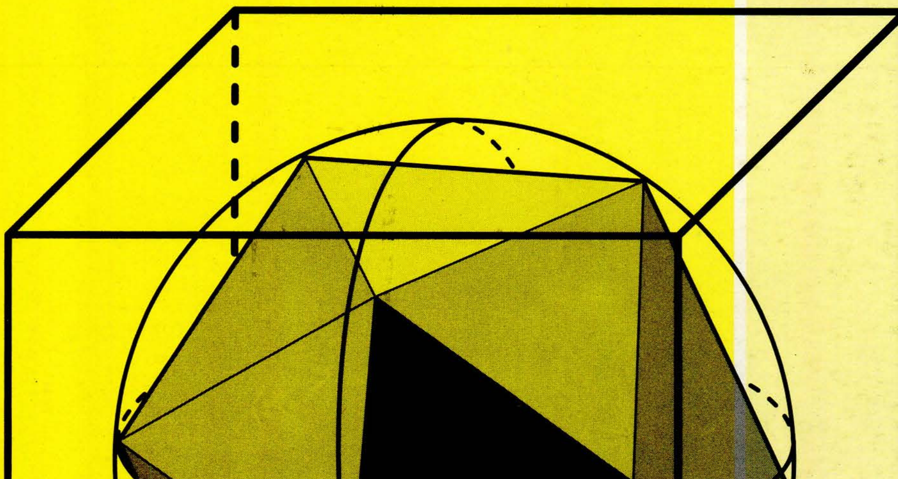
LIBRO DE DISTRIBUCIÓN GRATUITA. PROHIBIDA SU VENTA



Matemática

Parte 1

12° grado

MATEMÁTICA

Duodécimo grado

Parte 1

Dr. Luis Campistrous Pérez
Prof. Hilba Rivero Álvarez
Lic. Alexis Durán Jorrín
Lic. Armando Sandoval Torres

EDITORIAL
PUEBLO Y EDUCACIÓN

Edición: Prof. Adelaida Palma Matienzo
Diseño: Sonia Acosta Milián
Ilustración: Martha González Arencibia
Corrección: Hilda Pallés Arango
B. Marlén Sardiñas Álvarez
Realización: Idania González Sixto
Sonia Rodríguez García

ISBN 978-959-13-1659-2 Obra completa
ISBN 978-959-13-1653-0 Parte 1

EDITORIAL PUEBLO Y EDUCACIÓN
Ave. 3ra. A No. 4601 entre 46 y 60,
Playa, La Habana, Cuba. CP 11300.
epe@enet.cu

Agradecimientos

Agradecemos la colaboración que en la confección de este libro han tenido el licenciado Armando Flores Arco, el colectivo de investigación de "Números complejos" del Instituto Superior Pedagógico de Santiago de Cuba y el colectivo de investigación de "Inducción y combinatoria" del Instituto Superior Pedagógico de Manzanillo. También al doctor Luis F. Davidson San Juan por su minucioso trabajo en la búsqueda de referencias históricas para las notas introductorias de cada capítulo.

Este libro forma parte del conjunto de trabajos dirigidos al Perfeccionamiento Continuo del Sistema Nacional de Educación en la Educación General Politécnica y Laboral. Ha sido elaborado por un colectivo de autores integrado por metodólogos, maestros, profesores y especialistas, y revisado por la subcomisión correspondiente de la Comisión Nacional Permanente para la Revisión de Planes, Programas y Textos de Estudio del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas del Ministerio de Educación.

ÍNDICE

ORIENTACIONES SOBRE EL TRABAJO CON ESTE LIBRO

Para estudiar por este libro debes tener en cuenta que el contenido se encuentra en los capítulos 1, 2 y 3.

Cada capítulo está dividido en epígrafes. En cada epígrafe encontrarás contenidos, algunos de ellos destacados en recuadros, y ejemplos resueltos que ilustran cómo debes actuar para resolver ejercicios importantes que corresponden a ese contenido. Al final de cada epígrafe aparecen los ejercicios que debes resolver, y al final de cada capítulo una colección de ejercicios que incluyen contenidos de cada uno de estos. Los ejercicios que aparecen señalados con un asterisco, son los que presentan un mayor grado de dificultad.

En las últimas páginas del libro aparecen las respuestas de la mayoría de los ejercicios propuestos. Esto te permitirá autocontrolar tu trabajo.

Aparece además un Anexo que contiene:

Las tablas de cuadrados y raíces cuadradas, cubos y raíces cúbicas, y las de las funciones seno, coseno, tangente y cotangente, que necesitarás para calcular y resolver los ejercicios y problemas.

Un Memento o recordatorio donde se resumen algunos contenidos de grados anteriores que te serán necesarios para el trabajo en este grado.

COMBINATORIA Y PROBABILIDADES

El análisis combinatorio y la teoría de las probabilidades están estrechamente vinculados desde su propio origen. Esto puede afirmarse ya que tanto Pierre Fermat (1601-1665) como Blas Pascal (1623-1662) al intentar resolver ciertos problemas relacionados con los juegos de azar se vieron obligados a analizar y enumerar las combinaciones que brindaban los datos de estos problemas. Mas, como disciplina científica propiamente dicha, la teoría combinatoria aparece por primera vez en los trabajos de G. W. Leibniz, quien, en su obra *Razonamiento sobre el arte combinatorio*, desarrolla con cierta sistematicidad el análisis combinatorio de lo discreto y sobre todo en los trabajos de quien puede considerarse también fundador de esta nueva rama de la Matemática, uno de los miembros más destacados de una familia de matemáticos suizos, Jacobo Bernoulli (1654-1705). Bernoulli elabora la teoría en su famosa obra *Arte de la suposición* publicada póstumamente en 1713.

Para continuar el desarrollo de la teoría combinatoria se integra hacia 1770 una escuela de matemáticos alemanes encabezada por K. E. Hindeburg (1741-1818). Es curioso significar que algunas propiedades conocidas más de veinte siglos atrás, como es el caso de los números poligonales, ideados en la escuela pitagórica, tienen aplicación en varias ramas de la matemática merced al análisis combinatorio.

En cuanto a la teoría de probabilidades puede decirse que los primeros problemas de carácter probabilístico tienen su origen en los trabajos de P. Fermat y B. Pascal quienes fueron incitados a resolver dos problemas originados en los juegos de azar por un famoso jugador de su época, Antonio Gombaud, el caballero de Mére. Tanto Pascal como Fermat los resolvieron, pero mediante diferentes razonamientos; en particular, la solución de Pascal fue mediante las propiedades que hoy conocemos de los números combinatorios, o sea, de los coeficientes del desarrollo de la potencia del binomio que se obtienen del no menos célebre "Triángulo de Pascal", llamado así pese a que no fue Pascal el primero en descubrirlo ya que en el año 1303 el triángulo aparece en una obra del matemático chino Chu-Shi-Kie, quien expresa que este era conocido en su país desde mucho tiempo atrás.

CAPÍTULO 1

Combinatoria y probabilidades

Inducción completa

1. *Principio de inducción*

En este capítulo profundizaremos en el estudio de los números naturales; comenzaremos estudiando un método de gran utilidad para demostrar propiedades en este conjunto.

Decimos que una afirmación sobre números naturales es una propiedad en el conjunto de los números naturales por ejemplo:

A: El producto de dos números naturales consecutivos es par.

B: Un número natural es par.

C: El producto de un número natural distinto de cero por cero es el mismo número natural.

Es fácil ver que la afirmación A es verdadera para todos los números naturales pues de dos números naturales consecutivos uno es par y el producto de un número, natural cualquiera por un número par da como resultado un número par. En este caso se trata de una propiedad que se cumple para todos los números naturales.

La afirmación B es verdadera para los números naturales pares y falsa para los impares. Es una propiedad que solo se cumple para algunos números naturales.

La afirmación C es falsa para todos los números naturales, se trata de una propiedad que no se cumple para ningún número natural.

Una propiedad puede cumplirse para todos los números naturales, para algunos o para ninguno; en Matemática interesan las que se cumplen para todos los números naturales. Para estar seguro de que una propiedad se cumple para todos los números naturales se requiere de una demostración.

Simbólicamente las propiedades definidas para los números naturales se representan por $P(n)$, es decir, como un enunciado que depende de la variable n.

Ejemplo 1

Representa simbólicamente las propiedades A, B, C mencionadas antes.

Resolución

a) $A(n)$: $n(n+1)$ es par o $A(n)$: $n(n+1) = 2k,\ k \in \mathbb{N}$

b) $B(n)$: n es par

c) $C(n)$: $n \cdot 0 = n,\ n \neq 0.$ ■

Cuando en una propiedad $P(n)$ se sustituye n por un número natural dado, se obtiene una afirmación sobre ese número natural que puede ser verdadera o falsa.

Ejemplo 2

Escribe la afirmación dada y analiza si es verdadera o falsa.
a) A(2) b) A(57) c) B(3) d) B(8) e) C(15)

Resolución

a) A(2): $2(2 + 1)$ es par ; como $2(2 + 1) = 6$ y 6 es par, es verdadera.

b) A(57): $57(57 + 1)$ es par ; como $57(57 + 1) = 57 \cdot 58 = 3\,306$ y 3 306 es par, la afirmación es verdadera.

c) B(3): 3 es par. Falsa.

d) B(8): 8 es par. Verdadera.

e) C(15): $15 \cdot 0 = 15$. Falsa. ■

Como hemos dicho antes, para comprobar que una propiedad se cumple para todos los números naturales, es necesario realizar una demostración. En ocasiones puede ser una demostración que utiliza los métodos deductivos que ya conoces.

Ejemplo 3

Prueba que $A(n)$ es verdadera para todo n.

Resolución

Sea $n \in \mathbb{N}$, en ese caso hay dos posibilidades:

$$n = 2k \text{ (par) o } n = 2k + 1 \text{ (impar)}$$

entonces

$$n + 1 = 2k + 1 \text{ o } n + 1 = 2k + 2 = 2(k + 1)$$

y

$$n(n + 1) = 2k(2k + 1) \text{ o } n(n + 1) = (2k + 1)2(k + 1)$$

luego en todos los casos $n(n + 1)$ es par. ■

A veces no es fácil encontrar una demostración de este tipo. Por ejemplo, si se quiere demostrar que el producto de n números impares es impar, podemos proceder como sigue:

Sean $a_1, ..., a_n$ números impares cualesquiera. Es claro que $a_1 \cdot a_2$ es impar pues si $a_1 = 2k + 1$, $a_2 = 2r + 1$, se tiene $a_1 \cdot a_2 = (2k + 1)(2r + 1) = 4kr + 2(k + r) + 1 = 2(2kr + k + r) + 1$, que es impar.

Para tres números tenemos:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = (a_1 \cdot a_2) \cdot a_3 = b_1 \cdot a_3$$

pero $b_1 = a_1 \cdot a_2$ es impar y $b_1 \cdot a_3$ es impar, luego $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$ es impar.

Podemos repetir este razonamiento para $n = 4$ y "así sucesivamente", luego $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$ es impar para todo n.

En este caso comenzamos por la demostración para $n = 2$ y hemos "inducido" su validez general.
Igualmente podemos demostrar

$P(n)$: $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, donde los puntos suspensivos indican "así sucesivamente", es decir, que se suman todos los números naturales de 1 a n.

En efecto, si llamamos $S(n) = 1 + 2 + ... + n$, tenemos

$$S(n) = 1 + 2 + 3 + ... + n$$
$$S(n) = n + (n-1) + (n-2) + ... + 1$$

pues se puede invertir el orden y la suma no se altera. Sumando ordenadamente:

$$\begin{aligned} 2\,S(n) &= (n+1) + (n-1+2) + (n-2+3) + ... + (n+1) \\ &= (n+1) + (n+1) + (n+1) + ... + (n+1) \end{aligned}$$

donde los puntos suspensivos indican que "así sucesivamente" cada columna suma $n + 1$; como hay n columnas resulta,

$$2\,S(n) = n(n+1)$$
$$S(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ambas demostraciones parecen convincentes, pero en ambos casos los argumentos resultan algo imprecisos pues incluyen la expresión "así sucesivamente" que no está claramente explicada. El peligro de esta imprecisión se pone de manifiesto en casos como el siguiente:

$P(n)$: $n^2 - n + 41$ es un número primo.

Obtenemos "sucesivamente":

$P(0)$: $0^2 - 0 + 41 = 41$ es primo. Verdadero.

$P(1)$: $1^2 - 1 + 41 = 41$ es primo. Verdadero.

$P(2)$: $2^2 - 2 + 41 = 43$ es primo. Verdadero.

$P(3)$: $3^2 - 3 + 41 = 47$ es primo. Verdadero.

.
.
.

Parece que la proposición es cierta para todo n natural, sin embargo:

$P(41)$: $41^2 - 41 + 41 = 41^2 = 41 \cdot 41$ no es primo.

Si analizamos más detalladamente los ejemplos anteriores podemos darnos cuenta de lo siguiente: en los primeros dos casos tenemos un primer número para el cual la propiedad era cierta y la expresión "así sucesivamente" enlazaba cada número con el siguiente. Ocurre como con las fichas de dominó en la figura 1.1a, cada ficha al caer tumba a la que le sigue y por eso al caer la primera se caen todas las demás.

En el tercer ejemplo cada afirmación es independiente de la siguiente, ocurre como con las fichas de dominó en la figura 1.1b cada una es independiente y si se cae una no tumba a las restantes.

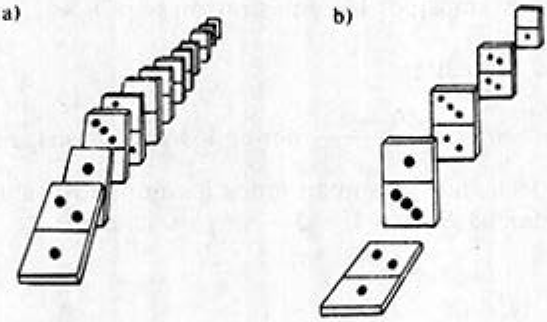


Fig. 1.1

En el último caso se tiene una inducción empírica o incompleta que es útil para inferir algunos resultados pero no garantiza su validez.

En los dos primeros casos se tiene una inducción completa, la validez de los resultados se garantiza en virtud del teorema siguiente:

Teorema 1 (Principio de inducción completa)

Si para una propiedad $P(n)$ sobre el conjunto de los naturales se cumple:
i) $P(a)$ es verdadera, $a \in \mathbb{N}$;
ii) De $P(k)$ se deduce $P(k+1)$;
entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \geqslant a$.

Este teorema, no vamos a demostrarlo, lo aceptamos como verdadero y lo aplicaremos a la demostración de propiedades que dependen de un número natural.

Debes observar que una demostración en la que se aplique el principio de inducción completa requiere dos etapas:

1. Demostrar que la propiedad se cumple para algún número natural (en el ejemplo del dominó esto significa probar que una ficha se cae).
2. Demostrar que si se cumple para un número natural, se cumple para el siguiente (o sea que cada ficha al caer tumba a la que le sigue).

Ejemplo 4

Sea $S(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ con $n \geqslant 1$, prueba que:

$$S(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Resolución

Como se quiere demostrar la propiedad para $n \geqslant 1$, hay que comenzar por comprobar que se cumple para $n = 1$. Para $n = 1$ la propiedad se expresa,

$$S(1) = 1 = \frac{1(1+1)}{2} \text{ que es verdadera.}$$

Ahora suponemos que se cumpla para un número natural arbitrario k:

$$S(k) = \frac{k(k+1)}{2},$$

y hay que demostrar que se cumple para su sucesor, $k + 1$. Es decir:

Si $S(k) = \frac{k(k+1)}{2}$, entonces, $S(k+1) = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2}$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Debemos partir entonces de $S(k) = \frac{k(k+1)}{2}$ y llegar a

$$S(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Para pasar de $S(k)$ a $S(k+1)$ basta sumar $k + 1$, entonces de

$S(k) = \frac{k(k+1)}{2}$ resulta,

$$S(k) + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1$$

$$S(k+1) = (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right)$$

$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ como se quería.

Es decir, hemos partido de $S(k) = \frac{k(k+1)}{2}$ y hemos deducido

$$S(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

luego podemos afirmar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$. ■

Ejemplo 5

Prueba que para todo n, $5^n - 1$ es divisible por 4.

Resolución

En este caso $P(n): 5^n - 1 = 4x,\ x \in \mathbb{N}$.
Como se quiere probar para todo $n \in \mathbb{N}$, comenzamos por verificar $P(0)$
$P(0): 5^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 4 \cdot 0$ es verdadera.

Ahora debemos comprobar que si se supone $P(k)$, se puede deducir $P(k + 1)$. Es decir, de $P(k): 5^k - 1 = 4x,\ x \in \mathbb{N}$ se deduce $P(k + 1): 5^{k+1} - 1 = 4y,\ y \in \mathbb{N}$.
Partimos en este caso de $5^k - 1 = 4x$, es decir, $5^k = 1 + 4x$.
Para pasar a $P(k + 1)$, necesitamos multiplicar por 5 ambos miembros:

$$5 \cdot 5^k = 5 \cdot (1 + 4x)$$
$$5^{k+1} = 5 + 4 \cdot 5x, \text{ o sea}$$
$$5^{k+1} = 1 + 4 + 4 \cdot 5x$$
$$5^{k+1} - 1 = 4 + 4 \cdot 5x, \text{ de donde } 5^{k+1} - 1 = 4(1 + 5x).$$

Pero $1 + 5x = y \in \mathbb{N}$ pues la suma y el producto de números naturales es un número natural. Luego $5^{k+1} - 1 = 4y$ como se quería, es decir, de $P(k)$ se deduce $P(k + 1)$ y la propiedad es cierta para todo n. ■

Algunas propiedades se cumplen a partir de $a > 1$

Ejemplo 6

Demuestra que la cantidad de rectas que pasan por n puntos del plano, de los cuales no hay 3 alineados, es $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Resolución

Sea $P(n)$: por n puntos del plano pasan $\dfrac{n(n-1)}{2}$ rectas.

En este caso comenzamos por $n = 2$.
Por dos puntos del plano pasa una sola recta (fig. 1.2),

y como $1 = \dfrac{2(2-1)}{2}$, entonces

$P(2)$ es verdadera.

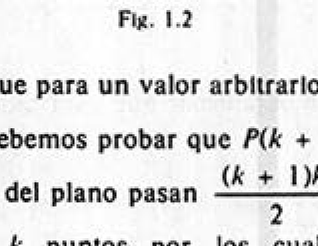


Fig. 1.2

Supongamos que $P(k)$ es verdadera, es decir, que para un valor arbitrario de k, por k puntos del plano pasan $\dfrac{k(k-1)}{2}$ rectas. Debemos probar que $P(k + 1)$ es verdadera, o sea, que entonces por $k + 1$ puntos del plano pasan $\dfrac{(k+1)k}{2}$ rectas.

Consideremos que tenemos en el plano, k puntos por los cuales pasan $\dfrac{k(k-1)}{2}$ rectas. En la figura 1.3a se ilustra el caso para $k = 3$.

Agreguemos un nuevo punto. De cada uno de los k puntos que ya existían puede trazarse una recta que pasa por el punto agregado. Se obtienen entonces k nuevas rectas (fig. 1.3b).

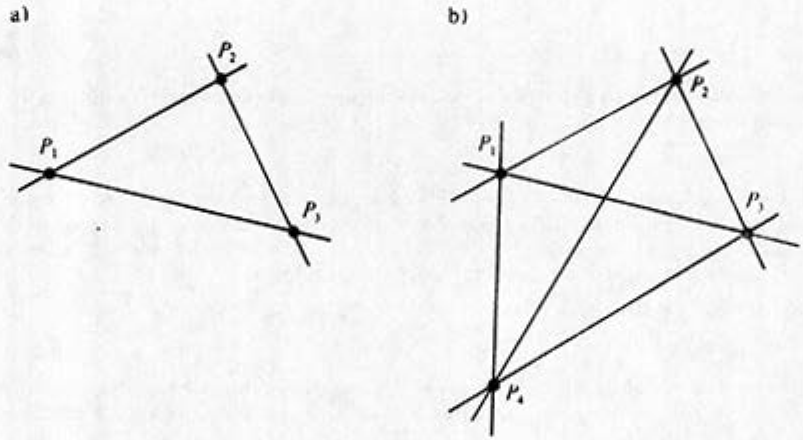


Fig. 1.3

Hay ahora en total $\dfrac{k(k-1)}{2} + k$ rectas.

Pero $\dfrac{k(k-1)}{2} + k = \dfrac{k(k-1)+2k}{2} = \dfrac{k(k-1+2)}{2} = \dfrac{k(k+1)}{2}$

O sea, que por $k+1$ puntos pasarían $\dfrac{k(k+1)}{2}$ rectas, es decir, $P(k+1)$ es verdadera.

Hemos probado que si $P(k)$ es verdadera, entonces $P(k+1)$ también lo es. Como $P(2)$ es verdadera, entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. ■

Ejemplo 7*

Demuestra que para todo número natural $n \geq 1$ se cumple que $2^n > n$.

Resolución

Aquí consideramos $P(n)$: $2^n > n$.
Primero debemos probar que $P(1)$ es verdadera; se cumple $2^1 = 2 > 1$. $P(1)$ es verdadera.
Probemos ahora que si $P(k)$ es verdadera, entonces $P(k+1)$ también lo es. Supongamos que $P(k)$ es verdadera para algún número natural $k \geq 1$, es decir, que $2^k > k$ y demostramos que $P(k+1)$ es verdadera. Esto significa que $2^{k+1} > k+1$.

Si $2^k > k$ entonces $2^k \cdot 2 > k \cdot 2$,

o sea, $2^{k+1} > 2k$

es decir, $2^{k+1} > k + k$.

Pero siendo $k \geq 1$ se cumple que $k + k \geq k + 1$, luego,

$2^{k+1} > k + k \geq k + 1$

y por lo tanto $2^{k+1} > k + 1$, lo cual significa que $P(k+1)$ es verdadera.
En virtud del principio de inducción, $P(n)$ es verdadera para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, es decir, para todo número natural $n \geq 1$ se cumple $2^n > n$. ■

Ejemplo 8*

Demuestra que cualquier número entero de pesos, mayor que 7, puede pagarse en billetes de 3 y 5 pesos, sin necesidad de cambio.

Resolución

Consideremos $P(n)$: pueden pagarse n pesos en billetes de 3 y 5 pesos, sin necesidad de cambio.
$P(8)$ es verdadera, pues con un billete de 3 pesos y otro de 5 se pagan 8 pesos, sin necesidad de cambio.
Si $P(k)$ es verdadera para $k \geqslant 8$, esto significa que pueden pagarse k pesos usando solo billetes de 3 y 5 pesos, sin necesidad de cambio. En ese caso hay dos posibilidades:

i) Todos los billetes son de 3 pesos.

ii) Hay algún billete de 5 pesos.

Si se cumple i), entonces hay al menos tres billetes de 3 pesos pues como $k \geqslant 8$, el menor valor de k para el cual se cumple i) es 9. Podemos reemplazar tres billetes de 3 pesos por dos de 5 y obtenemos $k + 1$ pesos.
Si se cumple ii), reemplazamos el billete de 5 pesos por dos de 3 y se obtienen $k + 1$ pesos.
Así, en cualquier caso, si se pueden pagar k pesos sin necesidad de cambio usando solo billetes de 3 y 5 pesos, es posible pagar $k + 1$ pesos.
Por lo tanto, $P(n)$ es verdadera para todo $n \geqslant 8$. ■

Ejercicios (epígrafe 1)

1. Demuestra por inducción completa que para todos los números naturales n se cumple:

   a) $0 + 2 + 4 + ... + 2n = n(n + 1)$

   b) $0 + 3 + 6 + ... + 3n = \frac{3}{2}\ n\,(n + 1)$

   c) $5 + 7 + 9 + ... + (2n + 5) = (n + 1)(n + 5)$

   d) $11 + 13 + 15 + ... + (2n + 11) = (n + 1)\,(n + 11)$

   e) $2 + 7 + 12 + ... + (5n + 2) = \frac{(n + 1)(5n + 4)}{2}$

   f) $1 + 2 + 4 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$

   g) $3^0 + 3^1 + 3^2 + ... + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$

   h) $4 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5^2 + ... + 4 \cdot 5^n = 5^{n+1} - 1$

2. Demuestra por inducción completa que para todos los números naturales $n \geqslant 1$ se cumple:

   a) $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$

   b) $6 + 12 + 18 + ... + 6n = 3n(n + 1)$

   c) $7 + 9 + 11 + ... + (2n + 5) = n(n + 6)$

   d) $3 + 7 + 11 + ...(4n - 1) = n(2n + 1)$

   e) $7 + 13 + 19 + ... + (6n + 1) = n(3n + 4)$

f) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

g) $7 + 6 \cdot 7 + 6 \cdot 7^2 + \dots + 6 \cdot 7^n = 7^{n+1}$

h) $10 + 9 \cdot 10 + 9 \cdot 10^2 + \dots + 9 \cdot 10^n = 10^{n+1}$

i) $x + (x-1)x + (x-1)x^2 + \dots + (x-1)x^n = x^{n+1}$

j) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \dfrac{1}{3}\, n\,(4n^2 - 1)$

k) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$

l) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

m) $4 + 14 + 30 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2$

n) $2 \cdot 5 + 5 \cdot 8 + 8 \cdot 11 + \dots + (3n-1)(3n+2) = n(3n^2 + 6n + 1)$

ñ) $1 + a + a^2 + \dots + a^n = \dfrac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$

o) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

p) $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$

3. Demuestra por inducción completa que para todo número natural n:

a) $3^n - 1$ es divisible por 2.
b) $n^3 - n + 3$ es múltiplo de 3.
c) $n(n+1)(n+2)$ es múltiplo de 3.
d*) $4^n + 15n - 1$ es siempre divisible por 9.
e*) $7^n - 3^n$ es múltiplo de 4.
(Indicación: $7^{k+1} - 3^{k+1} = (7^{k+1} - 7 \cdot 3^k) + (7 \cdot 3^k - 3^{k+1})$)
f*) $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ es divisible por 7.
(Indicación: $3^{2n+3} = 3^2 \cdot 3^{2n+1} = 9 \cdot 3^{2n+1} =$
$= (7+2) \cdot 3^{2n+1} = 7 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 3^{2n+1}$)

4*. Prueba que para todo número natural $n \geqslant 1$ se cumple:
$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$

5*. Demuestra por inducción completa las desigualdades siguientes. Analiza para qué valores de n son válidas.

a) $3n > n + 1$
b) $n^2 + 1 > n$
c) $(1 + n)^2 > 1 + n^2$
d) $2^n > n^2$
e) $(1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha \ (\alpha \neq 0,\ \alpha > -1)$

6*. Demuestra por inducción que n rectas, entre las cuales no hay dos paralelas ni tres que pasen por un mismo punto, se cortan en $\frac{n(n-1)}{2}$ puntos.

7*. Demuestra que la cantidad de diagonales de un polígono de n lados es $\frac{n(n-3)}{2}$.

8*. Demuestra que la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados es $(n-2)\pi$.

9. Los números $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ forman una sucesión aritmética si existe un número d tal que $a_{n+1} = a_n + d$ para todo $n \geqslant 1$.
Así, por ejemplo, tomando $a_1 = 5$ y adicionando sucesivamente $d = 3$ obtenemos $a_2 = 5 + 3 = 8$, $a_3 = 8 + 3 = 11$, ..., es decir, la sucesión aritmética 5, 8, 11, 14, 17, ...

a) Demuestra, por inducción completa, que para esta sucesión se cumple:
$a_n = 5 + 3(n-1)$ para todo $n \geqslant 1$

b) Demuestra que:

$$5 + 8 + 11 + 14 + \ldots + (3n + 2) = 5n + \frac{3}{2}n(n-1).$$

10*. Demuestra, por inducción completa, que para una sucesión aritmética $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ se cumple:

a) $a_n = a_1 + (n-1)d$

b) $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = na_1 + \frac{(n-1)n}{2}d$

11. Calcula la suma aritmética:

a) $6 + 10 + 14 + \ldots + 202$,

b) $15 + 17 + 19 + \ldots + 213$,

c) $5 + 5{,}5 + 6 + 6{,}5 + \ldots + 1\,000$.

12. Los números $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ forman una sucesión geométrica si existe un número q tal que $a_{n+1} = a_n \cdot q$ para $n \geqslant 1$.
Si consideramos $a_1 = 3$ y multiplicamos sucesivamente por $q = 2$ se obtiene $a_2 = 3 \cdot 2 = 6$, $a_3 = 6 \cdot 2 = 12$, ... o sea, la sucesión geométrica 3, 6, 12, 24, ...

a) Demuestra por inducción que para esta sucesión se cumple $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ para $n \geqslant 1$.

b) Demuestra que:
$3 + 6 + 12 + 24 + \ldots + 3 \cdot 2^{n-1} = 3(2^n - 1)$

13*. Demuestra por inducción completa que para una sucesión geométrica $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ se cumple:

a) $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

b) $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

14. Calcula las siguientes sumas geométricas:

a) $2 + 6 + 18 + 54 + ... + 1\,458$,

b) $4 + 2 + 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{256}$,

c) $2 - 4 + 8 - 16 + 32 - ... + 8\,192$.

15* Explica el error en la siguiente "demostración" por inducción.

Teorema: Dado un conjunto de n niñas rubias, si por lo menos una de las niñas tiene ojos azules, entonces las n niñas tienen ojos azules.

Demostración

La proposición es evidentemente cierta si $n = 1$. El paso de k a $k + 1$ puede ilustrarse pasando de $n = 3$ a $n = 4$. Supón para ello que la proposición es cierta para $n = 3$ y sean G_1, G_2, G_3 y G_4 cuatro niñas rubias tales que una de ellas, por lo menos, tenga los ojos azules, por ejemplo, la G_1. Tomando G_1, G_2, G_3 conjuntamente y haciendo uso de la proposición cierta para $n = 3$, resulta que también G_2 y G_3 tienen ojos azules. Repitiendo el proceso con G_1, G_2 y G_4, se encuentra igualmente que G_4 tiene ojos azules; es decir, las cuatro tienen ojos azules. Un razonamiento análogo permite el paso de k a $k + 1$ en general.

(*Nota:* Este ejemplo se debe al matemático G. Polya.)

Combinatoria

2. *Principio de multiplicación*

Los números naturales surgieron para resolver el problema del conteo; en efecto, para contar los elementos de un conjunto basta ponerlos en correspondencia con la sucesión de los números naturales.

Desde que comenzaste en la escuela aprendiste a realizar esta operación elemental de conteo y desde entonces la has aplicado a diario. Sin embargo, en muchas ocasiones la técnica elemental de contar mediante la correspondencia con los números naturales es insuficiente y se necesitan técnicas más elaboradas. En esta sección estudiaremos algunas de esas técnicas.

Teorema 1 (Principio de multiplicación)

> Si un suceso cualquiera puede ocurrir de n maneras diferentes y, después que ha ocurrido de una cualquiera de esas maneras, un segundo suceso puede ocurrir de p maneras diferentes, entonces los dos sucesos, en ese orden, pueden ocurrir de np maneras.

El teorema anterior recibe el nombre de principio de multiplicación pues afirma que si dos sucesos ocurren uno después de otro, el total de formas en que pueden ocurrir se obtiene multiplicando el número de formas del primero por el número de formas del segundo.

Ejemplo 1

Para ir desde el Muelle de Caballería hasta Línea y Paseo se pueden utilizar 3 ómnibus y para ir desde este punto hasta Ciudad Libertad, 2 ómnibus. ¿De cuántas formas diferentes se puede ir en ómnibus desde el Muelle de Caballería hasta Ciudad Libertad?

Resolución

En este caso el primer suceso es el viaje desde el Muelle de Caballería hasta Línea y Paseo y el segundo suceso el viaje desde Línea y Paseo hasta Ciudad Libertad. Podemos esquematizar la situación en un diagrama (fig. 1.4).

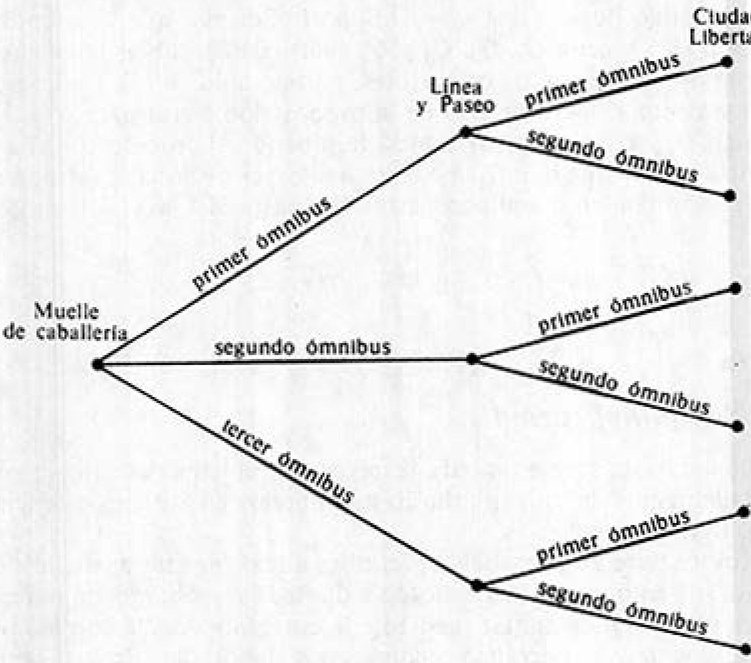


Fig. 1.4

En este diagrama cada segmento representa un viaje en ómnibus entre dos de los puntos señalados en el problema. Para realizar el viaje completo es necesario seleccionar dos segmentos sucesivos; en el diagrama se ve con claridad que hay tantas posibilidades como segmentos entre el segundo y tercer puntos, es decir, 6.
A este resultado se llega también fácilmente aplicando el teorema 1.
El primer suceso, llegar a Línea y Paseo, puede ocurrir de 3 formas diferentes pues hay 3 ómnibus y después de cada una de estas formas hay 2 formas de llegar a Ciudad Libertad pues hay dos ómnibus, luego el número total de formas es $3 \cdot 2 = 6$. ■

En la práctica no es necesario utilizar un diagrama como el del ejemplo 1, pero si se hace, ayuda a comprender el problema y, en casos complicados, esta ayuda puede ser esencial. Este tipo de diagrama recibe el nombre de "diagrama en árbol" pues cada punto se ramifica de la misma forma que lo hace un árbol.

Para aplicar el teorema 1 no es necesario que los sucesos se continúen en el tiempo; lo esencial es que se disponga de una forma para distinguir cuál es el primero y cuál el segundo.

Ejemplo 2

¿Cuántas sílabas de dos letras, que comienzan por una consonante, existen en el idioma español?

Resolución

Este es un caso en que el conteo directo se hace difícil por el número de posibilidades. El teorema 1 es aquí una ayuda inestimable aunque los sucesos no están separados en el tiempo.

El primer suceso es la selección de la primera letra (una consonante) y el segundo la selección de la segunda letra (una vocal).

Como en Español hay 24 consonantes, el primer suceso puede ocurrir de 24 formas y como hay 5 vocales, el segundo puede ocurrir de 5 formas. En total se pueden obtener, entonces, $24 \cdot 5 = 120$ sílabas. ■

El principio de multiplicación puede extenderse también a más de dos sucesos.

Ejemplo 3

¿Cuántos números de tres cifras son múltiplos de 5?

Resolución

En este caso tenemos tres sucesos. El primero consiste en seleccionar la primera cifra, el segundo en seleccionar la segunda cifra y el tercero en seleccionar la tercera cifra (consideramos las cifras de izquierda a derecha, es decir, primero la cifra de las centenas, luego la cifra de las decenas y por último la cifra de las unidades).

El primer suceso puede ocurrir de 9 formas (la primera cifra no puede ser cero); el segundo de 10 formas y el tercero de 2 formas (si el número es múltiplo de 5 debe terminar en 0 o en 5); luego aplicando el principio de multiplicación encontramos que existen $9 \cdot 10 \cdot 2 = 180$ números de tres cifras que son múltiplos de 5. ■

En muchas ocasiones los diagramas conjuntistas son una eficaz ayuda para el conteo.

Ejemplo 4

En un grupo de 30 alumnos 16 practican natación, 16, béisbol y 12, atletismo. Si 3 alumnos practican los tres deportes, 5 practican sólo béisbol y atletismo, 2 solamente atletismo y 4 solamente béisbol,

a) ¿cuántos practican sólo béisbol y natación?

b) ¿cuántos practican solamente natación?

c) ¿cuántos no practican ninguno de los tres deportes?

Resolución

a) Denotemos por N el conjunto de los que practican natación, por A el de los que practican atletismo y por B el de los que practican béisbol. La figura 1.5 recoge los datos conocidos.

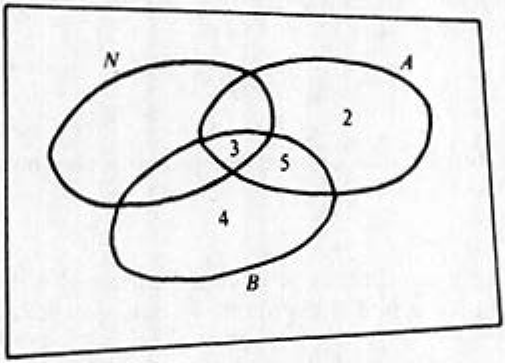


Fig. 1.5

Representaremos por A' el conjunto de los elementos que no pertenecen a A y por $\# A$ la cantidad de elementos de A.

Ahora es fácil ver que:

a) $\#(N \cap B \cap A') = \# B - (4 + 5 + 3) = 16 - 12 = 4$,
es decir, 4 alumnos practican sólo béisbol y natación.

b) $\#(\bar{N} \cap A \cap B') = \# A - (2 + 5 + 3) = 12 - 10 = 2$
$\#(N \cap B' \cap A') = \# N - (2 + 3 + 4) = 16 - 9 = 7$,
es decir, 7 alumnos practican solamente natación.

c) Finalmente, el número de alumnos que no practica ningún deporte se obtiene restando al total la suma de todos los subconjuntos representados:
$30 - (2 + 5 + 4 + 2 + 3 + 4 + 7) = 30 - 27 = 3$. ■

El principio que hemos utilizado en este ejemplo recibe el nombre de Principio de las inclusiones y exclusiones y se recoge en el teorema siguiente que tampoco vamos a demostrar.

Teorema 2* (Principio de las inclusiones y exclusiones)

Para cualquier sistema de n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se cumple:

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \# A_1 + \# A_2 + \ldots + \# A_n - [\#(A_1 \cap A_2) + \#(A_1 \cap A_3) + \ldots + \#(A_{n-1} \cap A_n)] + [\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \ldots + \#(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n)] + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \#(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

Ejemplo 5*

¿Cuántos números del 1 al 100 no son divisibles ni por 2, ni por 3, ni por 5?

Resolución

Para resolver este problema podemos utilizar el teorema 2: basta observar que la cantidad de números que cumplen esa condición es igual al total de números (100) menos el total de los que son divisibles por al menos uno de los números 2, 3 o 5. Con cada uno de estos números es posible asociar el conjunto de sus múltiplos.

A_2: conjunto de los múltiplos de 2 menores o iguales que 100.
A_3: conjunto de los múltiplos de 3 menores o iguales que 100.
A_5: conjunto de los múltiplos de 5 menores o iguales que 100. Y el conjunto de los números que son divisibles por al menos uno de los números 2, 3 o 5 es $A_3 \cup A_2 \cup A_5$.

Según el teorema 2 se cumple que:

$$\#(A_2 \cup A_3 \cup A_5) = \# A_2 + \# A_3 + \# A_5 - [\#(A_2 \cap A_3) + \#(A_2 \cap A_5) + \#(A_3 \cap A_5)] + \#(A_2 \cap A_3 \cap A_5).$$

Pero,

$A_2 \cap A_3 = A_6$, los múltiplos de 2 y de 3 son los múltiplos de 6 pues 2 y 3 son primos.
$A_2 \cap A_5 = A_{10}$, los múltiplos de 2 y de 5 son los múltiplos de 10.
$A_3 \cap A_5 = A_{15}$, los múltiplos de 3 y de 5 son los múltiplos de 15.
$A_2 \cap A_3 \cap A_5 = A_{30}$, los múltiplos de 2, de 3 y de 5 son los múltiplos de 30.

Entonces,

$$\#(A_2 \cup A_3 \cup A_5) = \# A_2 + \# A_3 + \# A_5 - \# A_6 - \# A_{10} - \# A_{15} + \# A_{30}$$

Para calcular la cantidad de números entre 1 y 100 que son divisibles por n basta calcular el cociente de la división de 100 por n, entonces:

$$\# A_2 = 50 \quad \# A_3 = 33 \quad \# A_5 = 20 \quad \# A_6 = 16 \quad \# A_{10} = 10 \quad \# A_{15} = 6 \quad \# A_{30} = 3$$

Luego,

$$\#(A_2 \cup A_3 \cup A_5) = 50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 = 74$$

y el número pedido es

$$\#(A_2^c \cap A_3^c \cap A_5^c) = 100 - 74 = 26. ■$$

Ejercicios (epígrafe 2)

1. De la ciudad A hasta la ciudad B conducen 5 caminos, y de la ciudad B a la C, 3. ¿Cuántos caminos que pasen por B conducen desde A hasta C?

2. ¿De cuántos modos se puede escoger una vocal y una consonante de la palabra "número"?

3. A la cumbre de una montaña conducen 5 caminos. ¿De cuántas maneras puede subir un turista a la montaña y descender de ella utilizando tales caminos? ¿Y si el ascenso y el descenso tienen lugar por caminos diferentes?

4. En una reunión de 18 personas todas se saludan entre sí y ningún par de personas se saluda más de una vez. ¿Cuántos saludos de manos se dan?

5. En una tienda de ropa hay camisas de hombre en 4 tallas diferentes y en 3 colores distintos cada talla. ¿Cuántos tipos diferentes de camisas hay en la tienda?

6. De entre 3 ejemplares de un texto de Álgebra, 7 de uno de Geometría y 7 de uno de Trigonometría hay que escoger un ejemplar de cada texto. ¿Cuántos modos de hacerlo existen?

7. Hay 6 pares de guantes de distintas medidas. ¿De cúantas maneras se pueden escoger entre ellos un guante de la mano izquierda y otro de la derecha, de forma que estos guantes sean de distintas medidas?

8. Se forman signos que consisten en una figura geométrica (circunferencia, cuadrado, triángulo o exágono), una letra y una cifra. ¿Cuántos signos de este tipo pueden formarse?

9. Dados los conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$ y $C = \{p, q\}$. Halla cuántas ternas ordenadas $(x;y;z)$ pueden formarse tales que $x \in A$, $y \in B$, $z \in C$.

10. ¿De cuántas maneras diferentes pueden escribirse las letras *ABCD*, una detrás de la otra y sin repetir ninguna?

11. Un niño tiene un juego de figuras plásticas diferentes. Cada figura es de uno de los 3 colores (azul, rojo, blanco), de uno de los tamaños (pequeño, mediano, grande) y de una de las 4 formas (cuadrada, redonda, triangular, ovalada). El juego tiene una figura de cada uno de los tipos posibles.

    a) ¿De cuántas figuras consta el juego?

    b) ¿Cuántas figuras triangulares hay?

    c) ¿Cuántas figuras no son ovaladas?

    d) ¿Cuántas figuras azules tiene el juego?

    e) ¿Cuántas figuras difieren de la figura "triangular roja grande" en exactamente dos características?

12. ¿Cuántos números de dos dígitos pueden formarse con las cifras 1;2;3;4;5;6 y 7? ¿Cuántos de ellos tienen sus dos cifras diferentes?

13. ¿Cuántos números de tres dígitos pueden formarse con las cifras del número 24 356? ¿Cuántos de ellos son pares?

14. ¿Cuántos números de tres cifras existen que son múltiplos de 2?

15. Determina la cantidad de números impares que tienen tres cifras y son menores que 500.

16. ¿Cuántos números de 4 cifras existen?

17. ¿Cuántos números naturales de cuatro cifras existen que no contienen la cifra 7?

18. ¿Cuántos números naturales entre 100 y 999 tienen todas sus cifras diferentes? Comprueba tu respuesta corriendo el siguiente programa de computación:

```
10 C = 0
20 FOR I = 1 TO 9
30 FOR J = 0 TO 9
40 FOR K = 0 TO 9
50 IF I<>J AND J<>K AND K<>I THEN C = C + 1
60 NEXT K, J, I
70 PRINT C
```

19. ¿Cuántos de los primeros 1 000 enteros positivos tienen todas sus cifras diferentes?

20*. ¿Cuántos números naturales mayores que 53 000 tienen las dos propiedades siguientes:

    I) todos sus dígitos son diferentes, y

ii) entre sus dígitos no están ni el 0 ni el 9?

21. ¿De cuántas formas se puede indicar en un tablero de ajedrez dos casillas, una blanca y otra negra?

22. ¿De cuántas formas se puede escoger en un tablero de ajedrez, un cuadro blanco y uno negro de manera que no estén ni en la misma fila ni en la misma columna?

23*. Al transmitir informaciones por telégrafo se utiliza el código Morse. En este código las letras, las cifras y los signos de puntuación se representan por puntos y rayas. Por ejemplo, la letra *E* se representa por un punto (·) y la letra *L* por tres puntos y una raya (· – · ·). Empleando hasta 5 signos, ¿cuántas letras pueden codificarse?

24. ¿Cuántos números naturales existen entre 10 y 96, ambos inclusive? ¿Y entre 158 y 1 990? ¿Y entre los números naturales a y b con $a < b$?

25. ¿Cuántos pares ordenados $(x; y)$ de números enteros no negativos existen tales que:

a) $x + y = 4$ b) $x + y = 20$ c) $x + y = n$, $n \in \mathbb{N}$

26. ¿Cuántos números naturales de tres cifras existen tales que la suma de sus dígitos es 5?

27. En un instituto trabajan 67 personas. De estas, 47 hablan el idioma inglés; 35, el ruso y 23, ambos idiomas. ¿Cuántas personas en el instituto no hablan ni el inglés ni el ruso?

28. Entre los números naturales del 1 al 1 000 hay 500 que son divisibles por 2; 333 que lo son por 3 y 166 divisibles por 6. ¿Cuántos números entre 1 y 1 000 son impares y múltiplos de 3?

29. De un grupo de jóvenes se conoce que a 19 les gustan las matemáticas, a 17 las artes plásticas, a 11 les gusta la historia, 12 prefieren matemáticas y artes plásticas; 7, historia y matemáticas; 5, artes plásticas e historia. A 2 les gustan las tres y a 5 ninguna de ellas. ¿Cuántos jóvenes hay en el grupo?

30. Supón que en una encuesta relacionada con los hábitos de lectura se obtienen los siguientes datos:
El 60% de los encuestados lee la revista A, el 50% lee la revista B, el 50% lee la revista C, el 30% lee las revistas A y B, el 20% las revistas B y C, el 30% las revistas A y C y el 10% lee las tres revistas.

a) ¿Qué tanto por ciento de los encuestados lee exactamente dos revistas?

b) ¿Qué tanto por ciento no lee ninguna de las tres revistas?

31. El responsable de un grupo de estudiantes dio los siguientes datos sobre ellos: "En nuestra aula hay 45 alumnos, de los cuales 25 son varones; 30 alumnos tienen buenas notas, entre ellos, 16 varones. Entre los 28 que practican deportes hay 18 varones y 17 estudiantes con buenas notas. Hay 15 varones que tienen buenas notas y practican deportes".
Días después el profesor guía, quien les impartía matemáticas, lo llamó y le dijo que había un error en los datos.

Muestra que, efectivamente, los datos son erróneos. (Sugerencia: Calcula la cantidad de muchachas del grupo que no practican deportes ni tienen buenas notas).

3. *Concepto de probabilidad*

Como sabes, la matemática es un instrumento para comprender y transformar el mundo. Esto se pone de manifiesto cuando expresamos matemáticamente las leyes de la naturaleza.

La matemática que has estudiado hasta ahora es adecuada para la descripción causal de los fenómenos; este tipo de descripción nos permite conocer con seguridad las consecuencias si se conocen las causas. Por ejemplo, si se suelta una pelota en el aire podemos asegurar que caerá atraída por la tierra y, si conocemos la altura, podemos calcular la velocidad con que chocará con el suelo.

Además de los fenómenos que pueden ser modelados mediante una descripción causal, existen fenómenos para los que no es posible una descripción de ese tipo en el estado actual de nuestros conocimientos, o no hay recursos para realizar los cálculos que estos requerirían. Se habla en este caso de fenómenos aleatorios.

Un ejemplo de fenómeno aleatorio es la determinación del sexo de un niño, ya que en el estado actual de la ciencia, no es posible predecir cómo se van a acoplar los cromosomas sexuales y, por tanto, no se conoce el sexo hasta que el embrión está formado y desarrollado.

Sin embargo, el hecho de que no sea posible una descripción causal no significa que los fenómenos aleatorios (o del azar) no estén sometidos a leyes, y que no se puedan describir matemáticamente. En estos casos se emplea una descripción estadística; el concepto matemático central en una descripción de este tipo es el de *probabilidad* y es en este epígrafe donde realizamos una introducción a su estudio.

Un ejemplo de descripción estadística lo tenemos cuando se habla de la mortalidad infantil; al decir que la mortalidad infantil en Cuba es de 10,7 por cada mil nacidos vivos (dato de 1990) se da una descripción que nos permite conocer, con qué frecuencia muere un niño en su primer año de vida. Por supuesto, esta descripción no nos permite determinar si un niño determinado morirá o no.

El hecho de que una descripción estadística no determine lo que ocurrirá en casos particulares, no significa que sea inútil; así, por ejemplo, si comparamos la mortalidad infantil de Cuba con la del resto de los países de Latinoamérica (que está entre 60 y 70 por cada mil nacidos vivos), podemos afirmar que en esos países es 6 veces más probable que un niño muera en su primer año de vida. Además, la disminución de este índice permite conocer que el hombre puede dominar también los fenómenos aleatorios. En este caso se logra extendiendo la atención médica y mejorando su calidad.

Existen diferentes formas de introducir el concepto de probabilidad; nosotros nos limitaremos al concepto "clásico" de probabilidad que se basa en la noción intuitiva de "sucesos igualmente probables". Intuitivamente consideramos que dos sucesos son igualmente probables, cuando ambos tienen la misma posibilidad de ocurrir o, lo que es lo mismo, que si repetimos el experimento un número muy grande de veces, ambos ocurrirán, aproximadamente, el mismo número de veces.

Por ejemplo, si lanzamos al aire una moneda de cinco centavos esperamos que el hecho de que muestre hacia arriba la cara que representa una estrella y el hecho que muestre hacia arriba la que representa un escudo sean igualmente probables. Si se lanza una moneda unas 5 000 veces debe resultar estrella aproximadamente el mismo número de veces que escudo; unas 2 500.

Este hecho lo puedes comprobar "experimentalmente" utilizando una computadora. El siguiente programa, escrito en MSX-BASIC, simula el lanzamiento de una moneda N veces y cuenta cuantas veces resulta estrella y cuál es su frecuencia. Córrelo en una de las computadoras de tu escuela para diferentes valores de N.

Verás que mientras mayor es el valor de N, más se acerca la frecuencia a $\frac{1}{2}$.

```
10 REM lanzamiento de una moneda
20 INPUT N
30 FOR I = 1 TO N
40 A = RND (-TIME)
50 A = INT(10*A)
60 IF A>4 THEN E = E + 1
70 NEXT I
80 PRINT "Frecuencia de estrellas:"; E/N
90 END
```

Definición 1 (Concepto de probabilidad)

> Si un suceso A puede ocurrir en n_A casos de n casos posibles e igualmente probables, se define la probabilidad de A y se denota $p(A)$, al cociente
>
> $$p(A) = \frac{n_A}{n}$$

Al referirse a los casos en que puede ocurrir el suceso A es costumbre hablar de "casos favorables" y, entonces, se interpreta la probabilidad como el cociente de casos favorables entre casos posibles.

Ejemplo 1

Al lanzar un dado (homogéneo), ¿cuál es la probabilidad de obtener un 5?

Resolución

Con la palabra homogéneo se quiere significar que los 6 resultados son igualmente probables, en lo sucesivo se asumirá que es así siempre. Así pues, en este caso tenemos 6 resultados posibles (e igualmente probables): 1; 2; 3; 4; 5 y 6. El suceso A es "obtener un 5", luego de los 6 resultados sólo uno es favorable, que es obtener un 5, y $p(A) = \frac{1}{6}$. ■

Observa que "casos favorables" no tiene ninguna significación positiva o negativa, es solo un nombre; en este caso obtener un 5 no es "favorable" ni "desfavorable" en el sentido usual. En otros casos (como en el de la mortalidad infantil) a lo que llamamos casos favorables son realmente desfavorables.

No siempre es tan sencillo calcular la probabilidad como en el ejemplo 1.

Ejemplo 2

Estudios realizados en diferentes países y épocas muestran que la probabilidad de nacimiento de un varón es aproximadamente $\frac{22}{43}$. ¿Cuál es la probabilidad de tener 4 hijos varones?

Resolución

Decir que la probabilidad es $\frac{22}{43}$ significa que hay 22 casos favorables (varón) de 43 posibles. En otras palabras, el nacimiento de un niño puede ocurrir de 43 formas y de ellas 22 son favorables.

Si se tiene un segundo hijo, por cada uno de los 43 casos posibles se tienen, de nuevo, 43 posibilidades y entonces el total de casos posibles es $43 \cdot 43 = 43^2$ y así sucesivamente.

Si el nacimiento se repite 4 veces, el total de casos posibles será, según el principio de multiplicación,

$$43 \cdot 43 \cdot 43 \cdot 43 = 43^4 = 3\ 418\ 801$$

y, aplicando de nuevo el principio de multiplicación, los casos favorables serán $22^4 = 234\ 256$.

Entonces, si B representa el suceso "los 4 niños son varones", la probabilidad será

$$P(B) = \frac{234\ 256}{3\ 418\ 801} \simeq 0{,}0685. \blacksquare$$

Observa que la probabilidad de nacer varón es ligeramente superior a 0,5

$$\frac{22}{43} \simeq 0{,}512$$

pero la probabilidad de 4 varones es menor que 0,1. Esto explica por qué son poco frecuentes las familias con 4 o más hijos, todos varones.

De la definición de probabilidad resultan de inmediato algunas propiedades elementales.

Teorema 1

La probabilidad satisface las propiedades:

a) Para todo suceso A, $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$.

b) Si A y B son excluyentes (es decir, no pueden ocurrir simultáneamente) entonces,

$p(A \text{ o } B) = p(A) + p(B)$.

c) $p(\text{no } A) = 1 - p(A)$.

Demostración

a) Si n_A representa los casos favorables y n los casos posibles se cumple, $0 \leqslant n_A \leqslant n$;

luego $0 \leq \frac{n_A}{n} \leq \frac{n}{n} = 1$

y esto significa $0 \leq p(A) \leq 1$ como se quería.

b) Como A y B no pueden ocurrir simultáneamente, si n_A es el número de veces que ocurre A y n_B el número de veces que ocurre B, el número de veces que ocurre A o B es la suma $n_A + n_B$, luego:

$$p(\text{A o } B) = \frac{n_A + n_B}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} = p(A) + p(B)$$

c) Si n_A es el número de veces que ocurre A, entonces A no ocurre en $n - n_A$ casos, luego:

$$p(\text{no } A) = \frac{n - n_A}{n} = \frac{n}{n} - \frac{n_A}{n} - 1 - p(A). \blacksquare$$

El teorema 1c es útil, en ocasiones, para calcular la probabilidad de un suceso.

Ejemplo 3

Una obra de cuatro tomos se coloca en el estante al azar. Calcula la probabilidad de que los tomos no queden en orden ni de derecha a izquierda ni de izquierda a derecha.

Resolución

Calculemos el número de casos posibles, es decir, de cuántas maneras pueden colocarse los cuatro libros: para el primer libro que se escoja hay 4 posibilidades (pues hay cuatro libros), después de colocado este, quedan 3 libros para la segunda posición, 2 para la tercera y al final queda un solo libro para ocupar la cuarta posición. Aplicando el principio de multiplicación hay $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ ordenaciones posibles. Como los tomos se colocan al azar, asumimos que todas las ordenaciones son igualmente probables.

Si consideramos el suceso A: los libros quedan en orden, debemos calcular p (no A). El suceso A ocurre cuando se tienen los ordenamientos 1 234 y 4 321, luego

$p(A) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$ y por lo tanto

$$p(\text{no } A) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}. \blacksquare$$

Ejercicios (epígrafe 3)

1. En un grupo de 35 alumnos hay 14 varones. Si se selecciona un alumno al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que sea una muchacha?
2. Se tiene un juego de dominó de 28 fichas (desde el doble blanco hasta el doble seis). ¿Qué probabilidad hay de que al coger una ficha, haya en esta exactamente cuatro puntos?
3. En una caja hay 30 tornillos de los cuales 6 están oxidados. Si se extrae un tornillo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no esté oxidado?

4. Si se escoge al azar una letra de la palabra "prensa", ¿cuál es la probabilidad de que sea la letra *n*? ¿Cuál es la probabilidad de que sea una vocal?

5. Se lanzan dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos obtenidos sea 7?

6. Se lanzan dos dados, uno es rojo y el otro es blanco.
Calcula la probabilidad de que el dado rojo muestre un número mayor que el dado blanco.

7. Calcula la probabilidad de obtener "estrella y número mayor que 4" al lanzar una moneda y un dado.

8. Se lanzan dos dados. Calcula la probabilidad de que la suma de los puntos obtenidos:

   a) sea mayor que 9,

   b) sea múltiplo de 3.

9. Calcula la probabilidad de que al lanzar un dado se obtenga un número múltiplo de 9.

10. Se tienen dos cajas (I y II). En la caja I hay 6 lápices azules y en la caja II hay 2 lápices azules y 5 lápices rojos. Si se escoge al azar un lápiz de cada caja, calcula la probabilidad de los sucesos:

    A: los dos lápices son rojos,

    B: uno de los lápices es rojo y el otro azul,

    C: los dos lápices son azules,

    D: al menos uno de los lápices es azul.

11*. Considere tres urnas con la siguiente composición: la urna I contiene 2 bolas blancas y 4 bolas rojas, la II contiene 1 bola blanca y 3 bolas rojas y la urna III contiene 3 bolas blancas y 3 bolas rojas. Una bola es seleccionada de cada urna. Determina la probabilidad de que:

    a) se escojan tres bolas blancas,

    b) se escojan exactamente dos bolas blancas,

    c) al menos una de las tres bolas sea roja.

12*. Un cubo, cuyas caras están pintadas, se ha dividido en 1 000 cubos iguales más pequeños, los cuales son colocados en una bolsa. Calcula la probabilidad de que uno de los cubos pequeños tomado al azar tenga exactamente

    a) una cara pintada,

    b) dos caras pintadas,

    c) tres caras pintadas.

13. Si se selecciona al azar un número de tres cifras, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de sus dígitos sea 4?

14*. Al lanzar tres dados, ¿qué es más probable; obtener en total 10 puntos o alcanzar sólo 9 puntos?

15*. Escribe un programa de computación que calcule la probabilidad de que al lanzar tres dados se obtengan en total N puntos.

16 . En un Instituto de Investigaciones científicas trabajan 55 personas. De estas, 26 conocen el idioma ruso, 20 el alemán y 16 el francés. Además, 13 conocen el ruso y el alemán; 8, el ruso y el francés y 5, el alemán y el francés. Hay 3 personas que hablan los tres idiomas. Si se selecciona al azar una de las personas que trabajan en el instituto, ¿cuál es la probabilidad de que no hable ninguno de estos tres idiomas?

17*. Se escoge un número entre 1 y 1 000 inclusive. Calcula la probabilidad de que:

a) el número no sea divisible por 7,

b) el número no sea divisible ni por 2, ni por 3, ni por 5 ni por 7.

18*. Al entrar a un supermercado cuatro personas entregan los paquetes que traían a la empleada encargada de guardarlos. Si a la salida los cuatro paquetes se les devolviesen al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de las cuatro personas reciba su paquete?

19*. (Problema de las cajas de fósforos de Banach.)

Un cierto matemático siempre lleva dos cajas de fósforos, y cuando quiere un fósforo selecciona una caja al azar. Si cada caja tiene n fósforos, determina la probabilidad de que cuando una se vacíe, la otra tenga n fósforos.

4. *Variaciones y combinaciones*

Con los principios de la teoría combinatoria que estudiaste en el epígrafe 2 se pueden resolver la mayor parte de los problemas que se presentan; sin embargo, existen algunos casos particulares que se dan con cierta frecuencia y para los cuales resulta posible obtener fórmulas sencillas.

Definición 1

Se llaman variaciones (sin repetición) de n objetos tomados p a p, a todas las posibles ordenaciones de p objetos tomados de los n.

Ejemplo 1

Obtén todas las variaciones de las vocales tomadas 3 a 3. ¿Cuántas hay?

Resolución

El diagrama en árbol de la figura 1.6 indica cómo obtener todas las variaciones. Obtenemos así las variaciones *aei, aeo, aeu, aie,...,uoi.* Para contarlas apliquemos el principio de multiplicación. La primera vocal se puede escoger de 5 formas, la segunda de 4 formas (no se puede repetir la primera) y la tercera de 3 formas (no se pueden repetir ninguna de las dos primeras).

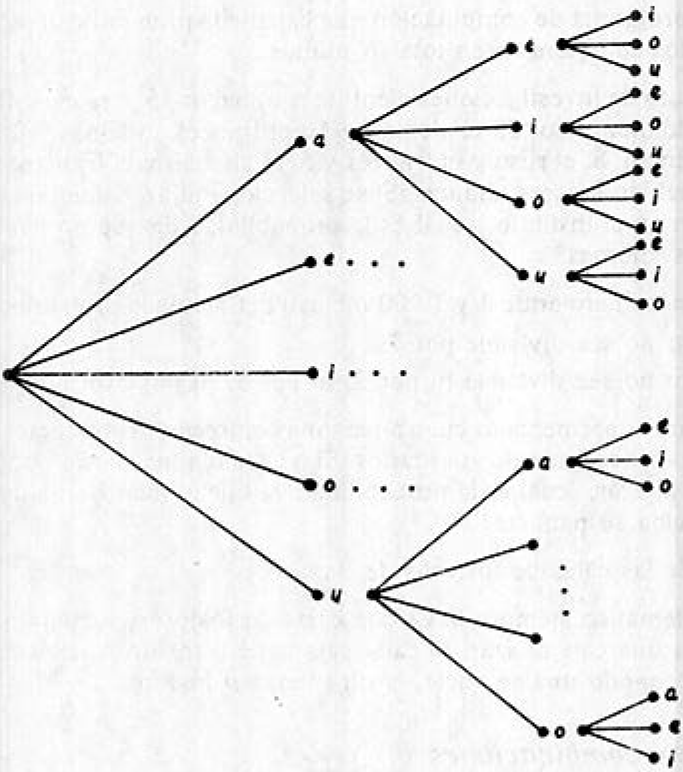


Fig. 1.6

Según el principio de multiplicación, en total se tendrán

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60. \blacksquare$$

Si $n = p$ hablamos de permutaciones de orden n.

Teorema 1

> El número de permutaciones de orden n se denota P_n y se calcula con la fórmula
>
> $$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Demostración

Procederemos por inducción en n; para $n = 2$ es cierta evidentemente: $P_2 = 2 = 2 \cdot 1$ pues solo existen dos permutaciones $a_1 a_2$ y $a_2 a_1$. Supongamos que es cierta para $n = k$, o sea,

$$P_k = k \cdot (k - 1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Para formar las permutaciones de orden $k + 1$ podemos proceder como se ilustra en la figura 1.7, es decir, seleccionar uno cualquiera de los $k + 1$ elementos y después, para cada selección, escoger una permutación de orden k.

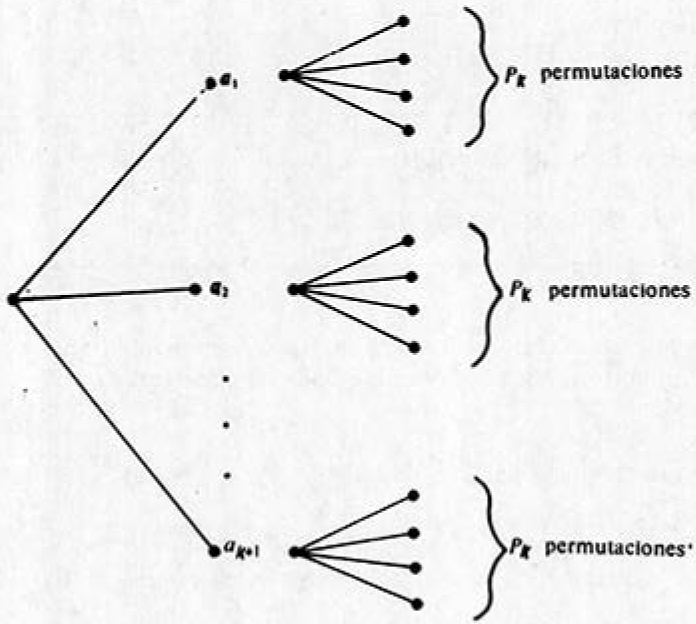


Fig. 1.7

Entonces, según el principio de multiplicación,

$$P_{k+1} = (k + 1) \cdot P_k = (k + 1) \cdot k \cdot (k - 1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$$

como se quería, luego;

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1. \blacksquare$$

Ejemplo 2

En una serie selectiva de béisbol participan 8 equipos. ¿Cuántas posiciones finales diferentes pueden resultar?

Resolución

Cada posición final es una permutación de los 8 equipos, por tanto, en total pueden existir;

$$P_8 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\ 320. \blacksquare$$

El número $n \cdot (n - 1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$ aparecerá con frecuencia en lo que sigue y es conveniente darle una notación especial.

Definición 2

Se llama factorial de n y se denota $n!$ al número
$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1.$

En general se cumple:

Teorema 2

> El número de variaciones de n objetos tomados p a p, se denota V_p^n y se calcula mediante la fórmula;
> $V_p^n = n(n - 1)(n - 2) \dots (n - p + 1).$

Demostración

Procederemos por inducción en n. Para $n = p$ (no es posible que $n < p$, por eso se comienza por p) se trata de las permutaciones de orden p:

$$V_p^p = P_p = p(p - 1)(p - 2) \dots 2 \cdot 1 = p(p - 1)(p - 2) \dots (p - p + 2)(p - p + 1).$$

Supongamos que es cierta para $n = k$, o sea,

$$V_p^k = k(k - 1) \dots (k - p + 1).$$

Formamos las variaciones de $k + 1$ elementos tomados p a p (fig. 1.8).

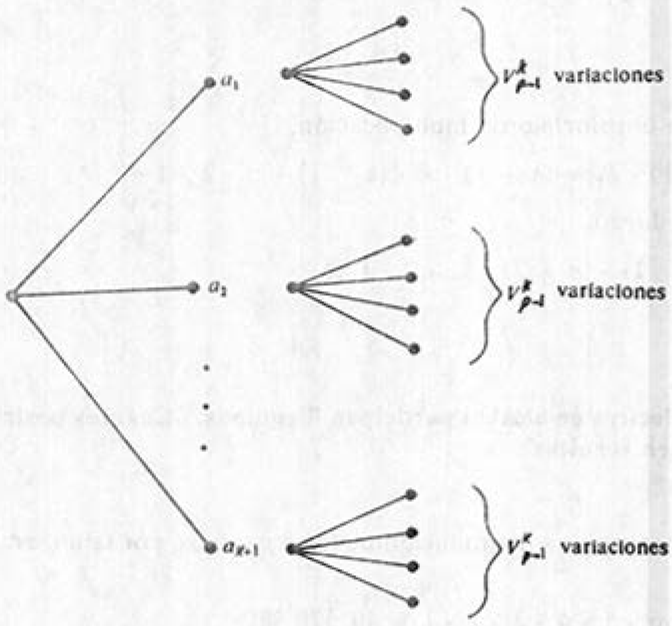


Fig. 1.8

Luego, aplicando el principio de multiplicación, resulta

$$\begin{aligned} V_p^{k+1} &= (k + 1) \cdot V_{p-1}^k = (k + 1)\, k\, (k - 1) \dots (k - (p - 1) + 1) \\ &= (k + 1)\, k\, (k - 1) \dots (k + 1 - p + 1). \end{aligned}$$

Entonces,

$$V_p^n = n\,(n - \;) \dots (n - p + 1). \blacksquare$$

Observa que son p factores sucesivos decrecientes empezando por n.

Ejemplo 3

En un comité de 8 personas hay que elegir un presidente, un vicepresidente y un secretario. ¿De cuántas formas puede hacerse?

Resolución

Se trata de formar grupos de 3 personas en los cuales la ordenación juega un papel esencial, pues no es lo mismo Juan Presidente, Pedro vicepresidente y Ana Secretaria que Pedro presidente, Ana vicepresidenta y Juan secretario. El hecho de que el orden sea esencial nos indica que son variaciones, luego, se trata de calcular las variaciones de 8 elementos tomados 3 a 3. Empezamos en 8 y tomamos 3 factores decrecientes sucesivos:

$$V_3^8 = 8 \cdot (8 - 1) \cdot (8 - 2) = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336. \blacksquare$$

La fórmula para el cálculo de las variaciones puede escribirse en forma más compacta utilizando factoriales:

$$\boxed{V_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

En efecto,

$$V_p^n = n(n-1)\ldots(n-p+1) = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)(n-p)(n-p-1)\ldots 2\cdot 1}{(n-p)(n-p-1)\ldots 2\cdot 1}$$

$$= \frac{n!}{(n-p)!}, \text{ como se quería.}$$

Para dar generalidad a esta fórmula es necesario que incluya el caso $n = p$, en este caso;

$$V_n^n = P_n = n!$$

y debe ser $(n - n)! = 1$. Esta es una de las razones por las que se define $0! = 1$.

Ejemplo 4

a) **¿De cuántas formas pueden distribuirse en los días de la semana los cumpleaños de 4 personas, de modo que no haya coincidencias?**

b) **¿Cuál es la probabilidad de que en un grupo de 4 personas haya al menos 2 que nacieron el mismo día de la semana?**

Resolución

a) Se trata de distribuir los 7 días de la semana en grupos de 4 en los que el orden es esencial ya que no es lo mismo que el lunes sea el cumpleaños de Pedro a que sea el de José. Esto significa que hay que contar las variaciones (sin repetición) de 7 elementos tomados 4 a 4.

$$V_4^7 = \frac{7!}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$

b) En este caso se trata de calcular la probabilidad de que al menos dos cumpleaños coincidan; es más simple calcular la probabilidad de que no coindan y aplicar el teorema 1c del epígrafe 3.
Calculamos la probabilidad de que no coincidan. El número de casos favorables es el calculado en el inciso a, $n_A = 840$.
Calculemos el número de casos posibles: el primer cumpleaños puede ocurrir cualquier día de la semana, es decir, de 7 formas; para cada una de estas formas el segundo puede ocurrir de 7 formas y así sucesivamente. Luego, según el principio de multiplicación
$n = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4 = 2\,401$

$$p\,(\text{no coincidencia}) = \frac{840}{2\,401} = 0{,}35$$

Luego, si A es el suceso que consiste en que al menos dos coincidan:
$P(A) = 1 - p\,(\text{no } A) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65.$
Se ve que es más probable que haya coincidencias a que no las haya. ■

Definición 3

Se llaman combinaciones de n objetos tomados p a p, a todos los subconjuntos de p elementos que se pueden formar con los n objetos.

Puedes observar que las combinaciones se diferencian de las variaciones en que en ellas no interesa el orden.

Ejemplo 5

Obtén las combinaciones de las vocales tomadas 3 a 3, ¿cuántas hay?

Resolución

En la figura 1.9 se indica cómo formar las combinaciones.

Obtenemos las combinaciones *aei, aeo, aeu, aio,...,iou.* Para contarlas debemos observar que con cada 3 vocales diferentes se forma una sola combinación, en lugar de $3! = 6$ variaciones diferentes que se forman con ellas, luego, el total será $\frac{V_3^5}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10.$ ■

Establece una comparación de este ejemplo con el ejemplo 1.

El principio aplicado en el ejemplo anterior se cumple en general.

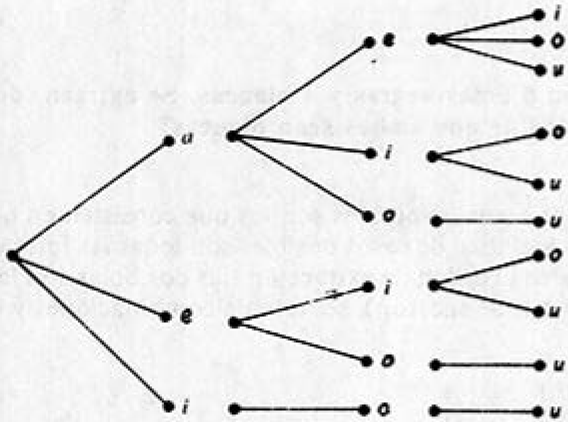


Fig. 1.9

Teorema 3

> El número de combinaciones de n elementos tomados p a p, se denota $\binom{n}{p}$ y se calcula con la fórmula
>
> $$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}.$$

Los números $\binom{n}{p}$ reciben el nombre de números combinatorios. También se denotan por C_p^n.

Demostración

Para demostrar este teorema basta observar que cada $p!$ variaciones dan lugar a una sola combinación, pues no importa el orden, luego

$$\binom{n}{p} = \frac{V_p^n}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}. \blacksquare$$

Ejemplo 6

De un grupo de 10 personas hay que seleccionar 3 delegados a la asamblea de escuela. ¿De cuántas formas pueden elegirse?

Resolución

Como en este caso no importa el orden, se trata de combinaciones:

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$$

Pueden elegirse de 120 formas. $\blacksquare$

Ejemplo 7

En una urna se tienen 6 bolas negras y 4 blancas. Se extraen dos bolas al azar ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean blancas?

Resolución

En esta oportunidad los casos favorables son los que consisten en que las dos bolas extraídas sean blancas y el total de casos posibles son todas las formas de extraer dos bolas. Como no se marca el orden de extracción (las dos bolas son las mismas, cualquiera sea el orden en que se sacaron), se trata de combinaciones y el total de casos posibles es:

$$n = \binom{10}{2} = \frac{10!}{8!\ 2!} = 45.$$

Los casos favorables son los que consisten en extraer dos bolas blancas (suceso A); de nuevo no interesa el orden y como son 4,

$$n_A = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\ 2!} = 6$$

luego $p(A) = \dfrac{6}{45} = \dfrac{2}{15} = 0{,}13.$ ■

Ejercicios (epígrafe 4)

1. Forma todas las variaciones de las letras A, B, C, D, E, F tomadas dos a dos.
2. Forma las variaciones de los números 1;2;3;4 tomados tres a tres.
3. Calcula el número de variaciones de siete objetos tomados cinco a cinco.
4. Calcula el número de variaciones de diez objetos tomados cuatro a cuatro.
5. ¿De cuántas maneras se pueden depositar 4 cartas en 7 buzones no depositando más de una carta en cada buzón?
6. Una línea de ferrocarriles tiene 30 estaciones cada una de las cuales expide boletos a las demás estaciones. Determina cuántas clases de boletos se necesitan.
7. En una carrera de 100 metros planos participan 8 corredores. ¿De cuántas maneras diferentes pueden quedar ubicados los corredores en la carrera (sin considerar empates)?
8. Una habitación tiene 6 puertas. ¿De cuántas maneras es posible entrar por una puerta y salir por otra diferente?
9. ¿Cuántos números entre 100 y 999 inclusive están formados solamente por dígitos impares diferentes?
10. ¿De cuántas formas puede confeccionarse una bandera de tres franjas de colores distintos si se tienen telas de colores azul, blanco, rojo, amarillo y verde? ¿Y si la franja superior debe ser roja?

11. ¿Cuántos diccionarios diferentes hay que editar para que se puedan hacer traducciones directamente entre cualquiera de los idiomas: español, ruso, inglés, francés y alemán?

12. Con los dígitos 1;2;3;4;5 y 6, ¿cuántos números menores que 1 000 pueden formarse que no tengan cifras repetidas?

13. ¿Cuántos números de cuatro cifras diferentes pueden formarse con las cifras del número 2 574? ¿Cuántos de ellos son impares?

14. ¿Cuántos números diferentes pueden formarse tomando 5 dígitos distintos del número 43 256 178?

15. Escribe todas las permutaciones de los elementos del conjunto {azul, blanco, rojo}.

16. Calcula el número de todas las "palabras" (tengan sentido o no) que se obtienen permutando las letras de la palabra AMOR. Escríbelas.

17. ¿De cuántas maneras pueden disponerse los 9 jugadores de un equipo de béisbol? ¿De cuántas maneras si el lanzador y el receptor son fijos?

18. ¿De cuántas maneras 6 soldados pueden colocarse en fila? ¿De cuántas maneras si a uno de ellos no se le permite ocupar los extremos?

19*. ¿De cuántas maneras pueden sentarse 5 personas alrededor de una mesa redonda?

20*. ¿De cuántas maneras pueden colocarse 8 llaves en un llavero?

21. ¿De cuántas maneras pueden formar parejas en un baile 10 muchachas y 10 varones?

22. Escribe las combinaciones de las letras A,B,C,D,E tomadas tres a tres.

23. Un equipo de 8 estudiantes realizó un trabajo de investigación. En la exposición del trabajo participan 4 estudiantes. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar los 4 estudiantes?

24. Hay 20 puntos en el plano, de los cuales no hay tres alineados. ¿Cuantas rectas pueden trazarse uniendo pares de puntos? ¿Cuántos triángulos pueden formarse cuyos vértices sean tres de estos puntos?

25. En una circunferencia están situados 20 puntos. Considerando estos puntos como vértices, ¿cuántos triángulos inscritos en la circunferencia pueden trazarse?

26. En un plano hay 12 puntos pero 4 están en línea recta. Determina el número de rectas de unión.

27. Calcula el número de diagonales de un polígono de n lados.

28. En una serie selectiva de béisbol participan 8 equipos. Si cada par de equipos se enfrenta 9 veces, ¿cuántos juegos se realizan en total?

29. Una compañía está formada por 3 oficiales, 6 sargentos y 60 soldados rasos. ¿De cuántos modos puede elegirse entre ellos un destacamento formado por un oficial, dos sargentos y 20 soldados rasos?

30. ¿Cuántas formas existen de escoger 12 personas de entre 17, si dos personas de estas 17 no pueden ser elegidas juntas?

31. En una urna hay fichas con los números 1;2;3;...;10. De ella se sacan 3 fichas a la vez. ¿En cuántos casos la suma de los números escritos en dichas fichas será igual a 9? ¿Y no menor que 9?

32. Un coro está formado por 10 participantes. ¿De cuántos modos se pueden escoger 6 participantes durante tres días, de forma que cada día el coro tenga distinta composición?

33. Dados 5 segmentos de longitudes 4;6;7;8 y 9 cm, respectivamente, ¿cuántos triángulos diferentes pueden construirse?
Nota: dos triángulos se consideran diferentes si no son congruentes.

34. ¿Cuántos números naturales entre 10 000 y 100 000 tienen como únicos dígitos 6;7 u 8? ¿Y cuántos sólo 6;7;8 o 0?

35*. En una reunión deben intervenir 5 personas: *A*, *B*, *C*, *D* y *E*. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir en la lista de oradores con la condición de que *B* debe intervenir inmediatamente después que *A*?

36. Hay 9 libros diferentes en un estante: 4 son rojos y 5 son verdes. ¿De cuántas maneras diferentes es posible colocarlos en el estante de tal forma que:

a) no haya restricciones,

b) los libros rojos deben estar juntos y los verdes también,

c) los libros rojos deben estar juntos pero los verdes pueden estarlo o no,

d) no haya dos libros juntos del mismo color.

37*. Un examen consta de 10 preguntas. ¿De cuántas maneras puede un estudiante responder correctamente a exactamente 8 preguntas? ¿De cuántas maneras puede responder erróneamente a lo sumo a dos preguntas?

38*. Un grupo de danza está formado por 7 hombres y 4 mujeres. Es necesario seleccionar 6 personas de forma que entre ellas haya no menos de 2 mujeres. ¿De cuántas maneras puede efectuarse la elección?

39*. Para los premios de un concurso de Matemáticas se tienen 3 ejemplares de un libro, 2 de otro y 1 de un tercero. ¿De cuántos modos se pueden entregar los premios, si en el concurso participan 20 personas y a nadie se le otorgan dos ejemplares de un mismo libro pero se le pueden entregar dos o tres libros diferentes?

40. Una urna tiene 6 bolas blancas y 4 negras. Se extraen 2 bolas a la vez. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:
A: una de las bolas es blanca y la otra negra,
B: las dos bolas son del mismo color.

41. Dos muchachos y dos muchachas se colocan en fila, al azar, para tomarse una fotografía. ¿Cuál es la probabilidad de que las muchachas y los muchachos queden alternados en la fotografía?

42. En una habitación hay 5 personas que llevan números de identificación del 1 al 5. Si se seleccionan al azar dos personas, ¿cuál es la probabilidad de que entre estos dos números de identificación el mayor sea 3?

43*. Se escribe al azar un número natural de cinco cifras. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de sus cifras sea 20?

44. Tomando al azar dígitos del conjunto $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$ se forma un número de 3 cifras distintas. Calcula la probabilidad de que sea múltiplo de 3.

45. Se escriben cuatro cartas y los sobres correspondientes. Se introducen las cartas en los sobres sin fijarse en si corresponden. ¿Cuál es la probabilidad de que se acierte en todas? ¿Cuál es la probabilidad de fallar en alguna?

46*. Un profesor de Educación Física decide dividir a sus 10 alumnos en dos equipos de 5 para jugar baloncesto. Para ello anota los nombres en 10 papelitos (uno en cada papelito) y los coloca en una caja. Uno de los muchachos le dice a su mejor amigo: "Ojalá caigamos en el mismo equipo". El amigo le responde: "Tenemos 50% de posibilidades de jugar juntos". ¿Es correcta su afirmación?

47. Se lanzan cuatro dados, ¿Cuál es la probabilidad de que los cuatros números mostrados sean diferentes?

48. En un lote de 12 artículos se conoce que 4 de ellos son defectuosos. Si se escogen dos artículos del lote al mismo tiempo, calcula la probabilidad de que:

a) los dos sean defectuosos,

b) los dos sean buenos,

c) uno sea bueno y el otro defectuoso,

d) al menos un artículo sea bueno.

49. Se reúnen 7 personas. Calcula la probabilidad de que todas cumplan años en días diferentes de la semana.

50. Demuestra que si $n, p \in \mathbb{N}$ y $n > p + 1$, entonces:

a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n}$,

b) $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$,

c) $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

51. Calcula de la manera más ventajosa:

a) $\binom{7}{2} + \binom{7}{3}$,

b) $\binom{9}{3} - \binom{8}{3}$,

c) $\binom{13}{9} + \binom{14}{9} + \binom{13}{10}$.

d) $\binom{21}{4} + \binom{23}{18} + \binom{21}{16} + \binom{22}{6}$.

Teorema del binomio

5. *Teorema del binomio*

Desde la secundaria básica conoces la *fórmula del binomio* $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

En este epígrafe generalizaremos esta fórmula para obtener potencias naturales cualesquiera de un binomio.

Teorema 1 (Teorema del binomio)

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}a\,b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Observa que la suma de los exponentes de a y b es siempre n y que el coeficiente es el número combinatorio $\binom{n}{k}$ donde k es exponente de b.

Ejemplo 1

Halla el desarrollo de $(a + b)^5$.

Resolución

$$(a + b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}a\,b^4 + \binom{5}{5}b^5$$

$$= 1 \cdot a^5 + 5 \cdot a^4b + 10 \cdot a^3b^2 + 10 \cdot a^2b^3 + 5 \cdot ab^4 + 1 \cdot b^5$$

$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5. \blacksquare$$

Ejemplo 2

Determina el coeficiente del término a^6b^4 en el desarrollo de $(a + b)^{10}$.

Resolución

De la observación anterior se deduce que el coeficiente de a^6b^4 es

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{6!\ 4!} = 210. \blacksquare$$

Ejemplo 3

Encuentra en el desarrollo de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{12}$

a) el cuarto término,

b) el término independiente.

Resolución

a) Como el primer término es x^{12}, es decir el exponente de $\frac{1}{x}$ es 0 y este exponente aumenta de 1 en 1, en el cuarto término aparecerá $\left(\frac{1}{x}\right)^3$, entonces este término es:

$$\binom{12}{3} x^9 \left(\frac{1}{x}\right)^3 = \frac{12!}{9!\ 3!} \cdot x^9 \cdot \frac{1}{x^3} = 220\ x^6$$

b) En el término independiente, x y $\frac{1}{x}$ deben aparecer con el mismo exponente, como la suma de ambos es 12, el exponente de cada uno es 6, luego el término independiente es:

$$\binom{12}{6} x^6 \cdot \frac{1}{x^6} = \frac{12!}{6!\ 6!} = 924. \blacksquare$$

Es fácil comprender por qué aparecen los números combinatorios en esta fórmula. Podemos calcular $(x + a_1)(x + a_2) \ldots (x + a_n)$.

Para esto se toma un factor de cada paréntesis; por ejemplo para obtener x^n es necesario tomar x en cada uno de estos paréntesis y solamente puede hacerse de una forma.

Para obtener x^{n-1} se toma x en $n - 1$ factores y en el otro factor el término independiente; resulta la suma de productos:

$$a_1x^{n-1} + a_2x^{n-1} + a_3x^{n-1} + \ldots + a_nx^{n-1} = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)x^{n-1}$$

Para obtener x^{n-2} se toma x en $n - 2$ factores y el término independiente en los dos restantes; se obtiene:

$$a_1a_2x^{n-2} + a_1a_3\,x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\,a_nx^{n-2} = (a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{n-1}\,a_n)x^{n-2}$$

Finalmente resulta:

$$x^n + (a_1 + a_2 + .. + a_n)x^{n-1} + (a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n)x^{n-2} + \ldots + a_1a_2 \ldots a_n.$$

Si ahora se pone $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = a$, los coeficientes serán potencias de a y su número será igual a la cantidad de combinaciones de ese orden.

Independientemente de este argumento, el teorema 1 puede ser demostrado utilizando inducción.

Demostración del teorema 1

Ya hemos visto que para $n = 2$ el teorema se cumple; supongamos que se cumple para $n = k$:

$$(a + b)^k = \binom{k}{0} a^k + \binom{k}{1} a^{k-1} b + \ldots + \binom{k}{p} a^{k-p} b^p + \ldots + \binom{k}{k} b^k$$

entonces,

$$\begin{aligned}
(a + b)^{k+1} &= (a + b)^k \cdot (a + b) \\
&= a(a + b)^k + b(a + b)^k \\
&= a^{k+1} + \binom{k}{1} a^k b + \ldots + \binom{k}{p} a^{k-p+1} b^p + \ldots + \binom{k}{k} ab^k + \\
&\quad + \binom{k}{0} a^k b + \ldots + \binom{k}{p-1} a^{k-p+1} b^p + \ldots + \binom{k}{k-1} ab^k + b^{k+1}
\end{aligned}$$

Para reducir términos semejantes debemos sumar números combinatorios de la forma $\binom{k}{p-1} + \binom{k}{p}$; calculemos estas sumas:

$$\begin{aligned}
\binom{k}{p-1} + \binom{k}{p} &= \frac{k!}{(p-1)!\,(k-p+1)!} + \frac{k!}{p!\,(k-p)!} \\
&= \frac{k!}{(p-1)!\,(k-p)!} \left[\frac{1}{k-p+1} + \frac{1}{p} \right] \\
&= \frac{k!}{(p-1)!\,(k-p)!} \left[\frac{p + k - p + 1}{p(k-p+1)} \right] \\
&= \frac{k!(k+1)}{(p-1)!\,p(k-p)!\,(k-p+1)} \\
&= \frac{(k+1)!}{p!(k-p+1)!} = \frac{(k+1)!}{p!\,(k+1-p)!} = \binom{k+1}{p}.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
(a + b)^k &= a^{k+1} + \binom{k+1}{1} a^k b + \ldots + \binom{k+1}{p} a^{k+1-p} b^p + \ldots + b^{k+1} \\
&= \binom{k+1}{0} a^{k+1} + \binom{k+1}{1} a^k b + \ldots + \\
&\quad + \binom{k+1}{p} a^{k+1-p} b^p + \ldots + \binom{k+1}{k+1} b^{k+1}. \blacksquare
\end{aligned}$$

Ejercicios (epígrafe 5)

1. Halla el desarrollo de:

   a) $(m + n)^6$ b) $(a + 3)^4$ c) $(a - b)^5$ d) $\left(h - \frac{1}{2}\right)^5$

2. Determina el coeficiente del término:

   a) x^3y^8 en el desarrollo de $(x + y)^{11}$,

   b) x^3 en el desarrollo de $(x + 2)^5$.

3. Desarrolla:

   a) $(x + 2y)^3$ b) $(2x + 5y)^4$

   c) $(\sqrt{2} + a)^4$ d) $\left(\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{4}v\right)^6$

4. a)Halla el coeficiente del quinto, séptimo y décimo términos en el desarrollo de $(a + b)^{28}$. ¿Existen otros términos con esos mismos coeficientes?

   b) ¿Cuál es el coeficiente de $a^{17}b^{11}$?

5. Calcula:

   a) el sexto término de $(x - y)^{15}$,

   b) el octavo término de $(2a - x)^{10}$,

   c) el cuarto término de $(x + 3y)^9$.

   d) el décimo término de $(2a + b)^{15}$.

6. Halla el término independientemente de x en el desarrollo de:

   a) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{14}$ b) $\left(3x^2 - \frac{1}{2x}\right)^9$

   c) $\left(\frac{1}{x^5} + 2x^2\right)^7$ d) $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{3n}$

7. Expresa como suma de potencias:

   a) $(x + 1)^4 + (x - 1)^4$

   b) $(1 + 4a)^3 - (1 - 4a)^3$

8. Demuestra que para todo n natural se cumple:

   a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$

   b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$

Ejercicios del capítulo

1. En un campeonato de voleibol, masculino y femenino, intervienen equipos de 6 países en ambos sexos. ¿De cuántas formas diferentes se pueden repartir los primeros lugares?

2. El examen teórico para obtener la licencia de conducción consta de 20 preguntas. Para aprobarlo es necesario responder correctamente 14 preguntas o más. ¿De cuántas maneras diferentes es posible tener en el examen exactamente 14 preguntas correctas?

3. En un campeonato de fútbol participan 18 equipos. ¿De cuántas maneras diferentes pueden quedar ubicados los 18 equipos? ¿De cuántas maneras diferentes pueden distribuirse los tres primeros lugares?

4. Luis tiene 9 libros y Ana, 7. Todos los libros son diferentes entre sí.
   a) ¿De cuántas maneras diferentes puede ordenar Ana sus libros en un estante?
   b) ¿De cuántas maneras puede escoger Luis 2 de sus libros para prestárselos a Ana?
   c) ¿De cuántas maneras pueden intercambiar Ana y Luis 2 de los libros de uno por 2 de los libros del otro?

5. Un estudiante necesita llamar por teléfono a una compañera de estudios pero sólo recuerda que las dos primeras cifras de su número telefónico son 32, y que las otras cuatro son distintas entre sí y menores que 5. Si llama por teléfono al azar, ¿qué probabilidad tiene de acertar?

6. En una mueblería hay 14 lámparas de noche de las cuales se sabe que 5 tienen defectos. Si se escogen al azar 2 lámparas para hacer un chequeo de calidad, calcula la probabilidad de que:
   a) ninguna sea defectuosa,
   b) exactamente una sea defectuosa,
   c) al menos una sea defectuosa.

7. Si se escriben las 29 letras del alfabeto en un orden aleatorio, ¿cuál es la probabilidad de que las letras x, y queden juntas?

8. En la figura 1.10 cada par de puntos consecutivos, horizontal y verticalmente, dista 1 unidad.

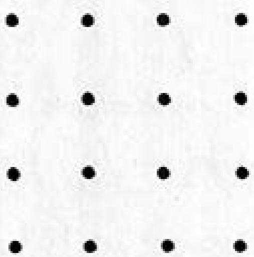


Fig. 1.10

   a) ¿Cuántos cuadrados existen cuyos vértices son cuatro de estos puntos?
   b) Si se seleccionan al azar cuatro de los puntos de la figura, ¿cuál es la probabilidad de que sean vértices de un cuadrado?

9*. El siguiente programa, escrito en BASIC, permite calcular la cantidad de números de tres cifras tales que la suma de sus tres dígitos es igual a N:

```
10 INPUT N
20 C = 0
30 FOR I = 1 TO 9
40 FOR J = 0 TO 9
50 FOR K = 0 TO 9
60 IF I + J + K= N THEN C = C + 1
70 NEXT K,J,I
80 PRINT C
80 END
```

Con la ayuda de este programa y aplicando lo que has aprendido en este capítulo:

a) construye una tabla con las cantidades de números de tres cifras cuyos dígitos suman N para $0 \leqslant N \leqslant 30$,

b) halla una fórmula que resuelva el problema para $1 \leqslant N \leqslant 9$,

c) si se escoge al azar un número de tres cifras, ¿cuál es el valor más probable de la suma de sus dígitos?

10*. Escribe un programa de computación que resuelva el siguiente problema: "Calcula la probabilidad de que al lanzar tres dados el producto de los números obtenidos sea n".

11. Si desarrollamos las potencias
$(a + b)^0$, $(a + b)^1$, $(a + b)^2$, $(a + b)^3$, ...
obtenemos
1, $a + b$, $a^2 + 2ab + b^2$, $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, ...

Podemos tomar los coeficientes de cada desarrollo y colocarlos en forma de triángulo. Por ejemplo:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & & & \dots & & & \end{array}$$

A este diagrama se le llama triángulo de Pascal.

a) Muestra que si se conoce una fila cualquiera de este triángulo, es posible calcular los coeficientes que forman la fila siguiente.

b) Escribe cuatro filas más del triángulo de Pascal dado anteriormente.

¿CÓMO SURGEN LOS NÚMEROS COMPLEJOS?

Desde la secundaria básica conoces la fórmula de resolución de una ecuación de segundo grado. Si la ecuación es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, esa fórmula es:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Recordarás que a $D = b^2 - 4ac$ se le llama discriminante y si $D < 0$ no existen soluciones reales, pues la raíz cuadrada de un número negativo hasta ahora no tiene sentido para ti.

También existen fórmulas de resolución para las ecuaciones cúbicas o de tercer grado. Estas fórmulas de resolución no se estudian en la escuela media; su obtención se debió al trabajo de los matemáticos italianos Escipione del Ferro, Nicolo Fontano (Tartaglia) y Gerónimo de Cardano, entre los siglos XV y XVI.

En estas fórmulas aparecen de nuevo raíces cuadradas de números negativos, pero estos matemáticos también rechazaron esas soluciones y no lograron darse cuenta de que al rechazar las raíces cuadradas de números negativos que surgen en el procedimiento de resolución, están excluyendo soluciones reales de la ecuación dada.

Esta particularidad es observada por el también italiano Rafael Bombelli (1530-1579), a quien se debe la primera noción del número complejo según se puede apreciar en su libro *Álgebra*, editado en 1572 y en el cual utiliza la fórmula de Tartaglia para la resolución de ecuaciones de tercer grado. Bombelli representó las soluciones mediante expresiones de la forma $a \pm b\sqrt{-1}$ donde a y b son números reales. A expresiones como las anteriores las denominaron entonces "números imaginarios".

Los números imaginarios no tuvieron entre los matemáticos de la época una franca acogida, por lo que se mantuvieron envueltos por más de 200 años en el más completo misticismo; esto justifica la denominación de "imaginario", carente de sentido en la actualidad, aunque por razones históricas aún se conserva esa denominación.

Aún en el siglo XVIII, la expresión $\sqrt{-1}$ estaba desprovista de sentido y representaba un símbolo de una operación imposible que permitía establecer vínculos o relaciones imprevistas, que más tarde fueron demostradas por los matemáticos franceses A. Demoivre (1667-1754) y J. D' Alembert (1717-1783) y el suizo L. Euler (1707-1783), este último introduce la letra i para denotar el símbolo $\sqrt{-1}$, que en electricidad se representa por j.

Fue en el siglo XIX, cuando se dio un concepto claro y preciso de los números imaginarios, contribuyendo en primer término, a la interpretación geométrica, que casi simultáneamente dieron el matemático alemán K.F. Gauss (1777-1855), el noruego G. Wessel (1745-1818) y el suizo A. J. Argaud (1768-1822) y, en segundo término una concepción puramente formal de los números complejos, que los reduce a números reales y de la que fue el matemático alemán Hermann Hankel (1849-1873), su más preclaro expositor.

Los números complejos, no solo constituyen un complemento en la construcción de los dominios numéricos, sino también son una herramienta de trabajo, imprescindible en numerosas ramas de la ciencia y la técnica; en el estudio de diversos temas de Física, como son: el movimiento vibratorio, las oscilaciones armónicas y otros fenómenos ondulatorios. Los números complejos constituyen un lenguaje apropiado para la representación matemática de esos fenómenos.

Los ilustres matemáticos del siglo XIX, el francés A. Cauchy (1789-1857) y los alemanes B. Riemann (1826-1866) y K. Weirstrass (1815-1897), construyeron, sobre la base de los números complejos, una de las disciplinas matemáticas más bellas y armoniosas, la teoría de las funciones de variable compleja que tiene interesantes aplicaciones.

CAPÍTULO 2

Números complejos

Representación binómica

1. *Introducción al estudio de los números complejos*

En este capítulo vamos a introducir un nuevo dominio numérico: el dominio de los números complejos. Cabe preguntarse, ¿es necesario un nuevo dominio numérico?, ¿existen problemas de interés práctico que no puedan ser resueltos utilizando los números reales? Hasta ahora han sido problemas prácticos los que han motivado las sucesivas ampliaciones de los dominios numéricos.

– Los números fraccionarios surgen para resolver el problema de dividir una unidad en varias partes alícuotas, o sea, para solucionar ecuaciones de la forma $ax = b$ en las que b no es múltiplo de a.

El problema se resuelve añadiendo "nuevos números" $\frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^*$.

– Los números racionales surgen para resolver el problema de magnitudes que tiene dos sentidos, matemáticamente esto conduce a ecuaciones $x + a = b$ con $b < a$. El problema se resuelve "añadiendo los números negativos" $-a$. $(a > 0)$

– Los números reales se completan para poder medir cantidades no racionales como la diagonal del cuadrado de lado 1; esto es equivalente a la solución de ecuaciones $x^2 = a$, $a > 0$ en las que a no es un cuadrado perfecto. El problema se resuelve "añadiendo los números irracionales"

Ejemplo 1

Determina el dominio numérico más reducido al que pertenecen los números siguientes:

a) $\frac{3}{4}$ **b)** $-5{,}3$ **c)** $1{,}\overline{17}$ **d)** π **e)** -2 **f)** $1{,}010010001....$

Resolución

a) Al conjunto de los números fraccionarios ($\mathbb{Q}_+$), pues se expresa como el cociente de dos números naturales.

b) Al conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$), pues se expresa como una expresión decimal finita y negativa.

c) Al conjunto de los números fraccionarios ($\mathbb{Q}_+$), pues se expresa como una expresión decimal periódica.

d) Al conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) pues π es irracional.

e) Al conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$), pues es el opuesto de un número natural.

f) Al conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) pues se expresa como una expresión decimal infinita no periódica. ■

Volvamos a la pregunta inicial, ¿existen problemas con sentido práctico que conduzcan a la necesidad de crear nuevos números?

Sabemos que un problema no soluble en $\mathbb{R}$ es la extracción de la raíz cuadrada de números negativos, pero no hemos enfrentado ningún problema práctico que conduzca a la necesidad de extraer raíces de números negativos.

Consideremos el problema siguiente:

¿Cuál es la arista de un cubo cuyo volumen es igual a su perímetro disminuido en $10\sqrt{2}$?

Este problema conduce a la ecuación:

$$x^3 = 12x - 10\sqrt{2}$$

Esta es una ecuación de tercer grado de la forma $x^3 = px + q$. Aunque no ha sido estudiada en la escuela, el matemático italiano Tartaglia mostró en el siglo XVI que esta ecuación puede ser resuelta y su raíz se expresa en la forma:

$x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$, donde u y v son las soluciones del sistema:

$$u + v = q$$

$$u \cdot v = \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

En este caso $p = 12$, $q = -10\sqrt{2}$ y el sistema es:

$$u + v = -10\sqrt{2}$$
$$u \cdot v = 4^3 = 64$$

Para resolver este sistema despejamos u: $u = \dfrac{64}{v}$ y sustituimos en la primera ecuación,

$$\frac{64}{v} + v = -10\sqrt{2}$$

$$64 + v^2 = -10\sqrt{2}\,v$$
$$v^2 + 10\sqrt{2}\,v + 64 = 0.$$

Al tratar de resolver esta ecuación, vemos que el discriminante es:

$$(10\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 64 = 200 - 256 = -56 < 0$$

y, por tanto, el sistema no tiene soluciones pues habría que extraer raíz cuadrada de un número negativo y eso no es posible en $\mathbb{R}$.

Sin embargo, una simple sustitución permite comprobar que $\sqrt{2}$es una solución; esto significa que el problema práctico tiene solución pero no se puede obtener calculando sólo con número reales.

Dado que calculando con raíces de números negativos se pueden obtener resultados válidos, se comprende que tiene sentido una nueva ampliación del dominio numérico; para hacerlo es suficiente "adjuntar" un elemento, que denotamos por i y satisface:

$$\boxed{i^2 = -1} \qquad (1)$$

A este elemento lo llamamos *unidad imaginaria;* admitimos que con él se puede operar siguiendo las reglas de los números reales y teniendo en cuenta la condición (1).

Al operar con números reales y la unidad imaginaria[1] se obtienen expresiones de la forma:

$a + ib, \qquad a, b \in \mathbb{R}$

Estas expresiones se llaman *números complejos*, expresados en forma binómica, y con ellos se calcula como con los reales, teniendo en cuenta (1) y que los múltiplos de i no son comparables con los números reales, por tanto, la igualdad de los números complejos exige la igualdad de sus componentes, es decir:

$$\boxed{\begin{array}{c} a + ib = c + id \quad \text{si y solo si} \\ a = c \ \text{ y } \ b = d \end{array}}$$

Ejemplo 2

a) Calcula:

$\sqrt{-4} \qquad (2 + 3i) + (3 - 2i) \qquad (2 + 3i)(3 + 4i)$

b) Determina x, y **si:** $(x + 2) + 3i = -1 + (y^2 + 2y)i$

Resolución

a) $\sqrt{-4} = \sqrt{4i^2} = 2i$ puesto que $i^2 = -1$

$(2 + 3i) + (3 - 2i) = (3 + 2) + (3 - 2)i$
$= 5 + i$ (reduciendo términos semejantes)

$(2 + 3i)(3 + 4i) = 6 + 8i + 9i + 12i^2$
$= 6 + 17i + 12(-1)$
$= -6 + 17i.$

[1] El nombre unidad imaginaria es una reminiscencia de la época en que se consideraba que estos números eran imaginarios, absurdos y estaban envueltos en el misterio. En la actualidad, estos números no tienen nada de misteriosos, tienen tanta razón de ser como los números reales, de imaginarios sólo les queda el nombre.

b) Por la condición de igualdad de números complejos debe ser:

$$x + 2 = -1 \quad \text{y} \quad 3 = y^2 + 2y$$
$$x = -3 \quad \text{y} \quad y^2 + 2y - 3 = 0$$
$$(y + 3)(y - 1) = 0$$
Luego $y = -3$ o $y = 1$

Es decir $x = -3$, mientras que $y = -3$ o $y = 1$. ■
El conjunto de los números complejos se denota $\mathbb{C}$.

Ejercicios (epígrafe 1)

1. Determina el dominio numérico más restringido al que pertenecen los números siguientes.

a) $\frac{2}{3}$ b) -1 c) $\sqrt{\pi}$

d) π^2 e) e^2 f) -5

g) 6 h) $\sqrt{4 + 5}$ i) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}$

j) $e^{i\pi}$ k) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{3}$ l) $\cos \frac{\pi}{2}$

m) $\log 10^{3/2}$ n) -6 ñ) $\sqrt{225}$

o) 0 p) $e^{i\pi 3}$ q) $e^{i\pi 1/2}$

r) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ s) $(\sqrt{3})^3$ t) $(\sqrt{3})^4$

u) $\cos \frac{\pi}{2}$ v) $e^{\sqrt{2}}$

2. Di si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

a) $0 \in \mathbb{N}$ b) $\frac{3}{2} \in \mathbb{N}$ c) $\sqrt{3} \notin \mathbb{R}$

d) $7{,}66 \in \mathbb{Q}$ e) $\mathbb{I} \subset \mathbb{Q}$ f) $-6 \in \mathbb{Z}$

g) $\pi \in \mathbb{Q}$ h) $\sqrt{36} \in \mathbb{N}$ i) $\operatorname{sen} 30° \in \mathbb{Q}$

j) $2 \cos 120° \in \mathbb{Z}$ k) $\log 0{,}001 \notin \mathbb{Z}$

l) $e^{i\pi/2} \notin \mathbb{R}$

3. Completa utilizando los símbolos ($\in, \notin, \subset, \not\subset$), de manera que resulte una proposición verdadera.

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ____ $\mathbb{I}$ b) $-\frac{3}{4}$ ____ $\mathbb{Q}$ c) $\mathbb{R}$ ____ $\mathbb{Z}$

d) -4 ____ $\mathbb{Z}$ e) $\sqrt{2}$ ____ $\mathbb{Q}$ f) $\sqrt{3}$ ____ $\mathbb{R}$

4. Escribe en el espacio en blanco los símbolos $\in$, $\notin$, $\subset$, o $\not\subset$ de manera que resulte una proposición falsa.

a) $\frac{3}{5}$ ____ $\mathbb{Q}$ b) π ____ $\mathbb{Z}$ c) $\mathbb{Z}$ ____ $\mathbb{R}$

d) $-\frac{1}{3}$ ____ $\mathbb{R}$ e) $\mathbb{I}$ ____ $\mathbb{R}$ f) $\cos\frac{\pi}{3}$ ____ $\mathbb{I}$

5. Sea el conjunto:

$$U = \left\{\frac{1}{2}\ ;\ 0;\ -1;\ \sqrt{25}\ ;\ \pi;\ \frac{5}{3}\ ;\ 2{,}\overline{09}\ ;\ -\sqrt{6};\ e\right\}$$

Escribe los elementos de los conjuntos.

$A = \{x \in U \text{ y } x \in \mathbb{N}\}$ $B = \{x \in U \text{ y } x \in \mathbb{Q}\}$
$C = \{x \in U \text{ y } x \notin \mathbb{Z}\}$ $D = \{x \in U \text{ y } x \in \mathbb{R}\}$
$E = \{x \in U,\ x \in \mathbb{Z}\}$ $F = \{x \in U \text{ y } x \notin \mathbb{R}\}$

6. Descompón a $x^3 - 1$ aplicando la regla de Ruffini.

7. Investiga si las ecuaciones siguientes tienen solución en el conjunto U dado.

a) $\dfrac{4x^2 - 3x + 5}{x^2 - 2x + 13} = 2 \qquad U = \mathbb{N}$

b) $\dfrac{3x}{2x - 1} - \dfrac{39}{2x + 1} = 5 - \dfrac{45}{4x^2 - 1} \qquad U = \mathbb{Z}$

c) $(m - n)x^2 - nx = m \qquad U = \mathbb{Q} \quad m, n \in \mathbb{Q}$

d) $\dfrac{x^2 - x + 16}{x^2 + x + 1} = \dfrac{x + 6}{x - 1} + \dfrac{x + 36}{x^3 - 1} \qquad U = \mathbb{R}$

e) $\sqrt{2x - 2\sqrt{x - 3}} - \sqrt{4x - 4} = 0 \qquad U = \mathbb{R}$

8*. Demuestra que la ecuación $x^2 - 3 = 0$ carece de solución en $\mathbb{Q}$.

9. Di si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

a) $\frac{1}{2} \in \mathbb{C}$ b) $\sqrt{-4} \in \mathbb{R}$ c) $\left(\sqrt{-2}\right)^{2/3} \notin \mathbb{R}$

d) $\mathbb{R}$ e) $1 - 2i \notin \mathbb{R}$ f) $-3 + \sqrt{5}\, i \in \mathbb{R}$

10. Completa, utilizando los símbolos ($\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$ de forma que se obtenga una proposición verdadera.

a) $\sqrt{3}$ ____ $\mathbb{C}$ b) $\mathbb{C}$ ____ $\mathbb{R}$ c) $3 - \sqrt{2}i$ ____ $\mathbb{C}$

d) 3 ____ $\mathbb{R}$ e) $-\frac{1}{2}$ ____ $\mathbb{R}$ f) $\mathbb{R}$ ____ $\mathbb{C}$

11. Completa, utilizando los símbolos ($\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$) de manera que resulte una proposición falsa.

a) i ____ $\mathbb{C}$ b) $\mathbb{R}$ ____ $\mathbb{C}$ c) $\sqrt{2}$ ____ $\mathbb{R}$
d) $-3i$ ____ $\mathbb{R}$ e) $\mathbb{C}$ ____ $\mathbb{R}$

12. Di si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

a) $\left\{\text{sen}\ \frac{\pi}{4};\ \frac{2}{3};\ e^2;\ \sqrt{5}\right\} \subset \mathbb{R}$.

b) $\{e^{i/2};\ 2;\ -5;\ 0\} \subset \mathbb{Z}$

c) $\left\{\left(\text{sen}\ \frac{\pi}{6}\right)^2;\ 2\ \text{sen}\ \frac{5\pi}{6};\ 1;\ \cos\ \frac{\pi}{2};\ \sqrt{16};\ \log 2\right\} \subset \mathbb{Q}$

d) $\{e^{i\pi\sqrt{2}/2};\ \frac{1}{2};\ 0;\ 5\} \subset \mathbb{Q}$.

13. Calcula la suma de los siguientes números complejos.

a) $(3 + 2i) + (5 + 3i)$ b) $(1 + 7i) + (4 + 5i)$
c) $(5 + 5i) + (-8 + 2i)$ ch) $(2 + 4i) + (-9 - 7i)$
d) $(-3 + 2i) + (16 - 11i)$ e) $(-15 - 8i) + (-1 - i)$
f) $\left(-6 - \frac{1}{3}i\right) + \left(5 - \frac{2}{3}i\right)$ g) $(-4 + 2i) + i$
h) $(5 + 2i) + (2 + 4i)$ i) $(6 + 3i) + (3 - 5i)$
j) $(7 + 2i) + (5 - 4i)$ k) $(2 + 0i) + (4 + 0i)$
l) $(3 + 0i) + (0 + 3i)$ ll) $(8 + 5i) + (2 + 3i)$
m) $(-3 - 5i) + (4 + 5i)$ n) $(-8 - 5i) + (-2 - 2i)$
ñ) $(9 + 2i) + (4 - 2i)$ o) $(2p - 3qi) + \left(-\frac{m}{2}i + n\right)$
p) $\left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i\right) + \left(-\frac{2}{3} - i\right)$ q) $\left[\frac{\sqrt{2}}{3} - i\right] + \left[-\frac{1}{3} + 2i\right]$
r) $(z + x^2i) + \left[\frac{i}{y^2}\right] + \frac{x}{y}$ s) $\left[\frac{1}{3} - \frac{2}{5}i\right] + \left[\frac{2}{3} + \frac{2}{5}i\right]$
t) $\left[\frac{1}{2} - 0{,}5i\right] + \left[\frac{3}{2} + 2{,}5i\right]$ u) $\left[\frac{1}{2} + \sqrt{3}i\right] + \left[\frac{1}{4} - \sqrt{3}i\right]$
v) $(3 - 2i) + (0 + 3i) + (6 - 2i)$
w) $(6 + 3i) + (3 - 2i) + (8 + 0i) + (0 + 4i)$
x) $(8 + i) + (-2 + 3i) + (5 - 5i)$
y) $(-5 + 2y) + (3 + 4i) + 8i$

z) $\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{5}i\right) + (2 + i) + \left(\frac{7}{3} - \frac{2}{5}i\right)$

14. Calcula las diferencias siguientes de números complejos.

a) $(4 + 2i) - (2 + 4i)$
b) $(-8 + 2i) - (3 + 6i)$
c) $(10 + 3i) - (-5 - 2i)$
d) $(2 + 2i) - (2 - i)$
e) $(0 + 5i) - (2 + 0i)$
f) $(-6 - 2i) - (-4 - 3i)$

15. Calcula los productos siguientes de números complejos.

a) $(4 + 2i)(5 + i)$
b) $(2 + 0i)(3 + 0i)$
c) $(5 + 0i)(0 + 2i)$
d) $4(5 + 2i)$
e) $-5(4 + 3i)$
f) $\frac{1}{4}(-2 - 4i)$
g) $(3 + 2i)(3 - 2i)$
h) $(8 + i)(3 - 2i)$
i) $(-5 - 4i)(2i)$
j) $(1 + 2i)(2 + 5i)$
k) $(2 + 3i)(3 + 15i)$

16. Calcula:

a) $(2 - i)(3 + i) - \left(\frac{1}{2} + 4i\right)$

b) $(\sqrt{2}i - 7)\left(\sqrt{3} + \frac{1}{5}i\right) - \left(\frac{2}{3} - i\right)(i - 5i)$

c) $(1 + i)(1 - i) - 5(2 + 3i)(4 - 5i) - (3 - i)$

d) $\frac{2}{3}i - 5 + \frac{1}{5}(\pi - 5i) - \left(2 + \frac{1}{2}i\right)\left(2 - \frac{1}{2}i\right)$

e) $(\sqrt{3} - \sqrt{5}i)(\sqrt{3} + \sqrt{5}i) - 2i\left(\frac{5}{2} - i\right)$

f) $(e - i)(\sqrt{2} + i) + 5i(3 - 2i) + \frac{1}{2}i - 5$

g) $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}i\right)(6 - i) + (6 - i)(2 - i) + (3i - 5)(5 - 3i)$

h) $\left(\sqrt{288} - \sqrt{108}\,i\right)(2\sqrt{2} + \sqrt{3}i) - (55 - 2i) - (2 - i)(4 + 3i)$

i) $\frac{\sqrt{5}i}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} - \frac{2i + 3}{5} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 7$

j) $(2 + 3i)^2 - (2 - 3i)^2$

k) $(1 + i)^3 - (1 - i)^3$

l) $(\sqrt{2} + i)^2 - (\sqrt{3} - i)^2$

m) $(\sqrt{5}i + 3i)^3 + (\sqrt{5} \cdot 3)^3$

17. Determina x, y si: $(x, y \in \mathbb{R})$

a) $x^2 - 3x + i(y - 4) = 2 + 3i$

b) $x + y - i(2x - y) = 4 - 4i$

c) $x^2 + 1 - i(y^2 - 1) = x - iy$

d) $x^2 + y - i(y + 1) = 2 - 3i$

e) $x + y + ixy = 4$

f) $x - 2y + 3ix - 3iy = 5 - i$

g) $2 + x + 3i(y - 2) = 3i$

h) $x - iy = 4$

i) $x^4 - x^2 + i(y - 4) = -1 + 3i$

j) $\dfrac{x}{y} + 3ixy = 1$

k) $(x - 3i) + (5 + iy) = 6 - 6i$

l) $[x^2 + 1 + (y - 1)i] - [2x + (y^2 + 1)i] = 0$

m) $(x^2 + iy) + (3 - 4i) = x - i$

n) $(x + iy) + (x - iy) = 5$

ñ) $(x + iy) - (x - iy) = 4$

o) $(x + 2 - i)(y - 1 - i) = 3 - 4i$

18. Teniendo en cuenta la definición de igualdad de números complejos, determina los valores de x, $y \in \mathbb{R}$ que satisfacen las ecuaciones siguientes.

a) $x^2 - y - yi = 5 - 2x + 3(1 - x)i$

b) $(2x^2 + y^2 - 54) + (2y^2 - x^2)i = 17i$

c) $(4 + 2i)x + (5 - 3i)y = 13 + i$

d) $(3x - i) + (y - x + 5) = 8 - iy$

19. Calcula los valores de x, $y \in \mathbb{R}$ que satisfacen las ecuaciones siguientes.

a) $(x + iy)(1 - 5i) = 2 + 5i$

b) $(x + iy)(-1 + 4i) = -9 + 5i$

c) $(x + iy)(3 - 7i) = 2 + 4i$

d) $(x + iy)(2 + i) = 1 + 3i$

2. *Números complejos conjugados. Módulo de un número complejo*

Hemos visto que un número complejo es una expresión de la forma $a + ib$ donde $a, b \in \mathbb{R}$, i es la unidad imaginaria.

En otras palabras, un número complejo es la suma de un número real y el producto de la unidad imaginaria por un número real.

Estos términos reciben nombres especiales.

Definición 1

> Dado el número complejo $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, se llama parte real y se denota $\mathscr{R}(z)$ al número real a y parte imaginaria de z y se denota $\mathscr{I}(z)$ al número real b. En símbolos: $\mathscr{R}(a + ib) = a$, $\mathscr{I}(a + ib) = b$; $a, b \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1

Determina la parte real y la parte imaginaria de:

a) $5 - 3i$

b) $6i - \dfrac{8}{3}$

c) $\dfrac{2 + 5i}{6}$

d) $z = (2 + 3i) + (1 - 3i)$

e) $z = (4 + 5\,i) - (4 + 3i)$

f) $z = (1 + i)(2 + 3i)$

g) $z = (3 + i)\,(3 - i)$

Resolución

a) $\mathscr{R}(5 - 3i) = 5 \quad \mathscr{I}(5 - 3i) = -3$

b) Lo escribimos en la forma $a + ib$: $6i - \dfrac{8}{3} = -\dfrac{8}{3} + 6i$

entonces; $\mathscr{R}\left(6i - \dfrac{8}{3}\right) = \dfrac{8}{3}$, $\mathscr{I}\left(6i - \dfrac{8}{3}\right) = 6$.

c) Efectuamos para expresarlo en la forma $a + ib$.

$$\frac{2 + 5i}{6} = \frac{2}{6} + \frac{5}{6}\,i = \frac{1}{3} + \frac{5}{6}\,i, \text{ luego:}$$

$$\mathscr{R}\left[\frac{2 + 5i}{6}\right] = \frac{1}{3} \approx 0{,}333 \qquad \mathscr{I}\left[\frac{2 + 5i}{6}\right] = \frac{5}{6} \approx 0{,}833$$

d) Efectuando tenemos: $z = (2 + 3i) + (1 - 3i) = 3$, luego $\mathscr{R}(z) = 3$, $\mathscr{I}(z) = 0$.

e) Efectuando resulta: $z = (4 + 5i) - (4 + 3i) = 2i$, luego $\mathscr{R}(z) = 0$, $\mathscr{I}(z) = 2$.

f) Efectuando: $z = (2 + i)(2 + 3i) = 1 + 8i$, luego $\mathscr{R}(z) = 1$, $\mathscr{I}(z) = 8$.

g) Efectuando: $z = (3 + i)\,(3 - i) = 9 - (-1) = 9 + 1 = 10$;
luego $\mathscr{R}(z) = 10$, $\mathscr{I}(z) = 0$. ■

Definición 2

> **Dos números complejos se llaman conjugados si difieren sólo en el signo de la parte imaginaria.**
> **En símbolos si $z = a + ib \in \mathbb{C}$, su conjugado, que se denota $\bar{z}$ (se lee *z barra*), es $\bar{z} = a - ib \in \mathbb{C}$.**

Ejemplo 2

Escribe el conjugado de los números complejos siguientes.

a) $z = 2 + \pi i$ b) $a = \frac{8}{3} i - \sqrt{2}$

c) $m = 5$ d) $n = 3i$

Resolución

a) $\mathcal{R}(z) = 2$, $\mathcal{I}(z) = \pi$ luego si $\bar{z}$ es el conjugado de z: $\mathcal{R}(\bar{z}) = 2$, $\mathcal{I}(\bar{z}) = -\pi$, es decir, $\bar{z} = 2 - i\pi$.

Vemos que para obtener el conjugado de un número complejo, basta cambiar el signo de la parte imaginaria.

b) $a = \frac{8}{3} i - \sqrt{2} = -\sqrt{2} + \frac{8}{3} i$, $\bar{a} = -\sqrt{2} - \frac{8}{3} i$

c) $m = 5$, $\bar{m} = 5 = m$ pues $\mathcal{I}(m) = 0$

d) $n = 3i$, $\bar{n} = -3i = -n$, pues $\overline{\mathcal{R}}(n) = 0$. ■

Teorema 1

> Sea $z = a + ib$ un número complejo; $z \in \mathbb{C}$ cualquiera, entonces se cumple:
> a) $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ b) $z + \bar{z} = 2\mathcal{R}(z)$ c) $z - \bar{z} = 2\mathcal{I}(z)i$

Demostración

Se reduce a un simple cálculo. Si $z = a + ib$, $\bar{z} = a - ib$, entonces:

a) $z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$

b) $z + \bar{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a = 2\mathcal{R}(z)$

c) $z - \bar{z} = (a + ib) - (a - ib) = 2ib = 2\mathcal{I}(z)i$

Definición 3

> Se llama módulo de un número complejo $z \in \mathbb{C}$ y se denota $|z|$, al número real $\sqrt{z \cdot \bar{z}}$.

Ejemplo 3

Calcula el módulo de los números complejos siguientes:

a) $z = 2 + 3i$ b) $z = \sqrt{2}$ c) $z = 2 - 3i$

Resolución

a) $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}61$

b) $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$

c) $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}61.$ ■

En general se cumple que si $z = a + ib$, entonces:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ y, por tanto, } |z| = |\bar{z}|.$$

Los conceptos introducidos pueden ser utilizados para facilitar la división de números complejos.

Ejemplo 4

Expresa en forma binómica:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2} + i}$ b) $\dfrac{2 - \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}$

Resolución

Para expresar los números dados en la forma binómica, se multiplica y se divide por el conjugado del denominador. Se tiene:

a)
$$\frac{1}{\sqrt{2} + i} = \frac{1}{\sqrt{2} + i} \cdot \frac{\sqrt{2} - i}{\sqrt{2} - i} = \frac{\sqrt{2} - i}{2 + 1}$$
$$= \frac{\sqrt{2} - i}{3}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3}i$$

b)
$$\frac{1 - \sqrt{2}i}{1 + \sqrt{3}i} = \frac{2 - \sqrt{2}i}{1 + \sqrt{3}i} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}$$
$$= \frac{2 - 2\sqrt{3}i - \sqrt{2}i + \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}i}{1^2 + (\sqrt{3})^2}$$
$$= \frac{2 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - (\sqrt{2} + 2\sqrt{3})i}{1 + 3}$$
$$= \frac{2 - \sqrt{6} - (\sqrt{2} + 2\sqrt{3})i}{4}$$
$$= \frac{2 - 2{,}45 - (\sqrt{2} + 2\sqrt{3})i}{4}$$
$$= \frac{-0{,}45 - (1{,}41 + 2 \cdot 1{,}73)\,i}{4}$$

$$= -\frac{0{,}45}{4} - \frac{4{,}87i}{4}$$

$$= -0{,}112 - 1{,}217i. \blacksquare$$

Dado que las operaciones con números complejos se efectúan calculando con sus partes reales e imaginarias, tienen las mismas propiedades que las operaciones con números reales.

Teorema 2

a) La adición y la multiplicación de números complejos son conmutativas y asociativas, es decir:
$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $\quad (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ y
$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$, $\quad (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

b) El 1 y el 0 desempeñan el mismo papel que en el conjunto de los números reales, es decir:
$z + 0 = 0 + z$, $z + (-z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y $z \cdot 1 = 1 \cdot z$ y
$z \cdot z^{1} = z^{1} \cdot z = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$
Si $z_1 \cdot z_2 = 0$, entonces $z_1 = 0$ ó $z_2 = 0$.

c) La multiplicación de números complejos es distributiva respecto a la suma y la resta, es decir, para todo z, z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ se cumple:
$z \cdot (z_1 \pm z_2) = z \cdot z_1 \pm z \cdot z_2$.

Ejemplo 5

a) Comprueba que:

$$(2 + 3i) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{2}{3}i\right) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{2}{3}i\right) + (2 + 3i).$$

b) Calcula de la forma más ventajosa posible:

$$\left[(\sqrt{2} + \pi) + \frac{\sqrt{5}}{5}i\right] + (4 - 5i) + \left[(-\sqrt{2} - \pi) - \frac{\sqrt{5}}{5}i\right]$$

c) Resuelve la ecuación $z^2 + 4 = 0$, con $z \in \mathbb{C}$.

Resolución

a) Calculando obtenemos

$$(2 + 3i) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{2}{3}i\right) = \left(2 - \frac{1}{2}\right) + \left(3 - \frac{2}{3}\right)i$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{7}{3}i = 1{,}5 + 2{,}33i$$

$$\left(-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}i\right)+(2+3i)=\left(-\frac{1}{2}+2\right)+\left(-\frac{2}{3}+3\right)i$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{7}{3}i=1{,}5+2{,}33i$$

luego se cumple la igualdad.

b) Aplicando las propiedades asociativa y conmutativa obtenemos:

$$(\sqrt{2}+\pi)+\frac{\sqrt{5}}{5}i+(4-i)+\left[(-\sqrt{2}-\pi)-\frac{\sqrt{5}}{5}i\right]$$

$$=(\sqrt{2}+\pi)+\frac{\sqrt{5}}{5}i+\left[(4-i)+\left((-\sqrt{2}-\pi)-\frac{\sqrt{5}}{5}i\right)\right]$$

$$=(\sqrt{2}+\pi)+\frac{\sqrt{5}}{5}i+\left[(-\sqrt{2}-\pi)-\frac{\sqrt{5}}{5}i+(4-i)\right]$$

$$=\left[(\sqrt{2}+\pi)+\frac{\sqrt{5}}{5}i+(-\sqrt{2}-\pi)-\frac{\sqrt{5}}{5}i\right]+(4-i)$$

$$=0+(4-i)$$
$$=4-i.$$

En la práctica se cancelan directamente los opuestos sin necesidad de efectuar todas las transformaciones que hemos realizado en este ejemplo con el fin de que se comprenda por qué resulta así.

c) $z^2+4=z^2-(-4)=z^2-4i^2=(z-2i)(z+2i)=0$, luego

$z-2i=0$ o $z+2i=0$

$z=2i$ o $z=-2i$

y la ecuación tiene dos raíces que son los números complejos conjugados $2i$ y $-2i$.

También se puede proceder:

$$z^2+4=0$$
$$z^2=-4$$
$$z^2=4i^2$$
$$z=\pm\sqrt{4i^2}=\pm 2i.\ ■$$

Ejercicios (epígrafe 2)

1. Determina la parte real e imaginaria de los números complejos siguientes.

a) $3-4i$ b) $\dfrac{2+5i}{2}$ c) $x-xy+(3-4i)$

d) x^2+y^2 e) $12-(i+4)$ f) $(2-i)(i+\sqrt{5})$

g) $\sqrt{-9}$ h) $\dfrac{1}{i}$ i) $12(\cos 48° - i\cdot \operatorname{sen} 48°)$

j) $\sqrt{-2} + (i + \sqrt{5})$

k) $5^{0,6} - i10^{3/4}$

l) $\dfrac{2 + 3i}{1 - i}$

m) $(x + i)(yi - 4)(2 - \sqrt{3}\, i)$

n) $(2 + 3\, i)^4$

2. De los números complejos dados a continuación di cuáles representan un número real y cuáles son imaginarios puros:

a) $z_1 = 3 - 2i$ b) $z_2 = 4$ c) $z_3 = -\dfrac{1}{2}\, i$

d) $z_4 = 0$ e) $z_5 = \sqrt{2}i$ f) $z_6 = i$

g) $z_7 = \dfrac{11}{3}$ h) $z_8 = 4 - \dfrac{5}{3}\, i$ i) $z_9 = -2{,}7$

j) $z_{10} = (\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$ k) $z_{11} = x$

l) $z_{12} = yi\ (y \neq 0)$

3. ¿Para qué valores de $x \in \mathbf{R}$ los números complejos dados son imaginarios puros? ¿Para qué valor de $y \in \mathbf{R}$ su parte imaginaria es 0?

a) $z = x + \sqrt{4x + 1} - 5 + (2y - 1)i$

b) $z = \dfrac{1}{2x - 2} + \dfrac{3}{x^2 - 1} - \dfrac{1}{4} + (y^2 + y + 1)i$

c) $z = \dfrac{5x}{2x^2 - x - 1} - \dfrac{4x - 5}{x^2 - 1} - \dfrac{5}{2x + 1} + \left(y - \sqrt{10 - 2y} - 1\right)i$

4. Si $z = (a + 2) + 3i$ y $z_1 = 5 + (b - 1)i$ $(a, b \in \mathbf{R})$.
Determina a y b para que:

a) $\mathcal{R}(z + z_1) = 0$ b) $\mathcal{R}(z - z_1) = 0$ c) $\mathcal{I}(z + z_1) = 0$

d) $\mathcal{I}(z - z_1) = 0$ e) $\mathcal{R}(z \cdot z_1) = 0$ f) $\mathcal{I}(z \cdot z_1) = 0$

5. Determina condiciones sobre los componentes de dos números complejos para que la parte real de su producto sea cero.

6. Determina los conjugados de los números complejos siguientes.

a) $\dfrac{3}{2} - \sqrt{2}i$ b) $i^4 - 3i^3 + 5i^2 - 1$

c) $\sqrt{7} - i \cdot 3\log 5$ d) $(\sqrt{2} + \sqrt{3}i)(\sqrt{2} + \sqrt{3}i)$

e) $2 - i$ f) $(\sqrt{2} - \sqrt{3}i) + \left(\dfrac{2}{3} - 0{,}73i\right)$

g) $(1 + 2i)^3 - i^{29}$ h) $(1 + i)^4$

i) $(2 - i) + (2 + i)$ j) $(3 + 5i)^2 - (4 - i)^2$

k) $(\sqrt{2} - \sqrt{5}i)\ (\sqrt{2} + \sqrt{5}i)$

l) $10^{2/3} - 5^{3/4}i + (\sqrt{2}i)^3$

m) $(2 + 4i) + (\sqrt{3} - 5i)$

n) $(6 + 7i) - (\sqrt{5} - 2i)$

ñ) $(\sqrt{2} - i)\ (\sqrt{3}i - 4)$

o) $\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$

p) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

q) $4(\cos 30° + i \cdot \operatorname{sen} 30°)$

r) $\rho\,(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$

s) $(1 + i) - (1 - i)$

t) $\log 5 - (3^{1,5} + \log 3)i$

u) $\dfrac{3,5 - 5i}{2 + \sqrt{3}i}$

v) $\dfrac{6 - 5,31i}{8i - \sqrt{5}} \cdot \dfrac{4 - 3i}{2,1 + \sqrt{7}i}$

7. Si $z = (4 - 3i)^2 + (2 + 6i)(i - 4i)$. Calcula $\bar{z}$.

8. Dado $\bar{z} = (1 + i)^2 - (1 - i)^2 + i(i - 1)$. Determina $\mathscr{R}(z)$ e $\mathscr{I}(z)$.

9. Prueba que:

a) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

10. Determina el número complejo z que satisface:

a) $z^2 = \bar{z}$ b) $z^2 = -\bar{z}$

11. ¿Para cuáles valores de x e y $(x, y \in \mathbb{R})$ los números complejos $z_1 = 9y^2 - 4 - 10xi$ y $z_2 = 8y^2 + 20i^7$ son conjugados?

12. Calcula el módulo de los números complejos siguientes.

a) $z = 3 + 4i$

b) $z = (-24; 7)$

c) $z = \sqrt{3} + i$

d) $z = \cos x + i \cdot \operatorname{sen} x$

e) $z = \tan 45° + i$

f) $z = x^2 - y^2 + 2xyi$

g) $z = 7i$

h) $z = \sqrt{27}$

i) $z = 0,3 + 1,7i$

j) $z = 15 + 8i$

k) $z = -24 - 7i$

l) $z = \sqrt{3} - 2i$

m) $z = 2\cos x + 2i \cdot \operatorname{sen} x$

13. Calcula el módulo del número complejo w con la condición indicada:

a) $w = z - 1;\ z = 2,5 - i$ b) $w = \dfrac{z}{z + 1};\ z = i$

c) $w = z^2 + z - 1;\ \bar{z} = \sqrt{2} - i$

d) $w = \dfrac{z + 1}{z^2 + 3z + 2};\ \bar{z} = 3 - 2i$

e) $w = z^3$; $\quad \bar{z} = 1 - i$

f) $w = \dfrac{z^2 - i}{z + i}$; $\quad \bar{z} = 4 - 0{,}5i$

14. Calcula el cociente de los números complejos siguientes:

a) $\dfrac{4 + 2i}{2 + 2i}$ b) $\dfrac{4 + 2i}{8 + 2i}$

c) $\dfrac{5 + 5i}{2 + 2i}$ d) $\dfrac{4 + i}{2 + 3i}$

e) $\dfrac{10 - 10i}{4 - 2i}$ f) $\dfrac{20 + 10i}{2 + 5i}$

g) $\dfrac{(1 + i)(2 + 2i)}{3 + 3i}$ h) $\dfrac{11 - 2i}{2i - 1} + \dfrac{7 + i}{1 - i}$

i) $\dfrac{(2 - i)(3i - 1)}{1 + 3i}$ j) $\dfrac{i - 3}{2 + i} \cdot \dfrac{2 - i}{2 - i}$

k) $\dfrac{(3 + 5i)(2 - 3i)}{1 + i}$ l) $\dfrac{10(\cos 60^\circ + i \text{ sen } 60^\circ)}{2(\cos 40^\circ + i \text{ sen } 40^\circ)}$

m) $\dfrac{2(\cos 20^\circ + i \text{ sen } 20^\circ)}{4(\cos 50^\circ + i \text{ sen } 50^\circ)}$

n) $30 \cos 2\pi + i \text{ sen } 2\pi)$: $15 (\cos 2\pi + i \text{ sen } \pi)$

ñ) $3 \left[\cos \dfrac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen } \dfrac{\pi}{2}\right] : \dfrac{1}{3} \left[\cos \dfrac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen } \dfrac{\pi}{4}\right]$

15. Prueba que:

a) $\dfrac{z}{\bar{z}} = \dfrac{z}{|z|^2}$ b) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ c) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

16. Calcula los cocientes siguientes:

a) $\dfrac{3i - 1}{i}$ b) $\dfrac{2 - 4i}{2 + i}$ c) $\dfrac{i^3 - 4}{i^2 - i^5}$

d) $\dfrac{5 - 6i}{5 + 6i}$ e) $\dfrac{\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4} i}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} i}$

17. Calcula:

$$\frac{\dfrac{i^7 - i^9 - i^{10}}{(1 + i)^3} + (2 - i)(i - 1) + 1}{3 - 2i}$$

18. Halla el valor absoluto del número:

a) $z = \dfrac{3 - i}{4 + i}$ b) $z = \dfrac{\dfrac{2}{3} i - 1}{\sqrt{2} + \dfrac{2}{7} i}$

c) $z = \dfrac{(0{,}51 - 5{,}3i)\left[\dfrac{1}{5} i - 2\right]}{\dfrac{2}{3} + i}$

d) $z = \dfrac{\pi - i}{(2 + i)\left(\sqrt{5} - \dfrac{1}{7} i\right)}$

e) $z = \dfrac{(3 + 4i)(-1 + 2i)}{(-1 - i)(3 - i)}$

f) $z = 3\left(\cos \dfrac{\pi}{5} + i \cdot \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{5}\right) \cdot \left(2{,}5 \cos \dfrac{\pi}{5} + 2{,}5i \cdot \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{5}\right)$

19. Si $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -2 + 4i$ y $z_3 = \sqrt{2} - 2i$, calcula $\mathscr{I}\left[\dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_3}\right]$

20. Si $z_1 = 1 - i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$ y $z_3 = 1 + \sqrt{3}i$, calcula:

a) $z_1 : \bar{z}_1$ b) $\dfrac{\bar{z}_2 \cdot z_3}{z_1}$ c) $\dfrac{z_2 + z_3}{z_1}$

d) $\dfrac{\bar{z}_2}{z_3}$ e) $\dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_3}$

21. Calcula x e y si: ($x, y \in \mathbb{R}$) en:

$$\frac{\dfrac{x + i}{2i} + \dfrac{2 - yi}{3 + i}}{i(2 - i)} = 4 + 3i$$

22. Determina la relación entre a y b ($a, b \in \mathbb{R}$), si

$z = a + ib$ y $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$ $(z \neq 0)$.

23. ¿Qué relación debe existir entre a y b ($a, b \in \mathbb{R}$) para que $\dfrac{3 - 2ai}{b + 2i}$ sea un imaginario puro?

24. Resuelve la ecuación lineal compleja $ax + b = 0$, donde $a, b \in \mathbb{C}$ si:

a) $a = 1 - 2i \qquad b = -i$
b) $a = 2 + 3i \qquad b = 4 - 5i$
c) $a = (3 - 4\sqrt{2}i) \qquad b = -3 - \sqrt{2}i$
d) $a = (3 - i)(4 + 2i) \qquad b = (2 + i)(5 - 3i)$

25*. Demuestra que:

a) $$\frac{\sqrt{1 + x^2} + i}{1 - i\sqrt{1 + x^2}} = i \qquad (x \in \mathbb{R})$$

b) $$\frac{(1 + i)^2}{\sqrt{3} + i} = \frac{\sqrt{3} - i}{(1 - i)^2}$$

26*. Halla el valor que debe tener k en la expresión siguiente:

$$z = \frac{3 - ki}{1 + 3i} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

a) para que z sea un número real,
b) para que z sea un imaginario puro.

27. Resuelve los sistemas de ecuaciones siguientes:
($z_1, z_2 \in \mathbb{C}$)

a) $$\begin{aligned} z_1 + 2z_2 &= -1 - i \\ 3z_1 + z_2 &= 2 - 3i \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2(z_1 - z_2) + z_1 &= 1 - 2i \\ z_2 - z_1 - 3z_1 &= 2 - 4i \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 3(2z_1 + z_2) - 2(z_1 - 3z_2) &= -4 - 2i \\ z_1 + 3z_2 - (z_2 - 2z_1) &= 1 + 2i \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 2(z_1 + z_2) + i(2z_2 - iz_1 + 1) &= 2 \\ 3i(z_1 + iz_2 - i) - (2z_2 + i) &= 0 \end{aligned}$$

28*. La diferencia de dos números complejos es el número $2 - 2i$ y el producto es $4 + 2i$, determina estos números.

29*. Halla dos números complejos cuya suma es $-i$ y su producto es $8 - 14i$.

30*. Halla dos números complejos cuya suma es 6, la diferencia es 4 y el producto es $3i$.

31. Representa en forma binómica.

a) $(2-i)\left[\frac{5}{3}+\frac{1}{2}i\right]$

b) $\dfrac{\left[\frac{2}{3}i-5\right](a-ib)}{3\cos\frac{\pi}{4}-i\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}$

c) $\left[5-\frac{2}{3}i\right]+\left[8-\frac{1}{3}i\right]-\left(3\cos\frac{\pi}{5}+3i\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\right)$

d) $(3-5i)^2(i-3)^3$

e) $\dfrac{z_1\cdot z_2}{z_1+\bar{z}_2}$ si: $z_1=\frac{2}{3}-\sqrt{5}i$ y $z_2=-\sqrt{5}i-\frac{2}{3}$

f) $(\sqrt{3}i-\sqrt{5})(\sqrt{5}i-\sqrt{3})$

g) $\dfrac{(8+i)(2-ie)}{4i}$

h) $e^{i\pi}$

i)* $(3-i)^6$

32. Resuelve:

a) $z^2+9=0$

b) $z^2-3z=0$

c) $z^2+15=0$

d) $z^2+z+1=0$

e) $z^3-8i=0$

f) $z^2-\sqrt{2}\cdot iz=0$

g) $z^3=8iz$

h) $z^3=64$

i) $z^4+2z^2+1=0$

j) $z^2-3z+4=0$

k) $z^2-z+5=0$

l) $z^2-\sqrt{2}z+\sqrt{5}=0$

Forma trigonométrica del número complejo

3. *Representación geométrica de los números complejos*

Los números reales se representan en una recta, de modo que a cada número real corresponde un punto en la recta y recíprocamente. Esto significa que en la recta solo pueden ser representados los números reales, o sea, no hay lugar para los números complejos. Podemos notar que cada número complejo $z=a+ib$ está determinado por un par de números reales $(a;b)$, de ahí surge la idea de representar los números complejos utilizando el plano coordenado (fig. 2.1).

Como se observa en esta figura, sobre el eje horizontal se representa la parte real de los números complejos y, por esa razón recibe el nombre de eje real. Sobre el eje vertical se representa la parte imaginaria y recibe el nombre de eje imaginario.

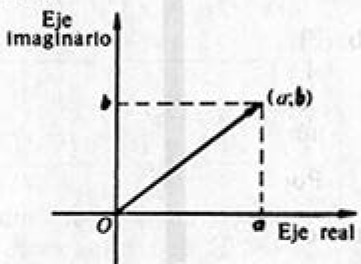


Fig. 2.1

El punto $(a;b)$ recibe el nombre de afijo del número complejo $z=a+ib$, y como representación del número complejo se utiliza el vector de origen O y cuyo extremo es el afijo de z.

Ejemplo 1

a) Representa gráficamente los números complejos:

$$2 + 3i; \qquad 1{,}5 - \frac{4}{3}i; \qquad -1 - \sqrt{2}i; \qquad -1 + 1{,}8i$$

b) Identifica los números complejos que aparecen representados en la figura 2.2.

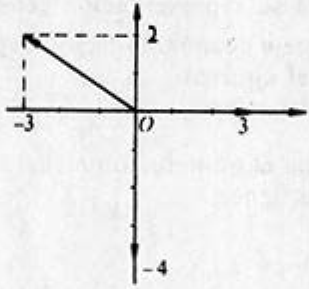


Fig. 2.2

Resolución

a) En la figura 2.3 se han seleccionado en los ejes, escalas graduadas hasta las décimas y se han representado los afijos de los números complejos dados. Para representar $-\frac{4}{3}$ y $-\sqrt{2}$ tomamos valores aproximados hasta las décimas:

$$-\frac{4}{3} \approx -1{,}3\,; \qquad -\sqrt{2} \approx -1{,}4.$$

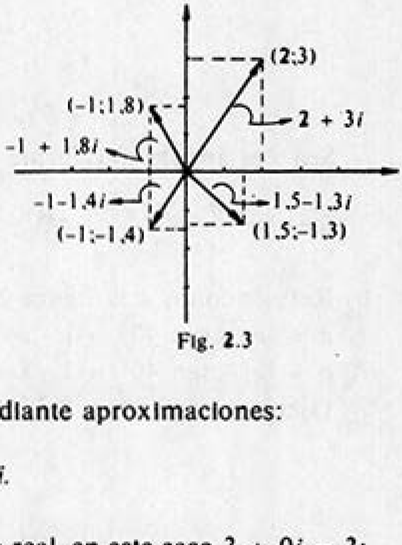


Fig. 2.3

De esta forma se representan los números dados mediante aproximaciones:

$$1{,}5 - \frac{4}{3}i \approx 1{,}5 - 1{,}3i \quad \text{y} \quad -1 - \sqrt{2}i \approx -1 - 1{,}4i.$$

b) El vector sobre el eje real corresponde a un número real, en este caso $3 + 0i = 3$; el vector sobre el eje imaginario corresponde a un "imaginario puro", en este caso $0 - 4i = -4i$; el otro tiene componentes -3 y 2, se trata entonces del número complejo $-3 + 2i$. ■

Puede comprobarse fácilmente que la longitud del vector que representa al número complejo $z = a + ib$ es $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ o sea:

El módulo de un número complejo es igual a la longitud del vector que lo representa.

Del resultado anterior se deduce que el lugar geométrico de los afijos de los números complejos de módulo 1 (o sea, del conjunto solución de la ecuación $|z| = 1$) es una circunferencia de centro en el origen y radio 1. Esta es la circunferencia unitaria.

Ejemplo 2

a) Dado el número complejo $1 + \sqrt{3}i$, represéntalo gráficamente, determina su módulo y el ángulo que forma su representación geométrica con el eje real.

b) Determina el número complejo de módulo 1 cuya representación geométrica forma un ángulo de 40° con el eje real.

Resolución

a) En la figura 2.4 se representa el número complejo $1 + \sqrt{3}i$. Para el módulo se tiene.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$$

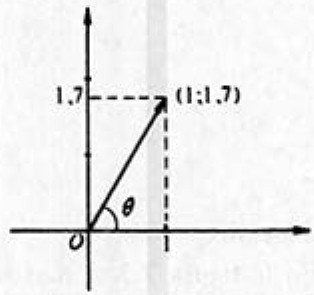


Fig. 2.4

Sea θ el ángulo que forma z con con el eje real, entonces:

$$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \text{ y } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \text{ luego } \theta = \frac{\pi}{3}$$

b) Refiriéndonos a la figura 2.5 tenemos:

$a = |z| \cdot \cos 40° = 1 \cdot \cos 40° = 0{,}766$

$b = |z| \cdot \operatorname{sen} 40° = 1 \cdot \operatorname{sen} 40° = 0{,}643$

Luego $z = a + ib = 0{,}766 + 0{,}643i$. ■

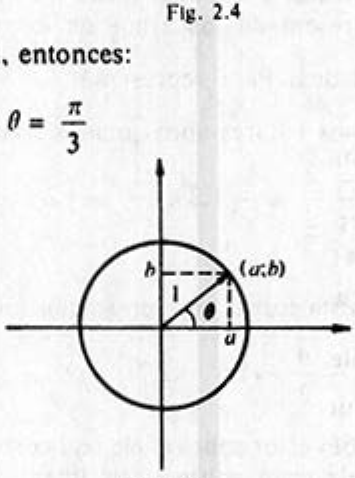


Fig. 2.5

Dado que los números complejos se representan mediante vectores, la adición y la sustracción de estos números pueden efectuarse geométricamente mediante la adición y la sustracción de vectores.

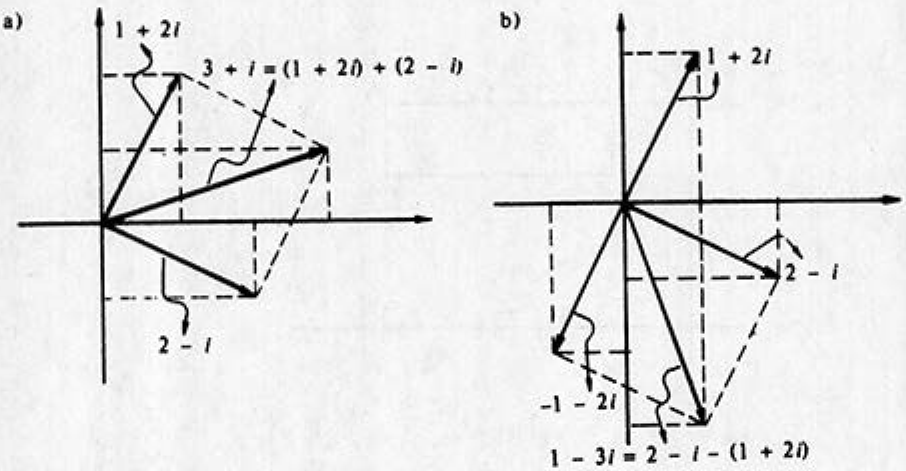
Ejemplo 3

Efectúa geométricamente la adición y la sustracción de los números complejos $2 - i$ y $1 + 2i$.

Resolución

En la figura 2.6a se han representado los vectores $2 - i$ y $1 + 2i$ y se ha construido el paralelogramo que estos determinan. La suma pedida $(3 + i)$ está representada por la diagonal del paralelogramo.

De igual forma, en la figura 2.6b se han representado $2 - i$ y $-1 - 2i$, que es el opuesto de $1 + 2i$, la diagonal del paralelogramo es la diferencia pedida $(1 - 3i)$. ■



Ejemplo 4

Fig. 2.6

a) Representa geométricamente el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : 3 < |z| < 5\}$

b) Prueba que los afijos de los números complejos $z_1 = 1 + 2i$; $z_2 = 4 + 2i$; $z_3 = 1 + 3i$; $z_4 = 4 + 3i$ determinan un rectángulo. Comprueba, que las diagonales son congruentes.

Resolución

a) Sabemos que la representación gráfica de $|z| = 3$ es la circunferencia de centro en el origen y radio 3; igualmente $|z| = 5$ es la circunferencia de centro en el origen y radio 5.
Si $|z| > 3$, el afijo de z es exterior a la circunferencia de radio 3; si $|z| < 5$ su afijo es interior a la circunferencia de radio 5.
Luego, la representación gráfica del conjunto es el anillo entre ambas circunferencias (fig. 2.7).

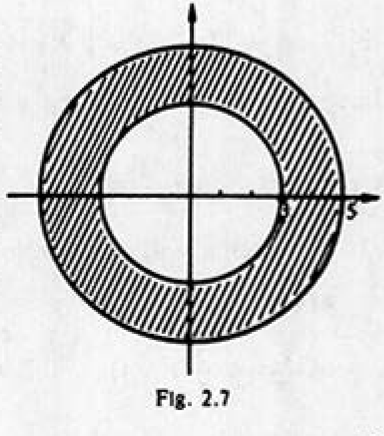


Fig. 2.7

b) Como la representación gráfica de los números complejos se realiza mediante vectores, $z_2 - z_1$ estará representado por un lado del cuadrilátero y $z_4 - z_3$ por el opuesto.
Para que la figura sea un paralelogramo, estos vectores deben ser iguales pero:

$$z_2 - z_1 = 4 + 2i - (1 + 2i) = 3$$
$$= (4 + 3i) - (1 + 3i) = z_4 - z_3$$

Para que sea un rectángulo, los lados deben ser perpendiculares, calculamos $z_3 - z_1$,

$z_3 - z_1 = 1 + 3i - (4 + 2i) = i$;

Pero los vectores que representan a los números complejos $w_1 = 3$ y $w_2 = i$ forman ángulo de 90°, luego se trata de un rectángulo (fig. 2.8).

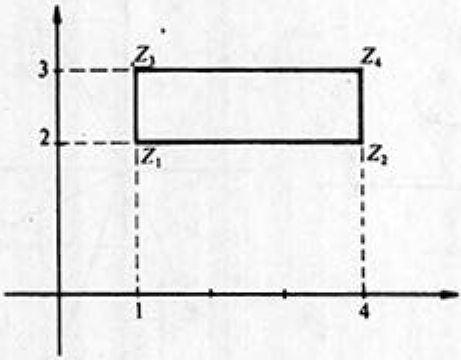


Fig. 2.8

Para probar que las diagonales son congruentes debemos comprobar que sus módulos son iguales.

$$z_4 - z_1 = 4 + 3i - (1 + 2i) = 3 + i$$
$$z_3 - z_2 = 4 + 2i - (1 + 3i) = 3 - i \quad \text{y}$$

$$|z_4 - z_1| = |3 + i| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

$$|z_3 - z_2| = |3 - i| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

Luego $|z_4 - z_1| = |z_3 - z_2|$ y son crongruentes.■

Ejercicios (epígrafe 3)

1. Representa gráficamente los números:

a) $3 + 5i$ b) $4 - i$ c) $-2 - 2i$ d) $-4i$

e) $\frac{1}{2} - \frac{3}{4}i$ f) $-0{,}2 + 0{,}5i$ g) -4

2. Obtén gráficamente la suma y la diferencia de los números complejos dados:

a) $z_1 = 4 - 6i$ $\qquad z_2 = -3 + 2i$

b) $z_1 = -2i$ $\qquad z_2 = -2 - i$

c) $z_1 = i$ $\qquad z_2 = -\dfrac{1}{2} - i$

d) $z_1 = -3{,}5 + 6i$ $\qquad z_2 = \dfrac{5}{2} - i$

e) $z_1 = 3 - 2i$ $\qquad z_2 = -1 + i$

3. Determina los números complejos cuyos afijos son los vértices de las figuras representadas en cada caso (fig. 2.9).

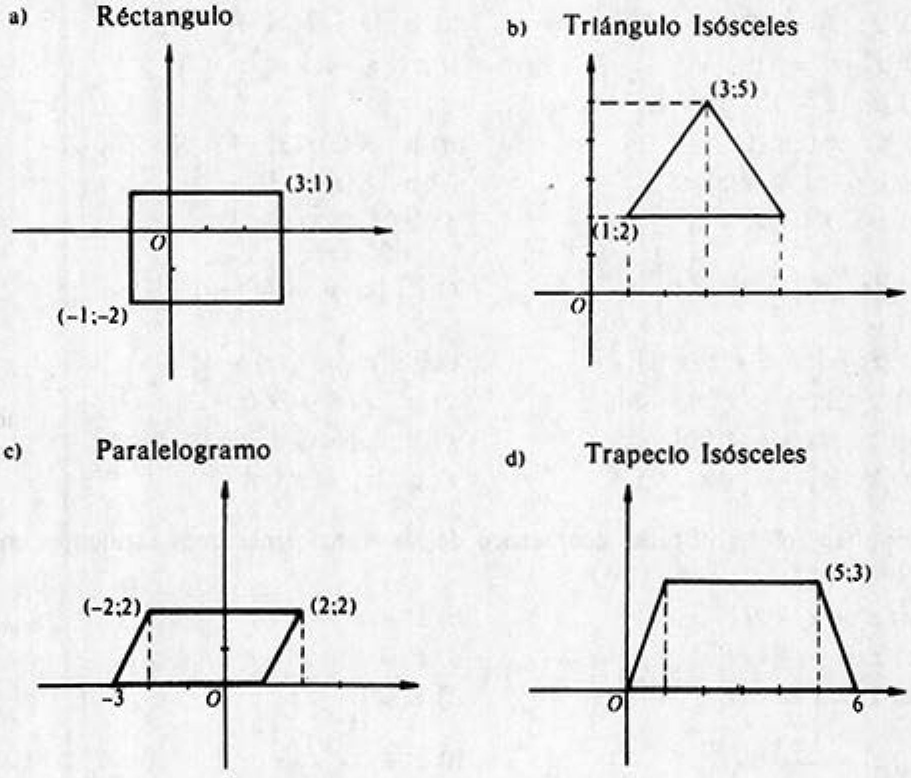


Fig. 2.9

4. Determina los números complejos asociados a los lados de las figuras del ejercicio 3.

5. Calcula:

a) la longitud de las diagonales del rectángulo del ejercicio 3a y el ángulo que forman;

b) los ángulos del triángulo isósceles del ejercicio 3b y la longitud de la base.

c) la longitud de los lados y de las diagonales del paralogramo del ejercicio 3c, los ángulos de ese paralelogramo y los que forman sus diagonales (comprueba que las diagonales se cortan en su punto medio);

d) la longitud de los lados y de las diagonales del trapecio del ejercicio 3d, la amplitud de sus ángulos y los ángulos que forman las diagonales.

6. Representa geométricamente los conjuntos:

a) $\{z : 2 < |z| < 4\}$

b) $\{z : |z + 1| \leq 3\}$

c) $\left\{z : |z| > \dfrac{2}{3}\right\}$

d) $\{z : |z - i| > 2\}$

e) $\{z : |z - 1 - i| < 2\}$

f) $\{z : 1 < |z - 2 + i| \leq 3\}$

g) $\{z : |z| = \sqrt{2}\}$

h) $\{z : |z + 1| = 3\}$

i) $\{z : |z| = |z - 1|\}$

j) $\{z : |z - 1| = |z - i|\}$

k) $\{z : |z - 1 - i| = |z + 1 + i|\}$

l) $\{z : \mathcal{R}(z) > 1\}$

m) $\{z : \mathcal{R}(z) \leq 3\}$

n) $\{z : -1 \leq \mathcal{R}(z) < 5\}$

ñ) $\{z : \mathcal{J}(z) = 3\}$

o) $\{z : \mathcal{J}(z) \geq -1\}$

p) $\{z : 4 \leq \mathcal{J}(z) < 1\}$

q) $\left\{z : \mathcal{R}\left(\dfrac{1}{z}\right) = 1\right\}$

r) $\{z : |z| = \mathcal{R}(z) + 1\}$

s) $\{z : |z| = z + \bar{z} + 1\}$

t) $\{z : |z| = \mathcal{J}(z) - 1\}$

u) $\{z : \mathcal{R}(z) + \mathcal{J}(z) = 2\}$

v) $\{z : \mathcal{R}(z) + \mathcal{J}(z) \leq 3\}$

w) $\{z : \mathcal{R}(z) = \mathcal{J}(z)\}$

x) $\{z : |z| = \mathcal{R}(z)\}$

y) $\{z : |z| = z - \bar{z}\}$

z) $\{z : |z| = \mathcal{J}(z)\}$

7*. Explica el significado geométrico de las transformaciones siguientes en las que $z \to z'$.

a) $z' = z - 2i$

b) $z' = z + 1 - i$

c) $z' = z - 4$

d) $z' = 1 - \bar{z}$

e) $z' = \sqrt{2}\,z$

f) $z' = i - 2z$

g) $z' = \dfrac{z}{\sqrt{2}}$

h) $z' = -\dfrac{1}{3}z$

i) $z' + 1 = \dfrac{1}{3}(z - i)$

j) $z' = z(1 + i)$

k) $z' = \dfrac{z}{\sqrt{3}}(1 - i)$

l) $z' = 2iz$

m) $z' = \dfrac{1}{i}z$

n) $z' = -z$

ñ) $z' = -3iz$ o) $z' = iz - 1$

p) $z' - 1 = i(z - 1)$ q) $z' = (1 - i)(1 + i)z$

8*. Determina z' en función de z ($z' = f(z)$), si $z \to z'$ en las transformaciones siguientes.

a) Traslación de 2 unidades, paralela al eje real y en sentido positivo.

b) Traslación de $\frac{1}{2}$ unidad en la dirección positiva del eje imaginario y después 2 unidades en la dirección negativa del eje real.

c) Traslación de $\sqrt{2}$ unidades en la dirección de la bisectriz del primer cuadrante.

d) Rotación de centro en el origen y ángulo de 90°.

e) Rotación de centro en el origen y ángulo de 45°.

f) Homotecia de centro en el origen y razón 3.

g) Homotecia de centro en $-1 + i$ y razón $\frac{1}{2}$.

h) Simetría respecto al eje real.

i) Simetría respecto al eje imaginario.

j) Simetría respecto al origen.

k) Simetría respecto al punto $(2 - i)$

l) Simetría respecto a la recta $\mathscr{I}(z) = 1$

m) Simetría respecto a la recta $\mathscr{R}(z) = -1$

n) Simetría respecto a la recta $\mathscr{R}(z) = \mathscr{I}(z)$

ñ) Semejanza de centro en el origen, ángulo de 45° y razón $\frac{1}{2}$.

o) Semejanza de centro en $3 + 4i$, ángulo de 45° y razón 5.

9*. Si $z' = z - 1 - i$ y $z'' = z'\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, determina la transformación $z \to z''$ y descríbela geométricamente. ¿Hay algún punto invariante por esta transformación compuesta?

10.* Sea z tal que $|z| = 1$ y $z_1 = z^2$, $z_2 = z^3$. ¿Qué tipo de triángulo es el determinado por los afijos de z, z_1, z_2.

11*. (El tesoro del pirata)
Un joven encontró un pedazo de papel donde se describía la posición del tesoro de un pirata en una isla desierta. La descripción era:
En la isla hay una palmera, un cedro y una horca; caminar desde la horca hacia la palmera contando los pasos, al llegar a la palmera girar 90° a la derecha, contar el mismo número de pasos y clavar una estaca. Regresar a la horca, caminar hacia el cedro contando los pasos, al llegar al cedro girar 90° a la izquierda, contar el mismo número de pasos y clavar otra estaca. El tesoro está en el centro de la línea determinada por ambas estacas.

Al llegar a la isla estaban el cedro y la palmera pero la horca había desaparecido por el tiempo transcurrido. El joven no pudo encontrar ese tesoro y regresó a su casa.
Lo triste de la historia es que si el joven hubiera sabido calcular con números complejos podría haber encontrado el tesoro. Explica cómo lo hubiera hallado.

4. *Forma trigonométrica de los números complejos*

La representación geométrica de los números complejos sugiere otra forma de expresión para los mismos:

Dado un número complejo $z = a + ib$ (fig. 2.10)

de módulo $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$
y cuya representación forma un ángulo θ con el eje real, se tiene que $a = \rho \cos \theta$;
$b = \rho \cdot \text{sen}\ \theta$, luego $z = \rho \cdot \cos \theta + i\ \rho \cdot \text{sen}\ \theta$

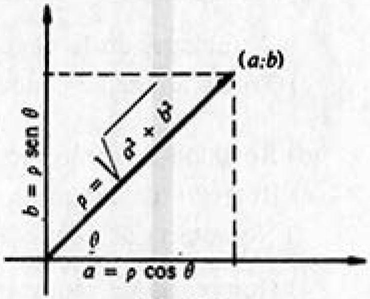


Fig. 2.10

$$\boxed{z = \rho\,(\cos \theta + i \cdot \text{sen}\ \theta)}$$

Esta forma de representar los números complejos recibe el nombre de *forma trigonométrica o forma polar de los números complejos.*

El ángulo θ recibe el nombre de *argumento* del número complejo y se determina excepto un múltiplo de 2π ya que el seno y el coseno son periódicas de período 2π.

Ejemplo 1

a) Expresa en forma trigonométrica $2 + i$; $\overline{2 + i}$; $-1 - 2i$

b) Expresa en forma binómica $\sqrt{2}\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\ \frac{2\pi}{3}\right)$;

$3(\cos 50° - i \cdot \text{sen}\ 50°)$

Resolución

a) En la figura 2.11a observamos que

$\tan \theta = \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$; luego

$\theta = 26{,}6° + k \cdot 180°$, pero como

$a = 2 > 0$, el ángulo θ está en el I cuadrante, es decir:

$\theta = 26{,}6° + k \cdot 360°$.

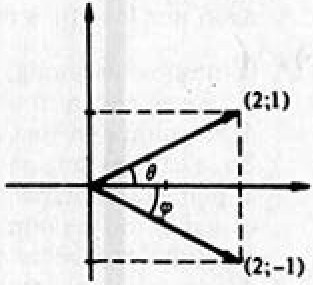


Fig. 2.11 a)

Aunque el argumento puede ser cualquiera de esos valores, se fija un intervalo principal de longitud 360° o 2π; en lo sucesivo utilizaremos como intervalo principal [0; 360°) o [0; 2π).

Entonces $\theta = 26{,}6°$; como además

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \approx 2{,}24,$$

$$2 + i = 2{,}24\,(\cos 26{,}6° + i \cdot \operatorname{sen} 26{,}6°).$$

Tenemos $\overline{2 + i} = 2 - i$ y en la misma figura 2.11a vemos que $\tan \varphi = \frac{1}{2}$, $\tan \varphi = \frac{-1}{2} = -0{,}5$; luego $\varphi = -26{,}6° + k \cdot 180°$ y como $a = 2 > 0$, φ está en el IV cuadrante y su valor principal será $\varphi = 360° - 26.6° = 333{,}4°$. Además $\rho = 2{,}24$ ya que $|z| = |\bar{z}|$, luego:

$$\begin{aligned}\overline{2 + i} &= 2.24\,(\cos 333{,}4° + i \cdot \operatorname{sen} 333{,}4°)\\ &= 2{,}24[\cos (360° - 26{,}6°) + i \cdot \operatorname{sen} (360° - 26.6°)]\\ &= 2{,}24(\cos 26{,}6° - i \operatorname{sen} 26{,}6°).\end{aligned}$$

Observa que el conjugado se obtiene restando el argumento de 360° y que en forma trigonométrica se escribe conservando el argumento del número y cambiando el signo de la parte imaginaria:

$$\overline{\rho\,(\cos \varphi + i \cdot \operatorname{sen} \varphi)} = \rho\,(\cos \varphi - i \cdot \operatorname{sen} \varphi).$$

De aquí resulta que las representaciones geométricas de los números complejos conjugados son simétricas respecto al eje real.

Análogamente, en la figura 2.11b, tenemos:

$$\tan \theta = \frac{-2}{-1} = 2, \text{ luego } \theta = 63{,}4° + k \cdot 180°$$

y como $a = -1 < 0$, θ está en el III cuadrante y su valos principal será:

$$\theta = 63{,}4° + 180° = 243{,}4° \ (k = 1)$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \approx 2{,}24$$

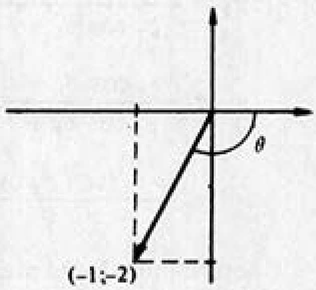


Fig. 2.11 b)

Entonces: $-1 - 2i = 2{,}24\,[\cos (243{,}4°) + i \cdot \operatorname{sen} (243{,}4°)]$.

b) $$\begin{aligned}\sqrt{2}\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}\right) &= \sqrt{2}\,\cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sqrt{2}\,\operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}\\ &= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + i \cdot \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}\\ &= -0{,}707 + 1{,}22i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3(\cos 50° - i \cdot \text{sen } 50°) &= 3 \cos 50° - i \cdot 3 \text{ sen } 50° \\ &= 3(0{,}643) - i \cdot 3(0{,}766) \\ &= 1{,}93 - 2{,}30i. \blacksquare \end{aligned}$$

La forma trigonométrica de los números complejos resulta particularmente útil para la multiplicación y la división.

Teorema 1

Sean $z_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \cdot \text{sen } \theta_1)$ y $z_2 = \rho_2(\cos \theta_2 + i \cdot \text{sen } \theta_2)$ $\rho \neq 0$ dos números complejos entonces:

a) $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2[(\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$

b) $z_1 : z_2 = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} [\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \text{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$

Demostración

a) $z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \cdot \text{sen } \theta_1) \cdot \rho_2(\cos \theta_2 + i \cdot \text{sen } \theta_2)$
$= \rho_1 \rho_2[(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \text{sen } \theta_1 \text{ sen } \theta_2 + i(\text{sen } \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \text{ sen } \theta_2)]$

Si escribimos las expresiones entre paréntesis como el coseno y el seno de la suma de dos ángulos, resulta:

$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2[(\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$.

$$\text{b) } z_1 : z_2 = \frac{\rho_1 \cos \theta_1 + i \cdot \rho_1 \text{ sen } \theta_1}{\rho_2 \cos \theta_2 + i \cdot \rho_2 \text{ sen} \theta_2}$$

$$= \frac{\rho_1 \cos \theta_1 + i \cdot \rho_1 \text{sen } \theta_1}{\rho_2 \cos \theta_2 + i \cdot \rho_2 \text{sen } \theta_2} \cdot \frac{\rho_2 \cos \theta_2 - i \cdot \rho_2 \text{ sen } \theta_2}{\rho_2 \cos \theta_2 - i \cdot \rho_2 \text{ sen } \theta_2}$$

$$= \frac{\rho_1 \rho_2 [\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2) + i(\text{sen } \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \text{ sen } \theta_2)]}{\rho_2^2}$$

Si escribimos las expresiones entre paréntesis como el coseno y el seno de la diferencia de ángulos resulta:

$$z_1 : z_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \text{sen } (\theta_1 - \theta_2)]. \blacksquare$$

Ejemplo 2

Calcula $z_1 \cdot z_2$ y $z_1 : z_2$ si:

a) $z_1 = 2(\cos 30° + i \cdot \text{sen } 30°)$; $\quad z_2 = \sqrt{5}(\cos 75° + i \cdot \text{sen } 75°)$

b) $z_1 = \sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} - i \cdot \text{sen } \dfrac{\pi}{3}\right)$; $\quad z_2 = \sqrt{7}(\cos 1{,}2 + i \text{ sen } 1{,}2)$

Resolución

a) $z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{5}[\cos(30° + 75°) + i \cdot \operatorname{sen}(30° + 75°)]$

$= 4{,}47(\cos 105° + i \cdot \operatorname{sen} 105°).$

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cos(30° - 75°) + i \cdot \operatorname{sen}(30° - 75°)]$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5}[\cos(-45°) + i \cdot \operatorname{sen}(-45°)]$$

$$= 0{,}894(\cos 45° - i \cdot \operatorname{sen} 45°).$$

b) $z_1 \cdot z_2 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{7}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + 1{,}2\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + 1{,}2\right)\right]$

$$= \sqrt{21}\ (\cos 2{,}25 + i \cdot \operatorname{sen} 2{,}25)$$

$$\approx 4{,}58(\cos 2{,}25 + i \cdot \operatorname{sen} 2{,}25)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} - 1{,}2\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - 1{,}2\right)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{21}}{7}[\cos(-0{,}153) + i \cdot \operatorname{sen}(-0{,}153)]$$

$$\approx 0{,}655(\cos 0{,}153 - i \cdot \operatorname{sen} 0{,}153).\ \blacksquare$$

Dado que el cálculo del producto y el cociente de números complejos en forma trigonométrica se reduce a operar con los módulos y argumentos por separado, es usual representar la forma trigonométrica de manera abreviada:

$$\boxed{\rho(\cos\varphi + i \cdot \operatorname{sen}\varphi) = \rho \operatorname{cis}\varphi}$$

En esta expresión;

c: es la inicial de la palabra coseno.

i: es la unidad imaginaria.

s: es la inicial de la palabra seno.

Con esta notación los resultados del teorema 1 se expresan:

$$\boxed{\begin{array}{l} \rho_1 \operatorname{cis}\varphi_1 \cdot \rho_2 \operatorname{cis}\varphi_2 = \rho_1\rho_2 \operatorname{cis}(\varphi_1 + \varphi_2) \\ \rho_1 \operatorname{cis}\varphi_1 : \rho_2 \operatorname{cis}\varphi_2 = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{cis}(\varphi_1 - \varphi_2); \\ \rho_2 \neq 0 \end{array}}$$

Ejemplo 3

Calcula $z_1 \cdot z_2$ y $z_1 : z_2$ si:

a) $z_1 = \text{cis } 141°$; $z_2 = \text{cis } 63°$

b) $z_1 = \text{cis } 2{,}17$; $z_2 = \text{cis } 5$

Resolución

a) $z_1 \cdot z_2 = \text{cis } 141° \cdot \text{cis } 63° = \text{cis } 204°$

$z_1 : z_2 = \text{cis } 141° : \text{cis } 63° = \text{cis } 78°$

b) $z_1 \cdot z_2 = \text{cis } 2{,}17 \cdot \text{cis } 5 = \text{cis } 7{,}17 = \text{cis } (7{,}17 - 6{,}28) = \text{cis } 0{,}89$

$z_1 : z_2 = \text{cis } 2{,}17 : \text{cis } 5 = \text{cis } (-2{,}83) = \text{cis } (2\pi - 2{,}83) = \text{cis} 3{;}45.$ ■

Ejercicios (epígrafe 4)

1. Expresa en forma trigonométrica:

a) $z = -2$

b) $z = 2i$

c) $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

d) $z = -2 + 2\sqrt{3}i$

e) $z = 1 + \sqrt{3}i$

f) $z = 4 + 3i$

g) $z = -\dfrac{5}{2} - \dfrac{5}{2}\sqrt{3}i$

h) $z = 2\sqrt{3} - i$

i) $z = \cos\alpha - i \cdot \text{sen } \alpha$ $\left[\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}\right]$

j) $z = (-5;\ 5\sqrt{3})$

k) $z = 3 \cos 120° - 3i \cdot \text{sen } 120°$

l) $z = \cos\dfrac{\pi}{4} - i \cdot \text{sen } \dfrac{\pi}{4}$

m) $z = \cos\dfrac{\pi}{3} - i \cdot \text{sen } \dfrac{\pi}{3}$

n) $z = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{5}i$

ñ) $z = 0{,}125i - 0{,}12$

o) $z = \dfrac{4}{17} - \dfrac{5}{31}i$

2. Expresa en forma binómica:

a) $z = \text{cis } 90°$

b) $z = 2 \text{ cis } 180°$

c) $z = 4 (\cos\pi + i \cdot \text{sen } \pi)$

d) $z = 5\sqrt{2}\left[\cos\dfrac{3\pi}{4} - i \cdot \text{sen } \dfrac{3\pi}{4}\right]$

e) $z = \dfrac{3}{4} (\cos 32{,}4° + i \cdot \text{sen } 32{,}4°)$

f) $z = 3\sqrt{2}\left[\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\cdot\text{sen}\dfrac{7\pi}{4}\right]$

g) $z = \sqrt{5}\,\text{cis } 40{,}1°$ h) $z = \sqrt{3}\ \text{cis } (-15°)$

i) $z = 3{,}27\,\text{cis}\left[-\dfrac{\pi}{6}\right]$ j) $z = 2{,}51\ \text{cis}\left[\dfrac{\pi}{12}\right]$

k) $z = \dfrac{8}{3}\ \text{cis } (-57°)$ l) $z = \dfrac{2}{7}\ \text{cis } (175°)$

m) $z = \sqrt{15}\ \text{cis } (-157°)$ n) $z = 1{,}53\,\text{cis}\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$

ñ) $z = 2{,}15\left[\cos\dfrac{\pi}{8} + i\cdot\text{sen}\dfrac{\pi}{8}\right]$ o) $z = \text{cis } 0°$

3*. a) Sea la ecuación en $\mathbb{C}$, $z^3 - az + 4 = 0$ ($a \in \mathbb{C}$). Si una de sus raíces es $z = 1 - i$, calcula el módulo y el argumento del número complejo $w = a + 2i$.

b) Si $z = \dfrac{i - 5}{2}$ determina $|w|$ y arg w, si: $w = \dfrac{1}{z + 2} + i^3$

4. Halla los valores de ρ y φ en:

a) $\rho\ \text{cis}\ \varphi = \dfrac{1 - \sqrt{3}i}{1 + i}$ b) $\rho\ \text{cis}\ \varphi = \dfrac{18 + i}{2 + 3i} + i^{12}$

c) $\rho\ \text{cis}\ \varphi = \dfrac{(2 - i)(1 + i)}{1 - 3i} + \dfrac{\sqrt{3} - 4i}{4}$

d) $\rho\ \text{cis}\ \varphi = \dfrac{3 - 2i}{2 + 3i} - \dfrac{1 - i}{1 + i} + \dfrac{4 + 4\sqrt{3}i}{\sqrt{3} + i}$

5. Representa gráficamente los números complejos siguientes, sin expresarlos en forma aritmética.

a) $z_1 = 2\text{cis } 0°$ b) $z_2 = 4\text{cis } 180°$

c) $z_3 = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\cdot\text{sen}\dfrac{\pi}{3}$ d) $z_4 = \dfrac{11}{2}(\cos 36° + i\cdot\text{sen } 36°)$

e) $z_5 = 3(\cos 30° - i\cdot\text{sen } 30°)$

6* Sean los números complejos $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\cdot\text{sen}\,\varphi_1)$ y $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\cdot\text{sen}\,\varphi_2)$, ¿qué condiciones deben cumplirse para establecer la igualdad entre z_1 y z_2 expresados en forma trigonométrica o polar.

7*. La suma de dos números complejos es 6; el módulo del primero es $\sqrt{13}$, y el del segundo 5. Halla dichos números y determina su producto y su cociente.

8. Calcula:

a) $(\cos 15^\circ + i \cdot \operatorname{sen} 15^\circ) \cdot 2(\cos 30^\circ + i \cdot \operatorname{sen} 30^\circ)$

b) $\left[2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}\right] \left[\frac{1}{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}\right]$.

c) $0{,}8(\cos 7{,}2^\circ + i \cdot \operatorname{sen} 7{,}2^\circ) \cdot 4{,}2(\cos 1{,}8^\circ + i \cdot \operatorname{sen} 1{,}8^\circ)$

d) $\frac{7}{10} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{5}{21} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}$

e) $\frac{2}{3} \operatorname{cis} 20^\circ \cdot \frac{9}{8} \operatorname{cis} (-120^\circ) \cdot \frac{4}{3} \operatorname{cis} 100^\circ$

f) $\sqrt{2} \operatorname{cis} 20^\circ \cdot \frac{1}{5} \operatorname{cis} \frac{\pi}{5}$

g) $1{,}27 \operatorname{cis} 2 \cdot \frac{2}{3} \operatorname{cis} 3$

h) $\frac{2}{5} \operatorname{cis} 41{,}3^\circ \cdot \frac{1}{3} \operatorname{cis} 1{,}5$

i) $\sqrt{10} \operatorname{cis}(-27^\circ) \cdot \sqrt{2} \operatorname{cis} 3{,}1$

j) $\sqrt{\frac{1}{2}} \operatorname{cis} 23{,}2^\circ \cdot 1{,}57 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{6}\right)$

k) $\frac{2}{11} \operatorname{cis} 7{,}21 \cdot \operatorname{cis} (-176^\circ)$

l) $\frac{2}{9} \operatorname{cis} 48{,}3^\circ \cdot 1{,}65 \operatorname{cis} 50^\circ$

m) $\frac{2}{3} \operatorname{cis} \frac{\pi}{12} \cdot \frac{1}{5} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}$

n) $3{,}89 \operatorname{cis} 145^\circ \cdot 3 \operatorname{cis} 67{,}2^\circ$

ñ) $\sqrt{3{,}17} \operatorname{cis} 3{,}09 \cdot \operatorname{cis} 2{,}51$

o) $\operatorname{cis} 153^\circ \cdot \operatorname{cis} 41{,}3^\circ$

p) $2 \operatorname{cis} 180^\circ \cdot \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$

q) $3{,}57 \operatorname{cis} 1{,}5 \cdot 2{,}17 \operatorname{cis} \frac{\pi}{5}$

9. Calcula:

a) $\frac{8(\cos 70^\circ + i \cdot \operatorname{sen} 70^\circ)}{2(\cos 40^\circ + i \cdot \operatorname{sen} 40^\circ)}$

b) $\dfrac{\sqrt{3}\,\text{cis } 20^\circ}{\sqrt{5}\,\text{cis}(-100^\circ)}$

c) $\dfrac{2{,}8(\cos 21{,}5^\circ + i \cdot \text{sen } 21{,}5^\circ)}{0{,}07(\cos 17{,}8^\circ + i \cdot \text{sen } 17{,}8^\circ)}$

d) $\left[\dfrac{2}{3} \ \text{cis } \dfrac{5\pi}{3}\right] : \left[\dfrac{4}{9} \ \text{cis } \dfrac{\pi}{9}\right]$

e) $\dfrac{20 \text{ cis}\left[-\dfrac{5\pi}{2}\right]}{4\text{cis}\left[-\dfrac{\pi}{18}\right]}$

f) $3{,}27\text{cis } 2 : 1{,}51\text{cis } 1{,}5$

g) $\sqrt{5}\,\text{cis } 54{,}3^\circ : 3{,}21\text{cis}(-127^\circ)$

h) $\dfrac{3}{13}\text{cis } (-27{,}5^\circ) : \text{cis}(157)$

i) $\dfrac{4}{17} \text{ cis } (463^\circ) : \text{cis } (178^\circ)$

j) $\sqrt{51} \ (\cos 3 - i \cdot \text{sen } 3) : \sqrt{15} \ \text{ cis } 1{,}67$

k) $1{,}7\text{cis } \dfrac{\pi}{15} : 2{,}17\text{cis } 3$

l) $\text{cis } 2{,}59 : \text{cis } \dfrac{\pi}{2}$

m) $\sqrt{8}\,\text{cis } 41{,}5^\circ : \text{cis } 2{,}5$

n) $3{,}91 \text{ cis } 179^\circ : 5{,}83\text{cis } \dfrac{\pi}{6}$

ñ) $\dfrac{5}{12}(\cos 31{,}2^\circ - i \cdot \text{sen } 31{,}2^\circ) : \dfrac{6}{13} \text{ cis } \dfrac{4\pi}{3}$

o) $\text{cis } 185^\circ : \text{cis } 200^\circ$

p) $\text{cis } 4 : \text{cis } 5$

q) $\sqrt{17} \ \text{cis } 4{,}15 : \sqrt{3}\,\text{cis } 57{,}4^\circ$

r) $5{,}2 \text{ cis } \dfrac{\pi}{12} : 6{,}25 \text{ cis } 43^\circ : \text{cis}(-2{,}17^\circ)$

s) $\dfrac{10 \text{ cis } 30^\circ \cdot 2 \text{ cis } 10^\circ - 5 \text{ cis } 2\pi/9}{3 \text{ cis } 5^\circ \cdot (1/5 \text{ cis } 35^\circ : 0{,}2 \text{ cis } \pi/12)}$

10. Calcula:

a) $(4 \text{ cis } 18° - 2 \text{ cis } 18°) : 3 \text{ cis } 45°$

b) $$\frac{2 \text{ cis } \frac{5\pi}{4} \cdot 3 \text{ cis}\left[-\frac{\pi}{4}\right]}{6 \text{ cis } 2\pi}$$

c) $$\frac{5(\cos 30° + i \cdot \text{sen } 30°) \cdot 2(\cos 175° + i \cdot \text{sen } 175°)}{3(\cos 120° + i \cdot \text{sen } 120°) \cdot 4(\cos 60° + i \cdot \text{sen } 60°)}$$

d) $$\frac{4 \text{ cis } \frac{2\pi}{3}}{2 \text{ cis}(-\frac{5\pi}{6})} : \frac{24 \text{ cis } \frac{4\pi}{3}}{6 \text{ cis}(-\frac{\pi}{6})}$$

11. Escribe en forma trigonométrica el número complejo:

a) $z = \dfrac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i}$

b) $z = \dfrac{(1 + i)(-\sqrt{3} + i)}{(1 - i)(\sqrt{3} + i)}$

c) $z = \dfrac{2i(\sqrt{3} - i)}{(1 + i)(-\sqrt{3} - i)}$

d) $z = \dfrac{(1 - i)(9 + 3i\sqrt{3})}{(4 + 4i)5i}$

12. Halla el valor de ρ y φ, en las siguientes expresiones:

a) $$\rho \text{cis } \varphi = \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\right)(4 \text{cis } 75°)}{2 \text{cis}(-15°)}$$

b) $$\rho \text{cis} \varphi = \frac{\left[\cos\frac{\pi}{3} - i \cdot \text{sen } \frac{\pi}{3}\right]\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]}{i}$$

c) $$\rho \text{cis } \varphi = \frac{(\sqrt{3} - i)\left[-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right]}{2\left[\cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot \text{sen } \frac{3\pi}{4}\right]}$$

13. Sea la expresión:

$w = \dfrac{z_1}{z_2 \cdot z_3} \qquad (z_2 \neq 0 \text{ y } z_3 \neq 0)$

Calcula $|w|$ y $\arg(w)$ si $z_1 = 1 + i$,
$z_2 = \sqrt{3} + i$,
$z_3 = 1 + \sqrt{3}i$.

14*. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{2}\text{cis } 45° + 2 + 3i + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{ cis } 60°$

b) $3 - i + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left[\cos \dfrac{\pi}{3} + i \cdot \text{sen } \dfrac{\pi}{3}\right] - \left[1 + \dfrac{\sqrt{3}}{4}i\right]$

c) $(-1 - i) \cdot 2(\cos 30° + i \cdot \text{sen } 30°)$

d) $(2 + 2i) \cdot 3\text{cis } 75° \cdot 5\text{cis } 105°$

e) $\dfrac{3 - i}{\cos 150° + i \cdot \text{sen } 150°}$

f) $\dfrac{2 + \dfrac{3}{2}i + \sqrt{2}\left[\cos \dfrac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen } \dfrac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{3}\text{cis } \pi - \left(\dfrac{1}{2} + \sqrt{3}i\right)}$

g) $\dfrac{(-1 - i) \cdot 2\text{cis } 45°}{3\text{cis } 120°}$

15. Halla los valores de a y b para que se cumpla que:

$$a + bi = \frac{(1 - \sqrt{3}i)\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]}$$

16. Efectúa y expresa el resultado en forma binomica o rectangular:

a) $\dfrac{2 \text{ cis } \dfrac{\pi}{4}}{3\sqrt{2}\text{cis } \dfrac{\pi}{4}}$

b) $\dfrac{2 \text{ cis } 60°(9 + 3\sqrt{3}i)}{3i(\text{cis } 135°)}$

c) $\dfrac{8(\cos 40° + i \cdot \text{sen } 40°) \cdot 2(\cos 170° + i \cdot \text{sen } 170°)}{4 \text{ cis} 190°}$

17. a) Calcula x e y si:

$$z = x + yi = \frac{2 \text{ cis } 40° \cdot 8 \text{ cis } 5°}{4 \text{ cis } 195°}$$

b) Determina el módulo y el argumento del conjugado del inverso de z.

18. a) Halla el valor de la siguiente expresión:

$$z = \frac{2 \text{ cis } 15° (1 - i)}{\sqrt{2}(\cos 120° + i \cdot \operatorname{sen} 120°)}$$

b) Representa gráficamente el resultado anterior.

19. Halla el valor de z en la siguiente expresión y expresa el resultado en forma binómica.

$$z = \frac{2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right) \cdot 3\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}\right)}{6\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4}\right)}$$

20.* El cociente de dos números complejos es imaginario puro, su suma es real e igual a 5 y el módulo del dividendo es el duplo del módulo del divisor. Halla los números.

21*. Sea $f(\theta) = z = \rho(\cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta)$ y $z_1 = f'(\theta)$. Si A es el afijo de z y A_1 el de z_1:

a) Determina z_1 en forma binómica.

b) ¿Qué relación existe entre $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OA}$?

c) Escribe la ecuación de la tangente r, a la circunferencia $x^2 + y^2 = \rho^2$ en el punto A.

d) ¿En qué punto corta r al eje x y al eje y? ¿Cuál es el área del triángulo que determina r con los ejes coordenados?

e) ¿Para qué valor de θ es mínima el área calculada en el inciso d?

22*. Si $z = \text{cis } \varphi$, determina z para que:

a) $\mathcal{R}(z^2)$ sea máximo.

b) $\mathcal{I}(z^2)$ sea máximo.

c) $\mathcal{R}(z^2)$ sea mínimo

d) $\mathcal{I}(z^2)$ sea mínimo.

Potencias y polinomios

5. *Potencias y raíces de los números complejos*

Al igual que para los números reales, se definen las potencias de exponente natural para números complejos.

Ejemplo 1

Calcula $\left[0{,}51 + \frac{2}{3}i\right]^2$

Resolución

Aplicando la fórmula del binomio tenemos

$$\left[0{,}51 + \frac{2}{3}i\right]^2 = (0{,}51)^2 + 2\cdot 0{,}51\cdot\frac{2}{3}i + \left[\frac{2}{3}\right]^2 i^2$$

$$= 0{,}2601 + 0{,}68i - \frac{4}{9}$$

$$= -0{,}184 + 0{,}68i. \blacksquare$$

El cálculo de potencias de mayor orden en notación bionómica resulta engorroso. El siguiente teorema permite calcular las potencias en notación trigonométrica.

Teorema 1 (Teorema de Moivre)

> Si $z = (\cos\theta + i\cdot\operatorname{sen}\theta)$ es un número complejo y $n\in\mathbb{N}$, se cumple:
> $z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\cdot\operatorname{sen} n\theta)$ (fórmula de Moivre).

Demostración

Haremos la demostración por inducción en n.
Para $n = 1$ se cumple, pues $z^1 = z = \rho(\cos\theta + i\cdot\operatorname{sen}\theta)$.
Supongamos que se cumple para $n = k$

$z^k = \rho^k(\cos k\theta + i\cdot\operatorname{sen} k\theta)$

entonces:

$$z^{k+1} = z^k\cdot z = \rho^k(\cos k\theta + i\cdot\operatorname{sen} k\theta)\cdot\rho(\cos\theta + i\cdot\operatorname{sen}\theta)$$
$$= \rho^{k+1}[\cos(k+1)\theta + i\cdot\operatorname{sen}(k+1)\theta]$$

o sea,

$z^{k+1} = \rho^{k+1}[\cos(k+1)\theta + i\cdot\operatorname{sen}(k+1)\theta]$.

y por tanto, para todo $n\in\mathbb{N}$ se cumple la fórmula de Moivre. $\blacksquare$

En notación abreviada el teorema de Moivre se expresa:

$$\boxed{(\rho\cdot\operatorname{cis}\varphi)^n = \rho^n\cdot\operatorname{cis} n\varphi}$$

Ejemplo 2

Calcula z^n **si:**

a) $z = \frac{3}{7}\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right]$, $\quad n = 3$

b) $z = 0{,}15\ [\cos 25° + i \cdot \text{sen } 25°]$, $n = 5$
c) $z = [\cos 1{,}5 + i \cdot \text{sen } 1{,}5]$, $n = 7$
d) $z = 3 - 4i$, $n = 4$

Resolución

a) Utilizando la fórmula de Moivre tenemos:

$$z^3 = \left[\frac{3}{7}\right]^3 \left(\cos 3\frac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen } 3\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{27}{343}\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \text{sen } \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$= 7{,}87 \cdot 10^{-2}\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \text{sen } \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$= -7{,}87 \cdot 10^{-2} i.$$

b) En este caso:

$$z^5 = (0.15)^5 (\cos 5 \cdot 25° + i \cdot \text{sen } 5 \cdot 25°)$$
$$= 10^{5 \log 0.15} (\cos 125° + i \cdot \text{sen } 125°)$$
$$= 10^{5 \cdot (-0.824)} (\cos 125° + i \cdot \text{sen } 125°)$$
$$= 10^{5(0.176-1)} (\cos 125° + i \cdot \text{sen } 125°)$$
$$= 10^{0.88-5} (\cos 125° + i \cdot \text{sen } 125°)$$
$$= 7{,}5910^{-5} (\cos 125° + i \cdot \text{sen } 125°).$$

c) $z^7 = (\cos 7 \cdot 1{,}5 + i \cdot \text{sen } 7 \cdot 1{,}5)$
$= \cos 10{,}5 + i \cdot \text{sen } 10{,}5$;

para reducir el argumento al intervalo principal dividimos por 2π:
$10{,}5 = 1 \cdot 6{,}28 + 4{,}22$ y, por tanto,
$z^7 = \cos 4{,}22 + i \cdot \text{sen } 4{,}22$.

d) Expresemos z en forma trigonométrica:

$$\rho = |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\tan \theta = -\frac{4}{3}\ ;\ \theta = -53{,}1° + k \cdot 180°$$

y como el afijo de z está en el IV cuadrante
$\theta = 307°$
$z = 5(\cos 307° + i \cdot \text{sen } 307°)$
y $z^4 = 5^4 (\cos 4 \cdot 307° + i \cdot \text{sen } 4 \cdot 307°) = 625(\cos 1\,228° + i \cdot \text{sen } 1\,228°)$
$= 625(\cos 148° + i \cdot \text{sen } 148°)$. ■

En particular resulta de utilidad conocer las potencias sucesivas de i:

$i^2 = -1$; $i^3 = i^2 \cdot (i) = -i$; $i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = 1$

luego:

$i^0 = 1;\quad i^1 = i;\quad i^2 = -1;\quad i^3 = -i$
$i^4 = 1;\quad i^5 = i;\quad i^6 = -1;\quad i^7 = -i$
$i^8 = 1;\quad i^9 = i;\quad i^{10} = -1;\quad i^{11} = -i$

en general: $i^{4n} = 1$; $i^{4n+1} = i$; $i^{4n+2} = -1$; $i^{4n+3} = -i$,
es decir, $i^{4n+k} = i^k \quad (k = 0; 1; 2; 3)$

Ejemplo 3

Calcula:

a) i^{15} **b)** i^{12} **c)** i^{21} **d)** i^{38}

Resolución

a) Dividiendo por 4 el exponente obtenemos
$15 = 4 \cdot 3 + 3$, luego:
$i^{15} = i^{4 \cdot 3 + 3} = i^{4 \cdot 3} \cdot i^3 = i^3 = -i$

b) Análogamente $12 = 4 \cdot 3 + 0 \cdot e$
$i^{12} = i^0 = 1$

c) $21 = 4 \cdot 5 + 1$; $\quad i^{21} = i$

d) $38 = 4 \cdot 9 + 2$; $\quad i^{38} = i^2 = -1$. ■

Una vez definidas las potencias, es posible definir las raíces de los números complejos.

Definición 1

> Sea $z \in \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ es una raíz n-ésima de z si se cumple:
> $z_0^n = z$

Ejemplo 4

Calcular $\sqrt{z}$ si $z = 2 - 5i$

Resolución

Sea $\sqrt{z} = z_0 = x + i \cdot y$, entonces:

$z = z_0^2 = (x + i \cdot y)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$.

es decir, $2 - 5i = x^2 - y^2 + 2ixy$
luego: $x^2 - y^2 = 2$
$2xy = -5$.

Para resolver el sistema despejamos en la segunda ecuación $y = -\dfrac{5}{2x}$ y sustituimos en la primera:

$$x^2 - \left[-\frac{5}{2x}\right]^2 = 2$$

$$x^2 - \frac{25}{4x^2} = 2$$

$$4x^4 - 25 = 8x^2$$
$$4x^4 - 8x^2 - 25 = 0$$

$$x^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 400}}{8}$$ (solo se toma la solución no negativa pues $x \in \mathbb{R}$ y por tanto, $x^2 > 0$)

$$x^2 = \frac{8 + 21{,}5}{8}$$

$$= \frac{29{,}5}{8} = 3{,}69 \quad y$$

$$x = \pm 1{,}92$$

Entonces:

$$y = -\frac{5}{2 \cdot (\pm 1{,}92)} = \pm 1{,}30$$ (observa que el signo de y es opuesto al de x)

Encontramos z raíces cuadradas,

$z_1 = 1{,}92 - 1{,}30i \qquad z_2 = -1{,}92 + 1{,}30i$. ■

También en el caso de las raíces, el cálculo se simplifica utilizando la forma trigonométrica de los números complejos.

Teorema 2

> Si $z = \rho(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$ es un número complejo y $n \in \mathbb{N}$, entonces z tiene n raíces n-ésimas dadas por la expresión:
>
> $$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right],\ k = 0, 1, ..., n-1$$
>
> Aquí $\sqrt[n]{\rho}$ representa la raíz aritmética de $\rho \in \mathbb{R}_+$.

Demostración

Sea $z_k = \rho(\cos\varphi_k + i \cdot \operatorname{sen}\varphi_k)$ una raíz n-ésima de z, entonces de la fórmula de Moivre resulta:

$z = z_k^n = \rho_k^n(\cos n\varphi_k + i \cdot \operatorname{sen} n\varphi_k)$.

O sea,

$\rho(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta) = \rho_k^n(\cos n\varphi_k + i \cdot \operatorname{sen} n\varphi_k)$.

De esta igualdad se deduce que los módulos son iguales, $\rho = \rho_k^n$ y los argumentos se diferencian en un múltiplo de 2π, $n\varphi_k - \theta = 2k\pi$. De aquí resulta:

$$\rho_k = \sqrt[n]{\rho} \text{ y } \varphi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Como un número real tiene una única raíz aritmética, es decir, para todo k, $\rho_k = \sqrt[n]{\rho}$, sin embargo, φ_k toma k valores diferentes, entonces,

$$\varphi_k - \varphi_0 = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} - \left(\frac{\theta}{n}\right) = \frac{k}{n} \cdot 2\pi.$$

luego φ_n y φ_0 se diferencian en un múltiplo de 2π sólo si k es un múltiplo de n y, por tanto, se obtienen n valores para $k = 0, 1, 2, ..., n - 1$ como se quería. ■

En notación abreviada:

$$\boxed{\sqrt[n]{\rho \cdot \text{cis}\,\varphi} = \sqrt[n]{\rho} \cdot \text{cis}\left[\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right] \quad k = 0,1,2,3,..., n - 1}$$

Ejemplo 5

Calcula:

a) las raíces quintas de $z = 32 \cdot \text{cis}\,\frac{5\pi}{6}$;

b) las raíces cuartas de $z = 12$;

c) las raíces cúbicas de $z = i$;

d) $(3 - i)^{2/3}$.

Resolución

a) Aplicando el teorema 2 resulta:

$$\sqrt[5]{z} = \sqrt[5]{32} \cdot \text{cis}\left[\frac{\frac{5\pi}{6}}{5} + \frac{2k\pi}{5}\right]; k = 0,1,2,3,4$$

$$= 2 \cdot \text{cis}\left[\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{5}\right]; k = 0,1,2,3,4.$$

Explícitamente las raíces se obtienen dando valores a k:

$$z_0 = 2 \cdot \text{cis}\,\frac{\pi}{6}$$

$$z_1 = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{5}\right) = 2 \cdot \text{cis}\,\frac{17\pi}{30}$$

$$z_2 = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{5}\right) = 2 \cdot \text{cis}\ \frac{29\pi}{30}$$

$$z_3 = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{6\pi}{5}\right) = 2 \cdot \cos\ \frac{41\pi}{30}$$

$$z_4 = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{8\pi}{5}\right) = 2 \cdot \text{cis}\ \frac{53\pi}{30}$$

En la figura 2.12 se han representado estas raíces.

b) Escribimos 12 en forma trigonométrica

$12 = 12\ (\cos 0° + i \cdot \text{sen}\ 0°)$

Entonces:

$$\sqrt[4]{12} = \sqrt[4]{12} \cdot \left[\cos \frac{360°\,k}{4} + i \cdot \text{sen}\ \frac{360°\,k}{4}\right]\ k = 0;\ 1;\ 2;\ 3.$$

Dando valores a k obtenemos las 4 raíces

$z_0 = 1{,}86;\qquad z_1 = 1{,}86\ [\cos 90° + i \cdot \text{sen}\ 90°] = 1{,}86i$

$z_2 = 1{,}86\ [\cos 180° + i \cdot \text{sen}\ 180°] = -1{,}86$

$z_3 = 1{,}86\ [\cos 90° - i \cdot \text{sen}\ 90°] = -1{,}86i$

En la figura 2.13 se han representado estas raíces.

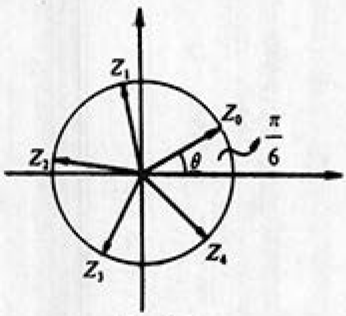


Fig. 2.12

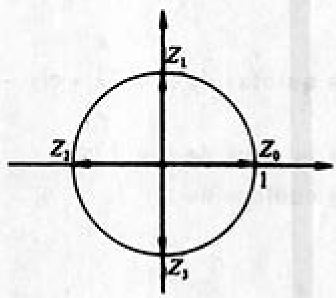


Fig. 2.13

c) En este caso $z = \text{cis}\ \frac{\pi}{2}$, luego

$$\sqrt[3]{z} = \text{cis}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right);\ k = 0;\ 1;\ 2.$$

Dando valores a k obtenemos:

$$z_0 = \text{cis}\ \frac{\pi}{6};\qquad z_1 = \text{cis}\ \frac{5\pi}{6}$$

$$z_2 = \text{cis}\ \frac{3\pi}{2} = -i$$

En la figura 2.14 se han representado estas raíces.

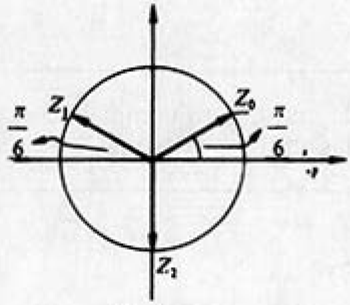


Fig. 2.14

d) Interpretamos el exponente fraccionario como en $\mathbb{R}$,

$$(3 - i)^{2/3} = \sqrt[3]{(3 - i)^2}$$

Pero en $\mathbb{C}$ obtenemos tres valores. En efecto, utilizando la forma trigonométrica:

$$3 - i = \sqrt{10} \cdot \text{cis } 342°$$

$$(3 - i)^2 = 10 \cdot \text{cis } 2 \cdot 342° = 10 \cdot \text{cis } 684° = 10 \cdot \text{cis } 324°$$

$$\sqrt[3]{(3 - i)^2} = \sqrt[3]{10} \cdot \text{cis} \left(\frac{324°}{3} + k \cdot 120°\right]; k = 0;1;2.$$

Dando valores a k obtenemos:

$z_0 = 2{,}15 \cdot \text{cis } 108°$
$z_1 = 2{,}15 \cdot \text{cis}(108° + 120°) = 2{,}15 \cdot \text{cis } 228°$
$z_2 = 2{,}15 \cdot \text{cis}(108° + 240°) = 2{,}15 \cdot \text{cis } 348°$.■

Es necesario destacar una diferencia notable con la radicación de números reales:

En $\mathbb{R}$ el símbolo $\sqrt[n]{\rho}\,(\rho > 0)$ representa un único valor, la raíz n-ésima aritmética de ρ. En $\mathbb{C}$, el símbolo $\sqrt[n]{z}$ (z cualquiera) representa las n raíces n-ésimas de z.

Las figuras de la 2.12 a la 2.14 muestran que los afijos de las raíces n-ésimas de un número complejo forman los vértices de un polígono regular de n lados, inscrito en la circunferencia de centro en el origen y radio $\sqrt[n]{\rho}$. Por otra parte, dado que las raíces n-ésimas de 1 se expresan por:

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \cdot \text{sen } \frac{2k\pi}{n} = \text{cis } \frac{2k\pi}{n}; k = 0, 1, \ldots, n - 1 \text{ y para todo } z \in \mathbb{C}$$

se tiene:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left[\cos \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \cdot \text{sen} \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

$$= \sqrt[n]{\rho} \left[\cos \frac{\theta}{n} + i \cdot \text{sen } \frac{\theta}{n}\right] \cdot \left[\cos \frac{2k\pi}{n} + i \cdot \text{sen } \frac{2k\pi}{n}\right]$$

$$= \sqrt[n]{\rho} \cdot \text{cis } \frac{\theta}{n} \cdot \text{cis } \frac{2k\pi}{n}; k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1.$$

Podemos concluir:

> Las n raíces n-ésimas de un número complejo z se obtienen multiplicando una raíz n-ésima de z por las n raíces n-ésimas de 1.

Ejercicios (epígrafe 5)

1. Calcula:

a) $(2 + 3i)^2$ b) $(1 + i)^3$ c) $(3 - 4i)^2$

d) $(-1 - 5i)^2$ e) $(6i - 5)^2$ f) $(i - 1)^2$

g) $e^{1/2}$ h) $(x - i)^2$ i) $\sqrt{(2 + i)^2}$

2. Calcula las potencias indicadas:

a) z^n si $z = 2 \text{ cis } 30°$ y $n = 4; 5; 6$.

b) $[3{,}17 (\cos 18{,}6° - i \cdot \text{sen } 18{,}6°)]^3$

c) $(\text{cis } 2)^6$ d) $(\sqrt{5} \text{ cis } \frac{\pi}{5})^8$

e) $[153 \text{ cis } (-1)]^6$ f) $\left(\cos \frac{\pi}{3} - i \cdot \text{sen } \frac{\pi}{3}\right)^{-4}$

g) $(\sqrt{17} \text{ cis } 0{,}5)^{10}$ h) $(\text{cis } 45°)^4$

i) $(10{,}1 \text{ cis } \frac{\pi}{7})^{14}$ j) $\left(\text{cis } \frac{\pi}{9}\right)^{-8}$

k) $[4(\cos 25° + i \cdot \text{sen } 25°)]^4$ l) $(3 \text{ cis } 120°)^5$

m) $\left[\frac{1}{2} \text{ cis } \frac{\pi}{20}\right]^{10}$

n) $[1{,}5 (\cos 18{,}2° + i \cdot \text{sen } 18{,}2°)]^3$

ñ) $\left(\sqrt{3} \text{ cis } \frac{5\pi}{6}\right)^4$ o) $(2 \text{ cis } 180°)^{1/3}$

p) $(2 + 3i)^4$ q) $(-1 - i)^5$

r) $\left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right]^{10}$ s) $(2{,}5i - 1{,}5)^6$

t) $(-2 - 2i)^{20}$ u) $(\sqrt{3} - i)^{100}$

v) $\left(-i - \sqrt{3}i\right)^{50}$ w) $(-9 - \sqrt{27}\, i)^8$

3. Simplifica:

a) $i^4 (i^{12} - 2)$ b) $i^{13} + 1$

c) $i^{16} - 1$ d) $2i^{31} + i^3$

e) $4i^2 - 3i + i^3$ f) $i^{82} - i^{38}$

g) $(i^2)^{41} \cdot (i^3)^{91}$

4. Determina el valor de la expresión:

$$w = \frac{z_1 \cdot z_3}{z_2} \quad \text{si} \quad z_1 = 1 - i\,;\; z_2 = \sqrt{3}i \quad \text{y} \quad z_3 = 2 \text{ cis } \frac{\pi}{2}$$

5. Sea $a \in \mathbb{C}^*$. Si se conoce que el valor de $a + \dfrac{1}{a}$ es el que se indica, calcula la expresión pedida:

a) $a + \dfrac{1}{a} = 2 + 3i$. Calcula $a^2 + \dfrac{1}{a^2}$

b) $a + \dfrac{1}{a} = 2$. Calcula $a^n + \dfrac{1}{a^n}$

c) $a + \dfrac{1}{a} = 1$. Calcula $a^2 + \dfrac{1}{a^2}$

d) $a + \dfrac{1}{a} = 0$. Calcula $a^n + \dfrac{1}{a^n}$

6. Determina $w = \dfrac{ab^3}{c}$ en forma binómica, si $a = -3 + \sqrt{3}i$

$b = 2 \text{ cis } 20°$ y $c = 2\left(\cos 10\dfrac{\pi}{9} + i \cdot \text{sen } 10\dfrac{\pi}{9}\right)$.

7. Halla el módulo y el argumento de w en:

$$w = \frac{(-\sqrt{3} + i)^3 (i - \sqrt{3})^4}{(-\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^6};$$

emplea la forma polar o trigonométrica.

8. Sea $z = \dfrac{\left[2 \text{ cis } \dfrac{\pi}{4}\right]\left[3 \text{ cis } \dfrac{3\pi}{2}\right]^2}{6 \text{ cis } \dfrac{5\pi}{4}}$. Calcula $|z|$ y $\arg z$.

9. Calcula los valores ρ y φ en: $\rho \text{ cis } \varphi = \dfrac{\left[\sqrt{2} \text{cis } \dfrac{\pi}{4}\right]^2 (1 + i)}{4 \text{ cis}\left[-\dfrac{\pi}{4}\right]}$

10. Efectúa:

$$z = \frac{(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^3}{(1 + i\sqrt{3})\,(4 \text{ cis } 75^\circ)} \text{ y calcula } |z| \text{ y } \arg z.$$

11. Sea el número complejo:

$$c = \frac{\left[2 \text{ cis } \frac{\pi}{6}\right]^3 \left[3 \text{ cis } \frac{\pi}{4}\right]}{6 \text{ cis}(-\pi)}$$

a) Expresa a c en notación trigonométrica.

b) Expresa a c en forma binómica.

c) Calcula $\arg \bar{c}$.

12. Calcula $|z|$ y $\arg z$ si:

$$z = \frac{(1 - i\sqrt{3})^5}{(-2 + 2i)^4} + \frac{(1 + i)(\sqrt{3} + i)^3}{(1 - i\sqrt{3}i)^3} - \frac{9}{8} + i$$

13. Dado $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$. Calcula $(\bar{z})^4$

14. Calcula las raíces cuadradas de los números siguientes:

a) $36 \text{ cis } \frac{\pi}{6}$ b) $\sqrt{3} + i$ c) $-1 - i$

d) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ e) $-5i$ f) $4i - 5$

g) $3 - 2i$ h) -8 i) $2i - 1$

j) $3 - i$ k) $4 + 4i$ l) $-5 - 5i$

m) $-3 - 6i$ n) $2i - 3$ ñ) $8i - 6$

o) $16i$

15. Calcula:

a) $\sqrt[3]{8 \text{ cis } 60^\circ}$ b) $\sqrt[4]{81 \text{ cis } 120^\circ}$ c) $\sqrt[5]{32 \text{ cis } 150^\circ}$

d) $\sqrt[6]{3{,}17 \text{ cis } 50^\circ}$ e) $\sqrt[7]{\text{cis } 3}$ f) $\sqrt[8]{\text{cis } \frac{5\pi}{6}}$

g) $\sqrt[10]{100 \text{ cis } \frac{5\pi}{6}}$ h) $\sqrt[4]{13{,}6(\cos 2 + i \cdot \text{sen } 2)}$

i) $\sqrt[4]{18\,(\cos 35^\circ + i \cdot \text{sen } 35^\circ)}$ j) $\sqrt[6]{3{,}5 \text{ cis } (-1{,}7)}$

k) $\sqrt[3]{4 + 4\sqrt{3}i}$

l) $\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i}$

m) $\sqrt[5]{2\sqrt{3} - 2i}$

n) $[z_1 - z_2]^{1/3}$ si $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i$ y $z_2 = -\sqrt{3}i - 1$

16. Calcula las raíces cúbicas de z, si $z = -4\sqrt{3} - 4i$.

17*. Denota por α_1 una de las raíces cúbicas complejas de 1, por α_2 la otra y por α_3 la raíz real. Demuestra que:
a) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$
b) $\alpha_1 \cdot \alpha_2^2 = \alpha_3$

18. ¿Para qué valor de $x \subseteq \mathbb{C}$ se cumple que $x^3 - 8i = 0$?

19. Halla las soluciones de las ecuaciones siguientes:
a) $z^6 + 27 = 0$ $(z \in \mathbb{C})$
b) $x^6 = i(x \in \mathbb{C})$

20. Sea $z = \dfrac{z_0 \cdot z_1}{z^2}$ $(z_2 \neq 0)$, donde $z_0 = \sqrt{3} + i$,

$z_1 = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} 150°$ y $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$

a) Calcula $\bar{z}$.
b) Determina las raíces cúbicas de z.

21. Halla las raíces cúbicas de $\bar{z}$ si:

$$z = \cos \frac{2\pi}{3} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

22*. Sea $w \in \mathbb{C}$ tal que:

$$w^3 = \frac{\left[3 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}\right]^3 \left[3 \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}\right]}{2[\cos(-\pi) + i \cdot \operatorname{sen}(-\pi)]},$$

calcula: $\sqrt{\bar{w}}$

23. Halla $\bar{z}$ si $z = \dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_3}$, sabiendo que $z_1 = 4\sqrt{3} - 4i$;

$z_2 = 2 \operatorname{cis} 150°$ y $z_3^2 = \dfrac{1}{2} \operatorname{cis} \dfrac{\pi}{6}$.

24. Halla las raíces sextas de la unidad y represéntalas gráficamente en una circunferencia.

25. Halla los valores de ρ y φ en la expresión:

$$\rho \operatorname{cis} \varphi = \sqrt[3]{\frac{\left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right](2 \operatorname{cis} 50°)^4}{2 \operatorname{cis} 230°}}$$

26. Halla los números complejos z tales que:

$$z^8 = \frac{1 + i}{\sqrt{3} - i} \cdot \sqrt{2}$$

27. Calcula ρ y φ si:

$$z = \rho \operatorname{cis} \varphi = \sqrt[4]{\frac{(1 - i)^3 \cdot \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}}{2 \operatorname{cis} 75°}}$$

a) Representa gráficamente las raíces cuartas de z.

28. Sea el número complejo $z = 8\sqrt{2}(1 + i)$
a) Determina $|z|$ y $\arg z$.
b) Halla las raíces cuartas de $\bar{z}$.

6. *Polinomios y ecuaciones*

Los números complejos poseen numerosas aplicaciones en la ciencia y la técnica, en particular, en la propia Matemática.

En este epígrafe encontrarás algunas aplicaciones de los números complejos en otras áreas de la Matemática.

Veamos una aplicación en la resolución de ecuaciones; en primer lugar veamos cómo se obtienen las soluciones de la ecuación: $x^3 - 12x + 10\sqrt{2} = 0$ considerada en el epígrafe 1.

Vemos que $x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$, donde u y v son las soluciones del sistema:

$$\begin{aligned} u + v &= -10\sqrt{2} \\ u \cdot v &= 64 \end{aligned}$$

oue se reduce a la ecuación de segundo grado:

$v^2 + 10\sqrt{2}v + 64 = 0$; sus soluciones son:

$$v = -5\sqrt{2} \pm \sqrt{50 - 64} = -5\sqrt{2} \pm \sqrt{-14} = -5\sqrt{2} \pm i\sqrt{14}$$

entonces:

$$x = \sqrt[3]{-5\sqrt{2} + i\sqrt{14}} + \sqrt[3]{-5\sqrt{2} - i\sqrt{14}}$$

Calculando tenemos:

$$\sqrt[3]{-5\sqrt{2}+i\sqrt{14}} + \sqrt[3]{-5\sqrt{2}-i\sqrt{14}}$$

$$= \sqrt[3]{-5\sqrt{2}+i\sqrt{14}} + \sqrt[3]{-5\sqrt{2}-i\sqrt{14}}$$

$$= \sqrt[3]{8(\cos 152° + i \cdot \operatorname{sen} 152°)} + \sqrt[3]{8(\cos 152° - i \cdot \operatorname{sen} 152°)}$$

$$= 2[\cos (50{,}7° + 120°k) + i \cdot \operatorname{sen} (50{,}7° + 120°k] +$$

$$+ [\cos (50{,}7° + 120°k) - i \cdot \operatorname{sen} (50{,}7° + 120°k)] \qquad k = 0;\ 1;\ 2.$$

$$= 4 \cdot \cos (50{,}7° + 120°k) \qquad k = 0,\ 1,\ 2.$$

La expresión dada tiene tres valores diferentes.

$$\sqrt[3]{-5\sqrt{2} + \sqrt{-14}} + \sqrt[3]{-5\sqrt{2} - \sqrt{-14}} = \begin{cases} 2{,}53, & k = 0 \\ -3{,}95, & k = 1 \\ 1{,}41, & k = 2 \end{cases}$$

El valor obtenido para $k = 2$ coincide, dentro de la precisión utilizada, con $\sqrt{2}$ que es la raíz que conocíamos.

Se puede comprobar que los otros dos valores también son raíces. En este caso el cálculo con números complejos se ha aplicado para obtener las tres raíces reales de la ecuación, lo que no es posible calculando solo con números reales.

También en el caso de las ecuaciones de segundo grado puede aplicarse el cálculo con números complejos, en este caso se obtienen dos raíces para cada ecuación.

Ejemplo 1

Resuelve:

a) $x^2 - 3x - 1 = 0$

b) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

c) $x^2 + x + 1 = 0$

d) $x^2 - 2ix - 5 = 0$

Resolución

a) Aplicando la fórmula obtenemos (el discriminante es positivo):

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{4+9}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} = \frac{3 \pm 3{,}61}{2}$$

$$= \begin{cases} 3{,}30 \\ -0{,}305 \end{cases}$$

b) En este caso el discriminante es cero $(16 - 16 = 0)$ y se obtiene una única raíz:

$$x_{1,2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

c) Aquí el discriminante es negativo $(1 - 4 = -3 < 0)$ y no hay raíces reales, pero sí complejas:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$= \begin{cases} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}\right) \\ \left(\cos \frac{2\pi}{3} - i \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$

Observa que en este caso las raíces de la ecuación son raíces complejas de 1; esto se debe a que:

$$x^2 + x + 1 = \frac{(x^2 + x + 1)(x - 1)}{x - 1} = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

y las soluciones de la ecuación son las raíces cúbicas de 1 diferentes de 1, es decir, las raíces cúbicas complejas de 1. En general:

$x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$ y las raíces de

$x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 = 0$ son las raíces n-ésimas complejas de 1. Estas ecuaciones se llaman ciclotómicas.

d) Aquí los coeficientes son complejos:

$$x_{1,2} = i \pm \sqrt{i^2 + 5} = i \pm \sqrt{-1 + 5} = i \pm 2. \blacksquare$$

Hemos visto que las ecuaciones de tercer grado tienen tres raíces y las de segundo dos; ambas son casos particulares de un teorema general.

Teorema 1 (Teorema fundamental del Álgebra)

Toda ecuación de grado n en $\mathbb{C}$ tiene exactamente n raíces complejas.

En este curso no podemos demostrar este teorema. Observa que si los coeficientes son reales no podemos afirmar que las raíces sean reales como muestra el ejemplo 1c.

Terminaremos el contenido de este epígrafe con algunos resultados sobre los polinomios con coeficientes complejos.

Como sabemos, los polinomios son expresiones de la forma:

$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ en las que $a_i \in \mathbb{C}$, $(a \neq 0)$

$n \in \mathbb{N}$ es el grado del polinomio y z es una variable (que puede tomar valores complejos) y cuya igualdad se determina por la definición siguiente.

Definición 1 (Igualdad de los polinomios)

> Dos polinomios $a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$, $a_n \neq 0$
> y $b_m z^m + \ldots + b_1 z + b_0$, $b_m \neq 0$
> son iguales si y solo si sus grados son iguales ($n = m$) y sus coeficientes también, es decir:
> $a_k = b_k \quad k = 0, 1, \ldots n.$

Esta definición permite resolver numerosos problemas.

Ejemplo 2

Calcula A y B para que se cumpla:

$$\frac{x+2}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$$

Resolución

Efectuando en el miembro derecho obtenemos:

$$\frac{x+2}{x^2-5x+6} = \frac{A(x-2)+B(x-3)}{x^2-5x+6} = \frac{(A+B)x+(-2A-3B)}{x^2-5x+6}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores deben serlo también:
$x + 2 = (A + B)x + (-2A - 3B)$
aplicando la definición de igualdad tenemos:

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ -2A - 3B &= 2 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por 2 y sumando se tiene:

$-B = 4$, luego $B = -4$

y sustituyendo en la primera resulta:

$A - 4 = 1$, luego $A = 5$, es decir,

$$\frac{x+2}{x^2-5x+6} = \frac{5}{x-3} - \frac{4}{x-2} \blacksquare$$

El procedimiento introducido en este ejemplo se llama método de los coeficientes indeterminados, pues se introducen coeficientes que no se conocen y cuyo valor se determina aplicando la definición de igualdad.

Del teorema fundamental del Álgebra resulta que todo polinomio con coeficientes complejos puede ser descompuesto en factores lineales.

Teorema 2 (Teorema de factorización total)

> Si $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ es un polinomio con $a_k \in \mathbb{C}$ y $z_1, z_2, \dots, z_n$ son las raíces de la ecuación $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$, entonces, $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = a_n(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n)$ $z_1, \dots, z_n$ se llaman también ceros del polinomio.

Este teorema tampoco lo demostraremos.

Ejemplo 3

Descompón en factores: $x^2 + x + 1$.

Resolución

Sabemos que: $x^2 + x + 1 = 0$ tiene raíces

$$\alpha_1 = \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}\right) \text{ y } \alpha_2 = \left(\cos \frac{2\pi}{3} - i \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}\right)$$

luego del teorema 2 resulta:

$$x^2 + x + 1 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2). \blacksquare$$

Observa que el polinomio del ejemplo 3 no tiene descomposición en polinomios con coeficientes reales.

Combinando el teorema 2 y el ejemplo 2, podemos descomponer cualquier fracción en fracciones simples del tipo $\dfrac{A}{x - \alpha}$.

Ejemplo 4

Descompón en fracciones simples: $\dfrac{2x + 1}{x^2 + 1}$

Resolución

Como $x^2 + 1 = 0$ tiene raíces $\pm i$, tenemos:

$x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$ y entonces escribimos,

$$\frac{2x + 1}{x^2 + 1} = \frac{A}{x - i} + \frac{B}{x + i} = \frac{A(x + i) + B(x - i)}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{(A + B)x + (A - B)i}{x^2 + 1}.$$

Aplicando la definición de igualdad tenemos:

$$\begin{array}{lcl} A + B = 2 & & A + B = 2 \\ (A - B)i = 1 & \text{o} & A - B = -i \end{array}$$

de donde se obtiene:

$A = \dfrac{2 - i}{2}$ y $B = \dfrac{2 + i}{2}$, o sea,

$$\frac{2x + 1}{x^2 + 1} = \frac{2 - i}{2(x - i)} + \frac{2 - i}{2(x + i)}. \blacksquare$$

Ejercicios (epígrage 6)

1. Determina las soluciones de las ecuaciones siguientes en el conjunto de los números complejos.

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$ b) $2x^2 + x - 1 = 0$

c) $x^2 + x - 5 = 0$ d) $3x^2 - x - 2 = 0$

e) $4x^2 + x - 2 = 0$ f) $x^2 + x - 1 = 0$

g) $x^2 + x + 3 = 0$ h) $x^2 + 4 = 0$

i) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$ j) $x^4 + x^2 - 1 = 0$

k) $x^4 + x^2 + 1 = 0$ l) $x^2 - 3x + 5 = 0$

m) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ n) $5x^2 - x + 1 = 0$

ñ) $(2x - 1)^2 - (x + 2)(x - 2) - 2x^2 = -2x - 5$

o) $\dfrac{2x + 3i}{i} = \dfrac{1 - i}{x - i}$ p) $x^2 - 5 + 12i = 0$

q) $x^2 = 2x - 3 - i$

r) $x^2 - (2 + 4i)x + 2i - 3 = 0$

s) $\dfrac{x + 18}{x^2 - 4} + \dfrac{3x + 1}{x + 2} = \dfrac{x + 2}{x - 2}$

2. Resuelve las ecuaciones siguientes ($z \in \mathbb{C}$):

a) $z^2 + iz = 2$ b) $z^2 + iz + 1 = 0$

c) $z^2 + 2iz - 1 = 0$ d) $z^2 + 2iz = 5$

e) $z^2 = 2i - (1 - 2i)z$ f) $z^4 = 30z^2 - 289$

g) $z^2 = 2z - 5$ h) $z(z - 2i) = 5$

3. Descompón en factores complejos.

a) $16b^2 + 36x^2$ $(x; b>0)$ b) $a^2 + \dfrac{b^2}{4}$ $(a; b>0)$

c) 26 d) $x^4 + y^4$ $(x; y>0)$

e) $a^{2n} + b^{2n}$ $(a; b>0)$ f) $2x^2 - 2x + 1$

4. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $x^2 + 9 = 0$ b) $\frac{16}{81}x^2 + 49 = 0$

c) $3x^2 = 2x - 1$ d) $2x^3 - 5x^2 + 5x - 6 = 0$

5. Expresa en forma trigonométrica las soluciones de las ecuaciones siguientes:

a) $x^2 + x + 1 = 0$ b) $x^2 - 2x + 4 = 0$

6. Demuestra que la suma de las raíces quintas de la unidad real es nula.
Sugerencia: Resuelve la ecuación $x^5 = 1$

7. Resuelve el sistema de ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} 5x^2 + 2xy - y^2 &= 3 \\ 2x + y &= 0 \end{aligned}$$

8*. Determina los ceros de las funciones complejas siguientes:

a) $f(z) = z^2 - (5 + 2i)z + 21 + i$

b) $f(z) = z^2 - 8z - 3iz + 13i$

c) $f(z) = (1 + i)z^2 - (71 + 13i)z + 2 + 60i$

9*. Determina los ceros y polos de las funciones complejas siguientes:

a) $f(z) = \dfrac{z^2 - 6z + 10}{z^2 + z + 1}$

b) $g(z) = \dfrac{z^2 + 1}{z^2 - 6z + 25}$

c) $n(z) = \dfrac{z^2 + 4z - 2zi - i}{z^4 - z}$

d) $h(z) = \dfrac{z^3 - 125}{z^2 + 2iz - 5 - i}$

10*. Descompón en factores complejos:

a) $2x^3 + 7x^2 + 16$ b) $x^4 - x^3 - 4x^2 - 5x - 3$

11. Resuelve los siguientes sistemas en el conjunto de los números complejos:

a) $\begin{aligned} 3x^2 + 2y^2 &= 25 \\ x + y &= 5 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 4x^2 - 9y^2 - 8x - 36y - 68 &= 0 \\ y - x &= 2 \end{aligned}$

12. Resuelve los siguientes sistemas con las condiciones dadas:

a) $\begin{aligned} ix - (1 + i)y &= 3 \\ (2 + i)x + iv &= 4 \end{aligned}$ $x; y$ **R**

b) $z + iw = 1 \qquad z;\, w \in \mathbb{C}$
$\underline{iz + w = 1 + i}$

c) $(2 + i)z + (2 - i)w = 2i \qquad z;\, w \in \mathbb{C}$
$(1 + i)z - iw = 3 + i$

13. **Reduce los polinomios siguientes y determina su grado:**

a) $P(x) = 7x^3 + 5x - 3 - 3x^3 - 2x + 7$

b) $Q(x) = (2x + 1)^2 - (x + 1)(x - 1) - 3x^2$

c) $M(x\,;\,y) = 2x^2y^3 - xy(xy^2 - 1) - 4x^3y^4 + 6x^3y^4 - xy$

d) $S(a\,;\,b) = \frac{1}{2}a^3b^2 - \frac{1}{4}a^2b^3 + \frac{3}{4}a^3b^2 + \frac{5}{8}a^2b^3 + 2$

14. Sea $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x + 1$, calcula $P(1)$, $P(-1)$, $P(2)$ y $P\left(\frac{1}{2}\right)$ aplicando la regla de Ruffini o de Horner.

15. Dado $P(x) = 2x^3 + x^2 - 2x + 3$. Calcula $P(-i)$, $P(1 - i)$ y $P(i^1)$.

16. Sea $Q(x\,;\,y) = x^2 - xy + y^3$.
Calcula $Q(-1\,;\,2)$ y $Q(2i;\,1 - i)$.

17. Dado $P(x\,;\,y) = x^4 - 2xy + x - y \ (x;\, y \in \mathbb{C})$
Calcula su valor numérico si:

a) $x = \frac{1}{2} \qquad y = -2$ b) $x = -0{,}3 \qquad y = -0{,}5$

c) $x = i \qquad y = -i$ d) $x = 2 - i \qquad y = 4 + 3i$

e) $x = 2\,\text{cis}\,\frac{\pi}{4} \quad y = \frac{1}{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{6}$

18*. **Halla un polinomio de tercer grado cuyas raíces sean:**

a) $x_1 = 1 \qquad x_2 = -2 \qquad x_3 = 0$

b) $x_1 = -1 \qquad x_2 = -1 \qquad x_3 = \frac{1}{2}$

c) $x_1 = x_2 = x_3 = -i$

d) $x_1 = 1 \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = -1 \qquad x_4 = 0$

e) $x_1 = 1 - 2i \qquad x_2 = i \qquad x_3 = 1 + 2i$

f) $x_1 = 1 \qquad x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

g) $x_1 = \frac{1}{a} \qquad x_2 = a \qquad x_3 = -a \qquad (a \neq 0)$

h) $x_1 = \sqrt{3} \qquad x_2 = -\sqrt{3} \qquad x_3 = 2$

19*. Halla p y q para que el polinomio:

a) $x^3 + px^2 - qx - 3$ sea divisible por $x^2 + 2x - 3$.

b) $x^4 - px^3 + qx - 1$ sea divisible por $x^2 - 1$.

c) $3x^3 - 8x^2 + px + q$ sea divisible por $3x^2 - 5x - 2$.

d) $x^3 - px^2 + qx - 6$ sea divisible por $x^2 - 2x + 1$.

20*. Halla p, q y r para que el polinomio:

a) $2x^3 + px^2 + qx + r$ sea divisible por $(x + 1)(x + 3)(2x - 1)$.

b) $px^5 - 5x^4 - 14x^3 + qx^2 + 5x + r$ sea divisible por $x^3 - 6x^2 - 9x + 14$.

21.* Analiza la divisibilidad de los binomios:
$x^n \pm a^n$ por $x \pm a$ $(n \in \mathbb{N})$

22.* Descompón en factores los polinomios siguientes en los conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

a) $x^3 - 7x - 6$

b) $(3 + i)x^2 - 7ix - 6$

c) $x^3 - 1$

d) $x^4 - 16$

e) $x^3 - 6x^2 + 6x - 5$

f) $2x^4 + 5x^3 - x^2 + 5x - 3$

g) $2x^4 + x^3 + x^2 - 7x + 3$

h) $x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$

23.* Halla el polinomio $P(x)$, de tercer grado que se anula para $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 2$ y toma el valor -24 para $x = -2$.

24*. Determina el polinomio $P(x)$ de tercer grado cuyos ceros son $x_1 = 1$; $x_2 = 2$ y $x_3 = 3$, si al dividirlo por $x - 4$ el resto es 134.

25*. ¿Cuál es el polinomio de cuarto grado cuyos factores son $x + 2$, $x + 1$, $x - 1$ y $x - 2$ y su valor numérico es 4 para $x = 0$.

26. Calcula el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que un cero de la función $f(x) = kx^5 - 3x^3 + kx^2 - 7$ sea $x_0 = 2$.

27.* Si se tiene que $P(x - 2) = 0$. Prueba que evaluando el polinomio para $x = 5$ es divisible por 3.

28*. El polinomio $P(x) = 2x^4 - 2x^3 + n^2x^2 - 3nx + 2$ es divisible por $x - 1$. Calcula n.

29.* Descompón en fracciones simples:

a) $\dfrac{x - 5}{(x + 1)(x - 1)}$ b) $\dfrac{3}{x^2 + 3x}$

c) $\dfrac{8x - 8}{x^3 - 2x^2 - 8x}$ d*) $\dfrac{2x^2 - 2x - 1}{(x - 2)(x - 1)^2}$

e) $\dfrac{54}{x^3 - 21x + 20}$ f)* $\dfrac{x^4 - 4x^2 - x + 3}{(x^2 + 1)^3}$

g) $\dfrac{3x}{x^2 - 25}$ h) $\dfrac{3x - 2}{x^2 - 5x + 4}$

i) $\dfrac{3x^2 + 12x + 11}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}$

30*. Calcula los coeficientes *A*, *B*, *C* y *D* en:

a) $\dfrac{x^2}{x^2 - 5x + 6} = Ax + B + \dfrac{C}{x - 2} + \dfrac{D}{x - 3}$

b) $\dfrac{(x - 1)(x - 3)^2}{(x^2 + x - 3)^2} = \dfrac{Ax + B}{(x^2 + x - 3)^2} + \dfrac{Cx + D}{x^2 + x - 3}$

c) $\dfrac{x^3 + 1}{(x^2 + x + 1)^2} = \dfrac{Ax + B}{(x^2 + x + 1)^2} + \dfrac{Cx + D}{x^2 + x + 1}$

31*. Expresa como suma:

a) $\dfrac{x^3 + 8}{x^2 - 2x + 4}$ b) $\dfrac{x^3 + x^2}{x^2 - 3x + 2}$

c) $\dfrac{8x^3 + 7}{(x + 1)(2x + 1)^3}$ d) $\dfrac{x^3 + 3x}{x^2 - 2x - 3}$

32*. Calcula *A*, *B*, *C*, *D* y *E* si:

a) $\dfrac{x^3 + x^2 + 5x + 3}{(x + 1)(x^2 + x + 1)^2} = \dfrac{A}{x + 1} + \dfrac{Bx + C}{x^2 + x + 1} + \dfrac{Dx + E}{(x^2 + x + 1)^2}$

b) $\dfrac{-x^4 - 3x^2 + x + 2}{(x + 2)(x^2 + 1)^2} = \dfrac{A}{x + 2} + \dfrac{Bx + C}{(x^2 + 1)^2} + \dfrac{Dx + E}{x^2 + 1}$

c) $\dfrac{x^3}{x(x^2 + 1)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx + C}{(x^2 + 1)^2} + \dfrac{Dx + E}{x^2 + 1}$

33. Muestra que las siguientes expresiones se reducen a un polinomio idénticamente nulo.

a) $P(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 5x + 6} + \dfrac{3}{x - 2} + \dfrac{4}{x - 4}$

b) $Q(x) = \dfrac{x + a}{(x - a)(x - c)} + \dfrac{\dfrac{b + a}{c - a}}{x - b} - \dfrac{\dfrac{c + a}{c - b}}{x - c}$

34*. Halla por el método de los coeficientes indeterminados, el cociente y el resto de la división de:

a) $x^3 - x^2 + x - 1 : x - 1$ b) $3x^3 + 6x^2 - 9 : 2x + 1$

c) $5x^3 - 6x^2 + 4x - 1 : x^2 - 2x + 1$ d) $x^6 - 2x^3 + 1 : x^4 - 3x^3 + 3x - 2$

Ejercicios del capítulo

1. Expresa en forma binómica.

a) $(3 - i) + (2{,}5 + i) - (1{,}3 + 6{,}7i)$

b) $(i - 4)(2 + 3i) - \left[\left(\frac{1}{5} - 0{,}85i\right) + \frac{2}{3} - i\right]$

c) $\left[\sqrt{2}\,\text{cis}\ 45° + \left(\frac{2}{3} - 5{,}1i\right)\left(1 - i\right)\right] : (2 - i)$

d) $[5{,}3\ \text{cis}\ 40° - \sqrt{3}\,\text{cis}\ 3]\ (2 + 3i)$

e) $(0{,}4 - 0{,}3i)^2 + 2\left[\cos\frac{\pi}{5} - i \cdot \text{sen}\ \frac{\pi}{5}\right]$

f) $(2 + i)^5 - 0{,}45\ \text{cis}\ 45°$

g) $\sqrt{5 - i} + \text{cis}\ 3 \cdot 2{,}7(\cos 80° - i \cdot \text{sen}\ 80°)$

h) $\sqrt[3]{0{,}064\ \text{cis}\ 150°} \cdot (2{,}5 + i)^4 - \sqrt[3]{i}$

i) $\left[\overline{5 - 3i} + \frac{1}{2{,}81i - 3}\right] \cdot 3\ \text{cis}\ (-6)$

j) $\overline{(0{,}57 + 0{,}31i) - (2{,}53i - 5) + 3(2 - i)}$

k) $3{,}5\ \text{cis}\ 48° \cdot 2{,}7\ \text{cis}(-65°) : \sqrt{3}\,\text{cis}\ 70°$

l) $2{,}7\ \text{cis}\ \frac{\pi}{3} : 6{,}1\ \text{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right) \cdot 7{,}8\ \text{cis}\ \frac{2\pi}{3}$

m) $5{,}65\ \text{cis}\ 140° \cdot \overline{3\ \text{cis}\ 40°} : 8\ \text{cis}\ 65°$

n) $2\ \text{cis}\ 17° + 3{,}5\ \text{cis}\ 25°$

ñ) $(4{,}15\ \text{cis}\ 2)^2 \cdot \overline{\text{cis}\ 3} : (2 - i)$

o) $[\overline{(3 + i)} - (3 + i)](2 - i)$

p) $\overline{(4 + i)}\ \overline{(-1 + 3i)} - \overline{(7 - 2i)}\ \overline{(2 - 7i)}$

q) $\overline{(2 - i)(i + 2)} + \sqrt{5}\left(\cos\frac{\pi}{3} - i \cdot \text{sen}\ \frac{\pi}{3}\right)$

r) $\left[\sqrt[5]{2}\,\text{cis}\ \frac{\pi}{10}\right]^{10} \cdot \left[\sqrt[4]{2}\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]^4 + \sqrt{5}\,\text{cis}\ 2{,}7$

2. Determina los valores de x e $y \in \mathbb{R}$ en las ecuaciones siguientes:

a) $x + 3i + 3 = 5 + yi$ b) $x - 2i = 3 + 3i - yi$

c) $x - iy = y + ix$ d) $2x + iy = 9 + y - 3ix$

e) $3y - ix + 1 = iy - 3x$ f) $3x - y - i = 2ix - iy$

g) $(x + iy)(1 + 2i) = -1 + 8i$

h) $(x + iy)(2 - i) = 5$

i) $(x + iy)(x - iy) = (2 + ix)^2$

j) $(x + iy)^2 = 1 + i$

k) $(x - iy)(\overline{x - iy}) = (x + 1)^2$

l) $(2x - 3i)^2 = (i - 9y)y$

m) $|x - iy| = 4$

n) $x^2 - 3x - i(y + x - 1) = y + 1$

3*. Prueba las igualdades siguientes:

a) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ b) $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$

c) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ d) $\overline{z : w} = \bar{z} : \bar{w}$

4. Calcula $a \in \mathbb{R}$ para que el número $z = \dfrac{2 - 4ai}{1 + i}$ sea un número real.

5*. Sea el número complejo $w = \dfrac{z - 1}{z + 1}$ $(z \in \mathbb{C}, z \neq -1)$.

a) Determina $\mathcal{R}(w)$ e $\mathcal{I}(w)$.

b) Demuestra que si w es un imaginario puro, entonces $|w| = 1$.

6*. a) Sea $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ prueba que:

$$x = \frac{\bar{z} + z}{2} \quad \text{y} \quad y = \frac{\bar{z} - z}{2}\, i$$

b) Sea la ecuación de la recta $Ax + By + C = 0$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Demuestra que:

$(A + iB)\bar{z} + (A - iB)z + 2C = 0$

7. Resuelve las ecuaciones siguientes.

a) $w^3 - 4\sqrt{2}(1 + i) = 0$ b) $w^5 - 4 + 4i = 0$

c) $w^4 - \dfrac{1 + 3i}{2 + i} = 0$

8. Halla dos números complejos tales que su diferencia sea igual a $6i$ y su cociente sea un número imaginario puro.

9*. La suma de dos complejos es $3 + 2i$. La parte real de uno es 2. Halla dichos números si su cociente es un número imaginario puro.

10. Calcula el valor de la suma:
$S = 1 + i + i^2 + \ldots + i^{120}$

11. Halla las partes real e imaginaria de los números siguientes:

a) $z = \dfrac{(1 + 2i)^3}{i} + i^{19}$

b) $z = \dfrac{5 + 2i}{2 - 5i} - \dfrac{3 - 4i}{4 + 3i} + \dfrac{1}{i}$

c) $z = \dfrac{2 - 3i}{1 + 4i} + i^6$

12. Sea la función compleja $f(z) = 2z^4 - z^3 + z^2 - z - 1 (z \in \mathbb{C})$.
a) Calcula $f(1 - i)$ y $f(1 + \sqrt{3}i)$
b) Investiga si $z_0 = i$ es un cero de f.

13. Demuestra que si $|z_1| = |z_2|$, entonces $\dfrac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ es un imaginario puro.

14. Determina ρ y φ dado:
$\rho \operatorname{cis} \varphi = \sqrt[3]{\dfrac{ma^2}{b}}$ donde $m = \sqrt{3} + i$, $a = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ y $b = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$.

15. Calcula las raíces cuartas de z si:

$\bar{z} = a^3bc$ donde $a = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis} \dfrac{\pi}{18}$

$b = \sqrt{2}(\cos 40° + i \cdot \operatorname{sen} 40°)$ y $c = \sqrt{3} \operatorname{cis} 50°$.

16. Un extremo de un diámetro de circunferencia cuyo centro coincide con el origen de coordenadas es el punto $4\sqrt{2} + 2i$. Halla el número que representa los extremos del diámetro perpendicular al dado y calcula la longitud del diámetro de la circunferencia.

17. ¿Qué figura del plano representa las siguientes ecuaciones?

a) $\mathcal{I}(z^2) = 2$

b) $\mathcal{R}\left[\dfrac{1}{2}\right] = 1$

c) $\mathcal{I}\left[\dfrac{1}{2}\right] = \dfrac{1}{2}$

d) $z \cdot \bar{z} + (1 - i)z + (1 + i)\bar{z} = 0$

e) $z \cdot \bar{z} + i\,(\overline{z^2 - \bar{z}}) = 2$

f) $\mathcal{I}(z^2 - \bar{z}) = 2 - \mathcal{I}(z)$

g) $2z \cdot \bar{z} + (2 + i)z + (2 - 2)\bar{z} = 2$

18. a) Calcula las raíces cúbicas de $\bar{z}$, si $z = 3 + \sqrt{3}i$.

b) Las raíces cuadradas de z. si

$$z = \frac{40 \text{ cis } 20° \cdot \dfrac{1}{2} \text{ cis } 40°}{(\sqrt{3} - i)^3}.$$

19. El centro de un cuadrado es el afijo de $z_0 = 1 + i$, y uno de los vértices es el afijo de $z_1 = 1 - i$. ¿Qué números complejos determinan los vértices restantes? Calcula la longitud de la diagonal del cuadrado.

20. a) Sea la función compleja:
$f(z) = z^3 - 2z^2 + z - 1 \quad (x \in \mathbb{C})$.
Calcula el valor $f(\sqrt{3} - i)$.

b) Si $g(z) = z^4 - iz^3 - (1 + 2i)z^2 + 3z + (1 - 13i)$
Calcula el valor de $g(2 + 3i)$.

21*. a) Si α es una de las raíces cúbicas complejas de la unidad, comprueba las relaciones siguientes:

- $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$
- $(1 + \alpha^2)^6 + (1 + \alpha)^4 = \dfrac{1}{3}(1 - \alpha)^2$

b) Si α_1 es una raíz cúbica compleja de la unidad y α_2 es la otra, muestra que:

- $\alpha_1 + \alpha_2 = -1$
- $\alpha_1 \cdot \alpha_2^2 = \alpha_2$

22.* Demuestra que si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se verifica que:
$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z^2| = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$. Interpreta este resultado geométricamente.

23. Describe geométricamente el conjunto de números complejos z que cumple la condición siguiente:

- $z - \bar{z} = i$

24. Comprueba si $1 \pm \sqrt{3}i$ son raíces de la ecuación:

$$x^2 - 4x + 3 = -\frac{3}{x^2 - 1}$$

25.* Los ceros de un polinomio son $-1, 3, 5, -2$, y toma el valor 144 para $x = 1$. Determina el resto cuando se divide por $x - 4$.

26*. Determina n para que el polinomio $2x^3 - 2x^2 + nx - 1$ sea divisible por $x - 3$.

27*. a) Determina a y b en el polinomio $x^4 - ax^3 + 2x^2 - bx + 1$, sabiendo que es divisible por $x - 1$ y $x - 2$.

b) ¿Cuál es el polinomio de tercer grado en una variable cuyas raíces o ceros son $-4i$, $1 - i$, 1 y toma el valor numérico $-4i + 12$ cuando la variable toma el valor i.

28. Resuelve las ecuaciones siguientes.

a) $x^3 - x^2 - 2x = 0$ b) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

c) $x^5 - 4x^4 - 7x^3 + 22x^2 + 24x = 0$

29. Descompón la fracción $\dfrac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2}$ en fracciones simples.

30* Demuestra que para ningún polinomio $P(x)$ con coeficientes enteros se cumplen las igualdades $P(7) = 5$ y $P(15) = 9$.

31* Expresa en términos de sen φ y cos φ.

a) cos 3φ b) sen 3φ c) cos 4φ d) sen 4φ

32*. Calcula:

a) $1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi$

b) $\text{sen}\,\varphi + \text{sen}\,2\varphi + \ldots + \text{sen}\,n\varphi$

LA GEOMETRÍA DEL ESPACIO

La geometría del espacio, estereometría o geometría de los sólidos, como toda geometría, tiene su origen en las primeras civilizaciones. Del conocimiento de los papiros que ha llegado hasta el presente siglo, se puede inferir que es en esta rama de la matemática en la que los egipcios superaron, quizás, a las civilizaciones que poblaron el valle de la Mesopotamia, y muy en especial, en geometría del espacio.

En el Papiro de Golenishchev o Papiro de Moscú que data del año 1850 a.n.e., por ejemplo, se emplea la fórmula $V = \frac{h}{2}\,(a^2 + ab + b^2)$ que usan acertadamente para calcular un tronco de pirámide de dimensiones superiores a las de la gran Pirámide de Keops.

No obstante, los babilonios dejan también huellas de sus conocimientos estereométricos en una de las tablillas de barro que con escritura cuneiforme se conserva en la Universidad de Yale, la cual se supone fue confeccionada en el año 1600 a.n.e. En esta tablilla se presenta también el cálculo de un tronco de pirámide, pero en este caso, la solución conduce a una ecuación cúbica.

Los griegos comienzan el estudio geométrico de los sólidos en la escuela de Pitágoras. Sus miembros se inclinan básicamente al conocimiento exclusivo de ciertos sólidos muy característicos, es decir, a los poliedros regulares.

La geometría de los sólidos adquiere su fisonomía actual en los libros XI, XII y XIII de los *Elementos.* Dedica Euclides estos tres libros de su famosa obra a construir la geometría del espacio y, con excepción de la esfera, la desarrolla tal como se estudiaba hasta casi mediados del siglo XX. En sus *Elementos* presenta Euclides las definiciones, los teoremas relativos a rectas y planos en el espacio, los teoremas relativos a paralelepípedos y concluye con la construcción de los cinco poliedros regulares.

La estereometría se completa tal como la conocemos hoy con los trabajos del Gran Arquímedes en sus obras: *Sobre la esfera y el cilindro* y *De los conoides y esferoides.*

Al estudiar a los sólidos inscriptibles en una esfera, además del trabajo con los cinco poliedros regulares, Arquímedes aporta otros 13 poliedros que denomina semirregulares, de los cuales el más conocido es el que consta de 12 cuadrados y 8 triángulos.

CAPÍTULO 3

Geometría del espacio

Geometría sintética

1. *Introducción a la geometría del espacio*

Has estudiado geometría plana o planimetría, sin embargo, no vives en un mundo plano, vives en un mundo con tres dimensiones (largo, ancho y alto), en un espacio tridimensional. Para comprender este espacio y orientarte en él es conveniente estudiar la geometría del espacio o estereometría.

En la geometría del espacio se tienen algunas propiedades diferentes a las que te son familiares de la planimetría.

Por ejemplo, en el cubo de la figura 3.1 puedes apreciar que las rectas AB y DE no son paralelas, pero no tienen puntos comunes, esto significa que en el espacio no puede decirse que las rectas paralelas son las que no se cortan.

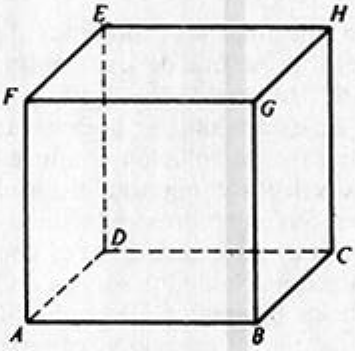


Fig. 3.1

Igualmente, las rectas FG y GB son perpendiculares a la recta GH; es decir, en el espacio se puede trazar más de una perpendicular a una recta en un punto y, además, dos rectas perpendiculares a una tercera no tienen que ser paralelas entre sí.

Ejemplo 1

Considera la pirámide que se obtiene seccionando el cubo de la figura 3.1 por las rectas *EA*, *EC* y *AC*. Señala, utilizando las aristas:

a) Dos rectas que no se corten y no sean paralelas.

b) Tres rectas que sean perpendiculares dos a dos.

c) Dos rectas paralelas.

d) ¿Qué parte del cubo es la pirámide?

Resolución (fig. 3.2)

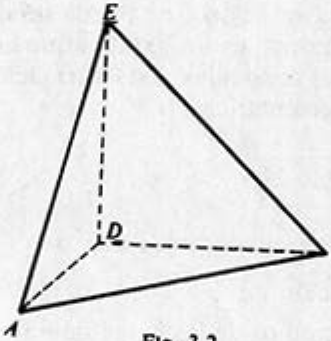


Fig. 3.2

a) Las rectas DE y AC.

b) Las rectas ED, DA y DC.

c) No existen; entre las aristas que se obtienen no hay dos paralelas.

d) La pirámide tiene por base el triángulo rectángulo ADC y por altura el segmento ED. Si denotamos $\overline{ED} = \overline{AD} = \overline{AC} = l$ (lado del cubo) tendremos:

$$V_p = \frac{1}{3} A_B \cdot h = \frac{1}{3} \frac{\overline{AD} \cdot \overline{DC}}{2} . \overline{ED} = \frac{1}{3} \frac{l^2}{2} \cdot l = \frac{1}{6} l^3$$

y como $V_c = l^3$, la razón será:

$$\frac{V_p}{V_c} = \frac{\frac{1}{6} l^3}{l^3} = \frac{1}{6}$$

La pirámide es la sexta parte del cubo. ■

Como hemos visto, la diferencia fundamental entre el plano y el espacio radica en que en el espacio hay tres dimensiones, es decir, se pueden trazar por un punto tres rectas perpendiculares dos a dos. En el espacio tenemos cuerpos que no pueden estar en un plano, estos cuerpos están limitados por superficies y algunos, como el cubo de la figura 3.1 por planos.

En resumen:

> El espacio es un conjunto de puntos en el cual hay algunos subconjuntos llamados rectas, caracterizados por las propiedades del punto 17 del Memento y otros subconjuntos llamados planos caracterizados por las propiedades de la afirmación 1.

Afirmación 1

> Un plano es un subconjunto propio del espacio caracterizado por las propiedades siguientes:
>
> a) Por tres puntos del espacio, no situados en línea recta, pasa un plano y solo uno.
>
> b) Si dos planos tienen un punto común, entonces tienen una recta común que contiene a ese punto (recta de intersección).
>
> c) Si una recta tiene dos puntos en un plano, entonces está contenida en dicho plano.

La afirmación 1 no puede ser demostrada a partir de las propiedades geométricas que conoces; es un axioma que aceptamos sin demostración y añadimos a las propiedades conocidas. Esta afirmación podemos utilizarla para demostrar otras propiedades geométricas.

Ejemplo 2

¿Por qué nunca cojea una mesa de tres patas?

Resolución

Los extremos de las patas siempre quedan en un plano (tres puntos no alineados determinan un plano y solo uno) por tanto la mesa de tres patas no cojea. ■

Teorema 1

Dos rectas que se cortan determinan un plano y solo uno.

Demostración

Sean p y q (fig. 3.3) las rectas y A el punto de intersección, tomemos en p un punto $P \neq A$ y en q un punto $Q \neq A$. entonces los puntos A, P y Q determinan un plano α y solo uno, según la afirmación 1 a

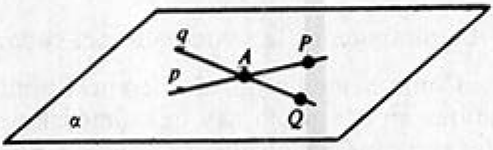


Fig. 3.3

Según la afirmación 1 c, la recta p está enteramente contenida en α, pues tiene en él los puntos A y P; igualmente la recta q tiene los puntos A y Q en α y está contenida en él. ■

Nota: El plano, al igual que la recta, es una figura ilimitada y del mismo modo que para representar una recta se dibuja solo un segmento de esta, para representar un plano se dibuja solo una porción de este, la cual puede ser un rectángulo que visto en perspectiva parece un paralelogramo.

Ejemplo 3

Demuestra que una recta r y un punto exterior a esta, determinan un plano y solo uno.

Resolución

Sea B un punto de la recta r (fig. 3.4), entonces:

Las rectas AB y r se cortan y determinan un plano único α (teorema 1). ■

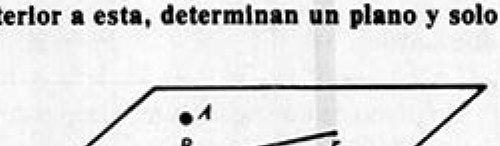


Fig. 3.4

En general, en el espacio se cumplen todas las propiedades conocidas relativas a paralelismo, orden y congruencia.

En el caso del paralelismo es necesario modificar la definición de rectas paralelas.

Definición 1

> Dos rectas en el espacio son paralelas si y solo si
> a) están contenidas en un plano y,
> b) son paralelas en ese plano.

Como hemos visto, dos rectas en el espacio pueden no ser paralelas y no cortarse; en general son posibles las relaciones siguientes:

> - Las rectas están en un plano y entonces:
>   a) se cortan o,
>   b) son paralelas.
> - Las rectas no están en un plano y entonces no se cortan. En este caso se dice que se cruzan o que son alabeadas.

Se conviene en llamar ángulo entre rectas que se cruzan, al ángulo que forman a partir de un punto dos semirrectas paralelas a aquellas.

Ejemplo 4

Prueba que dos rectas paralelas determinan un plano y solo uno.

Resolución

Sean p y q rectas paralelas (fig. 3.5); por definición de paralelismo están contenidas en un plano α. Este plano está determinado por los puntos A, $B \in p$ y $C \in q$, luego es único. ■

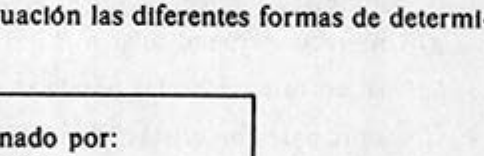


Fig. 3.5

Por su importancia, resumimos a continuación las diferentes formas de determinar un plano.

> Un plano está determinado por:
> a) Tres puntos no alineados.
> b) Dos rectas que se cortan.
> c) Dos rectas paralelas.
> d) Una recta y un punto exterior a esta.

Ejercicios (epígrafe 1)

1. En los prismas de la figura 3.6, señala utilizando las aristas:
   a) Dos rectas paralelas.

b) Dos rectas que se cruzan.

c) Tres rectas que sean perpendiculares dos a dos.

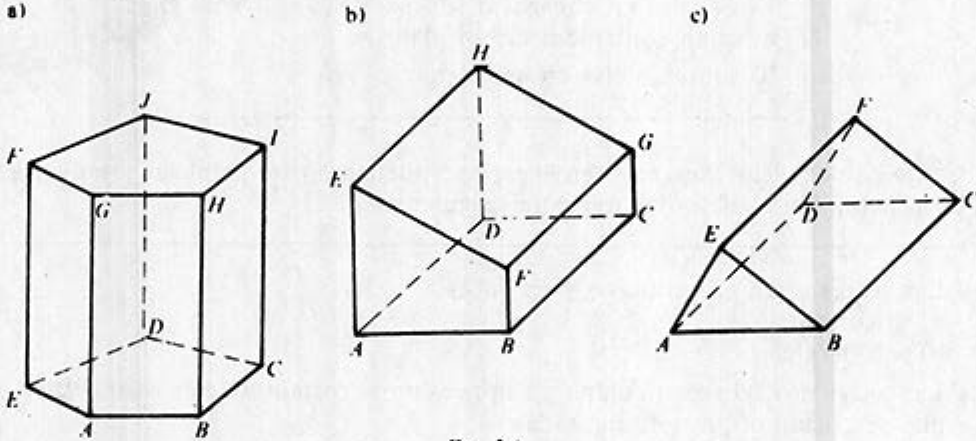


Fig. 3.6

2. Sea el cubo *ABCDEFGH* de la figura 3.7. Señala, utilizando las aristas:
   a) Dos rectas paralelas que no pertenezcan a una misma cara.
   b) Dos rectas que no sean paralelas ni se corten.
   c) Dos rectas perpendiculares.
   d) Dos rectas paralelas que no estén en un mismo plano.
   e) Cuatro puntos que no estén en un mismo plano.
   f) Dos rectas que se corten en un punto que no sea vértice.
   g) Una recta perpendicular a *BG*.

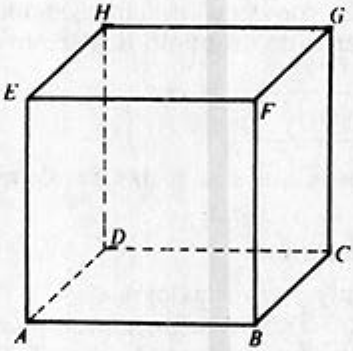


Fig. 3.7

3. Señala, en tu aula, rectas paralelas que se corten y que se crucen.
4. ¿Cuántos pares de aristas situadas sobre rectas cruzadas hay en una pirámide triangular?
5. ¿Cuántos pares de aristas paralelas y aristas que se cruzan hay en el ortoedro?
6. ¿Por qué cojea una mesa de cuatro patas con una más corta que las otras?
7. Si se unen con dos hilos los extremos inferiores de las patas no consecutivas de una silla, ¿cómo se sabe si estos cuatro extremos están en el mismo plano?
8. ¿Son verticales todas las rectas perpendiculares a una horizontal? Pon ejemplos.
9. Si dos rectas en el espacio no se cortan por mucho que se prolonguen, ¿se puede afirmar que son paralelas?

10. ¿Cuántos planos determinan tres rectas concurrentes no coplanares?

11. Se tienen 7 puntos entre los que nunca hay 4 en un mismo plano. ¿Cuántos planos determinan?

12. ¿Cuántos planos determinan 20 puntos, no hallándose nunca 4 de ellos en el mismo plano, ni tres en línea recta? ¿Cuántos planos determinan n puntos en las mismas condiciones?

13. ¿Cuántos planos determinan 3 rectas paralelas?

14. ¿Cuál es el número mayor de planos que pueden determinar 3 rectas paralelas y un punto cualquiera exterior a estas?

15. Dos rectas se cortan, si una tercera recta cruza a una de ellas y es paralela a la otra, ¿cuántos planos distintos determinan?

16. ¿Cuántos planos determinan dos rectas que se cortan al ser cortadas por una tercera?

17. Prueba que si una recta corta a dos rectas paralelas, las tres están en el mismo plano.

18. Si 4 puntos no están en un plano, prueba que 3 de ellos no están alineados.

19. Demuestra que si las rectas AB y CD no están en un mismo plano, entonces las rectas AC y BD tampoco están en un mismo plano.

2. *Rectas y planos*

Definición 1

Una recta y un plano son paralelos si no se intersecan.

En la vida diaria puedes reconocer muchos ejemplos de rectas y planos paralelos; por ejemplo, las rectas determinadas por las lozas del piso son paralelas al techo de tu aula.

Ejemplo 1

Identifica en el prisma de la figura 3.8:

a) Un plano paralelo a la recta CD **(**BC**).**

b) Una recta paralela al plano ACD **(**ABC**).**

Resolución

a) El plano ABF es paralelo a la recta CD.
El plano DEF es paralelo a la recta BC.

b) La recta BF es paralela al plano ACD.
La recta EF es paralela al plano ABC. ■

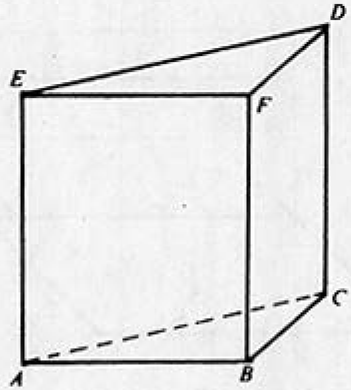


Fig. 3.8

Ejemplo 2

Prueba que si una recta de un plano es paralela a otro plano que lo interseca, es paralela a la recta de intersección.

Resolución

Sea la recta $p \subset \beta$ (fig. 3.9), q la recta de intersección de los planos α y β, $p \| \alpha$.

Debemos probar que $p \| q$

Si la recta p cortara a q lo haría en un punto Q de α lo que es imposible ya que $p \| \alpha$. ■

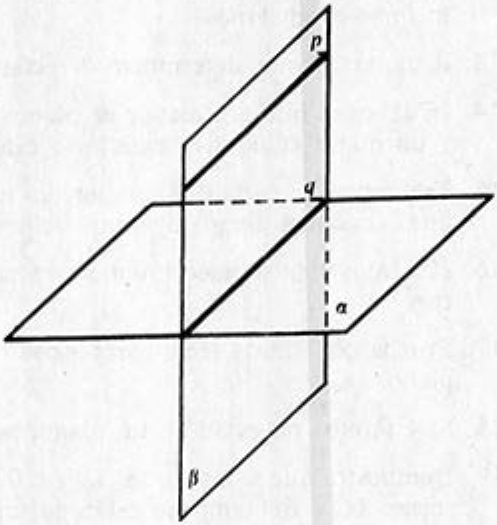


Fig. 3.9

Teorema 1 (Criterio de paralelismo de recta y plano)

> **Una recta es paralela a un plano si es paralela a una recta contenida en dicho plano.**

Demostración

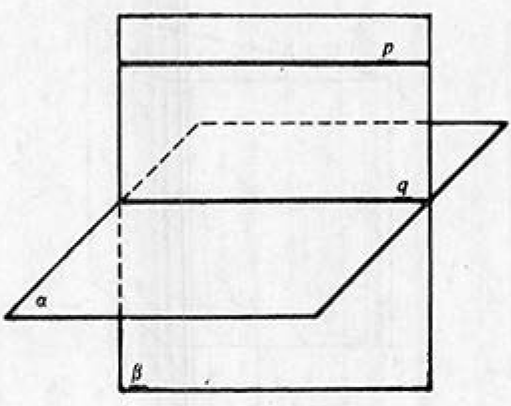


Fig. 3.10

Tenemos que (fig. 3.10) $p \| q$ y $q \subset \alpha$.
Debemos demostrar que $p \| \alpha$.
Si $p \| q$, se puede trazar un plano β que contenga a p y q. Si la recta p cortara al plano α, cortaría también a q, pues $q = \alpha \cap \beta$, lo que es imposible pues $p \| q$; luego $p \| \alpha$. ■

Ejemplo 3

Utiliza el teorema 1 para fundamentar la respuesta del ejemplo 1.

Resolución

a) $CD||FB$ y FB pertenece al plano ABF, luego el plano ABF es paralelo a la recta CD.
$BC||FD$ y FD pertenece al plano DEF, luego el plano DEF es paralelo a la recta BC.

b) $BF||CD$ y CD pertenece al plano ACD, luego BF es paralela al plano ACD.
$EF||AB$ y AB pertenece al plano ABC, luego la recta EF es paralela al plano ABC. ■

Ejemplo 4

Prueba que si dos rectas se cruzan, por cada una de ellas se puede trazar un plano paralelo a la otra.

Resolución

Sean p y q dos rectas que se cruzan (fig. 3.11).

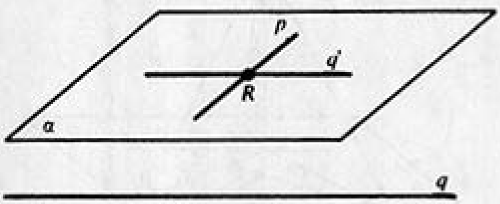


Fig. 3.11

Tracemos por un punto R de p una recta q' paralela a q. Las rectas p y q' determinan un plano α (teorema 1, epígrafe 1) que es paralelo a q (teorema 1, epígrafe 2).

Se dice que una recta interseca a un plano si tiene un punto común con el plano, entonces pueden ocurrir dos casos:

a) la recta es perpendicular a todas las rectas del plano que pasan por su punto de intersección,

b) la recta no es perpendicular al menos a una de las rectas que pasan por su punto de intersección.

En el primer caso se dice que la recta es *perpendicular al plano* y en el segundo caso que la recta es *oblicua al plano.* Al punto de intersección se le llama pie de la perpendicular o de la oblicua.

Por "perpendicular" (oblicua) al plano se entiende también el segmento de recta perpendicular (recta oblicua) comprendido entre un punto y un plano.

En la vida diaria puedes encontrar ejemplos de rectas perpendiculares y oblicuas a un plano; por ejemplo, la recta de intersección de dos paredes del aula es perpendicular al piso, mientras que los tensores que sostienen un poste determinan rectas oblicuas al piso.

Ejemplo 5

En la pirámide recta de la figura 3.12, identifica rectas perpendiculares u oblicuas al plano de la base.

Resolución

La recta ED es perpendicular al plano de la base.
Las rectas EA, EB, EC y ED son oblicuas al plano de la base. ■

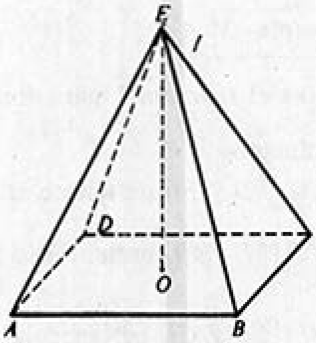


Fig. 3.12

Teorema 2 (Criterio de perpendicularidad de recta y plano)

> Si una recta es perpendicular a dos rectas de un plano que se cortan en su pie, entonces es perpendicular al plano.

Demostración

Sean m y n dos rectas que se cortan en el plano α (fig. 3.13) y p una recta tal que $p \perp m$ y $p \perp n$. B punto de intersección de p, m y n.
Debemos demostrar que p es perpendicular a toda recta del plano que pasa por B. Sea q una cualquiera de esas rectas, luego hay que probar que $p \perp q$.

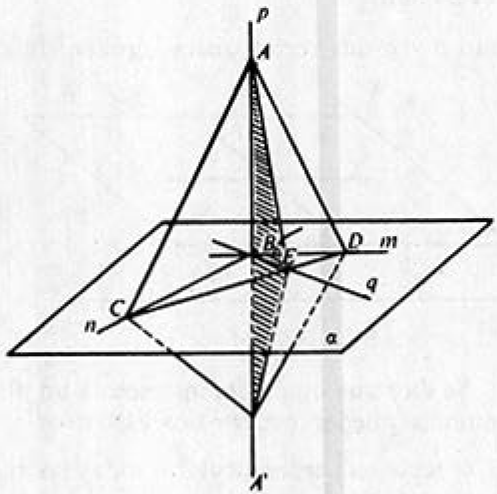


Fig. 3.13

Tomemos sobre la recta p dos puntos A y A' simétricos con respecto a B, y sobre las rectas m y n dos puntos arbitrarios C y D, y denotemos por E al punto donde la recta q corta a CD.
Uniendo los puntos A y A' con C, D y E, respectivamente, se tiene:

$\triangle ACD = \triangle A'CD$ (CD lado común, $AC = A'C$ y $AD = A'D$ por ser n y m mediatrices de AA')

por tanto,

$\sphericalangle ACE = \sphericalangle A'CE$ (elementos homólogos en triángulos iguales)

luego $\triangle ACE = \triangle A'CE$ (l.a.l.)

de donde $\overline{AE} = \overline{A'E}$ (elementos homólogos en triángulos iguales)
y el $\triangle AA'E$ es isósceles,
pero $\overline{EB}$ es la mediana relativa al lado desigual, por lo que también es altura y las rectas p y q son perpendiculares. ■

Ejemplo 6

Fundamenta, utilizando el teorema 2, que en el cubo de la figura 3.14 la recta *GH* es perpendicular al plano *CDE*.

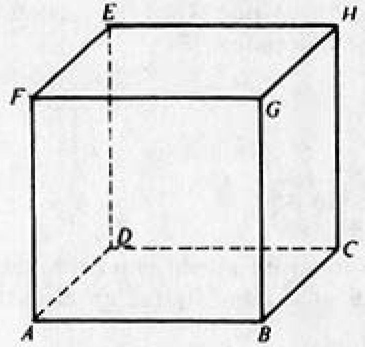


Fig. 3.14

Resolución

$GH \perp HC$ y $GH \perp HE$, luego GH es perpendicular al plano CDE por ser perpendicular a dos rectas de ese plano que se cortan en su pie (H). ■

Ejemplo 7

Prueba que por cualquier punto de una recta se puede trazar un plano perpendicular a esta.

Resolución

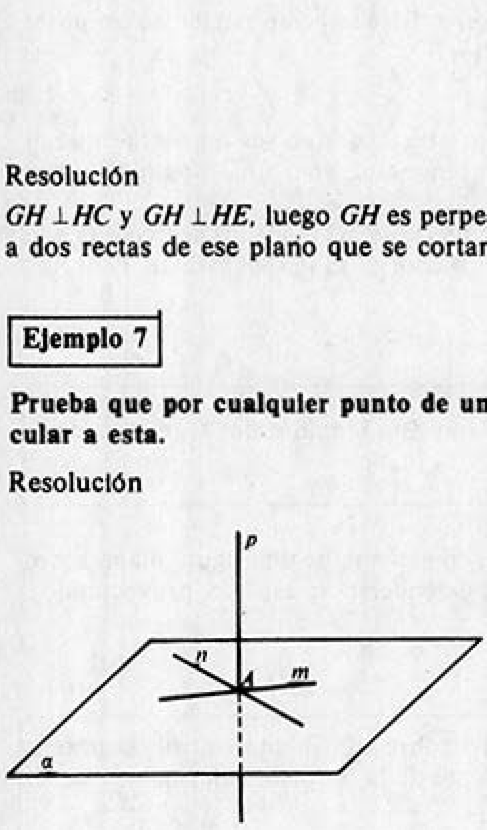


Fig. 3.15

Sean la recta p y A un punto cualquiera de p (fig. 3.15). Tracemos por A dos rectas m y n perpendiculares a p. Estas rectas m y n determinan un plano $\alpha \perp p$ (teorema 2). ■

Teorema 3

Si desde un punto se trazan una perpendicular y varias oblicuas a un plano, la perpendicular es menor que las oblicuas.

Demostración

Sean $\overline{AB} \perp \alpha$ y $\overline{AC}$ una oblicua cualquiera a α (fig. 3.16). Uniendo los puntos C y B se obtiene el $\triangle ABC$, rectángulo en B pues $\overline{AB} \perp \alpha$, y por tanto lo es a $\overline{CB}$ ($\overline{CB} \subsetneq \alpha$); luego $\overline{AB} < \overline{AC}$ ya que $\overline{AB}$ es cateto y $\overline{AC}$ es hipotenusa. ■

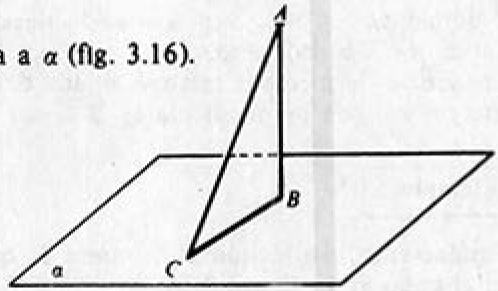


Fig. 3.16

Ejemplo 8

¿Qué longitud puede tener una cuerda para ser utilizada como tensor de un poste de 6,5 m si debe fijarse en el extremo superior?

Resolución

La cuerda tiene que ser oblicua al plano por lo que tiene que ser más larga que el poste que es perpendicular (teorema 3), luego tiene que tener una longitud mayor que 6,5 m. ■

Como consecuencia del teorema anterior se tiene que de todos los segmentos que pueden trazarse desde un punto a un plano, el menor es el perpendicular. Esto nos permite dar la definición siguiente:

Definición 2

Llamaremos distancia de un punto a un plano a la longitud del segmento de perpendicular comprendido entre el punto y el plano.

La proyección de un punto, un segmento y, en general, de una figura plana sobre una recta; puede hacerse en el plano y puede extenderse al espacio proyectando, ahora, sobre un plano.

Definición 3

a) Llamamos proyección de una oblicua $\overline{AB}$ sobre un plano α, al segmento $\overline{A'B}$ que une el pie de la oblicua con el pie de la perpendicular bajada desde el mismo punto A al plano α (fig. 3.17).

b) Llamamos ángulo entre una oblicua $\overline{AB}$ y un plano α, al ángulo γ formado por la oblicua y su proyección sobre α.

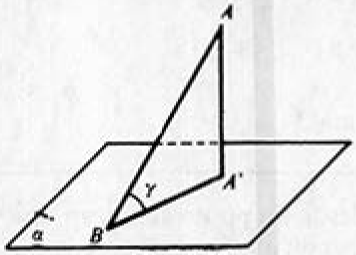


Fig. 3.17

Ejemplo 9

Un triángulo isósceles ABC, rectángulo en C, se encuentra sobre un plano α. Por el vértice C se traza la perpendicular $\overline{CM}$ a α tal que $\overline{CM}$ = 15 cm (fig. 3.18).

a) Halla la longitud de la oblicua $\overline{AM}$ si esta forma un ángulo de 30° con el plano α.

b) Halla el área del triángulo ABC.

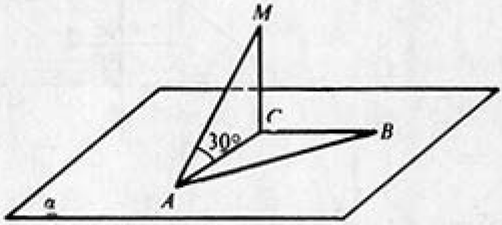


Fig. 3.18

Resolución

a) Tenemos que

En $\Delta\ ACM$ es rectángulo en C ($\overline{CB} \perp \alpha$) y $\measuredangle\ CAM = 30°$

luego $\overline{AM}$ = 30 cm (hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyo cateto opuesto al ángulo de 30° mide 15 cm)

b) $\overline{BC} = \overline{AC}$ (el $\Delta\ ABC$ es isósceles)

En $\Delta\ ACM$ se tiene:

$$\overline{AC} = \overline{AM}\ \cos 30° = 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3} = 15 \cdot 1{,}73 = 26$$

$\overline{BC}$ = 26 cm

$$A_{\Delta ABC} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}{2} = \frac{(15\sqrt{3})^2}{2} = \frac{225 \cdot 3}{2} = \frac{675}{2} = 337{,}5 \text{ cm}^2$$

$A_{\Delta ABC}$ = 3,4 dm². ■

Teorema 4

a) Si una de dos rectas paralelas es perpendicular a un plano, la otra también lo es.

b) Dos rectas perpendiculares a un plano son paralelas entre sí.

Demostración

a) Sean el plano α y las rectas p y q tales que $p \perp \alpha$ y $p \| q$: P y Q los pies de p y q sobre α, respectivamente (fig. 3.19). Tracemos por P dos rectas m y n y por Q dos rectas m' y n' tales que $m' \| m$ y $n' \| n$.

Tenemos que: $p \perp m$ y $p \perp n$ (por ser $p \perp \alpha$)

luego $q \perp m'$ y $q \perp n'$ (por ser $p \| q$, $m \| m'$ y $n \| n'$) (en el espacio se conservan las propiedades conocidas relativas a paralelismo)

Por lo tanto, $q \perp \alpha$. (teorema 2, epígrafe 2).

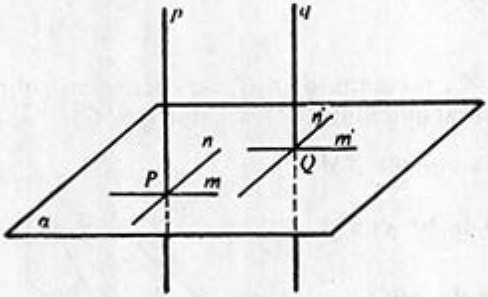


Fig. 3.19

b) Sean $p \perp \alpha$ y $q \perp \alpha$, P la intersección de p y α (fig. 3.20). Supongamos que $p \not\parallel q$. Tracemos por P la recta $p' \parallel q$. Las rectas p y p' determinan un plano β que interseca al plano α según la recta m. Se tiene que $p' \perp \alpha$ (inciso a) luego $p' \perp m$.
Pero también $p \perp m$ ($p \perp \alpha$),

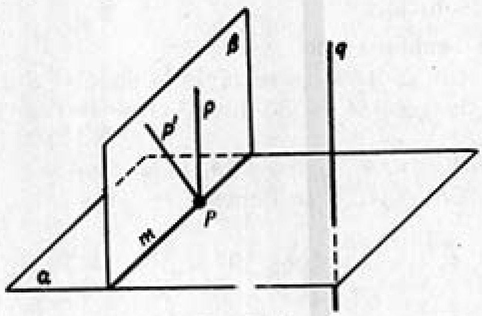


Fig. 3.20

luego, en el plano β se han trazado dos rectas perpendiculares a m en el mismo punto lo que es imposible. Por lo tanto, $p \parallel q$. ■

Ejemplo 10

Prueba que los puntos de una recta paralela a un plano equidistan del plano.

Resolución

Sean $p \parallel \alpha$, A y B dos puntos cualesquiera de p (fig. 3.21)
Tracemos por A y B dos segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ perpendiculares a α, entonces, $AC \parallel BD$ (teorema 4b, epígrafe 2).

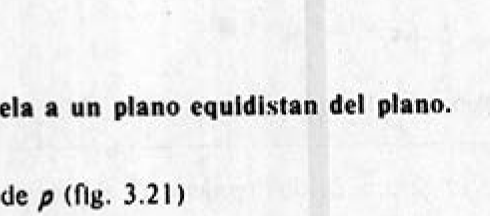


Fig. 3.21

Las rectas AC y BD determinan un plano β que interseca a α según la recta CD, luego

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ (ejemplo 2, epígrafe 2).

Por lo tanto, $ABCD$ es un rectángulo y $\overline{AC} = \overline{BD}$. ■

Teorema 5 (Teorema de las tres perpendiculares)

> Si una recta de un plano que pasa por el pie de una oblicua al plano es perpendicular a la proyección de la oblicua, entonces es perpendicular a la oblicua.

Demostración

Sean la recta AB oblicua a α (fig. 3.22), CB = proy$_\alpha$ AB.
r una recta contenida en α tal que $r \perp CB$
y β el plano determinado por A, B y C.
Debemos probar que $r \perp AB$.
Tracemos por C una recta p tal que $p \| r$.

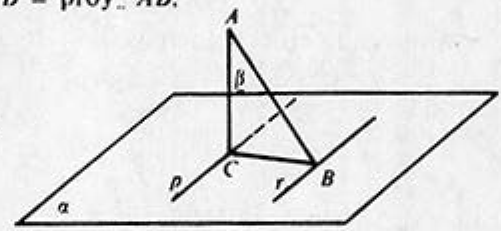


Fig. 3.22

Tenemos que: $p \perp AC$ $\quad$ ($AC \perp \alpha$ y $p \subset \alpha$)
$\qquad\qquad\quad p \perp CB$ $\quad$ ($p \| r$, $r \perp CB$ y p, r, $CB \subset \alpha$)
luego $p \perp \beta$ (teorema 2)
pero $r \| p$, luego $r \perp \beta$ (teorema 4a),
por tanto $r \perp AB$. ■

El recíproco de este teorema se cumple, es decir, *si una recta de un plano, que pasa por el pie de una oblicua, es perpendicular a la oblicua, entonces es perpendicular a su proyección.* La demostración es similar a la del teorema directo.

Ejemplo 11

Se tiene un triángulo rectángulo ABC tal que $\overline{AC}$ = 10 cm y $\sphericalangle CAB = 30°$. Por el vértice C del ángulo recto se ha trazado una perpendicular al plano α del triángulo y en ella se ha tomado un punto M tal que $\overline{CM}$ = 12 cm.

a) Halla el área del triángulo ABM.

b) Halla el área de la proyección del triángulo ABM sobre α.

Resolución

a) Tenemos que: $A_{\triangle ABM} = \dfrac{1}{2}\,\overline{AB}\cdot h$ $\quad$ (1) $\quad$ (fig. 3.23)

Tracemos la altura $\overline{CD}$ del $\triangle ABC$
Se tiene que $\overline{AB} \perp \overline{CD}$
pero $\overline{DC}$ = proy$_\alpha$ $\overline{MD}$
luego, $\overline{AB} \perp \overline{MD}$ (teorema 5)
por lo tanto $\overline{MD} = h$
En el $\triangle ABC$ se tiene

$$\cos 30° = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

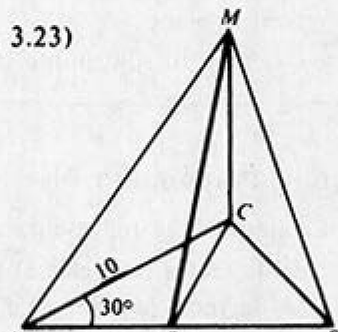


Fig. 3.23

$$\overline{AB} = \frac{\overline{AC}}{\cos 30°} = \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

En el $\triangle ACD$ se tiene $\overline{CD} = 5$ cm (cateto que se opone al ángulo de 30 grados)

luego, en el $\triangle CMD$, $\overline{MD} = \sqrt{\overline{CD}^2 + \overline{CM}^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169}$

$$\overline{MD} = 13 \text{ cm}$$

sustituyendo en (1) tenemos:

$$A_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} \; \frac{20\sqrt{3}}{3} \cdot 13$$

$$A_{\triangle ABM} = 75 \text{ cm}^2$$

b) $\text{proy}_\alpha \triangle ABM = \triangle ABC$ $(\overline{MC} \perp \alpha)$

luego: $A_{\text{proy}\alpha\triangle ABM} = \frac{1}{2} \; \overline{AC} \cdot \overline{AB} \text{ sen } 30° = \frac{1}{2} \; 10 \cdot \frac{20\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2}$

$$= \frac{50\sqrt{3}}{3} = 28.8$$

Respuesta: a) El área del triángulo ABM es aproximadamente igual a 75 cm².

b) El área de la proyección del triángulo ABM sobre α es aproximadamente igual a 29 cm².

Por su importancia, resumimos a continuación las posiciones relativas de una recta y un plano.

Una recta y un plano pueden:

a) No tener puntos comunes, en ese caso son paralelos.

b) Tener puntos comunes. Pueden suceder dos casos:

- todos los puntos de la recta pertenecen al plano, la recta está contenida en el plano.
- tienen un solo punto común, en ese caso se intersecan.

Ejercicios (epígrafe 2)

1. La figura 3.24 representa un prisma exagonal regular; identifica:

   a) Dos rectas paralelas al plano ABC.

   b) Una recta paralela al plano $AA'E$.

   c) Dos planos paralelos a la recta $B'C''$.

   d) Fundamenta en cada caso tu respuesta.

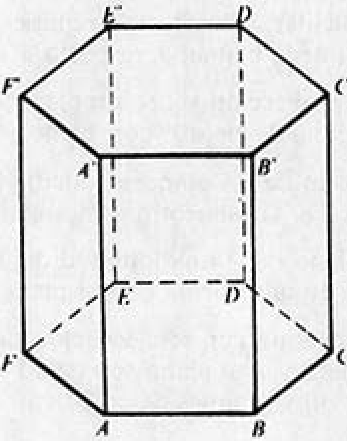


Fig. 3.24

2. En la figura del ejercicio anterior, identifica:
   a) rectas perpendiculares al plano *ABC*.
   b) rectas oblicuas al plano del rectángulo *ABB'A'*.
3. La figura 3.25 representa una pirámide de altura $\overline{CE}$. Identifica rectas perpendiculares y oblicuas al plano de su base.

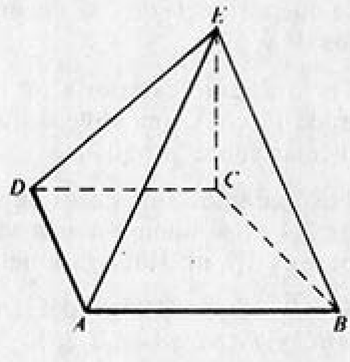


Fig. 3.25

4. En la figura 3.27 señala:
   a) una recta y un plano paralelos,
   b) una recta y un plano perpendiculares,
   c) dos rectas oblicuas al plano *BEF*.
5. Señala, en tu aula: rectas paralelas al piso, rectas perpendiculares al piso. Justifica en cada caso.
6. Si dos rectas son paralelas a un plano, ¿son paralelas entre sí?
7. ¿Cuántas rectas paralelas a un plano pueden trazarse por un punto exterior al plano?
8. Si dos rectas son paralelas, el plano que contenga solo a una de estas, ¿qué relación guarda con la otra?
9. Dos rectas se cruzan, ¿cuántos planos pueden trazarse que contengan a una de estas y sean paralelos a la otra?
10. Si una recta es paralela a un plano, ¿podrá ser paralela a dos rectas de ese plano? ¿a cuántas puede serlo?
11. Si una recta es perpendicular a un plano, ¿a cuántas rectas de ese plano es perpendicular?

12. Una recta r es perpendicular a una recta m que está contenida en un plano α. ¿Qué posición relativa puede ocupar r respecto a α?

13. Halla la longitud de la proyección sobre un plano de una oblicua de 18 cm de longitud que forma un ángulo de 60° con dicho plano.

14. Un punto P dista 14,1 cm de un plano α, calcula la longitud de la proyección de la oblicua $\overline{PM}$ sobre α, si esta forma un ángulo de 45° con dicho plano.

15. La oblicua $\overline{AB}$ a un plano tiene una longitud de 20 cm y su proyección sobre este mide 10 cm. ¿Qué ángulo forma con el plano?

16. Dos puntos A y B se encuentran en semiespacios distintos con respecto a un plano α. Si las distancias de A y B al plano son de 20 cm y 40 cm, respectivamente y la distancia entre sus proyecciones es de 80 cm. ¿Cuál es la distancia entre A y B?

17. Los puntos M y N se encuentran situados en el mismo semiespacio en relación con el plano α. Si sus distancias al plano se encuentran en la razón 2:3 y la recta que ellos determinan corta al plano en un punto P situado a 12 cm del punto M. ¿a qué distancia de P se encuentra N? ¿A qué distancia se hallan entre sí los puntos M y N?

18. Por un punto exterior a un plano se han trazado a este una perpendicular que mide 12 cm y una oblicua que mide 16 cm. Calcula la proyección de la perpendicular sobre la oblicua.

19. Los extremos superiores de dos columnas verticales que están a una distancia de 3,4 m se unen por una viga. La altura de una columna es 5,8 m y la de la otra es 3,9 m. Halla la longitud de la viga.

20. Si $\overline{AD}$ es la altura del triángulo ABC y $\overline{PA} \perp \alpha$ (fig. 3.26).
    a) Prueba que $\triangle PDC$ es rectángulo.
    b) Calcula $\overline{PC}$ si $\overline{PD} = 4{,}0$ cm y $\overline{CD} = 5{,}0$ cm.

Fig. 3.26

21. La figura 3.27 representa un ortoedro de dimensiones $\overline{AB} = 30$ cm, $\overline{BC} = 20$ cm y $\overline{BG} = 15$ cm. Halla el área de la región sombreada y el volumen de la pirámide $BADEF$.

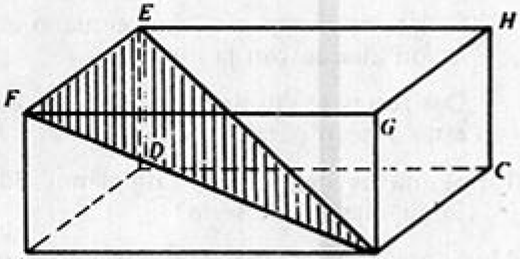


Fig. 3.27

22. Un cartabón con ángulos de 30° y 60° se coloca sobre una mesa apoyado sobre el lado menor que mide 10 cm. Si el "lado medio" queda inclinado formando con el plano de la mesa un ángulo de 45°, ¿cuánto mide la proyección del lado mayor sobre la mesa?

23. Por el vértice M del triángulo MNP rectángulo e isósceles se traza una perpendicular MA al plano α del triángulo. Si el lado desigual $\overline{NP}$ mide 10 cm y $\overline{AP}$ = 11,2 cm, calcula el ángulo que forma con el plano α la mediana $\overline{AB}$ del triángulo ANP y la distancia de A al plano.

24. Se tiene un triángulo RST contenido en un plano α. Por el vértice R se levanta una perpendicular $\overline{RM}$ al plano α. La perpendicular trazada desde M al lado $\overline{ST}$ mide 6,0 cm y forma un ángulo de 60° con α. Halla el área del triángulo RST si $\overline{ST}$ = 10 cm. Halla el volumen de la pirámide $MRST$.

25. En la figura 3.28, $ABCD$ es un cuadrado. $\overline{AB}$ está contenido en α y $\overline{AD}$ forma un ángulo de 45° con α. Si el área de $ABCD$ es 80 cm², halla el área de la proyección sobre α de $ABCD$.

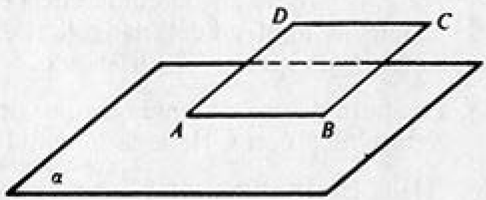


Fig. 3.28

26. Por el centro O de un círculo de radio igual a 3,0 dm se ha trazado una perpendicular $\overline{OB}$ a su plano; se ha trazado también una tangente en el punto A de la circunferencia y en esta tangente se ha tomado, desde el punto de tangencia, un segmento $\overline{AC}$ = 2,0 dm. Calcula la longitud de la oblicua $\overline{BC}$, si $\overline{OB}$ = 60 cm.

27. Los lados de un triángulo miden 15 cm, 37 cm y 44 cm. Por el vértice del mayor de los ángulos del triángulo se ha trazado una perpendicular al plano de este igual a 16 cm. Calcula la distancia del extremo de la perpendicular al lado mayor.

28. Demuestra que:
Si desde un punto exterior a un plano se trazan la perpendicular y varias oblicuas:

a) las oblicuas cuyas proyecciones son iguales tienen igual longitud,

b) de dos oblicuas, aquella cuya proyección es mayor tiene mayor longitud,

c) a oblicuas iguales corresponden proyecciones iguales,

d) de dos oblicuas desiguales, a la mayor corresponde mayor proyección.

29. Por el punto M exterior al plano α se trazan dos oblicuas iguales que miden 3,46 cm cada una y que forman un ángulo de 30° con la perpendicular bajada del punto al plano. Halla la distancia entre los pies de las oblicuas si sus proyecciones sobre α forman un ángulo de 120°.

30. Un punto se encuentra a 10 cm del centro de la circunferencia circunscrita a un triángulo equilátero de 30 cm de lado. ¿A qué distancia se encuentra este punto de cada uno de los vértices del triángulo si es exterior al plano del triángulo?

31. Un punto P se encuentra a una distancia de 70 dm del centro O de un círculo de 2 000 dm^2 de área. ¿Cuál es la distancia de P a un punto cualquiera de la circunferencia si el punto es exterior al plano del círculo?

32. Halla la distancia del punto P al plano de un triángulo equilátero de lado l = 5,19 cm, si su distancia a cualquiera de los vértices del triángulo es igual a 5,0 cm.

33. El punto O es el centro de un cuadrado de lado a. El segmento $\overline{OM}$ es perpendicular al plano del cuadrado. Si $\overline{OM} = \frac{a}{2}$, halla la distancia del punto M a los vértices del cuadrado.

34. Por el centro de una circunferencia circunscrita a un triángulo se traza una perpendicular al plano del triángulo. Demuestra que cada punto de esta recta equidista de los vértices del triángulo.

35. La altura de una pirámide regular de base cuadrada mide 14 cm y el lado de la base es de 16 cm. Halla la longitud de la arista lateral.

36. Halla la superficie total de una pirámide recta de base cuadrada de 20 cm de altura, si el lado de la base mide 42 cm.

37. La altura de una cara de una pirámide regular de base triangular es igual a 12 cm y forma un ángulo de 30° con el plano de la base. Halla el área lateral y el volumen de la pirámide.

38. La base de la pirámide $SABC$ es un triángulo rectángulo ABC. La arista $\overline{SA}$ es perpendicular al plano de la base e igual a 18 cm. Halla el área total de la pirámide si la hipotenusa $\overline{AB}$ de la base mide 25 cm y el cateto $\overline{BC}$ mide 7,0 cm.

39. Halla la superficie lateral de un prisma regular de base exagonal cuya diagonal mayor mide 13 dm y la arista lateral 5,0 dm.

3. *Pares de planos*

Del mismo modo que se analizan las posiciones relativas de dos rectas, de rectas y planos, es posible analizar las relaciones entre dos planos en el espacio.

Definición 1

Dos planos son paralelos si no se intersecan.

Puedes encontrar muchos ejemplos de planos paralelos en la vida diaria, por ejemplo, las paredes laterales del aula son paralelas.

Ejemplo 1

Identifica planos paralelos en el cubo de la figura 3.29.

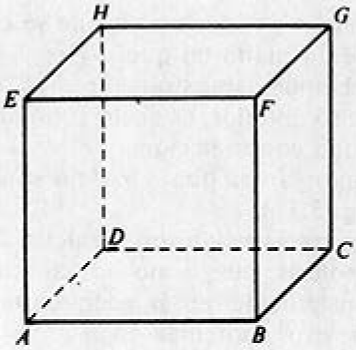


Fig. 3.29

Resolución

Son paralelos los planos *ABCD* y *EFGH*, *ABFE* y *DCGH*, *BCGF* y *ADHE*. ■

El siguiente teorema nos proporciona un criterio práctico para determinar si dos planos son paralelos.

Teorema 1 (Criterio de paralelismo de dos planos)

> Dos planos son paralelos si:
>
> a) Son perpendiculares a una misma recta.
>
> b) Uno de ellos es paralelo a dos rectas que se cortan en el otro.

Demostración

a) Sean α y β dos planos perpendiculares a la recta r, en los puntos A y B, respectivamente (fig. 3.30). Debemos demostrar que $\alpha \| \beta$.
Supongamos que α y β no son paralelos, entonces tendrán un punto común C exterior a r.

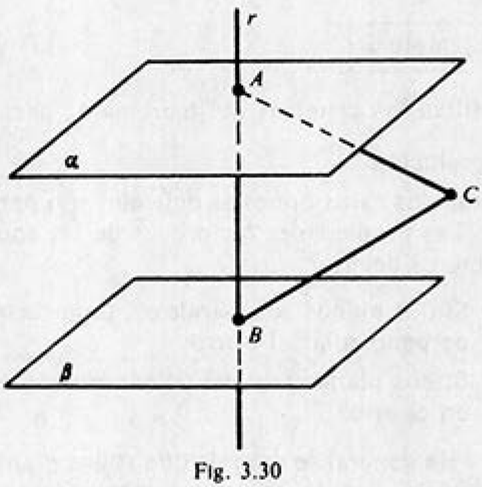


Fig. 3.30

La recta r y el punto C determinan un plano γ que interseca a los planos α y β según las rectas AC y BC, respectivamente.
Pero $r \perp AC$ y $r \perp BC$ porque es perpendicular a α y β. Tendríamos entonces que en el plano γ se podrían trazar dos perpendiculares a r por el punto C exterior a ella, lo que contradice una propiedad de la planimetría; por tanto α y β no pueden cortarse y se cumple que $\alpha \| \beta$.

b) Sean m y n dos rectas que se cortan en el plano β, A. su punto de intersección y α un plano tal que $\alpha \parallel m$ y $\alpha \parallel n$.
Debemos demostrar que $\alpha \parallel \beta$. Para ello seguiremos la misma vía utilizada en el inciso anterior, es decir, supondremos que no son paralelos y trataremos de llegar a una contradicción.
Supongamos que α y β no son paralelos, entonces se cortarán según la recta p (fig. 3.31).
Las rectas m y n son paralelas a α por hipótesis, luego no lo cortan, por consiguiente no pueden cortar a p que está contenida en α.

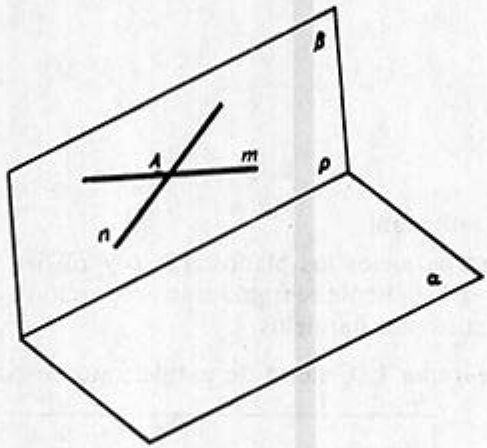


Fig. 3.31

Pero m, n y p están contenidas en β y tendríamos entonces, en este plano, dos rectas paralelas a p trazadas por A lo que es imposible; por lo tanto $\alpha \parallel \beta$. ■

Ejemplo 2

Utiliza los criterios del teorema 1, para fundamentar la respuesta del ejemplo 1

Resolución

Cada dos caras opuestas del cubo son perpendiculares a las aristas que lo contienen.

Las propiedades recíprocas de las enunciadas en el teorema 1 también se cumplen, es decir:

a) Si dos planos son paralelos, toda recta perpendicular a uno de estos es también perpendicular al otro.
b) Si dos planos son paralelos, uno de estos es paralelo a dos rectas que se cortan en el otro.

En general se cumple que si dos planos son paralelos uno cualquiera de estos es paralelo a cualquiera recta contenida en el otro.

Teorema 2

Por un punto exterior a un plano se puede trazar un plano paralelo y solo uno.

Demostración

Sean α un plano y A un punto exterior a él. Tracemos en α dos rectas a y b que se cortan en P (fig. 3.32a), y por A dos rectas a' y b' tales que $a' || a$ y $b' || b$. Las rectas a' y b' determinan un plano β y por el teorema 1b $\beta || \alpha$; luego por un punto exterior a un plano α se puede trazar un plano β paralelo a él.

Debemos demostrar que β es único.

Supongamos que por A pasa otro plano $\beta' || \alpha$ $\cdot$ β y β' se cortarán según la recta r (fig. 3.32 b).

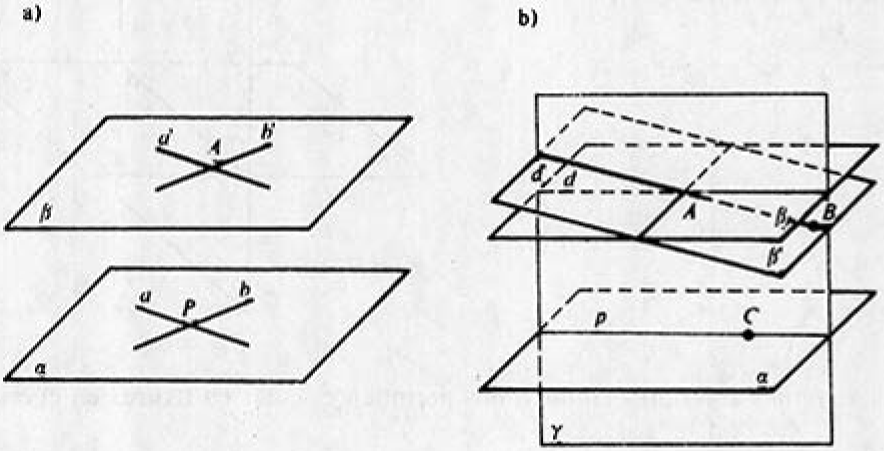


Fig. 3.32

Tomemos en β' un punto B que no pertenezca a β y en α un punto C.

A, B y C determinan un plano γ que corta a β y a β' según las rectas d y d', y a α según la recta p.

Las rectas d y d' no cortan a p pues cortarían a α; luego, $d || p$ y $d' || p$.

Pero d y d' pasan por A, luego tenemos en γ dos rectas paralelas a p trazadas por el mismo punto lo que es imposible; por lo tanto lo supuesto es falso, β y β' coinciden y β es único. ■

Ejemplo 3

Fundamenta por qué dos planos paralelos a un tercero son paralelos entre sí.

Resolución

Estos planos no pueden teñer ningún punto común pues por este punto pasarían dos planos paralelos al tercero lo que contradice al teorema 2. ■

Teorema 3

Si dos planos paralelos son cortados por un tercero, las rectas de intersección que resultan son paralelas.

Demostración

Sean $\alpha || \beta$ y γ un plano que los interseca (fig. 3.33), AB y CD las rectas de intersección de γ con α y β, respectivamente. Las rectas AB y CD están en un mismo plano (γ) y no se cortan ($AB \subset \alpha$ y $CD \subset \beta$); si se cortaran, ese punto sería común a α y a β y por hipótesis $\alpha || \beta$, luego son paralelas. ■

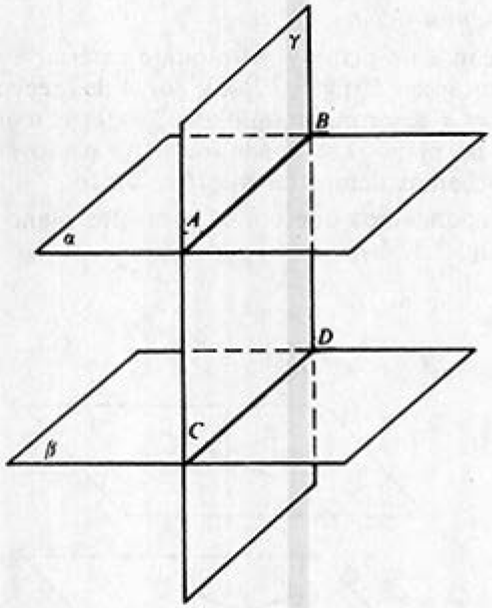


Fig. 3.33

Los teoremas anteriores también nos permiten calcular en figuras en el espacio.

Ejemplo 4

Sean α_1 y α_2 dos planos paralelos (fig. 3.34) y A un punto que no pertenece a ninguno de los dos. Por el punto A se traza una recta a que interseca a α_1 y α_2 en X_1 y X_2, y una recta b que los interseca en Y_1 y Y_2.
Si $\overline{AX_1} = 2{,}5$ cm; $\overline{AX_2} = 10{,}5$ cm y $\overline{X_1Y_1} = 2{,}0$ cm. Calcula $\overline{X_2Y_2}$

Resolución

Tenemos que, las rectas a y b determinan un plano (teorema 1, epígrafe 1).

luego $X_1Y_1 || X_2Y_2$ (teorema 3, epígrafe 3)

por lo tanto, $\triangle\, AX_1Y_1 \sim \triangle\, AX_2Y_2$

de donde $\dfrac{\overline{AX_1}}{\overline{AX_2}} = \dfrac{\overline{X_1Y_1}}{\overline{X_2Y_2}}$

$$\overline{X_2Y_2} = \frac{10{,}5 \cdot 2}{2{,}5} = 8{,}4$$

Respuesta: $\overline{X_2Y_2} = 8{,}4$ cm. ■

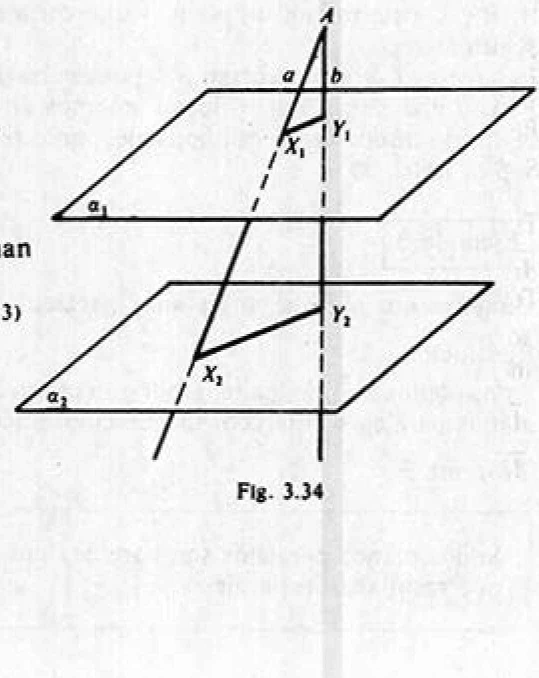


Fig. 3.34

Definición 2

> Se llama ángulo diedro convexo a la intersección de dos semiespacios.

Por ejemplo, la región sombreada en la figura 3.35 es la intersección de dos semiespacios, luego es un ángulo diedro.

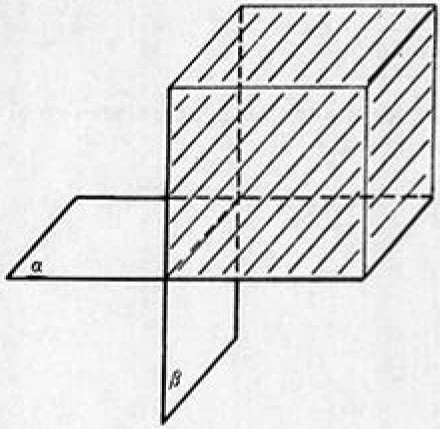


Fig. 3.35

Se llama ángulo lineal de un ángulo diedro, al formado por dos rectas perpendiculares (contenidas una en cada cara) a la recta de intersección (arista); es fácil comprobar que todos los ángulos lineales que corresponden a uno diedro son iguales; por esta razón, para medir un ángulo diedro se usa el lineal correspondiente.

Ejemplo 5

Sobre una de las caras de un ángulo diedro de 45° se ha tomado un punto A cuya distancia a la otra cara es igual a 1,5 dm. Calcula la distancia de A a la arista.

Resolución

Sean α y β las caras del diedro y r la arista (fig. 3.36)

Tracemos por A el segmento $\overline{AP} \perp \beta$, $\overline{AM} \perp r$ y por el punto P el segmento $\overline{PM} \perp r$. Tenemos que: $\Delta\ APM$ es rectángulo en P e isósceles ($\overline{AP} \perp \beta$ y $\sphericalangle\ AMP = 45°$ por ser el lineal del diedro); luego,

$$|\overline{AM}|^2 = |\overline{AP}|^2 + |\overline{PM}|^2 = 2|\overline{AP}|^2$$

$$|\overline{AM}| = |\overline{AP}|\sqrt{2} = 1,5 \cdot 1,41 = 2,12$$

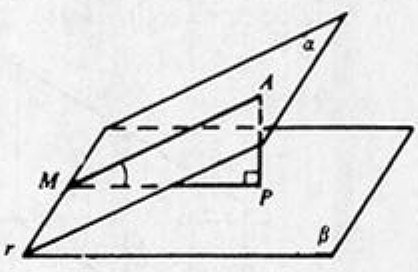


Fig. 3.36

Respuesta: La distancia del punto A a la arista es aproximadamente igual a 2,1 dm. ■

Definición 3

> Dos planos son perpendiculares si forman un ángulo diedro recto.

Ejemplo 6

Identifica planos perpendiculares en el cubo de la figura 3.37.

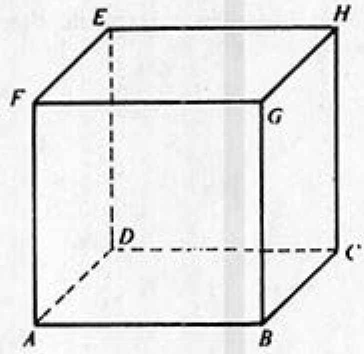


Fig. 3.37

Resolución

El plano $ABGF$ es perpendicular a los planos $ABCD$, $EFGH$, $ADEF$ y $BCHG$.
En general, cada cara del cubo es perpendicular a todas las otras caras excepto a la opuesta. ■

Teorema 4 (Criterio de perpendicularidad de dos planos)

> Dos planos son perpendiculares si uno de ellos contiene una recta perpendicular al otro.

Demostración

Sean α y β dos planos que se intersecan según la recta m;
r una recta de β, $r \perp \alpha$ (fig. 3.38).

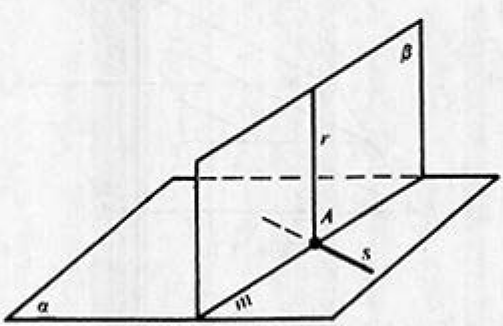


Fig. 3.38

Tracemos por A (pie de r sobre α) una recta $s \perp m$.
Tenemos que $r \perp m$ y $s \perp m$, luego el ángulo formado por r y s es el lineal del diedro; pero este ángulo es recto pues $r \perp s$ ($r \perp \alpha$); por tanto, los planos α y β son perpendiculares. ■

Ejemplo 7

Utiliza el criterio del teorema 4 para fundamentar la solución del ejemplo 6.

Resolución

Cada cara del cubo es perpendicular a las caras restantes excepto a la opuesta, porque cada una de esas caras contiene una recta perpendicular al plano de la cara en cuestión. Por ejemplo, la recta EF es perpendicular a la cara $ABGF$, luego los planos $ABGF$ y $EFGH$ son perpendiculares. ■

Ejemplo 8

Dado un plano α y una recta a contenida en este, traza un plano $\beta \perp \alpha$ tal que a esté contenida en β.

Resolución

Sean α un plano y a una recta contenida en α (fig. 3.39). Como a debe estar contenida en β, a será la recta de intersección de los dos planos. Trazando por un punto P cualquiera de a una recta $b \perp \alpha$, el plano determinado por a y b será perpendicular a α (teorema 4) por contener una recta perpendicular a este plano. ■

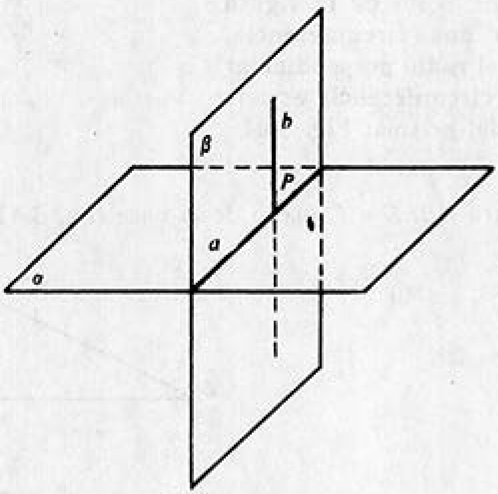


Fig. 3.39

El procedimiento utilizado en el ejemplo anterior sugiere la validez del siguiente teorema:

Teorema 5

Si dos planos α y β son perpendiculares y una recta a contenida en α es perpendicular a la recta de intersección, entonces a es perpendicular a β.

Demostración

Sean $a \perp \beta$, $a \subset \alpha$, $a \perp m$ y m la recta de intersección de α y β (fig. 3.40).

Trazando por P (P, punto de intersección de a y m) una recta $n \perp m$ se tiene:

El ángulo formado por a y n es el lineal del diedro, por lo que es recto, luego, $a \perp n$ y $a \perp m$; por lo tanto $a \perp \beta$ (teorema 2, epígrafe 2). ■ Fig. 3.40

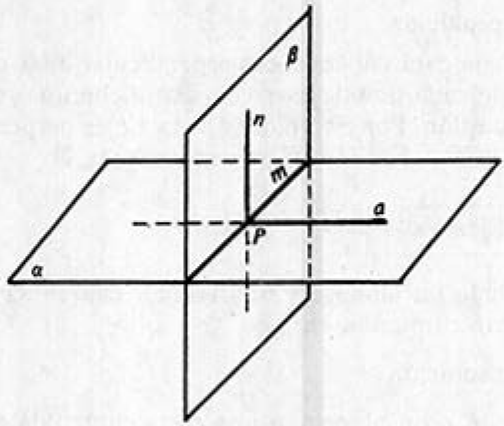


Fig. 3.40

Ejemplo 9

En la base del prisma recto de la figura 3.41, se ha inscrito una circunferencia. Fundamenta por qué el radio perpendicular al lado tangente a esa circunferencia es perpendicular a la cara del prisma. Fig. 3.41

Resolución

Sean α, plano de la cara $ABFE$ y β, plano de la base (fig. 3.41).

Tenemos que:

$r \perp \overline{AB}$ ($\overline{AB}$ lado del $\triangle ABC$)

y $\overline{AB} = \alpha \cap \beta$

luego, $r \perp \alpha$ (teorema 5). ■

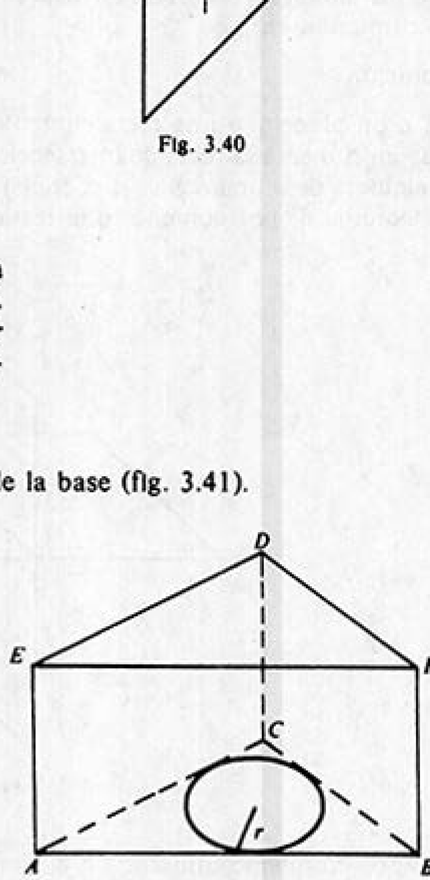


Fig. 3.41

Teorema 6

Sean α y β planos paralelos, entonces los puntos de α equidistan de β. A esta distancia común se llama distancia entre los planos α y β.

Demostración

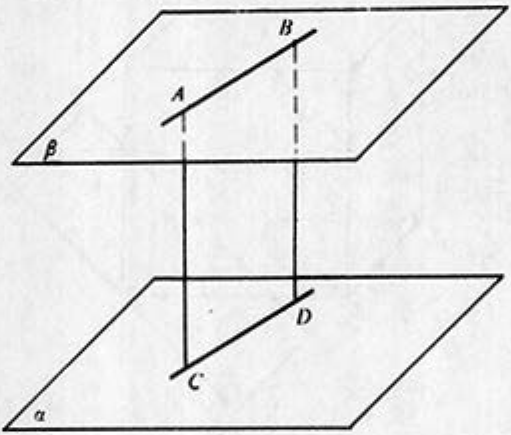


Fig. 3.42

Sea $\alpha || \beta$ (fig. 3.42).
Por los puntos A, $B \in \beta$, tracemos $AC \perp \alpha$ y $BD \perp \alpha$.
Se tiene que $AC || BD$, por lo que determinan un plano γ que interseca a α y a β, por lo tanto, $AB || CD$ (teorema 3) de donde $ABCD$ es un rectángulo, luego, $AC \perp \beta$, $BD \perp \beta$ y $\overline{AC} = \overline{BD}$. ■

Ejemplo 10

¿Cuál es la distancia entre las caras opuestas de un cubo?

Resolución

Las caras opuestas de un cubo son paralelas, luego la arista que las une es la distancia entre ellas (teorema 6), por tanto, la distancia entre estas caras es igual a la longitud de la arista del cubo. ■

Dadas dos rectas a y b que se cruzan, es posible construir dos planos paralelos que las contienen, la distancia entre estos planos es la distancia entre estas rectas.

Ejemplo 11

Calcula la distancia entre las rectas *AE* y *CD* en el cubo de la figura 3.43.

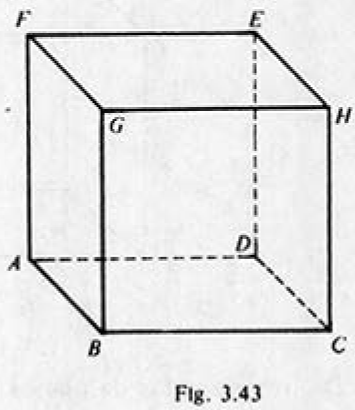


Fig. 3.43

Resolución

Las rectas AE y CD se cruzan. Tracemos por AE un plano α paralelo a la recta CD, sea este el plano $AEBH$ (fig. 3.44).
Por C y D tracemos dos rectas paralelas a BH y AE; estas rectas determinan un plano β paralelo a α.

El segmento $\overline{DM}$ de la perpendicular común a α y a β es la distancia entre AE y CD.
Como $ADEF$ es un cuadrado, el segmento $\overline{DM}$ es la mitad de la diagonal, luego, si l es la arista del cubo

$$|\overline{DM}| = \frac{1}{2}\sqrt{l^2 + l^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2l^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, l.$$

Respuesta: La distancia entre las rectas AE y CD es igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ lu. ■

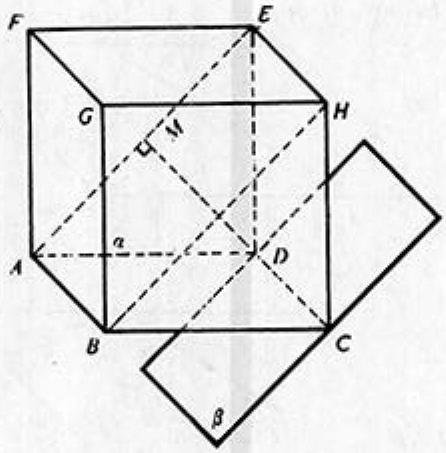


Fig. 3.44

Observa que la distancia hallada no es más que el segmento de la perpendicular común comprendido entre ambas rectas. En la práctica lo que se hace es determinar este segmento.

Ejercicios (epígrafe 3)

1. Identifica planos paralelos en el prisma recto de la figura 3.45. Fundamenta tu respuesta. Ten en cuenta que la base está formada por rectángulos.

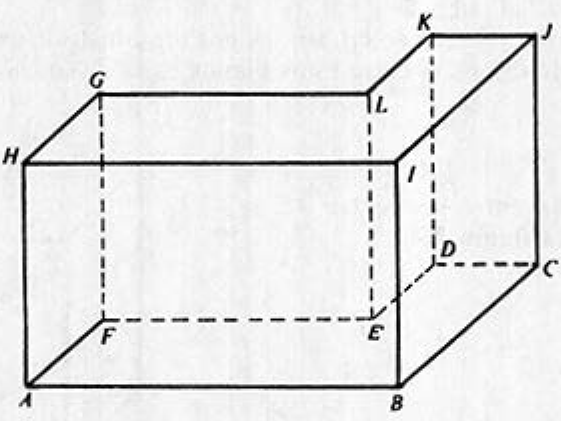


Fig. 3.45

2. Da tres ejemplos de planos paralelos utilizando elementos de tu aula.
3. Dibuja un plano α y un punto P exterior a este. Traza por P un plano paralelo a α.
4. Tres planos paralelos a la misma recta, ¿son paralelos entre sí?
5. Señala, en tu aula, dos planos paralelos cortados por un tercero y las intersecciones paralelas que se originan.

6. Da tres ejemplos de ángulos diedros tomados de la realidad objetiva.
7. Las hojas de una puerta giratoria forman entre sí 5 ángulos diedros. ¿Cuánto mide cada uno?
8. Identifica planos perpendiculares en el prisma de la figura 3.45. Fundamenta tu respuesta.
9. En la figura 3.27 señala:
   a) dos planos paralelos,
   b) dos planos perpendiculares,
   c) dos planos que no sean paralelos ni perpendiculares.

   Justifica en cada caso.
10 Si una recta es perpendicular a un cierto plano α, ¿qué relación ocupa respecto a un plano:
   a) paralelo a α,
   b) perpendicular a α?
11. Si dos planos son paralelos, demuestra que todo plano perpendicular a uno de ellos es también perpendicular al otro.
12. Por los extremos de un segmento $\overline{AB} = 26$ cm que se encuentra fuera de un plano α, se han trazado las perpendiculares $\overline{AC} = 80$ cm y $\overline{BD} = 60$ cm al plano. Calcula la distancia del punto medio de $\overline{AB}$ al plano α.
13. Por los extremos de un segmento $\overline{AB}$ y su punto medio M se han trazado rectas paralelas que intersecan a un plano en los puntos A', B' y M'. Halla la longitud del segmento $\overline{MM'}$, si $\overline{AA'} = 50$ cm, $\overline{BB'} = 70$ cm y
   a) $\overline{AB}$ no interseca al plano.
   b) $\overline{AB}$ interseca al plano.
14. Se dan 3 planos paralelos α, β y γ (fig. 3.46). Una recta r los corta respectivamente en los puntos A, B y C; y otra recta s los corta, respectivamente en los puntos D, E y F.
   a) Si $\overline{AB} = 24$ m, $\overline{BC} = 15$ m y $\overline{DE} = 36$ m. Halla $\overline{EF}$.
   b) Si $\overline{AB} = 12$ m, $\overline{BC} = 18$ m y $\overline{DF} = 40$ m. Halla $\overline{DE}$.

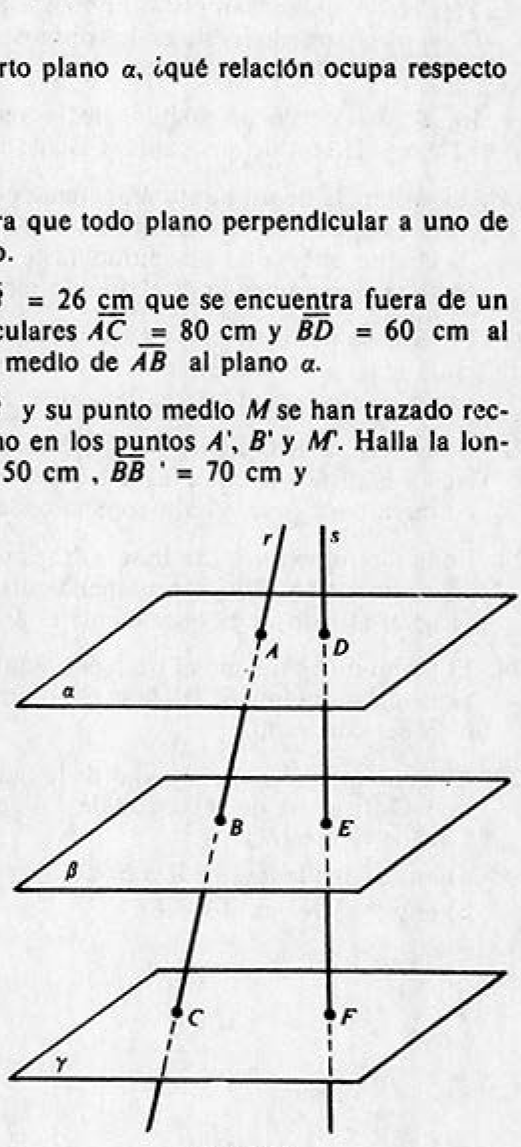


Fig. 3.46

15. Por un punto M, que se encuentra fuera de dos planos paralelos, se han trazado dos rectas que cortan a dichos planos en los puntos A y B la primera, C y D la segunda. Calcula la longitud del segmento $\overline{AC}$, si $\overline{BD} = 28$ cm y $\overline{MA} : \overline{AB} = 5 : 2$.

16. Dos segmentos están comprendidos entre dos planos paralelos. Las proyecciones de estos segmentos sobre los planos son de 10 dm y 70 dm. Calcula las longitudes de estos segmentos si su diferencia es igual a 4,0 dm.

17. Por los vértices de un triángulo ABC que está sobre uno de dos planos paralelos se han trazado rectas paralelas que cortan al otro plano en los puntos A', B' y C'. Demuestra que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales.

18. Tres rectas que pasan por un punto intersecan a un plano en los puntos A, B y C y a otro paralelo a este en los puntos A', B' y C'. Demuestra que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes.

19. En el interior de un ángulo diedro recto se ha tomado un punto que está a 12 cm y 16 cm de sus caras. Calcula la distancia de este punto a la arista.

20*. La distancia de un punto M, situado en una cara de un ángulo diedro a la otra cara es igual a 12 cm. En el punto M se traza una perpendicular a la cara sobre la cual se encuentra este punto hasta intersecar la otra cara. Calcula la longitud de esta perpendicular si el ángulo diedro es de 60°.

21. En la base de un prisma exagonal regular se ha inscrito una circunferencia de radio igual a 10 cm. Si la distancia entre las bases del prisma es de 20 cm, calcula su volumen y su área lateral.

22. En el prisma de la figura 3.41, si la base es un triángulo equilátero de 10 cm de lado y la distancia entre las dos bases es igual a 12 cm, halla el volumen del cono cuya base es la circunferencia dada y de altura igual a la del prisma.

23. En la pirámide $SABC$ la base ABC es un triángulo equilátero de 12 cm de lado, las caras SAB y SBC son perpendiculares al plano de la base y la arista $\overline{SB}$ es igual al lado de la base. Halla el área total y el volumen de la pirámide.

24. El plano que contiene al triángulo equilátero BCE es perpendicular al que contiene al cuadrado $ABCD$. Halla el volumen de la pirámide $ABCDE$ en función del lado del cuadrado.

25. En el prisma exagonal regular de la figura 3.47, la arista de la base mide 3,4 cm. Calcula la distancia:
    a) entre los planos ABB' y EDD',
    b) entre las rectas AB y EE'.

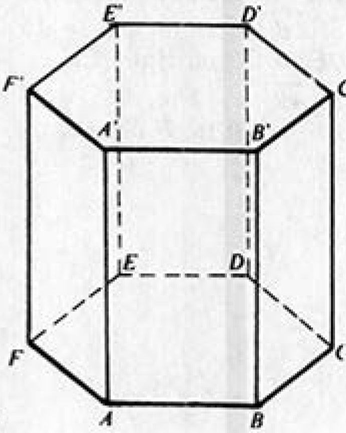


Fig. 3.47

4. *Poliedros*

Definición 1

Se llama ángulo poliedro a la región del espacio limitada por tres o más planos que se cortan sucesivamente, según rectas que concurren en un mismo punto. Un ángulo poliedro es convexo si está a un lado de cualquiera de sus ángulos planos.

En la práctica se encuentran ejemplos de ángulos poliedros, por ejemplo, cada esquina del aula es un ejemplo de ángulo triedro, en el vértice de una pirámide se forma un ángulo poliedro.

La figura 3.48 representa un ángulo poliedro convexo. En esta tenemos que el punto O es el *vértice* del ángulo poliedro; OA, OB, OC y OD son sus *aristas;* los ángulos planos AOB, BOC, COD y DOA son las *caras;* y los ángulos formados por cada dos caras contiguas son los *diedros* del ángulo poliedro.

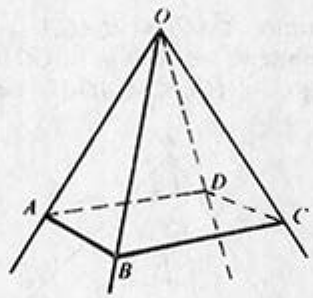


Fig. 3.48

Para denotar un ángulo poliedro de vértice O y aristas OA, OB, OC,.... escribimos $OABC$.... En la figura 3.48 el ángulo poliedro representado será el $OABCD$.

En lo que sigue nos referiremos siempre a ángulos poliedros convexos.

Teorema 1

a) En un ángulo triedro cada ángulo plano es menor o igual que la suma de los otros dos.

b) La suma de los ángulos planos de un ángulo poliedro es menor o igual que $4R$ (R: recto).

Demostración

a) Si los tres ángulos planos del triedro son iguales, el teorema es evidente; también lo es cuando las dos caras mayores son iguales, por lo que nos limitaremos al caso en que un ángulo plano es mayor que los otros dos.

En el triedro de la figura 3.49, supongamos que $\sphericalangle AOB \leqslant \sphericalangle BOC < \sphericalangle COA$

En el plano del $\sphericalangle COA$ construyamos al $\sphericalangle AOD = \sphericalangle AOB$ y hagamos $\overline{OD} = \overline{OB}$.

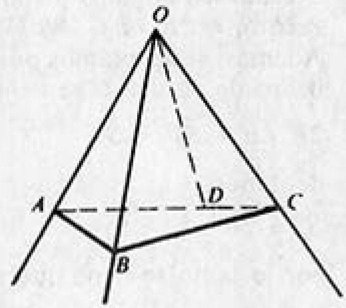


Fig. 3.49

Se tiene entonces,

$\triangle AOD = \triangle AOB$ (l.a.l.)

luego $\overline{AD} = \overline{AB}$ (1)

pero en el $\triangle ABC$ se cumple,

$\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$ (desigualdad triangular)

ó $\overline{AD} + \overline{DC} < \overline{AB} + \overline{BC}$ (2)

de donde $\overline{DC} < \overline{BC}$ (3) (restando (1) de (2)).

Los triángulos BOC y COD tienen dos lados iguales ($\overline{OC}$ común y $\overline{OD} = \overline{OB}$), pero los terceros lados no son iguales. En tales triángulos a los lados menores se oponen ángulos menores, luego de (3) se tiene:

$\sphericalangle COD < \sphericalangle BOC$

y como $\sphericalangle AOD < \sphericalangle AOB$

se obtiene $\sphericalangle AOD + \sphericalangle COD < \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC$ (sumando miembro a miembro)

luego, $\sphericalangle AOC < \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC$

b) Sea $OABCDE$ ... un ángulo poliedro (fig. 3.50) y tracemos un plano que corte a todas sus aristas, de este modo se obtiene el polígono $ABCDE$... Aplicando el inciso a del teorema se tiene:

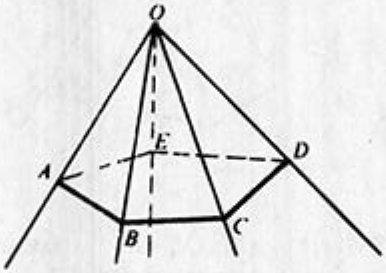


Fig. 3.50

$\sphericalangle ABC < \sphericalangle ABO + \sphericalangle CBO$

$\sphericalangle BCD < \sphericalangle BCO + \sphericalangle DCO$

$\sphericalangle CDE < \sphericalangle CDO + \sphericalangle EOD$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

Si sumamos miembro a miembro estas desigualdades se tiene que la suma de la izquierda (S_i) es la suma de todos los ángulos interiores del polígono $ABCDE$... y la suma de la derecha (S_d) es la suma de todos los ángulos de las caras ($2R \cdot n$) excepto los ángulos planos del ángulo poliedro de vértice O.

Pero $S_i = 2R \cdot n - 4R$ (Ver punto 32 del Memento).

Además, si denotamos por S la suma de todos los ángulos planos del ángulo poliedro de vértice O se tiene que:

$2R \cdot n - S_d = S$

de donde,

$S_d = 2R \cdot n - S$

por lo tanto se tiene que:

$S_i < 2R \cdot n - S$

sustituyendo

$$2R \cdot n - 4R \leq 2R \cdot n - S$$
$$-4R \leq -S$$

luego,

$S \leq 4R$. ■

Definición 2

> Se llama poliedro a todo cuerpo limitado por un número finito de planos. Un poliedro es convexo si está contenido en un solo lado de cualquiera de los planos que lo limitan.

Los prismas y las pirámides que has estudiado en cursos anteriores son ejemplos de poliedros conocidos.

Ejemplo 1

Las aristas de la base de una pirámide triangular regular de 8,0 cm de altura miden 10,5 cm. Calcula su volumen.

Resolución

$$V_P = \frac{1}{3} A_B \cdot h \text{ (fig. 3.51)}$$

$$A_B = \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \text{ sen } 60° \quad (l\text{: arista de la base})$$

$$= \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$V_P = \frac{1}{3} \cdot \frac{10{,}5^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 8 = 127$$

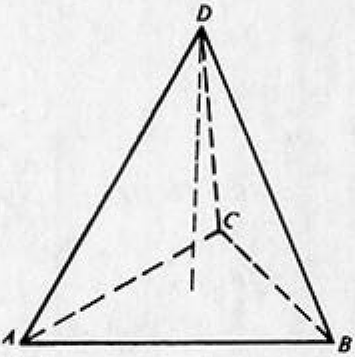


Fig. 3.51

Respuesta: El volumen de la pirámide es aproximadamente de $0{,}13\ dm^3$. ■

Ejemplo 2

Por un lado de la base de un prisma triangular regular se traza un plano que forma un ángulo de 30° con el plano de la base. Halla el volumen y el área lateral de la sección inferior, si el lado de la base del prisma mide 3,0 cm.

Resolución

Sea $ABCDEF$ (fig. 3.52) el prisma y ABH el plano que lo interseca. Para dibujarlo hemos trazado la perpendicular al lado $\overline{AB}$ que coincide, en este caso, con la altura del $\triangle ABC$ por ser equilátero; se tiene entonces que $HG \perp AB$ (teorema 5 del epígrafe 2) $\sphericalangle HGC = 30°$.

La sección inferior que se obtiene es una pirámide cuya base es el $\triangle ABC$ de altura $\overline{HC}$ Esta pirámide no es recta, pero su volumen se calcula aplicando la misma fórmula,

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot h = \frac{1}{3} A_{\triangle ABC} \cdot \overline{HC}$$

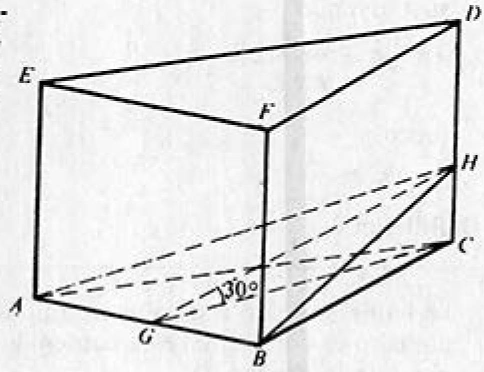


Fig. 3.52

En $\triangle ABC$, equilátero, tenemos

$$\overline{GC} = \overline{BC} \text{ sen } 60° = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

luego, $A_B = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$.

En $\triangle HCG$, rectángulo en C.

$$\overline{HC} = \overline{GC} \tan 30° = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{2}$$

luego, $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{2}$

$$V = 2{,}0 \text{ cm}^3.$$

Por otra parte,

$$A_L = A_{\triangle HCB} + A_{\triangle HAB} + A_{\triangle HAC}$$

pero $\triangle HCB = \triangle HAC$ (l.a.l.)

luego, $A_L = 2A_{\triangle HCB} + A_{\triangle HAB}$

$$A_{\triangle HCB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{HC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} = 2{,}25$$

$$A_{\triangle HAB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{HG}$$

pero, $\overline{HG} = 2 \cdot \overline{HC} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$

luego $A_{\triangle HAB} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4{,}5$

por tanto, $A_L = 2 \cdot 2{,}25 + 4{,}5 = 9$.

Respuesta: El volumen de la sección inferior del prisma es aproximadamente 2,0 cm³ y su área lateral 9,0 cm². ■

Definición 3

Un poliedro convexo se llama regular si sus caras son polígonos regulares y en cada vértice concurre el mismo número de aristas.

Teorema 2

Existen 5 tipos de poliedros regulares (fig. 3.53).

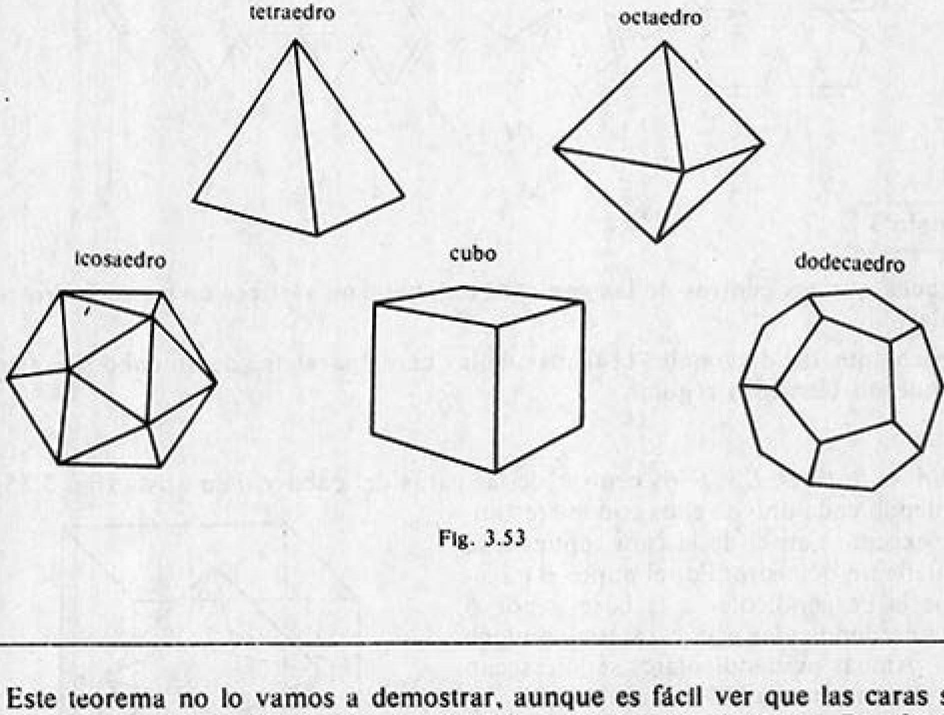


Fig. 3.53

Este teorema no lo vamos a demostrar, aunque es fácil ver que las caras solo pueden ser triángulos equiláteros, cuadrados o pentágonos regulares. En efecto, a partir del exágono, los ángulos interiores son mayores o iguales que 120° y como debe haber como mínimo tres aristas, la suma de las caras del ángulo poliedro será mayor o igual que 360°, lo que es imposible.

Por la misma razón:

Si las caras son triángulos equiláteros, en cada vértice solo pueden concurrir 3 (tetraedro), 4 (octaedro) o 5 (icosaedro) aristas; si las caras son cuadrados, solo pueden ser 3 (cubo); si las caras son pentágonos, solo 3 (dodecaedro).

Todos los poliedros regulares se pueden desarrollar en un plano (fig. 3.54). Estos poliedros pueden ser construidos con cartón recortando los desarrollos, doblándolos por las líneas discontinuas y pegando los bordes.

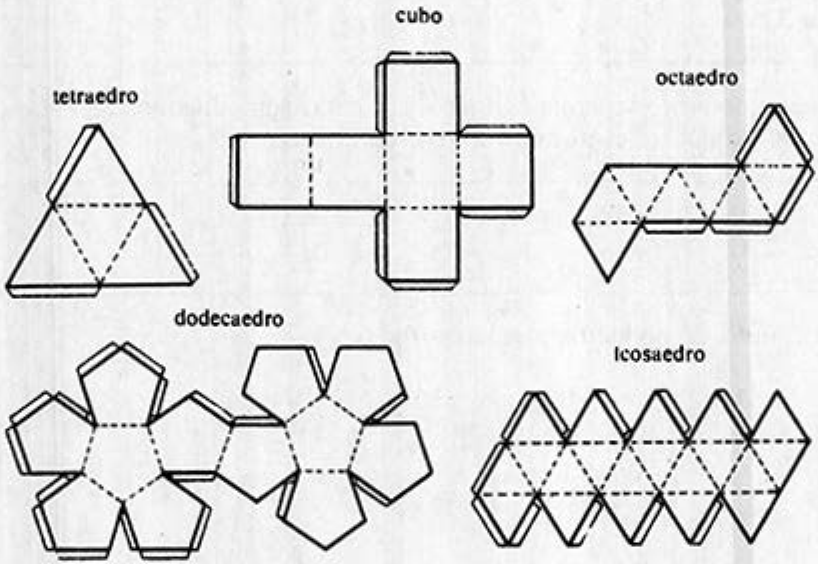


Fig. 3.54

Ejemplo 3

a) Prueba que los centros de las caras de un cubo son vértices de un octaedro regular.

b) Prueba que las diagonales cruzadas de las caras paralelas de un cubo son aristas de un tetraedro regular.

Resolución

a) Sean A, B, C, D, E y F los centros de las caras del cubo y a su arista (fig. 3.55). Uniendo cada uno de ellos con los restantes excepto con el de la cara opuesta se obtiene un octaedro. Por el punto B tracemos la perpendicular a la base y por E una perpendicular a la cara que contiene a B. Ambas perpendiculares se intersecan en el punto medio M de la arista $\overline{PQ}$ y el $\triangle\ EMB$ es rectángulo en M.
En $\triangle\ EMB$ tenemos:

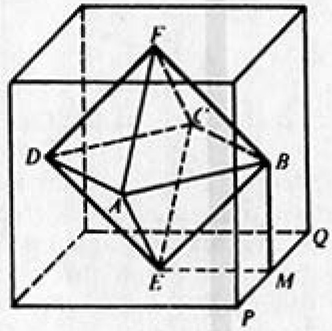


Fig. 3.55

$$\overline{EB} = \sqrt{\overline{EM}^2 + \overline{MB}^2} = \sqrt{\left[\frac{a}{2}\right]^2 + \left[\frac{a}{2}\right]^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2}}$$
$$= \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Es posible hacer lo mismo con el resto de los vértices, trazando perpendiculares a caras convenientes, obteniéndose siempre el mismo resultado para las aristas del octaedro $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, luego sus 8 caras son triángulos equiláteros; además, en cada vértice concurren 4 aristas, por tanto, es un octaedro regular.

b) Sean *B, D, F* y *H* los vértices del tetraedro (fig. 3.56). Las aristas del tetraedro son todas iguales a la diagonal de una cara del cubo, luego todas son iguales entre sí por lo que las 4 caras son triángulos equiláteros y en cada vértice concurren 3 aristas, por tanto, el tetraedro es regular. ■

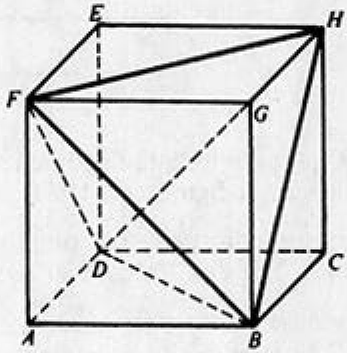


Fig. 3.56

Ejercicios (epígrafe 4)

1. Di si es posible formar un ángulo triedro cuyos ángulos planos midan:

   a) 45°; 45°; 90° b) 60°; 60°; 90°
   c) 140° ; 70°; 171° d) 105°; 118° ; 130°

2. Di cuántas caras puede tener un ángulo poliedro convexo si cada uno de sus ángulos planos mide:

   a) 90° b) 60° c) 45° d) 30°

3. $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ y $\overline{PR}$ son diagonales de tres de las caras de un cubo como se muestra en la figura 3.57, ¿cuál de los siguientes valores corresponde a la medida del ángulo *PQR*? 120°, 45°, 60°, 75°, 90°.

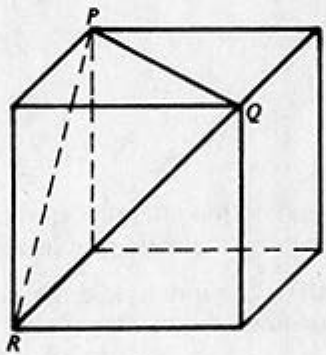


Fig. 3.57

4. Halla el volumen de un prisma triangular de 16 cm de altura si los lados de la base miden 6,0 cm, 8,0 cm y 10 cm.

5. Sea un paquete de regalo de forma de ortoedro y con las dimensiones que aparecen en la figura 3.58 (las dimensiones en cm).

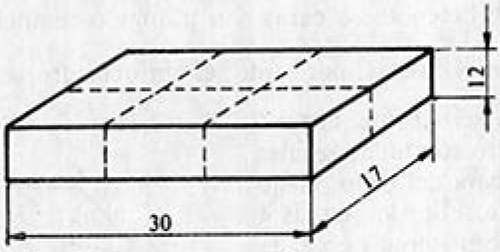


Fig. 3.58

¿Cuál es la longitud de la cuerda necesaria para amarrar el paquete como se indica en la figura con líneas discontinuas (despreciando la longitud del nudo)?

6. Un ortoedro tiene 120 dm de largo y 90 dm de ancho, y una de sus diagonales mide 259 dm. Calcula su área total y su volumen.

7. La base de un prisma recto es un trapecio isósceles cuyas bases miden 30 cm y 12 cm, y la altura de dicho trapecio es de 12 cm. Si la altura del prisma es de 45 cm, calcula su área lateral y su volumen.

8. El desarrollo de la superficie lateral de un prisma triangular regular de 8,0 m de altura es un rectángulo cuya diagonal mide 10 m. Calcula el área total y el volumen del prisma.

9. Sea *ABCDEFGH* un cubo (fig. 3.59), se une el vértice *C* con los vértices *A*, *E*, *F* y *H*.
   a) ¿Cuántas pirámides están completamente trazadas? Identifícalas.
   b) ¿Existe alguna relación entre los volúmenes de estas pirámides?

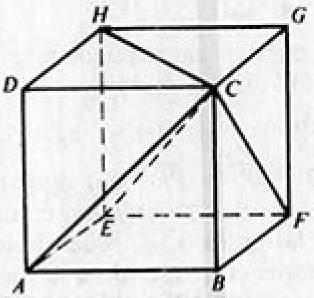


Fig. 3.59

10. Halla el área lateral y el volumen de una pirámide triangular regular de 12 m de altura sabiendo que la arista de la base mide 8,65 m.

11. Halla el volumen de una pirámide recta de 2,75 m de altura que tiene por base un rombo cuyas diagonales miden 0,85 m y 0,60 m.

12*. El área total de una pirámide triangular regular es de 60 m^2 y el radio del círculo inscrito en la base mide 2,0 m. Halla la altura de la pirámide.

13. Halla el volumen y el área lateral de una pirámide exagonal regular de 3,0 m de altura cuyas aristas laterales forman ángulos de 60° con el plano de la base.

14. Calcula el área total de un exaedro regular, sabiendo que la diagonal de una de sus caras mide 2,3 m.

15. Calcula el área y el volumen de un tetraedro regular si su arista mide 21 cm.

16. Calcula el área y el volumen de un octaedro regular cuya arista mide 12 cm.

17. Calcula el área de un icosaedro regular cuya arista mide 12 cm.

18. La arista de un dodecaedro regular mide 20 cm. Calcula su área.

19. Calcula el área lateral, el área total y el volumen de un tetraedro regular si el radio de la circunferencia circunscrita a la base es de 40 cm.

20. En un cubo de arista 20 dm se hace pasar un plano por los puntos medios de tres aristas concurrentes en un vértice. Halla el área total y el volumen de la pirámide que resulta.

21. ¿Cuál es el poliedro regular cuya área total es $32\sqrt{3}$, si sus caras son triángulos equiláteros de altura igual a $2\sqrt{3}$?

22. Tomando como base una de las caras de un cubo se construye una pirámide regular de igual altura que el cubo. Si la altura total llega a 20 cm, ¿cuánto valdrá el área total del poliedro que se ha obtenido?

23. Se tiene un prisma recto cuya base es un cuadrado de lado a y de altura $h = a\sqrt{2}$. Comprueba que el poliedro que se obtiene uniendo los puntos medios de las aristas laterales entre sí y con los centros de las bases, es un octaedro regular.

24*. El número que mide, en metros, la diagonal de un exaedro regular, es igual al número que representa, en metros cuadrados, el área de un triángulo que tiene un vértice en el centro de una de las caras del exaedro y por lado opuesto a ese vértice la diagonal de la cara opuesta. Calcula el área total del exaedro.

25. La superficie lateral de un tetraedro regular de arista 2,0 dm está desarrollada en un plano. Halla una diagonal del cuadrilátero obtenido.

26. ¿Qué ángulo forma la arista de un tetraedro regular con las caras que no la contienen?

27. El desarrollo de un icosaedro regular ocupa una superficie de 100 dm^2, ¿Cuál será la longitud del lado de cada uno de los triángulos que lo forman?

28. El tetraedro regular, el octaedro y el icosaedro están formados por triángulos equiláteros; si los triángulos son iguales para todos ellos, ¿cuáles son las razones entre las áreas de los 3 cuerpos?

29*. La superficie total de un cubo es de 486 cm^2. Calcula el área total del prisma cuadrangular que resulta de cortar el cubo por un plano que contiene un lado de la base y forma con esta un ángulo de 30°.

30. Expresa el volumen del tetraedro regular en función de su arista a.

31. Calcula el volumen de un icosaedro:

   a) de arista a = 12,6 cm; si la distancia del centro de la esfera circunscrita a una de sus caras es igual a 9,53 cm,

b) de arista a = 10,5 cm; si el radio de la esfera circunscrita es igual a 10 cm.

c) si el radio de la esfera circunscrita es de 20 cm y el de la circunferencia circunscrita a una de sus caras es 12,1 cm.

32. Calcula el volumen de un dodecaedro:

a) de arista a = 10,7 cm; si la distancia del centro de la esfera circunscrita a una de sus caras es igual a 11,9 cm,

b) de arista a = 7,14 cm; si el radio de la esfera circunscrita es de 10 cm.

Geometría analítica

5. *Coordenadas en el espacio*

Como recordarás, en el plano es posible estudiar analíticamente las propiedades de las figuras mediante la introducción del sistema rectangular de coordenadas (fig. 3.60).

Este sistema permite establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano y los pares de números reales.

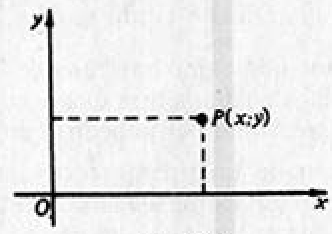


Fig. 3.60

En el espacio también pueden asignarse coordenadas a los puntos pero, como tiene tres dimensiones, se necesitan tres coordenadas. En efecto, se pueden trazar (fig. 3.61) tres planos mutuamente perpendiculares que se corten en un punto O. Las rectas de intersección de estos planos son los ejes coordenados y los planos son llamados planos coordenados. El determinado por los ejes x y y se llama plano xy; el determinado por los ejes y y z, plano yz y el determinado por los ejes x y z, plano xz.

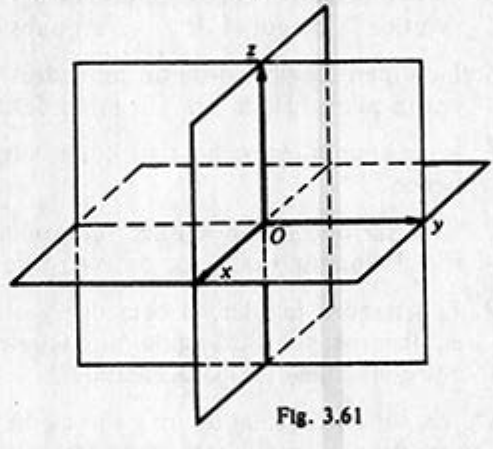


Fig. 3.61

El sistema obtenido de esta forma se llama sistema rectangular de coordenadas en el espacio[1]. Para asignar coordenadas a los puntos se procede de la misma forma que en el plano, pero utilizando tres coordenadas.

[1] Más exactamente, sistema rectangular directo, pues un tornillo que se haga girar del eje x al eje y, avanza en el sentido del eje z. Nosotros solo utilizaremos este sistema y por eso no especificamos que es directo.

Ejemplo 1

a) Sitúa en un sistema de coordenadas los puntos P_1 (1;2;4) y P_2 (2; $\frac{3}{2}$; 0).

b) Determina las coordenadas de los puntos representados en la figura 3.62.

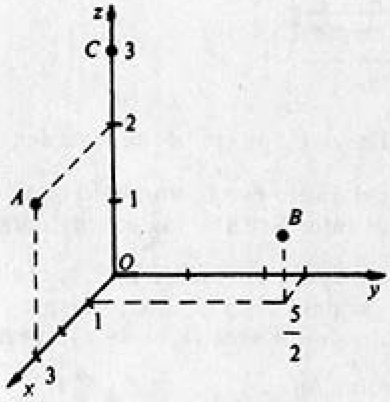


Fig. 3.62

Resolución

a) En la práctica no es necesario representar los planos coordenados sino solo los ejes como se ilustra en la figura 3.63. Observa que, para obtener una figura en perspectiva, las representaciones de los ejes x, y forman un ángulo de aproximadamente 135° y sobre el eje x se toma una escala que es la mitad de la de los otros ejes.

b) $A(3;0;2)$; $B(1; \frac{5}{2}$; 1) ; C (0;0;3). ■

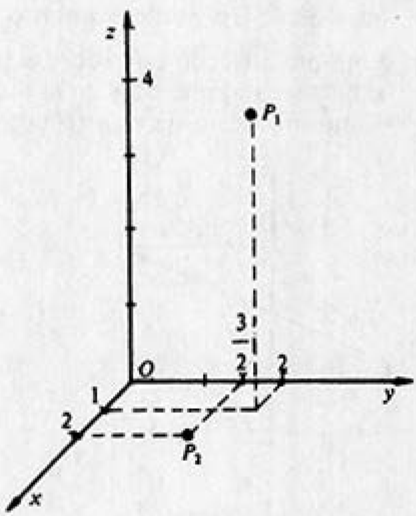


Fig. 3.63

El procedimiento de representación pone de manifiesto que la coordenada x es la distancia al plano yz; la coordenada y, la distancia al xz y la z la distancia al xy. Por esta razón:

la condición $x = 0$ caracteriza al plano yz,
la condición $y = 0$ caracteriza al plano xz,
la condición $z = 0$ caracteriza al plano xy.

Como cada eje es la intersección de dos planos coordenados:

la condición $x = 0$, $y = 0$ caracteriza al eje z,
la condición $x = 0$, $z = 0$ caracteriza al eje y,
la condición $y = 0$, $z = 0$ caracteriza al eje x.

Ejemplo 2

a) **Dado el punto *A* de coordenadas $(3; -\frac{1}{2}; 4{,}2)$, escribe las coordenadas del punto donde un plano que pasa por *A* y es perpendicular al eje *z*, corta a este último. Escribe las coordenadas de un punto arbitrario de ese plano.**

b) **Dado el punto $B(-2; 3{,}4; 1)$ escribe las coordenadas del punto donde una recta paralela al eje *z* que pasa por *B*, corta al plano *xy*. Escribe las coordenadas de un punto arbitrario de esa recta.**

Resolución

a) El punto buscado pertenece al eje *z*, luego las coordenadas *x*, *y* son cero. Si el plano es paralelo al *xy*, la coordenada *z* será la misma del punto dado, por tanto las coordenadas del punto son $(0;0;4{,}2)$. Su representación puede observarse en la figura 3.64. Un punto arbitrario de ese plano tendrá coordenadas $(x;y;4{,}2)$.

b) El punto buscado está sobre el plano *xy*, luego $z = 0$. Si la recta es paralela al eje *z*, interseca al plano *xy* en el punto $(-2;3{,}4;0)$. Puede verse en la figura 3.65. Un punto arbitrario de esta recta tendrá coordenadas $(-2;3{,}4;z)$.

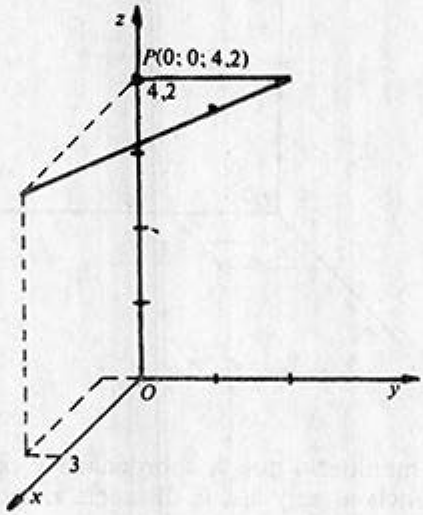


Fig 3.64

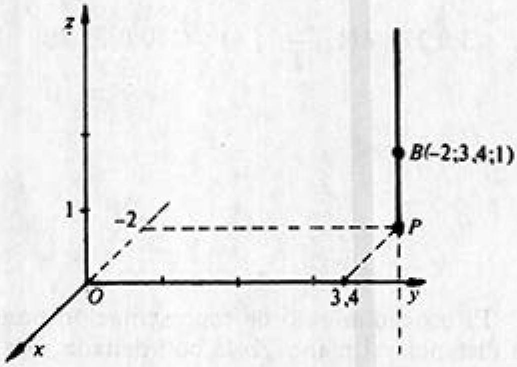


Fig. 3.65

Teorema 1

> La correspondencia establecida entre las ternas de números reales $(x;y;z)$ y los puntos del espacio mediante un sistema rectangular de coordenadas es biunívoca.

Demostración

Si por el punto A del eje x (fig. 3.66), trazamos un plano paralelo al plano yz, por el punto B del eje y un plano paralelo al plano xz y por el punto C del eje z un plano paralelo al plano xy; estos tres planos son únicos (teorema 2, epígrafe 3) y se cortan en un punto P de coordenadas $(x;y;z)$ con $\overline{OA} = x$, $\overline{OB} = y$ y $\overline{OC} = z$. Luego a cada terna de números reales corresponde un punto único del espacio.

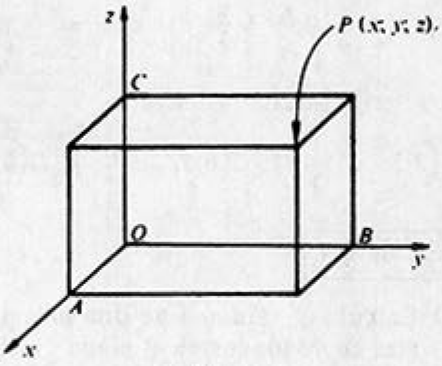


Fig. 3.66

Recíprocamente, si tenemos un punto P del espacio y trazamos por este, planos paralelos a los planos coordenados, estos cortan a los ejes en los puntos A, B y C; con lo que quedan determinados tres números reales. Por lo tanto, a cada terna de números reales corresponde un punto único del espacio y viceversa. ■

Ejemplo 3

Si los puntos $\left(2;3;\frac{1}{2}\right)$; $\left(2;5;-\frac{1}{2}\right)$; $\left(0;5;\frac{1}{2}\right)$ son vértices de un ortoedro de bases paralelas a los planos coordenados, determina las coordenadas de los vértices restantes.

Resolución

Como el ortoedro tiene sus bases paralelas a los planos coordenados, tendrá 4 vértices con una coordenada constante (fig. 3.67). Conocemos los vértices

$E\left(2;3;\frac{1}{2}\right)$, $B\left(2;5;-\frac{1}{2}\right)$ y $G\left(0;5;\frac{1}{2}\right)$.

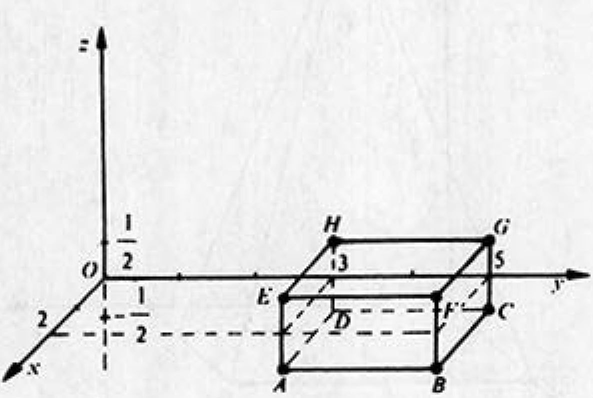


Fig. 3.67

Los vértices estarán en los planos

$$x = 2,\ x = 0,\ y = 3,\ y = 5,\ z = \frac{1}{2},\ z = -\frac{1}{2}$$

Los vértices restantes serán:

$$A\left(2;3;\ -\frac{1}{2}\right);\ C\left(0;5;\ -\frac{1}{2}\right);\ D\left(0;3;\ -\frac{1}{2}\right);\ F\left(2;5;\frac{1}{2}\right);\ H\left(0;3;\ \frac{1}{2}\right).\blacksquare$$

Ejemplo 4

a) Calcula el volumen de una pirámide recta rectangular de lados paralelos a los ejes coordenados en el plano xy si dos de sus vértices son (1;0;0), (3;4;0) y tiene altura 6.

b) Determina las coordenadas del vértice de la pirámide.

Resolución

a) La base está en el plano xy y sus lados son paralelos a los ejes coordenados, luego las coordenadas de los otros dos vértices serán (3;0;0) y (1;4;0). Pueden verse en la figura 3.68.

Los lados de la base son $a = 4$ y $b = 2$; luego,

$$V = \frac{1}{3} A_B h.$$

$$V = \frac{1}{3} 2 \cdot 4 \cdot 6 = 16$$

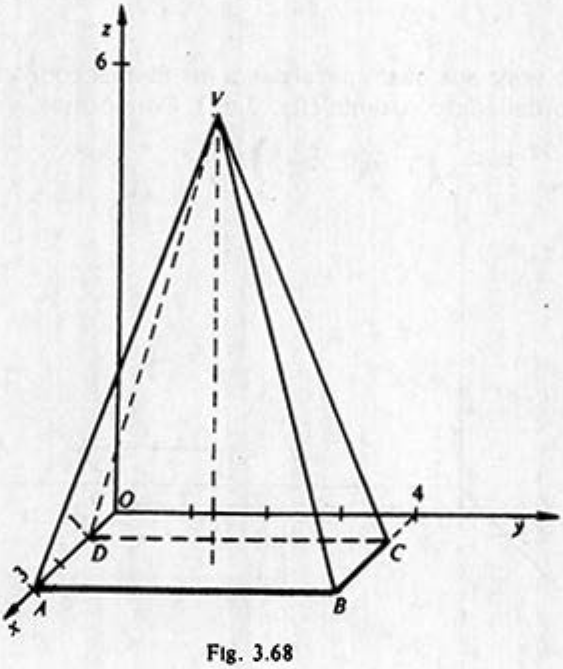


Fig. 3.68

b) Tenemos que $z = 6$

Las coordenadas x y y del vértice las podemos hallar fácilmente ya que su pie está en el plano xy y por ser la pirámide recta, el pie de la altura es el punto medio de $\overline{AC}$; luego, $x = 2$ y $y = 2$, por lo tanto $V(2;2;6)$. ■

Al igual que en el plano, se puede encontrar una expresión para calcular la distancia entre dos puntos en función de sus coordenadas.

Teorema 2

> Sean $P(x_1; y_1; z_1)$ y $Q(x_2; y_2; z_2)$ dos puntos cualesquiera en el espacio, la distancia entre estos viene dada por la expresión:
>
> $$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Demostración

Sean $P(x_1; y_1; z_1)$ y $Q(x_2; y_2; z_2)$ dos puntos cualesquiera del espacio (fig. 3.69), tracemos por estos puntos, planos paralelos a los planos coordenados. Estos planos se intersecan formando un ortoedro en el cual $\overline{PQ}$ es una diagonal.
Tenemos que: $d(P,Q) = |\overline{PQ}|$.

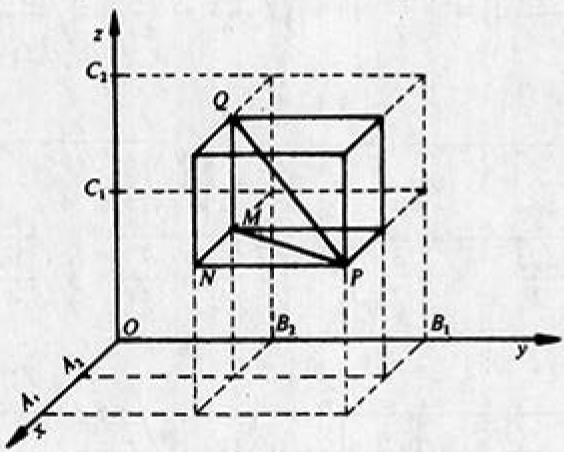


Fig. 3.69

Aplicando pitágoras en los triángulos MNP y MPQ se obtiene que

$$|\overline{PQ}|^2 = |\overline{NM}|^2 + |\overline{NP}|^2 + |\overline{QM}|^2$$

pero

$$|\overline{MN}| = |\overline{A_2A_1}| = |x_1 - x_2|$$
$$|\overline{NP}| = |\overline{B_2B_1}| = |y_1 - y_2|$$
$$|\overline{QM}| = |\overline{C_1C_2}| = |z_2 - z_1|$$

luego, $|\overline{PQ}|^2 = |x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2 + |z_2 - z_1|^2$

de donde $d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$. ■

Ejemplo 5

a) Calcula la distancia entre los puntos $A(2;1;-3)$ y $B(-1;5;3)$.

b) Prueba que la pirámide de vértices $P(0;0;0)$, $Q\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}; 0\right)$, $R(0;3;0)$ y $S\left[\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}; \sqrt{6}\right]$, es un tetraedro regular.

Resolución

a) Aplicando la fórmula del teorema anterior,

$$d(A,B) = \sqrt{(2+1)^2 + (1-5)^2 + (-3-3)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 16 + 36} = \sqrt{61} = 7{,}81.$$

b) Veamos si todas las aristas son iguales,

$$d(P,Q) = \sqrt{\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]^2 + \left[\frac{3}{2}\right]^2} = \sqrt{\frac{27}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = 3$$

$$d(P,R) = \sqrt{3^2} = 3$$

$$d(P,S) = \sqrt{\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]^2 + \left[\frac{3}{2}\right]^2 + [\sqrt{6}]^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4} + 6} = 3$$

$$d(Q,R) = \sqrt{\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]^2 + \left[\frac{3}{2}\right]^2} = \sqrt{\frac{27}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = 3$$

$$d(Q,S) = \sqrt{[\sqrt{3}]^2 + [\sqrt{6}]^2} = \sqrt{3 + 6} = 3$$

$$d(S,R) = \sqrt{\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]^2 + \left[\frac{3}{2}\right]^2 + [\sqrt{6}]^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4} + 6} = 3$$

Todas las caras son triángulos equiláteros, y en cada vértice concurren tres aristas, luego la pirámide dada es un tetraedro regular. ■

Conocidas las coordenadas de dos puntos $A(x_1; y_1; z_1)$ y $B(x_2; y_2; z_2)$ del espacio, también es posible hallar las coordenadas del punto medio del segmento que estos determinan.

Estas coordenadas son:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y_m = \frac{y_1 + y_2}{2};\ z_m = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Ejercicios (epígrafe 5)

1. Representa en un sistema de coordenadas los puntos: $A(2;0;-1)$ $B(4;-3;7)$, $C(-5;-9;2)$ y $D(3;-2;4)$.

2. Halla las coordenadas de los vértices del cubo de arista $a = 4$ cm representado en la figura 3.70

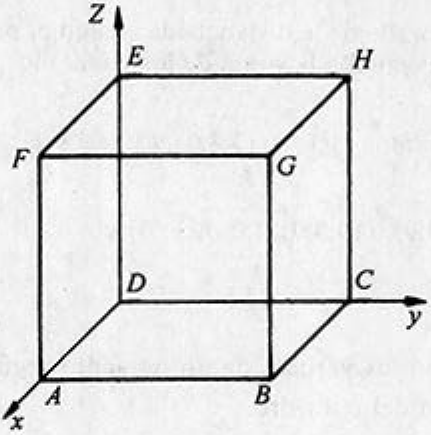


Fig. 3.70

3. Los puntos $(3;1;2)$, $(3;5;2)$, $(-1;1;2)$ y $(3;1;6)$ son vértices de un cubo. Halla los vértices restantes y dibuja el cubo.

4. Los puntos $(2;2;0)$, $(2;0;2)$, $(4;2;2)$, $(2;4;2)$, $(0;2;2)$ y $(2;2;4)$ son los vértices de un octaedro regular, dibuja el octaedro.

5. Dibuja la pirámide triangular de vértice $V(4;4;1)$ si los vértices de la base son los puntos $(4;1;4)$, $(4;4;4)$ y $(1;4;4)$ y calcula su volumen.

6. El punto $P(2;3;3)$ es un vértice de un ortoedro formado por los planos coordenados y los planos que pasando por P son paralelos a estos. Halla las coordenadas de los otros 7 vértices y el volumen del cuerpo.

7. Calcula la distancia entre los puntos:

   a) $A(2;5;3)$ y $B(-3;2;1)$ b) $C(0;3;0)$ y $D(6;0;2)$

   c) $E(-4;-2;3)$ y $F(3;3;5)$ d) $G(-1;-2;2)$ y $H(2;2;-1)$

   e) $I(-1;3;2)$ y el origen de coordenadas.

8. Calcula el perímetro del triángulo cuyos vértices son los puntos $(4;6;1)$, $(6;4;0)$ y $(-2;3;3)$.

9. Halla la distancia del punto $(3;-1;2)$ a cada uno de los planos coordenados y a los ejes coordenados.

10. Comprueba que los puntos $A(5;1;5)$, $B(-3;-2;1)$ y $C(4;3;2)$ son los vértices de un triángulo rectángulo y calcula su área.

11. Dado el triángulo cuyos vértices son los puntos:
$A(3;-1;2)$, $B(0;-4;2)$ y $C(-3;2;1)$; comprueba que es isósceles y halla la longitud de la mediana relativa al lado desigual.

12. Comprueba que los puntos $(2;0;-1)$, $(3;2;-2)$ y $(5;6;-4)$ son colineales.

13. Halla la distancia del punto $(-2;5;3)$ a cada uno de los planos coordenados y al origen.

14. Demuestra que el cuadrado de la distancia de cualquier punto del espacio al origen de coordenadas, es igual a la suma de los cuadrados de sus distancias a los planos coordenados.

15. Comprueba que los puntos $(1;1;0)$, $(3;3;0)$, $(3;1;2)$ y $(1;3;2)$ son vértices de un tetraedro regular.

16. Dados los puntos $(0;0;0)$, $(10;0;0)$, $(5;5\sqrt{3};0)$ y
$$\left[5;\frac{5\sqrt{3}}{3};\frac{10\sqrt{6}}{3}\right]:$$
a) Comprueba que son los vértices de un tetraedro regular.
b) Calcula el volumen del tetraedro.

17. Los puntos $(0;1;\sqrt{2})$, $(3;5;\sqrt{2})$, $(7;2;\sqrt{2})$ y $(4;-2;\sqrt{2})$ son vértices de un octaedro regular.
a) Halla las coordenadas de los otros dos vértices si se sabe que están sobre una recta paralela al eje z y la distancia entre ellos es $5\sqrt{2}$ u.
b) Calcula el área lateral del cuerpo.

6. *Ecuaciones de rectas y planos*

Como sabes, los vectores son segmentos dirigidos; estos segmentos pueden no estar contenidos en un plano como los que estudiaste en el curso anterior. Cuando se dispone de un sistema de coordenadas rectangulares en el espacio, los vectores pueden caracterizarse por 3 números que son sus coordenadas; las operaciones con ellos se realizan igual que en el caso de los vectores en un plano.

Ejemplo 1

Dados los puntos $P(1;-2;3)$ y $Q(-1;1;1)$:

a) Representa sus vectores de posición $\overrightarrow{OP}=\vec{a}$ y $\overrightarrow{OQ}=\vec{b}$.

b) Determina $\overrightarrow{PQ}$.

c) Calcula $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}+2\vec{b}$.

d) Calcula $\vec{a}\cdot\vec{b}$. ¿Qué puedes decir de $\vec{a}$ y $\vec{b}$?

Resolución

a) En la figura 3.71 aparecen representados los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$.

luego, el vector determinado por $\left(\frac{d}{a};0;0\right)$ y $(x;y;z)$ es perpendicular al vector $(a;b;c)$, es decir, $(x;y;z)$ está en el plano perpendicular a ese vector y que pasa por $\left(\frac{d}{a};0;0\right)$. ■

Ejemplo 2

a) Escribe la ecuación del plano perpendicular al vector (1;1;2) y que pasa por (0;1;3). Represéntalo.

b) Dado el plano $2x - 3y + z = 1$, determina sus intersecciones con los ejes y un vector perpendicular.

Resolución

a) Si el plano es perpendicular al vector (1;1;2) su ecuación será de la forma

$$x + y + 2z = d$$

y como pasa por (0;1;3)

$$0 + 1 + 2 \cdot 3 = d$$
$$d = 7$$

luego la ecuación del plano es: $x + y + 2z = 7$

Para representarlo, hallamos las intersecciones del plano con los ejes (fig. 3.73).
Con el eje x:

$y = 0$, $z = 0$; luego, $x = 7$
$A(7;0;0)$

Con el eje y:

$x = 0$, $z = 0$; luego $y = 7$
$B(0;7;0)$

Con el eje z

$x = 0$, $y = 0$; luego $z = \frac{7}{2}$

$C\left(0;0;\frac{7}{2}\right)$

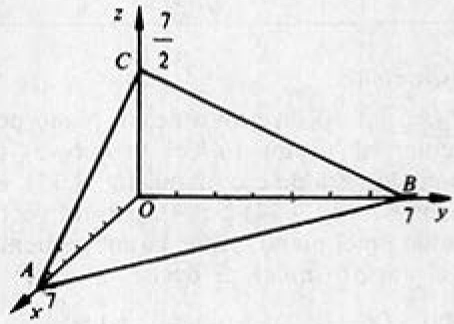


Fig. 3.73

Uniendo estos puntos obtenemos las trazas sobre los planos coordenados y queda representado el plano dado por el triángulo ABC.

b) $2x - 3y + z = 1$
Intersecciones con los ejes:

Eje x: para $y = 0$ y $z = 0$, $x = \frac{1}{2}$; luego $A\left(\frac{1}{2};0;0\right)$.

Eje y: para $x = 0$ y $z = 0$, $y = -\frac{1}{3}$; luego $B\left(0;-\frac{1}{3};-0\right)$.

b) $\overrightarrow{PQ}\ (x_Q-x_P;\ y_Q-y_P;\ z_Q-z_P)$

$\overrightarrow{PQ}\ (-2;3;-2)$

c) $(1;-2;3) + (-1;1;1) = (0;-1;4)$

$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})(0;-1;4)$

$(1;-2;3)-(-1;1:1) = (2;-3;2)$

$(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})\ (2;-3;2)$

$2\overrightarrow{b}$: $2(-1;1;1) = (-2;2;2)$

$(\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b})$: $(1;-2;3) + (-2;2;2) = (-1;0;5)$

$(\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b})(-1;0;5)$

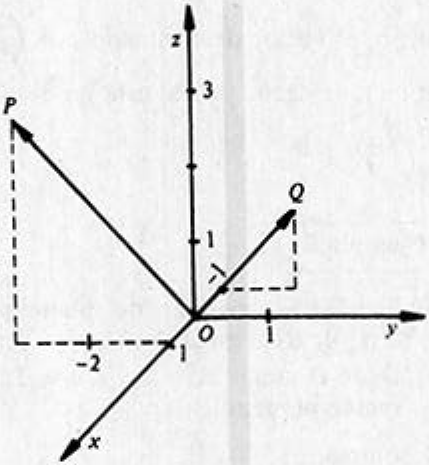


Fig. 3.71

d) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 1(-1) + (-2)(1) + 3 \cdot 1 = -1 - 2 + 3 = 0$

Los vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ son perpendiculares. ■

Teorema 1

> Una ecuación de la forma $ax + by + cz = d$ representa un plano perpendicular al vector $(a;b;c)$.

Demostración

Sea $P_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ un punto de un plano perpendicular al vector $(a;b;c)$ y $P(x;y;z)$ un punto cualquiera de ese plano (fig. 3.72). En ese caso $(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ es un vector contenido en el plano, y por tanto, perpendicular al vector $(a;b;c)$, es decir:

$$(a;b;c;) \cdot (x - x_0; y - y_0; z - z_0) = 0$$
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$
$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$$

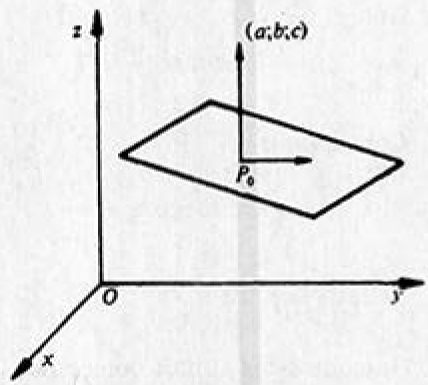


Fig. 3.72

de donde $ax + by + cz = d$, con $d = ax_0 + by_0 + cz_0$.
Recíprocamente, dada la ecuación $ax + by + cz = d$, el punto $\left(\frac{d}{a};0;0\right)$ satisface la ecuación y si $(x;y;z)$ es otro punto cualquiera que la satisface se cumple:

$$a\left[x - \frac{d}{a}\right] + b(y - 0) + c(z - 0) = 0,$$

Eje z: para $x = 0$ y $y = 0$, $z = 1$; luego $C\,(0;0;1)$.

Las intersecciones con los ejes coordenados son los puntos: $A\left(\frac{1}{2};0;0\right)$, $B\left(0;-\frac{1}{3};0\right)$ y $C(0;0;1)$. Un vector perpendicular al plano dado será el $(2;-3;1)$. ■

Ejemplo 3

Determina el punto de intersección de los planos:

$x - 2y + 4z - 9 = 0$, $3x - 4y + z + 2 = 0$ y $2x + y + 3z - 13 = 0$.

Resolución

Resolvamos el sistema formado por las ecuaciones dadas.

$$\begin{aligned} x - 2y + 4z - 9 &= 0 \quad (1)\\ 3x - 4y + z + 2 &= 0 \quad (2)\\ 2x + y + 3z - 13 &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} -3x + 6y - 12z + 27 = 0 \\ \underline{3x - 4y + z + 2 = 0} \\ 2y - 11z + 29 = 0 \quad (4) \end{array} \quad \text{(multiplicando (1) por } -3 \text{ y sumando (2))}$$

$$\begin{array}{r} -2x + 4y - 8z + 18 = 0 \\ \underline{2x + y + 3z - 13 = 0} \\ 5y - 5z + 5 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \quad (5) \end{array} \quad \text{(multiplicando (1) por } -2 \text{ y sumando (3))}$$

$$\begin{array}{r} -2y + 2z - 2 = 0 \\ \underline{2y - 11z + 29 = 0} \\ -9z + 27 = 0 \\ z = 3 \end{array} \quad \text{(multiplicando (5) por } -2 \text{ y sumando (4))}$$

sustituyendo en (5) $y - 3 + 1 = 0$, $y = 2$

sustituyendo en (1) $x - 4 + 12 - 9 = 0$; $x = 1$ luego, los tres planos se intersecan en el punto $(1;2;3)$. ■

Como una recta está determinada por la intersección de dos planos, el sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1\\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \end{aligned}$$

representa una recta si los vectores $(a_1;b_1;c_1)$ y $(a_2;b_2;c_2)$ no son paralelos.

Ejemplo 4

Representa las rectas:

a) $\begin{aligned} 2x + 3y &= 6\\ z &= 4 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 2x + 3y &= 6\\ y + z &= 1 \end{aligned}$

Resolución

a) Representemos los planos dados (fig. 3.74).

α: $2x + 3y = 6$

β: $z = 4$

El plano α es paralelo al eje z y pasa por los puntos (3;0;0) y (0;2;0).

β es un plano paralelo al plano xy y pasa por el punto (0;0;4).

La intersección será la recta r.

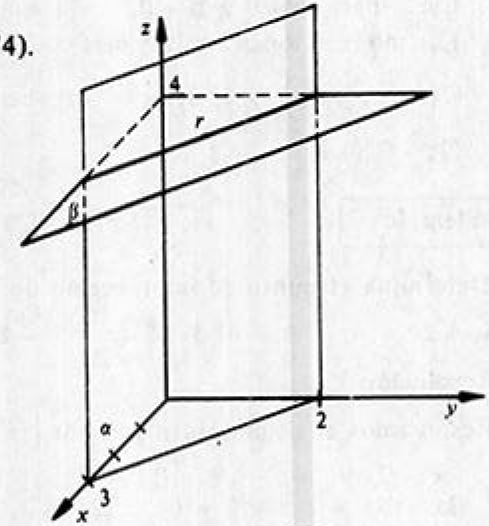


Fig. 3.74

b) α: $2x + 3y = 6$

γ: $y + z = 1$

Representemos estos planos en la figura 3.75.

γ es un plano paralelo al eje x y pasa por los puntos (0;1;0) y (0;0;1).

La recta de intersección sera l.

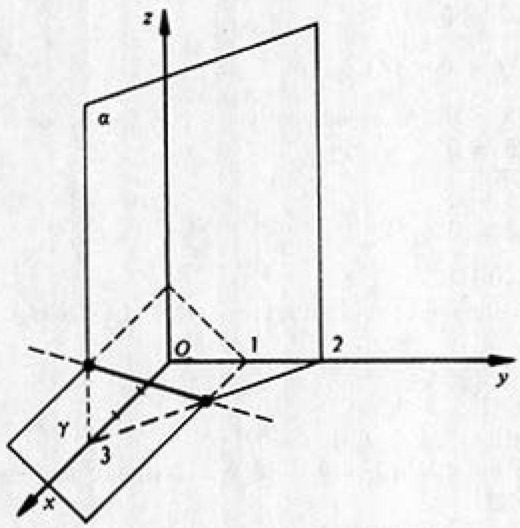


Fig. 3.75

Cuando se conoce un punto $P_0(x_0; y_0; z_0)$ y un vector director $(a;b;c)$ de una recta, la ecuación puede escribirse,

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \lambda a \\ y - y_0 &= \lambda b \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z - z_0 &= \lambda c \end{aligned}$$

y si $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$; se obtiene la llamada ecuación simétrica de la recta:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Ejemplo 5

a) Escribe la ecuación simétrica de la recta que pasa por el punto (3;–5;4) y tiene vector directo (2;7;6).

b) Determina un punto y un vector director de las rectas:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{2};\quad \frac{2x-1}{2}=y=2z-1.$$

Resolución

a) La ecuación simétrica de la recta será:

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+5}{7}=\frac{z-4}{6}$$

b) $$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{x+1}{2}$$

Un punto de esta recta es (1;2;–1) y un vector director (2;3;2).

$$\frac{2x-1}{2}=y=2z-1$$

Transformemos la ecuación a la forma simétrica (eliminando los coeficientes de las variables).

$$x-\frac{1}{2}=y=\frac{z-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

Un punto de esta recta es $\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$ y un vector director $\left(1;1;\frac{1}{2}\right)$.■

Ejemplo 6

Determina las posiciones relativas:

a) de los planos $2x+y=5$, $x-2y+z=1$ respecto a los ejes coordenados y entre sí,

b) de las rectas

$$x=\frac{y-2}{2}=z;\quad \frac{x-1}{2}=\frac{y}{4}=\frac{z}{2},$$

$$\frac{x-2}{2}=2y-2=z;\quad \frac{x-3}{4}=y=\frac{z-1}{2},$$

$$\frac{x}{4}=\frac{y-1}{2}=z;\quad x+1=y=2z+1,$$

c) **del plano** $2x - y + z = 2$ **y las rectas** $x = -y = -z$;

$\frac{x-1}{2} = y = \frac{z-2}{2}$.

Resolución

a) α: $2x + y = 5$

α es paralelo al eje z (esta variable no aparece en su ecuación).

Intersección con el eje x

Para $y = 0$, $x = \frac{5}{2}$; luego, α corta al eje x en el punto $\left(\frac{5}{2};0;0\right)$.

Intersección con el eje y

Para $x = 0$, $y = 5$; luego, α corta al eje y en el punto $(0,5;0)$.

β: $x - 2y + z = 1$

β corta a los tres planos coordenados pues las tres variables aparecen en la ecuación.

Intersección con el eje x

Para $y = 0$ y $z = 0$, $x = 1$; luego β corta el eje x en el punto $(1;0;0)$.

Intersección con el eje y

Para $x = 0$ y $z = 0$, $y = -\frac{1}{2}$; luego β corta al eje y en el punto $\left(0; -\frac{1}{2}; 0\right)$.

Intersección con el eje z

Para $x = 0$ y $y = 0$, $z = 1$; luego β corta el eje z en el punto $(0;0;1)$.

Por otra parte,

α y β no son paralelos porque α es ortogonal al vector $\vec{a}(2;1;0)$; β lo es al vector $\vec{b}(1;-2;1)$ y $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$; luego los planos α y β se cortan según una recta.

Resolviendo el sistema podemos hallar la forma de los puntos de esta recta.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 & (1) \\ x - 2y + z = 1 & (2) \end{cases}$$

Despejando y en (1)

$y = 5 - 2x$ (3)

sustituyendo en (2)

$x - 2(5 - 2x) + z = 1$

$x - 10 + 4x + z = 1$

$5x + z = 11$

de donde $z = 11 - 5x$ (4)

Los puntos de la recta tendrán la forma $(x; 5 - 2x; 11 - 5x)$.

b) $r_1 : x = \frac{y-1}{2} = z$; $r_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{2}$

Sean $\vec{a_1}$ y $\vec{a_2}$ los vectores directores de las rectas r_1 y r_2 respectivamente, entonces $\vec{a_1}(1;2;1)$ y $\vec{a_2}(2;4;2)$ pero $\vec{a_2} = 2\vec{a_1}$, luego, $\vec{a_1} \parallel \vec{a_2}$ y las rectas son paralelas.

Veamos si coinciden:

Sea $P_1(0;1;0) \in r_1$

Sustituyendo en r_2 se obtiene: $\frac{-1}{2} \neq \frac{1}{4} \neq 0$; luego las rectas son paralelas pues $P_1 \notin r_2$.

$$r_1: \frac{x-2}{2} = 2y - 2 = z; \quad r_2: \frac{x-3}{4} = y = \frac{z-1}{2}$$

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{\frac{1}{2}} = z$$

luego, $\vec{a_1}\left(2; \frac{1}{2}; 1\right)$; $\vec{a_2}(4;1;2)$

$\vec{a_2} = 2\vec{a_1}$, por tanto, las rectas son paralelas.
$P_1(2;1;0) \in r_1$, veamos si el $P_1 \in r_2$.

$\frac{2-3}{4} \neq 1 \neq \frac{-1}{2}$, luego $P_1 \notin r_2$ y las rectas r_1 y r_2 son paralelas.

$$r_1: \frac{x}{4} = \frac{y-1}{2} = z \qquad r_2: x + 1 = y = 2z + 1$$

$$x + 1 = y = \frac{z + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

luego, $\vec{a_1}(4; 2; 1)$ y $\vec{a_2}\left(1;1;\frac{1}{2}\right)$

$\vec{a_1} \not\parallel \vec{a_2}$, por lo tanto las rectas se cortan. Hallemos el punto de intersección.
De las ecuaciones de las rectas se obtiene el sistema

$$\begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{y-1}{2} \\ \frac{y-1}{2} = z \\ x + 1 = y \\ y = 2z + 1 \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} x - 2y + 2 = 0 & (1) \\ y - 2z - 1 = 0 & (2) \\ x - y + 1 = 0 & (3) \\ y - 2z - 1 = 0 & (4) \end{cases}$$

Las ecuaciones (2) y (4) son iguales; luego el sistema se reduce a

$$\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 & (1) \\ y - 2z - 1 = 0 & (2) \\ x - y + 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

Resolviendo este sistema se obtiene el punto de intersección (0;1;0).

c) α: $2x - y + z = 2$; r_1: $x = -y = -z$

Resolvamos el sistema

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 & (1) \\ x = -y & (2) \\ y = -z & (3) \end{cases}$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1) resulta:

$2x + x - x = 2$

$$x = 1\ ; \qquad y = -1\ ; \qquad z = -1$$

Se intersecan en el punto $(1;\ -1;\ -1)$.

$$\alpha: 2x - y + z = 2\ ;\ r_2: \frac{x-1}{2} = y = \frac{z-2}{2}$$

Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ \dfrac{x-1}{2} = y \\ y = \dfrac{z-2}{2} \end{cases}$$

se obtiene el punto $\left(\frac{1}{5}\ ;\ -\frac{2}{5}\ ;\ \frac{6}{5}\right)$, luego la recta corta al plano en ese punto. ■

Ejemplo 7

a) Halla la ecuación del plano bisector del segmento $\overline{P_1P_2}$ con $P_1(1;2;0)$ y $P_2(3;1;4)$.

b) Determina las coordenadas del vértice de una pirámide recta de base rectangular determinada por los puntos $A(2;1;1)$, $B(4;3;1)$, $C(3;4;1)$ y $D(1;2;1)$; si se sabe que pertenece al plano $2x + 4y - 2z - 3 = 0$.

Resolución

a) El plano bisector del segmento $\overline{P_1P_2}$ es el perpendicular al segmento que pasa por su punto medio.

Hallemos el punto medio M de $\overline{P_1P_2}$

$$x_m = \frac{1+3}{2} = 2\ ;\ y_m = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}\ ;\ z_m = \frac{0+4}{2} = 2$$

luego $M\left(2;\ \frac{3}{2}\ ;2\right)$.

Un vector perpendicular al plano puede ser el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$; $\overrightarrow{P_1P_2}$ $(2;\ -1;\ 4)$.

La ecuación del plano es : $2x - y + 4z = d$

y como pasa por M, $2 \cdot 2 - \frac{3}{2} + 4 \cdot 2 = d$

de donde, $d = \frac{21}{2}$

luego, $2x - y + 4z = \frac{21}{2}$ o $4x - 2y + 8z - 21 = 0$ es la ecuación del plano buscada.

b) La base de la pirámide se encuentra en un plano paralelo al plano xy (todos los puntos dados de la base tienen la misma coordenada z), luego la altura es perpendicular al plano (fig. 3.76).

Como la pirámide es recta, el pie de la altura será el punto medio de las diagonales del rectángulo de la base, o sea, el punto $\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; 1\right)$.

El vértice tendrá por lo tanto las coordenadas $V\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; z\right)$.

Para determinar la z, como V es un punto del plano $2x + 4y - 2z - 3 = 0$, se tiene: $2 \cdot \frac{5}{2} + 4 \cdot \frac{5}{2} - 2z - 3 = 0$, de donde se obtiene que $z = 6$ luego, las coordenadas del vértice son $V\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; 6\right)$. ■

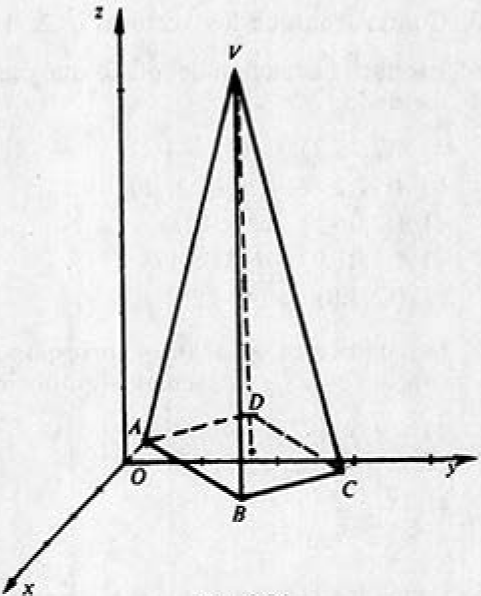


Fig. 3.76

Resumen

La ecuación de un plano perpendicular al vector $(a;b;c)$ es de la forma $ax + by + cz = d$.

El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

representa una recta (recta de intersección de los planos determinados por esas ecuaciones) si los vectores $(a_1; b_1; c_1)$ y $(a_2; b_2; c_2)$ no son paralelos.

La ecuación $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$, representa una recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0; z_0)$ con vector director $(a;b;c)$, si $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$.

Ejercicio (epígrafe 6)

1. Representa los vectores de posición de los puntos:
   $A(2;1;3)$, $B(3;-1;2)$, $C(-1;3;2)$ y $D(4;2;-1)$.

2. Dados los vectores $\vec{a}(1;-2;3)$, $\vec{b}(2;2;-1)$, $\vec{c}(0;1;-2)$ y $\vec{d}(2;-1;0)$; calcula:

   a) $\vec{a} + \vec{b}$ b) $\vec{a} - \vec{b}$ c) $3\vec{d}$ d) $\vec{a} + 4\vec{c}$
   e) $\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}$ f) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ g) $(2\vec{a}) \cdot (3\vec{c})$

3. Comprueba que los vectores $\vec{a}(2;-1;4)$ y $\vec{b}(-3;2;2)$ son perpendiculares.

4. Escribe la ecuación del plano que pasa por el punto A y es perpendicular al vector dado.

   a) $A(2;1;-2)$, $\vec{a}(3; -1;4)$
   b) $A(-1;2;-3)$, $\vec{b}(-1;2;-1)$
   c) $A(2;0;-1)$, $\vec{c}(0;-1;2)$
   d) $A(-3;1;0)$, $\vec{d}(3;0;-1)$
   e) $A(2;3;0)$, $\vec{e}(4;-1;0)$

5. Las siguientes ecuaciones corresponden a planos. Determina sus intersecciones con los ejes y represéntalos gráficamente.

   a) $x + y + 2z = 4$ b) $2x + y + z = 6$
   c) $3x + 4y = 12$ d) $y + z = 2$
   e) $2x - 3z = 6$ f) $x = 2$
   g) $y = -3$ h) $z = 4$

6. Dados los siguientes planos, determina un punto y un vector perpendicular.

   a) $3x - 6y - 2z = 5$ b) $4x + 2y - 2z = 3$
   c) $2x - y + 2z = 4$ d) $4x + 3y = 7$
   e) $2x - 3y + z = 8$ f) $2x + y = 5$
   g) $y - 4 = 0$ h) $x = 1$

7. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $(-1;2;3)$ y es paralelo al plano $2x - 3y + z = 8$

8*. Escribe la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(-1;-2;-1)$, $B(0;-2;-3)$ y $C(1;4;1)$

9. Representa gráficamente las siguientes rectas:

   a) $\begin{cases} x + z = 4 \\ 4z + 3y = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ z = 2 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ y + z = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$

10. Escribe la ecuación simétrica de la recta que pasa por el punto dado con vector director $\vec{a}$.

a) $A(-1;2;3)$, $\vec{a}(2;-3;1)$

b) $B(2;-1;3)$, $\vec{a}(2;1;-1)$

c) $C(-1;0;-3)$, $\vec{a}(1;-1;3)$

d) $D(-1;2;-1)$, $\vec{a}(0;4;-2)$

e) $E\left(2;-1;\frac{3}{4}\right)$, $\vec{a}(-1;2;-3)$

f) $F(0;0;-3)$, $\vec{a}(1;1;0)$

11. Escribe la ecuación simétrica de la recta que pasa por los puntos:

a) $(-3;2;0)$ y $(0;1;-3)$

b) $(-2;3;1)$ y $(0;-2;1)$

c) $(-1;2;-1)$ y $(3;4;-2)$

12. Escribe la ecuación simétrica de la recta que pasa por el punto $(2;-1;3)$ y es perpendicular al plano $3x + 2y + 5z - 3 = 0$.

13. Escribe la ecuación simétrica de la recta que pasa por el punto $(2;3;-5)$ y es paralela a la recta

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+3}{-4}.$$

14. Determina un punto y un vector director de las rectas siguientes:

a) $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-4}{4}$

b) $2x + 3 = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z-1}{3}$

c) $\dfrac{3x}{4} = \dfrac{5-y}{7}$; $z = 1$

d) $\dfrac{2-5x}{3} = 3 + 4y = \dfrac{2z-1}{4}$

e) $\dfrac{2-x}{4} = \dfrac{y+3}{3} = \dfrac{z}{-5}$

f) $y - 3 = z + 2$; $x = 0$

15. Halla la ecuación del plano:

a) bisector del segmento que une los puntos $A(3;-2;0)$ y $B(5;4;6)$,

b) que pasa por el punto $(-1;3;2)$ y es perpendicular a la recta

$$\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{4}.$$

16. Halla el punto de intersección de los planos
$3x + 2y - 5z - 9 = 0$, $2x - y - z + 1 = 0$ y $x - y + 3z + 2 = 0$.

17. Determina las posiciones relativas de los planos siguientes:

a) $2x + y - z + 4 = 0$; $4x + 2y - 2z - 6 = 0$

b) $x + 3y - 5 = 0$; $2x - y + z - 2 = 0$

c) $2y + z = 3$; $x - 2z - 2 = 0$

18. Halla el punto de intersección de las rectas

a) $x - 2 = \dfrac{y + 2}{-2} = \dfrac{z - 1}{-1}$ y $\dfrac{x + 3}{2} = \dfrac{y + 2}{1} = z$

b) $\dfrac{x + 4}{2} = \dfrac{y - 1}{-1} = \dfrac{3z - 2}{6}$ y $x + 2 = 1 - 2y = z$

c) $\dfrac{x - 2}{3} = \dfrac{y - 2}{4} = \dfrac{8 - z}{4}$ y $\dfrac{x - 1}{3} = \dfrac{2 - y}{-4} = \dfrac{z + 4}{-4}$

d) $\dfrac{x - 1}{2} = y - 3 = \dfrac{z + 8}{5}$ y $x = y = 2z + 1$

19. Halla la posición relativa de la recta

$x - 2 = y - 3 = \dfrac{z - 4}{2}$ y el plano $2x + y + z - 6 = 0$.

20. Representa el ortoedro formado por los planos coordenados y por los planos $x = 4$, $y = 3$ y $z = 2$. Calcula su volumen y su área total.

21. Calcula el volumen del prisma limitado por los planos $y = 0$, $y + z = 4$, $z = 0$, $x = 0$ y $x = 5$.

22. Calcula el volumen de la pirámide limitada por el plano $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ y por los planos coordenados.

Ejercicios del capítulo

1. Di si las siguientes proposiciones son verdaderas en planimetría, estereometría o ambas.
   a) Por un punto situado fuera de una recta se puede trazar una paralela y solo una a esta.
   b) Por un punto situado fuera de una recta se puede trazar una perpendicular y solo una a esta.
   c) Por un punto de una recta se puede trazar una perpendicular y solo una a esta.
   d) Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí.
   e) Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí.
   f) Por un punto de una recta se pueden trazar infinitas perpendiculares a dicha recta.

2. Demuestra que los puntos medios de los lados de un cuadrilátero no plano (sus vértices no están en el mismo plano) son vértices de un paralelogramo.

3. Una recta r corta a un plano α en un punto P. En la recta se toman dos puntos M y N situados cada uno en distintos semiespacios respecto a α y equidistantes de P. Si el punto M dista 10 cm del plano α, ¿cuánto dista N?

4. Un cuadrado $ABCD$ está inscrito en una circunferencia de 25,1 cm de longitud; por el punto O de intersección de sus diagonales se levanta una perpendicular $\overline{OS}$ de 4,0 cm de longitud al plano del cuadrado.
   a) Haz un esquema de la figura.
   b) Halla la distancia de S a cada vértice del cuadrado.
   c) Halla el ángulo que forma la oblicua $\overline{SA}$ con el plano del cuadrado.

5. Uno de los catetos de un triángulo rectángulo isósceles está contenido en el plano α y el otro forma con este un ángulo igual a 45°. Halla el ángulo que forma la hipotenusa con el plano α.

6. Desde un punto exterior a un plano se trazan dos oblicuas iguales de 14,1 cm; el ángulo que dichas oblicuas forman con el plano es de 45° y sus proyecciones son perpendiculares. Halla la distancia entre los pies de las oblicuas y el ángulo que estas forman.

7. Se tiene un círculo de 4,0 cm de radio; por su centro O se traza una perpendicular al plano del círculo y sobre esta se toma un segmento $\overline{OM} = 8{,}0$ cm. Halla la distancia del punto M a una cuerda de 6,0 cm de longitud.

8. Un rectángulo tiene uno de sus lados menores que mide 12 cm sobre un plano; el lado paralelo a este dista 8,0 cm del plano. Calcula los otros dos lados sabiendo que forman con el plano un ángulo de 30°. ¿Qué longitud tienen las diagonales del rectángulo?

9. La base de una pirámide es un cuadrado. Una de sus aristas laterales es perpendicular a la base y la mayor que es igual a 6,0 dm forma un ángulo de 45° con el plano de la base. Halla el área de la base.

10. En una pirámide triangular regular, la altura es igual al lado de la base.
    a) Halla el ángulo formado por la arista lateral y el plano de la base.
    b) Halla el volumen de dicha pirámide si el lado de la base mide 12 dm.

11. Un cable telefónico de 15 m de largo se extiende desde una columna donde se ha asegurado a una altura de 8,0 m de la tierra, hasta un edificio, donde se ha asegurado a una altura de 20 m. Halla la distancia entre el edificio y la columna suponiendo que el cable no hace ondas.

12. Por el vértice C del ángulo recto de un triángulo se ha trazado un plano paralelo a la hipotenusa a una distancia de 20 cm de esta. Las proyecciones de los catetos sobre este plano son iguales a 60 cm y 100 cm. Halla la longitud de la hipotenusa.

13*. Por el punto D, exterior a un plano, se han trazado tres oblicuas, cada una de las cuales forma con el plano un ángulo de 60°. Los pies de las oblicuas A, B y C se han unido mediante segmentos. Calcula los lados del triángulo ABC si el punto D está a una distancia a del plano y los ángulos ADB, BDC y CDA son iguales entre sí.

14. Un rombo tiene uno de sus lados sobre un plano y su lado opuesto a 10 cm. Si los ángulos que forman las diagonales de dicho rombo con el plano miden 80° y 45°, respectivamente, calcula la longitud del lado del rombo.

15* Por el vértice M del triángulo equilátero MNP se ha levantado la perpendicular $\overline{MQ}$ a su plano, tal que $\overline{MQ} = \overline{MN}$. Halla la tangente del ángulo entre las rectas NQ y PQ.

16. Demuestra que los segmentos de rectas paralelos comprendidos entre planos paralelos son iguales.

17. $ABCD$ es un paralelogramo que no interseca al plano α. Por los vértices A, B, C y D se han trazado perpendiculares a α que lo intersecan en los puntos A', B', C' y D', respectivamente. Halla la longitud del segmento $\overline{DD'}$, si $\overline{AA'} = a$, $\overline{BB'} = b$ y $\overline{CC'}$ =

18*. En la pirámide cuadrangular regular de la figura 3.77 sus caras son triángulos equiláteros de lado a. Se han trazado las medianas $\overline{AM}$ y $\overline{CM}$ de las caras ABE y BCE, respectivamente y la altura $\overline{OE}$ de la pirámide.

a) Halla el ángulo entre las rectas AM y MC.

b) Halla el volumen de la pirámide $ACBM$.

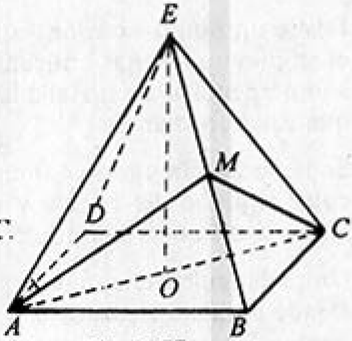


Fig. 3.77

19. En el cubo de la figura 3.78, la longitud de la arista es a y P es el punto medio de $\overline{BC}$. Halla la distancia entre las rectas:

a) HC y la diagonal de la cara $ABGF$.

b) AF y GP.

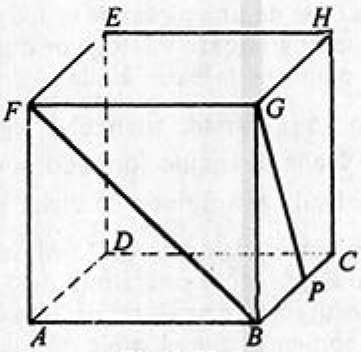


Fig. 3.78

20. El área de la sección plana que resulta de cortar un prisma cuadrangular regular por un plano que pasa por dos aristas laterales opuestas es de 169 cm^2 y el lado de la base mide 12 cm. Calcula el área total y el volumen del prisma.

21. Se corta un cubo por un plano que pasa por la diagonal de una de sus caras y por uno de los vértices de la cara opuesta que más dista de dicha diagonal. Halla el volumen de la pirámide que resulta si la arista del cubo mide 14 cm.

22. Calcula el área total y el volumen de un exaedro regular si se sabe que la distancia de uno de sus vértices al centro de la cara opuesta es de 2,0 m.

23. Halla el área total y el volumen de un tetraedro regular si la suma de todas sus aristas es igual a 200 cm.

24. Expresa el volumen del tetraedro regular en función de su altura h.

25. El desarrollo de un icosaedro regular ocupa una superficie de 100 dm^2. ¿Cuál será la longitud del lado de cada uno de los triángulos que lo forman?

26. Si se duplican las aristas de un cubo, ¿qué relación guardan sus volúmenes?

27. Halla el área y el volumen de un octaedro regular de 3,0 m de arista.

28. La mediana de una de las caras de un octaedro regular mide 17,3 m. Calcula el área del octaedro.

29. El radio de la circunferencia circunscrita a una de las caras de un icosaedro regular mide 5,0 cm. Calcula el área del icosaedro.

30. Calcula el área de un dodecaedro regular si su arista mide 10 cm.

31. Representa en un sistema de coordenadas los puntos: (2;1;0), (0;3;4), (2;0;-1), (3;-2;4), (1;2;-3), (-5;3;-2).

32. Dibuja el tetraedro cuyos vértices son los puntos (0;0;0), (2;0;0), (0;2;0) y (0;0;2). ¿Es este tetraedro regular? Calcula su volumen.

33. Los puntos (1;1;0), (5;1;0) y (5;5;8) son vértices de un prisma cuadrangular regular que tiene una base en el plano xy. Halla los vértices restantes y dibuja el prisma.

34. Investiga si los puntos (2;-1;0), (0;-1;-1), (1;1;3) y (3;1;-2), tomados en ese orden, son los vértices de un rectángulo.

35. Comprueba que los puntos (4;2;4), (10;2;-2) y (2;0;-4) son vértices de un triángulo equilátero y calcula su área.

36. Verifica que los puntos $A(3;-1;2)$, $B(1;2;-1)$, $C(-1;1;-3)$ y $D(3;-5;3)$ son vértices de un trapecio.

37. Halla la distancia del punto (2;3;-4) a cada uno de los planos coordenados y a los ejes coordenados.

38. Dados los vectores $\vec{a}(4;-2;0)$, $\vec{b}(-3;4;2)$ y $\vec{c}(5;-1;3)$; calcula:

a) $\vec{a} + \vec{b}$ b) $3\vec{a} + 2\vec{c}$ c) $\frac{1}{3}\,\vec{b} - \vec{c}$

d) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ e) $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$ f) $(\vec{a} - \vec{b})^2$

39. Calcula el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}(3;\,-2;\,-5)$, si su punto de aplicación se desplaza, en un movimiento rectilíneo, de la posición $A(2;-3;5)$ a la posición $B(3;\,-2;\,-1)$.

40. ¿Para qué valores de α los vectores $\vec{a}(\alpha;-3;2)$ y $\vec{b}(1;2;-\alpha)$ son perpendiculares entre sí?

41. Escribe la ecuación del plano que pasa por el punto (2;1;-1) y es perpendicular al vector (1;-2;3).

42. El punto $P(2;-1;-1)$ es el pie de la perpendicular bajada del origen de coordenadas a un plano. Halla la ecuación de este plano.

43. Dados los puntos $A(3;-1;2)$ y $B(4;-2;\ -1)$, halla la ecuación del plano que pasa por el punto A y es perpendicular al vector $\overrightarrow{AB}$.

44. Un plano tiene por ecuación $x + 2y - 2z + 9 = 0$. Halla:
   a) un vector perpendicular a este plano.
   b) sus intersecciones con los ejes.

45. Encuentra una ecuación del plano que pasa por $(1;2;-3)$ y es paralelo al plano cuya ecuación es $3x - y + 2z = 4$.

46. Los puntos $A(1;1;-1)$, $B(3;3;2)$ y $C(3;-1;-2)$ determinan un plano:
   a) halla un vector perpendicular al plano,
   b) escribe la ecuación del plano.

47. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $(2;3;-7)$, sabiendo que el vector que une $(1;2;3)$ con $(2;4;12)$ es perpendicular a dicho plano.

48. Calcula el volumen de la pirámide limitada por los tres planos coordenados y el plano $x + 2y + 3z = 6$.

49. Representa gráficamente las rectas:

a) $2x - y = 6$ $z - y = 5$	b) $x + 2y + z = 2$ $y = 3$	c) $2x + 3z = 6$ $x - 2y = 4$

50. Halla la ecuación simétrica de la recta que pasa por el punto A con vector director $\vec{a}$.

a) $A(2;-1;4)$ $\vec{a}(3;-1;6)$	b) $A(4;0;5)$ $\vec{a}(1;-1;3)$
c) $A(-3;2;7)$ $\vec{a}(2;-3;1)$	d) $A(-2;4;3)$ $\vec{a}(2;1;-3)$

51. Halla las ecuaciones simétricas de los lados del triángulo cuyos vértices son los puntos $M(-2;\ -3;\ -2)$, $N(-3;1;4)$ y $P(2;3;-1)$.

52. Escribe la ecuación simétrica de la recta que pasa por el punto $(2;1;3)$ y es paralela a la recta de ecuación

$$\frac{x-3}{3} = 5 - y = \frac{z}{4}.$$

53. Determina el punto de intersección de los planos:
   $3x + 2y - z - 3 = 0$, $2x - 3y - 3z - 4 = 0$ y $x + 7y - 2z + 7 = 0$.

54. Determina las posiciones relativas de los siguientes planos:
   a) $x - 2y - z + 2 = 0$, $3x - 6y - 3z + 5 = 0$
   b) $2x - 5y - 3 = 0$, $x + 2y - z = 0$
   c) $x + 3y - 2 = 0$, $x - 5y + 5 = 0$

55. Halla el punto de intersección de las rectas:

a) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-7}{-1}$, $\frac{x+5}{5} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-9}{-1}$

b) $x = \frac{4y+11}{3} = 4z + 17$, $x = \frac{z+3}{-1} = \frac{y+1}{-1}$

c) $\frac{x}{2} = y - 1 = 3z + 1$, $\frac{x+2}{6} = \frac{y}{3} = z$

56. Determina la posición relativa de las rectas:

a) $x = 2y - 3 = \frac{2z-1}{5}$ y el plano $4x - 2y + z - 3 = 0$,

b) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{-1}$; $z = 0$ y los planos coordenados.

Respuestas de los ejercicios

CAPÍTULO 1

Epígrafe 1

$\boxed{5}$ a) $n>0$; b) $n\geqslant 0$; c) $n>0$; d) $n = 0, n = 1, n>4$; e) $n>1$.

$\boxed{11}$ a) 5 200; b) 11 400; c) 1 000 477,5.

$\boxed{14}$ a) 2 186; b) $\dfrac{2\,047}{256}$; c) 5 462.

$\boxed{15}$ El razonamiento del paso de k a $k + 1$ es válido para $k\geqslant 2$. Pero para $k = 2$ la proposición es falsa.

Epígrafe 2

$\boxed{1}$ 15.

$\boxed{2}$ 9.

$\boxed{3}$ 25; 20.

$\boxed{4}$ 153.

$\boxed{5}$ 12.

$\boxed{6}$ 147.

$\boxed{7}$ 30.

$\boxed{8}$ 1 160.

$\boxed{9}$ 12.

$\boxed{10}$ 24.

$\boxed{11}$ a) 36; b) 9; c) 27; d) 12; e) 16.

$\boxed{12}$ 49; 42.

$\boxed{13}$ 125; 75.

14 450.

15 200.

16 9 000.

17 5 832.

19 738.

20 103 920.

21 1 024.

22 768.

23 62.

24 87; 1 833; $b - a + 1$.

25 a)5; b)21; c)$n + 1$.

26 15.

27 8.

28 167.

29 30.

30 a) 50%; b) 10%.

31 La cantidad de muchachas que no practican deportes ni tienen buenas notas es negativa (–2) lo cual es imposible.

Epígrafe 3

1 0,6.

2 $\frac{3}{28}$.

3 0,8.

4 $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}$.

5 $\frac{1}{6}$.

6 $\frac{5}{12}$.

7 $\frac{1}{6}$.

8 a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{1}{3}$.

$\boxed{9}$ 0.

$\boxed{10}$ $0; \frac{5}{7}; \frac{2}{7}; 1.$

$\boxed{11}$ a) $\frac{1}{24}$; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{23}{24}$.

$\boxed{12}$ a) 0,384; b) 0,096; c) 0,008.

$\boxed{13}$ $\frac{1}{90}$.

$\boxed{14}$ Obtener 10 puntos porque la probabilidad de obtener suma 10 es $\frac{27}{216}$ mientras que la de suma 9 es $\frac{25}{216}$.

$\boxed{16}$ $\frac{16}{55}$.

$\boxed{17}$ a) 0,858; b) 0,228.

$\boxed{18}$ 0,625.

$\boxed{19}$ $\frac{1}{2^{n-1}}$.

Epígrafe 4

$\boxed{1}$ *AB. AC. AD. AE. AF. BA. BC. BD. BE. BF. CA. CB. CD. CE. CF. DA. DB. DC. DE. DF. EA. EB. EC. ED. EF. FA. FB. FC. FD. FE.*

$\boxed{2}$ 123; 124; 132; 134; 142; 143; 213; 214; 231; 234; 241; 243; 312; 314; 321; 324; 341; 342; 412; 413; 421; 423; 431; 432.

$\boxed{3}$ 2 520.

$\boxed{4}$ 5 040.

$\boxed{5}$ $V_4^7 = 840$.

$\boxed{6}$ $V_2^{30} = 870$.

$\boxed{7}$ $P_8 = 40\ 320$.

$\boxed{8}$ $V_2^6 = 30$.

$\boxed{9}$ $V_3^5 = 60$.

$\boxed{10}$ $V_3^5 = 60$; $V_2^4 = 12$.

$\boxed{11}$ $V_2^5 = 20$.

$\boxed{12}$ $V_1^6 + V_2^6 + V_3^6 = 156$.

$\boxed{13}$ $P_4 = 24$; $2 \cdot P_3 = 12$.

$\boxed{14}$ $V_5^8 = 6\ 720$.

15 azul rojo blanco, azul blanco rojo, rojo azul blanco, rojo blanco azul, blanco rojo azul, blanco azul rojo.

16 $P_4 = 24$. AMOR, AMRO, AOMR, AORM, AROM, ARMO, MAOR, MARO, MOAR, MORA, MRAO, MROA, OAMR, OARM, OMAR, OMRA, ORAM, ORMA, RAMO, RAOM, ROAM, ROMA, RMAO, RMOA.

17 $P_9 = 362\,880$, $P_7 = 5\,040$.

18 $P_6 = 720$. $6! - 2 \cdot 5! = 480$.

19 $P_4 = 24$.

20 $\frac{1}{2} P_7 = 2\,520$.

21 $P_{10} = 3\,628\,800$.

22 *ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE.*

23 $C_4^8 = 70$.

24 $C_2^{20} = 190$. $C_3^{20} = 1\,140$.

25 $C_3^{20} = 1\,140$.

26 $C_2^{12} - C_2^4 + 1 = 61$.

27 $C_2^n - n = \frac{n(n-3)}{2}$.

28 $9 \cdot C_2^8 = 252$.

29 $C_1^3 \cdot C_2^6 \cdot C_{20}^{60}$.

30 $C_{12}^{17} - C_{10}^{15} = 3\,185$.

31 $3, C_3^{10} - 4 = 116$.

32 $C_6^{10} \cdot (C_6^{10} - 1)(C_6^{10} - 2) = 9\,129\,120$.

33 $C_3^5 = 10$.

34 243. 768.

35 $P_4 = 24$.

36 a) $P_9 = 362\,880$; b) $2 \cdot P_4 \cdot P_5 = 5\,760$; c) $P_4 \cdot P_6 = 17\,280$; d) $P_4 \cdot P_5 = 2\,880$.

37 $C_8^{10} = 45$. $C_{10}^{10} + C_9^{10} + C_8^{10} = 56$.

38 $C_2^4 \cdot C_4^7 + C_3^4 \cdot C_3^7 + C_4^4 \cdot C_2^7 = 371$.

39 $C_3^{20} \cdot C_2^{20} \cdot C_1^{20}$.

40 $\frac{24}{C_2^{10}} = \frac{8}{15}, \frac{7}{15}$.

41 $\dfrac{2 \cdot P_2 \cdot P_2}{P_4} = \dfrac{1}{3}$.

42 $\dfrac{2}{C_2^5} = \dfrac{1}{5}$.

43 $\dfrac{2 \cdot C_3^5 + C_2^5 \cdot C_2^3}{90\ 000} = \dfrac{1}{1\ 800}$.

44 $\dfrac{4 \cdot P_3}{V_3^5} = 0{,}4$.

45 $\dfrac{1}{P_4} = \dfrac{1}{24}$, $\dfrac{23}{24}$.

46 No. Tienen aproximadamente 44,4% de posibilidades.

47 $\dfrac{V_4^6}{1\ 296} = \dfrac{5}{18}$.

48 a) $\dfrac{C_2^4}{C_2^{12}} = \dfrac{1}{11}$; b) $\dfrac{C_2^8}{C_2^{12}} = \dfrac{14}{33}$; c) $\dfrac{C_1^8 \cdot C_1^4}{C_2^{12}} = \dfrac{16}{33}$; d) $\dfrac{10}{11}$.

49 $\dfrac{7!}{7^7} \approx 0{,}006$.

Epígrafe 5

1 a) $m^6 + 6m^5n + 15m^4n^2 + 20m^3n^2 + 15m^2n^4 + 6mn^5 + n^6$

b) $a^4 + 12a^3 + 54a^2 + 108a + 81$

c) $a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

d) $h^5 - \dfrac{5}{2}h^4 + \dfrac{5}{2}h^3 - \dfrac{5}{4}h^2 + \dfrac{5}{16}h - \dfrac{1}{32}$.

2 $\binom{11}{8} = 165$; b) $\binom{5}{2} \cdot 2^2 = 40$.

3 a) $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$

b) $16x^4 + 160x^3y + 600x^2y^2 + 1000xy^3 + 625y^4$

c) $4 + 8\sqrt{2}a + 12a^2 + 4\sqrt{2}a^3 + a^4$

d) $\dfrac{1}{64}u^{12} - \dfrac{3}{64}u^{10}v + \dfrac{15}{256}u^8v^2 - \dfrac{5}{128}u^6v^3 + \dfrac{15}{1\ 024}u^4v^4 - \dfrac{3}{1\ 024}u^2v^5$

$+ \dfrac{1}{4\ 096}v^6$.

4 a) $\binom{28}{4} = 20\ 475$, $\binom{28}{6} = 376\ 740$, $\binom{28}{9} = 6\ 906\ 900$.

Sí pues $\binom{28}{4} = \binom{28}{24}, \binom{28}{6} = \binom{28}{22}$

y $\binom{28}{9} = \binom{28}{19}$;

b) $\binom{28}{11} = 21\ 474\ 180$.

5 a) $-3\ 003x^{10}y^5$; b) $-960a^3x^7$; c) $2\ 268x^6y^3$; d) $320\ 320a^6b^9$

6 a) $\binom{14}{7}$; b) $\binom{9}{6} \cdot \frac{27}{64}$; c) $\binom{7}{5} \cdot 32$; d) $\binom{3n}{n}$.

7 a) $2x^4 + 12x^2 + 2$; b) $24a + 128a^3$.

Ejercicios del capítulo

1 36.

2 $C_{14}^{20} = 38\ 760$.

3 $P_{18} \cdot V_3^{18} = 4\ 896$.

4 a) $P_7 = 5\ 040$; b) $C_2^9 = 36$; c) $C_2^7 \cdot C_2^9 = 756$.

5 $\frac{1}{V_4^5} = \frac{1}{120}$.

6 a) $\frac{C_2^9}{C_2^{14}} = \frac{36}{91}$; b) $\frac{5 \cdot 9}{C_2^{14}} = \frac{45}{91}$; c) $\frac{55}{91}$.

7 $\frac{2}{29}$.

8 a) 20; b) $\frac{20}{C_4^{16}} = \frac{1}{91}$.

9 b) $\frac{N(N+1)}{2}$; c) 14.

11 b) 1 4 6 4 1; 1 5 10 10 5 1; 1 6 15 20 15 6 1; 1 7 21 35 35 21 7 1.

CAPÍTULO 2

Epígrafe 1

1 a) $\mathbb{Q}_+$; b) $\mathbb{Z}$; c) $\mathbb{R}$; d) $\mathbb{R}$; e) $\mathbb{R}$; f) $\mathbb{R}$; g) $\mathbb{N}$; h) $\mathbb{N}$;
i) $\mathbb{N}$; j) $\mathbb{Z}$[1]; k) $\mathbb{R}$; l) $\mathbb{Q}_+$; m) $\mathbb{Q}_+$; n) $\mathbb{Z}$; ñ) $\mathbb{N}$; o) $\mathbb{N}$;
p) $\mathbb{N}$; q) $\mathbb{Q}_+$; r) $\mathbb{R}$; s) $\mathbb{R}$; t) $\mathbb{N}$; u) $\mathbb{N}$; v) $\mathbb{R}$.

2 a) V; b) F; c) F; d) V; e) F; f) V; g) F; h) V; i) V; j) V; k) F; l) V[1].

[1] La fundamentación la aprenderás en cursos posteriores.

$\boxed{3}$ a) $\in$; b) $\in$; c) $\not\subset$; d) $\in$; e) $\not\subset$; f) $\in$.

$\boxed{4}$ a) $\not\subset$; b) $\in$; c) $\not\subset$; d) $\notin$; e) $\not\subset$; f) $\in$.

$\boxed{5}$ $A = \left\{0; \sqrt{25}\right\}$, $B = \left\{\frac{1}{2}; 0; -1; \frac{5}{3}; 2{,}\overline{09}; \sqrt{25}\right\}$;

$C = \left\{0; -1; \sqrt{25}\right\}$, $D = U$, $E = \left\{\pi; -\sqrt{6}; e\right\}$, $F = \emptyset$.

$\boxed{6}$ $(x - 1)(x^2 + x + 1)$

$\boxed{7}$ a) Sí; b) Sí; c) Sí d) No; e) No.

$\boxed{9}$ a) V; b) F; c) V; d) No es proposición; e) V; f) F.

$\boxed{10}$ a) $\in$; b) $\not\subset$; c) $\in$; d) $\in$; e) $\in$; f) $\subset$.

$\boxed{11}$ a) $\notin$; b) $\not\subset$; c) $\not\subset$; d) $\in$; e) $\subset$

$\boxed{12}$ a) V; b) F; c) F; d) F.

$\boxed{13}$ a) $8 + 5i$; b) $5 + 12i$; c) $-3 + 7i$; ch) $-7 - 3i$;
d) $13 - 9i$; e) $-16 - 9i$; f) $-1 - i$; g) $-4 + 3i$;
h) $7 + 6i$; i) $9 - 2i$; j) $12 - 2i$; k) 6; l) $3 + 3i$;
ll) $10 + 8i$; m) 1; n) $-10 - 7i$; ñ) 13;

o) $(2p + n) - \dfrac{6q + m}{2}i$; p) $-\dfrac{13}{15} - \dfrac{2}{5}i$; q) $0{,}137 + i$;

r) $\dfrac{yz + x}{y} + \dfrac{x^2y^2 + 1}{y^2}i$; s) 1; t) $2 + 2i$; u) $\dfrac{3}{4}$;

v) $9 - i$; w) $17 + 5i$; x) $11 - i$; y) $(-2 + 2y) + 12i$; z) $-\dfrac{1}{5}i$.

$\boxed{14}$ a) $2 - 2i$; b) $-11 - 4i$; c) $15 + 5i$; d) $3i$; e) $-2 + 5i$; f) $-2 + i$.

$\boxed{15}$ a) $18 + 14i$; b) 6; c) $10i$; d) $20 + 8i$; e) $-20 - 15i$; f) $-\dfrac{1}{2} - i$; g) 13;

h) $26 - 13i$; i) $8 - 10i$; j) $-8 + 9i$; k) $-39 + 39i$.

$\boxed{16}$ a) $6{,}5 + 3i$; b) $15{,}8 + 3{,}72i$; c) $-116 - 9i$;
d) $-8{,}62 - 0{,}333i$; e) $6 - 5i$; f) $9{,}84 + 16{,}8i$;
g) $-0{,}667 + 23{,}3i$; h) 0; i) $-7{,}6 + 2{,}1i$;
j) $24i$; k) $4i$; l) $3 - 0{,}318i$; m) $8{,}94 - 132i$.

$\boxed{17}$ a) $x_1 = -0{,}56$; $x_2 = 3{,}56$; $y = 7$,
b) $x = \dfrac{8}{3}$; $y = \dfrac{4}{3}$

c) No existen, d) $x = 0$; $y = 2$, e) $x_1 = 0$; $y_1 = 4$, $x_2 = 4$; $y_2 = 0$,

f) $x = -\frac{17}{3}$; $y = -\frac{16}{3}$, g) $x = -2$; $y = 3$, h) $x = 4$; $y = 0$,
i) No existen, j) No existen, k) $x = 1$; $y = -3$,
l) No existen, m) No existen, n) $x = 2{,}5$; $y \in \mathbb{R}$,
ñ) No existen, o) $x = 0$; $y = 3$.

18 a) $x_1 = 2$, $y_1 = 3$; $x_2 = -1$, $y_2 = -6$,
b) $x = \pm 4{,}22$; $y = \pm 4{,}20$,
c) $x = 2$; $y = 1$, d) $x = 1$; $y = 1$.

19 a) $x = -\frac{23}{26}$; $y = \frac{15}{26}$, b) $x = \frac{29}{17}$; $y = \frac{31}{17}$,

c) $x = -\frac{11}{29}$; $y = \frac{13}{29}$, d) $x = 1$; $y = 1$.

Epígrafe 2

1 a) real: 3, imag: -4; b) real: 1, imag: 2,5;
c) real: $x - xy + 3$, imag: -4; d) real: $x^2 + y^2$, imag:0;
e) real:8, imag:-1; f) real:$2\sqrt{5} + 1$, imag: $2 - \sqrt{5}$;
g) real: 0, imag: 3; h) real: 0, imag: -1;
i) real: 12 cos 48°, imag: -12 sen 48°;
j) real: $\sqrt{5}$, imag: $1 + \sqrt{2}$; k) real: $5^{0,6}$, imag: $-10^{3/4}$;
l) real: $-0{,}5$, imag: 2,5;
m) real: $-2(4x + y) + \sqrt{3}(xy - 4)$, imag: $\sqrt{3}(4x + y) + 2(xy - 4)$;
n) real: -119, imag: -120.

2 reales: b, d, g, i, k; imaginarios puros: c, e, f, l.

3 a) imag. puro si: $x = 12$ o $x = 2$; real si: $y = \frac{1}{2}$,

b) imag. puro si: $x = 5$ o $x = -3$; no existe $y \in \mathbb{R}$

c) imag. puro si: $x = -\frac{5}{8}$ o $x = 2$; real si: $y = \pm 3$.

4 a) $a = -7$; b) $a = 3$; c) $b = -2$ d) $b = 4$; e) $a = \frac{13 + 3b}{5}$;

f) $a = -\frac{2b + 13}{b - 1}$.

5 $ac = bd$.

6 a) $\frac{3}{2} + \sqrt{2}i$; b) $-5 - 3i$; c) $\sqrt{7} + i\, 3 \log 5$; d) $-1 - 2\sqrt{6}i$; e) $2 + i$;

f) $2{,}08 + 2{,}46i$;

g) $-11+3i$; h) -4; i) 4; j) $-33-38i$; k) 7;

l) $\sqrt[3]{100}+(\sqrt[4]{125}+2\sqrt{2})i$; m) $(2+\sqrt{3})+i$; n) $(6-\sqrt{5})-9i$;

ñ) $(-4\sqrt{2}+\sqrt{3})-(\sqrt{6}+4)i$; o) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$; p) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$; q) $2\sqrt{3}-2i$;

r) $\rho(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)$; s) $-2i$; t) $\log 5+(3^{1.5}+\log 3)i$;
u) $-0{,}236+2{,}29i$; v) $-0{,}81-1{,}18i$.

7 $\bar{z}=33+26i$.

8 $\mathscr{R}(z)=-1$; $(z)=-3$.

10 a) $0;1;-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$; b) $0;-1;\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

11 $x=-2$, $y=\pm 4$.

12 a) $|z|=5$; b) $|z|=25$; c) $|z|=2$; d) $|z|=1$;
e) $|z|=\sqrt{2}$; f) $|z|=x^2+y^2$; g) $|z|=7$; h) $|z|=\sqrt{27}$;
i) $|z|=1{,}73$; j) $|z|=17$; k) $|z|=25$; l) $|z|=2{,}66$;
m) $|z|=2$.

13 a) $|w|=1{,}8$; b) $|w|=0{,}71$; c) $|w|=4{,}08$;
d) $|w|=0{,}19$; e) $|w|=2{,}83$; f) $|w|=3{,}75$.

14 a) $1{,}5-0{,}5i$; b) $\frac{9}{17}+\frac{2}{17}i$; c) $\frac{5}{2}$; d) $\frac{5}{13}+\frac{14}{13}i$;

e) $3-i$; f) $\frac{90}{29}\cdot\frac{80}{29}i$; g) $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i$; h) $1{,}6-0{,}8i$;

i) $2{,}2+0{,}4i$; j) $-1+i$; k) $-4-15i$; l) $4{,}7+1{,}71i$;

m) $\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i$; n) -2; ñ) $\frac{9\sqrt{2}}{2}+\frac{9\sqrt{2}}{2}i$.

16 a) $3+i$; b) $-2i$; c) $2{,}5-1{,}5i$; d) $-\frac{11}{61}-\frac{60}{61}i$;

e) $-\frac{5}{9}-\frac{4}{3}i$.

17 $-\frac{35}{52}+\frac{33}{52}i$.

18 a) $|z|=\frac{13}{17}$; b) $|z|=12{,}3$; c) $|z|=8{,}92$;

d) $|z|=1{,}19$; e) $|z|=2{,}5$; f) $|z|=7{,}5$.

19 2,08.

20 a) $-i$; b) $2-2i$; c) $2{,}73i$; d) $-i$; e) $0{,}365-1{,}37i$.

21 $x=13{,}5$; $y=14{,}5$.

22 $a^2+b^2=1$.

23 $a=\dfrac{3}{4}\,b$.

24 a) $x=-\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}\,i$; b) $x=\dfrac{7}{13}+\dfrac{22}{13}\,i$; c) $x=\dfrac{1}{41}+\dfrac{9\sqrt{2}}{41}\,i$;

d) $x=-0{,}9+0{,}2i$.

26 a) $k=-9$; b) $k=1$.

27 a) $z_1=1-i$, $z_2=-1$; b) $z_1=-1+2i$, $z_2=-2+4i$;

c) $z_1=\dfrac{17}{19}+\dfrac{22}{19}\,i$, $z_2=-\dfrac{16}{19}-\dfrac{14}{19}\,i$;

d) $z_1=-\dfrac{24}{117}-\dfrac{3}{117}\,i$, $z_2=\dfrac{8}{13}-\dfrac{i}{13}$.

28 $3-i$ y $1+i$; $-1-i$ y $-3+i$.

29 $2+3i$ y $-2-4i$.

30 No existen.

31 a) $\dfrac{23}{6}-\dfrac{2}{3}\,i$;

b) $-\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{17\sqrt{2}}{2}\,a+\dfrac{13\sqrt{2}}{2}\,b\right)+\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{17\sqrt{2}}{2}\,b-\dfrac{13\sqrt{2}}{2}\,a\right)i$;

c) $10{,}6-2{,}76i$; d) $1068+124i$; e) N.S.; f) $-8i$;

g) $\dfrac{4e-1}{2}-\dfrac{16+e}{4}\,i$; h) -1 (con los conocimientos que tienes por ahora no puedes llegar al resultado).

i) $-352-936i$.

32 a) $z=\pm 3i$; b) $z_1=0$, $z_2=3$; c) $z=\pm\sqrt{15}\,i$;

d) $z_{1,2}=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$; e) $z_1=\sqrt{3}+i$, $z_2=-\sqrt{3}+i$, $z_3=-2i$;

f) $z_1=0$, $z_2=\sqrt{2}\,i$; g) $z_1=0$, $z_2=2+2i$, $z_3=-2-2i$;
h) $z_1=4$, $z_{2,3}=-2\pm 3{,}47i$; i) $z=\pm i$; j) $z_{1,2}=1{,}5\pm 2{,}65i$;
k) $z_{1,2}=0{,}5\pm 2{,}18i$; l) $z_{1,2}=0{,}705\pm 1{,}32i$.

Epígrafe 3

3 a) $-1+i$; $3-2i$; $3+i$; $-1-2i$; b) $5+2i$; $3+5i$, $1+2i$;
c) 1, -3, $-2+2i$, $2+2i$; d) 0; 6; $5+3i$; $1+3i$.

4 a) 4 y $3i$; b) 4; $-2 + 3i$ y $2 + 3i$; c) 4 y $1 + 2i$;
d) 6 y $-1 + 3i$, -4 y $-1 - 3i$.

5 a) 5; 73,7°, b) 4; 67,4°; 56,3°; 56,3°,
c) lados: 4 y 2; diagonales: 5,39 y 3,61;
ángulos: 63,4° y 116,6° (los opuestos son iguales)
d) lados: 4; 6; 3,16 y 3,16; diagonales: 5,83; ángulos: 108,4°; 71,6°; ángulo que forman las diagonales: 61,9°.

8 a) $z' = z + 2$; b) $z' = z - 2 + \frac{1}{2}i$; c) $z' = z + \sqrt{2}(1 + i)$;

d) $z' = z \cdot i$; e) $z' = z \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$; f) $z' = 3z$;

g) $z' = \frac{1}{2}(-1 + i + z)$; h) $z' = \bar{z}$; i) $z' = \ -\bar{z}$;

j) $z' = \ -z$; k) $z' = \ -z + 4 - 2i$; l) $z' = \bar{z} + 2i$;

m) $z' = \ -\bar{z} - 2$; n) $z' = \frac{1}{2}\bar{z}(1 + i)^2$;

ñ) $z' = \frac{1}{2}z\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$;

o) $z' = 5(z - 3 - 4i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) + 3 + 4i$.

9 Se ha trasladado z en la dirección de la diagonal del tercer cuadrante y se rota un ángulo de 60° con centro en el origen. El punto invariante es

$$z = \frac{1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})i}{2}.$$

10 Isósceles.

11 Si el eje real es la recta determinada por el cedro y la palmera, el eje imaginario es la mediatriz del segmento determinado por ambos y la palmera es el punto $z = 1$, el tesoro está en el punto $z = \ -i$, cualquiera sea la posición de la horca.

Epígrafe 4

1 a) 2 cis 180°; b) 2 cis 90°; c) 2 cis 45°; d) 4 cis 120°;
e) 2 cis 60°; f) 5 cis 36,8°; g) 5 cis 300°;
h) $\sqrt{13}$ cis 344,2°; i) cis $(2\pi - \theta)$; j) 10 cis 120°;

k) 3 cis (240°); l) cis $\left(\frac{7\pi}{4}\right)$; m) cis $\left(\frac{5\pi}{3}\right)$;

n) $\frac{\sqrt{61}}{25}$ cis 50,2°; ñ) 0,173 cis 133,8°; o) 0,3 cis 325,6°.

$\boxed{2}$ a) i; b) -2; c) -4; d) $-5 - 5i$; e) $0{,}633 + 0{,}402i$;
f) $3 - 3i$; g) $1{,}71 + 1{,}44i$; h) $1{,}67 - 0{,}488i$;
i) $2{,}83 - 1{,}64i$; j) $2{,}42 + 0{,}650i$; k) $1{,}46 - 2{,}24i$;
l) $-0{,}285 + 0{,}0249i$; m) $-3{,}56 - 1{,}51i$; n) $1{,}53i$;
ñ) $1{,}99 + 0{,}822i$; o) 1.

$\boxed{3}$ a) $|w| = 2\sqrt{2}$; $\theta = 45°$, b) $|w| = \sqrt{5}$; $\arg w = 243{,}4°$,

$\boxed{4}$ a) $\rho = \sqrt{2}$; $\theta = 255°$, b) $\rho = 4\sqrt{2}$; $\theta = 315°$.

c) $\rho = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}433$; $\theta = 0°$, d) $\rho = 4$; $\theta = 30°$

$\boxed{6}$ $\rho_1 = \rho_2$; $\theta_1 = \theta_2$ (en el periodo principal)

$\boxed{7}$ a) $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = 4 - 3i$ y $z_3 = 2 - 3i$; $z_4 = 4 + 3i$,

$z_1 \cdot z_2 = 17 + 6i$; $z_3 \cdot z_4 = 17 - 6i$; $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{-1 + 18i}{25}$;

$\dfrac{z_3}{z_4} = \dfrac{-1 - 18i}{25}$.

$\boxed{8}$ a) $2 \text{ cis } 45°$; b) -1; c) $3{,}36 \text{ cis } 9°$;

d) $\dfrac{1}{6} \text{ cis } 7\pi/12 \approx 0{,}167 \text{ cis } \dfrac{7\pi}{12}$; e) 1; f) $\dfrac{\sqrt{2}}{5} \text{ cis } 36° \approx 0{,}283 \text{ cis } 36°$;

g) $0{,}847 \text{ cis } 5$; h) $\dfrac{2}{15} \text{ cis } 127° \approx 0{,}33 \text{ cis } 127°$; i) $\sqrt{20} \text{ cis } 151° \approx 4{,}47 \text{ cis } 151°$;

j) $1{,}11 \text{ cis } 353°$; k) $\dfrac{2}{11} \text{ cis } 237° \approx 0{,}82 \text{ cis } 237°$;

l) $0{,}367 \text{ cis } 98{,}3°$; m) $\dfrac{2}{15} \text{ cis } \dfrac{11\pi}{12} \approx 0{,}133 \text{ cis } \dfrac{11\pi}{12}$;

n) $11{,}7 \text{ cis } 212°$; ñ) $1{,}78 \text{ cis } 5{,}6$; o) $\text{cis } 194°$;
p) $-2i$; q) $7{,}75 \text{ cis } 2{,}13$.

$\boxed{9}$ a) $4 \text{ cis } 30°$; b) $0{,}775 \text{ cis } 120°$; c) $40 \text{ cis } 37°$;

d) $1{,}5 \text{ cis } \dfrac{14\pi}{9}$; e) $5 \text{ cis } \dfrac{13\pi}{9}$; f) $2{,}17 \text{ cis } 0{,}5$;

g) $0{,}697 \text{ cis } 181°$; h) $\dfrac{3}{13} \text{ cis } 175° \approx 0{,}231 \text{ cis } 175°$;

i) $\dfrac{4}{17} \text{ cis } 285° \approx 0{,}235 \text{ cis } 285°$; j) $3\sqrt{85} \text{ cis } 1{,}61 \approx 27{,}7 \text{ cis } 1{,}61$;

k) $0{,}788 \text{ cis } 3{,}49$; l) $\text{cis } 1{,}02$; m) $2\sqrt{2} \text{ cis } 258° \approx 2{,}83 \text{ cis } 258°$;
n) $0{,}671 \text{ cis } 149°$;

ñ) $\frac{65}{72}$ cis 88,8°≈0,903 cis 88,8°;

o) cis 345°; p) cis 5,28; q) $\sqrt{51}$ cis 180°≈-7,14;
r) 0,832 cis 344°; s) 5 cis 15°;

10 a) $\frac{2}{3}$ cis 333°≈0,667 cis 333°; b) –1; c) $\frac{5}{6}$ cis 25°≈0,833 cis 25°; d) 0,5.

11 a) $\sqrt{2}$cis 105°; b) cis 210°; c) $\sqrt{2}$cis 165°; d) 0,47 cis 198,3°.

12 a) $\rho = \sqrt{2}$; $\theta = 45°$, b) $\rho = 1$; $\theta = 270°$, c) $\rho = 1$; $\theta = 315°$.

13 $|w| = \frac{\sqrt{2}}{4}$; arg $(w) = 315°$.

14 a) $3{,}43 + 4{,}75i$; b) $2{,}43 - 0{,}183i$; c) $-0{,}73-2{,}73i$; d) $-30 - 30i$;
e) $-3{,}1 - 0{,}635i$; f) $-1{,}38 - 0{,}0489i$; g) $\frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}i$.

15 $a = 0$; $b = 1$.

16 a) $\frac{\sqrt{2}}{3}$; b) $-2\sqrt{6}-2\sqrt{6}i$; c) $3{,}76 + 1{,}37i$.

17 a) $x = -2\sqrt{3}$; $y = -2$, b) $|\overline{z^{1}}| = \frac{1}{4}$; arg $(\overline{z^{1}}) = 210°$.

18 a) $-\sqrt{3} - i$.

19 $z = i$.

20 $z_1 = 1 + 2i$; $z_2 = 4 - 2i$ y $z_1 = 1 - 2i$; $z_2 = 4 + 2i$.

21 a) $z_1 = -\rho \operatorname{sen}\theta + i \cdot \rho\cos\theta$; b) son perpendiculares;

c) $x\cos\theta + y \operatorname{sen}\theta = \rho$; d) $x_0 = \frac{\rho}{\cos\theta}$; $y_0 = \frac{\rho}{\operatorname{sen}\theta}$;

e) $A = \frac{\rho}{\operatorname{sen}^2\theta}$; f) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$.

22 a) 1; –1, b) cis $\frac{\pi}{4}$; cis $\frac{3\pi}{4}$; cis $\frac{5\pi}{4}$; cis $\frac{7\pi}{4}$, c) i; $-i$

Epígrafe 5

1 a) $12i - 5$; b) $-2 + 2i$; c) $-7 - 24i$; d) $10i - 24$; e) $-11 - 60i$; f) $-2i$;
g) $0{,}888 + 0{,}479i$ (no se puede calcular con los conocimientos del curso);
h) $x^2 - 2ix + 1$; i) $\pm(2 + i)$.

2 a) $z^4 = 16$ cis 120°, $z^5 = 32$ cis 150°, $z^6 = -64$;

b) $31{,}9 \operatorname{cis} 304°$; c) $\operatorname{cis} 5{,}72$; d) $625 \operatorname{cis} \frac{8\pi}{5}$;

e) $7{,}80 \cdot 10^{-2} \operatorname{cis} 6$; f) $\operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}$; g) $1{,}42 \cdot 10^{6} \operatorname{cis} 5$;

h) -1 ; i) $1{,}15 \cdot 10^{4}$; j) $\operatorname{cis} \frac{10\pi}{9}$; k) $256 \operatorname{cis} 100°$;

l) $343 \operatorname{cis} 240°$; m) $9{,}77 \cdot 10^{-4} i$; n) $3{,}38 \operatorname{cis} 54{,}6°$;

ñ) $9 \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}$; o) $1{,}26 \operatorname{cis} 60°$; $1{,}26$; $1{,}26 \operatorname{cis} 300°$;

p) $170 \operatorname{cis} 225°$; q) $5{,}66 \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$; r) $\operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}$;

s) $614 \operatorname{cis} 6°$; t) $-1{,}07 \cdot 10^{9}$; u) $1{,}27 \cdot 10^{30} \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}$;

v) $-6{,}67 \cdot 10^{21}$; w) $7{,}35 \cdot 10^{-9} \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}$.

3 a) -1; b) $i + 1$; c) 0; d) $-3i$; e) $-4 - 4i$; f) 0 ; g) $-i$.

4 $1{,}63 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{4}$.

5 a) $-7 + 12i$; b) 2 ; c) -1 ; d) 0 (si n es impar); 2 (si $n = 4k$); -2 (si $n = 4k + 2$).

6 12,[illegible] $+ 4{,}75\, i$.

7 $|w| = 11{,}3$; $\arg (w) = \frac{4\pi}{3}$

8 $|z| = 3$; $\arg (z) = 0$.

9 $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\theta = \pi$.

10 $|z| = 1$; $\arg (z) = 0°$.

11 a) $\operatorname{cis} \frac{7\pi}{4}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$; c) $\frac{\pi}{4}$

12 $|z| = 3{,}57$; $\arg (z) = 209°$.

13 $\operatorname{cis} 120°$.

14 a) $6 \operatorname{cis} \frac{\pi}{12}$, $-6 \operatorname{cis} \frac{\pi}{12} = 6 \operatorname{cis} \frac{13\pi}{12}$;

b) $\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{12}$; $-\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{13\pi}{12}$;

c) $\sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{5\pi}{4}$; $-\sqrt[4]{2}\operatorname{cis}\dfrac{5\pi}{4} = \sqrt[4]{2}\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{4}$;

d) $\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{6}$; $-\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{6} = \operatorname{cis}\dfrac{7\pi}{6}$;

e) $\sqrt{5}\operatorname{cis} 135°$; $-\sqrt{5}\operatorname{cis} 135° = \sqrt{5}\operatorname{cis} 315°$.

f) 2,53 cis 70,5°; − 2,53 cis 70,5° = 2,53 cis 250,5°;

g) 3,61 cis 163°; -3,61 cis 163° = 3,61 cis 243 .

h) $\pm 2\sqrt{2}i$; i) 1,50 cis 58,3°; -1,50 cis 58,3°; 1,50 cis 238,3°;

j) 1,78 cis 171°; -1,78 cis 171° = 1,78 cis 351°;

k) 2,38 cis $\dfrac{\pi}{8}$; -2,38 cis $\dfrac{\pi}{8}$ = 2,38 cis $\dfrac{9\pi}{8}$;

l) 2,66 cis $\dfrac{5\pi}{8}$; -2,66 cis $\dfrac{5\pi}{8}$ = 2,66 cis $\dfrac{13\pi}{8}$;

m) 2,59 cis 122°; -2,59 cis 122° = 2,59 cis 302°;

n) 1,90 cis 73,2°; -1,90 cis 73,2° = 1,90 cis 253,2°;

ñ) 3,16 cis 63,4°; -3,16 cis 63,4° = 3,16 cis 243,4°;

o) 4 cis $\dfrac{\pi}{4}$; -4 cis $\dfrac{\pi}{4}$ = 4 cis $\dfrac{5\pi}{4}$.

15 a) 2 cis 20°; 2 cis 140°; 2 cis 260°;

b) 3 cis 30°; 3 cis 120°; 3 cis 210°; 3 cis 300°;

c) 2 cis 30°; 2 cis 102°; 2 cis 174°; 2 cis 246°; 2 cis 318°;

d) 1,21 cis 8,33°; 1,21 cis 68,3°; 1,21 cis 128,3°; 1,21 cis 188,3°; 1,21 cis 248,3°; 1,21 cis 308,3°;

e) cis 0,429; cis 1,33; cis 2,22; cis 3,12; cis 4,02; cis 4,92; cis 5,81;

f) cis $\dfrac{5\pi}{18}$; cis $\dfrac{17\pi}{18}$; cis $\dfrac{31\pi}{18}$;

g) 1,58 cis $\dfrac{\pi}{12}$; 1,58 cis $\dfrac{17\pi}{60}$; 1,58 cis $\dfrac{29\pi}{60}$;

1,58 cis $\dfrac{81\pi}{60}$; 158 cis $\dfrac{53\pi}{60}$; 1,58 cis $\dfrac{13\pi}{12}$;

1,58 cis $\dfrac{77\pi}{60}$; 1,58 cis $\dfrac{89\pi}{60}$; 1,58 cis $\dfrac{101\pi}{60}$; 1,58 cis $\dfrac{113\pi}{60}$;

h) 1,92 cis 0,5; 1,92 cis 2,07; 1,92 cis 3,64; 1,92 cis 5,21;

i) 2,06 cis 8,75°; 2,06 cis 98,8°; 2,06 cis 188,8°; 2,06 cis 278,8°;

j) 1,23 cis 0,763; 1,23 cis 1,81; 1,23 cis 2,86; 1,23 cis 3,90; 1,23 cis 4,95; 1,23 cis 6,00;

k) $2 \text{ cis } \frac{\pi}{9}$; $-2 \text{ cis } \frac{7\pi}{9}$; $2 \text{ cis } \frac{13\pi}{9}$;

l) $\text{cis } \frac{\pi}{24}$ $\text{cis } \frac{13\pi}{24}$; $\text{cis } \frac{25\pi}{24}$; $\text{cis } \frac{37\pi}{24}$;

m) $4 \text{ cis } \frac{11\pi}{30}$; $4 \text{ cis } \frac{23\pi}{30}$; $4 \text{ cis } \frac{35\pi}{30}$; $4\text{cis } \frac{47\pi}{30}$; $4\text{cis } \frac{59\pi}{30}$;

n) 1,82 cis 20°; 1,82 cis 140°; 1,82 cis 260°.

$\boxed{16}$ 2 cis 40°; 2 cis 160°; 2 cis 280°.

$\boxed{18}$ $x = 2$ cis 30° o $x = 2$ cis 150° o $x = 2$ cis 270°.

$\boxed{19}$ a) $1{,}73 \text{ cis } \frac{\pi}{6}$; $1{,}73 \text{ cis } \frac{\pi}{2}$; $1{,}73 \text{ cis } \frac{5\pi}{6}$;

$1{,}73 \text{ cis } \frac{7\pi}{6}$; $1{,}73 \text{ cis } \frac{9\pi}{6}$; $1{,}73 \text{ cis } \frac{11\pi}{6}$;

b) $\text{cis } \frac{\pi}{12}$ $\text{cis } \frac{5\pi}{12}$; $\text{cis } \frac{3\pi}{4}$; $\text{cis } \frac{13\pi}{12}$; $\text{cis } \frac{17\pi}{12}$; $\text{cis } \frac{21\pi}{12}$.

$\boxed{20}$ a) $4\sqrt{2}\text{cis } \frac{2\pi}{3}$,

b) $1{,}78 \text{ cis } \frac{4\pi}{9}$; $1{,}78 \text{ cis } \frac{10\pi}{9}$; $1{,}78 \text{ cis } \frac{16\pi}{9}$.

$\boxed{21}$ cis 100°, cis 220°, cis 340°.

$\boxed{22}$ $1{,}85 \text{ cis } \frac{17\pi}{24}$; $1{,}85 \text{ cis } \frac{25\pi}{24}$; $1{,}85 \text{ cis } \frac{11\pi}{8}$; $1{,}85 \text{ cis } \frac{41\pi}{24}$;

$1{,}85 \text{ cis } \frac{\pi}{24}$; $1{,}85 \text{ cis } \frac{3\pi}{8}$.

$\boxed{23}$ $16\sqrt{2}\text{cis } \frac{17\pi}{12} \approx 22{,}6 \text{ cis } \frac{17\pi}{12}$, $16\sqrt{2}\text{cis } \frac{5\pi}{12} \approx 22{,}6 \text{ cis } \frac{5\pi}{12}$.

$\boxed{24}$ 1; $\text{cis } \frac{\pi}{3}$, $\text{cis } \frac{2\pi}{3}$, $\text{cis } \pi$, $\text{cis } \frac{4\pi}{3}$, $\text{cis } \frac{5\pi}{3}$.

$\boxed{25}$ $\rho = 2$, $\theta_1 = \frac{\pi}{18}$; $\theta_2 = \frac{13\pi}{18}$, $\theta_3 = \frac{25\pi}{18}$.

$\boxed{26}$ $\text{cis } \frac{5\pi}{96}$, $\text{cis } \frac{29\pi}{96}$, $\text{cis } \frac{53\pi}{96}$,

$\text{cis } \frac{77\pi}{96}$, $\text{cis } \frac{101\pi}{96}$, $\text{cis } \frac{125\pi}{96}$,

$\text{cis}\ \dfrac{149\pi}{96}$, $\text{cis}\ \dfrac{173\pi}{96}$.

27 $\rho = 1{,}19$; $\theta_1 = \dfrac{\pi}{3}$, $\theta_2 = \dfrac{5\pi}{6}$, $\theta_3 = \dfrac{4\pi}{3}$, $\theta_4 = \dfrac{11\pi}{6}$.

28 a) $|z| = 16$, $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4}$.

b) $2\ \text{cis}\ \dfrac{7\pi}{16}$, $2\ \text{cis}\ \dfrac{15\pi}{16}$, $2\ \text{cis}\ \dfrac{23\pi}{16}$, $2\ \text{cis}\ \dfrac{31\pi}{16}$.

Epígrafe 6

1 a) 1; 2, b) -1; $\dfrac{1}{2}$, c) 1,79; $-2{,}89$, d) $-\dfrac{2}{3}$; 1,

e) 0,593; $-0{,}843$, f) 0,62; $-1{,}62$; g) $-0{,}5 \pm 1{,}66i$, h) $2i$; $-2i$, i) $\pm i$,

j) $\pm 0{,}787$; $\pm 1{,}27i$, k) $\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; $-\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

l) $0{,}5 \pm 2{,}06i$, m) $\pm 1{,}41\, i$; $\pm i$, n) $0{,}1 \pm 0{,}436i$,
ñ) $1 \pm 3i$. o) $0{,}949 + 3{,}21i$; $-0{,}949 - 5{,}21i$,
p) $2{,}28 - 0{,}439i$; $-2{,}28 + 0{,}439i$, q) $1{,}346 - 1{,}45i$; $0{,}654 + 1{,}45i$,
r) $2 + 3i$; i, s) $1{,}5 + 1{,}32i$; $1{,}5 - 1{,}32i$.

2 a) $z_1 = 1{,}33 - 0{,}5i$, $z_2 = -1{,}33 - 0{,}5i$;
b) $z_1 = -0{,}5 + 1{,}12i$. $z_2 = -1 - 1{,}12i$; c) $z = -i$;
d) $z_1 = 2 - i$. $z_2 = -2 - i$; e) $z_1 = 2i$, $z_2 = -1$;
f) $z_1 = 4 + i$, $z_2 = -4 - i$. $z_3 = 4 - i$, $z_4 = -4 + i$;
g) $z_1 = 1 + 2i$. $z_2 = 1 - 2i$; h) $z_1 = 2 + i$. $z_2 = -2 + i$.

3 a) $36\left[x - \dfrac{b\sqrt{2}}{2}i\right] \cdot \left[x + \dfrac{b\sqrt{2}}{2}i\right]$;

b) $\dfrac{(b + 2ai)(b - 2ai)}{4}$; c) $2 \cdot 13$;

d) $\left(x - y\ \text{cis}\ \dfrac{\pi}{4}\right)\left(x - y\ \text{cis}\ \dfrac{3\pi}{4}\right)\left(x - y\ \text{cis}\ \dfrac{5\pi}{4}\right)\left(x - y\ \text{cis}\ \dfrac{7\pi}{4}\right)$;

e) $\left(a - b\ \text{cis}\ \dfrac{\pi}{2n}\right)\left(a - b\ \text{cis}\ \dfrac{3\pi}{2n}\right)\ldots\ldots\left(a - b\text{cis}\ \dfrac{(2n-1)\pi}{2n}\right)$;

f) $2\left(x - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)\left(x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)$.

4 a) $x_1 = 3i$. $x_2 = -3i$; b) $x_1 = -\dfrac{63}{4}i$, $x_2 = \dfrac{63}{4}i$;

c) $x_{1,2} = 0{,}333 \pm 0{,}47i$; d) $x_1 = 2$; $x_{2,3} = 0{,}25 \pm 1{,}2i$.

$\boxed{5}$ a) $x_1 = \text{cis } 120°$, $x_2 = \text{cis } 240°$;
b) $x_1 = 2 \text{ cis } 60°$, $x_2 = 2 \text{ cis } 300°$.

$\boxed{6}$ 0.

$\boxed{7}$ $x_1 = i$, $x_2 = -i$, $y_1 = -2i$, $y_2 = 2i$.

$\boxed{8}$ a) $z_1 = 6{,}5 + 1{,}5i$, $z_2 = -1{,}5 + 0{,}5i$;
b) $z_1 = 7{,}71 + 1{,}37i$, $z_2 = 0{,}29 + 1{,}65i$;
c) $z_1 = 16{,}6 - 22{,}5i$, $z_2 = 18{,}9 - 13i$.

$\boxed{9}$ a) Ceros: $x = 3 \pm 2i$. Polos: $x = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$;

b) Ceros: $x = \pm i$, Polos: $x = 3 \pm 4i$;
c) Ceros: $z = 0{,}33 + 0{,}356i$, $z = -4{,}33 + 1{,}64i$,

Polos: $z = 0$, $z = 1$, $z = -\dfrac{1}{2} \pm 0{,}865i$;

d) Ceros: $z_1 = 5$, $z_{2,3} = -\dfrac{5}{2} \pm \dfrac{5\sqrt{3}}{2} \approx -2{,}5 \pm 4{,}33i$,

Polos: $z = 2{,}19 - 0{,}772i$, $z = -2{,}19 - 2{,}42i$.

$\boxed{10}$ a) $2(x + 4)(x - 0{,}25 - 2{,}79i)(x - 0{,}25 + 2{,}79i)$;
b) $(x + 1)(x - 3)(x + 0{,}5 - 0{,}865i)(x + 0{,}5 + 0{,}865i)$.

$\boxed{11}$ a) $x_1 = 2 + i$, $y_1 = 3 - i$, $x_2 = 2 - i$, $y_2 = 3 + i$;
b) $x_1 = -2{,}63$; $y_1 = -0{,}63$; $x_2 = -13{,}37$; $y_2 = -11{,}37$.

$\boxed{12}$ a) N.S; b) $z = 1 + 0{,}5i$, $w = 1{,}5$;
c) $z = 1{,}92 - i$, $w = -0{,}77 + 2{,}08i$.

$\boxed{13}$ a) grado: 3; b) grado: 1; c) grado: 7; d) grado:5.

$\boxed{14}$ $P(1) = -1$, $P(-1) = 9$, $P(2) = 9$, $P\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$.

$\boxed{15}$ $P(-i) = 2$, $P(1-i) = 9 + 8i$, $P(-i) = 2$.

$\boxed{16}$ $Q(-1;2) = 11$, $Q(2i;1-i) = -2 + 2i$.

$\boxed{17}$ a) $P\left(\dfrac{1}{2};-2\right) = \dfrac{73}{16}$; b) $P(-0{,}3; -0{,}5) = -0{,}0919$;

c) $P(i; -i) = -1 + 2i$; d) $P(2 - i; 4 + 3i) = -23 - 8i$;

e) $P\left(2\text{cis } \dfrac{\pi}{4}; \dfrac{1}{2} \text{ cis } \dfrac{\pi}{6}\right) = -13{,}9 + 0{,}75i$.

$\boxed{18}$ a) $P(x) = x^3 + x^2 - 2x$; b) $P(x) = x^3 + \dfrac{3}{2} x^2 - \dfrac{1}{2}$;

c) $P(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$; d) No existe;
e) $P(x) = x^3 - (2 + i)x^2 + (5 + 2i)x - 5i$. f) $P(x) = x^3 - 1$;

g) $P(x) = x^3 - \dfrac{1}{a}x^2 - a^2x + a$; h) $P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 6$.

19 a) $p = 3,\ q = 1$; b) $p = 0,\ q = 0$; c) $p = 3,\ q = 2$;
d) $p = 8,\ q = 13$.

20 a) $p = 7,\ q = 2,\ r = -3$; b) $p = 1{,}0,\ q = 0,\ r = -15$.

21 $x^n - a^n$ Siempre es divisible por $(x - a)$.
Es divisible por $(x + a)$ si n es par.
$x^n + a^n$ Es divisible por $(x + a)$ si n es impar.
Nunca es divisible por $(x - a)$.

22 a) $(x + 1)(x - 3)(x + 2)$; b) En $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ no tiene descomposición. En $\mathbb{C}$: $(x - 3{,}56 + 1{,}29i)(x + 0{,}33 - 3{,}45i)$.
c) En $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$: $(x - 1)(x^2 + x + 1)$;

En $\mathbb{C}$: $(x - 1)\left(x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

d) En $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$: $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$;
En $\mathbb{C}$: $(x - 2)(x + 2)(x + 2i)(x - 2i)$.
e) En $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ no tiene descomposición;

En $\mathbb{C}$ $(x - 5)\left(x - \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

f) En $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$: $2(x - 3)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)(x^2 + 1)$;

En $\mathbb{C}$: $2(x - 3)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)(x + i)(x - i)$.

g) En $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$: $2(x - 1)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)(x^2 + 2x + 3)$;

En $\mathbb{C}$: $2(x - 1)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)(x - 1 - \sqrt{2}i)(x - 1 + \sqrt{2}i)$.

h) En $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, y $\mathbb{C}$: $(x - 1)(x + 2)(x + 3)(x - 3)$.

23 $P(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$.

24 $\dfrac{67}{3}(x - 1)(x - 2)(x - 3) = \dfrac{67}{3}(x^3 - 6x^2 + 4x - 6)$

25 $P(x) = (x + 2)(x + 1)(x - 1)(x - 2) = x^4 - 5x^2 + 4$

26 $k = \dfrac{31}{36}$.

28 $n_1 = 2; n_2 = 1.$

29 a) $\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-1}$; b) $\frac{1}{x} - \frac{2}{x+3}$;

c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-4} + \frac{2}{x+2}$; d) $\frac{3}{x-2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)}$

e) $\frac{-5}{2x} + \frac{6}{5(x+5)} + \frac{3}{2(x-4)}$;

f) $\frac{1}{x^2+1} - \frac{6}{(x^2+1)^2} - \frac{x-8}{(x^2+1)^3}$;

g) $\frac{3}{2(x+5)} + \frac{3}{2(x-5)}$; h) $\frac{\frac{10}{3}}{x-4} - \frac{\frac{1}{3}}{x-1} = \frac{1}{3}\left[\frac{10}{x-4} - \frac{1}{x-1}\right]$

i) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}$.

30 a) $A = 0, B = 1, C = -4, D = 9$;
b) $A = 14; B = -33, C = 1, D = -8$;
c) $A = 0, B = 2, C = 1, D = -1$.

31 a) $x + 2$; b) $x + 4 + \frac{10x - 8}{x^2 - 3x + 2}$;

c) $\frac{7}{x+1} - \frac{12}{2x+1} + \frac{6}{(2x+1)^2} + \frac{6}{(2x+1)^3}$

32 a) $A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}, C = 0, D = 1, E = \frac{7}{2}$;

b) $A = -\frac{4}{25}, B = -1, C = 2, D = \frac{18}{25}, E = -\frac{46}{25}$

c) $A = 0, B = 0, C = -1, D = 0, E = 1$.

34 a) Cociente: $x^2 + 1$, Resto: 0;

b) Cociente: $x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{5}{4}$, Resto: $-\frac{31}{4}$;

c) Cociente: $5x + 4$, Resto: $7x - 5$;
d) Cociente: $x^2 + 3x + 4$, Resto: $22x^3 - 8x^2 - 21x + 19$

Ejercicios del capítulo

1 a) $4{,}2 - 6{,}7i$; b) $-11{,}9 - 8{,}15i$; c) $-0{,}420 - 2{,}59i$;
d) $22{,}5 + 10i$; e) $1{,}69 - 1{,}42i$; f) $-38{,}4 + 40{,}6i$;

g) $-2{,}34 + 2{,}92i$, $2{,}16 + 2{,}48i$;

h) $-8{,}73 + 19{,}2i$; $-10{,}5 - 17{,}2i$, $21{,}7 - 2{,}35i$,
$-10{,}5 + 19{,}2i$, $-12{,}3 - 17{,}2i$, $19{,}9 - 2{,}35i$,
$-9{,}60 + 17{,}7i$, $-11{,}4 - 18{,}7i$, $20{,}8 - 3{,}85i$;

i) $11{,}3 + 13{,}1i$; j) $11{,}6 - 5{,}22i$; k) $0{,}221 - 4{,}22i$;

l) $-1{,}73 - 2{,}99i$; m) $111 + 78{,}0i$; n) $5{,}08 + 2{,}07i$;

ñ) $0{,}849 + 7{,}63\, i$; o) $-2 - 4i$; p) $-7 - 42i$; q) $6{,}12 - 1{,}94i$;

r) $5{,}98 + 0{,}956i$.

2 a) $x = 2$, $y = 3$; b) $x = 3$, $y = 5$; c) $x = y = 0$;

d) $x = \dfrac{7}{3} = 2{,}33$, $y = -7$; e) No existen; f) $x = 1$, $y = 3$;

g) $x = 3$, $y = 2$; h) $x = 2$, $y = 1$; i) $x = 0$, $y = 2$ o $x = 0$, $y = -2$; j) $x = \pm 1{,}10$, $y = \pm 0{,}455$; k) No existen ; l) No existen; m) $x^2 + y^2 = 16$; n) $x = 1 + \sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}$ o $x = 1 - \sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}$.

4 $a = -\dfrac{1}{2}$.

5 a) $\mathcal{R}(w) = \dfrac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 2\mathcal{R}(z) + 1}$; $\mathcal{I}(w) = \dfrac{2\mathcal{I}(z)}{|z|^2 + 2\mathcal{R}(z) + 1}$.

7 a) $2 \text{ cis } \dfrac{\pi}{12}$, $2 \text{ cis } \dfrac{3\pi}{4}$, $2 \text{ cis } \dfrac{17\pi}{12}$;

b) $\sqrt{2} \text{cis } \dfrac{7\pi}{20} \approx 1{,}41 \text{ cis } \dfrac{7\pi}{20}$, $1{,}41 \text{ cis } \dfrac{3\pi}{4}$, $1{,}41 \text{ cis } \dfrac{23\pi}{20}$,

$1{,}41 \text{ cis } \dfrac{31\pi}{20}$, $1{,}41 \text{ cis } \dfrac{39\pi}{20}$;

c) $\sqrt{2} \text{cis } \dfrac{\pi}{16} \approx 1{,}09 \text{cis } 11{,}3°$, $1{,}09 \text{ cis } 101°$.

8 $z_1 = \dfrac{6\alpha(1 + i\alpha)}{1 + \alpha^2}$, $z_2 = \dfrac{6(\alpha - i)}{1 + \alpha^2}$, $\alpha \in \mathbf{R}^*$.

9 $z_1 = 2 - 0{,}0205i$, $z_2 = 0{,}5 + 2{,}41i$ o $z_1 = 2 + 2{,}411i$,
$z_2 = 0{,}5 - 0{,}41i$.

10 1.

11 a) $\mathcal{R}(z) = -2$; $\mathcal{I}(z) = 10$; b) $\mathcal{R}(z) = 0$; $\mathcal{I}(z) = 1$;
c) $\mathcal{R}(z) = -1{,}59$; $\mathcal{I}(z) = -0{,}647$.

12 a) $f(1 - i) = -4 + i$, $f(1 + \sqrt{3}i) = -11 + 26i$; b) Sí.

14 $\rho = 2,\ \theta_1 = \frac{\pi}{9},\ \theta_2 = \frac{7\pi}{9},\ \theta_3 = \frac{13\pi}{9}.$

15 1,49 cis 60°, 1,49 cis 150°, 1,49 cis 240°, 1,49 cis 330°.

16 $-2 + 5{,}66i$ y $2 - 5{,}66i$ Longitud: $d = 12$.

17 a) hipérbola; b) no existe; c) circunferencia; d) circunferencia; e) dos puntos; f) hipérbola; g) elipse,

18 a) $\sqrt[6]{12}\ \text{cis}\left(10° + \frac{2k\pi}{3}\right),\ k = 0;1;2;$

b) $\sqrt{z} = \sqrt{10}\ \text{cis}\left(15° + \frac{2k\pi}{2}\right),\ k = 0;1.$

19 Los números que representan los vértices restantes son: $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 3 + i$ y $z_3 = -1 + i$. La longitud de la diagonal es: 4.

20 a) $f(\sqrt{3} - i) = -5 + \sqrt{3} + (9 + 4\sqrt{3})i.$
b) $g(2 + 3i) = -75 + 19i.$

23 Los afijos de estos números están sobre una recta paralela al eje real que interseca al eje imaginario en $\frac{1}{2}\ i$.

25 El resto es 2 422.

26 $n = -\frac{35}{3}.$

27 a) $a = \frac{17}{6},\ b = \frac{7}{6}$; b) $2(x - i)(x - 1 + i)(x - 1).$

28 a) $x = 0,\ x = 2,\ x = -1$; b) $x = \pm 1;\ x = \pm 2;$
c) $x = 0,\ x = -1,\ x = -2,\ x = 3,\ x = 4.$

29 $x - \frac{1}{x} + \frac{x - 1}{x^2 + 1}.$

31 a) $\cos 3\varphi = \cos^3\varphi + 3\cos\varphi\,\text{sen}^2\varphi;$
b) $\text{sen}\,3\varphi = 3\cos^2\varphi\,\text{sen}\,\varphi - \text{sen}^3\varphi;$
c) $\cos 4\varphi = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\,\text{sen}^2\varphi + \text{sen}^4\varphi;$
d) $\text{sen}\,4\varphi = 4\cos^3\varphi\,\text{sen}\,\varphi - 4\cos\varphi\,\text{sen}^3\varphi.$

32 a) $\dfrac{\cos(n + 1)\varphi\ \text{sen}\ n\varphi}{\text{sen}\ \frac{\varphi}{2}}$; b) $\dfrac{\text{sen}\ \frac{n\varphi}{2} \cdot \cos\left[\frac{n - 1}{2}\right]\varphi}{\text{sen}\ \frac{\varphi}{2}}$

CAPÍTULO 3

Epígrafe 1

$\boxed{4}$ 3.

$\boxed{5}$ paralelas 18, cruzadas 24.

$\boxed{6}$ Porque las 4 patas no están en el mismo plano.

$\boxed{7}$ Si los hilos se intersecan en un punto.

$\boxed{8}$ No.

$\boxed{9}$ No.

$\boxed{10}$ 3.

$\boxed{11}$ 35.

$\boxed{12}$ 1140, $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

$\boxed{13}$ uno o tres.

$\boxed{14}$ 6.

$\boxed{15}$ 2.

$\boxed{16}$ Uno o tres.

Epígrafe 2

$\boxed{6}$ No necesariamente.

$\boxed{7}$ Infinitas.

$\boxed{8}$ Es paralelo.

$\boxed{9}$ Uno.

$\boxed{10}$ Sí; A infinitas.

$\boxed{11}$ A infinitas.

$\boxed{12}$ perpendicular, oblicua o estar contenida en α.

$\boxed{13}$ 9,0 cm.

$\boxed{14}$ 14,1 cm.

$\boxed{15}$ 60°.

$\boxed{16}$ 10 dm.

$\boxed{17}$ 18 cm; 6,0 cm.

$\boxed{18}$ 9,0 cm.

$\boxed{19}$ 3,9 m.

$\boxed{20}$ b) 6,4 cm.

21 3,4 dm^2; 3,0 dm^3.

22 16 cm.

23 60°; 8,7 cm.

24 15 cm^2; 26 cm^3.

25 57 cm^2.

26 7,0 dm.

27 20 cm.

29 3,0 cm.

30 20 cm.

31 74 dm.

32 4,0 cm.

33 $\frac{a}{2}\sqrt{3}$

35 18 cm.

36 42 dm^2.

37 6,5 dm^2; 1,1 dm^3.

38 6,3 dm^2.

39 1,8 m^2.

Epígrafe 3

4 No necesariamente.

7 72°.

10 a) Perpendicular; b) paralela o contenida.

12 70 cm.

13 a) 60 cm; b) 10 cm.

14 a) 23 cm; b) 16 cm.

15 20 cm.

16 8,0 cm y 4,0 cm.

19 20 cm.

20 24 cm.

21 6,9 dm^3; 2,1 dm^2.

22 0,42 dm^3.

23 3,0 dm^2; 0,25 dm^3.

24 $\frac{l^3\sqrt{3}}{6}$.

25 a) 5,9 cm; b) 5,9 cm.

Epígrafe 4

1 a) Sí; b) Sí; c) No; d) Sí.

2 a) 3; b) 3; 4 o 5; c) 3; 4; 5; 6 o 7;
d) 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10 u 11.

3 60°.

4 0,38 dm^3.

5 20 dm.

6 11 hm^2; 2,3 hm^3.

7 32 dm^2; 11 dm^3.

8 51 m^2; 14 m^3.

9 a) 3 : *CAEDH*, *CABFE* y *CEFGH* ; b) son iguales.

10 1,6 dam^2; 0.13 dam^3.

11 0,23 m^3.

12 3,2 m.

13 7,8 m^3; 17 m^2.

14 16 m^2.

15 7,6 dm^2; 1,1 dm^3.

16 5,0 dm^2; 0,81 dm^3.

17 0,13 m^2.

18 83 dm^2.

19 62 dm^2; 83 dm^2; 39 dm^3.

20 2,4 m^2; 0,17 m^3

21 octaedro regular.

22 7,2 dm^2.

24 36 m^2.

25 3,5 dm.

26 54,8°.

27 3,40 dm.

28 1:2:5.

29 4,0 dm².

30 $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

31 a) 4,4 dm³; b) 2,5 dm³ c) 20 dm³.

32 a) 9,37 dm³, b) 2,8 dm³.

Epígrafe 5

2 $A(4;0;0)$, $B(4;4;0)$, $C(0;4;0)$, $D(0;0;0)$, $E(0,0,4)$, $F(4;0;4)$, $G(4;4;4)$, $H(0;4;4)$.

3 (–1;5;2), (3;5;6), (–1;5;6), (–1;1;6).

5 $\frac{9}{2}$

6 (0;0;0), (2;0;0), (2;3;0); (0;3;0), (0;3;3), (0;0;3), (2;;0;3), 18.

7 a) 6,16; b) 7; c) 8,83; d) 5,83; e) 3,74;

8 18,6.

9 Al plano xy: 2; al plano yz: 3; al plano xz: 1; al eje x: 2,24: al eje y: 3,61; al eje z: 3,16.

10 16,1.

11 6,45.

13 Al plano xy: 30; al plano xz: 5; Al plano yz: 2; al origen: 6,16.

16 b) $\frac{250\sqrt{2}}{3} = 118$.

17 a) $\left(\frac{7}{2};\frac{3}{2};\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{7}{2};\frac{3}{2};\frac{-3\sqrt{2}}{2}\right)$; b) 86,5.

Epígrafe 6

2 a) (3;0;2); b) (–1;–4;4); c) (6;–3;0); d) (1;2;–5); e) (5;5;–5); f) –5; g) –48.

4 a) $3x - y + 4z + 3 = 0$; b) $x - 2y + z + 8 = 0$; c) $y - 2z - 2 = 0$; d) $3x - z - 9 = 0$; e) $4x - y = 5$.

5 a) Eje x: (4;0;0); eje y: (0;4;0); eje z: (0;0;2):
b) Eje x: (3;0;0); eje y: (0;6;0); eje z: (0;0;6):
c) Eje x: (4;0;0); eje y: (0;3;0); eje z: no existe:
d) Eje x: no existe; eje y: (0;2;0); eje z: (0;0;2):
e) Eje x: (3;0;0); eje y: no existe; eje z: (0;0;–2):
f) Eje x: (2;0;0); eje y: no existe; eje z: no existe:

g) Eje x: no existe; eje y: $(0;-3,0)$, eje z: no existe:

h) Eje x: no existe; eje y: no existe; eje z: $(0;0;4)$.

6 a) $P\left(0;0;-\frac{5}{2}\right)$ $\vec{a}(3;-6;-2)$; b) $P\left(0;\frac{3}{2};0\right)$ $\vec{a}(4;2;-2)$;

c) $P(2;0;0)$ $\vec{a}(2;-1;2)$; d) $P(1;1;0)$ $\vec{a}(4;3;0)$;

e) $P(0;0;8)$ $\vec{a}(2;-3;1)$; f) $P(2;1;0)$ $\vec{a}(2;1;0)$;

g) $P(0;4;0)$ $\vec{a}(0;1;0)$; h) $P(1;0;0)$ $\vec{a}(1;0;0)$.

7 $2x - 3y + z + 5 = 0$,

8 $2x - y + z + 1 = 0$.

10 a) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = z - 3$; b) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{-1}$;

c) $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+3}{3}$; d) $\frac{y-2}{4} = \frac{z+1}{-2}$, $x = -1$;

e) $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-\frac{3}{4}}{-3}$; f) $\frac{x}{1} = \frac{y}{1}$, $z = -3$.

11 a) $\frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{-3}$; b) $\frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{5}$, $z = 1$;

c) $\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

12 $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{5}$.

13 $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+5}{-4}$.

14 a) $P(3;-1;4)$ $\vec{a}(5;2;4)$; b) $P\left(\frac{-3}{2};0;1\right)$ $\vec{a}\left(\frac{1}{2};4;3\right)$;

c) $P(0;5;1)$ $\vec{a}\left(\frac{4}{3};-7;0\right)$; d) $P\left(\frac{2}{5};-\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right)$ $\vec{a}\left(-\frac{3}{5};\frac{1}{4};2\right)$;

e) $P(2;-3;0)$ $\vec{a}(-4;3;-5)$; f) $P(0;3;-2)$ $\vec{a}(0;1;1)$.

15 a) $x + 3y + 3z = 16$; b) $5x - 2y + 4z + 3 = 0$.

16 $(1;3;0)$

17 a) paralelos; b) y c) se cortan.

18 a) $(1;0;2)$; b) no existe; c) no existe; d) $(5;5;2)$.

19 se cortan.

20 24; 52.

21 40.

22 8.

Ejercicios el capítulo

1 a) En ambas; b) en ambas; c) en planimetría; d) en ambas; e) en planimetría; f) en estereometría.

3 10 cm.

4 b) 5,6 cm.
c) 45°.

5 30°.

6 14 cm; 60°.

7 8,4 cm.

8 *l*: 16 cm; *d*: 20 cm.

9 9,0 dm².

10 60° ; 0,25 m³.

11 9,0 m.

12 12 dm.

13 *a*.

14 8,7 cm.

15 0,88

17 $a + c - b$.

18 a) 70,5°; b) $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$.

19 a) *a*; b) *a*.

20 7,7 dm²; 1,4 dm³.

21 4,6 cm³.

22 16 m²; 4,4 m³.

23 19,2 dm²; 4,35 dm³.

24 $\frac{h^3\sqrt{3}}{8}$.

25 3,40 dm.

26 1:8.

27 31 m^2; 13 m^3.

28 13,8 m^2.

29 6,5 dm^2.

30 17 dm^2.

32 No. $\frac{4}{3}$.

33 (1;5;0), (5;5;0), (1;1;8), (5;1;8), (1;5;8).

34 No.

35 31,1.

37 plano *xy:* 4; plano *xz:* 3; plano *yz:* 2; eje *x:* 5; eje *y:* 4,47; eje *z:* 3,61.

38 a) (1;2;2) b) (22;–8;6); c) $\left(-6; \frac{7}{3}; -\frac{7}{3}\right)$; d) –20;

e) –136; f) 89.

39 31.

40 –6.

41 $x - 2y + 3z + 3 = 0$.

42 $2x - y - z = 2$.

43 $x - y - 3z + 2 = 0$.

44 a) (1;2;–2); b) eje *x:* (–9;0;0); eje *y:* $\left(0; -\frac{9}{2}; 0\right)$ eje *z:* $\left(0;0;\frac{9}{2}\right)$.

45 $3x - y + 2z + 5 = 0$.

46 a) es de la forma $(a;\ 2a;-2a)$;$a \in \mathbb{R}$; b) $x + 2y - 2z = 1$.

47 $x + 2y + 9z + 55 = 0$.

48 6.

50 a) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-4}{6}$; b) $x - 4 = \frac{y}{-1} = \frac{z-5}{3}$;

c) $\frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{-3} = z - 7$; d) $\frac{x+2}{2} = y - 4 = \frac{z-3}{-3}$.

51 MN: $\frac{x+2}{-1} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+2}{6}$ NP: $\frac{x+3}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{-5}$

$MP = \frac{x+2}{4} = \frac{y+3}{6} = z + 2$.

52 $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-5}{-1} = \dfrac{z}{4}$.

53 (2;-1;1).

54 a) son paralelos; b) y c) se cortan.

55 a) (-5;-1;9); b) (1;-2;-4); c) no existe.

56 a) se cortan; b) contenida en el plano *xy;* corta a los planos *xz* y *yz.*

Anexo

Tablas matemáticas

Tabla de cuadrados

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,020	1,040	1,061	1,082	1,103	1,124	1,145	1,166	1,188
1,1	1,210	1,232	1,254	1,277	1,300	1,323	1,346	1,369	1,392	1,416
1,2	1,440	1,464	1,488	1,513	1,538	1,563	1,588	1,613	1,638	1,664
1,3	1,690	1,716	1,742	1,769	1,796	1,823	1,850	1,877	1,904	1,932
1,4	1,960	1,988	2,016	2,045	2,074	2,103	2,132	2,161	2,190	2,220
1,5	2,250	2,280	2,310	2,341	2,372	2,403	2,434	2,465	2,496	2,528
1,6	2,560	2,592	2,624	2,657	2,690	2,723	2,756	2,789	2,822	2,856
1,7	2,890	2,924	2,958	2,993	3,028	3,063	3,098	3,133	3,168	3,204
1,8	3,240	3,276	3,312	3,349	3,386	3,423	3,460	3,497	3,534	3,572
1,9	3,610	3,648	3,686	3,725	3,764	3,803	3,842	3,881	3,920	3,960
2,0	4,000	4,040	4,080	4,121	4,162	4,203	4,244	4,285	4,326	4,368
2,1	4,410	4,452	4,494	4,537	4,580	4,623	4,666	4,709	4,752	4,796
2,2	4,840	4,884	4,928	4,973	5,018	5,063	5,108	5,153	5,198	5,244
2,3	5,290	5,336	5,382	5,429	5,476	5,523	5,570	5,617	5,664	5,712
2,4	5,760	5,808	5,856	5,905	5,954	6,003	6,052	6,101	6,150	6,200
2,5	6,250	6,300	6,350	6,401	6,452	6,503	6,554	6,605	6,656	6,708
2,6	6,760	6,812	6,864	6,917	6,970	7,023	7,076	7,129	7,182	7,236
2,7	7,290	7,344	7,398	7,453	7,508	7,563	7,618	7,673	7,728	7,784
2,8	7,840	7,896	7,952	8,009	8,066	8,123	8,180	8,237	8,294	8,352
2,9	8,410	8,468	8,526	8,585	8,644	8,703	8,762	8,821	8,880	8,940
3,0	9,000	9,060	9,120	9,181	9,242	9,303	9,364	9,425	9,486	9,548
3,1	9,610	9,672	9,734	9,797	9,860	9,923	9,986	10,05	10,11	10,18
3,2	10,24	10,30	10,37	10,43	10,50	10,56	10,63	10,69	10,76	10,82
3,3	10,89	10,96	11,02	11,09	11,16	11,22	11,29	11,36	11,42	11,49
3,4	11,56	11,63	11,70	11,76	11,83	11,90	11,97	12,04	12,11	12,18
3,5	12,25	12,32	12,39	12,46	12,53	12,60	12,67	12,74	12,82	12,89
3,6	12,96	13,03	13,10	13,18	13,25	13,32	13,40	13,47	13,54	13,62
3,7	13,69	13,76	13,84	13,91	13,99	14,06	14,14	14,21	14,29	14,36
3,8	14,44	14,52	14,59	14,67	14,75	14,82	14,90	14,98	15,05	15,13
3,9	15,21	15,29	15,37	15,44	15,52	15,60	15,68	15,76	15,84	15,92
4,0	16,00	16,08	16,16	16,24	16,32	16,40	16,48	16,56	16,65	16,73
4,1	16,81	16,89	16,97	17,06	17,14	17,22	17,31	17,39	17,47	17,56
4,2	17,64	17,72	17,81	17,89	17,98	18,06	18,15	18,23	18,32	18,40
4,3	18,49	18,58	18,66	18,75	18,84	18,92	19,01	19,10	19,18	19,27
4,4	19,36	19,45	19,54	19,62	19,71	19,80	19,89	19,98	20,07	20,16
4,5	20,25	20,34	20,43	20,52	20,61	20,70	20,79	20,88	20,98	21,07
4,6	21,16	21,25	21,34	21,44	21,53	21,62	21,72	21,81	21,90	22,00
4,7	22,09	22,18	22,28	22,37	22,47	22,56	22,66	22,75	22,85	22,94
4,8	23,04	23,14	23,23	23,33	23,43	23,52	23,62	23,72	23,81	23,91
4,9	24,01	24,11	24,21	24,30	24,40	24,50	24,60	24,70	24,80	24,90
5,0	25,00	25,10	25,20	25,30	25,40	25,50	25,60	25,70	25,81	25,91

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,1	26,01	26,11	26,21	26,32	26,42	26,52	26,63	26,73	26,83	26,94
5,2	27,04	27,14	27,25	27,35	27,46	27,56	27,67	27,77	27,88	27,98
5,3	28,09	28,20	28,30	28,41	28,52	28,62	28,73	28,84	28,94	29,05
5,4	29,16	29,27	29,38	29,48	29,59	29,70	29,81	29,92	30,03	30,14
5,5	30,25	30,36	30,47	30,58	30,69	30,80	30,91	31,02	31,14	31,25
5,6	31,36	31,47	31,58	31,70	31,81	31,92	32,04	32,15	32,26	32,38
5,7	32,49	32,60	32,72	32,83	32,95	33,06	33,18	33,29	33,41	33,52
5,8	33,64	33,76	33,87	33,99	34,11	34,22	34,34	34,46	34,57	34,69
5,9	34,81	34,93	35,05	35,16	35,28	35,40	35,52	35,64	35,76	35,88
6,0	36,00	36,12	36,24	36,36	36,48	36,60	36,72	36,84	36,97	37,09
6,1	37,21	37,33	37,45	37,58	37,70	37,82	37,95	38,07	38,19	38,32
6,2	38,44	38,56	38,69	38,81	38,94	39,06	39,19	39,31	39,44	39,56
6,3	39,69	39,82	39,94	40,07	40,20	40,32	40,45	40,58	40,70	40,83
6,4	40,96	41,09	41,22	41,34	41,47	41,60	41,73	41,86	41,99	42,12
6,5	42,25	42,38	42,51	42,64	42,77	42,90	43,03	43,16	43,30	43,43
6,6	43,56	43,69	43,82	43,96	44,09	44,22	44,36	44,49	44,62	44,76
6,7	44,89	45,02	45,16	45,29	45,43	45,56	45,70	45,83	45,97	46,10
6,8	46,24	46,38	46,51	46,65	46,79	46,92	47,06	47,20	47,33	47,47
6,9	47,61	47,75	47,89	48,02	48,16	48,30	48,44	48,58	48,72	48,86
7,0	49,00	49,14	49,28	49,42	49,56	49,70	49,84	49,98	50,13	50,27
7,1	50,41	50,55	50,69	50,84	50,98	51,12	51,27	51,41	51,55	51,70
7,2	51,84	51,98	52,13	52,27	52,42	52,56	52,71	52,85	53,00	53,14
7,3	53,29	53,44	53,58	53,73	53,88	54,02	54,17	54,32	54,46	54,61
7,4	54,76	54,91	55,06	55,20	55,35	55,50	55,65	55,80	55,95	56,10
7,5	56,25	56,40	56,55	56,70	56,85	57,00	57,15	57,30	57,46	57,61
7,6	57,76	57,91	58,06	58,22	58,37	58,52	58,68	58,83	58,98	59,14
7,7	59,29	59,44	59,60	59,75	59,91	60,06	60,22	60,37	60,53	60,68
7,8	60,84	61,00	61,15	61,31	61,47	61,62	61,78	61,94	62,09	62,25
7,9	62,41	62,57	62,73	62,88	63,04	63,20	63,36	63,52	63,68	63,84
8,0	64,00	64,16	64,32	64,48	64,64	64,80	64,96	65,12	65,29	65,45
8,1	65,61	65,77	65,93	66,10	66,26	66,42	66,59	66,75	66,91	67,08
8,2	67,24	67,40	67,57	67,73	67,90	68,06	68,23	68,39	68,56	68,72
8,3	68,89	69,06	69,22	69,39	69,56	69,72	69,89	70,06	70,22	70,39
8,4	70,56	70,73	70,90	71,06	71,23	71,40	71,57	71,74	71,91	72,08
8,5	72,25	72,42	72,59	72,76	72,93	73,10	73,27	73,44	73,62	73,79
8,6	73,96	74,13	74,30	74,48	74,65	74,82	75,00	75,17	75,34	75,52
8,7	75,69	75,86	76,04	76,21	76,39	76,56	76,74	76,91	77,09	77,26
8,8	77,44	77,62	77,79	77,97	78,15	78,32	78,50	78,68	78,85	79,03
8,9	79,21	79,39	79,57	79,74	79,92	80,10	80,28	80,46	80,64	80,82
9,0	81,00	81,18	81,36	81,54	81,72	81,90	82,08	82,26	82,45	82,63
9,1	82,81	82,99	83,17	83,36	83,54	83,72	83,91	84,09	84,27	84,46
9,2	84,64	84,82	85,01	85,19	85,38	85,56	85,75	85,93	86,12	86,30
9,3	86,49	86,68	86,86	87,05	87,24	87,42	87,61	87,80	87,98	88,17
9,4	88,36	88,55	88,74	88,92	89,11	89,30	89,49	89,68	89,87	90,06
9,5	90,25	90,44	90,63	90,82	91,01	91,20	91,39	91,58	91,78	91,97
9,6	92,16	92,35	92,54	92,74	92,93	93,12	93,32	93,51	93,70	93,90
9,7	94,09	94,28	94,48	94,67	94,87	95,06	95,26	95,45	95,65	95,84
9,8	96,04	96,24	96,43	96,63	96,83	97,02	97,22	97,42	97,61	97,81
9,9	98,01	98,21	98,41	98,60	98,80	99,00	99,20	99,40	99,60	99,80

Tabla de cubos

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,030	1,061	1,093	1,125	1,158	1,191	1,225	1,260	1,295
1,1	1,331	1,368	1,405	1,443	1,482	1,521	1,561	1,602	1,643	1,685
1,2	1,728	1,772	1,816	1,861	1,907	1,953	2,000	2,048	2,097	2,147
1,3	2,197	2,248	2,300	2,353	2,406	2,460	2,515	2,571	2,628	2,686
1,4	2,744	2,803	2,863	2,924	2,986	3,049	3,112	3,177	3,242	3,308
1,5	3,375	3,443	3,512	3,582	3,652	3,724	3,796	3,870	3,944	4,020
1,6	4,096	4,173	4,252	4,331	4,411	4,492	4,574	4,657	4,742	4,827
1,7	4,913	5,000	5,088	5,178	5,268	5,359	5,452	5,545	5,640	5,735
1,8	5,832	5,930	6,029	6,128	6,230	6,332	6,435	6,539	6,645	6,751
1,9	6,859	6,968	7,078	7,189	7,301	7,415	7,530	7,645	7,762	7,881
2,0	8,000	8,121	8,242	8,365	8,490	8,615	8,742	8,870	8,999	9,129
2,1	9,261	9,394	9,528	9,664	9,800	9,938	10,08	10,22	10,36	10,50
2,2	10,65	10,79	10,94	11,09	11,24	11,39	11,54	11,70	11,85	12,01
2,3	12,17	12,33	12,49	12,65	12,81	12,98	13,14	13,31	13,48	13,65
2,4	13,82	14,00	14,17	14,35	14,53	14,71	14,89	15,07	15,25	15,44
2,5	15,63	15,81	16,00	16,19	16,39	16,58	16,78	16,97	17,17	17,37
2,6	17,58	17,78	17,98	18,19	18,40	18,61	18,82	19,03	19,25	19,47
2,7	19,68	19,90	20,12	20,35	20,57	20,80	21,02	21,25	21,48	21,72
2,8	21,95	22,19	22,43	22,67	22,91	23,15	23,39	23,64	23,89	24,14
2,9	24,39	24,64	24,90	25,15	25,41	25,67	25,93	26,20	26,46	26,73
3,0	27,00	27,27	27,54	27,82	28,09	28,37	28,65	28,93	29,22	29,50
3,1	29,79	30,08	30,37	30,66	30,96	31,26	31,55	31,86	32,16	32,46
3,2	32,77	33,08	33,39	33,70	34,01	34,33	34,65	34,97	35,29	35,61
3,3	35,94	36,26	36,59	36,93	37,26	37,60	37,93	38,27	38,61	38,96
3,4	39,30	39,65	40,00	40,35	40,71	41,06	41,42	41,78	42,14	42,51
3,5	42,88	43,24	43,61	43,99	44,36	44,74	45,12	45,50	45,88	46,27
3,6	46,66	47,05	47,44	47,83	48,23	48,63	49,03	49,43	49,84	50,24
3,7	50,65	51,06	51,48	51,90	52,31	52,73	53,16	53,58	54,01	54,44
3,8	54,87	55,31	55,74	56,18	56,62	57,07	57,51	57,96	58,41	58,86
3,9	59,32	59,78	60,24	60,70	61,16	61,63	62,10	62,57	63,04	63,52
4,0	64,00	64,48	64,96	65,45	65,94	66,43	66,92	67,42	67,92	68,42
4,1	68,92	69,43	69,93	70,44	70,96	71,47	71,99	72,51	73,03	73,56
4,2	74,09	74,62	75,15	75,69	76,23	76,77	77,31	77,85	78,40	78,95
4,3	79,51	80,06	80,62	81,18	81,75	82,31	82,88	83,45	84,03	84,60
4,4	85,18	85,77	86,35	86,94	87,53	88,12	88,72	89,31	89,92	90,52
4,5	91,13	91,73	92,35	92,96	93,58	94,20	94,82	95,44	96,07	96,70
4,6	97,34	97,97	98,61	99,25	99,90	100,5	101,2	101,8	102,5	103,2
4,7	103,8	104,5	105,2	105,8	106,5	107,2	107,9	108,5	109,2	109,9
4,8	110,6	111,3	112,0	112,7	113,4	114,1	114,8	115,5	116,2	116,9
4,9	117,6	118,4	119,1	119,8	120,6	121,3	122,0	122,8	123,5	124,3
5,0	125,0	125,8	126,5	127,3	128,0	128,8	129,6	130,3	131,1	131,9
5,1	132,7	133,4	134,2	135,0	135,8	136,6	137,4	138,2	139,0	139,8
5,2	140,6	141,4	142,2	143,1	143,9	144,7	145,5	146,4	147,2	148,0
5,3	148,9	149,7	150,6	151,4	152,3	153,1	154,0	154,9	155,7	156,6

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,4	157,5	158,3	159,2	160,1	161,0	161,9	162,8	163,7	164,6	165,5
5,5	166,4	167,3	168,2	169,1	170,0	171,0	171,9	172,8	173,7	174,7
5,6	175,6	176,6	177,5	178,5	179,4	180,4	181,3	182,3	183,3	184,2
5,7	185,2	186,2	187,1	188,1	189,1	190,1	191,1	192,1	193,1	194,1
5,8	195,1	196,1	197,1	198,2	199,2	200,2	201,2	202,3	203,3	204,3
5,9	205,4	206,4	207,5	208,5	209,6	210,6	211,7	212,8	213,8	214,9
6,0	216,0	217,1	218,2	219,3	220,3	221,4	222,5	223,6	224,8	225,9
6,1	227,0	228,1	229,2	230,3	231,5	232,6	233,7	234,9	236,0	237,2
6,2	238,3	239,5	240,6	241,8	243,0	244,1	245,3	246,5	247,7	248,9
6,3	250,0	251,2	252,4	253,6	254,8	256,0	257,3	258,5	259,7	260,9
6,4	262,1	263,4	264,6	265,8	267,1	268,3	269,6	270,8	272,1	273,4
6,5	274,6	275,9	277,2	278,4	279,7	281,0	282,3	283,6	284,9	286,2
6,6	287,5	288,8	290,1	291,4	292,8	294,1	295,4	296,7	298,1	299,4
6,7	300,8	302,1	303,5	304,8	306,2	307,5	308,9	310,3	311,7	313,0
6,8	314,4	315,8	317,2	318,6	320,0	321,4	322,8	324,2	325,7	327,1
6,9	328,5	329,9	331,4	332,8	334,3	335,7	337,2	338,6	340,1	341,5
7,0	343,0	344,5	345,9	347,4	348,9	350,4	351,9	353,4	354,9	356,4
7,1	357,9	359,4	360,9	362,5	364,0	365,5	367,1	368,6	370,1	371,7
7,2	373,2	374,8	376,4	377,9	379,5	381,1	382,7	384,2	385,8	387,4
7,3	389,0	390,6	392,2	393,8	395,4	397,1	398,7	400,3	401,9	403,6
7,4	405,2	406,9	408,5	410,2	411,8	413,5	415,2	416,8	418,5	420,2
7,5	421,9	423,6	425,3	427,0	428,7	430,4	432,1	433,8	435,5	437,2
7,6	439,0	440,7	442,5	444,2	445,9	447,7	449,5	451,2	453,0	454,8
7,7	456,5	458,3	460,1	461,9	463,7	465,5	467,3	469,1	470,9	472,7
7,8	474,6	476,4	478,2	480,0	481,9	483,7	485,6	487,4	489,3	491,2
7,9	493,0	494,9	496,8	498,7	500,6	502,5	504,4	506,3	508,2	510,1
8,0	512,0	513,9	515,8	517,8	519,7	521,7	523,6	525,6	527,5	529,5
8,1	531,4	533,4	535,4	537,4	539,4	541,3	543,3	545,3	547,3	549,4
8,2	551,4	553,4	555,4	557,4	559,5	561,5	563,6	565,6	567,7	569,7
8,3	571,8	573,9	575,9	578,0	580,1	582,2	584,3	586,4	588,5	590,6
8,4	592,7	594,8	596,9	599,1	601,2	603,4	605,5	607,6	609,8	612,0
8,5	614,1	616,3	618,5	620,7	622,8	625,0	627,2	629,4	631,6	633,8
8,6	636,1	638,3	640,5	642,7	645,0	647,2	649,5	651,7	654,0	656,2
8,7	658,5	660,8	663,1	665,3	667,6	669,9	672,2	674,5	676,8	679,2
8,8	681,5	683,8	686,1	688,5	690,8	693,2	695,5	697,9	700,2	702,6
8,9	705,0	707,3	709,7	712,1	714,5	716,9	719,3	721,7	724,2	726,6
9,0	729,0	731,4	733,9	736,3	738,8	741,2	743,7	746,1	748,6	751,1
9,1	753,6	756,1	758,6	761,0	763,6	766,1	768,6	771,1	773,6	776,2
9,2	778,7	781,2	783,8	786,3	788,9	791,5	794,0	796,6	799,2	801,8
9,3	804,4	807,0	809,6	812,2	814,8	817,4	820,0	822,7	825,3	827,9
9,4	830,6	833,2	835,9	838,6	841,2	843,9	846,6	849,3	852,0	854,7
9,5	857,4	860,1	862,8	865,5	868,3	871,0	873,7	876,5	879,2	882,0
9,6	884,7	887,5	890,3	893,1	895,8	898,6	901,4	904,2	907,0	909,9
9,7	912,7	915,5	918,3	921,2	924,0	926,9	929,7	932,6	935,4	938,3
9,8	941,2	944,1	947,0	949,9	952,8	955,7	958,6	961,5	964,4	967,4
9,9	970,3	973,2	976,2	979,1	982,1	985,1	988,0	991,0	994,0	997,0

Tabla de senos y cosenos.

seno

Grad.	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	(1,0)	
0	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175	89
1	0,0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	88
2	0,0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	0523	87
3	0,0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	0698	86
4	0,0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	0872	85
5	0,0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028	1045	84
6	0,1045	1063	1080	1097	1115	1132	1149	1167	1184	1201	1219	83
7	0,1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374	1392	82
8	0,1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547	1564	81
9	0,1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719	1736	80
10	0,1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	1908	79
11	0,1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	2079	78
12	0,2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2233	2250	77
13	0,2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	2419	76
14	0,2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	2588	75
15	0,2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	2756	74
16	0,2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	2924	73
17	0,2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3090	72
18	0,3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3256	71
19	0,3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	3420	70
20	0,3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3584	69
21	0,3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3746	68
22	0,3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3907	67
23	0,3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	4067	66
24	0,4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	4226	65
25	0,4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	4384	64
26	0,4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	4540	63
27	0,4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	4695	62
28	0,4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	4848	61
29	0,4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	5000	60
30	0,5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	5150	59
31	0,5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	5299	58
32	0,5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	5446	57
33	0,5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	5592	56
34	0,5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	5736	55
35	0,5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	5878	54
36	0,5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	6018	53
37	0,6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	6157	52
38	0,6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	6293	51
39	0,6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	6428	50
40	0,6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	6561	49
41	0,6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	6691	48
42	0,6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	6820	47
43	0,6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	6947	46
44	0,6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	7071	45
	(1,0)	,9	,8	,7	,6	,5	,4	,3	,2	,1	,0	Grad.

coseno

Tabla de senos y cosenos (continuación)

seno

Grad.	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	(1,0)	
45	0,7071	7083	7096	7108	7120	7133	7145	7157	7169	7181	7193	44
46	0,7193	7206	7218	7230	7242	7254	7266	7278	7290	7302	7314	43
47	0,7314	7325	7337	7349	7361	7373	7385	7396	7408	7420	7431	42
48	0,7431	7443	7455	7466	7478	7490	7501	7513	7524	7536	7547	41
49	0,7547	7559	7570	7581	7593	7604	7615	7627	7638	7649	7660	40
50	0,7660	7672	7683	7694	7705	7716	7727	7738	7749	7760	7771	39
51	0,7771	7782	7793	7804	7815	7826	7837	7848	7859	7869	7880	38
52	0,7880	7891	7902	7912	7923	7934	7944	7955	7965	7976	7986	37
53	0,7986	7997	8007	8018	8028	8039	8049	8059	8070	8080	8090	36
54	0,8090	8100	8111	8121	8131	8141	8151	8161	8171	8181	8192	35
55	0,8192	8202	8211	8221	8231	8241	8251	8261	8271	8281	8290	34
56	0,8290	8300	8310	8320	8329	8339	8348	8358	8368	8377	8387	33
57	0,8387	8396	8406	8415	8425	8434	8443	8453	8462	8471	8480	32
58	0,8480	8490	8499	8508	8517	8526	8536	8545	8554	8563	8572	31
59	0,8572	8581	8590	8599	8607	8616	8625	8634	8643	8652	8660	30
60	0,8660	8669	8678	8686	8695	8704	8712	8721	8729	8738	8746	29
61	0,8746	8755	8763	8771	8780	8788	8796	8805	8813	8821	8829	28
62	0,8829	8838	8846	8854	8862	8870	8878	8886	8894	8902	8910	27
63	0,8910	8918	8926	8934	8942	8949	8957	8965	8973	8980	8988	26
64	0,8988	8996	9003	9011	9018	9026	9033	9041	9048	9056	9063	25
65	0,9063	9070	9078	9085	9092	9100	9107	9114	9121	9128	9135	24
66	0,9135	9143	9150	9157	9164	9171	9178	9184	9191	9198	9205	23
67	0,9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9265	9272	22
68	0,9272	9278	9285	9291	9298	9304	9311	9317	9323	9330	9336	21
69	0,9336	9342	9348	9354	9361	9367	9373	9379	9385	9391	9397	20
70	0,9397	9403	9409	9415	9421	9426	9432	9438	9444	9449	9455	19
71	0,9455	9461	9466	9472	9478	9483	9489	9494	9500	9505	9511	18
72	0,9511	9516	9521	9527	9532	9537	9542	9548	9553	9558	9563	17
73	0,9563	9568	9573	9578	9583	9588	9593	9598	9603	9608	9613	16
74	0,9613	9617	9622	9627	9632	9636	9641	9646	9650	9655	9659	15
75	0,9659	9664	9668	9673	9677	9681	9686	9690	9694	9699	9703	14
76	0,9703	9707	9711	9715	9720	9724	9728	9732	9736	9740	9744	13
77	0,9744	9748	9751	9755	9759	9763	9767	9770	9774	9778	9781	12
78	0,9781	9785	9789	9792	9796	9799	9803	9806	9810	9813	9816	11
79	0,9816	9820	9823	9826	9829	9833	9836	9839	9842	9845	9848	10
80	0,9848	9851	9854	9857	9860	9863	9866	9869	9871	9874	9877	9
81	0,9877	9880	9882	9885	9888	9890	9893	9895	9898	9900	9903	8
82	0,9903	9905	9907	9910	9912	9914	9917	9919	9921	9923	9925	7
83	0,9925	9928	9930	9932	9934	9936	9938	9940	9942	9943	9945	6
84	0,9945	9947	9949	9951	9952	9954	9956	9957	9959	9960	9962	5
85	0,9962	9963	9965	9966	9968	9969	9971	9972	9973	9974	9976	4
86	0,9976	9977	9978	9979	9980	9981	9982	9983	9984	9985	9986	3
87	0,9986	9987	9988	9989	9990	9990	9991	9992	9993	9993	9994	2
88	0,9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	9997	9998	9998	9998	1
89	0,9998	9999	9999	9999	9999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0
	(1,0)	,9	,8	,7	,6	,5	,4	,3	,2	,1	,0	Grad

coseno

Tabla de tangentes y cotangentes

tangente

Grad.	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	(1,0)	
0	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175	89
1	0,0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	88
2	0,0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507	0524	87
3	0,0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682	0699	86
4	0,0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857	0875	85
5	0,0875	0892	0910	0928	0945	0963	0981	0998	1016	1033	1051	84
6	0,1051	1069	1086	1104	1122	1139	1157	1175	1192	1210	1228	83
7	0,1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388	1405	82
8	0,1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566	1584	81
9	0,1584	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745	1763	80
10	0,1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	1944	79
11	0,1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	2126	78
12	0,2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	2309	77
13	0,2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	2493	76
14	0,2493	2512	2530	2549	2568	2586	2605	2623	2642	2661	2679	75
15	0,2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	2867	74
16	0,2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3057	73
17	0,3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3249	72
18	0,3249	3269	3288	3307	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3443	71
19	0,3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	3610	70
20	0,3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3839	69
21	0,3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	4040	68
22	0,4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	4245	67
23	0,4245	4265	4286	4307	4327	4348	4369	4390	4411	4431	4452	66
24	0,4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	4663	65
25	0,4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4877	64
26	0,4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	5095	63
27	0,5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	5317	62
28	0,5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	5543	61
29	0,5543	5566	5589	5612	5635	5658	5681	5704	5727	5750	5774	60
30	0,5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	6009	59
31	0,6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	6249	58
32	0,6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	6494	57
33	0,6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	6745	56
34	0,6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	7002	55
35	0,7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239	7265	54
36	0,7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	7536	53
37	0,7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	7813	52
38	0,7813	7841	7869	7898	7926	7954	7983	8012	8040	8069	8098	51
39	0,8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	8391	50
40	0,8391	8421	8451	8481	8511	8541	8571	8601	8632	8662	8693	49
41	0,8693	8724	8754	8785	8816	8847	8878	8910	8941	8972	9004	48
42	0,9004	9036	9067	9099	9131	9163	9195	9228	9260	9293	9325	47
43	0,9395	9358	9391	9424	9457	9490	9523	9556	9590	9623	9657	46
44	0,9657	9691	9725	9759	9793	9827	9861	9896	9930	9965	1,000	45
	(1,0)	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.0	Grad.

cotangente

Tabla de tangentes y cotangentes (continuación)

tangente

Grad.	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	(1,0)	
45	1,000	003	007	011	014	018	021	025	028	032	036	44
46	1,036	039	043	046	050	054	057	061	065	069	072	43
47	1,072	076	080	084	087	091	095	099	103	107	111	42
48	1,111	115	118	122	126	130	134	138	142	146	150	41
49	1,150	154	159	163	167	171	175	179	183	188	192	40
50	1,192	196	200	205	209	213	217	222	226	230	235	39
51	1,235	239	244	248	253	257	262	266	271	275	280	38
52	1,280	285	289	294	299	303	308	313	317	322	327	37
53	1,327	332	337	342	347	351	356	361	366	371	376	36
54	1,376	381	387	392	397	402	407	412	418	423	428	35
55	1,428	433	439	444	450	455	460	466	471	477	483	34
56	1,483	488	494	499	505	511	517	522	528	534	540	33
57	1,540	546	552	558	564	570	576	582	588	594	600	32
58	1,600	607	613	619	625	632	638	645	651	658	664	31
59	1,664	671	678	684	691	698	704	711	718	725	732	30
60	1,732	739	746	753	760	767	775	782	789	797	804	29
61	1,804	811	819	827	834	842	849	857	865	873	881	28
62	1,881	889	897	905	913	921	929	937	946	954	963	27
63	1,963	971	980	988	997	006	014	023	032	041	050	26
64	2,050	059	069	078	087	097	106	116	125	135	145	25
65	2,145	154	164	174	184	194	204	215	225	236	246	24
66	2,246	257	267	278	289	300	311	322	333	344	356	23
67	2,356	367	379	391	402	414	426	438	450	463	475	22
68	2,475	488	500	513	526	539	552	565	578	592	605	21
69	2,605	619	633	646	660	675	689	703	718	733	747	20
70	2,747	762	778	793	808	824	840	856	872	888	904	19
71	2,904	921	937	954	971	989	006	024	042	060	078	18
72	3,078	096	115	133	152	172	191	211	230	251	271	17
73	3,271	291	312	333	354	376	398	420	442	465	487	16
74	3,487	511	534	558	582	606	630	655	681	706	732	15
75	3,732	758	785	812	839	867	895	923	952	981	011	14
76	4,011	041	071	102	134	165	198	230	264	297	331	13
77	4,331	366	402	437	474	511	548	586	625	665	705	12
78	4,705	745	787	829	872	915	959	005	050	097	145	11
79	5,145	193	242	292	343	396	449	503	558	614	671	10
80	5,671	5,730	5,789	5,850	5,912	5,976	6,041	6,107	6,174	6,243	6,314	9
81	6,314	6,386	6,460	6,535	6,612	6,691	6,772	6,855	6,940	7,026	7,115	8
82	7,115	7,207	7,300	7,396	7,495	7,596	7,700	7,806	7,916	8,028	8,144	7
83	8,144	8,264	8,386	8,513	8,643	8,777	8,915	9,058	9,205	9,357	9,514	6
84	9,514	9,677	9,845	10,0	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	5
85	11,43	11,66	11,91	12,16	12,43	12,71	13,00	13,30	13,62	13,95	14,30	4
86	14,30	14,67	15,06	15,46	15,89	16,35	16,83	17,34	17,89	18,46	19,08	3
87	19,08	19,74	20,45	21,20	22,02	22,90	23,86	24,90	26,03	27,27	28,64	2
88	28,64	30,14	31,82	33,69	35,80	38,19	40,92	44,07	47,74	52,08	57,29	1
89	57,29	63,66	71,62	81,85	95,49	114,6	143,2	191,0	286,5	573,0	- - -	0
	(1,0)	,9	,8	,7	,6	,5	,4	,3	,2	,1	,0	Grad.

cotangente

Tabla de logaritmos

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3997	4014	3979	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4229	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4869	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

Memento

Aritmética y Álgebra

Números reales

(1) Dominios numéricos

El dominio de los números enteros está formado por los naturales y sus opuestos:
$\mathbb{Z} = \{0;\ \pm 1;\ \pm 2,\ \pm 3;\ \ldots\}$
El dominio de los números racionales está formado por los cocientes de dos enteros:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q}\ : p, q \in \mathbb{Z}\ ;\ q \neq 0\right\}.$$

El dominio de los números reales, $\mathbb{R}$, está formado por los racionales y los irracionales; todo número real se representa como una expresión decimal. Si la expresión es periódica el número es racional, en caso contrario es irracional.

(2) Subconjunto de $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} / \{0\}$; $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\}$; $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \ \{0\}$

$[a;\ b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$; $(a;\ b) = \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$

$(a;\ b] = \{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$; $[a;\ b) = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$

$(-\infty;\ a) = \{x \in \mathbb{R}: x < a\}$; $(-\infty;\ a] = \{x \in \mathbb{R}: x \leq a\}$

$(a;\ +\infty) = \{x \in \mathbb{R}: x > a\}$; $[a;\ +\infty) = \{x \in \mathbb{R}: x \geq a\}$

(3) Potencias

Para todo número real positivo $a \neq 1$ y todo número real c, existe un único número real $b > 0$ tal que: $a^c = b$ y recíprocamente, a^c es la potencia de base a y exponente c. La potenciación tiene las propiedades siguientes:

Si $a > 0$, $b > 0$ y $s, r \in \mathbb{R}$;

1. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
2. $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$
3. $a^r : a^s = a^{r-s}$
4. $a^r : b^r = (a : b)^r$
5. $(a^r)^s = a^{rs}$
6. $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$

(4) Logaritmos

Dados dos números reales a y b ($a > 0$, $a \neq 1$ y $b > 0$) se llama logaritmo en base a de b y se denota $\log_a b$ al número x que satisface la ecuación $a^x = b$.
La logaritmación tiene las propiedades siguientes:

Si $b > 0$, $c > 0$ y $a > 0$ tal que $a \neq 1$, $c \neq 1$ entonces;

1. $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
2. $\log_a \left[\dfrac{b}{c}\right] = \log_a b - \log_a c$
3. $\log_a b^x = x \log_a b$
4. $\log_a c \cdot \log_c b = \log_a b$

(5) Notación científica

Un número está expresado en notación científica si se escribe $a = a_0 \cdot 10^k$ con $1 \leq a_0 < 10$ y $k \in Z$
Ejemplo: $1\ 364 = 1{,}364 \cdot 10^3$; $\quad 0{,}098 = 9{,}8 \cdot 10^{-2}$

(6) Módulo de un número real

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

(7) Reglas de redondeo

Si el orden al cual se va a redondear (señalado con una flecha en los ejemplos) está seguido de 0; 1; 2; 3; 4, se redondea por defecto. Ejemplo:

$1\ 842 \approx 1\ 800 \qquad 1\ 847 \approx 1\ 800$

Si está seguido de 5; 6; 7; 8; 9 se redondea por exceso.

Ejemplo: $1\ 751 \approx 1\ 800 \quad 1\ 650 \approx 1\ 700 \quad 1\ 980 \approx 2\ 000$

(8) Valores aproximados

En un valor aproximado se llaman cifras significativas, todas las que se encuentran a partir de la primera cifra diferente de cero. Si un número está en notación científica, los ceros de la potencia de 10 no son cifras significativas.

Ejemplo: 1 200	tiene 4 cifras significativas.
0,0240	tiene 3 cifras significativas.
0,01034	tiene 4 cifras significativas.
0,000001	tiene 1 cifra significativa.
$1{,}2 \cdot 10^4$	tiene 2 cifras significativas.

Un valor aproximado que se obtiene de uno exacto aplicando las reglas del redondeo, tiene todas sus cifras significativas correctas. Ejemplo:
1 es un valor aproximado de $\sqrt{2}$ con 1 cifra correcta.

0,333 es un valor aproximado de $\frac{1}{3}$ con 3 cifras correctas.

$1{,}4 \cdot 10^2$ es un valor aproximado de $\sqrt{20\ 000}$ con 2 cifras correctas.

(9) Regla fundamental del cálculo aproximado

Cuando se calcula con valores aproximados el resultado debe darse con tantas cifras significativas como el dato que tenga menor número de cifras significativas. Los cálculos intermedios se realizan con una cifra significativa más que las que debe tener la respuesta; en caso de que esto sea demasiado engorroso, se calcula con tantas cifras como debe tener la respuesta; nunca con menos.

Expresiones algebraicas

(10) Polinomios

Polinomio es una suma algebraica de monomios, se representa por $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \ldots + a_0$; $a_n \neq 0$, grado: n Fracción algebraica es un cociente de polinomios:

$$H(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Si se multiplican o dividen el numerador y el denominador de la fracción por un mismo factor (diferente de cero) la fracción no cambia. Si se divide, la fracción se simplifica; es conveniente operar con fracciones lo más simplificadas posible.

Ejemplo: $\dfrac{(x-2)^3(x+1)^2}{(x-2)^2(x-5)} = \dfrac{(x-2)(x+1)^2}{x-5}$; se simplificó $(x-2)^2$

(11) Productos notables

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

(12) Descomposición factorial

Factor común: $ax + bx = (a+b)x$

Diferencia de cuadrados: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Trinomios: cuadrado perfecto; $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

$x^2 + px + q$: $x^2 + px + q = (x+a)(x+b)$; con $a + b = p$ y $ab = q$

$mx^2 + px + q$: $mx^2 + px + q = (ax+b)(cx+d)$; con $m = ac$; $p = ad + bc$; $q = bd$

Ejemplo: $2x^2 - 3x - 2 = (2x+1)(x-2)$

$$\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ \hline +1 & -4 = -3 \end{array}$$

Ruffini: $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = (x-a)(x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_n)$

$$\begin{array}{c|llll} & 1 & a_1 & a_2 \dots\dots a_n & \\ a & a & & ab_2 \dots\dots ab_{n-1} & \\ \hline & 1 & a + a_1 = b_2 & a_2 + ab_2 = b_3 \dots a_n + ab_{n-1} = 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -4 & 3 \\ 3 & & 3 & 3 & -3 \\ \hline & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

Ejemplo: $x^3 - 2x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x^2 + x - 1)$

(13) Radicales

Radicales semejantes son los que tienen el mismo índice y la misma expresión subradical; se reducen como los términos semejantes. Ejemplo:

$2\sqrt{a} - \sqrt{a^3} + \sqrt{4a} = 2\sqrt{a} - a\sqrt{a} + 2\sqrt{a} = (4-a)\sqrt{a} \qquad (a>0)$

Racionalizar es eliminar los radicales del denominador.

Ejemplo: $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\dfrac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{2(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b} \qquad (a,b>0;\ a \neq b)$

Ecuaciones. Sistemas de ecuaciones

(14) Ecuación de segundo grado

$ax^2 + bx + c = 0$ ($a,b,c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$)

$D = b^2 - 4ac$ es el discriminante. Si $D>0$, la ecuación tiene dos soluciones; si $D = 0$, una solución y si $D<0$, no tiene solución real.

Las soluciones son: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

(15) Ecuaciones con radicales

Para resolverlas es necesario racionalizar: se aísla el radical y se elevan al cuadrado ambos miembros; después se resuelve la ecuación obtenida. Es necesario comprobar.

Ejemplo: $\sqrt{x+3} - 1 = x$

aislamos el radical: $\sqrt{x+3} = x + 1$

racionalizamos: $x + 3 = x^2 + 2x + 1$
raíces: $x_1 = 1$; $x_2 = -2$

-2 es una raíz extraña, pues: $\sqrt{-2+3} - 1 = 0 \neq -2$

luego la única solución de la ecuación es: $x = 1$.

(16) Sistemas de ecuaciones

Los sistemas de ecuaciones pueden resolverse por adición y sustracción (o sea, por eliminación de variables), y por sustitución.
Los sistemas de ecuaciones lineales pueden ser determinados (tienen una solución única), indeterminados (tienen infinitas soluciones) o imposibles (no tienen solución).
Ejemplos:

(1) $2x + y = 5$ (2) $x - y = 1$	(adicionando conduce a $x = 2$; luego $y = 1$) (es determinado, su única solución es (2;1))
(1) $2x + 2y = 6$ (2) $y = 3 - x$	(sustituyendo (2) en (1) se obtiene: $2x + 2(3 - x) = 6$; o sea $6 = 6$. Indeterminado)
(1) $x + 2y = 3$ (2) $2x + 2y = 5$	Multiplicando (1) por 2 y restándolo (2) resulta: $0 = 1$. Imposible)
(1) $x^2 + y^2 = 8$ (2) $y = x$	(sustituyendo (2) en (1) resulta: $x^2 + x^2 = 8$ o $2x^2 = 8$; $x = \pm 2$ luego $y = \pm 2$. Soluciones: (2;2); (-2; -2)

GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA

Ángulos y rectas

(17) Rectas

Una recta es un subconjunto de puntos del plano que tiene las propiedades siguientes:

- Dos puntos determinan una recta y solo una.
- Por un punto pasan infinitas rectas.
- El conjunto de puntos de una recta se puede poner en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números reales, de manera que se conserva el orden.
- Si dos rectas tienen dos puntos en común son coincidentes.

(18) Paralelas y perpendiculares

Las rectas paralelas tienen la misma dirección.
Las rectas perpendiculares forman ángulo de 90°.

Por cada punto de un plano se pueden trazar exactamente una paralela y una perpendicular a una recta dada.

(19) Distancia de un punto a una recta

Si desde un punto exterior a una recta se trazan una perpendicular y varias oblicuas, la perpendicular es menor que las oblicuas. La longitud del segmento de perpendicular es la distancia del punto a la recta.

(20) Ángulos complementarios: Son aquellos cuya suma es 90°.
Ángulos suplementarios: Son aquellos cuya suma es 180°.

(21) Pares de ángulos

Ángulos entre paralelas
En la figura M.1 $r || p$ y s secante.
alternos: α y ρ, β y ω, γ y θ; δ y φ
correspondientes: α y θ; β y φ;
δ y ω; δ y ρ.
conjugados: α y ω; β y ρ; γ y φ; δ y θ

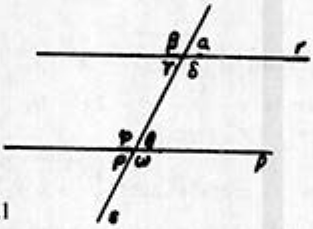


Fig. M.1

Los ángulos alternos y los correspondientes entre paralelos son iguales.
Los ángulos conjugados entre paralelas son suplementarios.
Los ángulos que tienen sus lados, respectivamente, paralelos o perpendiculares son iguales o suplementarios.

Triángulos

(22) Rectas notables de un triángulo

Alturas: son los segmentos de perpendicular trazados desde los vértices hasta los lados opuestos. (Los pies de las perpendiculares se llaman pies de las alturas.)
Medianas: son los segmentos determinados por los vértices y el punto medio del lado opuesto.
Mediatrices. son las mediatrices de cada uno de los lados de un triángulo.
Bisectrices: son los segmentos de bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo; comprendidos entre cada vértice y el lado opuesto.

(23) Puntos notables en un triángulo

En todo triángulo:

- Las alturas se cortan en un punto llamado *ortocentro.*
- Las medianas se cortan en un punto llamado *baricentro.* (centro de gravedad).
- Las mediatrices se cortan en un punto que es el *circuncentro* (centro de la circunferencia circunscrita).
- Las bisectrices se cortan en un punto que es el *incentro* (centro de la circunferencia inscrita).

(24) Suma de ángulos interiores de un triángulo

Los ángulos interiores de un triángulo suman 180°.

(25) Triángulos isósceles

Un triángulo es isósceles si tiene dos lados iguales. En todo triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales y se llaman ángulos de la base. El vértice del otro ángulo es el vértice principal.
En todo triángulo isósceles la altura, la mediana, la mediatriz y la bisectriz relativas al vértice principal coinciden.

(26) Triángulo equilátero

Un triángulo equilátero tiene iguales sus tres lados y sus tres ángulos.
En todo triángulo equilátero las medianas, las mediatrices, las bisectrices y las alturas relativas a cada vértice coinciden.

(27) Triángulo rectángulo

Triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo recto (fig. M.2). El lado opuesto al ángulo recto es la hipotenusa y los otros dos son catetos (*a*: hipotenusa, *b* y *c*: catetos).
En todo triángulo rectángulo se cumple:

$a^2 + b^2 = c^2$ (Teorema de Pitágoras)

$\frac{b}{a} = \operatorname{sen} B \qquad \frac{c}{a} = \cos B$

$\frac{b}{c} = \tan B \qquad \frac{c}{b} = \cot B$

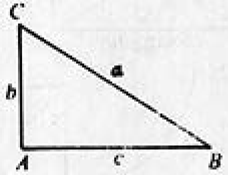


Fig. M. 2

(28) Paralela media de un triángulo

El segmento que une los puntos medios de la base de un triángulo es paralelo a la base e igual a su mitad.

(29) Criterios de igualdad de triángulos

Dos triángulos son iguales si tienen, respectivamente iguales:

- Un lado y los ángulos adyacentes (a.l.a.).
- Dos lados y el ángulo comprendido (l.a.l.).
- Sus tres lados (l.l.l.).

(30) Criterios de semejanza de triángulos

Dos triángulos son semejantes si:

- Tienen dos ángulos respectivamente iguales (a.a.).
- Tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos, respectivamente igual (p.a.p.).
- Tienen los tres lados proporcionales (p.p.p.).

(31) Clasificación y propiedades de los cuadriláteros

Paralelogramos

- Los paralelogramos tienen sus lados opuestos iguales y paralelos. Sus ángulos opuestos son iguales y los consecutivos suman 180°. Las diagonales se cortan en su punto medio (fig. M.3). Los *rectángulos* y los *rombos* son paralelogramos especiales

Rectángulo
- Sus cuatro ángulos son rectos.
- Sus diagonales son iguales.

Rombo
- Sus cuatro lados son iguales.
- Sus diagonales son perpendiculares y bisecan el ángulo de donde parten.

- El *cuadrado* es un paralelogramo que es a la vez rectángulo y rombo.

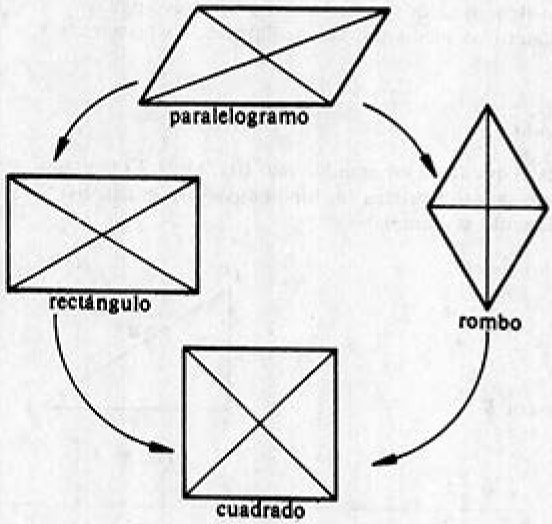


Fig. M.3

Trapecio

- Los trapecios son cuadriláteros que tienen un par de lados paralelos. Los lados paralelos se llaman bases del trapecio (fig. M.4).
- El segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio (*paralela media*) es paralelo a las bases y su longitud es igual a la semisuma de las longitudes de estas.

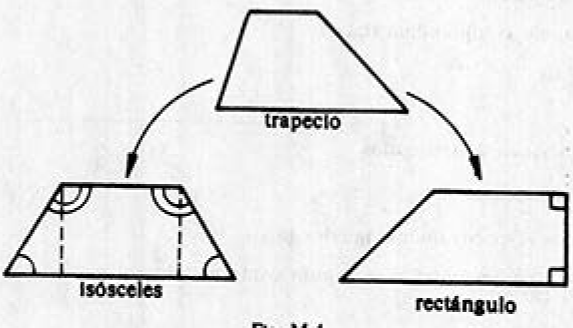


Fig. M.4

(32) Polígonos

Un polígono de:

5 lados, se llama pentágono.
6 lados, se llama exágono.
7 lados, se llama eptágono.
8 lados, se llama octógono.
En general un polígono de n lados se llama n-ágono.
Un polígono es regular si sus ángulos interiores son iguales entre sí y sus lados también.
La suma de los ángulos interiores de un polígono regular de n lados es $(n - 2)\ 180°$.

(33) Polígonos regulares

Para todo polígono regular existe una circunferencia circunscrita.
El centro de esa circunferencia es el centro del polígono. El radio de la circunferencia circunscrita se llama radio del polígono y la perpendicular a un lado trazada desde el centro es la apotema.

El ángulo central α que subtiende un lado del polígono regular es: $\alpha = \dfrac{360°}{n}$ donde n es el número de lados.

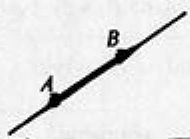
(34) Circunferencia

La circunferencia es un conjunto de puntos que equidistan de uno llamado centro. La distancia de cualquier punto al centro es el radio.
El segmento determinado por dos puntos en una circunferencia es una cuerda, si el centro está en la cuerda es un diámetro.
Si una recta corta a la circunferencia en dos puntos es secante a la circunferencia y si la toca en un solo punto es tangente. Las tangentes trazadas desde un punto a la circunferencia (son dos) son iguales y cada tangente es perpendicular al radio en el punto de contacto.
Por tres puntos no alineados pasa una circunferencia y solo una; su centro es el punto de intersección (circuncentro) de las mediatrices del triángulo que determinan.

Operaciones con vectores

(35) Vectores

Un vector tiene dirección, sentido y módulo; se representa por un segmento orientado. La dirección del vector es la dirección de la recta que lo contiene, el sentido es el de la semirrecta cuyo origen es el origen del vector y lo contiene, y su módulo es la longitud del segmento (fig. M.5).
Dos vectores opuestos tienen igual dirección y módulo, pero sentidos opuestos, se denota $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.



$\overrightarrow{BA}$ opuesto de $\overrightarrow{AB}$

Fig. M.5

(36) Adición de vectores

Para sumar dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, se coloca en un punto del plano un vector $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ y a partir de B un vector $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, entonces (fig. M.6):
$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

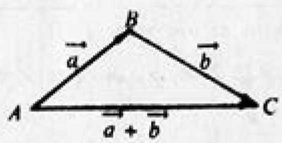


Fig. M.6

El mismo resultado se obtiene si se colocan los vectores $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ y $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ con origen común y se completa el paralelogramo $ABCD$; la diagonal $\overrightarrow{AD}$ es la suma
$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ (fig. M.7).
Fig. M.7

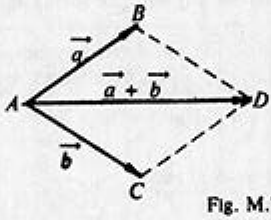


Fig. M.7

(37) Sustracción de vectores

Para restar vectores, se suma al primero el opuesto del segundo. Se puede comprobar que si se construye el paralelogramo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$, la diferencia $\vec{a} - \vec{b}$ es la diagonal $\overrightarrow{CB}$ (fig. M.7).

(38) El producto de un vector $\vec{a}$ por un número real α, es un vector $\alpha\vec{a}$ (fig. M.8) que tiene igual dirección y sentido que $\vec{a}$ si $\alpha>0$; igual dirección y sentido opuesto si $\alpha<0$ y cuyo módulo es $|\alpha|\ |\vec{a}|$.

Fig. M.8

(39) Descomposición de un vector

Todo vector $\vec{a}$ se puede expresar como la suma de dos vectores de direcciones perpendiculares entre sí (fig. M.9), estos dos vectores se llaman componentes del vector $\vec{a}$:

$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$; $|\vec{a}_x| = |\vec{a}| \cos\theta$; $|\vec{a}_y| = |\vec{a}| \operatorname{sen}\theta$

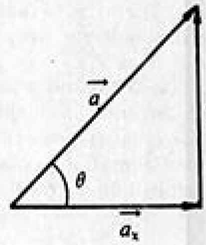


Fig. M.9

Geometría analítica

(40) Distancia entre dos puntos

Dados dos puntos del plano $P_1(x_1; y_1)$ y $P_2(x_2; y_2)$, la distancia entre ellos está dada por la fórmula:

$$d(P_1; P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

(41) Punto medio de un segmento

Sea $\overline{P_1P_2}$ un segmento cuyos extremos tienen coordenadas $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$ entonces las coordenadas del punto medio $M(x_M; y_M)$ de $\overline{P_1P_2}$ son:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \ ; \ y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

(42) Pendiente de una recta

Sean $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$ dos puntos de una recta, no paralela al eje "y"; la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

es la tangente del ángulo que forma la recta con el semieje "x" positivo.

(43) Condiciones de paralelismo y perpendicularidad

Sean las rectas r_1 y r_2 de pendientes m_1 y m_2 respectivamente, se cumple que:

a) $r_1 \| r_2$ si y solo si $m_1 = m_2$

b) $r_1 \perp r_2$ si y solo si $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$

(44) Coordenadas de un vector. Módulo

Se llama vector de posición de un punto $P(x;y)$ al vector que tiene origen en el origen de coordenadas y extremo en el punto P y sus coordenadas son $\overrightarrow{OP}$ $(x;y)$.
Si $P_1(x_1;y_1)$ y $P_2(x_2;y_2)$, entonces $\overrightarrow{P_1P_2}$ $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ (fig. M.10)

$$|\overrightarrow{P_1 P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

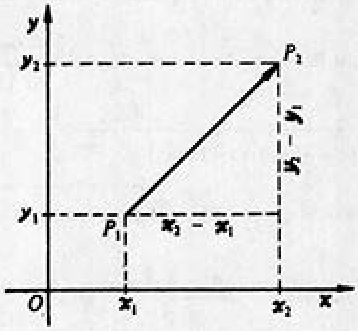


Fig. M.10

(45) Ecuación de la recta

Ecuación general: $Ax + By + C = 0$ con $A \neq 0$, $B \neq 0$ pendiente: $m = -\dfrac{A}{B}$

Ecuación paramétrica: $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}$, $\vec{r}_0$ (vector de posición del punto $P_0 \in r$)
$\vec{a}$ (vector director)
t (parámetro)

en forma de sistema $\begin{cases} x = x_0 + ta_x \\ y = y_0 + ta_y \end{cases}$

pendiente: $m = \dfrac{a_y}{a_x}$

(46) Curvas de segundo grado

Circunferencia: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r_2$ $O(h;k)$(centro)
r(radio)

Parábola de vértice $V(h;k)$:

$(y - k)^2 = 4p(x - h)$ abre a la derecha; si el signo es negativo abre a la izquierda.
$(x - h)^2 = 4p(y - k)$ abre hacia arriba; si el signo es negativo abre hacia abajo.

Elipse de centro $O(h;k)$:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \text{ (eje mayor paralelo al eje } x)$$

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1 \text{ (eje mayor paralelo al eje } y)$$

Hipérbola de centro $O(h;k)$:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \text{ (eje principal paralelo al eje } x)$$

$$\frac{(y - h)^2}{a^2} - \frac{(x - k)^2}{b^2} = 1 \text{ (eje principal paralelo al eje } y)$$

Perímetros, Áreas y Volúmenes

(47) Perímetros

Triángulo: $P = a + b + c$ Paralelogramo: $P = 2a + 2b$

Longitud de la circunferencia: $L = 2\pi r$

Longitud del arco de amplitud $\alpha°$: $l = \dfrac{\pi r \alpha°}{180°} = \pi r \alpha_r$ (α_r medida en radianes)

(48) Áreas (Figuras Planas)

Triángulo: $A = \dfrac{1}{2}\,bh = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (fórmula de Herón) donde

a, b, c: lados: $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

$A = \dfrac{1}{2}\,bh = \dfrac{1}{2}\,ab \operatorname{sen} \gamma$

Rectángulo: $A = ab$ Cuadrado: $A = a^2$

Rombo: $A = \dfrac{1}{2}\,ab$ (a y b longitudes de las diagonales)

Trapecio: $A = \left[\dfrac{b+b'}{2}\right]h$ (b y b' bases, h altura)

Circunferencia: $A = \pi r^2$

$A_{\text{sector}} = \dfrac{\pi r^2 \alpha°}{360°} = \dfrac{\pi r^2(\alpha_r)}{2\pi}$ (α_r medida en radianes)

Áreas de regiones aplicando el cálculo integral:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx + \left|\int_b^c f(x)\,dx\right| \text{ (fig. M.11)}$$

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx \text{ (fig. M.12)}$$

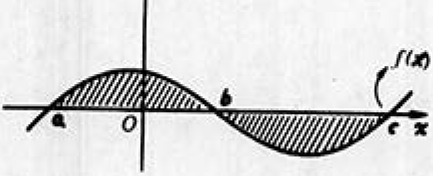


Fig. M.11

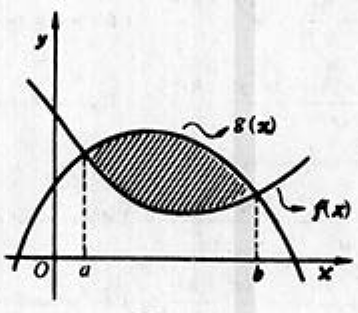


Fig. M.12

(49) Volúmenes y áreas laterales y totales (Cuerpos)

Prisma: $V = A_B \cdot h$

Pirámide: $V = \frac{1}{3} A_B \cdot h$

Cilindro: $\begin{cases} V = A_B \cdot h \\ A_L = 2\pi r \cdot h \\ A_T = 2\pi rh + 2\pi r^2 \end{cases}$

Cono: $\begin{cases} V = \frac{1}{3} A_B \cdot h \\ A_L = \pi g r \\ A_T = \pi r^2 + \pi r g \end{cases}$

Esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; $A = 4\pi r^2$

Prisma (pirámide) regular: prisma (pirámide) recto cuya base es un polígono regular

Trigonometría

(50) Signo de las razones trigonométricas

Razón	Cuadrantes			
	I $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	II $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	III $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	IV $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
seno	+	+	-	-
coseno	+	-	-	+
tangente	+	-	+	-
cotangente	+	-	+	-

(51) Identidades trigonométricas

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha \qquad 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \qquad \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$

$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} \qquad \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$

(52) Fórmulas de reducción

	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$-\alpha$
sen	sen α	$-$sen α	$-$sen α
cos	$-$cos α	$-$cos α	cos α
tan	$-$tan α	tan α	$-$tan α
cot	$-$cot α	cot α	$-$cot α

(53) Relaciones entre las funciones de ángulos complementarios

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{sen}\,\alpha \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\text{sen}\,\alpha \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$

Cálculo Diferencial

(54) Resumen de algunas reglas de derivación.

1. $(c)' = 0$, c: constante   2. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $x>0$
3. $(f + g)' = f' + g'$ siendo f y g funciones diferenciables
4. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ 5. $(c \cdot f)' = c \cdot f'$
6. $\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} (g \neq 0)$.
7. $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ (regla de la cadena)

(55) Derivadas de algunas funciones

- $[\sqrt{x}]' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(\text{sen}\,x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\text{sen}\,x$
- $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(e^x)' = e^x$

(56) Condición para la existencia de extremos locales

Sea f una función dos veces derivable en x_0.

Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) \neq 0$, entonces f tiene un extremo local en x_0.
Si $f''(x_0) > 0$, el extremo es un mínimo local.
Si $f''(x_0) < 0$, el extremo es un máximo local.

SOYGRAF
IMPRESIONES GRÁFICAS
EMPRESA DE PERIÓDICOS
Impreso en la UEB Gráfica de Holguín
Tirada 7 370 ejemplares
Marzo de 2019

Colección
Preuniversitario

Este libro te brinda la primera parte del contenido del programa vigente para el duodécimo grado a partir del curso 1991-1992. Consta de tres capítulos: 1. Combinatoria y probabilidades, 2. Números completos y 3. Geometría del espacio.

Cada uno de estos capítulos está dividido en epígrafes. Por cada epígrafe te ofrecemos una relación de ejercicios que te ayudarán en la consolidación, y al final de cada capítulo encontrarás ejercicios generales de cada uno.

Al final del libro, puedes buscar la mayoría de las respuestas de los ejercicios, y un anexo con las tablas matemáticas y, además, un Memento con contenidos de grados anteriores que necesitarás recordar para aplicarlos en este grado.

9 789591 316530