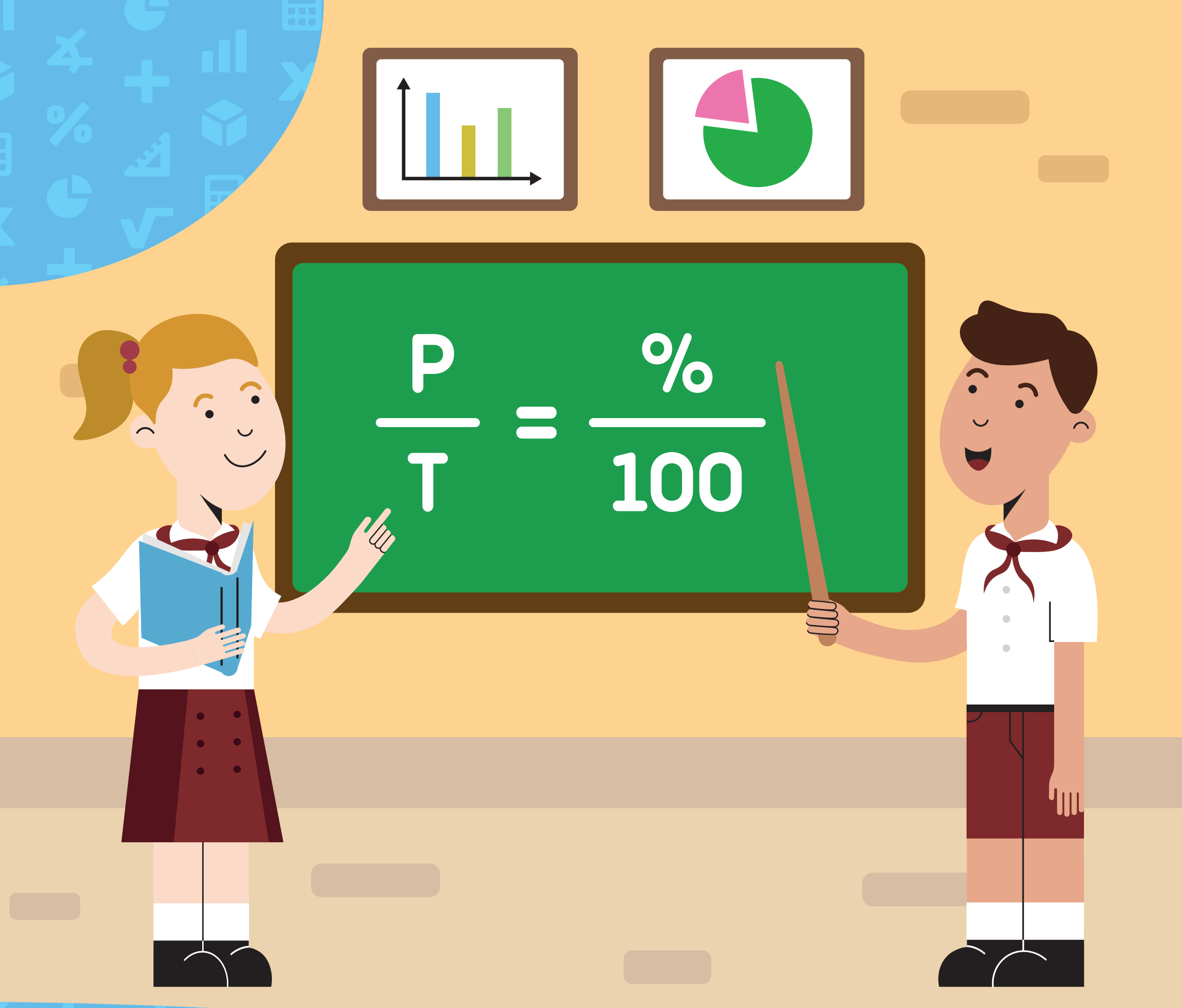


MATEMÁTICA

sexto grado

MATEMÁTICA

sexto grado

MATEMÁTICA

sexto grado

Lic. Raúl González Rojas
M. Sc. Maritza Rodríguez Valdés
Dr. C. Eduardo V. Villegas Jiménez

EDITORIAL
PUEBLO Y EDUCACIÓN

Este material forma parte del conjunto de trabajos dirigidos al Tercer Perfeccionamiento Continuo del Sistema Nacional de la Educación General. En su elaboración participaron maestros, metodólogos y especialistas a partir de concepciones teóricas y metodológicas precedentes, adecuadas y enriquecidas en correspondencia con el fin y los objetivos propios de cada nivel educativo, de las exigencias de la sociedad cubana actual y sus perspectivas.

Ha sido revisado por la subcomisión responsable de la asignatura perteneciente a la Comisión Nacional Permanente para la revisión de planes, programas y textos de estudio del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas del Ministerio de Educación.

Colaborador:
- M. Sc. Yanieski Rosabal Vanega

Edición y corrección:
- M. Sc. Judith María Mugica Ruiz

Cubierta:
- Instituto Superior de Diseño (ISDi)

Emplane:
- María Pacheco Gola

Diseño:
- Instituto Superior de Diseño (ISDi):

Adriana Vigil Hernández • Alessandra Fuentes Tiel • Jennifer González Espinosa • Thalía Ibarra Villavicencio • Laura Ramos García • Ernesto Alejandro Gilart Ruiz • María Fernanda Lemus González • Aldahir Santana Guzmán • Litsary Zamora Rodríguez • Samira González González • Marian Ramos Rodríguez • Kamila Carpio Crespo • DCV María Paula Lista Jorge • M. Sc. Maité Fundora Iglesias • Dr. C. Ernesto Fernández Sánchez

ISBN 978-959-13-5067-1 (Versión impresa)
ISBN 978-959-13-5073-2 (Versión digital)

EDITORIAL PUEBLO Y EDUCACIÓN
Ave. 3.ª A No. 4601 entre 46 y 60,
Playa, La Habana, Cuba. CP 11300
epueblo@epe.gemined.cu

ÍNDICE

A los educandos

En sexto grado, el que ahora comienzas, continuarás el estudio de la matemática.

Cuando utilices este libro, debes tener en cuenta que el contenido se encuentra en los capítulos del 1 al 6, y que cada uno está dividido en epígrafes que aparecen numerados. Algunos de estos, a su vez, se dividen en subepígrafes.

El índice que se encuentra al inicio del libro, te ayudará a localizar las páginas donde se halla cada contenido.

En cada epígrafe encontrarás ejercicios resueltos que ilustran cómo debes actuar para resolver ejercicios importantes correspondientes a ese contenido.

Hallarás además secciones que aprendiste en quinto grado (*Reflexiona un instante, Saber más, ¿Sabías que...?, Algo de historia, Recuerda que…, En resumen*) que te permitirán ampliar o consolidar tus conocimientos.

Esperamos que este texto sea de gran utilidad para alcanzar las metas que te propongas y culmines con éxitos este grado y la educación primaria.

Los autores

CAPÍTULO 1

Los números fraccionarios

Los números que utilizamos para contar se llaman naturales. Por ejemplo, un docente, para saber si todos sus educandos regresaron a clases después del receso, simplemente los cuenta: uno, dos, tres,…, treinta. Hoy nos cuesta trabajo imaginar un mundo en el que los adultos no sepan contar. Sin embargo, no siempre fue así. Cuando los hombres empezaron a contar usaron sus dedos, trataron de representar cantidades reuniendo objetos o haciendo marcas en un lugar visible, pero no conocían la representación escrita de números con los diez dígitos o cifras básicas: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. De hecho, actualmente existen comunidades de personas que no conocen esta abreviada forma de escritura.

1.1 Operaciones básicas de cálculo con números naturales

Los hombres, en el decurso de la historia, han desarrollado diversos sistemas de numeración. En cada uno de ellos un mismo número natural tiene diferentes representaciones, de la misma manera que este número en diferentes idiomas puede tener distintos nombres. Por ejemplo, el número que en español llamamos doce, en alemán se llama *zwölf* y en inglés *twelve*. En el sistema posicional de numeración decimal que normalmente usamos, este mismo número se escribe 12, pero en el sistema de numeración romano es XII y en escritura maya .

Debes reconocer que las palabras cero, uno, dos, … y los signos 0, 1, 2, … son solo medios para expresar y representar números naturales.

La numeración romana aún se usa para referirse a los siglos; se emplea además con frecuencia al ordenar capítulos en un libro y en algunos relojes. También se pueden encontrar fechas escritas en números romanos, en monumentos y construcciones antiguas, como el año 1888 que se aprecia en la figura 1.1.

Figura 1.1

Ejercicio resuelto

En un hermoso monumento construido en La Habana a la memoria del presidente José Miguel Gómez, se pueden ver a la izquierda y a la derecha de su estatua los siguientes números romanos: MDCCCLVIII-MCMXXI; MCMIX-MCMXIII.

¿Cuáles son los significados de estos números?

Respuesta: Sus significados son: a la izquierda, 1858-1921, lo que indica que el presidente nació en el año 1858 y murió en el año 1921. A la derecha: 1909-1913, señala su período presidencial.

Reflexiona un instante

Investiga en tu localidad, municipio o provincia, la existencia de tarjas, relojes, edificios o monumentos en los que aparezcan números romanos. Reflexiona sobre su significado e informa sobre ello en tu colectivo de estudio.

En el sistema de numeración decimal, las diez cifras básicas se combinan de forma tal que podemos escribir cualquier número por grande que este sea. Cada cifra básica, en dependencia de la posición que ocupe, tiene un valor. Así, por ejemplo, en el número 1959, uno de los 9 significa nueve centenas y el otro (último a la derecha) nueve unidades.

En el número expresado en el sistema decimal, cada posición está asociada a una potencia de diez. De derecha a izquierda, las posiciones se identifican como unidades, decenas, centenas (simples); unidades de miles, decenas de miles, centenas de miles; unidades de millón, decenas de millón, centenas de millón, y así sucesivamente.

Ejemplo: En la figura 1.2 se expresan algunos números:

Billones			Miles de millones			Millones			Miles					
10^{14}	10^{13}	10^{12}	10^{11}	10^{10}	10^{9}	10^{8}	10^{7}	10^{6}	10^{5}	10^{4}	10^{3}	10^{2}	10	1
C	D	U	C	D	U	C	D	U	C	D	U	C	D	U
											1	9	5	9
						3	0	7	2	5	9	6	8	4
		9	4	6	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0

Figura 1.2

Estos números se pueden escribir como sumas de múltiplos de potencias de diez. Así, por ejemplo:

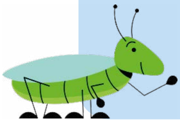
$$1\,959 = 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 9 \cdot 1$$

$$307\,259\,684 = 3 \cdot 10^8 + 0 \cdot 10^7 + 7 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 +$$
$$9 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 4 \cdot 1$$

En el segundo caso podría omitirse el sumando $0 \cdot 10^7$ por ser igual a cero. En el último caso, son varios los sumandos que se omiten al escribir:

$$9\,460\,800\,000\,000 = 9 \cdot 10^{12} + 4 \cdot 10^{11} + 6 \cdot 10^{10} + 8 \cdot 10^8$$

Recuerda que...



Si se ordenan de menor a mayor los números naturales, se obtiene la sucesión:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, … Los puntos suspensivos indican que después de la última cifra escrita, existen infinitos números naturales más que se van alcanzando si se suma uno a trece, después uno a catorce y así sucesivamente. En este orden, cada número natural (a) tiene exactamente un **sucesor** ($a + 1$), y excepto el cero, un único **antecesor** ($a - 1$).

Los números naturales se pueden representar en un rayo numérico. En una representación de este tipo, a cada número natural corresponde un único punto del rayo numérico. Pero presta atención: hay puntos del rayo numérico a los cuales no corresponde un número natural.

Ejercicio resuelto

En la figura 1.3 se ilustran tres rayos numéricos con escalas diferentes. En cada uno de ellos se han representado números naturales en el lugar que les corresponde y se han destacado otros puntos de dichos rayos solo con letras.

a) ¿Qué número natural corresponde a cada una de las letras?

b) Determina los números naturales que podrías situar entre C y D; G y H; L y M.

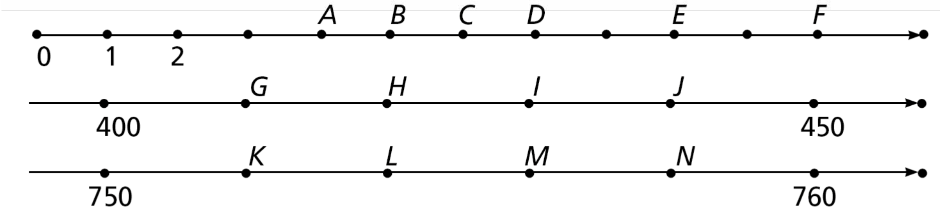


Figura 1.3

Respuesta:

a) $A = 4$; $B = 5$; $C = 6$; $D = 7$; $E = 9$; $F = 11$; $G = 410$; $H = 420$; $I = 430$; $J = 440$; $K = 752$; $L = 754$; $M = 756$; $N = 758$

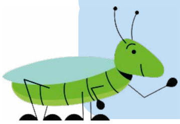
b) Entre *C* y *D* ninguno: no hay un número natural entre 6 y 7; entre *G* y *H*: 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419; entre *L* y *M*: 755

Recuerda que...

Dados dos números naturales *a* y *b*, se puede calcular siempre la **suma** $a + b$.

A los números *a* y *b* se les llama **sumandos**.

La adición es una operación que cumple las siguientes propiedades:



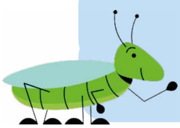
- Conmutativa: Si *a* y *b* son números naturales, entonces $a + b = b + a$
- Asociativa: Si *a*, *b*, y *c* son números naturales, entonces $(a + b) + c = a + (b + c)$

Recuerda que...

Dados dos números naturales *a* y *b*:

Si $a \geq b$, la **diferencia** $a - b$ es también un número natural. A los números *a* y *b* se les llama minuendo y sustraendo respectivamente. La sustracción es una operación que cumple las siguientes propiedades:

- No es conmutativa.
- Es la operación inversa a la adición:



$$\left.\begin{array}{l}\boxed{x + 15 = 33}\\ \boxed{15 + x = 33}\end{array}\right\} \longrightarrow \text{Entonces se cumple} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l}x = 33 - 15\\ 15 = 33 - x\end{array}}$$

Ejercicio resuelto

Calcula: 369 – 192 + 82 – 95

Respuesta: Cuando estamos en presencia de uno o varios sumandos y de varios sustraendos se puede variar su orden al calcular. En lugar de efectuar varias sustracciones, se pueden adicionar los sustraendos y el resultado sustraerlo de la suma de los sumandos.

Planteamos: $(369 + 82) - (192 + 95)$

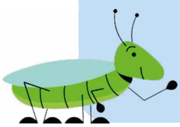
Calculamos:

$$\begin{array}{r} 369 \\ +\ \ 82 \\ \hline 451 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 192 \\ +\ \ 95 \\ \hline 287 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 451 \\ -\ 287 \\ \hline \underbrace{164}_{\text{respuesta}} \end{array}$$

Recuerda que...

Para cada dos números naturales a y b hay exactamente un **producto** $a \cdot b$. Los números a y b se llaman factores del producto $a \cdot b$. La multiplicación es una operación que cumple las siguientes propiedades:

- Con distintos factores se puede obtener el mismo producto.
- Para un número natural (a) cualquiera: $a \cdot 0 = 0$; $0 \cdot a = 0$; $a \cdot 1 = a$; $1 \cdot a = a$.
- Propiedad conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a$.
- Propiedad asociativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Propiedad distributiva: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$



Ejercicio resuelto

Calcula: $835 \cdot 217$

Es conveniente, antes de comenzar a calcular, hacer mentalmente un estimado de la respuesta (un cálculo aproximado). Esta medida evitará algunos errores. En este caso:

$835 \approx 800$ $\qquad 217 \approx 200$ $\qquad 800 \cdot 200 = 160\,000$

Se calcula entonces por escrito:

a) $835 \cdot 217 = 835 \cdot (200 + 10 + 7)$

$$\begin{aligned} &= 835 \cdot 200 + 835 \cdot 10 + 835 \cdot 7 \\ &= 167\,000 + 8\,350 + 5\,845 \\ &= 181\,195 \end{aligned}$$

comenzamos por las unidades

b) $\underline{835 \cdot 217}$

$$\begin{array}{r} 5845 \\ 835 \\ +1670 \\ \hline \underbrace{181195}_{} \end{array}$$

Respuesta

comenzamos por las centenas

c) $\underline{835 \cdot 217}$

$$\begin{array}{r} 1670 \\ 835 \\ +5845 \\ \hline \underbrace{181195}_{} \end{array}$$

Respuesta

Cualquiera de estas tres variantes escritas es correcta. Como puedes apreciar en las dos últimas, al escribir los productos parciales 167 000 y 8 350 se omiten ceros, lo cual es muy importante a la hora de colocar estos números como sumandos.

Recuerda que...

Para la multiplicación

Si *a* y *b* son números naturales, entonces

$$b \cdot a = \underbrace{a + a + a + \ldots a}_{b \text{ veces}}$$

Ejemplo: seis veces cinco es $6 \cdot 5 = \underbrace{5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5}_{6 \text{ veces}}$

Y se puede representar gráficamente como en la figura 1.4.

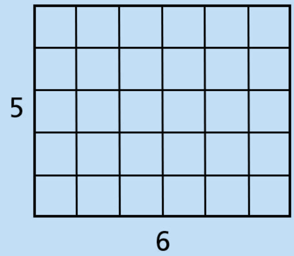


Figura 1.4

Para la potenciación

El número natural a se llama base y el número natural $n \geq 1$ exponente de la potencia a^n.

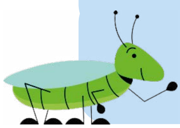
Para el producto $a \cdot a \cdot a \ldots a$ con n factores iguales que a, se escribe la potencia a^n.

Para $a \neq 0$ y $n = 0$, se define que $a^0 = 1$.

Para la radicación

Esta operación consiste en obtener la raíz de una cifra o de una expresión.

El signo $\sqrt{\ }$ se llama radical, lo que se escribe dentro del signo, cantidad subradical o radicando y el que aparece en su parte superior izquierda, índice del radical que en el caso de la raíz cuadrada se omite su escritura.



Podemos argumentar que $\sqrt{36} = 6$ porque el cuadrado de 6 es 36.

Recuerda que...

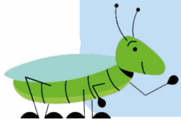
- De igualdades de multiplicación, por ejemplo $8 \cdot 9 = 72$, se pueden obtener dos igualdades de división: $8 = 72 : 9$ y $9 = 72 : 8$.
- La división es la operación inversa a la multiplicación.
- En una división, el número que se divide por otro se llama dividendo; el número por el cual se divide es el divisor y el resultado se llama cociente:

72	:	8	=	9
dividendo		divisor		cociente

- Si para dos números naturales a y b existe un único número natural x tal que $a = b \cdot x$, entonces el número x es igual al cociente $a : b$

  $8 \cdot x = 72 \longrightarrow x = 72 : 8$

  $x \cdot 8 = 72$



- La división por cero no se puede realizar.

Ejercicio resuelto

Calcula: 6 204 : 47

Respuesta:

$$\begin{array}{r|l} 6204 & 47 \\ \cline{2-2} -47 & 132 \\ \hline 150 & \\ -141 & \\ \hline 94 & \\ -94 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

comprobación: $\underline{132 \cdot 47}$

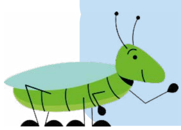
$$\begin{array}{r} 528 \\ +\ \ 924 \\ \hline 6204 \end{array}$$

Recuerda que...

Al efectuar varias **operaciones combinadas de cálculo**, hay que tener mucho cuidado con el orden en que estas se realizan:

1. Calcular primero lo que está entre paréntesis.
2. Calcular potencias o raíces.
3. Multiplicar o dividir antes de adicionar o sustraer.

Si no hay que aplicar ninguna de las tres reglas anteriores:



- Calcular de izquierda a derecha en el orden en que aparecen las operaciones.

Ejercicio resuelto

En cada uno de los siguientes ejercicios planteados, determina cuál es la última operación que se debe realizar:

a) $3 \cdot 7 + 5$	c) $3 \cdot (15 + 7)$	e) $(35 - 25) : 2$	g) $33 + 7 \cdot 6$
b) $6 \cdot 7 + 4 \cdot 3$	d) $23 - 3 \cdot 5$	f) $25 : 5 \cdot 6$	h) $36 \cdot 3 : 12$

Respuesta: a), b), g) adición; c), f) multiplicación; e), h) división; d) sustracción

Ejercicios del epígrafe

1. Escribe los siguientes números en una tabla de posición decimal. Ordénalos de menor a mayor. Represéntalos después como sumas de múltiplos de potencias de diez.

a) 4 718; 53; 975 006; 201; 4 708

b) Ochocientos sesenta y cinco mil once; tres mil setecientos millones quinientos cuarenta y tres mil; quince millones doscientos noventa y siete; cuatrocientos veintiséis.

2. Menciona el sucesor de cada uno de los siguientes números naturales (con $b > 9$). Menciona también el antecesor en los casos posibles.

a) 73; 99; 200; 0; $b + 1$; $b - 1$; $b - 7$

b) Completa la tabla:

a	33				
Sucesor de *a*			12		
Antecesor de *a*		0			
Sucesor del doble de *a*				47	133

3. ¿Cuál de los siguientes números pertenece a la secuencia numérica correspondiente al patrón dado a continuación?

Selecciona y marca la opción que da respuesta correcta a la pregunta

13 16 19 22 25

a) ______ 26 b) ______ 30 c) _____ 28 d) ______ 24

4. ¿Cuál de los siguientes números no pertenece a la secuencia numérica correspondiente al patrón dado a continuación?

Los números (3; 2 500; 3 500; 4 500: 5 500) deben colocarse en una tabla de una sola fila.

Selecciona y marca la opción que da respuesta correcta a la pregunta

a) _____ 9 500 b) _____ 8 500 c) _____ 7 000 d) _____ 6 500

5. Observa la siguiente serie:

14 729; _____; 14 715; _____; 14 701; 4 694; _____; 14 680
Selecciona y marca con una x. ¿Qué números debes elegir para completar correctamente la secuencia numérica dada?

a) __ 14 698, 14 692, 14 683
b) __ 14 722; 14 708; 14 687
c) __ 14 710, 14 700, 14 685
d) __ 14 734, 14 716, 14 689

6. Adiciona:

a) 14 387 + 63 512
b) 13 576 + 3 055 + 9 023 + 4 385 + 9 876

7. Calcula convenientemente:

a) 24 + 7 + 6 + 13
b) 15 + 8 + 5 + 22 + 6
c) 32 + 24 + 17 + 18 + 26

8. Tres números naturales consecutivos suman 363. ¿Cuáles son estos números?

9. En 5 cooperativas de la provincia Artemisa se cosecharon en un trimestre las siguientes cantidades de granos:

Cooperativa	Cantidad de granos cosechados
1	500 kg
2	76 kg más que la primera

Cooperativa	Cantidad de granos cosechados
3	Tanto como las dos primeras juntas
4	Tanto como la primera y la tercera
5	Tanto como las tres primeras más 5 kg

a) ¿Cuántos kilogramos de granos se cosecharon en total entre las 5 cooperativas?

10. Sustrae y comprueba adicionando:

a) 126 000 – 58 735
b) 157 687 – 68 799
c) 2 008 005 – 991 110
d) 1 000 000 – 877 654

11. Calcula:

a) 93 568 + 75 612 – 15 234 + 8 615
b) 762 954 – 243 129 – 5 234 + 347 812
c) 348 293 + 912 083 – 975 423 + 123 482
d) 735 123 + 15 612 – 759 301 + 8 615

12. ¿Qué números naturales son soluciones de las siguientes ecuaciones?

a) $170 + x = 190$
b) $230 - x = 120$
c) $x - 30 = 150$
d) $x + 120 = 175$

13. Multiplica:

a) $305 \cdot 270$
b) $305 \cdot 207$
c) $350 \cdot 270$
d) $350 \cdot 207$

14. Calcula:

a) $37 \cdot 33$
b) $37 \cdot 303$
c) $37 \cdot 3\,003$
d) $37 \cdot 30\,003$

15. Halla el producto:

a) $357 \cdot 45$
b) $852 \cdot 805$
c) $4\,376 \cdot 307$
d) $5\,046 \cdot 973$
e) $1\,008 \cdot 309$

16. Calcula qué cantidad de segundos tiene una hora y cuántos tiene un día.

17. Con una calculadora puedes comprobar que si elevas 2 a los exponentes 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 y 8 obtienes como resultados 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128 y 256. Los resultados terminan en 2; 4; 8; 6 y después se repiten estos mismos números como terminación.

a) Investiga en qué números pueden terminar las potencias naturales de 3.
b) Determina, sin efectuar el cálculo, en qué número termina 6^{12}.

18. Resuelve y comprueba:

a) $78\,012 : 36$
b) $227\,970 : 745$
c) $340\,595 : 85$
d) $181\,302 : 201$

19. ¿Qué números naturales son soluciones de las siguientes ecuaciones?

a) $x : 9 = 20$ b) $54 : x = 6$ c) $x : 80 = 0$ d) $480 : x = 240$

20. Martica compró 12 caramelos de diez centavos y diez caramelos más de un cuarto de peso cada uno. Si su abuela le dio 5 pesos para comprar los caramelos, plantea en una sola operación combinada el cálculo que debes hacer para determinar el vuelto que la abuela debe recibir.

21. Calcula y compara los resultados. ¿En qué casos los paréntesis no afectan el resultado?

a) $120 - (80 - 25)$; $120 - 80 - 25$

b) 300 + (180 – 60); 300 + 180 – 60
c) (24 + 36) : 12; 24 + 36 : 12
d) (33 – 3) · 10; 33 – 3 · 10
e) (15 + 25) · 8; 15 + 25 · 8
f) 60 : 15 – 3; 60 : (15 – 3)

1.2 Fracciones y números fraccionarios

Para expresar una o varias partes iguales de una unidad entera o de un conjunto se utilizan fracciones.

Ejemplos

Cuando se divide una tableta de chocolate en 8 partes iguales, cada una de estas partes es un octavo $\left(\frac{1}{8}\right)$.

En una institución educativa, un recreo puede durar un cuarto de hora $\left(\frac{1}{4}\right)$, un matutino media hora $\left(\frac{1}{2}\right)$ y una clase tres cuartos de hora $\left(\frac{3}{4}\right)$.

En una competencia de atletismo, la diferencia entre los tiempos logrados por dos corredores puede expresarse en centésimas de segundos $\left(1 \text{ centésima}, \frac{1}{100}\right)$.

En el libro *Cocina al minuto* de Nitza Villapol, se indican los ingredientes requeridos para una receta de la manera siguiente:

Papas Ana

2 lb de papas

$1\frac{1}{2}$ cucharadita de sal

$\frac{1}{8}$ cucharadita de pimienta

$\frac{1}{4}$ lb de mantequilla

Para cada ingrediente se precisan partes iguales de una unidad entera (en este caso: libra o cucharadita). Los denominadores representan las partes en que se ha dividido la unidad y los numeradores las partes que deben ser tomadas de acuerdo con esta receta. En el caso de las papas, el número que expresa la cantidad de libras es un número natural (2), y en el caso de la sal, es una cucharadita (1) y media cucharadita más $\left(\frac{1}{2}\right)$.

El centavo (¢) y el medio, monedas que tienen un valor fraccionario con respecto al peso cubano, reciben estos nombres que indican la fracción que representan: el centavo es una centésima de peso; en el caso del medio, se refiere a la mitad de un real (moneda de 10 ¢ que ya no se imprime). La moneda denominada medio es igual a 5 ¢.

Definición 1.1

Una **fracción** es un par de números naturales escritos en la forma $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ en la que b (denominador) indica en cuántas partes iguales se dividió un todo, y a (numerador) indica cuántas partes como estas componen la fracción.

Por ejemplo: $\frac{13}{4}$ indica que se dividió un todo en cuatro partes iguales y se han tomado 13 partes iguales a estas como se muestra en la figura 1.5.

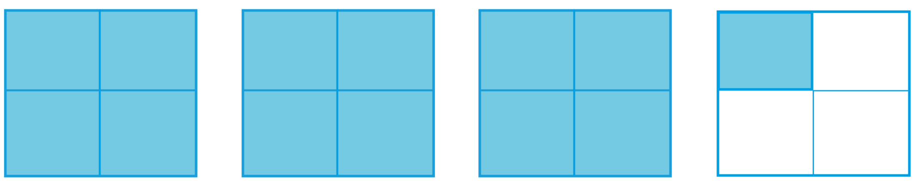


Figura 1.5

Ejemplos

En la definición dada, el todo puede ser una unidad entera o un conjunto.

a) Como partes de una unidad entera (figura 1.6):

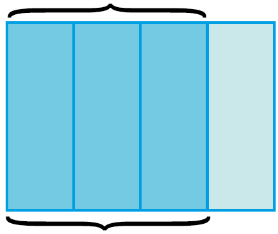


Figura 1.6

$\frac{3}{4}$ de la unidad

b) Como partes de un conjunto (figura 1.7):

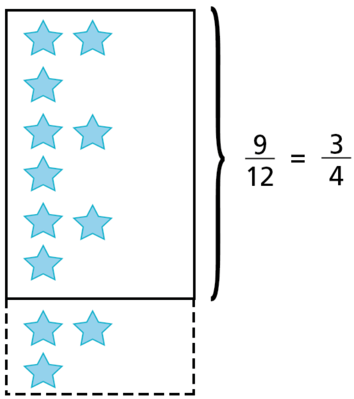


Figura 1.7

$\frac{3}{4}$ de 12 = 9 (el todo es 12)

Una fracción puede considerarse también como una división indicada, en la cual el numerador representa al dividendo y el denominador al divisor. Recordemos los tipos de fracciones estudiadas en quinto grado:

Tipos	**Características**	**Ejemplos**
Decimales	El denominador es la unidad seguida de ceros	$\frac{1}{10}; \frac{1}{100}; \frac{3}{10}; \frac{32}{1000}$
Comunes	El denominador no es la unidad seguida de ceros	$\frac{1}{2}; \frac{4}{4}; \frac{5}{1}; \frac{32}{21}; \frac{121}{1015}$

Tipos	Características	Ejemplos
Propias	El numerador es menor que el denominador	$\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{32}{53}$; $\frac{121}{1015}$
Impropias	El numerador es mayor o igual que el denominador	$\frac{5}{2}$; $\frac{4}{4}$; $\frac{32}{21}$; $\frac{121}{101}$

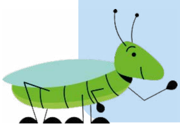
Para comparar fracciones generalmente acudimos a la propiedad siguiente:

Teorema 1

Para dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ ($b \neq 0$; $d \neq 0$), se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ siempre que } a \cdot d < c \cdot b \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ siempre que } a \cdot d = c \cdot b \\ \frac{a}{b} > \frac{c}{d} \text{ siempre que } a \cdot d > c \cdot b \end{array}\right\} \text{ criterio de los productos cruzados}$$

Recuerda que...



Las fracciones que representan una misma parte de un todo se llaman fracciones equivalentes. En el ejemplo anterior son fracciones equivalentes: $\frac{3}{4}$ y $\frac{9}{12}$

Si se multiplican el numerador y el denominador de una fracción por el mismo número natural distinto de cero, la fracción resultante es equivalente a la dada (ampliación).

Si se dividen el numerador y el denominador de una fracción por cualquiera de sus divisores comunes, la fracción resultante es equivalente a la dada (simplificación).

Las fracciones pueden ordenarse siguiendo estos criterios y ubicarse en un rayo numérico como se observa en la figura 1.8.

Cuando a un punto del rayo numérico corresponde una fracción $\frac{a}{b}$, también corresponden a este punto todas las fracciones equivalentes a ella.

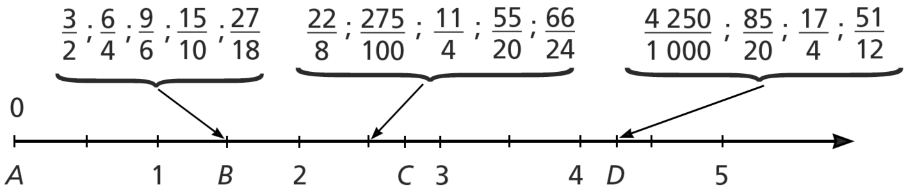


Figura 1.8

A un punto del rayo numérico al que corresponde una fracción, corresponden todas las fracciones que se pueden obtener a partir de ella por ampliación o simplificación. Con cualquiera de estas fracciones equivalentes se representa el mismo número. Como representante principal se puede tomar la fracción irreductible $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ para la cual mcd $(a, b) = 1$.

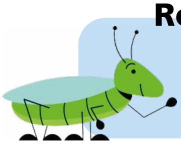
Definición 1.2

Se llama **número fraccionario** a la clase o conjunto de todas las fracciones que son equivalentes entre sí por ampliación o simplificación.

Ejemplo

Las fracciones $\frac{2}{4}$ y $\frac{5}{10}$ no son en rigor la misma fracción, pero se pueden utilizar para referirse al mismo número fraccionario, cuyo representante principal es $\frac{1}{2}$.

Recuerda que...



De dos **números fraccionarios** es menor el que queda más a la izquierda en el rayo numérico.

Ejercicio resuelto

Escribe en forma de fracciones. Simplifica en los casos que sea posible y compara.

a) 1 : 2 y 50 : 100
b) 9 : 12 y 35 : 28
c) 8 : 32 y 48 : 72
d) 80 : 16 y 24 : 21

Respuestas:

a) Las fracciones son $\frac{1}{2}$ y $\frac{50}{100}$. La primera está simplificada. En la segunda, como 50 es divisor de 100, podemos simplificar $\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$. Por tanto, las fracciones son equivalentes (al comparar sus productos cruzados son iguales).

b) Las fracciones son $\frac{9}{12}$ y $\frac{35}{28}$. En la primera 9 y 12 son múltiplos de 3, simplificamos $\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$. En la segunda 35 y 28 son múltiplos de 7, por lo que se simplifica $\frac{35}{28}=\frac{5}{4}$. Al compararlas simplificadas, tienen igual denominador, por tanto $\frac{3}{4}<\frac{5}{4}$.

c) Simplificamos las fracciones obtenidas: $\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$ y $\frac{48}{72}=\frac{2}{3}$. Al compararlas se tiene: $\frac{1}{4}<\frac{2}{3}$, porque como resultado de los productos cruzados $1 \cdot 3 < 2 \cdot 4$, ya que $3 < 8$.

Observa que:

Al efectuar los productos cruzados es muy importante mantener el orden en que se realizan: si $\frac{a}{b}$ está a la izquierda de $\frac{c}{d}$, entonces $a \cdot d$ también estará a la izquierda de $c \cdot b$ en la comparación.

Al efectuar los productos cruzados es muy importante mantener el orden. La comparación pudo hacerse con las fracciones antes de simplificarlas, pero entonces en los productos cruzados los factores serían mayores y complicarían innecesariamente las multiplicaciones en: $8 \cdot 72 < 48 \cdot 32$.

d) Simplificando las fracciones obtenidas $\frac{80}{16}=\frac{5}{1}=5$ y $\frac{24}{21}=\frac{8}{7}$

Comparamos: $5>\frac{8}{7}$, porque como resultado de los productos cruzados $35>8$.

Recuerda que...

Las fracciones impropias se pueden escribir como números naturales, si el numerador es múltiplo del denominador. Ejemplos:

$\frac{80}{16} = 5; \frac{27}{27} = 1; \frac{123}{3} = 41$

Toda fracción impropia distinta de 1 es mayor que 1.

En la práctica podemos expresar una fracción impropia que no representa un número natural como un **número mixto**.

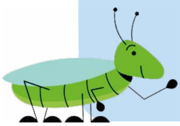
Por ejemplo, para representar $\frac{7}{3}$ como número mixto:

Dividimos el numerador entre el denominador:

$$\begin{array}{r|l} 7 & 3 \\ \hline -6 & 2 \\ \hline 1 & \end{array}$$

Con el cociente, el resto y el divisor se forma el número mixto $2\frac{1}{3}$

$$\text{cociente} \rightarrow 2\frac{1 \rightarrow \text{resto}}{3 \rightarrow \text{divisor}}$$



¡Atención! El número mixto $2\frac{1}{3}$ es igual a $2 + \frac{1}{3}$.

Como ya has aprendido a hallar el mcm de números naturales, puedes hallar el menor denominador común de varias fracciones aplicando este procedimiento. Al ampliar las fracciones de manera que todas tengan un denominador común, es más fácil compararlas.

Ejercicio resuelto

Ordena de mayor a menor las fracciones $\frac{63}{20}; \frac{49}{14}$ y $\frac{127}{42}$.

Respuesta: Para hallar el menor común denominador se descomponen en factores primos los denominadores y se halla el mcm: $20 = 2^2 \cdot 5$; $14 = 2 \cdot 7$; $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$.

Por tanto: mcm $(20, 14, 42) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$.

Después se amplían las fracciones que sean necesarias para llevarlas todas a un denominador común que es el mcm hallado:

$$\frac{63}{20}=\frac{63\cdot 21}{20\cdot 21}=\frac{1\,323}{420} \quad \frac{49}{14}=\frac{49\cdot 30}{14\cdot 30}=\frac{1\,470}{420} \quad \frac{127}{42}=\frac{127\cdot 10}{42\cdot 10}=\frac{1\,270}{420}$$

Comparamos los numeradores de las fracciones ampliadas: $1\,470 > 1\,323 > 1\,270$.

Por tanto: $\frac{49}{14}>\frac{63}{20}>\frac{127}{42}$

Recuerda que...

El mínimo común múltiplo (mcm) de dos o más números naturales es el menor de los múltiplos comunes diferentes de cero.

Este procedimiento puedes utilizarlo para determinar el mínimo común múltiplo (mcm), pero puedes usar también la descomposición en factores primos para hallar el mcm.

Ejemplo:

Hallemos el mínimo común múltiplo (mcm) de 30 y 12.

El número buscado se forma con los factores primos, comunes y no comunes, en las descomposiciones respectivas con su mayor exponente: 2^2;3; 5

Luego se multiplican estos factores y el resultado es el mínimo común múltiplo:

mcm (30; 12) = $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

El máximo común divisor (mcd), de dos o más números naturales, es el mayor divisor común diferente de uno.

Al igual que para determinar el mínimo común múltiplo podemos utilizar la descomposición en factores primos para determinar el mcd.

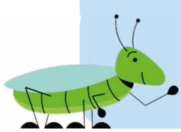
Hallemos el máximo común divisor (mcd) de 24 y 36.

$24 = 2^3 \cdot 3$ $\qquad$ $36 = 2^2 \cdot 3^2$

Después de descomponer en factores primos, se tomaron solamente los factores comunes con su menor exponente.

mcd (24;36) = $2^2 \cdot 3 = 12$

mcd (24;36) = 12



Al igual que en el mínimo común múltiplo podemos utilizar el máximo común divisor en la resolución de problemas.

¿Sabías que...?

Las reglas para realizar las operaciones básicas con fracciones tienen una larga historia con antecedentes en una época remota, muchos siglos antes de que se editaran los primeros libros en papel. Hay evidencias que datan de mucho antes de la construcción de las pirámides de Egipto. En los papiros de Kahun (1950 a.n.e.) y de Rhind (1650 a.n.e.) que se conservan en Londres, aparecen problemas que conducen a realizar operaciones con fracciones. En el papiro de Rhind, redactado por el escriba Ahmés con datos que tomó de documentos más antiguos, aparece, por ejemplo, el siguiente problema: Una cantidad y su séptima parte suman 24. ¿Cuál es la cantidad?

Más notables aún son los resultados alcanzados en la India, mostrados en la obra de matemáticos como Brahmagupta (siglo VII) y que se trasladaron por comerciantes árabes e italianos a Europa. Sin embargo, el estudio de las operaciones con fracciones no se introdujo en las instituciones escolares europeas como contenido de enseñanza hasta el siglo XVIII.

Recuerda que...

Para adicionar números fraccionarios como fracciones comunes:

1. Se representan por fracciones comunes que tengan un mismo denominador.
2. Se adicionan las fracciones de denominador común.

Ejemplo:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$$

(en la práctica se suprime el primer paso) (figura 1.9)

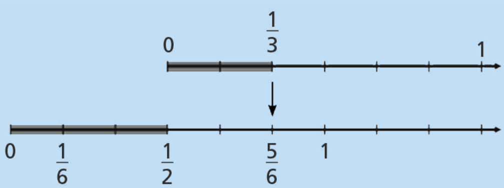
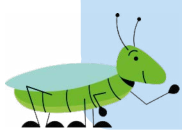


Figura 1.9



Al igual que en los números naturales:

- Dados dos números fraccionarios cualesquiera, siempre es posible hallar su suma que también es un número fraccionario.
- La adición de números fraccionarios es conmutativa: para todos los números a y b fraccionarios se cumple $a + b = b + a$.
- La adición de números fraccionarios es asociativa: para todos los números a, b y c fraccionarios se cumple $a + (b + c) = (a + b) + c$.
- Para cada número fraccionario a se cumple: $a + 0 = 0 + a = a$.

Recuerda que...

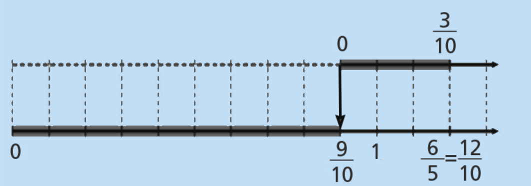
Para sustraer números fraccionarios como fracciones comunes:

1. Se representan por fracciones comunes que tengan un mismo denominador.
2. Se verifica en las fracciones de igual denominador, si el numerador del minuendo es mayor o igual que el numerador del sustraendo.
3. Si se cumple 2, se sustraen las fracciones de denominador común (si el minuendo es menor que el sustraendo, se concluye que el resultado no es un número fraccionario).

Ejemplo: $\frac{6}{5} - \frac{3}{10} = \frac{12}{10} - \frac{3}{10} = \frac{12-3}{10} = \frac{9}{10}$ (en la práctica se suprime el primer paso)

$$x + \frac{3}{10} = \frac{6}{5}$$

Observa la figura 1.10.



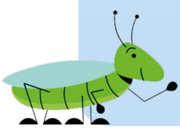


Figura 1.10

Al igual que en los números naturales, dados dos números fraccionarios expresados como fracciones de igual denominador, para que el resultado de su sustracción sea un número fraccionario, el numerador del minuendo tiene que ser mayor o igual que el numerador del sustraendo.

Dominar el cálculo con fracciones de diferentes denominadores es muy importante para la resolución de problemas. Veamos un caso con un apoyo gráfico.

Ejercicio resuelto

Juana reparte un pastel en tres partes (figura 1.11), de modo que la mitad sea para su esposo y la tercera parte para su hija. ¿Qué parte del pastel le corresponde a su esposo e hija juntos? ¿Qué parte del pastel quedó para ella?

Respuesta:

Parte del pastel que corresponde al esposo: $P_1 = \frac{1}{2}$

Parte del pastel que corresponde a la hija: $P_2 = \frac{1}{3}$

Parte del pastel que corresponde a los dos juntos $P_1 + P_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$

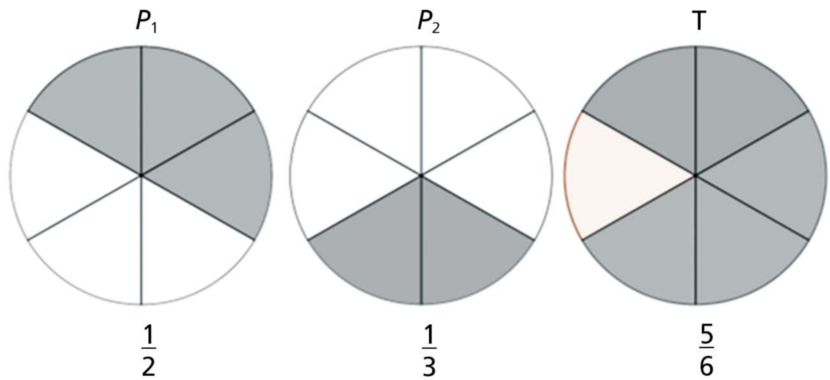


Figura 1.11

Parte del pastel que queda para ella: $1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$

Respuesta: Juana destinó para su esposo e hija juntos $\frac{5}{6}$ del pastel, y para ella quedó $\frac{1}{6}$.

En resumen

Para adicionar o sustraer fracciones:

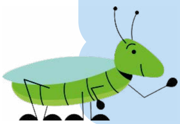
- Si son de igual denominador, basta con adicionar o sustraer los numeradores y colocar el mismo denominador.
- Si son de diferente denominador, se reducen a un denominador común (preferiblemente el mcm de los denominadores), y una vez así se adicionan o sustraen los numeradores de las fracciones halladas (la fracción resultante debe simplificarse siempre que sea posible).

Ejemplo: $\frac{1}{4}+\frac{3}{7}-\frac{23}{60}=\frac{105+180-161}{420}=\frac{124}{420}=\frac{31}{105}$

Recuerda que...

Para multiplicar números fraccionarios como fracciones comunes:

1. Se simplifican las fracciones dadas tanto como se pueda.
2. Se multiplican numerador por numerador y denominador por denominador de las fracciones simplificadas $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$ $(b \neq 0;\ d \neq 0)$.



3. Se simplifica la fracción obtenida si es necesario

Ejemplo

Determina el área de un rectángulo con los lados: $x=\frac{2}{3}$ m; $y=\frac{1}{2}$ m

En la figura 1.12 se puede observar una representación gráfica del producto:

$$x\cdot y=\frac{2\cdot 1}{3\cdot 2}=\frac{2}{6}\text{ m}^2;\ \text{simplificando } \frac{1}{3}\text{ m}^2$$

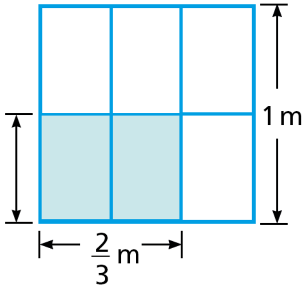


Figura 1.12

Otros ejemplos de problemas que conducen a la multiplicación de fracciones son:

a) ¿Qué tiempo dedicas en la semana a clases de ortografía, si empleas 2 veces a la semana tres cuartos de hora?

Respuesta: Una hora y media $\left(2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}\right)$

b) ¿Cuántos refrescos representan las dos terceras partes de una caja, si una caja tiene 24 refrescos?

Respuesta: 16 refrescos $\left(\frac{2}{3} \cdot 24 = \frac{48}{3} = 16\right)$

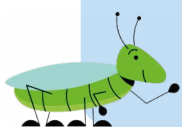
c) ¿Qué parte de una tableta de chocolate te han dado, si de la mitad te dan solo la cuarta parte?

Respuesta: Te han dado la octava parte de la tableta $\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8}\right)$

Recuerda que...

Al igual que en los números naturales:

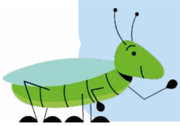
- Dados dos números fraccionarios cualesquiera, siempre es posible hallar su producto que también es un número fraccionario.
- La multiplicación de números fraccionarios es conmutativa: para todos los números a y b fraccionarios se cumple $a \cdot b = b \cdot a$. La multiplicación de números fraccionarios es asociativa: para todos los números a, b y c fraccionarios se cumple $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
- Para cada número fraccionario a se cumplen $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ y $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.



Definición 1.3

El recíproco de una fracción $\frac{a}{b}$ es la fracción $\frac{b}{a}$ $(a \neq 0;\ b \neq 0)$.

Recuerda que...



Para dividir números fraccionarios como fracciones comunes:

1. Se determina el recíproco del divisor.
2. Se multiplica el dividendo por el recíproco del divisor:
$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad (b \neq 0;\ c \neq 0;\ d \neq 0)$$
3. Se simplifica la fracción obtenida si es necesario.

Ejercicio resuelto

Halla el cociente

a) $\frac{5}{7} : 7$

b) $8 : \frac{3}{4}$

c) $\frac{7}{8} : \frac{2}{3}$

Respuesta:

a) $\frac{5}{7} : 7 = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{5}{49}$

b) $8 : \frac{3}{4} = \frac{8}{1} \cdot \frac{4}{3} = \frac{32}{3}$

c) $\frac{7}{8} : \frac{2}{3} = \frac{7}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{21}{16}$

Definición 1.4

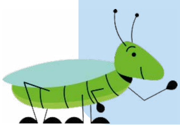
Se denominan **fracciones complejas** a aquellas que tienen fracciones en su numerador, en su denominador o en ambos términos a la vez.

Las divisiones indicadas del ejercicio anterior pueden expresarse como fracciones complejas, por ejemplo:

$$\frac{7}{8} : \frac{2}{3} = \frac{\frac{7}{8}}{\frac{2}{3}}$$

Respuesta: Cada inciso (una fracción compleja) puede expresarse también como una división indicada, en la que el dividendo es el numerador y el divisor es el denominador.

Recuerda que...



- Toda fracción compleja es una división indicada. Para la fracción compleja se usa una raya mayor para diferenciarla de rayas en el numerador o el denominador.
- También debes tener muy en cuenta la colocación del signo igual al efectuar cálculos y comparaciones en las que aparezcan fracciones complejas.

Ejercicios del epígrafe

1. Observa la figura 1.13. Marca con una x la respuesta que completa de manera correcta la siguiente afirmación: “La fracción que aparece representada es…”

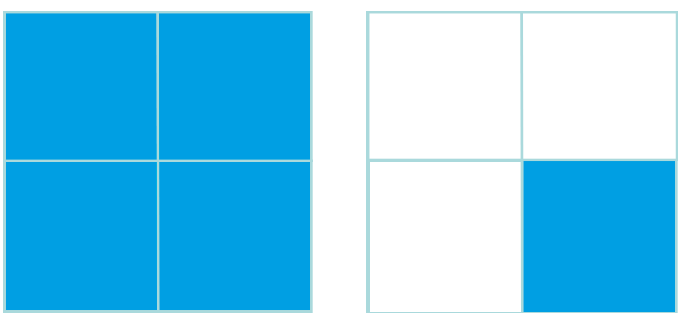


Figura 1.13

a) ____ $\frac{4}{3}$ b) ____ $\frac{4}{5}$ c) ____ $\frac{5}{4}$ d) ____ $\frac{1}{3}$

2. Determina el mcm y el mcd de los siguientes números:

a) 12, 24 y 30
b) 18, 28 y 36

3. Expresa como número mixto:

a) $\frac{7}{5}$ b) $\frac{29}{12}$ c) $\frac{313}{10}$ d) $\frac{653}{100}$

4. Convierte en fracciones impropias:

a) $4\frac{3}{5}$ b) $11\frac{1}{10}$ c) $2\frac{9}{17}$ d) $7\frac{25}{34}$

5. Marca con una x la respuesta que completa de manera correcta la siguiente afirmación: "La fracción mayor entre $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{15}$; $\frac{1}{15}$; $\frac{1}{5}$ es..."

a) ____ $\frac{2}{15}$ b) ___ $\frac{1}{3}$ c) ____ $\frac{1}{15}$ d) ____ $\frac{1}{5}$

6. Marca con una x la respuesta que completa de manera correcta la siguiente afirmación: "De las siguientes fracciones: $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$ la fracción menor es ..."

a) ___ $\frac{1}{2}$ b) ___ $\frac{5}{2}$ c) ___ $\frac{1}{4}$ d) ___ $\frac{1}{3}$

7. Ordena las siguientes facciones, comienza por la menor:

a) $\frac{1}{4}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{1}{8}$

b) $\frac{2}{5}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{6}$

8. Ordena de menor a mayor con ayuda de una calculadora:

a) $\frac{1}{8};\frac{3}{7};\frac{5}{4};\frac{0}{8};\frac{5}{7};1$

b) $4\frac{3}{5};11\frac{1}{10};2\frac{9}{17};7\frac{25}{34}$

c) $\frac{1}{12};1\frac{2}{9};\frac{7}{10};\frac{8}{12};\frac{7}{12}$

d) $\frac{11}{17};3\frac{1}{17};\frac{97}{136};\frac{41}{68};\frac{21}{34}$

9. Marca con una x la respuesta que completa de manera correcta la siguiente afirmación: “ Al simplificar la fracción $\frac{9}{18}$ de manera irreducible se obtiene la fracción …”

a) ____ $\frac{1}{6}$ b) ____ $\frac{1}{2}$ c)____ $\frac{3}{6}$ d) ____$\frac{1}{9}$

10. Calcula y simplifica:

a) $\frac{11}{24}+\frac{17}{36}+\frac{7}{9}$

b) $\frac{4}{7}+\frac{1}{6}+\frac{9}{14}+\frac{5}{12}+\frac{16}{21}+\frac{1}{3}+\frac{7}{8}$

c) $\frac{21}{12}-\frac{5}{4}-\frac{1}{2}$

d) $\frac{7}{12}-\frac{3}{8}-\frac{1}{32}-\frac{7}{96}$

11. Calcula y compara los resultados obtenidos en cada inciso:

a) $\frac{5}{3}-\frac{5}{6}-\frac{1}{12}$

b) $\frac{5}{3}-\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{12}\right)$

c) $\frac{5}{3}-\frac{5}{6}+\frac{1}{12}$

d) $\frac{5}{3}-\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{12}\right)$

12. Suprime paréntesis, calcula y simplifica:

$\frac{2}{3}-\left(\frac{11}{12}-\frac{1}{4}\right)$

$\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{2}{5}$

$\frac{39}{18}-\frac{50}{45}-\left(\frac{11}{36}+\frac{67}{90}\right)$

13. Simplifica y después multiplica las fracciones obtenidas:

a) $\frac{8}{15}\cdot\frac{3}{4}$

b) $\frac{3}{7} \cdot \frac{17}{51}$

c) $\frac{11}{33} \cdot \frac{1}{3}$

d) $\frac{9}{96} \cdot \frac{12}{81}$

e) $\frac{12}{18} \cdot \frac{3}{2}$

f) $\frac{7}{3} \cdot 5\frac{1}{4}$

14. Simplifica las fracciones siempre que sea posible y después calcula:

a) $\frac{7}{9} : \frac{5}{8}$

b) $\frac{12}{7} : \frac{9}{14}$

c) $\frac{15}{2} : \frac{8}{5}$

d) $2\frac{2}{9} : \frac{5}{3}$

e) $6\frac{3}{5} : \frac{3}{5}$

f) $5\frac{4}{7} : 3\frac{3}{12}$

15. Calcula respetando el orden de las operaciones:

a) $\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{15}\right) : \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{9}\right)$

b) $\left(\frac{2}{9} + \frac{1}{6}\right) : \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{10}\right) \cdot 1\frac{1}{2}$

16. En la elaboración de una torta se necesitan dos octavos de litro de leche para la masa y tres octavos de litro de leche para la crema. ¿Cuántos litros de leche se necesitan en total para esta torta?

17. Barbarita empleó media hora en la tarea de Matemática y un cuarto de hora en la tarea de vocabulario de Inglés. ¿Qué tiempo en total empleó en estas tareas?

18. Un ciclista recorre una distancia en dos días; el primer día hace un recorrido de 26,14 km; en el segundo día 30,5 km. ¿Cuál fue el recorrido total?

Marca con una x la respuesta correcta para este problema.

a) ___ 56,34 km b) ___ 4,06 km

c) ___ 55,34 km d) ___ 5,634 km

19. Luis y Laura son médicos y esta noche coincidieron en la guardia. Si Luis realiza su guardia cada 60 días y Laura cada 80, ¿cuántos días deben transcurrir para que vuelvan a realizar la guardia unidos?

20. Se tienen tres listones de madera con las siguientes longitudes 72 cm, 60 cm y 24 cm. Si se quieren cortar en trozos iguales de manera que obtengamos el mayor número de pedazos, ¿cuánto debe medir cada pedazo y cuántos trozos de esa longitud se pueden cortar de cada listón?

21. El tanque de una motocicleta tiene dos litros de gasolina. Si se utilizan dos tercios de litro en un recorrido, ¿cuánta gasolina queda en el tanque al final del recorrido?

1.3 Problemas típicos de fracciones

En quinto grado aprendiste a resolver problemas relacionados con estas igualdades. Por su importancia, vamos a repasarlos.

1. Halla $\frac{3}{4}$ de 8.
2. ¿Qué parte es 6 de 8?
3. ¿De qué número es 6 los $\frac{3}{4}$?

En la igualdad $\frac{3}{4} \cdot 8 = 6$, reconocemos dos factores y un producto. Al dar como datos dos de estos elementos y como incógnita el tercero de ellos, obtenemos tres ejercicios diferentes: $\frac{3}{4} \cdot 8 = x$; $x \cdot 8 = 6$; $\frac{3}{4} \cdot x = 6$.

Hay tres problemas típicos de fracciones que se asocian a estos tres ejercicios.

Hallar una fracción de un número

a) $\frac{3}{4}$ de 8

b) $\frac{5}{3}$ de 24

Respuesta: Para hallar una fracción de un número multiplicamos la fracción por el número dado.

a) El producto será menor que el número dado (8), porque multiplicaremos por una fracción propia (menor que 1): $\frac{3}{4} \cdot 8 = \frac{3}{1} \cdot 2 = 6$.

b) En este caso, el producto va a ser mayor que el número dado (24), pues se multiplicará por una fracción impropia (mayor que 1): $\frac{5}{3} \cdot 24 = \frac{5}{1} \cdot 8 = 40$.

Hallar qué parte es un número de otro

a) 6 de 8 b) 9 de 6

Respuesta: Para hallar qué parte es un número de otro aplicas la división y simplificas la fracción obtenida cuanto sea posible.

a) La fracción en este caso será propia porque estamos averiguando qué parte es un número menor de otro mayor: $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

b) Al hallar qué parte es un número mayor de otro menor, la fracción que se obtiene es impropia: $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$.

Hallar el número cuando se conoce una parte fraccionaria de él

¿De qué número es?

a) 6 los $\frac{3}{4}$ b) 21 los $\frac{7}{3}$

Respuesta: Para hallar el número cuando se conoce una parte fraccionaria, se divide el número que representa la parte fraccionaria entre la fracción.

Podemos plantear: $\frac{3}{4} \cdot x = 6$.

Sabemos que entonces: $x = 6 : \frac{3}{4}$, que en la práctica equivale a multiplicar el número por el recíproco de la fracción: $6 \cdot \frac{4}{3} = 8$.

En este caso, procederemos directamente: $21 \cdot \frac{3}{7} = 9$.

Ejercicios del epígrafe

1. Una cafetería se mantiene abierta al público dos terceras partes de las 24 h del día. ¿Cuántas horas se mantiene abierta al público?

2. Un tío reparte $ 100,00 entre sus tres sobrinas; a la mayor le da $ 50,00, a la más pequeña $ 20,00 y a la mediana el resto. ¿Qué fracción de los $ 100,00 entregó a cada una?

3. Una cooperativa envía al mercado agropecuario 2 000 kg de papas, que representan $\frac{4}{5}$ de lo recogido ese día. ¿Cuántos kilogramos de papas se recogieron en total ese día?

1.4 División de expresiones decimales

Entre las fracciones que has estudiado están aquellas que tienen como denominador una potencia de 10. Ejemplos de algunas son:

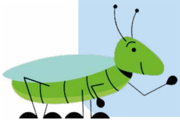
$$\frac{2}{10};\ \frac{341}{100};\ \frac{1\,573\,492}{1\,000};\ \frac{28}{1\,000}$$

Los casos anteriores de fracciones se pueden representar como expresiones decimales, empleando un procedimiento sencillo que ya conoces:

$$\frac{2}{10} = 0{,}2;\ \frac{341}{100} = 3{,}41;\ \frac{1\,547\,492}{1\,000} = 1\,573{,}492;\ \frac{28}{1\,000} = 0{,}028$$

Recuerda que...

Las fracciones cuyos denominadores son potencias de 10 se llaman **fracciones decimales** y se pueden representar también en **notación decimal**.



Las fracciones decimales cuando se representan en notación decimal se denominan **expresiones decimales**.

Para escribir una fracción decimal en notación decimal, se escribe el numerador y se completa el número colocando una coma (intercalando ceros si es necesario) de modo que haya después de ella tantos lugares como ceros tenga el denominador.

La tabla de posiciones del sistema de numeración decimal se amplía hacia la derecha cuando se escriben en ella expresiones decimales. Recordarás que el número natural 3 645 978 está escrito en el sistema de numeración decimal y en la tabla de posición decimal cada dígito tiene un significado:

Unidades de millón	**Centenas de millar**	**Decenas de millar**	**Unidades de millar**	**Centenas**	**Decenas**	**Unidades**
3	6	4	5	9	7	8

Para representar expresiones que tienen una coma decimal, la tabla se amplía a la derecha de las unidades para dar cabida a las décimas, centésimas, milésimas, diez milésimas y así sucesivamente. Observa que el criterio sigue siendo el mismo: en las decenas diez unidades, en las centenas cien unidades, en las unidades de millar mil unidades, y así en lo adelante:

Unidades de millar	**Centenas**	**Decenas**	**Unidades**	**Décimas**	**Centésimas**	**Milésimas**
			0	2		
			3	4	1	
1	5	7	3	4	9	2
			0	0	2	8

Los números representados en la tabla son: 0,2; 3,41; 1 573,492 y 0,028. Estos números también pueden representarse en un ábaco (figura 1.14) (teniendo en cuenta la coma). A la izquierda de la coma estarán representadas las unidades, decenas, centenas y así sucesivamente. A la derecha de la coma, las décimas, centésimas, milésimas y así sucesivamente. Como ejemplo tomamos los tres primeros representados en la tabla anterior.

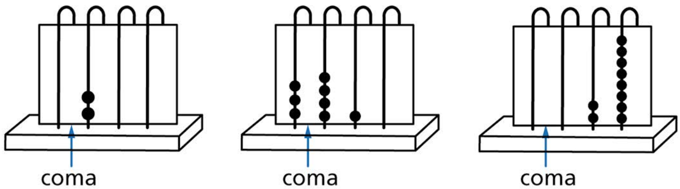


Figura 1.14

Entre los significados asociados a las fracciones comunes hemos estudiado que cada fracción común $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$) representa una división indicada en la que el número natural a es el dividendo y el número natural b es el divisor.

Cuando a es múltiplo de b, la división es exacta y el resultado es también un número natural.

En los ejemplos como: $\frac{1}{5} = 0{,}2$ y $\frac{25}{100} = 0{,}25$ la división es exacta, pero el resultado no es un número natural.

Comprueba que lo mismo ocurre con las fracciones comunes: $\frac{1}{25}$; $\frac{6}{24}$; $\frac{9}{8}$

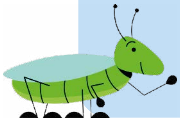
En todos estos casos se pueden hallar fracciones decimales equivalentes a las dadas (cuando se pueden hallar, existen múltiples posibilidades):

$$\frac{1}{25} = \frac{4}{100};\ \frac{6}{24} = \frac{25}{100};\ \frac{9}{8} = \frac{1125}{1\,000}$$

En tales casos no se puede hallar una fracción decimal equivalente a la dada. Utiliza una calculadora para comprobarlo.

Recuerda que...

Los procedimientos escritos de la adición y la sustracción de expresiones decimales son similares a los utilizados para adicionar y sustraer números naturales, si se tiene cuidado al escribir las expresiones decimales para que las unidades



de un mismo orden queden una debajo de la otra. Cuando se escriben correctamente las expresiones decimales, la coma de cada una queda debajo de la coma de la expresión escrita anteriormente.

Ejercicio resuelto

Dadas las expresiones decimales 147,025; 27,5 y 9,72:

a) Adiciona estas expresiones.
b) Sustrae de la primera de ellas la suma de las otras dos.

Respuesta:

a)
$$\begin{array}{r} 147{,}025 \\ 27{,}5 \\ +\ \ 9{,}72 \\ \hline 184{,}245 \end{array}$$

b)
$$\underbrace{\begin{array}{r} 27{,}5 \\ +\ \ 9{,}72 \\ \hline 37{,}22 \end{array}}_{\text{respuesta}} \qquad \underbrace{\begin{array}{r} 147{,}025 \\ -\ 37{,}22 \\ \hline 109{,}805 \end{array}}_{\text{respuesta}}$$

Recuerda que...

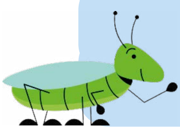
Si al multiplicar tenemos expresiones decimales como factores:

1. Se calcula el producto como si los factores fueran números naturales.
2. En el producto se separan mediante una coma tantos lugares decimales como haya en todos estos factores juntos.

Ejemplos:

$0{,}75 \cdot 10 = 7{,}50 = 7{,}5$ $\qquad$ $3{,}32 \cdot 0{,}24 = 0{,}7968$

$16{,}3 \cdot 7{,}08 = 115{,}404$



Ejercicio resuelto

¿Cuál es el área de un cuadrado, si su perímetro es igual a 10 cm?

Sabemos que si a la longitud del lado de un cuadrado la llamamos a, su perímetro es $4a$ y su área a^2. Como tenemos el perímetro $4a = 10$, calculamos la longitud del lado:

$$a = \frac{10}{4} = 2{,}5$$

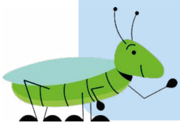
Por tanto: $a^2 = 2{,}5 \cdot 2{,}5 = 6{,}25$

Respuesta: El área es igual a 6,25 cm^2.

Recuerda que...

Las divisiones de números naturales en las que el dividendo es un múltiplo del divisor, son divisiones exactas de resto igual a cero. El cociente de cada una de estas divisiones es un número natural. Ejemplo: 480 : 2 = 15

$$\begin{array}{r|l} 480 & 32 \\ \cline{2-2} -\ 32 & 15 \\ \hline 160 & \\ -160 & \\ \hline 0 & \end{array}$$



En la práctica vemos muchas veces que, al dividir dos números naturales dados, no es posible obtener un resto igual a cero. Al considerar esta división como una entre números fraccionarios con denominador 1, el resultado de la división es un número fraccionario.

Ejemplo

$$\begin{array}{r|l} 183 & 15 \\ \cline{2-2} -\ 15 & 12 \\ \hline 33 & \\ -\ 30 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

$$183 : 15 = 12\frac{3}{15} = 12\frac{1}{5}$$

El procedimiento de la división con números fraccionarios, dado que el cociente puede ser una expresión decimal, se extiende hasta que el resto es cero o comienzan a repetirse los restos de manera periódica. Para ello, al llegar al punto en que la división con números naturales concluía, se coloca una coma en el cociente y se agregan ceros a los restos para continuar la división.

Ejemplos

a) Escribe la división 183 : 15

```
 183    | 15
– 15      12,2
 ----
  33     ↑ Antes de escribir las décimas del cociente debes colocar
– 30       la coma decimal
 ----
   30
→– 30    Se transforman las 3 unidades del resto en 30 décimas;
 ----    esto equivale a agregar un cero
    0
```

El resultado es una expresión decimal finita: 183 : 15 = 12,2

b) Escribe la división 75 : 11 (figura 1.15).

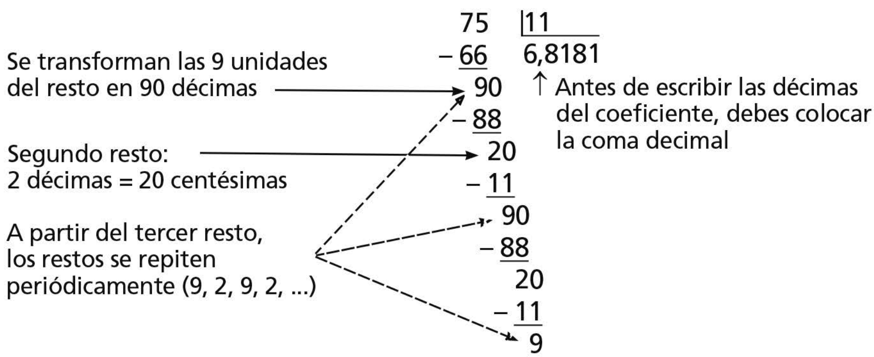


Figura 1.15

El resultado es una expresión decimal infinita:

75 : 11 = 6,8181…

Los puntos suspensivos al final de la expresión indican que las dos cifras básicas (8 y 1) del cociente se repiten infinitamente. El conjunto de estas cifras que se repiten se llama período.

Otros ejemplos de divisiones en las que el resultado se expresa como una expresión decimal periódica son:

2 : 9 = 0,222…
5 : 11 = 0,4545…
29 : 7 = 4,142857…
119 : 13 = 9,153846…

¿Sabías que…?

Una forma más breve de escribir las expresiones decimales periódicas consiste en trazar una raya horizontal sobre las cifras básicas que forman un período, para no tener necesidad de repetirlas. Por ejemplo:

El número 0,222 se escribe $0,\overline{2}$ y se lee: cero coma dos, período dos.

El número 0,4545 se escribe $0,\overline{45}$ y se lee: cero coma cuarenta y cinco, período cuarenta y cinco.

Hasta ahora solo hemos dividido números naturales, pero el tener que agregar ceros a los restos sugiere cómo dividir una expresión decimal entre un número natural.

Ejercicio resuelto

Halla la expresión decimal que es el resultado de dividir:

a) 7,48 : 4

Respuesta:

```
  7,48   | 4
 – 4     |______
  34 ←     1,87
 – 32      ↑ Colocar la coma al bajar el 4
    28
  – 28
     0
```

Resultado: 1,87

b) 27,3 : 11

Respuesta:

$$
\begin{array}{r|l}
27{,}3 & \;11 \\ \cline{2-2}
\underline{-\,22\;} & \;2{,}481 \\
53 \leftarrow & \;\uparrow \text{Colocar la coma al bajar el 3} \\
\underline{-\,44\;} & \\
90 & \\
\underline{-\,88\;} & \\
20 & \\
\underline{-\,11\;} & \\
90 & \\
\underline{-\,88\;} & \\
2 &
\end{array}
$$

Resultado: $2{,}\overline{481}$

Para dividir una expresión decimal entre un número natural se efectúa la operación como si se tratara de una división de números naturales, teniendo cuidado de colocar en el cociente una coma cuando se termine de dividir la parte entera del dividendo, al bajar la primera cifra decimal.

Ejercicio resuelto

Alberto ahorró en una alcancía $ 313,50 y le dio la mitad a su hermana. ¿Cuánto dio a su hermana?

Para hallar la respuesta dividimos: $ 313,50 : 2 = 156,75

Respuesta: Alberto le dio a su hermana $ 156,75.

Todavía nos falta el caso más general de división escrita de números fraccionarios, en el que tanto el dividendo como el divisor son expresiones decimales. Este procedimiento se puede reducir a los anteriores casos estudiados multiplicando el divisor y el dividendo por la unidad seguida de tantos ceros como sean necesarios para obtener como resultado un número natural como nuevo divisor. Se divide finalmente una expresión decimal entre un número natural.

Ejemplos

a) 2,877 : 4,11

287,7 : 411 = 0,7

$$\begin{array}{r|l} 287{,}7 & 411 \\ \cline{2-2} -2877 & 0{,}7 \\ \hline 0 & \end{array}$$

b) 31,84 : 3,2

318,4 : 32 = 9,95

$$\begin{array}{r|l} 318{,}4 & 32 \\ \cline{2-2} \underline{-288} & 9{,}95 \\ 304 & \\ \underline{-288} & \\ 160 & \\ \underline{-160} & \\ 0 & \end{array}$$

c) 0,037 : 0,9

0,37 : 9 = 0,041

$$\begin{array}{r|l} 0{,}37 & 9 \\ \cline{2-2} \underline{-36} & 0{,}041 \\ 10 & \\ \underline{-9} & \\ 10 & \\ \underline{-9} & \\ 1 & \end{array}$$

En resumen

Para dividir expresiones decimales:

- Se elimina la coma del divisor multiplicando el dividendo y el divisor por una potencia de diez (10; 100; 1 000…).
- Se divide como si dividendo y divisor fueran números naturales.
- Se coloca una coma en el cociente cuando se vaya a bajar la primera cifra decimal (después que se hayan dividido las unidades del dividendo) y se continúa dividiendo, si es necesario.

Ejercicio resuelto

1. Elena tiene un corte de tela de algodón de 0,75 m de ancho y 14,25 m de largo. Quiere hacer manteles individuales cuadrados de lado igual a 0,75 m. ¿Cuántos manteles podrá hacer con toda la tela que tiene?

   Para hallar la respuesta dividimos 14,25 : 0,75 = 1 425 : 75 = 19.

   Respuesta: Elena puede hacer 19 manteles.

2. Héctor quiere comprobar si le han dado en el supermercado la cantidad de queso que ha pedido. El kilogramo tiene un precio de $ 8,10 y le han cobrado $ 28,35. ¿Cuántos kilogramos de queso debe tener?

Para hallar la respuesta dividimos:

$ 28,35 : $ 8,10 = 2 835 : 810 = 3,5.

Respuesta: Héctor debe tener 3,5 kg de queso.

Ejercicios del epígrafe

1. Representa las siguientes fracciones como expresiones decimales y ubícalas en el rayo numérico (figura 1.16):
$\frac{3}{5}$; $1\frac{1}{2}$; $\frac{16}{5}$; $\frac{18}{4}$

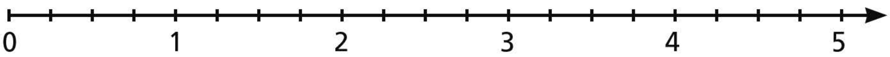


Figura 1.16

2. Convierte, en cada caso, las expresiones decimales en fracciones comunes. Simplifica y compara. Fundamenta tus respuestas:

a) $\frac{13}{11}$ y 1,3

b) $\frac{7}{6}$ y 0,75

c) $\frac{23}{5}$ y 4,25

d) 6,15 y $\frac{75}{12}$

3. Calcula prestando atención al orden de las operaciones:

a) $0,18 \cdot (8,5 + 163,48) - 10,63$

b) $45,41 - 5,41 \cdot (2,8 + 2,27)$

4. Convierte las fracciones comunes en expresiones decimales y calcula:

a) $\frac{39}{2} + \frac{30}{4} \cdot (4,73 + 2,27)$

b) $12,5 - \frac{1}{2} \cdot \left(2,31 + \frac{127}{20}\right)$

5. Halla el cociente y comprueba:

a) 54,6 : 1,3 b) 175 : 0,4 c) 6,936 : 0,34

6. Halla el cociente completo, si es posible, en las siguientes divisiones. Clasifica en expresiones finitas o infinitas los cocientes obtenidos.

a) 3,46 : 0,16

b) 87,96 : 5

c) 5 : 0,12

d) 2,877 : 4,11

7. Calcula el resultado exacto de:

a) $\dfrac{17{,}13+4{,}55}{5{,}42}$ b) $\dfrac{25{,}98+5{,}62}{6{,}32}$ c) $\dfrac{27{,}02-10{,}01}{3{,}78}$

1.5 Cálculo con valores aproximados

Cuando no se necesita o no se puede precisar un valor exacto en mediciones, resultados de cálculos o estimaciones, pueden darse en su lugar **valores aproximados.** Por ejemplo, los siguientes datos representan valores aproximados:

- Un lápiz mide cerca de 19 cm.
- La distancia entre La Habana y Varadero es aproximadamente de 142 km.
- En el Estadio Cándido González estaban presentes unos 10 000 espectadores.
- Si el dividendo es 99 y el divisor 5, el resultado aproximado de la división es 20.

Supongamos que quieres estimar cuánto debes pagar por un conjunto de productos que has decidido comprar o por los platos que seleccionaste del menú de un restaurante. Para ello, si la suma es muy complicada, puedes hacer un cálculo aproximado.

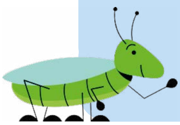
Por ejemplo, en la lista que se ofrece, se han anotado los precios de los productos que se van a comprar en una feria agropecuaria:

Plátano $ 12,50
Papa $ 8,25
Aguacate $ 6,80
Zanahoria $ 7,10
Ají $ 3,30

Para realizar un cálculo aproximado, redondeas los datos y haces un estimado mental: $13 + 8 + 7 + 7 + 3 = 38$.

De esta manera sabes que puedes pagar con $ 40,00.

Recuerda que...



Para redondear (82 y 37) a múltiplos de 10:

- Buscamos entre qué múltiplos consecutivos de 10 está el número dado.

  $80 < 82 < 90$ $\quad$ $30 < 37 < 40$

- Determinamos cuál de esos múltiplos está más próximo al número dado y redondeamos.

  $82 \approx 80$ (por defecto) $\quad$ $37 \approx 40$ (por exceso)

Las reglas de redondeo que ya aprendiste para los números naturales se aplican también para redondear expresiones en notación decimal.

Ejercicios resueltos

1. Redondea a un lugar decimal.

   a) 3,625 b) $53,\overline{18}$

   Respuestas:

   Como 6 es la cifra que corresponde al primer lugar decimal se analiza la siguiente (en este caso 2). Como $2 < 5$, se conserva el 6, es decir, se redondea por defecto y se eliminan las siguientes cifras decimales: $3,625 \approx 3,6$.
   Como 1 es la cifra que corresponde al primer lugar decimal se analiza la siguiente (en este caso 8). Como $8 > 5$, se añade 1 a la cifra que corresponde al primer lugar decimal, es decir, se

redondea por exceso y se elimina la raya horizontal sobre las cifras básicas que indicaba las siguientes cifras decimales: $53,\overline{18} \approx 53,2$.

2. Redondea a dos lugares decimales.

a) 3,625   b) $53,\overline{18}$ c) $1,\overline{307692}$

Respuestas:

a) $3,625 \approx 3,63$ b) $53,\overline{18} \approx 53,18$ c) $1,\overline{307692} \approx 1,31$

En resumen

Para redondear expresiones decimales:

- Se redondea por defecto si la cifra siguiente a la que ocupa el lugar hasta donde se debe redondear es menor que 5.
- Se redondea por exceso si la cifra siguiente a la que ocupa el lugar hasta donde se debe redondear es mayor o igual que 5.

Cuando se redondea, el número obtenido es un valor aproximado del número dado. Dos importantes ejemplos en los que se aplica el redondeo consisten en utilizarlo para:

- Dar el resultado de una división, cuando el cociente no es finito o tiene muchos lugares decimales.
- Representar en un rayo numérico diferentes fracciones.

3. Efectúa las siguientes divisiones y expresa la respuesta con dos lugares decimales:

a) $\frac{277}{13}$ b) 526,5 : 9,9

Respuestas:

a) Al efectuar la división podemos comprobar que cero es la cifra que corresponde al segundo lugar decimal; se analiza entonces la siguiente. Como es 7, que es mayor que 5, se añade 1 a la cifra que corresponde al segundo lugar decimal.

$$\begin{array}{r|l} 277 & 13 \\ \cline{2-2} -26 & 21,307 \\ \hline 17 & \\ -13 & \\ \hline 40 & \\ -39 & \\ \hline 100 & \\ -91 & \\ \hline 9 & \end{array}$$

$$\frac{277}{13} \approx 21,31$$

b) Al efectuar la división podemos apreciar que $526,5 : 9,9 = 53,\overline{18}$. Para dar la respuesta con dos lugares decimales, se redondea por defecto, pues la tercera cifra decimal es 1, que es menor que 5.

$526,5 : 9,9 = 53,\overline{18}$ $\qquad 53,\overline{18} \approx 53,18$

4. Representa en un rayo numérico las siguientes fracciones:

$\frac{1}{2}; \frac{23}{4}; \frac{82}{13}; \frac{135}{17}$

Respuesta:

Primero se divide y redondea para obtener un valor aproximado en cada caso:

0,5; 5,75; 6,3; 7,94

Después se ubica cada valor aproximado en el rayo numérico utilizando una regla graduada (figura 1.17):

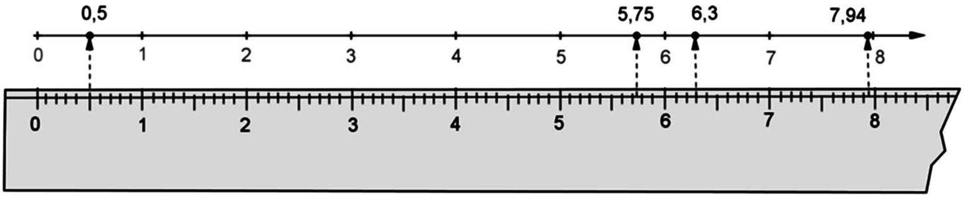


Figura 1.17

Ejemplo

En la siguiente tabla se expresan, en la primera columna, algunos valores aproximados; en la segunda columna, el número de cifras significativas que cada uno de ellos tiene, y en la tercera, qué números pueden ser expresados con cada valor aproximado.

Valor aproximado	Cifras significativas	Números que pueden ser expresados con el valor aproximado
0,5	1	$0{,}45 \leq x < 0{,}55$
6,3	2	$6{,}25 \leq x < 6{,}35$
0,702	3	$0{,}7015 \leq x < 0{,}7025$
0,004	1	$0{,}0035 \leq x < 0{,}0045$
0,180	3	$0{,}1795 \leq x < 0{,}1805$

En muchas ocasiones tendrás que calcular con expresiones decimales que no son valores exactos; en estos casos calcularás con aproximaciones de los valores exactos y tendrás en cuenta las siguientes reglas de cálculo con valores aproximados:

- Si un valor aproximado se ha obtenido por redondeo de un valor exacto, entonces se dice que tiene todas sus cifras correctas.
- Son cifras significativas de una expresión decimal todas las cifras básicas menos los ceros a la izquierda de la primera cifra básica que no es cero.
- Si calculas con valores aproximados, debes expresar el resultado con tantas cifras significativas como el dato que menos cifras significativas tiene.
- Si calculas con valores aproximados, la precisión del resultado no puede ser mayor que la de los datos.
- Al calcular con valores aproximados, los cálculos intermedios se realizan con una cifra significativa más de las que debe tener el resultado.

¿Sabías que...?

La última de estas reglas se emplea en el cálculo manual. Nuestros abuelos, al no disponer de calculadoras, empleaban esta y otras reglas más específicas para redondear valores intermedios, lo que les permitía ganar tiempo y obtener al final un valor aproximado con las cifras correctas deseadas. Con ayuda de una calculadora se ahorra mucho tiempo, por tanto, es posible realizar todos los cálculos con las cifras dadas y redondear solo al final.

Ejercicios resueltos

1. Un caminante recorre una distancia de 3,0 km en 765,6 s. ¿De cuántos metros por segundo es la velocidad del caminante en este recorrido?

   El dato correspondiente a la distancia recorrida es el que menos cifras significativas tiene (dos cifras significativas).

   Convertimos de kilómetros a metros y después dividimos con el auxilio de una calculadora. El resultado en una calculadora es 3,918495298, o en una más precisa 3,918495297805643.

   De cualquier manera, el resultado hallado no es exacto. La respuesta hay que darla con dos cifras significativas (las que tiene el dato con menos cifras significativas).

   Respuesta: La velocidad del caminante en este recorrido es de 3,9 m/s.

2. Un huerto rectangular tiene aproximadamente 30,25 m de largo y 23,5 m de ancho como se indica en la figura 1.18. En el huerto hay un kiosco (K) en el que se guardan herramientas y se venden productos. La superficie que este ocupa es aproximadamente la correspondiente a un cuadrado de 3,75 m de lado.

   a) ¿Cuál es el perímetro del huerto (incluyendo el kiosco)?

   b) ¿Cuál es el área de huerto no ocupada por el kiosco?

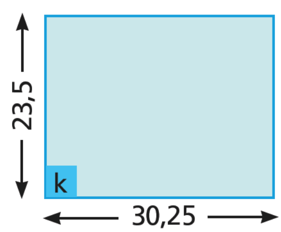


Figura 1.18

Sabemos que, si *a* y *b* son los lados de un rectángulo, su perímetro es $P = 2(a + b)$.

Calculamos: $P = 2 \cdot (30{,}25\ \text{m} + 23{,}5\ \text{m}) = 107{,}50\ \text{m}$

Teniendo en cuenta que todos los valores dados son aproximaciones, el resultado se debe expresar con 3 cifras significativas, como el dato que menos cifras significativas tiene (23,5).

Respuesta (a): El perímetro del huerto es aproximadamente de 108 m.

Ahora calculamos el área total y la ocupada por el kiosco. Restar estas áreas nos permitirá hallar la respuesta. En este caso, para los cálculos intermedios los resultados se dan con cuatro cifras significativas, una cifra más de las tres que tiene el dato con menos cifras significativas, que es por tanto el número de cifras significativas que debe tener el resultado final:

$A_{total} = (30{,}25\ \text{m})(3{,}75\ \text{m}) \approx 710{,}9\ \text{m}^2$

$A_{kiosko} = (3{,}75\ \text{m})(3{,}75\ \text{m}) \approx 14{,}06\ \text{m}^2$

$710{,}9\ \text{m}^2 - 14{,}06\ \text{m}^2 \approx 696{,}84\ \text{m}^2$

Respuesta (b): El área del huerto no ocupada por el quiosco es aproximadamente de 697 m^2.

¿Sabías que...?

En algunas tareas es necesario operar con números fraccionarios en diferentes formas de representación. Cuando aparecen combinadas fracciones comunes y expresiones decimales, nos decidimos por una forma de representación (la indicada o la más conveniente). Escritos todos los números en una misma forma de representación, se aplica el procedimiento conocido para cada caso. El empleo de una calculadora puede simplificarnos gran parte de este trabajo, pero es muy importante para el que utiliza la calculadora saber interpretar correctamente los resultados que obtiene.

Ejercicios resueltos

1. Calcula y comprueba los resultados con una calculadora:

a) $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+0,75$

b) $\frac{3}{2}-\frac{2}{3}-0,25$

Escribir todos los números fraccionarios como fracciones comunes; calcular y simplificar si es necesario.

Respuestas:

a) $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{1+2+3}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

b) $\frac{3}{2}-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{18-8-3}{12}=\frac{7}{12}$

Escribir todos los números fraccionarios como expresiones decimales y calcular. Emplear valores aproximados si es necesario.

Respuestas:

a) 0,25 + 0,5 + 0,75 = 1,5

b) 1,5 – 0,667 – 0,25 $\approx$ 0,58

En algunos cálculos donde aparecen combinadas fracciones comunes y expresiones decimales no es necesario hacer conversiones de una forma a otra para alcanzar los resultados.

2. ¿En cuánto es la diferencia de los números 3,75 y $\frac{1}{2}$ menor que su suma?

Podrías obtener la respuesta por razonamiento lógico, pero también planteando los cálculos:

$$\left(3,75+\frac{1}{2}\right)-\left(3,75-\frac{1}{2}\right)=3,75+\frac{1}{2}-3,75+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

Respuesta: En 1 es la diferencia de estos números menor que su suma.

3. Eduardo regresa del huerto a su casa con naranjas. Se detiene en casa de su hermano y le deja un cuarto de las naranjas que trae, después deja a su vecino un tercio de las que le quedaban y llega a su casa con 36. ¿Con cuántas naranjas salió del huerto?

En este problema conoces las naranjas que tiene al final y las partes que ha ido dejando en el camino. No conoces las naranjas que ha tenido al inicio. En estos casos, una técnica que se puede emplear es la de trabajo hacia atrás:

¿Cuántas naranjas tiene al final? Respuesta: 36

¿Qué parte es de las que tenía al llegar a casa del vecino? Respuesta: $\frac{2}{3}$ (porque dejó $\frac{1}{3}$ al vecino)

¿Cuántas tenía al llegar a casa del vecino? Respuesta: 54 (si $\frac{2}{3}$ es 36, $\frac{1}{3}$ es 18)

¿Qué parte es de las que tenía al llegar a casa del hermano? Respuesta: $\frac{3}{4}$ (porque dejó $\frac{1}{4}$ al hermano)

¿Cuántas tenía al llegar a casa del hermano? Respuesta: 72 (si : $\frac{3}{4}$ es 54, $\frac{1}{4}$ es 18)

Respuesta: Eduardo salió del huerto con 72 naranjas.

Comprobación:

Comprobamos en el enunciado del problema: Regresa del huerto a su casa con 72 naranjas. Se detiene en casa de su hermano, le deja 18 y le quedan 54. Después deja a su vecino un tercio de las 54 que le quedaban, es decir, 18. Llega a su casa con 36.

Ejercicios del epígrafe

1. Redondea las siguientes expresiones decimales a tres lugares, dos lugares y un lugar después de la coma:

a) 0,8156 b) $0,\overline{93}$ c) 3,7689 d) $2,\overline{590}$ e) $1,\overline{972}$ f) 1,4599

2. ¿Cuántas cifras significativas tienen los siguientes números?

a) 48 b) 36,5 c) 0,005 d) 0,05 e) 3,500 f) 0,095 g) 4,5

3. Expresa en notación decimal con dos y con tres cifras significativas correctas:

a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{7}{6}$ c) $\frac{15}{9}$ d) $\frac{12}{11}$ e) $2\frac{5}{7}$ f) $3+\frac{1}{8}$

4. Representa en un rayo numérico las fracciones de los incisos a), c), e) y f) del ejercicio anterior.

5. Calcula la suma y la diferencia de los siguientes valores aproximados:

a) 13,75 km + 135,2 km + 0,455 km + 1,856 km
b) 3,48 + 1,50 + 6,586 + 4,56
c) 365,965 – 106,348
d) $454{,}25 - 80{,}\overline{85}$

6. A continuación, los datos que no son expresiones periódicas son valores aproximados. Calcula con la ayuda de una calculadora, pero expresa el resultado con las cifras que corresponden en cada caso.

a) (6,405 + 17,8 + 0,70) · 2,5
b) (26,986 – 14,76) : 30
c) 0,435 – 0,3 + 0,648 · 8,9
d) $15{,}\overline{2} \cdot 1{,}48 \cdot 5{,}36$
e) (3,288 : 4,11) : 2
f) $5{,}28 : (4{,}\overline{3} + 7{,}8)$

1.6 Ejercicios del capítulo

1. Realiza los cálculos necesarios para completar la siguiente tabla:

x	y	$x + y$	$x - y$	$y + x$	$y - x$	$x \cdot y$	$x(x + y)$	$x : y$
$4\frac{1}{5}$	2,6							
5,6			$\frac{5}{2}$					
	$5\frac{1}{4}$		4,5					
		$\frac{3}{2}$	0					

2. Lee los siguientes números. Escríbelos primero como números romanos y después como sumas de potencias de diez.

a) 53 497 b) 409 118 c) 122 400 c) 4 030 607

3. Escribe el menor número natural de cinco lugares que puede representarse con las cifras básicas: 5; 6; 0; 1 y 9. ¿Cuál es el mayor número natural de cinco lugares que puede representarse con estas mismas cifras?

4. Calcula la suma y la diferencia entre el mayor y el menor número de cinco cifras.

5. Un número y su sucesor suman 51. ¿Cuáles son estos números?

6. Juanita tiene 3 sayas y 4 blusas diferentes. ¿Cuántas combinaciones puede hacer con ellas?

7. La suma de tres números naturales *a*, *b* y *c* (diferentes de cero) es igual a 10. ¿Cuáles pueden ser estos números? (Atención: hay varias posibilidades).

8. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas? Fundamenta tu respuesta.

a) Existe un número natural x, tal que $x \cdot 0 = 0$.
b) Existe un número natural y, tal que $0 \cdot y = 1$.
c) Existe un número natural z, tal que $z \cdot 1 = 0$.

9. Determina cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas:

a) 24 es divisible por 6.
b) 7 divide a 50.
c) Para todos los números naturales a y b diferentes de cero se cumple $a : b = b : a$.
d) Existe un número natural x para el cual se cumple x divide a 17.
e) La suma de tres números naturales consecutivos cualquiera es siempre impar.

10. ¿A cuántos números fraccionarios diferentes pertenecen las siguientes fracciones? Denomina cada uno de los números mediante la fracción irreducible correspondiente.

$\frac{20}{15}; \frac{3}{6}; \frac{20}{40}; \frac{8}{2}; \frac{12}{9}; \frac{80}{30}$

11. ¿Qué parte de las 24 h del día son las 8 h que le dedica un obrero a su trabajo?

12. Entre la casa de Luis y la de Samuel hay 2 360 m. Selecciona y marca el dato de magnitud que expresa esa misma distancia en dos unidades:

a)___ 2 km 36 m b) ___ 236 km c) ___ 23 km 60 m
d) __2 km 360 m

13. De un paquete con 40 caramelos, me comí la mitad el lunes y $\frac{1}{2}$ del resto el martes. ¿Cuántos caramelos me quedan aún?

14. Calcula en cada uno de los siguientes casos:

a) Lázaro tiene coleccionados en un álbum un total de 250 sellos. $\frac{3}{5}$ de estos son de un país extranjero. ¿Cuántos sellos son cubanos?
b) Alina está leyendo un libro de 120 páginas. Hasta el momento ha podido leer $\frac{2}{3}$ del libro. ¿Cuántas páginas no ha podido leer todavía?

15. Jean de La Fontaine, escritor francés cuyas fábulas se distinguen por su agilidad e ingenio narrativo, escribió el siguiente relato: "Vamos a repartir este cordero, dijo el león, dirigiéndose al mono y al zorro. Puesto que somos tres, me toca en primer lugar un tercio: es justo. Seguidamente, como rey de los animales, me corresponde como tributo, además, la mitad. Finalmente, me corresponde también la sexta parte porque así lo quiero. El resto lo reparten entre ustedes".

a) ¿Qué parte total del cordero considera el león que le corresponde?

b) ¿Cuánto quedará del cordero para repartir entre el mono y el zorro?

16. Traza en papel cuadriculado un cuadrado grande que contenga $8 \cdot 8$ cuadrículas. Divide el cuadrado grande en 4 cuadrados iguales. Colorea de estos 4 cuadrados, 2 de azul y uno de rojo. Responde las siguientes preguntas:

a) ¿Qué parte del cuadrado grande ha sido coloreada?
b) Considerando solo la zona coloreada, ¿qué fracción has pintado de rojo?
c) ¿Qué fracción de la zona coloreada has pintado de azul?

17. En un tablero de ajedrez, con todas sus piezas colocadas en su lugar para iniciar una partida, si consideramos sus 64 casillas:

a) ¿Cuántas casillas son blancas y qué parte del tablero representan?
b) ¿Cuántas casillas están ocupadas por peones y qué parte del tablero representan?
c) ¿Cuántas casillas están ocupadas por caballos y qué parte del tablero representan?

18. ¿Qué parte es 25 de 60? ¿Qué parte es 85 de 50?

19. He gastado las tres cuartas partes de mi dinero y me quedan 90 pesos.

¿Cuánto dinero tenía?

20. ¿Qué fracción:

a) de un año es un semestre?
b) de una hora son 45 min?
c) de un lustro es un trimestre?
d) de un minuto son 13 s?

21. Un tercio de los educandos de un aula está leyendo y dos quintos están dibujando. Los demás educandos de la clase juegan en el patio.

a) ¿Qué parte de los educandos están ocupados en el aula?

b) ¿Qué parte juega en el patio?
c) Si la clase tiene 30 educandos, ¿cuántos se dedican a cada actividad?

22. Un tablón de $3\frac{1}{4}$ dm se cepilló $2\frac{5}{8}$ a 32 dm. ¿Cuánto se le rebajó?

23. ¿Cuándo tiene una piscina mayor cantidad de agua, cuando está llena hasta sus $\frac{3}{5}$ partes o cuando está llena hasta sus $\frac{5}{7}$?

24. Un atleta que se prepara para una competencia hace el primer día el siguiente entrenamiento: corre $5\frac{1}{4}$ km, nada $\frac{5}{2}$ km y recorre en bicicleta 2,25 km. ¿Cuántos kilómetros recorrió el atleta en el entrenamiento ese día?

25. Determina cuáles de las siguientes proposiciones son falsas. Fundamenta cada caso con un ejemplo.

a) De varias fracciones comunes que tengan igual denominador, es mayor la que tenga mayor numerador.
b) De varias fracciones comunes que tengan igual numerador, es mayor la que tenga mayor denominador.
c) Si del numerador y el denominador de una fracción propia se sustrae el mismo número natural, la fracción que resulta es menor que la primera.
d) Si al numerador y al denominador de una fracción impropia se adiciona el mismo número natural, la fracción que resulta es mayor que la primera.
e) Si del numerador y el denominador de una fracción impropia se sustrae el mismo número natural, la fracción que resulta es mayor que la primera.

26. De los 120 lápices que había en el armario, la maestra cogió 60 para repartirlos a los educandos de sexto grado, pero solo estaban presentes 45 educandos.

a) ¿Qué parte del total de lápices pensaba repartir?

b) ¿Qué parte de los que pensaba repartir pudo entregar?
c) ¿Qué parte del total de lápices pudo entregar?

27. Un árabe dejó como herencia a sus tres hijos 17 camellos para repartir así: la mitad al primero, la tercera parte al segundo y la novena al tercero. Como a los herederos les resultó difícil tal reparto, decidieron dirigirse a un juez. Este se hizo prestar, recurriendo a un amigo, un camello y ejecutó entonces el reparto dispuesto por el árabe, pero sobre los 18 camellos que tuvo entonces a su disposición.

Así, entregó la mitad, es decir, 9 camellos al primer heredero; la tercera parte, o sea, 6 al segundo; la novena parte, serían 2, al tercero. En total, 9 + 6 + 2 = 17.

El camello sobrante (18 – 17 = 1) lo devolvió al amigo. Cada hijo recibió de esta manera más de lo establecido en el testamento y el amigo no perdió su camello.

¡Explica este aparentemente paradójico reparto!

28. Han transcurrido $\frac{5}{6}$ de una hora. ¿Cuántos minutos faltan para completar la hora?

29. La rueda de una bicicleta da 28 vueltas en medio minuto. A esa misma velocidad, ¿cuántas vueltas dará en un minuto?

30. Determina, a partir de las fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{7}$:

a) El mínimo común múltiplo de sus denominadores.
b) Tres parejas de fracciones diferentes que representen los mismos números fraccionarios.
c) El mayor de los dos números fraccionarios representados por estas fracciones.

31. ¿Cuál es la fracción que al multiplicarla por $\frac{3}{5}$ da como resultado $\frac{4}{3}$?

32. Estoy pensando en dos fracciones. La suma de las dos está entre 0 y 1.

a) ¿Qué se puede decir de esas fracciones con respecto a 1?
b) ¿Tienen que ser las dos fracciones menores que $\frac{1}{2}$?
c) Si una es mayor que $\frac{1}{2}$, ¿cómo es la otra?
d) ¿Tiene que estar también entre 0 y 1 el producto de estas dos fracciones?

33. De las 180 ha de una granja, se dedica $\frac{1}{6}$ a la siembra de caña, $\frac{2}{15}$ a cítricos, $\frac{3}{10}$ a viandas, $\frac{1}{6}$ a hortalizas y el resto a la cría de animales. ¿Cuántas hectáreas se dedican a la cría de animales?

34. En una nave de una granja avícola hay 300 pollitos de los cuales 180 tienen menos de una semana de nacidos. ¿Qué parte del total de pollitos tiene más de una semana?

35. La matrícula de este año en una institución educativa del municipio Centro Habana es de 246 educandos. Dice la directora que se ha sobrepasado en $\frac{1}{5}$ la matrícula del año pasado. Esto equivale a decir que la de este año representa $\frac{6}{5}$ de la del año anterior. ¿Cuántos educandos tenía la escuela el año pasado?

36. En el rayo numérico (figura 1.19) se ha dividido el segmento $\overline{AB}$ en 12 partes iguales.

Figura 1.19

Si $A = 0$ y $B = 1$:

a) Localiza en el segmento $\overline{AB}$ los puntos correspondientes a los números fraccionarios representados por:

$\frac{1}{12}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{11}{12}$; 0,25; $0,\overline{3}$; 0,5; $0,\overline{6}$; 0,75; $\frac{2}{6}$; $\frac{3}{6}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{6}$

b) ¿A cuántos números fraccionarios diferentes (sin incluir el 0 y el 1) se ha referido el inciso anterior?

37. Comprueba que la división de fracciones no cumple la propiedad conmutativa. Utiliza para ello como ejemplo las fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{4}$.

38. Divide la suma de las fracciones $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{5}$ por su producto.

39. Presta atención al orden de las operaciones y calcula:

a) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$ b) $\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right):\left(\frac{4}{5}+\frac{5}{6}\right)$ c) $\frac{9}{4}-\frac{4}{9}:\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}:\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ e) $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}:\frac{4}{5}+\frac{5}{6}$ f) $\frac{9}{4}-\frac{4}{9}:\frac{3}{2}+\frac{2}{3}$

40. Calcula y simplifica tanto como sea posible:

a) $\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\right)$ b) $\frac{3}{13}\cdot\left(\frac{7}{4}+\frac{1}{5}\right)$ c) $\left(\frac{7}{4}-\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{8}{11}$ d) $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+2\frac{1}{5}$

e) $\left(\frac{15}{30}-\frac{4}{10}\right):\frac{1}{3}$ f) $\frac{5}{13}\cdot\left(\frac{4}{20}-\frac{1}{10}\right)$ g) $\left(3-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(2-\frac{4}{8}\right)$

h) $\left(5-3\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\right)\cdot 4$ i) $\left(\frac{9}{12}\ \frac{3}{8}\right)\cdot\frac{1}{3}$ j) $\left(5\frac{4}{7}+1\frac{3}{4}\right):\frac{15}{14}$

41. En una receta de sopa de tomate para 2 raciones se recomienda utilizar, entre otros ingredientes, 1 $\frac{1}{2}$ tazas de leche, $\frac{1}{2}$ taza de puré de tomate, 1 cucharadita de sal y $\frac{1}{8}$ cucharadita de pimienta. ¿Qué cantidad de estos ingredientes se necesita para preparar 8 raciones?

42. Si dividimos $\frac{4}{7}$ entre otra fracción, el cociente es $\frac{3}{14}$. ¿Cuál es el divisor?

43. El cociente de dos fracciones es $\frac{2}{3}$ y el dividendo es $\frac{8}{15}$. ¿Cuál es el divisor?

44. Calcula:

a) $7-\frac{9}{20}-2\frac{3}{4}$ b) $5\frac{3}{4}+\frac{1}{5}:\left(\frac{15}{4}-3\frac{1}{2}\right)$ c) $8+2\cdot\frac{7}{20}+\frac{3}{20}$

d) $\dfrac{\frac{7}{9}:3}{13:\frac{81}{7}}$

45. La maestra no estuvo conforme con el procedimiento seguido por Rosita para encontrar el producto de $\frac{1}{6}$ por $\frac{3}{11}$. Rosita escribió:

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{11}=\frac{11}{66}\cdot\frac{18}{66}=\frac{198}{4\,356}=\frac{99}{2\,178}=\frac{33}{726}=\frac{11}{242}=\frac{1}{22}$$

¿Es $\frac{1}{22}$ la respuesta correcta? ¿Por qué no estuvo conforme la maestra?

46. Pensé una expresión decimal. La multipliqué por 3. Al producto le resté 0,8 y después adicioné 0,3 a la diferencia. Obtuve 1.

a) ¿En qué expresión decimal pensé?
b) ¿A qué fracción común equivale?

47. Yean está ahorrando para comprarse un pulóver que le cuesta $ 25,00. Ya tiene ahorrado $ 12,80. Su abuela le da $ 1,75 a la semana y su tía $ 1,30. ¿Cuántas semanas necesitará para reunir lo que le falta?

a) ____ 2 semanas b) ___ 4 semanas c) ______1 semana
d)_____3 semanas

48. Halla todas las expresiones decimales que se encuentran entre los dos números dados y tienen el mismo número de lugares decimales que ellos:

a) 3,02 y 3,10 b) 200,8 y 201,0 c) 0,997 y 1,001

49. Escribe las expresiones decimales de: $\frac{5}{4}$; $\frac{1}{25}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{7}{9}$; $\frac{5}{6}$; $1\frac{1}{7}$; $2\frac{1}{11}$; $\frac{4}{15}$

50. Convierte en fracciones comunes y simplifica:

a) 0,125 b) 0,25 c) 0,5 d) 0,75 e) 1,6 f) 2,02 g) 27,5

51. En botellas de 0,35 L se quieren envasar 88 L de puré de tomate. ¿Cuántas botellas se necesitan? ¿Quedará algún puré de tomate sin envasar?

52. La bibliotecaria de la institución educativa está haciendo un tarjetero nuevo y tiene franjas de cartulina que miden 82,5 cm de largo. Ella quiere hacer tarjetas que tengan el mismo ancho de las franjas y 7,5 cm de largo. ¿Cuántas tarjetas podrá obtener de cada franja?

53. ¿Cuántas piezas de 15,2 pulgadas de largo pueden sacarse de un listón de madera que mide 1 216 pulgadas, si el ancho y el alto de las piezas son los mismos del listón?

54. Por $ 4,80 se compran un cinto y su hebilla. El cinto vale $ 4,00 más que la hebilla. ¿Cuánto vale cada objeto por separado?

55. Alejandro está ahorrando para comprar un teléfono celular que cuesta $ 25,00. Ya tiene ahorrado $ 15,85. Su papá le da $ 1,75 a la semana y su mamá $ 1,30 cada domingo. Si ahorra todo lo que recibe cada semana, ¿cuántas semanas necesitará para reunir lo que falta?

56. La familia Valdés está planificando pintar el techo de los dos cuartos de su casa. Uno de los cuartos mide 4,45 m de largo y 4 m de ancho, el otro 4,2 m de largo y 3,8 m de ancho. Una lata de la pintura que desean comprar alcanza para pintar entre 7 m^2 y 8 m^2. ¿Cuántas latas deben comprar? Fundamenta tu respuesta.

57. Calcula el volumen y el área total de un cubo que tiene 8,3 cm de arista.

58. Calcula el volumen de un ortoedro si se conoce que su largo es igual a 17,5 cm, su ancho es igual a la mitad de su largo y su alto es igual a la mitad de su ancho.

59. Siete docenas de botones cuestan $ 8,40. ¿Cuánto cuesta un botón?

60. Utiliza paréntesis para plantear y realizar los siguientes cálculos:

a) Adiciona a 0,75 la diferencia de $\frac{4}{7}$ y $\frac{3}{8}$.

b) Sustrae 2,5 de la diferencia de los números $\frac{7}{3}$ y $3\frac{1}{2}$.

c) Reduce en 2,8 la suma de $3\frac{1}{2}$ y $5\frac{3}{4}$.

61. Calcula:

a) $2918 - 918 : \frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3} : 0,12\left(1,01 - \frac{1}{20}\right)$

c) $76\ 543 \cdot \left(\frac{9}{20} - 0,22 - 0,23\right)$

62. De un rollo que contiene 27,5 m de cable para antena de televisión, un cliente compra la mitad, otro 4,2 m y un tercero 3,45 m. ¿Qué cantidad de cable quedará en el rollo?

63. ¿En cuánto es la suma de los números 2,5 y $\frac{11}{8}$ mayor que su diferencia?

64. Realiza las siguientes tareas teniendo en cuenta las reglas del cálculo con valores aproximados:

a) Mide el largo y el ancho de tu mesa de trabajo. Calcula el área de su superficie.

b) Estima el largo de tu aula, su ancho y el área que ocupa.

65. Determina la edad promedio de un equipo de baloncesto en el que tres jugadores tienen 21 años, cuatro jugadores 22, dos tienen 23, un jugador 24 y otro 25.

66. Un vendedor despacha por la mañana las $\frac{3}{4}$ partes de las papas que tenía. Por la tarde vende $\frac{4}{5}$ de las que le quedaban. Si al terminar el día aún le quedan 100 kg de papas, ¿cuántos kilogramos tenía?

67. Calcula, ten en cuenta el orden operacional:

a) $625 : 5^2 . (0,3 + 0,8) - \frac{2}{5}$

b) $96 - 729 : 32 - \left(\frac{15}{2} - \frac{7}{5}\right)$

c) $\frac{21}{12} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \sqrt{4}$

d) $\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\right) \cdot 10 - (0,3 \cdot 0,4)$

68. Un camión cubre la distancia entre dos ciudades en tres horas. En la primera hora hace $\frac{3}{8}$ del trayecto, en la segunda los $\frac{2}{3}$ de lo que le queda y en la tercera los 80 km restantes. ¿Cuál es la distancia total recorrida?

69. Un ciclista recorre tres etapas: en la primera hace la tercera parte del recorrido total, en la segunda 33,2 km y en la tercera 31,42 km. ¿Cuál fue el recorrido total?

70. Si de una soga de 30 m de longitud se cortan tres partes iguales de $2\frac{1}{4}$ m cada una, ¿qué longitud tiene la soga restante?

71. Nueve ejemplares de un libro cuestan \$ 11,00 y pico; 13 ejemplares del mismo libro cuestan \$ 15,00 y pico. ¿Cuánto cuesta un libro?

CAPÍTULO 2

Ecuaciones

Algo de historia

El idioma del trabajo con variables son las ecuaciones. Muchos son los problemas que se resuelven mediante el planteo de una ecuación. Acerca de esto, la historia ha conservado un ejercicio sobre el célebre matemático de la antigüedad Diofanto de Alejandría, que figura en una dedicatoria en su tumba y que brinda informaciones interesantes acerca de su vida. A continuación, reproducimos esa inscripción en el lenguaje de la época y lo traducimos al idioma de las variables.

"¡Caminante! Aquí fueron sepultados los restos de Diofanto, y los números pueden mostrar ¡oh, milagro! cuán larga fue **su vida (x)**, cuya **sexta parte** $\left(\frac{x}{6}\right)$ constituyó su hermosa infancia. Había transcurrido, además, una **duodécima parte** $\left(\frac{x}{12}\right)$ de su vida cuando de vellos cubrióse su barbilla, y la séptima parte de su existencia $\left(\frac{x}{7}\right)$ transcurrió en un matrimonio estéril. Pasó un **quinquenio (5)** y lo hizo dichoso el nacimiento de su precioso primogénito que entregó su cuerpo, su hermosa existencia a la tierra, que duró tan solo **la mitad** $\left(\frac{x}{2}\right)$ de la de su padre, y con profunda pena descendió a la sepultura, habiendo sobrevivido **cuatro años (4)** al deceso de su hijo".

2.1 Procedimientos de resolución de ecuaciones

Un boticario tiene una balanza. Quiere saber cuántos gramos tienen unas pesas pequeñas. Para equilibrar los platillos, coloca en uno de ellos 3 pesas pequeñas, todas iguales, cuyo gramaje no conoce, y en el otro una pesa de 12 gramos. ¿Cuál es el número de gramos que tiene una de las pesas pequeñas?

Con ayuda de una igualdad se puede resolver este problema. En la igualdad debe haber una incógnita que son los gramos que tiene cada pesa pequeña. Si llamamos x a esta incógnita, tenemos la ecuación $3x = 12$.

Si tres pesas pequeñas e iguales juntas tienen 12 gramos, ¿cuántos gramos tiene una sola de ellas?

Más simple: ¿Qué número multiplicado por 3 da como resultado 12? El número es 4. La respuesta completa al problema es: Cada una de las pesas pequeñas tiene 4 gramos.

Definición 2.1

Se denomina **ecuación** a toda igualdad en la que aparece al menos una variable.

Ejemplos

a) $2x = 7$ b) $3x + 1 = 13$ c) $x - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ d) $2{,}5x - 3{,}6 = 0{,}5x$

e) $2(x + 3) = 18$ f) $\frac{12}{x} = 3$

Las ecuaciones, según su posición con respecto al signo de relación (=), están formadas por el miembro izquierdo (MI) y el miembro derecho (MD) respectivamente.

Ejemplo

En la ecuación:

$\underbrace{2{,}5x - 3{,}6}_{\text{MI}} = \underbrace{0{,}5x}_{\text{MD}}$; MI: $2{,}5x - 3{,}6$ y MD: $0{,}5x$

Observa la composición del MI de la ecuación del ejemplo. Se trata de una diferencia donde el minuendo es 2,5x y contiene la variable x, el sustraendo es 3,6 y no contiene la variable x. El MD de la ecuación analizada es 0,5x.

Saber más

Las proposiciones son afirmaciones verdaderas o falsas. Las igualdades que no contienen variables son proposiciones.

Ejemplos

1. 8 es un número par, ¿es una proposición verdadera o falsa?
   Un número es par si es divisible por 2, es una proposición verdadera; como 8 es divisible por 2, entonces, "8 es un número par" también es una proposición verdadera.
2. $3 \cdot 4 + 1 = 13$, ¿es una proposición verdadera o falsa?
   Si realizas correctamente los cálculos indicados en el miembro izquierdo de la igualdad, obtienes la igualdad 13 = 13, por tanto, "$3 \cdot 4 + 1 = 13$" es una proposición verdadera.
3. $3 \cdot \frac{4}{5} + 1 = 15$, ¿es una proposición verdadera o falsa?
   Si realizas correctamente los cálculos indicados en el miembro izquierdo de la igualdad, obtienes la desigualdad $3\frac{2}{5} \neq 15$, por tanto, $3 \cdot \frac{4}{5} + 1 = 15$ es una proposición falsa.

¿Será cierto que una ecuación no es una proposición? Analiza los casos siguientes:

a) $2x = 7$, ¿es una proposición verdadera o es una proposición falsa?

b) $2x + 3 = 10$, ¿es una proposición verdadera o es una proposición falsa?

La presencia de variables en una ecuación impide el cálculo del valor al menos en uno de sus miembros. Por tanto, no es posible decidir si se cumple o no la igualdad que plantean. Pero si se sustituyen las variables por valores numéricos conocidos, la ecuación se convierte en una proposición que es verdadera o falsa. Por eso es importante, antes de resolver una ecuación, conocer por qué valores se pueden sustituir sus variables.

Definición 2.2

Se conoce como **dominio de la variable** de una ecuación al conjunto de valores que se usa para sustituir a la variable en la ecuación.

El dominio de la variable se indica generalmente a continuación de esta, como se muestra en los ejemplos.

Ejemplos

a) $9b = \frac{63}{2} (b \in \mathbb{Q}_+)$

b) $2x + 3 = 10 (x \in \mathbb{N})$

c) $\frac{32}{x} = 8 (x \in \mathbb{N}; x \neq 0)$

El dominio de la variable puede establecerse de manera convenida. Cuando no se especifica, se toma el conjunto numérico más amplio de los conocidos en el grado.

Para la ecuación $9b = \frac{63}{2} (b \in \mathbb{Q}_+; b \leq 4)$ se establece como dominio de la variable al conjunto de los números fraccionarios menores o iguales que 4.

Para una ecuación como $7 - x = 3$, el dominio de la variable queda automáticamente restringido a los números fraccionarios que son menores o iguales que 7. Observa que la variable es el sustraendo en la diferencia $7 - x$, y la sustracción tiene restricciones cuando se realiza con números naturales o con fraccionarios.

Cuando sustituimos las variables por valores numéricos en una ecuación, tenemos:

- Una proposición verdadera si se satisface la igualdad.
- Una proposición falsa si no satisface la igualdad.

Ejemplo

Los números 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7… son valores del dominio de la variable que no satisfacen la ecuación $3x + 2 = 14$ ($x \in \mathbb{N}$). Solo el valor $x = 4$ transforma la ecuación en una proposición verdadera:

$3 \cdot 0 + 2 = 14$ (falso)
$3 \cdot 1 + 2 = 14$ (falso)
$3 \cdot 2 + 2 = 14$ (falso)
$3 \cdot 3 + 2 = 14$ (falso)
$3 \cdot 4 + 2 = 14$ (verdadero)
$3 \cdot 5 + 2 = 14$ (falso)
$3 \cdot 6 + 2 = 14$ (falso)
$3 \cdot 7 + 2 = 14$ (falso)

Definición 2.3

Se llama **solución de una ecuación** al valor del dominio de la variable que satisface (que transforma en proposición verdadera) a la ecuación.

Ejemplos

a) $\frac{7}{2}$ es solución de la ecuación porque $9b = \frac{63}{2} (b \in \mathbb{Q}_+)$ porque $9 \cdot \frac{7}{2} = \frac{63}{2}$ es una proposición verdadera y $\frac{7}{2}$ es fraccionario.
b) 4 es solución de la ecuación $3x + 2 = 14$ ($x \in \mathbb{N}$) pues 4 satisface la ecuación, y es un número natural.

Entre las ecuaciones que se resuelven en este grado, encontrarás algunas que no tienen solución, otras que tienen una solución única y otras con infinitas soluciones.

Ejemplos

a) $2x = 0$ ($x \in \mathbb{N}$); solo se satisface para $x = 0$ ($2 \cdot 0 = 0$).
b) $y - y = 5$ ($y \in \mathbb{N}$); ningún valor del dominio de la variable y satisface la ecuación, pues $0 \cdot y = 0$ para cualquier valor de y (todo número multiplicado por cero es igual a cero).

c) $0{,}2\,x = \frac{1}{5}x$, $\left(x \in \mathbb{Q}_+\right)$; cualquier valor del dominio de la variable satisface la ecuación: $0 \cdot x = 0$ se cumple para cualquiera que sea el valor de x.

Definición 2.4

El conjunto de todas las soluciones de una ecuación se denomina **conjunto solución**.
Cuando la ecuación o la inecuación no tiene solución se dice que el *conjunto solución* es nulo o vacío (Ø).

Ejemplos

a) Para la ecuación $9b = \frac{63}{2}\left(b \in \mathbb{Q}_+\right)$ el conjunto solución se escribe $S = \left\{\frac{7}{2}\right\}$.

b) Para la ecuación $3x + 2 = 14$ $(x \in \mathbb{N})$ el conjunto solución se escribe $S = \{4\}$.

c) Para la ecuación $0{,}2\ x = \frac{1}{5}x$, $\left(x \in \mathbb{Q}_+\right)$ el conjunto solución se escribe $S = \mathbb{Q}_+$ (En este inciso el conjunto solución se satisface para cualquier valor del dominio de la variable).

d) Para la ecuación $y - y = 5$ $(y \in \mathbb{N})$ el conjunto solución se escribe $S = Ø$

Definición 2.5

A una desigualdad en la que aparece al menos una variable se le denomina inecuación.
Las definiciones de dominio de la variable, solución y conjunto solución dadas para las ecuaciones se ajustan a las inecuaciones cuyo dominio son números fraccionarios. Los procedimientos de solución también guardan estrecha relación.

¿Sabías que…?

Para hallar los valores que satisfacen una ecuación o una inecuación es necesario resolver la ecuación o la inecuación, es decir, encontrar sus soluciones. Para ello existen varios procedimientos: simple inspección, ensayo error, reflexiones lógicas y las transformaciones equivalentes.

Simple inspección: se emplea en casos de ecuaciones e inecuaciones tan sencillas como $x = 5$; $x + 1 = 6$ o $x < 3$, con las que llegamos a las soluciones y al conjunto solución casi de manera inmediata.

Ensayo error: se emplea cuando el que resuelve la ecuación tiene una idea aproximada de los valores que satisfacen la ecuación y realiza sustituciones de la variable por los valores numéricos estimados.

Reflexiones lógicas: se emplean en el caso de una ecuación o una inecuación en la que, sin llegar a ser del todo compleja, se puede hallar la solución casi de manera inmediata al aplicar los conocimientos acerca de la numeración y el cálculo. Son muy variadas las formas y, por lo general, dos personas no proceden de igual manera ante la misma situación. Por ejemplo:

$\frac{45}{x} = 9$. ¿Por qué número dividimos 45 y se obtiene 9 como cociente?

¿Sabías que...?

Dos ecuaciones (inecuaciones) son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución.

Ejemplos

a) Las ecuaciones $x + 3 = 5$ y $3 + x = 5$ son equivalentes porque tienen el mismo conjunto solución: $S = \{2\}$. Observa que, si en la primera los sumandos del miembro izquierdo se intercambian, como resultado se obtiene la segunda ecuación; esta es una transformación equivalente, pues no produce cambios al conjunto solución.

b) Las inecuaciones $x + 3 < 5$ y $x < 2$ son equivalentes porque tienen el mismo conjunto solución para $x \in \mathbb{N}$, $S = \{0; 1\}$. Observa que si restas 3 de cada miembro de la primera inecuación, se obtiene la segunda.

Transformaciones equivalentes. Son aquellas que:

- Se realizan en un mismo miembro:
  - Eliminar signos de agrupación
  - Aplicar propiedades de las operaciones
  - Realizar los cálculos posibles
- Se realizan en ambos miembros a la vez:
  - Adicionar o sustraer el mismo término
  - Multiplicar o dividir por el mismo número fraccionario (distinto de cero)
  - Intercambiar los miembros (en una inecuación además se cambia el sentido del signo)

La aplicación sucesiva de transformaciones equivalentes a una ecuación o inecuación se hace con el objetivo de transformarla en otra mucho más simple que facilite la búsqueda de soluciones.

Ejemplo

$10 + x = 3(x + 2) - x$; $(x \in \mathbb{N})$

Se aplica la ley distributiva de la multiplicación con respecto a la adición en el miembro derecho y se obtiene la ecuación $10 + x = 3 \cdot x + 3 \cdot 2 - x$.

Se realizan los cálculos resultantes en el miembro derecho de esta ecuación y se obtiene $10 + x = 3x + 6 - x$.

Se aplica la ley conmutativa en el miembro derecho de esta última ecuación y se obtiene la ecuación $10 + x = 6 + 3x - x$.

Se calcula la diferencia $3x - x$ en el miembro derecho de la ecuación y se obtiene $10 + x = 6 + 2x$.

¡Importante! La diferencia de $3x - x$ se calcula de manera similar a cuando se determina la diferencia entre 3 naranjas y 1 naranja, o sea, calculando $3 - 1 = 2$.

Se resta x a ambos miembros de la ecuación y se obtiene $10 + x - x = 6 + 2x - x$.

Se calcula en ambos miembros de la ecuación y se obtiene $10 = 6 + x$.

En esta última ecuación se pueden intercambiar sus miembros, obteniéndose la ecuación $6 + x = 10$.

De aquí se puede inferir la solución y el conjunto solución de la ecuación, pero también se puede obtener otra más simple restando 6 de cada miembro de la ecuación y calculando: $6 - 6 + x = 10 - 6$, por tanto, $x = 4$.

Muchas de las ecuaciones e inecuaciones que debes resolver en este grado se reducen a una de las formas $ax = b$ o $\frac{a}{x} = b$, y de las correspondientes inecuaciones.

Para resolver una ecuación de la forma $ax = b$ ($a \neq 0$):

1. Dividimos ambos miembros de la ecuación por a. Resultado: $x = b : a \left(x = \frac{b}{a} \right)$ es la única solución posible de esta ecuación.
2. Verificamos que este resultado pertenece al dominio definido para x.
3. Comprobamos y damos la respuesta.

Observa que se ha exigido $a \neq 0$. Cuando $a = 0$, la ecuación no tiene solución. Por ejemplo: $0 \cdot x = 5$ no tiene solución, pues no hay ningún número que multiplicado por cero sea igual a 5.

Ejercicio resuelto

¿Qué números naturales satisfacen las ecuaciones siguientes?

a) $5 \cdot x = 19$ b) $y \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$ c) $3t - 4 = 8 + t$

Respuestas:

a) $5 \cdot x = 19 \mid : 5$

$$x = \frac{19}{5}$$

Como la posible solución no es un número natural, la respuesta es: $S = \emptyset$

Nota: Si nos hubieran pedido hallar los números fraccionarios que satisfacen la ecuación, la respuesta hubiera sido $S = \left\{ \frac{19}{5} \right\}$.

b) $y \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2} : \frac{3}{4}$

$y \cdot \frac{3}{4} : \frac{3}{4} = \frac{3}{2} : \frac{3}{4}$

Dividir entre $\frac{3}{4}$ es multiplicar por $\frac{4}{3}$

Simplificando: $y = 2$. Como 2 es un número natural y $2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$, la respuesta es $S = \{2\}$.

c) $3t - 4 = 8 + t$

$3t - t = 8 + 4$

$2t = 12 \mid : 2$

$t = 12 : 2$

$t = 6$

Comprobación:

MI: $3 \cdot 6 - 4 = 18 - 4 = 14$

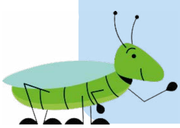
MD: $8 + 6 = 14$

Comparando: MI = MD

Respuesta: $S = \{6\}$·

Lo primero en este caso es agrupar en un miembro los términos con variables y en el otro miembro los términos que no tienen variables.

Recuerda que...



- Al pasar un término de un miembro a otro, si está sumando pasa restando y viceversa, si está restando pasa sumando. Se simplifica la ecuación realizando las operaciones posibles.
- Al despejar la variable su coeficiente pasa dividiendo al otro miembro.

Después se procede como en los ejemplos anteriores. Se comprueba que la posible solución esté en el dominio de la variable (6 es un número natural), se comprueba en la ecuación original y se da la respuesta correspondiente:

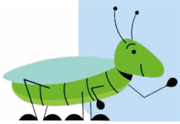
Para resolver una ecuación de la forma $\frac{a}{x} = b \ (a \neq 0, b \neq 0)$:

1. Multiplicamos ambos miembros de la ecuación por x ($x \neq 0$).
   Resultado: $a = b \cdot x$
2. Dividimos ambos miembros de esta ecuación por b.
   Resultado: $x = a : b \left(x = \frac{a}{b} \right)$
3. Verificamos que este resultado no es cero y que pertenece al dominio definido para x.
4. Comprobamos y damos la respuesta.

Recuerda que...

Para resolver una ecuación o una inecuación:

1. Se eliminan los signos de agrupación y se realizan las operaciones posibles en ambos miembros de la ecuación o la inecuación.
2. Se agrupan los términos con variables en un miembro y los que no contienen variables en el otro miembro.
3. Se dividen ambos miembros entre el coeficiente de la variable.
4. Se comprueba en la ecuación original.
5. Se determina y escribe el conjunto solución.



Ejercicio resuelto

Resuelve la ecuación $4(x + 2) + 3 = 2x + 13$ para $x \in \mathbb{N}$.

$4x + 8 + 3 = 2x + 13$

$4x + 11 = 2x + 13$ (restar 11 en cada miembro)

$4x + 11 - 11 = 2x + 13 - 11$

$4x = 2x + 2$ (restar $2x$ en cada miembro)

$4x - 2x = 2x - 2x + 2$

$2x = 2$ (dividir entre 2)

$x = 1$

Comprobación:

MI: $4(x+2)+3; 4(1+2)+3 = 4 \cdot 3 + 3 = 12 + 3 = 15$

MD: $2x + 13$; $2 \cdot 1 + 13 = 2 + 13 = 15$

MI = MD

Como $1 \in \mathbb{N}$, $S = \{1\}$

Existen otros tipos de ecuaciones que puedes resolver aplicando reflexiones lógicas, en ese caso se encuentran:

a) $x^2 = 9$ se resuelve buscando qué número elevado al cuadrado es igual a 9, o sea hallando $\sqrt{9}$. Si $x^2 = 9$, entonces $x = \sqrt{9} = 3$.
b) $\sqrt[3]{x} = 2$ se resuelve buscando de qué número es 2 su raíz cúbica, o sea, cuánto es 2^3. Entonces $x = 2^3 = 8$.
c) $4^x = 16$ se resuelve buscando las veces que hay que multiplicar 4 por sí mismo para obtener 16. Como $4 \cdot 4 = 16$, $x = 2$.

En algunos textos aparece la transposición de términos como vía para resolver ecuaciones e inecuaciones. La transposición de términos o despeje de la variable puede verse como una simplificación que, en la práctica, se hace con el método de las transformaciones equivalentes. Observa cómo se procede al resolver una ecuación transponiendo términos.

Ejemplo

$5x - 7 = 2x + 8$

1. Transponemos (pasamos) $2x$ restando al MI porque está sumando en el MD. $5x - 2x - 7 = 8$
2. Calculamos en el MI: $5x - 2x = 3x$

   $3x - 7 = 8$
3. Transponemos (pasamos) 7 sumando al MD porque está restando en el MI. $3x = 8 + 7$
4. Calculamos en el MD: $8 + 7 = 15$
5. Transponemos (pasamos) 3 dividiendo al MD porque está multiplicando en el MI.

   $3x = 15$

   $x = 15 : 3$
6. Calculamos en el MD: $15 : 3 = 5$

   $x = 5$

Ejercicios del epígrafe

1. Resuelve y comprueba:

a) $4 \cdot x = 128$ b) $7 \cdot a = \frac{49}{2}$ c) $0{,}25 \cdot z = 24$

d) $2{,}7 \cdot m = 21{,}6$ e) $\frac{2}{3} \cdot y = 24$ f) $\frac{8}{5} \cdot u = 64$

g) $3 \cdot x = 0$ h) $0 \cdot x = 7{,}2$ i) $9 \cdot x + 5 = 23$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{3}{4} \cdot x = \frac{7}{8}$ b) $u \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{2}$ c) $\frac{8}{3} = 4 \cdot x$

d) $1{,}2 = 3 \cdot t$ e) $\frac{19}{2} \cdot y = 38$ f) $\frac{x}{2{,}1} = 0{,}15$

3. ¿Qué números fraccionarios satisfacen las ecuaciones siguientes?

a) $x - 15 = 4$ b) $y - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ c) $7a + 5 = 54$

d) $3x + 8 = 23$ e) $\frac{2}{3} \cdot c - 16 = 2$ f) $0{,}05x - 3{,}5 = 8$

g) $7m = 4m + 6$ h) $0{,}3z + 1{,}42 = 2{,}42$

4. Resuelve las siguientes inecuaciones. Procede igual que en las ecuaciones y como se ilustra en el inciso a)

a) $2x - 8 < 5$ b) $2x < 5 + 8$ c) $2x < 13$ d) $x < \frac{13}{2}$

e) $11 + 2a < 21$ f) $0{,}4x > 1{,}36$ g) $y + \frac{5}{2} < 3$ h) $3n + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$

5. Resuelve y comprueba:

a) $\frac{4}{x} = 12$ b) $\frac{0{,}4}{y} = 1{,}2$ c) $\frac{2}{w} = \frac{3}{4} \cdot 1{,}2$ d) $9{,}5 - 3{,}5 = \frac{5}{u}$

6. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\frac{2}{x} > \frac{3}{4}$ b) $\frac{1{,}2}{y} \leq \frac{2}{3}$ c) $12 \cdot \frac{1}{t} \geq 24$ d) $3{,}6 \cdot \frac{2}{z} < 18$

7. Escribe el conjunto solución de las ecuaciones siguientes. Ten en cuenta el dominio de la variable indicado en cada caso:

a) $0{,}26x - 1{,}3 = 1{,}04$ $(x \in \mathbb{N})$ b) $z + 6\frac{2}{3} = 7$ $(z \in \mathbb{Q}_+)$

c) $,5+2,8)\cdot 4y=12,6(y\in\mathbb{Q}_+)$

d) $5x-x=\frac{12}{5}(x\in\mathbb{Q}_+)$

e) $\frac{m}{35}=\frac{3}{21}(m\in\mathbb{Q}_+)$

f) $\frac{3}{x}=\frac{1}{2}$ $(x\in\mathbb{N})$

g) $\frac{2}{3}: n=\frac{3}{4}$ $(n\in\mathbb{N})$

h) 0,72 = 0,28 : w $(w\in\mathbb{Q}_+)$

2.2 Resolución de problemas mediante ecuaciones

Las expresiones con variables sirven para representar situaciones de la vida cotidiana. Por ejemplo, en el lenguaje diario, decir que “Mario trae el doble de naranjas que Luis”, es equivalente a decir en el lenguaje algebraico que “Luis trae x naranjas y Mario $2x$ naranjas”, pues $2x$ es el doble de x cualquiera que sea el valor de x.

La posibilidad de usar expresiones algebraicas para formular situaciones de la práctica las convierte en importantes herramientas para resolver problemas.

Traducción del lenguaje común al algebraico y viceversa

En la práctica, a una cantidad desconocida se le llama incógnita y en el lenguaje común o de uso cotidiano empleamos variadas formas para expresar relaciones entre cantidades de objetos. Estas expresiones del lenguaje común son relacionadas frecuentemente con expresiones del lenguaje matemático, también conocido como lenguaje algebraico. Por eso es importante poder traducir del lenguaje común al lenguaje algebraico y viceversa.

Para realizar la traducción del lenguaje común al algebraico debes conocer palabras y frases que tienen un significado matemático y pueden ser expresadas haciendo uso de variables, números, operaciones de cálculo, signos de agrupación y otras herramientas algebraicas. Por ejemplo:

Lenguaje común	Lenguaje algebraico
La edad de Pedro, la estatura de Juan, los puntos alcanzados en el examen de Matemática (cualquier cantidad)	x (o cualquier otra variable)
El doble de, el duplo de	$2x$
Aumentado en 3, 3 más que	$x + 3$
Disminuido en 5, 5 menos que	$x - 5$
La mitad de	$\frac{x}{2}$; $x : 2$; $\frac{1}{2}x$
3 más que el doble de, el doble de… aumentado en 3	$2x + 3$

También se traducen expresiones del lenguaje de la matemática como:

un número	x
el triplo de un número	$3x$
el sucesor de un número	$x + 1$
la quinta parte de un número	$\frac{1}{5}x$; $\frac{x}{5}$; $x : 5$
el décuplo de un número	$10x$
el cuadrado de un número	x^2

Observa con detenimiento los textos y sus correspondientes ecuaciones, las que resultan de traducir del lenguaje común al lenguaje algebraico.

Ejemplos

1. El triplo de un número más el cuádruplo del mismo número es 56.

   Analizamos:

   - Un número: x

- El triplo de un número: $3x$
- El cuádruplo del mismo número: $4x$
- El triplo de un número más el cuádruplo del mismo: $3x + 4x$
- El triplo de un número más el cuádruplo del mismo número es 56:

  $3x + 4x = 56$

  $3 \cdot x + 4 \cdot x = 56$

  Observa que la ecuación se ha ido construyendo paso a paso.

2. El dinero ahorrado por Juan es el doble del dinero ahorrado por Pedro. Entre los dos han ahorrado $ 72,00.

- Dinero ahorrado por Pedro: x
- El doble del dinero ahorrado por Pedro: $2x$
- Entre los dos han ahorrado $ 72,00 ($x + 2x = 72$)

  Lo primero es determinar la incógnita para asignar la variable.

3. Isabel y su hermana coleccionan sellos. Entre las dos tienen 96 sellos, pero Isabel tiene en su colección cinco veces el número de sellos que tiene su hermana. ¿Cuántos sellos tiene cada una?

Si lees con detenimiento el texto del problema encontrarás dos afirmaciones claves para transformar el texto en una ecuación:

a) Entre las dos tienen 96 sellos.
b) Isabel tiene cinco veces el número de sellos que su hermana.

En la segunda afirmación se expresa qué relación hay entre las cantidades de sellos que tienen Isabel y su hermana. Esta relación puede escribirse de dos maneras, las que dependen de cuál de las cantidades se toma como incógnita:

- Si x representa el número de sellos que tiene la hermana de Isabel, entonces:
  x: cantidad de sellos que tiene la hermana de Isabel
  $5x$: cantidad de sellos que tiene Isabel.
- Si x representa el número de sellos que tiene Isabel, entonces:
  x: cantidad de sellos que tiene Isabel.
  $\frac{x}{5}$: cantidad de sellos que tiene la hermana de Isabel.

De conjunto con la primera afirmación se obtiene la ecuación buscada, la que puede ser: $x + 5x = 96$ o $x + \frac{x}{5} = 96$.

Con la ecuación $x + 5x = 96$ se obtiene la cantidad de sellos que tiene la hermana de Isabel, y con la ecuación $x + \frac{x}{5} = 96$ se obtiene la cantidad de sellos que tiene Isabel.

En general, para resolver un problema por medio de una ecuación puedes proceder de la manera siguiente:

- Analiza el texto, subraya las expresiones que cuantifican alguna magnitud y aquellas que indican operaciones o relaciones.
- Selecciona la incógnita o cantidad que vas a representar con la variable.
- Plantea la ecuación teniendo en cuenta las expresiones que cuantifican o indican operaciones y relaciones.
- Resuelve la ecuación y si fuese necesario, realiza los cálculos restantes.
- Comprueba si el o los resultados satisfacen las exigencias del texto.
- Plantea las respuestas.

2.3 Ejercicios del capítulo

1. Dados los números $a = \frac{2}{5}; b = 6; c = 3; d = 15$, calcula:

a) $b + a \cdot c$ b) $a \cdot d - b$ c) $a + \frac{d}{c}$ d) $\frac{b}{c} - d$

2. Completa las tablas:

a	b	$a + b$	$a \cdot b$
$\frac{5}{6}$		$\frac{9}{6}$	
0,25			0,325
	$\frac{2}{4}$	$\frac{17}{8}$	
$3\frac{3}{4}$			1,125
	$\frac{7}{3}$		$\frac{21}{10}$
$\frac{6}{7}$			$\frac{10}{7}$
8,87		22,32	

x	y	$x - y$	$x : y$
15,4		7,7	
$\frac{2}{9}$			10
	0,05		12
	$8\frac{2}{3}$	1	
	2 631	5 262	
	50 100	885	
13,2			33

3. Analiza las proposiciones dadas. Escribe verdadero o falso y justifica cada caso donde la proposición es falsa.

a) ___ $15 + 4 = 19$

b) ___ $\frac{3}{2} + \frac{4}{3} = \frac{17}{6}$

c) ___ $\frac{5}{2} + \frac{2}{3} = \frac{38}{12}$

d) ___ $14 + 23 = 47$

e) ___ $2\frac{7}{5} - 1\frac{3}{8} = \frac{36}{7} - \frac{6}{5}$

f) ___ $2,38 + 0,4 = 1,71 + 1,07$

g) ___ $2\frac{3}{4} - 1\frac{1}{3} = \frac{5}{6} + \frac{7}{12}$

h) ___ $1,83 + 0,5 = 1,14 + 1,07$

4. Sustituye la variable en cada una de las igualdades siguientes por los valores: 2; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$; 4; 7; 1,2; 0,4. Analiza si las proposiciones que obtienes son verdaderas o falsas.

a) ___ $3x = 12$ b) $5{,}1 + x = 6{,}3$ c) $4{,}9\ x = 6{,}1$

d) ___ $\frac{2}{3}x = 0{,}6$ e) ___ $4x = 8$ f) ___ $\frac{1}{4}x = 1$

g) ___ $\frac{1}{2}x = 2$ h) ___ $\frac{3}{4}x = 0{,}3$ i) ___ $\frac{2}{3}x < \frac{3}{5}$

j) ___ $a - \frac{4}{9} > 3$ k) ___ $3\frac{1}{4} + x < 6$ l) ___ $3b - b > 8$

5. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $4x - 2 = 10$ b) $72 - x = 8$ c) $25 : x = 5$ d) $3x - 8 = 8 + x$

6. Resuelve y comprueba. Escribe en cada caso el conjunto solución. (Sugerencia: Siempre que te sea posible hazlo por simple inspección)

a) $x - 15 = 4$ b) $x - 7 = 8$ c) $75 - c = 19$

d) $2x + 8 = 23 - x$ e) $3x - x = 16$ f) $a + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$

g) $c + \frac{3}{8} = \frac{13}{20}$ h) $\frac{12}{25} - x = \frac{1}{2}$ i) $x - \frac{5}{2} = \frac{11}{4}$

j) $x - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ k) $\frac{14}{57} - x = \frac{1}{4}$ l)) $x - \frac{7}{3} = \frac{3}{5}$

m) $2\frac{3}{5} + x = 7\frac{4}{15}$ n) $x - \frac{3}{4} = 0{,}01$

7. Resuelve y comprueba. Considera que en todas las ecuaciones $S_B = \mathbb{Q}_+$.

a) $4x = 12$ b) $7a = \frac{49}{2}$ c) $0{,}25z = 24$

d) $2{,}7x = 21{,}6$ e) $0{,}5w = 48$ f) $0{,}3x = 9$

g) $\frac{x}{4} = 7$ h) $\frac{x}{2} = 38$ i) $\frac{x}{6{,}3} = 0{,}05$

j) $x : \left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3}$ k) $7a + 5 = 54$ l) $4b - 11 = 5$

m) $3x + 8 = 23$ n) $\frac{2}{3}a - 16 = 2$ ñ) $0{,}05x - 3{,}5 = 8$

o) $5x + 11 = 156$ p) $4\frac{1}{2}c - 38 = 6\frac{1}{4}$ q) $74 = 104 - 5x$

r) $2x = 9 - x$ s) $7x = 4x + 6$ t) $0{,}2x - 1{,}2 = 1{,}3$

u) $0{,}3x + 1{,}42 = 2{,}42$

8. Escribe el conjunto de números fraccionarios que satisfacen al menos una de las ecuaciones siguientes:

a) $3x = 7$ b) $2x = 9$ c) $\frac{3}{5}x = \frac{2}{3}$ d) $\frac{2}{3}x = \frac{3}{5}$

e) $x - \frac{3}{5} = \frac{7}{3}$ f) $\frac{6}{7}x = 18$ g) $5x = 3{,}6$ h) $\frac{3}{5}x = 3$

i) $0{,}6x = 7{,}2$ j) $5x - 2x = 48$ k) $4x + 2x = 49 - x$

9. Según el dominio básico de la variable indicada, ¿cuál es el conjunto solución en cada caso?

a) $9b = \frac{63}{2} \left(b \in \mathbb{Q}_+\right)$ b) $\frac{4}{x} = 2\left(x \in \mathbb{Q}_+; x \neq 0\right)$

c) $\frac{6}{x} = 3\left(x \in \mathbb{N}; x \neq 0\right)$ d) $0{,}4x = 1{,}2\left(x \in \mathbb{Q}_+\right)$

e) $0{,}5x = 1{,}5\left(x \in \mathbb{N}\right)$ f) $\frac{4}{3} : x = \frac{3}{2}\left(x \in \mathbb{Q}_+\right)$

g) $0{,}26x - 1{,}3 = 1{,}04\left(x \in \mathbb{N}\right)$ h) $z + 6\frac{2}{3} = 7\left(z \in \mathbb{Q}_+\right)$

i) $\left(3{,}5 + 2{,}8\right)4x = 12{,}6\left(x \in \mathbb{Q}_+\right)$ j) $5x - x = \frac{12}{5}\left(x \in \mathbb{Q}_+\right)$

k) $4b + 2b = 8{,}7\left(b \in \mathbb{Q}_+\right)$ l) $3y + 0{,}5y = 10{,}6\left(y \in \mathbb{Q}_+\right)$

m) $\frac{2}{3} : x = \frac{3}{4}\left(x \in \mathbb{N}; x \neq 0\right)$ n) $0{,}72 = 0{,}28 : x\left(x \in \mathbb{Q}_+; x \neq 0\right)$

ñ) $0{,}54 = 0{,}21 : x\left(x \in \mathbb{Q}_+; x \neq 0\right)$ o) $\frac{x}{0{,}25} = 8\left(x \in \mathbb{N}\right)$

p) $\frac{x}{35} = \frac{3}{21}\left(x \in \mathbb{Q}_+\right)$ q) $\frac{3}{x} = \frac{5{,}2}{2{,}6}\left(x \in \mathbb{Q}_+; x \neq 0\right)$

r) $\frac{3}{x} = \frac{1}{2}\left(x \in \mathbb{N}\right)$

10. En la ecuación $8 - x = a$ ($x \in \mathbb{Q}_+$), ¿cuál es el mayor valor fraccionario que puede tomar la variable x para que la solución sea posible? En ese caso, ¿cuál sería el valor de a?

11. Resuelve las inecuaciones siguientes. Escribe en cada caso el conjunto solución.

a) $2x - 8 < 5$ b) $0{,}9x < 2$ c) $x + \frac{5}{2} < 3$

d) $11 + 2 < a \; 21$ e) $5x + 3 < 19$ f) $13 + 2b < 23$

g) $5x - 2x < 4$ h) $3x + 2 > 5$

i) $3x + \frac{1}{2} < \frac{1}{4}$ j) $0{,}4x > 1{,}36$

12. Escribe la ecuación que describe en el lenguaje matemático las situaciones de la práctica dadas a continuación:

a) El triplo de un número aumentado en 8 es 23, es x el número desconocido.

b) La mitad de la edad de Jorge disminuida en tres es la misma edad que la de su hermano Luis que tiene 6 años, es y la edad de Jorge.

c) El cuádruplo del área de un terreno, aumentada en el duplo de su área inicial, es de 96 m^2, es z el área inicial.

13. Considerando que x representa la longitud de un segmento y la masa de un melón y z la cantidad de educandos de un aula:

a) ¿Qué situaciones describen las ecuaciones?:
$2x = 16$; $3y + 6 = 24$; $\frac{z}{6} = 6$

b) Escribe otras situaciones de la práctica que se correspondan con las ecuaciones dadas.

c) Explica cómo hacer cambiar de una situación a otra a partir de la misma ecuación.

14. Escribe en lenguaje matemático y usa expresiones con solo una variable como en el inciso resuelto:

a) Un número, su triplo y su mitad (respuesta: x; 3x; $\frac{x}{2}$).

b) El antecesor de un número, el duplo y la tercera parte de su antecesor.

c) El sucesor de un número, el cuádruplo y la cuarta parte de su sucesor.

d) La mitad de los educandos de un aula.

e) La suma de las longitudes de los lados de un cuadrado.

f) La quinta parte del precio de un producto.

g) La suma de las longitudes de los lados de un triángulo equilátero.

h) El décuplo de un número de hojas.

i) El precio de un producto disminuido en $ 12,00.
j) El cuadrado de un número aumentado en su triplo.
k) Un número par (impar).

15. Escribe una ecuación o inecuación que se corresponda con cada uno de los textos siguientes:

a) El quíntuplo de un número es igual a 35.
b) Si adicionas 4 a un número el resultado es 10,3.
c) La mitad de un número es 0,3.
d) La quinta parte de un número es igual a $\frac{1}{2}$.
e) El doble de un número natural es menor que 13.
f) La tercera parte de la edad de Jorge disminuida en 3 años es igual a 1.
g) El perímetro de un cuadrado de lado *a* es igual a 24 cm.
h) El cuádruplo del área de un terreno aumentada en su duplo es 96 m^2.
i) El resultado de dividir 14,4 por un número es igual a 4,8.

16. En cada uno de los textos del ejercicio anterior, agrega una pregunta para completar un problema que tenga solución. Halla la solución de cada problema formulado.

17. Completa la tabla siguiente:

Lenguaje común	Introducción de variables	Lenguaje algebraico
El triplo de un número	*x*: un número	
Un número aumentado en seis	*y*: un número	
La mitad de la suma de dos números naturales consecutivos	*z*: un número natural	
Un número impar	*n*: un número natural	
Un múltiplo de 8	*n*: un número natural	
El perímetro de un cuadrado	*l*: lado del cuadrado	
El área de un rectángulo	*a* y *b:* lados consecutivos	

Lenguaje común	Introducción de variables	Lenguaje algebraico
Dos tercios de la producción de una fábrica	p: la producción de una fábrica	
Mortalidad infantil disminuida en dos tercios	m: mortalidad infantil	

18. Escribe al menos dos expresiones del lenguaje común que se puedan representar con las siguientes expresiones matemáticas:

a) $x - 1$ b) $2n$ c) m^3 d) $3m$ e) $\frac{x}{10}$ f) $\frac{5b}{2}$

g) $2n + n^3$ h) $\frac{p}{10} + 8$ i) $3m - 8$

19. ¿Qué significado tienen para el cálculo las ecuaciones? ¿Qué otras ecuaciones como estas conoces?

a) $a + b = b + a$

b) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

20. Se busca el número que:

a) Multiplicado por 112 es 24 080.

b) Multiplicado por $\frac{2}{5}$ es 58.

c) Dividido por 9 es $\frac{1}{3}$.

d) Sumado con el triplo de 0,35 es 2.

e) Si se le resta $\frac{4}{5}$ se obtiene 0,2.

f) Si se resta de $\frac{4}{5}$ se obtiene $\frac{6}{10}$.

21. Calcula el número natural que al sumar su tercera y su cuarta parte da como resultado 14.

22. Si duplico un número, al resultado le adiciono la mitad de dicho número y obtengo como resultado 20. ¿Cuál es el número?

23. La maestra propone el siguiente ejercicio: ¿Cuál es el número que sumado con su duplo da como resultado un número que es divisible por tres?

a) Dice Juancito que a ese ejercicio le viene bien cualquier número natural. ¿Será esto cierto? Argumenta tu respuesta.

24. El triplo de un número se disminuye en 3,5 primero y luego en 2,8 y se obtiene 15 como resultado. ¿Cuál es el número?

25. Se conoce que las balanzas, cuando están equilibradas, funcionan de modo similar a las ecuaciones. Las balanzas que se representan a continuación están en equilibrio. Escribe la ecuación que permite determinar la masa de la pesa que señala la flecha en cada inciso (figura 2.1).

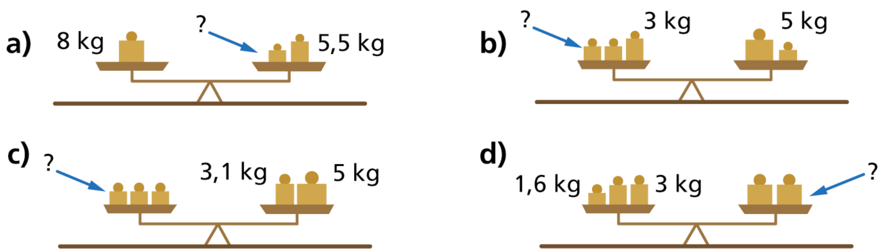


Figura 2.1

26. Si cada grupo de pesas representadas en la figura 2.2 equivale a la masa de la mayor, y la de mayor tamaño tiene una masa de 6 kg.

Figura 2.2

¿Cuánta masa tiene cada una de las pesas restantes?

27. Resuelve los problemas siguientes. Aplica lo que sabes sobre las ecuaciones con una variable.

27.1 Con las dos terceras partes del dinero que tenía y 28,00 más compré un par de zapatos que me costaron $ 350,00. ¿Cuánto dinero tenía? ¿Cuánto dinero me quedó después de hacer esta compra?

27.2 De las tres quintas partes de las libretas que hay en el almacén se han distribuido 895 entre los educandos de primero y segundo grados y 12 libretas para los docentes de estos grados, quedando 1 238 libretas para repartir entre los educandos de tercero y cuarto. ¿Cuántas libretas había en el almacén antes de comenzar a distribuirlas entre los educandos del centro? Si se sabe que el resto de las libretas son para distribuirlas entre los educandos de tercero y cuarto, ¿cuántas libretas corresponden a los educandos de estos grados?

27.3 Alberto y Mario recolectaron entre los dos 27 frascos de valor. Alberto recolectó 5 frascos más que Mario. ¿Cuántos frascos de valor recolectó cada uno de ellos?

27.4 La cola de un pez mide el doble de la longitud de la cabeza y el cuerpo tiene 11 pulgadas más que la cola. Si el pez mide 91 pulgadas, ¿cuánto mide cada una de las partes enumeradas del pez?

27.5 Si *a* y *b* son dos números distintos de cero y *a* es el doble de *b*:

a) Representa la suma y la diferencia de *a* y *b* en forma algebraica empleando solo una variable.

b) Reflexiona: ¿cuáles son los cocientes que corresponden a dos números cualesquiera que cumplen con la condición dada?

27.6 La playa de Santa Lucía es un ecosistema marino costero ubicado a 110 km de la ciudad de Camagüey, al sur del Canal Viejo de Bahamas. Al traducir al lenguaje algebraico las informaciones dadas en los incisos *a*, *b* y *c*, podrás obtener nuevos datos de este importante ecosistema cubano.

a) Es una playa arenosa de origen volcánico, el quíntuplo de su longitud aumentado en 10 equivale a la distancia que hay de la playa a la ciudad de Camagüey.

b) El ancho promedio de la franja de arena con sol es de 15 m. La diferencia entre el décuplo de su profundidad mayor y el ancho promedio de la franja de arena con sol es de 3 m.

c) Posee una gigantesca barrera coralina. Entre esta y la línea de costa, el mar alcanza una profundidad máxima, la que aumentada en seis décimas de metro equivalente al duplo de la profundidad mayor que alcanza la playa.

27.7 Interesantes investigaciones arqueológicas han demostrado que, durante el mioceno, en los mares de Cuba habitaban tiburones y rayas gigantes. Se ha comprobado también la existencia de ballenas fósiles del grupo de las odontocetas: delfines y orcas. Se estima que un tiburón en ese momento lograba alcanzar el doble de la longitud que una raya y que colocados uno a continuación del otro, podían alcanzar 30 m de longitud. ¿Cuál es el estimado que se hace para la longitud de un tiburón y para una raya en el mioceno?

27.8 Cuba es la mayor de las islas que compone el archipiélago cubano. Su parte más ancha es mayor en 160 km que su parte más estrecha. La suma de las longitudes de su parte más ancha, su parte más estrecha, con la longitud de la Isla de Cuba es de aproximadamente 1 472 km. Si el largo estimado de la isla es de 1 250 km.

a) ¿Cuánto mide aproximadamente la isla de Cuba en su parte más ancha? ¿Y en su parte más estrecha?

b) Investiga dónde están ubicadas ambas partes.

27.9 La Gran Piedra es una de las principales atracciones con que cuenta el Parque Baconao, que se encuentra ubicada a 20 km de la ciudad de Santiago de Cuba. El parque fue declarado por la Unesco Reserva Mundial de la Biosfera en 1987. Es un gran bloque de roca de origen volcánico. Tiene aproximadamente 5 m más de ancho que de alto y su largo es un metro más que el doble de su altura. Sus dimensiones largo, ancho y alto, alcanzan en total 106 m. ¿Cuáles son las dimensiones de esta gigantesca roca?

CAPÍTULO 3

Proporcionalidad

Algo de historia

La teoría de las proporciones fue desarrollada por el gran matemático griego Eudoxio, quien nació en la ciudad de Cnido en el Asia Menor en el año 408 a.n.e.

Su obra original sobre la teoría de las proporciones no llegó hasta los tiempos actuales, pero gracias a uno de sus más ilustres sucesores, Euclides de Alejandría, se pudo conocer dicha teoría, pues la recogió en su libro V de *Los Elementos*.

En el mencionado libro, Euclides explica que Eudoxio realiza una excelente aclaración de la idea de la razón, excluye al cero y establece que las razones solamente tienen sentido cuando se refieren a magnitudes del mismo tipo, es decir, ambas son longitudes, áreas, etcétera. En el libro de Euclides aparece la definición de proporción formulada por Eudoxio.

En este capítulo aprenderás una definición de proporción expresada de una forma más simple que la formulada por Eudoxio y verás qué útil te será este conocimiento para resolver situaciones de la vida cotidiana.

En los mapas de países, ciudades y otros sitios de interés, se trata de presentar un dibujo a escala de estos sitios que refleje sus formas con la mayor semejanza posible. La distancia entre dos puntos del mapa es menor que la distancia entre los puntos correspondientes del sitio, pero el mapa refleja de manera semejante el sitio al que corresponde. Esto se logra cuando la distancia entre dos puntos cualesquiera del mapa es k veces la distancia entre dos puntos cualesquiera en el sitio real (con $0 < k < 1$).

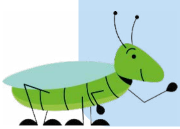
Por ejemplo, si la longitud de una autopista entre las ciudades A y B tiene 100 km y en el mapa la representamos con un segmento $\overline{A'B'}$ de longitud 10 cm, entonces la escala correspondiente se obtiene así:

$k = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ y al expresar ambas longitudes en la misma unidad

$$k = \frac{10\,\text{cm}}{10\ 000\ 000\,\text{cm}}$$

Simplificando la escala o razón de semejanza, es $k = \frac{1}{1\ 000\ 000}$

Recuerda que...



En general, decir que un plano está en escala $k = \frac{a}{b}$, significa que por cada a unidad de longitud que se tome en el plano hay b de las mismas unidades de longitud en el sitio correspondiente.

3.1 Razones y proporciones

Te invito a trabajar con la siguiente situación:

A un Joven Club de computación asisten seis niños por cada cinco niñas. ¿Cómo se puede expresar esta situación a partir de un cociente? Calculando: $\frac{5}{6} = 1,2$

Respuesta: La cantidad de niños es 1,2 veces la cantidad de niñas.

Otras informaciones de la práctica que llevan a análisis similares son:

- El mejor lanzador del equipo permitió 1 carrera limpia por cada 9 entradas de labor.
- De cada 5 personas en el mundo, 2 se ven afectadas en su nivel de vida por la degradación de los suelos.

- De cada 100 participantes en un concurso, 1 recibe medalla de oro, 3 reciben medallas de plata y 5 reciben medallas de bronce.
- La escala empleada en un mapa de la isla de Cuba es 1 : 3 000 000.En todos estos casos las informaciones se dan a partir de una razón.

Definición 3.1

Se llama razón entre dos números *a* y *b* con ($b \neq 0$) al cociente de la división de *a* por *b* tomados en ese orden.

Se escribe $\frac{a}{b}$ y se lee *a* es a *b*.

También puede escribirse $a : b$. El número *a* recibe el nombre de antecedente de la razón y el número *b* el de consecuente de la razón.

Ejemplo

La siguiente figura 3.1 muestra un conjunto de dados, de ellos 12 son gris oscuro y 4 son gris claro. Halla la razón entre:

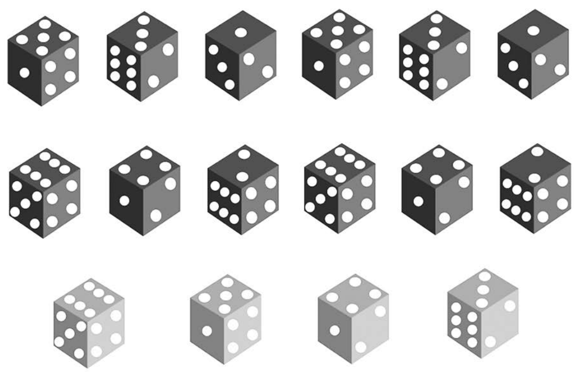


Figura 3.1

a) El número de dados gris claro y el de dados gris oscuro.
b) El número de dados gris oscuro y el de dados gris claro.
c) ¿Significan lo mismo las razones dadas como respuesta en cada inciso?
¿En qué orden se plantea la relación de los elementos?

En el inciso a), la relación se pide entre la cantidad de dados gris claro y la cantidad de dados gris oscuro; la razón correspondiente es: 4 es a 12. Por el contrario, en el inciso b) la relación se pide entre la cantidad de dados gris oscuro y la cantidad de dados gris claro; la razón correspondiente es: 12 es a 4.

¿Cómo puedes plantear e interpretar dichas razones?

Para el inciso a), la razón se escribe $\frac{4}{12}$ o 4 : 12; se lee: 4 es a 12. Dado que $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ significa que por cada dado gris claro hay 3 gris oscuro.

Para el inciso b), la razón se escribe $\frac{12}{4}$ o 12 : 4; se lee: 12 es a 4. Dado que $\frac{12}{4} = \frac{3}{1}$ significa que por cada dado oscuro hay un dado gris claro.

En resumen

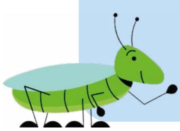
La razón entre dos cantidades a y b y la fracción $\frac{a}{b}$ se interpreta como una división $a : b$, por lo que se asume que **toda fracción representa una razón**.

Dada la estrecha relación entre la razón, la fracción y la división, muchas de las problemáticas relativas a la razón se pueden resolver aplicando los conocimientos relacionados con las fracciones y la división.

En una razón $\frac{a}{b}$ con ($b \neq 0$), a y b no tienen que ser obligatoriamente números naturales.

El cociente $\frac{1,2}{3}$ es una razón, pero no es una fracción porque 1,2 no es un número natural.

Recuerda que...



Mediante ampliación o simplificación puedes obtener infinitas fracciones equivalentes a una dada. De igual manera, siempre es posible hallar infinitos pares de números para representar una razón dada.

Ejercicio resuelto

Busca tres parejas de números que estén en la razón:

a) 2 es a 5 b) 16 es a 2

a) Si expresas la razón 2 es a 5 como una fracción, puedes ampliarla. Al hacerlo obtienes otras iguales y, por tanto, en la misma razón: $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} = \frac{20}{50}$

Si expresas las fracciones $\frac{4}{10} = \frac{6}{15} = \frac{20}{50}$ como razones, tendrás la respuesta buscada: 4 es a 10; 6 es a 15; 20 es a 50 son la misma razón expresada con diferentes números.

b) Con la fracción $\frac{16}{2}$ se expresa la razón 16 es a 2. Esta se puede simplificar y ampliar: $\frac{16}{2} = \frac{8}{1} = \frac{40}{5} = \frac{800}{100}$

Las fracciones halladas representan las razones 8 es a 1; 40 es a 5; 800 es a 100.

¡No olvides!

Para hallar la razón de dos números, formas el cociente entre ellos en el orden en que aparecen y lo simplificas tanto como sea posible.

Ampliando y simplificando las fracciones podemos determinar pares de números que están en la misma razón.

Como has podido ver, los pares de números 2 y 5; 4 y 10; 6 y 15; 20 y 50, se hallan en la misma razón. Tomando dos pares de estas razones se forma una igualdad de razones.

Definición 3.2

Se llama **proporción** a la igualdad entre dos razones.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ es una proporción y se lee: *a* es a *b* como *c* es a *d*.

También puede escribirse $a : b = c : d$.

En la proporción $a : b = c : d$ a los números a y d se les llama extremos y a los números b y c, medios (figura 3.2).

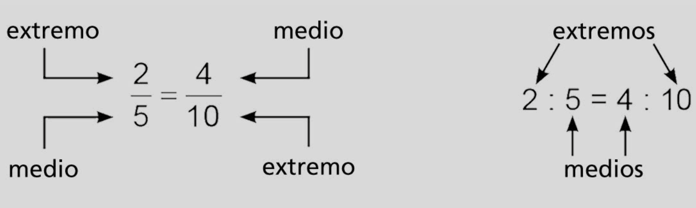


Figura 3.2

Ejemplo

Las razones $\frac{7}{2}$ y $\frac{21}{6}$ son iguales; por tanto, $\frac{7}{2} = \frac{21}{6}$ (7 : 2 = 21 : 6) es una proporción en la que 7 y 6 son los extremos, mientras que 2 y 21 son los medios.

Las razones $\frac{3}{5}$ y $\frac{4,2}{7}$ son iguales; por tanto, $\frac{3}{5} = \frac{4,2}{7}$ es una proporción.

Las razones $\frac{8}{2}$ y $\frac{9}{6}$ no son iguales; por tanto no forman una proporción.

Propiedades de las proporciones

Teorema 3.1

En toda proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios (propiedad fundamental de las proporciones).

Ejemplo

a) $\frac{7}{2} = \frac{21}{6}$ es una proporción porque $7 \cdot 6 = 2 \cdot 21$.

b) 3 : 5 = 4,2 : 7 es una proporción porque $3 \cdot 7 = 5 \cdot 4,2$.

c) $\frac{8}{2}$ y $\frac{9}{6}$ no es una proporción porque $8 \cdot 6 \neq 2 \cdot 9$.

Ejercicio resuelto

Dada la proporción $\frac{26}{13} = \frac{4}{2}$, comprueba que se obtiene de nuevo una proporción:

- Al intercambiar los medios
- Al intercambiar los extremos
- Al invertir ambas razones

Respuestas:

a) $\frac{26}{4} = \frac{13}{2}$ es una proporción porque $2 \cdot 26 = 13 \cdot 4$

b) $\frac{2}{13} = \frac{4}{26}$ es una proporción porque $26 \cdot 2 = 4 \cdot 13$

c) $\frac{13}{26} = \frac{2}{4}$ es una proporción porque $4 \cdot 13 = 2 \cdot 26$

Teorema 3.2

En una proporción, al intercambiar los medios, al intercambiar los extremos y al invertir ambas razones se obtiene de nuevo, en cada caso, una proporción.

Ejemplo

De la proporción 3 : 5 = 4,2 : 7 se pueden obtener otras proporciones:

- Intercambiando los medios: 3 : 4,2 = 5 : 7
- Intercambiando los extremos: 7 : 5 = 4,2 : 3
- Invirtiendo ambas razones: 5 : 3 = 7 : 4,2

Reflexiona un instante

Halla el valor de x en las proporciones y comprueba:

a) $\frac{x}{6} = \frac{20}{12}$

b) $\frac{2}{x} = \frac{28}{7}$

Comenta con tus compañeros de aula la situación para que puedan dar criterios y entre todos buscar la solución a este ejercicio.

Sugerencia: Indaga qué conocimientos relacionan a las variables y a las proporciones.

Revisa el resumen que aparece a continuación y comprueba si coincide con tu criterio y el de tus compañeros.

Para hallar el valor de *x*, es decir, el término desconocido en la proporción, aplicas la propiedad fundamental de las proporciones y, para comprobar, puede ser útil lo aprendido al resolver ecuaciones: se calcula cada miembro y se comparan los resultados obtenidos.

Ejercicio resuelto

Halla el valor de *x* en las proporciones siguientes y comprueba:

a) $\frac{x}{6} = \frac{20}{12}$

$x \cdot 12 = 6 \cdot 20$ se aplica la propiedad fundamental de las proporciones

$x = \frac{120}{12}$ Resolviendo la ecuación

$x = 10$

Comprobación:

Sustituimos *x* por el valor obtenido y verificamos si la expresión $\frac{10}{6} = \frac{20}{12}$ es una proporción:

$12 \cdot 10 = 6 \cdot 20$

$120 = 120$

Respuesta: El valor de *x* es 10.

b) $\frac{2}{x} = \frac{28}{7}$ $\quad 7 \cdot 2 = 28 \cdot x \quad 28 \cdot x = 14 \quad x = x = \frac{\cancel{14}^{1}}{\cancel{28}_{2}} \quad x = \frac{1}{2}$

Comprobación: $\frac{2}{\frac{1}{2}} = \frac{28}{7} \quad 7 \cdot 2 = \cancel{28}^{14} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_{1}} \quad 14 = 14$

Respuesta: El valor de *x* es $\frac{1}{2}$.

Con los conocimientos adquiridos acerca de las razones y las proporciones puedes resolver problemas como el que sigue.

Ejercicio resuelto

En un taller de computadoras trabajan 24 hombres. Si la cantidad de hombres y la cantidad de mujeres están en la razón 2 es a 3 respectivamente, ¿cuántas mujeres laboran en ese taller?

Lee con detenimiento el problema y determina:

a) ¿Qué datos ofrece el problema?

b) ¿Qué pide?

c) ¿Qué tipo de relaciones se dan entre lo dado y lo buscado?

d) ¿Qué vía de solución se puede seguir?

Lee los siguientes planteamientos y expresa a tus compañeros si coinciden con tus ideas de resolución o si has pensado de otra manera. Explica tus razonamientos.

Respuestas:

a) El problema da como datos:

- la cantidad de hombres que trabaja en el taller (24).
- la razón entre la cantidad de hombres y la cantidad de mujeres $\left(\frac{2}{3} \text{ o } 2 \text{ es a } 3\right)$.

b) Pide la cantidad de mujeres.

En el texto del problema se refleja claramente que lo dado y lo buscado están en una razón, o sea, se relacionan mediante una razón. 2 es a 3 significa que son 2 hombres por cada 3 mujeres. Si son 24 hombres, entonces se pueden formar 12 grupos de 2 hombres y como por cada dos hombres son 3 mujeres, calculamos el número de mujeres multiplicando $12 \cdot 3$.

Otra vía de solución consiste en formar la proporción. Si representamos por x la cantidad de mujeres, la vía de solución está en plantear la proporción con la razón entre la cantidad de hombres y la de mujeres: $\frac{24}{x}$ y la razón $\frac{2}{3}$, para luego determinar el término desconocido de la proporción:

$$\frac{24}{x} = \frac{2}{3}$$

$$2x = 72$$

$$x = 36$$

Comprobación:

$$\frac{24}{x} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

$$x = 36$$

Respuesta: En el taller laboran 36 mujeres.

Ejercicios del epígrafe

1. Observa la figura 3.3 y escribe las razones pedidas en cada inciso.

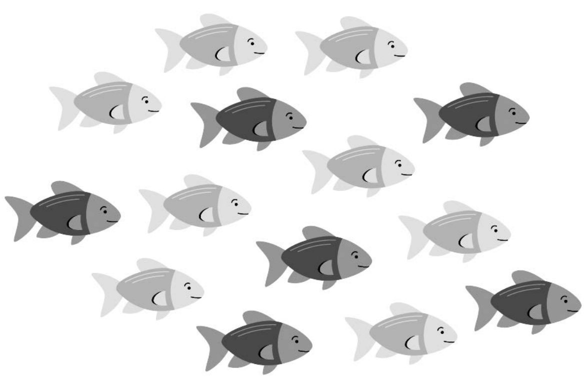


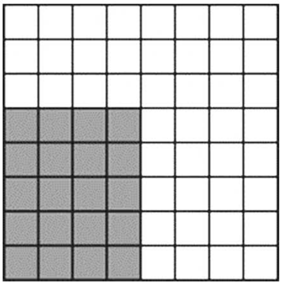
Figura 3.3

a) Razón entre los peces de color gris claro y el total de ellos.

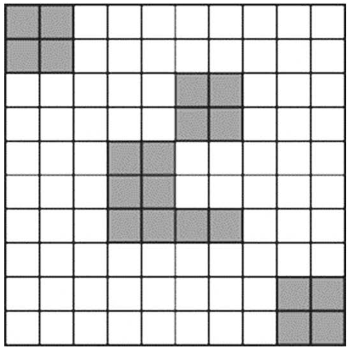
b) Razón entre los peces de color gris oscuro y el total de ellos.

c) Razón entre los peces de color gris claro y los de color gris oscuro.

2. En cada caso, en la figura 3.4 a y b, identifica la razón entre la cantidad de cuadrados blancos y la de cuadrados grises.

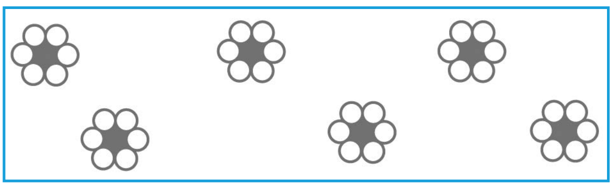


a) **Figura 3.4 a**

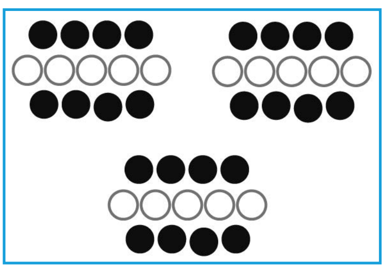


b) **Figura 3.4 b**

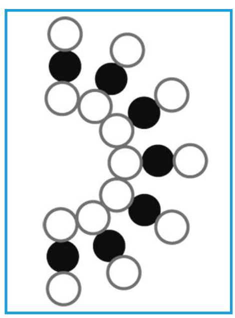
3. Halla la razón entre la cantidad de círculos blancos y círculos negros en cada inciso (figura 3.5 a, b, c).



a) **Figura 3.5 a**



b) **Figura 3.5 b**



c) **Figura 3.5 c**

4. Halla la razón entre:

a) 30 y 5
b) 8 y 64
c) 15 y 6
d) 4 y 10
e) 84 y 3
f) 7,8 y 0,2
g) 108 y 12
h) 0,25 y 0,75
i) $\frac{1}{2}$ y 4
j) 8 y $\frac{2}{7}$
k) $\frac{1}{5}$ y 3
l) 0,9 y $\frac{1}{4}$

5. Di en qué razón se encuentran:

a) Las edades de dos niños de 10 y 14 años respectivamente.

b) Las longitudes de dos segmentos $\overline{AB}$ = 49 cm y $\overline{CD}$ = 28 cm.

c) Las horas de viaje de La Habana a Santa Clara si aproximadamente en tren son 6 h y en ómnibus 4 h.

d) Las áreas de dos rectángulos que miden 16 dm^2 y 64 dm^2.

e) Las amplitudes de dos ángulos *M* y *N* que miden 72° y 27° respectivamente.

6. Halla tres pares de números que estén en la razón:

a) $\frac{10}{1}$
b) 6 : 8
c) 11 : 5
d) $\frac{4}{9}$
e) 3 : 7
f) $\frac{1}{0{,}2}$
g) 1,4 : 3
h) 19 : 2,5

7. Investiga cuáles de los pares de números siguientes están en la razón 7 es a 1:

a) 15 y 4
b) 6 y 42
c) 56 y 8
d) 70 y 10
e) 32 y 6
f) 1,4 y 0,2

8. Dados los segmentos siguientes (figura 3.6):

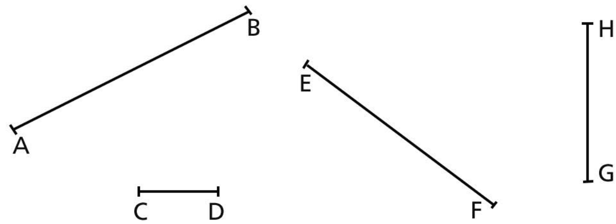


Figura 3.6

Halla la longitud de cada uno y calcula las razones que se indican a continuación:

a) $\dfrac{\overline{GH}}{\overline{AB}}$ b) $\dfrac{\overline{EF}}{\overline{CD}}$ c) $\overline{CD} : \overline{GH}$ d) $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$

9. Asocia cada elemento del conjunto M con un elemento del conjunto N (figura 3.7) de modo que estén en la razón $\dfrac{1}{3}$.

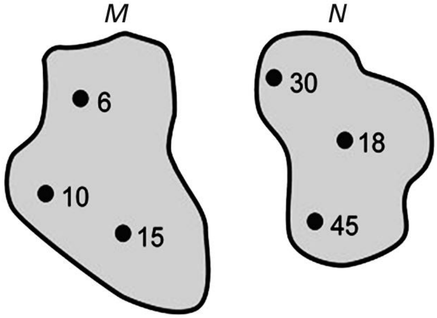


Figura 3.7

10. Investiga cuáles de los pares de razones siguientes forman una proporción:

a) $\dfrac{6}{20}$ y $\dfrac{3}{10}$ b) $\dfrac{4}{2}$ y $\dfrac{32}{16}$

c) 100 : 25 y 4 : 1 d) 0,2 : 1,6 y 0,5 : 4

e) $\dfrac{5}{9}$ y $\dfrac{4}{68}$ f) $\dfrac{15}{17}$ y $\dfrac{0,4}{1,2}$

11. Copia en tu libreta y en cada línea escribe el signo $>$, $<$ o $=$ según corresponda. Di en cada caso si es una proporción y argumenta.

a) $3 : 3$ ___ $2 : 3$

b) $\frac{1}{2}$ ___ $\frac{50}{20}$

c) $\frac{11}{12}$ ___ $\frac{6}{5}$

d) $15 : 9$ ___ $20 : 12$

e) $76 : 100$ ___ $3 : 4$

f) $\frac{6}{5}$ ___ $\frac{1}{1}$

12. Forma una proporción a partir de cada igualdad de las que se dan a continuación:

a) $5 \cdot 6 = 30 \cdot 1$

b) $30 \cdot 4 = 24 \cdot 5$

c) $68 \cdot 3 = 12 \cdot 17$

d) $24 \cdot \frac{7}{4} = 20 \cdot 2{,}1$

e) $\frac{1}{2} \cdot 36 = 1{,}8 \cdot 10$

f) $0{,}09 \cdot 25 = 4{,}5 \cdot 0{,}5$

13. Halla el valor de *n* en las siguientes proporciones:

a) $3 : 2 = 15 : n$

b) $\frac{5}{3} = \frac{10}{n}$

c) $1 : 5 = n : 100$

d) $3 : n = 75 : 100$

e) $\frac{n}{18} = \frac{12}{16}$

f) $\frac{25}{n} = \frac{15}{9}$

14. Calcula el valor de *x* en las siguientes proporciones:

a) $3 : x = 18 : 12$

b) $\frac{16}{x} = \frac{48}{6}$

c) $x : 36 = 7 : 12$

d) $\frac{2}{3} : \frac{5}{6} = \frac{1}{2} : x$

e) $1{,}2 : 0{,}4 = x : 2{,}5$

f) $\frac{x}{3{,}1} = \frac{2{,}4}{0{,}6}$

15. Transforma las siguientes proporciones de modo que obtengas en cada caso tres proporciones más:

a) $\frac{8}{9} = \frac{40}{45}$

b) $11 : 17 = 121 : 187$

c) $\frac{1,6}{4} = \frac{4}{10}$

d) $\frac{20}{7} = \frac{102}{35,7}$

e) 2 : 7 = 8,6 : 30,1

f) 5,4 : 15 = 27 : 45

16. Dada la igualdad de productos $3 \cdot 4 = 2 \cdot 6$, establece cuanta proporción te sea posible obtener de esta igualdad.

17. Calcula x en la razón:

a) $\frac{x}{8} = 2$

b) $\frac{7,5}{x} = 3,75$

18. Calcula x en la proporción $\frac{85}{x} = \frac{7}{2}$

19. Comprueba que las igualdades dadas son proporciones:

$\frac{10}{7} = \frac{30}{21}$ y $\frac{(10+7)}{7} = \frac{(30+21)}{21}$

a) Describe cómo se puede obtener la segunda de la primera igualdad.

b) De la igualdad $\frac{15}{4} = \frac{45}{12}$ obtén otra de manera similar que en el inciso a). Muestra que ambas son proporciones.

c) *En la proporción $\frac{x}{4} = \frac{y}{6}$, calcula el valor de x y de y si se sabe que $x + y = 8$.

20. * Calcula x en la proporción:

$\frac{(x+7)}{x} = \frac{4}{3}$

21. Pagué $ 24,00 por 2 kg de tomates de ensalada. ¿Cuánto debo pagar para adquirir 8 kg de esa variedad de tomates?

22. La longitud del paso de una persona es de aproximadamente 50 cm.

a) ¿Cuántos pasos necesitará para recorrer 86 m?

b) ¿Cuál es la razón entre las cantidades de longitud del paso y tramo recorrido?

23. Daniel trabaja preparando medicamentos en un laboratorio. Cierto antibiótico se elabora con dos compuestos: *A* y *B*, cuyas masas deben estar en la razón 6 es a 11. Si se tienen 54 g del compuesto *A*, ¿cuántos g del compuesto *B* se necesitan para preparar el antibiótico?

24. En una cesta hay en total 50 huevos, de los cuales se han utilizado 18 para confeccionar una panetela. ¿Cuál es la razón entre los huevos de la cesta y los que se utilizaron para la panetela?

25. Sea *C* un ángulo recto y *D* un ángulo llano, halla la razón entre las amplitudes del *C* y del *D*.

26. Alejandro tiene 20 años. Si las edades de Alejandro y Laura están en la razón 5 es a 4, ¿qué edad tiene Laura?

27. En un juego de baloncesto, por cada 5 tiros se anotaron 2 canastas. Si en total hubo 80 tiros, ¿cuántas canastas se anotaron?

28. Tres de cada cuatro educandos de un aula son varones. Hay 15 varones.

   a) ¿Cuántos educandos tiene el aula?
   b) ¿Cuántas hembras hay?

29. Dos números están en la razón 15 es a 8. Si el mayor de los números es 105, ¿cuál es el otro número?

30. La cantidad de música almacenada en una tarjeta de memoria está en la razón 4 es a 120. ¿Cuántas horas de música se pueden almacenar en 8 tarjetas de memoria como esta?

31. Con 6 lb de harina se fabrican 20 moldes de pan. ¿Cuántos moldes de pan se fabrican con la mitad de esta cantidad de harina?

32. Con 12 g de chocolate se fabrican 20 panetelas. ¿Cuántas panetelas de chocolate se fabrican con la mitad de esta cantidad de chocolate? ¿Y con la cuarta parte?

33. El perímetro de una cancha de fútbol es de 432 m. Si la razón entre el ancho y el largo de la cancha es 5 : 7, ¿cuánto mide cada lado de la cancha?

34. Maritza y su hijo compraron una pizza para celebrar su cumpleaños y la cortaron en trozos iguales. Los trozos que comió Maritza y los que comió su hijo están en la razón 2 : 1. Si Maritza comió 4 trozos, ¿cuántos trozos de pizza comió su hijo?

35. Juan Carlos tiene 64 monedas entre medios y pesetas. Si por cada 8 monedas hay 3 medios:

a) ¿Cuántos medios tiene?
b) ¿Cuántas de las monedas son pesetas?
c) ¿Qué cantidad de dinero tiene Juan Carlos en total?
(Ten en cuenta que todas las pesetas son de 20 ¢)

3.2 Proporcionalidad directa

Muchas veces, en la práctica se nos presentan situaciones en las que el valor o la cantidad de una magnitud depende del valor de otra. Por ejemplo, el consumo eléctrico depende, entre otras causas, de la cantidad de bombillos encendidos.

La siguiente tabla recoge la relación entre la cantidad de bombillos encendidos y su consumo eléctrico durante 4 h.

Cantidad de bombillos (u)	1	2	3	4	...	9	10
Consumo eléctrico (kw)	28	56	84	112	...	252	280

a) ¿Qué magnitudes se relacionan en la tabla?
b) ¿Cuál es el comportamiento del consumo eléctrico cuando va en aumento la cantidad de bombillos encendidos?
c) ¿Qué patrón o regularidad se aprecia en la correspondencia entre los datos de ambas magnitudes?

Observa que:

$\mathbf{28} = \mathbf{28} \cdot 1$; $56 = \mathbf{28} \cdot 2$; $84 = \mathbf{28} \cdot 3$; $112 = \mathbf{28} \cdot 4$;…; $252 = \mathbf{28} \cdot 9$; $280 = \mathbf{28} \cdot 10$

Cuando se duplica, triplica, cuadruplica, etc., la cantidad de bombillos, se duplica, triplica, cuadruplica, el consumo eléctrico, o sea, la magnitud correspondiente. El consumo eléctrico se obtiene multiplicando la cantidad de bombillos por un valor constante: **28**.

¿Sabías que...?

Cuando dos magnitudes están relacionadas de modo que los valores de una de ellas se obtienen multiplicando por un mismo número los valores correspondientes en la otra, se dice que son **directamente proporcionales**. El número por el que se multiplica se denomina **factor de proporcionalidad**.

Dicho de otra manera: En una proporcionalidad directa entre dos magnitudes, una cantidad cualquiera de una de las magnitudes y su correspondiente en la otra, forman siempre la misma razón.

Ejemplos

a) $\frac{1}{2} = \frac{28}{56}$ (1 es a 2 como 28 es a 56)

b) $\frac{3}{4} = \frac{84}{112}$ (3 es a 4 como 84 es a 112)

c) $\frac{9}{3} = \frac{252}{84}$ (9 es a 3 como 252 es a 84)

Existen muchos ejemplos que conoces de la práctica que son magnitudes directamente proporcionales:

- El perímetro de un cuadrado y la longitud de su lado.
- El precio que se debe pagar y la cantidad de artículos que se compran, si se pagan por unidad.
- El precio que se debe pagar por un producto y el peso de este, si se paga por peso.
- El espacio recorrido y el tiempo de demora, si la velocidad es constante.

- El tiempo de trabajo y la obra realizada, si el número de obreros y su productividad son constantes (en valores razonables).
- El número de obreros y la obra realizada, si el tiempo de trabajo y la productividad son constantes.
- En un conjunto de rectángulos de la misma base las superficies son proporcionales a sus respectivas alturas.
- La cantidad de líquido que pasa a velocidad constante por una llave y el tiempo que permanece abierta.

Lee con detenimiento el siguiente ejemplo y debate con tu docente y compañeros de aula con relación a las interrogantes que te planteamos. Formulen sus ideas.

Ejemplo

En la tabla siguiente se ilustra una correspondencia entre el número de panes y el precio de venta en centavos según la venta normada.

Número de panes (u)	1	2	3	10	11	12
Precio de la compra (¢)	5	10	15	50	55	60

- Cuando aumenta el número de panes, ¿qué ocurre con el precio?
- ¿Cómo son las razones entre dos cantidades de una de las magnitudes y sus correspondientes en la otra magnitud?
- ¿Cuál es el factor de proporcionalidad en este caso? ¿Por qué?
- ¿Puedes plantear alguna relación entre el factor de proporcionalidad y el valor correspondiente a la unidad?

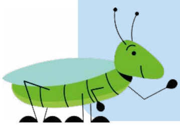
Divide varias cantidades de la segunda magnitud entre la cantidad correspondiente en la primera.

- ¿Qué regularidad observas?
- ¿Hay alguna relación entre el número obtenido y el factor de proporcionalidad?

Expresa a tu docente y compañeros de aula si estás de acuerdo con los siguientes planteamientos:

- Cuando aumenta el número de panes, aumenta el precio de la compra, y las razones entre dos cantidades y sus correspondientes son iguales. Por ejemplo: $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ $\frac{10}{11} = \frac{50}{55}$ $\frac{3}{12} = \frac{15}{60}$ En cada caso se forma una proporción.
- El factor de proporcionalidad es 5, pues es el número fijo por el que se multiplica cada cantidad de panes para obtener su precio.
- El factor de proporcionalidad es el valor correspondiente a la unidad y lo puedes obtener dividiendo cualquier cantidad de la segunda magnitud entre la cantidad a la cual corresponde en la primera, por ejemplo: $\frac{5}{1} = 5$; $\frac{10}{2} = 5$; $\frac{55}{11} = 5$

Recuerda que...



En una proporcionalidad directa, dos cantidades cualesquiera de una magnitud y sus correspondientes en la otra forman una proporción.

El factor de proporcionalidad es el valor correspondiente a la unidad y se obtiene dividiendo cualquier cantidad de la segunda magnitud entre la cantidad a la cual corresponde en la primera.

Saber hacer

Los problemas de proporcionalidad directa los puedes resolver por el método de reducción a la unidad o a partir de alguna de las proporciones que son posibles aplicando la propiedad fundamental de las proporciones como observaste en el ejemplo anterior.

Ejemplos

1. Si 1 kg de arroz cuesta $ 8,80, ¿cuánto cuestan 6 kg de ese mismo producto?

a) ¿Qué datos ofrece el problema?
b) ¿Se conoce el factor de proporcionalidad? ¿Por qué?
c) ¿Cómo procedes para hallar la solución?
En este caso tienes como dato el factor de proporcionalidad: \$ 8,80: precio de 1 kg de arroz.

Entonces se multiplica el número de kilogramos por el precio de 1 kg, pues conoces el contenido de cada una de las partes iguales (\$ 8,80) y la cantidad de partes (6).

$6 \cdot 8{,}80 = 52{,}80$

Respuesta: 6 kg de arroz cuestan \$ 52,80.

2. Una brigada de obreros construye 12 m de un muro en 2 días de trabajo. ¿Cuántos metros construirán en $3\frac{1}{2}$ días si mantienen el mismo ritmo de trabajo?

a) ¿De qué trata el problema?
b) ¿Qué datos ofrece?
c) ¿Qué pide?
d) ¿Se conoce el factor de proporcionalidad? ¿Por qué?
e) ¿Cómo procedes para calcular cuántos metros construirán en $3\frac{1}{2}$ días?

El problema trata de la relación que se da entre dos magnitudes: resultados de un trabajo y el tiempo en lograrlo con una cantidad fija de obreros, o sea, se trata de un problema de proporcionalidad.

Los datos expresan que se construyen 12 m de un muro en 2 días de trabajo y se pide el resultado del trabajo cuando hayan transcurrido $3\frac{1}{2}$ días.

No se conoce el factor de proporcionalidad, pero se puede calcular. Si la brigada construye 12 m de muro en dos días de trabajo, ¿cuántos metros puede construir en un día? No te es difícil comprender que a esta pregunta se responde calculando: $12 : 2 = 6$; es decir, que en 1 día construyen 6 m de muro. Entonces el factor de proporcionalidad es 6. Conociéndolo, el problema se puede reformular así:

Una brigada de obreros construye 6 m de un muro en un día de trabajo. ¿Cuántos metros construirán en $3\frac{1}{2}$ días si mantienen el mismo ritmo de trabajo?

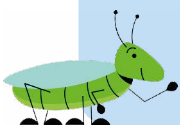
En este problema ya conoces el factor de proporcionalidad, lo que te permite calcular el valor que corresponde a $3\frac{1}{2}$ días de trabajo multiplicando este número por dicho factor:

$6 \cdot 3\frac{1}{2} = 6 \cdot \frac{7}{2} = 21$

Respuesta: En $3\frac{1}{2}$ días la brigada construye 21 m de muro.

Cuando en el proceso de resolución de problemas de proporcionalidad se calcula el factor de proporcionalidad, se dice que se procede reduciendo a la unidad.

Recuerda que...



El procedimiento de solución conocido como reducción a la unidad consiste en hallar el factor de proporcionalidad, el cual se multiplica por el valor conocido para obtener su correspondiente de la otra magnitud.

Otra vía para resolver el mismo problema es trabajar con la proporción correspondiente a la situación descrita en el problema, o sea, hallando el término desconocido en la proporción: 2 es a $3\frac{1}{2}$ como 12 es a x.

Veamos otro ejemplo:

3. Un auto recorre 206,85 km en 3,5 h con una velocidad constante. ¿Qué distancia recorre en 5 h?

Para resolver este problema debemos reconocer que las magnitudes espacio y tiempo son directamente proporcionales cuando un móvil se desplaza a velocidad constante. Si denotamos por x la distancia que recorre el auto en 5 h, podemos representar en una tabla los datos del problema figura 3.8.

Espacio (km)	206,85	x
Tiempo (h)	3,5	5

Figura 3.8

Como en magnitudes directamente proporcionales dos valores de una magnitud y sus correspondientes en la otra forman una proporción, podemos plantear la siguiente proporción y calcular el término desconocido:

$$\frac{206,85}{x} = \frac{3,5}{5}$$

$$3,5\ x = 206,85 \cdot 5$$

$$x = \frac{1034,25}{3,5}$$

$$x = 295,5$$

Respuesta: En 5 h el auto recorre 295,5 km.

Representación gráfica de la proporcionalidad directa

En la tabla siguiente se ilustra una correspondencia que es una proporcionalidad directa entre el número de caramelos y lo que cuesta comprarlos:

Número de caramelos (x)	1	2	3	4	…	10	11	…
Costo en centavos (y)	2	4	6	8	…	20	22	…

En este caso, el factor de proporcionalidad es 2, pues es el número por el cual se multiplica cada cantidad de caramelos para obtener su costo.

Si representas esta proporcionalidad directa en un sistema de coordenadas, puedes comprobar que los puntos que se obtienen al representar cada par de valores correspondientes están sobre una misma recta (figura 3.9).

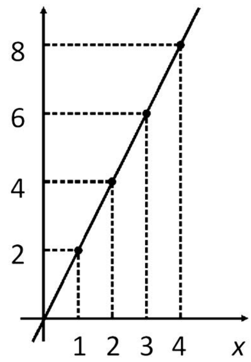


Figura 3.9

Ejercicios del epígrafe

1. Los datos representados en las tablas siguientes corresponden a magnitudes directamente proporcionales. Halla en cada caso el factor de proporcionalidad y calcula los valores que faltan.

Libras de mandarina	3	5	
Costo (pesos)	10,50		31,50

Distancia recorrida por un auto (km)	50	100	120
Tiempo (h)		8,5	

Número de piezas que produce una máquina		170	306
Tiempo que demora (h)	$1\frac{1}{2}$	5	

2. Si 13 m de tela para cortina cuestan $ 975,00 ¿cuánto cuestan 4 m?

3. Un ciclista recorre 54 km en 3 h. ¿Cuántas horas necesita para recorrer 126 km?

4. Una máquina automática elabora 162 piezas en 2 h.

a) ¿Cuántas piezas elabora en 9 h?
b) ¿Cuántas horas necesita para elaborar 972 piezas?

5. 52 m de un tipo de alambre cuesta $ 780,00.

a) ¿Cuántos metros de alambre compró David si gastó $ 15,00?
b) Daniel necesita comprar 106 m de ese alambre. ¿Cuánto le costarán?

6. De 150 q de remolacha se obtienen 25 q de azúcar.

a) ¿Cuántos quintales de azúcar se obtienen de 60 q de remolacha?
b) ¿De cuántos quintales de remolacha se obtienen 15 q de azúcar?

7. Identifica cuáles de los pares de magnitudes descritas son directamente proporcionales.

a) La altura en centímetros de una persona y su edad.
b) Las horas trabajadas en un turno y el pago respectivo por ese turno.
c) La cantidad de páginas de un libro y la cantidad de hojas que se necesitan para imprimirlo.
d) El precio de una comida y el tiempo que un cliente demora en comerla.

8. Dos ruedas están unidas por una correa transmisora. La primera tiene un radio de 15 cm de longitud y la segunda de 45 cm de longitud. Cuando la primera rueda da 300 vueltas, ¿cuántas vueltas da la segunda?

9. El sonido de un trueno demora 0,6 s en recorrer una distancia de 206 m. ¿Cuántos metros recorre el trueno en 0,9 s?

10. Alfredo toma fotografías y compara el tamaño de los objetos en la foto con su tamaño en la realidad. Un objeto cuya altura es de 2 m aparece en la foto con un tamaño de 6 cm. ¿Con qué tamaño aparecerá un objeto cuya altura es de 8 m?

3.3 Proporcionalidad inversa

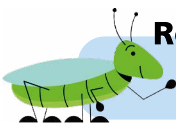
Hay magnitudes que son directamente proporcionales, es decir que aumentan o disminuyen de manera proporcional. ¿La proporcionalidad entre dos magnitudes pudiera manifestarse de forma contraria? Te invito para que analices la siguiente situación:

El papá de Enrique lo lleva a la playa en su automóvil. Enrique le pide que disminuya la velocidad para evitar un accidente. Su papá le aclara que si disminuye la velocidad el tiempo de viaje aumenta.

¿Estás de acuerdo con el papá de Enrique en cuanto a la relación entre la velocidad y el tiempo que tarda al recorrer un trayecto fijo? ¿Podemos plantear que las relaciones entre las magnitudes tiempo y velocidad en este caso son directamente proporcionales? ¿Por qué?

La experiencia personal nos dice que en la medida que el automóvil avance a menor velocidad, el tiempo el cual demora en llegar a su destino aumenta y, por el contrario, si avanza a mayor velocidad, el tiempo de viaje disminuye; por tanto, las relaciones entre las magnitudes no son directamente proporcionales.

Situaciones como la anterior también se presentan, por ejemplo, en la relación que existe entre las dimensiones largo y ancho de dos rectángulos que tienen la misma área.



Recuerda que...

- El área del rectángulo es el producto del largo por el ancho.

Analicemos la siguiente situación:

Sea *ABCD* un rectángulo con un área de 36 cm^2 cuyas dimensiones son 1 cm de largo por 36 cm de ancho. ¿Cómo varía el ancho de un rectángulo cuando, sin variar su área, duplicamos, triplicamos, … su largo?

En la siguiente tabla se muestra lo que ocurre con las dimensiones del rectángulo cuando se varía la longitud de uno de los lados manteniendo su área fija.

Largo (cm)	1	2	3	4	6	9
Ancho (cm)	36	18	12	9	6	4

Observa que para cantidades de magnitudes correspondientes se cumple:

- Sus productos son iguales a 36, lo que indica que su área se mantiene fija.
- Entre estas se puede verificar que:

$$36 = 1 \cdot 36 \qquad 18 = \frac{1}{2} \cdot 36 \qquad 12 = \frac{1}{3} \cdot 36$$

$$9 = \frac{1}{4} \cdot 36 \qquad 6 = \frac{1}{6} \cdot 36 \qquad 4 = \frac{1}{9} \cdot 36$$

O sea, cada valor de la fila de abajo se obtiene mediante el producto de un número constante: 36, y el recíproco de su correspondiente en la fila de arriba; dicho de otro modo: los valores del ancho se obtienen multiplicando 36 por los recíprocos de los valores del largo. Aquí se aprecia que cuando el largo aumenta (duplica, triplica, etc.), el ancho se reduce proporcionalmente (a la mitad, la tercera parte, etcétera).

Ejercicio resuelto

Si un educando necesita 12 días para escardar un campo de tomates, ¿cuántos días necesitarán 4 educandos para realizar la misma labor?

Vamos a denotar por x la cantidad de días que necesitan 4 educandos para realizar la labor.

Representando los datos en una tabla (figura 3.10):

Educandos	1	4
Días	12	x

Figura 3.10

Formamos la proporción igualando la razón entre los valores de una magnitud con el recíproco de la razón entre sus valores correspondientes, como indican las flechas.

$$\frac{1}{4} = \frac{x}{12} \qquad 4x = 12 \qquad x = \frac{12}{4} \qquad x = 3$$

Respuesta: 4 educandos necesitarán 3 días para realizar la labor.

Otra vía puede ser también hallar el valor que corresponde a 1, es decir, el factor de proporcionalidad. En este ejemplo es $1 \cdot 12 = 12$

Después multiplicamos por el recíproco del valor que conocemos: (4 educandos): $12 \cdot \frac{1}{4} = 3$

Respuesta: 4 educandos necesitarán 3 días para realizar la labor.

¿Sabías que...?

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** cuando los valores de una de ellas se obtienen multiplicando un mismo número por los recíprocos de los valores correspondientes de la otra magnitud.

Así tenemos, por ejemplo, que la velocidad y el tiempo son inversamente proporcionales cuando la distancia que se recorre es la misma. Igual sucede con el largo y el ancho de los rectángulos de igual área.

Se llama **factor de proporcionalidad inversa** al número fijo que resulta ser el producto de dos valores correspondientes cualesquiera.

De la tabla y las reflexiones anteriores puedes concluir que la razón entre dos valores de una magnitud y el recíproco de la razón de sus correspondientes, forman una proporción.

Ejemplo

$$\frac{1}{2} = \frac{18}{36}; \frac{3}{4} = \frac{9}{12}; \frac{2}{9} = \frac{4}{18}$$

Representación gráfica de la proporcionalidad inversa

La proporcionalidad inversa también puede ser representada en un sistema de coordenadas. En la tabla siguiente se ilustra la proporcionalidad inversa planteada en un ejemplo anterior: entre el número de educandos que escardan un campo de tomates y el tiempo necesario para realizar la labor.

x: Educandos	1	2	3	4	6	12
y: Tiempo (días)	12	6	4	3	2	1
$x \cdot y$	12	12	12	12	12	12

En este caso, el factor de proporcionalidad inversa es 12, pues es el número por el cual se multiplica el inverso de cada cantidad de educandos para obtener el tiempo necesario para realizar la labor $y = 12 \cdot \frac{1}{2}$.

Si representas esta proporcionalidad inversa en un sistema de coordenadas, puedes comprobar que los puntos que se obtienen al representar cada par de valores correspondientes no están sobre una misma recta (figura 3.11).

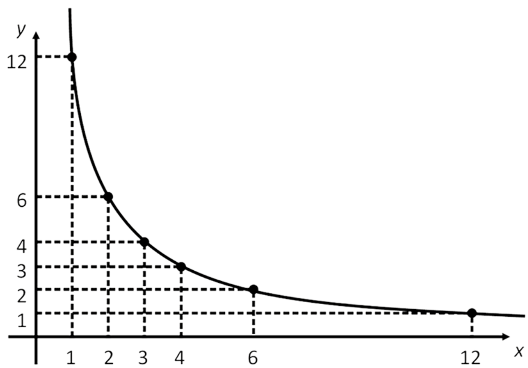


Figura 3.11

Reflexiona un instante

¿Por qué en la medida en que los valores de una de las magnitudes aumentan, el de la otra magnitud se acerca más a cero?

Otros ejemplos de magnitudes inversamente proporcionales son:

- El número de litros que recibe un tanque por minuto y el tiempo necesario para llenarlo.
- El número de obreros y el número de días empleados para hacer una obra, si se trata de la misma obra.
- El sueldo diario de un obrero y el número de días que ha trabajado, si lo ganado en total permanece constante.
- Lo que gana un obrero por día y el número de días que necesita para realizar un trabajo, si lo que se paga por ese trabajo es constante.

Observa los ejemplos siguientes en los que se utilizan diferentes vías para resolver problemas de proporcionalidad inversa.

Ejercicio resuelto

Armando quiere hacer un estudio que muestre a los trabajadores de la brigada que dirige que, si aumenta la productividad al plantar árboles, disminuye proporcionalmente el tiempo en concluir la tarea. Para hacer su exposición se quiere auxiliar de una tabla como la que aparece a continuación:

Productividad (cantidad de árboles sembrados por día de trabajo)	4	6	8	16	24	32
Tiempo en concluir la tarea (días)	24					

Completa la tabla si sabes que las magnitudes dadas son inversamente proporcionales.

En el texto del problema se plantea: si aumenta la productividad al plantar árboles, disminuye proporcionalmente el tiempo en concluir la tarea. Se trata, por ende, de magnitudes inversamente proporcionales.

Puedes proceder por la vía de reducción a la unidad, o sea, determinando el factor de proporcionalidad inversa o planteando las proporciones correspondientes a cada dato de magnitud conocido.

El factor de proporcionalidad se puede calcular si se conocen un par de valores que sean correspondientes, en este caso, se calcula el producto: $4 \cdot 24 = 96$

Y conociendo que el factor de proporcionalidad inversa es la cantidad de árboles que se deben sembrar, la tabla se completa aplicando el significado práctico de la división:

$96 : 6 = 16$; $96 : 8 = 12$;…; $96 : 32 = 3$

Se ha resuelto el problema por reducción a la unidad.

Otra manera de resolver el problema es planteando y calculando el término desconocido de las proporciones correspondientes a cada dato conocido:

4 es a 6 como x es a 24; 4 es a 8 como x es a 24;…; 4 es a 32 como x es a 24

$\frac{4}{6} = \frac{x}{24}$	$\frac{4}{8} = \frac{x}{24}$	…	$\frac{4}{32} = \frac{x}{24}$
$4 \cdot 24 = 6x$	$4 \cdot 24 = 8x$	…	$4 \cdot 24 = 32x$
$96 = 6x$	$96 = 8x$	…	$96 = 32x$
$16 = x$	$12 = x$	…	$3 = x$

¡No olvides!

En magnitudes inversamente proporcionales:

- El factor de proporcionalidad inversa es el producto entre dos magnitudes correspondientes.
- La razón entre dos valores de una magnitud y el recíproco de la razón de sus correspondientes en la otra magnitud, forman una proporción.

Para resolver problemas de proporcionalidad inversa podemos utilizar más de una vía:

- Por reducción a la unidad.
- Planteo y cálculo del término desconocido en proporciones correspondientes.

¡Cuidado! Existen casos de magnitudes que están relacionadas entre sí de modo que el valor de una depende del valor de otra, sin embargo, no existe proporcionalidad entre ellas.

Por ejemplo, la estatura de una persona en los primeros quince años normalmente aumenta, pero no lo hace proporcionalmente. Si un niño mide 1 m a los 3 años, eso no significa que a los 6 años mida 2 m, ni que a los 15 años vaya a ser un gigante de 5 m. No existe una relación de proporcionalidad entre la estatura y la edad (figura 3.12).

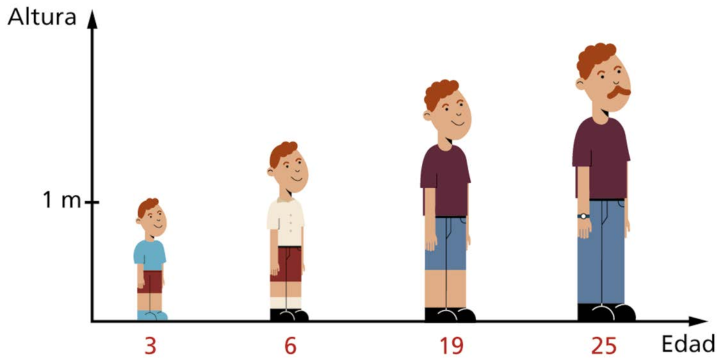


Figura 3.12

Proporcionalidad

Proporcionalidad directa

Ejemplo:

Dulces	1	2	3	4	...
Costo (en centavos)	5	10	15	20	...

Proporcionalidad inversa

Ejemplo:

Obreros	1	2	3	4	...
Tiempo en que hacen la obra (días)	8	4	$\frac{8}{3}$	2	...

En la proporcionalidad directa, a medida que aumentan los valores de una magnitud, los correspondientes a la otra también lo hacen.

El costo se obtiene multiplicando 5 (factor de proporcionalidad) por la cantidad de dulces: $10 = 5 \cdot 2$

Todas las razones de los valores de una misma magnitud forman una proporción con las razones de los valores correspondientes de la otra magnitud: $\frac{1}{3}=\frac{5}{15}$

En la proporcionalidad inversa, a medida que aumentan los valores de una magnitud, los correspondientes a la otra disminuyen.

El tiempo que demoran los obreros se obtiene multiplicando 8 (factor de proporcionalidad) por el recíproco de la cantidad de obreros: $4=8\cdot\frac{1}{2}$

Todas las razones de los valores de una misma magnitud forman una proporción con los recíprocos de las razones de los valores correspondientes de la otra magnitud: $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$

Ejercicios del epígrafe

1. Los datos representados en la tabla siguiente corresponden a magnitudes inversamente proporcionales. Halla el factor de proporcionalidad y calcula los valores que faltan.

Litros de agua que recibe un tanque por minuto		25	50
Tiempo necesario para llenarse	20	10	

2. Una brigada de 9 mecánicos realizó un trabajo en 46 h.
   a) ¿En qué tiempo pueden realizar este trabajo 15 mecánicos?
   b) ¿Qué tiempo necesitarán 6 mecánicos con el mismo rendimiento promedio?

3. Con 12 tornos del mismo tipo se pueden elaborar una serie de pequeñas piezas de maquinaria en 25 h.
   a) ¿Cuántas horas se necesitan para elaborar las piezas si dos tornos no se pueden utilizar por estar en reparación?
   b) ¿Cuántas horas se atrasa la elaboración?

4. Cinco educandos remueven en 12 h un área del huerto escolar. Determina en qué tiempo realizan el mismo trabajo:

a) 6 educandos
b) 10 educandos
c) 4 educandos

5. Cuatro educandos remueven la mitad del huerto en 18 h. La otra mitad del huerto se debe remover en:

a) 8 h
b) 9 h
c) 6 h

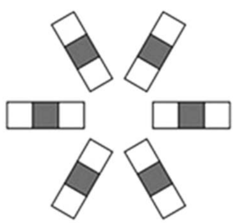
5.1 ¿Cuántos educandos deben participar en el trabajo para obtener el mismo rendimiento promedio?

3.4 Ejercicios del capítulo

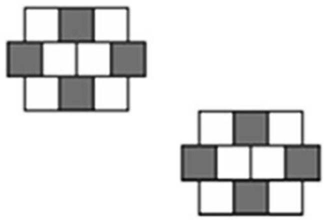
1. Halla la razón entre:

a) 16 y 8
b) 30 y 10
c) 20 y 15
d) $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{2}$
e) 9,2 y 2,3
f) $2\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{6}$
g) $3\frac{2}{5}$ y 0,3

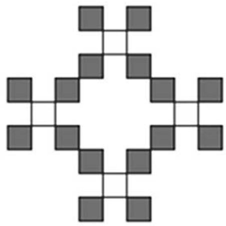
2. Halla la razón entre el número de cuadraditos negros y el de cuadraditos blancos en cada inciso (figura 3.13 a, b, c).



a) Figura 3.13 a



b) Figura 3.13 b



c) Figura 3.13 c

3. Escribe el conjunto B formado por 5 razones iguales a $\frac{5}{3}$.

4. Sea el conjunto:

$$M = \left\{\frac{1}{6};\frac{21}{27};30:110;\frac{9}{33};0{,}8:4;\frac{77}{99};1{,}5:5{,}5;\frac{1{,}4}{1{,}8}\right\}$$

a) ¿Cuáles de las razones del conjunto M son iguales a $\frac{7}{9}$?

b) *Escribe el conjunto P formado por elementos del conjunto M que sean iguales a 3 : 11.

c) ¿Qué relación existe entre los conjuntos M y P?

5. Sustituye las variables que aparecen en la figura 3.14 de modo que obtengas razones iguales a 8 : 3.

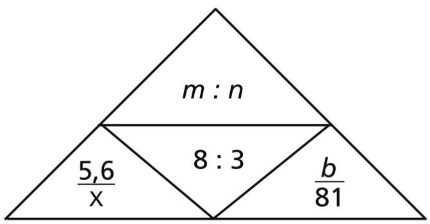


Figura 3.14

6. Halla el valor de c en las siguientes proporciones:

a) $\frac{c}{15} = \frac{7}{3}$ b) $2 : 3 = 5 : c$

c) $\frac{c}{4} = \frac{1}{5}$ d) $\frac{c}{12} = \frac{5}{15}$

e) $\frac{2{,}4}{c} = \frac{2{,}1}{1{,}4}$ f) $4 : 2\frac{1}{2} = c : \frac{3}{4}$

7. Investiga cuáles de los siguientes pares de razones forman proporciones:

a) $\frac{67}{9}$ y $\frac{16}{8}$ b) $\frac{3}{4} : 1$ y $\frac{1}{2} : 2$

c) $\frac{2}{3} : \frac{3}{2}$ y $\frac{1}{5} : \frac{3}{10}$ d) $\frac{10}{1{,}2}$ y $\frac{25}{3}$

8. Forma dos proporciones con los valores que se dan en cada inciso.

a) 1; 2; 3; 6 b) 8; 22; 11; 16

c) 7; 21; 33; 11 d) 34; 17; 2; 4

9. Dados los siguientes ángulos, determina su amplitud y calcula las razones que se indican a continuación (figura 3.15):

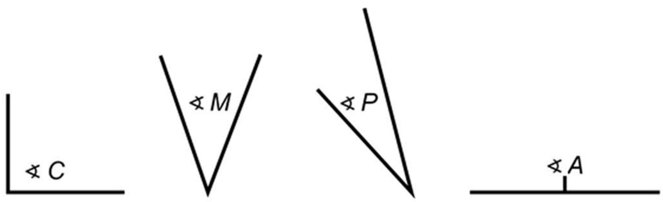


Figura 3.15

a) $\frac{\sphericalangle C}{\sphericalangle M}$ b) $\sphericalangle M : \sphericalangle P$ c) $\sphericalangle A : \sphericalangle M$ d) $\frac{\sphericalangle C}{\sphericalangle P}$

10. Busca cinco pares de valores para a y b de manera que: $\frac{16}{a} = \frac{b}{3}$

11. * Halla valores para m y n de modo que $\frac{m}{5} = \frac{n}{3}$ sea una proporción.

Indica 3 posibilidades.

12. Determina el valor de x en las proporciones siguientes:

a) $\frac{50}{x} = \frac{x}{2}$ b) $x : 4 = 16 : x$ c) $\frac{x}{3} = \frac{12}{x}$

13. Busca en cada inciso tres pares de valores para *a* y *b*:

a) $\frac{a}{6} = \frac{6}{b}$ b) $a : 9 = 9 : b$ c) $a : 8 = 8 : b$ d) $\frac{a}{12} = \frac{12}{b}$

14. Celia está haciendo un collar colocando las cuentecitas en la forma que se indica en la figura 3.16:

Figura 3.16

Si tiene 18 cuentecitas negras, ¿cuántas blancas necesita?

15. Un automóvil recorre 10 km en 7 min. ¿Cuántos kilómetros recorrerá en 21 min?

Marca con una x la respuesta correcta para este problema.

1) ____ 17 km 2) _____ 30 km

3) ____ 38 km 4) _____ 91 km

16. El tiempo planificado para la construcción de un parque de diversiones fue de 140 días. Si la microbrigada que ejecutó la obra solo necesitó el 80 % del tiempo planificado, ¿cuántos días demoró la construcción del parque?

17. Si 6 obreros pueden hacer la representación de un equipo en 42 días, ¿cuántos días necesitan para hacerlo 18 obreros?

18. Si una llave vierte 354 L en un cuarto de hora, ¿cuántos litros vierte en 5 min?

19. El costo de 5 libretas es $ 35,00. ¿Cuánto cuestan 3 docenas de libretas?

20. Una brigada de obreros construye 12 m de un muro en 2 días de trabajo. ¿Cuántos metros construirán en $3\frac{1}{2}$ días, si trabajan al mismo ritmo? Marque con *x* la opción que consideras es solución del problema.

a) ___ 42 m b) ___14 m c) ___ 6 m d) ___ 21 m

21. Un tanque puede llenarse en 18 min por una llave que vierte 15 L/min. ¿Cuánto tardará en llenarse por otra llave que vierte 10 L/min?

22. Cuando Rosa cumplió 9 años su abuela le dijo: "Tienes 1 por cada 7 de los años que yo tengo ahora". ¿Qué edad tiene la abuela?

23. En un grupo de 500 personas, 35 son mayores de 70 años.

a) ¿Cuál es la razón del número de personas mayores de 70 años al total del grupo?

24. Si 6 entradas al teatro cuestan $ 72,00, ¿cuánto costarán 8 entradas como estas?

25. Si 8 costureras cortan 11 sayas en 6 h, ¿cuánto tiempo le llevará a 5 costureras cortar 3 sayas trabajando a la misma velocidad?

26. Ganando $ 4,50 en cada metro de tela, ¿cuántos metros se han vendido si la ganancia ha sido $ 217,35?

27. *En 4 días de trabajo, 6 tractores araron 144 ha. ¿Cuántas hectáreas pueden arar 4 tractores en 8 días con el mismo ritmo de trabajo?

28. Dos niños corren al encuentro uno del otro al mismo tiempo. Uno avanza 360 m cada 3 min, y el otro 450 m cada 4 min. Se encuentran a los 12 min. ¿Qué distancia recorrió cada niño?

29. *¿Cuántas horas durará un suero de 900 mL a 15 gotas por minuto, si cada mililitro equivale a 20 gotas de suero?

30. *¿Cuántos kilogramos de pan se pueden producir con 300 kg de trigo? (de 5 kg de trigo se obtienen 4 kg de harina y de cada 2 kg de harina, 3 kg de pan).

CAPÍTULO 4

Tanto por ciento

Algo de historia

En la antigua Roma, los porcentajes eran de gran importancia para la economía. Aunque todavía no se reconocían como tal, se aplicaban fracciones con denominador 100 para calcular impuestos sobre bienes o la venta de esclavos.

Una de las aplicaciones más frecuentes de la proporcionalidad en la vida cotidiana es el tanto por ciento. En las informaciones que se ofrecen en la prensa sobre aspectos económicos, en las rebajas que se anuncian en las tiendas sobre los precios de los productos o en las estadísticas que se archivan en las instituciones educativas y hospitales, aparecen expresiones como las siguientes:

- Cuba aspira llegar al 2030 con el 24 % de su energía eléctrica generada mediante fuentes renovables de energía.
- El sistema bancario nacional aplica una bonificación o rebaja del 4 % a los pagos que se realizan mediante tarjetas magnéticas.
- En el examen de Matemática aprobó el 100 % de los educandos de la institución educativa matriculados en sexto grado.
- El envejecimiento de la población, de la cual el 20,1 % tiene en la actualidad 60 años o más, unido a la disminución de la natalidad, constituye uno de los principales retos para nuestro sistema de salud.
- Del total de tierras entregadas en usufructo a personas naturales, el 12 % se entregó a mujeres.

- En 2016 los chinos contribuyeron al 42 % de la producción mundial de té.
- El 20,9 % de la troposfera es oxígeno.
- El 38 % de los niños menores de 12 años dedican gran parte de su tiempo libre a los juegos de video.

4.1 Concepto de tanto por ciento

Para comprender e interpretar este tipo de dato, es preciso saber que tanto por ciento significa **tantos de cada cien**. Es decir, dividido un todo o un conjunto en 100 partes iguales; el tanto por ciento expresa cuántas partes como esta se han tomado.

Ejemplo

- 6 % significa 6 de cada 100.
- 35 % significa 35 de cada 100.
- 6,3 % significa 6,3 de cada 100.

Este problema se puede enfocar desde otro punto de vista, interpretando 6 de cada 100 como la razón 6 es a 100, asumiendo su representación como $\frac{6}{100} = 0,06$.

Te invito a que observes cómo se procede cuando es necesario interpretar un cociente o una fracción como un tanto por ciento.

Ejemplo

a) $\frac{25}{100}$ b) $\frac{3}{5}$ c) 0,5 d) 0,513

Como debes haber observado, el tanto por ciento es el numerador de una fracción de denominador 100.

a) $\frac{25}{100}$ es una fracción de denominador 100 y numerador 25. Luego, $\frac{25}{100}$ significa 25 %.

b) $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{60}{100}$; la fracción $\frac{3}{5}$ es equivalente con la fracción $\frac{60}{100}$. Luego, $\frac{3}{5}$ significa 60 %.

c) $0,5 = \frac{50}{100}$; la expresión decimal 0,5 significa $\frac{50}{100}$. Luego, 0,5 significa 50 %.

d) $0,513 = \frac{513}{1000} : 10 = \frac{51,3}{100}$. Luego, 0,513 significa 51,3 %.

Ejercicios del epígrafe

1. Calcula:

a) $56 \cdot 100$ b) $123 \cdot 100$
c) $2,1 \cdot 100$ d) $0,4 \cdot 100$
e) $21,1 \cdot 100$ f) $246 \cdot 100$
g) $32,3 \cdot 100$ h) $1,45 \cdot 100$
i) $56 : 100$ j) $123 : 100$
k) $2,1 : 100$ l) $0,4 : 100$
m) $21,1 : 100$ n) $246 : 100$
ñ) $32,3 : 100$ o) $1,45 : 100$
p) $4,5 \cdot 23$ q) $1,3 \cdot 213$
r) $6,3 \cdot 23$ s) $20,4 \cdot 123$
t) $32 \cdot 0,2$ u) $30 \cdot 1,4$
v) $36 \cdot 0,6$ w) $40 \cdot 2,2$

2. ¿Qué significa la expresión: cumplí con el 100 % de mis tareas?

3. Escribe como tanto por ciento:

a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{7}{8}$ d) $\frac{3}{10}$
e) $\frac{39}{10}$ f) 0,71 g) $\frac{3}{4}$ h) $\frac{9}{10}$
i) $\frac{1}{25}$ j) 0,2 k) $\frac{68}{100}$ l) $\frac{5}{4}$
m) 3,6 n) 0,11 ñ) 2,3

4. Escribe como fracción decimal:

a) 23 % b) 3 % c) 78 %
d) 321 % e) 802 % f) 342 %
g) 53 % h) 9 % i) 93 %

5. Expresa en notación decimal:

a) 54 % b) 5 % c) 45 %
d) 402 % e) 2,1 % f) 1,08 %
g) 0,03 % h) 1,6 % i) 7,3 %

6. Si de una unidad se quita 0,65, ¿qué fracción queda? ¿Cómo se expresa esta, en tanto por ciento?

4.2 Razones, fracciones, tanto por ciento

Reflexiona acerca de las siguientes expresiones:

- El 65 % de las mujeres en edad laboral trabaja.
- La $\frac{13}{20}$ parte de las mujeres en edad laboral trabaja.
- 13 de cada 20 mujeres en edad laboral trabajan.

¿En qué se parecen con relación a su significado práctico? ¿En qué se diferencian? Todas se refieren a la misma cantidad relativa, a las mujeres que en edad laboral trabajan.

Es la misma información dada desde diferentes puntos de vista: el tanto por ciento, la fracción y la razón.

¿Qué tienen en común el tanto por ciento, la fracción y la razón?

La aplicación del concepto de fracción a diversas situaciones ha permitido desarrollar otros conceptos importantes: razón, proporción, tanto por ciento. Una de las dificultades que se presentan en el aprendizaje de los porcentajes es que no se relacionan con sus equivalentes fraccionarios o decimales. Por ejemplo, calcular el 25 % de un número es equivalente a hallar el resultado de multiplicar ese número por 0,25, $\frac{25}{100}, \frac{1}{4}$ o cualquiera de sus fracciones equivalentes: $\left(\frac{2}{8}, \frac{3}{12}\right)$...

En la tabla que se muestra a continuación es posible observar relaciones entre estos conceptos que nos ayudarán en el cálculo del tanto por ciento:

Porcentaje	Fracción decimal	Notación decimal	Fracción simplificada	Razón	Calcular % de un total
10 %	$\frac{10}{100}$	0,1	$\frac{1}{10}$	1 : 10	Décima parte del total
20 %	$\frac{20}{100}$	0,2	$\frac{1}{5}$	1 : 5	Quinta parte del total
25 %	$\frac{25}{100}$	0,25	$\frac{1}{4}$	1 : 4	Cuarta parte del total
50 %	$\frac{50}{100}$	0,5	$\frac{1}{2}$	1 : 2	Mitad del total
75 %	$\frac{75}{100}$	0,75	$\frac{3}{4}$	3 : 4	Tres cuartas partes del total

En la primera columna aparecen porcentajes (tantos por ciento) que se pueden hallar con facilidad, si se conoce en cada caso la razón que representa y se multiplica por esta razón.

A estos casos particulares se les llama **porcentajes cómodos.**

Ejercicio resuelto

Calcula aplicando los porcentajes cómodos en cada caso:

a) Halla el 75 % de 44.
b) Halla el 25 % de 338.
c) De qué número es 32 el 50 %?
d) De qué número es 83,4 el 20 %?

Respuestas:

a) Como 75 % corresponde a $\frac{3}{4}$, calculamos: $\frac{3}{4} \cdot 44 = 3 \cdot 11 = 33$
Respuesta 33

b) Como 25 % corresponde a $\frac{1}{4}$, calculamos: $\frac{1}{4} \cdot 338 = \frac{169}{2} = 84{,}5$
Respuesta 84,5

c) Como 50 % corresponde a $\frac{1}{2}$, calculamos: $\frac{1}{2} \cdot x = 32$
$x = 32 \cdot 2 = 64$
Respuesta 64

d) Como 20 % corresponde a $\frac{1}{5}$, calculamos: $\frac{1}{5} \cdot x = 83,4$
$x = 83,4 \cdot 5 = 417$
Respuesta 417

Ejemplo

En un año de 365 días, llovió el 20 % de sus días. ¿Cuántos días llovió? Debemos calcular el 20 % de 365. Los porcentajes cómodos indican que esto se reduce a calcular la quinta parte del total. Luego: $\frac{1}{5} \cdot 365 = 73$ Respuesta: Llovió 73 días.

¿Sabías que...?

En algunas informaciones estadísticas se acostumbra a expresar las razones en tanto por mil. En la prensa podemos leer, por ejemplo:

- En el año 2017, la tasa de mortalidad infantil fue de 3,8 por cada mil nacidos vivos. Con ese resultado, Cuba mantuvo por diez años consecutivos este indicador de salud por debajo de 5.
- El líder individual de bateo tiene un *average* de 467 (una razón aproximada de 467 *hits* en 1 000 veces al bate). En algunas publicaciones se escribe 0,467.

Ejercicio resuelto

En un taller de reparaciones, un técnico se propuso arreglar 200 televisores como saludo a la jornada del triunfo de la Revolución. Si logró reparar 220 equipos, ¿qué tanto por ciento del compromiso logró?

En casos como este en que lo real (220) supera a lo planificado (200), el porcentaje es mayor que el ciento por ciento.

$$\frac{200}{100} = \frac{220}{x} \qquad x = \frac{220 \cdot 100}{200} = \frac{220}{2} = 110$$

Respuesta: El técnico logró el 110 % de su compromiso. (También se puede decir: El técnico logró un 10 % por encima de su compromiso).

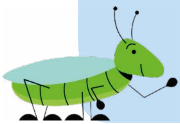
Recuerda que...

Existen relaciones entre las razones, fracciones, tanto por ciento.

Ejemplo: 2 de cada 5 flores son rosas.

Razón	Fracción decimal	Centésimas	Por ciento
2 : 5	$\frac{40}{100}$	0,40	40 %

El lenguaje del tanto por ciento es una forma especial del lenguaje de las razones.



Ejemplo:

La razón 2 : 5 es igual a la razón $\frac{40}{100}$ (0,40); 2 es el 40 % de 5.

Ejercicios del epígrafe

1. Completa la tabla siguiente:

Fracción común	Fracción decimal (denominador 100)	Notación decimal	Porciento
$\frac{1}{2}$	$\frac{50}{100}$	0,50	50 %
$\frac{1}{4}$			
$\frac{2}{5}$			
	$\frac{80}{100}$		
		0,60	
			75 %
		1,40	
			3 %

2. Observa la figura 4.1 y responde:

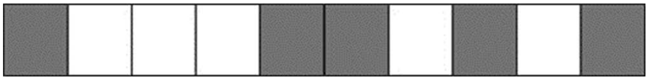


Figura 4.1

a) ¿Qué tanto por ciento de ella está coloreado?
b) ¿Qué tanto por ciento de ella está sin colorear?
c) ¿Cuál es la suma de estos porcentajes?

3. Indica qué tanto por ciento representa el área sombreada del cuadrado mayor (figura 4.2). Luego escríbelo como fracción y como notación decimal.

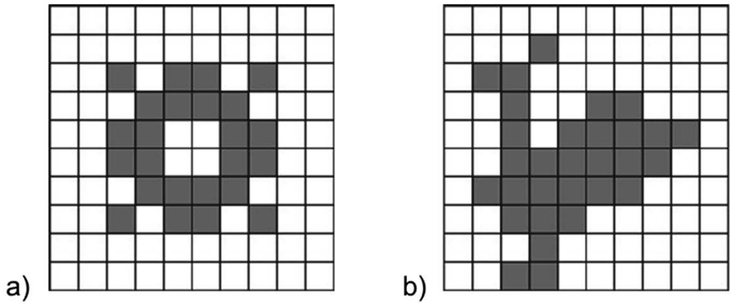
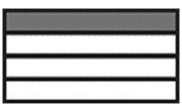
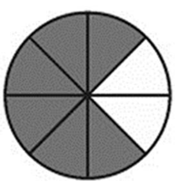


Figura 4.2

4. Completa la siguiente tabla:

Figuras geométricas	Partes coloreadas	Total de partes	Razón	Denominador 100	Notación decimal	Porciento
						
						
						

5. Escribe el tanto por ciento correspondiente a la siguiente situación: Una de cuatro personas lee el diario todos los días.

6. Si para hacer 5 tazas de ponche se utiliza una taza de jugo de frutas, ¿qué tanto por ciento del ponche es jugo de frutas?

7. De cada 10 árboles de una finca, 4 son de mango, 3 de tamarindo y el resto de naranja.

   a) ¿Qué tanto por ciento de árboles de mango hay en la finca?
   b) ¿Qué tanto por ciento de árboles de tamarindo hay en la finca?
   c) ¿Qué tanto por ciento de árboles de naranja hay en la finca?

8. El tiempo planificado para la construcción de un centro deportivo fue de 180 días. Si la empresa que ejecutó la obra solo necesitó el 75 % del tiempo planificado, ¿cuántos días demoró la construcción del centro deportivo?

4.3 Problemas típicos de tanto por ciento

Se consideran problemas típicos de tanto por ciento:

- Hallar el tanto por ciento de un número
- Hallar qué tanto por ciento es un número de otro
- Hallar el número, conocido un tanto por ciento de él

4.3.1 Hallar el tanto por ciento de un número

En los problemas para hallar el tanto por ciento de un número, podemos proceder de acuerdo con la definición de tanto por ciento.

Ejemplo

El 6 % de 300 es 18.

300 está formado por 3 grupos de 100 · 6 % significa que tomamos 6 de cada 100.

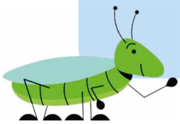
Para hallar el 6 % de 300, tomamos 3 veces 6: $3 \cdot 6 = 18$.

En el ejemplo hemos utilizado un procedimiento que resulta sencillo cuando se trata de cantidades que son múltiplos de 100, y nada práctico en el resto de los casos. Es conveniente encontrar una manera de simplificar el procedimiento para realizar este y otros cálculos que permitan resolver los variados problemas de tanto por ciento.

Recuerda que...

Para hallar una fracción de un número se multiplica la fracción por el número.

Como el tanto por ciento puede expresarse como fracción, el problema de hallar el tanto por ciento de un número puede reducirse al cálculo de la fracción de un número.



Ejemplo

Un joven ahorra el 8 % de sus entradas anuales y estas ascienden a $ 2 400,00. ¿Cuánto ahorra ese joven al año?

Para resolver este problema procedemos aplicando el concepto de tanto por ciento:

Como 8 % significa 8 de cada 100, el 8 % de 2 400 se calcula multiplicando $8 \cdot 24 = 192$.

También podemos resolver el problema reduciéndolo a un problema típico de fracciones:

Como el 8 % de un número equivale a $\frac{8}{100}$, entonces el 8 % de 2 400, se puede calcular multiplicando $\frac{8}{100}$ por 2 400.

$$\frac{8}{1\cancel{00}} \cdot 24\cancel{00} = 8 \cdot 24 = 192$$

Respuesta: El joven ahorra $ 192,00 cada año.

Ahora, lee con detenimiento la situación siguiente: ¿Cuánto es el 21,2 % de 60?

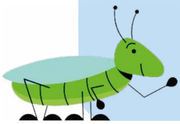
- ¿Cuánto se toma de cada 100?
- La parte de 100 que equivale a 21,2 %, ¿con qué cociente se representa?

- ¿A qué equivale hallar el 21,2 % de 60?
- Entonces, ¿cómo puedes calcular el 21,2 % de 60?

Las preguntas anteriores te ayudan a resolver el ejemplo, comprueba si pensaste así.

Claro que se procede como en el ejemplo anterior; en este caso, de cada 100 se toman 21,2. Esta relación se representa con el cociente: $\frac{21{,}2}{100}$, lo que equivale a hallar el $\frac{21{,}2}{100}$ de 60.

Pensando de otra manera, se puede calcular planteando la proporción: $\frac{21{,}2}{100} = \frac{x}{60}$, que según la ley fundamental de las proporciones se resuelve: $= 21{,}2 \cdot \frac{60}{100}; \frac{21{,}2}{10\cancel{0}} \cdot 6\cancel{0} = 2{,}12 \cdot 6 = 12{,}7$ o también: 0,212 · 60 = 12,72.



Recuerda que...

Para calcular el tanto por ciento de un número, multiplicas el número por el tanto por ciento (expresado como una división de divisor 100 o en notación decimal).

Si se entiende que tanto por ciento significa tantos de cada 100, ¿este puede superar a 100? Veamos el ejemplo:

En una fábrica, de un plan de ensamblado de 600 computadoras se lograron ensamblar 780 para un 130 % de cumplimiento.

- ¿Qué significa la expresión 130 %?
- ¿Qué cantidad de computadoras es necesario ensamblar para alcanzar al 100 % el plan de ensamblado?

Según el texto, el 100 % del plan es 600. Si 600 constituye el 100 %, las 780 computadoras ensambladas ¿qué tanto por ciento representan?

Resolvemos mediante la proporción:

$$\frac{600}{780} = \frac{100}{x}$$

$$x = 780 \cdot \frac{1\cancel{00}}{6\cancel{00}}$$

$$x = \frac{780}{6}$$

$$x = 130$$

Respuesta: Las 780 computadoras ensambladas representan el 130 %.

Cuando un tanto por ciento supera al 100 %, este indica un sobrepaso al número tomado como 100 %. En el ejemplo analizado, 130 % es superior al 100 %, por tanto, indica un sobrepaso a 600; como 180 es el 30 % de 600, entonces 780 es el 130 % de 600.

Siendo consecuentes con el concepto de tanto por ciento, cuando escuchas hablar de sobrecumplimiento de un plan productivo, se refiere a un sobrepaso del plan de producción propuesto.

Al calcular con un tanto por ciento superior al 100 %, se mantienen los procedimientos aprendidos. Por ejemplo:

$$\frac{130}{1\cancel{00}} \cdot 6\cancel{00} = 130 \cdot 6 = 780$$

Conocer acerca del significado de tanto por ciento es de gran utilidad. Por ejemplo, si quieres comprar un producto con descuento, podrás calcular lo que finalmente pagarás al aplicar el tanto por ciento de descuento.

Ejemplo

Un pantalón que inicialmente se vendía en $ 500 se ha puesto a la venta con el 20 % de descuento. Rafael desea aprovechar la rebaja para adquirir uno de esos pantalones. ¿Cuánto dinero se ahorra al comprarlo?

Sabemos que a 20 % corresponde la fracción $\frac{20}{100}$. Calculamos

$$\frac{20}{1\cancel{00}} \cdot 5\cancel{00} = 20 \cdot 5 = 100.$$

Respuesta: Rafael ahorra $100 al comprar el pantalón.

Si realizas el cálculo simplificando primero la fracción $\frac{20}{100}$, podrás darte cuenta de que calcular el 20 % de un número es lo mismo que dividirlo entre 5.

Ejercicios del epígrafe

1. Halla el:

a) 3 % de 200 b) 12 % de 300 c) 20 % de 70
d) 50 % de 40 e) 64 % de 1 100 f) 21 % de 2 300

g) 4 % de 25 h) 15 % de 20 i) 24 % de 75
j) 88 % de 125 k) 175 % de 57 l) 55 % de 106

2. Di cuánto es el:

a) 14 % de 38 b) 67 % de 59 c) 28 % de 115
d) 71 % de 93 e) 69 % de 21 f) 53 % de 187

3. Calcula:

a) 4,2 % de 26 m b) 8,11 % de 17 km
c) 15,4 % de 89 h d) 33,7 % de 95 dm
e) 103,5 % de 63 L f) 2,34 % de 605 g
g) 6 % de $ 713,00 h) 48,52 % de 109 t

4. En una institución educativa hay 350 educandos en tercer ciclo. De ellos, el 54 % tiene conocimientos del idioma inglés. ¿Cuántos educandos tienen conocimientos del idioma inglés?

5. En un destacamento de 45 pioneros, el 80 % está incorporado a equipos deportivos. ¿Cuántos pioneros se han incorporado a esos equipos?

6. De las 80 competencias efectuadas por los exploradores en el país, la zona central obtuvo el 15 % de victorias. ¿Cuántas competencias ganó la zona central?

7. El tiempo planificado para la construcción de un círculo infantil era de 180 días. Si la cooperativa de construcción que ejecutó la obra solo necesitó el 75 % del tiempo planificado. ¿Cuántos días demoró la construcción del círculo?

8. En saludo a la jornada del triunfo de la Revolución, un chofer de taxis se comprometió a realizar 462 viajes prestando servicios a la población después de su horario de trabajo. El compromiso fue cumplido en un 135 %. ¿Cuántas horas voluntarias realizó?

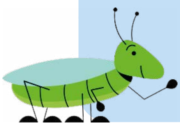
9. A un taller de confecciones textiles se le entregaron 1 894 m de tela. El 63 % se utilizará para confeccionar uniformes escolares para hembras y el resto para varones. ¿Cuántos metros de telas se utilizaron en la confección de uniformes de hembras y cuántos en las de varones?

10. Una cooperativa de producción agropecuaria cosechó 2 153 q de viandas. El 41 % de la cosecha es de malanga, el 27 % de papa, el 11 % de plátano y el resto de boniato. ¿Cuántos quintales de cada vianda se cosecharon?

11. Además de nitrógeno y oxígeno, la atmósfera contiene otros gases como el argón, el dióxido de carbono y el vapor de agua. Si consideramos las capas de la atmósfera más cercanas a la Tierra, el nitrógeno ocupa el 78,084 % del espacio y el oxígeno, el 20,946 %. ¿Qué tanto por ciento del espacio ocupan en conjunto el nitrógeno y el oxígeno?

4.3.2 Hallar qué tanto por ciento es un número de otro

Recuerda que...



Para hallar qué fracción es un número de otro se plantea la fracción correspondiente y se simplifica tanto como sea posible.

Este principio nos puede servir para determinar qué tanto por ciento es un número de otro. Bastaría con plantear la fracción correspondiente a los números dados y expresarla como tanto por ciento.

Te invito a resolver el siguiente problema aplicando lo aprendido en la solución de los problemas típicos de fracciones.

Ejemplo

En un trabajo de control de Matemática aplicado, aprobaron 45 de los 50 educandos matriculados. ¿Qué tanto por ciento de aprobado se obtuvo?

- ¿Qué significa tanto por ciento? (Tantos de cada 100)
- ¿De qué otra manera se puede representar?

Mediante la razón 45 : 50 o la fracción $\frac{45}{50}$; ampliando la fracción $\frac{45}{50}$ a su equivalente de denominador 100, se obtiene $\frac{90}{100}$, cuyo significado como tanto por ciento es 90 %.

Calcula el cociente 45 : 50. Compara este resultado con el obtenido con el procedimiento anterior.

$$\begin{array}{r|l} 45{,}0 & 50 \\ \cline{2-2} \underline{-\ 450} & 0{,}9 \\ 0 & \end{array}$$

Respuesta: Se obtuvo el 90 % de aprobados.

Por tanto, para hallar qué tanto por ciento es un número de otro, se procede de forma similar al caso típico de fracción: hallar qué parte es un número de otro, es decir, se halla el cociente de los números y el resultado se multiplica por 100.

$$\frac{45}{5\cancel{0}} \cdot 10\cancel{0} = \frac{\cancel{45}^{9}}{\cancel{5}_{1}} \cdot 10 = 9 \cdot 10 = 90$$

Otra vía de solución de este ejercicio es multiplicar por 100 el dividendo (en este caso 45) y luego dividir.

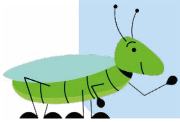
$$\begin{array}{r|l} 4500 & 50 \\ \cline{2-2} \underline{-\ 450} & 90 \\ 0 & \end{array}$$

En algunos casos la división no es exacta; para dar la respuesta se redondea a un lugar después de la coma, por ejemplo:

Calcula qué tanto por ciento es 39 de 41.

$$\begin{array}{r|l} 390 & 41 \\ \cline{2-2} \underline{-\ 369} & 0{,}9512 \\ 210 & \quad \uparrow 95{,}1\ \% \\ \underline{-\ 205} & \\ 50 & \\ \underline{-\ 41} & \\ 90 & \\ \underline{-\ 82} & \\ 8 & \end{array}$$

Recuerda que...



Para hallar qué tanto por ciento es un número de otro divides el primero por el segundo y expresas el cociente como tanto por ciento.

Ejercicios del epígrafe

1. Calcula y si es necesario redondea el resultado a un lugar después de la coma:

a) 24 : 32 b) 58 : 101 c) 123 : 148
d) 3,8 : 43 e) 524 : 322 f) 821 : 43
g) 92,1 : 21 h) 582 : 483 i) 12,8 : 21

2. Calcula qué tanto por ciento es:

a) 10 de 200 b) 24 de 48 c) 3 de 400
d) 32 de 160 e) 5 de 40 f) 7 de 84
g) 8 de 72 h) 15 de 20 i) 25 de 20

3. Calcula el tanto por ciento:

a) 730 de 730 b) 30 de 60 c) 45 de 600
d) 24 de 120 e) 0,2 de 8 f) 10,5 de 23
g) 8,1 de 150 h) 2 de 24,6 i) 60 de 45

4. Calcula el tanto por ciento:

a) 11 cm de 26 cm b) 51 h de 170 h
c) 13 mm de 2,6 mm d) 5,4 q de 620 q
e) $ 0,40 de $ 23,80 f) 3 L de 0,4 L
g) $\frac{1}{2}$ t de 10 t h) 0,08 kg de 6 kg
i) $\frac{3}{5}$ m de 7 m j) $ 4,00 de $ 2,00

5. Un equipo de pelota gana 12 de 15 juegos efectuados.

a) ¿Qué tanto por ciento de los juegos ganó?
b) ¿Qué tanto por ciento perdió?

6. Unas gallinas han puesto hoy 35 huevos de los cuales se han roto 7.

a) ¿Qué tanto por ciento se ha roto?

b) ¿Qué tanto por ciento quedó sano?

7. De los 154 trabajadores de una empresa, 148 participaron en la jornada de cambio de actividad. ¿Qué tanto por ciento de participación tuvo la empresa en la jornada?

8. De los 978 electores de una circunscripción del Poder Popular, 596 son mujeres.

a) ¿Qué tanto por ciento de mujeres hay en la circunscripción?

b) ¿Cuántos hombres hay?

9. De un período de 50 días de clases, Pedro asistió 48 días, María 45 días y Martha, por estar enferma, solo asistió 35 días. ¿Qué tanto por ciento del período asistió cada educando?

10. Para ir a la institución educativa debo recorrer una distancia de 850 m. Si he recorrido ya 120 m, ¿qué tanto por ciento de la distancia he recorrido?

11. Rogelio se ha propuesto la meta de cortar 200 @ de caña diariamente durante la presente zafra. El comportamiento durante los tres primeros días de corte fue el siguiente: lunes: 150 @; martes: 200 @; miércoles: 210 @.

¿Qué tanto por ciento de la meta alcanzó cada día?

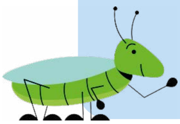
12. En un establecimiento del Ministerio de la Industria Alimentaria hay 164 trabajadores en total. De ellos 15 son graduados universitarios, 118 técnicos medios, 22 obreros calificados y el resto son graduados de noveno grado. ¿Qué tanto por ciento representa cada una de estas calificaciones?

13. El tiempo planificado para la construcción de un club de computación era de 148 días, pero gracias al esfuerzo conjunto de la cooperativa de construcción y vecinos del lugar solo se necesitaron 119 días. ¿Qué tanto por ciento del tiempo planificado se empleó?

14. En un taller de reparaciones, un técnico se propuso arreglar 289 ollas arroceras. Si logró reparar 315 equipos, ¿qué tanto por ciento del compromiso logró?

4.3.3 Hallar el número, conocido un tanto por ciento de él

Recuerda que...



Para hallar de un número conocido una fracción, se plantea el cociente del número entre la fracción.

Como el tanto por ciento puede expresarse como fracción, el problema hallar el número, conocido un tanto por ciento de él, puede reducirse al cálculo del número conocida una fracción de él.

Ejemplo

¿De qué número es 8 el 16 %?

Para ello aprendiste en el capítulo de fracciones que puedes encontrar el número dividiendo la parte fraccionaria (en este caso 8) entre la fracción (que es $\frac{16}{100}$).

$$8 \cdot \frac{16}{100} = \cancel{8}^{1} \cdot \frac{\cancel{100}^{50}}{\cancel{16}_{\cancel{2}\,1}} = 50$$

Respuesta: El número es 50.

¡No olvides!

Para hallar un número, dado un tanto por ciento y su resultado, divides el resultado por el tanto por ciento (expresado como un cociente con divisor 100).

Ejercicios del epígrafe

1. Calcula el número del cual:

a) 15 es el 2 % b) 18 es el 3 %
c) 20 es el 15 % d) 34 es el 20 %
e) 240 es el 4 % f) 86 es el 12 %

g) 140 es el 70 %
h) 57 es el 95 %
i) 86,8 es el 140 %
j) 3,20 es el 4 %
k) 2,40 es el 3 %
l) 94,50 es el 78 %
m) 104,76 es el 72 %
n) 45,9 es el 150 %

2. Di de qué cantidad es:

a) 38 m el 50 %
b) 15,2 kg el 32 %
c) 54 h el 75 %
d) 2,5 L el 4 %
e) 13,4 t el 80 %
f) 68 q el 136 %
g) $ 15,80 el 79 %
h) 5,46 mm el 13 %

3. Manolo gastó $ 10,00 en caramelos, lo que representa el 20 % del dinero que tenía. ¿Cuánto dinero tenía?

4. Se está imprimiendo un libro de texto de Matemática. Se han terminado de imprimir 112 páginas, lo que representa el 80 % del total. ¿Cuántas páginas tendrá el libro?

5. Un obrero textil ha producido 1 959 m de tela, que es el 75 % del compromiso para la Jornada Camilo-Che. ¿Cuántos metros de tela habrá producido al cumplir el compromiso?

6. En el grupo de Armando, 36 educandos conocen el lenguaje de computación. Estos representan el 80 % de los educandos del grupo. ¿Cuántos educandos hay en el grupo?

7. El comité de base de la UJC de una institución educativa está formado por 24 militantes que representan el 25 % del total de jóvenes. ¿Cuántos jóvenes trabajan en la institución educativa?

8. En un grupo de sexto grado, 20 educandos conocen la herramienta Geogebra, lo que representa el 16 % del total de educandos. ¿Cuántos educandos integran el grupo?

9. El bronce está formado por cobre y estaño. ¿Cuántos kilogramos de bronce pueden producirse con 425 kg de cobre si debe contener el 85 %? ¿Cuántos kilogramos de estaño se necesitan?

10. En una empresa se producen, como promedio, 52,08 piezas diarias debido a una rotura. Si esta cantidad representa el 62 % de las posibilidades de producción de la empresa, ¿cuánto puede producirse diariamente de no existir la rotura?

4.3.4 La calculadora

Otra forma de calcular porcentajes es con la calculadora. Para ello, debes tener en cuenta que calcular un porcentaje equivale a multiplicar la cantidad por la fracción o el decimal que representa dicho porcentaje.

El 35 % de 8 900 equivale a: $\frac{35}{1\cancel{00}} \cdot 8\,9\cancel{00} = 3\,115$, o bien:

$0{,}35 \cdot 8\,900 = 3\,115$

Ejercicios del epígrafe

1. Calcula mentalmente:

a) 10 % de 50 b) 20 % de 300 c) 25 % de 120
d) 20 % de 40 e) 10 % de 500 f) 50 % de 250
g) 25 % de 36 h) 50 % de 84

2. Calcula los porcientos:

a) 20 % de 3 000 b) 25 % de 7 200
c) 10 % de 5 560 d) 50 % de 9 400
e) 10 % de 874 f) 25 % de 320
g) 75 % de 1 000 h) 20 % de 820

3. Representa cada enunciado como porciento.

a) En la fiesta, $\frac{1}{4}$ de los invitados no bailó.
b) La décima parte de la música grabada es bailable.
c) 8 de cada 10 jóvenes participaron en la donación de sangre.
d) Solo la mitad del grupo ha logrado llegar a la meta.

4. ¿Cuánto dinero se ahorra Juan si al comprar un reloj de $ 20 000,00 este tenía un 35 % de descuento?

5. Si un producto tiene un precio de $ 10 990,00 y a este se le aplica un descuento de $ 3 297,00, ¿qué porcentaje de descuento se le hizo?

4.4 El tanto por ciento y las gráficas

En las revistas y los periódicos, en muchas ocasiones, aparecen gráficas que expresan tantos por ciento; por ello es conveniente que aprendas a interpretarlas. Las gráficas que más se utilizan en la práctica son las circulares y las rectangulares o de barras.

Por ejemplo, en el censo de población y vivienda realizado en Cuba en 2012, se recogieron datos sobre la población comprendida entre 0 y 5 años, 6 y 11 años y 12 y 17 años. Esos datos aparecen representados gráficamente en las figuras 4.3 y 4.4:

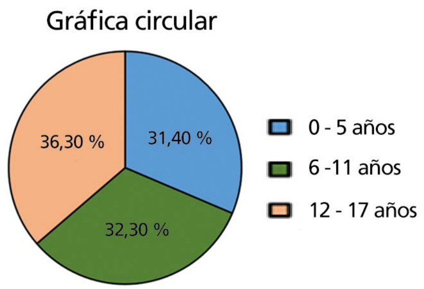


Figura 4.3

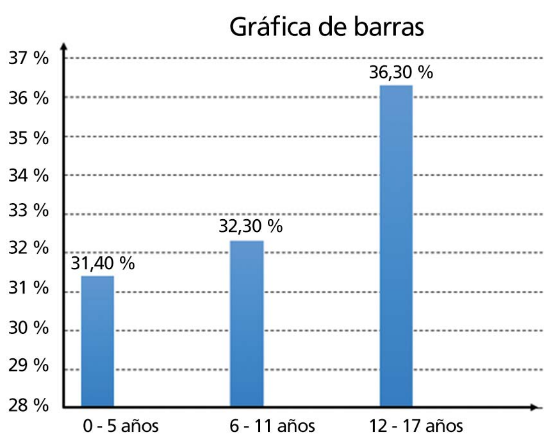


Figura 4.4

En cualquiera de las dos representaciones es fácil determinar que la mayor población se encuentra entre 12 y 17 años y que la menor entre 0 y 5 años, aspecto que refleja el envejecimiento poblacional.

Es importante también que te des cuenta, en este caso, de que el total de la población representa el 100 %, por eso los tantos por ciento que representan cada parte suman 100.

En gráficas de barra también se pueden representar datos en tanto por ciento que no responden a un mismo todo (valor base). Así tenemos, por ejemplo, que el tanto por ciento de medallas de oro con relación al total alcanzado por cada país de los relacionados en los Juegos Olímpicos de Barranquilla 2018, aparecen representados en el diagrama de barras de la figura 4.5:

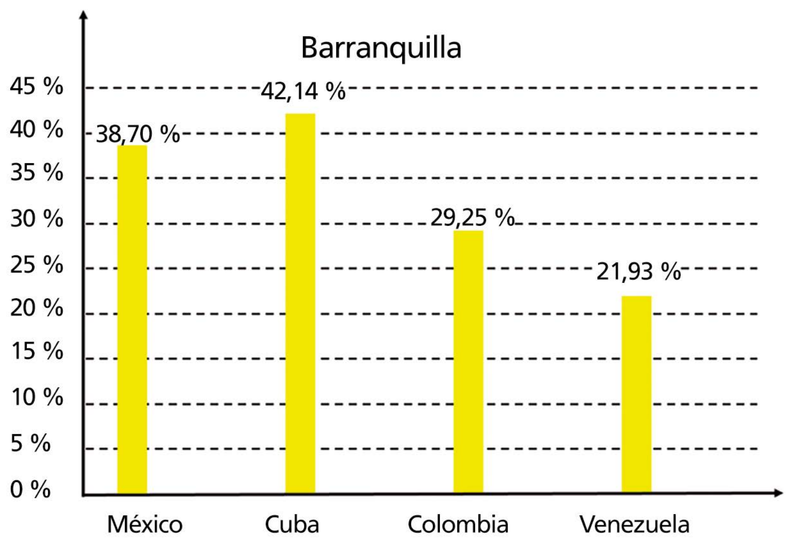


Figura 4.5

En este caso, como los datos de tanto por ciento no están referidos a un mismo valor (base), pues el total de medallas alcanzado en cada uno de esos países es diferente, la suma de los tantos por ciento no es 100 %.

¡No olvides!

Las gráficas circulares solo sirven para representar datos referidos a una misma cantidad.

Ejercicios del epígrafe

1. Cuba posee uno de los mayores sistemas cavernarios del mundo. Cuenta con 20 000 cuevas, las que se localizan en casi todas las provincias del país, pero Pinar del Río sobresale con el 70 %. El sistema cavernario de Cuba es superior al de Estados Unidos en 11 000 cuevas, al de Italia en más de 8 000 y al de Francia en 7 000 (tomado del periódico *Granma* del 10 de febrero de 2018).

a) ¿Cuántas cuevas representan el sistema cavernario de Pinar del Río?

b) ¿Cuántas cuevas tiene el sistema cavernario de Estados Unidos?

c) ¿Qué porciento representa con relación al de Cuba?

d) ¿En qué porciento supera el sistema cavernario de Cuba al de Francia?

e) Representa en una gráfica de barras los porcientos cavernarios de Pinar del Río, Estados Unidos y Francia.

2. Para la venta del tabloide del Proyecto de Constitución de la República, Correos de Cuba habilitó 3 156 puntos de venta a lo largo de todo el territorio nacional. De ellos 815 oficinas de correos, 1 000 carteros y 900 agentes postales.

a) Calcula el porciento que representa cada modalidad con relación al total de puntos de ventas habilitados.

b) Representa en una gráfica de barras los porcientos calculados.

3. La gráfica de la figura 4.6 muestra los principales gases de efecto invernadero (GEI) generados por la actividad humana.

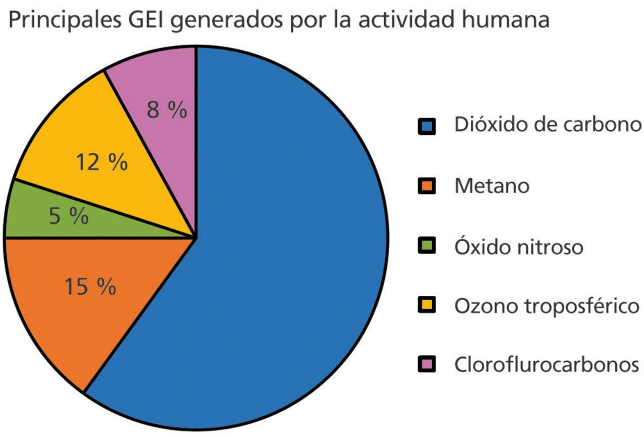


Figura 4.6

a) ¿Qué tanto por ciento corresponde al óxido nitroso?
b) ¿Cuánto mayor es el porciento de dióxido de carbono que el de ozono troposférico?

¿Sabías que...?

Se llama efecto invernadero a la retención, en las cercanías de la Tierra, de parte de la radiación infrarroja proveniente del sol que se refleja en su superficie. Esto provoca que la radiación que entra a la atmósfera sea mayor que la que sale, generándose una paulatina acumulación y un consecuente aumento de la temperatura del planeta. Los gases que favorecen directa o indirectamente a este fenómeno son denominados gases de efecto invernadero (GEI).

El vapor de agua es considerado un gas de efecto invernadero cuyas fuentes de emisión son de origen natural. Su concentración en la atmósfera es variable debido a la permanente evaporación y condensación del agua.

4. El gráfico circular (figura 4.7) muestra el tipo de error que cometieron los educandos de sexto grado en un dictado.

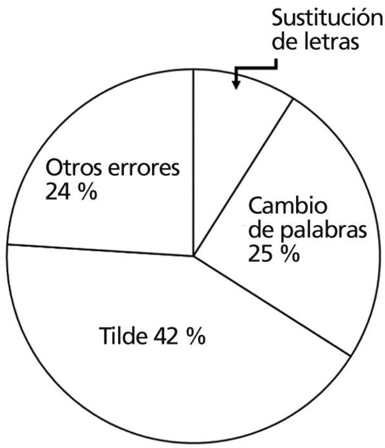


Figura 4.7

a) ¿Qué porciento de los datos representa el círculo entero?
b) ¿Cuál fue el tipo de error más frecuente?
c) ¿Cuál es el porciento correspondiente al error sustitución de letras?
d) Si el destacamento tiene una matrícula de 34 educandos, ¿cuántos tuvieron errores en la tilde?

4.5 Ejercicios del capítulo

1. ¿Cuánto es 30 % de 106?

2. ¿Qué tanto por ciento es 68 de 85?

3. ¿De qué número es 24 el 12 %?

4. Halla el 17 % de 80.

5. 38 es el 19 % de qué número.

6. Halla el tanto por ciento que representa 30,6 de 51.

7. Calcula el 98 % de 215.

8. Halla el número del cual 59,4 es el 132 %.

9. Halla el 2 %, el 19 % y el 86 % de 340.

10. ¿De qué número es 25 el 5 %, el 40 % y el 150 %?

11. Las figuras 4.8 y 4.9 muestran la marcha de la descarga de dos documentos informáticos. Determina el tanto por ciento de los documentos que falta por descargar.

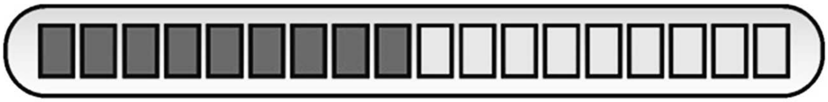
a) 

Figura 4.8

b) 

Figura 4.9

12. Elena respondió el 80 % de las preguntas de un examen. Si este consta de 40 preguntas, ¿cuántas contestó?

13. En una fábrica hay 3 500 obreros de los cuales el 75 % son mujeres. ¿Cuántos hombres trabajan en la fábrica?

14. Alberto le cuenta a José que en su álbum tiene pegadas 270 fotos de futbolistas, las que corresponden al 90 % del total. José le cuenta que a él le falta el 15 % para completar el mismo álbum. ¿Cuántas fotos le faltan a José para completar su álbum?

15. Enrique repartió 80 bolas entre sus amigos. Ramsés recibió el 30 %, Yaniel recibió un 15 % más que Ramsés y Juan recibió el resto de las bolas. ¿Cuántas bolas recibió cada uno?

16. En un grupo de personas, el 64 % realiza ejercicios. ¿Qué porcentaje del total realiza ejercicios?

17. El 75 % de los viajes entre dos ciudades demora una hora o más. Si un día se realizan 20 viajes, ¿cuántos demoran menos de una hora?

18. Rosa debe alcanzar 3 200 puntos para pasar al siguiente nivel de un juego. Si solo ha obtenido el 15 % de la puntuación, ¿cuántos puntos tiene hasta ahora?

19. En una empresa se deben ensamblar 380 computadoras y se han ensamblado 304.

a) ¿Qué porciento representan las computadoras ensambladas?

b) ¿Qué porciento falta por ensamblar?

20. En un almacén hay 3 000 lentes. El 60 % es para hacer espejuelos, el 25 % para microscopios y el 15 % para otros usos.

a) ¿Cuántos lentes se han destinado para cada caso?

b) Si sumas los lentes que hay para cada objeto, ¿cuál es el resultado? ¿Qué porciento del total representa?

21. Una tienda rebaja todos sus precios (figura 4.10). Calcula los valores de estos productos.

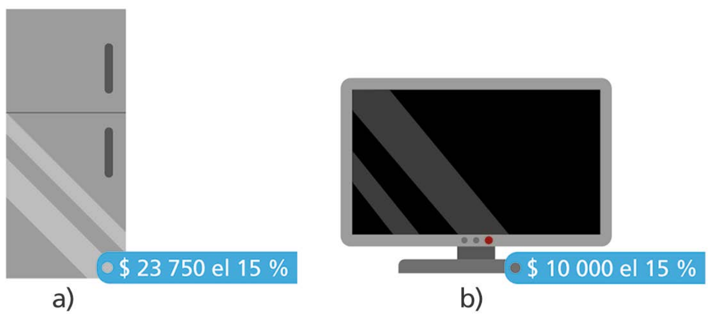


Figura 4.10

22. Elena ya ha ocupado el 60 % de los minutos libres de su plan de llamadas. Si este incluye 350 min libres, ¿cuántos le quedan?

23. El siguiente gráfico (figura 4.11) muestra el tipo de lectura que prefiere un grupo de personas.

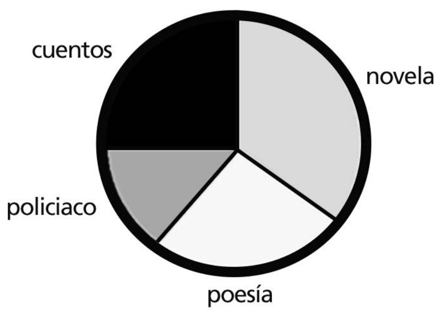


Figura 4.11

Selecciona y marca con una x. ¿Cuál de las siguientes conclusiones es correcta?

a) _____ El 50 % de las personas prefieren leer libros novela

b) _____ $\frac{1}{3}$ de las personas prefieren leer policiaco

c) _____ $\frac{4}{5}$ de las personas prefieren leer poesía.

d) _____ El 25 % de las personas prefieren leer cuentos.

24. La gráfica (figura 4.12) muestra la cosecha lograda por una cooperativa de producción agropecuaria.

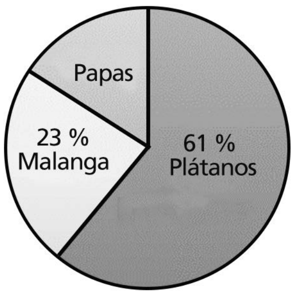


Figura 4.12

Completa de forma correcta la afirmación siguiente:
El tanto por ciento que corresponde a la cosecha de papas es:

a)___ 84 % b) ___ 16 % c) ____ 38 % d) ____ 138 %

CAPÍTULO 5

Geometría

Algo de historia

La geometría que estudiamos proviene, casi sin alteraciones, de una de las obras más famosas de todos los tiempos: *Los Elementos*.

La obra está compuesta por trece libros cuyo original en griego fue escrito por el gran matemático Euclides de Alejandría.

Los Elementos data del siglo IV a.n.e, fueron copiados en múltiples manuscritos y traducidos a numerosos idiomas antes de la invención de la imprenta. A partir de 1482, cuando apareció su primera edición impresa, ha sido reditada más de 1 000 veces y publicada en casi todos los idiomas. Su contenido ha dominado universalmente la enseñanza de la geometría durante más de dos milenios.

Desde las primeras páginas de *Los Elementos*, Euclides presenta como cimientos del edificio geométrico que quiere construir, las cinco propiedades siguientes, algunas de las cuales conoces desde los primeros grados:

- Se puede trazar una línea recta que pasa por dos puntos.
- Se puede prolongar una recta indefinidamente a partir de una recta finita (segmento).
- Se puede trazar una circunferencia con centro y radio dados.
- Todos los ángulos rectos son iguales.
- Por un punto exterior a una recta puede trazarse una sola paralela a ella.

Euclides no formuló esta última propiedad de esa forma, pero es como más se conoce universalmente.

A partir de estas propiedades se pueden enunciar otras y demostrar teoremas muy útiles de la geometría, algunos de los cuales vas a estudiar en este y otros grados de la Secundaria Básica.

Introducción a la geometría

Uno de los principales problemas prácticos que encontraron los primeros hombres que construyeron pirámides fue el tener que dibujar en el suelo los rectángulos y cuadrados que se convertirían en bases de estas asombrosas construcciones. ¿Cómo lograr los ángulos rectos de estas figuras?

Hay evidencias de que idearon una manera muy ingeniosa de construir un ángulo recto, cuando descubrieron que con una cuerda dividida por nudos en 12 espacios iguales resolvían el problema.

Con la cuerda formaban un triángulo que en un lado tuviera 3 espacios entre nudos, en otro, 4 espacios y en el tercer lado 5. Clavando tres estacas en los vértices del triángulo, marcaban el ángulo recto deseado.

Los albañiles de nuestros días disponen de diversos instrumentos graduados para tareas similares, sin embargo, este proceder ha trascendido a través de los siglos. ¡Comprueba que es recto uno de los ángulos del triángulo construido de la manera descrita!

Los orígenes de la geometría se remontan a necesidades prácticas de esta naturaleza. El estudio de las figuras geométricas, de sus propiedades y relaciones, te prepara para orientarte en el entorno espacial, percibir sus dimensiones y proporciones, desarrollar tu memoria visual, captar regularidades, semejanzas y diferencias, a la vez que aprendes a resolver problemas de construcción, demostración y cálculo (figura 5.1).

Figura 5.1

5.1 Repaso y profundización de igualdad y movimiento

Figuras planas y cuerpos geométricos

Las líneas, las superficies, los cuerpos, conviven armónicamente en el entorno natural y en las creaciones que la humanidad precedente nos ha dejado como legado. La geometría más elemental estudia las formas. El estudio geométrico de los cuerpos consiste, entre otras cuestiones, en el estudio de las propiedades de sus formas.

De las superficies que limitan a los cuerpos, las superficies planas son fácilmente diferenciables del resto de las formas. La parte de la geometría que se encarga del estudio de las superficies planas se llama planimetría o geometría plana. Las figuras planas son subconjuntos de puntos de un plano, en estas se pueden identificar hasta dos dimensiones: largo y ancho. Los cuerpos son tridimensionales, o sea, en ellos se pueden identificar tres dimensiones: largo, ancho y altura o profundidad; no todos sus puntos están en el mismo plano. La parte de la geometría que estudia los cuerpos se llama geometría del espacio o estereometría. A continuación, se ilustran (figura 5.2) algunas figuras planas y cuerpos geométricos.

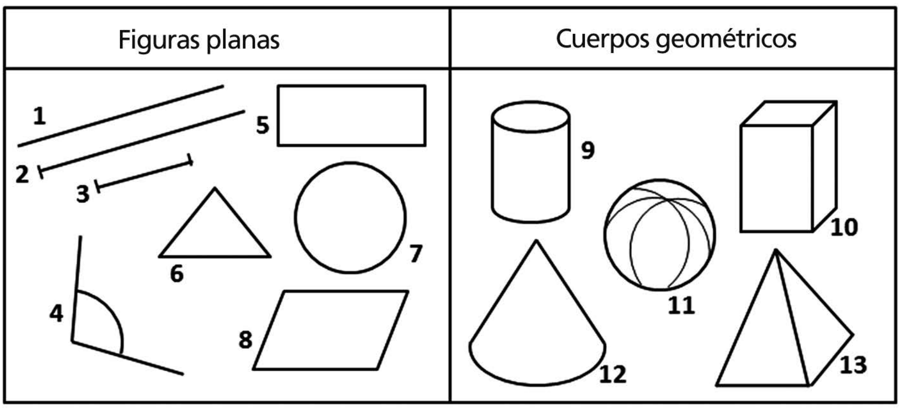


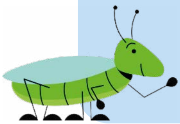
Figura 5.2

1) recta 2) semirrecta 3) segmento 4) ángulo 5) rectángulo 6) triángulo 7) circunferencia 8) paralelogramo 9) cilindro 10) ortoedro 11) esfera 12) cono 13) pirámide

Recuerda que...

Mediante las proposiciones se pueden precisar los conocimientos acumulados por la humanidad. Las proposiciones son afirmaciones que se pueden clasificar en verdaderas o falsas, nunca son verdaderas y falsas a la vez.

El conocimiento matemático se expresa en el lenguaje de las proposiciones mediante definiciones, axiomas y teoremas. Las definiciones nos dicen cómo se nombran, qué son o cómo se originan los objetos, sus relaciones y operaciones. Los axiomas y teoremas expresan importantes propiedades que permiten, por medio del razonamiento, comprender y establecer las vías para resolver problemas del entorno y del aprendizaje en áreas o ramas del conocimiento matemático.



Algunas de las propiedades fundamentales de la planimetría

El punto, la recta, el plano y sus relaciones de posición son elementos básicos en el estudio de la geometría. No se definen, pero están sujetos a determinados axiomas.

El **punto** no tiene dimensiones e indica un lugar o posición en el plano. Se denota por letras mayúsculas del alfabeto latino (A, B, C, …) y se representa por una cruz, círculo o circunferencia pequeña (figura 5.3).

Figura 5.3

La **recta** es unidimensional, determina una dirección y se puede recorrer en dos sentidos. Se representa con una línea como la que se obtiene al deslizar la punta del lápiz por el borde de la regla escolar (figura 5.4). No tiene ni principio ni final, es ilimitada. Se denota por una letra minúscula del alfabeto latino (a, b, c, …).

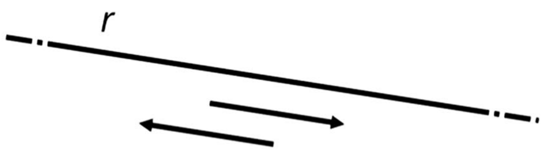


Figura 5.4

Además, debes saber que:

- **Por dos puntos pasa una y solo una recta.** De este axioma se obtiene la definición de recta de unión y su notación: recta *AB* o recta *BA* (es la recta que pasa por los puntos *A* y *B*) (figura 5.5).

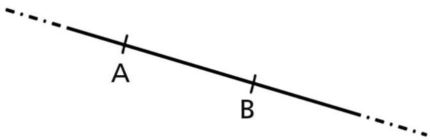


Figura 5.5

Para expresar que un punto *A* pertenece o está en una recta *r*, o que la recta *r* pasa por un punto *A*, se escribe: $A \in r$. En caso contrario escribimos: $A \notin r$.

- **Cada recta tiene infinitos puntos y hay infinitos puntos que no pertenecen a ella.** Este axioma nos permite clasificar los puntos del plano en dos grupos: los que pertenecen a la recta (puntos alineados) y los que no pertenecen a ella. De este axioma se obtiene el concepto de **semiplano de borde *r***, que es el conjunto formado por todos los puntos que están en la recta *r* o a un mismo lado de ella. Un semiplano se denota por una letra mayúscula o con tres escritas una a continuación de la otra, las dos primeras denotan puntos de la recta borde, el tercero es un punto que está a un lado de la recta (figura 5.6).

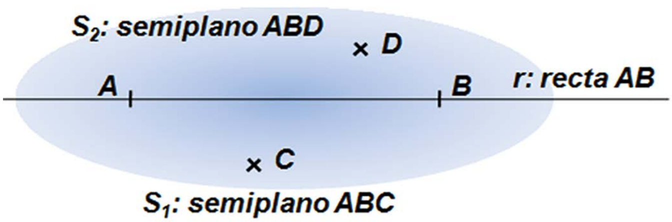


Figura 5.6

Los semiplanos *ABC* y *ABD* son semiplanos opuestos. Algo similar ocurre en una recta: cada punto de una recta determina en estos dos subconjuntos de puntos, que solo tienen este punto en común.

A cada uno de estos subconjuntos se le llama semirrecta y al punto que las origina se le denomina origen de la semirrecta (figura 5.7).

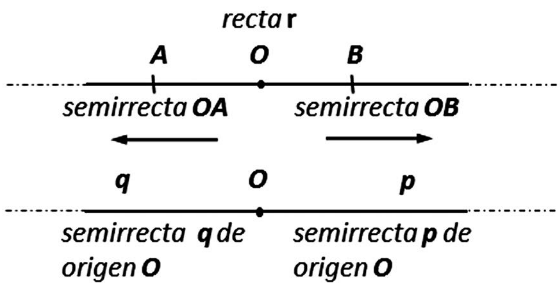


Figura 5.7

Dos semirrectas de una misma recta, que solo tienen el vértice común se llaman semirrectas opuestas.

Otras afirmaciones como: por un punto pasan infinitas rectas; dos rectas diferentes tienen como máximo un punto común, se pueden argumentar con otras que ya conociste (figura 5.8):

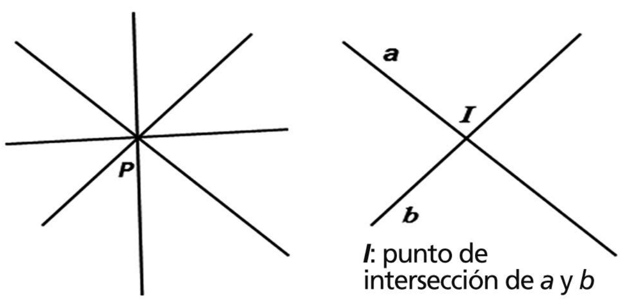


Figura 5.8

Estas, a su vez, dan lugar a nuevos conceptos geométricos, por ejemplo, una recta *a* es paralela a una recta *b* si estas coinciden o no tienen punto de intersección (figura 5.9).

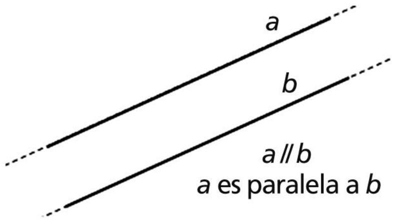


Figura 5.9

- **Entre dos puntos diferentes de una recta hay infinitos puntos.** De este axioma se deriva la definición de segmento. Dos puntos diferentes A y B de una recta r determinan el segmento $\overline{AB}$. Se llama segmento $\overline{AB}$ al conjunto de puntos formado por los puntos A y B y aquellos de la recta que están entre estos. Los puntos A y B son los extremos del segmento (figura 5.10).

Figura 5.10

- **Por un punto exterior a una recta se puede trazar una y solo una paralela a esta.** A este se le conoce como axioma de las paralelas, y como ya debes saber fue dado a conocer por Euclides desde la antigüedad (figura 5.11).

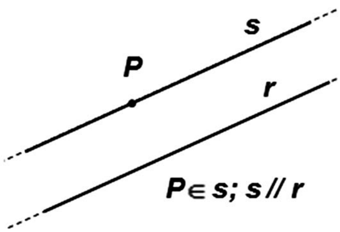


Figura 5.11

Propiedades de los movimientos. Composición de movimientos

En grados anteriores aprendiste que la reflexión, la traslación y la rotación son movimientos del plano. Estos cumplen con las propiedades siguientes:

- La imagen de una recta es siempre una recta, la de una semirrecta es siempre una semirrecta y la de un segmento es siempre un segmento.

- Un segmento y su imagen son de igual longitud; un ángulo y su imagen son de igual amplitud.
- Las imágenes respectivas de dos rectas paralelas son paralelas y las de rectas que se cortan, son rectas que se cortan.

Estas propiedades de los movimientos del plano dan lugar a otra muy importante: toda figura y su imagen por un movimiento del plano son iguales.

En la reflexión de eje *r* se cumplen además las propiedades siguientes (figura 5.12):

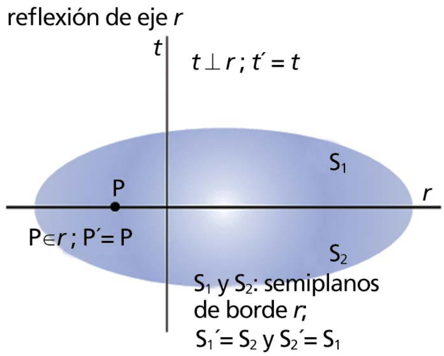


Figura 5.12

- Cada punto del eje *r* es su propia imagen.
- Cada recta perpendicular a *r* es su propia imagen.
- Cada punto y su imagen equidistan del eje.

En una traslación de flecha $\overrightarrow{PQ}$ se cumplen además las propiedades (figura 5.13):

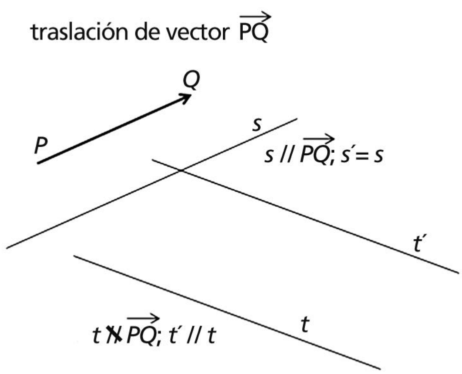


Figura 5.13

- Toda recta y su imagen son paralelas.
- Cada recta paralela al vector es su propia imagen.

En una rotación de centro *O* y ángulo ∡ *(p,q)* se cumplen además las propiedades (figura 5.14):

- El centro de rotación es el único punto que es su propia imagen.
- Todo punto y su imagen están a la misma distancia del centro de rotación.
- Todos los puntos giran el mismo ángulo respecto al centro de rotación.

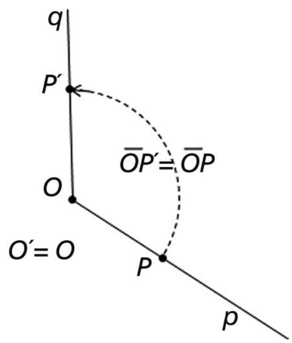


Figura 5.14

Cuando se aplican al plano dos o más movimientos, uno seguido de otro, se dice que el resultado es una composición de movimientos. Observa detenidamente las ilustraciones siguientes (figura 5.15):

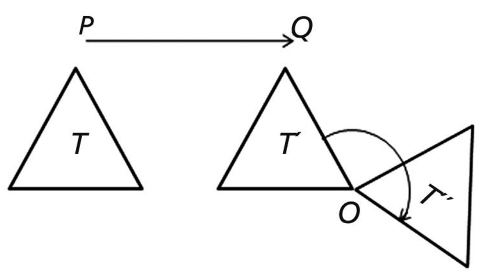


Figura 5.15

Al triángulo original se le aplicó una traslación de flecha $\overrightarrow{PQ}$ y a su imagen una rotación de centro *O*; es decir, al triángulo se le aplicó la composición de una traslación y una rotación.

Mediante la aplicación de la composición de movimientos se obtienen nuevos conocimientos acerca de los movimientos del plano. Ejemplo:

- De la composición de dos reflexiones de ejes paralelos resulta una traslación.

Al triángulo original se le aplicó la composición de las reflexiones de ejes *r* y *s* (*r* // *s*). El resultado de la composición es el mismo que el de la traslación de flecha $\overrightarrow{PQ}$ (figura 5.16):

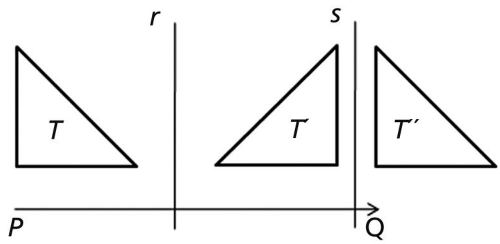


Figura 5.16

- De la composición de dos reflexiones de ejes que se cortan en un punto, resulta una rotación (figura 5.17).

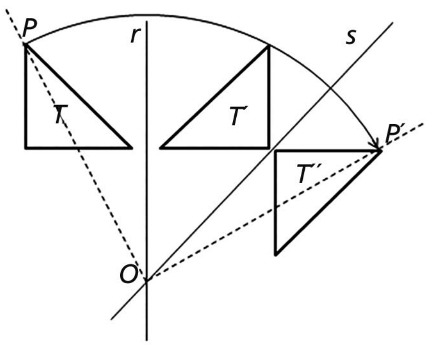


Figura 5.17

Al triángulo original se le aplicó la composición de dos reflexiones de ejes *r* y *s* $\left(r \cap s = \{O\}\right)$. El resultado de la composición es el mismo que el de la rotación de centro *O* y ángulo $\measuredangle\, POP'$.

Ejercicios del epígrafe

1. Escribe el nombre de objetos que estén limitados:

a) Solo por superficies curvas

b) Solo por superficies planas
c) Por superficies curvas y planas

2. Colecciona objetos de variadas formas que sean representaciones de cuerpos geométricos.
   a) Identifica en estos objetos los elementos que lo relacionan con el cuerpo geométrico que representan.
3. ¿Qué forma tienen las caras de un cubo? ¿Por qué es considerado un ortoedro?
4. ¿Qué forma tienen las caras de una pirámide? ¿Cuántas bases tiene? ¿Qué forma tienen?
5. En la figura 5.18 se muestra la base y una de las caras de un prisma. Construye un prisma similar de igual base y tres veces su altura.

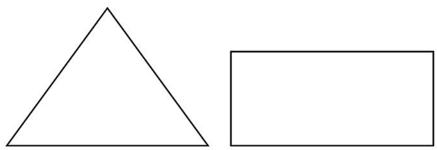


Figura 5.18

6. Elabora plantillas que te permitan construir cubos, ortoedros, pirámides, cilindros y conos con cartulina.
7. Las líneas que usamos para dibujar tienen formas; muchas de ellas se nombran en las clases de Apreciación de las Artes Plásticas. Investiga acerca de las diferentes formas que pueden tener las líneas y sus nombres. Confecciona un muestrario de estas.
8. A partir de las operaciones doblar y recortar se pueden obtener mucha de las figuras geométricas planas que conoces (figura 5.19).

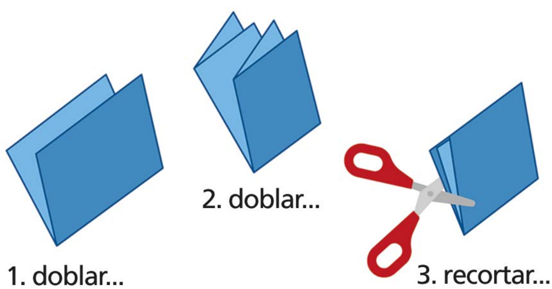


Figura 5.19

a) Crea figuras de papel con estas formas y escribe las instrucciones que permitan a otros niños hacer reproducciones.
b) Muestra creativamente los usos que puedes dar a estas figuras de papel.

9. Traza tres puntos *P*, *Q* y *R*.

a) ¿Cuántas rectas contienen al punto *P*?
b) ¿Cuántas rectas pasan por los puntos *P* y *Q* a la vez?
c) ¿Cuántas rectas diferentes se pueden trazar por los puntos *P*, *Q* y *R*?
d) ¿Cuántos planos se pueden definir a partir de los puntos *P*, *Q* y *R*?
e) Argumenta tus respuestas en cada uno de los incisos anteriores.

10. Traza una recta *AB*.

a) ¿De cuántas formas diferentes se pueden ubicar dos puntos *C* y *D* respecto a la recta *AB*?
b) ¿Bajo qué condiciones el segmento $\overline{CD}$ no corta a la recta *AB*?
c) Conociendo que la recta *AB* no pasa por *C*, ¿cuántas de las rectas que contienen a *C* son paralelas a la recta *AB*?

11. Traza un sistema de coordenadas rectangulares (segmento unidad: 1 cm).

a) Localiza los vértices de un triángulo *ABC*: *A* (4;1), *B* (8;2) y *C* (7;4).
b) Traza las paralelas a los lados de *ABC* que pasan por los puntos *A*, *B* y *C*.
c) Fundamenta por qué el triángulo determinado por las paralelas trazadas es único.

12. Tres de las coordenadas de un paralelogramo *ABCD* son: *A* (4;1), *B* (6;5) y *C* (3;7). ¿Cuáles son las coordenadas del punto *D*?

13. En la figura 5.20 aparece representado un cubo de 4 cm de lado. El cubo ha sido cortado por un plano paralelo a una de sus caras, a 1 cm de ella.

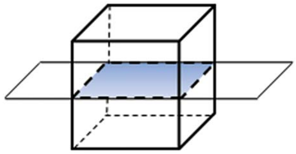


Figura 5.20

a) ¿En cuántos cuerpos se descompone el cubo por ese corte?

b) ¿Cuáles son las dimensiones de los nuevos cuerpos?

14. Aplica al polígono dado la composición de movimientos reflexión de eje *s* y traslación de flecha $\overrightarrow{MN}$ (figura 5.21). Sírvete de las cuadrículas para reproducir en tu libreta los elementos geométricos dados y dar solución al ejercicio.

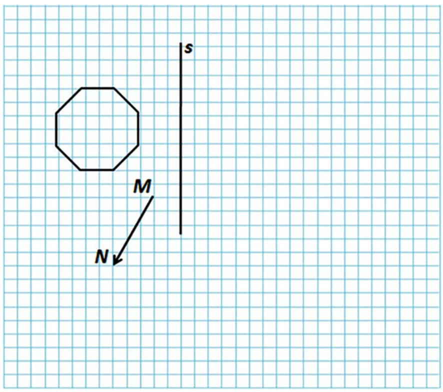


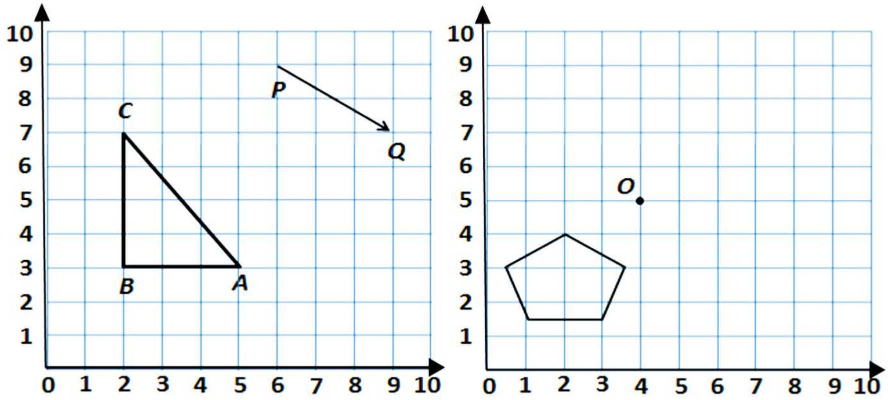
Figura 5.21

a) ¿Se obtiene el mismo resultado si en la composición de movimientos se invierte el orden de estos?

b) Al invertir el sentido de la traslación, ¿cuál sería el resultado de la composición de movimientos traslación de flecha $\overrightarrow{NM}$ y reflexión de eje *s*?

15. Dibuja un cuadrado *ABCD* en tu libreta. Aplica a este la composición de traslaciones de flechas $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ en ese orden. Comenta con tus compañeros acerca de los resultados del ejercicio.

16. Dibuja en tu libreta los polígonos de cada figura y aplica los movimientos que se indican para cada caso (figura 5.22).



traslación de vector $\overrightarrow{PQ}$ simetría de centro *O*

Figura 5.22

a) Escribe las coordenadas de los puntos *A´*, *B´* y *C´*.

17. Reproduce en tu libreta la figura 5.23.

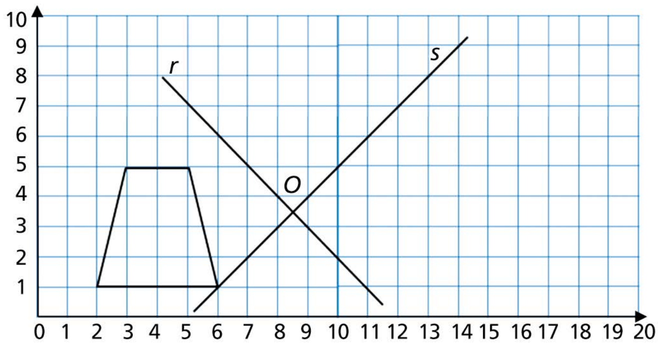


Figura 5.23

a) Denota los vértices del cuadrilátero y determina sus coordenadas.

b) En la composición de movimientos, determina las coordenadas de los puntos que resultan imágenes sucesivas de cada vértice del cuadrilátero.

5.2 Ángulos, relaciones de posición entre pares de ángulos

Definición de ángulos

Las rectas *AA´* y *BB´* se cortan en el punto *O*. De la intersección de los semiplanos *BB´A* y *AA´B* resulta el ángulo de intersección

$\measuredangle AOB$. De la unión de los semiplanos $BB'A$ y $AA'B$ resulta el ángulo de unión $\measuredangle A'OB'$.

Los ángulos se obtienen por la unión o intersección de dos semiplanos cuyos bordes se cortan en un punto (figura 5.24).

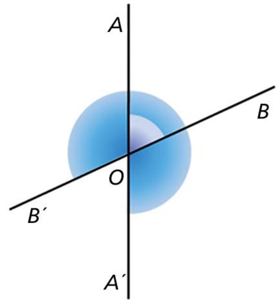


Figura 5.24

Definición 5.1

Se denomina **ángulo** a la unión o la intersección de dos semiplanos cuyos bordes se cortan.

En ambos casos el ángulo está limitado por dos semirrectas de origen común: *OA* y *OB* el ángulo de intersección; *OA´* y *OB´* el ángulo de unión. Las semirrectas son lados del ángulo y el origen común es vértice del ángulo.

Cuando los lados del ángulo son semirrectas opuestas se forma un ángulo llano, que es el mayor de los ángulos de intersección.

Dos semirrectas de origen común, que no son opuestas, determinan dos ángulos en el plano: uno es de intersección, el otro de unión. Al denotar a un ángulo por su vértice y sus lados, por convenio, se considera que se refiere al ángulo de intersección siempre que no se aclare lo contrario (figura 5.25).

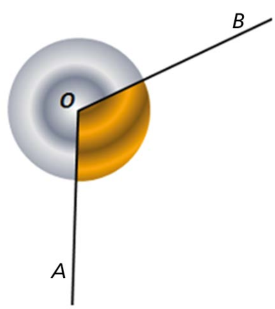


Figura 5.25

Trazado y medición de ángulos con el semicírculo graduado

Para medir los ángulos se usa el semicírculo graduado. A la medida de los ángulos se les llama amplitudes y se representan por letras del alfabeto griego.

Para medir un ángulo de intersección, su amplitud se obtiene directamente de la lectura en la escala del semicírculo como aprendiste en grados anteriores (figura 5.26).

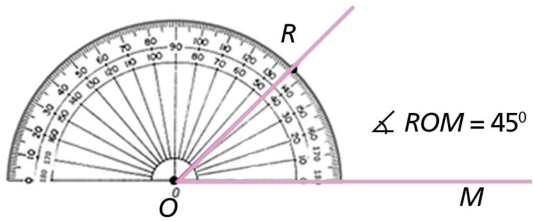


Figura 5.26

Para medir un ángulo de unión se puede optar por una de las variantes siguientes:

1. Mides el ángulo de intersección correspondiente al ángulo de unión y hallas la diferencia de esta con 360° (figura 5.27).

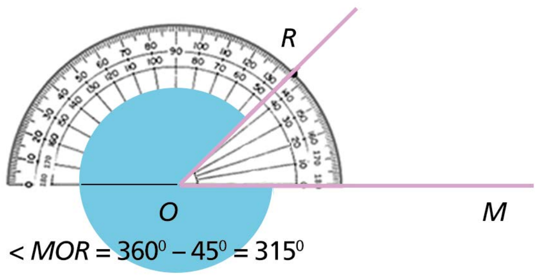


Figura 5.27

2. Mides el ángulo que sobrepasa al ángulo llano y calculas la suma de esta amplitud con 180° (figura 5.28).

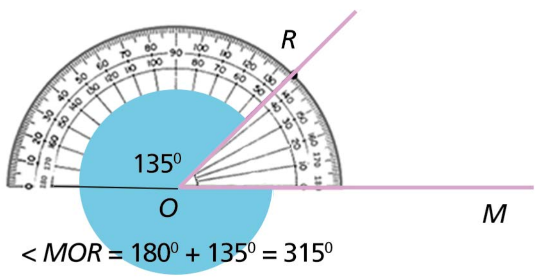


Figura 5.28

Los procedimientos para el trazado de ángulos están estrechamente relacionados con los procedimientos de medición de ángulos (figura 5.29).

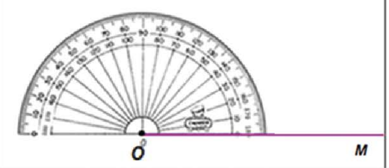
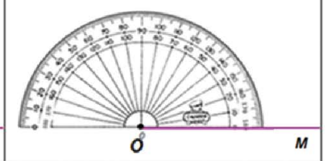
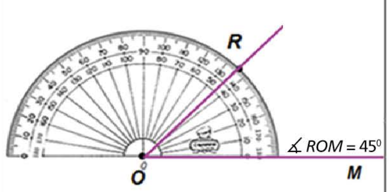
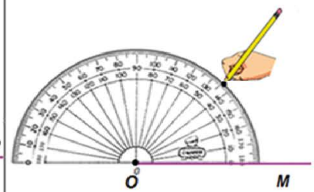
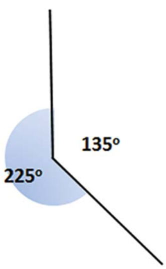
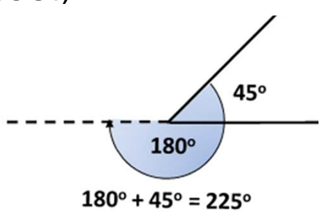
	Medir ángulos	Trazar ángulos
Colocación del semicírculo graduado respecto a un lado		
Lectura de la medida o ubicación del punto por donde pasa el otro lado		

Figura 5.29

Los ángulos mayores que el ángulo llano se construyen de forma similar que en el ejemplo siguiente:

Ejemplo

Construir un ángulo de 225°

Por diferencia con el ángulo de 360°	Por diferencia con el ángulo de 180°
Calculo la diferencia: 360° – 225° = 135°	Calculo la diferencia: 225° – 180° = 45°
Trazo el ángulo de 135°	Trazo el ángulo de 45°
El ángulo de 215° es el ángulo de unión correspondiente a los lados del ángulo de 135° (figura 5.30)  **Figura 5.30**	Trazo la semirrecta opuesta a uno de los lados del ángulo de 45°. El ángulo de 225° es el ángulo de unión determinado por la semirrecta prolongada y la otra semirrecta del ángulo de 45° (figura 5.31)  **Figura 5.31**

Clasificación de ángulos según su amplitud

Ángulos de intersección

Observa la figura 5.32:

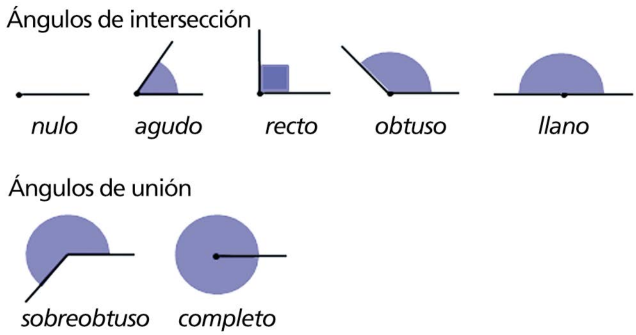


Figura 5.32

Los ángulos, atendiendo a su amplitud, se clasifican en:

- Nulo: 0°
- Agudo: mayor que 0° y menor que 90°
- Recto: 90°
- Obtuso: mayor que 90° y menor que 180°
- Llano: 180°
- Sobreobtuso: mayor que 180° y menor que 360°
- Completo: 360°

5.2.1 Ángulos consecutivos. Suma de ángulos. Propiedad de los ángulos consecutivos a un lado de una recta y alrededor de un punto

Definición 5.2

Dos ángulos son consecutivos si solo tienen en común el vértice y un lado (figura 5.33).

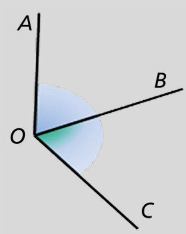


Figura 5.33

- Los ángulos $\measuredangle AOB$ y $\measuredangle BOC$ son consecutivos.
- $\measuredangle AOB + \measuredangle BOC = \measuredangle AOC$ (suma de ángulos).
- El ángulo suma está determinado por la unión de dos ángulos consecutivos, sus lados son los lados no comunes y mantiene el mismo vértice que los ángulos que lo originan.

Observa la figura 5.34:

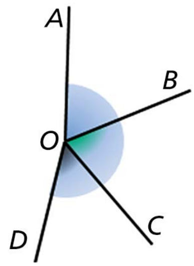


Figura 5.34

- Los ángulos $\measuredangle AOB$ y $\measuredangle BOC$ son consecutivos; los ángulos $\measuredangle BOC$ y $\measuredangle COD$ son consecutivos; se dice entonces que los ángulos $\measuredangle AOB$, $\measuredangle BOC$ y $\measuredangle COD$ son consecutivos.
- Para los ángulos $\measuredangle AOB$, $\measuredangle BOC$ y $\measuredangle COD$ se cumple:

$$\measuredangle AOB + \measuredangle BOC + \measuredangle COD = \measuredangle AOD$$

Si construyes una figura similar a la que se ilustra, podrás comprobar que:

- La suma de ángulos y la suma de amplitudes están estrechamente relacionadas si se comprueba que:
  - La amplitud del ángulo $\measuredangle AOB$ es β; $\measuredangle AOB = \beta$
  - La amplitud del ángulo $\measuredangle BOC$ es γ; $\measuredangle BOC = \gamma$
  - La amplitud del ángulo $\measuredangle COD$ es δ; $\measuredangle COD = \delta$

Se cumple entonces que la amplitud del ángulo $\measuredangle AOD$ es $\beta + \gamma + \delta$; $\measuredangle AOD = \beta + \gamma + \delta$; cualesquiera que sean los ángulos $\measuredangle AOB$, $\measuredangle BOC$ y $\measuredangle COD$ es posible considerar que la amplitud del ángulo suma es igual a la suma de las amplitudes de los ángulos consecutivos que lo forman.

Ejemplo

En la figura anterior, $\measuredangle AOB = 70°$, $\measuredangle BOC = 68°$, $\measuredangle COD = 55°$; luego: $\measuredangle AOD = 70° + 68° + 55° = 193°$

Observa la figura 5.35:

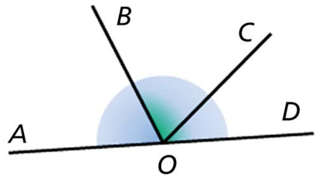


Figura 5.35

Los ángulos ∡ AOB, ∡ BOC y ∡ COD son consecutivos.

Los lados OA y OD son semirrectas opuestas; se dice entonces que los ángulos ∡ *AOB*, ∡ *BOC* y ∡ *COD* son **consecutivos a un lado de la recta.**

Teorema 1

Las amplitudes de los ángulos consecutivos a un lado de la recta suman 180º.

Demostración (ver figura anterior)

Sean β, γ y δ las amplitudes respectivas de los ángulos ∡ *AOB*, ∡ *BOC* y ∡ *COD*, consecutivos a un lado de la recta *AD*, luego:

1. ∡ *AOB* + ∡ *BOC* + ∡ *COD* = ∡ *AOD* (concepto de suma de ángulos)
2. ∡ *AOD* es un ángulo llano y *OA* y *OD* son semirrectas opuestas
3. ∡ *AOD* = 180° (amplitud del ángulo llano)
4. $\beta + \gamma + \delta = 180°$ (sustituyendo los ángulos por sus respectivas amplitudes) l.q.q.d

Concepto de teoremas

En Matemática, las proposiciones llamadas **teoremas** son afirmaciones cuya veracidad es necesario demostrar. Un teorema es como un problema que se debe resolver, y al igual que este consta de dos partes:

Las **premisas** o **hipótesis**: lo que se da como información y que es probadamente cierto.

La **tesis**: es lo que se debe verificar como cierto, es lo que se busca.

Un teorema puede enunciarse en la forma: *Si*… (premisas), *entonces*… (tesis). Esta forma de enunciado facilita el reconocimiento y delimitación de las *premisas* de la *tesis*, lo que resulta de gran importancia para encontrar y desarrollar la idea para demostrar dicho teorema.

La veracidad de un teorema se establece mediante la ***demostración***. La demostración es una cadena de ideas o razonamientos que generalmente parte de las premisas para llegar a la tesis.

Ejemplo

En el teorema 1, las premisas son:

- β (beta), γ (gamma) y δ (delta) son las amplitudes respectivas de los ángulos $\measuredangle AOB$, $\measuredangle BOC$ y $\measuredangle COD$
- $\measuredangle AOB$, $\measuredangle BOC$ y $\measuredangle COD$ son ángulos consecutivos a un mismo lado de la recta; y la tesis: $\beta + \gamma + \delta = 180°$.

En la *demostración* de este teorema se parte desde las premisas: del concepto de *ángulos consecutivos a un mismo lado de la recta*, y se pasa de este al de *ángulo suma* (el cual se caracterizó a partir del concepto de *ángulos consecutivos*). Al ser *consecutivos a un lado de la recta*, garantiza como verdadera la identificación del *ángulo suma* como *ángulo llano*, lo que finalmente confirma, según la clasificación de ángulos, que se trata de un ángulo de 180°. El esquema siguiente puede ayudarte a comprender en qué consiste la demostración del teorema tomado como ejemplo (figura 5.36).

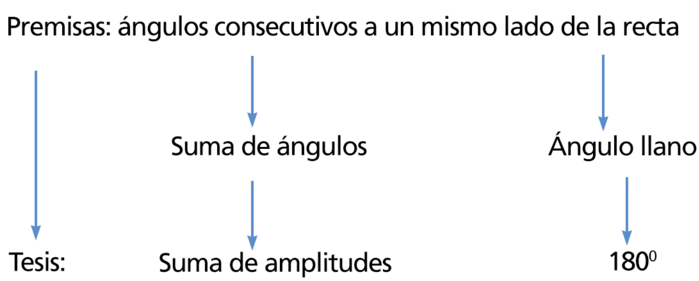


Figura 5.36

Observa la figura 5.37:

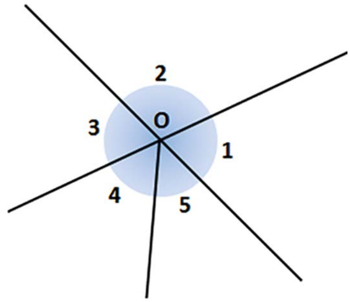


Figura 5.37

Las parejas de ángulos ∡ 1 y ∡ 2, ∡ 2 y ∡ 3, ∡ 3 y ∡ 4, ∡4 y ∡ 5, ∡ 5 y ∡ 1 son consecutivos, además de tener vértice común; de conjunto recorren el plano completo. A toda sucesión similar a la de los ángulos ∡ 1, ∡ 2, ∡ 3, ∡ 4, ∡ 5, se le llama **ángulos consecutivos alrededor de un punto.**

La suma de los ángulos consecutivos alrededor de un punto es igual a un ángulo completo; en correspondencia con esto, la suma de sus amplitudes respectivas es de 360°.

Ángulos adyacentes

Observa en la figura 5.38 que cuando dos rectas se cortan, dividen al plano en cuatro regiones que son ángulos intersección con vértice común.

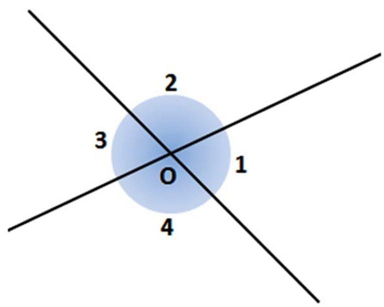


Figura 5.38

Las parejas de ángulos ∡ 1 y ∡ 2, ∡ 2 y ∡ 3, ∡ 3 y ∡ 4, ∡4 y ∡ 1 son consecutivos a un mismo lado de la recta.

Definición 5.3

Se llaman **ángulos adyacentes** a un par de ángulos consecutivos que están a un mismo lado de una recta.

Ejemplo

En la figura anterior, cada pareja de ángulos $\measuredangle$ 1 y $\measuredangle$ 2, $\measuredangle$ 2 y $\measuredangle$ 3, $\measuredangle$ 3 y $\measuredangle$ 4, $\measuredangle$4 y $\measuredangle$ 1, está compuesta por ángulos adyacentes.

Observa que los ángulos adyacentes tienen el vértice y un lado común, y los lados no comunes son semirrectas opuestas.

Teorema 2 (de los ángulos adyacentes)

Si dos ángulos son adyacentes, entonces sus amplitudes suman 180º.

Ejemplo

En el teorema 2 se pueden reconocer las premisas y la tesis de una forma sencilla. Observa la figura 5.39:

Si dos ángulos son adyacentes entonces sus amplitudes suman 180º.

Figura 5.39

Demostración del teorema 2

Observa la figura 5.40.

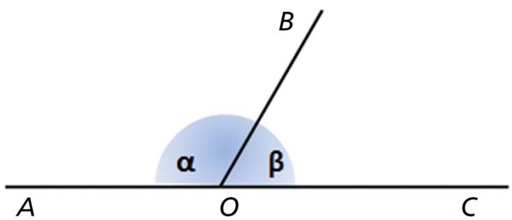


Figura 5.40

Sean α y β las amplitudes respectivas de los ángulos adyacentes $\measuredangle AOB$ y $\measuredangle BOC$:

1. $\measuredangle AOB$ y $\measuredangle BOC$ son consecutivos a un mismo lado de la recta (concepto de ángulos adyacentes).
2. $\measuredangle AOB + \measuredangle BOC = \measuredangle AOC$ y $\measuredangle AOC$ es un ángulo llano (propiedad de los ángulos consecutivos a un lado de la recta).
3. $\measuredangle AOC = 180°$ (clasificación de ángulos).
4. $\alpha + \beta = 180°$ (sustituyendo los ángulos por sus amplitudes respectivas), l.q.q.d.

Recíproco de un teorema

Cuando se intercambian las premisas y la tesis de un teorema, se forma el ***recíproco del teorema***. Este no siempre es un nuevo teorema, es decir, no siempre resulta ser una proposición verdadera.

Ejemplo

El recíproco del teorema 2 sería enunciado así:

Teorema: Si dos ángulos son adyacentes entonces sus amplitudes suman 180°.

Recíproco: Si las amplitudes de dos ángulos suman 180°, entonces son adyacentes.

El recíproco de este teorema no es verdadero, pues la amplitud de un ángulo no depende de su posición relativa. Por ejemplo, dos ángulos con amplitudes de 80° y 100° respectivamente, no tienen que ser adyacentes. Observa, comprueba y reflexiona:

Las amplitudes de los ángulos con vértices en *A* y *B* suman 180°. ¿Son estos ángulos adyacentes? (figura 5.41).

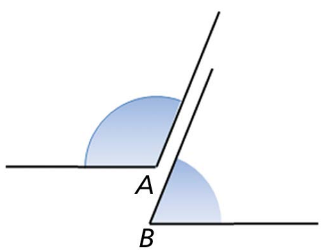


Figura 5.41

Ángulos opuestos por el vértice. Teorema de los ángulos opuestos por el vértice

Observa nuevamente la figura 5.38. Entre los ángulos destacados se formaron pares de ángulos que son adyacentes. ¿Cuántas parejas se pueden formar que no son adyacentes? ¿Qué características tienen estas parejas de ángulos?

Definición 5.4

Dos ángulos con vértice común, donde los lados de uno son las semirrectas opuestas de los lados del otro ángulo, se llaman **opuestos por el vértice.**

Ejemplo

En la figura 5.38 correspondiente a los ángulos adyacentes, los ángulos $\measuredangle$ 1 y $\measuredangle$ 3, $\measuredangle$ 2 y $\measuredangle$ 4, son opuestos por el vértice. Observa que, además de tener vértice común, los lados del ángulo $\measuredangle$ 1 son las semirrectas opuestas a los lados del ángulo $\measuredangle$ 3 y viceversa. Igual ocurre con los ángulos $\measuredangle$ 2 y $\measuredangle$ 4.

Teorema 3

Los ángulos opuestos por el vértice son de igual amplitud.

Demostración

Sean α y β las amplitudes respectivas de los ángulos opuestos por el vértice $\measuredangle AOB$ y $\measuredangle A'OB'$ (figura 5.42).

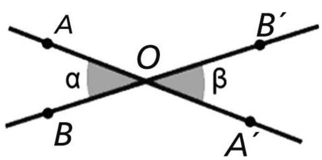


Figura 5.42

Por una simetría de centro O, resulta que $\measuredangle A'OB'$ es imagen de $\measuredangle AOB$, por tanto $\measuredangle AOB = \measuredangle A'OB'$ (propiedad general de los movimientos) y, por tanto, $\alpha = \beta$ l.q.q.d.

5.3 Ángulos entre rectas cortadas por una secante

En las relaciones de posición de tres rectas en un mismo plano, es de especial interés el caso en que dos rectas son cortadas por una tercera. En la figura 5.43, c_1 y c_2 son las rectas cortadas y s la recta secante.

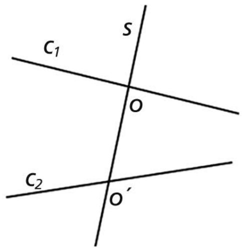


Figura 5.43

Las cortadas dividen el plano en tres regiones: dos exteriores y una interior. La secante divide el plano en dos regiones, cada una de ellas es un semiplano de borde s (figura 5.44).

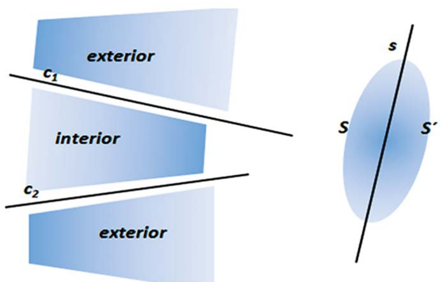


Figura 5.44

Las rectas cortadas por una secante dividen el plano en 6 regiones, en las que se localizan 8 ángulos de intersección: 4 alrededor de cada punto de intersección. En la figura 5.45 aparecen los ángulos numerados del 1 hasta el 8.

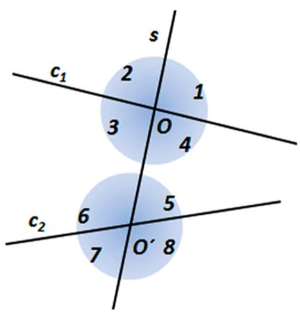


Figura 5.45

Las parejas de ángulos que como en el caso de ∡ 1 y ∡ 5 tienen vértices diferentes, están a un mismo lado de la secante: uno es exterior (∡ 1) y el otro interior (∡ 5), se denominan **ángulos correspondientes.**

Localiza en la figura 5.46 otras parejas de ángulos correspondientes.

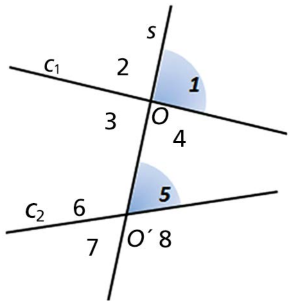


Figura 5.46

Las parejas de ángulos que como en los casos de ∡ 1 y ∡ 8 o ∡ 4 y ∡ 5 tienen vértices diferentes, están a un mismo lado de la secante y ambos son exteriores (∡ 1 y ∡ 8) o interiores (∡ 4 y ∡ 5), se denominan **ángulos conjugados** (figura 5.47).

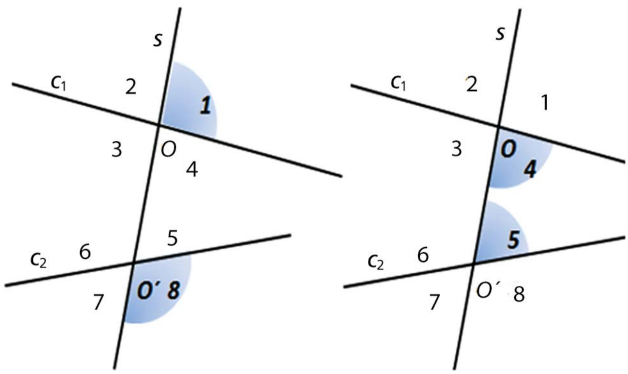


Figura 5.47

Localiza en la figura anterior otras parejas de ángulos conjugados.

Las parejas de ángulos que como en los casos de ∡ 1 y ∡ 7 o ∡ 3 y ∡ 5 tienen vértices diferentes, están en diferentes lados respecto a la secante y ambos son exteriores (∡ 1 y ∡ 7) o interiores (∡ 3 y ∡ 5), se denominan á**ngulos alternos** (figura 5.48).

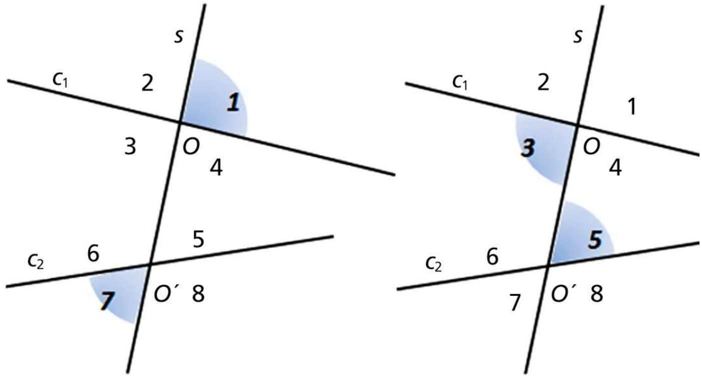


Figura 5.48

Localiza en la figura anterior otras parejas de ángulos alternos.

Cuando las rectas cortadas **son paralelas**, las parejas de ángulos correspondientes, alternos y conjugados cumplen propiedades que son muy útiles en el cálculo de amplitudes de ángulos y la argumentación del paralelismo entre rectas.

Teorema 4 (de los ángulos correspondientes entre paralelas)

Los ángulos correspondientes formados entre rectas paralelas son de igual amplitud.

Demostración

Sean α y β las amplitudes de los ángulos correspondientes $\measuredangle$ 1 y $\measuredangle$ 5, donde las cortadas c_1 y c_2 son paralelas. Según definición y propiedades de la traslación de vector $\overrightarrow{OO'}$, el ángulo $\measuredangle$ 5 es imagen por traslación del ángulo $\measuredangle$ 1; luego $\measuredangle 5 = \measuredangle 1$, por tanto, $\alpha = \beta$ l.q.q.d., (figura 5.49).

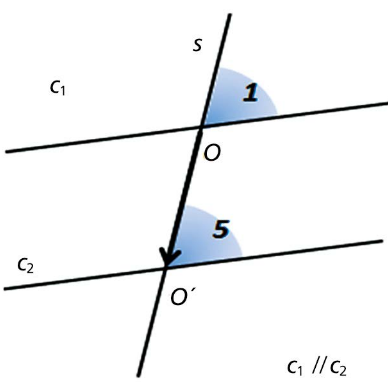


Figura 5.49

Recíproco del teorema 4

Si un par de ángulos correspondientes son de igual amplitud, entonces las rectas cortadas son paralelas.

En este caso, el recíproco del teorema 4 es nuevamente un teorema y puede demostrarse. La demostración puede ser desarrollada basándose en la definición de ángulos correspondientes y la traslación que transforma al vértice de uno de los ángulos en el otro y sus propiedades. No será difícil llegar a la conclusión de que los lados de uno de los ángulos son paralelos a los lados del otro ángulo.

Teorema 5 (de los ángulos conjugados entre paralelas)

Las amplitudes de los ángulos conjugados formados entre paralelas suman 180º.

Observa la figura 5.50:

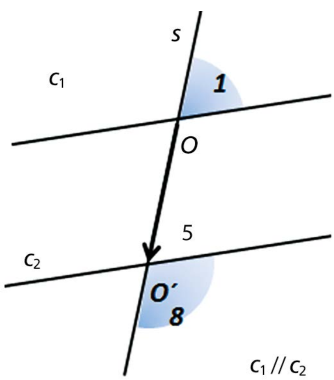


Figura 5.50

En la traslación de flecha $\overrightarrow{OO'}$, el ángulo ∡ 1 se transforma en el ángulo ∡ 5 que es adyacente con el ángulo ∡ 8. De ahí que, según el teorema de los ángulos adyacentes, la suma de las amplitudes de los ángulos ∡ 1 y ∡ 8 sea 180º.

Con esta idea se puede redactar la demostración del teorema.

Demostración

Sean α y β las amplitudes respectivas de los ángulos conjugados $\measuredangle$ 1 y $\measuredangle$ 8 formados entre las paralelas c_1 y c_2. Al aplicar la traslación de vector $\overrightarrow{OO'}$:

1. $\measuredangle 1 = \measuredangle 5 = \alpha$ (definición de traslación)
2. $\measuredangle 1 = \measuredangle 5 = \alpha$ (propiedad de los movimientos del plano)
3. $\measuredangle$ 5 y $\measuredangle$ 8 son adyacentes (definición de ángulos adyacentes)
4. $\alpha + \beta = 180°$ (teorema de los ángulos adyacentes) l.q.q.d.

Recíproco del teorema 5

Si la suma de las amplitudes de un par de ángulos conjugados es 180º, entonces las rectas cortadas son paralelas.

El recíproco del teorema de los ángulos conjugados es una proposición verdadera, por tanto, es un teorema y puede ser demostrado.

Teorema 6 (de los ángulos alternos entre paralelas)

Los ángulos alternos formados entre rectas paralelas son de igual amplitud.

Para la demostración de este teorema se puede considerar la aplicación del teorema de los ángulos correspondientes entre paralelas: ($\measuredangle 1 = \measuredangle 5$) y el teorema de los ángulos opuestos por el vértice: ($\measuredangle 5 = \measuredangle 7$); para luego concluir con la igualdad de los ángulos $\measuredangle 1 = \measuredangle 7$ que prueba la igualdad de sus amplitudes (figura 5.51).

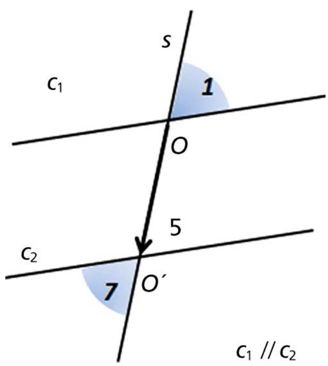


Figura 5.51

Por lo evidente de la demostración, se propone sea desarrollada como parte de los ejercicios del epígrafe.

Recíproco del teorema 6

Si dos ángulos alternos son de igual amplitud, entonces las rectas cortadas son paralelas.

El recíproco del teorema de los ángulos alternos es verdadero, por tanto, es también un teorema y puede ser demostrado.

Con lo aprendido acerca de los ángulos puedes resolver ejercicios como los que te mostramos a continuación.

Ejercicios resueltos

1. Observa las figuras 5.52 a, b, c y determina las amplitudes de los ángulos que se indican en cada caso. Argumenta tus respuestas.

   r y *s* son rectas que se cortan en un punto

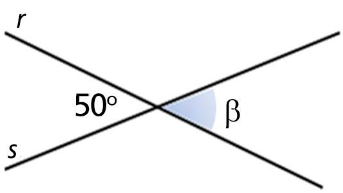


Figura 5.52 a

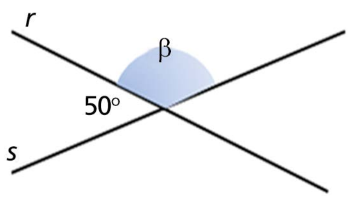


Figura 5.52 b

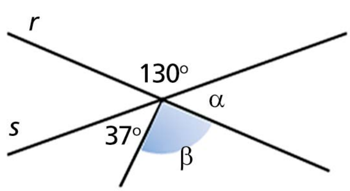


Figura 5.52 c

Respuestas:

a) $\beta = 50°$, $\measuredangle\, \beta$ es opuesto por el vértice al ángulo de 50°.

b) $50° + \beta = 180°$, $\measuredangle\ \beta$ es adyacente al ángulo de $50°$, $\beta = 180° - 50° = 130°$. Por tanto, $\beta = 130°$.

c) Solución: (1) $37° + \beta = 130°$, $37° + \beta$ es la amplitud del ángulo opuesto por el vértice al ángulo de $130°$, $\beta = 130° - 37° = 93°$, por tanto, $\beta = 93°$

Solución (2) $130° + \alpha = 180°$, α es la amplitud del ángulo adyacente al ángulo de $130°$, por tanto, $\alpha = 50°$.
$\alpha + \beta + 37° = 180°$, son las amplitudes de los ángulos consecutivos a un mismo lado de la recta *s*, por tanto, $\beta = 180° - 50° - 37° = 93°$, por tanto, $\beta = 93°$.

2. ¿Cuántos grados ha girado el horario del reloj? Clasifica el ángulo de giro (figura 5.53).

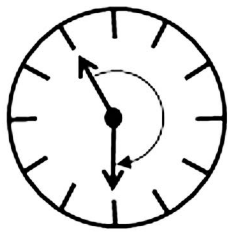


Figura 5.53

Los 360° del ángulo completo quedan divididos en 12 partes iguales. A cada una de las partes le corresponden 30°, y $30 \cdot 7 = 210$.
Respuesta: El horario del reloj ha girado 210°. El ángulo de giro es sobreobtuso porque su amplitud es mayor que 180° y menor que 360°.

3. Clasifica los ángulos incluidos en el ángulo $\measuredangle\ DOA$ de la figura 5.54:

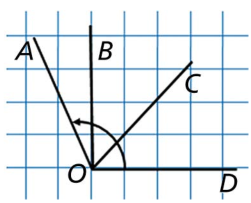


Figura 5.54

Los ángulos incluidos son ∡ *DOC*, ∡ *DOB*, ∡ *DOA*, ∡ *COB*, ∡ *COA*, ∡ *BOA*.

Respuesta: obtuso: ∡ *DOA*, recto: ∡ *DOB*; los restantes son agudos.

Nota: En cada caso, los ángulos se comparan con las líneas de las cuadrículas que son perpendiculares.

4. Para las rectas *m*, *n* y *s* de la figura 5.55 se cumple: m // n; *s* corta a *m* y a *n*. Argumenta las proposiciones siguientes:

a) ∡ 1 = ∡ 3

b) Si ∡ 1 = α, entonces, ∡ 7 = α

c) ∡ 2 y ∡ 5 no son adyacentes, ni opuestos por el vértice, ni alternos, ni correspondientes, ni conjugados.

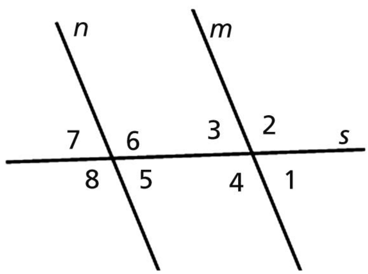


Figura 5.55

Respuestas:

a) ∡1 = ∡ 3 porque son opuestos por el vértice.

b) ∡ 1 = ∡ según datos, ∡1 = ∡7 son alternos entre paralelas, luego ∡ 7 = α porque los ángulos alternos entre paralelas son de igual amplitud.

c) ∡ 2 y ∡ 5 no son adyacentes, ni opuestos por el vértice porque no tienen vértice común; no son alternos pues uno es exterior y el otro interior respecto a las cortadas; no son correspondientes ni conjugados, pues no están a un mismo lado de la secante.

5. Argumenta por qué en todo trapecio con un par de lados paralelos, la suma de las amplitudes de los ángulos adyacentes a los lados no paralelos es 180° (figura 5.56).

Figura 5.56

Respuesta: Siendo α y β las amplitudes de dos ángulos adyacentes a un lado no paralelo de un trapecio cualquiera, los ángulos $\measuredangle\ \alpha$ y $\measuredangle\ \beta$ son conjugados entre paralelas, por tanto $\alpha + \beta = 180°$.

6. Observa detenidamente la figura 5.57. Indica bajo qué condiciones las rectas *m* y *n* serían paralelas.

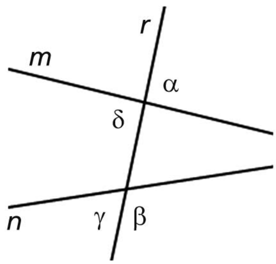


Figura 5.57

Respuesta: *m* // *n* si se cumple una de las condiciones:

a) $\alpha + \beta = 180°$ (recíproco del teorema de los ángulos conjugados entre paralelas)

b) $\delta = \gamma$ (recíproco del teorema de los ángulos correspondientes entre paralelas)

c) $\alpha = \gamma$ (recíproco del teorema de los ángulos alternos entre paralelas)

7. Determina la amplitud de los ángulos $\measuredangle\ 1$ y $\measuredangle\ 2$ que aparecen en la figura 5.58:

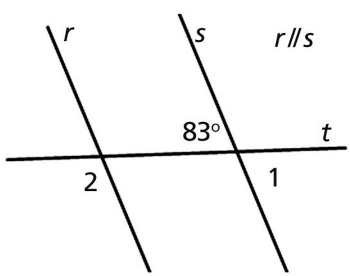


Figura 5.58

Respuesta:

- $\measuredangle 1 = 83°$ (opuestos por el vértice)
- $\measuredangle 1 + \measuredangle 2 = 180°$ (conjugados entre paralelas)
- $83° + \measuredangle 2 = 180°$ (sustituyendo)
  $\measuredangle 2 = 180° - 83°$ (despejando)
  $\measuredangle 2 = 97°$ (calculando)

Ejercicios del epígrafe

1. Traza en tu libreta dos semirrectas de origen común, identifica los ángulos que determinan y mide la amplitud de estos. Intercambia tu libreta con otros compañeros del aula para que ellos evalúen tus resultados.

2. Propón a tus compañeros el trazado de ángulos de unión y de intersección con variadas amplitudes. Comprueba que hayan realizado tu orden de manera correcta y corrige los errores en caso necesario.

3. Traza en un sistema de coordenadas los puntos *A* (1;5); *B* (2;2); *C* (5;1).

a) Mide los lados del triángulo *ABC*.
b) Mide los ángulos interiores del triángulo *ABC*.
c) Traza otro triángulo *A´B´C´* sabiendo que sus coordenadas se obtienen al aumentar en dos unidades las abscisas (primera componente) de las coordenadas dadas.
d) Comenta con tus compañeros acerca del movimiento que ha transformado un triángulo en el otro.

4. Observa el desplazamiento del horario de un reloj y completa las siguientes afirmaciones de modo que resulten verdaderas.

a) De 11:00 a. m. a 4:00 p. m. el horario de un reloj gira un ángulo de ______, por lo que puede clasificarse como un ángulo________.
b) De 5:00 p. m. a 9:00 p. m. el horario de un reloj gira un ángulo de ______, por lo que puede clasificarse como un ángulo________.

c) De 1:00 a. m. a 10:00 a. m. el horario de un reloj gira un ángulo de ______, por lo que puede clasificarse como un ángulo________.

5. Traza 3 triángulos diferentes de modo que entre los ángulos de estos se identifique a lo sumo un ángulo recto y un ángulo obtuso. ¿Cuál es el menor número de ángulos agudos que pueden aparecer en los triángulos trazados?

6. Traza polígonos de 3, 4 y 5 lados. Identifica en ellos ángulos interiores agudos, obtusos y sobreobtusos.

7. María Elena horneó un pastel de forma circular que dividió en partes iguales realizando 4 cortes diametrales. ¿Qué amplitud tiene el ángulo de corte de una cuña del pastel?

Corte diametral: corte recto que se realiza pasando por el centro del círculo.

8. Selecciona entre los ángulos dados uno, dos o más con los que puedes formar un ángulo recto:

$\measuredangle A = 30°$; $\measuredangle B = 20°$; $\measuredangle C = 35°$; $\measuredangle D = 45°$; $\measuredangle E = 40°$; $\measuredangle F = 55°$; $\measuredangle G = 10°$; $\measuredangle H = 5°$

9. Tres ángulos consecutivos alrededor de un punto se mezclaron con otros dos. Identifica en cada inciso cuáles son los ángulos que no forman parte del trío de ángulos consecutivos.

a) $\measuredangle A = 180°$; $\measuredangle B = 45°$; $\measuredangle C = 95°$; $\measuredangle D = 30°$; $\measuredangle E = 85°$

b) $\measuredangle A = 120°$; $\measuredangle B = 60°$; $\measuredangle C = 120°$; $\measuredangle D = 120°$; $\measuredangle E = 75°$

c) $\measuredangle A = 270°$; $\measuredangle B = 30°$; $\measuredangle C = 15°$; $\measuredangle D = 60°$; $\measuredangle E = 90°$

9.1 ¿En cuál de estos incisos los ángulos del trío representan un tercio del ángulo completo? Argumenta tu respuesta.

10. ¿Cuál es la amplitud del menor de tres ángulos consecutivos a un lado de una recta, si se sabe que la diferencia entre la amplitud de uno de ellos y el que le sigue, es de 25°?

a) Si estos ángulos estuviesen localizados alrededor de un punto, ¿cuál sería la amplitud de cada uno de ellos?

11. Traza tres rectas que se corten en el punto O. Diferencia por colores:

a) Dos o más ángulos consecutivos a un lado de una recta.

b) Dos o más ángulos consecutivos alrededor de un punto.

c) Parejas de ángulos adyacentes.

d) Parejas de ángulos opuestos por el vértice.

Sugerencia: Usa ilustraciones diferentes para cada respuesta.

12. Completa las siguientes afirmaciones de modo que resulten proposiciones verdaderas:

a) De un par de ángulos adyacentes uno es agudo y el otro es __________.

b) De un par de ángulos adyacentes uno es recto y el otro es __________.

c) De un par de ángulos adyacentes uno mide 36°, otro 27° y el otro __________.

d) De un par de ángulos adyacentes uno tiene el doble de amplitud que el otro, estos miden __________ y __________ respectivamente.

13. Observa las figuras 5.59 y 5.60 y completa cada tabla.

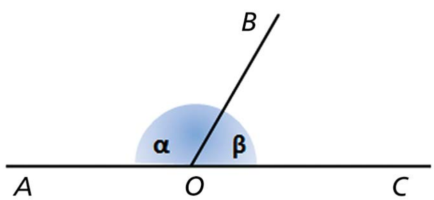


Figura 5.59

a)

α	65,23°	134,2°	15°	145,39°	179°
β					

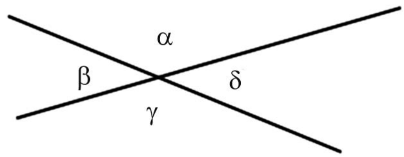


figura 5.60

b)

α	$83{,}2^0$	116^0	$137{,}9^0$	$27{,}7^0$
β				
γ				
δ				

14. Usando solamente la regla, construye y denota dos ángulos cuyas amplitudes sumen 180° y que:

a) Tengan vértice común.
b) Tengan vértices diferentes.

15. Usando solamente la regla, construye y denota dos ángulos cuyas amplitudes sean iguales y además sean:

a) De vértice común.
b) de vértices diferentes.

16. Fundamenta cada una de las siguientes proposiciones:

a) Dos ángulos agudos no pueden ser adyacentes.
b) Dos ángulos obtusos no pueden ser adyacentes.
c) Dos ángulos, uno obtuso y el otro agudo, no pueden ser opuestos por el vértice.

17. Muestra con un ejemplo que las siguientes proposiciones son falsas:

a) Si dos ángulos tienen un lado común, entonces son adyacentes.
b) Si dos ángulos tienen vértice común, entonces son adyacentes.
c) Dos ángulos adyacentes no pueden ser de igual amplitud.
d) Dos ángulos iguales son opuestos por el vértice.

18. Traza dos ángulos adyacentes cualesquiera. Construye sus respectivas bisectrices. Comprueba que estas son perpendiculares.

19. Traza dos ángulos opuestos por el vértice cualesquiera. Construye sus respectivas bisectrices. Comprueba que estas forman un ángulo llano.

20. En la figura 5.61 se cumple que $\measuredangle ABC = \measuredangle CBD$. Demuestra que $\measuredangle ABE = \measuredangle DBE$

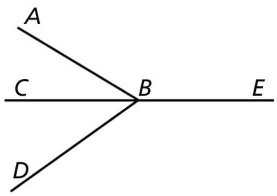


Figura 5.61

a) Describe un movimiento que transforme al $\measuredangle ABE$ en el $\measuredangle DBE$ o viceversa.

21. Haz un resumen ilustrado en tu libreta donde representes las posibles relaciones de posición entre dos ángulos:

a) Cuando dos rectas se cortan.

b) Cuando dos rectas son cortadas por una tercera.

21.1 Escribe los teoremas y recíprocos asociados a cada relación.

22. Observa con detenimiento la figura 5.62. Analiza los datos que te dan y luego trabaja para cumplir con la orden de cada inciso.

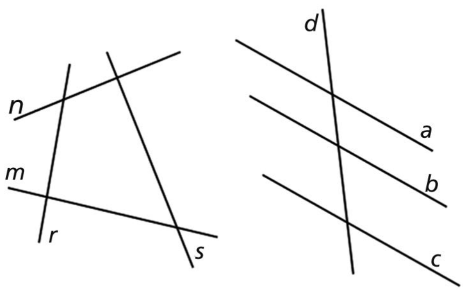


Figura 5.62

r, s, m, n, a, b, c, d son rectas, *a // b // c*

a) Reproduce la ilustración en tu libreta y denota pares de ángulos opuestos por el vértice, adyacentes, correspondientes, alternos y conjugados (al menos uno de cada tipo en cada figura de la ilustración).

b) Escoge una de las parejas de ángulos que sean correspondientes y de igual amplitud. Describe un movimiento que transforme a uno de ellos en su correspondiente.

23. Observa la figura 5.63 y fundamenta cada una de las igualdades siguientes:

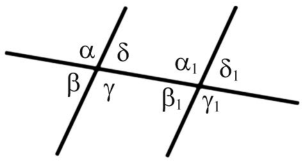


Figura 5.63

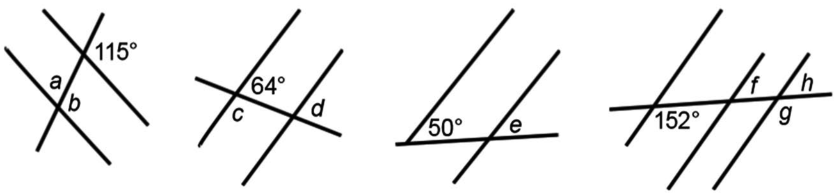
a) $\measuredangle\, \alpha = \measuredangle\, \alpha_1$

b) $\measuredangle\, \beta = \measuredangle\, \delta_1$

c) $\measuredangle\, \beta = \measuredangle\, \delta$

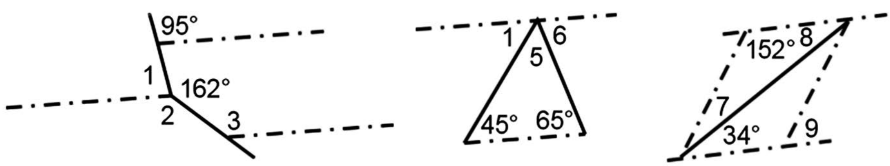
d) $\delta + \alpha_1 = 180°$

24. Observa las ilustraciones de la figura 5.64 con detenimiento. Calcula los ángulos denotados por letras, considera que las cortadas son paralelas.



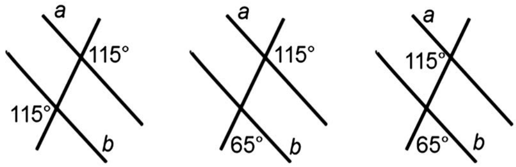
Figuras 5.64

25. Calcula los ángulos denotados por números en la figura 5.65, las líneas marcadas con puntos son paralelas.



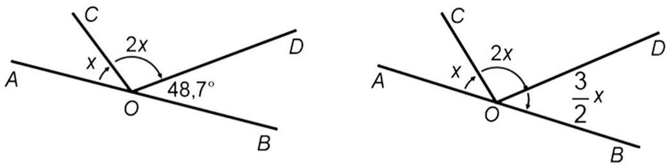
Figuras 5.65

26. Observa detenidamente la figura 5.66. Fundamenta la proposición *a // b* en cada caso.



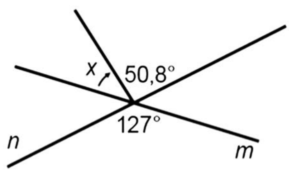
Figuras 5.66

27. Calcula las amplitudes de los ángulos destacados en la figura 5.67 (*A, O* y *B* están en la misma recta).



Figuras 5.67

28. Observa la figura 5.68 y determina la amplitud del ángulo *x* (las rectas *m* y *n* se cortan en *O*).



Figuras 5.68

5.4 Triángulos

En grados anteriores aprendiste que el polígono es una figura plana limitada por una línea poligonal cerrada. De manera particular, se trataron aquellos polígonos que dividían el plano en dos regiones: una interior y otra exterior (polígonos simples). Una recta trazada por cualquiera de sus lados nunca los separa en dos partes (convexos). Los elementos notables de un polígono son los vértices, los lados, las diagonales y los ángulos. Los polígonos se clasifican, según la cantidad de lados, en triángulos, cuadriláteros, pentágonos, entre otros.

Definición 5.5

El triángulo es un polígono de tres lados (figura 5.69).

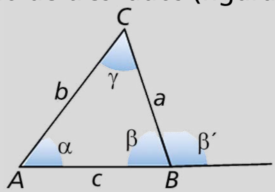


Figura 5.69

Los triángulos tienen tres vértices, tres lados y tres ángulos. Para denotar estos elementos se usan letras mayúsculas y minúsculas del alfabeto latino y letras minúsculas del alfabeto griego. En la figura anterior identificamos de manera convencional el triángulo *ABC*, con las letras que a su vez identifican sus vértices; con *a*, *b* y *c* las longitudes respectivas de los lados *BC*, *AC* y *AB*; con α, β y γ las amplitudes de los ángulos interiores cuyos vértices respectivos son *A*, *B* y *C*. Como ángulo exterior se nombra a un adyacente de cada ángulo interior y sus amplitudes se denotan α', β' y γ'.

Se considera **altura del triángulo** y se denota **h** a cualquiera de los segmentos que marca la distancia entre uno de sus vértices y el lado que a este se opone (figura 5.70).

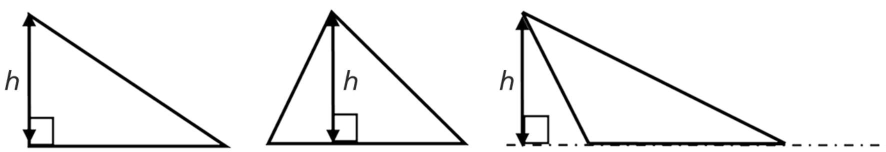


Figura 5.70

Observa en la figura 5.71 que en cada triángulo se pueden localizar tres alturas, una por cada lado, y siempre son perpendiculares a este.

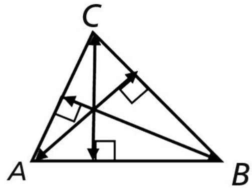


Figura 5.71

Estas notaciones son un modelo de triángulo que usaremos para facilitar su identificación.

Los triángulos se clasifican según las relaciones entre las longitudes de sus lados y según las amplitudes de sus ángulos interiores (figura 5.72).

Según las relaciones entre las longitudes de sus lados se clasifican en:

- Escalenos: lados con longitudes diferentes
- Isósceles: dos lados de igual longitud
- Equiláteros: sus tres lados son de igual longitud

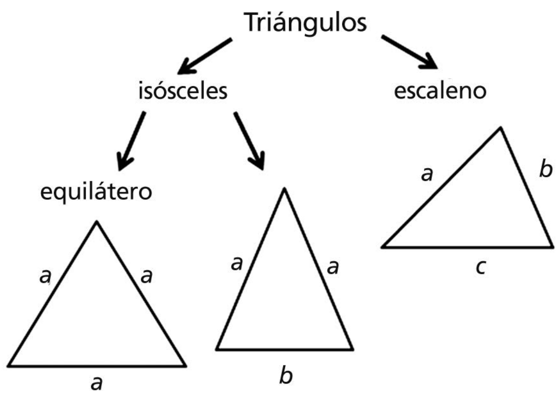


Figura 5.72

Todo triángulo equilátero es isósceles, pero ¿todo triángulo isósceles es equilátero?

Para triángulos isósceles no equiláteros se establece que su lado base es el lado desigual y sus ángulos base son los ángulos interiores con vértice en los extremos del lado base. Al tercer ángulo se le llama ángulo principal o vertical (figura 5.73).

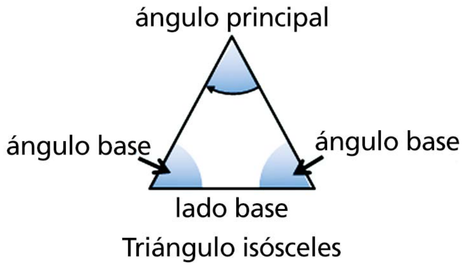


Figura 5.73

Según las amplitudes de sus ángulos interiores, los triángulos se clasifican en (figura 5.74):

- Acutángulos: sus tres ángulos son agudos
- Rectángulos: un ángulo es recto
- Obtusángulos: un ángulo es obtuso

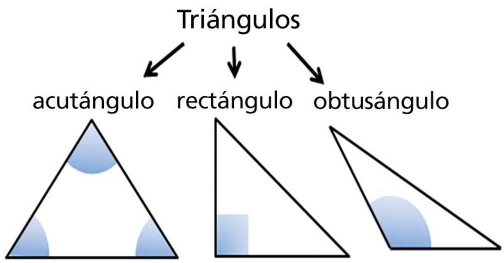


Figura 5.74

¿Un triángulo acutángulo puede ser rectángulo u obtusángulo? Para triángulos rectángulos se establece que a los lados que forman el ángulo recto se les llama catetos, y al tercero de los lados hipotenusa (figura 5.75).

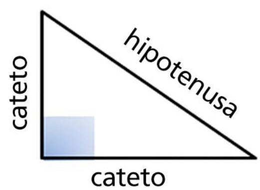


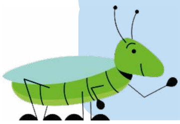
Figura 5.75

Puedes comprobar además que en el triángulo rectángulo los catetos son también alturas, y en el obtusángulo dos de sus alturas, las que corresponden a los lados del ángulo obtuso, no están localizadas dentro del triángulo.

5.4.1 Relaciones entre lados y ángulos de un triángulo. Desigualdad triangular

El estudio de los triángulos es de gran importancia para continuar tus estudios en esta área de la ciencia matemática.

Recuerda que...



En lo adelante debes prestar mucha atención, pues:

- Al lado *AB* de un triángulo, se le llama también lado de longitud *c* o lado opuesto al ángulo con vértice en *C*.
- Al ángulo interior con vértice en *C* se le llama también ángulo de amplitud γ (gamma) o ángulo opuesto al lado *AB*.

De forma similar ocurre con el resto de los lados y ángulos de cualquier triángulo.

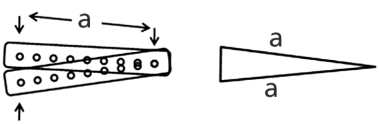
Reflexiona un instante

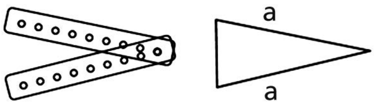
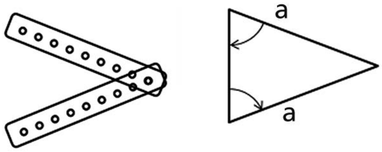
Si colocas una banda elástica entre los extremos de tu dedo índice y mayor y comienzas a separarlos, notarás que la longitud de la banda aumenta a la vez que aumenta el ángulo de separación entre tus dedos.

¿Existen relaciones entre los lados y los ángulos que forman un triángulo?

Ejemplo

De un juego de construcción o con paletas de los helados, selecciona dos varillas iguales y sujétalas por uno de los extremos sin que pierdan movilidad (figuras 5.76, 5.77, 5.78).

 **Figura 5.76**	Los orificios a los extremos generan un triángulo isósceles. La longitud de los lados iguales es *a*.

 **Figura 5.77**	Al aumentar la amplitud del ángulo principal, aumenta la longitud del lado base. Los lados iguales mantienen su longitud y los ángulos de la base mantienen su relación de igualdad de amplitudes.
 **Figura 5.78**	Un nuevo aumento en la amplitud del ángulo principal produce un nuevo aumento en la longitud del ángulo base. Los lados iguales mantienen su longitud y los ángulos base mantienen su relación de igualdad de amplitudes.

Este experimento lo puedes repetir con varillas desiguales, medir las longitudes de los lados y las amplitudes de sus respectivos ángulos opuestos. Con estos resultados podrás verificar los teoremas que se presentan a continuación.

Teorema 7

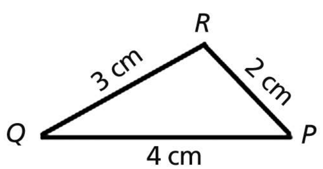
En todo triángulo, a lados iguales se oponen ángulos iguales.

El recíproco de este teorema es una proposición verdadera y, por tanto, un nuevo teorema.

Teorema 8

En todo triángulo, a ángulos iguales se oponen lados iguales. Otras relaciones se dan en los triángulos que no tienen lados iguales (escalenos).

Observa la figura 5.79:



Lado		Ángulo
$\overline{PQ}$	← se opone →	$\angle R$
$\overline{QR}$	← se opone →	$\angle P$
$\overline{RP}$	← se opone →	$\angle Q$

Figura 5.79

Mide los ángulos y ordénalos de mayor a menor, comprueba que coincide con el orden de sus respectivos lados opuestos.

Teorema 9

En todo triángulo, al mayor lado se opone el mayor ángulo.

El recíproco del teorema 9 es nuevamente un teorema.

Teorema 10

En todo triángulo, al mayor ángulo se opone el mayor lado.

¿Sabías que...?

La suma de segmentos y la suma de longitudes de segmentos están estrechamente relacionadas.

Observa la figura 5.80:

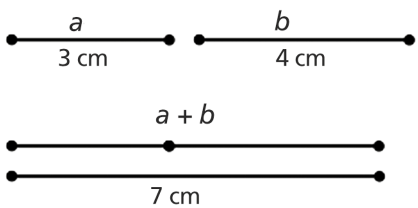


Figura 5.80

- La suma de los segmentos de longitudes *a* y *b*, es un segmento de longitud *a* + *b*.
- Las longitudes *a* y *b* son 3 cm y 4 cm respectivamente, su suma es 7 cm.

¿Con tres segmentos cualquiera se puede construir un triángulo? La respuesta a esta pregunta la puedes encontrar en el teorema siguiente:

Teorema 11

En todo triángulo, cada lado es menor que la suma de los otros dos lados.

Este teorema nos permite, anticipadamente, decidir si es posible la construcción de un triángulo conocidas las longitudes de tres segmentos.

Ejemplo

¿Se puede construir un triángulo con tres segmentos que miden 9 cm, 17 cm y 4 cm respectivamente?

Para dar respuesta a una pregunta como esta, basta verificar que, si la longitud de uno de ellos es mayor o igual que la suma de las longitudes de los otros dos, entonces no es posible la construcción del triángulo referido.

5.4.2 Teoremas relativos a los ángulos de un triángulo

Si construyes un triángulo de cartulina y recortas los ángulos de sus puntas, notarás que siempre es posible colocarlos de forma consecutiva a un mismo lado de una recta (figura 5.81).

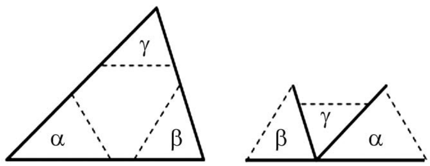


Figura 5.81

¿A qué se debe esto? Una respuesta clara la encontrarás en el siguiente teorema.

Teorema 12

La suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo es de 180°.

Demostración

Sea *ABC* un triángulo cualquiera y *s* la paralela al lado *AB* que pasa por *C* (figura 5.82).

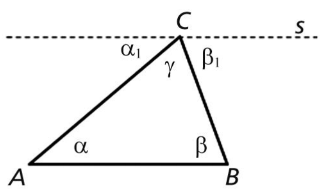


Figura 5.82

1. $\measuredangle\ \alpha_1$ y $\measuredangle\ \alpha$ son alternos entre paralelas (según definición)
2. $\measuredangle\ \beta_1$ y $\measuredangle\ \beta$ son alternos entre paralelas (según definición), por tanto:
   a) $\measuredangle\ \alpha_1 = \measuredangle\ \alpha$ y $\measuredangle\ \beta_1 = \measuredangle\ \beta$ (teorema de los ángulos alternos entre paralelas)
   b) $\measuredangle\ \alpha_1$, $\measuredangle\ \beta_1$ y $\measuredangle\ \gamma$ son consecutivos a un lado de la recta *s* (según definición)
   c) $\measuredangle\ \alpha_1 + \measuredangle\ \beta_1 + \measuredangle\ \gamma = 180°$ (teorema de los ángulos consecutivos a un lado de la recta) l.q.q.d.

Observa la figura 5.83 con detenimiento.

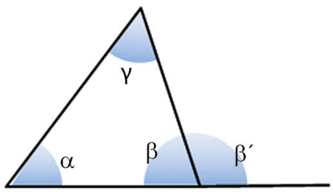


Figura 5.83

¿Encuentras alguna relación entre un ángulo exterior y los interiores de un triángulo?

- $\measuredangle\ \beta'$ es exterior, $\measuredangle\ \beta$ es interior, $\measuredangle\ \beta'$ y $\measuredangle\ \beta$ son adyacentes.
- $\measuredangle\ \alpha$ y $\measuredangle\ \gamma$ son interiores, y no son adyacentes al $\measuredangle\ \beta'$.

En el teorema que sigue se enuncia una relación muy importante que se cumple entre un ángulo exterior y los interiores no adyacentes a él.

Teorema 13 (sobre los ángulos exteriores)

En todo triángulo, la amplitud de un ángulo exterior es igual a la suma de las amplitudes de los ángulos interiores no adyacentes a él.

La demostración de este teorema se basa en la propiedad común de los ángulos adyacentes, la de los ángulos interiores (sus amplitudes suman 180°) y las propiedades del cálculo aritmético que aplicaste para resolver ecuaciones.

Si, $\measuredangle\alpha + \measuredangle\beta + \measuredangle\gamma = 180°$, y $\measuredangle\beta + \measuredangle\beta' = 180°$, entonces $\measuredangle\alpha + \measuredangle\beta + \measuredangle\gamma = \measuredangle\beta + \measuredangle\beta'$.

Si en la tercera ecuación restas $\measuredangle\beta$ de ambos miembros, obtienes la igualdad $\measuredangle\alpha + \measuredangle\gamma = \measuredangle\beta'$, de la que puedes interpretar que la amplitud de un ángulo exterior es la suma de las amplitudes de los ángulos interiores no adyacentes a él.

5.4.3 Área del triángulo

Recuerda que...

El área de un rectángulo se calcula multiplicando el largo por el ancho (base por altura) mediante la fórmula $A = b \cdot a$ ($A = b \cdot h$).

En el caso particular del cuadrado, la fórmula se reduce a $A = b^2$. Ver la figura 5.84.

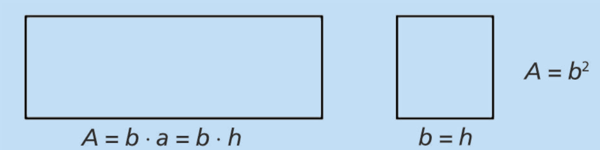
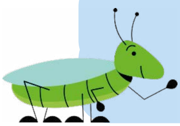


Figura 5.84



En la práctica, cuando se traza una de las diagonales de un rectángulo, se obtienen dos triángulos iguales, o sea, de igual superficie. ¿Cómo calcular el área de uno de esos triángulos?

Observa detenidamente la figura 5.85:

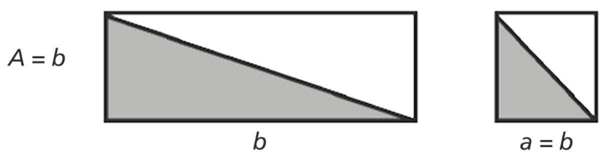
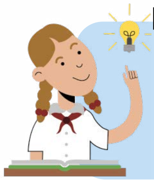


Figura 5.85

Cada triángulo ocupa la mitad de la superficie que el rectángulo donde se originó. Además, el triángulo y su correspondiente rectángulo mantienen en común el lado de la base y la altura.

Luego, para triángulos como los ilustrados, el cálculo del área es la mitad del área del rectángulo: $A = \frac{b \cdot h}{2}$



Reflexiona un instante

Como puedes observar, estos son triángulos rectángulos, ¿se cumplirá lo mismo para los acutángulos y los obtusángulos?

Confecciona varios rectángulos de papel. En cada uno de ellos repite las instrucciones siguientes:

1. Elige un punto cualquiera (*y*) en uno de sus lados.
2. Traza el triángulo determinado por este punto y los extremos del lado opuesto.
3. Recorta el triángulo trazado. Clasifícalo según la amplitud de sus ángulos.
4. Comprueba que con los triángulos rectángulos del recorte puedes cubrir toda la superficie del triángulo trazado.

Con la experiencia realizada puedes concluir que para todo triángulo se cumple que su área es igual a la mitad del área del rectángulo con el que tiene en común el lado de la base y la altura correspondiente a este.

En grados posteriores obtendrás más conocimientos que te permitirán reafirmar que para calcular el área de un triángulo (figura 5.86), puedes usar la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$

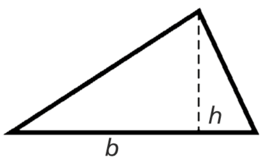


Figura 5.86

Ejercicio resuelto

El lado de la base de un triángulo mide 6,0 cm y la altura correspondiente a dicho lado 4,0 cm. ¿Cuál es el área del triángulo?

b = 6,0 cm; h = 4,0 cm

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A = \frac{6{,}0cm \cdot 4{,}0cm}{2} = \frac{24{,}0cm}{2} = 12cm$$

Respuesta: El área del triángulo es de 12 cm^2

A partir de la fórmula para calcular el área del rectángulo puedes obtener otras para calcular el área de los paralelogramos, trapecios, entre otros. Puedes experimentar en la búsqueda de estas fórmulas a partir de tus experiencias para componer y descomponer el rectángulo y otras figuras en partes.

5.5 Ejercicios del capítulo

1. Clasifica los triángulos representados en la figura 5.87 atendiendo a la longitud de los lados y a la amplitud de sus ángulos. Comprueba haciendo uso de los instrumentos de medición a tu alcance.

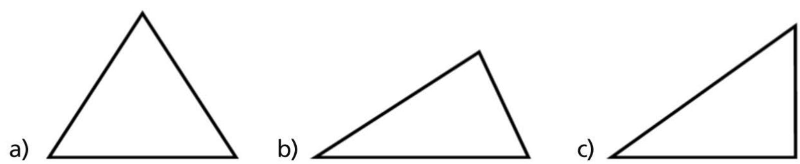


Figura 5.87

2. Traza triángulos que sean:

a) Rectángulo e isósceles a la vez
b) Equilátero y rectángulo a la vez
c) Isósceles no equilátero a la vez
d) Obtusángulo e isósceles a la vez

2.1 Si en alguno de los incisos no te resulta posible trazar el triángulo. Argumenta tu respuesta.

3. Localiza en un sistema de coordenadas rectangulares los puntos A (2;1) y B (6;1). Determina las coordenadas de otros tres puntos C, D y E de modo que:

a) El triángulo *ABC* sea rectángulo e isósceles.
b) El triángulo *ABD* sea isósceles y acutángulo.
c) El triángulo *ABE* sea obtusángulo y escaleno.

4. Copia en tu cuaderno la tabla siguiente. Escribe una cruz en la casilla que corresponda a un triángulo que se pueda clasificar a la vez según lo indican las celdas verticales y horizontales.

Triángulo	**Escaleno**	**Isósceles**	**Equilátero**
Acutángulo			
Rectángulo			
Obtusángulo			

5. Construye los triángulos isósceles que se te indican. Todos tienen en común su base: $\overline{AB} = 2{,}8$ cm y además:

a) $\overline{AC} = 3{,}0$ cm
b) $\overline{AC} = 2{,}8$ cm
c) $\overline{BC} = 4{,}0$ cm

6. Completa las siguientes afirmaciones de modo que resulten proposiciones verdaderas:

a) Los lados de un triángulo equilátero cuyo perímetro es de 72,3 m miden _____.
b) Si un triángulo es equilátero, entonces también es __________.
c) Si los lados iguales de un triángulo isósceles miden 3,0 dm y su perímetro es de 100 cm, entonces su lado base mide _____ m.
d) Si el lado base de un triángulo isósceles mide 40 cm y su perímetro es de 12 dm, entonces sus ángulos interiores miden _________.
e) Si un triángulo rectángulo es isósceles entonces su ángulo principal mide ___ y los de la base miden ____.
f) Las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo son 92,5°, 27,3° y 78,2° respectivamente. De acuerdo

con la clasificación, según sus ángulos el triángulo es ___________ y según sus lados es __________.

g) En todo triángulo rectángulo su mayor lado es _______.

h) Para construir un triángulo con tres varillas, dos de las cuales miden 3 cm y 5 cm, la tercera debe alcanzar más de _____ cm.

7. Construye, si es posible, un triángulo cuyos lados miden:

a) 8 cm, 7 cm y 6 cm

b) 3 cm, 5 cm y 8 cm

c) 1,1 dm, 9 cm y 5 cm

d) 4 cm, 6 cm y 12 cm

e) 2 dm, 10 cm y 1,2 dm

7.1 Argumenta tu respuesta cuando no te sea posible construir el triángulo.

8. Traza el mayor número posible de triángulos diferentes al usar tres de los segmentos cuyas longitudes se dan a continuación:

a = 4 cm b = 9,5 c = 7 cm d = 5 cm e = 2 cm

9. Tomando como diagonal un segmento $\overline{AC}$ de 7 cm:

a) Construye un paralelogramo *ABCD* cuyos lados iguales midan 3 cm y 5 cm respectivamente.

b) Construye un trapezoide simétrico *ABCD* cuyos lados iguales midan 3 cm y 5 cm respectivamente.

9.1 Argumenta por qué no se hubieran podido resolver los incisos a y b si los lados iguales midiesen 3 cm y 4 cm respectivamente.

10. Calcula la amplitud de los ángulos identificados por letras minúsculas en las figuras 5.88 y 5.89.

a)

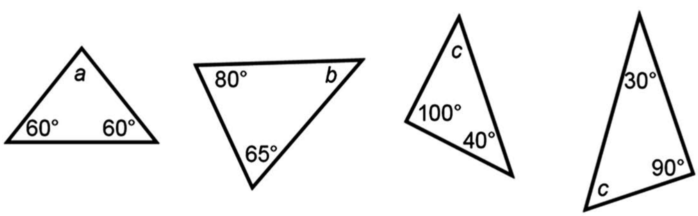


Figura 5.88

b)

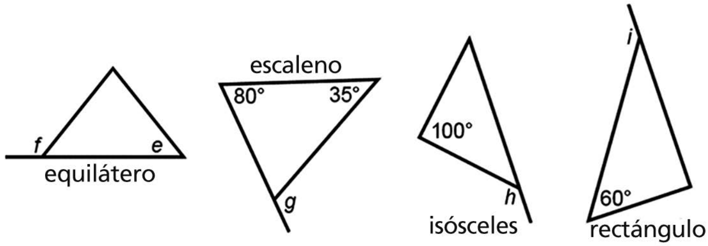


Figura 5.89

11. En un triángulo rectángulo, uno de sus ángulos exteriores mide 141° (127°, 135°). Calcula la amplitud de sus ángulos interiores.

12. En un triángulo isósceles, el ángulo exterior al ángulo principal mide 132° (128°, 142°). Calcula la amplitud de sus ángulos interiores.

13. Muestra, a través de un ejemplo, que no siempre se cumple que la amplitud de un ángulo exterior es mayor que cualquiera de los ángulos interiores.

14. Argumenta: El ángulo suma de los ángulos que se oponen a los catetos en un triángulo rectángulo es recto.

15. ¿Por qué los ángulos base de un triángulo isósceles no pueden ser obtusos (rectos)?

16. Completa la siguiente tabla en la que α, β y γ son las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo.

Amplitudes			**Clasificación**	
α	β	γ	Según sus ángulos	Según sus lados
	75°	30°		
72°	65°			
31°		59°		
				Equilátero
	100°			Isósceles
		90°		Isósceles

CAPÍTULO 6

Ejercicios

En este capítulo encontrarás ejercicios variados. Ten en cuenta que para resolverlos debes poner en práctica lo aprendido en todos los grados de la primaria. Algunos de ellos te servirán para entrenarte y poder participar en concursos y otros eventos que pudieran ser de tu interés.

1. Analiza y responde con la cooperación de otros educandos del aula:

   a) ¿Cómo podrías determinar si un número es divisible por 6 aplicando las reglas de divisibilidad por 2 y por 3?

   b) María dice:

   Un número que es divisible por 4 también es divisible por 2. Puedo afirmar entonces que ese número, al ser divisible por 4 y por 2, también es divisible por 8.
   Pedro dice que María está equivocada porque 124 es divisible por 2 y por 4, sin embargo, no es divisible por 8.
   ¿Quién se equivoca y cuál es su error?

   c) Escribe un número de 5 cifras que sea divisible por 4 y tenga los dígitos 0, 1, 3, 5 y 6. Investiga si hay más de un número con estas características.

   d) Escribe seis números de cinco cifras: tres que sean divisibles por 9 y otros tres que no lo sean.

2. Construye con tus compañeros de estudio una tabla de 10 filas y diez columnas que contenga los números naturales del 1 al 100, ordenados de izquierda a derecha y de arriba a abajo en sus celdas. Aplica el siguiente procedimiento ideado por Eratóstenes, matemático, físico y astrónomo bibliotecario de Alejandría:

- Tacha el 1.
- No taches el 2, pero a partir de él tacha todos sus múltiplos.
- Haz lo mismo que has hecho con el 2 pero con el 3, el 5 y el 7.

a) ¿Qué puedes conjeturar sobre los números que han quedado sin tachar?

3. Descompón los números $a = 84$ y $b = 90$ en factores primos. Responde:

a) ¿Cuáles son los divisores comunes de a y b?
b) ¿Qué números primos son divisores comunes de a y b?
c) ¿Cuál es el mcm de a y b?

4. ¿Cuál es la menor longitud de una cinta que se puede dividir en pedazos de 8 cm, 9 cm o 15 cm sin que sobre ni falte nada, y cuántos pedazos de cada longitud se podrían sacar de esa cinta?

5. Un tren sale de La Habana para Santiago de Cuba cada 4 días, otro cada 5 y otro cada 9. Si salen los tres hoy, ¿cuándo volverán a salir los tres el mismo día?

6. El perímetro de la figura 6.1 es de 32 cm y se ha dividido en cuadrados iguales. Marca con una x la opción que indica, ¿cuál es el perímetro de la figura sombreada?

a) _____ 24 cm b) ____ 16 cm c)_____ 32 cm
d) ____ 20 cm

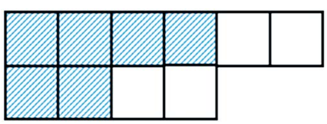


Figura 6.1

7. ¿Cuál es la menor capacidad posible de un tanque que se puede llenar en un número (natural) exacto de minutos por cualquiera de tres llaves que vierten 2 L por min, 30 L en 2 min y 48 L en 3 min?

8. En la búsqueda de expresiones que conducen a números primos, el jurista francés Pierre de Fermat, famoso por sus conjeturas matemáticas, verificó que los números de la forma $2^n + 1$ son primos, si $n = 2, 4, 8$, y 16, así que supuso que siempre que n es una potencia de 2, el número de la forma $2^n + 1$ es primo. Esta proposición más general resultó ser falsa, pues como contraejemplo se pudo calcular que $2^{32} + 1 = 4\ 294\ 967\ 297$, divisible por 7.

a) Investiga si para los cinco primeros números naturales n es $n \cdot n + n + 11$ un número primo.
b) Sustituye n por 11 y determina si el resultado es también un número primo.
c) ¿Qué puedes afirmar sobre la proposición: Para cada número natural n, es $n \cdot n + n + 11$ un número primo?

9. En un instituto de investigación científica trabajan 67 personas y todas conocen otros idiomas. De estas, 47 conocen el idioma inglés, 35 el ruso y 23 ambos idiomas. ¿Cuántas personas conocen un idioma que no es el inglés ni el ruso?

10. De 30 educandos de una misma aula, hay 21 que pueden montar bicicleta, 12 que saben nadar y siete que pueden hacer las dos cosas. ¿Cuántos educandos no saben nadar ni montar bicicleta?

11. Determina cuáles de los siguientes números son divisibles por 2, 3, 4, 6, 8 y 9 y fundamenta tu decisión en cada caso.

459; 638; 798; 819; 856;1 028; 2 431; 2 736; 9 632

12. ¿Cuál es el menor número que debe añadirse a 2 486 132 para convertirlo en un número divisible por 4 125?

13. El producto de todos los números naturales del 1 al 100, ambos incluidos, ¿en cuántos ceros acaba?

14. Resuelve el siguiente crucigrama numérico (en cada casilla va un solo dígito) (figura 6.2).

	1	2	3	4
A				
B				
C				
D				

Figura 6.2

Horizontales

A. Múltiplo de 4 y 7. Sus únicos divisores son 1 y 7
B. Múltiplo de 8 y 9
C. Múltiplo de 2 y de 3. Antecesor de 10^2
D. Divisor de todos los números. Doble de 2

Verticales

A. Divisor de 432
B. Divisible entre 12 y 7. Antecesor del menor número primo
C. Su sucesor es múltiplo de 2 y de 5
D. Mayor que 6 y menor que 9. Mínimo común múltiplo de 2 y de 47

¿Sabías que...?

Para determinar un patrón numérico, primero debes analizar las relaciones que se dan entre los números que aparecen en cada figura. Esto se logra generalmente por ensayo error, o sea, probando con las diferentes relaciones numéricas y operaciones de cálculo que conoces.

Ejemplo

Halla el valor de *m* y *n* en la figura 6.3.

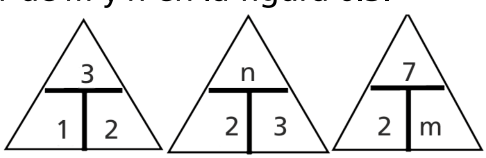


Figura 6.3

Para determinar el patrón numérico, analizamos la figura que tiene completa la información:

Primera suposición: Se trata de la colocación de tres números consecutivos: 1, 2 y 3, por lo que cabe la posibilidad de que los dos restantes sean similares al primero. En ese caso n = 4, pero esta lógica queda rota en la tercera figura, pues para la sucesión 2, *m*, 7, no hay ningún número natural m, que la transforme en una sucesión de números consecutivos. Por tanto, esta suposición queda descartada.

Segunda suposición: Se trata de tríos ordenados de sumas, los sumandos están en la base del triángulo. Según esta suposición $n = 2 + 3 = 5$ y $m = 7 - 2 = 5$. Al no encontrar contradicción en el proceso de cálculo con la suposición inicial, se asume la respuesta como correcta.

Cuando dos o más suposiciones son posibles, todas son consideradas como respuestas correctas para el ejercicio. Las figuras usadas pueden ser diversas pero el procedimiento es el mismo.

15. Determina el patrón numérico empleado en cada triángulo y completa las secuencias de triángulos que aparecen en las figuras 6.4, 6.5, 6.6:

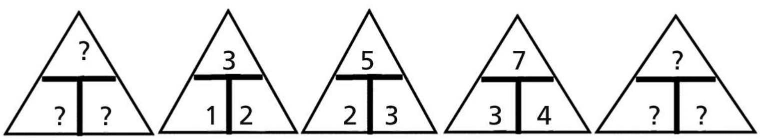
a) 

Figura 6.4

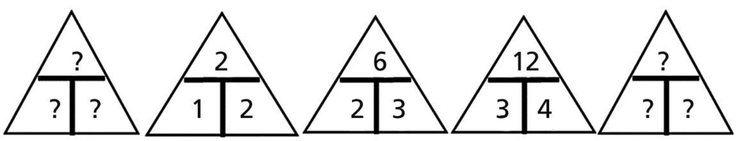
b) 

Figura 6.5

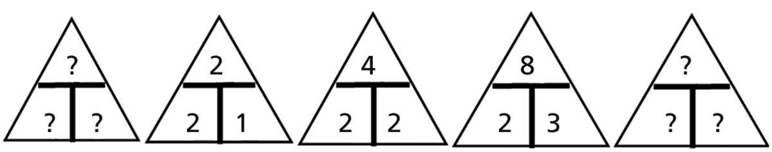
c) 

Figura 6.6

16. Completa las figuras numéricas siguiendo el patrón numérico del ejemplo (figura 6.7):

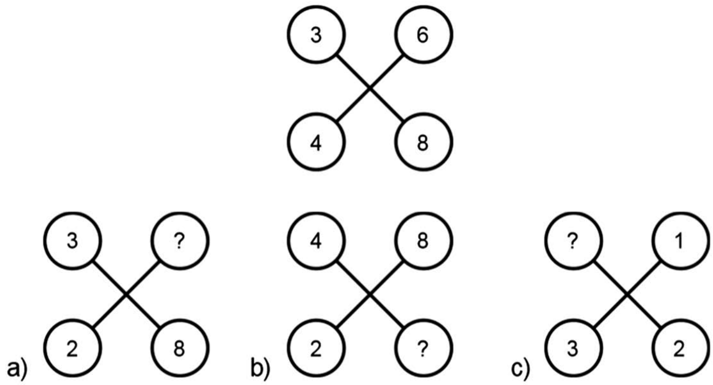


Figura 6.7

17. ¿Se puede obtener el número de frijoles que contiene un jarro con capacidad de 1 L contando solo hasta 10? De creerlo posible, explica cómo se puede lograr.

18. Si te preguntaran:

a) ¿Cuántas decenas (centenas) se pueden formar con 3 276 unidades?
b) ¿Cuál es el mayor número de decenas (centenas) que se puede formar con 3 276 unidades?
c) ¿Para cuál de esas preguntas solo es posible una repuesta? Argumenta.

19. Escribe la fracción que corresponde a cada parte en que ha sido dividido el cuadrado mayor (figura 6.8). En tu respuesta considera que el cuadrado mayor representa la unidad.

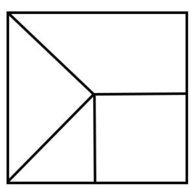


Figura 6.8

a) ¿Qué fracciones darías como respuesta si consideras como unidad al menor de los cuadrados que aparece en la ilustración?

20. Escribe una igualdad combinando operaciones y números, de modo que en el miembro izquierdo solo aparezcan las cifras básicas 3 y 5. El miembro derecho es 1.

21. Con dos recipientes de 5 L y 3 L respectivamente de capacidad, determina la medición de 1 L de cualquier líquido sin hacer uso de ningún otro recipiente.

22. Con dos varillas de 5 cm y 3 cm respectivamente de longitud, obtén una varilla de 1 cm sin hacer uso de ningún instrumento de medida.

23. Juan mide la longitud de una vara y da como resultado de su medición 3,0 cm; Pedro mide la misma vara y da como resultado 3 cm. ¿Cuál de ellos logró mayor exactitud al medir? Argumenta tu respuesta.

24. Tomando como modelo una caja en forma de ortoedro, cuyas dimensiones son 6,4 m de largo, 36 dm de ancho y 260 cm de altura, se construyó otra similar cuyas dimensiones se corresponden con la mitad de las dimensiones de esta. ¿Cuántas veces cabe la menor dentro de la mayor? Muestra que tu respuesta es correcta apoyándote en tus conocimientos de numeración y(o) cálculo.

25. Se sabe que el rectángulo ilustrado (figura 6.9), representa $\frac{1}{4}$ del rectángulo unidad.

Dibuja el rectángulo unidad. ¿Hay una sola posibilidad de realizar este ejercicio?

Figura 6.9

26. Realiza los cálculos siguientes empleando procedimientos ventajosos:

a) Halla la suma de 2 325; 584; 2 325; 2 325 y 584.
b) Halla la suma de 999; 1 002; 998 y 1 001.
c) Halla la suma de 29, 26, 30, 28, 25 y 27.

27. Un educando, al pedírsele que hallara mentalmente el producto de 48 por 0,5, convirtió 0,5 en $\frac{1}{2}$. Después determinó $\frac{1}{2}$ de 48 y obtuvo como resultado 24. Frente a esto, otro educando multiplicó 0,5 por 48, es decir, multiplicó 5 por 48 obteniendo 240 y colocó la coma decimal para llegar a la respuesta: 24,0. ¿Qué vía consideras es la más rápida y mejor razonada? ¿Por qué?

28. Al preguntar a mi abuelo la hora, este me respondió: Es la una y cuarto de la tarde.

a) ¿Qué significa la expresión subrayada en el texto?
b) ¿Qué ángulo forman las manecillas del reloj a esa hora?

29. A un reloj mecánico de pulsera se le ha desprendido el minutero. ¿Es posible determinar (calcular) la hora aproximada que marca este reloj conociendo la posición del horario respecto a la escala de tiempo? Explica con un ejemplo.

30. Observa con detenimiento la tabla siguiente:

	A	B	C
1	x	$\frac{x+4}{2}$	
2	0	2	
3	2	3	
4	4	4	1
5			3
6			5

a) ¿En qué fila las columnas B y C igualan sus valores?
b) ¿Cuál de las expresiones siguientes va en la casilla 1C? Encierra en un círculo la respuesta correcta.

$2x - 7;\ \ x - 3;\ \dfrac{x}{2} + 1$

c) ¿Qué tienen en común las casillas 2C y 3C?

31. La torta de cumpleaños repartida en la fiesta de Ramón fue cortada según se muestra en la figura 6.10.

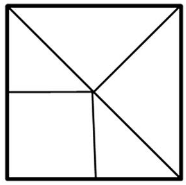


Figura 6.10

31.1 Marca con una x la afirmación correcta:

a) ___ La torta fue fraccionada.

b) ___ A 3 de las 5 partes corresponde la misma fracción.

c) ___ Tres partes resultaron ser iguales.

d) ___ Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

31.2 Sin realizar otro corte, ¿cuántos niños recibirían igual porción de la torta ¿Qué parte de la torta sería?

31.3 ¿Cuál es el menor número de cortes que deben hacer a la torta para que 16 niños reciban igual cantidad?

32. A Mario no le funcionan las teclas para introducir los datos numéricos 4 y 6 en su calculadora. Pero él asegura que eso no le impide realizar el cálculo que quiera, haciendo uso de esta. ¿Estás de acuerdo con Mario? Argumenta tu posición.

33. Para cuatro ángulos de amplitudes α, β, γ, δ, se cumple: $\alpha = \beta$, $\gamma = \delta$ y $\alpha > \delta$.

33.1 Marca con una x la igualdad que es correcta.

a) ___ $\alpha - \gamma = \delta - \beta$

b) ___ $\beta - \delta = \alpha - \gamma$

c) ___ $\delta - \beta = \alpha - \gamma$

d) ___ $\gamma - \alpha = \delta - \beta$

32.2 Marca con una x las igualdades correctas.

a) ___ $\alpha = \beta + \delta - \gamma$

b) ___ $\alpha = \beta - \delta - \gamma$

c) ___ $\alpha = \beta + \delta + \gamma$

d) ___ $\alpha = \beta + \gamma - \delta$

34. El reloj marca las 3:00 p. m., en algo más de 15 min el horario y el minutero van a coincidir una vez más y en un período menor a este tiempo el minutero habrá sobrepasado al horario formando con este un ángulo de 75°. ¿A qué hora sucederá esto último? (figura 6.11).

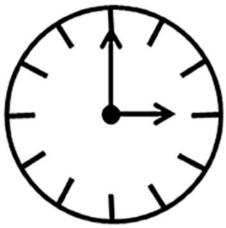


Figura 6.11

35. Las dimensiones exteriores de un marco para fotos son 19 cm y 14 cm respectivamente (figura 6.12). El marco tiene 2 cm de ancho. ¿Cuáles deben ser las dimensiones y la superficie de la mayor de las fotografías impresas que se puede colocar en un marco como este?

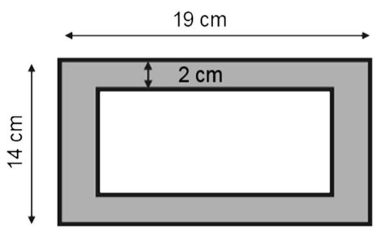
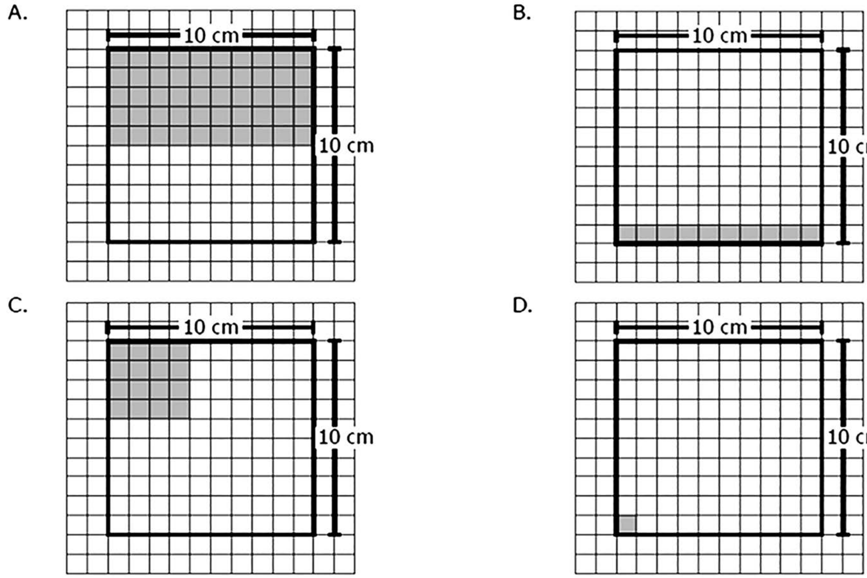


Figura 6.12

36. Observa con detenimiento las imágenes dadas en la figura 6.13 y responde:

a) ¿Cuál de las figuras sombreadas dentro del cuadrado tiene un área de 1 cm²?

b) ¿Cuál de las figuras sombreadas dentro del cuadrado tiene una superficie superior a 0,1 dm² e inferior a 0,5 dm²?



Figuras 6.13

37. En un almacén se agruparon cajas iguales, como la que se muestra en la figura 6.14.

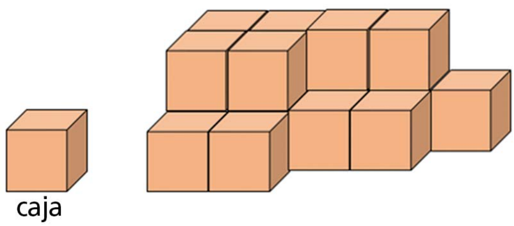


Figura 6.14

Marca con una x la opción que indica, ¿cuántas cajas se agruparon?

a) ____18 b) ____9 c) ____17 d) ____11

38. Los rectángulos A y B se han rellenado con cuadrados, todos de 1 cm^2; algunos de ellos visibles y otros no (figura 6.15).

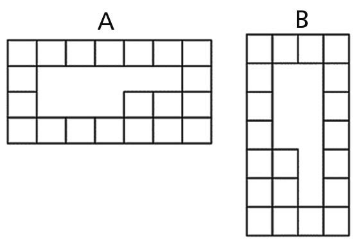


Figura 6.15

Indica con una x cuál de las siguientes proposiciones es verdadera.

a)___ El área de la figura A es mayor que el de la figura B.

b)___ Ambas figuras tienen la misma cantidad de cuadraditos de un centímetro cuadrado.

c)___ El área de la figura B es mayor que el de la figura A.

d)___ La figura B tiene mayor perímetro que la figura A.

39. En el parque de la comunidad sacaron algunas baldosas rotas. Observa la figura 6.16 y marca con una x la opción que indica el número de baldosas nuevas que hay que comprar:

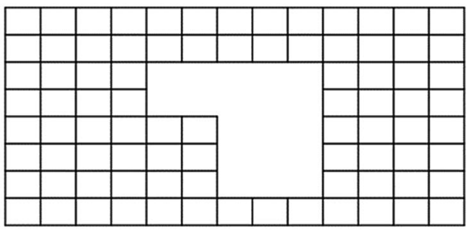


Figura 6.16

1) ___ 25 2) _____16 3) ____26 4) _____27

40. En cada caso marca con una x la opción que consideres correcta. Explica a tus compañeros los argumentos de tu selección:

a) Al duplicar la longitud de un par de los lados opuestos de un rectángulo:

___ se mantiene su superficie y también su forma.

___ se duplica su superficie y se mantiene su forma.

___ disminuye su superficie a la mitad y pierde su forma.

___ se duplica su superficie y pierde su forma.

b) Al duplicar la longitud de los lados de un rectángulo:

___ se mantiene su superficie y también su forma.

___ se duplica su superficie y pierde su forma.

___ disminuye su superficie a la mitad y pierde su forma.

___ se cuadriplica su superficie y se mantiene su forma.

c) Si se duplica la altura que corresponde al lado base de un triángulo:

___ se mantiene su superficie y también su forma.
___ se duplica su superficie y se mantiene su forma.
___ disminuye su superficie a la mitad y pierde su forma.
___ se duplica su superficie y pierde su forma.

41. Observa la figura 6.17:

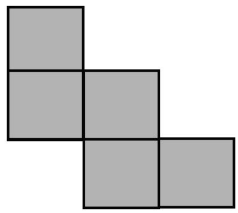


Figura 6.17

a) ¿Cuál de las siguientes figuras (figura 6.18), tiene la misma forma y la misma área que la figura anterior?

Figura 6.18

b) Si se amplía la figura dada (figura 6.19), duplicando la medida de sus lados. ¿Cuál de las siguientes figuras correspondería a la ampliación realizada?

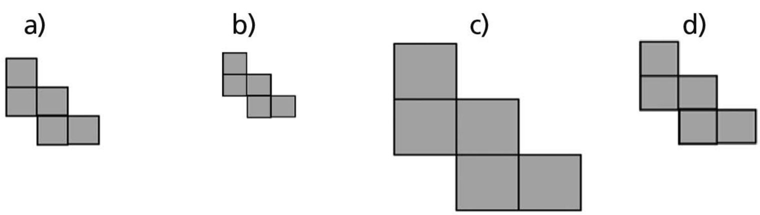


Figura 6.19

¿Sabías que...?

Entre las propiedades que cumplen el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo se encuentran:

Si multiplicas cada número natural a y b por un tercer número natural $c \neq 0$, entonces el mcd (a; b) y el mcm (a; b) quedan multiplicados por dicho número:

$a \cdot b$ = mcd (a; b) · mcm (a; b)

42. El mcd (48; 36) = 12 y el mcm (48; 36) = 144. Halla los términos de cada una de las sucesiones siguientes:

a) mcd (48 · 2; 36 · 2), mcd (48 · 3; 36 · 3), mcd (48 · 4; 36 · 4), mcd (48 · 5; 36 · 5)…

b) 12 · 2; 12 · 3; 12 · 4; 12 · 5;…

c) mcm (48 · 2; 36 · 2), mcm (48 · 3; 36 · 3), mcm (48 · 4; 36 · 4), mcm (48 · 5; 36 · 5)…

d) 144 · 2; 144 · 3; 144 · 4; 144 · 5;…

Comenta acerca de la correspondencia término a término que se da entre las sucesiones de los incisos a) y b) y entre los incisos c) y d).

Sugerencia: realizar en equipos

43. Escribe una fracción $\frac{a}{b}$ para la que se cumpla:

a) mcd (a; b) = 15 y es equivalente a la fracción $\frac{3}{8}$.

Sugerencia: aplica la propiedad 1 relativa al máximo común divisor y la propiedad fundamental de las fracciones equivalentes.

b) $\frac{a+5}{b+9}$ es equivalente a la fracción $\frac{3}{8}$.

Sugerencia: aplica la propiedad fundamental de las fracciones equivalentes.

44. ¿Cuál es el menor número natural que dividido por 20, 27 y 30 deja como resto 9?

Sugerencia: repasa el concepto de división con resto.

¿Cuál es el menor número natural que multiplicado por 3 780 da como resultado un cuadrado perfecto?

Sugerencia: Analiza la regularidad en las descomposiciones en factores primos en una sucesión de cuadrados perfectos.

45. Las dimensiones de un terreno rectangular son 566 m y 1 084 m respectivamente. Se quiere rodear por una línea de árboles plantados a 3 m del borde, de modo que haya un árbol en cada esquina del terreno y que la distancia entre dos árboles consecutivos cualquiera sea la mayor posible. ¿Cuántos árboles se necesita plantar?

Sugerencia: modela la situación con números menores.

¿Sabías que...?

Una sencilla regla de cálculo te puede ayudar a resolver problemas en los que se relacionan proporcionalmente hasta tres magnitudes. Si puedes reconocer en el texto del problema que dos magnitudes dadas son directa o inversamente proporcionales sería suficiente para llegar a la respuesta siguiendo esta regla.

Pon atención a la manera ilustrada de proceder en los ejemplos siguientes:

Problema 1

El peso de 200 hojas de papel de 230 cm^2 de área es de 270 g. ¿Cuánto pesan 460 hojas de papel del mismo material y de 440 cm^2 de área?

Para modelar el problema se recomienda hacerlo con un modelo tabular:

Cantidad de hojas (u)	Superficie (1 cm^2)	Masa (1 g)
200↑	230↑	270↑
460	440	x

Indicamos con flechas el tipo de proporcionalidad de las magnitudes respecto a la que contiene la incógnita, en la que colocaremos la flecha con sentido desde la variable hacia el dato correspondiente. Como la superficie de la hoja es directamente proporcional a su masa, en esa columna se coloca la flecha con igual sentido que la primera. De igual modo, como la cantidad de hojas es directamente proporcional a la masa de la hoja, la flecha que corresponde a dicha columna tiene el mismo sentido que las anteriores. En este caso se cumple:

$$x = \frac{270 \cdot 440 \cdot 460}{200 \cdot 230} = \frac{27 \cdot 44 \cdot 46}{2 \cdot 23} = 27 \cdot 22 \cdot 2 = 1188$$

Respuesta: Las 480 hojas pesan 1 188 g.

Problema 2

Si una persona camina a razón de 48 pasos por minuto con pasos de 60 cm demora 15 min en recorrer cierta distancia. ¿Qué tiempo se demora en el regreso si lo hace a razón de 36 pasos por minuto con pasos de 40 cm?

Se modela de forma similar que en el problema 1

Pasos por minuto (u)	Longitud del paso (1 cm)	Tiempo (1 min)
48$\downarrow$	60$\downarrow$	15$\downarrow$
36	40	x

Las magnitudes pasos por minuto y longitud del paso son inversamente proporcionales a la magnitud tiempo que demora en hacer el mismo recorrido; por tanto, sus flechas van en sentido contrario que en la magnitud tiempo. En este caso se calcula:

$$x = \frac{15 \cdot 60 \cdot 48}{36 \cdot 40} = \frac{15 \cdot 3 \cdot 48}{36 \cdot 2} = 15 \cdot 2 = 30$$

Respuesta: Demora en el regreso 30 min.

Problema 3

Un tren recorre una cierta distancia en 110 min a una velocidad de 70 km/h. ¿Qué tiempo demora en recorrer el doble de esa distancia a una velocidad de 55 km/h?

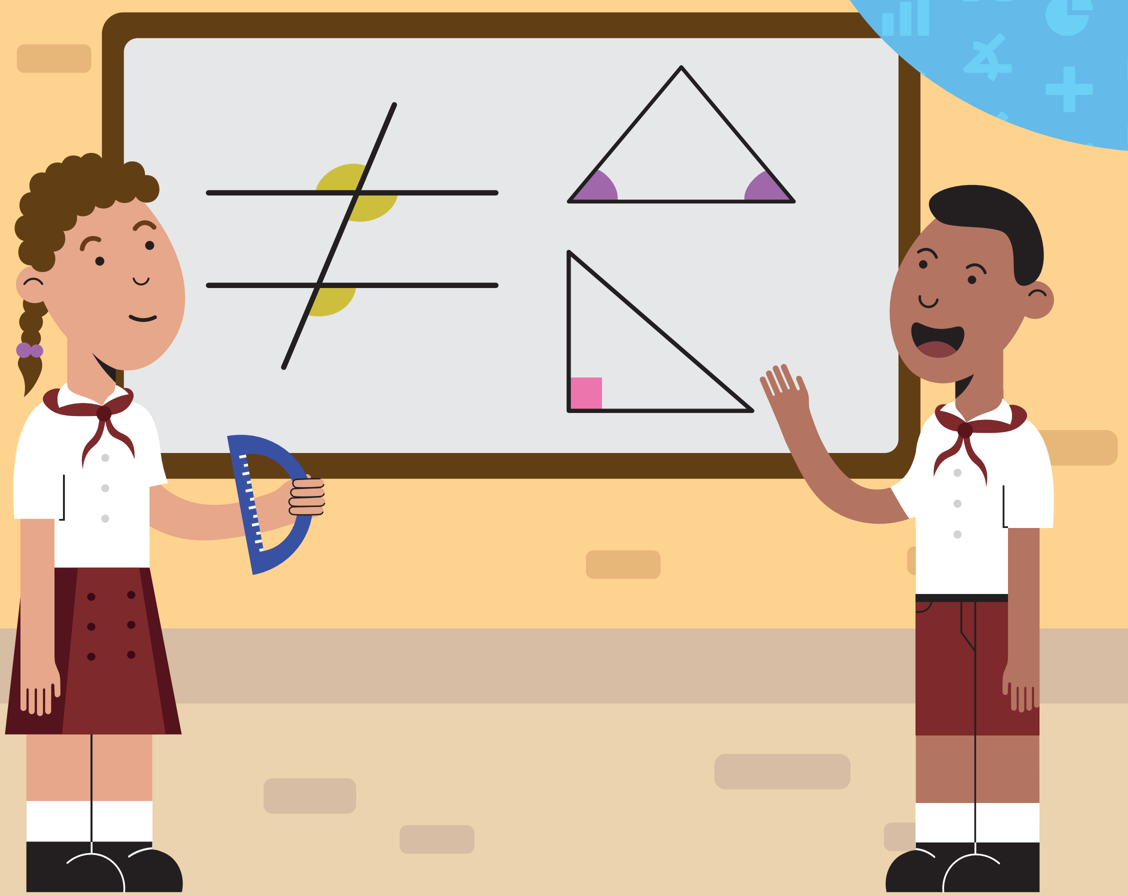
distancia (km)	velocidad (km/h)	Tiempo (1 min)
d $\uparrow$	70$\downarrow$	110$\downarrow$
2d	55	x

Las magnitudes velocidad y tiempo son inversamente proporcionales, por lo que sus flechas van en sentido contrario. Las magnitudes, distancia y tiempo, son directamente proporcionales, sus flechas se colocan en igual dirección. Luego el cálculo se plantea:

$$x = \frac{110 \cdot 70 \cdot 2d}{55 \cdot d} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 70}{1} = 4 \cdot 70 = 280$$

Respuesta: El doble de la distancia lo debe recorrer en 280 min.

Observación: Se hace necesario que siempre escojas los tres factores del numerador y los dos del denominador teniendo en cuenta el sentido de cada una de las flechas.



EDITORIAL
PUEBLO Y EDUCACIÓN

9 789591 350732