Geometría Plana

Ángulo. Triángulo.
Cuadrilátero. Circunferencia.

Enseñanza Media "SB" y Media Superior "PRE"

Enseñanza Media "SB" y Media Superior "PRE"

Autor: MsC. Carlos Jiménez Tejeda
Profesor de Matemáticas y Estadísticas.

Octubre del 2010

La primera versión de este libro fue presentado como parte de un trabajo, “Estrategia Didáctica para la Geometría en la Enseñanza Media”, en el **COMPUMAT´ 2009**.
En estos años ha tenido actualizaciones y ha incrementado sus temas y páginas.

En febrero 2017

Revisado por:
Dra. Celia Rizo Cabrera.
Dr. Luis Campistrous Pérez.

“Geometría Plana. Ángulo. Triángulo. Cuadrilátero. Circunferencia”.

Autor: MsC. Carlos Jiménez Tejeda.
Correo: “**prof_cjimenezt@nauta.cu**” o “**prof.cjimenezt.2013@gmail.com**”

INDICE

ÍNDICE

ÍNDICE

ÍNDICE

ÍNDICE

PRÓLOGO

Este libro constituye un resumen que trata de las figuras geométricas fundamentales y en síntesis tiene como propósitos esclarecer las dudas y facilitar la asimilación y recuperación de los elementos básicos declarados en su contenido.

La obra que se presenta está validada por más de tres décadas de ejercicio de la docencia en escuelas de nivel medio básico, medio superior y en el Instituto Preuniversitario Vladimir Ilich Lenin.

El contenido y la extensión de las definiciones de todos los conceptos están precisados con las adecuadas notaciones y ejemplos, lo que contribuye al desarrollo de habilidades y hábitos en la resolución de ejercicios y problemas.

La sistematización de conceptos, teoremas y procedimientos están presentes en todo el desarrollo mediante el establecimiento de relaciones, apoyados por tablas y representaciones gráficas.

Se favorece la profundización al adquirir conocimientos más amplios, con más exactitud en diferentes propiedades, particularidades o generalizaciones de los objetos geométricos estudiados, por ejemplo: ángulos con lados paralelos o perpendiculares, la mediatriz como eje de simetría, características de los paralelogramos, el esquema de los cuadriláteros, el punto potencia y otros resultados geométricos básicos.

A quienes consulten este libro les será de mucha utilidad y aprenderán mejor la geometría plana de la escuela media.

Hilarión F. Santana de Armas
Presidente de Honor de la Cátedra
“Dulce María Escalona”

Introducción.

ANGULO – TRIÁNGULO – CUADRILÁTERO -- CIRCUNFERENCIA

La forma y estructura de presentación de estos elementos geométricos, están basados en más de 30 años de experiencia como profesor en estos niveles de enseñanza, de mucho bregar en diferentes foros de discusión y de activa reflexión con mis colegas sobre la problemáticas de los alumnos en la asimilación, en el entendimiento de la Geometría.

En este resumen se intenta satisfacer la necesidad (en los alumnos y profesores, sobre todo, profesores jóvenes) de contar con un ***resumen donde aparezcan todos los elementos*** *de estas figuras geométricas; en particular de figuras CONVEXAS (las NO Convexas no se estudian en la escuela) y disponer de* ***una fuente para poder esclarecer las dudas*** *que a menudo surgen en el trabajo con estos temas geométricos.*

*En nuestro criterio estos Elementos básicos se deben "**intentar**" COMPRENDER y también Memorizarlos, tal y como lo hacen con los productos básicos y/o las propiedades de las potencias en la Aritmética, los productos notables en el Algebra o con los gráficos de las funciones elementales. Por eso, el lenguaje usado y la presentación de los contenidos están dirigidos a FACILITAR su Comprensión, su Asimilación y PRONTA* ***Recuperación****.*

En el inicio, aparecen las PRECISIONES, donde se esclarece la NOTACIÓN con la que se trabaja a lo largo del resumen.

Antes de abordar las cuatro figuras fundamentales (Ángulos, Triángulos, Cuadriláteros y Circunferencia) se precisan los nombres de algunas letras griegas, usadas con regularidad en la descripción de elementos en las figuras. También se hace una pequeña síntesis del surgimiento y florecimiento de la Geometría, A.C., en su devenir histórico; así como de algunos de los hombres que le dieron vida he hicieron posible que ellas llegaran hasta nuestros días, tal y como la conocemos hoy, siglo XXI.

En cada una de las figuras se tratan sus elementos "básicos", intentando completar toda la información relacionada e importante para la escuela cubana. También se hacen resúmenes de Resultados Geométricos asociados a la igualdad de segmentos con las figuras tratadas.

Ya para el final se brindan algunas PRECISIONES del Teorema de las Transversales; en particular, las proporciones entre los segmentos y se ofrecen ***otros resultados geométricos****, más allá de los básicos y esenciales, que también forman parte de la Geometría Plana en el contexto de la escuela.*

Algo de Historia. Los babilónicos, los egipcios y los GRIEGOS ….

***Los babilónicos**, pueblo que vivió en una región del Medio Oriente llamada Babilonia (2500 - 500 A.C., aproximadamente), famosos (entre otras cosas, como ya veremos) por su edificio de 7 pisos con los "Jardines colgantes de Babilonia" (una de las Siete Maravillas del mundo antiguo y que como casi todas las Maravillas no llegaron hasta nuestros días).*

Ellos fueron los primeros que perfeccionaron la agrimensura (medida de la tierra), contaban con métodos para determinar el área de varias figuras sencillas, necesarios para la medida de la tierra, la construcción de edificios y la "Astrología" (primeros pasos en el estudio de los cuerpos celestes y antecesora de la Astronomía).

*ATENCION,…a este pueblo se le atribuye el actual sistema de medida de ángulos basado en grados (**360^0**); suponían que la esfera celeste, al contrario de lo que se conoce hoy día, giraba alrededor de la Tierra y que el año constaba de 360 días, cantidad de partes en que dividieron a la circunferencia.*

***Los egipcios**, los antiguos egipcios, legaron una gran cantidad de conocimientos prácticos, necesarios para ellos a propósito de la construcción de las pirámides, la agrimensura del valle del Nilo (río de grandes inundaciones anuales) y la Astrología.*

A ellos se les atribuyen la mayoría de los documentos más antiguos (más de 1000 años A.C.) que revelan conocimientos geométricos concretos y que han llegado hasta nuestros días. La fama de su sabiduría fue punto importante para que otros pueblos se interesaran en ir a Egipto. Uno de estos pueblos fue el griego.

***Los griegos**, los antiguos griegos; tuvieron en el periodo de la llamada "tiranía" (mediados del 1er milenio A.C., aproximadamente) el florecimiento de la cultura Helénica, que propiciaba la "búsqueda del conocimiento". Ellos tomaron la sabiduría y el conocimiento egipcio, para estudiarlo, refinarlo, argumentarlo, estructurarlo y sistematizarlo.*

Entre los primeros en trascender hasta nuestros días están Tales y Pitágoras; aunque también hubo muchos otros que hicieron grandes aportes al conocimiento.

- *Tales de Mileto (Tales, nacido en Mileto en 640 A.C.) fue un acomodado hombre de negocios, que quedó impactado en su viaje a Egipto y al regresar a Grecia se retiró de los negocios para dedicarse al estudio y la enseñanza de la Geometría y la Astronomía; fue a un alumno suyo, Anaximandro, al que se le atribuye el primer libro sobre las distintas partes de la Geometría. Hoy día se le recuerda, a Tales,* *como Geómetra (el ángulo inscrito sobre el diámetro, las relaciones de proporcionalidad de los segmentos en las transversales, entre otros).*

Sin embargo, en su tiempo predijo un eclipse total de Sol y su predicción fue cierta, el eclipse ocurrió el 28 de mayo del 585 A.C. Realmente la vida de Tales fue importantísima para el desarrollo de la sociedad, él marcó una época. Baste decir, que antes de Tales las explicaciones sobre el universo eran mitológicas, es su quehacer y su interés en el mundo físico lo que marca el nacimiento del Pensamiento Científico. A él también se le atribuye la introducción de la Geometría en Grecia.

Tales de Mileto es considerado como uno de los "Siete Sabios de Grecia", también conocido como los "Siete Sensatos"

- *El famoso Pitágoras, que vivió entre el 569 y el 500 A.C. fue un estudioso de todo lo que en su época se escribió y al regreso de su viaje a Egipto se dedicó a la enseñanza de la Geometría, así como a la Enseñanza de la Filosofía y la Religión con basamento en principios matemáticos. Fue el líder de un grupo llamado "Los pitagóricos" que enriquecieron y le dieron vigencia a muchos conocimientos del mundo antiguo. A él se le atribuye la primera demostración de la relación entre los lados del triángulo rectángulo, que llega a nuestros días como el "TEOREMA DE PITÁGORAS". También se dice que fue el que colocó la piedra angular de la geometría científica.*

Hubo muchos griegos más, como ya decíamos, que enriquecieron el conocimiento por aquellas épocas, Platón, Aristóteles, Arquímedes, Apolonio, entre otros.

*Más no quisiera terminar este recorrido en pequeña síntesis de la historia A.C., en particular del conocimiento Geométrico, que nos antecedió y nos condujo al nivel de civilización que hoy gozamos, **sin mencionar a Euclides**.*

- *El se dedicó a Enseñar Matemáticas en la Universidad y vivió por los años 330 - 275 A.C. en Alejandría, cuidad egipcia que durante centenares de años fue el centro y la capital del saber humano y recordada (entre otras) por su faro "El Faro de Alejandría", otra de las Siete Maravillas del mundo antiguo, así como por la añorada "Biblioteca de Alejandría", donde se supone estaba recogido gran parte del conocimiento del mundo antiguo y que fue tristemente incinerada.*

  *Baste decir, que Euclides fue el encargado de mostrar al mundo de forma RIGUROSA toda la geometría plana y gran parte del conocimiento Matemático hasta su época en su obra "**Los elementos**", extenso tratado que consta de 13 volúmenes. Este alejandrino de ascendencia Griega trasciende hasta nuestros días, no solo por su obra los Elementos (que se utilizaron como texto durante más de 2000 años, e incluso hoy, una versión modificada de sus primeros libros **constituye la base de la enseñanza** de la geometría plana en las escuelas), sino también, por la partición en el estudio de Geometría, que **hoy, siglo XXI,** hacemos: Geometría **Euclidiana** y Geometría **No Euclidiana.***

…hasta aquí la síntesis histórica...

PRECISIONES Preliminares.

Aquí estableceremos la notación que se presenta en el resumen, así como también algunos "detalles" sobre las relaciones entre los elementos.

Notación $\mapsto$ Punto- Recta- Segmento- Semirrecta- Ángulo

- a cada **punto** lo llamaremos por una letra mayúscula; **Ej: A**, **B**,…
- a las **rectas** se le nombrará por dos letras mayúsculas (dos puntos que estén contenidos en ella); **Ej: AB** o por una letra minúscula; **Ej: r**, **s**, **t**,…; también puede llamárseles por la combinación de los dos anteriores **Ej:** $\mathbf{r_{AB}}$ (recta que contiene a los puntos **A** y **B**).
    - Cuando **tres o más puntos** están sobre una recta se dice que son **colineales**, o que están **alineados**.
- a los **segmentos** por dos letras mayúsculas (por dos puntos que son los extremos del segmento); **Ej:** $\overline{\mathbf{AB}}$ (la raya arriba lo diferencia de la recta **AB**). También suele llamársele por una letra minúscula; **Ej: a**, **b**, **c,…** (la que denomina, realmente, su longitud).
- a las **semirrectas** se les nombrará por dos letras mayúsculas (dos puntos que estén contenidos en ella) donde la primera letra marca el origen de la semirrecta y se le agrega el nombre; **Ej: semirrecta AB**, **semirrecta FE**.
- a los **ángulos** se les nombrará por un símbolo con tres letras mayúsculas (tres puntos, dos en sus lados y el tercero es el vértice) donde la letra del medio es la del vértice. **Ej:** $\angle$**APB** (el punto **P** es el vértice del ángulo, los puntos **A** y **B** están en los lados del ángulo). También suele llamársele por una letra griega; **Ej:** α, β, γ, δ, φ,… (la que denomina, realmente, su amplitud).

Relación $\mapsto$ Recta-Recta ("$//$", "$\not\parallel$" y "$\perp$")- Punto-Recta

<u>En el plano</u>

- Dos rectas pueden cortarse o no cortarse.
    - ✓ Cuando **no se cortan** se dice que son **paralelas** (tienen la misma dirección); **Ej: AB // CD** o **r // s** o $\mathbf{t_{KJ}\,//\,s_{MN}}$
    - ✓ Cuando **se cortan** lo hacen en un punto (punto de intersección) se dice que **NO son paralelas**. Las rectas se intersectan; **Ej:** $\mathbf{AB \not\parallel GH}$

      Si se cortan en el punto **P**, se dice: $\mathbf{P = AB \cap GH}$
    - Cuando **varias rectas se cortan en un mismo punto** se dice que concurren en ese punto; son **rectas concurrentes**.

Nota: la relación de paralelismo, "**//**", es una relación de EQUIVALENCIA, por eso es REFLEXIVA , SIMÉTRICA y TRANSITIVA. Veamos:

- ➢ **r // r** (REFLEXIVA). Una recta es paralela con ella misma.

- $\mathbf{r\,//\,s \Rightarrow s\,//\,r}$ (SIMÉTRICA). Si **r** es paralela a **s**, entonces **s** es paralela a **r**.
- $\mathbf{r\,//\,s \wedge s\,//\,t \Rightarrow r\,//\,t}$ (TRANSITIVA). Si **r** es paralela a **s** y **s** es paralela a **t**, entonces **r** es paralela a **t**.

Las relaciones de IGUALDAD y SEMEJANZA, también son relaciones de EQUIVALENCIA.

- un punto puede estar o no sobre una recta, lo llamaremos **punto exterior** en caso de que no esté contenido en la recta; **Ej:**
  - Si $\mathbf{P \notin t}$, es porque **P** es exterior a la recta **t**.
  - Si $\mathbf{K \in AB}$, es porque **K** es un punto de la recta $\mathbf{AB}$.
- Por un punto exterior a una recta SOLO puede trazarse **una recta paralela a ella**.
- Por un punto (exterior o sobre la recta) SOLO se puede trazar **una recta perpendicular a ella**.

Nota: la relación de perpendicularidad, "$\perp$", NO es una relación de equivalencia.
Ej: (NO es Transitiva)

- $\mathbf{r \perp s \wedge s \perp t \Rightarrow r\,//\,t}$

Sobre los elementos Geométricos a "Memorizar".

*A continuación se presentan las características y relaciones básicas, en síntesis, de las cuatro figuras fundamentales para los estudios de Geometría Plana en la Enseñanza Media Superior: los **Ángulos**, los **Triángulos**, los **Cuadriláteros** y la **Circunferencia**. A este bloque de contenidos se les denomina, en este resumen, como "Hechos Geométricos a Memorizar". Es de vital importancia que todo estudiante aspirante a cursar estudios superiores, en los PREUNIVERSITARIOS o en la UNIVERSIDAD, tome estos hechos, los intente COMPRENDER y **los memorice**.*

<u>Las letras griegas</u>

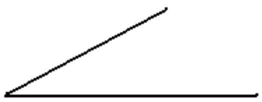
Es usual utilizar <u>las</u> <u>letras</u> <u>del</u> <u>alfabeto</u> <u>griego</u> ($\alpha, \beta, \delta, \gamma, \lambda, \pi, \theta, \varphi$; entre otras) para denominar a distintos elementos en la Geometría,…

*Tal vez, llegue así a nuestros días (designar con esas letras) por ser los griegos, de **antes de nuestra era**, los que descubrieron muchos de los elementos y relaciones en la Geometría**, dándole** <u>presencia</u> y <u>trascendencia</u> a todos aquellos resultados Geométricos que hoy nos brindan, a todos, muchas de nuestra "comodidades"* más de 2000 años después,…..

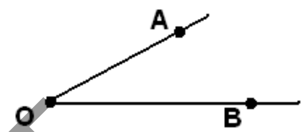
$\alpha \mapsto$ **alfa**, $\beta \mapsto$ **beta**, $\delta \mapsto$ **delta**, $\gamma \mapsto$ **ganma**,

$\lambda \mapsto$ **landa**, $\pi \mapsto$ **pi**, $\theta \mapsto$ **cita**, $\varphi \mapsto$ **fi**

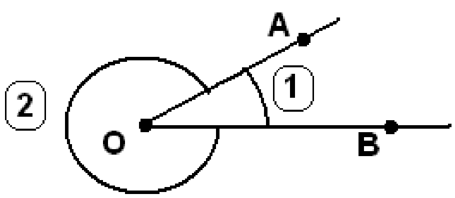
Á N G U L O S



*Esta figura, conocida por todos como **ángulo**, posee algunos elementos y características que son de interés,… Está formada por dos semirrectas (*visualmente, *dos segmentos), que llamamos **lados** del ángulo y se unen en su "origen", determinando un punto, que llamamos **vértice**.*



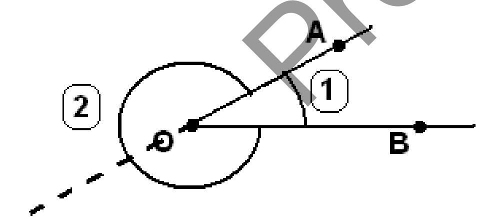
*Nombrar a estos elementos nos permite referirnos al ángulo o establecer relaciones entre figuras (sobre todo cuando hay otras figuras representadas). Denotemos tres puntos, un punto en cada **lado** (el punto **A** y el **B**) y al punto común, **al vértice** (**O**).*



*Ya estamos en condiciones de hablar del ángulo **AOB*** ($\measuredangle$**AOB**) *ó del ángulo **BOA*** ($\measuredangle$**BOA**), es IGUAL siempre que **O** quede en el medio de los otros dos puntos. *Ahora, estas dos semirectas de origen común dividen al plano en **dos regiones**, la* $\boxed{1}$ *y la* $\boxed{2}$*, entonces al nombrar* $\measuredangle$**AOB** *¿a cuál región nos referimos? ¿Cuál parte tomar como* $\measuredangle$**AOB***?*

R / *El ángulo al que hacemos referencia es la parte **1**, o sea, el **menor** de los ángulos. Para referirnos a la parte **2** diríamos, ángulo sobre obtuso* **AOB**.

También se podría hablar de ángulo convexo y no convexo (cóncavo).
*El ángulo al que hacemos referencia es la parte **1**, es **convexo**. Veamos:*

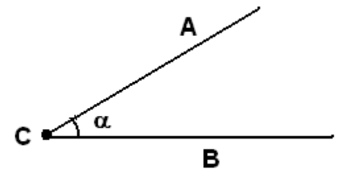


Nótese que al prolongar uno de sus lados, la recta **OA** *divide al plano en dos semiplanos y la parte **1** está completamente en uno de esos semiplanos, mientras que la **2**, tiene partes en cada semiplano.*

Ahora sí podemos describir al ÁNGULO

*Un ángulo está formado por **dos semirectas** de origen común, llamadas **lados del ángulo**, un **vértice** (**punto común** y origen de las semirectas) y toda la "**región**" que está delimitada por sus lados (incluido los lados); a esa región se le llama **amplitud** del ángulo y usualmente se mide en grados (*Ejemplo: $\mathbf{36^0}$, $\mathbf{90^0}$*).*

En la figura, **CA** *y* **CB** *lados del ángulo*
C *vértice del ángulo*
α *amplitud del ángulo*



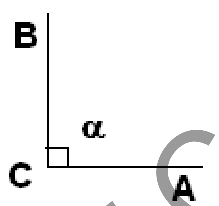
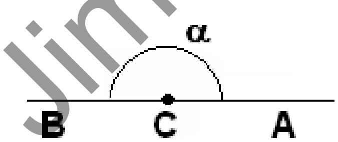
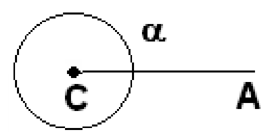
Hay varias maneras de denotar a un ángulo, entre ellas tenemos:

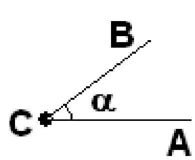
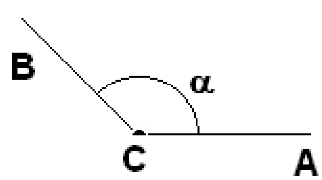
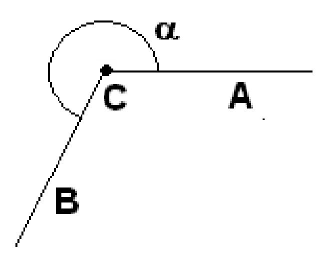
$\angle\mathbf{ACB}$ *o* $\angle\mathbf{C}$ *o* $\angle\mathbf{BCA}$ *o* α *(refiere amplitud)*

(también suele nombrarse con un número; Ejemplo: $\measuredangle\mathbf{1}$ *)*

*<u>Nótese</u> que cuando se hace con tres letras, **la del medio** corresponde con el **vértice.***

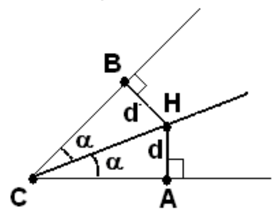
Clasificación de los ángulos (según su amplitud)

	Recto	***Llano***	***Completo***
Ángulo			
Amplitud $\mapsto$	$\alpha = \mathbf{90^0}$	$\alpha = \mathbf{180^0}$	$\alpha = \mathbf{360^0}$

	Agudo	***Obtuso***	***Sobre obtuso***
Ángulo			
Amplitud $\mapsto$	$\mathbf{0} < \alpha < \mathbf{90^0}$	$\mathbf{90^0} < \alpha < \mathbf{180^0}$	$\mathbf{180^0} < \alpha < \mathbf{360^0}$

La bisectriz de un ángulo.

La bisectriz del ángulo es aquella semirrecta, que con origen en el vértice, lo divide en dos ángulos iguales (aunque no es solo esa la propiedad que posee la bisectriz)



En la figura, ***CH*** *es la bisectriz del* $\angle$**ACB**

<u>Nótese</u>: Que al tomar un punto de la bisectriz (punto ***H****), la distancia (longitud del segmento perpendicular) a los lados del ángulo son iguales.*

Dos propiedades de la bisectriz (***CH*** *) de un ángulo:*

1º. *Divide al ángulo en dos ángulos iguales.*

$$\angle \mathbf{BCH} = \angle \mathbf{ACH} = \alpha$$

2º. *Cada punto de la bisectriz equidista (igual distancia,* ***d****) de los lados del ángulo.*

$$\overline{\mathbf{HB}} = \overline{\mathbf{HA}} = \mathbf{d}$$

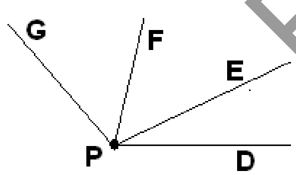
*Nota: <u>La distancia</u> ("****d****") de un punto a una recta, es la longitud del segmento perpendicular que va del punto a la recta. En la figura anterior* $\overline{\mathbf{HB}}$ *y* $\overline{\mathbf{HA}}$

Ángulos entre rectas (con igual vértice y con distintos vértices)

<u>Ángulos con Vértice Común</u>: Consecutivos, Adyacentes, Opuestos por el vértice

Los consecutivos *tienen un lado común, un vértice común y está uno a continuación del otro (<u>tres</u> condiciones);*

<u>En la figura:</u>



$\angle$**GPF** *es consecutivo con* $\angle$**FPE***,*

$\angle$**GPF** *es consecutivo con* $\angle$**FPD***,*

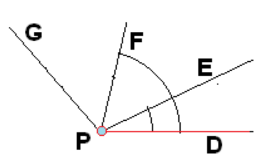
$\angle$**EPF** *es consecutivo con* $\angle$**DPE***,*

$\angle$**EPF** *es consecutivo con* $\angle$**GPF***, por último;*

$\angle$**EPD** *es consecutivo con* $\angle$**EPF** *y* $\angle$**EPD** *es consecutivo con* $\angle$**GPE***;*

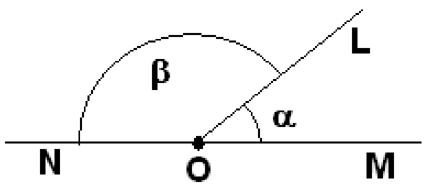
PERO,…. $\angle$**EPD** *NO es consecutivo con* $\angle$**DPF***.*

<u>Nótese</u>: que entre estos dos ángulos, $\angle$**EPD** *y* $\angle$**DPF***,* ***sólo*** *se cumplen <u>dos condiciones</u> (****PD*** *lado común y* ***P*** *vértice común); la tercera condición, que esté uno a continuación del otro,* ***NO*** *se cumple.*



Los adyacentes *tienen un lado común, un vértice común, está uno a continuación del otro y forman un ángulo llano (<u>cuatro</u> condiciones); también puede decirse que son <u>consecutivos</u> y <u>suman</u>* **<u>180^0</u>** *(SOLO <u>dos</u> condiciones);*

<u>En la figura</u>



***M**, **O** y **N** alineados*

$\angle$**MON** *llano*

$\angle$**LON** *y* $\angle$**MOL** *son consecutivos*

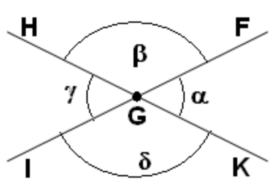
$\angle$**MOL** *es adyacente con* $\angle$**LON**

<u>Nótese</u>: que $\angle$**MOL** *es consecutivo con* $\angle$**LON** ***y** que* $\alpha + \beta = 180^0$; ***dos condiciones.***

Un ERROR común es asociar a los ángulos adyacentes SOLO con que suman **180^0**. *Esa sola condición no es suficiente para que sean Adyacentes, necesita de DOS condiciones (consecutivos y suman* **180^0** *).*

Los Opuestos por el vértice se forman cuando dos rectas se cortan, aparecen aquí cuatro ángulos consecutivos que forman un ángulo completo (α, β, γ y δ); *los OPUESTOS, tienen un vértice común, sus lados están sobre las dos rectas que los forman, NO son consecutivos, sus orientaciones son OPUESTAS y son **iguales** (igual amplitud);*

<u>En la figura</u>



$G = r_{HK} \cap r_{IF}$ *(Rectas que se cortan)*

$\angle$**HGI** *es Opuesto por el vértice con* $\angle$**FGK** *y* $\gamma = \alpha$

$\angle$**HGF** *es Opuesto por el vértice con* $\angle$**IGK** *y* $\beta = \delta$

<u>Nótese</u>: que (en esta representación) $\angle$**HGI** *está orientado hacia la izquierda y el* $\angle$**FGK** *está orientado hacia la derecha, o sea, a partir del vértice son **opuestos** luego* $\boxed{\gamma = \alpha}$; *semejantes a los ángulos* $\angle$**HGF** *y* $\angle$**IGK** *que están orientados a partir del vértice de **forma opuesta** (hacia arriba y hacia abajo) luego* $\boxed{\beta = \delta}$.

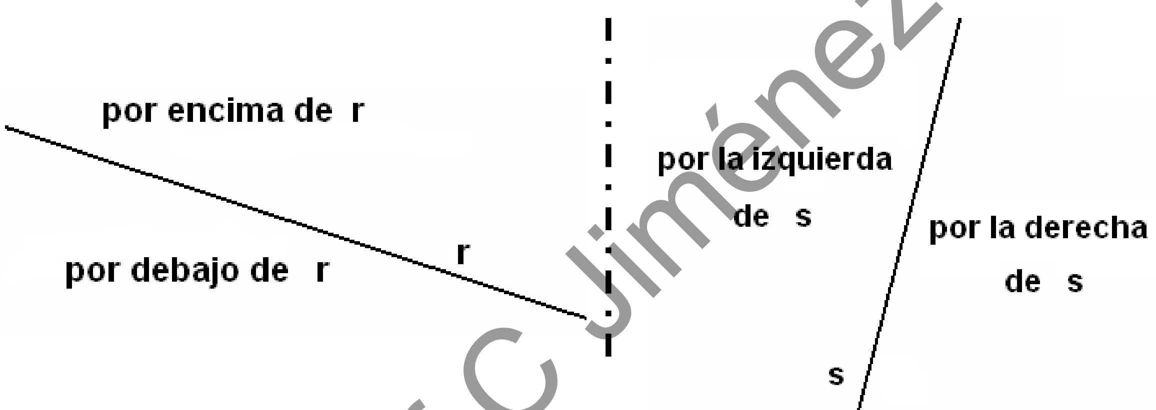
Ángulos con Vértices Distintos: Correspondientes, Alternos y Conjugados

Los correspondientes, los alternos y los conjugados *reciben esa denominación por la POSICIÓN que ocupan en las tres rectas (dos rectas son cortadas por una tercera, llamada "secante")*

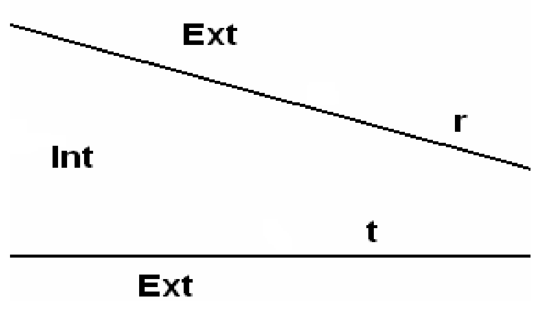
<u>Preliminares</u>: Al estar estos ángulos entre rectas (más de dos) y tomar su denominación por la **posición** *que ocupan en ellas, es que se hace necesario ACLARAR las regiones del plano a considerar.*

<u>Regiones del plano a considerar:</u>

Una recta divide al Plano en dos partes (una parte a un lado de la recta y la otra parte al otro lado de la recta), ambas partes reciben el nombre de Semiplanos.

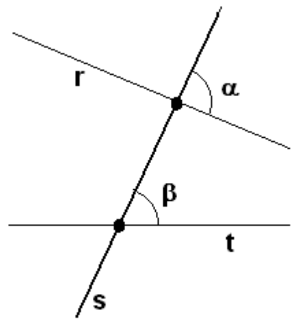


También puede hablarse de regiones entre rectas, en particular entre dos rectas; una región interior (***Int.*** *) y otra región (* ***Ext.*** *)*



Los ángulos Correspondientes *están en vértices diferentes, a <u>un</u> <u>mismo</u> <u>lado</u> <u>de</u> <u>la</u> <u>secante</u> y los dos están a <u>un</u> <u>mismo</u> <u>lado</u> <u>de</u> <u>las</u> <u>otras</u> <u>dos</u> <u>rectas</u> (tres condiciones). A ellos "***les corresponde la misma posición***" (entre las rectas).*

<u>En la figura:</u>



*la recta **s** es la recta secante*

***α** y **β** están a un mismo lado de la secante*

***α** y **β** están por encima de **r** y por encima de **t** RESPECTIVAMENTE.*

(Están a un mismo lado) ↦ **Condición ESENCIAL**

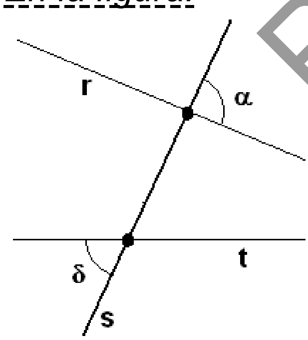
Esta última condición "un mismo lado…." puede decirse,.. "**uno Exterior y otro Interior**".

En conclusión, α es correspondiente con β

<u>Nótese</u>: que α y β tienen diferentes vértices.

Los ángulos Alternos *están en vértices diferentes, a <u>diferentes</u> <u>lados</u> <u>de</u> <u>la</u> <u>secante</u> y a <u>diferentes</u> <u>lados</u> <u>de</u> <u>las</u> <u>otras</u> <u>dos</u> <u>rectas</u> (tres condiciones). Ellos "***alternan su Posición***" (entre las rectas).*

<u>En la figura:</u>



*la recta **s** es la recta secante*

***α** y **δ** están a diferentes lados de la secante.*

α** y **δ** están uno por encima de **r** y otro por debajo de **t.

(Ellos alternan su Posición) ↦ **Condición ESENCIAL**

Esta última condición " uno por encima y otro por debajo" puede decirse,…

"**los dos son Exteriores o los dos son Interiores**"

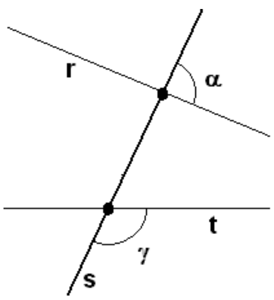
En conclusión, α es alterno con δ

<u>Nótese</u>: que α y δ tienen diferentes vértices

Los ángulos Conjugados *están en vértices diferentes, a un mismo lado de la secante y a diferentes lados de las otras dos rectas (tres condiciones).*

Ellos "**conjugan su posición**" *("COMBINAN" su posición entre las rectas).*

En la figura:



La recta s es la recta secante

***α** y γ están a un mismo lado de la secante*

α** y γ están uno por encima de **r** y otro por debajo de **t.

(Ellos conjugan su Posición) $\mapsto$ **Condición ESENCIAL**

Esta última condición puede decirse,…

"los dos son Exteriores o los dos son Interiores"

En conclusión, α *es conjugado con* γ

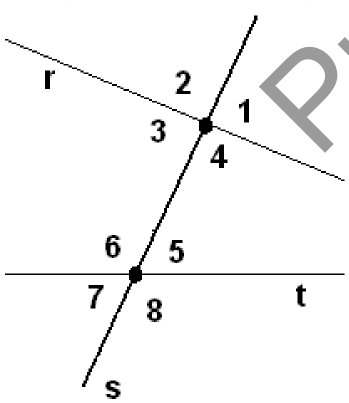
Nótese: que α *y* γ *tienen diferentes vértices; además:*

"Conjugan, combinan, complementan su posición"

*Con **la secante**, la misma Posición* (**son correspondientes**) *y*

*con las **otras rectas**, diferente Posición* (**son alternos**)

Ejemplo: En la figura,



Son **ángulos correspondientes** las siguientes parejas

el ***1*** y el ***5***, el ***2*** y el ***6***, el ***3*** y el ***7***, el ***4*** y el ***8***.

Son **ángulos alternos** las siguientes parejas

el ***1*** y el ***7***, el ***2*** y el ***8***, el ***3*** y el ***5***, el ***4*** y el ***6***.

Son **ángulos conjugados** las siguientes parejas

el ***1*** y el **8**, el ***2*** y el **7**, el ***3*** y el **6**, el ***4*** y el **5**.

Algunos criterios para la IGUALDAD de ángulos entre rectas
Ángulos entre PARALELAS

Las relaciones entre ángulos (Correspondientes, Alternos y Conjugados entre PARALELAS) son de <u>gran utilidad en la "práctica"</u>,…sobre todo, al intentar resolver ejercicios en Geometría. Estas relaciones se usan, comúnmente, para:

- ✓ ***Probar igualdades** de ángulos,*
- ✓ ***Probar paralelismo** entre rectas.*
- ✓ ***Determinar amplitudes** de ángulos*

Los Correspondientes y los Alternos:

✓ Si dos ángulos son **Correspondientes o Alternos**
y
✓ están entre **rectas paralelas**

entonces

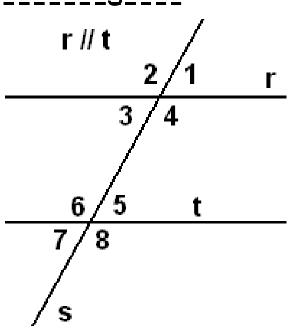
Los ángulos **Son IGUALES**

✓ Si dos ángulos son **IGUALES**
y
✓ Por su POSICIÓN son **Correspondientes o Alternos**

entonces

Los ángulos están **entre rectas PARALELAS**

<u>En la figura:</u>



- $\angle 1 = \angle 5$, ya que son **Correspondientes** y están entre paralelas (**r // t**), con secante **s**.
- $\angle 4 = \angle 6$, ya que son **Alternos** y están entre paralelas (**r // t**), con secante **s**.

Los Conjugados:

- ✓ Si dos ángulos son **Conjugados y**
- ✓ están entre **rectas paralelas**

entonces ⇒

Los ángulos **Suman 180^0**

- ✓ Si dos ángulos **Suman 180^0 y**
- ✓ Por su POSICIÓN son **Conjugados**

⇐ *entonces*

Los ángulos están **entre rectas PARALELAS**

<ins>En la figura (anterior)</ins>

$\angle\mathbf{2} + \angle\mathbf{7} = \mathbf{180^0}$, ya que son **Conjugados** y están entre paralelas (**r // t**), con secante **s**.

$\angle\mathbf{3} + \angle\mathbf{6} = \mathbf{180^0}$, ya que son **Conjugados** y están entre paralelas (**r // t**), con secante **s**.

RESUMEN (Criterios de igualdad de ángulos)

- ✓ *Los **ángulos Opuestos** por el vértice <ins>siempre</ins> **son iguales**.*
- ✓ *Los **ángulos Adyacentes** NO siempre son iguales.*

  ***Son iguales** <ins>solo</ins> <ins>en</ins> <ins>el</ins> <ins>caso</ins> de que sean ángulos rectos.*
- ✓ *Los **ángulos Correspondientes** y **ángulos los alternos** NO siempre son iguales.*

  ***Son iguales** <ins>solo</ins> <ins>en</ins> <ins>el</ins> <ins>caso</ins> que estén entre RECTAS PARALELAS.*
- ✓ *Los **ángulos Conjugados** No siempre son iguales.*

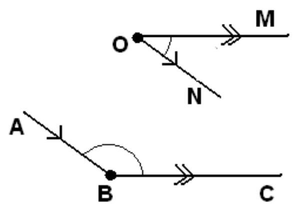
  ***Son iguales** (entre paralelas) <ins>solo</ins> <ins>en</ins> <ins>el</ins> <ins>caso</ins> que sean ángulos rectos.*

…Más sobre igualdad de ángulos (lados paralelos, lados perpendiculares)

Ángulos con lados paralelos

Si dos ángulos tienen sus lados paralelos y ambos tienen la misma clasificación (dos condiciones), entonces ***son iguales.***

En la figura:

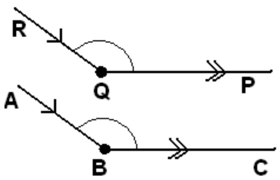


OM / / BC *y* **ON / / AB**

$\angle$**ABC** *Obtuso y* $\angle$**MON** *Agudo (**diferentes** clasificaciones)*

*Cumplen solo **una de las dos** condiciones. Luego:*

NO son iguales $\mapsto$ $\boxed{\angle ABC \neq \angle MON}$



RQ / / AB *y* **QP / / BC**

$\angle$**ABC** *Obtuso y* $\angle$**RQP** *Obtuso*

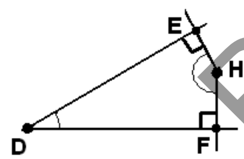
*Cumplen **las dos** condiciones. Luego*

SON IGUALES $\mapsto$ $\boxed{\angle ABC = \angle RQP}$, *ya que tienen sus lados paralelos y ambos son obtusos.*

Ángulos con lados perpendiculares

Si dos ángulos tienen sus lados perpendiculares y ambos tiene la misma clasificación (dos condiciones), entonces ***son iguales***

En la figura:

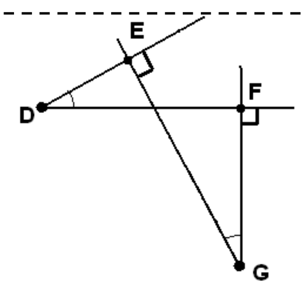


EH $\perp$ **DE** *y* **FH** $\perp$ **DF**

$\angle$**EHF** *Obtuso y* $\angle$**EDF** *Agudo (**diferentes** clasificaciones)*

*Cumplen solo **una de las dos** condiciones. Luego:*

NO son iguales $\mapsto$ $\boxed{\angle EHF \neq \angle EDF}$



EG $\perp$ **DE** *y* **FG** $\perp$ **DG**

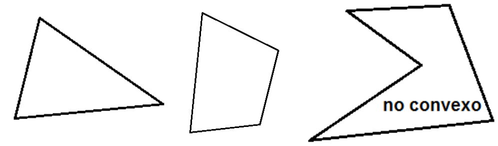
$\angle$**EDF** *Agudo y* $\angle$**EGF** *Agudo*

*Cumplen **las dos** condiciones. Luego*

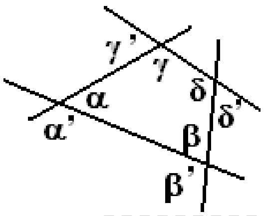
SON IGUALES $\mapsto$ $\boxed{\angle EDF = \angle EGF}$, *ya que tienen sus lados paralelos y ambos son agudos.*

Nótese que cuando tienen distinta clasificación son SUPLEMENTARIOS.

Los ángulos en los POLÍGONOS



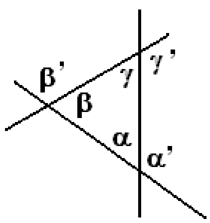
<u>Preliminares</u>: Un POLÍGONO (POLI-varios, GONO-ángulos) es una figura plana compuesta por una secuencia finita de segmentos consecutivos que cierran a una región, en nuestro caso, a una región convexa.
En los polígonos existen ángulos interiores y ángulos exteriores.



Los <u>ángulos</u> <u>exteriores</u> (α', β', γ' y δ'); *son aquellos que <u>son adyacentes</u> a los <u>ángulos</u> <u>interiores</u>* (α, β, γ y δ);

En un triángulo la suma de las amplitudes de los ángulos interiores es $\mathbf{180^0}$*; mientras que la suma de las amplitudes de los ángulos exteriores es de* $\mathbf{360^0}$

<u>En la figura:</u>



Los ángulos α, β *y* γ *son ángulos interiores.*

Los ángulos α', β' *y* γ' *son ángulos exteriores*

$\alpha + \beta + \gamma = \mathbf{180^0}$ *y* $\alpha' + \beta' + \gamma' = \mathbf{360^0}$

Algo más …

TEOREMA del ángulo exterior (de un triángulo)

"La amplitud del ángulo exterior, <u>de un triángulo</u>, es igual a la suma de las amplitudes de los ángulos interiores NO adyacentes a él"

Ejemplo: *(En el triángulo anterior):* $\alpha' = \beta + \gamma$; $\beta' = \alpha + \gamma$; $\gamma' = \alpha + \beta$

En general…

En los POLÍGONOS

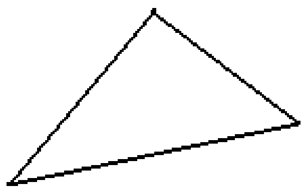
La suma de los ángulos exteriores de un Polígono es, <u>siempre</u>, $\mathbf{360^0}$*; mientras que la de los ángulos interiores <u>varía</u> de acuerdo al número de lados, "**n**".*

Esta suma puede calcularse $\mathbf{180^0(n-2)}$. *Así, por Ejemplo:*

- *Cuadrilátero,* $\mathbf{n = 4}$, *luego* $\mathbf{180^0(4-2) = 360^0}$
- *Pentágono,* $\mathbf{n = 5}$, *luego* $\mathbf{180^0(5-2) = 540^0}$
- *Exágono,* $\mathbf{n = 6}$, *luego* $\mathbf{180^0(6-2) = 720^0}$

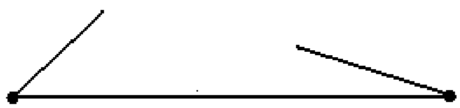
EL TRIÁNGULO

Esta figura, conocida por todos como ***triángulo (****tres ángulos), es el polígono más relevante y el más estudiado; posee elementos y características propias que son de sumo interés.*



Está formado por tres segmentos o tres ***lados*** *que se unen (dos a dos) en un punto común, llamado* ***vértice*** *(hay tres vértices), cada vértice con dos lados forman a los tres ángulos del triángulo.*

¿Al intentar unir tres segmentos se forma, SIEMPRE, un triángulo?
R/. No, ..no siempre,…

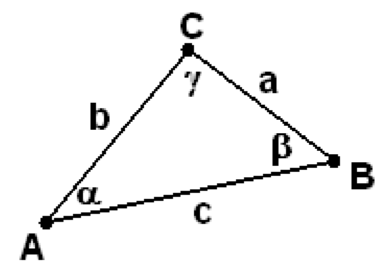


Para que con tres segmentos se forme un triángulo deben cumplir una condición:
La "DESIGUALDAD TRIÁNGULAR";

- La suma de las longitudes de dos lados es siempre mayor que la longitud del tercer lado.

Así, al "unir" a tres segmentos se forman tres ángulos con sus tres vértices.

Denotemos a estos elementos para que podamos referirnos a ellos, dar otros elementos y mostrar algunas de las relaciones básicas de este precioso *polígono.*

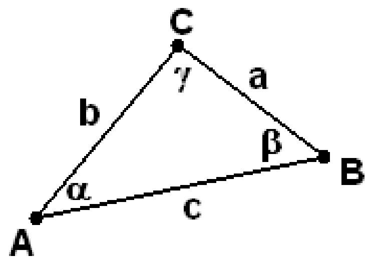
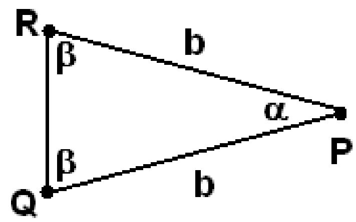
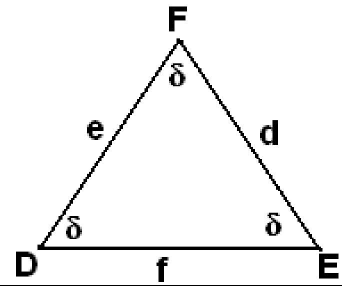


*Los tres vértices con una letra mayúscula (****A****,* ***B*** *y* ***C****), los ángulos con una letra griega , usualmente se le asocia al vértice* ***A*** *la letra α, al vértice* ***B*** *la letra β y al vértice* ***C*** *la letra γ (si los vértices son nombrados con otras letras, en orden alfabético, se le asocia α, β, γ); a las longitudes de los lados opuestos a cada vértice se asocia la letra del vértice en minúscula (al lado opuesto al vértice* ***A*** *la letra* ***a*** *y así), también se le nombra al lado por dos letras mayúsculas que son sus extremos. El Δ**ABC** está formado por los lados $\overline{\mathbf{AB}}$, $\overline{\mathbf{BC}}$ y $\overline{\mathbf{CA}}$; por los vértices* ***A****,* ***B*** *y* ***C****; y los ángulos α, β, γ ó $\angle$**CAB** ,$\angle$**ABC** y$\angle$**BCA** respectivamente.*

Clasificación de triángulos

Los triángulos se clasifican atendiendo a dos aspectos: según las longitudes de sus lados (Escalenos, ***Isósceles*** *y Equiláteros) y según la amplitud de sus ángulos (Acutángulos,* ***Rectángulos*** *y Obtusángulos); también puede referirse a la vez por dos de estas clasificaciones (*Ejemplo: *Rectángulo e Isósceles).*

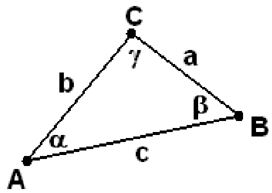
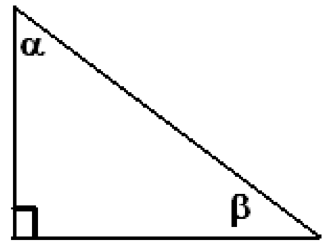
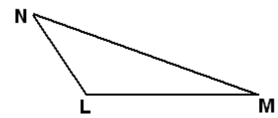
Veamos:

	∆ Escaleno	**∆ Isósceles**	**∆ Equilátero**
Según la longitud de sus lados			
	lados diferentes *y <u>por tanto</u>* ***ángulos diferentes*** *(al <u>mayor</u> <u>lado</u> se le opone el <u>mayor</u> <u>ángulo)</u>*	***dos** lados **iguales*** *y <u>por tanto</u>* ***dos** ángulos **iguales*** *(al tercer lado se le llama **lado base** y a los lados iguales **lados No bases**)*	***lados iguales*** *y <u>por tanto</u>* ***ángulos iguales*** *(los Internos y los Externos)*
	En las figuras anteriores $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{c}$ *y* $\mathbf{c} \neq \mathbf{a}$ *Si **a** es el menor de los lados, **entonces** α es el menor de los ángulos*	$\overline{\mathbf{PQ}} = \overline{\mathbf{PR}} = \mathbf{b}$ $\overline{\mathbf{RQ}}$ *es **<u>lado base</u>*** $\angle\mathbf{PQR} = \angle\mathbf{PRQ} = \beta$ $\angle\mathbf{PQR}$ *y* $\angle\mathbf{PRQ}$ *son los **ángulos bases*** *EL* $\angle\mathbf{RPQ}$ *es el **ángulo principal***	*Cada ángulo Interior mide* $\mathbf{60^0}$ *y cada ángulo Exterior mide* $\mathbf{120^0}$

Continúa…

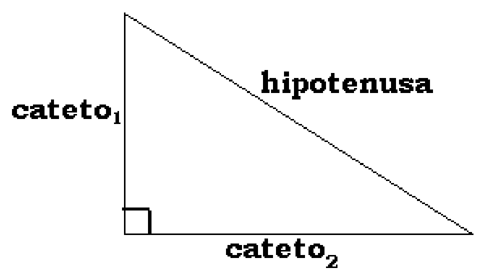
Los triángulos equiláteros son Isósceles

Más… NO todos los Isósceles son Equiláteros

	Δ ***Acutángulo***	Δ ***Rectángulo***	Δ ***Obtusángulo***
Según la amplitud de sus ángulos			
	*Tiene sus **tres ángulos agudos***	*Tiene **un ángulo recto** y dos ángulos **agudos***	*Tiene **un ángulo obtuso** y dos ángulos **agudos***
	$\alpha < 90^0$; $\beta < 90^0$ $\gamma < 90^0$	$\alpha < 90^0$; $\beta < 90^0$ $\alpha + \beta = 90^0$	$\measuredangle MLN > 90^0$

EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Detengámonos en él,…. De una <u>relevancia y trascendencia grandísima</u> tanto para las ciencias, como para la vida práctica.



- ✓ *En los **triángulos Rectángulos** los lados reciben nombres; a los lados que forman al ángulo recto se les llama **catetos** y al tercer lado, al mayor lado (al que se le opone al ángulo recto), se le nombra **hipotenusa**.*
- ✓ *En ellos $\left(\Delta_{\perp}\right)$ se da una relación **básica** y **herramienta fundamental** para la resolución de <u>ejercicios y problemas Geométricos</u>:*

EL TEOREMA DE PITÁGORAS:

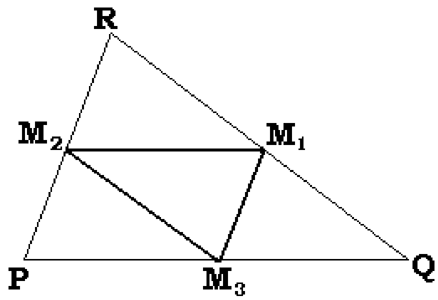
En todo Δ Rectángulo, $\mathbf{(hipotenusa)^2 = (cateto_1)^2 + (cateto_2)^2}$

*Entre otras aplicaciones, este importantísimo resultado (**RELACIÓN MÉTRICA FUNDAMENTAL de la Geometría Plana**), permite **calcular** la longitud de **uno de los lados** del triángulo rectángulo ($\Delta_{\perp}$), **conocido** las **otras dos longitudes**.*

***Nota**: También aparecen aquí, los **tríos Pitagóricos** (tríos de números Naturales que cumplen con la relación Pitagórica);* **Ej:** *(**3**, **4** y **5**) ó (**5**, **12** y **13**) ó (**7**, **24** y **25**) y muchos otros; existen INFINITOS tríos que cumplen esta relación. Sean **a** y **b** catetos y **c** la hipotenusa:* $\boxed{\mathbf{a = m \cdot n}}$; $\boxed{\mathbf{b = \frac{m^2 - n^2}{2}}}$; $\boxed{\mathbf{c = \frac{m^2 + n^2}{2}}}$ *con **m** y **n** impares y primos entre si.*

Los Segmentos de un triángulo. Los segmentos Notables

La Paralela Media



M₁, ***M₂*** *y* ***M₃*** *puntos medios de los lados* $\overline{\mathbf{QR}}$, $\overline{\mathbf{RP}}$ *y* $\overline{\mathbf{PQ}}$ *respectivamente.*

La paralela media es un segmento que va desde el punto medio de un lado al punto medio de otro lado. Tiene dos propiedades básicas, descritas en su nombre,

i) es paralela con el tercer lado y
ii) es la mitad (media) del tercer lado

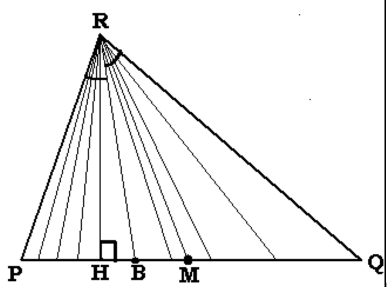
En la figura:

$\overline{\mathbf{M_1M_2}}$ *es la* ***Paralela media*** *del* Δ***PQR*** *con respecto al lado* $\overline{\mathbf{PQ}}$

$$\overline{\mathbf{M_1M_2}} \,//\, \overline{\mathbf{PQ}} \quad y \quad \overline{\mathbf{M_1M_2}} = \frac{\overline{\mathbf{PQ}}}{\mathbf{2}}$$

$\overline{\mathbf{M_3M_2}}$ *y* $\overline{\mathbf{M_1M_3}}$ *son paralelas medias del* Δ***PQR***

Los segmentos NOTABLES. La Altura, la Mediana y la Bisectriz



Nótese: *que desde un vértice de un triángulo pueden trazarse infinitos segmentos al lado opuesto de ese vértice. Estos* ***segmentos*** *se conocen con el nombre de "Cevianas". Algunas tienen una* ***Posición NOTABLE:***

- ✓ ***la Altura,***
- ✓ ***la Mediana*** *y*
- ✓ ***la Bisectriz***

de un ***triángulo***

Desde cada vértice se pueden trazar tres segmentos Notables.

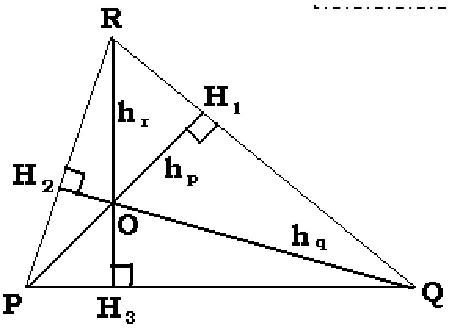
- ✓ *Cuando cae en el lado opuesto con un ángulo de 90⁰;* — *l**a altura***
- ✓ *Cuando cae en el punto medio del lado;* — *la* ***mediana***
- ✓ *Cuando divide al ángulo en dos ángulos iguales;* — *la* ***bisectriz***

En la figura:

- *Si* $\overline{\mathbf{RH}} \perp \overline{\mathbf{PQ}}$
  $\overline{\mathbf{RH}}$ ***altura*** *del* Δ***PQR***, *con respecto al lado* $\overline{\mathbf{PQ}}$. $\mapsto \boxed{\mathbf{h_{PQ}}}$
- *Si* ***M punto medio*** *de* $\overline{\mathbf{PQ}}$
  $\overline{\mathbf{RM}}$ ***mediana*** *del* Δ***PQR***, *con respecto al lado* $\overline{\mathbf{PQ}}$. $\mapsto \boxed{\mathbf{m_{PQ}}}$
- *Si* $\angle\mathbf{PRB} = \angle\mathbf{BRQ}$
  $\overline{\mathbf{RB}}$ ***bisectriz*** *del* Δ***PQR***, *con respecto al lado* $\overline{\mathbf{PQ}}$. $\mapsto \boxed{\mathbf{b_{PQ}}}$

Continúa …

La altura



Nota: *Las tres alturas se cortan en un mismo punto, llamado **Ortocentro** (el prefijo ORTO, "significa" recto, correcto,…)*

Si $\angle PH_1Q = \angle QH_2R = \angle RH_3P = 90^0$

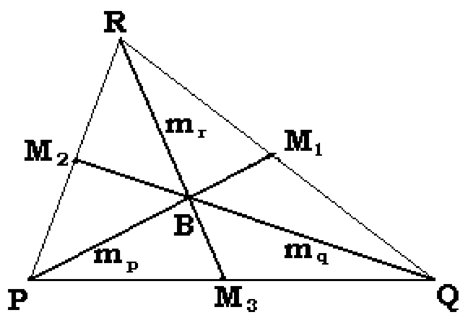
$\overline{PH_1}$ *es la **altura** de ΔPQR con respecto al lado $\overline{RQ}$ o lado **p**.* $\left(\overline{PH_1} = h_p\right)$

$\overline{QH_2}$ *es la **altura** de ΔPQR con respecto al lado $\overline{RP}$ o lado **q**.* $\left(\overline{QH_2} = h_q\right)$

$\overline{RH_3}$ *es la **altura** de ΔPQR con respecto al lado $\overline{PQ}$ o lado **r**.* $\left(\overline{RH_3} = h_r\right)$

***O** es el **Ortocentro** del ΔPQR*

La mediana



Nota**: Las tres medianas se cortan en un mismo punto, llamado **Baricentro** (el prefijo BARI "significa" gravedad,…). El Baricentro divide a cada mediana en **dos segmentos

***Si** M_1, M_2 y M_3 son los puntos medios de los lados $\overline{QR}$, $\overline{RP}$ y $\overline{PQ}$ respectivamente.*

$\overline{PM_1}$ *es la **mediana** del ΔPQR con respecto al lado $\overline{QR}$.* $\left(\overline{PM_1} = m_p\right)$

$\overline{QM_2}$ *es la **mediana** de ΔPQR con respecto al lado $\overline{RP}$.* $\left(\overline{QM_2} = m_q\right)$

$\overline{RM_3}$ *es la **mediana** de ΔPQR con respecto al lado $\overline{PQ}$.* $\left(\overline{RM_3} = m_r\right)$

***B** es el **Baricentro** del ΔPQR*

*<u>El **Baricentro**</u> es el punto interior <u>más importante</u> del triángulo; es el **centro de gravedad**, es el punto que deja **una razón** entre los segmentos que él determina en cada la mediana.*

La Razón

Entre los DOS segmentos de CADA mediana

(***B** es el **Baricentro***)

$$\frac{\overline{M_1B}}{\overline{BP}} = \frac{1}{2} = \frac{\overline{M_2B}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{M_3B}}{\overline{BR}}$$

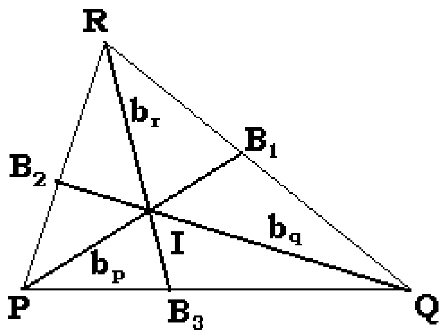
Uno es la **mitad** del otro, o el otro es el **doble** de uno.

Entre el menor de los DOS segmentos y la mediana

$$\frac{\overline{M_1B}}{\overline{PM_1}} = \frac{1}{3} = \frac{\overline{M_2B}}{\overline{QM_2}} = \frac{\overline{M_3B}}{\overline{RM_3}}$$

El segmento es la **tercera parte** de la mediana, o la mediana es el **triplo** del segmento.

La bisectriz



Nota**: Las tres bisectrices se cortan en un mismo punto, llamado **Incentro.

Si $\angle QPB_1 = \angle B_1PR$ *;*

$\overline{PB_1}$ *es la **bisectriz** del* Δ***PQR*** *con respecto al lado* $\overline{RQ}$. $\left(\overline{PB_1} = b_p\right)$

Si $\angle RQB_2 = \angle B_2QP$

$\overline{QB_2}$ *es la **bisectriz** de* Δ***PQR*** *con respecto al lado* $\overline{RP}$. $\left(\overline{QB_2} = b_q\right)$

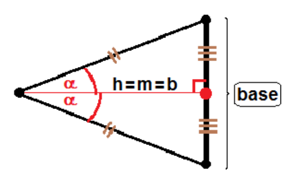
Si $\angle PRB_3 = \angle B_3RQ$

$\overline{RB_3}$ *es la **bisectriz** de* Δ***PQR*** *con respecto al lado* $\overline{PQ}$. $\left(\overline{RB_3} = b_r\right)$

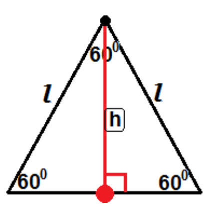
I** es el **Incentro** del* ΔPQR***

Sobre los segmentos Notables…….

✓ *En el **triángulo Isósceles coinciden**, con respecto <u>al lado base</u>, **los tres segmentos notables**.* $h_{base} = m_{base} = b_{base}$



✓ *En el **triángulo Equilátero** los <u>tres segmentos notables</u> **coinciden** (con respecto a cada lado). **Solo** se pueden trazar, a lo sumo, uno por cada vértice (tres segmentos) TODOS iguales. Su **longitud** es*

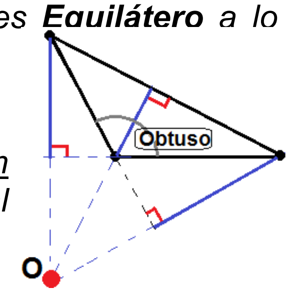


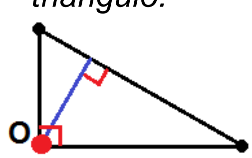
$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}\,l$$ *("l" longitud del lado del triángulo **Equilátero**).*

Aquí coincide el Ortocentro, el Baricentro y el Inscentro.

✓ *En **cualquier** triángulo se pueden trazar, a lo sumo, **9** segmentos notables. Si el triángulo **es Isósceles**, a lo sumo **7** segmentos notables y si es **Equilátero** a lo sumo **3** segmentos notables.*

✓ *En el triángulo **Obtusángulo**, el **Ortocentro** (**O**) NO <u>es un punto interior</u> del triángulo**,** sino que es un **punto exterior** al triángulo.*





✓ *En el triángulo **Rectángulo**, el **Ortocentro** (**O**) coincide con el <u>vértice del ángulo recto</u>.*

Algo más del triángulo Isósceles…

*En la práctica, es saludable, conocer algunas de las **características de los triángulos Isósceles**, de esas <u>que</u> <u>permiten</u> **<u>probar</u>** que un triángulo es **Isóscele**s:*

- *Dos **lados iguales**.*
- *Dos **ángulos iguales***

***Coinciden**, con respecto a un mismo lado**, dos segmentos notables**:*

- ***La mediana**, con respecto a un lado, **coincide** con **la bisectriz** respecto a ese mismo lado.*
- ***La mediana**, con respecto a un lado, **coincide** con **la altura** respecto a ese mismo lado.*
- ***La altura**, con respecto a un lado, **coincide** con **la bisectriz** respecto a ese mismo lado.*

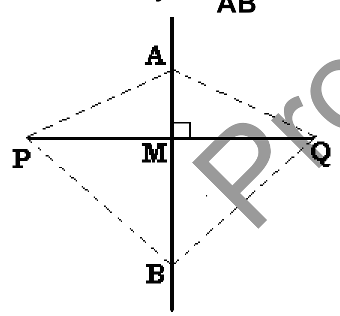
***ATENCIÓN:** basta con que **se cumpla** <u>una</u> <u>de</u> <u>estas</u> <u>CINCO</u> para que el triángulo sea Isósceles.*

Ahora bien, si conocemos que el triángulo es Isósceles podemos UTILIZAR cualquiera de sus características (incluidas estas CINCO).

La Mediatriz de un segmento. Una recta Notable del triángulo

<table>
<tr>
<td>

*Sea **M** el punto medio del segmento* $\overline{PQ}$ *y* $r_{AB} \perp \overline{PQ}$



*La recta **AB** (* r_{AB} *) **es la MEDIATRIZ** de* $\overline{PQ}$*, ya que es <u>perpendicular</u> al segmento y pasa por el <u>punto</u> <u>medio</u> **"M"**.*

</td>
<td>

De *la **mediatriz** de un segmento*

PRECISEMOS:

- *La mediatriz es **una recta**, no un **segmento.***
- ***Cada punto** de la mediatriz **equidista** de los extremos del segmento.*

↖ *(en el* Ejemplo*:* $\overline{AP} = \overline{AQ}$; $\overline{BP} = \overline{QB}$*).*

- *La mediatriz es una recta que corta al segmento en su **punto medio** y con **ángulo de*** 90^0
- *Es una de la cuatro rectas Notables del triángulo.*

</td>
</tr>
</table>

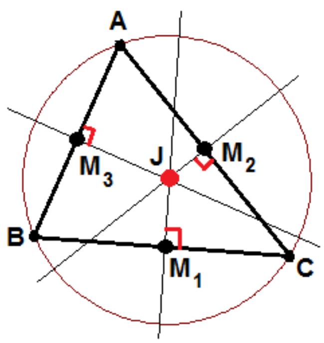
*Nota: Los Segmentos Notables son parte de una recta, a esas rectas se le nombran RECTAS NOTABLES: **la mediatriz**, **la bisectriz**, **la mediana**, y **la altura**.*

Algo más sobre las Rectas Notables,…La Mediatriz …

La mediatriz puede aparecer en cualquier Polígono; basta con que la figura tenga como lado a un segmento para que pueda trazarse la MEDIATRIZ.

En particular, ***en los triángulos:***

- Si *consideramos a la bisectriz, a la mediana y a la altura como "rectas",* entonces *podemos hablar de* ***cuatro rectas notables*** *en un triángulo:*
  La mediatriz, **la mediana**, **la altura** y **la bisectriz.**
- ***Las mediatrices*** *de los lados se cortan en un mismo punto, tal y como lo hacen los segmentos notables, a este punto se le llama el Circunscentro.*



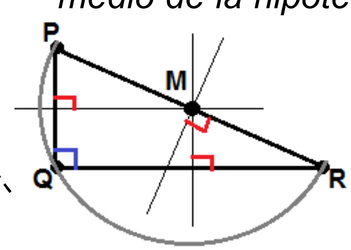
En la figura:

$\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$ *y* $\mathbf{M_3}$ *son puntos medios.*

J *es el* ***circunscentro*** *del* Δ**ABC**. *Es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.*

Nótese que a diferencia de los segmentos Notables la Mediatriz NO tiene que pasar por el vértice opuesto al lado.

- Si *la Mediatriz de un lado del triángulo pasa por el vértice opuesto,* entonces *el triángulo es Isósceles y el lado es la base de ese triángulo Isósceles.*
- *En el* ***triángulo equilátero*** *la mediatriz contiene a los segmentos notables.* ***Coinciden*** *así Circuncentro, Incentro, Baricentro y Ortocentro.*
- *En el* ***triángulo Isósceles*** *la mediatriz del lado base contiene a los segmentos notables con respecto a ese lado.*
- *En el* ***triángulo Rectángulo*** *el Circunscentro* ***coincide*** *con el punto medio de la hipotenusa.*



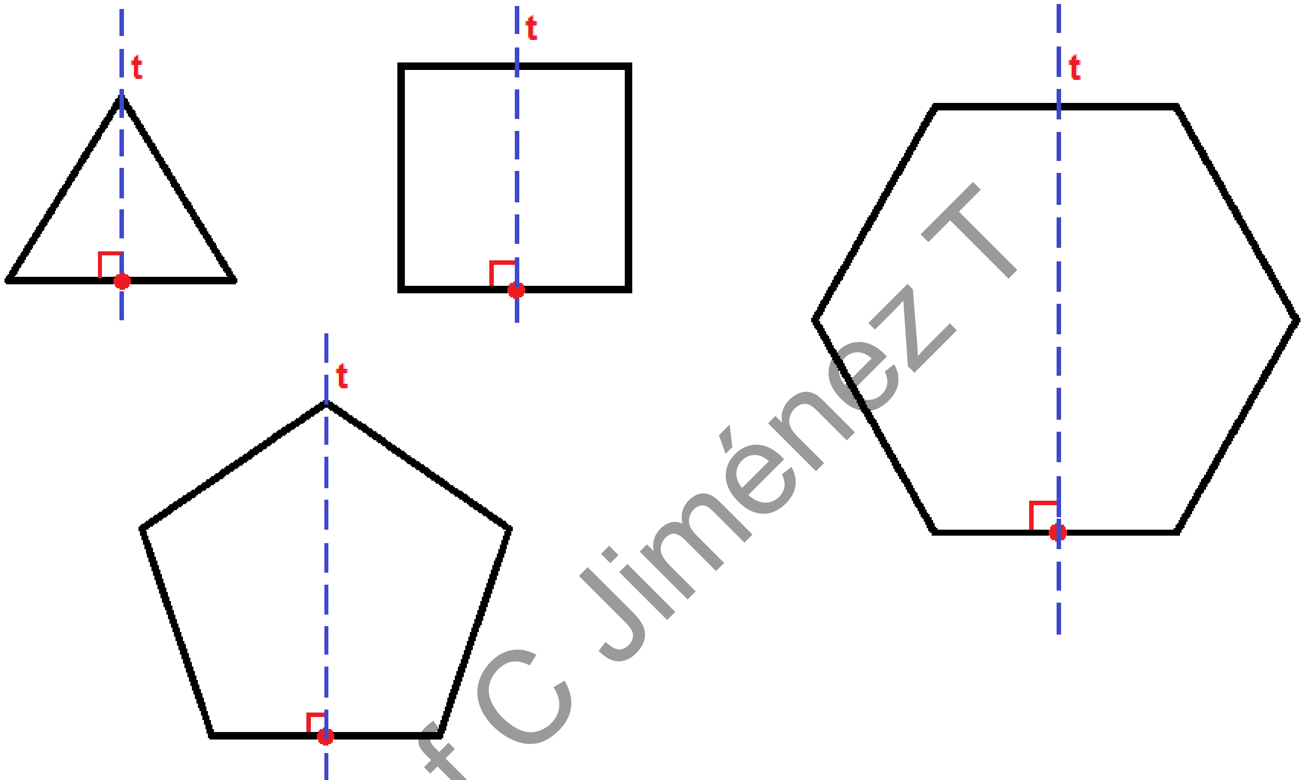
En la figura:

M *es el punto medio de la hipotenusa.*

M *es el* **Circuncentro** *del* Δ**PQR**.

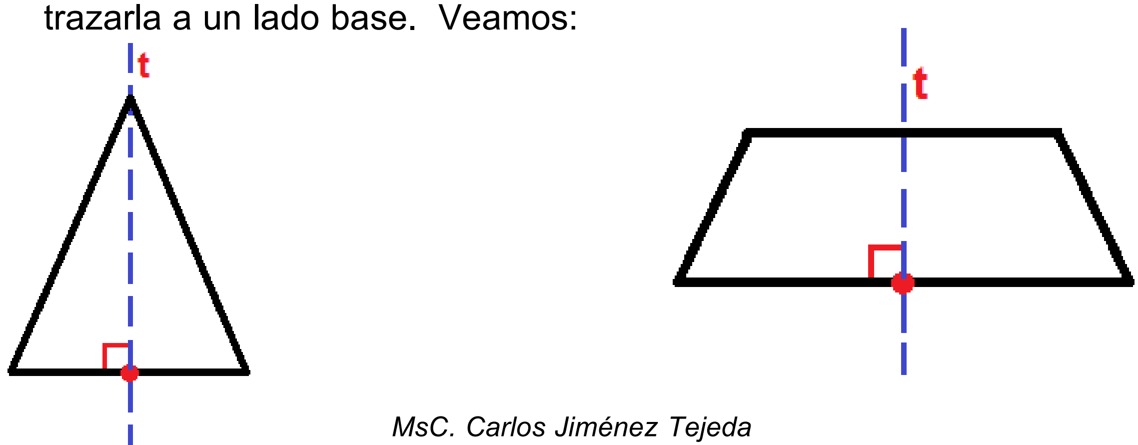
..Algo más sobre la mediatriz ….”EJE de SIMETRÍA”

*Al trazar la mediatriz de los lados de una figura REGULAR (*Triángulos Equiláteros, Cuadrados, Pentágonos Regulares, Hexágonos Regulares, etc.), *esta recta se convierte, en estas figuras, en el* EJE DE SIMETRÍA Axial*. Veamos:*



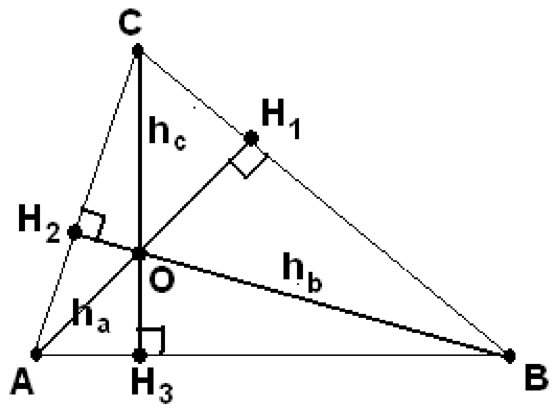
Nótese que en las figuras REGULARES cuya cantidad de lados es un número IMPAR, la mediatriz hace también de Bisectriz de un ángulo interior.

La Mediatriz, también ejerce la función de EJE DE SIMETRÍA Axial en los Triángulos ISÓSCELES y en los Trapecios ISÓSCELES; ocurre, al trazarla a un lado base. Veamos:



El área y el Perímetro de un Triángulo

*El **área** o la **medida de la superficie** que ocupa la figura, en este caso el triángulo, tiene muchas formas de calcularse (a partir de los datos con que se cuente) y en la medida que avance su escolaridad conocerá varias de estas. Nos restringiremos aquí a dos de ellas. Mientras que el **perímetro** es la **medida de la línea** (**longitud**) que limita a la superficie ocupada por el triángulo.*



Nota: En lo que viene a continuación

$\mathbf{A}$ es el área del Δ**ABC**

P es el perímetro del Δ**ABC**

$\mathbf{s} = \dfrac{\mathbf{P}}{\mathbf{2}}$ es el semiperímetro

Nótese que:

P (mayúscula) $\rightarrow$ Perímetro

s(minúscula) $\rightarrow$ Semiperímetro

En el Δ**ABC**,

$$\overline{\mathbf{AB}} = \mathbf{c} = l_1, \quad \overline{\mathbf{BC}} = \mathbf{a} = l_2 \quad \text{y} \quad \overline{\mathbf{AC}} = \mathbf{b} = l_3$$

El **perímetro, P.**

$$\mathbf{P} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \boxed{l_1 + l_2 + l_3}$$

El **semiperímetro, s**

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{2}}$$

<u>**El área**</u> (dos fórmulas, según los datos con se cuente)

- <u>conocido</u> un lado "l" y <u>su</u> <u>altura</u> correspondiente "h_l"

$$\mathbf{A} = \boxed{\frac{l.h_l}{\mathbf{2}}} = \frac{\mathbf{a{\bullet}h_a}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{b{\bullet}h_b}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{c{\bullet}h_c}}{\mathbf{2}}$$

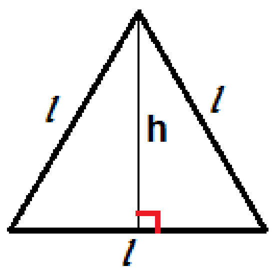
- <u>conocido</u> los **tres lados**.

$$\mathbf{A} = \sqrt{\mathbf{s(s-a)(s-b)(s-c)}} = \boxed{\sqrt{s\left(s-l_1\right)\left(s-l_2\right)\left(s-l_3\right)}}$$

También conocida como fórmula de **Herón**

Algo más sobre las áreas,…

Si el triángulo es ***Equilátero*** *y se conoce la longitud de su lado "l";*

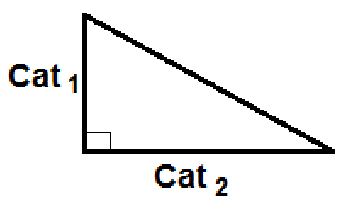


*Entonces su altura "**h**" es*

$$\mathbf{h} = \frac{\sqrt{3}}{2} l \quad (l \text{ es la longitud del lado}) \qquad \textbf{\textit{y}}$$

$$\boxed{\mathbf{A} = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2} \quad (\mathbf{A} \text{ es el área })$$

Si el triángulo es ***Rectángulo*** *y se conoce la longitud de dos de los lados,*



Entonces su área **A** *es*

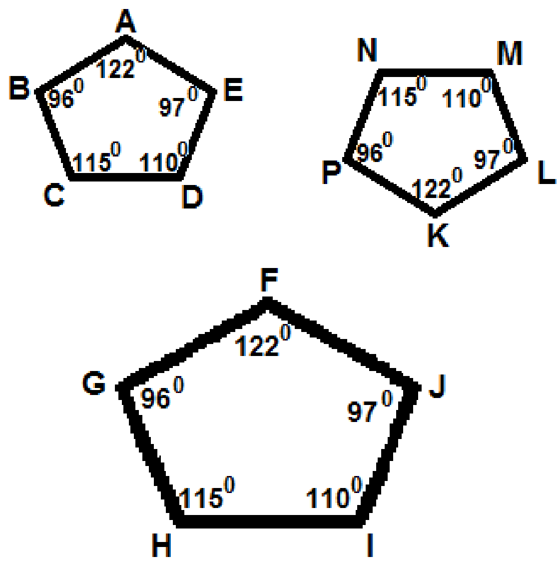
$$\boxed{\mathbf{A} = \frac{\mathbf{cat_1 \cdot cat_2}}{\mathbf{2}}}$$

Nótese que un cateto es la altura del triángulo con respecto al otro cateto.

Igualdad & Semejanza. Entre Polígonos.

Dos figuras son SEMEJANTES
(una condición)

- *Cuando tienen la misma "forma"*
  (ángulos interiores "IGUALES")



ABCDE ~ KLMNP ~ FGHIJ

Dos figuras son IGUALES
(dos condiciones)

- *Cuando tienen la misma forma* ***y***
- *Tienen el mismo tamaño*

*Nótese que se necesitan **DOS condiciones***

↖ *De los tres pentágonos solamente:*

$\boxed{\textbf{ABCDE} = \textbf{KLMNP}}$ $\left\{ \begin{array}{l} \textbf{ya que:} \\ = \ \textbf{Forma} \\ = \ \textbf{Tamaño} \end{array} \right\}$

Nótese que:

$\boxed{\textbf{ABCDE} \neq \textbf{FGHIJ}}$ $\left\{ \begin{array}{l} = \ \textbf{Forma} \\ \quad \textbf{y} \\ \neq \ \textbf{Tamaño} \end{array} \right\}$

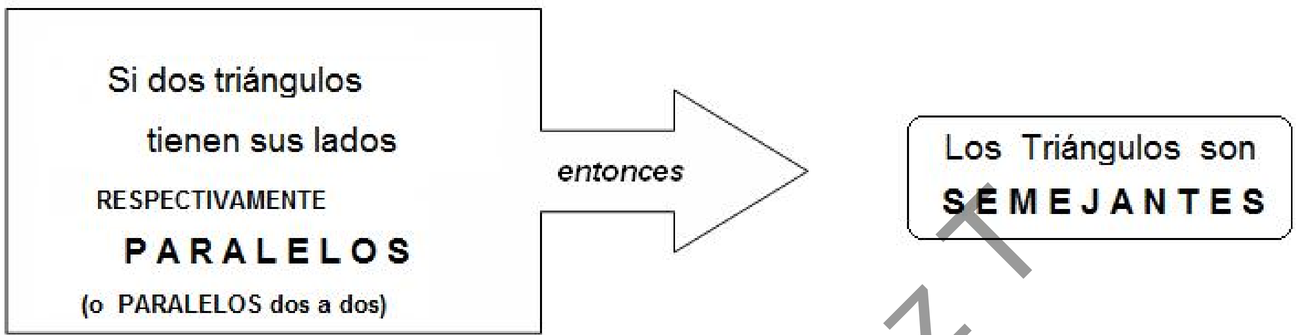
*En la Práctica, **dos Polígonos son semejantes**, de manera general, si:*

- *Sus lados son PARALELOS, dos a dos; ó*
- *Sus ángulos interiores son iguales, dos a dos; ó*
- *Sus lados son proporcionales, dos a dos.*

*Nótese que basta con que **se cumpla UNA DE LAS TRES condiciones** para que se considere que son SEMEJANTES.*

De la IGUALDAD y/o SEMEJANZA de TRIÁNGULOS

TODOS los triángulos EQUILÁTEROS son SEMEJANTES
*Tienen la **misma forma*** $\Leftrightarrow$ *TODOS sus ángulos miden* **60^0**



Otros Criterios para probar la Semejanza o la Igualdad entre TRIÁNGULOS:

SEMEJANZA	***IGUALDAD***
a. a. *(“**a**”, **á**ngulos iguales)*	***a. l. a.*** *(“**l**”, **l**ados iguales)*
p. p. p. *(“**p**”, lados **p**roporcionales)*	***l. l. l.***
p. a. p.	***l. a. l.***

Aquí es importante la POSICIÓN de cada lado con respecto a los ángulos, así como la FORMA de escribir las justificaciones en la demostración por alguno de estos TEOREMAS; veamos:

p. a. p. $\mapsto$ por tener dos lados RESPECTIVAMENTE proporcionales e igual el ángulo comprendido entre los lados.

l. a. l. $\mapsto$ por tener dos lados y el ángulo comprendido, entre ellos, RESPECTIVAMENTE iguales; o

$\mapsto$ *por tener un ángulo y los lados que forman a ese ángulo* RESPECTIVAMENTE iguales.

a. l. a. $\mapsto$ por tener dos ángulos y el lado comprendido, entre ellos, RESPECTIVAMENTE iguales; o

$\mapsto$ *por tener un lado y los ángulos adyacentes a ese lado* RESPECTIVAMENTE iguales.

*Ahora bien, la proporcionalidad entre lados "HOMÓLOGOS" (lados que se oponen a ángulos iguales) en dos figuras que sean SEMEJANTES, deja una RAZÓN (número "**k**"), llamada razón de semejanza.*

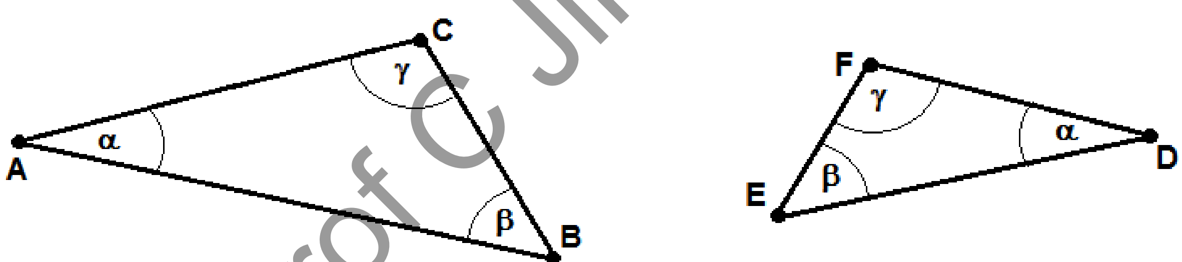
Hay dos momentos en los que se presenta esta PROPORCIONALIDAD. Cuando se quiere:

- ⇒ *Probar la proporcionalidad entre las longitudes de lados que se oponen a ángulos iguales para demostrar la SEMEJANZA de Triángulos.*
- ⇒ *Establecer la proporcionalidad entre lados homólogos, una vez probada la Semejanza de dos triángulos.*

De este último:

*PRECISEMOS **cómo** establecer esta proporción y la razón "**k**" (razón de semejanza), una vez conocido la semejanza de los triángulos.*

Sean los triángulos **ABC** y **DEF** SEMEJANTES ($\Delta ABC \sim \Delta DEF$)



En $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

$$\begin{array}{rccccc} & \alpha & & \beta & & \gamma \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \begin{array}{r}\Delta ABC \mapsto \\ \Delta DEF \mapsto\end{array} & \boxed{\dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}}} & = & \dfrac{\overline{AC}}{\overline{FD}} & = & \dfrac{\overline{AB}}{\overline{ED}} \end{array}$$

Nótese que en esta disposición,

- *en los numeradores, como también, en los denominadores van SIEMPRE los lados del **triángulo** que se decide poner en ESA POSICIÓN y*
- *en cada fracción están los LADOS que SE OPONEN a **ángulos IGUALES**.*

*de ahí que la **razón de semejanza** es* $\mathbf{k} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{ED}}$ *ó* $\mathbf{k} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{FD}}$ *ó* $\mathbf{k} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$

***La igualdad entre figuras es un caso particular de la semejanza**, es decir:*

- *Si dos figuras son iguales
  entonces
  son semejantes,*

  …PERO

- *Si son semejantes NO siempre son iguales.*

Dos figuras SEMEJANTES son IGUALES solamente

*cuando la razón de semejanza es **UNO**, **"k = 1"***

ATENCIÓN:

- ✓ ***La razón de semejanza al CUADRADO** es la RAZÓN entre sus áreas*

$$\boxed{k^2 = \frac{A_1}{A_2}}$$

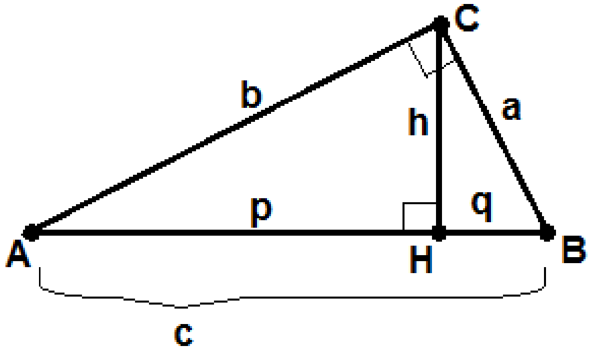
- ✓ ***La razón** entre sus PERÍMETROS es* **k** (razón de semejanza), $\boxed{k = \frac{P_1}{P_2}}$

En general:

- ✓ Si dos figuras son iguales sus áreas y sus perímetros son iguales. PERO
- ✓ Si dos figuras tienen igual área NO tienen por qué ser iguales (figuras).

GRUPO DE TEOREMAS DE PITÁGORAS

Al trazar la ALTURA respecto a la Hipotenusa



$\mathbf{b} \mapsto \mathbf{cateto_1}$; $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{cateto_2}$

En el $\Delta\mathbf{ABC}$, *rectángulo en* ***C***

$\mathbf{h} \mapsto$ *<u>Altura</u> del Δ, con respecto a la hipotenusa* $\overline{\mathbf{AB}}$. "$\mathbf{h_{AB} = h_c}$"

$\mathbf{p} \mapsto$ *<u>Proyección</u> del cateto* **b** *sobre la hipotenusa* $\overline{\mathbf{AB}}$. "$\mathbf{p} = \overline{\mathbf{AH}}$"

$\boxed{\mathbf{proyec(b) = p}}$

$\mathbf{q} \mapsto$ *<u>Proyección</u> del cateto* **a** *sobre la hipotenusa* $\overline{\mathbf{AB}}$. "$\mathbf{q} = \overline{\mathbf{HB}}$"

$\boxed{\mathbf{proyec(a) = q}}$

***TEOREMA DE PITÁGORAS**:*

En todo Δ Rectángulo, $\mathbf{(hipotenusa)^2 = (cateto_1)^2 + (cateto_2)^2}$

↖ *En la figura:* $\boxed{\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}}$

Al trazar la ALTURA con respecto a la hipotenusa quedan determinados tres triángulos SEMEJANTES

De la figura $\mathbf{\Delta ABC \sim \Delta HCA \sim \Delta HBC}$

TEOREMA DE LA ALTURA:

En todo Δ Rectángulo, al trazar la altura con respecto a la hipotenusa

$$\mathbf{(altura)^2 = \left[proyec(cateto_1)\right] \bullet \left[proyec(cateto_2)\right]}$$

↖ *En la figura:* $\boxed{\mathbf{h^2 = p \bullet q}}$

TEOREMA DE LOS CATETOS:

En todo Δ Rectángulo, al trazar la altura con respecto a la hipotenusa

$$\mathbf{(cateto_1)^2 = \left[proyec(cateto_1)\right] \bullet \left[hipotenusa\right]}$$

↖ *En la figura:* $\boxed{\mathbf{b^2 = p \bullet c}}$

$$\mathbf{(cateto_2)^2 = \left[proyec(cateto_2)\right] \bullet \left[hipotenusa\right]}$$

↖ *En la figura:* $\boxed{\mathbf{a^2 = q \bullet c}}$

Algo más, antes de terminar con los triángulos…

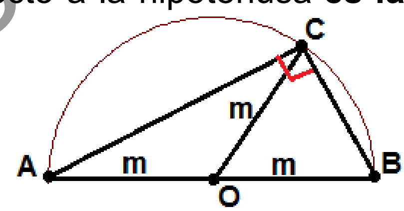
I. Si en un triángulo (CLASIFICACIÓN según los ángulos, **conocidos los lados**):

1º. El cuadrado del lado mayor es **IGUAL a la suma** de los **cuadrados de los otros dos lados**, entonces el triángulo es RECTÁNGULO.

2º. El cuadrado del lado mayor es **MAYOR a la suma** de los **cuadrados de los otros dos lados**, entonces el triángulo es OBTUSÁNGULO.

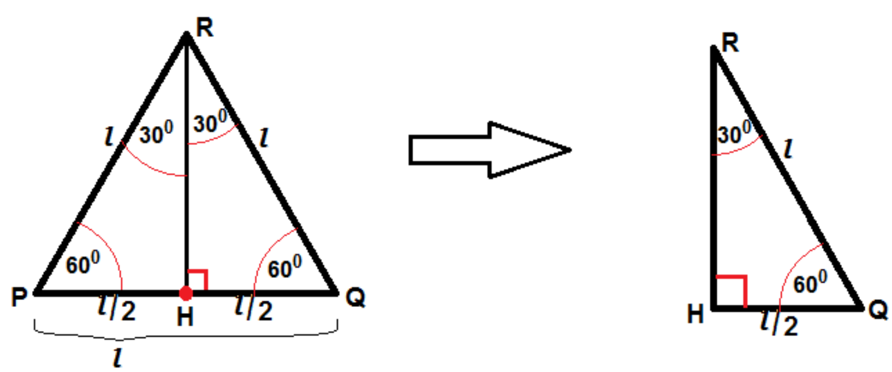
3º. El cuadrado del lado mayor es **MENOR a la suma** de los **cuadrados de los otros dos lados**, entonces el triángulo es ACUTÁNGULO.

II. En todo triángulo rectángulo **la mediana** con respecto a la hipotenusa **es la mitad de la hipotenusa.**



III. Si en un triángulo **la mediana** con respecto a un lado **es la mitad de ese lado**, entonces el triángulo es RECTÁNGULO y **el lado** es a la **hipotenusa**.

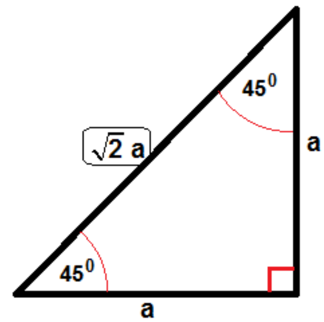
IV. En todo triángulo rectángulo con ángulos agudos de $\mathbf{30^0}$ y de $\mathbf{60^0}$, sucede que la longitud del cateto opuesto al ángulo de $\mathbf{30^0}$ es la mitad de la hipotenusa.



En Δ**QRH** rectángulo en H

$$\boxed{\overline{\mathbf{HQ}} = \frac{\overline{\mathbf{RQ}}}{\mathbf{2}}}$$

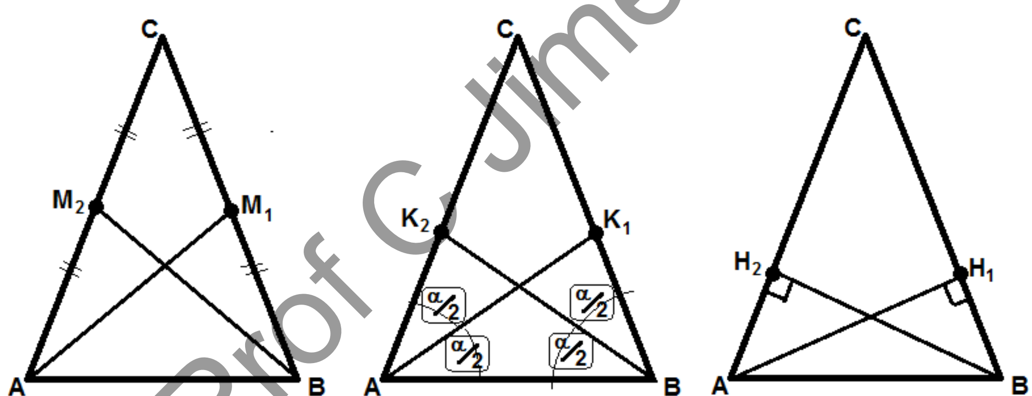
VI. En los triángulos rectángulos e Isósceles la longitud de la hipotenusa es $\sqrt{2}$ por la longitud de uno de los catetos.



V. En los triángulos ISÓSCELES:

- Las MEDIANAS trazadas a los lados Iguales **son IGUALES**;
- Las BISECTRICES trazadas a los lados Iguales **son IGUALES**;
- Las ALTURAS trazadas a los lados Iguales **son IGUALES**;

En las figuras Δ**ABC** *Isósceles de base* $\overline{AB}$



$\overline{AM_1} = \overline{AM_2}$ $\overline{AK_1} = \overline{AK_2}$ $\overline{AH_1} = \overline{AH_2}$

(medianas) *(bisectrices)* *(alturas)*

VI. Si en un triángulo dos de sus Medianas o dos de sus Bisectrices o dos de su Alturas son IGUALES, entonces el **Triángulo es ISÓSCELES** y los lados a los cuales se les trazó los segmentos son sus lados NO BASES.

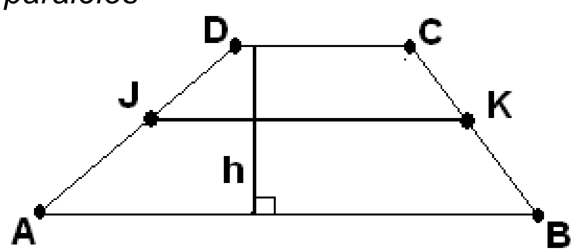
EL CUADRILÁTERO.

Un cuadrilátero es un Polígono de cuatro lados y se dividen para su estudio en dos grupos, los que tienen <u>lados paralelos</u> (Trapecios) y los que no tienen lados paralelos (Trapezoides). Aquí nos dedicaremos a los Trapecios, que son los únicos que tienen altura (distancia entre dos lados paralelos, longitud del segmento perpendicular entre los lados paralelos).

*Un **Trapecio** es un cuadrilátero **con dos lados paralelos**, nombrados lados bases. Los Paralelogramos, Rectángulos, Rombos y Cuadrados al tener dos lados paralelos se consideran también TRAPECIOS.*

TRAPECIO

Cuadrilátero con un par de lados paralelos



Descripción:

Lados opuestos y lados consecutivos.

Un par de lados <u>bases</u>;
$\overline{DC}$ *y* $\overline{AB}$ *(paralelos).*

Un par de lados <u>NO</u> <u>bases</u>;
$\overline{DA}$ *y* $\overline{CB}$

***J** y **K** son los punto medios de los <u>lados</u> <u>no</u> <u>bases</u>.*

$\overline{JK}$ *es la <u>paralela</u> <u>media</u> y va del punto medio de un lado NO base, al punto medio del otro lado NO base*

***h** es la ALTURA, distancia entre los lados paralelos.*

***Nota** a los trapecios con un par de lados opuestos no paralelos los llamaremos **trapecios comunes** (para facilitar su representación).*

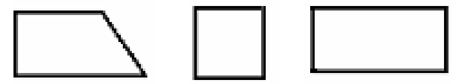
Como $\overline{AB} // \overline{DC}$,

***ABCD** es un trapecio de base* $\overline{AB}$ *o de base* $\overline{DC}$

- $\angle A$ *y* $\angle B$ *son una pareja de ángulos bases*
- $\angle D$ *y* $\angle C$ *son una pareja de ángulos bases*
- $\overline{JK}$ *es la **Paralela media** del trapecio **ABCD***
- ***h*** *es la altura del trapecio.*
- $\angle A + \angle D = \boxed{180^0} = \angle B + \angle C$
- $\overline{JK} = \dfrac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$ *(Longitud de la paralela media)*
- $A = \boxed{\dfrac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \bullet h} = \boxed{\overline{JK} \bullet h}$
- $P = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$

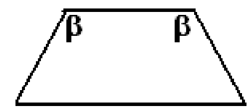
***Nota:** El <u>trapecio</u> <u>común</u> tiene **una sola altura**; cuya representación es cualquier segmento perpendicular a las bases.*

Los trapecios que tiene un ángulo recto se les nombra **TRAPECIOS RECTÁNGULOS**

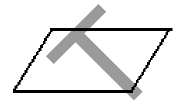


*Los trapecios con un par de ángulos bases iguales se les nombra **Trapecios Isósceles**. Veamos algunas de sus características:*

- ✓ *Sus <u>lados No bases</u> **iguales**.*
- ✓ *Los <u>pares de ángulos bases</u> son **iguales**.*
- ✓ *Sus <u>diagonales</u> son **iguales**.*



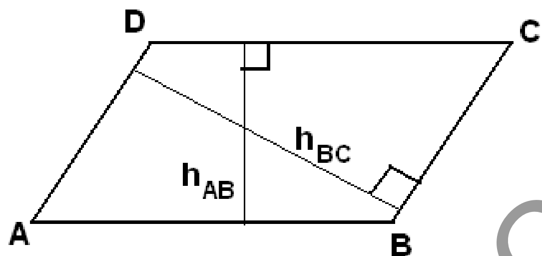
- ✓ *<u>No</u> <u>basta</u> con que un trapecio tenga los <u>lados</u> <u>No</u> <u>bases</u> <u>iguales</u> para que se considere a un Trapecio Isósceles.*

Ejemplo: $\mapsto$ 

Recuerde
Los Trapecios Isósceles son SIMÉTRICOS respecto a la mediatriz de las bases.

EL PARALELOGRAMO

Lados opuestos paralelos



Descripción:

- *Dos alturas (en general)….*

  $\mathbf{h_{AB}}$ *es la altura con respecto a los lados paralelos* $\overline{\mathbf{AB}}$ *y* $\overline{\mathbf{CD}}$

  $\mathbf{h_{CB}}$ *es la altura con respecto a los lados paralelos* $\overline{\mathbf{CB}}$ *y* $\overline{\mathbf{AD}}$
- *Lados opuestos y*
- *Lados consecutivos (vértice común)*
- *Ángulos opuestos y*
- *Ángulos consecutivos (lado común).*

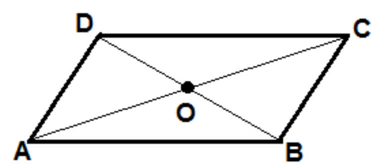
Como $\overline{\mathbf{AB}} // \overline{\mathbf{CD}}$ *y* $\overline{\mathbf{AD}} // \overline{\mathbf{BC}}$

***ABCD** es un Paralelogramo. Luego:*

- $\overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{DC}}$ *y* $\overline{\mathbf{AD}} = \overline{\mathbf{BC}}$
- $\angle\mathbf{DAB} = \angle\mathbf{DCB}$ *y* $\angle\mathbf{ADC} = \angle\mathbf{ABC}$
- *Las diagonales se cortan en el <u>Punto Medio</u> (se bisecan).*

Ejemplo: $\rightarrow$

$\overline{\mathbf{AO}} = \overline{\mathbf{OC}}$
$\overline{\mathbf{BO}} = \overline{\mathbf{OD}}$



<u>ÁREA</u>

- $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{AB}} \cdot \mathbf{h_{AB}} = \overline{\mathbf{CD}} \cdot \mathbf{h_{CD}}$

<u>PERÍMETRO</u>

- $\begin{cases} \mathbf{P} = \overline{\mathbf{AB}} + \overline{\mathbf{BC}} + \overline{\mathbf{CD}} + \overline{\mathbf{DA}} \\ \mathbf{P} = 2(\overline{\mathbf{AB}} + \overline{\mathbf{BC}}) \end{cases}$

***Nota** a los paralelogramos que no son Ni rectángulos Ni rombos lo llamaremos **paralelogramo común**.*

Cada diagonal divide al paralelogramo en **dos triángulos iguales**

*En la práctica, es saludable precisar algunas de las **características de los Paralelogramos**, de esas que permiten **probar** que un Cuadrilátero es un Paralelogramo (SIETE):*

TRES con respecto a los lados:

- ***Dos pares** de lados, opuestos, **paralelos**. (* lados opuestos paralelos ***)***
- ***Dos** pares de lados, opuestos, **iguales**. (* lados opuestos iguales)
- ***Un par** de lados, opuestos, **iguales y paralelos**.*

DOS con respecto a los ángulos:

- ***Dos pares** de ángulos, opuestos, **iguales**.* (ángulos opuestos iguales)
- ***La suma** de dos ángulos, interiores, consecutivos es **180^0**. (de todos).*

UNA con lados y ángulos:

- ***Un par** de lados opuestos **paralelos** y **Un par** de ángulos opuestos **iguales***

UNA con respecto a la diagonal:

- ***Las diagonales** se cortan en el **punto medio**.* (las diagonales se bisecan)

EL RECTÁNGULO

*Este cuadrilátero, con **todos sus ángulos rectos**, plantea una pelea con el triángulo en "su desempeño" para la vida de los humanos; nótese que en nuestra sociedad, la llamada sociedad occidental, "la mayoría de las cosas" tienen forma rectangular... existen hasta personas "rectangulófilas" y un país "Rectangulandia" (imaginario, claro está…), mientras que en la sociedad oriental se toman más los arcos y los triángulos para las representaciones y construcciones.*

El rectángulo es:

- ✓ *Un Polígono con cuatro lados y cuatro ÁNGULOS RECTOS.*
- ✓ *Es un paralelogramo con todos los ÁNGULOS RECTOS.*
- ✓ *Es un trapecio rectángulo e Isósceles.*
- ✓ *Es un cuadrilátero con lados opuestos paralelos y lados adyacentes o consecutivos PERPENDICULARES.*

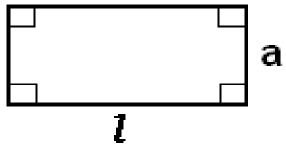
*Él es de gran trascendencia en nuestra sociedad, a veces y por su cotidianeidad **pasa sin ser notado**, … la pantalla de los PC, las cajas de los CD, las página de un libro, las "javitas" de las tiendas, las caras de una caja, una fotografía,... por nombrar algunas bien cotidianas, que como decíamos, pasan sin ser notados (*los rectángulos*),…*

*Fue gracias a la brillante mente de Claudi Alsina (Dr. y Prof. de Matemática, español) que por la última década del siglo pasado nos deleitamos con su libro **"Viaje al país de los Rectángulos**", obra de rico contenido y cautivador para aspirantes a "rectangulófilos".*

El área y el perímetro del Rectángulo…

El Área y el Perímetro

$l \rightarrow$ largo $a \rightarrow$ ancho



$$A = l \cdot a \qquad P = 2\,(\,l + a\,)$$

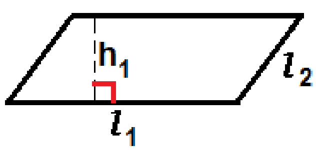
En general (lados consecutivos)*:*

- *El Área es producto de dos* lados consecutivos.
- *El Perímetro es el duplo de la suma de dos* lados consecutivos.

✓ El Rectángulo es Simétrico respecto a las mediatrices de cualquiera de sus lados.

Una CURIOSIDAD…

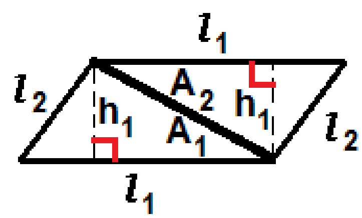
Área del Paralelogramo $\leftrightarrow$ *Área del Triángulo*



$A = l_1 \bullet h_1$

(lado por su altura)

$\rightarrow$ al trazar una diagonal
$\rightarrow$



$$A_1 = A_2 = \frac{A}{2}$$

Luego, el área del Triángulo es la MITAD del área del Paralelogramo

$$A_{\triangle} = \frac{l_1 \bullet h_1}{2}$$

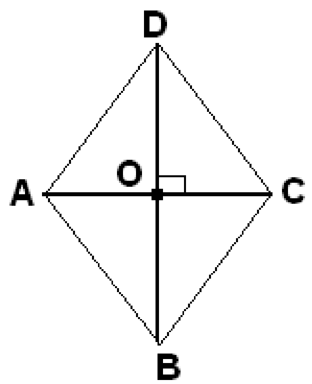
[lado por su altura sobre dos ó
el semiproducto de un lado por su altura]

NOTA: Recuerde que el RECTÁNGULO es un Paralelogramo….

EL ROMBO

El Rombo

Cuatro ***lados iguales***



Descripción:
$\overline{AC} = d_1$ *y* $\overline{BD} = d_2$
son diagonales.

..a continuación.. ↗

Nótese: lo ***prolífico***

de sus

DIAGONALES

Como $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$

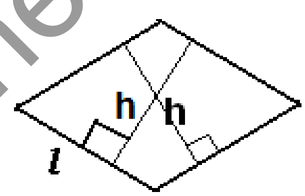
ABCD *es un Rombo, luego:*

- ***ABCD*** *es un Paralelogramo y también es Trapecio.*

- *Sus DIAGONALES* ***son perpendiculares****.*
  $\overline{AC} \perp \overline{BD}$
- *Las DIAGONALES* ***son bisectrices*** *de los ángulos interiores del Rombo.*
- *Las DIAGONALES forman* ***cuatro triángulos rectángulos iguales.***

- *Tiene Una sola altura*

Ejemplo: →



ÁREA

- Conocido sus diagonales

$$A = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2} = \boxed{\frac{d_1 \cdot d_2}{2}}$$

- Conocido la altura y el lado

$$\boxed{A = l \cdot h}$$

PERÍMETRO

- $P = 4 \cdot \overline{AB} = \boxed{4 \cdot l}$

Algo más,…

El Rombo es un paralelogramo especial, se dice que es un caso particular del paralelogramo; es un paralelogramo con **dos lados consecutivos iguales***.*

EL CUADRADO

El CUADRADO tiene iguales sus CUATRO lados y sus CUATRO ángulos

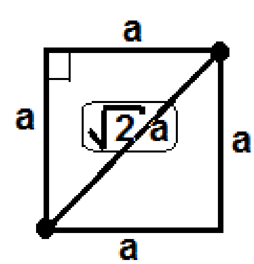
- ✓ *Si el Rombo **tiene un ángulo recto** entonces es un **Cuadrado***
- ✓ *El **Cuadrado** es también un caso particular del **Rectángulo** (4 $\measuredangle$ rectos) o sea un Cuadrado es **Rombo** y es **Rectángulo.** Además, también es **Paralelogramo** y es T**rapecio**.*

→ *Es un **polígono regular** de cuatro lados;*
esto es:
- ✓ *Ángulos iguales y*
- ✓ *Lados iguales*

*La **diagonal** del cuadrado*
- ➢ *Es bisectriz de los ángulos interiores*
- ➢ *Divide a dichos ángulos interiores en ángulos de* **45^0**
- ➢ Al trazar una, *se forman dos Triángulos Rectángulos e Isósceles Iguales*
- ➢ Al trazar las dos, *se forman cuatro triángulos Rectángulos e Isósceles iguales.*

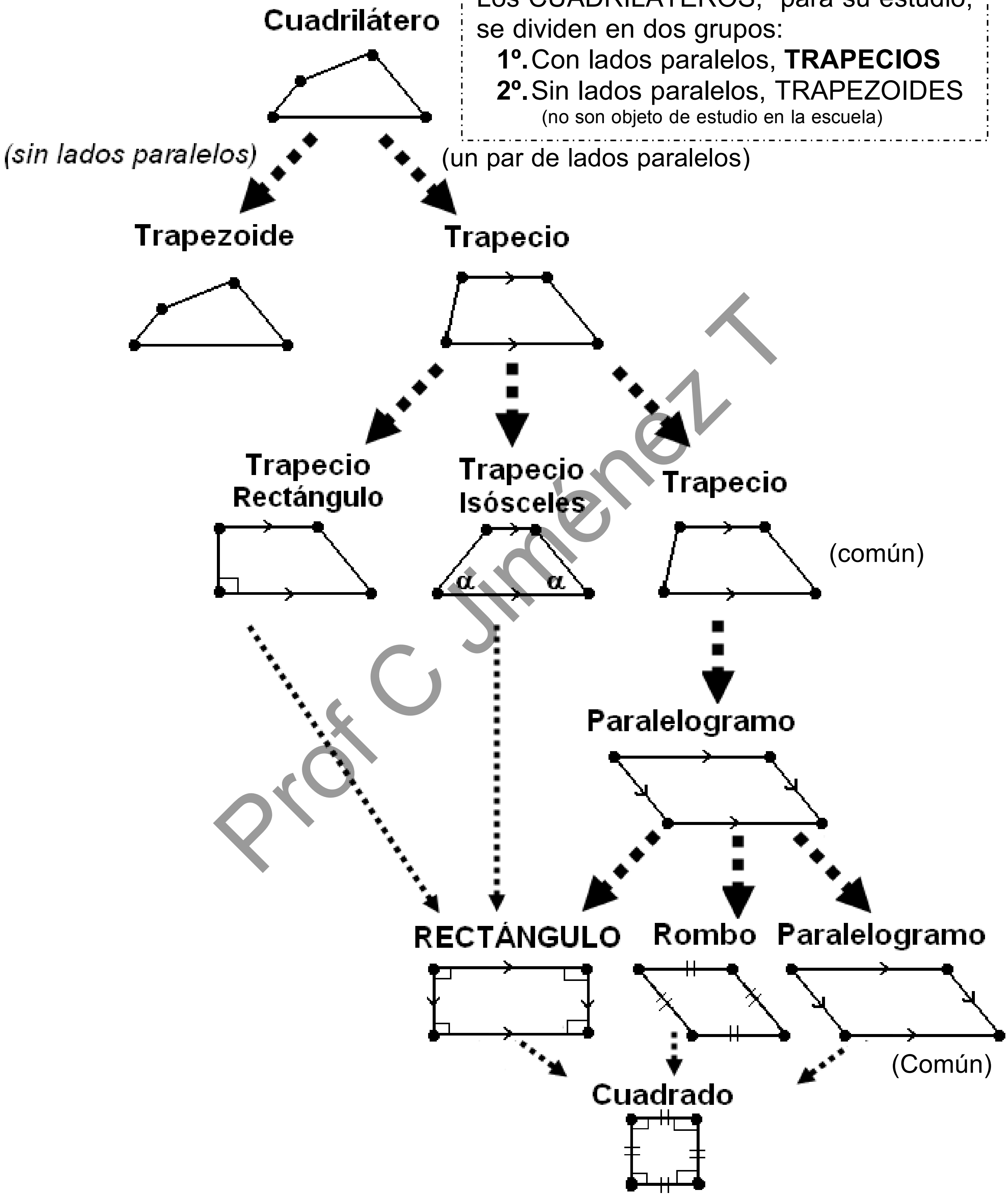
*De las dimensiones: sea "**a**" longitud del lado del Cuadrado*

- *La longitud de su diagonal es* $\boxed{\sqrt{2}.a}$ *ó* $a\sqrt{2}$
- *Su área* $\boxed{A = a^2}$
- *Su perímetro* $\boxed{P = 4a}$



Los CUADRILÁTEROS, para su estudio, se dividen en dos grupos:

1º. Con lados paralelos, **TRAPECIOS**
2º. Sin lados paralelos, TRAPEZOIDES
(no son objeto de estudio en la escuela)



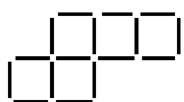
…Lo real maravilloso o lo inesperadamente sencillo…

La Matemática, tiene en la Geometría a lo "Real Maravilloso"; tal vez tenga que ver ESTO con la sorpresa de lo <u>inesperadamente</u> <u>sencillo</u>

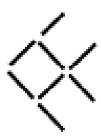
. . . Problemas con cerillas (cerillas⇔ "fósforos"; TODOS de igual tamaño):

Moviendo sólo ALGUNAS cerillas. P-1** y **P-2

***P-1.** Dejar cuatro cuadrados iguales a estos, moviendo <u>sólo dos</u> <u>cerillas</u>.*



***P-2**. Esta figura se "asemeja a un Pez" que se dirige hacia la IZQUEIRDA. Hacer que el Pez se dirija hacia la DERECHA, moviendo <u>sólo</u> <u>tres</u> <u>cerillas</u>.*

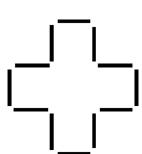


Cambio de la disposición de las cerillas y cambio del ÁREA

***P-3.** Esta figura tiene un área equivalente a la suma de la superficie de **5** de estos cuadrados. Cambie la disposición de las **12** cerillas, de tal modo que los utilice todos en el contorno de la nueva figura obtenida y que esta abarque sólo una superficie equivalente a:*

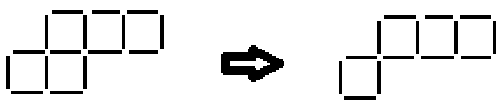
***3.1. SEIS** de estos cuadrados. (DOS soluciones)*

***3.2. CUATRO** de estos cuadrados.*

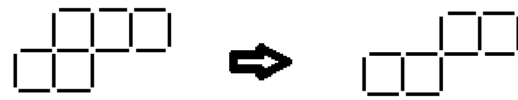


REFLEXIONANDO en las soluciones…

De P-1 *(dos soluciones)*



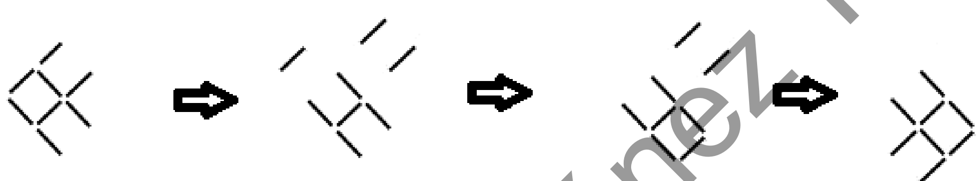
ó



MARAVILLOSO.!!!!!!,.. USTED supuso que debía utilizarlos todos???

No dice nada de que hay que "cambiar la disposición de los cerillas", solo dice "moviendo dos cerillas" ,…. y por tanto NO necesita utilizarlos todos.

De P-2



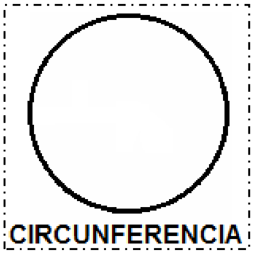
***Real Maravilloso**, e <u>inesperadamente</u> <u>sencillo</u>*

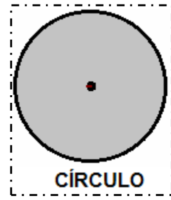
De P-3 $\mapsto$ ***¡INTÉNTELO! ... ¡VAMOS! ...*** *usted verá… de seguro será ….*

<u>inesperadamente</u> <u>sencillo</u>

LA CIRCUNFERENCIA

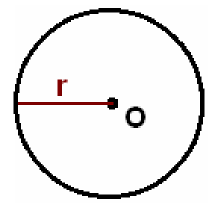
La circunferencia <u>es una linea</u>, una linea formada por el conjunto de puntos que EQUIDISTAN de un punto fijo, llamado CENTRO. Toda la superficie plana limitada por esta linea constituyen al CÍRCULO (incluidos, claro está, los puntos de la linea).





*La <u>circunferencia</u> **es <u>la</u> <u>línea</u>** que bordea a una superficie plana y circular (el centro no pertenece a la circunferencia)*

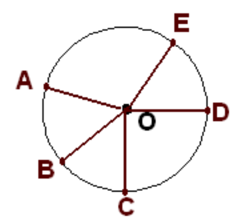
<u>Conceptos</u> <u>Básicos.</u> El CENTRO y el RADIO.



- *el <u>punto</u>, "**O**", es <u>el</u> <u>centro</u> de la circunferencia y del círculo y*
- *<u>la distancia</u> del centro a cualquier punto de la circunferencia es el radio, "**r** "(* **r**, letra minúscula*).*

***Nota**: A esta representación se la asocia, el concepto de **ángulo completo** (**360^0**).*

*En una circunferencia se pueden dibujar **un solo centro** e **infinitos** segmentos que representan al **radio**.*



Los segmentos $\overline{AO}$, $\overline{BO}$, $\overline{CO}$, $\overline{DO}$ y $\overline{EO}$ son radios pues van del centro a un punto de circunferencia.

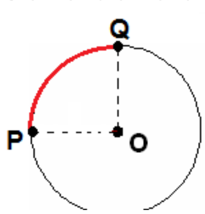
*Al ángulo formado por dos radios se le llama **ángulo central**.*

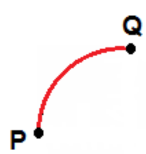
*Al radio se le nombra comúnmente como **r** (de longitud **r**). Así, al referirse a una circunferencia se dice de centro **O** y radio **r** (o de centro en **P** y radio **k**; u otras formas según se nombre al centro y al radio).*

Partes de la Circunferencia y partes del Círculo

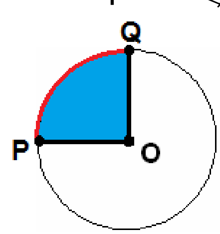
Tanto a la línea o Circunferencia como al Círculo se les puede dividir en partes; comúnmente a las partes de una circunferencia se le denomina ARCO, a las partes del círculo (limitadas por dos radios y un arco) se les denomina SECTOR CIRCULAR.

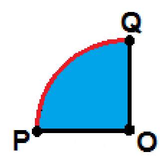
El ARCO es un parte de la circunferencia, es una línea curva limitada por dos puntos. Se le denota $\widehat{PQ}$ o **arc(PQ)**





El SECTOR CIRCULAR es una parte del círculo, es la superficie limitada por un ángulo central y el arco. Se denota, usualmente por $S_{\sphericalangle POQ}$





Nota: *Cuando el arco es mayor que* **180^0** *se nombra con TRES letras mayúsculas; la letra del medio es la de un punto en el interior del arco.*

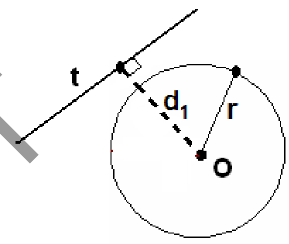
La recta y la circunferencia. *Relación de posición:*

Entre una recta y una circunferencia pueden establecerse, en lo fundamental, tres relaciones de posición, Exterior, Secante y Tangente.

✓ *Una recta y una circunferencia pueden **NO** tener punto en común (punto de intersección). Cuando NO tienen punto en común se dice que:*
La recta es EXTERIOR

En la representación:

- *la recta "**t** es exterior" a la circunferencia de centro **O.***
- ***d_1** distancia del centro **O** a la recta **t;*** $\mathbf{d(O;t) = d_1}$

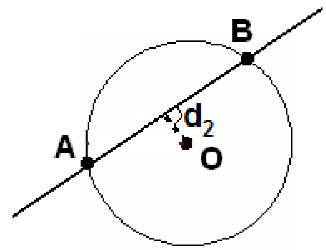


Aquí se verifica que **"**La distancia del punto **O** a la recta **t** es MAYOR que el radio de la circunferencia". $\boxed{\mathbf{d_1 > r}}$

✓ *Una recta y una circunferencia pueden tener DOS puntos en común (puntos de intersección). Cuando TIENEN dos puntos en común se dice que:*
La recta es SECANTE

En la representación:

- **A** *y* **B** *son los puntos de la circunferencia*
- *la recta "**AB** es secante" a la circunferencia de centro **O.***

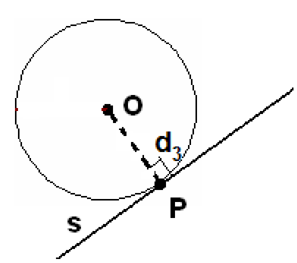


Aquí se verifica que **"**La distancia del punto **O** a la recta **AB** es MENOR que el radio de la circunferencia": $\boxed{\mathbf{d(O;AB) = d_2 < r}}$

✓ *Una recta y una circunferencia pueden tener UN punto en común (punto de intersección). Cuando TIENEN un punto en común se dice que*
La recta es TANGENTE

En la representación:

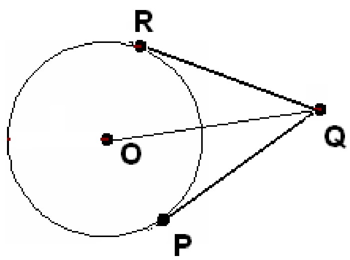
- **P** *es un punto de la circunferencia*
- *la recta "**s** es tangente" a la circunferencia de centro **O** en **P** (**P**, punto de tangencia).*



Aquí se verifica que **"**La distancia del punto **O** a la recta **s** es IGUAL al radio de la circunferencia $\boxed{\mathbf{d(O;s) = d_3 = r}}$

Algo más sobre tangencia……

*Desde un punto exterior a una circunferencia se pueden trazar **dos tangentes**. Los segmentos de tangencia (*$\overline{QR}$ *y* $\overline{QP}$*), así determinados, **son iguales**: En la representación:*



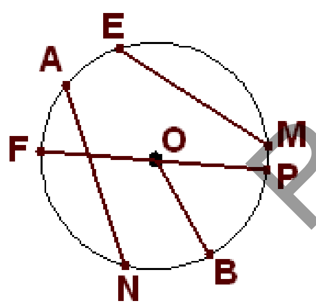
- *los puntos **R** y **P** son puntos de tangencia*
- ***Q** punto exterior,*
- *Luego, se cumple que* $\overline{RQ} = \overline{PQ}$
- $\overline{OQ}$ *bisectriz del* $\angle RQP$

La cuerda y el diámetro. El arco y la semicircunferencia

*En una circunferencia se suelen trazar segmentos con extremos en puntos de la circunferencia, a estos segmentos se les denominan **cuerdas,** cada cuerda divide a la circunferencia en dos arcos (dos partes).*

*A la mayor de todas las cuerdas se la llama **Diámetro** (**d,** letra minúscula). El diámetro divide a la circunferencia en dos SEMICIRCUNFERENCIAS.*

En la representación:



- $\overline{AN}$ *es una cuerda, no es un diámetro.*
- $\overline{BO}$ *NO es una cuerda* (**O** *es el centro), ya que uno de sus extremos NO es un punto de la circunferencia.* $\overline{BO}$ *es un radio.*
- $\overline{PF}$ *es una cuerda y también es un diámetro.*
- *La cuerda* $\overline{AN}$ *divide a la circunferencia en los arcos* $\widehat{ANF} = \widehat{AN}$ *y* $\widehat{AEN}$ *(aquí se utilizan tres letras para **diferenciar** a los dos arcos y no crear ambigüedades).*

***Nótese** que el diámetro es la cuerda que **contiene al centro** de la circunferencia,* $O \in \overline{PF}$ *(la cuerda* $\overline{PF}$ *pasa por el centro de la circunferencia). Además:*

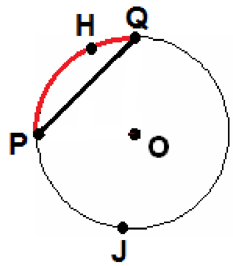
*La longitud del diámetro, "**d**" es el **doble** de la longitud del radio.* $\boxed{d = 2r}$

Ejemplo: $\overline{PF} = 2.\overline{FO} = 2.\overline{PO} = 2.\overline{BO}$

Nota: El arco $\widehat{AEN}$ también puede nombrase como $\widehat{AMN}$ ó $\widehat{APN}$ ó $\widehat{ABN}$, ya que **E**, **M**, **P** y **B** son puntos interiores de ese arco.

<u>Cada cuerda determina dos arcos</u>, uno a cada lado de la cuerda, se dice que la cuerda subtiende al menor de los dos arcos (siendo consecuente con otros conceptos de nuestra descripción).

<u>En la representación</u>:



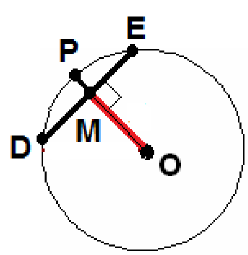
- $\overline{\mathbf{PQ}}$ *cuerda de la circunferencia de centro* **O**
- $\overset{\frown}{\mathbf{PHQ}}$ *y* $\overset{\frown}{\mathbf{QJP}}$ *determinados por la cuerda* $\overline{\mathbf{PQ}}$
- $\overset{\frown}{\mathbf{PHQ}} < \overset{\frown}{\mathbf{QJP}}$
- *La cuerda* $\overline{\mathbf{PQ}}$ *subtiende al arco* $\overset{\frown}{\mathbf{PHQ}}$ *(al menor de los dos arcos).*
- *Usualmente se le describe así:*

$\overline{\mathbf{PQ}}$ *subtiende a* $\overset{\frown}{\mathbf{PQ}}$

Nótese *que* $\overset{\frown}{\mathbf{QJP}}$ *es mayor que la mitad de la circunferencia, él contiene a una semicircunferencia, mientras que* $\overset{\frown}{\mathbf{PHQ}}$ *ò* $\overset{\frown}{\mathbf{PQ}}$ *es un parte de semicircunferencia; luego* $\overset{\frown}{\mathbf{PHQ}} < \overset{\frown}{\mathbf{QJP}}$ *y* $\overset{\frown}{\mathbf{PQ}}$ *(solo dos letras) refiere a* $\overset{\frown}{\mathbf{PHQ}}$.

*A la <u>longitud segmento perpendicular</u> que va del centro a la cuerda se le llama **distancia, "d"**, del centro a la cuerda.*

<u>En la representación:</u>



- $\overline{\mathbf{DE}}$ *cuerda de la circunferencia de centro* **O**
- $\overline{\mathbf{PO}}$ *radio de la circunferencia*
- ***M*** *es el punto de intersección entre el radio* $\overline{\mathbf{PO}}$ *y la cuerda* $\overline{\mathbf{DE}}$
- $\overline{\mathbf{MO}} \perp \overline{\mathbf{DE}}$; *luego* $\boxed{\overline{\mathbf{MO}} = \mathbf{d}\left(\mathbf{O}; \overline{\mathbf{DE}}\right)}$

ATENCIÓN → **M** *es el punto medio de* $\overline{\mathbf{DE}}$ *y* **P** *es el punto medio* $\overset{\frown}{\mathbf{DE}}$.

*El **radio** que divide <u>a la cuerda</u> <u>en el punto medio</u>, TAMBIÉN divide <u>al arco</u> <u>en el punto medio.</u>*

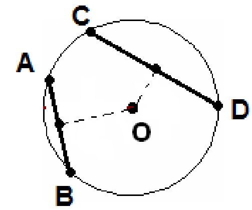
Nótese *que* $\Delta\mathbf{DEO}$ *es isósceles de base* $\overline{\mathbf{DE}}$; $\overline{\mathbf{OM}}$ *altura del* $\Delta\mathbf{DEO}$ *con respecto a la base, por tanto,* $\overline{\mathbf{OM}}$ *es mediana con respecto a la base.*

Algo más sobre las cuerdas……

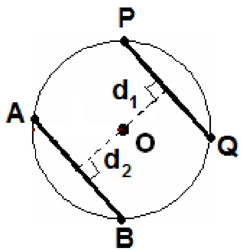
En una circunferencia:

- *Si dos cuerdas tienen igual longitud, sus distancias al centro también son iguales.*
- *Mientras MENOR sea la longitud de la cuerda, MAYOR será la distancia de esta cuerda al centro*

¡CUIDADO!...la longitud de la cuerda y la distancia de esa cuerda al centro, **NO son** inversamente proporcionales



En la representación:



- $\mathbf{d_1}$ *y* $\mathbf{d_2}$ *distancias del centro a las cuerdas* $\overline{\mathbf{AB}}$ *y* $\overline{\mathbf{PQ}}$*, respectivamente*
- $\overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{PQ}}$*, luego* $\mathbf{d_1 = d_2}$

El área y el perímetro** (longitud de la circunferencia)**.

*El área del **círculo** y la longitud de la **circunferencia**. El círculo es la superficie limitada por la circunferencia (incluida esta), a él se le halla el área, que es la medida de esa superficie. Por otro lado, la circunferencia es una línea, de ahí que se le halle su longitud; a esa longitud también se le llama perímetro de la circunferencia.*

***Cómo** calcular?; "el área del circulo (**A**)" o "la longitud de la circunferencia (**L**)" ó "el perímetro de la circunferencia (**P**)".*

***Las fórmulas** para estos cálculos son:*

*Conocido el radio "**r**":*

$$\mathbf{A} = \pi \cdot \mathbf{r}^2$$
$$\mathbf{L} = 2\pi \cdot \mathbf{r}$$
$$\mathbf{P} = 2\pi \cdot \mathbf{r}$$

*Conocido el diámetro "**d**":*

$$\mathbf{A} = \pi \cdot \left(\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{2}}\right)^2 = \pi \cdot \frac{\mathbf{d}^2}{\mathbf{4}}$$
$$\mathbf{L} = \pi \cdot \mathbf{d}$$
$$\mathbf{P} = \pi \cdot \mathbf{d}$$

NOTA: Aquí la letra griega π *(pi)* *<u>expresa</u> <u>un</u> <u>número</u>, por eso, tal vez, algunos se refieran a ella como <u>una</u> <u>"constante"</u> (* NO es un valor variable, como comúnmente suele asignársele al valor de las letras; "variables"$\rightarrow$ de valor variable *).*

Algo más sobre el número π *.....*

Ese número, π *(expresado por una letra), es **la razón** que hay entre la <u>longitud</u> de la circunferencia y su <u>diámetro</u>:*

$$\pi = \frac{\textbf{longitud de la circunferencia}}{\textbf{diámetro de la circunferencia}} \quad y \quad \pi \quad \text{es un número IRRACIONAL}$$

$$\pi = \mathbf{3.14159265358979323 84...},$$

Usualmente se trabaja con un valor aproximado de π *;* $\boxed{\mathbf{3{,}14}}$

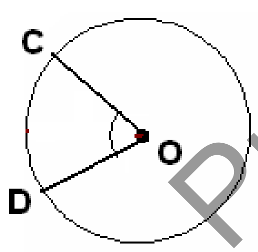
TRÍOS de relaciones básicas en la circunferencia

(CUATRO **T**ríos $\rightarrow$ $\mathbf{T_1}$*,* $\mathbf{T_2}$*,* $\mathbf{T_3}$ *y* $\mathbf{T_4}$*)*

PRELIMINARES (El ángulo CENTRAL, el INSCRITO y el SEMINSCRITO)

*Un **ángulo Central** se forma al trazar dos radios, los radios son los lados del ángulo; su vértice es el centro de la circunferencia. (ángulo convexo)*

<u>En la representación</u>:



- ***O** centro de la circunferencia (vértice del ángulo).*
- $\overline{\mathbf{CO}}$ *y* $\overline{\mathbf{DO}}$ *radios (lados del ángulo).*
- $\angle\mathbf{COD}$ *es un ángulo CENTRAL*
- *El* $\overset{\frown}{\mathbf{CD}}$ *es determinado por este ángulo, ángulo central,* $\angle\mathbf{COD}$.

- *Comúnmente al arco **se le asocia** <u>la</u> <u>misma</u> "amplitud" que tiene el ángulo central que lo determina.*

<u>Nota:</u> Esta asociación está apoyada en la IGUALDAD

$$\boxed{\frac{\mathbf{ampitud}(\angle\mathbf{COD})}{\mathbf{360^0}} = \frac{\mathbf{longitud}\left(\overset{\frown}{\mathbf{CD}}\right)}{\mathbf{2\pi r}}}$$

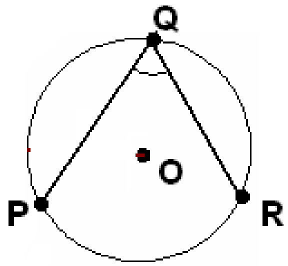
Igualdad entre dos razones:

- *la razón de la amplitud del ángulo que determina al arco con* $\mathbf{360^0}$ *y*
- *la razón de la longitud del arco con la longitud de la circunferencia.*

.

Un ángulo Inscrito *se forma al trazar dos cuerdas que se corten en un punto de la circunferencia, las cuerdas son los lados del ángulo; el vértice es el punto de intersección de las cuerdas (punto de la circunferencia).*

En la representación:



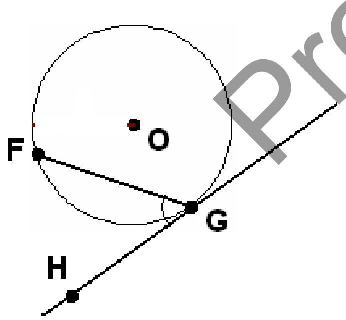
- $\overline{PQ}$ *y* $\overline{RQ}$ *cuerdas de la circunferencia de centro en* ***O*** *(lados del ángulo)*
- **Q** *punto de la circunferencia, común a ambas cuerdas (vértice del ángulo).*
- $\angle PQR$ *es un ángulo INSCRITO sobre el* $\overset{\frown}{PR}$
- *La amplitud del* $\angle PQR$*, inscrito, es la mitad de la amplitud del* $\overset{\frown}{PR}$

$$\boxed{\measuredangle PQR = \frac{\overset{\frown}{PR}}{2}}$$

Ejemplo: *Si el* $\overset{\frown}{PR} = 110^0$*, entonces el* $\angle PQR = 55^0$ *y viceversa.*
(ya que $\angle PQR$ *es inscrito sobre* $\overset{\frown}{PR}$*)*

Un ***ángulo Seminscrito*** *se forma al trazar una cuerda y una recta tangente en uno de los puntos extremo de la cuerda, la cuerda y la recta tangente son los lados del ángulo, el vértice es el punto de tangencia.*

En la representación:



- $\overline{FG}$ *cuerda de la circunferencia de centro en* **O**, *que subtiende al* **arco(FG)**.
- r_{HG}*, recta tangente a la circunferencia.*
- **G** *punto de tangencia de recta* r_{HG}.
- $\angle FGH$ *es un ángulo SEMINSCRITO sobre el* **arco(FG)**
- *La amplitud del* $\angle FGH$ *seminscrito es la mitad de la amplitud del* **arco(FG)**

$$\boxed{\angle FGH = \frac{\overset{\frown}{FG}}{2}}$$

Ejemplo: *Si el* $\overset{\frown}{FG} = 100^0$*, entonces el* $\angle FGH = 50^0$ *y viceversa.*
(ya que $\angle FGH$ *es seminscrito sobre* $\overset{\frown}{FG}$*)*

Algo más sobre el ángulo inscrito*….*

*Los ángulos **inscritos en el mismo arco** tienen **igual amplitud**.*

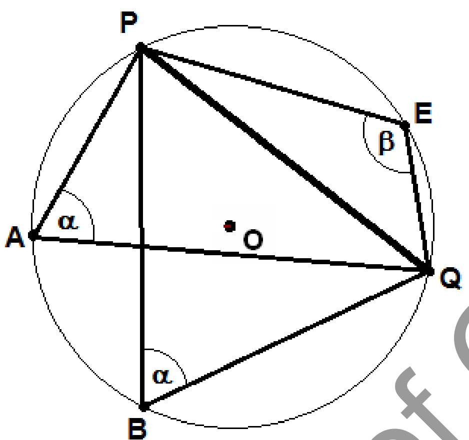
..¿Los ángulos inscritos sobre la misma cuerda son IGUALES?..

Precisemos:

- *Los ángulos inscritos sobre la misma cuerda y a un mismo lado de esta, **son iguales**; mientras que:*
- *Los ángulos inscritos sobre la misma cuerda y a DIFERENTES lados de esta cuerda, son SUPLEMENTARIOS (suman* $\mathbf{180^0}$*)*

En la representación:

- $\overline{\mathbf{PQ}}$ *cuerda de la circunferencia de centro en **O***



- $\measuredangle\mathbf{PAQ}$ ***y*** $\measuredangle\mathbf{PBQ}$ ***inscritos** sobre* $\overset{\frown}{\mathbf{PEQ}}$ *o* $\overset{\frown}{\mathbf{PQ}}$ *(inscrito sobre un mismo arco).*
- $\measuredangle\mathbf{PEQ}$ ***inscrito** sobre* $\overset{\frown}{\mathbf{PAQ}}$
- $\measuredangle\mathbf{PAQ}$ ***y*** $\measuredangle\mathbf{PBQ}$ *inscritos la misma cuerda* $\overline{\mathbf{PQ}}$ *y a un mismo lado de la cuerda.*
- $\measuredangle\mathbf{PEQ}$ ***y*** $\measuredangle\mathbf{PAQ}$ *inscritos la misma cuerda* $\overline{\mathbf{PQ}}$ *y a diferentes lados de ella. Al igual que los* $\measuredangle\mathbf{PEQ}$ ***y*** $\measuredangle\mathbf{PBQ}$***.***

En conclusión

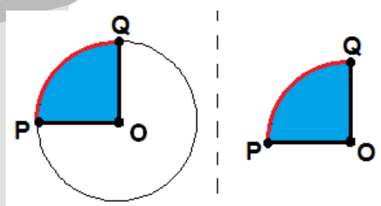
$\boxed{\measuredangle\mathbf{PAQ} = \measuredangle\mathbf{PBQ}}$ *ya que están inscritos sobre un mismo arco (*$\overset{\frown}{\mathbf{PQ}}$*); o inscritos en una cuerda (*$\overline{\mathbf{PQ}}$*) y a un mismo lado de esta (*$\overset{\frown}{\mathbf{PEQ}}$*).*

Mientras que

$\boxed{\measuredangle\mathbf{PEQ} + \measuredangle\mathbf{PAQ} = \mathbf{180^0} = \measuredangle\mathbf{PEQ} + \measuredangle\mathbf{PBQ}}$ *ya que: los* $\measuredangle\mathbf{PEQ}$ *y* $\measuredangle\mathbf{PAQ}$ *están inscritos en una cuerda (*$\overline{\mathbf{PQ}}$*) pero a diferentes lados de esta. Al igual que los* $\measuredangle\mathbf{PEQ}$ *y* $\measuredangle\mathbf{PBQ}$ *que están inscritos a diferentes lados de la cuerda* $\overline{\mathbf{PQ}}$*.*

Alguna de la "consecuencias" de los ángulos centrales...

El área de los Sectores Circulares.



El sector es una superficie, de ahí que pueda medirse, el ÁREA del Sector Circular "$A_{S_{\measuredangle}}$ ó A_S" es la medida de esta superficie.

En la representación: $A_{S_{\measuredangle POQ}} = \dfrac{\measuredangle POQ}{360^0}.\left(\pi.r^2\right)$

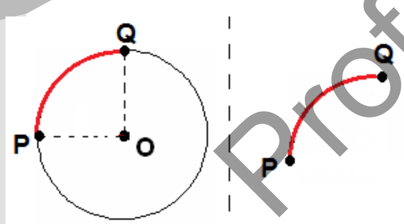
Nota: Esta fórmula se deduce de la proporción

$$\boxed{\frac{A_{S_{\measuredangle}}}{A_C} = \frac{\text{amplitud del ángulo Central}}{360^0}}$$

*El ÁREA del Sector Circular "$A_{S_{\measuredangle}}$ es **directamente proporcional** a la amplitud del ángulo central que determina al Sector.*

Cont...

La longitud de los Arcos.



El arco es una línea, de ahí que pueda medirse, la LONGITUD del arco es la medida de esta línea.

En la representación: $l_{\overset{\frown}{PQ}} = \dfrac{\measuredangle POQ}{360^0}\bullet(2\pi r)$

Nota: Esta fórmula se deduce de la proporción

$$\boxed{\frac{l_{arc}}{l_{circ}} = \frac{\text{amplitud del ángulo Central}}{360^0}}$$

*La LONGITUD del arco es **directamente proporcional** a la amplitud del ángulo central que determina al Arco.*

Ahora si, …. LOS TRÍOS (CUATRO **Tríos** $\rightarrow$ **T_1, T_2, T_3** *y* **T_4***)*

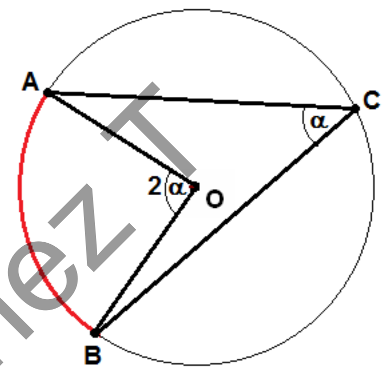
El 1ero TRÍO "T_1". Entre tres ángulos (Central, Inscrito y Seminscrito)

$T_{1.1}$ $\mapsto$ *El ángulo Central y el Inscrito*

La amplitud del ángulo central ***es el doble*** *de la amplitud del ángulo inscrito sobre el mismo arco; o la amplitud del ángulo inscrito* ***es la mitad*** *del ángulo central sobre el mismo arco.*

En la representación:

- $\measuredangle \mathbf{AOB}$ *central sobre el* $\overset{\frown}{\mathbf{AB}}$
- $\measuredangle \mathbf{ACB}$ *inscrito sobre el* $\overset{\frown}{\mathbf{AB}}$



Luego,

$\boxed{\measuredangle \mathbf{AOB} = \mathbf{2}(\measuredangle \mathbf{ACB})}$ ***ó*** $\boxed{\measuredangle \mathbf{ACB} = \dfrac{\measuredangle \mathbf{AOB}}{\mathbf{2}}}$

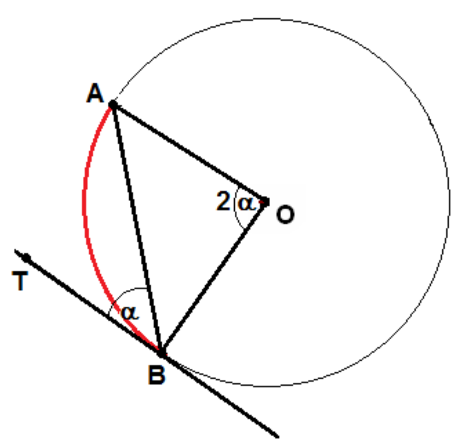
Justificación $\rightarrow$ *ya que uno es central y el otro es inscrito sobre el mismo arco* $\overset{\frown}{\mathbf{AB}}$.

$T_{1.2}$ $\mapsto$ *El ángulo Central y el Seminscrito*

La amplitud del ángulo Central ***es el doble*** *de la amplitud del ángulo Seminscrito sobre el mismo arco; o la amplitud del ángulo Seminscrito* ***es la mitad*** *del ángulo central sobre el mismo arco.*

En la representación:

- **TB** *recta tangente en* **B**
- $\measuredangle \mathbf{AOB}$ *central sobre el* $\overset{\frown}{\mathbf{AB}}$
- $\overline{\mathbf{AB}}$ *cuerda que subtiende* $\overset{\frown}{\mathbf{AB}}$
- $\measuredangle \mathbf{TBA}$ *inscrito sobre el* $\overset{\frown}{\mathbf{AB}}$



Luego, $\boxed{\measuredangle \mathbf{AOB} = \mathbf{2}(\measuredangle \mathbf{ABT})}$ *o* $\boxed{\measuredangle \mathbf{ABT} = \dfrac{\measuredangle \mathbf{AOB}}{\mathbf{2}}}$

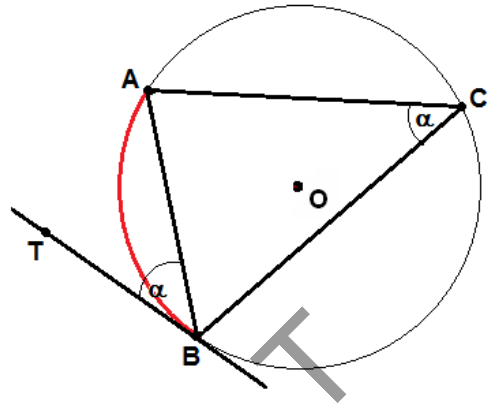
Justificación $\rightarrow$ *ya que uno es Central y el otro es Seminscrito sobre el mismo arco* $\overset{\frown}{\mathbf{AB}}$.

$T_{1.3}$ $\mapsto$ _*El ángulo Inscrito y el Seminscrito*

*La amplitud del ángulo Inscrito es **IGUAL** a la amplitud del ángulo seminscrito sobre el mismo arco.*

En la representación:

- **TB** *recta tangente en* **B**
- $\measuredangle$**ACB** *Inscrito sobre el* $\overset{\frown}{AB}$
- $\overline{AB}$ *cuerda que subtiende* $\overset{\frown}{AB}$
- $\measuredangle$**TBA** *Seminscrito sobre el* $\overset{\frown}{AB}$



Luego, $\boxed{\measuredangle ACB = \measuredangle ABT}$

Justificación $\rightarrow$ *ya que uno es Inscrito y el otro es Seminscrito sobre el mismo arco* $\overset{\frown}{AB}$.

De $T_{1.1}$ **,** $T_{1.2}$ ***y*** $T_{1.3}$ ***se tiene…***

La amplitud del ángulo central guarda la misma relación con la amplitud del ángulo Inscrito que con la amplitud del Seminscrito.

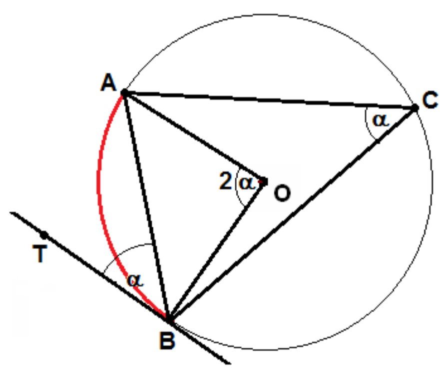
Dicha amplitud es **el doble**:

- *de la amplitud del inscrito y*
- *de la amplitud del seminscrito;*

TODOS sobre el mismo arco.

En la representación: $\rightarrow$ $\rightarrow$ $\rightarrow$ $\rightarrow$

- r_{TB} *recta tangente en* **B**
- $\overline{AB}$ *cuerda que subtiende* $\overset{\frown}{AB}$
- $\measuredangle$**AOB** *central sobre el* $\overset{\frown}{AB}$
- $\measuredangle$**TBA** *Seminscrito sobre el* $\overset{\frown}{AB}$
- $\measuredangle$**ACB** *Inscrito sobre el* $\overset{\frown}{AB}$



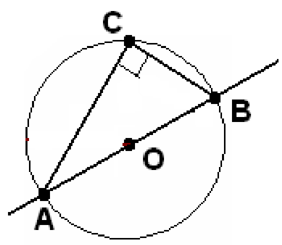
$\boxed{\measuredangle AOB = 2(\measuredangle ABT) = 2(\measuredangle ACB)}$

El 2do TRÍO "T_2". Perpendicularidad. Relaciones básicas.

$T_{2.1}$ ↦ *El ángulo Inscrito sobre el diámetro.* (uno de los Teoremas de Tales)

El ángulo RECTO se forma al trazar un ángulo inscrito sobre la semicircunferencia (arco de $\mathbf{180^0}$*). La amplitud del ángulo inscrito sobre el diámetro es la mitad del arco que determina el diámetro.*

En la representación:



- $\overline{\mathbf{AB}}$ *diámetro de la circunferencia de centro* **O**
- $\measuredangle\mathbf{ACB}$ *inscrito sobre el diámetro*
- $\overset{\frown}{\mathbf{AB}} = \mathbf{180^0}$

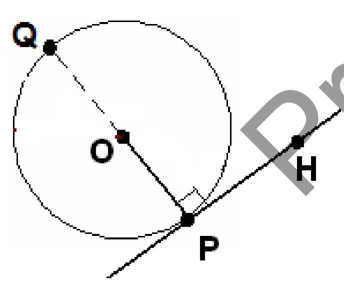
Luego, $\boxed{\overline{\mathbf{AC}} \perp \overline{\mathbf{CB}}}$ *o* $\boxed{\measuredangle\mathbf{ACB} = \mathbf{90^0}}$

Justificación → *ya que es inscrito sobre el diámetro.*

$T_{2.2}$ ↦ La tangente y el radio en el punto de tangencia.

El ángulo RECTO se forma entre la tangente y el radio en el punto de tangencia.

En la representación:



- $\overline{\mathbf{OP}}$ *radio de la circunferencia de centro* **O**
- $\mathbf{r_{HP}}$ *tangente a la circunferencia en* **P**
- $\overline{\mathbf{QP}}$ *diámetro de la circunferencia*
- $\measuredangle\mathbf{QPH}$ *seminscrito sobre* $\overset{\frown}{\mathbf{QP}}$
- $\overset{\frown}{\mathbf{QP}} = \mathbf{180^0}$ *y* $\measuredangle\mathbf{QPH} = \dfrac{\mathbf{180^0}}{\mathbf{2}}$

Luego, $\boxed{\overline{\mathbf{AC}} \perp \overline{\mathbf{CB}}}$ *o* $\boxed{\measuredangle\mathbf{ACB} = \mathbf{90^0}}$

Justificación → *ya que* $\mathbf{r_{HP}}$ *es tangente y* $\overline{\mathbf{OP}}$ *radio en el punto de tangencia* **P**

También se cumple el recíproco; veamos:

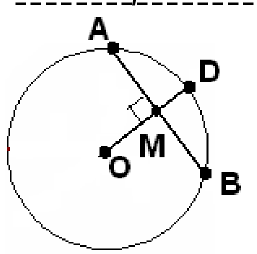
Una recta que es perpendicular a un radio en un punto de la circunferencia (extremo del radio) es tangente a la circunferencia.

$T_{2.3}$ $\mapsto$ ***La cuerda y el radio que la corta en el punto medio.***

El ángulo RECTO se forma entre <u>la cuerda</u> y <u>el radio</u> que la corta en el punto medio.

- *El radio que corta a la cuerda en **su punto medio**, la corta **perpendicularmente** y*
- *El radio que corta a la cuerda **perpendicularmente** la divide **en dos partes iguales**.*

<u>En la representación</u>:



- $\overline{\mathbf{OD}}$ *radio de la circunferencia de centro* **O**
- $\overline{\mathbf{AB}}$ *cuerda*
- **M** *punto medio cuerda* $\overline{\mathbf{AB}}$, $\boxed{\mathbf{M} = \overline{\mathbf{OD}} \cap \overline{\mathbf{AB}}}$; *de ahí que* **D** *sea el punto medio de* $\overset{\frown}{\mathbf{AB}}$.

Luego,

- ✓ *Si **M** <u>punto medio</u> de* $\overline{\mathbf{AB}}$, *entonces* $\boxed{\overline{\mathbf{AB}} \perp \overline{\mathbf{OD}}}$
- ✓ *Si* $\boxed{\overline{\mathbf{AB}} \perp \overline{\mathbf{OD}}}$, *entonces* **M** *es el <u>punto medio</u> de* $\overline{\mathbf{AB}}$

***Nótese** que* $\Delta\mathbf{AOB}$ *es isósceles de base* $\overline{\mathbf{AB}}$ *(ya que* $\overline{\mathbf{OM}}$ *es mediana y altura del* $\Delta\mathbf{AOB}$ *con respecto a la base).*

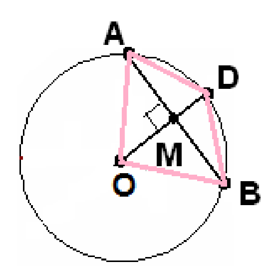
<u>Justificación</u> $\rightarrow$ *ya que el <u>radio divide a la cuerda en el punto medio</u>.*

Algo más sobre esta relación de perpendicularidad (consecuencia)

El cuadrilátero formado por los extremos del radio y los extremos de la cuerda es un Trapezoide SIMÉTRICO (con respecto a una de sus diagonales, el radio)

En la representación:

- $\overline{\mathbf{OD}}$ *radio de la circunferencia de centro* **O**
- $\overline{\mathbf{AB}}$ *cuerda que subtiende* $\overset{\frown}{\mathbf{AB}}$
- **M** *punto medio de* $\overline{\mathbf{AB}}$
- **D** *punto medio del* $\overset{\frown}{\mathbf{AB}}$
- $\mathbf{r_{OD}}$ **mediatriz** de $\overline{\mathbf{AB}}$
- **ADBO** *Trapezoide SIMÉTRICO con respecto a* $\overline{\mathbf{OD}}$



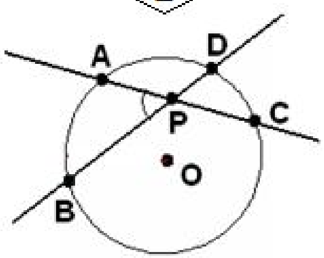
El 3er TRÍO "T_3". La amplitud del ángulo entre rectas que se cortan e intersectan a una circunferencia.

PRELIMINARES ***(para los tríos de relaciones que viene a continuación)***

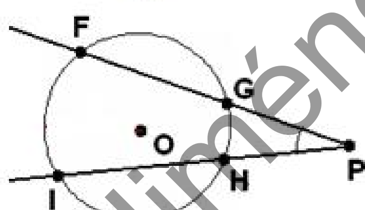
*Cuando DOS rectas se cortan e intersectan a una circunferencia pueden ocurrir cuatro situaciones, de ellas nos interesan **TRES**. Esta intersección puede darse:*

- *Dentro de la circunferencia,*
  - *I* → ***Ambas rectas son secantes***
- *Fuera de la circunferencia,*
  - *II* → ***Ambas rectas son secantes***
  - *III* → ***Una secante y la otra tangente***

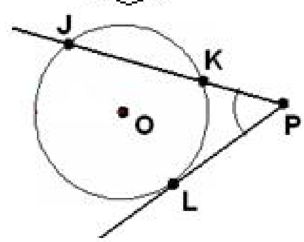
I



II



III

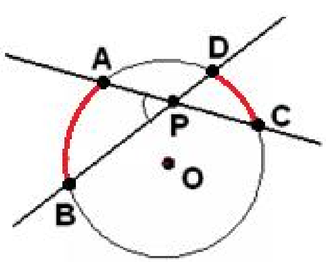


Nótese *que los ángulos tienen vértice en el punto de intersección.*

$T_{3.1}$ ↦ ***Los* ángulos entre las rectas que se cortan dentro de la circunferencia.** (ángulos opuestos por el vértice)

La amplitud de uno de los ángulos opuestos es <u>la semi-suma</u> de las amplitudes de los arcos determinados por sus lados.

En la representación:



- **P** *punto de intersección de* **AC** *con* **BD**
- $\overline{AC}$ *y* $\overline{BD}$ *cuerdas de la circunferencia de centro* **O**
- $\overset{\frown}{AB}$ *y* $\overset{\frown}{DC}$ *arcos determinados en la circunferencia por los ángulos opuestos.*

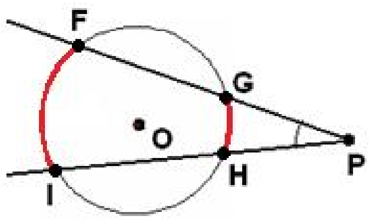
Luego → $\boxed{\measuredangle APB = \dfrac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{DC}}{2}}$

Justificación → *ya que* $\overline{AC}$ *y* $\overline{BD}$ *son cuerdas se cortan en* **P**, *punto interior a la circunferencia.*

$T_{3.2}$ $\mapsto$ ***El ángulo entre las recta que se cortan fuera de la circunferencia.***

La amplitud del ángulo es <u>la semi-diferencia</u> de las amplitudes de los arcos determinados por sus lados.

<u>En la representación</u>:



- **P** *punto de intersección de las rectas secantes* r_{FG} *y* r_{IH}
- $\measuredangle$**FPI***, ángulo entre las rectas.*
- $\overset{\frown}{FI}$ *y* $\overset{\frown}{GH}$*, arcos determinados en la*

circunferencia por el ángulo $\measuredangle$**FPI**

Luego $\rightarrow$ $\boxed{\measuredangle FPI = \dfrac{\overset{\frown}{FI} - \overset{\frown}{GH}}{2}}$

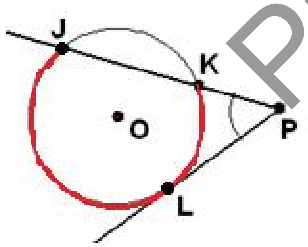
Justificación $\rightarrow$ *ya que* **FG** *y* **HI** *son secantes que se cortan en* **P***, punto exterior a la circunferencia.*

Nótese *que* $\overset{\frown}{FI} > \overset{\frown}{GH}$ *de ahí que la diferencia* $\overset{\frown}{FI} - \overset{\frown}{GH}$ *sea un <u>número</u> <u>POSITIVO</u>.*

$T_{3.3}$ $\mapsto$ ***El ángulo entre la recta secante y la recta tangente que se cortan fuera de la circunferencia.***

La amplitud del ángulo es <u>la semi-diferencia</u> de las amplitudes de los arcos determinados por sus lados.

<u>En la representación</u>:



- ***P*** *punto de intersección de las rectas.*
- r_{JK} *secante y* r_{PL} *tangente en* **L**
- $\measuredangle$**JPL***, ángulo entre la cuerda y la tangente.*
- $\overset{\frown}{JL}$ *y* $\overset{\frown}{KL}$*, arcos determinados en la circunferencia por el ángulo* $\measuredangle$**JPL**

Luego $\rightarrow$ $\boxed{\measuredangle JPL = \dfrac{\overset{\frown}{JL} - \overset{\frown}{KL}}{2}}$

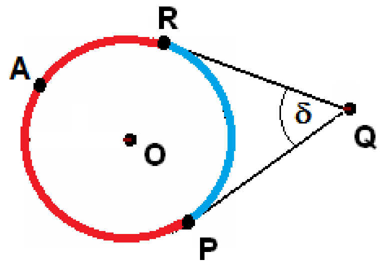
Justificación $\rightarrow$ *ya que* **JK** *es una secante y la* **PL** *una tangente que se cortan en* **P***, punto exterior a la circunferencia.*

Nótese *que* $\overset{\frown}{JL} > \overset{\frown}{KL}$ *de ahí que la diferencia* $\overset{\frown}{JL} - \overset{\frown}{KL}$ *sea un número POSITIVO.*

Algo más sobre: el ángulo entre tangentes….

***El ángulo** <u>entre dos segmentos de tangencia</u> desde un punto exterior puede calcularse, esta amplitud es la SEMI diferencia entre los dos arcos determinados por los puntos de tangencia.*

<u>En la representación</u>:



- *los puntos **R** y **P** son puntos de tangencia*
- ***Q** punto exterior,*

***Luego** →* $\delta = \dfrac{\overset{\frown}{RAP} - \overset{\frown}{RP}}{2}$

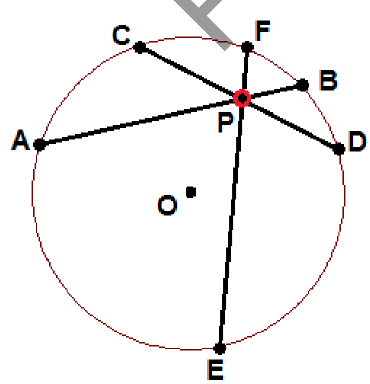
<u>Justificación</u> → *ya que los segmentos de tangencia* $\overline{RQ}$ *y* $\overline{PQ}$ *se cortan en **Q***

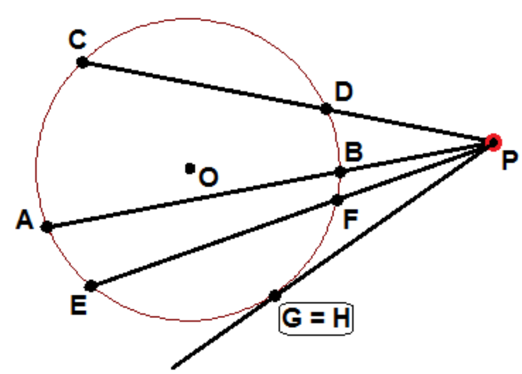
El 4to TRÍO "T_4". La Potencia de un Punto. La razón que queda entre las longitudes de los segmentos cuando dos rectas se cortan e intersectan a una circunferencia.

<u>La Potencia de un Punto (PUNTO POTENCIA)</u>

Sea **P** es un punto en el plano y una circunferencia con centro **O**, entonces para cualquier recta que pase por **P** y corte a la circunferencia en dos puntos (**A** *y* **B** *ó* **C** *y* **D** *ó …)* , se cumplirá que $\overline{PA}\bullet\overline{PB}$ es constante, independientemente de la posición de la RECTA. El valor de dicha constante se denomina **la potencia del punto *P***. Veamos:

En las figuras:





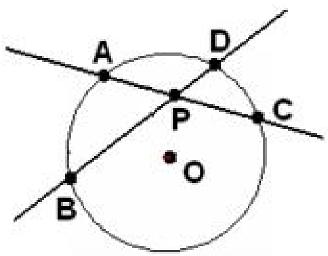
$\boxed{\overline{PA}\bullet\overline{PB}} = \overline{PC}\bullet\overline{PD} = \overline{PE}\bullet\overline{PF}$

$\boxed{\overline{PA}\bullet\overline{PB}} = \overline{PC}\bullet\overline{PD} = \overline{PE}\bullet\overline{PF} = \overline{PG}\bullet\overline{PH} = \left(\overline{PG}\right)^2 = \left(\overline{PH}\right)^2$

$T_{4.1}$ $\mapsto$ *PUNTO POTENCIA*. ***La razón que determina entre las longitudes de los segmentos de cuerdas que se cortan dentro de la circunferencia*** (los segmentos con extremo en ese punto).

El producto de las longitudes de los segmentos en una cuerda es IGUAL al producto de las longitudes de los segmentos en la otra cuerda.

En la representación:



- $\overline{AC}$ *y* $\overline{BD}$ *cuerdas de la circunferencia de centro* **O**
- **P** *punto de intersección de* $\overline{AC}$ *con* $\overline{BD}$
- $\overline{AP}$ *y* $\overline{PC}$ *segmentos de una cuerda;* $\overline{BP}$ *y* $\overline{PD}$ *segmentos de la otra cuerda. TODOS con un extremo en* **P**.

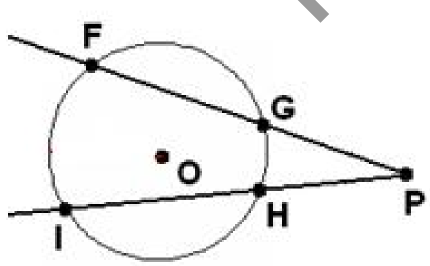
Luego $\rightarrow$ $\boxed{\overline{AP} \bullet \overline{PC} = \overline{BP} \bullet \overline{PD}}$

Justificación $\rightarrow$ *ya que* $\overline{AC}$ *y* $\overline{BD}$ *son cuerdas se cortan en* **P**, *punto interior a la circunferencia.*

$T_{4.2}$ $\mapsto$ *PUNTO POTENCIA*. ***La razón que determina entre las longitudes de los segmentos de cuerdas que se cortan fuera de la circunferencia (los segmentos con extremo en ese punto).***

El producto de las longitudes de los segmentos en una secante es IGUAL al producto de las longitudes de los segmentos en la otra secante.

En la representación:



- r_{FG} *y* r_{IH} *rectas secantes*
- **P** *punto de intersección de las rectas*
- $\overline{FG}$ *y* $\overline{IH}$ *cuerdas de la circunferencia de centro en* **O**
- $\overline{FP}$ *y* $\overline{PG}$ *segmentos de una recta;* $\overline{IP}$ *y* $\overline{PH}$ *segmentos de la otra recta. TODOS con un extremo en* **P**.

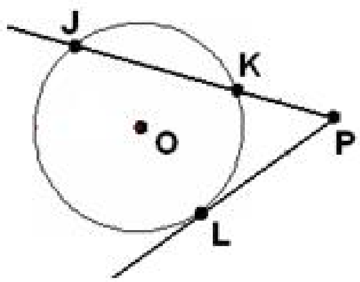
Luego $\rightarrow$ $\boxed{\overline{FP} \bullet \overline{PG} = \overline{IP} \bullet \overline{PH}}$

Justificación $\rightarrow$ *ya que* **FG** *y* **HI** *son secantes que se cortan en* **P**, *punto exterior a la circunferencia.*

T$_{4.3}$ $\mapsto$ *PUNTO POTENCIA*. ***La razón que determina entre las longitudes de los segmentos en la Secante y en la Tangente.***
(los segmentos con extremo en ese punto).

El producto de las longitudes de los segmentos en la secante es IGUAL al cuadrado de la longitud del segmento en la tangente.

En la representación:

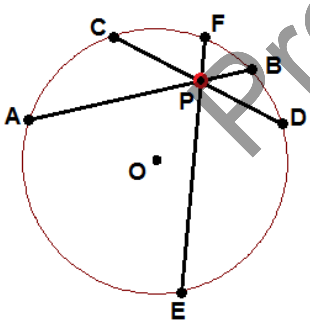


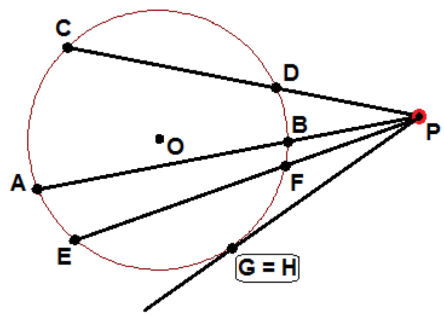
- $\mathbf{r_{JK}}$ *secante y* $\mathbf{r_{PL}}$ *tangente en* **L**
- **P** *punto de intersección de las rectas*
- $\overline{\mathbf{JK}}$ *cuerda y* $\overline{\mathbf{PL}}$ *segmento de tangencia*
- $\overline{\mathbf{JP}}$ *y* $\overline{\mathbf{PK}}$ *segmentos de secante. TODOS con un extremo en* **P***.*

Luego $\rightarrow$ $\boxed{\overline{JP}\bullet\overline{PK}=\overline{PL}\bullet\overline{PL}=(\overline{PL})^2}$

Justificación $\rightarrow$ *ya que* $\mathbf{r_{JK}}$ *es una secante y la* $\mathbf{r_{PL}}$ *es una tangente que se cortan en* **P***, punto exterior a la circunferencia.*

Algo más sobre el PUNTO POTENCIA:
Sea una recta que corta a la circunferencia en los puntos **A** *y* **B** *y sea* **P** *un punto de la recta (interior o exterior a la circunferencia), se cumple que:*





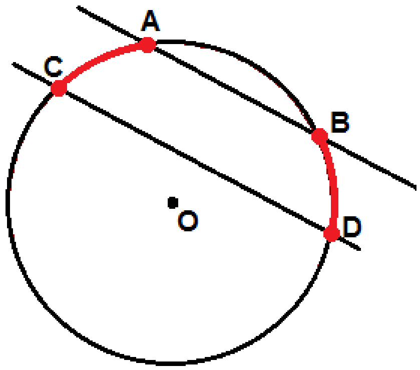
Cualquier recta que pase por **P** *y corte a la circunferencia, determina dos segmentos (con extremos en ese punto* **P***) cuyo producto es del mismo valor que el producto de* $\overline{\mathbf{PA}}\bullet\overline{\mathbf{PB}}$ (potencia del punto **P**)

En otras palabras, el ***valor del producto es INDEPENDIENTE*** *de la recta; ahora, la potencia del punto, no muestra ninguna señal del valor de ese producto.*

La LONGITUD de los ARCOS que quedan <u>entre</u> <u>cuerdas</u> <u>paralelas</u>

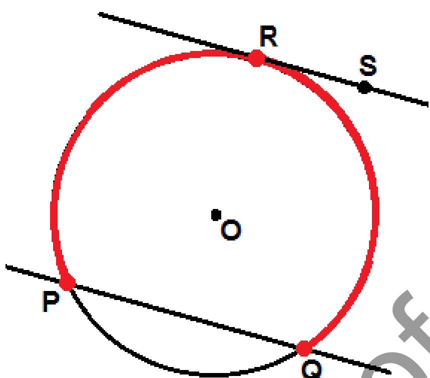
La Longitud de los arcos que se forman, entre cuerdas, cuando dos rectas PARALELAS intersectan a la circunferencia.

En las representaciones:



- *los puntos* **A**, **B**, **C**, **D**, **P**, **Q** *y* **R** *son puntos de la CIRCUNFERENCIA y LA RECTA.*

- *Las rectas* $\mathbf{r}_{AB}$, $\mathbf{r}_{CD}$ *y* $\mathbf{r}_{PQ}$ *son SECANTES.*



- *La recta* $\mathbf{r}_{SR}$ *es TANGENTE en* **R**.
- *El punto* **R** *es un punto de tangencia.*
- *El punto* **S** *es un punto exterior.*
- *Las rectas* $\mathbf{r}_{AB} // \mathbf{r}_{CD}$, *así como* $\mathbf{r}_{PQ} // \mathbf{r}_{RS}$.

Luego → *los* $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$, *como también* $\overset{\frown}{RP} = \overset{\frown}{RQ}$.

Justificación → *ya que son arcos de circunferencia que están entre rectas paralelas.*

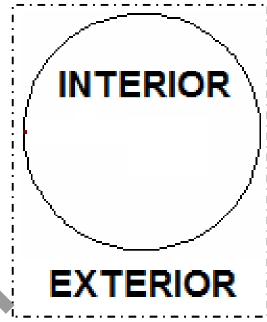
La Circunferencia y los Polígonos.

PRELIMINARES (entre dos circunferencias)

Sean DOS circunferencias de centro $\mathbf{O}$ y $\mathbf{O'}$; y radios $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r'}$ ($\mathbf{r} > \mathbf{r'}$), respectivamente.

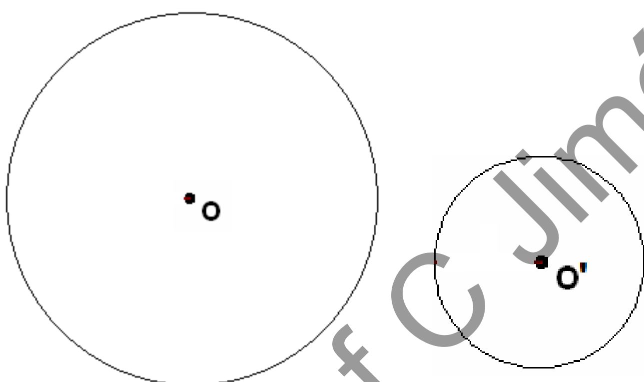
(Entre dos circunferencia existen **varias relaciones de posición**)

- *Una circunferencia divide al plano en dos regiones; una **Exterior** y otra **Interior**.*



1º. ***No** tienen puntos en común. Se dice que son Exteriores o Interiores.*

<u>*EXTERIORES*</u>

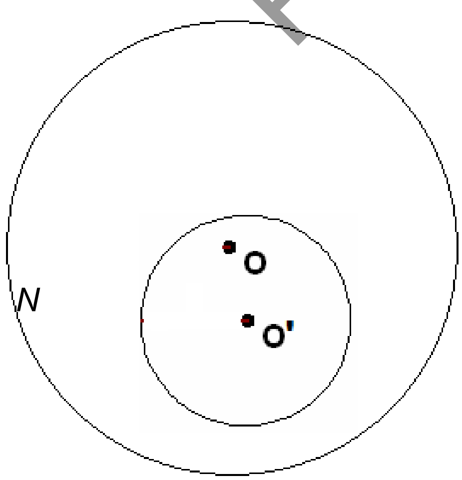


- *La distancia entre sus centros ($\overline{\mathbf{OO'}}$) es **mayor** que la suma de las longitudes de sus radios:*

  $\boxed{\overline{\mathbf{OO'}} > \mathbf{r} + \mathbf{r'}}$

- ***NO** tienen punto común.*

<u>*INTERIORES*</u>



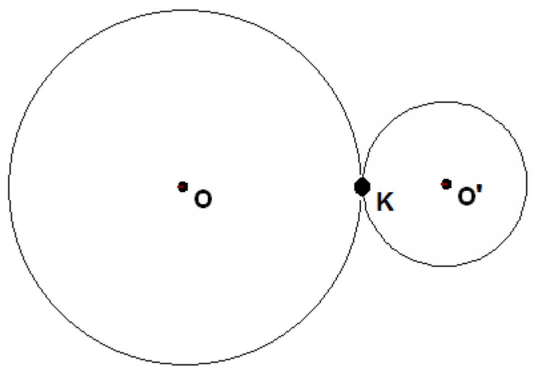
- *La distancia entre sus centros ($\overline{\mathbf{OO'}}$) es **menor** que la longitud del mayor radio($\mathbf{r} > \mathbf{r'}$):*

  $\boxed{\overline{\mathbf{OO'}} < \mathbf{r}}$

- ***NO** tienen punto común.*

2º. ***Tienen*** *un ÚNICO punto en común. TANGENTES.*

Tangentes EXTERIORES

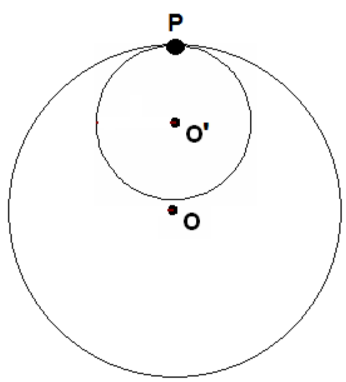


- ✓ *La distancia entre sus centros ($\overline{OO'}$) es **IGUAL** a la suma de las longitudes de sus radios.*

  $$\boxed{\overline{OO'} = r + r'}$$

- ✓ *Tienen **un punto común**.*

Tangentes INTERIORES

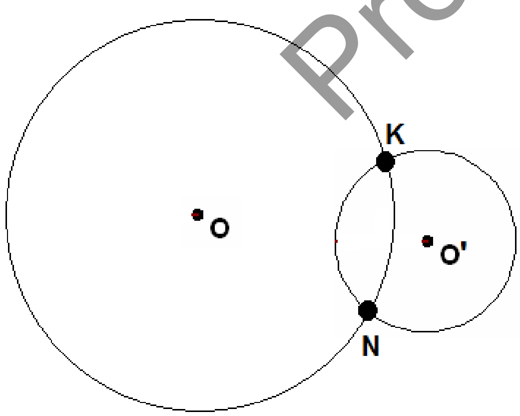


- ✓ *La distancia entre sus centros ($\overline{OO'}$) es **menor** que la longitud del mayor radio ($r > r'$):*

  $$\boxed{\overline{OO'} < r}$$

- ✓ *Tienen un punto común.*

3º. *Tienen dos puntos en común. SECANTES.*



- ✓ *La distancia entre sus centros ($\overline{OO'}$) es **menor** que la suma de las longitudes de sus radios.*

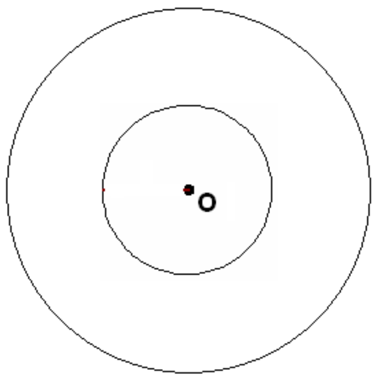
  $$\boxed{\overline{OO'} < r + r'}$$

- ✓ *Tienen DOS puntos comunes (en la figura **K** y **N**).*
- ✓ *El segmento determinado por esos puntos $\overline{KN}$ **es PERPENDICULAR** al segmento determinado por los dos centros $\overline{OO'}$; así*

  $$\boxed{\overline{KN} \perp \overline{OO'}}$$

Algo más….

CONCÉNTRICAS

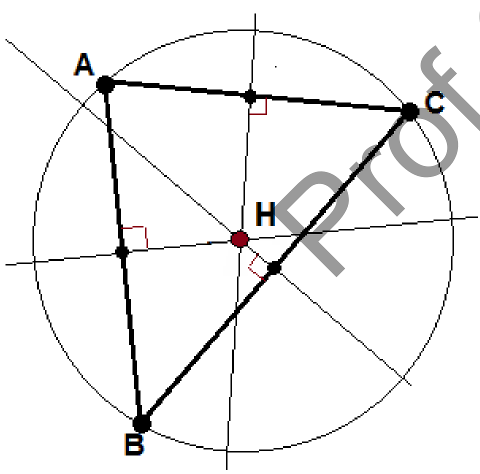


- ✓ *Tienen un mismo centro.*
- ✓ *NO tienen puntos comunes.*

CIRCUNFERENCIA & TRIÁNGULO

A un triángulo SIEMPRE se le puede Circunscribir o Inscribir una circunferencia; Veamos:

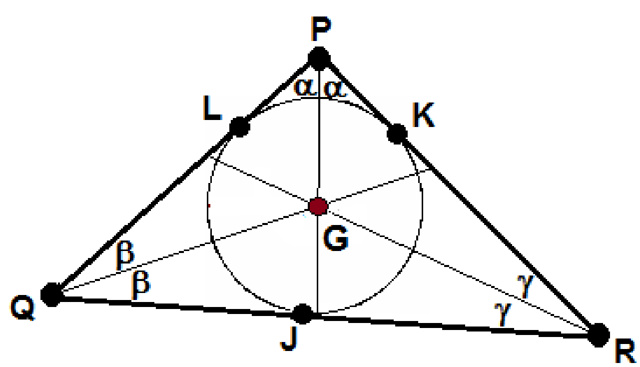
CIRCUNSCRITA al **ΔABC**



H *es el Circuncentro del* **ΔABC**.
(**H** es el punto de intersección de las MEDIATRICES de los lados del **ΔABC**).
A, **B** *y* **C** *puntos de la circunferencia.*

INSCRITA al **ΔPQR**

(**L**, **J** *y* **K** *puntos de tangencia).*



G *es el Incentro del* **ΔABC**
(**G** es el punto de intersección de las BISECTRICES de los ángulos del **ΔABC**).
L, **J** *y* **K** *puntos de tangencia.*

Circunferencia & Cuadrilátero

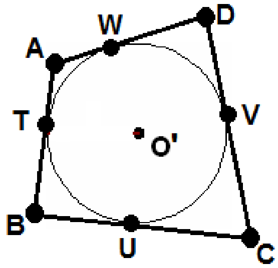
<u>NO siempre</u> se le puede Inscribir o Circunscribir una circunferencia a un cuadrilátero.

CIRCUNSCRIBIR un CUADRILÁTERO a una CIRCUNFERENCIA solo SI

***La suma** de las longitudes de lados opuestos es la misma*

↙ *(en la figura)* ↦ $\boxed{\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{AB}+\overline{DC}}$

***T**, **U**, **V** y **W** puntos de tangencia*



$$\left.\begin{aligned}\overline{AT}&=\overline{AW}\\ \overline{DW}&=\overline{DV}\\ \overline{CV}&=\overline{CU}\\ \overline{BU}&=\overline{BT}\end{aligned}\right\}$$ *Ya que son segmentos de tangencia desde un mismo punto.*

<u>Nótese</u> que $\underbrace{\overline{AD}+\overline{BC}}_{\overline{AW}+\overline{WD}+\overline{BU}+\overline{UC}} = \underbrace{\overline{AB}+\overline{CD}}_{\overline{AT}+\overline{TB}+\overline{CV}+\overline{VD}}$ *por suma de segmentos iguales*

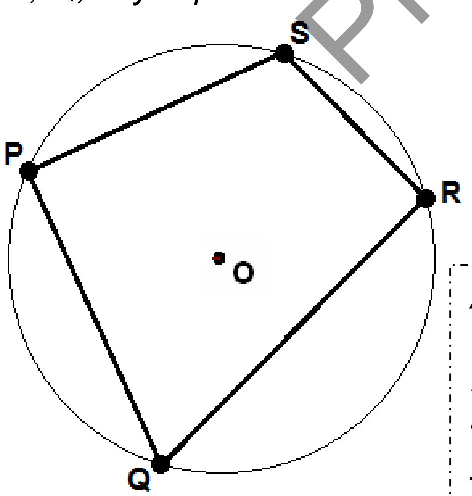
INSCRIBIR solo SI

***La suma** de las amplitudes de los ángulos opuestos es* $\mathbf{180^0}$

↙ *(en la figura)* ↦ $\boxed{\measuredangle PSR+\measuredangle PQR=\measuredangle SPQ+\measuredangle SRQ}$

Veamos….

***P**, **Q**, **R** y **S** puntos de la circunferencia*



$\measuredangle SPQ+\measuredangle SRQ=180^0$ *(ya que están inscrito a diferentes lados de la cuerda* $\overline{SQ}$*)*

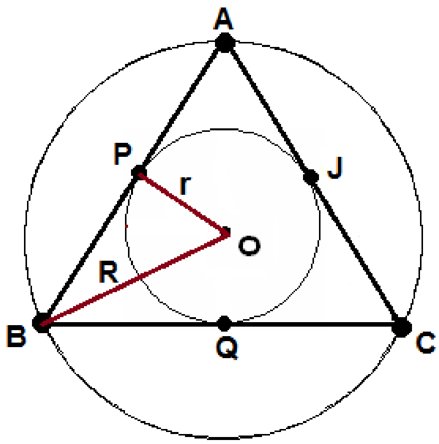
$\measuredangle PSR+\measuredangle PQR=180^0$ *(ya que están inscrito a diferentes lados de la cuerda* $\overline{PR}$*)*

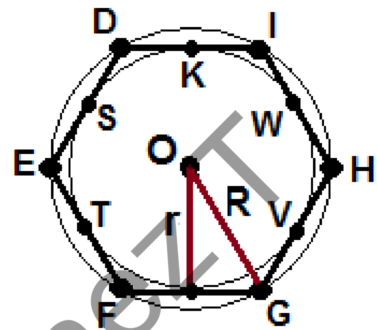
*A estos cuadriláteros se les llama CUADRILÁTEROS **CÍCLICOS** y tienen como fórmula, similar a la de HERÓN, para calcular su área (conocidas las longitudes de sus lados **a**, **b**, **c** y **d**):*

$$\mathbf{A}=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

Circunferencia & Polígonos REGULARES $\begin{cases}\textbf{TODOS los Ángulos IGUALES}\\ \textbf{TODOS los Lados IGUALES}\end{cases}$

Dos circunferencias concéntricas, una Inscrita y otra Circunscrita al Polígono.





***P**, **Q** y **J** puntos de tangencia y puntos medios de los lados.*

***R** → Radio de la Circunscrita.*

***r** → radio de la Inscrita o <u>Apotema.</u>*

***D**, **E**, **F**, **G**, **H** e **I** puntos de tangencia y puntos medios de los lados.*

***R** → Radio de la Circunscrita.*

***r** → radio de la Inscrita o <u>Apotema.</u>*

Conocido la longitud del lado y el apotema (**r** *), y si:*

***n**→ es la cantidad de lados del polígono regular.*

***l**→ longitud del lado del polígono regular.*

El área: $\boxed{\mathbf{A = n\left[\frac{l \bullet r}{2}\right]}}$ *y perímetro:* $\boxed{\mathbf{P = n \bullet l}}$

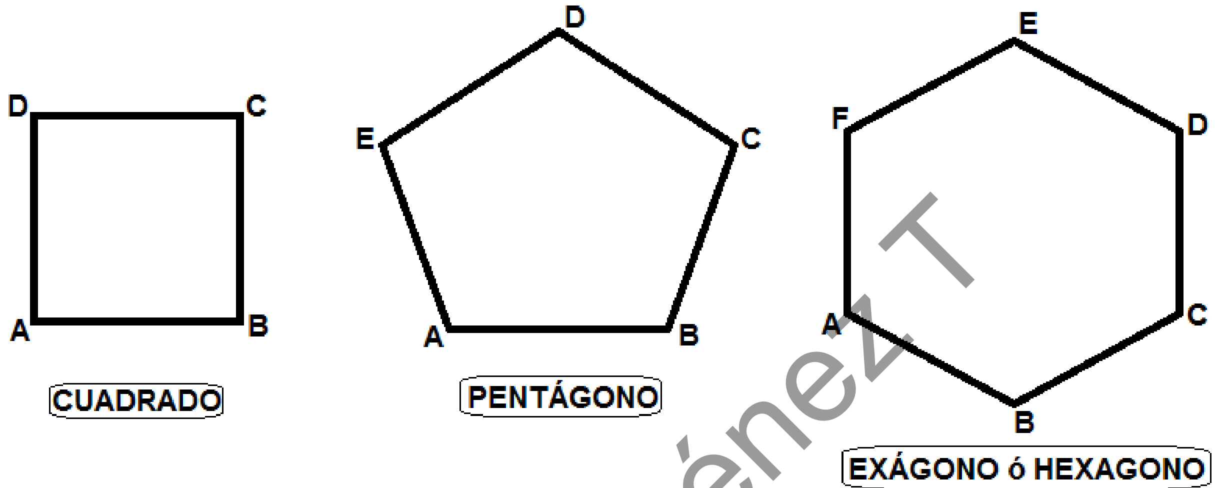
*Donde **la AMPLITUD el ángulo interior** se calcula* $\boxed{\mathbf{\frac{180^0(n-2)}{n}}}$

y

***la CANTIDAD de diagonales** se calcula* $\boxed{\mathbf{\frac{n(n-3)}{2}}}$

Algo más sobre los Políogonos REGULARES

- ***Con la excepción de los Triángulos Equílateros,***
- ***Los Polígonos REGULARES tienen lados consecutivos y lados no consecutivos, al igual que vértices consecutivos y vertices no consecutivos. Entre los más comunes:***



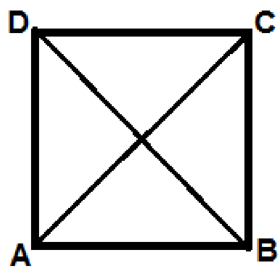
De las figuras: Ejemplos de vértices, y lados, consecutivos y NO consecutivos

En el CUADRADO $\mapsto$ **A** *es consecutivo con* **B** *y también lo es con* **D**
A *no es consecutivo con* **C**
D *no es consecutivo con* **B**
$\overline{\mathbf{AB}}$ *es consecutivo con* $\overline{\mathbf{BC}}$ *y también lo es con* $\overline{\mathbf{AD}}$
$\overline{\mathbf{AB}}$ *no es consecutivo con* $\overline{\mathbf{CD}}$

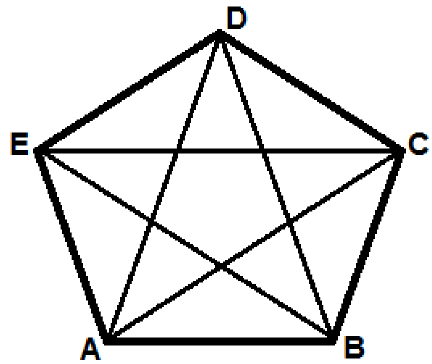
En el PENTÁGONO $\mapsto$ **A** *es consecutivo con* **B** *y también lo es con* **E**
A *no es consecutivo con* **C**, *ni tampoco con* **D**
$\overline{\mathbf{AB}}$ *es consecutivo con* $\overline{\mathbf{BC}}$ *y también lo es con* $\overline{\mathbf{AE}}$
$\overline{\mathbf{CD}}$ *es consecutivo con* $\overline{\mathbf{DE}}$ *y también lo es con* $\overline{\mathbf{BC}}$
$\overline{\mathbf{AB}}$ *no es consecutivo con* $\overline{\mathbf{CD}}$, *ni tampoco con* $\overline{\mathbf{DE}}$

En el EXÁGONO $\mapsto$ **A** *es consecutivo con* **B** *y también lo es con* **F**
A *no es consecutivo con* **C**, *ni tampoco con* **D**
$\overline{\mathbf{AB}}$ *es consecutivo con* $\overline{\mathbf{BC}}$ *y también lo es con* $\overline{\mathbf{AF}}$
$\overline{\mathbf{EF}}$ *es consecutivo con* $\overline{\mathbf{DE}}$ *y también lo es con* $\overline{\mathbf{FA}}$
$\overline{\mathbf{CD}}$ *es consecutivo con* $\overline{\mathbf{DE}}$ *y también lo es con* $\overline{\mathbf{BC}}$
$\overline{\mathbf{AB}}$ *no es consecutivo con* $\overline{\mathbf{CD}}$, *ni tampoco con* $\overline{\mathbf{FE}}$

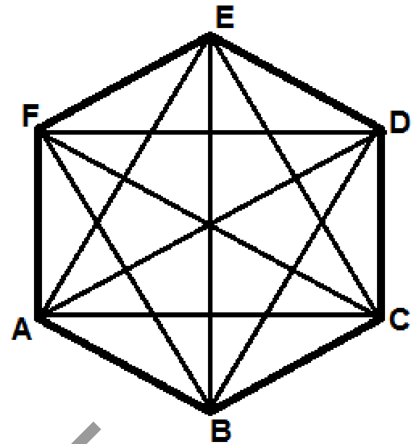
SEGMENTOS IGUALES.



CUADRADO



PENTÁGONO



EXÁGONO ó HEXAGONO

- *Las <u>diagonales</u> <u>del</u> <u>Polígono</u> son segmentos que van de un vértice a otro vértice no consecutivo.*

En el CUADRADO y el PENTÁGONO <u>las diagonales</u> son IGUALES

✓ *En el EXÁGONO <u>de las tres diagonales</u> que se pueden trazar desde un vértice:*

- *dos diagonales son **IGUALES***
- *La tercera diagonal (que es la de mayor longitud) lo divide en dos TRAPECIOS Isósceles IGUALES. Esa diagonal constituye un eje de simetría.*

De las figuras: Ejemplos de diagonales iguales.

En el EXÁGONO $\mapsto$ *desde* **A:** $\overline{\mathbf{AC}} = \overline{\mathbf{AE}}$; $\overline{\mathbf{AD}}$, *lo divide en los Trapecios ISÓSCELES* **ABCD** *y* **ADEF**

desde **B:** $\overline{\mathbf{BF}} = \overline{\mathbf{BD}}$; $\overline{\mathbf{BE}}$, *lo divide en los Trapecios ISÓSCELES* **BCDE** *y* **BEFA**

mas sobre el EXÁGONO REGULAR

✓ *Las diagonales mayores se intersectan en el centro de las circunferencias y forman con los lados **SEIS triángulos EQUILÁTEROS**.*

✓ *Los lados tienen la misma longitud del radio de la circunferencia circunscrita* "**R**".

✓ El área $\boxed{\mathbf{A} = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\mathbf{R}^2\right)}$

RELACIONES entre LONGITUDES de SEGMENTOS

SEGMENTOS IGUALES

*En la práctica, es saludable precisar algunos hechos, de esos que permiten **probar** en la práctica que dos segmentos son iguales.*

DOS SEGMENTOS SON IGUALES:

- *Si son **lados de un Polígono Regular** (Triángulo Equilátero, Cuadrado, Pentágono Regular, Exágono Regular, entre otros).*
- *Si son **lados de un Rombo**.*
- *Si son **lados no bases de un** Δ **Isósceles** o de un **Trapecio Isósceles.***
- *Si son **las dos alturas** a los lados no bases de un **Triángulo Isósceles.***
- *Si son **las dos medianas** a los lados no bases de un **Triángulo Isósceles.***
- *Si son **las dos bisectrices** a los lados no bases de un **Triángulo Isósceles.***
- *Si son **lados opuestos de un Paralelogramo**.*
- *Si son **diagonales de un Rectángulo**.*
- *Si son **las diagonales** de un **Trapecio Isósceles**.*
- *Si son divididos por el **Punto Medio** del segmento.*
- *Si son los **dos segmentos en que queda dividida la diagonal** de un paralelogramo al ser cortada por la otra diagonal (las diagonales se bisecan).*
- *Si son el resultado de la **suma o la diferencia de segmentos de igual longitud**.*
- *Si son **MITADES** de segmentos **IGUALES**.*
- *Si son dos **lados que se oponen a ángulos iguales** en TRIÁNGULOS IGUALES (lados homólogos en triángulos iguales) o en un MISMO triángulo.*
- *Si son **las distancias de un punto** de la **bisectriz** a los **lados del ángulo**.*
- *Si son las **distancias de un punto** de la **mediatriz** a los **extremos del segmento**.*
- *Si son **dos radios de una circunferencia** o de circunferencias "distintas" de iguales diámetros.*
- *Si son **las distancias a cuerdas IGUALES** desde el centro de la circunferencia o en circunferencias "distintas" de iguales diámetros.*
- *Si son **segmentos de tangencia** a una circunferencia desde un mismo punto.*
- *Si son **dos cuerdas que sustentan a arcos iguales** en una circunferencia o en circunferencias distintas de iguales diámetros.*

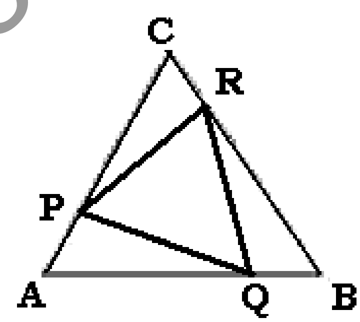
- *Si son **dos cuerdas** que en una circunferencia estén **a igual distancia del centro.***
- *Si son **dos cuerdas paraleles** unidas por un diámetro (en sus extremos); […cumplen dos condiciones].*
- *Si son **dos cuerdas** unidas por un diámetro (en sus extremos) y tienen igual ángulo con el diámetro; […cumplen dos condiciones].*

Algunos EJEMPLOS:

*Mostremos ahora **algunos** de los casos mencionados anteriormente, sobre todo aquellos que tienen un **proceder "interesante"** y pueden brindar el **"cómo actuar"**, llegada la ocasión o cómo justificar la igualdad.*

Ejemplo_1 : (**suma o diferencia** de **segmentos iguales**)

En la figura:
ΔABC *Equilátero;*
$\overline{AP} = \overline{QB} = \overline{RC}$.
Probar que: $\overline{PC} = \overline{AQ}$



R /

De la figura:

$\overline{PC} = \overline{AC} - \overline{AP}$

$\overline{AQ} = \overline{AB} - \overline{QB}$

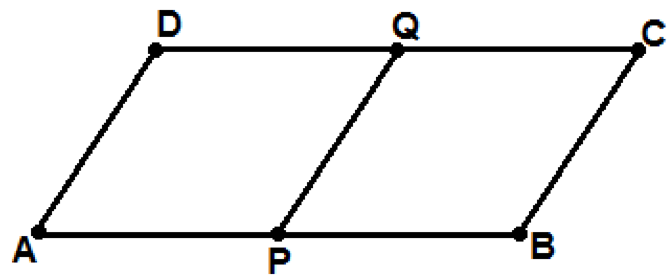
$\therefore$ $\overline{PC} = \overline{AQ}$ *(por **diferencia de segmentos iguales**)*

Nótese que: ***Los minuendos**,* $\overline{AC}$ *y* $\overline{AB}$, *en cada diferencia son iguales. (ya que son lados del triángulo Equilátero).*

***Los sustraendos**,* $\overline{AP}$ *y* $\overline{QB}$, *en cada diferencia, son iguales. (ya que lo dicen los datos)*

Ejemplo_2 : (**MITADES** de segmentos **IGUALES**)

En la figura:
ABCD *paralelogramo*
$\overline{\mathbf{PQ}}$ *paralela media con respecto a* $\overline{\mathbf{BC}}$
Probar que: $\overline{\mathbf{AP}} = \overline{\mathbf{QC}}$

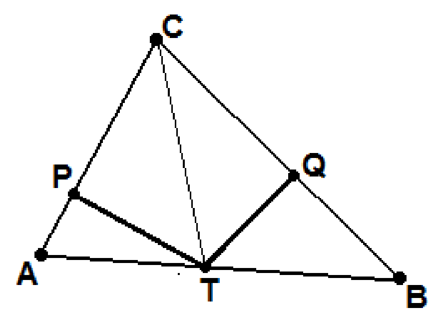


R /

$\overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{DC}}$ *(por ser lados opuestos del paralelogramo)*
P *y* **Q** *puntos medios de* $\overline{\mathbf{AB}}$ *y* $\overline{\mathbf{DC}}$*, respectivamente* ($\overline{\mathbf{PQ}}$ paralela media)
$\therefore$ $\overline{\mathbf{AP}} = \overline{\mathbf{QC}}$ *(por ser* ***mitades de segmentos iguales****)*

Ejemplo_3 : (***las distancias de un punto*** *de la* ***bisectriz*** *a los* ***lados del ángulo***)

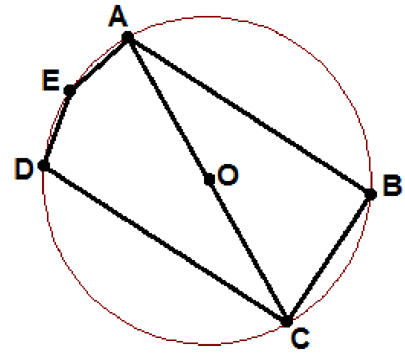
En la figura:
$\overline{\mathbf{CT}}$ bisectriz del Δ**ABC** *con respecto a* $\overline{\mathbf{AB}}$
Δ**APT** y Δ**BQT** rectángulos en **P** y en **Q**
Probar que: $\overline{\mathbf{PT}} = \overline{\mathbf{QT}}$



R /

$\overline{\mathbf{PT}} \perp \overline{\mathbf{AC}}$ **(**por ser Δ**APT** rectángulo en **P)**
$\overline{\mathbf{QT}} \perp \overline{\mathbf{BC}}$ **(**por ser Δ**BQT** rectángulo en **Q)**
T punto de la bisectriz del $\measuredangle$**ACB**
$\therefore$ $\overline{\mathbf{PT}} = \overline{\mathbf{QT}}$ *(por ser* ***las distancias de un punto*** *de la* ***bisectriz*** *a los* ***lados del ángulo*** *)*

Ejemplos_4: (*Si son **dos cuerdas paralelas** unidas por un diámetro*)

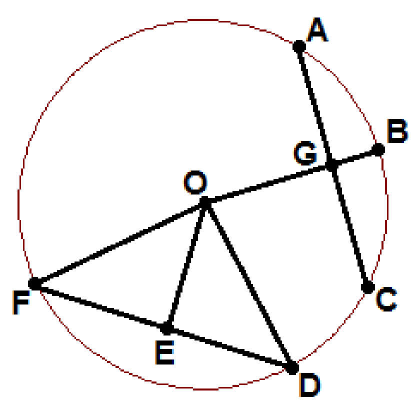


En la figura:
$\overline{\mathbf{AB}} // \overline{\mathbf{CD}}$
$\overline{\mathbf{AC}}$ diámetro de la circunferencia de centro **O**
Probar que: $\overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{CD}}$

R /

$\overline{\mathbf{AB}}$ y $\overline{\mathbf{CD}}$ cuerdas de la circunferencia de centro **O**
$\overline{\mathbf{AB}} // \overline{\mathbf{CD}}$ (datos)
$\overline{\mathbf{AC}}$ diámetro de la circunferencia de centro **O**
$\therefore$ $\overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{CD}}$ *(por ser **dos cuerdas paralelas** unidas por un diámetro en sus extremos)*

Ejemplos_5: (*Si son **las distancias a cuerdas IGUALES***)



En la figura:
$\overset{\frown}{\mathbf{AC}} = \overset{\frown}{\mathbf{DF}}$
B punto medio de $\overset{\frown}{\mathbf{AC}}$
$\overline{\mathbf{OE}}$ mediana del $\Delta\mathbf{OFD}$ con respecto a $\overline{\mathbf{DF}}$
Probar que: $\overline{\mathbf{OE}} = \overline{\mathbf{OG}}$

R /

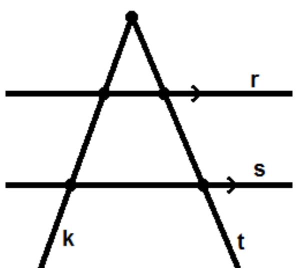
G *es punto medio de* $\overline{\mathbf{AC}}$ *(ya que* $\overline{\mathbf{OB}}$ *radio que divide al* $\overset{\frown}{\mathbf{AC}}$ en su punto medio)
$\overline{\mathbf{OB}} \perp \overline{\mathbf{AC}}$ *(por ser* $\overline{\mathbf{OB}}$ *radio que divide a la cuerda* $\overline{\mathbf{AC}}$ *en su punto medio)*
$\Delta\mathbf{OFD}$ Isósceles de base $\overline{\mathbf{DF}}$ (por ser $\overline{\mathbf{OF}}$ *y* $\overline{\mathbf{OD}}$ *radios)*
$\overline{\mathbf{OE}} \perp \overline{\mathbf{FD}}$ *(por ser* $\overline{\mathbf{OE}}$ *mediana y altura del* $\Delta\mathbf{OFD}$ Isósceles *con respecto a la base* $\overline{\mathbf{DF}}$*)*
$\therefore$ $\overline{\mathbf{OE}} = \overline{\mathbf{OG}}$ *(por ser **las distancias del centro** de la circunferencia **a cuerdas IGUALES)***

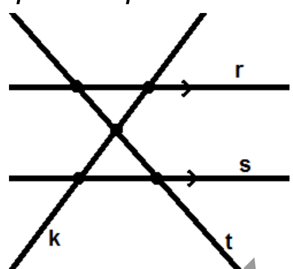
SEGMENTOS PROPORCIONALES (Teorema de las Transversales)

A la proporcionalidad entre segmentos ya la hemos comentado, en parte, cuando se trató la <u>Semejanza de Triángulos</u>; ahora trataremos el Teorema de las TRANSVERSALES (otro de los Teoremas de Tales de Mileto que ha llegado hasta nuestros días con vigencia plena)

PRELIMINARES

A las rectas que cortan o intersectan a rectas paralelas se les llama transversales, SEMEJANTE a como ocurre en la vida con el <u>corte transverso</u>, corte RECTO (no curvo) en otra dirección de la establecida por las paralelas. Así,

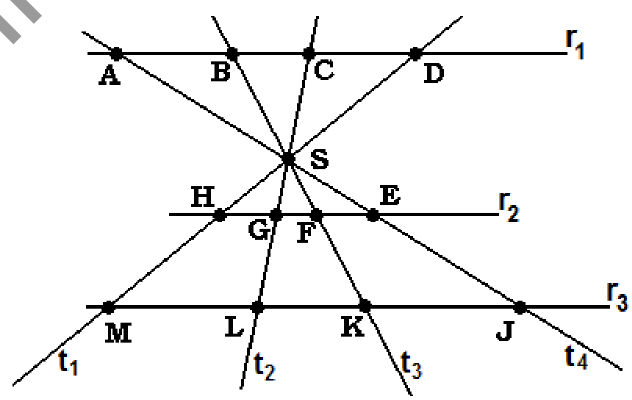




*<u>Nótese que</u>: que las rectas trasversales (**k** y **t**) pueden cortarse "fuera o dentro" de las rectas paralelas (**r** y **s**)*

¿Entre cuáles segmentos se establece la proporcionalidad?

En estos cortes aparecen segmentos en la transversales ($\mathbf{t_1}$, $\mathbf{t_2}$, $\mathbf{t_3}$ *y* $\mathbf{t_4}$*), así como segmentos en las paralelas (* $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$ *y* $\mathbf{r_3}$*).*



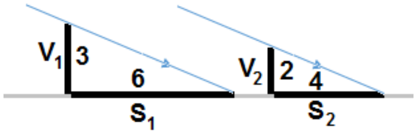
R / *Las relaciones de proporcionalidad se establecen entre los segmentos de transversales que estén determinados por las mismas paralelas y/o determinados por el Punto **S**. También se establecen entre segmentos de paralelas que estén determinados entre las mismas transversales. Veamos:*

$\overline{\mathbf{AB}}$, $\overline{\mathbf{FE}}$ *y* $\overline{\mathbf{KJ}}$ *son segmentos de paralelas entre las mismas transversales* $\mathbf{t_3}$ *y* $\mathbf{t_4}$ ($\boxed{\mathbf{t_3} \leftrightarrow \mathbf{t_4}}$*, segmentos que están entre* $\mathbf{t_3}$ *y* $\mathbf{t_4}$ *).*

$\overline{\mathbf{HM}}$, $\overline{\mathbf{GL}}$, $\overline{\mathbf{FK}}$ *y* $\overline{\mathbf{EJ}}$ *son segmentos de transversales entre las mismas paralelas* $\mathbf{r_2}$ *y* $\mathbf{r_3}$ ($\boxed{\mathbf{r_2} \leftrightarrow \mathbf{r_3}}$*, segmentos que están entre* $\mathbf{r_2}$ *y* $\mathbf{r_3}$ *).*

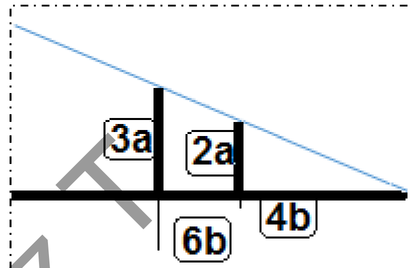
$\overline{\mathbf{SH}}$ *es un segmento de transversal, determinado entre el punto **S** y la paralela* $\mathbf{r_2}$ ($\boxed{\mathbf{S} \leftrightarrow \mathbf{r_2}}$*, segmento que está entre el punto **S** y* $\mathbf{r_2}$ *).*

*Tales encontró estas relaciones en su empeño de querer medir las alturas de las Pirámides, fue en su intento de "COMPARAR las **S**ombras" de **V**aras que afloró, para él, estas fenomenales y transcendentales relaciones. Al parecer, se*



*dio cuenta de que dos **V**aras* $\left(V_1;\ V_2\right)$ *puestas perpendicularmente sobre el piso a una misma hora del día tenían **S**ombras* $\left(S_1;\ S_2\right)$ *proporcionales con las longitudes de las varas* $\dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} \mapsto \boxed{\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{V_1}{V_2}}$

ó $\dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{6} \mapsto \boxed{\dfrac{V_1}{S_1} = \dfrac{V_2}{S_2}}$, *para más tarde generalizar* $\Rightarrow$



el resultado (TEOREMA) entre varios de los segmentos que allí se formaban, los de transversales y los de las paralelas; Resultado que hoy en día se divide en tres partes.

Teorema de las TRANSVERSALES

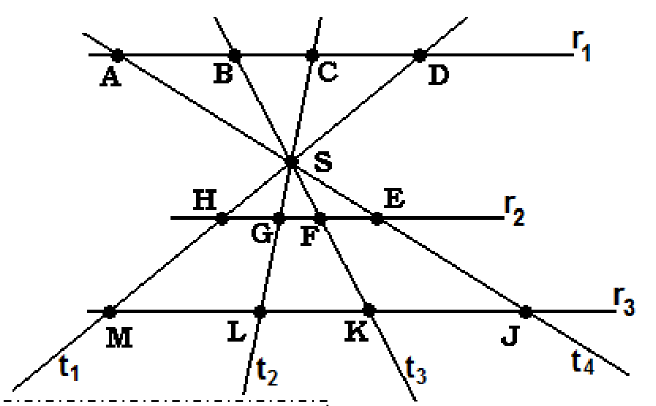
Sean las rectas $r_1 // r_2 // r_3$ y las rectas t_1, t_2, t_3 y t_4 que se cortan en el punto ***S***; entonces se puede establecer:

- ✓ *Relaciones entre <u>segmentos</u> <u>de</u> <u>transversales</u>* $(t_1, t_2, t_3$ *y* $t_4)$
- ✓ *Relaciones entre <u>segmentos</u> <u>de</u> <u>paralelas</u>* $(r_1, r_2$ *y* $r_3)$
- ✓ *Relaciones entre <u>segmentos</u> <u>de</u> <u>transversales</u> y <u>paralelas</u>*

Veamos:

- ➢ Entre <u>segmentos</u> <u>de</u> <u>transversales</u>(determinados por la paralelas o el punto **S**)
  - Con segmentos de t_1, t_3 y entre

$$\underbrace{\overbrace{\dfrac{\overline{SH}}{\overline{HM}} = \dfrac{\overline{SF}}{\overline{FK}}}^{\overbrace{S \leftrightarrow r_2}^{\text{Numerador}}}}_{\underbrace{r_2 \leftrightarrow r_3}_{\text{Denominador}}} \quad \text{ó} \quad \underbrace{\overbrace{\dfrac{\overline{DS}}{\overline{HM}} = \dfrac{\overline{BS}}{\overline{FK}}}^{r_1 \leftrightarrow S}}_{r_2 \leftrightarrow r_3}$$



RECUERDE: $\boxed{S \leftrightarrow r_2}$, *segmento que está entre el punto **S** y* r_2

ATENCIÓN: Estas proporciones necesitan, en principio, escribirlas con MUCHO CUIDADO y ORDEN.
NÓTESE *que en los numeradores y denominadores se precisan la posición de los segmentos; entre que transversales o las paralelas o el punto* **S** *se encuentran.*

- Con segmentos de t_1, t_2 y entre

$$\overbrace{\underbrace{\frac{\overline{DH}}{\overline{HM}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{GL}}}_{r_2 \leftrightarrow r_3}}^{r_1 \leftrightarrow r_2} \quad \text{ó} \quad \overbrace{\underbrace{\frac{\overline{DS}}{\overline{HM}} = \frac{\overline{CS}}{\overline{GL}}}_{r_2 \leftrightarrow r_3}}^{r_1 \leftrightarrow S} \quad \text{ó} \quad \overbrace{\underbrace{\frac{\overline{DS}}{\overline{SH}} = \frac{\overline{CS}}{\overline{SG}}}_{S \leftrightarrow r_2}}^{r_1 \leftrightarrow S}$$

➢ Entre <u>segmentos</u> <u>de</u> <u>paralelas</u> (determinados por la transversales)

- Con segmentos de r_2, r_3 y entre

$$\overbrace{\underbrace{\frac{\overline{GF}}{\overline{GE}} = \frac{\overline{LK}}{\overline{LJ}}}_{t_2 \leftrightarrow t_4}}^{t_2 \leftrightarrow t_3} \quad \text{ó} \quad \overbrace{\underbrace{\frac{\overline{HG}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{ML}}{\overline{KJ}}}_{t_3 \leftrightarrow t_4}}^{t_1 \leftrightarrow t_2}$$

Estas relaciones también pueden escribirse de <u>otra</u> <u>manera</u> (usando la “diversidad” de una proporción)

De $\frac{\overline{GF}}{\overline{GE}} = \frac{\overline{LK}}{\overline{LJ}} \mapsto \boxed{\frac{\overline{GF}}{\overline{LK}} = \frac{\overline{GE}}{\overline{LJ}}}$

- Con segmentos de r_1, r_3 y entre

$$\overbrace{\underbrace{\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{KJ}}{\overline{LJ}}}_{t_2 \leftrightarrow t_4}}^{t_3 \leftrightarrow t_4} \quad \text{ó} \quad \overbrace{\underbrace{\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ML}}{\overline{KJ}}}_{t_3 \leftrightarrow t_4}}^{t_1 \leftrightarrow t_2}$$

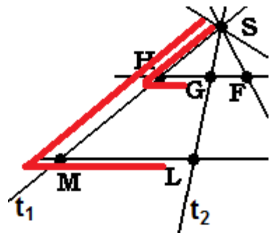
De $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{KJ}}{\overline{LJ}} \mapsto \boxed{\frac{\overline{AB}}{\overline{KJ}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{LJ}}}$

De $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ML}}{\overline{KJ}} \mapsto \boxed{\frac{\overline{CD}}{\overline{ML}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{KJ}}}$

- Entre <u>segmentos de transversales</u> *y <u>paralelas</u> (conocido como la "**L**" ó la "**Z**")*
(los segmentos de transversales determinados por el punto **S**)

  - Con segmentos de t_1, r_2, r_3 y entre

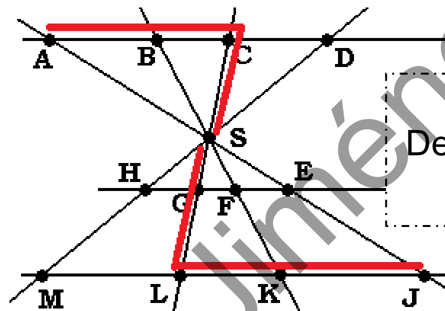
$$\underbrace{\overbrace{\frac{\overline{SH}}{\overline{HG}} = \frac{\overline{SM}}{\overline{ML}}}^{S \leftrightarrow r_2 \text{ ó } r_3}}_{t_1 \leftrightarrow t_2}$$



De $\frac{\overline{SH}}{\overline{HG}} = \frac{\overline{SM}}{\overline{ML}} \mapsto \boxed{\frac{\overline{SH}}{\overline{SM}} = \frac{\overline{HG}}{\overline{ML}}}$

  - Con segmentos de t_2, r_1, r_3 y entre

$$\underbrace{\overbrace{\frac{\overline{SC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{SL}}{\overline{LJ}}}^{S \leftrightarrow r_1 \text{ ó } r_3}}_{t_2 \leftrightarrow t_4}$$



De $\frac{\overline{SC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{SL}}{\overline{LJ}} \mapsto \boxed{\frac{\overline{SC}}{\overline{SL}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{LJ}}}$

Dos PRECISIONES, para esta última parte (*la "**L**" ó la "**Z**")*:
- Los segmentos de trasversales están determinados por el punto **S**
- Los segmentos de paralela tienen un punto común con los de transversales

Algo más sobre las transversales, antes de concluir:

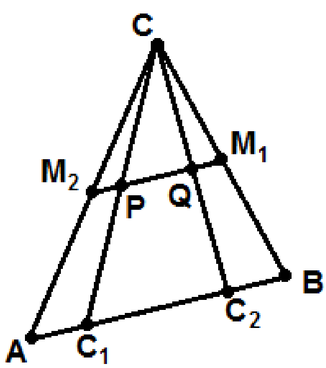
Semejante a como ocurre con los <u>ángulos</u> <u>entre</u> <u>paralelas</u>, en esta relación se cumple el RECIPROCO;
Si existe Razones de Proporcionalidad entre segmentos (de las antes mencionadas) es porque hay <u>PARALELISMO</u> <u>DE</u> <u>entre</u> <u>RECTAS</u>.

Otros resultados Geométricos, básicos e interesantes, de los más usados en la práctica escolar.

Se trata resultados distintos a los ya expuestos (a lo largo de este resumen) y que usted puede traer a la resolución de un ejercicio, si así lo cree oportuno. Estos resultados geométricos aparecen, en ocasiones, en las distintas situaciones de la Matemática escolar; <u>no</u> <u>necesitan</u> <u>de</u> <u>una</u> <u>demostración</u> para ser utilizados, como todo lo anteriormente expuesto son HECHOS GEOMÉTRICOS cuyo valor de verdad está garantizado desde hace mucho tiempo por todos los hombres de ciencia que nos han antecedido.

➢ La PARALELA MEDIA de un triángulo y PARALELA MEDIA la de un trapecio.

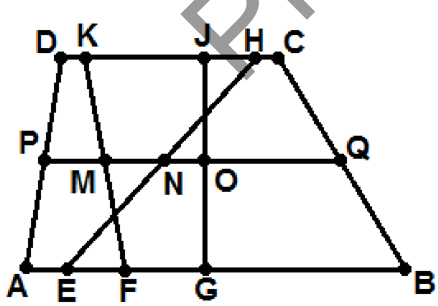
- Toda ceviana trazada desde un vértice y cortada por la paralela media con respecto al lado opuesto del vértice queda dividida en dos partes iguales.



En la figura:
$\overline{M_1M_2}$ paralela media del Δ**ABC** con respecto al lado $\overline{AB}$
$\overline{CC_1}$ y $\overline{CC_2}$ cevianas trazadas desde el vértice **C**

Luego $\boxed{\overline{CP} = \overline{PC_1}}$ **y** $\boxed{\overline{CQ} = \overline{QC_2}}$

- Todo segmento trazado entre las bases de un trapecio al ser cortado por la paralela media queda dividido en dos partes iguales.

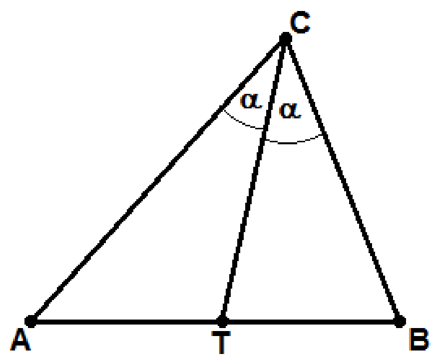


En la figura:
ABCD trapecio de base $\overline{AB}$
$\overline{PQ}$ paralela media del trapecio **ABCD**

Luego $\boxed{\overline{KM} = \overline{MF}}$; $\boxed{\overline{LO} = \overline{OG}}$ y

$\boxed{\overline{HN} = \overline{NE}}$

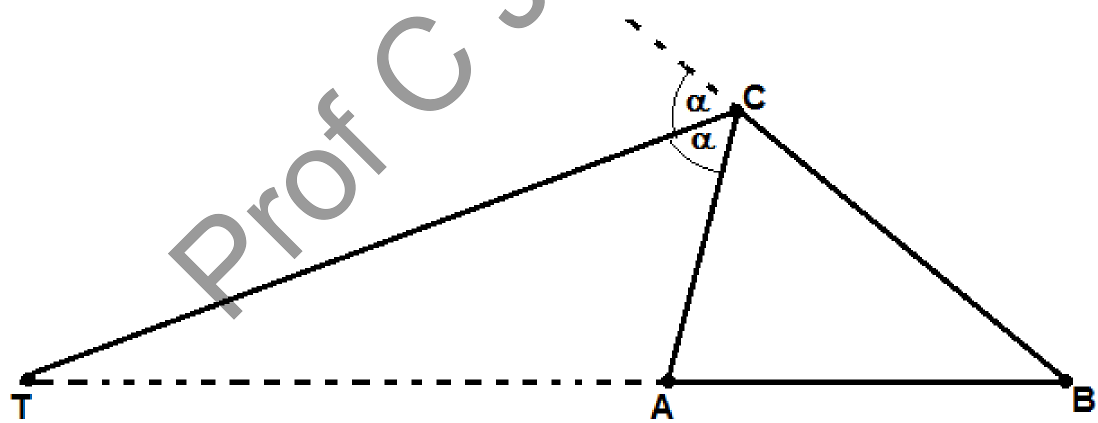
- Razón que deja la bisectriz de un triángulo.
  - Bisectriz del ángulo INTERIOR
    Al trazar la bisectriz a un lado de un triángulo se establece una proporción entre los lados del ángulo de la bisectriz y los segmentos que la bisectriz determina en el lado.



En la figura
$\overline{CT}$ bisectriz del Δ**ABC** con respecto al lado $\overline{AB}$

Luego $\boxed{\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \dfrac{\overline{TA}}{\overline{TB}}}$

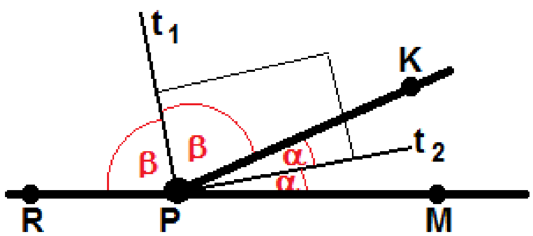
  - Bisectriz del ángulo EXTERIOR
    Al trazar la bisectriz del ángulo EXTERIOR de un triángulo a la PROLONGACIÓN de un lado, se establece una proporción entre los lados del ángulo INTERIOR y los segmentos que la bisectriz determina en la PROLONGACIÓN del lado.



En la figura
$\overline{CT}$ bisectriz del ángulo EXTERIOR del Δ**ABC** en el vértice **C** con respecto al lado $\overline{AB}$

Luego $\boxed{\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \dfrac{\overline{TA}}{\overline{TB}}}$

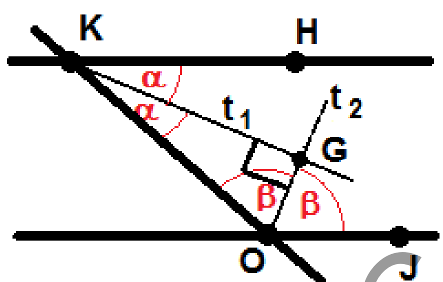
- Las bisectrices de ángulos SUPLEMENTARIOS
  - Las bisectrices de dos ángulos ADYACENTES forman un ángulo RECTO, son PERPENDICULARES



En la figura:
R, **P** y **M** alineados
t_1 y t_2 bisectrices de $\measuredangle$**RPK** y $\measuredangle$**KPM** respectivamente.

Luego $\boxed{\measuredangle(t_1;t_2) = 90^0}$

  - Las bisectrices de dos ángulos CONJUGADOS entre PARALELAS forman un ángulos RECTO, son PERPENDICULARES

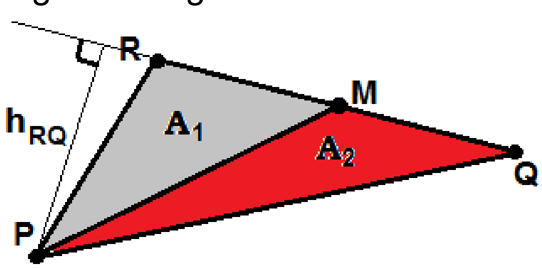


En la figura:
Sean las rectas **KH / / OJ**
t_1 y t_2 bisectrices de $\measuredangle$**HKG** y $\measuredangle$**KOJ** respectivamente.

Luego $\boxed{\measuredangle(t_1;t_2) = 90^0}$

- Igualdad entre las áreas de los triángulos que deja la mediana trazada a uno de los lados de un triángulo

Al trazar la mediana a un lado de un triángulo se forman dos nuevos triángulos de igual área



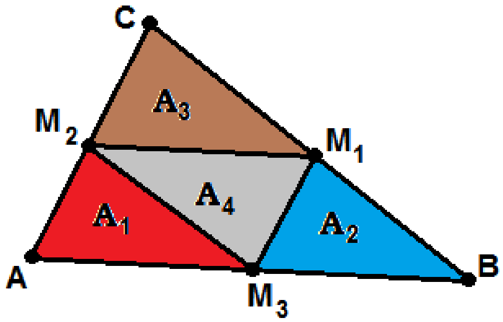
En la figura
$\overline{\mathbf{PM}}$ mediana del Δ**ABC** con respecto al lado $\overline{\mathbf{RQ}}$, de ahí que $\overline{\mathbf{RM}} = \overline{\mathbf{MQ}}$
$\overline{\mathbf{PR}}$ altura del Δ**ABC** con respecto al lado $\overline{\mathbf{RQ}}$ ($\mathbf{h}_{\mathbf{RQ}}$)

Luego $\boxed{\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2}$

Nótese que $\mathbf{A}_1 = \dfrac{\overline{\mathbf{RM}} \bullet \mathbf{h}_{\mathbf{RQ}}}{2}$ y $\mathbf{A}_2 = \dfrac{\overline{\mathbf{MQ}} \bullet \mathbf{h}_{\mathbf{RQ}}}{2}$

- Igualdad entre CUATRO los triángulos que dejan las tres paralelas medias de un triángulo.

Al trazar las tres paralelas medias de un triángulo se forman cuatro nuevos triángulos IGUALES y por tanto de Igual área



En la figura:
M_1, M_2 y M_3 puntos medios de los lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$ respectivamente
La paralela media $\overline{M_2M_3} = \overline{BM_1} = \overline{M_1C}$,
La paralela media $\overline{M_3M_1} = \overline{CM_2} = \overline{M_2A}$ y
La paralela media $\overline{M_1M_2} = \overline{AM_3} = \overline{M_3B}$

Luego $\Delta AM_3M_2 = \Delta BM_1M_3 = \Delta CM_2M_1 = \Delta M_1M_2M_3$

Nótese que tienen sus tres lados IGUALES.

DOS consecuencias para sus dimensiones:

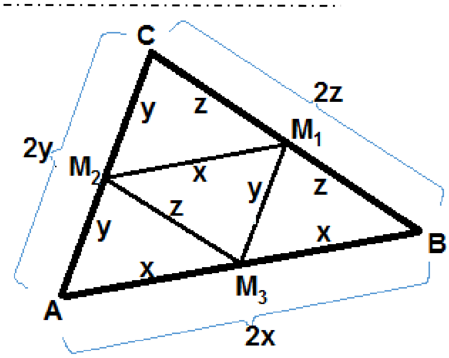
- Tienen iguales sus áreas, $\mathbf{A_1 = A_2 = A_3 = A_4}$, y por tanto CADA área es la CUARTA parte del área del Δ**ABC**

$$\mathbf{A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = \boxed{\frac{1}{4} A_{\Delta ABC}}}$$

- También sus perímetros son iguales

$P_1 = \boxed{x + y + z} = P_2$ y $P_3 = \boxed{x + y + z} = P_4$

Luego $P_1 = P_2 = P_3 = P_4$ y como el $P_{\Delta ABC} = 2(x + y + z)$, queda que CADA Perímetro es la MITAD del $P_{\Delta ABC}$

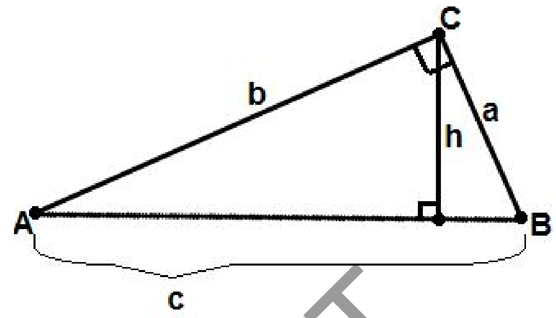


En conclusión: $\boxed{P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = s_{\Delta ABC}}$ (**s** $\mapsto$ semiperímetro)

- Sea **h** la altura con respecto a la hipotenusa, **a** y **b** los catetos, y **c** la hipotenusa:

  i. $\mathbf{h = \dfrac{a \bullet b}{c}}$

  ii. $\mathbf{\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}}$

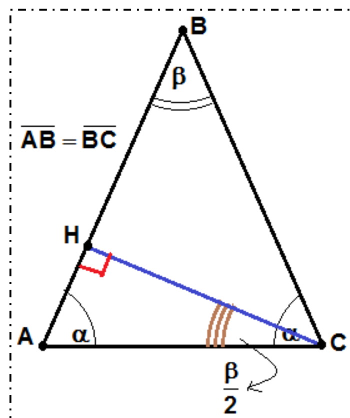


- En los triángulos ISÓSCELES **al trazar una altura** a uno de los lados IGUALES:

  El <u>ángulo agudo</u> del triángulo rectángulo (que tiene entre sus lados a la base del Isósceles) es la **MITAD del ángulo PRINCIPAL**.

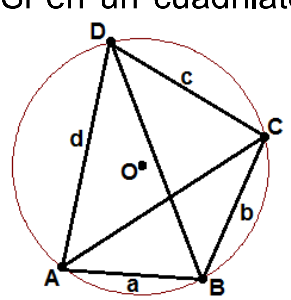
En $\Delta\mathbf{ABC}$, Isósceles de base $\mathbf{\overline{AC}}$

$\mathbf{\overline{HC}}$ Altura con respecto a $\mathbf{\overline{AB}}$: $\mapsto$ $\boxed{\measuredangle \mathbf{HCA} = \dfrac{\beta}{2}}$



De los Cuadriláteros CÍCLICOS

- Ptolomy (Teorema de Ptolomeo)
  - En todo cuadrilátero cíclico, el producto de los diagonales es igual a la suma del producto de los lados opuestos.
  - Si en un cuadrilátero, el producto de los diagonales es igual a la suma del producto de los lados opuestos, entonces el cuadrilátero es cíclico

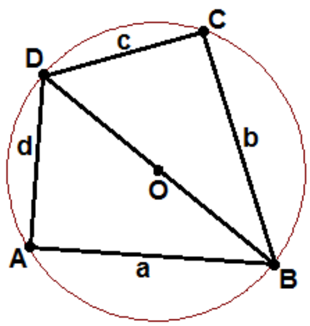


A, **B**, **C** y **D** puntos de la circunferencia de centro **O**

Luego $\mathbf{\overline{AC} \bullet \overline{BD} = \overline{AB} \bullet \overline{CD} + \overline{BC} \bullet \overline{DA}}$

- El ÁREA de un cuadrilátero cíclico, conocidas las longitudes de sus lados, es $\boxed{\mathbf{A}=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$

- *El área del cuadrilátero SIMÉTRICO es* $\mathbf{A}=\dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$ *(conocidas las longitudes de las diagonales), PERO, si también es CÍCLICO, su área se puede calcular conocidas las longitudes de sus lados.*



En la figura:
a, **b**, **c** y **d** son las longitudes de los lados del cuadrilátero

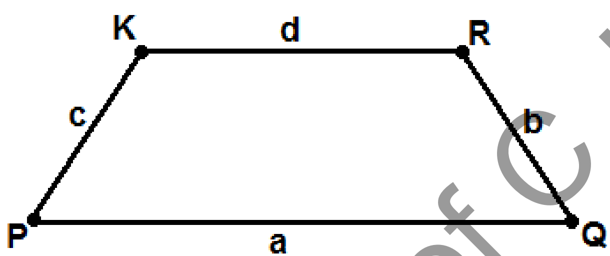
Luego $\mathbf{A}=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

Ahora, como $a=b$ y $c=d$

$$\mathbf{A}=\sqrt{(s-a)^2(s-c)^2}=\boxed{(s-a)(s-c)}$$

(**ÁREA del Cuadrilátero CÍCLICO y SIMÉTRICO**)

- *El área de un Trapecio Isósceles conocido las longitudes de sus cuatro lados.*



En la figura:
KPQR trapecio Isósceles de base $\overline{PQ}$
a, **b**, **c** y **d** longitudes de los lados del trapecio

Luego $\mathbf{A}=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

Ahora, como $b=c$ $\mapsto$ $\mathbf{A}=\sqrt{(s-a)(s-b)^2(s-d)}=\boxed{(s-b)\sqrt{(s-a)(s-d)}}$

Nótese $\mapsto$ que un **trapecio ISÓSCE ES** es un **cuadrilátero CÍCLICO**.

Hasta aquí el RESUMEN…

BIBLIOGRAFÍA

Álvarez Pérez, Marta…[et.al]. "El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática". Ed Pueblo y Educación. La Habana. 2014

Baldor, J. A. "Geometría Plana y del Espacio". Publicaciones Cultural. XX-Ed. Mejico. 2004

Campistrous,L; Rizo,Celia…[et.al]. "Matemática-7mo-8vo-9no-10mo-11no-12mo". Ed Pueblo y Educación. La Habana. 1998

Fiterri Riveras, I. "Matemática 2do-3er-4to curso. Geometría". Ed. Selecta. La Habana. 1957

Gamboa, Romy; Ballestero, Esteban. "La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes". Revista Electrónica Educare. Vol.XIV .No.2. Julio-Diciembre. 2010

García Martínez, Enech. "Breve acercamiento a una metodología para abordar problemas geométricos de tipo olímpico. IX Encuentro Taller científico Metodológico de la Cátedra "Dulce María Escalona". La Habana. 2015

Guerra Rodríguez, Matilde. "La geometría y su didáctica. Rev "Innovación y Experiencia,… No 31. Granada. España. 2010

Gusiev,V., Litvinenko,V…[et.al]. "Prácticas para resolver problemas Matemáticos". Ed. Mir. Moscú. 1989

Jiménez Tejeda, Carlos…[et.al]. "Estrategia didáctica para la geometría"; como parte de la preparación a la Pruebas de Ingreso de la Universidad. VII Encuentro Taller científico Metodológico de la Cátedra "Dulce María Escalona". La Habana. 2009

R.Clemens, Stanley…[et.al]. "GEOMETRY" Teacher´s Edition. Ed. Addison-Wesley. EU. 1990