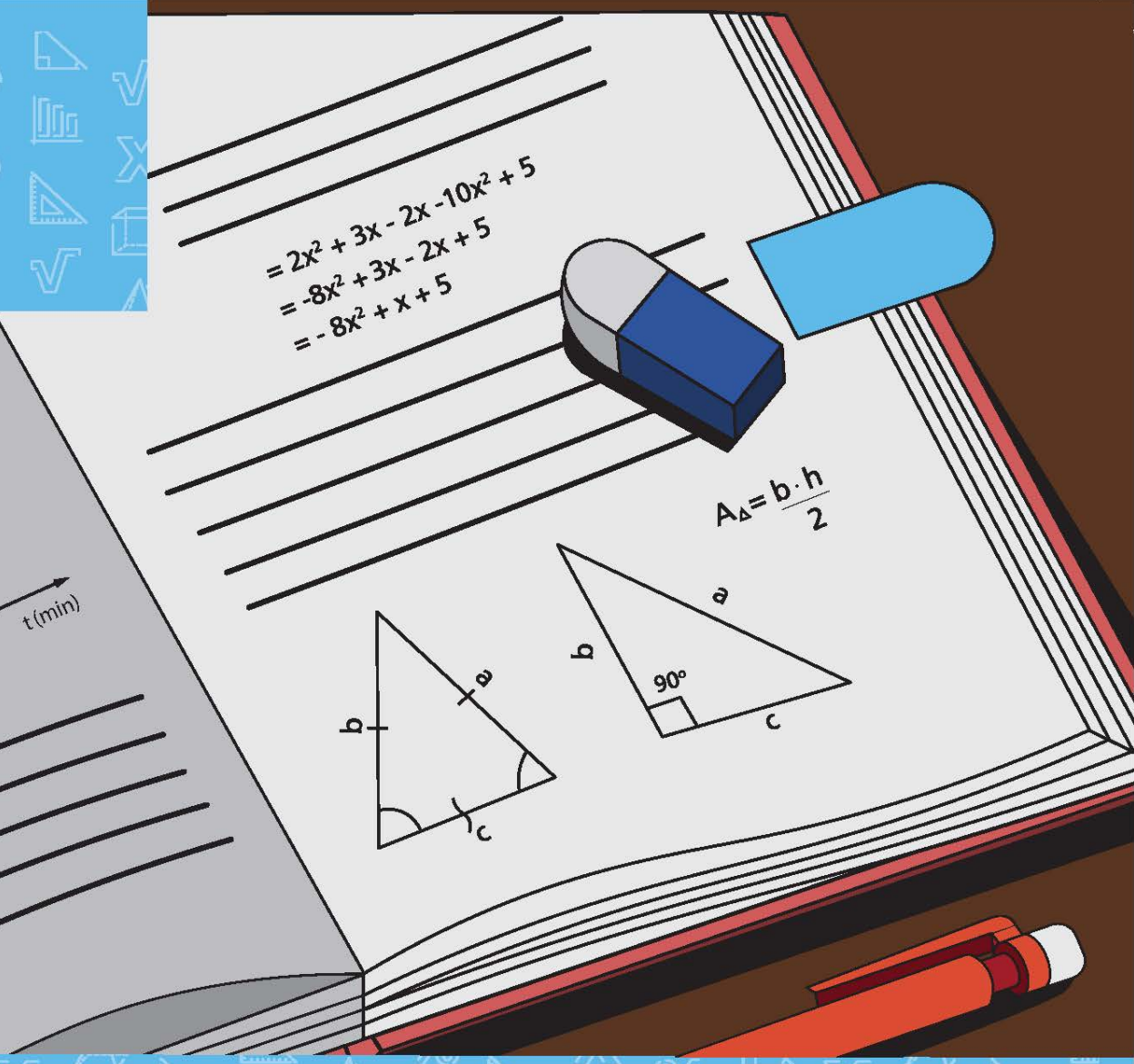


MATEMÁTICA

onceno grado

MATEMÁTICA

onceno grado

M. Sc. Justo Javier Castillo Reyna
M. Sc. Rosa Alicia Cárdenas
Dr. C. Aurelio Quintana Valdés
M. Sc. Francisco E. Rodríguez Meneses
M. Sc. Richard Naredo Castellanos
M. Sc. Zulema Cuadrado González
Dr. C. Emma Mercedes García Enis
M. Sc. Yurixander Castillo Rojas
Ing. Carmelo Mena Rodríguez

EDITORIAL
PUEBLO Y EDUCACIÓN

Este material forma parte del conjunto de trabajos dirigidos al Tercer Perfeccionamiento Continuo del Sistema Nacional de la Educación General. En su elaboración participaron maestros, metodólogos y especialistas a partir de concepciones teóricas y metodológicas precedentes, adecuadas y enriquecidas en correspondencia con el fin y los objetivos propios de cada nivel educativo, de las exigencias de la sociedad cubana actual y sus perspectivas. Ha sido revisado por la subcomisión responsable de la asignatura perteneciente a la Comisión Nacional Permanente para la revisión de planes, programas y textos de estudio del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas del Ministerio de Educación.

Queda rigurosamente prohibida, sin la autorización previa y por escrito de los titulares del copyright y bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, así como su incorporación a un sistema informático.

Material de distribución gratuita. Prohibida su venta

Colaboradora:
■ Dr. C. Marta Álvarez Pérez

Edición y corrección:
■ Lic. Amada Díaz Zuazo

Diseño, cubierta, ilustración:
■ Instituto Superior de Diseño (ISDi)

Emplane:
■ María Pacheco Gola

Diseño:
■ Instituto Superior de Diseño (ISDi):
Adriana Vigil Hernández ■ Alessandra Fuentes Tiel ■ Jennifer González Espinosa ■ Thalia Ibarra Villavicencio ■ Laura Ramos García ■ Ernesto Alejandro Gilart Ruiz ■ María Fernanda Lemus González ■ Aldahir Santana Guzmán ■ Litsary ZamoraRodríguez ■ Samira González González ■ Marian Ramos Rodríguez ■ Kamila CarpioCrespo ■ DCV María Paula Lista Jorge ■ M. Sc. Maité Fundora Iglesias ■ Dr. C. ErnestoFernández Sánchez

© Ministerio de Educación, Cuba, 2024
© Editorial Pueblo y Educación, 2024

ISBN 978-959-13-4807-4 (Versión impresa)
ISBN 978-959-13-4808-1 (Versión digital)

EDITORIAL PUEBLO Y EDUCACIÓN
Ave. 3.ª A No. 4601 entre 46 y 60,
Playa, La Habana, Cuba. CP 11300
epueblo@epe.gemined.cu

Índice

Preámbulo IX
Estudiante XI

1 Funciones numéricas, sus propiedades y operaciones 1
1.1 Funciones numéricas 2
1.2 Función inversa, funciones raíz cuadrada y raíz cúbica, ecuaciones con radicales y operaciones con funciones 22
Ejercicios del capítulo 1 53
Autoevaluación 62

2 Ecuaciones y funciones exponenciales y logarítmicas 67
2.1 Ecuaciones e inecuaciones exponenciales 69
2.2 Logaritmo, sus propiedades y ecuaciones e inecuaciones logarítmicas 82
2.3 Logaritmos decimales 109
2.4 Funciones exponenciales y logarítmicas 122
Ejercicios del capítulo 164
Autoevaluación 172

3 Ecuaciones y funciones trigonométricas 177
3.1 El sistema circular de medida de ángulos 178
3.2 Razones trigonométricas 183

3.3 Identidades y ecuaciones trigonométricas 195
3.4 Funciones trigonométricas. Gráfico y propiedades 222
Ejercicios del capítulo 3 265
Autoevaluación 272

4 **Geometría analítica de la recta en el plano** 275
4.1 Geometría plana 276
4.2 Geometría analítica de la recta 296
Ejercicios del capítulo 331
Autoevaluación 335

5 **Curvas de segundo grado. Secciones cónicas** 339
5.1 Circunferencia 341
5.2 Elipse 359
5.3 Hipérbola 375
5.4 Parábola 389
5.5* Secciones cónicas 405
Ejercicios del capítulo 5 412
Autoevaluación 414

ANEXOS 417

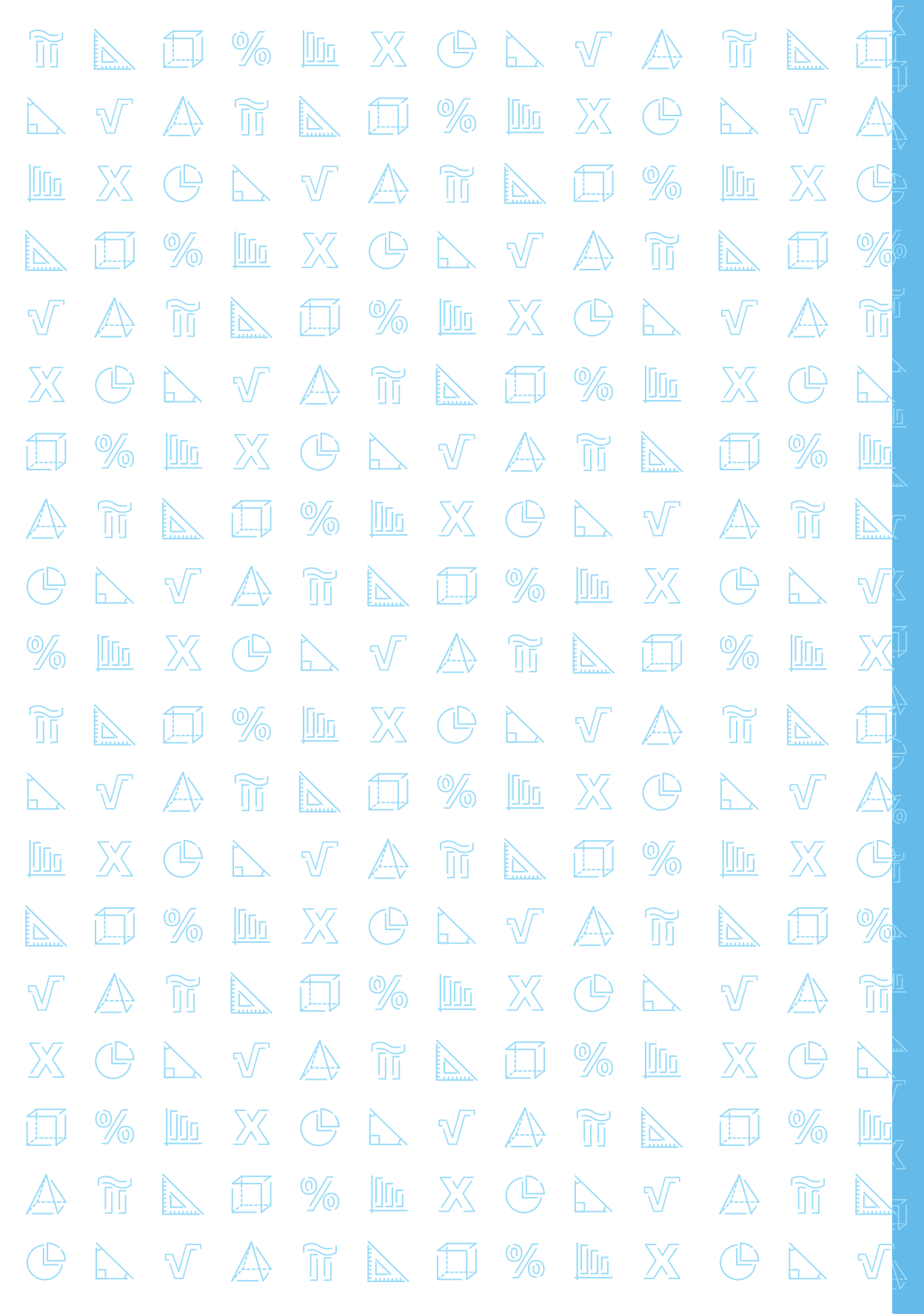
Respuestas a los ejercicios 417
Capítulo 1 417
Capítulo 2 431
Capítulo 3 447
Capítulo 4 454
Capítulo 5 459

BIBLIOGRAFÍA 475

Preámbulo

El presente *libro de texto* que ponemos en tus manos, elaborado para el Onceno grado, vigente a partir del curso escolar 2024-2025, ha tenido como punto de partida el resultado de muchos años de trabajo de un grupo importante de especialistas en la disciplina y en la metodología para su enseñanza, encabezado en un primer momento por el Dr. C. Luis Campistrous Pérez y la Dra. C. Celia Rizo Cabrera y, posteriormente, por la Dra. C. Marta Álvarez Pérez lo que permitió que sus autores contaran, a lo largo de todo el proceso de elaboración, no solo con valiosos materiales de apoyo, sino con acertadas críticas, reflexiones, valoraciones y sugerencias de ellos, de otros especialistas de las universidades, de la enseñanza preuniversitaria y de profesores, que participaron en la etapa experimental, dedicados a la enseñanza de la matemática, los que siempre realizaron observaciones oportunas y necesarias.

¡A todos, nuestro infinito agradecimiento!



Estudiante:

Este libro lo hemos escrito para ti, para que puedas adquirir los conocimientos matemáticos básicos en este grado que estás cursando, los cuales te serán útiles, además, para comprender los contenidos que estudiarás en los grados siguientes. No se trata de presentar contenidos aislados, el libro tiene la intensión de reactivar los conocimientos anteriores, los cuales representan la base necesaria para introducir los nuevos, que a su vez constituyen su ampliación y profundización.

El contenido de este libro está estructurado en cinco capítulos que se corresponden con las unidades del programa de estudio que comprende el curso. Para organizar mejor el contenido, los capítulos están divididos en epígrafes y algunos de estos en subepígrafes.

Cada una de los capítulos comienza con una introducción que revela, de manera breve, el surgimiento y evolución en el tiempo del contenido fundamental que se estudia en el tema, las principales personalidades que propiciaron su desarrollo y la importancia que tiene su estudio para el mejoramiento humano.

En cada epígrafe encontrarás los contenidos del curso, algunos de ellos destacados en recuadro, como es el caso de las definiciones, teoremas y propiedades; los ejemplos resueltos, que contienen además algunas sugerencias que ilustran como debes proceder para resolver ejercicios importantes que corresponden a ese contenido.

Al final de cada uno de los epígrafes aparecen ejercicios propuestos para el trabajo independiente, muchos de los cuales requieren del uso de asistentes matemáticos y tienen el propósito de obtener nuevos conocimientos que debes compartir con tu profesor de matemática y compañeros de grupo. Al final de cada capítulo, encontrarás otros ejercicios que integran los contenidos tratados. Los ejercicios que aparecen señalados con un asterisco (*) son lo que presentan un mayor grado de dificultad.

Para que puedas comprender mejor el contenido y establecer una comunicación más amena con tu libro, este contiene algunas secciones que también aparecen en los diferentes epígrafes. Estas secciones son:

De la Historia. En esta sección se destacan aspectos de personalidades vinculadas al descubrimiento, surgimiento de nuevos contenidos o el origen y desarrollo de aspectos de la matemática tratados.

Reflexiona. Presenta situaciones problémicas en las que debes pensar, porque tienen que ver con un concepto, una relación o un procedimiento.

¿Sabías que…? Es una sección itinerante y variada, para expresar brevemente informaciones relevantes en el tema: una noticia, un descubrimiento o una aplicación de la matemática.

Recuerda que. Presenta pequeños resúmenes de contenidos que debes saber para obtener otros nuevos.

¡Atención! Esta sección es una llamada de atención en aspectos en los cuales debes ser cuidadoso para no incurrir en errores. Destaca algunos elementos que hay que considerar en la resolución de las actividades o ejercicios propuestos.

Investiga y aprende. Se proponen tareas para investigar y, así, enriquecer el conocimiento con el aprendizaje de nuevos contenidos y procederes.

Saber más. Se trata de aspectos relacionados con el contenido que no corresponden al programa, es decir, una breve ampliación del tema que puedes investigar usando los medios de comunicación.

Aplica tus conocimientos. Aparecen tareas para emplear los conocimientos adquiridos, que pueden solucionar nuevas problemáticas intramatemáticas y extramatemáticas

¡Conéctate! En el sitio www.cubaeduca.cu puedes consultar la teoría y ejercicios resueltos relacionados con los temas estudiados.

Reflexiona sobre lo aprendido. Se trata de un grupo de preguntas simples cuyas respuestas sintetizan los contenidos fundamentales del capítulo.

Además, incluye:

Autoevaluación. Aparece al final de cada capítulo estructurada en dos tipos de test.

Ejemplos. Ejercicios resueltos que muestran procedimientos de trabajo.

Ejercicios. Contiene los ejercicios que se proponen para cada epígrafe.

Ejercicios del capítulo. Agrupa ejercicios que integran los contenidos tratados en todo el capítulo.

Respuesta de los ejercicios. Contiene las respuestas de los ejercicios de cada capítulo, al final del libro.

Ponemos en tus manos esta obra y confiamos que sabrás aprovechar el contenido que en ella se recoge, no solo para tu enriquecimiento personal, sino también para compartir los conocimientos que adquieras con todos los que te rodean.

Los autores

CAPÍTULO 1

Funciones numéricas, sus propiedades y operaciones

Desde grados anteriores conoces el concepto de función y sabes que es un modelo matemático que se utiliza para representar la dependencia entre dos magnitudes. Por ejemplo:

- La dependencia del perímetro P de un rectángulo en función del lado a, cuando el otro tiene una longitud fija de 12 m, se puede representar mediante la ecuación $P = f(a) = 2a + 24$.
- El estiramiento s de un resorte en función de la masa w de un cuerpo, para el caso en que una masa de 5 kg estira el resorte 3 cm, se puede expresar de la forma $s = f(w) = \frac{2}{5}w$.
- La relación entre la temperatura medida en grados Fahrenheit (F) y en grados Celsius (C) se puede expresar por la ecuación $F = f(\mathrm{C}) = \frac{9}{5}\mathrm{C} + 32$.

Estos tres ejemplos ilustran cómo un mismo modelo matemático, en este caso una función lineal, sirve para representar diferentes situaciones prácticas. Esto evidencia la generalidad de la Matemática, lo cual es una de las causas de su importancia y sus posibilidades de aplicación en diferentes esferas.

■ *¿Cómo comprender y proceder ante el comportamiento de la temperatura ambiental o humana, de los procesos nutricionales, de los fenómenos físicos que ocurren en la naturaleza o que provoca el hombre o el de las epidemias entre otras?*

La respuesta a las situaciones planteadas en la interrogante, pueden ser analizadas por medio de modelos matemáticos que reflejan la dependencia

entre las magnitudes existentes (ecuaciones) y sus representaciones gráficas. Por ejemplo:

El calentamiento global es un fenómeno que afecta a todos, su comportamiento hace que una parte de los científicos, consideren que la temperatura de la superficie de la Tierra suba constantemente, esta actuación ha sido resumida mediante el modelo: $T = 0,02t + 15$.

Donde T: es la temperatura en °C

t: es la cantidad de años desde 1950.

¿Por qué se puede afirmar que esta relación es una función?

¿Qué condiciones deben cumplir las variables implicadas?

¿Corresponde esta función, a algunas de las conocidas por ti?

En este capítulo profundizarás y estudiarás nuevas funciones, propiedades y operaciones básicas que pueden realizarse y que se encuentran presente en sucesos y análisis de la ciencia.

1.1 Funciones numéricas

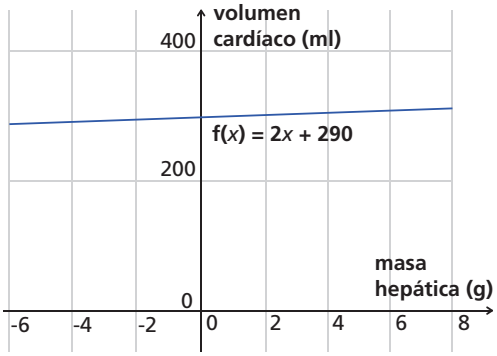


Fig. 1.1

En diversas áreas de la vida cotidiana se establecen relaciones entre dos o más elementos, por ejemplo, la figura 1.1 muestra la gráfica que se obtiene al relacionar el comportamiento entre el volumen del corazón y la masa hepática de un individuo[1] después de realizar determinada actividad física a lo largo del tiempo.

Atendiendo a la ecuación que define a la función y a su gráfica:

¿Cuál es la variable dependiente y cuál la independiente de esta función?

¿Qué valoración puedes hacer sobre el ritmo cardiaco y el volumen hepático?

¿Qué interpretación puedes hacer con respecto al volumen cardiaco en el punto donde la gráfica interseca al eje de las ordenadas?

¿Por qué se puede afirmar que esta función f es numérica?

[1] http://netlizama.usach.cl/Apuntes%20Medicina%20(Veronica).pdf

Estas interrogantes las podrás responder una vez que hayas estudiado los aspectos correspondientes a las funciones numéricas.

¿Qué son las funciones numéricas?

Definición 1.1

Las funciones numéricas son aquellas en las cuales el dominio de definición es un subconjunto de los números reales.

A partir de la definición, te habrás podido percatar de que algunas de las funciones ya estudiadas son numéricas, por lo que profundizarás en ellas.

Repaso y sistematización de las funciones numéricas

Recuerda que...

Una función f de X en Y es:

- una correspondencia en la que a cada elemento del conjunto X se le asocia un único elemento del conjunto Y.
- un conjunto de pares ordenados $(x;y)$ tal que cada $x \in X$ aparece como primera componente de un solo par ordenado.

Una función numérica f se puede representar mediante una ecuación de la forma $y = f(x)$. En este caso, para que f esté bien determinada, se debe conocer su dominio de definición.

Ejemplo 1.1

Determinar cuáles de las siguientes correspondencias, gráficos (figuras 1.2 y 1.3) o conjunto de pares ordenados no son funciones. Justifica tu respuesta.

a)

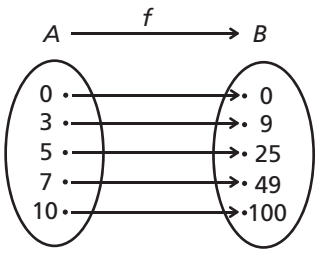


Fig. 1.2

b)

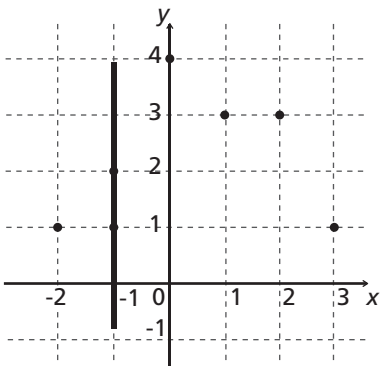


Fig. 1.3

c) $C = \{(1;5),(2;5),(3;5),(4;5),(5;5),(6;5),(7;5)\}$

d) La correspondencia de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, en la que a cada número real le asocia su cubo aumentado en tres.

e) $M = \left\{(x;y) : y = \frac{1}{x-1}, x \in \mathbb{R}\right\}$

f) La correspondencia definida de *A* en *B* representada en la tabla 1.1

Tabla 1.1

A	–1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$
B	-1	0	3	4	5	7

g) La correspondencia definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que a cada número real *x* le hace corresponder $\sqrt{x}$.

Resolución:

a) La correspondencia *f* de *A* en *B* es una función, porque cada número del conjunto *A* tiene asociado un único número o elemento de *B*, su cuadrado.

b) El gráfico no corresponde a una función pues los pares ordenados (–1;1) y (–1;2) tienen la misma abscisa $x = -1$. La recta paralela al eje de las ordenadas que pasa por el punto (–1;1) también contiene al punto (–1;2).

c) El conjunto de pares ordenados representa una función porque cada $x \in X$ aparece como primera componente de un solo par ordenado.

d) La correspondencia es una función, porque cada número real le asocia su cubo aumentado en tres y este es único.

e) El conjunto de pares representado no es una función porque existe un elemento de conjunto de partida ($\mathbb{R}$) el cual no tiene imagen en el conjunto de llegada, que en este caso es el número 1 dado que la función no está definida en $x_0 = 1$.

f) La correspondencia representada en la tabla no es una función porque al elemento $\frac{1}{2}$ del conjunto *A* le corresponden dos imágenes en el conjunto *B* (el 3 y el 7).

g) La correspondencia no es una función porque no está definida en $\mathbb{R}$ solo para todo $x \in \mathbb{R}$ con $x \geq 0$. ◆

Reflexiona

¿Cómo determinar las propiedades globales de las funciones: dominio de definición, conjunto imagen, ceros, monotonía, paridad, signos, valores extremos, simetría del gráfico de la función ?

Ejemplo 1.2

Sea $h(x)=(x+2)^2-1$ la ecuación de la función cuadrática *h*, cuyo gráfico se muestra en la figura 1.4:

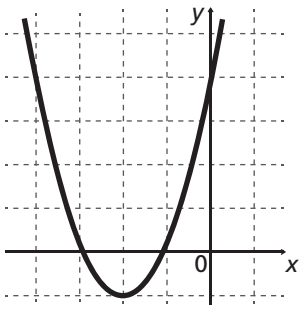


Fig. 1.4

a) Si se conoce que los pares $(-5;b)$ y $(a;48)$ pertenecen a la función *h*, hallar la componente que falta en cada caso.

b) Determinar el conjunto imagen de *h* y la ecuación de eje de simetría.

c) Determinar los valores máximo y mínimo de la función.

d) Expresar el conjunto *A* de todos los valores de *x* del dominio de definición de *h* para los cuales se cumple que: Si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$.

e) ¿Cuál es la ecuación de una función lineal cuyo gráfico corta al gráfico de *h* en un punto del eje de las ordenadas y tiene pendiente *m* = 2?

Resolución:

a) Si un par ordenado pertenece a una función entonces satisface su ecuación; luego, para hallar las componentes que faltan, es suficiente sustituir en la ecuación de la función *h.*

Para hallar *b* se procede así:

$$b = h(-5) = (-5+2)^2 - 1$$
$$= (-3)^2 - 1 = 9 - 1 = 8$$

Para hallar *a* se procede así:

$$(a+2)^2 - 1 = 48$$
$$(a+2)^2 = 49$$
$$a+2 = \pm\sqrt{49}$$
$$a+2 = -7 \quad \text{o} \quad a+2 = 7$$
$$a = -9 \quad \text{o} \quad a = 5$$

Hay dos pares de ordenadas $y = 48$ que pertenecen a la función *h* $(-9;48)$ y $(5;48)$

b) $\text{Im}h = \{y \in \mathbb{R} : y \geq -1\}$

Ecuación del eje de simetría *x* = –2

c) Valor máximo no tiene y valor mínimo $f(-2) = -1$

d) $A = \{x \in \mathbb{R} : x > -2\}$. En este subconjunto del dominio de definición, la función es monótona creciente.

e) $y = mx + n$, pero $m = 2$ y su gráfico corta el eje de las ordenadas en el punto $(0;3)$; entonces, la ecuación es $y = 2x + 3$. ◆

Ejemplo 1.3

Sea la función f representada mediante la ecuación $f(x) = (x-2)^3 + 1$.

a) Determinar el dominio de definición y el conjunto imagen.

b) Hallar el cero y el intercepto del gráfico con el eje de las ordenadas.

c) Trazar el gráfico en un sistema de coordenadas cartesianas (figura 1.5).

d) Determinar el signo de las imágenes de la función.

e) Explicar por qué f no es una función impar.

Resolución:

a) $\text{Dom}f = \{x \in \mathbb{R}\}; \text{Im}f = \{y \in \mathbb{R}\}$

b) Cero de la función

$$(x-2)^3 + 1 = 0$$
$$(x-2)^3 = -1$$
$$x - 2 = \sqrt[3]{-1}$$
$$x - 2 = -1$$

Cero: $x_0 = 1$

Intercepto del gráfico de f con el eje de las ordenadas (eje y)

$$f(0) = (0-2)^3 + 1$$
$$f(0) = (-2)^3 + 1$$
$$f(0) = -8 + 1$$
$$f(0) = -7$$
$$y_1 = -7$$

c)

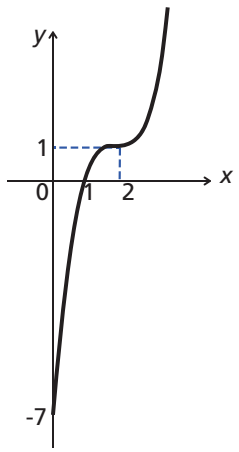


Fig. 1.5

d) La función es negativa para $x < 1$ y positiva para $x > 1$.

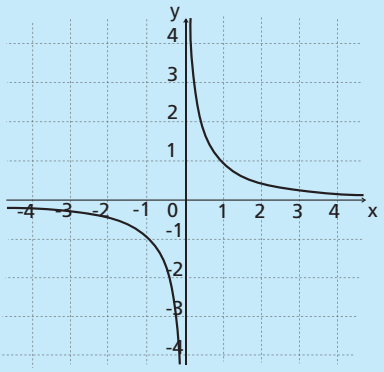
e) La función f no es impar porque elementos opuestos de su dominio de definición no tienen imágenes opuestas. Esto quiere decir que su gráfico no es simétrico respecto al origen de coordenadas. En otras palabras, para que una función sea impar se debe cumplir que $f(x) = -f(-x)$ es decir; $f(-x) = (-x-2)^3 + 1 = -(x+2)^3 + 1$ $f(x) = (x-2)^3 + 1$ $(x-2)^3 + 1$ es diferentes de $-(x+2)^3 + 1$ y para este caso no se cumple. ◆

En los ejemplos anteriores trabajaste nuevamente con dos funciones potenciales que estudiaste en décimo grado: las funciones cuadráticas y las funciones cúbicas. Ahora debes analizar cuidadosamente otro ejemplo de funciones potenciales.

Recuerda que...

La correspondencia que a cada $x \in \mathbb{R}$, con $x \neq 0$, le asocia el número real $f(x) = \frac{k}{x}$, con $k > 0$, se denomina función de proporcionalidad inversa. En este caso k es la constante de proporcionalidad.

La figura 1.6 muestra el gráfico de esta función para el caso $k = 1$.



$f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ con $x \neq 0$

Fig. 1.6

Como en todas las funciones estudiadas hasta ahora, si se tiene una función f dada por su ecuación en la forma más simple, por ejemplo $f(x) = \frac{1}{x}$, se pueden obtener otras mediante traslaciones del gráfico de f en la dirección de los ejes de coordenadas. En este caso, la ecuación correspondiente a una de estas nuevas funciones tiene la forma $y = \frac{1}{x+d} + e$ (con d y e números reales conocidos).

Ejemplo 1.4

Sea la función g representada mediante la ecuación $g(x) = \frac{1}{x-2} + 1$.

a) Determinar el dominio de definición, el conjunto imagen y la monotonía.
b) Hallar el cero y el intercepto del gráfico con el eje de las ordenadas.
c) Trazar el gráfico en un sistema de coordenadas cartesianas (figura 1.7).
d) Analizar los signos de la función.
e) Escribir la ecuación de las asíntotas.

Resolución:

a) $\text{Dom}g = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\}$; $\text{Im}g = \{y \in \mathbb{R} : y \neq 1\}$

La función g es decreciente para $x < 2$ y $x > 2$.

b) Cero

$$\frac{1}{x-2}+1=0$$

$$\frac{1}{x-2}=-1$$

$$1=-(x-2)$$

$$1=-x+2$$

$$-1=x-2$$

$$x=1$$

Cero:

$x_o=1$

Intercepto

$$g(0)=\frac{1}{0-2}+1$$

$$g(0)=-\frac{1}{2}+1$$

$$g(0)=\frac{1}{2}$$

Intercepto del gráfico de g con el eje de las ordenadas: $y_1=\frac{1}{2}$

c) Gráfico

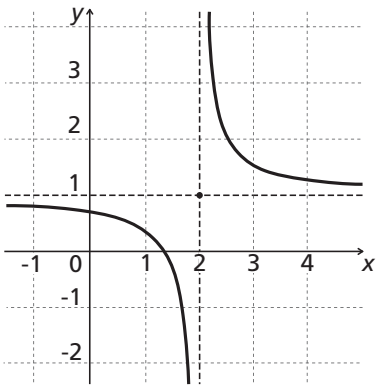


Fig. 1.7

d) Positiva para $x<1$ o $x>2$. Negativa para $1<x<2$

e) Ecuación de la Asíntota vertical: $x=2$ o $x-2=0$

Ecuación de la Asíntota horizontal: $y=1$ o $y-1=0$ ◆

Ejemplo 1.5

La siguiente gráfica (figura 1.8) corresponde a una función t de ecuación $t(x)=|x+d|+e$ definida en el intervalo $[-3;5]$:

a) Escribir la ecuación de la función.

b) Determinar el conjunto imagen y la monotonía.

c) Determinar los ceros, signo de las imágenes, valores extremos y ecuación del eje de simetría.

d) ¿La función es par o impar? Fundamenta tu respuesta.

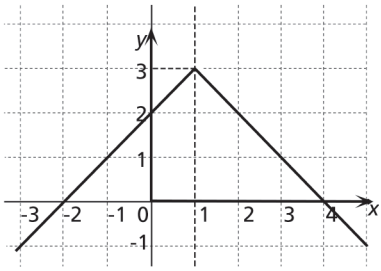


Fig. 1.8

Resolución:

a) $y(x)=-|x-1|+3$

b) $\text{Im}t=\{y\in\mathbb{R}:-1\le y\le 3\}$

La función es creciente para $-3\le x<1$ y decreciente para $1<x\le 5$.

c) Ceros: $x_1=-2$ o $x_2=4$

Signos de las imágenes de la función: positivas para $-2<x<1$; negativas para $x<-2$ o $x>4$

Valores extremos:

$f(1)=3$ valor máximo

$f(-3) = f(5) = -1$ valor mínimo

Ecuación del eje de simetría $x = 1$

d) La función no es par ni impar porque no se cumple que $f(-x) = f(x)$ ni que $f(x) = -f(-x)$ o porque no es simétrica respecto al eje de las abscisas, ni al origen de coordenadas. ◆

Otras propiedades de las funciones numéricas

¿Cuáles de las funciones estudiadas anteriormente satisfacen la propiedad siguiente?

Las rectas paralelas al eje de las abscisas cortan a su gráfico a lo sumo en un punto.

Esta propiedad la puedes ilustrar (figuras 1.9 y 1.10) utilizando la función cuadrática y la función cúbica.

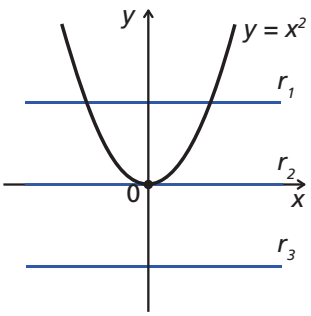


Fig. 1.9

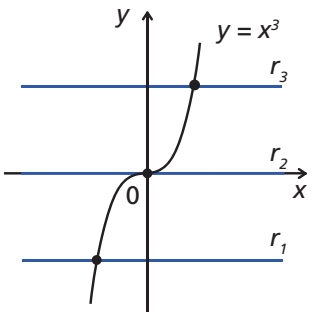


Fig. 1.10

r_1, r_2 y r_3 son rectas paralelas al eje de las abscisas (r_2 es coincidente con el eje).

¿Cuál de las dos funciones satisface la propiedad enunciada anteriormente?

Observa que en la función cuadrática es posible trazar rectas paralelas al eje de las abscisas que cortan en más de un punto a su gráfico, en tanto en la función cúbica cualquier recta paralela al eje de las abscisas corta a su gráfico en un único punto.

Las funciones, en las cuales *las rectas paralelas al eje de las abscisas cortan a su gráfico a lo sumo en un punto*, se clasifican como **inyectivas**.

Definición 1.2

Una función *f* es **inyectiva** si para dos valores iguales de la imagen le corresponden valores iguales del dominio.

En símbolos:

Una función *f* es **inyectiva** *si* $f(x_1)=f(x_2)$ *entonces* $x_1=x_2$ cualesquiera sean los elementos x_1 y x_2 del dominio de *f*. Esta proposición es equivalente a:

si $x_1 \neq x_2$ *entonces* $f(x_1)\neq f(x_2)$.

De esta definición se deduce que:

Si $f(x_1)=f(x_2)$ para al menos un par de valores X_1 y X_2 del dominio de definición de *f*, tales que $x_1 \neq x_2$, entonces *f* es una función **no inyectiva**.

Reflexiona

¿Cuáles de las funciones estudiadas hasta ahora son inyectivas?

Ejemplo 1.6

Dadas las funciones *f* y *g* definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ respectivamente por las ecuaciones siguientes: $f(x)=x^2-2$ y $g(x)=(x+2)^3+1$:

a) Trazar sus gráficos en un sistema de coordenadas cartesianas (figuras 1.11 y 1.12).

b) Comprobar si son o no funciones inyectivas.

Resolución:

a)

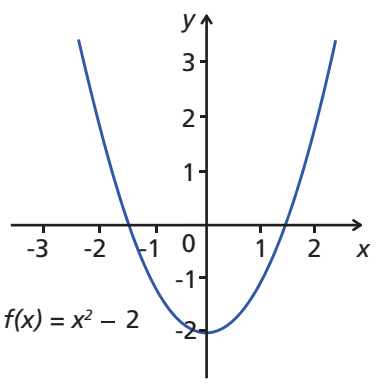


Fig. 1.11

b)

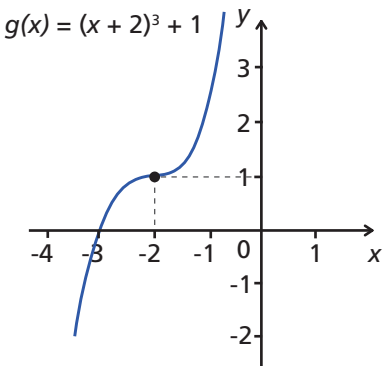


Fig. 1.12

La función f no es inyectiva porque se obtiene la misma imagen para valores diferentes del dominio, por ejemplo, $f(-2)=f(2)=2$.

Esto se puede mostrar de manera general si aplicamos la definición:

Sean x_1 y x_2 elementos del dominio de f, tales que $f(x_1)=f(x_2)$.

En este caso:

$$(x_1)^2-2=(x_2)^2-2$$

$$(x_1)^2=(x_2)^2$$

Pero esta igualdad se satisface para $x_1=x_2$ y para $x_1=-x_2$; luego, existen imágenes iguales para elementos diferentes del dominio; por tanto, f es una función *no inyectiva.*

La función g es inyectiva porque se obtienen imágenes diferentes para valores diferentes del dominio, por ejemplo: $g(-2)=1,\ g(2)=65$.

Esto se puede mostrar de manera general si aplicamos la definición:

Sean x_1 y x_2 elementos del dominio de g, tales que $g(x_1)=g(x_2)$.

En este caso:

$$(x_1+2)^3+1=(x_2+2)^3+1$$

$$(x_1+2)^3=(x_2+2)^3$$

Esta igualdad solo se cumple cuando $x_1+2=x_2+2$

$$x_1=x_2$$

Este resultado significa que se obtienen imágenes iguales solo cuando los elementos del dominio son iguales; por tanto, g es una función *inyectiva*. ◆

¡Atención!

Si la función de ecuación $f(x)=x^2-2$ tuviese dominio restringido; por ejemplo: $\text{Dom}f=\{x\in\mathbb{R}: x>0\}$ entonces la función en ese intervalo o del dominio **sí es una función inyectiva**.

Ejemplo 1.7

Los siguientes diagramas diagramas a y b de la figura 1.13 representan funciones definidas de A en B y los gráficos c y d funciones definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Explicar cuáles de ellas son inyectivas y cuáles no.

Resolución:

a) La función f es inyectiva porque si dos elementos del dominio son diferentes, sus imágenes siempre son diferentes.

b) La función g no es inyectiva porque si $g(x_1)=g(x_2)$, donde x_1 y x_2 son elementos del dominio de g, no necesariamente se cumple que $x_1=x_2$, por ejemplo, $g(b)=g(c)=2$; sin embargo, $b\neq c$.

c) La función *h* no es inyectiva porque existen rectas paralelas al eje de las abscisas que cortan su gráfico en más de un punto.

d) La función *i* es inyectiva porque cualquier recta paralela al eje de las abscisas que corta a su gráfico, no lo hace en más de un punto. ◆

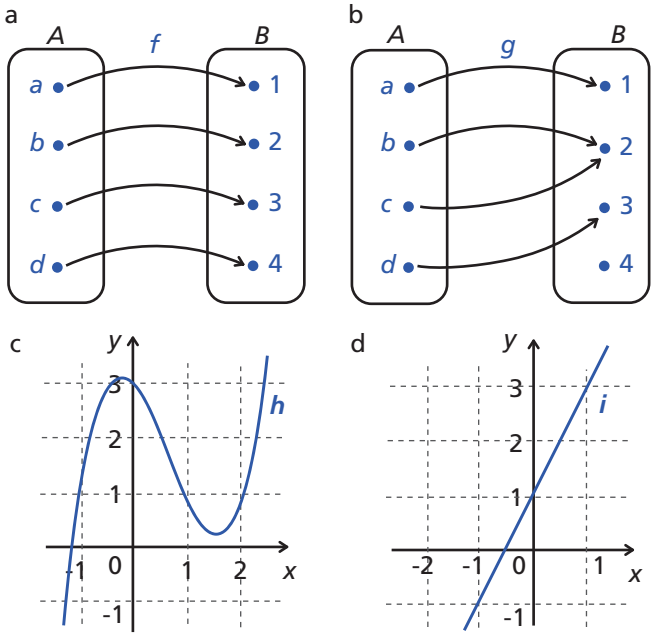


Fig. 1.13

¿Qué otras propiedades se cumplen o no en las funciones estudiadas hasta ahora?

En la figura 1.14 se tiene:

- A y B representan respectivamente el *conjunto de partida y el conjunto de llegada* de una función f.
- $X = \text{Dom}f$ (dominio de definición f)
- $Y = \text{Im}f$ (conjunto imagen de f)

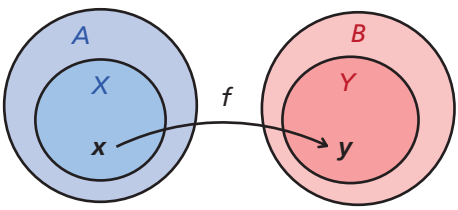


Fig. 1.14

De manera general, cualquiera que sea la función f, se cumple que $X = \text{Dom}f \subseteq A$ y $Y = \text{Im}f \subseteq B$.

Reflexiona

Observa que en las funciones f y g, dadas en el ejemplo 1.4 el conjunto de partida A y el de llegada B son en ambos casos del conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$).
¿En cuáles de los casos el conjunto imagen coincide con el conjunto de llegada?

Definición 1.3

Una función f es **sobreyectiva** si para cada $y \in B$ (B es el conjunto de llegada) existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$.

Ejemplo 1.8

Explicar cuál de las funciones del ejemplo 1.6 es sobreyectiva y cuál no lo es.

Resolución:

a) La función f, de ecuación $f(x) = x^2 - 2$, no es sobreyectiva: existen valores del conjunto de llegada ($\mathbb{R}$) que no son imagen de ningún elemento del dominio de definición de f. Por ejemplo, si y es un número real negativo menor que –2 no existe $x \in \text{Dom} f$ tal que $y = f(x)$.

Otra forma de explicar sería: que el dominio, el conjunto de llegada son todos los números reales, y conjunto imagen de la función son todos los números reales mayores o iguales a –2.

b) La función g, de ecuación $g(x) = (x+2)^3 + 1$, es sobreyectiva porque para todo $y \in \mathbb{R}$ existe un $x \in \text{Dom} f$ tal que $y = f(x)$. (figura 1.15). ◆

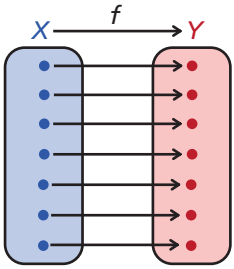


Fig. 1.15

¡Atención!

Si el conjunto imagen y el conjunto de llegada coinciden la función es **sobreyectiva**.

Reflexiona

¿Qué pasaría si todos los elementos del conjunto de partida tienen una imagen distinta en el conjunto de llegada, y a su vez, a cada elemento del conjunto de llegada le corresponde un elemento del conjunto de partida?

Definición 1.4

Una función es **biyectiva** cuando todos los elementos del conjunto de llegada son imagen de uno y solo un elemento del conjunto de partida.

Si se representa una función biyectiva, en un diagrama (figura 1.16), de una función *f* de *A* en *B*, observarías que todos los elementos *B* tienen solo una flecha desde el conjunto *A*.

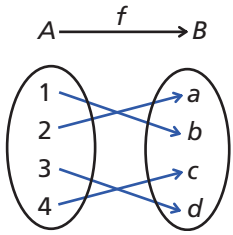


Fig. 1.16

También se puede explicar mediante el lenguaje algebraico: si la función *f* de *A* en *B* es biyectiva cumple que, siendo *x* y *y* elementos de *A*:

$f(x)=f(y)\rightarrow x=y$

Conjunto imagen $(f)=B$

A manera de resumen para que comprendas mejor la **biyectividad de funciones** se muestran los diagramas siguientes en la figura 1.17, en los que se relacionan los elementos del conjunto *A* con los del conjunto *B*.

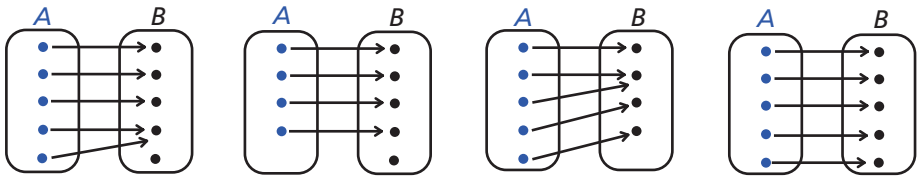


Fig. 1.17

- *Inyectiva* significa que cada elemento de *B* tiene al menos un elemento de *A* al que le corresponde, esto no quiere decir que todos los elementos de *B* tengan alguno en *A*.
- *Sobreyectiva* significa que cada elemento de *B* tiene al menos un elemento en *A* (quizá más de uno).
- *Biyectiva* significa inyectiva y sobreyectiva a la vez. Existe una correspondencia "uno a uno" biunívoca entre los elementos de los dos conjuntos.

Ejemplo 1.9

Analizar los siguientes diagramas (figura 1.18) e identificar cuál corresponde a una función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva:

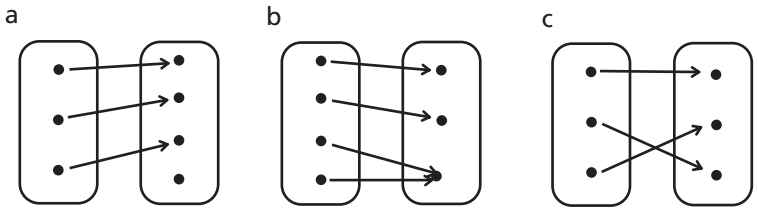


Fig. 1.18

Resolución:

a. Es una función inyectiva porque cada par de elementos diferentes del dominio poseen imágenes diferentes en el conjunto de llegada.
b. Es una función sobreyectiva porque el conjunto de llegada coincide con el conjunto imagen (no se quedan imágenes sin dominio).
c. Es inyectiva, sobreyectiva y biyectiva. ◆

Ejemplo 1.10

Determinar si la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f(x)=3x-2$ es una función biyectiva.

Resolución:

Probaremos primero si la función f es inyectiva, para eso recordemos que una función es inyectiva si $f(x_1)=f(x_2)$ se cumple que $x_1 = x_2$

$3x_1 - 2 = 3x_2 - 2$

$3x_1 = 3x_2$

$x_1 = x_2$

Luego se cumple que si para dos valores iguales del conjunto imagen le corresponden valores iguales del dominio entonces la función es inyectiva.

Al observar la gráfica de esta función (figura 1.19) se verifica que es sobreyectiva que el dominio es $\mathbb{R}$, el conjunto de llegada es $\mathbb{R}$ y el conjunto imagen también es $\mathbb{R}$.

Entonces podemos concluir que la función f de ecuación $f(x)=3x-2$, es simultáneamente inyectiva y sobreyectiva y por tanto es también biyectiva. ◆

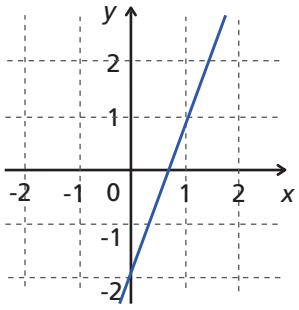


Fig. 1.19

¡Atención!

Si una función es **inyectiva** y **sobreyectiva** simultáneamente entonces es **biyectiva** y viceversa.

Ejemplo 1.11

Explicar por qué las siguientes funciones f y g no son biyectivas (figura 1.20).

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, donde $f(x)=-|x|+3$ b) $y=g(x)$

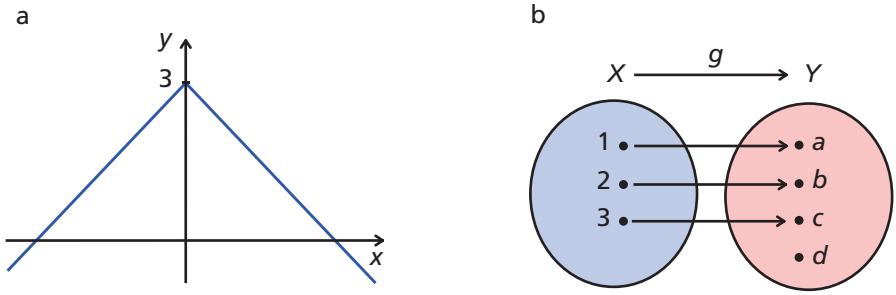


Fig. 1.20

Resolución:

a) La función f no es biyectiva porque no es inyectiva ni sobreyectiva.

- No es inyectiva, porque existen rectas paralelas al eje de las abscisas que cortan su gráfico en más de un punto.
- No es sobreyectiva, porque para cualquier $y>3$ no existe $x\in \mathrm{Dom}f$ tal que $y=f(x)$.

b) La función g no es biyectiva porque no es sobreyectiva. En este caso, para $y=d$ no existe $x\in \mathrm{Dom}g=X$ tal que $y=f(x)$. ◆

Reflexiona

De las funciones estudiadas hasta décimo grado, teniendo en cuenta su relación dominio-conjunto imagen, clasifícalas en inyectiva, sobreyectiva y biyectiva. Justifica en cada clasificación.

Conéctate

Accede al sitio www.cubaeduca.cu, en la sección curricular, busca en undécimo grado Matemática en Actividades de aprendizaje. Repaso sobre funciones y realiza los ejercicios propuestos.

Ejercicios del epígrafe 1.1

1. Determina cuáles de las siguientes correspondencias o conjuntos de pares ordenados no representan una función (figuras 1.21, 1.22, 1.23, 1.24). Justifica tu respuesta.

a)

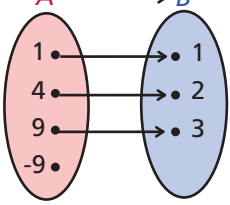


Fig. 1.21

b)

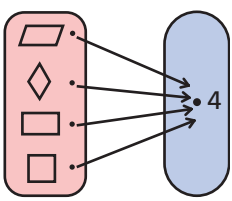


Fig. 1.22

c)

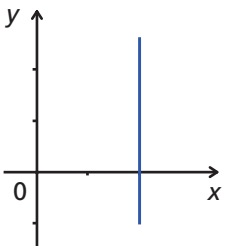


Fig. 1.23

d)

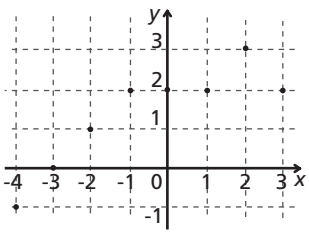


Fig. 1.24

e) $K:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\setminus\{2\}\,\text{con}\,f(x)=3x-1$.

f) $A=\{(x,y):y=x-5\}$.

g) $B=\{(x,y):y=\sqrt{x},x\in\mathbb{R}_+\}$.

h) La correspondencia de $\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ donde a cada número natural se le asocia su recíproco.

2. Las correspondencias que aparecen a continuación, representan una función, escribe cada una como un conjunto de pares ordenados.

a) A cada número real se le hace corresponder su triplo.

b) A cada número real se le hace corresponder su triplo disminuido en 1.

c) A cada número real se le hace corresponder su mitad aumentada en 2,5.

d) A cada número real se le hace corresponder su cuadrado disminuido en 5.

e) A cada número real se le hace corresponder su módulo disminuido en 1.

f) A cada número real distinto de cero se le hace corresponder su recíproco.

g) A cada número real se le hace corresponder su cubo aumentado en 0,1.

3. Determina cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. De considerar alguna falsa fundamenta tu respuesta.

a) La correspondencia definida de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ que a todo número natural le hace corresponder sus divisores en una función.

b) La correspondencia definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que a cada número real x le hace corresponder $\frac{1}{x-2}$ no es una función.

c) La correspondencia que a cada número real le hace corresponder su módulo aumentado en 2 es una función.

d) El conjunto de pares ordenados $\{(1;1),(2;1),(4;2),(4;-2)\}$ representa una función.

e) La función f de ecuación definida en $\mathbb{R}$ de ecuación $f(x)=|x-4|$ no es inyectiva.

f) Las funciones definidas en $\mathbb{R}$ por la ecuación de la forma $y=ax^2+bx+c$ donde a, b y c son números reales y $a<0$, alcanza el valor mínimo en la abscisa del vértice $V(x_v;y_v)$ de la parábola.

g) El gráfico de la función h definida en $\mathbb{R}$ de ecuación $h(x)=x^3+8$, Interseca al eje de las abscisas en el punto de coordenadas $(-2;0)$.

h) Si f es una función definida en los números reales y tiene como ecuación $f(x)=x^2+2x$, entonces si su dominio se restringe al intervalo real $x\in[0;3)$, el conjunto imagen es el intervalo real $y\in[-1;15)$.

I) Si las imágenes de dos valores opuestos del dominio de una función siempre son opuestas entonces la función es par.

j) Las funciones potenciales de exponente entero par definida en $\mathbb{R}$ son biyectivas.

k) La correspondencia definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ donde a cada x real se le asocia $3x^2+1$ es una función sobreyectiva.

l) La función de la forma $y=\frac{3}{x+a}+b$, $x\neq -a$ es una función inyectiva.

m) La función $g(x)=2x^2+1$ no es inyectiva.

4. Dadas las ecuaciones de las funciones que se muestran a continuación.

a) $y=(x-1)^2$ b) $y=|x|-2$ c) $y=x^3+1$ d) $y=(x-1)^2+2$

e) $y=\begin{cases}x^2 & \text{si } x\geq 0\\ -x & \text{si } x<0\end{cases}$ f) $\begin{cases}x^3 & \text{si } x\geq 1\\ 1 & \text{si } 0<x<1\\ -x^2 & \text{si } x\leq 0\end{cases}$

4.1 Traza el gráfico de cada una de ellas en un sistema de coordenadas rectangulares.

4.2 Halla en cada caso el dominio de definición, el conjunto imagen, ceros, paridad, signos, monotonía, valores extremos.

4.3 Verifica la representación gráfica de cada una de las funciones y las propiedades utilizando el GeoGebra.

5. Dada la función *f* definida en un subconjunto de $\mathbb{R}$ por la ecuación $f(x)=\dfrac{1}{x-2}-1$

a) Traza su gráfico en un sistema de coordenadas rectangulares y comprueba tu respuesta utilizando el asistente matemático GeoGebra.

b) Analiza y expresa cuáles son los valores reales que puede tomar la variable *x* y *y*.

c) Identifica cuál es el cero de la función, si existe.

d) En la entrada escribe asíntota, dentro del corchete colocar $f(x)$ haz un clic para que aparezcan las asíntotas y escribe la ecuación de cada una de las asíntotas en tu cuaderno.

e) Sitúa y desliza un punto en cada una de las ramas de la función *f* y describe el comportamiento de las imágenes en cada caso. Describe las conclusiones a las cuales puedes arribar.

f) Si *g* es una función dada por la ecuación $g(x)=x-3$, halla los pares ordenados de números reales $(x;y)$ que pertenecen a ambas funciones. Expresa cuál es el significado gráfico que tienen estos pares ordenados.

6. El siguiente gráfico (figura 1.25) corresponde a una función *f* cuya ecuación tiene la forma $f(x)=\dfrac{1}{x+d}+e$ (*d* y *e* son números reales). Se conoce además que los puntos *A* (3;0) y *B* (1;–2) pertenecen a *f*.

a) Halla los valores de los parámetros reales *d* y *e*.

b) Determina el dominio de definición y el conjunto imagen.

c) Escribe la ecuación de las asíntotas.

d) ¿Por qué *f* es una función decreciente en el intervalo $(2;+\infty)$?

e) ¿Por qué se puede afirmar que *f* no es una función par, ni impar?

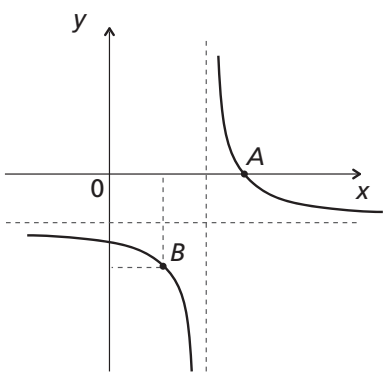


Fig. 1.25

7. De las siguientes correspondencias y conjunto de pares ordenados que se

muestran a continuación (figuras 1.26, 1.27, 1.28, 1.29, 1.30, 1.31, 1.32,1.33):

a)

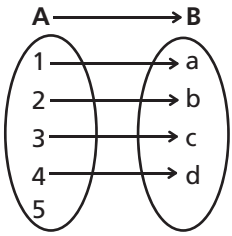


Fig. 1.26

b)

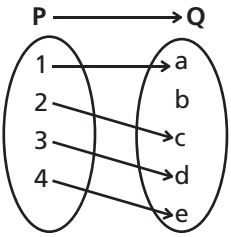


Fig. 1.27

c)

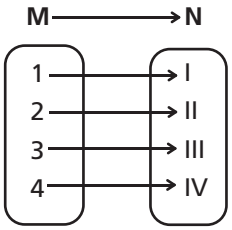


Fig. 1.28

d)

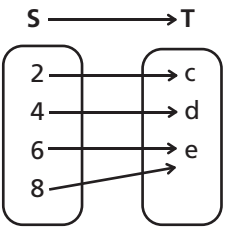


Fig. 1.29

e)

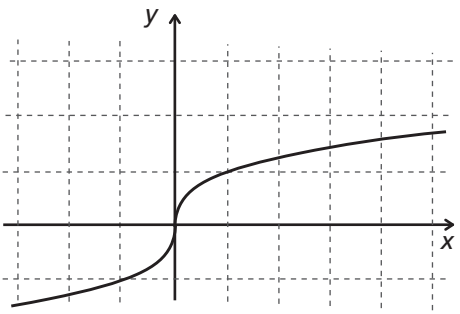


Fig. 1.30

f)

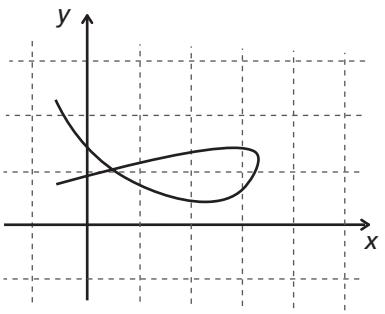


Fig. 1.31

g)

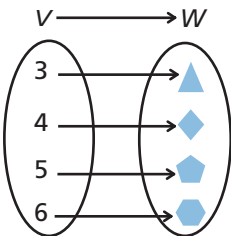


Fig. 1.32

h)

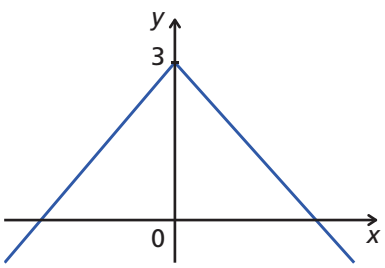


Fig. 1.33

i) El conjunto de pares ordenados $C = \{(1;2),(2;3),(3;4),(3;5)\}$.

j) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x + 3$

k) La correspondencia de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ donde a cada número real *x* diferente de cero se le asocia su recíproco es una función.

7.1 Identifica cuáles son funciones.

7.2 De las correspondencias que son funciones, ¿en cuáles, el conjunto imagen coincide con el conjunto de llegada? o ¿en cuáles todos los elementos del conjunto de llegada están relacionados con algún elemento del conjunto de partida?

7.3 ¿En cuáles, cada imagen se relaciona con solo una preimagen? o ¿en cuáles, cada imagen se relaciona con solo un elemento del conjunto de partida?

7.4 ¿En cuáles coinciden?, ¿cuáles son funciones sobreyectivas e inyectivas?

8. Identifica cuáles de los siguientes diagramas y gráficos (figuras 1.34, 1.35, 1.36, 1.37, 1.38, 1.39, 1.40) representan funciones y cuáles de ellas son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.

a)

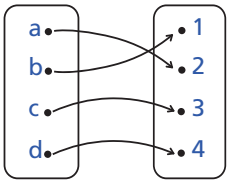


Fig. 1.34

b)

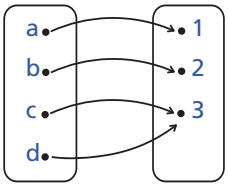


Fig. 1.35

c)

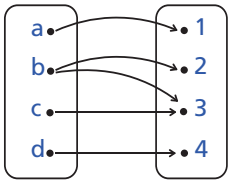


Fig. 1.36

d)

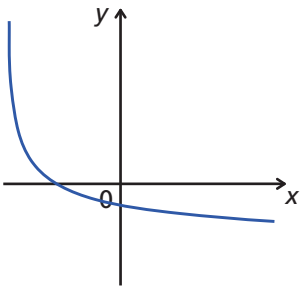


Fig. 1.37

e)

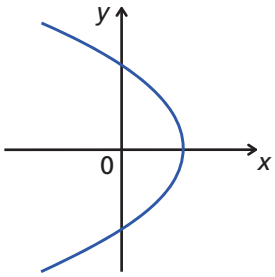


Fig. 1.38

f)

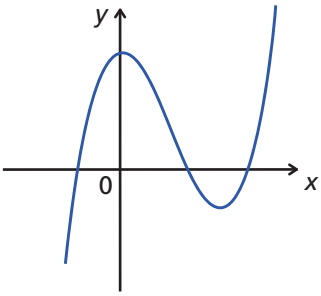


Fig. 1.39

g)

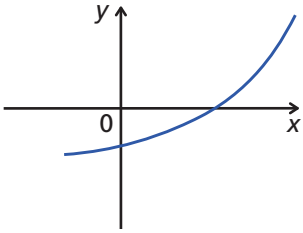


Fig. 1.40

9. Accede al sitio www.cubaeduca.cu y busca la lección Función numérica y realiza las actividades de autoevaluación.

10. Formula un problema que se modele mediante una función que sea inyectiva.

1.2 Función inversa, funciones raíz cuadrada y raíz cúbica, ecuaciones con radicales y operaciones con funciones

Función inversa. Interpretación gráfica

Existen variadas relaciones que, tanto en un sentido como en el otro, tienen un significado práctico; por ejemplo, a partir de una cantidad n *de frascos se puede determinar, en la medida que se van utilizando dichos frascos, el volumen de un tipo de medicamento que se puede envasar, pero si lo que se conoce es el volumen total de un medicamento, entonces se puede determinar cuántos frascos se deben utilizar para envasarlo. En este caso, las relaciones frasco-volumen y volumen-frasco son inversas.*

■ *¿Relaciones como estas se pueden expresar mediante funciones numéricas?*

¿Cuáles son las funciones de un conjunto A *en un conjunto* B *que determinan una nueva función, si se definen de* B *en* A*?*

Consideremos una función $f : A \to B$ como se muestra en la figura 1.41. En este caso $A = \text{Dom}f$ y $B = \text{Im}f$.

Como se puede apreciar la función $f : A \to B$ es inyectiva y sobreyectiva.

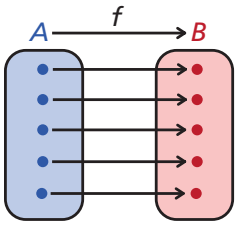


Fig. 1.41

Luego, por ser f inyectiva y sobreyectiva, tenemos que a cada elemento del conjunto $\text{Im}f$ le podemos hacer corresponder uno y solo un elemento del conjunto $\text{Dom}f$; de esta forma, se obtiene una nueva función, que denotaremos $f^{-1} : \text{Im}f \to \text{Dom}f$ (figura 1.42), también inyectiva y sobreyectiva, por lo que es biyectiva y que llamaremos función inversa o invertible de f.

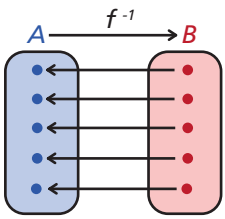


Fig. 1.42

Si f es una función biyectiva con dominio de definición A y conjunto imagen B, entonces la función inversa f^{-1} tiene dominio de definición B y conjunto imagen A y se define por $f^{-1}(y) = x$ si $f(x) = y$ para todo $y \in B$.

Ejemplo 1.12

Sea la función $f : A \to B$ con $A = \{-3; -1; 1,1; 1,41; 2; 3; 4\}$ y $B = \{-2,1; 0; -1; 2,5; 3; 5; -2\}$ representada por el siguiente conjunto de pares ordenados de números reales:

$$f = \{(-3; -2,1), (-1; 0), (1,1; -1), (1,41; 2,5), (2; 3), (3; 5), (4; -2)\}$$

a) Determinar su dominio de definición y el conjunto imagen.

b) Fundamentar por qué $f : \text{Dom}f \to \text{Im}f$ es una función inyectiva y sobreyectiva.

c) Hallar la función inversa de f, su dominio de definición y el conjunto imagen.

d) Representar ambas funciones y el gráfico de $y = x$ en un sistema de coordenadas cartesianas (figura 1.43).

e) Analizar la relación entre los gráficos de una función y su inversa respecto al gráfico de la función idéntica ($y = x$).

Resolución:

a) $\text{Dom}f = \{-3; -1; 1,1; 1,41; 2; 3; 4\}$; $\text{Im}f = \{-2,1; -2; -1; 0; 2,5; 3; 5\}$

b) f es inyectiva porque cualesquiera que sean x_1 y x_2, elementos del dominio de definición de f, se cumple que: si $x_1 \neq x_2$, entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$ y es sobreyectiva porque a cada elemento de B le corresponde al menos un elemento de A.

c) $f^{-1} = \{(-2,1; -3), (0; -1), (-1; 1,1), (2,5; 1,41), (3; 2), (5; 3), (-2; 4)\}$

$\text{Dom}f^{-1} = \{-2,1; -2; -1; 0; 2,5; 3; 5\}$; $\text{Im}f^{-1} = \{-3; -1; 1,1; 1,41; 2; 3; 4\}$

d)

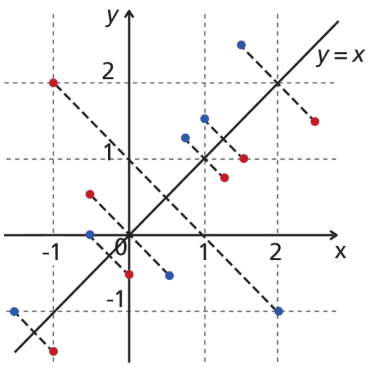


Fig. 1.43

e) El gráfico de una función y el de su inversa (figura 1.43) son axialmente simétricos respecto a la recta que representa el gráfico de la función idéntica ($y = x$). ◆

Para determinar la ecuación de la función inversa f^{-1} de f:

- Verificar si la función es inyectiva
- Sustituir $f(x)$ por y
- Despejar la variable x
- Cambiar la variable x por y
- Escribir la ecuación de la función inversa f^{-1}

Ejemplo 1.13

De la función definida de ecuación $h(x) = -\dfrac{1}{x+4} + 1$:

a) Determinar el dominio de definición y el conjunto imagen de la función.
b) Verificar si la función es inyectiva y sobreyectiva.
c) Determinar la ecuación de la función inversa h^{-1}.
d) Determinar el dominio de definición y la imagen de la función inversa.

Resolución:

a) Determinar el dominio de definición de h. $\{x \in \mathbb{R} : x \neq -4\}$

Determinar el conjunto imagen de h. $\{y \in \mathbb{R} : y \neq 1\}$

b) Verificar la biyectividad de la función.

Por definición es sobreyectiva.
Es inyectiva si para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
$h(x_1) = h(x_2)$ si y solo si $x_1 = x_2$

$$h(x_1) = h(x_2)$$
$$-\frac{1}{x_1+4} + 1 = -\frac{1}{x_2+4} + 1$$
$$-\frac{4}{x_1+1} = -\frac{4}{x_2+4}$$
$$x_1 + 4 = x_2 + 4$$
$$x_1 = x_2$$

Es sobreyectiva porque su conjunto imagen coincide con el conjunto de llegada. Luego, la función es biyectiva por tanto tiene inversa.

c) Para determinar la ecuación de la inversa debes despejar la variable independiente.

$$h(x) = -\frac{1}{x+4} + 1$$

$$y = -\frac{1}{x+4} + 1$$

$$y - 1 = -\frac{1}{x+4}$$

$$(y-1)(x+4) = -1$$

$$x + 4 = \frac{-1}{y-1}$$

$$x = -\frac{1}{y-1} - 4$$

Intercambiar variable.

$$y = -\frac{1}{x-1} - 4$$

Plantear la ecuación de la inversa.

$$h^{-1}(x) = y = -\frac{1}{x-1} - 4$$

d) Determinar el dominio de definición de h^{-1}.

$\{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$

Determinar el conjunto Imagen h^{-1}.

$\{y \in \mathbb{R} : y \neq -4\}$ ◆

Observa que:

Dom h $\{x \in \mathbb{R} : x \neq -4\}$ Dom h^{-1} $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$

Im h $\{y \in \mathbb{R} : y \neq 1\}$ Im h^{-1} $\{y \in \mathbb{R} : y \neq -4\}$

¿A qué conclusión puedes llegar?

Estudio de la función raíz cuadrada ($y = f(x) = \sqrt{x}$)

Reflexiona

Para cualquier valor $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ se puede calcular su imagen mediante la ecuación $f(x) = x^2$, para lo cual es suficiente calcular el cuadrado del valor de x, pues los pares ordenados que pertenecen a esta función tienen la forma $(x; x^2)$.
¿Qué operación se debe utilizar para hallar los valores funcionales de la función inversa de f?, ¿qué forma tienen los pares que pertenecen a la función f^{-1}?.

Como la función cuadrática, definida de

$A = \{x \in \mathbb{R}\}$

en $B = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$

$A = \mathbb{R}$ en $B = (0;\infty)$ por la ecuación

$y = h(x) = x^2$ (figura 1.44), no es inyectiva, no se puede obtener una nueva función si se define en sentido inverso, es decir, de *B* en *B*.

Para que esta función se pueda invertir se debe definir, en un dominio restringido (figura 1.45), como se muestra a continuación: $f(x) = x^2$ con dominio restringido:
$\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

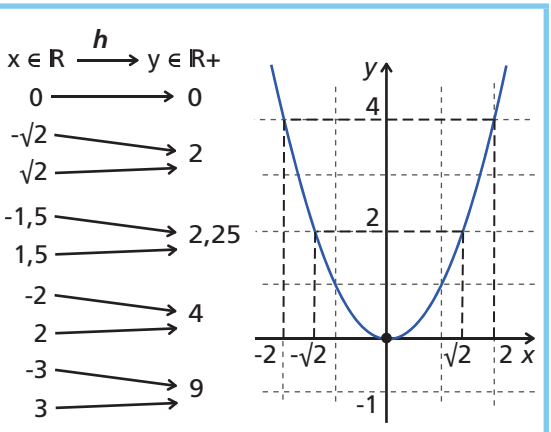


Fig. 1.44

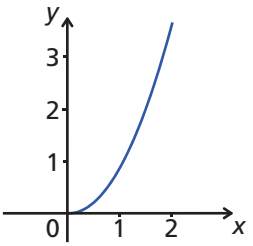


Fig. 1.45

Observa que la función *f* definida del conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ en el conjunto $B = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$ (*A* es el conjunto de partida y dominio de definición y *B* es el conjunto de llegada que coincide con el conjunto imagen) por la ecuación $f(x) = x^2$, es inyectiva y sobreyectiva. Esto quiere decir que la función *f* tiene inversa, ¿cuál es?

En la tabla 1.2 se muestran algunos pares ordenados de la función definida por

$f(x) = x^2$ con $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$:

Tabla 1.2

x	0	1	$\sqrt{2}$	1,5	2	2,5	3
$y = x^2$	0	1	2	2,25	4	6,25	9
$(x;y)$	(0;0)	(1;1)	$(\sqrt{2};2)$	(1,5;2,25)	(2;4)	(2,5;6,25)	(3;6)

A partir de la tabla anterior, se pueden obtener pares ordenados que pertenecen a la función inversa $f(x) = x^2$ con $\{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$.

$$\{(0;0),(1;1),(2;\sqrt{2}),(2,25;1,5),(4;2),(6,25;2,5),(9,3)\}$$

Este resultado nos permite comprender que los pares ordenados que pertenecen a la función inversa de f tienen la forma $(x;\sqrt{x})$, luego su ecuación es

$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ con $\{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$.

Definición 1.5

La correspondencia que a cada $x \in \mathbb{R}$ $(x \geq 0)$ le asocia el número real $f(x) = \sqrt{x}$, se denomina función raíz cuadrada.
Como un conjunto de pares ordenados, esta función se representa de la siguiente manera: $f = \{(x;y): y = \sqrt{x}; x \geq 0\}$

Ahora podemos concluir que la función cuadrática $(y = x^2 ; x \geq 0)$ y la función raíz cuadrada $(y = \sqrt{x} ; x \geq 0)$ son inversas; por tanto, sus gráficos (figura 1.46) son axialmente simétricos respecto a la recta que representa el gráfico de la función idéntica $(y = x)$

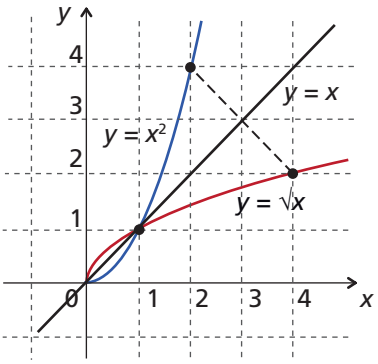
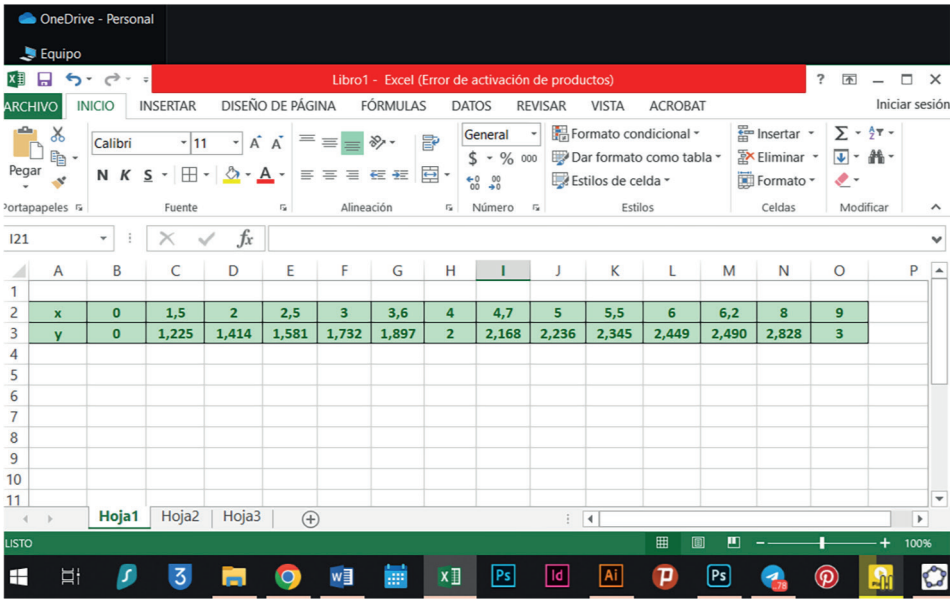


Fig. 1.46

¿Cuáles son las propiedades y el gráfico de la función raíz cuadrada, cuya ecuación es $y = \sqrt{x} ; x \geq 0$ *?*

Utilizando un tabulador electrónico, la calculadora científica, la tabla que aparece al final del libro o de manera manual, puedes construir una tabla para calcular la raíz cuadrada de algunos números reales (figura 1.47), tal como se muestra a continuación:

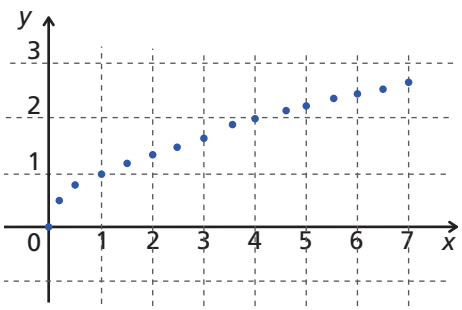


	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
2	x	0	1,5	2	2,5	3	3,6	4	4,7	5	5,5	6	6,2	8	9
3	y	0	1,225	1,414	1,581	1,732	1,897	2	2,168	2,236	2,345	2,449	2,490	2,828	3

Fig. 1.47

Si representas estos pares ordenados $(x;y)$en un sistema de coordenadas rectangulares, se obtiene una gráfica como la que se muestra en la figura 1.48 a, y si aumentas la cantidad de pares o utilizas un asistente matemático, entonces el gráfico es como el que se muestra en la figura 1.48 b.

a



b

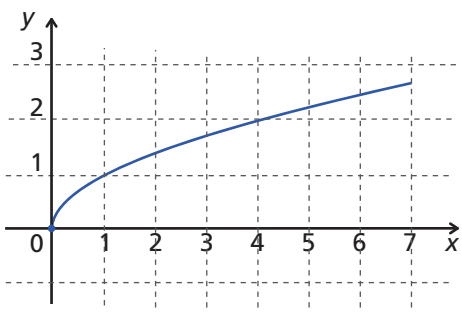


Fig. 1.48

$$y = f(x) = \sqrt{x}$$

Si analizas la ecuación y te apoyas en la representación gráfica de la función (figura 1.48 b), podrás comprender el resumen de la tabla 1.3.

Tabla 1.3

Dominio de definición	$x \in \mathbb{R} : x \geq 0$	Para cada número real no negativo existe su raíz cuadrada y la proyección horizontal de su gráfico cubre completamente el semieje no negativo de las abscisas.
Conjunto imagen	$y \in \mathbb{R} : y \geq 0$	Cualquier número real no negativo se puede expresar como la raíz cuadrada de un número real no negativo y la proyección vertical de su gráfico cubre completamente el semieje no negativo de las ordenadas.
Monotonía	Creciente en todo su dominio de definición	En la medida que crecen los valores del dominio van creciendo los valores de las imágenes.
Ceros	Tiene un único cero $x_0 = 0$	La gráfica de la función corta en un solo punto el eje de las abscisas.
Paridad	No es par ni impar	Su gráfico no es simétrico respecto al eje vertical ni al origen de coordenadas.
Signo	Positiva para $x > 0$	Las imágenes toman valores positivos para $x > 0$.
Valores mínimos y máximos	Valor mínimo: $f(0) = 0$ Valor máximo: no tiene	El menor valor que toma la función es $y = 0$. La función no tiene valor máximo pues no se puede determinar, ya que a medida que aumenta el valor de x en el dominio aumenta el valor de sus imágenes.
Biyectividad	Es inyectiva y sobreyectiva	Es inyectiva ($\sqrt{a} = \sqrt{b}$) si y solo si para $a = b$ y sobreyectiva (el conjunto de llegada coincide con el conjunto imagen.

¿Cómo obtener el gráfico y las propiedades de una función cuya ecuación tiene la forma $y = a\sqrt{x+d}+e$, *con* $a \neq 0$, d *y* e *números reales dados?*

Si utilizas una vista gráfica del GeoGebra, podrás crear un deslizador para cada parámetro real con $a \neq 0$, d y e (figura 1.49). De esta manera, variando los valores de los parámetros, podrás observar las transformaciones y las traslaciones del gráfico de cualquiera de las funciones que se obtienen y llegar a conclusiones generales.

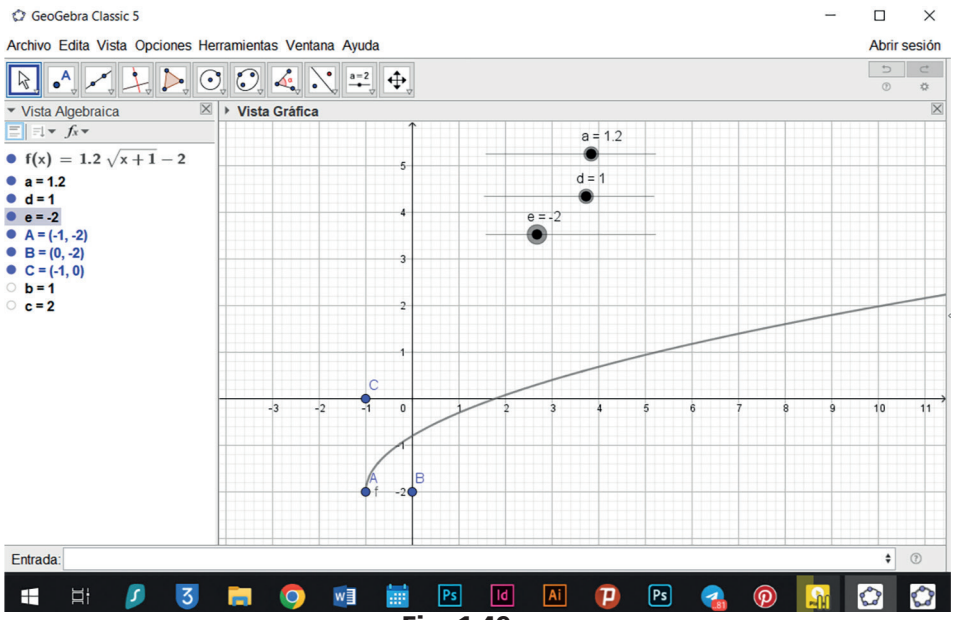


Fig. 1.49

Ejemplo 1.14

Sea la función h cuya ecuación es $h(x) = \sqrt{x-2} + 1$.

a) Determinar el dominio de definición, el conjunto imagen, la monotonía y la paridad.

b) Determinar los valores mínimos y máximos.

c) Comprobar que el par ordenado (66;9) pertenece a la función h.

d) Trazar su gráfico en un sistema de coordenadas rectangulares (figura 1.50).

Resolución:

a) $\text{Dom}h = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$; $\text{Im}h = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 1\}$; es monótona creciente para todo $x \in \mathbb{R} : x \geq 2$; no es par ni impar, es inyectiva en todo su dominio de definición

b) Valor mínimo $h(2) = 1$ Valor máximo no tiene.

c) $h(66) = \sqrt{66-2}+1 = \sqrt{64}+1 = 8+1 = 9$, como $h(66) = 9$ se cumple que $(66;9) \in h$.

d)

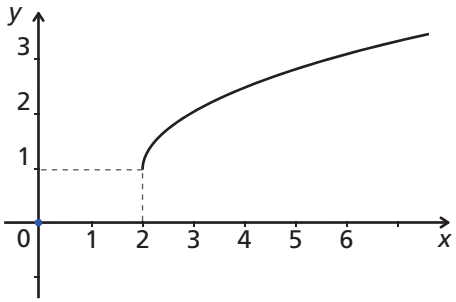


Fig. 1.50

◆

Ecuaciones con radicales

Conoces una nueva función que relaciona la variable real $x \geq 0$ *con la variable también real* $y \geq 0$. *En este caso,* x *es la variable independiente, la cual aparece en el argumento de una raíz cuadrada en ecuaciones que tienen la forma* $y = a\sqrt{x+d}+e$, *con* $a \neq 0$, d *y* e *números reales dados.*

¿Cómo hallar algebraicamente los ceros de funciones cuyas ecuaciones tienen esa forma?

¿Cuál es el procedimiento para hallar la ecuación de la función inversa de una función cuya ecuación tiene la forma $y = a\sqrt{x+d}+e$ *?*

Recuerda que...

- Se denomina cero de una función *f* a un elemento de su dominio de definición cuyo valor funcional es cero.
- Simbólicamente: x_0 es un cero de una función *f* si $x_0 \in \text{Dom}f$ y $f(x_0) = 0$.
- Los ceros de una función *f* son los interceptos de su gráfico con el eje de las abscisas.

Las funciones cuyas ecuaciones tienen la forma $y = a\sqrt{x+d}+e$, por ser inyectivas, tienen a lo sumo un cero, ¿cómo hallarlo?

Como debe cumplirse que el valor funcional sea cero, entonces debemos resolver una ecuación del tipo $a\sqrt{x+d}+e = 0$, que se clasifica como **una ecuación con radicales**.

Las ecuaciones con radicales son aquellas que tienen la variable (incógnita) bajo el signo radical. Para resolver este tipo de ecuación, es necesario transformarla en otra en la que la variable no aparezca en el radicando.

Ilustremos el procedimiento para resolver una ecuación con radicales en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.15

Hallar el conjunto solución de la ecuación $\sqrt{2x+3}-x=0$.

¿Cómo hacerlo?	*Resolución:*
Aislar el radical, es decir, despejarlo.	$\sqrt{2x+3}=x$
Elevar ambos miembros al cuadrado.	$\left(\sqrt{2x+3}\right)^2=x^2$
Obtener una ecuación sin radicales. Recuerda que si $a\geq 0$, entonces $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$	$2x+3=x^2$
Resolver la ecuación obtenida.	$x^2-2x-3=0$ $(x+1)(x-3)=0$ $x_1=-1$ o $x_2=3$
Finalmente, se deben comprobar las raíces o soluciones en la ecuación original, pues al elevar al cuadrado pueden introducirse soluciones de la ecuación trasformadas que no lo sean de la original. Observa que en este ejemplo solo una de las raíces de la ecuación trasformada es solución de la original.	Para $x_1=-1$ MI: $\sqrt{2(-1)+3}-(-1)=\sqrt{1}+1=2$ MD: 0 MI $\neq$ MD Para $x_2=3$ $\sqrt{2\cdot 3+3}-3=\sqrt{9}-3=0$ MD: 0 MI = MD $S=\{3\}$ ◆

En resumen:

Procedimiento para resolver una ecuación con radicales

1. *Racionalizar la ecuación.* Esto consiste en eliminar los radicales de la ecuación. Para ello seguimos dos pasos:
   Primero: aislar el radical.
   Segundo: elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación.
2. *Resolver la ecuación obtenida*.

3. *Comprobar* en la ecuación original las raíces obtenidas para desechar las que no la satisfacen (raíces extrañas).

Ahora, mediante la resolución de ecuaciones con radicales, podemos hallar el cero de la función raíz cuadrada y la ecuación de la función inversa de una función, cuya ecuación tiene la forma $y = a\sqrt{x+d} + e$, con $a \neq 0$, d y e números reales dados.

Ejemplo 1.16

Sea la función h definida de $A = \{x \in \mathbb{R} : x > -3\}$ en $B = \{y \in \mathbb{R} : y \geq -2\}$ cuya ecuación es $h(x) = \sqrt{x+3} - 2$.

a) Hallar el cero de h, si existe.
b) Analizar si la función es biyectiva.
c) Determinar la ecuación de la función inversa de h.
d) Trazar el gráfico de ambas funciones y el de la función idéntica en un sistema de coordenadas rectangulares (figura 1.51).

Resolución:

a) $h(x) = 0$

$$\sqrt{x+3} - 2 = 0$$
$$\sqrt{x+3} = 2$$
$$\left(\sqrt{x+3}\right)^2 = 2^2$$
$$x + 3 = 4$$
$$x = 1$$

El cero de la función es $x_0 = 1$

b) Por definición la función es sobreyectiva pues el conjunto de llegada coincide con el conjunto imagen de la función.
Probemos que es inyectiva.
La función es inyectiva si:
Para todo $(x_1, x_2 \in \mathbb{R})$ si $h(x_1) = h(x_2)$ Se cumple que $x_1 = x_2$

$$h(x_1) = h(x_2)$$
$$\sqrt{x_1 - 2} + 1 = \sqrt{x_2 - 2} + 1$$
$$\sqrt{x_1 - 2} = \sqrt{x_2 - 2}$$
$$x_1 - 2 = x_2 - 2$$
$$x_1 = x_2$$

Como *h* es inyectiva y sobreyectiva, entonces es biyectiva.

c) Para hallar la ecuación de la función inversa se debe despejar *x*. De esta forma se obtiene *x* en función de y.

$y = \sqrt{x+3} - 2$, con $x \geq -3$

$y + 2 = \sqrt{x+3}$

$(y+2)^2 = \left(\sqrt{x+3}\right)^2$

$(y+2)^2 = x+3$

$x = (y+2)^2 - 3$

Para obtener la ecuación de la función inversa que se busca, se deben intercambiar las variables; luego, $y = (x+2)^2 - 3$. Por tanto la ecuación de la función inversa de *h* es: $h^{-1}(x) = (x+2)^2 - 3$, con $x \geq -2$.

d)

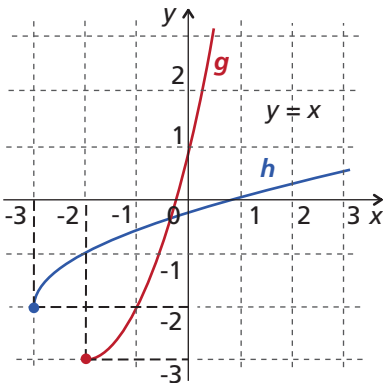


Fig. 1.51

En algunas situaciones debemos resolver ecuaciones con radicales que requieren otras transformaciones algebraicas, como es el caso de desarrollo del cuadrado de un binomio o la necesidad de elevar al cuadrado más de una vez ambos miembros de la ecuación. Pero, en todos los casos, se puede aplicar el procedimiento que se explicó anteriormente.

Recuerda que...

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

Ejemplo 1.17

Hallar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) $x - \sqrt{x} = 2$ b) $\sqrt{x-1} + 1 = x$ c) $\sqrt{x+25} - \sqrt{x} = 1$

Resolución:

a) $x-\sqrt{x}=2$

¿Cómo hacerlo?

Aislar el radical, es decir, despejarlo.

Elevar ambos miembros al cuadrado.

Desarrollar el binomio al cuadrado del miembro derecho y obtener una ecuación sin radicales.

Resolver la ecuación obtenida.

Comprobar las posibles soluciones en la ecuación original y escribir el conjunto solución.

Resolución:

a) $\sqrt{x}=x-2$

$\left(\sqrt{x}\right)^2=(x-2)^2$

$x=x^2-4x+4$

$x^2-5x+4=0$

$(x-4)(x-1)=0$

$x_1=4 \quad \text{o} \quad x_2=1$

Para $x_1=4$

MI: $4-\sqrt{4}=4-2=2$

MD: 2 MI = MD

Para $x_2=1$

MI: $1-\sqrt{1}=1-1=0$

MD: 2 MI ≠ MD

$S=\{4\}$

b) $\sqrt{x-1}+1=x$

Esta ecuación es análoga a la anterior, por tanto, se sigue el mismo procedimiento:

$\sqrt{x-1}=x-1$

$\left(\sqrt{x-1}\right)^2=(x-1)^2$

$x-1=x^2-2x+1$

$x^2-3x+2=0$

$(x-2)(x-1)=0$

$x_1=2 \quad \text{o} \quad x_2=1$

Comprobación

Para $x_1=2$

MI: $\sqrt{2-1}+1=1+1=2$

MD: 2 MI = MD

Para $x_2=1$

MI: $\sqrt{1-1}+1=0+1=1$

MD: 1 MI = MD

$S=\{1;2\}$

c) $\sqrt{x+25}-\sqrt{x}=1$

En esta ecuación aparecen dos radicales que contienen la incógnita; por tanto, habrá que elevar dos veces al cuadrado:

$$\sqrt{x+25} = 1+\sqrt{x}$$
$$\left(\sqrt{x+25}\right)^2 = \left(1+\sqrt{x}\right)^2$$
$$x+25 = 1+2\sqrt{x}+x$$
$$24 = 2\sqrt{x}$$
$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = 12^2$$
$$x = 144$$

Comprobación

Para $x = 144$

MI: $\sqrt{144+25} - \sqrt{144} = \sqrt{169} - \sqrt{144}$

$13 - 12 = 1$

MD: 1 MI = MD

$S = \{144\}$ ◆

Estudio de la función raíz cúbica ($y = f(x) = \sqrt[3]{x}$)

En una empresa se diseña un tipo de caja (figura 1.52) que tiene forma de cubo y en determinado momento se realiza, teniendo en cuenta el ahorro de materiales, las posibilidades de almacenamiento y de optimización del volumen, un estudio de la relación entre el volumen V *y las dimensiones* a *de estas cajas.*



Fig. 1.52

■ *¿Mediante qué ecuación se puede expresar la forma en que puede variar el volumen cuando se modifica la longitud de las dimensiones?*

Si analizas la situación descrita, puedes responder la pregunta formulada utilizando la ecuación $V(a) = a^3$. En este caso, se trata de un ejemplo de función cúbica en la que para cada valor de *a*, con $a \geq 0$ (longitud de las aristas), se obtiene un único valor para el volumen *V* de la caja.

¿Cuál es la ecuación que describe la variación del valor a *de la arista del cubo en función del volumen* V*? ¿Se trata en este caso de una función?*

Esta nueva situación la podemos obtener despejando en la ecuación anterior. En este caso se obtiene $a = \sqrt[3]{V(a)}$, y como a cada valor del volumen *V* le corresponde un único valor de *a* se trata de una función.

Definición 1.6

La correspondencia que a cada $x \in \mathbb{R}$ le asocia el número real $f(x) = \sqrt[3]{x}$ se denomina **función raíz cúbica**.

Como un conjunto de pares ordenados esta función se representa de la siguiente manera: $f = \left\{(x;y) : y = \sqrt[3]{x}\right\}$

Utilizando un tabulador electrónico, la calculadora científica o la tabla que aparece al final del libro, puedes construir una tabla (figura 1.53) para calcular la raíz cúbica de algunos números reales:

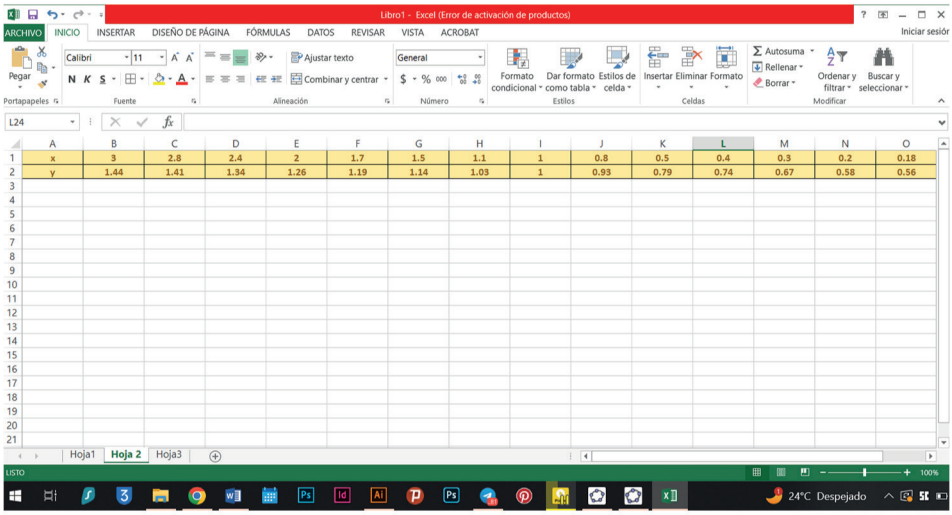


Fig. 1.53

Si representas estos pares ordenados en un sistema de coordenadas rectangulares se obtiene, mediante el ploteo, una gráfica como la que se muestra en la figura 1.54 a, y si aumentas la cantidad de pares o utilizas un asistente matemático, entonces el gráfico es como el que se muestra en la figura 1.54 b.

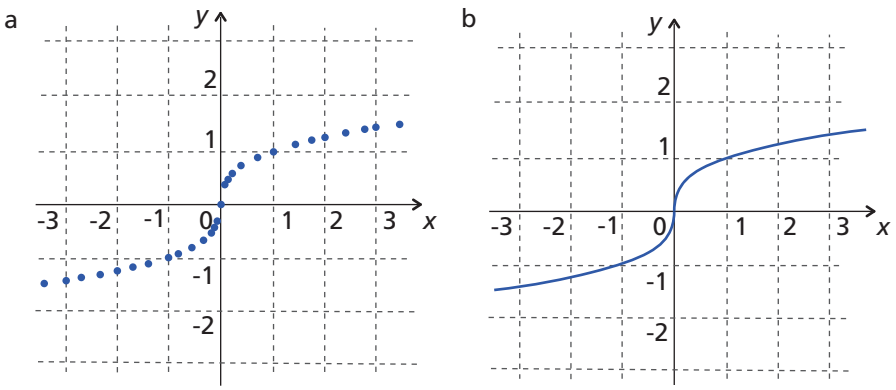


Fig. 1.54

¿Cuáles son las propiedades de la función f *cuya ecuación es* $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$ *?*

Si analizas la ecuación y te apoyas en su representación gráfica (figura 1.54 b), podrás elaborar un resumen como el que te proponemos en la tabla 1.4.

Tabla 1.4

Dominio de definición	$x \in \mathbb{R}$	▪ Para cada número real x existe el número real $\sqrt[3]{x}$ y la proyección de la gráfica de la función sobre el eje de las abscisas lo cubre completamente.
Conjunto Imagen	$y \in \mathbb{R}$	▪ Para cada número real y existe un número real x tal que $y = \sqrt[3]{x}$ y la proyección de la gráfica de la función sobre el eje de las ordenadas lo cubre completamente.
Monotonía	Creciente en todo su dominio de definición	▪ En la medida que crecen los valores del dominio, sus imágenes también.
Ceros	Tiene un cero $x_0 = 0$	▪ La gráfica de la función corta el eje de las abscisas en $x_0 = 0$.
Simetría	Es simétrica con respecto al origen de coordenadas	▪ Si al gráfico le aplica una rotación de centro O y ángulo de 180° se transforma en si misma.
Paridad	Impar	▪ Las imágenes de dos valores opuestos del dominio siempre son opuestas y el gráfico es centralmente simétrico respecto al origen de coordenadas.
Signo	Para $x < 0$ negativas Para $x > 0$ positivas	▪ Para $x < 0$ las imágenes de la función son negativas. ▪ Para $x > 0$ las imágenes de la función son positivas.
Valores extremos	No tiene valor máximo ni valor mínimo	▪ En la medida en que los valores del dominio aumentan (disminuyen) sus imágenes aumentan (disminuyen) ilimitadamente por tanto no se puede determinar y un valor máximo (mínimo) de la función.
Biyectividad	Inyectiva y sobreyectiva, por tanto es biyectiva	▪ Para cada valor de su dominio de definición, existe un único valor de y tal que $y = f(x)$, y viceversa.

¿Cómo obtener el gráfico y las propiedades de una función cuya ecuación tiene la forma $y = a\sqrt[3]{x+d}+e$, *con* $a \neq 0$, d *y* e *números reales dados?*

Como lo hiciste en otras funciones, si utilizas una vista gráfica del *GeoGebra,* podrás crear un deslizador para cada parámetro real con $a \neq 0$, *d* y *e* (figura 1.55). De esta manera, variando los valores de los parámetros, podrás observar las transformaciones y las traslaciones del gráfico de cualquiera de las funciones que se obtienen y llegar a conclusiones generales.

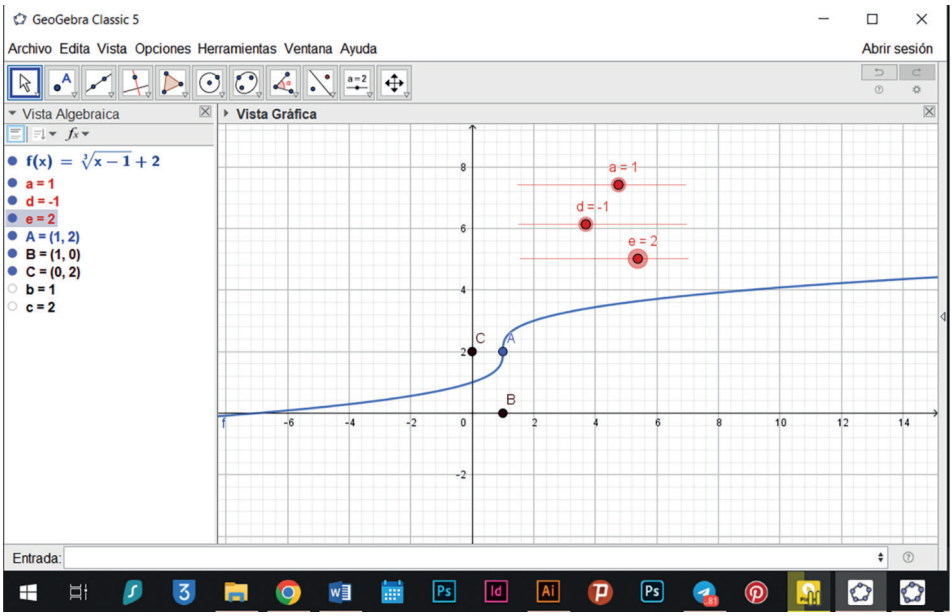


Fig. 1.55

Ejemplo 1.18

Sea la función *h* definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ cuya ecuación es $h(x) = \sqrt[3]{x+2} - 3$:

a) Determinar el dominio de definición y el conjunto imagen.
b) Comprobar que el par ordenado (25;0) pertenece a la función *h*.
c) Hallar el cero y el intercepto con el eje de las ordenadas.
d) ¿Para qué valores del dominio de la función *h* las imágenes son positivas o negativas?
e) ¿Por qué *h* no es una función impar?
f) Trazar su gráfico en un sistema de coordenadas rectangulares (figura 1.56).

Resolución:

a) Dom$h: x \in \mathbb{R}$; Im$h: y \in \mathbb{R}$

b) $h(25) = \sqrt[3]{25+2} - 3 = \sqrt[3]{27} - 3 = 3 - 3 = 0$, como $h(25) = 0$ se cumple que $(25;0) \in h$.

c) Cero de la función

$\sqrt[3]{x+2} - 3 = 0$

$\sqrt[3]{x+2} = 3$

$\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^3 = 3^3$

$x + 2 = 27$

$x = 27 - 2 = 25$

El cero es $x_o = 25$

Intercepto

$y = \sqrt[3]{0+2} - 3$:

$y = \sqrt[3]{2} - 3$:

El intercepto es $y_1 = \sqrt[3]{2} - 3$:

d) Las imágenes de la función *h* son positivas para $x > 25$ y negativas para $x < 25$.

e) *h* no es una función impar porque no se cumple que *f(–x) = – f(x)*. Su gráfico no es simétrico respecto al origen de coordenadas.

f)

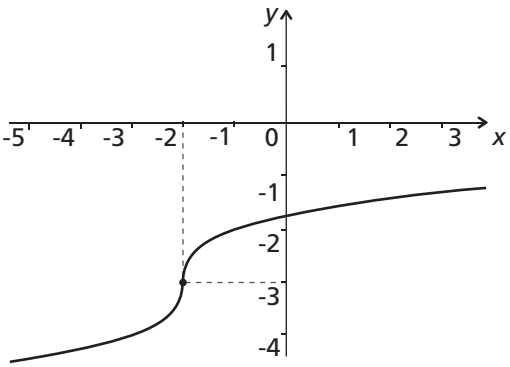


Fig. 1.56

◆

Generalización de las funciones potenciales de exponente fraccionario

Has podido estudiar dos funciones en las cuales la variable independiente es una potencia de exponente fraccionario de la forma $\frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 2$: la función raíz cuadrada ($y = f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$; $x \geq 0$) y la función raíz cúbica ($y = f(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$: $x \in \mathbb{R}$).

■ *¿Qué relaciones existen entre estas dos funciones?*

Definición 1.7

La correspondencia que a cada valor admisible de $x \in \mathbb{R}$ le asocia el número real $y = f(x) = x^{\frac{1}{n}}$, con $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 2$, se denomina función potencial de exponente fraccionario.

De acuerdo con esta definición, las dos funciones estudiadas anteriormente son funciones potenciales de exponente $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$, respectivamente.

¿Satisfacen estas funciones potenciales de exponente fraccionario propiedades comunes? ¿Qué relación hay entre sus gráficos?

Estas funciones potenciales, de ecuaciones de la forma:

$$y = f(x) = x^{\frac{1}{n}} \qquad (n \in \mathbb{N} : n \geq 2)$$

Las podemos organizar en dos grupos según el comportamiento de sus gráficos y propiedades globales: (1) n es un número natural par y (2) $n \geq 3$ es un número natural impar. Este análisis lo puedes realizar utilizando las herramientas del GeoGebra (figura 1.58) y posteriormente resumir las propiedades y el gráfico en una tabla.

¿Cómo hacerlo?

Crear un deslizador para el parámetro n *en la pantalla gráfica del GeoGebra, dar entrada a la ecuación* $y = x^{\frac{1}{n}}$ *y ejecutar* ↵ *Enter. De esta forma obtendrás el gráfico de la función que indica el valor de* n *en el deslizador (figura 1.57).*

Al ejecutar el deslizador, cambia el valor de n *y podrás observar la ecuación que se obtiene en la vista algebraica y las variaciones de su gráfico.*

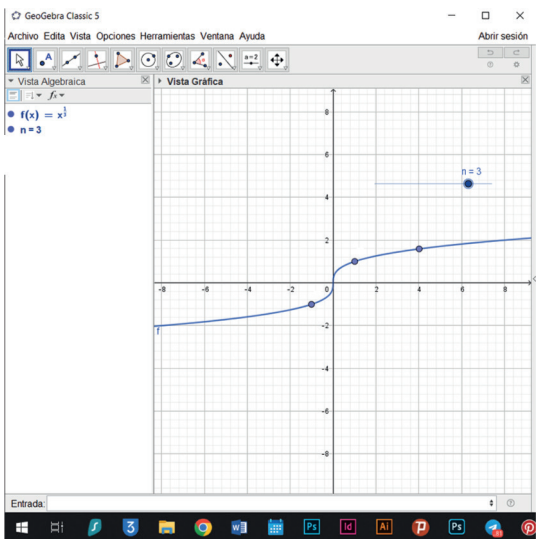
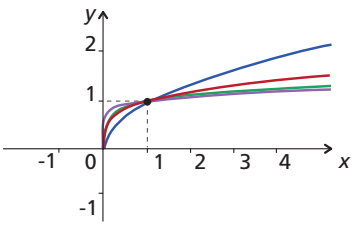
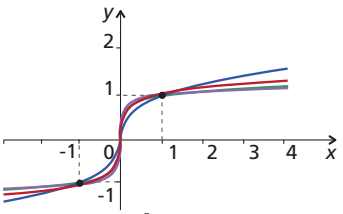


Fig. 1.57

A continuación un resumen (tabla 1.5) de las funciones potenciales.

Tabla 1.5
Resumen de las funciones potenciales

$y = f(x) = x^{\frac{1}{n}}$	$y = x^{\frac{1}{n}}$ $(n \in \mathbb{N};\ n \geq 2)$ (n es par)	$y = x^{\frac{1}{n}}$ $(n \in \mathbb{N};\ n \geq 3)$ (n es impar)
Ejemplos	$y = x^{\frac{1}{2}}\ ;\ y = x^{\frac{1}{4}}\ ;\ y = x^{\frac{1}{6}}$ $(x \geq 0)$	$y = x^{\frac{1}{3}}\ ;\ y = x^{\frac{1}{5}}\ ;\ y = x^{\frac{1}{7}}$ $(x \in \mathbb{R})$
Dominio de definición	$x \in \mathbb{R};\ x \geq 0$	$\mathbb{R}$
Conjunto Imagen	$y \in \mathbb{R}: y \geq 0$	$\mathbb{R}$
Puntos característicos	(1;1)	(–1;–1) y (1;1)
Ceros	$x_0 = 0$	$x_0 = 0$
Paridad	Ni pares ni impares	Impares
Simetría del gráfico	No son simétricos respecto a los ejes ni al origen de coordenadas	Centralmente simétricos respecto al origen de coordenadas
Monotonía	Creciente en todo su dominio de definición	Creciente en todo su dominio de definición
Biyectividad	Son inyectivas y sobreyectiva, por tanto biyectiva.	Son inyectivas en todo su dominio. También son sobreyectivas y biyectivas.
Signos	Positivas para $x > 0$	Positivas para $x > 0$ Negativas para $x < 0$
Gráficos	 **Fig. 1.58**	 **Fig. 1.59**

Ejemplo 1.19

Sea la función *h* cuya ecuación es $h(x) = \sqrt[4]{x+2} - 1$

a) Determinar el dominio de definición, el conjunto imagen y los ceros.
b) Hallar el valor de y_1 para que el par ordenado $(14; y_1)$ pertenezca a la función *h*.
c) Trazar su gráfico en un sistema de coordenadas rectangulares (figura 1.60).
d) Determinar el signo de las imágenes de la función.

Resolución:

a)

$\text{Dom}h = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -2\}$

$\text{Im}h = \{y \in \mathbb{R} : y \geq -1\}$

$\sqrt[4]{x+2} - 1 = 0$

$\sqrt[4]{x+2} = 1$

$\left(\sqrt[4]{x+2}\right)^4 = 1^4$

$x + 2 = 1$

$x = -1$

Cero: $x_0 = -1$

b)

$h(14) = \sqrt[4]{14+2} - 1$

$h(14) = \sqrt[4]{16} - 1$

$h(14) = 2 - 1$

$h(14) = 1$

$y_1 = 1$

c)

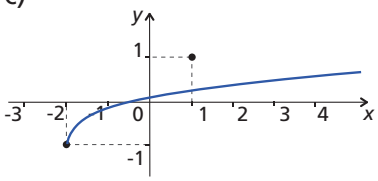


Fig. 1.60

d) Positiva para $x > -1$ y negativa para $-2 \leq x < -1$ ◆

Operaciones con funciones

El desarrollo de la ciencia y la técnica demanda la aplicación de las funciones numéricas para la toma de decisiones y análisis de las situaciones que se presentan.

Estudiosos del medio ambiente han podido constatar el nivel promedio del monóxido de carbono en el aire mediante la función lineal de ecuación $M(m) = 1 + 0,6m$ *partes por millón, si el número de personas es* n *– miles. Si en un tiempo* t *determinado, la población en miles de personas puede estar dada:* $P(t) = 0,5t^2 + 30t + 400$

a) ¿Cómo puedes expresar el nivel de monóxido de carbono en el aire en función del tiempo?
b) ¿Cuál es el nivel de monóxido de carbono en el aire cuando t = *8 años?*

La situación planteada requiere relacionar dos funciones numéricas conocidas una función lineal y una cuadrática, por lo que ampliaras tus conocimientos sobre funciones que puedan dar respuesta al escenario presentado.

Conocerás que con funciones numéricas se pueden realizar diferentes operaciones que resultan muy prácticas cuando se conocen las ecuaciones correspondientes.

Definición 1.8

Dadas dos funciones numéricas f y g de variable independiente x, en que $\text{Dom}f \cap \text{Dom}g \neq \varnothing$ se definen las funciones:

Suma: $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$; con Dom $(f+g) = \text{Dom}f \cap \text{Dom}g$

Diferencia: $(f-g)(x) = f(x)-g(x)$; con Dom $(f-g) = \text{Dom}f \cap \text{Dom}g$

Producto: $(f \cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$; con Dom $(f \cdot g) = \text{Dom}f \cap \text{Dom}g$

Cociente: $(f : g)(x) = f(x) : g(x)$; con Dom $(f : g) = \text{Dom}f \cap \text{Dom}g$; $g(x) \neq 0$

Ejemplo 1.20

Sean las siguientes funciones f, g, h, k, m dadas por sus ecuaciones correspondientes:

$f(x) = x^2 - 1$; $\quad g(x) = \sqrt{x} + 2$; $\quad h(x) = \sqrt{x} - 2$;

$k(x) = -x^3 + x^2 - 2x + 1$; $\quad m(x) = 2x - 2$

Determinar las funciones siguientes y hallar el dominio de definición en cada caso:

a) $f + m$ b) $f - k$ c) $g \cdot h$ d) $f : m$

Resolución:

a) $(f+m)(x) = x^2 - 1 + 2x - 2 = x^2 + 2x - 3$

Dom$f$ = $\mathbb{R}$; Dom$m$ = $\mathbb{R}$; Dom $(f + m)$ = $\mathbb{R}$

b) $(f-k)(x) = x^2 - 1 + x^3 - x^2 + 2x - 1 = x^3 + 2x - 2$

Dom$f$ = $\mathbb{R}$; Dom$k$ = $\mathbb{R}$; Dom $(f - k)$ = $\mathbb{R}$

c) $(g \cdot h)(x) = \left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right) = \left(\sqrt{x}\right)^2 - 2^2 = x - 4$

Dom$g$ = Dom$h$ = $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$; Dom $(g \cdot h)$ = $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

d) $(f : m)(x) = \dfrac{x^2-1}{2x-2} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{2(x-1)} = \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

Dom$f$ = $\mathbb{R}$; Dom$m$ = $\mathbb{R}$; Dom $(f : m)$ = $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ ◆

Además de las operaciones algebraicas expresadas en la definición anterior, con las funciones se realizan otras operaciones, como es el caso de la composición.

Definición 1.9

Sean f y g dos funciones numéricas de variable independiente x, en que $\text{Dom}f \cap \text{Dom}g \neq \varnothing$ tales que $\text{Im}f \cap \text{Dom}g \neq \varnothing$, entonces se llama función compuesta gof a la función definida por: $(gof)(x) = g(f(x))$

$\text{Dom}gof = \{x \in \text{Dom}f : g(f(x)) \text{ está definida}\} = \text{Dom}f \cap \text{Dom}g\,(f(x))$

La imagen de la figura 1.61 ilustra cómo se obtiene la función *fog* dadas las funciones numéricas *f* de *A* en *B* y *g* de *B* en *C*.

Supongamos que se trata de dos procesos diferentes en una fábrica de refrescos, en los cuales A *es el conjunto de las botellas vacías y sin tapas,* B *el de las botellas llenas de refresco pero sin tapas y* C *el de las botellas llenas de refresco y tapadas.*

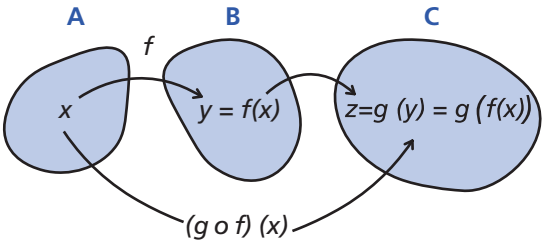


Fig. 1.61

En este caso, la función f *es la que llena de refresco cada botella vacía,* g *la que pone las tapas a las botellas llenas y* fog *es la función en la que a cada botella vacía le asocia una botella llena y tapada.*

■ *¿Se obtiene el mismo resultado si se halla* gof*?*

Ejemplo 1.21

Sean las funciones *f*, *g* y *h*, cuyas ecuaciones son $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^4$ y $h(x) = \dfrac{1}{x-1}$ respectivamente.

Hallar las ecuaciones de las funciones compuestas que se dan a continuación y determinar su dominio de definición en cada caso:

a) *gof* b) *fog* c) *foh* d) *hof*

Resolución:

a) $(gof)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^4 = \left(\sqrt{x^2}\right)^2 = x^2$

$\text{Dom}f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ y $\text{Dom}g(f(x)) = \mathbb{R}$

Pero $\text{Dom}(gof) = \text{Dom}f \cap \text{Dom}g\left(f(x)\right) \therefore \text{Dom}(gof) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

b) $(fog)(x) = f\left(g(x)\right) = f\left(x^4\right) = \sqrt{x^4} = x^2$; $\text{Dom}(fog) = \mathbb{R}$

c) $(foh)(x) = f\left(h(x)\right) = f\left(\dfrac{1}{x-1}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{x-1}}$; $\text{Dom}(foh) = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$

d) $(hof)(x) = h\left(f(x)\right) = h\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$; $\text{Dom}(hof) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0; x \neq 1\}$ ◆

¿Es conmutativa la operación compuesta "o"?

Si observas el resultado de los incisos a) y b), pudieras pensar que la repuesta a la pregunta anterior es conmutativa, pero ¿sucede así en los incisos c) y d)?

Si f y g son dos funciones numéricas; $h = fog$ y $t = gof$ las funciones compuestas, entonces de manera general la igualdad $(fog)(x) = (gof)(x)$ no se satisface para todo x del dominio de definición de las funciones h y t. Por tanto, la composición de funciones no es una operación conmutativa.

Ya estás en condiciones de responder las preguntas planteadas en la situación problémica expuesta a principios del epígrafe.

a) El monóxido de carbono en función del tiempo lo puedes expresar según la definición de función compuesta por medio de la función:

$(MoP)(t) = M\left[P(t)\right]$	Aplicar la definición de función compuesta
$M\left[P(t)\right] = M\left(0{,}5t^2 + 30t + 40\right)$	Sustituir a la función $P(t)$
$M\left[P(t)\right] = 0{,}6\left(0{,}5t^2 + 30t + 400\right) + 1$	Sustituir a la variable independiente en $M(t)$
$M\left[P(t)\right] = 0{,}3t^2 + 18t + 240 + 1$	Efectuar la operación indicada
$M\left[P(t)\right] = 0{,}3t^2 + 18t + 241$	Reducir términos semejantes

Respuesta: el monóxido de carbono en función del tiempo lo puedes expresar como $M\left[P(t)\right] = 0{,}3t^2 + 18t + 241$

b) Para determinar el nivel de monóxido de carbono cuando $t = 8$ basta sustituir en la función compuesta encontrada

$M\left[P(t)\right] = 0{,}3t^2 + 18t + 241$

$$M\left[P(8)\right]=0,3(8)^2+18(8)+241$$

$$M\left[P(8)\right]=0,3\cdot 64+144+241$$

$$M\left[P(8)\right]=19,2+144+241=404,2\text{ppm}$$

Respuesta: el nivel de monóxido de carbono cuando t = 8 es 404,2 ppm

Ejercicios del epígrafe 1.2

1. Las siguientes funciones, representadas mediante un conjunto de pares ordenados, son sobreyectivas. Analiza si son inyectivas y, en caso afirmativo, determina su inversa.

a) $f=\{(1;0),(2;1),(2,3;1,3),(7;6),(9,1;8,1),(11;10),(12,3;11,3),(15,14)\}$

b) $g=\{(-2;4),(-1;1),(1,5;2,25),(2;4),(3;9),(4,5;20,3),(5;25),(6,5,42,3)\}$

c) $h=\{(-3;-27),(-2;-8),(-1,5;-3,4),(0;0),(1;1),(2;8),(3,1;29,8),(4,64)\}$

2. Dadas las funciones biyectivas a, b, c, d, e, dadas por las ecuaciones.

a) $a(x)=4-2x$ b) $b(x)=\dfrac{3}{x+1}$ c) $c(x)=\dfrac{x-1}{4}$

d) $d(x)=\dfrac{1}{x-2}+3$ e) $e(x)=|x-2|$

Determina de cada una de las funciones:

2.1 Dominio de definición y conjunto imagen.

2.2 Ecuación de la función inversa de *a*, *b* y *c*.

2.3 Dominio de definición y conjunto imagen de las funciones inversas de *a*, *b* y *c*.

2.4 Representa en un mismo sistema de coordenadas la función *b* y su inversa.

2.5 Verifica la representación gráfica en un sistema de coordenadas rectangulares con ayuda del asistente GeoGebra.

3. Selecciona cuáles de los siguientes pares ordenados pertenecen a la función *f* representada por la ecuación $f(x)=\sqrt{x}$

a) $(1;1)$ b) $(0,04;0,2)$ c) $(15;5)$ d) $(-4;-2)$

e) $\left(\dfrac{1}{4};0,5\right)$ f) $(0,0001;0,01)$ g) $(2;1,414\ldots)$ h) $(4,9;0,7)$

4. Clasifica cada una de las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas. Si clasifica alguna como falsa justifica por qué lo es:

a) Para todo número real no negativo x, existe un número real y, también no negativo, tal que $y = \sqrt{x}$.

b) Para todo número real y existe un número real no negativo x, tal que $y = \sqrt{x}$.

c) Si el par ordenado de números reales $(a;b)$ pertenece a la función f, cuya ecuación es $f(x) = \sqrt{x}$, entonces $(-a;b)$ también pertenece a f.

d) La función h, cuya ecuación es $h(x) = \sqrt{x}$, con $x \in \mathbb{R}; x \geq 0$, es creciente en todo su dominio de definición.

e) En la función h, cuya ecuación es $h(x) = \sqrt{x}$, con $x \in \mathbb{R}; x \geq 0$, si x_1 y x_2 pertenecen al dominio de definición de h y $x_1 < x_2$, entonces $h(x_1) > h(x_2)$.

f) La función f, cuya ecuación es $f(x) = \sqrt{x}$, con $x \in \mathbb{R}; x \geq 0$, es par.

5. Las siguientes funciones f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2, p_1, p_2 están dadas por sus ecuaciones correspondientes:

$f_1(x) = 2\sqrt{x}$ $\quad g_1(x) = \sqrt{x} - 1$ $\quad h_1(x) = \sqrt{x+2}$ $\quad p_1(x) = \sqrt{x+2} - 1$

$f_2(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ $\quad g_2(x) = \sqrt{x} + 1$ $\quad h_2(x) = \sqrt{x-2}$ $\quad p_1(x) = \sqrt{x-1} + 2$

a) Traza el gráfico de cada una. En cada sistema de coordenadas debes representar una pareja de estas funciones (f_1 y f_2; g_1 y g_2; h_1 y h_2; p_1 y p_2).

b) Halla los ceros, si existen.

c) Determina el dominio de definición, el conjunto imagen y la monotonía.

6. En el siguiente gráfico (figura 1.62) se ha representado la función f:

6.1 La ecuación de la función f es:

a) $f(x) = \sqrt{x+1} + 1$

b) $f(x) = \sqrt{x-1} + 1$

c) $f(x) = \sqrt{x} - 1$

d) $f(x) = \sqrt{x-1}$

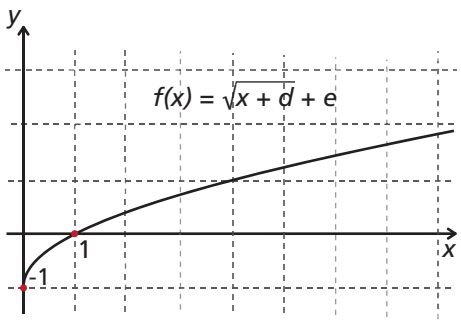


Fig. 1.62

6.2 De la función f se puede afirmar que:

a) Su inversa es f^{-1} de ecuación $f^{-1}(x)=(x+1)^2$
b) Su conjunto imagen es $\{y \in \mathbb{R} : y > -1\}$
c) Alcanza valores positivos para $x \geq 1$
d) No tiene valor máximo

6.3 El punto que pertenece al gráfico de la función *f* es:

a) $(0;1)$ b) $(1;4)$ c) $\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{2}\right)$ d) $(4;-1)$

6.4 Determina la ecuación de la función *h* si $h(x)=\sqrt{x}+x+2-f(x)$.

7. De la función $p(x)=\sqrt{x+2}+d$ se conoce que $p(-1)=-1$:

7.1 Escribe la ecuación de la función *p*

7.2 Selecciona el gráfico (figuras 1.63, 1.64, 1.65, 1.66) que corresponde a la función *p*:

a)

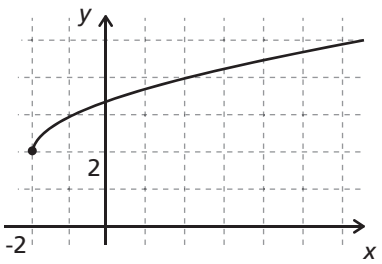


Fig. 1.63

b)

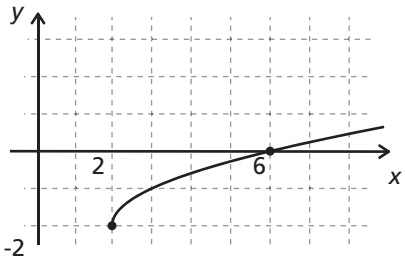


Fig. 1.64

c)

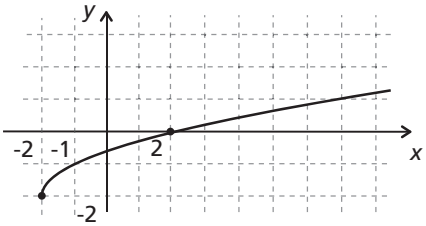


Fig. 1.65

d)

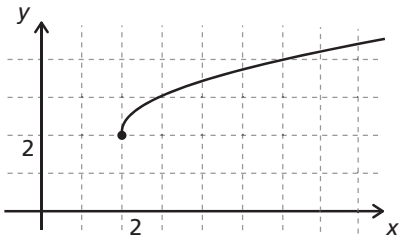


Fig. 1.66

7.3 Determina la ecuación de la función inversa de *p*, su dominio de definición y el conjunto imagen.

7.4 Analiza el signo de la función.

8. Selecciona cuáles de los siguientes pares ordenados pertenecen a la función *f* representada por la ecuación $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

a) $(1;1)$ b) $(0,008;0,2)$ c) $(9;3)$ d) $(-8;2)$

e) $\left(\frac{1}{27};\frac{1}{3}\right)$ f) $(0,000001;0,01)$ g) $(3;1,25992\ldots)$ h) $(2,7;0,3)$

9. Clasifica cada una de las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas. Si clasificas alguna como falsa, justifica por qué lo es:

a) Para todo número real *x* existe un número real *y* tal que $y = \sqrt[3]{x}$.

b) Existe algún número real *y* para el cual no existe ningún número real *x*, tal que $y = \sqrt[3]{x}$.

c) Si el par ordenado de números reales $(a;b)$ pertenece a la función *f*, cuya ecuación es $f(x) = \sqrt[3]{x}$, entonces $(-a;-b)$ también pertenece a *f*.

d) La función *h*, cuya ecuación es $h(x) = \sqrt[3]{x}$, es creciente en todo su dominio de definición.

e) En la función *h*, cuya ecuación es $h(x) = \sqrt[3]{x}$, si x_1 y x_2 pertenecen al dominio de definición de *h* y $x_1 < x_2$, entonces $h(x_1) > h(x_2)$.

f) La función *h*, cuya ecuación es $h(x) = \sqrt[3]{x}$, es impar.

10. Las siguientes funciones f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2, p_1, p_2 están dadas por sus ecuaciones correspondientes:

$f_1(x) = 2\sqrt[3]{x}$ $g_1(x) = \sqrt[3]{x} - 1$ $h_1(x) = \sqrt[3]{x+2}$ $p_1(x) = \sqrt[3]{x+2} - 1$

$f_2(x) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x}$ $g_2(x) = \sqrt[3]{x} + 1$ $h_2(x) = \sqrt[3]{x-2}$ $p_2(x) = \sqrt[3]{x-1} + 2$

a) Traza el gráfico de cada una. En cada sistema de coordenadas debes representar una pareja de estas funciones (f_1 y f_2; g_1 y g_2; h_1 y h_2; p_1 y p_2).

b) Halla los ceros, si existen.

c) Determina el dominio de definición, el conjunto imagen y la monotonía.

11. Copia la tabla 1.6 en tu cuaderno e identifica las funciones a las cuales pertenece cada uno de los pares ordenados que aparecen en la primera columna.

Tabla 1.6

	$y=\sqrt{x}$	$y=\sqrt[3]{x}$	$y=\sqrt[4]{x}$	$y=\sqrt[5]{x}$	$y=\sqrt[8]{x-1}$	$y=\sqrt[11]{x-5}-1$
$(0;0)$						
$(0;1)$						
$(1;1)$						
$(1;0)$						
$(-1;-1)$						
$(-1;1)$						
$(1:-1)$						
$(6;0)$						
$(16;2)$						
$(16;4)$						
$(32;2)$						

12. La columna A muestra las ecuaciones de algunas funciones radicales, y en la B aparecen el conjunto imagen. Forma pares ordenados $(a;b)$ en los que a es la función y b su imagen

A

a) $y=\sqrt[3]{x}$

b) $y=\sqrt[7]{x}$

c) $y=\sqrt{x-1}+2$

d) $y=-\sqrt[6]{x}$

e) $y=\sqrt{x+4}-3$

f) $y=\sqrt[9]{x}+3$

g) $y=\sqrt[4]{x+13}-2$

h) $y=-\sqrt[6]{x}+1$

B

1) $\mathbb{R}$

2) $\{y\in\mathbb{R}: y\leq 1\}$

3) $\{y\in\mathbb{R}: y\leq 0\}$

4) $\{y\in\mathbb{R}: y\geq -2\}$

5) $\{y\in\mathbb{R}: y\geq -3\}$

6) $\{y\in\mathbb{R}: y\geq 2\}$

13. Determina el conjunto solución de las ecuaciones siguientes:

a) $\sqrt{x}-2=3$ b) $\sqrt{x}+3=2$ c) $\sqrt{2x}-1=3$

d) $3\sqrt{x-1}=-12$ e) $2+3\sqrt{2x+5}=5$ f) $3\sqrt{2x}-2=6+\sqrt{2x}$

g) $\sqrt{x^2-3x-3}-1=0$ h) $\sqrt{2-x}-x=0$ i) $x+\sqrt{x-2}=4$

j) $\sqrt{x-1}-x=-1$ k) $x=2\sqrt{x+4}-4$ l) $\sqrt{x^2+5x+1}+1=2x$

14. De las siguientes funciones *f, g, h, i* biyectivas:

a) $f(x)=\sqrt{x-3}+1$ b) $g(x)=x^3$ c) $h(x)=\sqrt[3]{x+1}$ -2 d) $i(x)=(x+4)^3$

Determina:

a) Dominio de definición y conjunto imagen de cada función.
b) Ecuación de las funciones inversas.
c) Dominio de definición y conjunto imagen de las funciones inversas.
d) Representa utilizando el asistente GeoGebra en un mismo sistema de coordenadas cartesianas la función *g* y su inversa.

15. Dadas las funciones *f* y *g*. Determina $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$, *fog* y *gof* , y su dominio de definición en cada caso.

a) $f(x)=2x+1$; $g(x)=x$

b) $f(x)=2x+1$; $g(x)=-x+2$

c) $f(x)=x^2-2x+1$; $g(x)=x^2-1$

d) $f(x)=x^3-4x$; $g(x)=x+2$

e) $f(x)=\sqrt{1-x}$; $g(x)=\sqrt{x-2}$

f) $f(x)=\sqrt{x}+1$; $g(x)=\sqrt{x}$

g) $f(x)=2+\frac{1}{x}$; $g(x)=\frac{1}{x-1}+1$

16. Abre el *software* GeoGebra y escribe en la barra de entrada las siguientes expresiones: raíz(x,2), raíz(x,4), raíz(x,6), raíz(x,8).

16.1 ¿En qué son iguales y en qué diferentes las representaciones escritas?

16.2 ¿Son funciones? Justifica.

16.3 De ser afirmativa la pregunta anterior, ¿qué propiedades son comunes?

17. Abre el *software* GeoGebra y escribe en la barra de entrada las siguientes expresiones: raíz(x,3), raíz(x,5), raíz(x,7), raíz(x,9).

17.1 ¿En qué son iguales y en qué diferentes las representaciones escritas?

17.2 ¿Son funciones? Justifica.

17.3 De ser afirmativa la pregunta anterior, ¿qué propiedades son comunes?

18. Investiga fenómenos de la vida que se modelen mediante funciones radicales de índice par y de índice impar. Formula un problema con cada una de ellas.

Ejercicios del capítulo 1

1. Selecciona de las siguientes proposiciones cuáles son verdaderas y cuáles falsas. Justifica las falsas.

a) La correspondencia definida de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ que a cada número natural se le asocia su antecesor, es una función.

b) La correspondencia definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que a cada número real se le asocia su valor absoluto, no es una función.

c) La correspondencia definida de $\{x \in \mathbb{R}: x \neq 2\}$ en $\mathbb{R}$, que a cada número real se le asocia la expresión $\frac{1}{x-2}+1$, es una función.

d) Si A = {– 1; 0; 3} y B = {4}, entonces la correspondencia definida de A en B determinada por el conjunto de pares ordenados {(– 1; 4) , (0 ; 4) , (3 ; 4)}, es una función.

e) El siguiente diagrama (figura 1.67) corresponde a una función definida del conjunto A en el conjunto B.

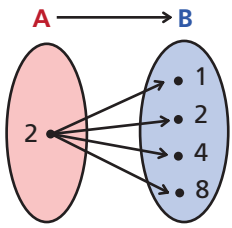


Fig. 1.67

f) La ecuación $y = 5$ corresponde a una función definida en el conjunto de los números reales.

g) El conjunto de pares ordenados $\left\{(x,y): y = \frac{5}{x}, x, y \in \mathbb{R}\right\}$ es una función.

2. Sean las siguientes funciones *f, g, h* dadas por las ecuaciones siguientes

$f(x) = 3x + 2 \quad g(x) = 2x^2 + 3x - 5 \quad h(x) = x^5 - 1$

a) Representa cada una de ellas en un sistema de coordenadas utilizando el asistente GeoGebra.

b) Determina la intersección entre $f(x)$ y $g(x)$, y entre $g(x)$ y $h(x)$ mediante el comando intersección. ¿Qué polígono convexo se puede construir con estas intersecciones?

3. Identifica de las siguientes funciones si son sobreyectivas, inyectivas y (o) biyectivas.

a) $f : A \longrightarrow B$

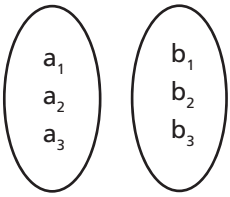


Fig. 1.68

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$g(x) = mx + n, \quad m \neq 0$

c) $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to x^2 - 4$

d) $h : P \longrightarrow Q$

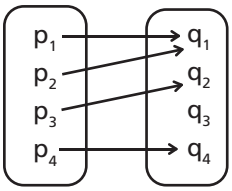


Fig. 1.69

e) $i : \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

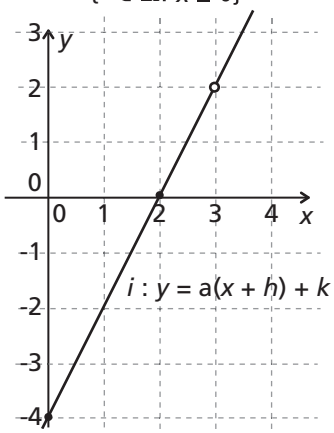


Fig. 1.70

f) $j : \{x \in \mathbb{R}\} \longrightarrow \{x \in \mathbb{R} : y \geq -2\}$

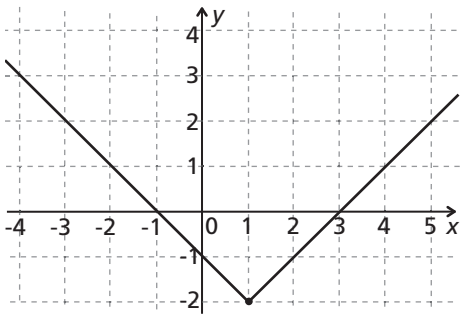


Fig. 1.71

g) $k:\{x \in \mathbb{R}: \geq 1\} \longrightarrow y \in [-2; \infty)$

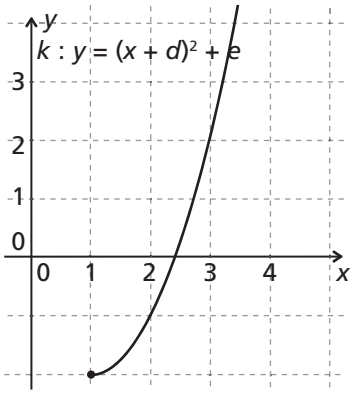


Fig. 1.72

4. Los siguientes gráficos corresponden a funciones numéricas (figura 1.73). Analiza cuáles son inyectivas y traza el gráfico de la función inversa en caso de que exista. Compruébalo utilizando el asistente GeoGebra.

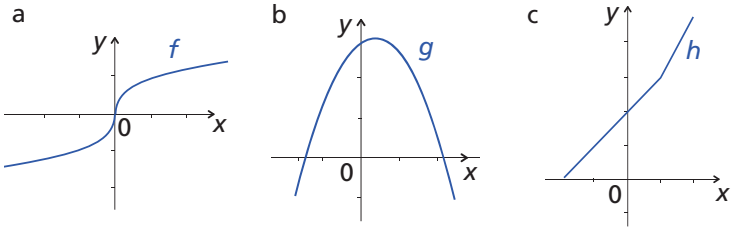


Fig. 1.73

5. ¿Tienen inversa las siguientes funciones? En caso afirmativo, halla la ecuación de la inversa y representa el gráfico de ambas en un sistema de coordenadas rectangulares.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y = 2x + 1$

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \quad y = x^2 + 2$

c) $h : \{x \in \mathbb{R} : x \geq -4\} \to \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\} : y = |x + 2|$

d) $h : \{x \in \mathbb{R} : x \geq -2\} \to \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\} : y = |x + 2|$

6. Halla en cada caso el valor de la variable *t*, si se conoce que el par ordenado pertenece a la función *g* representada por la ecuación $g(x) = \sqrt{x}$

a) $(t;0)$ b) $(1;t)$ c) $(25;t)$ d) $(t;-2)$

e) $\left(\frac{9}{25};t\right)$ f) $(t;0{,}02)$ g) $(-16;t)$ h) $(t;0{,}7)$

7. Cada gráfico (figura 1.74) corresponde a las funciones cuyas ecuaciones tienen la forma $y = \sqrt{x+d} + e$. Escribe la ecuación de la función que le corresponde en cada caso.

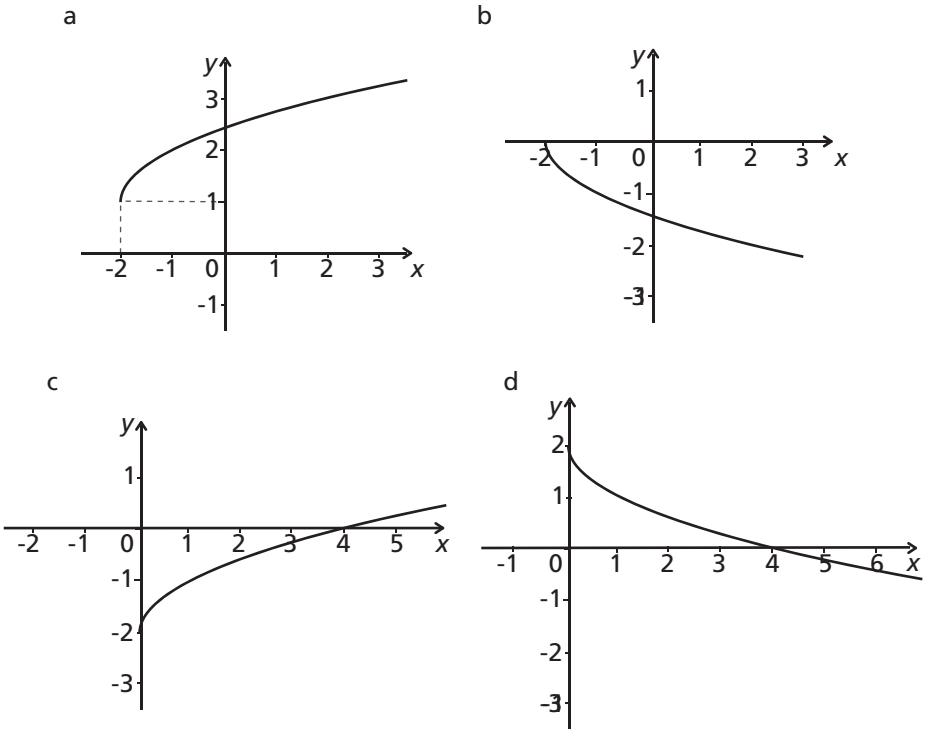


Fig. 1.74

8. A continuación se relaciona un conjunto de ecuaciones que se corresponden con funciones.

a) $y = \sqrt{x}$ b) $y = 1 - \sqrt{x}$ c) $y = \sqrt{x+1} - 3$

d) $y = 2\sqrt{x}$ e) $y = \sqrt{x-1}$ f) $y = -\sqrt{x-2}$

8.1 ¿Cuáles de los gráficos de las funciones dadas pasan por el origen de coordenadas?

8.2 ¿Cuáles de los gráficos de las funciones dadas intersecan al eje de las ordenadas en $y_0 = -2$?

8.3 ¿Cuáles de las funciones dadas son impares?

8.4 ¿Cuáles de los gráficos de las funciones dadas son centralmente simétricos respecto al origen de coordenadas o axialmente simétricos respecto al eje de las ordenadas?

8.5 ¿Para cuáles de las funciones dadas se cumple que para valores del dominio, ordenados de manera ascendente, los valores correspondientes de sus imágenes resultan ordenados descendentemente?

9. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\sqrt{2x-1}-x=0$ b) $\sqrt{24-5x}-x=0$ c) $x+\sqrt{x}=12$

d) $\sqrt{x}+\sqrt{x-4}=2$ e) $\sqrt{x}+\sqrt{x-4}=0$ f) $x+\sqrt{x}-6=0$

g) $\sqrt{x+11}+1=x$ h) $\sqrt{5x-1}-2\sqrt{x+3}=0$ i) $\sqrt{x-12}-\sqrt{x-3}=-3$

j) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}=3$ k) $\sqrt[4]{2x+11}-\sqrt{5}=0$ l) $\sqrt{x+1+\sqrt{3x+4}}=3$

m) $\sqrt[6]{x+1}+2=0$ n) $\sqrt{7+\sqrt[3]{x^2+7}}=3$ ñ) $\sqrt{x^2(x+3)}-\sqrt{x+3}=0$

o) $\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{3}{2}$ p) $\dfrac{3+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}=2$ q) $\sqrt{x}-2=\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}$

10. Si $A(x)=\sqrt{x^2+9}$, halla los valores reales de x para los cuales se satisface la igualdad $A(x)+\dfrac{15}{A(x)}=8$.

11. El período para una oscilación completa de un péndulo está dado por la fórmula $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ ($g\approx 10\text{m}/\text{s}^2$), donde el período T es el tiempo en segundos, l la longitud en metros del péndulo y g ($g\approx 10\text{m}/\text{s}^2$) la aceleración de la gravedad. Determina la longitud de un péndulo que da una oscilación completa en un segundo.

12. Determina en cada caso el valor de la variable t si se conoce que el par ordenado pertenece a la función g representada por la ecuación $g(x)=\sqrt[3]{x}$.

a) $(t;0)$ b) $(1;t)$ c) $(27;t)$ d) $(t;-2)$

e) $\left(\dfrac{1}{27};t\right)$ f) $(t;0{,}1)$ g) $(-64;t)$ h) $(t;0{,}3)$

13. Cada gráfico (figura 1.75) corresponde a unas funciones cuyas ecuaciones tienen la forma $y=\sqrt[3]{x+d}+e$. Escribe la ecuación de la función que le corresponde en cada caso.

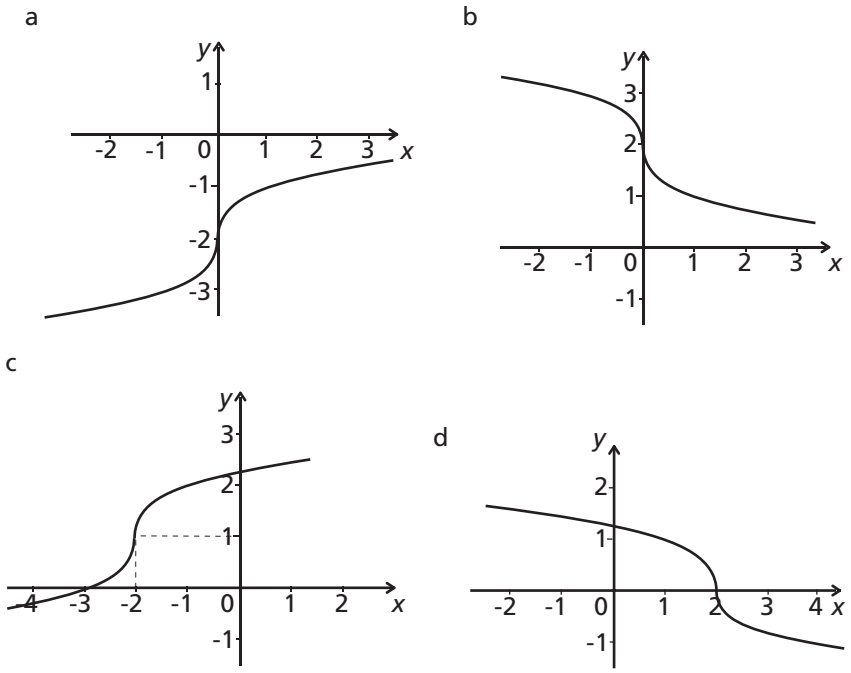


Fig. 1.75

14. A continuación se relaciona un conjunto de ecuaciones que se corresponden con funciones.

a) $y = \sqrt[3]{x}$ b) $y = 1 - \sqrt[3]{x}$ c) $y = \sqrt[3]{x+1} - 3$

d) $y = 2\sqrt[3]{x}$ e) $y = \sqrt[3]{x-1}$ f) $y = -\sqrt[3]{x-2}$

14.1 ¿Cuáles de los gráficos de las funciones dadas pasan por el origen de coordenadas?

14.2 ¿Cuáles de los gráficos de las funciones dadas intersecan al eje de las ordenadas en $y = -2$?

14.3 ¿Cuáles de las funciones dadas son impares?

14.4 ¿Cuáles de las funciones dadas son pares?

14.5 ¿Para cuáles de las funciones dadas se cumple que para valores del dominio, ordenados de manera ascendente, los valores correspondientes de sus imágenes resultan ordenados descendentemente?

14.6 ¿Cuáles de las funciones dadas tienen su único cero en $x_0 = 26$?

15. Representa gráficamente las funciones *f, g, h, t, k, m* y di las propiedades en el dominio indicado.

a) $f(x) = 2x - 6$ si Dom $f = \{x \in \mathbb{R} : -4 \leq x \leq 10\}$

b) $g(x) = (x - 3)2 - 1$ si Dom $g = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 4\}$

c) $h(x) = |x - 1| - 4$ si Dom $h = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 7\}$

d) $t(x) = \dfrac{1}{x+4} - 1$ si Dom $t = \{x \in \mathbb{R} : -4 < x < 5\}$

e) $k(x) = \sqrt{x+4} - 2$ si Dom $k = \{x \in \mathbb{R} : -4 \leq x \leq 12\}$

f) $m(x) = \sqrt[3]{x-1}$ si Dom $m = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 9\}$

16. En la tabla 1.7, la columna A muestra las ecuaciones de algunas funciones radicales (potenciales de exponente fraccionario), y en la B aparecen algunas de sus propiedades. Forma pares ordenados $(a;b)$ en los que a es la función y b es la propiedad que satisface.

Tabla 1.7

A	B
a) $y = \sqrt[3]{x}$	1) Tiene un único cero que es $x_0 = 3$.
b) $y = \sqrt[5]{x}$	2) Es decreciente, no es par y su conjunto imagen son los números reales no positivos.
c) $y = \sqrt[11]{x} + 3$	3) Su gráfico pasa por el punto $P(1;4)$.
d) $y = -\sqrt[6]{x}$	4) Es impar y tiene un cero en el origen de coordenadas.
e) $y = \sqrt{x+4} - 3$	5) Es decreciente en todo su dominio y tiene un cero en $x_o = 1$.
f) $y = \sqrt{x-1} + 2$	6) Es creciente en todo su dominio y no tiene un cero.
g) $y = \sqrt[4]{x+13} - 2$	7) Su gráfico corta al eje de las abscisa en el $x = 5$ y el de la ordenadas en $y = -1$.
h) $y = -\sqrt[8]{x} + 1$	8) Es creciente, impar y contiene el par .

17. Representa en un sistema de ejes coordenados el gráfico de las funciones f y g dadas por sus ecuaciones utilizando el asistente GeoGebra:

$f(x) = 3x^3 - 5$ y $g(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{3} + \dfrac{5}{3}}$

17.1 Determina el punto de intersección de los gráficos de las funciones y compara el valor de las abscisas con el de las ordenadas.

17.2 Escribe la ecuación de la función de la recta que contiene al punto determinado anteriormente y al origen de coordenadas.

17.3 Representa la recta que se obtiene de la ecuación anterior e inserta un punto cualquiera en ella.

17.4 Comprueba que al trazar una perpendicular a la recta que pase por el punto anterior y los puntos de intersección de las funciones con esta perpendicular se obtienen dos puntos cuyos valores coordenados están intercambiados. Explica por qué ocurre esto.

18. Para calcular el tiempo que demora un objeto en caer al suelo se utiliza la expresión $T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ donde $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$, h: altura a la que se lanza el objeto y T: tiempo que demora en caer. Si un objeto es soltado en caída libre desde 1 960 m de altura, entonces el tiempo que tarda en llegar al suelo será de:

20 min 20 s 200 s 200 min

19. Dadas las ecuaciones de las funciones f y g. Determina fog y got.

a) $f(x) = x^2 + 1\ ;\ g(x) = x - 2$

b) $f(x) = x^3\ ;\ g(x) = x - 1$

c) $f(x) = |x + 1|\ ;\ g(x) = 1 + \sqrt{x}$

d) $f(x) = |x|\ ;\ g(x) = \frac{1}{x}$

e) $f(x) = \sqrt[3]{x - 3}\ ;\ g(x) = x + 3$

f) $f(x) = \frac{1}{x + 1}\ ;\ g(x) = x$

g) $f(x) = x^2 + 1\ ;\ g(x) = 1$

20. Accede al Portal CubaEduca sitio www.cubaeduca.cu y en curricular selecciona la lección correspondiente y realiza las actividades siguientes:

20.1 Busca en las actividades de aprendizaje Ejercicios sobre Función numérica, y realiza los ejercicios interactivos propuestos.

20.2 Selecciona la lección Función raíz cuadrada y raíz cúbica, y resume:

a) Las semejanzas y diferencia entre las funciones planteadas.

b) Identifica con qué tema del contexto se relacionan las aplicaciones descritas de estas funciones e investiga su vigencia.

21. Dado el gráfico de la función g (figura 1.76) de ecuación

$$g(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & x \le -1 \\ \sqrt{x+1} & -1 \le x < 3 \end{cases}$$

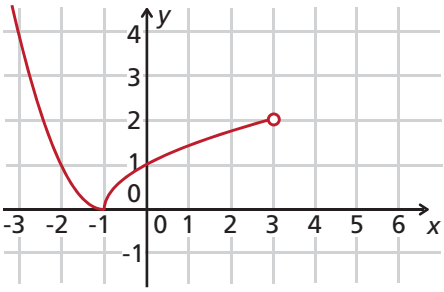


Fig. 1.76

a) Di el dominio de definición y el conjunto imagen.
b) Analiza la monotonía.
c) ¿Cuáles son las coordenadas del punto de intersección del gráfico con el eje x?
d) Analiza la paridad de la función.
e) Determina los valores extremos de la función.
f) ¿Será inyectiva la función? Fundamenta tu respuesta.
e) Analiza si el par (–2;2) pertenece a la función.

22. El siguiente gráfico (figura 1.77) corresponde a una función h.

$$h(x)=\begin{cases} x & -2 < x \leq 0 \\ \sqrt{x} & 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

a) Determina el dominio de definición y el conjunto imagen.
b) Analiza la monotonía y los signos de la función.

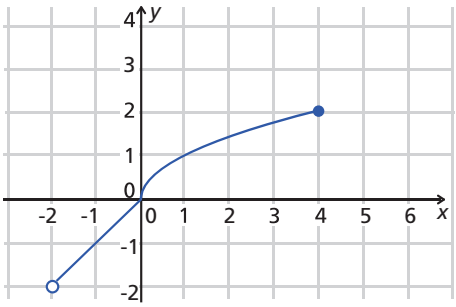


Fig. 1.77

c) ¿Cuáles son las coordenadas del punto de intersección del gráfico con el eje y?
d) Analiza la paridad de la función.
e) Determina el valor máximo y mínimo si existen.
f) ¿Será inyectiva la función? Fundamenta tu respuesta.
e) Calcula el valor de y para que el par (2,5;y) pertenezca a la función.

23. Formula dos problemas vinculados a fenómenos de la naturaleza o la sociedad que se modelen mediante funciones biyectivas.

Autoevaluación

Lee detenidamente y responde:

1. Determina cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles falsas. Fundamenta las que consideres falsas.

a) La recta de ecuación $x = 1$ corresponde al gráfico de una función.

b) Los puntos $P(-1;2)$ y $Q(-1;4)$ pertenecen al gráfico de una función.

c) La función f de ecuación $y = x^2$ es inyectiva en todo su dominio

d) Si $f(x_1) = f(x_2)$, para al menos un par de valores x_1 y x_2 del dominio de definición de f, tales que $x_1 \neq x_2$, entonces f es una función no inyectiva.

e) Toda función inyectiva es biyectiva.

f) La función h es par si se cumple que para todo $x \in \mathbb{R}$ $f(-x) = -f(x)$.

g) El vértice de la función f de ecuacion $f(x) = (x-1)^2 + 2$ es $V(-1;2)$.

h) La función g dada por la ecuación $g(x) = x + 1$ es monótona decreciente.

i) La función $y = 2$ es par.

j) La conjunto imagen de la función $g(x) = -|x-2| + 1$ es $\{y \in \mathbb{R} : y \geq 1\}$.

k) El dominio de definición la función h de ecuación $h(x) = \dfrac{1}{x-2} + 1$ es $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\}$.

l) La función t de ecuación $t(x) = x^5$ es simétrica respecto al origen de coordenadas

m) La función cuadrática con ecuación $y = x^2 + 1$ es par.

n) La función p de ecuación $p(x) = \sqrt{x-1} + 2$ no tiene ceros.

ñ) La función $y = x - 1$ es negativa para $x \in (1;+\infty)$.

o) El conjunto imagen de la función f de ecuación $f(x) = \sqrt[2]{x-1} - 3$, es $\{y \in \mathbb{R}: y \geq -3\}$

p) Si g y h son dos funciones reales, dadas por sus ecuaciones $g(x) = x^{3-4}$, y $h(x) = \dfrac{2x+5}{7}$, la ecuación de la función compuesta goh es $(goh)(x) = \left(\dfrac{2x+5}{7}\right)^3 - 4$.

q) Sean $A = \{1;2;3;4\}$, $B = \{a;b;c;d;e\}$ y la función con $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$, $f(4) = d$ se puede afirmar que la función es sobreyectiva.

r) La función $g : \mathbb{R} / \{5\} \to \mathbb{R}$ de ecuación $g(x) = \dfrac{3}{x-5} + 3$ tiene inversa.

2. Identifica cuál es la respuesta correcta en cada caso.

2.1 La gráfica (figura 1.78) que se muestra a continuación corresponde a una función cuadrática f de ecuación $f(x)=(x+d)^2+e$, con d y e parámetros reales. De esta se puede afirmar que:

a) Su gráfico no corta al eje de las ordenadas.

b) f es par

c) Los ceros de f son $x_1=0$ y $x_2=2$.

d) El valor máximo es $y=-1$.

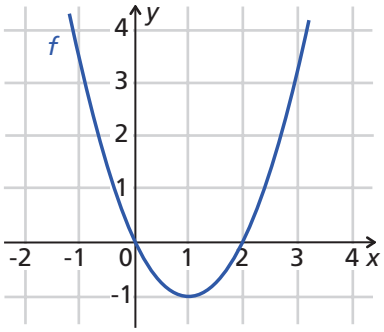


Fig. 1.78

2.2 La gráfica que se muestra a continuación (figura 1.79) corresponde a una función de proporcionalidad inversa f de ecuación $f(x)=\dfrac{1}{x+a}+b$, con a y b parámetros reales. De esta se puede afirmar que:

a) Es impar

b) Su dominio es $\{x\in\mathbb{R}: x\neq -2\}$.

c) Es monótona creciente.

d) Es negativa para $0<x<2$.

e) La ecuación de f es $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+1$.

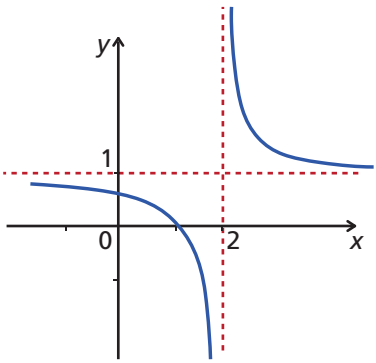


Fig. 1.79

2.3 Si p y q son dos funciones definidas en $\mathbb{R}$ por las ecuaciones $p(x)=\sqrt[3]{x}+1$ y $q(x)=x^3$, entonces se cumple que:

a) El gráfico de p no interseca al eje de las abscisas.

b) La función q es la función inversa de p.

c) La función compuesta de ecuación $(poq)(x)=x+1$.

d) La función q es positiva en todo su dominio

2.4 El intercepto de la función $y=x^2+2x+1$ con el eje y es:

a) $y_1=2$ b) $y_1=0$ c) $y_1=1$ d) $y_1=-1$

2.5 Al gráfico de la función *g* de ecuación $g(x) = \sqrt{x-2} - 1$ pertenece el punto de coordenadas:

a) $(-2;-1)$ b) $(2;1)$ c) $(2;-1)$ d) $(-1;2)$

2.6 A la función *f* de ecuación $f(x) = x^3 - 1$ pertenece el par ordenado

a) $(0;1)$ b) $(0;-1)$ c) $(-1;0)$ d) $(-2;7)$

2.7 Al excavar hacia el interior de la tierra, la temperatura aumenta según la fórmula $T = 15 + 0{,}001d$, donde *T* es la temperatura alcanzada en grados Celsius (°C) y *d* la profundidad en metros. Si la temperatura alcanzada en cierto punto de la excavación es de 100 °C es porque está situado a una profundidad de:

a) 83 000 m b) 85 000 m c) 81 000 m d) 80 000 m

2.8 Para medir la temperatura (en °C) a una hora determinada del día en una región, se utiliza la ecuación de la función *g* definida por $g(t) - \frac{1}{10}(t-12)^2 + 30$, donde *t* representa la hora del día en que es tomada la temperatura. Entonces la temperatura tomada a las 22 h es:

a) 20°C b) 22°C c) 29°C d) 40°C

2.9 En la figura 1.80 aparece representada una función *f* cuya ecuación tiene la forma $f(x) = \sqrt{x+a} + b$.

a) La ecuación de *f* es:

$f(x) = \sqrt{x+9} + 2$ $f(x) = \sqrt{x+9} - 2$

$f(x) = \sqrt{x-9} - 2$ $f(x) = \sqrt{x-9} + 2$

b) De la función *f* se puede afirmar que:

tiene cero $x_0 = -2$

su dominio es $\{x \in \mathbb{R} : x > -9\}$

la gráfica corta al eje *y* en (1;0)

no es par ni impar

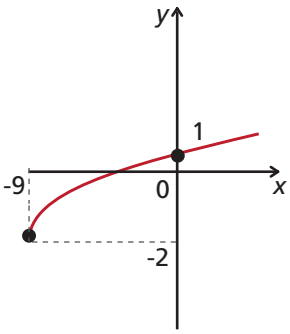


Fig. 1.80

c) De los pares siguientes el que pertenece a la función *f* es:

(– 1;2) (27;4) (– 10;– 3) (7;0)

2.10 La gráfica 1.81 muestra una función *s*, definida en $\mathbb{R}$ por la ecuación:

$s(x) = a\sqrt[3]{x+b} + c$.

a) La ecuación de s es:

$s(x) = \sqrt[3]{x+1}$

$s(x) = \sqrt[3]{x+1} + 2$

$s(x) = 2\sqrt[3]{x+1} + 2$

$s(x) = 2\sqrt[3]{x+1}$

b) De la función s se puede afirmar que: su inversa es una función raíz cúbica, es par, es negativa para $x < -1$ y tiene valor máximo $y = 2$.

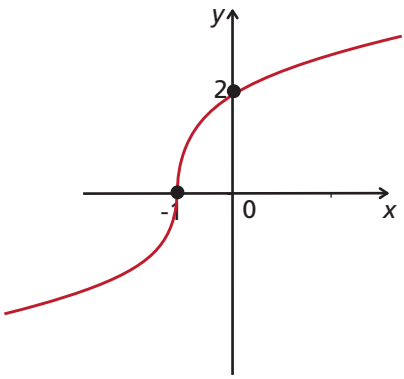


Fig. 1.81

3. Completa en tu cuaderno los espacios en blanco de forma tal que obtengas una proposición verdadera:

3.1 Los ceros de la función de ecuación $y = x^2 - 2x - 3$ son_____.

3.2 La función f de ecuación $f(x) = \sqrt{x-1} + 10$ es monótona _____ en todo su dominio.

3.3 El conjunto solución de la ecuación $\sqrt[3]{x-2} - 1 = 2$ es_____.

3.4 El vértice de la función modular $y = |x| - 3$ es_____.

3.5 Un móvil A con movimiento rectilíneo uniforme se desplaza mediante la función lineal s de ecuación $s(t) = vt$. Si en 8 s el móvil ha recorrido 80 m, la ecuación de la función es _____.

3.6 La velocidad de la propagación de las ondas en aguas poco profundas de un tsunami, se puede calcular mediante la función V de ecuación $V = \sqrt{gh}$ donde g: aceleración de la gravedad 9,81 m/s^2 y h: profundidad, en metros, del fondo marino. La velocidad de las ondas cuando la profundidad de las aguas es de 1 020 m será de ___ m/s.

4. Dadas las funciones inyectivas f, g y h definidas por las ecuaciones:

$f(x) = x - 2$, $g(x) = (x-1)^3 + 2$ y $h(x) = \sqrt[3]{x+2}$

a) Determina, si existe, la función inversa de g. Indica el dominio de la inversa.

b) Calcula $(hof)(8)$.

5. Analiza las siguientes interrogantes y respóndelas.

a) Esboza un gráfico que no represente una función. Justifica.

b) ¿Cuáles son las expresiones que se indefinen para ciertos valores de la variable?

c) Ponga 3 ejemplos de expresiones que no tengan como dominio a todos los reales.

d) ¿Qué funciones de las estudiadas no tienen como conjunto dominio $\{x \in \mathbb{R}\}$?

e) ¿Qué forma debe tener la ecuación de una función para que tenga inversa?

f) ¿Qué características debe tener el gráfico de una función para que sea par?



CAPÍTULO 2

Ecuaciones y funciones exponenciales y logarítmicas

En las escrituras cuneiformes encontradas en las tablillas de barro de la época babilónica (1600 a. n. e.), fueron hallados algunos cuadros con las potencias de los números (figura 2.1) y problemas en los que se plantean cuestiones tales como a qué exponente hay que elevar un número dado para obtener otro también prefijado, es decir, lo que actualmente va a significar cuál es el logaritmo de este último número, en un sistema cuya base es el primero de los números dados, aspecto que estudiarás con más profundidad en este capítulo.



Fig. 2.1 Primeras referencias a las potencias matemáticas en Babilonia

■ *¿Qué actividades humanas dieron origen al trabajo con los exponentes y logaritmos hasta la actualidad?*

La decadencia del feudalismo en Europa originó el aumento del poder de una nueva clase social, la burguesía, la cual comienza a otorgar préstamos con intereses. El surgimiento del capitalismo estimula la acumulación de riquezas y lucro, se producen grandes descubrimientos geográficos que dan lugar a la apertura de pequeños capitales financieros y bancarios.

La expansión del comercio y el perfeccionamiento de las técnicas de navegación exigían cálculos mayores. Fue así como a partir del siglo XVI surgió la necesidad de encontrar algoritmos menos engorrosos para la realización de las operaciones de cálculo de las riquezas acumuladas en lo que



Fig. 2.2 John Napier (Neper) 1550-1617

se refiere al interés compuesto, lo que inspiró a John Napier (figura 2.2) al descubrimiento de los logaritmos.

Napier creó la palabra logaritmo (del griego *logos*, razona o calcula, y *arithmos*, número: para calcular).

También conoces de grados anteriores que el hombre tuvo la necesidad de elaborar ecuaciones e inecuaciones como modelos matemáticos que reflejan las características esenciales de situaciones de la realidad, estas a su vez posibilitan la representación de la correspondencia que se puede establecer entre magnitudes en los diferentes tipos de funciones matemáticas.

Sin embargo, entre las diversas ecuaciones y funciones, hay algunas como las exponenciales y logarítmicas, con una importancia especial para el desarrollo científico, técnico y social en general, ya que sus propiedades son muy valiosas para la realización de análisis matemático.

En la actualidad, ¿en qué áreas se encuentran las principales aplicaciones de las ecuaciones y funciones exponenciales y logarítmicas en la práctica cotidiana y en el desarrollo de las ciencias?

Podrías responder, en:

- las telecomunicaciones y la informática,
- la medicina,
- los estudios de comportamientos biológicos, como la reproducción de las colonias de bacterias,
- el estudio demográfico de las poblaciones y el crecimiento de los bosques,
- la intensidad de los sismos, la desintegración de una sustancia radiactiva,
- la música, el pentagrama musical, la tonalidad,
- el interés bancario y en otras.

¿Qué vas a aprender en este capítulo?

En este capítulo profundizarás en el cálculo con logaritmos, aprenderás sus propiedades, comprenderás el significado del término exponencial, que con seguridad has escuchado con frecuencia, y el algoritmo de resolución de las ecuaciones e inecuaciones exponenciales y logarítmicas, así

como la definición, representación gráfica y propiedades de estas nuevas funciones.

2.1 Ecuaciones e inecuaciones exponenciales

La ceiba[1] (figura 2.3) es una de las plantas más longevas sobreviviente de los bosques que cubrían las llanuras cubanas en siglos pasados. En ella, como en algunas otras especies de nuestra flora, puedes observar cómo de cada una de sus ramas se originan otras dos y de estas otras dos y así sucesivamente durante su larga vida. Un comportamiento similar lo puedes encontrar en numerosos fenómenos y procesos naturales.



Fig. 2.3

■ *¿Qué características comunes tienen estos comportamientos? ¿Será siempre así?*

Este tipo de manifestación puede ser modelada mediante ecuaciones que reciben el nombre de **ecuaciones exponenciales**.

¿Qué diferencia existe entre este tipo de ecuación y las estudiadas con anterioridad?

Potenciación

En nuestros días, resulta muy común leer o escuchar noticias de la ciencia o la técnica relacionadas con la nanotecnología, es decir, con el área que estudia materiales con dimensiones muy pequeñas y que utiliza como unidad fundamental el nanómetro, equivalente a las mil millonésimas partes de un metro, cuyo símbolo es nm, y con la cual se mide, por ejemplo, la longitud de onda de las radiaciones infrarrojas y ultravioletas.

Con los conocimientos que posees sobre potencia de exponente real, *¿de qué forma escribes como potencia la equivalencia de esta unidad respecto al metro?*

[1] A. Rodríguez Nodals y A. Rodríguez Manzano: *Especies forestales utilizadas como frutales en las condiciones de Cuba. Agricultura Orgánica*, Año 13 No. 1, pp. 19-22.

Recuerda que...

Para todo número real positivo $a \neq 1$ y todo número real c, existe un único número real $b > 0$, tal que $a^c = b$ y recíprocamente a^c es la potencia de base a y exponente c:
$a^c = b$ necesariamente $a > 0$ y $b > 0$
Si $a \neq 1$ se cumple que $a^0 = 1$

Ejemplo 2.1

Expresar como potencia las operaciones siguientes:

a) $\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)$ b) $\frac{1}{6\cdot6\cdot6\cdot6}$ c) $-\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\right)$

d) $5^x \cdot 5^x \cdot 5^x$ e) $(8 \cdot 8 \cdot 8)^4$ f) $(a + 1)\,(a + 1)$

g) $a \cdot a \cdot a \cdot a + 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ h) $(0,2) \cdot (0,2)$ i) $(-b) \cdot (-b)$

Resolución:

a) $\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^3$

b) $\frac{1}{6\cdot6\cdot6\cdot6} = \frac{1}{6^4} = \left(\frac{1}{6}\right)^4 = (6)^{-4}$

c) $-\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\right) = -\left(\frac{3}{4}\right)^3$

d) $5^x \cdot 5^x \cdot 5^x = (5^x)^3 = 5^{3x}$

e) $(8 \cdot 8 \cdot 8)^4 = (8^3)^4 = 8^{12}$

f) $(a + 1)\,(a + 1) = (a + 1)^2$

g) $a \cdot a \cdot a \cdot a + 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = a^4 + 1^4$

h) $(0,2) \cdot (0,2) = (0,2)^2$

i) $(-b) \cdot (-b) = (-b)^2 = b^2$ ◆

Investiga y aprende

Lee la leyenda del juego de ajedrez, Capítulo VI del libro *Matemática Divertida*, escrito por Yakov I. Perelman. Allí podrás apreciar algunas de las regularidades de las potencias de 2.

- Extrae y relaciona los ejemplos que aparecen en el libro de las propiedades que se ponen de manifiesto.

Nota: el libro aparece en formato digital en el Portal CubaEduca.

De grados anteriores conoces las propiedades de la potencia, establecidas para las potencias de iguales bases o iguales exponentes y en la potencia de potencia, aplicables al cálculo en la multiplicación y la división.

¿Sabías que...?

La palabra exponente proviene del latín *expo* que significa fuera de y *ponere* que significa lugar. Si bien la palabra exponente pasó a significar cosas diferentes, ¡el primer uso moderno aparece registrado en un libro llamado *Integra Arithmetica*!, escrito en 1544 por el matemático inglés Michael Stifel (figura 2.4).



Fig. 2.4

Ejemplo 2.2

Fundamentar la veracidad de las igualdades siguientes:

a) $12^4 : 6^4 = 16$

b) $\left(5^2\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{25}$

c) $\dfrac{m^{a+2}}{m^{a-1}} = m^3$

d) $3^2 + 5^2 \neq (3 + 5)^2$

e) $\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^3 = \dfrac{(a+b)^3}{(a-b)^3}$

f) $2^{\frac{3}{4}} : 2^{-\frac{1}{2}} \cdot 2\sqrt[4]{2}$

Resolución:

a) $12^4 : 6^4 = (12 : 6)^4 = 2^4 = 16$

Cada término de la división se encuentra elevado al mismo exponente, luego, se mantiene el mismo exponente y se dividen las bases.

c) $\dfrac{m^{a+2}}{m^{a-1}} = m^{a+2-(a-1)} = m^{a+2-a+1} = m^3$

Las bases de las potencias que aparecen en la división indicada son iguales; luego, debes sustraer los exponentes y mantener la misma base. División de potencias de igual base se mantiene la base y se sustraen los exponentes.

b) $\left(5^2\right)^{\frac{1}{3}} = \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{25}$

Estás en presencia de una potencia elevada a otra potencia; también conocida como potencia de potencia; luego, debes mantener la base y multiplicar los exponentes.

d) $3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$

$(3 + 5)^2 = 8^2 = 64$

Las propiedades de las potencias no se cumplen en la adición ni en la sustracción.

$a^2 \pm b^2 \neq (a \pm b)^2$

Luego se cumple que:

$3^2 + 5^2 \neq (3 + 5)^2$

e) $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^3 = \frac{(a+b)^3}{(a-b)^3}$

Como la división está elevada a un mismo exponente, debes aplicar la propiedad donde se eleva a la 3 tanto el numerador como el denominador de la fracción.

f) $2^{\frac{3}{4}} : 2^{-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{2}\right)} = 2^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{4}} = 2\sqrt[4]{2}$

Propiedad de división de potencias de igual base se mantiene la base y se sustraen los exponentes. Para transformar la potencia en raíz se sigue el procedimiento que se describe a continuación.

$2^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{2^5} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2}$

$= \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{2} = 2\sqrt[4]{2}$ ◆

Ecuaciones exponenciales

■ *¿Qué caracteriza o define a una ecuación exponencial?*

Una ecuación exponencial es aquella en la que la incógnita aparece únicamente en los exponentes de bases constantes positivas y distintas de uno.

Las propiedades de las potencias son muy útiles y necesarias en la resolución de ecuaciones exponenciales con la misma base. Para resolver estas ecuaciones debes conocer y aplicar la propiedad de la igualdad de las potencias:

Si $a^x = a^y$, entonces $x = y$ $a > 0$ *con* $a \neq 1$

En otras palabras, si las bases son iguales los exponentes también son iguales.

Ejemplo 2.3

Hallar las soluciones de las ecuaciones siguientes:

a) $4^x = 64$ b) $2^{x-1} = 4^5$ c) $\sqrt{3^x} = \frac{1}{\sqrt{27}}$

d) $5^{x+1} + 5^x = 750$ e) $2^{x^2} \cdot 16 = 32$

Resolución

a) $4^x = 64$

$4^x = 4^3$

Transforma ambas potencias en la misma base $a^x = a^y$, para esto debes expresar 64 como potencia de base 4.

$x = 3$ — Aplica la igualdad de potencias. Si $a^x = a^y$ entonces $x = y$.

Respuesta: La solución es $x_1 = 3$ — Escribe la respuesta.

b) $2^{x-1} = 4^5$

$2^{x-1} = \left(2^2\right)^5$ — Expresa el 4 como potencia de base 2.

$2^{x-1} = 2^{10}$ — Aplica la propiedad potencia de potencia.

$x - 1 = 10$ — Iguala los exponentes.

$x = 11$ — Determina el valor de la variable.

Respuesta: La solución es $x_1 = 11$ — Escribe la respuesta.

c) $\sqrt{3^x} = \dfrac{1}{\sqrt{27}}$

$3^{\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{27^{\frac{1}{2}}}$ — Expresa como potencias las dos raíces.

$3^{\frac{x}{2}} = 3^{-\frac{3}{2}}$ — Transforma ambas potencias en la misma base.

$\dfrac{x}{2} = -\dfrac{3}{2}$ — Iguala los exponentes.

$x = -3$ — Determina el valor de x.

Respuesta: La solución es $x_1 = -3$ — Escribe la respuesta

d) $5^{x+1} + 5^x = 750$ — Observa que se trata de una suma de potencias.

$5^x(5+1) = 750$ — Factoriza (extrae factor común 5^x) .

$5^x \cdot 6 = 750$ — Realiza la operación indicada dentro del paréntesis.

$5^x = 125$ — Despeja 5^x. Realiza la división.

$5^x = 5^3$ — Transforma 125 como potencia de base 5

$x = 3$ — Iguala los exponentes.

Respuesta: La solución es $x_1 = 3$ — Escribe la respuesta

e) $2^{2x+3} - 17 \cdot 2^x + 2 = 0$ — Observa que se trata de una suma de potencias; por tanto, debe factorizar.

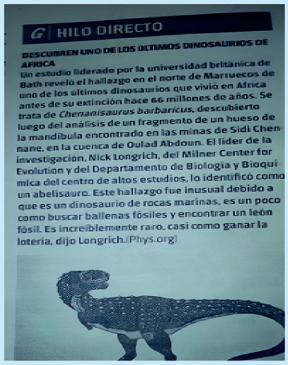
$2^{2x} \cdot 2^3 - 17 \cdot 2^x + 2 = 0$ — Aplica las propiedades de las potencias. En el primer término, como se están adicionando los exponentes y las bases son iguales, los separa en dos factores.

$\left(2^x\right)^2 \cdot 8 - 17 \cdot 2^x + 2 = 0$	Expresa como potencia aplicando la propiedad de potencia de potencia.
$8a^2 - 17a + 2 = 0$	Introduce el cambio de variable $a = 2^x$ para la ecuación cuadrática que se ha obtenido.
$(8a - 1)(a - 2) = 0$	Factoriza el trinomio.
$8a - 1 = 0$ o $a - 2 = 0$	Iguala cada factor a cero.
$a = \frac{1}{8}$ $\quad a = 2$	Despeja la nueva variable en cada ecuación lineal.
$2^x = 2^{-3}$ $\quad 2^x = 2$	Realiza cambio de variable.
$x = -3$ $\quad x = 1$	Iguala los exponentes.
Respuesta: las soluciones son $x_1 = -3$ y $x_2 = 1$ ◆	Escribe la respuesta.

Las ecuaciones exponenciales son una herramienta valiosa para encontrar variables como ritmo de crecimiento, ritmo de decaimiento, la cantidad de tiempo transcurrido de un acontecimiento, el cálculo de la tasa de cambio instantánea, etc. Además, están presentes en la vida cotidiana, en el cálculo del interés compuesto, el volumen del sonido, el aumento o disminución de la población o la disminución de la radioactividad, son solo algunos ejemplos de las aplicaciones de las ecuaciones exponenciales.

En la actualidad, estas ecuaciones son aplicadas en una gran variedad de situaciones en la ciencia, desde la modelación de la propagación de enfermedades virales en una población hasta la estimación de la presión atmosférica, en una altitud dada, a reacciones en cadena en la fusión nuclear.

Saber más


HILO DIRECTO

DESCUBREN UNO DE LOS ÚLTIMOS DINOSAURIOS DE ÁFRICA

Un estudio liderado por la universidad británica de Bath reveló el hallazgo en el norte de Marruecos de uno de los últimos dinosaurios que vivió en África antes de su extinción hace 66 millones de años. Se trata de *Chenanisaurus barbaricus*, descubierto luego del análisis de un fragmento de un hueso de la mandíbula encontrado en las minas de Sidi Chennane, en la cuenca de Oulad Abdoun. El líder de la investigación, Nick Longrich, del Milner Center for Evolution y del Departamento de Biología y Bioquímica del centro de altos estudios, lo identificó como un abelisauro. Este hallazgo fue inusual debido a que es un dinosaurio de rocas marinas, es un poco como buscar ballenas fósiles y encontrar un león fósil. Es increíblemente raro, casi como ganar la lotería, dijo Longrich./Phys.org/

Fig. 2.5

En periódicos (figura 2.5), revistas o en la TV puedes leer o escuchar noticias referidas a grupos de investigadores que han encontrado restos fósiles.

¿Cómo pueden los investigadores obtener datos de un fósil? ¿Cómo logran calcular fechas aproximadas de objetos, animales o personas que vivieron hace millones de años?

Uno de los métodos que se utiliza para obtener datos de un fósil, es mediante el carbono 14; con él se obtiene el fechado aproximado del fósil en cuestión, que tiene como fórmula:

$$A = A_0 \cdot 2^{-\frac{t}{5600}}$$

donde:

A_0: cantidad de carbono presente en el fósil cuando murió

A: cantidad de carbono después de t años.

t: cantidad de años transcurridos

Ejemplo 2.4

Si un organismo cuando murió tenía 500 g de carbono 14, ¿cuántos gramos de carbono 14 se encuentran en el fósil después de 2 000 años?

Resolución:

$$A = A_0 \cdot 2^{-\frac{t}{5600}}$$

$$A = 500 \cdot 2^{-\frac{2000}{5600}}$$

$$A \approx 500 \cdot (0{,}780709)$$

$$A \approx 390{,}3545 \text{ g}$$

Respuesta. Se encuentran en el fósil, después de 2 000 años, aproximadamente 390,35 g de carbono 14. ◆

Conéctate

Accede al sitio www.cubaeduca.cu en la sección curricular, busca en undécimo grado Matemática y resuelve las actividades interactivas 1 y 3 propuestas. Comprueba tus resultados.

Inecuaciones exponenciales

Monotonía de la potenciación

■ *¿Cuál es mayor, mil millones o 2^{30}? Fundamenta analíticamente tu respuesta.*

Desde los primeros años de vida escolar estableces relaciones entre cantidades; por eso, conoces cómo comparar potencias de bases iguales o diferentes, para lo cual debes aplicar propiedades de las potencias.

Recuerda que...

En las propiedades de las potencias se cumple que:

Si $r < s$ entonces $a^r < a^s$ para $a > 1$ y $a^r > a^s$ para $0 < a < 1$ (monotonía de la potenciación).

Si $a > 1$ y $b > 0$ se cumple que $a \cdot b > b$

Aplicando estas propiedades de las potencias (tabla 2.1) resulta que:

Tabla 2.1

Para $c > 0$	Para $c < 0$
Si $a > 1; a^c > 1$	Si $a > 1; a^c < 1$
Si $a = 1; a^c = 1$	Si $a = 1; a^c = 1$
Si $0 < a < 1; a^c < 1$	Si $0 < a < 1; a^c > 1$

Teorema 2.1

a) Si a > 1 se cumple que: si $x < y$ entonces $a^x < a^y$

b) Si 0 < a < 1, se cumple que: si $x < y$, entonces $a^x < a^y$

Demostración

a) $a^y = a^{y-x} \cdot a^x$

Pero como $y < x$ entonces $y - x > 0$ y por ser $a > 1$, por lo que necesariamente $a^{y-x} > 1$; entonces,

$a^y = a^{y-x} \cdot a^x > a^x$

Luego, $a^x < a^y$.

Análogamente se demuestra el inciso b).

La estructura del Teorema 2.1 garantiza el cumplimiento del teorema siguiente:

Teorema 2.2

a) Si $a > 1$ se cumple: Si $a^x < a^y$; entonces $x < y$

b) Si $0 < a < 1$ se cumple: Si $a^x < a^y$; entonces, $x > y$

Ejemplo 2.5

Seleccionar cuáles de las relaciones siguientes son verdaderas y cuáles falsas. Fundamenta la elección.

a) $5^{-3} < 5^7$

b) $0,8^3 < 0,8^5$

c) $10^{-\frac{1}{2}} > 10^{-\frac{1}{4}}$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

Resolución:

a) Verdadera, porque al ser la base 5 mayor que 1 y $-3 < 7$ se mantiene el sentido de la desigualdad por tanto se cumple que $5^{-3} < 5^7$.

b) Falsa, porque al ser base 0,8 mayor que cero y menor que 1 y 3 < 5, cambia el sentido de la desigualdad, luego, debe ser $0,8^3 > 0,8^5$.

c) Falsa, porque al ser la base 10 mayor que 1 y $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{4}$ se mantiene el sentido de la desigualdad luego debe ser $10^{-\frac{1}{2}} < 10^{-\frac{1}{4}}$.

d) Verdadera, porque al ser la base $\frac{1}{3}$ mayor que cero y menor que 1 y $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ cambia el sentido de la desigualdad por tanto se cumple que $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ ◆

Inecuaciones

En décimo grado estudiaste las inecuaciones lineales, modulares, cuadráticas y fraccionarias en una variable real y el procedimiento para su resolución en cada cado. Te propongo que consultes en el libro de texto de 10mo. grado el procedimiento que se debe seguir en cada caso y realices un resumen de su proceder para cada una de ellas.

¿Cómo comparar dos potencias de iguales bases si sus exponentes son variables?

¿De qué depende la relación entre las potencias cuando sus exponentes son variables?

Ejemplo 2.6

Determinar el conjunto solución de las inecuaciones siguientes:

a) $36^x > 6$ b) $\frac{1}{16} < \left(\frac{1}{4}\right)^x$ c) $7^{3x^2+x} > 49$

Resolución:

a) $36^x > 6$

$6^{2x} > 6$ Expresa ambos miembros como potencias de igual base.

$2x > 1$ Aplica el teorema 2.1. Como $6 > 1$ se mantiene el sentido de la desigualdad en los exponentes.

$x > \frac{1}{2}$ Despeja la variable.

$S = \left\{x \in \mathbb{R}: x > \frac{1}{2}\right\}$ Escribe el conjunto solución.

b) $\frac{1}{16} < \left(\frac{1}{4}\right)^x$

$\left(\frac{1}{4}\right)^2 < \left(\frac{1}{4}\right)^x$ — Expresa ambos miembros como potencias de igual base.

$2 > x$ — Aplica el Teorema 2.1. Como $0 < \frac{1}{4} < 1$ se cambia el sentido de la desigualdad al comparar los exponentes.

$S = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$ — Escribe el conjunto solución.

c) $7^{3x^2+x} > 49$

$7^{3x^2+x} > 7^2$ — Expresa ambos miembros como potencias de igual base.

$3x^2 + x > 2$ — Aplica el Teorema 2.1. Como $7 > 1$ se mantiene el sentido de la desigualdad de los exponentes

$3x^2 + x - 2 > 0$ — Plantea la inecuación cuadrática respecto a cero.

$(3x-2)(x+1) > 0$ — Factoriza.



Fig. 2.6

Realiza el análisis de signo, para conocer cuándo el producto planteado es positivo (figura 2.6).

$S = \left\{x \in \mathbb{R}: x < -1 \text{ o } x > \frac{2}{3}\right\}$ — Escribe el conjunto solución ◆

¡Atención!

No olvides realizar el análisis de signo, es decir, la representación en la recta del comportamiento de los ceros de cada una de las funciones asociadas, siempre que estés en presencia de una inecuación cuadrática, polinómica de grado mayor que dos o fraccionaria.

Reflexiona

¿Qué diferencia existe entre el procedimiento de solución de una inecuación exponencial y el proceso de solución de las inecuaciones lineales y cuadráticas?

Te sugiero que intercambies con tus compañeros la posible respuesta de la reflexión.

Conéctate

Accede al sitio www.cubaeduca.cu en la sección curricular, busca en undécimo grado Matemática la lección Inecuaciones exponenciales y realiza las actividades 1 y 2 en ella propuestas.

Ejercicios del epígrafe 2.1

1. Escribe en tu libreta la potencia o valor que corresponda a cada una de las letras indicadas, para que sean verdaderas las igualdades siguientes:

a) $2^3 \cdot A = 32$ b) $3^{-1} \cdot 3^4 = P$ c) $5^{-8} : 5^{-4} = M$

d) $\left(4^3\right)^B = 4^{12}$ e) $\left(9^H\right)^2 = 9^{12}$ f) $\left(\frac{3}{5}\right)^R = \frac{5}{3}$

g) $4^Q \cdot 4^{-3} = \frac{1}{4}$ h) $10^0 : 10^2 = F$ i) $\frac{14^{\frac{1}{2}}}{14^u} = \frac{\sqrt{14}}{14}$

2. Analiza y di cuáles de las afirmaciones o igualdades que aparecen a continuación son verdaderas o falsas. Fundamenta tu elección.

a) Cualquier número real elevado al exponente cero es igual a uno.

b) Al dividir 3^8 por 3^{-2} se obtiene como resultado 3^6.

c) $-4^2 \neq (-4)^2$.

d) Al calcular $\frac{6^{10} + 6^8}{6^8}$ se obtiene 6^{10}.

e) $\frac{9^2}{3^{-1} \cdot 3^2} = 27$.

3. Representa 2^{30} en forma de potencia con base.

a) 2^2 b) 2^3 c) 32 d) 64

4. Aplica las propiedades de las potencias y escribe una potencia equivalente a la dada.

a) 9^y b) 25^{2a} c) $4^a \cdot 3^a$ d) $\frac{1}{4}^{b+2}$

e) $(5a)^2$ f) 3^{x-2} g) 6^{m+3} h) $\frac{2}{7}$

5. Si $a = 3^{40}$, $b = 5^{30}$ y $c = 7^{20}$ ¿Cuál es la relación de orden que existe entre a, b y c? Fundamenta tu respuesta.

6. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $2^x = 32$

b) $4^x = 64$

c) $\left(2^x \cdot 32\right)^x = \frac{1}{64}$

d) $5\left(2^{x-3}\right) = 80$

e) $4^x + 8 \cdot \left(2^x\right) - 48 = 0$

f) $\frac{5^x \cdot 125}{\sqrt{5}} = 625$

g) $3^x \cdot \frac{1}{27} = 9^x \cdot 3$

h) $6^x = 36\sqrt[3]{6}$

i) $4^{x+3} \cdot 2^x = 8^{x-1}$

7. Determina el conjunto solución de las ecuaciones siguientes:

a) $2^{x+3} = 64$

b) $\sqrt[3]{4^x} = 16$

c) $3^{x+1} = 81$

d) $3^{x+1} - 3^x = 18$

e) $2^{x+3} + 2^x = 72$

f) $5^{x-2} + 5^{x-1} = 6$

g) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x = -4$

h) $2^x + 2^{1-x} = 3$

i) $2^{2x-2} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$

j) $\left(2^2\right)^x - 3 \cdot 2^{x-1} - 2 = 0$

8. ¿Qué valores de la variable satisfacen a las ecuaciones que aparecen a continuación?

a) $7^x = 343$

b) $4 \cdot 3^{x+1} = 36$

c) $2^{x^2} \cdot 16 = 32$

d) $3^{x+2} - 3^x = 72$

e) $2^{2x+3} - 15 \cdot 2^x - 2 = 0$

f) $2 \cdot 3^{2x} - 9 = 17 \cdot 3^x$

9. En la columna B se encuentran las soluciones de cada ecuación de la columna A. Identifícalas.

Columna A

A. $3^{x^2-7x+10} = 1$

B. $\left(9^{x-3}\right)^{x+3} = 1$

C. $\left(\frac{4}{7}\right)^{2x+3} = \left(\frac{7}{4}\right)^{3x-5}$

D. $\left(2^x\right)^2 - 11 \cdot 2^x = -28$

E. $\left(2^{2x}\right) + 8 = 9 \cdot 2^x$

F. $4^{2x} - 20 \cdot 4^x = -64$

Columna B

1. $x_1 = 2$ y $x_2 = \log_2 7$

2. $x_1 = 2$ y $x_2 = 1$

3. $x_1 = 2$ y $x_2 = 5$

4. $x_1 = 3$ y $x_2 = 0$

5. $x_1 = \frac{2}{5}$

6. $x_1 = -3$ y $x_2 = 3$

10. La profesora de décimo 2 propuso a sus estudiantes resolver la ecuación $\frac{2^{2m+3}}{16\cdot 2^{-m}} = 1$. Al comprobar el resultado con cuatro estudiantes, dos obtuvieron como respuesta que $m = -\frac{1}{2}$ y los otros dos que $m = \frac{1}{3}$. Identifica cuál de las respuestas dadas es la correcta y explica cuál fue el error cometido por el otro dúo.

11. Identifica cuáles de las siguientes afirmaciones son falsas. Fundamenta tu elección

a) Si $\left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^y$ entonces $x < y$.

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^x \geq 1$ si $x \geq 0$.

c) Si $\left(\frac{4}{3}\right)^x \geq \frac{4}{3}$ se cumple que $x \geq 1$.

d) Los valores reales para los cuales $2^{3x-2} \geq 1$ son $x \geq \frac{2}{3}$.

e) El conjunto solución de la inecuación $2^x < \frac{1}{4}$ es $\{x \in \mathbb{R}; x > -2\}$.

12. ¿Cuál es el conjunto de valores reales que satisface las inecuaciones siguientes? Expresa el conjunto en notación de intervalo.

a) $3^{x-4} \geq 9$

b) $7^{3x^2+x} > 49$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4} \leq \left(\frac{1}{8}\right)^{x+2}$

d) $5^{3x-2} < 5^{0,5+x}$

e) $5^{-x^2+5x} \leq 25^3$

f) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} - 8\left(\frac{1}{3}\right)^x > 9$

13. ¿Qué valores enteros pertenecen al conjunto solución de la inecuación siguiente? $(0,004)^{5x-x^2-6} < 625$

14. Halla el conjunto de valores que satisfacen las inecuaciones siguientes:

a) $2^{x^2+7x+7} \geq \frac{1}{32}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4} \leq 8^{x+2}$

15. Sean las expresiones exponenciales:

$A(x) = 2^{3x-1}$ y $B(x) = 2^{x+1}$

a) ¿Para qué valores reales de x se cumple que $A(x) \cdot B(x) = \frac{1}{4}$?

b) Halla el conjunto solución de la ecuación $A(x) : B(x) = \frac{1}{4}$?

c) Resuelve la inecuación $A(x) > B(x)$.

16. Di cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifica las falsas.

a) $2^{m-1} = 2^m - \frac{1}{2}$.

b) El resultado de calcular $6^{\sqrt{2}+1} : 6^{\sqrt{2}-1}$ es un número primo.

c) La solución de la ecuación $\sqrt{6^x} = 36$ es un número mayor que 4.

d) La solución de la ecuación $3^{2x} = 27$ es un número irracional.

e) Si $a > 1$, se cumple que si $a^x < a^y$ entonces $x > y$.

f) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 > 3^{-4}$.

g) Los valores reales negativos para los cuales se cumple que la expresión $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}$ es menor o igual que la unidad son $x \leq -\frac{1}{2}$.

17. Accede al portal CubaEduca www.cubaeduca, busca la lección Ecuaciones exponenciales y resuleve los ejercicios nombrados. ¿Cuál es la solución de la ecuación y ecuaciones exponenciales diferentes?

18. Investiga situaciones de la vida que se modelen mediante ecuaciones o inecuaciones exponenciales y formula un problema de cada tipo.

2.2 Logaritmo, sus propiedades y ecuaciones e inecuaciones logarítmicas

Como ya te habíamos mencionado anteriormente, el concepto de logaritmo se debe al suizo Jorst Bürgi, y su nombre tiene un significado muy explicativo: logaritmo significa "número para el cálculo". El escocés John Napier enseguida lo utilizó para publicar, en 1614, su obra *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (descripción de la maravillosa regla de los logaritmos) (figura 2.7) con las primeras tablas de logaritmos para el seno y el coseno de un ángulo a intervalos de 1' y con siete cifras.

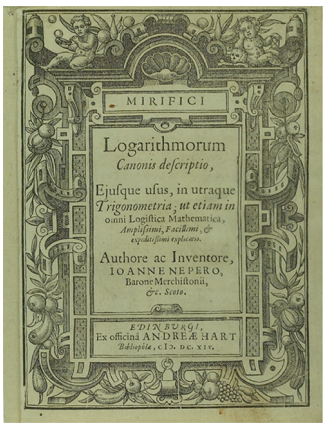

MIRIFICI
Logarithmorum
Canonis descriptio,
Ejusque usus, in utraque
Trigonometria; ut etiam in
omni Logistica Mathematica,
Amplissimi, Facillimi, &
expeditissimi explicatio.
Authore ac Inventore,
IOANNE NEPERO,
Barone Merchistonii,
&c. Scoto.
EDINBURGI,
Ex officina ANDREÆ HART
Bibliopolæ, CIↃ. DC. XIV.

Fig. 2.7

Ahora bien, te estarás preguntando, ¿para qué sirven los logaritmos?

La importancia de los logaritmos está en que, gracias a ellos, se facilita la resolución de cálculos muy complejos, lo que ha contribuido al avance

de la ciencia, permiten relacionar la potenciación y la radicación, y facilitar el cálculo de operaciones matemáticas muy complejas. Se utilizan en diversas ciencias, como la astronomía, la química, la física, la biología y la psicología, para medir fenómenos como la antigüedad de restos, la intensidad de sonidos o la percepción sensorial. Nos ofrecen información sobre el tamaño de un número, el número de dígitos que tiene y la estimación del producto. Si bien es cierto que son elementos de estudios fundamentales en la matemática, lo importante de los logaritmos está en las posibilidades de aplicación que tienen en la vida real:

- En la geodesia, en la navegación marítima y la matemática aplicada.
- En la economía, los cálculos realizados con los logaritmos ayudan a conocimiento de la oferta y la demanda.
- En la banca, por ejemplo, ayuda al calcular el crecimiento de los depósitos.
- En la estadística, porque sus cálculos ayudan a conocer el crecimiento de población.
- En la música, cuyos pentagramas tienen relación con la escala logarítmica.
- En la topografía ayudando a conocer la altitud de un edificio.
- En la biología y la química ayuda en la realización del cálculo del pH.

De la historia

Antes de 1661, Christian Huygens (figura 2.8) elaboró un elegante método para calcular las longitudes de las cuerdas de los instrumentos musicales para cualquier afinación, que fue aplicado a la escala del tono medio (mesotónico). Aplicó los logaritmos en el cálculo de las longitudes de las cuerdas y de las dimensiones de los intervalos musicales como se emplea en nuestros días (figura 2.9).



Fig. 2.8 Gran físico holandés Christian Huygens 1629-1695



Fig. 2.9

¿Sabías que...?

En los países occidentales el pentagrama (figura 2.10) es un ejemplo de escala logarítmica, pues la altura con la que representamos los sonidos en el pentagrama no es proporcional a la frecuencia, sino al logaritmo de la frecuencia.

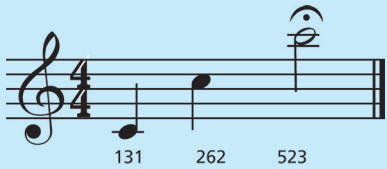


Fig. 2.10

Las tres notas do representadas, tanto en el pentagrama como en la construcción, tienen (aproximando a las unidades) las siguientes frecuencias en herzios: 131, 262 y 524. Como se ve, de un do grave al do siguiente, más agudo, la frecuencia se dobla (es decir: la sucesión de frecuencias de las notas do está en progresión geométrica). Sin embargo, en el pentagrama, la separación vertical entre las tres notas es la misma.

Vale resaltar que, sin los logaritmos y su contribución sería imposible conseguir muchísimos de los avances que hasta ahora han sido posibles, lo que significa que no solo estamos en presencia de una simple operación matemática, sino de un contenido que contribuye realmente al desarrollo económico, industrial, tecnológico, social, etcétera.

Los avances que imponen las nuevas tecnologías y el desarrollo de la sociedad y todo lo que nos rodea no serían fáciles de comprender sin los logaritmos.

Su importancia en resumen está en la simplificación que supone para multitud de cálculos. Y ahora más simplificado con ayuda de ordenadores y calculadoras. De manera particular, podemos obtener logaritmos decimales en la calculadora, con la tecla "log".

Observa en la tabla 2.2 un ejemplo concreto de todo lo mencionado anteriormente.

Tabla 2.2

Crecimiento de la población mundial		
Fecha	Población mundial aproximada (en millones)	Tiempo estimado de duplicación (en años)
8000 a.n.e.	5	1 500
1650 d.n.e.	500	200

1850 d.n.e.	1 000	200
1930 d.n.e.	2 000	200
1974 d.n.e.	4 000	200
1987 d.n.e.	5 000	200
1999 d.n.e.	6 000	200
2050 d.n.e.	12 000	x

■ *¿Qué forma puede tener el modelo matemático que permite representar la relación que existe entre estas tres magnitudes?*

¿Cómo calcular el tiempo estimado en que se duplicará la población mundial?

En este epígrafe encontrarás las respuestas a estas interrogantes, lo que te permitirá ampliar los conocimientos que posees sobre la logaritmación como una de las operaciones inversas de la potenciación.

Logaritmación

Ya conoces que una de las operaciones inversas de la potenciación es la logaritmación. *¿Por qué? ¿Qué restricciones tiene esta operación?*

Recuerda que...

Dados dos números reales a y $b\,(a>0,\ a\neq 1$ y $b>0)$, se llama logaritmo en base a de b y se denota $\log_a b$ al número x que satisface la ecuación $a^x = b$.
Simbólicamente, $\log_a b = x$ si, y solo si, $a^x = b$.
De la definición se obtiene la identidad fundamental
$a^{\log_a b} = b\,(a>0,\ a\neq 1$ y $b>0)$.

Ejemplo 2.7

1. Calcular los logaritmos siguientes:
   a) $\log_5 25$
   b) $\log_6 \frac{1}{36}$
   c) $\log_{\frac{1}{4}} 2\sqrt{2}$
   d) $3^{\log_3 7}$
   e) $25^{\log_5 2}$
   f) $4^{\log_4 5+1}$

Resolución:

a)

$\log_5 25$

$\log_5 25 = x$ Plantear la ecuación que permite calcular el logaritmo.

$5^x = 25$	Aplicar definición de logaritmo.
$5^x = 5^2$	Transformar 25 como potencia de base 5.
$x = 2$	Igualar exponentes y obtener el valor de la variable.
$\log_5 25 = 2$	Escribir la respuesta.

b)

$\log_6 \frac{1}{36}$

$\log_6 \frac{1}{36} = x$	Plantear la ecuación que permite calcular el logaritmo.
$6^x = \frac{1}{36}$	Aplicar la definición de logaritmo.
$6^x = (6)^{-2}$	Transformar $\frac{1}{36}$ como potencia de base 6.
$x = -2$	Igualar exponentes y obtener el valor de la variable.
$\log_6 \frac{1}{36} = -2$	Escribir la respuesta.

c)

$\log_{\frac{1}{4}} 2\sqrt{2}$

$\log_{\frac{1}{4}} 2\sqrt{2} = x$	Plantear la ecuación que permite calcular el logaritmo.
$\left(\frac{1}{4}\right)^x = 2\sqrt{2}$	Aplicar definición de logaritmo.
$\left(\frac{1}{4}\right)^x = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$	Transformar la raíz en potencia.
$(2)^{-2x} = 2^{\frac{3}{2}}$	Transformar $\frac{1}{4}$ como potencia de base 2 y aplicar propiedades de las potencias.
$-2x = \frac{3}{2}$	Igualar exponentes.
$x = \frac{3}{2} \div (-2)$	Despejar la variable.
$x = -\frac{3}{4}$	Resolver la operación indicada y obtener el valor de la variable.
$\log_{\frac{1}{4}} 2\sqrt{2} = -\frac{3}{4}$	Escribe la respuesta.

d)

$3^{\log_3 7}$

$= 7$ Aplicar directamente identidad fundamental logarítmica.

e)

$25^{\log_5 2}$

$= 5^{2\log_5 2}$ Expresar 25 como potencia de 5.

$= \left(5^{\log_5 2}\right)^2$ Aplicar la propiedad de potencia de potencia.

$= 2^2$ Aplicar la identidad fundamental logarítmica.

$= 4$ Calcular la potencia.

f)

$4^{\log_4 5+1}$

$4^{\log_4 5} \cdot 4$ Aplicar propiedad del producto de potencias de igual base.

$5 \cdot 4 = 20$ Aplicar identidad fundamental logarítmica y calcular. ◆

En los últimos años, numerosos países han sido afectados por sismos o terremotos, que ocasionan cuantiosos daños materiales y la pérdida de vidas humanas. La magnitud de este fenómeno natural se mide según la escala Richter, expresada por la fórmula:

$R = log_{10} I$

Donde *R* representa la magnitud del terremoto e *I,* el número de veces que el terremoto es más intenso con relación a la actividad sísmica más pequeña que se puede medir con el sismógrafo.

¿Cuál es el dominio numérico más restringido de la variable I?

La variable *I* representa número de veces, y puede obtenerse, por ejemplo, 2,5 veces; 3,6 veces; etc., es decir, se pueden obtener valores racionales positivos, no tiene sentido que sean valores negativos, además de las restricciones que definen al logaritmo; por lo tanto, el dominio numérico más restringido al cual puede pertenecer es al de los números racionales diferentes de cero.

Para determinar el dominio de definición de una expresión logarítmica ten presente que debe cumplirse las condiciones de existencia del logaritmo: el argumento mayor que cero y la base mayor que cero y diferente de uno.

Ejemplo 2.8

Determinar el dominio de definición de los logaritmos siguientes:

a) $\log_5 x+7$ b) $\log_x(2x-1)$ c) $\log_3\left(x^2-4\right)$

d) $\log_2\sqrt{x^2+1}$ e) $\log_{\frac{1}{4}}\left(\dfrac{x-x^3}{x}\right)$

Resolución

a) Dom : $\{x\in\mathbb{R} : x>0\}$

El argumento del logaritmo es la variable *x*; luego, los valores de la variable, para que el logaritmo exista, deben ser positivos.

b) $x>0; x\neq 1$

Determinar las condiciones de la base del logaritmo de acuerdo con la definición (observa que la base del logaritmo debe ser mayor que cero y diferente de 1).

$2x-1>0$

Aplicar la condición de existencia del logaritmo para el argumento.

$2x>1$

Transponer al otro miembro.

$x>\dfrac{1}{2}$

Despejar la variable.

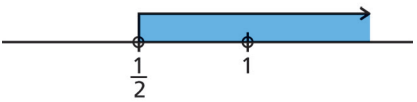


Fig. 2.11

Trazar la recta numérica e interceptar las soluciones de ambas inecuaciones de acuerdo con las condiciones de existencia del logaritmo (figura 2.11)

Dom : $\left\{x\in\mathbb{R} : x>\dfrac{1}{2}, x\neq 1\right\}$

Escribir analíticamente el dominio de definición.

c) $\left(x^2-4\right)>0$

Plantear la condición que debe cumplir el argumento del logaritmo de acuerdo con su definición, el cual debe ser mayor que cero.

$(x-2)(x+2)>0$

Factorizar.

$(x-2)(x+2)=0$

$x_1=2$ y $x_2=-2$

Determinar los valores de la variable que hacen cero cada factor, para analizar el cambio de signo del producto.

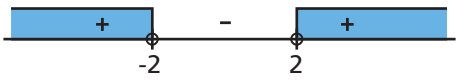


Fig. 2.12

Situar los valores en la recta numérica y realizar el análisis de signos para el producto (figura 2.12).

$\text{Dom}: \{x \in \mathbb{R}: x < -2 \text{ o } x > 2\}$

Escribir analíticamente el dominio de definición.

d) $\log_2 \sqrt{x^2+1}$

Observar que el argumento del logaritmo es una raíz cuadrada y el subradical es siempre mayor o igual que cero, pero como se trata de un logaritmo siempre el argumento tiene que ser mayor que cero.

$x^2+1>0$

$\sqrt{x^2+1}>0$

Observar que esa desigualdad se cumple para todo valor de x real

$\text{Dom}: \{x \in \mathbb{R}\}$

Escribir analíticamente la solución.

e) $\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x-x^3}{x}\right)$

$\frac{x-x^3}{x}>0$

Comparar el argumento con cero.

$\frac{x(1-x^2)}{x}>0$

Factorizar el numerador y simplificar, sin olvidar las condiciones de la variable, que no puede tomar el valor cero.

$1-x^2>0$

Obtener la expresión simplificada

$(1-x)(1+x)>0$

Factorizar y observar que en uno de los factores la variable es negativa.

$(1-x)(1+x)=0$

Igualar a cero para encontrar los valores de la variable.

$x_1=1 \quad o \quad x_2=-1$

Obtener los valores de la variable.

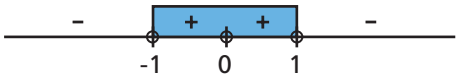


Fig. 2.13

Realizar el análisis de signo comenzando de derecha a izquierda con el signo negativo (figura 2.13).

$\text{Dom}: \{x \in \mathbb{R}; -1<x<1; x \neq 0\}$

Escribir analíticamente el dominio de definición. ♦

¡Atención!

Observa en los ejemplos que los valores extremos del intervalo se excluyen, porque el argumento del logaritmo no puede ser cero, según la definición.

Ejemplo 2.9

Determinar para qué valores de la variable se cumplen las igualdades siguientes:

a) $\log_2 x = 5$

b) $\log_6 \left(x^2 - x\right) = 1$

c) $\log_x 16 = 2$

d) $\log_2{}^2 x - 2\log_2 x = 3$

Resolución:

a) $\log_2 x = 5$

$2^5 = x$	Aplicar la definición de logaritmo.
$x = 32$	Obtener el valor de x.
$32 > 0$	Verificar si el posible valor de x satisface las condiciones de existencia del logaritmo.
Respuesta: la igualdad se cumple para $x = 32$	Escribir la respuesta.

b) $\log_6 \left(x^2 - x\right) = 1$

$x^2 - x = 6^1$	Aplicar la definición de logaritmo
$x^2 - x - 6 = 0$	Igualar la ecuación de segundo grado a cero.
$(x-3)(x+2) = 0$	Factorizar y buscar los valores de la variable para los cuales el producto se hace cero.
$x_1 = 3$ y $x_2 = -2$	Resolver la ecuación y obtener los valores de x.
Para $x_1 = 3$ $\left(3^2 - 3\right) = 6 > 0$ Para $x_2 = -2$ $\left((-2)^2 - 2\right) = 2 > 0$	Verificar si los posibles valores de la variable satisfacen las condiciones de existencia del logaritmo. Ambos valores de x cumplen con las condiciones de existencia del logaritmo.
Respuesta: La igualdad se cumple para $x_1 = 3$ y para $x_2 = -2$	Escribir la respuesta.

c) $\log_x 16 = 2$

$x^2 = 16$	Aplicar la definición de logaritmo.
$x^2 - 16 = 0$	Igualar la ecuación de segundo grado a cero.
$(x-4)(x+4) = 0$	Factorizar y buscar los valores de la variable para los cuales el producto es cero.
$x_1 = 4$ y $x_2 = -4$	
Para $x_1 = 4$ la base cumple la condición de ser positiva y diferente de cero. Para $x_2 = -4$ la base no cumple la condición pues es negativa.	Comprobar si los posibles valores de x satisfacen las condiciones de existencia del logaritmo.
Respuesta: la igualdad se cumple para $x_1 = 4$	Escribir la respuesta.

d) $\log_2{}^2 x - 2\log_2 x = 3$

$\log_2{}^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0$	Igualar la ecuación a cero por ser una ecuación logarítmica de segundo grado.
$a = \log_2 x$	Hacer cambio de variable.
$a^2 - 2a - 3 = 0$	Escribir la ecuación en función de la nueva variable.
$(a-3)(a+1) = 0$	Factorizar el trinomio y buscar los valores de la variable para los cuales el producto es cero.
$a_1 = 3$ y $a_2 = -1$	Obtener los valores de la variable.
$\log_2 x = 3$, luego $x = 8$ $\log_2 x = -1$, luego $x = \frac{1}{2}$	Sustituir a por $\log_2 x$ y resuelve cada ecuación.
Comprueba si los valores de x satisfacen las condiciones $\frac{1}{2} > 0 \quad 8 > 0$	Verificar si los posibles valores de x satisfacen las condiciones de existencia del logaritmo.
Respuesta: la igualdad se cumple para $x_1 = 8$ y para $x_2 = \frac{1}{2}$	Escribir la respuesta. ◆

¡Atención!

- Ten presente que siempre es necesario verificar si los posibles valores de la variable satisfacen las condiciones de existencia del logaritmo, de acuerdo con la definición de logaritmo.
- Puedes también comprobar si los posibles valores de la variable pertenecen al dominio de definición de la ecuación.

¿? ¿Sabías que...?

Para transmitir una señal digital se necesita, como mínimo, dos símbolos para el 0 y para el 1 respectivamente, o puede disponerse de una modulación de cuatro dígitos que se hace corresponder a 00, 01, 10 y 11; así se trasmite dos bits con cada símbolo (figura 2.14). De manera general, el régimen binario, o velocidad de transmisión, representa el número de bits que se transmite por segundo. Cuando se emplea N símbolos al modular una señal binaria, se tiene que:

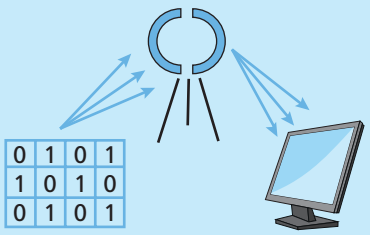


Fig. 2.14

$$v_{TX} = R_b = \frac{log_2 N}{T}$$

donde N es el número de símbolos y T, el tiempo de uno.

Fuente: Transmisión y digitalización (diciembre 2004)

Monotonía de la logaritmación

El siguiente teorema muestra que la logaritmación es una operación monótona.

Teorema 2.3

a) Si $a > 1$, de $b > c$ resulta $\log_a b > \log_a c$
b) Si $0 < a < 1$, de $b > c$ resulta $\log_a b < \log_a c$

Demostración

a) Supongamos que $\log_a b \leq \log_a c$; entonces, $b = a^{log_a b} \leq a^{log_a c} = c$, pues $a < 1$, es decir, $b \leq c$, lo cual contradice la hipótesis; luego, $\log_a b > \log_a c$ como se quiere demostrar.
b) Se demuestra de forma análoga.

Ejemplo 2.10

Comparar los logaritmos siguientes.

a) $\log_5 25$ y $\log_5 125$

b) $\log_{\frac{1}{3}} 27$ y $\log_{\frac{1}{3}} 125$

Resolución:

a) $\log_5 25 < \log_5 125$
porque $5 > 1$ y $25 < 125$

b) $\log_{\frac{1}{3}} 27 > \log_{\frac{1}{3}} 125$
porque $0 < \frac{1}{3} < 1$ y $27 < 125$ ◆

Propiedades de los logaritmos

El índice de dificultad en lograr que el *mouse* (ratón) de las computadoras haga clic en el icono de la pantalla (figura 2.15), de acuerdo con la Ley de Fitts (ley que rige el movimiento), depende de la distancia del objetivo y el tamaño de este, y está dado por:



Fig. 2.15

$$ID = \frac{\log_{10}\left(\frac{2A}{W}\right)}{\log_{10} 2}$$

Donde W es la anchura del objetivo y A, la distancia a su centro. Si un *mouse* se encuentra a 100 mm del icono:

¿Qué relación existe entre dar clic en un icono de 10 mm respecto a un icono de 5 mm? ¿Cómo determinar el índice de dificultad (ID)?

Con anterioridad habías trabajado con algunas propiedades de los logaritmos.

Recuerda que...

$\log_a a = 1; \quad \log_a 1 = 0; (a > 0; a \neq 1)$

$a^{\log_a b} = b \ (a > 0; a \neq 1; b > 0)$ (Identidad logarítmica fundamental)

Además, de estas propiedades existen otras que permiten realizar cálculos en la resolución de ecuaciones y problemas como el propuesto.

Algunas de las que se aplican con frecuencia son las siguientes:

Teorema 2.4

Si $b > 0$, $c > 0$ y $a > 0$ tal que $a \neq 1$ y $c \neq 1$ entonces se cumple:

a) $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

b) $\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$

c) $\log_a b^x = x\log_a b$

d) $\log_a c\cdot\log_c b=\log_a b$

e) $\log_{a^x} b=\frac{1}{x}\log_a b \quad (x\neq 0)$

Demostración

a) $\log_a(b\cdot c)=\log_a b+\log_a c$

a) Se tiene que:
$a^{\log_a b+\log_a c}=a^{\log_a b}\cdot a^{\log_a c}=b\cdot c$; luego, de la definición se tiene que
$\log_a(b\cdot c)=\log_a b+\log_a c$ ·
Esta propiedad se generaliza al caso de un producto de más de dos factores.

b) $\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$

b) Se tiene que $a^{\log_a b-\log_a c}=\frac{a^{\log_a b}}{a^{\log_a c}}=\frac{b}{c}$; luego, $log_a\left(\frac{b}{c}\right)=log_a b-log_a c$

c) $\log_a b^x = x\log_a b$

c) Se tiene que: $a^{x\log_a b}=\left(a^{\log_a b}\right)^x=b^x$, por lo tanto, $\log_a b^x = x\log_a b$.
En particular, si $x=\frac{1}{n}$, $\log_a\sqrt[n]{x}=\log_a b^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\log_a b$.

d) $\log_a c\cdot\log_c b=\log_a b$

d) Se tiene que:
$a^{\log_a c\cdot\log_c b}=\left(a^{\log_a c}\right)^{\log_c b}=c^{\log_c b}=b$

e) $\log_{a^x} b=\frac{1}{x}\log_a b$, $(x\neq 0)$

e) Se tiene que:
$\log_{a^x} b=\frac{\log_a b}{\log_a a^x}=\frac{\log_a b}{x\log_a a}=\frac{1}{x}\log_a b$

Ejemplo 2.11

Expresar como una suma los logaritmos siguientes:

a) $\log_\beta(6{,}25\cdot 0{,}2)$

b) $\log_\beta\left(6^2\cdot 30{,}2 : 14\right)$

c) $\log_\beta\left(13^2\cdot\sqrt[3]{40}\right)$

d) $\log_\beta\sqrt{\frac{12{,}6}{2{,}4\cdot 0{,}5}}$

Resolución:

a) $\log_\beta (6,25 \cdot 0,2)$
$= \log_\beta 6,25 + \log_\beta 0,2$

b) $\log_\beta \left(6^2 \cdot 30,2 : 14\right)$
$= \log_\beta 36 + \log_\beta 30,2 - \log_\beta 14$

c) $\log_\beta \left(13^2 \cdot \sqrt[3]{40}\right)$
$= \log_\beta 169 + \log_\beta (40)^{\frac{1}{3}}$
$= \log_\beta 169 + \frac{1}{3}\log_\beta 40$

d) $\log_\beta \sqrt{\frac{12,6}{2,4 \cdot 0,5}} = \log_\beta \left[\frac{12,6}{2,4 \cdot 0,5}\right]^{\frac{1}{2}}$
$= \frac{1}{2}\left(\log_\beta 12,6 - \log_\beta 2,4 - \log_\beta 0,5\right)$ ◆

Ejemplo 2.12

Calcular:

a) $\log_5 3 \cdot \log_3 125$

b) $\log_{27} 100$

Resolución:

a) $\log_5 3 \cdot \log_3 125 = \log_5 3 \cdot \log_3 5^3$
$\log_5 5^3 = 3$

b) $\log_{27} 100 = \log_{3^3} 10^2 = \frac{1}{3}\log_3 10^2$
$= \frac{2}{3}\log_3 10$ ◆

Ejemplo 2.13

Expresar como un solo logaritmo para todo $a > 0$, $a \neq 1$

a) $\log_\alpha 10 + \log_\alpha 5 - \log_\alpha 25$

b) $\frac{1}{2}\log_\alpha 16 + \log_\alpha 30 - \log_\alpha 24$

c) $\frac{1}{5}\left(\log_\alpha 2,4 + \log_\alpha 2 - \log_\alpha 0,4\right)$

Resolución:

a) $\log_\alpha 10 + \log_\alpha 5 - \log_\alpha 25 = \log_\alpha \left[\frac{10 \cdot 5}{25}\right] = \log_\alpha 2$

b) $\frac{1}{2}\log_\alpha 16 + \log_\alpha 30 - \log_\alpha 24 = \log_\alpha \left[\frac{\sqrt{16} \cdot 30}{24}\right] = \log_\alpha 5$

c) $\frac{1}{5}\left(\log_\alpha 2,4 + \log_\alpha 2 - \log_\alpha 0,4\right) = \log_\alpha \sqrt[5]{\frac{2,4 \cdot 2}{0,4}} = \log_\alpha \sqrt[5]{12}$ ◆

¿Sabías que...?

En los sistemas de comunicación modernos (fibras ópticas, cables UTP, etc.), para determinar la velocidad máxima de transmisión de información, se emplea la fórmula de Shannon (figura 2.16):

$$C = B \cdot \log_2\left(1+\frac{s}{n}\right) \text{bit/s}$$

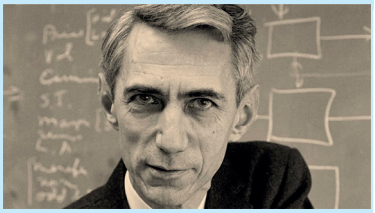


Fig. 2.16 Claude E. Shannon (1916-2001)

Donde,

C: la velocidad máxima.

B: anchura de banda (intervalo de frecuencias en Hz).

$\frac{s}{n}$:relación señal a ruido.

bit: unidad de medida de la información.

Fuente: http://www.tsc.urjc.es/Master/RETEPAD/sites/default/ files/Curso0_Ficha2.pdf

Para el análisis o estudios que se realizan en la ciencia y en la técnica, se emplean los logaritmos en base 10 por las ventajas que estos ofrecen, las cuales estudiarás más adelante; esto quiere decir que cuando la base de un logaritmo no es 10, debe cambiarse para poder calcular.

¿Cómo se transforma un logaritmo que se encuentra en una base a otra base?

De la propiedad d) del teorema 2.4 se obtiene:

Propiedad de cambio de base:

$$\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$$

Ejemplo 2.14

Expresar $\log_{12} 9$ en base 3.

Resolución:

$\log_{12} 9$

$$\log_{12} 9 = \frac{\log_3 9}{\log_3 12} = \frac{2}{\log_3 (4\cdot 3)}$$

$$= \frac{2}{\log_3 4 + \log_3 3} = \frac{2}{\log_3 4 + 1}$$

Aplica la propiedad de cambio de base. Se puede expresar en logaritmos de bases conocidas.

Observa que debes aplicar la propiedad del logaritmo del producto, para simplificar la expresión. ♦

Ejemplo 2.15

En la telefonía analógica el ancho de banda es de 3 100 Hz y la relación de señal a ruido es de 35 dB (decibeles), la señal es mayor que el ruido, es decir, la señal es aproximadamente 3 548 dB mayor que el ruido. ¿Cuál es la velocidad máxima (*c*) que se podrá obtener?

Resolución:

$C = B \cdot \log_2\left(1 + \frac{s}{n}\right)$ — Aplicar la fórmula de Shannon.

$C = 3\,100 \cdot \log_2\left(1 + \frac{3\,548{,}13}{1}\right)$ — Sustituir.

$C = 3\,100 \cdot \log_2\left(3\,549{,}13\right)$ — Resolver las operaciones del paréntesis.

En este caso, el logaritmo está expresado en base 2, pero en las tablas o la calculadora de los celulares o la científica de las computadoras, los logaritmos son en base 10; luego, debes aplicar cambio de base para calcular. Aunque existen programas en que se pueden calcular directamente.

$C = 3\,100 \cdot \frac{\log_{10} 3\,549{,}13}{\log_{10} 2}$ — Aplicar la propiedad de cambio de base.

$C = 3\,100 \cdot \frac{3{,}550\,1210}{0{,}301029} = 3\,100 \cdot 11{,}792\,3$ — Determinar los logaritmos.

$C = 36\,559 \text{bit/s}$ — Es la velocidad máxima que se puede obtener en la línea analógica.

Respuesta: la velocidad máxima que se podrá obtener es de 36 559 bit/s. ◆

Aplica tus conocimientos

¿Cuál es mayor, $\log_4 17$ o $\log_{25} 24$? . Fundamenta analíticamente tu respuesta.

Conéctate

Accede a la sección curricular del Portal CubaEduca www.cubaeduca.cu y selecciona la lección Propiedades de los logaritmos. Una vez en ella:

- Revisa el resumen de las propiedades que se encuentra en el recurso.
- Realiza la actividad.
- Intercambia con tus compañeros del aula o del equipo las posibles respuestas a la interrogante que aparece en la sección Medita.
- Resuelve los dos ejercicios propuestos.

Ecuaciones e inecuaciones logarítmicas



Fig. 2.17

Cuando recibes el contenido de una asignatura (figura 2.17) y no la estudias sistemáticamente, tu desempeño en esta disminuye con el tiempo. Este cambio fue investigado por el psicólogo alemán Hernann Ebbighaus (1850-1909), quien estableció que cuando se aprende una tarea a un nivel de desempeño P_0, después de un intervalo de tiempo t el nivel de desempeño P satisface la ecuación:

$$\log_{10}P = \log_{10}P_0 - c\log_{10}(t+1)$$

¿Cómo determinar el valor de P?

Imagina que realizaste una prueba de matemática en la que obtuviste 90 puntos. ¿Cuántos puntos aproximadamente obtendrás dos meses después en una prueba similar, si confiaste en los conocimientos que ya tenías y no repasaste los contenidos?

Para hallar el valor de P, necesitas saber cómo se resuelve la ecuación logarítmica planteada, donde la constante $c = \frac{1}{4}$.

$\log_{10}P = \log_{10}P_0 - c\log_{10}(t+1)$	Plantear la ecuación donde aparecen operaciones indicadas.
$\log_{10}P = \log_{10}P_0 - \log_{10}(t+1)^c$	Aplicar la propiedad logaritmo de la potencia.
$\log_{10}P = \log_{10}\frac{P_0}{(t+1)^c}$	Aplicar la propiedad logaritmo del cociente de dos logaritmos

$P = \dfrac{P_0}{(t+1)^c}$ Eliminar los logaritmos según la monotonía de la logaritmación.

$P = \dfrac{90}{(2+1)^{\frac{1}{4}}}$ Adicionar y determinar la raíz cuarta de la raíz cuadrada de 3.

$P = \dfrac{90}{\sqrt[4]{3}} = \dfrac{90}{1,31} \approx 68,7$ Calcular.

Respuesta: obtendrás aproximadamente 68,7 puntos después dos meses con una prueba similar. ◆

Esto quiere decir que tu desempeño puede verse afectado notablemente cuando no estudias sistemáticamente un contenido, lo cual profundizarás en el epígrafe dedicado a las funciones.

¿Cuál sería el resultado pasados cuatro meses? ¿…y pasados seis meses?

Esta valiosa información sobre la retención del aprendizaje, la ampliarás en el epígrafe 2.4.

Ecuaciones logarítmicas

■ *¿Qué caracteriza o define a una ecuación logarítmica?*

Una ecuación logarítmica es aquella en la que la incógnita aparece en el argumento del logaritmo de bases constantes positivas y distintas de uno.

Las propiedades de los logaritmos son muy útiles y necesarias en la resolución de ecuaciones logarítmicas con la misma base. Para resolver estas ecuaciones debes conocer y aplicar la propiedad de la igualdad de los logaritmos.

$$Si\ \log_a x = \log_a y\ ,\ entonces\ x = y\quad a > 0\ \text{ con }\ a \neq 1$$

En otras palabras, si las bases de los logaritmos son las mismas los argumentos también son iguales (propiedad de monotonía de la logaritmación).

Ejemplo 2.16

Determinar el conjunto solución de las ecuaciones siguientes:

a) $\log_3 x = \log_3 12 + \log_3 4$ b) $\log_5 (x-1) - \log_5 4 = \log_3 2$

c) $\log_{10}(x+2) + \log_{10}(x-1) = 1$ d) $\log_2^2 x - 5\log_2 x = 0$

Resolución:

a) $\log_3 x = \log_3 12 + \log_3 4$

$\log x = \log_3 (12 \cdot 4)$	Aplicar la propiedad del logaritmo del producto.
$\log_3 x = \log_3 48$	Efectuar la multiplicacion indicada.
$x = 48$	Aplicar la propiedad de monotonía de la logaritmación.

Como 48 > 0 satisface las condiciones de existencia del logaritmo $log_3 x$ y el valor de x pertenece al dominio de definición de la inecuación. Luego el conjunto solución es: $S = \{48\}$

b) $\log_5 (x-1) - \log_5 4 = \log_3 2$

$\log_5 \frac{x-1}{4} = \log_3 2$	Aplicar la propiedad del logaritmo del cociente.
$\frac{x-1}{4} = 2$	Aplicar la propiedad de monotonía de la logaritmación.
$x = 9$	Resolver la ecuación.

Como para $x = 9$ el argumento de $\log_5 (x-1)$ es $8 > 0$ satisface las condiciones de existencia del logaritmo y el valor de x pertenece al dominio de definición de la ecuación. Luego el conjunto solución es $S = \{9\}$.

c) $\log_{10} (x+2) + \log_{10} (x-1) = 1$

$\log_{10} (x+2)(x-1) = 1$	Aplicar la propiedad del logaritmo del producto.
$(x+2)(x-1) = 10$	Aplica la definición de logaritmo.
$x^2 + x - 2 = 10$	Transformar el producto, en suma.
$x^2 + x - 12 = 0$	Igualar a cero.
$(x+4)(x-3) = 0$	Factorizar el trinomio.
$x_1 = -4$ o $x_2 = 3$	Obtener los valores de x.

Observa que $x_1 = -4$ no puede ser solución de la ecuación dada porque al sustituir el valor encontrado se obtiene $\log_{10} (-2)$ y $\log_{10} (-6)$ para lo cual no cumplen las condiciones declaradas en la definición de logaritmo, pues no pertenece al dominio de definición de la ecuación, sin embargo para $x_2 = 3$ la igualdad es válida, luego el conjunto solución es: $S = \{3\}$.

d) $\log_2{}^2 x - 5\log_2 x = 0$

$\log_2 x = a$	Hacer cambio de variable.
$a^2 - 5a = 0$	Sustituir $\log_a x$ por a.
$a(a-5) = 0$	Factorizar el binomio.
$a = 0$ o $a = 5$	Determinar los valores de la variable a.
$\log_2 x = 0$ $\log_2 x = 5$	Sustituir a por $\log_a x$.
$x = 2^0$ $x = 2^5$	Aplicar la definición de logaritmo.
$x_1 = 1$ $x_2 = 32$	Calcular la potencia.

Como ambos valores de x pertenecen al dominio de definición de la ecuación, el conjunto solución de la ecuación es: $S = \{1; 32\}$

Otra vía para resolverla es sin hacer cambio de variable como se muestra a continuación:

$\log_2^2 x - 5\log_2 x = 0$	
$\log_2 x(\log_2 x - 5) = 0$	Extraer factor común.
$\log_2 x = 0$ o $\log_2 x - 5 = 0$	Aplicar la propiedad si $a \cdot b = 0$ se cumple que $a = 0$ o $b = 0$.
$\log_2 x = 5$	Despejar $\log_2 x$.
$x = 2^0$ $x = 2^5$	Aplicar la definición de logaritmo a ambas ecuaciones.
$x = 1$ $x = 32$	Calcular la potencia.

Como ambos valores de x pertenecen al dominio de definición de la ecuación, el conjunto solución de la ecuación es $S = \{1; 32\}$. ◆

¡Atención!

Siempre que resuelvas una ecuación logarítmica, debes verificar si los valores encontrados para la variable no indefinen al logaritmo, es decir, son elementos del dominio de definición.

Una forma de comprobar las ecuaciones logarítmicas puede ser analizando si las transformaciones realizadas en el proceso de resolución son equivalentes.

La comprobación, para verificar si las soluciones obtenidas las satisfacen, se debe realizar mediante el cálculo de los logaritmos, no debe realizarse sobre la base de la aplicación de las propiedades pues tiene como riesgo que si se cometió un error al resolverla y se comprueba sobre la base del mismo error no se garantiza la veracidad de la solución.

Reflexiona

¿Por qué si $\log_{\frac{1}{2}} a > \log_{\frac{1}{2}} b$ se puede asegurar que $a < b$, para $a > 0; b > 0$?

Ejemplo 2.17

Determinar el conjunto solución de las inecuaciones siguientes:

a) $\log_3 \dfrac{x^2+3x+2}{x+1} \geq 0$ b) $\log_{\frac{1}{3}} \left(\dfrac{x-4}{x} \right) < 1$

Resolución:

a) $\log_3 \dfrac{x^2+3x+2}{x+1} \geq 0$

Primero: determinar el dominio de definición del logaritmo

$\dfrac{x^2+3x+2}{x+1} > 0$ Plantear el argumento del logaritmo mayor que cero, de acuerdo con las condiciones de existencia del logaritmo.

$\dfrac{(x+2)(x+1)}{x+1} > 0$ Factorizar el trinomio del numerador.

Ubicar los ceros y realizar el análisis de los signos (figura 2.18).

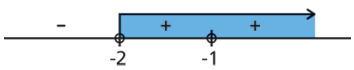


Fig. 2.18

$\text{Dom} = \{x \in \mathbb{R} : x > -2, x \neq -1\}$ Escribir el dominio de definición.

Segundo**:** resuelve la inecuación

$\log_3 \dfrac{x^2+3x+2}{x+1} \geq 0$

$\log_3 \dfrac{x^2+3x+2}{x+1} \geq \log_3 1$ Sustituir el valor del miembro derecho por un logaritmo equivalente que tenga la misma base.

$\dfrac{x^2+3x+2}{x+1} \geq 1$ Aplicar monotonía de la logaritmación.

$\dfrac{x^2+3x+2}{x+1} - 1 \geq 0$ Transponer el 1 al miembro izquierdo.

$\dfrac{x^2+3x+2-(x+1)}{x+1} \geq 0$ Determinar el común denominador y ampliar los numeradores.

$$\frac{x^2+3x+2-x-1}{x+1}\geq 0$$

Realizar las operaciones en el numerador.

$$\frac{x^2+2x+1}{x+1}\geq 0$$

Reducir términos semejantes.

$$\frac{(x+1)^2}{x+1}\geq 0$$

Factorizar el numerador.



Fig. 2.19

Ubicar los ceros y hacer el análisis de los signos (figura 2.19).

$$\{x\in\mathbb{R}: x>-1\}$$

Tercero: determina el conjunto intersección entre el dominio de definición del logaritmo y la solución de la inecuación



Fig. 2.20

Interceptar las soluciones de las inecuaciones (figura 2.20).

$$S=\{x\in\mathbb{R}: x>-1\}$$

Escribir el conjunto solución

b) $\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x-4}{x}\right)<1$

$$\frac{x-4}{x}>0$$

Determinar el dominio de definición del logaritmo.

Ubicar los ceros y hacer el análisis de los signos (figura 2.21).

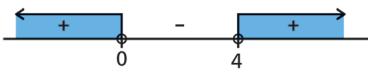


Fig. 2.21

$\text{Dom}=\{x\in\mathbb{R}: x<0 \text{ o } x>4\}$ Escribir el dominio del logaritmo.

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x-4}{x}\right)<\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}$$

Sustituir el 1 de la inecuación por un logaritmo equivalente de igual base.

$$\frac{x-4}{x}>\frac{1}{3}$$

Como $0<\frac{1}{3}<1$, ocurre que se cambia el sentido de la desigualdad.

$$\frac{x-4}{x}-\frac{1}{3}>0$$

Transponer $\frac{1}{3}$ al primer miembro.

$\frac{3(x-4)-x}{3x} > 0$ Determinar el común denominador y ampliar los numeradores.

$\frac{3x-12-x}{3x} > 0$ Resolver la operación indicada.

$\frac{2x-12}{3x} > 0$ Reducir términos semejantes.

$\frac{2(x-6)}{3x} > 0$ Factorizar el numerador.

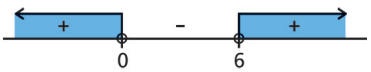


Fig. 2.22

Ubicar los ceros y hacer el análisis de signo (figura 2.22).

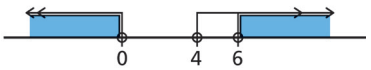


Fig. 2.23

Intersecar el dominio del logaritmo con la solución de la inecuación (figura 2.23).

$S = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ o } x > 6\}$ Escribir el conjunto solución. ◆

Aplica tus conocimientos

Junto a dos compañeros describe los pasos que se deben seguir para resolver una inecuación logarítmica. Una vez concluido, consulta con tu profesor los pasos descritos.

Conéctate

Accede al sitio www.cubaeduca.cu, en la sección curricular, buscas en undécimo grado Matemática la lección Inecuaciones logarítmicas y realiza las actividades de autoevaluación propuestas. Comprueba tus resultados.

Ejercicios del epígrafe 2.2

1. Expresa como logaritmo las potencias que aparecen a continuación para todos los valores admisibles de las variables p, q, t, r, s.

a) $12^0 = 1$ b) $5^2 = 25$ c) $10^{-3} = 0{,}001$

d) $49^{\frac{1}{2}} = 7$ e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 32$ f) $3^{-2} = \frac{1}{9}$

g) $p^q = t$ h) $q^r + p = s$ i) $\frac{p^{r2}}{2} = q^3$

2. Escribe en forma de potencia los logaritmos siguientes:

a) $\log_{30} 900 = 2$ b) $\log_4 1 = 0$ c) $\log_8 4 = \frac{2}{3}$ d) $\log_m t = 45$; $m > 0; m \neq 1, t > 0$

3. Di cuál es el número cuyo logaritmo en base:

a) 5 es 2 b) 4 es 2

c) 10 es 2 d) $\frac{1}{2}$ es -3

4. En qué base el logaritmo de

a) 0,001 es -3 b) 243 es c) 8 es 1 d) 49 es 2

5. En la figura 2.24 se muestra una pirámide logarítmica, donde el valor que aparece en cada rectángulo corresponde a la diferencia de los rectángulos en los cuales descansa.

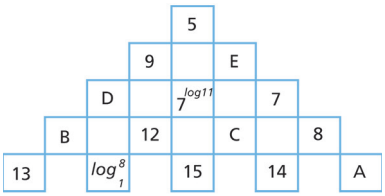


Fig. 2.24

a) Identifica los valores de las letras y expresa como un logaritmo en base 2, o una identidad fundamental equivalente, si el número es mayor que 6.

b) Reproduce la pirámide en tu libreta y coloca en cada rectángulo la expresión logarítmica correspondiente en cualquier base. También puedes aplicar la identidad fundamental para los rectángulos cuyo valor es mayor que seis.

6. Escribe al menos dos expresiones logarítmicas equivalentes a los valores que aparecen a continuación:

a) 0 b) 1 c) -3

d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{1}{2}$ f) $\sqrt{2}$

7. Busca tres valores diferentes para las variables a, b, x, y ($a > 0; a \neq 1; b > 0; b \neq 1; x > 0, y > 0$) de forma tal que $\log_a x = \log_b y$.

8. Halla el dominio de definición de las expresiones logarítmicas siguientes:

a) $\log_5 \frac{x}{x+5}$ b) $\log_3 \frac{x^2 - 2x}{x^2 + x - 6}$ c) $\log_2 \left(x^3 - 2^x - 5x + 6\right)$

d) $\log_3 \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 3x + 2}$ e) $\log_7 \frac{5x - 1}{x^2 + 1}$ f) $\log_{10} \frac{\sqrt{x^3 - 2^x - 5x + 6}}{x(x+4)}$

g) $\log_3\left(\frac{2^x-4}{x^2-1}\right)$ h) $\log_3\left(\frac{9^x-27}{x^2+1}\right)$ i) $\log_5\frac{x^3-x}{2x}$

9. Determina los valores de $x \in \mathbb{R}$ que son soluciones de las ecuaciones que aparecen a continuación:

a) $\log_x 3 = \frac{1}{3}$ b) $\log_{3\sqrt{3}} x = 2$

c) $\log_2(3x-2) = 1$ d) $\log_5\left(\frac{x-5}{x-2}\right) = 2$

e) $\log_6 x = -\log_6 9$ f) $\log_7(2x^2-5x) = 1$

g) $\log_3{}^2 x = 4 - 3\log_3 x$ h) $\log_{x-2}(x^2+6x+10) = 1$

i) $(\log_{10} x)^2 - 2\log_{10} x = 3$ j) $\log_3\log_9 x = 0$

10. Ordena ascendentemente los logaritmos siguientes:

a) $\log_2 5;\ \log_2 1;\ \log_2 3;\ \log_2 0{,}3$ b) $\log_{0,2} 2;\ \log_{0,2} 1;\ \log_{0,2} 7;\ \log_{0,2}\frac{5}{2}$

11. Si las variables son valores reales tales que: $x > 0, m > 0$ y $p > 0$, $p \neq 1$, expresa cuáles condiciones deben cumplir las variables para que las desigualdades sean ciertas.

a) $\log_4 12 > \log_4 x$ b) $\log_{\frac{1}{5}} m < \log_{\frac{1}{5}} 10$ c) $\log_p 5 > \log_p 7$

12. Clasifica en verdaderas o falsas las proposiciones siguientes, para todo valor admisible de las variables y escribe las falsas correctamente:

a) $\frac{\log_5 a}{\log_5 b} = \log_5\frac{a}{b}$ b) $\log_3(a-b) = \log_2\frac{a}{b}$

c) $\log_7 x^4 = 4\log_7 x$ d) $\log_8 a = \frac{1}{3}\log_2 a$

e) $2\log_5 b = \log_5^2 b$ f) $\log_{32} b = \log_2\sqrt[5]{b}$

13. Aplica las propiedades del logaritmo y calcula:

a) $\log_3\sqrt{27}$ b) $\log_2 160 - \log_2 5$

c) $\log_{10} 4 + \log_{10} 25$ d) $\log_4 192 - \log_4 3$

e) $\log_{12} 9 + \log_{12} 16$ f) $\log_{10}\frac{1}{\sqrt{1\,000}}$

g) $\log_4 16^{100}$ h) $\log_2 8^{44}$

i) $\log_3 100 - \log_9 25 - \log_{\frac{1}{3}} 2$ j) $\log_5 10 + \log_5\frac{1}{20}$

14. Determina el valor numérico de M si
$M = \log_9 81 + \log_{\frac{1}{5}} 25 + \log_{34} 1 - 25^{\log_5 4}$

15. Simplifica las expresiones siguientes:

a) $\log_3 18 - \log_3 2 + \log_3 5$

b) $\log_2 80 - \log_2 5$

c) $\log_3 5 \cdot \log_{25} 27$

d) $3\log_{10} x + \frac{1}{2}\log(x+1)$

16. Se ha comprobado que el oído humano responde al sonido en una escala que es aproximadamente proporcional al logaritmo en base 10 de su intensidad. Así, la altura (*b*), medida en decibeles (dB) está definida por la relación $b = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$, donde I es la intensidad del sonido e I_0, la mínima intensidad detectable (umbral auditivo).

a) Escribe una ecuación equivalente a la relación dada.

b) ¿Qué valores reales pueden tomar I e I_0?

17. Determina el valor de la letra que aparece en cada una de las igualdades siguientes:

a) $\log_5 A = \log_5 36 - \log_5 9$

b) $\log_{100} B = \frac{1}{2}$

c) $\log_7 10 = \log_7 C + \log_7 D$

d) $\log_3 6 = \log_3 E + 1$

e) $\log_F 5 = \frac{\log_3 G}{\log_3 2}$

18. Se considera $I_0 = 10^{-12\frac{W}{m^2}}$, a una frecuencia de 10000 Hz lo que mide el sonido apreciado por el umbral del oído. Calcula el nivel de intensidad, en decibeles, del motor de un carro durante el arranque, si la intensidad que se mide es de $100\frac{W}{m^2}$ y si $\beta(\text{nivel de intensidad}) = 10\log_{10}\frac{I}{I_0}$.

19. Escribe en tu libreta al menos tres expresiones equivalentes a cada uno de los logaritmos siguientes:

a) $\log_a (A \cdot B)^2$ donde $a > 0; a \neq 1; (A \cdot B) > 0 \quad B - \log_{16} 25$

b) $\log_8 \left(\sqrt[3]{100} \cdot 5^3\right)$

20. Halla las soluciones de las ecuaciones siguientes:

a) $\log_{10} x + \log_{10} 5 = 2$

b) $\log_3 (2x+1) - \log_3 (x-1) = 1$

c) $\log_2 (x^2 + 5x + 2) = \log_{\frac{1}{5}} 125 + \log_2 128$

d) $\log_5 (x+1) - \log_5 4 = \log_5 (2x+5)$

e) $2\log_3(x+2)=2$

f) $\log_2 x+\log_{\frac{1}{2}} x+\log_4 x+\log_{\sqrt{2}} x=\frac{15}{2}$

g) $\log_2(3x-2)=4\log_2 3-\log_2 27$

h) $\log_3(x+4)+\log_3(x-4)=2$

i) $\dfrac{\log_{10}(35-x^3)}{\log_{10}(5-x)}=3$

j) $\log 2x+\dfrac{1}{\log_{x+3}10}=\log(4x+2)$

k) $\log_{10}(2^x+8)+\log_{10}(2^x+8)=2$

l) $\log_{x^2}4-\log_x 64=-2$

21. Di para qué valores de $x\in\mathbb{R}$ se cumple que:

a) $\log_2\dfrac{x+3}{x}>1$

b) $\log_2\dfrac{x^2+6}{2}\geq 0$

c) $\log_5\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}<0$

d) $\log_2\dfrac{x^2+x+10}{(x+2)^2}<4$

e) $\log_2\dfrac{3x^2-5x+6}{x^2-8x+16}\leq 1$

22. Descubre el error en la siguiente secuencia de pasos:
Observa con cuidado los pasos realizados en la siguiente desigualdad. Debido a un error se llega a una conclusión absurda. Explica cuál ha sido el error cometido.

$\frac{1}{4}>\frac{1}{8}$	La desigualdad es cierta.
$\left(\frac{1}{2}\right)^2>\left(\frac{1}{2}\right)^3$	Aplicando propiedades de la potencia.
$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^2>\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^3$	Aplicando logaritmo en cada miembro.
$2\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)>3\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$	Propiedades del logaritmo.
$2>3$	Dividiendo por $\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$.

23. Di cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifica las que sean falsas.

a) El $\log_x 64$ está definido para todo número real $x>0$.

b) La expresión $\log_{0,2} 3x$ está definida para todo $x\in\mathbb{R}: x\neq 0$.

c) El dominio de definición de la expresión $\log_2(-2x+4)$ es $\{x\in\mathbb{R}: x<4\}$.

d) El resultado de calcular $\log_{\frac{1}{4}} 2\sqrt{2}$ es un número fraccionario.

e) $\log_2 8 - \log 0{,}01 = 1$.

f) $9^{\log_3 \sqrt{5}} \in \mathbb{I}$.

g) $\log_2 15 > \log_2 14$.

h) $(\log_6 18 + \log_6 2)$ pertenece al dominio de los números naturales.

i) $4^{\log_2 9} = 81$.

j) Si $x \in \mathbb{R}$ y $x > 0$, entonces $\log_8 x = \frac{1}{3}\log_2 x$.

k) La solución de la ecuación $\log_{0,2} x = 3$ es 0,008.

l) La solución de la ecuación $\log_3 (x+4) + \log_3 (x-4) = 2$ es $x = 5$.

m) Si $0 < a < 1$, se cumple que si $\log_a x < \log_a y$ entonces, $x > y$.

n) $\log_3 \frac{1}{9} > \log_3 0,1$.

ñ) Los valores reales negativos para los cuales se cumple que la expresión $log_2 (x+3) - 2$ es menor o igual que la unidad son las $x < 1$.

o) Según de la escala de Richter, la intensidad de un terremoto es fuerte si y solo si para su magnitud M se cumple que: $6,0 \leq M \leq 6,9$. La magnitud M se determina mediante la función $M(E) = \frac{2}{3} log \frac{E}{10^{4,40}}$, donde E representa la energía liberada por el terremoto. Si un terremoto libera una energía igual a $E = 10^{10,40}$ J, entonces se clasifica como fuerte.

24. Investiga fenómenos que se modelen mediante ecuaciones e inecuaciones logarítmicas y formula un problema en cada caso.

2.3 Logaritmos decimales

A la ciencia aún no le es posible pronosticar la ocurrencia de eventos naturales de origen geológico, como los terremotos, pero en cada uno se puede calcular su magnitud, o sea, se puede determinar la medida de la energía que se libera en el interior de la tierra y genera movimientos telúricos (figura 2.25).[2] La escala habitualmente utilizada es la escala de Richter, que es logarítmica de base 10, cuyo modelo matemático es:

$$M = \log A + 3\log(8\Delta t) - 2,92$$

Donde:

A : es la amplitud de onda, en milímetros, tomada del sismógrafo.

Δt : tiempo, en segundos, desde el inicio de la onda P (primaria) a la onda S (secundaria).

M: magnitud arbitraria, pero constante a terremotos que liberan la misma cantidad de energía.

[2] Tomado del periódico Granma, 9 de julio de 2022. Foto: CENAIS

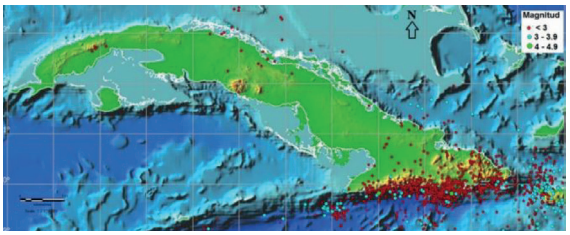


Fig. 2.25 Durante el primer semestre de 2022, la sismicidad registrada en el territorio nacional se ha caracterizado por estar mayormente relacionada con la falla Oriente

Como en la geología, el logaritmo de base 10 se emplea en numerosas áreas de la técnica y la ciencia; es uno de los logaritmos que aparece en la calculadora de los celulares y en las computadoras, y existen tablas para su cálculo.

■ *¿Por qué el logaritmo de base 10 es uno de los más utilizados? ¿Qué ventajas ofrecen la realización de cálculos haciendo uso de los logaritmos de base 10 respecto a los logaritmos de base 2; 3; 5; etcétera?*

Los logaritmos de base 10 se relacionan con nuestro sistema de numeración, y las propiedades que poseen hacen extraordinariamente cómodos los cálculos. Estos logaritmos son llamados logaritmos decimales, vulgares o de Briggs, quien dio origen a las primeras tablas.

De la historia



Fig. 2.26

Henry Briggs, matemático de origen inglés (figura 2.26), fue el primero que hizo las tablas logarítmicas en base 10, en el año 1631. En su obra *Logarithmall Arithmetike*, explica el objetivo de la invención de los logaritmos: *Con ellos se evitan todas las molestias de las multiplicaciones y de las divisiones; de manera que, en lugar de multiplicaciones, se hacen solamente adiciones y, en lugar de divisiones, se hacen sustracciones. La laboriosa operación de extraer raíces, se efectúa con suma facilidad. Con los logaritmos se resuelven con mayor sencillez y comodidad todos los problemas no solo de la aritmética y geometría, sino también de astronomía.*

Fuente: Newman, James R. (1994) - *Sigma El Mundo de las Matemáticas* - Barcelona, Grijalbo

Pueden ser denotados sin colocar la base, sin la letra "*o*":
$\log_{10} A$ *o* lgA

¿Sabías que...?

En optometría los optotipos (símbolo o figura que se utiliza para medir la agudeza visual), más conocidos para medir la agudeza visual, son de escala aritmética; sin embargo, también existen los optotipos de escala logarítmica, que disponen de cinco letras en cada línea y la misma separación entre líneas (figura 2.27). Cada optotipo tiene asignada un valor de 0,02u. El valor de la agudeza visual se calcula como:

$\log(MAR) = (85 - \text{letras acertadas}) \cdot 0{,}02$

o $VAR = 100 - 50 \cdot \log(MAR)$

Nota: MAR (mínimo ángulo de resolución) y VAR (valor de agudeza visual)

http://www.scielo.org.co/pdf/inan/v13n22/v13n22a03.pdf

Ojo izquierdo Ojo derecho



Fig. 2.27

Recuerda que...

$\log_a b = c$ si y solo si $a^c = b$, $a > 0, a \neq 1, b > 0$; luego, c es un número que, por lo general, tiene una parte entera y una decimal.

En el siguiente cuadro (tabla 2.3) podrás apreciar mejor las propiedades de los logaritmos decimales:

Tabla 2.3

Número (***N***)	Operación	Logaritmo	Potencia
1 000	log 1 000	3	$10^3 = 1000$
100	log 100	2	$10^2 = 100$
10	log 10	1	$10^1 = 10$
1	log 1	0	$10^0 = 1$
0,1	log 0,1	–1	$10^{-1} = 0{,}1$
0,01	log 0,01	–2	$10^{-2} = 0{,}01$
0,001	log 0,001	–3	$10^{-3} = 0{,}001$

Reflexiona

¿Cuál debe ser el logaritmo de log120 o el log24 o log0,35?

Como has podido apreciar, la parte entera del logaritmo depende solo de la cantidad de cifras que tenga el número; esta parte recibe el nombre de *característica* y la parte decimal, *mantisa.*

De la historia

En 1617, Briggs publicó el libro *Logarthmo unchilias prima*, que comprende los logaritmos del 1 al 1 000 con una precisión de 14 cifras decimales. Siete años más tarde en su obra *Aritmética Logarítmica* ya aparece la palabra característica (parte entera). La palabra mantisa fue utilizada por vez primera por Wallis en 1693. Las tablas elaboradas por Briggs contienen los logaritmos decimales de los números del 1 al 20 000 y del 90 000 al 100 000, con 14 cifras decimales precisas.

Si N es un número que tiene k cifras enteras (tabla 2.4), se tiene:

Tabla 2.4

Con 1 cifra	$1 \leq N < 10$	$0 \leq \log N < 1$
Con 2 cifras	$10 \leq N < 10^2$	$1 \leq \log N < 2$
Con 3 cifras	$10^2 \leq N < 10^3$	$2 \leq \log N < 3$
.....	.....	.....
Con k cifras	$10^{k-1} \leq N < 10^k$	$k-1 \leq \log N < k$

Si $0 < N < 1$ y comienza con k ceros (incluyendo el cero que está delante de la coma decimal) (tabla 2.5) se tiene :

Tabla 2.5

Con 1 cero	$10^{-1} \leq N < 10^0$	$-1 \leq \log N < 0$
Con 2 ceros	$10^{-2} \leq N < 10^{-1}$	$-2 \leq \log N < -1$
Con 3 ceros	$10^{-3} \leq N < 10^{-2}$	$-3 \leq \log N < -2$
.....	.....	.....
Con k ceros	$10^{-k} \leq N < 10^{-k+1}$	$-k \leq \log N < -k+1$

¡Atención!

- La característica del logaritmo de un número de k cifras enteras es k 1.
- La característica del logaritmo decimal de un número que comienza con k ceros es $-k$.

Ejemplo 2.18

Determinar la característica de cada uno de los logaritmos siguientes:

a) log 2 450 b) log 245 c) log 24,5
d) log 2,45 e) log 0,245 f) log 0,0 245

Resolución:

Logaritmo	Característica	Fundamentación
a) log 2 450	3	porque el número tiene cuatro cifras enteras
b) log 245	2	porque el número tiene tres cifras enteras
c) log 24,5	1	porque el número tiene dos cifras enteras
d) log 2,45	0	porque el número tiene una cifra entera
e) log 0,245	–1	porque el número comienza con un cero
f) log 0,0 245	–2	porque el número comienza con dos ceros ◆

La parte decimal del logaritmo de un número se denomina mantisa y no depende de la posición de la coma decimal.

Observa que si N es un número cualquiera de cinco cifras enteras la podemos representar de la forma

$N = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$

Por ejemplo:

$$\log(a_1a_2a_3a_4a_5) = \log\left[a_1a_2a_3, a_4a_5 \cdot 10^2\right] = \log\left[10^{\log(a_1a_2a_3, a_4a_5)+2}\right]$$

$$= 2 + \log(a_1a_2a_3, a_4a_5)$$

Los números tienen la misma sucesión de cifras $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ en el mismo orden, solo cambia la posición de la coma; esto quiere decir que sus logaritmos solo se diferencian en el número entero (característica): sus partes decimales (mantisa) tienen que ser iguales.

Ejemplo 2.19

Sabiendo que $\log 823 = 2,9206$; determinar el logaritmo decimal de:

a) 8230 b) 82,3 c) 8,23 d) 0,823 e) 0,00823

Resolución:

a) $\log 8230 = 3,9206$ b) $\log 82,3 = 1,9206$

c) $\log 8,23 = 0,9206$ d) $\log 0,8230 = -1 + 0,9206$

e) $0,00823 = -3 + 0,9206$ ◆

En los incisos d) y e) la característica es negativa y en este caso se acostumbra a escribir el logaritmo como una suma con la parte decimal positiva.

¿? ¿Sabías que...?

Los números de teclas de un piano constituyen logaritmos de la cantidad de vibraciones de cada uno por los sonidos correspondiente multiplicados por 12. El número de la octava corresponde a la característica, el número del sonido en la octava dada, es la mantisa de este logaritmo.
Fuente: Y. Perelman *Álgebra recreativa.*

Los logaritmos decimales son fáciles de calcular cuando el número es una potencia de 10, lo que también facilita la solución de importantes ecuaciones.

Ejemplo 2.20

Calcular:

a) $\log 1000$ b) $\log \sqrt{10}$ c) $\log \sqrt[4]{1000}$

Resolución:

a) $\log 1000 = \log 10^3 = 3\log 10 = 3 \cdot 1 = 3$

b) $\log \sqrt{10} = \log 10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log 10 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

c) $\log \sqrt[4]{1000} = \log 10^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}\log 10 = \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}$ ◆

Observar que en general se cumple que $\log 10^k = k$.

Ejemplo 2.21

Existen determinadas rocas cuya composición incluye ciertos materiales en su interior, entre ellos materiales radioactivos. La ciencia ha desarrollado una técnica que permite determinar la concentración de cierto material y la edad de la roca. La ecuación que relaciona estos dos aspectos es:

$C = 3^{-t}k$

Donde:

C: es la concentración del material radioactivo encontrado en la roca;

t: la edad de la roca (medida en cientos de años), y

k: la concentración del elemento radioactivo en el momento de formarse la roca.

¿Qué edad tiene una roca si $k = 4\,500$ y la concentración de material encontrado es de 1 500?

Resolución:

$C = 3^{-t} \cdot k$	
$\log C = log\left(3^{-t} \cdot k\right)$	Aplicar logaritmo decimal en ambos miembros.
$\log C = \log 3^{-t} + \log k$	Utilizar la propiedad del producto de dos logaritmos.
$\log 1500 = -t\log 3 + \log k$	Transponer los términos.
$t\log 3 = \log 4500 - \log 1500$	
$t\log 3 = \log \frac{4500}{1500}$	Aplicar la propiedad del cociente de logaritmos.
$t\log 3 = \log 3$	Determina el valor de t.
$t = 1$	

Respuesta: la edad de la roca es de 100 años, puesto que se mide en cientos de años. ◆

Como has podido ver, existen casos en que es posible realizar los cálculos utilizando las potencias de diez, pero en otros debes conocer la mantisa del número, por lo que requieres utilizar la tabla.

¡Atención!

No olvides que la mantisa siempre es positiva; por esa razón, cuando la característica es negativa se expresa como una suma con la parte decimal positiva.

Investiga y aprende

Junto a otros compañeros, indaga en qué zonas de Cuba se pueden encontrar rocas que posean material radioactivo, solicita la cantidad de material que poseen y determina la edad aproximada de estas.

Hoy el desarrollo de la Ciencia y la técnica requieren de estos conocimientos.

Saber más

En diferentes eventos de la naturaleza, como:

- los brazos de las galaxias; se cree que la vía Láctea tiene cuatro brazos espirales mayores, cada uno de los cuales es una espiral logarítmica,
- los brazos de los ciclones tropicales y huracanes (figura 2.29),

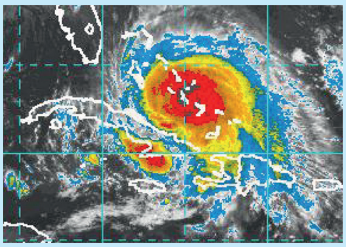


Fig. 2.28

- las telas de araña y las conchas de los moluscos, se identifica la espiral logarítmica, curva que forma ángulo constante con los radios vectores que parten del centro de giro. La distancia al centro de giro crece de forma exponencial con el ángulo girado. Los rumbos o loxodromas son las trayectorias en la superficie de la tierra, que forman ángulo constante. De su definición se obtiene la ecuación:

$$\theta = \frac{1}{b}\log\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

Donde: r_0 es el radio inicial, b es un parámetro y θ es el ángulo en radianes.
Fuente:. La espiral logarítmica. Una aplicación(pdf)
www.dccia.u.es/~tortosa/pag5/files/act-espiral.pdfwww.ieshumanes.com/nw/Espiral/espiral.pdf

Ejemplo 2.22

Hallar el logaritmo decimal de los números siguientes:

a) 143 b) 3 c) 1,24

Resolución:

a) log143 **Tabla 2.6**

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10										
11										
12										
13										
14				1553						
15										

Busca la intersección de la fila 14 y la columna 3 (tabla 2.6). Como el número tiene tres cifras la característica es 2; esto quiere decir que:
log143 = 2,1553

b) log3 **Tabla 2.7**

	0	1	2	3
20				
21				
22				
23				
24				
25				
26				
27				
28				
29				
30	4771			
31				

Busca la fila 30 y la columna 0 (tabla 2.7), como solo tiene una cifra
log3 = 0,477

c) log1,24 **Tabla 2.8**

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10										
11										
12					0934					
13										
14										
15										

Como la mantisa de un número no depende de la coma decimal, debes buscar la fila 12 y la columna 4 (tabla 2.8)
log1,24 = 0,0934 ◆

Si posees un celular androide (figura 2.29), en su calculadora, puedes comprobar u obtener los logaritmos.

Ejemplo 2.23



Fig. 2.29

Deslizar la barra de las operaciones, buscar logaritmo decimal (figura 2.30).



Fig. 2.30

Colocar el número entre paréntesis (figura 2.31).

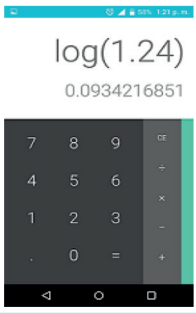


Fig. 2.31 ◆

Ejemplo 2.24

En una calculadora científica puedes encontrar los logaritmos. Para saber cómo debes proceder, te sugiero consultar al sitio: www.cubaeduca.cu
Una vez que estés en él, busca la sección curricular y en ella el undécimo grado Matemática, donde encontrarás la lección Propiedades de los logaritmos (figura 2.32).

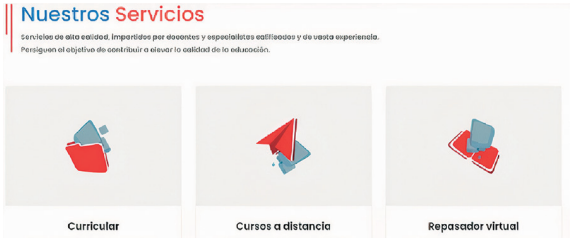


Fig. 2.32

De la historia

Las primeras tablas logarítmicas desarrolladas por Neper estaban formadas por rodillos, por esa razón fueron llamados rodillos de Neper (figura 2.33). Cada uno de los círculos contenía lo dígitos del 1 al 9, con sus múltiplos, en la columna debajo de ellos la multiplicación de ellos se hacía girando los círculos.

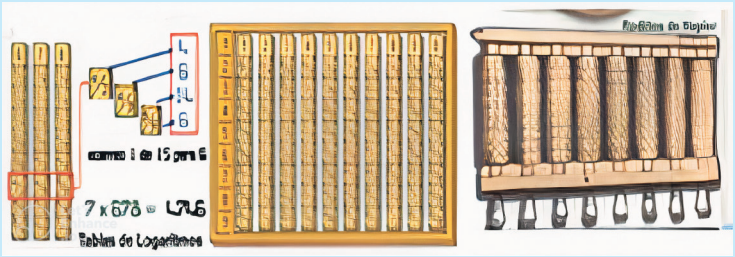


Fig. 2.33

Ejemplo 2.25

Hallar el valor de x en las ecuaciones siguientes:

a) $\log x = 2{,}3304$ b) $\log x = -1 + 0{,}7076$

Se busca el número, que significa hallar el **antilogaritmo**, el cual puede ser denotado como 10^x o antilog x.

Resolución:

a) $\log x = 2{,}3304$ **Tabla 2.9**

	0	1	2	3	4
20					↑
21	←				3304
22					
23					
24					
25					

Busca la mantisa, o sea, la sucesión de números decimales en la tabla. Encuentra la fila y la columna (tabla 2.9). El valor entero del logaritmo del número (característica) indica la cantidad de cifras que tiene el número. En este caso como la característica es 2, la cantidad de cifras del número es 3.

Luego $x = 214$

b) $\log x = -1 + 0{,}7076$ **Tabla 2.10**

	0	1	2	3
46				
47				
48				
49				
50				
51 ← 7076				

Procede de forma análoga (tabla 2.10). Como el valor entero (característica) es negativo, en este caso por ser -1 el número está precedido por un cero antes de la coma decimal.

Luego $x = 0{,}51$

◆

¿Cómo lo haces?

En una calculadora científica para determinar el antilogaritmo debes ejecutar la tecla que dice SHIFT o INV antes de seleccionar el número (figura 2.34).



Fig. 2.34

Ejemplo 2.26



Fig. 2.35

En el artículo 93 de la Ley No. 109, del Código de Seguridad Vial de Cuba, se establecen las prohibiciones de conducir bajo los efectos del alcohol, para cualquier tipo de vehículo. Estudios médicos han estimado un modelo matemático, que indica el porcentaje de riesgo que, en estos casos, tiene un conductor (ebrio o no) para provocar un accidente automovilístico (figura 2.35), cuya ecuación es $R = 6 \cdot e^{kx}$

Donde:

R: es el porcentaje de riesgo.

x: la concentración de alcohol en sangre, g/L .

k: una constante y *e:* otra constante con valor aproximado de 2,71.

Calcula el riesgo de accidente de un conductor que tiene una concentración de alcohol en sangre de $0{,}5\,\frac{g}{L}$, sabiendo que $k = 2{,}81$.

Resolución:

$R = 6 \cdot e^{kx}$	Escribe el modelo matemático.
$\log R = \log\left(6 \cdot e^{kx}\right)$	Aplica logaritmo decimal a ambos miembros de la ecuación exponencial.
$\log R = \log 6 + \log e^{kx}$	Aplica la propiedad del producto.
$\log R = \log 6 + kx \log e$	Aplica la propiedad de la potencia.
$\log R = \log 6 + (2{,}81)(0{,}5)\log(2{,}71)$	Busca los valores de cada logaritmo.
$\log R = (0{,}778) + (2{,}81)(0{,}5)(0{,}435)$	Calcula.
$\log R = (0{,}778) + 0{,}6041$	
$\log R = 1{,}382$	Aplica la definición del logaritmo.
$R = 10^{1{,}382}$	Aplica el antilogaritmo.
$R \approx 24{,}1$	
24 %	

Respuesta: el riesgo de accidentes de un conductor que tiene una concentración de alcohol en sangre de $0{,}5\,\frac{g}{L}$, es aproximadamente del 24 %. ◆

¿? ¿Sabías que...?

En la ciencia y en la técnica se utiliza con frecuencia el logaritmo que tiene por base al número irracional $e \approx 2{,}718\,281\ldots$, que recibe el nombre de logaritmo neperiano, en honor a Neper, y también de logaritmo natural, denotándose: $\log_e x = \ln$.
Aplicando cambio de base puedes trabajar con él y calcular utilizando la tabla del logaritmo decimal, en una calculadora aparece la tecla directamente.

Ejercicios del epígrafe 2.3

1. Escribe en tu libreta al menos dos números cuyas características sean:

a) 1 b) 4 c) 0 d) 3 e) −2 f) −3

2. La mantisa de un número N es 8 195. Escribe el logaritmo decimal del número N si:

a) $10 < N < 100$
b) $1 < N < 10$
c) $100 < N < 1000$
d) $\frac{1}{100} < N < \frac{1}{1000}$

3. Determina el logaritmo decimal de:

a) 458 b) 6,93 c) 24,3 d) 4 e) 0,0195

4. Halla el valor de la variable en las ecuaciones siguientes:

a) $\log x = 0,42$ b) $\log x = 2,35$ c) $\log x = -1 + 0,5441$
d) $\log x = 0,9502$ e) $\log x = -2 + 0,9557$ f) $\log x = 1,6385$

5. Calcula:

a) $10^{1,7273}$ b) antilog3,5441 c) antilog $-2 + 0,8727$
d) $10^{1,238}$ e) $10^{0,511}$ f) antilog0,1847

6. La capacidad máxima C_m *de* un cable coaxial para trasmitir información se determina por la ecuación de Hartley-Shannon $C_m = B\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$ bit / s donde *B* representa el ancho de banda, $\frac{S}{N}$ la relación señal/ruido y bit/s las unidades de información por segundo. Determina la capacidad máxima de un cable coaxial de 50 MHz de ancho de banda (figura 2.36), para una relación señal/ruido de 10 dB (decibeles).



Fig. 2.36

7. En la tabla 2.11, que aparece a continuación, se presenta la proliferación de células (fisión binaria)[3] a partir de una sola, con un tiempo de generación de 30 min. Copia la tabla en tu cuaderno de trabajo y completa los datos que faltan.

Tabla 2.11

Tiempo (horas)	Número de células	Logaritmo del número de células
0		0
0,5	2	0,301
1		0,602
1,5	8	
2		1,204
2,5		1,505
3		
3,5	128	2,107
4		2,408

[3] Reproducción y crecimiento microbiano.

Tiempo (horas)	Número de células	Logaritmo del número de células
4,5		2,709
5	1 024	3,010 3
...		...
10		6,021

2.4 Funciones exponenciales y logarítmicas

Las condiciones del suelo, la naturaleza química del material, la humedad, el Ph, y la comunidad de microrganismos locales son variables, de las cuales depende la descomposición de la biomasa definida por la ecuación: $W_t = W_0 \cdot 2,71^{-kt}$

Donde:

k *: representa la tasa de descomposición*

W_0*: biomasa inicial*

W_t*: biomasa en un tiempo* t

Conociendo esta ecuación es posible estudiar, por ejemplo: la descomposición de cada especie, la cantidad de biomasa existente pasados t *semanas, meses o años; el porcentaje de descomposición semanal de cada especie, entre otros aspectos. Este ejemplo indicado te puede conducir a las siguientes interrogantes:*

- *¿Por qué se puede afirmar que esta relación es una función?*
- *¿Qué condiciones deben cumplir las variables implicadas?*
- *¿Corresponde esta función a algunas de las conocidas?*

Funciones exponenciales

En un laboratorio se trabaja con una bacteria que se multiplica 1,4 cada hora (figura 2.37). ¿Cómo representarías analítica y gráficamente, el comportamiento de esta especie de bacteria? ¿Cuántas bacterias habrá a las cuatro horas de haberse comenzado el estudio, si inicialmente solo había una?

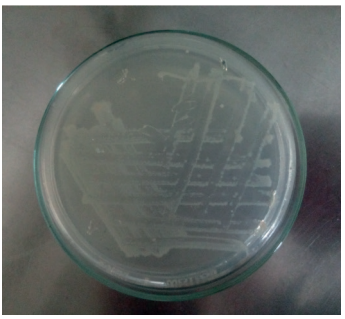


Fig. 2.37

Primero debes identificar que estás en presencia de un comportamiento exponencial, donde para cada hora corresponde una cantidad de bacterias diferente; luego, es posible afirmar que estás en presencia de una función, la cual recibe el nombre de *función exponencial*.

Definición 2.1

Se llama función exponencial de base $a(a>0 : a\neq 1)$ a la función que a cada número real x, se le hace corresponder a^x, es decir, **el conjunto de pares ordenados** $\{(x;a^x): x\in\mathbb{R}, a>0, a\neq 1\}$.

Ejemplo 2.27

Utilizando la calculadora científica o las tablas de logaritmos decimales que aparecen al final del libro o de manera manual, puedes calcular el valor de algunos números reales, de la función exponencial que tiene por ecuación $f(x)=10^x$.

a) Determinar las imágenes de la función de ecuación $f(x)=10^x$ para los valores siguientes de x: $-2; -1{,}5; -1; -0{,}5; 0; 0{,}3; 0{,}6; 0{,}7$.

b) Escribir los pares ordenados obtenidos.

c) Representar los pares ordenados en un sistema de coordenadas rectangulares.

Resolución:

a)

$10^{-2}=0{,}01$ $10^{-1{,}5}=0{,}03$ $10^{-1}=0{,}1$

$10^{-0{,}5}=0{,}3$ $10^{0}=1$ $10^{0{,}3}=2$

$10^{0{,}6}=4$ $10^{0{,}7}=5$

b)

$(-2;0{,}01)$ $(-1{,}5;0{,}03)$ $(-1;0{,}1)$ $(-0{,}5;0{,}3)$ $(0;1)$ $(0{,}3;2)$

$(0{,}6;4)$ $(0{,}7;5)$

c) Al representar los pares ordenados se obtiene la curva de la (figura 2.38):

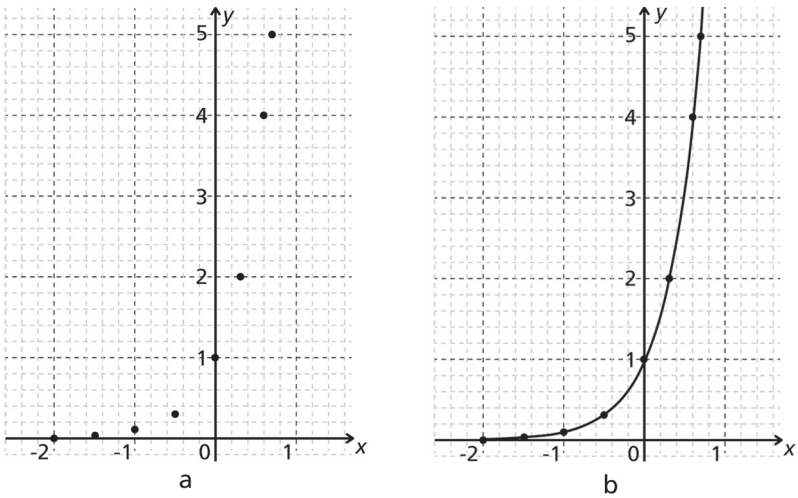


Fig. 2.38 ◆

Si representas estos pares ordenados en un sistema de coordenadas rectangulares se obtiene una gráfica como la que se muestra en la figura 2.38 a, y si aumentas la cantidad de pares o utilizas un asistente matemático, entonces el gráfico de f es como el que se muestra en la figura 2.38 b.

Observa que los pares de puntos en el gráfico 2.38 b, se salen del gráfico porque los valores de 10^x crecen rápidamente.

Ten presente que: $10^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y por tanto, su gráfico no interseca al eje de las x, aunque se aproxime ilimitadamente a él por la izquierda. Esta recta a la cual la curva se acerca ilimitadamente se denomina **asíntota horizontal de la función exponencial**.

La función exponencial de base 10 desempeña un papel importante en la práctica y por ser la base de nuestro sistema de numeración. En forma análoga se pueden definir funciones exponenciales para bases positivas diferente de cero.

Ejemplo 2.28

A partir de la definición 2.1 es posible dar respuesta al problema planteado el inicio del subepígrafe.

Primeramente, busca la ecuación correspondiente a la función, para lo cual debes definir las variables:

y , número de bacterias que se obtendrá pasado un tiempo x; por lo tanto, la ecuación que se obtiene: $y = 1,4^x$

A partir de la ecuación de la función represéntala gráficamente, para lo cual es necesario:

- Determinar los valores de *y* al menos para las cuatro primeras horas (figura 2.39);
- Situar los puntos en el sistema de coordenadas (figura 2.40);
- Trazar la curva (figura 2.41).

Resolución:

Tiempo	Número de bacterias
0	1
1	1,4
2	1,96
3	2,74
4	3,84

Fig. 2.39

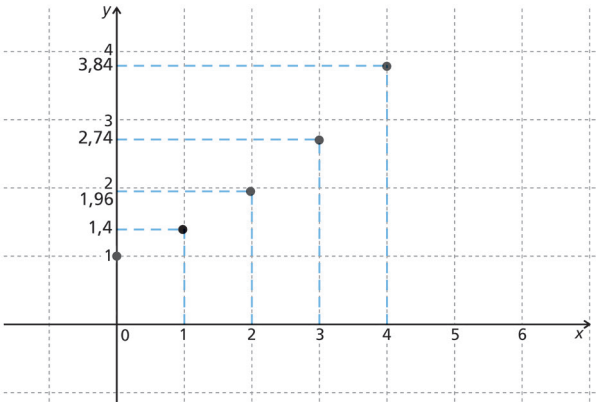


Fig. 2.40

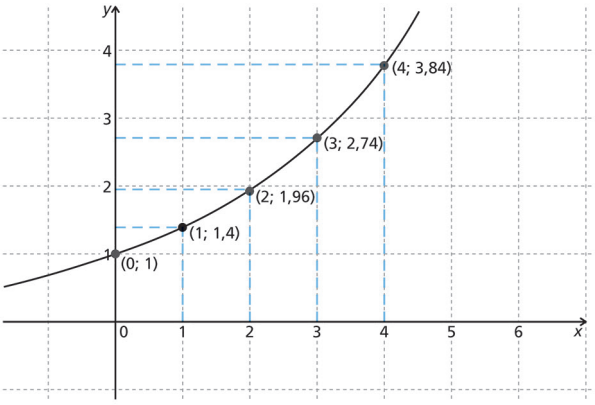


Fig. 2.41

Respuesta: a las cuatro horas de haber comenzado el estudio habrá 3,84 bacterias. ◆

Reflexiona

¿Por qué no se han dado valores negativos en la tabla?

La función exponencial, al igual que las funciones que conoces, cumplen determinadas propiedades las cuales obtendremos a partir del ejemplo siguiente.

Ejemplo 2.29

Representar gráficamente la función f de ecuación $f(x) = 2^x$ y a partir de su representación gráfica obtener sus propiedades.

Comprobar la representación gráfica de la función f de ecuación $(x) = 2^x$ utilizando el asistente GeoGebra (figura 2.42).

Resolución:

Tabla 2.12

x	–2	–1	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

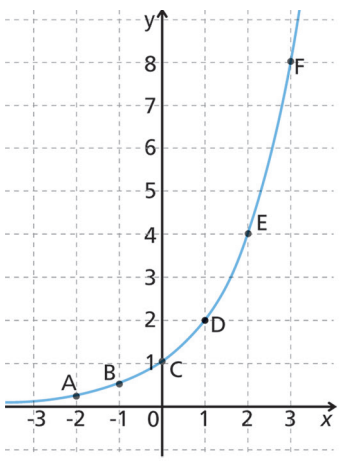


Fig. 2.42 ◆

¿Cuáles son las propiedades de la función f cuya ecuación es $y = f(x) = 2^x$?

Si analizas la ecuación y te apoyas en su representación gráfica podrás comprender el resumen de la tabla 2.13.

Tabla 2.13

Dominio de definición	$\mathbb{R}$ o $\{x \in \mathbb{R}\}$	La proyección de la gráfica cubre todo el eje de las abscisas.
Conjunto imagen	$\mathbb{R}^*_+$ o $\{y \in \mathbb{R} : y > 0\}$	La proyección de la gráfica cubre la parte superior del eje de las ordenadas o sea al semieje positivo.
Monotonía	Creciente en todo su dominio de definición	La gráfica asciende de izquierda a derecha o sea a medida que aumentan los valores del dominio de la función los valores de las imágenes son más grandes.
Ceros	No tiene	La gráfica no corta al eje de las abscisas.
Paridad	No es par ni impar	No es simétrica respecto al eje de las ordenadas ni al origen de coordenadas.
Signo	Positiva en todo su dominio de definición	Toda su gráfica está por encima del eje *x*.
Inyectividad	Es biyectiva	Si se traza una recta paralela al eje de las abscisas interseca al gráfico de la función en un solo punto.
Punto característico	(0;1)	La gráfica interseca al eje de las ordenadas en el punto (0;1).
Valor máximo	No tiene	La gráfica toma cualquier valor positivo.
Valor mínimo	No tiene	La gráfica se aproxima indefinidamente al eje *x*, por la izquierda, pero no lo toca.
Asíntotas	Horizontal Vertical	La recta $y = 0$. No tiene.

Ejemplo 2.30

Dadas las funciones *f, g, h* de ecuaciones $f(x)=10^x$, $g(x)=3^x$ y $h(x)=5^x$.

a) Determinar $f(1)$, $f(-1)$, $g(1)$, $g(-1)$, $h(1)$ y $h(-1)$ y esbozar el gráfico de las tres funciones en un mismo sistema de coordenadas.

b) ¿Para qué valor de *x*, la gráfica de estas funciones interseca al eje de las ordenadas?

c) ¿Cuál es la ecuación de la recta a la cual se acerca el gráfico de las funciones, pero no la toca?

Resolución:

a) $f(1)=10$; $f(-1)=\frac{1}{10}$; $g(1)=3$; $g(-1)=\frac{1}{3}$; $h(1)=5$; $h(-1)=\frac{1}{5}$

Como puedes observar en la figura 2.43 las tres funciones representadas contienen el punto $(0;1)$.

Los gráficos de las funciones *g* y *h* son una contracción del gráfico de la función *f*.

b) Los conocimientos que posees sobre potencias te permiten comprender que, para $x = 0$, la imagen es 1, por lo tanto, las gráficas de las tres funciones intersecan al eje de las ordenadas en el punto $(0;1)$.

c) Ninguna de las curvas toca al eje de las abscisas, porque la función no tiene a cero como imagen de estas funciones; luego, la ecuación de la recta a la cual se acerca y no la toca es $y = 0$; esta recta es la asíntota horizontal de las tres funciones. ◆

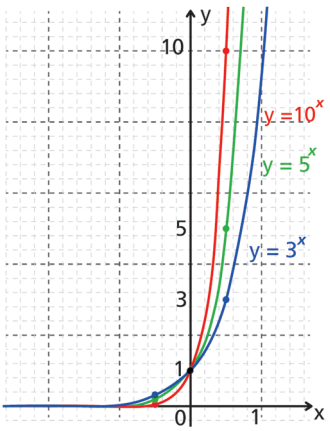


Fig. 2.43

En las tres funciones se cumplen todas las propiedades enunciadas anteriormente en la función de ecuación $y=2^x$ del ejemplo 2.29.

En general, las propiedades de las funciones de ecuación $f(x)=a^x$ y sus gráficas se pueden obtener de la gráfica de la función *f* de ecuación $f(x)=10^x$. Es suficiente observar que:

$$f(x)=a^x=10^{x\log a}$$

¡Atención!

Si $a > 1$, entonces $\log a > 0$, y la gráfica se obtiene de la $y = 10^x$ por la contracción o dilatación en dirección al eje de las x (figura 2.43).

Como has observado todas las funciones analizadas hasta este momento tienen como la característica que $a > 1$.

¿Cómo se comporta la función de ecuación $f(x) = a^x$ en el caso se ser $0 < a < 1$?

Analicemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.31

Las sustancias radioactivas se transforman en otras o se desintegran. Por ejemplo, el periodo de desintegración del radio es de 1 600 años. Observa la tabla 2.14 y responde las preguntas que se hacen a continuación.

Tabla 2.14

Periodo (año)	0	1	2	3	4	5
Cantidad de sustancia (gramo)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	

a) De acuerdo con el comportamiento de los valores descritos en la tabla. Escribir la ecuación de la función que describe el proceso.
b) ¿Qué cantidad de sustancia radioactiva habrá a los cinco años? (tabla 2.15)
c) Esbozar el gráfico de la función; para ello calcula las imágenes de valores –1, –2 y –3.
d) Analiza sus propiedades (tabla 2.16).

Resolución:

a) Es una función exponencial de la forma $f(x) = a^x$. Analizando los pares ordenados de la tabla 2.15, se tiene que su ecuación es $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (figura 2.44).
b)

Tabla 2.15

Periodo	0	1	2	3	4	5
Gramos	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$

c)

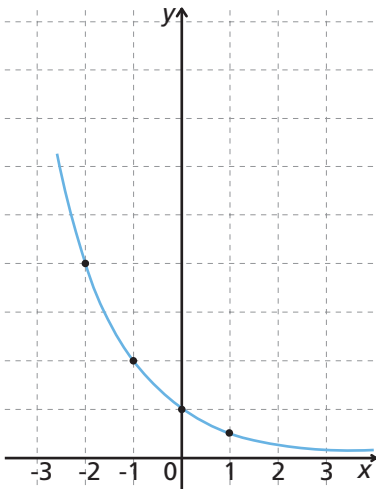


Fig. 2.44

d) Propiedades:

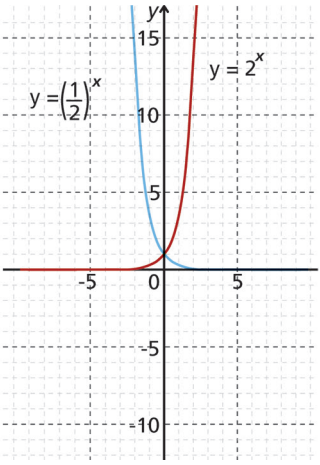
Tabla 2.16

Dominio de definición	$\mathbb{R}$ o $\{x \in \mathbb{R}\}$	La proyección de la gráfica cubre todo el eje de las abscisas.
Conjunto imagen	$\mathbb{R}^*_+$ o $\{y \in \mathbb{R} : y > 0\}$	La proyección de la gráfica cubre la parte superior del eje de las ordenadas o sea al semieje positivo.
Monotonía	Decreciente en todo su dominio de definición	La gráfica desciende de izquierda a derecha o sea a medida que aumentan los valores del dominio de la función los valores de las imágenes son más pequeños.
Ceros	No tiene	La gráfica no corta al eje de las abscisas.
Paridad	No es par ni impar	No es simétrica respecto al eje de las ordenadas ni al origen de coordenadas.
Signo	Positiva en todo su dominio de definición	Toda su gráfica está por encima del eje de las abscisas.

Inyectividad	Es biyectiva	Si se traza una recta paralela al eje de las abscisas interseca al gráfico de la función en un solo punto.
Punto característico	(0;1)	La gráfica interseca al eje de las ordenadas en el punto (0;1).
Valor máximo	No tiene	La gráfica toma cualquier valor positivo.
Valor mínimo	No tiene	La gráfica se aproxima indefinidamente al eje de las abscisas, por la derecha, pero no lo toca.
Asíntotas	Horizontal Vertical	La recta $y = 0$ No tiene. ◆

En general (tabla 2.17), para las funciones exponenciales de ecuación $f(x) = a^x$ con $a > 0$ y $a \neq 1$, se cumple (figura 2.45):

Tabla 2.17

Gráfica	Si $a > 1$	Si $0 < a < 1$
 **Fig. 2.45**	Dominio de definición: $\{x \in \mathbb{R}\}$ Conjunto imagen $\{y \in \mathbb{R} : y > 0\}$ Ceros: no tiene Monotonía: creciente Valor máximo: no tiene Valor mínimo: no tiene Signo: positivo Inyectividad: es inyectiva y sobreyectiva. Paridad: no es par ni impar Asíntota horizontal del gráfico de la función: la recta $y = 0$ Asíntota vertical del gráfico de la función: no tiene	Dominio de definición: $\{x \in \mathbb{R}\}$ Conjunto imagen $\{y \in \mathbb{R} : y > 0\}$ Ceros: no tiene Monotonía: decreciente Valor máximo: no tiene Valor mínimo: no tiene Signo: positivo Inyectividad: es inyectiva y sobreyectiva Paridad: no es par ni impar Asíntota horizontal del gráfico de la función: la recta $y = 0$ Asíntota vertical del gráfico de la función: no tiene

Como puedes observar en la figura 2.46, la gráfica de la función exponencial de ecuación $y = a^x$ con $0 < a < 1$ se puede obtener por una reflexión del gráfico de la función de ecuación $y = a^x$ con $a > 1$ con respecto al eje de las ordenadas.

¿Cómo proceder para representar gráficamente las funciones exponenciales, escribir la ecuación y analizar las propiedades cuando el gráfico de la función $y = a^x$ se traslada en la dirección de los ejes de coordenadas?

Sean las funciones exponenciales *f*, *g* , *h* de ecuaciones $f(x) = a^x + e$, $g(x) = a^{x+d}$ y $h(x) = a^{x+d} + e$.

En las funciones de ecuación $f(x) = a^x + e$ su gráfico se traslada *e* unidades en la dirección del eje de las ordenadas (*y*), en las de ecuación $g(x) = a^{x+d}$ su gráfico se traslada *-d* unidades en la dirección del eje de las abscisas (*x*) y en las de ecuación $h(x) = a^{x+d} + e$ su gráfico se traslada en ambas direcciones.

Ejemplo 2.32

De la función exponencial de ecuación $y = 2^x - 1$:

a) Representarla gráficamente (tabla 2.18 y figura 2.46).
b) Comparar: dominio, conjunto imagen, cero, monotonía, signo y asíntota del gráfico de la función de ecuación $y = 2^x - 1$ respecto a la función de ecuación $y = 2^x$ (tabla 2.19).

Resolución:

a)

Tabla 2.18

x	-1	0	1	2
2^x	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$2^x - 1$	$-\frac{1}{2}$	0	1	3

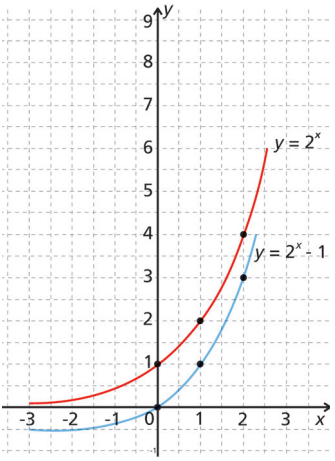


Fig. 2.46

b)

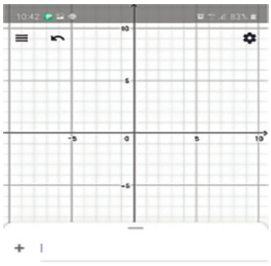
Tabla 2.19

Propiedades	$y = 2^x$	$y = 2^x - 1$
Dominio de definición	$\{x \in \mathbb{R}\}$	$\{x \in \mathbb{R}\}$
Conjunto imagen	$\{y \in \mathbb{R} : y > 0\}$	$\{y \in \mathbb{R} : y > -1\}$
Cero	no tiene	$x_o = 0$
Monotonía	creciente en todo su dominio	creciente en todo su dominio
Signo	Positiva en todo su dominio	Positiva para $x > 0$; negativa para $x < 0$
Asíntota horizontal del gráfico de la función	Ecuación $y = 0$	Ecuación $y = -1$
Paridad	No es par ni impar	No es par ni impar
Inyectividad	Es inyectiva y sobreyectiva	Es inyectiva y sobreyectiva
Valor máximo	No tiene	No tiene
Valor mínimo	No tiene	No tiene ◆

Ejemplo 2.33

Representar la función de ecuación $f(x) = 2^{(x-3)} - 2$, haciendo uso de la aplicación *Desmos* para Androide.

¿Cómo utilizar la aplicación *Desmos*?

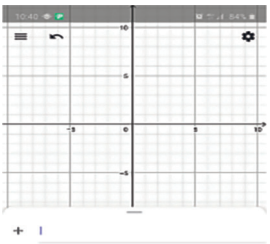


Busca teclear $y = 2$

Busca la tecla que indica *funcs* (figura 2.47)



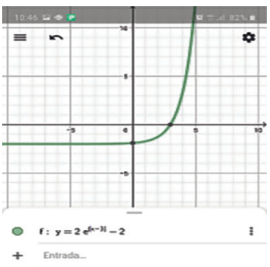
Fig. 2.47



Marca la tercera columna y busca *exp*( ); dentro del paréntesis se coloca el argumento de la función (figura 2.48).



Fig. 2.48



Completar la ecuación y ver el gráfico en la pantalla (figura 2.49).



Fig. 2.49

¿Cómo esbozar el gráfico de las funciones cuyas ecuaciones son

$$f(x) = a^x + e\,;\ g(x) = a^{x+d}\ y\ h(x) = a^{x+d} + e?$$

Ejemplo 2.34

Esbozar el gráfico de la función de ecuación de $y = 2^x - 16$.

Resolución:

Para esbozar dicho gráfico necesitas:

1) La ecuación de la asíntota horizontal: $y = -16$ te ofrece la información para trazar la recta que representa la asíntota horizontal

2) El cero de la función: te ofrece información para determinar las coordenadas del punto en que la curva interseca al eje de las abscisas (figura 2.50)

$2^x - 16 = 0$

$2^x = 16$

$2^x = 2^4$

$x = 4$

El cero de la función es $x_0 = 4$

3) Las coordenadas del punto característico $f(0) = 2^0 - 16 = -15$ luego el punto es (0;–15) (te ofrece la información del punto en que la curva interseca al eje de las ordenadas)

4) Trazar la asíntota horizontal, ubicar los pares ordenados (4;0) y (0;–15) en el sistema de coordenadas y finalmente trazar la curva.

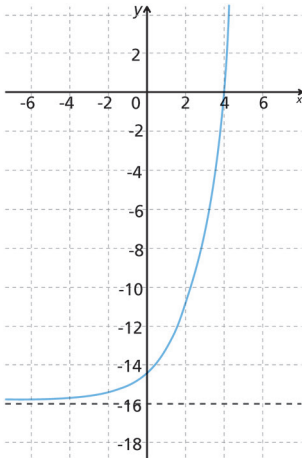


Fig. 2.50 ◆

Ejemplo 2.35

Esbozar el gráfico de la función de ecuación $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 1$ (figura 2.51).

1) Determinar la asíntota horizontal: $y = 1$.

2) Calcular el cero de la función:

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 1 = 0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = -1$ No tiene cero porque

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} > 0$ para todo valor de x.

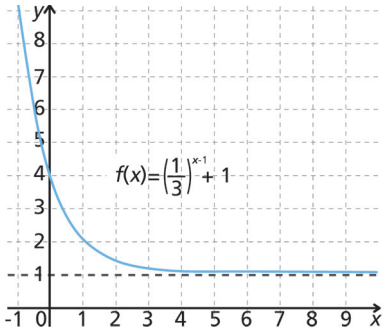


Fig. 2.51

3) Determinar las coordenadas del punto característico

$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{0-1} + 1 = 3 + 1 = 4$

4) Trazar la asíntota horizontal, ubicar el par ordenado (0;4) en el sistema de coordenadas y trazar la curva. ◆

¿Cómo determinar la ecuación de la función conocido su gráfico?

Ejemplo 2.36

Dado el gráfico de la función exponencial h (figura 2.52) de ecuación $h(x) = 5^{x+d} + e$

Escribir la ecuación que la define.

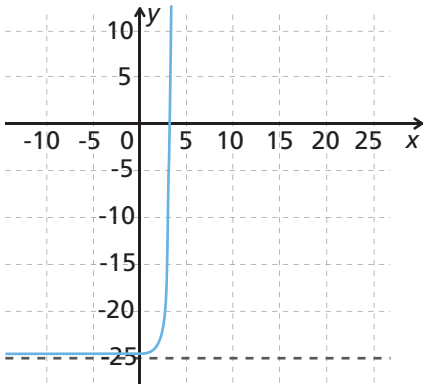


Fig. 2.52

Resolución:

Para escribir la ecuación, necesitas el valor de los parámetros *d* y *e*.

1) Determina los valores de *d* y *e*:

- Obtén directamente del gráfico el valor de *e*, que es por donde pasa la asíntota horizontal.
  $e = -25$

2) Halla el valor de *d*, para lo cual debes utilizar al menos un punto de la gráfica. En este caso, te ofrecen las coordenadas del punto (3; 0).

- Halla *d*
- Sustituye en la ecuación el valor de *d*:
  $y = 5^{x+d} - 25$
- Sustituye en la ecuación de la función las coordenadas del punto (3; 0):
  $0 = 5^{3+d} - 25$
- Resuelve la ecuación obtenida:
  $5^{3+d} = 25$
  $5^{3+d} = 5^2$
  $3 + d = 2$
  $d = -1$

3) Escribe la ecuación: $y = 5^{x-1} - 25$. ◆

En ocasiones encontrarás ejercicios y problemas sobre las funciones exponenciales con dominio restringido definidas en un subintervalo real.

¿Qué implicaciones tiene esta situación al graficar o analizar las propiedades de las funciones cuyo dominio está restringido?

En estos casos, se hace la representación gráfica de solo una parte de la curva y algunas propiedades cambian respecto a las de la función en su dominio de definición

Ejemplo 2.37

En la gráfica (figura 2.53) aparece representada una función p cuya ecuación tiene la forma $p(x) = 2^{x+d} + e$, definida en el Intervalo $x \in (-\infty\ ;\ 5]$.

a) Escribir la ecuación de la función.
b) Determinar el conjunto imagen.
c) Calcular el cero de la función, los valores máximo y mínimo, y analizar los signos de sus imágenes.

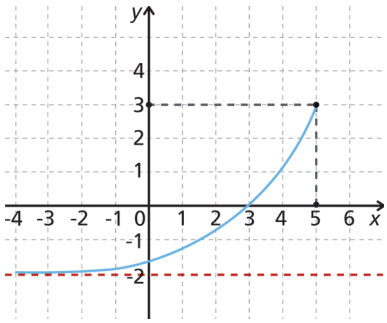


Fig. 2.53

Resolución:

a) Hallar el valor de e:
Determinar la asíntota horizontal: $y = -1$
Luego, $e = -1$
Hallar el valor de d:
Con el valor de $e = -1$ y el punto $(5; 3)$ que pertenece al gráfico de la función
$y = 2^{x+d} - 1$ (sustituir el valor de b en la ecuación de la función)
$3 = 2^{5+d} - 1$ (sustituir las coordenadas del punto en la ecuación de la función)
$4 = 2^{5+d}$ (adicionar 1 a ambos miembros)
$2^2 = 2^{5+d}$ (expresar 4 como potencia de base 2)
$2 = 5 + d$ (igualar los exponentes)
$d = -3$ (adicionar –5 a ambos miembros)
La ecuación de la función es: $p(x) = 2^{x-3} - 1$.

b) Conjunto imagen $\{y \in \mathbb{R}: -1 < x \leq 3\}$

c) $2^{x-3} - 1 = 0$ (sustituir y por cero)
$2^{x-3} = 1$ (adicionar 1 a ambos miembros)
$2^{x-3} = 2^0$ (expresar 1 como potencia de base 2)
$x - 3 = 0$ (igualar los exponentes)
$x = 3$ (obtener el valor de x)
Luego el cero de la función es $x_0 = 3$
Valor máximo $f(5) = 3$ Valor mínimo: no tiene
Negativa $x \in (-x\ ;\ 3)$ Positiva $x \in (3\ ;\ 5]$ ◆

Investiga y aprende

Dentro de los materiales que se encuentran en los residuos sólidos (basura) (figura 2.54), aproximadamente el 20,34 % está formado por papel y cartón[4]; sin embargo, cada tonelada de papel que se recicle impide la tala de 17 árboles de diez años de antigüedad[5].



Fig. 2.54

a) Investiga cuántas toneladas de residuos sólidos produce tu ciudad diariamente y la razón o porciento aproximado con que crece.

b) Dada la ecuación $Q(t) = Q_0\,(2{,}71)^{kt}$, donde:
k: por ciento de crecimiento,
Q_0: valor inicial

Calcula cuántas toneladas diarias de basura (papel y cartón) habría que reciclar dentro de 10 años, para evitar la tala de 4 000 árboles/día.

Saber más

La función exponencial, es conocida formalmente como la función real e^x, donde e es el número de Euler, aproximadamente 2,718 28; esta función tiene por dominio de definición el conjunto de los números reales, y tiene la particularidad de que su derivada es la misma función.

El número *"e"*, también conocido como Número de Euler o Constante de Napier, es uno de los números reales más relevantes, considerado como el número del cálculo por excelencia. Se relaciona con resultados importantes como la derivada de la función exponencial: $f(x) = e^x$
Su valor aproximado es:
$e \approx 2{,}718281828459045235360287471352662497757247093699 95$

El descubrimiento del número e se le acredita a Jacob Bernoulli, que estudiaba un problema llamado interés compuesto.

Jacob Bernoulli comprobó que esta expresión se aproxima al valor de 2,71828. De aquí proviene la definición que se da de e en finanzas: este número es el límite de una inversión de 1 UM con una tasa de interés al 100 % anual compuesto en forma continua.

Leonard Euler estableció la fórmula para obtener el valor de e, que se suele definir como la sumatoria de 1 partido por los factoriales de todos los números enteros a desde el 0 hasta n.

En análisis de crecimiento de poblaciones de bacterias y crecimiento poblacional, la función exponencial de base e desempeña un papel

[4] Revista *Energía y Tú,* No. 24 nov-dic, 2005.

[5] Revista *Energía y Tú,* No. 31, 2005.

fundamental para calcular crecimiento poblacional; hacer estimaciones, predicciones; calcular incrementos poblacionales; entre otras aplicaciones.

Ejemplo 2.38

La ecuación $P = 100000 \cdot e^{0,05t}$ permite calcular el incremento de la cantidad de personas (P) en una ciudad determinada con 100 000 personas inicialmente, donde (t) es el número de años a partir del año 2010. Si $e \approx 2,71828$, calcula, con ayuda de una calculadora o el asistente matemático GeoGebra u otra aplicación matemática en cuánto se incrementará la cantidad de personas en esa ciudad para el año 2030.

Resolución:

Primeramente, determinar la cantidad de años que se toman como base para hacer el análisis. Para ello calcular 2030 – 2010 = 20 años.

Luego $P = 100000 \cdot e^{0,05 \cdot 20} = 100000 \cdot 2,718281 = 271828,1$

Respuesta: la cantidad de personas que se incrementa en esa ciudad es aproximadamente 271 828 personas. ◆

¿Sabías que...?

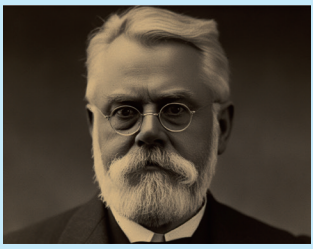


Fig. 2.55
Hermann Ebbinghaus
(1850-1909)

La curva del olvido

El psicólogo alemán Hermann Ebbinghaus (figura 2.55) estudió, durante 30 años, la pérdida de la retentiva en el tiempo y determinó que el olvido de una información o conocimiento ocurre de manera progresiva como una función exponencial similar a la que aparece en la figura 2.56. Esta teoría explica cuánto tiempo se puede conservar una información o conocimiento, si no se ejercita lo suficientemente repasándola y refrescándola, es decir, mientras más intensa y significativa sea la actividad del conocimiento que produce el recuerdo más perdurará.

La aproximación matemática a la curva que expresa la función exponencial es la siguiente:

$R(t) = e^{-\frac{t}{s}}$

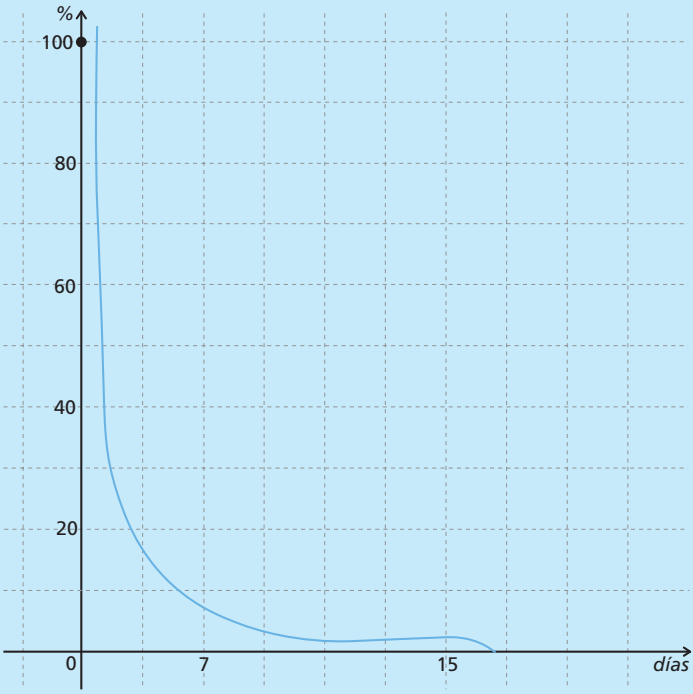


Fig. 2.56

donde:

R: es la retentiva, *S* la intensidad de retentiva del recuerdo y *t* es el tiempo en decrecimiento exponencial, y el número e ≈ 2,71….

Fuente:

http://es.slidesshare.net/enpsicologia/lamemoriahumana_1175712

Conocer las representaciones de las funciones te ayuda a estudiarlas mejor y analizar su significado, como sucede en la curva del olvido.

Conéctate

Accede al sitio en la sección curricular, busca en undécimo grado la lección Función exponencial y realiza la actividad 2.

Funciones logarítmicas

Estudiar la diversidad es un tema importante para las comunidades, ecosistemas y sistemas agroforestales, entre otros (figura 2.57). Para ello,

se realizan estudios basados en la curva especie-área[6], que permite estimar el área *(A)* que debe tener una reserva natural para conservar un número dado de especies *(S)* o conocer cuántas especies pueden perderse si se destruye su hábitat natural. Además, se analiza la diversidad máxima (*H'*) de acuerdo con el número de especies *(S)* mediante la función logarítmica $H' = log(S)$, con la que es posible obtener valiosas informaciones.

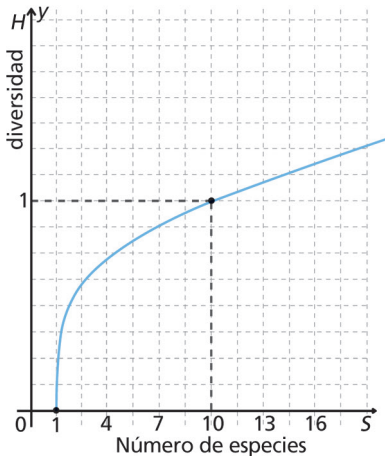


Fig. 2.57

■ *¿Cuál es el comportamiento de la diversidad máxima, cuando aumenta el número de especies?*

¿Qué valores puede tomar la variable S?

¿Qué diversidad máxima se obtiene cuando el número de especies es 12?

Definición 2.2

Se llama función logarítmica de base a $(a > 0; a \neq 1)$ a la función que a cada $x\,(x > 0)$, le hace corresponder $\log_a x$, es decir, al conjunto de pares ordenados: $\{(x; \log_a x) : x \in \mathbb{R}_+, a > 0 \cdot a \neq 1\}$

Ejemplo 2.39

a) Determinar las imágenes de la función f de ecuación $f(x) = \log x$ para los valores siguientes de x: 0,01; 0,1; 0,5; 1; 1,6; 2; 3,2; 5; 10.

b) Escribir los pares ordenados obtenidos.

c) Representar los pares ordenados en un sistema de coordenadas.

Resolución:

a)

$\log 0,01 = -2$ $\quad$ $\log 0,1 = -1$ $\quad$ $\log 0,5 = -0,3$

$\log 1 = 0$ $\quad$ $\log 1,6 = 0,2$ $\quad$ $\log 2 = 0,3$

$\log 3,2 = 0,5$ $\quad$ $\log 5 = 0,6$ $\quad$ $\log 10 = 1$

b)

$(0,01; -2)$ $\quad$ $(0,1; -1)$ $\quad$ $(0,5; -0,3)$ $\quad$ $(1; 0)$ $\quad$ $(1,6; 0,2)$ $\quad$ $(2; 0,3)$

$(3,2; 0,5)$ $\quad$ $(5; 0,6)$ $\quad$ $(10; 1)$

[6] Sitio: *www.unión.es/usc/fblanco/Tema24.ACUSTKAS.B.pdf*

c) Al representar los pares ordenados se obtiene la curva siguiente (figura 2.58):

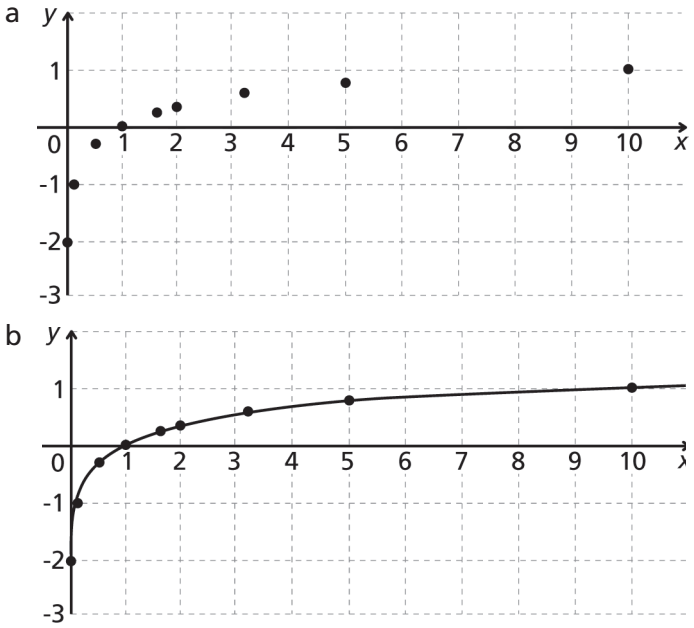


Fig. 2.58 ◆

¡Atención!

Debes tener presente que $x > 0$; esto quiere decir que la gráfica se acerca infinitamente al eje de las y pero no lo toca. Esta recta, a la cual la curva se acerca sin tocarla, recibe el nombre de asíntota vertical de la función logarítmica y, en este caso, su ecuación es $x = 0$.

A partir de los pares obtenidos y de la representación de la función $f(x) = \log x$ puedes inferir las siguientes propiedades:

Si analizas la ecuación y te apoyas en su representación gráfica (figura 2.58 b) podrás comprender el resumen de la tabla 2.20:

Tabla 2.20

Dominio de definición	$\mathbb{R}_+$ o $\{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$	La proyección de la gráfica cubre el semieje positivo de las abscisas
Conjunto imagen	$\mathbb{R}$ o $\{y \in \mathbb{R}\}$	La proyección de la gráfica cubre el eje de las ordenadas

Monotonía	Creciente en todo su dominio de definición	La gráfica asciende de izquierda a derecha o sea a medida que aumentan los valores del dominio de la función los valores de las imágenes son más grandes.
Ceros	$x_o = 1$	La gráfica corta al eje de las abscisas en el punto (1;0).
Paridad	No es par ni impar	No es simétrica respecto al eje de las ordenadas ni al origen de coordenadas.
Signo	Positiva para: $x > 1$ Negativa para: $0 < x < 1$	Para los valores mayores que 1, la gráfica está por encima del eje de las abscisas. Para valores mayores que cero y menores que 1 la gráfica está por debajo del eje da las abscisas.
Inyectividad	Es biyectiva	Si se traza una recta paralela al eje de las abscisas interseca al gráfico de la función en un solo punto.
Punto característico	(1;0)	La gráfica interseca al eje de las abscisas en el punto (1;0).
Valor máximo	No tiene	La gráfica toma cualquier valor positivo.
Valor mínimo	No tiene	La gráfica se aproxima indefinidamente al eje *y*, pero no lo toca.
Asíntotas	Horizontal Vertical	No tiene. La recta $x = 0$.

Ejemplo 2.40

Utilizar el asistente matemático GeoGebra para representar la función $y = \log_2 x$ en el sistema de coordenadas. Analizar las siguientes propiedades.

a) Decir los valores reales que pueden tomar las imágenes.
b) Identificar el valor del dominio que anula a la función.
c) Expresar los valores del dominio para los cuales la función es negativa.
d) Decir el conjunto de valores para los cuales la función es creciente.

Resolución:

a) ¿Cómo se hace?

En Vista busca el teclado.
Coloca la ecuación de la función en la barra de entrada (figura 2.59).

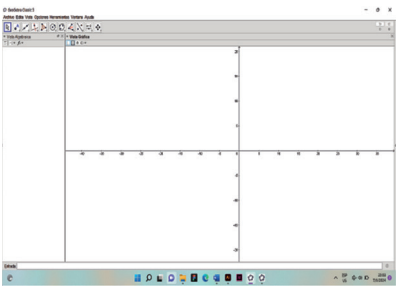


Fig. 2.59

En Vista gráfica, cuadrícula (figura 2.60).

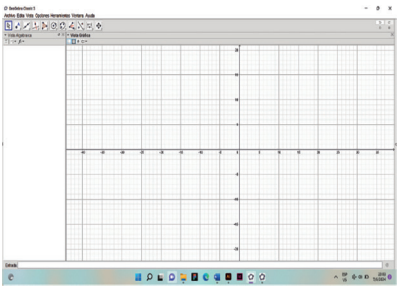


Fig. 2.60

Escribe la ecuación en entrada de datos (figura 2.61).

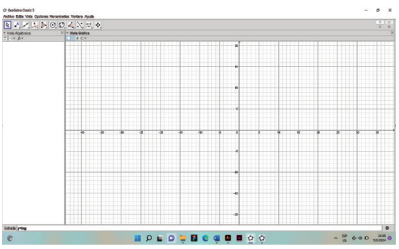


Fig. 2.61

Se obtiene el gráfico (figura 2.62):

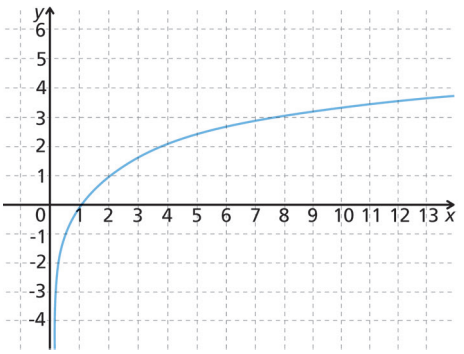


Fig. 2.62

Para identificar la función, en el menú busca Texto (figura 2.63).

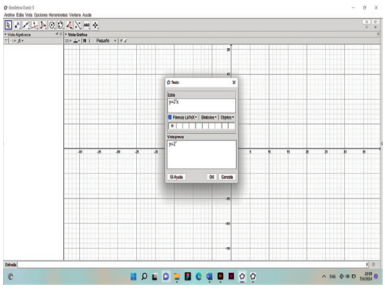


Fig. 2.63

Se obtiene el gráfico (figura 2.64):

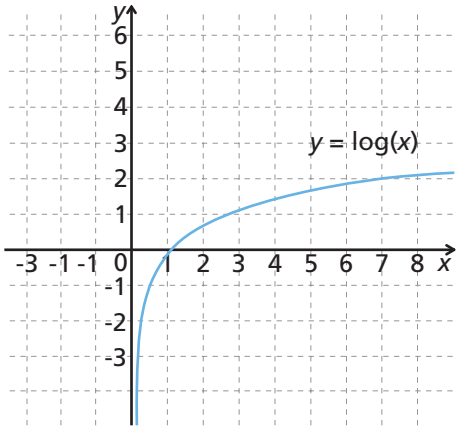


Fig. 2.64

b) Como puedes observar, el gráfico corta al eje de las abscisas en el punto de coordenadas (1;0) por tanto el valor del dominio que anula a la función es $x_o = 1$.

c) Entre los valores 0 y 1 el gráfico se encuentra por debajo del eje de las abscisas, luego, puedes concluir que los valores del dominio para los cuales la función es negativa es $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$.

d) Al analizar el gráfico, puedes apreciar que a medida que los valores del dominio aumentan, los valores de las imágenes también aumentan; por lo tanto, los valores para los cuales la función es creciente $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

Como podrás apreciar, la función logarítmica de ecuación $y = \log_2 x$ conserva las propiedades de la función de ecuación $y = \log x$. ◆

Ejemplo 2.41

Analizar los gráficos de las figuras 2.65 y 2.66 que aparecen a continuación. Describir las transformaciones de estos, respecto al gráfico de la función $y = \log x$.

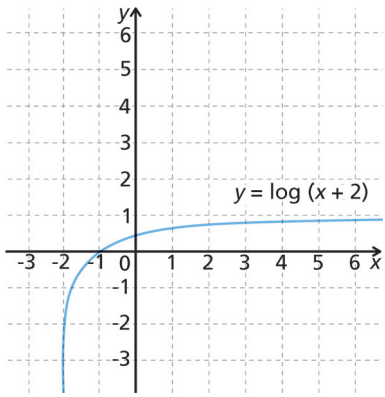


Fig. 2.65

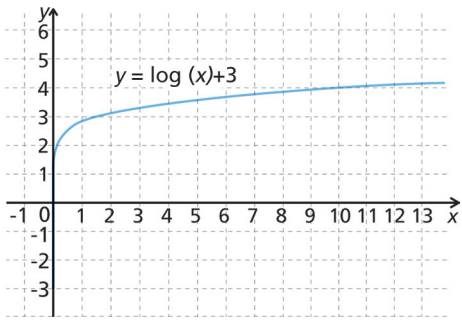


Fig. 2.66

Resolución:

En la figura 2.65
La gráfica es una traslación de dos unidades negativas en la dirección del al eje de las abscisas x, luego, su asíntota vertical es la recta de ecuación $x = -2$.

En la figura 2.66
La gráfica es una traslación de tres unidades en la dirección del eje de las ordenadas y; luego, su asíntota vertical es la recta de ecuación $x = 0$. ◆

Las gráficas de las funciones logarítmicas de ecuación $y = b\log_a x$ se pueden obtener por dilatación o contracción del gráfico de la función $y = \log_a x$.

Ejemplo 2.42

Emplear el asistente GeoGebra y representar en un mismo sistema de coordenadas las funciones cuyas ecuaciones son: $y = \log x$, $y = 3\log x$, $y = 8\log x, y = 0,5\log x$.

a) Analizar las propiedades comunes de estas cuatro funciones.
b) Decir cómo influye el coeficiente (figura 2.67), en comparación con la gráfica de la función de ecuación $y = \log x$

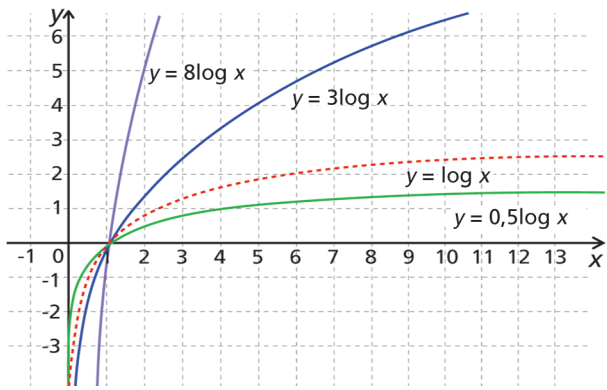


Fig. 2.67

Resolución:

a) Al observar las gráficas de las cuatro funciones se puede concluir que:

- Son monótonas creciente en todo su dominio de definición.
- La proyección del gráfico sobre el eje de las ordenadas cubre todo el eje de las ordenadas *y*.
- La proyección del gráfico sobre el eje de las abscisas cubre el semieje positivo de las abscisas *x*.
- Tienen como asíntota vertical a la recta de ecuación $x = 0$.
- Tienen como punto característico al punto (1;0).
  - Son inyectivas.
  - No tienen valor máximo, ni valor mínimo.
  - No son pares ni impares.
  - Son positivas para todo $x > 1$.
  - Son negativas para todo $0 < x < 1$.

b) En una función logarítmica con una ecuación de la forma $y = b\log_a x$, mientras mayor sea el valor del coeficiente *b*, más alejada se encuentra la gráfica respecto al eje de las abscisas. ◆

Como has observado todas las funciones analizadas hasta este momento tienen como característica que $a > 1$.

¿Cómo se comporta la función de ecuación $f(x) = \log_a x$ *en el caso se ser* $0 < a < 1$*?*

Analicemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.43

Observar la tabla 2.21 y responder las preguntas que se hacen a continuación.

Tabla 2.21

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$log_a x$	3	2	1	0	-1		

a) De acuerdo con el comportamiento de los valores descritos en la tabla, escribir la ecuación de la función.

b) Completar la tabla (tabla 2.22).

c) Esbozar el gráfico de la función.

d) Analizar sus propiedades (tabla 2.23).

Resolución:

a) Analizando los pares ordenados de la tabla, se tiene que la ecuación de la función es $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ (figura 2.68).

b)

Tabla 2.22

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$\log_{\frac{1}{2}} x$	3	2	1	0	–1	–2	–3

c)

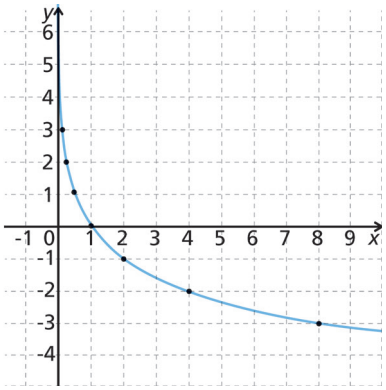


Fig. 2.68

Propiedades:

Tabla 2.23

Dominio de definición	$\mathbb{R}_+$ o $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$	La proyección de la gráfica cubre el semieje positivo de las abscisas.
Conjunto imagen	$\mathbb{R}$ o $\{y \in \mathbb{R}\}$	La proyección de la gráfica cubre el eje de las ordenadas.
Monotonía	Decreciente en todo su dominio de definición	La gráfica desciende de izquierda a derecha o sea a medida que aumentan los valores

		del dominio de la función los valores de las imágenes son más pequeños.
Ceros	$x_o = 1$	La gráfica corta al eje de las abscisas en el punto (1;0).
Paridad	No es par ni impar	No es simétrica respecto al eje de las ordenadas ni al origen de coordenadas.
Signo	Positiva para: $0 < x < 1$ Negativa para: $x > 1$	Para los valores mayores que cero y menores que 1 la gráfica está por encima del eje da las abscisas Para valores mayores que 1, la gráfica está por debajo del eje de las abscisas.
Inyectividad	Es biyectiva	Si se traza una recta paralela al eje de las abscisas interseca al gráfico de la función en un solo punto.
Punto característico	(1;0)	La gráfica interseca al eje de las abscisas en el punto (1;0)
Valor máximo	No tiene	La gráfica toma cualquier valor positivo.
Valor mínimo	No tiene	La gráfica se aproxima indefinidamente al eje *y*, pero no lo toca.
Asíntotas	Horizontal Vertical	No tiene La recta $x = 0$ ◆

En general (tabla 2.24), para las funciones logarítmicas de ecuación $f(x) = \log_a x$ con $a > 0$ y $a \neq 1$, se cumple (figura 2.69):

Tabla 2.24

Gráfica	Si $a > 1$	Si $0 < a < 1$
 **Fig. 2.69**	Dominio de definición : $\{x \in \mathbb{R} :> 0\}$ Conjunto imagen $\{y \in \mathbb{R}\}$ Ceros: $x_0 = 1$ Monotonía: creciente Valor máximo: no tiene Valor mínimo: no tiene Signo: positivo para $x > 1$ Negativo para $0 < x < 1$ Inyectividad: es inyectiva y sobreyectiva Paridad: no es par ni impar Asíntota vertical del gráfico de la función: la recta $x = 0$ Asíntota horizontal no tiene	Dominio de definición: $\{x \in \mathbb{R} :> 0\}$ Conjunto imagen $\{y \in \mathbb{R}\}$ Ceros: $x_0 = 1$ Monotonía: decreciente Valor máximo: no tiene Valor mínimo: no tiene Signo: positivo para $0 < x < 1$ Negativo para $x > 1$ Inyectividad: es inyectiva y sobreyectiva Paridad: no es par ni impar Asíntota vertical del gráfico de la función: la recta $x = 0$ Asíntota horizontal: no tiene

La gráfica de la función logarítmica $y = \log_a x$ con $0 < a < 1$ se puede obtener por una reflexión con respecto al eje de las abscisas del gráfico de la función de ecuación $y = \log_a x$ con $a > 1$.

¿Cómo proceder para representar gráficamente una función logarítmica, escribir la ecuación y analizar sus propiedades cuando el gráfico se traslade en la dirección de los ejes de coordenadas?

Sean las funciones f, g, h de ecuación $f(x) = \log_a x + e$, $g(x) = \log_a (x + d)$ y $h(x) = \log_a (x + d) + e$

En las funciones de ecuación $f(x) = \log_a x + e$ su gráfico se traslada e unidades en la dirección del eje de las ordenadas (y), en las de ecuación

$g(x) = \log_a(x + d)$ su gráfico se traslada – d unidades en la dirección del eje de las abscisas (x) y en las de ecuación $h(x) = \log_a(x + d) + e$, se trasladan en ambas direcciones.

Ejemplo 2.44

Esbozar el gráfico de la función de ecuación $y = \log_{0,3}(x - 1)$.

Resolución:

Para esbozar dicho gráfico necesitas:

1) La ecuación de la asíntota vertical:

$x = 1$ (te ofrece la información para trazar la recta que representa la asíntota vertical. Observa que es el opuesto de –1

2) El cero de la función:

(te ofrece información para determinar las coordenadas del punto en que la curva interseca al eje de las abscisas)

$0 = \log_{0,3}(x - 1)$ (sustituye en la ecuación de la función la y por cero)

$(0,3)^0 = x - 1$ (aplica la definición de logaritmo)

$1 = x - 1$ (aplica la propiedad de la potencia de exponente cero

$x = 2$ (despeja la variable x)

El cero es: $x_0 = 2$

3) Las coordenadas del punto de intersección con el eje de las abscisas (x): es (2;0)

4) Trazas el sistema de coordenadas, y en este, trazas la recta que corresponde a la asíntota vertical, luego ubicas el par (2;0) y, finalmente, trazas la curva (figura 2.70).

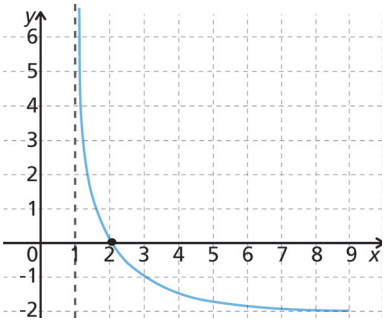


Fig. 2.70 ◆

Ejemplo 2.45

Esbozar el gráfico de la función de ecuación $y = \log_2(x + 4) - 1$.

1) Ecuación de la asíntota vertical $x = -4$.

2) Cero de la función:

$0 = \log_2(x + 4) - 1$ (sustituye la y por cero)

$1 = \log_2(x + 4)$ (resuelve la ecuación)

$2^1 = x + 4$

$x = -2$

El cero es $x_0 = -2$

3) Punto de intersección del gráfico de la función con el eje x: (-2;0)

4) Gráfica de la función (figura 2.71).

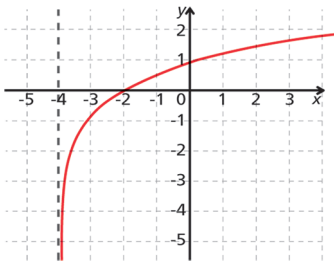


Fig. 2.71 ◆

¿Cómo determinar la ecuación de la función conocido su gráfico?

Dado el gráfico de la función logarítmica (figura 2.72) de ecuación $y = \log 5(x+d)+e$.

Escribir la ecuación que la define.

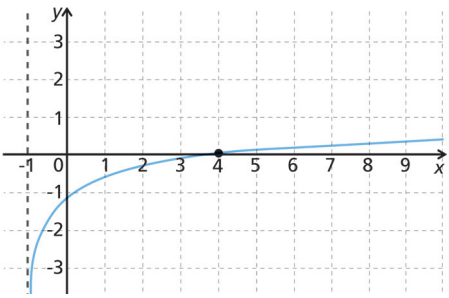


Fig. 2.72

Resolución:

Para escribir la ecuación de la función necesitas determinar el valor de los parámetros d y e, para ello debes:

1) Obtener el valor opuesto por donde pasa la asíntota vertical, en este caso $x = -1$; por tanto el valor de d es 1.

2) Determinar el valor de *e*, para ello debes utilizar al menos un punto de la gráfica. En este caso, se observa que la gráfica contiene al punto de coordenadas (4;0), luego:

- Sustituir en la ecuación el valor de *d* (ten presente que es el opuesto del valor de $x = 1$)
  $y = \log_5 (x + 1) + e$
- Sustituir en la ecuación las coordenadas del punto (4;0) en la ecuación
  $0 = \log_5 (4 + 1) + e$
- Calcular el valor de *e*:
  $0 = \log_5 5 + e$ (adicionar en el argumento)
  $0 = 1 + e$ (calcular el logaritmo)
  $e = -1$ (despejar *e*)

3) Escribir la ecuación: $y = \log_5 (x + 1) - 1$ ◆

En ocasiones encontrarás ejercicios y problemas sobre las funciones logarítmicas con dominio restringido, definidas en un subintervalo de números reales.

¿Qué implicaciones tiene esta situación al graficar o analizar las propiedades de las funciones cuyo dominio está restringido?

En estos casos, se hace la representación gráfica de solo una parte de la curva y algunas propiedades cambian respecto a las de la función en su dominio de definición.

Ejemplo 2.46

En la gráfica (figura 2.73) aparece representada una función *h* cuya ecuación tiene la forma

$h(x) = \log_2(x + d) + e$
definida en el intervalo $x \in (2; 10)$.

a) Escribir la ecuación de la función.
b) Determinar el conjunto imagen.
c) Calcular el cero de la función, el valor máximo y mínimo, y analiza el signo de sus imágenes.

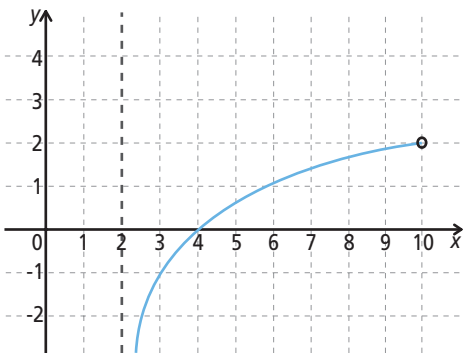


Fig. 2.73

Resolución:

a) Halla el valor de d:

Determinar la ecuación de la asíntota vertical: $x = 2$
Luego, $d = -2$ por ser el valor opuesto al de la asíntota

- Hallar el valor de e:
  Con el valor de $d = -2$, en la ecuación de la función
  $y = \log_2(x - 2) + e$ (sustituir el valor de d)
  $2 = \log_2(10 - 2) + e$ (sustituir las coordenadas del par (10;2))
  $2 = \log_2 8 + e$ (sustraer en el argumento del logaritmo)
  $2 = 3 + e$ (calcular el logaritmo)
  $e = -1$ (obtener el valor de e)
  La ecuación de la función es: $h(x) = \log_2(x - 2) - 1$

b) Conjunto imagen $y \in (-\infty; 2)$

c) $\log_2(x - 2) - 1 = 0$ (sustituye y por cero)
$\log_2(x - 2) = 1$ (resuelve la ecuación)
$2^1 = x - 2$
$x - 2 - 2 = 0$
$x = 4$

Luego el cero de la función es $x_0 = 4$
Valor máximo: no tiene Valor mínimo: no tiene
Negativa: $x \in (2; 4)$ Positiva: $x \in (4; 10)$ ◆

Teorema 2.5

Las funciones de ecuaciones $y = \log_a x$ y $y = a^x\ (a > 0; a \neq 1)$ son funciones inversas una de la otra.

Demostración:

$y = \log_a x$ significa que $x = a^y$

Ambas son funciones inversas; por esa razón, el gráfico de $y = \log_a x$ se obtiene mediante una reflexión del gráfico de $y = a^x$ con respecto a la recta $y = x$. En el gráfico siguiente (figura 2.74) se ilustra la reflexión para $a > 1$.

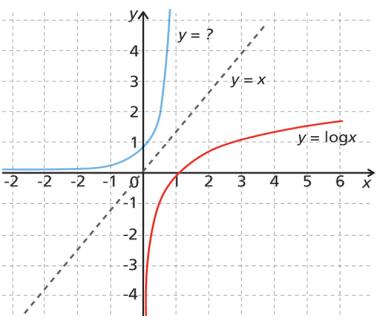


Fig. 2.74

Ahora puedes retomar la situación inicial referida a la relación de la diversidad máxima y el área, porque ya conoces las propiedades de la función logarítmica; luego, en los sistemas forestales, ecológicos y agroforestales, entre otros, a medida que aumenta el número de especies la diversidad es mayor, es decir, su comportamiento es creciente (figura 2.75).

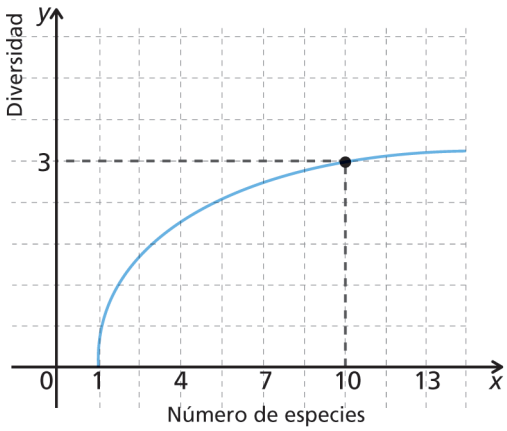


Fig. 2.75

Como se habla de números de especies, los valores que corresponden a S son positivos y, además, naturales.

Aplica tus conocimientos

Utiliza un asistente matemático y representa las funciones f y g de ecuaciones

a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ b) $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

Analiza las propiedades de cada una de ellas.

Conéctate

Accede al sitio en la sección curricular, busca en undécimo grado la lección Función logarítmica y realiza las actividades 1 y 2.

Ejercicios del epígrafe 2.4

1. Clasifica las afirmaciones siguientes en verdaderas o falsas. Argumenta las que seleccionaste como falsas y escribe un contraejemplo.

a) El dominio de definición de las funciones exponenciales es el conjunto de los números reales.

b) En toda función exponencial se cumple que $f(a) < f(b)$ cuando $a < b$.

c) Si una función exponencial es de la forma $f(x) = 2^{x+d} + e$ se cumple siempre que $f(x) = f(-x)$.

d) El conjunto imagen de una función exponencial de la forma $f(x) = a^{x+d} + e$ con $(a \in \mathbb{R}, a \neq 0; a \neq 1)$ es $\{y \in \mathbb{R}; y > e\}$.

e) Toda función exponencial es inyectiva.

2. Escribe el conjunto imagen de cada una de las funciones dadas por las ecuaciones siguientes.

a) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x+2}+1$ b) $f(x)=2^{x+1}$ c) $g(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x}$ d) $y=3^{x}-9$

2.1 Halla el cero de cada una de las funciones.

3. Sean las funciones *f*, *g* y *h* dadas por las ecuaciones siguientes:

a) $f(x)=2^{x-3}+1$ b) $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}-2$ c) $h(x)=3^{x}$

3.1 Identifica a cuáles de las funciones, corresponde cada uno de los pares ordenados siguientes:

A	B	C	D	E	F
$(0;1)$	$\left(0;\frac{9}{8}\right)$	$(-1;-3)$	$\left(1;\frac{5}{4}\right)$	$(1;3)$	$(2;9)$

3.2 Escribe la ecuación de la función inversa de cada una de las funciones sabiendo que son biyectivas.

4. Escribe en cada caso la ecuación de una función exponencial de la forma $f(x)=a^{x+d}+e$ con $(a\in\mathbb{R}, a>0; a\neq 1)$ que cumpla las condiciones siguientes:

a) Creciente
Su gráfico se desplaza tres unidades en la dirección del eje de las ordenadas.

b) Conjunto imagen sea $\{y\in\mathbb{R}; y>-4\}$
Decreciente
Su gráfico se desplaza solo dos unidades en la dirección del eje de las abscisas.

c) Creciente y positiva para todo su dominio.
Su gráfico se desplaza dos unidades en la dirección del eje de las abscisas.

d) Positiva en todo su dominio.
Decreciente.
Su gráfico se desplaza una unidad en la dirección del eje de las abscisas en sentido positivo.

e) Posee cero
Creciente
Su gráfico se desplaza una unidad en la dirección del eje de las abscisas en sentido negativo.

f) Conjunto imagen sea $\{y\in\mathbb{R}; y>0\}$
Creciente

5. De una ecuación exponencial t de la forma $f(x) = 2^{x+d} + e$ se conoce que:

- Su conjunto imagen es $\{y \in \mathbb{R} : y > -1\}$.
- Alcanza sus valores positivos para $\{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$.

a) Determina su ecuación.

b) Esboza el gráfico.

c) Determina la ecuación de la función inversa sabiendo que es biyectiva, su dominio y su conjunto imagen.

6. La forma de la ecuación de una función exponencial es $h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+d} + e$ y se conoce que:

- Su conjunto imagen es $\{y \in \mathbb{R} : y > -3\}$.
- Sus imágenes son negativas para $x > -3$.

a) Escribe la ecuación de la función.

b) Esboza el gráfico.

7. La gráfica (figura 2.76) representa una función exponencial de ecuación $f(x) = 2^{x+d} - 4$

a) Escribe la ecuación si su cero es $x = 3$.

b) ¿Por qué se puede afirmar que el par ordenado de la forma $(x; -5)$ no pertenece a la función?

c) ¿Para qué valores del dominio la función es no negativa?

d) ¿En qué intervalo la función es positiva?

e) Determina el intercepto con el eje de las ordenadas.

f) Fundamenta por qué la función es monótona creciente.

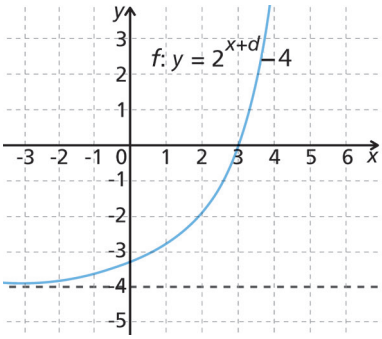


Fig. 2.76

8. La función q definida en el intervalo [-2;2) tiene por gráfica la figura 2.77.

a) Escribe la ecuación de q.

b) Determina el conjunto imagen.

c) Determina los valores máximo y mínimo de la función.

d) ¿Para qué valores del dominio la función es no negativa?

e) Fundamenta por qué la función no es par.

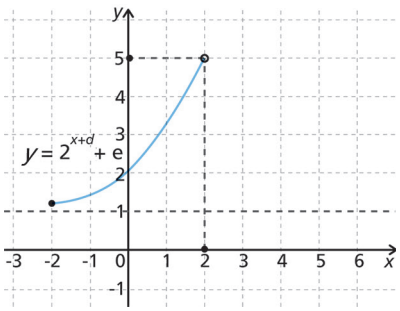


Fig. 2.77

9. La figura 2.78 muestra la gráfica de una función exponencial.

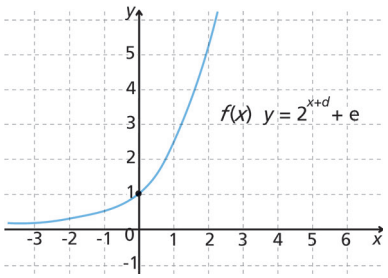


Fig. 2.78

a) Determina su ecuación si su gráfico se acerca indefinidamente a cero.

b) Escribe el conjunto imagen.

c) Calcula $f(-1)+f(0)$

d) Analiza si el par $\left(-2;\frac{1}{4}\right)$ pertenece a la función.

e) Di la monotonía de la función y fundamenta el por qué.

f) ¿Será biyectiva esta función? ¿Por qué?

10. Analiza las gráficas de la figura 2.79, determina las coordenadas de los puntos A; B y C situados en ellas.

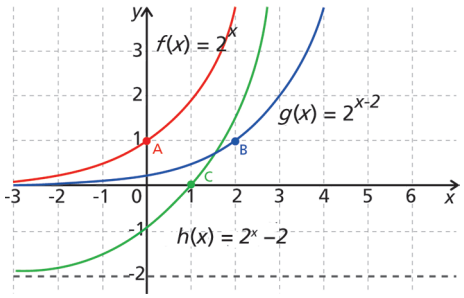


Fig. 2.79

11. En la figura 2.79 aparecen tres funciones exponenciales. Analiza las gráficas e identifica las afirmaciones en verdaderas y falsas. Fundamenta las falsas.

a) Todas las imágenes de la función de ecuación $y = 2^x$ son no negativas.

b) La ecuación de las asíntotas del gráfico de las funciones cuyas ecuaciones son $y = 2^x$ y $y = 2^{x-2}$ coinciden.

c) La función de ecuación $y = 2^x - 2$ es negativa para $x < -1$.

d) En una función de la forma $y = a^x + e$, el punto A de la función de ecuación $y = 2$ se traslada e unidades en la dirección del eje de las ordenadas.

12. En la figura 2.80 se ha representado una función exponencial. Identifica las proposiciones verdaderas o falsas. Fundamenta tu selección.

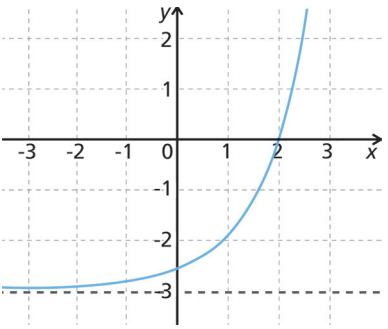


Fig. 2.80

a) La ecuación que define a la función f es $f(x) = 3^{x-1} - 3$.

b) El conjunto imagen de la función es $\{y \in \mathbb{R} : y \geq -3\}$.

c) La función f es inyectiva.
d) Las coordenadas del punto A$(-2;-2{,}5)$ no pertenecen a la función.
e) La función es par.

13. Escribe en cada inciso la ecuación de la función logarítmica que se corresponda con las características que se describen a continuación:

a) Que tenga como base 3 y como dominio de definición el conjunto de valores reales mayores que 0.
b) De asíntota $x = 5$ y su gráfico se trasladada siete unidades en la dirección del eje de las ordenadas en sentido positivo.
c) Con base, se traslada cuatro unidades en sentido positivo en el eje de las abscisas, y una unidad en la dirección del eje de las ordenadas en sentido negativo.
d) De base 4, el gráfico se traslada dos unidades en sentido negativo en el eje de las abscisas y dos unidades en sentido negativo en el eje de las ordenadas.

14. Determina el dominio de definición de cada una de las funciones dadas por las ecuaciones siguientes:

a) $f(x) = \log_3 x - 4$
b) $g(x) = \log_2(x+1)$
c) $h(x) = \log_5(x^2+3)$
d) $s(x) = \log_3(2-x)$
e) $s(x) = \log_3(5-x) - 2$
f) $m(x) = \log_3(x^2+x+1)$
g) $n(x) = \log 3x - 4$
h) $t(x) = \log_3(x^2-9)$

15. Identifica cuáles de las afirmaciones siguientes son verdaderas y cuáles falsas para las funciones logarítmicas definidas para todo número real positivo. Fundamenta las falsas.

a) El conjunto imagen siempre son los números reales.
b) No son pares ni impares.
c) La segunda componente de sus pares ordenados, siempre son positivas.
d) El conjunto dominio es cualquier valor real.
e) No tienen ceros.

16. Escribe una función logarítmica que tenga como conjunto dominio el que aparece a continuación

a) $\{x \in \mathbb{R} : x > 3\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$
c) $\mathbb{R}$

d) $\{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$ e) $\{x \in \mathbb{R} : x < 4\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} : x > -2\}$

17. Una función f tiene por ecuación $f(x) = \log_3 x$. Sin realizar cálculos determina cuál es el signo de:

a) $f\left(\frac{3}{4}\right)$ b) $f(3)$ c) $f\left(\frac{1}{110}\right)$ d) $f(215)$

18. Escribe al menos dos pares ordenados que pertenezcan a cada una de las funciones cuyas ecuaciones son las siguientes:

a) $y = \log_5(x-8)$ b) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-3)$

c) $y = \log_5 x + 1$ d) $y = \log_2(x+3)$

e) $y = \log x - 4$ f) $y = \log(x-5) - 1$

19. ¿Cuál es la ecuación de la asíntota del gráfico de las funciones cuyas ecuaciones aparecen a continuación?

a) $f(x) = \log_3 x + 2$ b) $g(x) = \log_5(x+3)$

c) $h(x) = \log_3(x+2) - 1$ d) $t(x) = \log_2(7-x) + 2$

20. El gráfico representado en la figura 2.81 corresponde a una función de ecuación de la forma: $h(x) = \log_2(x+d) + e$

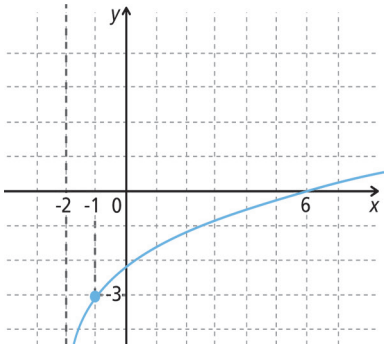


Fig. 2.81

Analiza el gráfico y determina:

a) La ecuación que define a la función.
b) El conjunto dominio.
c) Los valores del dominio para los cuales la función es positiva.

21. En el sistema de coordenadas de la figura 2.82 se ha representado una función g definida por la ecuación de la forma $g(x) = \log_a x$ en el intervalo $0 < x \leq 4$.

Considera los datos y determina:

a) Las coordenadas del punto B.
b) El valor de *a*.

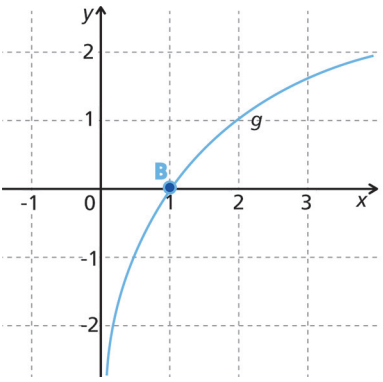


Fig. 2.82

c) El conjunto imagen y los valores máximo y mínimo.
d) Los intervalos en que las imágenes de la función son positivas y negativas.
e) Fundamenta el por qué la función es inyectiva.
f) Sin calcular, di cuál es el signo de las ordenadas, cuando los valores del dominio son: 0,5; 0,75; 2; $\frac{17}{10}$. Fundamenta tu respuesta.

22. Una función logarítmica con ecuación de la forma $f(x)=\log_2(x+d)+e$ y un punto de esta, se ha representado en el sistema de coordenadas de la figura 2.83. Analiza los datos y determina:

a) La ecuación de la función.
b) Los valores del dominio para los cuales se cumple que:

I) $f(x)<0$.

II) $f(1)<f(x)\leq f(3)$.

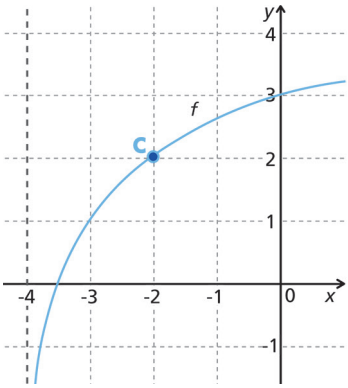


Fig. 2.83

23. Escribe la ecuación de una función logarítmica en cualquier base, que tenga como dominio de definición a:

a) $\{x\in\mathbb{R}: x>-2\}$
b) $(-\infty:11)$
c) $(0;\infty)$
d) $\{x\in\mathbb{R}: x<3\}$
e) $\mathbb{R}$
f) $\{x\in\mathbb{R}: x<2 \text{ o } x>1\}$

24. Utiliza un asistente matemático y representa en un mismo sistema de coordenadas las funciones de ecuaciones:

a) $f(x)=log(x-4)$ b) $g(x)=log_2(x+4)-1$ c) $h(x)=log_3(x+4)-1$

24.1 Confecciona en tu cuaderno de trabajo una tabla comparativa entre las semejanzas y diferencias que existen entre las propiedades de estas tres funciones.

25. Accede al Portal CubaEduca www.cubaeduca.cu y de la lección Función logarítmica. Gráfica y propiedades realiza los ejercicios sobre las propiedades de las funciones logarítmicas propuestas.

26. Escribe las ecuaciones respectivas de las funciones logarítmicas que cumplan con las condiciones siguientes:

a) que la base sea $\frac{1}{2}$ y contenga al punto $(3;0)$.

b) sea creciente y que el gráfico se desplace una unidad en la dirección del eje de las ordenadas.

26.1. Representa las funciones propuestas por ti en un sistema de coordenadas (puedes utilizar un asistente matemático), y relaciona las propiedades comunes de ambas funciones de acuerdo con su representación gráfica.

27. Accede al Portal CubaEduca www.cubaeduca.cu y en la lección Función logarítmica, gráfica y propiedades, busca la sección Evaluación, y resuelve los ejercicios 1; 2; 3; 4 y 8.

28. En el sistema de coordenadas de la figura 2.84 aparece representada una función de la forma: $f(x)=log_2(x+d)+e$

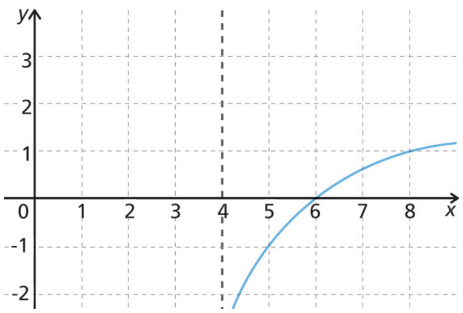


Fig. 2.84

a) Escribe la ecuación correspondiente a la función representada si $f(8) = 5$.

b) Expresa el intervalo para el cual la función es no negativa.

c) Determina el valor de x en $f(x)=8$.

d) Identifica los valores del dominio para los cuales la función f es creciente y negativa.

29. La gráfica que aparece en el sistema de coordenadas de la figura 2.85 corresponde a una función logarítmica de la forma:
$f(x)=\log_3(x+d)+e$

Identifica cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas. Escribe las falsas correctamente:

a) El conjunto dominio de la función son los valores reales positivos.

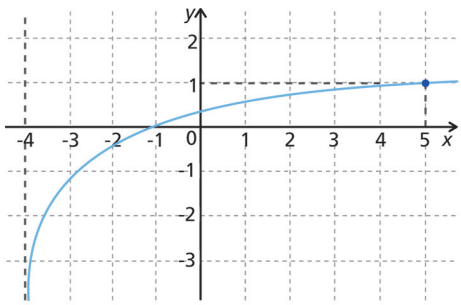


Fig. 2.85

b) La función es positiva para los valores reales de x mayores que 2.
c) El conjunto imagen de la función está formado por cualquier valor real.
d) En el intervalo $(2;5)$ se cumple que $f(x) < 2$.
e) La función f no es ni par ni impar.
f) La ecuación de la función es $f(x) = log_3(x-2)+2$

30. En la figura 2.86 se ha representado el gráfico de la función t definida en un subconjunto de $\mathbb{R}$ cuya ecuación tiene la forma $t(x) = y = \log_3(x + b) + c$. Analiza y determina:

a) La ecuación de la asíntota de su gráfico.
b) El cero de la función.
c) El intervalo en que la función es creciente y positiva.
d) Las coordenadas del punto de intersección del gráfico de la función con el eje de las ordenadas.

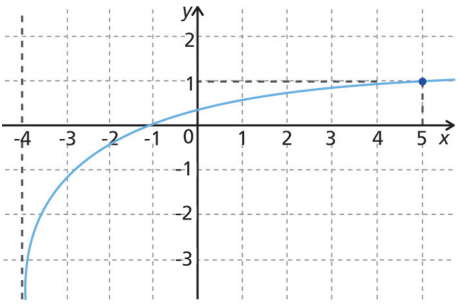


Fig. 2.86

e) Si la función sobreyectiva. Fundamenta tu respuesta.
f) Mediante el cálculo, las coordenadas de los puntos $A(23;y)$ y $B(x;3)$.
g) Escribe las coordenadas de un punto de la función cuya imagen sea negativa.

31. Accede al portal educativo cubano www.cubaeduca.cu y, en la sección Ejercicios de evaluación, resuelve los ejercicios 6; 9;10 y 12.

32. La ecuación de una función logarítmica es de la forma:
$f(x) = \log_5(x+1) - 5$
Argumenta si:

a) La ordenada del par de la forma $(322;y)$ es positiva o negativa.
b) El par de la forma $\left(-\frac{1}{2};y\right)$ es un punto de la gráfica de la función.
c) Algún valor del dominio de definición y su opuesto tienen la misma imagen.

33. Accede al portal educativo cubano www.cubaeduca.cu y, en la sección Ejercicios de evaluación, resuelve el ejercicio 13.

34. Sin hacer el gráfico de la función f de ecuación $f(x) = -\log_{\frac{1}{2}}(x+4) - 1$ identifica cuál es el signo de:

a) $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ b) $f(1)$ c) $f(2,4)$ d) $f(-3,7)$

35. Formula dos problemas que se modelen por una función exponencial y otra logarítmica que sean monótona creciente.

Ejercicios del capítulo

1. Prueba que

a) $4\log_2 0{,}5 + 9^{\log_3 \sqrt{5}} - 2\log_3 \sqrt{3} = 0$

b) $6^{\log_{36} 9} + \log 0{,}001 - 3\log_{\frac{1}{5}} 125 = 9$

c) $\log_7 \log_3 \log_2 8 + 2^{\log_2 3+1} + \log_{49} 7 = 6{,}5$

d) $5^{\log_5 2-1} \times \log_2 32 - \log_3 4 \times \log_2 3 = 0$

e) $\log_6 2 + \log_6 18 + \dfrac{\log_2 125}{\log_7 5} - \log_p p = 4$

f) $\log_4 160 - \log_4 10 + 6\log_{27} 3 = 4$

2. Halla el valor de la variable en las ecuaciones siguientes:

a) $4 \cdot 3^{x+1} = 36$

b) $7^x = 343$

c) $2^{x^2} \cdot 16 = 32$

d) $3^{x+2} - 3^x = 72$

e) $\log^2 x + 6 = 5\log x$

f) $\log\sqrt{x-5} + \log\sqrt{2x-3} + 1 = \log 30$

g) $\log_3\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = -2$

h) $36^{\log_6 2} - 6^{1-\log_6 3} = \log_3 (x-2)$

i) $2\log_2 \sqrt{\sqrt{x+1}-1} = 2$

j) $25^{\log_3 \sqrt{x+1}}\, 5^{\log_3 (x+9)} = 25$

3. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $5^x + 5^{1-x} = 6$

b) $9^x - 24 \cdot 3^x = 81$

c) $\dfrac{3^{2x-2}+7}{3^{2x-2}+1} = 4$

*d) $3^x = 2^x$

e) $9^{x-1} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x}$

*f) $x^{\log x - 1} = 100$

*g) $3^x \cdot 5^{2x} = 4$

*h) $2^{\operatorname{sen}(180^0 - 30^0)} = \dfrac{4^{\cot(225^0)}}{4^x}$

*i) $\log_2 \left(3^{x-1}+11\right) = \log_2 \left(3^{x-1}+1\right) + 1$

j) $\dfrac{\log_7 3}{\log_7 \sqrt{3}} - \log_6 \left(x^2+5x\right) = 0$

*k) $\log^2 x + \log x + 1 = \dfrac{7}{\log \dfrac{x}{10}}$

4. Di cuáles son los valores reales que satisfacen la ecuación o la inecuación siguiente:

a) $5^{x+1} + 5^x = 150$

b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2-4} \leq 27^{x+2}$

5. Determina el conjunto de pares ordenados que satisface cada uno de los sistemas de ecuaciones siguientes.

a) $\begin{cases} 3^{2(x+y)} = 3 \\ 3^{2x-5y} = 27 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2^x + 2^y = -2^6 \\ x + y = 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4^{x-y} = 16 \\ 2^{x+y} = (1:2)^{1-x} \end{cases}$

6.* Halla el conjunto solución de las siguientes ecuaciones e inecuaciones que se dan a continuación:

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x+2,5} < \frac{1}{125}$

b) $2^{\operatorname{sen}(180^\circ - 30^\circ)} = \frac{4^{\cot(180^\circ + 45^\circ)}}{4^x}$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-2\operatorname{sen}x} \cdot 9^{\operatorname{sen}x} = 3^{3\operatorname{sen}x+2}$ tal que $90^0 < x < 270^0$

d) $\log_2 5^{x+6} + \log_{0,5} 5^{x^2-2} = \log_2 25$

e) $5^{1+2x} + 6^{1+x} = 30 + 150^x$

f) $\log^2\left(x^{\sqrt{3}}\right) - \left(\log 0,01 \cdot x^7\right) = 0$

g) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} - 8\left(\frac{1}{3}\right)^x > 9$

7. Para qué valores están definidas las expresiones siguientes:

a) $\log_4(5x-2)$

b) $\log_4\left(3x^2 - 7x - 6\right)$

c) $\log_9(x-5)^2$

d) $\log_6\left(x^2+3\right)$

e) $\log_3 \frac{2x+1}{x}$

f) $\log_2 \frac{x^2-x}{x^2+1}$

g) $\log_5 \sqrt{\frac{2x^2+x-3}{4x^2-x^4}}$

h) $\log \frac{x^3+2x^2-4x-8}{x^2+5x+6}$

8.* Prueba que:

a) $\log_6 16 = \frac{4}{1+\log_2 3}$

b) $\log_{12} 2 = \frac{1}{2+\log_2 3}$

c) $\log_6 16 = \frac{4(3-a)}{3+a}$ si $\log_2 3 = \frac{2a}{3-a}$

9. Determina los valores de la variable que satisfacen las ecuaciones siguientes:

a) $\log x + \log 80 = 2$

b) $\log\sqrt{3x+1} + \log 5x = 2$

c) $\frac{\log\left(10-x^2\right)}{\log(5-2x)} = 2$

d) $\frac{4^{x+1}}{2^{x+2}} = 128$

*e) $2^{3x} = (0,5)^{3x+2}$

f) $3^{2x} - 4 \cdot 3^{x+1} = -27$

g) $25^x + 5^x = 20$

h) $3^{x+1} + 3^{x+1} = 54$

i) $\log(2x) + \frac{1}{\log_x 10} = \log(4x-2)$

j) $\log \frac{\left(35-x^3\right)^3}{(5-x)} = 3$

k) $9\cdot 3^{\log_x^2} - \left(\frac{1}{9}\right)^{\log_x\left(\frac{1}{8}\right)} = 0$

l) $\log_2 x + \log_x 2 = 2$

m) $\log_2\left(3^{2x-2}+7\right) = 2 + \log_2\left(3^{x-1}+1\right)$

n) $\log_4\left(2^x - 6\right) + 3 = 5 - \log_4 2^x$

ñ) $36^{\log_6 5} + 10^{1-\log 2} = 3^{\log_9 36}$

10. Halla el conjunto solución de los sistemas de ecuaciones siguientes:

a) $\begin{cases} 3^{x+y} = 81 \\ 3^{y-x} = 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3^{x+y} = 36 \\ 3^{y-x} = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \log_2(x-y) = 2 \\ \log_2 x - \log_2 y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log_y(x+6) = \frac{1}{2} \\ \log_x(y-72) = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2\log x - 3\log y = 5 \\ 3\log x + \log y = 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2^x - 2^y = 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + y = 12 \\ \log_3 x + \log_3 y = 3 \end{cases}$

h) $\begin{cases} \log x + \log y = 4 \\ y - 4x = 0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x + y = 117 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 5^{x+y} = 5^{11} \\ \log(x+y) + \log(x-y) = \log 33 \end{cases}$

11. La ley de Lambert y Beew plantea que la energía luminosa *I* que penetra hasta la profundidad de *x* metros del mar está dada por la ecuación exponencial: $I = I_0 \cdot C^x$

En tu libreta, realiza el procedimiento que se debe seguir para hallar el valor de la profundidad *x*.

12.* Encuentra el valor de $8{,}5^{2{,}3}$ haciendo uso del logaritmo (sugerencia: expresa que $N = 8{,}5^{2{,}3}$).

13. Determina mediante cálculo los valores que satisfacen a las inecuaciones siguientes:

a) $6^{x^2+5x} < 36^{\log_2 8}$

b) $\log_{\frac{1}{2}}\left(3 + 2x - x^2\right) \geq \log_5 \frac{1}{125}$

c) $25^x + 4\cdot 5^x \geq \log_2 32$

d) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{2,5}\left(x^2+5x+8\right)} \leq 2{,}5$

14. Cuando a una cantidad de agua se le agrega 20 g de sal, la cantidad $q(t)$ de sal que no se disuelve después de *t* segundos, está dada por la ecuación: $q(t) = 20(0{,}8)^t$

a) ¿Cuántos gramos de sal hay sin disolver pasados: 1,5 s y 8 s?

b) Utiliza un asistente matemático, representa la función y verifica gráficamente los resultados obtenidos.

15. Un medicamento se elimina del organismo a través de la orina. Si la dosis inicial fue de 10 mg y la cantidad que se mantiene en el cuerpo t horas después está dada por la ecuación $A(t)=10\cdot(0,8)^t$:

a) ¿Qué cantidad de fármaco queda en el organismo 8h después de haberlo ingerido?

b) ¿Qué porciento representa el medicamento que elimina del organismo cada hora?

16. La bacteria *Escherichia coli* generalmete se aloja en el instestino delgado. La cantidad de bacterias presente en un tiempo t puede determinarse por la ecuación $N(t)=N_0(2)^{0,05t}$, si en el instante cero existían 2 000 de ellas. Determina el número de bacterias que existía a las 72 h.

17. Para medir la magnitud de un sismo o terremoto se utiliza la escala de Richter, dada por la fórmula: $M=\log(A)+C$ (donde A es la amplitud de ondas superficiales en milímetros y $C=3,3+1,66\log(D)-log(T)$, es una constante que depende del periodo T. Si el 17de enero del 2016 ocurrió un sismo en Santiago de Cuba de magnitud 4,8 y un año más tarde en igual fecha ocurrió otro de magnitud 5,9 ¿cuánto mayor fue el segundo sismo respecto al anterior ocurrido en Santiago de Cuba?

18. Un sonido de intensidad I tiene por definición un nivel de tensión $D=10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ decibeles. ¿Cuánto mayor es el sonido emitido por un martillo neumático, que el de una conversación normal, si las definiciones son:

$D=10\log\left(\frac{3\cdot10^{-3}}{10^{-12}}\right)$ y $D=10\log\left(\frac{3\cdot10^{-6}}{10^{-12}}\right)$ respectivamente?

19. Para calcular la antigüedad de una lengua que se habla en un país, se emplea un método llamado glotocronología, fundamentado en los cambios lingüísticos $N(t)$ que ocurren en las palabras básicas N de esta, pasados t milenios. ¿Cuántas palabras básicas de una lengua permanecen invariantes pasados 500 años (0,5 milenios)?, si la relación entre estos elementos está dada por la ecuación: $N(t)=N(0,805)^t$

20. Cuando una persona se encuentra sometida de manera prolongada a altos niveles de ruido, entre otras afectaciones, es conducida a un deterioro de la audición. Para determinar los valores intermedios de ruido se utiliza la expresión:

$t_n = \dfrac{8}{2^{\left(\frac{L-90}{5}\right)}}$, donde L nivel de presión en decibeles (dB), t_n : tiempo admisible de presión sonora establecida.

Escribe la expresión que permite calcular el nivel de presión sonora (L) en decibeles.

21. Si $f(x) = \log_3(x+5)$; $g(x) = 4\log_3(x+3)$ y $h(x) = \log_2(x-1)+2$ son las ecuaciones de las funciones *f, g* y *h.*

a) ¿Para qué valores reales de la variable está definida las funciones *f, g, h*?

b) Calcula: $g(22) + f(4) + \log_2 65$.

c) Haz el esbozo del gráfico de la función *h*.

d) Representa gráficamente las tres funciones utilizando el asistente GeoGebra.

22. Representa gráficamente y di las propiedades de las funciones *d* y *s* dadas por sus ecuaciones en el dominio indicado.

a) $d(x) = 3^{x+1} - 9$ si Dom $d = \{x \in \mathbb{R}: -2 \leq x \leq 2\}$

b) $s(x) = \log_2(x+1)$ si Dom $s = \{x \in \mathbb{R}: -1 < x < 7\}$

23. Sean las funciones *f* y *g* de ecuaciones obtenidas como resultado de opraciones con funciones.

$f(t) = 3^{t+2} \cdot \dfrac{1}{9^t}$ y $g(x) = \log_6 x + \log_6(13-x)$

a) Halla para qué valor de *t* se cumple $f(t) = \sqrt{27}$.

b) Determina, mediante el cálculo, si existen valores del dominio para el cual se cumple $g(x) \geq 2$.

24. Si la función *f* está dada por la ecuación:

$f(x) = \left[\log_4(x+2) + \log_4(x-2) - \log_4 5\right]$ obtenidas como resultado de opraciones con funciones.

a) ¿Para qué valores de *x* se cumple $f(x)$ es negativa?

25. Los gráficos de las figuras 2.87 y 2.88 corresponden respectivamente a funciones de la forma $f(x) = \log_a(x+d) + e$ y $h(x) = a^{x+d} + e$, con $a > 0$ y a 1.

A

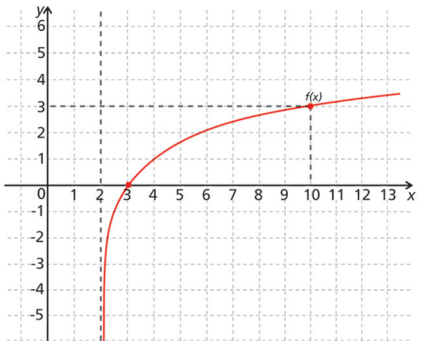


Fig. 2.87

B

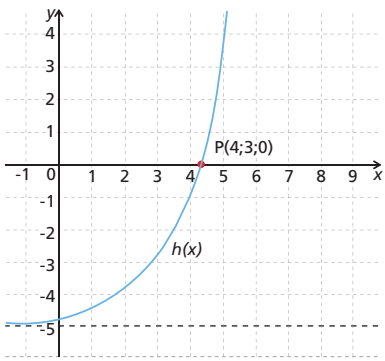


Fig. 2.88

Escribe el valor o el intervalo para el cual se cumple:

a) $f(x) = 24$ b) $f(x) \leq 3$

c) $h(x) < 0$ d) $g(x) > 0$

26. En una función logarítmica f de ecuación $f(x) = \log_a(x + d) + e$ se cumple:

- la ecuación de la asíntota es $x + 4 = 0$.
- es creciente y negativa para $-4 < x < 12$.
- contiene al par ordenado $(-3; -2)$.

a) Escribe la ecuación de la función.

b) Determina el dominio de definición y el conjunto imagen.

c) Determina el cero de la función.

d) Determina el punto de intersección del gráfico con el eje de las ordenadas.

e) Di la monotonía de la función.

f) Esboza el gráfico.

27. Escribe, en cada inciso, la ecuación de una función logarítmica (en cualquier base que esté definida el logaritmo) que cumpla las condiciones siguientes:

a) – Decreciente
– Conjunto dominio es $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

b) – Creciente
– Conjunto dominio $\{x \in \mathbb{R} : x > -2\}$

c) – Asíntota del gráfico de la función $x + 1 = 0$
– Creciente

d) – Creciente

– Desplazado una unidad en la dirección del eje de las ordenadas con respecto al gráfico a la función $y = \log x$

e) – De base $\frac{1}{2}$,

– Su gráfico contiene al punto $(3;0)$

28. La gráfica (figura 2.89) muestra una función t, definida en $\mathbb{R}$ por la ecuación de la forma $h(x) = 2^{x+d} + e$.

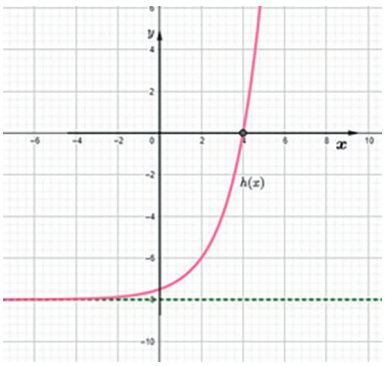


Fig. 2.89

28.1 Los valores de d y e son:

a) $d = 1$ y $e = 8$
b) $d = -1$ y $e = -8$
c) $d = -1$ y $e = 8$
d) $d = 1$ y $e = -8$

28.2 De la función h se puede afirmar que:

a) tiene conjunto imagen $\{y \in \mathbb{R} : y \neq -8\}$.
b) no es par ni impar.
c) es positiva para $x \geq 2$.
d) es decreciente.

28.3 De los siguientes pares ordenados, el que pertenece a la función t es:

a) $(-1;-8)$ b) $(0;-7)$ c) $(2;-5)$ d) $(5;8)$

28.4 Al calcular $h(2) + h^{-1}(0)$ se obtiene:

a) -3 b) -4 c) -2 d) -1

29. La gráfica (figura 2.90) muestra una función q, definida en $\{x \in \mathbb{R}: x > -3\}$ por la ecuación de la forma $q(x) = \log_3(x + d) + e$

29.1 La ecuación de q es:

a) $q(x) = \log_3(x - 3) - 2$
b) $q(x) = \log_3(x + 3) - 2$
c) $q(x) = \log_3(x + 3) + 6$
d) $q(x) = \log_3(x - 3) + 6$

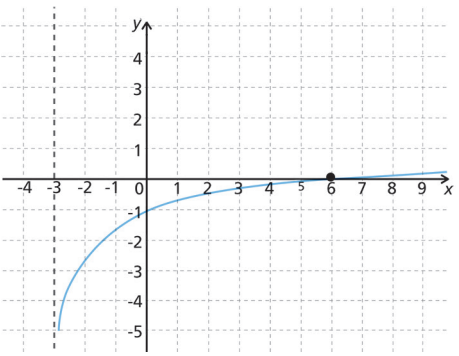


Fig. 2.90

29.2 El dominio de definición de q es:

a) $\{x \in \mathbb{R} : x > -3\}$
b) $\{x \in \mathbb{R}: x \geq -3\}$

c) $\{x \in \mathbb{R}\}$

d) $\{x \in \mathbb{R}: x \neq -3\}$

29.3 De la función q se puede afirmar que:

a) corta al eje de las ordenadas en 6

b) es impar

c) es negativa para $-3 \leq x \leq 6$

d) su inversa es $q^{-1}(x) = 3^{x+2} - 3$.

30. Dado el gráfico (figura 2.91) de la función f de ecuación

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -4 \leq x \leq 0 \\ 2^x & 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

a) Di el dominio de definición y su conjunto imagen.

b) Analiza la monotonía.

c) Determina los valores máximos y mínimos de la función.

d) ¿Será inyectiva la función? Fundamenta tu respuesta.

e) Analiza si el par (1;2) pertenece a la función.

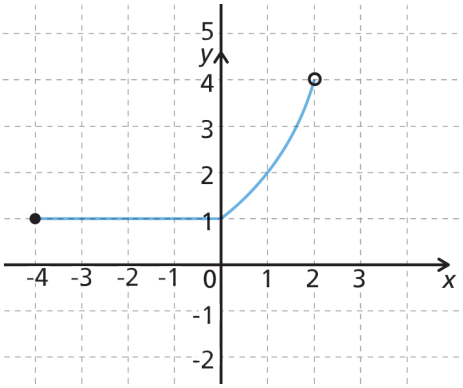


Fig. 2.91

31. Dado el gráfico (figura 2.92) de la función g de ecuación

$$g(x) = \begin{cases} \log_2 x & 0 < x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x & x > 2 \end{cases}$$

a) Di el dominio de definición, el conjunto imagen y la ecuación de la asíntota.

b) Analiza la monotonía.

c) ¿Cuáles son las coordenadas del punto de intersección del gráfico con el eje x?

d) Analiza la paridad de la función.

e) Determina los valores máximos y mínimos de la función.

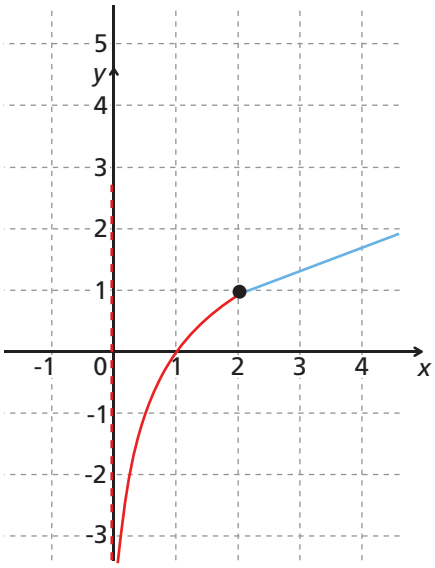


Fig. 2.92

f) ¿Será inyectiva la función? Fundamenta tu respuesta.
e) Analiza si el par (0;0,1) pertenece a la función.

32. La función logarítmica $V(x) = 10\log\frac{x}{10^{-9}}$ permite medir el volumen de sonoridad en decibeles, donde x es la intensidad del sonido medida en vatios por metro cuadrado.

a) Si en un aula se registra una intensidad de sonido de 10 W/m^2. ¿Cuál es el volumen de ruido de esa aula?
b) Investiga cuál es el volumen de ruido aconsejable para el oído humano y valora los resultados obtenidos en el inciso anterior con la información recogida.

33. Accede a la sección curricular del Portal CubaEduca undécimo grado y realiza todos los ejercicios de autoevaluación.

34. Investiga situaciones de la vida que se modelen mediante funciones exponenciales y logarítmicas, y fundamenta la importancia de estas para la sociedad.

Reflexiona sobre lo aprendido

¿Qué características distinguen a las ecuaciones exponenciales de las ya estudiadas?
¿Cómo se resuelve una ecuación exponencial cuando hay que factorizar?
¿Qué procedimiento debes seguir para resolver una ecuación exponencial?
¿Cuándo una función exponencial es creciente (decreciente)?
¿Cómo debes proceder para representar una función exponencial?
¿Qué propiedades cumplen las propiedades exponenciales?
¿Cómo debes proceder para representar una función logarítmica?
¿Qué propiedades cumplen las propiedades logarítmicas?
¿De qué depende la monotomía de las funciones exponenciales y logarítmicas?
¿Qué utilidad práctica tienen las funciones exponenciales y las logarítmicas?

Autoevaluación

1. Lee con cuidado y clasifica en verdadero o falso las proposiciones siguientes. Transforma las falsas en verdaderas:

a) El valor de x para el cual se cumple la igualdad $2^{\frac{x}{2}} = 4$ es 4.
b) $\left(\frac{1}{10}\right)^2 > \left(\frac{1}{10}\right)^{-1}$.
c) $a^x < 1$ para todo $0 < a < 1$.
d) $\log_{(x-1)} 5$ esta definido para todo $x \neq 1$.
e) $\log_3 \frac{1}{27}$ es un número natural.

f) Si $\log_{0,4} a > \log_{0,4} b$ entonces $a < b$.

g) $2^{2\log_2 3} = 3$.

h) Los valores de x que satisfacen la igualdad $log_{\sqrt{x}} \sqrt{x+2} = 2$ son $x_1 = -1$ y $x_2 = 2$.

i) Al despejar m en la fórmula $a^m = c + d$ se obtiene $m = \log_a (c + d)$.

j) Los valores x para los cuales se cumple la relación $\log(x-1) < 1$ son los valores reales $x < 1$

k) La función f de ecuación $f(x) = (0,3)^x$ no es inyectiva.

l) La asíntota del gráfico de la función f de ecuación $f(x) = 3^x + 2$ corta al eje de las ordenadas en $(0;3)$.

m) La función real g definida por la ecuación $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$ es monótona decreciente y positiva para todo valor real x, tal que $x > 0$.

n) La función f definida en $\mathbb{R}$ de ecuación $f(x) = \left(3^{-1}\right)^{x+2}$ es positiva en todo su dominio.

ñ) El punto de la forma $(x;-2)$ pertenece al gráfico de la función de ecuación $y = 2^{x+1} - 1$.

o) La función cuya ecuación es $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ es monótona decreciente en todo su dominio.

p) Los ceros de la función p cuya ecuación es $p(x) = \log_2 x^2 - 1$ son $x_0 = 1$ y $x_1 = -1$.

q) La función g definida en $\{x \in \mathbb{R} : x > -3\}$ por la ecuación $g(x) = \log_{\frac{2}{3}} (x+3)$ es positiva para todo $x < 0$.

r) El dominio de la función g definida por la ecuación $g(x) = \log_2\left(-\frac{1}{2}x + 1\right)$ es $\{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$.

2. Selecciona la respuesta correcta.

2.1 La función real de ecuación $y = 3^{x+2}$:

a) es par. b) es inyectiva. c) tiene imagen $\{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$

d) es monótona decreciente.

2.2 El gráfico (figura 2.93) que se muestra corresponde a la ecuación:

a) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x-2) + 1$

b) $y = \log_3 (x-2) + 1$

c) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x+1) - 2$

d) $y = \log_3 (x+1) - 2$

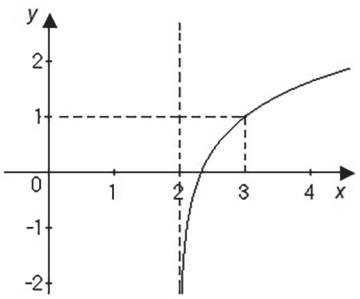


Fig. 2.93

3. Di en cuáles de las ecuaciones siguientes, la solución pertenece al domino de los números naturales.

a) $2^x = 0{,}125$

b) $2^{3x+1} = 4^{x-2}$

c) $10\left(3^{x-3}\right) = 810$

d) $\sqrt{3^x} = \dfrac{1}{\sqrt{27}}$

4. Escribe en notación de intervalo el conjunto solución de la inecuación:

$(0{,}04)^{5^x - x - 8} < 625$

5. En la figura 2.94 se ha representado una función h de la forma $y = a^x + e$, con $0 < a < 1$

Analiza y responde:

a) ¿En qué intervalo la función es decreciente y positiva?

b) ¿Cuál es el conjunto imagen de la función?

c) Determina la ecuación de la función.

d) Determina la función inversa de h.

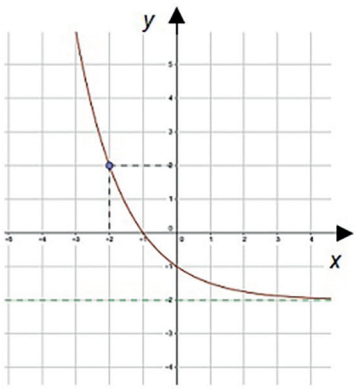


Fig. 2.94

6. ¿Cuáles de las siguientes expresiones logarítmicas tienen como dominio de definición $\mathbb{R}$?

a) $\log_5 (x-2)^2$

b) $\log_3 \left(x^2 - 2x - 1\right)$

c) $\log \sqrt{\dfrac{x^3}{x^2 + 5x + 3}}$

d) $\log_7 \left(\dfrac{x^2 + 5}{4}\right)$

7. En el área económica, uno de los factores que influye en la demanda D de un producto es el precio, los cuales se pueden relacionar mediante la ecuación: $\log_a D = \log_a c - \log_a p$ (a, c y p son constantes).

a) Transforma la ecuación anterior en una ecuación exponencial.

b) Explica cómo aumenta o disminuye la demanda de un producto en función del precio.

8. En una isla, la población de moscas P en función del tiempo se expresa mediante la función exponencial $P(t) = \dfrac{2000}{1 + 2^{-0{,}1t}}$, donde t: expresa el número de años y P población de moscas por miles.

a) ¿Cuál fue la población inicial?

b) Considerando que se mantengan las mismas condiciones, ¿cuál será la población de moscas dentro de 10 años?

9. Las ecuaciones de dos funciones son:

$h(x) = \log_5(x-2)$ $\qquad$ $g(x) = \log_5 x$

a) Determina para qué valores de la variable está definida la función *h*.

b) ¿Cuál es valor de la variable que satisface a la ecuación:

$2^{h(x)+g(x)} = 2^{\log_5 8}$?

10. Determina el conjunto solución de la ecuación siguiente:

$4^{\log\sqrt{2x^2+7x}-\log\sqrt{x}} = 16^{\log\sqrt{x+2}}$

11. El gráfico de la figura 2.95 corresponde a una ecuación logarítmica de la forma $f(x) = log_2(x+d)+e$. Analiza y responde

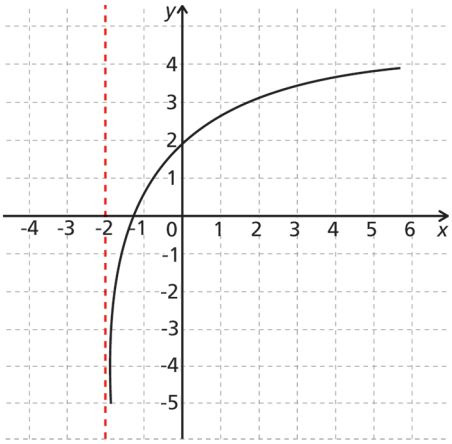


Fig. 2.95

a) ¿Para qué valores del dominio de definición la función es creciente y negativa si el punto (0;2) pertenece al gráfico de *f*?

b) Escribe la ecuación de la asíntota.

c) Escribe la ecuación de la función representada.

d) Determina la ecuación de la función inversa.

CAPÍTULO 3

Ecuaciones y funciones trigonométricas

En la época de Eratóstenes se decía que la Tierra era plana, pero algunos sabios sospechaban que la Tierra tenía una forma esférica. A esta conclusión llegaban al observar los barcos en el océano: al acercarse el barco a tierra, se veía en primer lugar solo el mástil y, más tarde, el casco del barco. Si la Tierra fuese plana, este hecho no se produciría y se vería el barco en su totalidad en cada momento.

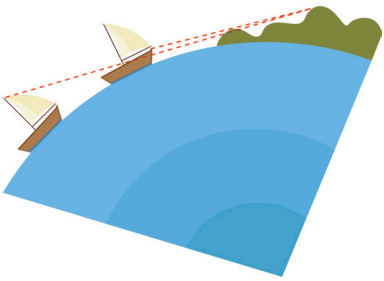


Fig. 3.1

■ *¿Por qué es importante el estudio de la Trigonometría?*

Estarás de acuerdo que su estudio es muy importante, e incluso divertido si aprendes paso a paso comprendiendo cada relación trigonométrica.

En la actualidad, la trigonometría es utilizada, entre otras, en la ingeniería electrónica para identificar las señales, establecer conexiones y establecer ubicaciones que favorecen la distribución de energía eléctrica; en la medicina su empleo permite a los médicos leer los electrocardiogramas, examen que registra gráficamente, la actividad eléctrica del corazón en función del tiempo, para poder dar un diagnóstico oportuno.

Lo anterior significa que el conocimiento de la trigonometría constituye un recurso matemático que posibilita la resolución de una gran cantidad de situaciones y problemas cotidianos, es decir, asuntos de la vida real.

En este capítulo profundizarás en el estudio de la Trigonometría, se introduce el sistema circular de medidas de ángulos; se sistematizan las razones trigonométricas y las identidades ya estudiadas en grados anteriores; también se incorporan otras identidades con su aplicación en la resolución de ecuaciones; así como, la demostración de nuevas identidades; se definen las funciones trigonométricas –en particular las que describen oscilaciones armónicas– y se estudian sus propiedades. En la sesión Saber más podrás conocer de la existencia de las funciones secante y cosecante, otras aplicaciones, curiosidades, hechos y descubrimientos asombrosos del maravilloso mundo de la Trigonometría, como ampliación de tus conocimientos.

3.1 El sistema circular de medida de ángulos

En la medición de ángulos y, por tanto, en la Trigonometría, existen cuatro unidades de medición de ángulos, aunque solo se utilizan tres. Si bien la más frecuente en la vida cotidiana es el grado sexagesimal, en la Matemática la más utilizada es el radián, que se define como la unidad natural para medir ángulos. El grado centesimal se desarrolló como la unidad más próxima al sistema decimal y se utiliza en la topografía, la arquitectura y en la construcción.

Grado sexagesimal: unidad angular que divide la circunferencia en 360 grados.

Grado centesimal: unidad angular que divide la circunferencia en 400 grados centesimales.

Mil angular: unidad angular que divide a la circunferencia en 6 400 unidades.

Radián: unidad angular natural en Trigonometría. En una circunferencia completa existen 2π radianes (algo más de 6,28).

Saber más

Un grado centesimal, centígrado o gradián (en plural: gradianes o gonio), es el ángulo central subtendido por un arco cuya longitud es igual a $\frac{1}{400}$ de la circunferencia y equivale a nueve décimos de grado sexagesimal. En las calculadoras, la abreviatura **grad** se representa como una "g" minúscula en superíndice colocada tras la cifra. Por ejemplo: $12{,}4574^{g}$.

En este epígrafe aprenderás sobre el uso del sistema circular para medir el ángulo como la razón entre la longitud del arco de una circunferencia subtendido por el ángulo y el radio de dicha circunferencia. Esta razón puede utilizarse para medir el ángulo porque es constante para un mismo ángulo, cualquiera que sea el radio de la circunferencia empleada.

Definición 3.1

Un radián (en símbolos 1 rad) es la amplitud de un ángulo en el que la longitud del arco es igual al radio (figura 3.2 a)

La definición anterior establece la unidad del sistema circular de medidas de ángulos y significa que, para calcular la medida de un ángulo en este sistema, se calcula la razón entre la longitud del arco (l) y el radio (r): $\frac{l}{r}$.

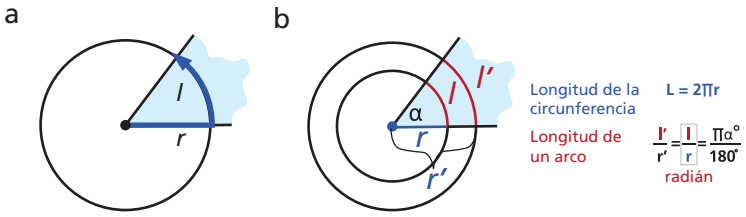


Fig. 3.2

En efecto, desde la Secundaria Básica conoces que, en una circunferencia de radio r, el ángulo y el arco varían en proporción directa: a mayor (menor) ángulo corresponde mayor (menor) arco[1], por lo que un ángulo de 1 rad y su arco, de longitud r (figura 3.2 a), están en igual razón que un ángulo arbitrario α_{rad} y su correspondiente arco l, o sea:

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha_{rad}}{l}$$

de donde, $\alpha_{rad} = \frac{l}{r}$

Además, cualquiera que sea el radio r de la circunferencia, dicha razón depende solamente de la amplitud del ángulo (figura 3.2 b).

En el caso de la circunferencia completa, como su arco es de longitud $l = 2\pi r$, el ángulo sería $\alpha_{rad} = \frac{l}{r} = \frac{2\pi r}{r}$, o bien, simplificando, $\alpha_{rad} = 2\pi$. Por

[1] *Proposición 33, Libro VI, de los Elementos de Euclides* (ss. IV-III). Durante dos milenios, fue el texto de Geometría empleado en las escuelas de enseñanza media del mundo occidental.

lo tanto, un ángulo de semicircunferencia en radián es $\alpha rad = \pi$ y en grados sexagesimales, $\alpha^0 = 180^0$, por tanto, si se dividen estas dos igualdades miembros a miembro resulta:

$$\frac{\alpha_{rad}}{\alpha^0} = \frac{\pi}{180^0}$$

Luego, al despejar α_{rad} o $\alpha 0$, se obtienen las relaciones $\alpha_{rad} = \frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ}$ y $\alpha^0 = \frac{180^\circ \alpha_{rad}}{\pi}$, que pueden ser utilizadas para convertir grados sexagesimales en radianes y viceversa, cuando multiplicamos por $\frac{\pi}{180^0}$ y por su inverso $\frac{180^0}{\pi}$, respectivamente.

Saber más

$1^0 \approx 0{,}01745$ rad y $1 \text{ rad} \approx 57^0\,17'\,45'' \approx 57{,}3^0$

El sistema circular elimina dos limitaciones del sistema sexagesimal:

a) el factor $\frac{\pi}{180}$, que complica los cálculos. Por ejemplo, en el sexagesimal, la longitud de un arco de radio r y ángulo θ es $l = r\theta \cdot \frac{\pi}{180}$, y el área de su sector, $A = \frac{r^2\theta}{2} \cdot \frac{\pi}{180}$, mientras que en el circular serían solo $l = r\theta$ y $A = \frac{r^2\theta}{2}$, respectivamente;

b) el hecho de que un ángulo pequeño y su seno sean casi iguales numéricamente, **a menor ángulo, mejor aproximación**, que solo es válido si el ángulo está medido en radianes. Así, sen1 rad = 0,8; casi iguales, pero sen 0,5 rad = 0,5 iguales. En Análisis matemático, esto está expresado como límite $\frac{\text{sen}\,\theta}{\alpha} = 1$ cuando θ tiende a cero.

De la historia

La denominación de radián fue propuesta por Jaime Thompson, hermano del famoso físico inglés Guillermo Thompson (Lord Kelvin), en 1871. Apareció impresa por primera vez en preguntas de exámenes, puestos por él, en el Colegio de la Reina de Belfast, Irlanda, en 1873. Antes habían existido otras propuestas, como rad y radial.

Ejemplo 3.1

Calcular la medida en el sistema circular de:

a) un ángulo recto b) un ángulo de 20^0 c) un ángulo llano

Resolución:

a) La amplitud de un ángulo recto es de 90º; luego, tenemos:

$$\alpha_{rad} = \alpha^0 \cdot \frac{\pi}{180^0} = 90^0 \cdot \frac{\pi}{180^0} = \frac{\pi}{2}$$

La medida de un ángulo recto en el sistema circular es $\frac{\pi}{2}$.

b) En este caso, $\alpha^0 = 200$ y la razón será:

$$\alpha_{rad} = 20^0 \cdot \frac{\pi}{180^0} = \frac{\pi}{9}$$

La medida de un ángulo de 20^0 en el sistema circular es $\frac{\pi}{9}$.

c) La amplitud de un ángulo llano es 1 800, luego cualquiera sea el radio tenemos:

$$\alpha_{rad} = 180^0 \cdot \frac{\pi}{180^0} = \pi$$

La medida de un ángulo llano en el sistema circular es π. ◆

Ejemplo 3.2

Expresar en el sistema circular:

a) 15^0 b) 214^0

Resolución:

a) $\alpha_{rad} = 15^0 \cdot \frac{\pi}{180^0} = \frac{\pi}{12}\text{rad}$ b) $\alpha_{rad} = 214^0 \cdot \frac{\pi}{180^0} \approx 3{,}73\text{rad}$ ◆

¡Atención!

Observa que, cuando es posible, la medida en el sistema circular se expresa como una parte fraccionaria sencilla de π.

Ejemplo 3.3

Expresar en el sistema sexagesimal:

a) $\frac{\pi}{6}$ b) 4,57

Resolución:

a) $\alpha^0 = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{180^0}{\pi} = 30^0$

b) $\alpha^0 = 4{,}57 \cdot \frac{180^0}{\pi} \approx 262^0$ (aunque 4,57 puede considerarse como un valor exacto, la respuesta debe tener tres lugares, pues se utiliza una aproximación de $\pi \approx 3{,}14$ con tres lugares). ◆

En los ejemplos anteriores, debes haber notado que la medida de un ángulo en el sistema circular no tiene dimensiones, pues es el cociente de dos longitudes. Esta observación nos permite calcular las razones trigonométricas de un número real si consideramos que es la medida de un ángulo en el sistema circular.

En la práctica, es conveniente que recuerdes de memoria la tabla de conversión para las medidas de los ángulos notables y ángulos axiales, que se representan a continuación:

Tabla 3.1

Conversión de ángulos notables y axiales de grados sexagesimales a radianes								
grados sexagesimales	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	270^0	360^0
radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Ejercicios del epígrafe 3.1

1. Expresa en radianes las cantidades de amplitud siguientes dadas en grados sexagesimales:

a) 15^0 b) 315^0 c) 42^0 d) 75^0 e) 210^0
f) 200^0 g) 102^0 h) 144^0 i) $43{,}8^0$ j) $72{,}5^0$
k) $221{,}3^0$ l) $60{,}5^0$ m) $138{,}5^0$ n) $47{,}6^0$ ñ) 300^0
o) 318^0 p) $6{,}72^0$ q) $81{,}52^0$ r) $70^015´$ s) $33^023´$
t) $8{,}42^0$ u) $123{,}13^0$ v) $2^004´$

2. Determina la medida en grados sexagesimales de los siguientes ángulos expresados en radianes.

a) $\frac{5\pi}{4}$ b) $\frac{11\pi}{6}$ c) $\frac{5\pi}{12}$
d) $\frac{\pi}{6}$ e) $\frac{7\pi}{4}$ f) $\frac{3\pi}{11}$
g) $\frac{3\pi}{5}$ h) 3,76 i) 1,48
j) 0,937 k) 4,84 l) 0,84
m) 0,95 n) 5,64 ñ) 1,16

3. Si un arco de una circunferencia mide $\frac{2}{3}$ del radio, ¿cuál es la medida de su ángulo central correspondiente en grados y en radianes?

4. Agarrando un arco y cuerda por el centro, un arquero tensa su arma hasta que forman un arco de circunferencia y un ángulo de $\frac{\pi}{3}$rad, respectivamente. Si el cordel tiene una longitud de 100 cm, ¿cuál es la longitud del arco cuando está tensado?

5. Encuentra el radio *r* del círculo en la figura 3.3.

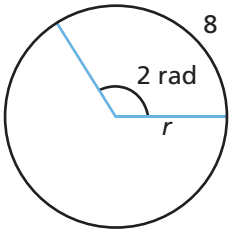


Fig. 3.3

6. Los extremos superior e inferior de la hoja de un limpiaparabrisas están a 35 cm y 85 cm del punto central, respectivamente. Mientras está en operación, el limpiador abarca $\frac{3\pi}{4}$ rad. Encuentra el área barrida por la hoja.

7. Formula un problema en que utilices la medida del ángulo en radianes.

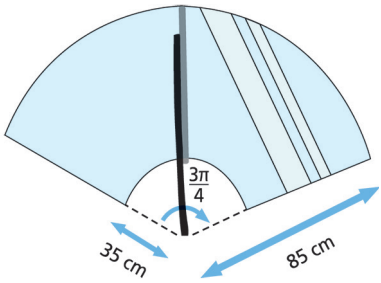


Fig. 3.4

3.2 Razones trigonométricas

El incesante desarrollo de la tecnología y la ciencia de la información exige, cada vez más, el empleo de la matemática como ocurre en la programación de los video juegos (figura 3.5)[2], en los que una situación característica es el seguimiento al enemigo, ¿qué sucede si el enemigo conoce el ángulo entre él y su oponente?

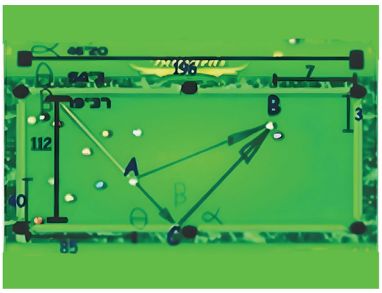


Fig. 3.5

Situaciones como la citada requieren de la relación ángulo-lado y juega un papel importante en las razones trigonométricas.

Desde grados anteriores has estudiado las relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo, tal es el caso del grupo de Teoremas de Pitágoras.

[2] El Club de los π-tagóricos. Aplicaciones de la trigonometría en las ciencias experimentales.

Recuerda que...

El Grupo de Teoremas de Pitágoras está compuesto por tres teoremas que tienen como premisa el triángulo rectángulo y son:

Teorema de Pitágoras. En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos ($c^2 = a^2 + b^2$) (figura 3.6).

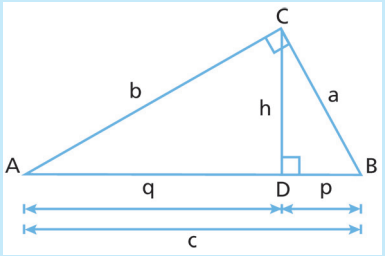


Fig. 3.6

Teorema de la altura. El cuadrado de la longitud de la altura relativa a la hipotenusa es igual al producto de las longitudes de los segmentos que esta determina sobre la hipotenusa ($h^2 = p \cdot q$) (figura 3.6)

Teorema de los catetos. El cuadrado de la longitud de cada cateto es igual al producto de la longitud de la hipotenusa por la longitud del segmento de hipotenusa correspondiente al cateto.

($a^2 = p \cdot c$; $b^2 = q \cdot c$) (figura 3.6).

También estudiaste las relaciones entre los lados y los ángulos interiores en un tángulo rectángulo, las cuales se expresan mediante las razones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante. Asimismo, realizaste cálculos utilizando estas razones, de ángulos medidos en grados sexagesimales.

Ahora, en este epígrafe, trabajarás nuevamente con las razones trigonométricas en las que los ángulos estarán expresados tanto en grados sexagesimales como en radianes.

De la historia

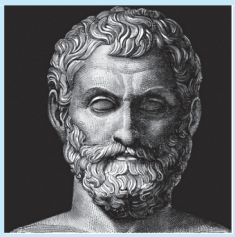
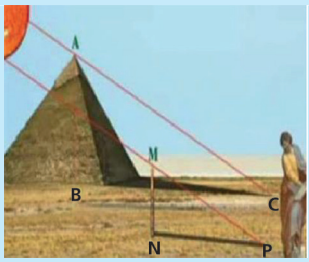


Fig. 3.7
Tales de Mileto
(624-546 a.n.e.)

Fig. 3.8



Cuenta la historia que Tales (figura 3.7) determinó la altura de las pirámides de Egipto midiendo la longitud que proyectaban sus sombras cuando la de una estaca, hincada perpendicularmente en la tierra, era igual a su propia altura (figura 3.8).

Este "cálculo" coincide con el que se obtiene por semejanza de los triángulos rectángulos ABC y MNP.
Aplicando la tangente trigonométrica de $\measuredangle BCA$, la altura sería $\overline{AB} = BC \cdot \tan \measuredangle BCA$, determinando $\overline{BC}$ distancia desde el centro B del cuadrado de la base de la pirámide hasta su lado (igual a su mitad) más la ese lado al vértice C y midiendo $\measuredangle ACB$ con un teodolito.

Para el trabajo con las razones trigonométricas se hace necesario que repases algunos contenidos que estudiaste anteriormente:

Recuerda que...

Tabla 3.2

Las razones trigonométricas en triángulos rectángulos

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c} \qquad \operatorname{sen}\beta = \frac{b}{c}$$

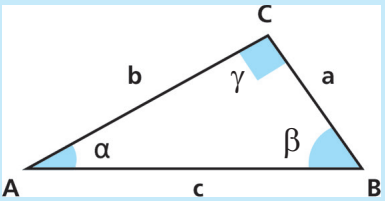
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \cos\beta = \frac{a}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \qquad \tan\beta = \frac{b}{a}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{b}{a} \qquad \cot\beta = \frac{1}{\tan\beta} = \frac{a}{b}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{c}{b} \qquad \sec\beta = \frac{1}{\cos\beta} = \frac{c}{a}$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{a} \qquad \csc\beta = \frac{1}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{b}$$



$\gamma = 90^0$

Fig. 3.9

a: longitud de $\overline{CB}$
b: longitud de $\overline{AC}$
c: longitud de $\overline{AB}$

Tabla 3.3
Signos y fórmulas de reducción en cada uno de los cuadrantes

I cuadrante α	II cuadrante $[180^0 - \alpha]$	III cuadrante $[180^0 + \alpha]$	IV cuadrante $360^0 - \alpha$ $[360^0 - \alpha \text{ o } (-\alpha)]$
+ sen α	+ sen α	– sen α	– sen α
+ cos α	– cos α	– cos α	+ cos α
+ tan α	– tan α	+ tan α	– tan α
+ cot α	– cot α	+ cot α	– cot α
+ csc α	+ csc α	– csc α	– csc α
+ sen α	– sec α	– sec α	+ sec α

Tabla 3.4
Valores de los ángulos notables y axiales

Grados sexagesimales	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	270^0	360^0
sen α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
tan α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	No definida	0	No definida	0
cot α	No definida	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	No definida	0	No definida
sec α	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	No definida	–1	No definida	1
csc α	No definida	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	No definida	–1	No definida

Tabla 3.5
Razones trigonométricas de ángulos opuestos

Para todo ángulo α se cumple que:
$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$
$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$
$\csc(-\alpha) = -\csc\alpha$
$\sec(-\alpha) = \sec\alpha$

A partir de la conversión de ángulos notables y axiales de grados sexagesimales a radianes, descrita en la Tabla 3.4, ya estás en condiciones de calcular las razones trigonométricas de los ángulos notables y axiales en el sistema circular, para los que debes tener presente el resumen que se presentó en las tablas 3.2, 3.3, 3.4 y 3.5.

Ejemplo 3.4

Calcular las razones trigonométricas siguientes:

a) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$ b) $\cos\frac{2\pi}{3}$ c) $\tan 5{,}25$

Resolución:

a) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen}\left(\frac{180^0}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\tan 5{,}25 = \tan\left(\frac{180^0}{\pi}\cdot 5{,}25\right) \approx \tan 301^0 \approx -1{,}67$ ◆

¡Atención!

Observa que $\frac{2\pi}{3} = 120^0$ está en el II cuadrante, entonces el valor del coseno es negativo.

Ejemplo 3.5

Determinar para cada uno de los siguientes ángulos, un ángulo coterminal entre 0 y 2π, según el sistema utilizado.

a) $-\frac{9\pi}{6}$ b) $\frac{17\pi}{5}$

Resolución:

a) Como el módulo del ángulo dado es menor que 2π , basta adicionar 2π a su medida, donde se obtiene: $-\frac{9\pi}{6} + 2\pi = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$
Luego el ángulo es $\frac{\pi}{2}$.

b) El múltiplo de 2π más próximo es el propio 2π; luego, $\frac{17\pi}{5} - 2\pi = \frac{7\pi}{5}$
Por tanto el ángulo es $\frac{7\pi}{5}$. ◆

Hemos visto que las razones trigonométricas de un ángulo dependen solamente de las coordenadas de un punto situado en el lado terminal. Esto significa que se pueden calcular las razones de ángulos cualesquiera utilizando las definiciones conocidas.

En la práctica procedemos como se indica a continuación:

Recuerda que...

Para calcular las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera, buscamos un ángulo del intervalo principal $[0^0; 360^0]$ que sea coterminal con él y calculamos sus razones.

Ejemplo 3.6

Calcular las razones trigonométricas de los ángulos:

a) $\frac{8\pi}{3}$ b) $-\frac{\pi}{4}$ c) 13,48 d) $\frac{47\pi}{4}$

Resolución:

En la práctica utilizamos el procedimiento indicado antes, como se muestra a continuación:

a) $\operatorname{sen}\frac{8\pi}{3} = \operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{3} - 2\pi\right) = \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ porque $\frac{2\pi}{3}$ y es coterminal de $\frac{8\pi}{3}$

$\cos\frac{8\pi}{3} = \cos\left(\frac{8\pi}{3} - 2\pi\right) = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

$\tan\frac{8\pi}{3} = \tan\left(\frac{8\pi}{3} - 2\pi\right) = \tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$

$\cot\frac{8\pi}{3} = \cot\left(\frac{8\pi}{3} - 2\pi\right) = \cot\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sec\frac{8\pi}{3} = \sec\left(\frac{8\pi}{3} - 2\pi\right) = \sec\frac{2\pi}{3} = -2$

$\csc\frac{8\pi}{3} = \csc\left(\frac{8\pi}{3} - 2\pi\right) = \csc\frac{2\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

¡Atención!

Ten presente que las razones trigonométricas de ángulos negativos se reducen a la de ángulos positivos aplicando las razones trigonométricas de los ángulos opuestos.

b) $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \operatorname{sen}\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$

$\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cot\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \cot\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cot\frac{\pi}{4} = -1$

$\sec\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sec\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \sec\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

$\csc\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \csc\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \csc\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\csc\frac{\pi}{4} = -\sqrt{2}$

c) El valor dado se encuentra en el sistema circular. Para buscar un ángulo del intervalo principal le restamos el múltiplo más próximo de $2\pi(\approx 6,28)$ y para encontrarlo, dividimos 13,48 por 6,28 (13,48 : 6,28 = 2,1464…,) y tomamos la parte entera del cociente que es 2. Entonces, 13,48 – 2 · 6,28 = 0,92 y para calcular las razones trigonométricas, lo expresamos en el sistema sexagesimal y buscamos en la tabla.

$$\operatorname{sen}13,48 = \operatorname{sen}0,92 = \operatorname{sen}\left(\frac{180^0}{\pi}\cdot 0,92\right)^0 = \operatorname{sen}52,7^0 = 0,796$$

$$\cos 13,48 = \cos 0,92 = \cos\left(\frac{180^0}{\pi}\cdot 0,92\right)^0 = \cos 52,7^0 = 0,606$$

$$\tan 13,48 = \tan 0,92 = \tan\left(\frac{180^0}{\pi}\cdot 0,92\right)^0 = \tan 52,7^0 = 1,31$$

$$\cot 13,48 = \cot 0,92 = \cot\left(\frac{180^0}{\pi}\cdot 0,92\right)^0 = \cot 52,7^0 = 0,763$$

$$\sec 13,48 = \sec 0,92 = \sec\left(\frac{180^0}{\pi}\cdot 0,92\right)^0 = \sec 52,7^0 = 1,62$$

$$\csc 13,48 = \csc 0,92 = \csc\left(\frac{180^0}{\pi}\cdot 0,92\right)^0 = \csc 52,7^0 = 1,26$$

En este inciso damos la respuesta con tres cifras porque al calcular hemos utilizado aproximaciones de $\pi \approx 3,14$.

En la práctica se puede proceder de una manera más simple, que es análoga a la que se utiliza cuando el ángulo está expresado en grados sexagesimales:

Si se divide el ángulo dado entre $2\pi \approx 6,28$ el cociente expresa el número de vueltas y el resto el ángulo coterminal que pertenece al intervalo principal. Por ejemplo, al dividir 13,48 entre 6,28 se obtiene cociente 2 y resto 0,92, luego un ángulo de 13,48 rad da dos vueltas y es coterminal con el ángulo de 0,92 que pertenece al intervalo principal.

d) Apliquemos el procedimiento empleado en el inciso c) para resolver este inciso.

$\frac{47\pi}{4} : 2\pi = 47 : 8$. En este caso se obtiene cociente 5 y resto 7, quiere decir que el ángulo $\frac{47\pi}{4}$ da 5 vueltas y es coterminal con $\frac{7\pi}{4}$ en el intervalo principal, entonces:

$$\operatorname{sen}\frac{47\pi}{4} = \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4} = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{47\pi}{4} = \cos\frac{7\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\frac{47\pi}{4} = \tan\frac{7\pi}{4} = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$

$$\cot\frac{47\pi}{4} = \cot\frac{7\pi}{4} = -\cot\frac{\pi}{4} = -1$$

$$\sec\frac{47\pi}{4} = \sec\frac{7\pi}{4} = \sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

$$\csc\frac{47\pi}{4} = \csc\frac{7\pi}{4} = -\csc\frac{\pi}{4} = -\sqrt{2}$$ ◆

Resumiendo, tenemos:

Tabla 3.6

En el sistema sexagesimal (grados)	En el sistema circular (radianes)
$\text{sen}(\alpha + k\cdot 360^0) = \text{sen}\alpha \quad k \in \mathbb{Z}$	$\text{sen}(\alpha + 2k\pi) = \text{sen}\alpha \quad k \in \mathbb{Z}$
$\cos(\alpha + k\cdot 360^0) = \cos\alpha \quad k \in \mathbb{Z}$	$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha \quad k \in \mathbb{Z}$
$\tan(\alpha + k\cdot 180^0) = \tan\alpha \quad k \in \mathbb{Z}$	$\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha \quad k \in \mathbb{Z}$
$\cot(\alpha + k\cdot 180^0) = \cot\alpha \quad k \in \mathbb{Z}$	$\cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha \quad k \in \mathbb{Z}$
$\sec(\alpha + k\cdot 180^0) = \sec\alpha \quad k \in \mathbb{Z}$	$\sec(\alpha + k\pi) = \sec\alpha \quad k \in \mathbb{Z}$
$\csc(\alpha + k\cdot 180^0) = \csc\alpha \quad k \in \mathbb{Z}$	$\csc(\alpha + k\pi) = \csc\alpha \quad k \in \mathbb{Z}$

Como observarás en el caso de la tangente, cotangente, secante y cosecante los valores se repiten cada media vuelta, o sea cada $\frac{2k\pi}{2} = k\pi$.

Ejemplo 3.7

Un avión sale de un aeropuerto y se eleva, manteniendo un ángulo constante de $\frac{\pi}{18}$ rad, hasta que alcanza una altura de 15 km. ¿Cuál es la distancia horizontal del avión al aeropuerto?



Fig. 3.10

Resolución:

Aplicando razones trigonométricas en triángulo rectángulo, tenemos que: $\tan\frac{\pi}{18}=\frac{15}{d}$, transformemos $\frac{\pi}{18}$ radianes a grados sexagesimales, $\frac{\pi}{18}=10^0$ Luego, $\tan 10^0 = \frac{15}{d}$, despejando *d* distancia horizontal del avión al aeropuerto, $d=\frac{15}{\tan 10^0}=\frac{15}{0{,}176}\approx 85\text{ km}$.

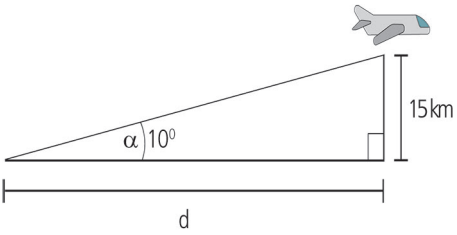


Fig. 3.11

Respuesta: la distancia horizontal del avión al aereopuerto es aproximadamente de 85 km. ◆

Ejemplo 3.8

Con los datos del ejemplo 3.7, calcular la longitud de la *línea de mira* del navegante con respecto al aeropuerto de partida.

Recuerda que...

Para un observador elevado, **línea de visión** o **mira** es el segmento de recta entre su punto de observación y otro observado por debajo de él (figura 3.12).

Ángulo de depresión es el formado por la línea de mira y una línea horizontal trazada por el punto de observación si está por debajo de la horizontal.

Ángulo de elevación es el formado por la línea de mira y una línea horizontal trazada por el punto observado si está por encima de la horizontal.

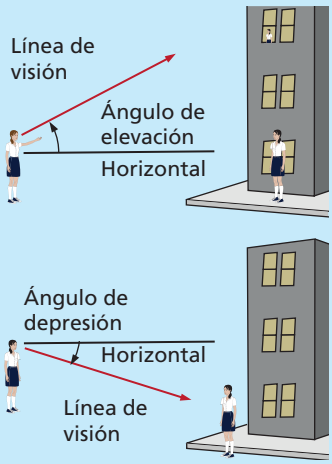


Fig. 3.12

Resolución:

Designando por *d* la longitud de la línea de mira del navegante, como su ángulo de depresión es de 10^0 y la altura del avión de 15 km, se puede plantear que:

$\text{sen}10^0 = \frac{15}{d}$, de donde resulta:

$$d = \frac{15}{\text{sen}10^\circ} = \frac{15}{0,17} \approx 88\text{km}$$

Si empleamos radianes en lugar de grados sexagesimales, con la fórmula correspondiente de conversión, se hallaría igual resultado:

$$d = \frac{15}{\text{sen}10^0 \cdot \frac{\pi}{180^\circ}} = \frac{15}{\text{sen}10 \cdot 0,017} = \frac{15}{\text{sen}0,17} \qquad \frac{15}{0,17} \approx 88 \text{ km.}$$

¡Atención!

Observa que, en radianes, para valores pequeños del ángulo, el seno coincide con el ángulo.

Respuesta: la longitud de la *línea de mira* del navegante con respecto al aeropuerto de partida es aproximadamente de 88 km. ◆

Ejemplo 3.9

Calcular el ángulo α que forma la pared con la escalera (figura 3.13).

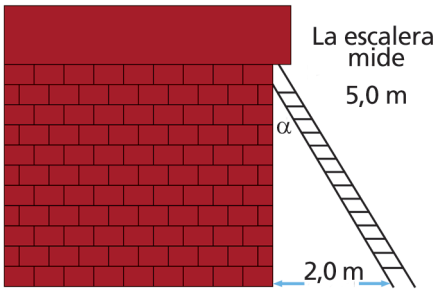


Fig. 3.13

Resolución:

Aplicando las razones trigonométricas (figura 3.14), tenemos:

$\text{sen}\alpha = \frac{2}{5} = 0,4$, cuyo ángulo en el sistema sexagesimal es

$\alpha \approx 23,6^0$, que, convertido al sistema circular, o expresado en radianes, sería $\alpha_{rad} \approx 23,6^0 \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0,4$ rad.

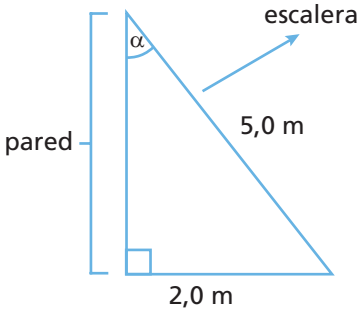


Fig. 3.14

Respuesta: el ángulo α que forma la pared con la escalera es aproximadamente de 0,4 rad.

Ejercicios del epígrafe 3.2

1. Determina para cada uno de los siguientes ángulos, un ángulo coterminal entre $(0;2\pi)$ según el sistema utilizado.

a) $73\pi:6$ b) $10\pi:3$ c) 6π d) $-9\pi:4$

e) $-7\pi:2$ f) 31,4 g) $-47{,}6^0$ h) 22π

i) $\frac{17\pi}{2}$ j) $\frac{14\pi}{3}$ k) -17π l) $-\frac{16\pi}{5}$

m) $-\frac{13\pi}{4}$ n) 7,12 ñ) – 2,04 o) – 0,25

2. Calcula las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de los siguientes ángulos.

a) $4\pi:3$ b) $-5\pi:6$ c) $7\pi:4$ d) $11\pi:3$ e) $-23:4$

f) $41\pi:6$ g) $-\pi:6$ h) $3\pi:4$ i) $-5\pi:3$ j) $-23\pi:6$

k) 2,23 l) 0,85 m) – 1,20 n) –7,24 ñ) $\frac{17\pi}{2}$

o) $\frac{14\pi}{3}$ p) $-\frac{16\pi}{5}$ q) 22π

3. Determina el signo de las razones trigonométricas siguientes:

a) $\cos\frac{3\pi}{4}$ b) $\tan\frac{7\pi}{6}$

c) $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}$ d) $\cos\frac{11\pi}{6}$

e) $\cot\frac{5\pi}{6}$ f) $\sec\frac{4\pi}{3}$

g) $\csc\frac{2\pi}{3}$

4. Di el cuadrante en que se encuentra situado α si:

a) $\operatorname{sen}\alpha > 0$ y $\cos\alpha < 0$ b) $\operatorname{sen}\alpha < 0$ y $\cos\alpha < 0$ c) $\tan\alpha < 0$ y $\cos\alpha < 0$

d) $\cot\alpha > 0$ y $\operatorname{sen}\alpha > 0$ e) $\sec\alpha > 0$ y $\operatorname{sen}\alpha < 0$ f) $\csc\alpha > 0$ y $\cos\alpha < 0$

5. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{\operatorname{sen}30^\circ + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \tan\frac{5\pi}{3}}{\operatorname{sen}60^\circ + \cot\frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}}$ b) $\cos 0 \cdot \operatorname{sen}^2 270^0 - 2\cos\pi$

c) $\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\left[\tan(-\pi) - \cos\left(-30^0\right)\right]$

6. Halla el valor de las siguientes razones trigonométricas:

a) $\sec 1\,125^0$ b) $\tan 1\,320^0$ c) $\tan(-1\,500^0)$ d) $\operatorname{sen}\frac{11\pi}{4}$

e) $\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$ f) $\tan\left(-\frac{17\pi}{3}\right)$ g) $\csc(-2{,}2)$ h) $\cos 2{,}28$

7. Calcula los valores de las razones trigonométricas del ejercicio 3.

8. Prueba que: $\frac{\operatorname{sen}\alpha+\cos b}{\tan^2 c-\cos d}\cdot\sec e=\frac{\sqrt{2}-2}{2}$, si conoces que:

$a=\frac{5\pi}{6}$; $b=\pi$; $c=\frac{\pi}{4}$; $d=\frac{5\pi}{4}$; $e=2\pi$

9. Un globo aerostático elevado, anclado fijamente al suelo con una soga, es arrastrado por el aire de costado, alcanzando una altura aproximada de 117,5 m. El ángulo que forma la soga con el suelo es de $\frac{\pi}{5}$ rad. ¿Cuál es la longitud de la soga?

10. En la antigua Grecia, el coloso de Rodas fue una estatua gigantesca de Apolo, construida a horcajadas a la entrada del puerto de la isla de Rodas, en el mar Egeo, pero derrumbada por un terremoto 56 años más tarde. Desde buques a una distancia de 92 m, medida en el mismo plano de la planta de sus pies, su cuerpo completo podía verse bajo un ángulo de $\frac{2\pi}{5}$ rad. ¿Cuál era la estatura de la estatua?

11. La altura de la Gran Pirámide del faraón Keops, antiguo rey de Egipto, mide 138 m. ¿Cuál sería la longitud del lado del cuadrado de la base, si el ángulo que forma la altura con la arista de la pirámide fuese de $\frac{\pi}{12}$ rad?

12. Calcula el área de la sección del canal en forma de trapecio isósceles que se muestra en la figura 3.15.

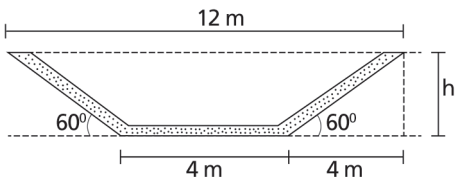


Fig. 3.15

13. Determina el largo y la altura del puente (figura 3.16) si se conoce que: $a = 32$ m.

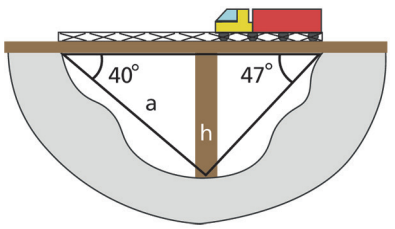


Fig. 3.16

14. El piloto de un avión de Cubana de Aviación debe aproximarse a la pista de aterrizaje con un ángulo de 7^0 con respeto a la horizontal. Si vuela a una altitud de 9 000 m. ¿A qué distancia de la pista debe comenzar su descenso?

15. De acuerdo con los datos que muestra la figura 3.17, calcula la longitud total del tobogán.

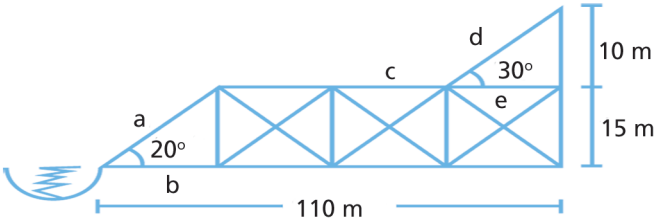


Fig. 3.17

16. Formula un problema en que tengas que aplicar las razones trigonométricas en triángulos rectángulos.

3.3 Identidades y ecuaciones trigonométricas

En el décimo grado resolviste ecuaciones trigonométricas en las que se utilizaban las identidades trigonométricas fundamentales, empleaste además para su solución el cálculo con razones trigonométricas, las fórmulas de reducción y los signos en cada uno de los cuadrantes. En este epígrafe utilizarás estas identidades y conocerás otras, para la demostración de otras identidades y ecuaciones trigonométricas más complejas.

Identidades fundamentales y fórmulas de adición

Recuerda que...

Una **identidad trigonométrica** es una ecuación que se satisface para todos los valores de la variable para los cuales está definida o, lo que es lo mismo, se satisface para todos los valores admisibles de la variable.

Identidades trigonométricas fundamentales

1) $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

2) $\tan\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\left(\alpha \neq 90^0\right)$

3) $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\left(\alpha \neq 0^0\right)$

4) $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}\left(\alpha \neq 90^0\right)$

5) $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}\left(\alpha \neq 0^0\right)$

6) $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}\left(\alpha \neq 90^0\right)$

7) $\csc\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\left(\alpha \neq 0^0\right)$

8) $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1\left(\alpha \neq 0^0\right)\left(\alpha \neq 90^0\right)$

Las identidades trigonométricas, que hemos estudiado hasta ahora, relacionan los valores de las razones de un mismo ángulo; en la práctica, se necesitan identidades que relacionen las razones de dos ángulos. Para esto, se necesitan otros recursos matemáticos que te serán útiles para el trabajo con las expresiones trigonométricas.

Fórmulas de adición

¿Cómo calcular $\cos\frac{\pi}{12}$, sen 75^0 *y* tan 75^0 *solo utilizando las razones trigonométricas de ángulos notables?*

Teorema 3.1

Para todo par de ángulos α y β se cumple:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

Demostración:

Consideremos en un sistema de coordenadas una circunferencia unitaria con centro en el origen y representemos de dos formas diferentes el ángulo $\alpha - \beta$ (figura 3.18 a).

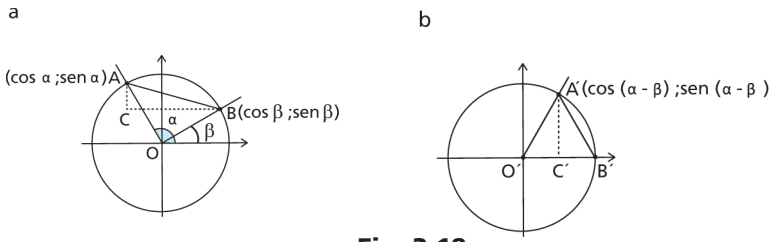


Fig. 3.18

Se tiene entonces que $\Delta ACB = \Delta A'C'B'$ porque:

$|OA| = |O'A'| = |OB| = |O'B'| = 1$ y $\measuredangle AOB = \measuredangle A'O'B' = \alpha - \beta$.

De la igualdad de los triángulos se deduce que $|AB| = |A'B'|$

Por otra parte, en el triángulo rectángulo *ACB* se tiene:

$|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2}$; pero

$|AC| = |\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta|$ y $|BC| = |\cos\alpha - \cos\beta|$

Luego,

$$|AB| = \sqrt{|\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta|^2 + |\cos\alpha - \cos\beta|^2} \qquad (1)$$

y análogamente en el triángulo rectángulo $A'C'B'$

$|A'B'| = \sqrt{|A'C'|^2 + |B'C'|^2}$ con

$|A'C'| = |1-\cos(\alpha-\beta)|$ y $|B'C'| = |\operatorname{sen}(\alpha-\beta)|$; por tanto,

$$|A'B'| = \sqrt{|1-\cos(\alpha-\beta)|^2 + |\operatorname{sen}(\alpha-\beta)|^2} \qquad (2)$$

De (1) y (2) se deduce:

$$|\cos\alpha-\cos\beta|^2 + |\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta|^2 = |\operatorname{sen}(\alpha-\beta)|^2 + |1-\cos(\alpha-\beta)|^2$$

de donde se obtiene sucesivamente:

$$\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cdot\cos\beta + \cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}^2\beta =$$

$$= \cos^2(\alpha-\beta) - 2\cos(\alpha-\beta) + 1 + \operatorname{sen}^2(\alpha-\beta).$$

$$2 - 2\cos\alpha\cdot\cos\beta - 2\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta = 2 - 2\cos(\alpha-\beta)$$

y, finalmente,

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta. \quad \blacklozenge$$

Ejemplo 3.10

Calcular $\cos\dfrac{\pi}{12}$ conocidas las razones trigonométricas de $\dfrac{\pi}{4}$ y $\dfrac{\pi}{6}$.

Resolución

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\sqrt{3}+1\right] \quad \blacklozenge$$

Teorema 3.2

Para todo par de ángulos α y β se cumple:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

Demostración:

a) Observemos que $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-(-\beta))$ entonces se tiene por lo demostrado en el teorema 3.1:

$$\cos(\alpha-(-\beta)) = \cos\alpha\cdot\cos(-\beta) + \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}(-\beta)$$

$$= \cos\alpha\cdot\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

porque $\cos(-\beta) = \cos\beta$ y $\operatorname{sen}(-\beta) = -\operatorname{sen}\beta$

b) Se tiene que $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos\beta$$

$$=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

c) $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}(\alpha+(-\beta))$

$$=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos(-\beta)+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}(-\beta)$$

$$=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta\,.$$ ◆

Ejemplo 3.11

Calcular sen 75^0 utilizando los valores de las razones trigonométricas de los ángulos notables.

Resolución:

Como sen 75^0 = sen $(45^0 + 30^0)$, podemos escribir:

sen 75^0 = sen $(45^0 + 30^0)$ = sen $45^0 \cdot \cos 30^0 + \cos 45^0 \cdot \operatorname{sen} 30^0$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right).$$ ◆

Teorema 3.3

Si α y β son dos ángulos tales que $\tan\alpha$, $\tan\beta$ y $\tan(\alpha+\beta)$ están definidas, se cumple:

a) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

b) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

Demostración

a) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$

$$=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}$$

dividiendo numerador y denominador por $\cos\alpha\cdot\cos\beta$, resulta:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

El inciso b) se demuestra de forma completamente análoga. ◆

Ejemplo 3.12

Calcular $\tan 75^0$ utilizando los valores de la tangente de los ángulos notables.

Resolución:

$$\tan 75^0 = \tan\left(45^0 + 30^0\right) = \frac{\tan 45^0 + \tan 30^0}{1 - \tan 45^0 \cdot \tan 30^0}$$

$$= \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{\left(3+\sqrt{3}\right)^2}{\left(3-\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)} = \frac{9+6\sqrt{3}+3}{9-3} = \frac{6\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)}{6} = 2+\sqrt{3} \quad \blacklozenge$$

Las fórmulas de los teoremas 3.1; 3.2 y 3.3 reciben el nombre de fórmulas de adición y constituyen **identidades trigonométricas**.

Fórmulas de adición

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha \cdot \cot\beta \mp 1}{\cot\alpha \pm \cot\beta}$$

Ejemplo 3.13

a) Simplificar $\operatorname{sen}\left(\theta + 30^0\right) + \cos\left(\theta + 30^0\right)$

b) Dado $\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{sen}\beta = \frac{12}{13}$ y sabiendo que ambos ángulos son agudos, hallar $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ y $\cos(\alpha+\beta)$.

c) Probar que $\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\alpha \cdot \cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$

d) Simplificar: $\dfrac{\tan\frac{2\pi}{9} - \tan\frac{\pi}{9}}{1 + \tan\frac{2\pi}{9} \cdot \tan\frac{\pi}{9}}$

Resolución:

a) Aplicando las fórmulas de adición obtenemos:

$$\operatorname{sen}(\theta+30^0)=\operatorname{sen}\theta\cdot\cos 30^0+\cos\theta\cdot\operatorname{sen}30^0$$

$$\cos(\theta+30^0)=\cos\theta\cdot\cos 30^0-\operatorname{sen}\theta\cdot\operatorname{sen}30^0$$

luego,

$$\operatorname{sen}(\theta+30^0)+\cos(\theta+30^0)=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\theta+\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\theta=\cos\theta.$$

b) Como α y β son ángulos agudos, sus cosenos son positivos:

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\left[\frac{5}{13}\right]^2}=\frac{12}{13}\qquad \cos\beta=\sqrt{1-\left[\frac{12}{13}\right]^2}=\frac{5}{13}$$

Aplicando entonces las fórmulas de adición, resulta:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

$$=\left[\frac{5}{13}\right]\cdot\left[\frac{5}{13}\right]+\left[\frac{12}{13}\right]\cdot\left[\frac{12}{13}\right]$$

$$=\left[\frac{5}{13}\right]^2+\left[\frac{12}{13}\right]^2$$

$$=1$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

$$=\left[\frac{12}{13}\right]\cdot\left[\frac{5}{13}\right]-\left[\frac{5}{13}\right]\cdot\left[\frac{12}{13}\right]$$

$$=0$$

c) $$\cot(\alpha+\beta)=\frac{1}{\tan(\alpha+\beta)}=\frac{1}{\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}}=\frac{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$$

Dividiendo numerador y denominador por $\tan\alpha\cdot\tan\beta$ obtenemos:

$$\cot(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{1}{\tan\alpha\cdot\tan\beta}-1}{\dfrac{1}{\tan\alpha}+\dfrac{1}{\tan\beta}}\quad\text{y como}\quad\cot x=\frac{1}{\tan x}$$

$$\cot(\alpha+\beta)=\frac{\cot\alpha\cdot\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}$$

d) Comparando con la fórmula para tan (α + β), reconocemos:

$$\frac{\tan\frac{2\pi}{9}-\tan\frac{\pi}{9}}{1+\tan\frac{2\pi}{9}\cdot\tan\frac{\pi}{9}}=\tan\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{\pi}{9}\right)=\tan\frac{3\pi}{9}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

. ◆

Observa que de esta forma puedes obtener el valor de la expresión en forma exacta y rápida, sin usar las tablas, calculadoras ni asistentes matemáticos.

Ejemplo 3.14

Calcular el seno, coseno, tangente y cotangente de los siguientes ángulos sin el uso de la calculadora.

a) 15^0 b) $\frac{7\pi}{12}$

Resolución:

Como $15^0 = 45^0 - 30^0$, podemos escribir:

a) $\operatorname{sen}15^0 = \operatorname{sen}(45^0 - 30^0) = \operatorname{sen}45^0 \cdot \cos 30^0 - \cos 45^0 \cdot \operatorname{sen}30^0$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$$

$$\cos 15^0 = \cos(45^0 - 30^0) = \cos 45^0 \cdot \cos 30^0 + \operatorname{sen}45^0 \cdot \operatorname{sen}30^0$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$$

Variante I

$$\tan 15^0 = \tan(45^0 - 30^0) = \frac{\tan 45^0 - \tan 30^0}{1 + \tan 45^0 \cdot \tan 30^0} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}{\frac{3+\sqrt{3}}{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\left(3-\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)}{\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)} = \frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^2}{9-3} = \frac{9-6\sqrt{3}+3}{6} = \frac{12-6\sqrt{3}}{6} = 2-\sqrt{3}$$

Variante II

Como ya conocemos el seno y coseno de 15^0 entonces tenemos:

$$\tan 15^0 = \frac{\operatorname{sen}15^0}{\cos 15^0} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{3-1} = \frac{3-2\sqrt{3}+1}{2} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$$

$$\cot 15^0 = \cot\left(45^0 - 30^0\right) = \frac{\cot 45^0 \cdot \cot 30^0 + 1}{\cot 45^0 - \cot 30^0} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)^2}{9-3}} = \frac{9 + 6\sqrt{3} + 3}{6} - \sqrt{3}$$

$$= \frac{\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)}{\left(3-\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)} = \frac{12+6\sqrt{3}}{6} = 2 + \sqrt{3}\,. \quad \blacklozenge$$

b) $$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1 + \sqrt{3}\right)$$

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{3} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1 - \sqrt{3}\right)$$

$$\tan\frac{7\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{3}}{1 - \tan\frac{\pi}{4} \cdot \tan\frac{\pi}{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)}{\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)} = \frac{1+2\sqrt{3}+3}{1-3}$$

$$= \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} = -2 - \sqrt{3}$$

$$\cot\frac{7\pi}{12} = \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\cot\frac{\pi}{4} \cdot \cot\frac{\pi}{3} - 1}{\cot\frac{\pi}{4} + \cot\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - 1}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}+3} = \frac{\left(\sqrt{3}-3\right)\left(\sqrt{3}-3\right)}{\left(\sqrt{3}+3\right)\left(\sqrt{3}-3\right)}$$

$$= \frac{3 - 6\sqrt{3} + 9}{3-9} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{-6} = -2 + \sqrt{3} \quad \blacklozenge$$

De la historia



Fig. 3.19

El matemático alemán de ascendencia judía Edmundo Y. Landau (1877-1938), considerando el sen x y el cos x como funciones analíticas, introdujo en forma trigonométrica el teorema de Pitágoras, el más mencionado de la Matemática:

$$1 = \cos 0 = \cos(x - x) = \cos x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x$$
$$= \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x \quad .$$

En efecto, si a y b son los catetos, x el ángulo opuesto a uno de ellos y c la hipotenusa de un triángulo rectángulo, $\cos x = \frac{b}{c}$ y $\operatorname{sen} x = \frac{a}{c}$, por lo que

$$\left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = 1$$

$$\frac{b^2}{c^2} + \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2 + a^2}{c^2} = 1$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad .$$

Como consecuencia de las fórmulas de adición se pueden expresar las razones trigonométricas del duplo de un ángulo en términos de las razones trigonométricas de dicho ángulo o, también como se les conoce, como **las razones trigonométricas del ángulo duplo.**

■ *¿Cómo se obtienen las identidades del ángulo duplo?*

Utilizando las fórmulas de la adición se pueden expresar las razones trigonométricas del duplo de un ángulo en términos de las razones trigonométricas de dicho ángulo

Teorema 3.4

Se cumple que:

a) $\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$

b) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

c) $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \qquad \alpha \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \ \alpha \neq (2r+1)\dfrac{\pi}{4}\ ;\quad k, r \in \mathbb{Z}$

d) $\cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha} \qquad \alpha \neq k\pi;\ \ \alpha \neq (2r+1)\dfrac{\pi}{4};\ \ k, r \in \mathbb{Z}$

Demostración:

Aplicando las fórmulas de adición obtenemos

a) $\operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{sen}(\alpha + \alpha) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$

b) $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

c) Si $\alpha = (2k+1)\dfrac{\pi}{2};\ \ k \in \mathbb{Z}$, $\tan\alpha$ no está definida y si $\alpha = (2r+1)\dfrac{\pi}{4};\ r \in \mathbb{Z}$ el denominador se anula

Luego, para los restantes valores de α puede escribirse

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha+\alpha) = \frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\cdot\tan\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

d) Se demuestra de forma análoga al anterior. ◆

¡Atención!

Ten presente que como consecuencias de la identidad

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

Puedes obtener

a) $1-\operatorname{sen}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha = 1-2\operatorname{sen}^2\alpha$

b) $\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha) = \cos^2\alpha-1+\cos^2\alpha = 2\cos^2\alpha-1$

Estos resultados te serán muy útiles en el cálculo, la demostración y la resolución de ecuaciones trigonométricas.

Ejemplo 3.15

a) Si $\cos\alpha = 0{,}25$ y α es un ángulo agudo, calcular $\operatorname{sen} 2\alpha$ y $\cos 2\alpha$.
b) Calcular $\operatorname{sen} 15^0$, $\cos 15^0$, $\tan 15^0$ y $\cot 15^0$ utilizando los valores del $\cos 30^0$.

Resolución:

a) Si $\operatorname{sen}^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$ entonces $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$, pues α en un ángulo agudo, es decir:

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-(0{,}20)^2}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-0{,}04}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{0{,}96} = 0{,}98$$

Luego, $\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha = 2(0{,}98)\cdot 0{,}20 = 0{,}39$.

Y $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = (0{,}20)^2 - (0{,}98)^2 = 0{,}04 - 0{,}96 = -0{,}92$

b) $\cos 30^0 = \cos 2\cdot 15^0 = 1-2\operatorname{sen}^2 15^0$

Como $\cos 30^0 = 1-2\operatorname{sen}^2 15^0$ despejando se obtiene

$$\operatorname{sen}^2 15^0 = \frac{1-\cos 30^0}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$ luego,

$$\operatorname{sen}15^0 = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \approx 0{,}2588$$

Análogamente, $\cos^2 15^0 = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$ y $\cos 15^0 = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \approx 0{,}9659$; entonces:

$$\tan 15^0 = \frac{\operatorname{sen}15^0}{\cos 15^0} = \frac{\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = 2-\sqrt{3} \approx 0{,}2679 \text{ y}$$

$$\cot 15^0 = \frac{\cos 15^0}{\operatorname{sen}15^0} = \frac{\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = 2+\sqrt{3} \approx 3{,}733. \quad \blacklozenge$$

Saber más

Para todo valor admisible de α se cumple:

Tabla 3.7

Fórmulas de medios ángulos

$\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$	$\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$
$\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$	$\cot\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1-\cos\alpha} = \dfrac{1+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$
$1+\cos\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$	$1-\cos\alpha = 2\operatorname{sen}^2\dfrac{\alpha}{2}$

Fórmulas de ángulos múltiples

$\operatorname{sen}3\alpha = 3\operatorname{sen}\alpha - 4\operatorname{sen}^3\alpha$
$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
$\tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$
$\cot 3\alpha = \dfrac{\cot^3\alpha - 3\cot\alpha}{3\cot^2\alpha - 1}$
$\operatorname{sen} n\alpha = 2\operatorname{sen}(n-1)\alpha \cdot \cos\alpha - \operatorname{sen}(n-2)\alpha$
$\cos n\alpha = 2\cos(n-1)\alpha \cdot \cos\alpha - \cos(n-2)\alpha$

Ejercicios del epígrafe Identidades fundamentales y fórmulas de adición

1. Calcular sin hacer uso de la tabla, calculadoras u otro cualquier asistente matemático, las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

a) 105^0 b) 165^0 c) 285^0

2. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$ b) $2\cos\left(\frac{\pi}{6}-\beta\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)$

c) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$

3. Si $\operatorname{sen}\beta=\frac{3}{5}$ y $\cos\alpha=\frac{12}{13}$; $0<\alpha$, $\beta<\frac{\pi}{2}$, halla:

a) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ b) $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$ c) $\cos(\alpha+\beta)$

d) $\cos(\alpha-\beta)$ e) $\tan(\alpha+\beta)$ f) $\tan(\alpha-\beta)$

4. Simplifica:

a) $\dfrac{\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)-\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)}{1+\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)\cdot\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)}$

b) $\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{10}\right)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{20}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{20}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{20}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{10}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{20}\right)}$

5. Prueba que las siguientes igualdades son verdaderas:

a) $\operatorname{sen}(x+y)\cdot\operatorname{sen}(x-y)=\operatorname{sen}^2x-\operatorname{sen}^2y$

b) $\cos(x+y)\cdot\cos(x-y)=1-\operatorname{sen}^2x-\operatorname{sen}^2y$

6. Halla sen 2*x*, cos 2*x*, tan 2*x* y cot 2*x* dados los siguientes valores de sen *x* y cos *x*:

a) $\operatorname{sen}x=\frac{1}{2}$; $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\operatorname{sen}x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\operatorname{sen}x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos x=\frac{1}{2}$ d) $\operatorname{sen}x=\frac{3}{5}$; $\cos x=\frac{4}{5}$

e) $\operatorname{sen}x=\frac{1}{7}$; $\cos x=\frac{\sqrt{48}}{7}$ f) $\operatorname{sen}x=\frac{2}{3}$; $\cos x=\frac{\sqrt{5}}{3}$

7. Sabiendo que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{x}{5}$ y $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcula $\operatorname{sen}2\alpha, \cos 2\alpha, \tan 2\alpha$ y $\cot 2\alpha$.

8. ¿Por qué $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}$?

9. Si $\operatorname{sen}x = \frac{4}{5}$ y $x \in$ II cuadrante, calcula:

a) $\operatorname{sen}(\pi + 2x)$ b) $\cos(\pi - 2x)$ c) $\tan(2\pi - 2x)$

d) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$ e) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$ d) $\cot(2\pi - 2x)$

10. Si $\cos x = \frac{3}{4}$, halla $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$ y $\cos\frac{\pi}{2}$.

11. Calcula sin hacer uso de tablas, calculadoras u otros asistentes matemáticos:

$$\frac{\operatorname{sen}75^0 - \operatorname{sen}15^0}{\cos 75^0 + \cos 15^0} \cdot \tan\frac{\pi}{6}$$

12. Crea un ejercicio de simplificación en que tengas que utilizar al menos tres de las fórmulas de adición estudiadas.

Demostración de identidades trigonométricas

Estas fórmulas de adición y las nuevas identidades trigonométricas que aprendiste en el subepígrafe anterior también son útiles para la demostración de identidades.

Ejemplo 3.16

Probar que: $\frac{\cos 2x}{\cos x + \operatorname{sen}x} = \cos x - \operatorname{sen}x$ es una identidad.

Resolución:

El dominio de definición de la igualdad es: $\mathbb{R} \setminus \{x : \operatorname{sen}x + \cos x = 0\}$ o, lo que es lo mismo:

$$\mathbb{R} \setminus \left\{x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Trabajando en el MI:

$$\frac{\cos 2x}{\cos x + \operatorname{sen}x} = \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x + \operatorname{sen}x} = \frac{(\cos x - \operatorname{sen}x)(\cos x + \operatorname{sen}x)}{\cos x + \operatorname{sen}x}$$

$$= \cos x - \operatorname{sen}x$$

MD : $\cos x - \operatorname{sen}x$

Observa que para los valores de x tales que $\cos x + \operatorname{sen} x = 0$, el miembro izquierdo no está definido y el miembro derecho sí, pero esos valores son inadmisibles y, por tanto, no hay que considerarlos para decidir si es una identidad.

Luego, MI = MD, y se cumple que es una identidad. ♦

¡Atención!

En la práctica, al comprobar que una igualdad es una identidad, no es necesario escribir los valores inadmisibles explícitamente, pero debe trabajarse con cuidado y garantizar que las transformaciones utilizadas son válidas en todo el dominio. Así, por ejemplo, $\sqrt{1-\cos^2 x}$ no puede ser sustituido por sen x en las comprobaciones de una identidad, puesto que la cadena de igualdades $\sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{sen} x$, solo es válida cuando $\operatorname{sen} x \geq 0$, pues $\sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x} = |\operatorname{sen} x|$, pero su dominio es $\mathbb{R}$; luego, no es una identidad.

Sabemos que, en general, no es fácil verificar que una igualdad es una identidad; sin embargo, muchas veces es sencillo comprobar que una igualdad no es una identidad, pues es suficiente encontrar un valor del dominio que no la satisfaga.

Ejemplo 3.17

Comprobar que la igualdad $\sqrt{1-\cos^2\beta} = \operatorname{sen}\beta$ no es una identidad.

Resolución:

Basta encontrar un valor del dominio para el cual no se cumple la igualdad. Tomemos, por ejemplo, $\beta = \frac{3\pi}{2}$:

$$\text{MI}: \sqrt{1-\cos^2 \frac{3\pi}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\text{MD}: \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = -1$$

$$\text{MI} \neq \text{MD}$$

$$1 \neq -1$$

Se cumple que la igualdad no es una identidad. ♦

¡Atención!

El procedimiento empleado, en este ejemplo, solo es válido para comprobar que una igualdad no es una identidad.

Aunque no existen reglas de validez generales para la demostración de identidades, en el décimo grado aprendiste varias vías para demostrar que una igualdad es una identidad.

Recuerda que...

Para demostrar que una igualdad es una identidad, podemos utilizar las vías siguientes:

Vía 1. Desarrollar un miembro, sobre todo el que tenga más facilidades de transformación, hasta llegar al otro.

Vía 2. Desarrollar ambos miembros y comparar los resultados para verificar si son iguales.

Vía 3. Sustraer ambos miembros para ver si el resultado es cero.

Es importante comprobar en todos los casos si las transformaciones realizadas son válidas en el dominio de definición de la igualdad.

Mediante los siguientes ejemplos, te mostraremos los procedimientos mencionados en el recuadro anterior.

Ejemplo 3.18

Desarrollar un miembro, sobre todo el que tenga más facilidades de transformación, hasta llegar al otro

Demostrar que la siguiente igualdad es una identidad:

$$\frac{\cos^2 x}{1-\operatorname{sen} x} = 1+\operatorname{sen} x$$

Resolución:

El dominio o valores admisibles de la igualdad es $1-\operatorname{sen} x \neq 0$, en el que el dominio de definición sería $\operatorname{sen} x \neq 1$, cuyo dominio es

$$\text{Dom} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Trabajando en el MI obtenemos:

$$= \frac{\cos^2 x}{1-\operatorname{sen} x} = \frac{\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)}{1-\operatorname{sen} x}$$

$$= \frac{\cancel{(1-\operatorname{sen} x)}\cdot(1+\operatorname{sen} x)}{\cancel{1-\operatorname{sen} x}}$$

$$= 1+\operatorname{sen} x \quad .$$

$$\text{MD} : 1+\operatorname{sen} x$$

Luego, MI = MD.

Se cumple que la igualdad es una identidad. ◆

Ejemplo 3.19

Desarrollar ambos miembros y comparar los resultados para verificar si son iguales

Demostrar la Identidad:

$$\tan x + \cot x = \frac{2}{\operatorname{sen} 2x} \qquad \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Resolución:

En este caso, ya se han indicado los valores admisibles que puede tomar la variable *x*. En muchas ocasiones se hace así; de lo contrario, debes analizar cuáles son, en cuyo caso, para realizar la demostración, se procede de la siguiente forma:

Trabajando en el MI:

$$\tan x + \cot x = \frac{\operatorname{sen} x}{cos\, x} + \frac{cos\, x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}$$

Trabajando en el MD:

$$\frac{2}{\operatorname{sen} 2x} = \frac{2}{2\operatorname{sen} x \cdot \cos x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}$$

Luego, MI = MD demuestra que es una identidad trigonométrica para todos los valores admisibles de la variable *x*. ◆

Ejemplo 3.20

Sustraer ambos miembros para ver si el resultado es cero

Demostrar si es una identidad esta igualdad:

$$(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = \operatorname{sen} 2x + 1$$

Resolución:

$$\begin{aligned}(\operatorname{sen} x + cos\, x)^2 - (\operatorname{sen} 2x + 1) &= \operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x \cdot cos\, x + \cos^2 x - \operatorname{sen} 2x - 1 \\ &= \operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x + \cos^2 x - 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x - 1 \\ &= \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

Se cumple porque al sustraer ambos miembros el resultado es cero, entonces la igualdad es una identidad para todos los valores admisibles de la variable *x*. ◆

Ejemplo 3.21

Demostrar la identidad: $\dfrac{1+\operatorname{sen}2x}{1-\operatorname{sen}2x}=\dfrac{(\tan x+1)^2}{(\tan x-1)^2}$ para todo valor admisible de la variable.

Resolución:

Variante I. Transformando el miembro izquierdo:

$$\text{MI}:\frac{1+\operatorname{sen}2x}{1-\operatorname{sen}2x}=\frac{1+2\operatorname{sen}x\cdot\cos x}{1-2\operatorname{sen}x\cdot\cos x}=\frac{\cos^2x+\operatorname{sen}^2x+2\operatorname{sen}x\cdot\cos x}{\cos^2x+\operatorname{sen}^2x-2\operatorname{sen}x\cdot\cos x}$$

$$=\frac{(\operatorname{sen}x+\cos x)^2}{(\operatorname{sen}x-\cos x)^2}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{\cos x}\right)^2}{\left(\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}-\dfrac{\cos x}{\cos x}\right)^2}$$

Dividiendo numerador y denominador por $\cos^2x\neq 0$

$$=\frac{(\tan x+1)^2}{(\tan x-1)^2}$$

$$\text{MD}:\frac{(\tan x+1)^2}{(\tan x-1)^2}$$

MI = MD. Luego, la igualdad es una identidad para todos los valores admisibles de la variable.

En esta variante I, hemos sustituido 1 por $\operatorname{sen}^2x+\cos^2x$, o simplemente hemos utilizado la identidad $(\operatorname{sen}x\pm\cos x)^2=1\pm\operatorname{sen}2x$. Observa que en ocasiones se hace necesario realizar transformaciones equivalentes que, en apariencia, hacen más compleja la expresión.

Variante II. Transformando el miembro derecho:

$$\text{MD}:\frac{(\tan x+1)^2}{(\tan x-1)^2}=\frac{\tan^2x+2\tan x+1}{\tan^2x-2\tan x+1}=\frac{(1+\tan^2x)+2\tan x}{(1-\tan^2x)-2\tan x}$$

$$\frac{\dfrac{1}{\cos^2x}+2\tan x}{\dfrac{1}{\cos^2x}-2\tan x}=\frac{\dfrac{1+2\tan x\cdot\cos^2x}{\cos^2x}}{\dfrac{1-2\tan x\cdot\cos^2x}{\cos^2x}}\ (\cos x\neq 0)$$

$$\frac{1+2\tan x\cdot\cos^2 x}{\cancel{\cos^2 x}}\Big/\frac{1-2\tan x\cdot\cos^2 x}{\cancel{\cos^2 x}}=\frac{1+\frac{2\operatorname{sen} x}{\cancel{\cos x}}\cdot\cancel{\cos^2 x}}{1-\frac{2\operatorname{sen} x}{\cancel{\cos x}}\cdot\cancel{\cos^2 x}}=\frac{1+2\operatorname{sen} x\cdot\cos x}{1-2\operatorname{sen} x\cdot\cos x}=\frac{1+\operatorname{sen} 2x}{1-\operatorname{sen} 2x}$$

$$\text{MI}=\frac{1+\operatorname{sen} 2x}{1-\operatorname{sen} 2x}$$

MI = MD. Luego, la igualdad es una identidad para todos los valores admisibles de la variable. ◆

¡Atención!

En la demostración de identidades es necesario recordar y utilizar:

- Las identidades trigonométricas fundamentales.
- Las fórmulas de adición.
- Las operaciones con expresiones algebraicas.
- Los distintos casos de descomposición factorial y productos notables.
- La simplificación de expresiones algebraicas.
- El cálculo con números, con radicales, con potencias y con logaritmos.

¡Atención!

Para la demostración de identidades te sugerimos:

1.º Iniciar la demostración por el miembro que te ofrezca más posibilidades para transformar. Si estás indeciso aplica el procedimiento de trabajar en ambos miembros.

2.º Si es posible utiliza la descomposición en factores o simplificar las expresiones.

3.º Si no tienes idea, por dónde empezar a trabajar, reduce todas las expresiones a senos y cosenos.

4.º Ten presente comprobar que todas las transformaciones son válidas en el dominio de definición de la identidad.

Conéctate

Accede al sitio www.cubaeduca.cu en la sección curricular, busca en undécimo grado Matemática, la lección Identidades trigonométricas, analiza los recursos que en ella aparecen y resuelve el ejercicio propuesto.

Ejercicios del epígrafe Demostración de identidades trigonométricas

1. Determina los valores admisibles de la variable en cada una de las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{1}{\cos x}$ b) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha}$ c) $\dfrac{\cot x}{\cos x + 1}$

d) $\tan\theta \cdot \cos\theta$ e) $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\tan\theta - 1}$ f) $\tan\theta - \cot\theta$

2. Determina si las siguientes igualdades son identidades. Fundamenta.

a) $\operatorname{sen}\gamma = \tan\gamma \cdot \dfrac{1}{\cos\gamma}$ b) $\dfrac{1}{\cos x} = \operatorname{sen} x + 1$

c) $\dfrac{\cos\rho}{\operatorname{sen}\,\rho} - \tan\rho = 2$ d) $\operatorname{sen} x - \tan x = \cos x - 1$

e) $\tan x \cdot \cos x = \operatorname{sen} x$ f) $\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta} = \tan\theta$

g) $\dfrac{\tan x + 1}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{1}{\cos x}$ h) $\tan 2\alpha - \cot 2\alpha = 0$

i) $\operatorname{sen} 2x - \cos x + 1 = 0$ j) $\dfrac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \operatorname{sen}^2 x$

k) $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 + (\operatorname{sen} x - \cos x)^2 = 20$

3. Demuestra que las siguientes igualdades no son identidades.

a) $\operatorname{sen}^2 x = 1 + \cos^2 x$ b) $\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta} + 1$

c) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} = 1 - \dfrac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$ d) $\tan^2 x + \cot^2 x = 1$

e) $\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x = 1$

4. Demuestra que las siguientes igualdades son identidades:

a) $(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)^2 = 2$ b) $\dfrac{\cos^2\varphi}{\operatorname{sen}\varphi \cdot \cos\varphi} = \cot\varphi$

c) $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 x \cdot \tan^2 x = \tan^2 x$ d) $\tan\delta \cdot \cos\delta = \operatorname{sen}\delta$

e) $\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x = \operatorname{sen} x$ f) $\dfrac{\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x}{\cos x} = \tan x$

g) $\operatorname{sen}^2\theta\left(1 + \dfrac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\right) = 1$ h) $\dfrac{\cos\gamma}{1 + \operatorname{sen}\gamma} + \dfrac{\cos\gamma}{1 - \operatorname{sen}\gamma} = \dfrac{2}{\cos\gamma}$

i) $\operatorname{sen}^2 x + \tan^2 x + \cos^2 x + \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1+\operatorname{sen}^2 x}{1-\operatorname{sen}^2 x}$

j) $\tan^2\theta - \dfrac{1}{\cos^2\theta} = -1$

k) $\dfrac{\cos\theta}{1-\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{1+\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

l) $\tan^2\theta\left(1+\cot^2\theta\right) = \dfrac{1}{1-\operatorname{sen}^2\theta}$

m) $\dfrac{\tan\theta - \cot\theta}{\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta} - \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}$

n) $\cot\beta + 1 = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\beta}\left(\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\right)$

ñ) $\dfrac{\dfrac{1}{\cos\theta} + \tan\theta}{\dfrac{1}{\cos\theta} - \tan\theta} = \dfrac{1+2\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}$

o) $\dfrac{\cos 2x + 2\cos x + 1}{\cos x\left(\cos x + 1\right)} = 2$

p) $\tan x + \cot x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}$

q) $\cos\alpha + \cos\left(\dfrac{2\pi}{3} - \alpha\right) + \cos\left(\dfrac{2\pi}{3} + \alpha\right) = 0$

r) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\beta} + \dfrac{1}{\cos^2\beta} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\beta \cdot \cos^2\beta}$

s) $\tan\beta = \dfrac{\operatorname{sen} 2\beta}{1 + \cos 2\beta}$

t) $\operatorname{sen}^2 x\left(1+\cot^2 x\right) = 1$

u) $\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)$

5. Prueba la validez de las siguientes igualdades para los valores admisibles de la variable:

a) $\tan x \cdot \operatorname{sen} x + \cos x = \sec x$

b) $\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)\left(\tan^2 x + 1\right) = 1$

c) $\dfrac{\operatorname{sen} x \cdot \cot x + \cos x}{\cot x} = 2\operatorname{sen} x$

d) $\dfrac{1}{1+\operatorname{sen} x} + \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \csc^2 x$

e) $\dfrac{1}{1+\operatorname{sen} x} + \dfrac{1}{1-\operatorname{sen} x} = 2\sec^2 x$

f) $\dfrac{\operatorname{sen}^2\left(90^\circ - \alpha\right)}{\operatorname{sen}\alpha} - \dfrac{\tan^2\left(90^\circ - \alpha\right)}{\operatorname{sen}\alpha} = 0$

h) $\dfrac{\operatorname{sen}\left(180^0 - \beta\right)}{\tan\left(180^0 + \beta\right)} \cdot \dfrac{\cot\left(90^0 - \beta\right)}{\tan\left(90^0 - \beta\right)} \cdot \dfrac{\cos\left(360^0 - \beta\right)}{\operatorname{sen}\left(-\beta\right)} = -\operatorname{sen}\beta$

i) $\left(1-\tan^2 x\right)\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right) = \left(1-\sqrt{2}\operatorname{sen} x\right)\left(1+\sqrt{2}\operatorname{sen} x\right)$

6. Transforma en producto:

a) $1 + 2\cos\alpha + \cos 2\alpha$

b) $\dfrac{1 + \operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha}{\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2}}$

7. Demuestra las siguientes identidades para todos los valores admisibles de la variable.

a) $(\operatorname{sen} x - \cos x)^2 = 1 - \operatorname{sen} 2x$

b) $\cot^2 x = \cos^2 x + (\cot x \cdot \cos x)^2$

c) $\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = (\operatorname{sen} x + \cos x)(1 - \operatorname{sen} x \cdot \cos x)$

d) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right) = \frac{\cos\beta - \sqrt{3}\operatorname{sen}\beta}{2}$

e) $\operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha}{\sqrt{2}}$

f) $3(1 - 2\operatorname{sen}^2\theta) = 3\operatorname{sen}\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

8. Accede a la sección curricular de CubaEduca y realiza los ejercicios de autoevalución. Comprueba tu aprendizaje.

9. Crea un ejercicio de demostración en que tengas que utilizar no menos de dos identidades trigonométricas estudiadas y que requieran de la necesidad de realizar operaciones algebraicas.

Resolución de ecuaciones trigonométricas

Seguramente recuerdas la resolución de ecuaciones que realizaste en el grado anterior, ahora las retomaremos y deberás aplicar las nuevas transformaciones y recursos matemáticos que has aprendido.

Recuerda que...

Una ecuación es una igualdad donde al menos existe una variable. Cualquier valor de la variable que satisface la ecuación es una de sus soluciones y todas las soluciones forman el conjunto solución.

No existen reglas generales ni algoritmos de soluciones absolutos para la resolución de ecuaciones trigonométricas. En muchos casos, los siguientes procedimientos resultan de utilidad para reducir las ecuaciones a una de la forma:

$\operatorname{sen} x = a$, $\cos x = b$, $\tan x = c$, $\cot x = d$.

¡Atención!

Para la resolución de ecuaciones trigonométricas te ofrecemos las siguientes ideas:

1.º Expresa todas las razones trigonométricas que aparecen en la ecuación con el mismo ángulo aplicando identidades.
2.º Expresa todas las razones trigonométricas en término de una sola razón.
3.º Resuelve la ecuación planteada, haciendo transformaciones, descomponiendo o cualquier otro trabajo algebraico.
4.º Determina los signos, las fórmulas de reducción y los ángulos coterminales de las soluciones de la ecuación transformada.
5.º Determina los valores que satisfacen la ecuación original y expresa las soluciones de acuerdo con el dominio de definición de la ecuación original.

Ejemplo 3.22

Determinar el conjunto solución de la siguiente ecuación
$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x = 0$

Resolución:

$\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x = 0$ Aplicar la identidad correspondiente a sen 2x

$\operatorname{sen} x(1 - 2\cos x) = 0$ Extraer factor común.

$\operatorname{sen} x = 0$ o $1 - 2\cos x = 0$ Igualar ambos factores a cero.

$x_1 = k\pi$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$\alpha = \frac{\pi}{3}$ ángulo auxiliar

Como $\frac{1}{2}$ es positivo implica que las soluciones estarán donde los valores del coseno son positivos, o sea, en el I y IV cuadrantes, de donde resulta que, en el primer cuadrante, la razón es positiva, que en este caso siempre coincide con el ángulo auxiliar $\alpha = x = \frac{\pi}{3}$ y, en el IV cuadrante, la fórmula $2\pi - x = \alpha$, o bien, $2\pi - x = \frac{\pi}{3}$

$2\pi - \frac{\pi}{3} = x$. Luego, $x = \frac{5\pi}{3}$.

Luego $x_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ $x_3 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

Por tanto, el conjunto solución de la ecuación es:

$S = \left\{ k\pi;\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \right\}$. ◆

Ejemplo 3.23

Resolver la ecuación $\cos 2x - \cos x = 0$ en el intervalo $[0;2\pi)$.

Resolución:

Como puedes observar, los argumentos de las razones trigonométricas que aparecen en esta ecuación son diferentes, luego, debemos lograr que sean iguales.

Transformando a una sola razón, se obtiene

$2\cos^2 x - 1 - \cos x = 0$

$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

Descomponiendo en factores,

$(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$

Igualando cada factor a cero $2\cos x + 1 = 0$ o $\cos x - 1 = 0$

Resolviendo las ecuaciones lineales, obtenemos:

$\cos x = -\frac{1}{2}$ o $\cos x = 1$

Y, retornando las variables a su valor inicial se obtiene que

$\alpha = \frac{\pi}{3}$ (ángulo auxiliar)

Observando que el signo de la razón de $\cos x$ es $-\frac{1}{2}$ (negativo), se puede afirmar que la razón coseno es negativa en el II y III cuadrantes. Aplicando las respectivas fórmulas para el II y III cuadrantes, se obtiene que: $x_1 = \frac{2\pi}{3}$ y $x_2 = \frac{4\pi}{3}$, y para $\cos x = 1$ se obtiene que: $x_3 = 0$ y $x_4 = 2\pi$ en el intervalo $[0;2\pi]$

Al observar el dominio de definición de esta ecuación $[0;2\pi)$, las soluciones de la ecuación planteada son $0; \frac{2\pi}{3}$ y $\frac{4\pi}{3}$ ◆

Ejemplo 3.24

Dadas las expresiones trigonométricas:

$A(x) = \cos x$ y $B(x) = \text{sen}^2 x - 1$

a) Determinar los valores reales de x para los cuales la expresión $A(x)$ se anula.

b) Resolver la ecuación $B(x) = 0$

c) ¿Para qué valores de $\{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x \leq \pi\}$ se cumple que: $A(x) = -B(x)$?

Resolución:

a) Para determinar los valores reales para los cuales la expresión $A(x)$ se anula basta resolver la ecuación $A(x) = 0$, o sea, $\cos x = 0$ la cual tiene solución para $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$, en el intervalo $[0;2\pi]$

Por tanto, los valores reales de x que anulan la expresión $A(x)$ son $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$.

b) $B(x) = \text{sen}^2 x - 1 = 0$ es una ecuación cuadrática sin término lineal. Como su término independiente es –1, se descompone como una diferencia de cuadrados:

$(\text{sen}\, x - 1)(\text{sen}\, x + 1) = 0$

$(\text{sen}\, x - 1) = 0$ o $(\text{sen}\, x + 1) = 0$

$\text{sen}\, x = 1$ o $\text{sen}\, x = -1$

Y si aplicamos el despeje del seno en la ecuación $\text{sen}^2 x - 1 = 0$ se obtiene $\text{sen}\, x = \pm\sqrt{1}$;

Luego, se buscan los valores de la variable que son soluciones de la ecuación.

Para el sen $x = 1$ le corresponde $x = \frac{\pi}{2}$ y para el sen $x = -1$, le corresponde $x = \frac{3\pi}{2}$, en el intervalo $[0;2\pi]$

Por tanto, los valores reales de x que satisfacen a la ecuación $B(x) = 0$ son $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) De la ecuación $A(x) = -B(x)$ se obtiene

$A(x) + B(x) = \cos x + \text{sen}^2 x - 1 = 0$

$\cos x + 1 - \cos^2 x - 1 = 0$	Aplicar la identidad $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.
$\cos x + \cos^2 x = 0$	Reducir términos semejantes
$\cos x(1 + \cos x) = 0$	Descomponer en factores
$\cos x = 0$ o $(1 + \cos x) = 0$	Igualar a 0 cada factor y despejando cos x
$\cos x = 0$ $\cos x = -1$	Despejar
$x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$	$x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Al observar el dominio de definición de la ecuación $\{x \in \mathbb{R}: 0 \le x \le \pi\}$; los valores para los cuales se cumple que $A(x) = -B(x)$ son $x_1 = \frac{\pi}{2}$ y $x_2 = \pi$ ◆

Ejemplo 3.25

¿Para qué valores reales de $x \in [0; 2\pi]$ se cumple que $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$?

Resolución:

Variante 1

$\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x + \cos^2 x = 1$ Elevar al cuadrado ambos miembros para utilizar las identidades fundamentales y desarrolla el binomio al cuadrado

$2\operatorname{sen} x \cdot \cos x + 1 = 1$ Aplicar la identidad: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$2\operatorname{sen} x \cdot \cos x = 0$ Dividir ambos miembros entre 2 y efectúar

$\operatorname{sen} 2x = 0$ Aplicar la identidad $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x$ hacia atrás.

$2x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$2x = k\pi \mid : 2$

$x = \frac{k\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$ →

- Para $k = 0$ $\quad x_1 = 0$
- Para $k = 1$ $\quad x_2 = \frac{\pi}{2}$
- Para $k = 2$ $\quad x_3 = \pi$
- Para $k = 3$ $\quad x_4 = \frac{3\pi}{2}$
- Para $k = 4$ $\quad x_5 = 2\pi$.

¡Atención!

Las soluciones que se obtienen a partir de $k < 0$ y $k > 4$ no es necesario calcularlas porque quedan fuera del intervalo de solución, que es: $[0; 2\pi]$.

En esta ecuación es necesario hacer la comprobación, pues se realiza la operación de elevar al cuadrado.

Para $x_1 = 0$ $\operatorname{sen} 0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1$ se cumple la igualdad, por tanto: $x_1 = 0$ es solución de la ecuación.

Para $x_2 = \frac{\pi}{2}$ $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1$ se cumple la igualdad, por tanto:

$x_2 = \frac{\pi}{2}$ es solución de la ecuación.

Para $x_3 = \pi$ $\operatorname{sen}\pi + \cos\pi = 0 - 1 = -1$ no se cumple la igualdad, por tanto:

$x_3 = \pi$ no es solución de la ecuación.

Para $x_4 = \dfrac{3\pi}{2}$ $\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2} + \cos\dfrac{3\pi}{2} = -1 + 0 = -1$ no se cumple la igualdad, por tanto:

$x_4 = \dfrac{3\pi}{2}$ no es solución de la ecuación.

Para $x_5 = 2\pi$ $\operatorname{sen}2\pi + \cos 2\pi = 0 + 1 = 1$ se cumple la igualdad, por tanto:

$x_5 = 2\pi$ es solución de la ecuación.

Luego, los valores para los cuales se cumple que sen x + cos x = 1 son

$x_1 = 0;\ x_2 = \dfrac{\pi}{2}\ ;\ x_5 = 2\pi$

Resolución:

Variante 2

$\operatorname{sen}x + \cos x = 1 \mid \cdot \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}$

Multiplicando ambos miembros por $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}$

$\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4} \cdot \operatorname{sen}x + \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4} \cdot \cos x = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}$

$\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\operatorname{sen}x + \cos\dfrac{\pi}{4}\cos x = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}$

Aplicando la identidad:
$\cos x \cdot \cos y \mp \operatorname{sen}x \cdot \operatorname{sen}y \Rightarrow \cos(x \pm y)$

$\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}$

De donde $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\dfrac{\pi}{4}$ (ángulo auxiliar)

$\cos(+) \rightarrow \begin{cases} I\,cuad: \dfrac{\pi}{4} \\ IV\,cuad: 2\pi - \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

Como el coseno es positivo, los valores se encuentran en el I y IV cuadrantes.

Conéctate

Accede al sitio www.cubaeduca.cu en la sección curricular, busca en undécimo grado Matemática, la lección Ecuaciones trigonométricas, realiza la actividad 1 y comprueba el resultado obtenido.

Ejercicios del epígrafe Resolución de ecuaciones trigonométricas

1. Determina el conjunto solución de las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $2\operatorname{sen}^2\alpha - 7\operatorname{sen}\alpha + 3 = 0$

b) $4\operatorname{sen}^2 x + 1 = 4\operatorname{sen} x$

c) $5\cos^2 x = 9 - 9\operatorname{sen} x$

d) $\operatorname{sen}\gamma + \cos\gamma = \sqrt{2}$

e) $3\cot^2 x - \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = 1$

f) $3(1 - \operatorname{sen} x) = 1 + \cos 2x$

g) $\cos 2\beta + 5\cos\beta = 2$

h) $3(1 + \cos\delta) = \operatorname{sen} 2\delta \cdot \tan\delta$

i) $4\cos^2\theta + 8\operatorname{sen}\theta = -1$

j) $\tan\beta + \cot\beta = 2$

k) $2\cos^2\varphi + 1 = -5\operatorname{sen}\varphi$

2. Resuelve la ecuación $\cos 2\beta = \dfrac{1}{2}\cos\beta - \operatorname{sen}^2\beta$ para $0 \le \beta \le 2\pi$

3. ¿Para qué valores de x se cumple que: $\cos 2x + 2 = 3\cos x - \operatorname{sen}^2 x$?

4. Sean las expresiones trigonométricas:

$A(x) = 4\cos 2x$ y $B(x) = \cos x + 1$

a) Comprobar si se cumple que $B\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) = \dfrac{3}{2}$

b) ¿Cuáles soluciones reales satisfacen la ecuación $\sqrt{A(x) - B(x)} = 2$?

5. Dadas las expresiones trigonométricas:

$M(x) = \operatorname{sen} 2x - 2\operatorname{sen} x$ y $N(x) = \operatorname{sen}^2 x + (\operatorname{sen} x + \cos x)^2$

a) Calcula $M\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + N(\pi)$

b) ¿Para qué valores de x se cumple que $\dfrac{M(x)}{N(x)} = \tan\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)$?

6. A partir de las expresiones trigonométricas siguientes:

$P(x) = \cos 2x + 2\operatorname{sen} x + 3$ y $Q(x) = (2 - \operatorname{sen} x)^2$

determina, en el intervalo $[0; 2\pi]$, el conjunto solución de la ecuación:

$P(x) = \sqrt{Q(x)}$.

7. Dadas las expresiones trigonométricas:

$T(x) = \cos 2x + 3\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x$ y $S(x) = 5\operatorname{sen} x - 2$

a) Calcula $T(3\pi)$.

b) Resuelve la ecuación $T(x) - S(x) = 0$ en el intervalo de $[0;2\pi]$.

8. Halla el conjunto solución de la ecuación

$2\ \operatorname{sen} 2\theta \cdot \cot\theta - \cos 2\theta = 2\cos\theta$ para $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$

9. Accede al portal CubaEduca (www.cubaeduca.cu) y realiza todos los ejercicios propuestos de autoevaluación de la lección Ecuaciones trigonométricas propuestas.

10. Elabora dos ecuaciones en que apliques al menos dos identidades trigonométricas y que tengan como conjunto solución:

a) $S = \{x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

b) $S = \left\{x = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

3.4 Funciones trigonométricas. Gráfico y propiedades

Las funciones trigonométricas tienen innumerables aplicaciones en la vida cotidiana, especialmente las llamadas armónicas. La forma de una de ellas se muestra en la figura 3.20 como objeto arquitectónico y se corresponde con la forma gráfica de una de las funciones que estudiarás.



Fig. 3.20

¿Con qué función se corresponde?
¿Qué otras funciones?

En este epígrafe conocerás nuevas funciones relacionadas con los contenidos trigonométricos que posees y de gran aplicación en el desarrollo de la ciencia y la técnica.

En el subepígrafe "Las funciones de ecuación $y = a$ sen $(bx + c)$ y $y = a$ cos $(bx + c)$ (con a, b y c parámetros reales; $b \neq 0$). Oscilaciones armónicas", describiremos dos de ellas en fenómenos de gran impacto social: la música, la radio y la televisión.

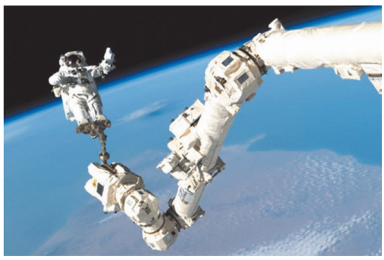


Fig. 3.21

El Canadarm 2 es un brazo manipulador robótico gigantesco de la Estación Espacial Internacional. Este manipulador es operado controlando los ángulos de sus articulaciones (figura 3.21). ¿Sabes cómo funciona?

Para calcular la posición final del astronauta en el extremo del brazo requiere de un uso repetido de las funciones trigonométricas de esos ángulos, que se forman por los variados movimientos que se realizan.

De la historia

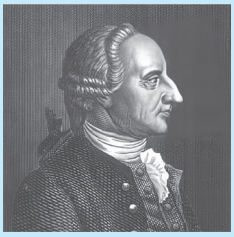


Fig. 3.22

Abraham Gotthelf Kästner (1719–1800), matemático alemán, fue quien definió las funciones trigonométricas como meros números más que razones en triángulos, cuando en 1759 escribió textualmente: Si x denota el ángulo expresado en grados, entonces las expresiones sen x, cos x, tan x, etc., son números que corresponden a cada ángulo.

Como cada número real representa la medida en radianes de un ángulo, esto quiere decir que al número real se pueden hacer corresponder las razones trigonométricas de ese ángulo.

Todas las funciones trigonométricas son periódicas, pues existe un número real T, tal que, para todo elemento, x, del dominio de la función se cumple que.

$f(x) = f(x + T)$, donde el número T recibe el nombre de período de la función.

Definición de la función seno. Representación gráfica y propiedades

Definición 3.2

Se llama función **seno** a la función que a cada número real x, se le hace corresponder sen x, es decir, el conjunto de pares ordenados $\{(x;\operatorname{sen} x): x \in \mathbb{R}\}$.

Como la función seno satisface $\operatorname{sen}(x+2k\pi)=\operatorname{sen} x$, $k \in \mathbb{Z}$, basta representarla en un intervalo de longitud 2π. Para hacerlo en el intervalo $[0;2\pi]$ calculamos algunos valores y lo representamos en una tabla como la siguiente:

Tabla 3.8

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	
sen x	0	0,5	0,71	0,87	1	0,87	0,71	0,5	
x	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sen x	0	–0,5	–0,71	–0,87	–1	–0,87	–0,71	–0,5	0

Al representar estos pares ordenados en un sistema de coordenadas rectangulares, se obtiene una gráfica como la que se muestra en la figura 3.23 a):

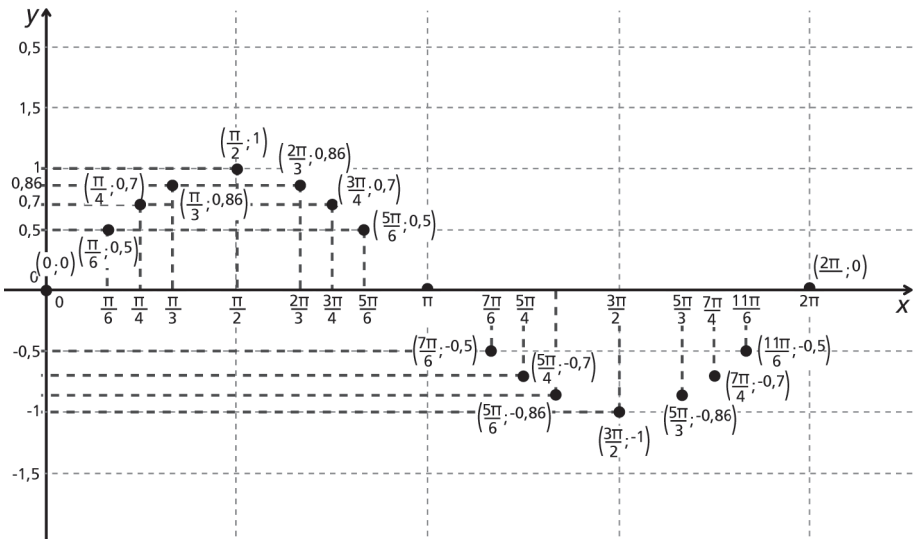


Fig. 3.23 a

Si aumentamos el número de puntos se obtiene una idea cada vez más aproximada de la gráfica de la función seno como se muestra en la figura 3.23 b).

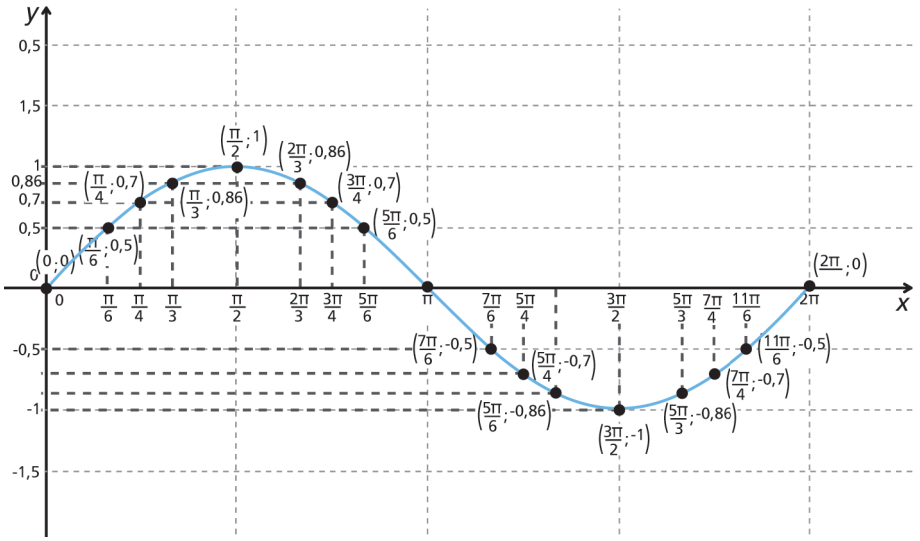


Fig. 3.23 b

Como puedes observar, en los pares ordenados representados en la gráfica los valores de x no están expresados en función de π. En general, la función seno está formada por los pares ordenados (x; sen x) con $x \in \mathbb{R}$ y su representación gráfica es la que se muestra en la figura 3.24.

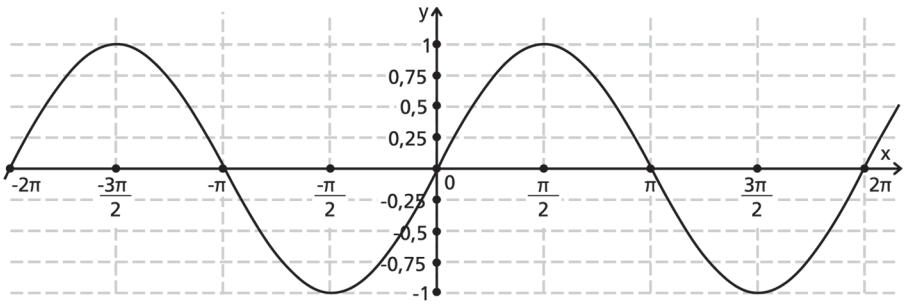


Fig. 3.24

En este gráfico pueden apreciarse algunas de las propiedades de la función seno.

Tabla 3.9

Dominio de definición: $\mathbb{R}$ o $\{x \in \mathbb{R}\}$	La proyección del gráfico sobre el eje x cubre todo el eje.

Conjunto Imagen: $[-1;1]$	La proyección del gráfico sobre el eje y cubre este intervalo pues $\lvert\operatorname{sen} x\rvert \leq 1$.
Ceros: $x = k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$	En estos puntos $\operatorname{sen} x = 0$ y la gráfica corta al eje de las abscisas, o sea, al eje x.
Intercepto con eje y: $y_o = 0$	La gráfica corta al eje de las ordenadas cuando $x = 0$, o sea, $y = \operatorname{sen}(0) = 0$.
Paridad: es impar	La gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas pues $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$
Monotonía: no es monótona	Se alternan intervalos de crecimiento y decrecimiento.
Periodicidad: es periódica Período 2π	Se obtiene repitiendo infinitamente el intervalo principal de longitud 2π.
Valor máximo: $y_1 = 1$	Es el mayor valor que alcanza la función.
Valor mínimo: $y_2 = -1$	Es el menor valor que alcanza la función.
Inyectividad: no es inyectiva	Si se traza una recta paralela al eje de las abscisas interseca al gráfico de la función en más de un punto.
Signos de la función en el intervalo principal: $(0;\pi)$ Positiva y de $(\pi;2\pi)$ Negativa	Positiva, el gráfico está por encima del eje x. Negativa, el gráfico de la función está por debajo del eje x.

Aunque la función seno no es monótona, en cada intervalo sí lo es, por lo que es muy fácil recordar cómo varía la función seno en el intervalo principal $[0\,;2\pi]$:

Tabla 3.10

Subintervalo	$\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$	$\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$	$\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$	$\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$
Variación	creciente desde 0 a 1	decreciente desde 1 a 0	decreciente desde 0 a –1	creciente desde –1 a 0
Signo	+ $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$	+ $\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$	– $\pi < x \leq \frac{3\pi}{2}$	– $3\frac{\pi}{2} \leq x < 2\pi$

¡Atención!

Si recuerdas el gráfico de la función seno en el intervalo $[0\,;2\pi]$, puedes fijar con facilidad estas propiedades.

Ejemplo 3.26

¿Cuáles de los siguientes valores pueden ser imágenes de la función seno?

$0{,}5;\ 3;\ \sqrt{2};\ \frac{\sqrt{3}}{3};\ 0;\ -1;\ -1{,}5;\ -0{,}4;\ -\frac{1}{2}$

Resolución:

Como el conjunto imagen de la función seno es el intervalo $[-1;1]$, no pueden ser considerados los valores que no pertenecen a ese intervalo: $3;\ \sqrt{2}$ y $-1{,}5$. Entonces la función seno puede tener como imágenes a: $0{,}5;\ \frac{\sqrt{3}}{3};\ 0;\ -1;\ -0{,}4;\ -\frac{1}{2}$. ◆

Ejemplo 3.27

Analizar la monotonía de la función seno en el intervalo dado:

a) $\left[\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$ b) $\left[\frac{7\pi}{6};2\pi\right]$

Resolución:

a) $\frac{3\pi}{4}$ es un ángulo del intervalo $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ y $\frac{5\pi}{4}$ es un ángulo del intervalo $\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$. En el intervalo $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ la función seno es decreciente y en el intervalo $\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ también como se observa la figura 3.25:

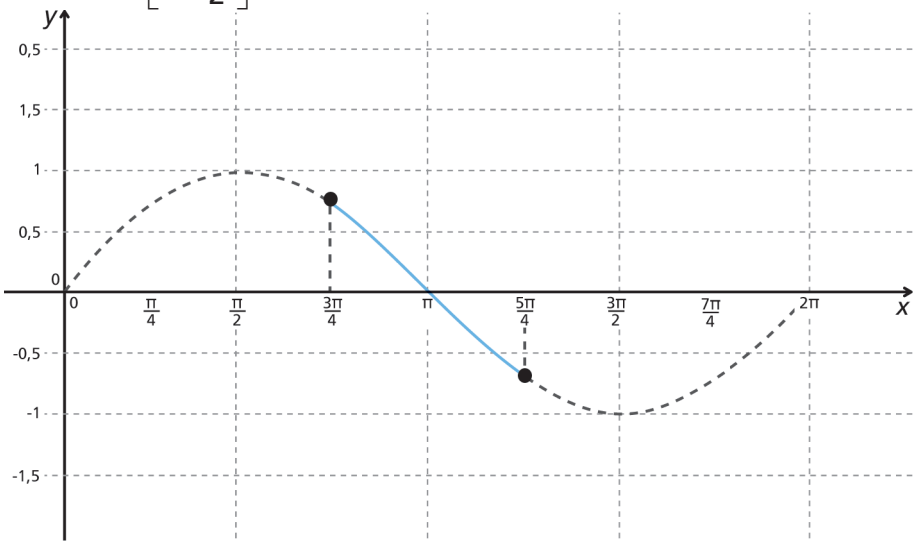


Fig. 3.25

Luego, la función es monótona decreciente en el intervalo dado.

b) $\frac{7\pi}{6}$ es un ángulo del intervalo $\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ y 2π es el extremo superior del intervalo $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$; la función seno es decreciente en el intervalo $\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ y creciente en el intervalo $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$ como se observa en la figura 3.26, luego no es un intervalo de monotonía y es necesario descomponerlo en dos subintervalos: $\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ y $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$.

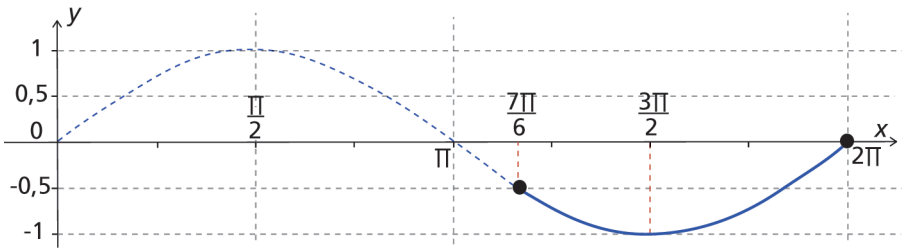


Fig. 3.26

Por tanto, la función seno es decreciente en el subintervalo $\left[\frac{7\pi}{6};\frac{3\pi}{2}\right]$ y creciente en $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$.

Ejemplo 3.28

Leer con detenimiento y resolver los incisos que aparecen a continuación:

a) Calcular los valores de la función *f* de ecuación $f(x)=\operatorname{sen}x$ para

$x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{4\pi}{3}$, $x=1{,}5$

b) ¿Cuáles de los siguientes números pueden ser valores de la función *f* de ecuación $f(x)=\operatorname{sen}x$?

$\sqrt{3}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4 ; $-\sqrt{2}$; $-\frac{1}{2}$; 0.

c) Determinar para qué valores de *x* la función *f* de ecuación $f(x)=\operatorname{sen}x$ alcanza los valores: $1;-1;\frac{1}{2}$

Resolución:

a) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{\pi}{4}$ es un ángulo notable y conocemos su valor.

$\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ es un ángulo del III cuadrante, de ahí el signo negativo.

1,5 no es un ángulo notable y debemos utilizar la tabla trigonométrica.

$$\operatorname{sen} 1{,}5 = \operatorname{sen}\left[1{,}5 \cdot \frac{180}{\pi}\right]^0 = \operatorname{sen} 86^0 = 0{,}998$$

b) Sabemos que $|\operatorname{sen} x| \le 1$ o $-1 \le \operatorname{sen} x \le 1$; luego, los valores de las imágenes de la función tienen que pertenecer al intervalo $[-1;1]$, o sea, no pueden alcanzar los valores $\sqrt{3}; 4; -\sqrt{2}$ y sí pueden alcanzar los valores $\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{2}; 0$.

c) Para contestar a estas preguntas se pueden resolver las ecuaciones sencillas $\operatorname{sen} x = 1$, $\operatorname{sen} x = -1$ y $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$. Ya sabemos obtener la solución de cada una de ellas:

Para $\operatorname{sen} x = 1$: $\left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x = (4k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Para $\operatorname{sen} x = -1$: $\left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x = (4k+3)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Para $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$: $\left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ o } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. ◆

Ejemplo 3.29

Interpretar gráficamente la ecuación sen x = 0,5.

Ya conocemos el conjunto solución de la ecuación sen x = 0,5

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ o } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Para la interpretación gráfica observemos que el conjunto solución debe estar formado por las abscisas de los puntos de intersección de la gráfica de la función seno con la recta y = 0,5, observa figura 3.27. En la gráfica puede comprenderse que este conjunto es infinito. ◆

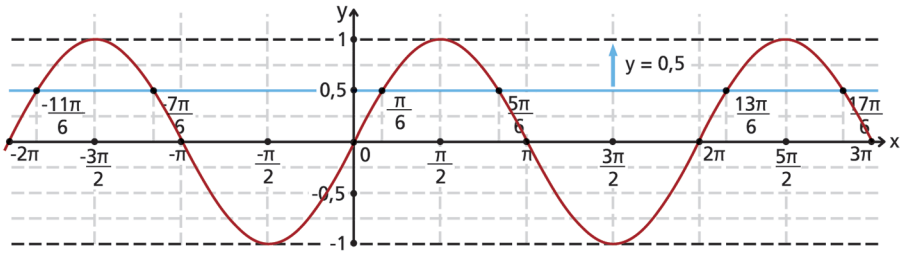


Fig. 3.27

En la gráfica también pueden apreciarse otras propiedades:

El valor máximo que alcanza la función seno es 1 y lo alcanza en los puntos de abscisa $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, o lo que es lo mismo $x = (4k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$; estos son los puntos de máximo de la función seno.

El valor mínimo que alcanza la función seno es –1 y lo alcanza en los puntos de abscisa $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi = (4k+3)\frac{\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$. Estos son los puntos de mínimo de la función seno.

Ejercicios del epígrafe Definición de la función seno. Representación gráfica y propiedades

1. Analiza si los pares ordenados siguientes pertenecen a la función *f* de ecuación

$f(x) = \operatorname{sen} x$.

a) $(-\pi;1)$ b) $\left(\frac{3\pi}{2};0\right)$ c) $\left(-\frac{7\pi}{2};1\right)$

d) $(18;0)$ e) $(12\pi;0)$ f) $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

g) $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{1}{2}\right)$ h) $\left(\frac{5\pi}{3};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ i) $\left(-\frac{7\pi}{6};\frac{1}{2}\right)$

j) $\left(\frac{19\pi}{2};-1\right)$

2. Determina para qué valores de *x* la función de ecuación *y* = sen *x* alcanza los valores:

$\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{4}$; $-0,1$; $\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$

3. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones tienen solución y cuáles no? Fundamenta.

a) $\operatorname{sen} x = 1,3$ b) $|\operatorname{sen} x| = 4$ c) $3\operatorname{sen} x = 2$

d) $4\operatorname{sen} x + 2 = 0$ e) $\operatorname{sen} x = -0,83$ f) $|\operatorname{sen} x| = \frac{1}{2}$

g) $-2\operatorname{sen} x = 4$ h) $3\operatorname{sen} x - 6 = -4$ i) $2\operatorname{sen} x = 0$

4. ¿Posee la función *f* de ecuación $f(x) = \operatorname{sen} x$ ceros en los intervalos siguientes? Determínalos, si existen, y comprueba utilizando el GeoGebra.

a) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$ b) $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ c) $[-\pi; \pi]$

d) $14 \leq x \leq 15$ e) $[-7; -3]$ f) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{2}$

5. Determina los signos de la función de ecuación $y = \text{sen } x$ en los siguientes intervalos.

a) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ b) $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ c) $\frac{\pi}{3} \leq x \leq 2\pi$

d) $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$ e) $\frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$ f) $\left[\frac{\pi}{2} : \frac{5\pi}{2}\right]$

g) $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$ h) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

6. Determina en qué valores de x que pertenecen a los siguientes intervalos la función de ecuación $y = \text{sen } x$ alcanza valores máximos o mínimos, determina, además, estos valores.

a) $0 \leq x \leq \pi$ b) $-\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ c) $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

d) $-2\pi \leq x \leq 0$ e) $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{2}$ f) $\pi \leq x \leq 3\pi$

g) $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ h) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$

7. Determina gráficamente y analíticamente los puntos de intersección de las gráficas de las funciones f y g. Compruébalo utilizando el asistente GeoGebra.

a) $f(x) = \text{sen } x$ y $g(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $f(x) = \text{sen } x$ y $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $f(x) = \text{sen } x$ y $g(x) = 0{,}7$

d) $f(x) = \text{sen } x$ y $g(x) = -0{,}5$

8. La siguiente gráfica (figura 3.28) corresponde a una función trigonométrica de la forma $f(x) = \text{sen } x$ en un subconjunto de $\mathbb{R}$.

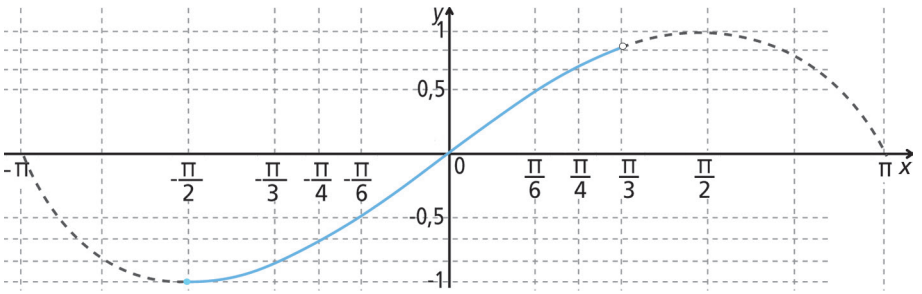


Fig. 3.28

Escoge el inciso con la respuesta correcta en cada caso:

8.1 El dominio de definición en el cual está definida la función representada es:

a) $\mathbb{R}$ b) $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{3}\right)$ c) $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{3}\right]$ d) $(-\pi;\ \pi)$

8.2 El conjunto imagen de la función f es:

a) $-1\le f(x)\le\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\mathbb{R}$ c) $-1\le f(x)\le 1$ d) $-1\le f(x)<\frac{\sqrt{3}}{2}$

8.3 El valor mínimo de la función es

a) 1 b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) -1 d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 4 La función en el intervalo representado cumple que:

a) es constante b) es decreciente

c) es creciente d) es creciente y decreciente

8.5 ¿Cuál de los siguientes puntos no pertenecen al gráfico de la función?

a) $\left(-\frac{\pi}{2};-1\right)$ b) $\left(-\frac{\pi}{6};-0{,}5\right)$ c) $\left(\frac{\pi}{6};0{,}5\right)$ d) $\left(\frac{\pi}{3};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Comprueba si es correcta la selección del 8.4 y 8.5 utilizando el GeoGebra.

9. La figura 3.29 corresponde a la gráfica de la función p de ecuación $p(x) = \text{sen } x$ en un subintervalo real.

a) Di el dominio de definición.

b) ¿Cuál es el conjunto imagen?

c) ¿Es impar la función?

Fundamenta.

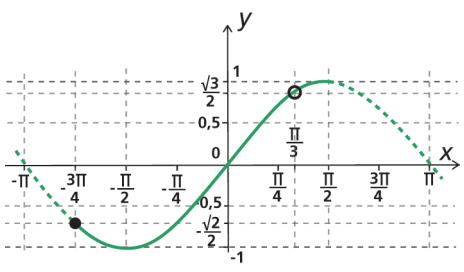


Fig. 3.29

d) ¿Para qué valores de x la función alcanza el máximo valor?

e) Di el intervalo donde la función es decreciente.

f) ¿En qué punto el gráfico corta al eje de las abscisas?

g) ¿El punto $\left(\frac{\pi}{3};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pertenece al gráfico de la función? Justifica.

h) Determina el intervalo donde la función es creciente y negativa.

i) ¿Será inyectiva la función? Fundamenta según la definición.

10. A continuación te mostramos el gráfico (figura 3.30) de la función de ecuación $y = \text{sen } x$.

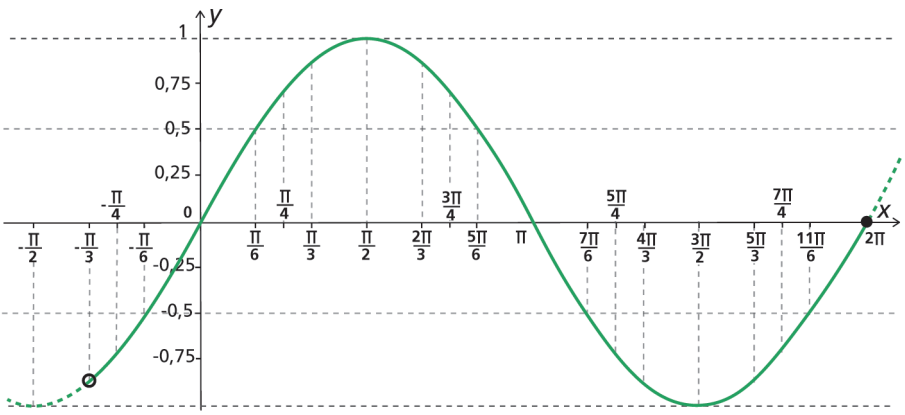


Fig. 3.30

Completa en tu libreta los espacios en blanco en cada caso:

10.1 El dominio de definición de la función representada es _____.

10.2 La función es decreciente y negativa en el intervalo _____.

10.3 La función es impar en el intervalo _____.

10.4 La gráfica corta a la recta $y = 0$, en los puntos de coordenadas _____ .

10.5 El valor máximo de la función es _____ y lo alcanza para x_1 =_____.

10.6 La función es positiva en el intervalo _____.

11. Accede al sitio www.cubaeduca.cu, busca la lección referente a Función seno y realiza las actividades interactivas de la sección de autoevaluación.

12. Investiga fenómenos de la vida que se modelen mediante la función seno y elabora un problema que se solucione con los recursos que ofrece esta función.

Definición de la función coseno. Representación gráfica y propiedades

En trigonometría es posible establecer relaciones entre el ángulo y el valor del coseno ¿por qué esta relación es una función? ¿qué características y propiedades tiene?

Definición 3.3

Se llama función **coseno,** a la función que a cada número real ***x*** le hace corresponder **cos *x*.**
Es decir, **el conjunto de pares ordenados** $\{(x;\cos x) : x \in \mathbb{R}\}$

Al igual que para la función seno, es suficiente representar gráficamente la función coseno en el intervalo $[0;2\pi]$. Calculemos algunos valores y construyamos la tabla 3.11:

Tabla 3.11

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
cos x	1	0,87	0,71	0,5	0	–0,5	0,71	–0,87
x	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
cos x	–1	–0,87	–71	–0,5	0	0,5	0,71	0,87

Al representar estos pares ordenados se tiene una gráfica como la que se muestra a continuación en la figura 3.31 a).

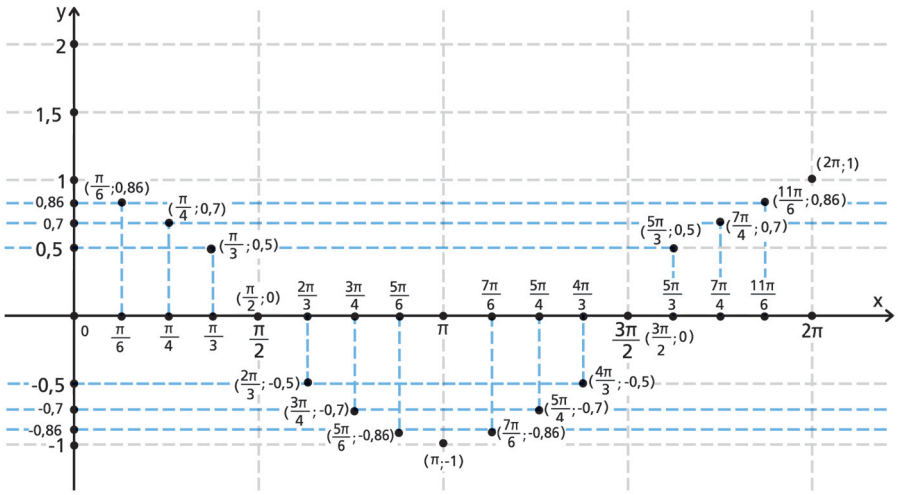


Fig. 3.31 a

Si aumentamos el número de puntos se obtiene una idea cada vez más aproximada de la gráfica de la función seno como se muestra en la figura 3.31 b.

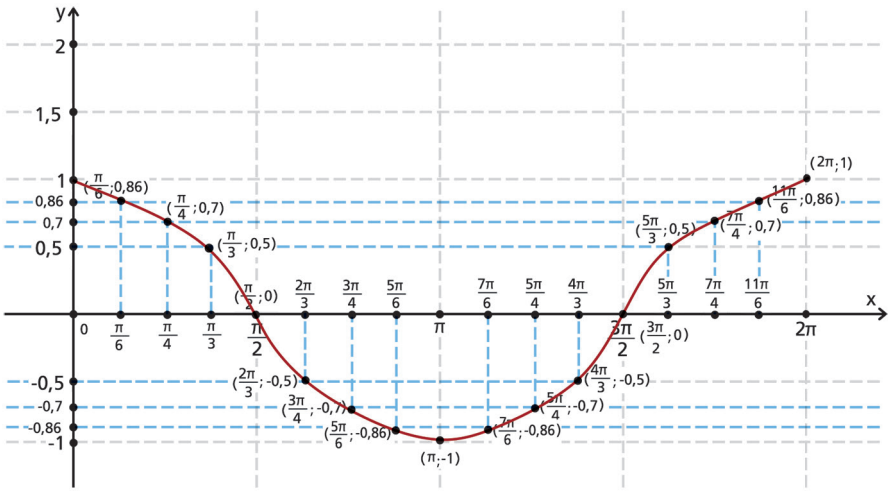


Fig. 3.31 b

Al igual que en el caso de la función seno, la gráfica de la función coseno en todo $\mathbb{R}$ se obtiene trasladando el gráfico correspondiente al intervalo $[0\,;2\pi]$ en ambos sentidos infinitamente. En otras palabras, esta función está formada por los pares ordenados (x; cos x). Su representación gráfica es la de la figura 3.32.

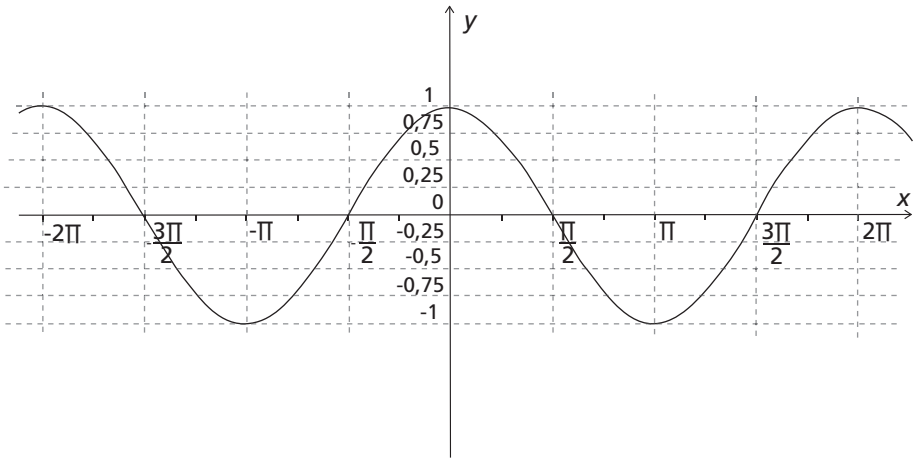


Fig. 3.32

También en este caso utilizamos el gráfico (tabla 3.12) para reconocer las propiedades de la función coseno:

Tabla 3.12

Dominio de definición: $\mathbb{R}$ o $\{x \in \mathbb{R}\}$	La proyección del gráfico sobre el eje x cubre todo el eje
Conjunto Imagen: $[-1;1]$	La proyección sobre el eje y cubre este intervalo pues $\lvert\cos x\rvert \leq 1$.
Ceros: $x = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$	En estos puntos cos x = 0 y la gráfica corta al eje de las abscisas, o sea, al eje x.
Intercepto con eje y : $y_o = 0$	La gráfica corta al eje de las ordenadas cuando x = 0, o sea, y = sen (0) = 0.
Paridad: es par	La gráfica es simétrica respecto al eje y pues cos $(-x) = \cos x$.
Monotonía: no es monótona	Se alternan intervalos de crecimiento y decrecimiento.
Periodicidad: Es periódica con Período 2π	Se obtiene repitiendo infinitamente el intervalo principal de longitud 2π.
Valor máximo: $y_1 = 1$	Es el mayor valor que alcanza la función.
Valor mínimo: $y_2 = -1$	Es el menor valor que alcanza la función.
Inyectividad: no es inyectiva	Si se traza una recta paralela al eje de las abscisas interseca al gráfico de la función en más de un punto.
Signos de la función en el intervalo principal: $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ y de $\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$ positiva y de $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ negativa	Positiva el gráfico está por encima del eje x. Negativa el gráfico de la función está por debajo del eje x.

Igual que la función seno, la función coseno es monótona, en los intervalos que se describen en la tabla 3.13. El cuadro que sigue resume la variación de la función coseno en el intervalo principal $[0\,;2\pi]$:

Tabla 3.13

Subintervalo	$\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$	$\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$	$\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$	$\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$
Variación	decreciente desde 1 a 0	decreciente desde 0 a –1	creciente desde –1 a 0	creciente desde 0 a 1
Signo	+ $0 \le x < \frac{\pi}{2}$	– $\frac{\pi}{2} < x \le \pi$	– $\pi \le x < \frac{3\pi}{2}$	+ $3\frac{\pi}{2} < x \le 2\pi$

¡Atención!

Si recuerdas el gráfico de la función coseno en el intervalo $[0;2\pi]$, puedes fijar con facilidad estas propiedades.

Ejemplo 3.30

Analizar la monotonía de la función coseno en el intervalo $[12,8;14,3]$

Resolución:

Al dividir 12,8 por 2π (6,28) encontramos que la parte entera del cociente es 2, luego 12,8 es coterminal con: $12,8 - 2 \cdot 6,28 = 0,24$

$0 < 0,24 < 1,57$; 0,24 es el ángulo del primer cuadrante.

Análogamente: $14,3 - 2 \cdot 6,28 = 1,74$ y como $1,57 < 1,74 < 3,14$; 1,74 es un ángulo del segundo cuadrante.

Luego la función coseno es decreciente en el intervalo dado (figura 3.33). ◆

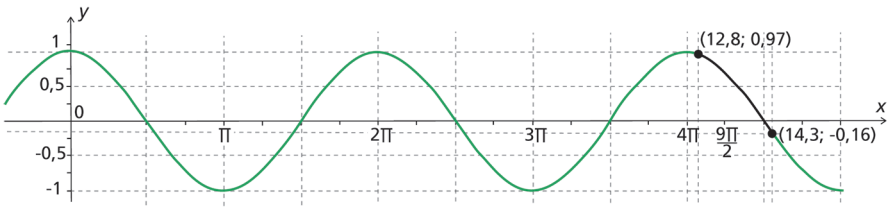


Fig. 3.33

Ejemplo 3.31

a) Calcular los valores de la función f de ecuación $f(x) = \cos x$ para $x = \frac{11\pi}{2}$; $x = -2\pi$; $x = 7,4$

b) Determina para qué valores de x la función $\cos x$ alcanza los valores siguientes:

$$-\frac{1}{2}\ ;\ \ \sqrt{2}\ ;\ 0.$$

Resolución:

a) $\cos\dfrac{11\pi}{2}=\cos\dfrac{3\pi}{2}=0$;

$\cos(-2\pi)=\cos 2\pi=1$;

$\cos 7,4=\cos\left[7,4\cdot\dfrac{180}{\pi}\right]^0=\cos 424^0=\cos 64,8^0=0,961.$

b) Para contestar a esta interrogante se deben resolver las ecuaciones sencillas:

$\cos x=-\dfrac{1}{2}$; $\cos x=\sqrt{2}$; $\cos x=0$.

Conocemos el conjunto solución de cada una de ellas:

Para $\cos x=-\dfrac{1}{2}$: $S=\left\{x\in\mathbb{R}: x=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi \ \text{ o } \ x=\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

Para $\cos x=\sqrt{2}$, como el $|\cos x|\le 1$, o sea, $-1\le\cos x\le 1$, no existe x tal que $\cos x=\sqrt{2}$ y, por tanto, no existen valores de x de la función $\cos x$ que alcance este valor por tanto $S=\varnothing$.

Para $\cos x=0$, $S=\left\{x\in\mathbb{R}: x=(2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. ◆

Ejemplo 3.32

Indicar el valor máximo y el valor mínimo de la función coseno en el intervalo dado:

a) $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{3\pi}{8}\right]$ b) $\left(\dfrac{3\pi}{5};\dfrac{4\pi}{3}\right]$ c) $\left[\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{13\pi}{4}\right]$

Resolución:

a) Ambos ángulos son del intervalo $\left[0:\dfrac{\pi}{2}\right]$, en este intervalo la función es decreciente y, por tanto, alcanza el máximo en $\dfrac{\pi}{6}$ y el mínimo en $\dfrac{3\pi}{8}$:

Valor máximo: $\cos\frac{\pi}{6} = 0,866$ Valor mínimo: $\cos\frac{3\pi}{8} = 0,383$

b) $\frac{3\pi}{5}$ es un ángulo del intervalo $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$, y $\frac{4\pi}{3}$ del intervalo $\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$, como la función coseno es decreciente en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$, y creciente en el intervalo $\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$, alcanza su valor mínimo en π que es el valor que separa a ambos intervalos. Para encontrar el valor máximo comparamos los valores en los extremos del intervalo:

$\cos\frac{3\pi}{5} = -0,309 > -0,5 = \cos\frac{4\pi}{3}$. Luego, el valor máximo:

$\cos\frac{3\pi}{5} = -0,309$ y el valor mínimo: $\cos\pi = -1$

c) $\frac{13\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} = \frac{31\pi}{12} > 2\pi$, luego este intervalo incluye un período completo de la función y necesariamente alcanza sus valores máximo y mínimo:

Valor máximo: 1 Valor mínimo: –1 ◆

Ejercicios del epígrafe Definición de la función coseno. Representación gráfica y propiedades

1. Analiza si los pares ordenados siguientes pertenecen a la función de ecuación $y = \cos x$

a) (0;1) b) $(\pi;1)$ c) $\left(\frac{9\pi}{2};0\right)$ d) $(-6\pi;1)$

e) (–2;1) f) $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ g) $\left(-\frac{\pi}{3};\frac{1}{2}\right)$ h) $\left(\frac{5\pi}{6};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

i) $\left(\frac{5\pi}{4};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ j) $\left(\frac{19\pi}{2};0\right)$

2. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones tienen solución y cuáles no? Fundamenta.

a) $\cos x = 0$ b) $4\cos x = 3$ c) $|\cos x| = 0,5$

d) $2\cos x - 3 = 0$ e) $|\cos H| = -2,3$ f) $\cos x = -2,3$

g) $2\cos x + 5 = 3$ h) $2\cos x = 3\sqrt{3}$

3. ¿Posee la función *f* de ecuación $f(x)=\cos x$ ceros en los intervalos siguientes? Determínalos si existen.

a) $-\pi \le x \le \frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{6} \le x \le 2\pi$ c) $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

d) $3 \le x \le 12$ e) $-2 \le x \le 0$ f) $-\frac{5\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{4}$

4. Determina el comportamiento de la función de ecuación $y=\cos x$ respecto a la monotonía en los intervalos siguientes:

a) $-\frac{\pi}{2} \le x \le 0$ b) $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$ c) $\pi \le x \le 3\pi$

d) $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ e) $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{3\pi}{4}$ f) $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$

5. Determina el signo de la función de ecuación $y = \cos x$ en los intervalos siguientes:

a) $[-\pi;\pi]$ b) $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ c) $-2\pi \le x \le 0$

d) $0 \le x \le \frac{3\pi}{4}$ e) $\left[\frac{\pi}{2};\frac{11\pi}{6}\right]$ f) $\frac{3\pi}{2} \le x \le 3\pi$

6. Determina en qué punto de los siguientes intervalos la función *g* de ecuación $g(x) = \cos x$ posee valores máximos o mínimos; determina, además, estos valores.

a) $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ b) $-\pi \le x \le \pi$ c) $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$

d) $0 \le x \le \pi$ e) $[\pi;5\pi]$ f) $\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{7\pi}{2}$

g) $\left[\frac{\pi}{2};3\pi\right]$ h) $-\frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi$

7. Determina gráficamente y analíticamente los puntos de intersección de los gráficos de las funciones, cuyas ecuaciones se dan a continuación, y compruébalo utilizando el asistente GeoGebra.

a) $h(x)=\cos x$ y $f(x)=0{,}5$

b) $h(x)=\cos x$ y $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $h(x)=\cos x$ y $g(x)=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

d) $h(x)=\cos x$ y $g(x)=0,2$

La figura 3.34, que se muestra a continuación, corresponde al gráfico de la función *h* que tiene como ecuación $h(x) = \cos x$ y está representada en un intervalo restringido de $\mathbb{R}$.

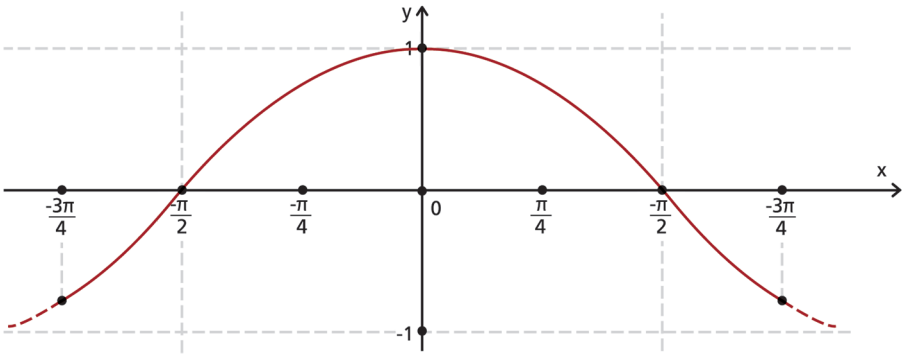


Fig. 3.34

Clasifica en verdaderas o falsas las siguientes preposiciones y justifica las que consideres falsas.

a) El dominio de definición de la función es $\left\{x \in \mathbb{R}: -\dfrac{3\pi}{4} < x < \dfrac{3\pi}{4}\right\}$.

b) La función es monótona creciente en todo su dominio.

c) $h(x) = h(-x)$.

d) El gráfico interseca al eje de las *y* en el punto (0;1).

e) La función no tiene ceros.

f) El valor mínimo de la función es –1.

g) El par ordenado $\left(\dfrac{3\pi}{4}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ pertenece al gráfico de la función representada.

h) El conjunto imagen de la función es $y \in \left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$.

8. Accede al sitio www.cubaeduca.cu, busca la lección referente a Función coseno y realiza las actividades interactivas propuestas en la sección de autoevaluación.

9. Investiga fenómenos de la vida que se modelen mediante la función coseno y elabora un problema que se solucione con los recursos que ofrece esta función.

Definición de la función tangente. Representación gráfica y propiedades

Definición 3.4

Se llama función **tangente,** a la función que a cada número real $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ se le hace corresponder tan x es decir, el conjunto de pares ordenados $\left\{(x;\tan x) : x \in \mathbb{R}; x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Como para la función tangente se cumple que: tan $(x + \pi)$ = tan x, es suficiente representarla en un intervalo de longitud π. Y como el dominio de la función tangente es el conjunto de los números reales que no son múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$, es decir, en los que la función coseno no se anula y, por tanto, está definida la tangente:

en símbolos: $\text{Dom}(\tan x) = \mathbb{R} \setminus \left\{x \in \mathbb{R} : x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ o

$\left\{x \in \mathbb{R} : x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$; entonces escogeremos el intervalo

$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ en el cual está definida para todos los valores de x en este intervalo.

Tabla 3.14

x	$-\frac{5\pi}{12}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{12}$	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$
tan x	–3,7	–1,7	–1	–0,58	–0,27	0	0,27	0,58	1	1,7	3,7

Al representar en un sistema de coordenadas los pares contenidos en la tabla 3.14, se obtiene una gráfica como la representada en la figura 3.35 a.

Si aumentamos el número de puntos se obtiene una idea cada vez más aproximada de la gráfica de la función seno como se muestra en la figura 3.35 b.

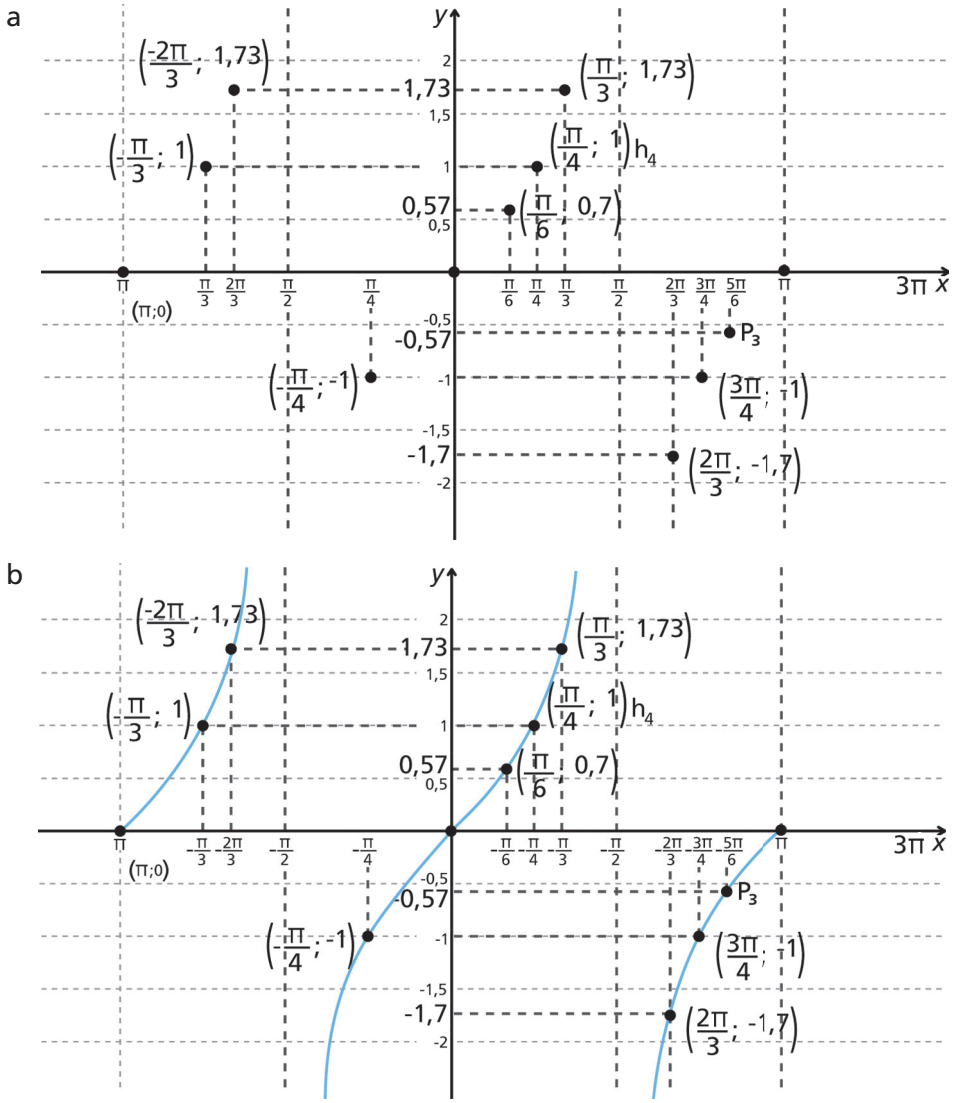


Fig. 3.35

¡Atención!

Observa que la función tangente está formada por la unión de todos los pares ordenados $(x;\tan x); x \in \mathbb{R}$; $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Te habrás dado cuenta de que la gráfica tiene una dificultad que no existe para las funciones seno y coseno: determinar cómo es la gráfica con x próximo a $\frac{\pi}{2}$ y a $-\frac{\pi}{2}$. La gráfica de la función tangente es una curva que se aproxima a las rectas perpendiculares al eje x: $x_1 = \frac{\pi}{2}$ y $x_2 = -\frac{\pi}{2}$ indefinidamente sin llegar a tocarlas. Recuerda que las rectas que cumplen esta propiedad se llaman asíntotas de la curva.

Al igual que en las restantes funciones, si determinamos más puntos, podemos tener una idea más aproximada de la gráfica de la función de ecuación $y = \tan x$. En otras palabras, la gráfica de la función tangente en todo $\mathbb{R}$ se obtiene trasladando la gráfica obtenida en ambos sentidos indefinidamente (figura 3.36).

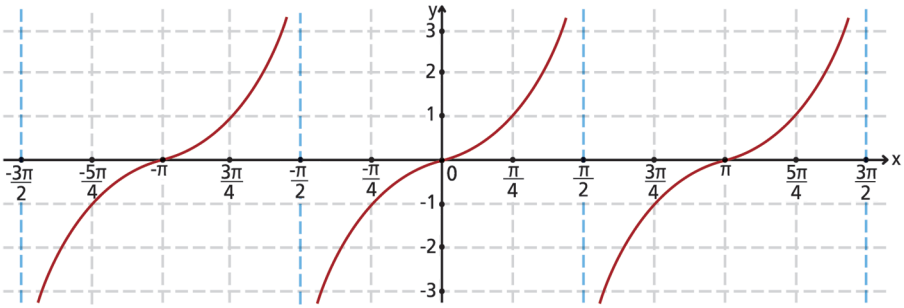


Fig. 3.36

De esta gráfica se pueden obtener las siguientes propiedades (tabla 3.15):

Tabla 3.15

Dominio de definición: $\mathbb{R} \setminus \left\{ x \in \mathbb{R} : x = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$ o $\left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$	La tangente no está definida en los valores que excluimos.
Conjunto imagen: $\mathbb{R}$ o $\{x \in \mathbb{R}\}$	La proyección cubre todo el eje y.
Ceros: $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	En estos valores la función se anula, o sea, la gráfica corta al eje x.
Intercepto con eje y	La gráfica corta al eje de las ordenadas cuando $x = 0$, o sea, $y = \tan(0) = 0$.
Valor máximo: no tiene	Toma todos los valores reales.
Valor mínimo: no tiene	Toma todos los valores reales.

Paridad: impar	La gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas tan $(-x) = -\tan x$
Monotonía: no es monótona	En cada intervalo es creciente
Periodicidad: es periódica Período: $k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$\tan(x + k\pi) = \tan x$
Asíntotasverticales: $x = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$	El gráfico de la función se pega indefinidamente sin llegar a cortarla.
Inyectividad: es inyectiva	Si se traza una recta paralela al eje de las abscisas interseca al gráfico de la función en más de un punto.

En la gráfica de la figura 3.36, se aprecia que en cada intervalo que no contiene múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$, la función es creciente. Ahora, ¿toda *función creciente es monótona*? No, este es el caso de la función tangente que ***no es monótona*** porque al pasar de unos de esos intervalos a otro no crece. En otras palabras, para que una función sea monótona, a medida que aumentan los valores de la variable *x*, aumentan los valores de la variable *y*, lo que no pasa en la función tangente. Para que entiendas un poco mejor (tabla 3.16), observa la siguiente tabla de valores:

Tabla 3.16

x	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$
$\tan x$	–1	0	1	1,73	–1	0	1

Como puedes apreciar, cuando cambia de un intervalo a otro deja de aumentar los valores de las ordenadas.

Ejemplo 3.33

a) Calcular, si es posible, el valor de la función de ecuación $y = \tan x$ en los valores que se muestran a continuación: $\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}; 1; -\frac{\pi}{6}$.

b) Resolver las siguientes ecuaciones:

$$\tan x = 0; \quad \tan x = 3; \quad \tan x = -\sqrt{3}; \quad \tan x = 0{,}5\ .$$

Resolución:

a) $\tan\frac{\pi}{4} = 1$; $\tan\frac{3\pi}{2}$ no se puede calcular pues $\frac{3\pi}{2}$ no pertenece al dominio de definición

Para calcular tan 1, se hace necesario utilizar la tabla.

$$\tan 1 = \tan\left[1 \cdot \frac{180}{\pi}\right]^{0} = \tan 57{,}3^{0} = 1{,}56\ ;$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -0{,}577.$$

b) Ya conoces el conjunto solución de la ecuación tan $x = 0$:
$\{x \in \mathbb{R}: x = k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\}$.

Como en ningún ángulo notable tan $x = 3$, es necesario buscar en la tabla, donde encontramos: tan $71{,}6^{0} = 3{,}0061 \approx 3{,}01$; luego, con tres cifras esenciales, el ángulo es de 71,60 en el sistema sexagesimal, y para obtener el valor de x es necesario expresarlo en el sistema circular: $71{,}6^{0} \cdot \frac{\pi}{180^{0}} = 1{,}25$, por lo que el conjunto solución es $\{x \in \mathbb{R}\ : x = 1{,}25 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Para $\tan x = -\sqrt{3}$, conocemos el conjunto solución:

$$\left\{x \in \mathbb{R}\ : x = -\frac{\pi}{3} + \ \ k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\right\}. \ \blacklozenge$$

¡Atención!

Observa que, en el caso de la tangente el período es π; de ahí que sus coterminales son los $k\pi : k \in \mathbb{Z}$.

¿Sabías que...?

En los videojuegos, para establecer el movimiento de los objetos en cuestión, se emplea la función trigonométrica de ecuación: $y = \tan\alpha(x - x_e) \pm y_e$ sobre el movimiento.



Fig. 3.37

Ejercicios del epígrafe Definición de la función tangente. Representación gráfica y propiedades

1. Analiza si los pares ordenados siguientes son elementos de la función de ecuación $y = \tan x$

a) (0;0) b) (π;–1) c) $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ d) (–12π;0)

e) $\left(\frac{\pi}{4};1\right)$ f) $\left(\frac{7\pi}{4};-1\right)$ g) $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ h) $\left(\frac{5\pi}{3};-\sqrt{3}\right)$

i) (3;0) j) (–8π;0)

2. Determina para qué valores de x la función de ecuación $y = \tan x$ alcanza los valores siguientes: $1;0;-\sqrt{3};\frac{4}{3};0,21;-2,23$

3. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones tienen solución y cuáles no? Fundamenta.

a) $\tan x = 0$ b) $3\tan x = 1$ c) $\tan x - 1,5 = 122$

d) $2\tan x + 5 = 10^{12}$ e) $\tan x = -10^{100}$ f) $|\tan x| = 23,4$

4. ¿Posee la función f de ecuación $f(x) = \tan x$ ceros en los intervalos siguientes? En caso de que existan, determínalos.

a) $-\pi \le x \le \pi$ b) $[-2\pi;-\pi]$ c) $3 \le x \le 6,2$

d) $-2\pi \le x \le \frac{\pi}{2}$ e) $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{4}$ f) $\left[-\pi;-\frac{\pi}{3}\right]$

5. ¿En qué valores de x que pertenezcan a los números reales de los siguientes intervalos no está definida la función de ecuación $y = \tan x$?

a) $[0;3\pi]$ b) $-\pi \le x \le \pi$ c) $\left[\frac{\pi}{3};5\pi\right]$

d) $-2\pi \le x \le 0$ e) $\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ f) $2\pi \le x \le 7\pi$

6. Determina el signo de la función de ecuación $y = \tan x$ en los intervalos siguientes:

a) $0 \le x \le 3\pi$ b) $[-\pi;0]$ c) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$

d) $\left[\frac{\pi}{3};\frac{3\pi}{2}\right]$ e) $0 < x < \frac{5\pi}{4}$ f) $-\frac{11\pi}{6} < x < 0$

7. Representa gráficamente la función de ecuación $g(x) = \tan x$ en los intervalos siguientes. Verifica su representación utilizando del asistente GeoGebra.

a) $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$ b) $-\pi \leq x < \frac{\pi}{2}$ c) $[-3\pi; 0]$

d) $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$ e) $[0; \pi]$ f) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$

8. Determina gráficamente y analíticamente los puntos de intersección de los gráficos de las funciones. Compruébalo utilizando el GeoGebra.

a) $y = \tan x$ y $f(x) = \sqrt{3}$ b) $y = \tan x$ y $f(x) = -1$

c) $y = \tan x$ y $g(x) = 2$ d) $y = \tan x$ y $h(x) = -4{,}2$

9. La siguiente ilustración corresponde a la gráfica (figura 3.38) de una función trigonométrica *h* de ecuación $h(x) = \tan x$, de esta responde:

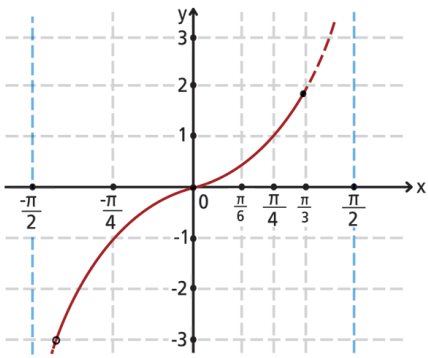


Fig. 3.38

a) ¿Cuál es el dominio de definición y el conjunto imagen de la función?

b) ¿El punto $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ pertenece al gráfico de la función?

c) ¿Es monótona la función representada? Fundamenta.

d) ¿En qué intervalo la función es positiva?

e) Determina valor máximo y mínimo si lo tienen.

f) ¿Será la función inyectiva? Compruébalo analíticamente

Definición de la función cotangente. Representación gráfica y propiedades

Definición 3.5

Se llama función **cotangente** a la función que a cada número real $x \neq k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ se le hace corresponder **cot** *x*. Es decir, el conjunto de pares ordenados

$\{(x; \cot x) : x \in \mathbb{R}; x \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$

El dominio de definición de la función cotangente es entonces el conjunto de los números reales que no son múltiplos de π, es decir, en los que la función seno no se anula y, por tanto, está definida la cotangente. En símbolos:

$$\text{Dom}\,(\cot x) = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}: x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{o}$$

$$\text{Dom}\,(\cot x) = \{x \in \mathbb{R}: x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

De la misma forma que hemos hecho con las demás funciones (tabla 3.17), basta representarla en un intervalo de longitud π y como la cotangente no está definida en 0, entonces escogeremos el intervalo de $(0;\pi)$:

Tabla 3.17

x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$
cot x	3,7	1,7	1	0,58	0,27	0	–0,27	–0,58	–1	–1,7	–3,7

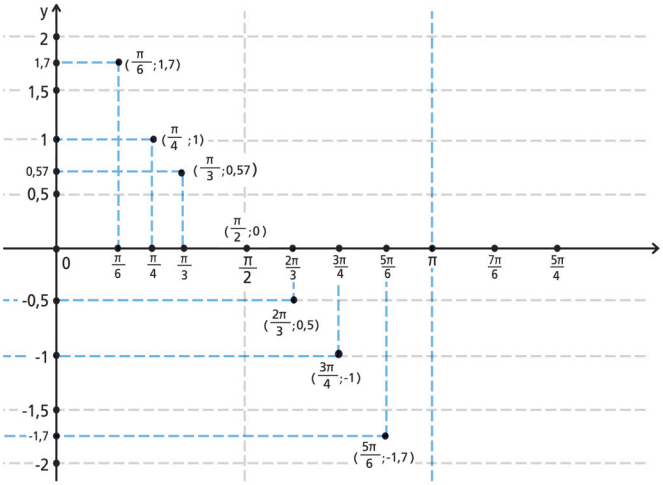


Fig. 3.39 a

Al representar en un sistema de coordenadas los pares contenidos en la tabla anterior, se obtiene una gráfica como la representada en la figura 3.39 a.

La gráfica de la función cotangente es una curva que se aproxima a las rectas perpendiculares al eje x : $x_1 = 0$ y $x_2 = \pi$ indefinidamente sin llegar a tocarlas. Estas son las *asíntotas* de la función cotangente y los valores son el antidominio de la función.

Si aumentamos el número de puntos se obtiene una idea cada vez más aproximada de la gráfica de la función cotangente como se muestra en la figura 3.39 b.

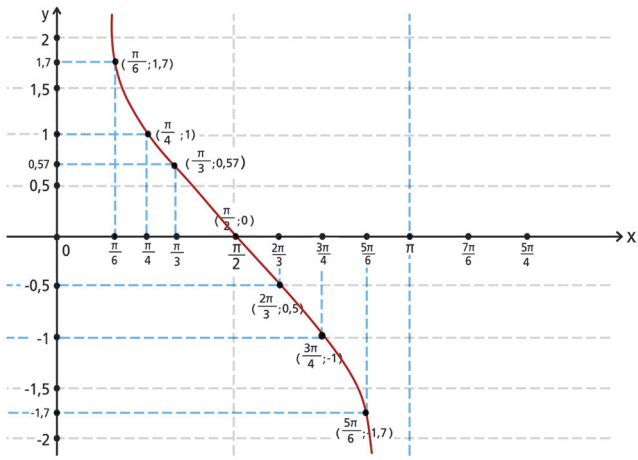


Fig. 3.39 b

¡Atención!

Observa que la función cotangente está formada, por la unión de todos los pares ordenados: $(x;\cot x)$ con $\{x \in \mathbb{R}: x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Ahora, si procedemos de igual forma que con las demás funciones y determinamos más puntos, podemos tener una idea más aproximada de la gráfica de la función de ecuación $y = \cot x$. En otras palabras, la gráfica de la función cotangente, definida en su dominio de definición, se obtiene trasladando la gráfica (figura 3.40) obtenida en ambos sentidos indefinidamente.

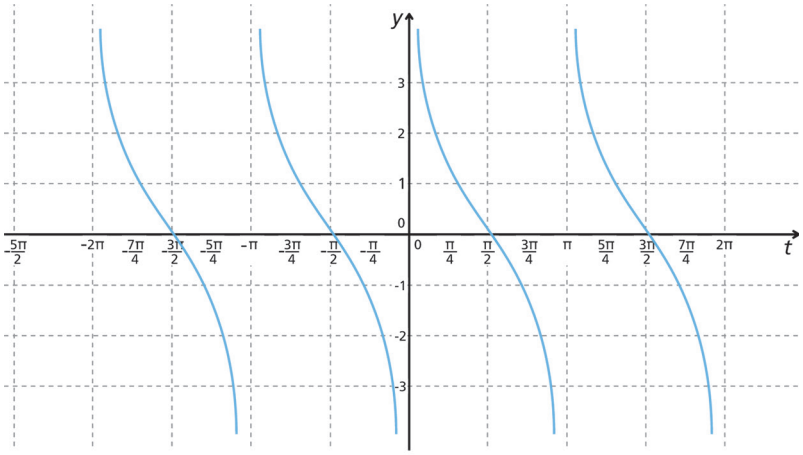


Fig. 3.40

De esta gráfica se pueden obtener las propiedades siguientes:

Tabla 3.18

Dominio de definición: $\mathbb{R} \setminus \{ k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, o $\{x \in \mathbb{R}: x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.	La cotangente no está definida en los valores que excluimos.
Conjunto Imagen: $\mathbb{R}$ o $\{y \in \mathbb{R}\}$	La proyección cubre todo el eje *y*.
Ceros: $x = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$	En estos valores la función se anula, o sea, la gráfica corta al eje *x*.
Intercepto con eje *y* : no tiene	El eje de las ordenadas representa una asíntota de esta función
Valor máximo: no tiene	Toma todos los valores reales.
Valor mínimo: no tiene	Toma todos los valores reales.
Paridad: impar	La gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas $\cot(-x) = -\cot x$
Monotonía: no es monótona	En cada intervalo es decreciente.
Periodicidad: si es periódica Período: $k\pi, k \in \mathbb{Z}$ Asíntotas verticales: $x = k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$ Inyectividad: es inyectiva	$\cot(x + k\pi) = \cot x$ El gráfico de la función se pega indefinidamente sin llegar a cortarla. Si se traza una recta paralela al eje de las abscisas interseca al gráfico de la función en más de un punto.

¡Atención!

La función cotangente al igual que la función tangente, no es monótona.

Existen otras dos funciones, la **secante** y la **cosecante**. Aquí no las estudiaremos; las citamos solo para tengas conciencia de su existencia, como dijimos en la Introducción de este capítulo.

Saber más

Las funciones secante (figura 3.41 a) y cosecante (figura 3.41 b) son funciones reciprocas de las funciones coseno y seno respectivamente, las cuales tienen gran aplicación.

Sus representaciones gráficas se muestran a continuación

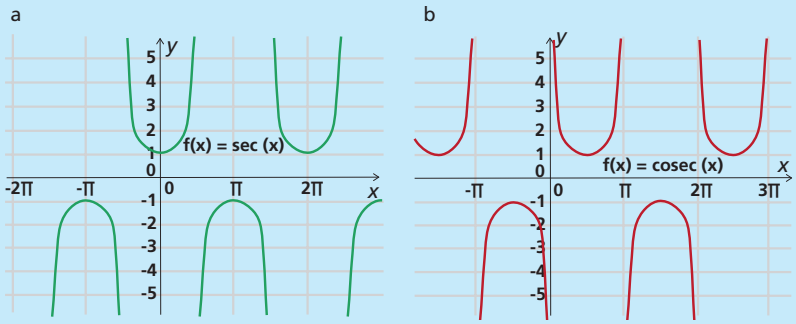


Fig. 3.41

Ejercicios del epígrafe Definición de la función cotangente

1. Analiza si los pares ordenados siguientes son elementos de la función de ecuación $f(x) = \cot x$

a) $\left(\frac{\pi}{6};\sqrt{3}\right)$ b) $\left(\frac{\pi}{4};1\right)$ c) $\left(-\frac{\pi}{4};1\right)$ d) $\left(\frac{7\pi}{12};-0,27\right)$

e) $(0;0)$ f) $(-2\pi;0)$ g) $\left(\frac{\pi}{3};0,58\right)$

2. Determina para qué valores de x la función de ecuación $y = \cot x$ alcanza los valores:

$-3,7;\ -1,7;\ \sqrt{3};\ \frac{\sqrt{3}}{3};\ 0;\ 1;\ 4$

3. Sea $f(x) = \cot x$ la ecuación de la función f calcula:

a) $\dfrac{f\left(\frac{5\pi}{4}\right)+2f\left(\frac{\pi}{4}\right)+f\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{3f\left(\frac{\pi}{6}\right)}$

b) $2f\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot f^2\left(\frac{\pi}{4}\right)-3f\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

4. De la siguiente gráfica (figura 3.42) de una función f de ecuación $f(x)=\cot x$. Responde:

a) ¿Cuál es el dominio de definición y el conjunto imagen de función?

b) ¿Para qué valores reales de la variable x, se anula la función?

c) ¿El par ordenado $\left(\frac{\pi}{4};1\right)\in f$? Justifica.

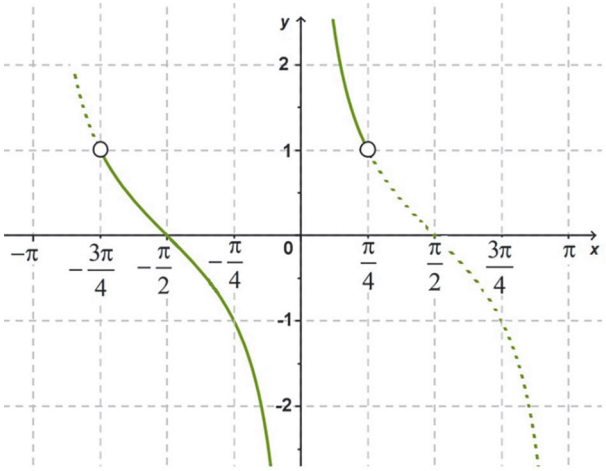


Fig. 3.42

d) ¿Tiene intercepto el gráfico con el eje y? Fundamenta.

e) Escribe un intervalo en que la función es decreciente y negativa.

f) ¿Será una función inyectiva? Fundamenta.

Las funciones de ecuación y = a *sen (*bx + c*) y* y = a *cos (*bx + c*) (con* a*,* b *y* c *parámetros reales;* b ≠ 0*). Oscilaciones armónicas*

¿Por qué decimos que la corriente de los hogares es de 110 V cuando el voltaje máximo producido es de 155 V?

Como la corriente es alterna y sinusoidalmente variable, para determinar su efectividad energética relativa a una corriente directa y constante, los ingenieros emplean el método del valor eficaz*, que da que el voltaje debe ser* $\frac{1}{\sqrt{2}}$ *de su valor máximo 155, por lo que al multiplicar estos dos números se obtiene el voltaje aproximado de la corriente de nuestros hogares, o sea,* $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 155\approx 110V$ *, cuya ecuación es* $\varepsilon(t)=155\cos 120\pi t\,(V;s)$.

Numerosos fenómenos físicos pueden describirse con ecuaciones de la forma: $y = A\text{sen}(\omega t + \varphi)$ y $y = A\cos(\omega t + \varphi)$.

Estas son las ecuaciones de las oscilaciones armónicas y las representaciones gráficas de las funciones definidas por ellas son sinusoides. Para trazarlas y analizarlas, se utilizan las propiedades de las funciones trigonométricas estudiadas. En ellas:

- $|A|$ recibe el nombre de *amplitud* de la oscilación, que es el módulo de los valores máximo y mínimo de la función;
- ω es la frecuencia angular y está relacionada con el período de la ecuación mediante la fórmula $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$
- ***T*** el período (duración de una oscilación completa);
- f la *frecuencia lineal* (oscilaciones en un segundo) y
- φ el ángulo de fase inicial y representa el valor del argumento para $t = 0$.

Se aplican ampliamente en la descripción de fenómenos físicos periódicos aquellos que, a intervalos iguales se repiten regularmente, especialmente los mecánicos, ya estudiados en la asignatura Física en décimo grado, y los electromagnéticos, que estudiarás en el onceno grado, consistentes en vibraciones mecánicas y oscilaciones electromagnéticas, que son el fundamento del movimiento ondulatorio y, por ende, de la propagación de ondas sonoras y radiales, respectivamente.

A continuación, citaremos con cierto detalle dos de sus aplicaciones más comunes y notables: una en la música y otra en la radio y la televisión.

Mecánicamente, la música produce en el oído sensaciones de *tonos* (físicamente, frecuencias), escribibles como notas en un pentagrama. El de más baja frecuencia ω, o *fundamental,* es expresable por la función sinusoidal $y = A\text{sen}\omega t$; sin embargo, aunque puede ser producido por un sintetizador electrónico, los instrumentos musicales naturales producen *tonos compuestos* –cuyos componentes son representables por sinusoides, de frecuencias angulares múltiplos de la fundamental, como $y_1 = A_1\,\text{sen}\omega t$, $y_2 = A_2\ \text{sen}2\omega t$, $y_3 = A_3\,\text{sen}3\omega t$ etc., denominados *armónicos*–, llamándose *primer armónico* al fundamental y *segundo armónico*, *tercer armónico*, etc., a los siguientes sucesivamente.

Saber más

La escala musical está sustentada en las relaciones de estos tonos. La figura 3.43 exhibe la forma general de la media de una de ellas, fundada en los *intervalos armónicos de tonos* (físicamente, *razones de frecuencias*) del renglón último. Así, fijada la frecuencia de la nota clave Do, la de la octava Do^1 sería su duplo, la de la séptima mayor sus *15/8*, la de la sexta mayor sus *5/3,* y así sucesivamente.

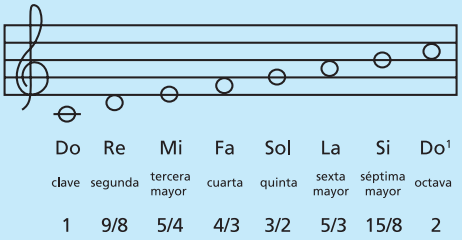


Fig. 3.43

¿Sabías que...?

Las denominaciones de armónica de la progresión 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + … y de la media matemáticas provienen de la música.
En la progresión, sus términos coinciden con los períodos 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4…, de los armónicos musicales 1, 2, 3, 4…, y en la media M, su inverso es el promedio aritmético de esos periodos. Así, 1/M = (1 + 1/2 + 1/3 + 1/4) / 4, o
M = 4 / (1 + 1/2 + 1/3 + 1/4).
Estos son ejemplos de los numerosos usos de la palabra armónico en la Matemática, que refleja la relación estrecha existente entre estas dos grandes invenciones del ingenio humano.

Electromagnéticamente, la conexión en serie de una bobina inductiva L y un condensador capacitivo C cargado inicialmente (figura 3.44), cuya energía fluctúa gradualmente entre eléctrica en a) y c) y magnética en b) y d), constituye un circuito oscilante, cuyo comportamiento se describe con la función trigonométrica de ecuación $y = A\text{sen}\omega t$,donde A es la carga máxima del condensador y $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, la frecuencia angular natural de oscilación, equivalente a $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

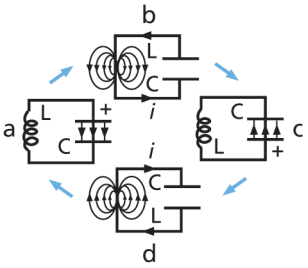


Fig. 3.44

Este circuito se emplea en la sintonía por resonancia de los receptores de radio y televisión. Conectado a la antena, en la entrada de estos equipos, sintoniza las portadoras de señal de los transmisores, que son

oscilaciones electromagnéticas de frecuencias específicas, *f*. Cambiando la capacidad C del condensador o la inductancia L de la bobina, de modo que $\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = f$, el circuito oscilaría con amplitud máxima, o resonaría, a la frecuencia recibida.

Así, se discriminan las distintas frecuencias específicas existentes en el espacio, emitidas por las estaciones transmisoras respectivas.

Ejemplo 3.34

Emplear la herramienta GeoGebra y representar gráficamente la función de ecuación $g(t) = 2\text{sen } t$ y analizar:

a) Semejanzas o diferencias que existen en su gráfica respecto a la de la función *f* de ecuación función $f(t) = \text{sen}t$
b) ¿Qué influencia tiene el factor dos en el gráfico de la función *f* ?
c) Resumir las propiedades

Sabemos que el factor 2 es el valor de ***A*** y representa la dilatación en la dirección del eje *y*, es decir, la gráfica de la función $y = 2 \text{ sen } t$, se obtiene duplicando las ordenadas de la función de ecuación $y = \text{sen } t$ (figura 3.45).

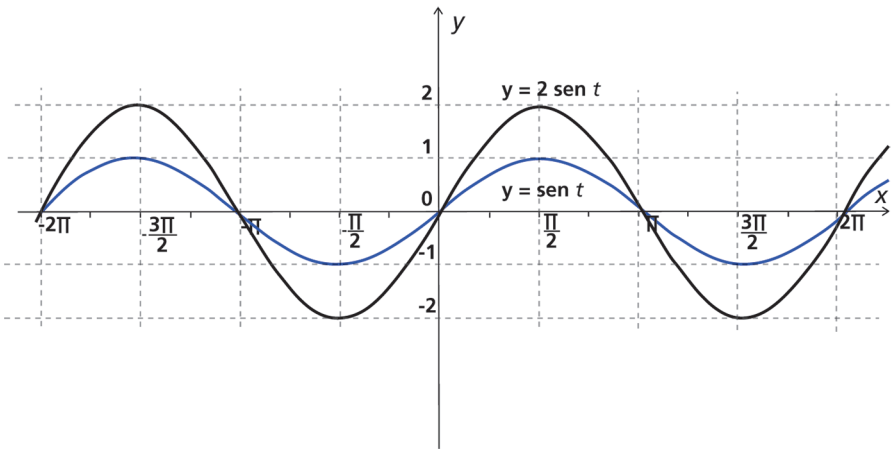


Fig. 3.45

De la gráfica de función $y = 2 \text{ sen } t$, se obtiene las siguientes propiedades:
Dominio de definición: $\mathbb{R}$
Conjunto Imagen: $[-2;2]$ La proyección cubre este intervalo
Ceros: $\{x \in \mathbb{R} : x = k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
Paridad: impar

Período: $2k\pi$

Valor máximo: 2 Valor mínimo: –2

Monotonía: no es monótona

Tabla 3.19

Subintervalo	$\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$	$\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$	$\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$	$\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$
Variación	Creciente de 0 a 2	Decreciente de 2 a 0	Decreciente de 0 a –2	Creciente de –2 a 0
Signo	$0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ +	$\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$ +	$\pi < x \leq \frac{3\pi}{2}$ –	$\frac{3\pi}{2} \leq x < 2\pi$ –

Todas estas propiedades se obtienen directamente de la gráfica y de las propiedades conocidas de la función de ecuación y = sen x. ◆

Ejemplo 3.35

Representar gráficamente y analizar las propiedades de la función definida por la ecuación: y = cos $2t$.

Resolución:

El factor 2 representa una contracción en la dirección del eje x; más exactamente la gráfica se obtiene dividiendo por 2 las abscisas en la gráfica de la función coseno. Para comprobarlo se construye una tabla como la siguiente y se plotean los valores:

Tabla 3.20

t	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$
$2t$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
cos$2t$	1	0,87	0,5	0,0	–0,5	–0,87	–1	–0,87	–0,5	–0,0	0,5	0,87

Fíjate que cada valor del coseno lo toma en una abscisa que es la mitad de la que corresponde, por ejemplo: toma el valor $\frac{1}{2}$ en $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3}$ y el coseno toma el valor $\frac{1}{2}$ en $\frac{\pi}{3}$. De esta forma se obtiene un periodo completo en el intervalo $[0;\pi]$ que se obtiene dividiendo en dos partes al intervalo $[0;2\pi]$ (figura 3.46).

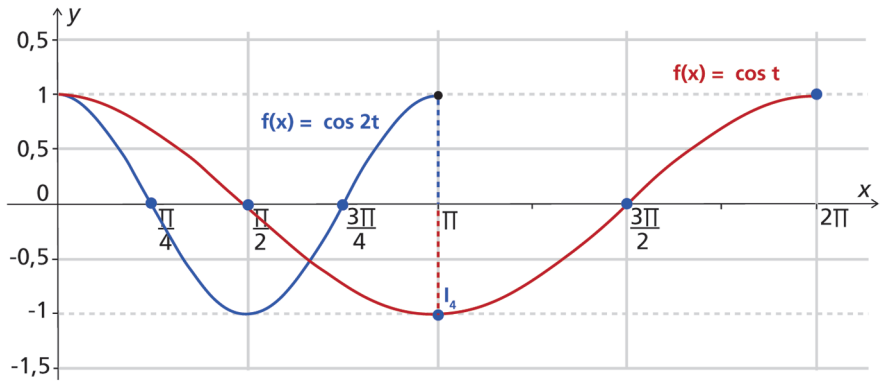


Fig. 3.46

De la representación gráfica de la función $y = \cos 2t$ representada pueden obtenerse las siguientes propiedades:

Dominio de definición: $\mathbb{R}$

Conjunto Imagen: $[-1;1]$

Ceros: $\left\{x \in \mathbb{R}: x = (2k+1)\frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}\right\}$ Se obtiene dividiendo por 2 los ceros de la función cos *x*.

Paridad: *par*

Período: $\frac{2k\pi}{2} = k\pi$ Se divide por 2 el periodo.

Valor máximo: 1

Valor mínimo: -1

Monotonía: no es monótona

La variación de $[0;\pi]$ se muestra en la tabla 3.21, en la que los intervalos se han dividido a la mitad:

Tabla 3.21

Subintervalo	$\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$	$\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$	$\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right]$	$\left[\frac{3\pi}{4};\pi\right]$
Variación	decreciente de 1 a 0	decreciente de 0 a –1	creciente de –1 a 0	creciente de 0 a 1
Signo	$0 \le x < \frac{\pi}{4}$ +	$\frac{\pi}{4} < x \le \frac{\pi}{2}$ –	$\frac{\pi}{2} \le x < \frac{3\pi}{4}$ –	$\frac{3\pi}{4} < x \le \pi$ +

Ejemplo 3.36

Esbozar en un sistema de coordenadas rectangulares la función de ecuación $y = \operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ y analizar las propiedades.

Resolución:

Ya conocemos que el sumando $\frac{\pi}{4}$ representa una traslación de $\frac{\pi}{4}$ unidades en el sentido negativo del eje *x*; luego, la gráfica se obtiene desplazando $\frac{\pi}{4}$ unidades a la izquierda la gráfica de la función seno (figura 3.47).

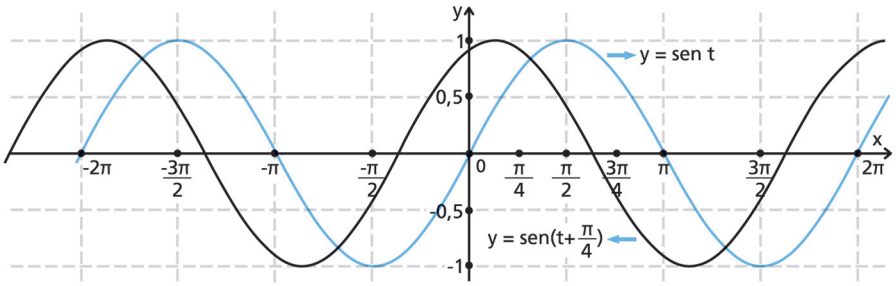


Fig. 3.47

Del esbozo del gráfico de la función desplazada $y = \operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ se obtienen las propiedades:

Dominio de definición: $\mathbb{R}$

Conjunto Imagen: $[-1;1]$

Ceros: $\left\{x \in \mathbb{R}: x = k\pi - \frac{\pi}{4} = (4k-1)\frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}\right\}$

Se resta $\frac{\pi}{4}$ a los ceros de la función sen *x*.

Paridad: no es par ni impar → No es simétrica respecto al eje *y* ni al origen de coordenadas sea, $f(x) \neq f(-x)$ y $-f(x) \neq f(-x)$.

Periodo: $2\,k\pi$

Valor máximo:1

Valor mínimo: –1

Se resta $\frac{\pi}{2}$ a los puntos de máximo y mínimo de la función seno (y = sen x).

Ejemplo 3.37

Representar gráficamente la función definida por la ecuación $y = 3\cos(2t - \pi)$. Determinar su amplitud, periodo y ángulo de fase inicial.

Resolución:

Aplicando lo planteado en el recuadro anterior obtenemos:

$|A| = 3$ es la amplitud, y el conjunto imagen de la función será $\{y \in \mathbb{R} : -3 \le y \le 3\}$ o en notación de intervalos, $y \in [-3;3]$.

$\omega = 2$; el periodo será $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2k\pi}{2} = k\pi$.

$\varphi = -\pi$; es el ángulo de fase inicial

¡Atención!

El valor del ángulo $(\varphi = -\pi)$ se toma con el mismo signo que aparece en la ecuación.

Para representar la función, debemos tener en cuenta que su gráfica está comprendida entre las rectas $y = -3$ y $y = 3$. Cuando $t = 0$, $y = \cos(-\pi) = \cos\pi = 1$ (la fase inicial es $-\pi$); luego, la gráfica está desplazada. Para hallar el desplazamiento, escribimos: $y = \cos(2t - \pi) = \cos 2\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right)$, y esto significa que la gráfica se ha desplazado $\dfrac{\pi}{2}$ unidades, o sea, medio periodo a la derecha (porque φ es negativo). La función está *atrasada* respecto al coseno (para $t = 0$ su argumento es negativo) (figura 3.48).

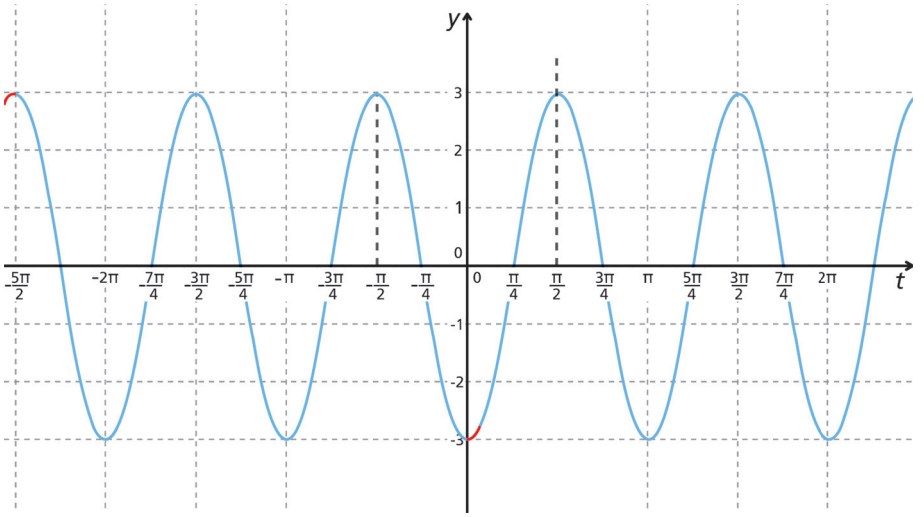


Fig. 3.48

En la figura 3.49 puedes observar que, como $\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\operatorname{sen} t$, la gráfica del coseno es la misma gráfica del seno desplazada $\frac{\pi}{2}$ unidades a la izquierda, como indica la flecha (⟵). El seno se retrasa respecto al coseno en la cuarta parte de un periodo, por lo que la gráfica es la misma con un desfasaje de $\frac{\pi}{2}$ y es, por tanto, suficiente considerar oscilaciones de la forma: $y = A\operatorname{sen}(\omega t+\varphi)$.

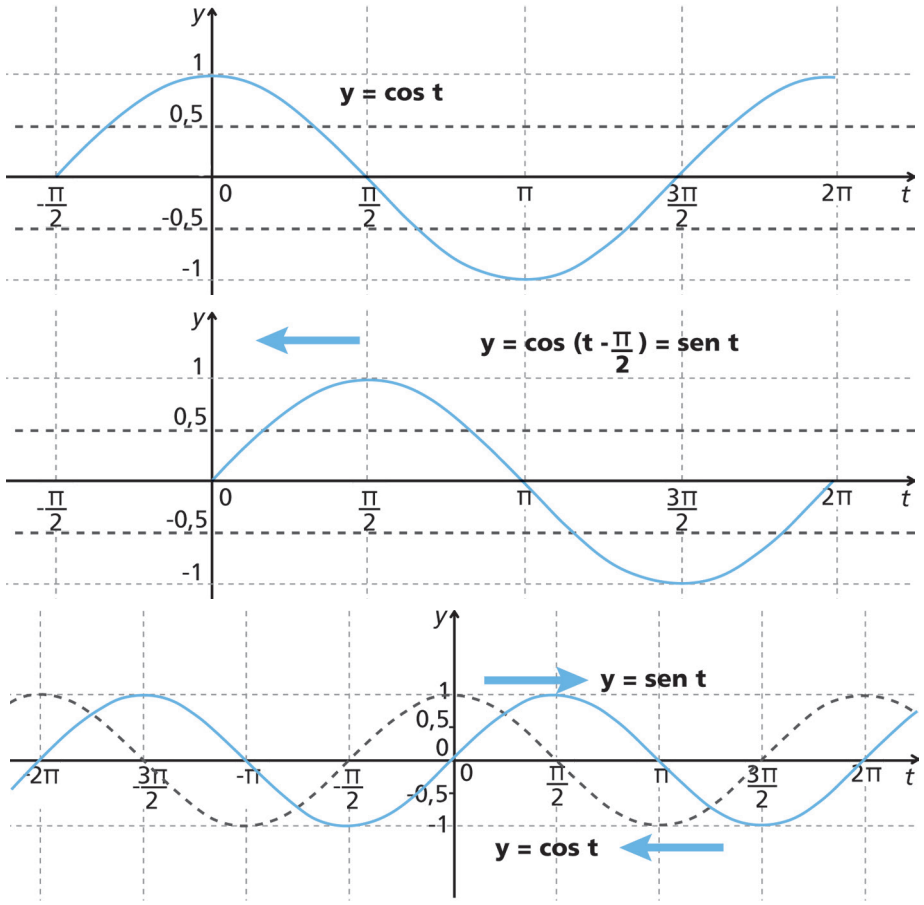


Fig. 3.49

Saber más

La presión sanguínea de un individuo se considera normal cuando la presión sistólica es 120 y la diastólica es 80, y está modelada por la ecuación trigonométrica, $p(t)=115+25\operatorname{sen}(160\pi t)$, donde p (x) es la presión en milímetros de mercurio (mmHg) cuando el tiempo se mide en minutos.

Ejercicios del epígrafe Las funciones de ecuación y = a sen (bx + c) y y = a cos (bx + c) (con a, b y c parámetros reales, b ≠ 0). Oscilaciones armónicas

1. Representa gráficamente las funciones siguientes y analiza sus propiedades:

a) $y = \text{sen}5t$ b) $y = \text{sen}\frac{t}{3}$ c) $y = \text{sen}2\pi t$

d) $y = \text{sen}\frac{3}{2}t$ e) $y = \text{sen}8t$ f) $y = \text{sen}\frac{2t}{3}$

2. Haz el esbozo gráfico de las funciones dadas por las ecuaciones que se dan a continuación y analiza sus propiedades.

a) $y = 4 \text{ sen } t$ b) $y = 2{,}5\text{sen}t$ c) $y = 0{,}2\text{sen}t$

d) $y = \frac{1}{2} \text{ sen } t$ e) $y = 3\cos t$ f) $y = 3{,}1\cos t$

3. Representa gráficamente las funciones dadas por las ecuaciones siguientes y analiza sus propiedades. Compruébalo utilizando el GeoGebra.

a) $y = 4{,}5\text{sen}t$ $-2\pi \leq t \leq 2\pi$

b) $y = 0{,}75 \text{ sen } t$ $-3\pi \leq t \leq 3\pi$

c) $y = 2{,}5 \text{ sen}2t$ $[-\pi; 2\pi]$

d) $y = 3 \text{ sen}\frac{t}{2}$ $0 \leq t \leq 5\pi$

e) $y = 0{,}5\cos\frac{2}{3}t$ $-3\pi \leq t \leq 3\pi$

f) $y = 2\cos\frac{t}{2}$ $[-2\pi; \pi]$

g) $y = 1{,}5\cos 2t$ $-\pi \leq t \leq 2\pi$

h) $y = \frac{1}{5}\cos\frac{t}{2}$ $-\pi \leq t \leq 2\pi$

4. Determina los valores máximos y mínimos de las funciones dadas por las ecuaciones siguientes, en los intervalos dados:

a) $y = 3\operatorname{sen} t$ $\quad \pi \le t \le 2\pi$

b) $y = 5\cos t$ $\quad \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$

c) $y = 2\operatorname{sen}\frac{t}{2}$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

5. Calcula los ceros de las siguientes funciones. Compruébalo mediante su representación gráfica en el GeoGebra

a) $y = \sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{5}{7}t$ $\quad -4\pi \le t \le 3\pi$

b) $y = 8\operatorname{sen}\frac{3}{2}t$ $\quad [-\pi; 3\pi]$

c) $y = 2\cos\frac{t}{2}$ $\quad -\pi \le t \le \pi$

6. Determina en cada caso la ecuación que se indica con los elementos dados:

a) $y = a\operatorname{sen} bt$ con $-2{,}3 \le y \le 2{,}3$ $\quad PP = 3\pi$

b) $y = a\operatorname{sen} bt$ con $-4 \le y \le 4$ $\quad PP = \frac{\pi}{2}$

c) $y = a\operatorname{sen} bt$ con $-1 \le y \le 1$ $\quad PP = \frac{\pi}{10}$

7. Determina el período P de las siguientes funciones dadas por las ecuaciones:

a) $y = 2{,}5\operatorname{sen}\left(4t - \frac{2\pi}{3}\right)$ $\quad$ b) $y = 0{,}5\operatorname{sen}\left(3t + \frac{\pi}{6}\right)$

c) $y = 1{,}2\cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$ $\quad$ d) $y = 0{,}3\cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$

8. Esboza el gráfico de las siguientes funciones e indica el período P y la amplitud A.

a) $y = 2\operatorname{sen}\left(t + \frac{3\pi}{4}\right)$ $\quad$ b) $y = 0{,}8\operatorname{sen}\left(3t - \frac{\pi}{2}\right)$

c) $y = 1{,}5\cos\left(\frac{t}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$ $\quad$ d) $y = 0{,}2\cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$

9. Determina en cada caso la ecuación que se indica con los valores dados (t: variable independiente).

a) $y = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi)$ $\quad -3 \le y \le 3$ $\quad \text{PP} = \pi$ $\quad \varphi = 1$

b) $y = A\cos(\omega t + \varphi)$ $\quad |y| \le \frac{1}{27}$ $\quad \text{PP} = \frac{2\pi}{3}$ $\quad \varphi = -2$

10. De la gráfica (figura 3.50) que se muestra a continuación:

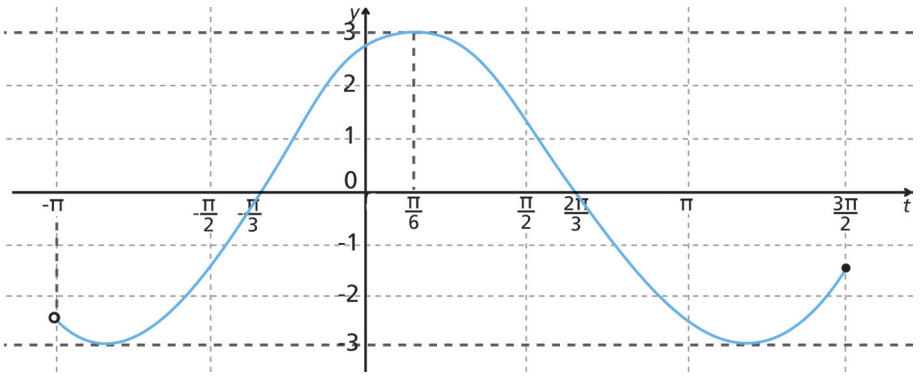


Fig. 3.50

a) Escribe su ecuación.
b) Determina sus propiedades: dominio, imagen, monotonía, paridad.
c) Determina el intercepto con el eje de las ordenadas.
d) ¿En qué puntos corta el gráfico al eje de las abscisas?
e) Di un intervalo donde la función sea positiva y decreciente.
f) ¿Para qué valor de x, la función alcanza su máximo valor?

11. La gráfica (figura 3.51) que se muestra a continuación es de la forma $g(x) = a\cos(bx + c)$ con a, b y c parámetros reales.

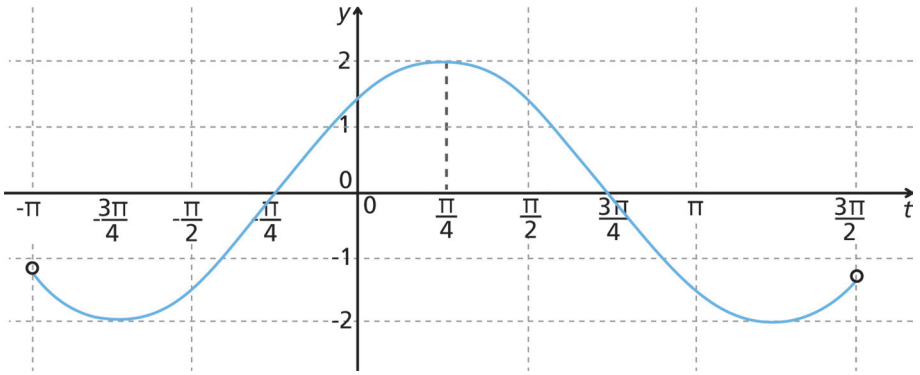


Fig. 3.51

Selecciona en cada caso la respuesta.

11.1 El dominio de la función g es:

a) $\{x \in \mathbb{R}\}$ b) $\left\{x \in \mathbb{R} : -\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}\right\}$ c) $\left\{x \in \mathbb{R} : -\pi < x < \frac{3\pi}{2}\right\}$

11.2 Los valores que anulan la función son:

a) $x_1 = -\frac{\pi}{4}$ y $x_2 = \frac{3\pi}{4}$ b) $x_1 = -\pi$ y $x_2 = \frac{3\pi}{2}$ c) $x_1 = \frac{\pi}{2}$ y $x_2 = \frac{3\pi}{2}$

11.3 Un intervalo donde la función es creciente negativa:

a) $\left\{x \in \mathbb{R} : -\frac{\pi}{2} \leq x \leq -\frac{\pi}{4}\right\}$ b) $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{3\pi}{4} \leq x < \pi\right\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} : -\frac{\pi}{2} \leq x < -\frac{\pi}{4}\right\}$

11.4 La ecuación de la función es:

a) $g(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ b) $g(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ c) $g(x) = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

11.5 El gráfico corta a la recta $x = 0$ en el punto:

a) $\left(\sqrt{2}; 0\right)$ b) $\left(0; \sqrt{2}\right)$ c) $\left(\frac{\pi}{4}; 2\right)$

11.6 El valor de x para lo cual la función alcanza el máximo valor es:

a) $-\frac{3\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{3\pi}{4}$

Ejercicios del capítulo 3

1. En cada tabla (3.22 y 3.23), cinco de las conversiones son incorrectas. Di cuáles son, dando sus valores verdaderos.

a) Grados a radianes

Tabla 3.22

#	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
α°	82	50	105	74	62	94	10	42	34	7	47	23
α_{rad}	1,43	0,97	1,83	1,39	1,08	1,64	0,27	0,63	0,59	0,12	0,72	0,40

b) Radianes a grados

Tabla 3.23

#	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
α_{rad}	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{4}$
α°	270	205	108	240	235	290	72	135	110	15	140	315

2. Calcula numéricamente las razones trigonométricas de los cinco ángulos, ya corregidos, del sistema circular (radianes) del inciso a), y las de los cinco, ya corregidos, del sistema sexagesimal (grados) del inciso b), del ejercicio anterior.

3. Prueba la validez de la igualdad siguiente para los valores admisibles de la variable:

$$\frac{\cos\alpha\ \cot\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}-1=\csc\alpha$$

4. En la antigüedad griega, el faro de la isla de Paros, frente a Alejandría, en el mar Mediterráneo, fue famoso por la gran intensidad de su luz, que guiaba la navegación por esa zona. Si los barcos detectaban sus destellos desde una distancia de 8,9 km aproximadamente bajo un ángulo medido desde el plano horizontal de su base– de $\frac{\pi}{175}$, ¿cuál sería la altura del faro?

5. Si un avión, a una altura de 2,5 km, detectase dos buques: uno con un ángulo de depresión de $\frac{\pi}{6}$ rad y el otro con otro de $\frac{\pi}{4}$ rad, ¿cuál sería la distancia entre las dos embarcaciones?

6. Demuestra la igualdad de las identidades siguientes:

a) $\tan\alpha+\cot\alpha=\sec\alpha\cdot\csc\alpha$

b) $\cot\alpha\operatorname{sen}2\alpha=1+\cos2\alpha$

c) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\cos\alpha$

7. Resuelve $\operatorname{sen}x\cdot\tan x=\operatorname{sen}x$

8. Resuelve la siguiente ecuación en el intervalo $[0;2\pi)$:

$\tan x(1+\tan x)=2$

9. Dadas las expresiones trigonométricas:

$A(x)=\cot x+\cos x$ y $B(x)=\frac{4}{\cot x+3}+\cos x$

a) Resuelve la ecuación $A(x) = 0$

b) Calcula B $(-\frac{\pi}{12})$.

c) Determina el conjunto solución en el intervalo $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ de la ecuación:

$3^{-2} \cdot 10^{\log A(x)} = \frac{1}{9} \cdot 10^{\log B(x)}$

10. Sean las expresiones trigonométricas:

$M(x) = \tan x + (1+\sqrt{3})$ y $N(x) = \sec x + 1$

a) Di los valores reales de x para los cuales se indefine $M(x)$.

b) Encuentra los valores que anulan $N(x)$.

c) Halla las soluciones reales de la ecuación $M(x) = N(x)$

11. De los pares ordenados siguientes (tabla 3.24), solo hay tres válidos para cada función. Di cuáles son, dando sus valores verdaderos.

Tabla 3.24

No.	1	2	3	4	5	6
$y = \operatorname{sen} x$	$\left(\frac{3\pi}{4}; -0{,}40\right)$	$\left(\frac{3\pi}{5}; 0{,}95\right)$	$\left(\frac{4\pi}{3}; -0{,}77\right)$	$\left(\frac{5\pi}{4}; 0{,}76\right)$	$\left(\frac{2\pi}{5}; 0{,}59\right)$	$\left(\frac{7\pi}{4}; -0{,}61\right)$
$y = \tan x$	$\left(\frac{\pi}{5}; 0{,}63\right)$	$\left(\frac{7\pi}{6}; 0{,}48\right)$	$\left(\frac{5\pi}{3}; -1{,}73\right)$	$\left(\frac{2\pi}{3}; -1{,}73\right)$	$\left(\frac{\pi}{12}; 0{,}49\right)$	$\left(\frac{5\pi}{6}; -0{,}71\right)$

12. Sean las expresiones trigonométricas:

$A(x) = 2 - \cos^2 x$ y $B(x) = \operatorname{sen} x$

a) Determina para que valores de x se cumple que $3^{A(x)} = 27 \cdot 3^{B(x)}$

b) Calcula $A\left(\frac{\pi}{4}\right)$

13. Encuentra las soluciones en el intervalo $[0; \pi]$ de la ecuación:

$\log(\cos 2x + \cos x) - \log(\operatorname{sen} x + \cos x) = 0$

14. Dadas las expresiones trigonométricas que se muestran a continuación:

$F(x) = \cos^2 x - \operatorname{sen} x$ y $G(x) = \operatorname{sen} x$

a) Efectúa $F\left(\frac{\pi}{3}\right)$

b) Halla el conjunto solución de la siguiente ecuación: $\left(\frac{1}{2}\right)^{F(x)} = 2^{[G(x)]^2}$

15. Sean las funciones trigonométricas dadas por las ecuaciones siguientes: $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos 2x$

a) ¿Para cuáles valores de $x \in \mathbb{R}$ se cumple que: $\frac{1}{3} \cdot 27^{f(x)} = 3^{g(x)}$?

b) Determina los valores reales de x que anulan la función g.

c) Calcula $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

16. Sean las expresiones trigonométricas:

$A(x) = \cos 2x$; $B(x) = \operatorname{sen} 2x$ y $C(x) = \cos x$

a) Verifica que $A\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

b) ¿Para qué valores de $x\in[0;2\pi]$ se cumple que:

$\left(\frac{1}{5}\right)^{A(x)}\cdot 5^{\frac{B(x)}{2C(x)}}=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$?

17. Sean f y g dos funciones de ecuación $f(x)=\cos x$ y $g(x)=\operatorname{sen} x$

a) ¿Para cuáles valores de $x\in[0;2\pi]$ se cumple que

$5^{2-[f(x)]^2}=125\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-g(x)}$?

b) Calcula el valor numérico de la función $g(x)$ para $x=-\frac{7\pi}{6}$.

18. Halla los valores de x para los cuales las funciones definidas por $f(x)=3-3\cos^2 x$ y $g(x)=10\operatorname{sen} x-7$ alcanzan el mismo valor o son iguales.

19. Dadas las expresiones trigonométricas:

$M(x)=\cos 2x;\ N(x)=3\operatorname{sen}^2 x;\ P(x)=\operatorname{sen} x$

a) Efectúa $N\left(\frac{\pi}{3}\right)$

b) Determina los valores de x que satisfacen la siguiente ecuación:

$2^{M(x)+N(x)}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{(\cos x)^2}=\frac{32^{P(x)}}{4}$

20. A continuación se muestran dos expresiones trigonométricas:

$A(x)=\operatorname{sen} x$ y $B(x)=\operatorname{sen} 2x$

a) Prueba que $B\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) Determina el conjunto solución de la ecuación:

$36^{A(x)}-\left(\frac{1}{6}\right)^{B(x)}=\operatorname{sen} 1\,980^0$.

21. Teniendo en cuenta las siguientes expresiones trigonométricas:

$Q(x)=\operatorname{sen} x+\frac{1}{3}$; $P(x)=10^{\log \operatorname{sen} x}$ y $R(x)=\cos x$

a) Halla el conjunto solución en el intervalo $[0;2\pi]$ de la ecuación

$7^{3Q(x)}=49^{P(x)}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{[R(x)]^2}$

b) Comprueba que $P\left(\frac{\pi}{2}\right)-1=0$

22. Sean las funciones de ecuaciones $f(x)=2^{3\operatorname{sen} x-\cos^2 x}$ y $g(x)=3x-4$. Halla los valores de x para los cuales se cumple que: $f(x)=g(4)$.

23. Dadas las expresiones trigonométricas:

$A(x) = 2\operatorname{sen}2x$, $B(x) = \tan x$ y $C(x) = \cos x$

a) Resuelve la ecuación $\left(\sqrt{3}\right)^{A(x)\cdot B(x)} = 81^{\frac{1}{2}-\frac{C(x)}{4}}$

b) Verifica que $B\left(-\frac{7\pi}{6}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$

24. Dadas las funciones trigonométricas *f*, *g* y *h* de ecuación

$f(x) = \operatorname{sen}2x$, $g(x) = \cos 2x$ y $h(x) = \cos x$

a) Halla las soluciones de la ecuación: $\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{f(x)}{g(x)}} - 8^{\frac{h(x)}{3}} = 0$

b) Calcula $f\left(\frac{\pi}{3}\right)-g\left(-\frac{\pi}{2}\right)+h\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

25. Sean *M* y *Q* expresiones trigonométricas tale que:

$M(x) = \operatorname{sen}x$ y $Q(x) = \sqrt{\cos x}$.

a) Demuestra que: $\sqrt{2}Q\left(\frac{5\pi}{3}\right)=1$

b) Halla el conjunto solución de la ecuación $4^{\left[Q(x)\right]^4} = 16\cdot 2^{5M(x)}$

26. Sean las funciones trigonométricas *f* y *g* si

$$f(x) = -\operatorname{sen}x \text{ y } g(x) = \frac{\cos 2x + \operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x}$$

a) Determina los valores de $\{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 2\pi\}$ para los cuales se cumple que:
$\sqrt{2f(x)} = \sqrt{g(x)}$.

b) Calcula $g\left(\frac{-\pi}{6}\right)$.

27. Sean las expresiones trigonométricas:

$A(x) = \cos^2 x + 4$, $B(x) = \operatorname{sen}2x$ y $C(x) = 2\cos x$

a) Resuelve la ecuación $\sqrt{A(x)} = \tan 225^0 + \frac{B(x)}{C(x)}$

b) Calcula $A\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

28. Sean las expresiones trigonométricas:

$P(x) = \cos 2x$ y $N(x) = \cos x$

a) Halla el conjunto solución de la ecuación $\left(\frac{1}{2}\right)^{-P(x)} - 4\cdot 32^{N(x)} = 0$.

b) Calcula $P\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

29. Dadas las funciones trigonométricas *h* y *q* de ecuaciones

$h(x) = \cos 2x - \operatorname{sen}x$ y $q(x) = \operatorname{sen}2x\cdot\tan x - \operatorname{sen}x$

a) ¿Para qué valores de $\{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le \pi\}$ se cumple que: $h(x) = q(x)$?

b) Di los valores reales de x que no pertenecen al dominio de definición de q.

c) Di si el par ordenado $\left(\frac{\pi}{6}; 0\right)$ pertenece a la función h.

d) Halla los ceros de la función q.

30. Sean las funciones trigonométricas

$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ y $g(x) = \operatorname{sen} 2x \cdot \tan x$

a) ¿Para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se cumple que las funciones f y g son iguales?

b) Demuestra que para todos los valores admisibles de la variable se cumple que $f(x) = \sqrt{g(x)} \cdot \cos\frac{\pi}{4}$

c) Determina el dominio de la función g.

31. Sean las expresiones trigonométricas

$A(x) = \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos x}$ y $B(x) = \operatorname{sen} 2x \cdot \tan x$

a) Resuelve la ecuación $2^{B(x)} = 16 \cdot 2^{A(x)}$

b) Comprueba que para todos los valores admisibles de la variable x se cumple que $\left[A(x)\right]^2 = 2B(x)$.

32. Dadas las expresiones trigonométricas que se muestran a continuación:

$M(x) = 2\operatorname{sen}^2 x + \cos 2x$ y $N(x) = \cos x + \operatorname{sen} 2x \cdot \tan x$

¿Para qué valores reales de x se cumple que:

$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{M(x)} = \log_2 N(x)$?

33. Sean las expresiones trigonométricas tales que:

$A(x) = \cos 2x$; $B(x) = \operatorname{sen} x$ y $C(x) = \operatorname{sen} 2x \cdot \tan x$

a) Halla en el intervalo de $[0; 2\pi]$ las soluciones de la ecuación:

$$6^{A(x)} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-B(x)} \cdot 2^{\frac{C(x)}{2B(x)}}$$

b) Di los valores inadmisibles de la expresión $C(x)$.

34. Sean las expresiones

$P(x) = \log_5\left(\cot^2 x + 1\right) + 2\log_5(\operatorname{sen} 2x)$ y $Q(x) = 4\cos x - 1$

a) Determina los valores reales de x con $0 \le x \le \pi$ para los cuales se cumple que: $5^{P(x)} = Q(x)$

b) Calcula el valor de $\log_2\left[Q(x) + 1\right]^2$ para $x = \frac{7\pi}{4}$.

35. Dada las expresiones trigonométricas:

$A(x) = \cos 2x + \operatorname{sen}^2 x$ y $B(x) = \cos x$.

a) Determina los valores reales de x con $0 \le x \le 4\pi$ los cuales se cumple que:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{A(x)} = 25 \cdot \left(\frac{1}{125}\right)^{B(x)}$$

b) Verifica que para $x = \dfrac{\pi}{2}$ se cumple la igualdad $\sqrt{4^{B(x)}} - 1 = 0$

36. En la figura 3.52 se encuentran representadas dos funciones trigonométricas f y g, si : $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$.

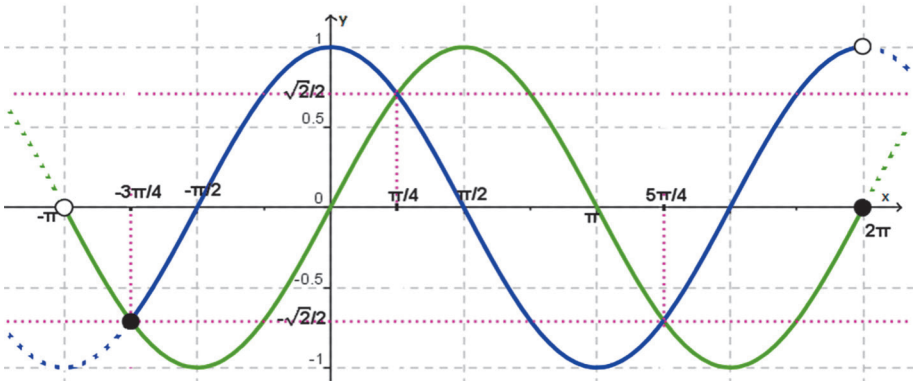


Fig. 3.52

Selecciona la respuesta correcta en cada caso:

36.1 El dominio de definición de la función f es:

a) $x \in [-\pi; 2\pi]$ b) $x \in \left[-\dfrac{3\pi}{4}; 2\pi\right)$

c) $x \in (-\pi; 2\pi]$ d) $x \in \left[-\dfrac{3\pi}{4}; 2\pi\right]$

36.2 Los valores para los cuales está definida la función g son:

a) $-\dfrac{3\pi}{4} < x < 2\pi$ b) $-\dfrac{3\pi}{4} \le x < 2\pi$

c) $-\dfrac{3\pi}{4} < x \le 2\pi$ d) $-\dfrac{3\pi}{4} \le x \le 2\pi$

36.3 Las coordenadas del punto donde ambas funciones son iguales es:

a) $\left(-\dfrac{3\pi}{4}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ b) $(0;0)$ c) $(2\pi; 0)$ d) $\left(\dfrac{5\pi}{4}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

36.4 El intercepto del gráfico de g con la recta $x = 0$, es en el punto de coordenadas :

a) (0;0) b) (0;1) c) (1;0) d) $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

37. De las gráficas de la figura 3.53:

37.1 Escribe las ecuaciones de sus funciones armónicas.

37.2 De cada una de ellas, di cuál es la amplitud, la fase inicial, el periodo y la imagen.

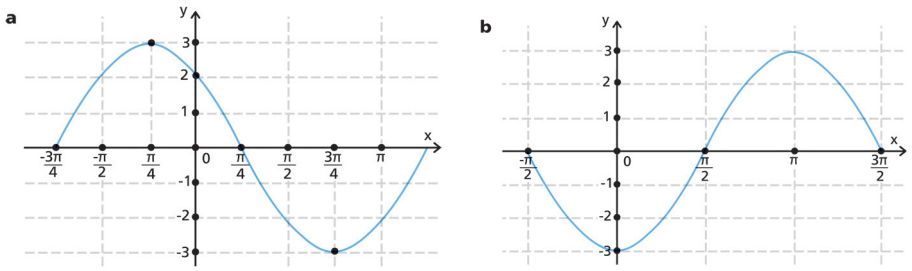


Fig. 3.53

¡Atención!

En la gráfica b) de la figura 3.53 cabe más de una interpretación.

38. Elabora una ecuación trigonométrica en la que utilices al menos dos de las identidades estudiadas cuyo conjunto solución sea

$$\left\{x \in \mathbb{R}: x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

39. Investiga situaciones de la vida que se modelen mediante funciones trigonométricas y formula un problema.

Autoevaluación

1. Lee con cuidado y clasifica en verdadero o falso las proposiciones siguientes, Transforma las falsas en verdaderas:

a) La amplitud del ángulo de 50^0 en el sistema circular es $\frac{5\pi}{18}$

b) $\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sec\frac{\pi}{3}$

c) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\cot\frac{5\pi}{4}$ es positiva

e) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$

f) Los valores inadmisibles de la expresión $\dfrac{1}{2\cos x}$ son $x\neq k\dfrac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$

g) La función *f* de ecuación *f(x)* = sen *x* es impar

h) La función *g* de ecuación *g(x)* = sen *x* es monótona

i) La función *h* de ecuación *h(x)* = sen *x* es creciente y positiva en el intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$

j) La función *i* de ecuación *i(x)* = cos *x* es simétrica respecto al origen de coordenadas

k) La función *k* de ecuación *k(x)* = cos *x* es negativa para $\left\{x\in\mathbb{R}:\dfrac{\pi}{2}\leq x\leq\dfrac{3\pi}{2}\right\}$

l) La función *l* de ecuación *l(x)* = 2cos *x* es inyectiva en el intervalo $[\pi;2\pi]$

m) La función *m* de ecuación *m(x)* = tan *x* es monótona

n) Los ceros de la función *n* de ecuación *n(x)*= tan *x* son $x=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$

ñ) La función *ñ* de ecuación *ñ*(*x*) = tan *x* no es periódica

o) La función *o* de ecuación *o(x)* = cot *(x* + π*)* es simétrica respecto al eje de coordenadas

p) La función *p* de ecuación *p(x)* = cot *x* no tiene valores extremos.

q) La ecuación de la asíntota de la función *q* de ecuación *q(x)* = cot *x* definida en el intervalo $\left[-\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$ es $x = 0$

2. Sean las expresiones trigonométricas:

A(x) = sen 2*x* · tan *x* y *B(x)* = $2\cos^2 x$

a) Demuestra que para todos los valores admisibles de la variable se cumple que *A(x)* + *B(x)* = 2.

b) Calcula: $\dfrac{4\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}}{\cos\pi}$ + tan 405° y di a qué dominio más restringido pertenece el resultado obtenido.

3. Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\cos 2x+\operatorname{sen}^2 x}=4\cdot\left(\dfrac{1}{8}\right)^{\cos x}$ $x\cdot(0\,;\,2\pi]$

b) $\log(\cos^2 x+5\operatorname{sen}x)-\log(\cos 2x)=\log_3 1$; $0<x<2\pi$

4. Sean las expresiones:

A(x) = $2^{3\operatorname{sen}x-\cos^2 x}$ y *B(x)* = 3*x* – 4

Determina los valores reales de *x* para los cuales se cumple que *A(x)* = *B* (4).

5. La gráfica (figura 3.54) muestra una función q, definida en un intervalo real por la ecuación $q(x) = a \cos bx$.

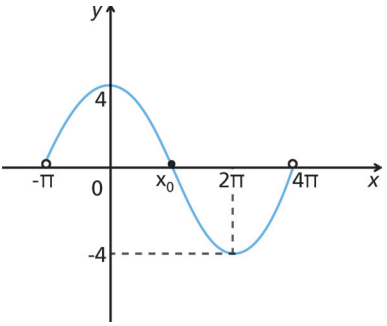


Fig. 3.54

a) La ecuación de q es:

$q(x) = 4\cos 2x$

$q(x) = 4\cos x$

$q(x) = a \cos \frac{1}{2} x$

$q(x) = 4\cos 4x$

b) De la función q se puede afirmar que:

tiene tres ceros.

tiene imagen $y \in (-4 ; 4)$.

x_0 es igual a π.

tiene dominio $x \in [-\pi ; 4\pi]$.

c) La función q es decreciente y positiva en el intervalo:

(0;4) (4;π) (0;π) (4;2π)

6. La gráfica (figura 3.55) muestra una función h definida por la ecuación

$h(x) = a$ sen bx en un intervalo real.

De la función h se puede afirmar que:

a) es positiva para $0 \leq x \leq \pi$.

b) tiene tres ceros.

c) tiene ecuación $h(x) = 3$ sen x.

d) tiene dominio $-\pi < x < \frac{3\pi}{2}$

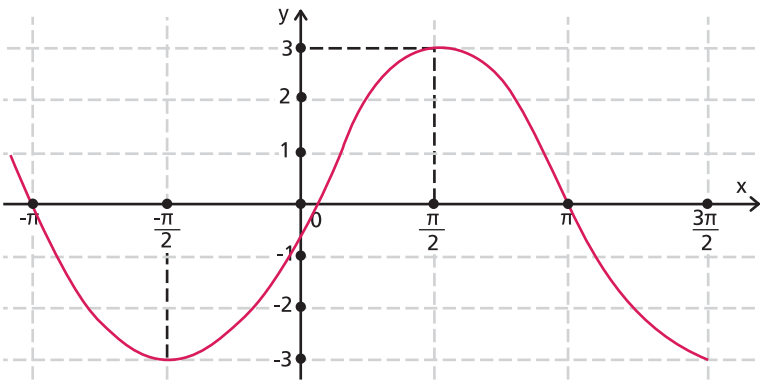


Fig. 3.55

CAPÍTULO 4

Geometría analítica de la recta en el plano

La siguiente interrogante te puede conducir a pensar en el GPS[1], ¿cómo conocer dónde estamos situados? El desarrollo de las nuevas tecnologías hace posible el empleo de métodos, tales como la triangulación o la trilateración[2] (que permiten conocer con mayor exactitud la posición de objetos (figura 4.1) como los celulares, el epicentro de los sismos, el desarrollo de los rayos, la localización de vehículos y otros. Los argumentos geométricos de estas técnicas eran conocidos por las antiguas civilizaciones hace más de dos mil años.

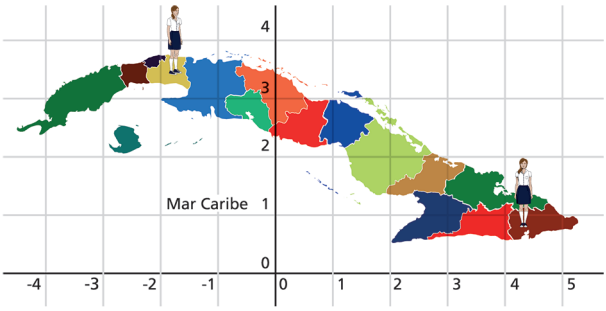


Fig. 4.1

Los antigüos egipcios referían los puntos a dos ejes perpendiculares, para la medición de parcelas y la construcción de templos y pirámides. En el siglo III, Arquímedes utilizó coordenadas y Apolonio dio una expresión métrica, característica de cada cónica, que no es más que su ecuación. La *Geografía* de Ptolomeo, escrita hacia el siglo II, es en esencia una tabla de

[1] Sistema creado para localización de objetos terrestres o aéreos, basados en el principio matemático de triangulación, por lo que para calcular la posición de un punto es necesario determinar la distancia.

[2] Técnica geométrica para determinar la posición de un objeto conociendo tres puntos de referencia que solo utiliza distancia.

longitudes y latitudes –de muchos puntos del mundo conocido–, a las que llamamos *coordenadas geográficas*.

Así fue que, el en siglo XVII René Descartes (1596-1650) (figura 4.2) descubrió la manera de resolver este tipo de problema con fórmulas del álgebra, creó los ejes de coordenados, mostró cómo las fórmulas matemáticas pueden representar figuras geométricas como las rectas, y funda la Geometría Analítica



Fig. 4.2

La diversa finalidad de la nueva Geometría –metódica para Descartes, técnica para Pierre Fermat (1601-1665) (figura 4.3)–, explica su diverso desarrollo. Como método, la Geometría Analítica permite hallar y estudiar los lugares geométricos de manera sistemática y general. Como instrumento de análisis dio la clasificación de las curvas en algebraicas y trascendentes, permitió demostrar la imposibilidad de solución de ciertos problemas clásicos (duplicación del cubo, trisección del ángulo, etc.), y abrió las puertas al estudio general de las transformaciones geométricas.



Fig. 4.3

El calificativo "analítica" procede de la *Analytica* con que Aristóteles designó la Lógica, y de él se deriva el nombre actual Análisis Matemático, dado al Álgebra ampliada con el Cálculo Infinitesimal.

La idea esencial de la Geometría Analítica es la representación de los lugares geométricos por ecuaciones y el estudio de las figuras susceptibles de tal expresión mediante el algoritmo algebraico.

En este capítulo inicias el aprendizaje de fórmulas algebraicas esenciales para comprender y desarrollar análisis de figuras planas, conocerás nuevas relaciones y figuras que se encuentran a tu alrededor, útiles en las diferentes ramas de la ciencia, la técnica y el arte.

Antes de adentrarte en los elementos de la geometría analítica te proponemos recordar algunos conocimientos de geometría plana, que son necesarios para su correcta comprensión.

4.1 Geometría plana

La geometría clásica (sintética), siguiendo las ideas de los griegos, es esencialmente estática, considera a las figuras como entes rígidos cuyas propiedades estudia.

En la resolución de problemas geométricos, ya sean de demostración, de cálculo o de construcción, el éxito se alcanza independientemente de los métodos matemáticos utilizados, por el conocimiento de los teoremas y las interrelaciones que se pueden obtener en el momento de su aplicación, según las exigencias que nos propone el problema por resolver.

Para la aplicación de los distintos teoremas estudiados en la resolución de los tipos de ejercicios antes mencionados, es indispensable el conocimiento de cuál es su premisa (datos) y cuál es su tesis (conclusión), pues esto nos permite saber qué relaciones debemos buscar para llegar a una conclusión exitosa y cómo poder establecer relaciones entre los distintos teoremas. Recordemos el enunciado de algunos teoremas que se emplean activamente en la resolución de estos ejercicios.

Rectas. Pares de ángulos

Las rectas y los ángulos son elementos geométricos que se encuentran en tu entorno, en tu andar, en tu postura, son fundamentales en las obras arquitectónicas entre muchos otros ejemplos.

Recuerda que...

Dos puntos determinan una recta.

■ *¿Qué relaciones se pueden establecer entre dos rectas en el plano?*

A esta pregunta podemos responder que son paralelas (o coincidentes como caso particular de paralelismo) o se cortan.

En caso de que se corten, pueden hacerlo formando ángulos agudos, obtusos o rectos (formando ángulos de 90^0). Veamos algunos teoremas de rectas que se cortan perpendicularmente.

Ejemplo 4.1

¿Cuál es la premisa y la tesis del siguiente teorema?

Si dos rectas son perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí**.**

Simbólicamente: (Si $a \perp c$, $b \perp c$, entonces $a \parallel b$) (figura 4.4).

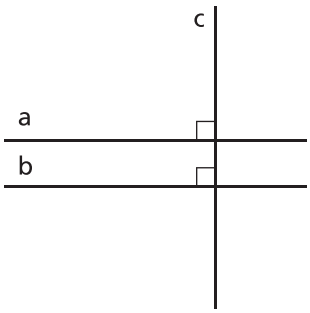


Fig. 4.4

Resolución:

Premisa: $a \perp c$, $b \perp c$. Tesis: $a \parallel b$ ◆

Si se quisiera demostrar que dos rectas a y b son paralelas, una vía es utilizar este teorema, por lo que se debe probar primeramente qué rectas (a y b) son perpendiculares a una tercera recta, digamos c, por medio de otros datos que nos planteen en el ejercicio propuesto o por conclusiones intermedias que se hayan podido establecer con los datos.

¿? ¿Sabías que...?

Las relaciones entre rectas y los ángulos que se forman son importantes en variados campos de la vida, como se evidencia en ergonomía[3].
Los estudios realizados, por especialistas, indican que una posición correcta frente a la computadora o laptop (figura 4.4) ocurre cuando la línea visual formada entre la pantalla y los ojos, es paralela a la línea que determina el brazo con la muñeca, así como la que queda determinada por la posición del muslo, en consecuencia estas son perpendiculares (forman un ángulo de 90⁰) con la recta que debe definir la espalda pegada al asiento, de esta forma cumple una higiene corporal adecuada.

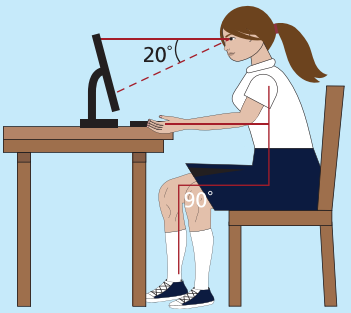


Fig. 4.5

Ejemplo 4.2

Si una recta es perpendicular a una de dos rectas paralelas, es perpendicular a la otra.

Simbólicamente: (Si $a \parallel b$, $a \perp c$ entonces $b \perp c$) (figura 4.6).

¿Cuál es la premisa y la tesis de este teorema?

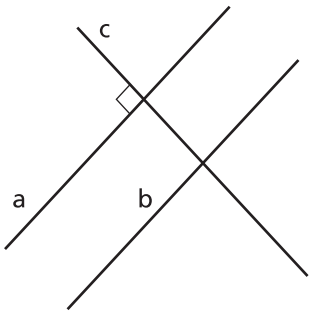


Fig. 4.6

Resolución:

Premisa: $a \parallel b$, $a \perp c$. Tesis: $b \perp c$ ◆

Teniendo en cuenta como analizamos el ejemplo 4.1, para poder aplicar este teorema en la demostración de la perpendicularidad de dos rectas $(b \perp c)$, debemos probar primero u obtener de los datos el paralelismo de

[3] Campo de estudios de la relación hombre-máquina, para reducir las molestias corporales que son causadas por las malas posturas al sentarse.

una de ellas (*b*) con otra recta (*a*) que sea perpendicular con una tercera recta (*c*).

Aplica tus conocimientos

De los siguientes teoremas separa la premisa y la tesis.

a) Segmentos de paralela entre paralelas son iguales.
b) Al cortarse dos rectas los ángulos opuestos por el vértice son iguales y los adyacentes suman 180^0.
c) Los ángulos agudos (obtusos) de lados respectivamente paralelos son iguales.
d) Dos ángulos de lados respectivamente perpendiculares, uno agudo y el otro obtuso, suman 180^0.

Utilizando los teoremas analizados anteriormente, veamos una forma de cómo resolver el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3

En la figura 4.7 tenemos:

$\overline{CD} \perp \overline{AB}$; $\overline{ED} \perp \overline{AC}$; $\overline{CG} \perp \overline{AC}$,

B punto de intersección de *CG* y *AF*, $\angle A = 50^0$.

Calcula las amplitudes de los ángulos $\angle$ EDC y $\angle$ *FBG*.

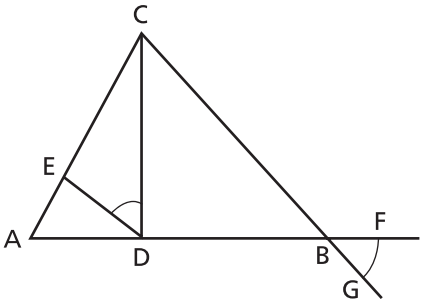


Fig. 4.7

Resolución:

$\overline{CD} \perp \overline{AB}$ por datos.

$\overline{ED} \perp \overline{AC}$ por datos (1).

Luego, $\measuredangle EDC = \measuredangle A = 50^0$ por tener sus lados respectivamente perpendiculares y ser del mismo tipo.

$\measuredangle ADE + \measuredangle EDC = \measuredangle ADC$ por suma de ángulos.

$\measuredangle ADE + 50^0 = 90^0$

$\measuredangle ADE = 40°$

De (1) y $\overline{CG} \perp \overline{AC}$ por datos.

Entonces, $\overline{ED} \,||\, \overline{GC}$ porque dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí; $\measuredangle ABC = \measuredangle ADE = 40°$ por ser correspondientes entre $\overline{ED} \,||\, \overline{GC}$ y $\overline{AF}$ secante; $\measuredangle FBG = \measuredangle ABC = 40^0$ por ser opuestos por el vértice. ◆

Ejercicios del subepígrafe Rectas. Pares de ángulos

1. ¿Qué condiciones deben cumplirse para que:

a) Dos ángulos en posición de alternos o correspondientes sean iguales y los conjugados sean suplementarios?

b) Las bisectrices de dos ángulos consecutivos sean perpendiculares?

2. Di si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones. Las falsas redáctalas correctamente.

a) La suma de ángulos consecutivos alrededor de un punto suman 180^0.

b) Si dos ángulos tienen sus lados respectivamente paralelos y uno es agudo y el otro es obtuso entonces suman 180^0.

c) El ángulo complementario a un ángulo de 50^0 es de 41^0.

d) Los ángulos suplementarios suman 180^0.

e) Los ángulos del mismo tipo de lados respectivamente perpendiculares son iguales

3. En la figura 4.8 determina todos los pares de ángulos adyacentes, opuestos por el vértice, correspondientes, alternos y conjugados que hay, y calcula sus amplitudes si $\measuredangle 1 = 50°$ y $a \parallel b$.

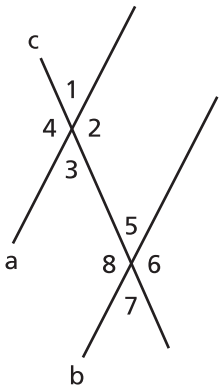


Fig. 4.8

4. En la figura 4.9, $AB \parallel DE$, $BC \parallel FG$ y $\measuredangle B = 30^0$.
Calcula la amplitud de los ángulos: α, β, γ y δ.

5. En la figura 4.10, $OC \perp OA$, $OD \perp OB$
OM: bisectriz del $\measuredangle BOA$
ON : bisectriz del $\measuredangle DOC$
Prueba que: $\alpha = \beta$

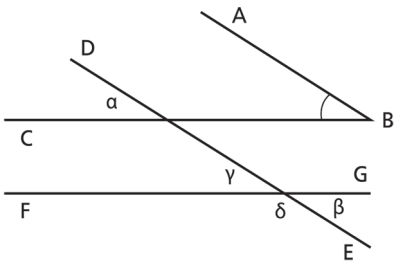


Fig. 4.9

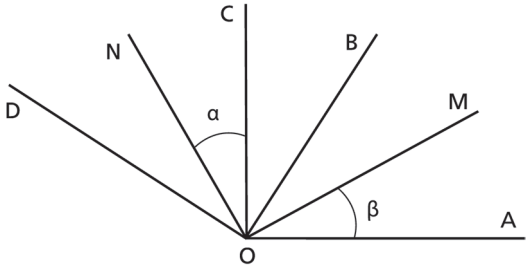


Fig. 4.10

Triángulos y rectas notables

Los conceptos vinculados a los triángulos y las rectas notables son de gran aplicabilidad en la Geometría Analítica, que se estudiará en este grado, de ahí que recordemos algunos conceptos, propiedades y teoremas vinculados a este contenido.

Recuerda que...

Los triángulos, porción del plano limitado por una poligonal cerrada de tres lados, han de cumplir que la longitud de cada lado es menor que la suma de las longitudes de los otros dos y mayor que la diferencia de las longitudes de esos dos lados (desigualdad triangular). Se clasifican tanto según la longitud de sus lados como la amplitud de sus ángulos interiores.

Aplica tus conocimientos

De acuerdo con la clasificación de los triángulos declarados en la columna A y las propiedades de la columna B forma los pares ordenados (número; letra) de forma tal que a cada número corresponda una o más letras.

A	B
1. Acutángulo	a) sus tres lados son iguales
2. Escaleno	b) uno de sus ángulos interiores es de 90°.
3. Triángulo rectángulo	c) sus tres ángulos interiores son agudos.
4. Equilátero	d) dos de sus lados son iguales.
5. Obtusángulo	e) uno de sus ángulos interiores es obtuso.
6. Isósceles	f) sus tres lados son desiguales.
	g) es tres veces isósceles.
	h) los ángulos base son iguales.

En todo triángulo existen tres de cada una de las rectas notables que se intersecan, cada trío en un punto llamado punto notable. Las rectas notables son la altura, la bisectriz, la mediatriz y la mediana; y los puntos notables son el ortocentro, incentro, circuncentro y baricentro, respectivamente.

¡Atención!

A pesar de que la altura, la bisectriz, la mediatriz y la mediana se reconocen como rectas notables, para el cálculo de su longitud la altura y la mediana, se comprenden como segmentos de recta.

Aplica tus conocimientos

Identifica en cada (Δ_n) con la recta notable, punto notable o la figura correspondiente, de forma tal que las proposiciones que se obtengan sean verdaderas.

1. La (Δ_1) es el segmento de perpendicular trazado desde un vértice hasta el lado opuesto (figura 4.11 (Δ_2)) y se intersecan en un punto llamado ortocentro.
2. El incentro es el punto de intersección de las (Δ_3) (figura 4.11 d) de los ángulos interiores del triángulo y cumple la propiedad de ser el centro (Δ_4).

3. El centro de gravedad de un triángulo es el (Δ_5) que es el punto de intersección de las (Δ_6), las cuales son los segmentos trazados desde un vértice hasta el (Δ_7) (figura 4.11 a) y cumplen, además, que se encuentra, de cada vértice, a una distancia igual a los dos tercios de la longitud de la mediana correspondiente y a un tercio del punto medio del lado.
4. En la figura 4.11 (Δ_8) se ha trazado la (Δ_9) de un lado del triángulo y no es más que la recta perpendicular en el punto medio del lado. Las tres mediatrices se intersecan en punto llamado (Δ_{10}) y es el centro de la (Δ_{11}) circunscrita al triángulo.

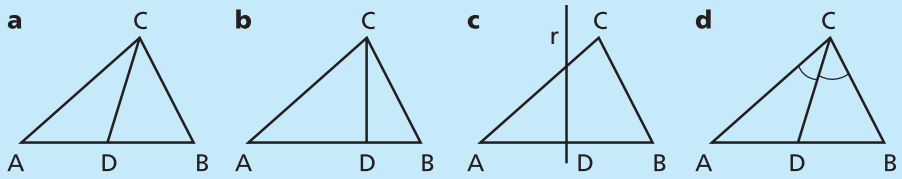


Fig. 4.11

Según la definición de cada recta y punto notable correspondiente, comprueba trazando dos triángulos con el GeoGebra, uno isósceles y otro equilátero, las siguientes proposiciones:

- En todo triángulo isósceles la altura relativa a la base coincide con la bisectriz del ángulo principal, la mediana y la mediatriz relativa a ese lado y los cuatro puntos notables están alineados sobre dicha altura.
- En todo triángulo equilátero, la altura relativa a cada lado coincide con las restantes rectas notables y todos los puntos notables coinciden en un punto.

Saber más

En todo triángulo el ortocentro, circuncentro y baricentro están en una misma recta, conocida como la recta de Euler.

Recuerda que...

La circunferencia inscrita en un triángulo es aquella que es interior al triángulo y tangente a sus lados (figura 4.10), su centro es el incentro (*I*), punto de intersección de las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo; luego, existen tres radios $\left(\overline{ID};\overline{IE};\overline{IF}\right)$ que son perpendiculares a los lados del triángulo.

Ejemplo 4.4

Calcular la longitud del radio de la circunferencia inscrita en un triángulo equilátero de 4,0 cm de lado.

Resolución:

Sea el ΔABC equilátero (figura 4.12). Las bisectrices coinciden con las alturas y las medianas; el incentro, por tanto, es ortocentro y baricentro, por lo que los radios $\overline{ID}$, $\overline{IE}$ e $\overline{IF}$ están sobre dichas rectas notables y su longitud es:

$$r = \overline{ID} = \frac{1}{3}\overline{CD} \qquad (1)$$

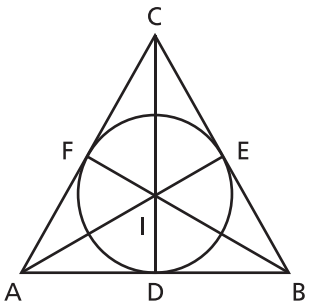


Fig. 4.12

Condición que cumple el incentro en el triángulo equilátero por coincidir con el baricentro.

Calculemos la longitud de $\overline{CD}$:

En el CDB rectángulo en D (figura 4.10), por ser $\overline{CD}$ altura tenemos:

$\measuredangle BCD = \dfrac{\measuredangle BCA}{2}$ por ser $\overline{CD}$ bisectriz del $\measuredangle C$.

$\measuredangle BCD = \dfrac{60^0}{2} = 30^0$ por ser $\measuredangle BCA$ interior del ABC equilátero.

Por el teorema del ángulo de 30^0, en el triángulo rectángulo tenemos:

$\overline{BD} = \dfrac{1}{2}\cdot\overline{BC} = \dfrac{1}{2}\cdot 4 = 2\,\text{cm}$, por ser $\overline{BD}$ cateto opuesto al ángulo de 30^0 y $\overline{BC}$, la hipotenusa; $\overline{CD} = \sqrt{3}\cdot\overline{BD} = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$ por ser $\overline{CD}$ el cateto adyacente al ángulo de 30° (como consecuencia del teorema del ángulo de 30^0 en el triángulo rectángulo) y $\overline{BD}$ el cateto opuesto.

Sustituyendo en (1) tenemos: $r = \dfrac{1}{3}\cdot 2\sqrt{3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}15\,\text{cm} \approx 1{,}2\,\text{cm}$.

Respuesta: la longitud del radio de la circunferencia inscrita en un triángulo equilátero de 4,0 cm de lado es aproximadamente igual a 1,2 cm ◆

Aplica tus conocimientos

Existe otra vía para calcular la longitud de $\overline{CD}$ en el ejemplo anterior.
¡Búscala!

En el triángulo rectángulo existen, también, un grupo de teoremas conocidos como Grupo de Teoremas de Pitágoras, en los cuales se plantean

relaciones métricas entre los lados del triángulo y entre la altura relativa a la hipotenusa y los lados, las cuales podrás encontrar en el epígrafe 3.2 del capítulo 3.

Aplica tus conocimientos

Identifica los siguientes teoremas, separa su premisa y su tesis (figura 4.13):

- En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos: $c^2 = a^2 + b^2$.
- En todo triángulo rectángulo, la longitud de la altura relativa a la hipotenusa es media proporcional entre las longitudes de los segmentos que determina sobre la hipotenusa: $\frac{p}{h} = \frac{h}{q}$ o $h^2 = p \cdot q$.
- En todo triángulo rectángulo, la longitud de cada cateto es media proporcional entre la longitud de su proyección sobre la hipotenusa y la longitud de la hipotenusa: $\frac{p}{b} = \frac{b}{c}; \frac{q}{a} = \frac{a}{c}$ o $a^2 = q \cdot c\,;\, b^2 = p \cdot c$.

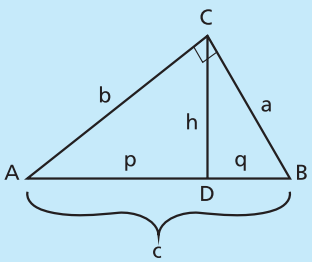


Fig. 4.13

Ejemplo 4.5

En el ΔBDA rectángulo en D (figura 4.14).

O: punto medio de $\overline{AB}$;

$\overline{AB} = 15\text{cm}$;

$\overline{EO} = 4{,}5\text{cm}$;

$\overline{DC} \perp \overline{AB}$ y E es el punto medio de $\overline{DC}$.

Calcular la longitud de $\overline{DC}$, $\overline{AD}$ y $\overline{CO}$.

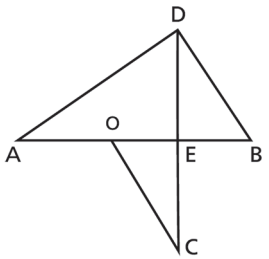


Fig. 4.14

Resolución:

Cálculo de $\overline{DC}$

Como $\overline{DC} \perp \overline{AB}$ (por datos), entonces $\overline{DE}$ es la altura relativa a la hipotenusa del ΔBDA rectángulo en D; luego, por el teorema de la altura tenemos:

$$\overline{DE}^2 = \overline{AE} \cdot \overline{BE} \qquad (1)$$

por suma de segmentos:

$\overline{AE} = \overline{AO} + \overline{EO}$ (2)

por diferencia de segmentos:

$\overline{BE} = \overline{BO} - \overline{EO}$ (3)

Pero $\overline{AO} = \overline{BO} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5\text{cm}$, por ser O punto medio de $\overline{AB}$;

pero, $\overline{EO} = 4{,}5\text{cm}$ por datos; luego, sustituyendo en (2), (3), resulta:

$\overline{AE}$ = 7,5 + 4,5 = 12 cm, $\overline{BE}$ = 7,5 – 4,5 = 3 cm

por lo que, sustituyendo en (1), tenemos:

$\overline{DE}^2$ = 12 · 3 = 36 cm^2,

$\overline{DE}$ = 6 cm;

pero, se tiene que calcular $\overline{DC}$

$\overline{DC} = 2 \cdot \overline{DE}$ por ser E punto medio de $\overline{DC}$

Luego $\overline{DC} = 2 \cdot 6 = 12\text{cm}$

Cálculo de $\overline{AD}$

$\overline{AD}^2 = \overline{AE} \cdot \overline{AB}$ por el teorema de los catetos

$\overline{AD}^2$ = 12 · 15

$\overline{AD}^2$ = 180

$\overline{AD} = \sqrt{180}$

Luego $\overline{AD} \approx 13{,}4\text{cm} \approx 13\text{cm}$

Cálculo de $\overline{CO}$

En el ΔCEO rectángulo en E por ser $\overline{DC} \perp \overline{AB}$ (por datos) tenemos:

$\overline{CE} = \overline{DE}$ = 6 cm por ser E punto medio de $\overline{DC}$.

$\overline{CO}^2 = \overline{EO}^2 + \overline{CE}^2$ por teorema de Pitágoras.

$\overline{CO}^2 = 4{,}5^2 + 6^2$

$\overline{CO}^2$ = 20,25 + 36

$\overline{CO}^2$ = 56,25

Luego $\overline{CO} = \sqrt{56{,}25} = 7{,}5\text{cm}$ ◆

Aplica tus conocimientos

Busca otra vía para realizar el cálculo de $\overline{AD}$ en el ejemplo anterior.

Conéctate

Accede al sitio www.cubaeduca.cu, en la sección curricular, buscas en undécimo grado Matemática, la lección: Sistematización sobre los triángulos.
Revisa el tema y realiza las actividades propuestas.

Ejercicios del epígrafe Triángulos y rectas notables

1. Si uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es $\frac{2}{3}$ del otro, ¿cuáles son las amplitudes de esos ángulos?

2. En un triángulo isósceles la amplitud del ángulo principal es de 60º. ¿Cuál es la amplitud de los ángulos bases? ¿Qué puedes decir de este triángulo?

3. En la figura 4.15; M, N y P son puntos alineados

Si $\sphericalangle QNP = 2\theta$.

Prueba que: $\overline{MN} = \overline{NQ}$

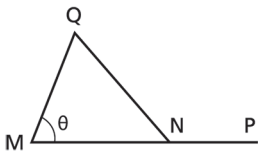


Fig. 4.15

4. En un triángulo rectángulo se pueden determinar los puntos notables ortocentro y circuncentro sin necesidad de trazar las rectas notables ¿En qué lugares se encuentran estos puntos? Fundamenta tu respuesta.

5. En la figura 4.16

$\overline{CD} \perp \overline{AB}$;

$\overline{BC} \perp \overline{AC}$;

$\overline{AM}$: bisectriz del $\sphericalangle A$

$\sphericalangle B = 58^0$

Calcula la amplitud del ángulo α.

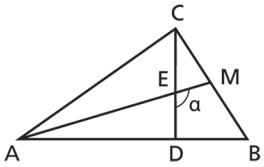


Fig. 4.16

6. En un triángulo rectángulo, la altura relativa a la hipotenusa mide 6,0 cm.

a) ¿Qué longitud pueden tener los segmentos en que el pie de la altura divide a la hipotenusa?

b) ¿Qué longitud tienen los segmentos de hipotenusa si su razón es 1:4?

7. Demuestra que en todo triángulo rectángulo de hipotenusa *c* y catetos *a* y *b* se cumple que la altura *h* relativa a la hipotenusa es igual al producto de la longitud de los catetos dividido por la longitud de la hipotenusa $\left(h = \frac{a \cdot b}{c}\right)$.

Sugerencia: Utiliza las distintas formas de expresar el área de un triángulo rectángulo o el Grupo de Teoremas de Pitágoras.

8. Crea un ejercicio en que se apliquen los conocimientos recordados en este epígrafe donde se vinculen las propiedades de los triángulos, las rectas y puntos notables.

Cuadriláteros

Al igual que en los triángulos, los conceptos vinculados a los cuadriláteros son de gran aplicabilidad en la Geometría Analítica que se estudiará en este grado de ahí que recordemos algunos conceptos, propiedades y teoremas vinculados a este contenido.

Recuerda que...

¿A qué llamábamos cuadrilátero convexo y cómo se clasifican?

En la figura 4.17 (a y b) tienes dos ejemplos de cuadriláteros convexos, no siendo así el caso del inciso c.

¿Qué los diferencia? En los incisos a y b, si trazas las rectas que contienen a sus lados, siempre el cuadrilátero quedará completamente a un lado de dicha recta; no sucede así en el inciso c, si trazas las rectas *HG* o *GF*, el cuadrilátero queda a ambos lados de esta.

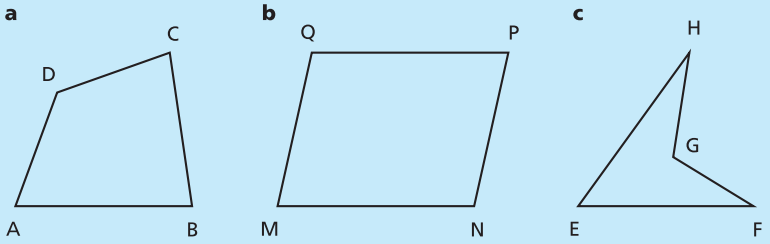


Fig. 4.17

■ *¿Qué criterio se tiene en cuenta para clasificar a los cuadriláteros convexos en paralelogramo, trapecio o trapezoide?*

Aplica tus conocimientos

De acuerdo con la clasificación de los cuadriláteros declarados en la columna A y las propiedades de la columna B forma los pares ordenados (número; letra) de forma tal que a cada número corresponda una o más letras.

A	B
1. Paralelogramo	a) Un par de lados opuestos paralelos
2. Trapecio	b) Ningún par de lados opuestos paralelos
3. Trapezoide	c) Los dos pares de lados opuestos paralelos

Los paralelogramos (figura 4.17 b) cumplen las siguientes propiedades:

- Los lados opuestos son paralelos e iguales: ($\overline{MN} \parallel \overline{PQ}; \overline{NP} \parallel \overline{MQ}$; $\overline{MN} = \overline{PQ}; \overline{NP} = \overline{MQ}$).
- Las diagonales se cortan en su punto medio.
- Los ángulos opuestos son iguales.
- Los ángulos consecutivos son suplementarios (suman 180^0).

Los paralelogramos a su vez se clasifican en paralelogramo general, rectángulo, rombo o cuadrado (figura 4.17 b).

¿Qué propiedades adicionales deben cumplir los paralelogramos para ser rectángulo, rombo o cuadrado?

Aplica tus conocimientos

En relación con los paralelogramos identifica cada (Δ_n) con rectángulo, cuadrado o rombo de forma tal que las proposiciones que se obtengan sean verdaderas.

- El (Δ_1) es un paralelogramo con sus ángulos rectos y las diagonales iguales.
- El paralelogramo con sus cuatro lados iguales y sus diagonales perpendiculares es un (Δ_2).
- El cuadrado es un paralelogramo que es (Δ_3) y (Δ_4) a la vez.

¡Atención!

Para demostrar que un cuadrilátero convexo es un paralelogramo, debemos probar que cumple una, cualquiera, de sus propiedades, es decir, debemos probar que:

- los lados opuestos son iguales, o
- los lados opuestos son paralelos, o
- un par de lados opuestos sean iguales y paralelos, o
- las diagonales se cortan en su punto medio, o
- los ángulos opuestos son iguales.

Ejemplo 4.6

Si *ABCD* y *CFED* son paralelogramos (figura 4.18), probar que: *ABFE* es un paralelogramo.

Resolución:

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ por ser lados opuestos del paralelogramo *ABCD*;

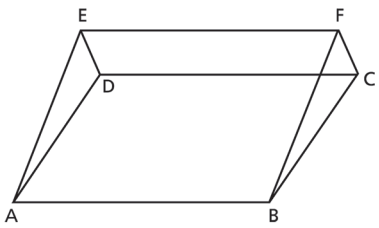


Fig. 4.18

$\overline{CD} \parallel \overline{EF}$ por ser lados opuestos del paralelogramo *CDEF*;
luego, $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$ por carácter transitivo.
$\overline{AB} = \overline{CD}$ por ser lados opuestos del paralelogramo *ABCD*;
$\overline{CD} = \overline{EF}$ por ser lados opuestos del paralelogramo *CDEF*;
Luego, $\overline{AB} = \overline{EF}$ por carácter transitivo.

Luego, *ABEF* es un paralelogramo por tener un par de lados opuestos paralelos e iguales. ◆

Aplica tus conocimientos

En el ejemplo 4.6 también se puede resolver, probando que los lados opuestos son iguales, a partir de demostrar que $\Delta ADE = \Delta BCF$.
¡Inténtalo!

En la figura 4.19 se muestra la clasificación y propiedades de los trapecios.

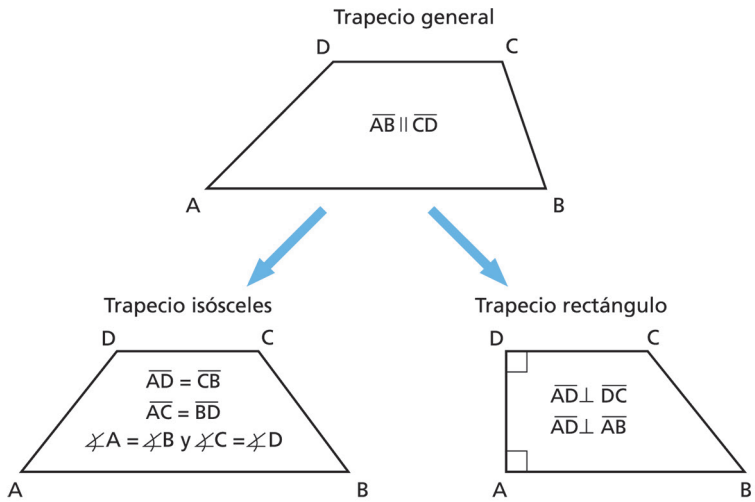


Fig. 4.19

¿Podríamos afirmar que todo paralelogramo es un trapecio?

Sí, pues para que un cuadrilátero sea trapecio solo basta con tener un par de lados opuestos paralelos. En el caso del paralelogramo, tenemos los dos pares de lados opuestos paralelos; sin embargo, no podemos decir que todo trapecio es un paralelogramo.

Ejercicios del epígrafe Cuadriláteros

1. Probar que, si por cada vértice de un paralelogramo se trazan paralelas a las diagonales, la figura formada es también un paralelogramo.

2. Probar que el segmento que une los puntos medios de dos lados opuestos de un paralelogramo, es paralelo a los otros dos lados.

3. Sea *ABCD* un paralelogramo (figura 4.20).

M y *N* son los puntos medios de $\overline{OA}$ y $\overline{OC}$, respectivamente.

Prueba que: *BNDM* es un paralelogramo

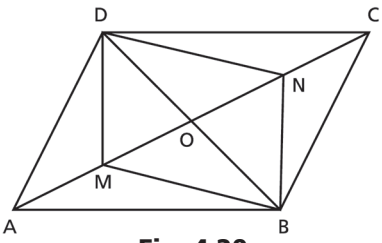


Fig. 4.20

4. Si la diagonal menor de un rombo es igual al lado, halla las amplitudes de los ángulos del rombo.

5. Prueba que la paralela media de un trapecio corta las diagonales en sus puntos medios.

6. Elabora un ejercicio de demostración en que tengas que aplicar las propiedades de los paralelogramos.

Circunferencia

Desde grados anteriores estudiaste la circunferencia como el conjunto de puntos del plano que equidistan (están a la misma distancia) de un punto fijo llamado centro, y que la distancia de un punto de la circunferencia al centro se llama radio, también estudiaste los elementos de la circunferencia y relaciones métricas que se cumplen entre estos.

Aplica tus conocimientos

Con los elementos de la circunferencia declarados en la columna A y las definiciones de la columna B forma los pares ordenados (número; letra) de forma tal que a cada número de la columna A le corresponda una letra de la columna B.

A	B
1. Cuerda	a) intersección de un ángulo central con la circunferencia
2. Diámetro	b) segmento con sus extremos en la circunferencia.
3. Ángulo central	c) ángulo cuyo vértice pertenece a la circunferencia y sus lados intersecan a esta en otros dos puntos.
4. Arco	d) cuerda que contiene al centro de la circunferencia
5. Ángulo inscrito	e) ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia.
6. Ángulo seminscrito	f) ángulo cuyo vértice pertenece a la circunferencia y un lado contiene una cuerda y el otro es tangente a la circunferencia.

En la circunferencia se cumplen ciertas relaciones métricas entre sus elementos, que son muy útiles en la Geometría Analítica, las cuales son:

a) Toda recta tangente a la circunferencia es perpendicular al radio en su punto de tangencia y viceversa (figura 4.21 a).

b) Todo radio o diámetro perpendicular a una cuerda la biseca a ella y al arco correspondiente (figura 4.21 b).

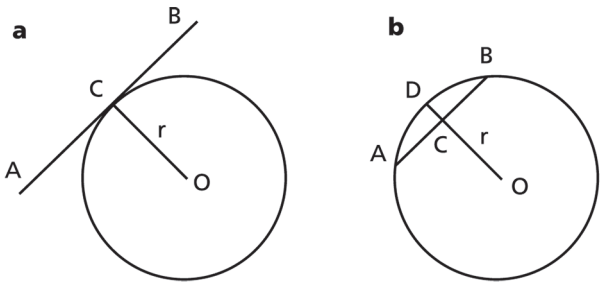


Fig. 4.21

Ejemplo 4.7

Demostrar que en toda circunferencia o en circunferencias iguales todo radio o diámetro que pase por el punto medio de una cuerda es perpendicular a dicha cuerda.

Resolución:

Para demostrar este teorema lo primero que debemos determinar es la premisa y la tesis, es decir, de cuáles datos dispongo y qué tengo que demostrar, seguidamente hacer una representación gráfica de la situación planteada, entonces:

Premisa:

- C(O;r)
- $\overline{EF}$: cuerda
- $\overline{EF} \cap r = \{C\}$
- C: punto medio de $\overline{EF}$ (figura 4.22 a)

Tesis: $r \perp \overline{EF}$

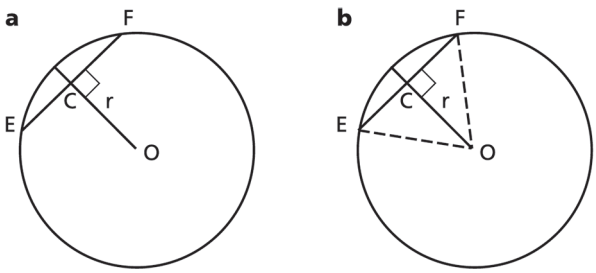


Fig. 4.22

Tracemos los radios $\overline{OE}$ y $\overline{OF}$ (figura 4.22 b) luego el ΔEOF es isósceles de base $\overline{EF}$.

Como C es el punto medio del lado $\overline{EF}$ entonces $\overline{OC}$ es la mediana relativa a la base del triángulo isósceles *EOF*, y como en todo triángulo isósceles

las rectas notables relativas a la base coinciden entonces $\overline{OC}$ es altura, por lo que $\overline{OC} \perp \overline{EF}$, pero $\overline{OC}$ está sobre el radio r por tanto $r \perp \overline{EF}$. ◆

Ejercicios del epígrafe Circunferencia

1. Di si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones. Fundamenta tu respuesta.

a) Si dos cuerdas de una circunferencia son paralelas, entonces hay un diámetro de la circunferencia que pasa por el punto medio de estas cuerdas.
b) Si dos cuerdas de una circunferencia son iguales, entonces son paralelas.
c) Existen dos cuerdas desiguales de una circunferencia que equidistan del centro.
d) Si dos rectas no coincidentes son tangentes a una circunferencia en los extremos de un diámetro, entonces son paralelas.
e) Los puntos de una circunferencia equidistan del punto medio de la hipotenusa de cualquier triángulo rectángulo inscrito en ella.
f) En un triángulo isósceles cualquiera, el centro de la circunferencia inscrita y el de la circunscrita coinciden.

2. Realiza la representación gráfica de la siguiente problemática.

Los lados de un triángulo ABC inscrito en una circunferencia de centro O equidistan del centro, $\overline{AD}$ es la altura al lado $\overline{BC}$, $\overline{CE}$ es la bisectriz del $\sphericalangle ACB$ y P es el punto de intersección de $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$.

a) Demuestra que: P es el circuncentro del triángulo.
b) Demuestra que: $\triangle APC$ es isósceles.
c) Demuestra que: $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$
d) Demuestra que: si se traza $\overline{ED}$, el cuadrilátero que se forma es un trapecio isósceles.

3. Formula un ejercicio o problema en que sea necesario aplicar el siguiente teorema: "Toda recta tangente a la circunferencia es perpendicular al radio en su punto de tangencia".

Áreas y perímetros de figuras planas

Son muchas las razones por las cuales es necesario el conocimiento de las áreas y perímetros de las figuras planas, entre ellas podemos citar:

- conocer la distancia que existe entre la casa y el consultorio del médico de la familia,
- conocer si un territorio, con cierta cantidad de población, está densamente poblado,
- conocer qué cantidad de alambre se necesita para cercar un terreno,
- dada el área de cierto terreno poder proyectar la planta de un edificio, etcétera.

Recuerda que...

Figura	Área	Perímetro
Triángulo	$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \operatorname{sen}\alpha$ $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$	$P = a + b + c$
Triángulo equilátero	$A = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$	
Triángulo rectángulo	$A = \frac{a \cdot b}{2}$ (a y b catetos)	
Paralelogramo	$A = a \cdot h = a \cdot b \ \operatorname{sen}\alpha$	$P = 2(a + b)$
Rectángulo	$A = a \cdot b$	
Rombo	$A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = a^2 \operatorname{sen}\alpha$	$P = 4a$
Cuadrado	$A = l^2 = \frac{d^2}{2}$	

Ejemplo 4.8

La figura 4.23 muestra el desarrollo en el plano de un envase de conservas cilíndrico de 8,0 cm de altura y 7,3 cm de diámetro. ¿Cuál será la cantidad máxima de envases que se pueden obtener de una chapa de lata rectangular de 2,0 m² de área? ¿Cuántos dm² de chapa quedan?

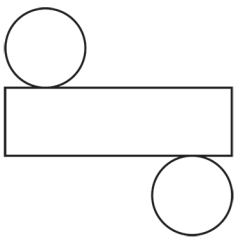


Fig. 4.23

Resolución:

Como se puede observar en la figura 4.23 el desarrollo en el plano de este envase está compuesto por un rectángulo que tiene de largo la

longitud de la circunferencia ($L = 2\pi r = d\pi$) y de ancho la altura del envase, y por dos círculos de 7,3 cm de diámetro.

Calculemos la cantidad de chapa necesaria para un envase.

Área del rectángulo:

$A_r = l \cdot a = d \cdot \pi \cdot a = 7{,}3 \cdot 3{,}14 \cdot 8 = 183{,}376\,\text{cm}^2 \approx 0{,}02\,\text{m}^2$

Área del círculo: $A_C = \pi \cdot r^2 = 3{,}14(3{,}65)^2 = 41{,}83265\ \text{cm}^2 \approx 0{,}004\ \text{m}^2$

Total de chapa para un envase:

$A_T = A_r + 2A_C = 0{,}02 + 2\ (0{,}004) = 0{,}02 + 0{,}008 = 0{,}028\ \text{m}^2$

Para calcular la cantidad de envases que se pueden obtener dividimos el área de la chapa por el área de un envase y obtenemos:

$2{,}0\ \text{m}^2 : 0{,}028\ \text{m}^2 \approx 71{,}4$

O sea, se pueden obtener 71 envases completos y quedarían 0,4 de otro envase que representaría de la chapa original: $0{,}028 \cdot 0{,}4 = 0{,}0112\ \text{m}^2 = 1{,}1\ \text{dm}^2$

Respuesta: se pueden obtener 71 envases y sobran aproximadamente $1{,}1\ \text{dm}^2$ de chapa. ◆

Ejemplo 4.9

Se quiere construir un edificio cuya planta está compuesta por un triángulo rectángulo isósceles, un cuadrado y dos trapecios rectángulos, como se muestra en la figura 4.24, en un terreno que tiene forma de triángulo rectángulo isósceles con una hipotenusa de 42 m de longitud. Calcular el área que ocupa dicho edificio (las medidas están dadas en metros).

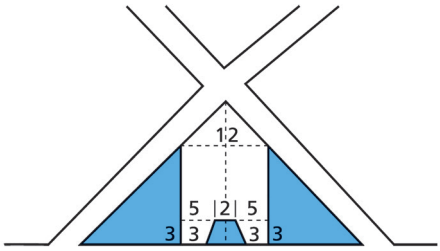


Fig. 4.24

Resolución:

Para resolver este ejercicio podemos utilizar dos vías:

1. Hallar el área del terreno y restarle las áreas verdes, sabiendo que como el terreno tiene la forma de un triángulo rectángulo isósceles este no es más que la mitad de un cuadrado cuya diagonal es la hipotenusa de dicho triángulo y la altura relativa a la hipotenusa es la mitad de esta (mitad de la diagonal del cuadrado).
2. Hallar directamente el área de la planta calculando las áreas de las figuras planas que la componen según las medidas del plano.

Utilicemos la segunda vía.

Área del cuadrado: $A_1 = a^2 = 12^2 = 144\ \text{m}^2$

Área del triángulo rectángulo e isósceles: A_2

Si consideramos la hipotenusa como la base de este triángulo, entonces la altura relativa a la hipotenusa es su mitad, según analizamos en la primera vía, por tanto:

$b = 12$ m y $h = 6{,}0$ m, luego: $A_2 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{12 \cdot 6}{2} = 36 \text{ m}^2$

Área de los trapecios: A_3

En la planta del edificio vemos que ambos trapecios son iguales con una altura

$h = 3{,}0$ m, la base menor $b = 3{,}0$ m y según la simetría de esta su base mayor

$B = 5{,}0$ m; luego: $A_T = \frac{b+B}{2} \cdot h = \frac{3+5}{2} \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12 \text{ m}^2$

$A_3 = 2A_T = 2 \cdot 12 = 24 \text{ m}^2$

por tanto $A_P = A_1 + A_2 + A_3 = 144 + 36 + 24 = 204 \text{ m}^2$

Respuesta: el área que ocupa dicho edificio es aproximadamente igual a 0,20 m^2 ◆

Conéctate

Accede al sitio www.cubaeduca.cu, en la sección curricular, buscas en undécimo grado Matemática la lección: Sistematización sobre geometría plana.
Revisa el tema y realiza las actividades que se proponen.

Ejercicios del epígrafe Áreas y perímetros de figuras planas

1. Demuestra la fórmula del área del rombo (utiliza la fórmula del área del triángulo).

2. En un cuadrado de lado "*a*" se ha inscrito otro cuadrado tal que sus vértices son los puntos medios del primer cuadrado. La suma de los perímetros de los triángulos rectángulos que así se forman es:

a) $6a$ b) $(4 + 2\sqrt{2})a$ c) $7a$ d) $5\sqrt{2}\,a$

3. ¿Cuál es la razón entre las áreas de los cuadrados del ejercicio 2?

4. ¿Cuántas losas se necesitarán, si cada una de ellas cubre una superficie de 8,0 dm^2, para pavimentar un espacio rectangular de 36 m de largo por 21,6 m de ancho?

5. ¿Cuál es el área y la longitud del lado de un cuadrado, si el lado es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 7,0 cm y 24 cm respectivamente?

6. Dos calles paralelas tienen una separación de 264 m y están cruzadas por otras dos que no son paralelas; la zona limitada por las cuatro calles

no es un rectángulo, ni siquiera un paralelogramo. Si esta manzana de casas tiene 300 m de largo por un lado y 250 m por el paralelo, ¿cuál será su área?

7. Formula un problema en que te sea necesario aplicar las fórmulas de área y o perímetros de figuras planas que sean compuestas.

4.2 Geometría analítica de la recta

En el trabajo con la Geometría Analítica encontramos dos problemas fundamentales:

1. Dada una figura geométrica, o la condición que deben cumplir los puntos esta, determinar su ecuación.
2. Dada una ecuación interpretarla geométricamente, es decir, construir la gráfica correspondiente.

Para resolver cualquiera de estos problemas de la Geometría Analítica, se trabaja en un sistema de coordenadas rectangulares o sistema cartesiano, el cual lleva este nombre en honor a René Descartes.

De la historia

Raimundo Reguera Vilar (1921-2003), destacado profesor de Matemática y de la especialidad Geometría Analítica, para la cual dio valiosos aportes a su enseñanza. Autor de varios textos de Matemática, su libro de Geometría Analítica, hoy día, es el texto básico de la asignatura en la enseñanza universitaria cubana.
Se graduó en 1947 de la carrera de Ciencias Físico-Matemáticas, y en 1950 defiende su tesis de Doctor "Las Coordenadas Triangulares y la Geometría del Triángulo". Profesor de Mérito de la Universidad de La Habana, Miembro de Honor de la Asociación Cubana de Pedagogos. Miembro de Mérito de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación y Maestro. Fue fundador del primer Instituto Preuniversitario Vocacional Especializado en Ciencias Exactas; entrenador, jefe de delegación y profesor acompañante de Olimpiadas de Matemática Iberoamericanas e Internacionales.

El estudio analítico de la recta, según los problemas fundamentales de la Geometría Analítica señalados anteriormente, nos lleva a precisar algunas fórmulas como son: la distancia entre dos puntos, es decir, determinar una relación en coordenadas cartesianas que nos permita calcular la longitud de un segmento, hallar las coordenadas de su punto medio, determinar la pendiente de una recta conocido el ángulo inclinación de la recta respecto al eje de la abscisas, determinar la relación de paralelismo o

perpendicularidad entre dos rectas, hallar la distancia de un punto a una recta, determinar la ecuación de una recta, etcétera.

Fórmulas básicas

Un estudiante de ingeniería civil en su práctica profesional se encuentra con la siguiente situación problémica.

Dos centros experimentales de cría de ganado vacuno A *y* B *se encuentran de un pueblo* P *a 10,0 km al oeste; 5,00 km al norte; y 10,0 km al este y 20,0 km al norte respectivamente.*

a) ¿A qué distancia se encuentra un centro de otro?

b) Se quiere construir un pueblo T *para los trabajadores de dichos centros de forma tal que equidiste de ambos y sea la menor distancia posible, ¿cuál sería su ubicación respecto al pueblo* P*?*

Para resolver este problema, elijamos convenientemente un sistema de coordenadas. Como las ubicaciones de los centros *A* y *B* están dadas respecto al pueblo *P* por sus coordenadas geográficas, entonces consideremos un sistema de coordenadas rectangulares con origen en el pueblo *P* y con los ejes coordenados orientados según la rosa náutica, o rosa de los vientos, como muestra la figura 4.25; por lo tanto, el pueblo *P* y los centros experimentales *A* y *B* tienen coordenadas:

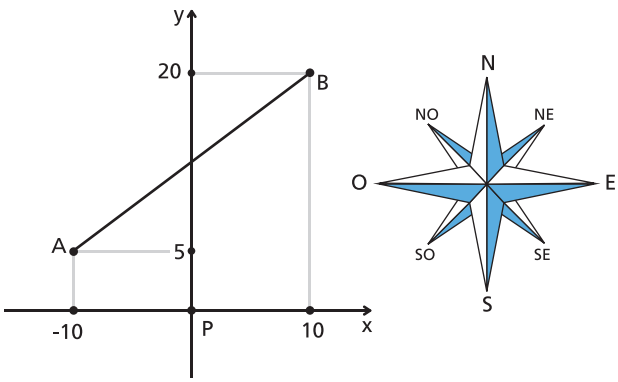


Fig. 4.25

P(0;0), *A*(–10;5) y *B*(10;20).

Debemos encontrar una relación general en coordenadas que nos permita hallar la distancia entre los centros *A* y *B*, para lo cual situemos en un plano coordenado dos puntos cualesquiera, $P_1(x_1\,;\,y_1)$ y $P_2(x_2\,;\,y_2)$, como se muestra en la figura 4.26.

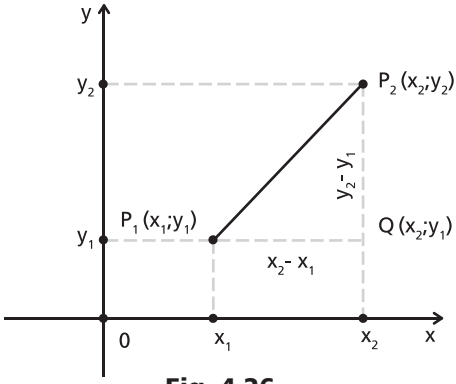


Fig. 4.26

Trazamos por P_1 un segmento de recta paralela al eje x hasta determinar el punto $Q(x_2; y_1)$ con la perpendicular trazada desde el punto P_2 a ese eje, formando el triángulo P_1QP_2 rectángulo en Q, por lo que $|\overline{P_1P_2}|$ es la hipotenusa de dicho triángulo. En estas condiciones, se tiene:

$$|\overline{P_1Q}| = |x_2 - x_1|$$

$$|\overline{P_2Q}| = |y_2 - y_1|$$

Del teorema de Pitágoras resulta entonces:

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{|\overline{P_1Q}|^2 + |\overline{P_2Q}|^2}$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

pero, $|\overline{P_1P_2}|$ es precisamente la distancia $d(P_1; P_2)$; luego:

$$d(P_1;P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

por tanto,

Teorema 4.1

Dados dos puntos $P_1(x_1; y_1)$ y $P_2(x_2; y_2)$, la distancia entre ellos está dada por la fórmula:

$$d(P_1;P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

La demostración de este teorema es la deducción anterior.

Ya conocida esta fórmula para calcular en coordenadas, la distancia entre dos puntos o, lo que es lo mismo, la longitud de un segmento, y de esta manera se puede resolver la primera parte de este problema.

Como la ubicación de los centros A y B están dadas en coordenadas, para hallar la distancia entre ellos utilizamos la fórmula de la distancia entre dos puntos:

$$d(A;B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-10 - 10)^2 + (5 - 20)^2} = \sqrt{(-20)^2 + (-15)^2}$$

$$= \sqrt{400 + 225} = \sqrt{625} = 25 \text{ km}$$

Respuesta: la distancia entre los centros A y B es de 25,0 km.

Para dar respuesta a la segunda situación en que se encuentra el estudiante, debemos hallar un punto que equidiste de los centros A y B para ubicar el pueblo T para los trabajadores.

Recuerda que...

La mediatriz de un segmento $\overline{MN}$ es la recta perpendicular en el punto medio del segmento y sus puntos cumplen la propiedad de equidistar de los extremos del segmento.

Teniendo en cuenta la definición de mediatriz de un segmento y la propiedad que cumplen sus puntos, entonces la menor equidistancia entre los centros *A* y *B* se encuentra sobre el punto medio del segmento $\overline{AB}$; luego, debemos encontrar una relación general en coordenadas que nos permita hallar las coordenadas de este punto entre los centros *A* y *B*.

Situemos en un plano coordenado dos puntos cualesquiera $A(x_A; y_A)$ y $B(x_B; y_B)$, extremos del segmento $\overline{AB}$, y el punto $M(x_M; y_M)$, punto medio de dicho segmento, como se muestra en la figura 4.27.

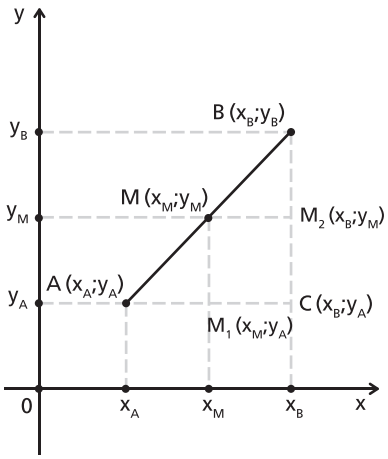


Fig. 4.27

Trazamos por *A* un segmento de recta paralela al eje *x* hasta determinar el punto $C(x_B; y_A)$ con la perpendicular trazada desde el punto *B* al eje *x*, formando el triángulo *ACB* rectángulo en *C*, y por el punto *M* segmentos de rectas paralelas a los ejes coordenados, determinando sobre $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ los puntos $M_1(x_M; y_A)$ y $M_2(x_B; y_M)$; luego, en el triángulo *ACB* tenemos que $\overline{MM_1}$ y $\overline{MM_2}$ son paralelas medias relativas a los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, por lo que se cumple:

$$\overline{AC} = 2\overline{AM_1} \qquad \overline{BC} = 2\overline{CM_2}$$

$$x_B - x_A = 2(x_M - x_A) \qquad y_B - y_A = 2(y_M - y_A)$$

$$x_B - x_A = 2 \cdot x_M - 2 \cdot x_A \qquad y_B - y_A = 2 \cdot y_M - 2 \cdot y_A$$

$$x_B + x_A = 2 \cdot x_M \qquad y_B + y_A = 2 \cdot y_M$$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Luego, en general, tenemos:

Teorema 4.2

Sea $\overline{AB}$ un segmento cuyos extremos tienen coordenadas $A(x_A; y_A)$ y $B(x_B; y_B)$, entonces las coordenadas del punto medio $M(x_M; y_M)$ de $\overline{AB}$ son:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

La demostración de este teorema es la deducción anterior.

Para dar solución a la segunda pregunta de la situación, utilizando la fórmula de las coordenadas del punto medio de un segmento, encontraremos la ubicación del pueblo T.

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

$$M\left(\frac{-10+10}{2}; \frac{5+20}{2}\right)$$

M (0;12,5)

Respuesta: el nuevo pueblo *T* se encuentra a 12,5 km al norte del pueblo *P*. ◆

Aplica tus conocimientos

Demuestra que el pueblo *T* representa, en este caso, el circuncentro del triángulo formado por el pueblo *P* y los centros experimentales *A* y *B*.

Ejemplo 4.10

a) Probar que el triángulo ABC, cuyos vértices tienen coordenadas *A* (–1; 0), *B*(7; –8) y *C*(–2; –9), es isósceles.

b) Hallar el centro y el radio de la circunferencia que pasa por los puntos de coordenadas *D*(0; 0), *E*(4; 8) y *F*(7; –1).

c) Probar que los triángulos cuyos vértices tienen por coordenadas *G*(3; 5), *H*(1; 1), *I*(–1; 2) y *J*(0; –1), *K*(2; 3),*L*(4; 2) son rectángulos e iguales.

Resolución:

a) Calculemos las longitudes de los lados:

$$d(A;B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-1-7)^2 + (0+8)^2}$$
$$= \sqrt{64+64} = \sqrt{128} \approx 11{,}3 \text{ u}$$

$$d(B;C) = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(7+2)^2 + (-8+9)^2}$$
$$= \sqrt{81+1} = \sqrt{82} \approx 9{,}06 \text{ u}$$

$$d(C;A) = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-2+1)^2 + (-9-0)^2}$$
$$= \sqrt{1+81} = \sqrt{82} \approx 9{,}06 \text{ u}$$

Luego, como los lados $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ tienen igual longitud, el ΔABC es isósceles de base $\overline{AB}$.

b) Como sabes, todos los puntos de la circunferencia equidistan del centro. Sea *O(x; y)* el centro de la circunferencia; luego, *d*(*O; D*) = *d*(*O; E*) = *d*(*O; F*) (figura 4.28), es decir,

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-8)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y+1)^2}$$

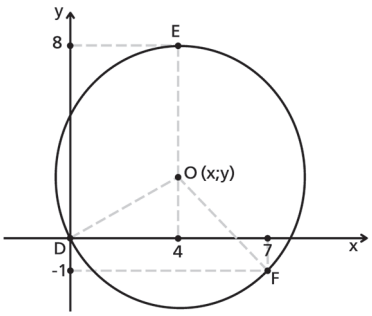


Fig. 4.28

Tomando dos a dos los miembros de esta cadena de igualdades, se obtiene:

$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-8)^2}$

que es equivalente, al eliminar los radicales, a:

$x + 2y - 10 = 0$ (1)

$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-7)^2+(y+1)^2}$

que es equivalente al eliminar los radicales a:

$7x - y - 25 = 0$ (2)

Con las ecuaciones (1) y (2) formamos un sistema, cuya solución son las coordenadas $(x; y)$ del centro de la circunferencia. Esta solución es $O(4; 3)$. Para hallar el radio, tenemos que calcular la distancia de O a cualquiera de los puntos D; E o F.

$r = d(O;D) = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5\text{u}$

c) Para probar que dos triángulos son iguales, basta con probar que sus tres lados son respectivamente iguales.

En el ΔGHI tenemos:

$\left|\overline{GH}\right| = d(G;H) = \sqrt{(3-1)^2+(5-1)^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}\text{u}$

$\left|\overline{HI}\right| = d(H;I) = \sqrt{(1+1)^2+(1-2)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}\text{u}$

$\left|\overline{GI}\right| = d(G;I) = \sqrt{(3+1)^2+(5-2)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5\text{u}$

En el ΔJKL tenemos:

$\left|\overline{JK}\right| = d(J;K) = \sqrt{(0-2)^2+(-1-3)^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}\text{u}$

$\left|\overline{KL}\right| = d(K;L) = \sqrt{(2-4)^2+(3-2)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}\text{u}$

$\left|\overline{LJ}\right| = d(L;J) = \sqrt{(4-0)^2+(2+1)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5\text{u}$

Como $|\overline{GH}| = |\overline{JK}| = 2\sqrt{5}u$ $|\overline{HI}| = |\overline{KL}| = \sqrt{5}u$ y $|\overline{GI}| = |\overline{LJ}| = 5u$ dichos triángulos son iguales.

Luego, como los lados son respectivamente iguales, dichos triángulos son iguales.

Para probar que un triángulo es rectángulo solo es necesario comprobar que satisface el teorema de Pitágoras. Como la hipotenusa es el mayor de los lados, en el ΔGHI debe cumplirse que:

$$|\overline{GI}|^2 = |\overline{GH}|^2 + |\overline{HI}|^2$$

y esto se cumple, ya que 25 = 20 + 5; luego, el ΔGHI es rectángulo, y también los es el ΔJKL por ser ambos triángulos iguales.

Ejemplo 4.11

a) Dado el triángulo cuyos vértices tienen por coordenadas $A(2; -1)$, $B(3; 5)$ y $C(-3; 3)$, calcular la longitud de la mediana relativa al lado $\overline{BC}$.

b) Probar que las diagonales del cuadrilátero cuyos vértices tienen coordenadas $D(-1; -1)$, $E(5; 0)$, $F(3; 2)$ y $G(-3; 1)$ se cortan en su punto medio. ¿Qué tipo de cuadrilátero es?

c) Determinar las coordenadas del centro de una circunferencia de diámetro $\overline{PQ}$ si sabemos que $P(4; 6)$ y $Q(8; 2)$.

Resolución:

a) Sea $\overline{AD}$ la mediana relativa al lado $\overline{BC}$ en el ΔABC (figura 4.29 a). Para calcular la longitud de esta mediana, debemos conocer las coordenadas del punto medio D del lado $\overline{BC}$.

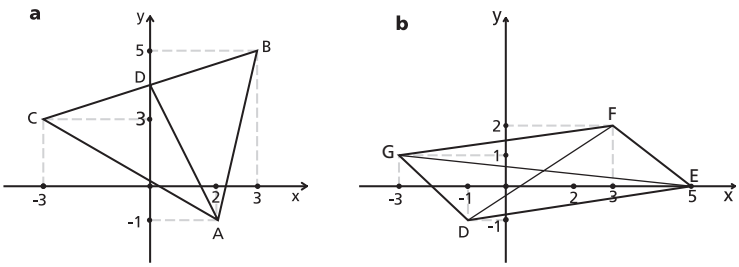


Fig. 4.29

luego, $(x_D; y_D) = \left(\frac{x_B + x_C}{2}; \frac{y_B + y_C}{2}\right) = \left(\frac{0}{2}; \frac{8}{2}\right) = (0; 4)$; por tanto, $D(0; 4)$

ahora $|\overline{DA}| = d(D; A) = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{(0-2)^2 + (4+1)^2}$

$= \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29} \approx 5{,}39$

Respuesta: la longitud de la mediana relativa al lado $\overline{BC}$ es aproximadamente igual a 5,39u.

b) Hallemos los puntos medio M y N de las diagonales $\overline{DF}$ y $\overline{EG}$ respectivamente (figura 4.29 b)

$$(x_M; y_M) = \left(\frac{x_D + x_F}{2}; \frac{y_D + y_F}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}; \frac{1}{2}\right) = \left(1; \frac{1}{2}\right) \quad \text{luego} \quad M\left(1; \frac{1}{2}\right)$$

$$(x_N; y_N) = \left(\frac{x_E + x_G}{2}; \frac{y_E + y_G}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}; \frac{1}{2}\right) = \left(1; \frac{1}{2}\right) \quad \text{luego} \quad N\left(1; \frac{1}{2}\right)$$

Por tanto, M y N coinciden y las diagonales se cortan en su punto medio, luego el cuadrilátero es un paralelogramo.

c) En este inciso se nos pide hallar el centro de una circunferencia que, a diferencia del ejemplo 4.10 b, ahora conocemos los extremos de un diámetro; luego, basta con hallar las coordenadas del punto medio del diámetro $\overline{PQ}$.

Sea O el centro de la circunferencia; luego:

$$(x_O; y_O) = \left(\frac{x_P + x_Q}{2}; \frac{y_P + y_Q}{2}\right) = \left(\frac{12}{2}; \frac{8}{2}\right) = (6; 4) \ ;$$

Respuesta: las coordenadas del centro de la circunferencia son $O(6;4)$. ◆

Otro concepto importante en la Geometría Analítica es el de la inclinación de una recta respecto al semieje positivo de las x (eje de las abscisas) y que conoces, desde el trabajo con la función lineal, como pendiente de una recta.

Recuerda que...

La pendiente m de una recta, conocidos dos puntos $P_1(x_1; y_1)$ y $P_2(x_2; y_2)$, que no pertenezcan a una recta paralela al eje y es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{(figura 4.30)}$$

La inclinación o dirección de la recta P_1P_2 (figura 4.30) está determinada por el ángulo α que forma con el semieje positivo x. Observa que como $\overline{P_1Q}$ es paralela al eje x, entonces el $\measuredangle P_2P_1Q$ y α son iguales por ser correspondientes entre paralelas, y el ΔP_1QP_2 es rectángulo en Q, luego:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\overline{P_2Q}}{\overline{P_1Q}} = \tan\measuredangle P_2P_1Q = \tan\alpha$$

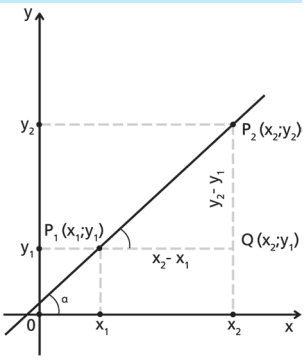


Fig. 4.30

Teorema 4.3

Sean $P_1(x_1; y_1)$ y $P_2(x_2; y_2)$ dos puntos de una recta, no paralela al eje *y*. La pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es la tangente del ángulo que forma la recta con el semieje *x* positivo.

La demostración es la deducción anterior.

En el caso de las rectas perpendiculares al eje *x* (paralelas al eje *y*), su ángulo de inclinación es de 90°; luego, la pendiente no está definida (no tiene pendiente), pues $x_2 = x_1$ y el cociente se indefine al hacerse cero el denominador.

Ejemplo 4.12

a) Calcular la pendiente de las rectas determinadas por los puntos dados y hallar la amplitud del ángulo de inclinación de la recta con el semieje *x* positivo.

1) $P_1(1; 3)$, $P_2(6; 7)$ 2) $A(3; 7)$, $B(–0,5; 0,75)$

b) Calcular la pendiente de las rectas cuyo ángulo de inclinación con respecto al semieje *x* positivo es:

1) $\alpha = 45°$ 2) $153°$

Resolución:

a) 1) Calculemos la pendiente: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-3}{6-1} = \frac{4}{5}$

Para calcular la amplitud del ángulo α que forma la recta con el semieje positivo del eje *x,* tenemos:

$\tan \alpha = m = \frac{4}{5} = 0,8$; luego, $\alpha = 38,7°$

a) 2) La pendiente es: $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0,75-7}{-0,5-3} = \frac{-6,25}{-3,5} = 1,786$ y

$\tan \alpha = m = 1,786$; luego, $\alpha = 60,8°$

b) 1) Para la pendiente de la recta, como conocemos es la tangente del ángulo que forma con el semieje positivo del eje *x,* entonces $m = \tan \alpha = \tan 45° = 1$

2) En este caso, el ángulo que forma la recta con el semieje positivo de las abscisas es un ángulo del segundo cuadrante; entonces, tenemos que la pendiente es negativa, pues en el segundo cuadrante la tangente lo es, luego:

$m = \tan \alpha = \tan 153° = \tan (180° – 27°) = – \tan 27° = – 0,51$ ◆

La pendiente de una recta no solo se utiliza para determinar su inclinación respecto al eje *x* y su dirección, sino también con su ayuda podemos decir sobre el paralelismo y la perpendicularidad de dos rectas.

De grados anteriores conoces que, si dos rectas son paralelas, sus pendientes son iguales (Si $r_1 \,||\, r_2$ entonces $m_1 = m_2$).

Reflexiona

¿Cuál es el valor de la pendiente si las rectas fueran paralelas?

Las coordenadas de los puntos *A*(0;0), *B*(4;3), *C*(1;7) y *D*(–3;4) son los vértices del cuadrado *ABCD* (figura 4.31). Analicemos qué sucede con las pendientes de las rectas que contienen dos lados consecutivos y las pendientes de sus diagonales que, como conoces, son perpendiculares.

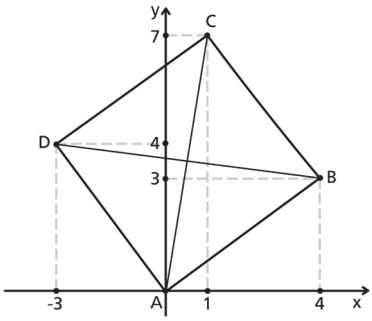


Fig. 4.31

Calculemos las pendientes de las rectas que contienen a los lados consecutivos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ y de las diagonales $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$.

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-0}{4-0} = \frac{3}{4} \text{ y } m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{3-7}{4-1} = -\frac{4}{3}$$

Observa que estas pendientes son opuestas en signo y recíprocas en su valor absoluto; además, el producto de ellas es:

$$m_{AB} \cdot m_{BC} = \left(\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{4}{3}\right) = -1$$

Analicemos las pendientes de las diagonales que también son perpendiculares.

$$m_{AC} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{0-70}{0-10} = 7 \text{ y } m_{BD} = \frac{y_B - y_D}{x_B - x_D} = \frac{3-4}{4+34} = -\frac{1}{7}$$ ◆

Observa que, en este caso, sucede lo mismo que con los lados consecutivos del cuadrado.

Teorema 4.4

Sean las rectas r_1 y r_2 de pendientes m_1 y m_2 respectivamente. Se cumple que:

a) $r_1 \,||\, r_2$ si y solo si $m_1 = m_2$

b) $r_1 \perp r_2$ si y solo si $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ o $m_1 \cdot m_2 = -1$

Demostración:

a) Si $r_1 \| r_2$ (figura 4.32 a), se cumple que: $\alpha_1 = \alpha_2$ por ser correspondientes; luego, tan α_1 = tan α_2, por lo que $m_1 = m_2$ (condición de paralelismo). Como los pasos son reversibles, se demuestra que si $m_1 = m_2$, entonces $r_1 \| r_2$ y queda probado el inciso a.

b) $r_1 \perp r_2$ (figura 4.32 b). Se cumple que: $\alpha_2 = 90° + \alpha_1$ por ángulo exterior del triángulo; luego, tan α_2 = tan $(90° + \alpha_1)$

tan $\alpha_2 = -\cot \alpha_1 = -\dfrac{1}{\tan \alpha_1}$, por lo que $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$ (condición de perpendicularidad). Como los pasos son reversibles, se demuestra que si $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$, entonces $r_1 \perp r_2$ y queda probado el inciso b. ◆

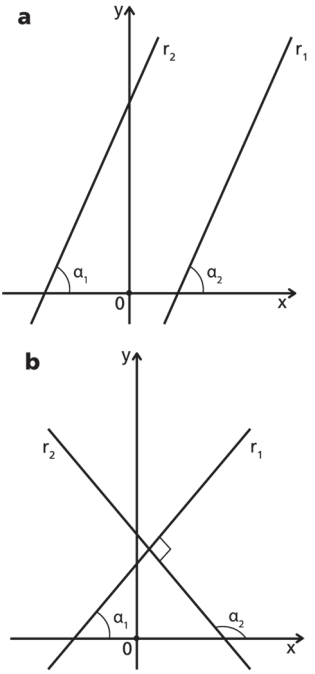


Fig. 4.32

Ejemplo 4.13

a) Sea *PQRS* un cuadrilátero. Probar que *PQRS* es un paralelogramo si: *P*(–2; –1), *Q*(2;1), *R*(3;4) y *S*(–1;2).

b) En el paralelogramo *ABCD* cuyas coordenadas de sus vértices son *A*(1;1), *B*(4;2), *C*(5;5) y *D*(2;4), probar que sus diagonales son perpendiculares. ¿Qué tipo de paralelogramo es?

c) Probar que los puntos de coordenadas *E*(–2; –4), *F*(4;–1), y *G*(8;1) están alineados.

d) Probar que los triángulos *ABC* y *AMN* representados en la figura 4.33 son semejantes.

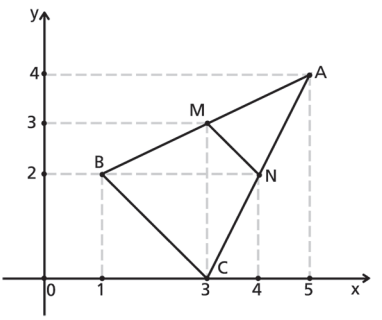


Fig. 4.33

Resolución:

a) Una vía para probar que el cuadrilátero *PQRS* es un paralelogramo es si obtenemos que tiene dos lados opuestos paralelos e iguales.
Hallando las pendientes de $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$, tenemos:

$$m_{PQ} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{1+1}{2+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad m_{RS} = \frac{y_S - y_R}{x_S - x_R} = \frac{2-4}{-1-3} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

luego, $\overline{PQ} \parallel \overline{RS}$ porque sus pendientes son iguales.

$$\left|\overline{PQ}\right| = d(P;Q) = \sqrt{(-2-2)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\text{u}$$

$$\left|\overline{RS}\right| = d(R;S) = \sqrt{(3+1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\text{u}$$

entonces, $\overline{PQ} = \overline{RS}$ y, por tanto, el cuadrilátero es un paralelogramo por tener un par de lados opuestos paralelos e iguales.

Otra vía es si sus diagonales se cortan en su punto medio.

Hallando las coordenadas de *M* y *N*, puntos medios de las diagonales $\overline{PR}$ y $\overline{QS}$ respectivamente, tenemos

$$M(x_P; y_R) = \left(\frac{x_P + x_R}{2}; \frac{y_P + y_R}{2}\right) = \left(\frac{-2+3}{2}; \frac{-1+4}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \qquad M\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

$$N(x_Q; y_S) = \left(\frac{x_Q + x_S}{2}; \frac{y_Q + y_S}{2}\right) = \left(\frac{2-1}{2}; \frac{1+2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \qquad N\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

Como las coordenadas de *M* y *N* coinciden, las diagonales se cortan en su punto medio, luego, el cuadrilátero es un paralelogramo.

b) En el paralelogramo *ABCD* (figura 4.34), calculemos las pendientes de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{5-1}{5-1} = \frac{4}{4} = 1$$

$$m_{BD} = \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \frac{4-2}{2-4} = \frac{2}{-2} = -1$$

se cumple que: $m_{AC} = -\dfrac{1}{m_{BD}}$ o $m_{AC} \cdot m_{BD} = -1$,

luego, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, por lo que el paralelogramo es un rombo por tener sus diagonales perpendiculares.

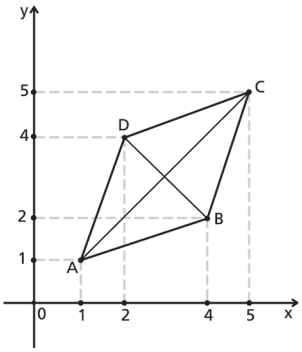


Fig. 4.34

c) Para probar que los punto *E*, *F* y *G* están alineados, basta probar que los segmentos $\overline{EF}$ y $\overline{FG}$ son paralelos y, como tienen un punto común, están alineados.

(*En el epígrafe siguiente estudiarás otra forma de probar que tres o más puntos están alineados*).

$$m_{EF} = \frac{y_F - y_E}{x_E - x_E} = \frac{-1+4}{4+2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad ; \quad m_{FG} = \frac{y_G - y_F}{x_G - x_F} = \frac{1+1}{8-4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Luego, $\overline{EF} \parallel \overline{FG}$ y, como tiene un punto común, los puntos *E*, *F* y *G* están alineados.

d) Para desarrollar este inciso es necesario que:

Recuerda que...

Criterios de semejanza de triángulos

Dos triángulos son semejantes si tienen:

- Dos ángulos respectivamente iguales, o
- Dos lados respectivamente proporcionales y el ángulo comprendido entre esos lados igual, o
- Los tres lados respectivamente proporcionales.

Teorema fundamental de la semejanza

Si una recta que corta a dos lados de un triángulo o sus prolongaciones es paralela al tercer lado, los triángulos que así se forman son semejantes.

En los triángulos *ABC* y *AMN* el ángulo de vértice *A* es común; luego, bastaría probar que tienen otro ángulo igual o que el lado es paralelo al lado $\overline{BC}$.

Tenemos que: $M(3;3), N(4;2), B(1;2)\, y\, C(3;0)$

$$m_{\overline{MN}} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{2-3}{4-3} = \frac{-1}{1} = -1 \quad ; \quad m_{\overline{BC}} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{0-2}{3-1} = \frac{-2}{2} = -1$$

como las pendientes son iguales, entonces $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta AMN$ por el teorema fundamental de la semejanza de triángulos. ◆

El trabajo en coordenadas nos permite también demostrar propiedades eligiendo convenientemente el origen de coordenadas.

Ejemplo 4.14

Probar que las diagonales de un rectángulo son iguales.

Resolución:

Cuando queremos demostrar una propiedad geométrica, la posición de los ejes no influye en los resultados y, por tanto, se trata de escogerlos lo más convenientemente posible. En este caso, escogemos un vértice del rectángulo en el origen de coordenadas (figura 4.35), un lado coincidiendo con el eje *x* y entonces otro está situado sobre el eje *y*.

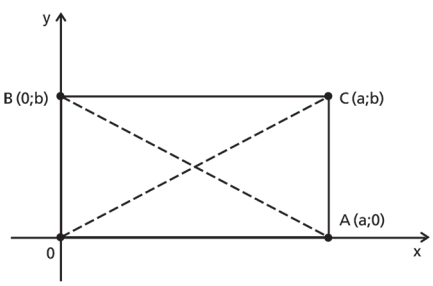


Fig. 4.35

Sean las coordenadas de los vértices, $O(0;0)$, $A(a;0)$, $B(0;b)$ y $C(a;b)$, entonces:

$|\overline{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$|\overline{OC}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Luego $|\overline{AB}| = |\overline{OC}|$ como se quería demostrar. ◆

Conéctate

Accede al sitio www.cubaeduca.cu, en la sección curricular, el nivel preuniversitario en undécimo grado Matemática la lección Fórmulas Básicas y resuelve el problema 1 y la actividad 2. Comprueba los análisis realizados.

Ejercicios del epígrafe Fórmulas básicas

1. Determina la distancia entre los puntos de coordenadas:

a) $A(-3;2)$, $B(6;-4)$ b) $C(5;7)$, $D(6;-3)$ c) $E(3;1)$, $F(1;-1)$

d) $G(1;0)$, $H(-2;1)$ e) $I(4;5)$, $J(6;5)$ f) $K(2;6)$, $L(0,5;3)$

g) $M\left(\frac{1}{3};4\right)$, $N\left(\frac{2}{5};1\right)$ h) $O\left(\sqrt{2};3\right)$, $P\left(0;\sqrt{3}\right)$ i) $Q(2,5;2)$, $R(1,3;1,5)$

2. Identifica en tu cuaderno de trabajo la respuesta correcta.

Sean *P, Q, R* tres puntos del plano. Si las coordenadas son $P(2;4)$, $Q(-2;2)$ y $R(-6;0)$ entonces:

a) se puede construir un triángulo isósceles.

b) se puede construir un triángulo equilátero.

c) no se puede construir un triángulo.

d) se puede construir un triángulo escaleno.

2.1 Verifica tu selección utilizando el GeoGebra

3. Halla la coordenada que falta si:

a) $d(A;B) = 4$; $A(2;5)$, $B(2,5;\ y)$ b) $d(C;D) = 2\sqrt{3}$; $C(2a;1)$, $D(a;2)$

c) $d(H;I) = 4,5$; $H(3a;5)$, $I(a - 1;6)$ d) $d(E;F) = 3$; $E(3;b)$, $F(-1;\ b^2)$

4. Las coordenadas de un punto que dista 10 unidades del punto $S(-3;-1)$ son:

a) (5;5) c) (–5;–5) b) (–3;9) d) (–3;7)

4.1 Comprueba tu selección utilizando el GeoGebra.

5. Si se sabe que una recta *p* forma con el semieje positivo *x* un ángulo α, determina el valor de su pendiente.

a) $\alpha = 15°$ b) $\alpha = 45°$ c) $\alpha = 60°$ d) $\alpha = 78°$

e) $\alpha = 90°$ f) $\alpha = 110°$ g) $\alpha = 145°$ h) $\alpha = 180°$

6. Calcula la amplitud del ángulo α que forma la recta *r* con el semieje positivo del eje *x* si sabes que pasa los puntos cuyas coordenadas son:

a) $A(4; 3)$, $B(-1; 4)$ b) $C(2{,}5; 2)$, $G\left(1{,}5;\sqrt{3}\right)$ c) $E\left(\sqrt{5};2{,}6\right)$, $F\left(\sqrt{2};1{,}3\right)$

d) $G(3; 8)$, $H(-3{,}4; 2\sqrt{2})$ e) $I(-3{,}6; 2{,}7)$, $J(9{,}5)$

6.1 Verifica cada resultado en el GeoGebra.

7. El ángulo de inclinación con el semieje *x* positivo de la recta *r* que tiene una pendiente $m = \sqrt{3}$ tiene una amplitud de:

a) 30^0 c) 45^0 b) 60^0 d) 90^0

8. Sea el triángulo *ABC* cuyos vértices tienen por coordenadas $A(1;1)$, $B(0;5)$ y $C(4; 8)$. Calcula:

a) la longitud de sus lados, clasifícalo;

b) la longitud de sus medianas.

9. Muestra que el triángulo cuyos vértices tienen coordenadas $A(2;-3)$, $B(5;-2)$ y $C(4;1)$ es rectángulo. Halla la longitud de la mediana relativa a la hipotenusa.

10. Dado el triángulo cuyos vértices tienen coordenadas $M(1;1)$, $N(5;3)$ y $P(6;-4)$, comprueba que es isósceles y calcula su área.

11. Las coordenadas de los puntos dados corresponden a vértices de un cuadrilátero (en ese orden). Halla las longitudes y las pendientes de sus diagonales; clasifícalo.

a) $A(2;0)$, $B(5;-1)$, $C(6;2)$ y $D(3;3)$

b) $E(0;0)$, $F(4{,}5;1{,}5)$, $G(6;6)$ y $H(1{,}5;4{,}5)$

c) $M(0;1)$, $N(4;2)$, $O(4;5)$ y $P(0;4)$

d) $Q(-1;-2)$, $R(4;-3)$, $S(5;2)$ y $T(0;3)$

e) $U(-4;-1)$, $V(1{,}5;0)$, $W(4;5)$ y X$(1{,}5;4)$

f) $A(-2;-3)$, $B(6;1)$, $C(2;4)$ y $D(-2;2)$

11.1 Comprueba cada resultado en el GeoGebra.

12. Sean las coordenadas de los siguientes pares de puntos. Calcula: la longitud del segmento determinado por estos, la pendiente de la mediatriz de ese segmento y las coordenadas del punto de intersección de la mediatriz con el segmento.

a) $A(-5;1)$, $B(3;7)$ b) $C(-1;4)$, $D(1;-2)$

c) $E(0;1)$, $F(8;5)$ d) $G(4; 3)$, $H(8;-1)$

13. Del segmento $\overline{AB}$ conocemos las coordenadas de un extremo y de *C*, su punto medio. Determina las coordenadas del extremo que falta, la longitud del segmento $\overline{AB}$ y el ángulo de inclinación de la recta que lo contiene con el semieje positivo *x*.

a) $A(-1;3)$, $C(3;0)$ b) $B(-3;-1)$, $C(0;0)$

c) $A(-4;-6)$, $C(-2;-3)$ d) $B(5;4)$, $C(1;1)$

14. Dadas las coordenadas de los vértices del cuadrilátero $ABCD$: $A(-1;-2)$, $B(3;1)$, $C(7;-2)$ y $D(3;-5)$, comprueba que es un rombo y calcula su área.

15. Se tiene el cuadrilátero cuyos vértices tiene como coordenadas: $M(-3;1)$, $N(0;3)$, $O(3;4)$ y $P(4;-1)$.

a) Halla su perímetro.

b) Comprueba que el cuadrilátero que se obtiene al unir los puntos medios de sus lados es un paralelogramo.

16. a) Representa gráficamente los triángulos DEF y ABC de vértices cuyas coordenadas son $D(-4;4)$, $E(-3;-1)$, $F(-1;1)$ y $A(4;0)$, $B(3;5)$, $C(1;3)$ y prueba que los triángulos son iguales.

b) ¿Qué tipo de cuadrilátero se forma con los puntos A, B, D, E?

17. Demuestra utilizando los conocimientos adquiridos de Geometría analítica que el segmento que une los puntos medios de los lados de un triángulo es paralelo al tercer lado e igual a su mitad.

18. Las coordenadas de los puntos $A(1;1)$, $B(5;3)$, $C(3;7)$ y $D(-1;5)$, tomados en ese orden, son los vértices de un cuadrado.

a) Halla su área.

b) Halla las coordenadas del centro y la longitud del radio de la circunferencia circunscrita.

18.1 Comprueba los resultados en el GeoGebra.

19. Halla el centro y el radio de la circunferencia que pasa por los puntos:

a) $A(0;0)$, $B(0;6)$ y $C(3;3)$ b) $D(1;5)$, $E(5;1)$ y $F(1;-3)$

c) $G(5;3)$, $H(4;6)$ y $I(0;8)$ d) $J(-3;6)$, $K(2;1)$ y $L(1;4)$

19.1 Prueba que los triángulos GHI y JKL son semejantes.

20. a) ¿Será verdadera o falsa la siguiente proposición?

Las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{AB}$ es $M(1;1)$

b) Selecciona la respuesta correcta.

Las coordenadas de A cuando las de B son $(-2;-3)$ son:

a) $A(0;1)$ d) $A\left(-\frac{3}{2};-2\right)$ c) $A(4;1)$ b) $A(4;-5)$

21. Prueba que el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio, es paralelo a los otros dos lados e igual a la semisuma de ellos (paralela media del trapecio). Comprueba los resultados en el GeoGebra.

22. Demuestra que en un paralelogramo las diagonales se cortan en su punto medio.

23. Prueba que las diagonales del rombo se cortan perpendicularmente.

24. Un bosque tiene forma de cuadrilátero con vértices:
$A(0;200)$, $B(200;0)$, $C(500;300)$ y $D(100;700)$.
Demuestra que tiene forma de trapecio rectángulo y calcula su área. Las coordenadas están dadas en metros.

25. Demuestra que si se determina el punto medio E del segmento $\overline{CD}$ en el ejercicio 24 y se traza el segmento, $\overline{AE}$, el cuadrilátero que representa el bosque se descompone en un rectángulo y un triángulo rectángulo.

26. Un vehículo se desplaza por una carretera rectilínea desde el punto $A(-30;80)$ hasta el punto $B(50;20)$ (respecto a cierto sistema de coordenadas). Halla el tramo recorrido entre A y B, y las coordenadas de una gasolinera que se encuentra en el centro del recorrido. Las coordenadas están dadas en kilómetros.

27. Halla las coordenadas de los tres puntos que dividen en 4 partes iguales al segmento dado por los puntos de coordenadas:

a) $A(-1;-2)$, $B(3;6)$ b) $C(-5;0)$, D(3;4)

c) $E(-6;-6)$, F(2;6) d) $G(5;-4)$, H(−11;8)

28. En la figura 4.36 aparece representado el triángulo ABC rectángulo en B.

a) Determina las coordenadas del vértice C.

b) Si (7;–2) son las coordenadas del punto N, calcula la longitud de la altura relativa al lado $\overline{BC}$ del triángulo BNC.

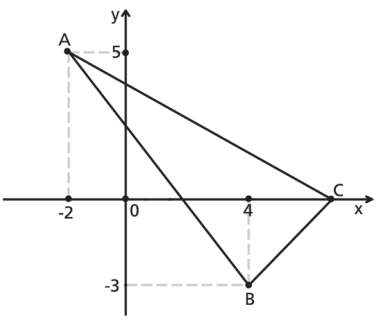


Fig. 4.36

29. Elabora un ejercicio o problema en que apliques tus conocimientos de Geometría Analítica y particularmente las fórmulas básicas estudiadas en este epígrafe.

Ecuación cartesiana de la recta

En este epígrafe vamos a trabajar con uno de los problemas fundamentales de la Geometría Analítica: *dada una figura geométrica, o la condición que deben cumplir sus puntos, determinar su ecuación*.

En el estudio realizado sobre las funciones, analizaste la función lineal que tiene como representación gráfica la recta, y cuya ecuación tiene la forma $f(x) = mx + n$ (o $y = mx + n$) y los puntos que pertenecen a ella, y solo ellos, cumplen la condición geométrica que las define (su ecuación). Al igual sucede con los puntos que pertenecen al gráfico de funciones tales como $y = ax^2 + bx + c$, cuya representación gráfica es la parábola y solo los puntos que cumplen con dicha ecuación pertenecen a ella.

Recuerda que...

Desde la primaria conoces:
Mediatriz de un segmento: conjunto de puntos que cumplen la condición de equidistar de los extremos del segmento.
Bisectriz de un ángulo: conjunto de puntos que cumplen la condición de equidistar de los lados del ángulo

Estos conjuntos de puntos, que satisfacen una condición dada y solo ellos, reciben el nombre de *lugar geométrico*, y la ecuación es la condición que los define.

Ejemplo 4.15

Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos que equidistan de los puntos $A(1; 3)$ y $B(2; 5)$.

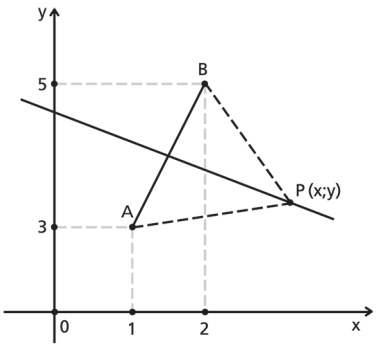


Fig. 4.37

Resolución:

Sea $P(x; y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico (figura 4.37), entonces debe cumplirse que:

$d(P;A) = d(P;B)$

$$\sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2} = \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2}$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2}$$

como las distancias son siempre positivas, entonces se cumple:

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = (x-2)^2 + (y-5)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 10y + 25$$

$$-2x + 1 - 6y + 9 = -4x + 4 - 10y + 25$$

$$2x + 4y - 19 = 0$$

o sea, si y solo si $y = -\frac{1}{2}x + \frac{19}{4}$ ◆

En el ejemplo anterior, la ecuación del lugar geométrico es una ecuación de primer grado cuya gráfica es una recta, lo cual no es sorprendente, pues, como recordamos anteriormente, el conjunto de puntos que equidistan de los extremos de un segmento es su mediatriz y sabes que esta es la recta perpendicular en el punto medio del segmento.

Observa que antes de expresarla en la forma $y = mx + n$, estaba expresada en la forma $Ax + By + C = 0$.

En general, se cumple:

Teorema 4.5

El lugar geométrico de la ecuación $Ax + By + C = 0$ con $A \neq 0$ o $B \neq 0$ es una recta.

Demostración:

Si $B \neq 0$, *en la ecuación* $Ax + By + C = 0$, despejando y obtenemos:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

luego, su gráfica es una recta de pendiente $m = -\frac{A}{B}$.

Recíprocamente, sea r una recta, debemos probar que su ecuación es de la forma dada.

Sean $P_1(x_1;y_1)$ y $P_2(x_2;y_2)$ dos puntos de la recta. Si $P(x;y)$ es un punto cualquiera de la recta r (figura 4.38), como la pendiente de una recta es única cualesquiera sean los puntos tomados, entonces debe ser:

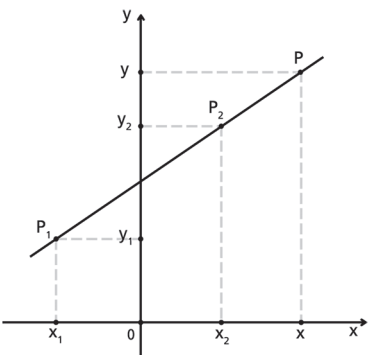


Fig. 4.38

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$(x_2 - x_1)(y - y_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1)$$

$$(x_2 - x_1)y - (x_2 - x_1)y_1 = (y_2 - y_1)x - (y_2 - y_1)x_1$$

$$(x_2 - x_1)y - x_2y_1 + x_1y_1 = (y_2 - y_1)x - y_2x_1 + y_1x_1$$

$$-(y_2 - y_1)x + (x_2 - x_1)y - x_2y_1 + y_2x_1 = 0$$

$$(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + (y_2x_1 - x_2y_1) = 0$$

que es de la forma dada con: $A = y_1 - y_2$, $B = x_2 - x_1$, $C = y_2 \cdot y_1 - x_2 \cdot x_1$ y al menos uno de los coeficientes A o B es diferente de cero. ◆

Observa que, en el ejemplo y la demostración anteriores, hemos escrito la ecuación de la recta de dos formas:

$$y = mx + n \qquad (1)$$

y

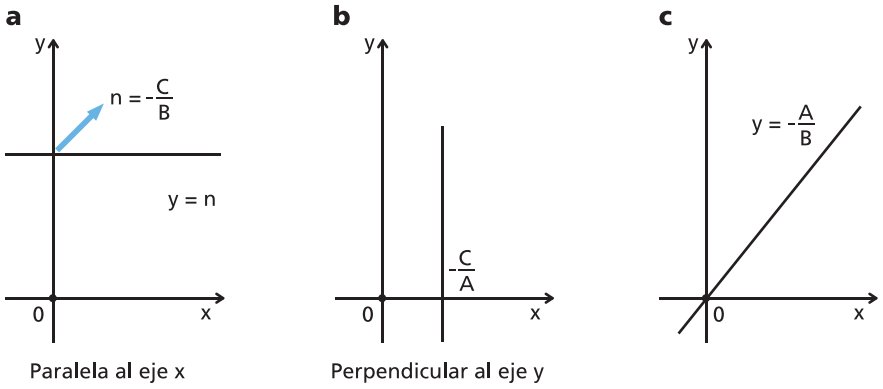
$$Ax + By + C = 0 \qquad (2)$$

Ambas formas son equivalentes, pues si en la ecuación (2) despejas la variable y se obtiene la ecuación:

$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, donde $m = -\frac{A}{B}$ y $n = -\frac{C}{B}$.

En la ecuación $Ax + By + C = 0$ se tiene que:

- Si $A = 0$; se tiene una recta paralela al eje x de ecuación $By + C = 0$ o $y = -\frac{C}{B}$ y que corta al eje y en el punto $\left(0; -\frac{C}{B}\right)$ (figura 4.39 a) representa el gráfico de la función lineal constante de ecuación $f(x) = n$).



Paralela al eje x | Perpendicular al eje y

Fig. 4.39

- Si $B = 0$; se tiene una recta perpendicular al eje x de ecuación $Ax + C = 0$ o $x = -\frac{C}{A}$ y que corta al eje x en el punto $\left(-\frac{C}{A}; 0\right)$ (figura 4.39 b) no representa a la función lineal, ¿por qué?.
- Si $C = 0$; se tiene una recta que pasa por el origen de coordenadas de ecuación $Ax + By = 0$ o $y = -\frac{A}{B}x$ con pendiente $m = -\frac{A}{B}$ (figura 4.39 c) (representa la función lineal de ecuación $f(x) = mx$ o función de proporcionalidad directa que pasa por el origen de coordenadas).

Hasta el momento, en el trabajo realizado con las ecuaciones con dos variables, se ha partido de la ecuación para hallar el lugar geométrico correspondiente. En el ejemplo anterior, hemos realizado el proceso

contrario, dada la condición que define al lugar geométrico, encontrar su ecuación.

En el caso de la recta, hay diferentes posibilidades para hacerlo, ya que una recta queda determinada de diferentes formas:

a) Conocido un punto de la recta y su pendiente (esta puede estar dada por las distintas formas de expresar su pendiente).

b) Conocidos dos de sus puntos.

Ejemplo 4.16

Determinar una ecuación de la recta que pasa por el punto *A* (3; 2) y tiene pendiente $m = \frac{1}{2}$

Resolución:

Conocidos un punto y la pendiente, la recta queda determinada (figura 4.40); luego, consideremos un punto *P(x;y)* cualquiera de la recta, entonces, se cumple:

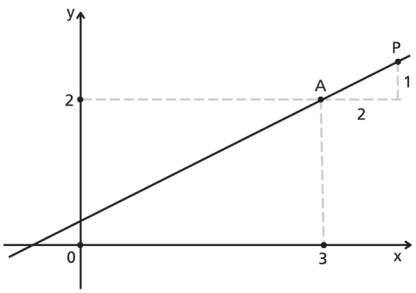


Fig. 4.40

$m = \frac{y-2}{x-3}$ pero, como $m = \frac{1}{2}$,

entonces $\frac{1}{2} = \frac{y-2}{x-3}$

$x - 3 = 2y - 4$

$x - 2y + 1 = 0$ ◆

Ejemplo 4.17

Hallar la ecuación de la recta determinada por las coordenadas de los puntos *B*(2;–3) y *C*(4;5).

Resolución:

Como conocemos las coordenadas de dos puntos, podemos hallar la pendiente de la recta.

$$m = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{5+3}{4-2} = \frac{8}{2} = 4$$

Conocida ya la pendiente, procederemos igual que en el ejemplo anterior, con uno, cualquiera, de los puntos; en este caso, tomamos B.

$$m = \frac{y - y_B}{x - x_B}$$

$$4 = \frac{y+3}{x-2}$$

$4x - 8 = y + 3$

$4x - y - 11 = 0$ ◆

Aplica tus conocimientos

Comprueba en el ejemplo anterior que si tomas el punto C, obtienes el mismo resultado.

¡Atención!

Para obtener la ecuación de una recta, seguimos el algoritmo:

1. Dado un punto y la pendiente:
   a) Consideramos un punto $P(x;y)$ cualquiera de la recta;
   b) Sustituimos las coordenadas de P y del punto conocido al igual que el valor de la pendiente en la fórmula de esta;
   c) Efectuamos y expresamos en la forma $Ax + By + C = 0$ o $y = mx + n$.
2. Si conocemos dos puntos:
   Hallamos el valor de la pendiente y seguimos el procedimiento anterior utilizando uno de los puntos conocidos.
3. Si conocemos un punto y el ángulo de inclinación de la recta en el eje x positivo.
   Hallamos el valor de la pendiente utilizando la razón de la tangente del ángulo y seguimos el procedimiento 1.

Es importante, que tengas en cuenta este algoritmo en la resolución de cualquier situación tendiendo los datos que se presenta en la actividad.

Conéctate

Accede al sitio www.cubaeduca.cu, en la sección curricular, el nivel preuniversitario en undécimo grado Matemática la lección Ecuación de la recta conocida las coordenadas, y realiza las actividades 1 y 2. Comprueba los análisis realizados.

Saber más

Debes haber observado que hemos expresado la ecuación de la recta de dos formas diferentes, como:

- $y = mx + n$ conocida como *forma explícita* de la ecuación de la recta,
- $Ax + By + C = 0$ conocida como *ecuación general de la recta* o *forma implícita*.

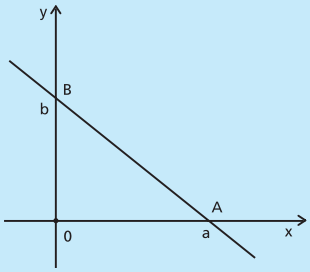


Fig. 4.41

También la ecuación de la recta se puede expresar en la forma:

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, conocida como ecuación segmentaria o simétrica de la recta, donde los parámetros a y b son los interceptos de la recta con los ejes coordenados x y y, respectivamente.

Demostración:

Sean los puntos *A(a;0)* y *B(0;b)* (figura 4.41). Sigamos el procedimiento indicado para hallar la ecuación de una recta conocidos dos puntos.

$$\frac{b}{-a}=\frac{y}{x-a}$$

$$bx - ab = -ay$$

$$bx + ay = ab \mid : ab$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Ejemplo 4.18

Determinar las coordenadas de los puntos de intersección de las rectas:

a) $2x - y - 1 = 0$ $\quad x - 2y + 4 = 0$

b) $3x - y - 1 = 0$ $\quad 3x - y - 4 = 0$

c) $6x + 8y + 10 = 0$ $\quad 3x + 4y + 5 = 0$

Resolución:

Las coordenadas de los puntos de intersección de ambas rectas deben satisfacer las dos ecuaciones; luego, se trata de resolver el sistema formado por ambas ecuaciones.

a) Resolvamos el sistema: $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$

El sistema tiene una única solución (2;3), eso significa que las rectas tienen un único punto común, es decir, se cortan en el punto (2;3) (figura 4.42 a)

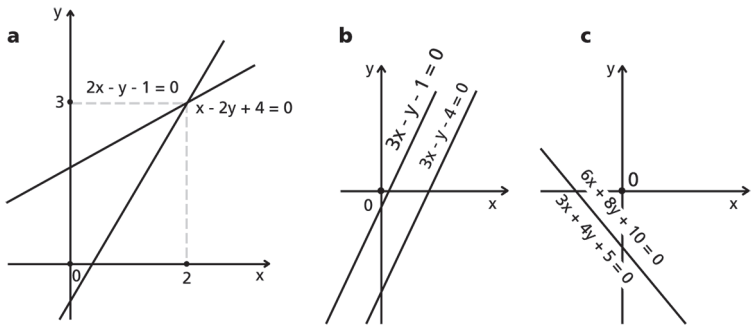


Fig. 4.42

b) Resolvamos el sistema: $\begin{cases} 3x - y - 1 = 0 \\ 3x - y - 4 = 0 \end{cases}$

Si sustraemos miembro a miembro las ecuaciones para eliminar *x*, obtenemos: 3 = 0, que es un absurdo; esto significa que el sistema no tiene solución, es decir, las rectas no tienen puntos comunes, lo que significa

que son paralelas no coincidentes (figura 4.42 b). A la misma conclusión podemos llegar si notas que las pendientes de esas rectas son iguales y no tienen el mismo intercepto en el eje *y*.

c) Resolvamos el sistema: $\begin{cases} 6x+8y+10=0 & (1) \\ 3x+4y+5=0 & (2) \end{cases}$

Multiplicando la ecuación (2) por –2 y sumando la ecuación obtenida con (1), obtenemos 0 = 0, lo cual se cumple siempre. Esto significa que el sistema tiene infinitas soluciones; luego, las rectas tienen todos sus puntos comunes, es decir, las rectas son coincidentes (figura 4.42 c). A la misma conclusión podemos llegar si notas que las pendientes de esas rectas son iguales y tienen el mismo intercepto en el eje y. ◆

■ *¿Cómo pudiéramos proceder para determinar la relación de posición de dos rectas sin necesidad de resolver el sistema de ecuaciones?*

Sean las ecuaciones de las rectas:

$r_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ con $A_1 \neq 0$ o $B_1 \neq 0$ y

$r_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ con $A_2 \neq 0$ o $B_2 \neq 0$

$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$	$r_1 \cap r_2 = S$ Las rectas se cortan en un punto	El sistema tiene una única solución.
$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$	$r_1 \cap r_2 = \varnothing$ $r_1 \parallel r_2$ Las rectas no tienen puntos comunes. Son paralelas.	El sistema no tiene solución.
$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$	$r_1 \cap r_2 = r_1 = r_2$ Las rectas tienen infinitos puntos comunes. Las rectas son coincidentes.	El sistema tiene infinitas soluciones.

Del mismo ejemplo 4.18 podemos analizar la relación entre las rectas sin resolver el sistema de ecuaciones.

a) $2x - y - 1 = 0$ b) $3x - y - 1 = 0$ c) $6x + 8y + 10 = 0$

$x - 2y + 4 = 0$ $3x - y - 4 = 0$ $3x + 4y + 5 = 0$

$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{2}$	$r_1 \cap r_2 = S$ Las rectas se cortan en un punto	El conjunto solución del sistema es $S\{2;3\}$.

$1 = 1 \neq \frac{1}{4}$	$r_1 \cap r_2 = \varnothing$ $r_1 \parallel r_2$ Las rectas no tienen puntos comunes. Son paralelas.	El sistema no tiene solución.
$2 = 2 = 2$	$r_1 \cap r_2 = r_1 = r_2$ Las rectas tienen infinitos puntos comunes. Las rectas son coincidentes.	El sistema tiene infinitas soluciones.

Ejemplo 4.19

Calcular el área del ΔABC si sus vértices tienen coordenadas:

$A(-4; 0)$, $B(2; 3)$ y $C(-2; 6)$.

a) Calcula la amplitud del $\measuredangle CAB$.

Resolución:

Para dar respuesta a este ejercicio, donde están dadas las coordenadas de los tres vértices del triángulo, podemos utilizar cualquiera de las tres fórmulas para calcular el área del triángulo que conocemos, o sea, si calculamos:

1. Las longitudes de los lados mediante la fórmula de distancia entre dos puntos podemos utilizar la fórmula de Herón:

$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ donde p es el semiperímetro del triángulo y a, b, y c, las longitudes de los lados.

2. Las longitudes de dos lados, digamos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, y el ángulo de intersección entre las rectas que contienen estos lados, nos permitiría utilizar la fórmula:

$$A = \frac{1}{2} b \cdot c \operatorname{sen}$$

3. La longitud de un lado considerado como la base y de la altura relativa a ese lado, usaríamos la fórmula:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Analicemos esta última vía, para ello consideremos como base el lado $\overline{AB}$ al cual calculamos su longitud:

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

$$= \sqrt{(-4-2)^2 + (0-3)^2}$$

$$= \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{45} \approx 3\sqrt{5}\text{u}$$

Calcular la altura relativa al lado $\overline{AB}$, para lo cual debemos tener presente que la *altura de un triángulo es el segmento de perpendicular trazado desde un vértice hasta el lado opuesto* (figura 4.43)

En este caso, para calcular la longitud del segmento $\overline{CQ}$, debemos tener las coordenadas del punto *Q*, que es el punto de intersección de las rectas *AB* y *CQ*.

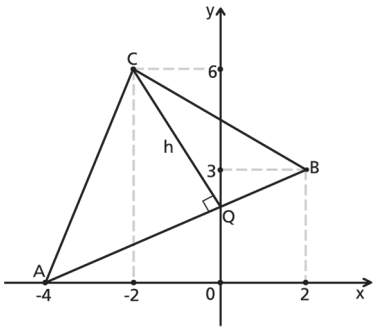


Fig. 4.43

Debemos obtener entonces las ecuaciones de dichas rectas y resolver el sistema formado por ambas.

Hallar la ecuación de la recta *AB*

Pendiente:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{3-0}{2+4}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Ecuación: $m_{AB}=\dfrac{y-y_A}{x-x_A}$

$$\frac{1}{2}=\frac{y}{x+4}$$

$$x+4=2y$$

$$x-2y+4=0$$

Hallar la ecuación de la recta *CQ*

Pendiente: como la recta *CQ* contiene a la altura *h* del triángulo, es perpendicular a la recta *AB*; luego, sus pendientes son opuestas y recíprocas, entonces: $m_{CQ}=-2$

Ecuación: $m_{CQ}=\dfrac{y-y_C}{x-x_C}$

$$-2=\frac{y-6}{x+2}$$

$$-2x-4=y-6$$

$$2x-y+2=0$$

Para obtener las coordenadas del punto *Q*, debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} x-2y+4=0 & (1)\\ 2x-y+2=0 & (2)\end{cases}$$

Al resolver el sistema, su solución es el punto (2; 0) que no son más que las coordenadas del punto *Q*, luego:

$$h=\left|\overline{CQ}\right|=\sqrt{(-2-0)^2+(6-2)^2}=\sqrt{(-2)^2+(4)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}\text{u}$$

$$A_{\Delta ABC}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CQ}}{2}=\frac{3\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}}{2}=3\cdot 5=15\text{u}^2$$

a) Para calcular la amplitud del $\angle CAB$, observa en la figura 4.41 que no es más que la diferencia entre el ángulo de inclinación respecto al eje *x* de la recta que contiene al lado $\overline{AB}$ y el del lado $\overline{AC}$, y, como la pendiente

de una recta es la tangente del ángulo de inclinación, podemos fácilmente calcular dichos ángulos.

Sea pues θ el ángulo de inclinación de la recta AB y φ el ángulo de inclinación de la recta AC, entonces:

$\tan\theta = m_{AB} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ luego, $\theta = 26{,}6°$

$\tan\varphi = m_{AC} = \frac{6-0}{-2+4} = \frac{6}{2} = 3$ luego, $\varphi = 71{,}6°$

por tanto $\angle CAB = \varphi - \theta = 71{,}6° - 26{,}6° = 45°$ ◆

En el inciso a, del ejemplo anterior, hemos analizado un procedimiento para hallar la altura de un triángulo. Analiza en la definición de altura que esta no es más que la distancia de un vértice del triángulo al lado opuesto, o sea, no es más que la distancia de un punto a una recta, siguiendo este procedimiento demostremos el siguiente teorema.

¡Atención!

Llamaremos distancia de un punto a una recta a la longitud del segmento de perpendicularidad comprendido entre el punto y la recta.

Teorema 4.6

La distancia de un punto $P(x_1; y_1)$ a la recta r de ecuación $Ax + By + C = 0$, se denota por $d(P_1; r)$ y es:

$$d(P_1;r) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Demostración:

Sea la recta r de ecuación $Ax + By + C = 0$ y un punto $P_1(x_1;y_1)$ que no pertenece a la recta (figura 4.44), luego:

$$d(P_1;r) = |\overline{P_1P}|$$

donde P es el pie de la perpendicular trazada desde P_1 a r.

Determinemos la ecuación de la perpendicular a r que pasa por el punto P_1.

Como $r_1 \perp r$, tenemos que $m_r = -\frac{A}{B}$ y $m_{r_1} = \frac{B}{A}$; la ecuación de r_1 sería:

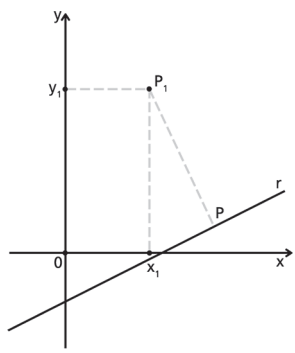


Fig. 4.44

$$\frac{B}{A}=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

$$y-y_1=\frac{B}{A}(x-x_1)$$

$$y=\frac{B}{A}(x-x_1)+y_1 \qquad (1)$$

Para hallar las coordenadas de *P*, sustituimos (1) en la ecuación de *r*:

$$Ax+B\left(\frac{B}{A}(x-x_1)+y_1\right)+C=0$$

$$Ax+\frac{B^2}{A}(x-x_1)+By_1+C=0$$

$$Ax+\frac{B^2}{A}x-\frac{B^2}{A}x_1+By_1+C=0$$

$$\left(\frac{A^2+B^2}{A}\right)x-\frac{B^2x_1-ABy_1-AC}{A}=0$$

$$x=\frac{B^2x_1-ABy_1-AC}{A^2+B^2} \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) tenemos:

$$y=\frac{B}{A}\left(\frac{B^2x_1-ABy_1-AC}{A^2+B^2}-x_1\right)+y_1$$

$$y=\frac{B}{A}\left(\frac{B^2x_1-ABy_1-AC-A^2x_1-B^2x_1}{A^2+B^2}\right)+y_1$$

$$y=\frac{B}{A}\left(\frac{-A(Ax_1+By_1+C)}{A^2+B^2}\right)+y_1$$

$$y=-B\left(\frac{Ax_1+By_1+C}{A^2+B^2}\right)+y_1$$

Luego, $P\left(\frac{B^2x_1-ABy_1-AC}{A^2+B^2};-B\left(\frac{Ax_1+By_1+C}{A^2+B^2}\right)+y_1\right)$

La distancia del punto P_1 al punto *P* es la $d(P_1;r)$, entonces:

$$d(P_1;r)=d(P_1;P)=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{-A(Ax_1+By_1+C)}{A^2+B^2}\right)^2+\left(-B\left(\frac{Ax_1+By_1+C}{A^2+B^2}\right)\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{A^2\left(Ax_1 + By_1 + C\right)^2}{\left(A^2 + B^2\right)^2} + \frac{B^2\left(Ax_1 + By_1 + C\right)^2}{\left(A^2 + B^2\right)^2}}$$

$$= \sqrt{\left(A^2 + B^2\right) \cdot \frac{\left(Ax_1 + By_1 + C\right)^2}{\left(A^2 + B^2\right)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(Ax_1 + By_1 + C\right)^2}{A^2 + B^2}}$$

$$= \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \blacklozenge$$

Ejemplo 4.20

En el ΔMNP calcular la altura relativa al lado $\overline{MN}$ si sus vértices tienen como coordenadas $M(4;-2)$, $N(-8;7)$ y $P(2;7)$.

Resolución:

Calcular la longitud de la altura no es más que calcular la distancia del vértice P a la recta que contiene al lado $\overline{MN}$.

Pendiente de la recta MN: $m_{MN} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{7+2}{-8-2} = \frac{9}{-12} = -\frac{3}{4}$

Ecuación de la recta MN: $-\frac{3}{4} = \frac{y+2}{x-4}$

$-3x + 12 = 4y + 8$

$3x + 4y - 4 = 0$

Cálculo de la altura pedida:

$$h = d(P, MN) = \frac{|Ax_P + By_P + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3(2) + 4(7) - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$= \frac{|6 + 28 - 4|}{\sqrt{25}} = \frac{30}{5} = 6$$

Respuesta: la altura relativa al lado $\overline{MN}$ es de 6 u. $\blacklozenge$

Aplica tus conocimientos

En el inciso a, del ejemplo 4.19 calcula el área del ΔABC aplicando la fórmula de distancia de un punto a una recta para determinar la altura.

Ejemplo 4.21

Demostrar aplicando los conocimientos de Geometría Analítica que en todo triángulo rectángulo de catetos *a* y *b* con hipotenusa c, la altura *h* relativa a la hipotenusa es:

$$h = \frac{a \cdot b}{c}$$

Demostración:

Sea el ΔBOA rectángulo en *O*, definamos un sistema de coordenadas de origen en el vértice del ángulo recto de dicho triángulo y los catetos coincidiendo con los ejes coordenados como se muestra en la figura 4.45, luego, los vértices del triángulo tienen coordenadas:

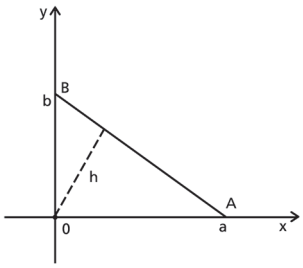


Fig. 4.45

A(a;0), *B*(0;b) y *O*(0;0); entonces, la altura *h* es la distancia del origen de coordenadas a la recta que contiene al segmento $\overline{AB}$ que soporta a la hipotenusa.

Obtengamos la ecuación de la recta *AB*:

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{0-b}{a-0} = -\frac{b}{a}$$

Ecuación de *AB*: $m_{AB} = \dfrac{y - y_B}{x - x_B}$

$$-\frac{b}{a} = \frac{y-b}{x}$$

$$-bx = ay - ab$$

$$-bx - ay + ab = 0$$

Cálculo de la altura *h*:

$$h = d(O;AB) = \frac{|-bx_O - ay_O + ab|}{\sqrt{(-b)^2 + (-a)^2}} = \frac{|-b \cdot 0 - a \cdot 0 + ab|}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{|ab|}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{a \cdot b}{c} \quad \blacklozenge$$

Saber más

Consideramos el ángulo de intersección entre dos rectas *a* y *b* no perpendiculares, de pendientes m_a y m_b respectivamente, al ángulo agudo δ que se forma al cortarse dichas rectas y se cumple que: $\tan\delta = \left|\dfrac{m_a - m_b}{1 + m_a \cdot m_b}\right|$

Aplica tus conocimientos

En el inciso a, del ejemplo 4.19, calcula el área del ΔABC aplicando la fórmula $A = \frac{1}{2} b \cdot c \operatorname{sen}\alpha$

Ejercicios del epígrafe Ecuación cartesiana de la recta

1. Halla la pendiente y el punto de intersección con el eje de las ordenadas de la recta cuya ecuación es:

a) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$ b) $3x - 2y - 5 = 0$ c) $5x + 2y + 4 = 0$

d) $2x - 5y = 0$ e) $x + \sqrt{2}y + 2 = 0$ f) $6x - \sqrt{3}y - 9 = 0$

1.1 Verifica utilizando el GeoGebra que son las coordenadas del punto de intersección de la recta con el eje de las ordenadas de los incisos a), c) y e).

2. Determina una ecuación de la recta que contiene al punto P_0 y tiene pendiente m si:

a) $P_0(3; 2)$, $m = 4$ b) $P_0(-5; 2)$, $m = -3$ c) $P_0(-6; -4)$, $m = \frac{1}{3}$

d) $P_0\left(\frac{1}{2}; -2\right), m = -1$ e) $P_0(-3; 2)$, m = 0 f) $P_0\left(\frac{1}{4}; 0\right), m = -\frac{3}{4}$

g) $P_0(0; -4)$, $m = -\frac{1}{4}$ h) $P_0\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right), m = 0{,}5$ i) $P_0\left(\sqrt{3}; 2\right), m = \sqrt{3}$

j) $P_0\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}\right), m = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3. Determina una ecuación de la recta que contiene las coordenadas de los pares de puntos siguientes:

a) (2; 3) y (3; 5) b) (–1; –5) y (–3; 5)

c) (–1; 0) y (3; –16) d) $\left(2; \frac{1}{2}\right)$ y (3; –4)

e) (2; 0) y (0; –3) f) $\left(\frac{3}{4}; -1\right)$ y $\left(2; -\frac{1}{2}\right)$

g) (3; –5) y (3; 6) h) (0; –5) y $\left(3; -\frac{1}{2}\right)$

i) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right) y \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{5}\right)$ j) $\left(0; 2\sqrt{2}\right) y \left(\sqrt{3}; -\sqrt{2}\right)$

4. Usa el asistente GeoGebra y representa una ecuación que tenga pendiente 3 y que interseque al eje de las abscisas en el punto de coordenadas (–2;0). Escribe su ecuación.

5. Halla una ecuación de la recta que pase por el punto de coordenadas $A(-6; -3)$ y tenga un ángulo de inclinación θ con el semieje positivo de las x de:

a) 30° b) 45° c) 60° d) 90° e) 180°

6. Escribe la ecuación de la recta que contiene a los ejes de coordenadas.

7. Determina una ecuación de la recta de pendiente $m = -3$ que tiene el mismo punto de intersección con el eje de las ordenadas que la recta $2x - 3y - 6 = 0$.

7.1 Comprueba utilizando el GeoGebra que la ecuación no es la única.

8. Determina la relación de posición de los siguientes pares de rectas dados por sus ecuaciones:

a) $5x - 3y - 1 = 0$; $4x - 5y + 32 = 0$ b) $3x - 2y + 6 = 0$; $y = \frac{3}{2}x - 2$

c) $2x + 3y = 1$; $8x + 12y - 4 = 0$ d) $x + 3y = 0$; $15x - 5y = 0$

e) $2x - 3y + 7 = 0$; $4x - 3y = 1$ f) $x - 4y + 13 = 0$; $3x = 2y - 9$

8.1 Determina los puntos de intersección en cada inciso. Comprueba los resultados obtenidos en el GeoGebra.

9. Dada la recta de ecuación $5x + 3y - 3 = 0$ determina la pendiente de la recta:

a) paralela a la recta dada;

b) perpendicular a la recta dada.

10. Sea la recta de ecuación $2x - 3y + 5 = 0$. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de coordenadas $M(4; -5)$ y es:

a) paralela a la recta dada;

b) perpendicular a la recta dada.

11. El valor de β para que la recta t de ecuación $t : \beta x - y + 8 = 0$ pase por el punto P de coordenadas (–2;4) es:

a) $\beta = -2$ b) $\beta = 2$ c) $\beta = -2\frac{1}{2}$ d) $\beta = 2\frac{1}{2}$

12. En el sistema de coordenadas (figura 4.46) se ha representado el cuadrilátero ABCD. Escribe en tu libreta las respuestas correctas y fundaméntalas.

a) El cuadrilátero representado es un:
trapecio isósceles

rombo
rectángulo
cuadrado

c) La longitud del lado $\overline{AB}$ es de: 3 u 4 u $\sqrt{10}$ u $\sqrt{13}$ u

d) Determina una ecuación de la recta que contiene a la paralela media a los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ del cuadrilátero dado.

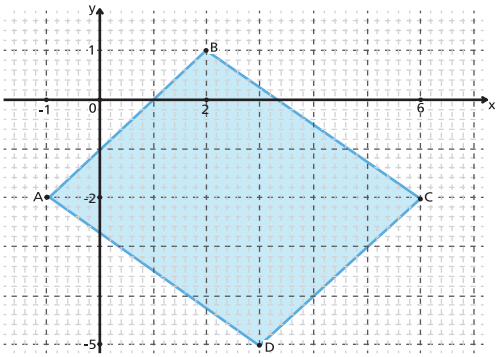


Fig. 4.46

13. ¿Para qué valor de α las rectas de ecuación $y = \alpha x + 3$ y $y = -3x + 2$ son paralelas?

14. ¿Para qué valor de α las rectas de ecuación $y = \alpha x - 1$ y $y = 5x + 3$ son perpendiculares?

15. Una recta r pasa por los puntos de coordenadas (3; 2) y (–4; –6), y otra recta n pasa por el punto de coordenadas (7; 1) y el punto A cuya ordenada es –6. Halla la abscisa del punto A, sabiendo que $r \perp n$.

16. ¿Cuál es la ecuación de la recta perpendicular a la recta de ecuación $2x - 3y + 7 = 0$ y que pasa por el punto medio del segmento de esta comprendido entre los ejes coordenados?

17. Halla una ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas de ecuación $x - y + 4 = 0$ y $4x + y - 19 = 0$ y es paralela a la recta $2x - 3y + 6 = 0$.

18. Muestra que la relación de perpendicularidad entre las rectas de ecuación $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ con $A_1 \neq 0$ o $B_1 \neq 0$ y $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ con $A_2 \neq 0$ o $B_2 \neq 0$ se puede expresar como $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

19. Determina el área del triángulo limitado por la recta $5x + 8y - 40 = 0$ y los ejes coordenados. Compruébalo utilizando el GeoGebra.

20. Los vértices del cuadrilátero $ABCD$ está dado por sus coordenadas $A(0;-2)$, $B(9;-3)$, $C(7;4)$ y $D(1;5)$. Halla las ecuaciones que contienen a sus diagonales.

21. Las coordenadas de los vértices de un triángulo son:
$L(-2;1)$, $M(4;7)$ y $N(6;-3)$.

a) Halla una ecuación de la recta que pasa por el vértice L con pendiente $m = \frac{1}{2}$.

b) Halla las coordenadas del baricentro.

c) Halla el ángulo que se forma entre las medianas relativas a los lados $\overline{LM}$ y $\overline{MN}$.

22. Dado el triángulo cuyos vértices tienen como coordenadas: $D(-5; -5)$, $E(1; 7)$ y $F(5; 1)$:

a) Determina las ecuaciones de las rectas que pasan por sus vértices y son paralelas al lado opuesto,

b) Determina las coordenadas del ortocentro,

c) Determina las coordenadas del circuncentro.

23. Las ecuaciones de las rectas que contienen a lados de un triángulo son: $3x - y - 7 = 0$, $x + y - 5 = 0$ y $2x - y - 7 = 0$. Halla las coordenadas de sus vértices.

Verifica que esas son las coordenadas de los vértices utilizando el GeoGebra.

24. Las coordenadas de los vértices de un triángulo son: $A(-5; 2)$, $B(5; 6)$ y $C(1; -2)$. Halla una ecuación de la recta que pasa por el punto medio de $\overline{BC}$ y es perpendicular a la mediana relativa a este lado y el ángulo que forma con el lado $\overline{AB}$.

25. Una recta de pendiente $m = -2$ pasa por el punto de coordenadas $(2; 7)$ y por los puntos A y B. Si la ordenada de A es 3 y la abscisa de B es 6, ¿cuál es la abscisa de A y la ordenada de B?

26. Dos rectas se cortan formando un ángulo de 45°. Una de ellas pasa por los puntos de coordenadas $(-2; 1)$ y $(9; 7)$ y la otra pasa por el punto de coordenadas $(3; 9)$ y por el punto A cuya abscisa es -2. Halla la ordenada de A.

27. Halla la distancia del punto dado a la recta de ecuación indicada:

a) $A\left(\frac{3}{2};9\right)$, $4x + 3y - 8 = 0$ b) $B(3;1)$, $6x - 8y - 5 = 0$

c) $C(0; 1)$, $x - 2y + 3 = 0$ d) $D(2;1)$, $y = 3x + 7$

28. Halla la longitud de la altura relativa al lado $\overline{AB}$ del triángulo cuyos vértices tienen como coordenadas $A(4;-2)$, $B(1;4)$ y $C(-2;0)$.

29. Halla la distancia entre las rectas de ecuación:

a) $4x - 3y + 25 = 0$ y $8x - 6y + 25 = 0$ b) $x - 2y + 5 = 0$ y $\frac{1}{2}x - y + 2{,}5 = 0$

30. Una de las bases de un triángulo está contenida en la recta que pasa por los puntos de coordenadas $(-3;1)$ y $(5;-1)$. ¿A qué distancia se encuentra el tercer vértice de coordenadas (6; 3) a la base?

31. Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de coordenadas: (3; 5), (–2; 4) y (–3; –1).

32. Las ecuaciones de las rectas de los lados de un triángulo son respectivamente $3x + 5y - 16 = 0$, y $x - y = 0$ y $3x + y + 4 = 0$. Calcula la distancia de cada vértice al lado opuesto, y la amplitud de los ángulos interiores del triángulo.

33. En el sistema de coordenadas rectangulares (figura 4.47) se ha representado el paralelogramo *PQRS.*

a) Demuestra que el paralelogramo representado, es un rectángulo.

b) Escribe una ecuación de una de las diagonales del rectángulo *PQRS.*

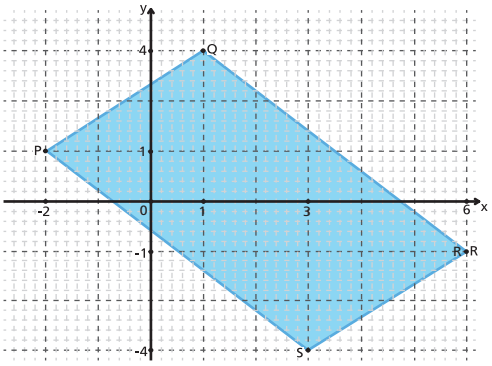


Fig. 4.47

c) Determina el área del rectángulo si se conoce que la suma de dos lados consecutivos es $8\sqrt{2}$u y la longitud del lado menor es $3\sqrt{2}$u.

34.* El área de un triángulo es $A = 15$ u^2, dos de sus vértices son los puntos $A(-1;-3)$ y B(5;0), y el tercer vértice, C, pertenece a la recta $2x - y + 1 = 0$. Determina las coordenadas de C.

35. Los puntos de coordenadas $A(1;-1)$, $B(5;1)$ y $C(1;5)$ son los vértices de un triángulo.

a) Clasifica dicho triángulo según la longitud de sus lados.

b) Calcula su área, su perímetro y la amplitud de sus ángulos interiores.

c) Calcula las coordenadas del circuncentro, del ortocentro y del baricentro.

d) Prueba que el circuncentro, el ortocentro y el baricentro están sobre una misma recta (Recta de Euler).

36.* Un punto se mueve de tal manera que su distancia al eje y disminuida en 3 es siempre igual al doble de su distancia al eje x. Halla una ecuación de su lugar geométrico y haz su representación gráfica.

37. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al eje x es igual a su distancia al punto $A(0;4)$. Halla una ecuación de su lugar geométrico.

38. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto $B(2;4)$ es siempre igual a su distancia al eje x disminuida en 3. Halla una ecuación de su lugar geométrico.

39. Formula un problema en que sea necesario aplicar tus conocimientos vinculados a la Geometría Analítica en que sientas la necesidad de determinar la ecuación de rectas, las relaciones de paralelismo y perpendicularidad, y los conceptos de área y o perímetro de figuras planas

Conéctate

Accede al sitio www.cubaeduca.cu, y resuelve todas las actividades de autoevaluación propuestas en la lección La recta como lugar geométrico.

Ejercicios del capítulo

1. Una recta de pendiente $m = 3$ pasa por el punto de coordenadas (3;2); si la abscisa de otro punto de la recta es 4, halla su ordenada.

2. Una recta pasa por los puntos de coordenadas $M(-2;-3)$ y $N(4;1)$. Si un punto de abscisa 10 pertenece a la recta, ¿cuál es su ordenada?

3. Comprueba que la recta que pasa por los puntos $A(1;1)$ y $B(2;-1)$ es paralela a la recta que pasa por los puntos $C(-1;3)$ y $D(0;1)$ y perpendicular a la recta que pasa por los puntos $E(6;2)$ y $F(0;-1)$.

4. Dado el triángulo cuyos vértices son: $A(2;-1)$, $B(4;7)$ y $C(6;-3)$. Determina:
a) una ecuación de la mediana relativa al lado $\overline{AB}$,
b) una ecuación de la mediatriz del lado $\overline{AB}$,
c) una ecuación de la altura relativa al lado $\overline{AB}$.

5. a) Prueba que los triángulos *BAC* y *DEF* representados en la figura 4.48 son semejantes.
b) Clasifica el cuadrilátero *ACEF*.

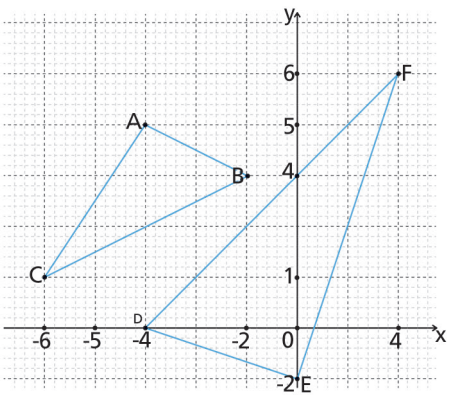


Fig. 4.48

6. Si $ax + 2y + 1 = 0$ y $9x + by + 3 = 0$ representan las ecuaciones de la misma recta, entonces una ecuación de dicha recta es:

a) $3x + 2y + 1 = 0$ b) $3x + 6y + 9 = 0$
c) $2x + 2y + 1 = 0$ d) $9x + 3y + 3 = 0$

7. * Dada las ecuaciones de las rectas que contienen dos lados de un cuadrado $5x + 12y - 10 = 0$ y $5x + 12y + 29 = 0$; halla las ecuaciones de las rectas de los otros dos lados, si el punto M(–3;5) en un lado de este cuadrado.

8. * Se dan las ecuaciones de dos lados de un rectángulo

$5x + 2y - 7 = 0$ y $5x + 2y - 36 = 0$, así como la ecuación de una de las rectas que contienen sus diagonales $3x + 7y - 10 = 0$. Halla las ecuaciones de las rectas que contienen a los otros dos lados y de la otra diagonal.

9. * Halla una ecuación de las rectas que pasa por el punto D de coordenadas (2;2) y forma con los ejes de coordenadas un triángulo de área 1,0 u^2.

10. Determina los valores de p tal que el producto de los segmentos que determina $3x + 5y + p = 0$ sobre los ejes de coordenadas es 60.

11. Dados dos vértices de un triángulo ABC, $A(-2;-3)$ y $B(2;1)$ y el punto $N(1;-2)$ de intersección de sus alturas, halla una de las ecuaciones de sus lados.

12. Dados dos vértices de un triángulo $A(-10;2)$ y $B(6;4)$ cuyas alturas se cortan en el punto $N(5;2)$; determina las coordenadas del vértice C, si se encuentra en la recta de ecuación $x - 2y - 18 = 0$.

13. Una recta pasa por el punto P. Si sabemos que $C = -AB$, halla la ecuación de la recta si:

a) $P(-2\,;\,6)$ y $A + B = 5$ b) $P(4;\,10)$ y $A - B = 9$

c) $P(2;\,0)$ y $A^2 - B^2 = 5$ d) $P(0;\,1)$ y $A^2 + B^2 = 5$

14. Demuestra que el cuadrilátero que se obtiene al unir los puntos medios de un cuadrilátero cualquiera es un paralelogramo. Compruébalo utilizando el GeoGebra.

15. Sean las coordenadas de los vértices de un triángulo:
$A(3;2)$, $B(5;1)$ y $C(3;-2)$. Calcula:

a) la amplitud del ángulo β.

b) la amplitud del ángulo exterior de vértice A.

16. Halla una ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que la razón de su distancia a los puntos $A(2;5)$ y $B(-1;3)$ es siempre igual a 1.

17. Halla una ecuación del lugar geométrico de los puntos tales que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a los puntos (2;1) y (–3;4) es siempre igual a 3.

18. Determina las coordenadas del pie de la perpendicular bajada desde el punto (–1;2) a la recta de ecuación $3x - 5y - 21 = 0$.

19. Halla la proyección del punto $P(-1;\,10)$ sobre la recta determinada por los puntos $A(2;-3)$ y $B(-6;1)$.

20. Desde el punto de coordenadas (2;–3) se traza una perpendicular a la recta de ecuación $3x - 4y + 6 = 0$. ¿A qué distancia se halla dicha perpendicular del punto de coordenadas (6;8)?

21. Halla una ecuación de la recta, si el punto $P(2; 3)$ es el pie de la perpendicular bajada del origen de coordenadas a esta recta. Determina la distancia del origen de coordenadas a dicha recta.

22. El punto de coordenadas (4;3) es un vértice de un cuadrado y la recta de ecuación $2x + y + 4 = 0$ contiene uno de sus lados. Halla el área de dicho cuadrado.

23. Dos de los lados de un paralelogramo están contenidos en las rectas de ecuaciones $x - 3y + 13 = 0$ y $3x - 2y + 4 = 0$ respectivamente, y uno de sus vértices es el punto (–3;1). Halla:

a) las coordenadas de los vértices que faltan,

b) las longitudes de sus diagonales,

c) la amplitud de sus ángulos interiores.

24.* Halla la posición relativa de las rectas r_1 y r_2 con la mediatriz del segmento que une los puntos A (–2;3) y B (4;–5) si:

a) r_1: $4x - 2y - 11 = 0$ b) r_2: $3x - 4y + 13 = 0$

25.* Los lados de un triángulo se dan por sus ecuaciones:

$4x - y - 7 = 0$; $x + 3y - 31 = 0$; $x + 5y - 7 = 0$

Halla las coordenadas del ortocentro.

26.* Una recta p pasa por el origen de coordenadas y por el punto de intersección Q, de las rectas de ecuación s: $x - 3y + 8 = 0$ y q: $x + y - 8 = 0$. Investiga cómo determinar una de las ecuaciones de la recta p sin hallar las coordenadas de Q.

27. Demuestra que la suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales de un paralelogramo es igual al duplo de la suma de las longitudes de los cuadrados de sus lados.

28. Una recta está dada por la ecuación $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$.

a) ¿Cuál es su pendiente?

b) ¿Cuáles son sus interceptos?

c) ¿Qué amplitud tiene el ángulo forma con el eje x?

d) Calcula el área del triángulo formado por la recta y los ejes coordenados.

29. Una recta corta a los ejes coordenados en el primer cuadrante formando segmentos iguales. Escribe una ecuación de dicha recta si el área del triángulo limitado por la recta y los ejes coordenados es de 18 u^2.

30. Escribe una ecuación de una recta que pasa por el punto $B(0;8)$, si el área del triángulo limitado por la recta y los ejes coordenados es igual a 16 u^2.

31. Dado un triángulo de vértices $M(0; -2)$, $N(0;2)$ y $P(2;4)$. Escribe la ecuación de la recta que contiene al lado $\overline{MP}$, a la mediana y a la altura relativa a ese lado.

32. De un rectángulo se conocen los extremos de una diagonal y la amplitud del ángulo de inclinación de un lado respecto al semieje positivo x. Escribe la ecuación de las rectas que contienen a cada lado del rectángulo.

a) $M(1;2)$, $P(3;7)$, $\alpha = 45°$ b) $A(0;0)$, B$(5;5)$, $\alpha = 68{,}2°$

33. En el triángulo EFG conocemos las coordenadas de los vértices E y F, y de los puntos medios M y N de los lados opuestos a dichos vértices respectivamente. Calcula las coordenadas del baricentro B, escribe las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados del triángulo y las coordenadas del vértice G.

a) $E(4;-3)$, $F(2;7)$, $M(-2;6)$ y $N(-1;1)$

b) $E(2;-6)$, $F(4;4)$, $M(-1;3)$ y $N(-2;-2)$

c) $E(5;8)$, $F(-4;7)$, $M(-3{,}5;4{,}5)$ y $N(1;5)$

34. Halla la distancia desde el punto M a la recta r:

a) $M\left(\frac{3}{2};9\right)$, r: $4x + 3y - 8 = 0$ b) $M\left(-\frac{3}{2};-9\right)$, r: $4x + 3y - 17 = 0$

35. Calcula la amplitud del ángulo entre las rectas dadas por las ecuaciones:

a) $7x - 24y + 86 = 0$ y $8x - 15y + 8 = 0$

b) $3x - y - 18 = 0$ y $x - 3y + 15 = 0$

c) $x + 5y + 9 = 0$ y $2x - 3y + 1 = 0$

d) $2x - 3y + 12 = 0$ y $4x - 6y + 15 = 0$

36. Sea la recta $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$. Calcula la distancia de esta recta al origen de coordenadas.

37. De un triángulo ABC se conoce que sus vértices son: $A(2;-3), B(5;-2)\ y\ C(4;y)$, además se cumple que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Analiza y responde:

a) ¿Cómo se clasifica el triángulo ABC según las amplitudes de sus ángulos interiores?

b) Escribe una ecuación de la que contiene a la mediana relativa a la hipotenusa $\overline{AC}$.

c) Calcula el área del paralelogramo que se forma si se ubica un punto D (en ese orden) a partir del triángulo ABC.

38. En el triángulo isósceles de vértices A $(2;1)$, $B(1;8)$ y $C(-4;3)$.

a) Escribe una ecuación de la recta que contiene al circuncentro y el incentro.

b) Calcula la amplitud de sus ángulos bases.

c) Calcula su área.

39. Sean las ecuaciones $y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$ y $6x + 8y + 12 = 0$ de las rectas r_1 y r_2 respectivamente:

a) Verifica que $r_1 \parallel r_2$. Compruébalo utilizando el GeoGebra.

b) Determina a qué distancia se encuentran las rectas r_1 y r_2.

40. Una recta pasa por el origen de coordenadas y forma con el eje x un ángulo de 45°; otra recta pasa por el punto $A(a;0)$ y forma con el eje OX un ángulo de 60°. Halla las coordenadas del punto de intersección de estas rectas y la amplitud del ángulo con que se cortan.

41. Calcula el área de los siguientes trapecios dados por las coordenadas de sus vértices.

a) $A(7;1)$, $B(-1;7)$, $C(0;0)$, $D(2;-15)$

b) $E(-3;0)$, $F(9;4)$, $G(5;6)$, $H(-1;4)$

c) $M(-1;1)$, $N(7;5)$, $P(2;8)$, $Q(-2;6)$

42. Un policlínico B se encuentra a 4,0 km al este y 2,0 km al norte de otro policlínico A, y otro C se encuentra de A a 2,0 km al oeste y 6,0 km al norte. Se quiere construir un centro de urgencia médica M que equidiste de estos tres policlínicos. ¿Cuál debe ser su ubicación respecto al policlínico A? ¿A qué distancia se encuentra de A, B y C?

43. Dos carreteras rectilíneas m y n se cortan formando un ángulo de 63,4° a 5,0 km al oeste de un pueblo P, por donde pasa la carretera m. ¿A qué distancia de la carretera n se encuentra un pueblo M que está a 2,5 km al norte del pueblo P?

44. Investiga sobre las aplicaciones de la Geometría Analítica a:

a) La Ingeniería civil

b) La navegación

b) La ciencia y técnica

c) La Matemática Superior

Autoevaluación

1. De las siguientes proposiciones di cuales son verdaderas o falsas. Justifica las falsas.

a) Si *a, b* y *c* son las longitudes de los lados de un triángulo, entonces su perímetro es 3*a* u.

b) Si un triángulo tiene solo dos de sus lados con igual longitud, entonces es isósceles.

c) Si los lados opuestos de un cuadrilátero convexo son iguales, entonces es un paralelogramo.

d) Un paralelogramo con sus diagonales iguales es un cuadrado.

e) Un rombo es un paralelogramo con sus diagonales perpendiculares.

f) Si la longitud de una diagonal de un cuadrado es 8,0 u, su área es de 32 u^2.

g) Si 6,0 u, 8,0u y 13 u son las longitudes de un triángulo, entonces es un triángulo rectángulo.

h) Si la pendiente de una recta es 3, entonces la pendiente de cualquier recta paralela a ella es 3.

i) Si el ángulo de inclinación de una recta es 45^0, entonces la pendiente de cualquier recta perpendicular a ella es 1.

j) La pendiente de una recta paralela a la recta de ecuación $2x - 3y - 1 = 0$ es $-\frac{2}{3}$.

k) Si la pendiente de una recta *r* es $\frac{4}{3}$, entonces *r* es perpendicular a la recta de ecuación $y = -\frac{3}{4}x - 1$.

l) Las rectas de ecuación r_1: $y = -x + 2$ y r_2: $y = -x + 4$ son paralelas.

m) Las rectas de ecuación $p : y = \frac{x}{5}$ y $q: = 5x - y + 4 = 0$ son perpendiculares.

n) Las rectas de ecuación *t*: $y = 2x + 1$ y *s*: $4x - 2y + 24 = 0$ se cortan en un punto.

2. Selecciona la respuesta correcta en casa caso.

Dadas las rectas *s* y *t* de ecuación *s*: $4x - 2y - 1 = 0$ y *t*: $y = (a + 1)x + 3$.

2.1 El valor de *a* para que las rectas *s* y *t* sean paralelas tiene que ser necesariamente:

a) $a = 3$ b) $a = 0$ c) $a = -1$ d) $a = 1$

2.2 La recta *s* interseca al eje de las ordenadas en el punto de coordenadas:

a) $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ b) $\left(\frac{1}{4};0\right)$ c) $\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ d) $\left(-\frac{1}{4};0\right)$

2.3 Se puede afirmar que la recta *s* y la recta *r* de ecuación *r*: $6x - 3y + 4 = 0$ son:

a) Coincidentes b) Perpendiculares c) Paralelas d) Otra relación

2.4 Si $a = -2$ entonces el punto donde se cortan las rectas t y p: $2y = 3x - 4$ es:

a) (2;–1) b) (2;1) c) (1;2) d) otro punto

2.5 La amplitud del ángulo que forman las rectas t y p al cortarse es aproximadamente igual:

a) $78{,}69^0$ b) 78^0 c) 135^0 d) $55{,}6^0$

3. Lee atentamente y responde según sea el caso

3.1 En tu libreta, escribe la expresión o palabra(s) que falta(n) para que cada proposición sea verdadera.

Si los puntos A (5;– 3), B(– 1;5) , C(–5;2) son los vértices de un ΔABC.

a) La longitud del lado $\overline{AB}$ es de _____

b) La mediana correspondiente al lado $\overline{BC}$ lo interseca en el punto de coordenadas_____

c) Se puede afirmar que el ΔABC es rectángulo en B porque_____

d) Una ecuación para una recta que sea paralela a hipotenusa del ΔABC es_____

3.2 Sean las rectas r y s de ecuaciones r: $ax - y + 3 = 0$ y s: $y = -2x + 1$

a) El valor de a para $r_1 \perp r_2$ es _____

b) La recta r interseca al eje de coordenadas en el punto_____

c) El ángulo que forma la recta s con el eje de las abscisas _____

4. Los vértices de un triángulo son los puntos de coordenadas: A(6;2), B(–2;–4) y C(–2;6).

a) Clasifica el triángulo ABC según la longitud de sus lados.

b) Escribe una ecuación de la recta que contiene al lado AB.

c) Investiga si el punto P(0,6;–2,05) pertenece a dicha recta.

5. La amplitud del ángulo que forma la recta que pasa por los puntos M(3;1) y N(0;4) con el semieje positivo x es:

a) 45^0 b) 135^0 c) 1^0 d) 180^0

6. Las rectas r_1 y r_2 de ecuaciones $2x - ky + 6 = 0$ y $k^2x + 2y = 2$ respectivamente, son perpendiculares si:

a) $k = 4$ b) $k = 1$ c) $k = -1$ d) $k = 2$.

7. Los vértices de un triángulo son: A(x;y), B(3;2) y C(6;5). Si M(8;0) es el punto medio del segmento $\overline{AC}$.

a) Determina las coordenadas del vértice A.

b) Clasifica el triángulo según sus lados, sabiendo que $d(A; C) = 2\sqrt{29}$ u.

c) Escribe la ecuación de la recta que contiene la altura relativa al lado $\overline{BC}$.

8. Dado el paralelogramo $PQRS$, cuyos vértices son los puntos $P(-2; 1)$, $Q(1;4)$, $R(6;-1)$ y $S(3;-4)$:

a) Represéntalo en un sistema de coordenadas rectangulares.

b) Investiga si $PQRS$ es un rectángulo.

c) Calcula su área y perímetro.

9. Halla la distancia del punto dado a la recta dada:

a) $A(2; 3)$; $3x + 5y + 5 = 0$.

10. De los siguientes pares de rectas dados por sus ecuaciones determina si se cortan o no. De cortarse, calcula la amplitud del ángulo con que se cortan:

a) $2x + y + 3 = 0$; $4x + 2y + 1 = 0$ b) $x + y - 4 = 0$; $x + 2y + 5 = 0$

11. Determina para qué valores de a y b las rectas de ecuación

$ax - 2y - 1 = 0$; $6x - 4y - b = 0$

a) tienen un punto común b) son paralelas c) son coincidentes

12. Demuestra que el cuadrilátero que tiene vértices en los puntos de coordenadas:

a) (2;1), (7;3) (3;4) y (8;6) es un paralelogramo

b) (2;4) (7;3) , (6;–2) y (1;–1) es un rombo

c) (–1;–2) , (0;1), (–3;2) y (–4;–1) es un trapecio

d) (1;–3) , (3; –2) , (0; 4) y (–2;3) es un rectángulo

e) (0;0), (4;3), (1;7) y (– 3;4) es un cuadrado

Calcula el perímetro y el área de dichos cuadriláteros.

13. Determina los valores de a para que la recta de ecuación $3x + 4y + a = 0$ esté a 2,4 u del origen de coordenadas. Compruébalo en el GeoGebra.

14. Formula un problema vinculado a la ciencia y técnica en que apliques los conocimientos adquiridos en la unidad.

CAPÍTULO 5

Curvas de segundo grado
Secciones cónicas

Los conocimientos que has adquirido en la asignatura te han permitido comprender que la Matemática no es solo para matemáticos, pues la abstracción que caracteriza a sus teorías surge de la práctica social, la historia así lo demuestra.

Seguramente has tenido que cortar hortalizas, vegetales o frutas, como parte de tu alimentación con una dieta balanceada: un pepino, un tomate, una naranja, una zanahoria, un melón, etc.; aparecen estas formas geométricas (figura 5.1), limitadas por curvas en las que reconoces circunferencias, elipses, parábolas e hipérbolas. Son las llamadas curvas de segundo grado o secciones cónicas.



Fig. 5.1

■ *¿Qué elementos las caracterizan?*
¿Será posible asociar una ecuación a estos objetos geométricos?
¿Qué propiedades las distinguen para su aplicación en las ciencias y las tecnologías?

Las curvas de segundo grado son las que se obtienen mediante secciones planas de una superficie cónica recta de revolución; son cuatro: la circunferencia, la elipse, la hipérbola y la parábola; aunque se nombran solo las tres últimas.

De la historia

El estudio de estas curvas se inició en el siglo IV a. n. e. por el matemático griego Menecmo, quien las obtenía intersecando un cono circular recto con un plano perpendicular a una generatriz. Hacia la segunda mitad del siglo III a. n. e., otro griego, Apolonio de Perga, introduce el método de las coordenadas, para caracterizar las curvas con ecuaciones, en términos de lo que se conoce como álgebra geométrica. Pero es el francés Fermat quien introduce los métodos de la Geometría Analítica, que ya estudiaste, para obtener las ecuaciones reducidas de estas secciones cónicas; desde entonces, se les considera lugares geométricos planos.

Las distintas curvas son el resultado de cortar o intersecar un cono con un plano. Todo dependerá de la inclinación de dicho plano respecto al cono. Este hecho lo puedes observar mejor en la figura 5.2.

- Si el plano cortante y el plano base del cono son paralelos se obtiene una **circunferencia**;
- Si el ángulo del plano cortante con la base del cono es menor que el ángulo de las generatrices con la base, o bien, cuando el ángulo entre el plano cortante es mayor que el ángulo entre cualquier generatriz y el eje, se obtiene una **elipse**;
- Si el ángulo del plano cortante con la base del cono es igual que el ángulo de las generatrices con la base, o cuando el ángulo entre el plano cortante y el eje es igual al ángulo de cualquier generatriz con el eje, se obtiene una **parábola**;
- Si el ángulo del plano cortante con la base del cono es mayor que el ángulo de las generatrices con la base, o de otra forma, cuando el ángulo entre el plano cortante y el eje es menor que el ángulo entre cualquier generatriz y el eje, se obtiene una **hipérbola**.

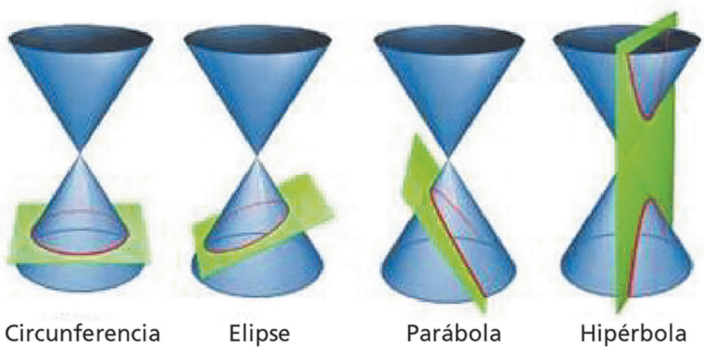


Fig. 5.2

El estudio que realizarás en este capítulo te permitirá comprender su aplicación en modelos que explican la trayectoria elíptica que describen los planetas alrededor del Sol, los satélites y cometas, su aplicación en la construcción de radares, antenas parabólicas, puentes y edificaciones con formas cónicas, así como para el lanzamiento de proyectiles precisos. Además, son de gran importancia en los campos de la óptica, astronomía, física, biología, informática, ingeniería y son la base del diseño y construcción de lentes y espejos los cuales son componentes de microscopios, telescopios, radares, teodolitos, distanciómetros, etcétera.

5.1 Circunferencia

Desde grados anteriores has estudiado a la circunferencia como una línea curva, cerrada y plana cuyos distintos puntos están a igual distancia del punto central y específicamente en la geometría plana y del espacio la has utilizado para el cálculo y demostraciones geométricas. La circunferencia no debe confundirse con el círculo pues *el círculo es el lugar geométrico determinado por una circunferencia y la región del plano que encierra a esta*. Para dominar todo lo concerniente a la circunferencia y al círculo debes conocer los elementos que los conforman y sus propiedades; además de su importancia y sus aplicaciones en la vida cotidiana. Puedes observar la circunferencia en todos los procesos de la vida diaria, y sus aplicaciones más frecuentes están en la Geometría: específicamente en las construcciones; en la Ingeniería para diseñar y construir ruedas, engranajes, poleas, etc.; en la Física son esenciales para comprender el movimiento circular, las leyes de la cinemática, entre otros fenómenos que se pueden modelar por medio de esta.

Desde las asignaturas de Física conoces que, en un átomo de hidrógeno el electrón tiene un movimiento circular uniforme alrededor de su núcleo (figura 5.3); el modelo que lo describe es una analogía del modelo planetario, que describe el movimiento de los planetas alrededor del Sol.

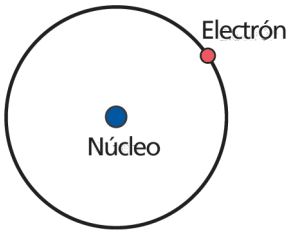


Fig. 5.3

En Geografía los llamados círculos máximos de la esfera: el Ecuador, el meridiano de Greenwich, y los trópicos de Cáncer y Capricornio se

identifican por las circunferencias imaginarias que los limitan (figura 5.4). Además, los cartógrafos utilizan la proyección cónica para representar los continentes y países polares en mapas en los que se muestran las circunferencias que limitan los círculos polares.

¿Qué propiedades de la circunferencia se consideran en estas modelaciones?

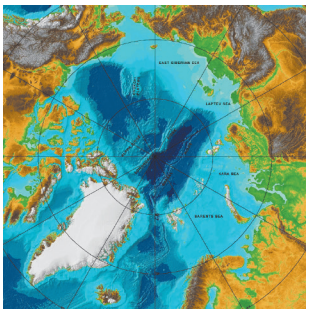


Fig. 5.4

Definición 5.1

La circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo de dicho plano.

Reflexiona

¿En cuál de las siguientes situaciones un punto arbitrario $M\,(x;y)$ del plano, pertenece a una circunferencia de centro $O\,(h;k)$ cuando $d\,(M,O) = r$, o cuando $d\,(M,O) \neq r$?
¿Qué recursos utilizarías para demostrar tu razonamiento?

Conéctate

Accede al sitio www.cubaeduca.cu, y en la sección curricular busca en undécimo grado Matemática, la lección: Circunferencia como lugar geométrico.
Interactúa con los recursos y realiza las actividades propuestas.

Investiga y aprende

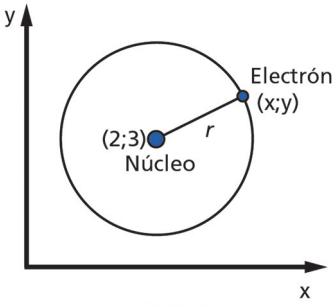
¿Cómo trazar circunferencias en un terreno sin utilizar compás? ¿Cómo lo hacen los jardineros? Si es posible, selecciona con tus compañeros un terreno de tu escuela o comunidad y aplica el método aprendido. Identifica los elementos de la circunferencia con plantas frutales, ornamentales o medicinales.

Ecuación cartesiana de la circunferencia

Durante el estudio de la geometría analítica de la recta en el plano, aprendiste a relacionar las propiedades geométricas de la recta con sus propiedades métricas, es decir, con sus ecuaciones, utilizando un sistema de coordenadas rectangulares. En este subepígrafe estudiarás cómo hacer corresponder una ecuación a una circunferencia.

Imagina que, como físico nuclear, participas en un estudio para el cual es necesario simular la trayectoria del electrón de un átomo de hidrógeno, en su estado básico fundamental (figura 5.5), utilizando un sistema coordenado.

■ *¿Cómo se puede obtener la ecuación de la circunferencia que describe la trayectoria del electrón E, cuando se encuentra a la menor distancia posible del núcleo N?*



$r = 5 \cdot 10^{-11}$m

Fig. 5.5

Consideremos el sistema de coordenadas donde la trayectoria del electrón, identificado por E (x_1;y_1) describe la circunferencia con centro en el núcleo N (h;k) y que tiene radio r.

Aplicando la fórmula de distancia entre dos puntos, tenemos:

$$d(E,N) = r = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2}$$

y elevando al cuadrado ambos miembros:

$$(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 = r^2.$$

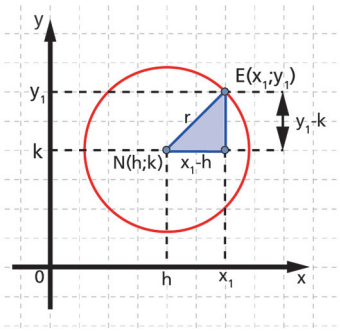


Fig. 5.6

En general, los únicos puntos de un plano que satisfacen la ecuación encontrada, están situados en una circunferencia con centro en *O* (*h*;*k*) y radio *r*.

Teorema 5.1

La circunferencia con centro en el punto *O* (*h*;*k*) y radio *r*, tiene por ecuación:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

La ecuación obtenida es la ecuación cartesiana u ordinaria de la circunferencia.

Si el centro de la circunferencia coincide con el origen de coordenadas *O* (0;0), entonces, como *h* = *k* = 0, la ecuación de la circunferencia de radio *r* será:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

que es conocida como ecuación canónica o estándar de la circunferencia.

Reflexiona

¿En cuál de las siguientes situaciones un punto arbitrario *M* (*x*;*y*) del plano, satisface la ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, de centro *O* (*h*;*k*): cuando *d* (*M*,*O*) = *r*; o cuando *d* (*M*,*O*) ≠ *r*? ¿Qué recursos utilizarías para demostrar tu razonamiento?

Las ecuaciones cartesiana y canónica estudiadas son suficientes para que puedas realizar ejercicios y problemas matemáticos sencillos o relacionados con tu entorno u otras ciencias.

Ejemplo 5.1

Escribir las ecuaciones de las circunferencias dadas por su centro O y radio r:

a) O (–2;3) y r = 5u.

b) O (0;0) y $r = \sqrt{3}$u.

Resolución:

a) Sustituyendo en la ecuación de la circunferencia $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ las coordenadas del centro y el radio tenemos que $(x+2)^2+(y-3)^2=25$, es la ecuación pedida (figura 5.7).

b) Como el centro de la circunferencia está ubicado en el origen de coordenadas, al sustituir en la ecuación $x^2+y^2=r^2$, tenemos que $x^2+y^2=3$, es la ecuación pedida (figura 5.8). ◆

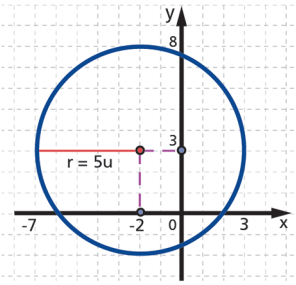


Fig. 5.7

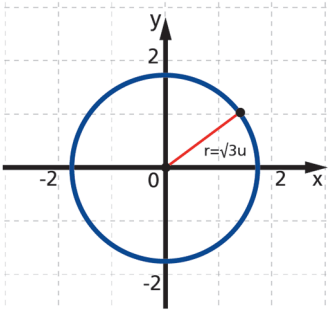


Fig. 5.8

Reflexiona

¿Cuál es la ecuación de la circunferencia descrita por la trayectoria del electrón de hidrógeno simulada en la figura 5.5?

Ejemplo 5.2

Determinar las coordenadas del centro y el radio de las circunferencias dadas por las ecuaciones:

a) $x^2+y^2=5$

b) $(x-1)^2+(y+3)^2=121$

Resolución:

a) Comparando con la ecuación canónica, se tiene que el centro es el origen de coordenadas (0;0) y el radio es $\sqrt{5}$u.

b) Comparando con la ecuación cartesiana o general de la circunferencia, tenemos que $h = 1$ y $k = -3$; de aquí que $O\,(1;-3)$ y $r = \sqrt{121} = 11$u. ◆

En ocasiones, la ecuación de la circunferencia se presenta en la forma: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ conocida como ecuación general de la circunferencia. Se obtiene al desarrollar los binomios al cuadrado de la ecuación canónica y resulta de interés reconocerla, y saber determinar su centro y su radio, para resolver diversas situaciones y problemas.

Ejemplo 5.3

Determinar las coordenadas del centro y el radio de las circunferencias dadas por las ecuaciones:

a) $x^2 + y^2 + 8x - 20 = 0$

b) $4x^2 + 4y^2 + 16x - 24y - 12 = 0$

Resolución:

a) Observa que no es posible comparar directamente con las ecuaciones cartesianas canónicas, por lo que necesitas hacer un completamiento cuadrático para la variable x.

Recuerda que...

Hacer un completamiento cuadrático es convertir una expresión $x^2 + px$ en un trinomio cuadrado perfecto.
Se obtiene adicionando y sustrayendo el complemento cuadrático $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ o sumarlo en los dos miembros de la expresión, para obtener el trinomio cuadrado perfecto $x^2 + 2xy + y^2$.

Aquí el complemento cuadrático de $x^2 + 8px$ es:

$$\left(\frac{8}{2}\right)^2 = 4^2 = 16$$

Luego reagrupamos los términos y transponemos el término independiente al segundo miembro, esto es:

$x^2 + y^2 + 8x - 20 = 0$

$x^2 + 8x + y^2 = 20$

Al realizar el completamiento cuadrático se tiene:

$(x^2 + 8x + 16) + y^2 = 20 + 16$

$(x + 4)^2 + y^2 = 36$

En la ecuación obtenida se identifica que el centro es el punto (–4;0) y el radio es de 6,0u.

b) Observa que en este caso necesitas reducir los coeficientes de los términos al cuadrado y hacer el completamiento cuadrático, tanto para la x como para la y; luego, en $4x^2+4y^2+16x-24y-12=0$ al dividir por 4 ambos miembros, se obtiene $x^2+y^2+4x-6y-3=0$

Al reagrupar los términos semejantes y transponer al miembro derecho el término independiente, se tiene:

$x^2+4x+y^2-6y=3$

y, al realizar el completamiento cuadrático,

$(x^2+4x+4)+(y^2-6y+9)=3+4+9$

$(x+2)^2+(y-3)^2=16$

En la ecuación obtenida se identifica el centro en el punto (–2;3) y el radio es de 4,0u. ◆



Saber más

- Una ecuación de la forma $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ representa una circunferencia cuando cumple la siguiente condición: $D^2+E^2-4F>O$.
  – En tal caso, $D=-2h$, $E=-2k$ y $F=h^2+k^2-r^2$.
  – Tiene el centro en el punto $\left(-\frac{D}{2};-\frac{E}{2}\right)$ y radio $r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$.
  Verifica estas condiciones en los resultados del ejemplo 5.2.
- También se obtienen otros tipos de ecuaciones para la circunferencia, a saber, la ecuación vectorial, la ecuación en coordenadas polares, la ecuación paramétrica de la circunferencia y la ecuación en el plano complejo, entre otras.

Observa que analíticamente la ecuación cartesiana de una circunferencia está determinada por tres condiciones: las coordenadas h y k del centro y el radio r y estas se pueden obtener a partir de las condiciones geométricas que la determinan.

Ejemplo 5.4

Hallar la ecuación de una circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB}$ con A (2;–1), B (4;5).

Resolución:

Observa que, con los datos dados, pueden determinarse las condiciones necesarias para determinar la ecuación: se puede calcular el centro O (h;k) y el radio determinado por la distancia del centro a uno de los extremos

del diámetro. Para que comprendas mejor lo que tienes que hacer te puedes apoyar en la representación gráfica (figura 5.9).

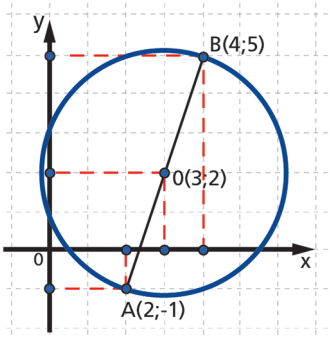


Fig. 5.9

Como el centro de la circunferencia está situado en el punto medio del diámetro $\overline{AB}$, se calcula $O\left(\frac{2+4}{2};\frac{-1+5}{2}\right)$, semisuma de las coordenadas de A y B, de donde O (3;2).

Para determinar la longitud del radio r de la circunferencia, podemos calcular la longitud del diámetro $\overline{AB}$ pues el diámetro es dos veces el radio o simplemente calcular la longitud del radio $r = \overline{OA} = \overline{OB}$, por la fórmula de distancia entre dos puntos:

$$d(O;A) = \sqrt{(x_O - x_A)^2 + (y_O - y_A)^2} = \sqrt{(3-2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{(1)^2 + (3)^2} = \sqrt{10}\text{u}$$

luego, la ecuación es: $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 10$. ◆

Conéctate

Accede al sitio www.cubaeduca.cu, y en la sección curricular busca en undécimo grado Matemática, la lección: Ecuación de la circunferencia.

- Interactúa con los recursos y realiza las actividades propuestas.
- Responde las interrogantes de síntesis y socializa tus criterios en el grupo.

Reflexiona

1. Explica cómo proceder para escribir la ecuación obtenida en el ejemplo 5.6 en forma de ecuación general de la circunferencia.
2. Elabora un esquema lógico o resumen de los procedimientos para obtener las ecuaciones canónica, cartesiana o general de circunferencias, a partir de sus condiciones.

Intersección entre circunferencias y rectas, y entre circunferencias

Entre las figuras geométricas, se identifican relaciones asociadas a las combinaciones o posiciones relativas que tienen en un plano determinado. Esas relaciones se pueden apreciar en la vida diaria, en fenómenos naturales, así como en el resultado de la actividad creativa de los seres humanos.

Asumiendo que, como diseñador o diseñadora, modelas el dibujo que vas a proponer para el estampado de un tipo de tejido o tela, en tu diseño solo quieres utilizar rectas y circunferencias, con sus diversas combinaciones.

Para mejorar la propuesta, intenta modificar el diseño original (figura 5.10), después de reproducirlo con la ayuda del GeoGebra.

Observa que al mover cualquiera de los puntos en el plano coordenado de la Vista gráfica, se transforman en la Vista algebraica las ecuaciones de las rectas y circunferencias asociadas al punto seleccionado.

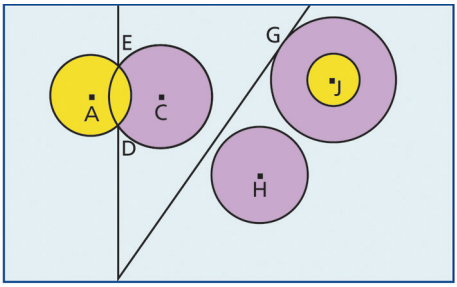


Fig. 5.10

■ *¿Qué condiciones y modelos matemáticos explican las trasformaciones que se muestran en la vista algebraica del programa?*

¿Será posible determinar sus relaciones de posición aplicando los modelos analíticos conocidos?

Reflexiona

¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para determinar la posición relativa de dos rectas en el plano? ¿Cómo la determinas dadas sus ecuaciones?

En este subepígrafe estudiarás las condiciones necesarias y suficientes para determinar las relaciones de posición entre una recta y una circunferencia o entre circunferencias, así como a utilizar los recursos de la geometría analítica para determinar sus intersecciones.

Intersección entre rectas y circunferencias

De la situación anterior, relacionada con el diseño de la tela, se utiliza en particular la relación de posición entre rectas y circunferencias.

Recuerda que...

Las posiciones relativas de una recta y una circunferencia en un plano pueden ser:

- Secante, si la recta interseca a la circunferencia en dos puntos.
- Tangente, si la recta tiene un punto común con la circunferencia.
- Exterior, si la recta y la circunferencia no tienen puntos comunes.

Las condiciones para la intersección entre una recta y una circunferencia se expresan en la relación dada por la distancia del centro de la circunferencia a la recta y la longitud de su radio, como se resume en la figura 5.11.

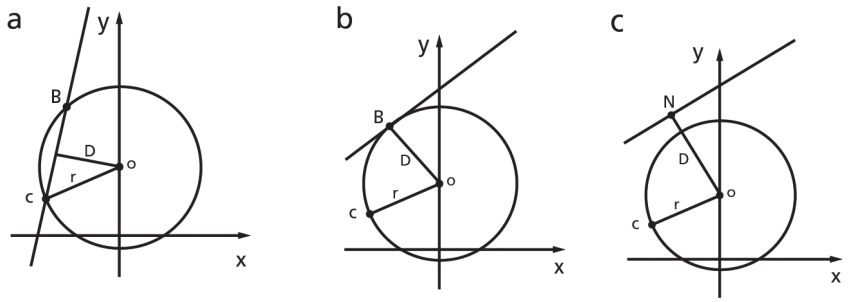


Fig. 5.11

Conéctate

Accede al sitio www.cubaeduca.cu, y en la sección curricular busca en undécimo grado Matemática, la lección: Circunferencia como lugar geométrico. Ecuaciones de la circunferencia. Interactúa con el recurso de las conclusiones y resuelve los ejercicios:

– Rectas asociadas a una circunferencia.
– Una tangente a la circunferencia.
– Rectas y circunferencias.

Cada uno de los objetos matemáticos estudiados, la circunferencia y la recta, son lugares geométricos caracterizados por una ecuación; luego, ¿será posible determinar sus relaciones e intercepciones, conocidas sus ecuaciones? ¿Cómo auxiliarse del GeoGebra y de los modelos analíticos conocidos?

Ejemplo 5.5

Determinar la relación de posición entre la recta y la circunferencia, dada por sus ecuaciones. En caso de tener puntos en común, determina sus coordenadas.

$$(x+4)^2+(y-2)^2=9$$
$$x+y+3=0$$

Existen al menos tres posibles vías de solución:

Resolución:

– Primera vía

Se obtiene mediante la representación gráfica de la recta y la circunferencia con ayuda del GeoGebra.

Observa que de la ecuación de la circunferencia se pueden identificar las coordenadas del centro que son *O* (–4;2) y el radio *r* = 3,0u. De la

ecuación de la recta se identifican los interceptos (–3;0) en el eje *x* y (0;–3) en el eje *y*.

La representación gráfica de la situación en *GeoGebra* (figura 5.12), muestra en la Vista grafica que la recta es secante a la circunferencia y en la vista gráfica, los cálculos aproximados de las coordenadas de los puntos *E* (–5,62;2,62) y *F* (–3,38;0,38).

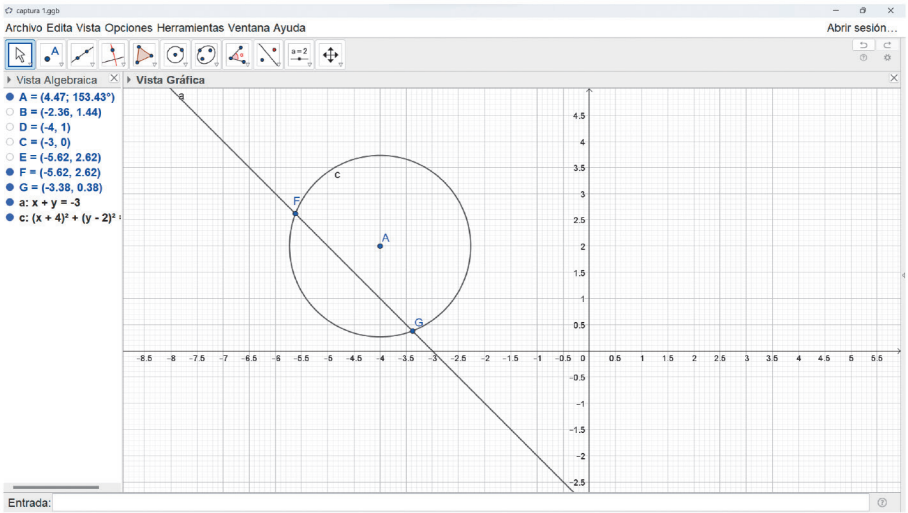


Fig. 5.12

– Segunda vía

Se tiene la solución al resolver directamente el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (x+4)^2+(y-2)^2=9 \\ x+y+3=0 \end{cases}$$

Como sistema cuadrático, se despeja *x* en la ecuación de la recta: $x = -y-3$.

Sustituyendo su valor en la ecuación de la circunferencia, se obtiene:

$(1-y)^2+(y-2)^2=9$ Desarrollando los binomios

$1-2y+y^2+y^2-4y+4-9=0$ Reduciendo términos semejantes

$2y^2-6y-4=0$

Resolviendo la ecuación cuadrática, se obtiene que sus raíces son aproximadamente:

$y_1 = 2{,}62$ o $y_2 = 0{,}38$

Para estos valores de *y* obtenemos:

$x_1 = -5{,}62$ o $x_2 = -3{,}38$.

Los puntos de intersección son (–5,62;2,62) y (–3,38;0,38); luego, la recta es secante.

Recuerda que...

Para resolver una ecuación cuadrática, podemos utilizar la fórmula:

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, donde $D = b^2 - 4ac$

– Tercera vía

Se obtiene al calcular la distancia del centro de la circunferencia a la recta, para determinar cuál de las condiciones se cumple.

Se sustituyen las coordenadas del centro de la circunferencia O (–4;2) y los términos de la ecuación de la recta dada, en la fórmula de la distancia de un punto a una recta.

$$d(O;recta) = \frac{|Ax + By + x|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d(O;recta) = \frac{|-4 + 2 + 3|}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,71\text{u}$$

¡Atención!

Observa que fue necesario racionalizar la expresión $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Como el radio r = 3,0u y 0,71 < 3, esto significa que la recta es secante a la circunferencia; luego, la interseca en dos puntos. ◆

Para determinar los puntos de intersección por esta vía, es necesario resolver el sistema de ecuaciones por la vía algebraica presentada anteriormente.

Reflexiona

¿Cuál de las tres vías utilizadas es la óptima?
¿De qué depende la selección de la vía o procedimiento que se va a utilizar, al resolver otros ejercicios?
Socializa con tus compañeros tus criterios al respecto.

Ejemplo 5.6

Determinar la ecuación de la tangente a la circunferencia $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 16$ en el punto P (5;4).

Resolución:

Como la tangente es perpendicular al radio en el punto *P*, basta calcular la pendiente del radio $\overline{OP}$ para utilizar la relación entre las pendientes de rectas perpendiculares. Dado que el centro es *O* (1;4) y el punto de tangencia es *P* (5;4), se tiene que:

$$m_{OP} = \frac{y_O - y_P}{x_O - x_P} = \frac{4-4}{1-5} = 0\ ;$$

Luego, la pendiente de la tangente es $m = 0$.

Sustituyendo el valor de la pendiente y las coordenadas del punto *P* en la ecuación de la pendiente de la recta, obtenemos $x = 4$, es decir, la tangente buscada es una perpendicular al eje de las abscisas. ◆

¡Atención!

Como la pendiente m_{OP} de la recta que contiene al radio de la circunferencia, es paralela al eje de las abscisas, se puede inferir de inmediato que la tangente que pasa por el punto *P*, es perpendicular al eje de abscisas, como se muestra en la figura 5.13.

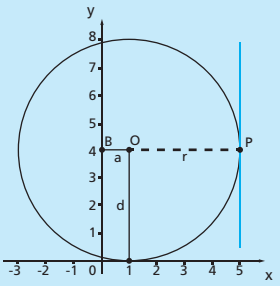


Fig. 5.13

Ejemplo 5.7

Demostrar que la recta $t : 4x + 3y - 40 = 0$ es tangente a la circunferencia cuyo radio es $r = 5$u y cuyo centro es el punto *O* (3;1). Hallar las coordenadas del punto de tangencia.

Resolución:

Para la demostración debemos considerar que si $d(O;t) = r$, entonces *t* es tangente a la circunferencia de centro *O* y radio $r = 5$u

Calculando la distancia del centro a la recta, se tiene que:

$$d(O;t) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d(O;t) = \frac{|12 + 3 - 40|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|-25|}{\sqrt{25}} = 5 = r$$

Luego, la recta dada es tangente a la circunferencia.

Para hallar el punto de tangencia, la vía de solución puede ser la siguiente:

– Primero

Encontrar la ecuación de la recta r que contiene al radio.

Como $t \perp r$, se cumple que $m_t = -\frac{1}{m_r}$; luego, de la ecuación de la recta tangente se obtiene que $m_t = -\frac{4}{3}$; entonces $m_r = \frac{3}{4}$.

Sustituyendo la pendiente de r y las coordenadas del centro de la circunferencia en la ecuación de la pendiente $\frac{3}{4} = \frac{y-1}{x-3}$, se obtiene que $3x - 4y - 13 = 0$ es la ecuación de la recta que contiene al radio r y al punto de tangencia.

– Segundo

Resolver el sistema de ecuaciones lineales

$4x + 3y = 40 \quad |\cdot 4$

$3x - 4y = 13 \quad |\cdot 3$

$16x + 12y = 160$

$9x - 12y = 39$

$25x = 199$

$x = 7{,}96$

Sustituyendo x en cualquiera de las dos ecuaciones, se obtiene $y = 2{,}72$

Luego, el punto de tangencia buscado es (7,96;2,72) ◆

Investiga y aprende

Representa en un sistema de coordenadas la circunferencia y la recta dadas por sus ecuaciones en el ejemplo 5.7. ¿Qué parámetros, de dichas ecuaciones, varían cuando modificas las posiciones relativas entre los objetos matemáticos representados?

Intersección entre circunferencias

En la situación relacionada con el diseño del estampado para la tela, también se utiliza la relación de posición entre circunferencias.

Recuerda que...

Según sus posiciones relativas en un plano, dos circunferencias pueden ser

- Secantes, si se intersecan en dos puntos.
- Tangentes, si tienen un punto común.
- Concéntricas, si tienen un centro común.
- Exteriores, si no tienen puntos comunes.

En general, cuando no hay intersecciones entre las circunferencias o cuando las hay, se pueden dar varios casos. Algunas de las condiciones para la intersección entre dos circunferencias, se presentan en la figura 5.14.

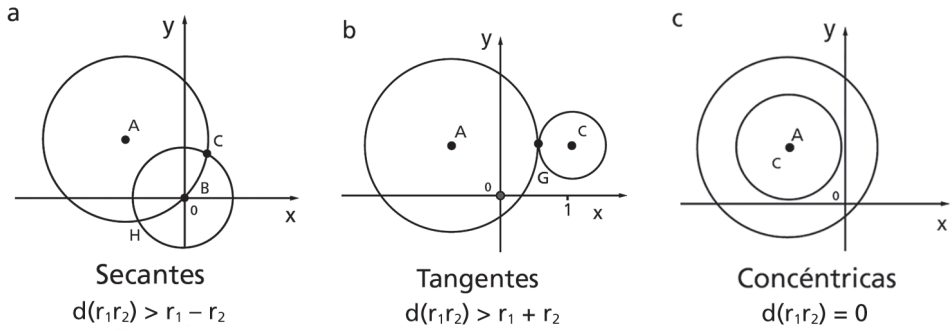


Fig. 5.14

Investiga y aprende

Completa la figura 5.12 con todos los casos posibles de posiciones relativas de dos circunferencias. Utiliza el GeoGebra para graficar las relaciones encontradas.

■ *¿Cómo determinar analíticamente las relaciones de posición de la circunferencia y los puntos de intersección conocidas sus ecuaciones, o dadas las condiciones geométricas, que las determinan?*

Ejemplo 5.8

Determinar la relación de posición entre las circunferencias dadas por su ecuación en cada caso. Si se intersecan, hallar las coordenadas de los puntos de intersección.

a) $x^2 + y^2 = 4$ (1)

$x^2 + (y-4)^2 = 20$ (2)

b) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$ (1)

$(x-1)^2 + y^2 = 4$ (2)

Resolución:

a) $x^2 + y^2 = 4$ (1)

$x^2 + (y-4)^2 = 20$ (2)

Con estas condiciones existen tres vías.

– Primera vía: gráfica

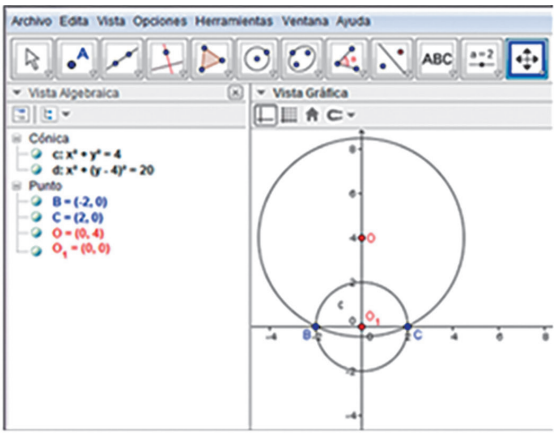


Fig. 5.15

Representa las circunferencias en una pantalla de GeoGebra.
Como muestra la figura 5.15, se puede apreciar que las circunferencias son secantes y que se han calculado las coordenadas de los puntos de intersección B (–2;0) y C (2;0).

– Segunda vía: algebraica

Resolver el sistema de dos ecuaciones cuadráticas de dos variables.
Desarrollando el binomio al cuadrado en (2), se tiene:

$x^2 + y^2 - 8y + 16 = 20 \quad (2)$

Sustituyendo (1) en (2) se tiene que:

$4 - 8y + 16 = 20$

$-8y + 20 = 20$

$y = 0$

Sustituyendo el valor de y en (1,) se obtiene $x^2 = 4$ de donde $x = \pm 2$.
Luego, los puntos de intersección son los puntos (-2; 0) y (2; 0)

– Tercera vía: analítica

Comparando en las ecuaciones se tiene que la circunferencia (1) tiene centro O_1 (0;0) y radio $r_1 = 2$, y la circunferencia (2) tiene centro O (0;4) y radio $r = 2\sqrt{5}$ u.

Como en este caso los centros tienen igual abscisa, la distancia entre ellos está determinada por el valor de las ordenadas, de donde $d(O;O)$.

Además, $r + r_1 = 2\sqrt{5} + 2 \approx 6,47$u, y como $4 < 6,47$ se puede concluir que las circunferencias son secantes.

Para determinar los puntos de intersección por esta vía, es necesario que resolvamos el sistema de ecuaciones que ya fue resuelto en la segunda vía.

b) $(x-1)^2+(y-3)^2=1 \quad (1)$

$(x-1)^2+y^2=4 \quad (2)$

– Primera vía: algebraica

Al considerar las características de las ecuaciones, se puede optar por la vía de resolver el sistema de dos ecuaciones cuadráticas.

Multiplicando por (-1) ambos miembros de la ecuación (2), y aplicando el método aditivo o de reducción, se obtiene:

$(y-3)^2-y^2=-3$, desarrollando el binomio al cuadrado.

$y^2-6y+9-y^2=-3$, reduciendo términos semejantes.

$-6y=-12$

$y=2$

Sustituyendo y en (2) y resolviendo la ecuación resultante,

$(x-1)^2+4=4$

$(x-1)^2=0$, de donde $x=1$.

Las circunferencias tienen un punto de intersección en (1;2); luego, son tangentes.

– Segunda vía: analítica

Comparando en las ecuaciones, se identifica que $r_1=1$ y $r=2$ luego, $r_1+r=3$.

Además, O_1 (1;3) y O (1;0), cuyas abscisas son iguales, por lo que resulta $d(O;O)=3$.

Como la distancia entre los centros es igual a la suma de las longitudes de los radios, entonces las circunferencias son tangentes exteriores.

En este caso, la vía gráfica utilizando el asistente GeoGebra, como se muestra en la figura 5.16, permite comprobar los resultados obtenidos por otras vías. ◆

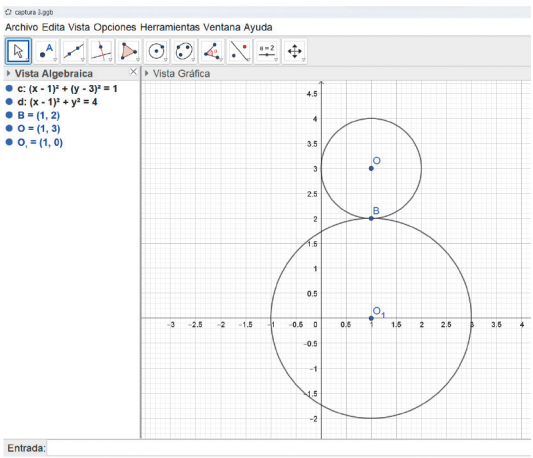


Fig. 5.16

Reflexiona

Socializa con tus compañeros tus criterios acerca de las siguientes interrogantes: En la ecuación de la circunferencia, ¿cuáles son las condiciones de los coeficientes y los signos de los términos al cuadrado? ¿Cómo determina la existencia de términos de primer grado en la posición del centro respecto a los ejes coordenados?

Escribe el plan de solución que seguirías para determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos de coordenadas: $A\ (-3;1)$, $B\ (1;5)$ y $C\ (2;5)$. Utiliza el GeoGebra para encontrar circunferencias y rectas que tengan diferentes relaciones de posición con la circunferencia encontrada.

Ejercicios del epígrafe 5.1

1. Escribe la ecuación de la circunferencia que tiene centro en O y radio r. Represéntalas gráficamente en el sistema de coordenadas cartesiano utilizando el GeoGebra.

a) $O(2;4),\ r=2$ b) $O(5;-2),\ r=7$ c) $O(0;0),\ r=\sqrt{3}$

d) $O(0;5),\ r=3\sqrt{2}$ e) $O\left(\frac{1}{3};2\right),\ r=\frac{\sqrt{31}}{3}$ f) $O(3,2;0),\ r=37,21$

2. Escribe la ecuación de las circunferencias representadas en la figura 5.17.

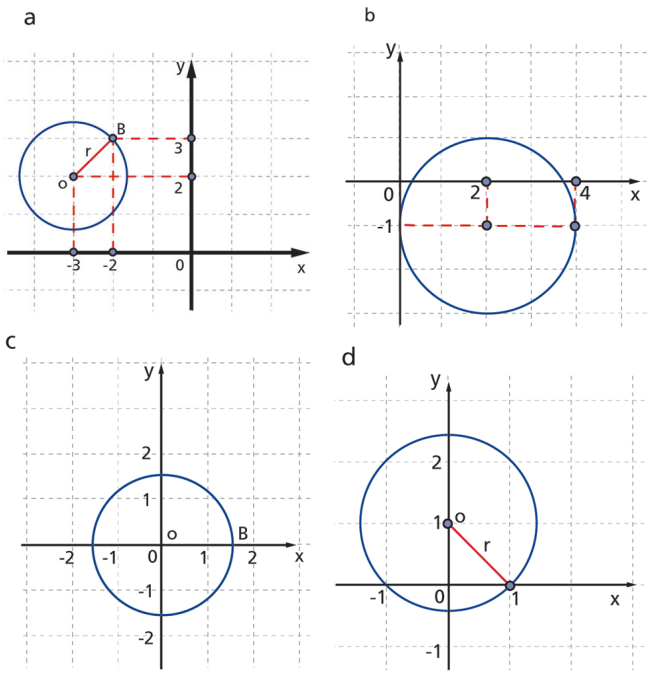


Fig. 5.17

3. Determina las coordenadas del centro y la longitud del radio de la circunferencia dada por la ecuación:

a) $x^2+y^2=49$
b) $(x-3)^2+(y+3)^2=20$
c) $x^2+(y-5)^2=36$
d) $x^2+y^2+4x-2y-20=0$
e) $x^2+y^2+6x-9=0$
f) $x^2+y^2+9x-2y=0$
g) $x^2+y^2-8y-9=0$
h) $2x^2+2y^2+8x-6y-10=0$

4. Sea $\overline{AB}$ el diámetro de una circunferencia, halla su ecuación conocidas las coordenadas de A y B en los casos siguientes:

a) A (2;3) , B (- 4;5)
b) A (4;3) , B (-3;-1)
c) A ($\frac{5}{2}$; 2) , B (- $\frac{1}{2}$; 3)
d) A ($\frac{3}{4};\frac{1}{2}$) , B (0;- $\frac{1}{2}$)
e) A (10,4; 3,6), B (14,1; 20,4)
f) A ($\sqrt{2}$; 3) , B (3; $\sqrt{3}$)

5. Escribe la ecuación de la circunferencia con centro en el punto O(-1;-1) y que es tangente a la recta:

a) $x = y + 1$
b) $4x + 3y - 5 = 0$
c) $x - 2y - 2 = 0$
d) $2x - y - 7 = 0$

6. Halla los puntos de intersección de las circunferencias.

a) $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 + 6y = 9$
b) $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 14 = 0$, $x^2 + y^2 + 2y - 8 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 28 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$, $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 13 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 18x - 20y + 12 = 0$, $x^2 + y^2 + 16x + 14y - 56 = 0$
f) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$, $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 33 = 0$

7. Determina la ecuación de la recta que contiene al diámetro de la circunferencia

$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$, y es perpendicular a la recta de ecuación $5x + y - 13 = 0$.

8. Utiliza el GeoGebra para representar en el sistema de coordenadas cartesiano y determinar la ecuación de circunferencias que pasan por los puntos A (–3;3) y B (1;4) y cumplen en cada caso las siguientes condiciones:

a) la abscisa de su centro es 2.
b) su centro se encuentra en el eje de las x.
c) su centro se encuentra en la recta de ecuación $2x - y + 1 = 0$.
d) formula un problema que cumpla las condiciones del inciso anterior.

9. Determina para qué valores de la pendiente k las siguientes rectas dadas por las ecuaciones son secantes, tangentes o exteriores a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0$.

a) $y = kx$ b) $y = kx - 8$

10. Encuentra la ecuación de la circunferencia que cumple simultáneamente las siguientes condiciones:

– es concéntrica a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0$.

– es tangente a la recta $3x - 4y + 7 = 0$.

10.1 Representa en GeoGebra en un sistema de coordenadas cartesianas la relación entre la circunferencia y la recta encontrada.

11. Determina cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. De considerar alguna falsa, fundamenta tu respuesta.

a) La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del diámetro.

b) La ecuación de la circunferencia con centro O (–3;4) y $r = \sqrt{5}$ es $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 5$.

c) El diámetro de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 3$ es 6,0u.

d) El centro de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 18 = 0$ es O (3,–2).

e) La longitud del radio de una circunferencia tangente a la recta de ecuación $y = -x$ es $2\sqrt{2}$u.

f) La recta de ecuación $x - y + 2 = 0$ interseca en un punto a la circunferencia de ecuación $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 16$.

12. Formula un problema que se modele mediante la ecuación de una circunferencia, en la que sea necesario determinar el perímetro.

Conéctate

Accede al sitio www.cubaeduca.cu, y en la sección curricular busca en undécimo grado Matemática, la lección: Circunferencia como lugar geométrico. Ecuaciones de la circunferencia.

Resuelve los ejercicios propuestos y autovalora tus aprendizajes en este epígrafe.

5.2 Elipse

La interesante leyenda llamada El Secreto del Salón Ovalado[1] *cuenta cómo en el siglo XVIII un Ministro pudo pasar un mensaje importante al Rey*

[1] http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/old/06juegomat/cuentosccuentas/salonovalado0003.htm

pese a haber numerosos espías en un salón, de forma ovalada. El Rey se colocó en cierto lugar y el Ministro a 20 m frente a él (figura 5.18). De esta manera, el Ministro pasó el mensaje, que solo escuchó el Rey.

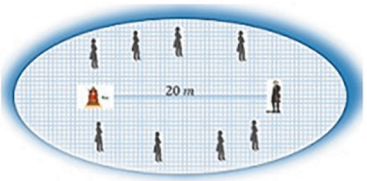


Fig. 5.18

¿Por qué el Ministro utilizó esta estrategia?
¿Por qué el resto de las personas no escuchó el mensaje?
■ *¿Cuál es el secreto del salón ovalado?*

El estudio de la elipse también resulta de gran interés por su amplia presencia en la vida cotidiana y en la diversidad de aplicaciones que tienen sus propiedades en las ciencias.

De la historia

Johannes Kepler (1571-1630) (figura 5.19), astrónomo y matemático alemán que estudió, con profundidad, los datos recogidos de sus antecesores y de sus propias teorías sobre el movimiento de los planetas hasta descubrir que:



Fig. 5.19

a) las órbitas planetarias son elípticas, con el Sol en uno de sus focos,
b) los planetas, en su recorrido por la elipse, barren áreas iguales en tiempos iguales,
c) el cuadrado del periodo orbital de un planeta es directamente proporcional al cubo del semieje mayor de su órbita.

Estas leyes se estudian hoy en las universidades como la partida de nacimiento de la moderna astronomía.

¿Cuál es la definición geométrica de la elipse?
¿Cómo intervienen sus elementos en sus ecuaciones?
¿Qué propiedades la distinguen y qué utilidad tienen en la modelación y explicación de situaciones y fenómenos de la realidad?

Definición 5.2

La elipse es el lugar geométrico de los puntos de un plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos del mismo plano, llamados focos, es una constante mayor que la distancia entre los focos.

Elementos de la elipse

La definición de la elipse facilita su modelación geométrica. La distancia entre los focos F_1 y F_2 de una elipse (figura 5.20) es la *distancia focal* y se denota $2c$; por tanto, la *semidistancia focal* es c.

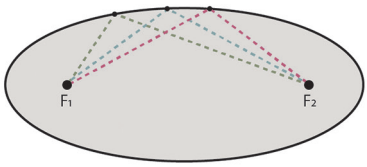


Fig. 5.20

Además de los focos, la elipse posee otros elementos.

Eje principal. La recta que contiene a los focos e interseca a la elipse en dos puntos A_1 y A_2 (figura 5.21), llamados *vértices principales*, determina el segmento $\overline{A_1A_2}$, que es el *eje mayor* de la elipse, cuya longitud se denota por $2a$, por lo que a representa la longitud del *semieje mayor*. La recta A_1A_2 es un eje de simetría de la elipse.

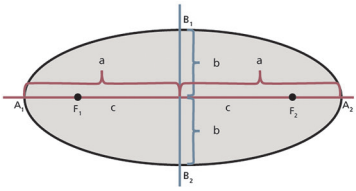
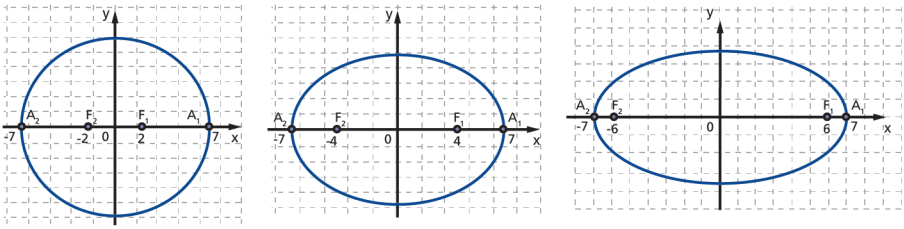


Fig. 5.21

Eje no principal. Es la mediatriz del eje mayor que interseca a la elipse en dos puntos B_1 y B_2 (figura 5.22), llamados *vértices no principales*; la recta B_1B_2 es otro eje de simetría de la elipse. La longitud del segmento $\overline{B_1B_2}$ se denota $2b$, donde b es la longitud del *semieje menor*; luego, la recta B_1B_2 es otro eje de simetría de la elipse.



$e=\frac{2}{7}\approx 0{,}29$ $e=\frac{4}{7}\approx 0{,}37$ $e=\frac{6}{7}\approx 0{,}86$

Fig. 5.22

Lado recto. Segmento perpendicular al eje mayor que contiene a uno de los focos y se denota por $L=\dfrac{2b^2}{a}$.

Centro. De lo anterior es fácil concluir que la elipse tiene dos ejes de simetría que son perpendiculares; de aquí se deduce que el punto de intersección de ambos ejes es el *centro* de la elipse. Al igual que la circunferencia, es una curva con centro.

Excentricidad numérica. Es la relación que existe entre su semidistancia focal, denominada c, y su semieje mayor, identificado como a, es decir, $e = \frac{c}{a}$; de ahí se deduce que $0 < e < 1$.

La excentricidad indica la forma de la elipse (figura 5.22).

Reflexiona

¿Qué figura obtienes si $a = c$?

¿Sabías que...?

La atracción gravitacional hace que los planetas se muevan en órbitas elípticas con el Sol en uno de sus focos. En general, las elipses que describen tienen excentricidad muy pequeña, casi son circulares, sin embargo, se destaca el planeta Mercurio, el más cercano al Sol por tener orbita visiblemente elíptica.

Planetas	Excentricidad
Mercurio	0,206
Venus	0,007
Tierra	0,017
Marte	0,093
Júpiter	0,048
Saturno	0,056
Urano	0,046
Neptuno	0,010

Conéctate

Accede al sitio www.cubaeduca.cu, y en la sección curricular busca en undécimo grado Matemática, la lección: La elipse como lugar geométrico.

Interactúa con los recursos y realiza las actividades propuestas.

Resuelve los ejercicios sobre la elipse como lugar geométrico y autovalora la comprensión que has logrado sobre el tema.

Ecuación de la elipse

Ecuación canónica de la elipse

De la definición resulta fácil comprobar que la constante mencionada es la longitud del eje mayor, $2a = |\overline{A_1A_2}|$ (figura 5.23), es decir, que todo punto P de la elipse satisface:

$$|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2a$$

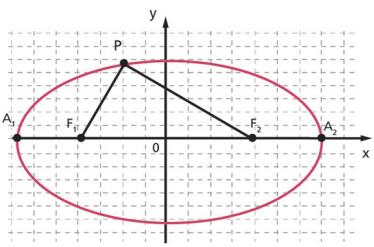


Fig. 5.23

Las longitudes *a, b* y *c* están relacionadas entre sí por:

$a^2 = b^2 + c^2$ (1)

Se puede comprobar considerando B_1 como el punto de la elipse (figura 5.24), que:

$\left|\overline{B_1F_1}\right| + \left|\overline{B_2F_2}\right| = 2a$

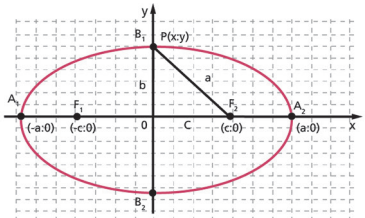


Fig. 5.24

Pero $\left|\overline{B_1F_1}\right| = \left|\overline{B_2F_2}\right|$, donde B_1B_2 es mediatriz de $\overline{F_1F_2}$, y como el triángulo B_1OF_1 es rectángulo en *O*, resulta (1).

Teorema 5.2

La elipse de centro en el origen de coordenadas y semiejes *a* y *b*, con eje mayor en el eje de las *x* tiene por ecuación: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Ejemplo 5.9

Uno de los vértices principales de una elipse es A_2 (10;0) y las coordenadas de los focos son (6;0) y (–6;0) respectivamente (figura 5.25). Escribir la ecuación de la elipse.

Resolución:

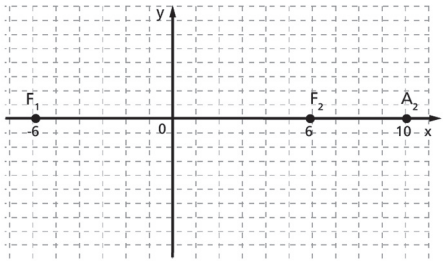


Fig. 5.25

Modelar la situación según los datos para arribar a las conclusiones siguientes:

- El centro de la elipse es (0;0)
- El eje mayor se encuentra en el eje de las abscisas.
- Longitud del semieje $a = 10$
- La semidistancia focal $c = 6$
- Es necesario buscar el valor de *b* para escribir la ecuación

Si $a = 10$ y $c = 6$

$a^2 = b^2 + c^2$ Aplicar la relación pitagórica

$b^2 = a^2 - c^2$ Despejar

$b^2 = (10)^2 - (6)^2$ Sustituir los valores de *a* y *b*

$b^2 = 100 - 36$

$b^2 = 64$ Calcular

$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ Escribir la ecuación de la elipse ◆

Ejemplo 5.10

La ecuación de una elipse es $25x^2 + 9y^2 = 125$.

a) Escribir la ecuación reducida de la elipse.

b) Determinar las coordenadas: del centro, los focos y los vértices principales y no principales.

c) Esbozar la elipse en el sistema de coordenadas (figura 5.26).

Resolución:

a) $25x^2 + 9y^2 = 125$ — Observar que la ecuación debe tener la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ o $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

$25x^2 + 9y^2 = 125$ — Dividir toda la ecuación por 125, para igualarla a 1

$25x^2 + 9y^2 = 125 / :125$

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ — El semieje mayor se encuentra en el eje de las ordenadas

b) Centro: (0;0)

Focos — Para escribir las coordenadas de los focos se necesita conocer el valor de *c*.

Si $a^2 = 25$ y $b^2 = 9$

Como $a^2 = b^2 + c^2$ — Despejar *c*

$c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 25 - 9$

$c^2 = 16$

$c = 4$ — La semidistancia focal

Coordenadas de los focos

$F_1(0;4)$ y $F_2(0;-4)$

Vértices principales

$A_1(0;5)$ y $A_2(0;-5)$

Vértices no principales

$B_1(3;0)$ y $B_2(-3;0)$ — en el eje de las abscisas

c)

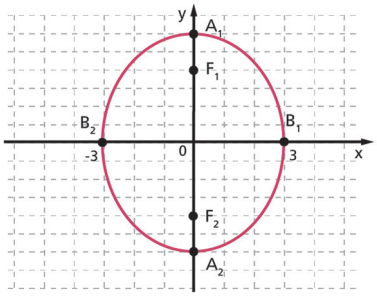


Fig. 5.26 ◆

Ejemplo 5.11

En la figura 5.27 se ha representado una elipse con centro en el origen.

a) Escribir las coordenadas de los vértices principales y no principales.

b) Escribir la ecuación canónica de la elipse.

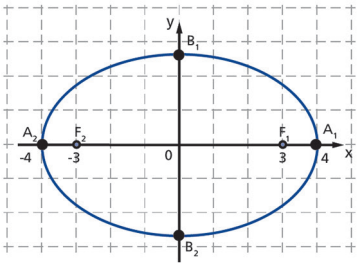


Fig. 5.27

Resolución:

a) $A_1(4;0)$ y $A_2(-4;0)$ — Vértices principales

$a^2 = b^2 + c^2$ — Relación pitagórica

$a = 4$ y $c = 3$ — Según la gráfica se obtienen los valores de a y c

$b^2 = a^2 - c^2$ — Despejar b

$b^2 = (4)^2 - (3)^2 = 7$

$B_1\left(0;\sqrt{7}\right)$ y $B_2\left(0;-\sqrt{7}\right)$ — Vértices no principales

b) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{7} = 1$ ◆ — Tomar los valores obtenidos de a y b

Las características y definición de la elipse permiten que esta pueda ser trazada sobre un plano de forma manual (figura 5.28). Basta fijar dos alfileres, o estacas si se trata de un jardín, y con una cuerda o hilo inextensible, con una longitud mayor que la distancia entre los focos y anudados a los extremos de los alfileres,

a b

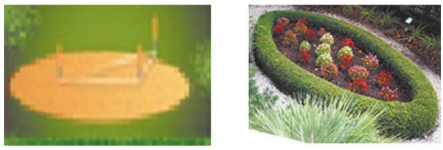


Fig. 5.28

o estacas, se estira el hilo o cordel con el lápiz, o una tercera estaca, que al moverlo se obtiene la elipse.

Aplica tus conocimientos

¿Para qué valores de n la recta $y = -x + n$ corta a la elipse de ecuación $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$?

¿Sabías que...?

La elipse posee propiedades óptico-acústicas. Si desde uno de sus focos se emite una onda electromagnética o sonora y se refleja en su interior, su reflexión se concentra en el otro foco, propiedad que se emplea modernamente en las bóvedas elípticas de algunos recintos famosos en la transmisión de sonidos y en medicina, en un equipo llamado litotriptor (figura 5.29), para desintegrar cálculos renales por medio de ondas de choque introacústicas. Esta propiedad también se utiliza en el deporte para el acondicionamiento físico o cardíaco.

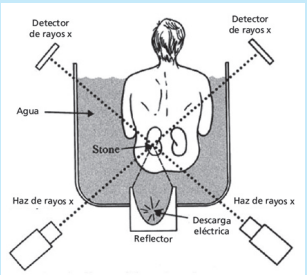


Fig. 5.29

Ecuación de la elipse desplazada con ejes paralelos a los ejes de coordenadas

Al igual que la circunferencia estudiada como lugar geométrico, no siempre el centro de una elipse se encuentra en el origen de coordenadas (figura 5.30).

Luego, la ecuación que identifica a la curva tiene la siguiente forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

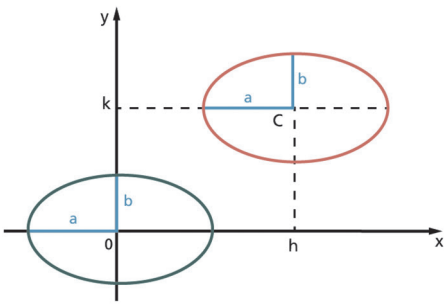


Fig. 5.30 Gráfica de la elipse con centro en un punto cualquiera del plano

Cuando su eje principal sea paralelo al eje de las abscisas, su centro será $O\,(h;k)$. Ahora bien, si su eje principal es paralelo al eje de las ordenadas (figura 5.31), el centro se denota de igual modo y la forma de la ecuación es:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

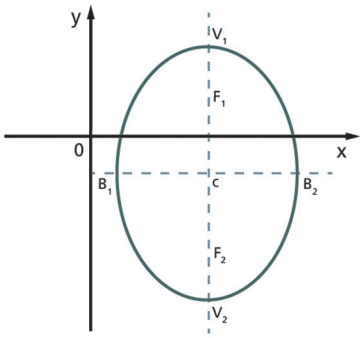


Fig. 5.31

Ejemplo 5.12

Hallar la ecuación de una elipse de centro *O* (–1;–1), si uno de los vértices se encuentra en el punto de coordenadas (5;–1), la excentricidad numérica es $\frac{2}{3}$ y el semieje *a* mide 6u (figura 5.32).

Resolución:

Modelar la situación planteada con los datos que aporta el ejercicio.

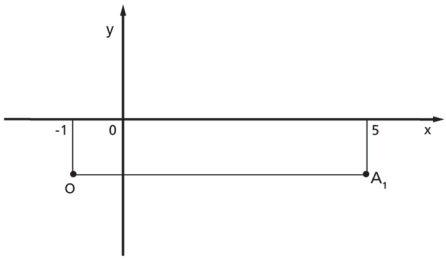


Fig. 5.32

¿Qué elementos se conocen?: *O* (–1;–1); $a = 6$ y $e = \frac{2}{3}$

¿Qué elemento falta para escribir la ecuación?: *b*

Escribir la relación de la excentricidad: $e = \frac{c}{a}$

Despejar *c*: $\frac{2}{3} = \frac{c}{6}$

Hallar el valor de *c*: $c = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4$

Escribir la relación pitagórica, para hallar *b*: $a^2 = b^2 + c^2$

Despejar b^2

Sustituir: $b^2 = (6)^2 - (4)^2$

$b^2 = 36 - 16$

Calcular: $b^2 = 20$

Escribir la ecuación: $\frac{(x+1)^2}{36} + \frac{(y+1)^2}{20} = 1$

Ejemplo 5.13

Determinar el centro, los semiejes, los focos, la excentricidad y la longitud del lado recto de una elipse de ecuación:

$4x^2+9y^2-8x-18y-23=0$

Resolución:

$4x^2+9y^2-8x-18y-23=0$

$(4x^2-8x)+(9y^2-18y)=23$ Agrupar términos semejantes

$4(x^2-2x)+9(y^2-2y)=23$ Extraer factor común

$4(x^2-2x+1)+9(y^2-2y+1)=23+4+9$ Realizar el completamiento cuadrático, para obtener el trinomio cuadrado perfecto

$4(x-1)^2+9(y-1)^2=36$ Factorizar el trinomio y reducir términos semejantes en el miembro derecho

$4(x-1)^2+9(y-1)^2=36 \div 36$ Dividir la ecuación por el término independiente, para obtener la ecuación reducida

$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$ Ecuación reducida

Como $a=3$ y $b=2$ Extraer la raíz de los denominadores, para conocer el valor de los semiejes

$a^2=b^2+c^2$ Plantear la relación pitagórica

$c^2=a^2-b^2$ Hallar c

$c^2=(3)^2-(2)^2$

$c^2=9-4$

$c^2=5$

$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ Establecer la relación de la excentricidad

$O(1;1), a=3; b=2; F(\pm\sqrt{5};1);\ e=\frac{\sqrt{5}}{3}$ y $L=\frac{2b^2}{a}$; $L=\frac{2(2^2)}{3}=\frac{8}{3}\approx 2,7u$ ◆

Aplica tus conocimientos

La Tierra describe una trayectoria elíptica alrededor del Sol, siendo este uno de sus focos. Sabiendo que el semieje mayor de la elipse mide $1{,}485 \cdot 10^8$ km y que la excentricidad es aproximadamente $\frac{1}{62}$, halla las distancias máxima y mínima de la Tierra al Sol.

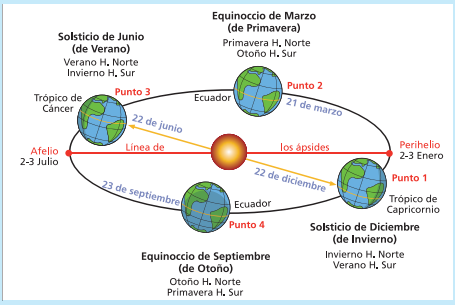


Fig. 5.33 Foto de la Revista Energía y tú

Intersección de una elipse con una recta o entre una elipse y otra curva

Como en la circunferencia, también la elipse puede tener puntos de intersección con rectas y curvas.

En particular es conocido que la elipse tiene un **círculo auxiliar**, es el que tiene un radio igual a la mitad de la longitud del eje menor y el mismo centro que la elipse (figura 5.34). Es por lo tanto el círculo más grande que se puede ajustar dentro de una elipse.

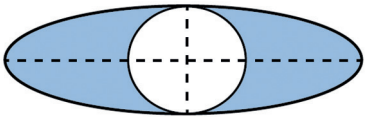


Fig. 5.34

¿Cómo determinar las coordenadas de sus puntos de intersección, conocidas las características de estas curvas de segundo grado?

En este subepígrafe estudiarás las condiciones necesarias y suficientes para determinar la intersección de la elipse con rectas o entre elipses y otras curvas, aplicando recursos algebraicos y gráficos ya conocidos.

Ejemplo 5.15

Hallar los puntos de intersección de la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, en los casos siguientes:

a) Con la recta de ecuación $3x - 5y + 15 = 0$

b) Con la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 16$

¡Atención!

Observa que, en cada caso, para determinar los puntos de intersección es conveniente formar y resolver el sistema de ecuaciones con cada una de las ecuaciones dadas.

Resolución:

a) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1 \quad (1) \\ 3x-5y=0 \quad (2) \end{cases}$

Despejando la variable y en (2) se tiene: $y=\dfrac{3}{5}x+3$ (3)

Sustituyendo (3) en (1) obtenemos:

$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{\left(\dfrac{3}{5}x+3\right)^2}{9}=1$ I multiplicando ambos miembros por el mcm = 225

$9x^2+25\left(\dfrac{3}{5}x+3\right)^2=225$, de donde se obtiene: $x^2+5x=0$

la cual tiene soluciones: $x_1 = 0$; $x_2 = -5$,

luego, sustituyendo en (3) se tiene que:

para $x_1 = 0$; $y_1 = 3$;

para $x_2 = -5$; $y_2 = 0$

Por lo que la recta interseca a la elipse en los puntos

P_1 (0;3) y P_2 (– 5;0)

(figura 5.35).

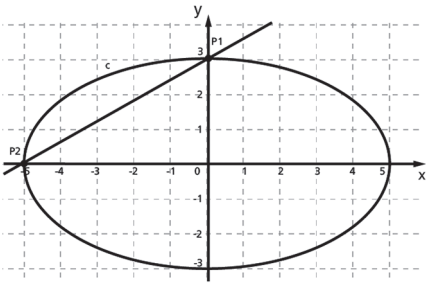


Fig. 5.35

b) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1 \qquad (1) \\ x^2+y^2=16 \qquad (2) \end{cases}$

Despejando x^2 en (2), sustituyendo en (1) y eliminando denominadores se obtiene la ecuación: $9(16 - y^2) + 25\ y^2 = 225$ que es equivalente a: $16y^2 = 81$,

cuyas soluciones son: $y_1=\dfrac{9}{4}$ y $y_2=-\dfrac{9}{4}$

luego sustituyendo esos valores en (2) se tiene que:

para $y_1=\dfrac{9}{4}$; $x_1 = \pm 3{,}31$

para $y_2=-\dfrac{9}{4}$; $x_2 = \pm 3{,}31$

Los puntos de intersección son:

$P_1(3{,}32;2{,}25)$

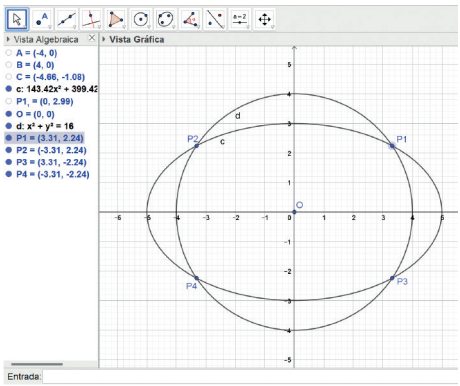


Fig. 5.36

$P_2(-3{,}31;2{,}25)$
$P_3(3{,}32;-2{,}25)$
$P_4(-53{,}31;-2{,}25)$

Al comprobar el resultado obtenido utilizando GeoGebra, se obtiene el gráfico de la figura 5.36. ◆

Conéctate

Accede al sitio www.cubaeduca.cu, y en la sección curricular busca en undécimo grado Matemática, la lección: La elipse como lugar geométrico. Ecuación ordinaria.
Elabora un resumen con tus criterios en relación con las preguntas de síntesis.

Reflexiona sobre lo aprendido

1. ¿Para qué valores de n la recta $y = -x + n$, corta a la elipse de ecuación $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$.
2. Encuentra los puntos de intersección de las elipses dadas por las ecuaciones
   $4x^2 + y^2 = 4$
   $4x^2 + 9y^2 = 36$
   2.1 Representa las elipses utilizando el GeoGebra.
3. Explica el procedimiento que utilizarías para determinar los puntos de intersección, entre una elipse y su círculo máximo. Plantea un ejemplo.

Ejercicios del epígrafe 5.2

1. La ecuación de una elipse es $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$. Determina:
   a) la longitud del eje mayor y el eje menor.
   b) las coordenadas de los vértices principales y no principales.
   c) las coordenadas de los focos.
   d) la excentricidad.

2. De una elipse se conoce su centro C (0;0); $a = 10$ y $b = 8$.
   Determina las coordenadas de los focos.

3. Halla la ecuación de la elipse con eje mayor paralelo al eje x, sabiendo que:

a) $a = 5$, $b = 2$ y $O(3;1)$

b) $2a = 10$, $2c = 8$ y $O(-1;0)$

c) $2b = 24$, $2c = 10$ y $O(0;0)$

d) $2c = 3$, $e = \frac{3}{5}$ y $O(-4;2)$

e) $2a = 20$, $e = \frac{3}{5}$ y $O(2;2)$

f) $e = \frac{1}{2}$, y $O(3;2)$

g) $c = \sqrt{3}$, $e = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ y $O(0;1)$

h) $2a = 10$, $c = 7$ y $O(3;-5)$

4. Halla la ecuación de la elipse con eje mayor paralelo al eje y, sabiendo que:

a) $a = 7$, $b = 2$ y $O(0;0)$

b) $2a = 10$, $2c = 8$ y $O(2;3)$

c) $2c = 12$, $e = \frac{12}{13}$ y $O(5;0)$

d) $2a = 18$, $e = \frac{1}{2}$ y $O(-6;-3)$

e) $2b = 16$, $e = \frac{3}{5}$ y $O(0;-4)$

f) $b = \sqrt{3}$, $e = \frac{2}{5}$ y $O(-1;2)$

g) $c = 1{,}5$, $e = \frac{3}{4}$ y $O(0;0)$

h) $a = 3$, $b = 2$, $c = 4$ y $O(-3;2)$

5. Escribe la ecuación de la elipse si se conoce:

a) $F(\pm 4;0)$; $V(5;0)$

b) $F(0;\pm 6)$; semieje menor es 8

c) $V(\pm 10;0)$; $LR = 5$

d) $9x^2 + 16y^2 = 576$

e) $F(\pm 3;0)$; $LR = 9$; $c = 3$

f) $F\left(0;\pm\frac{3}{2}\right); e = \frac{3}{4}$

g) $F_1(0;0); e = \frac{1}{2}$

h) $C(-1;-1); V(5;-1)$; $e = \frac{2}{3}$

i) que pasa por los puntos $P(1;-1)$ y $Q(0;-4)$ y tiene su centro en el origen de coordenadas.

6. Determina el centro, los semiejes, los vértices, los focos, la excentricidad numérica y la longitud del lado recto.

a) $x^2 + 4y^2 = 25$

b) $4x^2 + 9y^2 + 8x - 18y - 23 = 0$

c) $x^2 + 4y^2 + 4x - 36 = 0$

d) $10x^2 + 20y^2 + 60x - 20y - 105 = 0$

e) $3x^2 + y^2 + 2y - 11 = 0$

f) $18x^2 + 8y^2 + 72x + 16y - 64 = 0$

g) $x^2 + 4y^2 - 24y + 48 = 9$

h) $2x^2 + 3y^2 - 16x + 6y + 29 = 0$

i) $2x^2 - 4xy + 8y^2 + 7 = 0$

7. Determina las coordenadas de: los vértices, los focos, la excentricidad numérica y la longitud del lado recto de la elipse de ecuación $3x^2 + 6y^2 = 12$.

8. Representa en un sistema de coordenadas rectangulares las siguientes elipses dadas por sus ecuaciones.

a) $9x^2 + 16y^2 = 144$

b) $16x^2 + 9y^2 - 32x + 18y + 72 = 0$

c) $3x^2 + 4y^2 + 12x - 8y - 32 = 0$

d) $16x^2 + 4y^2 + 32x - 48 = 0$

9. Observa la representación gráfica de las elipses que se muestran en la figura 5.37 y escribe la ecuación de cada una:

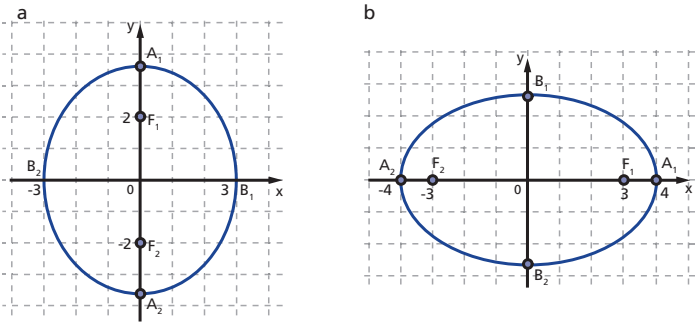


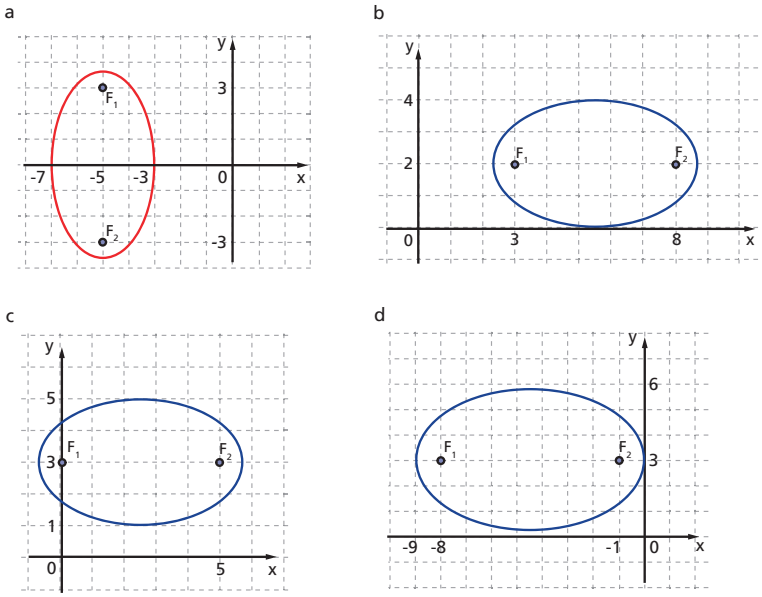
Fig. 5.37

10. Con los datos de las elipses que aparecen en la figura 5.38. Determina de cada una de estas:

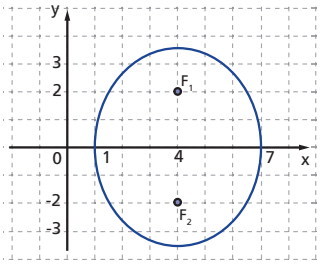
– La ecuación.

– La longitud del lado recto.

– La excentricidad.



e



f

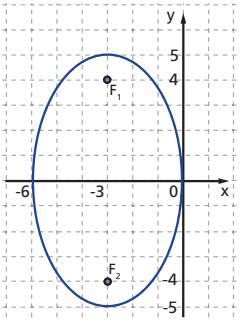


Fig. 5.38

11. Dada la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$. Determina los puntos de esta que cumplen que:

a) las abscisas son: –3; 1; 2.

b) las ordenadas son: 2; 1; –1.

12. Asiste al laboratorio de la escuela o al Joven Club de tu localidad y, haciendo uso de la herramienta informática GeoGebra, o de los teléfonos inteligentes, representa en el sistema de coordenadas rectangulares cartesianas las elipses cuyas ecuaciones son las siguientes:

a) $\frac{(x+1)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$ b) $9x^2+16y^2=144$

c) $16x^2+9y^2-32x-48=0$ d) $x^2+4y^2+10x-8y+7=0$

13. Determina si existen los puntos de intersección de la elipse y las rectas dadas por las ecuaciones siguientes:

a) $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1;\ y=x$

b) $\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1;\ 3x-4y=0$

c) $4(x-3)^2+9(y+2)^2=36\ ;\ 2x-3y-6=0$

d) $4x^2+16(y-3)^2=64\ ;\ y=-\frac{1}{2}x-1$

14. Encuentra si existen los puntos de intersección entre las elipses dadas por las ecuaciones siguientes:

a) $\begin{cases}100x^2+25y^2=100\\ x^2+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$ b) $\begin{cases}\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1\end{cases}$

14.1 Representa la intersección con el uso del GeoGebra en el sistema de coordenadas rectangulares cartesianas.

15. Determina cuáles de los puntos C_1 (–2;3), C_2 (2;–2), C_3 (2;–4), C_4 (–1;3), C_5 (–4;–3), C_6 (3;–1) están en la elipse de ecuación $8x^2 + 5y^2 = 77$.

16. Halla la ecuación de la circunferencia que tiene centro en el foco F_1 de la elipse de ecuación $9x^2 + 25y^2 - 100y - 125 = 0$ y de radio $r = \frac{c}{2}$.

17. Calcula el área del cuadrilátero que tiene dos vértices en los focos de la elipse de ecuación $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ y los otros dos coinciden con los extremos del eje menor.

18* Encuentra la ecuación y la excentricidad de una elipse sabiendo que uno de sus vértices es el punto (0;–7), que su centro está en el origen y que pasa por el punto $\left(\sqrt{5};\frac{14}{3}\right)$.

19. Un satélite artificial de la Tierra está a una distancia mínima de la superficie terrestre de $1{,}87 \cdot 10^9$ km y una máxima de $1{,}39 \cdot 10^9$ km. Si el radio de la Tierra es $6{,}29 \cdot 10^8$ km, ¿cuál es la excentricidad de la órbita?

20. Dada la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{169} + \frac{(y-2)^2}{144} = 1$. Completa en tu cuaderno de trabajo de manera que obtengas una proposición verdadera en cada inciso.

a) El eje principal es paralelo al eje
b) El centro de la elipse tiene coordenadas
c) El eje focal tiene una longitud igual a
d) La excentricidad numérica tiene un valor igual a
e) Uno de sus vértices principales tiene por coordenadas
f) Uno de los puntos de intersección de la recta de ecuación $x - y + 14 = 0$ con la elipse tiene coordenadas.

21. Formula un problema en el que tengas como datos las coordenadas de los focos de una elipse y su excentricidad.

Conéctate

Accede al sitio www.cubaeduca.cu, y en la sección curricular busca en undécimo grado Matemática, la lección: La elipse como lugar geométrico. Ecuación ordinaria. Accede a la sección Comprueba lo aprendido y autovalora tus aprendizajes en este epígrafe.

5.3 Hipérbola

Estudiar la hipérbola también resulta de gran interés por la amplia aplicación que tiene la propiedad que la distingue en las ciencias y en la vida cotidiana (figura 5.39).

Observa a tu alrededor, y notarás que la hipérbola aparece en la estructura de diversos objetos que utilizas o que son parte de tu entorno, como en las torres de refrigeración.



Fig. 5.39

¿Cuál es la definición geométrica de la hipérbola?
¿Qué propiedades la distingue y qué utilidad tienen en la modelación y explicación de situaciones y fenómenos de la realidad?
¿Cómo intervienen sus elementos en sus ecuaciones?

La hipérbola es una curva que tiene variadas aplicaciones en la vida cotidiana. Por ejemplo, en:

- el diseño de los puentes que se sostienen con cables.
- la trayectoria de algunos cometas que se acercan al Sol.
- el sistema de navegación de largo alcance (LORAN), en que se utiliza sus propiedades de reflexión.
- las señales de los sistemas de radio en los que se emplean funciones hiperbólicas, y se pueden identificar posiciones geográficas usando hipérbolas.
- el uso de telescopios o microscopios en los que colocas tu ojo en un punto focal bien determinado, que permite que la luz de los objetos invisibles se enfoque de forma que los puedas ver.

También, en los sistemas de satélites se utilizan mucho las hipérbolas y las funciones hiperbólicas; por ejemplo, para lanzar un satélite al espacio los astrónomos y demás científicos deben usar estas ecuaciones hiperbólicas, para predecir el camino del satélite para hacer ajustes de forma tal que el satélite vaya en la trayectoria correcta y llegue a su destino.

La hipérbola tiene asociada una importante función matemática que estudiaste anteriormente: la función de proporcionalidad inversa $y = \frac{1}{x}$, en esta, a medida que aumenta el valor de x disminuye el valor de y y viceversa, la relación se puede describir como una hipérbola equilátera.

Definición 5.3

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos de un plano tales que el módulo de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del mismo plano, llamados focos, es una constante menor que la distancia entre los focos.

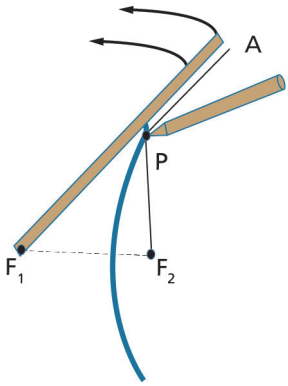


Fig. 5.40

La propiedad que la define como lugar geométrico, permite que al igual que otras cónicas, la hipérbola, también pueda ser trazada de forma manual. Basta fijar dos alfileres, en los puntos fijos F_1 y F_2, se coloca una barra o regla (figura 5.40), de manera que puede rotar en F_1 y una cuerda o hilo inextensible, con una longitud menor que la barra o regla se anuda al punto fijo F_2 y al punto A. Se estira la cuerda o hilo o cordel con el lápiz, contra la barra o regla cuando se rota en sentido contrario a las manecillas del reloj y al moverlo se obtiene una de las ramas de la hipérbola.

Reflexiona

¿Cómo se debe proceder, para obtener la otra rama de la hipérbola?

Elementos de la hipérbola

La figura 5.41 representa una hipérbola. F_1 y F_2 son los *focos*, la distancia entre ellos es la *distancia focal,* que se denota por $2c$, y c representa la semidistancia focal. La recta que contiene a los focos interseca a la curva en los puntos A_1 y A_2, que son los *vértices* de la hipérbola. Al segmento $\overline{A_1A_2}$ lo llamamos *eje principal,* su longitud se denota $2a$ y a representa la longitud del semieje principal.

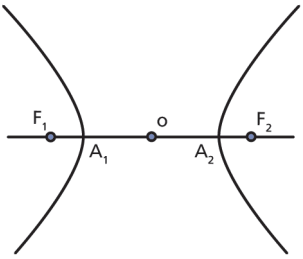


Fig. 5.41

Al igual que en la elipse, el cociente $e = \frac{c}{a}$ se llama *excentricidad numérica* de la hipérbola, y de la propia definición se tiene que $2c > 2a$; entonces, $c > a$ y, por tanto,

$$e = \frac{c}{a} > 1.$$

La mediatriz del segmento $\overline{A_1A_2}$ es eje de simetría de la hipérbola (figura 5.42), pero no lo corta, es el eje no principal. Por analogía con la elipse, determinamos los puntos B_1 y B_2 tales que: $\left|\overline{OB_1}\right| = \left|\overline{OB_2}\right| = \sqrt{c^2 - a^2}$ y a esta longitud la denotamos por b, y le llamamos

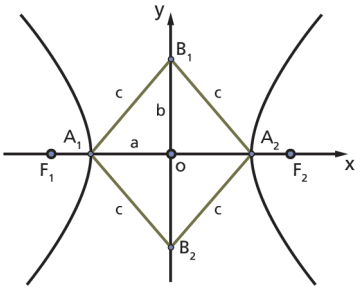


Fig. 5.42

longitud del semieje no principal. Y de manera análoga que en la elipse el lado recto $L = \frac{2b^2}{a}$.

En general, se cumple que: $b^2 = c^2 - a^2$

Ecuación de la hipérbola

Ecuación canónica de la hipérbola

En la figura 5.43, que se muestra a continuación, tenemos que $P(x;y)$ es un punto cualquiera de la hipérbola. Como el centro es el origen de coordenadas, los focos son F_1 $(-c;0)$ y F_2 $(c;0)$. De la definición de hipérbola tenemos:

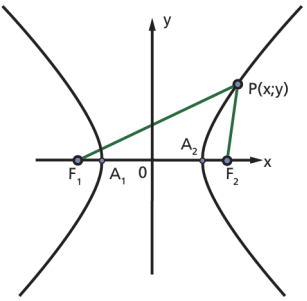


Fig. 5.43

$\left|\overline{PF_1}\right| - \left|\overline{PF_2}\right| = 2a$ (condición geométrica), de donde:

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = \left(\pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2xc + c^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2xc + c^2$$

$$4xc - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad \text{| divide por 4 |}$$

$$xc - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\left(xc - a^2\right)^2 = \left(\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2\left[(x-c)^2 + y^2\right]$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$\left(c^2 - a^2\right)x^2 - a^2y^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right)$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad \text{| dividir por } a^2b^2 \text{ |}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

La ecuación $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ es la ecuación de la hipérbola referida a su centro y ejes, y recibe el nombre de *ecuación canónica* de la hipérbola.

Teorema 5.3

La hipérbola de centro en el origen de coordenadas y semiejes *a* y *b* con eje principal en el eje *x,* tiene por ecuación: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

Investiga y aprende

La hipérbola tiene como propiedad que cuando un rayo de luz incide sobre un foco, este se proyecta en el otro foco. Esta propiedad de reflexión es utilizada en la construcción de telescopios; también se usó en sistemas de localización marítima.
Consulta otras fuentes de Información y encuentra ejemplos de aplicación de las propiedades de la elipse o situaciones de la vida real donde ocurran hipérbolas.

Conéctate

Accede al sitio www.cubaeduca.cu, y en la sección curricular busca en undécimo grado Matemática, la lección: La hipérbola como lugar geométrico.
Interactúa con los recursos y realiza las actividades propuestas.
Resuelve los ejercicios sobre la hipérbola como lugar geométrico y autovalora la comprensión que has logrado sobre el tema.

Ejemplo 5.14

Escribir la ecuación de la hipérbola que tiene centro en el origen de coordenadas, eje principal sobre el eje *x* y cumple que:

a) $a = 3$, $b = 2$

b) $2a = 6$ $c = 5$

Resolución:

a) Sustituyendo *a* y *b* en la ecuación canónica, se tiene:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$$

que es la ecuación de la hipérbola pedida.

b) Para escribir la ecuación de la hipérbola, se deben conocer *a* y *b*, luego, como conocemos *a* y *b*, tenemos:

$$b=\sqrt{c^2-a^2}$$

$$b^2=c^2-a^2$$

$b^2 = 5^2 - 3^2$

$b^2 = 25 - 9$

$b^2 = 16$

por lo que la ecuación pedida es:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Si la hipérbola tuviera su eje principal sobre el eje *y*, la ecuación quedaría:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Ecuación de la hipérbola desplazada con ejes paralelos a los ejes de coordenadas

Al igual que la elipse y la circunferencia, el centro de la hipérbola puede estar en cualquier punto $O\,(h;k)$, si sus ejes son paralelos a los ejes coordenados, entonces las ecuaciones (I) y (II) se expresan por:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \text{ (I)} \quad \text{y} \quad \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \text{ (II)}$$

respectivamente, las cuales se obtienen por traslación.

Observa que el cuadrado del eje principal de la hipérbola siempre se encuentra en el denominador de la variable precedida del signo positivo (es el único para el que se obtiene intersección), es decir, que el eje principal es paralelo al eje correspondiente a esa variable.

Ejemplo 5.15

Escribir la ecuación de la hipérbola que tiene centro *O* y cumple:

a) $O\,(3;-4)$, $a = 4$ y $b = 3$ b) $O\,(6;1)$, $2b = 10$ y $F_2\,(0;1)$

Resolución:

a) Como no se conoce la posición de los ejes, tendremos dos soluciones:

$$\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y+4)^2}{9} = 1 \quad \text{o} \quad \frac{(y+4)^2}{16} - \frac{(x-3)^2}{9} = 1$$

b) De acuerdo con la posición de *O* y F_2, se tiene que el eje principal de la hipérbola es paralelo al eje *x* (ambos puntos tienen la misma ordenada) y $c = 6$ (distancia entre *O* y F_2) (figura 5.44), por lo que debe determinarse el valor de *a*:

$c^2 = a^2 + b^2$



Fig. 5.44

$a^2 = c^2 - b^2$

$a^2 = 6^2 - 5^2$

$a^2 = 11$

Luego, la ecuación pedida es: $\frac{(x-6)^2}{11} - \frac{(y-1)^2}{25} = 1$ ◆

Como puedes apreciar, la hipérbola no es una curva cerrada y limitada como la elipse; para trazarla es necesario tener idea del transcurso de la curva a grandes distancias del centro (figura 5.45). Se puede comprobar que para valores muy grandes de $|x|$, la curva se aproxima a las rectas que contienen las diagonales del rectángulo de lados paralelos a los ejes coordenados, centro en el origen de coordenados, y longitud de los lados $2a$ y $2b$.

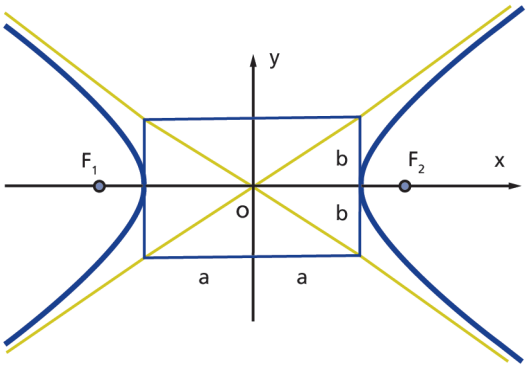


Fig. 5.45

Estas rectas tienen ecuaciones $y = \pm\frac{b}{a}x$ y se llaman *asíntotas* de la hipérbola. Si el eje principal es paralelo al eje *y,* las ecuaciones son de la forma $y = \pm\frac{a}{b}x$.

Ejemplo 5.16

Representar gráficamente en un sistema de coordenadas rectangulares las siguientes hipérbolas dadas por sus ecuaciones y escribir las ecuaciones de sus asíntotas.

a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ b) $\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{9} = 1$

Resolución:

a) Construir el rectángulo de lados $2a$ y $2b$. Como la variable x está precedida del signo positivo, el eje principal es paralelo al eje "x"; además, $a^2 = 16$ y $b^2 = 9$, por lo que se obtiene que $a = 4$ y $b = 3$, luego, a partir del centro de la hipérbola (0;0) (figura 5.46), situar 4 unidades a la izquierda y 4 a la derecha, obteniendo los vértices A_1 y A_2. A partir de estos, ubicar b unidades (3) hacia arriba y hacia abajo, obteniendo así el rectángulo deseado.

Trazar las asíntotas y obtener un gráfico aproximado a la curva pedida.

Para encontrar las ecuaciones de las asíntotas, se cuenta con $m = \pm\frac{3}{4}$ y como pasa por el punto O de coordenadas (0;0), las ecuaciones serían:

$y = \frac{3}{4}x$ y $y = -\frac{3}{4}x$.

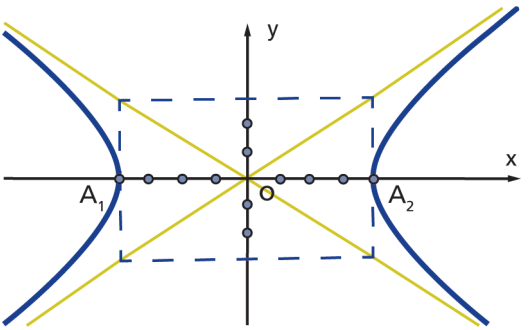


Fig. 5.46

b) $\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{9} = 1$. En este caso, el centro de la hipérbola es el punto O (0;0) y el eje principal es paralelo al eje x (variable positiva); luego, $a^2 = 4$ y $b^2 = 9$, por lo que $a = 2$ y $b = 3$.

Al construir el rectángulo correspondiente, se traza el eje principal, $2a$ paralelo al eje y y b, paralelo al eje x (figura 5.47), luego se trazan las asíntotas y a continuación la curva pedida.

Para hallar las ecuaciones de las asíntotas, se tiene que $m = \pm\frac{2}{3}$ y pasan por el punto (3;2), entonces:

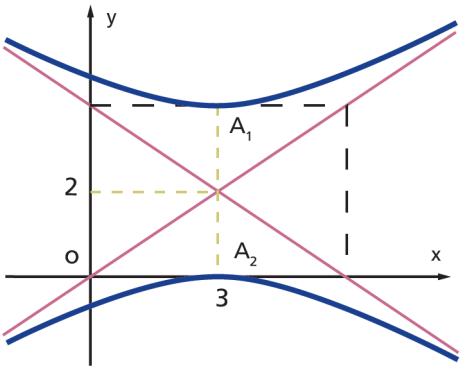


Fig. 5.47

$$\pm\frac{2}{3} = \frac{y-2}{x-3}$$

$$\pm 2x \mp 6 = 3y - 6$$

$$2x - 6 = 3y - 6 \qquad -2x + 6 = 3y - 6$$

$$2x - 3y = 0 \qquad 2x + 3y - 12 = 0 \quad \blacklozenge$$

En décimo grado estudiaste la función $y = \frac{k}{x}$ y le llamabas función de proporcionalidad inversa o hipérbola equilátera a su gráfica; quizás te sorprendas que ahora llamemos con ese nombre a una curva obtenida de otra forma.

Se puede demostrar (aunque aquí no lo haremos), que la gráfica de $y = \frac{k}{x}$ es en realidad una hipérbola; la diferencia entre las ecuaciones es que se utiliza un sistema de referencia diferente.

En efecto (figura 5.48), la gráfica de $y = \frac{k}{x}$ es una hipérbola, pero sus asíntotas son los ejes de coordenadas y, por tanto, perpendiculares.

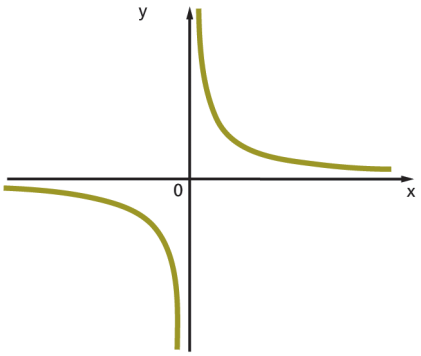


Fig. 5.48

Si observas la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (figura 5.49), puedes apreciar que es la misma anterior pero rotada: ahora las asíntotas son las bisectrices de los cuadrantes, que también son perpendiculares.

Las hipérbolas cuyas asíntotas son perpendiculares se llaman *equiláteras*, porque en este caso (como puedes comprobar en el ejemplo anterior) $a = b$.

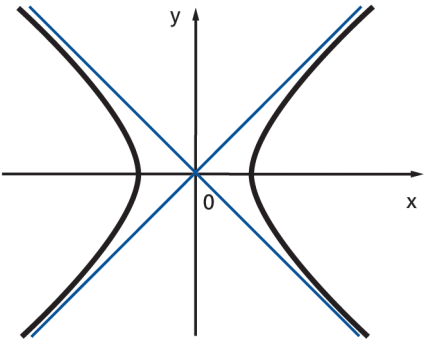


Fig. 5.49

Intersección de una hipérbola con una recta o entre la hipérbola con otra curva

Como en las otras curvas de segundo grado, también la hipérbola puede tener puntos de intersección con rectas y curvas.

Ejemplo 5.17

Encontrar si existen los puntos de intersección de la hipérbola de ecuación:

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, con las curvas:

a) $5x - 4y - 16 = 0$ b) $x^2 + y^2 = 1$

Resolución:

Al formar los sistemas con las ecuaciones de la hipérbola y de la curva para determinar los puntos de intersección, se obtiene:

a) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1 & (1) \\ 5x-4y-16=0 & (2) \end{cases}$

despejando en (2) la variable "y" se obtiene $y=\dfrac{5}{4}x-4(3)$ y sustituyendo la ecuación (3) en la ecuación (1), se tiene:

$$\frac{x^2}{16}-\frac{\left(\frac{5}{4}x-4\right)^2}{9}=1$$

$$9x^2-16\left(\frac{5}{4}x-4\right)^2=144$$

de donde se obtiene la ecuación: $(x-5)^2=0$ de solución $x = 5$ y sustituyendo $x = 5$ en (3), se consigue: $y=\dfrac{9}{4}$; por lo tanto, la recta interseca a la hipérbola en el punto $\left(5;\dfrac{9}{4}\right)$.

b) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1 & (1) \\ x^2+y^2=1 & (2) \end{cases}$

Al despejar una variable, en este caso la variable "x^2", se obtiene $x^2 = 1 - y^2$ (3) y sustituyendo la ecuación (3) en la ecuación (I), se tiene:

$$\frac{1-y^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

$9(1-y^2) - 16y^2 = 144$, de donde se obtiene la ecuación $25y^2 + 135 = 0$, cuyo discriminante $D = b^2 - 4ac = -13\,500 = -13\,500 < 0$, por lo que la hipérbola y la circunferencia no tienen puntos comunes. ◆

Conéctate

Accede al sitio www.cubaeduca.cu, y en la sección curricular busca en undécimo grado Matemática, la lección: La hipérbola como lugar geométrico. Ecuación ordinaria.
Elabora un resumen con tus criterios en relación a las preguntas de síntesis.

Reflexiona sobre lo aprendido

Demuestra que si $P(x_1; y_1)$ es un punto cualquiera que satisface la ecuación $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{5}=1$ entonces también satisface la condición geométrica

$\left|\left|\overline{PF_1}\right|-\left|PF_2\right|\right|=2a$ y por tanto está sobre la hipérbola.

Ejercicios del epígrafe 5.3

1. La ecuación de una hipérbola es $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. Determina:

a) la longitud del eje principal

b) las coordenadas de los vértices

c) las coordenadas de los focos

d) la distancia focal

e) la excentricidad numérica

f) longitud del lado recto

2. De una hipérbola se conoce su centro C (0;0); $a = 10$ y $b = 8$

Determina las coordenadas de sus focos.

3. Halla la ecuación de la hipérbola con eje principal paralelo al eje x conociendo que:

a) $a = 3$, $b = 2$ y O (1;3)

b) $2a = 6$, $2c = 10$ y O (–2;0)

c) $2b = 10$, $2c = 24$ y O (1;3)

d) $2c = 12$, $e=\frac{3}{2}$ y O (–1;–2)

e) $2a = 6$, $e=\frac{13}{12}$ y O (–5;3)

f) $2b = 8$, $e=\frac{5}{3}$ y O (0;–5)

g) $2b = 10$, $e=\frac{4}{3}$ y O (0;0)

h) $2a=\sqrt{5}$, $e=\frac{\sqrt{7}}{2}$ y O (–4;1)

4. Determina la ecuación de la hipérbola con eje principal paralelo al eje y sabiendo que:

a) $a = 9$, $b = 4$ y O (0;0)

b) $2a = 8$, $2c = 10$ y O (1;2)

c) $2c=12$, $e=\frac{6}{5}$ y $O(3;0)$

d) $2a=16$, $e=\frac{5}{3}$ y $O(-1;-3)$

e) $2b=20$, $c=10\sqrt{2}$ y $O(-4;8)$

f) $2b=24$, $e=\frac{5}{3}$ y $O(0;-7)$

g) $2b=12$, $2a=16$, $e=\frac{5}{3}$ y $O(-2;3)$

h) $2b=\sqrt{6}$, $e=2$ y $O(-5;1)$

5. Escribe la ecuación de la hipérbola conociendo que:

a) $O(0;0)$, $F_1(-5;0)$ y $a=2$

b) $O(0;0)$, $A_1(0;3)$ y $F_1(0;5)$

c) $F_1(4;-2)$, $F_2(4;-8)$ y $2a=4$

d) $A_1(-6;3)$, $A_2(1;3)$ y $F_1(-8;3)$

e) $A_1(1;-2)$, $F_2(9;-2)$ y $O(3;-2)$ f) $F_1(-3;0)$, $F_2(3;0)$ y $b=\sqrt{2}$

g) $F_1(2;0)$, $A_1(2;2)$ y $O(2;-1)$ h) $O(-2;1)$, $A_1(-5;1)$ y $2b=5$

6. Determina las coordenadas del centro, los vértices, los focos, la longitud del semieje, la excentricidad numérica y la longitud del lado recto de las hipérbolas siguientes, dadas por sus ecuaciones:

a) $x^2-9y^2=25$ b) $4y^2-9x^2=36$

c) $4x^2-9y^2+32x+36y-8=0$ d) $25x^2-4y^2+150x+325=0$

e) $4x^2-y^2+2y-2=0$ f) $x^2-y^2-x+4y=0$

g) $x^2-2y^2-xy+x-2y=0$ h) $16x^2-20y^2-20y-75=0$

i) $x^2-4y^2-2x+1=0$ j) $3x^2-y^2+30x+78=0$

7. Representa en un sistema de coordenadas las siguientes hipérbolas.

a) $x^2-y^2=16$ b) $4x^2-9y^2-24x-36y-36=0$

c) $x^2-4y^2+16y=0$ d) $4x^2-20y^2-8x-80y-79=0$

8. La ecuación $8x^2-9(y-1)^2-72=0$, representa una curva de segundo grado. Copia en tu cuaderno de trabajo el enunciado del ejercicio con la respuesta correcta en cada caso.

8.1 La curva es:

a) Circunferencia b) Elipse c) Hipérbola d) Otra

8.2 Las coordenadas de su centro son:

a) (0;–1) b) (0;1) c) (1;0) d) (–1;0

8.3 La distancia entre sus vértices es:

a) 6;0u b) 4;0u c) 5;0u d) 3;0u

8.4 Su excentricidad numérica es:

a) e= 0,75 b) 0,6 c) $e=1\frac{1}{3}$ d) e = 1,37

8.5 La longitud de cada lado recto es:

a) $16\frac{2}{3}$ u b) $5\frac{1}{3}$u c) 6,0u d) 12,5u

8.6 Un punto que pertenece a la curva es:

a) (0;1) b) (1;0) c) $\left(\sqrt{11};-\frac{1}{3}\right)$ d) (4,12;1)

9. Los gráficos de la figura 5.50 representan hipérbolas. Escribe la ecuación correspondiente en cada caso.

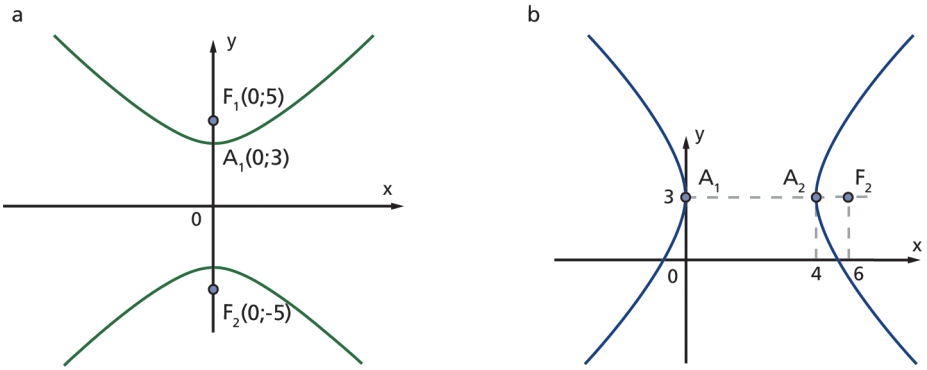


Fig. 5.50

10. En la hipérbola cuya ecuación es $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, halla las coordenadas de los puntos que cumplen que:

a) Su abscisa es: –5; 8;4

b) Su ordenada es: 3;–4;7

11. Determina cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la hipérbola cuya ecuación es $3x^2-y^2=12$:

a) P_1 (4;6) b) $P_2\left(-1;\sqrt{5}\right)$ c) $P_3\left(-3;\sqrt{6}\right)$ d) $P_4\left(\sqrt{5};\sqrt{3}\right)$

12.* Escribe la ecuación de una hipérbola de centro en el origen y focos sobre el eje *x* si sabe que pasa por el punto $N\left(-5;\frac{16}{3}\right)$ y su distancia focal es igual a 10 unidades.

13. Los focos de una hipérbola coincide con los focos de la elipse de ecuación $9x^2+25y^2-225=0$.

Halla la ecuación de la hipérbola si su excentricidad es igual a 2.

14.* Halla la ecuación de la hipérbola de centro en el origen, eje principal sobre el eje de las ordenadas y que pasa por los puntos (4;6) y (1;–3).

15. Los focos de una hipérbola son los puntos (4;–2) y (4;–8) y la longitud de su eje principal es 4. Halla la ecuación de la hipérbola, las ecuaciones de sus asíntotas y la excentricidad.

16. Demuestra que la distancia de un foco de la hipérbola $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ a una asíntota es igual a *b*.

17. El punto $P\left(10;-\sqrt{5}\right)$ pertenece a la hipérbola $x^2-4y^2=80$. Halla las ecuaciones de las rectas que pasan por *P* y los focos de la hipérbola.

18. Por el foco izquierdo de la hipérbola $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$ se ha trazado una perpendicular a la recta que contiene los vértices. Determina la distancia

de los focos a los puntos de intersección de esta perpendicular con la hipérbola.

19. Halla los puntos de intersección de la hipérbola y las curvas que se dan a continuación:

a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1;\ 4x - 3y - 16 = 0$

b) $4x^2 - 9y^2 = 36\ ;\ 2x - y + 1 = 0$

c) $x^2 - 4y^2 = 32\ ;\ 3x + 2y - 16 = 0$

d) $x^2 - 4y^2 - 6x - 24y - 47 = 0\ ;\ x - 3y - 12 = 0$

e) $2x^2 - 5y^2 = 52\ ;\ x^2 - 7y^2 = 80$

f) $4x^2 - 3y^2 = -12\ ;\ 5x^2 + 2y^2 = 77$

g) $2x^2 + y^2 = 33\ ;\ x^2 - y^2 = 15$

h) $x^2 - 4y^2 - 6x + 5 = 0\ ;\ x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$

20. Determina bajo qué condiciones las asíntotas de la hipérbola: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ son perpendiculares entre sí.

21.* Demuestra que el producto de las distancias de cualquier punto de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ a sus dos asíntotas es una cantidad constante e igual a: $\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$

22. Un punto se mueve en el plano de tal manera que su distancia a la recta $y + 4 = 0$ es $\frac{1}{2}$ de su distancia al punto (3;2). Halla la ecuación de su lugar geométrico.

23. La base de un triángulo es de longitud fija siendo sus extremos los puntos (3;0) y (–3;0). Halla la ecuación del lugar geométrico determinado por el vértice opuesto si el producto de las pendientes de los lados variables es siempre igual a 4.

24. Dos de los vértices de un triángulo son los puntos *A* (2;0) y *B* (6;0). Halla la ecuación del lugar geométrico determinado por el tercer vértice *C* si se mueve de tal manera que la diferencia entre las longitudes $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ es siempre igual a la mitad de la longitud del lado $\overline{AB}$.

25. Se han situado tres puntos de escucha, *A, B* y *C*, de modo que *A* está situado a 700 m al norte de *B*, y *C* a 1 500 m al este de *B*. El ruido de un cañonazo se escucha simultáneamente en *A* y *B* dos segundos después de oírse en *C*. Determina la posición del cañón asumiendo que la velocidad del sonido es de 340 m/s.

26. Dada la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{169}+\frac{(y-2)^2}{144}=1$. Completa en tu cuaderno de trabajo de manera que obtengas una proposición verdadera en cada inciso.

a) El eje principal es paralelo al eje.
b) El centro de la elipse tiene coordenadas.
c) El eje focal tiene una longitud.
d) La excentricidad numérica tiene un valor igual a.
e) Uno de sus vértices principales tiene por coordenadas.
f) Uno de los puntos de intersección de la recta de ecuación $x - y + 14 = 0$ con la elipse tiene coordenadas.

27. Formula un problema en el que tengas como datos las coordenadas de los focos de una hipérbola y su excentricidad.

28. Formula un problema en el que se conoce la longitud del lado recto de una hipérbola ($L = 4{,}5$), la longitud $b = 3{,}0$u y que su eje principal esté contenido en la recta de ecuación $y - 2 = 0$.

29. En la figura 5.51 se ha representado una curva de segundo grado. Formula un problema en el que se pregunte 5 de los elementos que la caracterizan.

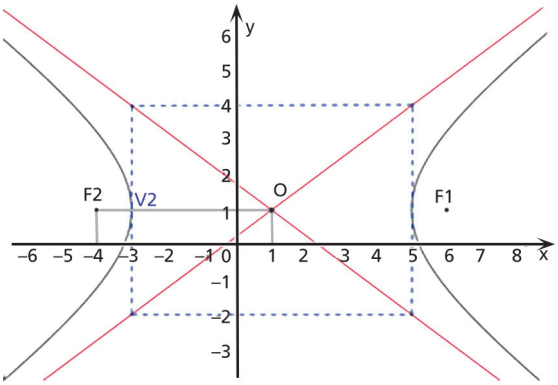


Fig. 5.51

5.4 Parábola

La parábola es una de las curvas de segundo grado. En estudio desde la antigüedad, ha permitido aplicar la propiedad que la caracteriza a la solución de diversos problemas matemáticos y situaciones de la vida cotidiana.

En la actualidad, arquitectos e ingenieros en diversas ramas de las ciencias consideran la propiedad de la parábola en óptica, en proyectos de

recuperación o construcción de puentes, en el diseño de faros para vehículos de transportación terrestre y marítima, en dispositivos para captar o emitir señales (figura 5.52), y en telecomunicaciones, entre otros.

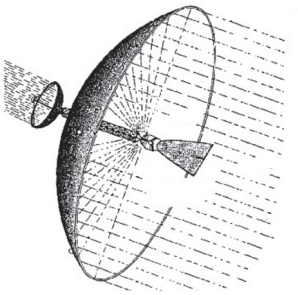


Fig. 5.52

■ *¿Qué elementos y propiedades de la parábola se aplican en la tecnología y en la solución a problemas de las ciencias?*

Al igual que las otras cónicas, la parábola puede ser trazada mediante un movimiento continuo, en este caso utilizando una regla, un cartabón y un hilo cuya longitud sea igual al cateto mayor del cartabón. Fijas un extremo del hilo en el extremo del cateto mayor que corresponde al ángulo agudo y el otro en un punto del plano. Deslizas el cartabón sobre la regla manteniendo tenso el hilo con un lápiz; al hacerlo, se describe una parábola (figura 5.53). Cualquiera de los puntos de la parábola obtenida por este método, está a la misma distancia, del extremo del hilo fijado en un punto del plano, que de la recta fija determinada por la regla.

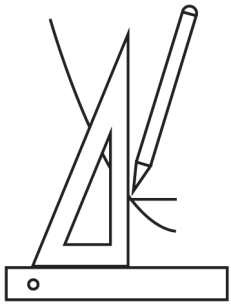


Fig. 5.53

El procedimiento descrito, revela la propiedad reflexiva que caracteriza a la parábola cómo un lugar geométrico.

Definición 5.4

La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano, que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta fija que no pasa por el punto, llamada directriz.

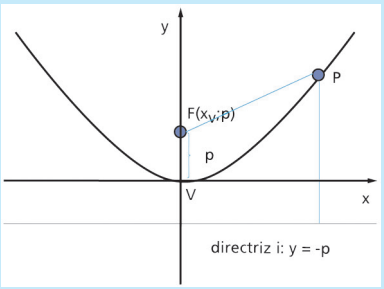


Fig. 5.54

Son elementos de la parábola además del vértice $V\ (x_y;y_V)$ y el eje de simetría o eje focal:

- el foco $F\ (x_V;p)$
- la ecuación de la recta directriz $l : y = -p$
- el parámetro $2p$ dado por la distancia del foco a la directriz (figura 5.55).

- el semiparámetro p es la distancia del vértice al foco, que es igual a la del vértice a la directriz $p = d\ (V;l)$.

La relación entre los puntos de la parábola, el foco y la directriz, determina la propiedad reflexiva, que explica por qué al proyectar luz desde una fuente lejana, el reflejo de los rayos que inciden paralelos al eje de un espejo parabólico, se concentra en el foco.

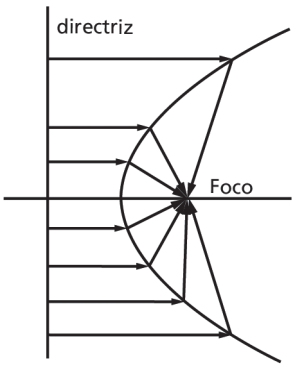


Fig. 5.55

De la historia

Se cuenta entre las leyendas de la antigüedad que el gran sabio Arquímedes (277-212 a.n.e.) defendió a su ciudad natal, Siracusa, de los romanos, utilizando espejos paraboloides (figura 5.56), en los cuales, al concentrar los rayos del Sol sobre el foco de los espejos, su proyección sobre las naves romanas provocaba el incendio como consecuencia de la propiedad reflexiva de la parábola.

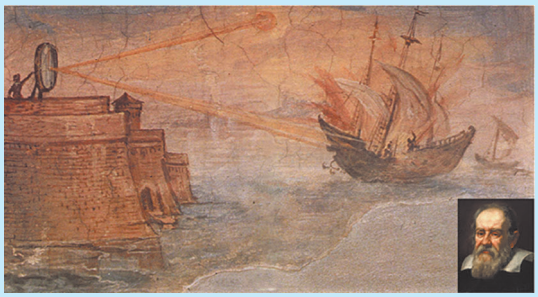


Fig. 5.56

Investiga y aprende

Sobre la utilidad de la propiedad reflexiva de la parábola, en las comunicaciones, la construcción, en óptica o en otras ciencias de tu interés. Elabora con tu equipo un trabajo con al menos dos ejemplos y socializa los resultados en tu grupo.

Reflexiona

¿Qué recursos utilizarías para determinar si un punto $P\ (x, y)$ cualquiera del plano, pertenece a una parábola? Explica tu razonamiento.

Ecuación de la parábola, referida a su foco y directriz

De grados anteriores conoces la parábola como la gráfica que describe una función real de ecuación $y = ax^2 + bx + c$. Sin embargo, en este subepígrafe estudiarás cómo se define su ecuación a partir de sus propiedades geométricas y algebraicas, sobre el plano coordenado.

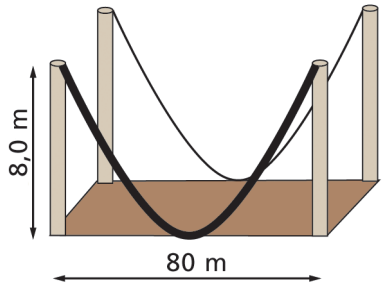


Fig. 5.57

Imagina que como arquitecto trabajas en el diseño de un puente colgante (figura 5.57), que tiene en cada extremo, dos torres a una distancia de 80 m una de la otra, y a 8,0 m de altura sobre la autopista; los cables sujetos en los extremos superiores de cada una de las torres, forman una parábola y tocan la carretera en el punto medio entre ambas torres.

¿Cómo encuentras la ecuación que modela la forma parabólica de los cables?

Ecuación canónica de la parábola

Para deducir la ecuación vamos a considerar una parábola con vértice V (0;0) (figura 5.58) donde según la propiedad reflexiva que la define como lugar geométrico se cumple que:

$d(P;F) = d(P;D)$

luego, se tienen que:

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+p)^2}$$

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

y se obtiene:

$x^2 = 4py$

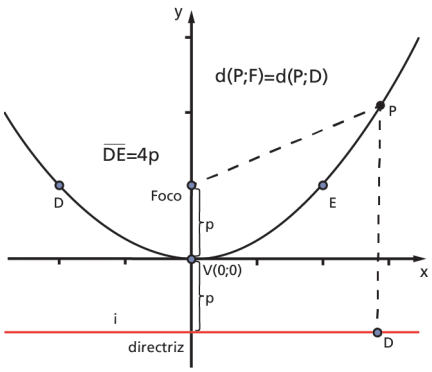


Fig. 5.58

Observa que como la recta $x = 0$ es el eje de simetría de la parábola, por la propiedad reflexiva, el segmento de la recta paralela a la directriz, $y = -p$, limitado por los puntos D y E de la parábola, y que contiene al foco F (0;p) tiene longitud $4p$.

La ecuación encontrada, permite resolver ejercicios y problemas matemáticos sencillos o situaciones en las cuales se conoce al menos dos

elementos de la parábola, a decir, el vértice, el foco, la directriz o dos puntos cualesquiera.

Teorema 5.4

La parábola con foco $F\,(0;p)$ y directriz $y = -p$, tiene por ecuación: $x^2 = 4py$

Ejemplo 5.18

Escribir la ecuación y representar en una pantalla de GeoGebra la parábola que cumple:

a) $V\,(0;0)$ y $F\,(0;2)$ b) F (0;1) y l: $y + 1 = 0$

Resolución:

a) Al conocer el vértice y el foco, podemos hallar el valor de p.

Como $p = d\,(V;F)$ luego, $p = 2$, al sustituirlo en $x^2 = 4py$, se obtiene $x^2 = 8y$, que es la ecuación pedida.

Para representar la parábola con el uso del GeoGebra, se requiere, situar el foco y la directriz que en este caso es la recta de ecuación $y = -2$. La gráfica obtenida se muestra en la figura 5.59.

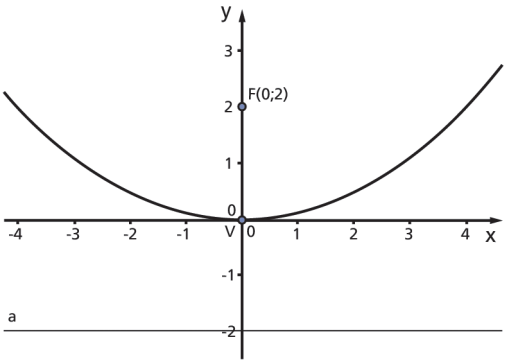


Fig. 5.59

b) En este caso al conocer el foco y la ecuación de la directriz, se determina p, a partir de que:

$2p = d\,(F;\ell) = |y + 1| = |1 + 1| = 2$

Luego, $p = 1$ y $x^2 = 4y$, es la ecuación pedida.

La gráfica de la parábola en Geogebra, con las condiciones dadas, se muestra en la figura 5.60. ◆

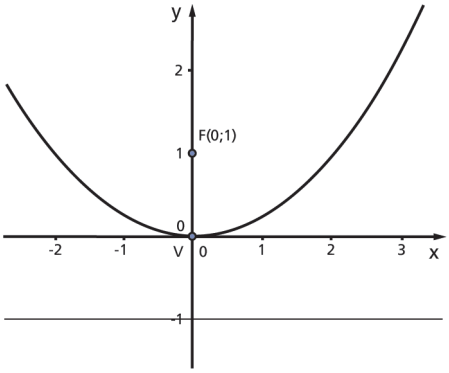


Fig. 5.60

Recuerda que...

Para representar la parábola de forma manual debemos conocer, al menos, tres puntos de ella, uno de los cuales debe ser siempre el vértice, y los otros dos se hallan evaluando la ecuación de la parábola; por comodidad, pueden ser dos puntos simétricos con respecto a su eje y uniéndolos con un trazo continuo se obtiene un gráfico aproximado de esta parábola.

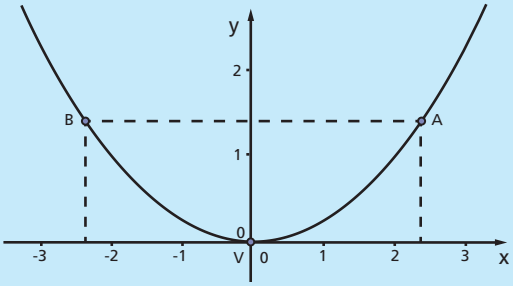


Fig. 5.61

En general, cuando el eje de simetría, o eje focal, de la parábola coincide con el eje *y* y la directriz se ubica por debajo del vértice, la parábola abre hacia arriba, por cuanto en la ecuación $4p > 0$.

Sin embargo, si la parábola tiene su eje focal paralelo al eje *y*, y se refleja en el eje *x*, su ecuación sería: $x^2 = -4py$ (figura 5.62 a).

En la vida cotidiana, se pueden apreciar diversidad de situaciones que representan parábolas que abren hacia abajo (figura 5.62 a y b).

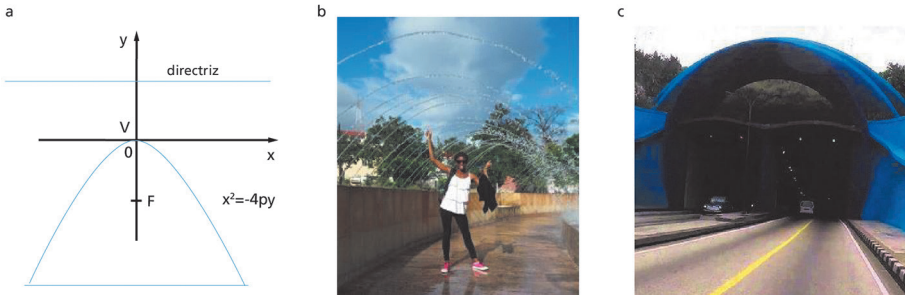


Fig. 5.62

Ejemplo 5.19

Escribe la ecuación y representa en una pantalla de GeoGebra la parábola que cumple: $V\,(0;0)$ y $F\,(0;-1)$

Resolución:

Al conocer las coordenadas del vértice y el foco, se puede determinar que: $p = d\,(V;F) = 1$. Como el foco está por debajo del vértice, en sentido negativo del eje y es decir, la parábola abre hacia abajo, luego al sustituirlo en $x^2 = -4py$, se obtiene $x^2 = -4y$ que es la ecuación pedida.

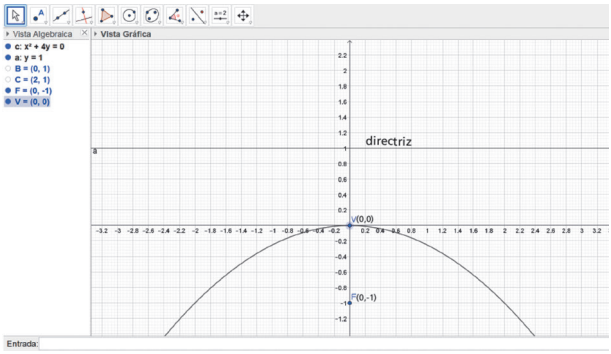


Fig. 5.63

La figura 5.63, muestra la parábola obtenida en una captura de pantalla de GeoGebra. ♦

¿Sabías que...?

Si a un tanque lleno de un líquido se le hacen orificios a distintas alturas del fondo, los chorros describen trayectorias parabólicas.
La ecuación de la parábola es:
$x^2 = -4(A-a)(y-a)$
Donde, A es la altura de la superficie del líquido y a es la altura de cualquier orificio, ambas respecto al fondo. Contrariamente a la intuición general, no tienen más alcance los que están más cerca del fondo, donde la presión hidrostática y la velocidad de salida son mayores, sino los que están en el mismo medio; además, los que equidistan de él, por arriba y por abajo, tienen igual alcance entre sí.

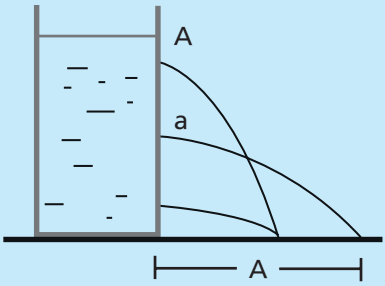


Fig. 5.64

También existen situaciones donde se pueden apreciar parábolas cuyo eje focal no es paralelo al eje y, es decir, abren hacia la derecha o hacia la izquierda.

Los faros de automóviles, tienen la forma de un paraboloide con dos filamentos que se encienden dependiendo de la selección de luces altas o



Fig. 5.65

bajas (figura 5.65). Disponer de ambas luces es fundamental para un conductor. De noche las luces altas son de mayor alcance, pero las luces bajas son útiles para no interferir en la visibilidad de otro conductor que maneja en sentido contrario, en una doble vía.

Al modelar en GeoGebra, el diseño de un faro con los dos tipos de luces se representa una parábola, cuyo eje focal coincide con el eje x y abre hacia la derecha. ¿Cuál será la ecuación que la caracteriza?

Un caso particular de la situación planteada se muestra en la gráfica de la figura 5.66. Observa en la vista algebraica que la ecuación que caracteriza a la parábola es $y^2 - 8x = 0$, de donde: $y^2 = 8x$. Como $p = 2$, se puede inferir que el modelo que la describe es $y^2 = 4px$.

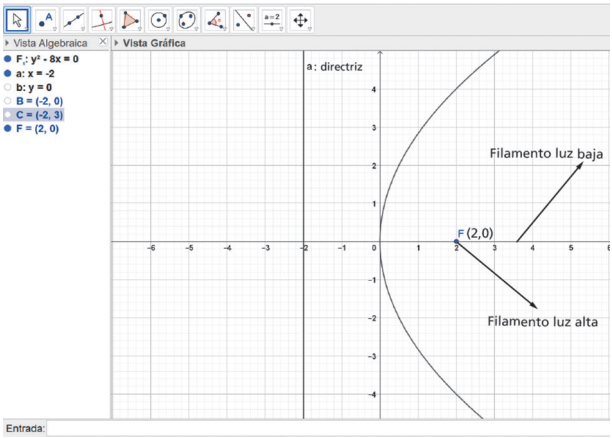


Fig. 5.66

Se puede concluir que las parábolas que tienen el eje focal paralelo al eje x su directriz es la recta perpendicular $x + p = 0$, por lo que sus ecuaciones son:

$y^2 = 4px$ o $y^2 = -4px$

en dependencia de que abran a la derecha o a la izquierda.

Ejemplo 5.20

Escribe la ecuación y representa en GeoGebra la parábola que cumple: $F\,(-3;0)$ y $l : x - 3 = 0$

Resolución:

Se puede apreciar que el foco está situado en el eje x, y la directriz es la recta $x = 3$ paralela al eje y, luego $p = 3$. Como el foco está a la izquierda de la recta directriz, la parábola abre hacia la izquierda, por lo que la ecuación pedida es: $y^2 = -12x$.

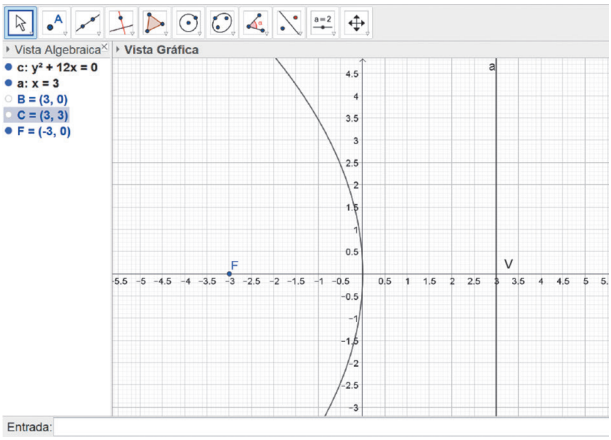


Fig. 5.67

La gráfica obtenida en GeoGebra, se muestra en la figura 5.67. ◆

Reflexiona

¿Cuál es la ecuación de la parábola que describe los cables del puente colgante diseñado, en la situación inicial, según el modelo: $x^2 = 4y$ y de los datos dados. Explica tu razonamiento.

Ecuación de la parábola con vértice en un punto (h;k)

Las ecuaciones de la parábola, vistas anteriormente, son válidas solamente en el caso de que el vértice esté en el origen de coordenadas y que el eje de simetría de la parábola o eje focal coincide con el eje x o el eje y.

Conoces que la parábola no siempre tiene su vértice en el origen de coordenadas; se dice en estos casos que está desplazada (figura 5.68).

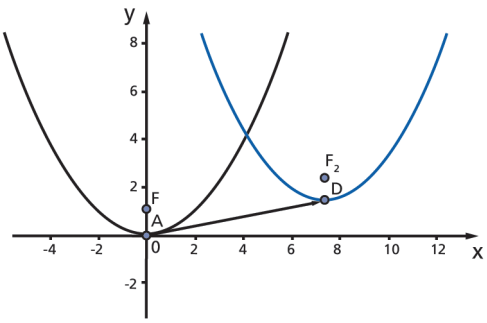


Fig. 5.68

Para el caso en que el vértice está en un punto cualquiera (h;k), y que el eje focal de la parábola es paralelo al eje x, ¿cuál será la ecuación de la parábola referida a su foco y directriz?

Una parábola con vértice en un punto (*h;k*) cualquiera del plano, se describe con la ecuación cartesiana:

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$ o $(x-h)^2 = -4p(y-k)$ Si el eje focal es paralelo al eje *y*, en dependencia de que abra hacia arriba o hacia abajo.

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$ o $(y-k)^2 = -4p(x-h)$ Si el eje focal es paralelo al eje *x*, en dependencia de que abra hacia la derecha o hacia la izquierda.

Ejemplo 5.21

Escribir la ecuación de la parábola que cumple:

a) $V(2;4)$ y $F(2;6)$ b) $F(3;4)$ y $\ell: y+2=0$

c) $V(1;-2)$ y $\ell: x-2=0$

Resolución:

a) Conocidos el vértice y el foco de la parábola podemos identificar que:
$h = 2$, $k = 4$ y $p = d(V;F) = 2$, como su eje de simetría es paralelo al eje *y*, la ecuación pedida es: $(x-2)^2 = 8(y-4)$
La figura 5.69 muestra la gráfica de la parábola modelada por la ecuación encontrada.

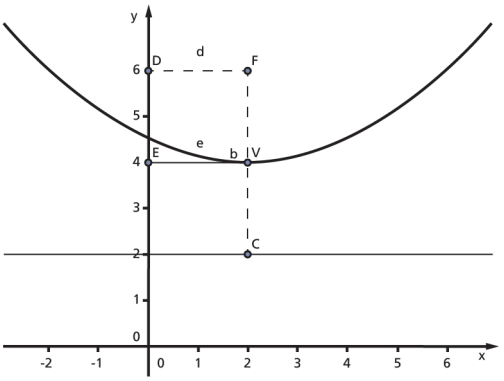


Fig. 5.69

b) Como conocemos el foco y la ecuación de la directriz, debemos buscar el vértice y el valor del parámetro *p*.
El vértice es punto medio de la perpendicular bajada desde el foco a la directriz; luego, $V(3;1)$ y $p = 3$ por lo que la ecuación pedida es: $(x-3)^2 = 12(y-1)$

La figura 5.70 muestra la posición de los elementos identificados y un tramo de la parábola que describe la ecuación encontrada.

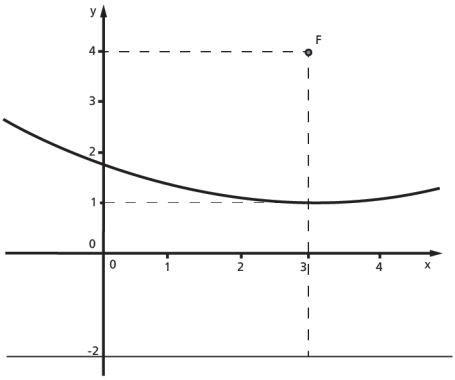


Fig. 5.70

c) Al conocer las coordenadas del vértice y la ecuación de la directriz, se puede determinar $p = d\,(V;l)$, de donde se obtiene que $p = 1$.

Como la directriz $x = 2$, está a la derecha del vértice, el eje focal es paralelo al eje x, luego la parábola abre hacia la izquierda, y la ecuación pedida es: $(y+2)^2 = -4(x-1)$

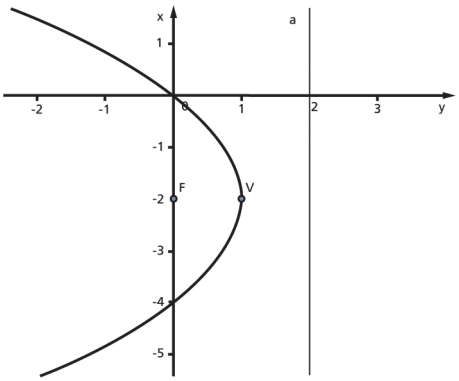


Fig. 5.71

La figura 5.71 muestra la parábola que describe la ecuación encontrada. ◆

En ocasiones la ecuación de la parábola se presenta en su forma general:
Si la parábola es vertical $x^2 + Dx + Ey + F = 0$,
con $D = -2h$; $E = -2p$ y $E = h^2 + 2ph$.
Si la parábola es horizontal $y^2 + Dx + Ey + F = 0$,
con $D = -2p$; $E = -2h$ y $E = k^2 + 2ph$.

Ejemplo 5.22

Determinar las coordenadas del foco, del vértice, y la ecuación de la directriz de las parábolas representadas por las ecuaciones siguientes:

a) $y^2 + 4y + 4x = 0$ b) $y^2 - 8x = 0$

c) $x^2 - 10y - 10 = 0$ d) $2x^2 - 12x + 3y - 9 = 0$

Resolución:

a) $y^2 + 4y + 4x = 0$

Para hallar los elementos pedidos, debemos expresar la ecuación de la forma conocida. Para ello dejamos en el primer miembro los términos que corresponden a la variable de segundo grado (en este caso y) y completamos cuadrados:

$y^2 + 4y + 4x = 0$

$y^2 + 4y = -4x$

$y^2 + 4y + 4 = -4x + 4$

$(y+2)^2 = -4(x-1)$

Luego, $4p = 4$, de donde $p = 1$ y $V\,(1;-2)$

La parábola tiene el eje paralelo al eje x (es la variable lineal) y abre hacia la izquierda; por lo tanto, el foco es $F\,(0;-2)$ y la directriz ℓ es:

$x = h + p$

$x = 1 + 1$

$x = 2$

$x - 2 = 0$

Para representar esta parábola, como ya conocemos el vértice, nos queda hallar otros dos puntos.

Por comodidad evaluaremos la ecuación para la x del foco.

Para $x = 0$ tenemos:

$y^2 + 4y = 0$, de donde se obtienen:

$y_1 = 0$ y $y_2 = -4$.

La parábola pasa por los puntos (1;–2); (0;=) y (0;–4) (figura 5.72).

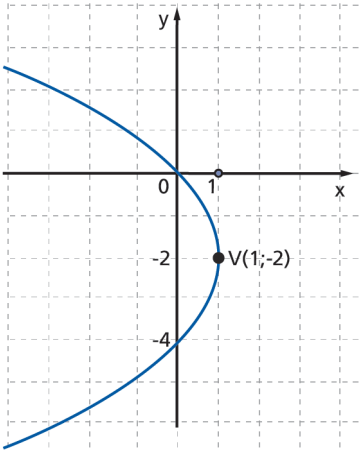


Fig. 5.72

b) $y^2 - 8x = 0$

En este caso no es necesario completar cuadrados, la parábola tiene el vértice en el origen de coordenadas, el eje coincide con el eje x y la parábola abre hacia la derecha; luego,

$4p = 8$ $\quad V(0;0)$ $\quad F:(h+p;0)$ $\quad \ell: x = h - p.$

$p = 2$ $\quad = (2;0)$ $\quad x = -2$

$x + 2 = 0$

c) $x^2 - 10y - 10 = 0$

$x^2 = 10y + 10$

$x^2 = 10(y - 1)$

luego, $4p = 10$, de donde $p = \frac{5}{2}$ y $V(0;-1)$

El eje de la parábola es paralelo al eje y (es la variable lineal) y abre hacia arriba; luego, $F\left(0\ ;-1+\frac{5}{2}\right)=\left(0;\frac{3}{2}\right)$

$$\ell : y = k - p$$
$$y = -1 - \frac{5}{2}$$
$$2y = -2 - 5$$
$$2y + 7 = 0$$

d) $2x^2 - 12x + 3y - 9 = 0$

$$2x^2 - 12x = -3y + 9$$
$$2(x^2 - 6x + 9) = -3y + 9 + 18$$
$$2(x-3)^2 = -3y + 27$$
$$(x-3)^2 = -\frac{3}{2}(y-9)$$

Luego, $4p = \frac{3}{2}$, de donde $p = \frac{3}{8}$ y $V(3;9)$

El eje de la parábola es paralelo al eje x, y esta abre hacia abajo; luego,

$$F:\left[3;9-\frac{3}{8}\right]=\left[3;\frac{69}{8}\right]=(3;8{,}6)$$

$$\ell : y = k + p$$
$$y = 9 + \frac{3}{8}$$
$$8y = 72 + 3$$
$$8y - 75 = 0. \ \blacklozenge$$

De la historia

En la antigua Grecia la duplicación del cubo, de construcción imposible con el Álgebra geométrica griega, que excluía las ecuaciones de grado mayor que dos por los medios que tenían que usarse, regla sin graduar y compás, o rectas y circunferencias cuyas ecuaciones eran de grado menor que tres, fue resuelta por Hipócrates de Quios (s. V a.n.e.) con el empleo de dos medias proporcionales equivalentes a las parábolas.

$x^2 = ay$ y $y^2 = 2ax$, donde a es la arista del cubo dado y x, la del cubo de doble volumen. Despejando y en la primera y sustituyendo en la segunda se obtiene como resultado: $x^3 = 2y^3$.

Menecmo (s. IV a. n. e.) obtuvo un resultado similar, pero empleando secciones cónicas por primera vez, con las parábolas $x^2 = 2y$, y $y^2 = x$, donde a es la arista del cubo dado y x, la del cubo de doble volumen.

Ejemplo 5.23

Determinar los puntos de intersección entre las curvas:

a) $y^2 - 4y - 8x + 12 = 0$; $y = x - 5$

b) $y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 - 6x - 6 = 0$

Resolución:

a) Para obtener los puntos de intersección, resolvamos el sistema formado por las ecuaciones de las dos curvas:

$y^2 - 4y - 8x + 12 = 0$ (1)

$y = x - 5$ (2)

Sustituyendo (2) en (1), se tiene:

$(x - 5)^2 - 4(x - 5) - 8x + 12 = 0$

que es equivalente a: $x^2 - 22x + 57 = 0$

cuyas soluciones son: $x_1 = 3$ y $x_2 = 19$

Sustituyendo estos valores en (2), se obtiene:

para $x_1 = 3$, $y = 3 - 5 = -2$

para $x_2 = 19$, $y = 19 - 5 = 14$

por lo que la recta interseca a la parábola en los puntos (3;–2) y (19;14).

b) Resolvamos el sistema: $y^2 = 4x$ (3)

$x^2 + y^2 - 6x - 6 = 0$ (4)

Sustituyendo (3) en (4), se obtiene:

$x^2 - 2x - 6 = 0$

cuyas soluciones son:

$x_1 , x_2 = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 24}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{28}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$, de donde:

$x_1 = 3{,}65$ y $x_2 = -1{,}65$:

Sustituyendo los valores de x en (3), se obtiene:

para $x_1 = 3{,}65$, $y_1 = \pm\sqrt{4 \cdot 3{,}65}$

para $x_2 = -1{,}65$ no hay solución, pues $y^2 > 0$;

luego, la parábola y la circunferencia se cortan en:

los puntos (3,65;3,82). ◆

Ejercicios del epígrafe 5.4

1. Escribe la ecuación de una parábola si se sabe que:

a) V (1;2), F (3;2) b) V (0;3); $\ell : y = 5$,

c) F (3;0); $\ell : x + 3 = 0$ d) V (0;0); $p = 5$

e) $F\,(-4;3)$; $\ell : y = 0$

f) $V\,(4;-1)$, eje: $x - 4 = 0$ y pasa por el punto $(3;-3)$.

2. Dadas las siguientes ecuaciones, investiga si representan una parábola y, en caso positivo, determina las coordenadas de su vértice y foco, y la ecuación de la directriz:

a) $y^2 - 20x = 0$

b) $x^2 + 3y = 0$

c) $y^2 - 8x + 8y = 0$

d) $x^2 - 6x + 4y - 3 = 0$

e) $3x^2 + 18x - 4y + 27 = 0$

f) $y^2 - 8x + 32 = 0$

g) $x^2 + y^2 + 4y = 0$

h) $x^2 - 5x - 3y - 8 = 0$

3. Escribe la ecuación de la parábola que pasa por el origen de coordenadas y es simétrica respecto al eje de ordenadas, si las coordenadas del foco son $F\,(0;-3)$.

4. Determina la ecuación de la parábola $y^2 = 4p\,(x - 3)$, sabiendo que pasa por el punto $(1;4)$.

5. De la parábola $y_2 = 20x$, calcula la distancia del punto de abscisa 7 al foco.

6. Halla la ecuación de la parábola con vértice en la recta $x + 2y + 5 = 0$, y que pasa por los puntos $(-2;0)$ y $(-23;4)$.

7. El centro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$ es el vértice de una parábola, cuyo eje tiene como ecuación $y + 1 = 0$. Si la parábola pasa por el punto $D\,(4;3)$:

a) halla su ecuación;

b) halla la ecuación de la directriz.

8. En un espejo cuya sección es una parábola, todo rayo que incide paralelo a su eje se refleja pasando por su foco. Un rayo de luz de ecuación $y = -2$ cae sobre un espejo cuya sección plana es la parábola $y^2 = 24x$ (figura 5.73). Halla la ecuación de la recta a la cual pertenece el rayo reflejado.

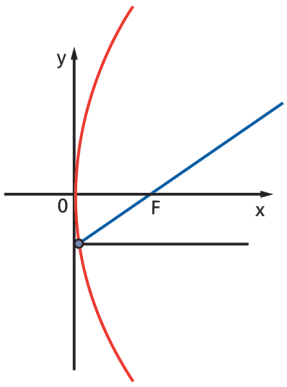


Fig. 5.73

9. Determina los puntos de intersección de las parábolas y las rectas dadas:

a) $x^2 = 5y\ ;\ 2x - y - 5 = 0$

b) $(x-4)^2 = 4(x-1)\ ;\ 2x - y + 6 = 0$

c) $x^2 + 6x - 8y + 25 = 0\ ;\ x - y + 3 = 0$

d) $y = (x+5)^2\ ;\ x - 6y + 6 = 0$

e) $x^2+2x-2y+5=0$; $x-2y-2=0$

f) $(x+0{,}5)^2=2y$; $2y=4x-0{,}5$

10. Halla los puntos de intersección de las siguientes curvas:

a) $y^2 = 4x$; $(x-1)^2 + y^2 = 25$

b) $y^2 - 6y - 6x - 3 = 0$; $x^2 + y^2 - 8x - 6y - 11 = 0$

c) $(x+1)^2 = -8y$; $(x+1)^2 + y^2 = 2$

d) $x^2 - 2^y - 1 = 0$; $3x^2 + 6 = 3$

e) $x^2 - x - y - 2 = 0$; $2x^2 - 2^x - 2y = 4$

11. Escribe la ecuación de la circunferencia cuyo centro coincide con el foco de la parábola $y^2 = 8x$ y es tangente a la directriz de la parábola.

12. El cable de un puente colgante tiene la forma de una parábola (figura 5.74). Halla la altura sobre el puente de los postes que sostienen el cable si, en la figura, $|\overline{OD}| = 5{,}0$; $|\overline{DA}| = 0{,}27$ y la longitud del puente es de 60u.

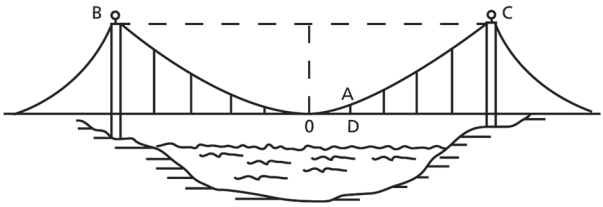


Fig. 5.74

13. Un punto se mueve de tal manera que la razón de sus distancias a la recta $y - 4 = 0$ y el punto (3;2) es 1.

Determina la ecuación de su lugar geométrico.

14. Un punto se mueve tal manera que la razón de sus distancias a la recta $y = x$ es igual a la distancia del punto (3;–1) es 1. Determina la ecuación de su lugar geométrico.

15. Cualquier cuerpo disparado oblicuamente (la flecha del arquero, la pelota del lanzador, la bala del artillero, etc.) sigue siempre una trayectoria parabólica, aunque con ciertas restricciones por razones de rozamiento y velocidad, despreciables generalmente en la práctica. La ecuación de esa parábola es:

$ax^2 - mx + y = 0$,

donde $a = \dfrac{m^2+1}{200}$, $m = \tan\theta$ y θ el ángulo de elevación del lanzamiento.

Halla, para cualquier ángulo:

a) la altura máxima que alcanza el cuerpo y.

b) el alcance, o distancia horizontal recorrida.

5.5* Secciones cónicas

Al estudiar las curvas de segundo grado has podido apreciar que existen semejanzas entre ellas y, además, reciben el nombre de *secciones cónicas*.

Aparte de sus aplicaciones a construcciones (edificios y puentes), comunicaciones electromagnéticas y ópticas (antenas y espejos), focos de iluminación marítima y terrestre (faros costeros y vehiculares), lanzamiento de proyectiles, entre otras, conocemos que conforman el curso del movimiento de los planetas del sistema solar, determinando que haya primavera, verano, otoño e invierno en nuestro planeta.

Así que su estudio no es un ejercicio intelectual inútil, sino de práctica utilidad, que, además, ayuda a entender fenómenos del mundo en que vivimos y fuera de él.

Reflexiona

¿Cabría dirigir el cono de luz de la linterna de forma que sea elíptica la figura luminosa que proyecta sobre el piso? (figura 5.75)

Si no conoces, o no encuentras, la respuesta la hallarás en este epígrafe.

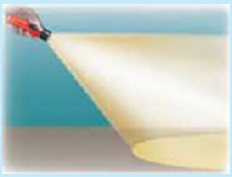


Fig. 5.75

Las semejanzas y el nombre genérico de deben a que tienen un origen común: son secciones planas de un cono circular recto (figura 5.76).

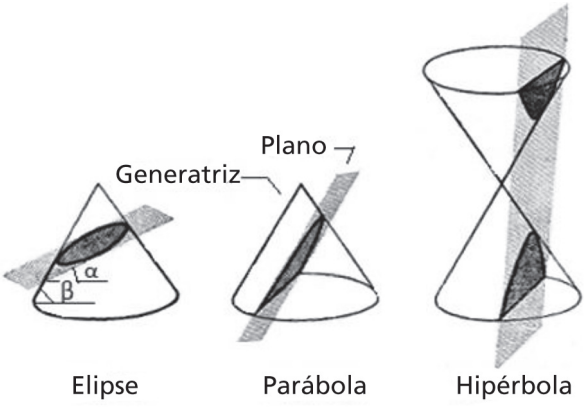


Fig. 5.76

Como se puede apreciar en la figura, si el ángulo de inclinación del plano α es menor que el ángulo de las generatrices del cono β, es decir, $\alpha < \beta$, la intersección es una elipse; si $\alpha = \beta$, es una parábola; y si $\alpha > \beta$ es una

hipérbola; en este caso el plano corta a las dos hojas del cono y, por eso, la hipérbola tiene dos ramas.

Saber más

Los paraboloides pueden ser también elípticos o hiperbólicos. Una aplicación del hiperbólico es la que existe en la Ciudad Deportiva de La Habana, consistente en un domo de forma de silla de montar (figura 5.77) sobre cuatro pilares, cuya sección longitudinal *A-B* es una hipérbola y la sección transversal *C-D*, una parábola, ambas de eje vertical.

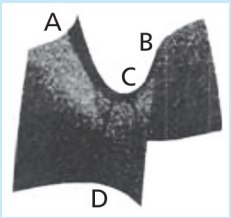


Fig. 5.77

Teorema 5.5

Sea C un cono circular recto de vértice V y cuyas generatrices forman un ángulo β con s, la base, y ε un plano con inclinación α respecto a la base del cono y que no contiene a β; entonces la intersección entre el plano y el cono es:

a) una elipse si $\alpha < \beta$,
b) una parábola si $\alpha = \beta$,
c) una hipérbola si $\alpha > \beta$.

Demostración:

Para realizar la demostración, inscribiremos en el cono esferas tangentes al plano ε. Estas esferas reciben el nombre de *esferas de Dandelin*, en honor del matemático que las usó por primera vez en 1822.

a) Si $\alpha < \beta$, se inscriben dos esferas tangentes a ε en dos puntos F_1 y F_2. En la figura 5.78 se tiene:
$\overline{PF_1} = PH_1$ y $\overline{PF_2} = PH_2$ (por ser tangentes de un punto a una esfera), luego, $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = PH_1 + PH_2 = \overline{H_1H_2} = \overline{A_1A_2}\,\overline{H_1H_2}$ (constante).

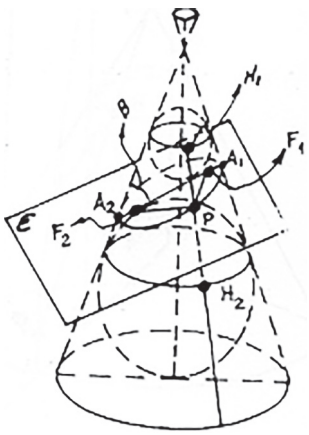


Fig. 5.78

b) Si $\alpha = \beta$, hay una sola esfera tangente en F al plano ε. En la figura 5.79 se tiene:
$\varepsilon \cap \mu_1 = \ell$ (directriz), $\overline{PL} \perp \ell$, $\overline{VD} \parallel \varepsilon$;
entonces,
$\overline{PA} = \overline{PF}$ (por ser tangentes exteriores)
$\frac{\overline{PA}}{\overline{PL}} = \frac{\overline{VA}}{\overline{VD}}$ (teorema de las transversales)
$\overline{PA} = \overline{PL}$, (pues $\overline{VA} = \overline{VD}$)

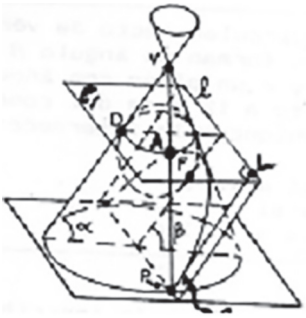


Fig. 5.79

El inciso c) se demuestra como el inciso a) utilizando la figura 5.80.

El teorema 1 muestra que las secciones cónicas tienen un origen común; el teorema 2 mostrará que pueden ser caracterizadas por una misma propiedad.

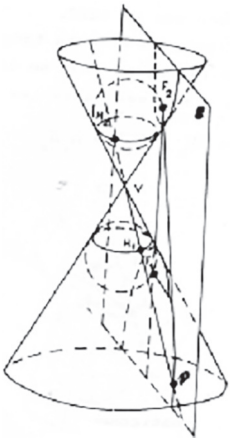


Fig. 5.80

Teorema 5.6

Una sección cónica es el lugar geométrico de los puntos de un plano que satisfacen que la razón de sus distancias a un punto fijo llamado foco y a una recta fija llamada directriz es una constante *e*. Si $e < 1$ se trata de una elipse, si $e = 1$, de una parábola y si $e > 1$, de una hipérbola.

Demostración:

Haremos la demostración para el caso de la elipse (para la parábola ya fue demostrado); el caso de la hipérbola se demuestra igual.

En la fig. 5.81 se tiene que:
$\overline{PN} = \overline{PA}\ \text{sen}\ \alpha = \text{sen}\ \beta$

$\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\beta}$, $\overline{PA} = \overline{PF}$;

luego, $\frac{\overline{PF}}{\overline{PA}} = \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\beta}$

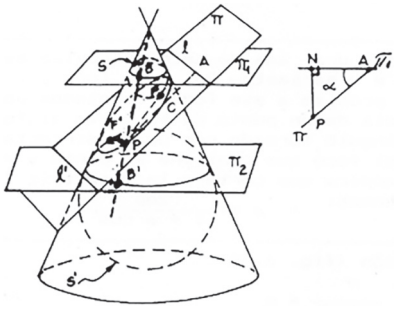


Fig. 5.81

En la figura 5.82 se muestra una sección longitudinal del cono para el caso de la elipse. Como $\overline{A_1A_2}$ es la distancia entre los planos de tangencia de la esfera y el cono, de esta figura resulta:

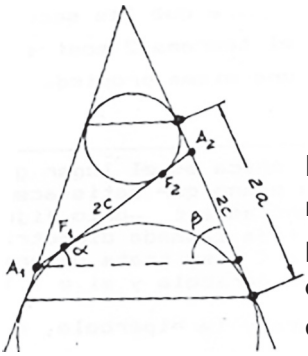


Fig. 5.82

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}. \quad \blacklozenge$$

Al igual que en la parábola, la distancia de la directriz al foco de una sección cónica la denotaremos $2p$ y la llamaremos parámetro. Se puede obtener una ecuación común para las secciones cónicas en función de ese parámetro y la excentricidad.

Teorema 5.7

Sea C una rama de sección cónica de excentricidad e y parámetro 2p, F un foco y ℓ la directriz más próxima a ese foco. Denotemos por ρ la distancia de un punto de la curva al foco y por ϕ el ángulo formado por una semirrecta de origen en el foco que contiene al punto y el semieje de la cónica que corta a la directriz (figura 5.81), entonces:

$$\rho = \frac{2ep}{1 + e\cos\varphi}.$$

Demostración (figura 5.83):

$$\frac{\dot{A}}{d(P,\ell)} = e$$

$$d(P, \ell) = 2p - \cos\phi$$

$$\rho = e\,(2p - \rho\cos\phi$$

$$\rho(1 - e\cos\phi) = 2ep$$

$$\rho = \frac{2ep}{1 + e\cos\varphi}$$

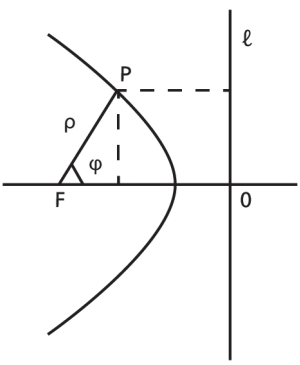


Fig. 5.83

En el caso de la hipérbola, esta ecuación corresponde a la rama asociada al foco dado; para la otra rama, la ecuación sería:

$$\rho = \frac{-2ep}{1 - e\cos\varphi}$$

Esta es la llamada *ecuación polar* de la sección cónica.

Ejemplo 5.24

a) Identificar la sección cónica de ecuación polar:

$$\rho = \frac{144}{13 - 5\cos\varphi}$$

b) Escribir la ecuación polar de la elipse que tiene foco F (2;1), excentricidad $e = \frac{1}{2}$ y cuya directriz tiene ecuación $2x - 3y + 1 = 0$. ◆

Resolución:

a) Llevamos la ecuación a la forma canónica:

$$\rho = \frac{\frac{144}{13}}{1 - \frac{5}{19}\cos\varphi};$$

luego, $e = \frac{5}{13} < 1$, y se trata de una elipse. Su parámetro es:

$$\frac{144}{13} : \frac{5}{13} = \frac{144}{5}$$

b) $2p = d(F; \ell) = \frac{|2\cdot 2 - 3\cdot 1 + 1|}{\sqrt{4+9}} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{12\sqrt{13}}{13}$, y la ecuación es:

$$\rho = \frac{\frac{2\sqrt{13}}{13}}{1 + \frac{1}{2}\cos\varphi} = \frac{4\sqrt{13}}{26 + 13\cos\varphi}.$$ ◆

A partir de la ecuación polar se puede obtener una ecuación cartesiana referida al vértice (el origen de coordenadas está en el vértice).

Teorema 5.8

La ecuación referida al vértice de una sección cónica es:
$y^2 = -4epx + (e^2 - 1)^2$

En el caso de la hipérbola, la ecuación representa una rama. La demostración de este teorema se deja como ejercicio.

Si $e = 1$ se obtiene la ecuación canónica de la parábola $y^2 = 4px$. Esta ecuación representa que el área del cuadrado construido sobre la ordenada es igual a la del rectángulo de base x y altura $4p$; de aquí se deriva el nombre, pues la voz griega *parabolé* (παραβολη΄) significa *anexar* o *comparar*.

En el caso de la elipse $e < 1$, y el área del rectángulo es menor que la del cuadrado; de ahí el nombre, pues la voz griega *elleipsis* (ε΄λλειψις) significa *insuficiencia*.

Para la hipérbola $e > 1$, y hay un *exceso de área*; su nombre se deriva de la voz griega *hyperbolé* (υ΄περβολη΄), que significa *exceso.*

Cuando $e \neq 1$ resulta una cónica con centro; en este caso, se puede probar que las ecuaciones de las directrices referidas al centro son:

$x = \pm\frac{a}{e}$, y que $2p = \frac{b^2}{c}$.

Ejemplo 5.25

Dada la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, escribe la ecuación polar de una rama.

Resolución:

Se tiene $a = 4$, $b = 3$, $c = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $e = \frac{5}{4}$, $p = \frac{b^2}{c} = \frac{9}{5}$, y la ecuación es:

$$\rho = \frac{\frac{5}{4} \cdot \frac{9}{5}}{1 + \frac{5}{4}\cos\varphi} = \frac{9}{4 + 5\cos\varphi}. \quad \blacklozenge$$

Saber más

Blas Pascal (1623-1662), filósofo religioso, físico y matemático francés, en su obra *Generación de Secciones Cónicas* –perdida, pero conocida por notas tomadas por Leibniz, entre otros–, consideraba estas curvas como generadas por la proyección central de una circunferencia.

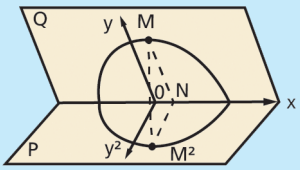


Fig. 5.84

Así, por ejemplo, proyectando ortogonalmente (figura 5.84) los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 0$ del plano Q sobre el plano P, que forman un ángulo agudo ϕ, se tiene la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

La justificación está en que, como puede probarse, las ordenadas de la elipse, y_e, y de la circunferencia, y_c, están en la razón constante $\frac{y_e}{y_c} = \frac{b}{a}$, y, en los planos Q y P, donde por proyección $MM' \perp M'N$, del triángulo rectángulo M´NM se tiene también que $\frac{M'N}{MN} = \cos\varphi$, una razón constante.

Ejercicios del epígrafe 5.5

1. Identifica el tipo de cónica y escribe la ecuación referida al centro.

a) $\rho = \dfrac{12}{1 + \frac{2}{5}\cos\varphi}$ b) $\rho = \dfrac{15}{6 - 9\cos\varphi}$

c) $\rho = \dfrac{10}{2 + 2\cos\varphi}$ d) $\rho = \dfrac{25}{4 + 20\cos\varphi}$

e) $\rho = \dfrac{16}{-4-3\cos\varphi}$ f) $\rho = \dfrac{10}{5+5\cos\varphi}$

2. Escribe la ecuación polar y la ecuación referida al vértice de las cónicas:

a) $5x^2 + 12y^2 + 10x - 48y - 5 = 0$

b) $4x^2 - 6y^2 - 8x + 18y - 20 = 0$

c) $2x^2 + 6x - 4y + 8 = 0$

d) $9x^2 + 4y^2 - 27x - 16y + 2 = 0$

e) $9x^2 - 4y^2 - 27x - 16y + 2 = 0$

f) $10x^2 + 30y - x = 0$

g) $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 3 = 0$

3. Dados la directriz, el foco y la excentricidad de una cónica, escribe las ecuaciones:

a) $x = 5$, $F(6\ ;\ 0)$ y $e = 1$.

b) $x = -1$, $F(2;\ 1)$ y $e = 0{,}5$.

c) $x = 2$, $F(5;\ 4)$ y $e = 2$.

d) $x = \dfrac{3}{4}$, $F(2;\ 5)$ y $e = 12$.

e) $x = \dfrac{5\sqrt{5}}{3}$, $F(3;\ 4)$ y $e = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Demuestra que la curva dada por la ecuación: $\rho = \dfrac{c}{1 + a\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}$ es una cónica. Clasifícala.

5. Dados tres puntos de una cónica, donde la primera coordenada es ρ y la segunda, ϕ de la ecuación polar, escribe sus ecuaciones polar y canónica.

a) $(1;0)$; $\left(\dfrac{9}{5};\dfrac{\pi}{2}\right)$ y $(9;\pi)$

b) $2,\left(\dfrac{9}{5};\dfrac{\pi}{2}\right)$ y $(-9;\ \pi)$

6. El principio de Cavalieri, generalizado, afirma que si dos regiones determinan sobre cada recta de un haz de rectas paralelas segmentos que están en la razón $k_1{:}k_2$, entonces sus áreas están en esa razón. Utiliza este resultado para hallar el área de la elipse a partir del área de la circunferencia.

7. Encuentra la ecuación paramétrica para la elipse.

8. Demuestra el teorema 5.4.

9. Demuestra que las ecuaciones referidas al centro, de las directrices de una cónica con centro, son $x = \pm\dfrac{a}{e}$.

10. Demuestra que para una cónica con centro, $2p = \frac{b^2}{c}$.

Recuerda que...

La excentricidad *e* determina el tipo de sección cónica, tanto en su ecuación polar (variables ρ, ϕ) como cartesiana con vértice en el origen (variables *x, y*) –ambas contienen a *e*–, cuya clasificación depende de su valor. Así:

- $e = 1$ corresponde a una parábola,
- $e < 1$, a una elipse, *y*
- $e > 1$, a una hipérbola.

Además, de su ecuación cartesiana con vértice en el origen se obtiene:

a) si $e = 1$, la ecuación canónica, o estándar, de la parábola $y^2 = 4pxy$

b) si $e \neq 1$, la ecuación de una elipse o una hipérbola con centro (la parábola no lo tiene), con directrices $x = \pm\frac{a}{e}$ y $2p = \frac{b^2}{c}$.

Ejercicios del capítulo 5

1. Escribe la ecuación de la circunferencia que cumple:

a) Tiene centro *O* (4;3) y radio 8.

b) Tiene centro en el punto *O* (0;–2) y pasa por el punto *F* (–1;5).

c) Tiene los extremos de un diámetro en los puntos *A* (5;1) y *B* (3;9).

d) La tangente a la recta $x - y + 6 = 0$ y tiene centro en el punto (6;0).

2. Determinar el valor de *k* para que la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x + 10y + k = 0$ tenga radio 7.

3. Halla la distancia mínima del punto a la circunferencia en cada uno de los casos siguientes:

a) *A* (6;– 8) ; $x^2 + y^2 = 9$

b) *B* (3;9) ; $x^2 + y^2 - 26x + 30y + 313 = 0$

c) *C* (–7;2) ; $x^2 + y^2 - 10x - 14y - 151 = 0$

4. Escribe la ecuación de la cuerda de la circunferencia $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 10$, que tiene punto medio en el punto *A* (1;2).

5. El punto *O* (3;–1) es el centro de una circunferencia que interseca a la recta $2x - 5y + 18 = 0$. Si la longitud de la cuerda que determina esta recta es 6, halla la ecuación de la circunferencia

6. Escribe la ecuación de la elipse que cumple:

a) *O* (4;6); $a = 7$; $2b = 12$ b) F_1 (0;4); F_2 (6;4) ; $2a = 10$

c) *O* (0;5) ; $a = 12$; $e = \frac{3}{4}$

7. Escribe la ecuación de la elipse que tiene su centro en el origen, un foco en (0;3) y longitud de semieje mayor en igual a 5.

8. Si sabemos que el punto B (–4;2,4) está en la elipse $16x^2 + 25y^2 = 400$, halla la distancia de B a los focos.

9. Se da el punto $A\left(-2;\frac{5}{3}\right)$ en la elipse $5x^2 + 9y^2 = 45$. Halla las ecuaciones de las rectas que pasan por A y los focos de la elipse.

10. Halla el área del cuadrilátero que tiene sus vértices en los vértices de la elipse:

a) $16x^2 + 25y^2 = 400$ b) $5x^2 + 9y^2 – 30x + 18y + 9 = 0$

11. Halla la ecuación de la hipérbola que cumple con lo siguiente:

a) Tiene centro O (0;0), $2a = 6$ y $e = 2$.

b) Tiene centro en el punto O (–4;1), un vértice en (2;1) y la semidistancia focal mide 8u.

c) Tiene centro en O (0;0), A_2 (6;0) y la ecuación de una asíntota $4x – 3y = 0$

d) Sus vértices son los puntos (1;7) y (7;–1), y la excentricidad es $e=\frac{5}{4}$.

12. Halla la ecuación de la hipérbola equilátera que pasa por el punto (3;–1) y cuyos ejes coinciden con los ejes coordenados.

13. Halla las coordenadas del centro, la excentricidad, los focos y las asíntotas de la hipérbola de ecuación $9x^2 –4y^2– 36x – 24y – 36 = 0$.

14. Halla la ecuación de la hipérbola con centro en (0;–1), eje principal paralelo al eje x y que pasa por los puntos (3;–3) y (7;5).

15. Halla la ecuación de una parábola que cumpla lo siguiente:

a) Su vértice es el punto (2;3) y pasa por el origen.

b) Su foco está en el origen de coordenadas y la directriz es $x – y = 0$.

c) Su vértice s el punto (3;2) y el foco es (5;2)

d) F (2;–2) y la directriz es $y – 4 = 0$.

16. Halla el vértice, el foco y la directriz de la parábola:

a) $y^2 + 4y – 6x + 7 = 0$ b) $4x^2 + 4x + 3y – 2 = 0$

17. Halla la ecuación de la parábola con vértice en la recta $x + 2y + 5 = 0$ y pasa por los puntos (–2;0) y (–2;–4).

18. Halla la ecuación de la circunferencia del menor radio posible que pasa por el foco de la parábola $y^2 = 4x$ y tiene su centro en la recta $x – y + 4 = 0$.

19. El centro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$ es el vértice de una parábola cuyo eje tiene por ecuación $y + 1 = 0$. Si la parábola pasa por el punto A (4;3), halla su ecuación y la de la directriz.

20. El segmento de recta entre dos puntos opuestos de la elipse, que pasa por uno de sus focos perpendicularmente al eje mayor, se denomina *lado recto* de la elipse. Demuestra que su longitud es $LR = 2\frac{b^2}{a}$.

Autoevaluación

1. Lee detenidamente la pregunta y responde en tu cuaderno de trabajo:

1.1 Clasifica las proposiciones siguientes en verdaderas o falsas. Justifica las falsas

a) En la ecuación general de la cónica $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ si $A = C$ es una circunferencia.

b) Si la excentricidad numérica de una cónica es menor que 1, es una parábola.

c) La ecuación de la directriz de la parábola con ecuación $x^2 = 4(y - 2)$ es $x = 1$.

d) En las hipérbolas equiláteras donde $a = b$, las asíntotas se cortan perpendicularmente.

e) La recta $y = x$ corta a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 8$ en dos puntos.

1.2 Identifica la respuesta correcta en cada caso

I. La longitud de la circunferencia que tiene como ecuación $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$ es aproximadamente:

a) 282,6u b) 28,26u c) 188,4u d) 18,84u

II. El vértice de la parábola de ecuación $(x - 1)^2 = 12(y + 2)$ es:

a) $V(1;2)$ b) $V(-1;2)$ c) $V(-2;1)$ d) $V(2;-1)$

III. Al expresar la elipse de ecuación general $9x^2 + 25y^2 = 225$, a su ecuación cartesiana se obtiene:

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ b) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ c) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$ d) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

1.3 Completa los espacios en blanco de forma tal que se obtenga una proposición verdadera en cada caso:

I. La excentricidad de la hipérbola con ecuación $\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ es

II. La elipse de ecuación $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$, tiene como coordenadas de su centro _____ y excentricidad _____.

III. La distancia focal en la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ se puede determinar por la relación pitagórica _____ y su valor es

IV. El centro de la circunferencia de ecuación $(x-1)^2+y^2=4$ es _____ y el área del círculo que limita a esta circunferencia es

V. La recta $y = 2$ corta a la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=4$ en el punto de coordenadas

2. Las siguientes ecuaciones representan curvas de segundo grado:

$c_1:(y-1)^2+4x-8=0$

$c_2:\left(\frac{y+2}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{x+1}{\sqrt{5}}\right)^2=2$

$c_3:c_3:\frac{4(y-1)^2}{5}-\frac{5x^2}{12}=20$

$c_4:c_4:2x^2+2y^2-8x-4y+4=0$

a) Identifícalas (nombre, coordenadas de su centro (vértice) y relación con los ejes coordenados)

b) Calcula su excentricidad numérica.

c) Determina la longitud de cada lado recto.

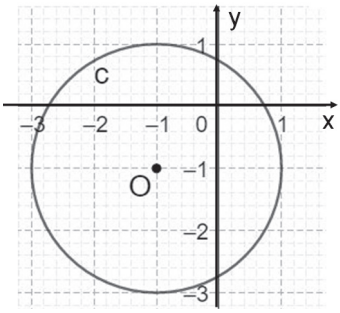
d) Realiza un esbozo de su representación gráfica.

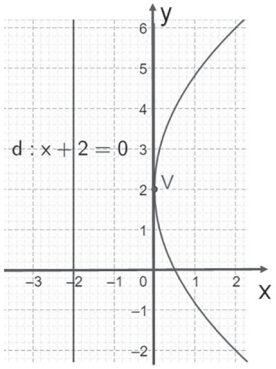
e) Determina la ecuación cartesiana de una recta para cada curva que sea:

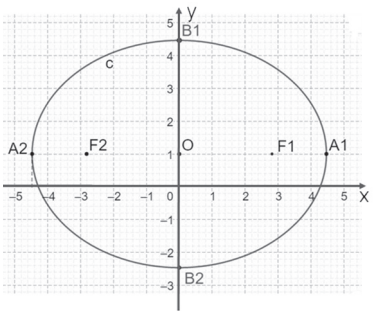
– Secante – Tangente – Exterior

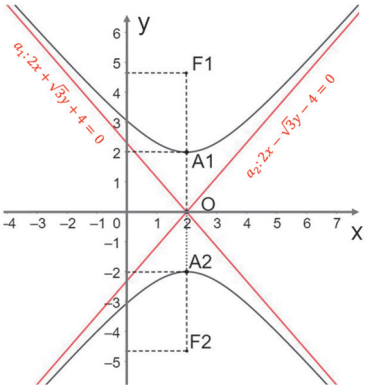
f) Con ayuda del Geogebra, representa cada ecuación en el sistema de coordenadas rectangulares y comprueba cada resultado obtenido.

3. Los siguientes gráficos representados en un SRCC, son curvas de segundo grado:









3.1 Identifícalas.

3.2 Determina la ecuación en cada curva.

3.3 Escribe las coordenadas de:

– Vértices – Focos

3.4 Determina en cada una, un punto que cumpla:

– interior a la curva – exterior a la curva – que pertenezca a la curva

ANEXOS

Respuestas a los ejercicios

Capítulo 1

Epígrafe 1.1

1. No representan funciones a), c), e), h)

2.

a) $f = \{(x;y) : y = 3x\,; x \in \mathbb{R}\}$

b) $f = \{(x;y) : y = 3x - 1\,; x \in \mathbb{R}\}$

c) $f = \left\{(x;y) : y = \frac{x}{2} + 2{,}5\,; x \in \mathbb{R}\right\}$

d) $f = \{(x;y) : y = x^2 - 5\,; x \in \mathbb{R}\}$

e) $f = \{(x;y) : y = |x| - 1\,; x \in \mathbb{R}\}$

f) $f = \left\{(x;y) : y = \frac{1}{x}\,; x \in \mathbb{R}, x \neq 0\right\}$

g) $f = \{(x;y) : y = x^3 + 0{,}1; x \in \mathbb{R}\}$

3. a) F, porque existen elementos del conjunto de partida a los que les corresponde más de un elemento en el conjunto de llegada. Por ejemplo, al número 4 le corresponden el 1; 2; 4.

b) V

c) V

d) F, porque existen dos pares ordenados en que a la primera componente (el 4) se le están asociando dos valores como segunda componente (el 2 y el –2).

e) V

f) F, porque alcanza su valor máximo, ya que $a < 0$ y la parábola abre hacia abajo y esta función con esas condiciones no tiene valor mínimo.

g) V

h) F, porque para ningún valor del dominio restringido la función no alcanza valores negativos y su conjunto imagen es el intervalo es el intervalo real $y \in [0;15)$.

i) F, porque en esas condiciones el gráfico de la función no sería simétrico respecto a la recta $x = 0$, sino a la recta $y = x$ que corresponde a una función impar.

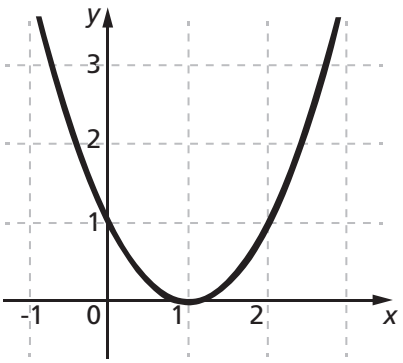
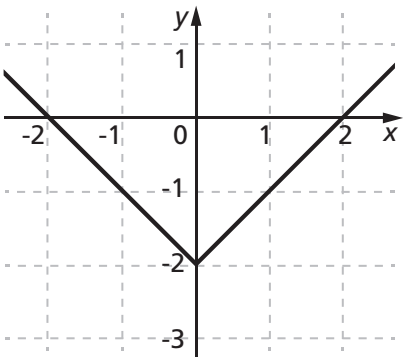
j) F, porque son funciones sobreyectivas, pero no cumplen la condición de ser inyectivas.

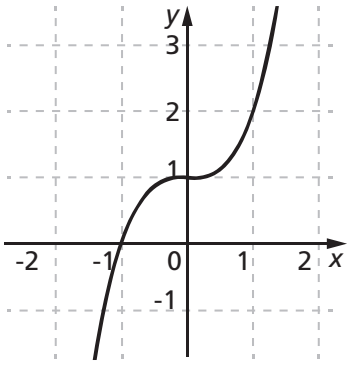
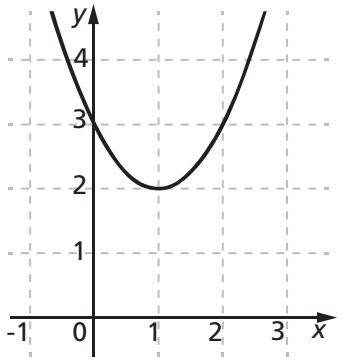
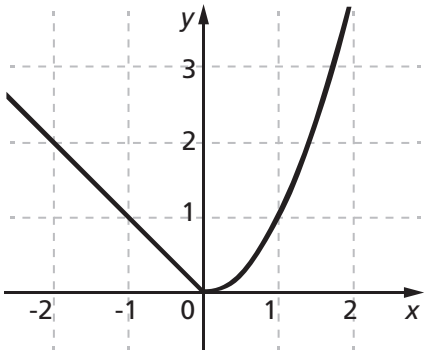
k) F, porque el conjunto imagen no coincide con el conjunto de llegada.

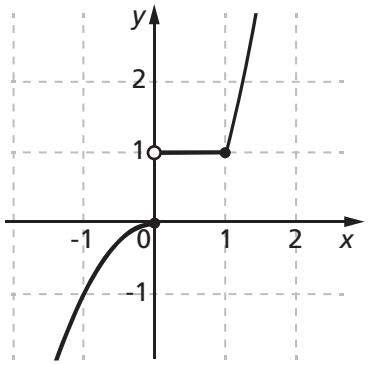
l) V

m) V

4.

f	**4.2 Dominio de definición y conjunto imagen, ceros, paridad, signos**	**4.1 Gráfico**
a)	$\text{Dom}f = \{x \in \mathbb{R}\}$ $\text{Im}f = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$ Cero: $x_0 = 1$ No es par ni impar Es positiva para todo $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$ Para $x < 1$ MD Para $x > 1$ MC Valor máximo: no tiene Valor mínimo: $y_0 = 0$	 **Fig. R1**
b)	$\text{Dom}f = \{x \in \mathbb{R}\}$ $\text{Im}f = \{y \in \mathbb{R} : y \geq -2\}$ Ceros: $x_1 = -2$ y $x_2 = 2$ Es par Es positiva para todo $\{x \in \mathbb{R} : x < 2 \text{ o } x > 2\}$ Es negativa para todo $\{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 2\}$ Para $x < 0$ MD Para $x > 0$ MC Valor máximo: no tiene Valor mínimo: $y_0 = -2$	 **Fig. R2**

c)	$\text{Dom}f = \{x \in \mathbb{R}\}$ $\text{Im}f = \{y \in \mathbb{R}\}$ Ceros: $x_1 = -1$ No es par ni impar Es positiva para todo $\{x \in \mathbb{R} : x > -1\}$ Es negativa para todo $\{x \in \mathbb{R} : x < -1\}$ Para todo $\{x \in \mathbb{R}\}$ es MC Valor máximo: no tiene Valor mínimo: no tiene	 **Fig. R3**
d)	$\text{Dom}f = \{x \in \mathbb{R}\}$ $\text{Im}f = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 2\}$ Ceros: no tiene No es par ni impar Es positiva para todo $\{x \in \mathbb{R}\}$ Para $x < 10$ MD Para $x > 10$ MC Valor máximo: no tiene Valor mínimo: $y_0 = 2$	 **Fig. R4**
e)	$\text{Dom}f = \{x \in \mathbb{R}\}$ $\text{Im}f = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$ Cero: $x_0 = 0$ No es par ni impar Es positiva para todo $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ Para $x < 0$ MD Para $x > 0$ MC Valor máximo: no tiene Valor mínimo: $y_0 = 0$	 **Fig. R5**

f)	$\text{Dom}f = \{x \in \mathbb{R}\}$ $\text{Im}f = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 1 \text{ o } y \leq 0\}$ Cero: $x_0 = 0$ No es par ni impar Es positiva para todo $\{x \in \mathbb{R} :> 1\}$ Es negativa para todo $\{x \in \mathbb{R} :< 0\}$ Para $x_0 \leq 0$ MC Para $x_0 \geq 0$ MC Valor máximo: no tiene Valor mínimo: no tiene	 Fig. R6

4.3 Respuesta abierta utilizando el asistente GeoGebra.

5. a) Representación gráfica en un sistema de coordenadas utilizando el asistente GeoGebra.

b) La variable x puede tomar los valores $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\}$ y la variable y puede tomar los valores $\{y \in \mathbb{R} : y \neq -1\}$.

c) El cero de la función es $x_0 = 3$.

d), e), f) Se responden utilizando el asistente GeoGebra**.**

d) Ecuaciones de las asíntotas $x = 2$ (vertical) y $y = -1$ (horizontal).

e) (1;–2) y (3;0) son los puntos donde se cortan los gráficos de estas dos funciones.

6. a) $d = -2$ y $e = -1$; b) $\text{Dom}f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\}$; $\text{Im}f = \{y \in \mathbb{R} : x \neq -1\}$

c) Ecuación de la asíntota vertical: $x = 2$;
Ecuación de la asíntota horizontal: $y = -1$

d) La función f es decreciente en el intervalo $(2;\infty)$ porque en la medida que crecen los valores del dominio, disminuyen sus valores funcionales.

e) La función f no es par porque elementos opuestos de su dominio de definición no tienen la misma imagen. Esto quiere decir que su gráfico no es simétrico respecto al eje de las ordenadas y no es impar porque elementos opuestos de su dominio de definición no tienen imágenes opuestas. Esto quiere decir que su gráfico no es simétrico respecto al origen de coordenadas (para valores opuestos del dominio la función no alcanza valores iguales ni opuestos).

Tenemos $f(x)$ que es $f(x) = \dfrac{1}{x-2} - 1$ como no hay restricción en el dominio procedemos a buscar de manera general a

$f(-x)$, $f(-x)=\dfrac{1}{-x-2}-1=\dfrac{1}{-(x+2)}-1=-\dfrac{1}{x+2}-1$ comparando $f(-x)$ con $f(x)$ nos percatamos que no son iguales (no es par) ni opuestas (no es impar).

7.

7.1 b), c), d), e), h), j), k)

7.2 c), d), e), h), j)

7.3 c), e), j)

8.

Son funciones a), b), d), f), g)

Son inyectivas a), d), g)

Son sobreyectivas a), b), d), f), g)

Son biyectivas a), d), g)

9. Respuesta abierta conectándose con sitio

Epígrafe 1.2

1. a) f es una función inyectiva

$f^{-1}=\{(0;1),(1;2),(1,3;2,3),(6;7),(8,1;9,1),(10;11),(11,3;12,3),(14,15)\}$

b) g no es una función inyectiva

c) h es una función inyectiva

$h^{-1}=\{(-27;-3),(-8;-2),(-3,4;-1,5),(0;0),(1;1),(8;2),(29,8;3,1),(64;4)\}$

2.

Función	2.1 Dominio de definición y conjunto Imagen	2.2 Ecuación de la inversa	2.3 Dominio de definición y conjunto imagen de la inversa
a)	$\text{Dom}a=\{x\in\mathbb{R}\}$ $\text{Im}a=\{y\in\mathbb{R}\}$	$a^{-1}(x)=-\dfrac{x-4}{2}$ $=-\dfrac{x}{2}+2$	$\text{Dom}a^{-1}=\{x\in\mathbb{R}\}$ $\text{Im}a^{-1}=\{y\in\mathbb{R}\}$
b)	$\text{Dom}b\{x\in\mathbb{R}:x\neq-1\}$ $\text{Im}b\{y\in\mathbb{R}:y\neq0\}$	$b^{-1}(x)=\dfrac{3}{x}+1$	$\text{Dom}b^{-1}\{x\in\mathbb{R}:x\neq0\}$ $\text{Im}b^{-1}\{y\in\mathbb{R}:y\neq1\}$
c)	$\text{Dom}c=\{x\in\mathbb{R}\}$ $\text{Im}c=\{y\in\mathbb{R}\}$	$c^{-1}(x)=4x+1$	$\text{Dom}c^{-1}=\{x\in\mathbb{R}\}$ $\text{Im}\,c^{-1}=\{y\in\mathbb{R}\}$
d)	$\text{Dom}d\{x\in\mathbb{R}:x\neq2\}$ $\text{Im}d\{y\in\mathbb{R}:y\neq3\}$	-	-
e)	$\text{Dom}e=\{x\in\mathbb{R}\}$ $\text{Im}e=\{y\in\mathbb{R};y\geq0\}$	-	-

2.4

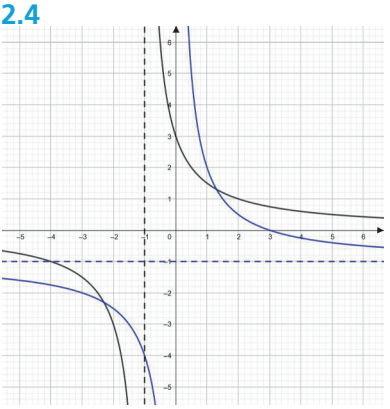


Fig. R7

2.5 Respuesta abierta utilizando del asistente GeoGebra

3. a), b), e), f) y g)

4. a) V

b) F, si $y \leq 0$, entonces no existe un número real no negativo x, tal que $y = \sqrt{x}$, pues $\sqrt{x} \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}; x \geq 0$.

c) F, si $(a;b) \in f$ entonces $a \geq 0$, eso quiere decir que $(-a;b) \notin f$ porque las abscisas de los pares de esta función no pueden ser negativas.

d) V

e) F, la función raíz cuadrada es creciente; por tanto, en la medida que crecen los valores de x en el dominio crecen sus imágenes.

f) F, la función raíz cuadrada no es par porque su gráfico no es simétrico respecto al eje de las ordenadas.

5. a)

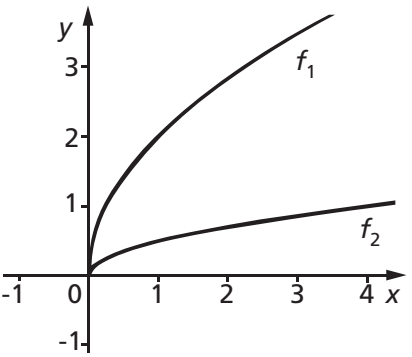


Fig. R8

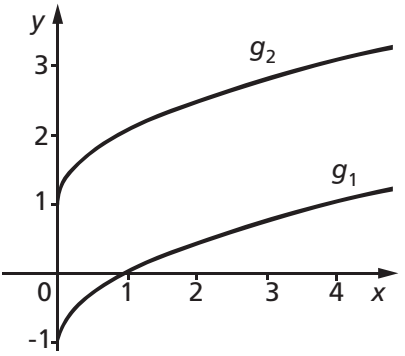


Fig. R9

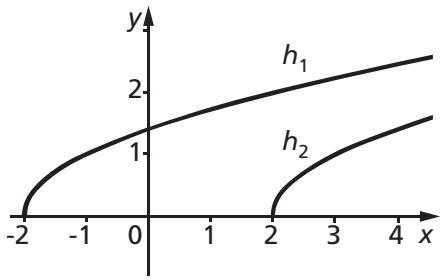


Fig. R10

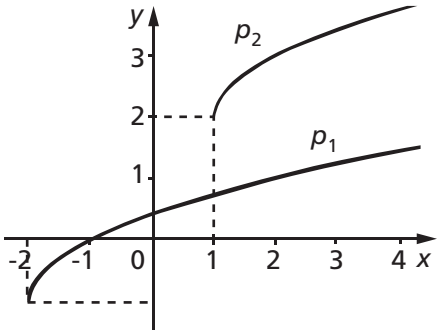


Fig. R11

Función	b)	c)		
	Ceros	Dominio de definición	Conjunto imagen	Monotonía
f_1	$x_0 = 0$	$x \in \mathbb{R}; x \geq 0$	$y \in \mathbb{R}; y \geq 0$	Creciente
f_2	$x_0 = 0$	$x \in \mathbb{R}; x \geq 0$	$y \in \mathbb{R}; y \geq 0$	Creciente
g_1	$x_0 = 1$	$x \in \mathbb{R}; x \geq 0$	$y \in \mathbb{R}; y \geq -1$	Creciente
g_2	No tiene	$x \in \mathbb{R}; x \geq 0$	$y \in \mathbb{R}; y \geq 1$	Creciente
h_1	$x_0 = -2$	$x \in \mathbb{R}; x \geq -2$	$y \in \mathbb{R}; y \geq 0$	Creciente
h_2	$x_0 = 2$	$x \in \mathbb{R}; x \geq 2$	$y \in \mathbb{R}; y \geq 0$	Creciente
p_1	$x_0 = -1$	$x \in \mathbb{R}; x \geq -2$	$y \in \mathbb{R}; y \geq -1$	Creciente
p_2	No tiene	$x \in \mathbb{R}; x \geq 1$	$y \in \mathbb{R}; y \geq 2$	Creciente

6.

6.1 c) **6.2** d) **6.3** c) **6.4** $h(x) = x + 3$ con ≥ 0

7. a) $p(x) = \sqrt{x+2} - 2$ b) C

8. a), b), e) y f)

9. a) V

b) F, la función raíz cúbica es biyectiva; por tanto, para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un único $y \in \mathbb{R}$, y viceversa, tal que $y = \sqrt[3]{x}$

c) V

d) V

e) F, la función raíz cúbica es creciente en todo su dominio; por tanto, en la medida que crecen los valores del dominio, crecen sus imágenes

f) V

10. a)

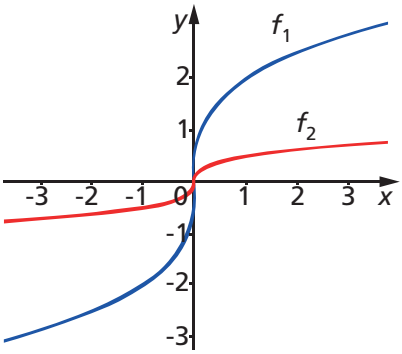


Fig. R12

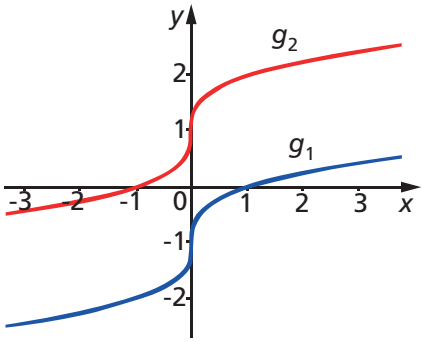


Fig. R13

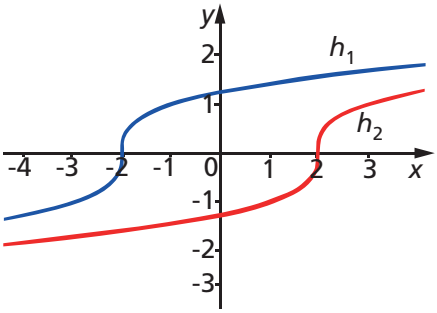


Fig. R14

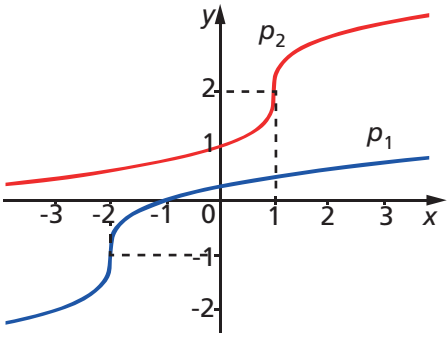


Fig. R15

Función	b)	c)		
	Ceros	Dominio de definición	Conjunto Imagen	Monotonía
f_1	$x_0 = 0$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$	Creciente
f_2	$x_0 = 0$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$	Creciente
g_1	$x_0 = 1$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$	Creciente
g_2	$x_0 = -1$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$	Creciente
h_1	$x_0 = -2$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$	Creciente
h_2	$x_0 = 2$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$	Creciente
p_1	$x_0 = -1$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$	Creciente
p_2	$x_0 = -7$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$	Creciente

11.

	$y=\sqrt{x}$	$y=\sqrt[3]{x}$	$y=\sqrt[4]{x}$	$y=\sqrt[5]{x}$	$y=\sqrt[8]{x-1}$	$y=\sqrt[11]{x-5}-1$
(0;0)	x	x	x	x		
(0;1)						
(1;1)	x	x	x	x		
(1;0)					x	
(–1;–1)		x		x		
(–1;1)						
(1;–1)						
(6;0)						x
(16;2)			x			
(16;4)	x					
(32;2)				x		

12. (*a*;1), (*b*;1), (*c*;6), (*d*;3), (*e*;5), (*f*;1), (*g*;4), (*h*;2)

13. a) $S=\{25\}$, b) $S=\phi$, c) $S=\{8\}$, d) $S=\phi$), e) $S=\{-2\}$
f) $S=\{8\}$, g) $S=\{-1;4\}$, h) $S=\{1\}$, i) $S=\{3\}$, j) $S=\{1;2\}$
k) $S=\{-4;0\}$, l) $S=\{3\}$.

14.

		$f(x)=\sqrt{x-3}+1$	$g(x)=x^3$	$h(x)=\sqrt[3]{x+1}-2$	$i(x)=(x+4)_3$
a)	Dominio de definición	$\{x\in\mathbb{R}: x\geq 3\}$	$\{y\in\mathbb{R}\}$	$\{y\in\mathbb{R}\}$	$\{y\in\mathbb{R}\}$
	Conjunto Imagen	$\{y\in\mathbb{R}: y\geq 1\}$	$\{y\in\mathbb{R}\}$	$\{y\in\mathbb{R}\}$	$\{y\in\mathbb{R}\}$
b)	Ecuación de la inversa	$f^{-1}(x)=(x-1)^2+3$	$g^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$	$h^{-1}(x)=(x+2)^3-1$	$i^{-1}(x)=x^3-4$
c)	Dominio de la inversa	$\{y\in\mathbb{R}\}$	$\{y\in\mathbb{R}\}$	$\{y\in\mathbb{R}\}$	$\{y\in\mathbb{R}\}$
	Conjunto Imagen de la inversa	$\{y\in\mathbb{R}: y\geq 3\}$	$\{y\in\mathbb{R}\}$	$\{y\in\mathbb{R}\}$	$\{y\in\mathbb{R}\}$

d)

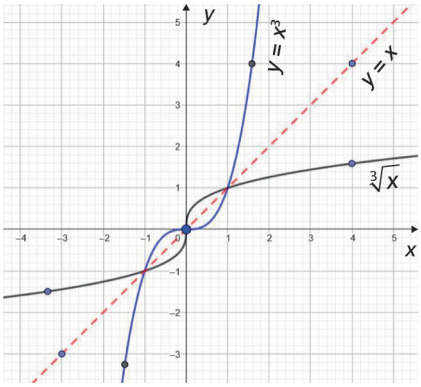


Fig. R16

15. a) $(f + g)(x) = 3x + 1$	$\text{Dom}(f+g) = \mathbb{R}$
$(f - g)(x) = x + 1$	$\text{Dom}(f+g) = \mathbb{R}$
$(f \cdot g)(x) = 2x^2 + x$	$\text{Dom}(f+g) = \mathbb{R}$
$(f:g)(x) = 2 + \frac{1}{x}$	$\text{Dom}(f+g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$(fog)(x) = 2x + 1$	$\text{Dom}(fog) = \mathbb{R}$
$(gof)(x) = 2x + 1$	$\text{Dom}(gof) = \mathbb{R}$
b) $(f + g)(x) = x + 3$	$\text{Dom}(f+g) = \mathbb{R}$
$(f - g)(x) = 3x - 1$	$\text{Dom}(f+g) = \mathbb{R}$
$(f \cdot g)(x) = -2x^2 + 3x + 2$	$\text{Dom}(f+g) = \mathbb{R}$
$(f:g)(x) = \frac{2x+1}{-x+2}$	$\text{Dom}(f+g) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
$(fog)(x) = -2x + 5$	$\text{Dom}(fog) = \mathbb{R}$
$(gof)(x) = -2x + 1$	$\text{Dom}(gof) = \mathbb{R}$
c) $(f + g)(x) = 2x^2 - 2x$	$\text{Dom}(f+g) = \mathbb{R}$
$(f - g)(x) = -2x + 2$	$\text{Dom}(f+g) = \mathbb{R}$
$(f \cdot g)(x) = x^4 - 2x^3 + 2x + 1$	$\text{Dom}(f+g) = \mathbb{R}$
$(f:g)(x) = \frac{x-1}{x+1}$	$\text{Dom}(f+g) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

$(fog)(x) = x^4 - 4x^2 + 4$	$\text{Dom}(fog) = \mathbb{R}$
$(gof)(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x$	$\text{Dom}(gof) = \mathbb{R}$
d) $(f + g)(x) = x^3 - 3x + 2$	$\text{Dom}(f+g) = \mathbb{R}$
$(f - g)(x) = x^3 - 5x - 2$	$\text{Dom}(f+g) = \mathbb{R}$
$(f \cdot g)(x) = x^4 + 2x^3 - 4x - 8$	$\text{Dom}(f+g) = \mathbb{R}$
$(f : g)(x) = x^2 - 2x$	$\text{Dom}(f+g) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
$(fog)(x) = x^3 - 6x^2 + 8$	$\text{Dom}(fog) = \mathbb{R}$
$(gof)(x) = x^3 - 4x^2 + 2$	$\text{Dom}(gof) = \mathbb{R}$
e) No existen porque $\text{Dom}f \cap \text{Dom}g = \varnothing$	
f) $(f+g)(x) = 2\sqrt{x} + 1$	$\text{Dom}(f+g) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$
$(f - g)(x) = 1$	$\text{Dom}(f-g) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$
$(f \cdot g)(x) = x + \sqrt{x}$	$\text{Dom}(f \cdot g) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$
$(f : g)(x) = \dfrac{x + \sqrt{x}}{x}$	$\text{Dom}(f : g) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$
$(fog)(x) = \sqrt[4]{x} + 1$	$\text{Dom}(fog) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$
$(got)(x) = \sqrt{\sqrt{x} + 1}$	$\text{Dom}(gof) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$
g) $(f+g)(x) = \dfrac{3x^2 - x - 1}{x^2 - x}$	$\text{Dom}(f+g) = \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$
$(f-g)(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x^2 - x}$	$\text{Dom}(f+g) = \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$
$(f \cdot g)(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$	$\text{Dom}(f+g) = \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$
$(f : g)(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2}$	$\text{Dom}(f+g) = \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$
$(fog)(x) = 2 + \dfrac{x-1}{x}$	$\text{Dom}(fog) = \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$
$(gof)(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$	$\text{Dom}(gof) = \mathbb{R} \setminus \{-1;0\}$

16. Respuesta abierta conectándose con el sitio www.cubaeduca.cu

17. Respuesta abierta conectándose con el sitio www.cubaeduca.cu

Ejercicios del capítulo 1

1. a) F, porque existe un elemento del conjunto de partida (el 0) que no tiene correspondiente en el conjunto de llegada, o porque el elemento 0 del conjunto de los números naturales no tiene antecesor en este.

b) F, porque en el conjunto de los números reales a todo número real se le puede determinar si valor absoluto, por tanto cumple la definición de función.

c) V

d) V

e) F, porque al único elemento del conjunto A le corresponden cuatro elementos del conjunto B, por tanto, no satisface la definición de función de hacerle corresponder un solo elemento.

f) V

g) F, porque el elemento cero, que es un número real, no tiene correspondiente o porque para $x = 0$ no está definida la expresión $\frac{5}{x}$.

2. Respuesta abierta utilizando del asistente GeoGebra.

3. Sobreyectivas: f, g, i, j, k

Inyectivas: f, g, i, k

Biyectivas: f, g, i, k

4.

a) Es inyectiva

Gráfico de la inversa.

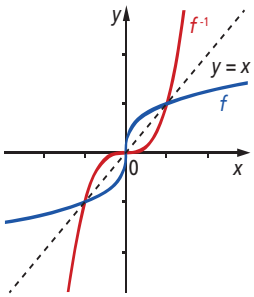


Fig. R17

b) No es inyectiva; por tanto, no tiene inversa en su dominio de definición.

c) Es inyectiva

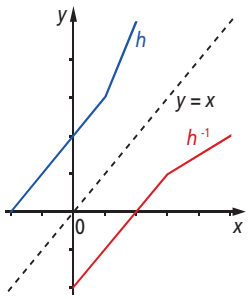


Fig. R18

La comprobación utilizando del asistente GeoGebra es una respuesta abierta.

5. De las cuatro funciones la única que tiene inversa es la función *f*.

La ecuación de la inversa $f(x)^{-1} = \dfrac{x-1}{2}$

Gráfico de la inversa

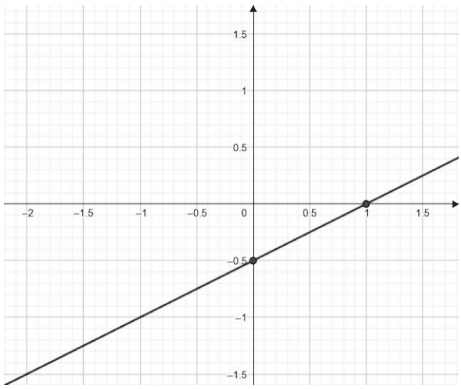


Fig. R19

6. a) $t = 0$ b) $t = 1$ c) $t = 5$ d) $t =$ No existe
e) $t = \dfrac{3}{5}$ f) $t = 0{,}001$ g) $t =$ no existe h) $t = 0{,}49$

7.
a) $y = \sqrt{x} - 2$ b) $y = -\sqrt{x} + 2$ c) $y = \sqrt{x+2} + 1$ d) $y = -\sqrt{x+2}$

8.

8.1 a) y d); **8.2** c); **8.3** a) y d); **8.4** Ninguno de las funciones son simétricas simetrías **8.5** b) y f) ; **8.6** c).

9.

a) $x = 1$; b) $x = 3$; c) $x = 9$; d) $x = 4$; e) No tiene soluciones reales
f) $x = 4$; g) $x = 5$; h) $x = 13$; i) $x = 12$; j) $x = 1$; k) $x = 7$; l) $x = 4$
m) No tiene soluciones reales; n) $x = 1$; ñ) $x = \pm 1$ o $x = -3$; o) $x = 4$;
p) $x = 1$; q) $x = 1$ o $x = 9$

10. $x = \pm 4$ o $x = 0$

11. $l = \dfrac{5}{2\pi^2} \approx 0{,}25m$

12. a) $t = 0$; b) $t = 1$; c) $t = 3$; d) $t = 3$; e) $t = \dfrac{1}{3}$; f) $t = 0{,}001$; g) $t = -4$, h) $t = 0{,}027$

13.

a) $y = \sqrt[3]{x} - 2$ b) $y = -\sqrt[3]{x} + 2$ c) $y = \sqrt[3]{x+2} + 1$ d) $y = -\sqrt[3]{x-2}$

14.

14.1 a) y d); **14.2** c); **14.3** a) y d); **14.4** Ninguna de las funciones es par; **14.5** b) y f); **14.6** c)

15.

a)

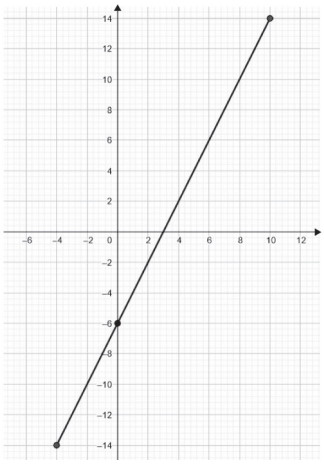


Fig. R20

b)

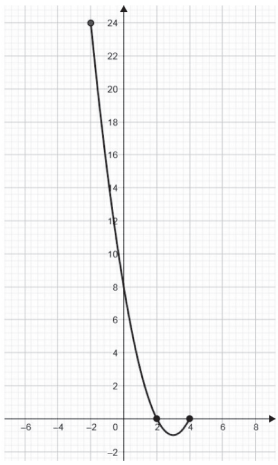


Fig. R21

c)

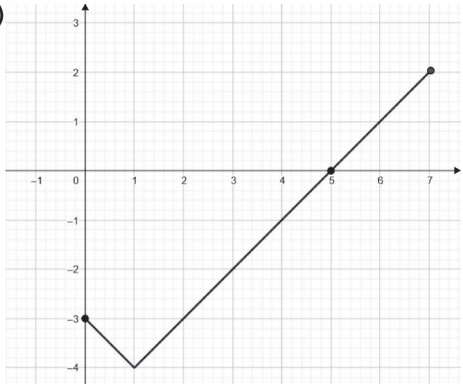


Fig. R22

d)

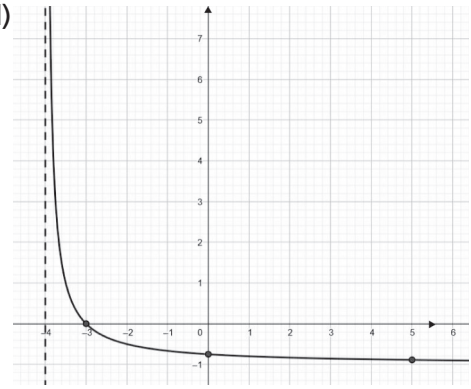


Fig. R23

e)

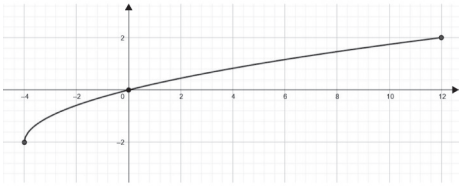


Fig. R24

f)

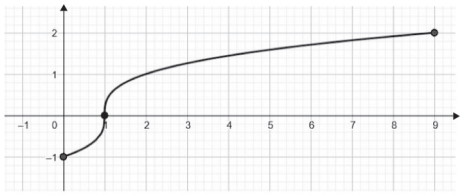


Fig. R25

16. (*a*;4), (*b*;8), (*c*;3), (*d*;2), (*e*;7), (*f*;6), (*g*;1), (*h*;5)

17.1

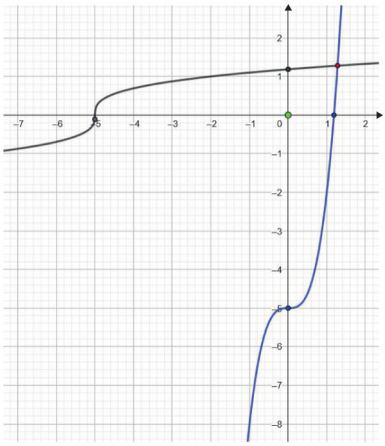


Fig. R26

17.2 ; **17.3**; **17.4** Las respuestas se obtendrán a partir de la utilización del Asistente Matemático GeoGebra.

18. 20 s

19.

a) $(f \cdot g)(x) = (x-2)^2 + 1$ $\quad (g \cdot f)(x) = x^2 - 1$

b) $(f \cdot g)(x) = (x-1)^3$ $\quad (g \cdot f)(x) = x^3 - 1$

c) $(f \cdot g)(x) = \left|2 + \sqrt{x}\right|$ $\quad (g \cdot f)(x) = 1 + \sqrt{|x+1|}$

d) $(f \cdot g)(x) = \left|\frac{1}{x}\right|$ $\quad (g \cdot f)(x) = \frac{1}{|x|}$

e) $(f \cdot g)(x) = \sqrt[3]{x}$ $\quad (g \cdot f)(x) = \sqrt[3]{x-3} + 3$

f) $(f \cdot g)(x) = \frac{1}{x+1}$ $\quad (g \cdot f)(x) = \frac{1}{x+1}$

g) $(f \cdot g)(x) = 2$ $\quad (g \cdot f)(x) = 1$

Capítulo 2

Epígrafe 2.1

1. a) $A = 2^2$ b) $P = 27$ c) $M = 5^{-4}$

d) $B = 4$ e) $H = 6$ f) $R = 1$

g) $Q = 2$ h) $F = 10^{-2}$ i) $u = 1$

2. a) F, porque la base de la potencia no puede ser igual a cero, porque 0^0 es una indeterminación.

b) F, porque cuando se dividen potencias de iguales bases se restan los exponentes; por lo tanto, $3^8 : 3^{-2} = 3^{3(-2)} = 3^{3+2} = 3^5$

c) V, porque $-4^2 = -(4 \cdot 4) = -16$ mientras que $(-4)^2 = (-4)(-4) = -16$

d) F, porque $\frac{6^{10}+6^8}{6^8} = \frac{6^8\left(6^2+1\right)}{6^8} = 6^2+1 = 37.$

Otro análisis puede ser:

$\frac{6^{10}+6^8}{6^8} = \frac{6^{10}}{6^8} + \frac{6^8}{6^8} = 6^2+1 = 37$

e) V, $\frac{9^2}{3^{-1}\cdot 3^2} = \frac{\left(3^2\right)^2}{3^1} = \frac{3^4}{3} = 3^3 = 27$

3. a) $(2^2)^{15}$ b) $(2^3)^{10}$ c) 32^6 d) 64^5

4. a) $9^y = 3^{2y} = (3^2)^y = (3^y)^2$ b) 5^{4a} c) 12^a d) $2^{(-2b+4)}$

e) $25a^2$ f) $\frac{3^x}{9}$ g) $216{,}6^m$ h) $\left(\frac{7}{2}\right)^{-1}$

5. $c < a < b$ porque:

$a = 3^{40} = (34)^{10} = 81^{10}$

$b = 5^{30} = (5^3)^{10} = 125^{10}$

$c = 7^{20} = (7^2)^{10} = 49^{10}$

Como el exponente es el mismo en todos los casos, la menor potencia es la que tiene menor base.

6.

a) $x = 5$ b) $x = 3$ c) $x_1 = -3$ y $x_2 = -2$

d) $x = 7$ e) $x = 2$ f) $x = \frac{3}{2}$

g) $x = -4$ h) $x = \frac{7}{3}$ i) $S = \varnothing$

7.

a) $x = 3$ b) $x = 6$ c) $x = 3$

d) $x = 2$ e) $x = 3$ f) $x = 2$

g) $x_1 = 2$ y $x_2 = 0$ h) $x_1 = 1$ y $x_2 = 0$ i) $x_1 = 2$ y $x_2 = 1$

j) $x = 2$

8.

a) $x = 3$ b) $x = 1$ c) $x_1 = 1$ o $x_2 = -1$

d) $x = 2$ e) $x = 1$ f) $x = 2$

9.

A.3; B.6; C.5; D.1; E.4; F.2

10. La respuesta correcta es $m = \frac{1}{3}$, y el error cometido por el otro dúo de estudiantes consistió en que no respetaron el orden de las operaciones al considerar $16,2^{-m} = 32^{-m}$. Lo correcto es:

$$\frac{2^{2m+3}}{16,2^{-m}} = 1$$

$$\frac{2^{2m+3}}{2^4 \cdot 2^{-m}} = 1$$

$$\frac{2^{2m+3}}{2^{4-m}} = 1$$

$$2^{2m+3-4+m} = 2^0$$

$$3m - 1 = 0$$

$$3m = 1$$

$$m = \frac{1}{3}$$

Otra forma:

$$\frac{2^{2m+3}}{2^4 \cdot 2^{-m}} = 1$$

$$2^{2m+3} = 2^{4-m}$$

$$2m + 3 = 4 - m$$

$$3m = 1$$

$$m = \frac{1}{3}$$

11.

a) F, porque la base de la potencia se encuentra entre 0 y 1.

b) F, porque la base de la potencia se encuentra entre 0 y 1

c) V

d) V

e) F, el resultado debe ser $x < -2$ y la fracción puede ser expresada como 2^{-2}; luego, la base es mayor que u

12.

a) $(6;\infty]$ b) $(-\infty;-1) \cup \left(\frac{2}{3};\infty\right)$ c) $(-\infty;-2] \cup [5;\infty)$

d) $(-\infty;2,5)$ e) $(-\infty;2] \cup [3;\infty)$ f) $(-\infty;-2)$

13. $x = 2$

14.

a) $\{x \in \mathbb{R}; x \leq -4 \text{ o } x \geq -3\}$ b) $\{x \in \mathbb{R}; -2 \leq x \leq -1\}$

15. a) $-\frac{1}{2}$ b) $x = 0$ c) $x > 2$

16.

a) F, porque no se aplicó correctamente la propiedad del del producto de potencias

La respuesta correcta es $2^m \cdot \frac{1}{2}$

b) F, porque 36 no solo es divisible por él y la unidad, es divisible también es divisible por otros como el 2; 3; 4; 6; 9; 18; 12.

c) F, porque $\frac{3}{2}$ no es una expresión decil infinita no periódica

d) F, porque por la propiedad de la monotonía si $a > 1$, se cumple que si $a^x < a^y$ entonces $x < y$.

e) V

f) F, porque los valores negativos que cumplen la condición planteada son los valores de x que satisfacen la condición $-\frac{1}{2} < x < 0$

17. Responde las preguntas de Cubaeduca

18. Respuesta abierta

Epígrafe 2.2

1.

a) $\log_{12} 1 = 0$ b) $\log_5 25 = 2$ c) $\log_{10} \frac{1}{1000}$

d) $\log_{49} 7 = \frac{1}{2}$ e) $\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5$ f) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$

g) $\log_p t = q$ h) $(s - p) = q$ i) $\sqrt{\log_p (2q^3)} = r$

2.

a) $30^2 = 900$ b) $4^0 = 1$ c) $8^{\frac{2}{3}} = 4$ d) $m^{45} = t$

3.

a) 25 b) $\frac{1}{64}$ c) 100 d) $\frac{1}{8}$

4.

a) 10 b) 3 c) 8 d) 7

5. a)

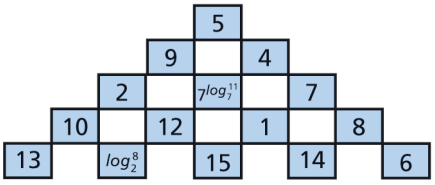


Fig. R27

La respuesta a este ejercicio puede ser variada; ahora bien en cualquiera de los casos debe aplicarse la definición y la identidad fundamental.

b) Posibles respuestas:

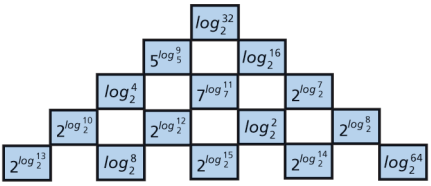


Fig. R28

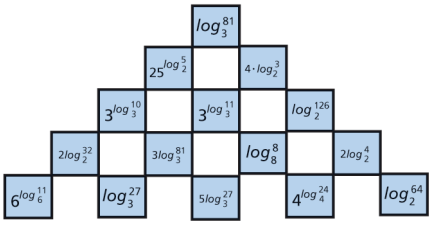


Fig. R29

6.

a) Puede escribirse como respuesta cualquier logaritmo con argumento uno.

b) Cualquier logaritmo con igual argumento y base

c) $\log_2 \frac{1}{8}$; $\log_3 \frac{1}{27}$; etcétera.

d) $\log_3 \sqrt[3]{9}$

e) $\log_5 \sqrt{5}$

f) $\log_4 2$

7. Como posibles respuestas:

$x = 8$	$y = 27$	$a = 2$	$b = 3$
$x = 25$	$y = 64$	$a = 5$	$b = 4$
$x = 1\,000$	$y = 216$	$a = 10$	$b = 6$

8.

a) Dom $= \{x \in \mathbb{R} : x < -5 \text{ o } x > 0\}$

b) Dom $= \{x \in \mathbb{R} : x < -3 \text{ o } x > 0; x \neq 2\}$

c) Dom $= \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 1 \text{ o } x > 3\}$

d) Dom $= \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ o } x > 1; x \neq 2\}$

e) Dom $= \left\{x \in \mathbb{R} : x > \frac{1}{5}\right\}$

f) Dom $= \left\{x \in R : 0 < x < \sqrt{3} \text{ o } x > 2\right\}$

g) Dom $= \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1 \text{ o } x > 2\}$

h) Dom $= \left\{x \in \mathbb{R} : x > \frac{3}{2}\right\}$

i) Dom $= \{x \in \mathbb{R} : x < -1 \text{ o } x > 1\}$

9.

a) $x = 27$

b) $x = 27$

c) $x = \frac{4}{3}$

d) $x = \frac{45}{24}$

f) $x = \frac{1}{9}$

f) $x = -1 \text{ o } x = \frac{7}{2}$

g) $x = 3 \text{ o } x = \frac{3}{81}$

h) $\varnothing$

i) $x = 100 \text{ o } x = \frac{1}{10}$

j) $x = 9$

10.

a) $\log_2 1 < \log_2 0{,}3 < \log_2 3 < \log_2 5$

b) $\log_{0,2} 7 < \log_{0,2} \frac{5}{2} < \log_{0,2} 2 < \log_{0,2} 1$

11.

$\{x \in \mathbb{R} : x > 12\}$ $\{m \in \mathbb{R} : m > 10\}$ $\{m \in \mathbb{R} : 0 < p < 1\}$

12.

a) F, $\log_b a$

b) F, $\log_2 (a-b) = \log_2 \frac{a}{b}$ o $\log_2 (a-b) = \log_3 \frac{a}{b}$

c) V

d) V

e) F, $\log_5 {}^{b2}$

f) V

13.

a) $\frac{3}{2}$ b) 5 c) 2 d) 3 e) 5

f) $-\frac{3}{2}$ g) 200 h) 132 i) $\log_3 40$ j) 0

14. $M = -16$

15.

a) $\log_3 45$

b) 4

c) $\frac{3}{2}$

d) $\log_{10} x^3 \sqrt{x+1}$

16.

a) $b = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right) = 10 (\log_{10} I - \log_{10} I_0)$

b) $\frac{I}{I_o} > 0$ Ambos tienen que tomar valores positivos $I > 0 \, e \, I_0 > 0$

17.

a) $A = 4$

b) $B = 10$

c) $C = 5$ o (2) u otras combinaciones

$D = 2$ o (5) u otras combinaciones, siempre que C y D sean mayores que 0.

d) $E = 2$

e) $F = 2 \quad G = 5$

18. 140 dβ

19. Respuesta abierta

20.

a) $x = 20$ b) $x = 4$ c) $x_1 = -7$ o $x_2 = 2$

d) $S = \varnothing$ e) $x = 1$ f) $x = 8$

g) $x = \frac{5}{3}$ h) $x = 5$ i) $x_1 = 2$ o $x_2 = 3$

j) $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ k) $x = 1$ l) $x_1 = 2$ 0 $x_2 = 4$

21.

a) (0; 3) b) $\mathbb{R}$ c) $(1;\infty)$

d) $(-\infty : -3) \cup \left(-\frac{6}{5};\infty\right)$ e) $[2;13] \setminus \{4\}$

22.

El error se deriva porque al dividir por$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$ no se cambió el signo de la desigualdad. Fíjate bien: el $\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$ es negativo.

23.

a) F, porque además de cumplir esa condición debe ser $x \neq 1$.

b) F; porque se debe cumplir que $x > 0$.

c) F, porque, por ejemplo, para $x = 3$ no se cumple que el argumento sea mayor que cero.

d) F, porque $x = -\frac{3}{4}$ y no es un número fraccionario, es racional.

e) F, porque $x = 5$.

f) V; g) V; h) V; i) V; j) V; k) V; l) V; m) V; n) V.

ñ) F, porque los que cumplen la condición son $-3 < x < 0$.

24. Respuesta abierta para que investiguen.

25. Respuesta abierta para que investiguen.

Epígrafe 2.3

1.

a) Cualquier número con dos cifras enteras.

b) Número de cinco cifras enteras.

c) Número con una cifra entera.

d) Número de cuatro cifras enteras.

e) Números que comiencen con dos ceros.

f) Números que comiencen con tres ceros.

2.

a) log$N$ = 1,8195 b) log$N$ = 1,8195

c) log$N$ = 2,8195 c) log$N$ = –2 + 1,8195

3.

a) log458 = 2,6609 b) log6,93 = 0, 8407 c)log24,3 = 1, 3856

d)log4 = 0,6021 e) log0,0195 = –2 + 0,2900

4.

a) 2,63 b) 224 c) 0,35

d) 8,93 e) 0,903 f) 43,5

5.

a) 53,3 b) 3 500 c) 0,0746

d) 17,0 e) 3,24 f) 1,53

6. 3,466 bit

7. Tabla 2.2

Tiempo (horas)	Número de células	Logaritmo del número de células
0	1	0
0,5	2	0,301
1	4	0,602
1,5	8	0,903
2	16	1,204
2,5	32	1,505
3	64	1,806
3,5	128	2,107
4	256	2,408
4,5	512	2,709
5	1024	3,0103
...		...
10	1048576	6,021

Epígrafe 2.4

1.

a) F, porque puede ser que tenga dominio restringido

b) F, porque cuando la base se encuentra entre cero y uno la función es decreciente, ejemplo: $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+5}$

c) F, porque las funciones exponenciales no son pares ni impares

d) V

e) V

2.

a) $\{y \in \mathbb{R} : y > 1\}$ $\{y \in \mathbb{R} : y > 0\}$ $\{y \in \mathbb{R} : y > 0\}$ $\{y \in \mathbb{R} : y > -9\}$

2.1 a) b) c) No tienen cero; d) El cero es $x_0 = 2$

3.

a – C b – A c – B d – A e – C f – C

4.

a) $y = 2^x + 3$ o $y = 2^x - 3$

b) $y = 5^{x+2} - 4$ o $y = 5^{x-2} - 4$

c) $y = 5^{x+2}$ o $y = 5^{x-2}$

d) $y = \left(\frac{1}{7}\right)^{x-1} + 3$

e) $y = 10^{x+1} - 8$

f) $y = 4^x 5$:

5.

a) $y = 2x-1 - 1$ b)

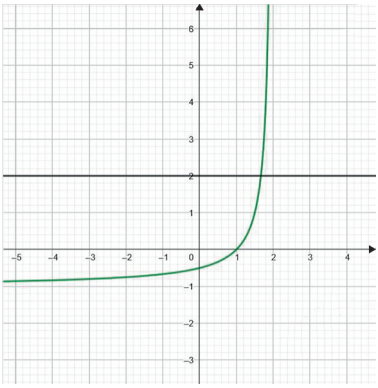


Fig. R30

c) $y = \log 2(x - 1) + 1$ Dom$\{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$ Im $\{y \in \mathbb{R}\}$

6.

a) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$

b)

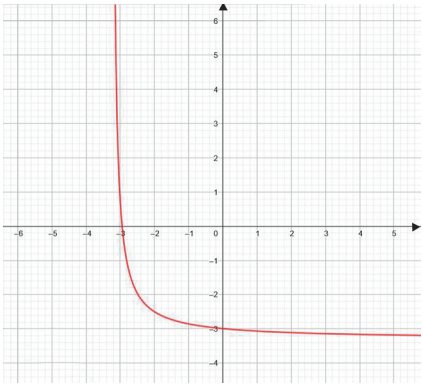


Fig. R31

7. a) $y = 2^{x-1} - 4$

b) Porque $y = -5$ no es un elemento del conjunto imagen de la función.

c) Para $\{x \in \mathbb{R} : \leq 3\}$

d) Para $\{x \in \mathbb{R} : > 3\}$

e) $y = -3{,}5$

f) Porque a medida que aumentan los valores del dominio de definición aumenta el valor de sus imágenes.

8. a) $y = 2^x + 1$

b) Imagen de la función [1;5)

c) Valor mínimo es $ym = 1{,}25$ y valor máximo no tiene.

d) Para todos los valores del dominio.

e) Porque no es simétrica con respecto al eje *x.*

9.

a) $y = 2^x$ b) $\{y \in \mathbb{R} : y > 0\}$ c) $f(-1) + f(0) = \frac{3}{2}$

d) Monótona creciente porque la gráfica asciende de izquierda a derecha, o sea, a medida que aumentan los valores del dominio de la función los valores de las imágenes son más grandes.

e) Es inyectiva porque si trazas una recta paralela al eje de las abscisas esta corta en un solo punto al gráfico de la función.

10.

Figura 2.79: *A*(0;1), *B*(2;0) y *C*(1;0)

11.

a) F, porque la proyección del gráfico abarca el semieje positivo de las *y* sin incluir al cero.

b) V

c) F, la función intersecta al eje de las abscisa en $x = 1$, donde cambia el signo, su gráfico para los valores menores que uno se encuentra por debajo del eje de las *x*0

d) V

12.

a) V, porque $y = -3$ es la asíntota horizontal y $x_0 = 2$ es el cero de la función.

b) F, porque la función no puede tomar el valor *ya* = –3.

c) V, porque cada imagen tiene solo una pre imagen.

d) F, porque el par correcto es (–2;–2,96).

e) F, porque la función no es par, ya que no es simétrica respecto al eje de la *y*.

13.

a) $f(x) = \log_3 x$

b) $f(x) = \log_3 (x-5) + 7$

c) $f(x) = \log_2 (x-4) - 1$

d) $f(x) = \log_3 (x+2) - 2$

14.

a) $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} : x > -1\}$ c) $\mathbb{R}$ d) $\{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} : x < 5\}$ f) $\mathbb{R}$ g) $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ h) $\{x \in \mathbb{R} : x \langle -3 \text{ o } x \rangle 3\}$

15.

a) V

b) V

c) F, porque para la función $f(x) = \log_2 x$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$, luego $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$

d) F, porque por definición $f(x) = \log_2 x$ con $x > 0$

e) F, porque para una función de la forma $(x) = \log_2 x - e$, tiene cero

16. (posibles respuestas)

a) $y = \log_5 (x-3)$ b) $f(x) = \log_3 7x$ c) $y = \log_6 (x^2 + 9)$

d) $y = \log_2 (x-1)$ e) $y = \log_4 (4-x)$ f) $y = \log_3 (x+2)$

17.

a) negativo b) positivo c) negativo e) positivo

18. (posibles respuestas)

a) (9;0) y (13;1) b) (5;0) y (12;–3) c) (1;1) y (3;2)

d) (5;3) y (13;4) e) (10;–3) y (1;–4) f) (6;1) y (15;0)

19.

a) $x = 0$ b) $x = -3$ o $x + 3 = 0$

c) $x = -2$ o $x + 2 = 0$ d) $x = 7$ o $x - 7 = 0$

20.

a) $f(x) = \log_2 (x+1) - 3$

b) $\{x \in \mathbb{R}; x > -1\}$ $\{x \in \mathbb{R}; x > 6\}$

21.

a) $a = 2$

b) (1;0)

c) Negativo, negativo, positivo, positivo. Porque la función es negativa (0;1) y positiva para los valores del dominio mayores que 1.

22.

a) $f(x) = \log_2 (x+4) + 1$

b) *i*) $\left\{x \in \mathbb{R} : -4 < x < -\frac{7}{2}\right\}$ o $\left(-4;-\frac{7}{2}\right)$

ii) $\{x \in \mathbb{R} : -3 < x \leq 0\}$

23. (posibles respuestas)

a) $y = \log_2(x+2)$

b) $y = \log_2(11-x)+4$

c) $y = \log x - 9$

d) $y = \log(3-x)+1$

e) $y = \log_3(x^2+10)$

f) $y = \log_5(x^2+x-2)$

25. Solución de CubaEduca

26. $f(x) = \log_{0,5}(x-2)$

27. Solución de CubaEduca

28.

a) $f(x) = \log_2(x-4)-1$

b) (0;6)

c) $f(x) = \log_2(x-4)-1$

$f(x) = \log_2(8-4)-1$

$f(x) = \log_2(x-4)-1$

29.

a) F, porque el dominio de la función es $\{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$

b) F, porque la función es positiva para los $\left\{x \in \mathbb{R} : x > \frac{7}{3}\right\}$

c) V

d) V

e) V

f) F, porque la ecuación de la función es $f(x) = log_3(x-2)+1$

30.

a) $x + 4 = 0$

b) $A(-3;0)$ y $B(5;1)$

c) Puede ser cualquier punto cuya abscisa sea menor que la abscisa de *A* y mayor que el valor de la asíntota.

31. Solución de Cubaeduca

32.

a) Es positiva, porque el gráfico de la función se encuentra por encima del eje de las *x*, desde las $x > 31$.

b) el par $\left(-\frac{1}{2};y\right)$ es un punto de la gráfica de la función, porque el dominio de la función son $\{x \in \mathbb{R} : x > -1\}$

c) ningún valor del dominio y su opuesto tienen la misma imagen, porque la función no es par.

33. Solución de Cubaeduca

34.

a) Positivo b) negativo c) negativo d) positivo

Ejercicios del capítulo 2

1. a) $x = 1$ b) $x = 3$ c) $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$ d) $x = 2$
e) $x_1 = 100$; $x_1 = 1\,000$ f) $x = 3$

2. a) $x = 1$ y $x = 0$ b) $x = 1$ y $x = 3$ c) $x = 1$ y $x = 3$
*d) $x = 0$ e) $x = 2$ *f) $x = 100$ y $x = \frac{1}{10}$ *g) $x = 0{,}321$
*h) $x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4}$ i) $x = 3$ j) $x = 100$ k) $(-9;-5) \cup [0;4)$

3. a) $x = 3$ b) $(\infty;-2] \cup [-1;\infty_+)$

4. a) $\left(\frac{11}{4};-\frac{2}{7}\right)$ b) $(4;4)$ c) $(3;4)$

5*. b) $x = \frac{\sqrt{2}-4}{2}$ c) $x = 2100$
d) $x = 3$ y $x = -2$ e) $x_1 = \log_{25} 6 x_2 = \log_6 5$
f) $x_1 = -1 + 0{,}4771;\ x_2 = 100$ g) $x < -2$

6. a) $\left\{x \in \mathbb{R} : x > \frac{2}{5}\right\}$ b) $\left\{x \in \mathbb{R} : x \left\langle \frac{2}{3} \text{ o } x \right\rangle 3\right\}$
c) $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ d) $\mathbb{R}$
e) $\left\{x \in \mathbb{R} : x \left\langle -\frac{1}{2} \text{o } x \right\rangle 3\right\}$ f) $\{x \in \mathbb{R} : x \langle 0 \text{ o } x \rangle 1\}$
g) $\left\{x \in \mathbb{R} : -2 < x < \frac{3}{2} \text{ o } 1 < x < 2\right\}$ h) $\{x \in \mathbb{R} : -3 < x \langle -2 \text{ o } x \rangle 2\}$

8. a) $x = \frac{5}{4}$ b) $x = \frac{13}{5}$
c) $x = 1$ d) $x = 7$
e) $x = 3$ f) $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$
g) $x = 0{,}8613$ h) $x = 6{,}003$

9. $I = I_0 \cdot C^x$ aplicando logaritmo decimal en ambos miembros
$\log I = \log\left(I_0 \cdot C^x\right)$
$\log I = \log I_0 + \log C^x$ aplicando las propiedades de la multiplicación
$\log I = \log I_0 + x \log C$ aplicando las propiedades de la potenciación
$x \log C = \log I - \log I_0$

10*. $:8{,}5^{2,3} \approx 137{,}297$

11. a) $\{x \in \mathbb{R} : 2 \le x \le 8\}$ b) $S = \varnothing$
c) $x \ge 1$ d) $\{x \in \mathbb{R} : -4 \le x \le -1\}$

12. $x = 1;\ x = 3$

13.

a) $x \in (1;9)$

b) $x \in \mathbb{R}$

c) $x \in [-\infty;0) \cup [1;+\infty)$

d) $x \in (-\infty;-4] \cup [-1;+\infty)$

14. ≈75,25

15. ≈75,41

16. ≈31,18

18. ≈70,05

20. $L = 5\dfrac{\log\dfrac{8}{tn}}{\log 2} + 90$

21.

a)

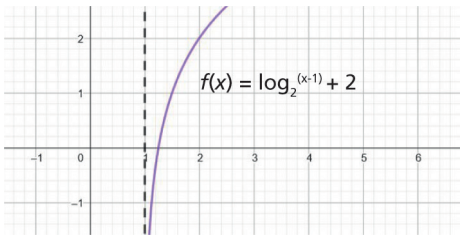
Valores admisibles en $f(x)$: $\{x \in \mathbb{R} : x > -5\}$

Valores admisibles en $g(x)$: $\{x \in \mathbb{R} : x > -3\}$

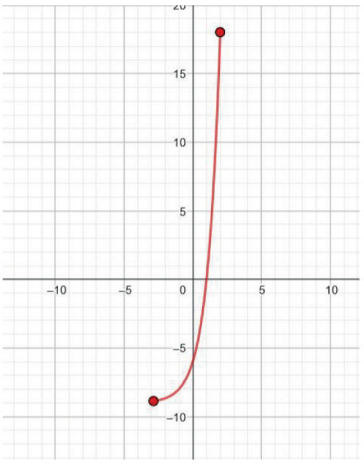
Valores admisibles en $h(x)$: $\{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$

b) 16

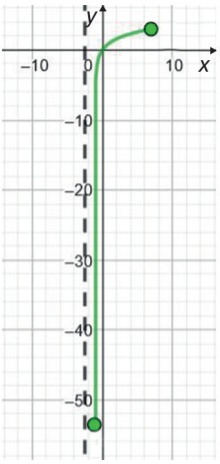
c) Gráfico



22. a)



b)



23. a) $t = 1$

b) $(0;4] \cup (13;+13)$

24. En el ejercicio debe aparecer, en el segundo sumando, $\log 4(x + 2)$ es decir cambiar el signo menos por el más, para responda a lo que pide (para qué valores), de lo contrario no da solución real.

Solución $x \in (-2;1)$

25. La respuesta puede ser variada en algunos incisos, que es la idea que el docente valorará con sus educandos.

a) $x = 3$

b) respuesta variada porque se pide intervalo, puede ser: (4;9) o (7;10), etc., serían los valores de x cuyas imágenes sean menores que 3.

c) $x < 4$.

d) los valores de x cuyas imágenes sean positivas.

26.

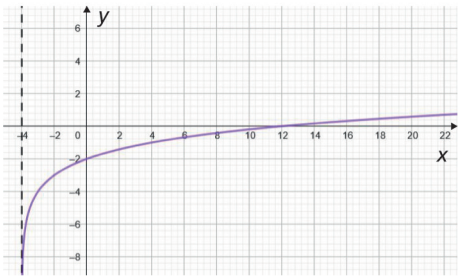
a) $f(x) = \log_2(x + 4) - 4$

b) $\text{Dom} : \{x \in \mathbb{R} : x > -4\}$
$\text{Img} : y \in \mathbb{R}$

c) $x = 12$

d) (0;–2)

e) Creciente en todo su dominio



27.

a) Las respuestas son variadas pero la base debe ser un valor entre 0 y 1.

b) $f(x) = \log_a(x+2)$ la condición es que $a > 1$

c) $f(x) = \log_a(x-1)$ la condición es que $a > 1$

d) l $f(x) = \log_a x - 1$

e) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$

28.

28.1 d) **28.2** b) **28.3** b) **28.4** la respuesta me da con 2 que no está

29.

29.1 b) **29.2** a) **29.3** c)

30.

a) Dom : $x \in [-4;2)$

b) Crece $x \in (0;2)$

c) $y = 1$

d) No es inyectiva, porque en el intervalo (–4,0) las imágenes son las mismas

e) si pertenece

31.

a) Dom: $x \in (0;+\infty)$ b) Creciente c) (1;0)

d) no es ni par ni impar e) no tiene f) es inyectiva

g) o no es elemento del dominio

32.

a) 220

Autoevaluación

1. a) V b) V c) F

2. Solo la solución del inciso c) pertenece a los naturales.

3. $(\infty;-2) \cup (3;\infty_+)$

5. Las expresiones de los incisos b y d.

6. a) $D = \frac{c}{p^k}$

b) La demanda aumentará cuando disminuya el precio y viceversa.

7. a) 100 mil b) 1 333 miles

8. a) $\{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$ b) $x = 4$

Capítulo 3

Epígrafe 3.1

1.

a) $\frac{\pi}{12}$ rad; b) $\frac{7\pi}{4}$ rad; c) $\frac{7\pi}{30}$ rad; d) $\frac{5\pi}{12}$ rad; e) $\frac{7\pi}{6}$ rad; f) $\frac{10\pi}{9}$ rad; g) $\frac{17\pi}{30}$ rad; h) $\frac{3\pi}{4}$ rad; i) 0,764 rad; j) 1,27 rad; k) 3,863 rad; l) 1,06 rad; m) 2,41 rad; n) 0,830 rad; o) $\frac{5\pi}{3}$ rad; p) $\frac{5\pi}{30}$ rad; q) 0,117 rad; r) 1,423 rad; s) 1,23 rad; t) 0,581 rad; u) 0,147 rad; v) 2,15 rad; w) 0,036 rad.

2.

a) 225º; b) 330º; c) 75º; d) 30º ; e) 315º; f) 49,1º; g) 108º; h) 216º; i) 84,8º; j) 53,7º; k) 377º; l) 48º; m) 54,4º; n) 323º; ñ) 66,5º.

3. $\alpha_{rad} = \frac{2}{3}$ rad ; $\alpha^0 = 38{,}2^\circ$

4. l = 52 cm

6. Área = 0,71 m^2.

Epígrafe 3.2

1. a) 60º; b) 75º; c) 134º; d) 155,6º; e) 24,4º; f) 78,5; g) 325,6º; h) 227º; i) 203º; j) 240,3º; k) 312,4º; l) 238,7º; m) 0; n) $\frac{\pi}{2}$; ñ) $\frac{2\pi}{3}$; o) π; p) $\frac{4\pi}{5}$; q) $\frac{3\pi}{4}$; r) 0,84; s) 4,24; t) 0,15; u) 6,03; v) 2,82; w) 0,05.

2. Se dan en orden seno, coseno y tangente de cada ángulo:

a) –0,9659;0,2588;–3,732

b) –0,7660;0,6428;–1,192

c) –0,9135;0,4067;–2,246

d) –0,805;0,593;–1,36

e) –0,9945;0,1045;–9,514

f) 0,5299;–0,8480;–0,6249

g) –0,6691;0,7431;–0,9004

h) –0,8192;0,5736;1,428

i) 0,6691;–0,7431;–0,9004

j) $\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};1$

k) 0,4726;0,8813;0,5362

l) 0,7986;–0,6018;–1,327

m) $-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};-1$

n) –0,9455;0,3256;–2,904

ñ) –0,1736;0,9848;–0,1763

o) 0;1;0

p) –0,4226;–0,9063;0,4663

q) 0,790;–0,613;–1,29

r) 0,751;0,660;1,14

s) –0,932;0,362;–2,58

t) $-0,818; 0,575; -1,42$ u) $0,266; 0,964; 0,275$

v) $1; 0$; no definido w) $\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; -\sqrt{3}$

x) $0,588; -0,809; -0,727$ y) $0; 1; 0$

3. a) – ; b) + ; c) – ; d) + ; e) – ; f) + ; g) +

4. a) II Cuadrante; b) III Cuadrante; c) II Cuadrante; d) I Cuadrante; e) IV Cuadrante; f) II Cuadrante

5. a) 0,45; b) 3 ; c) 0,87.

6. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) 0,5 ; c) $\sqrt{3}$; d) $-\sqrt{3}$; e) 1 ; f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; g) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; h) 0 ; i) $\sqrt{3}$; j) 1, 37; k) – 0,724; l) – 0,651

7. a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) 0,58 ; c) – 0,87 ; d) 0,87 ; e) $\sqrt{3}$; f) – 0,5 ; g) 1,15.

8. Demostración

9. 204

10. 30 m

11. 52 m

12. 55,4 m²

13. l = 39,74 m; h ≈ 3,47 m

14. 73,300 m

15. 124,85 m

Epígrafe 3.3.3

1. a) $\left\{x \in \mathbb{R}: x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R}: x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $\{x \in \mathbb{R}: x_1 = 82° + k \cdot 360°;\ x_2 = 358° + k \cdot 360°;\ k \in \mathbb{Z}\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R}: x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi;\ x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $\{x \in \mathbb{R}: x_1 = 30,9° + k \cdot 360°;\ x_2 = 149,1° + k \cdot 360°; k \in \mathbb{Z}\}$

f) $\left\{x \in \mathbb{R}: x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

g) $\left\{x \in \mathbb{R}: x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$

h) $\{x \in \mathbb{R}: x_1 = 64,8° + k \cdot 360°;\ x_2 = 295,2° + k \cdot 360°;\ k \in \mathbb{Z}\}$

i) $\left\{x \in \mathbb{R}: x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

j) $\{x \in \mathbb{R}: x_1 = 25,8° + k \cdot 360°;\ x_2 = 154,2° + k \cdot 360°;\ k \in \mathbb{Z}\}$

k) $\{x \in \mathbb{R}: x_1 = 202{,}3° + k \cdot 360°;\ x_2 = 337{,}7° + k \cdot 360°;\ k \in \mathbb{Z}\}$

l) $\left\{x \in \mathbb{R}: x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

2. $\{25{,}4°; 42{,}6°; 317{,}4°; 334{,}6°\}$

3. $2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$;

4. b) $(2k + 1)\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

5. a) $M\left(\frac{\pi}{2}\right) + N(\pi) = -1$; b) $\frac{3\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$;

6. ($x_1 = 22{,}6°$ y $x_2 = 112{,}6°$) $+2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$;

7. a) $T(3\pi) = 0$; b) $S = \{0°; \pi\}$.

8. $S = \left\{\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right\}$

Epígrafe 3.4.1

1. a) no ; b) no; c) no; d) no; sí; e) sí; f) sí; g) no; h) sí; i) sí; j) sí.

2. $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{3}$; 0,25 rad; – 0,1 rad; ninguno; ninguno.

3. a) no; b) no; c) sí; d) sí; e) sí; f) sí; g) sí; h) sí; i) sí; (sen $x \leq |1|$) .

4. a) 0; b) π; c) $-\pi$ y π; d) no; e) no; f) 0 y 2π

5. a) +;

b) – en $-\frac{\pi}{2} \leq x < 0$; y + en $0 < x < \pi$;

c) + en $\frac{\pi}{3} \leq x < \pi$; y – en $\pi < x < 2\pi$;

d) + en $-\frac{3\pi}{2} \leq x < -\pi$ y – en $-\pi \leq x < 0$;

e) + en $\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$ y – en $\pi < x < 2\pi$;

f) + en $\left(\frac{\pi}{2} \leq x < \pi \text{ y } 2\pi < x < \frac{5\pi}{2}\right)$; y – en $\pi < x < 2\pi$;

g) + en $\frac{\pi}{4} \leq x < \pi$ y $-$ en $\pi < x \leq \frac{5\pi}{4}$;

h) + en $-\frac{\pi}{2} \leq x < 0$

6. a) $x = \frac{\pi}{2}$; b) $x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{\pi}{2}$; c) ídem;

d) $x = -\frac{3\pi}{2}$ y $x = -\frac{3\pi}{2}$; e) $x = \frac{3\pi}{2}$ y $x = \frac{5\pi}{2}$; f) $x = -\frac{3\pi}{2}$ y $x = \frac{5\pi}{2}$;

g) $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$ y $x = \frac{5\pi}{2}$; h) $x = -\frac{\pi}{2}$

8. 1) Dom: $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{3}\right)$; 2) Im: $-1 \le f(x) < \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) máx.: –1;
4) creciente; 5) $\left(\frac{\pi}{3};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

9. a) Dom: $\left[-\frac{3\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right)$; b) Im: $-\frac{\sqrt{2}}{2} \le f(x) < \frac{\sqrt{3}}{2}$;
c) no (asimétrica con respecto al origen); d) $y = -1$; e) $\left[-\frac{3\pi}{4};-\frac{\pi}{3}\right]$;
f) (0;0); g) no (la función es discontinua en ese punto)

10. 1) Dom: $\left(-\frac{\pi}{3};2\pi\right]$; 2) $\left(-\frac{\pi}{3};2\pi\right]$; 3) impar en $\left(-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$;
4) (0;0), (π;0) y (2π;0); 5) máx.: 1 en $x = \frac{\pi}{2}$

Epígrafe 3.4.2

1. a) sí; b) no; c) sí; d) sí; e) sí; f) sí; g) no; h) sí; i) no; j) sí.

2. a) sí; b) sí; c) sí; d) no; e) no; f) no

3. a) $x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{\pi}{2}$; b) $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$; c) $x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{\pi}{2}$; d) $x = \frac{3\pi}{2}$;
e) $x = -\frac{\pi}{2}$; f) $x = -\frac{5\pi}{2}$, $x = -\frac{3\pi}{2}$ y $x = -\frac{\pi}{2}$

4. a) creciente; b) creciente en $-\pi < x < 0$ y decreciente en $0 < x \le \frac{\pi}{2}$;
c) creciente en $\pi < x < 2\pi$ y decreciente en $2\pi < x < 3\pi$;
d) decreciente en $\frac{\pi}{3} \le x \le \pi$ y creciente en $\pi \le x \le 3\pi$; e) decreciente;
f) creciente en $-\frac{\pi}{3} \le x < 0$ y decreciente en $0 < x < \frac{\pi}{2}$

5. a) – en $-\pi \le x < -\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2} < x \le \pi$, y + en $-\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2}$; b) +;
c) + en $-2\pi \le x < -\frac{3\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2} \le x < 0$, y – en $-\frac{3\pi}{2} \le x < -\frac{\pi}{2}$;
d) + en $0 \le x < \frac{\pi}{2}$ y – en $\frac{\pi}{2} < x \le \frac{3\pi}{4}$; e) – en $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ y + en $\frac{3\pi}{2} < x \le \frac{11\pi}{2}$;
f) + en $\frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$ y – en $\frac{5\pi}{2} < x \le 3\pi$.

6. a) $x = 0$; b) $x = -\pi$, $x = 0$ y $x = \pi$; c) $x = -2\pi$ y $x = -\pi$; d) $x = 0$ y $x = \pi$;
e) y $x = \pi$, $x = 2\pi$, $x = 3\pi$, $x = 4\pi$ y $x = 5\pi$; f) $x = 2\pi$ y $x = 3\pi$;
g) $x = \pi$, $x = 2\pi$ y $x = 3\pi$; h) $x = -\pi$, $x = 0$ y $x = \pi$.

8. a) V; b) F (en el primer y cuarto cuadrantes es decreciente);
c) V; d) V; e) $F(x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{\pi}{2}$ son ceros);
f) F (carece de mínimo); g) V.

Epígrafe 3.4.3

1. a) no; b) no; c) no; d) sí; e) sí; f) sí; g) no; h) sí; i) no; j) no

2. $\frac{\pi}{4}$; 0 y π; $-\frac{\pi}{3}$; 0,93 rad; 0,21 rad; 1,15 rad

3. a) –; f). Todas tienen solución, por cuanto la imagen de la función tangente es $\mathbb{R}$.

4. a) $x = -\pi$, $x = 0$ y $x = \pi$; b) $x = -2\pi$ y $x = -\pi$; c) $x = \pi$;
d) $x = -2\pi$, $x = -\pi$ y $x = 0$; e) $x = 0$ y $x = \pi$; f) $x = -\pi$ y $x = 0$

5. a) $x = \frac{\pi}{2}$; $x = \frac{3\pi}{2}$ y $\frac{5\pi}{2}$; b) $x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{\pi}{2}$;
c) $x = \frac{\pi}{2}$; $x = \frac{3\pi}{2}$; $x = \frac{5\pi}{2}$; $x = \frac{7\pi}{2}$ y $x = \frac{9\pi}{2}$; d) $x = -\frac{5\pi}{2}$ y $x = -\frac{\pi}{2}$;
e) $x = \frac{\pi}{2}$; f) $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$.

9. b) np ; c) sí

Epígrafe 3.4.4

1. a) sí; b) sí; c) no; d) sí; e) no; f) no; g) sí

2. –1,3; –1,04; 1,04; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4}$; 1,3

4. a) Dom: $\mathbb{R} \setminus \left\{ x \in \mathbb{R} : x = k\pi; x \le -\left(\frac{3\pi}{4} + |k|\pi\right);\ x \ge \frac{\pi}{4} + |k|\pi;\ k \in \mathbb{Z} \right\}$;
b) $x = -(2|k|+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$;
c) no (la función es discontinua en ese punto);
d) no (la función es asintótica con respecto a ese eje).

Epígrafe 3.4.5

4. a) – 3; b) 5; c) 2, – 2.

5. a) $\left\{ t \in \mathbb{R} : t = k\frac{7\pi}{5}; -4 \le k \le 3; k \in \mathbb{Z} \right\}$;
b) $\left\{ t \in \mathbb{R} : t = k\frac{2\pi}{3}; -1 \le k \le 3; k \in \mathbb{Z} \right\}$;
c) $\left\{ t \in \mathbb{R} : t = (2k+1)\pi; -1 \le k \le 1; k \in \mathbb{Z} \right\}$;
d) $\left\{ x \in \mathbb{R} : x = (2k+1)\frac{\pi}{4};\ -2 \le k \le 2;\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

6. a) $y = 2{,}3 \operatorname{sen} \frac{2}{3}t$; b) $y = 4 \operatorname{sen} 4t$; c) $y = \operatorname{sen} 20t$

7. a) $\frac{\pi}{2}$; b) $\frac{2\pi}{3}$; c) π; d) 4π

9. a) $y = 3 \operatorname{sen}(2t + 1)$; b) $y = \frac{1}{27}\cos(3t - 2)$

10. a) $y = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; b) Dom: $x \in \left(-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$; Im: $|y| \leq 3$; ni par ni impar;
c) $y = 2{,}5$; d) $x_1 = -\frac{\pi}{6}$ y $x_2 = \frac{2\pi}{3}$; e) $x \in [\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}]$; f) $x = \frac{\pi}{6}$

11.1 c) $\left\{x \in \mathbb{R} : -\pi < x < 3\frac{\pi}{2}\right\}$

11.2 a) $x_1 = -\frac{\pi}{4}$ y $x_2 = 3\frac{\pi}{4}$

11.3 c) $\left\{x \in \mathbb{R} : -\frac{\pi}{2} \leq x < -\frac{\pi}{4}\right\}$

11.4 a) $g(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

11.5 b) $\left(0; \sqrt{2}\right)$

11.6 b) $\frac{\pi}{4}$

Ejercicios del capítulo 3

1. a) #2 0,87; #4 1,29; #7 0,17; #8 0,73; #11 0,82
b) #2 210; #5 225; #6 300; #9 120; #11 150.

2.

Función seno	a)	0,764	0,961	0,169	– 0,677	0,731
	b)	– 0,5	– 0,707	– 0,866	0,866	0,5
Función coseno	a)	0,645	0,277	0,986	0,745	0,957
	b)	– 0,866	– 0,707	0,5	– 0,5	– 0,866
Función tangente	a)	1,185	3,467	0,172	0,895	1,072
	b)	0,577	1	– 1,732	– 1,732	– 0,5777

3. Demostración

4. $\approx$ 44 m

5. $\approx$ 4 km

6. Demostración

7. $(x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ y $x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

8. $S = \{\frac{\pi}{4}; 116{,}6^{\circ}; \frac{5\pi}{4}\}$.

9. a) $A(x) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$; b) $B(x) = 2$; c) $S = \{73{,}3^{\circ}; 106{,}7^{\circ}; 253{,}3^{\circ}\}$.

10. a) $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$;

b) $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$;

c) $(x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ y $x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

11. $y = \text{sen } x$: # 2; 4 y 5; $y = \cos x$: # 3; 4 y 6.

12. a) $x = \frac{3\pi}{2}$; b) $A(\frac{\pi}{4}) = 1{,}5$.

13. $x_1 = \frac{\pi}{2}$ y $x_2 = \pi$.

14. a) $F(\frac{\pi}{3}) = -0{,}62$; b) $x = \frac{2\pi}{3}$

15. a) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$; b) $(2k + 1)\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$; c) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

16. b) $(x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ y $x_2 = 48{,}6^{0} + k \cdot 360^{0})$ con $k\ k \in \mathbb{Z}$.

17. a) $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$; b) $-0{,}5$

18. $(x_1 = 212^{\circ} + k \cdot 360)$ y $x_2 = 328^{0} + k \cdot 360^{0})$ con $k\ k \in \mathbb{Z}$.

19. a) 2,25; b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k = 1, 2, 3, \ldots$

20. b) $\{x \in \mathbb{R}: x_1 = 0;\ x_2 = (2k+1)\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

21. a) $\left\{x \in \mathbb{R}: x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

22. $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

23. a) $\left\{x \in \mathbb{R}: x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; x_2 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

24. a) $(2k + 1)\frac{2\pi}{3}$ con $k \in \mathbb{Z}$; b) $-0{,}87$

25. b) $\{x \in \mathbb{R}: x_1 = 191{,}9^{\circ} + k \cdot 360^{\circ};\ x_2 = 348{,}1^{\circ} + k \cdot 360^{\circ};\ k \in \mathbb{Z}\}$

26. a) $\frac{3\pi}{2}$; $61{,}9^{\circ}$; $118{,}1^{\circ}$; b) 0.

27. a) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$; b) $x = 4{,}5$.

28. a) $\left\{x \in \mathbb{R}: x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi; x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$; b) -1.

29. a) $x_1 = 216{,}9°$ y $x_2 = 323{,}1°$; b) $\left\{x \in \mathbb{R}: x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; x_2 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$;

c) Sí; d) $(x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ y $x_2 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

30. a) $\left\{x \in \mathbb{R}: x_1 = k\pi; x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$; c) $\{x \in \mathbb{R}: -1 \le x \le 1\}$.

31. a) $(x_1 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ y $x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

32. a) $\left\{x \in \mathbb{R}: x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

33. a) $x_1 = 38{,}3°$ y $x_2 = 141{,}7°$

34. a) $x = \frac{\pi}{3}$; b) 8,7.

35. a) $\left\{x \in \mathbb{R}: x_1 = k\pi,\ k \le 4; x_2 = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \le 3;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

36. 1. d); 2. b); 3. a); 4. b)

37. 1. a) $y = 3\cos(4t + \pi) = 3\cos 4(t + \frac{\pi}{4})$

b) $y1 = -2\cos t$ y $y2 = 2\operatorname{sen}(2t - \pi) = 2\operatorname{sen} 2(t - \frac{\pi}{2})$

2. a) $|A| = 3$; $\varphi = \pi$; $T = \frac{\pi}{2}$; Imagen: $y \in [-3;3]$

b) $|A| = 2$; $\varphi = \pi$; $T = k\pi$; Imagen: $y \in [-2;2]$

Capítulo 4

Epígrafe 4.1.1

3. $\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7 = 50°$; $\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = 130°$

4. $\alpha = \beta = \gamma = 30°$; $\delta = 150°$

Epígrafe 4.1.2

1. 36°; 54°

2. 60°

5. 106°

6. b) 3,0 cm y 12 cm.

Epígrafe 4.1.3

4. 60°; 120°

Epígrafe 4.1.5

2. b) $\left(4 + 2\sqrt{2}\right)a$

3. $\frac{1}{2}$

4. 9 720 losas

5. $A = 2{,}5\ dm^2$; $L = 15{,}6\ cm$

6. $A = 7{,}26\ hm^2$

Epígrafe 4.2.1

1. a) $\sqrt{117} \approx 10{,}8$ u b) $\sqrt{101} \approx 10{,}0$ u c) $2\sqrt{2} \approx 2{,}82$ u
d) $\sqrt{10} \approx 3{,}16$ u e) 2,0 u f) $\sqrt{11{,}25} \approx 3{,}35$ u
g) $\approx 3{,}0$u h) $\sqrt{3{,}61} \approx 1{,}9$ u i) $\sqrt{1{,}69} \approx 1{,}3$u

2. c) no se puede construir un triángulo.

2.1

3. a) $y_B = 8{,}97$ y $y_B = 1{,}03$
b) $x_C = \pm 2\sqrt{11} \approx \pm 6{,}64$; $x_D = \pm\sqrt{11} \pm 3{,}32$
c) $x_H = 5{,}1$ y $x_H = -8{,}1$; $x_I = 0{,}7$ y $xI = -3{,}7$
d) no existe

4. a) (5;5)

5. a) 0,268; b) 1; c) 1,73; d) 4,70; e) no existe; f) – 2,75; g) – 0,700; h) 0

6. a) 168,7°; b) 15,1°; c) 57,4°; d) 39,0°; e) 10,3°; f) 60°

7. b) 60^0

8. a) $\sqrt{17} \approx 4{,}12$; $3\sqrt{5} \approx 6{,}72$; $2\sqrt{5} \approx 4{,}48$; escaleno
b) $\sqrt{28{,}25} \approx 5{,}32$; $\sqrt{\frac{29}{2}} \approx 2{,}70$; $\sqrt{26} \approx 5{,}10$

9. $\sqrt{5} \approx 2{,}24$

10. $A = 15$ u2

11. a) longitudes: $2\sqrt{5}$; pendientes: $\frac{1}{2}$ y –2; cuadrado
b) longitudes: $6\sqrt{2}$ y $3\sqrt{2}$; pendientes: 1 y –1; rombo
c) longitudes: $4\sqrt{2}$ y $2\sqrt{5}$; pendientes: 1 y $-\frac{1}{2}$; paralelogramo
d) longitudes: $2\sqrt{13}$; pendientes: $\frac{2}{3}$ y $-\frac{3}{2}$; cuadrado
e) longitudes: 10 y 4; pendientes: $\frac{3}{4}$; no definida: no pertenece a la clasificación dada.
f) longitudes: $\sqrt{65}$; pendientes: $\frac{7}{4}$; $-\frac{1}{8}$; trapecio
g) longitudes: $\sqrt{65}$ y $\sqrt{68}$; pendientes: 4 y $-\frac{1}{8}$; no pertenece a la clasificación dada.

12. a) 10 u; $m = -\frac{4}{3}$; (–1;4); b) 7,32 u; $m = \frac{1}{3}$; (0;1)2 c) 8,96 u; m = –2; (4;3)
d) 5,64 u; m = 1; (6;1)

13. a) $B(7;-3)$; 10 u; $143{,}1^0$ b) $A(3;1)$; 6,32 u; $18{,}4^0$
c) $B(0;0)$; 7,22 u; $56{,}3^0$ d) $A(-3;-2)$; 10 u; $36{,}9^0$

14. 24 u^2

15. a) 20,3 u

16. b) paralelogramo

18. a) 20 u^2 b) (2;4); $\sqrt{10} \approx 3{,}16$

19. a) (0;3); 3 b) (1;1); 4 c) (0;3); 5 d) (–3; 1); 5

20. c. $A(4;1)$)

26. 18 hm2; 22,100 km; (10;50)

27. a) (0;0) (1;2) 24. b) (– 3;1), (–1;2), (1;3) c) (– 4; –3), (–2;0), (0;3)
d) (1; –1), (–3;2), (–7;5)

28. a) $C(8;0)$ b) 1,0u

Epígrafe 4.2.2

1. a) $m = -\frac{2}{3}; \left(0;\frac{8}{3}\right)$ b) $m = \frac{3}{2}; \left(0;-\frac{5}{2}\right)$ c) $m = -\frac{5}{2}; (0;-2)$
d) $m = -\frac{2}{5}; (0;0)$ e) $m = m = -\frac{\sqrt{2}}{2}; (0;-\sqrt{2})$ f) $m = 2\sqrt{3}; (0;3\sqrt{3})$

2. a) $4x - y - 10 = 0$ b) $3x + y + 13 = 0$ c) $x - 3y - 6 = 0$
d) $2x + 2y + 3 = 0$ e) $y - 2 = 0$ f) $12x + 16y - 3 = 0$
g) $x + 4y + 16 = 0$ h) $12x - 24y + 5 = 0$ i) $\sqrt{3}\,x - y - 1 = 0$
j) $\sqrt{2}x - 2y + 2(\sqrt{2} - 1) = 0$

3. a) $2x - y - 1 = 0$ b) $5x + y + 10 = 0$ c) $4x + y + 4 = 0$
d) $9x + 2y - 19 = 0$ e) $3x - 2y - 6 = 0$ f) $4x - 10y - 13 = 0$
g) $x - 3 = 0$ h) $3x - 2y - 10 = 0$ i) $4x - 15y + 3 = 0$
j) $\sqrt{6}\,x + y - 2\sqrt{2} = 0$

4. $3x - y + 6 = 0$

5. a) $\sqrt{3}\,x - 3y + 3(2\sqrt{3} - 3) = 0$ b) $x - y + 3 = 0$
c) $\sqrt{3}\,x - y + 3(2\sqrt{3} - 1) = 0$ d) $x - 6 = 0$ e) $y - 3 = 0$

6. Eje y; $x = 0$; eje x; $y = 0$

7. $y = -3x - 2 = 0$

8. a) $\left(\frac{101}{13}\right);\left(\frac{164}{13}\right)$ b) no tiene c) infinitos, las rectas coinciden.
d) (0; 0) e) (4; 5) f) (–1; 3)

9. a) $-\frac{5}{3}$ b) $\frac{3}{5}$

10. a) $2x - 3y - 23 = 0$ b) $3x + 2y - 2 = 0$

11. b) $\beta = 2$

12. a) rombo b) 5,0u c) $3x - 4y - 20 = 0$

13. $\alpha = -31$

14. $\alpha = -\overline{5}$

15. $x = 15$

16. $36x + 24y + 35 = 0$

17. $2x - 3y + 15 = 0$

19. 20 u^2

20. AC: $6x - 7y - 14 = 0$; BD: $x + y - 6 = 0$

21. a) $x - 2y + 4 = 0$ b) $G\left(\frac{8}{3};\frac{5}{3}\right)$ c) 62,6°

22. a) $3x + 2y + 25 = 0$; $3x - 5y + 32 = 0$; $2x - y - 9 = 0$

23. (3;2); (0;–7); (4;1)

24. $x - 3 = 0$; 68,2°

25. $x_A = 4$; $y_B = -1$

26. $y = -8$

27. a) 5,0 u b) $\frac{1}{2} = 0{,}5u$ c) $\sqrt{5} : 5 \approx 0{,}448u$ d) $6\sqrt{10} : 5 \approx 3{,}79u$

28. a) $2\sqrt{5}$ u

29. 2,5 u

30. $\sqrt{17} \approx 4{,}12$

31. 12 u^2

32. $6\sqrt{10} : 5 \approx 3{,}79$; $12\sqrt{34} : 17 \approx 4{,}12$; $4\sqrt{2} \approx 5{,}64$
76°; 63,4°; 40,6°

33.

34. $C\left(-\frac{17}{3};-\frac{31}{3}\right)$ o $C(1; 3)$

35. a) escaleno
b) P = 16,1 u; A = 12 u^2; ángulos interiores: 45°; 71,6° y 63,4°
c) circuncentro (2;2); ortocentro (3;1), baricentro $\left(\frac{7}{3};\frac{5}{3}\right)$

36. $|x| - 3 = 2|y|$ 34. $x^2 - 8y + 16 = 0$

37. $x^2 - 4x - 2y + 11 = 0$; $y \geq 3$

Ejercicios del capítulo 4

1. $y = 5$

2. $y = 5$

4. a) $2x + y - 9 = 0$ b) $x + 4y - 15 = 0$ c) $x + 4y + 6 = 0$

5. b) trapecio rectángulo en C y F.

6. a) $3x + 2y + 1 = 0$

7. $12x - 5y + 61 = 0$ y $12x - 5y + 22 = 0$ o
$12x - 5y + 61 = 0$ y $12x - 5y + 100 = 0$

8. Lados: $2x - 5y - 26 = 0$; $2x - 5y + 3 = 0$
Diagonal: $7x - 3y - 33 = 0$

9. $y = \frac{1}{2}x + 1$ y $y = 2x - 2$

10. $p = \pm 30$

11. a) $3x + y - 7 = 0$; b) $x + 3y + 11 = 0$; c) $x - y - 1 = 0$

12. (6;– 6)

13. a) $2x - y + 10 = 0$ o $3x + 2y - 6 = 0$
b) $2x + y - 18 = 0$ o $5x - 4y + 20 = 0$
d) $x = 0$ o $x + 2y - 2 = 0$ o $x - 2y + 2 = 0$

15. a) 82,9° b) 116,6°

16. $6x + 4y - 19 = 0$

17. $0x - 6y + 23 = 0$

18. (2;– 3)

19. (– 4;0)

20. 9,8 u

21. $\sqrt{13} \approx 3{,}61$; $2x + 3y - 13 = 0$

22. 45 u^2

23. a) (2;5); (–1;4); (0;2)
b) $\sqrt{41} \approx 6{,}4u\sqrt{5} \approx 2{,}24u$ c) 37,9° y 142,1°

24. a) se cortan en el punto $(3;\frac{1}{2})$
b) son paralelas, distancia 4 u

25. (3;4)

28. a) $m = -\frac{4}{3}$ b) (3;0), (0;4) c) $126{,}9^0$ d) $6u^2$ $24 \cdot x + y - 6 = 0$

29. $x + y - 7 = 0$

30. $2x + y - 8 = 0$; $-2x + y - 8 = 0$

31. MP: $3x - y - 2 = 0$; NE: $x - 5y + 4 = 0$; ND: $x + 3y - 12 = 0$

32. a) $x - y - 1 = 0$; $x - y + 4 = 0$; $x + y - 10 = 0$; $x + y - 3 = 0$
b) $5x - 2y = 0$; $5x - 2y - 15 = 0$; $2x + 5y = 0$; $2x + 5y - 35 = 0$

33. a) $B(0;3)$, $G(5;–6)$, $x - 4y + 26 = 0$; $4x + 5y - 1 = 0$; $5x + y - 17 = 0$
b) $B(0;0)$, $G(–6;2)$; $x - 5y + 16 = 0$; $x + y + 4 = 0$; $5x - y - 16 = 0$
c) $B(3;2)$, $G(–3;2)$; $3x - 4y + 17 = 0$; $3x + 5y - 1 = 0$; $6x + y - 38 = 0$

34. a) 5,0 u b) 10u

35. a) $\delta \approx 44^0$ b) $\delta \approx 53^0$ c) $\delta = 45^0$ d) $\delta = 0^0$

36. d ≈ 1,7u

37. a) $3x - y + 5 = 0$ b) $\delta \approx 63{,}4^0$ c) 20 u^2

38. $\left(\frac{a}{2}\left(3+\sqrt{3}\right);\frac{a}{2}\left(3+\sqrt{3}\right)\right)$; 15^0

39. b) La distancia entre las rectas r_1 y r_2 es 3,0u

41. a) $A \approx 31{,}3$ u^2 b) $A = 30$ u^2 c) 33 u^2

42. *M* se encuentra a 0,71 km al este, y 3,6 km al norte de *A*, a una distancia aproximada de 3,7 km

43. 3,4 km

Capítulo 5

Epígrafe 5.1

1. a) $\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{(y-4)^2}{2}=1$ b) $\frac{(x-5)^2}{44}+\frac{(y+2)^2}{44}=1$ c) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{3}=1$

d) $\frac{x^2}{18}+\frac{(y-5)^2}{18}=1$ e) $\frac{(x-1/3)^2}{\frac{31}{9}}+\frac{(y-2)^2}{\frac{31}{9}}=1$ f) $\frac{(x-3{,}2)^2}{37{,}21^2}+\frac{y^2}{37{,}21^2}=1$

2. a) $(x+3)^2+(y-2)^2=1$ b) $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$ c) $x^2+y^2=2{,}25$

d) $\frac{x^2}{2}+\frac{(y-1)^2}{2}=1$

3. a) $O(0;0)$; $r=7$ b) $O(3;-3)$; $r=2\sqrt{5}$ c) $O(0;5)$; $r=6$

d) $O(-2;1)$; $r=5$ e) $O(-3;0)$; $r=3$ f) $O(-4{,}5;4)$; $r=\sqrt{20{,}5}$

g) $O(0;4)$; $r=\sqrt{14}$ h) $O(-2;1{,}5)$; $r=\sqrt{15{,}5}$

Epígrafe 5.2

1.

Eje mayor	Eje menor	Vértices	Focos	Excentricidad
$2\sqrt{6}$	$2\sqrt{2}$	$A_1\left(-\sqrt{6};0\right)$	$F_1(-2;0)$	0,816
		$A_2\left(\sqrt{6};0\right)$	$F_2(2;0)$	
		$B_1\left(0;\sqrt{2}\right)$		
		$B_2\left(0;-\sqrt{2}\right)$		

2. $F_1(-8;0)$ y $F_2(8;0)$

3. a) $O(0;0)$, $r=7$ b) $O(3;-3)$, $r=2\sqrt{5}$ c) $O(0;5)$, $r=6$ d) $O(-2;1)$, $r=5$
e) $O(-3;0)$, $r=3$ f) $O(-4;5;4)$, $r=\sqrt{20{,}5}$ g) $O(0;4)$, $r=\sqrt{14}$
h) $O(-2;1{,}5)$, $r=\sqrt{15{,}5}$

4.

$A_1(-2;0)$ $A_2(2;0)$

$B_1\left(0;\sqrt{2}\right)$ $B_2\left(0;-\sqrt{2}\right)$

$F_1\left(-\sqrt{2};0\right)$ $F_2\left(\sqrt{2};0\right)$

5.

a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

b) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$

c) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$

d) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$

e) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$

f) $\frac{x^2}{0,25}+\frac{y^2}{4}=1$

g) $\frac{x^2}{36}+\frac{(x+3)^2}{27}=1$

h) $\frac{(x+1)^2}{36}+\frac{(y+1)^2}{20}=1$

i) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{0,75}=1$

Epígrafe 5.3

1. a) $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y-3)^2}{4}=1$

b) $\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

c) $\frac{x^2}{119}-\frac{y^2}{25}=1$

d) $\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{20}=1$

e) $\frac{(x+5)^2}{9}-\frac{(y-3)^2}{\frac{25}{16}}=1$

f) $\frac{x^2}{9}-\frac{(y+5)^2}{16}=1$

g) $7x^2 - 9y^2 = 225$

h) $12(x + 4)^2 - 16(y - 1)^2 = 75$

2. a) $\frac{y^2}{81}-\frac{x^2}{16}=1$

b) $\frac{(y-2)^2}{16}-\frac{(x-1)^2}{9}=1$

c) $\frac{y^2}{25}-\frac{(x-3)^2}{11}=1$

d) $\frac{(y+3)^2}{64}-\frac{(x+1)^2}{\frac{1024}{9}}=1$

e) $\frac{(y-8)^2}{100}-\frac{(x+4)^2}{100}=1$

f) $\frac{(y+7)^2}{81}-\frac{x^2}{144}=1$

g) no existe

h) $\frac{(y-1)^2}{0,5}-\frac{(x+5)^2}{1,5}=1$

3. a) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{21}=1$ b) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$

c) $\frac{(y+5)^2}{4}-\frac{(x-4)^2}{5}=1$ d) $\frac{(x+5/2)^2}{\frac{49}{4}}-\frac{(y-3)^2}{18}=1$

Epígrafe 5.4

1. a) $(y-2)^2=16(x+1)$ b) $x^2=-8(y-3)$ c) $y^2=12x$

d) $y^2=20x$; $x^2=20y$; $y^2=-20x$; $e^2=20y$

e) $(y-3)^2=-8(x+2)$ f) $(x-4)=-\frac{1}{2}(y+1)$

2. a) V (0;0); F (5;0); ℓ: $x+5=0$

b) V (0;0); F $(0;-\frac{3}{4})$; ℓ: $x=\frac{3}{4}$

c) V (0;3); F (2;3); ℓ: $x=-2$

d) V (3;3); F (3;2); ℓ: $x=-2$

e) V (– 3;0); F $(-3;\frac{1}{3})$; ℓ: $3y+1=0$

f) V (4;0); F (6;2); ℓ: $x-5=0$

g) No es una parábola.

h) V $\left(\frac{3}{2};\frac{10}{4}\right)$; F $\left(\frac{5}{2};-4\right)$; ℓ: $x=-\frac{11}{2}$

3. $x^2=-12y$

4. $y^2=8(x-3)$

5. $d(P;F)=12$

6. $(x+2)^2=-4(x+1)$

7. a) $(y+1)^2=8(x-2)$ b) ℓ: $x=0$

8. $y=\frac{12}{35}x-\frac{72}{35}$

9. a) (5 ; 5) b) (0 ; 6) , (– 1 ; 4) c) (1 ; 4) d) (–9;14) , (–9;14)

$\left(\frac{16}{3};\frac{1}{9}\right)$ e) No tienen f) (0 : 0,25) , $\left(\frac{1}{9};0{,}75\right)$

10. a) (4;4), (4;– 5) b) (4;9), (4;– 3), (– 2;3) c) (0,36 – 0,23), (– 2,36;– 0,23)

d) No existen. e) (4,87;2), (– 2,87;2)

11. $(x-2)^2+y^2=16$

12*. $x^2=5y$; ℓ: $4y+5=0$

13. 9,7 u

14. $(x-3)^2=-4(y-3)$

15. $x^2+y^2+2xy-12x+4y+20=0$

16. $x_{max}=\frac{200\text{m}}{m^2+1}$; $y_{máx}$ (evaluar la ecuación para $x=\frac{1}{2}$ $x_{max}=\frac{100\varphi\text{m}}{m^2+1}$).

Epígrafe 5.5

1. a) Elipse: $\frac{x^2}{467}+\frac{y^2}{259}=1$ b) Hipérbola: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

c) Parábola: $y^2 = 10x$

d) Hipérbola: $9\,216\,x^2 - 384\,y^2 = 62$

e) Elipse: $49x^2 + 112y^2 = 4\,096$ f) Parábola: $y^2 = 4x$

2. a) $\rho = \frac{5\sqrt{3}}{6+\sqrt{21}\cos\varphi}$; $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

b) $\rho = \frac{4\sqrt{6}}{3+\sqrt{15}\cos\varphi}$; $y^2 = -\frac{8\sqrt{6}}{3}x+\frac{2}{3}x^2$

c) $\rho = \frac{1}{1+\cos\varphi}$; $y^2 = -2x$

d) $\rho = \frac{4}{3+\sqrt{5}\cos\varphi}$; $y^2 = -\frac{8}{3}x-\frac{4}{9}x^2$

e) $\rho = \frac{9}{2+\sqrt{13}\cos\varphi}$; $y^2 = -9\,x\,\frac{9}{4}\,x^2$

f) $\rho = \frac{1}{20+20\cos\varphi}$; $y^2 = -\frac{1}{16}x$

g) Es una circunferencia.

3. a) $\rho = \frac{1}{1+\cos\varphi}$; $y^2 = 2x$

b) $\rho = \frac{1{,}5}{1+0{,}5\cos\varphi}$; $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$; $y^2 = -3x-\frac{3}{4}x^2$

c) $\rho = \frac{6}{1+2\cos\varphi}$; $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$; $y^2 = -3x-\frac{3}{4}x^2$

d) $\rho = \frac{15}{1+12\cos\varphi}$; $20\,449x^2 - 143y^2 = 225$; $y^2 = -30x + 143x^2$

e) $\rho = \frac{2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}\cos\varphi}$; $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$; $y^2 = -2\sqrt{2}\,x-\frac{1}{2}x^2$

5. a) $\rho = \frac{9}{5+4\cos\varphi}$; $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

b) $\rho = \frac{9}{2+3\cos\varphi}$; $25x^2 - 20y^2 = 324$

6. $\pi ab\ u^2$

7. $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \operatorname{sen}\theta \end{cases}$

Ejercicios del capítulo 5

1. a) $(x-4)^2+(y-3)^2=64$ b) $(x-5)^2+(y+2)^2=85$
c) $(x-4)^2+(y-5)^2=17$ d) $(x-6)^2+y^2=72$

2. $k=-8$

3. a) 7 b) 17 c) 2

4. $(x+2y-6=0$

5. $(x-3)^2+(y-1)^2=38$

6. a) $\frac{(x-4)^2}{49}+\frac{(y-6)^2}{36}=1$ o $\frac{(x-4)^2}{36}+\frac{(y-6)^2}{49}=1$

b) $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y-4)^2}{7}=1$

c) $\frac{x^2}{144}+\frac{(y-5)^2}{63}=1$ o $\frac{x^2}{63}+\frac{(y-5)^2}{144}=1$

7. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

8. $d(F_1;B)=2{,}6$; $d(F_2;B)=7{,}4$
Se muestra que: $(F_1;B)+d(F_2;B)=2^a$.

9. $5x+12y+10=0$; $x-2=0$

10. a) 40 u² b) 13,4 u²

11. a) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$ o $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{27}=1$ b) $\frac{(x+4)^2}{36}-\frac{(y-1)^2}{28}=1$

c) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$ d) $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$

12. $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$

13. $e=1,81$; O(2;– 3); $F1(-1{,}61;-3)$; $F2(5{,}61;-3)$;
$3x-2y-12=0$; $3x+2y=0$

14. $\frac{x^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{3{,}2}=1$

15. a) $(y-3)^2=-\frac{9}{4}(x-2)$ o $(x-2)^2=-\frac{4}{3}(x-3)$

b) $y^2=-12(x-3)$ c) $(y-2)^2=8(x-3)$

d) $(y-2)^2=-12(y-1)$

16. a) V $(\frac{1}{2};-2)$; F (2;– 2); $x+1=0$

b) V (– 0,5;1); F $(-0{,}5;\frac{13}{16})$; $16y-19=0$

17. $(y+2)^2=-4(x+1)$

18. $(x+1)^2+(y-3)^2=18$

19. $(y+1)^2=8(x-2)$

20. $24(x-\frac{5}{2})^2+25(y+2)^2=150$

Tabla de senos y cosenos

Seno												
Grad.	**,0**	**,1**	**,2**	**,3**	**,4**	**,5**	**,6**	**,7**	**,8**	**,9**	**(1,0)**	
0	0,0000	0,0017	0,0035	0,0052	0,0070	0,0087	0,0105	0,0122	0,0140	0,0157	0,0175	89
1	0,0175	0,0192	0,0209	0,0227	0,0244	0,0262	0,0279	0,0297	0,0314	0,0332	0,0349	88
2	0,0349	0,0366	0,0384	0,0401	0,0419	0,0346	0,0454	0,0471	0,0488	0,0506	0,0523	87
3	0,0523	0,0541	0,0558	0,0576	0,0593	0,0610	0,0628	0,0645	0,0663	0,0680	0,0698	86
4	0,0698	0,0715	0,0732	0,0750	0,0767	0,0785	0,0802	0,0819	0,0837	0,0854	0,0872	85
5	0,0872	0,0889	0,0906	0,0924	0,0941	0,0958	0,0976	0,0993	0,1011	0,1028	0,1045	84
6	0,1045	0,1063	0,1080	0,1097	0,1115	0,1132	0,1149	0,1167	0,1184	0,1201	0,1219	83
7	0,1219	0,1236	0,1253	0,1271	0,1288	0,1305	0,1323	0,1340	0,1357	0,1374	0,1392	82
8	0,1392	0,1409	0,1426	0,1444	0,1461	0,1478	0,1495	0,1513	0,1530	0,1547	0,1564	81
9	0,1564	0,1582	0,1599	0,1616	0,1633	0,1650	0,1668	0,1685	0,1702	0,1719	0,1736	80
10	0,1736	0,1754	0,1771	0,1788	0,1805	0,1822	0,1840	0,1857	0,1874	0,1891	0,1908	79
11	0,1908	0,1925	0,1942	0,1959	0,1977	0,1994	0,2011	0,2028	0,2045	0,2062	0,2079	78
12	0,2079	0,2096	0,2113	0,2130	0,2147	0,2164	0,2181	0,2198	0,2215	0,2233	0,2250	77
13	0,2250	0,2267	0,2284	0,2300	0,2317	0,2334	0,2351	0,2368	0,2385	0,2402	0,2419	76
14	0,2419	0,2436	0,2453	0,2470	0,2487	0,2504	0,2521	0,2538	0,2554	0,2571	0,2588	75
15	0,5288	0,2605	0,2622	0,2639	0,2656	0,2672	0,2689	0,2706	0,2723	0,2740	0,2756	74
16	0,2756	0,2773	0,2790	0,2807	0,2823	0,2840	0,2857	0,2874	0,2890	0,2907	0,2924	73
17	0,2924	0,2940	0,2957	0,2974	0,2990	0,3007	0,3024	0,3040	0,3057	0,3074	0,3090	72
18	0,3090	0,3107	0,3123	0,3140	0,3156	0,3173	0,3190	0,3206	0,3223	0,3239	0,3256	71
19	0,3256	0,3272	0,3289	0,3305	0,3322	0,3338	0,3355	0,3371	0,3387	0,3404	0,3420	70
20	0,3420	0,3437	0,3453	0,3469	0,3486	0,3502	0,3518	0,3535	0,3551	0,3567	0,3584	69
21	0,3584	0,3600	0,3616	0,3633	0,3649	0,3665	0,3681	0,3697	0,3714	0,3730	0,3746	68
22	0,3746	0,3762	0,3778	0,3795	0,3811	0,3827	0,3843	0,3859	0,3875	0,3891	0,3907	67
23	0,3907	0,3923	0,3939	0,3955	0,3971	0,3987	0,4003	0,4019	0,4035	0,4051	0,4067	66
24	0,4067	0,4083	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4163	0,4179	0,4195	0,4210	0,4226	65
25	0,4226	0,4242	0,4258	0,4274	0,4289	0,4305	0,4321	0,4337	0,4352	0,4368	0,4384	64
26	0,4384	0,4399	0,4415	0,4431	0,4446	0,4462	0,4478	0,4493	0,4509	0,4524	0,4540	63
27	0,4540	0,4555	0,4571	0,4586	0,4602	0,4617	0,4633	0,4648	0,4664	0,4679	0,4695	62
28	0,4695	0,4710	0,4726	0,4741	0,4756	0,4772	0,4787	0,4802	0,4818	0,4833	0,4848	61
29	0,4848	0,4863	0,4879	0,4894	0,4909	0,4924	0,4939	0,4955	0,4970	0,4985	0,5000	60
30	0,5000	0,5015	0,5030	0,5045	0,5060	0,5075	0,5090	0,5105	0,5120	0,5135	0,5150	59
31	0,5150	0,5165	0,5180	0,5195	0,5210	0,5225	0,5240	0,5255	0,5270	0,5284	0,5299	58
32	0,5299	0,5314	0,5329	0,5344	0,5358	0,5373	0,5388	0,5402	0,5417	0,5432	0,5446	57
33	0,5446	0,5461	0,5476	0,5490	0,5505	0,5519	0,5534	0,5548	0,5563	0,5577	0,5592	56
34	0,5592	0,5306	0,5621	0,5635	0,5650	0,5664	0,5678	0,5693	0,5707	0,5721	0,5736	55
35	0,5736	0,5750	0,5764	0,5779	0,5793	0,5807	0,5821	0,5835	0,5850	0,5864	0,5878	54
36	0,5878	0,5892	0,5906	0,5920	0,5934	0,5948	0,5962	0,5976	0,5990	0,6004	0,6018	53
37	0,6018	0,6032	0,6046	0,6060	0,6074	0,6088	0,6101	0,6115	0,6129	0,6143	0,6157	52
38	0,6157	0,6170	0,6184	0,6198	0,6211	0,5225	0,6239	0,6252	0,6266	0,6280	0,6293	51
39	0,6293	0,6307	0,6320	0,6334	0,6347	0,6361	0,6374	0,6388	0,6401	0,6414	0,6428	50
40	0,6428	0,6441	0,6455	0,6468	0,6481	0,6494	0,6508	0,6521	0,6534	0,6547	0,6561	49
41	0,6561	0,6574	0,6587	0,6600	0,6613	0,6626	0,6639	0,6652	0,6665	0,6678	0,6691	48
42	0,6691	0,6704	0,6717	0,6730	0,6743	0,6756	0,6769	0,6782	0,6794	0,6807	0,6820	47
43	0,6820	0,6833	0,6845	0,6858	0,6871	0,6884	0,6896	0,6909	0,6921	0,6934	0,6947	46
44	0,6947	0,6959	0,6972	0,6984	0,6997	0,7009	0,7022	0,7034	0,7046	0,7059	0,7071	45
	(1,0)	**,9**	**,8**	**,7**	**,6**	**,5**	**,4**	**,3**	**,2**	**,1**	**,0**	**Grad.**
Coseno												

Tabla de senos y cosenos

Seno												
Grad.	**,0**	**,1**	**,2**	**,3**	**,4**	**,5**	**,6**	**,7**	**,8**	**,9**	**(1,0)**	
45	0,7071	0,7083	0,7096	0,7108	0,7120	0,7133	0,7145	0,7157	0,7169	0,7181	0,7193	44
46	0,7193	0,7206	0,7218	0,7230	0,7242	0,7254	0,7266	0,7278	0,7290	0,7302	0,7314	43
47	0,7314	0,7325	0,7337	0,7349	0,7361	0,7373	0,7385	0,7396	0,7408	0,7420	0,7431	42
48	0,7431	0,7443	0,7455	0,7466	0,7478	0,7490	0,7501	0,7513	0,7524	0,7536	0,7547	41
49	0,7547	0,7559	0,7570	0,7581	0,7593	0,7604	0,7615	0,7627	0,7638	0,7649	0,7660	40
50	0,7660	0,7672	0,7683	0,7694	0,7705	0,7716	0,7727	0,7738	0,7749	0,7760	0,7771	39
51	0,7771	0,7782	0,7793	0,7804	0,7815	0,7826	0,7837	0,7848	0,7859	0,7869	0,7880	38
52	0,7880	0,7891	0,7902	0,7912	0,7923	0,7934	0,7944	0,7955	0,7965	0,7976	0,7986	37
53	0,7986	0,7997	0,8007	0,8018	0,8028	0,8039	0,0849	0,8059	0,8070	0,8080	0,8090	36
54	0,8090	0,8100	0,8111	0,8121	0,8131	0,8141	0,8151	0,8161	0,8171	0,8181	0,8192	35
55	0,8192	0,8202	0,8211	0,8221	0,8231	0,8241	0,8251	0,8261	0,8271	0,8281	0,8290	34
56	0,8290	0,8300	0,8310	0,8320	0,8329	0,8339	0,8348	0,8358	0,8368	0,8377	0,8387	33
57	0,8387	0,8396	0,8406	0,8415	0,8425	0,8434	0,8443	0,8453	0,8462	0,8471	0,8480	32
58	0,8480	0,8490	0,8499	0,8508	0,8517	0,8526	0,8536	0,8545	0,8554	0,8563	0,8572	31
59	0,8572	0,8581	0,8590	0,8599	0,8607	0,8616	0,8625	0,8634	0,8643	0,8652	0,8660	30
60	0,8660	0,8669	0,8678	0,8686	0,8695	0,8704	0,8712	0,8721	0,8729	0,8738	0,8746	29
61	0,8746	0,8755	0,8763	0,8771	0,8780	0,8788	0,8796	0,8805	0,8813	0,8821	0,8829	28
62	0,8829	0,8838	0,8846	0,8854	0,8862	0,8870	0,8878	0,8886	0,8894	0,8902	0,8910	27
63	0,8910	0,8918	0,8926	0,8934	0,8942	0,8949	0,8957	0,8965	0,8973	0,8980	0,8988	26
64	0,8988	0,8996	0,9003	0,9011	0,9018	0,9026	0,9033	0,9041	0,9048	0,9056	0,9063	25
65	0,9063	0,9070	0,9078	0,9085	0,9092	0,9100	0,9107	0,9114	0,9121	0,9128	0,9135	24
66	0,9135	0,9143	0,9150	0,9157	0,9164	0,9171	0,9178	0,9184	0,9191	0,9198	0,9205	23
67	0,9205	0,9212	0,9219	0,9225	0,9232	0,9239	0,9245	0,9252	0,9259	0,9265	0,9272	22
68	0,9272	0,9278	0,9285	0,9291	0,9298	0,9304	0,9311	0,9317	0,9323	0,9330	0,9336	21
69	0,9336	0,9342	0,9348	0,9354	0,9361	0,9367	0,9373	0,9379	0,9385	0,9391	0,9397	20
70	0,9397	0,9403	0,9409	0,9415	0,9421	0,9426	0,9432	0,9438	0,9444	0,9449	0,9455	19
71	0,9455	0,9461	0,9466	0,9472	0,9478	0,8483	0,9489	0,9494	0,9500	0,9505	0,9511	18
72	0,9511	0,9516	0,9521	0,9527	0,9532	0,9537	0,9542	0,9548	0,9553	0,9558	0,9563	17
73	0,9563	0,9568	0,9573	0,9578	0,9583	0,9588	0,9593	0,9598	0,9603	0,9608	0,9613	16
74	0,9613	0,9617	0,9622	0,9627	0,9632	0,9636	0,9641	0,9646	0,9650	0,9655	0,9659	15
75	0,9659	0,9664	0,9668	0,9673	0,9677	0,9681	0,9686	0,9690	0,9694	0,9699	0,9703	14
76	0,9703	0,9707	0,9711	0,9715	0,9720	0,9724	0,9728	0,9732	0,9736	0,9740	0,9744	13
77	0,9744	0,9748	0,9751	0,9755	0,9759	0,9763	0,9767	0,9770	0,9774	0,9778	0,9781	12
78	0,9781	0,9785	0,9789	0,9792	0,9796	0,9799	0,9803	0,9806	0,9810	0,9813	0,9816	11
79	0,9816	0,9820	0,9823	0,9826	0,9829	0,9833	0,9836	0,9839	0,9842	0,9845	0,9848	10
80	0,9848	0,9851	0,9854	0,9857	0,9860	0,9863	0,9866	0,9869	0,9871	0,9874	0,9877	9
81	0,9877	0,9880	0,9882	0,9885	0,9888	0,9890	0,9893	0,9895	0,9898	0,9900	0,9903	8
82	0,9903	0,9905	0,9907	0,9910	0,9912	0,9914	0,9917	0,9919	0,9921	0,9923	0,9925	7
83	0,9925	0,9928	0,9930	0,9932	0,9934	0,9936	0,9938	0,9940	0,9942	0,9943	0,9945	6
84	0,9945	0,9947	0,9949	0,9951	0,9952	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9962	5
85	0,9962	0,9963	0,9965	0,9966	0,9968	0,9969	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	0,9976	4
86	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9980	0,9981	0,9982	0,9983	0,9984	0,9985	0,9986	3
87	0,9986	0,9987	0,9988	0,9989	0,9990	0,9990	0,9991	0,9992	0,9993	0,9993	0,9994	2
88	0,9994	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	1
89	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0
	(1,0)	**,9**	**,8**	**,7**	**,6**	**,5**	**,4**	**,3**	**,2**	**,1**	**,0**	**Grad.**
Coseno												

Tabla de tangentes y cotangentes

Tangente												
Grad.	**,0**	**,1**	**,2**	**,3**	**,4**	**,5**	**,6**	**,7**	**,8**	**,9**	**(1,0)**	
0	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175	89
1	0,0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	88
2	0,0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507	0524	87
3	0,0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682	0699	86
4	0,0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857	0875	85
5	0,0875	0892	0910	0928	0945	0963	0981	0998	1016	1033	1051	84
6	0,1051	1069	1086	1104	1122	1139	1157	1175	1192	1210	1228	83
7	0,1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388	1405	82
8	0,1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566	1584	81
9	0,1584	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745	1763	80
10	0,1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	1944	79
11	0,1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	2126	78
12	0,2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	2309	77
13	0,2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	2493	76
14	0,2493	2512	2530	2549	2568	2586	2605	2623	2642	2661	2679	75
15	0,2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	2867	74
16	0,2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3057	73
17	0,3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3249	72
18	0,3249	3269	3288	33,07	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3443	71
19	0,3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	3640	70
20	0,3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3839	69
21	0,3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	4040	68
22	0,4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	4245	67
23	0,4245	4265	4286	4307	4327	4348	4369	4390	4411	4431	4452	66
24	0,4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	4663	65
25	0,4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4877	64
26	0,4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	5095	63
27	0,5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	5317	62
28	0,5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	5543	61
29	0,5543	5566	5589	5672	5635	5658	5681	5704	5727	5750	5774	60
30	0,5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	6009	59
31	0,6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	6249	58
32	0,6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	6494	57
33	0,6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	6745	56
34	0,6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	7002	55
35	0,7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239	7265	54
36	0,7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	7536	53
37	0,7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	7813	52
38	0,7813	7841	7869	7898	7926	7954	7983	8012	8040	8069	8098	51
39	0,8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	8391	50
40	0,8391	8421	8451	8481	8511	8541	8571	8601	8632	8662	8693	49
41	0,8693	8724	8754	8785	8816	8847	8878	8910	8941	8972	9004	48
42	0,9004	9036	9067	9099	9131	9163	9195	9228	9260	9293	9325	47
43	0,9395	9358	9391	9424	9457	9490	9523	3556	9590	9623	9657	46
44	0,9657	9691	9725	9759	9793	9827	9861	9896	9930	9965	1,000	45
	(1,0)	**,9**	**,8**	**,7**	**,6**	**,5**	**,4**	**,3**	**,2**	**,1**	**,0**	**Grad.**
Cotangente												

Tabla de tangentes y cotangentes

Tangente												
Grad.	**,0**	**,1**	**,2**	**,3**	**,4**	**,5**	**,6**	**,7**	**,8**	**,9**	**(1,0)**	
45	1,000	003	007	011	014	018	021	025	028	032	036	44
46	1,036	039	043	046	050	054	057	061	065	069	072	43
47	1,072	076	080	084	087	091	095	099	103	107	111	42
48	1,111	115	118	122	126	130	134	138	142	146	150	41
49	1,150	154	159	163	167	171	175	179	183	188	192	40
50	1,192	196	200	205	209	213	217	222	226	230	235	39
51	1,235	239	244	248	253	257	262	266	271	275	280	38
52	1,280	285	289	294	299	303	308	313	317	322	327	37
53	1,327	332	337	342	347	351	356	361	366	371	376	36
54	1,376	381	387	392	397	402	407	412	418	423	428	35
55	1,428	433	439	444	450	455	460	466	471	477	483	34
56	1,483	488	494	499	505	511	517	522	528	534	540	33
57	1,540	546	552	558	564	570	576	582	588	594	600	32
58	1,600	607	613	619	625	632	638	645	651	658	664	31
59	1,664	671	678	684	691	698	704	711	718	725	732	30
60	1,732	739	746	753	760	767	775	782	789	797	804	29
61	1,804	811	819	827	834	842	849	857	865	873	881	28
62	1,881	889	897	905	913	921	929	937	946	954	963	27
63	1,963	971	980	988	997	*006	*014	*023	*032	*041	*050	26
64	2,050	059	069	078	087	097	106	116	125	135	145	25
65	2,145	154	164	174	184	194	204	215	225	236	246	24
66	2,246	257	267	278	289	300	311	322	333	344	356	23
67	2,356	367	379	391	402	414	426	438	450	463	475	22
68	2,475	488	500	513	526	539	552	565	578	592	605	21
69	2,605	619	633	646	660	675	689	703	718	733	747	20
70	2,747	762	778	793	808	824	840	856	872	888	904	19
71	2,904	921	937	954	971	989	*006	*024	*042	*060	*078	18
72	3,078	096	115	133	152	172	191	211	230	251	271	17
73	3,271	291	312	333	354	376	398	420	442	465	487	16
74	3,487	511	534	558	582	606	630	655	681	706	732	15
75	3,732	758	785	812	839	867	895	923	952	981	*011	14
76	4,011	041	071	102	134	165	198	230	264	297	331	13
77	4,331	366	402	437	474	511	548	586	625	665	705	12
78	4,705	745	787	829	872	915	959	*005	*050	*097	*145	11
79	5,145	193	242	292	343	396	449	503	558	614	671	10
80	5,671	5,730	5,789	5,850	5,912	5,976	6,041	6,107	6,174	6,243	6,314	9
81	6,314	6,386	6,460	6,535	6,612	6,691	6,772	6,855	6,940	7,026	7,115	8
82	7,115	7,207	7,300	7,396	7,495	7,596	7,700	7,806	7,916	8,028	8,144	7
83	8,144	8,264	8,386	8,513	8,643	8,777	8,915	9,058	9,205	9,357	9,514	6
84	9,514	9,677	9,845	10,0	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	5
85	11,43	11,696	11,91	12,16	12,43	12,71	13,00	13,30	13,62	13,95	14,30	4
86	14,30	14,67	15,06	15,46	15,89	16,35	16,83	17,34	17,89	18,46	19,08	3
87	19,08	19,74	20,45	21,20	22,02	22,90	23,86	24,90	26,03	27,27	28,64	2
88	28,64	30,14	31,82	33,69	35,80	38,19	40,92	44,07	47,74	52,08	57,29	1
89	57,29	63,66	71,62	81,85	95,49	114,6	143,2	191,0	286,5	573,0	...	0
	(1,0)	**,9**	**,8**	**,7**	**,6**	**,5**	**,4**	**,3**	**,2**	**,1**	**,0**	**Grad.**
Cotangente												

Tabla de secantes y cosecantes

Secante												
Grad.	**,0**	**,1**	**,2**	**,3**	**,4**	**,5**	**,6**	**,7**	**,8**	**,9**	**(1,0)**	
0	1,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0001	0001	0001	0002	89
1	1,0002	0002	0002	0003	0003	0003	0004	0004	0005	0005	0006	88
2	1,0006	0007	0007	0008	0009	0010	0010	0011	0012	0013	0014	87
3	1,0014	0015	0016	0017	0018	0019	0020	0021	0022	0023	0024	86
4	1,0024	0026	0027	0028	0029	0031	0032	0034	0035	0037	0038	85
5	1,0038	0040	0041	0043	0044	0046	0048	0049	0051	0053	0055	84
6	1,0055	0057	0058	0060	0062	0064	0066	0068	0070	0073	0076	83
7	1,0076	0078	0080	0082	0084	0087	0088	0091	0094	0096	0098	82
8	1,0098	0101	0103	0106	0108	0111	0113	0116	0119	0121	0125	81
9	1,0125	0128	0131	0133	0136	0139	0142	0145	0148	0151	0154	80
10	1,0154	0157	0161	10164	0167	0170	10174	0177	0180	0183	0187	79
11	1,0187	0191	0194	0198	0201	0205	0208	0212	0216	0220	0224	78
12	1,0224	0227	0231	0235	0239	0243	0247	0251	0255	0259	0263	77
13	1,0263	0267	0271	0275	0280	0284	0288	0293	0298	0302	0306	76
14	1,0306	0310	0316	0320	0324	0330	0334	0338	0343	0348	0353	75
15	1,0353	0357	0363	0367	0372	0378	0382	0387	0393	0398	0403	74
16	1,0403	0408	0413	0419	0424	0430	0435	0441	0446	0452	0457	73
17	1,0457	0462	0468	0473	0480	0485	0491	0496	0503	0509	0514	72
18	1,0514	0521	0526	0533	0539	0545	0551	0557	0564	0570	0576	71
19	1,0576	0583	0589	0595	0602	0609	0615	0621	0628	0635	0642	70
20	1,0642	0648	0655	0662	0669	0676	0683	0691	0697	0704	0711	69
21	1,0711	0718	0726	0733	0740	0748	0755	0763	0770	0778	0785	68
22	1,0785	0793	0800	0808	0817	0824	0832	0840	0847	0855	0864	67
23	1,0864	0872	0880	0889	0896	0904	0912	0921	0929	0937	0947	66
24	1,0947	0955	0964	0972	0981	0989	0999	1007	1016	1025	1034	65
25	1,1034	1042	1052	1061	1071	1079	1089	1098	1107	1116	1126	64
26	1,1126	1136	1145	1154	1164	1174	1183	1193	1203	1213	1223	63
27	1,1223	1233	1244	1254	1264	1274	1284	1294	1305	1315	1326	62
28	1,1326	1337	1347	1357	1369	1379	1390	1401	1,1412	1422	1434	61
29	1,1434	1444	1456	1467	1478	1489	1501	1513	1523	1535	1547	60
30	1,1547	1558	1570	1582	1594	1606	1618	1629	1641	1654	1666	59
31	1,1666	1678	1690	1703	1715	1729	1741	1754	1766	1779	1792	58
32	1,1792	1805	1818	1830	1844	1857	1869	1884	1896	1910	1923	57
33	1,1923	1937	1950	1965	1979	1992	2006	2019	2034	2048	2063	56
34	1,2063	2076	2090	2105	2120	2134	2149	2164	2179	2192	2207	55
35	1,2207	2223	2238	2253	2268	2284	2299	2314	2329	2346	2361	54
36	1,2361	2376	2392	2408	2424	2439	2456	2472	2489	2505	2522	53
37	1,2522	2538	2555	2571	2588	2604	2621	2639	2655	2673	2690	52
38	1,2690	2708	2724	2742	2760	2778	2796	2814	2832	2850	2868	51
39	1,2868	2887	2905	2923	2942	2960	2979	2997	3016	3034	3055	50
40	1,3055	3074	3092	3111	3132	3151	3170	3191	3210	3229	3250	49
41	1,3250	3270	3291	3310	3332	3351	3373	3394	3414	3435	3457	48
42	1,3457	3477	3499	3521	3541	3563	3585	3607	3630	3652	3672	47
43	1,3672	3695	3717	3740	3763	3785	3808	3831	3854	3877	3902	46
44	1,3902	3926	3949	3972	3996	4019	4045	4069	4092	4118	4142	45
	(1,0)	**,9**	**,8**	**,7**	**,6**	**,5**	**,4**	**,3**	**,2**	**,1**	**,0**	**Grad.**
Cosecante												

Tabla de secantes y cosecantes

Secante												
Grad.	**,0**	**,1**	**,2**	**,3**	**,4**	**,5**	**,6**	**,7**	**,8**	**,9**	**(1,0)**	
45	1,414	417	1419	422	424	427	429	432	434	437	439	44
46	1,439	442	445	447	450	453	455	458	461	463	466	43
47	1,466	469	472	474	477	480	483	486	489	492	495	42
48	1,495	497	500	503	506	507	512	515	518	521	524	41
49	1,524	527	530	534	537	540	543	546	549	553	556	40
50	1,556	559	562	565	569	572	576	579	582	586	589	39
51	1,589	592	596	599	603	596	610	613	617	621	624	38
52	1,624	628	632	635	639	643	646	650	654	658	662	37
53	1,662	666	669	673	677	681	685	689	693	697	701	36
54	1,701	705	709	714	718	722	726	730	735	739	743	35
55	1,743	748	752	757	761	766	770	775	779	785	788	34
56	1,788	793	798	802	807	812	817	821	826	831	836	33
57	1,836	841	846	851	856	861	866	871	877	882	887	32
58	1,887	893	898	903	908	914	919	925	931	936	942	31
59	1,942	947	953	959	965	970	976	982	988	994	*000	30
60	2,000	006	012	018	025	031	037	043	050	056	063	29
61	2,063	069	076	082	089	096	103	109	116	123	130	28
62	2,130	137	144	151	158	166	173	181	188	195	203	27
63	2,203	210	218	226	233	241	249	257	265	273	281	26
64	2,281	289	298	306	314	323	332	340	349	357	366	25
65	2,366	375	384	393	402	411	421	430	440	449	459	24
66	2,459	469	478	488	498	508	518	528	539	549	560	23
67	2,560	570	581	591	602	613	624	635	647	658	670	22
68	2,670	681	693	705	717	729	740	753	765	778	790	21
69	2,790	803	816	829	843	856	869	883	896	910	924	20
70	2,924	938	952	966	981	996	*010	*026	*040	*056	*071	19
71	3,071	087	103	119	135	152	169	185	202	219	236	18
72	3,236	253	271	289	307	326	344	362	382	401	420	17
73	3,420	440	460	479	500	521	542	563	584	606	628	16
74	3,628	650	672	695	719	743	765	789	814	839	864	15
75	3,864	890	915	940	967	994	*021	*049	*077	*105	*134	14
76	4,134	163	193	223	254	284	316	348	378	411	444	13
77	4,444	478	515	550	585	621	658	695	733	771	810	12
78	4,810	850	890	931	973	015	058	105	149	195	241	11
79	5,241	288	336	385	435	488	540	593	647	701	760	10
80	5,760	817	875	935	995	*061	*124	*188	*254	*321	*394	9
81	6,394	464	536	609	689	766	845	925	*013	*097	*184	8
82	7,184	278	369	463	559	663	764	868	981	*091	*203	7
83	8,203	326	446	569	703	834	969	9,116	9,259	9,407	9,569	6
84	9,569	9,728	9,891	10,07	10,25	10,40	10,63	10,82	11,04	11,25	11,47	5
85	11,47	11,71	11,95	12,21	12,47	12,74	13,04	13,33	13,66	13,99	14,33	4
86	14,33	14,71	15,08	15,50	15,92	16,39	16,86	17,36	17,92	18,48	19,12	3
87	19,12	19,76	20,49	21,23	22,03	28,90	23,87	24,94	26,04	27,32	28,65	2
88	28, 67	30,12	31,85	33,67	35,84	38,17	40,98	44,05	47,85	52,08	57,14	1
89	57,14	63, 69	71,43	81,97	95,24	114,9	148,9	192,3	285,7	588,2	....	0
	(1,0)	**,9**	**,8**	**,7**	**,6**	**,5**	**,4**	**,3**	**,2**	**,1**	**,0**	**Grad.**
Cosecante												

La función $y = x^2$; $1{,}00 \leq x \leq 5{,}49$ (Cuadrados)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,020	1,040	1,061	1,082	1,102	1,124	1,145	1,166	1,188
1,1	1,210	1,232	1,254	1,277	1,300	1,322	1,346	1,369	1,392	1,416
1,2	1,440	1,464	1,488	1,513	1,538	1,562	1,588	1,613	1,638	1,664
1,3	1,690	1,716	1,742	1,769	1,796	1,822	1,850	1,877	1,904	1,932
1,4	1,960	1,988	2,016	2,045	2,074	2,102	2,132	1,161	2,190	2,220
1,5	2,250	2,280	2,310	2,341	2,372	2,402	2,434	2,465	2,496	2,528
1,6	2,560	2,592	2,624	2,657	2,690	2,722	2,756	2,789	2,822	2,856
1,7	2,890	2,924	2,958	2,993	3,028	3,062	3,098	3,133	3,168	3,204
1,8	3,240	3,276	3,312	3,349	3,386	3,420	3,460	3,497	3,534	3,572
1,9	3,610	3,648	3,686	3,725	3,764	3,802	3,842	3,881	3,920	3,960
2,0	4,000	4,040	4,080	4,121	4,162	4,202	4,244	4,285	4,326	4,368
2,1	4,410	4,452	4,494	4,537	4,580	4,622	4,666	4,709	4,752	4,796
2,2	4,840	4,884	4,928	4,973	5,018	5,062	5,108	5,153	5,198	5,244
2,3	5,290	5,336	5,382	5,429	5,476	5,522	5,570	5,617	5,664	5,712
2,4	5,760	5,808	5,856	5,905	5,954	6,002	6,052	6,101	6,150	6,200
2,5	6,250	6,300	6,350	6,401	6,452	6,502	6,554	6,605	6,656	6,708
2,6	6,760	6,812	6,864	6,917	6,970	7,022	7,076	7,129	7,182	7,236
2,7	7,290	7,344	7,398	7,453	7,508	7,562	7,618	7,673	7,728	7,784
2,8	7,840	7,896	7,952	8,009	8,066	8,122	1,180	8,237	8,294	8,352
2,9	8,410	8,468	8,526	8,585	8,644	8,702	8,762	8,821	8,880	8,940
3,0	9,000	9,060	9,120	9,181	9,242	9,302	9,364	9,425	9,486	9,548
3,1	9,610	9,672	9,734	9,797	9,860	9,922	9,986	10,05	10,11	10,18
3,2	10,24	10,30	10,37	10,43	10,50	10,56	10,63	10,69	10,76	10,82
3,3	10,89	10,96	11,02	11,09	11,16	11,22	11,29	11,36	11,42	11,49
3,4	11,56	11,63	11,70	11,76	11,83	11,90	11,97	12,04	12,11	12,18
3,5	12,25	12,32	12,39	12,46	12,53	12,60	12,67	12,74	12,82	12,89
3,6	12,96	13,03	13,10	13,18	13,25	13,32	13,40	13,47	13,54	13,62
3,7	13,69	13,76	13,84	13,91	13,99	14,06	14,14	14,21	14,29	14,36
3,8	14,44	14,52	14,59	14,67	14,75	14,82	14,90	14,98	15,05	15,13
3,9	15,21	15,29	15,37	15,44	15,52	15,60	15,68	15,76	15,84	15,92
4,0	16,00	16,08	16,16	16,24	16,32	16,40	16,48	16,56	16,65	16,73
4,1	16,81	16,89	16,97	17,06	17,14	17,22	17,31	17,39	17,47	17,56
4,2	17,64	17,72	17,81	17,89	17,98	18,06	18,15	18,23	18,32	18,40
4,3	18,49	18,58	18,66	18,75	18,84	18,92	19,01	19,10	19,18	19,27
4,4	19,36	19,45	19,54	19,62	17,71	19,80	19,89	19,98	20,07	20,16
4,5	20,25	20,34	20,43	20,52	20,61	20,70	20,79	20,88	20,98	21,07
4,6	21,16	21,25	21,34	21,44	21,53	21,62	21,72	21,81	21,90	22,00
4,7	22,09	22,18	22,28	22,37	22,47	22,56	22,66	22,75	22,85	22,94
4,8	23,04	23,14	23,23	23,33	23,43	23,52	23,62	23,72	23,81	23,91
4,9	24,01	24,11	24,21	24,30	24,40	24,50	24,60	24,70	24,80	24,90
5,0	25,00	25,10	25,20	25,30	25,40	25,50	25,60	25,70	25,81	25,91
5,1	26,01	26,11	24,21	26,32	26,42	26,52	26,63	26,73	26,83	26,94
5,2	27,04	27,14	27,25	27,35	27,46	27,56	27,67	27,77	27,88	27,98
5,3	28,09	28,20	28,30	28,41	28,52	28,62	28,73	28,84	28,94	29,05
5,4	29,16	29,27	29,38	29,48	29,59	29,70	29,81	29,92	30,03	30,14

Si se corre la coma en x un lugar a la derecha (izquierda), se debe correr en x^2 dos lugares a la derecha (izquierda).

La función $y = x^2$; $5{,}50 \leq x \leq 9{,}99$ (Cuadrados)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	30,25	30,36	30,47	30,58	30,69	30,80	30,91	31,02	31,14	31,25
5,6	31,36	31,47	31,58	31,70	31,81	31,92	32,04	32,15	32,26	32,38
5,7	32,49	32,60	32,72	32,83	32,95	33,06	33,18	33,29	33,41	33,52
5,8	33,64	33,76	33,87	33,99	34,11	34,22	34,34	34,46	34,57	34,69
5,9	34,81	34,93	35,05	35,16	35,28	35,40	35,52	35,64	35,76	35,88
6,0	36,00	36,12	36,24	36,36	36,48	36,60	36,72	36,84	36,97	37,09
6,1	37,21	37,33	37,45	37,58	37,70	37,82	37,95	38,07	38,19	38,32
6,2	38,44	38,56	38,69	38,81	38,94	39,06	39,19	39,31	39,44	39,56
6,3	39,69	39,82	39,94	40,07	40,20	40,32	40,45	40,58	40,70	40,83
6,4	40,96	41,09	41,22	41,34	41,47	41,60	41,73	41,86	41,99	42,12
6,5	42,25	42,38	42,51	42,64	42,77	42,90	43,03	43,16	43,30	43,43
6,6	43,56	43,69	43,82	43,96	44,09	44,22	44,36	44,49	44,62	44,76
6,7	44,89	45,02	45,16	45,29	45,43	45,56	45,70	45,83	45,97	46,10
6,8	46,24	46,38	46,51	46,65	46,79	46,92	47,06	47,20	47,33	47,47
6,9	47,61	47,75	47,89	48,02	48,16	48,30	48,44	48,58	48,72	48,86
7,0	49,00	49,14	49,28	49,42	49,56	49,70	49,84	49,98	50,13	50,27
7,1	50,41	50,55	50,69	50,84	50,98	51,12	51,27	51,41	51,55	51,70
7,2	51,84	51,98	52,13	52,27	52,42	52,56	52,71	52,85	53,00	53,14
7,3	53,29	53,44	53,58	53,73	53,88	54,02	54,17	54,32	54,46	54,61
7,4	54,76	54,91	55,06	55,20	55,35	55,50	55,65	55,80	55,95	56,10
7,5	56,25	56,40	56,55	56,70	56,85	57,00	57,15	57,30	57,46	57,61
7,6	57,76	57,91	58,06	58,22	58,37	58,52	58,68	58,83	58,98	59,14
7,7	59,29	59,44	59,60	59,75	59,91	60,06	60,22	60,37	60,53	60,68
7,8	60,84	61,00	61,15	61,31	61,47	61,62	61,72	61,94	62,09	62,25
7,9	62,41	62,57	62,73	62,88	63,04	63,20	63,36	63,52	63,68	63,84
8,0	64,00	64,16	64,32	64,48	64,64	64,80	64,96	65,12	65,29	65,45
8,1	65,61	65,77	65,93	66,10	66,26	66,42	66,59	66,75	66,91	67,08
8,2	67,24	67,00	13,84	13,91	13,99	14,06	14,14	14,21	14,29	14,36
8,3	68,89	69,06	69,22	69,39	69,56	69,72	69,89	70,06	70,22	70,39
8,4	70,56	70,73	70,90	71,06	71,23	71,40	71,57	71,74	71,91	72,08
8,5	72,25	72,42	72,59	72,76	72,93	73,10	73,27	73,44	73,62	73,79
8,6	73,96	74,13	74,30	74,48	74,65	74,82	75,00	75,17	75,34	75,52
8,7	75,69	75,86	76,04	76,21	76,39	76,56	76,74	7691,00	77,09	77,26
8,8	77,44	77,62	77,79	77,97	78,15	78,32	78,50	78,58	78,85	79,03
8,9	79,21	73,39	79,57	79,74	79,92	80,10	80,28	80,46	80,64	80,82
9,0	81,00	81,18	81,36	81,54	81,72	81,90	82,08	82,26	82,45	82,63
9,1	82,81	82,99	83,17	83,36	83,54	83,82	83,91	84,09	84,27	84,46
9,2	84,64	84,82	85,01	85,19	85,38	85,56	85,75	85,93	86,12	86,30
9,3	86,49	86,68	86,86	87,05	87,24	87,42	87,61	87,80	87,98	88,17
9,4	88,36	88,55	88,74	88,92	89,11	89,30	89,49	89,68	89,87	90,06
9,5	90,25	90,44	90,63	90,82	91,01	91,20	91,39	91,58	91,78	91,97
9,6	92,16	92,35	92,54	92,74	92,93	93,12	93,32	93,51	93,70	93,90
9,7	94,09	94,28	94,48	94,67	94,87	95,06	95,26	95,45	95,65	95,84
9,8	96,04	96,24	96,43	96,63	96,83	97,02	97,22	97,42	97,61	97,81
9,9	98,01	98,21	98,41	98,60	98,80	99,00	99,20	99,40	99,60	99,80

$8{,}47^2 = 71{,}74$ $\quad 0{,}847^2 = 0{,}7174$ $\quad \sqrt{21{,}44} = 4{,}63$ $\quad \sqrt{0{,}2144} = 0{,}463$

$84{,}7^2 = 7174$ $\quad 8{,}472^2 = 71{,}77$ $\quad \sqrt{21{,}44} = 46{,}3$

La función $y = x^3$; $1{,}00 \leq x \leq 5{,}49$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,030	1,061	1,093		1,158	1,191	1,225	1,260	1,295
1,1	1,331	1,368	1,405	1,443	1,482	1,521	1,561	1,602	1,643	1,685
1,2	1,728	1,772	1,816	1,861	1,907	1,953	2,000	2,048	2,097	2,147
1,3	2,197	2,248	2,300	2,353	2,406	2,460	2,515	2,571	2,628	2,686
1,4	2,744	2,803	2,863	2,924	2,986	3,049	3,112	3,177	3,242	3,308
1,5	3,375	3,443	3,512	3,582	3,652	3,724	3,796	3,870	3,944	4,020
1,6	4,096	4,173	4,252	4,331	4,411	4,492	4,574	4,657	4,742	4,827
1,7	4,913	5,000	5,088	5,178	5,268	5,359	5,452	5,545	5,640	5,735
1,8	5,832	5,930	6,029	6,128	6,230	6,332	6,435	6,539	6,645	6,751
1,9	6,859	6,968	7,078	7,189	7,301	7,415	7,530	7,645	7,762	7,881
2,0	8,000	8,121	8,242	8,365	8,490	8,615	83,742	8,870	8,999	9,129
2,1	9,261	9,394	9,528	9,664	9,800	9,938	10,08	10,22	10,36	10,50
2,2	10,65	10,79	10,96	11,09	11,24	11,39	11,54	11,70	11,85	12,01
2,3	12,17	12,33	12,49	12,65	12,81	12,98	13,14	13,31	13,48	13,65
2,4	13,82	140,00	14,17	14,35	14,53	14,71	14,89	15,07	15,25	15,44
2,5	15,63	15,81	16,00	16,19	16,39	16,58	16,78	16,97	17,17	17,37
2,6	17,58	17,78	17,98	18,19	18,40	18,61	18,82	19,03	19,25	19,47
2,7	19,68	19,90	20,12	20,35	20,57	20,80	21,02	21,25	21,40	21,72
2,8	21,95	22,19	22,43	22,67	22,91	23,15	23,39	23,64	23,89	24,14
2,9	24,39	24,64	24,90	25,15	25,41	25,67	25,93	26,20	26,46	26,73
3,0	27,00	27,27	27,54	27,82	28,09	28,37	28,65	28,93	29,22	29,50
3,1	29,79	30,08	30,37	30,66	30,96	31,26	31,55	31,86	32,16	32,46
3,2	32,77	33,08	33,39	33,70	34,01	34,33	34,65	34,90	35,29	35,61
3,3	35,94	36,26	36,59	36,93	37,26	37,60	37,93	38,27	38,61	38,96
3,4	39,30	39,65	40,00	40,35	40,71	41,06	41,42	41,78	42,14	42,51
3,5	42,88	43,24	43,61	43,99	44,36	44,74	45,12	45,50	45,88	46,27
3,6	46,66	47,05	47,44	47,83	48,23	48,63	49,03	49,43	49,84	50,24
3,7	50,65	51,06	51,48	51,90	52,31	52,73	53,16	53,58	54,01	54,44
3,8	54,87	55,31	55,74	56,18	56,62	57,07	57,51	57,96	58,41	58,86
3,9	59,32	59,78	60,24	60,70	61,16	61,63	62,10	62,57	63,04	63,52
4,0	64,00	64,48	64,96	65,45	65,94	66,43	66,92	67,42	67,92	68,42
4,1	68,92	69,43	69,93	70,44	70,96	71,47	71,99	72,51	73,03	73,56
4,2	74,09	74,62	75,15	75,69	76,23	76,77	77,31	77,85	78,40	78,95
4,3	79,51	80,06	80,62	81,18	81,75	82,31	82,88	83,45	84,03	84,60
4,4	85,18	85,77	86,35	86,94	87,53	88,12	88,72	89,31	89,92	90,52
4,5	91,13	91,73	92,35	92,96	93,58	94,20	94,82	95,44	96,07	96,70
4,6	97,34	97,97	98,61	99,25	99,90	100,5	101,2	101,8	102,5	103,2
4,7	103,8	104,5	105,2	105,8	106,5	107,2	107,9	108,5	109,2	109,9
4,8	110,6	111,3	112,0	112,7	113,4	114,1	114,8	115,5	116,2	116,9
4,9	117,6	118,4	119,1	119,8	120,6	121,3	122,0	122,8	123,5	124,3
5,0	125,0	125,8	126,5	127,3	128,0	128,8	129,6	130,3	131,1	131,9
5,1	132,7	133,4	134,2	135,0	135,8	136,6	137,4	138,2	139,0	139,8
5,2	140,6	141,4	142,2	143,1	143,9	144,7	145,5	146,4	147,2	148,0
5,3	148,9	149,7	150,6	151,4	152,3	153,1	154,0	154,9	155,7	156,6
5,4	157,5	158,3	159,2	160,1	161,0	161,9	162,8	163,7	164,6	165,5

Si se corre la coma en x un lugar a la derecha (izquierda), se debe correr en x^3 tres lugares a la derecha (izquierda).

La función $y = x^3$; $5{,}50 \leq x \leq 9{,}99$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	166,4	167,3	168,2	169,1	170,0	171,0	171,9	172,8	173,7	174,7
5,6	175,6	176,6	177,5	178,5	179,4	180,4	181,3	182,3	183,3	184,2
5,7	185,2	186,2	187,1	188,1	189,1	190,1	191,1	192,1	193,1	194,1
5,8	195,1	196,1	197,1	198,2	199,2	200,2	201,2	202,3	203,3	204,3
5,9	205,4	206,4	207,5	208,5	209,6	210,6	211,7	212,8	213,8	214,9
6,0	216,0	217,1	218,2	219,3	220,3	221,4	222,5	223,6	224,8	225,9
6,1	227,0	228,1	229,2	230,3	231,5	232,6	233,7	234,9	236,0	237,2
6,2	238,3	239,5	240,6	241,8	243,0	244,1	245,3	246,5	247,7	248,9
6,3	250,0	251,2	252,4	253,6	254,8	256,0	257,3	258,5	259,7	260,9
6,4	262,1	263,4	264,6	265,8	267,1	268,3	269,6	270,8	272,1	273,4
6,5	274,6	275,9	277,2	278,4	279,7	281,0	282,3	283,6	284,9	286,2
6,6	287,5	288,8	290,1	291,4	292,8	294,1	295,4	296,7	298,1	299,4
6,7	300,8	302,1	303,5	304,8	306,2	307,5	308,9	310,3	311,7	313,0
6,8	314,4	315,8	317,2	318,6	320,0	321,4	322,8	324,2	325,7	327,1
6,9	328,5	329,9	331,4	332,8	334,3	335,7	337,2	338,6	340,1	341,5
7,0	343,0	344,5	345,9	347,4	348,9	350,4	351,9	353,4	354,9	356,4
7,1	357,9	359,4	360,9	362,5	364,0	365,5	367,1	368,6	370,1	371,7
7,2	373,2	374,8	376,4	377,9	379,5	381,1	382,7	384,2	385,8	387,4
7,3	389,0	390,6	392,2	393,8	395,4	397,1	398,7	400,3	401,9	403,6
7,4	405,2	406,9	408,5	410,2	411,8	413,5	415,2	416,8	418,5	420,2
7,5	421,9	423,6	425,3	427,0	428,7	430,4	432,1	433,8	435,5	437,2
7,6	439,0	440,7	442,5	444,2	445,9	447,7	449,5	451,2	453,0	454,8
7,7	456,5	458,3	460,1	461,9	463,7	465,5	467,3	469,1	470,9	472,7
7,8	474,6	476,4	478,2	480,0	481,9	483,7	485,6	487,4	489,3	491,2
7,9	493,0	494,9	496,8	498,7	500,6	502,5	504,4	506,3	508,2	510,1
8,0	512,0	513,9	515,8	517,8	519,7	521,7	523,6	525,6	527,5	529,5
8,1	531,4	533,4	535,4	537,4	539,4	541,3	543,3	545,3	547,3	549,4
8,2	551,4	553,4	555,4	557,4	559,5	561,5	563,6	565,6	567,7	569,7
8,3	571,8	573,9	575,9	578,0	580,1	582,2	584,3	586,4	588,5	590,6
8,4	592,7	594,8	596,9	599,1	601,2	603,4	605,5	607,6	609,8	612,0
8,5	614,1	616,3	618,5	620,7	622,8	625,0	627,2	629,4	631,6	633,8
8,6	636,1	638,3	640,5	642,7	645,0	647,2	649,5	651,7	654,0	656,2
8,7	658,5	660,8	663,1	665,3	667,6	669,9	672,2	674,5	676,8	679,2
8,8	681,5	683,8	686,1	688,5	690,8	693,2	695,5	697,9	700,2	702,6
8,9	705,0	707,3	709,7	712,1	714,5	716,9	719,3	721,7	724,2	726,6
9,0	729,0	731,4	733,9	736,3	738,8	741,2	743,7	746,1	748,6	751,1
9,1	753,6	756,1	758,6	761,0	763,6	766,1	768,6	771,1	773,6	776,2
9,2	778,7	781,2	783,8	786,3	788,9	791,5	794,0	796,6	799,2	801,8
9,3	804,4	807,0	809,6	812,2	814,8	817,4	820,0	822,7	825,3	827,9
9,4	830,6	833,2	835,9	838,6	841,2	843,9	846,6	849,3	852,0	854,7
9,5	857,4	860,1	862,8	865,5	868,3	871,0	873,7	876,5	879,2	882,0
9,6	884,7	887,5	890,3	893,1	895,8	898,6	901,4	904,2	907,0	909,9
9,7	912,7	915,5	918,3	921,2	924,0	926,9	929,7	932,6	935,4	938,3
9,8	941,2	944,1	947,0	949,9	952,8	955,7	958,6	961,5	964,4	967,4
9,9	970,3	973,2	976,2	979,1	982,1	985,1	988,0	991,0	994,0	997,0

$8{,}47^3 = 607{,}6$ $\quad 0{,}847^3 = 0{,}6076$ $\quad \sqrt[3]{123{,}5} = 4{,}98$ $\quad \sqrt[3]{0{,}1235} = 0{,}498$

$84{,}7^3 = 607\,600$ $\quad 8{,}472^3 = 608{,}0$ $\quad \sqrt[3]{123\,500} = 49{,}8$

BIBLIOGRAFÍA

Álvarez Pérez, M., B. Almeida y E. Villegas: *El proceso de enseñanza de la Matemática. Documentos metodológicos*. Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2014.

Álvarez Pérez, M. y otros: *Manual de ejercicios de Matemática para la Educación Media Superior*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2008.

Ballester Pedroso, S. y otros: *Metodología de la Enseñanza de la Matemática*. t. I, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1992.

Ballester Pedroso, S. y otros: *Metodología de la Enseñanza de la Matemática*, t. II, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2000.

Ballester Pedroso, S. y otros: *Didáctica de la Matemática*, t. I, Ed. Universitaria Félix Varela, La Habana, 2018.

Campistrous Pérez, L. y otros: *Matemática décimo* (libro de texto), Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1989.

Campistrous Pérez, L. y otros: *Matemática onceno* (libro de texto), Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1990.

Davidson San Juan, L. D.: *Ecuaciones y matemáticos*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2008.

Davidson San Juan, L. D.: *Ecuaciones y matemáticos, Solucionario*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2008.

Davidson San Juan, L. D. y otros: *Manual de problemas de Matemática Elemental 1*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1987.

Davidson San Juan, L. D. y otros: *Manual de Problemas de Matemática Elemental 2*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1995.

Díaz González, M.: *Problemas de Matemática para los entrenamientos de la Educación Preuniversitaria I*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2004.

Díaz González, M.: *Problemas de Matemática para los entrenamientos de la Educación Preuniversitaria II*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2007.

GeoGebra Manual. The official manual of GeoGebra. Disponible en: http://research.shu.ac.uk/geogebra/GISGuides/Official%20 GeoGebra%20. Manual.pdf.

ICCP: *Bases generales para el perfeccionamiento del sistema nacional de educación*, Documento impreso, La Habana, 2013.

Martín, Y., L. E. Lezcano: *El GeoGebra en la clase de matemática de la enseñanza media desde los móviles*. VARONA, Revista Científico-Metodológica, No. 73 julio-diciembre 2021. ISSN: 1992-8238. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5456-2568

Muñoz Baños, F. y L. Campistrous Pérez: *Problemas de Matemática Elemental*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1986.

Naredo Castellanos, R: *Entrénate en Geometría*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2011.

Ochoa Rojas, R.: *Funciones y temas afines*, t. 3, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2009.

Palacio Peña, J.: *Didáctica de la Matemática: Búsqueda de relaciones y contextualización de problemas*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2007.

Polya, G.: *Cómo plantear y resolver problemas*, Ed. Trillas, México, 1989.

Ríbnikov, K.: *Historia de las Matemáticas*, 1.ª ed. en español, Ed. Mir, Moscú, 1987.

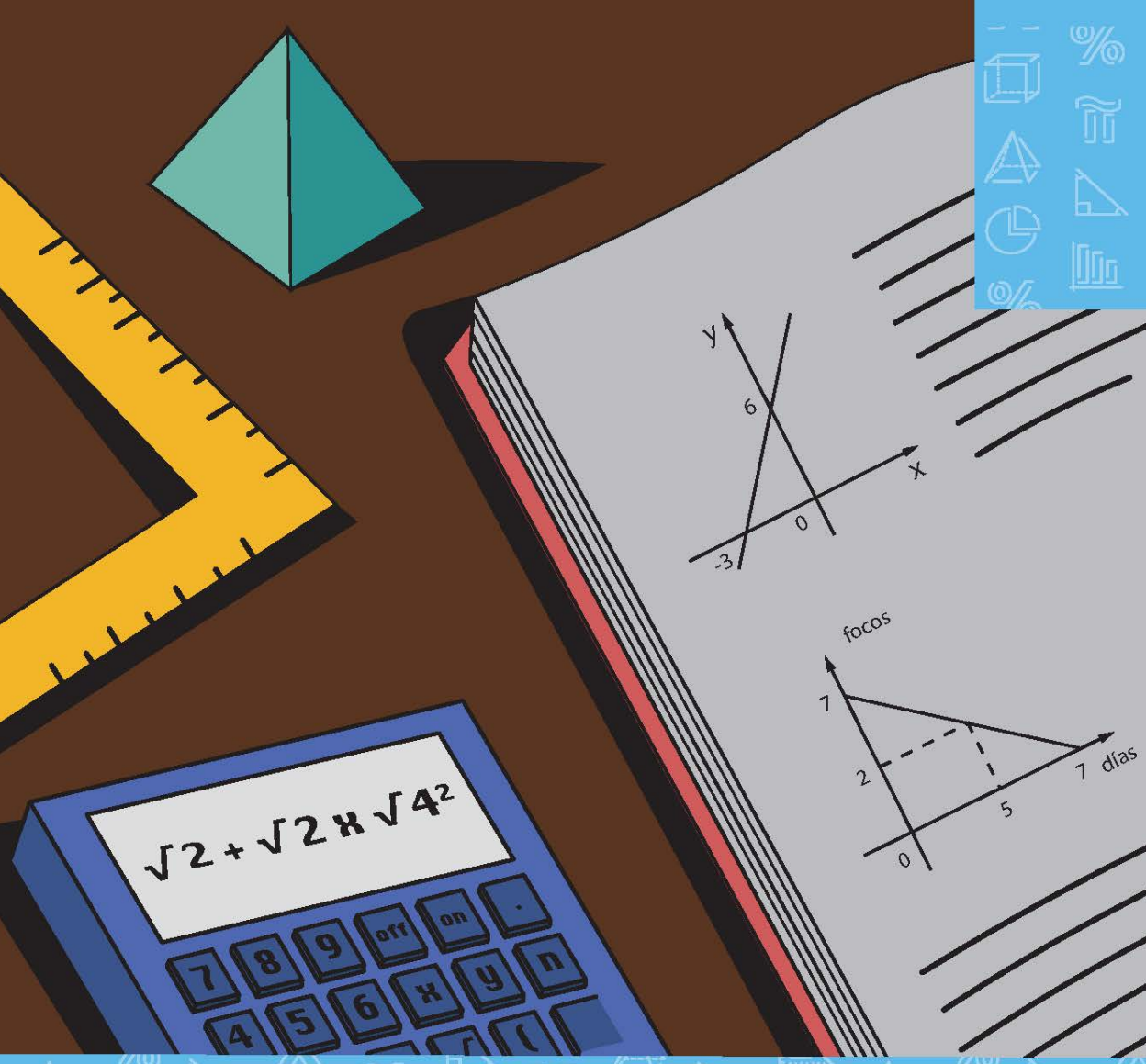
Rodríguez Meneses, F. y otros: *Matemática décimo grado*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2023.

Rodríguez Meneses, F. y otros: *Orientaciones metodológicas Matemática décimo grado*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2022.

Rodríguez Meneses, F. y otros: *Programa matemática décimo grado*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2020.

Stewart, J.: *Cálculo con trascendentes tempranas*, Parte 1, Ed. Félix Varela, La Habana, 2006.

www.cuaeduca.cu.http://matematica.cuaeduca.cu/idex.php?option-comcontent&viewarticle&id4874:-lista-de-act-de-apred-10mo&catid 528&Itemid 73



EDITORIAL
PUEBLO Y EDUCACIÓN

9 789591 342416