es $x(x + 5)$ y la del huerto ampliado: $(x + 4)(x + 9)$.

Los datos del problema pueden quedar de la manera siguiente:

Tabla 3.9

	Al inicio	**Después de la ampliación**
Ancho	x	$x + 4$
Largo	$x + 5$	$x + 9$
Área	$x(x + 5)$	$(x + 4)(x + 9)$

Después debes traducir del lenguaje común al algebraico la relación entre las áreas de los huertos y así obtener la ecuación que resolverá el problema, que se puede expresar de tres formas diferentes, todas equivalentes entre sí:

1) $x(x + 5) + 72 = (x + 4)(x + 9)$
2) $x(x + 5) = (x + 4)(x + 9) - 72$
3) $x(x + 5) - (x + 4)(x + 9) = 72$

$$x(x + 5) + 72 = (x + 4)(x + 9)$$
$$x^2 + 5x + 72 = x^2 + 9x + 4x + 36$$
$$x^2 + 5x + 72 = x^2 + 13x + 36$$
$$5x + 72 = 13x + 36$$
$$5x - 13x = 36 - 72$$
$$-8x = -36$$
$$x = 4{,}5$$

Como $x = 4{,}5$ entonces el ancho del huerto en la próxima cosecha será $4{,}5 + 4 = 8{,}5$ y el largo $4{,}5 + 9 = 13{,}5$.

Comprueba en el texto del problema:
Ancho del huerto al inicio: 4,5.
Largo del huerto al inicio: 9,5

$9{,}5 - 4{,}5 = 5$

Área del huerto al inicio: 4,5 m·9,5 m = 42,75 m^2
Área del huerto ampliado: 8,5 m·13,5 m = 114,75 m^2

$114{,}75 - 42{,}75 = 72$

Respuesta: El huerto en la próxima cosecha tendría 8,5 m de ancho y 13,5 m de largo.

Ejemplo 3:
Rolando se prepara para la prueba final de Matemática de octavo grado y comenzó a resolver ejercicios. El lunes resolvió la tercera parte del total de ejercicios, el martes el 25 % del resto y aún le quedan por resolver 21 ejercicios, el miércoles. ¿Cuántos ejercicios resolverá Rolando para estar preparado para la prueba final de matemática?

Solución:
El problema trata sobre la cantidad de ejercicios que resuelve Rolando en tres días. En el texto se plantea la cantidad de ejercicios que resuelve cada día y hay que determinar el total de ejercicios que resolverá Rolando. En el texto aparecen las palabras claves *tercera parte* y *25 % del resto*, mediante las cuales se describe la cantidad de ejercicios que resuelve cada día Rolando. Si designas por la variable x la cantidad de ejercicios que resolverá Rolando, entonces como el lunes resolvió la tercera parte del total de ejercicios, este día resolvió $\frac{x}{3}$ ejercicios. El martes resuelve el 25 % $\left(\frac{x}{3}\right)$ del resto,

pero como el lunes resuelve $\frac{x}{3}$, entonces el resto es $\frac{2}{3}x$. Por tanto, el martes resuelve $\frac{1}{4}\cdot\frac{2x}{3}=\frac{x}{6}$ ejercicios. Luego, como el total de ejercicios que resolvió Rolando es igual a la suma de la cantidad de ejercicios que resuelve cada uno de los tres días y para el tercer día le quedaban 21, resulta la ecuación: $x=\frac{x}{3}+\frac{x}{6}+21$

Datos:

Cantidad de ejercicios que resolvió Rolando: x

Cantidad de ejercicios resueltos el lunes: $\frac{x}{3}$

Cantidad de ejercicios resueltos el martes: $\frac{1}{4}\cdot\frac{2x}{3}=\frac{x}{6}$

Cantidad de ejercicios que le quedan por resolver: 21

$$x=\frac{x}{3}+\frac{x}{6}+21$$
$$6x = 2x + x + 126$$
$$6x = 3x + 126$$
$$6x - 3x = 126$$
$$3x = 126$$
$$x = 42$$

Comprobación en el texto del problema:

La tercera parte de 42 es 14. El resto es 28 (42 – 14 = 28) y el 25 % de 28 es 7. Por último 14 + 7 + 21 = 42.

Respuesta: Rolando resolverá 42 ejercicios para prepararse para la prueba final de Matemática.

Ejemplo 4:

La edad de la madre de Margarita es cinco veces la edad de ella, dentro de seis años la madre tendrá el triplo de la edad que tendrá Margarita en ese momento. ¿Cuál es la edad actual de Margarita?

Solución:

El problema trata sobre las edades de una madre y su hija, la incógnita es la edad de Margarita (hija); existen dos relaciones la primera se corresponde con la edad actual de la madre y la hija y la otra con lo que sucederá dentro de seis años con las edades de ellas. Las palabras claves son: **cinco veces, el triplo, dentro de seis años.**

El análisis de las palabras dentro de seis años te permite pensar que han transcurrido seis años, luego las dos personas tendrán seis años más que su edad actual.

Si designas por la variable x, la edad de la hija (Margarita), entonces puedes traducir del lenguaje común al algebraico cada relación y solucionar el problema.

Datos (es conveniente utilizar una tabla para diferenciar los dos momentos en que se manifiestan las relaciones):

Tabla 3.10

	Edad actual	**Dentro de seis años**
Margarita	x	$x + 6$
Madre de Margarita	$5x$	$5x + 6$

La ecuación se obtiene de la segunda relación: dentro de seis años la madre tendrá el triplo de la edad que tendrá Margarita en ese momento, luego escogemos los datos de la tercera columna y la igualdad nos quedará:

$5x + 6 = 3(x+6)$

$5x + 6 = 3x+18$

$5x - 3x = 18 - 6$

$2x = 12$

$x = 6$ y la edad de la madre sería: $5 \cdot 6 = 30$

Comprobación en el texto del problema:

La edad actual de la madre es el quíntuplo de la edad de Margarita porque 30 es cinco veces seis además 6 + 6 = 12, 30 + 6 = 36 y 36 es tres veces 12.

Respuesta: Margarita tiene seis años.

Investiga y aprende

Busca otras vías de solución para resolver el problema relacionado con la cantidad de ejercicios que resolvió Rolando para la prueba final de matemática.

Atención

Cuando resuelvas problemas analiza la posibilidad de utilizar los procederes explicados en los ejemplos anteriores para encontrar la ecuación que te permita resolver el problema.

Si la relación se refiere a la adición o sustracción de dos cantidades puedes escribir una cantidad que dependa de la otra con el uso de la propiedad de las operaciones inversas.

También puedes esbozar la situación planteada mediante una figura o utilizar tablas que te facilitan encontrar la ecuación.

Reflexiona un instante

Es posible que con una misma ecuación puedas resolver varios problemas; ¿serías capaz de elaborar un problema cuya solución se obtenga con la ecuación del ejemplo cuatro?

Atención

Para elaborar un problema es necesario seleccionar los datos apropiados y determinar las relaciones matemáticas que se establecen entre estos, para expresarlas en lenguaje común teniendo en cuenta el uso correcto de los signos de puntuación, de manera que la redacción no tenga errores y la interpretación del texto no sea la deseada.

Ejemplo 5:

El perímetro de un rectángulo es de 30 cm.Completa el enunciado del problema, si debe originar la ecuación: $2x + 2(x + 5) = 30$.

Solución:

Debes primero buscar las relaciones que se establecen en la ecuación, observa que el texto refiere el perímetro de un rectángulo y para su cálculo se necesitan las longitudes de sus lados. La ecuación que permite determinar el perímetro de un rectángulo es la suma del duplo del ancho y el duplo del largo; la variable se le debe asignar a uno de los lados, pudieras decir que a la longitud del largo se le designa la variable x y entonces como la otra expresión algebraica que aparece es $x + 5$, la longitud del ancho es cinco unidades más que la longitud del largo, por tanto, el problema puede ser:

El perímetro de un rectángulo es de 30 cm, si la longitud del ancho es cinco unidades más que la longitud del largo, ¿cuáles son las dimensiones de este rectángulo?

Investiga y aprende

Busca en los medios de comunicacion informaciones sobre el medallero de los ultimos Juegos Panamericanos y determina las relaciones entre sus datos para que elabores un problema que conduzca a una ecuacion lineal con una variable.

Ejercicios

1. Selecciona la respuesta correcta marcándola con una X.

1.1 Un pionero quiere representar mediante una ecuación la situación siguiente: La tercera parte de la matrícula de su grupo excede en 21 a los 12 miembros del equipo de voleibol de su escuela. Si la variable *x* representa la matrícula de su grupo, entonces la ecuación que escribió el pionero es:

a) ___ $\frac{1}{3}x-21=12$ b) ___ $3x - 21 = 12$

c) ___ $\frac{1}{3}x+21=12$ d) ___ $3x + 21 = 12$

1.2 Para representar mediante una ecuación la situación siguiente: la cuarta parte de un número *m* excede en tres a 18, la ecuación que se escribe es:

a) ____ $4m - 3 = 18$ b) ___ $\frac{1}{4}m+3=18$

c) ___ $4m + 3 = 18$ d) ___ $\frac{1}{4}m-3=18$

1.3 En un puesto de frutas las 83 guayabas que hay exceden en siete al triplo de la cantidad de piñas. Si *x* es la cantidad de piñas que hay en el puesto de frutas, entonces la ecuación que representa la situación anterior es:

a) ___ $3x - 7 = 83$ b) ___ $83 = 3x + 7$

c) ___ $\frac{1}{3}x-7=83$ d) ___ $\frac{1}{3}x+7=83$

1.4 Alina quiere expresar mediante una ecuación la información siguiente: el quíntuplo de los estudiantes que participaron en el concurso de dibujo de la casa de cultura aumentado en 12 es 72. Si *t* representa la cantidad de estudiantes que participaron en el concurso, cuál de las siguientes ecuaciones es la traducción del lenguaje común al algebraico de esta situación:

a) ___ $5t - 12 = 72$ b) ___ $5t + 12 = 72$

c) ___ $\frac{1}{5}t + 12 = 72$ d) ___ $\frac{5t}{12} = 72$

1.5 De un grupo de octavo grado se conoce que el triplo de los participantes en el concurso de Matemática excede en siete a los catorce que participaron en el concurso de Historia. Si x es la cantidad de participantes en el concurso de Matemática, entonces esta situación se puede expresar por la ecuación:

a) ___ $\frac{1}{3}x - 7 = 14$ b) ___ $3x + 7 = 14$

c) ___ $3x - 7 = 14$ d) ___ $\frac{1}{3}x + 7 = 14$

1.6 Cuatro veces un número n aumentado en cinco da como resultado 35. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones representa esta relación?

a) __ $4n - 5 = 35$ b) __ $4n + 5 = 35$

c) __ $4n \cdot 5 = 35$ d) __ $4(n + 5) = 35$

2. Dadas las siguientes ecuaciones escribe en el lenguaje común las relaciones que representan:

a) $y - 5 = 20$ b) $2x + 15 = 3x$

c) $\frac{1}{3}q - 2 = 7$ d) $p - \frac{p}{2} = 3p + 15$

3. Si la base de un rectángulo tiene una longitud de x centímetros y se conoce que su altura es tres veces la longitud de la base, entonces:

3.1 su perímetro se representa por ________________.

3.2 su área se representa por ___________________.

4. Si se dobla un alambre de 15 cm para formar un triángulo isósceles cuya base mida 6 cm, ¿cuánto miden los otros lados?

5. De una varilla de 2,50 m de largo se serrucharon cuatro pedazos iguales y queda un pedazo de 10 cm. ¿Qué longitud tiene cada pedazo serruchado?

6. En un mercado agropecuario hay un puesto de venta que tiene en exhibición 135 frutas entre naranjas, mangos, guayabas y limones. La cantidad de limones es el doble de la cantidad de naranjas, la de guayaba es la cuarta parte de la cantidad de naranjas y son cinco los mangos. ¿Cuántos limones, guayabas y naranjas hay en el puesto de venta?

7. En las elecciones pioneriles de este curso fueron propuestos Camilo y Gabriela para jefe de colectivo. Después de realizada la votación se contaron en total 220 votos válidos. Si Gabriela recibió 19 votos menos que el duplo de la cantidad de votos recibidos por Camilo, ¿cuál de los pioneros fue elegido jefe de colectivo?

8. Para ayudar a la repoblación forestal de un municipio los estudiantes de dos secundarias básicas sembraron 536 posturas de árboles. Los estudiantes de la secundaria básica Antonio Maceo sembraron 25 posturas menos que el duplo de la cantidad de posturas que sembraron los estudiantes de la secundaria Lidia Doce. ¿Cuál fue la secundaria básica que menos árboles sembró?

9. Como parte del ejercicio Meteoro 2013 realizado con el propósito de fortalecer la capacidad del país para enfrentar huracanes de gran intensidad y otros eventos extremos, una secundaria movilizó trabajadores, padres y estudiantes para realizar labores de higienización como parte de la lucha anti vectorial. Si se conoce que participaron 115 estudiantes más que trabajadores y el número de padres fue la mitad de la cantidad de trabajadores, qué cantidad de estudiantes, padres y trabajadores participaron en el ejercicio Meteoro 2013 en esa secundaria, si en total participaron 170 personas.

10. Un pionero compró en la feria del libro realizada este año, un libro de cuentos que tiene 126 páginas y decidió leerlo en tres días. El primer día leyó el doble de la cantidad de páginas que las que leyó el tercer día y el segundo día leyó la mitad de la cantidad de páginas que las que leyó el tercer día. ¿Cuántas páginas leyó por día?

11. Los estudiantes de un grupo de octavo grado de una secundaria básica se propusieron recuperar papel y cartón para entregar a la empresa de recuperación de materias primas de su municipio. Del total de libras de papel y cartón recuperadas, 151 corresponden a cartón, lo que excede en 15 libras a la mitad del total de libras de papel y cartón recuperadas. ¿Qué cantidad de libras de papel y cartón recuperaron estos estudiantes?

12. En la constitución de las asambleas provinciales del Poder Popular del XI periodo de mandato (2013 – tomaron posesión de sus cargos los 1 269 delegados provinciales elegidos por el pueblo. Dos veces la cantidad de mujeres delegadas provinciales excede en 26 al duplo de la cantidad de delegados hombres. ¿Qué por ciento del total de delegados provinciales representa la cantidad de mujeres delegadas?

13. La diferencia entre las longitudes de las bases de un trapecio es de 2,0 dm, su altura mide 40 cm y su área es igual al triplo de la longitud de la base mayor aumentada en la longitud de la altura. Calcula el área del trapecio.

14. El triplo del ancho de un rectángulo excede en 9,0 dm al largo. Determina el área del rectángulo si se conoce que su perímetro mide 460 cm.

15. En un triángulo escaleno la amplitud del ángulo menor es el 75 % de la amplitud del ángulo mediano y la del ángulo mayor excede en 100^0 a la diferencia de las amplitudes de los otros dos ángulos. Halla la amplitud de los ángulos del triángulo.

16. En un frigorífico hay papas almacenadas, de estas la tercera parte es para el consumo de hospitales, el 25 % del resto para el consumo de escuelas y círculos infantiles y las 150 000 toneladas restantes para el consumo de la población. ¿Cuántas toneladas de papas fueron destinadas al consumo de hospitales?

17. El 25 % de las caballerías de un trabajador agrícola, está dedicado al cultivo de hortalizas, la mitad al cultivo de frutas, $\frac{3}{5}$ del resto a la cosecha de viandas y las cuatro caballerías restantes a la siembra de flores. ¿Cuántas caballerías se emplearon en el cultivo de frutas y cuántas a viandas?

18. En una secundaria básica se aplicó una encuesta a 288 estudiantes de octavo grado para conocer sus intereses en la continuidad de estudios. La encuesta arrojó que hay 13 estudiantes menos interesados en matricular en un tecnológico que en una escuela pedagógica y la cantidad de interesados en matricular en un tecnológico excede en 22 al 60 % de los que quieren matricular en un preuniversitario. ¿Cuántos estudiantes están interesados en matricular en la escuela pedagógica?

19. En una competencia de ajedrez la cantidad de ajedrecistas del sexo masculino triplicó la cantidad de ajedrecistas femeninos. Si hubieran participado 25 mujeres más y 25 hombres menos, entonces tendrían la misma cantidad de participantes por sexo. ¿Qué cantidad de ajedrecistas femeninas participaron en la competencia?

20. Un tanque tiene cierta cantidad de litros de refresco. Durante la mañana se vendió las tres quintas partes del total de litros y en la tarde el 75 % de lo que le quedaba, quedando aún en el tanque 30 L.

a) ¿Cuántos litros de refresco tenía el tanque al inicio?
b) ¿Cuántos litros se vendieron en la mañana?
c) Si la cantidad de refresco en el tanque inicialmente representaba las tres cuartas partes de su capacidad, ¿cuál es la capacidad del tanque?

21. En un terreno hay sembradas varias hectáreas de col, lechuga y tomate. De col hay sembradas la tercera parte del total de hectáreas, de lechuga el 30 % del resto y de tomate, hay sembradas 28 hectáreas.

a) ¿Cuántas hectáreas hay sembradas de lechuga?
b) Si ya se recogieron la mitad de las hectáreas de col, el 25 % de las de lechugas y 15 hectáreas de tomate, ¿cuántas hectáreas en total faltan por recoger?

22. Joanna visitó la Feria del Libro. Durante su estancia allí, invirtió el 60 % del dinero que llevaba en la compra de varios libros, un cuarto de lo que le quedaba lo destinó para merendar y regresó a la casa con $30.00.

a) ¿Cuánto dinero llevó Joanna a la Feria?
b) Si los cinco libros que compró tenían el mismo precio, ¿qué precio tenía cada libro?
c) ¿Qué tanto por ciento del dinero que llevó Joanna a la Feria destinó a la merienda?

23. En una secundaria, el 25 % de la matrícula de la escuela es de séptimo grado, el 40% del resto cursa el octavo grado y hay 270 estudiantes en noveno grado.

a) ¿Cuál es la matrícula de la escuela?

b) Si cada grupo de la secundaria tiene como máximo 40 estudiantes, ¿cuántos grupos de cada grado hay en la escuela?

24. En una secundaria básica se utilizaron dos aulas para la escuela de padres. En un aula había el doble de sillas que en la otra. Para tener la misma cantidad de sillas en cada aula de la escuela de padres fue necesario trasladar 8 sillas del aula que más sillas tenía para la otra. ¿Cuántas sillas tenían cada aula antes de realizar la escuela de padres?

25. La cantidad de integrantes del Círculo de Interés Pedagógico es el triplo de la cantidad de estudiantes pertenecientes al círculo de interés de Medicina Natural y Tradicional. Si se incorporan cinco estudiantes más al círculo de interés de Medicina Natural y Tradicional, entonces este círculo tendría la mitad de integrantes que tiene el Círculo de Interés Pedagógico. ¿Cuántos integrantes tiene cada uno de estos círculos de interés?

26. En las elecciones pioneriles de un destacamento de octavo grado fueron propuestas tres estudiantes para jefa de destacamento: Brenda, Laura y Claudia. Al realizar el conteo de votos se comprobó que todos los presentes votaron y que todos los votos fueron válidos, que Brenda obtuvo las dos quintas partes del total de votos, que Laura obtuvo 7 votos más que Claudia y que Brenda obtuvo el doble de los votos obtenidos por Claudia.

a) ¿Cuántos pioneros participaron en la votación?

b) ¿Qué pionera fue elegida como jefa de destacamento?

27. En la figura 3.9 α y β ángulos adyacentes. Si $\angle \alpha = 5x + 1°$ y $\angle \beta = 2x - 17°$. Calcula las amplitudes de los ángulos α y β.

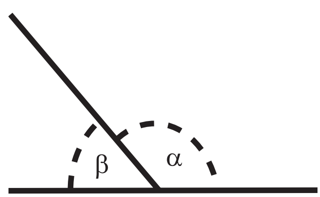


Fig. 3.9

28. De dos números se conoce que uno es menor en tres que el otro. Si al quíntuplo del mayor se le sustrae 30 se obtiene el duplo del número menor, ¿cuáles son los números?

29. En la figura 3.10 *ABEF* cuadrado y *ACDG* rectángulo, con *A, B* y *C* puntos alineados. La longitud del lado $\overline{AC}$ excede en 24 centímetros a la longitud del lado del cuadrado y la longitud de $\overline{DC}$ es 12 centímetros menor que la longitud de $\overline{EB}$. Cuáles son las longitudes de los lados del rectángulo si el cuadrado y el rectángulo tienen la misma área.

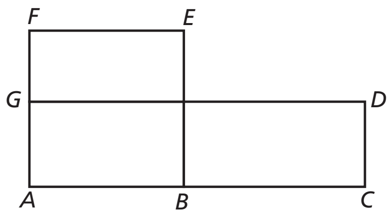


Fig. 3.10

30. Redacta un problema cuya resolución conduzca al planteamiento de la ecuación siguiente:

a) $x + 21 = 2x$;   b) $(x+5)4 = 602$;   c) $[(3x + 2) + x] = 36$

31. Elabora problemas utilizando la información de las figuras 3.11 a la 3.14 siguientes:

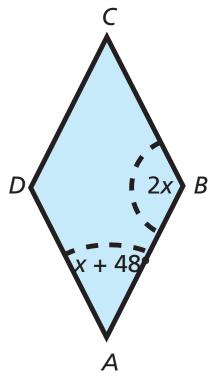


Fig. 3.11

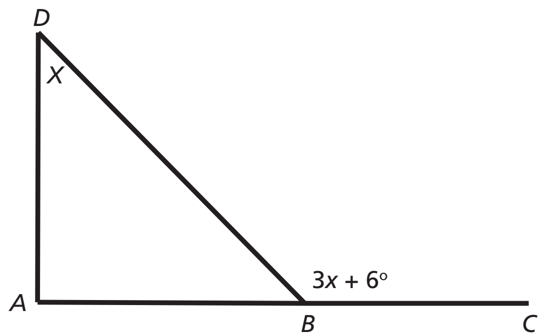


Fig. 3.12

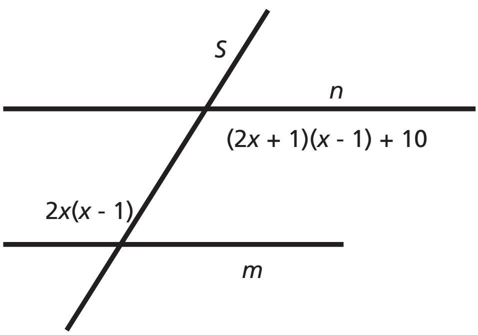


Fig. 3.13

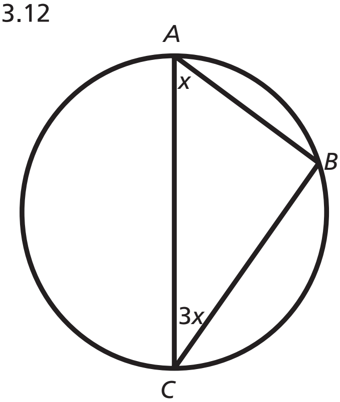


Fig. 3.14

32. Enuncia un problema relacionado con las edades de dos personas que conduzca a la ecuación siguiente: $4x + 5 = 3(x + 5)$

33. Elabora tres problemas que conduzcan a una ecuación lineal con una variable y que estén vinculados con la geometría plana.

3.4 Funciones lineales

Los medios de comunicación acostumbran a utilizar tablas y gráficos para transmitir informaciones y hacerlas más fácilmente comprensibles. Por ejemplo, para reflejar la evolución en el tiempo de la población mundial, la proporción del total de energía consumida por sectores, costo de teléfonos celulares por meses, el cálculo de oferta y demanda de un determinado producto, se puede calcular el consumo de un servicio, por ejemplo, agua, luz, gas, teléfono, etc. En la ciencia, en general, se utilizan con mucha frecuencia, por ejemplo, para hallar tasas de variación tales como: el cálculo de velocidades o en el estudio de reacciones químicas. También se usan para efectuar cambios de unidades de medida como la conversión de kilómetros a millas, o de grados centígrados a grados Fahrenheit y para realizar predicciones.

Aplica tus conocimientos

Mateo necesita saber la cantidad de dinero del saldo que tiene en su teléfono celular que consumirá si realiza una llamada a su madre en la mañana. Si él conoce que la llamada desde un celular prepago a un número en Cuba, según ETECSA cuesta 0.35 centavos en horario regular, por cada minuto íntegro, con sus 60 segundos, ¿de qué manera puede Mateo conocer cuánto dinero gastará en la llamada a su mamá?

Desde la Educación Primaria has estudiado las relaciones entre cantidades, que se pueden escribir en proporciones, pero también puedes utilizar tablas o gráficos donde se muestre el comportamiento de los valores de las magnitudes que intervienen en una situación que se te presente en la vida.

En este caso, las magnitudes presentes en esta situación son: la cantidad de minutos que habla Mateo cuando realiza la llamada y la cantidad de dinero que consume del saldo por minuto.

En este epígrafe recordaremos las diferentes formas de representar las correspondencias o relaciones que se establecen entre magnitudes y estudiarás uno de los conceptos más importantes de la Matemática para designar la dependencia entre los valores de las magnitudes que intervienen en una proporcionalidad directa.

3.4.1 Sistematización de razones y proporciones

Reflexiona un instante

Ana quiere saber cuántas veces es más alta su hija mayor Rosa que la más pequeña Ada; ella conoce la estatura de cada una de sus hijas, Rosa mide 1,50 metros y Ada 75 centímetros.

Existen varias formas de comparar dos números o cantidades, se puede hallar la diferencia o el cociente entre estos.

Ana debe primero expresar las estaturas en la misma unidad de medida para poder compararlas, p uede llegar a la conclusión de que Rosa tiene 0,75 m más de estatura que su hermana (1,50 m – 0,75 m = 0,75 m) oque la estatura de Rosa es **dos veces** (el doble de) la de Ada, también puede decir que la estatura de Ada es la **mitad** que la de Rosa pues calcula el cociente: $\frac{1{,}50\ m}{0{,}75\ m} = 2$, $\frac{150\ cm}{75\ cm} = 2$.

Recuerda que...

La razón de dos números *a* y *b* es la fracción $\frac{a}{b}$, con $b \neq 0$, y se lee *a* es a *b*.

Esta razón también puede escribirse *a:b*.

Para hallar la razón entre dos números, formas el cociente entre estos y lo puedes simplificar tanto como sea posible.

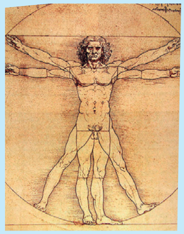
De la historia

Desde la Antigüedad clásica, matemáticos, filósofos y artistas han creído en la existencia de una razón privilegiada o divina que fue llamada **número áureo.**

Este número se suele indicar con la letra griega (fi) Φ y es un número irracional aproximadamente igual a 1,618

Pitágoras y sus seguidores ya habían descubierto este número al calcular la **razón** entre la longitud del lado de un pentágono y su diagonal.

Los griegos también consideraban que un rectángulo cuyos lados *a* y *b* estén en la relación $a : b = \Phi$ era especialmente armonioso y lo llamaron **rectángulo** áureo **o de oro**.



Razón aurea

$$\boxed{\phi = \frac{a}{b} = 1{,}618\,033...} \quad b$$

a

Fig. 3.15

Este rectángulo lo emplearon los arquitectos griegos en las construcciones de templos y edificios, como el **Partenón de Atenas,** por considerarlo de mayor atractivo artístico.

También pintores famosos han utilizado en sus obras la igualmente llamada **proporción divina**.

Como **Leonardo Da Vinci**, en su dibujo titulado **El hombre ideal**, donde la razón entre la distancia desde la cabeza hasta el ombligo y desde éste hasta los pies, es la misma que la razón entre la distancia desde el ombligo hasta los pies y desde la cabeza hasta los pies, además sobre el rostro y el cuerpo se aprecian rectángulos de oro.

Aparece igualmente en pinturas de **Salvador Dalí**, como la **Venus de Boticelli**.

Esta razón también la usaron en sus producciones artistas del Renacimiento. Por ejemplo, en España, en el **Palacio de La Alhambra**.

Aplica tus conocimientos

Luisito tiene seis bolas azules y tres bolas rojas; Aldo tiene diez bolas amarillas y cinco bolas verdes. Halla las razones entre las bolas que tiene cada niño y compara los resultados.

Recuerda que...

La igualdad entre dos razones recibe el nombre de proporción.
En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.
En una proporción al intercambiar los medios o los extremos y al invertir las razones se obtiene una proporción equivalente.

Ejemplo 1:

Las razones que se obtienen entre las bolas de Luisito y Aldo son iguales, por tanto forman una proporción.

Podemos decir entonces que $\frac{6}{3} = \frac{10}{5}$ es una **proporción**.

También puede escribirse 6 : 3 = 10 : 5.

En ambos casos se lee: 6 es a 3 como 10 es a 5.

Observa también qué sucede si intercambiamos los medios o los extremos de una proporción:

$\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ es una proporción, porque $6 \cdot 5 = 10 \cdot 3$

$\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$ es una proporción, porque $5 \cdot 6 = 3 \cdot 10$

Y si se invierten ambas razones:

$\frac{3}{6} = \frac{5}{10}$ es una proporción, porque $3 \cdot 10 = 6 \cdot 5$.

De la historia

La teoría de las proporciones fue desarrollada por el gran matemático griego Eudoxio, que nació en la ciudad de Cnido en el Asia Menor en el año 408 a.n.e. Su obra original no llegó hasta los tiempos actuales, pero gracias a uno de los más ilustres sucesores, Euclides de Alejandría, se pudo conocer dicha teoría, pues la recogió en su libro *V* de los Elementos.

Fig. 3.16

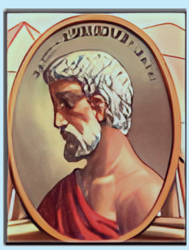


Fig. 3.17

Ejemplo 2:

En el Estadio Latinoamericano, del municipio Cerro, de la provincia La Habana se efectuó un juego de béisbol entre dos equipos de la serie nacional, asistieron 12 000 niños. Si la razón entre el número de niños y adultos que observaron el juego fue de 3 es a 7:

a) ¿Cuántos adultos asistieron al estadio?
b) ¿Cuántas personas asistieron en total?

Solución:

a) Representas por x la cantidad de adultos que asistieron al estadio.
La razón entre el número de niños y el de adultos se puede expresar como $\frac{12\,000}{x}$.
Como la razón es igual a $\frac{3}{7}$, puedes plantear la siguiente proporción:
$\frac{12\,00}{x} = \frac{3}{7}$ aplicas la propiedad fundamental de la proporción y resuelves la ecuación:
$12\,000 \cdot 7 = x \cdot 3$
$x = \frac{12\,000 \cdot 5}{2} = 28\,000$
Respuesta: Asistieron al estadio 28 000 adultos.

b) 12 000 + 28 000 = 40 000.
Respuesta: Asistieron un total de 40 000 personas al juego.

Ejemplo 3:

Un destacamento pioneril de octavo grado tiene 28 estudiantes; la razón entre la cantidad de hembras y la cantidad de varones es 4 : 3. ¿Cuántos varones y cuántas hembras tiene el destacamento?

Solución:

Este problema puedes resolverlo por varias vías:

Primera vía:

Datos:
cantidad de hembras:
v cantidad de varones: h
Total de estudiantes: 28

Como conoces la razón entre la cantidad de hembras y la de varones, planteas la razón dada y la amplías hasta que la suma del numerador y el denominador sea 28.

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{12}{9} = \frac{16}{12}$$

Respuesta: El destacamento tiene 16 hembras y 12 varones.

Segunda vía:

Como el total de estudiantes es 28 y no se conoce la cantidad de hembras y varones, puedes aplicar el procedimiento estudiado, asignando a una de las cantidades buscadas una variable y utilizando la propiedad de operación inversa para designar a la otra cantidad.

Datos:

Cantidad de hembras: x

Cantidad de varones: $28 - x$

Como la razón entre la cantidad de hembras y varones es 4 : 3, planteamos la proporción siguiente:

$$\frac{x}{28 - x} = \frac{4}{3}$$

$3x = 4(28 - x)$ aplicando la propiedad fundamental de las proporciones.

$3x = 112 - 4x$

$3x + 4x = 112$

$7x = 112$

$x = 16$ (cantidad de hembras) $28 - 16 = 12$ (cantidad de varones)

Respuesta: El destacamento tiene 16 hembras y 12 varones.

Ejercicios

1. Halla la razón entre:

a) 20 y 4 b) 4 y 20 c) 4 y 10 d) 10 y 4 e) $\frac{1}{2}$ y 4

f) 4 y $\frac{1}{2}$ g) 0,25 y 0,75 h) 8 y $\frac{2}{7}$ i) $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{10}$ j) $\frac{3}{4}$ y $\frac{27}{2}$

2. Busca tres pares de números que estén en la razón:

a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) 3 : 7

3. Cada figura que se muestra (fig. 3.18 está dividida en figuritas iguales más pequeñas, unas de color blanco y otras de color negro. Halla en cada inciso la razón entre:

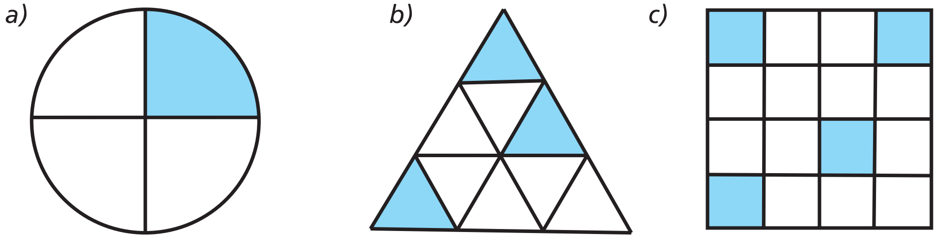


Fig. 3.18

3.1 El número de figuritas blancas y el de figuritas negras.
3.2 El número de figuritas blancas y el total de figuritas.
3.3 El número de figuritas negras y el total de figuritas.

4. En qué razón se encuentran:

a) Las edades de dos jóvenes de 16 y 18 años respectivamente.
b) Las longitudes de dos segmentos $\overline{AB}$ = 15 cm y $\overline{CD}$ = 5,0 cm
c) El área de dos triángulos que miden 20 dm^2 y 4000 mm^2.
d) Las amplitudes entre los ángulos α y β, si α es un ángulo llano y β un ángulo recto.

5. Selecciona cuáles de los pares de números dados están en la razón cinco es a 1.

a) 7 y 2 b) 15 y 3 c) 20 y 5 d) 1,1 y 5,5 e) 2 y $\frac{2}{5}$

6. ¿Cuántos cuadraditos del cuadrado en blanco hay que sombrear para que las partes sombreadas de las figuras (fig. 3.19), del mismo tipo, estén en la misma razón?

7. Completa la serie de dibujos de la figura 3.20, conociendo que la razón entre las partes sombreadas en cada figura es $\frac{2}{3}$.

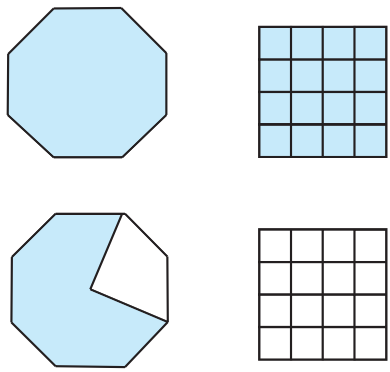


Fig. 3.19

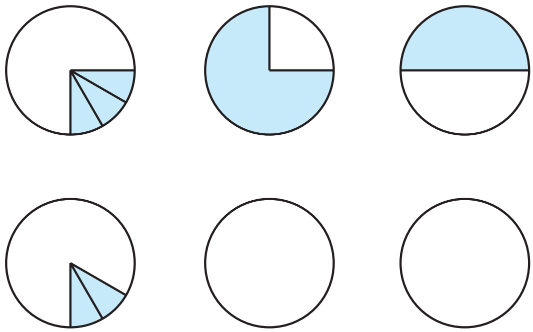


Fig. 3.20

8. Selecciona cuáles de los pares de razones siguientes forman una proporción.

a) $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{5}$ b) 30 : 7 y 15 : 3,5 c) $\frac{5}{10}$ y $\frac{0,2}{0,4}$ d) 2,4 : 3,2 = 0,5 : 2

9. Calcula el valor de la variable en cada caso en las siguientes proporciones:

a) $\frac{x}{2} = \frac{5}{30}$ b) 3 : y = 1,2 : 8,4 c) $\frac{80}{a} = \frac{a}{20}$

10. Dos números están en la relación de cinco a tres. Si el mayor es 655, ¿cuál es el menor?

11. En una secundaria básica hay 140 pioneros categorizados como pioneros Mambí. Si la razón entre los categorizados como Mambí y Rebelde es 4 : 3¿Cuántos pioneros están categorizados como Rebeldes?

12. En una acampada pioneril, la razón del número de varones y de hembras es de $\frac{5}{6}$. Si hay 126 hembras. ¿Cuántas hembras más que varones hay en la acampada?

13. En un juego de baloncesto por cada siete tiros se anotaron tres canastas. Si en total hubo 63 tiros. ¿Cuántas canastas se dejaron de anotar?

14. Cinco de cada seis personas que asistieron a una base de campismo son adultos. Si asistieron 55 adultos. ¿Cuántas personas asistieron al campismo?

15. Cuando María abrió su alcancía encontró que tenía 63 monedas entre medios y pesetas. Si por cada siete monedas hay cuatro medios. ¿Qué cantidad de dinero había en la alcancía? (ten en cuenta que todas las pesetas son de 20 centavos).

3.4.2. Sistematización de proporcionalidad. Proporcionalidad directa e inversa

Reflexiona un instante

Alicia, la mamá de Carlos, le preparará un pastel para su cumpleaños, que compartirá, además, con su papá y su hermano mayor.

La receta de un pastel de vainilla indica que para cuatro personas se necesitan 200 g de harina, 150 g de mantequilla, cuatro huevos y 120 g de azúcar.

Carlos le dice a su mamá que invitará a comer pastel a su mejor amigo, Tony. Ahora la mamá debe preparar para cinco personas y no para cuatro como lo había previsto ¿Cómo adaptará Alicia la receta para cinco personas?

Es evidente que se debe aumentar en la receta a cada ingrediente una cantidad determinada de gramos y también la cantidad de huevos a utilizar. ¿Pero será posible hacerlo sin una medida adecuada? Por supuesto que no, porque el pastel no quedaría con la calidad necesaria.

En esta situación es necesario que la cantidad de cada ingrediente sea **correspondiente** al número de personas.

Analicemos la correspondencia que existe entre dos cantidades o magnitudes, donde una depende de la otra:

a) El precio de una libra de malanga en el mercado agropecuario es de $60,00; si una persona quiere comprar dos libras su precio sería $120,00, si comprará tres libras su precio sería $180,00 y así sucesivamente.
b) Al cumplir cinco años, Raúl medía 95 cm; a los ocho años, su estatura era de 110 cm y ahora, que tiene 11 años mide 135 cm.
c) Un campesino deshierba un campo en 10 días, dos campesinos, trabajando al mismo tiempo, lo deshierban en cinco días.

La cantidad de dinero a pagar por la compra de malanga depende de la cantidad de libras que se compren. La estatura de una persona en edad de crecimiento depende o está relacionada con su edad. El tiempo que tarda desyerbar un terreno depende del número de personas que participen en esta tarea.

En realidad, hay muchas situaciones de la vida que se pueden expresar como correspondencias de una magnitud con otra.

Si tuvieras que saber: cuánto sería el precio de cuatro libras de malanga, la estatura de Raúl a los 15 años o la cantidad necesaria de campesinos para desyerbar el campo en un día, además de identificar que magnitud depende de la otra, necesitamos saber cuál es el criterio de correspondencia que existe entre las magnitudes.

Si a los 11 años Raúl medía 135 cm, es razonable pensar que a los 15 años haya crecido, pero ¿cuánto más? No es posible determinarlo.

Si una libra de malanga cuesta $60,00, cuatro libras, cuanto le costaría, (el cuádruplo cuatro veces su precio) costará $240. La correspondencia en este caso es más sencilla y calculas el precio a pagar multiplicando por cuatro el precio de una libra.

Si un campesino deshierba un campo en diez días y dos campesinos (el doble), lo hacen en cinco días (la mitad); ¿Cuántos campesinos se necesitan para desyerbarlo en un día (la décima parte)? La correspondencia en esta ocasión también se puede calcular solo que, a diferencia del caso anterior, lo hacemos dividiendo por diez la cantidad de días que demora un solo campesino.

Atención

Dos magnitudes son proporcionales cuando multiplicando o dividiendo una de estas por un número, la otra queda multiplicada o dividida (o viceversa) por el mismo número.

Aplica tus conocimientos

En la figura 3.21 se muestra la cantidad de naranjas y su precio.

Fig. 3.21

¿Qué magnitudes se relacionan en la ilustración?

¿Cómo calcular los datos desconocidos en la ilustración?

Establece las razones entre los valores de la primera magnitud y sus valores correspondientes de la segunda magnitud y compara los resultados.

Como ves, aquí aparecen relacionadas dos magnitudes: cantidad de naranjas y precio.

Es evidente que existe una relación entre ambas magnitudes, que nos permite completar los valores desconocidos:

Puedes observar que:

- Si una naranja cuesta \$0,50 y dos naranjas cuestan \$1,00, al aumentar en el **doble** la cantidad de naranjas, el precio es el **doble**.
- Si una naranja cuesta \$0,50 y tres naranjas cuestan \$1,50, al aumentar en el triplo la cantidad de naranjas, aumenta al **triplo** el precio.

Puedes calcular el precio de ocho naranjas, utilizando la correspondencia de que para una naranja su precio es \$0,50, por tanto, ocho naranjas sería multiplicar 0,50 por ocho; entonces, cuestan \$4,00 y para determinar cuántas naranjas cuestan \$7,50 divides este precio por el precio de una naranja, obteniendo 15 naranjas.

Recuerda que...

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando:

- **Aumenta** una magnitud (doble, triple, ...) y la otra **aumenta** de igual manera (doble, triple, ...).
- **Disminuye** una magnitud (mitad, tercio, ...) y la otra **disminuye** de la misma forma (mitad, tercio, ...).

El factor de proporcionalidad directa es el cociente que se obtiene dividiendo cualquier cantidad de la segunda magnitud entre la cantidad a la cual le corresponde la primera.

Puedes apreciar que en todos los casos el precio de las naranjas se obtiene multiplicando la cantidad de naranjas por un mismo valor, 0,50; que recibe el nombre de factor de proporcionalidad

Atención

De manera general esta correspondencia entre magnitudes se puede expresar como $y = \mathbf{k} \cdot x$, donde **k** es el **factor de proporcionalidad directa**.

Las razones entre dos valores de la magnitud cantidad de naranjas y sus valores correspondientes a sus precios son iguales, por tanto, forman una proporción.

$$\frac{1}{2}=\frac{0{,}50}{1} \qquad \frac{2}{3}=\frac{1}{1{,}50} \qquad \frac{3}{8}=\frac{1{,}50}{4} \qquad \frac{8}{15}=\frac{4}{7{,}50}$$

La **proporcionalidad directa** se aplica en la vida frecuentemente para resolver problemas donde aparecen magnitudes que se relacionan entre sí, por ejemplo: los **porcentajes**, las **escalas** y el **reparto proporcional**.

Si representas esta correspondencia en un sistema de coordenadas, puedes comprobar que los puntos que se obtienen al representar cada par de valores correspondientes, *están sobre una misma recta* (fig. 3.22).

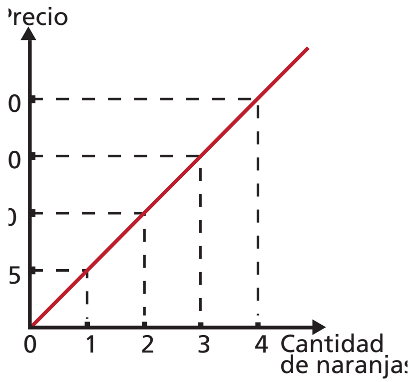


Fig. 3.22

Ejemplo 1:

Una llave abierta completamente durante 5 min hace que el nivel del agua de un tanque suba 20 cm. ¿Cuánto subirá el nivel del agua si se abre completamente la llave durante 15 min?

Solución:

Asignas la variable x al nivel del agua en el tanque a los 15 min. Puedes representar los datos del problema en una tabla:

Tabla 3.11

Tiempo (minutos)	5	15
Nivel del agua (centímetros)	20	x

Como dos valores de una magnitud y sus correspondientes en la otra forman una proporción, puedes plantear la siguiente proporción:

$\frac{5}{15}=\frac{20}{x}$ Para calcular el término desconocido aplicas la propiedad fundamental de las proporciones

$$x=\frac{20\cdot 15}{5}=60 \text{ cm}$$

Respuesta: Si se abre la llave completamente durante 15 min, el nivel del agua subirá hasta los 60 cm.

Recuerda que también puedes resolver el problema hallando el factor de proporcionalidad, que es $\frac{20}{5} = 4$ y multiplicas $4 \cdot 15 = 60$.

Ejemplo 2:

La Torre Eiffel (fig. 3.23) símbolo de Francia, es una estructura de hierro pudelado diseñada por el ingeniero francés **Gustave Eiffel**.

En un museo se muestra una maqueta de Paris donde aparece la Torre Eiffel. La maqueta fue elaborada a escala 1 : 1 620, por lo que la altura de la torre en la maqueta alcanza solo 20 cm. ¿Cuál es la altura real de la Torre Eiffel?

Fig. 3.23

Solución:

La escala 1 : 1 620 nos indica que por cada centímetro de la maqueta, en la realidad son 1 620 cm.

Para hallar las medidas reales basta con multiplicar por 1 620 las medidas que aparecen en la maqueta.

También se puede proceder al cálculo de la altura a partir de una proporción:

$\frac{1}{20} = \frac{1620}{h}$ aplicando la propiedad fundamental de las proporciones

$h = \frac{20 \cdot 1620}{1} = 32\,400$ cm.

La respuesta es más adecuada si la expresas en metros por lo que debes realizar la conversión de unidades de longitud.

Respuesta: La altura real de la Torre de Eiffel es 324 m.

Ejemplo 3:

El Programa de Agricultura Urbana, Suburbana y Familiar, permite a las familias cubanas sembrar en patios y parcelas productos alimenticios. Tres familias invirtieron \$700 en la compra de varias posturas de hortalizas. La primera familia compró dos posturas de tomate, la segunda cinco y la tercera siete.

Solución:

Datos:

x: Cantidad de dinero invertido por la primera familia

y: Cantidad de dinero invertido por la segunda familia

z: Cantidad de dinero invertido por la tercera familia

Como el reparto se hizo proporcional al total de dinero invertido, puedes plantear la proporción siguiente:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} = k$$

Igualando cada razón a k por separado y despejando la variable obtienes:

$x = 2k$

$y = 5k$

$z = 7k$

Adicionando cada miembro, obtienes:

$x = 2k$

$y = 5k$

$+ z = 7k$

$x + y + z = 14k$

Como el total de dinero invertido es \$70, entonces: $x + y + z = 70$. Sustituyes en el miembro izquierdo de la última igualdad y obtienes:

$700 = 14k$, de donde $k = 50$.

Conociendo k, ya es posible calcular la cantidad de dinero invertido:

$x = 2 \cdot 50 = 100$

$y = 5 \cdot 50 = 250$

$z = 7 \cdot 50 = 350$

Respuesta: La primera familia invirtió \$100.00, la segunda, \$250.00. y la tercera, \$350.00.

Reflexiona un instante

En la tabla 3.12 siguiente se muestra el tiempo, en minutos que demora en llenarse un tanque (fig. 3.24) según la cantidad de llaves que se utilicen, las cuales vierten igual cantidad de litros de agua por minuto.

Tabla 3.12

Cantidad de llaves	1	2	3	4	…	**?**
Tiempo en minutos	60	30	**?**	15	…	10

Calcula mentalmente los valores desconocidos.

¿Qué magnitudes se relacionan en la tabla?

Completa la tabla y deja escrito tus calculos.

Fig. 3.24

Establece las razones entre los valores de la primera magnitud y sus valores correspondientes de la segunda magnitud y compara los resultados.

Si una llave llena el tanque en 60 minutos y dos llaves lo hacen en 30 minutos, al aumentar en el **doble** la cantidad de llaves, disminuye en el **doble** el tiempo de llenado.

Si una llave llena el tanque en 60 minutos, al aumentar en el **triplo** la cantidad de llaves, disminuye en el **triplo** el tiempo de llenado, por lo que tres llaves lo harán en **20 minutos**.

Mientras que, si el tiempo disminuye **seis veces**, la cantidad de llaves aumenta **seis veces** y el tanque se llenará en 10 minutos si se utilizan **seis llaves**.

Recuerda que...

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** cuando:

- Al **aumentar** una magnitud (en el doble, el triplo, ...), la otra **disminuye** de igual manera (doble, triplo, ...).
- **Disminuye** una magnitud (mitad, tercio, ...), la otra **aumenta** de la misma forma (mitad, tercio, ...).

En una proporcionalidad inversa la razón entre dos cantidades cualesquiera de una magnitud y el recíproco de la razón de sus correspondientes en la otra, forman una **proporción.**

En una proporcionalidad inversa, el factor de proporcionalidad se halla **multiplicando cualquier cantidad de la segunda magnitud por la cantidad a la cual le corresponde la primera**.

De la tabla puedes observar que:

$60 = 1 \cdot 60;\ 30 = \frac{1}{2} \cdot 60;\ 20 = \frac{1}{3} \cdot 60;\ 15 = \frac{1}{4} \cdot 60$

Puedes apreciar que en todos los casos el tiempo que demora en llenarse el tanque se obtiene multiplicando por **60**, los **recíprocos** de la cantidad de llaves utilizadas, luego este valor, **60**, es el factor **de proporcionalidad inversa**.

Atención

De manera general esta correspondencia entre magnitudes se puede expresar como $y = k \cdot \frac{1}{x}$, donde k es el **factor de proporcionalidad inversa**.

Volvamos a la tabla ya completada:

Tabla 3.13

Cantidad de llaves	1	2	3	4	…	6
Tiempo en minutos	60	30	20	15	…	10

Calculamos las razones entre dos valores de una misma magnitud y los recíprocos de su razón correspondiente para comparar los resultados:

$\frac{1}{2} = \frac{30}{60}$ $\frac{2}{3} = \frac{20}{30}$ $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$ $\frac{4}{6} = \frac{10}{15}$

Las razones en cada caso son **iguales**, o sea, se forma una **proporción**.

En este ejemplo el factor de proporcionalidad es 60, pues el número por el cual **se multiplica** cada recíproco de la cantidad de llaves para obtener el tiempo en minutos que demora en llenarse el tanque.

También puedes representar gráficamente la relación entre magnitudes inversamente proporcionales (fig. 3.25).

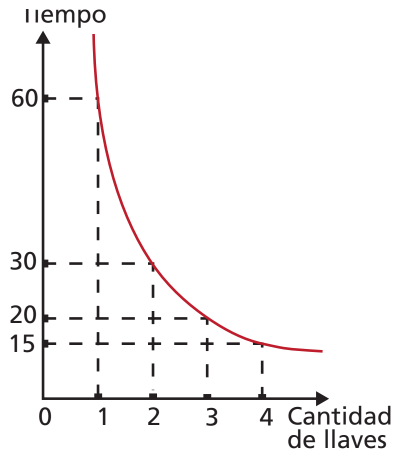


Fig. 3.25

De la historia

Pitágoras (siglo VI a.n.e.) hizo famoso el monocordio, instrumento que utilizó para identificar y definir los intervalos musicales y en la enseñanza de la teoría pitagórica de la relación entre los números y la música; entre otras cosas demostró que la frecuencia del sonido es **inversamente proporcional** a la longitud de la cuerda.

Fig. 3.26

La primera referencia escrita sobre el monocordio se atribuye a Boecio (siglo VI n.e.); según su relato:

Pitágoras, obsesionado por explicar matemáticamente los intervalos, al pasar por una herrería quedó sorprendido por el sonido rítmico del golpe de los martillos en el yunque. Entró, observó y experimentó utilizando cinco martillos.

Comprobó que uno, que rompía la escala perfecta de sonidos, tenía un peso sin relación numérica con el resto, por lo que lo eliminó.

Con los restantes, obtuvo las siguientes conclusiones: sus pesos estaban en la proporción 12, 9, 8 y 6; el mayor (12), de peso doble del más pequeño (6), producía un sonido (una octava) más bajo que el menor.

El peso de los otros dos martillos (9 y 8) correspondía a la media aritmética y armónica respectivamente de los de peso (12 y 6), por lo que dedujo que darían las otras notas fijas de la escala.

Ejemplo 4:

En las tablas de la 3.14 a la 3.16, identifica en cuáles se representa una proporcionalidad inversa y calcula, de ser posible, los valores que faltan.

a) La tabla 3.14 muestra la correspondencia que se establece entre la longitud del largo y la longitud del ancho, en centímetros, de varios rectángulos de 36 cm^2 de área.

Tabla 3.14

Largo (cm)	1	2	3	
Ancho(cm)	36	18		4

b) La tabla 3.15 muestra la correspondencia que se establece entre los valores de las escalas de temperatura expresados en grados centígrados (°C) y en grados Fahrenheit (°F), conocimiento muy importante y necesario para el ser humano que se determina por la expresión: $\frac{°F - 32}{9} = \frac{°C}{5}$

Tabla 3.15

grados centígrados (°C)	5	10	15	
grados Fahrenheit (°F)	41	50		68

c) La tabla 3.16 muestra la correspondencia que se establece entre la velocidad de un auto y el tiempo que demora en hacer su recorrido.

Solución:

Tabla 3.16

Velocidad del auto (km/h)	15		60	90
Tiempo (horas)	6	2		1

a) Para comprobar si es una proporcionalidad inversa puedes proceder de varias formas:

Primera vía:

Compruebas si los valores de una de las magnitudes se obtienen multiplicando por un mismo número los recíprocos de los valores correspondientes de la otra.

$36 = 1 \cdot 36$; $18 = \frac{1}{2} \cdot 36$; se cumple, luego las magnitudes son inversamente proporcionales y el factor de proporcionalidad inversa es 36.

Segunda vía:

Compruebas si los valores de la tabla forman una proporción, para esto comparas la razón entre los valores de una magnitud (la longitud del largo) y el recíproco de la razón de sus valores correspondientes en la otra (la longitud del ancho):

Razón entre dos valores de la longitud del largo: $\frac{1}{2}$

Razón entre dos valores de la longitud del ancho: $\frac{36}{18}$

Recíproco de la razón entre dos valores de la longitud del ancho: $\frac{18}{36}$

Comparación: $\frac{1}{2} = \frac{18}{36}$, son iguales, luego las magnitudes son inversamente proporcionales.

Tercera vía:

Multiplicas cualquier valor de la segunda magnitud por su correspondiente en la primera y verificas si se obtiene el mismo resultado.

$1 \cdot 36 = 36$ y $2 \cdot 18 = 36$; se obtiene el mismo resultado.

Hemos comprobado por tres vías diferentes que la correspondencia es una proporcionalidad inversa y es posible hallar los valores que faltan en la tabla.

Como el factor de proporcionalidad es 36, multiplicando $36 \cdot \frac{1}{3} = 12$.

Respuesta:

Largo (cm)	1	2	3	9
Ancho(cm)	36	18	12	4

El otro valor lo hallamos dividiendo $\frac{36}{4} = 9$.

b) Para comprobar si es una proporcionalidad inversa aplicas uno de los procedimientos anteriores.

Multiplicas los valores de la segunda magnitud (escala grados Fahrenheit (°F)) por sus valores correspondientes de la primera (escala grados centígrados (°C) y verificas si se obtiene el mismo resultado. $41 \cdot 5 = 205$ y $50 \cdot 10 = 500$ (no se obtiene el mismo valor, por lo que dicha correspondencia no es una proporcionalidad inversa)

c) Compruebas si es una proporcionalidad inversa por una de las vías conocidas:

$15 \cdot 6 = 90$ y $90 \cdot 1 = 90$

Se obtiene el mismo valor, por lo que esta correspondencia es una proporción y es posible hallar los valores que faltan en la tabla.

Como el factor de proporcionalidad es 90, para hallar la velocidad del auto cuando han transcurrido 2 horas, multiplicamos $90 \cdot \frac{1}{2} = 45$.y se coloca en la tabla.

En el otro caso, dividimos $90 : 60 = 1{,}5$ y se coloca en la tabla.

En la vida frecuentemente es necesario resolver problemas donde aparecen magnitudes que se relacionan entre sí mediante una **proporcionalidad inversa**.

Ejemplo 5:

Para descargar un contenedor en cuatro horas son necesarios seis operarios.

a) ¿Cuántos operarios se necesitan para descargarlo en dos horas?

b) ¿*Y* para descargarlo en 20 min?

Fig. 3.27

Solución:

a) Designas por *x* la cantidad de operarios que se necesitan para descargar el contenedor en dos horas.

Se puede confeccionar la siguiente tabla:

Tabla 3.17

Cantidad de operarios	6	x
Tiempo (hora)	4	2

El problema se puede resolver por varias vías:

Primera vía:

- Formas una proporción: $\frac{6}{x} = \frac{2}{4}$
- Hallas el valor de x : $x = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12$

Segunda vía:

- Hallas el factor de proporcionalidad: multiplicas 4 · 6 = 24.
- Multiplicas el factor hallado por el recíproco del valor conocido: $24 \cdot \frac{1}{2} = 12$.

Tercera vía:

(Reducción a la unidad) – Buscas cuánto demora un operario: 1 operario $\to$ x horas

- 4 operarios $\to$ 6 horas
- Formas la proporción: $\frac{1}{4} = \frac{6}{x}$
- Resuelves: $x = 24$.
- Divides 24 por el tiempo necesario, dos horas y se obtiene **12 operarios**.

Respuesta: Para descargar el contenedor en dos horas se necesitan 12 operarios.

b) 4 operarios $\to$ 360 minutos

x operarios $\to$ 20 minutos

Formas la proporción:

$$\frac{x}{4} = \frac{360}{20}$$

Hallas el valor de x: $x = \frac{360 \cdot 4}{20} = 72$.

Respuesta: Se necesitan 72 operarios para descargar el contenedor en 20 minutos.

Ejercicios

1. Di cuáles de los pares de magnitudes siguientes son directamente proporcionales:

a) La cantidad de entradas compradas para el cine y el dinero pagado por estas.
b) La edad de una persona y su peso.
c) La distancia recorrida por un camión que viaja a 80 km/h y el tiempo que tarda en recorrerla.
d) La talla de un pantalón y su precio.
e) El tiempo que permanece abierto una pila de agua y la cantidad de agua que vierte.
f) El grosor de un libro y su precio.
g) La longitud de una circunferencia y la longitud de su radio.
h) El volumen del agua y su peso.

2. De las correspondencias representadas en las tablas de la 3.18 a la 3.20, cuál de las correspondencias representadas en las tablas es una proporcionalidad directa.

Tabla 3.18

a)

x	2	7	8
y	3	10,5	12

Tabla 3.19

b)

x	2	10	15
y	5	4	35

Tabla 3.20

c)

x	– 3	4	-7
y	15	-20	35

3. Los datos representados en las tablas 3.21 a 3.23 corresponden a magnitudes directamente proporcionales. Halla en cada caso el factor de proporcionalidad y calcula los valores que faltan.

Tabla 3.21

Libras de tomate	1	2	
Costo en peso	1,60		17,60

Tabla 3.22

Distancia recorrida por un auto (en km)	50	100	120
Litros de gasolina consumidos		8,5	

Tabla 3.23

Horas trabajadas		25	120,5
Salario que devenga en pesos	126	450	

4. Selecciona la respuesta correcta marcando con una *X* en cada caso.

4.1 Un cuerpo de cobre de 1dm^3 de volumen tiene una masa de 8,9 kg. Un objeto de cobre con una masa de 53,4 kg tiene un volumen de:

a) ___6,0 dm^3 b) ___ 475,26 dm^3

c) ___ 60 dm^3 d) ___47526 dm^3

4.2. Un ciclista recorre 54 km en 3 horas; si le faltan por recorrer 72 km, ¿cuántas horas en total se tardará si mantiene la misma velocidad?

a) ___ 4 h b) ___ 1,28 h c) ___ 7 h d) ___ 2 268 h

5. Una máquina elabora 180 piezas en tres horas.

a) ¿Cuántas piezas elabora en 18 horas?

b) ¿Cuántas horas necesita para elaborar 9 000 piezas?

6. El salario de un técnico es $1,25 por hora.

a) ¿Cuál es su salario por 40 horas de trabajo?

b) ¿Cuánto tiempo, en horas, ha trabajado si cobra $215,00?

7. Un auto consume cuatro litros de gasolina por cada 55 km recorridos. ¿Qué distancia puede recorrer con 20 litros de gasolina?

8. Si cuatro libros, que tienen igual precio, cuestan $20,00, ¿cuánto costarán tres docenas de libros a ese mismo precio?

9. Una torre de 25,05 m da una sombra de 33,40 m. ¿Cuál será, a la misma hora, la sombra de una persona cuya estatura es 1,80 m?

10. Un auto recorre 206,85 km en 3,5 horas con una velocidad constante. ¿Qué distancia recorre en cinco horas?

11. Un medicamento tiene como dosis 2 mg por cada kilogramo de masa del paciente. Si la doctora recetó a Luis 32 mg de dicho medicamento, ¿cuánto pesa Luis?

12. En una secundaria básica de los 40 estudiantes de un grupo, el 15% pertenecen al Círculo de Interés Pedagógico. ¿Cuántos estudiantes del aula pertenecen a dicho círculo?

13. En una CP*A* fueron sembradas 80 ha de boniato. Si ya han sido cosechadas 45 ha, ¿qué tanto por ciento del total de hectáreas falta por cosechar?

14. Un estudiante ha resuelto ya 27 ejercicios de la guía de matemática, lo que representa el 30% del total de ejercicios de la guía. ¿Cuántos ejercicios tiene la guía?

15. En un mapa, cada centímetro medido representa 32 km en la realidad. Se dice que el mapa está hecho a escala 1:32.

a) ¿*A* qué distancia se encuentran dos ciudades en realidad, si en el mapa están a 120 cm una de la otra?

b) ¿*A* cuántos centímetros en el mapa se encuentran dos capitales que en la realidad están a 464 km de distancia?

16. Descompón el número 78 en tres sumandos proporcionales a los números tres, cuatro y seis respectivamente.

17. Las longitudes de los lados de un triángulo son proporcionales a dos, cuatro y cinco. Si su perímetro es 16,5 cm, ¿cuánto miden sus lados?

18. En tres campamentos fueron plantados 60 árboles de forma tal que la cantidad de árboles sembrados en cada campamento es proporcional a tres, cuatro y cinco. ¿Cuántos árboles se sembraron en cada campamento?

19. Confecciona una tabla en la que relaciones dos magnitudes directamente proporcionales con cinco columnas y en las que sea necesario completarla con un valor de cada magnitud

20. Elabora tres problemas donde utilices magnitudes directamente proporcionales de las seleccionadas en el ejercicio uno de este epígrafe.

21. Cuáles de los pares siguientes de magnitudes son inversamente proporcionales:

a) La velocidad de un auto y el tiempo que tarda en recorrer la distancia entre dos ciudades.

b) La edad de un atleta y la velocidad a la que corre.
c) El precio de las naranjas y los kilogramos que puedo comprar con $120,00.
d) El número de personas que descargan un vagón y el tiempo que demoran en hacerlo.
e) La cantidad de llaves que se utilizan para llenar un depósito de agua y el tiempo que demoran en hacerlo.
f) El precio de un libro y la cantidad de páginas que tiene.

22. De las tablas 3.24 a la 3.30, di cuál(es) corresponde(n) a una proporcionalidad inversa.

Tabla 3.24

a)

x	2	3	4
y	12	8	6

Tabla 3.25

b)

x	0,1	2,5	4
y	80	3,2	2

Tabla 3.26

c)

x	-1	1	-0,5
y	0,5	-2	2

23. Los datos representados en las tablas 3.27 y 3.28 corresponden a magnitudes inversamente proporcionales. Halla en cada caso el factor de proporcionalidad y calcula los valores que faltan.

Tabla 3.27

Litros de agua que recibe un tanque por minuto		25	50
Tiempo necesario para llenarse	20		

Tabla 3.28

Velocidad de un auto		60	90
Tiempo de demora del viaje en horas	9		1,5

24. Selecciona en cada caso la respuesta correcta marcando con una X.

24.1. Una escuela se reparó por diez hombres en seis días. Se necesita pintarla en cuatro días laborando al mismo ritmo de trabajo, entonces la cantidad de hombres que se necesita para pintarla es:

a) ___ 2 b) ___ 8 c) ___ 12 d) ___ 15

24.2. Un niño recorre del brazo de su padre cierta distancia. La tabla 3.29 muestra la longitud del paso de cada uno de estos al caminar y la cantidad de pasos que dio el niño.

Tabla 3.29

	Longitud del paso	Cantidad de pasos
Niño	20 cm	120
Padre	50 cm	

El dato que faltó en la tabla es:

a) ___ 300 b) ___ 48 c) ___ 480 d) ___ 60

24.3. Una Brigada de nueve mecánicos puede realizar la reparación de una planta en 45 horas. ¿En qué tiempo pueden realizar este trabajo, al mismo ritmo, con seis mecánicos más?

a) ___ 27 h b) ___ 75 h c) ___ 67,5 h d) ___ 30 h

25. Un albañil tarda cinco días en levantar una pared de 84 m^2. ¿Cuánto tardarán dos albañiles trabajando al mismo ritmo que el primero?

26. Una brigada de diez albañiles levanta las paredes de una casa en cuatro días de trabajo, ¿cuántos albañiles más se necesitarán para levantarlas en $2\frac{1}{2}$ días, trabajando al mismo ritmo?

27. Un móvil tarda tres horas para ir de un pueblo a otro si viaja a 60 km/h. ¿Qué tiempo demorará en recorrer esa misma distancia si viaja a una velocidad de 90 km/h?

28. Nueve hombres recogen un campo de piña en cinco días.

a) ¿Cuántos hombres más se necesitarán para recogerlo en un día, trabajando al mismo ritmo?

b) ¿Cuántos hombres menos para recogerlo en 15 días?

29. Un tanque puede llenarse en 18 minutos por una llave que vierte 15 litros por minuto. ¿Cuánto tardará en llenarse por otra llave que vierte diez litros por minuto?

30. Fui ayer al agromercado y compré, con los $ 60,00 que llevaba, diez aguacates. Al cabo de una semana volví con el mismo dinero y solo pude comprar seis, ya que el precio había subido. ¿En cuánto aumentó el precio de una semana a otra de un aguacate?

31. Confecciona una tabla en la que relaciones dos magnitudes inversamente proporcionales con cinco columnas y en las que sea necesario completarla con un valor de cada magnitud

32. Elabora tres problemas donde utilices magnitudes inversamente proporcionales de las seleccionadas en el "ejercicio 1" de este epígrafe.

3.4.3. Sistema de coordenadas cartesiano

Reflexiona un instante

Un arqueólogo se dispone a salir del campamento hacia la cueva que va a explorar. Dispone de un mapa que muestra la ubicación de la cueva y necesita saber a cuántos kilómetros se encuentra para llevar suficientes provisiones. ¿Cómo saber la distancia del campamento a la cueva (fig. 3.28)?

Fig. 3.28

La necesidad de orientarse condujo a los seres humanos, desde la antigüedad más lejana, a confeccionar mapas o cartas geográficas y a relacionar los puntos de una superficie mediante números.

Para elaborar una gráfica nuestra primera necesidad es contar con un sistema de referencia que nos permita orientarnos en el espacio. Esta condición no es de reciente data y enfrentarnos a esta nos condujo, como especie, a confeccionar desde tiempos muy remotos múltiples *sistemas de referencia.*

De la historia

Históricamente uno de los sistemas de referencia que con mayor frecuencia empleamos es el sistema cartesiano, de Cartesius, nombre latinizado de René Descartes, matemático francés y filósofo del siglo xvii al que se le atribuye su invención, a pesar de que la idea de este sistema fue desarrollada en 1637 de forma paralela e independiente en dos escritos diferentes, uno perteneciente a Descartes y otro atribuido a Pierre de Fermat.

Un amplio número de las gráficas que hoy en día podemos crear son construidas sobre un sistema de coordenadas cartesianas, en una, dos o tres dimensiones.

Reflexiona un instante

En grados anteriores aprendiste a asignarle coordenadas a puntos de un plano, donde los valores de las coordenadas pertenecían al conjunto de los números fraccionarios.

¿Será posible que los valores de las coordenadas pertenezcan al conjunto de los números reales; podrán ser estos valores números negativos?

Ejemplo1:

En el sistema de coordenadas de la figura 3.29a aparecen representados dos puntos:

a) Determina las coordenadas de los puntos *A* y *B*.

b) Representa los puntos de coordenadas *M*(2;4), *N*(7;1,5), *P*(– 2;– 5)

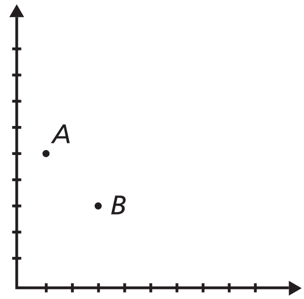


Fig. 3.29a

Solución:

a) Para determinar las coordenadas de un punto del plano debes proceder de la forma siguiente:

1. Trazas una perpendicular desde el punto *A* hasta el eje *x*, de esta forma obtienes el valor de la primera coordenada del punto, el valor es uno.

2. Trazas una perpendicular desde el punto *A* hasta el eje y, de esta forma obtienes el valor de la segunda coordenada del punto, el valor es cinco (fig. 3.29b).

3. Escribes las coordenadas del punto *A*(1;5).

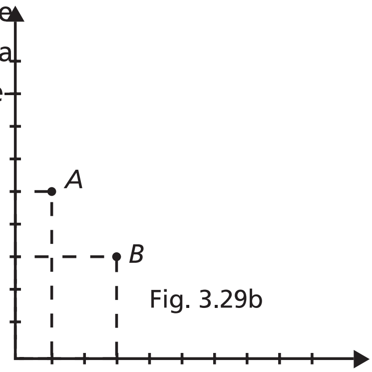


Fig. 3.29b

Análogamente por el punto *B* trazas perpendiculares a los ejes, como se muestra en la figura, y obtienes las coordenadas del punto *B*(3;3).

b) Para representar el punto $M(2;4)$ procedes de la forma siguiente:
   1. Trazas una perpendicular, con líneas discontinuas, al eje x por el valor dos (primera coordenada del punto).
   2. Trazas una perpendicular, con líneas discontinuas, al eje y por el valor cuatro (segunda coordenada del punto).
   3. Denota por *M* al punto donde se intersecan las perpendicular trazadas

   De forma análoga (fig. 3.30) procedes con el punto de coordenadas $N(7;1,5)$.

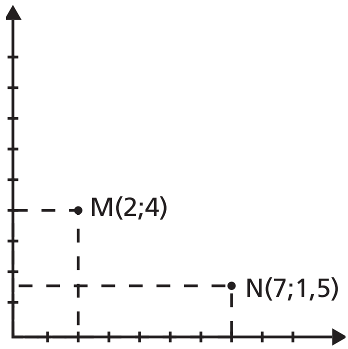


Fig. 3.30

¿Cómo procedes para representar el punto $P\,(-2;-5)$? Los valores de las coordenadas de este punto son números negativos, por tanto, es necesario ampliar los ejes coordenados y trazar rectas numéricas como aprendiste para representar los números racionales.

Atención

Las dos rectas numéricas perpendiculares entre sí, reciben el nombre de *ejes cartesianos* (fig. 3.31).

La recta numérica horizontal se llama eje de las "*x*" o eje de las abscisas y suele representarse con la letra *x* a la derecha.

La recta numérica vertical se llama *eje de las "y" o eje de las ordenadas* y suele representarse con la letra *y* en la parte superior.

El punto de coordenadas (0;0), donde se cortan ambas rectas se llama *origen de los ejes de coordenadas.*

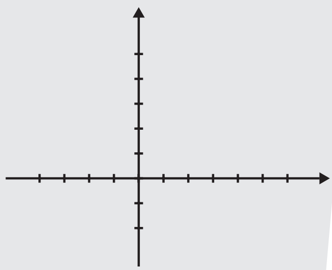


Fig. 3.31

Para representar el punto $P\,(-2;-5)$ se amplían los ejes de coordenadas como se muestra en la figura 3.32, colocando a la izquierda en el eje *x* y hacia abajo en el eje *y* del punto origen del sistema de coordenadas, los números negativos y luego se procede de manera análoga para ubicar los valores de

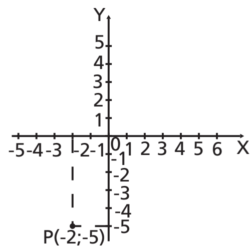


Fig. 3.32

cada coordenada del punto *P* y donde se interceptan las perpendiculares que se deben trazar, se denota el punto.

Atención

El sistema de coordenadas queda dividido en *cuatro cuadrantes* y cada eje en *dos mitades* (semiejes), con una parte donde aparecen los números positivos (semieje positivo) y otra donde aparecen los números negativos (semieje negativo).

Las coordenadas de los puntos en cada cuadrante tendrán los signos:

- I cuadrante: (+;+)
- II cuadrante: (–;+)
- III cuadrante: (–;–)
- IV cuadrante: (+;–)

Ejemplo 2:

En el sistema de coordenadas de la figura 3.33:

a) Representa los puntos de coordenadas *A*(–1;4); *B*(– 3;– 1,5); *C*(5;– 2); *D*(0;– 1) y *E*(5;0).

b) Determina las coordenadas de los puntos *T*, *Q*, *R* y *S*.

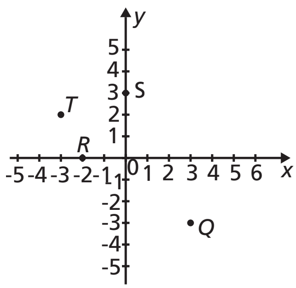


Fig. 3.33

Solución:

a) Para representar estos puntos se procede análogamente al procedimiento del ejemplo uno, solo debes observar detenidamente el signo del valor de cada coordenada para trazar la perpendicular a cada eje.

En el caso de los puntos *D* y *E*, que tiene una coordenada igual a cero, quedan representados sobre el eje cuya coordenada es distinta de cero. Esto se debe a que una de las rectas perpendiculares trazadas, la que se traza por cero, coincidirá siempre con uno de los ejes de coordenadas. Observa (fig. 3.34) que:

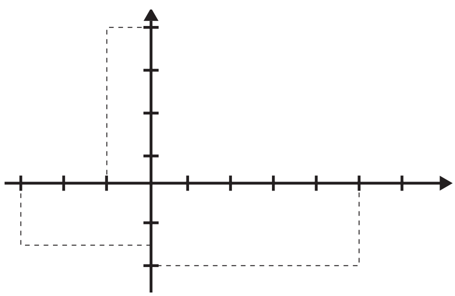


Fig. 3.34

- Los puntos *A*, *B* y *C* quedan representados sobre uno de los cuadrantes, *A* en el segundo; *B* en el tercero y *C* en el cuarto. Esto se debe a que las coordenadas de cada uno de estos puntos son diferentes de cero.
- Los puntos *D* y *E* quedan representados sobre los ejes. Esto se debe a que una de las coordenadas de dichos puntos tiene valor cero.
- El punto *A* se encuentra a cuatro unidades del eje "*x*" y a 1 unidad del eje "*y*"; ya que al determinar el punto *A* de coordenadas (– 1;4) se forma un rectángulo de lados 4 u y 1u. De manera análoga, el punto *B* se encuentra a 1,5 u del eje "*x*" y a 3u del eje "*y*".
- Los puntos *C* y *E* tiene igual abscisa, por lo que quedan situados sobre la recta vertical que pasa por $x = 5$.

b) Para determinar las coordenadas de los puntos *T* y *Q*, utilizas el mismo proceder, trazas desde el punto perpendiculares a los ejes como se muestra en la figura 3.35 y obtienes las coordenadas de los puntos: *T* (– 3; 2) y *Q* (3; – 2).
Los puntos *R* y *S*, que se encuentran situados sobre los ejes de coordenadas, tendrán una coordenada igual a cero y la otra toma el valor del número donde queda situado sobre ese eje.

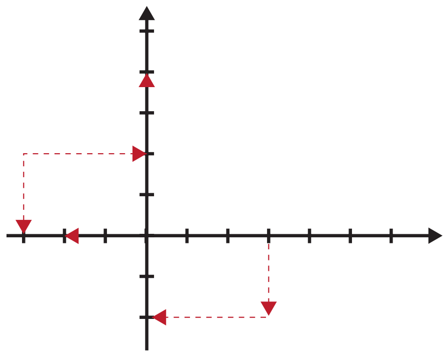


Fig. 3.35

Atención

Los puntos de la forma $P_1(x;0)$ están situados sobre el eje "*x*", mientras que los puntos de la forma $P_2(0;y)$, están situados sobre el eje "*y*".

Los valores absolutos de las coordenadas de un punto representan las distancias de este a los ejes de coordenadas.

Los puntos de igual abscisa (ordenada) están situados en una recta vertical o paralela al eje "*y*" (horizontal o paralela al eje "*x*") y recíprocamente todos los puntos de igual abscisa (ordenada) están contenidos en una recta vertical o perpendicular al eje "*x*" (horizontal o perpendicular al eje "*y*").

Ejemplo 3:

En el sistema de coordenadas (fig. 3.36) aparecen representados los puntos *A* y *C*, que son dos de los vértices de un triángulo ABC.

a) Representa el vértice *B*(6;0) y traza el triángulo *ABC*.

b) Si conoces que $\overline{CD}$ es la mediana relativa al lado $\overline{AB}$, halla las coordenadas del punto *D*.

c) Calcula el área del ΔABC.

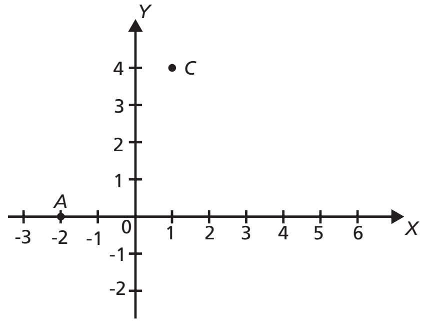


Fig. 3.36

Solución:

a) El vértice *B* tiene coordenadas (*x*;0) y conoces que los puntos que tienen esta forma están situados sobre el eje de *x*, luego el vértice *B* queda situado sobre el 6 en dicho eje (fig. 3.37).

Unes los puntos *A*, *B* y *C* y tenemos el triángulo.

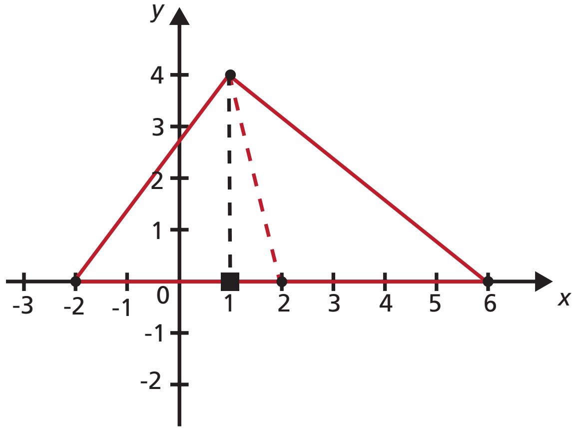


Fig. 3.37

b) Las coordenadas del punto *D* son (2;0).

Como sabes la mediana relativa a un lado del triángulo es el segmento cuyos extremos son el vértice opuesto a este lado y el punto medio del lado, por lo que *D* debe estar situado en el punto medio entre los vértices *A* y *B*. El valor numérico en el eje de las abscisas que está a la misma distancia de las coordenadas del punto *A*(– 2;0) y de *B*(6;0) es el valor dos, por lo que la abscisa del punto *D* es dos. Como los vértices *A* y *B* tienen ordenada igual a cero, porque se encuentran situados sobre el eje "*x*" y *D* es un punto que pertenece a $\overline{AB}$, también su ordenada es cero.

c) Aplicando la ecuación $A = \frac{b \cdot h}{2}$ para calcular el área del triángulo ABC, la base es el segmento $\overline{AB}$ y su altura relativa es el segmento de perpendicular trazado desde C al lado $\overline{AB}$ (fig. 3.37).
La longitud del lado $\overline{AB}$ se calcula determinando la suma de los valores absolutos de las abscisas de A y B que representan las distancias de estos puntos al eje "y", por tanto, si la distancia de A al eje "y" es 2 u y la de B es de 6 u, la longitud de $\overline{AB}$ es de 8 u.
Para calcular la longitud de la altura (segmento perpendicular a la base) relativa a la base $\overline{AB}$, como la base está contenida sobre el eje "x" entonces la distancia de C a la base $\overline{AB}$ coincide con el valor absoluto de la ordenada del vértice C, o sea 4 u.
El área del triángulo es $A = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16\ u^2$.

Ejercicios

1. Representa en un sistema de coordenadas rectangulares los puntos cuyas coordenadas son:

a) $(1;3)$ b) $(5;2,5)$ c) $(0,5;8)$ d) $(7;0)$

e) $\left(\frac{9}{2};0\right)$ f) $\left(\frac{1}{4};\frac{5}{2}\right)$ g) $(0;0)$ h) $(0;3)$

i) $\left(0;\frac{4}{5}\right)$ j) $(-2;3)$ k) $(-4,2;5,3)$ l) $\left(-\sqrt{2};0\right)$

m) $(-2;-5)$ n) $(-1,3;-5,5)$ ñ) $\left(0;-\frac{8}{3}\right)$ o) $(6;-5)$

p) $(3,3;-3,3)$ q) $\left(7,4;-\frac{1}{5}\right)$ r) $\left(\frac{2}{7};\frac{3}{5}\right)$.

2. Determina las coordenadas de los puntos A, B, C, D, E, F y G que aparecen representados en la figura 3.38:

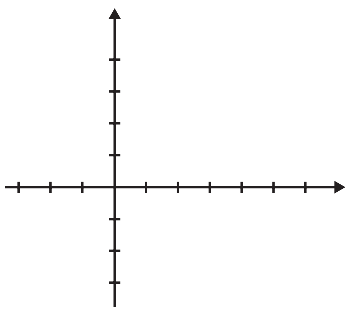


Fig. 3.38

3. Determina las coordenadas de los vértices de los polígonos representados en la figura 3.39:

a) Clasifícalos y calcula su área.

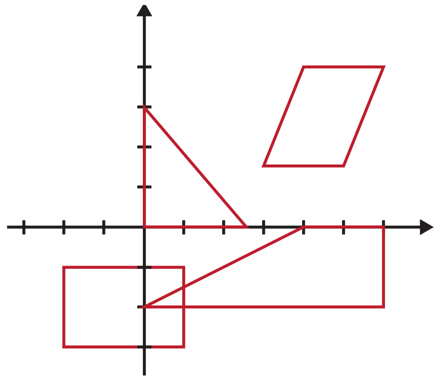


Fig. 3.39

4. Determina, sin representarlos, en qué cuadrantes se encuentran ubicados los puntos siguientes:

a) $A(-2\,;\,5)$ b) $B(2{,}5\,;\,-2)$ c) $C(-1{,}2\,;\,-3)$

d) $D\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ e) $E\left(-\frac{7}{8};-6\right)$ f) $F\left(2\frac{1}{3};\frac{5}{4}\right)$

5. Traza en un sistema de coordenadas los segmentos que tienen como extremos los puntos:

a) $A(2;5)$ y $B(-2;-4)$ b) $C(0;0)$ y $D(3;-3)$

c) $E(-4;1)$ y $F(-1;5)$ d) $G(0;3)$ y $H(6;0)$

6. Traza en un sistema de coordenadas rectangulares un segmento:

a) $\overline{AB}$ que tenga 4 u de longitud y sea paralelo al eje "*x*".

b) $\overline{CD}$ que tenga 2,5 u de longitud y sea paralelo al eje "*y*".

c) $\overline{MN}$ que tenga 1 u de longitud y esté contenido en el eje "*x*".

d) $\overline{PQ}$ que tenga 1,2 u de longitud y esté contenido en el eje "*y*".

6.1. Escribe en cada caso las coordenadas de los segmentos que trazaste.

7. En el sistema de coordenadas siguiente aparecen representados los segmentos $\overline{MN}$, paralelo al eje "*x*" y $\overline{NP}$, donde *P* es un punto del eje "*x*" (fig. 3.40).

a) Determina las coordenadas de un punto *Q*, para que el cuadrilátero *MNPQ* sea un paralelogramo.

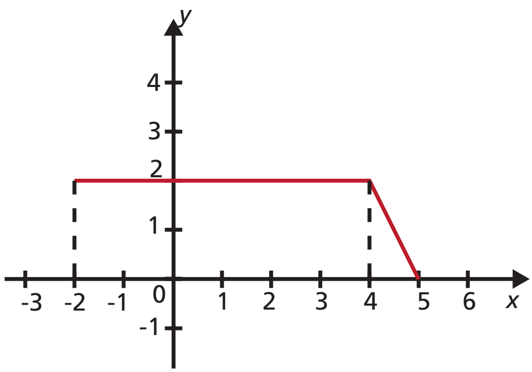


Fig. 3.40

b) Ubica el punto Q en la figura y completa el paralelogramo.
c) Calcula el área del paralelogramo.

8. Representa en un sistema de coordenadas el triángulo cuyos vértices son: $A(-3;-2)$; $B(1;4)$ y $C(-5;0)$. Determina qué tipo de triángulo es atendiendo a la longitud de sus lados.

9. Comprueba gráficamente que los puntos cuyas coordenadas son (5; – 3); (4; – 10); (– 3; – y (– 2; – están situados en una circunferencia con centro en el punto $M(1;-6)$.

10. Representa en un plano coordenado los puntos cuyas coordenadas se indican.
a) $P(2;3)$ y P' simétrico de P respecto al eje de las ordenadas.
b) $R(5;-2)$ y R' simétrico de R respecto al eje de las abscisas.
c) $M(-4;-1)$ y M' simétrico de M respecto al origen de coordenadas.

11. Traza las rectas que pasan por los puntos:
a) $A(2;0)$ y $B(0;4)$ b) $M(-3;0)$ y $N(0;4)$ c) $P(-2;0)$ y $B(0;-4{,}5)$

11.1 Determina, en cada caso, cuántos puntos de coordenadas enteras se encuentran en el interior del triángulo limitado por la recta trazada y los ejes de coordenadas.

3.4.4 Concepto de función

Reflexiona un instante

En la vida cotidiana, y en los distintos campos de la ciencia, se presentan situaciones en las que se relacionan o se hacen corresponder cantidades de magnitudes que reflejan las interacciones de los fenómenos que ocurren en el universo, tales como: a cada estudiante de un grupo le corresponde un número de lista, a cada madre le corresponde un número determinado de hijos; a cada número real le corresponde su duplo, a cada persona le corresponde un número de carné de identidad y una fecha de nacimiento, el costo de un envío postal varía según el peso de la carta, el costo de un estacionamiento depende del tiempo que está estacionado el vehículo, el aumento de la masa corporal de un animal depende del tipo de alimento que consuma, el número de personas que contraen una enfermedad contagiosa depende del tiempo transcurrido desde que se detectó esta, etcétera.

En el campo de las ciencias, uno de los aspectos más importante de estas es el establecimiento de las correspondencias que existen entre los fenómenos que ocurren en el universo; por ejemplo, los relacionados con crecimientos demográficos, con aspectos económicos, como la inflación o la evolución de los valores bursátiles, con todo tipo de fenómenos físicos, químicos o naturales, como la variación de la presión atmosférica, la velocidad y la aceleración, la gravitación universal, las leyes del movimiento, la desintegración de sustancias radiactivas o la reproducción de especies vegetales y animales.

En las situaciones antes mencionados existe una relación o correspondencia entre dos conjuntos cuyos elementos pueden ser números u objetos del mundo que nos rodea.

Reflexiona un instante

En las correspondencias siguientes:

a) Determina:

- La cantidad de conjuntos que se relacionan
- La ley o regla por la que se establece la relación entre sus elementos.
- La cantidad de elementos del conjunto de partida
- La cantidad de elementos del conjunto de llegada
- La cantidad de elementos del conjunto de llegada con los que se relaciona cada elemento del conjunto de partida.

b) Analiza los resultados anteriores teniendo en cuenta sus semejanzas y diferencias.

1) La correspondencia que a cada madre le hacen corresponder sus hijos. Como la cantidad de elementos del conjunto madres y la del conjunto hijos son *infinitos,* hacemos un diagrama solo con algunos elementos que nos muestre el comportamiento de esta relación (fig. 3.41).

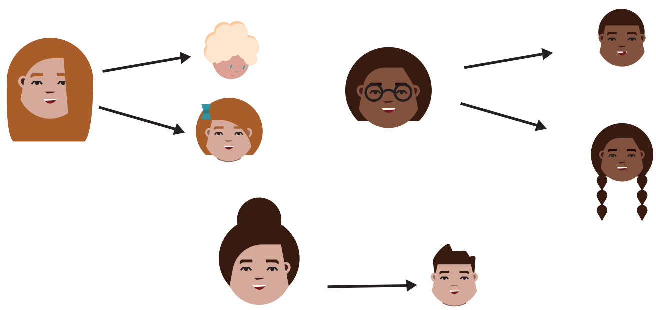


Fig. 3.41

Esta correspondencia que se expresa *literalmente*, relaciona *dos conjuntos:*
Conjunto de partida: El conjunto de todas las madres.
Conjunto de llegada: El conjunto de todos los hijos.
Regla o Ley: *A* cada madre se le hace corresponder sus hijos.
Relación entre los elementos: Una madre puede tener uno o varios hijos, luego, cada elemento del conjunto de partida se relaciona con **uno o más** elementos del conjunto de llegada.

2) La correspondencia que a cada hijo le hace corresponder su madre.
En este caso la cantidad de elementos de cada conjunto es **amplia**, hacemos un diagrama solo con algunos elementos que nos muestre el comportamiento de esta relación (fig. 3.42).

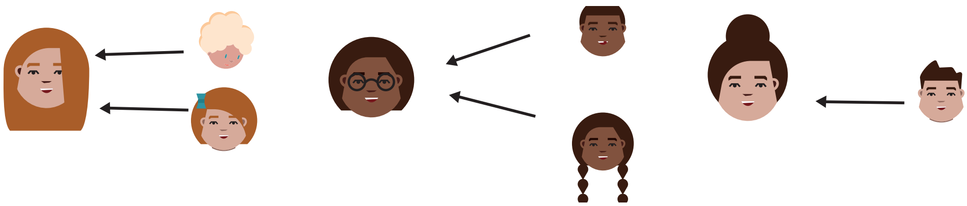


Fig. 3.42

La correspondencia se expresa literalmente y relaciona dos conjuntos:
Conjunto de partida: El conjunto de todos los hijos
Conjunto de llegada: El conjunto de todas las madres
Regla o Ley: *A* cada hijo se le asocia su madre.
Relación entre los elementos: Un hijo tiene una madre, luego, cada elemento del conjunto de partida se relaciona con un único elemento del conjunto de llegada.

3) La correspondencia de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ en la que a cada número real se le asocia su duplo.
La cantidad de elementos de cada conjunto es *infinita* porque se corresponden con el conjunto de los números reales.
Se relacionan *dos conjuntos*:
Conjunto de partida: El conjunto de los números reales.
Conjunto de llegada: El conjunto de los números reales.
Regla o Ley: Cada número real se multiplica por dos.
Relación entre los elementos: Todo número real tiene duplo y es único, luego en esta correspondencia cada elemento del conjunto de parti-

da se relaciona con *un* único elemento del conjunto de llegada.

4) La correspondeica que a cada elemento del conjunto A = {sodio, oxígeno, nitrógeno, cobre} asocia su símbolo químico en B = {O, Na, N, Cu} (fig. 3.43).

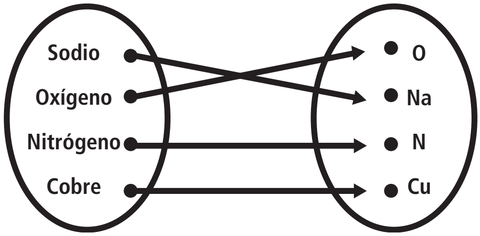


Fig. 3.43

La cantidad de elementos de cada conjunto es *finito*, pues existen cuatro elementos en cada conjunto.
Conjunto de partida: El conjunto de elementos químicos.
Conjunto de llegada: El conjunto formado por sus símbolos.
Regla o Ley: *A* cada elemento se le asocia su símbolo químico.
Relación entre los elementos: *A* cada elemento químico corresponde un único símbolo, luego en este caso, cada elemento del conjunto de partida se relaciona con *un* único elemento del conjunto de llegada.

5) La correspondencia que a cada elemento del conjunto
A = {Mario Benedetti, Juan Ramón Jiménez, Nicolás Guillén}
asocia su obra literaria en el conjunto
B = {¡Oh triste coche viejo! , "Esa boca", "El piano". "Platero y yo", "Nieve", "Presidio modelo"}.

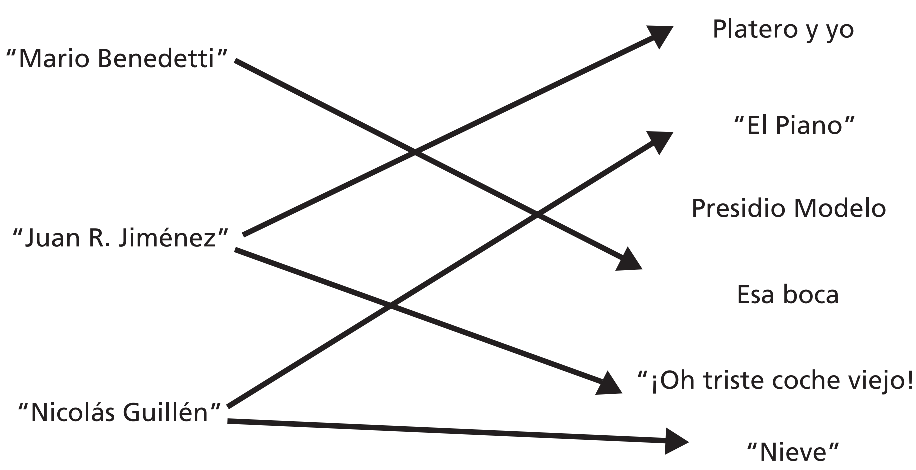


Fig. 3.44

Realizamos un diagrama (fig. 3.44) con dos columnas *A* y *B* y realizamos el enlace.

En este ejemplo el conjunto *A* está formado por tres elementos, o sea, es un conjunto *finito*, al igual que el conjunto *B*, formado por seis elementos.

La correspondencia se expresa mediante *dos columnas* que relacionan *dos conjuntos:*

Conjunto de partida: El conjunto formado por los autores.

Conjunto de llegada: El conjunto formado por sus obras.

Regla o Ley: *A* cada autor se le asocia su obra.

Relación entre los elementos: Cada elemento del conjunto de partida se relaciona con *uno o dos* elementos del conjunto de llegada.

6)

Tabla 3.30

Tiempo (*s*)	0	1	2	3	4
Cantidad de bacterias (*m*)	1	2	4	8	16

Las bacterias se reproducen por bipartición. Al colocar una bacteria en un recipiente y observar este proceso durante cuatro minutos, se pudo confeccionar la tabla 3.30 siguiente:

La correspondencia de la tabla la expresamos mediante el diagrama siguiente (fig. 3.45):

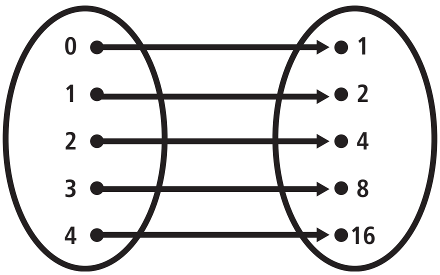


Fig. 3.45

Observa que se relacionan elementos de *dos conjuntos*:

Conjunto de partida: El conjunto formado por los valores del tiempo transcurrido.

Conjunto de llegada: El conjunto formado por la cantidad de bacterias.

Regla o Ley: *A* cada valor de tiempo se le hace corresponder la cantidad de bacterias en el recipiente.

Relación entre los elementos: Cada minuto que transcurre, en el recipiente aparece una cantidad de bacterias, luego a cada elemento del conjunto de partida (tiempo) se le asocia *un* único elemento del conjunto de llegada (cantidad de bacterias).

7) La gráfica de la figura 3.46 muestra la distancia recorrida por un auto que se mueve con movimiento rectilíneo uniforme (MRU), en metros, en función del tiempo transcurrido, en segundos.

La correspondencia se expresa mediante una *gráfica* en la que aparecen relacionadas dos magnitudes, tiempo y distancia recorrida.

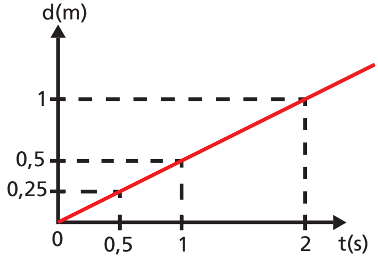


Fig. 3.46

<u>Conjunto de partida:</u> El conjunto formado por el tiempo transcurrido (*t*).

<u>Conjunto de llegada:</u> El conjunto formado por la distancia recorrida (*d*).

<u>Regla o Ley:</u> *A* cada segundo transcurrido se le hace corresponder la cantidad de metros recorridos por el auto.

<u>Relación entre los elementos:</u> Cada elemento del conjunto de partida se relaciona con *un* único elemento del conjunto de llegada, porque a cada valor del tiempo le corresponden un único valor de distancia recorrida.

En las correspondencias anteriores se puede encontrar las semejanzas y diferencias siguientes:

Semejanzas:

En todas:

- se relacionan *dos conjuntos*, el de partida y el de llegada
- existe una *regla o ley* que relaciona los elementos del conjunto de partida con los elementos del conjunto de llegada.

Diferencias:

- En todas las correspondencias los elementos del conjunto de partida no se relacionan con la misma cantidad de elementos del conjunto de llegada.
- En la segunda, tercera, cuarta, sexta y séptima los elementos del conjunto de partida se relacionan con *un* único *elemento* del conjunto de llegada.
- En la primera y la quinta los elementos del conjunto de partida se relacionan con *uno o más elementos* del conjunto de llegada.

Definición de función

Una función es una correspondencia en la que *a cada* elemento de un conjunto de partida se le asocia *un único* elemento del conjunto de llegada.

De acuerdo a esta definición puedes concluir que las correspondencias dos, tres, cuatro, seis y siete son funciones.

El conjunto de partida se denomina *dominio de la función* y a sus elementos se les llaman *argumentos o preimágenes*, los cuales se denotan generalmente utilizando la variable x (fig. 3.47).

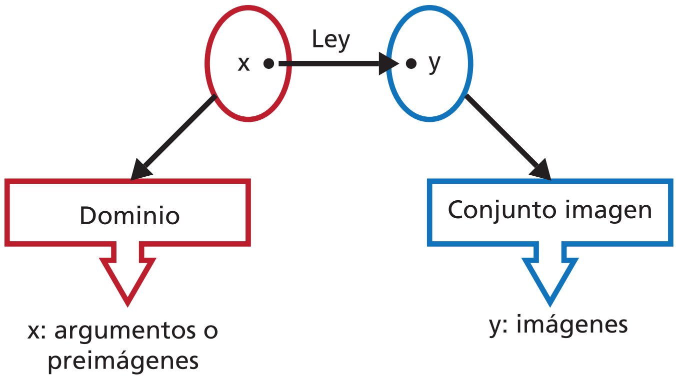


Fig. 3.47

A los elementos del conjunto de llegada que se corresponden con algún elemento del conjunto de partida se les llaman *imágenes*, y el conjunto de estos se denomina *conjunto imagen de la función*. Las imágenes suelen denotarse por la variable y.

Ejemplo 1:

Determina el dominio y el conjunto imagen de las correspondencias identificadas anteriormente:

2) La correspondencia que a cada hijo le hace corresponder su madre.
3) La correspondencia de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que a cada número real le asocia su duplo.
4) La correspondencia que a cada elemento del conjunto A = {sodio, oxígeno, nitrógeno, cobre} asocia su símbolo químico en $B = \{O, \text{Na}, N, \text{Cu}\}$.
6) Las bacterias se reproducen por bipartición. Al colocar una bacteria en un recipiente y observar este proceso durante cuatro minutos, se pudo confeccionar la tabla siguiente:

Tabla 3.31

Tiempo (minutos)	0	1	2	3	4
Cantidad de bacterias	1	2	4	8	16

Solución:

Para el caso dos, el dominio es: el conjunto formado por todos los hijos y el conjunto imagen es el conjunto formado por todas las madres.

Para el caso tres, tanto el dominio como el conjunto imagen es el conjunto de los números reales.

Para el caso cuatro, el dominio es: el conjunto formado por los elementos químicos del conjunto *A* y el conjunto imagen es el conjunto formado por todos los símbolos químicos que se corresponden con cada elemento químico del conjunto *A*.

Para el caso seis, el dominio es: el conjunto formado por los minutos en que las bacterias estuvieron en el recipiente y el conjunto imagen es el conjunto formado por la cantidad de bacterias que se reproducen en cada uno de los cuatro minutos que se observó el proceso.

De la historia

Las funciones son de mucho valor y utilidad para resolver problemas de la vida diaria, problemas de finanzas, de economía, de estadística, de ingeniería, de medicina, de química y física, de astronomía, de geología, y de cualquier área social donde haya que relacionar variables. Cuando se va al mercado o a cualquier centro comercial, siempre se relaciona un conjunto de determinados objetos o productos alimenticios, con el costo en pesos para así saber cuánto podemos comprar; si lo llevamos al plano, podemos escribir esta correspondencia en una ecuación de función "*x*" como el precio y la cantidad de producto como "*y*".

El concepto de función o simplemente función, es sin duda, el más importante y utilizado en Matemática y en las demás ramas de la Ciencia.

Este concepto está implícito en las matemáticas de las primeras civilizaciones y ello puede inferirse del estudio de las tablillas de barro babilónicas de la colección Plimpton, que datan del año 1 900 a.n.e.

Fig. 3.48

No fue fácil llegar a él y muchas mentes muy brillantes han dedicado enormes esfuerzos durante siglos para que tuviera una definición consistente y precisa.

Desde los tiempos de Galileo, que fue uno de los primeros en usarlo (aunque no en la forma que nosotros lo conocemos actualmente), pasando por el gran Newton y Leibniz (fig. 3.48), que fue el primero que en 1 673 usó la palabra "función" para referirse a la relación de dependencia de dos variables o cantidades, Euler, que le dio su formulación moderna $y = f(x)$ en su obra Commentarii de San Petersburgo en 1 736, Cauchy, Dirichlet o Gauss, las mejores mentes de la Historia de la Humanidad le dedicaron su atención y sus desvelos.

Ejemplo 2

Analiza cuáles de las correspondencias siguientes son funciones y cuáles no. Fundamenta tu respuesta. En el caso de ser función señala el dominio y la imagen.

a) *A* cada elemento del conjunto P = {España, Venezuela, Bolivia, Rusia, China, Portugal} asocia su capital C = {Caracas, Moscú, Beijing, Tokio, La Paz, Lisboa, Madrid, Quito}.

b) La correspondencia definida de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ que a cada número natural asocia su antecesor.

c) La que a cada personalidad del conjunto P = {Fidel Castro, José Martí, Antonio Maceo, Frank País, José A. Echevarría} asocia el hecho histórico en que participó en H = {Protesta de Baraguá, Asalto al Cuartel Moncada, Alzamiento en Santiago de Cuba, Triunfo de la Revolución, Alegato La Historia me Absolverá, Asalto al Palacio Presidencial, Fundación del PRC}.

d) La definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, que a cada número real asocia su valor absoluto.

Solución:

a) La correspondencia *es una función*, pues cada país le corresponde una única capital. Para el análisis se puede realizar un diagrama con dos columnas (fig. 3.49).

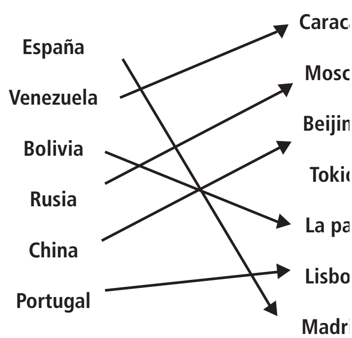


Fig. 3.49

Atención

Todos los elementos del conjunto de llegada no es necesario que estén relacionados con algún elemento del conjunto de partida. Este elemento **no formará parte del conjunto imagen** de la función.

El dominio de esta función es el conjunto formado por los países del conjunto de partida *P* y la imagen el conjunto formado por sus capitales, exceptuando a Tokio.

b) La correspondencia definida $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ que a cada número natural asocia su antecesor.
Como el conjunto de los números naturales es infinito, confeccionamos el diagrama, solo para algunos elementos (fig. 3.50).
Esta correspondencia *no es una función*, porque se establece de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$ y el antecesor de cero es –1, que no es un número natural; por lo que no aparece en el conjunto de llegada.
Si la correspondencia se estableciera de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ ¿sería una función?

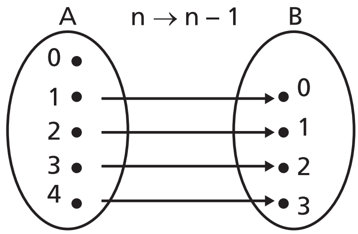


Fig. 3.50

c) La correspondencia que a cada personalidad del conjunto *P* = {Fidel Castro, José Martí, Antonio Maceo, Frank País, José A. Echevarría} asocia el hecho histórico en que participó en *H* = {Protesta de Baraguá, Asalto al Cuartel Moncada, Alzamiento en Santiago de Cuba, Triunfo de la Revolución, Alegato La Historia me Absolverá, Asalto al Palacio Presidencial, Fundación del PRC}.
Observa el diagrama siguiente con el enlace de los elementos de cada columna (fig. 3.51).
Esta correspondencia *no es función*, porque hay elementos del conjunto de partida (Fidel esta relacionado con tres hechos)que le corresponden más de un elemento del conjunto de llegada, por lo queno satisface una de las características del concepto de función.

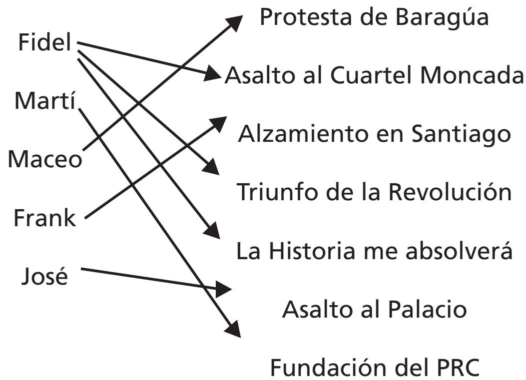


Fig. 3.51

d) La correspondencia definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, que a cada número real asocia su valor absoluto.
Como el conjunto de los números reales es infinito, confeccionemos un diagrama para algunos elementos (fig. 3.52).

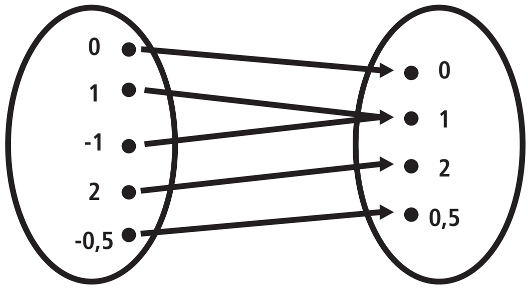


Fig. 3.52

Esta correspondencia *es una función*, porque a cada número real le corresponde un único valor absoluto o módulo.

Observa que a 1 y a – 1 le corresponde un único elemento en el conjunto *B*, aunque es el mismo para ambos.

En este caso el dominio y la imagen de la función es el conjunto de los números reales.

Las funciones cuyo dominio e imagen son conjuntos numéricos, se les llama **funciones numéricas.**

Para denotar las funciones se utilizan letras minúsculas: *f*, *g*, *h*, *p*, etcétera. Para indicar que entre dos conjuntos se estableció una función escribes $f : A \to B$ y lees: *f es una función de A en B.* Para denotar el elemento *y* del conjunto imagen que le corresponde al elemento *x* del dominio por la función *f*, escribes $y = f(x)$ y lees "efe de equis".

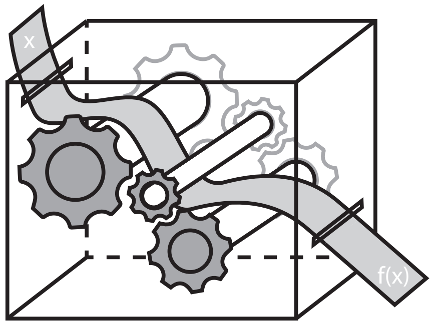


Fig. 3.53

Podemos imaginar que una función es como una máquina que toma una alimentación (entrada) *x* y la trasforma o convierte en alguna de salida *f(x),* como se muestra en la figura 3.53.

Por ejemplo, la máquina siguiente convierte el número cuatro de entrada en el número cinco de salida a partir de la función que a cada número real asocia su duplo disminuido en tres (fig. 3.54).

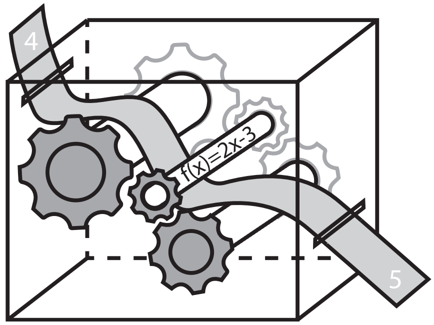


Fig. 3.54

Es posible expresar formalmente la relación existente entre los elementos de los conjuntos *A* y *B*, al representar la función por una ecuación cuando se realiza la traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico.

En la correspondencia representada anteriormente, que a cada número real se le asocia su duplo, la función puede expresarse por las ecuaciones: $y = 2x$ o $f(x) = 2x$

Precisamente estas dos últimas relaciones te muestran otra de las formas de representar las funciones numéricas, las *ecuaciones.*

Esta notación es útil para calcular la imagen de cualquier valor del dominio.

Ejemplo 3:

Calcula la imagen de $x = 2$ por la función $f(x) = 2x$:

Solución:

Sustituye en la ecuación el valor de *x* y calcula el valor numérico de su imagen:

$f(x) = 2x$

$f(2) = 2(2) = 4$

$f(2) = 4$ (que se lee "*f* de dos es igual a cuatro")

También esta notación nos permite realizar el procedimiento inverso, calcular el argumento o preimagen de un valor del dominio conocida la imagen que le corresponde.

Ejemplo 4:

Calcula el valor del dominio (argumento o preimagen) cuya imagen es $\frac{2}{3}$ por la función f(x) = 2x.

Solución:

Sustituye en la ecuación el valor de *y* (imagen) y calcula el valor numérico del dominio:

$f(x) = 2x$

$\frac{2}{3} = 2x$

$x = \left(\frac{2}{3}\right) : 2$

$x = \frac{1}{3}$

$f = \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$

Ejemplo 5:

Dada la función f representada por la ecuación $f(x) = 2x - 1$, con $x \in \mathbb{R}$:

a) Calcula el valor de la imagen para cada una de las preimagenes siguientes: 2,4 y – 5.

b) Determina el valor de la preimagen o argumento para cada una de las imágenes siguientes: – 2,2 ; 0.

Solución:

a) Para $x = 2{,}4$

$$f(x) = 2x - 1$$
$$f(2{,}4) = 2(2{,}4) - 1$$
$$= 4{,}8 - 1$$
$$= 3{,}8$$
$$f(2{,}4) = 3{,}8$$

Para $x = -5$

$$f(x) = 2x - 1$$
$$f(-5) = 2(-5) - 1$$
$$= -10 - 1$$
$$= -11$$
$$f(-5) = -11$$

b) Para $f(x) = -2{,}2$ $(y = -2{,}2)$

$$f(x) = 2x - 1$$
$$-2{,}2 = 2x - 1$$
$$-2{,}2 + 1 = 2x$$
$$-1{,}2 = 2x$$
$$x = -\frac{1{,}2}{2}$$
$$x = -0{,}6$$
$$f(-0{,}6) = -2{,}2$$

Para $f(x) = 0$ $(y = 0)$

$$f(x) = 2x - 1$$
$$0 = 2x - 1$$
$$0 + 1 = 2x$$
$$1 = 2x$$
$$x = \frac{1}{2}$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

Observa que el valor de la imagen (variable y), en cada inciso, depende del valor que se le asigne a la preimagen (variable x) en la ecuación de la función dada.

En las funciones, la variable x**,** que representa los elementos del dominio, se llama **variable independiente**; mientras la variable y, que representa los elementos del conjunto imagen, es la **variable dependiente**, por lo que es usual decir que y está en función de x o y depende de x.

Atención

Cuando una función se representa por una ecuación, su dominio será el subconjunto de los números reales para los cuáles está definida la ecuación, o sea cuando no está definido el dominio de la función se debe analizar los valores para los cuales la ecuación de dicha función tiene solución.

Ejemplo 6:

Determina el dominio de las funciones siguientes:

a) $y = 3x$ b) $f(x) = 9x - 4$ c) $g(x) = x^2$ d) $h(x) = \frac{1}{x}$

Solución:

a) Para la función: $y = 3x$, el dominio es el conjunto de los números reales ($x \in \mathbb{R}$)

b) Para la función: $f(x) = 9x - 4$, el dominio es el conjunto de los números reales ($x \in \mathbb{R}$)

c) Para la función: $g(x) = x^2$, el dominio es el conjunto de los números reales ($x \in \mathbb{R}$)

d) Para la función: $h(x) = \frac{1}{x}$, el dominio es el conjunto de los números reales distintos de cero ($x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ porque el valor del denominador de una fracción no puede ser igual a cero).

Las correspondencias analizadas al inicio del epígrafe se representaron de diferentes formas: descriptiva la primera y la segunda, mediante diagramas la tercera, cuarta y quinta, como tablas la sexta y con un gráfico la séptima. Las funciones también se pueden representar de estas mismas formas.

Ejemplo 7:

Representa la función: a cada número real se le asocia su duplo, expresada en *forma descriptiva*, por las formas siguientes:

a) Ecuación b) Tabla c) Gráfica

Solución:

a) $y = 2x$

b) Se debe calcular la imagen (variable dependiente) con algunos valores de x que pertenecen al dominio de la función.

Tabla 3.32

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-2	0	2	4

c) Determina las coordenadas de algunos puntos del plano que pertenezcan a la función formando el par ordenado con el elemento del dominio y su imagen (x; y), se ubican en el sistema de coordenadas rectangulares y se unen estos puntos (fig. 3.55).
Las coordenadas en este caso pueden ser: (– 2; – 4); (– 1; – 2); (0;0); (1;2); (2;4); (3;6) y (4;8)

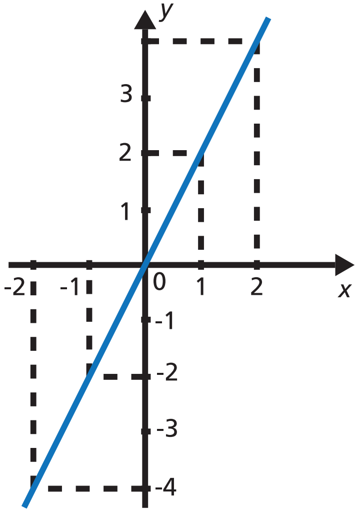
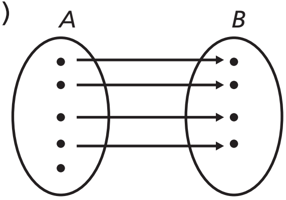
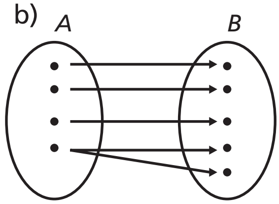


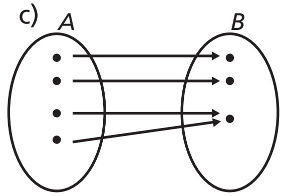
Fig. 3.55

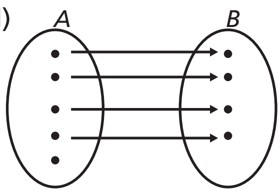
Ejercicios

1. Analiza si las correspondencias representadas en la figura 3.56 son funciones o no. En caso de no serlo, fundamenta tu respuesta.
Nota: Para determinar si una correspondencia es función dada por una gráfica, se traza una paralela imaginaria al eje "*y*" y se traslada de izquierda a derecha en el sentido del eje "*x*". Si corta a la gráfica siempre una sola vez es función, de lo contrario no lo es.

a)


b)


c)


d)


e)

x	0	1	2	2	2
y	0	1	8	-8	1

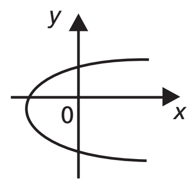
f)


Fig. 3.56

2. Sea el conjunto $M = \left\{-4; -25; -\frac{1}{2}; -1; 0; 1; 1{,}5; 3; 3\frac{1}{2}\right\}$.

a) Escribe un conjunto N de llegada, cuyos elementos sean el duplo de los elementos del conjunto M, para que la correspondencia de M en N sea una función.
b) Escribe un conjunto P de llegada, cuyos elementos sean los opuestos de los elementos del conjunto M, para que la correspondencia de M en P sea una función.
c) Escribe un conjunto A de llegada, cuyos elementos sean los valores absolutos de los elementos del conjunto M, para que la correspondencia de M en A sea una función.
d) Escribe un conjunto B de llegada, cuyos elementos sean los cuadrados de los elementos del conjunto M, para que la correspondencia de M en B sea una función.

3. En un estadio de béisbol se pueden dar las posibilidades siguientes:
a) Cada espectador ocupa un asiento, pero hay espectadores de pie.
b) Cada espectador ocupa un asiento, pero hay asientos vacíos.
c) Cada espectador ocupa un asiento y no hay asientos vacíos.
Confecciona un diagrama para cada inciso y di cuáles de esas correspondencias son funciones y cuáles no. Argumenta en cada caso tu respuesta.

4. Analiza cuáles de las correspondencias siguientes son funciones y cuáles no. Fundamenta tu respuesta cuando no sea una función.
a) *A* cada número real se le asocia su cuadrado aumentado en tres
b) *A* cada hecho histórico del conjunto A = {Triunfo de la Revolución, Asalto al Cuartel Moncada, Protesta de Baraguá, Invasión a Playa Girón, Desembarco del Granma, Incendio de Bayamo} se le asocia el año en que ocurrió en el conjunto B = {1956; 1953; 1959; 1961; 1869; 1878; 1887; 1956}
c) *A* cada número real se le asocia su recíproco.
d) *A* cada polígono del conjunto M se le hace corresponder la cantidad de lados en el conjunto N (fig. 3.57).

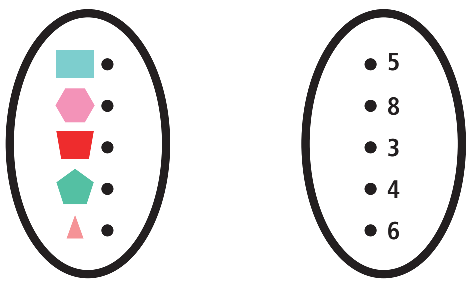


Fig. 3.57

e) *A* cada persona se le asocia su número de carné de identidad.

f) *A* cada organismo del conjunto O = {Pie de atleta, Basilo de Koch, león, tocororo, cocodrilo} se le hace corresponder el grupo al que pertenecen en el conjunto G = {aves, hongos, bacterias, mamíferos}.

g) *A* cada palabra en idioma inglés del conjunto I = {*one; red; boy; flag; love; good*} se le hace corresponder su significado en el idioma español del conjunto E = {rojo; bandera; amor; bueno; uno; niña; hijo}.

i) *A* cada río del conjunto R = {Cauto; Volga; Amazonas; Nilo; Amarillo} se le asocia el lugar donde se encuentra situado en el conjunto L = {África; Suramérica; América; Asia; Europa; Oceanía}

4.1 En los incisos que representan funciones señala el dominio y la imagen.

5. Sea el conjunto P = {*El señor de los Anillos, Fresa y Chocolate, El ojo del canario, Casablanca, Corazón valiente*}, escribe un conjunto de llegada A, cuyos elementos sean nombres de actores de esas películas, para que la correspondencia "película-actor" sea una función.

6. Sea el conjunto C formado por los continentes C = {América; África; Eurasia; Oceanía; Antártida}. Escribe un conjunto P formado por varios países para que la correspondencia "Continente-País":

a) Sea una función.

b) No sea una función.

7. Sea el conjunto E = {Ernest Hemingway; Pablo Neruda; José Martí; Miguel de Cervantes; Carilda Oliver; Dulce María Loynaz; Gabriel García Márquez}.

a) Escribe un conjunto de llegada P, cuyos elementos sean el país de origen de cada autor, para que dicha correspondencia represente una función.

b) Escribe un conjunto de llegada O, cuyos elementos sean obras literarias escritas por esos autores, para que dicha correspondencia no sea una función.

8. En el diagrama de la figura 3.58 se muestra una correspondencia entre los elementos de los conjuntos M y N.

a) ¿Representa esta correspondencia una función?

b) ¿Cuál es el valor de y en el conjunt N?

c) Descubre la ley de formación de la correspondencia y exprésala algebraicamente.

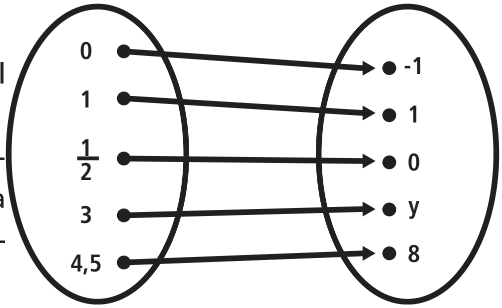


Fig. 3.58

9. Sean las funciones f, g y h dadas por sus ecuaciones: $f(x) = 4x + 3$; $g(x) = -\frac{1}{2}x - 1$ y $h(x) = x^2$, calcula:

a) la imagen de -2 ; 1,5 y de 5 por la función f.

b) la imagen de -2 ; 1,5 y de 5 por la función g.

c) la imagen de -2 ; 1,5 y de 5 por la función h.

10. Sean las funciones f, g y h dadas por sus ecuaciones: $f(x) = x - 3$; $g(x) = -2x + 5$ y $h(x) = \frac{x}{3} + 1 + 1$, calcula el valor del dominio para el cual se cumple que:

a) $f(x) = -2$; $f(x) = \frac{9}{8}$ y $f(x) = 0$.

b) $g(x) = -2$; $g(x) = \frac{9}{8}$ y $g(x) = 0$.

c) $h(x) = -2$; $h(x) = \frac{9}{8}$ y $h(x) = 0$.

11. Sean las funciones f y g dadas por sus ecuaciones $f(x) = \frac{x}{4} - 2$ y $g(x) = 3 - 2x$. Calcula:

a) $f(4) + 2g(0)$ b) $\frac{g(-1) + f(0)}{9}$ c) $\frac{f\left(-\frac{1}{2}\right)}{g(-0,2)}$

12. Sea $f(x) = x - 3$, halla el valor de a para el cual se cumple que:

a) $f(a) + f(a + 1) = 2$. b) $f(a - 3) - 3f(a) = -1$ c) $2f(a - 2) + 1 = f(5)$

3.4.5 Función lineal

Reflexiona un instante

La gráfica de la figura 3.59 muestra cómo varía la altura de una vela, al ser encendida, durante varios minutos a partir de las 10:00 p.m.

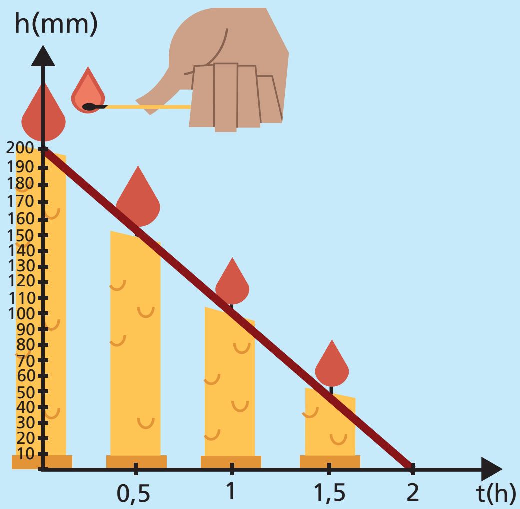


Fig. 3.59

a) ¿Cuál era la longitud de la vela al ser encendida?
b) ¿Cuál es la ecuación que describe la variación de la longitud de la vela?
c) ¿*A* los cuántos minutos la longitud de la vela era de 120 mm?
d) ¿*A* qué hora se gastó completamente la vela?

La correspondencia que se establece entre las magnitudes tiempo, en horas y la longitud, en milímetros, de la vela es una función porque a cada valor del tiempo en horas desde que se enciende la vela hasta que se apaga le corresponde un único valor de longitud de la vela en milímetros y es función numérica porque el dominio y la imagen son conjuntos numéricos.

El análisis de los gráficos en estadística y el estudio de estos como medio que emplean los físicos para realizar sus investigaciones, te permiten responder algunas de las preguntas anteriores, pero quizás no puedas determinar la ecuación que describe la variación de la longitud de la vela, por esta razón te propongo analizar las situaciones siguientes:

- La profesora solicitó a Leticia escribir cuatro números reales en la pizarra, luego Maykel tenía que escribir al lado de cada uno, el número que resulta de multiplicar por dos y adicionarle cinco al número escrito por Leticia. Los números que Leticia escribió fueron: 4; $\frac{1}{2}$; – 1 y 0. ¿Qué número escribirá Maykel en cada caso?

  Maykel debe escribir los números: 13; seis; tres y cinco, porque:

  $2 \cdot 4 + 5 = 13 \qquad 2 \cdot \frac{1}{2} + 5 = 6 \qquad 2(-1) + 5 = 3 \quad 2 \cdot 0 + 5 = 5$

  ¿Existirá una manera general de escribir la relación que se establece entre los números escritos por Leticia y Maikel, aplicando el lenguaje algebraico?

  Si le designamos a los números reales que escribió Leticia la variable x, entonces los números que escribió Maykel se representan por la expresión algebraica: $(2x + 5)$.

  La correspondencia entre los números escritos por Leticia y Maikel es una función; si la llamamos por f entonces podemos representarla mediante la ecuación $f(x) = 2x + 5$.

- Un tanque contiene 50 litros de agua. Para llenarlo se pone a funcionar una bomba de agua que vierte 20 litros de agua por minuto. ¿Qué cantidad de agua tendrá el tanque a los cinco minutos de encenderse la bomba? ¿*Y* a los diez minutos?

  En este caso el tanque contenía 50 litros de agua y cada minuto que pasa aumenta la cantidad de litros que tiene el tanque. Como la bomba vierte 20 L/min, para hallar la cantidad de agua a los cinco minutos, debes multiplicar 20 por cinco y adicionar 50 a dicho resultado, o sea, $20 \cdot 5 + 50 = 150$ L, para los diez minutos, serían $20 \cdot 10 + 50 = 250$ L.

  Si tuvieras que determinar cada cierto tiempo cuántos litros de agua tiene el tanque, ¿existirá una manera general de expresar esta relación?

  De manera general, puedes designar al tiempo, trascurrido en minutos, como la variable x y a la cantidad de agua que tendrá el tanque, en litros, la expresión: $(20 \cdot x + 50)$.

  Si llamas g a la función que asigna a cada minuto transcurrido, la cantidad de agua que contiene el tanque, puedes representarla mediante la ecuación: $g(x) = 20x + 50$.

- Un kilogramo de arroz cuesta \$100,00. ¿Cuánto debe pagar Rosa por siete kilogramos? ¿*Y* si compra 15 kg?
  Para calcular lo que debe pagar Rosa por siete y 15 kg respectivamente, debes multiplicar cada cantidad por el precio de un kilo, o sea, por \$10,00. (\$10,00 · 7 = \$70,00 y \$10,00 · 15 = \$150,00).
  De manera general, puedes comprobar que para comprar x kilogramos de arroz, Rosa tendrá que pagar $(10{,}00 \cdot x)$ pesos.
  Si llamas h a la función que asigna a cada kilogramo de arroz comprado, la cantidad de dinero a pagar, puedes representarla mediante la ecuación $h(x) = 10{,}00x$

Las correspondencias analizadas son funciones y se pueden expresar de manera general por una ecuación. En todas las funciones la imagen se obtiene como el producto de x por un número real, pero en las dos primeras a este producto se le adiciona un número real. ¿Existirá una forma general de escribir todas las ecuaciones que se obtuvieron en las correspondencias anteriores?

Definición de función lineal

La función que a cada $x \in R$ le hace corresponder el número real $f(x) = mx + n$, donde m y n son números reales dados, se denomina **función lineal**.

Ejemplo 1:

Justifica por qué las ecuaciones siguientes representan funciones lineales:

a) $f(x) = 7x - 3$ b) $g(x) = -2x + 0{,}5$ c) $h(x) = x + \dfrac{2}{3}$

d) $s(x) = 6x$ e) $t(x) = -1$

Solución:

a) La ecuación $f(x) = 7x - 3$ se corresponde con la forma: $f(x) = mx + n$, donde m y n son números reales, $m = 7$ y $n = -3$.
b) La ecuación $g(x) = -2x + 0{,}5$ se corresponde con la forma: $g(x) = mx + n$, donde m y n son números reales, $m = -2$ y $n = 0{,}5$.
c) La ecuación $h(x) = x + \dfrac{2}{3}$ se corresponde con la forma: $h(x) = mx + n$, donde m y n son números reales, $m = 1$ y $n = \dfrac{2}{3}$.
d) La ecuación $s(x) = 6x$ se corresponde con la forma: $s(x) = mx + n$, donde m y n son números reales, $m = 6$ y $n = 0$.

e) La ecuación $t(x) = -1$ se corresponde con la forma: $t(x) = mx + n$, donde m y n son números reales, $m = 0$ y $n = -1$.

Atención

Los casos en que el valor de n o de m en la ecuación sean cero, también son ecuaciones de funciones lineales, porque el número cero pertenece al conjunto de los números reales.

La expresión $mx + n$ está definida para cualquier valor real de x, o sea, podemos asignar a la variable x cualquier valor real. Luego, siempre que no se indique otra cosa, el dominio de una función lineal es el conjunto de los números reales.

Ejercicios

1. Determina cuáles de las ecuaciones siguientes definen funciones lineales y señala en estas el valor de m y de n:

a) $y = 3x + 2$ b) $y = x - 5$ c) $f(x) = x^2 - 3$ d) $g(x) = \frac{1}{x} \cdot 2$

e) $y = 3x$ f) $h(x) = \frac{x}{3} + 3$ g) $y = -\frac{x^3}{2}$ h) $t(x) = 7{,}5$

i) $y = -4$ j) $p(x) = \sqrt{x} + 3$ k) $s(x) = 5 - 2x$ l) $y = 2 - \frac{x}{4}$

m) $y = \frac{2x + 8}{3}$ n) $2x + y = 0$ o) $x - y = 8$ p) $\frac{x + y}{2} = 1$

2. Marca con una X la respuesta correcta.

De las ecuaciones siguientes la que no corresponde a una función lineal es:

a) ___ $y = \frac{1}{5}x$ b) ___ $y = -3{,}4$ c) $x \cdot y - 2 = y$ d) $x = \frac{y - 1}{3}$

3. Escribe la ecuación de la función lineal si conoces que:

a) $m = 1$ y $n = -1$ b) $m = -3$ y $n = 0{,}6$ c) $m = \frac{2}{3}$ y $n = -\frac{3}{2}$

d) $m = 4$ y $n = 0$ e) $m = 0$ y $n = 9$ f) $m = n = \sqrt{3}$

4. Dada la función f tal que $f(x) = -2x - \frac{3}{2}$.

a) Determina los valores de m y n.

b) Calcula $f(0)$, $f(-1)$, $f\left(-\frac{3}{4}\right)$ y $f(1{,}2)$.

c) Determina el valor de x si $f(x) = 0$, $f(x) = 1{,}5$ y $f(x) = -\frac{3}{2}$.

5. Expresa mediante una ecuación las siguientes situaciones:

a) La distancia d en kilómetros que recorre un auto que viaja a 60 km/h en función del tiempo t en horas.

b) El salario mensual de un trabajador si recibe $450,00 de salario fijo y $3,00 adicionales por cada hora extra que trabaja en el mes.

c) El precio p de un artículo en función del tiempo transcurrido en meses, si este precio no se ha alterado desde que salió a la venta en $85,00.

d) La altura h de un triángulo en función de su área, si su base mide 6,0 cm.

3.4.6 Representación gráfica de una función lineal

Reflexiona un instante

Conoces que una de las formas de representar funciones son las gráficas, en el epígrafe anterior aparece representada (fig. 3.59) la variación de la altura de una vela durante el tiempo que está encendida; sabes construir un sistema de coordenadas rectangulares, pero ¿cómo se determinan los puntos que se deben ubicar en este sistema?

Recuerda que...

El conjunto formado por los elementos del dominio de una función y sus respectivas imágenes, se pueden interpretar como las coordenadas de los puntos de un plano.

Atención

El conjunto de puntos que se obtiene al asignar todos los valores posibles a la variable independiente x, se le llama *gráfica de la función.*

La gráfica de la función se obtiene uniendo con una línea los puntos representados en el sistema de coordenadas cartesiano.

Ejemplo 1:

Representa gráficamente las funciones lineales definidas por las ecuaciones siguientes:

a) $y = 2x - 3$ b) $y = -3x$ c) $y = 2$

Solución:

Se determinan las coordenadas de algunos de los puntos en cada función, para esto podemos auxiliarnos de una tabla. (Recuerda que la x es la variable independiente, por lo que le puedes asignar los valores del dominio que desees)

a) $y = 2x - 3$

Tabla 3.33

x	-2	-1	0	3	3,5
y	-7	-5	-3	3	4

Para $x = -2$, se tiene $y = 2\cdot(-2) - 3 = -4 - 3 = -7$,
Para $x = -1$, se tiene $y = 2\cdot(-1) - 3 = -2 - 3 = -5$
Para $x = 0$, se tiene $y = 2\cdot(0) - 3 = 0 - 3 = -3$
Para $x = 3$, se tiene que $y = 2\cdot 3 - 3 = 6 - 3 = 3$
Para $x = 3{,}5$, se tiene que $y = 2 \cdot 3{,}5 - 3 = 7 - 3 = 4$

Obtienes los pares ordenados $(-2; -7)$, $(-1; -5)$, $(0; -3)$, $(3;3)$ y $(3{,}5;4)$, los cuales representas en el sistema de coordenadas rectangulares y unes dichos puntos y observa qué elemento geométrico se forma (fig. 3.60).

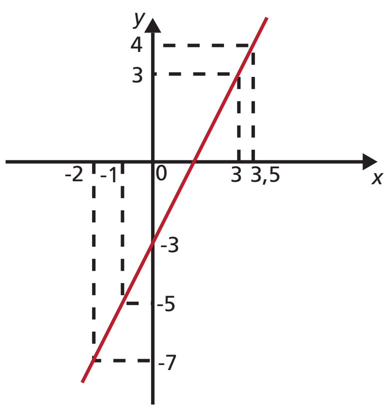


Fig. 3.60

b) $y = -3x$

Tabla 3.34

x	-2	-1	0	3	$3{,}5$
y	6	3	0	-9	$-10{,}5$

Para $x = -2$, se tiene que $y = -3 \cdot (-2) = 6$
Para $x = -1$, se tiene que $y = -3 \cdot (-1) = 3$
Para $x = 0$, se tiene que $y = -3 \cdot 0 = 0$
Para $x = 3$, se tiene que $y = -3 \cdot 3 = -9$
Para $x = 3{,}5$, se tiene que $y = -3 \cdot 35 = -10{,}5$

Obtienes los pares ordenados $(-2;6)$, $(-1;3)$, $(0;0)$, $(3;-9)$ y $(3{,}5;-10{,}5)$, los cuales representas en el sistema de coordenadas rectangulares, unes los puntos y observarás que se forma una recta (fig. 3.61).

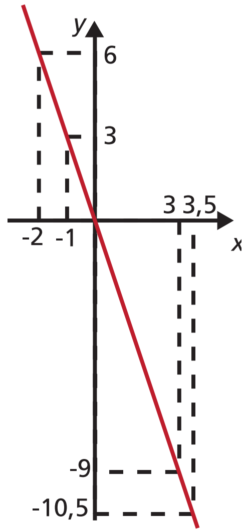


Fig. 3.61

c) $y = 2$

Tabla 3.35

x	-2	-1	0	3	$3{,}5$
y	2	2	2	2	2

En este caso la ecuación de la función tiene la forma $y = n$, o sea $m = 0$, por lo que no existe el término *mx*. Esto significa que esta función lineal toma valor *dos* para cualquier valor que tome la variable independiente *x*. Obtienes los pares ordenados (– 2;2), (– 1;2), (0;2), (3;2) y (3,5;2), los cuales representas en el sistema de coordenadas rectangulares y trazas la *recta*, que en este caso es paralela al eje "*x*" (fig. 3.62).

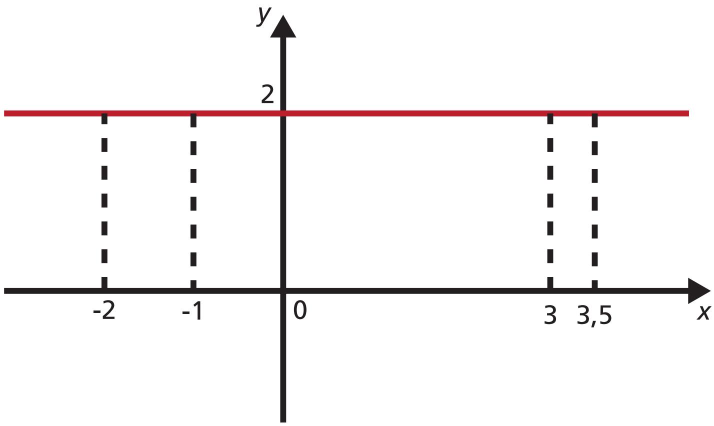


Fig. 3.62

Observa que en cada ejemplo se pudo trazar una recta que pasa por los puntos representados. Si hubieses tomado más puntos dando otros valores a la *x* y obtienes su respectivo valor de *y* mediante la ecuación de cada función, estos quedarían ubicados también sobre la recta trazada en cada ejemplo. Mientras más puntos represente s tendrás una idea más clara de la representación.

Atención

La gráfica de una función lineal, cuyo dominio es el conjunto de los números reales, es una *recta.*

Atención

¿La recta que representa la función lineal en cada gráfica tiene la misma inclinación?

¿De qué dependerá la inclinación de la recta de cada función lineal?

El análisis de las rectas representadas en cada inciso del ejemplo 1, te permite concluir que:

1. Cada recta tiene una inclinación diferente respecto al eje "x", la cual tiene relación directa con el valor que tiene la m en cada ecuación.

Observa que:

a) En el primer ejemplo la ecuación de la función lineal es $y = 2x - 3$, donde el valor de m es dos, o sea $m > 0$ y la recta se inclina *hacia arriba* de izquierda a derecha.

b) En el segundo ejemplo la ecuación de la función lineal es $y = -3x$, donde el valor de m es -3, o sea $m < 0$ y la recta se inclina *hacia abajo* de izquierda a derecha.

c) En el tercer ejemplo la ecuación de la función lineal es $y = 2$, donde $m = 0$, ya que la ecuación es de la forma $y = n$ y la recta no está inclinada, es paralela al eje de las "x".

2. Estas rectas intersecan al eje "y" en los puntos $(0; -3)$; $(0;0)$ y $(0;2)$ respectivamente, lo que tiene relación directa con el valor de n en cada ecuación.

Observa que:

a) En la ecuación $y = 2x - 3$, se tiene que $n = -3$, o sea, el valor de n coincide con el valor de y del par ordenado $(0; -3)$.

b) En la ecuación $y = -3x$, se tiene que $n = 0$, o sea, el valor de n coincide con el valor de y del par ordenado $(0;0)$.

c) En la ecuación $y = 2$, se tiene que $n = 2$, o sea, el valor de n coincide con el valor de y del par ordenado $(0;2)$.

Atención

En las funciones lineales la **inclinación** de la recta está relacionada con el valor de m en la ecuación.

El intercepto de la recta con el eje "y", o sea el valor de la ordenada, coincide con el valor que toma n en la ecuación.

Reflexiona un instante

Si por dos puntos pasa una única recta, bastarán dos puntos para representar una función lineal.

En muchos casos es conveniente para representar la función lineal seleccionar los puntos donde la recta corta a los ejes de coordenadas, o sea, P1(x;0) y P2(0;y), los que se suelen llamar puntos cómodos.

Ejemplo 2:

Representa en un sistema de coordenadas la función definida en el conjunto de los números reales por la ecuación: $f(x) = 5x - 5$.

a) Verifica si el punto (2;5) pertenece a la representación gráfica de f.

b) Sabiendo que el par ordenado (x;8) pertenece a la función f, halla el valor de la abscisa del par ordenado.

Solución:

$f(x) = y = 5x - 5$

1. Para representar la recta correspondiente a esta función buscamos los puntos cómodos:

   1.1. Intercepto con el eje "x". Este punto tiene coordenadas (x;0), por lo que tienes que hallar la preimagen de cero por esta función

   Sustituyes la ordenada "y" en la ecuación por el valor numérico cero y resuelves la ecuación:

   $0 = 5x - 5$

   $5 = 5x$

   $x = \frac{5}{5}$

   $x = 1.$

   Luego, el punto de intersección con el eje "x" tiene coordenadas (1;0).

   1.2. Intercepto con el eje "y": Como conoces este punto tiene coordenadas (0;y) entonces el valor de y coincide con el valor de la n en la ecuación, por lo que en este caso como n = – 5, el punto tiene coordenadas (0; – 5).

2. Trazas el sistema de coordenadas, ubicas los puntos hallados en este y trazas la recta que pasa por ambos puntos (fig. 3.63).

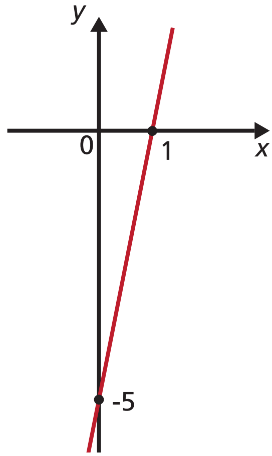


Fig. 3.63

a) Para verificar si el punto de coordenadas (2;5) pertenece a la representación gráfica de *f*:

Como conoces una recta tiene infinitos puntos y podemos obtener los valores de la variable dependiente (*y*) sustituyendo la variable independiente (*x*) por diferentes valores que pertenezcan al dominio de la función y así se obtienen los puntos de coordenadas (*x;y*) que pertenecen a dicha recta; entonces, para verificar que el punto pertenece a la función, o sea si un punto dado se encuentra sobre la recta, debes saber las coordenadas del punto, en este caso (2;5), y la ecuación de la función lineal (representada por la recta $y = 5x - 5$).

Si aplicas el método analítico:

1. Sustituir el valor de la abscisa (*x*) del punto en la ecuación: $y = 5 \cdot (2) - 5$
2. Efectuar las operaciones indicadas: $y = 10 - 5 = 5$
3. Comprobar que el resultado de las operaciones indicadas coincide con el valor de la ordenada ($5 = 5$)

Por tanto, el punto (2;5) *sí pertenece* a la representación gráfica de la función lineal *f*.

Atención

Cuando comparas el resultado de las operaciones indicadas con la ordenada del punto y no son iguales, entonces el punto no pertenece a la representación gráfica de la función lineal.

Si aplicas el método gráfico:

Ubicas en el eje de las abscisas el valor de la coordenada en *x* para después trazar por ese valor una recta perpendicular al eje "*x*" y otra recta perpendicular al eje de las ordenadas por el valor en el punto de *y*.

Verificar que las rectas perpendiculares trazadas se cortan en un punto que está sobre la recta que representa la función lineal (fig. 3.64).

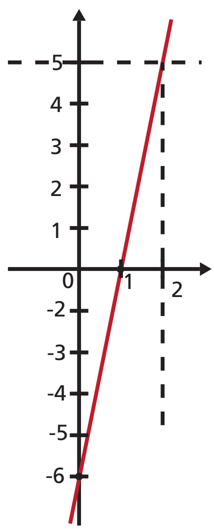


Fig. 3.64

Aplica tus conocimientos

Comprueba si el punto de coordenadas (2;5) pertenece a la representación gráfica de la función: $y = 5x - 5$ con la utilización un asistente matemático.

Atención

Generalmente para verificar si un punto pertenece a la representación gráfica de una función dada, se utiliza el método analítico porque el método gráfico requiere trazado de rectas que tengan el mismo grosor para que sea preciso.

b) Sabiendo que el par ordenado $(x_o;8)$ pertenece a la función f, halla el valor de la abscisa del par ordenado.
En este caso, a diferencia del inciso anterior el par ordenado $(x_o;8)$ pertenece a la función f por tanto $f(x_o) = 8$, por lo que necesitas conocer la preimagen o argumento de ocho; este proceder, que ya aprendiste, significa que debes resolver la ecuación: $8 = 5x - 5$.

$$8 + 5 = 5x$$
$$13 = 5x$$
$$x = \frac{13}{5}.$$

Luego la abscisa del par ordenado es $x_o = \dfrac{13}{5}$.

¿Sabías que...?

La representación gráfica de algunas funciones nos recuerda objetos conocidos. *La función* "Escalonada", la cual suele indicarse por la ecuación $f(x) = E[x]$, que se lee *f* de *x* igual a la parte entera de *x*. Se parece a una escalera (fig. 3.65).

Función escalonada *Función peine inclinado*

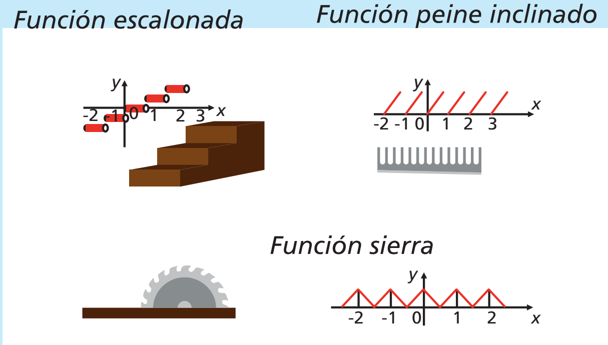


Fig. 3.65

La función "Peine inclinado", se asemeja a un peine con los dientes inclinados, suele indicarse con la ecuación $g(x) = x - E[x]$.

La función "Sierra", que debe su nombre a que su gráfica simula los dientes de la sierra, su ecuación es la distancia positiva entre x y el entero más próximo.

Ejercicios

1. Representa en un sistema de coordenadas cartesiano las funciones lineales siguientes:

a) $y = x$ b) $y = -x$ c) $f(x) = 5x$ d) $g(x) = -5x$

e) $y = \frac{3}{5}x$ f) $y = -\frac{3}{5}x$ g) $y = 1,3x$ h) $y = -1,3x$

1.1. ¿Las representaciones de estas funciones lineales pasan por el origen de coordenadas? Fundamenta tu respuesta.

1.2. ¿Tienen todas las rectas que representan estas funciones lineales la misma inclinación respecto al eje "x"? ¿Por qué?

2. Dadas las funciones lineales siguientes:

a) $y = x + 4$ b) $y = -x + 4$ c) $y = 2x - 6$ d) $y = -2x - 6$

e) $y = 3 + 9x$ f) $y = 3 - 9x$ g) $y = \frac{1}{3} + 3x$ h) $y = \frac{1}{3} - 3x$

2.1 Represéntalas en un sistema de coordenadas cartesiano.

2.2. ¿Pasa cada una de estas rectas representadas por el origen de coordenadas? ¿Por qué?

2.3. ¿Tienen la misma inclinación respecto al eje "x"? Fundamenta tu respuesta

3. Representa en un sistema de coordenadas cartesiano las funciones lineales siguientes:

a) $y = 2$ b) $y = -2$ c) $y = 3,5$ d) $y = -3,5$

e) $y = \frac{4}{3}$ f) $y = -\frac{4}{3}$ g) $y = 0$

3.1. ¿Qué posición tienen las rectas representadas respecto al eje "x"? ¿Por qué ocurre esto?

4. Sea la función lineal f definida en el conjunto de los números reales por la ecuación $f(x) = \frac{3}{2}x - 2$.

a) Represéntala gráficamente.

b) Prueba que: $\frac{f(-4)}{4} + f(0) = -4$.

c) Verifica si el punto de coordenadas $\left(\frac{2}{3}; -3\right)$ pertenece a la representación gráfica de f.

d) Determina el valor de x_o para el cual el par ordenado $A(x_o; -4)$ pertenece a la representación gráfica de la función f.

5. Una sustancia tiene una temperatura de 3 °C. Se somete a un proceso de calentamiento que hace variar su temperatura 2 °C por minuto. Representa en un sistema de coordenadas la variación de la temperatura de la sustancia hasta que alcance los 11°C en función del tiempo transcurrido.

6. Un recipiente que está completamente vacío tiene una capacidad de 50 litros. Se abre una llave que vierte cinco litros por minuto. Representa gráficamente el proceso completo de llenado del recipiente atendiendo a la relación tiempocantidad de litros.

7. La policía de tránsito mide la velocidad a un auto, que se acerca por la autopista, durante dos minutos y constató que viajaba todo el tiempo a 60 km/h. Representa gráficamente la variación de la velocidad del auto durante el tiempo que fue medida.

3.4.7. Ecuación de una función lineal

Reflexiona un instante

¿Será posible escribir mediante la ecuación de una función lineal el proceso de variación de la longitud de la vela? (fig. 3.66)

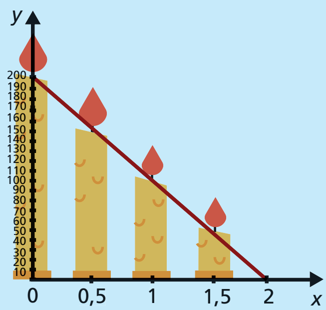


Fig. 3.66

La representación de este proceso es un segmento, pero si prolongamos sus extremos obtenemos una recta, entonces podemos escribir la ecuación si conocemos el valor de dos puntos que pertenecen a la recta.

Como sabes la ecuación de una función lineal tiene la forma $y = mx + n$, por lo que es necesario conocer los valores de m y n.

Si solo conoces el valor de la longitud de la vela al comenzar el proceso, que coincide con el par ordenado (0;200), entonces, el valor del parámetro n de la ecuación es 200.

¿Cómo proceder entonces para escribir la ecuación de una función lineal cuando conoces solo uno de los dos valores, m o n, involucrados en la ecuación?

Analicemos cómo proceder para escribir la ecuación de una función lineal:

a) Si conoces el valor de n y *un punto* de la recta.

Por ejemplo, cuando $n = 3$ y la gráfica de la función pasa el punto $A(2; -2)$

La ecuación general de la función lineal tiene la forma $y = mx + n$, por tanto, debes:

- Sustituir en la ecuación el valor de n: $y = mx + 3$
- Sustituir las coordenadas del punto A en la ecuación anterior:
  $-2 = m \cdot 2 + 3$ (recuerda que el primer valor de la coordenada es el valor de x y el segundo es el valor de y?
- Despejas m en la ecuación:
  $-2 - 3 = m \cdot 2$ (transponiendo el tres)
  $-5 = m \cdot 2$
  $m = -\frac{5}{2}$
- Escribir la ecuación: $y = -\frac{5}{2}x + 3$

b) Si conoces el valor de m *y un punto* de la recta

Por ejemplo, cuando $m = -\frac{1}{2}$ y su gráfica pasa por el punto $B(-4 ; 5)$.

La ecuación general de la función lineal tiene la forma $y = mx + n$, por tanto, debes:

- Sustituir en la ecuación el valor de m: $y = -\frac{1}{2}x + n$
- Sustituir las coordenadas del punto B en la ecuación anterior:
- $5 = -\frac{1}{2} \cdot (-4) + n$
- Despejar n en la ecuación: $5 = -\frac{1}{2} \cdot (-4) + n$

$$5 = 2 + n$$
$$5 - 2 = n$$
$$n = 3$$

- Escribir la ecuación: $y = -\frac{1}{2}x + 3$

c) Si tienes la representación gráfica y conoces las coordenadas de dos puntos por donde pasa la gráfica de la función.

Por ejemplo, cuando uno de los puntos por donde pasa la gráfica de la función es de coordenadas (0;y), o sea el punto que se corresponde con el valor de *n* (fig. 3.67) entonces debes:

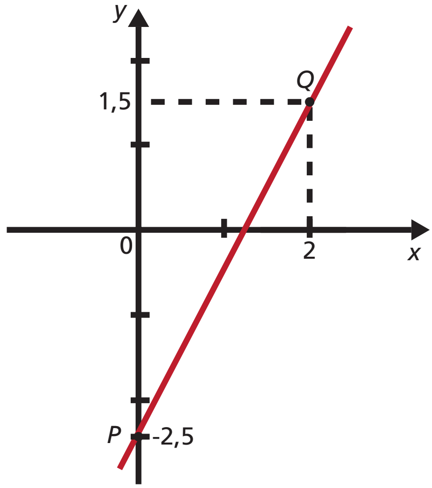


Fig. 3.67

- Extraer las coordenadas de los puntos de la gráfica representada: *P*(0; – 2,5) y *Q*(2;1,5), por lo que en este caso $n = -2,5$
- Sustituir en la ecuación el valor de n en la ecuación general de la función lineal: $y = mx - 2,5$
- Sustituir las coordenadas del otro punto en la ecuación anterior, en este caso es el punto *Q*(2; 1,5): $1,5 = m \cdot 2 - 2,5$
- Despejar m en la ecuación: $1,5 + 2,5 = m \cdot 2$

$$4 = m \cdot 2$$
$$m = 2$$

- Escribir la ecuación: $y = 2x - 2,5$

d) Otro caso sería si uno de los dos puntos por donde pasa la gráfica de la función es el origen de coordenadas entonces el valor de *n* es cero y procedes de igual manera al caso anterior; por ejemplo: si la gráfica pasa por los puntos *M*(0;0) y $Q\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$. Como el punto *M* tiene la forma (0;*y*) y el valor de su ordenada es 0, luego $n = 0$ y la ecuación toma la forma $y = mx$; entonces, para calcular el valor de *m*:

- Sustituyes las coordenadas del punto *Q* en la ecuación: $-\frac{2}{3} = m \cdot \frac{1}{3}$
- Despejas m en la ecuación: $m = -\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$

$$m = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{1}$$
$$m = -2$$

- Escribes la ecuación: $y = -2x$

Pasos para escribir la ecuación de una función lineal:

1. Determinar los valores de ***m*** y ***n***:
   - Si conoces el valor de ***m*** *y un punto de la recta*, sustituyes ***m*** y las coordenadas del punto en la ecuación; luego despejas ***n***.
   - Si conoces el valor de ***n*** y un punto de la recta, sustituyes ***n*** y las coordenadas del punto en la ecuación; luego despejas ***m***.
   - Si el valor de n es cero, la ecuación tendrá la forma ***y = mx*** y la recta pasará por el origen de coordenadas (0;0).

Aplica tus conocimientos

Escribe la ecuación de la función lineal que describe el proceso de variación de la altura de la vela desde que se enciende hasta que se apaga, que aparece representada en la figura 3.66.

Reflexiona un instante

¿Cómo determinar el dominio y la imagen de una función lineal?

Para determinar el dominio de una función lineal se proyecta su gráfica sobre el eje "x", como sabemos que la recta es infinita entonces cada punto de esta se puede proyectar sobre este eje (figura 3.68), realizaremos el análisis a partir de la gráfica de la función $y = 2x - 3$, que aparece representada en el ejemplo uno del epígrafe anterior, el procedimiento solo se realizará para algunos de sus infinitos puntos.

Cuando se observa la figura 3.68 podemos concluir que la gráfica de la función lineal cubre todo el eje "*x*", por lo que su *dominio* es el conjunto de los *números reales*.

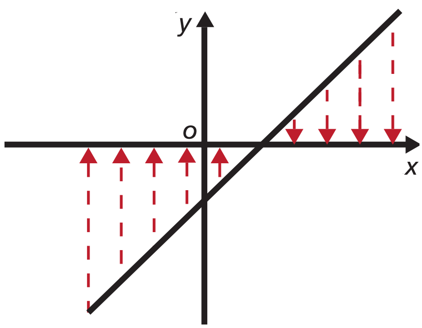


Fig. 3.68

Para analizar la *imagen* de una función lineal procedemos de manera análoga, pero se proyecta su gráfica sobre el eje "*y*", se puede observar en la figura 3.69 que cada punto de esta se puede proyectar sobre dicho eje. (Aquí se muestra solo para algunos de sus infinitos puntos).

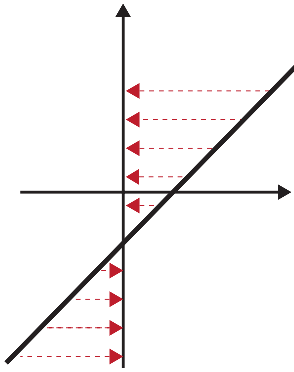


Fig. 3.69

De esta manera podemos concluir que la gráfica de la función lineal cubre todo el eje "y", por lo que su *imagen* es también el conjunto de los *números reales*.

Si la gráfica de la función se inclina hacia abajo, de izquierda a derecha, puedes comprobar que se obtiene igual resultado.

El dominio y la imagen de una función lineal, de la forma $y = mx + n$ ($m \neq 0$), es el conjunto de los números reales.

Reflexiona un instante

¿Cuál será el dominio y la imagen de la función lineal $y = n$, o sea cuando $m = 0$?

Cuando m = 0, la gráfica de la función es una recta paralela al eje "x". Para realizar el análisis tomemos como ejemplo la gráfica de la función de ecuación y = 2, representada en el ejemplo uno del epígrafe anterior.

La proyección de la gráfica de la función de ecuación $y = 2$ sobre el eje de las abscisas, coincide con todos los puntos del eje *x*, por tanto, el dominio de esta función también es el conjunto de los números reales, $x \in \mathbb{R}$. (fig. 3.70a).

Sin embargo, al proyectar la gráfica de la función $y = 2$ sobre el eje "*y*", (fig. 3.70b) todas las flechas van hacia un único valor de *y*, el 2. Luego la imagen de esta función es el conjunto unitario {2}.

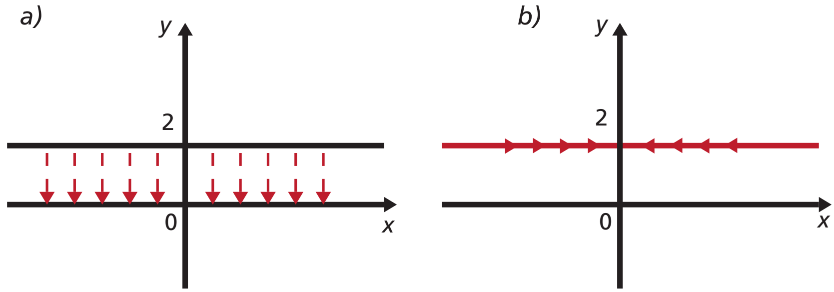


Fig. 3.70

Las funciones cuyo conjunto imagen consta de un solo número se les llaman **funciones constantes** y su gráfica siempre es una recta *paralela el eje "x".*

Es bueno aclarar que si ***n* = 0**, la gráfica de la función coincide con el eje "*x*" y su imagen es {0}.

El dominio de una función lineal de la forma $y = n$, es el conjunto de los números reales; y su conjunto imagen está formado por un único número, el valor de n.

Es importante aclarar que en algunas situaciones donde se utilizan funciones lineales para modelar procesos o fenómenos de la vida el dominio y la imagen *son subconjuntos* del conjunto de los números reales.

En el caso de la variación de la altura de la vela, el dominio y la imagen son subconjuntos de los números reales, porque los valores de t varían desde cero hasta dos, o sea $0 \le t \le 2$; mientras la imagen son los valores reales de h tales que, $0 \le h \le 120$.

Ejercicios

1. Escribe la ecuación de una función lineal si conoces que:

a) su gráfica pasa por el origen de coordenadas y $m = 5$.

b) $m = -3$ y su gráfica contiene el punto de coordenadas (0;4).

c) su gráfica corta al eje de las ordenadas en $y = -1$ y $m = 0$.

d) $m = \frac{1}{3}$ y su gráfica pasa por el punto $\left(0;-\frac{2}{3}\right)$.

e) el valor de n es tres y la recta contiene al punto (– 2;7).

f) su gráfica interseca al eje de "*y*" en 2,5 y al eje "*x* "en 3,5.

g) su gráfica pasa por los puntos (8; – 1)y $\left(0;-\frac{1}{5}\right)$

h) su representación gráfica pasa por el origen de coordenadas y por el punto $\left(\frac{3}{4};\frac{2}{5}\right)$.

i) su gráfica es paralela al eje "x" y corta al eje "y" en – 2,4.

2. Escribe las ecuaciones que definen las funciones representadas en la figura 3.71:

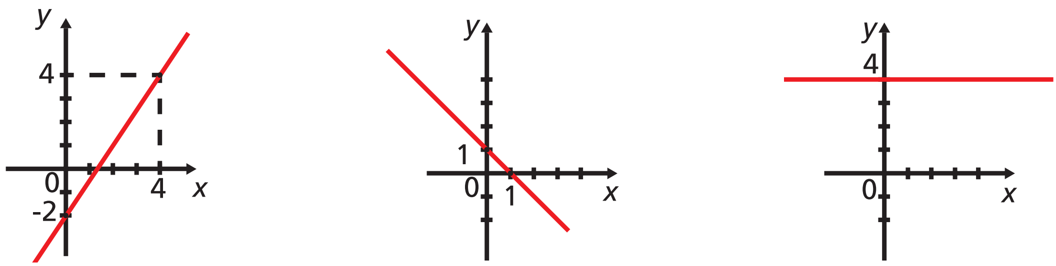


Fig. 3.71

2.1. Escribe el dominio y la imagen de las funciones representadas.

3. Halla el valor de n si se sabe que el gráfico de la función $y = 6x + n$ pasa por el punto:

a) (2; 5) b) (0; – 3) c) (0; 0) d) $\left(\frac{5}{6};\frac{1}{3}\right)$ e) $\left(-\frac{3}{2};-2\right)$

4. Halla el valor de m si se sabe que el gráfico de la función $y = mx – 1$ pasa por el punto:

a) (2;5) b) (3;0) c) (– 3; – 2) d) $\left(\frac{5}{6};\frac{1}{3}\right)$ e) $\left(\frac{3}{2};2\right)$

5. La gráfica de una función lineal f pasa por los puntos A (– 1; – 1) y B(0; – 5).

5.1. Marca con una X la respuesta correcta:

a) La ecuación de la función f es:

___ $f(x) = 4x – 5$ ___ $f(x) = – x – 5$

___ $f(x) = – 4x – 5$ ___ $f(x) = – 4x + 5$

b) De los puntos dados el que pertenece a la gráfica de la función f es:

___ $C(2;3)$ ___ $D(\frac{1}{4}; – 4)$ ___ $E(– 2; – 13)$ ___ $F\left(-\frac{1}{4};-4\right)$

c) Al calcular $f(-2{,}5)$ se obtiene:

___ 5 ___ – 15 ___ 4 ___ – 4

5.2 Representa gráficamente la función *f*.

5.3 Determina el dominio y la imagen de la función *f*.

6. a) Representa en un sistema de coordenadas la función lineal *h* definida por la ecuación $y = h(x) = 3x - 2$ en el tramo de $-5 \leq x \leq 5$.

b) Determina su dominio y su imagen.

7. La gráfica de la figura 3.72 muestra cómo varía la cantidad de agua en un recipiente que ya contenía cierta cantidad, a partir de las 8:00 am y hasta llenarse completamente.

C: cantidad de agua en litros

t: tiempo en minutos

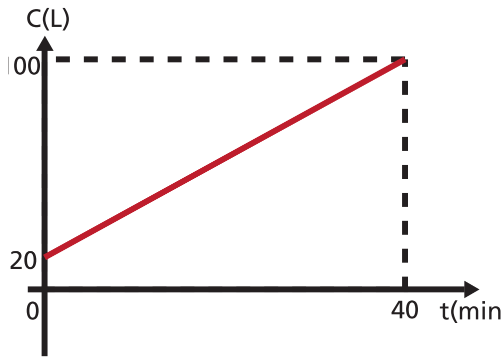


Fig. 3.72

a) Escribe la ecuación que describe el proceso de llenado del recipiente.

b) ¿Qué cantidad de agua tenía el recipiente al iniciarse el proceso de llenado?

c) ¿Qué cantidad de agua tenía el recipiente a los 15 minutos de iniciado el proceso de llenado?

d) ¿A los cuántos minutos de comenzar el proceso de llenado, el recipiente tenía 60 litros de agua?

e) ¿A qué hora se llenó completamente el recipiente?

8. La gráfica de la figura 3.73 muestra la variación de la temperatura de una sustancia a partir de las 9:05 pm durante varias horas.

T: temperatura en ^{0}C.

t: tiempo en horas

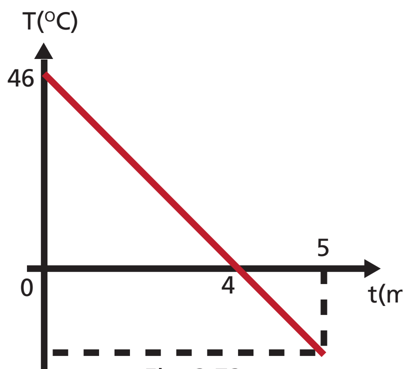


Fig. 3.73

a) Escribe la ecuación del proceso representado.
b) ¿Qué temperatura tenía la sustancia a la 1:05 pm?
c) ¿Cuál fue la temperatura mínima alcanzada por la sustancia?
d) ¿*A* qué hora la sustancia alcanzó los 23°C de temperatura?

9. La gráfica (fig. 3.74) muestra la altura que tiene el agua de un recipiente a partir de las 11: 50 am durante el proceso de vaciado.

h: altura del agua en el recipiente, en metros.

t: tiempo en minutos

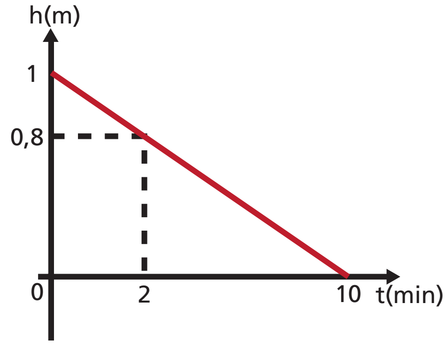


Fig. 3.74

9.1. Marca con una *X* la respuesta correcta.

a) La ecuación que describe el proceso representado es:

___ $h(t) = -2t + 1$

___ $h(t) = 2t + 1$

___ $h(t) = -0{,}1t + 1$

___ $h(t) = 0{,}1t + 1$

b) *A* los 2 minutos la altura del agua del recipiente había descendido:

___ 0,8 *m* ___ 1,8 *m*

___ 0,2 *m* ___ ninguna de estas

9.2. Completa los espacios en blanco.

a) La altura inicial del agua en el recipiente fue de ________.

b) El recipiente se vació completamente cuando el reloj marcaba las ________

3.4.8 Cero de una función lineal

Reflexiona un instante

En distintas ocasiones al analizar el comportamiento de procesos descritos a través de funciones lineales es de interés conocer el tiempo de duración del proceso.

¿Cómo saber cuánto tiempo transcurrió hasta que la vela se gastó completamente?

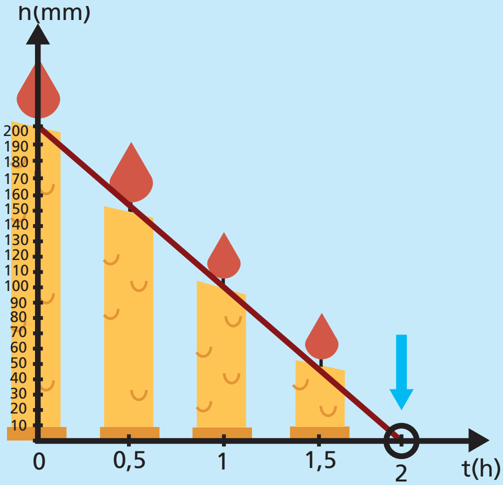


Fig. 3.75

Como puedes observar, figura 3.75, cuando la vela se va gastando, su longitud disminuye, y cuando se gasta completamente, su **longitud será igual a cero**. En la gráfica debes buscar el valor del tiempo para el cual la longitud de la vela es igual a cero. Este valor está precisamente sobre el eje "*x*", o sea, el valor dos.

Este es uno de los valores más importantes de una función lineal, el cual se denomina **cero** de la función.

Definición del cero de la función lineal

El elemento del **dominio** de la función lineal $y = mx + n$ $(m \neq 0)$ cuya **imagen** es **cero**, se denomina **cero** de esta función.

Atención

Gráficamente, el *cero* de la función es la *abscisa* del punto donde la recta corta al eje "*x*", este punto como ya sabes tiene coordenadas $(x_o;0)$.

Pasos para calcular el cero de una función lineal:

1. Sustituir la ordenada (*y*) por el valor cero en la ecuación de la función lineal.
2. Despejar la abscisa (*x*).

Atención

Es importante que compruebes que el *cero es la abscisa de dicho punto* (x_o) *y no el punto de intersección.*

Ejemplo 1:

Calcula el cero de las funciones lineales dadas por las ecuaciones siguientes:

a) $y = 2x - 6$

b) $-\frac{x}{3} + \frac{1}{5} = 0$

c) $y = -x - 2{,}4$

d) $y = 6$

Solución:

a) Para calcular el cero de la función lineal: $y = 2x - 6$

1. Sustituye la variable dependiente (y) por el valor cero en la ecuación: $2x - 6 = 0$.
2. Resolver la ecuación: $2x - 6 = 0$

$$2x = 6$$
$$x = 6 : 2$$
$$x = 3$$

Respuesta: El cero de la función dada por la ecuación $y = 2x - 6$ es $x_o = 3$.

Puedes comprobar de manera oral o escrita este resultado, si sustituyes el valor hallado de x en la ecuación y el resultado del cálculo es cero.

b) Para calcular el cero de la función lineal: $y = -\frac{x}{3} + \frac{1}{5}$

1. Sustituye la variable dependiente (y) por el valor cero en la ecuación: $-\frac{x}{3} + \frac{1}{5} = 0$
2. Resolver la ecuación: $-\frac{x}{3} + \frac{1}{5} = 0$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{3}$$

(observa que se transpone el término $-\frac{x}{3}$ para el otro miembro para que la x quede positiva)

$$x = \frac{1}{5} \cdot 3$$

$$x = \frac{3}{5}$$

Respuesta: El cero de la función dada por la ecuación: $y = -\frac{x}{3} + \frac{1}{5}$ es $x_o = \frac{3}{5}$

c) Para calcular el cero de la función lineal: $y = -x - 2{,}4$

1. Sustituye la variable dependiente (y) por el valor cero en la ecuación: $-x - 2{,}4 = 0$.
2. Despejar x en la ecuación: $-x - 2{,}4 = 0$.

$$-x = 2{,}4$$
$$x = -2{,}4$$

Luego el cero de la función dada por la ecuación $y = -x - 2{,}4$ es $x_o = -2{,}4$.

d) Para calcular el cero de la función lineal dada por la ecuación: $y = 6$

Al sustituir la variable dependiente por el valor cero en la ecuación obtienes una contradicción $0 = 6$, por lo que ningún valor real de x la satisface. Como conoces esta función es *constante* y su gráfica es una recta paralela al eje "x", por lo que para cualquier valor real de x su imagen es 6. En este caso la recta *no corta* en ningún punto a dicho eje y la función *no tiene cero*.

e) Para calcular el cero de la función lineal dada por la ecuación: $y = 0$

Al sustituir la variable dependiente por el valor cero en la ecuación, obtienes la igualdad $0 = 0$, la que se satisface para cualquier valor real de x. Esta función también es *constante* y como $n = 0$, su gráfica es una recta contenida sobre el eje "x".

En este caso, para cualquier valor real de x su imagen siempre es cero; por lo que esta función tiene *infinitos ceros*.

Cuando en la ecuación de la función lineal:

- $m \neq 0$, la función lineal tiene un único cero, $x_o = -\frac{n}{m}$. En este caso, la recta corta al eje "x" en un único punto.
- $m = 0$ y $n \neq 0$, la función lineal no tiene cero. En este caso, la recta es paralela al eje "x".
- $m = 0$ y $n = 0$, la función lineal tiene infinitos ceros. En este caso, la recta coincide con el eje "x".

Aplica tus conocimientos

Comprueba analíticamente, que la vela se gastó a las dos horas de iniciado el proceso de medición, como muestra la gráfica del proceso representado.

Consejos *útiles*

En la práctica es importante comprobar, cuando es posible, que los resultados obtenidos por la vía analítica coinciden o por lo menos que tengan sentido común cuando se comparan con la vía gráfica y viceversa. Esto te permite evitar errores de cálculo o apreciación.

Ejercicios

1. Calcula, si existe, el cero de las funciones lineales siguientes:

a) $y = 5x - 25$ b) $f(x) = 10x - 5$ c) $g(x) = -x + 3{,}5$

d) $h(x) = -0{,}5x - 4$ e) $y = \frac{x}{3} - 1$ f) $f(x) = \frac{2}{3}x - 8$

g) $g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ h) $h(x) = -2x - \frac{3}{5}$ i) $y = 2{,}5 - x$

j) $f(x) = 4$ k) $g(x) = -7$ l) $h(x) = -0{,}1x - 0{,}001$

2. Señala, si existe, el cero de las funciones lineales representadas en la figura 3.76. En caso de no existir, argumenta tu respuesta.

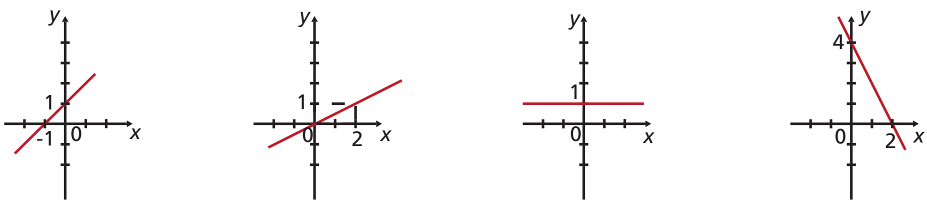


Fig. 3.76

2.1. Escribe la ecuación de la función lineal representada en cada caso.

3. Sea la función g dada por su ecuación $g(x) = -\frac{2}{3}x - 12$. Se puede afirmar que el cero de la función g es:

a) _____ 18 b) ____ – 8 c) ____ 0 d) ____ – 18

4. El cero de una función lineal f es $x_0 = \frac{1}{3}$. Se puede afirmar que dicha función lineal tiene ecuación:

a) ____ $h(x) = x + \frac{1}{3}$ b) ____ $f(x) = -9x + 3$

c) ____ $g(x) = 9x + 3$ d) ____ $t(x) = -3 + 6x$

5. Sea la función lineal f definida en el conjunto de los números reales por la ecuación $f(x) = 4x - 2$.

a) Calcula su cero.

b) Represéntala en un sistema de coordenadas rectangulares.

c) Determina su imagen.

5.1. De los pares ordenados $A(-1; 6)$; $B(0{,}5; 18)$ y $C\left(\frac{1}{4}; -1\right)$ el que pertenece a la función f es: ___ A ___ B ___ C

5.2. Prueba que: $\dfrac{f(0)-2f(1{,}5)}{f(-1)} = \dfrac{5}{3}$.

6. Sean $M(2; 6)$ y $N(0; -4)$ dos de los puntos de la representación gráfica de una función lineal g.

a) Represéntala en un sistema de coordenadas rectangulares.

b) Escribe su ecuación.

c) Determina su dominio e imagen.

d) Calcula su cero.

e) Calcula la imagen de -3 por la función g.

f) Determina la abscisa del punto C de la gráfica de g, cuya ordenada es -2.

7. En la gráfica (fig.3.77) se ha representado la función lineal f que corta a los ejes de coordenadas en los puntos A y B.

a) Escribe su ecuación.

b) Calcula el área del ΔAOB, donde O es el origen de coordenadas.

c) Halla el perímetro del ΔAOB.

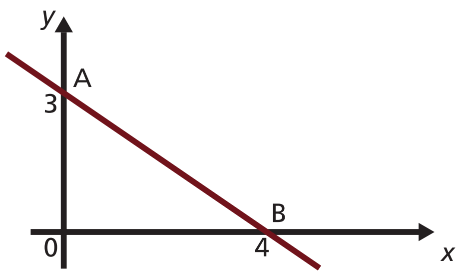


Fig. 3.77

8. Un tanque contiene cierta cantidad de agua. A las 10:30 am se abre su llave para vaciarlo y limpiarlo. Este proceso se muestra en la gráfica de la figura 3.78:
C: Cantidad de agua en litros.
t: tiempo en minutos.

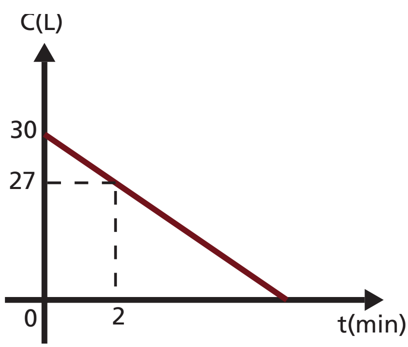


Fig. 3.78

a) ¿Qué cantidad de agua contenía el tanque inicialmente?
b) Escribe la ecuación del proceso representado.
c) ¿*A* qué hora se vació completamente el tanque?
d) ¿Qué cantidad de agua había en el tanque a los 15 minutos de iniciado el proceso de vaciado?

9. *A* medida que el tiempo transcurre, desde el momento de compra hasta el momento de venta, una máquina se desvaloriza.

Si *P* representa el precio de la máquina en pesos, una empresa calculó que el valor de una máquina, al finalizar *t* años, estaba dada por la ecuación $P(t) = 15000 - 1500t$.

a) ¿Cuál fue el costo inicial de la máquina?
b) ¿Cuál será el precio de la máquina a los dos años de haber sido comprada?
c) ¿Qué tiempo debe transcurrir desde la compra de la máquina, para que esta no tenga valor alguno?
d) Representa gráficamente la función que representa la relación preciotiempo transcurrido.

3.4.9 Rectas y funciones

Reflexiona un instante

Marvelys observó en la libreta de matemática de su prima Deysi, que la ecuación: $2x - y + 4 = 0$ es una ecuación de una recta y se preguntó:

¿Por qué la ecuación de la función lineal es una recta y no tiene la misma forma que la ecuación que apareceen en la libreta de mi prima?,

¿La manera en que está escrita la ecuación en la libreta de mi prima se podrá transformar a la forma de la ecuación general de una función lineal?

Ejemplo 1:

Escribe las ecuaciones siguientes como la ecuación de la función lineal: $y = mx + n$

a) $4x + 2y - 8 = 0$ b) $3x - 2y + 2 = 0$ c) $ax + by + c = 0$ $(b \neq 0)$

Solución:

Para escribir una ecuación de la forma $y = mx + n$, debes aislar la variable dependiente (y) en un miembro de la ecuación o sea despejar la variable dependiente (y).

a) $4x + 2y - 8 = 0$

$2y = -4x + 8$

$y = \frac{-4x+8}{2}$

$y = \frac{-2x}{2} + \frac{8}{2}$

$y = -2x + 4$

Respuesta: La ecuación de la forma y = mx + n, es: y = – 2x + 4 donde $m = -2$ y $n = 4$.

b) $3x - 2y + 2 = 0$

$3x + 2 = 2y$

$y = \frac{3x+2}{2}$

$y = \frac{3x}{2} + \frac{2}{2}$

$y = \frac{3}{2}x + 1$

Respuesta: La ecuación de la forma $y = mx + n$, es $y = \frac{3}{2}x + 1$, donde $m = \frac{3}{2}$ y $n = 1$.

c) $ax + by + c = 0$

$by = -ax - c$ (transponiendo al miembro derecho)

$y = \frac{-ax-c}{b}$ (transponiendo el parámetro b al miembro derecho)

$y = -\frac{ax}{b} - \frac{c}{b}$ (división de un binomio por b)

Respuesta: La ecuación de la forma $y = mx + n$ es $y = -\frac{ax}{b} - \frac{c}{b}$ (b≠0), donde $m = -\frac{a}{b}$ y $n = -\frac{c}{b}$, con ($b \neq 0$).

Como puedes observar al despejar la variable "*y*" en cada inciso obtienes ecuaciones de funciones lineales, por lo que su representación gráfica será una recta la cual ya puedes representar sobre un plano coordenado.

Teorema sobre la ecuación de una recta

Toda ecuación de la forma $ax + by + c = 0$ con $x, y \in \mathbb{R}$ y *a* y *b* no simultáneamente iguales a cero, representa una *recta* en el plano coordenado.

Investiga y aprende

Un grupo de turistas visitó la provincia de Pinar del Río, en una excursión a la Cordillera de Guaniguanico, figura 3.79, los visitantes lograron subir la elevación conocida como el mirador de La Luna, pero se impresionaron cuando trataron de bajarla, uno de los turistas gritó: la pendiente de esta elevación es demasiado acentuada.

¿*A* qué se refería el turista con la expresión relacionada con la pendiente de la elevación?

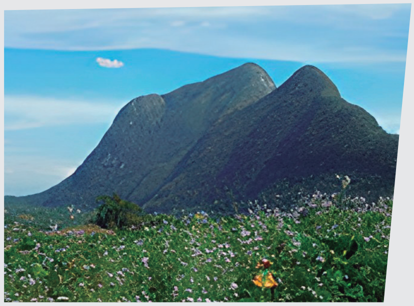


Fig. 3.79

Seguramente en varias ocasiones has tenido la posibilidad de observar la inclinación, respecto a la horizontal del suelo, de lomas, carreteras, puentes, cubiertas de techo, árboles, de los aviones al despegar en la pista, mecanismos simples, etcétera, como las que se muestran en las imágenes de las figuras 3.80 a 3.84.

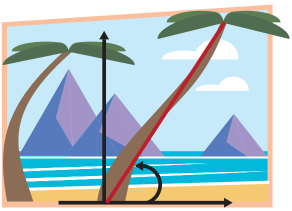


Fig. 3.80

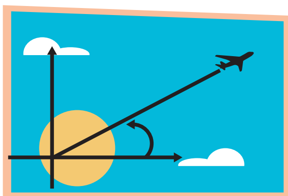


Fig. 3.81

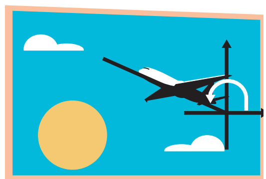


Fig. 3.82

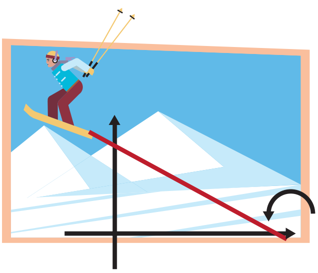


Fig. 3.83

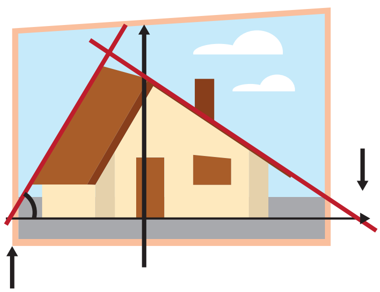


Fig. 3.84

Si trazas un sistema de coordenadas, con el eje "x" paralelo a la línea recta determinada por el suelo, y trazas la recta que representa la inclinación en cada figura, podrás observar que esta **inclinación de la recta** en cada imagen es **diferente** respecto a ese eje "x". O sea, unas están más inclinadas respecto al suelo que otras, por lo que el ángulo que forma la recta con dicho eje también tiene diferente amplitud.

Recuerda que...

La recta es la representación gráfica de una función lineal, cuya ecuación tiene la forma $y = mx + n$; que el valor de m está relacionado con la inclinación de la recta y que si $m > 0$, la recta se inclina hacia arriba de izquierda a derecha, si $m < 0$, se inclina hacia abajo de izquierda a derecha y si $m = 0$, la recta es paralela al eje "x".

Atención

El coeficiente de la variable, que indica la inclinación de la recta, se le denomina **pendiente**. También se conoce a la *pendiente* de una recta con el nombre de *coeficiente angular*, pues la inclinación de la recta depende del ángulo que esta forma con el eje "x".

Reflexiona un instante

Si conoces el valor de n y un punto de la recta puedes calcular el valor de m para escribir la ecuación de una función lineal.

Si dos puntos cualesquiera determinan una recta, entonces se podrá escribir la ecuación de una recta también si ninguno de los puntos es el origen de coordenadas, ni los puntos que son intercepto con los ejes coordenadas. Pero, ¿cómo calcular la pendiente de una recta?

Aplica tus conocimientos

Una persona se dispone a subir una colina por uno de sus extremos y descender por el otro, como se muestra en la representación de la figura 3.85, la colina tiene 60 metros de altura y la distancia de un extremo a otro de la base de la colina es de 100 m. Sabiendo que su cima se encuentra exactamente sobre un punto situado a la mitad entre ambos extremos, determina qué valor tiene, respecto al suelo, la inclinación de la colina por el lugar de ascenso y cuál por el lugar de descenso.

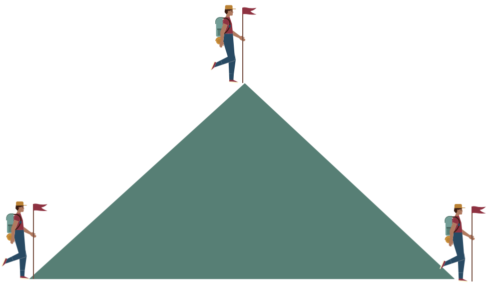


Fig. 3.85

Solución:

Para conocer el valor de la inclinación de la colina por el lugar de ascenso respecto al suelo (base de la colina), se debe calcular el valor de la pendiente (*m*) de cada recta trazada sobre la inclinación de ambos lados de la colina respecto a la línea horizontal. Puedes auxiliarte de una figura similar a la 3.86, para:

1. Trazar un sistema de coordenadas cuyos ejes perpendiculares tiene origen en el punto que representa el lugar por donde la persona comienza el ascenso.
2. Trazar las rectas que representan las trayectorias de ascenso y descenso de la colina y las denotas por r_1 y r_2, respectivamente.
3. Ubicar en el eje x el punto medio de la base de la colina (mitad de 100m)
4. Determinar las coordenadas de los puntos que pertenecen a las rectas r_1 y r_2:
   - *P*ares numéricos o coordenadas de los puntos que pertenecen a la recta r_1: (0;0) y (50;60)
   - *P*ares numéricos o coordenadas de los puntos que pertenecen a la recta r_2: (50;60) y (100;0)
5. Calcular la pendiente de las rectas r_1 y r_2

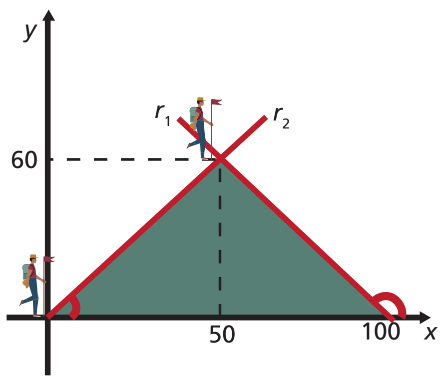


Fig. 3.86

En el caso de la recta r_1 se aplica el procedimiento estudiado para escribir la ecuación de una función lineal conocidos el valor de n y un punto de su representación gráfica.

Como $n = 0$, porque el punto de partida de la persona es el origen de coordenadas (0;0) cuya ordenada es igual a cero, entonces la forma de la ecuación es: $y = mx$, después se sustituye en la ecuación el otro punto situado sobre la recta r_1, o sea, (50;60), $60 = m \cdot 50$, $m = \frac{60}{50}$, por lo que $m = \frac{6}{5} = 1{,}2$.

Luego el valor de la pendiente de la recta r_1 es 1,2.

En el caso de la recta r_2 los puntos extraídos no tienen la forma (0;y), por tanto no conocemos el valor de *n*, tenemos que determinar entonces el valor de *m* y *n*.

¿Cómo proceder en este caso para hallar la pendiente de la recta r_2?

La pendiente de la recta permite determinar qué tan inclinada está y en qué dirección entonces la pendiente de una recta es "lo que sube sobre lo que avanza", es decir cuánto "sube" la recta *dividido* por cuánto "avanza" la recta hacia la derecha. Lo que "sube" la recta es la diferencia entre los valores de *y* (recuerda que el eje *y* se extiende hacia arriba y hacia abajo) y lo que "avanza" la recta es la diferencia entre los valores de *x* (el eje *x* se extiende hacia la izquierda y hacia la derecha). Simplemente debes pensar en la pendiente como la "razón de cambio" de una función: si aumenta el valor de "*x*", ¿en cuánto cambia el valor de "*y*"? Eso es la pendiente.

1. Representación de la función lineal de ecuación $y = x - 4$ (fig. 3.87).

   Observa en la figura que:

   - la imagen de 0 es – 4.
   - la imagen de 1 es – 3.
   - la imagen de 2 es – 2.
   - la imagen de 3 es – 1.
   - la imagen de 4 es 0.

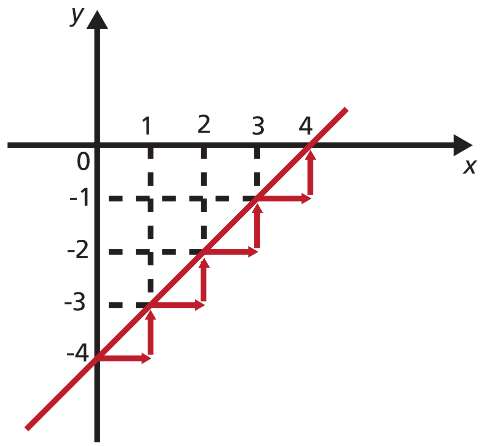


Fig. 3.87

Si el valor de la abscisa aumenta en una unidad, ¿en cuánto cambia el valor de la ordenada? La ordenada también aumenta en una unidad, pero si el valor de la abscisa aumenta en dos unidades, ¿en cuánto cambia ahora el valor de la ordenada? La ordenada también aumenta en dos unidades y así sucesivamente (fig. 3.88).

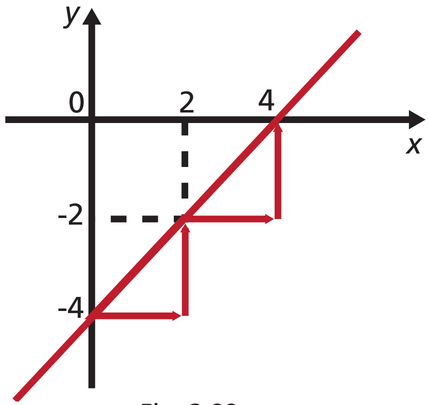


Fig. 3.88

Entonces como la pendiente es la razón de cambio, se halla la razón entre los cambios o variaciones de los valores de las abscisas con los cambios de los valores de las ordenadas: $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = 1 = m$

2. Representación de la función lineal de ecuación $y = -3x + 6$. (figura 3.89)

Observa que:

- la imagen de 0 es 6.
- la imagen de 1 es 3.
- la imagen de 2 es 0.
- la imagen de 3 es – 3.

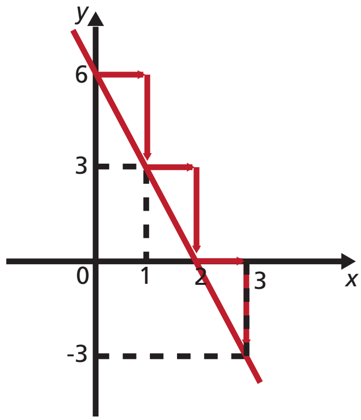


Fig. 3.89

¿Qué ocurre con el valor de la ordenada cuando la abscisa aumenta una unidad? Cuando el valor de la abscisa *aumenta una unidad*, entonces el valor de la ordenada *disminuye tres unidades*. (Del valor seis al valor tres)

Si el valor de la abscisa *aumenta dos unidades*, ¿en cuánto cambia el valor de la ordenada?

Si observas la gráfica (fig. 3.90) llegarás a la conclusión de que el valor de la ordenada *disminuye seis unidades*. (Del valor seis al valor cero)

Y así sucesivamente, cuando la abscisa **aumenta tres unidades**, la ordenada **disminuye nueve**.

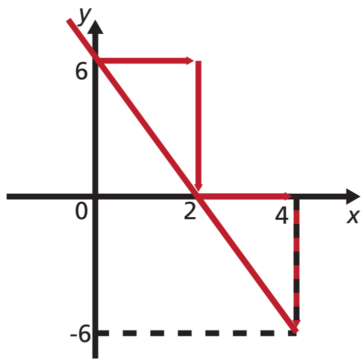


Fig. 3.90

Entonces como la pendiente es la razón de cambio, se halla la razón entre los cambios o variaciones de los valores de las abscisas con los cambios de los valores de las ordenadas:

$$\frac{-3}{1} = \frac{-6}{2} = \frac{-9}{3} = -3 = m$$

Puedes observas que las razones entre la variación del valor de la ordenada y la variación del valor de la abscisa son constantes e igual al valor de la pendiente m.

3. Representación de la función lineal de ecuación $y = 2$ (fig. 3.91).
   Observa que:
   - la imagen de – 2 es 2.
   - la imagen de – 1 es 2.
   - la imagen de 0 es 2.
   - la imagen de 1 es 2.
   - la imagen de 2 es 2.

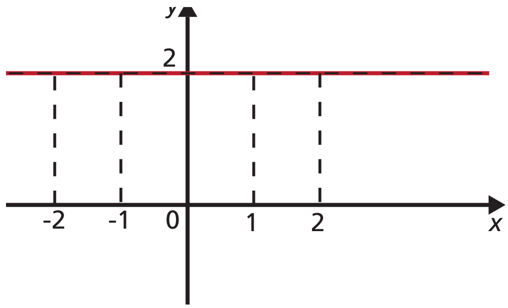


Fig. 3.91

En este caso cuando la abscisa *aumenta una unidad*, la ordenada *no aumenta ni disminuye.*

Lo mismo sucede cuando la abscisa aumenta en dos, tres o más unidades.

Entonces como la pendiente es la razón de cambio, se halla la razón entre los cambios o variaciones de los valores de las abscisas con los cambios de los valores de las ordenadas: $\frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3} = 0 = m$

De estos tres ejemplos puedes concluir que la pendiente está determinada por la razón entre la variación de los valores de la ordenada y la variación de los valores de la abscisa.

Esta conclusión te permite obtener una ecuación para calcular la pendiente si conoces las coordenadas de dos puntos de su representación gráfica, la cual te presentamos mediante el teorema siguiente:

Teorema de la pendiente de una recta

La pendiente $\boldsymbol{m}$ de una recta que pasa por los puntos $P_1(x_1;y_1)$ y $P_2(x_2;y_2)$ se calcula por la ecuación $\boldsymbol{m} = \dfrac{\boldsymbol{y_2 - y_1}}{\boldsymbol{x_2 - x_1}}$, con $x_1 \neq x_2$.

Para calcular la pendiente de la recta r_2, del esquema reflejado en la figura 3.86, se aplica la ecuación de la pendiente, con los puntos o pares ordenados (100;0) y (50;60) que pertenecen a la recta:

1. Se identifican las coordenadas de los dos puntos (recuerda que cada punto tiene como primera coordenada la ***x*** y como segunda la ***y***) con las variables de la ecuación: $(x_1;y_1)$; $x_1 = 50$, $y_1 = 60$; $(x_2;y_2)$: $x_2 = 100$, $y_2 = 0$
2. Se sustituye los valores de las variables en la ecuación $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y calculas:

   $m = \dfrac{0-60}{100-50}$; $m = \dfrac{-60}{50}$; $m = -\dfrac{6}{5} = -1{,}2$.

   Luego el valor de la pendiente de la recta $\boldsymbol{r_2}$ es $-1{,}2$, un valor negativo, porque la recta se inclina hacia abajo de izquierda a derecha.

La ecuación para calcular la pendiente de la recta también se puede utilizar siempre que se conozcan las coordenadas de dos puntos cualesquiera que pertenezcan a la recta.

Aplica tus conocimientos

Calcula la pendiente de la recta r_1 ($y = x + 4$), aplicando la ecuación de la pendiente.

Ejemplo 2:

Determina la pendiente de la recta que contiene los puntos siguientes:

a) $A(2;4)$ y $B(3;8)$. b) $C(-3;-5)$ y $D(-4;1)$. c) $M\left(\dfrac{2}{3};1\right)$ y $N\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{4}{5}\right)$

d) $P(4;3)$ y $Q(-7;3)$ e) $H(1;2)$ y $G(1;-3)$

Solución:

a) $A(2;4)$ y $B(3;8)$: $x_1 = 2$; $y_1 = 4$; $x_2 = 3$; $y_2 = 8$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{8-4}{3-2}$$

$$m = \frac{4}{1}$$

$$m = 4$$

Luego el valor de la pendiente de la recta es cuatro.
Observa que al representar en el sistema de coordenadas la recta que pasa por A y B, esta se inclina hacia arriba de izquierda a derecha. (fig. 3.92).

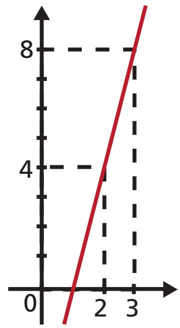


Fig. 3.92

b) $C(-3;-5)$ y $D(-4;1)$: $x_1=-3$; $y_1=-5$; $x_2=-4$; $y_2=1$

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$m=\frac{1-(-5)}{-4-(-3)}$$

$$m=\frac{1+5}{-4+3}=\frac{6}{-1}=-6$$

Luego el valor de la pendiente de la recta es $m=-6$.
Observa que al representar en el sistema de coordenadas la recta que pasa por C y D, esta se inclina hacia abajo de izquierda a derecha (fig. 3.93).

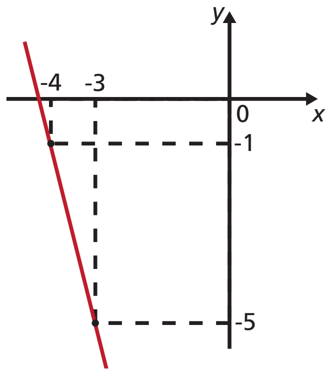


Fig. 3.93

Consejos *útiles*

Si las coordenadas $(x_1; y_1)$ son negativas debes sustituir su valor en la ecuación entre paréntesis y luego determinar su opuesto. También puedes sustituir directamente colocando el opuesto del número en la ecuación.

c) $M\left(\frac{2}{3};1\right)$ y $N\left(\frac{1}{3};-\frac{4}{5}\right)$

$M\left(\frac{2}{3};1\right)$ y $N\left(\frac{1}{3};-\frac{4}{5}\right)$: $x_1=\frac{2}{3}$; $y_1=1$; $x_2=\frac{1}{3}$; $y_2=-\frac{4}{5}$

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

$$m=\frac{-\frac{4}{5}-1}{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}.$$

$$m = \frac{\frac{-4-5}{5}}{-\frac{1}{3}} = \frac{-\frac{9}{5}}{-\frac{1}{3}} = -\frac{9}{5}\cdot(-3) = \frac{27}{5}$$

Luego el valor de la pendiente de la recta es $m = \frac{27}{5}$.

Observa que al representar en el sistema de coordenadas la recta que pasa por los puntos *M* y *N*, esta se inclina hacia arriba de izquierda a derecha (fig. 3.94).

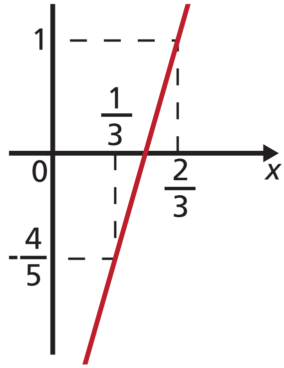


Fig. 3.94

d) *P*(4 ; 3) y *Q*(– 7 ; 3): $x_1 = 4$; $y_1 = 3$; $x_2 = -7$; $y_2 = 3$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

$$m = \frac{3-3}{-7-4}.$$

$$m = \frac{0}{-11} = 0$$

Luego el valor de la pendiente de la recta es $m = 0$, esto significa que la recta es *paralela* al eje "*x*", o sea, *no está inclinada* a dicho eje, como muestra la representación gráfica de la figura 3.95.

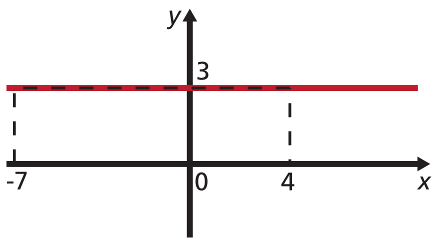


Fig. 3.95

e) *H*(1;2) y *G*(1; – 3) : $x_1 = 1$; $y_1 = 2$; $x_2 = 1$; $y_2 = -3$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{-3-2}{1-1}$$

$$m = \frac{-5}{0}$$

Luego la fracción se indefine, esto significa que no existe pendiente y la recta que pasa por esos dos puntos no está inclinada respecto al eje "*x*", sino que es *perpendicular* al eje "*x*", como se muestra en la figura 3.96.

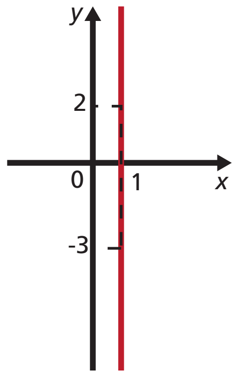


Fig. 3.96

Las pendientes pueden tener valores positivos, negativos o cero. Este resultado tiene relación directa con la inclinación de la recta al representarla en un sistema de coordenadas. Esta relación nos indica otra propiedad de las funciones lineales, la *monotonía*.

Si analizas la inclinación y el desplazamiento de la recta (en el gráfico) y el valor calculado de la pendiente de la recta en los casos anteriores del ejemplo dos:

- En el inciso *a*: la recta se inclina hacia arriba de izquierda a derecha y el valor de la pendiente es cuatro, un valor positivo.
- En el inciso *b*: la recta se inclina hacia abajo de derecha a izquierda y el valor de la pendiente es – 6, un valor negativo.
- En el inciso *c*: la recta se inclina hacia arriba de izquierda a derecha y el valor de la pendiente es $\frac{27}{5}$, un valor positivo.
- En el inciso *d*: la recta no se inclina respecto al eje "*x*", es *paralela* a este eje y el valor de la pendiente es cero, un valor no negativo.
- En el inciso e, la recta no se inclina respecto al eje "*x*", es *perpendicular* a este eje y el valor de la pendiente no existe. En este caso *no* es una función, porque a un mismo valor de *x*, corresponden infinitos valores de *y*.

La regularidad del análisis anterior permite concluir que:

En los incisos *a* y *c*, a medida que aumentan los valores de *x*, también aumentan los valores de *y*; la función crece.

En el inciso *b*, a medida que aumentan los valores de *x*, disminuyen los valores de *y*; la función decrece.

En el inciso *d*, a medida que aumentan los valores de *x*, *no varían* los valores de *y*; la función es *constante*

Si la pendiente de la ecuación de una función lineal es:
Mayor que cero ($m > 0$), la función lineal es *monótona creciente*.
Menor que cero ($m < 0$), la función lineal es *monótona decreciente*.
Igual a cero ($m = 0$), la función lineal es *constante*.

Ejemplo 3:

Sean las funciones lineales siguientes: $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = 6 - x$ y $h(x) = 8{,}3$ Determina el valor de la pendiente y analiza la monotonía de cada función lineal.

Solución:

La pendiente de $f(x)$ es $m = 2$ y como la pendiente es mayor que cero ($2 > 0$), la función f es monótona creciente.

La pendiente de $g(x)$ es $m = -1$ y como la pendiente es menor que cero ($-1 < 0$), la función g es monótona decreciente.

La pendiente de $h(x)$ es $m = 0$ y como la pendiente es igual a cero), la función h es constante.

Ejemplo 4:

Los puntos (1,5; – 2) y (3,5; – 3) pertenecen a la gráfica de la función lineal *p.* Determina la pendiente y la monotonía de la función lineal *p(x).*

Solución:

a) Si dos puntos pertenecen a la función lineal *p*, entonces se aplica la ecuación:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3-(-2)}{3{,}5-1{,}5} = \frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2}$$

La pendiente es negativa, l uego la función *p* es *monótona decreciente*.

Reflexiona un instante

Si conoces dos puntos que pertenecen a la recta que representa la ecuación de una función lineal, ¿Puedes escribir su ecuación?

Ejemplo 5:

Escribe la ecuación de la función lineal *f* cuya representación gráfica pasa por los puntos dados:

a) $A(4;1)$ y $B(2;7)$ b) $M(2;-2)$ y $N\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right)$

Solución:

a) $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$y = 3x + n$

$1 = -3 \cdot (4) + n$

$$= \frac{7-1}{2-4}$$
$$= \frac{6}{-2} = -3$$
$$m = -3$$

$$1 = -12 + n$$
$$1 + 12 = n$$
$$n = 13$$

Respuesta: $f(x) = -3x + 13$.

b) $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$= \frac{-\frac{1}{3} - (-2)}{\frac{1}{2} - 2}$$
$$= \frac{-\frac{1}{3} + 2}{\frac{1}{2} - 2}$$
$$= \frac{\frac{-1+6}{3}}{\frac{1-4}{2}}$$
$$= \frac{\frac{5}{3}}{-\frac{3}{2}} = \frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$$
$$m = -\frac{10}{9}$$

$$y = -\frac{10}{9}x + n$$
$$-2 = -\frac{10}{9} \cdot 2 + n$$
$$1 = -\frac{20}{9} + n$$
$$1 + \frac{20}{9} = n$$
$$n = \frac{9+20}{9}$$
$$n = \frac{29}{9}$$

Respuesta: $f(x) = -\dfrac{10}{9}x + \dfrac{29}{9}$

Ejercicios

1. Escribe las ecuaciones siguientes de la forma $y = mx + n$.

a) $x + y - 1 = 0$ b) $y - 3x + 12 = 0$ c) $2x + 2y + 4 = 0$

d) $x - y = 8$ e) $6x - 2y = 0$ f) $x - y = 0$

1.1 Determina el valor de la pendiente.

2. Calcula la pendiente de las rectas que pasan por cada uno de los puntos siguientes y represéntalas gráficamente.

a) (2;2) y (4;6) b) (3; – 1) y (4;2) c) (– 2; – 3) y (– 1;5)

d) (3;0) y (– 1;6) e) (0;0) y (2,5;10) f) $\left(2;\frac{1}{3}\right)$ y $\left(1;\frac{4}{3}\right)$

g) $\left(\frac{1}{2};\frac{2}{5}\right)$ y $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{5}\right)$ h) (3,2; 0,6) y (5,2; – 0,4) i) (3;9) y (4;9)

3. Representa en el sistema de coordenadas rectangulares el triángulo *ABC* donde: *A*(– 2; –1); B$(3;2)$ y *C*(– 8;9). Halla las pendientes de las rectas que contienen los lados del triángulo *ABC*.

4. Determina cuáles de las funciones lineales siguientes definidas por sus ecuaciones son crecientes, decrecientes o constantes. Fundamenta tu respuesta.

a) $y = 2x$ b) $y = -2x + 8$ c) $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$

d) $g(x) = -0,1x - 2$ e) $y = \sqrt{2}x + \sqrt{3}$ f) $y = x$

g) $h(x) = 3 - 2x$ h) $y = 2$ i) $y = -12$

j) $y = \frac{2}{3} - \frac{1}{5}x$ k) $y = \frac{7}{6} + \frac{x}{3}$ l) $s(x) = \frac{2x - 4}{4}$

m) $y = \frac{3 - 2x}{3}$

5. ¿Por qué no existe la pendiente de las rectas determinadas por los puntos:

a) *A*(3 ;1) y *B*(3;4)? b) *M*(0;0) y *N*(0;5)?

6. En la figura 3.97 se muestra la representación gráfica de tres funciones lineales:

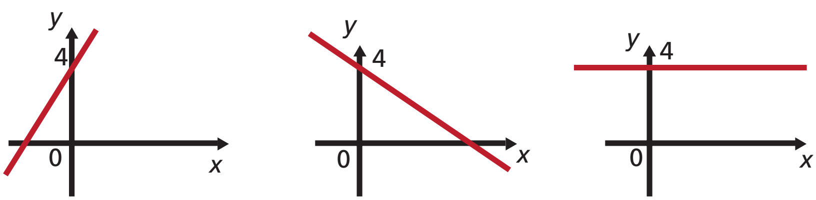


Fig. 3.97

6.1 ¿Cuál de las gráficas se corresponde con la función lineal de ecuación

$f(x) = -\frac{2}{3}x + 4$? Fundamenta tu selección.

6.2 Calcula el cero de la función lineal *f*.

6.3 Representa en el gráfico seleccionado una recta que tenga igual cero que la función lineal *f* y su pendiente sea negativa.

7. *A* medida que el aire seco se mueve hacia arriba, se expande y se enfría. La temperatura *T* (en grados Celsius) del aire a una altura *h* (en kilómetros) está dada aproximadamente por una ecuación que define una función lineal.

Selecciona cuál es el gráfico que le corresponde a la situación planteada, figura 3.98:

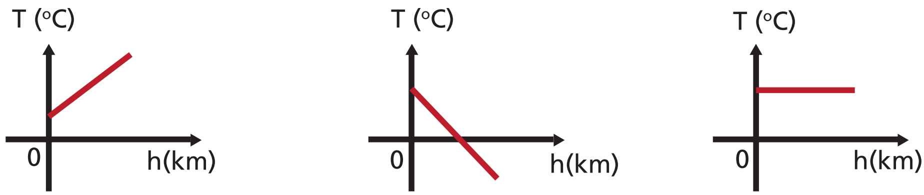


Fig. 3.98

8. La gráfica (figura 3.99muestra cómo varía la temperatura (T(°C)) de dos sustancias, *A* y *B*, a partir de las 10:30 a.m. (*t*(min))

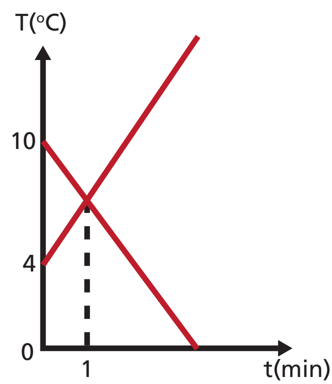


Fig. 3.99

a) Identifica cuál de las sustancias se calienta y cuál se enfría. Argumenta tu selección.

b) Si la ecuación que describe la variación de la temperatura, respecto al tiempo, de la sustancia *A* es $T(t) = 2t + n$, ¿a qué hora alcanzaron las sustancias la misma temperatura y de cuánto fue?

c) ¿*A* los cuántos minutos de haberse iniciado el proceso de medición de la temperatura, la sustancia *B* alcanzó los 0ºC?

9. Se comienzan a llenar dos recipientes vacíos *A* y *B* de igual altura y capacidad por llaves que vierten cantidades diferentes de litros de agua por minuto. La gráfica (fig. 3.100) muestra la altura, en decímetros, del agua en los recipientes durante varios minutos.

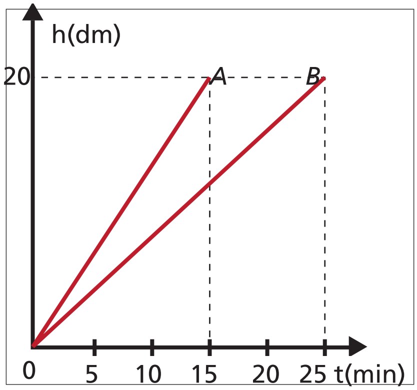


Fig. 3.100

a) Si el proceso de llenado de cada recipiente continúa, vertiendo cada llave la misma cantidad de agua por minuto que al inicio del proceso, ¿qué recipiente se llenará más rápido? Argumenta tu respuesta.

b) Escribe la ecuación que representa el proceso de llenado de cada recipiente.

c) ¿La correspondencia tiempoaltura es una proporcionalidad? En caso afirmativo identifica el tipo de proporcionalidad.

d) Si la altura de los recipientes es de 30 dm, ¿qué tiempo demorará en llenarse el recipiente A?

3.4.10 Funciones lineales definidas por tramos

Reflexiona un instante

Un excursionista realizó una caminata desde su campamento hasta un centro turístico situado a 18 km. Para orientarse contó con un perfil del trayecto (figura 3.101)

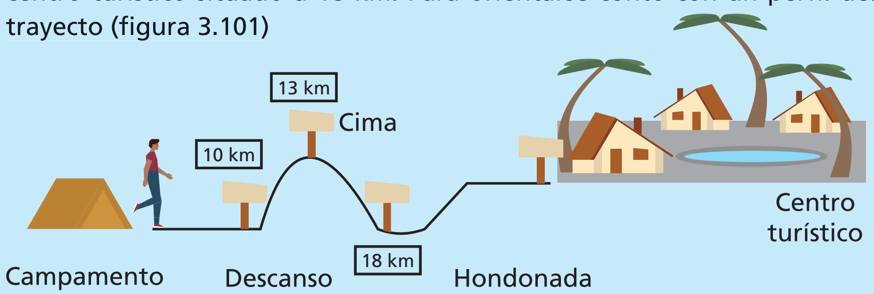


Fig. 3.101

La trayectoria del recorrido del excursionista se puede representar mediante un gráfico como el de la figura 3.102.

¿En qué se diferencia esta gráfica de las gráficas que representan una función lineal?

¿Sabías que...?

Existen fenómenos de la naturaleza cuyo comportamiento no es estable, o sea, varía cada cierto tiempo. Es por esto que para representar dicho comportamiento es necesario trazar varios tramos en un mismo sistema de coordenadas.

Aplica tus conocimientos

Analiza la gráfica de la figura 3.102 y responde:

- ¿Cuántos kilómetros caminó el excursionista hasta llegar al primer descanso?
- ¿Cuánto tiempo duró el primer descanso?
- ¿Qué tiempo demoró en llegar a la cima después de continuar la marcha?
- ¿Cuántos kilómetros separan la hondonada del centro turístico?
- Si salió del campamento a las 7:00 a.m., ¿a qué hora llegó al centro turístico?

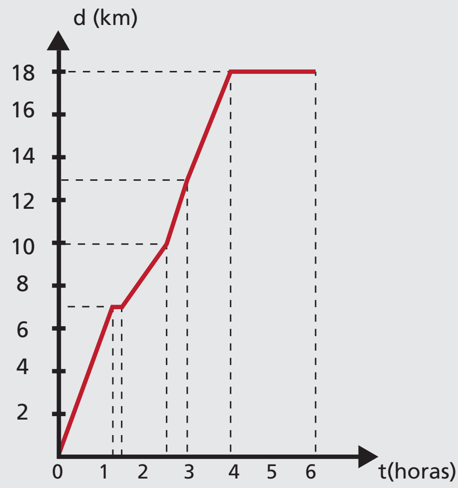


Fig. 3.102

Ejemplo 1:

La gráfica (figura 3.103) muestra la variación de la temperatura de una sustancia durante cierto tiempo por un proceso de enfriamiento, que comenzó a las 8:45 a.m.

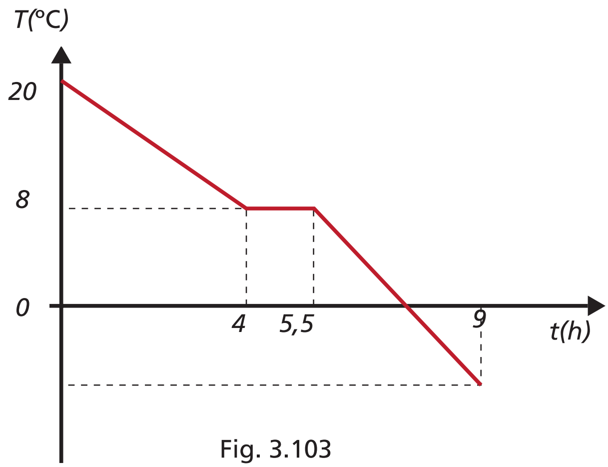


Fig. 3.103

1.1. Completa los espacios en blanco:

a) El valor inicial de la temperatura de la sustancia fue de __________.

b) Durante ______________ el valor de la temperatura de la sustancia no varió.

c) La sustancia alcanzó su temperatura mínima a las _____ horas de iniciado el proceso.

d) *A* la 1:00 p.m. la temperatura de la sustancia era de _________.

1.2. Marca con una *X* la respuesta correcta:

a) La ecuación de la función lineal que describe el proceso de enfriamiento de la sustancia durante las primeras cuatro horas es:

__ $T = -20t + 8$ __ $T = 3t + 20$

__ $T = -3t + 20$ __ $T = -8t + 20$

b) Durante las primeras cuatro horas la temperatura de la sustancia varió:

___ 200*C*   ___ 80*C*

___ 120*C*   ___ No se puede determinar

c) Después de las cinco horas y media la temperatura estuvo descendiendo durante:

___ 9 horas   ___ 4 horas

___ 210 minutos   ___ 4 horas y 30 minutos

1.3. Si la ecuación que describe la variación de la temperatura a partir de las cinco horas y media es $T = -4t + n$, ¿a qué hora la sustancia alcanzó los cero grados centígrados?

1.4. ¿Cuál fue la temperatura mínima alcanzada por la sustancia?

Solución:

1.1. a) 20 ^{0}C. (La gráfica inicia en el valor 20 en el eje "*y*").

b) Una hora y media.

La temperatura es constante (8^{0}C) en el tramo que es paralelo al eje "*x*", o sea de cuatro a 5,5 horas.

c) nueve horas.

La temperatura mínima corresponde con el menor valor que alcanza la gráfica en el eje de las ordenadas.

d) 8^{0}C.

El proceso de medición de la temperatura se inició a las 8:45 a.m., por lo que a la 1:00 p.m. habían transcurrido cuatro horas y 15 minutos. Este valor se encuentra entre las cuatro y las 5,5 horas, donde la temperatura se mantuvo constante en los 8°C.

1.2. a) $T = -3t + 20$

Para seleccionar la ecuación debe identificarse en el gráfico, en el primer tramo, el valor de n ($n = 20$) y analizar el comportamiento de la inclinación de la recta con relación al valor de la pendiente (la recta se inclina hacia debajo de izquierda a derecha por tanto la pendiente es negativa), como existen dos ecuaciones que cumplen estas condiciones, debe verificarse a cuál de las ecuaciones pertenece el punto (4;8).

También se puede escribir la ecuación del primer tramo dados dos puntos que pertenecen a esta, o identificar el valor de n y sustituir en la ecuación el otro punto para calcular m.

b) 12^{0}C.

Al iniciar la medición la temperatura era de 20^0C y a las cuatro horas alcanzaba los 8^{0}C, por lo que la diferencia es igual a 12^{0}C.

c) 210 minutos.

A partir de las cinco horas y media la temperatura estuvo descendiendo hasta las nueve horas. Por lo que descendió tres horas y media (210 minutos).

1.3 La temperatura alcanza los 0°*C* cuando la gráfica corta al eje "*x*", o sea, entre las cinco horas y media y las nueve horas; es necesario hallar el cero de la función.

Primero: Completar la ecuación de la función lineal.

$T = -4t + n$, sustituyendo un punto que pertenezca a esta (5,5;8)

$8 = -4 \cdot 5{,}5 + n$

$8 = -22 + n$.

$8 + 22 = n.$

$n = 30.$

$T = -4t + 30.$

Segundo: Calcular el cero de la función lineal

$0 = -4t + 30$

$4t = 30$

$t = \frac{30}{4}$

$t = 7,5$

Siete horas y media

Como la pregunta se refiere a la hora en que la temperatura fue de 0°C, entonces se le adiciona a la hora inicial siete horas y media.

Dado que el proceso de enfriamiento de la sustancia comenzó a las 8:45 a.m. la temperatura de 0°C se alcanzó a las 4:15 p.m.

Respuesta: La sustancia alcanzó los 0oC a las 4:15 p.m.

1.4. La ecuación de ese tramo se obtuvo en el inciso anterior $T = -4t + 30$, basta con identificar el valor del tiempo que se corresponde con la temperatura mínima para sustituirlo en la ecuación y hallar el valor mínimo de la temperatura

$T = -4t + 30$

$T = -4 \cdot 9 + 30$

$T = -36 + 30$

$T = -6$

Respuesta: La temperatura mínima alcanzada por la sustancia fue de –6°C.

Ejercicios

1. A las 9:00 a.m. se abre la llave y comienza el proceso de vaciado, el cual se detiene cuatro minutos después para hacer algunos reajustes y luego se vuelve a abrir la llave. En el gráfico de la figura 3.104 se muestra el proceso de vaciado del tanque.

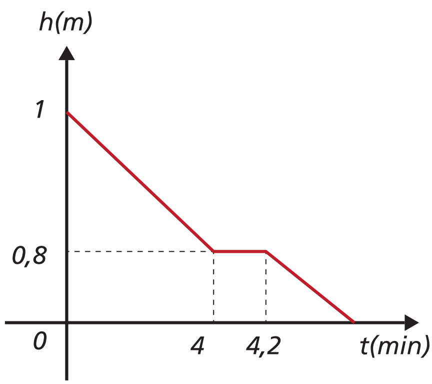


Fig. 3.104

a) ¿*A* los cuántos minutos de haber comenzado el proceso de vaciado el nivel del agua en el tanque era de 0,9 m?
b) ¿Cuál era el nivel del agua en el tanque a las 9:03 a.m.?
c) ¿Qué tiempo estuvo cerrada la llave para los reajustes?
d) Si después de abrirse de nuevo la llave el nivel del agua varía según la ecuación $h = mt + 1,5$, ¿a qué hora se vació completamente?

2. La gráfica (fig. 3.105) muestra cómo varía la temperatura de una muestra de agua durante varias horas desde las 2:00 p.m. al exponerse a diferentes procesos.

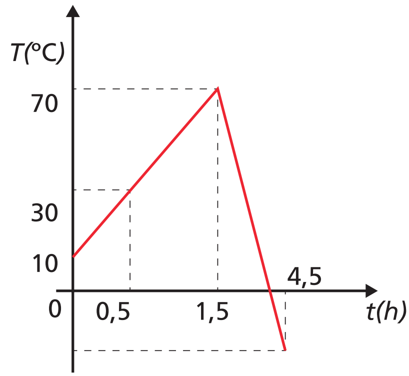


Fig. 3.105

2.1. ¿Al iniciarse el proceso de la muestra se calienta o se enfría? Argumenta tu respuesta.

2.2. Marca con una *X* la respuesta correcta:

a) La temperatura inicial de la muestra fue de:
___ 70°*C* ___ 30°*C* ___ 10°*C*

b) La sustancia alcanzó los 30 °*C* a las:
___ 2:05 p.m. ___ 2:30 p.m.
___ 2:50 p.m. ___ 7:00 p.m.

c) La temperatura estuvo ascendiendo durante:
___ media hora ___ hora y media
___ 70 horas ___ una hora y 50 minutos

2.3 ¿A las cuántas horas de iniciado el proceso, la sustancia alcanzó la temperatura máxima y de cuánto fue?

2.4 Si la sustancia alcanza los 0 °*C* de temperatura a las 4:00 p.m, ¿cuál fue la temperatura mínima alcanzada?

3. Un abuelo salió de su casa a las 7:00 a.m. y caminó para comprar el periódico hasta el quiosco, allí hizo la cola, compró el periódico y después caminó hasta el parque para hacer ejercicios con los demás abuelos de su círculo. Al terminar regresó a su casa. El gráfico muestra un aproximado del recorrido realizado por este abuelo (figura 3.106).

3.1. Completa los espacios en blanco:

a) El quiosco se encuentra a ___ metros de la casa del abuelo.

b) El abuelo realizó ejercicios durante ___ hora.

c) El parque se encuentra a ___ del quiosco.

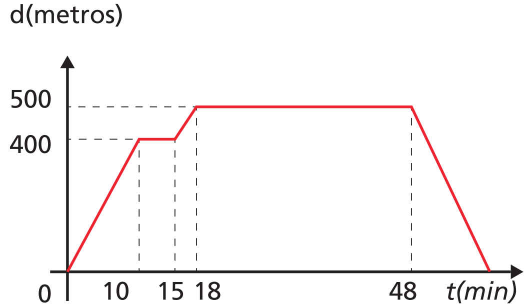


Fig. 3.106

3.2. Marca con una X la respuesta correcta.

a) La ecuación que describe el recorrido del abuelo de su casa al quiosco es:

___ $d = 10t + 400$ ___ $d = 4t$

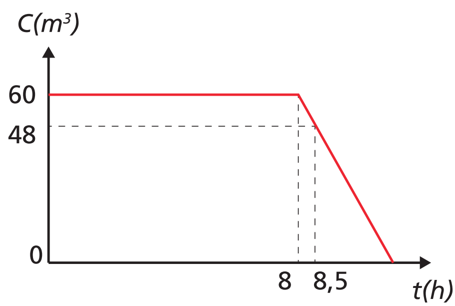
___ $d = 40t$ ___ $d = 4t + 400$

b) Durante el trayecto, desde que salió de su casa hasta que regresó a esta, el abuelo caminó:

___ 400 m ___ 1 km ___ 1 400 m ___ 900 m

3.3. Si la ecuación que describe el regreso a la casa del abuelo es $d(t) = -\frac{125}{3}t + n$ ¿a qué hora regresó el abuelo a su casa?

4. En el complejo de piscinas "Baragua" del municipio La Habana del Este, se efectuaron las competencias de natación de los Juegos Nacionales Escolares, estas comenzaron a las 8:00 a.m. Al finalizar la competencia se colocaron unas bombas de agua para vaciarla y limpiarla. La gráfica (figura 3.107) muestra la cantidad de agua que contiene la piscina que se utilizó en la competencia durante el tiempo que duró hasta vaciarse completamente.



t: tiempo transcurrido en horas.
C: cantidad de metros cúbicos de agua que hay en la piscina.

Fig. 3.107

4.1. Completa los espacios en blanco:

a) La piscina tiene una capacidad de _____ m^3.

b) La piscina se mantuvo llena durante _____ minutos.

c) *A* las 4:30 p.m. la piscina tenía ____ m^3 de agua.

4.2. Marca con una *X* la respuesta correcta:

a) La ecuación que describe el proceso de vaciado de la piscina es:

__ $C = 24t + 60$ ___ $C = -24t + 60$

__ $C = -24t + 252$ ___ $C = 8t + 60$

b) La piscina comenzó a vaciarse a las:

___ 8:00 p.m. ___ 8:08 a.m.

___ 4:00 p.m. ___ 6:00 p.m.

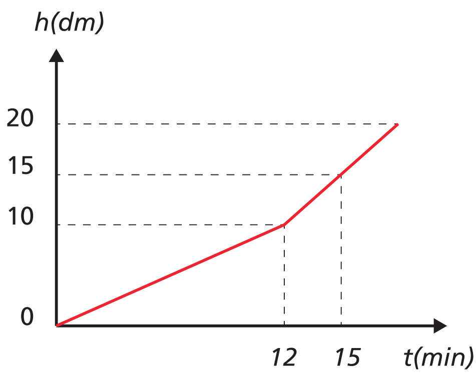
4.3. ¿*A* qué hora se vació completamente la piscina?

5. La gráfica (figura 3.108) muestra el proceso de llenado de un depósito de agua durante cierto tiempo por una bomba de un motor eléctrico.

a) Escribe la ecuación que describe el proceso de llenado del tanque durante los primeros 12 minutos.

b) Calcula la altura que había alcanzado el agua a los tres minutos de iniciado el proceso.

c) Si la altura máxima que alcanzó el agua en el tanque fue de 20 dm, ¿qué tiempo demoró en llenarse totalmente?



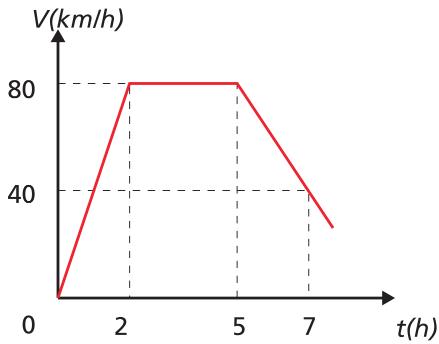
h: altura que alcanza el agua del depósito, en decímetros.
t: tiempo transcurrido en minutos.

Fig. 3.108

d) ¿En qué tramo era mayor la presión del agua? Justifica esta situación mediante cálculos.

6. La velocidad con que se desplaza un auto en un tramo recto de una autopista durante las primeras horas de su recorrido aparece representado en la figura 3.109.

6.1. Selecciona la respuesta correcta.



V: (velocidad en kilómetros por hora)

t: (tiempo en horas)

Fig. 3.109

a) La ecuación que describe la variación de la velocidad del auto durante las dos primeras horas es:

___ $V = 2t$ ___ $V = 40t$ ___ $V = \frac{1}{40}t$ ___ $V = 2t + 80$

b) La velocidad del auto aumentó durante:

___ dos minutos ____ 80 horas ____ 120 minutos

6.2 ¿Cómo se comportó la velocidad del auto entre las dos horas y cinco horas? Escribe la ecuación que describe la trayectoria en este tramo.

6.3 ¿Cuál era la velocidad del auto a la hora y media de haber iniciado el recorrido?

6.4. ¿Cuántas horas duró el desplazamiento del auto desde que se inició el recorrido, si la velocidad después de la cinco primeras horas se mantiene igual hasta detenerse?

7. En el sistema de coordenadas, los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ilustran los kilómetros recorridos por un ómnibus durante las seis primeras horas de su viaje a la provincia de Holguín. (fig. 3.110)

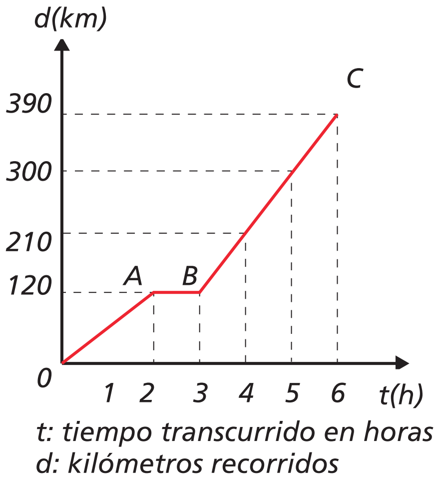


Fig. 3.110

7.1. ¿Cuántas horas estuvo detenido el ómnibus?

7.2. Selecciona la respuesta correcta.

a) En el recorrido de los últimos 180 kilómetros el ómnibus demoró:

___ 3 horas   ___ 1,5 horas   ___ 2 horas   ___ 2,5 horas

b) Si después de transcurrir las seis primeras horas, el desplazamiento del ómnibus se describe por la función lineal de ecuación $d = 50\,t + 90$; entonces había recorrido 540 km. al cabo de:

___ 6,5 horas   ___ 8 horas   ___ 9 horas   ___ 10 horas

7.3. Escribe la ecuación de la función lineal que describe el desplazamiento del ómnibus representado por el segmento $\overline{BC}$.

8. La tabla 3.36 muestra la temperatura en distintas horas de un día determinado.

Tabla 3.36

Hora	6:00 a.m.	9:00 a.m.	Medio día	3:00 p.m.	6:00 p.m.
Temperatura	12°C	17 °C	14 °C	18 °C	15 °C

Identifica el gráfico de la figura 3.111 que muestra la información de la tabla 3.36.

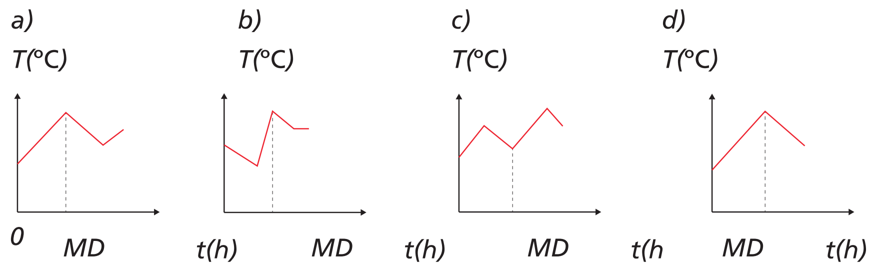


Fig. 3.111

9. Un ómnibus escolar transportó los estudiantes de una secundaria básica hasta un lugar de interés histórico-cultural. El ómnibus inició el recorrido a la hora prevista y después de transcurrido cierto tiempo alcanzó la velocidad máxima que mantiene hasta que inició el proceso de detención.

De las gráficas de la figura 3.112, ¿cuál es la que representa la situación anteriormente descrita?

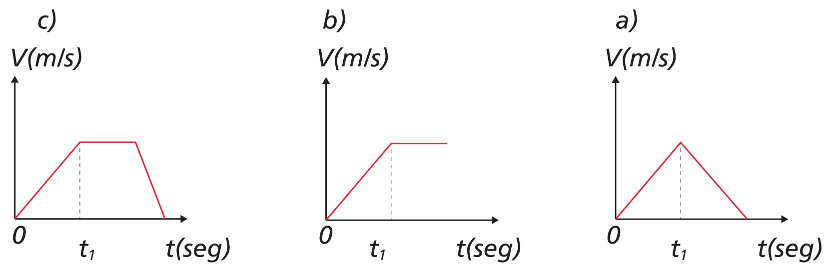


Fig. 3.112

10. Al medir la temperatura de 5,0 kg de cobre en estado líquido, se observa que disminuye durante cierto período de tiempo. Después, se aprecia que permanece constante y finalmente en un tercer momento, se observa que la temperatura vuelve a descender. ¿En cuál de los gráficos siguientes se refleja esa situación, si en el eje de las abscisas se ha indicado el tiempo *t* transcurrido (en minutos) y en el eje de las ordenadas, la temperatura *T* (en grados Celsius)? (fig. 3.113)

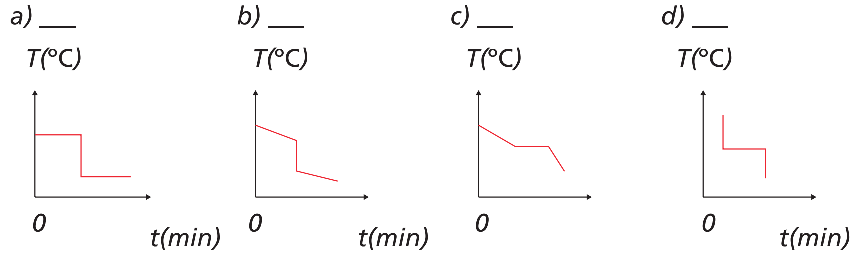


Fig. 3.113

11. Eduardo pasará sus vacaciones en una casa de la playa, situada a 400 km de su vivienda; el traslado lo hace en auto. Cuando había trascurrido hora y media y le faltaba la mitad de la distancia por recorrer realiza la primera parada de 30 minutos para merendar. Continúa su viaje sin problemas durante una hora, pero a 100 km del final hace una parada de 15 minutos. En total tarda cuatro horas en llegar a su destino.

a) Representa la situación descrita en una gráfica de la distancia recorrida en función del tiempo.

b) Escribe la ecuación que representa la distancia recorrida por Eduardo durante la primera hora y media.

c) ¿Qué tiempo, en total, estuvo detenido Eduardo durante el recorrido realizado hasta la casa de la playa?

d) Si Eduardo salió de su casa a las 8:00 a.m., ¿a qué hora llegó a su destino?

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO

1. Determina el valor numérico de las expresiones algebraicas siguientes:

a) $0{,}5m^3n^2 - m^2n + 1{,}75m - 3{,}25$ para $m = 0{,}5$ y $n = -1$

b) $2a^2b^4 + ab^2 - ab$ para $a = -2$ y $b = -3$

2. Simplifica las sumas algebraicas siguientes:

a) $3b^2 + bc^2 + 2(7b^2 - 4c^2)$

b) $3q - p - (2 - 8q)$

c) $5m - n^2 - (2m + 3 - 4n^2)$

d) $2cd + d^2 - (4cd - 7d^2)$

e) $2 - 8x^2 + (3x - 4)(x + 2)$

f) $(2m - 5)(m^2 + 4m - 1) + 7m$

g) $7a^2 + 2ab - 3(4a^2 + ab + 1) + 5a^3$

h) $(x^2 + 2x - 15):(x - 3)$

i) $(4a^2 + b)(a^2 - 3b)$

j) $(2m^3 + 3m^2 - 6):(m + 2) + m^2 - 4m$

k) $3x^2 - 7 + (3x - 4)(x + 2) + 5x$

3. Elimina los signos de agrupación y reduce las expresiones algebraicas siguientes:

a) $7a^2 - [-3ab - (2a^2 - ab) + 4]$

b) $3p^2q - \{5pq + [-2p^2q - (pq - 3) + p^2q]\}$

c) $4x^2 - [2xy + 3x(x - 5y) - x^2]$

d) $5q^2 + 3[2q^2 - (3p + q)(p - 4q)]$

4. Calcula:

a) $(2m + n)(m - 3n) - 3(m^2 - 5n^2)$

b) $(8b^2 - 10b + 3):(2b - 1) + (-3b + 4)$

c) $\dfrac{3x(4x-3)-(4x^2-3x+5)}{2x+1}$

5. Prueba que se cumplen las igualdades siguientes:

a) $7a^2 - [2ab + (6a^2 - 3ab)] = a^2 + ab$

b) $\dfrac{3m^2-13mn-10n^2}{m-5n} - 3(m+n) = -n$

6. Sean:

$A = 3c^2 + 2d^2 \quad B = 2c - 1 \quad C = c + 4d \quad D = 8c^2 + 7cd$

6.1 Calcula:

a) $2A + B \cdot C$

b) $A : B - C$

c) $(A \cdot B):C$

d) $B \cdot C - D$

e) $C^2 - A + D$

6.2 Halla el valor numérico de la expresión $\dfrac{D}{2C}$ para $c = \dfrac{1}{4}$ y d = – 2

7. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $4x - (x - 3) + 2x(x - 5) = 13 + 2x(x - 1)$

b) $4a + a(a + 2) = 4(5 - a) - a^2$

c) $7(1{,}4x - 2) - 8 = 3x - (-4{,}8x + 6)$

d) $(2x + 3)(x - 4) = 2x^2 + x$

e) $x(x - 6) + 1 = (x + 5)(x - 3)$

8. Completa el crucigrama de la figura 3.114

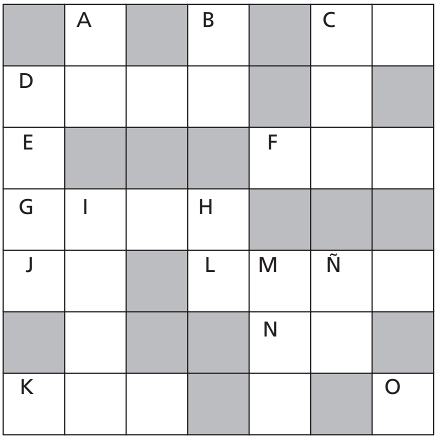


Fig. 3.114

Verticales

A. $3x + 2 = 32$

B. $5(x - 2) - 20 = 6(x + 10) - 2(x + 5)$

C. $2(x + 4) = 4(110 - 2x)$

E. $3x(x - 3) - 9 = x + (x - 1)(3x - 8) + 10$

H. $9x + 9 = 900$

I. $\frac{1}{4}(x-8)+2x(x-1)=(2x+5)(x+20)-30(x-5)-17x$

M. $\frac{x}{2}-11=x-233$

Ñ. $(x - 2)(x - 3) + 6x + 5 = (x + 3)^2 - 4(x + 20) - 3$

Horizontales

C. $7x - 4 = 171$

D. $8(x - 7) - 4 = 7(x + 135)$

F. $\frac{1}{2}x+2(x+4)-10x=8(11-x)$

G. $8(x - 5) - 3x = 35\,705$

J. $4(x - 18) = 3x + 8$

K. $(x + 10)(x + 4) + 5(10x - 25) = (x + 25)^2 + 1866$

L. $9x - 77 - (8x + 11) = 5$

N. $(x + 7)(x - 5) - x(x - 1) - 7 = 9x - 7(x + 1)$

O. $5x - 4x + 3x + 8 = 8$

Ñ. $8x-\frac{2}{3}(x-9)=7(x+5)$

9. La matrícula de los estudiantes de primer año de una escuela pedagógica en las diferentes especialidades de ciencias para profesor de secundaria básica es de 360. En la especialidad de Matemática hay 30 estudiantes más que la cantidad de estudiantes de la especialidad de Física y en la especialidad de Biología hay tantos estudiantes como en las dos otras especialidades juntas. ¿Cuántos estudiantes se forman en cada especialidad de ciencias en el primer año?

10. Una cooperativa de producción agropecuaria dedica cierta cantidad de hectáreas de tierra al cultivo de yuca, boniato y cítricos. La sexta parte de la cantidad de hectáreas está sembrada de yuca, el 40 % de boniato y las restantes 65 hectáreas de cítricos. ¿Cuántas hectáreas de yuca y boniato están sembradas en esta cooperativa de producción agropecuaria?

11. En la campaña de frío en un organopónico se sembró tomate, cebollinos y lechuga. En el mes de febrero la mitad del total de quintales cosechado fue de tomate, trece quintales fueron de lechuga y se cosecharon ocho quintales más de cebollinos que la quinta parte del total de quintales cosechados. ¿Cuántos quintales de yuca y cebollino se cosecharon?

12. El perímetro de un triángulo isósceles es de 48 cm, la longitud de sus lados iguales es dos veces y media la longitud del lado base. ¿Cuál es la longitud de los lados del triángulo?

13. La amplitud de uno de los ángulos adyacentes, es el duplo de la amplitud del otro. ¿Cuál es la amplitud de cada uno de esos ángulos adyacentes?

14. Las longitudes de los tres lados de un triángulo son números consecutivos. Si el perímetro del triángulo es 72 mm, ¿cuáles son las longitudes de sus lados?

15. Calcula el área de un rectángulo sabiendo que la longitud el ancho es el 60 % de la longitud de largo y su perímetro es 64 cm.

16. En un torneo de fútbol suramericano se anotaron 48 goles en total, de estos 16 anotó el equipo de Argentina, 12 el de Brasil y cuatro el de Colombia. Halla la razón entre:

a) El número de goles anotados por Argentina y el total de goles anotados en el torneo.

b) El número de goles anotados por Brasil y el total de goles anotados en el torneo.
c) El número de goles anotados por Colombia y el total de goles anotados en el torneo.
d) El número de goles anotados por Argentina y el número de goles anotados por Brasil.
d) El número de goles anotados por Brasil y el número de goles anotados por Colombia.

17. La razón entre las hectáreas sembradas de col y lechuga en un organopónico es dos: Si hay sembradas 30 hectáreas de col,
a) ¿cuántas hectáreas hay sembradas de lechuga?
b) ¿cuántas hectáreas hay sembradas en total?

18. Se realizó una encuesta a 840 personas para conocer quién es el mejor jugador del mundo actualmente entre el argentino Lionel Messi y el portugués Cristiano Ronaldo. Dos de cada tres encuestados votó por el astro argentino.
¿Cuántos votos obtuvo cada jugador?

19. Sea el conjunto $M = \{1; 3; 7; 9; 12; 2; 24; 60\}$
Forma subconjuntos de M cuyos elementos estén en la razón:
a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{1}{4}$ d) 7

20. Las tablas 3.37 a 3.39 muestran proporcionalidades directas o inversas. Identifica qué tabla corresponde a cada una, halla el factor de proporcionalidad y completa la tabla.

Tabla 3.37

Masa de aluminio	2,7	5,4			13,5
Volumen del aluminio	1	2	3		

Tabla 3.38

Cantidad de obreros		14	9		6
Tiempo (en día)	1	18			42

Tabla 3.39

Cantidad de piezas producidas	120					300	510
Tiempo (en hora)	2		2,5			5	

21. En la CPA de Holguín "Guillermón Moncada" se alcanzó en el año 2012 un rendimiento aproximado de 7,1 toneladas por hectárea en el cultivo del arroz. Si la CPA cuenta actualmente con 26 hectáreas sembradas de arroz.

a) ¿Cuántas toneladas de arroz se podrán cultivar de mantener igual rendimiento?

b) ¿Cuántas hectáreas se necesitan sembrar para obtener 248,5 toneladas de arroz?

22. Un ganadero tiene pienso suficiente para alimentar 220 terneras durante 45 días. ¿Cuántos días podrá alimentar con igual cantidad de pienso a 450 terneras?

23. Si cuatro estudiantes pueden escribir en la computadora un trabajo en ocho días, ¿ cuántos estudiantes más se necesitarían para escribir el trabajo en el 25% de este tiempo, si se trabaja a igual ritmo?

24. Luis y Ariel observan la longitud de su sombra sobre la arena. Luis tiene 1,80 metros de estatura y comprueba que su sombra es de 0,60 metros. ¿Cuál es la estatura de Ariel, si su sombra tenía, en ese momento 0,55 metros?

25. Representa gráficamente las figuras siguientes:

a) Un segmento cuyos extremos son $A(3; -1)$ y $B(0; 6)$.

b) La recta $\overline{MN}$ que pasa por los puntos $C(-2; -2)$ y $D(4;3)$.

c) El triángulo de vértices $M(-4;0)$; $N(6;0)$ y $P(1;5)$.

26. Dados los puntos $A(3;5)$; $B(-4;2)$; $C(1; -1)$; $D(-2; -$ y $E(0;0)$.

a) Determina las coordenadas de los puntos simétricos a los dados respecto al eje "x".

b) Determina las coordenadas de los puntos simétricos a los dados respecto al eje "y".

c) Determina las coordenadas de los puntos simétricos a los dados respecto al origen de coordenadas.

27. Identifica cuáles de las correspondencias siguientes son funciones. Fundamenta tu respuesta.

a) La correspondencia de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que a cada número real asocia su cuádruplo.
b) La correspondencia de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ que a cada número racional asocia su raíz cúbica.
c) La correspondencia de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ que a cada número natural asocia su antecesor.
d) La correspondencia de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ que a cada número entero asocia su sucesor.
e) La correspondencia de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que a cada número real se le asocia el cuadrado de -2.
f) La correspondencia de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ que a cada número entero le asocia su mitad.
g) La correspondencia de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ que a cada número real $x \to \sqrt{x}$.
h) La correspondencia de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ que a cada número natural $x \to |x|$.

28. Analiza si las correspondencias de las figuras 3.115 son funciones o no. Fundamenta tu respuesta en cada caso.

29. Determina cuáles de las correspondencias, dadas en las tablas siguientes, son funciones y cuáles no. Fundamenta tu respuesta.

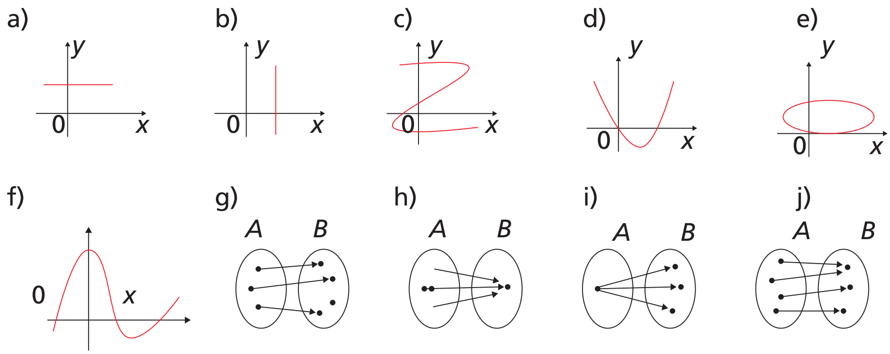


Fig. 3.115

29.1. Escribe el dominio y la imagen en las correspondencias que consideraste como funciones.

Tabla 3.40

x	1	1,5	2	1,5	2
y	2	3	4	5	6

Tabla 3.41

a	–2	–1	0	1	2
b	8	8	8	8	8

Tabla 3.42

a	0	0,3	1,2	1,7	2
b	0	2	0	2	0

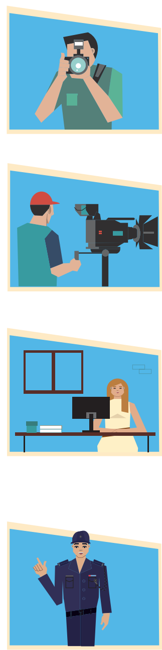
30. Sean los conjuntos F ={Messi; Cristiano, Pirlo, Neymar; Ramos; Podolski} y P = {España; Cuba; Argentina; Brasil; Portugal; Alemania; Italia; Inglaterra; Uruguay}.
Investiga si la correspondencia que a cada futbolista se le asocia su país de origen, es una función.

31. Analiza si las correspondencias siguientes son funciones. Fundamenta tu respuesta.

a) *A* cada imagen se le asocia su profesión (fig. 3.116).

b) La correspondencia que a cada obra literaria del conjunto *O*, se le asocia su género en el conjunto *G*. *O* = {"Oda a las casas"; "La Sierra"; "Santa Juana de América"} y *G* = {Dramático; Lírico; Épico}

c) La correspondencia que a cada país del conjunto *P*, se le asocia su capital en el conjunto *C*. *P* ={Cuba; Venezuela; Bolivia; Ecuador, Rusia; Japón; España} y *C* = {Tokio; La Paz; La Habana; Moscú; Caracas; Lima; Beijing; Buenos Aires}



photographer

teacher

cameraman

sportsman

secretary

actress

policeman

Fig. 3.116

32. Sea la función f definida en el conjunto de los números reales por la ecuación $f(x) = 3x - 5$.

a) Represéntala en un sistema de coordenadas rectangulares.

b) Analiza su monotonía. Argumenta tu respuesta.

c) Verifica si el punto $M\left(-\frac{1}{3}; -6\right)$ pertenece a la función f.

d) Calcula: $2f(-1) + \sqrt[3]{64}$.

e) Determina el área del triángulo limitado por la recta que representa la función lineal y los ejes de coordenadas.

f) Halla el valor de "a" si $f(2a) = f(a - 1)$

33. Sea la función g definida por la ecuación $g(x) = mx - 2$ y $A(2; -1)$ un punto de su representación gráfica.

a) Determina el valor de la pendiente de la recta.

b) Representa gráficamente la función g.

c) Calcula su cero.

d) Analiza su monotonía. Fundamenta tu respuesta.

e) Prueba que: $\dfrac{g(-4) + 4g(1)}{10} = -7$

f) Halla la abscisa del punto de la gráfica de g cuya ordenada es -3.

34. Determina la ecuación de una función lineal h cuya gráfica pasa por los puntos $P(2;3)$ y $R(-2;1)$.

a) Traza en un sistema de coordenadas el segmento $\overline{PR}$.

b) Escribe las coordenadas de un punto que se encuentre sobre el segmento $\overline{PR}$

c) Traza desde los puntos P y R segmentos perpendiculares al eje "x" y calcula el área del cuadrilátero limitado por el segmento $\overline{PR}$, los dos segmentos trazados y el eje "x".

35. En la gráfica aparece representada una función lineal de ecuación $f(x) = mx + n$, figura 3.117.

35.1. Clasifica en verdadero (V) o falso (F) las proposiciones siguientes. Argumenta las que consideras falsas.

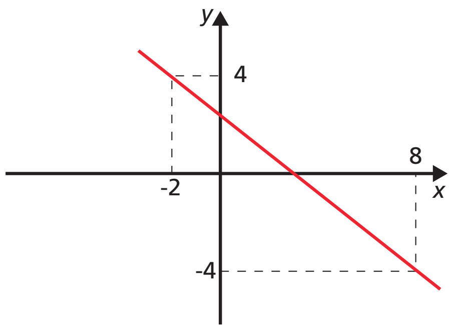


Fig. 3.117

a) ___ La función f es creciente.
b) ___ La ecuación de la función f es $f(x) = -\frac{4}{5}x + \frac{12}{5}$.
c) ___ El dominio de f es el conjunto de los números reales.
d) ___ El cero de la función f es (3;0).
e) ___ La intersección de la gráfica con el eje de las ordenadas es el punto de coordenadas (0;2,4).
f) ___ El par (–1; 3,2) pertenece a la representación gráfica de f.
g) ___ Al calcular f(-2,5) se obtiene un número fraccionario.

36. Una piscina de clavado llena de agua se comienza a vaciar a las 8:00 pm utilizando una bomba de agua. Al cabo de cierto tiempo se detiene el proceso de extracción por fallas de una bomba y se enciende la otra. La gráfica (fig. 3.118) muestra la variación de la altura del agua en la piscina.

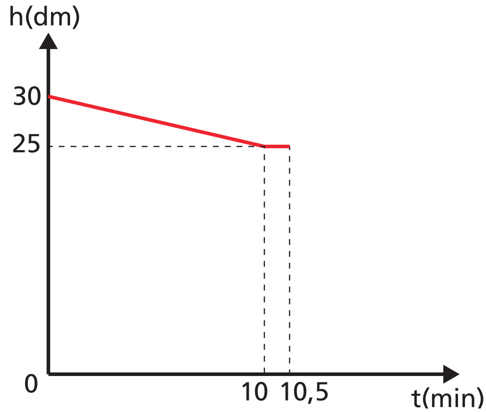


Fig. 3.118

36.1. Completa los espacios en blanco.
a) Al iniciarse el proceso de vaciado de la piscina, la altura del agua era de ______.
b) La bomba de agua se cambió a las _____ pm.
c) *A* las 8:10 pm el agua alcanzaba una altura de: _______.

36.2. Selecciona la respuesta correcta.
a) La ecuación que describe el proceso de vaciado durante los diez primeros minutos es:

___ $h = 0{,}5t + 30$ ___ $h = -0{,}5t + 25$
___ $h = -0{,}5t + 30$ ___ $h = -25t + 30$

b) La bomba de agua se cambió en:

___ 30 minutos ____ 30 segundos ___ 10,5 minutos ____ 5 minutos

36.3. ¿*A* qué altura se encontraba el agua de la piscina a los cuatro minutos de iniciado el proceso de vaciado?

36.4. ¿*A* los cuántos minutos de iniciado el proceso de vaciado la altura del agua alcanzó los 26 dm?

36.5. Si a partir de que empieza a funcionar la segunda bomba de agua, la altura del agua varió según la ecuación $h = -5t + 77{,}5$, ¿cuántos minutos en total demoró la piscina en vaciarse?

36.6. Representa en la misma gráfica el proceso de vaciado de la piscina después que empieza a funcionar la segunda bomba de agua.

36.7. ¿Cuál de las bombas de agua utilizadas tuvo mayor rendimiento? Argumenta tu respuesta.

37. En la gráfica (fig. 3.119) se ha representado la variación de la temperatura de dos sustancias *A* y *B*, a partir de las 9:00 am. La ecuación que describe el comportamiento de la variación de la temperatura *B* es $T = -\frac{5}{4}t + 20$.

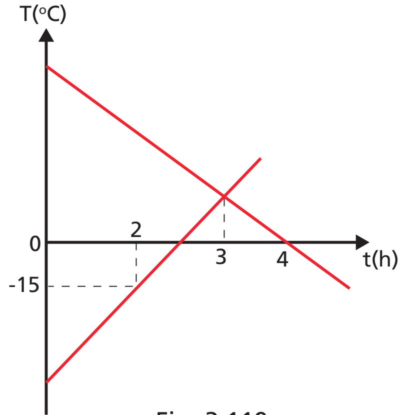


Fig. 3.119

a) Identifica cuál es la gráfica que representa la variación de temperatura de la sustancia *A*. Argumenta.

b) ¿Cuál era la temperatura inicial de cada sustancia?

c) ¿Cuál de las sustancias es la que su temperatura disminuye? Argumenta.

d) ¿*A* qué hora cada sustancia alcanzó los 0°C?

e) ¿*A* las cuántas horas de iniciada la medición las sustancias *A* y *B* alcanzaron la misma temperatura y de cuánto fue?

38. Una parada de ómnibus se encuentra a 200 m de la casa de María, ella tarda cinco minutos en llegar a la parada. Al cabo de diez minutos de estar esperando el ómnibus, decide ir caminando a su centro de trabajo, situado a dos kilómetros de su casa. Al transcurrir un cuarto de hora de estar caminando se encontraba a 1 200 metros de su trabajo, se percata que había olvidado en su casa el informe que debía entregar al director de su centro de trabajo y regresa a buscarlo, tardando 10 minutos en llegar.

a) Representa la gráfica de tiempo- distancia con la situación descrita.

b) Escribe la ecuación de la función lineal que describe la distancia recorrida por María entre los 15 y30 minutos.
c) Si María salió de su casa alas 7:00a.m., ¿a qué hora llegó a su casa cuando regresó?
d) ¿ Cuántos metros caminó María desde que salió de su casa hasta su regreso?

PARA LA AUTOEVALUACIÓN

Reflexiona sobre lo aprendido

- ¿Cuál es el grado de un polinomio?
- ¿Qué tienes en cuenta cuando eliminas los paréntesis en una expresión algebraica?
- ¿Cómo procedes al efectuar la multiplicación de dos polinomios?
- ¿Cuál es la relación existente entre el dividendo, el divisor y el resto, en la división de un polinomio por un binomio?
- ¿Cuándo una ecuación en una variable es lineal?
- ¿*A* qué llamamos razón? ¿*Y* proporción?
- ¿Cómo determinas si una proporcionalidad es directa o inversa?
- ¿Sabes resolver problemas de proporcionalidad?
- ¿*A* qué llamamos función?
- ¿Cuál es el dominio y la imagen de una función?
- ¿*A* qué llamamos función lineal?
- ¿Qué representan en la ecuación $f(x) = mx + n$ los parámetros m y n?
- ¿Cuál es la representación gráfica de una función lineal?
- ¿Sabes escribir la ecuación de una función lineal?
- ¿Sabes hallar su cero?
- ¿Cuál es la monotonía de una función lineal y de qué depende?
- ¿Cómo interpretar gráficos de funciones lineales definidas por tramos?

PONTE A PRUEBA

1. Dadas las expresiones $M = 4x^2 + 18x - 7$, $N = 5x^3 - 3x^2 - 32x - 12$, $P = x - 3$
a) Halla el valor numérico de la expresión $2P - [M - 3N]$ para $x = -3$.
b) Calcula $N : P - M$.

2. Resuelve las ecuaciones siguientes

a) $4x + 3(2x - 5) = 19 - 2(7 - 3x)$ b) $10 - (x + 2)(x + 4) = 5x - x(x - 3)$

3. Alejandro le dice a sus compañeros de aula: “Mañana es el cumpleaños de mi mamá. La cantidad de años que cumple es el triplo de los que cumplió hace 26 años”. ¿Cuántos años cumple la mamá de Alejandro?

4. En 50 L de agua de mar hay 1 300 g de sal.

a) ¿Cuántos litros de agua de mar contendrán 5,2 kg de sal?

b) ¿Cuántos gramos de sal hay en 20 L de agua de mar?

5. Para envasar cierta cantidad de vino se necesitan ocho toneles de 200 L de capacidad cada uno.

a) Para envasar la misma cantidad de vino empleando 32 toneles, ¿cuál deberá ser la capacidad de esos toneles?

b) Si se consiguen toneles de 8 L de capacidad, ¿cuántos toneles se necesitarán para envasar esa cantidad de vino?

6. Escribe verdadero (V) o falso (F) según corresponda. Argumenta las que consideres falsas.

a)___ La ecuación $2(x + 1) = 7$ tiene solución en el conjunto de los números naturales.

b)___ Las ecuaciones $x(x + 5) + 7 = 2x - x(1 - x)$ y $5x + 7 = x$ son equivalentes.

c) ___ Toda ecuación lineal tiene solución en el conjunto de los números reales.

d)___ La correspondencia definida de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ que a cada número entero le asocia su mitad aumentada en cinco, es una función.

e)___ La función f definida en el conjunto de los números reales por la ecuación $f(x) = -2 + 4x$ es decreciente.

f) ___ Sea la función g dada por su ecuación $g(x) = -\frac{2}{5}x - 4$, entonces $g\left(-\frac{2}{5}\right) = -3$

g)___ Toda ecuación de la forma $y = n$ representa una recta paralela al eje de las ordenadas.

h)___ El par $(-2;2,5)$ pertenece a la representación gráfica de la función $t(x) = -0{,}2x + 2{,}1$.

7. Marca con una X la respuesta correcta:

a) La función f de ecuación $f(x) = -\frac{1}{3}x - 3$;

___ tiene cero $x = 9$

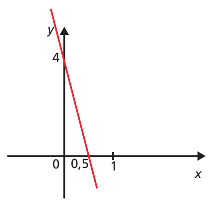
___ es creciente

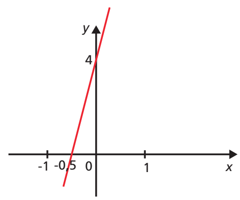
___interseca al eje y en -3.

b) La pendiente de la recta que pasa por los puntos $M(2;\ 7)$ y $N(3;\ -1)$ es:

___ -8 ___ $-\frac{1}{8}$ ___ 6 ___ $-\frac{1}{6}$

c) De las gráficas de la figura 3.120 la que corresponde a la función h de ecuación $h(x) = 4 - 8x$ es:





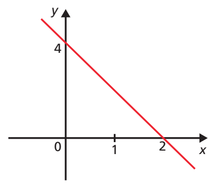


Fig. 3.120

d) El par ordenado que pertenece a la representación gráfica de la función g de ecuación $g(x) = \frac{2}{5}$ es:

___ (0;0) ___ $\left(\frac{2}{5};0\right)$ ___ $\left(0;\frac{2}{5}\right)$ ___ No se puede determinar

8. Un frigorífico almacena varios productos. *A* las 8:00 a.m. se abre para cargar varios camiones que transportarán los productos hacia varios destinos. La gráfica (fig. 3.121) muestra la variación de la temperatura del frigorífico durante el tiempo que duró la descarga.

8.1. Completa los espacios en blanco.

a) La temperatura en el frigorífico a las 8:00 a.m. era de ___°C.

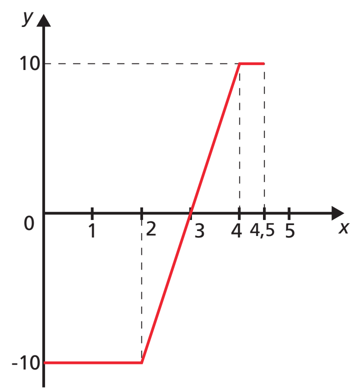


Fig. 3.121

b) *A* las 8:45 a.m., la temperatura en el frigorífico era de ___°C.

c) La temperatura en el frigorífico estuvo ascendiendo durante ___

d) Entre las dos y las cuatro h, la temperatura en el frigorífico varió ___°C.

8.2. Marca con una X la respuesta correcta.

a) La temperatura en el frigorífico alcanzó los 0 °*C* a las:
___8:30 a.m. ___11:00 a.m. ___8:03 a.m. ___3:00 p.m.

b) *A* partir de las 4 h la temperatura del frigorífico no varió durante:
___5 min ___50 min ___30 min ___4 h 5 min

c) La ecuación que describe el proceso de ascenso de la temperatura en el frigorífico es:
___$T = 10t - 10$ ___$T = 10t + 10$ __$T = 10t + 30$ __$T = 10t - 30$

8.3. *A* partir de las cuatro horas y media se cierra el frigorífico y la temperatura comienza a descender. Si la ecuación que describe dicho proceso es $T = mt + 70$, ¿qué tiempo demoró el alcanzar nuevamente los 0 °*C* la temperatura del frigorífico?

8.4. Representa en la misma gráfica, el proceso de descenso de la temperatura hasta que el frigorífico alcanza nuevamente su temperatura inicial.

Respuestas de los ejercicios

Capítulo 1

Epígrafe 1.1

1. b) Tendrá que trasladarse 2 077 m c) La distancia será de 2 248 m

2. No usan espejuelos 360 niños

3. La botella cuesta $1,05

4. $A = 19{,}3$ $B = -5.$ $C = \frac{9}{80}$ $D = -\frac{4}{9}$

4.1.1. d) **4.1.2.** d) **4.1.3.** d) **4.1.4.** a)

5. $E = -7$ $F = -7$ $G = -1$

a) Enteros

b) Es subconjunto de los números racionales.

c) Son iguales

d) *G*, porque está más cerca del cero en la recta numérica.

e) –8 f) –6 g) –8 y –6 h) Al opuesto de *F*

i) Potencia de potencia o producto de potencias de igual base.

j) cinco

6. El valor de la expresión es 3,5

7. a) $-13{,}\overline{3}$ b) Al conjunto de los números racionales.

8.1 $3{,}2 > 2 > \frac{2}{3} > 3^{-1} > -\frac{3}{2} > 2{,}3 > -9$

a) La pareja es: dos y $-\frac{3}{2}$ b) La diferencia es: 12,2

c) La base es tres d) 5,5

8.2 Entre dos y tres

8.3 Hay que adicionar la fracción $\frac{3}{4}$

10. Representa aproximadamente el 19 %

11. El comercio exterior chino sumó 27,81 billones de yuanes ($4{,}1 \cdot 10^9$ USD) en el año 2017.

12. Estaban laborando en el país 44 150 400 personas al concluir el año 2017.

14. a) En la caja quedan 16 pomos. b) Se han abierto seis cajas.

15. Se quedó con 96 libros.

a) Verdadero b) 50 %

16. La masa del trozo cortado es de 36,3 kg.

17. Tardará en llenar los cuatro botellones en seis minutos.

18. a) En un mes se producen 7 200 machetes, 12 600 guatacas y 4 200 de otros instrumentos.

b) El 52,5 % de lo producido en un mes corresponde a las guatacas.

c) Se encuentra en la razón 1 : 3.

19. Cristina tiene 22 años y ocho meses.

20. No son ni tartaletas ni pasteles 288 dulces.

a) Su ganancia es de $540,00. b) La cantidad es de 18 pasteles.

21. Sí, tiene sentido lo que dice.

22. a) Quieren ser profesores de inglés ocho integrantes del Círculo de Interés.

b) Representa el 5 % del total, los que quieren ser profesores de matemática.

23. $14 + 32 = 46$

$46 \cdot 3 = 138$

$138 : 2 = 69$

$69 - 1 = \overline{68}$

24. Se puede introducir una bola.

Epígrafe 1.2

1. Sí, porque los números irracionales son expresiones decimales infinitas no periódicas.

2. a) $\subset$ b) $\notin$ c) $\not\subset$ d) $\in$ e) $\subset$ f) $\notin$ g) $\in$ h) $\notin$
i) $\subset$ j) $\notin$ k) $\cap$ l) $\cap$ m) $\notin$ n) $\in$ ñ) $\cap$

3. a) V
b) F, porque es subconjunto.
c) F, porque es subconjunto.
d) V
e) F, porque pertenece.
f) F, porque sí pertenece.
g) V
h) F, porque la expresión tiene que ser infinita periódica.
i) F, porque no pertenece.
j) F, porque no es subconjunto.
k) V
l) F, porque $\sqrt[3]{8} = 2; 2 \in \mathbb{Q}$.
m) V
n) F, porque es subconjunto.
ñ) F, porque $\left(\sqrt[3]{-3}\right)^3 = -3;\ -3 \in \mathbb{Q}$
o) V
p) F, porque $\sqrt{5} + \left(-\sqrt{5}\right) = 0;\ 0 \in \mathbb{Q}$
q) V

4. a) $\mathbb{Q}$ b) $\mathbb{N}$ c) $\mathbb{Q}$+ d) $\mathbb{Q}$ e) $\mathbb{Z}$ f) $\mathbb{I}$ g) $\mathbb{I}$ h) $\mathbb{Q}_+$ i) $\mathbb{Q}$

5. a) El conjunto numérico más restringido de:

$-\frac{2}{3}$ es $\mathbb{Q}$ 3 es $\mathbb{N}$ $\sqrt{5}$ es $\mathbb{I}$ 0,4 es $\mathbb{Q}_+$ –4 es $\mathbb{Z}$

$\sqrt{4}$ es $\mathbb{N}$ 0 es $\mathbb{N}$ 6,0 es $\mathbb{N}$ $1\frac{1}{3}$ es $\mathbb{Q}_+$ $-5,\overline{6}$ es $\mathbb{Q}$

b) $-5,\overline{6} < -4 < -\frac{2}{3} < 0 < 0,4 < 1\frac{1}{3} < \sqrt{4} < \sqrt{5} < 3 < 6,0$

c) 1. $B = \left\{-\frac{2}{3}; 3; 0,4; -4; \sqrt{4}; 0; 6,0; 1\frac{1}{3}; -5,\overline{6}\right\}$

2. $C = \left\{-\frac{2}{3}; -5,\overline{6}\right\}$

3. $D = \left\{3; -4; \sqrt{4}; 0; 6,0\right\}$

4. $E = \left\{-4; 0; \sqrt{4}; 3\right\}$

d) 1. $\subset$ 2. $\not\subset$ 3. $\subset$ 4. $\subset$ 5. $\subset$

e) Infinitos números, porque el conjunto de los números reales es denso.

7. $\mathbb{R} / \mathbb{Q} = \mathbb{I}$ $\mathbb{R} / \mathbb{I} = \mathbb{Q}$ $\mathbb{Q} / \mathbb{I} = \mathbb{Q}$ $\mathbb{I} / \mathbb{Q} = \mathbb{I}$

8. $n = 1;\ \dfrac{\sqrt{5}+1}{2},\ n = 2;\ \dfrac{\sqrt{8}+2}{2} = \sqrt{2}+1,\ n = 3;\ \dfrac{\sqrt{13}+3}{2}$.

12.* a) *l*: 3,0 cm; *a*: 4,0 cm; *h*: 12 cm b) *l*: 6,0 dm; *a*: 8,0 dm; *h*: 24 dm

Epígrafe 1.3.1

1. a) No corresponde a estudios realizados dentro de la estadística descriptiva, pues se está realizando el estudio de un hecho aislado que es la producción de huevos en un día.

b) Sí corresponde a estudios realizados dentro de la estadística descriptiva, pues se está realizando el estudio de un conjunto de datos que se obtienen a partir de las notas que los estudiantes del grupo han obtenido en Matemática.

c) Sí corresponde a estudios realizados dentro de la estadística descriptiva, pues se está realizando el estudio del comportamiento de las votaciones durante un período de tiempo que en este caso es del año 1999 al año 2013.

d) No corresponde a estudios realizados dentro de la estadística descriptiva, pues se está realizando el estudio de un hecho aislado que es la preferencia por los programas musicales de una persona.

e) Sí corresponde a estudios realizados dentro de la estadística descriptiva, pues se está realizando el estudio del comportamiento de la cantidad de lluvia caída durante un período de tiempo que en este caso es de 12 meses.

2. a) Población: Los estudiantes de octavo grado de la escuela secundaria básica.
Muestra: Los 40 estudiantes seleccionados.

b) Población: Unidades de bombillos incandescentes que se producen diariamente en la fábrica (en este caso son 12 100 unidades).
Muestra: Las 3 025 unidades seleccionadas.

c) Población: Total de viviendas de la circunscripción.
Muestra: El 20 % de estas viviendas.

d) Población: Pacientes que ingresaron al hospital en un día (en este caso 540).

Muestra: Los 54 pacientes seleccionados para hacer el estudio.

e) Población: Total de pobladores de Pensilvania.
Muestra: Las 200 personas seleccionadas para hacer el estudio.

4. a) La muestra, porque es una parte representativa de los nacidos en el quinquenio.

5. a) De acuerdo

b) No estoy de acuerdo, porque la variable cantidad de estudiantes toma un número finito de valores numéricos los cuales se hacen coincidir con números enteros.

c) No estoy de acuerdo porque la variable la cantidad de juegos ganados o perdidos toma un número finito de valores numéricos los cuales se hacen coincidir con números enteros.

d) De acuerdo

e) De acuerdo

f) No estoy de acuerdo porque la variable calidad de las clases se refiere a los atributos que expresan una cualidad que no puede tomar valores numéricos. Por ejemplo: muy bien, bien, regular, mala.

6. a) Seleccionaría una muestra representativa de la producción diaria y le aplicaría los criterios de calidad establecidos por el Ministerio de la Agricultura.

b) Población: Producción total de huevos que en este caso es de 6 000.

c) Muestra: La cantidad de huevos seleccionados para aplicarle los criterios de calidad establecidos por el Ministerio de Agricultura.

d) Tabla 1.1

Variable	Tipo de variable	Valores de la variable
Calidad de la producción diaria de huevos durante el trimestre	Cualitativa	Buena, regular y mala
Promedio de la cantidad de huevos diarios que ponen las gallinas en el trimestre	Cuantitativa	Cualquier valor real
Nivel cultural de los trabajadores	Cualitativa	Primario, Medio básico, Medio superior y

Tabla 1.1 (cont)

Variable	Tipo de variable	Valores de la variable
Cantidad de ausencias de cada trabajador durante el trimestre	Cuantitativa	0; 1; 2; 3; 4; 5;...
Organización de los trabajadores por turnos de trabajo	Cualitativa	Turno *A*, Turno *B*, Turno *C*, ...

7. b) Falsa. La frecuencia absoluta es el número de veces que aparece el dato repetido.
d) Falsa. La frecuencia relativa es el cociente de la frecuencia absoluta por la cantidad de datos.
e) Falsa. La suma de la frecuencia relativa es igual a la unidad (1).
f) Falsa. La suma de la frecuencia relativa es igual al 100% cuando se expresa en términos porcentuales.

8. a) Categórica b) Numérica c) Categórica
d) Numérica e) Categórica f) Numérica

9. a)

Cantidad de hermanos	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
0	5	0,17
1	6	0,2
2	10	0,33
3	2	0,07
4	4	0,13
5	2	0,07
6	1	0,03
Total	30	1,00

c) Nueve estudiantes tienen más de dos hermanos. Representan el 30 %.

10. b) Tabla 1.2

Salto de altura (m)	Conteo	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa porcentual
2,30	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 I	51	0,27	27 %
2,31	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 I	21	0,11	11 %
2,32	𝍸 𝍸 IIII	13	0,07	7,0 %
2,33	𝍸 𝍸 III	13	0,07	7,0 %
2,34	𝍸 𝍸 𝍸 III	18	0,09	9,0 %
2,35	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 I	21	0,11	11 %
2,36	𝍸 𝍸 𝍸 II	17	0,09	9,0 %
2,37	𝍸 𝍸 𝍸	15	0,08	8,0 %
2,38	𝍸 II	7	0,04	4,0 %
2,40	𝍸 𝍸 III	13	0,07	7,0 %

c) El salto que realizó con más frecuencia fue de 2,30 m

d) La altura promedio de los saltos realizados fue aproximadamente de 2,35 m

11. a) Cantidad de ramos vendidos por el Día de las Madres. Variable cuantitativa.

b) Numérica

c) Tabla de Distribución de Frecuencias

Tipos de ramos de acuerdo con la cantidad de flores	Frecuencia Absoluta (F_i)	Frecuencia relativa (f_i)
6	4	0,13
10	8	0,27
12	9	0,30
18	5	0,17
24	4	0,13
	30	1,00

d) El ramo más vendido fue el de 12 flores

e) El porciento que representa del total de ramos vendidos es el 30 %
f) El gráfico de barras pues me permite hacer la comparación de la cantidad de ramos vendidos de acuerdo con su tipo.

12. c) $\overline{X}$ La frecuencia relativa correspondiente a la edad de 16 años es el 25 %.

13. a) Población: Matrícula de la escuela que, en este caso, es de 500 estudiantes.
Muestra: Estudiantes seleccionados que, en este caso, es de 40 estudiantes.
b) Motivación por el estudio de las Matemáticas
c) Tabla de Distribución de Frecuencia Absoluta y Frecuencia relativa:

Categoría	Frecuencia absoluta (F_i)	Frecuencia relativa (f_i)
Siempre	7	0,175
Casi siempre	6	0,15
A veces	14	0,35
Casi nunca	11	0,275
Nunca	2	0,05
Total	**40**	**1,00**

d) Categórica
e) Categoría más frecuente: A veces Categoría menos frecuente: Nunca
f) No es posible, pues la variable es cualitativa.

14. a) Cantidad de problemas resueltos por los estudiantes.
Variable: Cuantitativa
b) La frecuencia absoluta es siete, porque la frecuencia relativa es $\frac{7}{20}$
c) Resolvieron 12 problemas cinco estudiantes
d) Tabla 1.4

Tabla 1.4

Problemas resueltos	Frecuencia relativa
20	$\frac{3}{20}$
15	$\frac{7}{20}$
12	$\frac{5}{20}$
10	$\frac{1}{10}$
5	$\frac{3}{20}$

e) Resolvió menos de 12 problemas la cuarta parte de los estudiantes
f) El 75 % de los estudiantes aprobó el concurso
g) La media aritmética de la cantidad de problemas resueltos fue de 13 problemas.

Epígrafe 1.3.2

1. a) Variable: Tasa de mortalidad infantil. Variable cuantitativa
c) (Fig. 1.22)

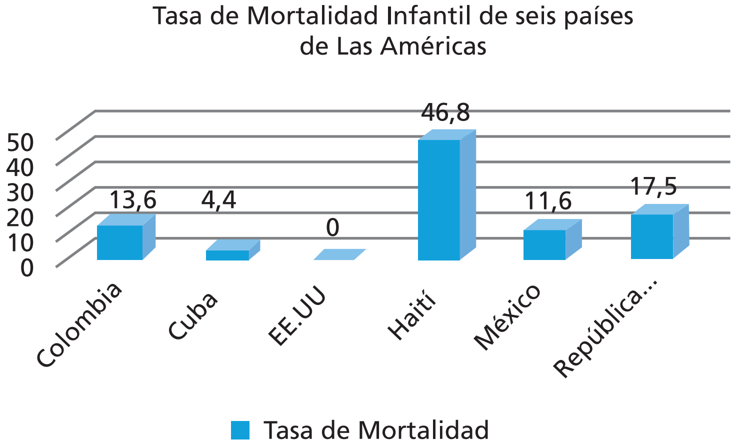
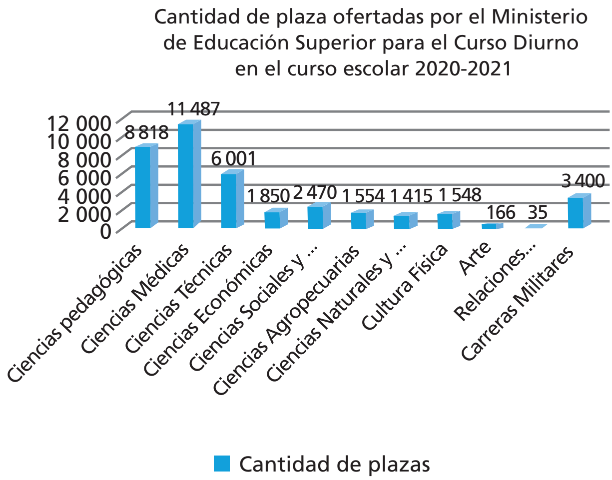


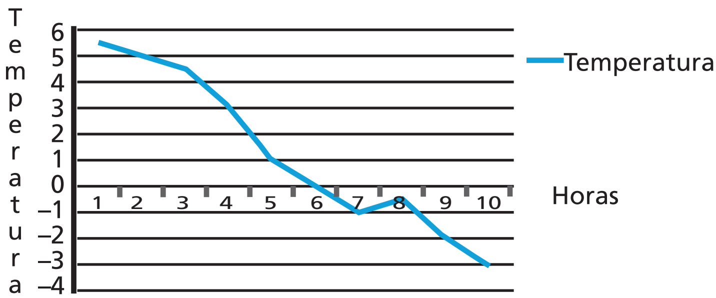
Fig. 1.22

2. a) El total de plazas para el Curso Diurno es de 38 744.
b) Se ofertó mayor cantidad de plazas a las carreras de Ciencias Médicas.
c) Representa aproximadamente el 30 % del total de plazas ofertadas.
d) (Fig. 1.23)



3. a) (Fig. 1.24)

Temperatura ambiental de un día invernal en Chile



b) Hubo más frío a las 10 p.m., porque a esa hora estaba a 3° bajo cero.

c) Descendió 8,3°C

4. **4. 4.1** c) $\overline{X}$ La frecuencia relativa correspondiente a los 37°C es 0,2.

4.2. Significa que es la temperatura que menos se registró, solo dos veces en el día.

4.3 (Fig. 1.25)

Temperatura en grados celsius en una ciudad durante diferentes horas del día

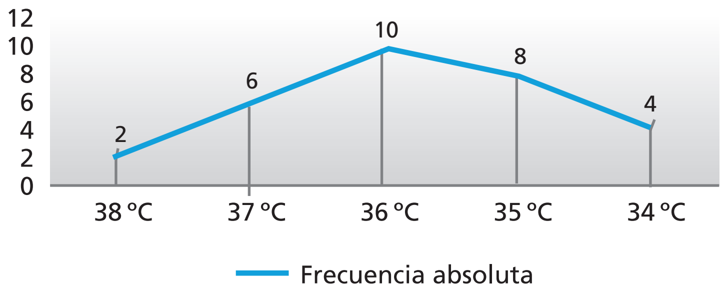


Fig. 1.25

5. a) La variable estadística es: Motivos por los cuales los jóvenes comienzan a fumar.

b) Se clasifica como: Variable cualitativa

Epígrafe 1.3.3

1. a) Verdadera

b) Falsa, porque tendría que ser numérica.

c) Verdadera
d) Falsa, porque puede no existir.
e) Falsa, porque se divide por la cantidad total de datos.
f) Falsa, porque eso solo ocurre cuando el conjunto de datos es impar.
g) Verdadera
h) Verdadera
i) Falsa, porque la moda es el dato que más se repite.
j) Falsa, porque también se puede calcular con variables cuantitativas.

3. c) ____ 90 puntos

4. a) No, porque la variable es cualitativa
b) Tabla de Frecuencia absoluta y Frecuencia relativa.
c) La moda es la preferencia por el IPVCE, porque es el dato que más se repite en este conjunto de datos.

5. La moda

6. No hay moda, es amodal.

7. c)

8. La respuesta correcta la tiene Marcos.

9. a) 2,07 b) a c) $a + 1$

11. a) Falsa b) Falsa c) Falsa d) Verdadera. Ejemplo: 6; 4; 4; 2.

12. Seleccionaría como salario medio más representativo $4 935,00 y me auxiliaría para tomar esa decisión en la mediana.

13. a) Que casi nunca se utiliza ese *software* en las clases de matemática en esas escuelas. Porque si analizamos la moda, el dato que más se repite es Casi nunca.

Ejercicios del capítulo

1. $-c > a$ **2.** 60 % **3.** c) **4.** c) **5.** d)

6. Tardará en llenar la cisterna 400 min. o seis horas y 40 min.

7. Después de cargar los 180 sacos, su masa total es de12 230 kg. Después de bajar el 70 % de los sacos su masa es de 6 434 kg.

8. a) De la tercera a la cuarta parada viajaban en el ómnibus 81 personas.
b) El 120 %.

9. a) Q > *P* b) 2,22 10. En seis horas y 15 min.

11. $-2 \in \mathbb{Z}$ **12.** $A = B$

13.1. a) 1) $\dfrac{3^2}{2^4 \cdot 5^5 \cdot 7}$ 2) $2^{-4} \cdot 3^2 \cdot 5^{-5} \cdot 7^{-1}$

13.2. b) 1) $\dfrac{a^3 \cdot c^2}{b}$ 2) $a^3 \cdot b^{-1} \cdot c^2$ $(b \neq 0)$

14.2 $B = 15$. El conjunto numérico más restringido al que pertenece el valor numérico de *B* es el conjunto de los números naturales y el más amplio es el conjunto de los números reales.

15. $0{,}7 \cdot 10^4$ **16.** a) $Y < Z < X$ b) N

17. a) $\in$ b) $\in$ c) $\not\subset$ d) $\in$ e) $\subset$
f) $\in$ g) $\notin$ h) $\in$ i) $\not\subset$

18. a) 28 b) 31,44 %
c) Estados Unidos, Japón, Australia, Canadá, Brasil, Nueva Zelanda y Cuba
d) Séptima e) 20 % f) Seis

18.1

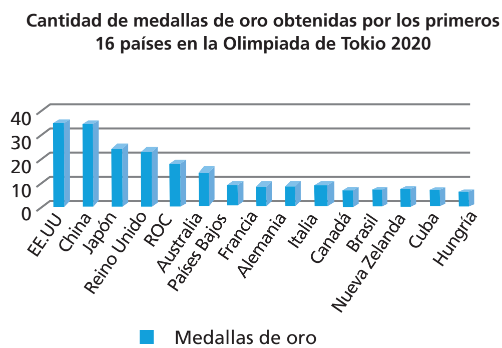
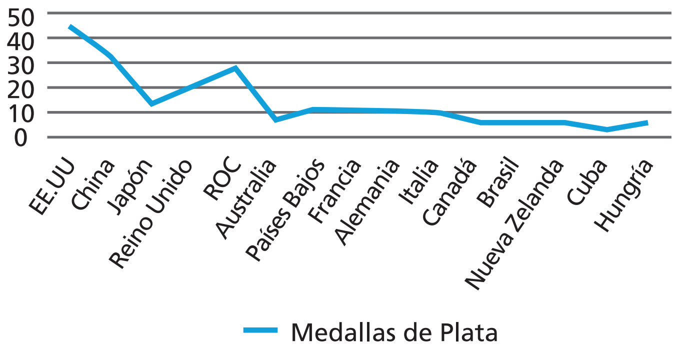


Fig. 1.26

18.2

Cantidad de MEdallas de Plata obtenidas por los primeros 16 países en la Olimpiada de Tokio 2020



CAPÍTULO 2

Epígrafe 2.1.1

1. radio ($\overline{AO}$), arco ($\overset{\frown}{AB}$), diámetro ($\overline{AF}$), recta tangente (ED), recta secante (AC), cuerda ($\overline{AD}$), centro (O).

2. a) AO, OC, $\overline{OB}$ b) AB, AC, $\overline{BC}$ c) $\overset{\frown}{AC}$

d) ABC, $\overset{\frown}{AC}$ e) $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ f) recta tangente

3. a) 3,0 cm b) 90° c) recta exterior d) recta secante

4. a) Falso, las circunferencias de igual centro son concéntricas y tienen diferentes radios
b) V c) V d) V

6. $\sphericalangle COA = \overset{\frown}{AC}$, $\sphericalangle DOB = \overset{\frown}{BD}$, $\sphericalangle DOC = \overset{\frown}{CBD}$

7. a) $\overset{\frown}{AD} = 82°$ y $\overset{\frown}{BC} = 38°$ b) $\overset{\frown}{AB} = 120°$, $\overset{\frown}{CD} = 120°$
c) $\sphericalangle AOB = 120°$, $\sphericalangle COD = 120°$

8. $\sphericalangle COD = 67{,}5°$ y $\overset{\frown}{AB} = 67{,}5°$.

9. a) $\sphericalangle COB = 60°$, $\sphericalangle DAB = 30°$, $\sphericalangle ABO = 30°$, $\sphericalangle ABC = 120°$, $\overset{\frown}{BDA} = 240°$

10. a) acutángulo b) $\overset{\frown}{SR} = \overset{\frown}{RQ}$ c)145°

11. $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} = 70°$

12. $\overset{\frown}{AC} = 30°$, $\overset{\frown}{DC} = 150°$, $\overset{\frown}{ABC} = 330°$, $\sphericalangle DOC = 150°$

13. a) $\overset{\frown}{AC} = 80°$ b) isósceles

14. 120°

15. 72°

16. $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$ (I), $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC}$ y $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD}$, al sustituir en (I), entonces

$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD}$ de donde $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$

Epígrafe 2.1.2

1. c)

2. $\sphericalangle AOB = 70°$, $\sphericalangle ADB = 35°$, $\overset{\frown}{AB} = 70°$

3. b)

4. a) rectángulo b) 50°

5. b)

6. c)

7. $\sphericalangle AOE = 160°$

8. 8.1. a) $\sphericalangle AOC$ b) $\sphericalangle ABC$ 8.2. 250°

9. a) $NP = 90°$ b) isósceles

10. 10. $\sphericalangle OAB = 30°$, $\sphericalangle ABC = 120°$

11. 11. $\sphericalangle ABE = 40°$

12. $\overset{\frown}{PR} = 145°$

13. a) $\overset{\frown}{CD} = 60°$ y $\overset{\frown}{DB} = 120°$ b) 6,3 cm

14. a) $\sphericalangle BAC = 60°$, $\overset{\frown}{BDC} = 120°$, $\overset{\frown}{ABD} = 160°$ b) No, $M \notin \overline{AD}$

15. a) $\sphericalangle B = 90°$ b) sugerencia: probar que $ABCD$ es un rectángulo.

16. b) $A_{MNP} = 6{,}0\text{cm}^2$ c) $P_{MNP} = 12$ cm

17. $\sphericalangle ODC = 65°$, $\sphericalangle BCD = 135°$

18. $\sphericalangle AOB = 100°$

Epígrafe 2.1.3

1. a) $\sphericalangle DEB = \sphericalangle DEM$ b) $\sphericalangle MCH = \sphericalangle FCH$, $\sphericalangle MBI = \sphericalangle EBI$

2. $\sphericalangle DAB = 50°$, $\sphericalangle AOB = 100°$, $\sphericalangle CAB = 90°$

3. = 140°, $\sphericalangle AMB = 70°$

4. $\sphericalangle AMB = 104°$ $\sphericalangle AOB = 140°$

5. Los ángulos: *ADB*, *DCA*, *DBA* y *ACB* son inscritos a la circunferencia, el $\sphericalangle AMB$ es interior a la circunferencia y $\sphericalangle AOB$ es central.

6. $\sphericalangle ABM = 46°$, $\sphericalangle BAT = 46°$, $\sphericalangle MAB = 88°$, $\sphericalangle AOB = 92°$

7. 10. Pepe

Epígrafe 2.2.1

1. Ver figura 2.236 a)

						A	**P**	O	T	E	M	A	
			R	O	M	B	**O**						
D	I	A	G	O	N	A	**L**						
				M	E	D	**Í**	A	T	R	I	Z	
		P	E	N	T	Á	**G**	O	N	O			
I	N	S	C	R	I	T	**O**						
		C	I	R	C	U	**N**	S	C	R	I	T	O
			E	X	Á	G	**O**	N	O				

Fig. 2.236 a)

2. a) F (todo pentágono es un polígono convexo).

d) F (todo polígono regular se puede inscribir a una circunferencia)

3. a) Ver figura 2.237

b) Ver figura 2.238

c) El lado del hexágono es igual a 0,2 dm o 2,0 cm y $r = l = 2{,}0$ cm (fig. 2.239).

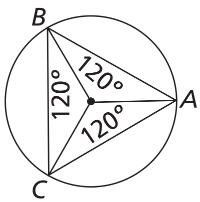


Fig. 2.237

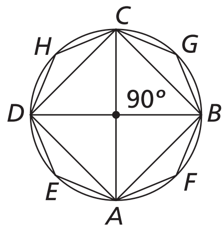


Fig. 238

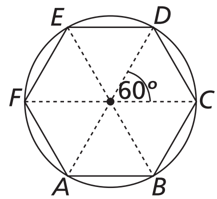


Fig. 239

4. Ver figura 2.240

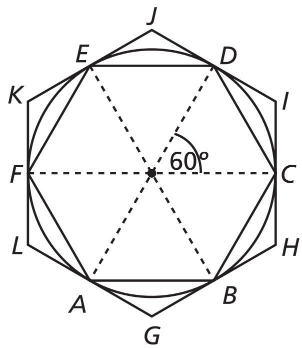


Fig. 2.240

6. a) 1 620°

b) Puede tener 3, 4, 5, 6, 9 o 10 lados

c) $\alpha = 156°$

7. a) 3,0 cm b) 24 cm c) 36 cm^2

8. $A_{ABCD} = 50{,}0$ cm^2

9.* El centro *O* de la circunferencia inscrita, es también el centro de la circunferencia circunscrita al cuadrado, por tanto, las diagonales *AC* y *BD* se cortan en *O* (fig. 2.241). El triángulo *AOB* es rectángulo e isósceles de base *AB*, $\overline{AB} \perp \overline{OP}$, es altura y mediana a la vez, por tanto, $\overline{OP} = \dfrac{\overline{AB}}{2}$, pero $r = \overline{OP}$,

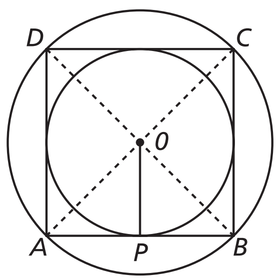


Fig. 2.241

$$r = \frac{\overline{AB}}{2}$$

$$2r = \overline{AB}$$

luego $d = \overline{AB}$

10. a) Isósceles de base *AE* b) Rectángulo en *E* c) $\overset{\frown}{AF} = 120°$

d) 240°   e) $P_p = 6 \cdot 6 = 36$ cm

Epígrafe 2.2.2

1. a) $L = 11$ cm   b) $L = 13$ dm   c) $L = 188$ mm

2. a) $L = 6,3$ km   b) $L = 38$ dm   c) $L = 8,8$ m

3. a) $r = 1,00$ m   b) $r = 3,5$ km   c) $r = 20,00$ cm

4. La longitud aproximada del arco sería 3 334 km.

5. El tractor ha avanzado 1,5 km, cuando cada rueda ha dado 400 vueltas.

6. Cada rueda tiene que dar 50 vueltas para recorrer 78,5 m.

7. La suma de los arcos es aproximadamente de 13 m.

8. Ver tabla 2.7

Tabla 2.7

L	d	r	b	α
13,2 cm	4,20	2,10	1,83 cm	50°
24 cm	7,8 cm	3,9 cm	13 cm	200°
15,7 cm	5,00 m	2,50 cm	3,93	90°
14,8 cm	4,71 cm	2,36 cm	10,0 cm	243°
15 cm	4,8 cm	2,4 cm	2,5 m	60°
2,70 cm	0,86 cm	0,43 cm	0,45 cm	30°

9. 9. $L \approx 97$ cm

10. $b \approx 19$ cm

11. c) La longitud del arco $\overset{\frown}{BC}$ es igual a 2,5 dm.

12. a) El triángulo *ABC* es rectángulo, porque el ángulo *C* está inscrito en un arco de circunferencia de amplitud igual a 180°.
b) La cuerda $\overline{AB}$ es la mayor de las cuerdas, o sea, es el diámetro de la circunferencia.
c) $L = 7,5$ cm.

13. El recorrido del asiento del columpio cuando el ángulo es máximo es de 3,8 cm.

14. El extremo libre del minutero, al avanzar 20 min recorre aproximadamente 13 cm.

Epígrafe 2.2.3

1. 1-F, 2-D, 3-A, 4-B, 5-C, 6-E

2. El área del círculo se puede calcular utilizando la relación $\pi \cdot \frac{d^2}{4}$.

3. a) $A_C \approx 154$ cm² b) $A_C \approx 79$ m c) $A_C \approx 314$ cm

4. a) $A_C \approx 707$ cm² b) $A_C \approx 2{,}3$ m² c) $A_C \approx 133$ mm²

5. a) $r \approx 2{,}8$ mm b) $d = 20{,}0$ cm c) $r \approx 2{,}50$ dm y $d \approx 5{,}00$ dm

6. a) $A_A \approx 1{,}4$ dm² b) $A_A \approx 35$ dm²

7. a) $r = 6{,}0$ m; $d = 12$ m; $A_{SC} \approx 14$ m²
b) $r \approx 4{,}71$ cm; $d \approx 9{,}42$ cm; $A_C \approx 69{,}7$ cm²; $\alpha \approx 292°$
c) $L \approx 31$ cm; $A_C \approx 79$ cm²; $\alpha \approx 70°$; $A_{SC} \approx 15$ cm²

8. $A_S \approx 3{,}4$ cm²

9. $A_S \approx 1{,}3 \cdot 10^2$ cm²

10. $A_S \approx 1{,}8 \cdot 10^2$ cm²

11. $A_S \approx 11$ m²

12. $A_{SM} \approx 1{,}1$ m²

13. $b \approx 44$ mm

14. Los niños disponen para jugar de un área aproximada de $7{,}8 \cdot 10^3$ m².

15. La razón entre sus superficies es 0,9.

16. Es mayor 2,25 veces.

17. a) La *pizza* se cortó en 8 pedazos.
b) La longitud aproximada de la *pizza* es 94,2 cm.

18.* $A_s \approx 35\ \text{cm}^2$

19.* $A_s = 8{,}220\ \text{cm}^2$

20.* $A_s = 0{,}64\ \text{cm}^2$

21. * $r = 2{,}0$ cm

22. $A_s \approx 1{,}0\ \text{dm}^2$

23. a) 33 medallas.
b) Oro: $\frac{33}{98} \approx 0{,}34$Plata: $\frac{27}{98} \approx 0{,}27$
c) Ver figura 2.242

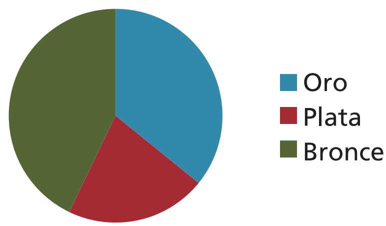


Fig. 2.242

24. a) Están aún sin incorporarse el 20 %.
b) Prefieren el círculo de interés de gastronomía 104 educandos.
c) Amplitud del sector (fig. 2.243).

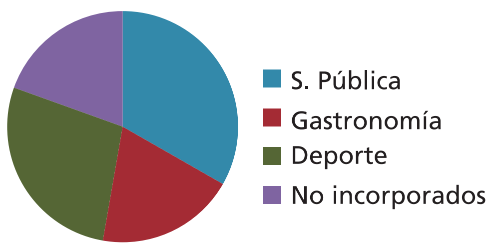


Fig. 2.243

25. a) Mujeres; la cuarta parte son niños.
b) Niños: 60; mujeres: 96 y hombres: 84.

Epígrafe 2.3.1

1. *Simetría axial de eje* m
Son puntos fijos los que pertenecen al eje de simetría, en particular *P*.
Se aceptan las rectas: $\overline{MN}$, $\overline{MP}$, $\overline{MQ}$, $\overline{NP}$, $\overline{NQ}$, $\overline{PQ}$ y sus respectivas imágenes: $\overline{M'N'}$, $\overline{M'P'}$, $\overline{M'Q'}$, $\overline{N'P'}$, $\overline{N'Q'}$, $\overline{P'Q'}$
Un segmento cualquiera: $\overline{MN}$y su imagen: $\overline{M'N'}$
Ángulo: $\sphericalangle MNP$ y su imagen $\sphericalangle M'N'P$
Simetría central de centro O: El centro *O* es el único punto fijo.

Se aceptan las rectas: $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GD}$ y sus respectivas imágenes: $\overline{D'E'}$, $\overline{E'F'}$, $\overline{F'G'}$, $\overline{G'D'}$

Un segmento cualquiera: $\overline{DE}$ y su imagen: $\overline{D'E'}$

Ángulo: $\sphericalangle DGF$ y su imagen: $\sphericalangle D'G'F'$

Traslación: No tiene puntos fijos.

Se aceptan las rectas: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y sus respectivas imágenes: $\overline{A'B'} = \overline{CB'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{A'C'} = \overline{CC'}$

Un segmento cualquiera: $\overline{AB}$ y su imagen: $\overline{A'B'}$

Ángulo: $\sphericalangle CAB$ y su imagen: $\sphericalangle C'A'B' = \sphericalangle C'CB'$

Rotación de centro O y ángulo α

El centro *O* es el único punto fijo. De igual forma que en los casos anteriores las rectas y segmentos están determinados por dos puntos. Ver el segundo recuadro del epígrafe 2.3.1.

2. a) $\overline{CM}$ mediana de $\overline{AB}$; $\overline{C'M}$ imagen de $\overline{CM}$ (fig. 2.244).

b) *M* ortocentro de $\triangle MNP$ por ser rectángulo; $\triangle MN'P'$ imagen de $\triangle MNP$ (fig. 2.245).

c) $\overline{PS}$ bisectriz $\sphericalangle QPR$ y $\overline{PS} = \overline{QS'}$ segmento y su imagen por la traslación que transforma *P* en *Q* (fig. 2.246).

3. Simetría axial de eje *s*, en la cual *s* es la mediatriz de los segmentos $\overline{NP}$ y $\overline{MQ}$ (fig. 2.247).

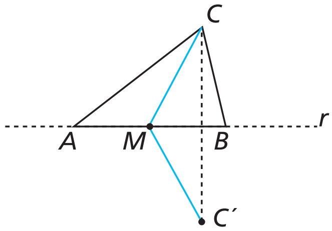


Fig. 2.244

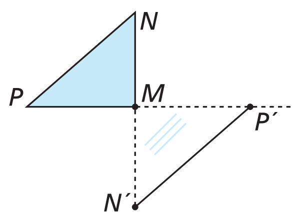


Fig. 2.245

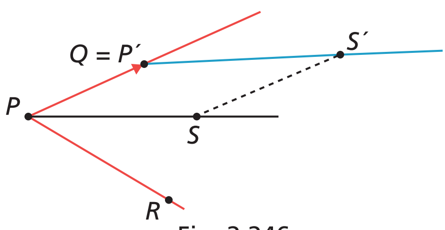


Fig. 2.246

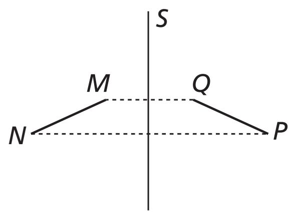


Fig. 2.247

Epígrafe 2.3.2

2. a) Se ilustra uno de los resúmenes que se piden, para que se tenga una idea de cómo hacerlo (fig. 2.248).
Diferentes casos de segmentos iguales[1]

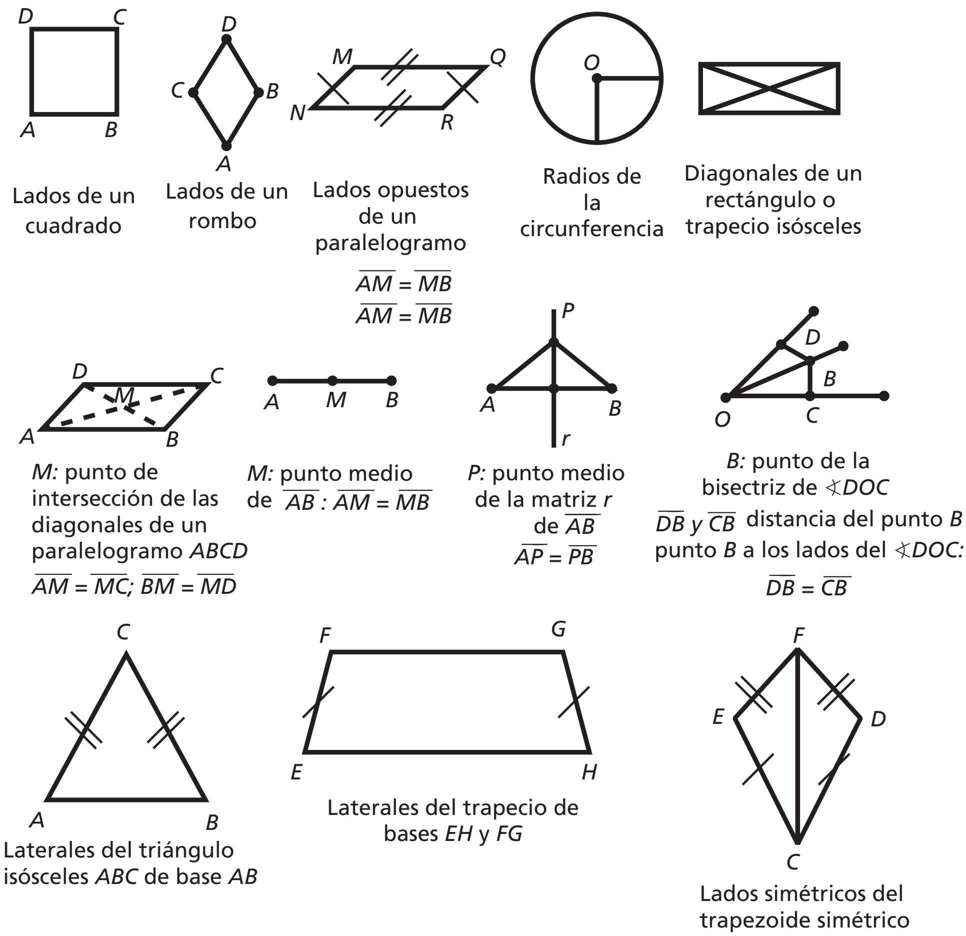


Fig. 2.248

Epígrafe 2.3.3

1. Parejas de triángulos iguales: 1 y 4; 3 y 6 (criterio *lal*) 5 y 6 (criterio *lll*).

[1] Tomado de la tesis del licenciado Heriberto Otaño Hernández, profesor de la Secundaria Básica Orestes Acosta del municipio Boyeros.

2. Triángulos que no cumplen ninguno de los criterios de igualdad de triángulos son: **1 y 2** porque no es suficiente que tengan respectivamente los ángulos iguales para que sean triángulos iguales. **5** y **4** que tengan solo un lado respectivamente igual no es un criterio para determinar que dos triángulos sean iguales.

3. Criterio *lll*: a, b y d Criterio *lal*: *a*, *c* y *d*

4. Criterio *lal*: a, c y d Criterio *ala*: *b*, *c* y *d*

5. a) Porque *MNPQ* trapecio isósceles. b) $\overline{QR} = \overline{PS}$ c) $\overline{MR} = \overline{SN}$
d) Por *teorema lll.*

6. a) Porque son ángulos base del $\triangle EFG$ isósceles.
b) Porque $\overline{EH}$ es la mediana relativa al lado $\overline{FG}$.
c) $\overline{GE} = \overline{EF}$ d) Por *teorema lal*

7. Pareja 1: $AED = \triangle FBC$ por *teorema ala, ya que* $\overline{AD} = \overline{BC}$ por ser lados opuestos el rectángulo *ABCD*; $\sphericalangle ADE = \sphericalangle CBF$ por alternos entre las paralelas $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, con secante $\overline{DB}$; $\sphericalangle DAE = \sphericalangle FCB$ por *teorema de terceros ángulos*.
Pareja 2: $\triangle ABD = \triangle BCD$ por *teorema lll,* ya que $\overline{AD} = \overline{BC}$ y $\overline{DC} = \overline{AB}$ por ser lados opuestos del rectángulo *ABCD* y $\overline{BD}$ lado común.
Pareja 3: $\triangle ABE = \triangle FCD$ por teorema ala, ya que $\overline{DC} = \overline{AB}$ por ser lados opuestos el rectángulo *ABCD*; $\sphericalangle ABE = \sphericalangle FDC$ por alternos entre las paralelas *DC* y *AB*, con secante *DB*; $\sphericalangle EAB = \sphericalangle FCD$ por teorema de terceros ángulos, ya que son iguales respectivamente los ángulos de la pareja de ángulos ya mencionada, se cumple también que $\sphericalangle AEB = \sphericalangle DFC = 90°$ porque $\overline{AE} \perp \overline{BD}$ y $\overline{CF} \perp \overline{BD}$ según datos.

8. $\triangle AOD = \triangle COB$ puede probarse por los tres criterios: teorema ala, teorema lll y teorema lal.

9. a) *AD* en $\triangle AED = \triangle FBC$ y también en $\triangle DAB = \triangle BCD$.
b) *FC* en $\triangle BCF = \triangle AED$ y también en $\triangle FCD = \triangle ABE$.

10. 10. a) $\triangle MQR = \triangle NPR$ se sigue por el teorema lal, al considerar: $\overline{NP} = \overline{QM}$ lados opuestos en el rectángulo *MNPQ*; $NR = RM$ por lados iguales de $\triangle MNR$ isósceles y $\sphericalangle QMR = \sphericalangle PNR$ con amplitud igual a la diferencia de dos parejas de ángulos de amplitudes respectivamente iguales ($\sphericalangle QMR = \sphericalangle PNR = 90°$) y ($\sphericalangle RMN = \sphericalangle RNM$) ángulos base del $\triangle MNR$ isósceles.

b) Se sigue del inciso a) por elementos homólogos.

c) El perímetro de *MNPQ* es igual a 20 cm, ya que si A = 12 cm^2, entonces $h = 4{,}0$ cm, pero como segmentos perpendiculares entre paralelas son iguales, se cumple para los lados $\overline{NP}$ y $\overline{QM}$ en el rectángulo *MNPQ* que $\overline{NP} = \overline{QM} = 4$ y cm con esto su perímetro es 20 cm, haciendo la conversión $\overline{MN} = 60$ mm = 6,0 cm

11. 11. a) $\Delta ADF = \Delta BCE$ se sigue por teorema lll de $\overline{EB} = \overline{DF}$ por datos, $\overline{AD} = \overline{BC}$: lados opuestos de *ABCD* rectángulo y $\overline{EC} = \overline{AF}$: lados opuestos de *AECF* paralelogramo; pero también por teorema lal, pues, además de $\overline{AD} = \overline{BC}$ lados opuestos de *ABCD* rectángulo y $\overline{EC} = \overline{AF}$: lados opuestos de *AECF* paralelogramo, se cmple $\sphericalangle D = \sphericalangle B$ por ser ángulos interiores del rectángulo *ABCD*.

b) $\triangle ADF$ rectángulo en *D*, porque $\sphericalangle D$ es ángulo interior del rectángulo *ABCD*.

c) Área de $\triangle ADF$ es igual a 4,0 cm^2, porque $\overline{EB} = \overline{AB} - \overline{AE} = 7 - 5 = 2 = \overline{DF}$, luego $A = \frac{\overline{AD}}{2} \cdot \overline{DF} = \frac{4}{2} \cdot 2 = 4{,}0 \text{ cm}^2$

12. b) $BC = 9{,}0$ dm.

13. b) $AS \approx 15$ dm^2

14. b) 100° y 80°

15. b) A = 5,1 dm^2

16. c)

17. b) Área del rombo (*AR*): 4 cm^2. Área del triángulo *AFD* (*AAFD*): 2 cm^2, entonces $AR = 2\ AAFD$

18. b) Si $AC = AB$, entonces $\triangle ABC$ es isósceles de base $\overline{BC}$, por la condición de que $\overline{BC} \perp \overline{AD}$, entonces *D* es punto medio del arco $\overline{BC}$, luego la amplitud del arco $\overline{BC}$ es igual a 1 200 por suma de amplitudes de arcos, entonces $\sphericalangle BAC = 60°$ por ser ángulo inscrito en una circunferencia y corresponderle el arco $\overline{BC}$.

Por tanto, todo triángulo isósceles con un ángulo con amplitud igual a 600 los demás ángulos tienen amplitud igual a 600 por suma de amplitudes de ángulos interiores y se cumple que el triángulo *ABC* es equilátero.

19. $\overline{AE} = \overline{BD}$ por ser rectas notables del *ABC* equilátero, $\overline{FE} = \overline{BD}$ por ser lados homólogos de triángulos iguales, entonces $\overline{AE} = \overline{FE}$ por propiedad transitiva.
Por tanto, se cumple que $\overline{BC}$ y $\overline{AF}$ se cortan perpendicularmente en su punto medio y esta condición es la de las diagonales de un rombo, luego *ABFC* es un rombo.

Epígrafe 2.4.1

1. a) F, las caras son triángulos. b) V c) V
d) F, la apotema es la altura de las caras laterales. e) V

2. El menor número de caras posibles es tres.

3. b)

Epígrafe 2.4.2

1. d)

2. $AL \approx 99\ cm^2$

3. $AT = 4,5\ m^2$

4. $AT \approx 112\ dm^2$

5. $AT = 3150\ cm^2$

6. $AB = 82,35\ dm^2$

7. Arista de la base: 12 cm

8. $AT \approx 79,2\ m^2$

9. $AL \approx 222\ m^2$

10. 10. AT(ortoedro) = 7 424 cm^2; Vortoedro = 13 824 cm^3; Arista(*cubo*) ≈ 51,7 cm;

11. AT(cubo) ≈ 4 870 cm^2;
AT(ortoedro) – AT(cubo) = 13 824 – 4 870 = 8 954 cm^3

Epígrafe 2.4.3

1. V = 1,44 dm^3

2. h = 4,5 cm

3. V = 9,6 dm^3

4. V ≈ 130 m^3

5. 320 m^3

6. Se necesitan 6,0 dm^3 de arena para cubrir el parque.

7. AT = 432 in^2

8. h = 2,5 m

9. a) 125 b) 27 c) 54 d) 36 e) 8

Epígrafe 2.4.4

1. b)

2. V = 50,4 dm^3

3. V ≈ 2,07 · 10^3

4. V ≈ 0,16 m^3

5. V ≈ 53 cm^3

6. V ≈ 1,8 dam^3

7. V ≈ 57 m^3

8. $V \approx 67\ cm^3$

9. Se podrá llenar 112 veces.

10. $V \approx 2{,}31\ hm^3$

Ejercicios del capítulo

1. El análisis se debe centrar en el ángulo que se determina por el vértice de referencia (B) donde está situado el observador y los dos vértices a ambos lados de él, porque como la poligonalborde del polígono va cerrando en el sentido de la flecha como muestra la figura 2.249 se supone que este ángulo de observación incluya al resto de los vértices.

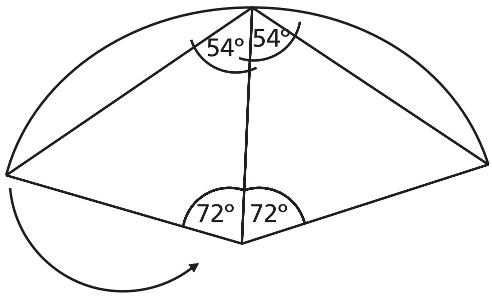


Fig. 2.249

a) En el caso del pentágono regular, el ángulo central es de 72° y determina triángulos isósceles con ángulos base de 54°, por lo cual el ángulo desde donde se observa es de 108° contenido en el ángulo de observación de 120°, luego sin incluir a *B*, se observan los cuatro vértices restantes.

b) En el caso del hexágono regular, el ángulo central es de 60° y determina triángulos equiláteros con todos los ángulos de 60°, por lo cual el ángulo desde donde se hace la observación es de 120° que coincide con el ángulo de observación también de 120°, luego sin incluir a *B*, se observan los cinco vértices restantes.

4. **4.1** c) **4.2** c)

5. Recorrido $\overset{\frown}{CD} = 156{,}0$ m; A instalación = 2 290 m^2

6. L ≈ 40,05·103 km

10. El camión avanza aproximadamente 0,57 km.

11. Longitud de un plato: 62,8 cm = $2\pi r = \pi d$; entonces d = 20 y caben 20 platos.

12. Lpiscina = 81,6 m

13. Son falsas: a), c), d), f), h), i)

15. a)

16. **16.1** a) $\overset{\frown}{PQ} = 145°$ b) $\overset{\frown}{AB} = 120°$
c) $\sphericalangle PRQ = 25°$ d) $\sphericalangle ACB = 21°$; $\sphericalangle PRQ = 240°$

17. $\sphericalangle 1 = 90°$; $\sphericalangle 2 = 90°$; $\sphericalangle 3 = 55°$; $\sphericalangle 4 = 35°$; $\sphericalangle 5 = 55°$; $\sphericalangle 6 = 35°$; $\sphericalangle 7 = 20°$

18. La igualdad de los triángulos se sigue por el criterio *ala*, pues el lado igual se da en los datos; se comprueba la igualdad de los ángulos adyacentes a él, calculando sus amplitudes, aplicando propiedades del triángulo equilátero y de los ángulos adyacentes, centrales y seminscritos, el teorema de Tales y el teorema de la suma de amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo.

19. Demostración: $\overline{MN}$ perpendicular a $\overline{AB}$ por propiedad de la tangente en B, luego también es perpendicular a su paralela $\overline{PQ}$, $\overline{AB}$ es perpendicular a la cuerda $\overline{PQ}$ luego la biseca, y con esto $\overline{CB}$ está contenida en esta por lo que sería altura y mediana al mismo tiempo del lado $\overline{PQ}$ en el ΔPQB y así ese triángulo sería isósceles.

a) En los triángulos *EBA* y *CBF* se cumple que: $\overline{EB} = \overline{BF}$ por ser lados del cuadrado *DFBE*.
$AB = BC$ por ser lados iguales del $\triangle ABC$ isósceles de base *AC*
$\sphericalangle EBA = \sphericalangle CBF$ porque $\sphericalangle EBF = 90°$ por ser ángulo interior del cuadrado *DFBE*, como $\overline{BD}$ es altura relativa a la base $\overline{AC}$ del $\triangle ABC$ isósceles, entonces es también bisectriz del $\sphericalangle ABC$ y es además bisectriz del $\sphericalangle EBF$ del cuadrado *DFBE*, luego: $\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC$ y $\sphericalangle EBD = \sphericalangle DBF = 45°$
por tanto: $\sphericalangle EBD = \sphericalangle DBF$
$\sphericalangle EBA + \sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC + \sphericalangle CBF$ por suma de ángulos
$\sphericalangle EBA = \sphericalangle CBF$

Por tanto $\triangle EBA = \triangle CBF$ por tener dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales. (Teorema *l.a.l*)

Como $\triangle EBA = \triangle CBF$ entonces $\overline{EA} = \overline{CF}$ por ser lados homólogos de triángulos iguales.

b) En los triángulos *DBM* y *DNB* se cumple que:

$BD = BD$ por ser lado común.

$\measuredangle MBD = \measuredangle DBN$ por ser $\overline{BD}$ es altura relativa a la base $\overline{AC}$ del $\triangle ABC$ isósceles entonces es también bisectriz del $\measuredangle ABC$.

$\measuredangle MDB = \measuredangle NDB$ porque por ser *BD* bisectriz del $\measuredangle EDF$ del cuadrado *DFBE*

Por tanto: $\triangle DBM = \triangle DNB$ por tener un lado y los ángulos adyacentes a este respectivamente iguales. (Teorema *a.l.a*)

20. Sea *ABCD* un paralelogramo cualquiera, para probar la igualdad de dos segmentos y también la igualdad de dos ángulos, por lo general, aplicamos la igualdad de triángulos. Como la figura es un cuadrilátero (fig. 2.250), se necesita una construcción auxiliar para "obtener triángulos", triángulos que se relacionen con los lados opuestos de *ABCD*. Tracemos por esto la diagonal $\overline{AC}$.

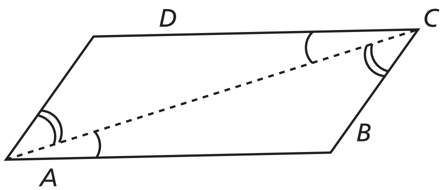


Fig. 2.250

Demostración:

En los triángulos *ABC* y *ACD* se cumple:

(1) $\overline{AC}$: lado común

(2) $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$ por alternos entre las paralelas $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, con secante $\overline{AC}$

(3) $\measuredangle 3 = \measuredangle 4$ por alternos entre las paralelas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, con secante $\overline{AC}$

Por tanto: $\triangle ABC = \triangle ACD$ por teorema ala.

Se sigue por elementos homólogos que: $\overline{DC} = \overline{AB}$ y $\overline{AD} = \overline{BC}$ que son lados opuestos del paralelogramo *ABCD* y, por tanto, se cumple la tesis.

21. Debe probarse la igualdad de dos parejas de ángulos: $\measuredangle ADC = \measuredangle ABC$ (I) y $\measuredangle DAB = \measuredangle BCA$ (*II*).

Demostración:

De la igualdad de triángulos probada en el ejercicio 20 se sigue también que: $\measuredangle ADC = \measuredangle ABC$ (I). Por otro lado, por lo ya fundamentado:

$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle 1=\sphericalangle 2\\ \sphericalangle 3=\sphericalangle 4\end{array}\right\}\Rightarrow \sphericalangle 1+\sphericalangle 3=\sphericalangle 2+\sphericalangle 4\Rightarrow \sphericalangle DAB=\sphericalangle BCA \quad \text{(II)}$$

Se tiene por (I) y (*II*) la igualdad de los ángulos opuestos del paralelogramo *ABCD* y, por tanto, se cumple la tesis.

22. Ahora la figura de análisis debe incluir las diagonales de un paralelogramo (fig. 2.251) y si las diagonales de *ABCD* se cortan en O, entonces la tesis que debo probar es que: $\overline{AO} = \overline{OC}$ y $\overline{DO} = \overline{OB}$

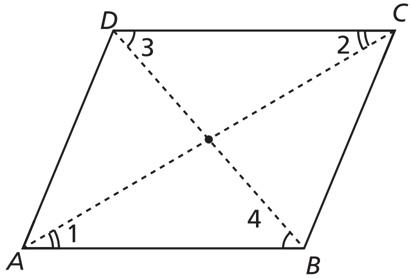


Fig. 2.251

Demostración:

En los triángulos *ABO* y *CDO* se cumple que:

(1) $DC = AB$ por ser lados opuestos del paralelogramo *ABCD*.

(2) $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ por alternos entre las paralelas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, con secante $\overline{AC}$

(3) $\sphericalangle 3 = \angle 4$ por alternos entre las paralelas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, con secante $\overline{BD}$

Por tanto: $\triangle ABO = \triangle CDO$ por teorema ala.

Se sigue por elementos homólogos que: $\overline{AO} = \overline{OC}$ y $\overline{OD} = \overline{OB}$ por lo cual las diagonales del paralelogramo *ABCD* se bisecan y con esto se cumple la tesis.

23. Sea $\triangle ABC$ isósceles de base *AB*, para probar la igualdad de dos ángulos, por lo general se aplica la igualdad de triángulos y se necesita para esto una construcción auxiliar.

En este caso, para probar la igualdad de los ángulos base del $\triangle ABC$, se necesita obtener en la figura, triángulos relacionados a estos ángulos base (fig. 2.252).

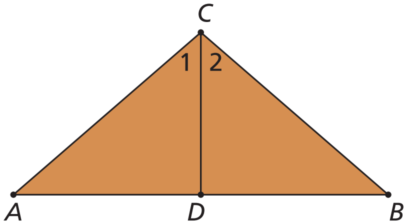


Fig. 2.252

Tracemos la bisectriz del ángulo principal $\sphericalangle ACB$, denotémosla $\overline{CD}$.

Tesis: $\sphericalangle A = \sphericalangle B$ Demostración:

En $\triangle ADC$ y $\triangle CDB$ se cumple:

(1) $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ porque *CD* bisectriz del $\sphericalangle ACB$

(2) $AC = CB$ porque $\triangle ABC$ isósceles de base $\overline{AB}$

(3) *CD* lado común de $\triangle ADC$ y $\triangle CDB$

Por tanto: $\triangle ADC = \triangle CDB$ por teorema *lal*

Se sigue por elementos homólogos que: $\sphericalangle A = \sphericalangle B$, l. q. q. d.

24. Sea *CD* mediana de *AB* en $\triangle ABC$ isósceles de base *AB* por lo que $D \in AB$ (fig. 2.244)

Tesis 1: *CD* es bisectriz del $\sphericalangle ACB$, o sea: $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$

Tesis 2: *CD* es altura de *AB*, o sea $\sphericalangle ADC = \sphericalangle CDB = 90°$

La tesis 1 se sigue por elementos homólogos, a partir de probar la igualdad de $\triangle ADC$ y $\triangle CDB$, por teorema lal, por propiedad de la mediana *CD* y D punto medio de *AB*, $AD = DB$; se tiene también la igualdad de los ángulos base: $\sphericalangle A = \sphericalangle B$ y la igualdad de los lados laterales del triángulo isósceles.

La tesis 2 se sigue de la misma igualdad de triángulos anterior, por elementos homólogos que: $\sphericalangle ADC = \sphericalangle CDB$ y como, además, son rectos por ser adyacentes iguales, entonces con esto $\overline{CD}$ es altura de $\overline{AB}$.

25. a) Se sigue por elementos homólogos a partir de probar la igualdad de $\triangle AFB$ y $\triangle FDE$, por teorema lal, ya que: $AF = FD$ (F punto medio de *AD*); $\sphericalangle BAF = \sphericalangle FDE$ (ángulo rectos porque *ABCD* rectángulo) y $\sphericalangle AFB = \sphericalangle EFD$ por opuestos por el vértice.

b) $$\begin{aligned} A &= h \cdot \frac{(B+b)}{2} \\ &= \overline{DC} \cdot \frac{\left[\overline{BC} + \overline{DF}\right]}{2} \\ &= \overline{DC} \cdot \frac{\left[\left(\overline{DF} + \overline{AF}\right) + \overline{DF}\right]}{2} \\ &= 3{,}5 \cdot \frac{\left[(4{,}4 + 4{,}4) + 4{,}4\right]}{2} \\ &= 23{,}1 \approx 23 \text{ cm} \end{aligned}$$

Respuesta: El área del trapecio *BCDF* es aproximadamente 23 cm^2

c) $\triangle BCE$ es rectángulo por ser $\sphericalangle BCD = 90°$, ya que es ángulo interior del rectángulo *ABCD*.

26. Cantidad de tela que se necesita: T

T = Alateral + A (una base) = 9 022 m^2 ≈ 90,2 hm^2

27. Cantidad de lona que se necesitó: 9,36 m^2 ≈ 9,4 m^2

28. Dos cuerpos equivalentes tienen igual volumen, un cubo equivalente a ese ortoedro tendrá un volumen de 1 728 cm^3 y arista 25,9 cm, dada por la raíz cúbica de ese número y con esto AT = 4 025 cm^2 = 40,2 dm^2

29. V = 78,7 m^3 ≈ 79 dm^3

30. El volumen de una pirámide es cuatro veces el volumen de la otra.

31. b)

32. a) 5 000 000 L b) 46 250 azulejos

33. $\overline{AB} = p \cdot a$ con p: semiperímetro y apotema $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$A_b = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2{,}598 \approx 2{,}6 \text{ m}^3$$

V = 25,95·20 = 519 m^3

b) A las 8:45 a.m., la temperatura en el frigorífico era de ___°C.

c) La temperatura en el frigorífico estuvo ascendiendo durante ___

d) Entre las dos y las cuatro h, la temperatura en el frigorífico varió ___°C.

CAPÍTULO 3

Epígrafe 3.1

1. a) $4n$: un número b) $6n$; n: un número c) $\frac{3}{5}n$; n: un número

d) $n - 1$; n: un número natural distinto de cero

e) $2n + 1$; n: un número natural

f) $\frac{1}{4}n$; n: un número

g) n, $n + 1$; n: un número natural

h) $8z$; z: un número entero

i) $x - 5 = y$ x: número mayor y: número menor

j) $3n + \frac{2}{5}m$ n un número m: otro número

2. a) p p: cantidad de piezas producidas por la fábrica.

b) $\frac{1}{2}h$ h: pobreza extrema y el hambre

c) $\frac{1}{5}a$ a: área de un terreno que se dedica al cultivo de cebollas.

d) 2x + y; x: amplitud de los ángulos base de un triángulo isósceles.
y: amplitud del ángulo opuesto a la base de un triángulo isósceles.

e) 2(a + b) a: longitud del lado mayor del rectángulo.
b: longitud del lado menor del rectángulo.

f) $g + \frac{3}{50}g$ g: ganancia planificada por EPCOMA para el 2012.

g) $n - s = 61$; $n = s + 61$; $s = n - 61$; n: cantidad de playas de la costa norte;
s: cantidad de playas de la costa sur.

h) $\frac{bh}{2}$ b: longitud de la base del triángulo rectángulo,
h: longitud de la altura del triángulo rectángulo

i) $\frac{4}{5}g$ g: gastos de una empresa

j) $d + \frac{1}{10}d$ d: índice de desocupación en Portugal hace cinco años.

k) $p + \frac{1}{5}p$ p: promoción de una escuela

l) $\frac{9}{10}f$ f: cantidad de fumadores

m) $\frac{2}{3}e$ e: cantidad de estudiantes de una escuela

n) $\frac{3}{5}m$ m: cantidad de estudiantes de un grupo.

3. **3.1** b) **3.2** d) **3.3** c) **3.4** d) **3.5** a) **3.6** b) **3.7** c) **3.8** c) **3.9** c)

4. Ver la tabla 3.43.

Tabla 3.43

Situación matemática	Significado de la variable *m*	Expresión algebraica en función de la variable *m*	Valor numérico de la expresión para $m = 5$
Área de un cuadrado	*m:* longitud del lado del cuadrado	m^2	$m^2 = 5^2 = 25$
El perímetro de un triángulo equilátero	*m:* longitud de los lados de un triángulo equilátero	$3m$	$3m = 3 \cdot 5 = 15$
El 60 % del área de un trapecio	*m:* área de un trapecio	$\frac{3}{5}m$	$\frac{3}{5}m = \frac{3}{5} \cdot 5 = 3$
El producto de un número natural y su sucesor	*m:* un número natural	$m(m + 1)$	$m(m + 1) = 5(5 + 1) = 30$
La mitad de la amplitud de un ángulo aumentada en tres	*m:* amplitud de un ángulo	$\frac{1}{2}m + 3$	$\frac{1}{2}m + 3 = \frac{1}{2} \cdot 5 + 3 = \frac{11}{2} = 5{,}5$

Epígrafe 3.1.1

1. a) – 10,5 b) – 13 c) 0,4 d) – 19 e) – 1,5
f) 20,4 g) – 31 h) – 7 i) – 3,5 j) 24 k) 84

2. Ver la tabla 3.44

Tabla 3.44

Expresión algebraica	$m = 2$	$m = -1$	$m = \frac{1}{4}$	$m = 1,5$
$-3m$	-6	3	$-\frac{3}{4}$	$-4,5$
$2m - 7$	-3	-9	$-\frac{13}{2}$	-4
$4m^2 - 115$	15	3	$-\frac{3}{4}$	8
$m^2 + 3m + 2$	12	0	$\frac{45}{16}$	8,75

3. a) 26 b) $\frac{1}{2}$ c) 0 d) $-\frac{9}{2}$

4. a) $-13,125 \in \mathbb{Q}$ b) $10,05 \in \mathbb{Q}_+$ c) $14 \in \mathbb{N}$ d) $-5 \in \mathbb{Z}$

5. 1

6. El valor numérico del polinomio para $x = -\frac{1}{3}$, $y = -5$ es 36 que es un múltiplo de cuatro.

7. a) Segundo grado b) Primer grado c) Segundo grado
d) Cero grado e) Tercer grado f) Noveno grado
g) Sexto grado h) Octavo grado

8. El monomio de mayor grado es $4a^2b4c^3$, pues es de noveno grado y los grados de los otros monomios son menores que nueve.

9. a) Primer grado b) Segundo grado c) Segundo grado
d) Tercer grado e) Segundo grado f) Cuarto grado
g) Séptimo grado

Epígrafe 3.2.1

1. a) $9p$ b) $4d - 1$ c) $2 - jk$ d) $-q3 - 3q^2 + 7q + 1$ e) $2w^2 - 5wv - v^2$

f) $2a^2b + 2ab - 6ab^2$ g) $12x^3y2 - 4x^2y + x3y^3 - 3x^3$
h) $6{,}8e^2g2h - 7{,}5eg^2h$ i) $8s^2t - 14st + 3st^2$
j) $\frac{1}{5}a^3bc^2 + 5a^3b^2c - a^3b^3c^3 + 5$

2. a) $-3st - 2$ b) $-4z - 1$ c) $-7q + p + 11$
d) $8x - 5xy - x2$ e) $-6mn^2 + 5$ f) $13p^2q + 3pq^3 - 5$
g) $12{,}7 - 2{,}5z^2$ h) $8a^2 - 1{,}8ab$ i) $7p + 5$

3. a) $8{,}63g$ + Valor numérico: $-1{,}63$ b) $-5hkj$ + Valor numérico: 62

5. a) $3{,}3a - 10b + 6{,}5$ b) $9{,}6a - 2{,}2b - 7$ c) $2{,}7a - 2b - 5{,}5$
d) $-1{,}9a + 11b - 13{,}5$ e) $11{,}6a - 11{,}2b + 14$ f) $11{,}7a - 7{,}2b + 5{,}5$

6. a) $-4x^4 - \frac{7}{4}x^3 - x - 1$ b) $4x^4 + \frac{1}{4}x^3 + 2x^2 - 5x + 7$

7. a) $7pq2 - 3$ b) -32

8. a) $\frac{3}{2}x$ b) Perímetro de $AGFECD$: 72 cm, área de $AGFECD$: 216 cm^2

9. a) $C = 2x^3 - 11x^2 + 2x - 4$ b) Tercer grado

11. a) $S = 2x^3 - 2x^2 - 8x + 11$ b) Tercer grado c) 4425

12. a) $P = 2x^2 - 2x - 6$ b) Segundo grado

Epígrafe 3.2.2

1. a) $15h^2k3$ b) $-4{,}76g^7s2$ c) $5k^2 + 10k$ d) $3v^5x2 - 27v^5$
e) $-2z^2p - 2z^2p2$ f) $8{,}3n^3 - 24{,}9n^2 + 16{,}6n$
g) $3w^4 + 6w^3 - 12wh$) $h4k^3 + h3k^4 - 3h^3k3$
i) $h2 + 14h + 45$ j) $a2 - 7a - 7b + ab$
k) $8m^2 + 10mn + 2n^2$ l) $2q^3r - 4qr3 - q2r^2 + 2r^4$
m) $x2y^2 + 6xyz + 9z^2$ n) $k3 + 6k^2 + 6k + 5$ ñ) $v3 + 2v^2 - v - 2$
o) $5m^3 - 8m^2 + 16m + 8$ p) $3a^3b + 5a^2 + 6a^2b2 + 3ab3 + 10ab + 5b^2$
q) $2c^3d\,4 - 4c^2d\,3 + 10d\,2c + c2d^2 - 2cd + 5$
r) $7x^4 + 2{,}8x^3 - 8x^2 - 0{,}4x + 1$ s) $8p^5 + 6p^4 - 8p^3 + 5p^2 + 8p - 4$
t) $2q^4 - 2q^3p - q2 + pq - 2p^2$ u) $4z^3 - 4zt2 - 12z - 2tz2 + 2t^3 + 6t$
v) $3x^2 - 6xy + 7x - 8y + 4$ w) $8x^5 - 6x^3 + 8x^2 + x - 2$

2. Ver la tabla 3.45.

Tabla 3.45

$A-(B+C)$	$(A+B)C$	$A+B\cdot C$	$A\cdot C+B$
$-4x-20$	$2x^3+27x^2+120x+175$	$x^3+16x^2+8^2x+135$	$x^3+13x^2+55x+75$
$2x-14$	$2x^3-29x^2-98x-49$	$x3-15x^2+71x-105$	$x^3-12x^2+26x+63$
$-2x^3+3x^2+9x-5$	$4x^4-11x^2+9x-2$	$4x^4-4x^3-13x^2+19x-6$	$6x^3+3x^2-15x+6$
$-5x^2+7x+6$	$75x^3+215x^2+177x+45$	$50x^3+90x^2+71x+21$	$25x^3+140x^2+140x+39$
$14x-14$	$2x^3-13x^2+20x-9$	x^3-x^2+9x-9	$x^3-14x^2+22x-9$

3. a) $14a-2ab+21a^2b$ b) $160a^3b2+5ab2-60ab$ c) $-10{,}5$

4. a) $x2+xy-6y^2$ b) $x3+x2y-5xy2+3y^3$
c) $x3-4x^2y+5xy2-2y^3$ d) $x3-4x^2y+5xy2-2y^3+x+3y$
e) $-5x^2y+10xy2-5y^3$

5. a) $-2k^2+14$ b) $23k^2+3k-10$ c) $-12k^2+3k-5$
d) $5k^2+13$ e) $21k^3+51k^2-14$

7. $\frac{t}{3}(3t+9)+(t+2)(t-7)-2\left(t^2-t-7\right)$

$= t^2+3t+(t^2-7t+2t-14)-2(t^2-t-7)$
$= t^2+3t+(t^2-5t-14)-2t^2+2t+14$
$= t^2+3t+t^2-5t-14-2t^2+2t+14$
$= 0$

8. $A+2aA\ AB$
$= (a-3b)+2a(a-3b) = (a-3b)\quad(2a+1)$
$= a-3b+2a^2-6ab = 2a^2+a-6ab-3b$
$= 2a^2-6ab+a-3b = 2a^2-6ab+a-3b$
Luego, $A+2aA = AB$

9. $-x2y^2+2xy2-3x^2y$

Epígrafe 3.2.3

1. a) $7p$ b) $-4m^2n$ c) $4{,}6w^3$ d) $2p+3$ e) $3x^2+2$

f) $a^2 + a + 1$ g) $\frac{1}{2} - \frac{3d^2}{2c}$ h) $\frac{2}{3}a^2 - \frac{2}{3}b^2$ i) $2z - 1$ j) $\frac{h^2}{k} - 2 + \frac{k}{h}$

k) $2p^2 - \frac{p^6}{q} - \frac{p^5}{5}$ l) $\frac{1}{2}x^2y^2 + xy^2 - \frac{1}{3}x^3y + \frac{1}{4}xy$

2. a) Cociente: $m - 2$, resto: 0 b) Cociente: $-2w^2 - 3w - 5$, resto: -5
c) Cociente: $t - 3$, resto: 15 d) Cociente: $2d + 13$, resto: 52
e) Cociente: $q + 5$, resto: 0 f) Cociente: $a^2 + 2^a + 4$, resto: 2
g) Cociente: $2x^2 + 3x + 1$, resto: -7 h) Cociente: $3p - 2$, resto: -8
i) Cociente: $k^2 + 2k + 2$, resto: 0 j) Cociente: $y^2 + 2y + 3$, resto: 1
k) Cociente: $2x^2 - 9x + 18$, resto: -24

3. a) $4(x^2 + x) = 4x^2 + 4x$ b) $x(6x + = 6x^2 + 2x$
c) $2y(3x + 2) = 6xy + 4y$ d) $(x + 3)(x - 5) = x2 - 2x - 15$
e) $(2x + 1)(2x^3 - 3x + 2) = 4x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x + 2$
f) $(x3 - 5)(3x + 2) = 3x^4 + 2x^3 - 15x - 10$

4. $7a^2bc2 - 3a^2b2c + 9$

5. $m + 4$

6. Cociente: $2x + 7$ y resto: 3

7. El divisor es $2x + 3$

8. $C = x2 + 1$

9. Ver la tabla 3.46:

Tabla 3.46

Dividendo	Divisor	Cociente	Resto
$x2 - x + 8$	$x - 2$	$x + 1$	10
$2x^2 + 7x + 3$	$x + 3$	$2x + 1$	0
$x3 + 1$	$x + 2$	$x2 - 2x + 4$	-7
$x2 + 2x - 1$	$x - 1$	$x + 3$	2

10. a) $4x^2 - 5x - 7$
b) $2x^3 - 27x + 8$

c) $4x^3 - 20x^2 + 55x - 23$
d) $x2 + 3x - 7$
e) $-4x^3 + 20x^2 - 55x + 23$

11. **Tabla 3.6**

A	***B***	***C***	***A + B·C***	***A·C + B***
$x^2 + 7x + 10$	$x^2 + 10x + 25$	$x + 5$	$x^3+16x^2+82x+135$	$x^3+13x^2+55x+75$
$x^2 - 6x - 7$	$x^2 - 9x + 14$	$x - 7$	$x^3-15x^2+71x-105$	$x^3-12x^2+26x+63$
$2x^2 + 3x - 2$	$2x^3 - x^2 - 8x + 4$	$2x - 1$	$4x^4-4x^3-13x^2+19x-6$	$6x^3+3x^2-15x+6$
$5x^2 + 23x + 12$	$10x^2 + 11x + 3$	$5x + 3$	$50x^3+90x^2+71x+21$	$25x^3+140x^2+140x+39$
$-x^2 + 12x - 11$	$-x^2 - x + 2$	$1 - x$	x^3-x^2+9x-9	$x^3-14x^2+22x-9$

12. $A = 2x^2 - 5x - 3$ a) El polinomio A es de segundo grado.

13. a) $-x^2 + x + 8$
b) El polinomio resultante es de segundo grado.
c) 4,25

14. $P \cdot h = 2(a + b)h$
$= (2a + 2b)h$
$= 2ah + 2bh$
$= A_L$

Epígrafe 3.3

1. a) *F*, ya que depende del dominio de la variable.
b) *F*, porque el valor de la variable que transforma la ecuación en una proposición verdadera no es un número natural.
c) V
d) *F*, porque para ningún valor de la variable x la ecuación $0 \, . \, x = 2$ se transforma en una proposición verdadera.
e) V
f) *F*, ya que toda ecuación lineal en una variable en el conjunto de los números reales tiene solución única.

g) *F*, porque la solución de la ecuación no es un número fraccionario.
h) *V* i) V
j) *F*, pues la solución de la ecuación es $x = \frac{15}{2}$ y, por lo tanto, su conjunto solución es $S = \left\{\frac{15}{2}\right\}$

2. a) $m = -1$ b) $p = -2$ c) $x = \frac{1}{3}$ d) $a = 2$ e) $x = 5$ f) $x = \frac{6}{5}$

g) $q = 3$ h) $x = 8$ i) $x = 1{,}75$ j) $t = \frac{5}{3}$ k) $b = 2$ l) $p = \frac{4}{5}$

m) $n = -5$ n) $y = 5$ ñ) $m = -\frac{1}{3}$ o) $d = -22$ p) $w = \frac{1}{5}$

3. a) $S = \left\{\frac{8}{3}\right\}$ b) $S = \{2\}$ c) $S = \{-2\}$ d) d) $S = \{3\}$ e) $S = \{1\}$

f) $S = \{6\}$ g) $S = \{0\}$ h) $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$ i) $S = \left\{-\frac{13}{5}\right\}$ j) $S = \{3\}$

k) $S = \{1\}$

4. a) p = 0,4 b) x = 20 c) b = 8 d) a = – 0,5 e) q = – 1 f) x = 1
g) x = 0 h) n = – 5 i) p = – 1 j) y = – 5 k) d= – 7 l) m = – 0,5

5. Ver la figura 3.122

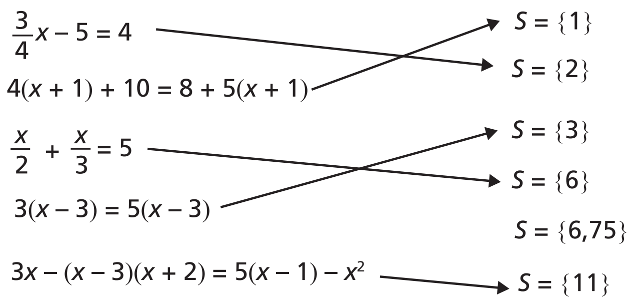


Fig. 3.122

6. Para $x = \frac{4}{3}$

7. La ecuación se transforma en una proposición falsa para todos los números reales distintos de dos.

11. $a = 11, 5$ **12.** $b = -\frac{11}{2}$

13. **13.1** b) **13.2** c) **13.3** d) **13.4** a)

14. a) Ningún número natural satisface la ecuación.
b) Ningún número fraccionario satisface la ecuación.
c) El número racional –1 satisface la ecuación.

15. Ningún número fraccionario satisface la ecuación porque el valor que transforma la ecuación en una proposición verdadera no es un número fraccionario.

16. Ver la tabla 3.47

Tabla 3.47

Ecuación	**Conjunto solución para el dominio de la variable**			
	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Q}_+$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$
$5x - 2 = 3(x + 2)$	$S = \{4\}$	$S = \{4\}$	$S = \{4\}$	$S = \{4\}$
$4(2 - a) + 5a\ 2a + 9$	$S = \emptyset$	$S = \emptyset$	$S = \{-1\}$	$S = \{-1\}$
$2(y + 3{,}1) = 2(1{,}1 - 4y) + 2y$	$S = \emptyset$	$S = \emptyset$	$S = \emptyset$	
$7t - 3 = 2(2t + 3) + 3$	$S = \emptyset$	$S = \emptyset$	$S = \{-11\}$	$S = \{-11\}$
$2(q - 2) + q = 3(q - 1) - 1$	$S = \mathbb{N}$	$S = \mathbb{Q}+$	$S = \mathbb{Z}$	$S = \mathbb{Q}$
$(3d + 1)(d - 2) = 3d^2 + 7d - 26$	$S = \{2\}$	$S = \{2\}$	$S = \{2\}$	$S = \{2\}$
$(2p + 3)(p - 4) - 8 = 2p(p - 1)$	$S = \emptyset$	$S = \emptyset$	$S = \emptyset$	

18. a) Tienen el mismo conjunto solución porque al aplicar transformaciones equivalentes la ecuación $4x + 3 = x - 3$ se reduce a la ecuación $3x - 6$.
b) No tienen el mismo conjunto solución, pues dos no es una solución de la ecuación $4x = 4x + 2$ porque no transforma la ecuación en una proposición verdadera.

c) No tienen el mismo conjunto solución, ya que la ecuación $7(x - 5) - 7x + 5 = x + 3$ no se reduce mediante transformaciones equivalentes a la ecuación $0 = x + 3$.

19. a) Para $p = 2$

b) Para que la ecuación tenga solución en $\mathbb{N}$ se tiene que cumplir que $\frac{p+3}{p-2} \in \mathbb{N}$, para eso $p + 3$ tiene que ser divisible por $p - 2$. Por ejemplo, para $p = 3$, $p = 7$ y $p = -3$.

c) $p = -\frac{6}{7}$

20. Para $a = \frac{3}{4}$

Epígrafe 3.3.1

1. a) $\frac{F_g}{m} = g$ b) $m\Delta_t = Q$ c) $\sqrt{A} = l$ d) $t = \frac{w}{p}$ e) $\frac{A_L}{2\pi r} = h$

f) $\frac{3V}{A_B} = h$ g) $\frac{s - s_0}{V} = t$ h) $\frac{L}{2\pi} = r$ i) $\frac{D\, r}{c} = d$ j) $\frac{V - V_0}{a} = t$

k) $\frac{A - 2ab}{2(a+b)} = h$ l) $\frac{a_n - a_l}{n-1} = d$ m) $\frac{2A}{d_2} = d_1$ n) $\frac{A - \pi r^2}{\pi r} = g$

2. d) 2. c) 2. a) La longitud del radio de la circunferencia es aproximadamente 3,9 cm.

3. 4. $\frac{2A - h(p+r)}{h} = q$

4. 4.2 $F = \frac{9C + 160}{5}$ 4.3 $L = \frac{360^o b}{\alpha}$

5. a) $\frac{c - a}{c + 3} = d$ b) $\frac{m - 2}{m + 5} = a$ c) $\frac{5p - 3m}{2} = n$

Epígrafe 3.3.2

1. 1. a) 1. d) 1. b) 1. b) 1. c) 1. d) 3.8x 3.3x^2

2. Los otros lados del triángulo isósceles miden 4,5 cm.

3. Cada pedazo serruchado tiene una longitud de 60 cm.

4. En el puesto de venta hay 40 naranjas, 80 limones y 10 guayabas.

5. Gabriela fue elegida jefa de colectivo al obtener la mayoría de los votos.

6. La secundaria básica Lidia Doce fue la que menos árboles sembró (187).

7. En el ejercicio Meteoro 2013 en esa secundaria participaron 137 estudiantes, 22 trabajadores y 11 padres.

8. El pionero el primer día leyó 72 páginas; el segundo, 18 y el tercero, 36.

9. Los estudiantes recuperaron 272 lb de cartón y papel.

10. El 50,5 % de los delegados provinciales son mujeres.

11. El trapecio tiene un área de 28 d*m*2.

12. El rectángulo tiene un área de 1,2 *m*2.

13. La amplitud del ángulo mayor es de 110°, la del mediano 40° y la del menor 30°.

14. Al consumo de hospitales fueron destinadas 100 000 t de papa.

15. Al cultivo de frutas se emplearon 20 caballerías y 6 a viandas.

16. Están interesados en matricular en la escuela pedagógica 98 estudiantes.

17. En la competencia participaron 25 féminas ajedrecistas.

18. a) El tanque tenía al inicio 300 *L* de refresco.
b) En la mañana se vendieron 180 *L* de refresco.
c) El tanque tiene una capacidad de 400 *L*.

19. a) De lechuga hay sembradas 12 ha.
b) Faltan por recoger en total 32 ha.

20. a) Joanna llevó a la feria 100 pesos.
b) Cada libro tenía un precio de 12 pesos.

c) Joanna destinó a la merienda el 10 % del dinero que llevó a la feria.

21. a) La matrícula de la escuela es de 600 estudiantes.
b) Hay cuatro grupos de séptimo grado, cinco de octavo y siete de noveno.

22. Antes de realizar la escuela de padres un aula tenía 16 sillas y la otra 32.

23. El Círculo de Interés Pedagógico tiene 30 integrantes y el de Medicina Natural y Tradicional, diez.

24. a) En la votación participaron 35 pioneros.
b) Ninguna, porque Brenda y Laura obtuvieron la misma cantidad de votos, por lo que hubo que realizar una nueva votación.

25. La amplitud del ángulo α es 141° y la del ángulo β es 39°.

26. Los números son cinco y ocho.

27. Los lados del rectángulo tienen 48 y 12 cm de longitud.

Epígrafe 3.4.1

1. a) 5 b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{5}{2}$ e) $\frac{1}{8}$ f) 8 g) $\frac{1}{3}$ h) 28 i) $\frac{4}{3}$ j) $\frac{1}{18}$

2. Algunos números pueden ser:
a) ocho y diez; 16 y 25; 40 y 50 b) seis y cuatro; 21 y 14; 36 y 24
c) cuatro y 12; cinco y 15; 0,3 y 0,9 d) nueve y 21; 12 y 28; 11 y 77

3. 3. a) 3, b) 2, c) 3 3. a) $\frac{3}{4}$, b) $\frac{2}{3}$, c) $\frac{3}{4}$ 3.3 a) $\frac{1}{4}$, b) $\frac{1}{3}$, c) $\frac{1}{4}$

4. a) $\frac{8}{9}$ b) 3 c) 50 d) 2

5. a) No b) Sí c) No d) No e) Sí

6. 12 cuadraditos

7. Ver la figura 3.123

Fig. 3.123

8. a) No b) Sí c) Sí d) No

9. a) $x = \frac{1}{3}$ b) $y = 21$ c) $a = \pm 40$

10. 393

11. 105

12. 21

13. 36

14. 66

15. $7,20.

Epígrafe 3.4.2

1. a, c, e, g y h

2. a y c

3. a) $k = 1,6$; 3,2 y 11 b) $k = 0,085$; 4,25 y 10,2
c) $k = 18$; 7 y 2 169

4. 4.a 4.c

5. a) 1 080 piezas b) 150 h

6. a) $50,00 b) 172 h

7. 275 km

8. $180,00

9. 2,4 m

10. 295,5 km

11. 16 kg

12. Seis estudiantes

13. 43,75 %

14. 90 ejercicios

15. a) 3 840 km b) 14,5 cm.

16. 18, 24 y 36

17. 3 cm; 6 cm y 7,5 cm

18. 15; 20 y 25

21. a, c, d y e

22. a; b

23. a) k = 250; 12,5 y 5 b) k = 135; 15 y 2,25

24. **24.1** d **24.2** b **24.3** a

25. Dos días y medio

26. Seis hombres más

27. Dos horas

28. a) 36 b) 6

29. 27 min

30. En $4,00

Epígrafe 3.4.3

2. A(4;3), B(0;-1,5), C(0;2), D(5;0), E(-3;1), F(-2;-2,y G(2;-3)

3. Triángulo ABC: A(0;3), B(0;y C(2,5;0). Área: 3,75 u^2.
Rectángulo $DEFG$: D(-2;-3), E(1;-3), F(1;-1) y G(-2;-1). Área: 6 u^2

Paralelogramo *HIJK*: *H*(3;1,5), *I*(5;1,5), *J*(6;4) y *K*(4;4). Área: 5 u^2
Trapecio rectángulo *LMNÑ*: *L*(0;-2), *M*(6;-2), *N*(6;0) y *Ñ*(4;0). Área: 8 u^2

4. a) II cuadrante b) IV cuadrante c) III cuadrante
d) I cuadrante e) III cuadrante f) IV cuadrante

5. Ver la figura 3.124.

6. Una solución puede ser la figura 3.125.

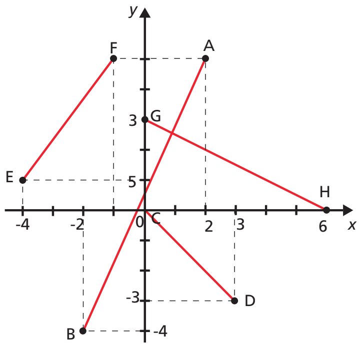


Fig. 3.124

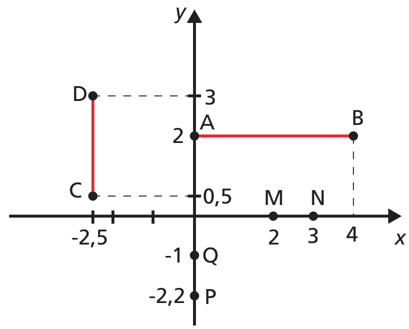


Fig. 3.125

6.1 a) *A*(0;y *B*(4;2) b) *C*(–2,5;0,5) y *D*(–2,5;3)
c) *M*(2;0) y *N*(3;0) d) *P*(0;–2,2) y *Q*(0;–1)

7. a) *Q*(–1; c) 12 u^2

8. Triángulo *ABC* isósceles de $\overline{AC}$ (fig. 3.126).

10. *P′*(–2;3), *R′*(5;2), *M′*(4;(fig. 3.127).

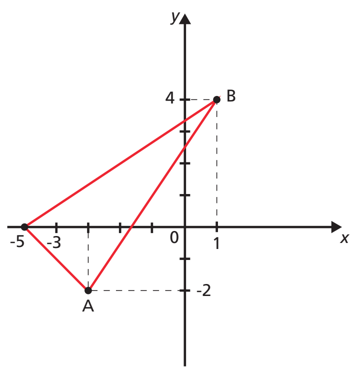


Fig. 3.126

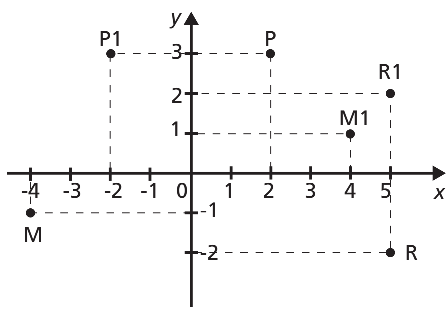


Fig. 3.127

11. a) Un punto (fig. 3.128).
b) Tres puntos (fig.3.129).
c) Dos puntos (fig. 130).

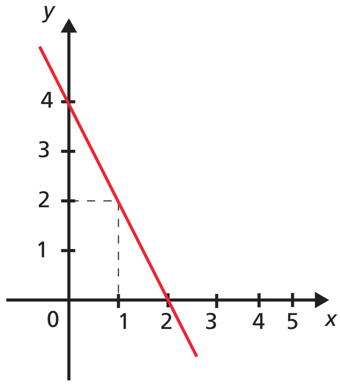


Fig. 3.128

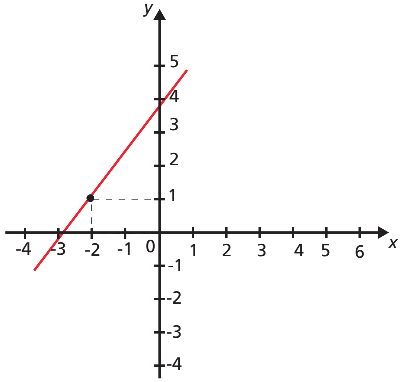


Fig. 3.129

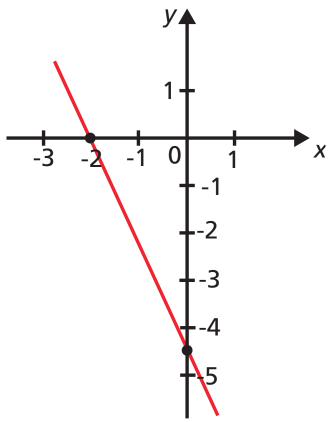


Fig. 3.130

Epígrafe 3.4.4

1. a) Sí
b) No, porque al último elemento del conjunto de partida le corresponden dos elementos en el de llegada.
c) Sí
d) No, porque hay un elemento del conjunto de partida que no está relacionado con ningún elemento del conjunto de llegada.

e) No, al elemento 2 del conjunto de partida en la tabla se le asocian dos elementos.

f) No, si trazas una paralela al eje *y* y la trasladas hacia ambos lados, dicha recta corta en varias ocasiones a la gráfica en dos puntos.

2. a) $P = \left\{4; -2,5; \frac{1}{2}; 1; 0; -1; -1,5; -3; -\frac{1}{2}\right\}$

b) N = {–8; –5; 1–1; –2; 0; 2; 3; 6{; 7}

c) A = {4; 2,5; 2; 0; 1; 1,5; 3; 32}   1

d) B = {16; 6,25; 4 ;1; 0; 2,25; 9;122}

3. Ver la figura 3.131.

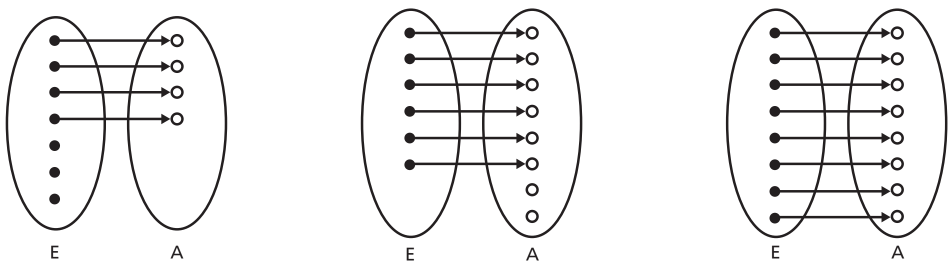


Fig. 3.131

a) No   b) Sí   c) Sí

4. a) Sí   b) Sí   c) No, el cero no tiene recíproco   d) Sí

e) Sí

f) No, ya que el cocodrilo no pertenece a ninguno de los grupos relacionados en el conjunto de llegada.

g) No, en el conjunto de llegada no está el significado de *boy.*

h) Sí

4.1. a) Dominio: conjunto de los números reales, imagen: conjunto de los números reales

b) Dominio: elementos del conjunto A, imagen: {1959; 1953; 1878; 1961; 1956; 1869}

d) Dominio: { ■ ⬢ ⏷ ⬠ △ } Imagen: {3; 4; 5; 6}

e) Dominio: el conjunto formado por todas las personas, imagen: el conjunto formado por todos los números de carné de identidad

h) Dominio: {Cauto; Volga; Amazonas; Nilo; Amarillo}, imagen: {América; Europa; Suramérica; África; Asia}

8. a) Sí b) 5 c) $2x - 1$

9. a) Imagen: – 5; 9; y 23 b) Imagen: 0; $-\frac{7}{4}$; $-\frac{7}{2}$ c) Imagen: 4; 2,25; y 25

10. a) 1; $\frac{33}{8}$; 3 b) 3,5; $\frac{31}{16}$; 2,5 c) – 9; $\frac{3}{8}$; – 3

11. a) 5 b) $\frac{1}{3}$ c) $-\frac{5}{8}$

12. a) $a = 3{,}5$ b) $a = 2$ c) $a = 5{,}5$

Epígrafe 3.4.5

1. a) ($m = 3$ y $n =$ b) ($m = 1$ y $n = -$ e) ($m = 3$ y $n =$ f) ($m = \frac{1}{3}$ y n = 3)

h) ($m = 0$ y $n = 7{,}5$) i) ($m = 0$ y $n = -4$) k) ($m = -2$ y $n = 5$)

l) ($m = -\frac{1}{4}$ y $n = 2$) m) ($m = \frac{2}{3}$ y $n = \frac{8}{3}$) n) ($m = -2$ y $n = 0$)

ñ) ($m = 1$ y $n = -8$) o) ($m = -1$ y $n = 2$)

2. c

3. a) $y = x - 1$ b) $y = -3x + 0{,}6$ c) $y = \frac{2}{3}x - \frac{3}{2}$ d) $y = 4x$

e) $y = 9$ f) $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$

4. a) $m = -2$ y $n = -\frac{3}{2}$

b) $f(0) = -\frac{3}{2}$; $f(-1) = \frac{1}{2}$; $f\left(-\frac{3}{4}\right) = 0$; $f(1{,}2) = -3{,}9$

c) $x = -\frac{3}{4}$; $x = -\frac{3}{2}$; $x = 0$

5. a) $d = 60t$ b) $s = 3h + 450$ c) $p = 85$ d) $h = \frac{1}{3}A$

Epígrafe 3.4.6

1. **1.1** Sí, porque en cada ecuación $n = 0$ que es la intersección de la gráfica con el eje y.

1.2 No, porque en unos casos $m > 0$ y en otros $m < 0$; y la inclinación está dada por el signo de la pendiente.

2. **2.2** No, porque en cada caso $n \neq 0$.

4. **2.3** No, porque en unos casos $m > 0$ y en otros $m < 0$; y la inclinación está dada por el signo de la pendiente.

3. **3.1** Las rectas son paralelas al eje x, ya que la pendiente en cada caso es igual a cero.

4. c) Sí, pertenece d) $-\frac{4}{3}$

5. Ver la figura 3.132.

6. Ver figura 3.133.

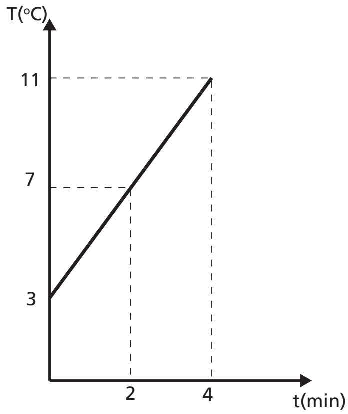


Fig. 3.132

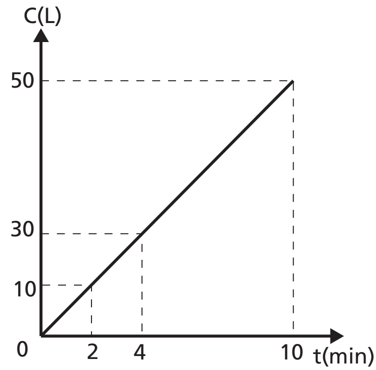


Fig. 3.133

7. Ver figura 3.134.

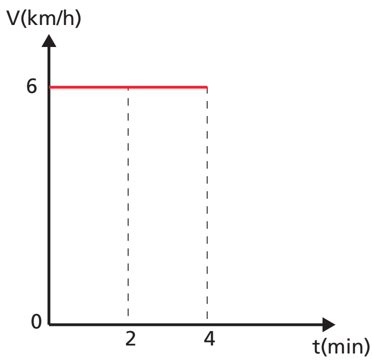


Fig. 3.134

Epígrafe 3.4.7

1. a) $y = 5x$ b) $y = -3x + 4$ c) $y = -1$

d) $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ e) $y = -2x + 3$

f) $y = -\frac{5}{7}x + 2{,}5$ g) $y = -\frac{1}{10}x + \frac{1}{5}$

h) $y = \frac{8}{15}x$ i) $y = -2{,}4$

2. a) $y = \frac{3}{2}x - 2$ b) $y = -x + 1$ c) $y = 4$

2.1 a) Dominio: $\{x \in \mathbb{R}\}$, imagen: $\{y \in \mathbb{R}\}$
b) Dominio: $\{x \in \mathbb{R}\}$, imagen: $\{y \in \mathbb{R}\}$
c) Dominio: $\{x \in \mathbb{R}\}$, imagen: $\{4\}$

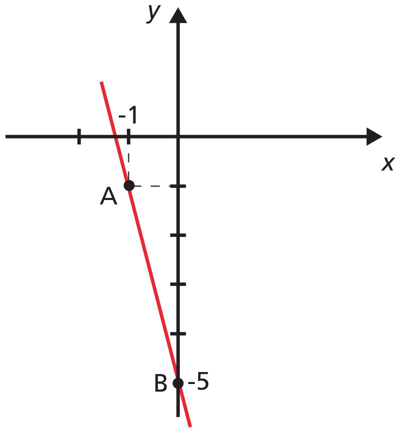


Fig. 3.135

3. a) $n = -7$ b) n –-3 c) $n = 0$

d) $n = -\frac{14}{3}$ e) $n = 7$

4. a) $m = 3$ b) $m = \frac{1}{3}$ c) $m = \frac{1}{3}$

d) $m = \frac{8}{5}$ e) $m = \frac{2}{3}$

5. **5.1** a) $f(x) = -4x - 5$ b) $F(-\frac{1}{4};-$ c) 5

5.2. Ver la figura 3.135.
5.3 Dominio: $\{x \in \mathbb{R}\}$, Imagen: $\{y \in \mathbb{R}\}$

6. a) Ver la figura 3.136.
b) Dominio $h: \{x \in \mathbb{R} : -5 \leq x \leq 5\}$,

Imagen $h: \{y \in \mathbb{R} : -17 \leq y \leq 13\}$

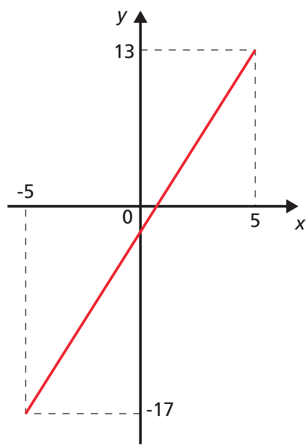


Fig. 3.136

7. a) $C = 2t + 20$ b) 20 L c) 50 L
d) 20 min e) 8:40 a.m.

8. a) $T = -\frac{23}{2} + 46$ b) 0 °C

c) –11,5 °C d) 8:40 p.m.

9. **9.1** a) $h(t) = -0{,}1t + 1$ b) 0,2 m
9.2 a) 1 m b) 12 meridiano

Epígrafe 3.4.8

1. a) $x = 5$ b) $x = 0{,}5$ c) $x = 3{,}5$ d) $x = -8$ e) $x = 3$
f) $x = 12$ g) $x = 1{,}5$ h) $x = -0{,}3$ i) $x = 2{,}5$ j) No tiene
k) No tiene l) –0,01

2. a) x = –1 b) x = 0 c) No tiene d) x = 2
2.1 a) $y = x + 1$ b) $y = 0{,}5x$ c) $y = 1$ d) $y = -2x + 4$

3. – 18

4. $f(x) = -9x + 3$

5. a) x = 0,5
b) Ver la figura 3.137
c) Imagen: {y ∈ *R* }
5.1 *C*

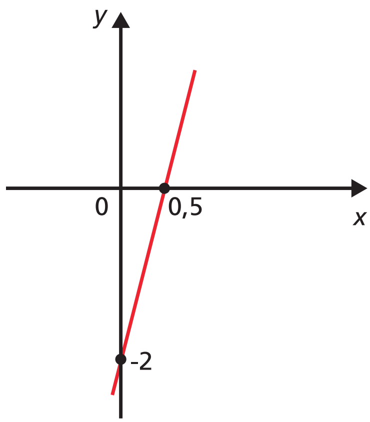


Fig. 3.137

6. a) Ver la figura 3.138.
b) $y = 5x - 4$ c) Dom: $x \in \mathbb{R}$, imagen: $y \in \mathbb{R}$ d) $x = 0{,}8$ e) $y = -19$
f) $x = 0{,}4$

7. a) $y = -\frac{3}{4}x + 3$ b) $A = 6u^2$ c) 12 *u*

9. a) 30 L b) $C = -\frac{3}{2}t + 30$ c) 10:50 a.m. d) 7,5 *L*

9. a) 15 000 pesos b) 12 000 pesos
c) 10 años $x \in \mathbb{R}$
d) Ver la figura 3.139.

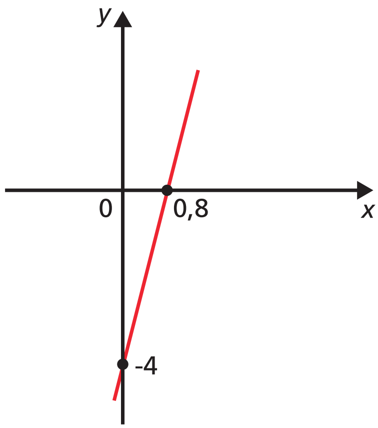


Fig. 3.138

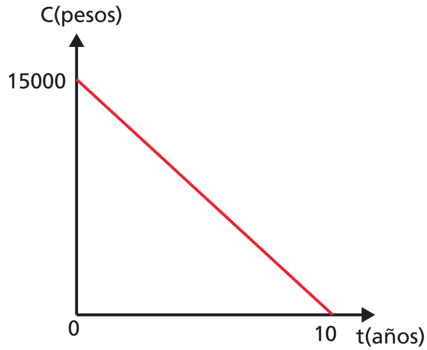


Fig. 3.139

Epígrafe 3.4.9

1. a) $y = -x + 1$ b) $y = 3x - 12$
c) $y = -x - 2$
d) $y = x - 8$ e) $y = 3x$ f) $y = x$
1.1 a) $m = -1$ b) $m = 3$
c) $m = -1$ d) $m = 1$
e) $m = 3$ f) $m = 1$
1.2 La recta se inclina hacia: a) abajo
b) arriba c) abajo d), e) *y* f) arriba

2. a) $m = 2$ b) $m = 3$ c) $m = 8$
d) $m = -\frac{3}{2}$ e) $m = 4$ f) $m = -1$

g) $m = -\frac{6}{5}$ h) $m = -\frac{1}{2}$ i) $m = 0$

3. $m_{\overline{AB}} = \frac{3}{5}$; $m_{\overline{AC}} = -\frac{5}{3}$ y $m_{\overline{BC}} = -\frac{7}{11}$

4. a) Creciente b) Decreciente
c) Creciente d) Decreciente e) Creciente f) Creciente
g) Decreciente h) Constante i) Constante j) Decreciente
k) Creciente l) Creciente m) Decreciente

5. Porque el denominador de la fracción se hace cero. En este caso la recta es perpendicular al eje *x*

6.

7. a) La gráfica b, ya que como $m = -\frac{2}{3}$ en la ecuación la recta se inclina hacia abajo.
b) $x = 6$

8. b

9. a) A: se calienta, porque su temperatura asciende. B: se enfría, porque su temperatura desciende.
b) A las 10:31 a.m. y es de 6 °C. c) *A* los dos minutos y medio.

10. a) El recipiente *A*, ya que su gráfica está más inclinada hacia arriba respecto al eje vertical que la gráfica del recipiente *B*.
b) $A : h = \frac{4}{3}t$ y $B : h = \frac{4}{5}t$ c) Sí, una proporcionalidad directa.
d) El recipiente *A* demoró en llenarse 22 minutos y medio.

Epígrafe 3.4.10

1. a) A los 2 min. b) Tenía 0,85 m de altura.
c) Estuvo cerrada 12 min. d) Se vació completamente a las 9:09 a.m.

2. **2.1** Se calienta, porque la temperatura asciende
2.2 a) 10 °C b) 2:30 p.m. c) Hora y media
2.3 A las 3:30 p.m. y fue de 70 °C
2.4 La temperatura mínima alcanzada fue de – 14 °C

3. a) 400 m b) Media c) 100 m
3.2 a) $d = 40t$ b) 1 km
3.3 El abuelo regresó a su casa a las 8:00 a.m.

4. **4.1** a) 60 *m*3 b) 8 h c) 48 m^3
4.2 a) $C = -24t + 252$ b) 4:00 p.m.
4.3 La piscina se vació completamente a las 6:30 p.m.

5. a) $h = \frac{5}{6}t$ b) *A* los 3 min la altura del agua era de 2,5 dm.

c) El tanque demoró en llenarse 18 min.

d) Hubo mayor presión en el tramo de 12 a 18 min, ya que la altura del agua subió 10 dm en 6 min; mientras en el tramo de 0 a 10 min, subió también 10 dm, pero en 10 min.

6. **6.1** a) $V = 40t$ b) 120 min

6.2 La velocidad se mantuvo constante. $V = 80$

6.3 Tenía una velocidad de 60 km/h.

6.4 El desplazamiento del móvil duró 9 h.

7. a) 1 h **7.1** a) 2 h b) 9 h **7.3** $d = 90t - 150$

8. c **9.** a **10.** c

11. a) Ver la figura 3.140

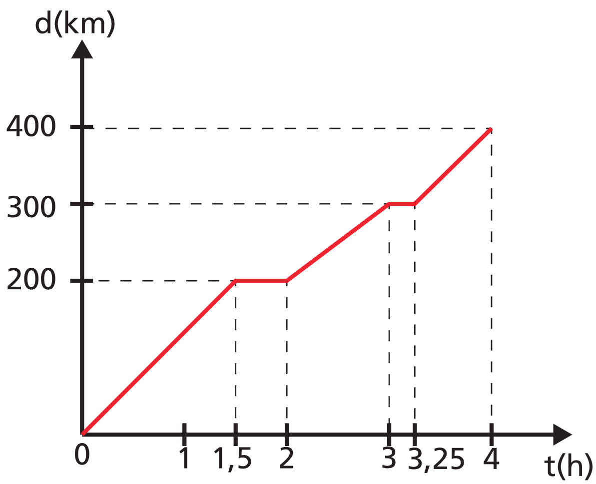


Fig. 3.140

b) $d = \frac{400}{3}t$ c) 45 min d) Llegó a su destino a las 12 m.

Ejercicios del capítulo

11. a) –2,0625 b) 624

12. a) $17b^2 + bc2 - 8c^2$ b) $11q - p - 2$ c) $3n^2 + 3m - 3$ d) $8d^2 - 2cd$
e) $-5x^2 + 2$ f) $2m^3 + 3m^2 - 15m + 5$ g) $5a^3 - 5a^2 - ab - 3$

h) $x + 5$ i) $4a^4 – 11a^2b – 3b^2$ j) $3m^2 – 5m + 2$ k) $4x^2 + 5x – 11$

13. a) $9a^2 + 2ab – 4$ b) $4p^2q – 4pq – 3$ c) $2x^2 + 13xy$
d) $23q^2 – 9p^2 + 33pq$

14. a) $–m2 – – 5mn + 12n^2$ b) $b + 1$ c) $4x – 5$

6. **6.1**
a) $6c^2 – 24d^2 – 4cd – c + 2d$
b) $c + 6d + 1$ c) $6c^3 – – 24d\ 2c – 11c^2 + 12d^2 – 16cd$
d) $–6c^2 – 20cd – c + 2d$ e) $6c^2 + 12cd + 6d^2$
6.2 $\frac{6}{31}$

7. a) $x = –2$ b) $a = 10$ c) $x = 8$ d) $x = –2$ e) $x = 2$

8. Ver la figura 3.141

	A 1		B 8		C 2	5
D 1	0	0	5		1	
E 2				F 1	6	0
G 7	I 0					
J 8	0		L 9	M 3	Ñ 8	7
	0			N 3	5	
K 1	8	4		3		O 0

Fig. 3.141

9. En la especialidad Educación Preescolar hay 75 estudiantes en primer año, en Educación Especial 105 y en Educación Primaria 180.

10. En esta cooperativa de producción agropecuaria están sembradas 25 ha de yuca y 60 h de boniato.

11. Se cosecharon 35 q de tomate y 22 q de cebollinos.

12. La base del triángulo tiene 8 cm de longitud y los lados no base 20 cm de longitud.

13. Un ángulo tiene una amplitud de 60° y el otro 120°.

14. Las longitudes de los lados del triángulo son 23 mm, 24 mm y 25 mm.

15. Área del rectángulo: 240 cm^2

16. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{4}{3}$ e) 3

17. a) 75 ha b) 105 ha

18. Messi: 560 votos y Cristiano: 280 votos

19. a) $M_1 = \{1; 3\}$, $M_2 = \{3; 9\}$,$M_3 = \{7; 21\}$

b) $M_1 = \{24; 60\}$

c) $M_1 = \{3; 12\}$

d) $M_1 = \{7; 1\}$ y $M_2 = \{21; 3\}$

20. a) Proporcionalidad directa, factor de proporcionalidad: 2,7, términos que faltan: 8,1 y 5

b) Proporcionalidad inversa, factor de proporcionalidad: 252, términos que faltan: 252 y 28

c) Proporcionalidad directa, factor de proporcionalidad: 60, términos que faltan: 150 y 8,5.

21. a) 184,6 t b) 35 ha

22. 22 días

23. 12 personas más

24. La estatura de Ariel es de 1,65 m

25. Ver la figura 3.142.

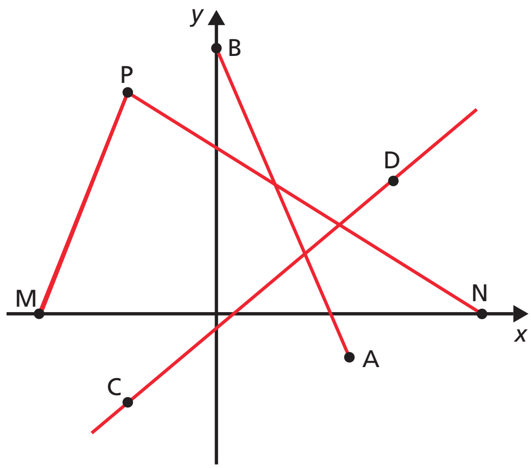


Fig. 3.142

26. a) *A'*(3; –5), *B'*(– 4; –2), *C'*(1;1), *D'*(–2;y *E'*(0;0)
b) A'(–3;5), B'(4;2), C'(–1; –1), D'(2; –5) y E'(0;0)
c) A'(–3; –5), B'(4; –2), C'(–1;1), D'(2;5) y E'(0;0)

27. a) Sí, porque el cuádruplo de un número real siempre existe y es único.
b) No, porque hay raíces cúbicas de números racionales que son irracionales como la $\sqrt[3]{2}$
c) No, porque el antecesor de 0 es –1 que no es un número natural.
d) Sí, cada número entero tiene un único sucesor.
e) Sí, el cuadrado de –2 es 4, por lo que todos los elementos del conjunto de partida se asocian a un único número, el 4.
f) No, porque hay números enteros cuya mitad no es entera, por ejemplo, la mitad de 3 es 1,5; que no es un número entero.
g) No, porque las raíces cuadradas de números negativos no existen.
h) Sí, porque todo número tiene módulo y este valor es único.

28. a) Sí, porque si trazas paralelas al eje *x*, estas cortan a la gráfica en un solo punto.
b) No, porque a un valor de *x* se le asocian infinitos valores de *y*.
c) No, porque si trazas paralelas al eje *x*, estas cortan a la gráfica en más de un punto.
d) Sí, porque si trazas paralelas al eje x, estas cortan a la gráfica en un solo punto.
e) No, porque si trazas paralelas al eje x, algunas cortan en dos puntos.
f) Sí, porque si trazas paralelas al eje x, estas cortan a la gráfica en un solo punto.
g) Sí, porque a cada elemento del conjunto de partida le corresponde exactamente un elemento del conjunto de llegada.

h) Sí, porque a cada elemento del conjunto de partida le corresponde exactamente un elemento del conjunto de llegada.

i) No, porque al elemento del conjunto *A* le corresponde tres elementos del conjunto *B*.

j) No, porque a un elemento del conjunto *A* le corresponde dos elementos del conjunto *B*.

29. a) No, porque al elemento dos le corresponden dos valores;

b) Sí, porque a cada valor de a se le asocia un único valor de b.

c) Sí, porque a cada valor de m se le asocia un único valor de n.

29.1 b) Dominio: {–2; –-1; 0; 1; 2}, imagen: {8}

c) Dominio: {0; 0,3; 1,2; 1,7; 2}, imagen: {0; 2}

30. Sí **31.** Sí

32. a) Ver la figura 3.143.

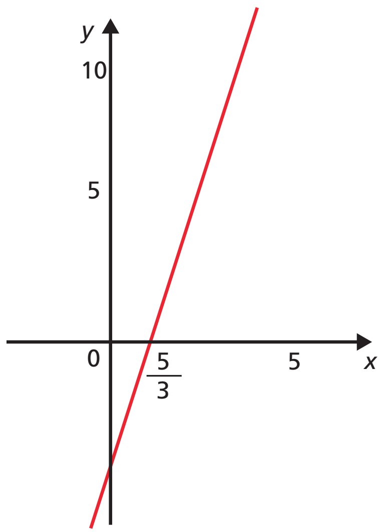


Fig. 3.143

b) Creciente, porque m = 3 > 0 c) Sí d) –12 e) $\frac{25}{6}u^2$ f) –1

33. a) $m = \frac{1}{2}$ b) Ver la figura 3.144

c) $x = 4$ d) Creciente f) $x = -2$

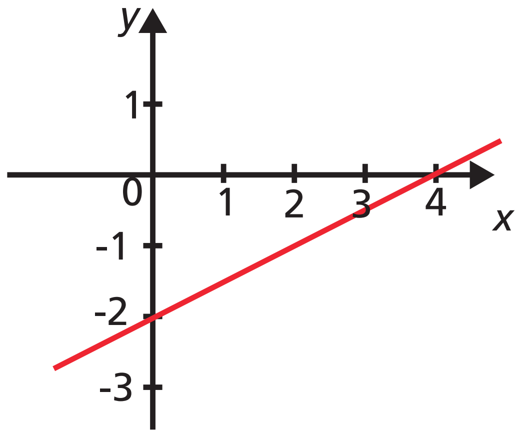


Fig. 3.144

34. a) $h(x) = \frac{1}{2}x + 2$

b) Ver la figura 145.

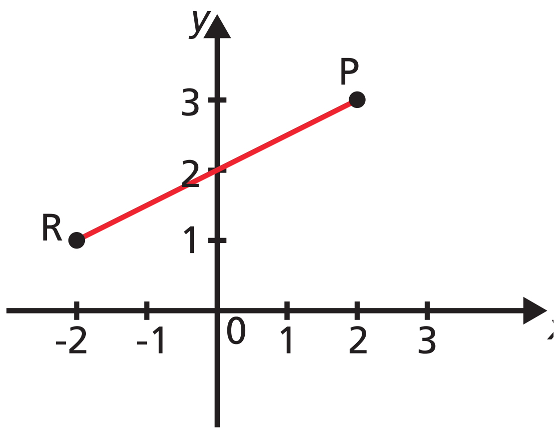


Fig. 3.145

c) (0; d) 8 u^2

35. a) Falso, porque se inclina hacia abajo de izquierda a derecha. (Otra variante: porque a medida que aumentan los valores de *x*, disminuyen los valores de *y*).

b) Verdadero.

c) Verdadero.

d) Falso, el cero es la abscisa del punto, o sea, $x = 3$.
e) Verdadero.
f) Verdadero.
g) Falso, porque se obtiene una fracción negativa y los números negativos no pertenecen al conjunto de los números fraccionarios.

36. a) 30 dm b) 8:10 p.m. c) 25 dm
36.2. a) $h = -0{,}5t + 30$ b) 30 s
36.3. 28 dm **36.4** 8 min **36.5** 15 min 30 s
36.7 La segunda bomba, ya que en 5 min la altura del agua baja 25 dm; y con la primera en 10 min solo desciende 5 dm.

37. a) La gráfica de *B* es la que desciende, ya que en la ecuación dada la pendiente es negativa. La de *A* es la que asciende.
b) B: 20 °C y A: – 45 °C c) La *B*, porque la temperatura desciende.
d) A: 12 m y B: 1:00 a.m. e) 4 h y de 15 °C.

38. a) Ver la figura 3.146.

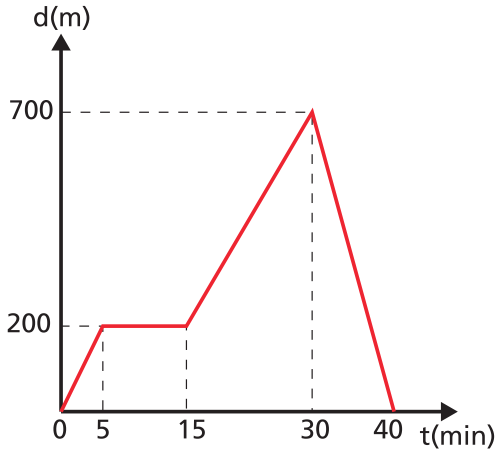


Fig. 3.146

b) $d = \frac{100}{3}t - 300$ c) 7:40 a.m. d) 1 400 m

Anexos

TABLA DE CUADRADOS

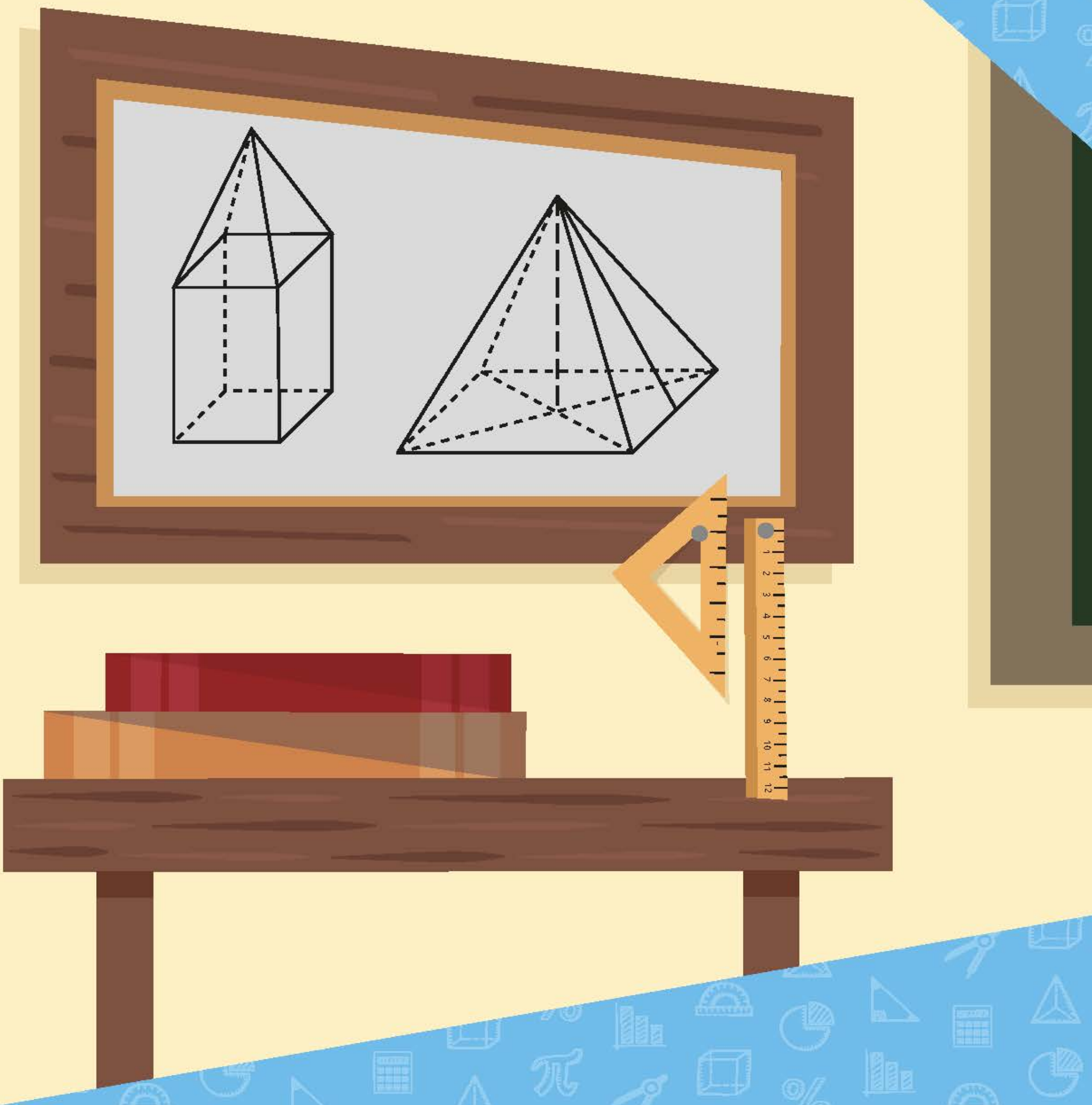
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,020	1,040	1,061	1,082	1,103	1,124	1,145	1,166	1,188
1,1	1,210	1,232	1,254	1,277	1,300	1,323	1,346	1,369	1,392	1,416
1,2	1,440	1,464	1,488	1,513	1,538	1,563	1,588	1,613	1,638	1,664
1,3	1,690	1,716	1,742	1,769	1,796	1,823	1,850	1,877	1,904	1,932
1,4	1,960	1,988	2,016	2,045	2,074	2,103	2,132	2,161	2,190	2,220
1,5	2,250	2,280	2,310	2,341	2,372	2,403	2,434	2,465	2,496	2,528
1,6	2,560	2,592	2,624	2,657	2,690	2,723	2,756	2,789	2,822	2,856
1,7	2,890	2,924	2,958	2,993	3,028	3,063	3,098	3,133	3,168	3,204
1,8	3,240	3,276	3,312	3,349	3,386	3,423	3,460	3,497	3,534	3,572
1,9	3,610	3,648	3,686	3,725	3,764	3,803	3,842	3,881	3,920	3,960
2,0	4,000	4,040	4,080	4,121	4,162	4,203	4,244	4,285	4,326	4,368
2,1	4,410	4,452	4,494	4,537	4,580	4,623	4,666	4,709	4,752	4,796
2,2	4,840	4,884	4,928	4,973	5,018	5,063	5,108	5,153	5,198	5,244
2,3	5,290	5,336	5,382	5,429	5,476	5,523	5,570	5,617	5,664	5,712
2,4	5,760	5,808	5,856	5,905	5,954	6,003	6,052	6,101	6,150	6,200
2,5	6,250	6,300	6,350	6,401	6,452	6,503	6,554	6,605	6,656	6,708
2,6	6,760	6,812	6,864	6,917	6,970	7,023	7,076	7,129	7,182	7,236
2,7	7,290	7,344	7,398	7,453	7,508	7,563	7,618	7,673	7,728	7,784
2,8	7,840	7,896	7,952	8,009	8,066	8,123	8,180	8,237	8,294	8,352
2,9	8,410	8,468	8,526	8,585	8,644	8,703	8,762	8,821	8,880	8,940
3,0	9,000	9,060	9,120	9,181	9,242	9,303	9,364	9,425	9,486	9,548
3,1	9,610	9,672	9,734	9,797	9,860	9,923	9,986	10,05	10,11	10,18
3,2	10,24	10,30	10,37	10,43	10,50	10,56	10,63	10,69	10,76	10,82
3,3	10,89	10,96	11,02	11,09	11,16	11,22	11,29	11,36	11,42	11,49
3,4	11,56	11,63	11,70	11,76	11,83	11,90	11,97	12,04	12,11	12,18
3,5	12,25	12,32	12,39	12,46	12,53	12,60	12,67	12,74	12,82	12,89
3,6	12,96	13,03	13,10	13,18	13,25	13,32	13,40	13,47	13,54	13,62
3,7	13,69	13,76	13,84	13,91	13,99	14,06	14,14	14,21	14,29	14,36
3,8	14,44	14,52	14,59	14,67	14,75	14,82	14,90	14,98	15,05	15,13
3,9	15,21	15,29	15,37	15,44	15,52	15,60	15,68	15,76	15,84	15,92
4,0	16,00	16,08	16,16	16,24	16,32	16,40	16,48	16,56	16,65	16,73
4,1	16,81	16,89	16,97	17,06	17,14	17,22	17,31	17,39	17,47	17,56
4,2	17,64	17,72	17,81	17,89	17,98	18,06	18,15	18,23	18,32	18,40
4,3	18,49	18,58	18,66	18,75	18,84	18,92	19,01	19,10	19,18	19,27
4,4	19,36	19,45	19,54	19,62	19,71	19,80	19,89	19,98	20,07	20,16
4,5	20,25	20,34	20,43	20,52	20,61	20,70	20,79	20,88	20,98	21,07
4,6	21,16	21,25	21,34	21,44	21,53	21,62	21,72	21,81	21,90	22,00
4,7	22,09	22,18	22,28	22,37	22,47	22,56	22,66	22,75	22,85	22,94
4,8	23,04	23,14	23,23	23,33	23,43	23,52	23,62	23,72	23,81	23,91
4,9	24,01	24,11	24,21	24,30	24,40	24,50	24,60	24,70	24,80	24,90

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,0	25,00	25,10	25,20	25,30	25,40	25,50	25,60	25,70	25,81	25,91
5,1	26,01	26,11	26,21	26,32	26,42	26,52	26,63	26,73	26,83	26,94
5,2	27,04	27,14	27,25	27,35	27,46	27,56	27,67	27,77	27,88	27,98
5,3	28,09	28,20	28,30	28,41	28,52	28,62	28,73	28,84	28,94	29,05
5,4	29,16	29,27	29,38	29,48	29,59	29,70	29,81	29,92	30,03	30,14
5,5	30,25	30,36	30,47	30,58	30,69	30,80	30,91	31,02	31,14	31,25
5,6	31,36	31,47	31,58	31,70	31,81	31,92	32,04	32,15	32,26	32,38
5,7	32,49	32,60	32,72	32,83	32,95	33,06	33,18	33,29	33,41	33,52
5,8	33,64	33,76	33,87	33,99	34,11	34,22	34,34	34,46	34,57	34,69
5,9	34,81	34,93	35,05	35,16	35,28	35,40	35,52	35,64	35,76	35,88
6,0	36,00	36,12	36,24	36,36	36,48	36,60	36,72	36,84	36,97	37,09
6,1	37,21	37,33	37,45	37,58	37,70	37,82	37,95	38,07	38,19	38,32
6,2	38,44	38,56	38,69	38,81	38,94	39,06	39,19	39,31	39,44	39,56
6,3	39,69	39,82	39,94	40,07	40,20	40,32	40,45	40,58	40,70	40,83
6,4	40,96	41,09	41,22	41,34	41,47	41,60	41,73	41,86	41,99	42,12
6,5	42,25	42,38	42,51	42,64	42,77	42,90	43,03	43,16	43,30	43,43
6,6	43,56	43,69	43,82	43,96	44,09	44,22	44,36	44,49	44,62	44,76
6,7	44,89	45,02	45,16	45,29	45,43	45,56	45,70	45,83	45,97	46,10
6,8	46,24	46,38	46,51	46,65	46,79	46,92	47,06	47,20	47,33	47,47
6,9	47,61	47,75	47,89	48,02	48,16	48,30	48,44	48,58	48,72	48,86
7,0	49,00	49,14	49,28	49,42	49,56	49,70	49,84	49,98	50,13	50,27
7,1	50,41	50,55	50,69	50,84	50,98	51,12	51,27	51,41	51,55	51,70
7,2	51,84	51,98	52,13	52,27	52,42	52,56	52,71	52,85	53,00	53,14
7,3	53,29	53,44	53,58	53,73	53,88	54,02	54,17	54,32	54,46	54,61
7,4	54,76	54,91	55,06	55,20	55,35	55,50	55,65	55,80	55,95	56,10
7,5	56,25	56,40	56,55	56,70	56,85	57,00	57,15	57,30	57,46	57,61
7,6	57,76	57,91	58,06	58,22	58,37	58,52	58,68	58,83	58,98	59,14
7,7	59,29	59,44	59,60	59,75	59,91	60,06	60,22	60,37	60,53	60,68
7,8	60,84	61,00	61,15	61,31	61,47	61,62	61,78	61,94	62,09	62,25
7,9	62,41	62,57	62,73	62,88	63,04	63,20	63,36	63,52	63,68	63,84
8,0	64,00	64,16	64,32	64,48	64,64	64,80	64,96	65,12	65,29	65,45
8,1	65,61	65,77	65,93	66,10	66,26	66,42	66,59	66,75	66,91	67,08
8,2	67,24	67,40	67,57	67,73	67,90	68,06	68,23	68,39	68,56	68,72
8,3	68,89	69,06	69,22	69,39	69,56	69,72	69,89	70,06	70,22	70,39
8,4	70,56	70,73	70,90	71,06	71,23	71,40	71,57	71,74	71,91	72,08
8,5	72,25	72,42	72,59	72,76	72,93	73,10	73,27	73,44	73,62	73,79
8,6	73,96	74,13	74,30	74,48	74,65	74,82	75,00	75,17	75,34	75,52
8,7	75,69	75,86	76,04	76,21	76,39	76,56	76,74	76,91	77,09	77,26
8,8	77,44	77,62	77,79	77,97	78,15	78,32	78,50	78,68	78,85	79,03
8,9	79,21	79,39	79,57	79,74	79,92	80,10	80,28	80,46	80,64	80,82
9,0	81,00	81,18	81,36	81,54	81,72	81,90	82,08	82,26	82,45	82,63
9,1	82,81	82,99	83,17	83,36	83,54	83,72	83,91	84,09	84,27	84,46
9,2	84,64	84,82	85,01	85,19	85,38	85,56	85,75	85,93	86,12	86,30
9,3	86,49	86,68	86,86	87,05	87,24	87,42	87,61	87,80	87,98	88,17
9,4	88,36	88,55	88,74	88,92	89,11	89,30	89,49	89,68	89,87	90,06
9,5	90,25	90,44	90,63	90,82	91,01	91,20	91,39	91,58	91,78	91,97
9,6	92,16	92,35	92,54	92,74	92,93	93,12	93,32	93,51	93,70	93,90
9,7	94,09	94,28	94,48	94,67	94,87	95,06	95,26	95,45	95,65	95,84
9,8	96,04	96,24	96,43	96,63	96,83	97,02	97,22	97,42	97,61	97,81
9,9	98,01	98,21	98,41	98,60	98,80	99,00	99,20	99,40	99,60	99,80

TABLA DE CUBOS

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,030	1,061	1,093	1,125	1,158	1,191	1,225	1,260	1,295
1,1	1,331	1,368	1,405	1,443	1,482	1,521	1,561	1,602	1,643	1,685
1,2	1,728	1,772	1,816	1,861	1,907	1,953	2,000	2,048	2,097	2,147
1,3	2,197	2,248	2,300	2,353	2,406	2,460	2,515	2,571	2,628	2,686
1,4	2,744	2,803	2,863	2,924	2,986	3,049	3,112	3,177	3,242	3,308
1,5	3,375	3,443	3,512	3,582	3,652	3,724	3,796	3,870	3,944	4,020
1,6	4,096	4,173	4,252	4,331	4,411	4,492	4,574	4,657	4,742	4,827
1,7	4,913	5,000	5,088	5,178	5,268	5,359	5,452	5,545	5,640	5,735
1,8	5,832	5,930	6,029	6,128	6,230	6,332	6,435	6,539	6,645	6,751
1,9	6,859	6,968	7,078	7,189	7,301	7,415	7,530	7,645	7,762	7,881
2,0	8,000	8,121	8,242	8,365	8,490	8,615	8,742	8,870	8,999	9,129
2,1	9,261	9,394	9,528	9,664	9,800	9,938	10,08	10,22	10,36	10,50
2,2	10,65	10,79	10,94	11,09	11,24	11,39	11,54	11,70	11,85	12,01
2,3	12,17	12,33	12,49	12,65	12,81	12,98	13,14	13,31	13,48	13,65
2,4	13,82	14,00	14,17	14,35	14,53	14,71	14,89	15,07	15,25	15,44
2,5	15,63	15,81	16,00	16,19	16,39	16,58	16,78	16,97	17,17	17,37
2,6	17,58	17,78	17,98	18,19	18,40	18,61	18,82	19,03	19,25	19,47
2,7	19,68	19,90	20,12	20,35	20,57	20,80	21,02	21,25	21,48	21,72
2,8	21,95	22,19	22,43	22,67	22,91	23,15	23,39	23,64	23,89	24,14
2,9	24,39	24,64	24,90	25,15	25,41	25,67	25,93	26,20	26,46	26,73
3,0	27,00	27,27	27,54	27,82	28,09	28,37	28,65	28,93	29,22	29,50
3,1	29,79	30,08	30,37	30,66	30,96	31,26	31,55	31,86	32,16	32,46
3,2	32,77	33,08	33,39	33,70	34,01	34,33	34,65	34,97	35,29	35,61
3,3	35,94	36,26	36,59	36,93	37,26	37,60	37,93	38,27	38,61	38,96
3,4	39,30	39,65	40,00	40,35	40,71	41,06	41,42	41,78	42,14	42,51
3,5	42,88	43,24	43,61	43,99	44,36	44,74	45,12	45,50	45,88	46,27
3,6	46,66	47,05	47,44	47,83	48,23	48,63	49,03	49,43	49,84	50,24
3,7	50,65	51,06	51,48	51,90	52,31	52,73	53,16	53,58	54,01	54,44
3,8	54,87	55,31	55,74	56,18	56,62	57,07	57,51	57,96	58,41	58,86
3,9	59,32	59,78	60,24	60,70	61,16	61,63	62,10	62,57	63,04	63,52
4,0	64,00	64,48	64,96	65,45	65,94	66,43	66,92	67,42	67,92	68,42
4,1	68,92	69,43	69,93	70,44	70,96	71,47	71,99	72,51	73,03	73,56
4,2	74,09	74,62	75,15	75,69	76,23	76,77	77,31	77,85	78,40	78,95
4,3	79,51	80,06	80,62	81,18	81,75	82,31	82,88	83,45	84,03	84,60
4,4	85,18	85,77	86,35	86,94	87,53	88,12	88,72	89,31	89,92	90,52
4,5	91,13	91,73	92,35	92,96	93,58	94,20	94,82	95,44	96,07	96,70
4,6	97,34	97,97	98,61	99,25	99,90	100,5	101,2	101,8	102,5	103,2
4,7	103,8	104,5	105,2	105,8	106,5	107,2	107,9	108,5	109,2	109,9
4,8	110,6	111,3	112,0	112,7	113,4	114,1	114,8	115,5	116,2	116,9
4,9	117,6	118,4	119,1	119,8	120,6	121,3	122,0	122,8	123,5	124,3
5,0	125,0	125,8	126,5	127,3	128,0	128,8	129,6	130,3	131,1	131,9
5,1	132,7	133,4	134,2	135,0	135,8	136,6	137,4	138,2	139,0	139,8
5,2	140,6	141,4	142,2	143,1	143,9	144,7	145,5	146,4	147,2	148,0
5,3	148,9	149,7	150,6	151,4	152,3	153,1	154,0	154,9	155,7	156,6
5,4	157,5	158,3	159,2	160,1	161,0	161,9	162,8	163,7	164,6	165,5
5,5	166,4	167,3	168,2	169,1	170,0	171,0	171,9	172,8	173,7	174,7
5,6	175,6	176,6	177,5	178,5	179,4	180,4	181,3	182,3	183,3	184,2
5,7	185,2	186,2	187,1	188,1	189,1	190,1	191,1	192,1	193,1	194,1
5,8	195,1	196,1	197,1	198,2	199,2	200,2	201,2	202,3	203,3	204,3
5,9	205,4	206,4	207,5	208,5	209,6	210,6	211,7	212,8	213,8	214,9

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6,0	216,0	217,1	218,2	219,3	220,3	221,4	222,5	223,6	224,8	225,9
6,1	227,0	228,1	229,2	230,3	231,5	232,6	233,7	234,9	236,0	237,2
6,2	238,3	239,5	240,6	241,8	243,0	244,1	245,3	246,5	247,7	248,9
6,3	250,0	251,2	252,4	253,6	254,8	256,0	257,3	258,5	259,7	260,9
6,4	262,1	263,4	264,6	265,8	267,1	268,3	269,6	270,8	272,1	273,4
6,5	274,6	275,9	277,2	278,4	279,7	281,0	282,3	283,6	284,9	286,2
6,6	287,5	288,8	290,1	291,4	292,8	294,1	295,4	296,7	298,1	299,4
6,7	300,8	302,1	303,5	304,8	306,2	307,5	308,9	310,3	311,7	313,0
6,8	314,4	315,8	317,2	318,6	320,0	321,4	322,8	324,2	325,7	327,1
6,9	328,5	329,9	331,4	332,8	334,3	335,7	337,2	338,6	340,1	341,5
7,0	343,0	344,5	345,9	347,4	348,9	350,4	351,9	353,4	354,9	356,4
7,1	357,9	359,4	360,9	362,5	364,0	365,5	367,1	368,6	370,1	371,7
7,2	373,2	374,8	376,4	377,9	379,5	381,1	382,7	384,2	385,8	387,4
7,3	389,0	390,6	392,2	393,8	395,4	397,1	398,7	400,3	401,9	403,6
7,4	405,2	406,9	408,5	410,2	411,8	413,5	415,2	416,8	418,5	420,2
7,5	421,9	423,6	425,3	427,0	428,7	430,4	432,1	433,8	435,5	437,2
7,6	439,0	440,7	442,5	444,2	445,9	447,7	449,5	451,2	453,0	454,8
7,7	456,5	458,3	460,1	461,9	463,7	465,5	467,3	469,1	470,9	472,7
7,8	474,6	476,4	478,2	480,0	481,9	483,7	485,6	487,4	489,3	491,2
7,9	493,0	494,9	496,8	498,7	500,6	502,5	504,4	506,3	508,2	510,1
8,0	512,0	513,9	515,8	517,8	519,7	521,7	523,6	525,6	527,5	529,5
8,1	531,4	533,4	535,4	537,4	539,4	541,3	543,3	545,3	547,3	549,4
8,2	551,4	553,4	555,4	557,4	559,5	561,5	563,6	565,6	567,7	569,7
8,3	571,8	573,9	575,9	578,0	580,1	582,2	584,3	586,4	588,5	590,6
8,4	592,7	594,8	596,9	599,1	601,2	603,4	605,5	607,6	609,8	612,0
8,5	614,1	616,3	618,5	620,7	622,8	625,0	627,2	629,4	631,6	633,8
8,6	636,1	638,3	640,5	642,7	645,0	647,2	649,5	651,7	654,0	656,2
8,7	658,5	660,8	663,1	665,3	667,6	669,9	672,2	674,5	676,8	679,2
8,8	681,5	683,8	686,1	688,5	690,8	693,2	695,5	697,9	700,2	702,6
8,9	705,0	707,3	709,7	712,1	714,5	716,9	719,3	721,7	724,2	726,6
9,0	729,0	731,4	733,9	736,3	738,8	741,2	743,7	746,1	748,6	751,1
9,1	753,6	756,1	758,6	761,0	763,6	766,1	768,6	771,1	773,6	776,2
9,2	778,7	781,2	783,8	786,3	788,9	791,5	794,0	796,6	799,2	801,8
9,3	804,4	807,0	809,6	812,2	814,8	817,4	820,0	822,7	825,3	827,9
9,4	830,6	833,2	835,9	838,6	841,2	843,9	846,6	849,3	852,0	854,7
9,5	857,4	860,1	862,8	865,5	868,3	871,0	873,7	876,5	879,2	882,0
9,6	884,7	887,5	890,3	893,1	895,8	898,6	901,4	904,2	907,0	909,9
9,7	912,7	915,5	918,3	921,2	924,0	926,9	929,7	932,6	935,4	938,3
9,8	941,2	944,1	947,0	949,9	952,8	955,7	958,6	961,5	964,4	967,4
9,9	970,3	973,2	976,2	979,1	982,1	985,1	988,0	991,0	994,0	997,0



EDITORIAL
PUEBLO Y EDUCACIÓN

9 789591 347589