FÍSICA

décimo grado

FÍSICA

décimo grado

Lic. Carlos Enrique Sifredo Barrios
Lic. Alberto Adolfo Santana Mora
Lic. Carlos Manuel Barroso Hernández
M. Sc. Maykel Ortiz Carmona
Lic. José Manuel Mora Hernández

EDITORIAL
PUEBLO Y EDUCACIÓN

Edición y corrección:
- Lic. Amada Díaz Zuazo

Diseño, cubierta, ilustración:
- Instituto Superior de Diseño

Emplane:
- Elier Guzmán Lajud

Instituto Superior de Diseño:
Anelís Simón Sosa ■ María Paula Lista Jorge ■ Sara Sofía Delgado Méndez ■ Isell Rodríguez Guerra ■ Daniela Domínguez Ramírez ■ Amanda Serrano Hernández ■ Rocío de la C. Ruiz Rodríguez ■ Evelio de la Sota Ravelo ■ Ana Laura Seco Abreu ■ Arianna Ruenes Torres ■ Reynier Polanco Somohano ■ Celia Carolina Céspedes Pupo ■ Elizabeth Diana Fajardo Céspedes ■ Laura Rosa Almero Fong ■ Elizabeth Blanco Galbán ■ Laura Reynaldo Jiménez ■ Daniela Arteaga Martínez ■ Daniela Alpízar Céspedes ■ Roberto Pérez Curbelo ■ Ariel Abreu Ulloa ■ M. Sc. Maité Fundora Iglesias ■ Dr. C. Ernesto Fernández Sánchez ■ D.I. Eric Cuesta Machado ■ D.I. Julio Montesino Carmona

© Carlos Enrique Sifredo Barrios y coautores, Cuba, 2023
© Editorial Pueblo y Educación, 2023

ISBN 978-959-13-4242-3 (Versión impresa)
ISBN 978-959-13-4356-7 (Versión digital)

EDITORIAL PUEBLO Y EDUCACIÓN
Ave. 3.ª A No. 4601 entre 46 y 60,
Playa, La Habana, Cuba. CP 11300.
epueblo@epe.gemined.cu

Prefacio

Estamos ante un panorama en el que el estudio de la Física, como parte esencial de una educación en ciencia y tecnología, en la educación preuniversitaria, tiene una importancia creciente para la formación de una cultura general de los jóvenes, incluida, por supuesto, la preparación específica para la continuidad de estudios o para la vida laboral; formación, vale reiterar, que resulta cada vez más necesaria, no solo para la continuidad de estudios superiores, sino para la vida en general.

El libro *Física Décimo grado* editado en el año 1989 fue objeto de sucesivas reimpresiones y utilizado hasta la fecha como texto básico para el primer año del preuniversitario. Independientemente de los valores de esta obra, la evolución de los programas de estudio, en función de los logros alcanzados, las dificultades y los nuevos retos, así como los avances en la ciencia y su proceso de enseñanza-aprendizaje, apuntaban en la dirección de la necesidad de, más allá de una reedición, elaborar un nuevo libro de Física.

Así, nace este nuevo libro *Física Décimo grado* cuya puesta en práctica está proyectada para el curso escolar 2023-2024.

Los autores de este libro se consideran deudores del equipo de profesores que tuvo a su cargo la preparación de una primera versión, sometida a prueba en un grupo de centros educativos durante el curso escolar 2017-2018 y del papel del ya citado texto precedente, en la elaboración de esta obra, en tanto fue utilizado como fuente de mucho valor.

En este sentido, expresamos nuestro agradecimiento a todos los profesores, investigadores y académicos que han colaborado con la publicación de esta obra y de manera particular, a los profesores, bien por sus valiosos señalamientos y aportaciones o por su contribución a la primera versión, de los profesores: Jorge Luis Contreras Vidal, Saúl Larramendi Valdés, René Fundora Arencibia, Rafael Rodríguez Pino, Juan José Bosque Ledesma y Miguel Ángel Ferrer López.

También queremos agradecer al personal de la Editorial Pueblo y Educación y a los diseñadores e ilustradores del ISDI. Para esta obra valoramos los comentarios y sugerencias que, en opinión de los profesores, estudiantes

y otros usuarios del libro, puedan contribuir a mejorar las futuras ediciones de este texto, incluyendo los aspectos relacionados con la estructura didáctica, que esperamos poder mejorar en las futuras ediciones.

Algunas características específicas del libro

Entre otras características del libro, se destacan las siguientes:

El libro está orientado a cubrir las temáticas del nuevo programa oficial de Física para el décimo grado, elaborado en el contexto del Tercer Perfeccionamiento del Sistema Nacional de Educación, y da continuidad a los estudios precedentes de esta asignatura en los grados octavo y noveno.

El enfoque metodológico del libro trata de tomar en consideración que la Física ha de ser enseñada y aprendida, no centrada en la atención a saberes y habilidades específicos, sino con toda la riqueza de métodos y formas de trabajo que le son inherentes a su sistema conceptual y que pueden contribuir decisivamente a una sólida asimilación de sus contenidos. Esto presupone que los estudiantes puedan apreciar la extraordinaria riqueza de la actividad investigadora y tengan una visión profunda de la ciencia, en correspondencia con su edad, nivel cultural de partida y lo requiera el contexto histórico-social en que han de vivir, de manera que se alcance el objetivo de ser personas verdaderamente cultas, capaces de orientarse independientemente en la solución de los problemas planteados por la sociedad.

En el texto se usa el Sistema Internacional de Unidades (SI) y está organizado en capítulos y epígrafes, los que pueden incluir varias subtemáticas y secciones: ¿Sabías que…?; De la historia; ¡Cuidado!; Desafío y Conéctate. Se incluyen ejemplos en los que se explica el procedimiento de solución de problemas, como modelo de referencia. Cada epígrafe incluye un sistema de actividades orientado a comprobar la asimilación correcta de las principales ideas abordadas y cada capítulo termina con un sistema de tareas generales con el objetivo de consolidar los conocimientos y desarrollar las habilidades necesarias para operar con estos, hasta el nivel de aplicación, es decir, poder resolver tareas para las que no se dispone de un modelo previo.

Además de la presentación de demostraciones y tareas experimentales, en el texto se incluyen prácticas de laboratorio (PL), las que se identifican siguiendo el mismo criterio utilizado para los ejercicios resueltos.

Al final del texto se proporcionan varias tablas de datos físicos, factores de conversión, tablas de constantes fundamentales, símbolos matemáticos y los símbolos griegos más utilizados.

A los educandos

No queremos dejar pasar la oportunidad de dirigir unas breves palabras a quienes está dirigida fundamentalmente esta obra.

Es muy común, y lógico, escuchar entre los estudiantes preguntas como las siguientes: ¿Para qué hace falta estudiar Física? ¿Qué importancia tiene aprender las ecuaciones?

Responder de forma convincente a estas interrogantes no es cosa sencilla, pero podemos al menos hacer algunos comentarios. En la actualidad la mayoría de los equipos utilizados en las fábricas e industrias, los hospitales, el transporte, la agricultura, las comunicaciones, los centros artísticos, la práctica deportiva, nuestros hogares y otros ámbitos, se han diseñado por los científicos e ingenieros sobre la base de las leyes de la Física.

Sin embargo, la importancia de su estudio no solo está dada por sus aportes al desarrollo tecnológico de nuestra civilización, sino por lo que este aporta intelectualmente a las personas, a potenciar sus capacidades de razonamiento y la creatividad. De hecho, el conocimiento físico del mundo constituye un componente esencial de la cultura.

Debe señalarse también que, inmersos en una sociedad cada vez más influenciada por la ciencia y la tecnología, sin el conocimiento físico, que está en la base de una formación que permita evaluar el impacto de este desarrollo sobre nuestra civilización, es poco probable que las personas puedan avanzar más allá de sus propios e inmediatos intereses, e incluso, ser presa fácil de muchos mitos, falsedades y manipulaciones. No exageramos si decimos que el conocimiento físico del mundo nos hace más libres, en tanto nos hace menos manipulables, de ello sobran ejemplos concretos que con seguridad discutirán durante el curso.

Solo si nos apropiamos también de estos conocimientos y procedimientos es posible alcanzar una cultura integral que nos permita disfrutar la vida en toda su riqueza y orientarnos de manera correcta en la solución de los problemas planteados por la sociedad. Por supuesto, esto se comprenderá a plenitud en la medida en que se avance en el estudio de esta ciencia

y hasta las ecuaciones, que en un principio pueden parecer un jeroglífico inexplicable, terminen mostrándonos toda la belleza y esplendor del conocimiento sobre los fenómenos naturales como reflejo sintético de la obra desarrollada durante milenios por la humanidad.

Esperamos que este libro pueda incentivar el interés de ustedes por la física y contribuir de manera significativa a su aprendizaje.

Los autores

ÍNDICE

Prefacio III

A los educandos V

1 Magnitudes físicas y su medición. Vectores 1

1.1 Magnitudes físicas 2
1.2 Magnitudes fundamentales y derivadas. Sistema Internacional de Unidades 5
1.3 Mediciones directas e indirectas. Incertidumbre 8
1.4 Magnitudes escalares y vectoriales. Operaciones con vectores 20
1.5 Componentes y proyecciones de una magnitud vectorial 30
Tareas generales del capítulo 35

2 Cinemática de la partícula 39

2.1 Movimiento mecánico. Sistema de referencia. Punto material. Posición de un cuerpo. Desplazamiento 41
2.2 Velocidad y desplazamiento en el Movimiento Rectilíneo Uniforme. Representación gráfica en el Movimiento Rectilíneo Uniforme 50
2.3 Relatividad del movimiento. Ecuación de composición de velocidades de Galileo 66
2.4 Movimiento variado. Velocidad media y velocidad instantánea 74
2.5 Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado 79
2.6 Gráficas de la velocidad y la posición en función del tiempo en el MRUV 86
2.7 Proyectiles. Movimiento circunferencial uniforme 96
2.8 Movimiento circunferencial uniforme 114
Tareas generales de la capítulo 122

3 Leyes del movimiento mecánico. Ley de Gravitación Universal 129
3.1 Primera ley de Newton (Ley de la inercia) 132
3.2 Segunda Ley de Newton (Ley de la fuerza) 142
3.3 Tercera Ley de Newton (Ley de acción y reacción) 147
3.4 Límite de validez de las leyes de Newton 150
3.5 Distintos tipos de fuerza 151
3.6 Aplicaciones de las leyes de Newton 166
3.7 Leyes de Kepler. Ley de Gravitación Universal 180
Tareas generales del capítulo 196

4 Ley de conservación de la cantidad de movimiento lineal 205
4.1 Impulso de una fuerza 206
4.2 Cantidad de movimiento lineal 208
4.3 Relación entre el impulso y la variación de la cantidad de movimiento lineal 211
4.4 Ley de conservación de la cantidad de movimiento lineal 215
Tareas Generales del Capítulo 227

5 Trabajo y energía. Ley de conservación de la energía mecánica 233
5.1 Trabajo mecánico 235
5.2 Energía cinética. Relación entre el trabajo y la energía cinética .. 242
5.3 Energía potencial 246
5.4 Ley de conservación de la energía mecánica 253
5.5 Choques 258
Tareas generales del capítulo 268

6 Dinámica de la rotación 275
6.1 Sólido rígido. Desplazamiento y velocidad angular en el movimiento de rotación 277
6.2 Aceleración angular y tangencial para un sólido rígido 282
6.3 Energía cinética rotacional. Momento de inercia. Teorema de Steiner 287
6.4 Torque. Ecuación fundamental de la dinámica de rotación 293

6.5 Cantidad de movimiento angular. Ley de conservación de la cantidad de movimiento angular 303
6.6 Movimiento de rotación y traslación combinados. Relaciones energéticas 308
Tareas generales del capítulo 314

7 Oscilaciones mecánicas 319

7.1 Movimiento mecánico oscilatorio y movimiento armónico simple: conceptos básicos 320
7.2 Movimiento armónico simple 324
7.3 Ecuaciones del MAS 326
7.4 La energía en el Movimiento Armónico Simple 339
7.5 Oscilaciones forzadas. Resonancia 342
Tareas generales del capítulo 344

8 Ondas mecánicas 349

8.1 Ondas. Características del movimiento mecánico ondulatorio 350
8.2 Ecuación del movimiento ondulatorio 358
8.3 Propiedades de las ondas 362
8.4 Ondas estacionarias 381
Tareas generales del capítulo 387

Anexos 393

Bibliografía 405

CAPÍTULO 1

Magnitudes físicas y su medición. Vectores

La galaxia de Andrómeda está a una distancia aproximada de la Tierra de $2{,}0 \cdot 10^{19}$ km y su luz llega a nuestro planeta en alrededor de 2 576 millones de años. Por supuesto estos valores también dependen de qué parte de Andrómeda se midan, pues esta galaxia tiene un diámetro de unos 220 000 años luz (figura 1.1).

Fig. 1.1 Galaxia de Andrómeda (Autor: Boris Štromar. Fuente: Wikipedia)

¿Cómo determinan los científicos estos valores de distancia y tiempo?

Durante el estudio de este capítulo vas a retomar algunos conceptos ya tratados en las asignaturas de Ciencias Naturales y Física, en la educación primaria y secundaria básica, respectivamente. En particular, ampliarás y

profundizarás en lo relacionado con el Sistema Internacional de Unidades, la medición de magnitudes físicas y la forma de operar con las magnitudes vectoriales.

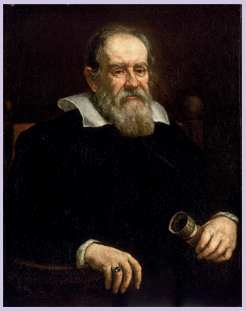
1.1 Magnitudes físicas

Para el desarrollo de la civilización resultó muy importante poder precisar, por ejemplo, la distancia entre las ciudades, el área de un terreno, la masa o el peso de muchos productos, el tamaño de un árbol o la edad de las personas. El surgimiento y desarrollo del comercio necesitó de la representación, mediante objetos, entre otras, de las unidades de longitud, volumen y masa.

Era frecuente que a la entrada de las ciudades existiera una piedra en la que se delimitaba, entre dos marcas, la unidad de longitud al uso. En caso de disputas, un "juez" de pesas y medidas intervenía para solucionar el conflicto.

Esta persona custodiaba los objetos que representaban las unidades utilizadas. Hoy este problema no existe debido a la creciente generalización y uso del sistema internacional de unidades.

De la historia



Galileo, escribe en sus *Diálogos*: "…en un tablón de madera de unos doce codos de longitud, y de ancho, en un sentido, medio codo, y en los otros tres dedos… elevado sobre la horizontal uno de sus extremos, una braza o dos…para medir con toda exactitud el tiempo, en el cual jamás se encontraba una diferencia ni siquiera de la décima parte de una pulsación…"

Investiga qué significan codo, dedos y braza, como medidas de longitud y qué significa pulsación como medida de tiempo. ¿Qué relación guardan estas unidades con aquellas establecidas por el Sistema Internacional de Unidades?

En la actualidad, tanto en la ciencia como en la tecnología y la vida diaria, la medición correcta y cada vez más precisa de las magnitudes, que permiten caracterizar y controlar procesos de todo tipo, cobra una importancia creciente. Por ejemplo, un instrumento actual de una gran precisión para medir tiempo lo constituye el reloj atómico. El sistema de posicionamiento global, por sus siglas en inglés GPS, que depende de 24 satélites artificiales que giran en órbitas sincronizadas (figura 1.2), no se hubiese

podido desarrollar si no se dispusiera de estos relojes. La precisión alcanzada con estos relojes es tan elevada que se logra una incertidumbre de un segundo en 30 000 años y los científicos y tecnólogos tratan de mejorar aún más este resultado.

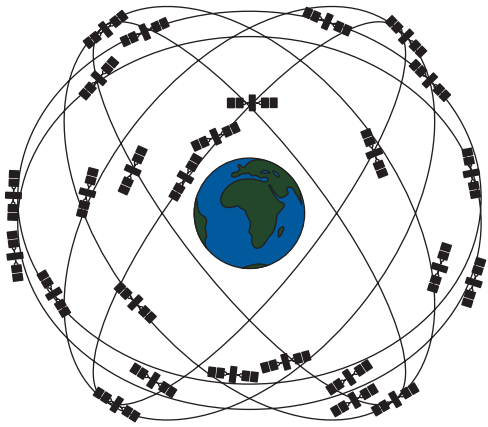


Fig. 1.2 Sistema de posicionamiento global (GPS)

Los receptores GPS reciben la señal que llega de estos satélites con una pequeña diferencia de tiempo en dependencia de la distancia con estos. Calculando estas demoras en el tiempo, el sistema GPS determina la posición donde se encuentra y actualiza la información continuamente.

Como 10^{-9} *s* es el tiempo que le toma a una señal de radio recorrer 0,30 *m,* si queremos definir la posición con esa precisión, los relojes en lo satélites tienen que ser capaces de detectar estas diferencias, cosa que solo se puede lograr mediante los llamados relojes atómicos.

Cuando una ciencia estudia un sistema o un fenómeno, es necesario definir o precisar los conceptos que permitan expresar sus propiedades. Luego, se debe encontrar la relación que existe entre ellas y las causas que provocan su variación considerando las condiciones en que ocurre. Esto se puede hacer utilizando tablas, gráficos o ecuaciones matemáticas. Aunque todos estos recursos tienen sus ventajas (y desventajas) y están intrínsecamente relacionados, el uso de una o varias ecuaciones que modelen matemáticamente la relación es un proceder muy fértil y por ello ampliamente utilizado en la ciencia. Si dicha relación se establece para un grupo grande de fenómenos, puede constituir una ley que los explica y permite predecir su comportamiento futuro.

Para operar matemáticamente con los conceptos definidos, es necesario que sean cuantificables, es decir, que se les puedan asociar números concretos de una sucesión mediante determinado procedimiento con variables numéricas. *La propiedad que a partir de ciertos procedimientos se pueda cuantificar recibe el nombre de magnitud.*

De la historia

¿Cómo midió el tiempo Galileo? A continuación, mostramos como lo describe él en su libro *Diálogos* acerca de Dos Nuevas Ciencias, a la hora de los trabajos realizados con los planos inclinados. Los personajes que intervienen en los *Diálogos* (Sagredo, Salviati y Simplicio) se describen en el siguiente capítulo.

Salviati: "Para la medida del tiempo, teníamos un gran cubo de agua puesto en alto, el que por una finísima espita que tenía soldada en el fondo derramaba un hilillo de agua que íbamos recogiendo en un vasito, durante todo el tiempo que la bola descendía por el canal o por algunas de sus partes. Las pequeñas cantidades de agua, recogidas de este modo, eran pesadas de tiempo en tiempo con una sensibilísima balanza, de modo que las diferencias y las proporciones de sus pesos, nos daban las diferencias y las proporciones de los tiempos; y esto con tal exactitud, que como ya lo he dicho, tales operaciones repetidas muchísimas veces, jamás se diferenciaban de un modo apreciable."

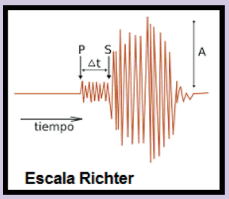
Consulte Reloj - Wikipedia, la enciclopedia libre (https://es.wikipedia.org/wiki/Reloj), para que pueda tener una mejor idea acerca de la historia de los diferentes relojes utilizados a lo largo del desarrollo de nuestra humanidad.

Una magnitud se cuantifica de modo tal que ello exprese la intensidad con que dicha propiedad se manifiesta en el sistema o proceso.

Algunos pocos ejemplos de magnitudes físicas, que con seguridad conocemos o al menos hemos escuchado, son: el tiempo, la longitud, la masa, la intensidad de la corriente eléctrica, la intensidad de la luz, la temperatura, la velocidad, la fuerza y la energía.

En síntesis, podemos decir que se denomina ***magnitud*** **a toda propiedad de un sistema o proceso a la que se le puede asignar un valor numérico, es decir, que a partir de ciertos procedimientos se pueda cuantificar.**

¿Sabías que...?



Existen magnitudes, de uso frecuente, a las que se les puede aplicar el procedimiento matemático de comparación, pero no otras operaciones algebraicas o aritméticas (suma, resta, multiplicación, etc.). Tales magnitudes se denominan *ordinales* y su uso es poco frecuente en física. Por ejemplo: la intensidad de los terremotos que se cuantifica usando la escala de Richter, o la intensidad de los huracanes cuantificada por la escala de Saffir-Simpson. También existen conceptos que expresan propiedades de sistemas o procesos que no es posible medir, tal es el caso de las *propiedades nominales,* ejemplos de ellas son: el sexo de un ser humano y el color de una muestra de pintura, entre otros. La propiedad nominal tiene un valor que se expresa en palabras, en código alfanumérico o por otros medios y si se expresan con números, solo es posible valorar criterios de igualdad o de diferencia.

Comprueba tus conocimientos

1. ¿Qué entiendes por magnitud física?
2. Menciona dos magnitudes físicas y sus unidades de medida.

1.2 Magnitudes fundamentales y derivadas. Sistema Internacional de Unidades

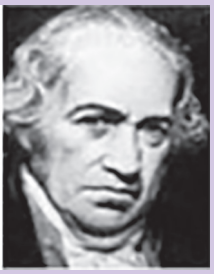
En la actualidad, el Sistema Internacional de Unidades (SI) adopta seis unidades de medida fundamentales y dos suplementarias. En las tablas 1.1 y 1.2 (en el anexo al final del texto) se representa el nombre de estas magnitudes, el nombre de la unidad de medida, el símbolo correspondiente y su definición (que analizaremos cuando sea necesario utilizarlas).

> Se llaman ***magnitudes fundamentales*** las que se definen independientemente de las demás; por extensión sus unidades de medida se llaman también fundamentales y se llaman ***magnitudes derivadas*** las que son definidas en función de las fundamentales.

El SI comprende treinta y cuatro magnitudes derivadas. Por ejemplo, la velocidad de un objeto es una magnitud derivada pues se define a partir de las magnitudes de longitud y tiempo.

¿? ¿Sabías que...?

Andres Celsius, 1701-1744



Daniel Fahrenheit, 1686-1736

Además de la escala de temperatura termodinámica cuya unidad es el Kelvin (K), aún es muy utilizada la escala de temperatura Celsius, que se considera como accesoria al sistema internacional de unidades. En los Estados Unidos de Norteamérica se sigue utilizando preferentemente la escala Fahrenheit.

Múltiplos y submúltiplos de las unidades de medida fundamentales

En algunas medidas resulta útil el uso de múltiplos o submúltiplos de las unidades fundamentales; en estos casos se conserva el nombre y el símbolo de la unidad de medida precedida del prefijo correspondiente. Por ejemplo, para expresar la distancia entre dos ciudades puede ser más apropiado decir que es de 250 km que de 250 000 m. En la tabla 1.3 (en el anexo al final del texto) aparecen las magnitudes, los nombres, los símbolos y los valores expresados en unidades del SI.

Algunos ejemplos ilustrativos del uso de múltiplos de 10 y sus prefijos (unidades de longitud, masa y tiempo) son los siguientes:

Longitud

1 nanómetro (1 nm) = 10^{-9} m (el diámetro de los átomos es de alrededor de 10 nm)

1 micrómetro (1 μm) = 10^{-6} m (el pelo del cabello tiene aproximadamente 80 μm)

1 milímetro (1 mm) = 10^{-3} m (diámetro aproximado del punto de algunos bolígrafos)

1 centímetro (1 cm) = 10^{-2} m (menciona cinco objetos entre 1 cm y 5 cm de grosor)

1 kilómetro (1 km) = 10^{3} m (distancia recorrida, aproximada, al caminar 10 min)

Masa

1 microgramo (1 μg) = 10^{-9} kg (masa aproximada de una partícula de polvo)

1 miligramo (1 mg) = 10^{-6} kg (masa aproximada de un grano de sal)
1 gramo (1 g) = 10^{-3} kg (masa aproximada de un sujetador de papeles)

Tiempo

1 nanosegundo (1 ns) = 10^{-9} s (tiempo en que la luz recorre 0,3 m)
1 microsegundo (1 μm) = 10^{-6} s (tiempo en que la luz recorre 300 m)
1 milisegundo (1 ms) = 10^{-3} s (tiempo en que la luz recorre 300 km)

En la tabla 1.4 (en el anexo al final del texto) se resumen las unidades de uso frecuente que no pertenecen al SI, pero que son admitidas según BIPM.

¿? ¿Sabías que...?

El origen del sistema decimal, según los antropólogos, está relacionado con el hecho de tenemos morfológicamente 10 dedos y esto sirve de base para contar. Pero, aunque también exiten otros sistemas, en el campo de la computación es más cómodo el sistema llamado binario, donde todos los números son una combinación de 0 y 1. Puede parecer que esto es mucho más complejo, pero tecnológicamente es más conveniente hacerlo de esta manera.

Comprueba tus conocimientos

3. ¿Cuáles son las magnitudes fundamentales del Sistema Internacional de Unidades (SI)? ¿Cuáles son los nombres y símbolos de sus unidades de medida?

4. Investiga cuáles son los países que no han adoptado el sistema internacional de unidades (buscar en: https://es.wikipedia.org/wiki/ Sistema Internacional de Unidades).

5. Convierte a segundo:

a) Quince años b) Un mes c) 4 h y 15 min d) 45 min

6. Convierte a metro:

a) 250 km b) 50 mm c) 10 cm d) 10 dm

7. Convierte a kilogramo:

a) 60 lb b) 10 t c) 50 g

8. Relaciona las magnitudes físicas que aparecen en la columna A con la unidad de medida que aparece en la columna B.

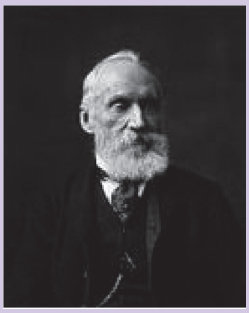
A	B
Velocidad	kg
Longitud	S
Tiempo	N
Fuerza	m/s
Trabajo	W
Energía	kg/m^3
Potencia	m
Masa	J
Densidad	J

9. ¿Qué unidades del ejercicio anterior son fundamentales?

1.3 Mediciones directas e indirectas. Incertidumbre

Sabemos que la física es una ciencia natural ya que se ocupa del estudio de sistemas y fenómenos relativos a la naturaleza y que también es una ciencia exacta, en tanto para la explicación de los sistemas y las predicciones de su comportamiento utiliza modelos matemáticos que tienen un elevado nivel teórico. Por otra parte, también sabemos que tiene un carácter marcadamente experimental.

De la Historia



Lord Kelvin

En relación con este carácter experimental de la física, lo planteado por Lord Kelvin (1824-1907) es muy elocuente:

"Suelo repetir con frecuencia que solo cuando es posible medir y expresar en forma numérica la materia de que se habla, se sabe algo acerca de ella; nuestro saber será deficiente e insatisfactorio mientras no seamos capaces de traducirlo en números. En otro caso, y sea cual fuere el tema de que se trate, quizás nos hallamos en el umbral del conocimiento, pero nuestros conceptos apenas habrán alcanzado el nivel de ciencia".

Por otra parte, la realización de tareas experimentales durante el aprendizaje de la física también es muy importante para la comprensión de los fenómenos y las leyes relacionadas con estos.

¿Qué es medir?

Medir es el conjunto de operaciones experimentales, de cálculo o ambas que se llevan a cabo para cuantificar una magnitud.

Para medir o determinar el valor de una magnitud tenemos que usar *instrumentos de medición* (figura 1.3), un *método de medición* y definir las *unidades de medición*.

Por ejemplo, si se desea medir el largo de una mesa, el instrumento de medición puede ser una regla y si elegimos el Sistema Internacional de Unidades (SI), la unidad sería el metro y la regla deberá estar calibrada en esta unidad (o en submúltiplos). El método de medición consistirá en determinar cuántas veces la regla y fracciones de ella "entran" en la longitud buscada, o sea, se comparan dos magnitudes de las mismas características, de forma que a una de ellas se le asigna el papel de unidad de medida o patrón.

La **unidad de medida** es una cantidad arbitraria, que se adopta para comparar con ella cantidades de la misma especie. Por ejemplo, en el SI son unidades de medida el segundo (tiempo), el metro (longitud) y el kilogramo (masa).

Resulta importante destacar que el patrón para las unidades de medida debe ser:

- Constante (en el sentido que no cambie con el lugar ni en el transcurso del tiempo)
- Universal (que pueda ser utilizada en cualquier parte)
- De fácil reproducción (de manera que pueda ser utilizada por todo el que la necesite)

El resultado obtenido al medir una magnitud está asociado con el concepto de **incertidumbre** y es por ello que el resultado de una medición se expresa por un número y las cotas de la incertidumbre, seguido del nombre de la unidad de medida empleada. Así, por ejemplo, se dice que la masa de un cuerpo medida con una balanza comercial es de:

$$30{,}0 \pm 0{,}1 \text{ kg}$$

Cómo medir una magnitud y cómo determinar la incertidumbre al realizar una medición es algo que estudiaremos más adelante y de forma paulatina, sobre todo mediante las actividades práctico-experimentales. Sin embargo, es importante señalar, desde ahora, que la incertidumbre que acompaña a

las mediciones, aunque pueden deberse a ciertas fallas en los instrumentos o el proceso de medición, es algo inherente a toda medición. Es decir, toda medición está afectada por elementos que provocan alteraciones que impiden obtener el valor verdadero de la magnitud y no es posible conocerlos todos ni en cuánto afectan la medición. Esta situación provoca una duda acerca de la validez del valor que se obtiene al realizar una medición.

Lo que sí podemos conocer es en qué intervalo se encuentra dicho valor e incluso llegar, de ser necesario, a mediciones de una precisión extraordinaria como en el ejemplo, ya señalado, de los llamados relojes atómicos.

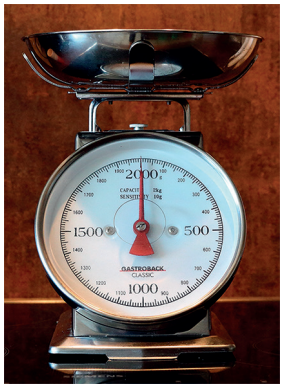
a

b

c

d

e



f

g

Fig. 1.3 Algunos instrumentos de medición usados en los hogares, la escuela, el laboratorio o en diversas labores: a) multímetro digital, b) cronómetro digital, c) probeta graduada, d) termómetro clínico digital, e) cinta graduada, f) balanza de "cocina", g) reloj de pared con termómetro e higrómetro

Estimación de la incertidumbre

En la primera parte de este tema ya nos familiarizamos con los conceptos de magnitud, medición e incertidumbre. Ahora analizaremos qué se entiende por una medición directa y qué por una medición indirecta.

> **Cuando la medición de una magnitud es el resultado inmediato de la utilización de un instrumento de medición, vale decir el resultado de la comparación con el patrón adoptado para la magnitud, se denomina medición directa.**

Por ejemplo, la masa de una varilla de plomo puede ser determinada con una balanza, el tiempo que debe ser calentada cierta cantidad de líquido para elevar su temperatura hasta 70 °C puede ser obtenido con un cronómetro. Estas dos situaciones constituyen ejemplos de mediciones directas.

Si no es posible encontrar un procedimiento experimental para realizar la medición de una magnitud física utilizando solamente instrumentos de medición, se recurre entonces a las mediciones indirectas.

> **Una medición indirecta es aquella en que el valor buscado de la magnitud, se halla a partir de una ecuación conocida, utilizando los resultados de mediciones directas y en algunos casos los valores de constantes físicas y matemáticas.**

Por ejemplo, la densidad de una sustancia líquida puede ser medida directamente con un densímetro (figura 1.4). Pero si la sustancia es sólida es necesario proceder de otro modo.

Fig. 1.4 Densímetro del tipo utilizado para determinar la concentración de ácido para baterías de plomo (ácido sulfúrico diluido en agua)

En este último caso, si se dispone de una balanza y una probeta, la masa del cuerpo y su volumen pueden ser determinados de forma directa. Conocidos estos valores, la densidad (que se simboliza por la letra griega ρ) se puede calcular mediante la expresión:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

La densidad, en este caso, se ha medido de forma indirecta y la ecuación utilizada recibe el nombre de *función de la medición*.

Para calcular el valor de una medición indirecta, una vez realizadas las mediciones directas pertinentes, es posible utilizar dos métodos: el analítico y el gráfico.

En el *método analítico* se obtiene el valor de la medición al sustituir los datos en la función de la medición y en el *método gráfico* el valor se obtiene a partir del gráfico de la función de la medición.

Los detalles sobre cómo aplicar estos métodos se tratarán más adelante mediante algunos ejemplos, durante la solución de tareas experimentales.

Puede ser conveniente reiterar que toda medición está afectada por factores que provocan alteraciones que impiden obtener el valor verdadero de la magnitud y que no es posible conocerlos todos ni en cuánto afectan la medición, situación esta, que provoca una duda acerca de la validez del valor que se obtiene al realizar una medición.

El Vocabulario Internacional de Metrología (VIM) establece el término *incertidumbre* para denominar la duda en el valor que se obtiene al realizar una medición.

> **Según el VIM (2008), la *incertidumbre de una medición es el parámetro no negativo que caracteriza la dispersión de los valores atribuidos a un "mesurando" (magnitud que se mide), a partir de la información que se utiliza.***

La Guía para expresión de la incertidumbre de la Medidas (GUM), establece los procedimientos con los que puede ser estimada cuantitativamente la duda, ofreciendo con ello criterios de valoración del resultado de la medición obtenido.

La incertidumbre que afecta una medición puede ser claramente apreciada al tomarse el pulso. Para evidenciar esto, de manera rápida, se puede hacer lo siguiente: haga al menos cinco mediciones del tiempo que

demoran 80 de sus pulsaciones con un reloj cuya resolución tenga un valor no mayor que un segundo.

Lo más probable es que al comparar los valores obtenidos no todos sean iguales. Ello es una fuente de la duda llamada *incertidumbre*. Las preguntas inmediatas son: ¿cuál de los valores obtenidos será el que se debe declarar como resultado de la medición?, ¿cómo estimar el valor de la duda? Los epígrafes que siguen ayudarán a encontrar, en buena medida, las respuestas.

Es importante no confundir los términos incertidumbre y error. El error es la diferencia entre el valor medido y el valor verdadero y no es posible calcularlo, mientras que la incertidumbre es la cuantificación de la duda acerca del valor medido, que sí es posible estimar.

Puede ser conveniente señalar que comprender bien que la medición de una magnitud siempre tiene una cierta incertidumbre es algo esencial y que los métodos para poder calcular dichas incertidumbres son tan importantes para la ciencia que constituyen un objeto especial de estudio. Sin embargo, el conocimiento específico de estos métodos, que pueden resultar muy complejos, es algo propio de especialistas.

A los fines de los no especialistas en este campo resulta suficiente poder determinar las cotas superiores de la incertidumbre (que en lo adelante llamaremos simplemente **incertidumbre**) al medir una magnitud, mediante procedimientos relativamente sencillos, que es lo que trataremos de hacer a continuación.

Estimación de la incertidumbre en mediciones directas

Un procedimiento sencillo e intuitivo para estimar la incertidumbre, en el caso de una medición directa, es el de hacer varias mediciones de la magnitud que se desea determinar y obtener el valor medio aritmético de estas mediciones.

Por ejemplo, si realizamos varias mediciones de la magnitud x (x_1, x_2, x_3, **...** x_n) entonces el valor medio de dicha medición es:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

donde n es el número de mediciones y $\bar{x}$ el valor medio de x.

En ocasiones no tiene sentido realizar varias mediciones, pues su valor no cambia, por ejemplo, si medimos el largo de un listón de madera con una cinta graduada. En otros casos, sí es conveniente realizar varias

mediciones, por ejemplo, si medimos el diámetro de una moneda con un micrómetro que puede apreciar hasta las décimas de milímetro (¿por qué en este caso es conveniente hacer varias mediciones?).

A manera de ejemplo, examinemos otro caso en el que resulta necesario hacer varias mediciones:

Supongamos que se mide 10 veces la masa de un cuerpo dado con una balanza y se obtienen los resultados siguientes (expresados en gramos):

masa (g)	34,1	33,8	34,0	34,4	34,3	34,1	34,3	34,1	33,8	34,1

El valor medio para la masa de ese cuerpo, calculado sumando todos los valores y dividiendo el resultado por 10, es de 34,1 g.

Pero no es suficiente haber encontrado el valor más representativo que será el que se reporte en una medición. Es necesario además caracterizar la desviación de los valores medidos del valor medio porque ello ofrece información acerca de la calidad de la medición y es premisa para la estimación de la incertidumbre.

En la incertidumbre influye tanto el instrumento de medición utilizado como el propio proceso de medición (método utilizado, variaciones de las condiciones ambientales, habilidades del experimentador y otros).

Si la mayor influencia está dada por el instrumento de medición, se puede reportar como incertidumbre la menor división de la escala del instrumento en cuestión. Por ejemplo, si al medir la masa del cuerpo indicado la balanza utilizada permite apreciar hasta 0,1 g, entonces la incertidumbre en la medición tendrá ese mismo valor y podemos escribir que la masa del cuerpo es:

$$m = 34{,}1 \pm 0{,}1\ g$$

En el caso de que la mayor influencia sea del segundo tipo se puede estimar la incertidumbre de la medición de la forma siguiente:

1. Se halla el módulo de la desviación de cada medida respecto al valor medio:

$$|\Delta x_1 = \bar{x} - x_1|$$
$$|\Delta x_2 = \bar{x} - x_2|$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|\Delta x_n = \bar{x} - x_n|$$

2. Se calcula la incertidumbre media de la forma siguiente:

$$\Delta\bar{x} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n}{n}$$

Hallada la incertidumbre $\Delta\bar{x}$, el resultado de la medición se escribe como:

$$x = \bar{x} \pm \Delta\bar{x}$$

Esta ecuación nos indica que la medición del valor de x está entre:

$$x_{máx} = \bar{x} + \Delta x,$$
$$x_{mín} = \bar{x} - \Delta x$$

Esto nos indica que el valor más probable de la magnitud x está entre $x_{máx}$ y x_{min} (figura 1.5).

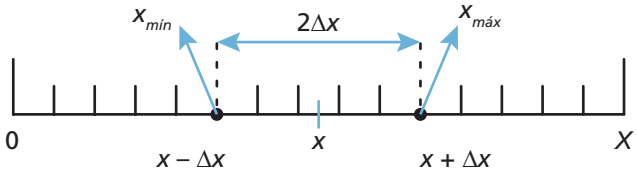


Fig. 1.5

¿Cuándo una medición es buena o es mala?

Una incertidumbre de 0,5 m puede parecer muy grande si medimos la longitud del aula, pero si medimos la longitud de la escuela, será pequeña respecto a esta. Por lo tanto, necesitamos estimar la incertidumbre relativa de la medición. Esta incertidumbre relativa, que denominaremos Δr_{rel} se define mediante la ecuación:

$$\Delta x_{rel} = \frac{\Delta x}{x}$$

donde Δx es la incertidumbre absoluta de la medición x.

La incertidumbre relativa se acostumbra a expresar en porciento. A estos efectos basta con multiplicar por 100 el resultado obtenido. Por ejemplo, si para una medición la incertidumbre relativa es de 0,20; se puede decir que esta es del 20 %.

Estimación de la incertidumbre en mediciones indirectas

Al realizar una medición indirecta se opera con magnitudes cuyos valores son el resultado de mediciones directas. Las incertidumbres que han

afectado a estas últimas también lo hacen, de un modo determinado, a la medición indirecta; se dice entonces que las incertidumbres de las mediciones directas se han propagado a la medición indirecta.

Cada operación matemática que se realice propaga la incertidumbre de una forma particular.

En la tabla 1.5 se recogen las formas en que se propagan las incertidumbres en algunos casos que pueden ser de interés. En la tabla, $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son dos valores medidos directamente de las magnitudes x y y con incertidumbres Δx y Δy respectivamente.

En la práctica, no siempre las operaciones y funciones se presentan de forma sencilla como en la tabla 1.5, sino que forman funciones compuestas. En estos casos hay que aprender a obtener la ecuación de propagación de errores correspondiente.

Otra manera de estimar cotas de incertidumbre para las mediciones indirectas (que posiblemente encuentres más sencilla) es la siguiente:

De la figura 1.6 se puede deducir que para las mediciones directas:

$2\Delta x = x_{máx} - x_{min}$, donde Δx es la incertidumbre absoluta de la magnitud x.

Si x fuera el resultado de una medición indirecta, por ejemplo, de la forma:

$$x = \frac{a+b}{c}$$

donde las incertidumbres de las magnitudes directas a, b y c se calculan, como ya se explicó, de la manera siguiente:

$$a = \bar{a} \pm \Delta a \qquad b = \bar{b} \pm \Delta b \qquad c = \bar{c} \pm \Delta c \qquad (4),$$

donde $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$, son los valores medios de las mediciones (a, b y c) y (Δa, Δb y Δc) sus incertidumbres.

Tabla 1.5 Resumen de las expresiones para el cálculo de las incertidumbres en algunos casos frecuentes

Función	Ecuación de propagación de incertidumbre
$s = \bar{x} + \bar{y}$ $s = \bar{x} - \bar{y}$	$\Delta s = \Delta x + \Delta y$
$s = \bar{x}\bar{y}$ $s = \frac{\bar{x}}{\bar{y}}$	$\frac{\Delta s}{s} = \frac{\Delta x}{\bar{x}} + \frac{\Delta y}{\bar{y}}$

$s = \bar{x}^n$	$\frac{\Delta s}{s} = n\frac{\Delta x}{\bar{x}}$
$s = \text{sen}\bar{x}$	$\Delta s = \Delta x \cos \bar{x}$
$s = \cos \bar{x}$	$\Delta s = \Delta x \cos \bar{x}$
$s = \tan \bar{x}$	$\Delta s = \frac{\Delta x}{\cos^2 \bar{x}}$
$s = e^{\bar{x}}$	$\Delta s = \Delta x e^{\bar{x}}$
$s = \ln \bar{x}$	$\Delta s = \frac{\Delta x}{\bar{x}}$

Se pueden entonces calcular los valores máximos y mínimos de la magnitud indirecta *x* de la forma siguiente:

$$x_{máx} = \frac{\left(a_{máx}\right) + \left(b_{máx}\right)}{c_{mín}} = \frac{\left(\bar{a} + \Delta a\right) + \left(\bar{b} + \Delta b\right)}{\bar{c} - \Delta c}$$

$$x_{mín} = \frac{\left(a_{mín}\right) + \left(b_{mín}\right)}{c_{máx}} = \frac{\left(\bar{a} + \Delta a\right) + \left(\bar{b} + \Delta b\right)}{\bar{c} - \Delta c}$$

Conocidos estos valores, se puede determinar la incertidumbre de la magnitud indirecta mediante la ecuación:

$$\Delta x_{Ind} = \frac{x_{máx} - x_{mín}}{2}$$

Recordemos que estos procedimientos simplificados no constituyen una forma rigurosa para determinar la incertidumbre de una medida, pero sí nos permiten determinar de forma razonable una cota superior de la incertidumbre, es decir, precisar que la incertidumbre cometida no será superior a la que estimamos mediante alguno de estos métodos.

Hora del laboratorio

Ejemplos de actividades experimentales

Práctica de laboratorio 1.1

Cálculo del tiempo de descenso de un cuerpo esférico por un plano inclinado mediante un cronómetro

Se deja rodar el cuerpo esférico por una superficie plana lo más larga posible, con un ángulo pequeño de inclinación, respecto a la horizontal,

para que el tiempo de descenso no sea muy corto y se pueda medir con más precisión mediante un cronómetro deportivo o un reloj de pulsera.

Para facilitar el proceso de recopilación se prepara una tabla como la mostrada (tabla 1.6), donde *n* es el número de cada medición y *t* el tiempo de descenso en cada medición. Se incluye también una columna con el valor absoluto de la diferencia entre la media aritmética de todos los tiempos medidos y el tiempo de cada medición.

Se realizan al menos 10 mediciones y se recogen los valores obtenidos en la tabla. El valor de la media aritmética de los tiempos medidos en este ejemplo es de 2,7 s.

Si bien el cronómetro puede apreciar hasta 0,01 s, de la tabla se infiere que predomina la incertidumbre originada por otras fuentes (posiblemente, entre otros factores, la diferencia entre los instantes en que el cuerpo se libera y llega a la base del plano con la operación de iniciar y detener el cronómetro). Por tal razón la incertidumbre absoluta se puede calcular como la media aritmética de los valores obtenidos para $|t_{medio} - t_n|$. Esta operación da un resultado de 0,2 s.

El tiempo de descenso del cuerpo se puede reportar entonces como:

$$t = 2{,}7 \pm 0{,}2 \text{ s}$$

Con una incertidumbre relativa de

$\Delta t_{rel} = \dfrac{\Delta t}{t_{medio}} = 0{,}07$, es decir, del 7 %

Tabla 1.6

n	***t* (s)**	$\|t_{medio} - t_n\|$
1	2,8	0,1
2	2,8	0,1
3	2,6	0,2
4	2,8	0,1
5	2,8	0,1
6	2,6	0,2
7	2,6	0,2
8	2,8	0,1
9	2,4	0,3
10	2,8	0,1
Valor medio	**2,7**	**0,2**

Práctica de laboratorio 1.2

Cálculo del valor de la aceleración de la gravedad (*g*) mediante un péndulo simple

Como se estudiará más adelante, un péndulo simple consiste en un cuerpo esférico que puede oscilar atado de un hilo. El hilo debe ser prácticamente inextensible y con masa muy pequeña en comparación con la del cuerpo y por lo tanto no tomarse en consideración. El hilo también debe ser suficientemente largo para que el ángulo de oscilación pueda considerarse muy pequeño, aunque el arco descrito tenga una amplitud apreciable.

En estas condiciones, el tiempo de una oscilación completa del cuerpo, denominado periodo (*T*) de las oscilaciones, se puede calcular mediante la ecuación:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Donde l es la longitud del péndulo (largo del hilo más radio del cuerpo) y g el valor de la aceleración de la gravedad.

Despejando g en esta ecuación se obtiene que:

$$g = \frac{4\pi^2 \cdot l}{T^2}$$

Y esta será entonces la función para calcular g.

La incertidumbre, de acuerdo con las formulas dadas en la tabla 1.5, para calcular la propagación de las incertidumbres de cada medición directa, será entonces:

$$\Delta g = \Delta l + 2\Delta T$$

Si la longitud del hilo se mide con una cinta de medición graduada en milímetros y el radio de la esfera se conoce con una precisión de las centésimas de milímetros, la medida de Δl se puede considerar como la menor apreciación de la escala de la cinta de medición.

Para medir ΔT las incertidumbres de segundo tipo serán mayores que la apreciación del cronómetro y se puede determinar entonces como el valor medio aritmético del valor absoluto del tiempo promedio y el tiempo de cada medición. Debe tomarse en cuenta que para poder medir el tiempo de una oscilación con mayor facilidad y precisión deberán tomarse en cada medición n oscilaciones y entonces, para hallar la duración de una oscilación dividir el tiempo total registrado por n.

Para una mejor comprensión de lo explicado se sugiere aplicar este procedimiento y determinar el valor de g.

Otra forma de determinar *g* mediante un péndulo simple puede ser la siguiente:

A partir de la ecuación $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, se puede obtener que:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{g}\right) l$$

Se puede entonces calcular *T* para péndulos de diferentes longitudes y con eso valores hacer una gráfica de T^2 en función de l. Como la gráfica de esta función es una recta con pendiente $\frac{4\pi^2}{g}$, a partir de ese valor se puede determinar el valor de *g*.

¿Cómo estimarías la incertidumbre en este caso?

Comprueba tus conocimientos

10. ¿Qué es medir? ¿Cuándo una medición es directa y cuándo indirecta?

11. Explica cómo se determinan las incertidumbres en las mediciones directas e indirectas.

1.4 Magnitudes escalares y vectoriales. Operaciones con vectores

Las magnitudes físicas pueden ser clasificadas en escalares y vectoriales.

> **Las *magnitudes escalares* son las que quedan suficientemente determinadas cuando se expresa su valor numérico, que puede ser positivo o negativo, y la unidad de medida empleada.**

Ejemplo de estas magnitudes son la masa, el tiempo, el volumen, la densidad, la temperatura, la energía, etcétera.

Con frecuencia escuchamos que, por ejemplo, un cuerpo tiene una masa de 5 kg, que ayer la temperatura ambiente alcanzó un mínimo de –2 °C en cierto país, o que en un proceso se ha consumido una energía de 15 J. En realidad, en este último caso lo más frecuente puede ser escuchar que se consumieron en la casa, por ejemplo, 600 kWh de electricidad (por supuesto, también lo que por ello fue necesario pagar). Estas magnitudes son escalares pues su valor queda claramente determinado por un número y su unidad de medida.

Las **magnitudes vectoriales** son aquellas que, para estar completamente determinadas, precisan de módulo, dirección, sentido y un punto de aplicación, además de una unidad de medida.

Aunque, en rigor, la palabra *sentido* ya implica una dirección, es muy usual decir "*dirección y sentido*".

Las magnitudes que cumplen con las cuatro características señaladas se conocen como vectores fijos (la fuerza, por ejemplo). Las que cumplen solo con las tres primeras características se llaman vectores libres (velocidad y aceleración son ejemplos de estas).

De la historia

Las primeras huellas de un tratamiento vectorial las encontramos a principios del siglo XVII.

Uno de los primeros pensadores que se propone este cometido es Galileo. Galileo, quien utiliza repetidamente unos diagramas de velocidades, similares a la representación triangular usada por el matemático italiano Nicolás Oresme en el siglo XIV. Además, de esta misma época datan los trabajos del matemático holandés Simon Stevin (1548-1620), quien formuló explícitamente el principio del paralelogramo de fuerzas.

En la descripción de la trayectoria del movimiento parabólico, Galileo se dio cuenta que se componía de un movimiento horizontal y otro vertical; para describirlo era necesario combinar estos dos movimientos mediante una nueva operación "suma", la cual no se podía realizar por los medios convencionales; había necesidad de incorporar un nuevo método. A partir de aquí, se evidencia un momento histórico donde los matemáticos sienten la necesidad de constituir un nuevo campo teórico con sus nuevos entes denominados vectores, los cuales se mostraron fundamentales para la modelización de fenómenos físicos. Newton se da a la tarea de matematizar la fuerza resultante que es causada por la suma de dos fuerzas individuales aplicables a un cuerpo, este problema lo soluciona mediante la representación del paralelogramo de fuerzas o velocidades.

Examinemos con más detalle lo relacionado con las magnitudes vectoriales mediante el ejemplo siguiente:

Si se quiere cambiar la posición de un objeto puntual, situado en *P*, en 10 cm sobre una superficie plana (figura 1.6), se puede apreciar que

hay infinitas formas de hacerlo. Efectivamente, cualquiera de los infinitos puntos que forman la circunferencia de 10 cm de radio con centro en *P* representa el cambio indicado.

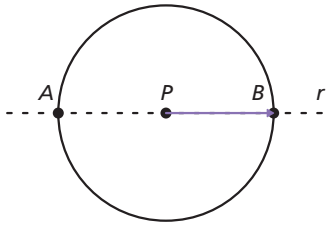


Fig. 1.6

Pero si este cambio debe realizarse según la dirección marcada por la recta *r* es evidente que el objeto situado en *P* solo puede trasladarse al punto *A* o al punto *B,* que son las intersecciones de la recta *r* con la circunferencia.

Si además se especifica que el sentido del cambio de posición tiene que ser *hacia la derecha,* desaparece toda ambigüedad, ya que el único punto que responde a la cuestión planteada es el punto *B.*

Fijémonos en lo que se ha hecho. Para determinar con precisión el cambio de posición del objeto se hacen necesarios tres datos: el valor numérico de lo que se desplazó (10 cm), la dirección (dada por la recta *r)* y el sentido (hacia la derecha).

Al segmento orientado de la recta que mide el cambio de posición del punto A al punto B se le llama desplazamiento. Esta es una *magnitud vectorial* pues indica un valor, una dirección y un sentido. Otras magnitudes que exigen expresar con precisión los tres elementos citados son, por ejemplo, la velocidad y fuerza.

Si se pregunta cómo variará el estado del movimiento de un determinado cuerpo sobre el que se aplica una fuerza de 10^3 N, no podemos responder correctamente si no se conoce la dirección y el sentido de la fuerza aplicada.

Las magnitudes vectoriales se representan, de manera geométrica, mediante segmentos de recta orientados, a los que se acostumbra a denominar *vectores.* Como el uso de las magnitudes vectoriales es muy frecuente en Física resulta imprescindible tener algunas nociones sobre

el concepto de vector y de las operaciones que pueden realizarse con ellos.

Sean A y B dos puntos de un plano (figura 1.7). Estos determinan una recta *r* que pasa por ellos y también el segmento $\overline{AB}$. Ahora bien, si además tomamos estos puntos en cierto orden, queda determinado lo que denominamos un ***vector fijo.***

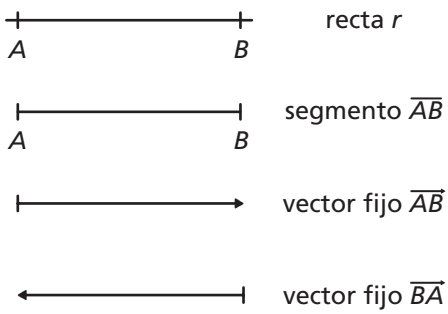


Fig. 1.7 Vector fijo

El par de puntos (*A, B*) determina el vector fijo $\overrightarrow{AB}$. Entonces se dice que *A* es el origen y *B* es el extremo del vector.

El par de puntos (*B, A*) determina el vector fijo $\overrightarrow{BA}$. *Se* dice que *B* es el origen y *A* es el extremo del vector.

Como se ha dicho, al definir las magnitudes vectoriales, los elementos que constituyen el vector fijo son el módulo, la dirección, el sentido y el punto de aplicación.

- El **módulo** se representa por la longitud del vector, que en el ejemplo de la figura (fig. 1.7) es la distancia *AB.*
- La **dirección** del vector es la indicada por la recta de posición de este o cualquiera de sus paralelas. En dicho ejemplo, el segmento de recta *r* o una paralela.
- El **sentido** lo da el orden en que se consideran los extremos del segmento. Así, el segmento $\overline{AB}$ del ejemplo citado determina dos vectores, el $\overrightarrow{AB}$ o el $\overrightarrow{BA}$, según sea el orden atribuido a los puntos *A* y *B.* El primero de los puntos se llama *origen del vector* y el segundo se denomina *extremo del vector.*
- El **punto de aplicación** está dado por el punto donde se sitúa el origen del vector

Suma de vectores

Dados dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ cuya suma se quiere realizar, se procede siguiendo uno de estos dos métodos:

1. Método del paralelogramo

Elegido un punto *O* como origen, se toman dos representantes de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y completamos el paralelogramo trazando segmentos paralelos a cada uno y a continuación, se traza la diagonal (figura 1.8). El vector $\vec{c}$ es un representante del vector suma $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

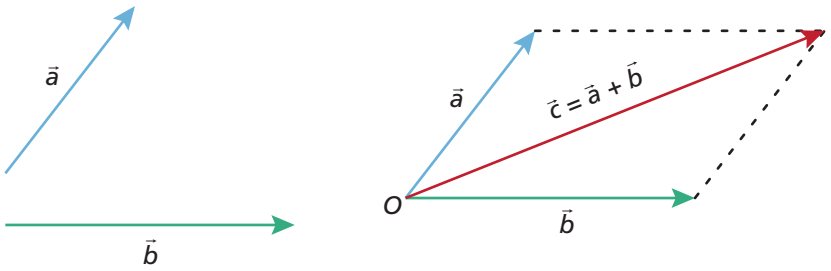
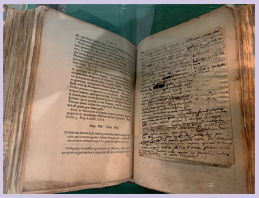


Fig. 1.8 Suma de vectores (método del paralelogramo)

De la historia



Libro original escrito por Newton con correcciones realizadas por el propio autor

En su libro los *Principia,* Newton escribe sobre la aplicación de dos fuerzas sobre un cuerpo y el movimiento de este como resultado de dichas aplicaciones: "Si un cuerpo, en un tiempo dado, con la sola fuerza M impresa en el punto A es transportado con movimiento uniforme de A a B y con la sola fuerza N impresa en el mismo punto es transportado de A a C, complétese el paralelogramo ABDC y con ambas fuerzas el cuerpo será transportado en el mismo tiempo en diagonal de A a D." Nótese, que sin utilizar los vectores, llega a un gráfico muy similar a la figura 1.8.

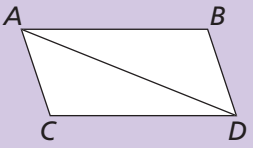


Diagrama original en el libro *Principia*

2. Método del polígono

El mismo resultado se obtiene si, elegido el punto *O* como origen se toma un representante de $\vec{a}$ y sobre su extremo se coloca el origen de un representante de $\vec{b}$. El vector suma $\vec{c}$ se obtiene uniendo el origen *O* del primero con el extremo *del* segundo (figura 1.9).

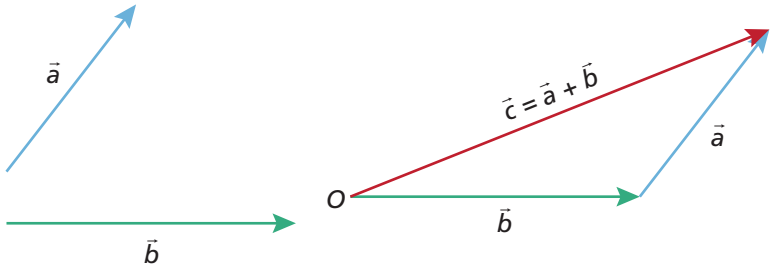


Fig. 1.9 Suma de vectores (método del polígono)

Si bien estas formas gráficas de sumar vectores son equivalentes, puede que sea más sencillo utilizar este método cuando se trata de sumar más de dos vectores. Por ejemplo, para sumar los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ (figura 1.10) se puede proceder de la forma siguiente: escogemos el punto O como origen, se coloca el vector $\vec{a}$ con su origen en O, después se coloca el vector $\vec{b}$ con su origen en el extremo de $\vec{a}$ y por último el vector de $\vec{c}$ con su origen en el extremo de $\vec{b}$. Al unir el origen de $\vec{a}$ con el extremo de $\vec{c}$ se obtiene el vector suma $\vec{d}$. Si se quieren sumar otros vectores el proceso se continúa de igual forma.

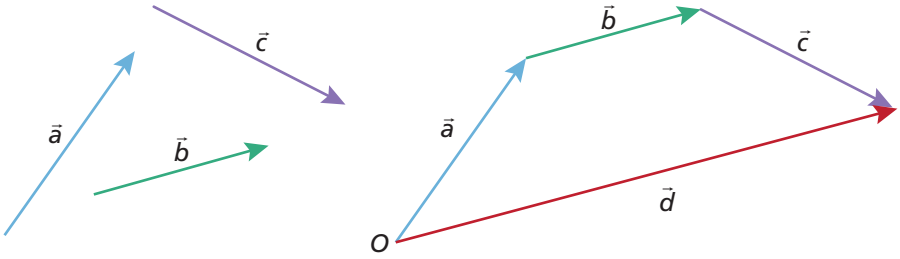


Fig. 1.10 Suma de más de dos vectores (método del polígono)

De la historia

El método del polígono utilizado para la suma de vectores, procede del lenguaje intelectual de la antigua Grecia. Este método fue utilizado por Aristóteles para la composición o suma de fuerzas.

Suma de vectores de la misma dirección

Este es un caso particular de la suma de vectores. Dados dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ (figura 1.11) se toma el representante de $\vec{a}$ a partir de un punto O elegido como origen y tomando B como origen, se traza el representante del

vector $\vec{b}$. Uniendo el origen del primero con el extremo del segundo, se obtiene el vector representante de la suma

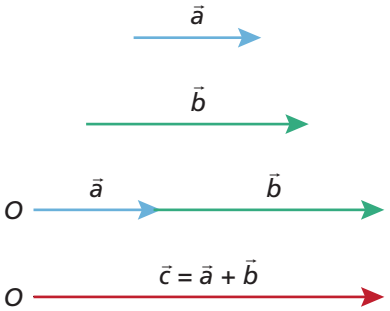


Fig. 1.11 Suma de vectores de igual dirección

Ahora bien:

- Si los dos vectores *tienen el mismo sentido,* el vector suma $\vec{c}$ tiene como como módulo la suma de los módulos y conserva la misma dirección y sentido que aquellos.
- Si *tienen sentidos contrarios,* el vector suma $\vec{c}$ tiene como módulo la diferencia de los módulos de los sumandos, la misma dirección y el sentido del mayor de los dos.

Diferencia de vectores

Se llama diferencia de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ al vector suma de $\vec{a}$ con el opuesto de $\vec{b}$, entendiendo por *vector opuesto de* $\vec{b}$, otro vector que tiene el mismo módulo y dirección que este y sentido contrario (se llama vector $-\vec{b}$).

Trazamos, como para la suma, el representante de $\vec{a}$ con origen en un punto *O* y, a partir de este, colocamos el representante de $-\vec{b}$. El vector $\vec{c}$ es representante de la diferencia de $\vec{a} - \vec{b}$ (figura 1.12).

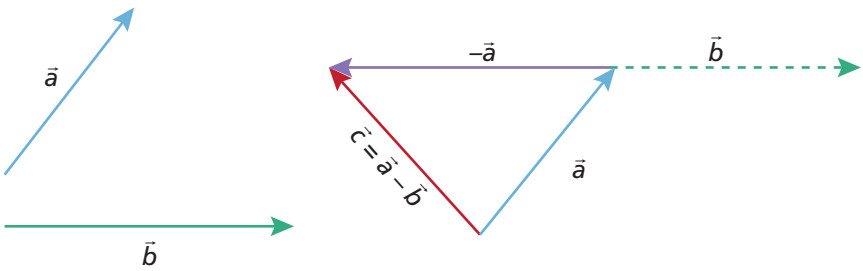


Fig. 1.12 Diferencia de vectores

Producto de vectores

Los vectores no son números ordinarios, así que no podemos aplicarles directamente las reglas de multiplicación ordinarias. En general se definen tres tipos diferentes de productos.

Producto de un vector por un número real

Sea $\vec{a}$ un vector y k un número real. Por definición, llamamos producto del vector $\vec{a}$ por el número real k al vector $k\vec{a}$ cuyos elementos son:

- *módulo:* el producto del valor absoluto de k por el módulo de $\vec{a}$.
- *dirección:* la misma que $\vec{a}$.
- *sentido:* el mismo que $\vec{a}$ si k es positivo y el opuesto, si k es negativo.

Por ejemplo, al multiplicar el vector $\vec{a}$ por el número real 3 obtenemos el vector $3\vec{a}$ y al multiplicarlo por (–2), obtenemos el vector $-2\vec{a}$ (figura 1.13).

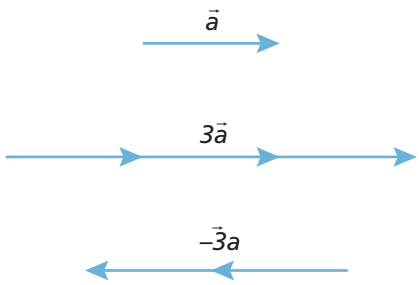


Fig. 1.13 Multiplicación de vectores por un escalar

Producto escalar

El producto escalar de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se escribe de la forma $\vec{A}\cdot\vec{B}$. Por esta notación, el producto escalar también se denomina producto punto. El producto escalar se define de manera tal que, aun cuando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ sean vectores, la cantidad $\vec{A}\cdot\vec{B}$ es una magnitud escalar C dada por:

$$C = \vec{A}\cdot\vec{B}$$

$$C = \left|\vec{A}\right|\cdot\left|\vec{B}\right|\cos\phi$$

$$C = A\cdot B\cos\phi$$

El ángulo ϕ se mide desde primer vector ($\vec{A}$) al segundo vector ($\vec{B}$), en sentido antihorario.

Nota que este producto es conmutativo y que si los vectores son perpendiculares el resultado es nulo.

Producto vectorial

El producto vectorial de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, también llamado producto cruz, se denota con $\vec{A} \cdot \vec{B}$. Como su nombre lo indica, el producto vectorial es un vector en sí mismo.

El resultado de este producto es un vector $\vec{C}$ perpendicular al plano que que forman los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ (figura 1.14):

$$\vec{C} = \vec{A} \cdot \vec{B}$$

El sentido de este vector $\vec{C}$ se puede determinar mediante la denominada **regla de la mano derecha** (figura 1.14): Se orientan los dedos de la mano derecha en el sentido del primer vector ($\vec{A}$), con el pulgar extendido, de manera que, al cerrarla, según el ángulo menor, se dirijan los dedos hacia el segundo vector ($\vec{B}$) en estas condiciones el pulgar indicará el sentido del vector resultado del producto ($\vec{C}$). El vector resultante $\vec{C}$ es perpendicular al plano que forman los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

El valor del vector $\vec{C}$ queda dado por:

$$C = \left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \operatorname{sen}\phi$$

Donde A y B son los módulos de los vectores correspondientes.

Nótese que este producto no es conmutativo, pues si se cambia el orden de los vectores cambia el sentido del vector producto.

También resulta importante destacar que la definición de este producto implica que si los vectores son paralelos el producto es nulo, es decir, en este caso, el vector $\vec{C}$ es igual al vector nulo $\vec{0}$ (no a 0, que es un número).

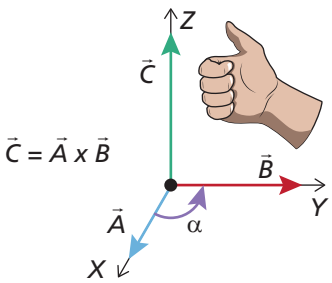


Fig. 1.14 Producto vectorial

Comprueba tus conocimientos

12. ¿Cuáles son las diferencias entre las magnitudes vectoriales y escalares? Explica tu respuesta.

13. Menciona 5 magnitudes escalares y 4 vectoriales que conozcas. En cada caso expresa la unidad de medida en el SI.

14. Representa el vector resultante: $\vec{C}_a = \vec{A}_a + \vec{B}_a$, $\vec{C}_b = \vec{A}_b + \vec{B}_b$ y $\vec{C}_c = \vec{A}_c + \vec{B}_c$ en cada uno de los casos siguientes, ver los datos en las figuras: 1.15, 1.16 y 1.17.

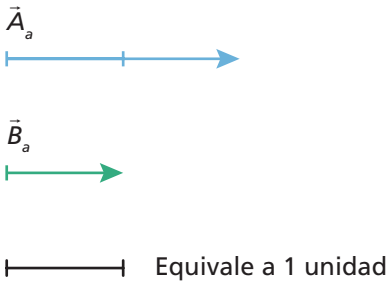


Fig. 1.15

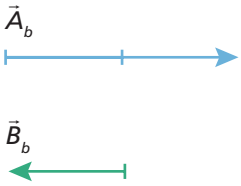


Fig. 1.16

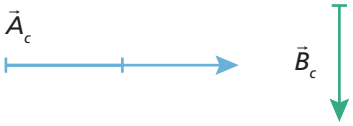


Fig. 1.17

15. Para el caso de la figura 1.16 del problema anterior representa el vector $\vec{C}_{\text{I}} = 2\vec{A}_b + \vec{B}_b$, para el caso de la figura 1.17 del problema anterior representa el vector $\vec{C}_{\text{II}} = 2\vec{B}_c - \vec{A}_c$.

16. Calcula los módulos de los vectores $\vec{C}_{\text{I}}$ y $\vec{C}_{\text{II}}$.

17. Describe los métodos para sumar vectores.

18. Dos vectores de diferentes valores se pueden combinar de forma tal que den un resultado o vector nulo. ¿Es cierta o falsa esta afirmación? Explica tu respuesta.

19. ¿Cuál es el resultado de multiplicar el vector $\vec{A}$ por 5? ¿Y por -5?

20. ¿Cuándo el resultado del producto escalar de dos vectores es nulo? Explica tu respuesta.

21. ¿Cuándo el resultado del producto vectorial de dos vectores es nulo? Explica tu respuesta.

22. Si un vector está orientado en el sentido positivo del eje de las de las *X*, de un sistema de coordenadas, y otro en la positiva del eje de las *Y*, ¿Qué dirección y sentido tendrá el vector resultado del producto vectorial de esos dos? Dibuja una representación de la situación planteada.

1.5 Componentes y proyecciones de una magnitud vectorial

Cualquier vector $\vec{a}$ puede siempre considerarse como la suma de dos o más vectores. Por supuesto, se pueden encontrar infinitos conjuntos de vectores cuya suma sea el vector $\vec{a}$.

Se denomina ***componentes de un vector*** $\vec{a}$ a l*os diversos conjuntos de vectores cuya suma es el vector* $\vec{a}$.

Ahora bien, si especificamos el número y la dirección de los componentes, ya hay una solución única que nos da los valores de estos.

Componentes rectangulares

En física tiene especial importancia una forma concreta de componentes: las llamadas *componentes rectangulares* de un vector. Veamos cómo se obtienen.

Trazamos un par de ejes perpendiculares. La intersección es el *origen de coordenadas.* El eje horizontal es el *eje de abscisas,* cuyo sentido positivo es *OX.* El eje vertical es el *eje de ordenadas* y su sentido positivo, *OY* (figura 1.18).

Dado un vector libre $\vec{a}$, trazamos su representante con origen en *O,* el vector $\overrightarrow{OA}$. Las perpendiculares a cada eje desde el punto A determinan los vectores $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ a los que llamamos componentes rectangulares de $\overrightarrow{OA}$. De este modo hemos descompuesto el vector $\vec{a}$ en sus dos componentes.

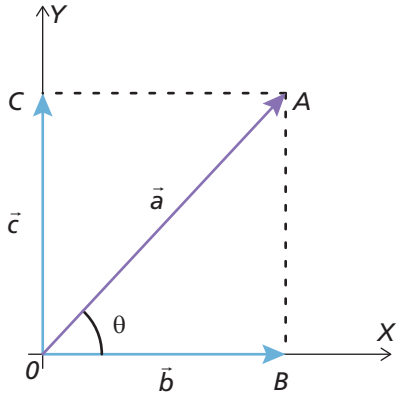


Fig.1.18 Componentes rectangulares de un vector

Dada la definición de la suma de vectores, se cumple que:

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$$

donde:

$$\vec{b} = \vec{a}_x \quad \text{y} \quad \vec{c} = \vec{a}_y$$

Son, respectivamente, las componentes horizontal y vertical del vector $\vec{a}$

Componentes rectangulares de un vector $\vec{a}$ son los dos vectores perpendiculares cuya suma vectorial es el vector $\vec{a}$.

Para calcular los valores de las componentes de $\vec{a}$, si son conocidas la magnitud *a* y su dirección, se aplica la definición de las relaciones trigonométricas,

$$\cos\theta = \frac{b}{a} \qquad sen\,\theta = \frac{c}{a}$$

De esta forma se obtienen las magnitudes *b* y *c*.

$$a \cdot \cos\theta = b \qquad a \cdot sen\,\theta = c$$

En este caso θ es medido desde el eje +*X* en sentido contrario de las manecillas del reloj. Con este convenio se obtienen los signos de las proyecciones de manera inmediata.

Con frecuencia, se presentan situaciones en las que se emplean las componentes de un vector. Unas veces, conociendo un vector, interesa descomponerlo en sus componentes rectangulares. En otras ocasiones, se determina aquel conociendo estas.

A los valores (positivos o negativos) de las componentes se les denomina **proyecciones**.

¡Cuidado!

Las componentes de un vector son vectores y las proyecciones de un vector son los valores de las componentes, que pueden ser positivos o negativos.

Ejemplo 1

¿Cuáles son las proyecciones (también llamadas componentes escalares) D_x y D_y del vector $\vec{D}$ en la figura 1.19? La magnitud del vector es $D = 3{,}0$ m y el ángulo es $\theta = 45°$.

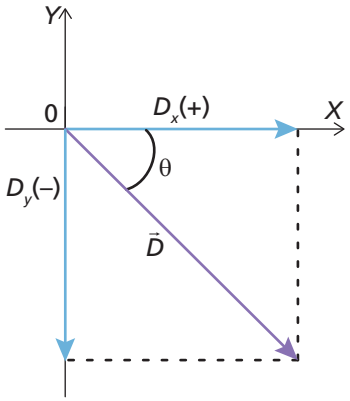


Fig. 1.19

En este ejemplo se debe tener cuidado porque el ángulo θ de la figura 1.19 no está medido desde el semieje $+X$ al semieje $+Y$ (es decir, en sentido anti horario) sino desde el semieje $+X$ al semieje $-Y$, esto exige que el ángulo θ deba ser considerado negativo $\theta = -45°$.

Por lo tanto, se deben emplear las siguientes ecuaciones aplicando las funciones trigonométricas.

$$\cos\theta = \frac{D_x}{D} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{D_y}{D}$$

$$D_x = D \cdot \cos\theta \qquad D_y = D \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$D_x = 2{,}1\,\text{m} \qquad D_y = -2{,}1\,\text{m}$$

El vector tiene una componente x positiva y una componente y negativa, como se muestra en la figura. Si hubiéramos tomado $\theta = 45°$ en las ecuaciones, habríamos obtenido D_y con el signo equivocado.

Cálculo de la magnitud y la dirección de un vector a partir de sus componentes

Podemos describir un vector dando su magnitud y dirección, o bien, sus componentes en *x* y en *y*. Las ecuaciones del ejemplo anterior indican cómo obtener las componentes si conocemos la magnitud y la dirección. También podemos invertir el proceso y obtener la magnitud y la dirección de un vector a partir de sus componentes. Aplicando el teorema de Pitágoras (figura 1.20) vemos que el valor del vector $\vec{A}$ es :

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

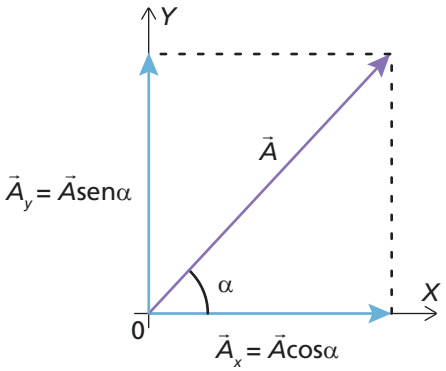


Fig. 1.20 Componentes de un vector

La ecuación anterior es válida para cualesquiera ejes *X* y *Y*, siempre y cuando sean perpendiculares entre sí. La dirección del vector se puede determinar directamente de los valores de las componentes, a partir de la definición de la tangente de un ángulo. Si medimos θ desde el semieje +*X* hacia el semieje +*Y* (como en la figura 1.18), entonces

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x}$$

De donde se obtiene que

$$\theta = \arctan\frac{A_y}{A_x}$$

Para la función tangente inversa también se usa la notación $\tan^{-1}$. Si se utiliza una calculadora puede ser que esta operación se indique con las teclas INV o 2ND. En el caso de la hoja de cálculo Excel, se indica esto con ATAN.

Ejemplo 2

Un avión despega y viaja 10,4 km al oeste y después 8,7 km al norte. ¿A qué distancia está de su punto de partida?

Si se considera la dirección norte en el sentido positivo del eje *Y,* la dirección oeste en el sentido positivo del eje *X,* se denotan por A_x y A_y los valores de los desplazamientos en cada una de estas direcciones y por A el valor del desplazamiento resultante, se tendrá que:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$A = \sqrt{(10,4\ \text{km})^2 + (8,7\ \text{km})^2}$$

$$A = \sqrt{108,16\ \text{km}^2 + 75,69\ \text{km}^2}$$

$$A = 13,56\ \text{km} = 13,6\ \text{km}$$

En los anexos del texto aparece una tabla con los valores de senos y cosenos de algunos ángulos notables para facilitar las operaciones con vectores.

Comprueba tus conocimientos

23. De las figuras 1.21, 1.22 y 1.23:

a) Representa las componentes de cada uno de los vectores.

b) Determina el módulo de las componentes de cada vector.

c) Utiliza los valores numéricos de las figuras, cada unidad de longitud equivale a 1,0 cm.

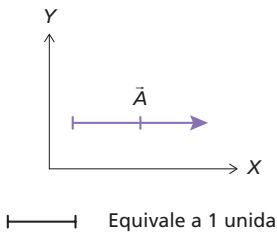


Fig. 1.21

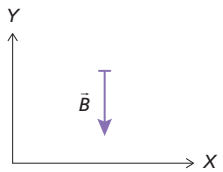


Fig. 1.22

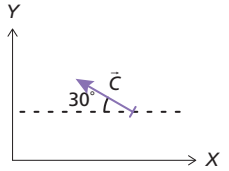


Fig. 1.23

24. Se conoce que las proyecciones de las componentes rectangulares de un vector son A_x = 3 m y A_y = 4 m, Determina el valor del vector $\vec{A}$.

25. En las figuras 1.24, 1.25, 1.26 y 1.27, se muestran distintas posiciones para dos vectores cualesquiera. Representa el vector suma $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$, en cada uno de los casos.

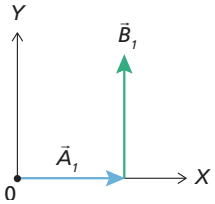


Fig. 1.24

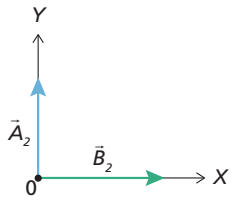


Fig. 1.25

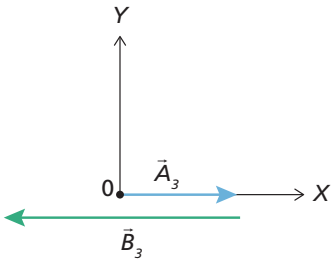


Fig. 1.26

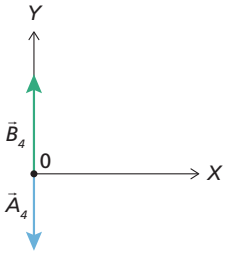


Fig. 1.27

26. Determina las proyecciones de cada vector resultante $\vec{C}$ en cada caso, del ejercicio 25, si se conoce que A = 1 cm y B = 2 cm.

27. Determina para los casos de las figuras 1.26 y 1.27, el ángulo que forma el vector resultante con la dirección positiva del eje *X*.

Tareas generales del capítulo

1. ¿Cuál es tu estatura? Expresa el resultado en metros y centímetros.
2. En el sistema de coordenadas de la figura 1.28 (cada cuadrícula tiene una longitud de 1 cm en ambos ejes):
   a) Representa un punto con coordenadas x_0 = 1 cm y y_0 = 2 cm.
   b) A partir de este punto traza un vector $\vec{A}$ de módulo igual a 2 cm en la dirección y sentido del eje *X*.
   c) Determina las proyecciones del vector $\vec{A}$ en cada eje.
   d) Determina las coordenadas x_1 y $y_1$del extremo (punto final) del vector $\vec{A}$.

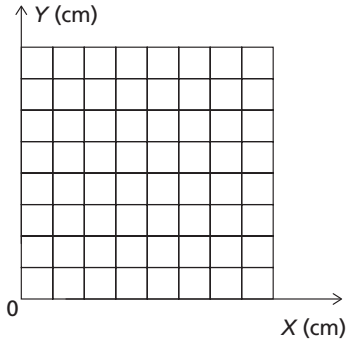


Fig. 1.28

3. Las proyecciones de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, son: A_x = 2 cm; A_y = 2 cm y B_x = 3 cm; B_y = 0 cm. Se encuentran uno a continuación del otro y el origen del vector $\vec{A}$, tiene coordenadas x_{0A} = 0; y_{0A} = 2 cm.

a) Representa ambos vectores en un sistema de coordenadas *X*; *Y*, y al vector resultante de la suma $\vec{A}+\vec{B}$.

b) Determina los valores de los tres vectores.

4. En el sistema de coordenadas representado en la figura 1.29, representa:

a) Un vector $\vec{S}_1$ que una a los puntos *A* y *B*.

b) Un vector $\vec{S}_2$ que una a los puntos *A* y *C*.

c) Un vector $\vec{S}_3$ que una a los puntos *D* y *A*.

d) Determina el valor de las proyecciones de cada vector.

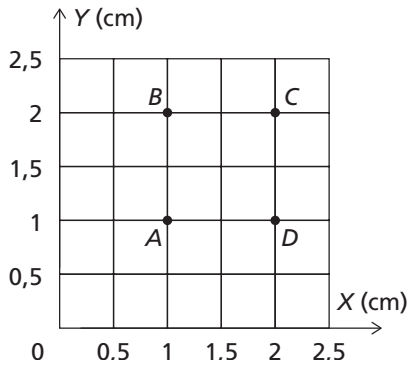


Fig. 1.29

5. Un cuerpo se desplaza en línea recta entre los puntos *A*, *B* y *C*, que aparecen en el sistema de coordenadas de la figura 1.30.

a) Representa los vectores $\vec{S}_{AB}$ y $\vec{S}_{BC}$.

b) Representa el vector resultante $\vec{S}_{AC}$ y determina el valor de sus proyecciones en cada uno de los ejes.

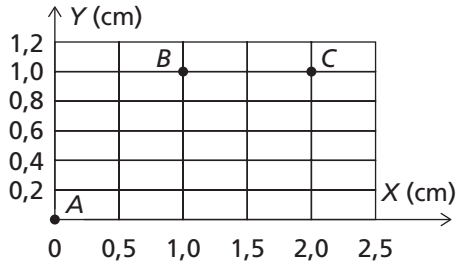


Fig. 1.30

6. Escribe la ecuación que permite determinar:

a) El producto escalar de dos vectores.

b) El producto vectorial de dos vectores.

7. Escribe en tu cuaderno una F para las afirmaciones falsas y una V para las verdaderas.

- El producto escalar de dos vectores es cero cuando el ángulo entre ellos es 0°.
- El producto escalar de dos vectores es cero si el valor de uno de ellos es cero.
- El producto escalar de dos vectores es cero si el ángulo entre ellos es 90°.
- Para un producto escalar se cumple que $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$.
- Para un producto vectorial se cumple que $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$.
- Para un producto vectorial se cumple que $\vec{A} \cdot \vec{B} = -\left(\vec{B} \cdot \vec{A}\right)$.
- Un producto vectorial es cero si el ángulo entre los vectores es cero.
- Un producto vectorial es cero si el ángulo entre los vectores es 90°.

8. En las figuras 1.31, 1.32, 1.33 y 1.34 se muestran los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Determina el producto vectorial $\vec{C} = \vec{A} \cdot \vec{B}$ en cada caso y representa el resultado obtenido.

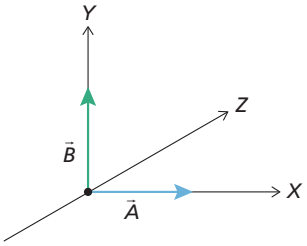


Fig. 1.31

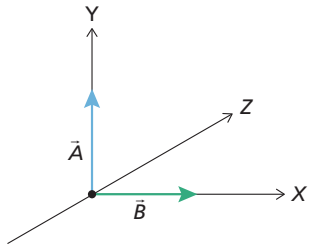


Fig. 1.32

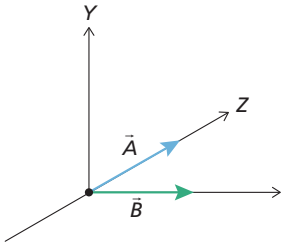


Fig. 1.33

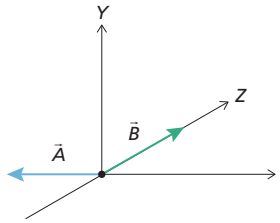


Fig. 1.34

9. *Experimenta*. Sabías que el valor de π se puede conocer "con solo" sesenta centavos. Determina el valor de π y estima su incertidumbre. Materiales: tres monedas de 20 centavos, una regla graduada en milímetros, papel blanco, un alfiler y un lápiz para escribir con su punta afilada.
10. *Experimenta*. Resuelve el problema anterior utilizando solo una moneda, calcule la calidad de ambas mediciones y comente los resultados.
11. ***Desafío.*** Determina el espesor de una hoja de papel de tu libreta, así como el valor de la incertidumbre. Registra la medición y valora su exactitud y precisión. *Materiales*: regla graduada en milímetros, hoja de la libreta.

CAPÍTULO 2

Cinemática de la partícula

Ya conocemos que la Física investiga sistemas y cambios *fundamentales*, es decir, que están en la base de otros más complejos estudiados por diversas ramas de la ciencia y la tecnología. En este tema ampliaremos y profundizaremos en el estudio de uno de los cambios más habituales en el universo: el *movimiento mecánico*, o simplemente *movimiento*.

Se mueven los seres humanos y los animales (figura 2.1); el agua de ríos y mares; el aire al formar vientos; los medios de transporte; las partes de los más diversos mecanismos; la Tierra; los cuerpos celestes como planetas, estrellas y galaxias; las moléculas y los átomos. En general, todo lo que existe de manera objetiva se encuentra en movimiento.

Fig. 2.1 El tigre, animal cazador solitario y nocturno, puede recorrer distancias entre 10 km y 20 km en una sola noche. Cuando ataca a sus presas desarrolla una rapidez de hasta 90 km/h.

Como ya se mencionó, el movimiento mecánico forma parte de cambios más complejos, por ejemplo: los cambios de estado de agregación de los materiales, el funcionamiento de nuestros órganos, la circulación de la sangre, la propagación de la luz, la propagación de las ondas de radio y televisión, los procesos que tienen lugar en el interior de los astros, etcétera.

La importancia del estudio del movimiento mecánico está determinada no solo por su presencia en casi todo lo que nos rodea, y sus innumerables aplicaciones prácticas (en el transporte, las maquinarias, las exploraciones espaciales, etc.), sino también por el hecho de que ha contribuido a responder preguntas cruciales sobre el universo y el lugar que en él ocupa el hombre: ¿Es la Tierra el centro del Universo? ¿Tienen igual naturaleza los movimientos en la Tierra y en el cosmos? ¿Cuál es edad del Universo?

Además, el movimiento mecánico fue el primero de los cambios examinados por la física en profundidad. En consecuencia, su estudio determinó el desarrollo de importantes conceptos, métodos e instrumentos de la ciencia. Gracias a su estudio también se desarrollaron conceptos clave de las matemáticas.

Del estudio de los fenómenos relacionados con el movimiento mecánico de los cuerpos se ocupa la parte de la Física que se denomina Mecánica.

> *El problema fundamental de la Mecánica consiste en describir cómo se moverán los cuerpos si se conocen las fuerzas aplicadas sobre él y viceversa, lo que. De hecho, significa determinar la posición y la velocidad de los cuerpos en cualquier instante.*

Un buen ejemplo al respecto, entre muchos otros, lo tenemos en el campo de la astronomía: los astrónomos, utilizando las leyes de la Mecánica, pueden calcular con exactitud la posición y velocidad de los cuerpos celestes en cualquier instante, y predecir diferentes fenómenos celestes, tales como los eclipses solares y lunares.

En este capítulo comenzaremos por el estudio de lo que se acostumbra a llamar Cinemática.

> **La Cinemática** es la parte de la mecánica que se ocupa de estudiar la forma en que se puede describir el movimiento de los cuerpos, sin considerar las causas que pueden provocar los cambios en el estado de movimiento.

De la historia

La Cinemática, en lo esencial, fue desarrollada por el astrónomo, filósofo, ingeniero, matemático y físico italiano Galileo Galilei (1564-1642), quien nació en Pisa. Sus primeros estudios universitarios se dirigieron a la medicina, pero la lectura de Euclides de Alejandría, matemático y geómetra, y de Arquímedes de Siracusa, físico, ingeniero, inventor, astrónomo y matemático, ambos griegos, lo cautivaron y lo incitaron a dedicarse a las matemáticas y la filosofía natural (Física). Dentro de sus trabajos publicados, los más sobresalientes fueron *Diálogos* sobre los dos máximos sistemas del mundo, en 1632, el cual es un ensayo en el que se debate sobre el movimiento del universo en torno al Sol y *Discurso y demostración matemática,* en torno a dos nuevas ciencias, en 1638, en el que se encuentran estudios sobre la estructura de los materiales, que conforman la exposición de la "ciencia nueva" que hoy llamamos estática y también los estudios sobre el movimiento rectilíneo uniforme y uniformemente acelerado de los cuerpos y la trayectoria de los proyectiles; en ambas se debate la segunda "ciencia nueva", hoy llamada dinámica. En los Diálogos se utilizan tres personajes: Salviati, Sagredo y Simplicio, donde se muestra el desarrollo mental y de análisis que él aplicaba para desentrañar los errores de sus predecesores, en especial de Aristóteles, e implantar sus ideas geniales. Salviati, quien habla en nombre de Galileo; Simplicio, que cree y sostiene las ideas de Aristóteles y Sagredo, persona bien informada y amigo de Salviati y Simplicio. Muere Galileo a la edad de 78 años, el 8 de enero de 1642, el año del nacimiento de Isaac Newton, físico inglés.

2.1 Movimiento mecánico. Sistema de referencia. Punto material. Posición de un cuerpo. Desplazamiento

A diferencia de la vida cotidiana, en la ciencia los conceptos y términos empleados se intentan definir con la mayor precisión posible. Comenzaremos, pues, caracterizando el concepto de *movimiento mecánico*. Para distinguirlo de otros cambios debemos precisar, ante todo, qué es lo que cambia en el movimiento mecánico.

En el **movimiento mecánico** cambian la posición del cuerpo como un todo, o las posiciones de sus partes. Cuando una persona camina o corre pueden apreciarse con claridad ambas cosas.

Todos los días vemos cómo el Sol cambia de posición en el cielo, en el lenguaje cotidiano decimos que sale por una dirección próxima al este y

se pone por una próxima al oeste. Sin embargo, con frecuencia leemos o escuchamos que la Tierra, y el resto de los planetas, se mueven alrededor de él. ¿Cuál de los cuerpos está realmente en movimiento, el Sol o la Tierra? (figura 2.2, se ha trazado la trayectoria aproximada para 365 días). Situaciones como la anterior indican que se requiere profundizar en la caracterización que hemos dado del movimiento.

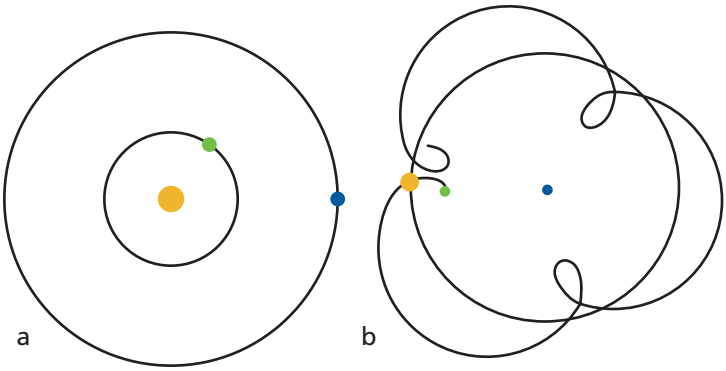


Fig. 2.2 Trayectorias aproximadas: a) de la Tierra (azul) y de Mercurio (verde) vistas desde el Sol; b) del Sol y de Mercurio vistas desde la Tierra

Resulta que todo cuerpo puede estar al mismo tiempo en reposo y en movimiento. Analicemos, por ejemplo, el caso de un pasajero sentado en un tren en marcha. Considerado en relación con el tren, el pasajero está en reposo; en cambio, considerado en relación con un cuerpo sobre la Tierra (digamos un árbol) el pasajero está en movimiento. Debemos añadir algo más: es tan correcto afirmar que el pasajero está en movimiento en relación con el árbol, como a la inversa, que el árbol está en movimiento respecto al pasajero.

Ahora estamos en mejores condiciones para comprender a qué llamamos movimiento mecánico:

> **Movimiento mecánico** es el *cambio de posición* de los cuerpos, o de sus partes, *en relación con otros cuerpos* en el transcurso del tiempo.

Los movimientos pueden estar relacionados con la deformación de los cuerpos, o no. Aquellos en que el cuerpo no se deforma son de dos tipos fundamentales: uno, en que todas sus partículas se mueven de igual modo (describen igual trayectoria y tienen igual velocidad), denominado **traslación,** y otro en que sus partículas describen circunferencias

de distintos radios y se mueven con diferente velocidad, denominado **rotación.**

Sistema de referencia

Para estudiar el movimiento de una pelota o de cualquier otro cuerpo en un plano, bastan dos ejes de coordenadas (figura 2.3). Si fuera el movimiento de un auto a lo largo de una carretera recta, solo es necesario un eje de coordenadas (figura 2.4).

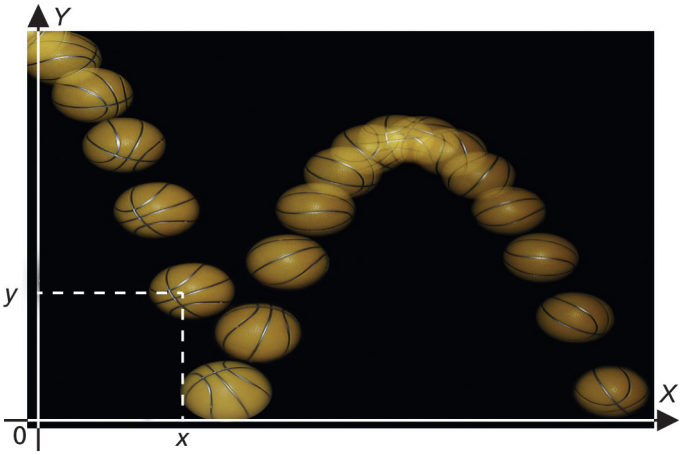


Fig. 2.3 Se requieren dos ejes de coordenadas para precisar la posición de la pelota en un instante

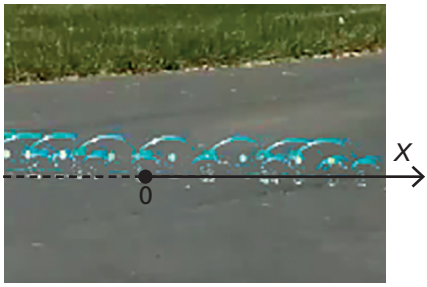


Fig. 2.4 Basta un eje de coordenadas para precisar la posición del carrito en un instante dado

En esencia, para caracterizar el movimiento de un cuerpo debemos precisar, mediante un sistema de ejes de coordenadas, su posición con respecto a un cuerpo de referencia, y las posiciones sucesivas que ocupa el cuerpo en el transcurso del tiempo.

Se denomina **sistema de referencia al** cuerpo de referencia, el sistema de coordenadas asociado con el cuerpo de referencia y el conjunto de relojes sincronizados, que permitan registrar cuando el cuerpo pasa por cada punto del sistema de coordenadas.

En la solución de cualquier tarea acerca del movimiento mecánico es necesario, ante todo, señalar el sistema de referencia mediante el cual será examinado el movimiento del cuerpo. Analicemos el ejemplo siguiente:

Imaginemos a un pasajero sentado en un vagón de un tren en movimiento. ¿Qué podemos decir del movimiento del pasajero?

El conductor del coche dirá que el pasajero no se mueve (está sentado), mientras que un observador en Tierra asegurará que el pasajero se mueve pasando por delante de él. El pasajero dirá que el conductor se acerca hacia él (se mueve de derecha a izquierda). El observador en Tierra afirmará que el conductor se aleja de él moviéndose de izquierda a derecha.

La línea, real o imaginaria, que describe todo cuerpo al cambiar de posición en relación con otros cuerpos en el transcurso del tiempo se denomina ***trayectoria***.

El modelo del cuerpo puntual o punto material. Posición de un cuerpo

Para estudiar el movimiento mecánico de los cuerpos, es decir, el cambio de su posición en el espacio respecto al tiempo, se necesita determinar la posición del cuerpo en cualquier instante. Todos los cuerpos tienen un cierto tamaño y por eso cada una de las partes de un cuerpo ocupa una posición distinta en el espacio. Entonces, ¿cómo *determinar la posición de todo el cuerpo?* En algunos casos, en dependencia de las condiciones del movimiento del cuerpo, no es necesario determinar la posición de cada una de las partículas del cuerpo en movimiento, por ejemplo, en los casos en que todas las partes del cuerpo se mueven igual y este se mueve en un espacio libre, no es necesario hacerlo. ¿Para qué, por ejemplo, describir el movimiento de cada parte externa de un automóvil que asciende por una pendiente sin tener obstáculos en su movimiento, si sus movimientos, exceptuando las ruedas que rotan, no se diferencian considerablemente entre sí?

Igualmente se mueven todas las partes de un auto cuando viaja por un tramo recto (figura 2.5) o la de un objeto cuando lo alzamos del piso.

Fig. 2.5 Movimiento de un cuerpo por un tramo recto

No es necesario determinar la posición de cada una de las partes del cuerpo en aquellos casos en que se estudie el movimiento del cuerpo y sus dimensiones pueden ser no tomadas en cuenta. De esta forma se examinaría el movimiento de un punto sin tener en cuenta las dimensiones del cuerpo.

En las ciencias, y en especial la Física, se elaboran *modelos* para facilitar el estudio de determinados fenómenos y procesos de la realidad. Un ejemplo es el **modelo del cuerpo puntual o punto material**.

El cuerpo puntual o punto material es un modelo muy útil para el estudio del movimiento de traslación de los cuerpos cuando es posible no considerar sus dimensiones de acuerdo con las condiciones en las que transcurre su movimiento. Siempre que el cuerpo realice un movimiento de traslación pura, todos los puntos describen la misma trayectoria y, por tanto, si las condiciones del movimiento lo permiten, solo se necesita estudiar el estado mecánico de un ***punto*** ya que este es representativo de todos los demás puntos del cuerpo. Ejemplos en los que puede ser utilizado el modelo de punto material son los de un barco en mar abierto, de un avión en un espacio libre o de un auto solitario por una autopista, pero si ese barco tiene que moverse en una región de abundantes témpanos de hielo, el avión en su movimiento tiene que cruzar entre dos torres o el auto se encuentra en una zona de elevado tráfico, entonces puede que el modelo de punto material no sea de utilidad para estudiar estos casos.

> **Cuerpo puntual o punto material**: modelo físico-matemático en el que el cuerpo se considera, principalmente para el estudio de su movimiento de traslación, sin *dimensiones,* es decir*, como punto.*

Es oportuno señalar que este modelo físico solo se abstrae de las dimensiones y forma, pero que conserva otras propiedades físicas caracterizadas por determinadas magnitudes, por ejemplo, la masa.

En lo antes expuesto queda implícita una cuestión muy importante: en la vida cotidiana acostumbramos a describir los cambios por medio de palabras, pero para conservar y comunicar información detallada sobre ellos, en la ciencia se emplean otros medios más sintéticos y rigurosos que las palabras: las *tablas de datos*, las *gráficas* y las *ecuaciones.* Al usar estos métodos (matemáticos) se hace necesario referirse al comportamiento de un punto. De esto nos percatamos, como ya se ha señalado, si comprendemos que, de forma matemática, solo podemos especificar la posición de un punto en el espacio. En consecuencia, al usar estos métodos para estudiar el movimiento de un cuerpo es necesario hacerlo mediante el modelo del cuerpo puntual.

Analicemos ahora con más detalle el asunto de precisar la posición de un cuerpo.

Vector de posición

Determinemos, por ejemplo, la posición de dos automóviles que se mueven por una carretera (figura 2.6). Tomemos como cuerpo de referencia una garita de control *A* y tracemos, a lo largo de la carretera, el eje de coordenadas *OX* que tiene su origen en el punto *A* (coordenada *O* del eje). *A* la derecha del origen las coordenadas se consideran positivas y a la izquierda, negativas.

En estas condiciones la posición del automóvil 1, en el instante *t* se determina por x_1 = 1 200 m y la del automóvil 2, por x_2 = -400 m.

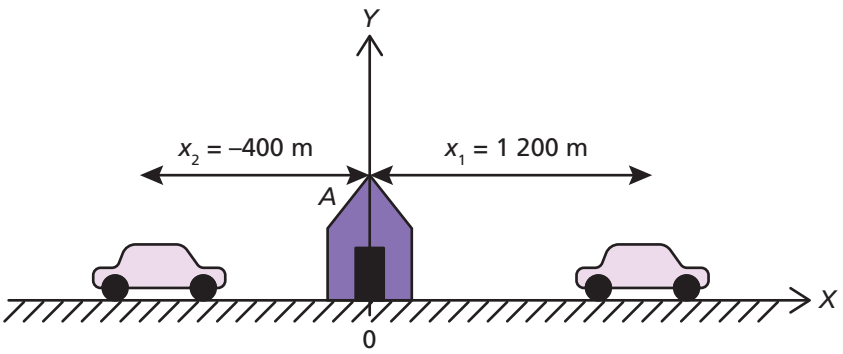


Fig. 2.6 Posición de dos autos respecto a un cuerpo de referencia, ubicado en el origen de coordenadas

Si el cuerpo se encuentra en un plano, por ejemplo, la pelota mostrada en la figura 2.2, la posición en cada instante queda definida por dos coordenadas *x; y.*

De esta forma, la posición de un cuerpo sobre una recta, un plano o en el espacio, se determina mediante una, dos o tres coordenadas (números) respectivamente.

La posición de un cuerpo también puede ser precisada si a partir del origen de coordenadas se traza un segmento de recta orientado o vector $\vec{S}$ hasta el punto M. Este vector recibe el nombre de vector de posición (figura 2.7).

> El vector de posición es una magnitud física que caracteriza la ubicación del cuerpo en el espacio, y está determinado por el segmento de recta orientado que une el origen del sistema de coordenadas elegido con el punto que señala la posición que ocupa el cuerpo objeto de estudio.

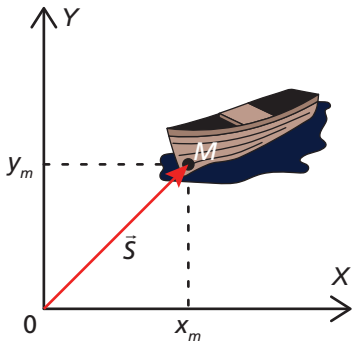


Fig. 2.7 Vector de posición *S* del bote en el plano *XY*

Entre estas dos formas de determinar la posición de una partícula existe una estrecha relación: las coordenadas están dadas por las proyecciones del vector de posición sobre cada uno de los ejes.

Desplazamiento

Supongamos que conocemos la posición inicial de un barco *(M) y* la distancia *s* navegada por este. Si quisiéramos conocer su posición en el mar, al transcurrir un intervalo de tiempo, a partir de estos datos, nos percatamos de que resulta imposible, pues el barco podría haber navegado en cualquier dirección durante este tiempo.

¿Cómo podemos determinar la nueva posición del barco en el mar?

Referiremos la posición inicial del barco en el instante t_o, en un sistema de coordenadas *XY,* mediante el vector de posición inicial $\vec{S}_0$. En otro instante *t,* la posición que ocupará el barco vendrá expresada por el vector de posición final $\vec{S}$.

En la figura 2.8 podemos apreciar el cambio del vector de posición cuando el cuerpo se mueve.

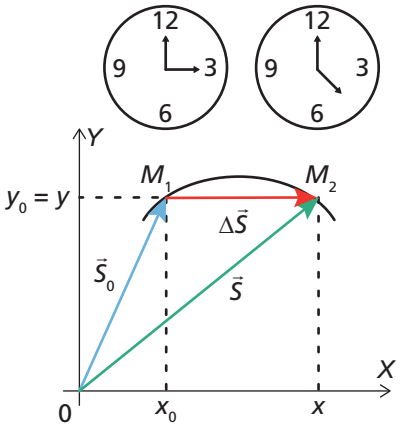


Fig. 2.8 Vector de posición $\Delta\vec{S}$ en el plano *XY*

La variación que experimenta el vector de posición al trasladarse entre dos puntos se denomina desplazamiento del cuerpo.

El desplazamiento $\Delta\vec{S}$ de un cuerpo puntual o punto material se define como la magnitud física vectorial que caracteriza la medida de la variación de la posición del cuerpo en el espacio y se representa por un vector que une la posición inicial con la final.

Vectorialmente el desplazamiento queda definido por la ecuación:

$$\Delta\vec{S} = \vec{S} - \vec{S}_0$$

Esta expresión es válida para cualquier tipo de movimiento mecánico, independientemente de la forma de la trayectoria del cuerpo y nos permite determinar la posición del cuerpo en cualquier instante:

$$\vec{S} = \vec{S}_0 + \Delta\vec{S} \qquad (2.1)$$

El vector desplazamiento de un cuerpo depende de las posiciones final e inicial del cuerpo y no de la trayectoria (camino recorrido) que sigue el cuerpo para ir de un punto a otro (figura 2.9 a), a menos que el movimiento se realice en una sola dirección a lo largo del eje *X*. Por ejemplo, en la figura 2.8 b) para ir de 1 a 6, por carretera, es necesario seguir la trayectoria 1, 2, 3, 4, 5 y 6, mientras que en lancha se va de 1 directo a 6.

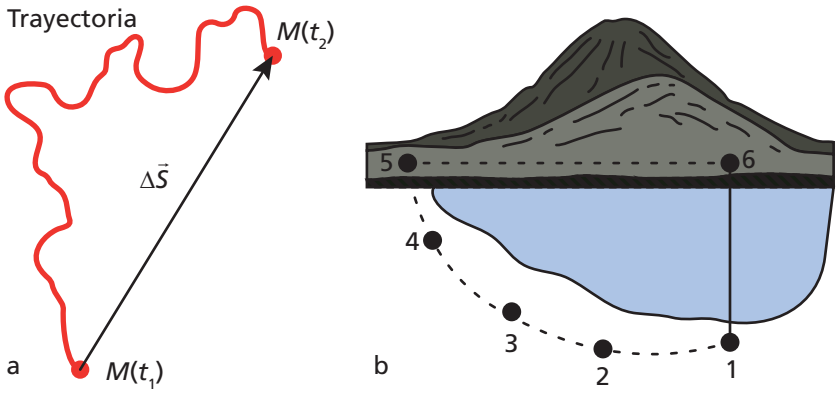


Fig. 2.9 a) diferencia entre el vector desplazamiento y el camino recorrido; b) dos trayectorias diferentes para llegar a la base de la montaña, partiendo de la posición 1

Puede ser conveniente señalar que durante el movimiento del cuerpo las coordenadas correspondientes a las posiciones del cuerpo varían. En el instante $t = t_0$, sus coordenadas en relación con el sistema de coordenadas *XY* serán x_0, y_0. Supongamos que al cabo de un cierto intervalo de tiempo *t* fueran respectivamente iguales a *x, y.* Esto significa que las coordenadas de sus posiciones han variado en Δx y Δy donde:

$$\Delta x = x - x_0$$
$$\Delta y = y - y_0$$

La figura 2.10 permite apreciar que la proyección del vector desplazamiento $\Delta\vec{S}$ sobre el eje *X* y sobre el eje *Y es* igual a la variación de las correspondientes coordenadas de estas.

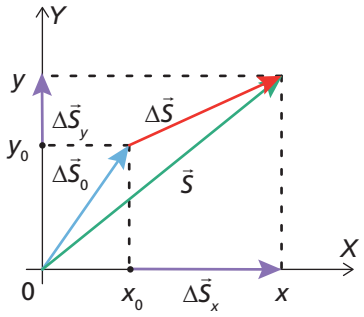


Fig. 2.10 Vectores componentes del vector $\Delta\vec{S}$ en el plano *XY*

Comprueba tus conocimientos

1. ¿A qué se denomina vector de posición?
2. ¿Qué se entiende por vector desplazamiento?
3. Un nadador en una piscina Olímpica de 50 m, la recorre ida y vuelta.

   ¿Qué distancia recorrió el nadador? ¿Cuál es el valor del vector desplazamiento del nadador?
4. Identifica las afirmaciones que son verdaderas y las falsas. Explica las afirmaciones falsas a partir de las definiciones.

   Se puede considerar como un punto material:
   - Un avión en movimiento entre dos ciudades
   - La aeromoza en movimiento dentro del avión
   - Un ómnibus del transporte urbano, realizando maniobras dentro de la terminal para poder salir de viaje
   - El balón golpeado por un futbolista para cobrar un penalti
   - Un estudiante al salir de la escuela, que camina tres cuadras para llegar a su casa
   - Una molécula de agua en movimiento dentro de un vaso
5. Un estudiante camina 5 m, en línea recta, de un punto *A* hasta un punto *B.* A continuación, gira un ángulo de 90º y recorre una distancia de 4 m, también en línea recta, hasta un punto *C.* Calcula la distancia recorrida y el valor del desplazamiento del estudiante.
6. Las coordenadas iniciales de un punto material son: $x_0 = -2$ m y $y_0 = 4$ m. Posteriormente el cuerpo se ha desplazado a un punto con coordenadas $x = 2$ m y $y = 1$ m. Representa en un plano *(XY)*, las posiciones del cuerpo y el vector desplazamiento. Halla las proyecciones del vector desplazamiento sobre los ejes *X* y *Y.*

2.2 Velocidad y desplazamiento en el Movimiento Rectilíneo Uniforme. Representación gráfica en el Movimiento Rectilíneo Uniforme

En la figura 2.11 se representa el resultado de un experimento en el cual un ciclista se mueve de forma tal que recorre iguales desplazamientos en iguales intervalos de tiempo (cualesquiera que estos sean) siguiendo una trayectoria rectilínea. Esta es una situación representativa del

movimiento mecánico más simple, el denominado movimiento rectilíneo uniforme (MRU).

Fig. 2.11 Distancias entre dos marcas consecutivas del eje delantero de la bicicleta, tomadas en iguales intervalos de tiempo

En otras palabras puede decirse que:

Movimiento rectilíneo uniforme (MRU), es el movimiento mecánico de un cuerpo que, al seguir una trayectoria rectilínea, recorre en iguales intervalos de tiempo, cualesquiera que estos sean, iguales desplazamientos.

De la Historia

Un caso muy interesante de cómo los científicos someten a revisión los conocimientos formulados, incluso, por ellos mismos, es el siguiente:
Galileo Galilei, en el libro de los *Diálogos,* en la Jornada tercera, dedicada a los movimientos locales, escribe:
"Acerca del movimiento uniforme tenemos necesidad de una sola definición, que yo enunciaré del modo siguiente:"
DEFINICIÓN
"Entiendo por movimiento uniforme aquel cuyos espacios, recorridos por un móvil en cualesquiera tiempos iguales, son entre sí iguales."
A la cual le sigue la siguiente **ADVERTENCIA:**
"Me ha parecido bien añadir a la antigua definición (que llama simplemente movimiento uniforme, a aquel en que espacios iguales son recorridos en tiempos iguales) el vocablo ''cualesqueira ~ o sea en tiempos cualesquiera iguales; porque puede suceder que el móvil recorra espacios iguales durante tiempos iguales, y que sin embargo no sean iguales los espacios recorridos durante algunas fracciones más pequeñas, aunque entre sí iguales, de esos mismos tiempos."

En este caso los intervalos de tiempo entre las marcas (Δt) fue de 0,066 s aproximadamente (se tomaron 15 imágenes por segundo) y el módulo del desplazamiento entre dos marcas consecutivas (Δx) es de 0,33 m.

Nota: en lo adelante, para simplificar la notación, denotaremos con *x, y* o *z,* según corresponda, a las componentes, proyecciones o módulos del vector desplazamiento en cada uno de los ejes de coordenadas.

Para cualquier intervalo de tiempo entre dos marcas la razón $\Delta x/\Delta t$ permanece constante (igual a 5 m/s). Esta razón define una magnitud, que mide el cambio de posición en la unidad de tiempo (mientras mayor sea la razón, mayor es el módulo desplazamiento en la unidad de tiempo) y recibe el nombre de rapidez.

Si se designa a la rapidez por la letra v_x, podemos escribir que:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Donde el subíndice *x* indica que el eje de coordenadas *X* es la dirección del movimiento.

La razón entre el desplazamiento y el intervalo de tiempo $\Delta\vec{x} / \Delta t$, que es una cantidad vectorial, recibe el nombre de velocidad y se acostumbra a simbolizar como $\vec{v}$.

> Se denomina velocidad del movimiento rectilíneo uniforme a la magnitud física vectorial que se determina por la razón del cambio del vector de posición de un cuerpo entre el tiempo empleado para su realización.

En correspondencia con lo anterior, la velocidad queda definida por la ecuación:

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{S}}{\Delta t} \qquad (2.2)$$

Si el movimiento es en una sola dirección, por ejemplo, la definida por el eje *X:*

$$\vec{v}_x = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} \qquad (2.3)$$

En este caso la ecuación general que permite describir el MRU (es decir, conocer la posición del cuerpo, considerado como un cuerpo puntual, en cualquier instante de tiempo), si se considera que en el instante inicial $t = 0$, será:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}_x t \qquad (2.4)$$

Como el movimiento es rectilíneo, siempre podemos escoger el sistema de coordenadas con uno de sus ejes en la dirección del movimiento y escribir la ecuación (2.2), simplemente para la proyección en dicho eje (en este caso el *X*):

$$x = x_0 + v_x t \qquad (2.5)$$

Si en el instante inicial $t_0 = 0$, el cuerpo se encuentra en el origen de coordenadas $x_0 = 0$, entonces:

$$x = v_x t \qquad (2.6)$$

De la historia

La expresión de velocidad tiene sus antecedentes en los trabajos de Aristóteles (394-322 a.n.e.) y Filopono (490-566), quienes consideraban las magnitudes de fuerza y resistencia, en vez de las magnitudes trabajadas por Galileo, que son las que estudiarás en este libro.

Para Aristóteles la velocidad de un objeto era igual a la relación entre la fuerza que se le aplicaba a un cuerpo y la resistencia que el medio le ofrecía. Algebraicamente esto sería: $V = F / R$. Una dificultad primaria de esta expresión es el hecho de que, si la resistencia se hace cero, pues entonces la velocidad tiende hacia el infinito, lo cual nunca ocurre. Para evitar esta dificultad, Aristóteles plantea que la resistencia solo puede ser cero en el vacío y que la naturaleza no lo permite porque lo aborrece, de esta manera se aferra a la idea del *horror vacui.* Otra dificultad es la referida a la magnitud fuerza. Después de lanzado un objeto, la fuerza que se utilizó para hacerlo deja de actuar inmediatamente, entonces qué fuerza mantiene al objeto en movimiento. Según Aristóteles, "los proyectiles se mueven, aunque lo que los impulsó no esté ya en contacto con ellos, o bien por antiperístasis, como suponen algunos, o bien porque el aire que ha sido empujado los empuja con un movimiento más rápido que el que los desplaza hacia su lugar propio.

Por su parte Filopono planteó que la velocidad de un objeto era igual a la diferencia entre la fuerza y la resistencia ($V = F - R$), evitando así la dificultad del vacío (resistencia cero) con la que se enfrentó Aristóteles y de la tendencia hacia el infinito de la velocidad. Sobre el hecho de la fuerza, Filopono sugiere que, al lanzar un objeto, este es dotado de una propiedad que lo mantiene en movimiento, o sea, no es necesario que el cuerpo colisione con otro o sobre el mismo actúe una fuerza que lo mantenga en ese estado. A esta propiedad que lo mantiene en movimiento se le llamó ímpetu.

¿Qué significa "antiperístasis" y en qué sentido lo utilizó Aristóteles en este escrito? Te recomendamos que busques en Google la palabra antiperístasis Diccionario etimológico. etimologias.dechile.net/? antiperistasis

¿Con cuál de las tres expresiones de velocidad te sientes más identificado: $V = S / t$; $V = F / R$ o $V = F - R$ y por qué?

Se debe señalar también, que en el caso del MRU, el módulo de la velocidad coincide con la rapidez.

En este mismo sentido, puede ser útil destacar también que cuando se hace referencia a la lectura del velocímetro de un automóvil (figura 2.12) diciendo, por ejemplo, "la velocidad es de 50 km/h´´, lo que se está mencionando es la rapidez del movimiento del automóvil y no su velocidad, que es una magnitud vectorial.

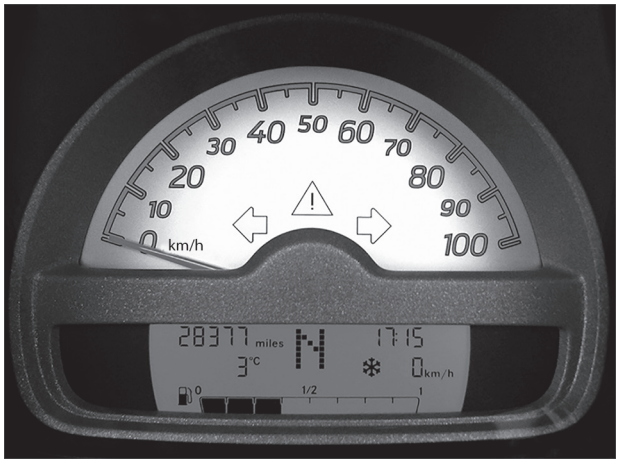


Fig. 2.12 Velocímetro de un automóvil que indica rapidez ("rapidómetro") o el módulo de la velocidad

La unidad de velocidad en el SI es el metro por segundo (m/s). Esta unidad tiene el significado de que el cuerpo se desplaza 1 m en el transcurso de 1 s. Algunos múltiplos muy utilizados son el cm/s, el km/h o el km/s.

Representación gráfica del Movimiento Rectilíneo Uniforme

Si bien las ecuaciones constituyen una poderosa herramienta para la Física, sus representaciones gráficas pueden ser también de mucha utilidad. En consecuencia, resulta muy importante estar bien familiarizados con esta forma de representación.

Supongamos que obtenemos los datos siguientes de la observación del movimiento de un cuerpo (tabla 2.1).

Tabla 2.1

Tiempo (*t*) en segundos (s)	Posición (*x*) en metros (m)
0,0	0,0
1,0	0,8
2,0	1,6
3,0	2,4
4,0	3,2
5,0	4,0
6,0	4,8

Para representar gráficamente el movimiento se traza un sistema de ejes rectangulares (figura 2.13). En los ejes horizontal y vertical, a una escala determinada, se representan, respectivamente, el tiempo y las posiciones. La gráfica obtenida muestra la dependencia de la posición del cuerpo en función del tiempo $x = f(t)$. Entonces la línea que, de modo uniforme, une los puntos de intersección es la gráfica del movimiento

La gráfica construida permite apreciar con facilidad que, por ejemplo:

- El cuerpo está en el origen en el instante tomado como cero. Esto no significa, por regla general, el comienzo del movimiento, sino el comienzo de la observación de dicho movimiento.
- Entre $t = 0$ y 1 s el cuerpo está moviéndose hacia la posición $x = 0{,}8$ m. En el siguiente segundo recorre otros 0,8 m. En el tercer segundo alcanza la posición de 2,4 m y así sucesivamente. Al cabo de los 6 s se interrumpe el gráfico y nuestra información termina.

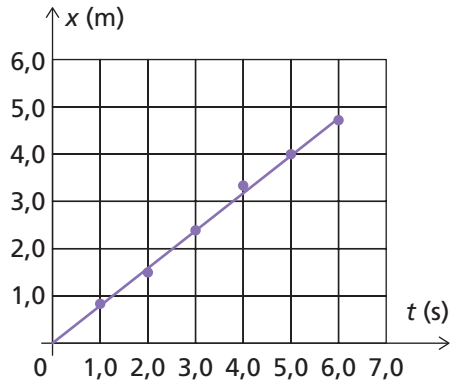


Fig. 2.13 Representación gráfica del comportamiento de la velocidad para un cuerpo con MRU

- Como conocemos, el que la gráfica sea una recta nos indica que la posición varia linealmente en el trascurso del tiempo. Por otra parte, la inclinación de la recta (su pendiente) nos indica si el cambio de posición en cada intervalo de tiempo es mayor o menor, es decir que tan rápido cambia la posición o lo que es lo mismo la rapidez o el módulo de la velocidad con que se mueve el cuerpo. También nos indica la proyección de la velocidad pues el gráfico puede tener en cuenta si la velocidad está dirigida en el sentido positivo o negativo del eje de coordenadas.
- El cálculo de la proyección de la velocidad puede hacerse con facilidad a partir de la gráfica. A estos efectos basta con buscar su pendiente, es decir el cociente $\Delta x / \Delta t$, entre dos puntos cualesquiera sobre la recta. Por ejemplo, para este caso:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4,8 - 0}{6 - 0} = 0,8 \text{ m/s}$$

Por supuesto, es posible obtener mucha más información valiosa a partir de las gráficas del movimiento, lo que se verá paulatinamente.

En el caso del MRU la gráfica de la velocidad en función del tiempo no resulta muy relevante pues es constante.

Problema resuelto 2.1

Un tren se mueve con velocidad constante y recorre una distancia de 400 m durante un tiempo de 25,0 s. Calcula el valor de la velocidad del tren.

Solución

Como la velocidad es constante (eso implica que no cambian ni su valor ni su dirección y sentido) estamos en presencia de un cuerpo animado de MRU.

En esta situación el valor de la velocidad (o la rapidez) lo podemos calcular, suponiendo que el tren se comporta como un cuerpo puntual, a partir de la ecuación fundamental del MRU:

$$\vec{S} = \vec{S}_0 + \Delta\vec{S}$$

Si colocamos el sistema de coordenadas, ligado a la Tierra, con el sentido positivo del eje de las *X* orientado en la dirección del movimiento, se puede escribir la ecuación, en términos de las proyecciones en el eje *X*, de la forma:

$$x = x_0 + v_x \Delta t$$

Si, además, el origen de coordenadas es tal que $x_0 = 0$, la ecuación queda como:

$$x = v_x \Delta t$$

De donde se obtiene que:

$$v_x = \frac{x}{\Delta t}$$

Como, por datos, $x = 400$ m y $\Delta t = 25{,}0$ s, sustituyendo:

$$v_x = \frac{400 \text{ m}}{25{,}0 \text{ s}}$$

$$v_x = 16 \text{ m/s}$$

Problema resuelto 2.2

En la figura 2.14 están representadas las gráficas del movimiento de un automóvil (1) y de un ciclista (2), que se mueven uno al encuentro del otro. Determina:

a) La rapidez del movimiento y la proyección de la velocidad del automóvil y del ciclista.
b) El lugar (la posición) y el tiempo al cabo del cual se encuentran.

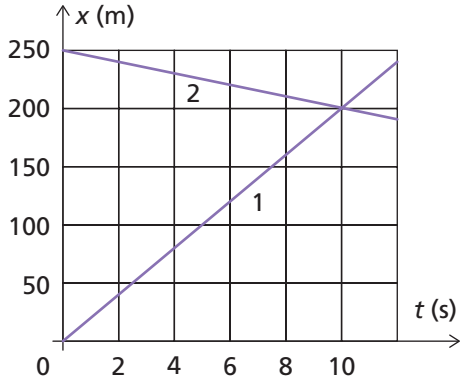


Fig. 2.14

Solución:

En general, las gráficas de $x = f(t)$ permiten resolver de manera directa el problema fundamental de la Mecánica, es decir determinar la posición de cuerpo y su velocidad en cualquier instante.

Recuerda que la gráfica de $x = f(t)$ para el MRU es una recta y que su pendiente coincide numéricamente con la velocidad del cuerpo puntual en cuestión. También que, en general, la ecuación de la recta es $y = mx + b$, donde m es la pendiente, x la variable independiente y b el intercepto con el eje Y.

En este caso, la gráfica (1) es una recta cuya pendiente es:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{200 - 0}{10 - 0} = 20$$

Que coincide numéricamente con la proyección de la velocidad (20 m/s) y que en el MRU coincide a su vez con la rapidez que es de 20 m/s

También se puede obtener este resultado a partir de la ecuación:

$$x = x_0 + v_x t$$

De donde se obtiene que:

$$v_x = \frac{x - x_0}{t}$$

$$v_x = \frac{200\ \text{m} - 0\ \text{m}}{10\ \text{s}} = \frac{200\ \text{m}}{10\ \text{s}}$$

$$v_x = 20\ \text{m/s}$$

Se debe notar que el valor de la proyección de la velocidad es positivo, cosa esta esperada, pues, tanto el desplazamiento como la velocidad están dirigidos en el sentido positivo del eje *X*.

La gráfica (2) es también una recta, pero su pendiente es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{200 - 250}{10 - 0} = -5$$

Esto nos indica que el ciclista está animado de un MRU cuya rapidez es de 5 m/s. En este caso la proyección de la velocidad es de -5 m/s pues se mueve en el sentido negativo del eje de las *X*.

Las gráficas nos indican también, directamente, que el automóvil y el ciclista se encuentran en un punto situado a 200 m del origen de coordenadas y que lo hacen al cabo de 10 s.

Problema resuelto 2.3

Dos ciclistas parten desde las ciudades *A* y *B* separadas una distancia de 50 km. Los ciclistas viajan al encuentro uno del otro por una carretera rectilínea, el número uno con una rapidez de 10 km/h y el otro de 20 km/h.

a) Construye las gráficas de posición en función del tiempo para cada uno de los ciclistas.
b) Construye las gráficas de la proyección de la velocidad en función del tiempo para cada uno de los ciclistas.
c) A partir de las gráficas, determina la distancia recorrida por los ciclistas al cabo de 2 h.
d) ¿Al cabo de qué tiempo se cruzan los ciclistas?

Solución:

a) De acuerdo con el enunciado del problema, podemos considerar que los ciclistas, cuyas posiciones iniciales conocemos, se mueven uno hacia el otro, y con movimiento rectilíneo uniforme de velocidad conocida en cada caso, $\vec{v}_1$ para el ciclista 1 y $\vec{v}_2$ para el ciclista 2. En la figura 2.15 se representa un esquema de la situación planteada por el problema.

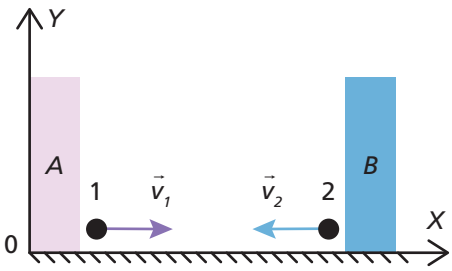


Fig. 2.15

Si tomamos como cuerpo de referencia la posición inicial del ciclista 1, por eje de coordenadas el *OX* y como instante inicial el valor $t = 0$; entonces la posición inicial del ciclista 2 se corresponde con la ciudad *B.*

Primero se deben construir las gráficas de $x = f(t)$ y $v_x = f(t)$ de ambos ciclistas (incisos a y b), por último, determinar a partir de las gráficas trazadas los desplazamientos realizados por cada ciclista en un intervalo de 2 h y la posición en la que se encuentran los ciclistas al cruzarse.

Conocemos que las gráficas de la posición en función del tiempo, correspondientes a movimientos rectilíneos uniformes, son segmentos de rectas inclinados ciertos ángulos con respecto al eje del tiempo, que dependen del valor de las velocidades respectivas. Además, sabemos que para trazar una recta en un plano es necesario conocer al menos las coordenadas de dos de sus puntos.

En nuestro caso y de acuerdo con el sistema de referencia adoptado, conocemos las coordenadas correspondientes a las posiciones iniciales de cada ciclista. Nos hace falta poder determinar las coordenadas correspondientes a otra posición, cualquiera, de los ciclistas.

Para lograr este propósito es necesario, primero, obtener las ecuaciones particulares de la posición de cada ciclista en función del tiempo. Con esta finalidad emplearemos la ecuación general de la posición en función del tiempo para un cuerpo en movimiento, que escrita en proyecciones resulta ser:

$$x = x_0 + v_x \Delta t \qquad (1)$$

Por lo tanto, para el ciclista 1:

$$x_1 = v_{x_1} t \qquad (2)$$

Análogamente, para el ciclista 2:

$$x_2 = x_0 + v_{x_2} t \qquad (3)$$

En ambas ecuaciones se ha tomado $\Delta t = t$ ya que $t_0 = 0$. En el caso del ciclista 1 se tiene también que $x_0 = 0$

Al sustituir los valores de los datos en (2) y (3), obtenemos las ecuaciones particulares, es decir:

$$x_1 = (10 \text{ km/h})t \qquad (4)$$

$$x_2 = 50 \text{ km} - (20 \text{ km/h})t \qquad (5)$$

Con las ecuaciones (4) y (5) podemos obtener las posiciones de los ciclistas en cualquier instante de tiempo. Para obtener los segundos pares de coordenadas, evaluemos las ecuaciones (4) y (5) para el instante $t = 5$ h, entonces:

$$x_1 \text{ (5 h)} = \text{(10 km/h) (5 h)} = 50 \text{ km}$$

$$x_2 \text{ (5 h)} = 50 \text{ km} - \text{(20 km/h) (5 h)} = -50 \text{ km}$$

Con estos valores de las posiciones de los ciclistas para el instante $t = 5$ h, obtenemos los pares coordenados que necesitábamos (5 h ; 50 km) para el ciclista 1 y (5 h ; –50 km) para el 2.

En las figuras 2.16 a) y 2.16 b) se muestran, por separado, las gráficas de ambos ciclistas.

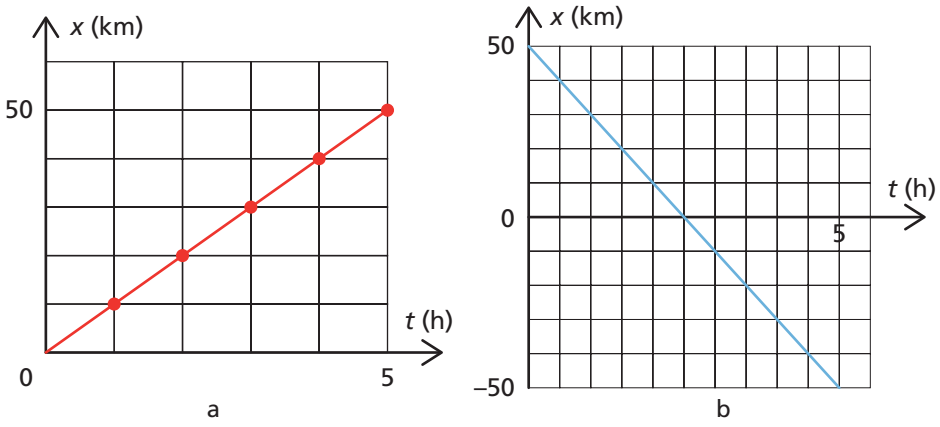


Fig. 2.16 a) ciclista 1; b) ciclista 2

El análisis de ambas gráficas nos permite formular las conclusiones siguientes:

En el instante $t = 5$ h el ciclista 1 llega a la ciudad B, mientras que el ciclista 2 se encuentra a 50 km a la izquierda de la ciudad A.

El ciclista 2 llega a la ciudad A en el instante $t = 2{,}5$ h.

Si se representa las dos gráficas en un mismo diagrama (figura 2.17) se puede también hacer un análisis comparativo y obtener más información.

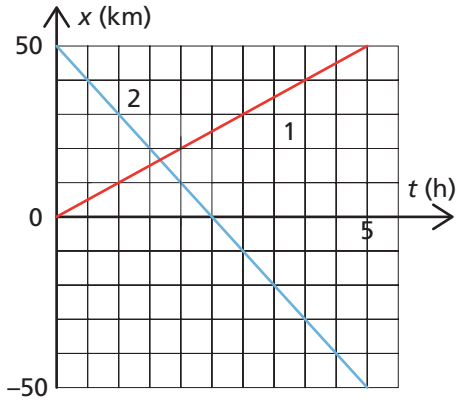


Fig. 2.17 Gráficas de los valores de la posición en función del tiempo para los ciclistas

b) Como las velocidades de ambos cuerpos son constantes, las gráficas para $v = f(t)$ serán rectas paralelas al eje t de los tiempos ya que la velocidad no depende del tiempo en este tipo de movimiento (figura 2.18).

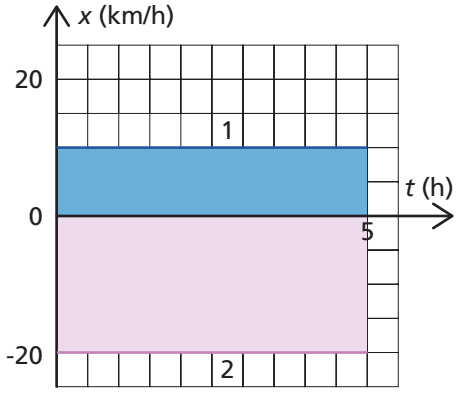


Fig. 2.18 Gráficas de las proyecciones de la velocidad en función del tiempo para ambos ciclistas

La proyección de la velocidad del ciclista 2 es negativa pues su dirección es contraria a la seleccionada como sentido positivo del eje de las *X*.

c) La distancia recorrida por los ciclistas al cabo de 2 h (o de otro valor cualquiera de t) se puede determinar a partir de las ecuaciones del MRU, pero también directamente a partir de las gráficas (como se pide en este inciso). Para hacer esto, basta con tener en cuenta que el área comprendida entre cada recta representativa de la velocidad y el eje t

(zonas sombreadas en la figura 2.18), es numéricamente igual a la proyección del desplazamiento (demuéstralo).

En este caso cada área viene dada por un rectángulo. Por lo tanto, se puede calcular por medio de la ecuación $A = bh$, donde b es la base del rectángulo y h su altura.

Como en este caso, para ambos ciclistas, t = 2 h, los desplazamientos serán:

$$x_1 = (10 \text{ km/h})\ (2 \text{ h}) = 20 \text{ km}$$
$$x_2 = (-20 \text{ km/h})\ (2 \text{ h}) = -40 \text{ km}$$

d) Debido a que los ciclistas viajan por la misma carretera y en direcciones opuestas, en un instante t los ciclistas se cruzarán, o sea, se encontrarán en la misma posición con respecto a la ciudad A.

Llamemos t, al instante en que los ciclistas se cruzan y x_1 a la posición de los ciclistas respecto a la ciudad A en ese instante, entonces al evaluar, para estos valores, las ecuaciones particulares de la posición en función del tiempo de ambos ciclistas e igualando, resulta:

$$x_1 = v_{x_1} t$$
$$x_2 = x_{0_2} + v_{x_2} t$$
$$v_{x_1} t = x_{0_2} + v_{x_2} t$$

De donde, despejando t:

$$t = \frac{x_{o_2}}{v_{x_1} - v_{x_2}} \qquad t = \frac{50 \text{ km}}{10 \text{ km/h} - (-20 \text{ km/h})} \qquad t = 1{,}7 \text{ h}$$

La posición de los ciclistas con respecto a la ciudad A la podemos calcular si sustituimos el valor de t en una cualquiera de las ecuaciones de la posición de los ciclistas:

$$x_1 = v_{x_1} t = (10 \text{ km/h})\ (1{,}7 \text{ h}) = 17 \text{ km}$$

De esta forma determinamos que al transcurrir 1,7 h después de comenzar el movimiento, ambos ciclistas se encuentran a 17 km de la ciudad A.

Es importante considerar que, en una gráfica de posición en función del tiempo, el valor de la pendiente de la función lineal representada se corresponde numéricamente con el valor de la proyección de la velocidad del movimiento del cuerpo

¡Cuidado!

Si se escribe $x = 10 + 2t$ se puede cometer un error al omitir las unidades de medidas. Para evitar que esto ocurra se puede escribir $x = (10 + 2t)$ (m;s)

Problema resuelto 2.4

Dos carritos animados de movimiento rectilíneo uniforme se desplazan uno al encuentro del otro, con rapideces de 80,0 km/h y 100 km/h. En un punto se cruzan y continúan su camino (figura 2.19). Determina:

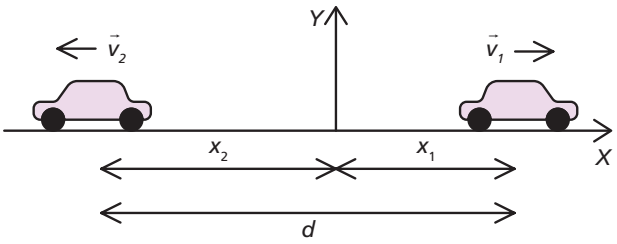


Fig. 2.19

a) La posición de cada carrito al cabo de 30 min del encuentro.
b) La distancia que los separa en ese instante.

Solución:

Como origen de coordenadas elijamos el lugar del encuentro y como origen de registro del tiempo el instante en que se cruzaron. El eje de coordenadas (representado por la letra *X)* lo dirigimos de izquierda a derecha. Señalemos por $\vec{v}_1$ la velocidad del carro que se mueve a 80,0 km/h y por $\vec{v}_2$ la del carro que se mueve a 100 km/h.

De acuerdo con el sistema de referencia adoptado, las proyecciones de las posiciones iniciales x_1 y x_2 de los carros, son nulas, mientras que la proyección de la velocidad v_{1x} del automóvil 1 es positiva ya que su vector velocidad $\vec{v}_1$ está dirigida en la misma dirección que el eje *X.* Su valor es igual a 80,0 km/h Por otra parte la proyección v_{2x} de la velocidad del automóvil 2 es negativa ya que el vector velocidad $\vec{v}_2$ está dirigido en sentido contrario a la dirección positiva del eje *X.* por tanto su valor es –100 km/h.

Debemos calcular las posiciones x_1 y x_2 de los carros al cabo de 30 min, así como la distancia *d* que separa los carros en ese momento.

a) Para determinar la posición de los carros, se puede utilizar la ecuación de la posición de un cuerpo, animado de MRU, en función del tiempo.

Si trabajamos con las proyecciones de las cantidades de cada carro sobre el eje de referencia, se tienen las ecuaciones:

$$x_1 = x_{0_1} + v_{x_1} t \qquad x_2 = x_{0_2} + v_{x_2} t$$

Como las posiciones iniciales son cero de acuerdo con los datos, entonces:

$$x_1 = v_{x_1} t \qquad x_2 = v_{x_2} t$$

Para t = 20 min = 0,5 h el resultado es:

$$x_1 = 80{,}0 \text{ km/h} \cdot 0{,}5 \text{ h} = 40{,}0 \text{ km}$$
$$x_2 = -100 \text{ km/h} \cdot 0{,}5 \text{ h} = -50{,}0 \text{ km}$$

Como se aprecia, la coordenada del automóvil 1 es positiva, mientras que la del 2 es negativa; esto significa que el primero se encuentra a 40 km a la derecha de la estación de gasolina, mientras que el segundo está a 50,0 km a la izquierda de la estación.

b) Para determinar la distancia que separa los automóviles basta con sumar las distancias recorridas por cada uno, es decir:

$$d = d_1 + d_2$$

Como las distancias son iguales en valor a los módulos de los desplazamientos realizados por los carros se tendrá que:

$$d = 40 \text{ km} + 50 \text{ km} = 90 \text{ km}$$

Comprueba tus conocimientos

7. Un niño camina con velocidad constante de 2,5 m/s ¿Qué distancia recorre en 15,0 min?

8. Un niño se encuentra a una distancia de 10,0 m de su amiga que está en reposo, él se mueve al encuentro de ella con una velocidad de valor constante 2,5 m/s. Escribe la ecuación del movimiento del niño respecto a su amiga para cuando se:

a) coloca el origen de coordenadas en la amiga con el eje dirigido hacia el niño.
b) coloca el origen de coordenadas en la posición inicial del niño dirigido hacia la amiga.

9. La gráfica de la figura 2.20 muestra cómo varía la coordenada *x* en función del tiempo para dos cuerpos *A* y *B* que se mueven por una trayectoria rectilínea.

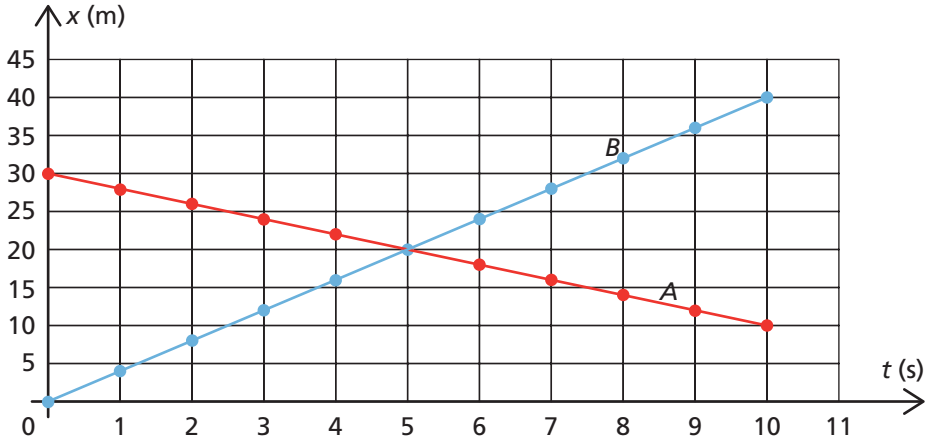


Fig. 2.20

a) ¿Qué tipo de movimiento poseen los cuerpos?
b) ¿Cuál es el valor de la coordenada inicial (x_0) de ambos cuerpos?
c) Calcula el valor de la velocidad de cada cuerpo.
d) ¿Para qué valor de tiempo se igualan las posiciones de ambos cuerpos?
e) Escribe la ecuación del movimiento de cada cuerpo, con los coeficientes numéricos correspondientes de la posición inicial y la velocidad.
f) Calcula el valor del desplazamiento de cada cuerpo para el instante del encuentro.
g) Construye las gráficas de $v = f(t)$ para cada cuerpo y representa en ellas, los valores del desplazamiento calculado en el inciso anterior.

2.3 Relatividad del movimiento. Ecuación de composición de velocidades de Galileo

Relatividad del movimiento

Todos hemos tenido la experiencia de contemplar desde un auto como otro auto viene al encuentro del nuestro y luego se aleja. Suponga, que los autos con velocidades $\vec{v}_A$ y $\vec{v}_B$ medidas respecto a la carretera, se cruzan

como se muestra en las figuras 2.21 y 2.22. Cuando se observa al auto B desde A, comprobamos que, en el primer caso, el cruce es más rápido. Por tanto, la velocidad del auto *B* respecto al *A,* no es la misma que respecto a la carretera, incluso en el caso de la figura 2.21, si los valores de las velocidades respecto a la carretera fueran iguales, los autos, uno respecto al otro, **estarían en reposo.**

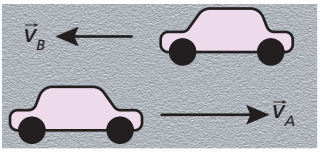


Fig. 2.21 Movimiento de autos en la misma dirección y sentido contrario

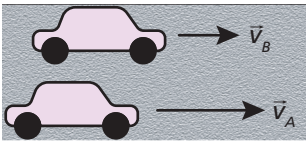


Fig. 2.22 Movimiento de autos en la misma dirección y sentido

Como sabes, otro caso, donde se aprecia que el estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme depende del sistema de referencia que tomemos, es el de si viajamos en un ómnibus que se mueve por una carretera recta con velocidad de valor constante.

Cuando estamos sentados en el aula o en la casa, estamos en reposo respecto al sistema Tierra. Pero también estamos en movimiento, por ejemplo, respecto al Sol. Quiere esto decir, que estar en movimiento o reposo es algo relativo, va a depender del sistema de referencia respecto al cual se analice el cuerpo.

De la Historia

Galileo Galilei realizó trabajos donde se vislumbra su idea acerca del principio de la relatividad del movimiento. Este principio fue formulado por él en 1638 y lo describe de la manera siguiente:

"Encerraos con un amigo en la cabina principal bajo la cubierta de un barco grande, y llevad con vosotros moscas, mariposas, y otros pequeños animales voladores... colgad una botella que se vacíe gota a gota en un amplio recipiente colocado por debajo de esta... haced que el barco vaya con la velocidad que queráis, siempre que el movimiento sea uniforme y no haya fluctuaciones en un sentido u otro.... Las gotas caerán... en el recipiente inferior sin desviarse a la popa, aunque el barco haya avanzado mientras las gotas están en el aire... las mariposas y las moscas seguirán su vuelo por igual hacia cada lado, y no sucederá que se concentren en la popa, como si cansaran de seguir el curso del barco..."

Ecuación de composición de velocidades de Galileo

¿Qué forma tendrá la ecuación para determinar la velocidad de un cuerpo respecto a un sistema de referencia en movimiento, por ejemplo, un niño que se mueve dentro de un vagón con velocidad constante a la derecha?

Supongamos que tenemos un vagón, que se mueve en línea recta con velocidad $\vec{u}$ respecto a Tierra. Si se considera que el movimiento del vagón es en el sentido positivo del eje de las *X* (como se ilustra en la figura 2.23) y que en el instante inicial se encuentra en el origen de coordenadas, entonces, al cabo de cierto intervalo de tiempo el vagón se habrá desplazado en $\Delta\vec{S}$.

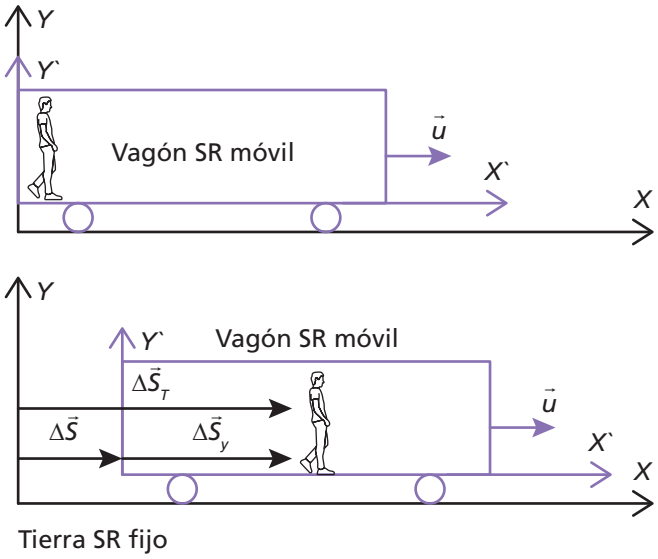


Fig. 2.23 Movimiento del niño dentro del vagón (sistema de referencia móvil) respecto al sistema de referencia Tierra elegido como fijo

Si un niño camina sobre el piso del vagón con una velocidad $\vec{V}'$, respecto al vagón y en la misma dirección y sentido que el vagón respecto a Tierra, al cabo del mismo intervalo de tiempo en que el vagón se desplazó en $\Delta\vec{S}$ el niño se habrá desplazado en $\Delta\vec{S}_V$, en relación con el del vagón.

$\Delta\vec{S}$: Desplazamiento del vagón como un todo (sistema de referencia en movimiento) en relación con la Tierra (SR fijo).

$\Delta\vec{s}_T$: Desplazamiento del niño en relación con la Tierra (SR fijo).

$\Delta\vec{S}_V$: Desplazamiento del niño en relación con el vagón (SR móvil).

Al sumar vectorialmente los vectores de desplazamiento (figura 2.24a) se obtiene que:

$$\Delta\vec{S}_T = \Delta\vec{S} + \Delta\vec{S}_V$$

Dividiendo entre el tiempo ambos miembros de la ecuación vectorial de la suma de desplazamientos queda que:

$$\frac{\Delta\vec{S}_T}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{S}}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{S}_V}{\Delta t}$$

$$\vec{V} = \vec{v}' + \vec{u} \qquad (2,7)$$

Que es la ecuación de composición de velocidades de Galileo (Mecánica Clásica).

Donde $\vec{v}$ es la velocidad del niño en relación con el sistema fijo (la Tierra en este caso), $\vec{u}$ la velocidad del sistema móvil en relación con la Tierra (también denominada velocidad de arrastre) y $\vec{v}'$ la velocidad del niño en relación con el sistema móvil (el vagón).

En la figura 2.24 b) se representa la suma de vectores correspondiente a la ecuación (2.7).

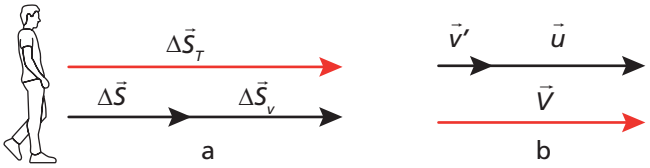


Fig. 2.24 Representación de: a) desplazamiento del niño según los sistemas de referencia; b) composición de velocidades

Generalmente cuando aplicamos la ecuación anterior hay dos sistemas de referencias, uno en movimiento respecto al otro y un cuerpo de estudio (punto material). La velocidad del cuerpo en estudio dependerá del sistema que se considere.

De la historia

La ecuación de composición de velocidades $\vec{V} = \vec{v}' + \vec{u}$ fue formulada por Galileo Galilei (15-02-1564 al 8-01-1642), físico italiano considerado uno de los científicos más grandes de todos los tiempos, pues sus métodos de trabajo sirvieron de base para el desarrollo posterior de las ciencias,

fundamentalmente la Física y la Astronomía. Estudió el movimiento mecánico, que permite hoy en día explicar muchos fenómenos físicos. Observó la Luna y sus cráteres, perfeccionó el telescopio, profundizó en el estudio del movimiento de los planetas y confirmó la teoría de que estos se mueven alrededor del Sol. Sus ideas entraron en contradicción con las doctrinas religiosas del tiempo que le tocó vivir, aunque no está demostrado que al enfrentarse a la inquisición dijera *eppur si muove* en español "pero sin embargo se mueve" refiriéndose supuestamente a que la Tierra no era el centro del universo y se movía. Esa frase, dicha o no, pasó la prueba del tiempo y llegó a nuestros días, como una prueba de que la verdad y el conocimiento triunfan al final. Lo que sí es incuestionable es el aporte que hizo el científico al desarrollo de la cultura universal.

Problema resuelto 2.5

Según la figura 2.25, determina:

a) El valor de la velocidad del auto *A* respecto a un observador en Tierra, si se conoce que el valor de su velocidad respecto al auto *B* es de 70,0 km/h y que el valor de la velocidad del auto B es de 50,0 km/h respecto a Tierra.

b) ¿Qué distancia recorrió cada auto trascurrido 10 min y a qué distancia estará uno del otro respecto a un observador en la Tierra?

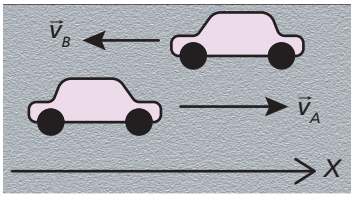


Fig. 2.25 Movimiento del auto A respecto al auto B (sistema de referencia móvil) y respecto a la Tierra (sistema de referencia fijo)

Solución:

a) Atendiendo al sistema de coordenadas (fijo a la Tierra) mostrado en la figura 2.24, el auto A se mueve en el sentido positivo del eje *X* y el *B* en el sentido negativo.

Si se considera el auto B como sistema de referencia móvil, se puede determinar la velocidad del auto A respecto a la Tierra utilizando la ecuación de composición de velocidades $\vec{V} = \vec{v}' + \vec{u}$, que escrita para las proyecciones será:

$$V_{A_x} = v'_{A_x} - v_B$$

Sustituyendo los valores

$$V_{A_x} = 70 \text{ km/h} - 50 \text{ km/h},$$

se obtiene que:

$$V_{A_x} = 20 \text{ km/h}$$

b) La distancia que recorre cada auto respecto al observador en la Tierra se puede determinar con la ecuación $\Delta S_x = v_x \Delta t$
Para el auto A:

$$\Delta S_{A_x} = 20 \text{ km/h } 0{,}12 \text{ h} = 2{,}4 \text{ km}$$

Para el auto B:

$$\Delta S_{B_x} = -50 \text{ km/h } 0{,}12 \text{ h} = -6 \text{ km}$$

Para determinar la distancia entre los autos A y B, sumamos el valor modular de la distancia recorrida por cada uno, respecto a la Tierra:

$$\Delta S_{A_x} + \Delta S_{B_x} = (2{,}4 \text{ km} + 6 \text{ km}) = 8{,}4 \text{ km}$$

Problema resuelto 2.6

Un nadador que puede desarrollar una velocidad de valor igual a 2,0 m/s en aguas tranquilas, decide nadar en un río donde la corriente una velocidad de valor igual a 1,0 m/s respecto a Tierra. Primero nada a favor de la corriente una distancia de 90 m respecto al punto de entrada al río y después regresa al mismo punto, nadando en contra de la corriente.

a) Determina el valor de la velocidad del nadador respecto a la Tierra, cuando nada a favor de la corriente y cuando nada en contra de la ella.
b) ¿Qué tiempo emplea el nadador en cada caso para recorrer los 90 m?

Solución:

a) En la figura 2.26, se representan dos instantáneas del movimiento del nadador, que posee una velocidad v' = 2,0 m/s respecto a la corriente (sistema de referencia móvil) y de la corriente del río, que se mueve con velocidad de valor u = 1,0 m/s respecto a Tierra (sistema de referencia fijo).

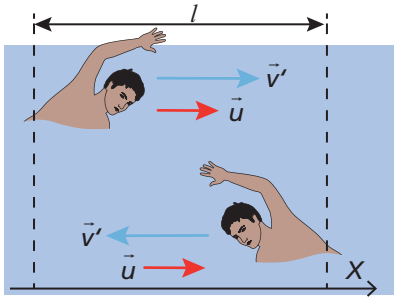


Fig. 2.26 Primero el nadador se mueve a favor de la corriente y después en contra

La persona, que nada una vez a favor de la corriente y después en contra de ella, se desplaza respecto al punto donde se lanza al agua, la distancia l = 90 m.

En el punto donde el comenzó a nadar se coloca el origen de coordenadas, que esta fijo a Tierra.

Para determinar la velocidad $\vec{V}_1$ con que el nada primero a favor de la corriente, vamos a utilizar la ecuación de composición de velocidades, $\vec{V} = \vec{v}' + \vec{u}$, donde $\vec{V}_1$ es la velocidad del nadador respecto a Tierra, $\vec{v}'$ velocidad del nadador respecto al agua, $\vec{u}$ velocidad de la corriente respecto a Tierra. Después de proyectar en el eje X según la misma figura, queda:

$$V_{1_x} = v_x' + u$$

pues los vectores $\vec{v}'$ y $\vec{u}$ están en la dirección y sentido del eje X.

El vector $\vec{V}_1$ es nuestra incógnita, no es necesario al proyectarlo para conocer su sentido (el signo positivo o negativo), pues estará determinado por los otros dos vectores. Sustituyendo por lo valores numéricos:

$$v_{1_x} = 3{,}0 \text{ m/s}$$

Para determinar la velocidad del nadador cuando regresa al punto de entrada al agua, se utiliza nuevamente la ley de composición de velocidades, pero la proyección de la velocidad del nadador es negativa respecto a la corriente.

$V_{2_x} = u - v_x'$. Sustituyendo los datos v_{2_x} = 1 m/s – 2 m/s

V_{2_x} = –1,0 m/s

El signo menos indica que él nada en contra del eje X.

b) Utilizando la ecuación $\vec{S}_x = \vec{S}_{0_x} + \vec{v}_x t$ en este caso $\vec{S}_x$ es el vector de posición final (es positivo) y su módulo es *x,* el vector de posición inicial es cero, pues coincide con el origen de coordenadas, $\vec{v}$ equivale a $\vec{V}_1$. De donde obtenemos $x = v_1 t_1$, de donde:

$$t_1 = \frac{x}{v_1} = 30\ s$$

Para el regreso se tendrá que:

$$0 = x - v_2 t_2$$

Pues ahora la posición final del nadador es cero, la inicial es *x* (positiva), y como nada en el sentido negativo del eje *X*, la proyección de $\vec{v}_2$ es negativa. Queda entonces que:

$$x = v_2 t_2 \qquad \text{o} \qquad t_2 = \frac{x}{v_2} = 90\ \text{s}$$

Comprueba tus conocimientos

10. Pon ejemplos donde se demuestre que el reposo y el MRU son dos fenómenos que dependen solo del sistema de referencia respecto al cual se analicen.

11. Dos autos viajan a velocidades 60 km/h y 40 km/h, si ambos se mueven en la misma dirección y sentido ¿con qué valor de velocidad el chofer del segundo auto observa que el primer auto lo adelanta después del encuentro?

12. Dos autos viajan uno al encuentro del otro con velocidades de valores 60 km/h y 40 km/h. Si ambos se mueven en la misma dirección y sentido contrario.
Calcula el valor de la velocidad del segundo auto respecto al primero.

13. Un ómnibus tiene una longitud 5,0 m y se mueve respecto a la Tierra con una velocidad de valor 36 km/h. Una persona camina dentro del ómnibus con una velocidad de valor 2,0 m/s.

a) Calcula el tiempo del movimiento de la persona, en recorrer dentro del ómnibus, la distancia de 5,0 m.
b) Calcula el valor de la velocidad de la persona respecto a un cuerpo situado en Tierra, si el sentido de su movimiento es contrario al del ómnibus.

14. ***Desafío***. Un auto adelanta a una rastra de longitud 10,0 m. Ambos se mueven en la misma dirección y sentido. El valor de la velocidad de la rastra es 36 km/h y la del auto 72 km/h.

a) ¿Cuál es el valor de la velocidad del auto respecto a la rastra?
b) ¿Cuál es el valor de la velocidad de la rastra respecto al auto?
c) ¿En qué tiempo el auto adelanta a la rastra?
d) ¿Qué distancia habrá recorrido la rastra en el tiempo que el auto le adelantó?
e) ¿Qué distancia habrá recorrido el auto mientras estuvo adelantando a la rastra?
f) ¿Qué distancia tuvo que recorrer el auto según el chofer de la rastra para adelantarla?

15. Una avioneta vuela entre dos ciudades A y B, el tiempo de ida con el aire a favor dura una hora y de regreso con el aire en contra dura hora y media. El módulo de la velocidad de la avioneta es 200 km/h. Determina el valor de la velocidad del viento.

16. Desafío. Entre las ciudades A y B sopla un viento cuya velocidad es de 20 km/h perpendicular a la línea que une las ciudades. La misma avioneta del problema 15 vuela de la ciudad A a la B, con igual rapidez, y llega directamente a ella ¿Bajo qué ángulo tiene volar la avioneta respecto a la dirección entre las ciudades para lograr su objetivo?

2.4 Movimiento variado. Velocidad media y velocidad instantánea

Hasta ahora hemos considerado solo el caso de los cuerpos que se mueven animados de movimiento rectilíneo y uniforme, es decir aquellos en que la velocidad permanece constante.

Si bien este es un caso muy importante, hay muchas situaciones en la que los cuerpos se mueven con velocidad variable, tanto en valor como en dirección y sentido. Por ejemplo, pensando solo en algunas vivencias personales, tenemos el caso de cuando viajamos en un automóvil o en un avión, cuando lanzamos una pelota verticalmente hacia arriba o formando un ángulo con la vertical.

A este tipo de movimiento, en el que la velocidad no permanece constante, se le denomina en general *movimiento variado* y para poder

describirlo resulta necesario introducir algunas nuevas magnitudes físicas.

Rapidez media. Vector velocidad media

Supongamos que un cuerpo recorre la trayectoria *AB* mostrada en la figura 2.27.

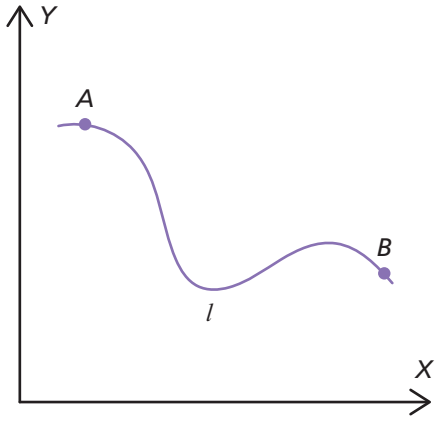


Fig. 2.27 Movimiento de un cuerpo por la trayectoria l

La longitud de la trayectoria recorrida por el cuerpo en ir de la posición *A* hasta la *B* será la distancia recorrida l por ella durante el intervalo de tiempo transcurrido en el cambio de posición. La relación existente entre la distancia recorrida y el tiempo empleado en recorrerlo se denomina *rapidez media* y se denota por v_m. Esta se expresa matemáticamente como:

$$v_m = \frac{l}{t} \qquad (2.8)$$

De la definición de rapidez media se ve que esta es una magnitud escalar, ya que es el resultado de dividir los escalares l y t. La rapidez media caracteriza la distancia que recorrió un cuerpo en una unidad de tiempo determinada.

El vector desplazamiento $\Delta\vec{S}$ que resulta del cambio de posición de la partícula en ir desde A hasta B, aparece representado en la figura 2.28.

La relación existente entre el vector desplazamiento $\Delta\vec{S}$ y el tiempo transcurrido t se denomina *velocidad media* y se expresa matemáticamente de la siguiente forma:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{S}}{\Delta t} \qquad (2.9)$$

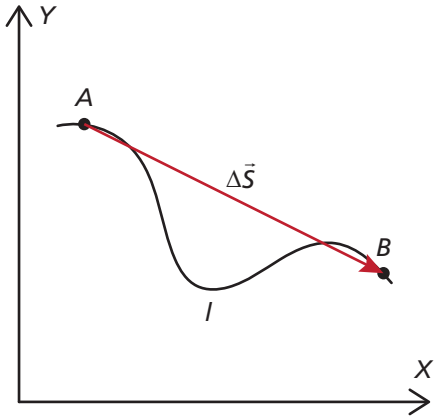


Fig. 2.28 Vector desplazamiento entre las posiciones *A* y *B*

Puede verse que la velocidad media es un vector en la misma dirección y sentido que el vector $\Delta\vec{S}$ y cuyo módulo es $\frac{1}{\Delta t}$ veces el módulo de $\Delta\vec{S}$.

Por ejemplo, en el caso de dos ciudades que están separadas una distancia de 80 km la carretera que las une tiene una longitud de 100 km tendremos que si un automóvil va de una ciudad a la otra en 2 h, su rapidez media será:

$$v_m = \frac{l}{\Delta t}$$

$$v_m = \frac{100\ \text{km}}{2\ \text{h}} = 50\ \text{km/h}$$

y su velocidad media:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{S}}{\Delta t}$$

$$v_m = \frac{80\ \text{km}}{2\ \text{h}} = 40\ \text{km/h}$$

Luego la velocidad media del auto será un vector en la misma dirección y sentido que el vector $\Delta\vec{S}$, cuyo valor es de 40 km/h

De lo anterior se infiere que el único caso en que coinciden la rapidez media y el módulo de la velocidad media es aquél en que el movimiento es unidireccional y en un mismo sentido, pues en este caso coincide la distancia recorrida con el módulo del vector desplazamiento. Por consiguiente, las diferencias que existen entre rapidez media y velocidad media son:

Velocidad media	Rapidez media
1) Es una magnitud vectorial	1) Es una magnitud escalar
2) No depende de la trayectoria sino de la posición inicial y final	2) Depende de la trayectoria
3) Es el cociente de dividir el vector desplazamiento $\Delta\vec{S}$ entre el tiempo transcurrido Δt	3) Es el cociente de dividir la distancia recorrida l entre el tiempo transcurrido Δt
$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{S}}{\Delta t}$	$v_m = \frac{l}{\Delta t}$

Rapidez instantánea. Vector velocidad instantánea

La rapidez de una partícula en un cierto instante o en determinado punto de su trayectoria se denomina *rapidez instantánea. A* esta magnitud la denotaremos por *v.* Para determinar la rapidez instantánea de un móvil se hace necesario medir la distancia recorrida por este durante una fracción pequeñísima de tiempo, medida a partir del instante dado, y dividir el espacio observado entre la fracción de tiempo. Podemos citar como ejemplo de rapidez instantánea, la que marca el velocímetro de un automóvil, el cual indica en cada instante su rapidez.

Similarmente, la velocidad de una partícula en un cierto instante o en determinado punto de su trayectoria se denomina velocidad instantánea $\vec{v}$. Para determinar el módulo de la velocidad instantánea de un móvil se hace necesario medir el módulo del desplazamiento efectuado por el mismo durante una fracción pequeñísima de tiempo, medida a partir del instante dado y dividir dicho módulo entre la fracción de tiempo.

La dirección del vector velocidad instantánea será la de la tangente a la trayectoria en el punto considerado y su sentido el del movimiento (figura 2.29).

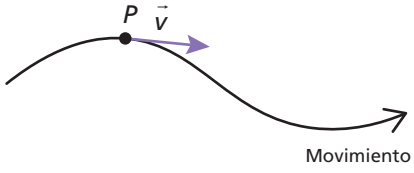


Fig. 2.29 Vector velocidad

Para aclarar lo antes dicho observemos la figura 2.30, en la cual se representa la trayectoria descrita y por ende la distancia *S* recorrida por una partícula.

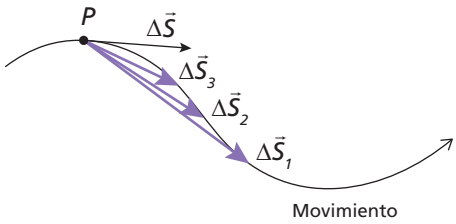


Fig. 2.30

Es evidente que a medida que el tiempo transcurrido desde que la partícula pasa por *P,* se considere más corto, el desplazamiento efectuado en ese intervalo de tiempo será cada vez menor, al mismo tiempo que tiende a ser tangente a la trayectoria (en tanto que la cuerda tiende a coincidir con el arco). Consecuentemente el vector velocidad instantánea será tangente a la trayectoria, ya que su dirección y sentido coinciden con los del vector desplazamiento.

Resulta además que el valor de la velocidad instantánea en un punto es igual a la rapidez instantánea en ese punto, ya que por haber tomado para ambas definiciones dos puntos muy cercanos, la dirección del vector desplazamiento se confunde con la trayectoria seguida, o sea, el valor de dicho vector coincide con la distancia recorrida.

Es conveniente destacar las siguientes características de la velocidad y rapidez instantánea:

- La rapidez instantánea es una magnitud escalar.
- La velocidad instantánea es una magnitud vectorial.
- El valor de la velocidad instantánea es igual a la rapidez instantánea.
- El vector velocidad instantánea es tangente a la trayectoria en el punto considerado.
- El sentido y la dirección del vector velocidad instantánea está determinado por el sentido y la dirección del desplazamiento.
- Las unidades de medida en que se expresan ambas magnitudes son las que resultan de dividir una unidad de longitud entre una unidad de tiempo.

Problema resuelto 2.7

Un automóvil se movió durante 6 h según una trayectoria rectilínea en dirección horizontal hacia el Este. Durante la primera hora de su recorrido se mantuvo constante la velocidad de valor igual a 30 m/s. Durante las restantes 5 h, se movió con una velocidad constante de 13 m/s. Determina:

a) El valor de la velocidad media durante todo el movimiento.
b) El desplazamiento del automóvil para el intervalo de las dos primeras horas del movimiento.

Solución:

a) Para determinar la velocidad media del movimiento en el intervalo de tiempo Δt = 6h, utilizaras la ecuación:

$$\vec{v}_{med} = \frac{\Delta \vec{S}_T}{\Delta t}$$

$$v_{med_x} = \frac{\Delta S_{1_x} + \Delta S_{2_x}}{\Delta t}$$

$$v_{med_x} = \frac{v_{1_x} \cdot \Delta t_1 + v_{2_x} \cdot \Delta t_2}{\Delta t}$$

Sustituyendo los datos:

$$v_{med_x} = \frac{30 \text{ km/h} \cdot 1 \text{ h} + 13 \text{ km/h} \cdot 5 \text{ h}}{6 \text{ h}} = 15{,}8 \text{ km/h}$$

b) El desplazamiento del automóvil para las dos primeras horas se determina con el valor de la velocidad media calculada para Δt = 6 h.

$$\Delta S_x = v_{x_{med}} \Delta t$$

Sustituyendo los datos:

$$\Delta S_x = 15{,}8 \text{ km/h} \cdot 2 \text{ h}$$

$$\Delta S_x = 31{,}6 \text{ km} \approx 32 \text{ km}$$

Comprueba tus conocimientos

17. ¿A qué se denomina velocidad media?

18. ¿Es posible, conociendo la velocidad media de un cuerpo, obtenida para un intervalo de tiempo determinado, calcular el desplazamiento realizado por el cuerpo en cualquier intervalo de tiempo?

19. ¿Cómo se define la velocidad instantánea del movimiento de un cuerpo?

2.5 Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado

En el epígrafe anterior estudiaste que, durante el movimiento variado de un cuerpo, la velocidad instantánea cambia constantemente en cada punto de la trayectoria.

En este epígrafe estudiarás, de los movimientos rectilíneos variados, el más sencillo de todos: *el movimiento rectilíneo uniformemente variado* de un cuerpo.

El **movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV)** es aquel movimiento en el cual la velocidad instantánea varía uniformemente, es decir, la aceleración es constante, tanto en magnitud como en dirección y sentido. Como en el movimiento rectilíneo los vectores velocidad y desplazamiento son colineales con el eje del movimiento, la aceleración tendrá también la dirección de este eje.

> En síntesis, el movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV) es el movimiento mecánico donde el vector aceleración permanece constante.

Puede demostrarse en este movimiento, de manera análoga a como se hizo con la velocidad media e instantánea en el movimiento rectilíneo uniforme, que la aceleración instantánea, en el caso del movimiento rectilíneo uniformemente variado, en cualquier punto de la trayectoria es igual a la aceleración media entre dos instantes cualesquiera.

De ahí que si llamamos $\vec{v}_0$ a la velocidad inicial que tiene el móvil cuando comenzamos a analizar el movimiento, es decir, a medir el tiempo transcurrido; y $\vec{v}$ a la velocidad final que tiene al cabo de un intervalo de tiempo Δt, la expresión de la aceleración será:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0} \qquad (2.10)$$

Como en el caso de un cuerpo animado de MRUV la aceleración tiene la misma dirección de la velocidad, aunque puede tener el mismo sentido o el sentido contrario, lo más sencillo es trabajar con las proyecciones de estos vectores sobre el eje de coordenadas seleccionado. En lo adelante trabajaremos de esta manera.

De esta manera, para la proyección de $\vec{a}$ en el eje *x* tendremos que:

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t} \qquad (2.11)$$

Donde se considera que $t_o = 0$, v_x la proyección en el eje *x* de la velocidad final y v_{o_x} la proyección en el eje *x* de la velocidad inicial.

Despejando v_x en (2.11) se obtiene que:

$$v_x = v_{o_x} + a_x t \qquad (2.12)$$

Por otra parte, en el caso del MRUV, se puede comprobar que para la velocidad media:

$$v_{med_x} = \frac{v_x + v_{o_x}}{2} \qquad (2.13)$$

Es decir, que la velocidad media es igual a la semisuma de las velocidades.

Pero a partir de la definición general para la velocidad media se puede escribir que:

$$v_{med_x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x + x_o}{t - t_o} \qquad (2.14)$$

Igualando (2.13) con (2.14) y despejando Δx:

$$\Delta x = \frac{1}{2}\left(v_x + v_{ox}\right)\Delta t \qquad (2.15)$$

Sustituyendo en (2.15) el valor de v_x dado por (2.12) considerando que $t_o = 0$, queda que:

$$x = x_0 + v_{0_x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \qquad (2.16)$$

Por otra parte, al despejar t en (2.12), sustituir el valor obtenido en (2.13) y simplificar se llega a la expresión:

$$v_x^2 = v_{0_x}^2 + 2a_x x \qquad (2.17)$$

Las ecuaciones (2.12) y (2.16) permiten calcular los valores de la posición x y velocidad v_x en cualquier instante de tiempo t, es decir son las ecuaciones fundamentales del MRUV.

Por otra parte, recordar (2.15) y (2.17) puede ser útil para resolver algunos problemas de manera más rápida.

En resumen, para el MRUV tenemos que:

$$x = x_o + v_{0_x}\Delta t + \frac{1}{2} a_x \Delta t^2 \qquad v_x^2 = v_{0_x}^2 + 2a_x \Delta x$$

$$v_x = v_{o_x} + a_x \Delta t \qquad \Delta x = \frac{1}{2}\left(v_x + v_{0_x}\right)\Delta t$$

Puede ser útil destacar que si el valor de la velocidad final v es mayor que el de la velocidad inicial v_o, el sentido del vector aceleración $\vec{a}$ coincide con el sentido del vector velocidad $\vec{v}$. En este caso se dice que el cuerpo se mueve con *un movimiento uniformemente variado con incremento del valor de su velocidad o acelerado*. Tal es el caso, por ejemplo, del movimiento de un ómnibus que al arrancar desde una parada incremente su velocidad de manera uniforme.

Si el valor de la velocidad final v es menor que el de la velocidad inicial v_o, entonces, la variación del valor de la velocidad, el sentido de la aceleración es contrario a la del vector velocidad inicial. Se dice entonces, que el cuerpo se mueve con un movimiento uniformemente con disminución del valor de su velocidad o retardado.

Tal es el caso de un móvil cuando al aplicar los frenos disminuye el valor de su velocidad de manera uniforme hasta detenerse.

De la historia

Salviati, Sagredo y Simplicio discuten un manuscrito, en los *Diálogos,* de a quien ellos llaman "nuestro académico", quien no es más que el propio Galileo. En esa discusión llegan a definir qué es un movimiento uniformemente acelerado.

"…llamamos a un movimiento uniforme cuando distancias iguales son recorridas durante intervalos iguales, en la misma forma también podemos… imaginarnos un movimiento igualmente uniforme y continuamente acelerado cuando, durante cualquier intervalo semejante, se le dan iguales incrementos de velocidad…"

Esta idea se contrapone a la que sostenía Aristóteles, que no era más que considerar al movimiento uniformemente acelerado como aquel en que "su velocidad aumenta en proporción al espacio recorrido", según argumenta Sagredo.

O sea, que para Galileo sería matemáticamente: $a = \dfrac{\Delta V}{\Delta t}$ y para Aristóteles la expresión sería: $a = \dfrac{\Delta V}{\Delta S}$. ¿Por qué la idea de Aristóteles está errada?

¡Cuidado!

En muchas ocasiones se comete error al interpretar el valor de la aceleración del movimiento de un cuerpo. Por ejemplo, la aceleración de la gravedad es y se interpreta a menudo de la siguiente forma: la velocidad varía en 9,8 m/s^2. Lo correcto es que: la velocidad varía en 9,8 m/s en cada segundo del movimiento.

Problema resuelto 2.8

Un auto que se mueve en línea recta con una velocidad de valor igual 60 km/h, frena y recorre 2 000 m hasta detenerse. Si la aceleración es constante, calcula su valor y el tiempo que demora el auto en detenerse.

Solución:

En la figura 2.31 se representa la situación planteada. En este boceto se toma el sentido positivo del eje de las X orientado hacia la derecha, se

asume que comienza a frenar cuando pasa por el origen de coordenadas y se considerará como instante inicial $t_o = 0$

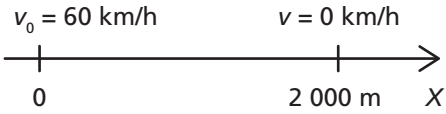


Fig. 2.31

Dado los datos del problema, el valor de la aceleración, supuesto el auto como un cuerpo puntual, se puede hallar directamente a partir de la ecuación:

$$v_x^2 = v_{0_x}^2 + 2a_x x$$

Si se despeja el valor de la aceleración se obtiene que:

$$a_x = \frac{v_x^2 - v_{0_x}^2}{2x}$$

Al sustituir por los datos correspondientes (previa conversión del valor de la velocidad a metro por segundo, m/s, tenemos que:

$$a_x \approx -0{,}07 \text{ m/s}^2$$

El signo negativo de la proyección del vector aceleración indica que tiene sentido contrario al de la velocidad inicial y, por tanto, se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente retardado.

El tiempo se puede calcular, despejando Δt, a partir de la ecuación:

$$v_x = v_{o_x} + a_x \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{v_x - v_{o_x}}{a_x}$$

$$\Delta t = \frac{0 - 17 \text{ m/s}}{-0{,}07 \text{ m/s}^2}$$

$$\Delta t \approx 243 \text{ s}$$

Problema resuelto 2.9

Un cuerpo se mueve en línea recta de manera tal que su velocidad aumenta de manera uniforme. La aceleración es constante y su valor es de 4 m/s^2. En el instante en que se empezó a observar el movimiento el valor de su velocidad era de 20 m/s. ¿Qué valor de la velocidad tendrá el cuerpo 4 s después?

Solución:

Si se considera al cuerpo puntual y se elige el sistema de coordenadas con el sentido positivo del eje de las *X* orientado en el mismo sentido del

movimiento del cuerpo, el valor de la velocidad se puede calcular directamente a partir de la ecuación:

$$v_x = v_{o_x} + a_x \Delta t$$

Al sustituir por los datos se obtiene

$$v_x = 20 \text{ m/s} + (4 \text{ m/s}^2)(4 \text{ s})$$
$$v_x = 36 \text{ m/s}$$

Problema resuelto 2.10

Un automóvil pasa cerca de un observador con una rapidez de 10 m/s. En ese instante el chofer aplica los frenos y el automóvil comienza a moverse con una aceleración de módulo igual 1 m/s^2. ¿Qué tiempo debe transcurrir para que dicho automóvil se detenga?

Solución:

Si se supone el automóvil como un cuerpo puntual y el sistema de coordenadas se escoge con el sentido positivo del eje de las *X* orientado en el mismo sentido de la velocidad, el tiempo se puede calcular a partir de la ecuación:

$$v_x = v_{o_x} + a_x \Delta t$$

Despejando Δt en esta ecuación:

$$\Delta t = \frac{v_x - v_{o_x}}{a_x}$$

Sustituyendo los datos:

$$\Delta t = \frac{0 - 10 \text{ m/s}}{-1 \text{ m/s}}$$
$$\Delta t = 10 \text{ s}$$

Problema resuelto 2.11

El chofer de un automóvil que se mueve rectilíneamente con una velocidad de 72 km/h, ve la luz roja de un semáforo y aplica los frenos, por lo que el automóvil comienza a disminuir su velocidad con una aceleración de módulo igual a 5 m/s^2. ¿Qué distancia recorrió el automóvil al cabo de 2 s de haberse aplicado los frenos? ¿Qué distancia recorrió hasta detenerse?

Solución:

Tracemos el eje de coordenadas *X* en la misma dirección del movimiento del automóvil, supuesto como un cuerpo puntual, y escojamos como origen

de coordenadas el punto de la carretera en el cual el automóvil comenzó a frenar. El tiempo lo comenzamos a medir a partir del momento en el cual el chofer aplicó los frenos.

De acuerdo con la orientación del sistema de coordenadas, el sentido de la velocidad del automóvil coincide con el del eje *X,* mientras que la aceleración tiene sentido contrario. Luego la proyección del vector velocidad será positiva y la del vector aceleración será negativa.

La posición final del automóvil se puede calcular a partir de la ecuación:

$$x = x_o + v_{o_x}\Delta t + \frac{1}{2}a_x\Delta t^2$$

Según los datos, $x_o = 0$, $v_o = 12$ km/h = 20 m/s $a = -5$ m/s^2 y $t_0 = 0$:

$$x = 0 + (20\ \text{m/s})(2\ \text{s}) + \frac{1}{2}(-5\ \text{m/s}^2)(2\ \text{s})^2$$

$$x = 30\ \text{m}$$

La distancia que recorrió hasta detenerse puede calcularse a partir de la ecuación:

$$v_x^2 = v_{x_0}^2 + 2a_x\Delta x$$

De donde, despejando x ($x_o = 0$)

$$x = \frac{v_x^2 - v_{0_x}^2}{2a_x}$$

$$x = \frac{0 - (20\ \text{m/s})^2}{2(-5\ \text{m/s})}$$

$$x = 40\ \text{m}$$

Comprueba tus conocimientos

20. ¿A qué se denomina aceleración? ¿Por qué es importante este concepto?

21. ¿Cuál es la característica fundamental del Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado?

22. ¿Cómo está dirigido el vector aceleración respecto al vector velocidad inicial cuando disminuye el valor modular de la velocidad y cuando aumenta el valor modular de la velocidad?

23. Un ómnibus se pone en movimiento con aceleración constante de valor 1,5 m/s^2. ¿Después de que intervalo de tiempo el ómnibus alcanza la velocidad de 54 km/h?

24. El chofer de un automóvil que se mueve con una velocidad de valor igual a 36 km/h, aplica los frenos y a los 4 s queda detenido. Calcula el valor de la aceleración del movimiento del auto en su frenado.

2.6 Gráficas de la velocidad y la posición en función del tiempo en el MRUV

Si se considera que $t_0 = 0$, para el caso del MRUV la ecuación de la proyección de la velocidad en función del tiempo tiene la forma:

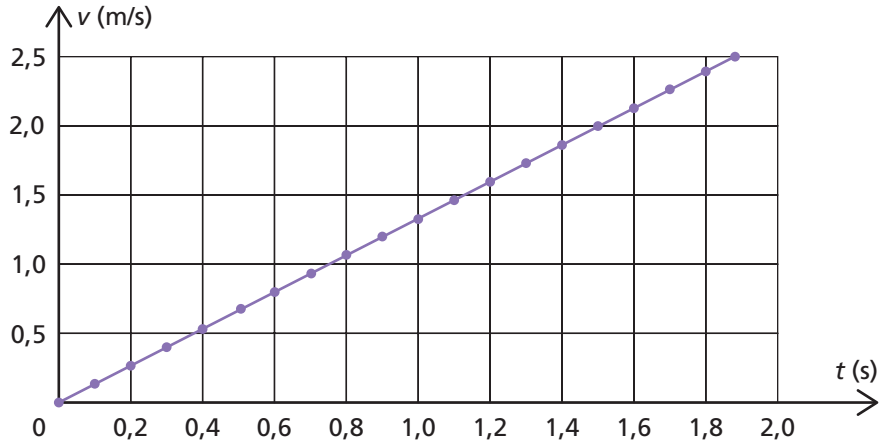
$$v_x = v_{o_x} + a_x t$$

En consecuencia, la gráfica de la proyección de la velocidad en función del tiempo será una línea recta de pendiente (inclinación) igual al valor de a_x.

Si se representa en el eje de las ordenadas a v_x y en el de las abscisas al tiempo t, v_{o_x} será el valor inicial (en $t = 0$) de v_x.

Por ejemplo, en la situación mostrada en la figura 2.32 a), en la que se puede apreciar que la velocidad del ciclista aumenta en el transcurso del tiempo, la gráfica de la proyección de la velocidad v_x en función del tiempo t se representa en la figura 2.32 b). En este caso el valor de la velocidad del ciclista se incrementa de manera uniforme, siendo el valor de la aceleración $a_x = 1{,}36$ m/s^2.

Fig. 2.32 La distancia entre las marcas del eje delantero, hechas cada 0,1 s, va aumentando según avanza el ciclista.



Si el ciclista, en vez de acelerar a partir del reposo, está desacelerando con $a_x = -3{,}42$ m/s^2 a partir de $v_{o_x} = 3{,}87$ m/s (figura 2.33), la gráfica correspondiente será como se muestra en la figura 2.33. Nota que en este caso la pendiente de la recta es negativa ($a_x = -3{,}42$ m/s^2), es decir, contraria al sentido de la velocidad, que es positivo en correspondencia con el sistema de coordenadas seleccionado.

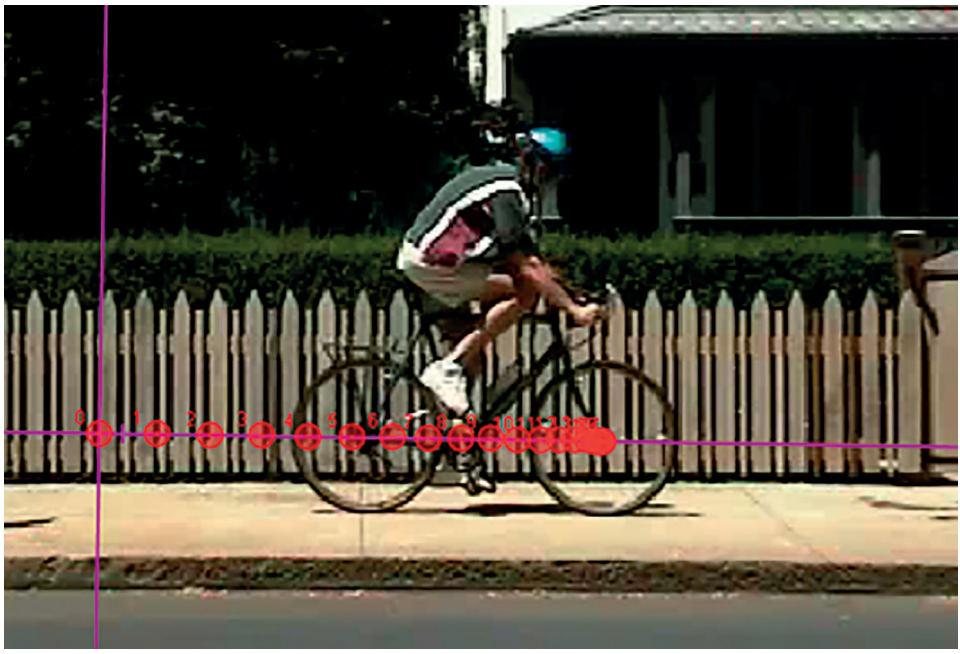


Fig. 2.33 la distancia entre las marcas del eje delantero, hechas cada 0.1s, va disminuyendo según avanza el ciclista

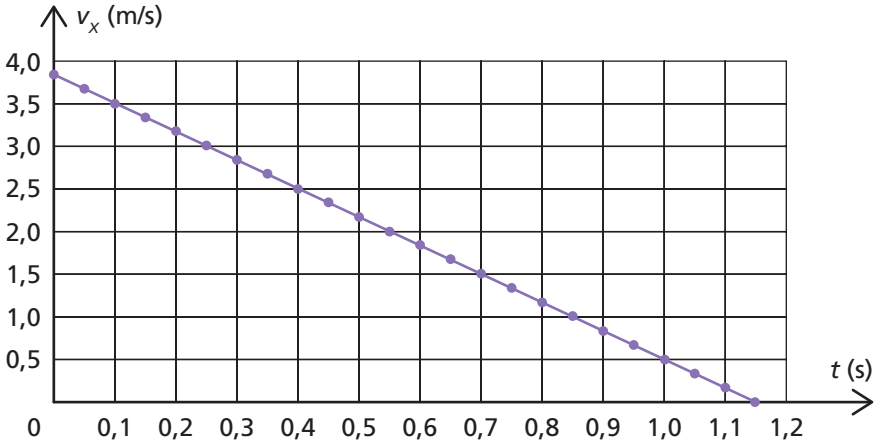


Fig. 2.33 La distancia entre las marcas del eje delantero, hechas cada 0,1 s, va disminuyendo según avanza el ciclista.

Por otra parte, conocemos ya que la ecuación de la posición en función del tiempo para el MRUV tiene la forma:

$$x = x_0 + v_{0_x}\Delta t + \frac{1}{2}a_x\Delta t^2$$

La gráfica de esta ecuación es una parábola, que en el caso de que $x_o = 0$, $v_{o_x} = 0$, y $a_x > 0$ (es decir, positiva), tendrá su vértice en el origen y la concavidad hacia arriba.

Por ejemplo, en el caso del ciclista mostrado en la figura 2.32, la gráfica será como se representa en la figura 2.34.

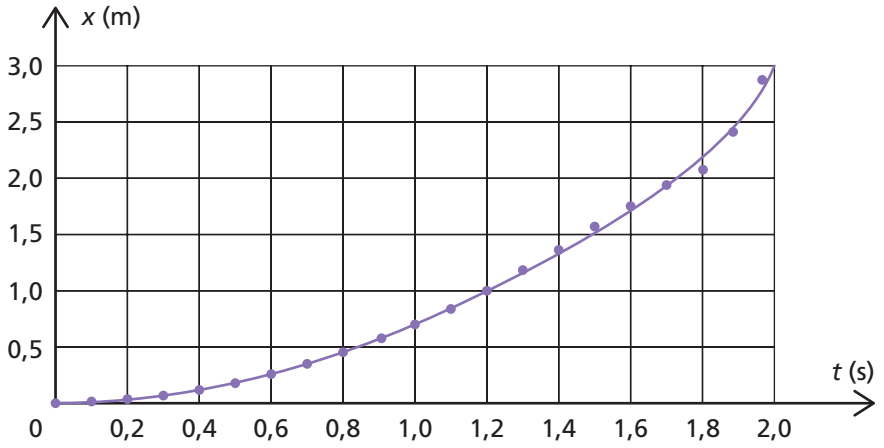


Fig. 2.34

En el caso del ciclista que desacelera (figura 2.33) la gráfica de la posición en función del tiempo es la representada en la figura 2.35. En este caso la concavidad es hacia abajo y el vértice está en la posición (x = 2,2 m, t = 1,2 s).

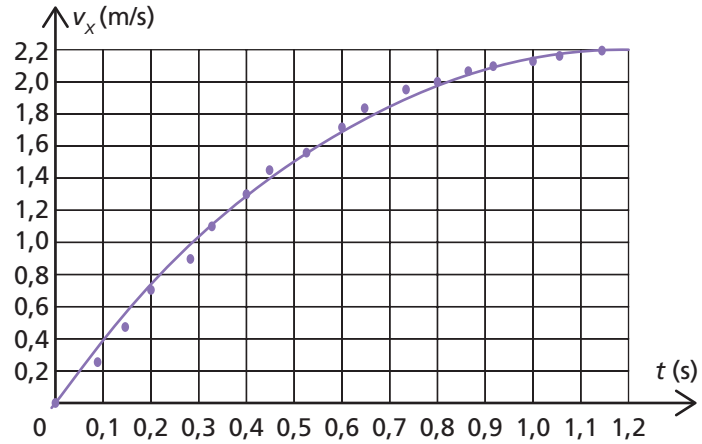


Fig. 2.35

Problema resuelto 2.12

Un cuerpo está animado con movimiento rectilíneo uniformemente variado, de forma tal que el gráfico del valor de la velocidad es el representado en la figura 2.36.

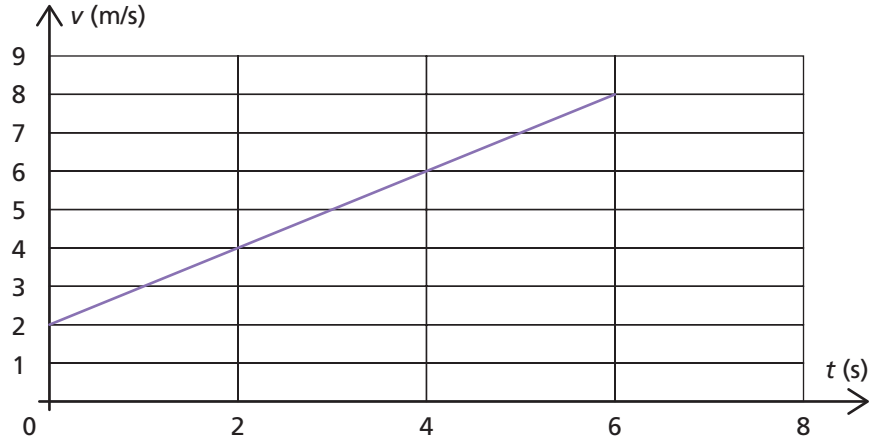


Fig. 2.36

a) Determina el valor de la aceleración del cuerpo.
b) Si para $t = 0$, $x = 0$, determina el desplazamiento al cabo de 2 s.

Solución:

a) La aceleración se puede calcular directamente, a partir de los datos de la gráfica, mediante la ecuación:

$$v_x = v_{o_x} + a_x \Delta t$$

Despejando a_x y sustituyendo por lo valores numéricos que proporciona la gráfica:

$$a_x = \frac{8 \text{ m/s} - 2 \text{ m/s}}{6 \text{ s}}$$

$$a_x = 1 \text{ m/s}^2$$

b) Con el dato de la aceleración y la información de la gráfica el valor del desplazamiento se puede calcular a partir de la ecuación:

$$x = x_o + v_{o_x} \Delta t + \frac{1}{2} a_x \Delta t^2$$

$$\Delta x = v_{o_x} \Delta t + \frac{1}{2} a_x \Delta t^2$$

¡Hazlo!

También el desplazamiento se puede encontrar calculando el área bajo la gráfica en el intervalo de 0 a 2 s:

$$A = \frac{(\text{suma de la base})}{2} \; h$$

Por lo tanto: $\Delta x = 6$ m

Problema resuelto 2.13

En la figura 2.37 se representan las gráficas de los valores de la velocidad de tres cuerpos que se mueven en línea recta.

a) ¿Qué características tiene el movimiento de cada cuerpo?
b) A partir de las gráficas, cuál es la rapidez inicial de los cuerpos 1 y 2.
c) Calcula el valor de la aceleración del cuerpo 1.

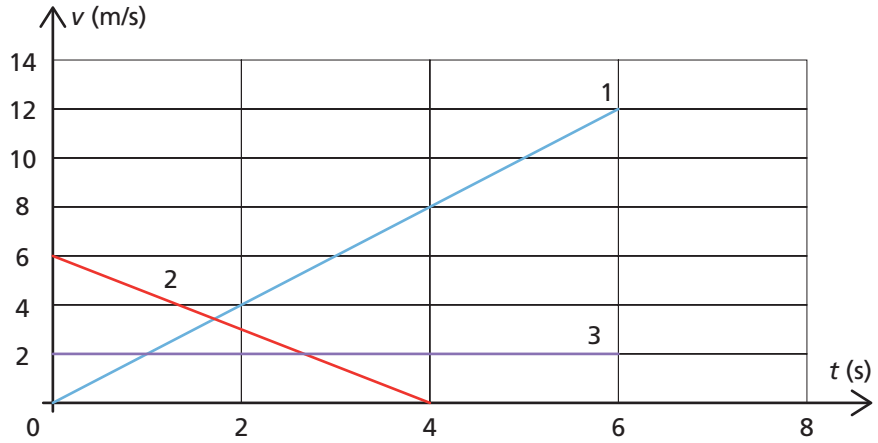


Fig. 2.37

Solución:

a) El análisis de las gráficas de las velocidades de los tres cuerpos permite afirmar que 1 y 2 corresponden a un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado y retardado, respectivamente, ya que la velocidad varía linealmente, con respecto al tiempo, mientras que la 3 corresponde a un cuerpo que se mueve con movimiento rectilíneo uniforme (velocidad constante).

b) Del análisis de la figura 2.37 se aprecia que para $t = 0$, las rapideces o valores de las velocidades de los cuerpos 1 y 2 son:

$$v_{0_1} = 0$$

$$v_{0_2} = 6 \text{ m/s}$$

c) De la gráfica se obtienen los datos que permiten calcular el valor de la aceleración del cuerpo 1 a partir de la ecuación:

$$a = \frac{v - v_o}{\Delta t}$$

Al sustituir por los valores numéricos se obtiene que:

$$a = \frac{12 \text{ m/s} - 0}{6 \text{ s}}$$

$$a = 2 \text{ m/s}^2$$

De la historia

En el libro de los *Diálogos*, Salviati describe los experimentos realizados con el plano inclinado, para demostrar que el movimiento gravitacionalmente gobernado sobre un plano inclinado era uniformemente acelerado. Galileo ya anticipaba que tal movimiento es así solamente en un límite ideal en el cual el roce contra el plano y la resistencia del aire son eliminados.

"Se tomó un tablón de madera, alrededor de 12 codos de largo, medio codo de ancho y tres dedos de grueso; sobre su borde se hizo un canal con un poco más de un dedo de anchura; habiendo hecho este surco recto, liso y pulido, y habiéndolo forrado con pergamino, también tan liso y pulido como fue posible, hicimos rodar a lo largo de él, una pelota de bronce, dura, lisa y muy redonda. Habiendo colocado esta tabla en una posición inclinada…rodamos la pelota a lo largo del canal, anotando… el tiempo requerido para hacer el descenso… siempre encontramos que los espacios recorridos eran entre sí como el cuadrado de los tiempos, y esto era verdad para todas las inclinaciones del plano."

Hora del laboratorio

Práctica de laboratorio 2.1

Estudio del movimiento rectilíneo uniformemente variado

Objetivo. Determinación del módulo de la aceleración, con su incertidumbre, para un cuerpo con MRUV.

Materiales: ticómetro[1] de cinta, juego de cuerpos de 50 g, hilo, polea, mordaza y fuente de corriente, cronómetro, regla graduada en milímetros.

Descripción y tareas:

a) Realiza el montaje que se representa en la figura 2.38.

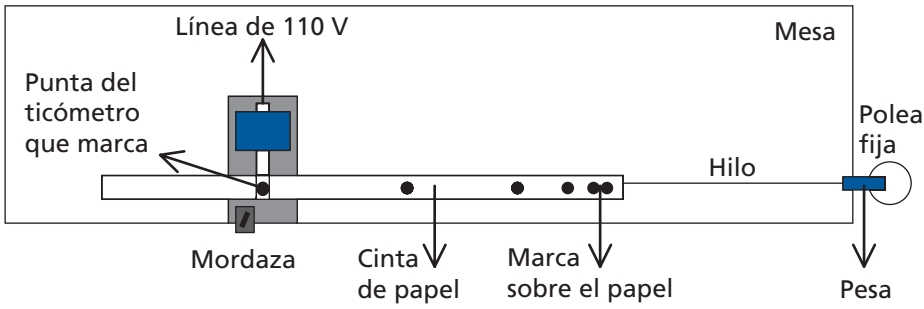


Fig. 2.38

[1] Un ticómetro es un instrumento que se utiliza para el estudio de los movimientos, ver figura 2.38, al dejar una huella de la posición del cuerpo en distintos momentos de tiempo.

b) Conecta y pon en funcionamiento el ticómetro y obtén las marcas en la cinta (figura 2.39).

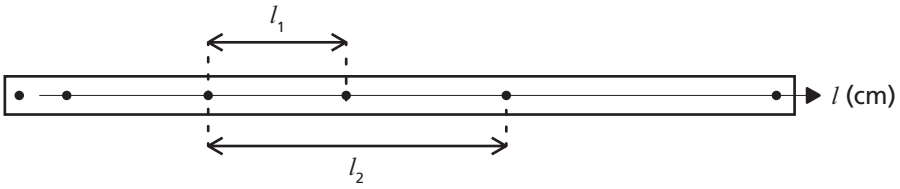


Fig. 2.39

c) Completa la tabla 2.2, donde *n* es el número de marcas y *l* es la distancia desde la primera marca a la de valor *n.*

Tabla 2.2

n	l_n (cm)	$a\left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$	$\Delta a\left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$
1			
2			
3			
4			
5			
6			

d) Construye una gráfica de $l = f(n)$ y analiza el resultado.

e) Toma dos marcas consecutivas de las anteriores l_1 y l_2, (figura 2.39).

f) Teniendo en cuenta que el movimiento de la cinta es con aceleración, demuestra que se cumple para dos marcas consecutivas $a = \frac{l_2 - 2l_1}{t^2}$, donde *a* es la aceleración de la cinta, *t* es el tiempo entre marcas consecutivas, l_2 y l_1 son dos distancias según la figura 2.39.

g) Determina la aceleración del cuerpo y estima su incertidumbre.

Comprueba tus conocimientos

25. La gráfica de la figura 2.40, representa el valor de la velocidad de un móvil, que se mueve en línea recta, en distintos intervalos de tiempo.

a) ¿Qué tipo tiene el móvil en los tramos AB, BC, CD y DE?

b) Calcula el valor de la aceleración del móvil en cada uno de tramos indicados.

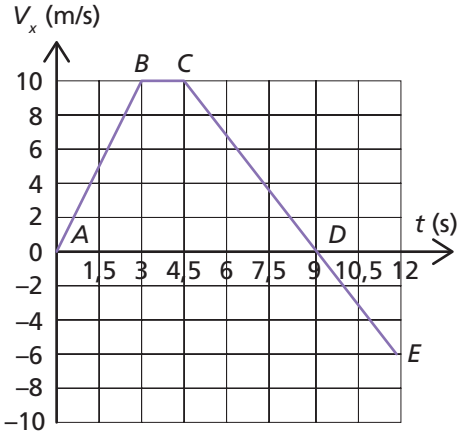


Fig. 2.40

26. Un cuerpo parte de reposo y se mueve con una aceleración constante de 2,0 m/s^2 durante un intervalo de tiempo de 10 s.

a) Determina los valores de la velocidad y el desplazamiento del cuerpo a los 10 s.
b) Construye la gráfica de $v_x = f(t)$.
c) Determina el valor de la velocidad media del cuerpo durante los 10 s.

27. Un cuerpo que posee una velocidad de 10 m/s comienza a frenar hasta detenerse. Durante el tiempo de frenado el valor modular de la aceleración es de 2,0 m/s^2. Calcula:

a) El tiempo que duró el frenado.
b) La distancia que recorrió durante el frenado.
c) El valor de la velocidad media durante el frenado.

28. La gráfica de la figura 2.41 de $v_x = f(t)$, describe la variación del valor de la velocidad del movimiento rectilíneo de cuerpo. Para cada tramo:

a) Identifica los tipos de movimiento.
b) Calcula el valor de la aceleración.

c) Calcula el valor de desplazamiento.

d) Calcula el valor de la velocidad media.

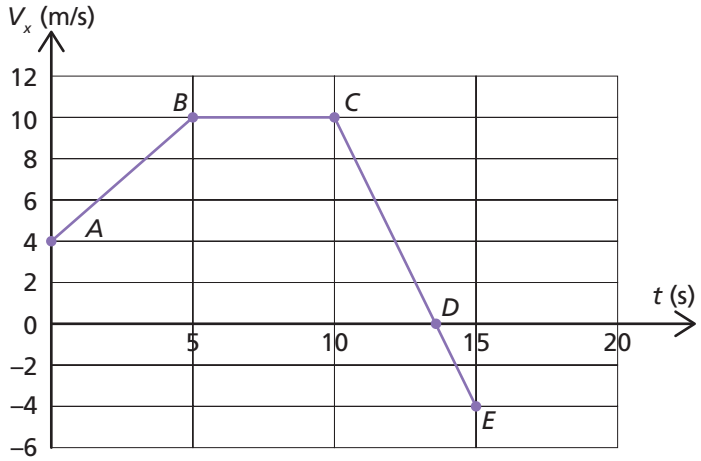


Fig. 2.41

29. Identifica las afirmaciones verdaderas y las falsas. Justifica, en tu cuaderno, las falsas.

- En el MRUV la aceleración es siempre negativa.
- En el MRUV, cuando la velocidad disminuye, los vectores aceleración y velocidad tienen sentidos contarios.
- En el MRUV la velocidad no aumenta uniformemente en valor.
- La velocidad media de un punto material que se mueve con MRUV es $\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}$, donde v_1 y v_2 son los valores de las velocidades inicial y final en el tramo.
- La velocidad media de cualquier movimiento es $\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}$, donde v_1 y v_2 son los valores de las velocidades inicial y final en el tramo.
- La velocidad media de cualquier movimiento es $\vec{v}_{med} = \frac{\Delta \vec{S}_t}{\Delta t}$, donde $\Delta \vec{S}_t$ es el desplazamiento y Δt el intervalo de tiempo en que este se recorre.

30. Una bala se dispara contra un cuerpo, moviéndose dentro de el con MRUV hasta detenerse como se representa en la figura 2.42.

Conocida la aceleración del movimiento de la bala y su desplazamiento en el medio, obtenga la ecuación para determinar la velocidad de entrada de la bala en el cuerpo.

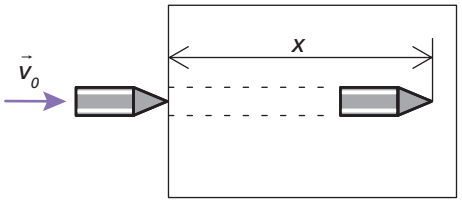


Fig. 2.42

31. Un cuerpo animado con movimiento rectilíneo uniformemente variado, disminuye el valor de su velocidad desde 10 m/s hasta 5,0 m/s en un intervalo de tiempo de 10 s. Calcula:

a) El valor de la aceleración del cuerpo.
b) El valor del desplazamiento recorrido por él a los 5,0 s de su movimiento.
c) Si el cuerpo pasado los 10 s continuara con la misma aceleración ¿Qué tiempo más necesitaría para lograr detenerse completamente?
d) Calcula el valor de su velocidad media durante los primeros 10 s.

32. Un automóvil recorre la mitad de su camino total con una rapidez de 60 km/h, la mitad del tiempo que queda lo recorre primero con rapidez de 15 km/h y el tiempo restante lo recorre con rapidez de 45 km/h. Determina el valor de la velocidad media en todo el movimiento.

2.7 Proyectiles. Movimiento circunferencial uniforme

Existen muchas situaciones en las que el movimiento de un cuerpo describe una trayectoria curvilínea, por ejemplo: el movimiento de los planetas alrededor del Sol, el de los niños montados en un carrusel en los parques de diversiones o el de una pelota lanzada formando un cierto ángulo con la horizontal (figura 2.43). En estos casos, en los que, además, la trayectoria está contenida en un plano, para describir el movimiento

hay que especificar dos coordenadas. Se dice entonces que se trata de un **movimiento bidimensional**.

Fig. 2.43 Las posiciones fueron tomadas con una cámara digital, cada 0.033 s

¿Cómo describir el movimiento de un cuerpo lanzado con cierta rapidez formando un ángulo cualquiera con la dirección horizontal? ¿A estos efectos, serán útiles los conocimientos que ya tenemos sobre el movimiento rectilíneo?

¿Cómo describir el movimiento de un cuerpo cuando se mueve describiendo una trayectoria en forma de circunferencia?

Dada la importancia práctica de estos dos casos particulares del movimiento curvilíneo en dos dimensiones y de su utilidad, como base para el análisis de otros movimientos más complejos, abordaremos ahora su estudio:

Movimiento de proyectiles

En el lenguaje cotidiano el termino proyectil es empleado para designar un objeto cuando es lanzado por un arma, sobre todo cuando se trata de un arma de fuego.

En física se acostumbra a utilizar este término en un sentido más amplio, el de cualquier objeto lanzado con cierta velocidad, por ejemplo, el de una flecha lanzada mediante un arco, el de una jabalina, el de un balón pateado al aire en un campo de fútbol, entre muchos otros.

Para el estudio del movimiento de un proyectil sobre la superficie de la Tierra, inicialmente nos limitaremos al caso de que, después de lanzado, el cuerpo se mueve solo bajo la acción del campo gravitatorio terrestre, es decir al caso de que el proyectil se encuentra en lo que se denomina movimiento de caída libre y por tanto se mueve con aceleración $\vec{g}$.

De la historia

Sobre el movimiento en caída libre se escribe en los *Diálogos:*
Simplicio: "Su discusión es realmente admirable; sin embargo, no encuentro fácil creer que una munición cae tan rápidamente como una bala de cañón."
Salviati: "¿Por qué no decir un grano de arena tan rápidamente como una piedra de molino? Aristóteles dice que una esfera de hierro de 100 libras, cayendo de una altura de 100 codos alcanza el suelo antes que una esfera de una libra haya caído un solo codo. Yo digo que ellas caen al mismo tiempo…" El codo y la libra son unidades de medición que no existen en el Sistema Internacional de Unidades. Sería muy útil que buscaras en Wikipedia qué es la libra.

¡Cuidado!

Caída libre:
El movimiento de un cuerpo en la dirección vertical cuando se deja caer no es el único caso de caída libre. Cualquier cuerpo lanzado con cierta velocidad se encuentra en caída libre, si sobre el solo actúa la fuerza de gravedad. También un satélite orbitando alrededor de la Tierra, se encuentra en caída libre.

Estudiemos el movimiento de un proyectil mediante un experimento sencillo, que en este momento resulta prácticamente al alcance de todos: filmar con una cámara digital el lanzamiento de un objeto, por ejemplo, una pelota o balón y después estudiar la posición del objeto durante el movimiento, en función del tiempo. Para hacer esto último aquí utilizaremos el programa informático Tracker, que casi seguro ya conoces, aunque hay muchos otros disponibles para esto.

La imagen de la figura 2.43 fue tomada con la cámara digital de un teléfono móvil de baja gama, que permite registrar las imágenes cada 33 milésimas de segundo aproximadamente.

En este caso, si se representan en una gráfica los valores de la posición horizontal x de la pelota sobre el eje vertical, orientado con el sentido positivo hacia arriba, y los valores de tiempo en el eje horizontal, con el sentido positivo tomado hacia la derecha, se obtiene una gráfica como la que se muestra en la figura 2.44

Por otra parte, si se representa la posición de la pelota en la dirección vertical y, orientado este eje con el sentido positivo hacia arriba y los valores de tiempo en el eje horizontal, orientado con el sentido positivo a la derecha, se obtiene una gráfica como la mostrada en la figura 2.45.

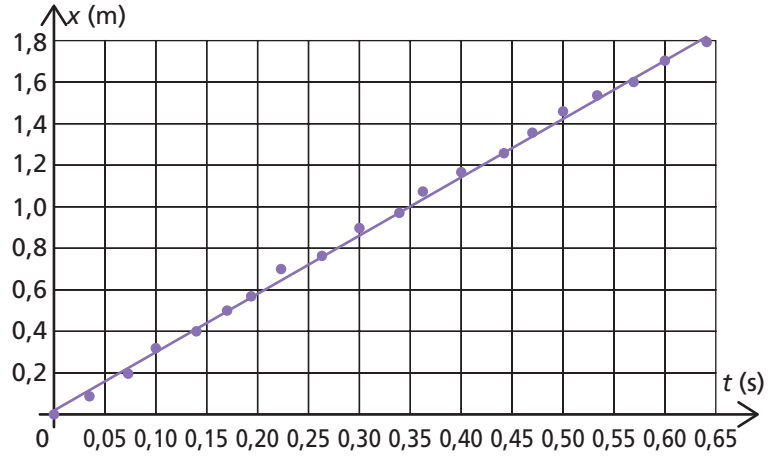


Fig. 2.44

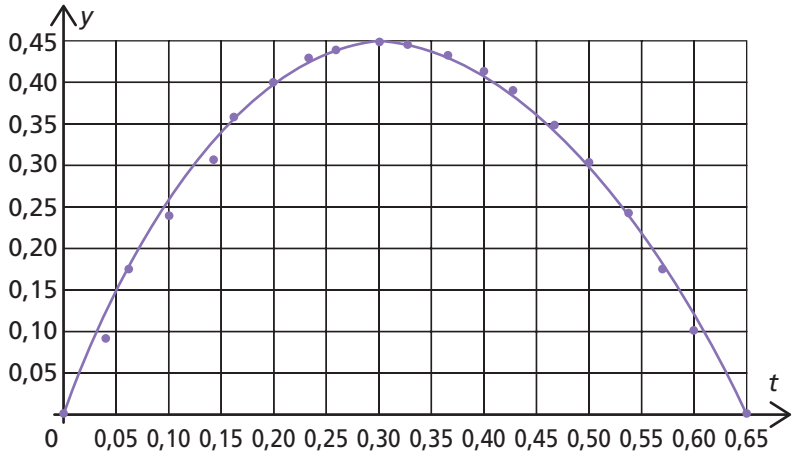


Fig. 2.45

En correspondencia con estos resultados, en la dirección horizontal, es decir a lo largo del eje coordenado *x,* la posición de la pelota se puede describir mediante la ecuación:

$$x = x_0 + v_x \Delta t$$

Donde, en este caso, $x_0 = 0$ y v_x (el valor de la velocidad en el eje *X*) es la pendiente de la recta.

Por lo tanto, en la dirección horizontal (eje X) la pelota se mueve con velocidad constante o, lo que es lo mismo, con movimiento rectilíneo uniforme.

En el caso del eje *Y*, la ecuación que describe la gráfica de la posición de la pelota tiene la forma.

$$y = y_0 + v_{0_y}\Delta t + \frac{1}{2}a_y\Delta t^2$$

Donde, en este caso, $y_0 = 0$, v_{0y} es el valor de la velocidad con que fue lanzado en la dirección vertical y a_y el valor de la aceleración en la dirección vertical, es decir el de la aceleración de la gravedad *g*.

> Por lo tanto, en la dirección vertical (eje *y*) el movimiento de la pelota es un movimiento con aceleración constante o, lo que es lo mismo, un movimiento rectilíneo uniformemente variado.

Se tiene entonces que, en general, **se puede describir el movimiento de un proyectil mediante la composición de dos movimientos, uno con velocidad constante (movimiento rectilíneo uniforme) en la dirección horizontal y otro con aceleración constante (movimiento rectilíneo uniformemente variado) en la dirección vertical.**

Por supuesto, lo anterior solo será válido si sobre el cuerpo solo actúa la fuerza de gravedad y puede no tenerse en cuenta, como estudiaremos más adelante, la influencia del aire.

Esto quiere decir que podemos describir el movimiento de un proyectil mediante las ecuaciones ya conocidas para estos tipos de movimientos, en el caso en que sea posible, reiteramos, no tener en cuenta la influencia del aire.

Puede ser conveniente llamar la atención sobre el hecho de que no se debe confundir la gráfica representada en la figura 2.45 con la trayectoria descrita por el proyectil, que también es una parábola. Esta gráfica (figura 2.45) representa, insistimos, la forma en que varía la posición vertical en función del tiempo. En la figura 2.46 se muestra la gráfica de $y = f(x)$, es decir la gráfica que corresponde a la trayectoria para el caso de la pelota.

También resulta importante tener presente que la dirección del vector velocidad es tangente a la trayectoria del proyectil, en cualquier punto (figura 2.47). Nota que en los puntos 1 y 3 la velocidad tiene la misma dirección (vertical) pero sentido contario y en el punto 3 es paralela a la dirección horizontal.

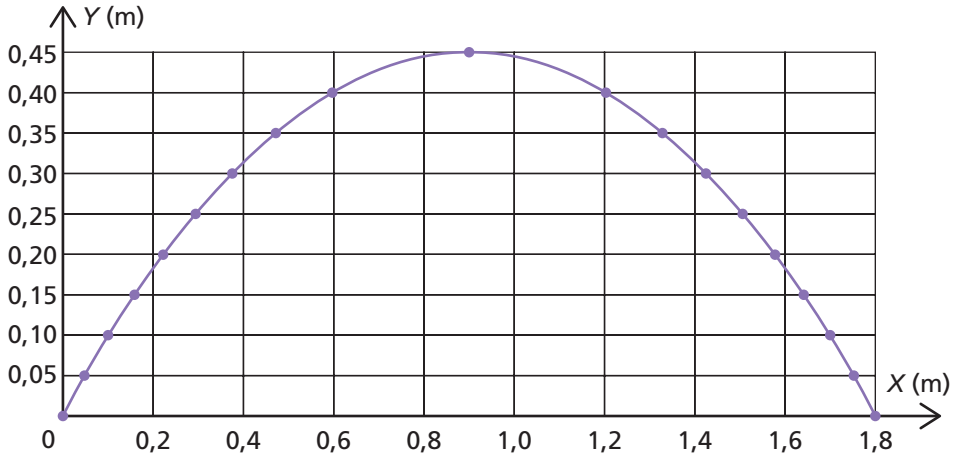


Fig. 2.46

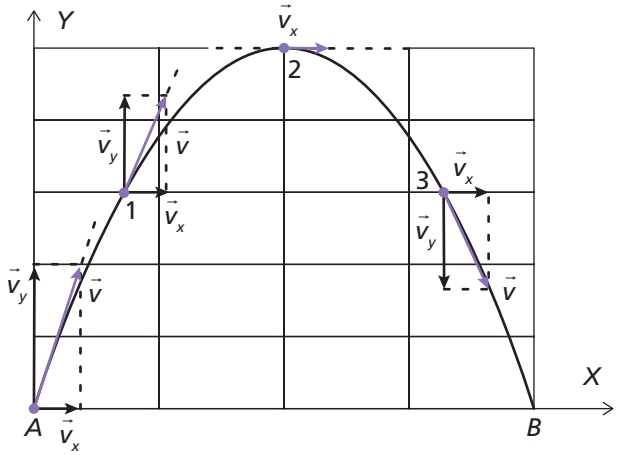


Fig. 2.47

¿Sabías que...?

En el estudio realizado sobre el movimiento de la pelota (figura 2.43), por supuesto, además de la fuerza de gravedad, actuó la fuerza de resistencia del aire. Sin embargo, el resultado obtenido expresa que la acción de esta última es tan pequeña que puede no tomarse en consideración, lo que se debe esencialmente a dos factores: la relativamente pequeña velocidad inicial de la pelota y el poco tiempo que estuvo en movimiento.

Una situación completamente distinta se presentaría, por ejemplo, en el caso de una pelota de béisbol al ser bateada por un jugador. En la figura 2.48 se puede apreciar la marcada diferencia entre la trayectoria real de una pelota de béisbol y la que tendría si la resistencia del aire se pudiera no tener en cuenta.

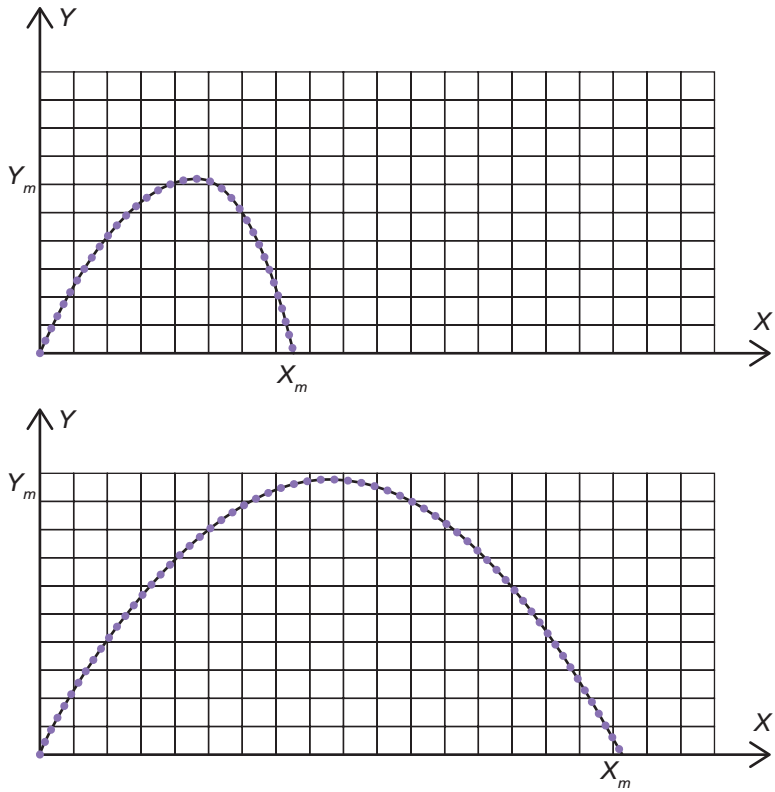


Fig. 2.48 Imágenes de la trayectoria descrita por una pelota de béisbol al ser bateada con el efecto del viento (superior) y si la resistencia del aire fuera despreciable (inferior)

La ampliación sobre las características del movimiento de un proyectil y el esclarecimiento de algunos importantes detalles se examinarán en los ejemplos siguientes:

Problema resuelto 2.14

Un proyectil se lanza formado un ángulo de 30º respecto a la dirección horizontal, con una velocidad de valor igual a 25 m/s. Bajo la consideración

de que es posible no tener en cuenta la influencia del aire, determina la posición y el valor de la velocidad del proyectil al cabo de 1 s.

Solución:

Sabemos que, en las condiciones planteadas, el proyectil describirá una trayectoria parabólica (figura 2.49).

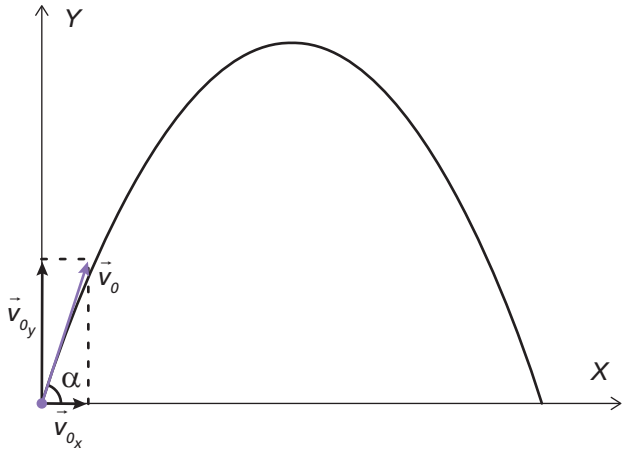


Fig. 2.49

En este caso, para facilitar la descripción del movimiento podemos situar el origen del sistema coordenado, como se muestra en la figura 2.49, en el punto de lanzamiento. En estas condiciones se tiene que los valores de las proyecciones de la velocidad inicial, en los ejes horizontal y vertical serán:

$$v_{o_x} = v_o \cos\alpha$$

$$v_{o_x} = (25 \text{ m/s}) \cos 30^\circ = (25 \text{ m/s})(0{,}86) = 21{,}5 \text{ m/s}$$

$$v_{o_y} = v_o \operatorname{sen}\alpha$$

$$v_{o_y} = (25 \text{ m/s}) \operatorname{sen} 30^\circ = (25 \text{ m/s})(0{,}5) = 12{,}5 \text{ m/s}$$

Como en el eje de las *X* el movimiento es rectilíneo uniforme, para determinar el valor de esta coordenada en función del tiempo, se tiene que:

$$x = x_0 + v_x \Delta t$$

$$x = 0 + (12{,}5 \text{ m/s})(1 \text{ s}) = 12{,}5 \text{ m}$$

En la dirección vertical el movimiento es uniformemente variado con un valor de la aceleración de $g = -9{,}8 \text{ m/s}^2$. Por lo tanto, para

determinar el valor de la coordenada y en función del tiempo se tiene que:

$$y = y_o + v_{0_y}\Delta t + \frac{1}{2}g\Delta t^2$$

$$y = 0 + (21{,}5\ \text{m/s})(1\,s) - \frac{1}{2}(9{,}8\ \text{m/s}^2)(1\,s)^2 = 16{,}6\,m$$

Por lo tanto, al cabo de 1 s, el proyectil se encuentra en la posición (12,5 m; 16,6 m)

Como la velocidad en la dirección horizontal no cambia su valor es:

$$v_x = 12{,}5\ \text{m/s}$$

En el eje de las *Y*, la velocidad en función del se determina mediante la ecuación:

$$v_y = v_{0_y} + g\Delta t$$

$$v_y = (21{,}5\ \text{m/s}) - (9{,}8\ \text{m/s}^2)\ (1\ \text{s}) = 11{,}7\ \text{m/s}$$

Por lo tanto, para calcular el valor de la velocidad es necesario sumar geométricamente los valores de las componentes v_x y v_y:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad v = \sqrt{(12{,}5\ \text{m/s})^2 + (11{,}7\ \text{m/s})^2} \approx 17\ \text{m/s}$$

Problema resuelto 2.15

Para la situación descrita en el problema resuelto 1, encuentra las expresiones que permiten calcular:

a) La altura máxima alcanzada por el proyectil
b) El tiempo de vuelo del proyectil
c) El alcance del proyectil.

Solución:

a) En el momento en que el proyectil alcance la altura máxima, la proyección de su velocidad en la dirección vertical (eje *Y*) será cero. Como no se conoce el tiempo que demora en alcanzar esta altura (aunque si se podría calcular fácilmente), se puede determinar directamente la altura máxima alcanzada a partir de la ecuación:

$$v_y^2 = v_{o_y}^2 + 2gy$$

Si $y = y_{máx}$, entonces $v_y = 0$

Por lo tanto: $y_{máx} = -\frac{v_{0_y}^2}{2g} = -\frac{(v_0 sen\alpha)^2}{2g}$

Expresión que permite calcular $y_{máx}$ directamente en función de v_0, g y α. Es importante notar que, para el sistema de coordenadas seleccionado, el valor de g es negativo y en consecuencia el valor de $y_{máx}$ será positivo como es de esperar.

b) El tiempo de vuelo, es decir, el tiempo que el proyectil demora en regresar al plano respecto al que lanzado, es el doble del tiempo en que el proyectil demora en alcanzar la altura máxima (como la aceleración es la misma, el proyectil demora el mismo tiempo en subir que en bajar). El tiempo que el proyectil demora en subir se puede calcular directamente en función de los datos iniciales a partir de la ecuación:

$$v_y = v_{0_y} + g\Delta t$$

Como al alcanzar la altura máxima $v_y = 0$, si se llama al tiempo de subida t_s se tiene que:

$$t_s = -\frac{v_{0_y}}{g} = -\frac{v_0 sen\alpha}{g}$$

Entonces para el tiempo de vuelo t_v se tendrá que:

$$t_{v=} 2t_s = -\frac{2v_0 sen\alpha}{g}$$

Aquí también debe notarse que, como el valor de g, respecto al sistema de coordenadas seleccionado, es negativo, el tiempo de vuelo será positivo.

c) El alcance del proyectil es la distancia que recorre horizontalmente el proyectil durante el tiempo que dura el movimiento, en este caso el tiempo de vuelo. El valor de esta distancia puede calcularse directamente a partir de la ecuación:

$$x = x_0 + v_x t_v$$

Como, según el sistema de coordenadas seleccionado, $x_0 = 0$, se tiene entonces que:

$$x = (v_0 cos\alpha) t_v$$

$$x = (v_0 cos\alpha)\left[-\frac{2v_0 sen\alpha}{g}\right]$$

$$x = -\frac{2v_0^2(cos\alpha)(sen\alpha)}{g}$$

$$x = -\frac{v_0^2 sen2\alpha}{g}$$

La expresión anterior permite calcular el alcance en función de los datos del problema.

Una vez más debe notarse que, como *g* es negativa en relación con el sistema de coordenadas seleccionado, el valor del alcance será positivo. También resulta importante notar que si α = 45°, entonces la distancia recorrida horizontalmente será la máxima posible para determinada velocidad inicial, pues el seno tomará el máximo valor posible, es decir 1.

Las figuras 2.50 a) y b) ilustran la forma en que depende el alcance de un proyectil con la velocidad inicial y el ángulo de lanzamiento: a) el alcance del segundo proyectil es mayor porque la velocidad de lanzamiento es mayor para un mismo ángulo; b) el alcance del primer proyectil es mayor porque se lanzó con un ángulo de 45°. La velocidad de lanzamiento para los proyectiles fue la misma.

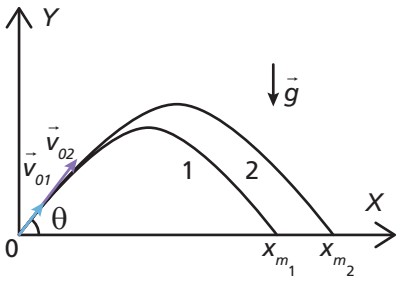


Fig. 2.50a El alcance del segundo proyectil es mayor porque la velocidad de lanzamiento es mayor para un mismo ángulo.

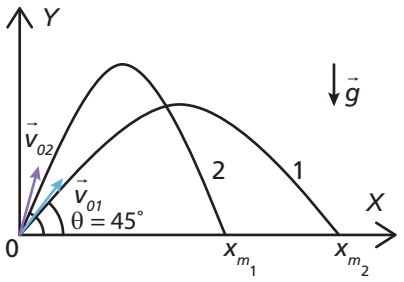


Fig. 2.50b El alcance del primer proyectil es mayor porque se lanzó con un ángulo de 45°. La velocidad de lanzamiento para los proyectiles fue la misma.

Problema resuelto 2.16

Un cuerpo es lanzado horizontalmente desde una altitud de 20 m sobre la superficie con una velocidad de valor igual a 11 m/s. Suponiendo despreciable los efectos del aire, ¿qué distancia recorrerá a lo largo de la dirección horizontal?

Solución:

Si para describir el movimiento se selecciona el sistema de coordenadas con el origen en el punto de lanzamiento y *el eje de la y orientado* verticalmente con el sentido positivo hacia arriba, la situación en el problema se corresponderá con la figura 2.51.

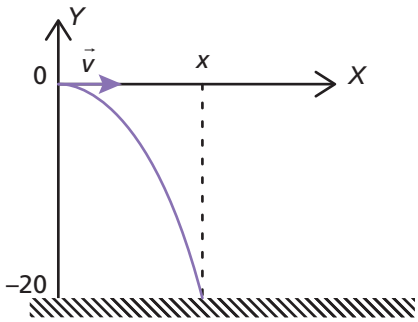


Fig. 2.51

Como en la dirección horizontal la velocidad permanece constante, el proyectil recorrerá una distancia dada por la ecuación:

$$x = x_0 + v_x \Delta t$$

Donde $x_0 = 0$ y, $v_x = 11$ m/s y Δt es el tiempo que demora en caer, que es el mismo en que *se está moviendo horizontalmente.*

Como en la dirección vertical el movimiento es uniformemente acelerado, el tiempo que demora en caer se pude calcular a partir de la ecuación:

$$y = y_0 + v_{0_y} \Delta t + \frac{1}{2} g \Delta t^2$$

Como en este caso $y_0 = 0$ y $v_{0_y} = 0$
La ecuación queda como:

$$y = \frac{1}{2} g \Delta t^2$$

Despejando t se encuentra que:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

Sustituendo lo valores se tiene que:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2(-20\ m)}{-10\ \text{m/s}^2}} = 2s$$

Donde se ha tomado 10 m/s^2 para el valor de g

Con este valor de Δt se puede calcular la distancia recorrida por el cuerpo

$$x = 0 + (11 \text{ m/s})(2 \text{ s}) = 22 \text{ m}$$

¿? ¿Sabías que...?

El efecto de la gravedad es el que provoca que los proyectiles se desvíen y sus trayectorias tengan forma de parábola. Si la gravedad no existiera, el proyectil tendría un movimiento rectilíneo

Problema resuelto 2.17

Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad de 10 m/s cerca de la superficie de la Tierra. Si se puede despreciar el rozamiento del cuerpo con el aire. Calcula:

a) El tiempo de la subida.
b) La altura máxima que alcanza.
c) El valor de la velocidad del cuerpo un instante antes de tocar el plano de lanzamiento.

Solución:

a) El tiempo se subida t_s se puede calcular como la mitad del tiempo de vuelo o, de manera más general, a partir de la ecuación:

$$v_y = v_{o_y} + a_y \Delta t$$

Si se considera $\Delta t = t_s$, $a_y = g$ y que al cabo del tiempo de subida $v_y = 0$. Se obtiene entonces que:

$$t_s = -\frac{v_{o_y}}{g}$$

$$t_s = -\frac{10 \, m/s}{-9{,}81 \, m/s^2} \approx 1{,}0 \, s$$

b) La altura máxima la puedes determinar utilizando cualquiera de las ecuaciones para desplazamiento en el caso del M.R.U.V. Si se utiliza:

$$y = y_0 + v_{0_y} \Delta t + \frac{1}{2} g \Delta t^2$$

Para $y_0 = 0$ y $g = -9{,}8$ m/s^2, queda que:

$$y = 10\, t - 4{,}9\, t^2$$

Como el tiempo de subida es 1 s

$$y_{máx.} = 10\frac{m}{s} \cdot 1\,s - 4{,}9\,\frac{m}{s^2} \cdot 1\,s^2$$

$$y_{máx} \approx 5{,}1\ m$$

d) La velocidad del cuerpo un instante antes de tocar el suelo se puede determinar directamente a partir de la ecuación:

$$v_y = v_{0_y} + a_y \Delta t$$

Si se evalúa esta ecuación para un valor de t igual al doble del tiempo de subida y se consideras que $a_y = g = -9{,}8\ m/s^2$, se obtiene que:

$$v_y = 10\,{}^{m}\!/_{s} - 9{,}81\,{}^{m}\!/_{s^2} \cdot 2\,s$$

$$v_y \approx -10\,{}^{m}\!/_{s}$$

Por supuesto, la proyección del vector velocidad es negativa porque el sentido del vector $\vec{v}_y$ es contrario al eje y que está dirigido hacia arriba.

Hora del laboratorio

Estudio del movimiento de un proyectil (opción 1)

Instrucciones:

1) Graba un video del lanzamiento de un cuerpo formando un determinado ángulo con la horizontal. Se sugiere tomar, por ejemplo, una pelota de tenis o de goma y lanzarla de manera que el alcance sea de unos dos metros. Tenga en cuenta diseñar la toma del video para que el movimiento pueda ser analizado con Tracker.
2) Utilizando "Tracker" obtén una tabla de datos de las posiciones, en un sistema de coordenadas cartesianas, en dependencia del tiempo.
3) Obtén las gráficas y las correspondientes ecuaciones, para la variación de las coordenadas (x; y) en función del tiempo.
4) Determina los valores de las velocidades iniciales, en cada uno de los ejes coordenados.
5) Determina el valor de la aceleración de la gravedad.
6) Sobre la base de los resultados obtenidos, ¿desempeño un papel importante la resistencia del aire en el movimiento del cuerpo?

Estudio del movimiento de un proyectil (opción 2)

Objetivo: medir la velocidad inicial de una bola lanzada horizontalmente. *Materiales:* rampa de lanzamiento (puede ser de la dotación china o cualquier otra rampa), una bola (acero o vidrio), regla graduada en milímetros, papel de carbón, hoja de papel blanca, plomada.

Descripción y tareas:

1) Realiza el montaje de la figura 2.52.

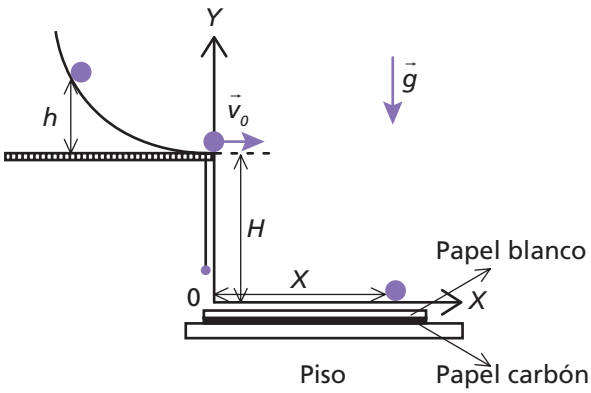


Fig. 2.52

2) Mide la altura *H,* con su incertidumbre.
3) Deja caer la bolita desde la misma altura 4 veces, marca la posición del choque en la hoja, usted obtendrá cuatro puntos, figura 2.53, únalos para buscar un centro donde se crucen la mayor cantidad de líneas, punto P, la distancia vertical medida desde el origen de coordenadas, será la que tomaremos como valor medio del alcance *X,* ver la misma figura.

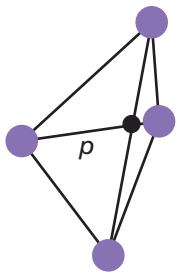


Fig. 2.53

Varía la altura del lanzamiento, puede tomar los valores propuestos en la tabla.

Selecciona cuatro valores distintos y repite la actividad 3. Completa la tabla.

Tabla 2.3

	H (m)	ΔH (m)	h (m)	Δh (m)	X (m)	ΔX (m)	v_0(m/s)	Δv_0(m/s)
1			0,10					
2			0,15					
3			0,20					
4			0,25					

4) Demuestra que la velocidad inicial de la bola puede ser determinada con la ecuación: $v_0 = \sqrt{\frac{g}{2H}}$

5) Realiza un informe de la práctica.

Comprueba tus conocimientos

33. Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad de 2,0 m/s, desde una altura 5,0 m. Determina:

a) El tiempo de subida del cuerpo.
b) El intervalo de tiempo que demora el cuerpo en la bajada hasta llegar a Tierra.
c) Describe el movimiento del cuerpo en la subida y en la bajada.
d) Construye la gráfica de $v_y = f(t)$ para el movimiento del cuerpo.

34. La gráfica de $v_y = f(t)$ de la figura 2.54 muestra como varía la velocidad de un cuerpo en el eje Y, que se lanzó verticalmente hacia arriba, desde una altura inicial respecto a la Tierra. Determina:

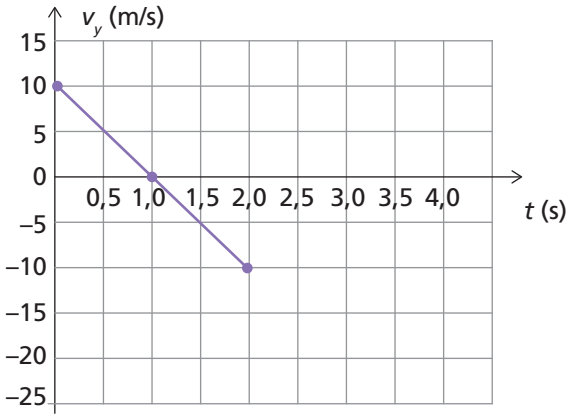


Fig. 2.54

a) El valor de la velocidad inicial del cuerpo.
b) El tiempo de subida del cuerpo
c) La altura máxima que alcanzó.
e) La altura inicial del lanzamiento.

35. Un cuerpo es lanzado horizontalmente con una velocidad inicial de valor 5,0 m/s desde una altura 5,0 m. Calcula:

a) El tiempo que demora en llegar a la Tierra.
b) El desplazamiento horizontal máximo del cuerpo.
c) ¿Qué le ocurre al tiempo del movimiento del cuerpo, si se aumenta la velocidad de lanzamiento al doble, sin cambiar la altura de lanzamiento? Explica.
d) ¿Qué le ocurre al alcance, si aumenta cuatro veces la altura del lanzamiento sin variar la velocidad para lanzarlo?

36. Dos cuerpos A y B, inicialmente se encuentran a una misma altura inicial de 20 m, como se muestra en la figura 2.55. El cuerpo A se deja caer sin velocidad inicial, mientras que el B se lanza horizontalmente con velocidad de valor 5,0 m/s. Calcula:

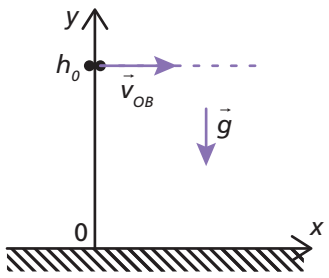


Fig. 2.55

a) El tiempo en que demoran en llegar al suelo.
b) El valor de las velocidades, con que cada uno llega al suelo.
c) La posición *(x;y)* de cada cuerpo para el instante t_1 = 2,0 s después de iniciado los movimientos.

37. Un avión vuela horizontalmente a una altura *H* con una velocidad de valor v_0, el piloto debe lanzar un bulto para que este caiga a tierra en el punto P (figura 2.56). ¿A qué distancia *l* medida horizontalmente del punto *p* debe el piloto soltar el bulto?

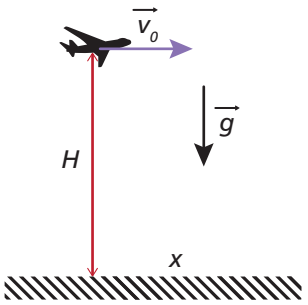


Fig. 2.56

38. Las proyecciones de las componentes rectangulares de la velocidad de un proyectil tienen como valor v_{0_x} = 8,0 m/s y v_{0_y} = 6,0 m/s. Calcula:

a) El valor de la velocidad al pasar por el punto de altura máxima.
b) El valor de la velocidad con que llega al plano de donde fue lanzado.
c) La distancia horizontal recorrida durante el tiempo de vuelo.

39. Un proyectil es lanzado con una velocidad inicial $\vec{v}_0$ como muestra la figura 2.57. Identifica las afirmaciones verdaderas y las falsas. Justifica las falsas.

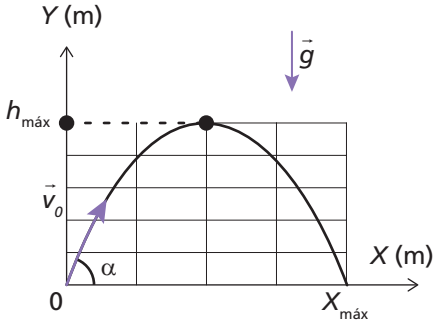


Fig. 2.57

- El movimiento que describe el proyectil en el eje *X* es MRU.
- El movimiento que describe el proyectil en el eje *Y,* es MRUV.
- En el punto de altura máxima el proyectil está en reposo.
- La componente de la velocidad en el eje *Y,* del proyectil en el punto de altura máxima es cero.
- La velocidad del proyectil en el punto de altura máxima es la componente en el eje *X* de la velocidad inicial $\vec{v}_0$.

- El tiempo empleado por el proyectil para llegar al punto de altura máxima, es el tiempo de vuelo.
- El tiempo empleado por el proyectil para llegar al punto de altura máxima, es la mitad del tiempo de vuelo.
- El desplazamiento horizontal del proyectil desde el punto de lanzamiento hasta el punto de altura máxima es el alcance.
- La componente del desplazamiento vertical del proyectil desde el punto de lanzamiento hasta el de altura máxima, es la altura máxima.
- La componente del desplazamiento en la dirección vertical del proyectil, para el tiempo de vuelo es cero.
- La componente del desplazamiento en la dirección horizontal del proyectil, durante el tiempo de vuelo es el alcance.

2.8 Movimiento circunferencial uniforme

Para describir el movimiento circunferencial resulta conveniente y necesario introducir algunas nuevas magnitudes.

En primer término, debemos notar que el movimiento de un cuerpo, supuesto puntual, que al trasladarse describe una circunferencia, se puede describir a partir del ángulo de giro o **desplazamiento angular** que experimenta el vector de posición $\vec{r}$.

¿? ¿Sabías que...?

En la mayoría de los libros, al movimiento circunferencial se le llama movimiento circular, lo que es generalmente aceptado, aunque, al menos en español, solo su tercera acepción (diccionario RAE) lo podría justificar.

En la figura 2.58, en el instante $t = 0$ el cuerpo se encuentra en la posición A y un intervalo de tiempo Δt después se encuentra en el punto *B.* Durante ese intervalo de tiempo, el vector de posición $\vec{r}$ gira un ángulo θ.

La posición de un punto cualquiera sobre la circunferencia se puede determinar tanto por sus coordenadas (*x, y*) como por el módulo del vector de posición o radio vector $\vec{r}$ y el ángulo θ que forma con el eje *x.*

Aunque es frecuente medir los ángulos en grados sexagesimales, es más conveniente emplear la unidad de ángulo del Sistema Internacional de Unidades: *el radián.*

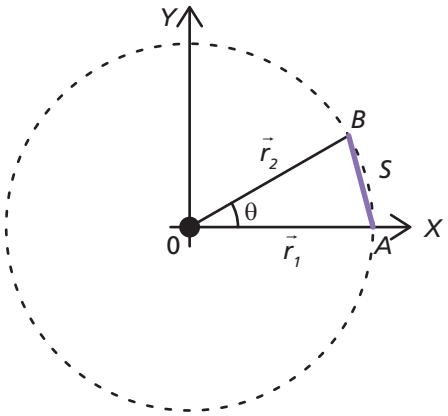


Fig. 2.58 La posición de un punto cualquiera sobre la circunferencia se puede determinar tanto por sus coordenadas (x, y) como por el módulo del vector de posición o radio vector $\vec{r}$ y el ángulo θ que forma con el eje x

En el Sistema Internacional de Unidades un ángulo se define como la relación entre la longitud del arco subtendido entre dos radios y la longitud de dichos radios (figura 2.59 a, el cociente entre la longitud del arco *s* y la del radio *r* define el valor del ángulo θ en radianes), es decir:

$$\theta = \frac{s}{r}$$

Si la longitud del arco es igual a la del radio (figura 2.59 b), entonces el ángulo es de un radián (1 rad); o sea, si r y s tienen la misma longitud, el ángulo θ mide un radián.

Fig. 2.59 a) El cociente entre la longitud del arco *s* y la del radio *r* define el valor del ángulo θ en radianes. b) Si *r* y *s* tienen la misma longitud el ángulo θ mide un radian.

Como un ángulo medido en radianes es la razón de dos longitudes, se dice que el radián tiene dimensión nula, es decir, si *s* = 3,0 m y *r* = 2,0 m, entonces θ = 1,5, pero se acostumbra a escribir esto como 1,5 rad para distinguirlo de un ángulo medido en otro sistema.

El perímetro de una circunferencia es 2π veces el radio, así que hay 2π (aproximadamente 6,283) radianes en una revolución (360°). Por tanto:

$$1\text{rad} = \frac{360}{2\pi} = 57{,}3^{o}$$

Con estos elementos ya estamos en condiciones de definir y caracterizar el movimiento circunferencial uniforme.

Movimiento circunferencial uniforme es aquel en que el vector de posición del cuerpo describe ángulos de giro iguales en iguales intervalos de tiempo, cualesquiera que estos sean.

Rapidez angular

En el caso del movimiento circunferencial uniforme, se denomina rapidez angular (ω) a la relación del ángulo $\Delta\theta$ que gira el vector de posición, del cuerpo que se mueve sobre la circunferencia, entre el intervalo de tiempo Δt que demora el giro. Esto se expresa matemáticamente mediante la ecuación:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (2.18)$$

Si el ángulo θ se expresa en radianes (rad) y el tiempo *t* en segundos, la rapidez angular se mide en radianes por segundo (rad/s).

Por otra parte, el valor de la velocidad o rapidez *v,* con que un cuerpo recorre un determinado arco de longitud ΔS**,** se puede expresar fácilmente en función de la rapidez angular ω como:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Se tiene entonces que:

$$v = r\omega \qquad (2.19)$$

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{r\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{r\omega\Delta t}{\Delta t} = r\omega$$

Esta ecuación, además de ser muy útil, nos indica que cuando un cuerpo se mueve con rapidez angular constante el valor de su velocidad lineal *v* será mayor a medida que el radio de giro sea mayor.

También resulta muy útil expresar la rapidez angular $v = r\omega$ (2.32) de un cuerpo en función del número de vueltas o revoluciones que el cuerpo realice en la unidad de tiempo. Para ello se utilizan dos magnitudes físicas *período y frecuencia de* un MCU.

Frecuencia. El número de vueltas (*n*) realizadas en la unidad de tiempo se denomina *frecuencia (f o* ν*).* La unidad de frecuencia en el Sistema Internacional de Unidades se denomina Hertz y se representa Hz.

Periodo. La magnitud física cuya medida es igual al inverso de la frecuencia se denomina *período.* El periodo representa el tiempo que demora un cuerpo en realizar una vuelta completa y se representa por la letra *T:*

De las definiciones de periodo y frecuencia se tiene que:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{\nu} \qquad (2.20)$$

Cada vez que el cuerpo dé una vuelta completa a la circunferencia, su vector de posición gira un ángulo de 2π (rad). Esto significa que si el cuerpo da *n* vueltas en la unidad de tiempo (*f*), entonces el vector de posición gira un ángulo de $2\pi f$ (rad), o sea:

$$\omega = 2\pi f \qquad (2.21)$$

Que, según (2.20), también se puede escribir como

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad (2.22)$$

Durante el movimiento circunferencial uniforme de un cuerpo, el valor de la velocidad lineal *v* permanece constante pero su dirección cambia al pasar de un punto a otro. Como ya conocemos, esto implica que existe una aceleración centrípeta durante el movimiento. Estudiemos como se puede calcular esta aceleración en función de la rapidez lineal *v* y de la rapidez angular ω para una trayectoria de radio *r*.

Consideremos que un cuerpo se mueve por una circunferencia de radio *r* y que en un instante determinado se encuentra en el punto *A* (figura 2.60) cuyo vector de posición es $\vec{r}_A$. En este punto la velocidad lineal del cuerpo $\vec{v}_A$ es, como sabemos, tangente a la trayectoria. Al cabo de un pequeño intervalo de tiempo Δt el cuerpo se encontrará en el punto *B,*

y su velocidad será $\vec{v}_B$, igual en valor modular a $\vec{v}_A$ y dirección tangente a la trayectoria en el punto *B.*

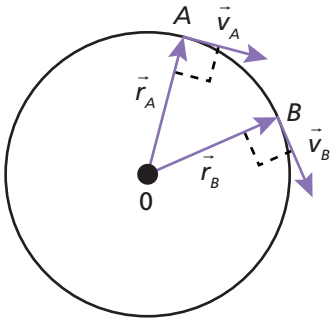


Fig. 2.60

Calculemos ahora la variación del vector velocidad por unidad de tiempo, es decir la aceleración, en este caso.

Como los valores de la velocidad lineal y del radio de giro no cambian, podemos representar la situación como se muestra en la figura 2.61.

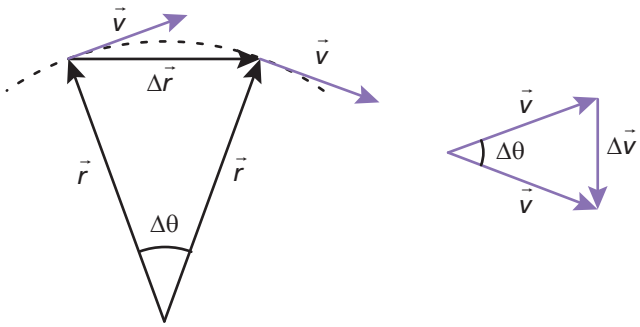


Fig. 2.61 Triángulos isósceles

Dado que los dos triángulos sombreados (isósceles) son semejantes, podemos plantear que:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r}, \text{donde} \Delta r = v\Delta t \text{ si el ángulo} \Delta\theta \text{ es muy pequeño}$$

Por lo tanto

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{v\Delta t}{r}$$

De donde se obtiene que:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{vv}{r} = \frac{v^2}{r}$$

Por lo tanto

$$a_c = \frac{v^2}{r} \qquad (2.23)$$

Que, a partir de la ecuación 2.19, se puede esperar también de la forma:

$$a_c = w^2 r \qquad (2.24)$$

El valor de la aceleración centrípeta de un cuerpo que se mueve con movimiento circunferencial uniforme, es igual a la razón entre el cuadrado del valor de la velocidad lineal del cuerpo y el radio de la circunferencia o, lo que es lo mismo, al producto de la rapidez angular por el radio de la circunferencia.

En conclusión, podemos decir que en un movimiento circunferencial uniforme el cuerpo se mueve con una aceleración cuya dirección coincide con la dirección radial de la circunferencia y cuyo sentido es hacia el centro de la circunferencia. Además, el vector aceleración centrípeta es en todo momento perpendicular al vector velocidad instantánea (figura 2.62).

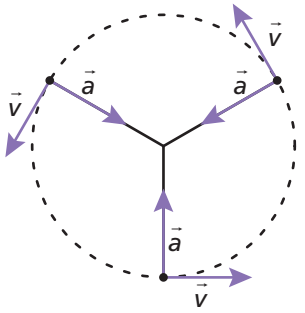


Fig. 2.62 Representación del movimiento circunferencial uniforme

Problema resuelto 2.18

En un parque de diversiones, un carrusel gira con rapidez angular constante y da una vuelta completa en 0,5 min. Un niño está montado en una de los caballitos a una distancia de 3 m del centro de giro y su hermano está en otro situado a 6 m. Determina la rapidez angular y la rapidez tangencial de cada niño.

Solución:

La rapidez angular es la misma para los dos caballitos. Si llamamos *A* al caballito que está a 3 m del centro de giro y *B* al que está a 6 m, podemos calcular la rapidez angular de los dos niños, en función de los datos, a partir de la ecuación:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Donde T = 0,5 min = 30 s

$$\omega_A = \omega_B = \frac{2\pi}{30\,s}$$

$$\omega_A = \omega_B \approx 0{,}21 \text{ rad/s}$$

La rapidez tangencial, para cada uno de los niños, se puede calcular utilizando la ecuación:

$$v_t = \omega R$$

De donde se obtiene que:

$$v_{t_A} = \omega R_A = (0{,}21 \text{ rad/s})(3 \text{ m}) = 0{,}63 \text{ m/s}$$
$$v_{t_B} = \omega R_B = (0{,}21 \text{ rad/s})(6 \text{ m}) = 1{,}26 \text{ m/s}$$

Problema resuelto 2.19

Un avión de acrobacias, al salir de una picada se mueve describiendo un arco de circunferencia con una rapidez contante de 800 km/h. Si el radio del arco descrito es de 500 m, calcula el valor de la aceleración centrípeta experimentada por el avión.

Solución:

Como se conoce la rapidez tangencial y el radio de la trayectoria, el valor de la aceleración centrípeta se puede calcular, directamente a partir de la ecuación:

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

Solo hay que cuidar, antes de sustituir los datos, de expresar la rapidez en m/s.

$$v = 800\,\text{km/h} = \frac{800 \cdot 10^3\ \text{m}}{3600\ \text{s}} \approx 222\ \text{m/s}$$

$$a_c = \frac{(222\ \text{m/s})^2}{500\ \text{m}} = 98{,}5\ \text{m/s}^2$$

Nota que el valor de esta aceleración es 10 veces mayor que la aceleración de la gravedad.

Comprueba tus conocimientos

40. ¿Cuál es el significado físico de la magnitud rapidez angular?

41. ¿Cómo están relacionados los valores de las magnitudes físicas rapidez angular y rapidez lineal en el Movimiento Circunferencial Uniforme?

42. El minutero y el segundero de cierto reloj tienen aproximadamente la misma longitud.

a) ¿Cuál de ellos tiene mayor rapidez angular? Argumenta tu selección.
b) Si se considera un punto que se encuentra en el extremo del minutero y del segundero, ¿cuál de los dos tiene mayor valor de su velocidad lineal? Argumenta tu selección.

43. ¿Cuál es la dirección y sentido del vector aceleración centrípeta de un cuerpo que se mueve por una circunferencia con velocidad lineal de valor constante?

44. Una piedra de esmeril de 10 cm de radio, durante su rotación realiza una vuelta cada 0,2 s. Calcula la aceleración centrípeta de uno de los puntos que se encuentra en su periferia.

45. Un automóvil se mueve por un tramo curvo de carretera, cuyo radio es de 100 m con una rapidez de 54 km/h. Calcula el valor de la aceleración centrípeta del automóvil.

46. Un disco de radio 5 cm, rota con rapidez angular constante, completando 1 500 vueltas en 15 s. Para un punto situado a 5 cm del centro del disco, determina:

a) El período y la frecuencia del movimiento.
b) La rapidez angular y el valor de la velocidad lineal.
c) La aceleración centrípeta

47. Una barra de longitud 1,0 m rota en contra de las manecillas del reloj, con velocidad angular constante como se representa en la figura 2.63. Se conoce que el intervalo de tiempo que emplea en moverse desde la posición I a la II es de 1,5 s. Calcula:

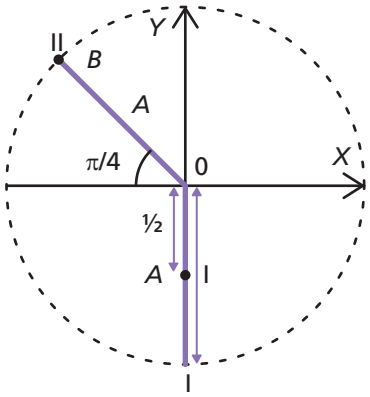


Fig. 2.63

a) El período de rotación de la barra.
b) La rapidez angular de la barra.
d) Los valores de las velocidades lineales de los puntos *A* y *B* de la barra. Representa el vector velocidad lineal en el punto *A.*
e) Los valores de la aceleración centrípeta de los puntos *A* y *B* de la barra. Representa el vector aceleración centrípeta en el punto *B.*

Tareas generales del capítulo

1. La figura 2.64 muestra la gráfica de la posición en función del tiempo para dos cuerpos *A* y *B* que se mueven por una trayectoria rectilínea.

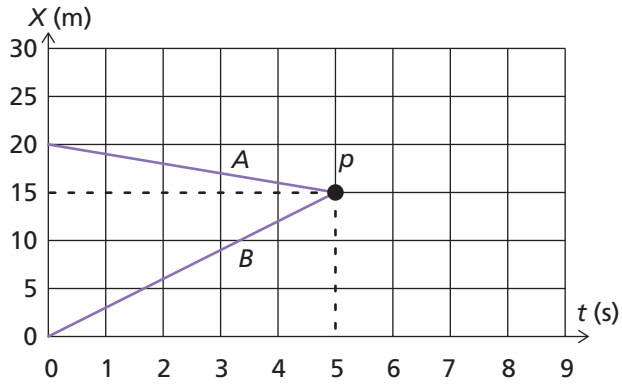


Fig. 2.64

a) ¿A qué distancia del origen de coordenadas están los cuerpos en el momento inicial?
b) ¿Qué representa el punto *p* en la figura? Explica.
c) De que tipo es el movimiento de cada cuerpo.
d) ¿Existe algún punto donde se igualen las velocidades? Explica.
e) Determina el valor del desplazamiento de cada cuerpo en el intervalo de tiempo transcurrido de $t = 0$ hasta $t = 5$ s.
f) Construye las gráficas del valor de la velocidad en función del tiempo para cada cuerpo.

2. Dos cuerpos *A* y *B* se mueven según las leyes: $x_A = 5 + 2t$ (m; s) y $x_B = 4 - 3t$ (m; s), respecto a un sistema de referencia fijo a la Tierra.
a) ¿Qué tipo de movimiento presenta cada cuerpo?
b) ¿Cuál es la posición inicial de cada cuerpo?
c) ¿Cuál es el valor de la velocidad de cada cuerpo?
d) Representa en una gráfica de $x = f(t)$ el movimiento de cada cuerpo.
e) Determina el módulo del desplazamiento de cada cuerpo para un intervalo de tiempo de 10 s.

3. Dos trenes parten de una estación y avanzan por dos líneas paralelas y rectas en el mismo sentido, animados de movimiento rectilíneo uniforme. El valor de la velocidad del primero es de 30,0 km/h y el del segundo 40,0 km/h. Si el segundo sale 2,0 h después que el primero. Calcula:
a) Sus posiciones respecto a la estación 5,0 h después de salir el primer tren.
b) El intervalo de tiempo que emplea el segundo tren en alcanzar al primero
c) La distancia que existe desde la estación al punto donde se cruzan.
d) Construya una gráfica de $x = f(t)$ que ilustre el movimiento de los trenes.

4. Un ómnibus de longitud 15,0 m avanza por una carretera y se mueve con MRU con una velocidad 36,0 km/h , un hombre camina dentro de él con una velocidad de 1,0 m/s hacia su parte trasera. Calcula:
a) El valor de la velocidad del hombre respecto a Tierra.
b) El tiempo en que demora el hombre en recorrer el ómnibus de un extremo a otro.
c) La distancia que recorre el hombre respecto a Tierra, en su movimiento hacia la parte trasera del tren.

5. Dada la gráfica (figura 2.65) del valor de la velocidad en función del tiempo, para un móvil que se mueve en un tramo recto:

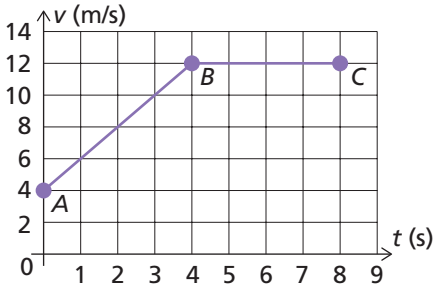


Fig. 2.65

a) Identifica el tipo de movimiento en cada tramo.
b) Calcula el valor de la aceleración en el tramo *AB.*
c) Calcula el valor de la velocidad del móvil a los 3,5 s.
d) Calcula el valor del desplazamiento total.
e) Calcula el valor de la velocidad media para el movimiento representado por el tramo *AB.*
f) Construye la gráfica del valor de la aceleración en función del tiempo $a = f(t)$, para el intervalo de 0 a 8 s.

6. Un auto tiene una velocidad inicial de 80,0 km/h, aplica los frenos y disminuye su velocidad hasta 50,0 km/h, en un intervalo de tiempo de 10,0 s. Calcula:
a) El valor de la aceleración del auto.
b) La distancia recorrida por el auto en 10 s.
c) El valor de la velocidad a los 2,0 s de iniciado el frenado.
d) La distancia que recorre en los dos últimos segundos del frenado.

7. Dada la gráfica del valor de la velocidad en función del tiempo (figura 2.66) para un cuerpo que se mueve en línea recta:
a) Determina el valor de la aceleración.
b) ¿Cuál es el valor de la velocidad a los 3 s?
c) Calcula el valor del desplazamiento al cabo de los primeros 2 s.
d) Calcula el valor del desplazamiento total.
e) Construye la gráfica de aceleración en función del tiempo $a = f(t)$.

8. **Desafío.** Un cuerpo se mueve inicialmente con MRU durante un intervalo de tiempo Δt_1 con una velocidad v_0. Después comienza a frenar con aceleración constante durante un intervalo tiempo Δt_2 hasta detenerse.

Conociendo que la velocidad media durante todo el movimiento es 10,0 m/s y que se cumple que $\Delta t_2 = 2\Delta t_1$. Determine la velocidad v_0.

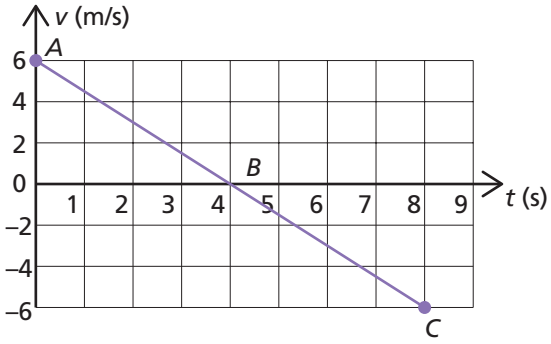


Fig. 2.66

9. La gráfica de la figura 2.67 muestra cómo varía el valor de la velocidad en función del tiempo para dos cuerpos que se mueven en la misma dirección y sentido. Para el instante inicial $t_0 = 0$, el cuerpo que parte de reposo comienza a moverse en el momento que el otro pasa junto a él.

Determina el instante de tiempo t y la posición x donde ocurre el encuentro.

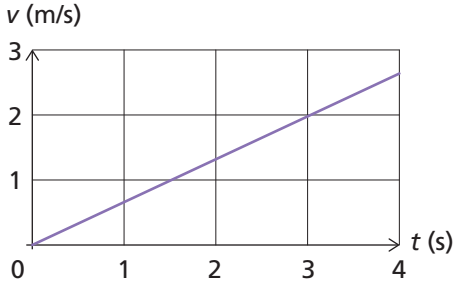


Fig. 2.67

10. Un proyectil es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de valor igual a 10,0 m/s. Calcula:

a) La altura máxima alcanzada y el tiempo para llegar a esta posición.
b) El tiempo que demora en regresar al punto de lanzamiento.
c) La posición y el valor de la velocidad del proyectil al cabo de 0,75 s.

11. Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial de 60,0 m/s, desde una altura de 250,0 m. Calcula:

a) El tiempo que demora en alcanzar la altura máxima

b) El valor de la velocidad de la pelota y el tiempo trascurrido cuando se encuentra a 225,0 m por debajo del punto de lanzamiento.

12. Desde el punto *P* que se encuentra a una altura de 3,0 m respecto al piso (figura 2.68), se lanzan horizontalmente y al mismo tiempo los proyectiles *A* y *B,* con velocidades de 16,0 m/s y 10,0 m/s respectivamente. Calcula:

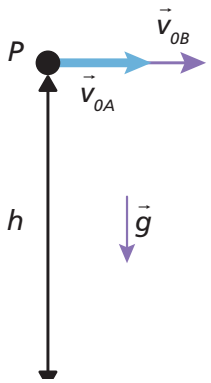


Fig. 2.68

a) El tiempo que demora cada proyectil en llegar al suelo.
b) El valor de la velocidad con que cada uno llega al suelo.
c) ¿Cuál de los proyectiles tiene un mayor alcance? Justifica tu respuesta.

13. Un proyectil es lanzado con una velocidad $\vec{v}_0$ que forma un ángulo $\alpha = 30°$ respecto a la dirección horizontal, como muestra la figura 2.69. Se conoce que el tiempo de vuelo es de 4,0 s. Calcula:

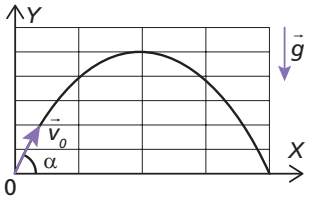


Fig. 2.69

a) El valor de la velocidad inicial.
b) La altura máxima alcanzada.
c) El máximo desplazamiento horizontal.

14. Las proyecciones de las componentes de la velocidad final de un proyectil, que fue lanzado con una velocidad $\vec{v}_0$ que forma un ángulo α respecto a la dirección horizontal, son v_x = 8,0 m/s y v_y = 6,0 m/s. Calcula:

a) La velocidad de lanzamiento del proyectil.
b) El tiempo de vuelo.
c) El alcance y la altura máxima.

15. Una piedra de amolar tiene un radio R = 15 cm y el motor que tiene acoplado provoca que de 240 vueltas en un minuto.

a) Determina el período de rotación.
b) Calcula el valor de la velocidad lineal tienen los puntos que se encuentran en la periferia de la piedra.
c) ¿A qué distancia del eje de rotación de la piedra, se encontrarán los puntos que poseen una velocidad lineal de valor igual a 2,5 m/s?

16. Un reloj que posee tres manecillas. La manecilla que marca las horas tiene una longitud de 0,8 cm, la que marca los minutos 1,2 cm y la que marca los segundos 1,3 cm. Determina los valores de las velocidades lineales del punto más alejado del eje de rotación para cada manecilla.

17. **Con simulador.** El maquinista de un tren de pasajeros, que viaja a 25 m/s, avista a un tren de carga cuyo furgón se encuentra a 200 m de él, en la misma vía. El tren de carga viaja en la misma dirección y sentido a 15 m/s. El maquinista del tren de pasajeros aplica los frenos inmediatamente provocando una aceleración cuyo modulo es 1 m/s^2, mientras el tren de carga sigue su marcha a velocidad constante. Utilizando Física Interactiva u otro *software* apropiado, modela el fenómeno descrito y determina si hay colisión.

18. **Con simulador.** Desde una altura de 2,0 m respecto a la superficie del suelo se lanza verticalmente hacia arriba una piedra con una velocidad de valor igual 5,0 m/s, la cual llega al suelo después de un tiempo determinado.

a) Representa mediante un dibujo la situación descrita.
b) Modela la situación descrita, utilizando el *software* Física Interactiva (u otro apropiado).
c) Incluye en la modelación las gráficas de la variación del valor de la velocidad y de la posición en función del tiempo.

19. **Con simulador.** Un proyectil de 3,0 kg es lanzado horizontalmente desde una altura de 2,0 m, con una velocidad de valor igual 5,0 m/s y al transcurrir un tiempo determinado llega al suelo. Modela la situación descrita (utilizando Física Interactiva u otro *software* apropiado) y calcula el tiempo de caída.

20. **Con simulador.** Un cuerpo de 30,0 kg que se encuentra en reposo a una altura de 3,0 m sobre un plano inclinado liso, que forma un ángulo de 30°, respecto a la horizontal, comienza a descender hasta que llega a la base del plano.

a) Modela la situación descrita, utilizando Física Interactiva u otro *software* apropiado.
b) Determina la velocidad del cuerpo al llegar a la base del plano

21. Un auto viaja a una velocidad de 90 km/h por una carretera recta y de pronto se encuentra a una vaca sobre la vía. A que distancia mínima debe estar el auto de la vaca para evitar el choque con ella. ¿Qué consecuencias puede traer este accidente en caso de que ocurriera? ¿Qué violación de la ley está presente?

CAPÍTULO 3

Leyes del movimiento mecánico. Ley de Gravitación Universal

Hasta ahora nos hemos limitado al estudio de la descripción, en determinados casos, del movimiento de traslación. En particular, sabemos que: el movimiento rectilíneo uniforme se caracteriza por su aceleración nula; el movimiento rectilíneo uniformemente variado por su aceleración constante; cuando la aceleración de un cuerpo es la de la gravedad se mueve en "caída libre" y que, en el movimiento circunferencial uniforme, la aceleración tiene valor constante, dirección radial y sentido hacia el centro de la trayectoria.

Con estos conocimientos es posible hacer ciertas predicciones y resolver múltiples problemas de interés práctico, sin embargo, no se pueden explicar los factores de los cuales depende el movimiento de un cuerpo y por tanto diseñar movimientos con las características deseadas.

¿Cuáles son los factores de los cuales dependen las características del movimiento de un cuerpo, o lo que es lo mismo, las causas que provocan los cambios en el estado de movimiento de los cuerpos?

> A la rama de la mecánica que se ocupa del estudio de los factores de los cuales dependen el cambio del estado mecánico de un sistema y, en consecuencia, poder predecir y modelar el movimiento de los cuerpos, se le conoce como dinámica.

Seguramente, no te resulta desconocida la respuesta a esta pregunta, tanto por lo estudiado en el octavo grado como por lo que puedas haber aprendido de otras fuentes. En este capítulo, se ampliará y profundizará en la respuesta a este importante problema.

¡Cuidado!

Puede ser conveniente destacar desde ahora, para evitar errores posteriores, el término *cambios,* utilizado para referirnos al objeto de estudio de la dinámica, pues aún persiste en muchos textos y escritos (ver por ejemplo la definición de dinámica en Wikipedia) la incorrección de decir "estudio de las causas del movimiento".

Las leyes de Newton del movimiento mecánico o simplemente las leyes de Newton, constituyen la base de la dinámica. Fueron formuladas por el físico inglés Isaac Newton (figura 3.1) y publicadas en 1687 en su obra *Philosophiæ naturalis principia mathematica,* que constituyó un importante hito en el desarrollo de las ciencias en sentido general.

Fig. 3.1 Isaac Newton (1642-1727), matemático y físico británico, considerado uno de los más grandes científicos de la historia

Podemos percatarnos de la importancia de estas leyes si consideramos que estas han permitido dar una explicación a fenómenos tan diferentes como el del movimiento de los planetas alrededor del Sol y el movimiento de un cuerpo suspendido de un resorte o el movimiento de los proyectiles, cuya descripción ya hemos estudiado en este curso. También, si reflexionamos sobre el hecho de que las complejas trayectorias que deben seguir los vehículos espaciales que circunvalan la Tierra o han sido enviados a la Luna y a varios planetas del Sistema Solar, se calculan sobre la base de estas leyes (figura 3.2, en las que se consideró que la nave pasaría por una zona de baja radiación de los cinturones de Van Allen y atravesaría esta zona en el menor tiempo posible). De igual forma estas leyes están en la base de la explicación y del propio diseño de todas las máquinas construidas por el

hombre, desde la simple palanca hasta las más complejas que se utilizan en la industria moderna.

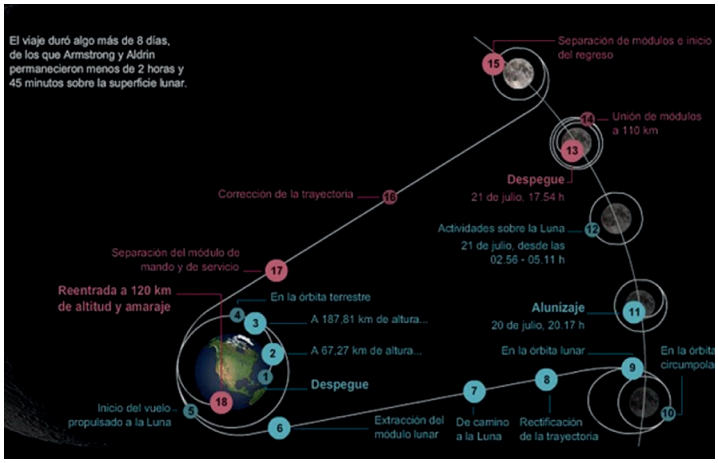


Fig. 3.2 Esquema que muestra la complejidad de la trayectoria del viaje a la Luna del Apolo 11

Por otra parte, el descubrimiento y formulación matemática de estas leyes constituyen uno de los grandes paradigmas de la ciencia e incluso, como se estudiará más adelante, los nuevos desarrollos de la ciencia conservan la validez de estas leyes en el marco en que fueron formuladas, es decir para los cuerpos macroscópicos que se mueven a velocidades con valores mucho menores que el de la velocidad de la luz en el vacío, que como recordarás es de aproximadamente $3 \cdot 10^8$ m/s.

Las leyes de Newton de la mecánica son tres y se acostumbran a nombrar como: primera ley o ley de la inercia, segunda ley o ley de la fuerza y tercera ley o ley de la acción y reacción.

De la historia

Isaac Newton nació el día de navidad de 1642, el mismo año en que falleció Galileo Galilei. Como Galileo, a Newton le gustaba construir y experimentar con aparatos mecánicos, además de poseer una fuerte inclinación hacia las matemáticas. A los 24 años de edad, calladamente, había hecho importantes descubrimientos en las matemáticas, la óptica, la mecánica y la gravitación. En 1687 Newton se estableció como uno de los más

grandes pensadores de la Historia, a partir de la publicación de su libro *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural,* conocido también como los *Principia.* En el año 1699 fue nombrado Jefe de la Casa de la Moneda, donde se encargó de controlar la acuñación de las nuevas monedas, que venían a sustituir a las anteriores, talladas a mano y fácilmente falsificables. Su dedicación fue absoluta y tan perfeccionista con ella como con sus experimentos científicos, como atestigua el centenar largo de falsificadores detenidos. En 1689 y 1701 representó a su universidad en el Parlamento. Fue hecho caballero en 1705. Desde 1703 hasta su muerte fue presidente de la Real Sociedad. Fue enterrado en la Abadía de Westminster

3.1 Primera ley de Newton (Ley de la inercia)

De estudios anteriores conocemos que la primera Ley de Newton o Ley de la inercia establece que:

> Todo cuerpo continúa en su estado de reposo, o de movimiento uniforme en una línea recta, a menos que sea obligado a cambiar ese estado por fuerzas aplicadas sobre él.

Esta ley tiene sus antecedentes en los trabajos de Galileo y permitió superar la visión aristotélica imperante por más de dieciocho siglos, de que el reposo era el estado natural de los cuerpos.

Recordemos que durante siglos el hombre pensó que para mantener un cuerpo en movimiento se necesitaba de la acción de otro. Por ejemplo, si se deja un cuerpo en movimiento libre, este en algún momento se detendrá; situaciones como esta fueron objeto de análisis por Aristóteles (384 a.n.e.-322 a.n.e.) y muchos otros filósofos de la antigüedad.

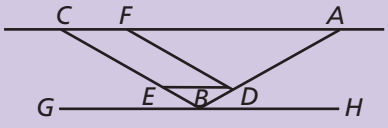
Las ideas esenciales formuladas por Galileo Galilei (1564-1642) y que constituyen la base de la primera Ley de Newton, tiene su origen en una serie de experimentos, diseñados por Galileo, en los que se analizaba el movimiento de un cuerpo al descender por un plano inclinado y luego ascender por otro de altura variable (figura 3.3).

Fig. 3.3 Esquema de los planos inclinados de Galileo

Galileo observó que a medida que se disminuye el ángulo de inclinación del plano por el que asciende el cuerpo, este alcanza una distancia horizontal cada vez mayor. En consecuencia, cuando el ángulo de inclinación es cero, el cuerpo continuaría su movimiento con velocidad constante, por supuesto considerando que las acciones externas sobre él (por ejemplo, la del aire) son nulas.

De la historia

La figura muestra el esbozo geométrico que realizó Galileo para un cuerpo que se mueve por un plano inclinado descendente *(AB),* uno ascendente *(BC)* y uno horizontal *(GH).* Lo anterior se muestra, de una manera más sencilla de comprender en la figura 3.3.



En la actualidad esto se puede apreciar en el movimiento de los satélites artificiales alrededor de la Tierra, que se mantiene inalterable por mucho tiempo, dado que prácticamente a la altura en que se encuentran, la resistencia del aire es despreciable.

También, en el laboratorio escolar, por ejemplo, mediante la llamada "vía de aire" (figura 3.4), se puede hacer una demostración de este fenómeno.

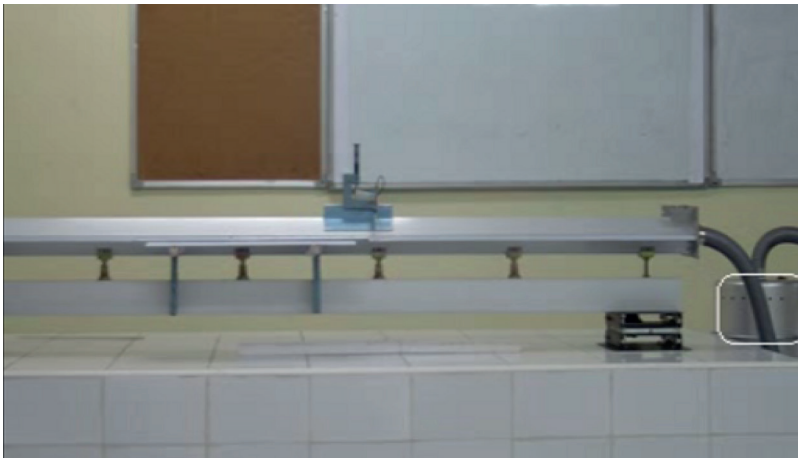


Fig. 3.4 Vía de aire utilizada en el laboratorio escolar de Física

En este dispositivo, cuando el flujo de aire que sale por los orificios levanta al cuerpo hace que la fuerza de rozamiento con la vía sea muy

pequeña. Si la vía está colocada horizontalmente, la velocidad del cuerpo que está colocado sobre ella permanece prácticamente constante, pues, por otra parte, la fuerza de rozamiento con el aire circundante es también muy pequeña.

Por supuesto, para comprender bien el significado de esta ley hay que recordar el concepto de fuerza en tanto constituye un elemento esencial de su enunciado.

Aunque durante el estudio de la segunda ley profundizaremos en este concepto (para Newton la fuerza de define a partir de la segunda ley), recordemos que para modificar el estado de movimiento de un cuerpo este debe interactuar con otro y que denominamos fuerza a la magnitud física que mide el grado de esta interacción, es decir que tan pequeño o grande es el cambio del estado de movimiento ocasionado por la interacción. En síntesis:

> Fuerza es la magnitud física vectorial que mide el grado de interacción entre los cuerpos. En el SI su unidad es el newton (N).

Como también conoces, la interacción entre los cuerpos puede dar lugar también a su deformación y no solo a cambiar su estado de movimiento como un todo. Este hecho es un importante precedente en el proceso de formación del concepto de fuerza y es la idea que se utiliza cuando se mide el valor de una fuerza con un dinámetro de resorte (figura 3.5).

Fig. 3.5 Medición de fuerza con un dinamómetro

Detengámonos ahora a examinar otra cuestión esencial relacionada con la primera ley.

Si desde un vehículo que se mueve siguiendo una trayectoria rectilínea con velocidad de valor *v* se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba, desde el sistema de referencia ligado a ese cuerpo, el cuerpo asciende y luego desciende retornando al mismo punto describiendo una trayectoria rectilínea.

Lo mismo sucederá si el cuerpo se lanza desde otro vehículo que se mueva a mayor o menor velocidad siempre y cuando esta sea constante. Sin embargo, si se repite la experiencia anterior cuando el vehículo está aumentando su velocidad, la trayectoria no será rectilínea ni el cuerpo retornaría al mismo punto. Lo mismo sucederá si el vehículo está disminuyendo su velocidad.

Un examen más detallado de esta situación nos conduce a afirmar que todos los sistemas de referencia ligados a un cuerpo animado de movimiento rectilíneo uniforme son equivalentes, es decir los fenómenos físicos que ocurren en ellos se describen de igual forma, estos sistemas se denominan *sistemas de referencia inerciales.*

Lo anterior significa que, si sobre un cuerpo no actúa ninguna fuerza o, lo que es lo mismo, las fuerzas que actúan sobre él están compensadas, el sistema de referencia ligado a ese cuerpo es un sistema de referencia inercial. De hecho, esta sería otra forma se expresar la primera ley.

> Sistema de referencia inercial es aquel que está asociado a un cuerpo que se mueve con movimiento rectilíneo uniforme o lo que es lo mismo, todos aquellos en los que se cumple la primera ley o de la inercia.

Desde un punto de vista práctico podríamos concluir que se puede considerar a la Tierra, o cualquier cuerpo en reposo o movimiento rectilíneo uniforme respecto a ella, como un sistema de referencia inercial.

Pero si analizamos más profundamente, hay que tomar en consideración que cualquier cuerpo sobre la superficie de la Tierra, en reposo o movimiento respecto a ella, también tiene un movimiento circunferencial debido a su rotación y que además está girando junto con la Tierra alrededor del Sol.

Sin embargo, para estudiar muchos movimientos se puede considerar a la Tierra con una buena aproximación como un sistema de referencia inercial, ¿por qué?

En los casos en que considerar a la Tierra como un sistema de referencia inercial no sea una buena aproximación, se puede entonces asumir como sistema de referencia inercial el Sol y si fuera necesario tener en cuenta el movimiento del Sistema Solar en la Galaxia, se puede asumir como sistema de referencia inercial uno asociado a las estrellas "fijas" (estrellas tan alejadas que parecen estar inmóviles en muy largos periodos de tiempo)

En conclusión, si bien en el universo no existe un cuerpo al cual asociar un sistema de referencia inercial, si es posible establecer con una buena aproximación un sistema de este tipo.

Para Newton, esto no constituía un problema pues él y sus contemporáneas asumían la existencia de un "espacio absoluto" y la primera ley se cumplía estrictamente en todos los sistemas de referencia que se moverán de manera rectilínea y uniforme respecto a este "espacio absoluto" pero, la ciencia ha podido demostrar la inexistencia de tal "espacio absoluto".

De la historia

En sus trabajos con los planos inclinados, Galileo llega a definir la ley de la inercia de la siguiente manera:

"Es necesario considerar, además, que el grado de velocidad cualquiera que sea el que se dé en el móvil, está por su propia naturaleza indeleblemente impreso en él, con tal que se eliminen todas las causas externas de aceleración o retardación, lo que sólo acontece en el plano horizontal; porque en los planos en declive descendente ya existe una causa de mayor aceleración, y en los en rampa ascendente de retardación; de donde se sigue que el movimiento en el plano horizontal es también eterno, porque si es uniforme no se debilita ni disminuye ni mucho menos se extingue".

Pero esta definición no es el único antecedente a la ley enunciada por Newton, existen otras definiciones que se muestran a continuación:

René Descartes (1596-1650): "Cada uno de los cuerpos permanece en el mismo estado hasta donde es posible y cambia su estado solamente por impacto con otros cuerpos. Cada cuerpo tiende a continuar su movimiento en línea recta, no una curva, y todo movimiento curvilíneo es movimiento bajo alguna constricción".

Cristian Huygens (1629-1695): "Un cuerpo en movimiento tiende a moverse en línea recta con la misma velocidad en tanto no encuentre un obstáculo".

Además de las mencionadas, se encuentran ideas sobre la inercia en los trabajos de Demócrito, Aristóteles, Filopono, Buridan y Benedetti.

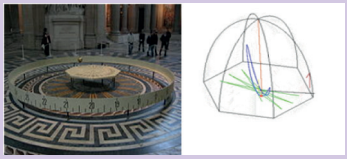
Newton, originalmente la enunció de la siguiente manera: "Todo cuerpo continúa en su estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta, si no es obligado a cambiar dicho estado por fuerzas aplicadas a él", la cual puede ser encontrada en los *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural* (1687), después de la definición IV donde plantea que una fuerza aplicada es una acción ejercida sobre un cuerpo a fin de cambiar su estado, ya sea de reposo, o de movimiento uniforme en una línea recta.

¿Por qué las leyes enunciadas por Huygens y Descartes no se aceptaron como la ley de la inercia y el mérito le pertenece a Newton?

¿Qué hay de incorrecto en la ley enunciada por Galileo que no le permitió ser el "dueño" de esta? ¡Cuidado!, la respuesta a esta pregunta no es tan sencilla. Si quieres contestarla exitosamente consulta Diálogos acerca de Dos Nuevas Ciencias, que puedes descargar de internet.

¿Sabías que...?

La primera demostración pública de la rotación de la Tierra se realizó (1851) mediante el "péndulo de Foucault". El péndulo se fijó a la cúpula del Panteón de París; medía 67 m y llevaba un cuerpo de 28 kg. Una vez lanzado, el péndulo oscilaba durante 6 h. El periodo es de 16,5 s; el péndulo se desviaba 11° por hora. Su ciclo de giro completo dura algo más de 32 h (figura 3.6 a).



a b

Fig. 3.6

La figura 3.6 b) es el esquema del movimiento del péndulo visto por un observador externo (la trayectoria, proyectada sobre el piso, se representa en verde).

Inercialidad y masa de los cuerpos

Antes de estudiar la segunda ley puede ser conveniente recordar y profundizar en los importantes conceptos de inercialidad y masa de los cuerpos.

De acuerdo con la primera ley de Newton, un cuerpo conserva su estado de movimiento cuando sobre el no actúan otros cuerpos o lo que es lo mismo, cuando las fuerzas que ejercen estos se compensan.

Ahora bien, la experiencia indica que los propios cuerpos y no solo la fuerza ejercida sobre ellos está relacionada con la variación del estado de movimiento, o lo que es lo mismo con la variación de su velocidad: la acción necesaria para que una mesa en reposo se ponga en movimiento con velocidad de valor v no es la misma que se debe ejercer para que un automóvil alcance el mismo valor de velocidad.

Por otra parte, suponga que tenemos dos cuerpos iguales y que al ejercer una fuerza sobre uno de ellos, durante cierto tiempo, el valor de su velocidad varia en Δv. Si se unen los dos cuerpos, por ejemplo, colocando uno sobre el otro sin que deslicen, y se ejerce sobre este sistema la misma fuerza, esta tendrá que actuar durante más tiempo para lograr la misma variación en el valor de la velocidad.

Estos hechos ponen de manifiesto que los cuerpos tienen la propiedad de oponerse en mayor o menor grado a variar su estado de movimiento y a esta propiedad se le llama *inercialidad*.

> La inercialidad es la propiedad de los cuerpos de oponerse, en mayor o menor grado, al cambio del estado de movimiento mecánico.

¿Sabías que...?

Algunos autores le llaman a la propiedad de la inercialidad, inercia. En este libro utilizamos el término inercia para designar el fenómeno sobre cuya base se establece la primera ley y el término inercialidad para caracterizar la propiedad de los cuerpos de oponerse, en mayor o menor grado, al cambio del estado de movimiento mecánico.

Este hecho tiene múltiples manifestaciones en la vida cotidiana y también puede ser comprobado fácilmente de muchas maneras (algunas de ellas muy impactantes). Una forma sencilla puede ser la de colocar una hoja de periódico sobre una mesa y sobre ella un vaso (preferentemente plástico para evitar un accidente). Si tiras rápidamente de la hoja el vaso quedará sobre la mesa sin moverse, pero si lo hace lentamente el vaso se moverá junto con la hoja. ¡Hazlo!

¿Sabías que...?

En relación con la experiencia antes descrita (el vaso sobre la hoja de periódico): cuando la hoja de periódico se retira rápidamente la interacción con el vaso es tan pequeña (dura muy poco tiempo) que este no cambia su estado mecánico.

En la actualidad, a la magnitud física que mide la inercialidad se le llama **masa** (más propiamente dicho **masa inercial**) y su unidad de medida en el Sistema Internacional de Unidades es el **kilogramo** (kg).

Para medir la masa de un cuerpo (la masa inercial) se encuentra la relación entre las aceleraciones experimentadas por un cuerpo considerado como patrón y la del otro cuerpo, por ejemplo, mediante un experimento como el que se muestra en el esquema representado en la figura 3.7. Cuando el resorte se expande los cuerpos de masas m_1 y m_2 se mueven con aceleraciones medias de valores a_1 y a_2 respectivamente.

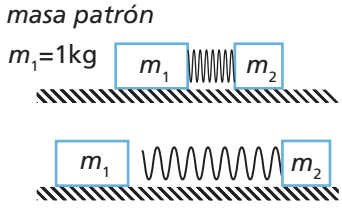


Fig. 3.7

Como resultado de un experimento de este tipo se encuentra que

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} \qquad (3.1)$$

Donde a_1 y a_2 son los valores medios de las aceleraciones adquiridas por los cuerpos de masas m_1 y m_2 respectivamente, durante la expansión del resorte.

Si se toma como patrón el cuerpo de masa 1 se obtiene que:

$$m = m_1 \cdot \frac{a_1}{a_2} \text{ (m}_1\text{: masa patrón utilizada)} \qquad (3.2)$$

La masa (masa inercial) de un cuerpo es la magnitud física escalar que mide su inercialidad y se determina por la relación de la aceleración del cuerpo patrón y la aceleración del cuerpo en cuestión durante la interacción.

En la práctica, dada la equivalencia entre la masa inercial y la masa gravitatoria, la masa inercial se mide con una balanza (figura 3.7).

¡Cuidado!

Puede ser conveniente destacar que "masa" no es el concepto de cantidad de sustancia en el cuerpo; ni el concepto erróneo de que es el "peso" del cuerpo.
El peso, como sabemos, es la fuerza que ejerce un cuerpo sobre su apoyo o sostén.
La **cantidad de sustancia** representa una cantidad determinada de moléculas y se mide en moles, no en kilogramos.
La **masa inercial** mide la oposición de un cuerpo al cambio de su estado de movimiento.
Son tres conceptos relacionados, pero no iguales.

La masa posee la propiedad de ser aditiva, es decir si se unen dos cuerpos de masas m_1 y m_2, la masa del nuevo cuerpo será:

$$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n \qquad (3.3)$$

Otra forma de conocer el valor de la masa de un cuerpo es utilizando la balanza (figura 3.8). El cuerpo interactúa con la Tierra y su masa es conocida como masa gravitatoria.

Fig. 3.8 Algunos tipos de balanzas

Las mediciones hechas de la masa inercial y la masa gravitatoria, coinciden con una incertidumbre de 10^{-13}, por lo que es válido decir que se pueden considerar equivalentes.

Comprueba tus conocimientos

1. Supongamos que tenemos un cuerpo, inicialmente en reposo, y se deja deslizar por el plano inclinado (ver figura 3.2) desde una altura de 10 cm. Si el rozamiento del cuerpo con el plano y el aire se puede considertar despreciable:

a) ¿A qué altura llegará en el plano inclinado de la derecha?
b) Si el plano inclinado de la derecha posee un pendiente de 1 cm por cada 10 cm de recorrido horizontal, ¿cuál será la distancia horizontal que recorrerá el cuerpo cuando asciende por este plano?
c) ¿Cuál será la distancia horizontal que recorre el cuerpo cuando asciende por el plano, si la pendiente del plano inclinado de la derecha fuera de 1,5 cm por cada 10 cm?
d) Si la pendiente del plano de la derecha es nula, ¿qué distancia recorrerá el cuerpo en la dirección horizontal?

2. Cita tres ejemplos de cuerpos que se encuentren en reposo respecto a la Tierra. Menciona en cada caso las acciones de los cuerpos que se compensan.

3. Enuncia el contenido de la primera ley de Newton.

4. Critica las siguientes afirmaciones.

a) Si sobre un cuerpo no actúan otros cuerpos, el cuerpo se moverá sin aceleración.
b) El movimiento de un cuerpo a lo largo de un plano horizontal sin obstáculo, es permanente.
c) Para que un cuerpo se mantenga animado de movimiento rectilíneo uniforme, sobre él siempre deben actuar otros cuerpos.

5. Cuando viajamos en un ómnibus que se mueve a lo largo de una trayectoria rectilínea con rapidez constante, mantenemos nuestra posición sin la necesidad de realizar esfuerzo alguno. Explica por qué esto es así.

6. ¿Qué sucede cuando viajamos de pie, sin sujetarnos, en un ómnibus que marcha con rapidez constante y de pronto el ómnibus toma una curva? Argumenta.

7. ¿Puede la velocidad de un cuerpo cambiar de forma instantánea?

8. ¿A qué llamamos masa? En el SI, ¿en qué unidad se mide?

9. ¿En qué consiste la propiedad de los cuerpos llamada inercialidad?

10. Se tiene un cuerpo suspendido de un soporte mediante una cuerda *A;* una segunda cuerda *B* del mismo material se coloca en la parte inferior del cuerpo figura 3.9.

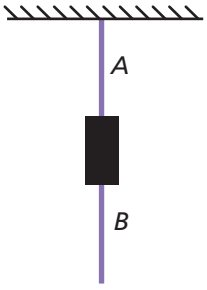


Fig. 3.9

a) Si se tira de la cuerda B rápidamente, esta se rompe.
b) Si de la cuerda *B* no se tira de forma rápida, sino de manera continua y con intensidad progresiva, la que se rompe es la cuerda *A.*
Explica la causa de la diferencia de este comportamiento.

11. ¿Qué magnitud caracteriza la inercialidad de un cuerpo?

12. ¿Qué relación existe entre las masas de dos cuerpos y los módulos de sus aceleraciones cuando interactúan?

13. Se tienen dos cuerpos, uno de 2,0 kg y otro de 4,0 kg. ¿Cuántas veces es más inerte un cuerpo en relación con el otro?

14. ¿Qué significa que la masa de un cuerpo posee la propiedad de ser aditiva?

3.2 Segunda Ley de Newton (Ley de la fuerza)

Como sabes, la primera Ley de Newton nos dice que: todo cuerpo permanece en su estado de reposo, o de movimiento uniforme en una línea recta, a menos que sea obligado a cambiar ese estado por fuerzas aplicadas sobre él. Esto significa que si la velocidad cambia es porque sobre el cuerpo se ejerce una fuerza neta (resultante).

¿Qué relación existe entre la fuerza resultante ejercida sobre un cuerpo y el cambio de su velocidad?

La respuesta a esta pregunta tiene una extraordinaria importancia teórica y práctica. Para comenzar con el estudio de esta cuestión puede ser conveniente precisar y resumir algunas de nuestras experiencias relacionadas con este fenómeno y después analizarlas con más rigor en el laboratorio.

Analicemos primero lo que ocurre cuando sobre un cuerpo de masa m actúa una fuerza resultante $\vec{F}$: al cabo de un intervalo de tiempo de Δt, la velocidad del cuerpo varia en una cantidad $\Delta\vec{v}$, es decir, adquiere una aceleración $\vec{a}$, dirigida en la misma dirección y sentido que la fuerza resultante $\vec{F}$.

Ahora bien, la experiencia concuerda con el hecho de que, si se duplica el valor de la fuerza resultante aplicada sobre el cuerpo, manteniendo constante la masa, el valor de la aceleración también se duplica y, en general, ocurre que el valor de la aceleración es directamente proporcional al valor de la fuerza aplicada (figura 3.10 a):

$$a \propto F$$

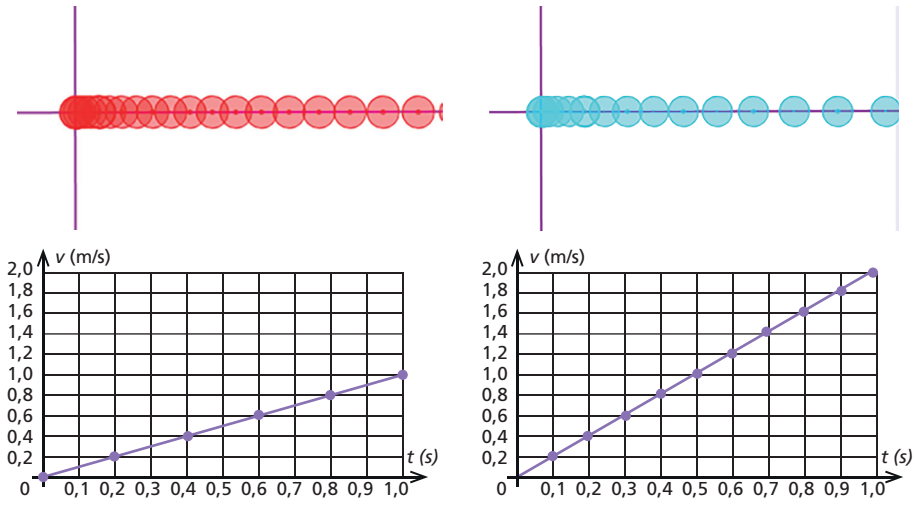


Fig. 3.10 a

En la imagen superior izquierda se muestra un cuerpo de masa *m* que se mueve bajo la acción de una fuerza de valor *F* y en la inferior la gráfica de cómo el valor de la velocidad cambia desde cero (0) hasta 2 m/s en 1 s, es decir que el valor de la aceleración es de 1 m/s^2. En la imagen superior derecha se muestra el movimiento del mismo cuerpo de masa *m,* pero bajo la acción de una fuerza de valor 2*F* y la imagen inferior indica que, en este caso, el valor de la velocidad varía desde cero (0) hasta 2 m/s en 1 s es decir que el valor de la aceleración es de 2 m/s^2. Se tiene entonces que el valor de la aceleración se duplica al duplicarse el valor de la fuerza aplicada sobre el cuerpo.

Por otra parte, si se mantiene constante el valor de la fuerza y se duplica la masa del cuerpo, entonces la aceleración que adquiere el cuerpo resulta ser la mitad y en general, se observa que el valor de la aceleración es inversamente proporcional a la masa del cuerpo (figura 3.10 b):

$$a \propto \frac{1}{m}$$

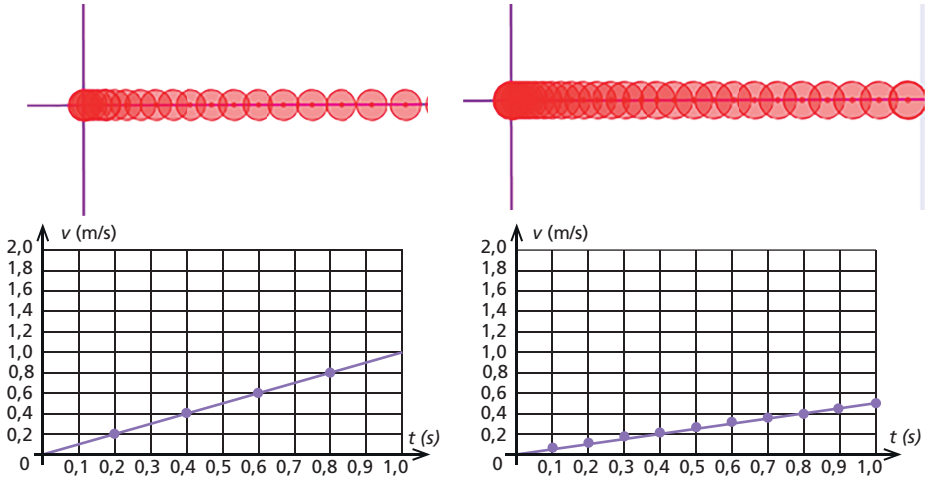


Fig. 3.10 b

En este caso el valor de la velocidad varía desde cero (0) hasta 0,5 m/s en 1 s, es decir el valor de la aceleración alcanza un valor de 0,5 m/s^2. Se tiene entonces que el valor de la aceleración disminuye a la mitad, si se mantiene la misma fuerza aplicada, cuando la masa del cuerpo se duplica.

Estas relaciones experimentales entre los valores de las magnitudes aceleración, fuerza y masa están en la base de la segunda ley de la mecánica formulada por Newton.

En el lenguaje utilizado actualmente por la ciencia, para el caso particular de que la masa del cuerpo permanezca constante, una forma de enunciar la segunda ley es la siguiente:

> La aceleración experimentada por un cuerpo, es decir el cambio de su estado de movimiento, es directamente proporcional a la fuerza aplicada e inversamente proporcional a la masa del cuerpo.

Lo que se puede expresar en símbolos como:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_R}{m} \qquad (3.4)$$

Donde $\vec{F}_R$ es la fuerza resultante, vale decir, la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

En el Sistema Internacional de Unidades la constante de proporcionalidad es igual a la unidad y por eso no figura en la ecuación.

Otra forma equivalente de expresar la segunda ley de Newton, de hecho, la más utilizada es la siguiente:

$$\vec{F}_R = m\vec{a} \qquad (3.5)$$

Esto nos expresa que:

> La fuerza resultante ejercida sobre un cuerpo es directamente proporcional al producto de su masa por su aceleración.

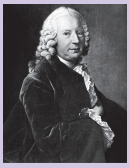
De la historia

Newton formuló su segunda ley (al igual que las otras dos) de manera axiomática, de la forma siguiente:
El cambio de movimiento es directamente proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime.
En el original, en latin: *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitu*.
La expresión *F = ma,* fue introducida durante el siglo XVIII por el matemático MacLaurin y por los Bernoulli (J. y D.) y L. Euler.

MacLaurin
(1698-1746)

Euler
(1707-1783)

J. Bernoulli
(1667-1748)


D. Bernoulli
(1700-1782)

Puede ser conveniente añadir que, para Newton, la segunda ley constituía una definición de fuerza, pero si consideramos que además de la masa y la aceleración, la fuerza también está definida como la medida de las interacciones, entonces esta ecuación representa una ley física.

También es necesario precisar que la segunda ley, formulada de esta manera, solo es aplicable desde sistemas de referencia inerciales, vale decir, aquellos que, como sabemos, quedan definidos por la primera ley.

Si se quiere utilizar la segunda ley desde sistemas de referencia no inerciales, es necesario reformularla de otra manera, lo que se acostumbra estudiar en los cursos universitarios de física.

También es importante señalar que los avances experimentados por la ciencia después de Newton no han cambiado la esencia de las leyes de Newton en el marco en que fueron formuladas, es decir, para los cuerpos macroscópicos que se mueven a velocidades con valores mucho menores que el de la velocidad de la luz en el vacío, que como recordarás es de aproximadamente $3 \cdot 10^8$ m/s.

Comprueba tus conocimientos

15. Plantea la expresión matemática de la segunda ley de Newton para el caso de cuerpos cuya masa no varía e interpreta su significado.

16. Di en qué condiciones es aplicable la segunda ley de Newton.

17. Indica si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones y argumenta las razones.

a) Un cuerpo sobre el que actúan varias fuerzas, cuya resultante es no es nula, permanece en reposo.
b) Un cuerpo que no tiene aceleración no está sometido a fuerza alguna.
c) Si la velocidad de un cuerpo es nula en un instante dado, es porque la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el en ese instante es nula.
d) La variación de la velocidad de un cuerpo solo queda definida por la fuerza resultante que actúa sobre él.
e) El desplazamiento de un cuerpo queda definido por la fuerza resultante que actúa sobre él.

18. Explica la causa o causas de las situaciones siguientes:

a) Un automóvil (sin gasolina y sin freno) disminuye su velocidad y se detiene.
b) Un libro que desliza sobre una mesa disminuye su velocidad y se detiene.
c) Una tiza al caer desde cierta altura aumenta su velocidad hasta chocar contra el suelo.
d) Una pelota que desliza hacia abajo por una pendiente aumenta su velocidad hasta alcanzar la parte más baja.
e) La Luna gira alrededor de la Tierra con rapidez aproximadamente constante.

19. ¿Qué significa el hecho de que la fuerza sea una magnitud vectorial?

20. Un cuerpo de 2,0 kg que se encuentra sobre una superficie horizontal dura y lisa se somete a la acción de varias fuerzas, cada una de 5,0 N, como se indica en la figura 3.11.

a) ¿Cuáles representaciones son equivalentes? ¿Por qué?
b) ¿Qué aceleración adquiere el cuerpo en cada caso?

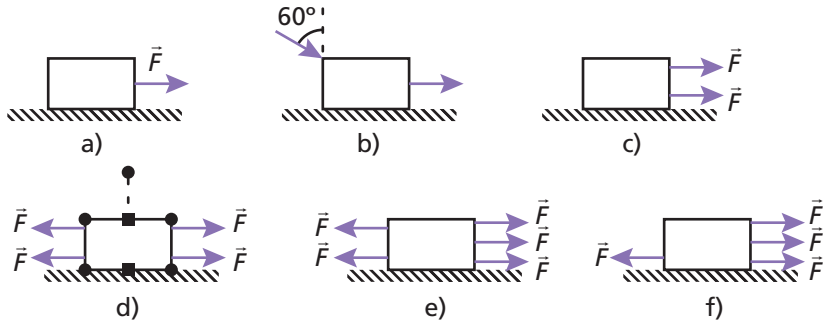


Fig. 3.11

21. Conocemos que al colocar un carro como los que tenemos en el laboratorio sobre un plano inclinado, el carro desciende con una aceleración constante. Dibuja un esquema y representa en él, la dirección y sentido de la fuerza resultante que provoca tal comportamiento del carro.

22. Mediante un dinamómetro se aplica una fuerza de 6,0 N sobre un carro cuya masa es de 2,0 kg. La fuerza actúa paralelamente a la superficie sobre la cual se encuentra el carro. Si se desprecia todo obstáculo al movimiento del carro, calcula la aceleración que este adquiere. Representa mediante un esquema las condiciones que se dan en este problema.

23. Experimental. Diseña un experimento donde compruebes que un cuerpo se mueve en la dirección de la fuerza resultante.

3.3 Tercera Ley de Newton (Ley de acción y reacción)

En una sesión de entrenamiento un jugador de béisbol da un buen golpe con su bate a una pelota que descansa en un soporte fijo y, como consecuencia de la fuerza que el bate ejerce sobre la pelota, esta sale a gran velocidad y cae bien lejos en el terreno.

Prepara una "pelota" de papel y pídele al jugador que la golpee de forma que logre alcanzar más o menos la misma distancia que con la de béisbol. Por supuesto, no lo logrará por mucho que se esfuerce.

¿Cuál es la causa de este hecho?

Generalmente asociamos una fuerza con un empujón, un tirón o un golpe, pero sabemos que la fuerza es una medida de la interacción de un cuerpo sobre otro. Si golpeas (cuidado) una pared con el puño, sentirás el efecto en tu puño (incluso, te puede causar dolor), es decir, al ejercer cierta fuerza sobre la pared al golpearla con el puño, esta también ejerce una fuerza sobre tu puño. De hecho, no puedes golpear a la pared sin que esta te devuelva el golpe.

En el caso del jugador de pelota, la pelota de papel no tiene la suficiente inercialidad para interaccionar con el bate con la misma fuerza que lo hace con la pelota de béisbol y, por mucho que se esfuerce el jugador no logrará que salga impulsada con la suficiente velocidad.

Estos y muchos otros hechos están en la base de la tercera Ley de Newton. En este epígrafe ampliaras y profundizaras en tus conocimientos sobre esta ley.

Recuerda que la tercera Ley de Newton o Ley de la acción y reacción plantea que:

> Con toda acción ocurre siempre una reacción igual y contraria, es decir que las acciones mutuas de dos cuerpos siempre son iguales y dirigidas en sentido opuesto.[1]

En términos del concepto fuerza, la ley nos expresa que si un cuerpo (cuerpo 1), ejerce una fuerza sobre otro cuerpo (cuerpo 2), este otro cuerpo ejercerá sobre el primero una fuerza de igual valor y dirección, pero de sentido contrario.

Simbólicamente esto se puede expresar de la forma:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \qquad (3.6)$$

Donde $\vec{F}_{12}$ es la fuerza que el cuerpo 1 ejerce sobre el cuerpo 2 y $\vec{F}_{21}$ es la fuerza que el cuerpo 2 ejerce sobre el 1.

Esta ley es **completamente** original (las dos primeras tienen sus antecedentes directos en los trabajos de Galileo, Hooke y Huygens) y hace de las leyes de la mecánica un conjunto lógico y completo.

En relación con la tercera ley de Newton es importante destacar que:

1) Implica que las fuerzas siempre forman un par (par de acción y reacción). Lo que es consistente con el hecho de que al ser la fuerza una medida de la interacción de dos cuerpos, automáticamente se da la necesidad de que haya dos cuerpos actuando uno sobre otro:

Como sabemos, no hay manera de golpear sin ser simultáneamente golpeado. De un manotazo se puede tumbar un madero, pero la mano sentirá el molesto golpe.

2) Este principio relaciona dos fuerzas que no están aplicadas al mismo cuerpo, produciendo en ellos aceleraciones diferentes, según sean sus masas.

[1] En la formulación original, en latín, Newton escribió que: *Actioni contrariam semper & æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales & in partes contrarias dirigi.*

3) Además de las limitaciones ya mencionadas para las leyes de Newton, hay casos, cuyo estudio rebasa los objetivos de este curso, en que la tercera ley no se cumple de la manera enunciada.
4) Las fuerzas de acción y reacción son iguales a pesar de que una de las partículas tenga mucha más masa que la otra.

¡Cuidado!

Se puede aceptar, de palabra, que las fuerzas de acción y reacción que son de igual valor, dirección y sentido contrario, pero al analizar casos particulares como el choque frontal entre un ciclista y un camión (o un insecto volador y el parabrisas del carro), la primera impresión es que el ciclista (o el insecto) sufre una fuerza mayor que el camión (o el carro), pues se tiende a identificar el valor de la fuerza con el daño material que ocasiona a cada uno.

Comprueba tus conocimientos

24. Enuncia la tercera ley de Newton y escribe la ecuacion matematica que la describe.

25. Si las fuerza de acción y reacción son de igual valor y dirección, pero de sentido contrario, ¿Por qué no se compensan?

26. Dos niños tiran de una soga en sentidos opuestos con una fuerza de 50 N cada uno. ¿Se romperá la soga si es capaz de soportar una tension de 80 N?

27. En la filmación de una película de ficción se hace colisionar frotalmente un gran camión con un pequeño automóvil, ¿qué relación existirá entre las fuerzas que actúan sobre ellos al chocar?

28. Un niño montado en patines se coloca frente a una pared y la empuja bruscamente. Explica qué le sucederá al niño. Confecciona un esquema en el cual representes las fuerzas que se manifiestan durante la interacción.

29. Se toman dos dinamómetros de igual graduación y se vinculan uno con el otro. Si se tira de uno de ellos hasta que indique el valor de 2,0 N, ¿cuál será la indicación del otro dinamómetro?

30. Representa las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo en los siguientes casos, identificando los pares de acción y reacción:

a) Un libro sobre la mano.
b) Un cuerpo sobre una superficie horizontal que está siendo arrastrado por una cuerda de la que se tira con la mano.
c) Un cuerpo que cuelga del techo suspendido por un muelle.
d) Un proyectil durante su trayectoria parabólica.

31. Sobre el platillo de accionamiento de un dinamómetro colocado en posición vertical, se pone un recipiente con agua.
Si en estas condiciones se introduce un dedo en el agua sin que este toque las paredes ni el fondo del recipiente, ¿qué le sucederá a la indicación del dinamómetro? Justifica tu respuesta.

32. La figura 3.12 muestra a dos cuerpos uno encima del otro en reposo, se conoce que la fuerza que ejerce el cuerpo A sobre el B es $F_{A-B} = 10$ N. Representa la fuerza que ejerce el cuerpo B sobre el A. ¿Cuál es su valor?

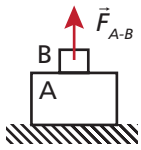


Fig. 3.12

3.4 Límite de validez de las leyes de Newton

Conocemos que las leyes de Newton se cumplen en aquellos sistemas de referencia que se denominan inerciales, es decir, aquellos que están definidos por la primera ley. En un sistema acelerado no se cumplen las Leyes de Newton.

Por ejemplo, al estar dentro de un ómnibus que se pone en movimiento de forma brusca (se acelera), tendemos a movernos hacia atrás. En este caso (figura 3.13), desde el sistema de referencia ligado al ómnibus (que está acelerado y por lo tanto no es inercial) se tendría que sobre cualquier cuerpo dentro del ómnibus actuaría una "fuerza" $\vec{F}_I$, de sentido contrario a la aceleración $\vec{a}$ experimentada por el ómnibus y que esta "fuerza" no está asociada a una interacción.

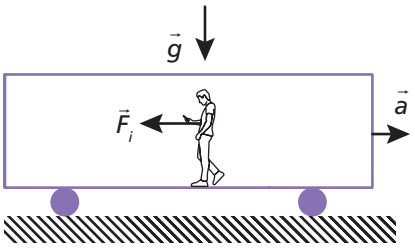


Fig. 3.13

Se tiene entonces que, por ejemplo, para poder aplicar la segunda ley de Newton en los sistemas no inerciales hay que modificar su formulación de maneras que se pueda tomar en consideración el efecto debido a la aceleración. Esto es objeto de estudio en cursos superiores de Física.

También se ha mencionado que las leyes de Newton se cumplen para velocidades pequeñas, en comparación con la velocidad de la luz en el vacío.

Esto está directamente relacionado con el hecho de que, si nos atenemos a la segunda ley, la velocidad de un cuerpo podría aumentar sin límite y ello entra en contradicción con que el valor máximo de la velocidad es el de la propagación de la luz en el vacío.

Por otra parte, a escala nanométrica, vale decir, en el llamado micromundo, para describir el comportamiento de los átomos y de las micropartículas en sentido general, se requiere utilizar la llamada mecánica cuántica. Si bien esto es objeto de estudio en cursos superiores de Física, en el duodécimo grado se tratarán de manera elemental alguno de estos aspectos.

Comprueba tus conocimientos

33. ¿Se puede aplicar la segunda ley de Newton al movimiento de un cuerpo desde un sistema de referencia no inercial? Argumenta tu respuesta mediante un ejemplo.

34. ¿Se puede aplicar la segunda ley de Newton al movimiento de un cuerpo que tenga una velocidad próxima a la de la luz? Argumenta tu respuesta.

3.5 Distintos tipos de fuerza

En Física utilizamos, en relación con el concepto de fuerza, los términos fuerza de gravedad, fuerza normal, fuerza peso o simplemente

peso, fuerza de rozamiento o fricción, fuerza centrípeta, fuerza elástica, fuerza de tensión, fuerza de contacto, fuerza eléctrica, y muchos otros más.

Por muy diferentes que parezcan esos "tipos" de fuerza, todos son manifestaciones de cuatro tipos de fuerza que se corresponden con los cuatro tipos de interacciones que existen en la naturaleza: gravitatoria, electromagnética, débil y fuerte.

Aunque se siguen considerando estos cuatro tipos de interacciones, actualmente se conoce que la interacción electromagnética y la débil son parte de un solo tipo de interacción. También se piensa que todas las interacciones se pueden considerar parte de una sola y aunque se han producidos avances en esta dirección, esto es un asunto todavía en investigación.

Por otra parte, como ya conocemos, la segunda Ley de Newton nos relaciona la aceleración con la fuerza que la provoca *en cada instante de tiempo*, es decir, no nos informa directamente sobre la trayectoria del movimiento. Pero si conocemos como varía la fuerza en función del tiempo, de la posición o si permanece constante, vale decir si conocemos la ley a que obedece la fuerza que actúa sobre el cuerpo, entonces podemos conocer como varía la aceleración en función del tiempo.

Por esto es tan importante conocer las leyes que rigen el comportamiento de determinadas fuerzas. Algunas de estas leyes se estudiarán a lo largo del curso.

Ahora nos detendremos en el estudio de las leyes que permiten describir el comportamiento de la fuerza de gravedad, la fuerza normal y la fuerza peso, la fuerza de fricción, la fuerza elástica y la fuerza centrípeta.

Fuerza de gravedad

De estudios anteriores, conoces que:

> A la fuerza de atracción que ejerce la Tierra sobre los cuerpos que están cercanos a su superficie se le llama fuerza de gravedad.

También puede ser importante recordar y profundizar en algunas ideas relacionadas con la fuerza de gravedad:

1) Si bien para Newton la fuerza de atracción entre cuerpos era una medida de la acción a distancia de uno sobre el otro, en la actualidad conocemos que la interacción entre los cuerpos se establece a través de

un campo de fuerzas que transmite la interacción de un cuerpo a otro a una velocidad finita, en este caso el campo gravitatorio de la Tierra.

2) La fuerza de gravedad está relacionada con la masa del cuerpo por la ecuación:

$$F_g = mg$$

Que en forma vectorial se escribe como:

$$\vec{F}_g = m\vec{g} \qquad (3.7)$$

En esta expresión F_g es el valor de la fuerza de gravedad que actúa sobre el cuerpo, m la masa de dicho cuerpo y g el valor local de la intensidad del campo gravitatorio (cuyo valor medio se considera de 9,8 m/s^2 para cuerpos situados cerca de la superficie de la Tierra).

Ahora bien, si comparamos la ecuación (3.7) con la (3.5), se puede apreciar que:

$$\vec{a} = \vec{g}$$

Esto nos dice que la intensidad del campo gravitatorio en un punto es igual a la aceleración de caída libre que adquiere una partícula de masa m colocada en ese punto. Como conocemos, esta aceleración de caída libre por lo general se denota por $\vec{g}$ al igual que la intensidad del campo gravitatorio y su unidad de medida en el SI puede ser N/m o m/s^2.

También sabemos que la fuerza de gravedad que la Tierra ejerce sobre otros cuerpos está dirigida en dirección vertical hacia su centro.

3) Los cuerpos atraen a la Tierra con una fuerza igual, pero de sentido contrario a la que la Tierra ejerce sobre ellos (figura 3.13), lo que está en correspondencia con la tercera Ley de Newton. Como se aprecia en la figura 3.14 sobre la maleta, en equilibrio, actúan las fuerzas $\vec{F}$ y $\vec{F}_g$. La pareja de acción y reacción de la fuerza $\vec{F}_g$ es la que el cuerpo hace sobre la Tierra y la de la fuerza $\vec{F}$ es la que el cuerpo hace sobre la mano que lo sostiene.

Por supuesto, sabemos que un cuerpo de 100 kg, cercano a la superficie de la Tierra, será atraído con una fuerza de aproximadamente 980 N y si no está apoyado o suspendido caerá con una aceleración de 9,8 m/s^2. De igual manera la Tierra también será atraída por el cuerpo con una fuerza de igual valor, pero su aceleración será solo de 10^{-23} m/s^2. Esto

explica el porqué, en la práctica, no se aprecia el movimiento de la Tierra hacia el cuerpo.

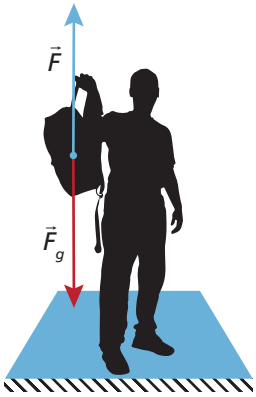


Fig. 3.14

4) La fuerza de gravedad no solo se ejerce entre los cuerpos cercanos o sobre su superficie. También se ejerce entre la Tierra y la Luna, entre el Sol y la Tierra y en general entre todos los cuerpos, ya sean tan grandes como las mayores estrellas del universo o tan pequeños como los átomos que forman los cuerpos.

Si bien este conocimiento, sobre la fuerza de gravedad, es suficiente para resolver muchas situaciones teóricas y prácticas, en combinación con las leyes de Newton, resulta muy necesario detenerse un poco más profundamente en el estudio relacionado con la atracción gravitacional entre los cuerpos, lo que se tratara, más adelante, en el epígrafe dedicado a Ley de Gravitación Universal formulada por Newton de forma independiente.

Fuerza elástica

Puede ser conveniente comenzar a profundizar en el estudio de la llamada fuerza elástica mediante un ejemplo muy conocido: Si se tira con la mano de un resorte, inicialmente no deformado (figura 3.15 a), el resorte ejercerá una fuerza sobre la mano (figura 3.15 b). Igual sucederá si en vez de un resorte se trata de una liga de goma y, aunque no resulta tan evidente, la fuerza que se ejerce sobre la mano de una persona que empuja una pared también tiene su origen en la deformación que sufre la pared al ser empujada.

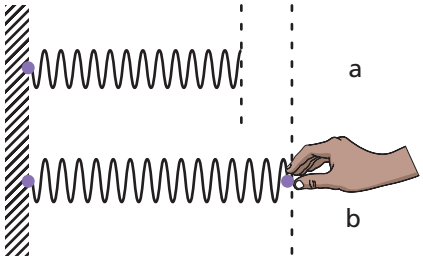


Fig. 3.15

Estas fuerzas que se oponen a la deformación de los cuerpos se acostumbran a llamar fuerzas elásticas, aunque su origen está en las fuerzas electromagnéticas entre los átomos o moléculas que forman el cuerpo, dicho de otra manera: llamamos fuerza elástica a la fuerza macroscópica resultante de las fuerzas, de carácter electromagnético, entre los átomos o moléculas de un cuerpo que se oponen a su deformación.

Para deformaciones pequeñas de un sistema, por ejemplo, el caso ya citado de un resorte (figura 3.17), la fuerza elástica satisface la llamada Ley de Hooke, cuya expresión modular es:

$$F_e = k\Delta x \qquad (3.8)$$

Donde k es la constante elástica o de restitución del resorte, Δx la elongación (lo que se estiro el resorte) y F_e el valor de la fuerza elástica. La unidad en que se mide la constante elástica en el SI es N/m.

Vectorialmente la Ley de Hooke se expresa como:

$$\vec{F}_e = -k\Delta\vec{x} \qquad (3.9)$$

Donde el signo menos indica que el vector fuerza elástica $\vec{F}_e$ y el vector elongación $\Delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_0$ tienen igual valor pero sentidos opuestos (figura 3.16).

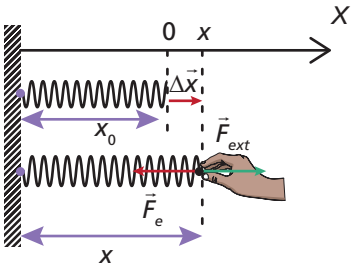


Fig. 3.16

Por supuesto, lo mismo ocurre si se comprime el resorte (figura 3.17).

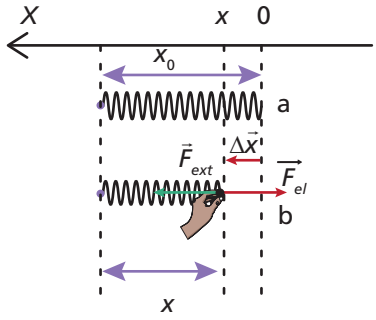


Fig. 3.17

De la historia

Robert Hooke (1635-1703), físico inglés considerado uno de los científicos experimentales más importantes de la historia de las ciencias, describió el método estático para medir la intensidad de una fuerza, lo que se conoce en la historia como ley de Hooke.

En 1678 escribió: "La teoría de los resortes, aunque intentada por diversos matemáticos eminentes de esta época, hasta ahora, no ha sido publicada por ninguno. Han pasado casi 18 años desde que yo la encontré, pero decidiendo aplicarla a algún caso particular, omití su publicación…"

Él describe varios experimentos con resortes hechos de alambres de secciones uniformes, ya fueran de acero, hierro o latón. Por medio de estos llegó a enunciar su conocida ley.

Hora del laboratorio

Práctica de laboratorio 3.1

Constante elástica de un resorte

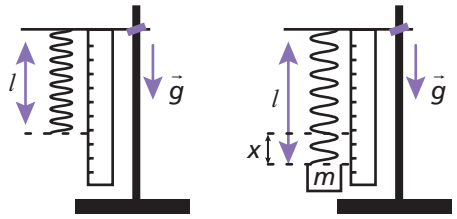
Objetivo: determinar la constante elástica de un resorte.

Materiales: regla graduada en milímetros, juego de cuerpo de masas de , soporte universal con base, varilla y doble nuez.

Descripción y tareas:

1) Realiza un montaje como el que aparece en la figura 3.18 a).

2) Determina los valores de la longitud inicial y final del resorte al colocar diferentes cuerpos hasta llegar a un total de 250 g (figura 3.18 b).



a b

Fig. 3.18

3) Escribe los resultados en una tabla.

4) Determina la constante elástica del resorte y reporta el resultado con su incertidumbre.

Fuerza normal y fuerza peso

Conocemos que entre dos superficies sólidas en contacto se manifiestan fuerzas elásticas (interacciones de naturaleza electromagnética). Cuando un cuerpo se encuentra sobre una superficie, la fuerza perpendicular a la superficie que sobre el cuerpo ejerce el apoyo se denomina **fuerza normal** o simplemente **normal** ($\vec{N}$) y es la fuerza de reacción a la que el cuerpo hace sobre la superficie. Por otra parte, a la fuerza que el cuerpo ejerce sobre la superficie se le llama **peso del cuerpo** o simplemente **peso** (figura 3.19).

Nota que el peso del cuerpo no es igual a la fuerza de gravedad que actúa sobre él, aunque es numéricamente igual a ella en el caso de que el cuerpo esté apoyado sobre una superficie horizontal.

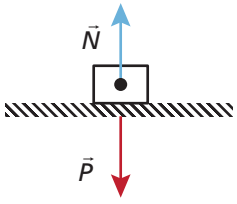


Fig. 3.19

En correspondencia con la ley de acción y reacción se puede escribir entonces que: $\vec{P} = -\vec{N}$

La situación de un cuerpo que esté suspendido, por ejemplo, colgado de una cuerda, es similar a la descrita: la normal es la fuerza que ejerce

el sostén (en este caso el techo) sobre el cuerpo y el peso es la fuerza que ejerce el cuerpo sobre el sostén (figura 3.20 a).

Detengámonos brevemente en una situación particular:

En el caso de un cuerpo que cuelga de una cuerda se puede suponer, en muchos casos, que la cuerda es inextensible y de masa despreciable, de manera que solo juega el papel de transmitir la interacción entre los cuerpos. Igual situación se presenta cuando, por ejemplo, se tira de un cuerpo que está apoyado sobre una superficie mediante una cuerda. En estos casos a las fuerzas que los cuerpos ejercen sobre los extremos de la cuerda se les acostumbra a llamar **fuerza de tensión** o simplemente **tensión** (figura 3.20 b), terminología que resulta muy frecuente al aplicar las leyes de Newton para la solución de algunos problemas. La cuerda, que solo transmite la fuerza, está sometida a una fuerza de tensión que actúa sobre sus extremos.

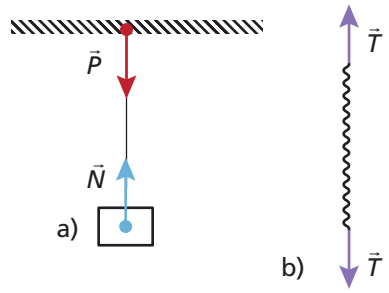


Fig. 3.20

Fuerza de rozamiento por deslizamiento. Coeficiente de rozamiento (estático y cinético)

Cuando un cuerpo en reposo está en contacto con una superficie sólida horizontal, las fuerzas que actúan sobre él, o sea, la fuerza de gravedad y la fuerza que ejerce la superficie (la normal), están compensadas

Si sobre el cuerpo actúa una fuerza $\vec{F}$ que tiende a moverlo, por ejemplo, hacia la derecha, sin lograrlo, la fuerza que compensa a la fuerza aplicada $\vec{F}$ se debe a la componente horizontal de las fuerzas de contacto entre las dos superficies (que sabemos son de naturaleza electromagnética). A esta fuerza se le denomina fuerza de fricción estática $\vec{f}_{r_e}$.

A medida que la fuerza externa $\vec{F}$ aumenta su valor, el de la fuerza de fricción estática también aumenta y de esta manera el cuerpo continúa en reposo, pues, aunque hay varias fuerzas actuando sobre él, la fuerza resultante es cero. Cuando la fuerza externa $\vec{F}$ se incrementa por encima de cierto valor (la fuerza de fricción estática no puede aumentar más su valor) y el cuerpo comienza a moverse, comienza a actuar sobre él una fuerza de fricción denominada cinética $\left(\vec{f}_{r_c}\right)$. La fricción estática puede tomar valores entre cero y un máximo y la cinética no cambia su valor.

Se demuestra experimentalmente que el valor de la fuerza de fricción, tanto el de la estática máxima como el de la cinética, son directamente proporcionales al valor de la fuerza normal. El módulo de la fuerza de fricción estática máxima cumple la relación siguiente:

$$f_{re_{máx}} = \mu_e N \qquad (3.10)$$

Donde μ_e es el coeficiente de fricción estático. Este coeficiente solo depende de las características de las superficies en contacto.

¡Cuidado!

La ecuación (3.10) no se puede escribir de manera vectorial pues los vectores fuerza de rozamiento y fuerza normal son perpendiculares entre sí.

La fuerza máxima de fricción estática, entre un par de superficies secas, está sujeta a dos leyes empíricas:

1. Es independiente del área de contacto entre las superficies.
2. Es directamente proporcional a la fuerza normal.

Cuando comienza el movimiento relativo entre las superficies en contacto, la fuerza de fricción toma el valor de la fuerza de fricción cinética, que es menor que el valor máximo de la fricción estática. El módulo de la fuerza de fricción cinética se determina por la ecuación:

$$f_{r_c} = \mu_c N \qquad (3.11)$$

Como ya se ha mencionado, el coeficiente de fricción entre dos superficies en contacto solo depende de las características de estas. La tabla 3.1 muestra los valores de coeficientes de rozamiento, estático y cinético para

diferentes superficies en contacto. Observa en la tabla que el coeficiente de fricción estático es siempre mayor que el cinético.

Tabla 3.1 Coeficientes de rozamiento o fricción

Superficies	Estático (μ_e)	Cinético (μ_c)
Madera con madera	0,25 - 0,5	0,2
Vidrio sobre vidrio	0,9 - 1,0	0,4
Caucho sobre concreto seco	1,0	0,8
Acero sobre hielo	0,1	0,05
Zapatos sobre hielo	0,1	0,05
Neumático de caucho y concreto seco	1,0	0,7 - 0,8
Neumático de caucho y concreto mojado	0,7	0,5
Neumático de caucho y hielo	0,3	0,02
Neumático de caucho y asfalto	0,6	0,4

¡Cuidado!

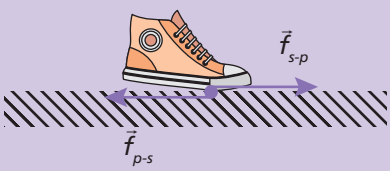


Fig. 3.21

Se debe decir que la fuerza de rozamiento se opone al movimiento relativo de las superficies de dos cuerpos en contacto y no, como ocurre con frecuencia, que se opone al movimiento de los cuerpos. Analicemos esto, por ejemplo, al caminar.

Si analizas la figura 3.21, la fuerza (de rozamiento) que ejerce el pie de la persona al caminar sobre la superficie $\vec{f}_{p-s}$ está dirigida hacia atrás, mientras que la fuerza que ejerce la superficie sobre la persona $\vec{f}_{s-p}$ está dirigida hacia delante, ella es la responsable de que podamos caminar. Ambas fuerzas constituyen un par de fuerzas de acción y reacción.

¿? ¿Sabías que...?

En general, la expresión de la fuerza de rozamiento estático es una inecuación de la forma $f_{r_e} \leq \mu_e N$.

En la gráfica mostrada (figura 3.22) se representan los valores que toma la fuerza de rozamiento f_r, en función de la fuerza aplicada sobre un cuerpo F'. Mientras el cuerpo permanezca en reposo (tramo *OA*), la fuerza de rozamiento es estática y tendrá el mismo valor que la fuerza aplicada $F' = f_r$ solo

en el punto *A* cuando el movimiento del cuerpo es inminente y entonces se cumple que $f_{re_{máx}} = \mu_e N$. El tramo *AB* representa la transición de la fuerza de rozamiento estática a la cinética. Cuando el cuerpo está en movimiento (punto *B*), la fuerza de rozamiento permanece constante, aunque aumente la fuerza aplicada con el resorte y se cumple que $f_{r_c} = \mu_c N$.

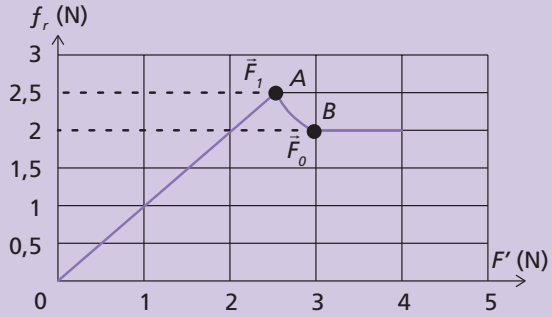


Fig. 3.22

Hora del laboratorio

Práctica de laboratorio 3.2

Estudio coeficiente de rozamiento cinético entre dos superficies secas

Objetivo: medir el coeficiente de rozamiento estático y cinético por deslizamiento entre la madera y el papel.
Materiales: juego de dinamómetros, juego de cuerpos de 50,0 g, taco de madera, hoja de papel.

Descripción y tareas:

1) Hacer el montaje como el representado en la figura 3.23, donde colocamos la hoja de papel encima de la mesa y sobre ella el taco de madera. La masa del taco se puede variar al colocar los cuerpos en los orificios hechos en el taco a estos efectos)

Fig. 3.23

2) Tirar del dinamómetro y lograr el valor máximo de la fuerza f_{r_e} (fuerza de rozamiento estática), cuando el cuerpo comienza a moverse, tomar los datos de f_{r_e} para los distintos valores de la masa del taco m_n.
3) Tirar del dinamómetro y poner el taco en movimiento con el menor valor posible de la fuerza aplicada (fuerza de rozamiento cinética), cuando el cuerpo está en movimiento con MRU, tomar los datos de f_r para los distintos valores de m_n
4) Según la expresión $f_{r_c} = \mu_c N$ determina el valor del coeficiente cinético entre la madera y el papel y estima su incertidumbre.
5) Según la expresión $f_{r_e} = \mu_e N$ determina el valor del coeficiente de rozamiento estático entre la madera y el papel y estima su incertidumbre.

Práctica de laboratorio 3.3

Estudio de la relación entre fuerza, masa y aceleración

Objetivo: analizar de dependencia entre las magnitudes: fuerza, masa y aceleración.
Materiales: ticómetro con cinta, juegos de cuerpos de 50,0 g, regla graduada en milímetro, polea, mordaza e hilo.

Para facilitar el desarrollo de esta actividad puede ser necesario hacer las consideraciones que se exponen a continuación.

Cuando un carrito de masa *M* (por ejemplo, de los utilizados en el laboratorio) se mueve sin deslizar bajo la acción de una fuerza de valor *F* sobre una superficie horizontal, como se ilustra en la figura 3.24 se puede considerar que la fuerza de rozamiento sobre el carrito solo se debe a la del aire y a la de las ruedas con su eje de rotación.

Fig. 3.24

En estas condiciones, si la velocidad del carrito es pequeña (como es el caso) y si las ruedas están bien ajustadas y engrasadas, estas fuerzas de fricción pueden no ser tomadas en consideración y suponer, con muy buena aproximación, que sobre el carrito la fuerza resultante tiene el valor *F* (el de la fuerza aplicada).

Descripción y tareas:

1) Prepara un montaje como el representado en la figura 3.25.

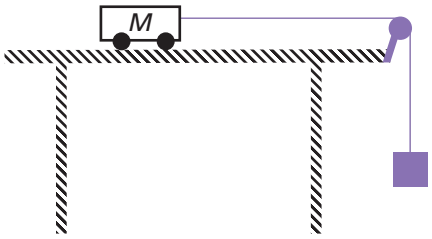


Fig. 3.25

2) Comprueba y anota la calibración del ticómetro.

3) Obtén los valores de la aceleración del cuerpo A cuando es sometido a una fuerza de valor *F*, 2*F,* 3*F* y 4*F* (para ello, utiliza los cuerpos de 50,0 g, aumenta la masa *M* del cuerpo B en 2*M,* 3*M* y 4*M.*

4) Obtén los valores de la aceleración del cuerpo A para diferentes valores de su masa, bajo la acción de una misma fuerza de valor *F* (utiliza para ello los cuerpos de 50,0 g)

5) Con los valores obtenidos prepara una tabla y calcula para cada caso el producto de la masa del cuerpo A por el valor de su aceleración. Compara estos valores con los de la fuerza resultante sobre el cuerpo A en cada caso.

6) Elabora un informe con los resultados obtenidos y las conclusiones correspondientes.

Comprueba tus conocimientos

35. Dos cuerpos, uno 1,0 kg y otro de 5,0 kg se dejan caer desde una altura de 5 m.

a) ¿Cuál es el valor de la fuerza de gravedad que actúa sobre cada uno?

b) ¿Llegarán los cuerpos al suelo al mismo tiempo si se dejan caer de forma simultánea y se puede despreciar toda acción que no sea la de la gravedad? Justifica tu respuesta.

36 ¿Sobre un cuerpo actúa la fuerza de gravedad terrestre, ¿sobre qué cuerpo actúa la fuerza de reacción?

37. Es común observar que la Tierra atrae a los cuerpos, pero no que los cuerpos atraigan a la Tierra. Parece ser que no se cumple tercera ley de Newton. Argumenta tu respuesta.

38. Calcula el valor de la aceleración que adquiere la Tierra cuando se deja caer un cuerpo de 1,0 kg. Considera que la masa de la Tierra es de $6 \cdot 10^{24}$ kg.

39. Representa la fuerza o fuerza que actúan sobre un cuerpo en las situaciones siguientes (suponga, en todos los casos, que se puede despreciar toda interacción de los cuerpos con el aire):

a) Un cuerpo, después de ser lanzado verticalmente hacia arriba, se encuentra subiendo.
b) El mismo cuerpo del inciso a), pero bajando.
c) Un cuerpo lanzado oblicuamente y que se encuentra moviéndose en el aire.
d) Un bloque que se desplaza sobre una superficie horizontal lisa (sin rozamiento) con una velocidad constante.
e) Un péndulo formado por un hilo resistente y una esfera, cuando se encuentra en una posición extrema.
f) El mismo péndulo, pero en el instante que pasa por su posición de equilibrio.

40. Atendiendo a los cuerpos A y B representados en la figura 3.26.

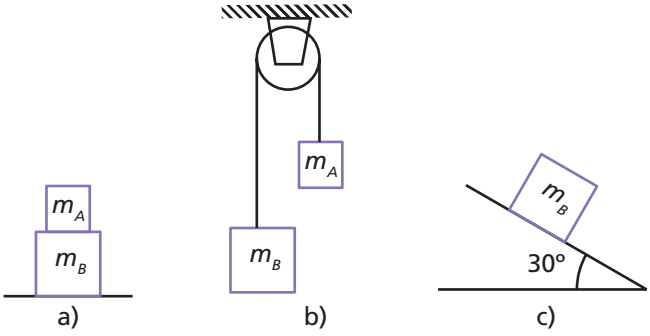


Fig. 3.26

a) Representa las fuerzas que actúan sobre cada uno.
b) Calcula el valor de la fuerza normal que actúa sobre cada uno si los valores de las masas son

$$A = 2{,}0 \text{ kg y } B = 3{,}0 \text{ kg.}$$

41. Menciona las características esenciales de la fuerza de rozamiento.

42. ¿Qué significado físico tiene el coeficiente de rozamiento?

43. Un niño trata de empujar una maleta sobre una superficie rugosa y no puede moverla. ¿Hay fricción? Explica.

44. ¿Qué magnitud física se calcula cuando se multiplica el coeficiente de rozamiento estático por el módulo de la fuerza normal $\vec{N}$?

45. Un niño empuja con todas sus fuerzas un librero, pero no logra moverlo. ¿Constituye esto una violación de la segunda ley de Newton? Justifica tu respuesta.

46. Un ladrillo de 5,0 kg se mueve rectilínea y uniformemente cuando se le empuja con una fuerza de 9,8 N, ¿cuál es el valor del coeficiente de rozamiento cinético del sistema ladrillo-mesa? Si se aplica la misma fuerza estando el ladrillo en reposo, ¿se pondrá en movimiento? Justifica tu respuesta.

47. Explica con la ayuda de un esquema cómo es que podemos caminar. ¿Cuál es la fuerza que nos hace avanzar?

48. Experimental: Coloca una caja de fósforo sobre una regla y luego levántala lentamente por uno de sus extremos de forma que su ángulo de inclinación, con la mesa aumente.

a) ¿Resbala la caja para cualquier inclinación de la regla? ¿Por qué?
b) Explica cómo se puede determinar el coeficiente de rozamiento estático mediante un experimento como este.

49. Un niño tira de una cuerda de masa despreciable que está atada a un árbol con una fuerza de 10 N.

a) Representa las fuerzas que actúan sobre la cuerda y el niño.
b) ¿Cuál es el valor de la tensión en la cuerda?

50. Una cuerda resiste una tensión de 20 N, dos niños tiran de ella horizontalmente ¿Qué fuerza tienen que aplicar para romper la cuerda?

51. Un cuerpo de masa 2,0 kg es sostenido con un dinamómetro, el cual se encuentra atado al techo de una cabina de un elevador. Determina la lectura del dinamómetro en cada uno de los casos;

a) El elevador está en reposo (figura 3.27 a).

b) El elevador sube con una aceleración $a = 2{,}0\ m/s^2$ (figura 3.27 b).
c) El elevador baja con una aceleración $a = 2{,}0\ m/s^2$ figura 3.27 c).

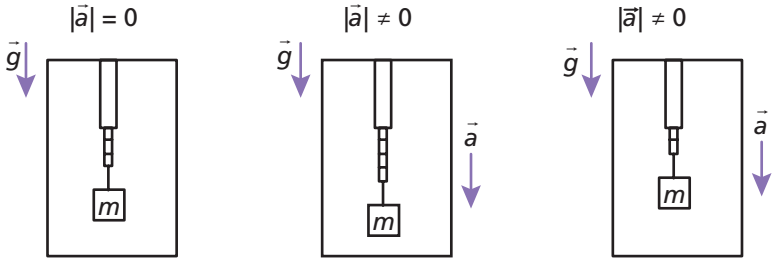


Fig. 3.27

3.6 Aplicaciones de las leyes de Newton

El proceso de interpretación y solución de los problemas relacionados con las leyes de Newton se facilita, en la generalidad de los casos, con ciertas reglas. Sin embargo, resulta conveniente no usar estas reglas de forma memorística o mecánica sino teniendo en cuenta las características específicas de cada caso.

Por ejemplo, al abordar estos problemas, además de la selección previa del cuerpo de referencia y del sistema de coordenadas más apropiado, es muy conveniente hacer lo que se llama un "diagrama de cuerpo libre" (representar todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo a estudiar) pues ello es esencial para poder determinar sin error la fuerza resultante sobre el cuerpo y poder aplicar así la segunda ley.

De forma resumida, estas reglas son las siguientes:

1. Determinar todos los cuerpos que interactúan con el cuerpo que se va a estudiar, para conocer todas las fuerzas que actúan sobre él.
2. Precisar el estado mecánico inicial del cuerpo.
3. Elegir el sistema de referencia inercial (en particular el cuerpo de referencia y el sistema de coordenadas) más conveniente.
4. Dibujar un diagrama de cuerpo libre donde se representen todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo (no es necesario dibujar el cuerpo, en correspondencia con el modelo, basta poner un punto que lo represente)
5. En caso de fuerzas que no tengan la dirección de alguno de los ejes coordenados, se determinan y representan sus componentes en el diagrama de cuerpo libre.

6. Escribir la ecuación (o las ecuaciones) de la segunda ley para los ejes coordenados que resulte necesario. ¡Es importante recordar que la fuerza que determina la aceleración del cuerpo es la fuerza neta o resultante!

Los problemas resueltos que se presentan a continuación pueden ayudar a comprender mejor como aplicar las leyes de Newton en algunos casos típicos.

Problema resuelto 3.1

El valor de la velocidad de un vehículo de 520 kg, que se mueve por una carretera recta, aumenta uniformemente de 4 m/s a 12 m/s en 4 s. ¿Qué valor tiene la fuerza resultante que actúa sobre él?

Solución:

Una lectura cuidadosa del problema nos indica que se trata del movimiento de un cuerpo que puede ser considerado puntual, que su masa es conocida y que tiene una aceleración constante, cuyo valor puede ser calculado a partir de los datos del problema. Entonces, la fuerza resultante puede ser calculada de manera directa aplicando la segunda ley de Newton:

$$\vec{F}_R = m\vec{a} \qquad (1)$$

Si se selecciona un sistema de coordenadas, asociado a la Tierra (la carretera) con el eje *X* en la dirección y sentido del movimiento, se puede escribir para la proyección de la fuerza en este eje que:

$$F_{R_x} = ma_x \qquad (2)$$

Donde:

$$F_{R_x} = m\left(\frac{v_x - v_{0x}}{\Delta t}\right) \qquad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2) queda que:

$$F_{R_x} = m\left(\frac{v_x - v_{x_o}}{\Delta t}\right)$$

Sustituyendo por los datos y resolviendo las operaciones:

$$F_{R_x} = 520\ \text{kg}\left(\frac{12\ \text{m/s} - 4\ \text{m/s}}{4\ \text{s}}\right)$$

$$F_{R_x} = 1\ 040\ \text{N}$$

Observación. Nota que al resolver el problema no fue necesario conocer en detalle todas las fuerzas que podrían estar actuando sobre el cuerpo y, en consecuencia, en este caso, no se requirió hacer un diagrama de cuerpo libre. Esto es un ejemplo de cómo las reglas recomendadas para resolver este tipo de problemas no deben ser aplicadas de forma "mecánica".

Problema resuelto 3.2

Una caja de 400 g se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal rugosa y sobre ella se aplica una fuerza horizontal $\vec{F}$ de valor igual a 2,0 N (figura 3.28). Se conoce que el coeficiente de rozamiento estático es 0,30 y el cinético 0,25. Considera que $g = 10\ m/s^2$.

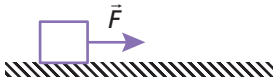


Fig. 3.28

a) Calcula la aceleración de la caja.
b) ¿Cuál es el valor máximo de la fuerza $\vec{F}$ para que la caja permanezca en reposo?

Solución:

a) En la situación planteada, para calcular la aceleración se requiere conocer la fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo, bajo la consideración de que se considera al cuerpo puntual.
Si seleccionamos un sistema de coordenada ligado a la Tierra, con el eje *X* orientado en la dirección del movimiento y construimos el diagrama de cuerpo libre, se tendrá un esquema como el mostrado en la figura 3.29, donde $\vec{F}_g$ es la fuerza de gravedad, $\vec{N}$ la fuerza normal, $\vec{f}_r$ la fuerza de rozamiento y $\vec{F}$ la fuerza aplicada.

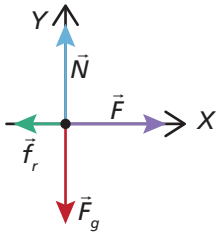


Fig. 3.29

En estas condiciones, para la resultante de las fuerzas en la dirección del eje horizontal se tendrá que:

$$\vec{F}_{R_x} = m\vec{a}_x \qquad (1)$$

$$\vec{F}_x + \vec{f}_{r_x} = m\vec{a}_x \qquad (2)$$

De donde, para las proyecciones queda que:

$$F - f_r = ma_x \qquad (3)$$

$$\text{Como } f_r = \mu_c \cdot N \qquad (4)$$

Sustituyendo (4) en (3) se obtiene:

$$F - \mu_c \cdot N = ma_x \qquad (5)$$

El valor de $\vec{N}$ no se conoce, pero se puede determinar aplicando la segunda ley para la resultante de las fuerzas que actúan en la dirección del eje vertical:

$$\vec{F}_{R_y} = m\vec{a}_y$$

Como $\vec{a}_y = \vec{0}$, se tiene que:

$$\vec{F}_{R_y} = \vec{0}$$

$$\vec{N} + \vec{F}_g = \vec{0}$$

Y para las proyecciones:

$$N - F_g = 0$$

De donde, despejando N y tomando en cuenta que $F_g = mg$:

$$N = mg$$

Sustituyendo esta expresión en (5) y despejando a_x:

$$a_x = \frac{F - \mu_c mg}{m} \qquad (6)$$

Sustituyendo por los datos y resolviendo las operaciones:

$$a_x = \frac{2{,}0\ \text{N} - (0{,}25)(0{,}4\ \text{kg})\left(10\ \text{m/s}^2\right)}{0{,}4\ \text{kg}}$$

$$a_x = 2{,}5\ \text{m/s}^2$$

b) El valor fuerza aplicada para que el cuerpo permanezca en reposo no puede exceder al valor de la fuerza de rozamiento estática máxima. Esta fuerza está dada por:

$$f_{r_e} = \mu_e \cdot N$$

Por lo tanto:

$$f_{r_e} = 0{,}3(0{,}4\ \text{kg})(10\ \text{m/s}^2)$$

$$f_{r_e} = 1{,}2\ \text{N}$$

De manera que, para que el cuerpo permanezca en reposo sobre la superficie, la fuerza aplicada puede tomar hasta un valor de 1,2 N. Para cualquier valor superior, el cuerpo comenzara a moverse con una aceleración dada por la ecuación (6).

Puede ser conveniente señalar que, de acuerdo con la ecuación (6), para que el cuerpo mantenga un movimiento rectilíneo uniforme la fuerza aplicada debe tomar el valor:

$$F = \mu_c mg$$
$$F = (0{,}25)(0{,}4\ \text{kg})(10\ \text{m/s}^2)$$
$$F = (0{,}25)(0{,}4\ \text{kg})(10\ \text{m/s}^2)$$
$$F = 1\ \text{N}$$

Problema resuelto 3.3

Una caja de 4,0 kg se mueve sobre una superficie horizontal rugosa ($\mu_c = 0{,}25$), bajo la acción de una fuerza de 10,0 N que que forma un ángulo de 30° con la dirección horizontal (figura 3.30). Considera $g = 10\ \text{m/s}^2$.

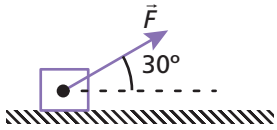


Fig. 3.30

a) Representa las fuerzas que actúan sobre la caja.
b) Determina la aceleración de la caja.

Solución:

a) En la figura 3.31 se representan, en el sistema de coordenadas seleccionado, las fuerzas que actúan sobre la caja: la de gravedad $\vec{F}_g$, ejercida

por la Tierra, la de rozamiento $\vec{f}_r$, ejercida por la superficie en dirección horizontal, la normal $\vec{N}$, ejercida por la superficie en la dirección vertical y, la fuerza aplicada $\vec{F}$ (que tiene componentes $\vec{F}_x$ y $\vec{F}_y$).

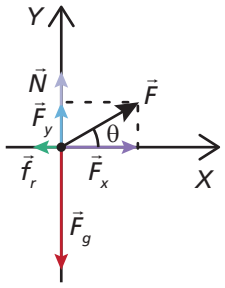


Fig. 3.31

b) La aceleración del cuerpo se puede determinar aplicando la segunda ley de Newton:

$$\vec{F}_R = m\vec{a}$$

Como el cuerpo se mueve en la dirección del eje X, se tiene que:

$$\vec{F}_{R_x} = m\vec{a}_x \qquad (1)$$

$$\vec{F}_x + \vec{f}_r = m\vec{a}_x \qquad (2)$$

Para las proyecciones queda que:

$$F_x - f_r = ma_x \qquad (3)$$

Como $F_x = F\cos\theta$ y $f_r = \mu_c \cdot N$
Sustituyendo en (3) se obtiene:

$$F\cos\theta - \mu_c \cdot N = ma_x \qquad (4)$$

El valor de $\vec{N}$ no se conoce, pero se puede determinar aplicando la segunda ley para la resultante de las fuerzas que actúan en la dirección del eje vertical:

$$\vec{F}_{R_y} = m\vec{a}_y \qquad (5)$$

Como $\vec{a}_y = \vec{0}$, se tiene que:

$$\vec{F}_{R_y} = \vec{0}$$

$$\vec{N} + \vec{F}_y + \vec{F}_g = \vec{0} \qquad (6)$$

Y para las proyecciones:

$$N + F_y - F_g = 0 \qquad (7)$$

$$N + F\text{sen}\theta - mg = 0$$

$$N = mg - F\text{sen}\theta \qquad (8)$$

Al sustituir (8) en (6) obtenemos:

$$F\cos\theta - \mu_c\,(mg - F\text{sen}\theta) = ma_x$$

Si agrupamos y extraemos factor común:

$$F\cos\theta - \mu_c mg + \mu_c F\text{sen}\theta = ma_x$$

$$F(\cos\theta - \mu_c sen\theta) - \mu_c mg = ma_x$$

Al despejar la aceleración:

$$a_x = \frac{F(\cos\theta - \mu_c \text{sen}\theta) - \mu_c mg}{m}$$

$$a_x = \frac{F(\cos\theta - \mu_c \text{sen}\theta)}{m} - \mu_c g$$

Al sustituir y calcular:

$$a_x = \frac{10\text{ N}(0{,}87 - 0{,}25\cdot 0{,}5)}{4\text{ kg}} - 0{,}25\cdot 10\text{ m/s}^2$$

$$a_x = 4{,}90\text{ m/s}^2$$

Problema resuelto 3.4

Un cuerpo de 1,5 kg está en la base de un plano inclinado, que forma un ángulo de 30° con la dirección horizontal y al aplicarle una fuerza de 15 N, paralela al plano, como se muestra en la figura 3.32, asciende por el plano inclinado, que es rugoso (μ_c = 0,25). Calcula la aceleración del cuerpo:

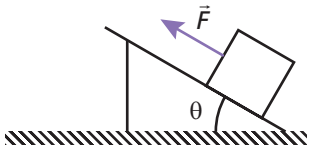


Fig. 3.32

a) Mientras sube por el plano inclinado.
b) Si la fuerza $\vec{F}$ deja de actuar.

Solución:

a) Hay que calcular el valor de la aceleración mientras el cuerpo asciende. Si se considera al cuerpo como puntual y el sistema de coordenadas, ligado a la Tierra, lo colocamos con el eje de las *X* orientado en la dirección y sentido del movimiento, el diagrama de cuerpo libre quedará representado como se muestra en la figura 3.33.

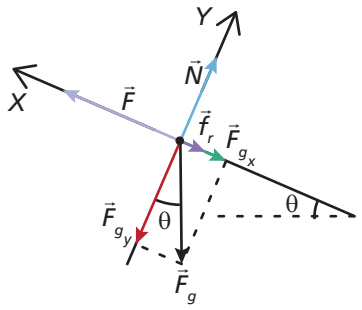


Fig. 3.33

Como la fuerza de gravedad actúa en la dirección vertical, en el diagrama se han representado sus componentes en las direcciones *X* y *Y*. Aplicando la segunda ley de Newton en la dirección que el cuerpo se mueve, queda.

$$\vec{F}_{R_x} = m\vec{a}_x$$

$$\vec{F} + \vec{F}_{g_x} + \vec{f}_{r_x} = m\vec{a}_x$$

$$F - F_{gx} - f_{rx} = ma_x$$

$$\text{pero } F_{g_x} = F_g \text{sen}\theta,\ F_g = mg \ \text{ y } \ f_{r_x} = f_r$$

Entonces, se puede escribir que:

$$F - mg\text{sen}\alpha - \mu_c N = ma_x \qquad (1)$$

Como no conocemos el valor de la fuerza normal, trabajamos con las fuerzas en el eje *Y,* donde la aceleración es nula por estar compensadas las fuerzas.

$$\vec{F}_y = m\vec{a}_y$$

$$\vec{N} + \vec{F}_{g_y} = \vec{0}$$

$$N - F_{g_y} = 0, \text{ pero } N = F_{g_y} \text{ y } F_{g_y} = mg\cos\theta$$

Por lo tanto:

$$N - mg\cos\theta = 0$$
$$N = mg\cos\theta \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en la ecuación (1) queda:

$$F - mg\cos\theta - \mu_c\,(mg\cos\theta) = ma_x$$
$$F - mg\,(\text{sen}\theta + \mu_c\cos\theta) = ma_x$$

Despejando a_x:

$$a_x = \frac{F - mg\left(\text{sen}\theta + \mu_C\cos\theta\right)}{m}$$
$$a_x = \frac{F}{m} - \frac{mg\left(\text{sen}\theta + \mu_C\cos\theta\right)}{m}$$
$$a_x = \frac{F}{m} - g\left(\text{sen}\theta + \mu_C\cos\theta\right)$$

Sustituyendo por los valores numéricos y haciendo lo cálculos:

$$a_x = \frac{15\text{ N}}{2{,}5\text{ kg}} - 10\text{ m/s}^2\left(0{,}5 - 0{,}25\cdot 0{,}87\right)$$

Calculando $a_x \approx 3{,}8\text{ m/s}^2$

b) Si la fuerza $\vec{F}$ deja de actuar y el valor de la componente de la fuerza de gravedad paralela al plano es mayor que el valor de la fuerza de rozamiento cinética el cuerpo descenderá con cierta aceleración. Por supuesto, también existe la posibilidad de que estas fuerzas sean de igual valor y el cuerpo descienda sin aceleración o que la componente de la fuerza de gravedad sea igual o menor que la fuerza de rozamiento estática y el cuerpo quede en reposo sobre el plano.
En la figura 3.34 se representa el diagrama de cuerpo libre para este caso. Aplicando la segunda ley de Newton en la dirección del eje de las *X,* se tendrá que:

$$\vec{F}_{R_x} = m\vec{a}_x$$
$$\vec{F}_{g_x} + \vec{f}_{r_x} = m\vec{a}_x$$
$$F_{g_x} - f_{r_x} = ma_x$$

pero $F_{g_x} = -F_g\text{sen}\theta$, $F_g = mg$ y $f_{r_x} = -f_r$

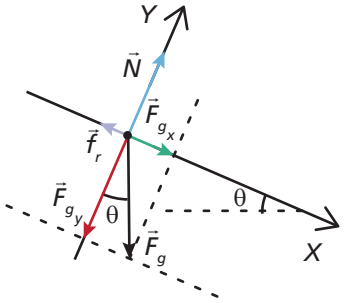


Fig. 3.34

Entonces, se puede escribir que:

$$F - mg\text{sen}\alpha - \mu_c N = ma_x \qquad (1)$$

Como no conocemos el valor de la fuerza normal, trabajamos con las fuerzas en el eje Y, donde la aceleración es nula por estar compensadas las fuerzas en esta dirección.

$$\vec{F}_y = m\vec{a}_y$$

$$\vec{N} + \vec{F}_{g_y} = \vec{0}$$

$$N - F_{g_y} = 0,$$

pero $N = F_{g_y}$ y $F_{g_y} = mg\cos\theta$

Por lo tanto:

$$N - mg\cos\theta = 0$$

$$N - mg\cos\theta \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en la ecuación (1) queda:

$$mg\text{sen}\theta - \mu_c(mg\cos\theta) = ma_x$$

$$mg(\text{sen}\theta - \mu_c\cos\theta) = ma_x$$

Despejando a_x:

$$a_x = \frac{mg(\text{sen}\theta - \mu_c\cos\theta)}{m}$$

$$a_x = g(\text{sen}\theta - \mu_c\cos\theta)$$

$$a_x = 10\ \text{m/s}^2\ (0{,}5 - 0{,}25 \cdot 0{,}87)$$

$$a_x = 2{,}80\ \text{m/s}^2$$

Problema resuelto 3.5

Sobre una superficie horizontal rugosa (μ_c = 0,4), se encuentran los cuerpos 1 y 2 de 1,0 kg y 5,0 kg respectivamente (figura 3.35), unidos por un hilo inextensible y de masa despreciable. Estos cuerpos, inicialmente en reposo, se mantienen en movimiento bajo la acción de la fuerza $\vec{F}$, paralela a la superficie y de valor igual a 60,0 N.

Fig. 3.35

a) Determina la aceleración del sistema.
b) Calcula la tensión en la cuerda.

Solución:

a) Si bien los dos cuerpos se mueven con la misma aceleración (pues están unidos) es necesario examinar por separado las fuerzas que actúan sobre cada uno de ellos dado que las fuerzas de rozamiento sobre cada cuerpo no son iguales.
En las figuras 3.36 y 3.37 se muestran los diagramas de cuerpo libre para los cuerpos 1 y 2, respectivamente.

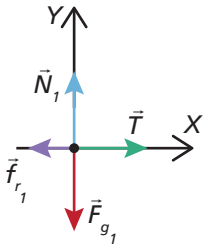


Fig. 3.36

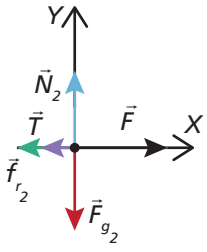


Fig. 3.37

Debe notarse que las fuerzas de tensión sobre cada cuerpo tienen el mismo valor y sentidos contrarios.
Al aplicar la segunda ley para el cuerpo 2 se tiene que:

$$\vec{F}_{R_x} = m\vec{a}_x$$

$$\vec{F} + \vec{T} + \vec{f}_{r_2} = m_2\vec{a}_{2_x}$$

$$F - T - f_{r_2} = m_2 a_{2_x}$$

$$F - T - \mu_c N_2 = m_2 a_{2_x}$$

Y para el cuerpo 1 queda:

$$\vec{T} + \vec{f}_{r_1} = m_1 \vec{a}_{1_x}$$

$$T - f_{r_1} = m_1 a_{1_x}$$

$$T - \mu_c N_1 = m_1 a_{1_x}$$

Pero como $a_{2_x} = a_{1_x} = a_x$, podemos escribir entonces que para el cuerpo 2:

$$F - T - \mu_c N_2 = m_2 a_x \qquad (1)$$

Y para el cuerpo 1:

$$T - \mu_c N_1 = m_1 a_x \qquad (2)$$

En las ecuaciones obtenidas para cada uno de los cuerpos el valor de la fuerza normal no es dato, pero, aplicando la segunda ley para la resultante de las fuerzas en el eje *Y* para el cuerpo 1 se tendrá que:

$$\vec{F}_{R_y} = m\vec{a}_y$$

$$\vec{N} + \vec{F}_g = \vec{0}$$

$$\vec{N}_1 + \vec{F}_{g_1} = \vec{0}$$

$$N_1 - F_{g_1} = 0$$

$$N_1 - m_1 g = 0$$

$$N_1 = m_1 g \qquad (3)$$

Por un análisis similar, para el cuerpo 2 obtenemos que:

$$N_2 = m_2 g \qquad (4)$$

Sustituyendo (3) en (2) y (4) en (1), se obtiene que:

$$F - T - \mu_c m_2 g = m_2 a_x \qquad (5)$$

$$T - \mu_c m_1 g = m_1 a_x \qquad (6)$$

Al sumar las ecuaciones (5) y (6) miembro a miembro, obtenemos:

$$F - T - \mu_c m_2 g + T - \mu_c m_1 g = m_2 a_x + m_1 a_x$$

$$F - T + T - \mu_c g\,(m_1 + m_1) = a_x\,(m_1 + m_2)$$

$$a_x = \frac{F - \mu_c g(m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2)}$$

Al sustituir los valores y calcular

$$a_x = 6{,}0 \text{ m/s}^2$$

b) La tensión en el hilo se puede calcular ahora utilizando la ecuación (6):

$$T = m_1 (a_x + \mu_c g)$$

$$T = 10 \text{ N}$$

Problema resuelto 3.6

Si el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo A y la superficie C (figura 3.38) es 0,6, calcula el valor de la aceleración de los cuerpos A y B y la tensión en la cuerda. Las masas de A y B son 20 kg y 30 kg respectivamente. Desprecia la masa de la cuerda y el rozamiento de la cuerda con la polea.

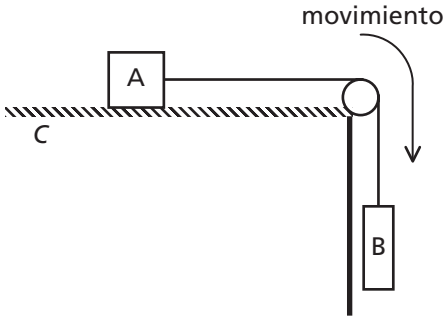


Fig. 3.38

Solución:

En este caso los cuerpos se mueven con el mismo valor de la aceleración. Sobre el cuerpo B actúa la fuerza de gravedad, en dirección vertical y hacia abajo y la tensión en la cuerda, en dirección vertical y hacia arriba. Por otra parte, sobre el cuerpo A actúa también la tensión en la cuerda, pero en dirección horizontal y la fuerza de rozamiento con la superficie C. Aquí, el papel de la polea es el de cambiar la dirección de la tensión en la cuerda al actuar sobre los cuerpos A y B, de manera que, en esencia, esta es una situación análoga a la del problema resuelto 3.5.

En las figuras 3.39 y 3.40 se representan los diagramas de cuerpo aislado para los cuerpos A y B respectivamente.

Al aplicar la segunda ley para el cuerpo A, en la dirección del movimiento, se tiene que:

$$\vec{F}_{R_x} = m\vec{a}_x$$

$$\vec{T} + \vec{f}_r = m_A \vec{a}_x$$

$$T - f_r = m_A a_x$$

$$T - \mu_c N = m_A a_x \qquad (1)$$

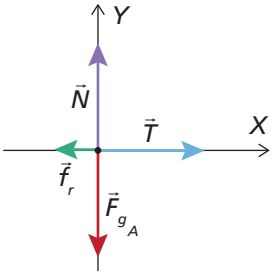


Fig. 3.39

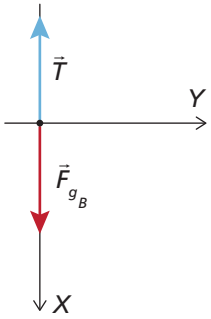


Fig. 3.40

Y para el cuerpo *B:*

$$\vec{F}_{g_B} + \vec{T} = m_B \vec{a}_x$$

$$F_{g_B} - T = m_B a_x \qquad (2)$$

En las ecuaciones obtenidas para cada uno de los cuerpos el valor de la fuerza normal no es dato y la fuerza de tensión en el hilo también se desconoce, pero la fuerza normal se puede calcular aplicando la segunda ley de Newton al cuerpo A en la dirección del eje de las *Y,* donde las fuerzas en esta dirección están compensadas:

$$\vec{F}_{Ry} = m\vec{a}_y$$

$$\vec{N} + \vec{F}_{g_A} = \vec{0}$$

$$N - F_{gA} = 0$$

$$N - m_A g = 0$$

$$N = m_A g \qquad (3)$$

Sustituyendo (3) en (1):

$$T - \mu_c m_A g = m_A a_x \qquad (4)$$

Sumando las ecuaciones (4) y (2) miembro a miembro:

$$m_B g - T + T - \mu_c m_A g = m_A a_x + m_A a_x$$

$$g(m_B - \mu_c m_A) = a_x\,(m_B + m_A)$$

$$a_x = \frac{g(m_B - \mu_c m_A)}{(m_B + m_A)}$$

Al sustituir los valores y calcular

$$a_x = 3{,}6 \text{ m/s}^2$$

Para conocer el valor de la fuerza de tensión en la cuerda se puede utilizar la ecuación (4):

$$T_B - \mu_c m_A g = m_A a_{Ax}$$
$$T_B = m_A(a_x + \mu_c g)$$
$$T_B = 192 \text{ N}$$

3.7 Leyes de Kepler. Ley de Gravitación Universal

En este epígrafe estudiaremos una de las leyes fundamentales de la naturaleza: la Ley de Gravitación Universal. La importancia de esta ley no radica solo en sus múltiples aplicaciones prácticas, basta citar el ejemplo de los vuelos espaciales, sino por su profunda repercusión cultural.

De la historia

¡Y cayó la manzana!
Una de las mejores fuentes sobre esta historia es una biografía de Newton escrita por su amigo Stukely, en 1752, en donde cuenta que:
"El tiempo era cálido, fuimos al jardín y tomamos té, bajo la sombra de unos manzanos, solo él y yo. Entre otras cuestiones, él me dijo que fue justamente en la misma situación cuando por vez primera se le ocurrió el concepto de la gravitación. Fue con ocasión de la caída de una manzana, cuando él estaba sentado con espíritu contemplativo. Por qué debería siempre una manzana descender perpendicularmente hacia el suelo, pensó para sí mismo. Por qué la manzana no iría hacia los lados o hacia arriba, sino constantemente hacia el centro de la Tierra."

La ley de gravitación universal, además de explicar el comportamiento del movimiento de los planetas, dio respuesta al hecho de que las órbitas de algunos planetas se desvían de su trayectoria cuando pasan por las proximidades de otro. En este aspecto la ley alcanzó un éxito definitivo cuando las perturbaciones en la órbita del planeta Urano permitieron predecir la posición de un planeta hasta entonces desconocido que recibió el nombre de Neptuno.

Las mareas oceánicas son otro importante fenómeno que encontró una completa explicación mediante la aplicación de esta ley.

La ley de gravitación universal también permitió explicar el movimiento de los cuerpos celestes fuera del sistema solar, por ejemplo, como el cometa Halley, que aparecen periódicamente en el firmamento, pasan cerca del Sol y vuelven a desaparecer.

Leyes de Kepler

El científico alemán Johannes Kepler (1571-1630) logró descubrir regularidades en el movimiento de los planetas del sistema solar que le permitieron llegar a las importantes conclusiones que posteriormente se denominaron Leyes de Kepler. La importancia de estas leyes no solo constituyó un inestimable aporte en el campo de la astronomía, sino que constituyeron un importante factor en el descubrimiento de la ley de gravitación universal.

Examinaremos ahora, de forma muy resumida, el contenido de estas leyes.

De la historia

La obra principal de Tycho fue realizada en Uraniborg, el observatorio construido para él en Dinamarca por el rey. Su primera tarea fue mejorar los instrumentos entonces usados.

Determinó los errores de sus instrumentos, dio los límites de precisión de sus observaciones y tuvo en cuenta el efecto de la refracción atmosférica sobre las posiciones aparentes de los cuerpos celestes. Tycho hizo observaciones regulares y sistemáticas de errores conocidos, que revelaron problemas ocultos hasta entonces.

Tycho fue capaz de demostrar, con sus instrumentos, que el cometa de 1577 estaba más allá del Sol y que su órbita debía haber pasado a través de las esferas celestes sólidas, si ellas existían. También se apartó del ideal platónico y sugirió que las órbitas de los cometas no eran circulares, sino ovaladas.

Elaboró un sistema propio (1588), en el que la Luna, el Sol y las estrellas fijas giraban alrededor de la Tierra estática, mientras que los cinco planetas giraban alrededor del Sol. Esto era geométricamente equivalente al sistema de Copérnico, pero evitó lo que creía defectos físicos Tycho legó sus observaciones a Kepler, que había venido a trabajar con él, le pidió que lo utilizase en la interpretación de sus datos.

Primera Ley de Kepler

Todos los planetas del sistema Solar se mueven por órbitas elípticas en uno de cuyos focos está el Sol (figura 3.41).

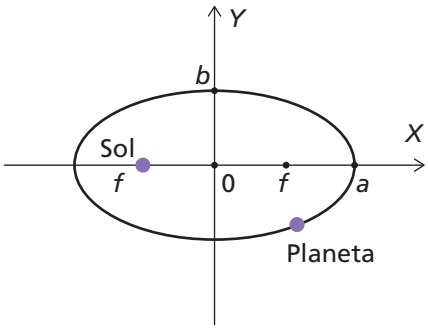


Fig. 3.41

Una elipse es una curva definida por la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (figura 3.40), donde a es la longitud del semieje mayor y b la del semieje menor, respecto al centro 0. Si $a = b = R$ entonces la elipse pasa a ser una circunferencia de radio R y ecuación $x^2 + y^2 = R^2$. La distancia f se acostumbra a llamar foco de la elipse.

En lugar del Sol puede estar cualquier otro cuerpo, por ejemplo, podemos poner en lugar del Sol a la Tierra y sustituir al planeta por la Luna.

Segunda Ley de Kepler

El radio vector que describe el planeta respecto al Sol barre la misma área en el mismo tiempo (figura 3.42). Las áreas barridas por el radio vector que une el centro del planeta con el centro del Sol son iguales en lapsos iguales.

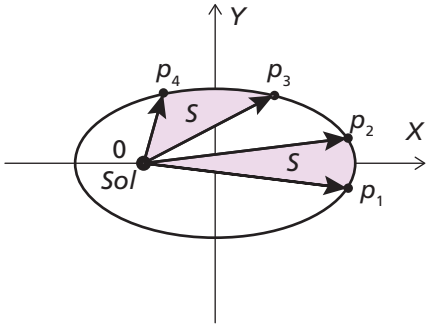


Fig. 3.42

Kepler comprendió que los planetas cambiaban el valor de su velocidad mientras más cerca ellos estaban del Sol. Pero observó que *la velocidad areolar es constante*.

Según esta ley, en la medida que el planeta se aproxima al Sol su velocidad aumenta. Supongamos que él invirtió el mismo tiempo en moverse entre los puntos (p_1; p_2) y (p_3; p_4). Por lo tanto, las áreas de los sectores de elipse $S_{(p_1, p_2)}$ y $S_{(p_3, p_4)}$ son iguales, pero los arcos de elipse recorridos son distintos.

Tercera Ley de Kepler

> **La relación entre el cuadrado del período (*T*) de traslación del planeta en su órbita y la longitud del semieje mayor al cubo, es una constante para cada planeta.**

Kepler también estudio la relación entre las magnitudes, período *T* de rotación de los planetas respecto a Sol y el radio de sus órbitas y llego a la conclusión de que esta guardaba una regularidad que es expresada según la tercera ley de Kepler, matemáticamente:

$$\frac{T^2}{a^3} = const. \qquad (3.12)$$

En el caso particular cuando el planeta se mueve por una órbita aproximadamente circular (3.12) queda $\frac{T^2}{R^3} = const$, que fácilmente podemos demostrar.

Esta ley permite afirmar que la ecuación (3.12) se puede aplicar a cualquier cuerpo del sistema Solar.

Ley de Gravitación Universal. Campo gravitatorio

Newton fue el primero en comprender que existía una regularidad entre la fuerza que es necesaria para sostener un cuerpo, y la que mantiene a la Tierra o cualquier otro planeta alrededor del Sol. Era necesaria la genialidad de Newton para descubrir este hecho que hoy puede parecer evidente. Al respecto Joseph Lagrange (1736-1813) matemático francés planteó "Newton fue el más grande genio que ha existido, pero también el más afortunado, dado que solo se puede encontrar una vez el sistema que rija al mundo". Pero el propio Newton siempre reconoció que él logró llegar a estos resultados pues existieron los trabajos de Kepler, Galileo y otros.

En la figura (3.43) mostramos a un planeta orbitando alrededor del Sol. La fuerza con que atrae el Sol al planeta $\vec{F}_{Sp}$, es la misma que ejerce el planeta sobre el Sol $\vec{F}_{pS}$, ambas son de acción y reacción, y según la Tercera Ley de Newton $\vec{F}_{pS} = -\vec{F}_{Sp}$ y $\vec{F}_{SP}$ mantiene al planeta en su órbita elíptica. De esta misma manera se puede explicar la caída de los cuerpos sobre la superficie terrestre.

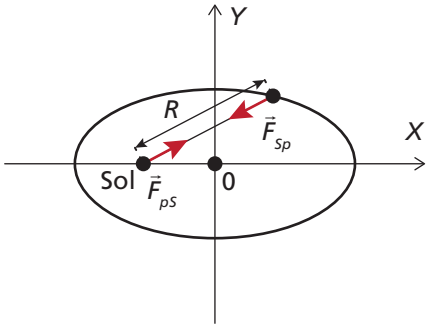
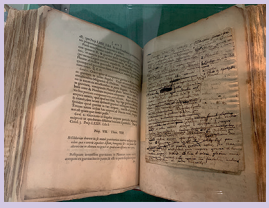


Fig. 3.43

¿Sabías que...?



Newton, en los *Principia*, se confiesa desconocedor de la naturaleza de la gravedad y se niega a proponer hipótesis imaginarias y a reconocer que las haya propuesto —«*hypotheses non fingo*»— pero afirma que la gravedad, sea lo que sea, existe de hecho «*satis est quod revera existat*».

Basándose en las ideas de Kepler, Newton llegó a formular la ley de gravitación universal la cual podemos enunciar de la siguiente forma:

> Dos cuerpos con masas *M* y *m* que se encuentren separados a una distancia *R* se atraen con una fuerza, que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos *R* dirigida según la línea que une sus centros.

Matemáticamente esta ley se puede expresar de la siguiente forma:

$$F = G\frac{M \cdot m}{R^2}, \qquad (3.13)$$

Donde *G* es una constante de proporcionalidad que se denomina Constante de Gravitación Universal o constante de Cavendish, en honor Henry

Cavendish, físico inglés que realizó grandes aportes a las ciencias, entre ellos, el cálculo de la masa de la Tierra.

La Constante de Gravitación Universal tiene el valor $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$.

De la historia

Newton en los *Principia* escribe:
"Finalmente, si mediante experimentos y observaciones astronómicas consta universalmente que todos los cuerpos alrededor de la Tierra gravitan hacia ella, y esto según la masa contenida en cada uno, que la Luna gravita hacia la Tierra según su masa, y viceversa que nuestro mar gravita hacia la Luna, que todos los planetas gravitan mutuamente entre sí y que la gravedad de los cometas hacia el Sol es similar, habrá que decir, en virtud de esta regla, que todos los cuerpos gravitan entre sí."
Luego agrega:
PROPOSICIÓN VII. TEOREMA VII
"La gravedad ocurre en todos los cuerpos y es proporcional a la masa existente en cada uno. Hemos probado ya que todos los planetas gravitan entre sí, y también que la gravedad hacia cada uno de ellos considerado individualmente es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde cada lugar al centro del planeta. De lo cual se sigue que (por la Proposición LXIX del Libro I y sus Corolarios) la gravedad hacia todos es proporcional a la masa existente en ellos."
Note, que en cuando se habla de la ley de gravitación universal siempre se habla de atracciones entre planetas, sol, estrellas, o sea, entre cuerpos realmente voluminosos y masivos, pero ¿esta ley también será aplicable entre cuerpos pocos voluminosos y masivos?
A la pregunta enunciada Newton contestó:
"…Si se objetara que, de acuerdo con esta ley, todos los cuerpos que nos rodean deben gravitar mutuamente uno hacia otro, mientras que tal gravitación no aparece por ningún lado, yo contesto, que…la gravitación entre ellos debe ser muy pequeña como para caer bajo la observación de nuestros sentidos."

¿Qué relación existe entre la fuerza gravitacional y la aceleración de la gravedad?

Supongamos que colocamos un cuerpo de masa m sobre la superficie de la Tierra. Según la ecuación de la ley de la gravitación Universal la Tierra atrae al cuerpo en su superficie con una fuerza:

$$F = G \frac{m_T \cdot m}{R_T^2}$$

Donde m_T y R_T son la masa y radio de la Tierra respectivamente. Según la segunda ley de Newton y teniendo en cuenta que la fuerza gravitacional es la única que actúa sobre el cuerpo, queda:

$$G\frac{m_T \cdot m}{R_T^2} = ma$$

De donde, dividiendo por m se obtiene que

$$G\frac{m_T}{R_T^2} = a$$

Conocida la masa de la Tierra y su radio:

$$m_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \quad \text{y} \quad R_T = 6{,}37 \cdot 10^{6}\ \text{m}$$

Al sustituir los valores, la aceleración con que se mueve el cuerpo de masa m próximo a la superficie de la Tierra queda:

$$a = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}{\left(6{,}37 \cdot 10^{6}\right)^2} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \cdot \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$$

$$a = \frac{39{,}82 \cdot 10^{13}}{40{,}58 \cdot 10^{12}} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

$$a \approx 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Como se puede apreciar este valor de la aceleración es el conocido valor promedio de la aceleración de la gravedad en el caso particular de los cuerpos cercanos a la superficie de la Tierra.

Sobrepeso e impesantez

Como definimos anteriormente, el peso es la acción que ejerce un cuerpo sobre sobre el soporte o apoyo. En los problemas resueltos 3.2, 3.3 y 3.4, se comprobó que, en un sistema de referencia acelerado, la fuerza normal $\left(\vec{N}\right)$ y por tanto el peso puede tomar valores distintos al de la fuerza de gravedad.

Cuando resolvimos el problema 54 de las tareas, el valor que marca el dinamómetro es el peso del cuerpo. El dinamómetro ejerce la fuerza $\vec{F}_1$ sobre el cuerpo, y el par de acción y reacción de ella es el peso $\vec{P}_1$, en este caso, la acción del cuerpo sobre el dinamómetro (lo que él marca). Como ambas fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{P}_1$, son pares de acción y reacción ($\vec{P}_1 = -\vec{F}_1$) y tienen el mismo valor.

Veamos los tres incisos de la tarea 52, comenzaremos por el inciso b). El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 3.44.

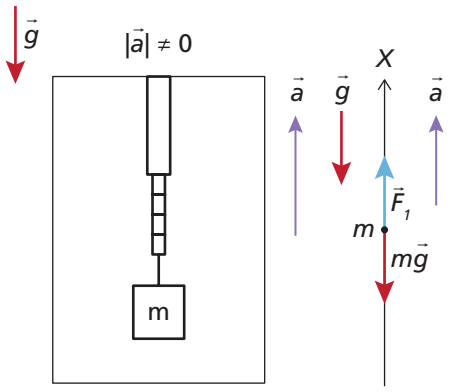


Fig. 3.44

Al aplicar la segunda ley obtenemos:

$$\vec{F}_1 + m\vec{g} = m\vec{a}\,,$$

De manera que:

$$F_1 - mg = ma_x$$
$$F_1 = mg + ma_x$$
$$F_1 = m(g + a_x)$$
$$P_1 = m(g + a_x)$$

Si el elevador está en reposo (figura 3.45)

$$\vec{F}_0 + m\vec{g} = \vec{0}\,,$$

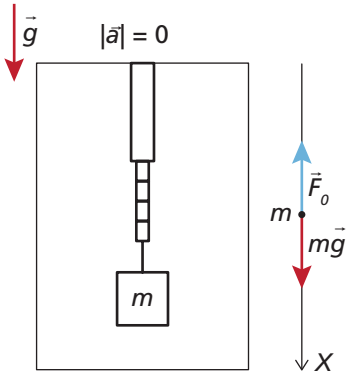


Fig. 3.45

Por lo tanto:

$$F_{0_X} = mg_X$$
$$P_0 = mg$$

En estas condiciones el peso del cuerpo coincide con el valor de *mg*. Si el elevador baja con aceleración, figura 3.46.

$$m\vec{g} + \vec{F}_2 = m\vec{a}$$
$$mg - F_2 = ma_x$$
$$-F_2 = ma_x - mg$$
$$F_2 = mg - ma_x$$
$$F_2 = m(g - a_x)$$
$$P_2 = m(g - ma_x)$$

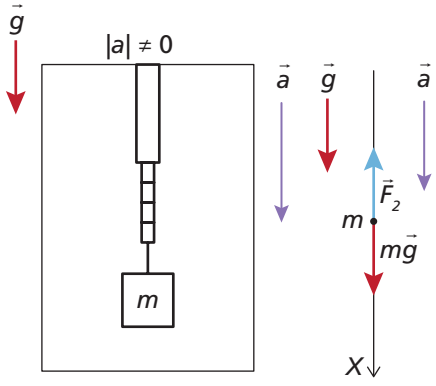


Fig. 3.46

En el caso de la figura 3.44 el dinámetro indica un sobrepeso, para el caso de la figura 3.46 su lectura será menor y si el ascensor cae libremente el cuerpo no pesaría (no interactúa con el apoyo) y se dice que está en estado de impesantez o imponderabilidad.

¡Cuidado!

No es lo mismo impesantez que ingravidez. Recuerda que cuando un cuerpo está sometido solo a la acción de la gravedad, por ejemplo, de la Tierra, no pesa y para que un cuerpo este ingrávido se requiere que esté lo suficientemente alejado del resto como para que la atracción gravitacional no se pueda apreciar.

Campo gravitatorio

La fuerza de gravitación fue concebida por Newton como la medida de una "*acción a distancia*" que un cuerpo ejerce sobre otro, sin necesidad de un agente intermediario.

Dos siglos después de que Newton descubriera la ley de gravitación universal, Faraday introdujo el concepto de campo para explicar las interacciones entre cuerpos electrizados, separados una cierta distancia, la cual se consolidó y desplazó la idea de la interacción a distancia, de manera que el esquema de interacción *cuerpo-cuerpo* quedó sustituido por el de ***cuerpo-campo-cuerpo*.**

¿Qué magnitud caracteriza al campo gravitacional?

De acuerdo con la ley de gravitación universal, la fuerza gravitatoria con que la Tierra atrae a un cuerpo puntual, a cierta distancia de su centro, está dirigida según la línea que une sus centros y tendrá un valor dado por:

$$F = G\frac{M_T \cdot m}{r^2},$$

donde M_T es la masa de la Tierra, m es la masa de la partícula y r es la distancia de la partícula al centro de la Tierra.

Si dividimos esta fuerza por la masa de la partícula, obtendremos una magnitud que no depende de dicha masa, es decir dependerá solo de la masa de la Tierra y de la distancia a su centro.

$$\frac{\vec{F}_g}{m} = \vec{g}$$

$$g = G\frac{M_T}{r^2} \qquad (3.14)$$

Donde $r = R_T + h$

Esta nueva magnitud ($\vec{g}$) se denomina **intensidad del campo gravitacional.**

La intensidad del campo gravitatorio es una magnitud vectorial que representa la fuerza gravitacional por unidad de masa que realiza el campo sobre un cuerpo colocado en el punto donde se evalúa y no depende de la masa m del cuerpo, solo de la distancia del punto considerado al centro del de masa M (en el caso de la Tierra de la altura h).

Si bien la expresión de la intensidad del campo gravitatorio se obtuvo con los datos de la Tierra, ella es válida para cualquier planeta o pareja de cuerpos.

El campo gravitacional puede ser representado por el vector intensidad $\vec{g}$, figura 3.47 o por líneas de intensidad (o líneas de fuerza), estas se trazan desde el infinito hasta la superficie del planeta, de manera que el vector intensidad en cada punto y la fuerza gravitacional que actúe sobre un cuerpo colocado en ese punto, sean tangentes a dicha línea.

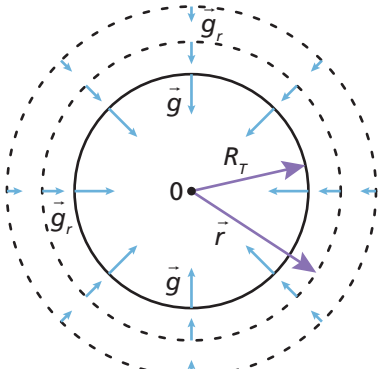


Fig. 3.47 Vector intensidad del campo gravitatorio respecto al centro de la Tierra

¿Sabías que...?

A pesar de la genialidad de Newton y de todos los honores recibidos en su vida, nunca se sintió envanecido por ello. Hay, al menos, dos ejemplos que demuestran lo anterior.

Después de mantener una correspondencia privada con Hooke, alabó la contribución de este a la óptica y le escribe que "Descartes dio un paso significativo. Usted ha añadido numerosos y nuevos caminos, especialmente al considerar filosóficamente los colores de las láminas delgadas. Si he ido un poco más lejos, ha sido apoyándome en los hombros de unos gigantes."

Y en otro momento de su vida, ya en su ancianidad expresó:

"No sé lo que pueda parecer al mundo pero, para mí mismo, sólo he sido como un niño jugando a la orilla del mar, divirtiéndome al encontrar una concha más hermosa que de costumbre, mientras que el gran océano de la verdad permanece sin descubrir ante mí".

Problema resuelto 3.7

Obtén, a partir de la Ley de Gravitación Universal y la Segunda Ley de Newton, la Tercera Ley de Kepler.

Solución:

Consideremos un cuerpo que se mueve por una órbita circular alrededor de la Tierra (figura 3.48).

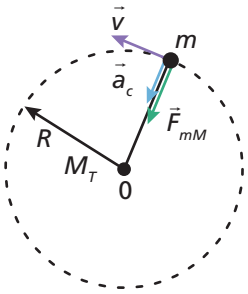


Fig. 3.48

Teniendo en cuenta que para este caso:

$$F_{mM} = G\frac{Mm}{R^2} \ , \ F_{mM} = ma_c \ \text{ y } \ a_c = \frac{v^2}{R}$$

Se obtiene que:

$$ma_c = G\frac{Mm}{R^2}$$

$$\frac{v^2}{R} = G\frac{M}{R^2}$$

Como $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ y $v_l = \omega R$

Entonces queda $\left(\dfrac{2\pi}{T}R\right)^2 = G\dfrac{M}{R}$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = G\frac{M}{R^3}$$

De donde se obtiene que:

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{MG}$$

En este caso tenemos que el cuerpo se mueve por una órbita circular de radio $R = a$ y el término $\dfrac{4\pi^2}{MG}$ es constante.

De la historia

La última mitad del siglo XX estuvo matizada por la guerra fría entre dos súper potencias. La URSS y los EE. UU. luchaban por lograr la conquista del cosmos. La URSS fue el primer país en colocar un satélite artificial en órbita alrededor de la Tierra (4 de octubre de 1957) y tuvo el primer cosmonauta del mundo (el 12 de abril de 1961 Yuri Gagarin le da una vuelta a la Tierra a bordo de la nave Vostok). Los EE. UU. fueron los primeros en mandar una nave tripulada a la Luna (el 20 de julio de 1969, los astronautas Neil Amstrong y Edwin Buzz, a bordo de la nave Apolo alunizan). Cuba, en cooperación con la URSS, tuvo el primer cosmonauta latino (Arnaldo Tamayo Méndez estuvo en el cosmos desde el 18 al 26 de septiembre del 1980). Todos estos logros están ligados a rigurosos cálculos físicos basados en las Leyes de Newton.

Problema resuelto 3.8

Determinar la primera velocidad cósmica para la Tierra (velocidad mínima que debe poseer un cuerpo para poder orbitar próximo a la Tierra sin caer sobre ella)

Solución:

Si el satélite está cerca de la superficie de la Tierra, se puede considerar que el radio de su órbita es el radio de la Tierra R_T. En la figura 3.49 se muestra la órbita del satélite *S* muy cerca de la superficie de la Tierra, podemos considerar a la Tierra como un punto y el satélite gira alrededor de él. La fuerza que ejerce la Tierra sobre el satélite estará dada por:

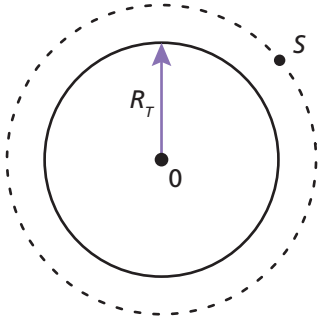


Fig. 3.49

$$F = G\frac{Mm}{R_T^2}$$

Donde: R_T, M son el radio y la masa de la Tierra, m la masa del satélite. Por otra parte, como:

$F = ma_c$, $g = G\frac{m_T}{R_T^2}$, $g = a_c$ y $a_c = \frac{v^2}{R_T}$, se tendrá que:

$$g = \frac{v^2}{R_T}$$

De donde:

$$v_l = \sqrt{R_T g}$$

Conociendo que el radio medio de la tierra es $R_T \approx 6371$ km, queda $v_l \approx 7{,}9$ km/s.

Esa es la velocidad mínima que puede tener un satélite artificial de la Tierra, si por alguna razón él tiene una velocidad menor, entonces comenzará a realizar vueltas cada vez con un radio menor y terminará cayendo sobre la superficie terrestre (figura 3.50). Por ejemplo, en el caso de los vuelos cósmicos como el de Gagarin o Tamayo se reduce la velocidad v en la órbita a un valor menor que v_l, y con ello se logra que el módulo de descenso llegara a la superficie terrestre en un punto específico p.

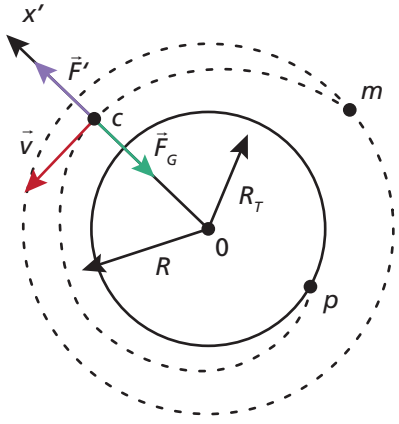


Fig. 3.50

Problema resuelto 3.9

Calcula la masa de la Tierra conocida la aceleración de la caída libre cerca de su superficie.

Solución;

La medición de la masa de la Tierras es posible hacerla indirectamente a partir de la ecuación:

$$g = G\frac{M_T}{R_T^{\,2}}$$

De donde se obtiene que:

$$M_T = \frac{g \cdot R_T^{\,2}}{G}$$

Como los valores de *g, G* y del radio de la Tierra son:

$G = 6\ 67 \cdot 10^{-11} \dfrac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$, g = 9,8 m/s^2 y R_T = 6370 km o $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m

De manera que:

$$M_T = \frac{9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m}}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}}$$

$$M_T = 6{,}0 \cdot 10^{24}\ \text{kg}$$

Problema resuelto 3.10

Cálculo de la masa del Sol

Solución:

De modo análogo al ejemplo anterior, se puede calcular la masa del Sol.

Conocemos que el radio de la órbita terrestre es $R_{\textit{órbita}} = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m y que el período de rotación de la Tierra alrededor del Sol es T = 1 año o $T = 31{,}536 \cdot 10^6$ s.

En correspondencia con la segunda ley de Newton:

$$\vec{F}_R = m\vec{a}$$

De donde, para este caso se tendrá que:

$$F_g = M_T a_c$$

$$G\frac{M_S \cdot M_T}{(R_{S-T})^2} = M_T a_c$$

$$a_c = G\frac{M_S}{(R_{S-T})^2}$$

Como $a_c = \dfrac{v^2}{R_{S-T}}$ $\quad v = \omega R \quad$ y $\quad \omega = \dfrac{2\pi}{T}$

Se tendrá que:

$$\frac{v^2}{R_{S-T}} = G\frac{M_S}{(R_{S-T})^2}$$

$$\frac{(\omega R)^2}{R_{S-T}} = G\frac{M_S}{(R_{S-T})^2}$$

$$\omega^2 (R_{S-T})^2 = G\frac{M_S}{R_{S-T}}$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2}\cdot (R_{S-T})^2 = G\frac{M_S}{R_{S-T}}$$

$$4\pi^2 \cdot (R_{S-T})^3 = G \cdot M_S \cdot T^2$$

$$M_S = \frac{4\pi^2 \cdot (R_{S-T})^3}{G \cdot T^2}$$

$$M_S = 1{,}98 \cdot 10^{30}\ \text{kg}$$

La masa del Sol es aproximadamente 330 000 veces mayor que la masa de la Tierra.

¿? ¿Sabías que...?

El caso de un satélite que orbita la Tierra es también un caso de caída libre.

Comprueba tus conocimientos

52. Analiza las siguientes afirmaciones e identifica las falsas y las verdaderas.

- La Primera Ley de Kepler plantea que los planetas del sistema solar se mueven por una órbita elíptica en cuyo centro está el Sol.
- La velocidad de los planetas en su órbita es constante en módulo.
- Si la masa entre dos planetas que interactúan aumenta en el doble y la distancia entre ellos no cambia, la fuerza de atracción entre ellos aumenta el doble. Justifica.
- Si las masas de dos planetas que interactúan y la distancia entre ellos aumenta al doble, la fuerza de atracción entre ellas no cambia.

53. Supón que tenemos un satélite que se mueve orbitando con un movimiento circunferencial, demuestra a partir de la Segunda Ley de Newton y la Ley de Gravitación Universal que para este caso particular se cumple la Tercera Ley de Kepler.

54. Demuestra a partir de la Segunda Ley de Newton y la Ley de Gravitación Universal que la aceleración de la gravedad es $|\vec{g}| \approx 9{,}81\ \text{m/s}^2$.

Tareas generales del capítulo

1. Un cuerpo de 2 kg se encuentra en movimiento sobre una superficie rugosa, por la acción de una fuerza de 5,0 N como se muestra en la figura 3.51.

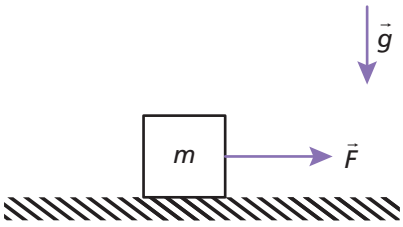


Fig. 3.51

a) Representa las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, en un diagrama.
b) Determina el valor de la aceleración del movimiento del cuerpo.
c) Calcula el peso del cuerpo.
d) ¿Qué le ocurre a la fuerza de rozamiento y al peso del cuerpo si se le aplica una fuerza $\vec{F}_1$ del mismo módulo que $\vec{F}$ pero verticalmente hacia abajo?

2. Un cuerpo de 4,0 kg se mueve hacia la derecha a partir del reposo, por una superficie horizontal rugosa ($\mu_c = 0{,}2$), bajo la acción de una fuerza, como se muestra en la figura 3.52, de 5,0 N que forma un ángulo de 30° con la dirección horizontal.

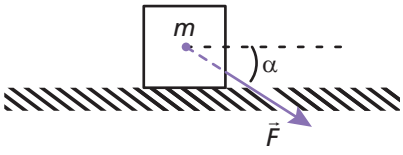


Fig. 3.52

a) Representa el diagrama de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

b) Calcula la aceleración con la que mueve el cuerpo.
c) Determina el peso del cuerpo.

3. Una caja de 25 kg se encuentra en reposo sobre un tablón rugoso, que está inclinado bajo un ángulo de 30º como muestra la figura 3.53. Considera la aceleración de la gravedad $g \approx 10\ m/s^2$

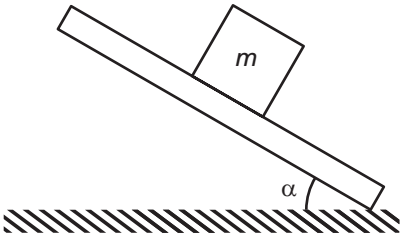


Fig. 3.53

a) Representa el diagrama de las fuerzas que actúan sobre la caja.
b) Calcula la fuerza de rozamiento sobre la caja.
c) Determine el peso del cuerpo.
d) Determina el coeficiente de rozamiento estático entre el cuerpo y el tablón.

4. Un cuerpo de 25 kg se encuentra sobre un tablón liso inclinado un ángulo de 45º respecto a la dirección horizontal, como se muestra en la figura 3.54. Determina el valor de la fuerza $\vec{F}_x$ que hay que aplicar al cuerpo, en la dirección del tablón para el que el cuerpo permanezca en reposo.

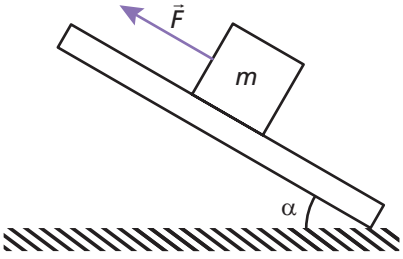


Fig. 3.54

5. Una caja con tomates de 25 kg, se cae de un camión que viajaba por un tramo recto de la carretera con una velocidad de 36 km/h, al caer sobre el pavimento se mueve con la velocidad del camión. El coeficiente de rozamiento entre el pavimento y la caja es 0,8.
a) ¿Con qué aceleración se mueve la caja por el pavimento?
b) ¿Qué distancia recorre antes de detenerse?

6. Un cuerpo se mueve por una superficie horizontal rugosa, la gráfica de $v = f(t)$ para el movimiento de este, se muestra en la figura 3.55. Se conoce que sobre él solo actúan la superficie del plano y la Tierra.

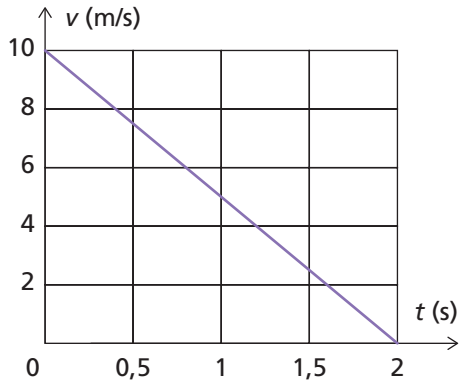


Fig. 3.55

a) ¿Cuál es la velocidad inicial del cuerpo?
b) ¿Cuánto tiempo empleó para detenerse?
c) Calcula el valor de la aceleración.
d) Determina el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano.

7. Un cuerpo de 500 g se mueve a partir del reposo, por un tramo recto bajo la acción de una fuerza 2,0 N paralela a la superficie (figura 3.56) alcanza una velocidad de 3,0 m/s cuando ha recorrido una distancia de 1,5 m. La superficie es rugosa.

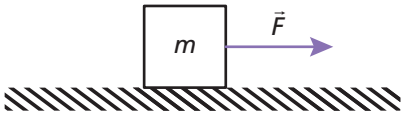


Fig. 3.56

a) Calcula la aceleración del cuerpo.
b) ¿Qué tiempo estuvo actuando la fuerza $\vec{F}$ hasta que recorrió la distancia S?
c) Determina el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano.

8. Un cuerpo se mueve por una superficie horizontal rugosa, según la figura 3.59. Determina la masa del cuerpo, si se conoce que la fuerza aplicada es horizontal y su valor es de 3,0 N. El coeficiente de rozamiento cinético entre el cuerpo y la superficie es 0,4. El cuerpo se mueve a partir del reposo y alcanza una velocidad de 4,0 m/s en un tiempo de movimiento 2,0 s.

9. La gráfica de $v = f(t)$ figura 3.57 muestra como varía la velocidad de un cuerpo de 500 g que se mueve por una superficie horizontal rugosa.

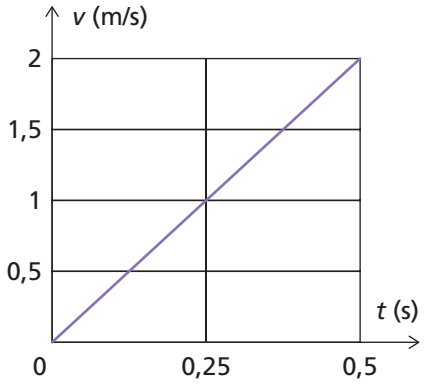


Fig. 3.57

a) Calcula el valor de la aceleración del cuerpo y la distancia recorrida en los primeros 0,25 s de su movimiento.
b) Determina el valor de la fuerza F_R que actúa sobre el cuerpo.

10. Un cuerpo de 2,0 kg se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal rugosa, al aplicarle una fuerza $\vec{F}$ que forma un ángulo de 30° con la horizontal, según se muestra en la figura 3.58.
Los coeficientes de rozamiento estático y cinético entre el cuerpo y la superficie son respectivamente: $\mu_e = 0{,}50$ y $\mu_c = 0{,}48$.

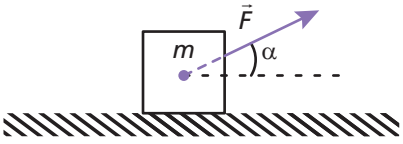


Fig. 3.58

a) Calcula el valor máximo que tiene que tener la fuerza F, para sacar al cuerpo del estado de reposo.
b) Determina el valor de la fuerza F_1, para que el cuerpo se mueva con MRU.
c) Calcula la aceleración del cuerpo, si la fuerza es de 15 N.

11. La gráfica de $v = f(t)$ en la figura 3.59, describe al movimiento de un cuerpo por un plano horizontal Calcula la aceleración y el valor de la fuerza F. Se conoce que: la masa del cuerpo es 4,0 kg, el coeficiente

de rozamiento cinético es 0,25, y el ángulo entre la fuerza y el plano es 30°.

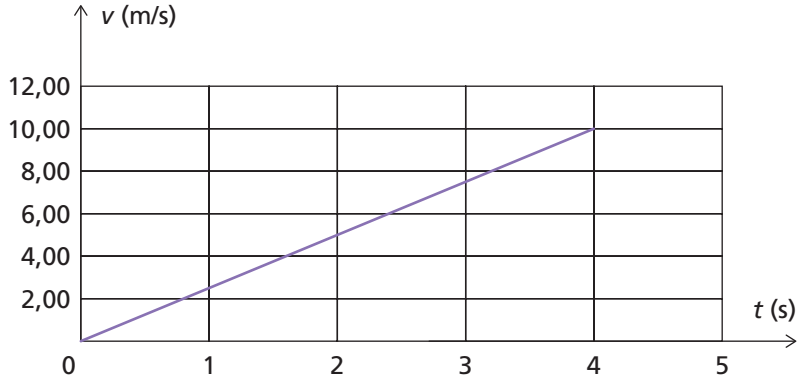


Fig. 3.59

12. Un cuerpo de 1,0 kg se coloca en la cima de un plano inclinado fijo a tierra, el coeficiente de rozamiento cinético entre el cuerpo y la superficie es 0,3. El ángulo que forma el plano inclinado con la superficie es 45° y la altura del plano es 50 cm, figura 3.60.

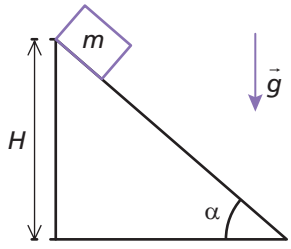


Fig. 3.60

a) Representa el diagrama de fuerzas.
b) Calcula la aceleración de su movimiento por el plano inclinado
c) Calcula el tiempo que emplea el cuerpo en recorrer el plano.

13. La gráfica de $v = f(t)$ en la figura 3.61 describe al movimiento de un cuerpo por un plano inclinado. Calcula su aceleración y el coeficiente de rozamiento cinético mc entre él y el plano. Se conoce que el ángulo es de 30°.

14. Un auto de 2 000 kg está en reposo sobre una pendiente de inclinación 10° con el horizonte. Determina el valor de la fuerza de rozamiento estática que actúa sobre el auto.

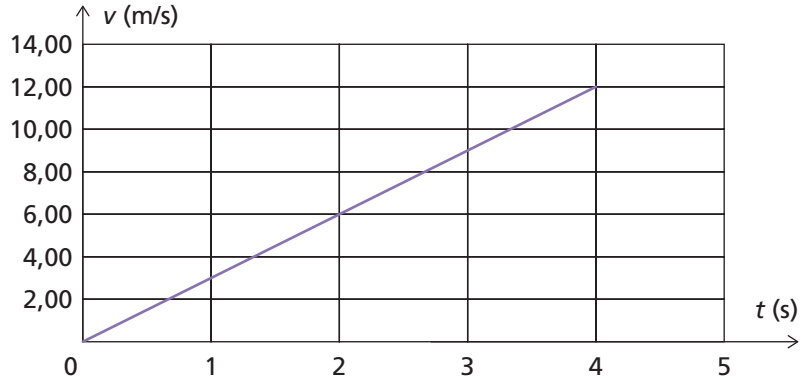


Fig. 3.61

15. Una grúa remolca a un auto que tuvo un accidente en una carretera. El cable de la grúa tira del auto con una fuerza de 10 000 N y se le opone a su movimiento una fuerza de rozamiento de 7 500 N. Calcula el valor de la aceleración del auto si el cable forma un ángulo de 30° con la horizontal y la masa del auto es de 2 000 kg.

16. Un cuerpo se lanza desde la base de un plano inclinado rugoso que forma un ángulo con el horizonte de 30°, como se muestra en la figura 3.62. La velocidad inicial en la base del plano es 5,0 m/s, los coeficientes de rozamiento cinético y estático del cuerpo y el plano son aproximadamente iguales a 0,5. Calcula:

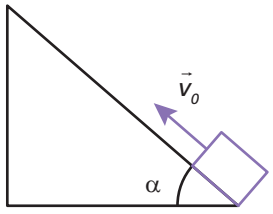


Fig. 3.62

a) la aceleración del cuerpo cuando sube por el plano inclinado.
b) la longitud mínima del plano para que el cuerpo no se caiga de él.
c) la aceleración con la que desciende por el plano inclinado.
d) Construye una gráfica de $v = f(t)$ para todo el movimiento del cuerpo.

17. Determina la velocidad máxima que puede desarrollar un auto en una curva plana de radio 50 m, si el coeficiente de rozamiento mínimo entre las ruedas y el asfalto es 0,5.

18. ***Con simulador.*** Modela la situación representada (figura 3.63), considera que el hilo es inextensible y de masa despreciable. Supón que el rozamiento puede despreciarse. Obtén la expresion para determinar el valor de la aceleración.

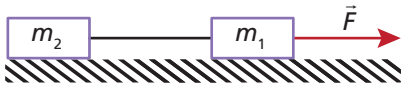


Fig. 3.63

19. ***Con simulador.*** Un cuerpo de 2,0 kg se encuentra en reposo sobre una superficie dura y lisa. Sobre este cuerpo se aplica una fuerza de 5,00 N durante 2,00.

a) Elabora, en tu libreta, un esquema en el que se muestre la situación descrita.

b) Modela la situación planteada, utilizando Física Interactiva.
En este caso no se te da el esquema, pero se te dan los valores de las magnitudes físicas. Esto te permite desarrollar la creatividad, pues no se te brinda información visual.

20. ***Con simulador.*** Sobre un cuerpo de 5,0 kg, que se encontraba en reposo sobre una superficie horizontal, lisa y dura, se aplica una fuerza de 20,0 N durante 4,0 s.

a) Modela la situación planteada, utilizando Física Interactiva y calcula el valor de la aceleración que adquiere el cuerpo bajo la acción de la fuerza aplicada.

b) Calcula el valor de la distancia que recorre el cuerpo bajo esas condiciones

c) Calcula el valor la velocidad que alcanza el cuerpo en esas condiciones

d) Determina qué le sucederá al valor de la aceleración del cuerpo si el valor de la fuerza aumenta en dos con respecto a su valor inicial.

21. ***Con simulador.*** El sistema de la figura 3.64 consiste en dos bloques A y B, sujetados por una cuerda inextensible de masa despreciable. Se considera que no hay fricción entre el plano horizontal y el bloque A. Modela la situación planteada, utilizando Física Interactiva.

a) Determinar la aceleración de cada bloque. Si $m_A = 8{,}0$ kg y $m_B = 12$ kg y el sistema parte del reposo.

b) Calcula la tensión en la cuerda.

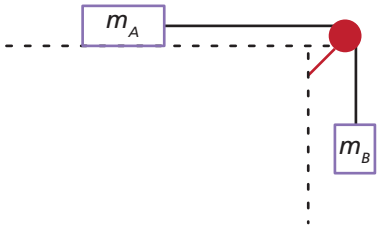


Fig. 3.64

22. ***Con simulador.*** En la figura 3.65, un bloque de 30 kg desliza por el plano inclinado. Si, el coeficiente cinético es 0,2. Modela la situación planteada, utilizando Física Interactiva

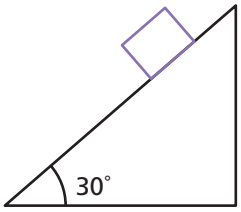


Fig. 3.65

a) Representa las fuerzas que actúan sobre el cuerpo
b) Determinar la aceleración del bloque durante su movimiento.

23. ***Con simulador.*** Sobre un plano inclinado que forma un ángulo de 30° con la horizontal, se encuentra un bloque, A, de 5 kg que está unido a otro bloque, B, de 3 kg que cuelga de un hilo que pasa por una polea situada en la parte superior del plano. Calcula la aceleración del sistema y la tensión del hilo, si el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es de 0,1.

a) Modele la situación descrita utilizando Física Interactiva.
b) Calcula la aceleración del sistema y la tensión del hilo.

24. Un auto que está a oscuras en la carretera es impactado por un camión cargado de mercancía. ¿Cuál de los dos vehículos sufre mayores daños? ¿Contradice esto la tercera ley de Newton? Justifica tu respuesta. ¿Qué violación de la ley se pone de manifiesto en este caso? ¿Cómo pudiera evitarse accidentes similares al descrito?

25. Una persona que viaja sobre un camión, al pasar por el lugar de destino, le dice al conductor que pare, pero este no lo hace y la persona se tira del camión en marcha. Menciona las consecuencias que puede

provocar la infracción que se ha cometido y los daños que pueden causar. Explica físicamente la ocurrencia del accidente.

26. Compara la fuerza de la gravedad que actúa sobre una persona que está en la superficie de la Tierra primero y después en la Luna. ¿Dónde impactaría con más velocidad contra la superficie de la Tierra o de la Luna si se cayera de la misma altura? ¿Significa esto que una persona más gruesa que otra impacta con más velocidad sobre la superficie de la Tierra, si caen de la misma altura? Justifica tu respuesta en cada caso. Desde el punto de vista de la salud, ¿qué consecuencias puede sufrir una persona que cae desde una altura considerable? ¿Qué medidas deben tomar las personas que trabajan en las alturas?

CAPÍTULO 4

Ley de conservación de la cantidad de movimiento lineal

Las leyes de Newton, en una gran variedad de situaciones, constituyen un importante método para determinar las magnitudes físicas que caracterizan el estado del movimiento mecánico de un cuerpo, durante o después de su interacción con otros cuerpos. Sin embargo, con frecuencia ocurren fenómenos en los que resulta difícil aplicar directamente los métodos relacionados con las leyes del movimiento de Newton, por ejemplo, cuando las fuerzas que actúan son de corta duración, muy intensas y variables.

En la vida cotidiana, en la ciencia y en la técnica son múltiples las ocasiones en las que el hombre se relaciona con interacciones donde las fuerzas que en ellas se manifiestan poseen estas características. Constituyen ejemplos representativos, las fuerzas que surgen durante la interacción de una pelota con un bate de béisbol o con una raqueta de tenis o de pimpón, al patear un balón de fútbol, al disparar un arma de fuego y en general, durante los choques de los cuerpos macroscópicos o microscópicos.

Determinar la velocidad o la posición de uno o más cuerpos después de una interacción como las antes mencionadas, no sería complejo si se pudiese calcular la aceleración que adquieren los cuerpos durante dichas interacciones, sin embargo, con la ayuda solo de las leyes de Newton, esto puede resultar muy complicado. Para resolver este tipo de problemas se puede contar, además, con la ayuda de una valiosa herramienta: la *ley de*

conservación de la cantidad de movimiento lineal. Este capítulo se dedicará al estudio de esta ley.

Fig. 4.1 La Copa del Mundo, el torneo internacional de más prestigio, se celebra cada cuatro años en un país distinto. La primera Copa del Mundo se celebró en 1930 en Uruguay, país ganador. Para poder predecir con relativa facilidad, por ejemplo, el cambio del estado de movimiento del balón de fútbol después de ser golpeado por un jugador puede resultar muy útil la ley de conservación de la cantidad de movimiento lineal.

4.1 Impulso de una fuerza

En el capítulo anterior se analizó que la fuerza es la causa de la variación del estado de movimiento de un cuerpo, sin embargo, en dependencia del intervalo de tiempo en que estas actúan pueden provocar mayor o menor variación en su velocidad. Por ejemplo, al mover un cuerpo que se encuentra sobre una superficie horizontal, mediante la acción de una fuerza constante, mientras más tiempo dure la interacción, mayor será la variación de la velocidad que alcanza el cuerpo.

Resulta fácil relacionar el valor de una fuerza constante aplicada a un cuerpo o de la resultante, si actúan más de una, con el cambio que experimenta el valor de su velocidad.

De acuerdo con la ecuación $\vec{F}_R = m\vec{a}$, donde $\vec{a} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$, se puede escribir que:

$$\vec{F}_R \Delta t = m\Delta\vec{v} \qquad (4.1)$$

En la ecuación (4.1) el producto de la fuerza por el intervalo de tiempo en que está actuando sobre el cuerpo se denomina ***impulso de la fuerza*** y se representa con la letra $\vec{J}$. Si se denota al impulso de la fuerza resultante como $\vec{J}_R$, se tendrá que:

$$\vec{J}_R = \vec{F}_R \Delta t \qquad (4.2)$$

Por lo tanto, el valor del impulso es igual al producto del valor de la fuerza por el tiempo en que se ejerce y su dirección y sentido coincide con el de la fuerza resultante.

En el Sistema Internacional, la unidad de medida del impulso de una fuerza es el N · s.

En la vida cotidiana el término impulso se emplea comúnmente en un sentido similar (figura 4.2: *tomó impulso, se impulsó, impulsó un cuerpo,* etcétera.

Fig. 4.2 Impulsión de la pelota con el bate

Problema resuelto 4.1

¿Cuál será el valor del impulso que provoca una fuerza aplicada a un cuerpo en un intervalo de tiempo de 3,0 s, si este se encuentra en reposo y el módulo de la fuerza es de 8,0 N?

Solución:

En este caso, para determinar el impulso de la fuerza, se puede partir directamente de la ecuación:

$$\vec{J} = \vec{F}\Delta t$$

Si se considera un sistema de coordenadas con el eje *X* orientado en la dirección que se aplica la fuerza se puede tendrá que:

$$J_x = F_x \Delta t$$

$$J_x = 8\ \text{N} \cdot 3\text{s} = 24\ \text{N} \cdot \text{s}$$

Comprueba tus conocimientos

1. ¿A qué se llama impulso de una fuerza? ¿En qué unidades se mide esta magnitud?

2. Un jugador de fútbol da un golpe al balón de manera que ejerce sobre él una fuerza constante de valor igual a 30 N, durante 8,0 ms. Calcula el valor del impulso de la fuerza aplicada al balón

3. Si el impulso provocado por una fuerza 12 N sobre un cuerpo es de 60 N · s. Determina el intervalo de tiempo en que estuvo aplicada la fuerza.

4.2 Cantidad de movimiento lineal

Múltiples observaciones de la vida cotidiana o sencillos experimentos ponen de manifiesto lo siguiente: para detener, aplicando la misma fuerza, dos cuerpos de masas diferentes que se mueven con la misma velocidad, la fuerza debe actuar durante tiempos diferentes. Por otra parte, si se requiere que los cuerpos se detengan en el mismo intervalo de tiempo, se precisa entonces que las fuerzas aplicadas sean de diferente valor.

Examinemos estos hechos aplicando la segunda Ley de Newton, expresada mediante la ecuación:

$$\vec{F}_R = m\vec{a}$$

Si el movimiento lo estudiamos con respecto a un sistema de referencia inercial fijo a Tierra y orientamos el sistema de coordenadas con el eje de

las *X* en el sentido del movimiento de los cuerpos, la segunda ley, escrita para las proyecciones, queda como:

$$F_{Rx} = ma_x$$

De donde se puede obtener que:

$$F_{Rx} = m\frac{v_x - v_{ox}}{\Delta t}$$

A partir de esta ecuación podemos encontrar que para un cuerpo se detenga ($v_{x=o)}$ debe transcurrir un intervalo de tiempo:

$$\Delta t = \frac{mv_{ox}}{F_{Rx}}$$

De esta ecuación se deduce que, bajo la acción de una fuerza resultante determinada, el tiempo de frenado depende del producto de la masa por la velocidad inicial del movimiento del cuerpo.

Este análisis nos revela que para caracterizar el estado de movimiento de un cuerpo es indispensable tener en cuenta tanto su masa inercial como su velocidad.

El producto de la masa del cuerpo por su velocidad define la magnitud física vectorial **cantidad de movimiento lineal.** Esta magnitud se acostumbra a representar mediante el símbolo $\vec{p}$.

Simbólicamente se tiene entonces que:

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad (4.3)$$

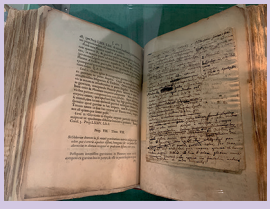
En el SI la unidad para expresar la cantidad de movimiento lineal es:

kilogramo × metro/segundo (kg · m/s)

La velocidad y la cantidad de movimiento lineal, aunque son magnitudes relacionadas expresan cosas diferentes. La velocidad de un cuerpo nos indica como este se mueve, pero no contiene información sobre sus propiedades inerciales, es decir, qué fuerza hay que aplicarle para variar su estado de movimiento.

De la historia

Isaac Newton, en su obra clásica *Principia* escribió: el cambio en el movimiento es proporcional a la fuerza aplicada y se produce en la dirección de la línea recta en que se aplica la fuerza. Newton utilizó la palabra movimiento para lo que hoy se denomina cantidad de movimiento.



Es importante tener en cuenta que, como magnitud vectorial, la cantidad de movimiento lineal no está determinada solamente por los valores de la masa y de la velocidad de los cuerpos. Por ejemplo, la cantidad de movimiento lineal de un auto que viaja con rapidez de 25 m/s hacia el sur no es igual a la cantidad de movimiento lineal de ese mismo auto que viaja con la misma rapidez hacia el oeste.

Cuando el movimiento no es rectilíneo puede que, en muchos casos, sea conveniente expresar la cantidad de movimiento lineal en sus componentes. Por ejemplo, para el caso de un proyectil que se mueve describiendo una parábola, en un sistema de coordenadas *XY*, tendríamos que las componentes son:

$$\vec{p}_x = m\vec{v}_x \text{ y } \vec{p}_y = m\vec{v}_y$$

Problema resuelto 4.2

Un objeto es lanzado con un ángulo de 45°, respecto a la dirección horizontal, con una rapidez inicial de 10,0 m/s con relación a la superficie de la Tierra. Si el objeto tiene una masa de 7,0 kg, determina:

a) El módulo de la cantidad de movimiento lineal que tiene el cuerpo en el momento de ser lanzado.
b) Las proyecciones de la cantidad de movimiento lineal del cuerpo, en un sistema coordenado *XY*, en el momento de ser lanzado.

Solución:

a) Consideremos que el objeto puede ser puntual y que el sistema de coordenadas se elige con el origen en el punto de lanzamiento y el eje de las *X* es paralelo a la dirección horizontal y en el sentido del movimiento en esta dirección.

Como se conocen los valores de la masa y de la velocidad, el módulo de la cantidad de movimiento lineal se puede calcular directamente a partir de la ecuación:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$|\vec{p}_o| = m|\vec{v}_o|$$

$$|\vec{p}| = 7 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}$$

$$|\vec{p}| = 70 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

b) Para las proyecciones se tendrá que:

$$p_{ox} = p_o cos\theta \text{ y } p_{oy} = p_o sen\theta$$

Como sen 45° = cos 45° ≈ 0,7

$$p_{ox} = p_{oy} \approx (70 \text{ kg m/s})(0,7)$$

$$p_{ox} = p_{oy} \approx 49 \text{ kg m/s}$$

Comprueba tus conocimientos

4. Si se aplica la misma fuerza para frenarlos, ¿por qué un auto y un tren de carga que tienen la misma velocidad no invierten el mismo tiempo para detenerse?

5. Un auto de 725 kg, se desplaza a 100 km/h. Determina el valor de su cantidad de movimiento lineal.

6. ¿Qué relación debe existir entre los valores de las velocidades de dos autos cuyas masas son de 2 175 kg y 725 kg, respectivamente, para que tengan el mismo valor de la cantidad de movimiento lineal?

4.3 Relación entre el impulso y la variación de la cantidad de movimiento lineal

En correspondencia con la ecuación 4.3, si la masa de un cuerpo permanece constante, la variación de su cantidad de movimiento dependerá de la variación de su velocidad:

$$\Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v} \qquad (4.4)$$

Donde

$$\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_o$$

Por lo tanto, la ecuación 4.1 se puede escribir como:

$$\vec{J}_R = \Delta\vec{p} \qquad (4.5)$$

Este resultado nos indica que la variación de la cantidad de movimiento lineal de un cuerpo es igual al impulso de la fuerza resultante que actúa sobre él.

De la historia

Como sabemos, Newton no escribió la expresión matemática de la segunda ley en la forma $\vec{F}_R = m\vec{a}$. En su libro *Principia* expresó lo siguiente:
El cambio de movimiento es directamente proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime.
En el original, en latin: *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitu.*
En el lenguaje actual esto significa que Newton formuló la segunda ley en términos de la cantidad de movimiento lineal.

En general, la ecuación 4.5 es aplicable tanto si la fuerza es constante como si es variable, incluso para las denominadas fuerzas impulsivas caracterizadas por alcanzar valores elevados en un corto intervalo de tiempo. También es aplicable en los casos en que la masa varié con el tiempo, como, por ejemplo, en los cohetes y proyectiles reactivos en los que la masa se reduce apreciablemente a medida que se consume el combustible.

En los casos en que la fuerza varíe de forma compleja, para operar con esta ecuación, se puede requerir de métodos matemáticos que están fuera del alcance de este libro, pero en otros casos, por ejemplo el de las fuerzas que varían de la forma $F = - k\Delta x$ (fuerza elástica) se puede utilizar la ecuación de forma relativamente sencilla, pues, como estudiarás posteriormente, el efecto de una fuerza de este tipo es el mismo que el de una fuerza constante de valor $F = ½ (F_{máx})$ donde $F_{máx}$ es el valor máximo de la fuerza elástica aplicada, es decir $F_{máx} = k\Delta x_{máx}$.

¿Sabías que...?

Si un automóvil que se desplaza con gran velocidad se detiene súbitamente el momento lineal del conductor (masa por velocidad) se reduce de un alto valor a cero en un breve lapso. El cinturón de seguridad y la bolsa de aire colocada en el auto para esos casos hacen que el conductor al interactuar con ellos disminuya su cantidad de movimiento lineal más lentamente que si se impactara en forma abrupta contra el volante. De esta forma, la fuerza ejercida sobre el conductor es menor y la posibilidad de resultar lesionado se reduce.

Problema resuelto 4.3

Un pasajero de 70,0 kg que viaja en un automóvil con una velocidad de valor igual a 17,9 m/s, experimenta un choque de frente con una barrera de concreto. Si el tiempo en que se detiene el automóvil, como consecuencia del choque, es de 100,0 ms, determina:

a) El valor del impulso de la fuerza necesario para detener al pasajero.
b) El valor de la fuerza media necesaria para detener al pasajero.

Solución:

Este es un ejemplo del porqué es tan importante el uso del cinturón de seguridad cuando se viaja en un vehículo automotor.

En la figura 4.3 se representan las fuerzas que actúan sobre el pasajero, respecto a un sistema de coordenadas fijo la Tierra con el eje *X* orientado en el sentido del movimiento.

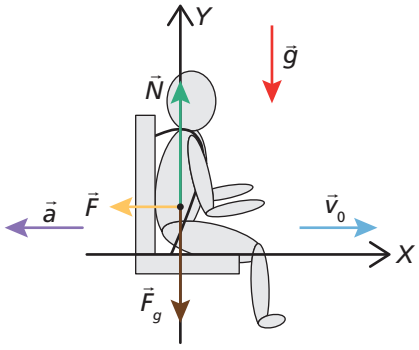


Fig. 4.3

La fuerza resultante es $\vec{F}$, que la ejerce el cinturón de seguridad (si no existe, el pasajero se va hacia adelante en el sentido positivo de *X* y se puede golpear).

Como conocemos que:

$$\vec{J}_R = \Delta\vec{p}$$

Para las componentes en el eje *X*, se tendrá que:

$$\vec{J}_{R_x} = m\left(\vec{v}_x - \vec{v}_{0x}\right)$$

Donde $|\vec{v}_x| = 0$, por lo tanto

$$\vec{J}_{R_x} = -m\vec{v}_0$$

Escribiendo esta ecuación para las proyecciones y sustituyendo por los valores numéricos se obtiene que:

$$J_{R_x} = -\ 70{,}0\ \text{kg} \cdot 17{,}9\ \text{m/s}$$
$$J_{R_x} \approx -\ 1{,}25 \cdot 10^3\ \text{N} \cdot \text{s}$$

La fuerza media que ejerce el cinturón sobre el pasajero se puede determinar a partir de la ecuación:

$$\vec{J}_R = \vec{F}_M \cdot \Delta t$$

Por lo tanto:

$$F_{Mx} = \frac{J_{R_x}}{\Delta t}$$

$$F_{Mx} = \frac{-1{,}25 \cdot 10^3\ \text{N} \cdot \text{s}}{100{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{s}}$$

$$F_{Mx} = -1{,}25 \cdot 10^4\ \text{N}$$

Como se puede apreciar esta es una fuerza de gran valor, equivalente a la fuerza de gravedad que se ejerce sobre un cuerpo de 1 250 kg situado sobre la superficie terrestre en un lugar donde la aceleración de la gravedad es $g \approx 10\ \text{m/s}^2$. De aquí la importancia del cinturón de seguridad para disminuir las posibles lesiones en caso de un accidente.

Comprueba tus conocimientos

7. ¿Qué valor posee el impulso capaz de producir un cuerpo de 8,0 kg una variación de velocidad de 4,0 km/h?

8. La velocidad de un cuerpo de 3,0 kg pasó de 10 m/s a 18 m/s bajo la acción de una fuerza de 12 N, paralela a la dirección de la velocidad inicial.

a) ¿Qué impulso le comunicó la fuerza al cuerpo?
b) ¿Durante qué tiempo actuó la fuerza?

9. Una pelota de fútbol de 0,25 kg rueda hacia un jugador a 6,0 m/s. El jugador patea la pelota en sentido contrario a la que esta tenía, y le imprime una velocidad de valor 14 m/s. ¿Cuál es el valor de la fuerza media durante la interacción entre la pelota y el pie del jugador si su duración fue de $2{,}0 \cdot 10^{-2}$ s?

4.4 Ley de conservación de la cantidad de movimiento lineal

Por los estudios precedentes de Física y Química conocemos la ley de conservación de la energía y la ley de conservación de la masa.

En general, los científicos prestan mucha atención a las magnitudes que no cambian durante un proceso determinado, pues esto las convierte en un poderoso medio para el análisis de diferentes fenómenos.

Cuando con la ayuda de estas magnitudes se pueden hacer predicciones sobre el comportamiento de un sistema, al hecho de que no varíe durante un proceso, es decir permanezca constante o se conserve, se le da el *carácter de ley de conservación*.

Hay muchos ejemplos, en el desarrollo de la ciencia, que al examinar un nuevo fenómeno parece no cumplirse una ley de conservación, pero es justamente en estos casos donde las leyes de conservación han contribuido a profundizar en la esencia de estos procesos ayudando a encontrar una explicación satisfactoria de ellos.

¿? ¿Sabías que...?

Cuando el equilibrio químico fue aplicado inicialmente al estudio de las reacciones químicas, parecía que en algunos procesos la masa aumentaba, que en otros disminuía y que en otros permanecía invariable. Pero cuando Lavoisier probó, por medio de numerosos ejemplos, que la masa era simplemente *transferida,* y que, en un sistema *aislado,* se conservaba, el esquema del conjunto apareció claramente. Por ejemplo, podían deducir con seguridad la masa de un producto gaseoso (que escapa de un sistema abierto) a partir de medidas realizadas fácilmente de los reactivos sólidos y líquidos.

En el campo de la mecánica, la ***ley de conservación de la cantidad de movimiento lineal*** es una de estas importantes leyes.

Aunque la ley de conservación de la cantidad de movimiento lineal está basada esencialmente en los resultados de las interacciones entre los cuerpos ella tiene, como veremos a lo largo del curso, un carácter más general.

Antes de continuar puede ser conveniente recordar o precisar que, de forma simplificada, llamamos **sistema** a un conjunto de elementos o cuerpos que constituyen unidades relativamente independientes que se relacionan entre sí. Por ejemplo, un satélite artificial y la Tierra pueden constituir un sistema; en esta situación las fuerzas con que interactúan

entre sí los elementos de este sistema (la Tierra y el satélite) se denominan **fuerzas internas** y las que ejercen otros cuerpos ajenos al sistema se denominan **fuerzas externas** (el Sol, la Luna, los planetas y otros astros más alejados).

Examinemos inicialmente el caso sencillo de un sistema dos cuerpos en movimiento con velocidades $\vec{v}_{0_1}$ y $\vec{v}_{0_2}$ respectivamente, sobre una superficie horizontal lisa, que chocan uno contra otro, como se muestra en la figura 4.4.

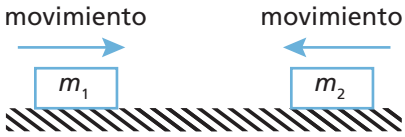


Fig. 4.4

En este caso, la variación de la cantidad de movimiento lineal de los cuerpos (considerados puntuales) estará dada por las ecuaciones:

$$\vec{F}_{12}\Delta t = m_1\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_{0_1}\right)$$

$$\vec{F}_{21}\Delta t = m_2\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_{0_2}\right)$$

Donde, durante el choque, $\vec{F}_{12}$ es la fuerza que el cuerpo 2 ejerce sobre el 1 y $\vec{F}_{21}$ es la que el cuerpo 1 ejerce sobre el 2. Estas fuerzas, **internas** al **sistema** formado por los dos cuerpos, constituyen un par de acción y reacción.

Por lo tanto, en correspondencia con la tercera ley de Newton:

$$\vec{F}_{12}\Delta t = -\vec{F}_{21}\Delta t$$

$$m_1\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_{0_1}\right) = -m_2\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_{0_2}\right)$$

$$m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{v}_{0_1} = -m_2\vec{v}_2 + m_2\vec{v}_{0_2}$$

Si agrupamos las cantidades de movimiento de las partículas antes y después de la interacción se tendrá que:

$$m_1\vec{v}_{0_1} + m_2\vec{v}_{0_2} = m_2\vec{v}_2 + m_1\vec{v}_1$$

$$\vec{p}_{0_1} + \vec{p}_{0_2} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \qquad (4.6)$$

Esta ecuación nos indica que, durante la interacción entre dos cuerpos, en ausencia de fuerzas externas o cuando estas están compensadas,

la cantidad de movimiento del sistema permanece invariable, es decir se conserva:

$$\vec{p}_{sistema\ antes} = \vec{p}_{sistema\ después}$$

En general se puede afirmar que:

La cantidad de movimiento lineal de un sistema de cuerpos sobre el que no actúen fuerzas externas o estas estén compensadas se mantiene invariable, es decir, se conserva.

Este hecho constituye el enunciado de la ley de conservación de la cantidad de movimiento lineal.

Simbólicamente esto se puede expresar de la forma siguiente:

$$\text{Si } \vec{F}_{R\ externas} = \vec{0}\text{, entonces } \Delta\vec{p}_{sistema} = \vec{0}$$

Una forma equivalente de enunciar esta ley es la de que en ausencia de impulsos externos la cantidad de movimiento lineal de un sistema de cuerpos se conserva. En efecto, de acuerdo con la ecuación 4.5, se tendrás que:

$$\Delta\vec{p}_{sistema} - \vec{j}_{R\ externo} = \vec{0} \qquad (4.7)$$

Y, en consecuencia, si.

$$\vec{j}_{R\ externo} = \vec{0}\text{, entonces } \Delta\vec{p}_{sistema} = \vec{0}$$

Puede ser conveniente llamar la atención que en muchos casos prácticos puede ser útil expresar la ecuación de la ley de conservación en sus componentes. Por ejemplo, para las componentes en los ejes *X* y *Y* se tendrá que:

$$\vec{p}_{0_{1_x}} + \vec{p}_{0_{2_x}} + \ldots \vec{p}_{0_{n_x}} = \vec{p}_{1_x} + \vec{p}_{2_x} + \ldots \vec{p}_{n_x}$$

$$\vec{p}_{0_{1_y}} + \vec{p}_{0_{2_y}} + \ldots \vec{p}_{0_{n_y}} = \vec{p}_{1_y} + \vec{p}_{2_y} + \ldots \vec{p}_{n_y}$$

La ley de conservación de la cantidad de movimiento lineal constituye una de las leyes fundamentales del universo y es de extraordinaria importancia pues nos permite predecir y realizar inferencias sobre las características del movimiento de los cuerpos que interactúan, independientemente de la naturaleza y características de las fuerzas entre ellos. Mediante esta

ley se puede determinar cómo se distribuyen las velocidades de los cuerpos del sistema después de la interacción.

Esta ley también puede ser útil para determinar la masa de uno de los elementos del sistema. En la física nuclear, cuando ocurre una desintegración, las velocidades de las partículas se pueden medir por la longitud de su alcance. Haciendo uso de la ley en cuestión, conociendo las velocidades de las partículas y la masa de una de ellas se puede determinar la masa de la otra.

Aunque la ley de conservación de la cantidad de movimiento lineal se puede inferir de las leyes de Newton, esta tiene un carácter más general porque permite caracterizar los cambios en el estado de movimiento de los cuerpos del sistema, aun cuando las leyes de Newton no se puedan aplicar de manera sencilla o estas no sean válidas, como es el caso de la Mecánica Relativista y la Mecánica Cuántica.

¿Sabías que...?

Movimiento reactivo

Una interesante aplicación de la ley de conservación de la cantidad de movimiento lineal es la descripción del llamado movimiento reactivo.

Este tipo de movimiento está muy difundido en la naturaleza, por ejemplo, es el que utilizan calamares, pulpos y medusas para su locomoción en el agua, expulsando un chorro de ese líquido a gran velocidad.

El hombre conoció este tipo de movimiento desde hace mucho tiempo y lo utilizó para hacer ascender a grandes alturas y con gran rapidez a los llamados fuegos artificiales, pero ha sido en épocas recientes que este tipo de movimiento ha alcanzado una gran importancia.

El movimiento reactivo es la base del movimiento de los aviones modernos, de los poderosos cohetes que son capaces de poner satélites en órbita, hacer viajes a la Luna y más recientemente a otros astros del Sistema Solar. También, de manera similar, funcionan las armas deportivas de aire comprimido o pólvora y por supuesto, muchas de las armas que existen en la actualidad y que nunca deberían ser utilizadas para hacer daño a nadie ni a nada.

En este curso, nos aproximaremos al estudio de este tipo de movimiento mediante la resolución de algunos problemas y experimentos.

Problema resuelto 4.4

Consideremos que los cuerpos representados en la figura 4.5 tienen masas $m_1 = 5$ kg, $m_2 = 3$ kg y que sus rapideces son $v_1 = v_2 = 2$ m/s. Calcula el valor de la velocidad de los cuerpos y di cuál es su dirección y sentido si después del choque ambos se mueven unidos.

Solución:

Escojamos un sistema de coordenadas con el origen en el punto del choque y con el eje de las *X* paralelo a la superficie horizontal y orientado en el sentido del movimiento del cuerpo 1 (figura 4.5).

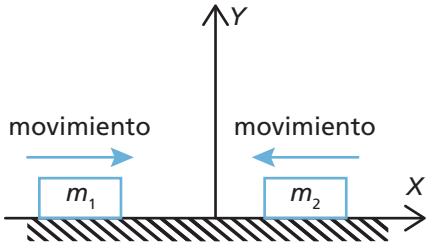


Fig. 4.5

Como no hay fricción y la fuerza de gravedad sobre el cuerpo está compensada por la fuerza que la superficie ejerce sobre el (la normal), se puede considerar que la suma de las fuerzas externas sobre el sistema de los dos cuerpos es nula y que durante el choque se conserva la cantidad movimiento lineal, es decir:

$$\Delta\vec{p}_{x\ del\ sistema} = \vec{0}$$

$$\vec{p}_{x\ sistema} - \vec{p}_{x_o\ sistema} = \vec{0}$$

$$\left(\vec{p}_{x_1} + \vec{p}_{x_2}\right) - \left(\vec{p}_{x_{o_1}} + \vec{p}_{x_{o_2}}\right) = \vec{0}$$

Por lo tanto, en proyecciones:

$$(m_1 + m_2)\, V = m_1 v_{1_{0_x}} - m_2 v_{0_{2_x}}$$

Donde *V* es el valor de la velocidad de los dos cuerpos unidos después del choque.

Despejando *V* y sustituyendo por los datos:

$$V = \frac{m_1 v_{1_{0_x}} - m_2 v_{0_{2_x}}}{(m_1 + m_2)}$$

$$V = \frac{(5\ \text{kg})(2\ \text{m/s}) - (3\ \text{kg})(2\ \text{m/s})}{5\ \text{kg} + 3\ \text{kg}}$$

$$V = 0{,}5\ \text{m/s}$$

El signo positivo del valor de la velocidad indica que los dos cuerpos se estarán moviendo en el sentido positivo del eje de las *X*.

De la historia

Descartes

Galileo veía el progreso en la dinámica mediante el estudio de los cambios del movimiento que ocurrían en las colisiones entre partículas. Descartes estudió las colisiones y publicó como leyes del movimiento una lista de reglas que eran obedecidas por cuerpos en colisión. Cuando en 1668, la Real Sociedad de Londres, pidió proposiciones definitivas de las leyes del movimiento y de "llevar a un solo punto de vista lo que aquellos excelentes hombres, Galileo, Descartes…y otros habían inventado.", fueron presentados trabajos por Wallis, Wren y Huygens. Cada uno presentó reglas para las colisiones, dadas las masas y las velocidades iniciales de las partículas. Wallis y Huygens se percataron de que la cantidad de movimiento lineal tenía propiedades vectoriales y que se conservaba en las colisiones. Ninguno de los trabajos presentados fue considerado las leyes del movimiento, ya que para tener un dominio general y amplio de la Física del movimiento había que definir y trabajar con la magnitud fuerza (acción), que es la que cambia el estado del movimiento. Fue Newton, el que define fuerza, y es quien establece los "axiomas sobre las leyes del movimiento", con un significado completamente diferente de las reglas de las colisiones.

Problema resuelto 4.5

En un campo de pruebas, una carga explosiva se encuentra en reposo sobre una viga vertical (figura 4.6) y, al estallar, se divide en tres pedazos. Dos de los pedazos tienen igual masa y salen expelidos en direcciones horizontales, perpendiculares entre sí, con una rapidez de 30 m/s. El tercer pedazo tiene una masa tres veces mayor que la de los otros dos. Determina la velocidad de este tercer pedazo (valor, dirección y sentido).

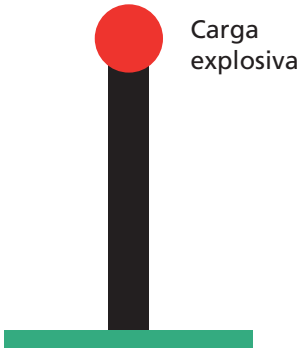


Fig. 4.6

Solución:

Los dos pedazos que tienen iguales masas y velocidades tienen cantidades de movimientos lineales perpendiculares y de igual valor. Si se asume que, sobre el sistema, dadas las condiciones del problema, se puede no considerar el efecto de las fuerzas externas durante la explosión, entonces el tercer pedazo debe tener una cantidad de movimiento lineal tal, que sumada de forma vectorial con las de los dos primeros, sea cero, en correspondencia con la ley de conservación de la cantidad de movimiento lineal (figura 4.7)

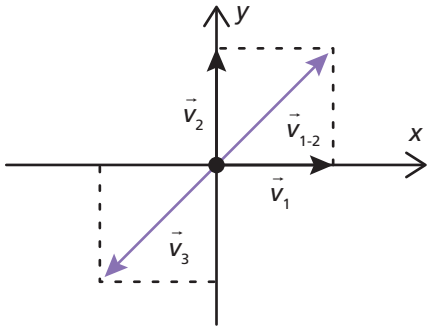


Fig. 4.7

Como $\vec{J}_{\vec{F}_{R_{ext}}} = \vec{0}$, se tendrá que;

$$\vec{p}_0 = \vec{p}$$

Donde $\vec{p}_0$ es la cantidad de movimiento inicial del sistema y $\vec{p}$ la final.

$$\vec{0} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$$

$$\vec{0} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3$$

Para las proyecciones se tiene entonces que:

$$0 = \sqrt{(m_1v_1)^2 + (m_2v_2)^2} - m_3v_3$$

$$m_3v_3 = \sqrt{(m_1v_1)^2 + (m_2v_2)^2}$$

Como:

$$m_1 = m_2 = m,\ m_3 = 3\ m \text{ y } v_1 = v_2 = v$$

$$m_3v_3 = \sqrt{(mv)^2 + (mv)^2}$$

$$m_3 v_3 = \sqrt{2(mv)^2}$$

$$m_3 v_3 = \sqrt{2} \cdot mv$$

$$v_3 = \frac{\sqrt{2} \cdot mv}{3m}$$

$$v_3 = \frac{\sqrt{2} v}{3}$$

$$v_3 = \frac{\sqrt{2} \cdot 30 \text{ m/s}}{3}$$

$$v_3 = 10\sqrt{2} \text{ m/s}$$

Problema resuelto 4.6

Un joven está sentado en un trineo que se halla en reposo sobre la superficie horizontal de un lago helado. En el trineo también hay 4 bolas de nieve. Si la masa conjunta del trineo y del joven es de 70 kg y la de cada bola de 1 kg, ¿cuál será el valor de la velocidad que alcanza el trineo si el joven las lanza en dirección horizontal, una tras otra, con una rapidez de 6 m/s ?

Solución:

Para el primer lanzamiento se puede escoger como sistema de referencia el lago. Desde este sistema de referencia la cantidad de movimiento lineal inicial es cero:

$$\vec{p}_0 = \vec{0}$$

Por otra parte, dada las condiciones del problema, es posible asumir que sobre el sistema no actúa una fuerza externa neta.

Al lanzar la primera bola con una velocidad $\vec{v}$, la cantidad de movimiento lineal de la bola ($m_b \cdot \vec{v}$) más la cantidad de movimiento lineal del trineo con el joven y las bolas restantes $(M - m_b)\vec{u}_1$ debe ser igual a cero:

$$\vec{0} = m_b \vec{v} + (M - m_b)\vec{u}_1$$

Despejando $\vec{u}_1$ se obtiene que:

$$\vec{u}_1 = -\frac{m_b \vec{v}}{(M - m_b)}$$

Donde M es la masa la masa total del trineo, el joven y las cuatro bolas de nieve y m_b masa de una bola.

Si para el segundo lanzamiento se escoge como sistema de referencia uno que se mueve con igual velocidad respecto al estanque que el trineo, entonces respecto a este el trineo tendrá velocidad nula y respecto a este nuevo sistema se puede escribir que:

$$\vec{0} = m_b\vec{v} + (M - 2m_b)\vec{u}_2$$

$$\vec{u}_2 = -\frac{m_b\vec{v}}{(M - 2m_b)}$$

Donde $\vec{u}_2$ es la velocidad del trineo respecto a un cuerpo que se mueve con velocidad $\vec{u}_1$ respecto al lago.

Aplicando la ley de composición de velocidades de Galileo, se tendrá que la velocidad del trineo respecto al lago será: $\vec{u}_2 + \vec{u}_1$.

Al lanzar la segunda bola la masa inicial *M* ha disminuido en un valor equivalente a dos bolas.

Para calcular la velocidad que adquiere el trineo respecto al estanque al lanzar la tercera bola se puede elegir como sistema de referencia un cuerpo que se mueva respecto al estanque con una velocidad $\vec{u}_2 + \vec{u}_1$ ya que, respecto a este, el trineo está en reposo y su cantidad de movimiento lineal sería nula por lo cual:

$$\vec{u}_3 = -\frac{m_b\vec{v}}{(M - 3m_b)}$$

La nueva velocidad respecto al estanque será:

$$\vec{u}_3 + \vec{u}_2 + \vec{u}_1$$

Al lanzar la cuarta y última bola se obtendrá para un el sistema que se mueve respecto al estanque con una velocidad $\vec{u}_3 + \vec{u}_2 + \vec{u}_1$ que:

$$\vec{u}_4 = -\frac{m_b\vec{v}}{(M - 4m_b)}$$

La velocidad final del trineo, respecto al lago, será entonces:

$$\vec{u} = \vec{u}_4 + \vec{u}_3 + \vec{u}_2 + \vec{u}_1$$

Al sustituirlos quedaría:

$$\vec{u} = -\left(\frac{m_b\vec{v}}{(M - m_b)} + \frac{m_b\vec{v}}{(M - 2m_b)} + \frac{m_b\vec{v}}{(M - 3m_b)} + \frac{m_b\vec{v}}{(M - 4m_b)}\right)$$

Como las bolas se lanzaron siempre con la misma velocidad y todas tienen la misma masa se obtiene:

$$\vec{u} = -\left(\frac{1}{(M-m_b)} + \frac{1}{(M-2m_b)} + \frac{1}{(M-3m_b)} + \frac{1}{(M-4m_b)}\right) m_b \vec{v}$$

$$u = -\left(\frac{1}{73} + \frac{1}{72} + \frac{1}{71} + \frac{1}{70}\right)\left(1\,\text{kg} \cdot 6\,{}^{\text{m}}\!/\!_{\text{s}}\right)$$

$$u = -0{,}336\ \text{m/s}$$

Observación. Nota que esta situación es similar a la de un cohete que lance porciones de gas de masa *m*, es decir, estamos en presencia de lo que se acostumbra a llamar movimiento reactivo. Por supuesto en el caso del movimiento de un cohete, avión a reacción, u otro artefacto similar, el gas se expulsa de forma continua, pero el razonamiento para llegar al resultado es completamente similar.

Hora del laboratorio

Práctica de laboratorio 4.1

Cantidad de movimiento lineal (variante 1)

Objetivo: estudiar la variación de la cantidad de movimiento lineal durante la interacción entre dos cuerpos.
Materiales: dos carros para experiencias de mecánica, cuerpos para incrementar la masa de los carros, regla de 1 m graduada en milímetros y balanza.

Descripción y tareas:

1) Realiza un montaje como el representado en la figura 4.8. Procede a ajustar la distancia de los carros a los topes de manera que los carros lleguen al mismo tiempo después de ser liberado el resorte comprimido entre ellos (el sonido que se produce durante el impacto con los topes permite determinar la simultaneidad con suficiente precisión). La distancia a los topes deberá ser lo sufrientemente pequeña para considerar que la velocidad es constante durante ese intervalo de tiempo.
2) Calcular la velocidad de cada carro, medir las masas respectivas y valorar como cambia la cantidad de movimiento de cada carro y la del sistema.

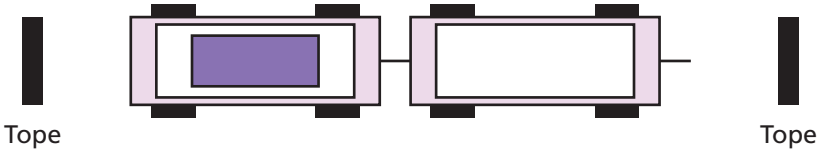


Fig. 4.8

Cantidad de movimiento lineal (variante 2)

Objetivo: estudiar la variación de la cantidad de movimiento lineal durante la interacción entre dos cuerpos.

Materiales: dos carros para experiencias de mecánica, cuerpos para incrementar la masa de los carros, regla de 1 m graduada en milímetros, balanza, cámara digital y Tracker.

1) Realiza un montaje como el representado en la figura 4.9.
2) Tomar un video del movimiento de los carros después de liberado el resorte.
3) Utilizando Tracker, determinar la velocidad inicial de cada carro, medir las masas con la balanza y valorar como cambia la cantidad de movimiento de cada carro y la del sistema.

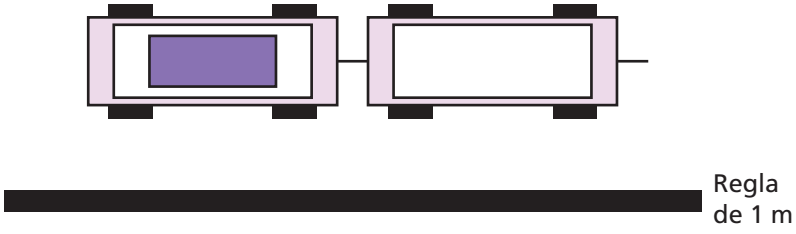


Fig. 4.9

¿Sabías que...?

Centro de masas. Movimiento del centro de masas

El centro de masas (cm) de un sistema de cuerpos es un punto muy especial. La característica esencial de este punto es la de que, independientemente de la complejidad del movimiento del sistema de cuerpos, el centro de masas del sistema se traslada como si toda la masa estuviera concentrada en este punto y la fuerza resultante estuviera aplicada sobre él. Esto significa que la aceleración del centro de masas se puede calcular mediante la ecuación:

$$\vec{F}_R = M\vec{a}_{cm}$$

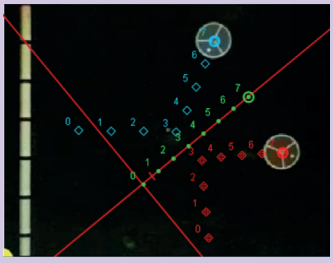
Donde $\vec{F}_R$ es la fuerza resultante, M la suma de las masas de todos cuerpos y $\vec{a}_{cm}$ la aceleración del centro de masas.

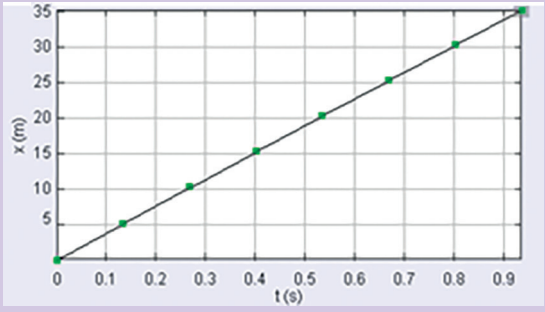
De esta ecuación se deduce inmediatamente que, si la fuerza resultante es nula, la aceleración del centro de masas es también nula, es decir, que el centro de masas del sistema se mueve con velocidad constante y, en consecuencia, la cantidad de movimiento del centro de masas se mantiene invariable si sobre el sistema no actúan fuerzas externas.

En el caso de un sistema de n cuerpos puntuales, de masas m_n, las coordenadas del centro de masas, en un plano, del sistema quedan definidas por las ecuaciones:

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \qquad x_{cm} = \frac{\sum_{i=0}^{n} m_i x_{ix}}{\sum_{i=0}^{n} m_i} \qquad (4.8)$$

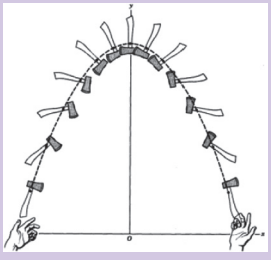
$$y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \qquad y_{cm} = \frac{\sum_{i=0}^{n} m_i x_{iy}}{\sum_{i=0}^{n} m_i} \qquad (4.9)$$





En la foto a la izquierda, las marcas rojas y azules representan las posiciones de dos discos, que se mueven sobre una superficie plana casi sin rozamiento, antes y después de chocar y los puntos verdes las posiciones del centro de masa.

En la gráfica de la derecha se puede apreciar cómo la velocidad del centro de masas permanece constante durante todo el proceso.



La trayectoria del movimiento del hacha representada en la ilustración nos resulta conocida: considerada como un punto el hacha describe una trayectoria parabólica. En este modelo, que ya hemos utilizado, el punto en cuestión resulta ser el centro de masas del hacha. Ningún otro punto del hacha describe una trayectoria tan simple.

Comprueba tus conocimientos

10. ¿Qué plantea la ley de conservación de la cantidad de movimiento lineal?

11. ¿Puede un bote de velas ser impulsado con aire soplado sobre sus vela con un ventilador que este fijo al bote?

12. Un cuerpo de 1 kg que se mueve con una rapidez de 1 m/s choca con otro de 0,5 kg y continúan su movimiento unidos. ¿Qué velocidad adquiere el sistema sí:

a) El segundo cuerpo estaba en reposo.
b) El segundo cuerpo se movía a 0,5 m/s en la misma dirección y sentido que el primero.
c) El segundo cuerpo se movía a 0,5 m/s en dirección y sentido contrario al primero.

Tareas generales de la unidad

1. La experiencia demuestra que, al disparar un fusil, la salida de la bala provoca un "culateo". Argumenta por qué.

2. Sobre un auto que pesa 15 680 N y que se mueve a 20 m/s por un tramo horizontal, actúan los frenos con una fuerza de 6 400 N, hasta llevarlo al reposo. Considera $g = 9{,}8\ m/s^2$
a) ¿Cuál es la masa del auto?
b) Determina su cantidad de movimiento lineal inicial.
c) ¿En cuánto varió su cantidad de movimiento lineal?
d) ¿Cuánto tiempo actuaron los frenos del auto hasta detenerlo?

3. ¿Qué valor posee el impulso capaz de producir en cuerpo de 8,0 kg una variación de velocidad de 4,0 km/h?

4. ¿Qué velocidad de retroceso adquiere un cañón al hacer un disparo en la dirección horizontal, si su masa es de $1{,}0 \cdot 10^3$ kg, la del proyectil que se dispara de 5,0 kg y la velocidad de salida de este último es de $6{,}0 \cdot 10^2$ m/s?

5. Una canica de 10 g rueda a 10 m/s hacia una bola de $2{,}5 \cdot 10^2$ g, inicialmente en reposo. Tras el choque la canica rebota con una velocidad de 5,0 m/s. Determina la velocidad que adquiere la bola.

6. Un vagón de 10 t se desliza por una vía recta horizontal a 2,0 m/s, interactúa con otro vagón de 15 t, que estaba en reposo y se acopla a este,

rodando juntos tras el choque. Despreciando el rozamiento, calcula la velocidad con que se mueven los vagones.

7. Una técnica utilizada para determinar la velocidad de una bala consiste en disparar sobre un blanco de modo que esta se incruste y en él. Supón que una bala de 20 g viaja con cierta velocidad y se incrusta en un blanco de 1,0 kg, por lo que el sistema blanco-bala se mueve a partir del reposo, con una velocidad de 2,0 m/s. Determina la velocidad de la bala antes del impacto.

8. Un cañón de $2{,}0 \cdot 10^2$ kg dispara un proyectil de $2{,}5 \cdot 10^2$ g con una velocidad de $2{,}0 \cdot 10^2$ m/s, formando un ángulo de 60° con la horizontal. Calcula la velocidad horizontal de retroceso del cañón.

9. Un fusil de 3,0 kg dispara horizontalmente una bala de 20 g con una velocidad de 600 m/s.

a) ¿Con qué velocidad retrocede el fusil?

b) ¿Qué valor tiene la cantidad de movimiento de la bala y del fusil después que se produce el disparo?

10. Una pelota de béisbol de 0,14 kg choca con un bate de forma horizontal a una velocidad de 40 m/s, sale del bate también en la dirección horizontal con una velocidad de 50 m/s

a) Determina la variación de la cantidad de movimiento de la pelota.

b) Calcula el valor de la fuerza media que le ejerce el bate si el tiempo del impacto es de 1,5 ms

11. Una plataforma de ferrocarril de 10 t descansa sobre los raíles. En la plataforma hay sujeto un cañón de 5,0 t que dispara a lo largo de la vía. La masa del proyectil es 100 kg y su velocidad inicial con relación al cañón es v = 500 m/s. Determina la velocidad v de la plataforma respecto a tierra un instante después del disparo si:

a) la plataforma estaba inicialmente en reposo.

b) si marchaba con una velocidad de 18 km/h y el disparo se hizo en el mismo sentido del movimiento.

c) si marchaba con una velocidad de 18 km/h y el disparo se hizo en sentido contrario al movimiento de la plataforma.

12. Un proyectil de 98 kg que se mueve horizontalmente en la dirección de la vía del ferrocarril con la velocidad de 500 m/s, hace blanco en un vagón cargado con arena, de masa total, 10 t y se atasca en él.

Suponiendo que el rozamiento entre el vagón y la vía es nulo, calcula el valor de la velocidad del vagón:

a) si en el momento del impacto estaba en reposo.
b) si en ese momento el vagón se movía con una velocidad de 36 km/h en el mismo sentido que el movimiento del proyectil.
c) si el vagón marchaba a 36 km/h en sentido contrario al del proyectil.

13. La figura 4.10 muestra un cuerpo A de 5,0 kg que se desplaza hacia la derecha con una velocidad de 2,0 m/s sobre una superficie horizontal lisa. Este cuerpo choca de forma frontal y directa con otro B de 3,0 kg que se mueve hacia la izquierda con una velocidad de 2,0 m/s. Considera que después del choque quedan unidos.

Fig. 4.10

a) Calcula la velocidad de los bloques después del impacto.
b) Realiza la interpretación física del resultado obtenido.

14. La figura 4.11 muestra un bloque de 3,0 kg que viaja con una velocidad de valor 3,0 m/s, va al encuentro de otro bloque que tiene el doble de su masa, $m_2 = 2m_1$ que se encuentra en reposo. Determina la velocidad con que se moverá el sistema después del choque. Desprecie la fricción entre el bloque y la superficie.

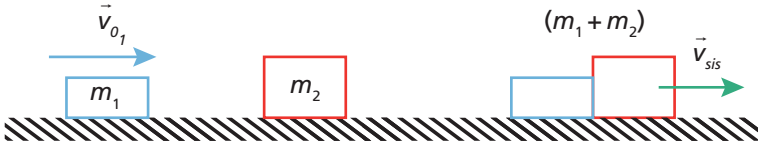


Fig. 4.11

15. Al disparar con un fusil, en una actividad práctica de tiro por el día de la defensa nacional, un proyectil de $7{,}0 \cdot 10^{-2}$ kg sale del ánima del cañón horizontalmente con una velocidad constante de $6{,}5 \cdot 10^{2}$ m/s, incrustándose contra un bloque de 2,0 kg que se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal lisa. El proyectil y el bloque se mueven unidos como un sistema por la superficie, como se representa en la figura 4.12.

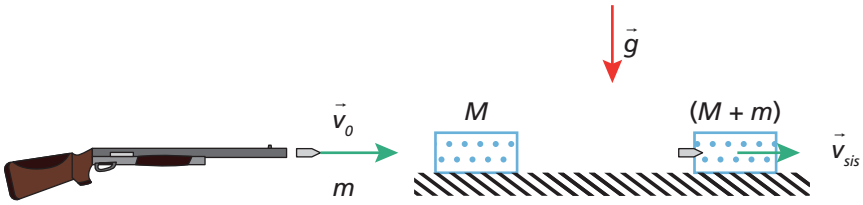


Fig. 4.12

a) Calcula la velocidad con que se mueve el sistema proyectil-bloque después del impacto.

b) Si el disparo se realizara en iguales condiciones, pero el proyectil se incrusta en un bloque 5,0 kg, entonces la velocidad del sistema proyectil-bloque, respecto al caso anterior, ¿será mayor, menor o igual? Justifica tu respuesta.

16. En un parque de diversiones un niño de 45 kg corre con una velocidad de 5,0 m/s por una superficie horizontal y alcanza una patineta de 5,0 kg que se mueve con una velocidad de 3,0 m/s en su misma dirección y sentido. Si el niño salta sobre la patineta quedando fijo sobre ella, calcula la velocidad con que se mueven ambos (niño-patineta).

a) Si la patineta tuviera menor masa, el resultado obtenido en el inciso anterior, ¿sería mayor, menor o igual? Justifica tu respuesta.

17. Un niño de 20 kg corre con una $\vec{v}_0$ y alcanza a una patineta de 60 kg que se mueve en su misma dirección y sentido a una velocidad de 2,0 m/s, salta sobre ella continuando el movimiento juntos con una velocidad de 4,4 m/s. Determina el valor de la velocidad del niño antes de montar en la patineta.

18. ***Desafío.*** Una flecha (figura 4.13) de 35 g que viaja a 175 m/s, penetra en una manzana de 100 g en reposo sobre una plataforma, como se modela en la figura, la atraviesa y sale por el lado opuesto a 145 m/s ¿Cuál es el valor de la velocidad de la manzana cuando la flecha la abandona?

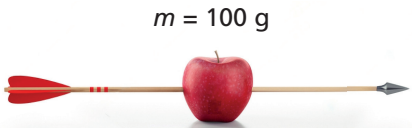


Fig. 4.13

19. ***Desafío.*** Una bala de 4,0 g se dispara horizontalmente contra dos bloques que descansan sobre una mesa sin fricción, como se

muestra en la figura 4.14. La bala atraviesa el primer bloque, de 1,5 kg y se empotra en el segundo, de 2,0 kg. Al hacerlo, se imprimen a los bloques velocidades de 0,65 m/s y 1,5 m/s, respectivamente, como se muestra en la figura. Despreciando la masa extraída del primer bloque por la bala, calcula:

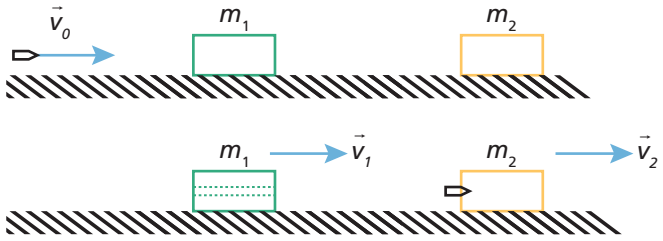


Fig. 4.14

a) La velocidad de la bala inmediatamente antes de impactar el segundo bloque.
b) La velocidad de la bala antes de impactar al primer bloque.

20. ***Desafío.*** Una bala de 54 g se dispara horizontalmente contra un bloque de madera de 2,41 kg que se encuentra inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal (figura 4.15). El coeficiente de fricción cinético entre el bloque y la superficie es de 0,21. La bala se atasca en el bloque y ambos recorren una distancia de 1,83 m hasta detenerse:

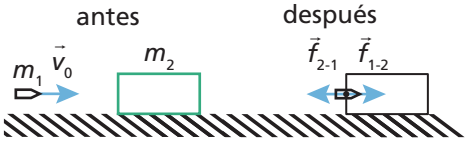


Fig. 4.15

a) ¿Cuál el valor de la velocidad del sistema inmediatamente después del choque?
b) ¿Cuál es el valor de la velocidad de entrada de la bala en el bloque?
c) Calcula el valor del impulso de la fuerza que ejerce la bala sobre el taco.
d) Calcula el valor del impulso de la fuerza de rozamiento que ejerce la superficie sobre el taco.

21. **Con simulador.** Un cuerpo A de 7,0 kg se mueve con una velocidad de 5,0 m/s sobre una superficie horizontal, lisa y dura. A una distancia

de 2,0 m se encuentra en reposo otro cuerpo *B* de 25,0 kg. Modela la situación descrita (utilizando Física Interactiva u otro software apropiado) obtén el valor de la velocidad de los cuerpos después del choque si:

a) Los dos cuerpos se mueven juntos en el mismo sentido de movimiento del cuerpo *A.*
b) El cuerpo *A* invierte su sentido de movimiento respecto al movimiento del cuerpo *B.*
c) Los dos cuerpos se mueven separados en el mismo sentido.
d) El cuerpo *A* se detiene y el *B* comienza a moverse.

22. **Con simulador.** Un automóvil de 2 000 kg que se movía a 15 m/s resbala sobre una superficie horizontal mojada, hasta que impacta a otro automóvil de 1 200 kg, que se encontraba en reposo sobre esa misma superficie. Después del impacto ambos continúan unidos.

a) Modela la situación descrita (utilizando Física Interactiva u otro *software* apropiado).
b) Calcula el valor de la velocidad del sistema después de la colisión.

23. Existe en ocasiones la creencia de que las "balas de salva" no hacen daño por no tener el plomo, sin embargo, esto ha provocado la muerte en algunos casos. ¿En qué casos es que puede hacer daño este tipo de "balas"? Explica desde el punto de vista físico la ocurrencia de este tipo de accidente.

24. Para prevenir la muerte o ser heridos, los policías y otros agentes de seguridad, utilizan chalecos antibalas. Explica el principio de funcionamiento de estos dispositivos.

25. Una persona que se tira por necesidad de una altura considerable puede recibir lesiones en su cuerpo, de menor o mayor gravedad. ¿Qué se debe hacer para minimizar dichas lesiones? Explica físicamente este hecho.

26. En las construcciones es obligatorio el uso del casco para evitar un accidente si por error cae un objeto de una altura considerable. Explica físicamente el funcionamiento de este medio de seguridad. Menciona otros medios de protección que su funcionamiento se basa en este principio.

CAPÍTULO 5

Trabajo y energía. Ley de conservación de la energía mecánica

En el tema anterior se trató sobre la ley de conservación de la cantidad de movimiento y su gran importancia teórica y práctica. También, con anterioridad, estudiamos las leyes de Newton del movimiento mecánico. No obstante, existen fenómenos mecánicos de gran interés teórico y práctico a los que no podemos dar respuesta con estas ideas.

Retomemos un ejemplo conocido. Si las esferas A y B representadas en la figura 5.1 tienen igual masa y separamos la A de su posición de equilibrio (figura 5.1 a), al liberarla desde cierta altura y chocar con la B, la esfera A se detiene y la B sale impulsada con la misma velocidad que tenía la A, hasta alcanzar casi la misma altura inicial de la A (figura 5.1 b).

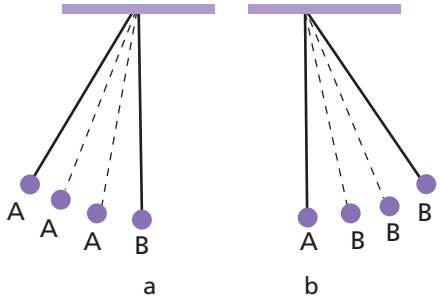


Fig. 5.1 Esquema del choque entre dos esferas suspendidas de un hilo

Por supuesto, esto es consistente con la ley de conservación de la cantidad de movimiento lineal. Pero, por ejemplo, si la esfera B retrocediera, con la misma velocidad, al chocar y la A saliera impulsada con el doble de la velocidad con que la impactó la B, también se cumpliría la ley de

conservación de la cantidad de movimiento lineal. Sin embargo, este fenómeno no ocurre. ¿Por qué no ocurre? ¿Hay alguna limitación a los cambios que pueden ocurrir en la naturaleza?

La imposibilidad de explicar este hecho y muchos otros, con el cuerpo de conocimientos que hemos abordado hasta ahora, indica la necesidad de introducir y desarrollar nuevas ideas.

Para seguir avanzando en esta dirección, ahora estudiaremos otra ley de conservación de gran importancia: la ley de conservación de la energía mecánica.

Para abordar el estudio de esta ley se deberán examinar primero algunos nuevos conceptos y magnitudes. Comenzaremos por profundizar en el conocimiento de la magnitud *trabajo mecánico*.

Antes de iniciar el estudio de estas magnitudes puede ser conveniente señalar que sobre el concepto de energía y de la ley de conservación de la energía, la mayoría de las personas, se dediquen o no al trabajo científico, conocen este término y le dan varios significados. Sin embargo, contrario a lo que muchas veces se piensa, este es un concepto relativamente "joven" y su introducción en la Física se atribuye al físico y matemático británico William Thomson (1824-1907), conocido comúnmente como Lord Kelvin, que se destacó por sus importantes trabajos en los campos de la termodinámica y la electrónica.

Actualmente, todos los aspectos relacionados con la energía tienen una gran relevancia por su importancia para el desarrollo de nuestra civilización, incluyendo los graves problemas medioambientales asociados a la explotación irracional de los recursos naturales no renovables utilizados de forma indiscriminada como fuentes de energía (figura 5.2).

Fig. 5.2 Construcción de parques eólicos como parte de los proyectos para transformar la matriz energética y proteger el medio ambiente

También puede ser útil señalar que establecer una definición general, aceptada por toda la comunidad científica, de lo que es la energía puede resultar algo escabroso, pero ello no significa que se trate de un concepto demasiado abstracto, complicado o impreciso. En este sentido, vale recordar que, son justamente este tipo de conceptos los que en muchas ocasiones han mostrado ser muy importantes y provechosos.

De hecho, de estudios anteriores, ya conoces una idea general sobre a que llamamos energía en sentido general: una magnitud que caracteriza la capacidad de un sistema de transformar sus propiedades o las propiedades de otro sistema, como resultado de variados procesos (físicos, químicos, biológicos, geológicos, etcétera).

5.1 Trabajo mecánico

Trabajo mecánico de una fuerza de valor constante sobre un cuerpo

En la vida cotidiana el trabajo se asocia con las actividades productivas de las personas, tanto manuales como intelectuales y también con cualquier tipo de esfuerzo o con los procesos ejecutados por las maquinarias de diverso tipo (figura 5.3).

Fig. 5.3 Representación de algunas manifestaciones de lo que se llama trabajo en la vida cotidiana

La magnitud *trabajo* apareció en la Física en el siglo XIX, casi 150 años después de que Newton estableciera sus tres leyes de la mecánica. Trataremos a continuación de precisar cómo se define en Física este concepto.

Consideremos un cuerpo sobre el que actúa una fuerza constante $\vec{F}$, que forma un cierto ángulo α con la dirección del movimiento y que bajo la acción de esta fuerza el cuerpo realiza un desplazamiento $\Delta\vec{S}$ (figura 5.4). Se dice entonces que para provocar el desplazamiento del cuerpo la fuerza ha realizado un trabajo.

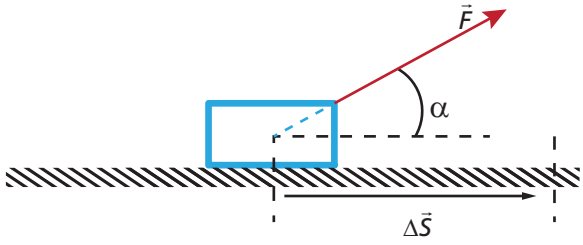


Fig. 5.4 Desplazamiento de un cuerpo bajo la acción de una fuerza

En general, para calcular el trabajo realizado por una fuerza se emplea la expresión:

$$W = \left|\vec{F}\right|\left|\Delta\vec{S}\right|\cos\alpha \qquad (5.1)$$

Donde $\left|\vec{F}\right|$ y $\left|\Delta\vec{S}\right|$ son los módulos de los vectores correspondientes.

En correspondencia con la definición de producto escalar, la ecuación (5.1) se puede escribir como:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{S} \qquad (5.2)$$

El trabajo realizado por una fuerza constante es una magnitud escalar que se calcula mediante el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento.

La unidad en que se expresa el trabajo, en el Sistema Internacional, se denomina joule y su símbolo es J.

De manera que: 1 J = 1 N · 1 m. Dicho en palabras, un joule es el trabajo que se realiza sobre un cuerpo cuando se desplaza un metro bajo la acción de una fuerza de un newton.

De la definición de trabajo mecánico se infiere que:

1. *El trabajo es una magnitud física escalar.*
2. *Si una fuerza no provoca el desplazamiento de un cuerpo su trabajo es nulo.*
   En este sentido, una persona que "suda la camisa" tratando de empujar un pesado objeto sin lograr moverlo no estará haciendo trabajo en el sentido físico de este concepto (figura 5.5). Nota que, en sentido cotidiano, si valoramos su actividad por el resultado, puede que se haya esforzado mucho, pero no hecho el trabajo que deseaba.

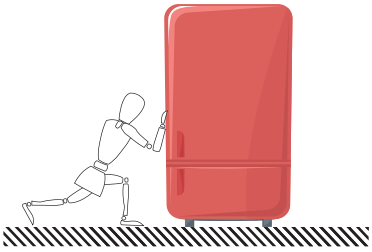


Fig. 5.5 A pesar del esfuerzo realizado no se logra mover al cuerpo

3. *Las fuerzas perpendiculares a la dirección del movimiento del cuerpo no realizan trabajo.*
   Esto es algo que está en la esencia de la definición y equivale a decir que solo realiza trabajo la fuerza o la componente de la fuerza que actúa en la dirección en que se desplaza el cuerpo. Por ejemplo, la fuerza de gravedad (tampoco la normal) no realiza trabajo sobre un vehículo que se desplaza por una superficie horizontal (figura 5.6).

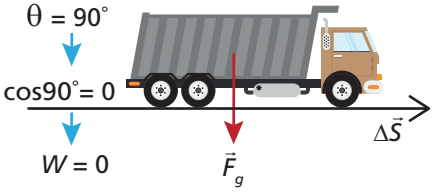


Fig. 5.6 En este caso, la fuerza de gravedad no hace trabajo durante el movimiento del camión

4. *Cuando la dirección de la fuerza es de la misma dirección que el desplazamiento el trabajo es máximo.*
   Si además tienen el mismo sentido el trabajo en "positivo" y si tienen sentido contrarios el trabajo es "negativo" (figura 5.7). En general, cuando el trabajo tiene signo positivo se dice que es "trabajo motor" y cuando tiene signo negativo "trabajo resistente".

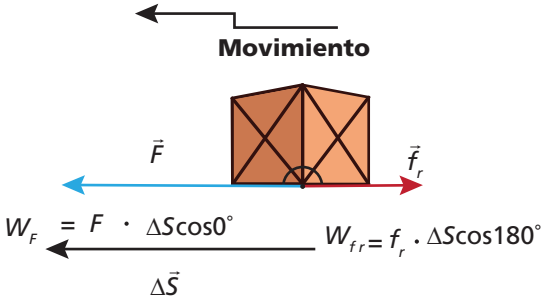


Fig. 5.7 En esta situación el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento es negativo

Puede ser conveniente insistir en que todo lo dicho es válido para el caso de fuerzas que permanezcan constantes. Si el eje de las *X* se selecciona orientado en la dirección del desplazamiento, como la fuerza es constante, la gráfica del valor de la fuerza en función del valor del desplazamiento es paralela al eje de las *X.* En estos casos (fuerza constante), la gráfica del valor de la fuerza en función del valor del desplazamiento tendrá la forma mostrada en la figura 5.8.

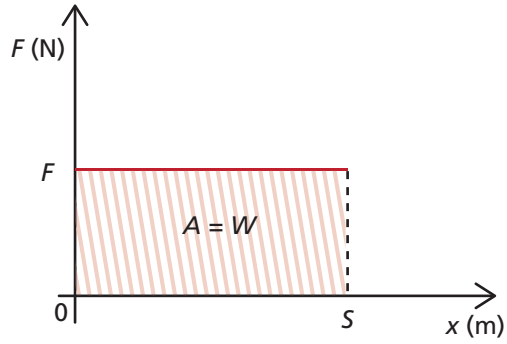


Fig. 5.8

Nota que en este caso el trabajo realizado por la fuerza al recorrer la distancia *S* (valor del desplazamiento) es numéricamente igual al área bajo la curva $F = f(x)$.

Este resultado particular se puede generalizar para el caso de fuerzas que no se mantengan constante al variar la posición. Esta generalización constituye un recurso para calcular con facilidad el trabajo realizado por este tipo de fuerzas en algunos casos. Por ejemplo, en el caso de las fuerzas elásticas donde la fuerza varía linealmente con el valor del desplazamiento tendríamos la situación representada en las figuras 5.9 a y b: a) el cuerpo está sujeto en la posición $x = s$ y al ser liberado regresa a la posición $x = 0$ bajo la acción de la fuerza elástica ejercida por el resorte; b) el trabajo de la fuerza elástica es numéricamente igual al valor del área bajo la curva, es decir, $W = 1/2\ (F_{e_{máx}} \cdot S)$. Nota que $\frac{F_{e_{máx}}}{2}$ es el valor de la fuerza media.

En el caso en que actúan más de una fuerza sobre el cuerpo, el cálculo del trabajo total (también se llama neto o resultante) se puede determinar como la suma algebraica del trabajo que realiza cada una de las fuerzas:

$$W_R = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$$

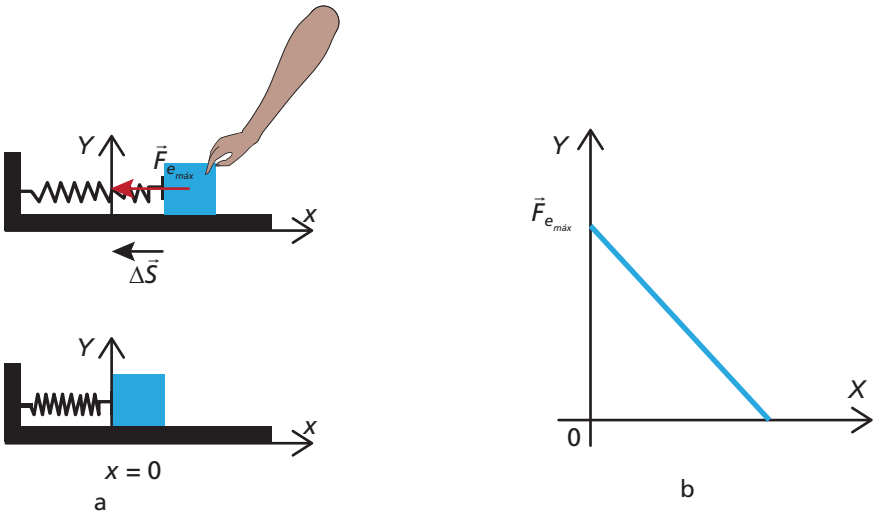


Fig. 5.9

O puede calcularse la fuerza resultante (suma vectorial de los vectores fuerzas) que actúan sobre el cuerpo, multiplicada por el módulo del vector desplazamiento del cuerpo y por el coseno del ángulo entre el vector fuerza resultante y el vector desplazamiento. En el caso de que todas las fuerzas no actúen simultáneamente durante el desplazamiento del cuerpo o sistema sino en determinados tramos, el trabajo total se sigue calculando por la misma ecuación, es decir, sería la suma algebraica de los trabajos de cada una de las fuerzas en los tramos considerados.

De la historia

En los *Diálogos*, Salviati expresa: "Pero decidme, amigos: el mazo que dejado caer sobre una estaca, desde una altura de cuatro codos, la hinca en tierra, digamos cuatro dedos, si viniera de una altura de dos codos la clavaría mucho menos, y menos todavía si viniera de la altura de un codo, y menos todavía si viniera de la altura de un palmo…" Como puede interpretarse del párrafo anterior, Galileo plantea la proporcionalidad entre la distancia que se hunde la estaca y la velocidad del cuerpo que cae. De esta manera, Galileo anticipa una forma de medir el trabajo mecánico a partir de sus efectos.

Problema resuelto 5.1

Un cuerpo recorre una distancia de 10 m, sobre una superficie horizontal, bajo la acción de una fuerza de 80 N que forma un ángulo de 30° con la horizontal. Si el módulo de la fuerza de rozamiento entre el cuerpo

y la superficie es de 20 N, calcula el valor del trabajo neto realizado sobre el cuerpo.

Solución:

Consideremos que el cuerpo se mueve en el sentido positivo del eje de las *X*, respecto a un sistema de coordenadas, ligado a la Tierra, con el eje de las *X* paralelo a la superficie y el origen de coordenadas en la posición inicial.

Para tener una idea clara de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo es conveniente construir el correspondiente diagrama de cuerpo libre (figura 5.10).

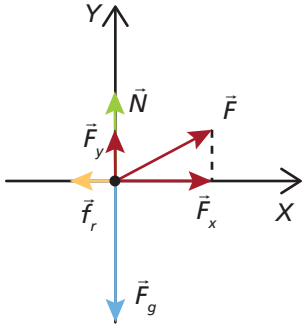


Fig. 5.10 Diagrama de cuerpo libre

Queda entonces claro que sobre el cuerpo solo hace trabajo la componente $\vec{F}_x$ de la fuerza $\vec{F}$ y la fuerza de fricción $\vec{f}_r$ pues la componente $\vec{F}_{y,}$ la fuerza de gravedad $\vec{F}_g$ y la fuerza normal $\vec{N}$ son perpendiculares a la dirección del movimiento.

Como se conoce el valor del desplazamiento el trabajo de cada una de las fuerzas se puede calcular directamente a partir de la ecuación que de forma operacional define esta magnitud:

$$W_{F_x} = F\cos 30^\circ \Delta S$$

$$W_{F_x} = (80\ \text{N})(0{,}5)(10\ \text{m})$$

$$W_{F_x} = 400\,\text{J}$$

$$W_{f_r} = f_r \cos 180^\circ \Delta S$$

$$W_{f_r} = (20\ \text{N})(-1)(10\ \text{m})$$

$$W_{f_r} = -200\ \text{J}$$

Por lo tanto, el trabajo neto o resultante será:

$$W_R = W_{F_x} + W_{f_r}$$

$$W_R = 400\ \text{J} - 200\ \text{J}$$

$$W_R = 200\ \text{J}$$

Otra forma de calcular el trabajo neto es la de calcular la fuerza resultante y hallar el trabajo de esta fuerza:

En proyecciones, para la fuerza resultante se tendrá que:

$$F_{R_x} = F_x - f_r$$

$$F_{R_x} = F\cos 30^\circ - f_r$$

$$F_{R_x} = (80 \cdot 0{,}5)\ \text{N} - 20\ \text{N}$$

$$F_{R_x} = 20\ \text{N}$$

Por lo que:

$$W_R = (F_{R_x} \cos 0^\circ)(\Delta S)$$

$$W_R = (20\ \text{N})(10\ \text{m})$$

$$W_R = 200\ \text{J}$$

Resultado que coincide con obtenido por el primer método.

Comprueba tus conocimientos

1. ¿Es el trabajo mecánico una magnitud escalar o vectorial?

2. ¿En qué condiciones una fuerza aplicada a un cuerpo en movimiento no realiza trabajo?

3. Cita dos ejemplos en los cuales una fuerza realice trabajo positivo y dos en el que el trabajo de la fuerza sea negativo.

4. ¿Cómo se puede calcular el trabajo resultante realizado por la acción de un sistema de fuerzas?

5. Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba. Determina a partir del concepto de trabajo mecánico, si el trabajo de la fuerza de gravedad es positivo o negativo:

a) Al subir.
b) Al caer.

6. Una partícula se traslada por el borde de una circunferencia con movimiento circunferencial uniforme. ¿Por qué la fuerza centrípeta que actúa sobre la partícula no realiza trabajo?

7. El trabajo realizado por la fuerza gravitacional durante el movimiento de la Tierra alrededor del Sol (si se supone circunferencial) es:

a) Nulo.
b) Positivo o motor.
c) Negativo o resistente.
d) Imposible de determinar.

8. Una persona tira de una caja con materiales de construcción, mediante una cuerda, con una fuerza de 50 N que forma un ángulo de 30° con la horizontal. Calcula el trabajo realizado por la fuerza sobre la caja, cuando esta se desplaza 3,0 m con un movimiento rectilíneo uniforme.

5.2 Energía cinética. Relación entre el trabajo y la energía cinética

Si sobre un cuerpo actúa una fuerza resultante, que permanece constante, la velocidad del cuerpo cambia de manera uniforme (varia de forma lineal). Por otra parte, la fuerza resultante estará haciendo un trabajo mecánico.

¿Qué relación existirá entre el cambio de velocidad provocado por la fuerza que actúa sobre el cuerpo y el trabajo mecánico realizado?

Tratemos de responder a esta pregunta.

La situación planteada se puede representar como se muestra en la figura 5.11.

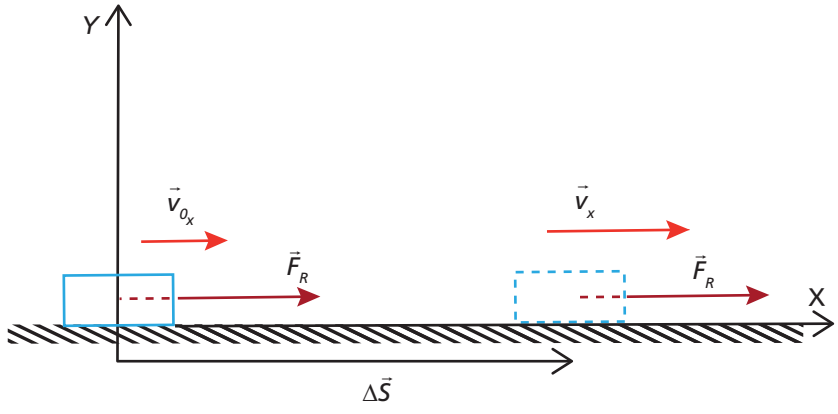


Fig. 5.11 Bajo la acción de la fuerza resultante $\vec{F}_R$ cambia la velocidad del cuerpo

En esta situación el trabajo realizado por la fuerza de valor *F* estará dado por:

$$W = F \cdot \Delta S \cos\theta$$

Donde *F* y ΔS son los valores modulares de la fuerza y el desplazamiento respectivamente.

De acuerdo con la segunda Ley de Newton, se puede escribir entonces que:

$$W = ma_x \cdot \Delta S$$

Pero como (recuerda que la aceleración es constante):

$$\Delta S = \frac{v_x^2 - v_{0_x}^2}{2a_x}$$

Se tendrá entonces que:

$$W = ma_x \cdot \frac{v_x^2 - v_{0_x}^2}{2a_x}$$

$$W = \frac{mv_x^2}{2} - \frac{mv_{0_x}^2}{2}$$

Que en general se puede escribir como:

$$W = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_o^2}{2} \qquad (5.3)$$

Esta es la ecuación que nos relaciona el trabajo realizado por la fuerza resultante con la variación del valor de la velocidad del cuerpo.

A la magnitud $\frac{m \cdot v^2}{2}$ se le denomina energía cinética y se acostumbra a representar por E_c:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (5.4)$$

En el SI, la unidad de energía es el *joule* (J).

Nota que esta magnitud siempre es un escalar positivo y mide la energía de un cuerpo cuando esta se debe a su movimiento.

En términos de la energía cinética la ecuación 5.3 se puede escribir en la forma:

$$W_R = E_c - E_{c_0}$$

$$W_R = \Delta E_c \qquad (5.5)$$

La ecuación (5.5) significa que:

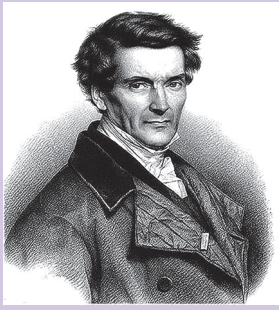
El trabajo realizado por la fuerza resultante sobre un cuerpo es igual a la variación de la energía cinética del cuerpo.

Este resultado se conoce con el nombre de teorema del trabajo y la energía cinética.

Es importante recordar que la velocidad de un cuerpo depende del sistema de referencia adoptado y la energía cinética podrá tomar valores diferentes, pero la variación de la energía cinética no cambia y, en consecuencia, la relación (5.5) es válida para todos los Sistemas de Referencia Inerciales (SRI).

El teorema del trabajo y la energía que se obtuvo a partir de la segunda ley de Newton, es válido para las fuerzas estudiadas: elástica, fricción, gravitacional y otras, no importa si son de valor constante o el movimiento es curvilíneo. Es válido para sistemas de referencias inerciales.

De la historia



En el *Essai sur les machines en general* (1782) de Lazare Carnot aparece el concepto de trabajo con el nombre de momento de actividad y fuerza viva. La introducción del trabajo en el sentido actual fue realizada por un grupo de ingenieros franceses entre los que figuran H. Navier (1785-1836), G. Coriolis (1792-1843) y J. V. Poncelet (1788-1867). El nombre de trabajo fue propuesto por Poncelet en *Introduction à la mécanique industrielle* (1829). El tratado de Coriolis *Du calcul de l'effet des machines* data de 1829. Allí aparece por primera vez la formulación del principio de conservación de las fuerzas vivas (energía cinética) en términos de trabajo. Coriolis redefine la fuerza viva (energía cinética) como $1/2mv^2$ para que el trabajo sea igual a la variación de dicha fuerza (energía cinética).

Problema resuelto 5.2

Un automóvil, cuya masa es de 1 000 kg, aumenta el valor de su velocidad de 40 km/h a 80 km/h. Calcula:

a) El trabajo realizado durante este proceso.
b) El valor de la fuerza aplicada, suponiendo que esta sea constante, y que el cambio de velocidad dado ocurrió al cabo de recorrer 2 km.

Solución:

a) El trabajo realizado se puede calcular, en este caso, aplicando directamente el teorema del trabajo y la energía cinética:

$$W_R = \Delta E_c$$

Antes de sustituir por los datos es necesario expresar los valores de las velocidades en m/s:

$$40 \text{ km/h} \approx 11 \text{ m/s}$$
$$80 \text{ km/h} \approx 22 \text{ m/s}$$

Agrupando términos y sustituyendo por los valores numéricos queda que:

$$W_R = \frac{1}{2} 10^3 \text{ kg} \left[(22 \text{ m/s})^2 - (11 \text{ m/s})^2 \right]$$

$$W \approx 1{,}8 \cdot 10^5 \text{ J}$$

b) El valor de la fuerza, dadas las condiciones del problema, se puede determinar directamente a partir de la ecuación:

$$W = \left|\vec{F}\right| \left|\Delta\vec{S}\right| \cos\alpha$$

De donde se obtiene que:

$$\left|\vec{F}\right| = \frac{W}{\left|\Delta\vec{S}\right|}$$

Sustituyendo los valores numéricos, expresados en el SI, se tendrá que:

$$\left|\vec{F}\right| = \frac{1{,}8 \cdot 10^5 \text{ J}}{2 \cdot 10^3 \text{ m}}$$

$$\left|\vec{F}\right| = 90\text{N}$$

Comprueba tus conocimientos

9. ¿Qué entiendes por energía cinética de un cuerpo? ¿Es esta magnitud escalar o vectorial?

10. ¿En qué consiste el teorema del trabajo resultante y la energía cinética?

11. ¿Cómo varía la energía cinética de un cuerpo si la fuerza que se aplica realiza trabajo positivo?

12. ¿Cómo varía la energía cinética de un cuerpo si la fuerza que se aplica realiza trabajo negativo?

13. ¿Variará la energía cinética de un cuerpo en movimiento al cambiar únicamente la dirección del vector velocidad?

5.3 Energía potencial

Trabajo de la fuerza de gravedad y energía potencial gravitatoria

Supongamos que un cuerpo de masa *m* cae libremente desde una altura inicial h_0, hasta llegar a la altura final *h*, como se representa en la figura 5.12. (Respecto al sistema de coordenadas seleccionado, el signo de la proyección de la fuerza de gravedad es negativo y el desplazamiento del cuerpo también tendrá signo negativo).

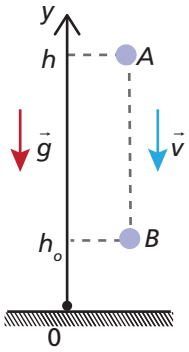


Fig. 5.12 Durante el deslizamiento del cuerpo sobre el plano solo hace trabajo la componente F_{g_x} de F_g

Calculemos el trabajo de la fuerza de gravedad al pasar el cuerpo de la posición *h* a la h_0.

En este caso, el trabajo estará dado por:

$$W_{F_g} = \left|\vec{F}_g\right| \cdot \left|\Delta\vec{S}\right| \cos\theta$$

$$W_{F_g} = -F_g\left(h - h_o\right)$$

$$W_{F_g} = -mg\left(h - h_o\right)$$

$$W_{F_g} = -mgh + mgh_0$$

$$W_{F_g} = mg\left(h_o - h\right)$$

Si se selecciona el origen de coordenadas de manera tal que $h = 0$, entonces se tendrá que:

$$W_{F_g} = mgh_o$$

Analicemos ahora el caso en que el cuerpo se mueve desde la altura h_0 hasta la h, pero deslizando sin rozamiento sobre una superficie inclinada (figura 5.13).

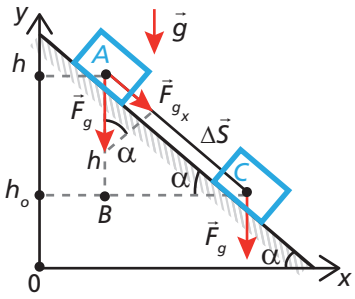


Fig. 5.13 Deslizamiento del cuerpo sobre el plano (trabajo la componente F_{g_x} de F_g)

En este caso el trabajo realizado por la fuerza de gravedad estará dado por:

$$W_{F_g} = F_{gx}\Delta s$$

Donde:

$$F_{gx} = mg\,sen\alpha \;\text{ y }\; \Delta s = \frac{h_o}{sen\alpha}$$

Por lo tanto, se puede escribir que:

$$W_{F_g} = mg\,sen\alpha \cdot \frac{h_o}{sen\alpha}$$

$$W_{F_g} = mgh_o$$

Este resultado coincide con el obtenido anteriormente para el trabajo realizado por la fuerza de gravedad cuando el cuerpo se dejaba caer libremente desde una altura h_0.

Se puede demostrar que, el resultado del cálculo del trabajo realizado por la fuerza de gravedad también sería el mismo independientemente de la trayectoria seguida por el cuerpo, es decir, que el trabajo realizado por la fuerza de gravedad solo depende de la diferencia de alturas entre los dos puntos que se consideren.

Por otra parte, si se calcula el trabajo de la fuerza de gravedad al mover el cuerpo desde el punto de altura *h* hasta el punto de altura h_0, el trabajo sería el mismo, pero de signo contrario. En consecuencia, el trabajo total realizado en una trayectoria cerrada sería cero.

Todas las fuerzas cuyo trabajo no depende del camino recorrido, sino solo de las posiciones inicial y final, o lo que es lo mismo, cuando el trabajo realizado en una trayectoria cerrada es cero, se denominan **fuerzas conservativas**. Las que no cumplen esta condición se denominan **fuerzas no conservativas.**

> Se denominan fuerzas conservativas aquellas cuyo trabajo no depende del camino recorrido, sino solo de la posición inicial y final, o lo que es equivalente, cuyo trabajo en una trayectoria cerrada es nulo.

Como se estudiará más adelante, además de la fuerza de gravedad, otros "tipos" de fuerzas cumplen con esta condición.

Por otra parte, un ejemplo típico de fuerza no conservativa es el de la fuerza de fricción que se manifiestan cuando un cuerpo desliza sobre otro o se mueve en el seno de un fluido.

La ecuación $W_{F_g} = mg(h_o - h)$, puede ser escrita de la forma:

$$W_{F_g} = -mg(h - h_o)$$

El segundo miembro de esta ecuación es la variación de la magnitud *mgh* y podemos decir que el trabajo de la fuerza de gravedad es igual a la variación de esta magnitud con signo negativo.

Recordemos que el trabajo de la fuerza resultante sobre un cuerpo es igual a la variación de la magnitud $E_c = \frac{mv^2}{2}$, que se denomina energía cinética.

Ahora encontramos que el trabajo de la fuerza de gravedad es igual a la variación de la magnitud *mgh,* con signo negativo. A esta magnitud, que solo depende de la posición del cuerpo, se le denomina energía potencial gravitatoria (E_{p_g}):

> Se denomina energía potencial gravitatoria (E_{p_g}) de un cuerpo de masa *m* a la magnitud *mgh,* donde *h* es la altura del cuerpo en relación con el origen del sistema de coordenadas asociado a un cuerpo de referencia.

$$E_{p_g} = mgh \qquad (5.6)$$

Se puede decir entonces que el trabajo realizado sobre un cuerpo por la fuerza de gravedad es igual a la variación de la energía potencial experimentada por el cuerpo con signo negativo:

$$W_{F_g} = -\Delta E_{p_g} \qquad (5.7)$$

Problema resuelto 5.3

Un proyectil de 1 kg es lanzado desde la superficie de la Tierra. ¿Qué trabajo ha realizado la fuerza de gravedad cuando el proyectil se encuentra a una altura de 20 m?

Solución:

Para este caso se puede escribir que:

$W_{f_g} = -(E_{p_{g_2}} - E_{p_{g_1}})$ Si se selecciona como nivel cero el de la energía potencial en la superficie de la Tierra, queda:

$$W_{f_g} = -E_{p_{g_2}} \text{ o } W_{f_g} = -mgh$$

$$W_{F_g} = -1{,}0 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \frac{m}{s^2} \cdot 20 \ m$$

$$W_{f_g} = -1{,}96 \cdot 10^2 \ J$$

El signo menos del trabajo expresa que la fuerza de gravedad es de sentido contraria al desplazamiento y realiza trabajo resistente.

Trabajo de la fuerza elástica y energía potencial elástica

Examinemos ahora el proceso de estirar o comprimir un resorte en el intervalo en que la fuerza elástica es directamente proporcional a la deformación, es decir, dentro de los límites de su elasticidad (figura 5.14).

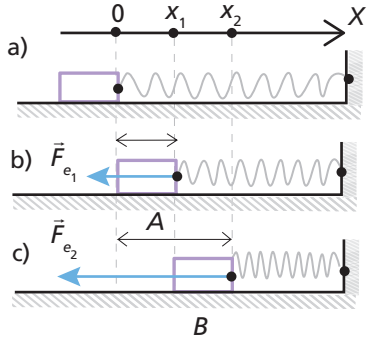


Fig. 5.14 La fuerza elástica sobre el cuerpo aumenta con la compresión del resorte.

Si el módulo de la fuerza externa aplicada F_{ext} para comprimir o estirar un resorte es igual al módulo de la fuerza elástica F_e ejercida por el resorte, entonces el trabajo de la fuerza externa (W_{ext}) será de igual valor y de signo opuesto al realizado por la fuerza elástica (W_{F_e}).

En este caso, el trabajo no se puede calcular directamente a partir de la ecuación $W = \left|\vec{F}\right|\left|\Delta\vec{S}\right|cos\alpha$ pues la fuerza elástica F_e no permanece constante durante el proceso.

Sin embargo, sabemos que podemos hacer este cálculo a partir de la ecuación:

$$W_{F_e} = -\frac{1}{2}F_{e_{máx}} \cdot \Delta x$$

Si, para mayor simplicidad, consideramos que un resorte de longitud x_0 no está inicialmente comprimido ni estirado, el trabajo realizado por la fuerza elástica cuando se alarga hasta un cierto valor x estaría dado por:

$$W_{F_e} = -\frac{1}{2}k \cdot x \cdot x$$

$$W_{F_e} = -\frac{1}{2}kx^2$$

A la magnitud $\frac{kx^2}{2}$, que solo depende del estiramiento del resorte, se le denomina energía potencial elástica (E_{p_e}).

$$E_{p_e} = \frac{1}{2}kx^2$$

En general, si un resorte se estira o comprime en una magnitud $x - x_0$, su energía potencial elástica varía en la magnitud:

$$\Delta E_{p_e} = E_{p_{e_f}} - E_{p_{e_0}}$$

Por lo tanto, el trabajo realizado en este proceso por la fuerza elástica será:

$$W_{F_e} = -\Delta E_{p_e} \qquad (5.8)$$

Podemos entonces decir que el trabajo realizado por la fuerza elástica cuando se comprime o estira un resorte (figura 5.13) es igual a la variación de su energía potencial con signo cambiado.

Como en el caso de la fuerza de gravedad, el trabajo de la fuerza elástica solo depende de la posición inicial y de la posición final, es decir, la fuerza elástica también es una **fuerza conservativa.**

¿? ¿Sabías que...?

El tendón de Aquiles, que va de la parte de atrás del tobillo al hueso del talón, actúa como un resorte natural. Cuando se estira y luego se relaja, el tendón almacena energía potencial elástica. Esta acción de resorte reduce el trabajo que los músculos de la pierna deben efectuar al correr.

En el caso de la energía cinética, esta se puede asociar a un cuerpo aislado que se mueve con cierta velocidad respecto a un sistema de referencia inercial, pero en el caso de la energía potencial esto no es así. En los dos casos examinados podemos notar como la energía potencial está determinada por la fuerza que un cuerpo ejerce sobre otro.

Por ejemplo, cuando un cuerpo se encuentra próximo a la superficie de la tierra, sobre él actúa la fuerza ejercida por la Tierra (mg) y a su vez este actúa sobre la Tierra con una fuerza igual valor, pero de sentido contrario ($-mg$). No tiene sentido hablar de que el cuerpo, o la Tierra, poseen por separado energía potencial, esto solo es válido para el sistema cuerpo-Tierra.

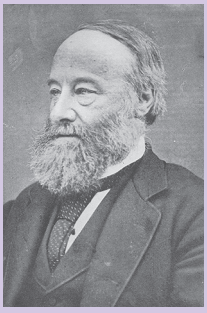
Análogamente, en el caso de un resorte la energía potencial elástica está siempre asociada al sistema cuerpo-resorte.

De la historia

La paternidad de la Ley de Conservación de la Energía generó discrepancias fuertes entre Mayer y Joule, aunque finalmente se le dio el crédito a Mayer. Joule escribe: "…Parece que Mayer se precipitó en publicar sus teorías con el propósito expreso de asegurarse la prioridad. No esperó a poder apoyarlas con hechos. Mi marcha, por el contrario, fue publicar solamente las teorías que había comprobado experimentalmente antes de presentarlas al público científico, bien convencido de la verdad de la observación…".

Helmholtz

Robert Mayer



Joule

Helmholtz, defendiendo a Mayer, escribe: "…Pero la fama del descubrimiento pertenece a aquel que halló la nueva idea; la investigación experimental representa un logro mucho más mecánico. Tampoco puede pedirse que el inventor de una idea tenga la obligación de efectuar la segunda parte de la empresa. De ser esto así, habría que despedir a la mayor parte de los físicos matemáticos."
Lo anterior se ha dado más de una vez en la historia de las ciencias y es un ejemplo de rivalidad, una por la prioridad y otra por los méritos relativos del experimentador y el teórico.

Comprueba tus conocimientos

14. ¿Qué condición debe cumplir una fuerza para que se considere conservativa?

15. ¿Es la fuerza de gravedad una fuerza conservativa? Explica tu respuesta.

16. ¿Qué relación existe entre el trabajo de la fuerza de gravedad y la energía potencial gravitatoria de un cuerpo?

17. ¿Qué variación sufre la energía potencial de un cuerpo durante su movimiento hacia arriba?

18. ¿En qué difiere la energía potencial de un cuerpo elevado a cierta altura de la energía cinética?

19. Un cuerpo lanzado formando cierto ángulo con el horizonte describió una parábola y cayó a la tierra. ¿A qué es igual el trabajo de la fuerza de gravedad si el punto inicial y final de la trayectoria se encuentran en el plano de lanzamiento?

20. ¿Qué fuerza es la que realiza trabajo durante el movimiento de un cuerpo que desciende por un plano inclinado sin rozamiento? ¿Depende este trabajo de la longitud del plano inclinado?

21. ¿Qué relación existe entre el trabajo de la fuerza elástica y la energía potencial elástica?

22. ¿Qué hay de común entre la energía potencial de un cuerpo sobre el que actúa la fuerza de gravedad y la de un cuerpo sometido a la fuerza elástica?

23. ¿Qué trabajo realiza la fuerza de rozamiento, ejercida por el aire, sobre un automóvil de 1 000 kg cuando su velocidad disminuye de 54 km/h a 36 km/h?

24. Se deja caer una piedra de 2 kg desde una altura de 10 m y llega a tierra con una velocidad de 10 m/s. Calcula el trabajo realizado por la fuerza de resistencia del aire.

5.4 Ley de conservación de la energía mecánica

Como sabemos, la ley de conservación de la energía nos dice que:

La energía ni se crea ni destruye, solo se transforma.

Aunque sobre esta importante ley se continuara profundizando durante todo el curso de Física, examinemos ahora con más detalle lo que se acostumbra a llamar ley de conservación de la energía mecánica, cuestión que por supuesto también contribuirá a una mejor comprensión de la ley en general.

Examinemos el sencillo caso de un cuerpo que se deja caer desde una cierta altura h_0, respecto a la superficie del suelo (figura 5.15). En el momento inicial la energía cinética del cuerpo respecto al suelo es cero (el cuerpo está en reposo) y su energía potencial respecto a la superficie del suelo es *mgh.* Durante la caída el cuerpo va perdiendo altura y en consecuencia su energía potencial disminuye. A su vez va ganando velocidad y su energía cinética aumenta. Cuando llegue justo a la superficie su energía potencial será cero (pues la altura es cero) y habrá alcanzado el máximo de velocidad. En el supuesto de que durante la caída solo ha actuado la fuerza de gravedad, que es una fuerza conservativa, toda la energía potencial se habrá transformado en cinética y la energía mecánica del cuerpo, es decir la suma de la energía cinética y de la energía potencial, no habrá variado.

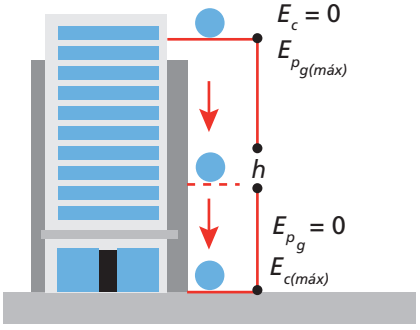


Fig. 5.15 Durante la caída la energía mecánica del cuerpo no cambia

En el caso ideal de que, durante la interacción entre el cuerpo y la superficie, toda la energía cinética se transforme en energía potencial elástica durante el choque (el cuerpo y la superficie se deforman), hasta que se detiene y posteriormente se vuelve a transformar en cinética, al recuperar el sistema su forma original y el cuerpo rebotará con el mismo valor de la velocidad con que chocó contra el piso. Durante el ascenso la energía cinética se ira transformado en energía potencial gravitatoria hasta que alcance la altura que tenía inicialmente, punto en el cual la energía cinética será cero y la potencial tendrá el valor inicial, es decir la energía mecánica permanece invariable durante todo el proceso.

Este resultado se puede generalizar a cualquier caso en que solo actúen fuerzas conservativas y concluir entonces que la energía mecánica permanece invariable en todo proceso en el que solo actúen fuerzas conservativas. Esto se puede representar simbólicamente:

$$\Delta E_M = 0, \text{ si } \vec{F}_{R_{no\ conservativas}} = 0 \qquad (5.9)$$

Donde

$$\Delta E_M = \Delta E_c + \Delta E_p$$

De hecho, sabemos que:

$$W_{F_R} = \Delta E_c \text{ y que } W_{F_{conservativas}} = -\Delta E_p$$

Pero como:

$$W_{F_R} = W_{F\ conservativas} + W_{F_{no\ conservativa}}$$

Por lo tanto, en general, podemos escribir que:

$$W_{F_{no\ conservativa}} = \Delta E_c + \Delta E_p$$

$$W_{F_{no\ conservativa}} = \Delta E_M \qquad (5.10)$$

Que resulta una forma equivalente a la (5.8) para expresar de forma simbólica la ley de conservación de la energía mecánica.

Notemos que si $W_{F_{no\ conservativa}} = 0$, entonces:

$$\Delta E_m = 0$$

¿Sabías que...?

Durante el proceso de caída de una persona atada a un *bungee* (cuerda de gran elasticidad) la **energía mecánica no se conserva,** porque tanto las fuerzas de fricción dentro del *bungee*, como la resistencia del aire también efectúan trabajo. Si la energía mecánica se conservara, la persona seguiría rebotando eternamente.

Problema resuelto 5.4

¿Qué altura *h* alcanza un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial $\vec{v}_0$? Desprecia la fuerza de rozamiento del cuerpo con el aire.

Solución:

Tenemos como origen de coordenadas el punto desde el cual fue lanzado el cuerpo. En este punto la energía potencial del cuerpo es igual a cero, mientras que la energía cinética es igual a $\frac{mv^2}{2}$, esto significa que la energía total del cuerpo en este punto es:

$$E_M = E_p + E_c$$

$$E_M = 0 + \frac{mv_0^2}{2}$$

En el punto más alto a la altura *h* la energía potencial gravitatoria es igual a *mgh* y la energía cinética es igual a cero.

La energía total en el punto más alto es igual a:

$$E_M = mgh + 0$$
$$E_M = mgh$$

De acuerdo con la ley de conservación de la energía mecánica:

$$mgh = \frac{mv_0^2}{2}$$

Por tanto:

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

Problema resuelto 5.5

Una escopeta de juguete lanza sus proyectiles de 50 g impulsándolos con un resorte que tiene una constante elástica de 10 N/cm. Determina la velocidad de salida del proyectil si el muelle inicialmente está deformado en 10 cm. Desprecia el rozamiento.

Solución:

Dada la situación planteada en el problema y las magnitudes que son datos, para determinar la velocidad de salida del proyectil, puede aplicarse la ley de conservación de la energía mecánica. Antes de disparar, toda la energía mecánica es potencial elástica igual a $\frac{kx_0^2}{2}$

Después que el muelle recupera su longitud normal, toda la energía es cinética igual a $\frac{mv^2}{2}$.

Por tanto, aplicando la ley de conservación de la energía mecánica se tiene que:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{kx_0^2}{2}$$

de donde: $v^2 = \frac{kx_0^2}{m}$ $\qquad v = \sqrt{\frac{kx^2}{m}}$ $\qquad v = x_0\sqrt{\frac{k}{m}}$

$$v = 0{,}1m\sqrt{\frac{10^3\,\text{N/m}}{0{,}05\ \text{kg}}}$$

$$v = 14{,}1\ \text{m/s}$$

Problema resuelto 5.6

Una grúa eleva una carga de masa m desde la altura h_0 hasta h (figura 5.16). Con ello la velocidad de la carga aumenta de $\vec{v}_0$ a $\vec{v}$. ¿Qué trabajo realiza la fuerza $\vec{F}$ de tensión del cable del que está suspendida la carga?

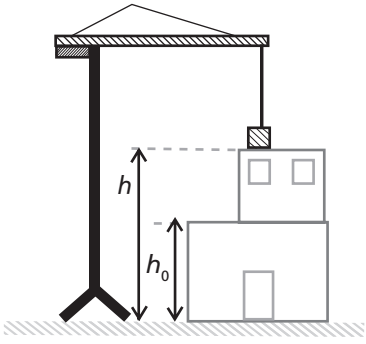


Fig. 5.16

Solución:

En el caso que examinamos, la carga está sometida a la fuerza de gravedad $m\vec{g}$ (con-

servativa) y a la tensión del cable $\vec{F}$ (no conservativa); en esta situación no se conserva la energía mecánica de la carga.

La energía mecánica de la carga es cinética y potencial gravitatoria. Utilizando la ecuación del trabajo de las fuerzas no conservativas y la variación de la energía mecánica:

$$W_{F_{nc}} = \Delta E_M \qquad W_{F_{nc}} = E_M - E_{M_0} \qquad W_{F_{n_c}} = (E_{p_g} + E_c) - (E_{p_{g_0}} + E_{c_0})$$

$$W_{F_{nc}} = \left(mgh + \frac{mv^2}{2}\right) - \left(mgh_0 + \frac{mv_0^2}{2}\right)$$

Como la energía ni se crea ni destruye, la variación de la energía mecánica se manifiesta en el sistema, en otras de sus formas, por ejemplo, en energía interna o en forma de calor.

¿Sabías que...?

La Ley de Conservación y Transformación de la Energía descubierta en el siglo XIX fue el resultado del aporte de tres científicos que trabajaron en la teoría de la equivalencia entre el calor y la energía. Robert Mayer (1814-1878), James P. Joule (1818-1889) y Herman Hemholtz (1821-1894).
Mayer presentó numerosos ejemplos de conversión de "fuerzas" (energías) y de su indestructibilidad, hasta generalizar los resultados en la primera formulación escrita del principio de conservación de las "fuerzas" (energías). Según sus palabras: "... podemos decir que las causas son cuantitativamente indestructibles y cualitativamente convertibles... Las "fuerzas" (energías) son, por tanto, entidades indestructibles y convertibles… En innumerables casos vemos que el movimiento cesa sin haber causado otro movimiento o el levantamiento de un peso; pero una fuerza (energía) una vez en existencia no puede ser aniquilada, puede solamente cambiar su forma y la cuestión aparece, ¿qué otras formas es capaz de tomar la fuerza, con la cual nos hemos familiarizado como con la fuerza de caída (energía potencial) y de movimiento (energía cinética)."
Averigüe en internet, ¿cuáles fueron los aportes de Hemholtz a esta Ley?

Trabajo de Laboratorio 5.1

Tema: estudio de la transformación y conservación de la energía mecánica
Objetivo: demostrar la transformación de la energía potencial gravitatoria en energía cinética en el movimiento de un cuerpo.
Materiales: rail de aire, cuerpo que desliza por el rail de aire, regla graduada, celdas fotoeléctricas y contador digital.

Descripción y tareas:

Incline la vía de aire de forma tal que la diferencia de altura entre dos posiciones del carro que se colocará en la vía de aire sea aproximadamente 10 cm.

Encienda el generador de aire, coloque el carro a una altura de 10 cm y suéltelo, determine la velocidad del carro cuando pase por la otra posición.

Comprueba si, dentro de las incertidumbres, se cumple la ley de conservación de la energía mecánica.

Aplicaciones

En una montaña rusa, a medida que el carro alcanza mayor altura, su energía potencial gravitatoria aumenta; mientras que al bajar, la energía potencial se va transformando en cinética, permitiendo que el carro alcance su velocidad máxima en la parte más baja de la montaña

Comprueba tus conocimientos

25. ¿A qué se denomina energía mecánica?

26. Enuncia la ley de conservación de la energía mecánica.

27. ¿Es nulo el trabajo de las fuerzas de rozamiento? Justifica tu respuesta.

28. ¿Se cumple la ley de conservación de la energía mecánica de un cuerpo (o sistema de cuerpos) si solo actúan simultáneamente las fuerzas de gravedad y elástica?

5.5 Choques

Con el fenómeno de los choques o colisiones ya nos familiarizamos durante el estudio de la ley de conservación de la cantidad de movimiento lineal. Ahora, la ley de conservación de la energía mecánica nos permite ampliar este estudio y resolver algunos problemas de mayor complejidad.

Como conocemos durante los choques, siempre y cuando las fuerzas externas al sistema de los cuerpos que chocan, se cumple la ley de

conservación de la cantidad de movimiento lineal, pero no sucede así con la ley de conservación de la energía.

De la historia

Para el año 1668, a solo ocho años de constituida la Royal Society de Londres, a las leyes de los choques se le daba tanta importancia, que se inició una investigación sobre el problema dando origen, mediante los trabajos del matemático inglés John Wallis, de los estudios de la cantidad de movimiento lineal.

Cuando lo cuerpos chocan y parte de la energía mecánica se transforma en energía interna de los cuerpos o se transfiere al entorno mediante un proceso térmico, se le denomina choque inelástico o plástico y cuando la energía mecánica se conserva al choque se la llama elástico.

> Cuando se conserva la energía mecánica, el choque es elástico, si no es así, entonces es inelástico.

Un sencillo y familiar ejemplo de choque inelástico es el que se produce cuando dejamos caer una pelota de goma y rebota al chocar con el piso: durante cada rebote la pelota alcanza cada vez menos altura, es decir su energía mecánica inicial no se conserva. Esto sucede porque parte de la energía mecánica se transforma en energía interna de la pelota y el piso durante cada choque y también se "disipa" por el rozamiento con el aire durante el descenso y ascenso de la pelota. En el caso, por ejemplo, que se deja caer desde cierta altura una "pelota" de plastilina, esta no rebota, en esta situación se dice de que choque fue perfectamente inelástico.

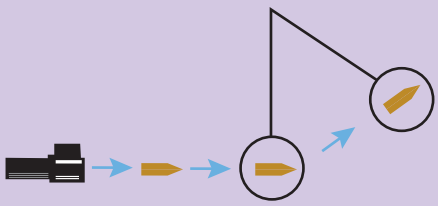
Los choques elásticos son una idealización, pero en muchas situaciones son una buena aproximación: por ejemplo, si la pelota que se deja caer es de un material que al chocar contra el piso absorbe muy poca energía y la fricción con el aire se puede no tener en cuenta, sabemos que la pelota casi alcanza la misma altura en el primer rebote y que, incluso, puede rebotar varias veces y la perdida de altura es pequeña.

Cuando en un choque, los cuerpos, antes y después de la interacción, solo poseen velocidades cuyas direcciones son colineales, el choque se denomina unidireccional. Aquí nos limitaremos a estudiar este tipo de choques.

¿Sabías que...?

El choque de dos cuerpos no solo ocurre cuando estos ponen en contacto directo algunas de sus partes, también ocurre cuando entre ellos surgen fuerzas que modifican sus estados mecánicos sin que se produzca dicho contacto. Este es el caso, por ejemplo, de los choques entre partículas cargadas eléctricamente.

Aplicaciones



Una aplicación de las leyes de conservación es el péndulo balístico. Para determinar la velocidad con que sale una bala de un arma, se la hace impactar en contra de un cuerpo, según se muestra, se produce un choque inelástico. El péndulo adquiere determinada energía cinética y al oscilar esta energía se transforma en energía potencial gravitatoria. Conocida la altura a la que llega, se conocerá la velocidad con que se movió inicialmente el sistema y, por conservación del *momentum*, con qué velocidad impacto la bala.

Analicemos ahora un ejemplo de cada uno de los dos tipos de choque.

Choque elástico unidireccional

En la figura 5.17 se muestran dos carros 1 y 2 que se mueven por una superficie horizontal lisa con velocidades $\vec{v}_{0x_1}$ y $\vec{v}_{0x_2}$. Las masas de los carros son respectivamente m_1 y m_2.

El carro 1 se mueve inicialmente en línea recta, con una velocidad $\vec{v}_{0x_1}$ respecto a la superficie, hacia el carro 2 que se encuentra también en movimiento por la misma superficie y en el mismo sentido. La velocidad del carro 1 es mayor que la que posee el carro 2, cuando se encuentran el choque es elástico, central y directo.

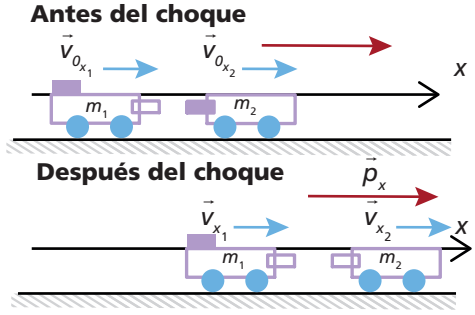


Fig. 5.17 Los carros experimentan un choque elástico, su interacción se produce entre los resortes que los conforman

Observa como en la figura 5.17 se ha representado el vector cantidad de movimiento antes y después de la interacción y como se cumple la ley de conservación del momento lineal, tienen el mismo módulo *(longitud), dirección y sentido (los vectores representados en la figura no están a escala)*

¿Cómo determinar las velocidades $\vec{v}_{x_1}$ y $\vec{v}_{x_2}$ de los carros después del choque si este es de tipo elástico?

En las condiciones representadas en la figura 5.16, antes del choque, las fuerzas externas que actúan sobre el sistema están compensadas. Si ubicamos el origen de nuestro sistema de coordenadas en un punto que coincida en el centro de masa del carro 1, pero fijo al laboratorio y con la dirección y sentido de su eje *X* coincidente con la velocidad de $\vec{v}_{0x_1}$, su cantidad de movimiento es: $\vec{p}_{0_{x_1}} = m\vec{v}_{0_{x_1}}$

Al producirse el choque, sobre ambos carros actúan fuerzas de naturaleza elástica, internas al sistema, que cumplen con la tercera ley de Newton, que son colineales al eje *X*. Por esta razón, la velocidad del carro 1 varía, es a partir de ese instante $\vec{v}_{x_1}$, el carro 2 adquiere una velocidad $\vec{v}_{x_2}$.

¿Por qué esto es así?

Después del choque elástico ambos carros se mueven con las velocidades $\vec{v}_{x_1}$ y $\vec{v}_{x_2}$ cuyas direcciones se mantienen colineales con las velocidades iniciales, las únicas fuerzas no equilibradas que actúan sobre los carros son internas al sistema, entonces se cumple la ley de conservación de la cantidad de movimiento lineal:

$\vec{p}_{0_x} + \vec{J}_{R_{Fext}} = \vec{p}_x \quad como \vec{J}_{R_{Fext}} = \vec{0}$ (criterio de conservación) se llega a que:

$$\vec{p}_{0_x} = \vec{p}_x$$

$$m_1\vec{v}_{0x_1} + m_2\vec{v}_{0x_2} = m_1\vec{v}_{x_1} + m_2\vec{v}_{x_2}$$

Si proyectamos las magnitudes involucradas en esta ecuación sobre el eje *X*, queda:

$$m_1 v_{0x_1} + m_2 v_{0x_2} = m_1 v_{x_1} + m_2 v_{x_2} \qquad (1)$$

Como existen dos incógnitas, $\vec{v}_{x_1}$ y $\vec{v}_{x_2}$ y una sola ecuación, recurriremos a la ley de conservación de la energía mecánica, que se cumple en este caso por ser despreciables las fuerzas de rozamiento.

En este caso $W_{F_{n_c}} = 0$ (criterio de conservación) se llega a que:

$$E_{M_o} + \cancel{W_{F_{n_c}}}^{0} = E_M \qquad E_{M_o} = E_M \qquad E_{C_{0_1}} + E_{C_{0_2}} = E_{C_1} + E_{C_2}$$

$$1/2 m_1 v_{0x_1}^2 + 1/2 m_2 v_{0x_2}^2 = 1/2 m_1 v_{x_1}^2 + 1/2 m_2 v_{x_2}^2$$

$$m_1 v_{0x_1}^2 + m_2 v_{0x_2}^2 = m_1 v_{x_1}^2 + m_2 v_{x_2}^2 \qquad (2)$$

En las ecuaciones (1) y (2), las incógnitas son los valores de las velocidades de los carros después del choque. Al agrupar en la ecuación 1 y, luego en la 2, obtenemos:

$$m_1\left(v_{0x_1} - v_{x_1}\right) = m_2\left(v_{x_2} - v_{0x_2}\right) \qquad (3)$$

$m_1\left(v_{0x_1}^2 - v_{x_1}^2\right) = m_2\left(v_{x_2}^2 - v_{0x_2}^2\right)$. Al desarrollar la diferencia de cuadrados, queda:

$$m_1\left(v_{0x_1} - v_{x_1}\right)\left(v_{0x_1} + v_{x_1}\right) = m_2\left(v_{x_2} - v_{0x_2}\right)\left(v_{x2} + v_{0x_2}\right) \qquad (4)$$

Al agrupar en la ecuación (1):

$$m_1 v_{0_{x_1}} - m_1 v_{x_1} = m_2 v_{x_2} - m_2 v_{0x_2}$$

$$m_1\left(v_{0x_1} - v_{x_1}\right) = m_2(v_{x_2} - v_{0x_2}) \qquad (5)$$

Al dividir (4) entre (3) queda:

$$\left(v_{0x_1} + v_{x_1}\right) = \left(v_{x_2} + v_{0x_2}\right)$$

Quedaría:

$$v_{x_1} = \left(v_{x_2} + v_{0x_2}\right) - v_{0x_1} \qquad (6)$$

Sustituyendo (6) en (1) obtenemos

$m_1 v_{0x_1} + m_2 v_{0x_2} = m_1\left(v_{x_2} + v_{0x_2} - v_{0x_1}\right) + m_2 v_{x_2}$.

Despejando la velocidad final del segundo cuerpo, queda:

$$v_{x_2} = \frac{v_{0x_2}\left(m_2 - m_1\right) + 2m_1 v_{0x_1}}{\left(m_2 + m_1\right)} \qquad (5.11)$$

Por un procedimiento similar se puede obtener la ecuación que permite determinar la velocidad del otro carro que participó en la interacción.

$$v_{x_1} = \frac{2m_2 v_{0x_2} + v_{0x_1}\left(m_1 + m_2\right)}{\left(m_2 + m_1\right)} \qquad (5.12)$$

Se puede comprobar las ecuaciones (5.11) y (5.12) en casos particulares.

Dos carros de igual masa ($m_1 = m_2$), uno en movimiento y el otro en reposo. Se lanza el primero con velocidad $v_{0x_1} = v_{01}$ y el segundo se encuentra en reposo ($v_{0x_2} = 0$), el primero quedará en reposo después del choque, y el segundo seguirá con la velocidad del primero, de (5.11) queda

$$v_{x2} = \frac{v_{0x_2}\left(m_1 - m_1\right) + 2m_1 v_{0_1}}{\left(m_1 + m_1\right)} y \quad v_{x_2} = v_{0x_1}$$

Este resultado confirma que después del choque el carro 1 queda en reposo y el 2 se mueve con una velocidad de igual módulo, dirección y sentido que la del carro 2 antes del choque.

Si m_2 » m_1 y el carro 2 está inicialmente en reposo $v_{0x_2} = 0$, el 1 debe rebotar después del choque con el mismo módulo de la velocidad inicial y el 2 quedarse en reposo. Para ello $m_2 + m_1 \approx m_2$ y $m_2 - m_1 \approx m_2$ en las ecuaciones (5.11) y (5.12) quedando:

$$v_{x_1} = \frac{2m_2 \overset{0}{\cancel{v_{0x_2}}} + v_{0x_1}m_2}{m_2} \qquad v_{x_1} = v_{0x_1}$$

$$v_{x_2} = \frac{m_2 \overset{0}{\cancel{v_{0x_2}}} + 2m_1 v_{0x_1}}{m_2} \qquad v_2 = \frac{2m_1 v_{0x_1}}{m_2} \to 0 \ \textit{por ser} \ m_2 \gg m_1$$

Choque inelástico

En este tipo de choque no se conserva la energía mecánica pues durante la interacción actúan fuerzas no conservativas y parte de la energía cinética inicial se transforma en energía interna del sistema, o sea, se eleva la temperatura en la zona donde se produce el impacto.

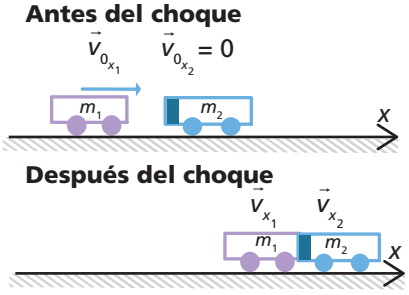


Fig. 5.18

En un choque inelástico los dos cuerpos, después de la interacción, pueden quedar unidos o separados. En la figura 5.18, los carros quedan unidos después del choque.

Para estudiar el choque inelástico se usa un carro 2 de masa m_2 *en reposo* y se le fija una porción de plastilina en su parachoques y un carro 1 de masa m_1 que se mueve inicialmente con una velocidad v_{0x_1}, (figura 5.18) antes del choque y lo hacemos chocar contra el carro 2.

¿Cómo determinar la velocidad final de los carros?

En este caso las consideraciones iniciales hechas para el choque elástico son válidas, solo que al chocar los carros, la plastilina se deforma

introduciéndose en los intersticios de los carros, por lo que ambos móviles quedan adheridos moviéndose después del choque con la misma velocidad $\vec{v}$, después del choque.

Si ubicamos el sistema de coordenadas, como se indica en la figura y aplicamos la ley de conservación de la cantidad de movimiento, se obtiene que:

$$m_1\vec{v}_{0x_1} + m_2\vec{v}_{0x_2} = m_1\vec{v}_{x_1} + m_2\vec{v}_{x_2} \qquad (5.13)$$

pero $v_{0x_2} = 0$ y $v_{x_1} = v_{x_2} = v_x$, al proyectar los vectores sobre el eje de $v_{0x_1} = v_{0_1}$ referencia, resulta:

$$m_1 \cdot v_{0_1} = (m_1 + m_2)v_x$$

$$v_x = \frac{m_1 \cdot v_{0_1}}{m_1 + m_2}$$

Problema resuelto 5.7

El péndulo balístico se utiliza para medir la velocidad de los proyectiles disparados por armas de fuego. El péndulo consiste en un bloque grande de madera de masa *M* que cuelga verticalmente mediante dos cuerdas. El proyectil cuya velocidad se desea medir y que posee una masa se dispara horizontalmente, de forma que se incruste en el bloque (figura 5.19). Se puede considerar que el intervalo de tiempo que emplea el proyectil en detenerse es muy pequeño, responde:

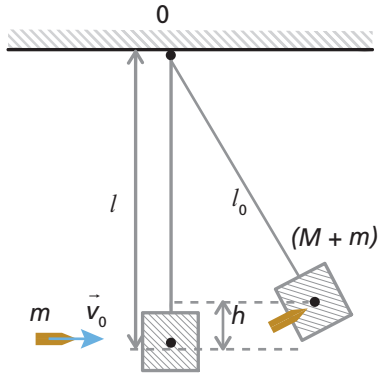


Fig. 5.19

a) ¿Qué tipo de choque se produce entre el proyectil y el bloque?
b) ¿Cómo determinar la velocidad del proyectil?

Solución:

Si el cañón del arma de fuego está muy próximo al bloque, el intervalo de tiempo que emplea el proyectil en llegar a este cuerpo es tan pequeño que se puede despreciar la acción de la fuerza de gravedad, y considerar que las únicas fuerzas que actúan son internas. Estas fuerzas son de rozamiento; la que actúa sobre el proyectil lo frena hasta que alcance el valor final $\vec{v}$ *(la del sistema).* La fuerza de rozamiento que actúa sobre el bloque lo acelera hasta que alcance la velocidad $\vec{v}$ igual que la del proyectil (como parte del sistema). En estas condiciones ambos se mueven con la velocidad pero manteniéndose en reposo uno con respecto al otro. Tracemos el sistema de referencia de forma que su origen coincida con el centro de masa del bloque, y su eje, con la dirección y sentido de la velocidad $\vec{v}$ asociada al sistema.

Las razones expuestas permiten considerar que se conserva la cantidad de movimiento en la dirección horizontal. La cantidad de movimiento antes del choque es: $\vec{p}_{0_{x_1}} = m_1\vec{v}_{0_{x_1}}$ y después del choque, $\vec{p}_{x_1} = (m_1 + M)\vec{v}$

Después de la interacción, el conjunto bloque-proyectil no se mueve horizontalmente, sino que se mueve por un arco de circunferencia, ascendiendo hasta una altura máxima *h* con respecto a la posición inicial que consideremos como nivel cero de energía potencial, o sea, el *eje X*.

Para calcular la velocidad $\vec{v}_1$ del proyectil se aplica la ley de conservación de la cantidad de movimiento al inicio y culminación del choque, es decir:

$m_1\vec{v}_{0_{x_1}} = (m_1 + M)\vec{v}_x$, como $v_{0_{x_1}} = v_{0_1}$ y $v_x = v$ queda:

$m_1 v_{0_1} = (m_1 + M)v$ y (proyectando sobre el *eje X*)

$$v_{0_1} = \frac{(m_1 + M)v}{m_1} \qquad (1)$$

Para calcular el valor de v_{0_1} es necesario determinar primero el valor de la velocidad *v* del conjunto después de la interacción. Esta la podremos calcular basándonos en la ley de conservación de la energía. Consideraremos que la fuerza de rozamiento con el aire es despreciable, por lo que se cumple que la energía cinética, un instante después de la interacción en la posición 1 (el péndulo aún no ha ganado altura), es igual a la energía potencial gravitatoria en la posición 2 (el péndulo alcanzó su máxima altura).

Luego:

$$E_{M_0} + W_{F_{n_c}} = E_M$$

$$E_{c_0} + E_{p_{g_0}} = E_c + E_{p_g}$$

$$1/2\,(m_1 + M)v_0^2 = (m_1 + M)gh$$

$$v_0^2 = 2gh$$

$$v_0 = \sqrt{2gh} \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) obtenemos:

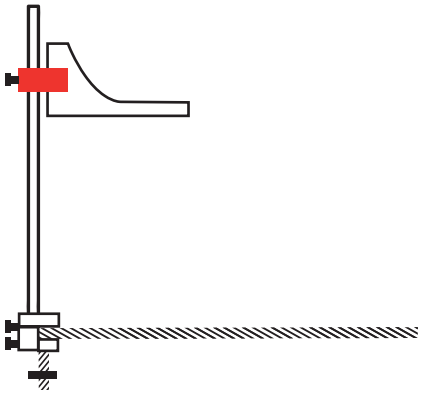
$$v_{01} = \frac{(m_1 + M)\sqrt{2gh}}{m_1}$$

a) El choque que se produce entre el proyectil y el bloque es perfectamente inelástico.
b) La velocidad del proyectil se calcula mediante la última expresión si se conocen los valores de m_1, M y h.

Trabajo de Laboratorio 5.2

Materiales:

Plano inclinado con canaleta y tornillo avellanado en su extremo, plomada, dos esferas metálicas de igual masa, soporte universal con varilla larga y corta, nuez doble y abrazadera, papel carbón y una hoja blanca, precinta, regla larga graduada en milímetros, papel milimetrado.



Desarrollo:

1) Monta el plano inclinado con el soporte universal como se indica en el esquema, coloca sobre la mesa el papel carbón y la hoja de papel

blanco, encuentra la forma de colocar la salida de la canaleta del plano de forma horizontal. Explica tu proceder. Encuentra además la línea vertical de la salida de la canaleta del plano inclinado, marca en el papel blanco ese punto.

2) Coloca la salida horizontal de la canaleta a alturas de 4,9 cm, 19,6 cm y 44,1 cm y deje caer desde una misma posición sobre el plano inclinado una de las esferas en tres ocasiones, toma las marcas que realiza la esfera sobre el papel blanco y mide la distancia horizontal recorrida por la esfera. Determina el valor de la velocidad horizontal de la esfera durante la caída, toma $g = 9{,}8\ m/s^2$.
3) Determina el radio de la esfera, y explica el método que utilizaste, ten en cuenta las posibles incertidumbres al medir.
4) Mide en el plano inclinado la diferencia de la altura desde el punto de donde soltaste la esfera hasta que salió disparada y determina la velocidad de salida de la esfera aplicando la ley de conservación de la energía mecánica.
5) Compara la velocidad calculada en los ítems 2) y 4). Realiza tus conclusiones.
6) Coloca el tornillo avellanado en la salida de la canaleta, en ese lugar coloca otra de las esferas, de forma tal que cuando deje caer la primera, chocará con la segunda, el choque deberá ser central (por lo que debes colocarlas de forma tal que sus centros de masas se encuentren a igual altura durante el choque), pero cuidar de que no sea frontal, las esferas después del choque deben salir en dos direcciones en el plano horizontal. Coloca el papel blanco por la otra cara y realiza el experimento desde la altura de 19,6 cm. Determina la velocidad de salida de cada una de las esferas después del choque.
7) Comprueba el cumplimiento o no de las leyes de conservación de la cantidad de movimiento lineal y de la energía mecánica en el choque, plantea tus a conclusiones.

Presenta los resultados en tablas. Ten en cuenta la teoría de las incertidumbres al presentar todos los resultados.

Comprueba tus conocimientos

29. ¿Cuándo un choque se denomina elástico?

30. ¿Qué diferencias existen entre un choque elástico y uno inelástico?

31. ¿Qué condiciones se deben dar para que el choque sea perfectamente inelástico?

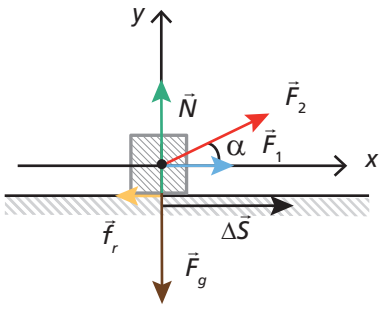
32. Dos esferitas de mercurio 1 y 2 chocan formando una sola. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones se cumple en este choque? Explica tu respuesta.

$$\vec{p}_{0_1} + \vec{p}_{0_2} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

$$1/2 m_1 v_{0_1}^2 + 1/2 m_2 v_{0_2}^2 = 1/2 m_1 v_1^2 + 1/2 m_1 v_2^2$$

Tareas generales del capítulo

1. Un niño tira de una caja llena de frutas mediante una cuerda, a la que aplica una fuerza de 100 N. Si la cuerda forma un ángulo de 30° con la horizontal. ¿Qué trabajo mecánico realiza el niño al lograr un desplazamiento de 50 m?
2. Un deportista de 50 kg trepa por una cuerda vertical hasta una altura de 10 m. ¿Qué trabajo mecánico realiza si se mueve con velocidad constante?
3. Un caballo tira de un carro que tiene una carga de 0,5 t, provocándole un desplazamiento de 5,0 m a partir del reposo en la dirección horizontal y hacia la derecha, en un tiempo de 10,0 s. Si el carro se mueve por una superficie horizontal de rozamiento despreciable, calcula el trabajo mecánico realizado por el caballo.
4. En la figura 5.20 se representa un cuerpo sobre el cual actúan varias fuerzas: determina el trabajo mecánico realizado por cada una de ellas y el trabajo de la fuerza resultante cuando el cuerpo se ha desplazado 3,0 m en la dirección y sentido indicados, por al vector desplazamiento $\Delta\vec{S}$.



F_1 = 5,0 N

F_2 = 20 N

f_r = 10 N

N = 6,0 N

F_g = 14 N

α = 30°

Fig. 5.20

5. Un ascensor de 1 500 kg comienza a subir con una aceleración constante de 1,0 m/s^2. Calcula el trabajo mecánico realizado por la fuerza que ejerce el motor en el primer segundo de su movimiento.
6. ¿Qué trabajo mecánico hay que realizar para que un automóvil que se mueve a una velocidad de 60 km/h aumente su velocidad a 80 km/h si la masa del automóvil es de 1,0 t ?
7. ¿Qué trabajo mecánico debe ser realizado para detener un tren de 1 000 t que se mueve con una velocidad de 108 km/h?
8. Sobre un cuerpo de 5,0 kg que se mueve a una velocidad de 6,0 m/s actúa una fuerza de 3,0 N dirigida en el sentido opuesto al movimiento. Como resultado, la velocidad del cuerpo disminuye hasta 2,0 m/s. ¿Qué trabajo mecánico en valor y signo realiza la fuerza? ¿Qué distancia recorrió el cuerpo mientras la fuerza realiza el trabajo?
9. Una piedra de 50 g es lanzada verticalmente hacia arriba. ¿Qué trabajo realiza la fuerza de gravedad cuando la piedra se encuentra a una altura de 5,0 m?
10. Un cuerpo de 50 kg se desliza con rozamiento por un plano inclinado que tiene un ángulo respecto al horizonte de 30°. Moviéndose a velocidad constante, el cuerpo recorre la longitud del plano que es igual a 6,0 m. Calcula el trabajo de la fuerza de gravedad durante este movimiento y la fuerza de rozamiento que actúa sobre el cuerpo.
11. Una carga de 2,5 kg cae desde una altura de 10 m. ¿En cuánto variará su energía potencial 1,0 s después de comenzar la caída? (Considera la velocidad inicial de la carga igual a cero).
12. Un cuerpo de 2,0 kg es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad de 10 m/s ¿Qué trabajo realiza la fuerza de gravedad desde el punto de lanzamiento hasta el punto de altura máxima?
13. Un estudiante determinó la fuerza máxima con la que puede estirar un dinamómetro. Esta resultó igual a 400 N. ¿Qué trabajo mecánico se realiza al alargar el muelle? La constante de elasticidad del muelle 10 000 N/m.
14. Un cuerpo cae desde cierta altura respecto a la superficie de la Tierra. En el instante en que choca con esta su velocidad es de 30 m/s. ¿De qué altura cae el cuerpo?

15. Un cuerpo de 2,0 kg cae desde una altura de 20 m. Si partió del reposo, determina:

a) la energía potencial gravitatoria y la mecánica total en el punto donde comienza a caer,

b) la energía potencial, cinética y mecánica total cuando está a la mitad de su altura inicial,

c) la energía cinética y mecánica total cuando llega al suelo. Considera que no hay rozamiento.

16. ¿Desde qué altura debe caer un peñasco de 1 000 kg para que tenga la misma energía cinética que un camión de 8,0 t que viaja a una velocidad de 90 km/h a lo largo de una carretera horizontal?

17. En la figura 5.21 se representa un cuerpo de 20 kg que baja un plano inclinado desde un punto *A,* donde la altura es de 2,45 m y llega a la base con una velocidad de valor igual a 4,0 m/s. Calcula el trabajo de la fuerza de rozamiento y su valor si el plano tiene una longitud de 4,9 m.

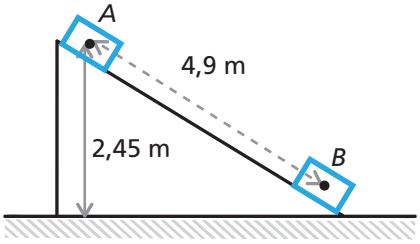


Fig. 5.21

18. En la figura 5.22 se representa un péndulo de 1,0 m de longitud, que inicialmente se encuentra en la posición *B.* Determina el valor de la velocidad al pasar por el punto *A* y la tensión de la cuerda, considera que el cuerpo en el extremo del hilo es de 10 g. Desprecia el rozamiento.

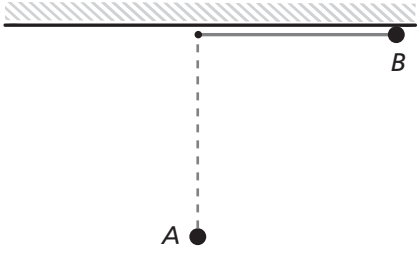


Fig. 5.22

19. Un resorte tiene una constante $k = 10$ N/m. Un pequeño bloque de 0,1 kg se coloca junto al resorte y, ejerciendo presión contra este, se acorta su longitud en 0,05 m, figura 5.23. Si entonces se suelta el bloque, el resorte recuperará su longitud natural, poniendo el bloque en movimiento por la superficie horizontal y después asciende por un plano inclinado.

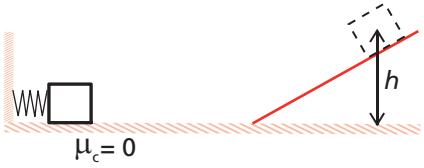


Fig. 5.23

a) Calcula el valor de la velocidad que adquiere el bloque en el plano horizontal.

b) Determina la altura a la que ascendería el bloque por un plano inclinado liso.

20. Un bloque de 1,0 kg se abandona, partiendo del reposo, en el punto *A*, sobre una pista curva rugosa constituida por un cuadrante de circunferencia de radio igual a 1,5 m. El bloque se desliza sobre la pista y alcanza el punto *B* con una velocidad de valor igual a 3,6 m/s. A partir del punto *B* se desliza sobre una superficie horizontal una distancia de 2,7 m hasta llegar al punto *C* en el cual se detiene (figura 5.24).

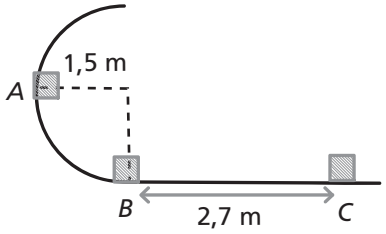


Fig. 5.24

a) ¿Cuál es el coeficiente cinético de rozamiento sobre la superficie horizontal?

b) Determina el trabajo mecánico realizado por la fuerza de rozamiento mientras el cuerpo se deslizó de *A* hasta *B*.

21. Una flecha de 200 g y velocidad 20 m/s se incrusta en un taco de madera que se halla en una superficie horizontal lisa tal y como se representa en la figura 5.25.

Determina la altura a la que ascenderá el taco de 2,0 kg por el plano inclinado suponiendo que este también es liso.

Fig. 5.25

22. Un blanco para tiro de fusil se monta de la manera que indica la figura 5.26. La masa del carro es de 2,0 kg, la constante elástica del resorte es de 450 N/m, la masa de la bala es de 5,0 g y su velocidad inicial de 200 m/s.
Determina la medida en que se comprime el resorte después de incrustarse en el carro horizontalmente la bala.

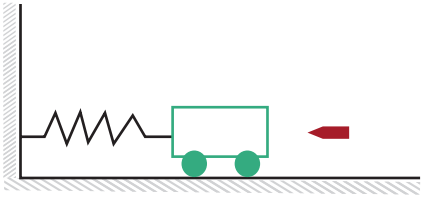


Fig. 5.26

23. ¿A qué altura ascenderá un péndulo balístico de 5,0 kg cuando se le incrusta un proyectil de 200 g que se movía a razón de 200 m/s antes de penetrarlo? (figura 5.27).

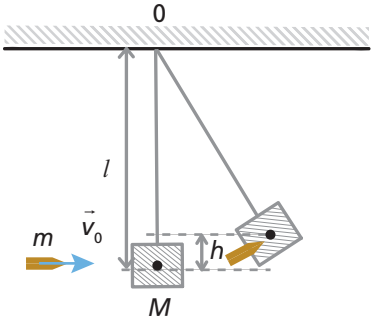


Fig. 5.27

24. ¿Cuál será la velocidad de un proyectil de 50 g que eleva a un péndulo balístico de 2,0 kg a 4,0 cm de altura?

25. Sobre una superficie horizontal lisa se mueve un bloque A de masa 200 g a razón de 12 m/s y choca con otro bloque B de masa cuatro

veces mayor que está inicialmente en reposo. Si el choque es elástico y frontal, determina las velocidades después del choque.

26. ***Desafío.*** Una bala de 10,0 g se mueve horizontalmente con una velocidad de 100 m/s choca contra un taco de 1,0 kg, que cuelga del punto (0) ubicado en el techo de la habitación de un hilo inextensible de masa despreciable y longitud 0,5 m. Ambos cuerpos quedan juntos después de la interacción (figura 5.28).

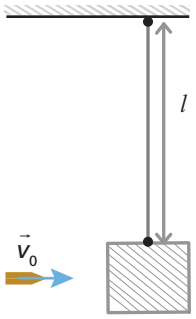


Fig. 5.28

a) Determina la energía cinética de la bala antes del choque.
b) Calcula la velocidad del sistema un instante después de la interacción.
c) Determina el impulso que le comunica la bala al taco.
d) Calcula la cantidad de calor que se libera en el choque.
e) ¿A qué altura sube el taco después del choque?

27. ***Desafío.*** Un resorte de constante elástica k = 720 N/m está deformado en 10 cm por un cuerpo de 200 g, como se muestra en la figura 5.29. El sistema se libera y el cuerpo comienza a moverse por una superficie horizontal, la cual termina en un rizo de radio 30 cm. Esta superficie horizontal al igual que la del rizo, son lisas. Al final del rizo se encuentra otra superficie horizontal rugosa cuya longitud es de 4,0 m.

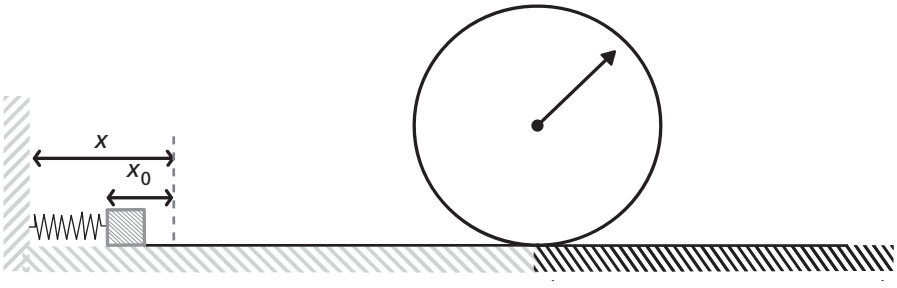


Fig. 5.29

a) Determina la velocidad del cuerpo después de ser liberado por el resorte.
b) Determina la velocidad del cuerpo en el punto más alto del rizo.
c) Calcula el radio máximo que puede tener el rizo, para que el cuerpo no caiga de él.
d) Determina el coeficiente de rozamiento en la parte rugosa, si el cuerpo se detiene después de haberla recorrido.

28. ***Con simulador.*** Un obrero tira de una carretilla, con una fuerza de 50,0 N, la cual forma un ángulo de 30° con el sentido del movimiento de la carretilla, y la hace desplazarse 50,0 m. Calcula el valor del trabajo realizado por el obrero. Modela la situación planteada y comprueba tu respuesta.

29. ***Con simulador.*** Dos patinadores, A y B, de 60 kg y 80 kg, respectivamente, se encuentran sobre una superficie horizontal. El patinador A empuja al B con una fuerza horizontal de 100 N.
Modela la situación descrita.
a) Determina el valor de la aceleración que adquiere cada patinador
b) Determina la distancia que recorre cada patinador al cabo de 12 s
c) Aumenta en 50 N el valor de la fuerza y analiza los resultados obtenidos en los incisos anteriores. Justifica los resultados obtenidos.

CAPÍTULO 6

Dinámica de la rotación

En el estudio que hemos realizado sobre el movimiento mecánico conocemos que existen dos formas básicas: el movimiento de traslación y el de rotación. Hemos profundizado en el estudio del movimiento de traslación de los sistemas en el Universo y han sido precisadas las principales ideas y las leyes que rigen estos cambios.

Existe una gran diversidad de cuerpos que describen movimientos de rotación, otros que realizan movimientos de traslación y rotación a la vez. En realidad, la mayoría de los movimientos mecánicos en la naturaleza pueden ser estudiados como una combinación de movimientos de traslación y rotación.

Una mirada a nuestro entorno nos permite constatar la cantidad de cuerpos que rotan (figura 6.1) y que están estrechamente relacionados con la ciencia, la tecnología y la vida cotidiana: el volante de un motor, los neumáticos de automóviles (la rueda probablemente fue inventada 4 000 años antes de nuestra era, por los sumerios de Mesopotamia), algunas ejecuciones de deportistas y artistas, las hélices de los ventiladores, el tambor de las lavadoras automáticas y muchos otros más.

El estudio sobre el movimiento de rotación de la Tierra (figura 6.2) ha permitido a diferentes ciencias, entre ellas la Geografía y la Física, analizar fenómenos vitales para la comprensión de la naturaleza, por ejemplo, el movimiento de los vientos en los ciclones o huracanes, de las aguas del río, la circulación del aire y de las corrientes marinas en nuestro planeta, son algunos de estos ejemplos.

Fig. 6.1 Movimiento de rotación de las hélices de los helicópteros en diferentes planos con el objetivo de facilitar su estabilidad

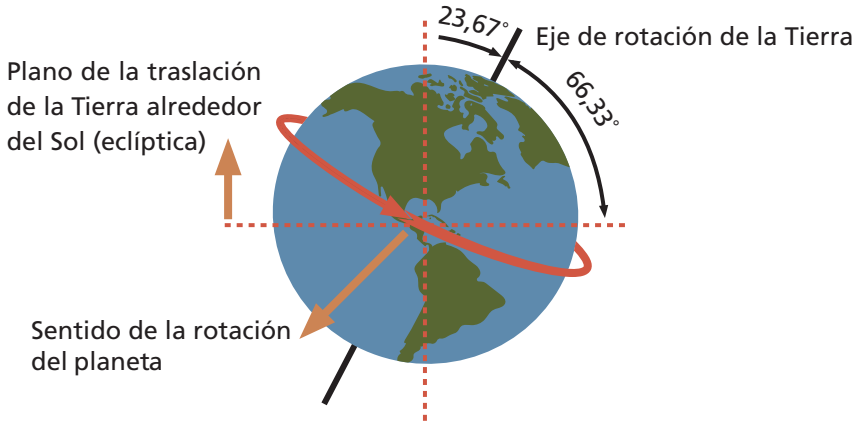


Fig. 6.2 Movimiento de rotación de la Tierra respecto al eje imaginario que pasa por los polos

¿Cómo describir el movimiento de rotación de los cuerpos? ¿Cuáles son los factores que determinan las características del movimiento de rotación? ¿Cómo caracterizar el estado de movimiento mecánico de un cuerpo que rota? ¿Cómo determinar las variaciones en el estado de movimiento mecánico de rotación de los cuerpos?

Para responder a estas interrogantes debemos comenzar introduciendo algunos nuevos conceptos y magnitudes.

6.1 Sólido rígido. Desplazamiento y velocidad angular en el movimiento de rotación

Sólido rígido

Conocemos que el movimiento de rotación de un cuerpo (figura 6.3) es aquel en el que todos puntos que lo forman se mueven describiendo circunferencias cuyos centros se encuentran sobre una misma recta que se denomina eje de rotación, que puede estar dentro (por ejemplo, el de la rotación de la Tierra alrededor del eje que pasa por los polos) fuera del cuerpo (por el de una puerta al girar alrededor de sus bisagras).

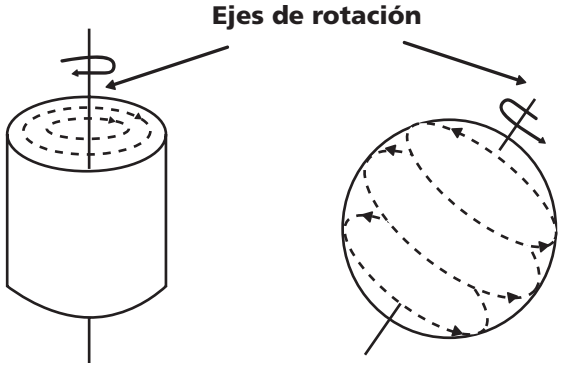


Fig. 6.3 Movimiento de rotación alrededor de un eje central

A diferencia del movimiento de traslación, cada punto del cuerpo que rota realiza un movimiento con características diferentes. Por esta razón no podemos analizar el movimiento de rotación como el de un solo punto (modelo del cuerpo puntual) como en el caso del movimiento de traslación.

Para el estudio del movimiento de rotación de un cuerpo sólido vamos a considerar el movimiento de sólidos que no se deforman, es decir, que la distancia entre los puntos que lo forman siempre permanece constante. Este modelo recibe el nombre de *cuerpo rígido.*

> Sólido rígido; modelo físico de un sólido en rotación donde la distancia entre las partículas que lo componen no varía durante el movimiento, es decir, que no se deforma.

De manera análoga al caso del movimiento de traslación del punto material, para describir la rotación de una partícula del sólido rígido, se

puede utilizar un sistema de coordenadas *XY* donde el origen es situado en un punto por donde pasa el eje de rotación. De esta forma podemos determinar la posición angular mediante el módulo del vector de posición y el valor del ángulo de giro, ya que las componentes rectangulares serán $x = R\cos\theta$ y $y = R\text{sen}\theta$ respectivamente.

Desplazamiento angular

Cuando analizamos el movimiento circunferencial uniforme de una partícula se analizó como caracterizar el cambio del vector de posición (al que se le llamó radio vector) en el trascurso del tiempo y se definieron los conceptos de velocidad y aceleración angular. Estos conceptos podemos retomarlos en el estudio del movimiento de rotación de un sólido en tanto que todas sus partículas describen circunferencias concéntricas de diferente radio alrededor del eje de rotación.

Si analizamos el movimiento de rotación, por ejemplo, de una rueda de bicicleta alrededor de un eje que pasa por su centro de masa, en la dirección del eje *X,* (figura 6.4) el valor del desplazamiento angular del radio-vector para el punto *p,* queda determinado por la ecuación:

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i \qquad (6.1)$$

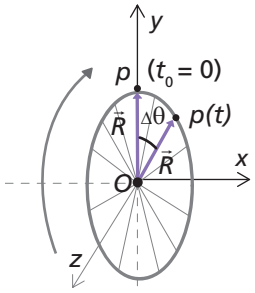


Fig. 6.4 Desplazamiento angular del radio-vector de una rueda en rotación

La magnitud $\Delta\theta$ caracteriza el cambio en la posición angular del punto *p* y se denomina desplazamiento angular. Su unidad de medida en el sistema internacional es el radián (rad).

Recordemos que cuando los ángulos se expresan en grados sexagesimales, para hacer la conversión a radianes basta con recordar que un ángulo de 180º equivale a π radianes en el SI, de donde se obtiene que:

$$\theta_{grd} = \left(\frac{180^o}{\pi}\right)\theta_{rad}$$

El valor del desplazamiento angular $\Delta\theta$ puede considerarse positivo o negativo, en dependencia del convenio que se adopte. Generalmente se elige como sentido positivo de la rotación el que se realiza contrario a las manecillas del reloj (antihorario), de modo que cuando un cuerpo gira en sentido antihorario $\Delta\theta$ es positivo y negativo en sentido contrario.

Velocidad angular

¿Cómo caracterizar la rapidez con que varía el desplazamiento angular?

En el movimiento de rotación, la velocidad angular $\vec{\omega}$ en cada instante, es la misma para todas las partículas del sólido rígido (figura 6.5) y, en consecuencia, se puede definir el valor de la velocidad angular instantánea del sólido como la relación entre el valor del desplazamiento cuando el intervalo de tiempo es lo suficientemente pequeño (se dice que Δt tiende a cero) para considerar que el desplazamiento angular es tan pequeño que la velocidad no varía en ese intervalo.

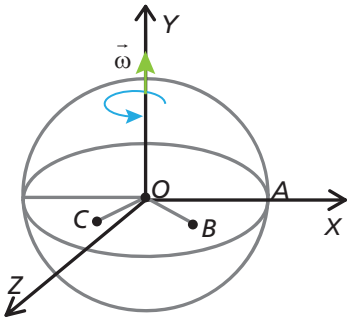


Fig. 6.5 Recorrido de las partículas *A, B* y *C* del sólido rígido, en trayectoria circular de diferente radio, con la misma velocidad angular en cada instante

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \text{ (cuando } \Delta t \text{ tiende a cero)}$$

El valor de la velocidad angular instantánea de un cuerpo que rota se define como:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (6.2)$$

Donde se considera que el intervalo de tiempo Δt tiende a cero.

En el SI la unidad de velocidad es el rad/s o simplemente s^{-1}.

La velocidad angular del sólido en rotación es una magnitud física vectorial, en consecuencia, debemos analizar lo relacionado con su dirección y sentido. El sentido y la dirección del vector velocidad angular se puede

determinar mediante un recurso llamado "regla de la mano derecha" (la misma que conoces para el producto vectorial).

Para este caso la regla de la mano derecha se formula de la manera siguiente: se toma el eje de rotación con la mano derecha y se giran los dedos en el sentido de la rotación, el pulgar extendido indica entonces el sentido del vector $\vec{\omega}$ (figura 6.6).

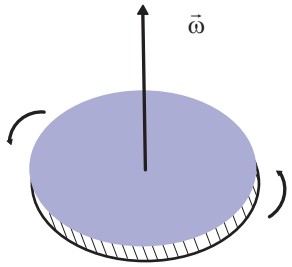


Fig. 6.6 Dirección y sentido de utilizando la regla de la mano derecha

En la figura 6.7 se muestra el radio-vector de un punto material, que barre un ángulo $\Delta\theta$, por el arco de longitud *l*, en el plano p_0. En este caso, el vector velocidad angular coincide con su componente $\vec{\omega} = \vec{\omega}_z$ y la proyección del vector velocidad angular será $\omega_z = \omega$, es positiva ya que el vector velocidad angular está orientado en el sentido positivo del eje *Z.* El sentido del vector velocidad angular $\vec{\omega}$ es saliendo del plano p_0 y se representa sobre el eje de rotación que se encuentra en la dirección del eje *Z.*

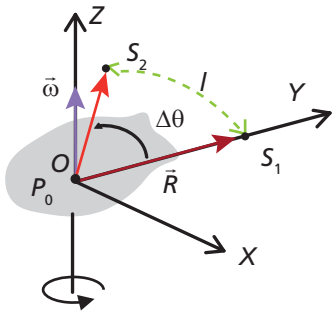


Fig. 6.7 Dirección y sentido del vector $\vec{\omega}$ aplicando la regla de la mano derecha

Velocidad lineal

En el caso de un cuerpo (sólido rígido) que, rota, la velocidad lineal de cada partícula, situadas a distancias diferentes del eje de rotación, tendrá

un valor diferente porque, como sabemos, el valor de la velocidad lineal se relaciona con el de la velocidad angular por la ecuación:

$$v = \omega R \qquad (6.3)$$

Donde R es el radio de giro.

La ecuación (6.3) se puede escribir en forma vectorial de la forma:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R} \qquad (6.4)$$

Por lo tanto, en general, el valor de la velocidad lineal estará dado por:

$$v = \omega R sen\alpha \qquad (6.5)$$

Donde α es el ángulo formado entre los vectores $\vec{\omega}$ y $\vec{R}$. Para el caso del movimiento circunferencial, como α = 90°, se obtiene la conocida ecuación 6.3.

La dirección y sentido de la velocidad lineal se puede determinar mediante la regla de la mano derecha para el producto vectorial (figura 6.8)

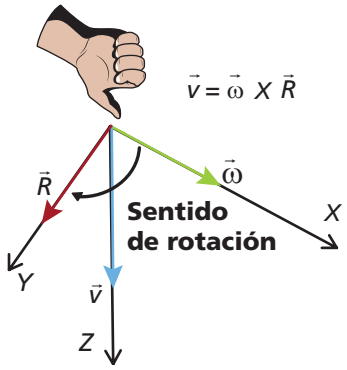


Fig. 6.8 Regla del producto vectorial para determinar la dirección y sentido del vector velocidad lineal de un punto del cuerpo en rotación

Comprueba tus conocimientos

1. Explica en qué consiste el modelo del sólido rígido.
2. Define las magnitudes desplazamiento angular, velocidad angular, velocidad lineal y di qué relación existe entre los valores de la velocidad angular y la velocidad lineal.

6.2 Aceleración angular y tangencial para un sólido rígido

Cuando la velocidad angular en el movimiento de rotación no permanece constante, es decir, varía en un intervalo de tiempo, el sólido rota con una aceleración angular $\vec{\alpha}$ y al igual que la velocidad angular, es en cada instante la misma para todas las partículas del sólido rígido (figura 6.9).

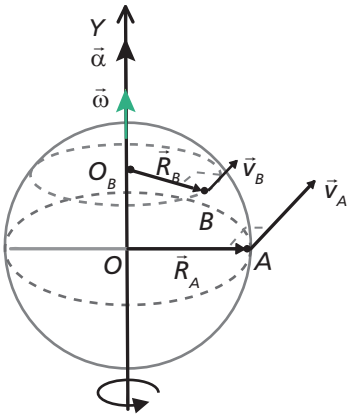


Fig. 6.9 Rotación del sólido con aceleración angular $\vec{\alpha}$ respecto al eje Y

El movimiento de rotación de un sólido rígido que gira alrededor de un eje fijo, se puede clasificar teniendo en cuenta el comportamiento de la aceleración angular. En el movimiento circunferencial uniforme, la velocidad angular es constante y la aceleración angular es nula ($\vec{a} = \vec{0}$) y entonces la rotación del sólido es **uniforme**. Por el contrario, si la velocidad angular varía uniformemente en iguales intervalos de tiempo, la aceleración angular permanece constante $\Delta\vec{\alpha} = \vec{0}$ y el movimiento de rotación es **uniformemente variado**.

La aceleración angular $\vec{\alpha}$ del movimiento de rotación de un sólido rígido, es una magnitud física vectorial dada por la razón de la variación de la velocidad angular y el intervalo de tiempo Δt durante el cual ocurre la variación de la velocidad angular:

$$\vec{\alpha} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} \qquad (6.6)$$

En el SI, la unidad de aceleración angular es el rad/s^2 o simplemente s^{-2}.

La aceleración angular tiene la misma dirección y sentido que la del vector variación de la velocidad angular, es decir, será también perpendicular al plano de rotación. Cuando el vector $\vec{\alpha}$ tiene el mismo sentido que $\vec{\omega}_0$ (la velocidad angular crece en el tiempo) el movimiento es acelerado como aparece en la figura 6.9, cuando $\vec{\alpha}$ y $\vec{\omega}_0$ tienen sentidos contrarios (la velocidad angular decrece en el tiempo), el movimiento es retardado. Por supuesto, se asume que el eje de rotación se mantiene fijo en una dirección y por lo tanto los vectores $\vec{\alpha}\, y\, \vec{\omega}$ son colineales.

Cuando en el movimiento de rotación del sólido rígido varía la velocidad angular, la velocidad lineal o tangencial de cada uno de los puntos también varía. Esta variación del valor de la velocidad lineal, determina que aparezca una nueva magnitud cinemática en el movimiento de rotación llamada vector aceleración tangencial $\vec{a}_t$, representado en la figura 6.10. Para partículas del sólido separadas a la misma distancia del eje de rotación, la aceleración tangencial tiene el mismo valor.

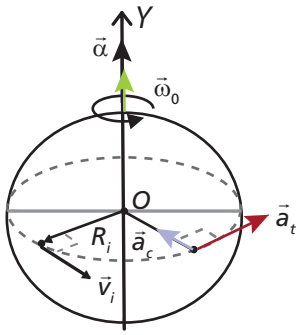


Fig. 6.10 Movimiento de rotación uniformemente variado de la esfera, con aumento de la velocidad angular El sentido del vector aceleración angular es el mismo que tiene el vector velocidad angular inicial. Aparecen los vectores aceleración tangencial y centrípeta.

En el SI la unidad para la aceleración tangencial es m/s^2.

La dirección del vector $\vec{a}_t$ es tangencial a la trayectoria, es decir perpendicular con el radio vector $\vec{R}$.

La aceleración tangencial $\vec{a}_t$ en el movimiento de rotación se define como la magnitud física vectorial que se determina como la razón entre la variación del valor de la velocidad lineal de cada partícula del cuerpo y el intervalo de tiempo durante el cual ocurre la variación:

$$\vec{a}_t = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \qquad (6.7)$$

No es difícil demostrar (hazlo) que la relación entre los valores de la aceleración tangencial y la aceleración angular está dada por la ecuación:

$$a_t = \alpha \cdot R \qquad (6.8)$$

Expresión que se puede escribir vectorialmente como:

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{R} \qquad (6.9)$$

En la figura 6.9, se muestran las componentes intrínsecas de la aceleración: la normal o centrípeta $\vec{a}_n$, como resultado de la variación de la dirección y el sentido del vector velocidad lineal, estudiada en el movimiento circunferencial uniforme y la tangencial $\vec{a}_t$, como resultado de la variación del módulo de la velocidad lineal.

Como conclusión del estudio cinemático sobre el movimiento de rotación del sólido rígido con aceleración angular constante encontrarás, que existe cierta analogía con el movimiento traslacional con aceleración constante. En la tabla 6.1 se resumen de forma comparativa las ecuaciones para los movimientos de traslación y rotación con aceleraciones lineales y angulares constantes respectivamente.

Tabla 6.1

Traslación	Rotación	Traslación	Rotación
$\Delta\vec{S}$	$\Delta\theta$	$\Delta\vec{S} = \vec{v}_0\Delta t + \frac{\vec{a}\Delta t^2}{2}$	$\Delta\theta = \omega_0\Delta t + \frac{\alpha\Delta t^2}{2}$
$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{S}}{\Delta t}$	$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$	$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$	$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\alpha}t$
$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$	$\vec{\alpha} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$	$\Delta S = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$	$\Delta\theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha}$
Ecuaciones de ligaduras de magnitudes de la traslación con la rotación.			
$l = \theta \cdot R$	$v = \omega \cdot R$	$a_t = \alpha \cdot R$	

Las ecuaciones cinemáticas que aparecen en la tabla sugieren que la cinemática rotacional es análoga a la cinemática de traslación. Esto es verdadero, con dos diferencias claves: (1) en la cinemática rotacional se debe especificar un eje de rotación y (2) en el movimiento de rotación el cuerpo

regresa periódicamente a su orientación original y podemos determinar el número de revoluciones realizadas por el sólido, concepto este que no tiene significado en el movimiento de traslación.

Problema resuelto 6.1

Una piedra de esmeril gira con aceleración angular constante de valor igual a 4,0 rad/s respecto a un eje de rotación perpendicular al plano de la piedra que pasa por su centro.

Si la rapidez angular inicial de la piedra de esmeril es 2,0 rad/s

a) ¿Cuál será el desplazamiento angular de cualquier punto de la piedra al cabo de 2,0 s?

b) ¿Cuál es la rapidez angular de la piedra de esmeril a los 2 s?

Solución:

Si consideramos el eje de rotación en la dirección del eje coordenado *Z:*

a) $\Delta\theta = \omega_{0z}\Delta t + \dfrac{\alpha_z \Delta t^2}{2}$:

Sustituyendo directamente por los valores numéricos se obtiene que:

$$\Delta\theta = 2{,}0\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}\,2{,}0\ \text{s} + \frac{4{,}0\ \text{rad/s}^2\ (2{,}0\ \text{s})^2}{2}$$

$\Delta\theta$ = 12,0 rad

b) $\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z \Delta t$

Sustituyendo directamente por los valores numéricos:

ω_z = 2,0 rad/s + 4,0 rad/s^2 · 2,0 s

ω_z = 10 rad/s

Problema resuelto 6.2

Un disco macizo de radio 0,50 m comienza a rotar a partir del reposo con una aceleración angular constante de módulo 3,0 rad/s^2. Si gira alrededor de un eje fijo, perpendicular al plano, que pasa por su centro de masa, determina:

a) El valor de la velocidad angular a los 2,0 s de iniciada la rotación.

b) El valor de la velocidad lineal de una partícula P que se encuentra en el extremo de su borde en el instante de 2,0 s.

c) El valor de la aceleración tangencial con que rota la partícula P.

Solución:

Consideremos el eje de rotación orientado en la dirección y sentido del eje coordenado Z.

a) El valor de la velocidad angular se puede calcular directamente a partir de la ecuación:

$\omega_z = \omega_{0_z} + a_z \Delta t$ si $\omega_{0z} = 0$

$\omega_z = a_z \Delta t$

Sustituyendo por lo valores numéricos:

$\omega_z = 3{,}0 \text{ rad/s}^2 \cdot 2{,}0 \text{ s}$

$\omega_z = 6{,}0 \text{ rad/s}$, y como $\omega_z = \omega$ tenemos

$\omega = 6{,}0 \text{ rad/s}$

b) Para el cálculo del valor de la velocidad lineal tendremos que:

$v = \omega r$

$v = 6{,}0 \text{ rad/s} \cdot 0{,}5 \text{ m}$

$v = 3{,}0 \text{ m/s}$

c) Y para el cálculo del valor de la aceleración tangencial:

$a_t = ar$

$a_t = 3{,}0 \text{ rad/s}^2 \cdot 0{,}5 \text{ m}$

$a_t = 1{,}5 \text{ m/s}^2$

Comprueba tus conocimientos

3. Sobre la base de las analogías entre el movimiento rectilíneo uniformemente variado y el movimiento circular uniformemente variado, completa en tu cuaderno las ecuaciones siguientes:

$$\Delta\theta = __\Delta t + \frac{1}{2}___\Delta t^2$$

$$\vec{\alpha} = \frac{__}{\Delta t}$$

$$\vec{\omega} = __ + __\Delta t$$

4. ¿Qué le sucede al valor de la velocidad angular de un disco, cuando la dirección y sentido del vector aceleración angular coincide con la dirección y sentido del vector velocidad angular inicial?

5. ¿En un movimiento rotacional uniformemente retardado, el sentido de los vectores $\vec{\alpha}$ y $\vec{\omega}_0$ son iguales o contrarios? Explica.

6. Nuestro Sol está a $2{,}3 \cdot 10^4$ años luz del centro de nuestra galaxia, la Vía Láctea y se mueve en su órbita alrededor de este centro con una velocidad lineal de módulo $2{,}5 \cdot 10^2$ km/s.

a) ¿Qué tiempo le toma al Sol en completar una vuelta alrededor del centro galáctico?

b) ¿Cuántas vueltas ha completado el Sol desde que se formó, hace alrededor de $4{,}5 \cdot 10^9$ años?

6.3 Energía cinética rotacional. Momento de inercia. Teorema de Steiner

Energía cinética rotacional

Un cuerpo rígido que solo gira alrededor de un eje fijo que permanece estacionario en el espacio, no posee energía cinética asociada con movimiento de traslación. Sin embargo, las partículas individuales que conforman el cuerpo en rotación, se mueven por el espacio y describen trayectorias circulares, como consecuencia debe existir energía cinética asociada al movimiento rotacional.

Considera una esfera maciza la cual está formada por un conjunto de partículas y supón que gira alrededor de un eje fijo que pasa por su centro de masa, con una velocidad angular $\vec{\omega}$ (figura 6.11).

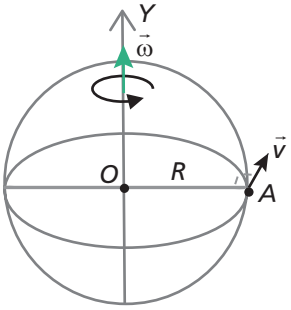


Fig. 6.11 La partícula *A,* de la esfera en rotación, con energía cinética de traslación

Cada una de estas partículas (por ejemplo, la A) posee una energía cinética determinada por su masa y su velocidad tangencial. De esta manera, si la masa de la partícula es m y su velocidad tangencial es v_t, su energía cinética estará determinada por la ecuación:

$$E_c = \frac{1}{2} m v_t^2 \qquad (6.10)$$

De esta manera podemos plantear que la energía cinética total del cuerpo rígido en rotación es igual a la suma de las energías cinéticas de las partículas individuales que componen al sólido rígido:

$$E_{C_R} = \sum \frac{1}{2} m v_t^2 \qquad (6.11)$$

Pero como

$$v_t = \omega R$$

Sustituyendo la expresión de la velocidad tangencial en (6.11) obtenemos:

$$E_{C_R} = \frac{1}{2} \sum m R^2 \omega^2 \qquad (6.12)$$

De donde se obtiene, para la energía cinética de rotación, que:

$$E_{C_R} = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m R^2 \qquad (6.13)$$

Momento de inercia

La sumatoria del producto mR^2 (ecuación 6.13) es una magnitud análoga a la masa para el caso del movimiento de traslación y se le denomina, *momento de inercia* de un sistema de partículas respecto al eje de rotación.

> El momento de inercia o inercia rotacional es una magnitud física escalar positiva que mide la inercialidad rotacional de un cuerpo

Esta magnitud se representa por la letra *I* y en el SI se mide en kg · m^2. Debe notarse que esta magnitud depende tanto de la masa de las partículas como de su distribución respecto al eje de rotación respecto al cual se mueven.

En consecuencia, para el caso de un cuerpo (sólido rígido) que rota, la inercialidad (propiedad) del sistema que se mide con el momento de inercia no va a depender únicamente de la masa del cuerpo sino también de su geometría y de la posición del eje de giro.

En función del momento de inercia la energía cinética de rotación (ecuación 6.13) se puede escribir como:

$$E_{C_R} = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad (6.14)$$

¡Cuidado!

Aunque decimos que para un sólido rígido en rotación posee una energía cinética rotacional, no es una nueva forma de energía, en esencia, es la energía cinética ordinaria porque se deduce de la suma de las energías cinéticas individuales de las partículas contenidos en el sólido rígido.

El momento de inercia de un sólido rígido formado por *n* partículas, se determina sumando el momento de inercia de cada una de las partículas:

$$I = m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + \cdots + m_nR_n^2 = \sum_{i=1}^{n} m_iR_i^2 \qquad (6.15)$$

La figura 6.12 permite apreciar la diferencia entre el momento de inercia según la geometría del cuerpo y la posición del eje de rotación.

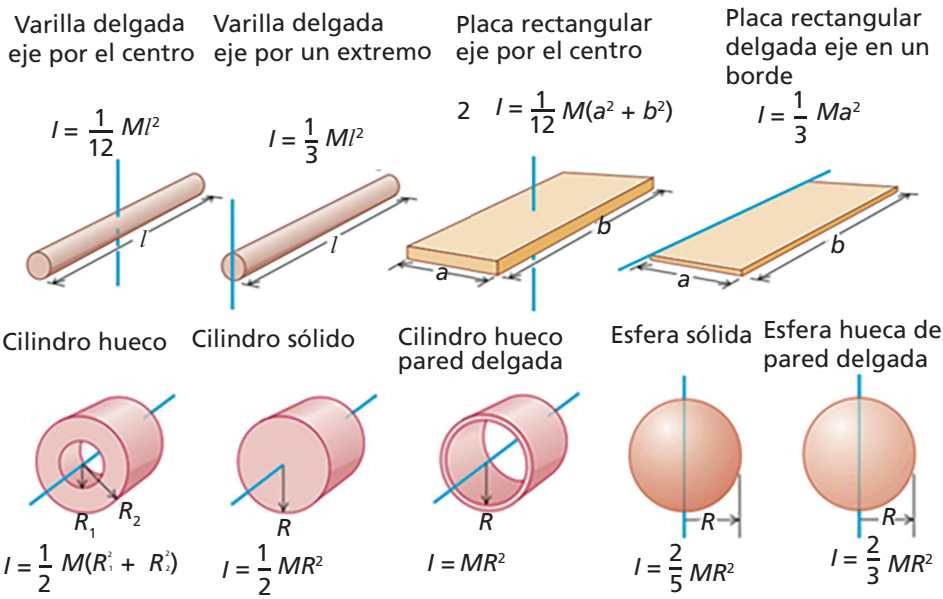


Fig. 6.12 Ecuaciones para calcular el momento de inercia de cuerpos con diferente configuración geométrica, respecto a un eje que pasa por el centro de masa

Recordemos que existe una importante diferencia entre momento de inercia y masa. El momento de inercia depende de la selección del eje de rotación respecto al cual se calcule, mientras que la masa es una propiedad inherente de la materia.

Teorema de Steiner o de los ejes paralelos

Como expresamos anteriormente el momento de inercia de un sólido rígido no es único, sino depende del eje de rotación respecto al cual se analice el movimiento. Si razonamos los ejemplos anteriores podremos comprender que en todos los casos los momentos de inercia presentados corresponden a cuerpos rígidos con geometría sencilla, o sea, cuerpos que poseen alta simetría.

Existen piezas que forman parte de las máquinas de las industrias, que rotan respecto a un eje paralelo al eje de rotación que pasa por el centro de masa de la pieza.

En la figura 6.13, una varilla delgada de masa *M,* rota respecto a un eje que por el punto *p* que está separado a una distancia *d* del centro de masa de la varilla. La varilla rota en el plano horizontal *XY*. La inercialidad (oposición al rotar) de la varilla ahora en este caso es mayor y el momento de inercia será mayor.

¿Cómo calcular el momento de inercia para un sistema que rota respecto a otro eje que no pasa por el centro de masa?

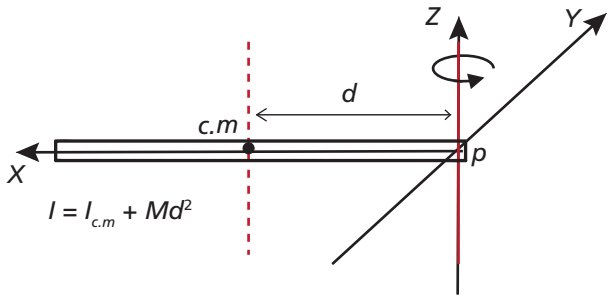


Fig. 6.13 Rotación de una varilla respecto a un eje paralelo al eje que pasa por el centro de masa

Para determinar el momento de inercia del cuerpo respecto a un eje de rotación que no pasa por el centro de masa, se utiliza el "teorema de los ejes paralelos o de Steiner". La ecuación de este teorema es:

$$I = I_{c.m} + Md^2 \qquad (6.16)$$

En esta ecuación *I* es el momento de inercia respecto al eje que no pasa por el centro de masa; $I_{c.m}$ es el momento de inercia para un eje paralelo

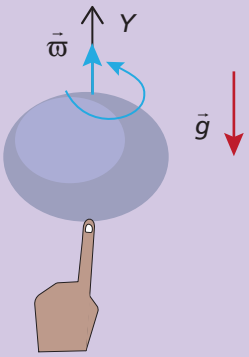
al anterior que pasa por el centro de masa; *M* la masa total y *d* la distancia entre los dos ejes considerados.

Para resolver problemas mediante el *teorema de Steiner* solo debemos recordar la definición de centro de masa y los momentos de inercia para cuerpos rígidos homogéneos con diferente geometría. La deducción de este teorema y del cálculo de los momentos de inercia para diferentes cuerpos no son objetivos de este curso, pues las herramientas matemáticas necesarias para su demostración se introducen en cursos de matemáticas superiores.

¿Sabías que...?

Conservación del plano de rotación

En la práctica hemos observado el efecto que produce la rotación en el movimiento de los cuerpos, por ejemplo, cuando montamos una bicicleta, comprobamos que es más fácil sostenernos sobre ella cuando estamos en movimiento que cuando estamos en reposo. Es relativamente sencillo sostener una pelota rotando sobre un dedo, en cambio cuando está en reposo es difícil mantenerla en equilibrio.



Problema resuelto 6.3

Considera una molécula de oxígeno O_2 que gira en el plano *XY* alrededor del eje Z. El eje de rotación pasa por el centro de masa de la molécula, perpendicular a su longitud, la masa de cada átomo de oxígeno es $2{,}66 \cdot 10^{-26}$ kg y a temperatura ambiente la separación promedio entre los dos átomos es $l = 1{,}21 \cdot 10^{-10}$ m.

a) Calcula el momento de inercia de la molécula alrededor del eje *Z.*

b) Si la rapidez angular de la molécula alrededor del eje *Z* es $4{,}60 \cdot 10^{12}$ rad/s, ¿cuál es la energía cinética rotacional?

Solución:

a) Esta es una aplicación sencilla de la definición de momento de inercia. Cada átomo está a una distancia $\frac{d}{2}$ del eje de rotación, por lo que el

momento de inercia alrededor del eje (considerados como cuerpos puntuales) es:

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

$$I = m\left(\frac{d}{2}\right)^2 + m\left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$I = \frac{md^2}{2}$$

$$I = \frac{\left(2{,}66 \cdot 10^{-26}\ \text{kg}\right)\left(1{,}21 \cdot 10^{-10}\ \text{m}\right)^2}{2}$$

$I = 1{,}95 \cdot 10^{-46}\ \text{kg m}^2$

b) En este caso, la energía cinética de rotación se puede calcular directamente a partir de la ecuación:

$$E_{C_R} = \frac{1}{2} I\omega^2$$

$$E_{C_R} = \frac{1}{2}\left(1{,}45 \cdot 10^{-46}\ \text{kg m}^2\right)\left(4{,}60 \cdot 10^{12}\ \text{rad/s}\right)^2$$

$E_R = 2{,}06 \cdot 10^{-21}\ \text{J}$

Problema resuelto 6.4

El momento de inercia de una barra delgada de 2 kg y 80 cm de longitud, con respecto al eje perpendicular que pasa por su centro de masa, es $I = \frac{1}{12} ml^2$ (figura 6.14).

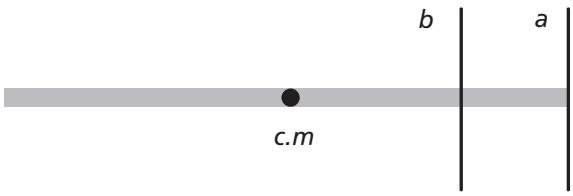


Fig. 6.14

Calcula el momento de inercia de la barra respecto a los ejes de giro *a* y *b* que pasan por:

a) El extremo derecho de la barra.

b) Un punto situado a 10 cm del extremo derecho de la barra.

Solución:

El eje paralelo *a* pasa a 40 cm del centro de masa de la barra, la mitad de *I.*

El eje paralelo *b* pasa a 10 cm del extremo. O sea, a 30 cm del centro de masa.

Los momentos de inercia se pueden calcular aplicando el teorema de Steiner:

$$I = I_{cm} + Md^2$$

a) $I_a = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2$

$I_a = \frac{1}{3}ml^2$

$I_a = 0{,}43 \text{ kg m}^2$

b) $I_b = \frac{1}{12}ml^2 + md^2$

$I_b = 0{,}28 \text{ kg m}^2$

Comprueba tus conocimientos

7. ¿Es el momento de inercia una magnitud escalar o vectorial?

8. ¿Qué representa físicamente el momento de inercia?

9. Plantea la ecuación general para el cálculo del momento de inercia y destaca el significado de cada uno de los términos de la ecuación.

10. Si dos cilindros macizos poseen iguales masas y radios, pero están constituidos por metales de densidades diferentes, ¿poseerán momentos de inercia iguales respecto al eje que:

a) pase por el centro de masa a lo largo del cilindro,
b) pase por el centro de masa y perpendicular a la longitud del cilindro? Explica en cada caso.

6.4 Torque. Ecuación fundamental de la dinámica de rotación

¿De qué factores depende el cambio del estado del movimiento de rotación de un cuerpo?

Torque

De nuestra experiencia cotidiana, sabemos que las agarraderas para abrir o cerrar las puertas se encuentran alejadas de las bisagras (figura 6.15). Esto no es casual, se busca un punto donde sea posible aplicar una fuerza menor, para abrirlas o cerrarlas con mayor facilidad.

De igual manera, cuando tratamos de soltar una tuerca enroscada en una tubería haciendo uso de una llave (figura 6.16), la fuerza se aplica por el extremo más alejado del eje de rotación de la tuerca.

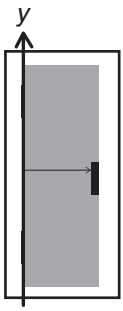


Fig. 6.15

Fig. 6.16

Del análisis de estos ejemplos podemos concluir, que es más fácil producir un cambio en el movimiento rotacional (al abrir o cerrar las puertas o para ajustar tuercas), si aplicamos la fuerza lo más alejado posible del eje de rotación. Además, la rotación depende no solo de la magnitud y dirección de la fuerza aplicada, sino de la posición en donde se aplique la fuerza.

De la historia

En el mismo trabajo en el cual Robert Hooke describió la ley de la fuerza en el estiramiento elástico de un resorte helicoidal, también describió la ley de la fuerza asociada a la torsión elástica de un alambre en tensión y de un resorte como el que se usa en un reloj. Hooke demostró experimentalmente que el desplazamiento angular a partir de la posición en reposo era proporcional al momento de la fuerza aplicado: $\tau(ø) = kø$.

Analicemos el siguiente ejemplo: considera dos fuerzas de igual valor, que están aplicadas sobre el mismo punto y que provocan efectos de

rotación diferentes en una barra delgada, como se observa en la figura 6.17. La barra rota en el plano que está señalado con líneas de puntos y es perpendicular al eje *Z*. La fuerza $\vec{F}_1$ genera un efecto rotacional mayor en la barra que el generado por la fuerza $\vec{F}_2$.

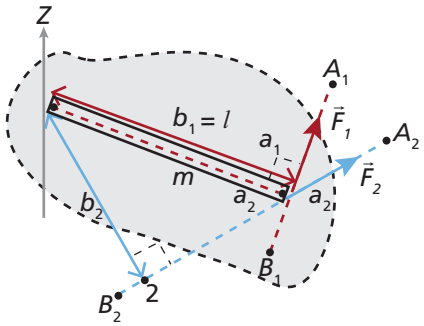


Fig. 6.17 Fuerzas iguales aplicadas sobre un mismo punto de la barra, provocan efecto rotacional diferente

Como puedes observar en la figura, para este caso la diferencia entre ambos valores de aceleración angular está determinada por el ángulo que forman las fuerzas aplicadas con respecto a la dirección de la barra.

La propiedad de cambiar el estado de movimiento de rotación de un cuerpo se mide con una magnitud denominada torque de una fuerza o simplemente torque y se representa por la letra griega tau (τ). También se le acostumbra a llamar momento de una fuerza.

En general. El torque de una fuerza queda definido, de forma operacional, por la ecuación:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (6.17)$$

Y, en consecuencia, la dirección del torque es perpendicular al plano que forman los vectores fuerza y posición del punto de aplicación de la fuerza respecto al eje de rotación.

El sentido del torque se puede determinar por la regla del producto vectorial o de la mano derecha (figuras 6.18, 6.19 y 6.20) y su valor estará dado por:

$$\tau = Fr\text{sen}\alpha \qquad (6.18)$$

Donde α es el ángulo formando entre los vectores $\vec{F}$ y $\vec{r}$.

En el SI, la unidad de medida del torque es el newton metro ($N \cdot m$).

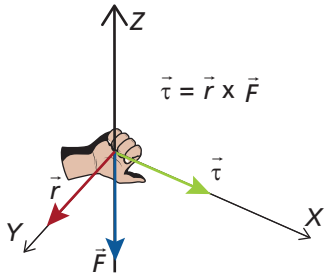


Fig. 6.18 Regla del producto vectorial para determinar la dirección y sentido del vector torque de la fuerza

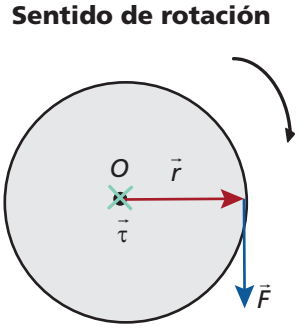


Fig. 6.19 Dirección del vector torque perpendicular al plano de la figura y sentido entrando al plano

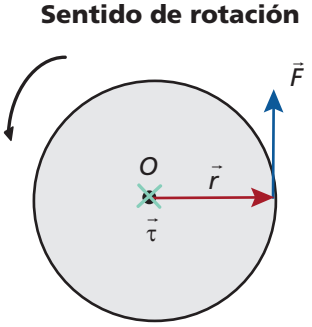


Fig. 6.20 Dirección del vector torque perpendicular al plano de la figura y sentido saliendo del plano

¡Cuidado!

Debemos tener cuidado con la unidad del torque. No se debe confundir *N.m* con la unidad de trabajo o energía, el Joule: 1 *J* = 1 *N.m*.
Sin embargo, equivalencia dimensional entre ambas magnitudes no es casual: Un torque de 1 *N.m* aplicado durante una revolución completa realiza un trabajo de $2\pi J$. Esto significa que la unidad de torque también se puede expresar como J/rad, que también se usa oficialmente en el SI.

Brazo de fuerza

En la ecuación (6.18) el producto $Rsen\alpha$ caracteriza una magnitud conocida como *brazo de fuerza,* la cual vamos a denotar como sigue:

El *brazo de fuerza* es la distancia que hay desde la línea de acción de la fuerza (línea imaginaria que se prolonga desde ambos

extremos del vector que representa la fuerza) al punto del cuerpo por donde pasa el eje de rotación del cuerpo (figura 6.21).

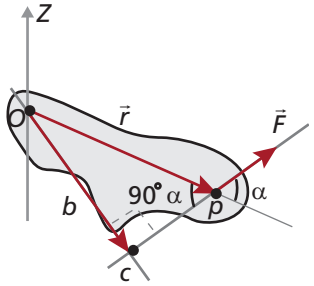


Fig. 6.21 Distancia brazo de la fuerza

En el caso particular de que el ángulo formado entre los vectores $\vec{F}$ y $\vec{r}$ sea 90° entonces $b = r$ y el torque de la fuerza es máximo.

Si el ángulo es 0°, el brazo de la fuerza es nulo y por tanto no hay torque, independientemente del valor de la fuerza aplicada.

En la figura 6.22 se representa una barra rígida sobre la que actúan las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, de igual valor, aplicadas en puntos diferentes. Cada una de ellas tiende a producir rotación alrededor de un eje que pasa perpendicular a la barra por el punto *O.*

¿Cuál será el sentido de rotación de la barra?

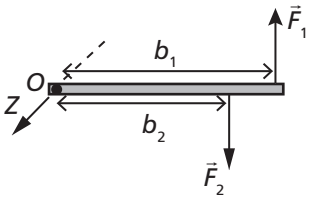


Fig. 6.22 La barra rota en sentido antihorario porque la fuerza $\vec{F}_1$ posee mayor brazo de fuerza

En este ejemplo $\vec{F}_1$ tiende a hacer rotar la barra en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj y $\vec{F}_2$ a favor del giro de las manecillas del reloj. Por supuesto, como el torque de la fuerza $\vec{F}_1$ es mayor que el que provoca la fuerza $\vec{F}_2$, la barra girará en sentido antihorario.

En general, el torque resultante de varias fuerzas será igual a la suma vectorial de los torques provocados por cada fuerza, que pueden tener proyecciones positivas o negativas en dependencia del valor del ángulo α (ecuación 6.18)

Una forma sencilla y rápida para determinar el valor del torques de varias fuerzas es el de establecer un convenio de signos para los torques en función del sentido de la rotación que provocan y calcular entonces el valor del torque resultante mediante la suma algebraica de los torques provocados por todas las fuerzas.

El convenio comúnmente adoptado se muestra en la figura 6.23.

El torque que provoca un giro en sentido contrario al de las manecillas del reloj se considera positivo

El torque que provoca un giro en el mismo sentido de las manecillas del reloj se considera negativo

Fig. 6.23 Convenio de signos para el torque

Problema resuelto 6.5

A continuación, se ilustran tres situaciones (figuras 6.24, 6.25 y 6.26) en las cuales se aplican fuerzas externas como indican las figuras. En cada caso, determina el valor del torque neto (resultante).

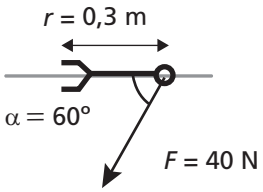


Fig. 6.24

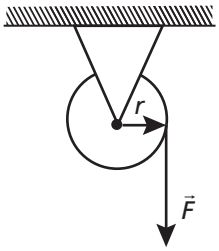


Fig. 6.25

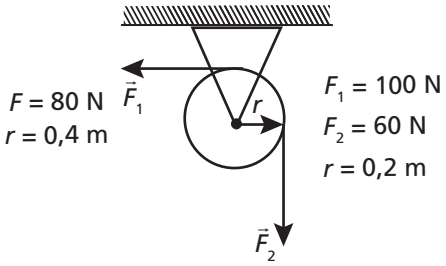


Fig. 6.26

Solución:

Figura 6.24

El valor del torque está dado por:

$\tau = Fr\text{sen}\alpha$

$\tau = 40\ \text{N} \cdot 0{,}3\ \text{m} \cdot \text{sen}\ 240°$

$\tau = -10{,}4\ \text{N m}$

Por supuesto, se puede tomar $\alpha = 60°$ y como el sentido de giro es horario asumir por convenio que el signo del torque es negativo.

Figura 6.25

El valor del torque está dado por:

$\tau = Frsen\alpha$

$\tau = 80\ N \cdot 0{,}4\ m\ sen\ 270$

$\tau = -32\ N\ m$

También en este caso se puede tomar $\alpha = 90°$ y como el sentido de giro es horario asumir por convenio que el signo del torque es negativo.

Figura 6.26

$\tau_R = \tau_1 + \tau_2$, pero $\tau_{1_z} = \tau_1$ y $\tau_{2_z} = \tau_2$

$\tau_R = F_1 r_1 sen\alpha_1 + F_2 r_2 sen\alpha_2$

$\tau_R = 100\ N \cdot 0{,}2\ m \cdot sen\ 90° + 60\ N \cdot 0{,}2\ m \cdot sen\ 270°$

$\tau_R = (100\ N \cdot 0{,}2\ m) + (60\ N \cdot 0{,}2\ m \cdot -1)$

$\tau_R = 8{,}0\ N\ m$

Ecuación fundamental de la dinámica de la rotación

Conocemos que, si la masa de un cuerpo no varía, la segunda ley del movimiento de Newton se puede escribir en la forma:

$$\vec{F}_R = m\vec{a}$$

¿Se podrá establecer una expresión similar a esta para el caso de los cuerpos en rotación?

Sabemos que los cambios en el estado de rotación de un sólido rígido están determinados por dos factores: el *torque* y el *momento de inercia* del cuerpo respecto al eje de rotación.

Se puede demostrar que para el movimiento de rotación la expresión simbólica de la segunda ley de Newton se puede escribir como:

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\tau}_R}{I}$$

Donde $\vec{\alpha}$ es la aceleración angular, $\vec{\tau}_R$ el torque resultante e I el momento de inercia.

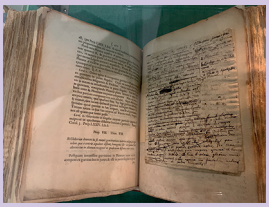
Es decir, la aceleración angular $\vec{\alpha}$ es directamente proporcional al torque resultante $\vec{\tau}_R$ e inversamente proporcional al momento de inercia I.

Debe notarse que:

- La aceleración angular tiene la misma dirección y sentido que el torque resultante.

- Si el torque resultante es cero, entonces la aceleración angular también lo es y el cuerpo realiza un movimiento de rotación uniforme o está en reposo rotacional, es decir la velocidad angular permanece constante o es cero.
- Si el torque resultante y el momento de inercia son constantes, entonces la aceleración angular también es constante y el cuerpo realiza un movimiento de rotación uniformemente variado, donde la velocidad angular varía uniformemente para iguales intervalos de tiempo, cualesquiera que estos sean.
- Si el torque resultante o el momento de inercia son variables, entonces la aceleración angular también es variable y el cuerpo describe un movimiento de rotación variado.

De la historia



Newton en su libro los *Principia* escribe:

DEFINICIÓN V

"La fuerza centrípeta es aquella en virtud de la cual los cuerpos son atraídos, empujados, o de algún modo tienden hacia un punto como a un centro."

De esta clase es la gravedad por la que los cuerpos tienden al centro de la Tierra; el magnetismo por el que el hierro tiende hacia el imán; y la fuerza, cualquiera que sea, por la que constantemente los planetas se ven apartados de las trayectorias rectilíneas y se ven obligados a permanecer girando en líneas curvas. Una piedra volteada en una honda intenta escapar de la mano del hondero y su intento hace estirarse la honda y más cuanto más rápidamente gira, y en cuanto se suelta se aleja. Llamo centrípeta a la fuerza contraria al mencionado intento; por ella, la honda retiene constantemente la piedra hacia la mano y la mantiene en el círculo, y, por tanto, se dirige hacia la mano o hacia el centro del círculo. Igual ocurre con todos los cuerpos que giran en círculo.

Problema resuelto 6.6

En la figura 6.27 a), está representada una polea de 1,0 kg y 5,0 cm de radio, sometida a la acción de una fuerza, en su periferia, con dirección tangencial de valor igual a 2,0 N. Determina el valor del vector aceleración angular de la polea y diga su dirección y sentido.

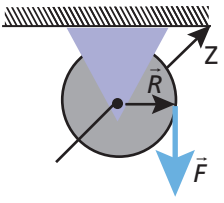


Fig. 6.27 a

Solución:

En el diagrama de fuerzas (figura 6.26 b) se aprecia que la fuerza normal y la fuerza de gravedad no producen torques y, en consecuencia, no modifican la velocidad angular de la polea. La fuerza que es tangencial a la polea, produce un torque $\vec{\tau}_{Rz}$, que provoca su aceleración angular. Aplicando la regla de la mano derecha, determinamos que la dirección del torque de la fuerza es perpendicular al plano de la figura y el sentido es en la dirección negativa del eje *Z*, que se ha representado perpendicular al plano de la figura. El vector aceleración angular tiene la misma dirección y sentido que el vector torque.

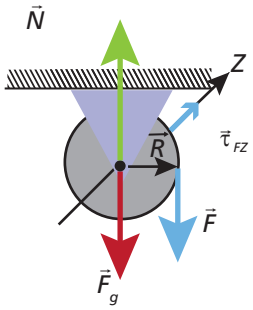


Fig. 6.27 b

El valor del torque se puede calcular a partir de la ecuación:

$$\alpha_z = \frac{\tau_{R_z}}{I} \qquad (1)$$

Al analizar la ecuación vemos que debemos hallar el torque resultante externo y el momento de inercia de la polea.

Para calcular el momento de inercia de la polea, utiliza la ecuación del momento de inercia del cilindro macizo que aparece en la tabla de la figura 6.13.

El valor del torque resultante se puede calcular directamente a partir de la ecuación:

$$\tau_{R_s} = FR\text{sen}\alpha \qquad (2)$$

Al sustituir (2) en (1) y despejar la aceleración, queda entonces que:

$$\alpha_z = \frac{\tau_{Rz}}{I}$$

$$\alpha_z = \frac{FR\text{sen}\alpha}{\frac{mR^2}{2}}$$

$$\alpha_z = \frac{2F\text{sen}\alpha}{mR}$$

$$\alpha_z = \frac{2 \cdot 2{,}0 \text{ N} \cdot \text{sen}270°}{1{,}0 \text{ kg} \cdot 5{,}0 \cdot 10^{-2} \text{ m}}$$

$$a_z = -80 \text{ rad/s}^2$$

El signo negativo de a_z se corresponde con el hecho de que vector aceleración angular tiene la misma dirección y sentido que el vector torque resultante.

Hora del laboratorio

Práctica de laboratorio 6.1

Torque o momento de la fuerza en la rotación

Objetivo: verificar los efectos del torque de una fuerza.
Materiales: palanca con agujeros, juego de cuerpos de 50 g y dinamómetro, soporte universal con varillas y nuez doble.

Descripción y tareas:

Con los materiales que se le ofrecen determina el valor de la masa de la palanca con su incertidumbre.

Coloca la palanca, con el auxilio del soporte universal y los aditamentos, de forma tal que pueda rotar alrededor de un eje que pasa por el orifico de uno de sus extremos. Por otro extremo coloque el dinamómetro en dirección perpendicular a la palanca, de formas que la palanca este en equilibrio y en la posición horizontal. Sitúa dos cuerpos entre el apoyo y el extremo de la palanca. Observa el valor de la fuerza que registra el dinamómetro para que la palanca se mantenga en equilibrio.

Repite la operación para varios cuerpos y también colócalos en diferentes posiciones de la palanca. Comprueba que la sumatoria de los torques es cero para el sistema en equilibrio (ten en cuenta las incertidumbres). Escribe tus conclusiones.

Comprueba tus conocimientos

11. ¿Qué se entiende por torque de una fuerza?

12. ¿Cuál es la fórmula para el cálculo del torque cuando la fuerza y el brazo son perpendiculares ente sí?

13. ¿La aceleración angular de un sistema solo depende del torque externo aplicado?

14. Define el brazo de una fuerza.

15. ¿Es el torque de una fuerza una magnitud escalar o vectorial? Fundamenta tú respuesta.

16. Cita ejemplos de la vida cotidiana donde se evidencie la ecuación fundamental de la dinámica de la rotación.

17. Explica cómo se determina el sentido del torque producido por una fuerza. Cita ejemplos de la vida cotidiana.

18. Plantea la ecuación fundamental de la dinámica de la rotación y expresa su significado físico.

6.5 Cantidad de movimiento angular. Ley de conservación de la cantidad de movimiento angular

Momento angular del sólido rígido

De formas análoga a como el producto de la velocidad de una partícula por su masa (la cantidad de movimiento lineal) permite caracterizar el estado de movimiento de traslación de la partícula, el producto del momento de inercia del sistema respecto al eje de rotación y por su velocidad angular, permite caracterizar el estado de movimiento del sólido rígido en rotación. Este producto constituye una nueva magnitud vectorial conocida como cantidad de movimiento o momento angular y se representa como $\vec{L}$:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \qquad (6.19)$$

En el SI, la unidad de medida del momento angular es $\left[\frac{\text{kg·m}^2}{\text{s}}\right]$.

De manera similar al caso del movimiento de traslación, en que la fuerza neta aplicada sobre la partícula es igual a la rapidez de cambio de la cantidad de movimiento lineal, en el movimiento de rotación, el torque neto es igual a la rapidez de cambio de la cantidad de movimiento angular, de manera que la segunda ley del movimiento de Newton para un sólido rígido en rotación se puede escribir de forma más general como:

$$\vec{\tau}_R = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} \qquad (6.20)$$

Como $\vec{L} = I\vec{\omega}$, para el caso de una partícula que describe un movimiento circunferencial (figura 6.28), para la proyección del vector $\vec{L}$ se tiene que:

$$L = I\omega$$

Como para una partícula $I = mR^2$ y $v = \omega R sen\alpha$, entonces:

$$L = (mv)\, Rsena$$

Como en este caso $\alpha = 90°$, el valor de la cantidad de movimiento angular de una partícula que gira con radio R estará dada por:

$$L = mvR$$

En general, para una partícula puede escribir que:

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{p} \qquad (6.21)$$

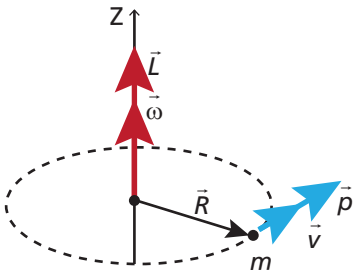


Fig. 6.28 Partícula de masa *m* que gira alrededor de *O* con velocidad angular $\vec{\omega}$

Ley de conservación de la cantidad de movimiento angular

De manera análoga al caso del impulso de una fuerza en el movimiento de traslación $\vec{J}_R = \vec{F}_R \Delta t$ podemos asumir que el producto del torque y el intervalo de tiempo que dura la interacción caracterizan una magnitud física denominada *impulso angular:*

$$\vec{J}_R = \vec{\tau}_R \Delta t \qquad (6.22)$$

En el SI la unidad de impulso angular es N · m · s

Por otra parte, en el movimiento de traslación el impulso de la fuerza resultante es igual a la variación de la cantidad de movimiento lineal del cuerpo $\vec{F}_R \Delta t = \Delta \vec{p}$. En el caso del movimiento de rotación, la relación entre el impulso angular del torque resultante y la variación del momento angular de un sólido rígido, podemos expresarla mediante la ecuación:

$$\vec{\tau}_R \Delta t = \Delta \vec{L} \qquad (6.23)$$

La ecuación 6.23 expresa que el impulso angular externo a un sistema que rota, modifica su momento angular. Además, el torque resultante externo determina la dirección y sentido en que varía el momento angular de un sistema.

¿Qué sucedería si el torque resultante de las fuerzas que actúan sobre el sólido rígido en rotación respecto al eje de giro resulta nulo?

Si $\vec{\tau}_{ext} = \vec{0}_{\tau ext}$

Se tiene que $\vec{J}_{\tau ext} = \vec{0}$

En consecuencia:

$$\vec{J}_{\tau ext} = \vec{0}$$

De donde se obtiene que:

$$\Delta\vec{L} = \vec{0} \qquad (6.24)$$

Esto significa que:

$$\vec{L}_{inicial} = \vec{L}_{final} \qquad (6.25)$$

De manera que si el torque resultante externo es nulo la cantidad de movimiento angular del cuerpo en rotación no cambia, es decir se conserva.

La relación 6.26 caracteriza una importante ley de la naturaleza: *la ley de conservación del momento angular.* Desde el punto de vista físico esta ley podemos interpretarla de la siguiente manera:

La ecuación 6.25 se puede escribir como:

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f \qquad (6.26)$$

La ecuación 6.26 nos expresa que, si el torque resultante externo es nulo, al variar el momento angular del cuerpo, variará su velocidad angular de manera tal que el producto de estas magnitudes permanezca constante, por ejemplo, los bailarines y los patinadores sobre hielo, utilizan esta regularidad para aumentar o disminuir su velocidad angular al ejecutar algunas de sus rutinas, de la manera siguiente: al abrir sus brazos, aumenta su momento de inercia y su velocidad angular disminuye y de esta manera se controla el movimiento de rotación (figura 6.29).

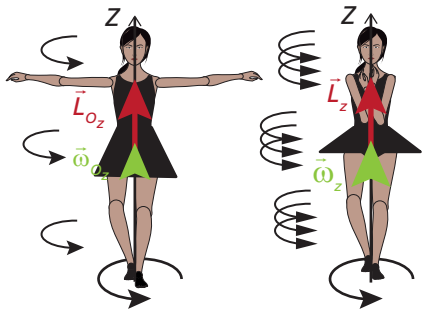


Fig. 6.29

Otro ejemplo en el cual apreciamos la conservación de la cantidad de movimiento angular es el de la oposición que se presenta al intentar cambiar el plano de rotación de una rueda de bicicleta en movimiento. Es por esto que se guarda más fácilmente el equilibrio cuando la bicicleta se mueve que cuando está detenida.

También resulta interesante la forma en que se ajusta la orientación de los satélites artificiales. Como en este caso se puede orientan que el torque externo resultante es nulo, para cambiar la orientación, un motor eléctrico hace girar un "volante de inercia", al hacer esto, para conservar el momento angular, el satélite se pone a girar en el sentido opuesto. Una vez en la buena orientación, basta parar el volante de inercia, lo cual para el satélite. También se utiliza el volante de inercia para parar las pequeñas rotaciones provocadas por los pequeños momentos inevitables, como los producidos por el viento solar.

¿? ¿Sabías que...?

Algunas estrellas se contraen convirtiéndose en púlsar (estrella de neutrones). Su diámetro disminuye hasta unos kilómetros, su momento de inercia disminuye y su velocidad de rotación aumenta enormemente. Se han detectado pulsares con periodos de rotación de tan solo unos milisegundos.

- La Luna ejerce una fuerza gravitacional sobre la Tierra y provoca las mareas. Estas crean fuerzas de fricción que disminuyen gradualmente la velocidad angular de rotación del planeta. El efecto es bastante pequeño, un aumento en el periodo de aproximadamente $2{,}5 \cdot 10^{-8}$ s cada día. Sin embargo, dentro de mil millones de años el día será unas 3 horas más largo. Se ha sugerido que hace $1{,}5 \cdot 10^{9}$ años el día solo duraba entre 9 y 10 horas, y que el año tenía 9 000 días de esos.
- El torque resultante que causa la disminución de la velocidad angular de la Tierra, es un torque interno al sistema Tierra-Luna y no modifica su momento angular. Entonces a medida que disminuye el momento angular de la Tierra, debe aumentar el momento angular de la Luna, por ello la Luna se aleja de la Tierra y su distancia aumenta un centímetro por año.

Problema resuelto 6.7

Dos esferas de igual masa 6,0 kg, se encuentran a 0,50 m cada una del eje de rotación que pasa por el centro de masa de una varilla de 2,0 m de longitud y masa despreciable, que se encuentra rotando con una frecuencia de 2,0 Hz, como se indica en la figura 6.30. Cuando se liberan los topes A y B durante la rotación, las esferas se deslizan a lo largo de la varilla, hasta llegar a

los topes *C* y *D* como se aprecia en la figura 6.31. Calcular el valor de la frecuencia de rotación de la varilla, cuando las esferas se encuentran en los extremos.

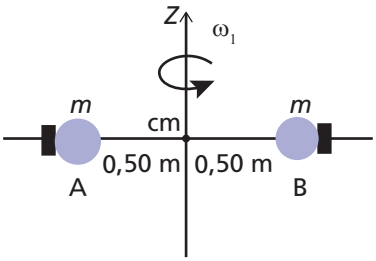


Fig. 6.31 a

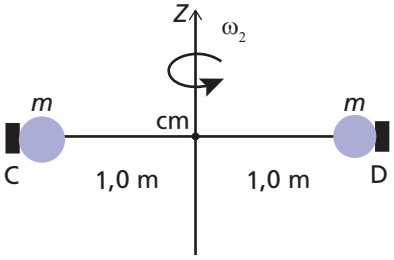


Fig. 6.31 b

Solución:

Si se considera a las esferas como un sistema de partículas con su centro de masa en punto medio de la varilla por donde pasa el eje de rotación, en las condiciones dadas:

$\vec{J}_{\tau} = \vec{0}$ y en consecuencia;

$\Delta\vec{L}_{sistema} = \vec{0}$

$\vec{L}_{inicial} = \vec{L}_{final}$

En proyecciones, para los valores del momento angular inicial y final se tiene que:

$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$

$2mR_1^2 \cdot 2\pi\nu_1 = 2mR_2^2 \cdot 2\pi\nu_2$

$R_1^2\nu_1 = R_2^2\nu_2$

$$\nu_2 = \frac{R_1^2\nu_1}{R_2^2} \qquad \nu_2 = \frac{(0{,}5\ \text{m})^2\ 2\ \text{Hz}}{(1\ \text{m})^2} \qquad \nu_2 = \frac{0{,}25\ \text{m}^2 \cdot 2\ \text{Hz}}{1\ \text{m}^2} \qquad \nu_2 = 0{,}50\ \text{Hz}$$

Comprueba tus conocimientos

19. ¿Qué se entiende por impulso angular?

20. ¿Qué relación existe entre el impulso angular y el momento angular?

21. ¿Qué establece la ley de conservación del momento angular?

22. ¿Qué hace una bailarina para aumentar su velocidad de rotación durante una puesta en escena?

23. ¿Cuál es el efecto que provoca el torque externo con respecto al tiempo sobre un sistema que rota?

24. Cita ejemplos de interés donde se ponga de manifiesto la conservación del momento angular.

25. Investiga sobre el cumplimiento de la ley de conservación del momento angular en el movimiento de los planetas.

6.6 Movimiento de rotación y traslación combinados. Relaciones energéticas

Existe un gran número de fenómenos donde se combinan movimientos de traslación y rotación para un mismo cuerpo. Un ejemplo sencillo es el de las ruedas de autos o bicicletas durante su traslación. También tenemos el caso del movimiento de la Tierra alrededor del Sol o el de las aspas de un helicóptero en movimiento, entre muchos otros ejemplos.

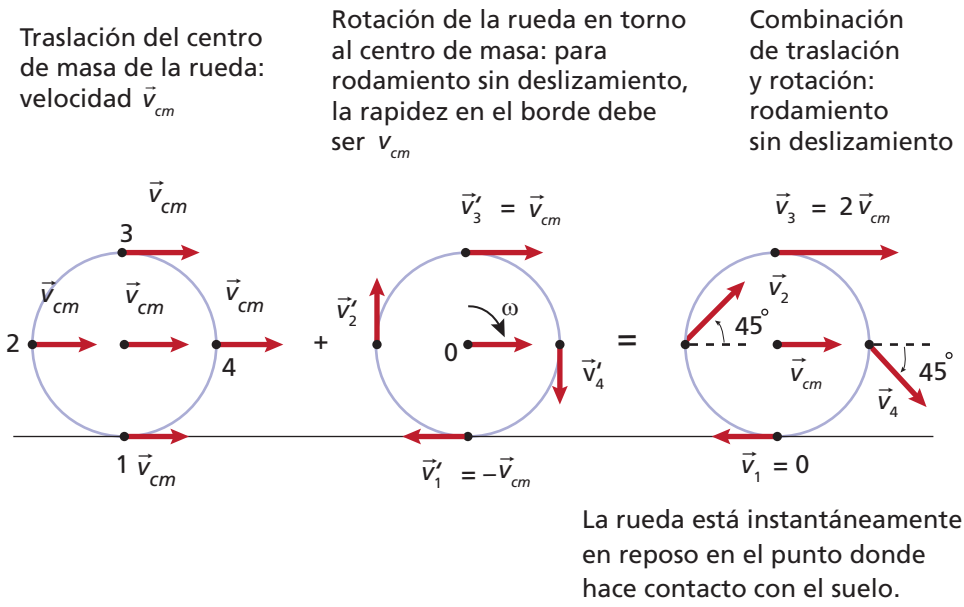


Fig. 6.32 Rueda que rota y se traslada por una superficie horizontal sin resbalar

Cuando un cuerpo rota y se traslada, su movimiento puede describirse como la suma independiente de los movimientos de traslación y rotación, lo que no demostraremos aquí pues es algo fuera del alcance de este curso.

Pero si debemos entender que esto significa que el movimiento resultante se puede considerar como la suma de los movimientos de traslación del centro de masa y del movimiento de rotación respecto a un eje que pasa por el centro de masas. Esto se ilustra, para el caso particular de una rueda que rota y se traslada por una superficie horizontal sin resbalar, en la figura 6.32.

Este hecho es muy importante no solo por su valor conceptual sino porque nos permite resolver muchos problemas a partir de las ecuaciones ya conocidas para los movimientos de traslación y rotación.

¡Cuidado!

Es importante tener presente que la relación $v_{c.m} = \omega R$ se cumple únicamente si hay rodamiento sin deslizamiento. Cuando el conductor de un automóvil (con tracción trasera) intenta salir muy bruscamente, los neumáticos traseros giran con gran rapidez mientras que el vehículo casi no se mueve, así que ωR mayor que $v_{c.m}$. Si el conductor aplica los frenos bruscamente y el auto resbala, los neumáticos casi no girarán y ωR menor que $v_{c.m}$.

Nota que, en un instante dado, podemos pensar que la rueda gira alrededor de un "eje de rotación instantáneo" que pasa por el punto de contacto con el suelo cuya velocidad es nula. Esto implica que la velocidad angular ω es la misma para este eje que para un eje que pasa por el centro de masa.

Por otra parte, también resalta el hecho de que, en el movimiento combinado de rotación y traslación, la energía cinética del cuerpo es la suma de una parte asociada al movimiento de traslación del centro de masa y una parte asociada a la rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa:

$$E_c = \frac{mv_{c.m}^2}{2} + \frac{I_{c.m}\omega^2}{2} \qquad (6.27)$$

¿Se conservará la energía mecánica del cuerpo, si tiene un movimiento de rodadura pura?

Se acostumbra a llamar rodadura pura al caso, ya conocido, de que el cuerpo se traslada por la superficie y rota sin resbalar. Nota que la condición de rodadura pura equivale al hecho de que, en cada vuelta, por ejemplo, de la rueda mostrada en la figura 6.33 equivale a que la rueda recorra una distancia L igual a su perímetro $2pR$.

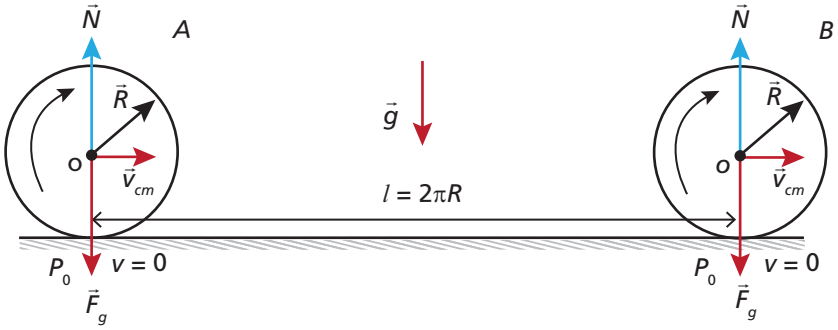


Fig. 6.33

En esta circunstancia se puede apreciar que la fuerza de gravedad y la fuerza normal no realizan trabajo (son perpendiculares a la dirección del movimiento de traslación). Por otra parte, como el trabajo de las fuerzas no conservativas es nulo (el cuerpo no desliza), se tiene que la energía mecánica del cuerpo es la misma en las posiciones inicial y final, vale decir que la energía mecánica del cuerpo se conserva:

$$E_{C0_{traslación}} + E_{C0_{rotación}} + E_{p_{g0}} \quad E_{c\ traslación} \quad E_{c\ rotación} + E_{pg}$$

$$\frac{mv_{0c.m}^2}{2} + \frac{I_{c.m}\omega_0^2}{2} + mgh_0 = \frac{mv_{c.m}^2}{2} + \frac{I_{c.m}\omega^2}{2} + mgh \qquad (6.28)$$

La ecuación (6.28), es la expresión matemática de la ley de conservación de la energía mecánica para el movimiento de rotación del sólido rígido sin deslizamiento (rodadura pura).

¿? ¿Sabías que...?

Si el chofer de un auto enciende el motor y en el arranque, las ruedas traseras rotan con deslizamiento, se puede observar la salida de humo debido al calentamiento de los neumáticos por efecto de la fricción con el suelo. Si el auto frena muy bruscamente y desliza, ocurre lo mismo.

Problema resuelto 6.8

Un cilindro macizo de 50 g y 1,0 cm de radio se coloca en reposo encima de un plano inclinado de altura igual a 20 cm, (figura 6.34). Se puede considerar que, durante el descenso, el cilindro rota sin deslizar.

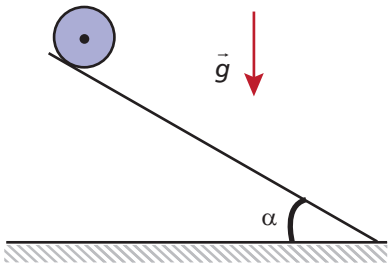


Fig. 6.34

a) Representa las fuerzas que actúan sobre el cilindro.
b) Determina el valor de velocidad en el momento de llegar a la base del plano inclinado.

Solución:

a) Ver figura 6.35

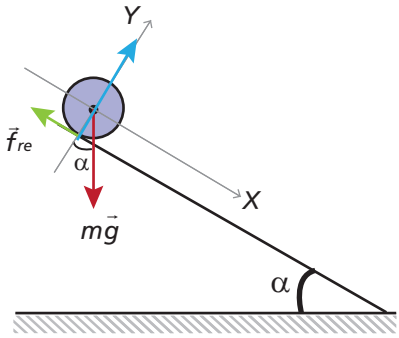


Fig. 6.35

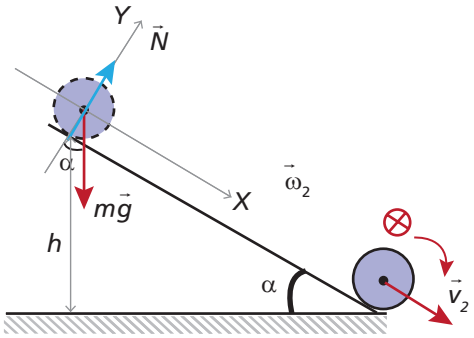


Fig. 6.36

b) Como el cilindro no desliza el trabajo de las fuerzas no conservativas es nulo y podemos utilizar la ley de conservación de la energía mecánica. En lo alto del plano inclinado, el cilindro se encuentra en reposo y la energía mecánica que posee es energía potencial gravitatoria y en la base del plano tiene energía cinética de traslación y energía cinética de rotación.

$$E_{c0\ traslación} + E_{c0\ rotación} + E_{pg_0} = E_{c\ traslación} + E_{c\ rotación} + E_{pg}$$

$$E_{c0\ traslación} = 0 \quad E_{c0\ rotación} = 0 \quad E_{pg} = 0$$

$$E_{pg_0} = E_{c\ traslación} + E_{c\ rotación}$$

$$mg(h+R) = \left(\frac{mR^2}{2}\right)\omega_2^2 + \frac{mv_2^2}{2} \qquad (1)$$

Se ha tenido en cuenta que $I = \frac{mR^2}{2}$, es el momento de inercia de un cilindro homogéneo respecto a un eje vertical que pasa por su centro y que, como tiene rodadura pura, $v_2 = R\omega_2$ (la velocidad con que se traslada el cilindro al llegar a la base del plano inclinado).

Al simplificar (1) se obtiene que:

$$g(h+R) = \frac{v_2^2}{2} + \frac{v_2^2}{2}$$

De donde:

$$v_2 = \sqrt{g(h+r)}$$

Sustituyendo por los valores numéricos:

$$v = \sqrt{2{,}1}\ \text{m/s}$$

$$v \approx 1{,}5\ \text{m/s}$$

Si $h >> R$ se llega a que $v_{R-T} = \sqrt{gh}$ y si se compara con la velocidad de llegada del mismo cilindro sin que rote $v_T = \sqrt{2gh}$, se observa que sería mayor $v_T > v_{R-T}$. Esto se debe a que cuando el cuerpo desciende sin rotar, su energía potencial gravitatoria inicial se transforma en cinética y cuando desciende con rotación pura la energía potencial gravitatoria inicial se comparte entre la energía cinética de traslación y rotación.

Problema resuelto 6.9

La figura 6.37 muestra una rueda de bicicleta de 1,0 kg y radio 0,30 m que posee inicialmente una velocidad angular 0,5 rad/s y se coloca sobre una superficie horizontal rugosa cuyo coeficiente de rozamiento cinético es 0,5. La rueda rota en el lugar hasta detenerse, si se sujeta mediante las manos con una fuerza $\vec{F}$ que solo actúa horizontalmente.

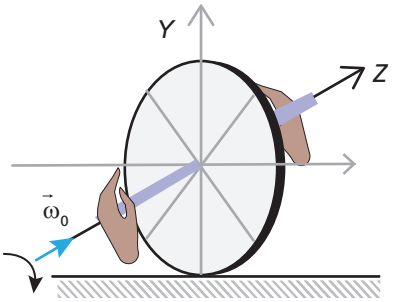


Fig. 6.37

a) Representa las fuerzas que actúan sobre la rueda cuando está rotando y sujeta por las manos.
b) Calcula el valor de la fuerza de rozamiento cuando la rueda está rotando.
c) Representa el torque de la fuerza de rozamiento que actúa sobre la rueda.
d) Determina el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento.

Solución:

a) Figura 6.38.

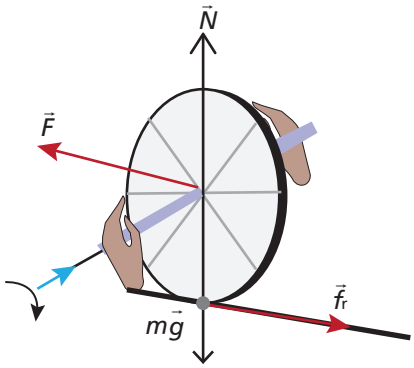


Fig. 6.38

b) $f_r = \mu_c N$

$f_r = \mu_c mg$

$f_r = 0{,}5 \cdot 1\,\text{kg} \cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$f_r = 5\ \text{N}$

c) En este caso la proyección del torque de la fuerza de rozamiento es negativa (figura 6.39) ya que el sentido del vector torque es contrario al sentido positivo del eje *Z,* es decir:

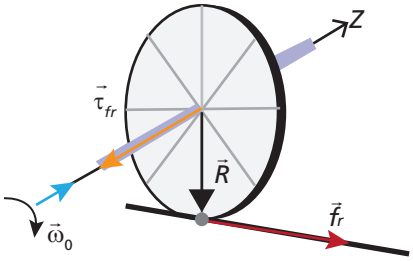


Fig. 6.39

$$\tau_{fr_z} = -\tau_{fr}$$

$$\tau_{fr_z} = -f_r \cdot R$$

d) $W_{fnc} = \Delta E_M \quad W_{fnc} = \Delta E_c \quad W_{fnc} = (E_{cf} - E_{c0}) \quad W_{fnc} = -E_{c0}$

$$W_{fnc} = -\frac{I\omega_0^2}{2} \quad W_{fnc} = -\frac{mR^2\omega_0^2}{2} \quad W_{fnc} = -0{,}010\ \text{J}$$

El sentido negativo indica que la rueda pierde energía por la acción de esta fuerza de rozamiento que ahora no es estática sino es una fuerza de rozamiento cinético.

Tareas generales del capítulo

1. Una rueda está inicialmente en reposo y comienza a rotar. Los valores de velocidad angular y tiempo están registrados en la siguiente tabla:

ω (rad/s)	0	3,0	6,0	9,0	12,0	15,0
t (s)	0	1,5	3,0	4,5	6,0	7,5

a) Determina la aceleración angular y el desplazamiento angular de la rueda a los 3 s de iniciado su movimiento.
b) ¿Cuál es la velocidad angular de la rueda a los 2 s de comenzar a rotar?

2. Un automóvil que avanza a 96,6 km/h posee ruedas de 0,76 m de diámetro, calcula el módulo de la velocidad angular de una rueda alrededor de un eje que pase por su centro de masa.

3. Una rueda que parte del reposo, gira con una aceleración angular constante de 2,0 rad/s^2. Si el diámetro de la rueda es de 1 m, calcula el valor de:
a) La velocidad angular si la rueda estuvo rotando durante 4,0 s.
b) El desplazamiento angular del radio-vector de un punto en la periferia de la rueda en ese tiempo.
c) El valor de la aceleración tangencial de un punto de la rueda situado en su periferia.

4. Calcula la energía cinética de rotación de un disco y una esfera, de 2,0 y 4,0 g respectivamente si ambas poseen un radio de 0,10 m y se encuentran rotando sobre un eje fijo que pasa por sus centros de masas con una velocidad angular de 2,0 rad/s.

5. Con la terminación del último salto, un clavadista posee una velocidad angular de 1,5 rad/s. Su momento de inercia en ese instante es de 4,40 kg · m^2. Debido a que él quiere lograr en el instante de la sumersión una velocidad angular pequeña, se extiende completamente por lo que su momento de inercia es de 13,2 kg · m^2
a) ¿Cuál es en ese instante el valor de su velocidad angular?
b) Calcula los valores de la energía cinética asociada a la rotación en las condiciones iniciales y finales del problema.

6. En la figura 6.40 se representa un sistema de partículas unidas por medio de una varilla rígida y de masa despreciable que puede girar

alrededor de un eje que pasa por *O* y es perpendicular al plano de representación. Calcula:

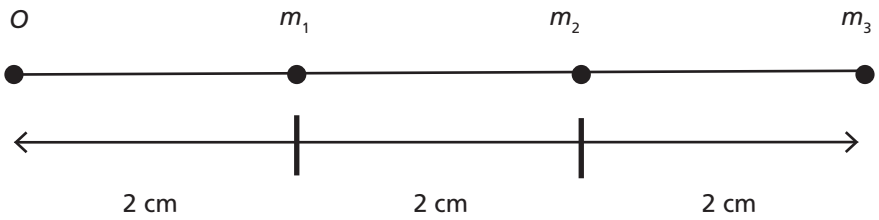


Fig. 6.40

a) El momento de inercia del sistema respecto al eje que pasa por *O.*
b) El momento de inercia respecto a un eje que pasa por el centro de masa si conocemos que $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ kg

7. En los extremos de una barra rígida de masa despreciable se sueldan dos esferas de 20 kg y 40 kg; si los centros de las esferas quedan separados por una distancia de 2 m, determina el momento de inercia del sistema:
a) Respecto a un eje que pasa por un punto de la barra que equidista de las esferas.
b) Respecto a un eje que pasa por el centro de masa.

8. En la figura 6.41 se representa una barra que puede girar alrededor de un eje que pasa por *O* y es perpendicular al plano de la figura y sobre la cual actúan las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ mostradas; teniendo en cuenta los datos de la figura:

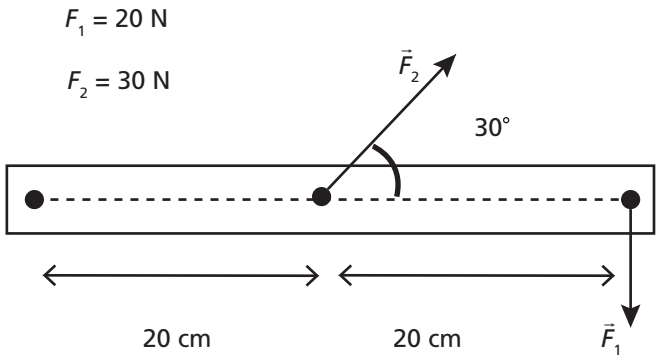


Fig. 6.41

a) Calcula el valor del torque de cada una de las fuerzas.

b) Calcula el valor del del torque resultante.
c) Representa el vector torque de cada fuerza y el vector torque resultante.

9. ¿Qué valor debe tener una fuerza tangencial aplicada a una rueda de 2 kg y 25 cm de radio para que, partiendo del reposo, adquiera una velocidad angular de 100 rad/s en 2 s?

10. Calcula el valor de la aceleración angular que adquiere una rueda de 2,00 m de radio y 800 kg, si se le aplica una fuerza de 400 N tangencialmente a su periferia y determina el valor de su velocidad angular al cabo de 20 s de haber aplicado la fuerza.

11. El volante de un motor de 100 kg gira a razón de 600 min^{-1}. Considerando que su radio es de 20,0 cm, determina:
a) El valor de la fuerza que hay que aplicar tangente a la periferia del volante para que se detenga al cabo de 8 s
b) La energía disipada en el frenado.

12. Calcula el valor del momento angular y la energía cinética de rotación de un cilindro de 20 kg y 50 cm de radio que gira alrededor de su eje con una frecuencia de 25 s^{-1}.

13. El cuerpo representado en la figura 6.42 gira con velocidad angular constante de 10 rad/s. Si se tira del hilo por el extremo A hasta que el cuerpo quede girando a una distancia de 10 cm del extremo superior del tubo, determina:

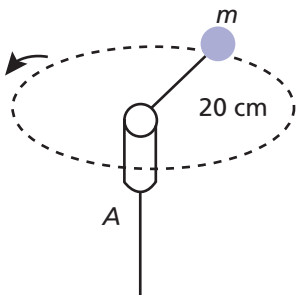


Fig. 6.42

a) El valor de la velocidad angular del cuerpo para estas condiciones.
b) El valor del vector momento angular inicial y final del cuerpo. Justifica tu respuesta.

14. Un disco homogéneo de 50 kg y radio 0,8 m gira alrededor de un eje perpendicular al plano disco, que pasa por su centro de masa. Si sobre

el borde del del disco se ejerce una fuerza tangente de valor 20 N durante 5 s, calcula el valor de:

a) La aceleración angular y el ángulo girado.
b) El momento angular.
c) La energía cinética de rotación.

15. Un cilindro de 1 kg y radio igual a 10 cm cuelga de un hilo enrollado alrededor de su borde como se representa en la figura 6.43. Calcula el valor de:

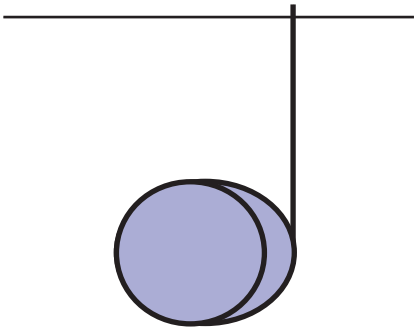


Fig. 6.43

a) La aceleración del centro de masa.
b) La aceleración angular del cilindro.
c) La tensión de la cuerda.

16. ***Desafío.*** Una barra de 2,0 kg y longitud 2,0 m se encuentra inicialmente en reposo sobre una mesa. Sobre la barra se aplican dos fuerzas de 10 N y 15 N en el punto *p*. La fuerza F_2 actúa todo el tiempo en la dirección de la barra, mientras que F_1 que se encuentra sobre el plano (*X;Y*) siempre forma un ángulo $\delta = 30°$ con el eje *X* (figura 6.44). La barra puede rotar libremente y sin rozamiento alrededor del eje *Z,* que además pasa por el punto *O*, la barra no se traslada por la mesa.

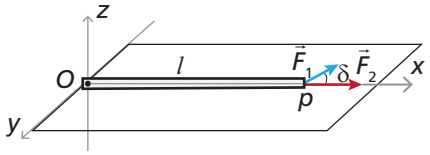


Fig. 6.44

a) Representa la fuerza que ejerce el eje de rotación sobre la barra.
b) Representa los torques que actúan sobre la barra.

c) Calcula el valor del brazo de cada una de las fuerzas que actúan sobre la barra.

d) Calcula el valor del torque de cada una de las fuerzas que actúan sobre la barra.

e) Conociendo que el momento de inercia de la barra respecto al punto *o* se puede calcular según la ecuación $I = \frac{ml^2}{3}$, determina el valor la aceleración angular de la barra.

17. ***Desafío.*** Se quiere que la barra de la figura 6.45 no rote ¿Cuál sería el valor de la fuerza mínima que tendríamos que aplicar sobre un punto 1 que se encuentra a la distancia $\frac{L}{4}$ del punto 0?

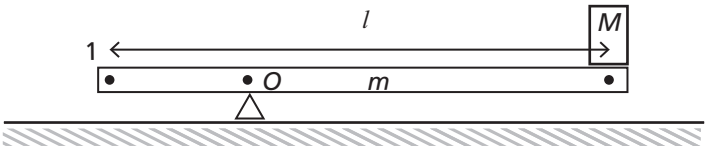


Fig. 6.45

18. ***Desafío.*** Una esfera de radio 2,0 cm y 50 g se coloca en la parte más alta de un plano inclinado de longitud 1,5 m que forma un ángulo α = 30° con la horizontal, como se muestra en la figura 6.46. Si la esfera esta inicialmente en reposo, determine el valor de la velocidad lineal y la angular de la esfera al llegar a la base del plano, cuando rota:

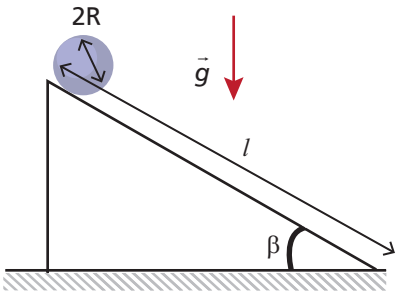


Fig. 6.46

a) Sin deslizar

b) Deslizando.

CAPÍTULO 7

Oscilaciones mecánicas

En los capítulos anteriores se ha tratado el estudio del movimiento de traslación de los cuerpos que se mueven en línea recta bajo la acción de una fuerza constante, el movimiento curvilíneo que describe un cuerpo lanzado en el campo gravitatorio de la Tierra y el movimiento circunferencial uniforme. También el estudio del movimiento de rotación de un cuerpo sólido.

En este capítulo ampliaremos y profundizaremos el estudio del movimiento de los cuerpos que oscilan, es decir, del movimiento mecánico oscilatorio (figura 7.1; el niño al moverse en el columpio realiza un movimiento en el que las posiciones se repiten cada cierto intervalo de tiempo).

Fig. 7.1 Ejemplo de movimiento mecánico oscilatorio

¿Por qué resulta de interés el estudio del movimiento oscilatorio?

Una primera razón es la de que el movimiento mecánico oscilatorio de los cuerpos se aprecia con mucha frecuencia en la naturaleza y en la técnica; por ejemplo, oscilan las cuerdas de una guitarra al ser pulsadas por el

intérprete, las moléculas de los gases que componen el aire cuando hablamos, los átomos que forman parte de la estructura de un cuerpo sólido, los pistones en un motor de combustión interna, etcétera.

También resulta importante el estudio de las oscilaciones mecánicas porque las ecuaciones que lo caracterizan se pueden utilizar para describir oscilaciones de otra naturaleza, como es el caso, por ejemplo, de las oscilaciones electromagnéticas.

Por otra parte, el estudio de los movimientos oscilatorios tiene un carácter básico para poder abordar los fenómenos ondulatorios que trataremos en el próximo capítulo.

¿? ¿Sabías que...?

El zunzuncito, perteneciente a la familia Colibrí, es el ave más pequeña del planeta y la geografía cubana tiene la suerte de ser uno de sus refugios. Su vuelo es extraordinariamente rápido, emitiendo con sus alas un sonido parecido al de un insecto, es el movimiento oscilatorio de sus alas, el que le permite permanecer en el aire, en una misma posición durante mucho tiempo, de esta manera es capaz de succionar el néctar de las flores sin la necesidad de apoyarse en las ramas de las plantas.

7.1 Movimiento mecánico oscilatorio y movimiento armónico simple: conceptos básicos

En este apartado recordaremos y precisaremos algunos conceptos básicos relacionados con el movimiento oscilatorio. En primer lugar:

¿Qué se entiende por oscilaciones?

En general, se llaman oscilatorios los procesos que en mayor o menor grado se repiten en el tiempo. En dependencia de la naturaleza del sistema, las oscilaciones pueden ser, por ejemplo, de carácter mecánico, electromagnético, o térmico, por solo citar algunos casos.

Por ejemplo, el movimiento de un columpio es un caso típico de oscilación mecánica, las variaciones de la tensión eléctrica en las redes domésticas o industriales de oscilación electromagnética y los cambios de temperatura durante un día de oscilación térmica.

En este tema nos limitaremos al estudio de las oscilaciones mecánicas.

Comencemos por analizar una situación concreta, por ejemplo, el caso del movimiento de un cuerpo sobre una superficie horizontal lisa bajo la acción

de la fuerza elástica ejercida por un resorte. En la figura 7.2 se representa una situación como la descrita: el sistema cuerpo-resorte se encuentra inicialmente sobre una vía de aire, en posición horizontal, con el resorte "relajado".

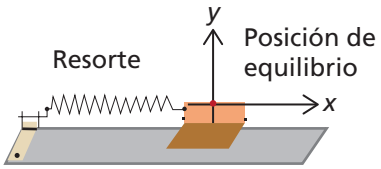


Fig. 7.2 En la posición mostrada la fuerza resultante sobre el cuerpo es nula y el cuerpo está en equilibrio

Si el cuerpo se desplaza hasta la posición mostrada en la figura 7.3, el resorte se estira y hala al cuerpo hacia la posición de equilibrio.

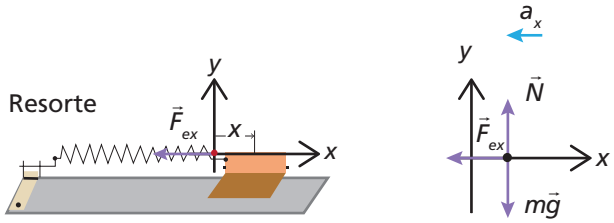


Fig. 7.3

Cuidado

Recuerda que la posición de equilibrio de un cuerpo es aquella en la que la fuerza resultante es nula y que ello no significa que el cuerpo este en reposo en dicha posición.

Si en estas condiciones el cuerpo se libera, se pone en movimiento bajo la acción de la fuerza elástica del resorte hasta llegar a la posición de equilibrio con cierta energía cinética y, en consecuencia, continua su movimiento y comienza a comprimir el resorte hasta que alcanza la posición mostrada en la figura 7.4, en la que se detiene instantáneamente.

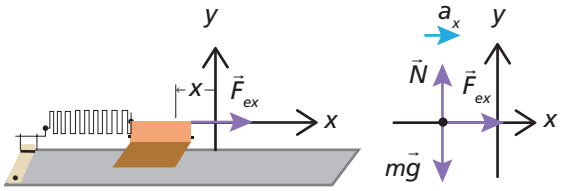


Fig. 7.4 En la posición mostrada el resorte comprimido empuja al cuerpo hacia la posición de equilibrio

Ahora el resorte comprimido empuja al cuerpo nuevamente hacia la posición de equilibrio y el proceso se repite, se dice entonces que el movimiento del cuerpo es oscilatorio o simplemente que el cuerpo oscila alrededor de la posición de equilibrio.

Como en la situación descrita se supone que la energía mecánica se conserva, el sistema se mantiene oscilando indefinidamente, cosa que, como sabemos, no sucede en la práctica pues la energía mecánica del sistema se va disipando y llega el momento en que el cuerpo de detendrá en la posición de equilibrio.

Notemos que, en este caso idealizado, la oscilación se produce como consecuencia de una fuerza que es interna del sistema cuerpo-resorte. A este tipo de oscilaciones se les denomina **oscilaciones libres no amortiguadas o simplemente oscilaciones libres.**

En general, en la naturaleza, las oscilaciones libres son **oscilaciones amortiguadas** pues cuando el sistema se separa de la posición de equilibrio y se libera, sobre el no solo actúan las fuerzas internas al sistema, sino también fuerzas externas disipativas.

Por lo tanto, para mantener un sistema oscilando es preciso restaurar la energía mecánica disipada y para ello se requiere de una fuerza externa. En este caso las oscilaciones se denominan **oscilaciones forzadas**.

En el caso del sistema cuerpo-resorte que hemos analizado, las magnitudes que caracterizan el estado mecánico del sistema, es decir, su posición, velocidad y aceleración, se repiten de forma regular cada cierto intervalo de tiempo. A las oscilaciones que cumplen esta condición se les denomina **oscilaciones periódicas.**

Recordemos y precisemos, antes de formular las ecuaciones que permiten describir el movimiento mecánico oscilatorio periódico, los términos de *amplitud, periodo, frecuencia y frecuencia angular*, que son algunas de las magnitudes específicas que se utilizan al analizar las oscilaciones mecánicas periódicas.

La **amplitud** de las oscilaciones, que se acostumbra a denotar por A o por x_m , es módulo del desplazamiento máximo, medido desde la posición de equilibrio, del cuerpo que oscila. En consecuencia, si se orienta el sistema de coordenadas con el eje X en la dirección del movimiento, el cuerpo oscilara entre las posiciones $x = A$ y $x = -A$, respecto a la posición de equilibrio.

El **periodo** de las oscilaciones, que se denota por *T,* es el tiempo que tarda una oscilación completa, es decir, el tiempo mínimo transcurrido en regresar a la posición inicial.

La **frecuencia**, que se denota por f o ν, es el número de oscilaciones en la unidad de tiempo, Su unidad, en el SI, se denomina hertz (en honor al físico alemán Heinrich Hertz, 1857-1894) y su símbolo es Hz.

La **frecuencia angular**, cuyo símbolo es ω, se define como $\omega = 2\pi f$ o, de forma equivalente, como $\omega = 2\pi/T$ y su unidad de medida en el SI es el s^{-1} o rad/s. Nota que si la frecuencia ν nos expresa el número de oscilaciones en la unidad de tiempo, la frecuencia angular ω lo que expresa es el número de oscilaciones en 2π unidades de tiempo. Aunque el término frecuencia angular nos resulta familiar (del estudio del movimiento circunferencial), más adelante veremos su utilidad para la descripción del movimiento oscilatorio.

De la historia

Salviati, en los *Diálogos*, se refiere al comportamiento de los péndulos. "Porque…separado el péndulo de plomo, cincuenta grados de la perpendicular y dejado desde allí en libertad; oscila, y pasando casi otros cincuenta grados más allá de la vertical, describe un arco de casi cien grados; y volviendo de por sí mismo hacia atrás, describe otro arco un poco menor, y continuando sus oscilaciones, después de haber cumplido un gran número de ellas, termina por quedar quieto. Todas y cada una de estas oscilaciones se cumplen en sendos tiempos iguales, tanto la de noventa grados, como la de cincuenta, la de veinte, la de diez, y la de cuatro. De modo que, en consecuencia, la velocidad del móvil va siempre disminuyendo, puesto que en tiempos iguales va recorriendo sucesivamente arcos cada vez menores. Algo semejante, y aun podríamos decir idéntico, efectúa el corcho pendiente de un hilo de igual longitud, con la única diferencia de que se reduce a la quietud durante menor número de oscilaciones, por ser menos apto, debido a su ligereza, para vencer el obstáculo del aire. No obstante, todas sus oscilaciones, grandes y pequeñas, se cumplen en tiempos iguales entre sí e iguales también a los tiempos de las oscilaciones del plomo." ¿Qué conclusiones, acerca de este tipo de movimiento oscilatorio, puedes sacar al terminar de leer este escrito?

Comprueba tus conocimientos

1. Cita algunos ejemplos de movimientos oscilatorios en la naturaleza, la técnica y la vida cotidiana. Explique por qué los considera como oscilatorios.

2. ¿A qué tipo de oscilaciones se les denomina libres? ¿Existen en la naturaleza oscilaciones de este tipo? Explica tu respuesta.
3. ¿Qué oscilaciones se denominan amortiguadas? Cite ejemplos.
4. ¿Qué oscilaciones se denominan forzadas? Cite ejemplos.
5. ¿Qué oscilaciones se denominan periódicas?
6. Defina los conceptos de amplitud, frecuencia, frecuencia angular y periodo de una oscilación. Diga qué relación existe entre la frecuencia y el periodo.

7.2 Movimiento armónico simple

El tipo de oscilaciones mecánicas más sencillo es el que ocurre bajo la acción de una fuerza recuperadora que es directamente proporcional al desplazamiento, medido respecto a la posición de equilibrio. Este el caso, por ejemplo, de un sistema cuerpo-resorte como el representado en la figura 7.1, donde la fuerza recuperadora F_x cumple con la ley de Hooke al deformarse el resorte:

$$F_x = -k\Delta x \qquad (7.1)$$

En general, a las fuerzas que tienden a llevar al cuerpo a su posición de equilibrio se les denomina fuerza recuperadora

A las oscilaciones que cumplen esta condición se les llama ***oscilaciones armónicas* simples** y por extensión se dice que el movimiento, en este caso, es un movimiento armónico simple o, de forma abreviada, MAS.

Según la segunda Ley de Newton $F_x = ma_x$, de manera que sustituyendo este valor en la ecuación 7.1 se obtendrá que:

$$ma_x = -k\Delta x$$

De donde se obtiene que:

$$a_x = -\frac{k}{m}\Delta x \qquad (7.2)$$

La ecuación 7.2 es la ecuación que describe el MAS. De inicio debemos destacar que la aceleración del cuerpo siempre tiene sentido contrario al del desplazamiento y que no permanece constante. Esto último nos indica que en este caso no podemos utilizar las ecuaciones que ya conocemos para los cuerpos que se mueven con aceleración constante. Como resolver esto lo veremos en el próximo epígrafe.

Por supuesto, no todos los sistemas oscilatorios periódicos son armónicos, entonces:

¿Por qué es importante estudiar el movimiento armónico simple?

Intentemos una primera respuesta a esta pregunta mediante un caso concreto: por ejemplo, las oscilaciones del llamado péndulo simple (figura 7.5) no son armónicas pues en este caso la fuerza de restitución tiene la forma:
$F = -mg\,sen\theta$, y no cumple con la condición establecida por la ecuación 7.1.

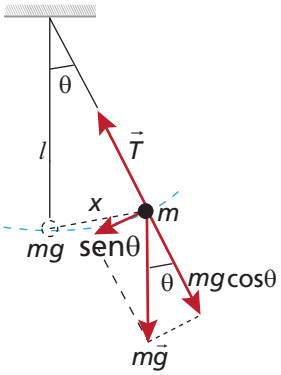


Fig. 7.5 Oscilaciones de un cuerpo puntual de masa *m,* suspendido de un hilo inextensible de masa despreciable, bajo la acción de la componente de la fuerza de gravedad $mgsen\theta$, de manera que no es directamente proporcional al desplazamiento del cuerpo y en consecuencia no son oscilaciones armónicas

Sin embargo, si las oscilaciones del péndulo son de pequeña amplitud, cosa que en la práctica se logra con un hilo suficientemente largo, la longitud del arco que describe el movimiento se aproxima a la longitud de la cuerda que lo subtiende y en estas condiciones, si el ángulo se mide en radianes, $sen\theta \approx \theta$, de manera que para la fuerza de restitución F_x se tendrá que:

$$F_x = -mg\theta = -mg\frac{x}{L}$$

De donde se obtiene que:

$$a_x = -\frac{g}{L}x \qquad (7.3)$$

Por lo tanto, en estas condiciones (oscilaciones de pequeña amplitud), las oscilaciones del péndulo se pueden considerar armónicas con muy buena aproximación.

Si bien, en este curso, nos limitaremos al estudio de las oscilaciones armónicas de los sistemas cuerpo-resorte y péndulo simple, existen muchas otras situaciones en que también se pueden estudiar las oscilaciones mediante el modelo de las oscilaciones armónicas con muy buena aproximación, incluso para el movimiento vibratorio de átomos o moléculas en un sólido. Justamente, en el hecho de poder estudiar los más variados tipos de oscilaciones utilizando el modelo de las oscilaciones armónicas, es que radica su gran importancia.

Comprueba tus conocimientos

7. ¿Qué oscilaciones son llamadas armónicas? Explica la importancia de estudiar este tipo de oscilaciones.

7.3 Ecuaciones del MAS

Las ecuaciones que permiten caracterizar al MAS pueden ser directamente deducidas a partir de la segunda Ley de Newton con relativa facilidad, pero ello requiere el uso de recursos matemáticos fuera del alcance de este curso.

Sin embargo, estas ecuaciones se pueden obtener por otras vías, una de las más recurridas, de carácter geométrico, es la de examinar el movimiento de la proyección de una partícula que se mueve con MCU sobre uno de los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas, lo que se puede encontrar en muchos libros de texto.

Como ya estamos familiarizados con el análisis de videos para el estudio del movimiento de un cuerpo, aquí utilizaremos este recurso.

Partiremos del caso de las oscilaciones de un péndulo (figura 7.6; La línea en rojo representa la trayectoria seguida durante las oscilaciones. Se ha añadido un sistema de coordenadas para apreciar como el arco descrito se aproxima a la cuerda que lo subtiende.) de aproximadamente 1,31 m de longitud en el que la amplitud de las oscilaciones es de 0,10 m. Nota que en estas condiciones la huella de la trayectoria (línea roja) de la esfera al oscilar es un arco que prácticamente coincide con la cuerda y, en consecuencia, el movimiento se puede considerar armónico con muy buena aproximación.

El cuerpo se deja oscilar a partir de la posición $x = 0{,}10$ m y se registran su movimiento cada 0,033 ms, mediante una cámara de video, durante un intervalo de tiempo igual a cuatro periodos de oscilación.

La gráfica de los datos de las posiciones (m) en función del tiempo (s), obtenida al analizar el video (con Tracker), se muestra en la figura 7.7.

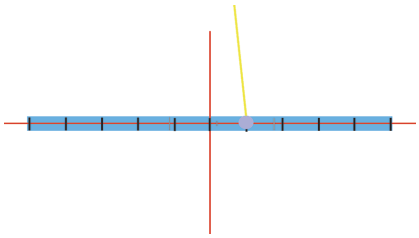


Fig. 7.6 Detalle de la instalación utilizada para estudiar las oscilaciones del péndulo. La línea en rojo representa la trayectoria seguida durante las oscilaciones. Se ha añadido un sistema de coordenadas para apreciar como el arco descrito se aproxima a la cuerda que lo subtiende

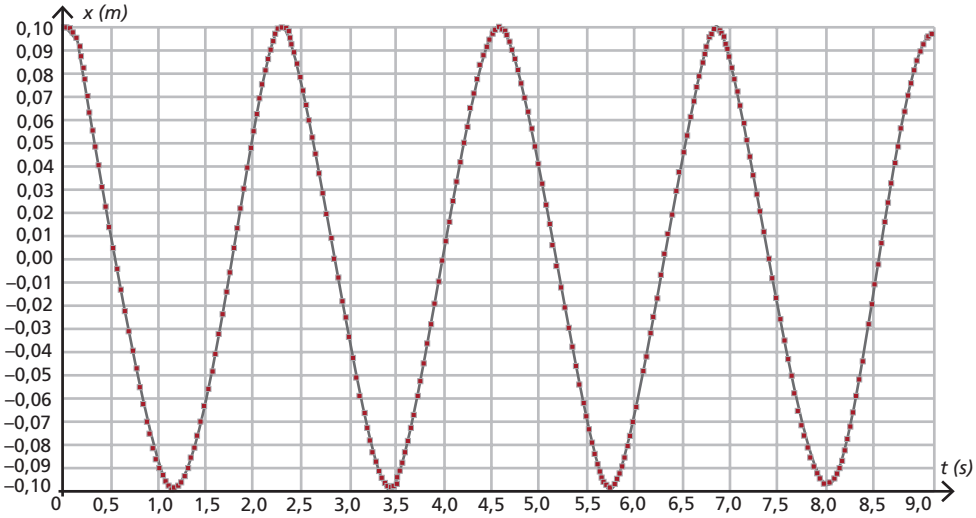


Fig. 7.7 Gráfica de las posiciones del péndulo en función del tiempo durante 4 periodos

Se puede comprobar que la gráfica del resultado experimental representada en la figura 7.7 se ajusta bien a una función del tipo:

$$x = x_m \cos\omega t$$

Donde $\omega = 2\pi f$ es la llamada frecuencia angular.

Esta ecuación se puede escribir de forma más general como:

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi) \qquad (7.4)$$

Al termino $(\omega t + \varphi)$ se le llama fase de las oscilaciones y al valor de φ fase inicial.

El valor de la fase inicial φ depende se las condiciones iniciales del movimiento. Por ejemplo, si en $t = 0$ el péndulo se encuentra en la posición

$x = 0$, moviéndose en el sentido negativo del eje X, entonces la ecuación que describe el movimiento será:

$$x = A\cos(\omega t + \pi/2), \text{ o:}$$
$$x = -A\text{sen}\omega t$$

La ecuación 7.4 sugiere, en correspondencia con las características del movimiento del péndulo, que los valores de la velocidad y la aceleración también dependerán del tiempo según una función seno o coseno. De hecho, si:

$$x = x_m\cos(\omega t + \varphi)$$

Se tendrá que:

$$v = -v_m\text{sen}(\omega t + \varphi) \quad (7.5)$$
$$a = -a_m\cos(\omega t + \varphi) \quad (7.6)$$

En estas ecuaciones $v_m = \omega x_m$ y (7.7)

$$a_m = \omega^2 x_m \quad (7.8)$$

En la figura 7.8 se muestra una comparación de las gráficas correspondientes a estas tres ecuaciones.

Nota que la ecuación 7.5 refleja el hecho de que, para este caso, en el instante inicial, donde $x = x_m$, el valor de la velocidad es cero y comienza a aumentar en el sentido negativo del eje X, hasta que alcanza su valor máximo al cabo de un cuarto de periodo, en que se encuentra en la posición $x = 0$. A partir de ese instante el valor de la velocidad comienza a disminuir y está dirigida en el sentido positivo del eje X hasta que al cabo de medio periodo el valor de su velocidad es cero y se encuentra en la posición $x = -x_m$. Ahora la velocidad comienza a aumentar en el sentido positivo del eje de las X hasta que alcanza su valor máximo en la posición $x = 0$, al cabo de tres cuartos de periodo y, a partir de este instante el valor de la velocidad comienza a disminuir en el sentido positivo del eje de la X, hasta que, al cabo de un periodo, se hace cero en la posición $x = x_m$ y a partir de este momento el proceso se repite.

En el caso de la aceleración (ecuación 7.6) se refleja que en el instante inicial la aceleración es máxima y tiene el sentido negativo del eje X y comienza a disminuir hasta que se anula en la posición $x = 0$ (posición de equilibrio). Después comienza a aumentar, hasta que nuevamente alcanza un valor máximo en la posición $x = -x_m$ y, a partir de ese momento comienza a disminuir en el sentido positivo del eje de las X, hasta que se anula al pasar por la posición de equilibrio. A partir de ese instante, comienza nuevamente a aumentar hasta que alcanza el valor máximo en la posición $x = 0$. Después el proceso se repite.

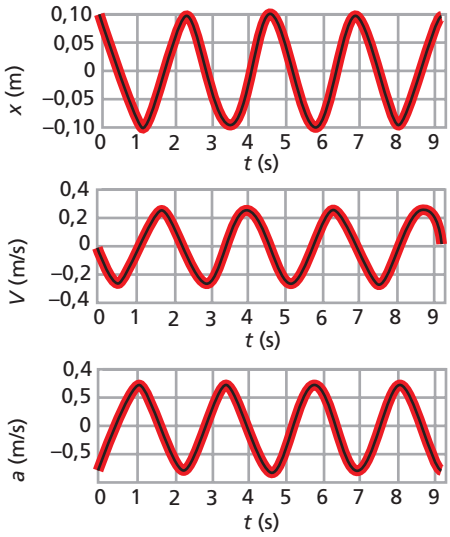


Fig. 7.8 Comparación de las gráficas de posición, velocidad y aceleración, en función del tiempo para el caso considerado del péndulo simple

Tabla 7.1 Valores de la coordenada, velocidad y aceleración para cada cuarto de periodo.

Tiempo	$t = 0$	$t = \frac{1}{4}T$	$t = \frac{1}{2}T$	$t = \frac{3}{4}T$	$t = T$
Coordenada (x)	x_m	0	$-x_m$	0	x_m
Velocidad (v)	0	$-v_m$	0	x_m	0
Aceleración (a)	$-a_m$	0	a_m	0	$-a_m$

De la historia

Huygens escribió en su libro *Horologium oscillatorum* que un péndulo

"…es un mecanismo un tanto "sorprendente": hay una aceleración de la gravedad –el péndulo "pesa", viene atraído por el centro de la Tierra– pero también hay una fuerza centrípeta, el esfuerzo de alejarlo del centro que es un efecto que se tiene en todo movimiento circular como el producido en la Tierra que gira alrededor de su eje. En el caso particular del péndulo las dos fuerzas son la gravitación y la *vis insita*, la fuerza de inercia. Por otro lado, el razonamiento hace que la energía del péndulo se disipe y suba, en cada oscilación, menos. Es decir, el razonamiento provoca que la elongación disminuya, lo que trae como consecuencia que el periodo cambie."

Por supuesto, las ecuaciones que 7.4, 7.5 y 7.6 describen el movimiento de cualquier sistema animado de un MAS y por consiguiente aplicables al caso del sistema cuerpo resorte (figura 7.1).

En el caso del sistema cuerpo resorte, para la frecuencia angular se tiene que:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (7.9)$$

De donde:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (7.10)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (7.11)$$

Como en el caso del péndulo simple el papel de k esta dado por la relación mg/L se tendrá que:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad (7.12)$$

De donde:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \qquad (7.13)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (7.14)$$

La relación 7.10 y, por tanto, la 7.12 se pueden inferir de la interesante relación geométrica entre el MAS y el MCU. Veamos esto con más detalle.

Relación entre el MAS y el MCU

Si consideramos un cuerpo puntual Q animado de un MCU con un radio de valor A y rapidez angular ω (figura 7.9), entonces $\varphi = \omega t$ y la proyección P del movimiento del cuerpo puntual Q sobre uno de los ejes coordenados, por ejemplo, el eje X, se moverá en correspondencia con la ecuación:

$$x = A\cos\omega t \qquad (7.16)$$

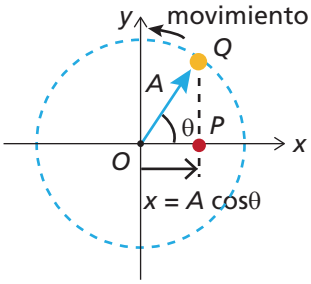


Fig. 7.9 La coordenada *x* del cuerpo puntual Q de ecuación $x = A\cos\omega t$

Esto significa que el movimiento de la proyección P será un MAS.

Si se hace este mismo análisis para la proyección sobre el eje *Y* se obtiene la ecuación:

$$y = A\text{sen}\omega t \text{ o}$$

$$y = A\cos(\omega t + \pi / 2) \qquad (7.14)$$

Esto nos conduce al importante resultado de que el MCU se puede considerar como la superposición de dos MAS mutuamente perpendiculares y desfasados en $\pi/2$. Más adelante veremos la utilidad de este resultado.

Por otra parte (figura 7.10), como el cuerpo puntual *Q* está sometido a una aceleración centrípeta de valor $a_Q = \omega^2 A$, el valor de la aceleración del movimiento de la proyección P estará dada por la ecuación:

$$a_x = -\omega^2 A\cos\omega t$$

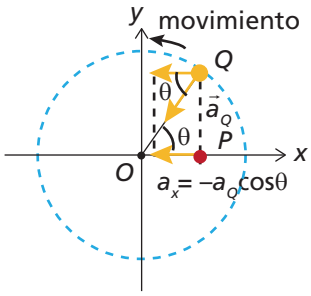


Fig. 7.10 La aceleración a_x del cuerpo puntual Q

Que, de acuerdo con 7.12, se puede escribir como:

$$a_x = -\omega^2 x$$

Por lo tanto, si m es la masa del cuerpo puntual, el valor de la fuerza que provoca el movimiento de la proyección P será:

$$F_x = -m\omega^2 x$$

Comparando esta fuerza con la fuerza recuperadora en los casos de los sistemas cuerpo resorte y péndulo simple, se obtienen las relaciones 7.7 y 7.10.

Por supuesto, la ecuación para el valor de la velocidad de la proyección análoga a la 7.5 se deduce directamente a partir de la figura 7.11.

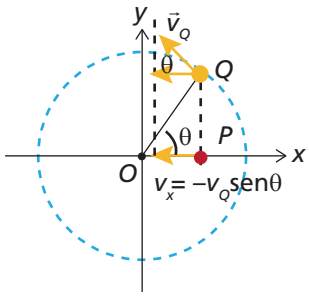


Fig. 7.11 La velocidad v_x del cuerpo puntual Q

Problema resuelto 7.1

Un sistema cuerpo resorte es separado de su posición de equilibrio estirando el resorte en 10 cm y, al soltarlo, comienza a oscilar armónicamente. Si la masa del cuerpo es de 7 kg y la constante elástica del resorte de 588 N/m.

a) Escribe las ecuaciones para la variación de la posición, la velocidad y la aceleración en función del tiempo.
b) Traza las gráficas correspondientes a cada una de las ecuaciones del inciso anterior.

Solución:

La siguiente figura, 7.12, ilustra la situación planteada en el problema:

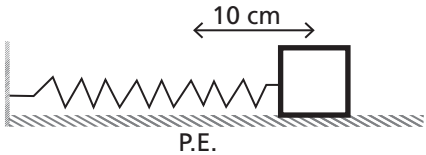


Fig. 7.12

La ecuación para la posición de este sistema responde a:

$$x = x_m cos(\omega t + \varphi_0)$$

Al analizar la figura el cuerpo se encuentra separado de la posición de equilibrio en 10 cm, la amplitud será:

$$x_m = 10 \text{ cm}$$

No conocemos la frecuencia angular y la fase inicial, pero como:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Los valores de estas magnitudes son datos en el problema.

$$\omega = \sqrt{\frac{588 \text{ N/m}}{7 \text{ kg}}}$$

$$\omega = 9{,}16 \text{ rad/s}$$

La fase inicial se determina mediante las condiciones iniciales: Como en este caso para $t = 0$, $x = 10$ cm, entonces

$10 = 10\cos(\omega t + \varphi_0)$ pero $\varphi_0 = 0°$

$x = 10\cos 9{,}16\ t$ (*cm;s*)

La ecuación del valor de la velocidad para el instante $t = 0$ es:

$$v = -v_m sen\omega t$$

$$v_m = \omega x_m$$

$$v_m = 10 \text{ cm} \cdot 9{,}16 \text{ rad/s}$$

$$v_m = 91{,}6 \text{ cm/s}$$

$$v = -91{,}6 \text{ sen } 9{,}16\ t \text{ (cm/s;s)}$$

La ecuación del valor de la aceleración para este instante.

$$a = -a_m cos(\omega t) \text{ donde:}$$

$$a_m = \omega^2 x_m$$

$$a_m = 10 \text{ cm} \cdot (9{,}16 \text{ rad/s})^2$$

$$a_m \approx 839 \text{ cm/s}^2$$

$$a_m = -839 \cos 9{,}16t \text{ (cm/s}^2\text{;s)}$$

Para trazar las gráficas de las tres magnitudes *x, v, a* es necesario conocer el período de las oscilaciones.

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$T = 0{,}22\pi s$$

Si se conocen los valores de las amplitudes de las oscilaciones de la posición, la velocidad y la aceleración el período y la ley que rigen dichas oscilaciones, las gráficas serían como en la figura 7.13.

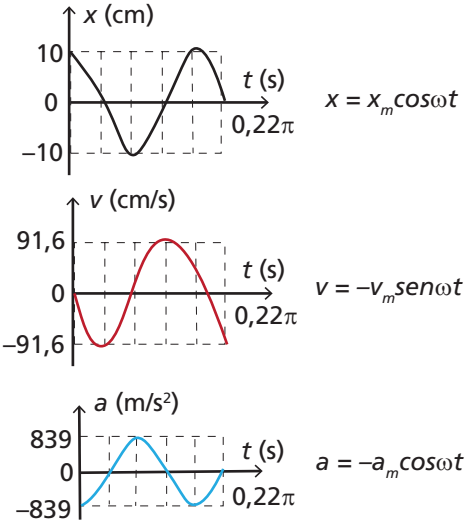


Fig 7.13

Problema resuelto 7.2

La posición de un cuerpo que oscila con un movimiento armónico simple se corresponde con la ecuación $x = 25\ \text{sen}4\pi t$, donde x se expresa en milímetros si el tiempo se mide en segundos.

a) Determina los valores de la amplitud, la frecuencia y el periodo de las oscilaciones.
b) Calcula el valor máximo de la velocidad y escribe la ecuación del valor de la velocidad en función del tiempo.
c) Calcula el valor máximo de la aceleración y escribe la ecuación del valor de la velocidad en función del tiempo.
d) Si el cuerpo que oscila es un péndulo simple, ¿cuál será su longitud?

Solución:

Como la ecuación que caracteriza al movimiento armónico tiene la forma:

$$x = x_m sen(\omega t + \varphi_0)$$

Y para este caso se conoce que:

$$x = 25 sen 4\pi t (\text{mm;s})$$

Entonces:

a) $x_m = 25$ mm

$\omega = 2\pi\nu$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\nu = \frac{4\pi \text{ rad/s}}{2\pi \text{ rad}}$$

$\nu = 2$ Hz

Y como

$$T = \frac{1}{\nu}$$

$$T = \frac{1}{2\ s^{-1}}$$

$$T = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ s}$$

b) $v_m = \omega x_m$

$v_m = 4\pi$ rad/s · 25 mm
$v_m = 100\pi$ mm/s
$v = v_m cos\omega t$ (mm/s;s)
$v = 100\pi\ cos 4t$ (mm/s;s)

c) $a_m = \omega^2 x_m$

$a_m = (4\pi \text{ rad/s})^2 \cdot 25$ mm
$a_m = 400\pi^2$ mm/s^2
$a = -a_m sen\omega t$(mm/s^2;s)
$a = -400\pi^2 sen 4\pi t$(mm/s^2;s)

d) $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$l = \frac{g}{\omega^2}$

$l = \frac{9{,}8 \text{ m/s}^2}{(4\pi \text{ rad/s})^2}$

l = 0,06 m

Problema resuelto 7.3

La gráfica (figura 7.14) corresponde a la variación de la posición en función del tiempo del movimiento de un cuerpo.

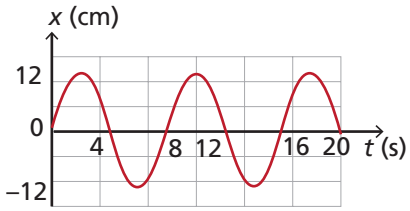


Fig. 7.14

a) Determina los valores máximos de la velocidad y la aceleración del cuerpo y di en qué posiciones se encontrará cuando tenga esos valores.
b) Escribe las ecuaciones para los valores de la posición, la velocidad y la aceleración en función del tiempo.

Solución:

La gráfica nos informa la amplitud de las oscilaciones, el periodo y la ley que rige las oscilaciones, en este caso se corresponde con el seno.

a) $v_m = \omega x_m$

Pero $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Donde T = 8 s y x_m = 12 cm

$v_m = \frac{2\pi}{T} \cdot x_m$

$v_m = \frac{2\pi \text{ rad}}{8 \text{ s}} \cdot 12 \text{cm}$

$v_m = 3\pi$ cm/s

$a_m = \omega^2 x_m$

$a_m = \left(\frac{\pi}{4}\ \text{rad/s}\right)^2 \cdot 12\ \text{cm}$

$a_m = 0{,}75\pi^2\ \text{cm/s}^2$

El valor de la magnitud velocidad es máximo cada vez que el sistema pasa por la posición de equilibrio, en ese instante la aceleración es cero. En las posiciones extremas la aceleración tiene el máximo valor y la velocidad es cero.

b) $x = x_m sen\omega t$

$x = 12\text{sen}\frac{\pi}{4}t\,(\text{cm;s})$

$v = v_m cos\omega t$

$v = 3\pi\, cos\frac{\pi}{4}t\,(\text{cm/s; s})$

$a = -a_m sen\omega t$

$a = -0{,}75\pi^2 sen\frac{\pi}{4}t\left(\text{cm/s}^2\text{;s}\right)$

Hora del laboratorio

Práctica de laboratorio 7.1

Estudio del movimiento oscilatorio de un sistema cuerpo-resorte

Objetivos: determinar la ecuación de las oscilaciones del sistema cuando oscila con MAS y trazar la gráfica en el caso de las oscilaciones amortiguadas.

Materiales: resorte, cuerpo de masa conocida, cámara de video (variante 1), sensor de movimiento (variante 2), soporte universal y accesorios para el montaje, computadora para el procesamiento de los datos.

Descripción y tareas:

1) Realiza un montaje como el representado en la figura 7.15.
2) Variante 1: Mediante la tecnología del análisis de video determina las posiciones del cuerpo durante dos periodos y procesa la información obtenida utilizando Tracker.
3) Variante 2: Mediante el sensor de movimiento registra las posiciones del cuerpo durante dos periodos y procesa la información obtenida utilizando el *software* apropiado.

a

b

Montajes: a) actividad 4; b) actividad 5

Fig. 7.15

4) Obtén la ecuación de cómo varía la posición en función del tiempo.
5) Mediante la variante utilizada repite el experimento para el caso de las oscilaciones amortiguadas (solo trazar la gráfica).
6) Tareas de ***desafío***:
   a) Obtén la ecuación para el caso de las oscilaciones amortiguadas.
   b) Mediante la herramienta de modelación de Tracker estudia como varían las oscilaciones al cambiar la masa del cuerpo y la constante del resorte.

Comprueba tus conocimientos

8. ¿Qué oscilaciones son llamadas armónicas? Explica la importancia de estudiar este tipo de oscilaciones.

9. Escribe las ecuaciones del movimiento oscilatorio de un sistema que comienza a oscilar en la posición:

a) De equilibrio
b) Extrema positiva

10. Oscilan en fase la posición, la velocidad y la aceleración en un MAS. Explica.

11. Un cuerpo está animado de un MAS. Completa la tabla siguiente, especificando donde las magnitudes son máximas o nulas, si en $t = 0$ el cuerpo pasa por la posición de equilibrio.

Tiempo	Elongación	Valor de la velocidad	Valor de la aceleración
0			
T/4			
T/2			
T/4			
T			

7.4 La energía en el Movimiento Armónico Simple

En el caso del MAS, como el trabajo de las fuerzas no conservativas es nulo, la energía mecánica del sistema se conserva.

Por ejemplo, en la figura 7.16 se ilustra el proceso de transformación de la energía para el caso de un sistema cuerpo-resorte animado de un MAS:

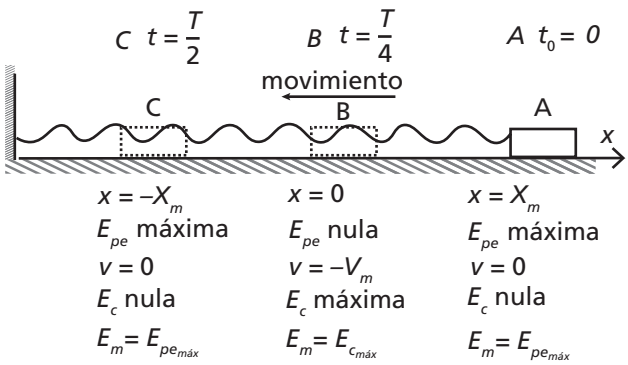


Fig. 7.16 Análisis de la energía durante el MAS de un sistema cuerpo-resorte

Para que el cuerpo se encuentre en la posición inicial A, se realizó trabajo (por una fuerza externa) para separarlo de la posición de equilibrio. Este trabajo en contra de la fuerza elástica, permitió que el sistema inicialmente tenga una energía potencial elástica máxima:

$$E_{p_{emáx}} = \frac{kx_m^2}{2}$$

En esta posición, la energía cinética es nula y como la energía mecánica es $E_M = E_c + E_{pe}$ entonces el valor de la energía mecánica inicial del sistema será:

$$E_{M_0} = E_{p_{emáx}}$$

Cuando inicia el movimiento (entre las posiciones A y B), la energía potencial elástica comienza a disminuir y a aumentar la energía cinética. Para cualquier valor de *x,* se cumple que $E_m = E_{M_0} = E_{p_{emáx}}$

En la posición B, la deformación del resorte es nula y toda la energía mecánica será cinética:

$$E_m = E_{cmáx}$$

En consecuencia, en la posición de equilibrio la energía cinética toma su valor máximo:

$$E_{cmáx.} = \frac{mv_m^2}{2}$$

A partir de la posición de equilibrio la energía cinética comienza a disminuir y a aumentar (entre las posiciones B y C). Durante todo este proceso la energía mecánica total permanece constante.

En la posición C, cuando ha transcurrido la mitad del período de la oscilación, la deformación del resorte es máxima y la velocidad instantánea es nula. En esta posición toda la energía mecánica es nuevamente potencial elástica:

$$E_m = E_{p_{emáx}}$$

En la siguiente media oscilación el proceso se repite y así sucesivamente.

En la figura 7.17 se representa la gráfica de la variación de la energía cinética y potencial en función de la posición.

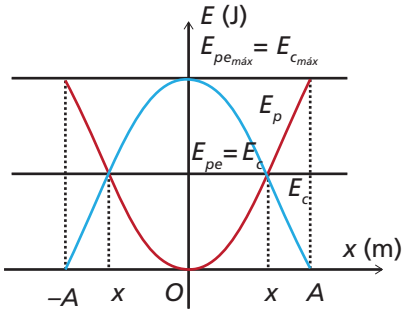


Fig. 7.17 Comportamiento de la energía mecánica en el MAS en función de las posiciones del sistema oscilante

Observa que para los valores de $x = 0$, $x = X_m$, $x = -X_m$, una energía es nula y la otra es máxima. También existe un valor de la posición, donde las energías cinética y potencial se igualan y cada una tiene el valor de la mitad de la energía total del sistema.

Problema resuelto 7.4

Para un sistema oscilatorio cuerpo-resorte, la constante recuperadora elástica es $k = 10^2$ N/m y el valor de la masa del cuerpo 4 kg. Si la amplitud es de 0,2 m, calcula los valores de la:

a) Energía potencial elástica máxima.
b) Energía cinética máxima.
c) Energía mecánica
d) Velocidad máxima

Solución:

Para el sistema cuerpo-resorte la energía potencial en cualquier posición está dada por $\frac{1}{2}kx^2$, por lo tanto:

$$E_{P_m} = \frac{1}{2}kx_m^{\ 2}$$

$$E_{P_m} = \frac{1}{2}1{,}0 \cdot 10^2 \text{N/m} \cdot \left(2{,}0 \cdot 10^{-1}\text{m}\right)^2$$

$$E_{P_m} = 2{,}0 \text{ J}$$

Como las oscilaciones son armónicas la energía mecánica se conserva, por lo tanto:

$$E_{C_m} = E_{P_m} = 2{,}0 \text{ J}$$

La energía mecánica es la suma de la energía potencial más la energía cinética del sistema $E_M = E_p + E_C$. En este caso, como se conoce que el valor máximo de E_p y E_C es de 2,0 J, entonces:

$$E_M = 2 \text{ J}$$

$$E_{C_m} = \frac{1}{2}mv_m^{\ 2}$$

$$v = \sqrt{\frac{2E_{C_M}}{m}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \text{ J}}{4 \text{ kg}}}$$

$$v = 1 \text{ m/s}$$

Comprueba tus conocimientos

12. ¿Depende el valor de la energía mecánica, de un sistema oscilador armónico, de la frecuencia de las oscilaciones?, ¿y de la amplitud de las oscilaciones?

13. Un sistema cuerpo-resorte está animado de un MAS. ¿Será igual su energía cinética a la potencial elástica cuando su posición es la mitad de la amplitud? Explica.

7.5 Oscilaciones forzadas. Resonancia

Ya conocemos que las oscilaciones armónicas libres son un modelo, que en la naturaleza las oscilaciones, como consecuencia de las fuerzas externas disipativas, se amortiguan y que para mantener un sistema oscilando es preciso que un agente externo reponga la energía que se disipa en el proceso.

En este último caso estamos en presencia de lo que hemos llamado oscilaciones forzadas. Analicemos con más detalles este caso.

La situación más sencilla de oscilaciones forzadas se presenta cuando el cuerpo es sometido a la acción de una fuerza externa cuyo valor responde a la ecuación:

$$F = F_m \text{sen}\omega' t$$

En esta ecuación F_m es el valor máximo de la fuerza y ω' su frecuencia angular.

En estas condiciones la posición del cuerpo dependerá del tiempo según una función seno, pero con la misma frecuencia ω' de la fuerza externa, que no depende de las propiedades del sistema oscilante.

En el caso de que la frecuencia de la fuerza externa ω' coincida con la frecuencia del sistema oscilante ω tiene lugar un fenómeno muy interesante e importante: la amplitud de las oscilaciones se hace máxima. Este fenómeno se conoce con el nombre de *resonancia de amplitud.*

En la figura 7.18 se muestra como depende la amplitud de las oscilaciones forzadas con la frecuencia. Nota que cuando la frecuencia propia del sistema oscilatorio coincide con la de la fuerza externas $\left(\frac{\omega'}{\omega} = 1\right)$, en condiciones de un amortiguamiento débil, la amplitud toma un gran valor y la curva es muy puntiaguda. Según sea mayor el amortiguamiento la curva se aplana, el máximo de amplitud tiene un valor menor y ocurre para una frecuencia menor que la propia.

Durante las oscilaciones forzadas ocurre también que el valor máximo de la velocidad depende de la frecuencia del agente externo y alcanza su valor máximo cuando la frecuencia propia del sistema coincide con la frecuencia del agente externo. Este fenómeno se llama *resonancia de velocidad.*

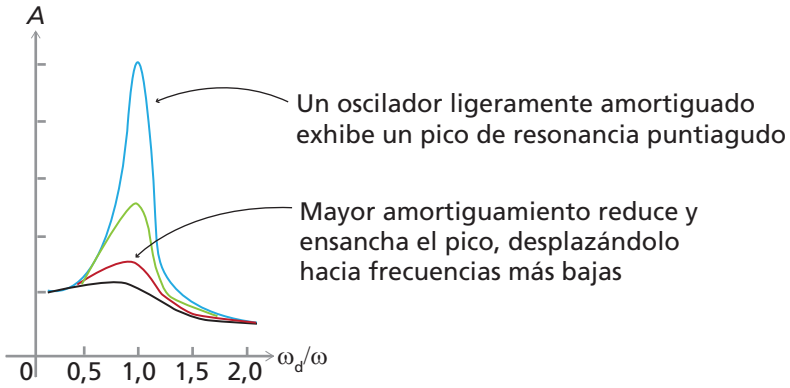


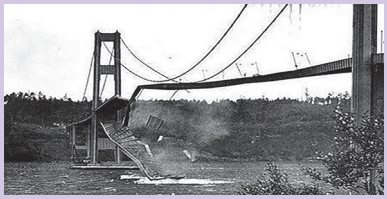
Fig. 7.18

¿Sabías que...?

Un jugador de baloncesto que realiza correctamente su *dribbling*, logra que la frecuencia con que su mano golpea el balón, coincide con la frecuencia con que él sube y baja. De lo contrario puede perder el control.

De la historia

El puente original de Tacoma Narrows se extendía 1 810 m para salvar un pequeño canal cerca de Tacoma, en el estado de Washington (Estados Unidos), ver en la figura. El puente fue abierto al tráfico el 1.º de julio de 1940. Cuatro meses después se vino abajo durante un temporal de viento con rachas que alcanzaron los 68 km/h. La catástrofe fue atribuida a la resonancia, que como vimos, una fuerza relativamente pequeña aplicada repetidamente aumenta la amplitud de un sistema oscilante. Esta fuerza repetitiva hizo que el puente se elevara y balanceara, hasta que finalmente se rompió y se precipitó al agua.



Como dato curioso, podemos añadir que a partir de la caída del puente, se utiliza en la ingeniería, un túnel de viento o túnel aerodinámico que es una herramienta de investigación desarrollada para ayudar en el estudio de los efectos del movimiento del aire alrededor de objetos sólidos como puentes y edificios. Con esta herramienta se simulan las condiciones que experimentará el objeto de la investigación en una situación real. Se varía la frecuencia del aire (agente externo) hasta encontrar la frecuencia de resonancia.

Comprueba tus conocimientos

14. Un sistema oscilante forzado tiene frecuencia propia ω_0. Si ω es la frecuencia de la fuerza externa, ¿cuál de los casos siguientes oscila en resonancia de amplitud?

a) $\omega < \omega_0$
b) $\omega > \omega_0$
c) $\omega = \omega_0$

15. Analiza desde el punto de vista energético las oscilaciones libres, las amortiguadas, las forzadas y el fenómeno de la resonancia.

Tareas generales del capítulo

1. Un péndulo simple es separado 5 cm de la posición de equilibrio hacia la derecha y es puesto a oscilar, el largo del hilo del que cuelga el cuerpo es de 1 *m* y se encuentra bajo la acción de la aceleración de la gravedad que podemos tomar como $g \approx 10$ m/s^2.

a) Halla el período de oscilación del péndulo simple.
b) Determina el valor de la frecuencia angular o cíclica.
c) Escriba la ecuación de la posición para este cuerpo que oscila con MAS.
d) Representa la gráfica $x = f(t)$ de estas oscilaciones, para un tiempo de un período.
e) Determina los valores máximos de la velocidad y de la aceleración.

2. La gráfica de la figura 7.19 nos muestra los diferentes valores de la posición de un sistema cuerpo-resorte, cuya masa es de 0,5 kg.

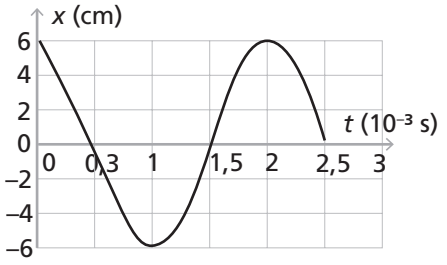


Fig. 7.19

a) Escribe la ecuación de la posición en función del tiempo para este movimiento.

b) Halla el valor de la constante elástica del resorte.
c) ¿Cuál es la máxima separación del cuerpo de la posición de equilibrio?
d) ¿Cuánto vale la velocidad a los $1{,}5 \cdot 10^{-3}$ s ?
e) ¿Cuál es el valor de la aceleración a los $2 \cdot 10^{-3}$ s?
f) Selecciona un instante de tiempo donde:

- El valor de la aceleración es cero.
- El valor de la velocidad es cero.
- La energía cinética es máxima.
- La energía potencial es máxima.

3. La ecuación del movimiento de un cuerpo que oscila armónicamente es

$$x = 4\,sen2\pi t \text{ (m;s)}$$

a) ¿Cuáles son los valores de la posición, la velocidad y la aceleración del cuerpo para $t = 0$ y $t = 0{,}25$ s?
b) Traza la gráfica de $x = (t)$ de este movimiento.

4. La ecuación $v = 2cos2\pi t$ (m/s;s) caracteriza el comportamiento de la velocidad de un sistema oscilatorio.
a) Determina la amplitud de las oscilaciones.
b) ¿Cuántas oscilaciones por segundo realiza el sistema?
c) Construye los gráficos de $x = f(t)$ y $a = f(t)$ planteando las ecuaciones correspondientes.

5. La gráfica de la figura 7.20, corresponde a las variaciones periódicas de la posición en función del tiempo de un péndulo simple.

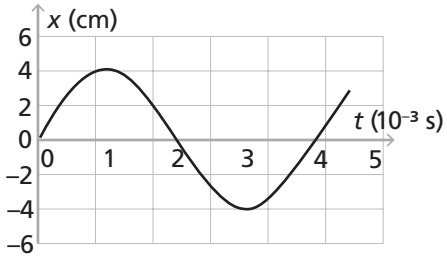


Fig. 7.20

a) ¿Cuál es el período de las oscilaciones?
b) Halla la frecuencia angular o cíclica.
c) ¿Cuál es el valor de la amplitud de las oscilaciones?
d) Escribe la ecuación del movimiento $x = f(t)$.
e) ¿Cuál es el valor de la velocidad y de la aceleración en el instante $3 \cdot 10^{-3}$ s?

6. La elongación de un sistema que se mueve con MAS varía con el tiempo según la ecuación: $x = 25\ sen 4\pi t$ (mm;s)
   a) ¿Cuál es el valor de la amplitud y de la frecuencia cíclica?
   b) ¿Cuánto vale el período y la frecuencia?
   c) Escribe las ecuaciones para los valores de la velocidad y la aceleración.
   d) Traza la gráfica de $x = f(t)$.
7. Una partícula oscila con una amplitud de 5 mm y se conoce que su aceleración máxima es de 78,96 m/s^2. Determina:
   a) La frecuencia angular o cíclica.
   b) El período de las oscilaciones.
   c) El valor máximo de la velocidad.
   d) Plantea la ley del movimiento si las oscilaciones comienzan a partir de la máxima elongación negativa.
8. Un cuerpo se desvía 2 cm a partir de la posición de equilibrio y se deja oscilar. ¿Qué parte del período habrá transcurrido cuando el cuerpo haya recorrido el primer centímetro?
9. Un sistema oscilatorio cuerpo-resorte está compuesto de un resorte cuya constante elástica es de 10^2 N/m y la masa del cuerpo es de 2,0 kg. Si se separa de la posición de equilibrio 0,20 m en el sentido positivo del eje *X.*
   a) Halla la energía potencial máxima.
   b) Determina la energía mecánica.
   c) Calcula el valor de la velocidad máxima.
   d) Halla el período de las oscilaciones.
   e) Escribe la ecuación de $x = f(t)$.
   f) Traza la gráfica de $x = f(t)$ del movimiento de este cuerpo.
10. Un cuerpo realiza oscilaciones armónicas, completando una oscilación en 2,5 s y separándose 4,0 cm de la posición de equilibrio.
    a) Calcula el valor de la frecuencia, el período y la frecuencia angular.
    b) Si el movimiento empieza en la máxima elongación negativa, plantea las ecuaciones de la posición, la velocidad y la aceleración en función del tiempo.
11. La gráfica $x = f(t)$ de lça figura 7.21, corresponde al MAS de un sistema. Determina:
    a) El valor de la velocidad máxima del cuerpo.
    b) El valor de la aceleración máxima.
    c) Los valores de velocidad y aceleración para $t = 5\ s$.

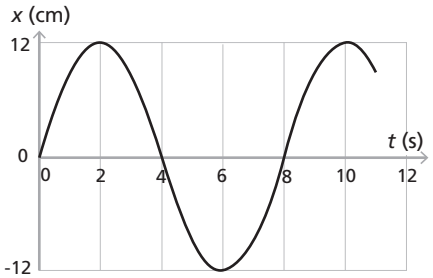


Fig. 7.21

12. Un péndulo simple de 1 m de largo y 0,20 kg, oscila con una amplitud de 0,50 cm Si en el instante inicial se encontraba en la posición extrema positiva y la aceleración gravitatoria es $g = 9{,}8\ m/s^2$, calcula:

a) La energía cinética máxima.
b) La energía potencial máxima.
c) La energía mecánica.
d) Los valores de la velocidad, aceleración y energía cinética que posee el sistema al cabo de 1 *s* de iniciado el movimiento.

13. En la figura 7.22, de un mismo alambre, cuelgan varios cuerpos atados de hilos de diferentes longitudes. Al poner a oscilar el péndulo P, ¿cuál de los demás péndulos oscilará con mayor amplitud? ¿Cómo explicas este fenómeno?

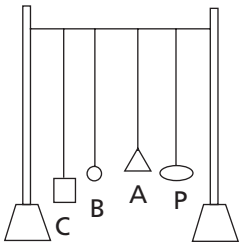


Fig. 7.22

14. La frecuencia angular de las oscilaciones propias de un sistema es de $10\pi\ s^{-1}$. Si sobre este sistema se ejerce una fuerza externa cuyo valor varía según la ecuación $F = 0{,}2cos\left(\frac{50}{5}\pi t\right)$. ¿Se logrará que en el sistema se alcance un máximo de amplitud? Justifica tu respuesta.

15. ***Desafío.*** Un péndulo realiza 10 oscilaciones mientras que otro, en el mismo tiempo realiza 6, la diferencia entre las longitudes de los péndulos es de 16 cm. Determina las longitudes de los péndulos.

16. ***Desafío.*** Un péndulo de longitud l realiza oscilaciones de período 0,5 s, ¿cuál será el valor del período de las oscilaciones de este péndulo si se coloca dentro de un elevador que sube con una aceleración de valor igual a 0,2 g?

17. ***Desafío.*** Cuando un tren del ferrocarril se mueve por una vía, al cruzar por los empates de los rieles se produce una vibración. Los empates están separados por una distancia de 12,5 m. Si en el vagón se coloca un péndulo simple de 44 cm de longitud, ¿para qué velocidad del tren se produce una mayor amplitud de las oscilaciones del péndulo matemático?

18. ***Desafío.*** Un tablero se mueve horizontalmente con MAS con una amplitud de 0,30 m y una frecuencia de 15 oscilaciones por minuto, ¿qué valor debe tener el coeficiente de rozamiento entre el tablero y un cuerpo para que éste no se deslice sobre el tablero?

19. **Con simulador.** Un cuerpo de 1,5 kg pende de un hilo inextensible y de masa despreciable, cuya longitud es 0,50 m. Al ser sacado de su posición de equilibrio y liberarse, comienza a oscilar. Se desprecia la fricción con el aire. Utilizando un programa para simulaciones, por ejemplo, Física Interactiva:
    a) Modela la situación descrita
    b) Di qué tipo de movimiento experimenta el cuerpo
    c) Obtén la gráfica de la posición en función del tiempo
    d) Utilizando los botones de control, varía la masa del cuerpo y describe qué le sucede a la amplitud de las oscilaciones. Justifica tu respuesta.
    e) Utilizando los botones de control, varía la longitud del hilo y describe qué le sucede a la amplitud de las oscilaciones. Justifica tu respuesta.
    f) Retornando a las condiciones iniciales del enunciado, activa la acción del aire sobre el cuerpo describe el comportamiento del fenómeno. Di qué tipo de oscilación posee el cuerpo en este caso.

20. **Con simulador.** Un cuerpo de masa *M,* pende de un resorte de constante elasticidad *k,* que se encuentra inicialmente deformado. Al liberarse el cuerpo, comienza a oscilar. Se considera que el fenómeno ocurre en el vacío.
    a) Utilizando Física Interactiva modela la situación descrita
    b) Determina qué le sucede a la amplitud de las oscilaciones si:
        - Aumenta la masa del cuerpo
        - La constante elástica del resorte fuese $2k$
        - El fenómeno ocurre bajo la influencia del aire.

CAPÍTULO 8

Ondas mecánicas

El *movimiento ondulatorio,* o simplemente las ondas, no es algo que nos resulte ajeno, tanto por sus manifestaciones en el mundo que nos rodea como por los estudios realizados en cursos anteriores, incluso, ya estamos familiarizados con algunas de sus características generales y específicas.

Este capítulo lo dedicaremos a ampliar y profundizar en el conocimiento de este fenómeno y resulta lógico que nos preguntemos sobre la necesidad e importancia de acometer esta tarea.

En primer término, recordemos que en la naturaleza y en la tecnología es muy frecuente este tipo de movimiento, sirva de ejemplo el conocido caso del sonido (figura 8.1), algo que es muy importante para la comunicación entre los seres vivos, entre otros aspectos.

Pero también sabemos que existen ondas de otra clase, que no necesitan del aire u otra sustancia para propagarse, como, por ejemplo, las luminosas.

En esencia, el estudio del movimiento mecánico ondulatorio nos permitirá dar una explicación unificada a un grupo de fenómenos aparentemente diversos y aplicar este estudio en otros campos de la Física.

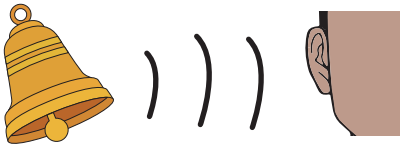


Fig. 8.1 Propagación, mediante el aire hasta el receptor, de las vibraciones producidas por la campana

8.1 Ondas. Características del movimiento mecánico ondulatorio

Recordemos algunos ejemplos de movimiento ondulatorio y que se entiende en general por una onda.

Un ejemplo de este tipo de movimiento cuando al extremo de una cuerda le damos una sacudida (figura 8.2), esta perturbación del estado mecánico se propaga a lo largo de la cuerda sin que esta se desplace como un todo en el sentido en que se mueve la perturbación.

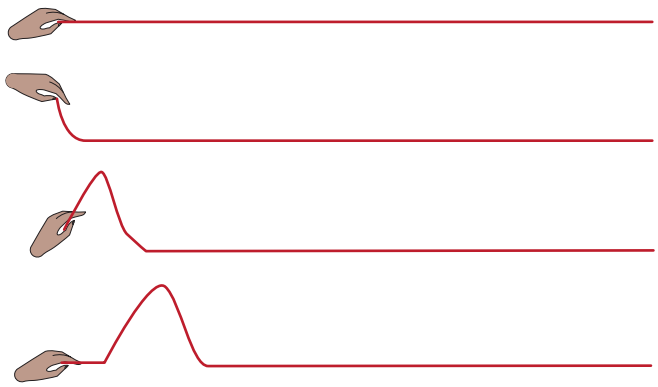


Fig. 8.2 Perturbación (pulso) que se propaga a lo largo de la cuerda generada por el movimiento de la mano hacia arriba y hacia abajo

Por supuesto, si se continúa moviendo el extremo de la cuerda se genera un pulso tras otro (figura 8.3) y eso da lugar a lo que se llama un tren de ondas o simplemente una onda.

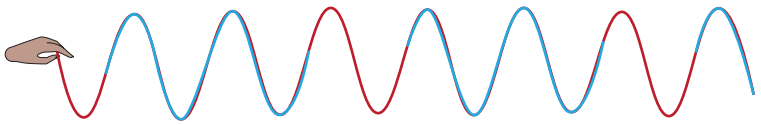


Fig. 8.3 Onda originada al hacer oscilar de forma continua el extremo de la cuerda

Otra situación muy familiar es cuando se deja caer una piedra en una piscina o estanque (figura 8.4), donde el agua está inicialmente tranquila, la perturbación provocada por la piedra se propaga en pequeñas olas en forma de circunferencias concéntricas, sin que por ello se desplace el agua, que solo adquiere un movimiento oscilatorio.

Fig. 8.4 Ondas en la superficie del agua por la caída de una piedra

En la figura 8.5 se ilustra también el caso de las ondas sonoras: al vibrar el cono del altavoz estas vibraciones se transmiten mediante el aire de manera que las sucesivas compresiones y enrarecimiento del aire se propaga sin que exista un movimiento del aire como un todo en la dirección en que se propagan las vibraciones.

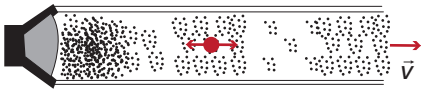


Fig. 8.5 Vibraciones del cono de la bocina que se transmiten a las moléculas del aire circundante

Conocemos que en todos estos casos estamos en presencia de un movimiento ondulatorio mecánico o simplemente de una onda mecánica.

En general:

Se denomina onda mecánica a la propagación de una perturbación de origen mecánico en un medio.

Recordemos ahora algunas de las características fundamentales de las ondas mecánicas.

En las ondas mecánicas, *las partículas del medio oscilan (vibran) respecto a su posición de equilibrio, no se desplazan en el medio en el cual se propagan,* esta es una de las características distintivas del movimiento mecánico ondulatorio.

Saber más

A diferencia de las ondas mecánicas, las ondas electromagnéticas no necesitan de un medio para propagarse.

En la figura 8.6, se representa que, en ausencia de sustancia, en este caso el aire, las vibraciones del timbre no pueden ser escuchadas, es decir no es posible que se genere una onda mecánica.

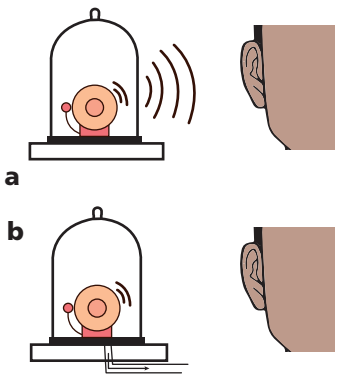


Fig. 8.6 Si se extrae el aire de la campana no se puede escuchar el timbre: a) el timbre oscila en la campana de una máquina neumática que contiene aire; b) el timbre oscila en la campana de una máquina neumática que no contiene aire

Otra importante característica del movimiento ondulatorio mecánico está relacionada con el mecanismo de su propagación. Examinemos esto con algo más de detalle, mediante el ejemplo de la propagación de una onda en un resorte largo (igual puede ser una cuerda) colocado sobre una superficie horizontal (figura 8.7).

Para mejor comprensión, se han señalado con un número diferentes puntos del resorte. Al desplazar (puede ser con la mano) hacia la derecha el punto 1, el resorte se estira y ejerce una fuerza sobre el punto 2, pero no de forma instantánea, sino después de un cierto intervalo de tiempo, debido a la inercialidad. Por esta razón, el movimiento oscilatorio del punto 2 no está en fase con el movimiento oscilatorio del punto 1. Nota que mientras mayor sea la densidad del resorte, mayor será su inercialidad y por tanto mayor la diferencia de fase del movimiento entre estos dos puntos. Cierto tiempo después de desplazado el punto 2, se comienza a desplazar el punto 3, después el punto 4 y así sucesivamente. De esta forma es que se propaga la onda por el resorte con una cierta velocidad, que por

supuesto no es la velocidad con que oscilan los diferentes puntos del resorte. Otro detalle que se debe observar (no se ha destacado en la figura) es que cuando el punto 1 ha realizado una oscilación completa, el punto que comienza a oscilar lo hace en fase con este punto y esa situación se repite para los puntos a los que llegue la onda después de un número entero de oscilaciones del punto 1.

Debemos señalar además que la velocidad de propagación de una onda, en general, depende de la densidad y de la elasticidad del medio por el que se propaga. Por ejemplo, en el caso de una onda que se propaga por la cuerda de un instrumento musical, la velocidad de propagación dependerá tanto de la densidad de la cuerda como de la tensión a que está sometida. Recordemos también el caso de las ondas sonoras que en el aire se propagan con una rapidez de aproximadamente 345 m/s (a temperatura y presión normales) y en el agua de mar de aproximadamente 1 500 m/s.

Si la perturbación que genera una onda es periódica, la onda tendrá también un carácter periódico, es decir, sus características se repiten cada intervalo de tiempo igual a un periodo. Si además de periódicas, las oscilaciones que general la onda son armónicas, la onda tendrá un perfil, en un instante determinado de tiempo, en forma de sinusoide.

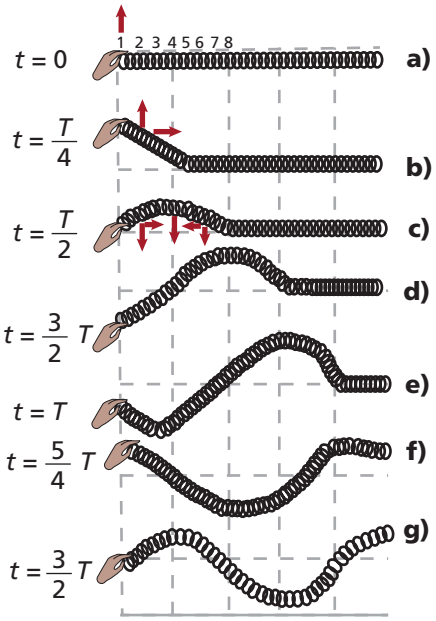
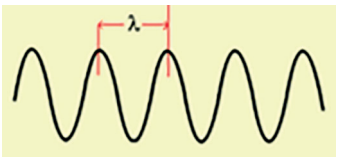
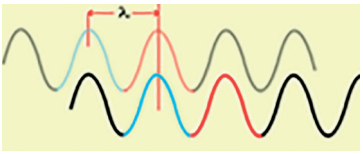
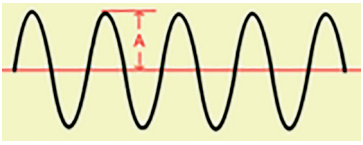


Fig. 8.7 Ilustración del mecanismo de transmisión de una onda en un resorte largo

Magnitudes que caracterizan a las ondas

Recordemos ahora que los parámetros cuantitativos que caracterizan a las ondas periódicas son: longitud de onda, periodo, frecuencia, velocidad de propagación y amplitud. En la tabla 8.1 se precisan cada uno de estos parámetros de forma resumida.

Tabla 8.1

Magnitud	Símbolo y unidad en el SI	Definición	Ilustración de apoyo o fórmula relacionada
Longitud de onda	λ, metro (m)	Distancia mínima entre dos puntos consecutivos del medio que oscilan en fase	
Periodo	T, segundo (s)	Tiempo que la onda tarda en recorrer una longitud de onda o, lo que es lo mismo, tiempo en que cualquier punto del medio realiza una oscilación completa.	
Frecuencia	f o ν, Hertz (Hz)	Número de oscilaciones que un punto del medio realiza en la unidad de tiempo.	$f = \frac{1}{T}$ o $\nu = \frac{1}{T}$
Rapidez de propagación	v, $\frac{\text{metro}}{\text{segundo}}\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$	Distancia recorrida por la onda en la unidad de tiempo.	$\nu = \frac{\lambda}{T}$
Amplitud	A o x_m, metro (m)	Elongación máxima con-que oscilan las partículas del medio por el que se propaga la onda.	

Tipos de ondas

También sabemos que, en el caso de las ondas mecánicas, las partículas del medio, por el que se propaga la onda, pueden oscilar en dirección perpendicular a la dirección de propagación, por ejemplo, es el caso de las ondas que se propagan por una cuerda (figura 8.3). En este caso la onda se denomina ***onda transversal***.

Pero, las partículas del medio también pueden oscilar en la misma dirección en que se propaga la onda, un ejemplo de este caso es el de las

ondas sonora (figura 8.5) o el de las ondas en un resorte, como se ilustra en la figura 8.8. Este tipo de onda de denomina ***onda longitudinal***.

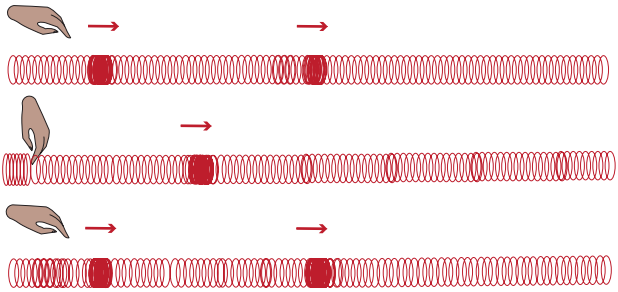


Fig. 8.8 Onda longitudinal en un resorte

También puede ocurrir que las partículas del medio oscilen tanto de forma transversal como longitudinal. Este es el caso, por ejemplo, de las ondas que se generan en la superficie del agua. En el caso particular que estas oscilaciones difieran en una fase de $\pi/2$ las partículas tendrían un movimiento circunferencial (figura 8.9). Nota que una situación similar se produce cuando una piedra cae sobre la superficie del agua en un estanque.

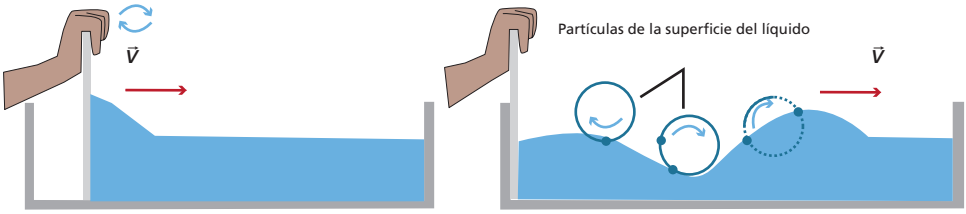
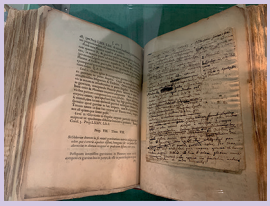


Fig. 8.9 Ondas generadas en la superficie del agua

De la historia



En el libro *Principia,* Newton muestra su interés por la mecánica de las vibraciones en un medio elástico y esto lo lleva al dominio de la acústica. Reconoce que las vibraciones sonoras son longitudinales y plantea la primera fórmula para la velocidad del sonido, que encuentra proporcional a la raíz cuadrada del cociente de la elasticidad (presión) por la densidad del aire. Esta fue la primera aproximación teórica que se dio para la velocidad real del sonido (que en condiciones normales de temperatura fija esa velocidad en 300 m/s), la segunda aproximación no apareció hasta comienzos del siglo XIX. En este libro escribe que:

"Todo cuerpo vibrante en un medio elástico propagará el movimiento de sus pulsaciones en directo hacia todas partes; en cambio, en un medio no elástico, excitará un movimiento circular."

"Por cuanto que las partes del cuerpo vibrante que van y vienen alternativamente, con su ida urgirán y empujarán a las partes del medio que están inmediatas a ellas, y al urgirlas las presionarán y las condensarán; y después con su retorno dejarán a las partes presionadas retroceder y expandirse. Por tanto, las partes del medio próximas al cuerpo vibrante irán y regresarán alternativamente, a la par de las partes del dicho cuerpo vibrante: y por la misma razón que las partes de este cuerpo agitaban a estas partes del medio, estas a su vez perturbadas por vibraciones semejantes agitarán a las partes inmediatas a ellas, y estas agitadas igualmente agitarán a las siguientes y así, sucesivamente, hasta el infinito."
"Que el medio no sea elástico: puesto que sus partes presionadas por las partes vibrantes del cuerpo vibrante no pueden condensarse, el movimiento se propagará instantáneamente hacia las partes donde el medio cede con facilidad, es decir, a las partes que el cuerpo vibrante dejase vacías tras él por el otro lado."

Cuando las ondas se propagan en una sola dirección, como en el caso de las que se generan en una cuerda, se denominan **unidimensionales.**

Si se propagan en un plano, como las ondas en la superficie del agua, se denominan **bidimensionales.** En muchos casos las ondas bidimensionales se propagan en forma de circunferencias concéntricas o de rectas, en el primer caso se dice que son ondas circunferenciales o circulares y en el segundo que son ondas planas (figura 8.10).

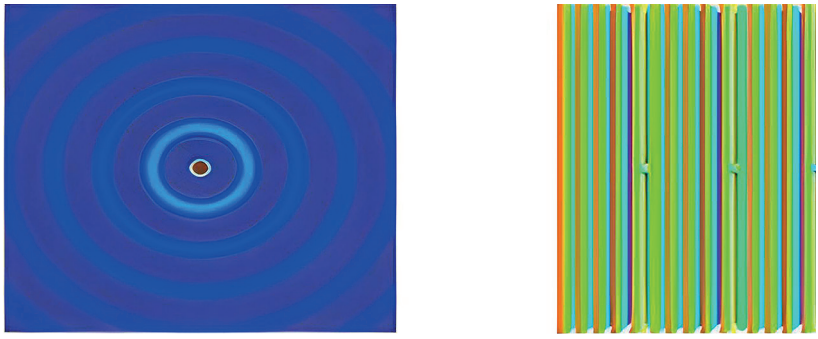


Fig. 8.10 Ondas planas (derecha) y circunferenciales (izquierda) generadas en la superficie del agua

Si se propagan en el espacio, como las ondas sonoras en el aire, se denominan **tridimensionales.** Un caso muy frecuente de este tipo de ondas son las ondas esféricas, es decir, cuando se propagan en forma de esferas concéntricas, como es el caso de las que se origina en una fuente sonora

puntual en reposo respecto al medio (homogéneo e isótropo) en que se propagan (figura 8.11).

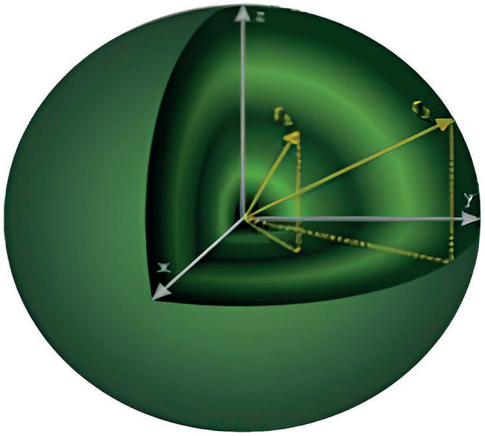


Fig. 8.11 Recreación de una onda esférica generada por una fuente puntual

Representación geométrica de las ondas

Las representaciones de las ondas mostradas en las figuras 8.10 y 8.11 nos resultan familiares, pero, ¿qué reflejan estas representaciones?

El lugar geométrico de todos los puntos, del medio por el que se propaga la onda, se denomina frente de onda. Justamente, lo que representan las rectas o circunferencias en las figuras 8.10 y 8.11 es el lugar geométrico de todos los puntos que oscilan en fase en un instante determinado. La distancia entre estas líneas es por lo tanto de una longitud de onda.

Una forma más simple de representar una onda es mediante **rayos**. Los rayos son líneas perpendiculares al frente de onda y nos indican la dirección de propagación de la onda. En la figura 8.12 se representan mediante frentes de onda y rayos, onda planas, circunferenciales y esféricas.

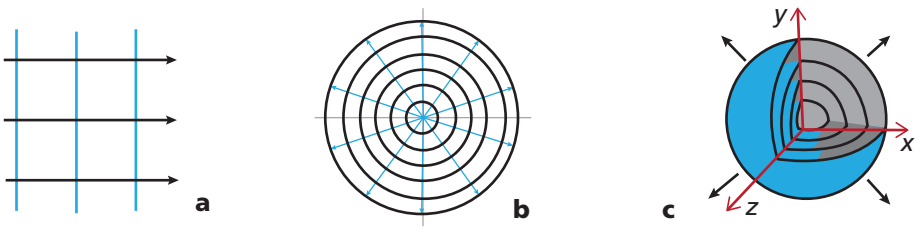


Fig. 8.12 Representación esquemática mediante frentes de onda y rayos: a) ondas planas; b) circunferenciales; c) esféricas.

Ya conocemos que una característica esencial del movimiento ondulatorio es que lo que se desplaza es una oscilación (en general una perturbación) y no el medio como un todo. Pero es importante notar que la energía y la cantidad de movimiento generadas por las oscilaciones de la fuente si se propaga con la velocidad de la onda y que en el caso de las ondas circunferenciales o esféricas la amplitud de las oscilaciones disminuye con la distancia a la fuente, aunque no existan efectos disipativos. **Esto se explica debido a que al alejarse los frentes de onda la energía se distribuye por una mayor longitud o área, según sea el caso.**

Comprueba tus conocimientos

1. ¿Qué es una onda mecánica?
2. ¿Cuál es la diferencia entre las ondas transversales y las longitudinales?
3. Describe el proceso de propagación de una onda transversal en un resorte fino y largo.
4. ¿Cómo representar de forma geométrica una onda circunferencial y una esférica?
5. Menciona ejemplos de la vida cotidiana de ondas esféricas y circunferenciales.

8.2 Ecuación del movimiento ondulatorio

¿Cómo calcular la coordenada o posición y, de cada partícula del medio que está separada a una distancia *x* del foco de la onda?

Estudiaremos ahora la ecuación que nos permite determinar la coordenada de cada punto del medio por el que se propaga una onda, en función del tiempo, o sea, la ecuación del movimiento ondulatorio. Vamos a limitar nuestro estudio al caso de las ondas armónicas unidimensionales, es decir, a la propagación de una oscilación armónica en una sola dirección, esto permite una mayor simplicidad en el conocimiento de las ideas esenciales sin perder en generalidad, pues lo estudiado para este tipo de ondas puede ser generalizado con relativa facilidad.

Supongamos que el punto en el cual se producen las oscilaciones armónicas que se propagan unidireccionalmente y que en lo adelante llamaremos *fuente* o *foco de las ondas,* oscila en correspondencia con la ecuación:

$$y = sen\omega t$$

Como ya conocemos, esta oscilación se va propagando a todos los puntos del medio con cierto retraso de fase respecto al foco. Si la onda llega al punto *P* situado a una distancia *x* (figura 8.13) al cabo de un intervalo Δt y se supone que las oscilaciones no se amortiguan, la elongación de dicho punto en función del tiempo vendrá dada por la ecuación:

$$y = sen\omega\,(t - \Delta t)$$

Donde, si la velocidad de propagación es constante e igual a *v:*

$$\Delta t = \frac{x}{v}$$

y la ecuación toma la forma:

$$y = sen\left(\omega t - \omega\frac{x}{v}\right) \qquad (8.1)$$

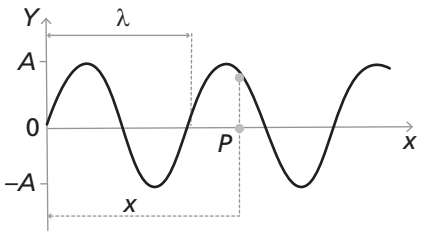


Fig. 8.13 Perfil de la onda en un instante determinado

Si tomamos, además, en consideración que $\omega = 2\pi/T$ y que $v = \lambda/T$, se tendrá que:

$$\omega\frac{x}{v} = \frac{2\pi}{T}\frac{x}{v} = \frac{2\pi}{T}\frac{x}{\lambda/T} = \frac{2\pi}{\lambda}x = kx\,,$$

donde $k = 2\pi/\lambda$

La constante *k* es análoga a ω pero en sentido espacial, es decir, *k* es el número de λ en 2π rad.

En términos de los parámetros ω y *k,* la ecuación (8.1) adopta la forma:

$$y = Asen\,(\omega t - kx) \qquad (8.2)$$

Entonces, esta es la ecuación que describe una onda transversal que se propaga en una sola dirección (en este caso, en el sentido positivo del eje *X*).

Si la onda se propaga en el sentido negativo del eje *X*, entonces, el signo menos que aparece en el argumento de la función será positivo.

Analicemos los gráficos de esta ecuación. Como $y = f(t,x)$, es decir, *y* es función de *t* y de *x,* tendremos que esta ecuación estará caracterizada por

dos gráficos: el de $y = f(t)$ para cada valor de x (figura 8.14 a) y el de $y = f(x)$ para cada instante de tiempo (figura 8.14 b)

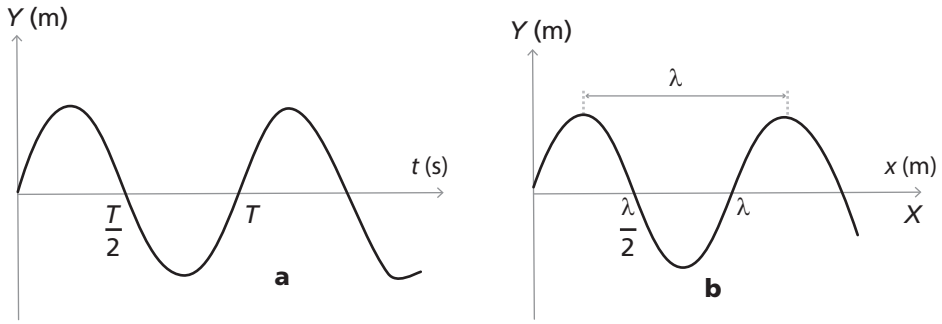


Fig. 8.14 Gráficas: a) de $y = f(t)$; b) de $y = f(x)$

La gráfica 8.14 a) representa cómo varía en función del tiempo la elongación de un punto de coordenada *X,* es decir, es la gráfica de la ecuación del movimiento de cada uno de los puntos de la región por la cual se propaga la onda. La gráfica 8.14 b) representa la configuración de la onda en un instante determinado de tiempo, o sea, es la gráfica de la ecuación de la elongación en función de la coordenada de cada punto para un instante de tiempo determinado. En sentido figurado podemos decir que esta última gráfica es como uno fotografía de la onda en un momento determinado.

Problema resuelto 8.1

Una onda transversal se propaga en el sentido positivo del eje de las *X*. Su amplitud es 0,2 m, el período de oscilación 2,0 s y la rapidez con se propaga 0,25 m/s. La partícula fuente de la onda se encuentra, en el instante inicial, en el origen de coordenadas y comienza a moverse en el sentido positivo del eje de las *Y*.

a) Escribe la ecuación general de este movimiento ondulatorio.
b) Calcula el valor de la posición *y*, para un punto situado a 4,0 m de la fuente, en el instante $t = 16$ s.
c) Construye las gráficas de $y = f(t)$ para la partícula fuente de la onda y de $y = f(x)$ para en el instante $t = 0$.

Solución:

a) De forma general la ecuación para esta onda es: $y = A\text{sen}\,(\omega t - kx)$, para este caso:

$A = 0{,}2$ m

$T = 2{,}0$ s

$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

$\omega = \pi \dfrac{rad}{s}$, la constante $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ y $\lambda = \dfrac{v}{\nu}$ por lo que $k = \dfrac{2.\pi.\nu}{v}$

$k = 4\pi \dfrac{rad}{m}$ entonces la ecuación general se puede escribir como:

$y = 0{,}2 \operatorname{sen}(\pi t - 4\pi x)$

b) Evaluando la ecuación para los valores dados de x y de t

$y = 0{,}2\, sen\left(\pi \dfrac{\text{rad}}{\text{s}} 16 \text{ s} - 4\pi \dfrac{\text{rad}}{\text{m}} \cdot 4 \text{ m}\right)$; $y = 0{,}20\, sen\ (16\pi \text{ rad} - 16\pi \text{ rad})$ m,

entonces:

$y = 0$ m.

c) Evaluando la ecuación para $x = 0$, se obtiene para $y = f(t)$ la gráfica representada en la figura 8.15 (para un periodo) y evaluando la ecuación para $t = 0$ se obtiene para $y = f(x)$ la gráfica representada en la figura 8.16.

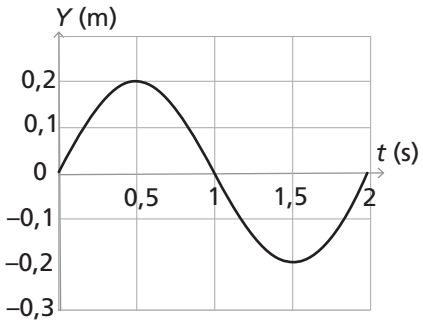


Fig. 8.15

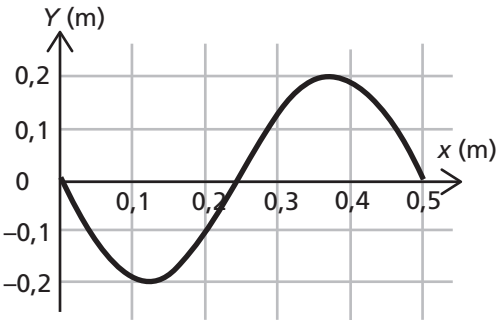


Fig. 8.16

Comprueba tus conocimientos

6. Escribe la ecuación general de una onda transversal que se propaga en el sentido positivo del eje de la X. ¿Qué cambia en la ecuación si la onda se propaga en el sentido negativo del eje de las X.

7. En una gráfica de $y = f(t)$ ¿cómo se denomina el tiempo que transcurre entre dos puntos de la onda que oscilan en concordancia de fase?

8. En una gráfica de $y = f(x)$, di el nombre de la distancia entre dos puntos de la onda que oscilan en concordancia de fase.

9. Analiza las magnitudes que aparecen en las ecuaciones A, B, C y D.

A) $y = 50\ sen\ (2\pi t - \pi x)$(cm;s) B) $y = 10\ sen\ (4\pi t - \pi x)$(cm;s)
C) $y = 50\ sen\ (4\pi t - 2\pi x)$(cm;s) D) $y = 2{,}0\ sen\ (4\pi t - 0{,}5\pi x)$(cm;s)

a) ¿Cuáles son las ondas que tienen igual amplitud?
b) ¿Cuáles son las ondas que tienen igual frecuencia? ¿Cuáles iguales longitud de onda? ¿Cuáles se propagan con la misma rapidez?

8.3 Propiedades de las ondas

Cuando una onda que se propaga en un medio homogéneo y encuentra a su paso un obstáculo, o cuando pasa a otro medio de características distintas, se producen una serie de fenómenos peculiares del movimiento ondulatorio.

Algunos de estos fenómenos, que estudiaremos a continuación, son: **la interferencia**, que es el resultado de la superposición bajo ciertas condiciones, de dos o más ondas en una determinada región del espacio; **la reflexión y la refracción**, que se producen cuando una onda alcanza la zona de separación entre dos medios; **la difracción**, que consiste en la desviación de la dirección de propagación al pasar la onda por el borde de un obstáculo; y el **efecto Doppler**, que consiste en el cambio de longitud de onda cuando la fuente se mueve respecto al observador. Algunos de estos fenómenos ya nos resultan conocidos o familiares de nuestros estudios sobre los fenómenos ópticos y sonoros en cursos anteriores, en estos casos lo que haremos será profundizar en el conocimiento de ellos.

Interferencia de las ondas

Analicemos qué sucede cuando dos o más ondas se encuentran en determinada región del espacio. Comencemos considerando un caso sencillo, el de dos pulsos de igual amplitud que se propagan a lo largo de una cuerda, uno al encuentro de otro.

En la secuencia de los esquemas de fotos estroboscópicas mostradas en la figura 8.17 puede observarse cómo al coincidir los pulsos, la amplitud de la oscilación resultante es igual a la suma de las amplitudes que producirían independientemente cada uno de los pulsos por separado, y que después cada uno de los pulsos continúa propagándose sin haber sufrido ninguna alteración.

En general, la amplitud de la oscilación resultante en un punto donde se superponen dos ondas, depende de las amplitudes de cada una de las ondas y de la relación entre sus fases

En el caso de la situación mostrada en la figura 8.17 a), donde las amplitudes de los pulsos son iguales y las oscilaciones tienen la misma fase, la amplitud resultante es el doble de la amplitud que provocarían los pulsos por separado en cada uno de los puntos. Los pulsos A y B, de iguales amplitudes y fases, se mueven a lo largo de la cuerda, uno al encuentro del otro y en la región del encuentro las elongaciones se duplican para después seguir su movimiento sin haber sufrido ninguna alteración.

En el caso correspondiente a la figura 8.17 b, donde las amplitudes también son iguales, pero las fases son opuestas, la amplitud resultante es nula. Los pulsos A y B, de iguales amplitudes y fases opuestas, se mueven a lo largo de la cuerda uno al encuentro del otro y en la región del encuentro las elongaciones se anulan para después seguir su movimiento sin haber sufrido ninguna alteración.

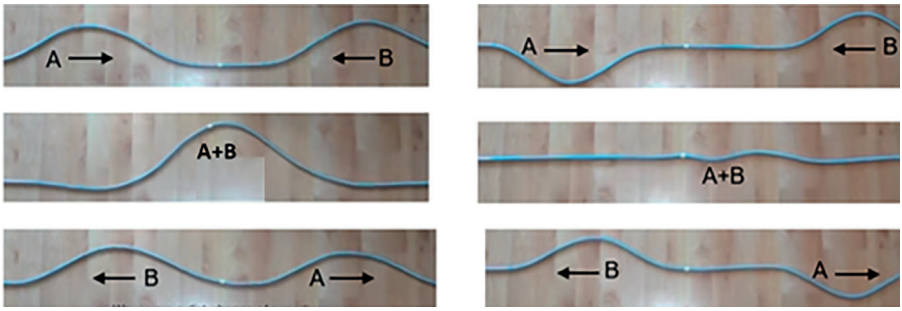


Fig. 8.17

Si la dirección de las oscilaciones que se propagan no tiene la misma dirección la suma de las amplitudes deberá hacerse de manera vectorial y no algebraica.

Este fenómeno tiene lugar siempre que se superponen dos ondas de cualquier tipo y recibe el nombre de **principio de superposición.**

> **El principio de superposición de las ondas plantea que cuando dos o más ondas se propagan en un medio y coinciden en determinada región, sus elongaciones se suman y continúan propagándose independientemente unas de las otras, es decir, sin ningún tipo de alteración.**

Es importante destacar que este es un fenómeno característico de las ondas, que refleja una situación muy diferente a la que se produce cuando dos cuerpos en movimiento coinciden en un lugar determinado (chocan), produciéndose, en general, un cambio en el estado mecánico después de la interacción.

Si en los extremos de la cuerda se generan oscilaciones periódicas de igual frecuencia y fase (o con una diferencia de fase constante), al superponerse las ondas darán lugar a un patrón estable; esto significa que los puntos en los que las amplitudes se anulen (llamados nodos) no cambiarán en el trascurso del tiempo (figura 8.18). A este fenómeno es al que se le llama interferencia de ondas y a la configuración de la onda resultante de la superposición se le denomina patrón o cuadro de interferencia.

Fig. 8.18 La cuerda por la que se superponen las dos ondas (la que se propaga hacia la derecha y la que se propaga a la izquierda) se superponen dando lugar a un patrón, como el mostrado en la figura, donde en ciertos puntos las elongaciones se anulan y en otros alcanzan la mayor amplitud

Las ondas procedentes de focos diferentes y cuya diferencia de fase en cada punto se mantienen constante en el transcurso del tiempo se denominan ***ondas coherentes,*** y a los focos que originan dichas ondas también se les denomina focos *cohe rentes.* En estos términos podemos decir que:

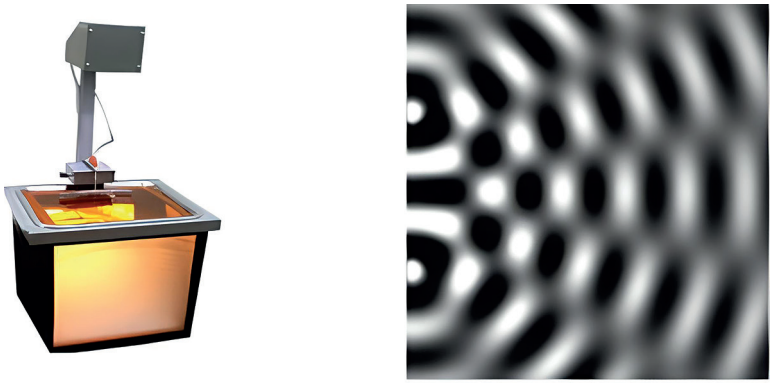
La interferencia de las ondas es el fenómeno que se produce cuando se superponen ondas coherentes.

En general, se denomina interferencia de ondas al fenómeno de la superposición de ondas, en el cual se produce en algunos puntos del medio, su reforzamiento mutuo estable en el tiempo, y en otros, su amortiguamiento, en dependencia de la relación de fase entre las ondas. **Solamente pueden interferir las ondas coherentes cuyas oscilaciones tienen lugar en la misma dirección.**

Debemos señalar que, si las ondas son armónicas, es decir, provienen de focos que oscilan armónicamente y tienen igual frecuencia, se mantendrá constante la diferencia entre sus fases para todos los puntos de la región en la que se propagan, es decir, **son coherentes.**

Analicemos ahora el caso de la superposición de dos ondas armónicas de igual frecuencia y amplitud, generada por dos focos puntuales coherentes, en la superficie del agua.

Este fenómeno se puede estudiar en el laboratorio mediante un dispositivo denominado cubeta de ondas en el que, mediante una lámpara estroboscópica, es posible observar el cuadro o patrón de interferencia que se genera (figura 8.19 a). La idea es muy simple, se ajusta la frecuencia de la lámpara estroboscópica para que coincida con la frecuencia de las ondas y, de esa manera, el patrón que se produce se puede observar como si estuviera "detenido" (figura 8.19 b).



a b

Fig. 8.19 a) Cubeta de ondas: b) Patrón de interferencia obtenido con una lámpara estroboscópica

Las zonas brillantes y oscuras se corresponden con los puntos a los que las ondas emitidas por cada foco llegan en fase y hay un reforzamiento. Las zonas grises corresponden a los puntos donde las ondas llegan en oposición de fase y se atenúan.

Para analizar este patrón representemos los frentes de ondas generados por cada uno de los focos (figura 8.20), en esta representación, los frentes representados con líneas continuas se corresponden con los puntos en que la amplitud es positiva (crestas) y las discontinuas con los que la amplitud es negativa (valles).

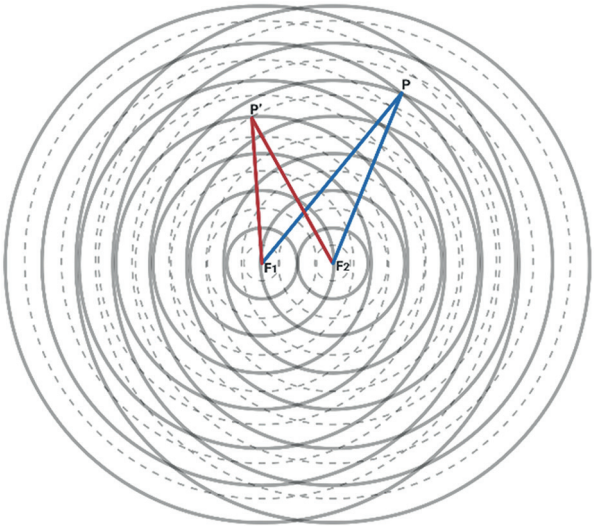


Fig. 8.20 Esquema de los frentes de onda, las líneas continuas representan las crestas y las discontinuas los valles

De acuerdo con la ecuación de la onda, las elongaciones en el punto P, para cada onda por separado, estará dada por:

$$y_1 = A sen(\omega t - kx_1)$$
$$y_2 = A sen(\omega t - kx_2)$$

Donde x_1 y x_2 son las distancias respectivas de F_1 y F_2 al punto *P.*

En general, el resultado de la superposición estará determinado por la diferencia de fases conque las ondas lleguen al punto P:

$$(\omega t - kx_1) - (\omega t - kx_2) = 2\pi/\lambda\ (x_2 - x_1) \qquad (8.3)$$

Si esta diferencia de fase es un número par de veces π, las oscilaciones se superpondrán en fase y en dicho punto existirá un reforzamiento o máximo de amplitud. Por lo tanto, la condición para que en un punto de un patrón de interferencia exista un máximo de amplitud es que:

$$\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = 2n\pi \qquad (8.4)$$

$$(x_2 - x_1)\ n\lambda \qquad (8.5)$$

Donde *n* es un número entero.

Es decir, cuando la diferencia del camino recorrido por las ondas es igual a un número entero de longitudes de onda, las ondas llegan en fase, la amplitud será máxima. Esto se puede apreciar de manera geométrica

en la figura 8.20: si se cuentan las longitudes de onda, desde cada foco hasta cualquier punto donde coincidan dos crestas o dos valles y se busca la diferencia, esta será igual a un número entero de longitudes de onda.

Por otra parte, si la diferencia de fases es un número impar de veces π (por ejemplo, en el punto P' de la figura 8.20), las oscilaciones se superpondrán con fases opuestas y la amplitud resultante será nula (por supuesto, si las amplitudes son iguales). Por lo tanto, la condición para que en un punto del patrón de interferencia exista un mínimo de amplitud es:

$$\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = 2(n+1)\pi \qquad (8.6)$$

$$(x_2 - x_1) = 2\,(n + 1)\,\lambda/2 \qquad (8.7)$$

Donde n es un número entero.

De manera que cuando la diferencia del recorrido de las ondas, hasta un punto determinado del patrón, es un *número impar de medias longitudes de onda* o, lo que es lo mismo, un número semientero de longitudes de onda, entonces las ondas llegan a este punto en oposición de fase y existirá un mínimo de amplitud. Esto también se puede comprobar geométricamente en la figura 8.20.

Problema resuelto 8.2

Sean F_1 y F_2 dos focos puntuales coherentes, ver figura 8.20, la distancia entre dos líneas circulares continuas (frente de onda) se corresponde con el valor de λ. Investiga si en los puntos P y P' de la figura existe interferencia constructiva (máximo) o destructiva (mínimo).

Solución:

La distancia entre el foco F_1 y el punto P (en longitudes de onda) es igual a 6 y la del foco F_2 es de 5, entonces la diferencia de marcha será:

$$\Delta = |x_1 - x_2| \quad \Delta = |6\lambda - 5\lambda|$$

$\Delta = \lambda$, que se corresponde con un máximo de interferencia ya que es un número entero de longitudes de onda.

Analicemos el punto P': la distancia entre el foco F_1 y el punto P es $x_1 = 4$ y del foco F_2 al punto P' es $x_2 = 4{,}5$, entonces la diferencia de marcha será:

$$\Delta = |x_1 - x_2| \qquad \Delta = 4\lambda - 4{,}5\lambda \quad \Delta = 0{,}5\lambda$$

por lo que resulta un mínimo de interferencia ya que es un número semientero de longitudes de onda.

Problema resuelto 8.3

Dos focos coherentes oscilan con frecuencia de 200 Hz y la velocidad de propagación de las ondas tiene un valor de 100 m/s. Se ha ubicado un punto que dista de uno de los focos 11 m y del otro foco 19 m. Determina:

a) Si en el punto en cuestión hay un máximo o un mínimo de interferencia.
b) La diferencia de fase entre las ondas que interfieren en el punto.

Solución:

a) Para determinar si en el punto en cuestión hay un máximo o un mínimo de interferencia es necesario calcula el valor de la longitud de onda.

Como $\lambda = \frac{v}{\nu}$

$$\lambda = \frac{100 \text{ m/s}}{200 \text{ Hz}};$$

$$\lambda = 0{,}5 \text{ m}$$

En términos de λ se tendrá que:

$$x_1 = \frac{11 \text{ m}}{0{,}5 \text{ m}} = 22\lambda$$

$$x_2 = \frac{19 \text{ m}}{0{,}5 \text{ m}} = 38\lambda$$

Entonces la diferencia de marcha será: $\Delta = 38\lambda - 22\lambda$, $\Delta = 16\lambda$. Como la diferencia de marcha nos da un número entero de longitudes de onda en ese punto existe un máximo.

b) Para determinar la diferencia de fase, se puede utilizar la ecuación:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta$$

Al sustituir el valor de la diferencia de marcha 16 λ, se tendrá que:
$\varphi_1 - \varphi_2 = 32\pi$ rad y, en consecuencia, las ondas llegan en fase.

Reflexión y refracción de las ondas

Si bien los fenómenos de la reflexión y refracción del sonido y la luz no nos resultan ajenos, en este apartado vamos a ampliar el estudio de estos fenómenos desde un punto de vista más general.

Iniciemos nuestro estudio con un análisis cualitativo de estos fenómenos para el caso de las ondas unidireccionales. Experimentalmente se

observa que, si un pulso que se propaga desde el extremo de una cuerda, que tiene el otro extremo fijo, el pulso retorna al llegar al extremo fijo, es decir, se refleja, con la peculiaridad de que se invierte el sentido de las oscilaciones (figura 8.21). Esta inversión significa que entre el pulso incidente y el reflejado existe una diferencia de fase de π rad.

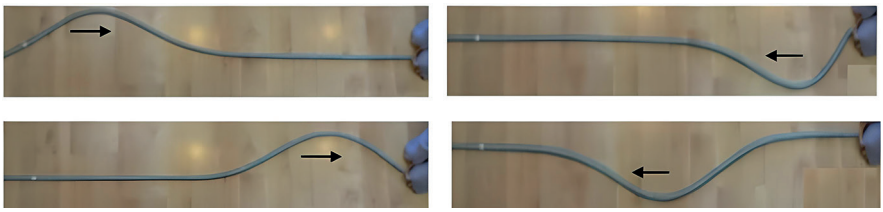


Fig. 8.21

Pero si el extremo en el cual ocurre la reflexión se encuentra libre, sucede que la onda incidente y la reflejada se encuentran en fase (figura 8.22).

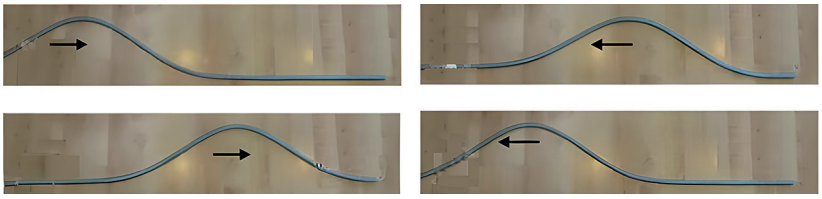


Fig. 8.22 En la secuencia de imágenes se puede apreciar como al reflejarse el pulso incidente y el pulso reflejado no difieren en fase

Las diferencias en el comportamiento de la reflexión en los casos anteriores se deben a que cuando el extremo en el cual ocurre la reflexión se encuentra fijo, la perturbación incidente provoca una fuerza sobre dicho extremo, y este a su vez una reacción de sentido contrario sobre el extremo, lo que provoca la inversión en el sentido de su movimiento. Cuando el extremo en el cual ocurre la reflexión se encuentre libre, no ocurre este efecto y no se produce la inversión en el sentido de las oscilaciones.

Examinemos ahora la situación que se produce cuando el pulso pasa de un medio a otro de características diferentes.

Por ejemplo, en la secuencia mostrada en la figura 8.23 se ilustra la situación de un pulso que se propaga por una cuerda unida a otra más ligera. En esta situación el pulso en parte se transmite a la cuerda

más ligera (parte derecha), aumentando el valor de su velocidad de propagación, y en parte se refleja sin cambiar de fase.

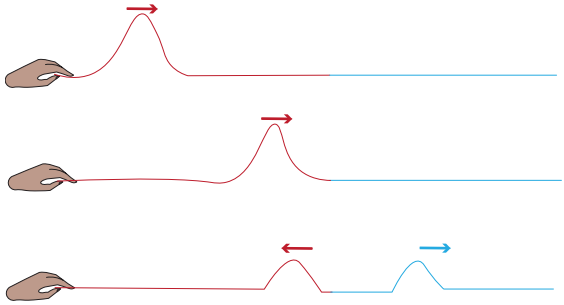


Fig. 8.23 Al llegar el pulso a la cuerda más ligera (parte derecha) en parte se refleja y en parte se trasmite

Si en la situación anterior, el pulso se propaga de la cuerda más ligera a la otra parte, entonces la velocidad de la onda disminuye al pasar al segundo medio y la reflexión se produce con un cambio de fase.

Al fenómeno del cambio del valor de la velocidad de propagación de las ondas al pasar de un medio a otro es a lo que se le denomina refracción.

Una consecuencia importante del cambio del valor de la velocidad cuando una onda pasa de un medio a otro es que, como la frecuencia no varía por esta razón, cambia su longitud de onda.

Examinemos ahora la reflexión y la refracción para el caso de las ondas bidimensionales como, por ejemplo, las ondas planas que se propagan en la superficie del agua.

En la figura 8.24 se representa un esquema, mediante frentes de ondas y rayos, de cómo se refleja una onda plana que se propaga en la superficie de un líquido, al encontrarse con un obstáculo.

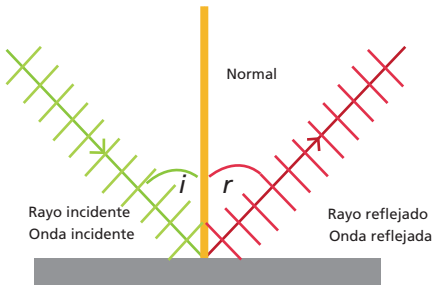


Fig. 8.24 Equema de la reflexión de una onda plana al llegar a una superficie

Los resultados de cualquier experimento sobre reflexión de las ondas pone de manifiesto dos importantes regularidades que se conocen como las leyes de la reflexión de las ondas.

Leyes de la reflexión de las ondas:

1) **El ángulo de incidencia (*i*) y el ángulo de reflexión (*r*) son iguales.**
2) **El rayo incidente, el rayo reflejado y la normal a la superficie de incidencia están en un mismo plano.**

En la figura 8.25 se representa un esquema, mediante frentes, que muestra cómo se refracta (y refleja) una onda plana que se propaga en la superficie del agua al pasar la frontera de separación entre dos zonas con profundidades diferentes (esto hace que se comporten como dos líquidos distintos), de manera que en la segunda zona la velocidad de propagación de la onda es menor.

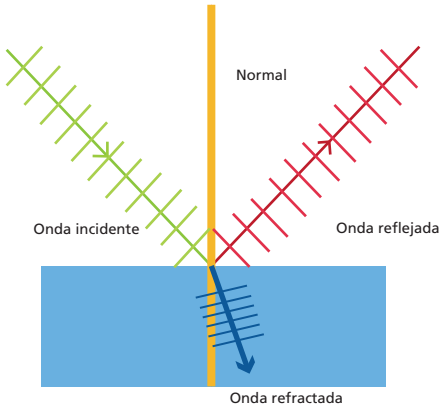


Fig. 8.25 Esquema del fenómeno de la refracción y reflexión de una onda en la superficie de separación de dos medios

Como consecuencia de la disminución de la velocidad de propagación al pasar al segundo medio, la dirección de propagación de la onda refractada se desvía de su trayectoria, acercándose a la normal a la superficie de separación entre los dos medios. En la figura 8.26 se puede apreciar este efecto y la disminución de la longitud de onda cuando ocurre la refracción.

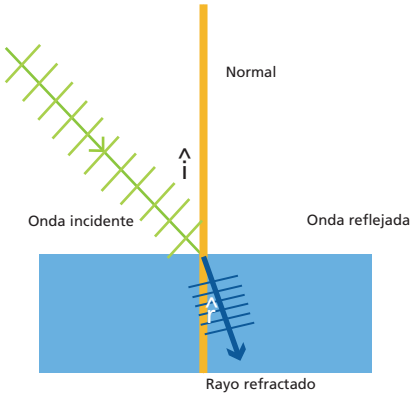
En el detalle de lo que ocurre en la superfice de separación entre los dos medios se puede apreciar como en el medio en que la onda se propaga más lentamente (en azul) el frente de onda se retrasa en relación con el

frente original y, como consecuencia, de ello se produce un cambio en la dirección de propagación.

Fig. 8.26 Detalle del fenómeno refracción en la superfice de separación

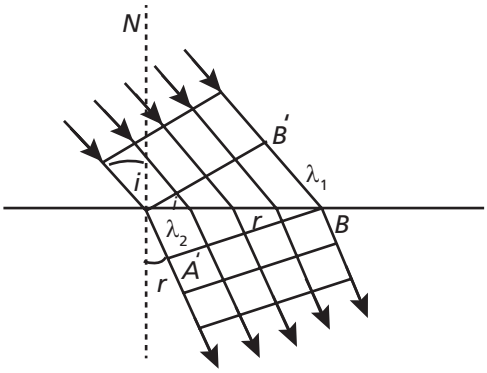
Analicemos ahora la relación que existe entre los ángulos de incidencia y de refracción (figura 8.27 a): cuando la onda pasa a un medio en el que se propaga con menor velocidad, se desvía de su trayectoria acercándose a la normal.

En la figura 8.27 b) se representan dos frentes de onda consecutivos y sus correspondientes ondas refractadas, demostrando la desviación del frente de onda al propagarse al segundo medio.



a

Fig. 8.27 a) Paso de la onda a otro medio



b

Fig. 8.27 b) Esquema de la desviación del frente de onda

De la geometría de la figura 8.26 b se puede plantear que:

$$\text{sen}i = \frac{\lambda_1}{AB}$$

$$\text{sen}r = \frac{\lambda_2}{AB}$$

Dividiendo miembro a miembro estas dos ecuaciones obtenemos que:

$$\frac{\text{sen}i}{\text{sen}r} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \qquad (8.8)$$

$$\frac{\text{sen}i}{\text{sen}r} = \frac{v_1 / v}{v_2 / v}$$

$$\frac{\text{sen}i}{\text{sen}r} = \frac{v_1}{v_2}$$

$$\frac{\text{sen}i}{\text{sen}r} = n_{12} \qquad (8.9)$$

Donde n_{12} es una constante que expresa la relación entre las velocidades de propagación en ambos medios y se denomina ***índice de refracción***. Esta relación recibe el nombre de **Ley de Snell.**

En resumen, para el fenómeno de la refracción, tenemos las leyes siguientes:

Leyes de la refracción de las ondas:

1) **La relación entre los ángulos de incidencia (*i*) y de refracción (*r*) es:**

$$\frac{\text{sen}i}{\text{sen}r} = n_{12}$$

Donde $n_{12} = v_1/v_2$ (índice de refracción) expresa la relación de las velocidades de las ondas en ambos medios.

2) **El rayo incidente, el rayo refractado y la normal a la superficie de incidencia están en un mismo plano.**

Las leyes de la reflexión y refracción de las ondas y en general todos los fenómenos asociados con la propagación de las ondas pueden ser deducidos sobre la base de un principio general que inicialmente fue descubierto por Huygens y más tarde completado por Fresnel. Este principio que se

concoe con el nombre de principio de Huygens-Fresnel se enuncia de la manera siguiente:

Principio de Huygens-Frenel

Todo punto de un frente de ondas puede considerarse como una fuente de ondas secundarias y la posición del siguiente frente de ondas viene dada por la envolvente a las ondas secundarias, como consecuencia de las interferencia de las ondas provenientes de cada una de dichas fuentes secundarias (figura 8.28).

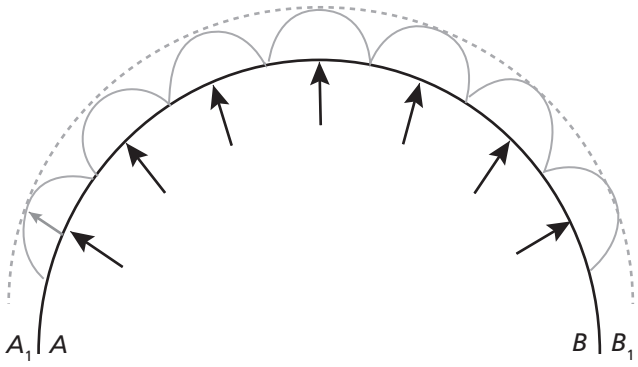
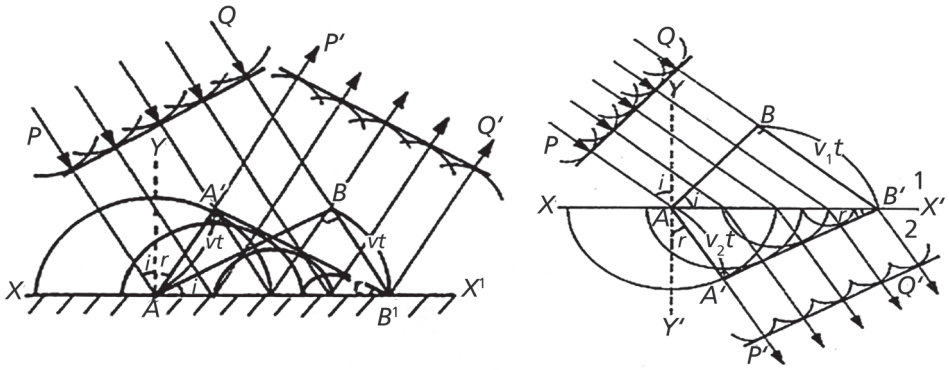


Fig. 8.28

A partir de las construcciones geométricas representadas en la figura 8.29 a) y 8.29 b) se pueden deducir las relaciones entre los ángulos de incidencia y de reflexión y entre los ángulos de incidencia y refracción.

De la figura 8.29 a)	De la figura 8.29 b)
$AA' = vt$	$\text{sen}i = \frac{BB'}{AB'}$
$BB' = vt$	$\text{sen}r = \frac{AA'}{AB'}$
Por lo tanto:	$\frac{\text{sen}i}{\text{sen}r} = \frac{BB'}{AA'}$
$AA' = BB'$	$\frac{\text{sen}i}{\text{sen}r} = \frac{v_1 t}{v_2 t}$
$\Delta AB'A' = \Delta ABB'$ y $<A'B'A = <BAB'$	Por lo tanto: $\frac{\text{sen}i}{\text{sen}r} = \frac{v_1}{v_2}$
Pero: $<A'B'A = r$ y $<BAB' = i$	
Por lo tanto: $i = r$	



a b

Fig. 8.29 Representación de construcciones geométricas: a) reflexión; b) refracción.

De la historia

Christian Huygens (1629-1695): astrónomo, físico y matemático holandés. Realizó trabajos en dos campos de la Física: en la mecánica y en la óptica. En 1673 publica un libro donde halló la expresión exacta de la fuerza centrífuga en el movimiento circular, la teoría del centro de oscilación, el principio de la conservación de las fuerzas vivas (antecedente del principio de la conservación de la energía) centrándose esencialmente en las colisiones entre partículas (corrigiendo algunas ideas erróneas de Descartes) y el funcionamiento del péndulo simple y del reversible. En el campo de la óptica elaboró la teoría ondulatoria de la luz, partiendo del concepto de que cada punto luminoso de un frente de ondas puede considerarse una nueva fuente de ondas (principio de Huygens).

Difracción de las ondas

La experiencia demuestra que si una onda encuentra a su paso una barrera que presenta una abertura, por ejemplo, cuando una onda plana que se propaga en la superficie del agua pasa por una abertura como se muestra en la figura 8.30, ocurre un fenómeno muy peculiar; ocurre una inflexión de la onda detrás de la barrera, es decir, cambia la dirección de propagación en los bordes de la barrera y esta penetra en la zona que

no podría ser alcanzada si continuara su propagación en la dirección que tenía antes de encontrar la barrera a su paso. Este fenómeno recibe el nombre de difracción de las ondas.

La difracción de las ondas es el fenómeno de la inflexión de las ondas que se observa al pasar por los bordes de un obstáculo.

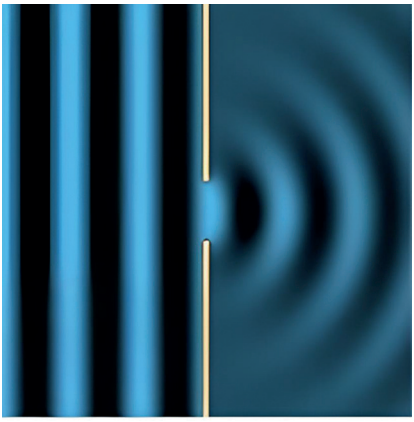


Fig. 8.30 La onda original cambia su dirección de propagación al pasar a través de la abertura y penetra en la zona que se encuentra tras la barrera.

El fenómeno de la difracción de las ondas resulta muy habitual, por ejemplo, en virtud de la difracción es que podemos escuchar una conversación fuera del local donde tiene lugar, aunque estemos en una posición que no sería alcanzada por las ondas sonoras si estas se propagaran sin desviarse (figura 8.31).

El fenómeno de la difracción se puede explicar sobre la base del principio de Huygens-Fresnel, pero esto es algo que está fuera del alcance de este curso. Sin embargo, si podemos analizar de manera cualitativa este fenómeno: cada punto del frente de onda que llega a la abertura se puede considerar como un foco emisor de ondas secundarias y el nuevo frente de ondas será el resultado de la interferencia de las ondas emitidas por cada foco, obteniéndose un patrón como el mostrado en la figura 8.30.

Si la abertura es lo suficientemente pequeña se puede considerar como un foco emisor de ondas y entonces se obtiene un patrón como el mostrado en la figura 8.31, en el que se puede apreciar que la onda penetra en toda la zona tras la abertura.

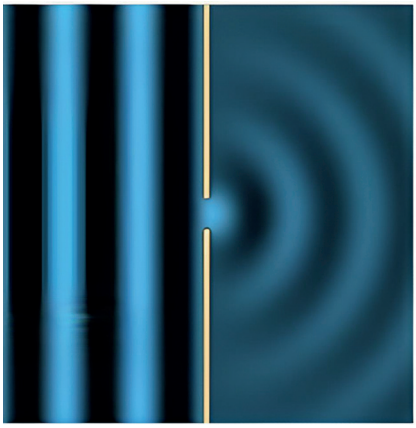


Fig. 8.31 Cuando la abertura es del orden de la longitud de onda, se comporta como un único foco emisor de ondas secundarias y ello da lugar a la propagación de una onda circunferencial tras la barrera

En general, para distancias cercanas al obstáculo la difracción se hace muy notable cuando las dimensiones de la abertura son del orden de la longitud de onda. Cuando la abertura es mucho mayor que la longitud de onda los efectos de la difracción se perciben a distancias muy alejadas de la abertura, donde, en condiciones reales, ya las ondas están muy amortiguadas y el fenómeno no es observable.

Efecto Doppler

De la historia

Christian Andreas Doppler (1803 -1853): matemático y físico austríaco.En el año 1842 en una monografía titulada *Sobre el color de la luz en estrellas binarias y otros astros*, propone una hipótesis sobre la variación aparente de la frecuencia de una onda percibida por un observador en movimiento relativo frente al emisor. A este efecto se le conoce como efecto Doppler.

Cuando un tren que se aproxima a gran velocidad a un observador en reposo, hace sonar el silbato de manera continua, el tono es más alto cuando se acerca y más bajo cuando se aleja, en relación

con el tono del silbato del tren cuando se encuentra detenido en la estación.

Se denomina efecto Doppler a la variación de la frecuencia de las ondas registradas por un receptor, como consecuencia del movimiento relativo entre la fuente y el receptor.

Analicemos cualitativamente las causas de este interesante fenómeno:

¿Sabías que...?

Doppler colocó un grupo de músicos en un ferrocarril y les indicó que tocaran la misma nota musical mientras que otro grupo de músicos, en la estación del tren, registraba la nota musical que oían mientras el tren se acercaba y después se alejaba. La frecuencia de la nota musical registrada por los músicos que se encontraban en reposo, aumentaba cuando el tren se acercaba y disminuía cuando se alejaba.
El efecto Doppler ha servido para realizar grandes descubrimientos, como la expansión del Universo. Como la luz está formada por ondas, cuando estas se alejan del observador sufren un aumento de su longitud de onda, lo que en la región visible de la luz se traduce en un desplazamiento hacia el rojo. Como la situación anterior ha sido observada en todas las galaxias, ha servido de prueba para verificar la expansión del Universo.

Si la fuente (sirena de la ambulancia) representada en la figura 8.32 se mueve uniformemente alejándose de un observador (A) y acercándose a otro (B), entonces, como consecuencia del cambio de posición de la fuente, la distancia entre los frentes de onda que se dirigen hacia el observador A disminuye y la de los que se dirigen hacia el B aumenta. Los observadores A y B registran pues, longitudes de ondas menores y mayores, respectivamente, en relación con el caso en que la fuente se encuentre en reposo respecto a dichos receptores.

Como la velocidad de propagación de las ondas no depende de la velocidad de la fuente, entonces en el receptor A se registrará una frecuencia ν_A y el observador B una frecuencia ν_B, mayores y menores, respectivamente, que la frecuencia *v* registrada cuando la fuente se encuentra en reposo.

El efecto Doppler tiene un gran número de aplicaciones prácticas, ya que como el cambio de frecuencia depende de la velocidad relativa entre la fuente y el receptor, si se conoce la velocidad de propagación de las ondas en el medio, y se puede medir el cambio de frecuencia, es posible determinar la velocidad relativa entre la fuente y el foco. Este es el

principio de funcionamiento de los dispositivos que utilizan los agentes del tránsito para determinar la velocidad de los vehículos y detectar posibles infracciones.

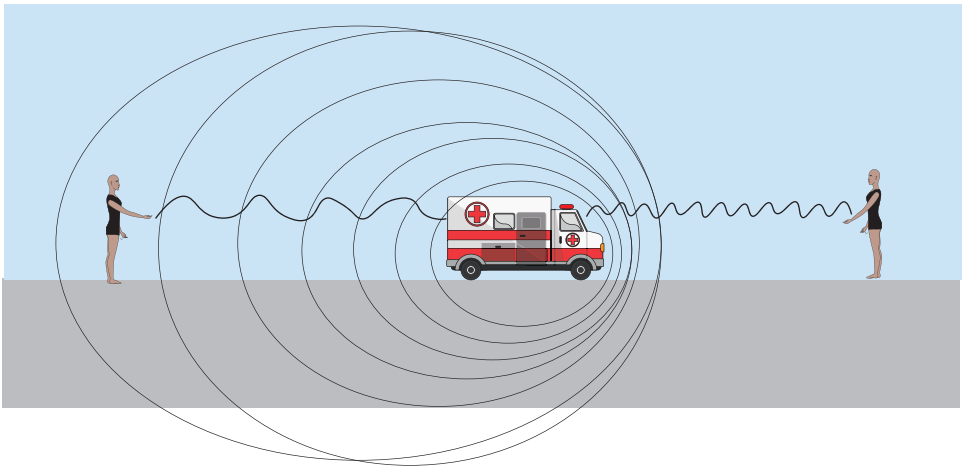
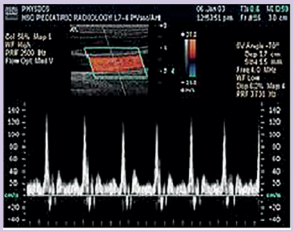


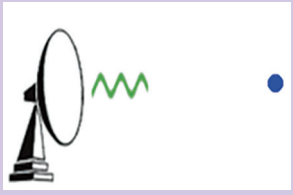
Fig. 8.32 Aumento de la longitud de onda del sonido para el observador de la izquierda y disminución de la longitud de onda del sonido para el observador de la derecha

También mediante el cambio de la frecuencia de las ondas luminosas procedentes de las estrellas de otras galaxias ha sido posible determinar que estas se están alejando y cuál es el valor de la velocidad con que se alejan.

Aplicaciones

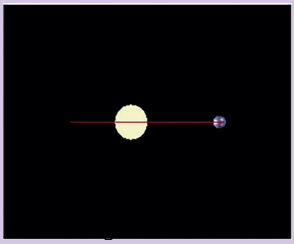


La ecografía Doppler que se utiliza en medicina, está basada en el empleo del ultrasonido y utiliza el efecto Doppler, para visualizar las ondas de velocidad del flujo de la sangre por los vasos sanguíneos y las arterias. La técnica permite determinar si el flujo se dirige hacia la sonda o si se aleja de ella, así como la velocidad de dicho flujo. En la figura se muestra el espectro Doppler de una arteria carótida.



El radar de impulsos Doppler de la figura es un sistema de radar capaz no solo de medir el rumbo, distancia y altitud de un objeto, sino también de detectar su velocidad. Su sistema de localización se basa en emitir trenes de pulsos a una frecuencia determinada y utilizar el efecto Doppler para determinar la velocidad relativa de los objetos. El mismo principio del radar, se

utiliza en la pistola que mide la velocidad de los autos en la vía y también en la pistola que mide la velocidad de los lanzamientos en un juego de béisbol.



La espectroscopía Doppler, también conocida como medición de la velocidad radial, es un método espectroscópico para encontrar planetas extrasolares. Involucra la observación de desplazamientos Doppler en el espectro de la estrella alrededor de la cual el planeta orbita. Observa en la figura la representación de una estrella orbitada por un planeta y el movimiento de la estrella a lo largo de la línea de vista del observador. Con este método se puede determinar la masa del planeta.

Comprueba tus conocimientos

10. ¿En qué consiste el principio de superposición de las ondas?

11. Si dos pulsos desplazándose uno hacia el otro en un muelle, tienen desplazamientos en el mismo sentido, ¿pueden anularse en el momento de cruzarse?

12. ¿A qué se denomina interferencia de las ondas mecánicas?

13. ¿Cuáles son las características fundamentales de las ondas coherentes?

14. ¿Para que dos focos sean coherentes tienen que vibrar necesariamente en igualdad de fases?

15. Digas cuáles son las condiciones de máximos y mínimos de interferencia.

16. Plantea las leyes de la reflexión y la refracción de las ondas.

17. ¿Cuál es el significado físico del índice de refracción?

18. ¿Qué condición debe cumplirse para que la onda reflejada en la zona de separación de dos medios cambie de fase?

19. Enuncia el principio de Huygens y di cuál es su importancia.

20. Si un extremo de una soga gruesa se une a un extremo de una soga fina del mismo material, al pasar una onda de la soga gruesa a la soga más fina:

a) ¿Qué sucede con la velocidad de la onda?

b) ¿Qué sucede con la frecuencia?

c) ¿Qué sucede con la longitud de onda?

21. Plantea las leyes de la reflexión y la refracción de las ondas.

22. ¿Cuál es el significado físico del índice de refracción?

23. ¿Qué condición debe cumplirse para que la onda reflejada en la zona de separación de dos medios cambie de fase?

24. Enuncia el principio de Huygens y di cuál es su importancia.

25. Si un extremo de una soga gruesa se une a un extremo de una soga fina del mismo material, al pasar una onda de la soga gruesa a la soga más fina:
a) ¿Qué sucede con la velocidad de la onda?
b) ¿Qué sucede con la frecuencia?
c) ¿Qué sucede con la longitud de onda?

26. ¿En qué consiste el fenómeno de la difracción?

27. Cuando nos encontramos en la casa y pasa una motocicleta por la calle, podemos oír su ruido, ¿qué fenómeno se ha puesto en evidencia? Describa cómo tiene lugar.

28. ¿Cuál es la causa del efecto Doppler? Realiza una explicación cualitativa del fenómeno.

29. Si estás de pie sobre una plataforma en una estación de tren y escuchas un tren que se aproxima a la estación con velocidad constante. Mientras el tren se aproxima, pero antes de que llegue ¿qué escuchas?
a) la intensidad y la frecuencia del sonido aumentan,
b) la intensidad y la frecuencia del sonido disminuyen,
c) la intensidad aumenta y la frecuencia disminuye,
d) la intensidad disminuye y la frecuencia aumenta,
e) la intensidad aumenta y la frecuencia permanece igual,
f) la intensidad disminuye y la frecuencia permanece igual.

8.4 Ondas estacionarias

Un tipo particularmente importante de interferencia es el que tiene lugar cuando dos ondas de la misma velocidad, frecuencia y amplitud, se propagan a través del mismo medio en direcciones opuestas, dando lugar al fenómeno conocido como onda estacionaria.

En la práctica, este caso se presenta frecuentemente cuando se superponen una onda y su reflejada en una determinada región del espacio, es decir, en un medio confinado. Por ejemplo, esta es la situación que tiene lugar cuando

en uno de los extremos de una cuerda elástica se produce una oscilación de manera continua, la cual se propaga a lo largo de la cuerda y se refleja en el otro extremo dando lugar a la interferencia de ambas ondas (figura 8.33).

Analicemos desde un punto de vista general el proceso de superposición que da lugar a la formación de este tipo de ondas. Consideremos dos ondas armónicas unidimensionales de iguales amplitudes, frecuencias y velocidades, que se propagan una al encuentro de la otra. Esta situación se representa en la figura 8.33. Donde la onda que viaja en sentido positivo del eje de coordenadas se ha representado por una curva en color azul y la que viaja en sentido negativo por una curva de color rojo y la resultante mediante una curva en color naranja.

Las ondas se muestran en nueve instantes, separados por un 1/16 de periodo. En cada punto de la cuerda sumamos las elongaciones (valores de y) para las dos ondas individuales; el resultado es la onda total en la cuerda, dibujada en color naranja.

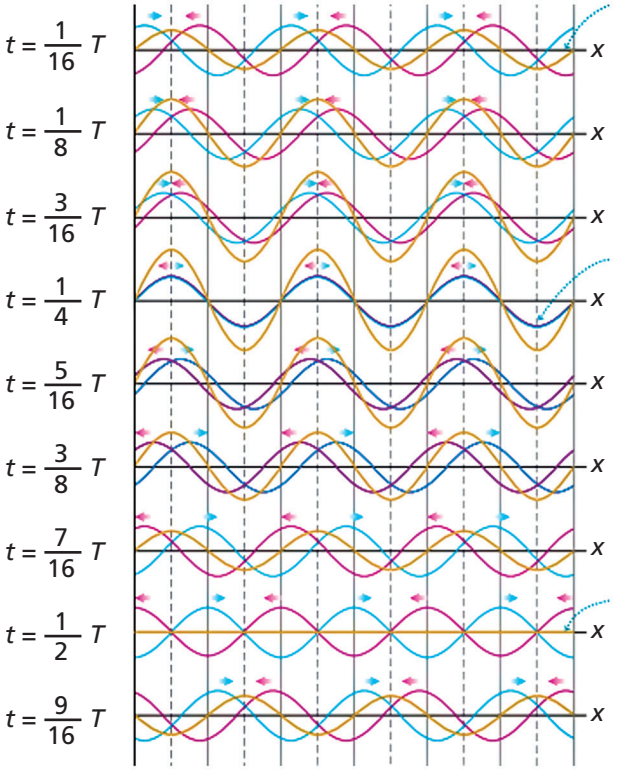


Fig. 8.33 En azul la onda que viaja de derecha a izquierda; en rojo la que viaja de izquierda a derecha, y en naranja la onda resultante de la superposición

En el instante $t = T/4$, las dos ondas están en fase y la cuerda forma una curva senoidal con el doble de amplitud que las ondas individuales. Por otra parte, en el instante $t = \frac{T}{2}$. Las ondas están en oposición de fase y la amplitud de la onda resultante es nula, es decir la cuerda se encuentra recta.

En el caso de las ondas estacionarias se destacan dos hechos que las diferencian de las ondas estudiadas hasta ahora (ondas viajeras).

En primer lugar, en estas ondas aparecen puntos en los que la elongación es siempre nula (en realidad es mínima y muy pequeña), denominados nodos, y otros puntos en los cuales la elongación alcanza los valores máximos, denominados crestas y valles (crestas si la elongación máxima está por encima de la elongación nula, y valles cuando está por debajo).

En segundo lugar, se observa que las ondas estacionarias no pueden tener cualquier longitud de onda, sino solamente aquellas que cumplan con la condición de que en los extremos del medio:

1) las elongaciones sean nulas (los dos extremos se encuentren fijos).
2) las elongaciones puedan alcanzar un valor máximo (los dos extremos libres).
3) la elongación de uno, nula y la del otro, máxima (un extremo se encuentra fijo y el otro libre).

Como entre dos nodos o dos vientres consecutivos la distancia es de media longitud de onda, en los dos primeros casos, las ondas estacionarias deberán cumplir la condición:

$$L = n\frac{\lambda}{2} \qquad (8.10)$$

O lo que es lo mismo:

$$\lambda = \frac{2L}{n}$$

Donde L es la distancia entre los extremos y n un número entero.

Como la distancia entre un nodo y un vientre es de un cuarto de longitud de onda, en el tercer caso, las ondas estacionarias deberán cumplir la condición:

$$L = m\frac{\lambda}{4} \qquad (8.11)$$

O lo que es lo mismo: $\lambda = \frac{4L}{m}$

donde *m* es un número impar.

El hecho más importante para destacar en las ondas estacionarias es que su longitud de onda y, por tanto, su frecuencia, no pueden tomar valores cualesquiera, sino solamente aquellos que son múltiplos de *n* o *m,* según sean las condiciones de los extremos. Esto contrasta poderosamente con lo que sucede en los medios no confinados, en los cuales pueden formarse ondas con cualquier valor de λ. La importancia teórica de este hecho la comprenderemos mejor cuando en los grados superiores estudiemos el comportamiento de las partículas subatómicas.

Debemos notar, además, que en las ondas estacionarias no ocurre la propagación de la energía, ya que las ondas que se propagan una al encuentro de la otra llevan energías iguales, pero en sentido contrario. La energía de las oscilaciones entre los nodos se mantiene constante. Solamente ocurre la transformación de la energía cinética en potencial, y viceversa. Cuando las varillas pasan por la posición de equilibrio, su energía cinética posee un valor máximo. Después de transcurrido un cuarto de período, la energía cinética se hace cero y la energía potencial alcanza su máximo valor; la desviación de las varillas respecto a su posición de equilibrio en este instante es máxima (el fleje estará más deformado en los vientres y menos en los nodos). Todo lo anterior es válido en ausencia de fuerzas disipativas, en condiciones reales, a través de los nodos, los cuales oscilan con la mínima amplitud, se propaga la energía suministrada por el agente externo para mantener las oscilaciones.

Problema resuelto 8.4

Un diapasón vibra frente al extremo abierto de un tubo cerrado por el otro extremo, provocando una onda estacionaria en su interior. La distancia entre los nodos consecutivos es de 40 cm. El sonido en el aire viaja a una velocidad de 340 m/s.

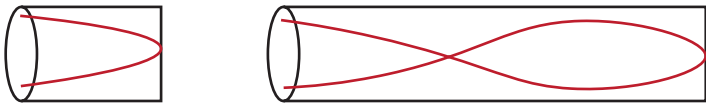
a) Halla la longitud de onda del sonido generado por el diapasón.
b) Calcula la longitud mínima del tubo para que pueda provocarse una onda estacionaria en él.
c) Representa la configuración de la onda estacionaria para las dos primeras frecuencias posibles.

Solución:

a) La distancia entre dos nodos consecutivos se corresponde con $\lambda/2$ entonces el valor de la longitud de onda es 80 cm.

b) Como para la situación dada uno de los extremos es libre y el otro fijo, entonces debe cumplirse que $L = m\frac{\lambda}{4}$, para que L sea mínima m = 1, por lo que L = 20 cm.

c) La primera frecuencia posible se corresponde con m = 1 que vimos anteriormente y la longitud del tubo será de 20 cm (figura 8.34 a) y la segunda frecuencia con m = 3 , la longitud del tubo se determina con la ecuación par $L = 3\frac{\lambda}{4} = 60$ cm (figura 8.34 b).



l = 20 cm $\quad$ l = 60 cm

a $\quad$ b

Fig. 8.34

Comprueba tus concimientos

30. ¿Qué se entiende por ondas estacionarias? ¿Cuál es la diferencia entre una onda estacionaria y una onda viajera?

31. ¿Qué ocurre con la fase de una onda cuando incide sobre su extremo cuando este extremo está: libre o fijo?

32. ¿Qué condición deben cumplir las ondas estacionarias cuando los extremos son: fijos, libres, ¿uno fijo y el otro libre?

Hora del laboratorio

Práctica de laboratorio 8.1

Velocidad de propagación de las ondas

Objetivo: determinación de la velocidad de propagación de una onda viajera en un hilo.

Materiales: soporte universal, diapasón con su martillo, hilo, cuerpo, regla graduada en centímetros.

Descripción y tareas:

Las ondas estacionarias son el resultado de la interferencia de dos ondas que provocan un patrón de interferencia fijo en el tiempo y se caracterizan por sus nodos y sus vientres. Si se utiliza un diapasón de frecuencia conocida *A* y en el extremo de uno de sus brazos, atamos un hilo fino y colgamos un cuerpo del otro extremo de forma tal que el hilo quede tensado, podemos obtener ondas estacionarias, cuando golpeamos una sola vez el diapasón.

1. Coloca el diapasón con la caja de resonancia hacia arriba y fija la caja al soporte universal, quedando los brazos como se muestra en la figura 8.35 b)
2. Toma un hilo fino y ata uno de sus extremos en el punto B de uno de los brazos del diapasón y el otro extremo, átalo a un cuerpo que una vez colgado pueda tensar al hilo (figura 8.35 b).
3. Mide la longitud L del hilo y anota el resultado.
4. Golpea el diapasón con el martillo en la posición *B* y observa que las oscilaciones se propagan en el hilo, formándose una onda estacionaria. Cuenta el número de nodos que se forman, para así determinar el valor de la longitud de onda como se ilustra en la figura 8.35 c).

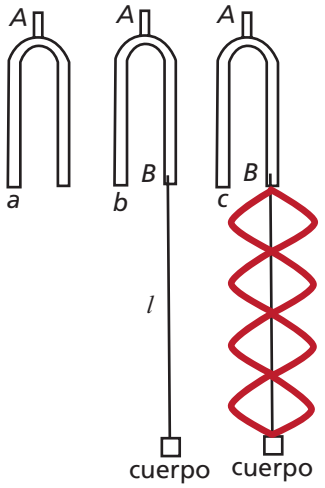


Fig. 8.35 Montaje experimental del trabajo de laboratorio

5. Determina la velocidad de propagación de la onda viajera en el hilo, conociendo la frecuencia del diapasón y después de medir de forma indirecta el valor de la longitud de onda.
6. Repite las actividades 4 y 5 de manera que sea posible estimar la incertidumbre de la medición de la velocidad de la onda.

Tareas generales del capítulo

1. La gráfica muestra el perfil de una onda viajera que se propaga a 20 m/s, para $t = 0$, se encuentra así en ese instante (figura 8.36).

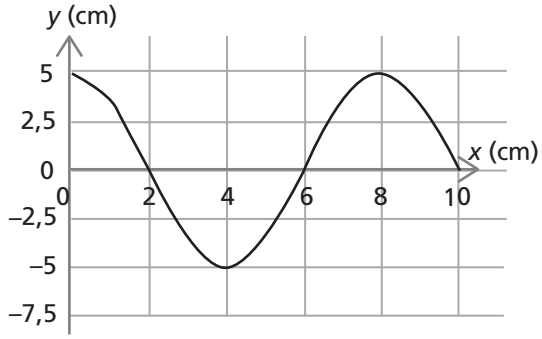


Fig. 8.36

a) Di si se muestra una onda transversal o longitudinal.
b) ¿Cuál es el valor de su longitud de onda?
c) ¿Qué valor tiene la amplitud de la oscilación?
d) Calcula la frecuencia de la onda.
e) Calcula el valor de la frecuencia angular o cíclica y el valor de la constante k de la onda.
f) Si la onda se desplaza hacia la derecha, escribe la ecuación de esta onda con los coeficientes numéricos correspondientes.

2. La figura 8.37 muestra la gráfica de las oscilaciones de la elongación en función del tiempo, de una partícula del medio situada en $x = 0$. El movimiento ondulatorio se desplaza hacia la izquierda, con velocidad de propagación es de 1,0 m/s.

a) Selecciona dos puntos que se encuentren en:
   - Concordancia de fase.
   - Oposición de fase.

b) Di el valor del período de oscilación y determina la frecuencia cíclica de la onda.
c) Calcula la longitud de onda.
d) Escribe la ecuación del movimiento de esta onda y representa la gráfica de $y = f(x)$ para los instantes de $t = 0$ *s* y $t = 1{,}0$ *s*.

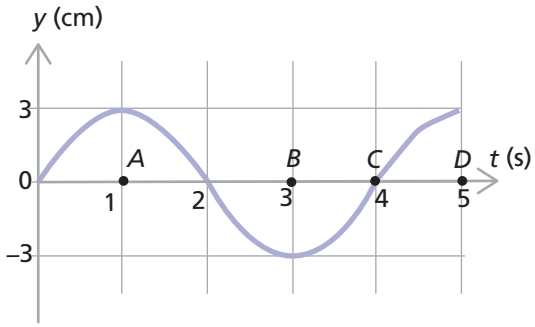


Fig. 8.37

e) Calcula la posición de una partícula que pertenece a esta onda y se encuentre a 1,0 m del origen en un tiempo de 2,0 s.

3. Un generador de ondas golpea la superficie del agua 24 veces en 6,0 s.
a) ¿Cuál es su frecuencia?
b) Si la longitud de onda es de 4 cm, ¿con qué velocidad se mueve la onda por la superficie del agua?
c) Si deseamos producir ondas con mayor longitud de onda e igual velocidad, ¿debemos aumentar o disminuir la frecuencia del generador? Explica.

4. El periodo de oscilación de las partículas del aire, por donde se propaga el sonido es de $10^{-3}s$. La distancia entre dos puntos consecutivos que oscilan en fase es de 0,34 m.
a) ¿Con qué velocidad se propaga la onda en el aire?
b) Conociendo que la velocidad del sonido en el agua es 1 435 m/s, calcula la longitud de onda del sonido cuando se refracta en el agua.

5. El eco de un disparo efectuado por un fusil, fue recibido por el observador que hizo el disparo en 4 s. ¿A qué distancia del observador se encuentra el obstáculo en el cual se reflejó el sonido del disparo? La velocidad del sonido en el aire es de 340 m/s.

6. A lo largo de una cuerda muy larga se propaga una onda transversal con una velocidad de 15 m/s a la derecha. La elongación en un punto M de la cuerda ($x = 0$ y la partícula se mueve hacia arriba en ese instante) viene dada por la expresión:

$$y = sen(100\pi t)$$ (y en metros y t en segundos)

a) Calcula los valores del periodo, la frecuencia y la longitud de onda del movimiento ondulatorio.
b) Escriba la ecuación de la onda.
c) Si luego de pasar por el punto M se localiza a una distancia de 1,5 m otro punto M´en un tiempo $\Delta t = 0{,}5$ s, determina el valor de la elongación del punto M en ese tiempo.

7. La ecuación de una onda transversal que se propaga hacia la derecha a lo largo de una cuerda muy larga tiene la forma: $y = 0{,}05\ sen\ (4\pi x - 2\pi t)m$. Representa en una gráfica de $y = f(x)$ para $t = 0$ y en otra gráfica de $y = f(t)$ para la partícula en $x = 0$, el movimiento ondulatorio que se propaga en la cuerda.

8. La gráfica $y = f(x)$ de la figura 8.38 y la gráfica $y = f(t)$ de la figura 8.39, corresponden a una onda transversal que se propaga a lo largo de un resorte muy largo. Escribe la ecuación de dicha onda si se desplaza hacia la derecha.

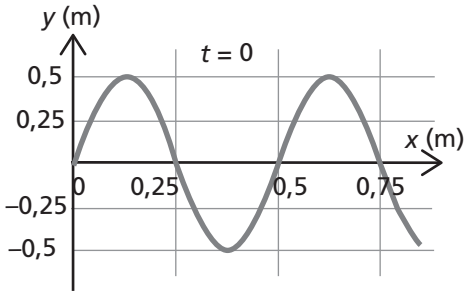


Fig. 8.38

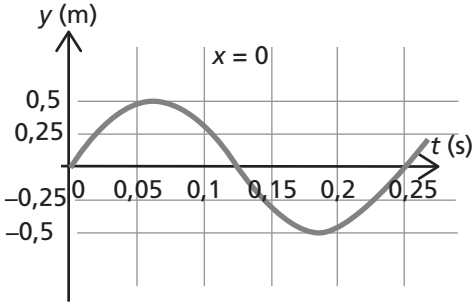


Fig. 8.39

9. El pulso mostrado en la figura 8.40, se propaga a lo largo de una cuerda hacia la derecha, representa en tu libreta otro pulso que se propague a través de la misma cuerda y que pueda provocar una anulación momentánea del primero.

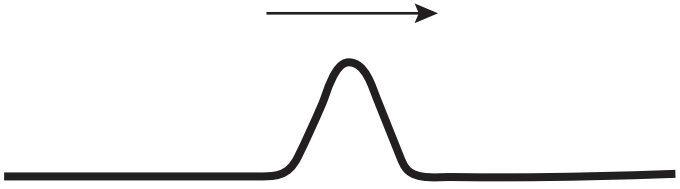


Fig. 8.40

10. Dos ondas transversales de 440 Hz, se propagan a una velocidad de 340 m/s y concurren en un mismo punto que equidista 30 m y 20,5 m respectivamente desde cada foco emisor. ¿Se formará en el punto un máximo o un mínimo de interferencia? Realiza los cálculos necesarios.

11. En la figura 8.41, aparecen dos frentes de ondas coherentes que se propagan sobre el agua con igual amplitud. Las líneas continuas representan las crestas de las ondas en un instante determinado. Determina en cada punto A, B o C si existirá un reforzamiento o un mínimo de interferencia de las ondas.

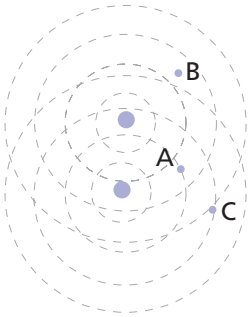


Fig. 8.41

12. La diferencia de marcha entre dos ondas coherentes de igual amplitud y frecuencia es de 12 cm. Si la longitud de onda es de 8 cm ¿cuál es el resultado de la interferencia de las ondas? Fundamenta, realizando el cálculo correspondiente.

13. La figura 8.42, representa un frente de onda plano, cuyas crestas se representan con las líneas continuas. El frente de onda incide con un ángulo de 30° sobre una barrera o muro. Representa en el esquema, el frente de onda reflejado.

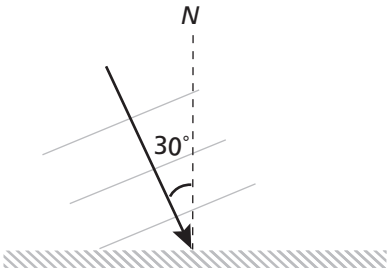


Fig. 8.42

14. La figura 8.43 muestra un frente de onda plano que se aproxima a una barrera rectangular que tiene un ángulo de 45°.

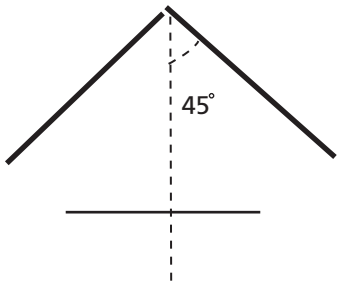


Fig. 8.43

a) Describe el fenómeno que ocurre cuando el frente de onda toca los lados de la barrera.
b) ¿Qué fenómeno ocurrirá entre las ondas reflejadas e incidentes, en la región limitada por las paredes de la barrera?

15. La velocidad de un sonido de frecuencia 200 Hz, en el aire es de 340 m/s y en el agua 1 435 m/s. Si el sonido pasa del aire al agua:
a) ¿Qué fenómeno experimenta el sonido?
b) Calcula el valor de la longitud de onda del sonido en el aire.
c) ¿En cuántas veces cambia la longitud de onda del sonido en el agua respecto al aire?

16. Las ondas en la superficie del agua, se propagan en una cubeta a cierta profundidad a 34 cm/s, con un ángulo de 60º.Cuando la profundidad de la cubeta cambia, la onda se propaga a una velocidad de 24 cm/s.
a) Calcula el ángulo de refracción de la onda.
b) Si la frecuencia se incrementa ligeramente, entonces la velocidad de la onda en el agua profunda es de 32 cm/s, calcula ahora el nuevo valor del ángulo de refracción.

17. Para las ondas estacionarias representadas en la figura 8.44 si el valor de la distancia l = 1 m.
a) Determina la longitud de onda en cada caso.
b) Indica en cada onda un nodo y un vientre.
c) Indica en el caso b un máximo y un mínimo de interferencia.

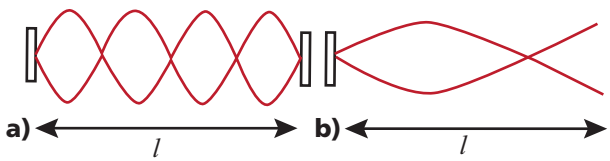


Fig. 8.44

18. La frecuencia del sonido emitido por una locomotora de un tren en reposo en la estación, para avisar de su partida es de 10^3 Hz. Un pasajero viene corriendo a su encuentro, con una velocidad de 5 m/s. Calcula la frecuencia y la longitud de onda del sonido que escucha el pasajero durante su movimiento. La velocidad del sonido en el aire es 340 m/s.

19. La sirena de un barco emite un sonido con una frecuencia de $2 \cdot 10^3$ Hz y velocidad de 340 m/s, alejándose de una persona que se encuentra en el muelle, con una velocidad de 10 m/s. Determina:

a) El valor de la frecuencia del sonido para la persona que se encuentra en el muelle.

b) El valor de la longitud de onda del sonido para los pasajeros del barco y para la persona que se encuentra en el muelle.

c) Si la persona que se encuentra en el muelle, se montara en una lancha rápida, ¿cuál debe ser el valor de la velocidad de la lancha al aproximarse al barco ahora en reposo, si el sonido escuchado tiene una frecuencia $3 \cdot 10^3$ Hz

20. ***Desafío.*** Una onda sinusoidal transversal en una cuerda, tiene un periodo T = 25,0 ms y viaja en la dirección positiva del eje X con una velocidad de 30,0 m/s. En un instante $t = \frac{T}{4}$, un elemento de la cuerda tiene una posición transversal de 2,0 cm.

a) Calcula la amplitud de la onda.

b) Calcula la velocidad de oscilación del elemento de la cuerda, que se corresponda con la posición transversal de 2,0 cm.

c) ¿Cuál es la máxima velocidad transversal de un elemento de la cuerda?

d) Escribe la ecuación del movimiento oscilatorio para el punto de la cuerda x = 0 y la ecuación de la onda, ambas con los coeficientes numéricos que la caracterizan.

21 ***Desafío.*** Se realiza un martillazo sobre un raíl de ferrocarril y a una distancia de 1 060 m, un observador escucha el sonido del golpe por el raíl y 3 s después, escucha el mismo sonido que se propaga por el aire. Determina la velocidad con que se mueve el sonido por el metal.

ANEXOS

SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI)

El SI revisado quedó definido como aquel en el que:

- la frecuencia de la transición hiperfina del estado fundamental no perturbado del átomo de cesio 133 ($\Delta\nu_{Cs}$) $\Delta\nu_{Cs}$ es 9 192 631 770 Hz
- la velocidad de la luz en el vacío (*c*) es 299 792 458 m/s
- la constante de Planck (*h*) es $6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}$ J · s
- la carga elemental (*e*) es $1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}$ C
- la constante de Boltzmann (*k*) es $1{,}380\,649 \cdot 10^{-23}$ J/K
- la constante de Avogadro (N_A) es $6{,}022\,140\,76 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}
- la eficacia luminosa de la radiación monocromática de $540 \cdot 10^{12}$ Hz (K_{cd}) es 683 lm/W

A partir de los valores anteriores se definen las siete unidades básicas.

Tabla 1.1 (Unidades Básicas)

Unidad básica (símbolo)	Magnitud física básica [Símbolo de la magnitud]	Definición técnica	Definición derivada
segundo (s)	tiempo [t]	Se define al fijar el valor numérico de la frecuencia de la transición hiperfina del estado fundamental no perturbado del átomo de cesio 133, $\Delta\nu_{Cs}$, en 9 192 631 770, cuando se expresa en la unidad Hz, igual a s^{-1}. [$\Delta\nu_{Cs}$ = 9 192 631 770 /s]	Es la duración de 9 192 631 770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental no perturbado del átomo de cesio 133.
metro (m)	longitud [*l*]	Se define al fijar el valor numérico de la velocidad de la luz en el vacío, c, en 299 792 458, cuando se expresa en la unidad m · s^{-1}, según la definición del segundo dada anteriormente. [*c* = 299 792 458 m/s]	Es la longitud del trayecto recorrido por la luz en el vacío durante un intervalo de tiempo de 1/299 792 458 de segundo.

Unidad básica (símbolo)	Magnitud física básica [Símbolo de la magnitud]	Definición técnica	Definición derivada
kilogramo (kg)	masa [m]	Se define al fijar el valor numérico de la constante de Planck, *h,* en 6,626 070 15 · 10^{-34}, cuando se expresa en la unidad J · s, igual a kg · m^2 · s^{-1}, según las definiciones del metro y el segundo dadas anteriormente. [*h* = 6,626 070 15 · 10^{-34} kg · m/s]	
amperio (A)	corriente eléctrica [I]	Se define al fijar el valor numérico de la carga elemental, e, en 1,602 176 634 · 10^{-19}, cuando se expresa en la unidad *C,* igual a A · s, donde el segundo se define en función de Δv_{Cs}. [*e* = 1,602 176 634 · 10-19 A · s]	El efecto de esta definición es que el amperio es la corriente eléctrica correspondiente al flujo de 1/(1,602 176 634 · 10^{-19}) = = 6,241 509 074 · 10^{18} cargas elementales por segundo.
kelvin (K)	temperatura termodinámica [T]	Se define al fijar el valor numérico de la constante de Boltzmann, *k,* en 1,380 649 · 10^{-23}, cuando se expresa en la unidad J · K^{-1}, igual a kg · m^2 · s^{-2} · K^{-1}, según las definiciones del kilogramo, el metro y el segundo dadas anteriormente. [*k* = 1,380 649 · 10^{-23} kg · $m^2/s^2/K$]	Es igual a la variación de temperatura termodinámica que da lugar a una variación de energía térmica *kT* de 1,380 649 · 10^{-23} J.
mol (mol)	cantidad de sustancia [n]	Cantidad de sustancia de exactamente 6,022 140 76 · 10^{23} entidades elementales. Esta cifra es el valor numérico fijo de la constante de Avogadro, N_A, cuando se expresa en la unidad mol^{-1}. [N_A = 6,022 140 76 · 10^{23} /mol]	Es la cantidad de sustancia de un sistema que contiene: 6,022 140 76 · 1023 entidades elementales especificadas.
candela (cd)	intensidad luminosa [Iv]	Se define al fijar el valor numérico de la eficacia luminosa de la radiación monocromática de frecuencia 540 · 10^{12} Hz, Kcd, en 683, cuando se expresa en la unidad lm · W^{-1}, igual a cd · sr · W^{-1}, o a cd · sr · kg^{-1}·m^{-2} · s^3, según las definiciones del kilogramo, el metro y el segundo dadas anteriormente. [K_{cd} = 683 cd · sr/kg/m^2 · s^3]	Es la intensidad luminosa, en una dirección dada, de una fuente que emite radiación monocromática de frecuencia 540 · 10^{12} Hz y tiene una intensidad radiante en esa dirección de 1/683 W/sr.

Además de las unidades básicas hay dos unidades suplementarias.

Tabla 1.2 (Unidades Suplementarias)

Unidad (símbolo)	Magnitud física	Expresión en unidades SI básicas	Definición
radián (rad)	ángulo plano	m/m=1	Es el ángulo plano comprendido entre dos radios de un círculo que, sobre la circunferencia de dicho círculo, interceptan un arco de longitud igual a la del radio.
estereorradián (sr)	ángulo sólido	$m^2/m^2=1$	Es el ángulo sólido que, teniendo su vértice en el centro de una esfera, intercepta sobre la superficie de dicha esfera un área igual a la de un cuadrado que tenga por lado el radio de la esfera.

Tabla 1.3

Prefijo		
Factor	**Nombre**	**Símbolo**
10^{24}	yotta	Y
10^{21}	zetta	Z
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hecto	h
10^{1}	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a
10^{-21}	zepto	z
10^{-24}	yocto	y

Unidades que no pertenecen al SI, pero se aceptan para su uso dentro de este

El BIPM declara que las siguientes unidades, que no pertenecen al SI, se permiten para su uso con el SI.

Tabla 1.4

Magnitud	Unidad		
	Nombre	Símbolo	Valor expresado en unidades del SI
Masa	tonelada	t	1 t = 1 Mg = 1 000 kg
volumen	litro	L, l	1 L = 1 dm^3 = 0,001 m^3
superficie	área	a	1 a = 1 dam^2 = 100 m^2
	hectárea	ha	1 ha = 100 a = 10 000 m^2
ángulo plano	grado sexagesimal	°	1 = (π/180) rad
	minuto de arco	′	1′ = (1/60) = (π/10 800) rad
	segundo de arco	″	1″ = (1/60)′ = (π/648 000) rad
tiempo	minuto	min	1 min = 60 s
	hora	h	1 h = 60 min = 3 600 s
	día	d	1 d = 24 h = 86 400 s

Datos útiles

Ángulos notables		
α	**sen**α	**cos**α
0°	0	1
30°	0,5	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$	0,5
90°	1	0
180°	0	–1

Identidades trigonométricas frecuentes
$1 = \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha$
$\text{sen}2\alpha = 2\,\text{sen}\alpha\,\cos\alpha$
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha$

Algunas constantes físicas y datos astronómicos	
Rapidez de la luz	$2{,}99792468 \cdot 10^8$ m/s
Constante gravitacional	$6{,}6742(10) \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2
Aceleración de la gravedad (valor estándar)	9,80665 m/s^2
Masa del electrón	$9{,}1093826(16) \cdot 10^{-31}$ kg
Masa del protón	$1{,}67262171(29) \cdot 10^{-27}$ kg
Masa del neutrón	$1{,}67492728(29) \cdot 10^{-27}$ kg
Masa de la Tierra	$5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg
Masa de la Luna	$7{,}349 \cdot 10^{22}$ kg
Masa del Sol	$1{,}9891 \cdot 10^{30}$ kg
Radio medio de la Tierra	6371,0 km
Radio medio de la luna	1 738 km
Radio medio del Sol	$0{,}7 \cdot 10^9$ m

Los números entre paréntesis indican la incertidumbre en los dígitos finales.

Respuestas a las tareas generales (numéricas)

Capítulo 2

2. b) $x_{0A} = 5$ m $x_{0B} = 4$ m c) $v_A = 2$ m/s $v_B = -3$ m/s
e) $\Delta S_A = 20$ m $\Delta S_B = 30$ m

3. a) $x_1 = 150$ km, $x_2 = 120$ km b) $t_2 = 6$ h, c) $x_e = 240$ km

4. a) $v = u - v' = 9{,}0$ m/s b) $t = \frac{l}{v'} = 15$ s c) $x = l\frac{u - v'}{v'} = 2{,}0 \cdot 10^1$ m

5. b) $a_{AB} = 2$ m/s^2, $a_{BC} = 0\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ c) $v_{3,5} = 11$ m/s d) $\Delta S = 80$ m e) $\tilde{v} \approx 8\frac{\text{m}}{\text{s}}$

6. a) a = –0,83 m/s^2 b) $\Delta S = 415$ m c) $v = 5{,}6$ m/s d) $\Delta S = 27{,}8$ m

7. a) a = 1,5 m/s^2 b) $v = 1{,}5$ m/s c) $\Delta S = 9{,}0$ m d) $\Delta S_T = 0$ m

8. $v_0 = 30$ m/s

9. $t_e = 3$ s, $x_e = 9$ m

10. a) $t_1 = 1{,}0$ s, $H_{máx} = 5{,}0$ m, b) $t_2 = 2{,}0$ s, c) $y_1 = 4{,}69$ m, $v_y = 2{,}5$ m/s.

11. $t_1 = 6{,}0$ s, $v_1 = -90{,}0$ m/s

12. a) $t = 0{,}77$ s b) $v_A \approx 8{,}3 \cdot 10$ m/s, $v_B \approx 2{,}3 \cdot 10$ m/s c) B

13. a) $v_0 = 40$ m/s b) $y_{máx} = 20$ m c) $L = 139{,}2$ m

14. a) $v_0 = 10$ m/s b) $t_v = 1{,}2$ s c) $L = 9{,}6$ m, $y_{máx} = 1{,}5$ m

15. a) $T = 0{,}25$ s b) $v = 3{,}8$ m/s c) $x = 10{,}0$ cm

16. $v_1 \approx 1{,}4 \cdot 10^{-5}$ m/s, $v_2 \approx 1{,}3 \cdot 10^{-3}$ m/s, $v_3 \approx 8{,}2 \cdot 10^{-2}$ m/s

17. Hay colisión $\Delta S = 312{,}5$ m.

Capítulo 3

1. b) $a = 0{,}5$ m/s^2, b) $P = 20$ N

2. b) $a = 0{,}88$ m/s^2 N, c) $P = 32{,}5$ N

3. b) fr = 125 N , c) $P = 200$ N, d) $\mu_c = 0{,}6$

4. $F_x = 175$ N

5. a) $a = -8{,}0$ m/s^2, b) $\Delta S = 6{,}25$ m

6. a) $v_0 = 10$ m/s, b) $\Delta t = 2{,}0$ s, c) $\mu_c = 0{,}5$

7. a) $a = 3{,}0$ m/s^2, b) $\Delta t = 1{,}0$ s, c) $\mu_c = 0{,}1$

8. $m = 0{,}55$ kg

9. a) 4,0 m/s^2, $\Delta S = 1\,250$ m, b) $F_R = 2{,}0$ N

10. a) $F_{máx} = 10$ N, b) $F = 9{,}6$ N

11. $a = 2{,}5\ m/s^2$, $F = 21{,}62\ N$

12. b) $a = 4{,}9\ m/s^2$, c) $\Delta t = 0{,}54\ s$

13. $a = 3\ m/s^2$, b) $\mu_c = 0{,}25$

14. $fr_e = 3\ 400\ N$

15. $a = 0{,}25\ m/s^2$

16. a) $a = -9\ m/s^2$, b) $\Delta S = 1{,}38\ m$, c) $a = 1\ m/s^2$

17. $v_{máx} = 15{,}8\ m/s$

Capítulo 4

2.

a) $m = 1,6 \cdot 10^3\ kg$

b) $p \approx 3{,}2 \cdot 10^4\ kg\ m/s$

c) $\Delta p \approx 3{,}2 \cdot 10^4\ kg\ m/s$

d) $\Delta t \approx 5{,}0\ s$

3.

a) $J \approx 8{,}4 \cdot 10^2\ N \cdot s$

b) $F \approx 3{,}0 \cdot 10^2\ N$

4.

$J \approx 8{,}9\ N \cdot s$

5.

a) $J \approx 24\ N \cdot s$

b) $\Delta t \approx 2{,}0\ s$

6.

$v_C \approx 3{,}0\ m/s$

7.

$v_b \approx 0{,}60\ m/s$

8.

$v_S \approx 0{,}80\ m/s$

9.

$v_b = 1{,}0\ 10^2\ m/s$

10.

$v_{rc} \approx -0{,}21\ m/s$

11.

a) $p_b = p_f = 12\ kg \cdot m/s$

b) $v_{rc} = 4{,}0\ m/s$

12.

a) $\Delta p \approx 1{,}4$ kg · m/s

b) $F \approx 9{,}3 \cdot 10^2$ N

13.

a) $V_p \approx -3{,}3$ m/s

b) $V_p \approx 1{,}7$ m/s

c) $V_p \approx -8{,}3$ m/s

14.

a) $V_c \approx 4{,}8$ m/s

b) $V_p \approx 15$ m/s

c) $V_p \approx -5{,}1$ m/s

15.

$V_S = 0{,}5$ m/s

16.

$p \approx 1{,}7 \cdot 10^3$ kg · m/s

18.

$F_m \approx 6{,}0 \cdot 10^3$ N

19.

$V_m \approx 11$ m/s

20.

a) $V_{1b} \approx 7{,}5 \cdot 10^2$ m/s b) $V_{0b} \approx 9{,}9 \cdot 10^2$ m/s

21.

a) $V_p \approx -3{,}1$ m/s

22.

a) $J = -1{,}2 \cdot 10^2$ N · s b) $F = 30$ N c) $p_0 = 100$ kg m/s $p_f = -20$ kg · m/s

23.

a) $F \approx 1{,}8 \cdot 10^4$ N b) $\Delta t \approx 4{,}7 \cdot 10^{-4}$ N

Capítulo 5

1. $W = 4\,350$ J

2. $W = 500$ J

3. $W = 250$ J

4. $W_{F1} = 15$ J, $W_{F2} = 48$ J, $W_{fr} = -30$ J, $W_R = 33$ J

5. $W = 3\,000$ J

6. $W = 0$ J

7. a) $W = 500$ J, b) $\mu_c = 0{,}66$

8. $W = 108\,640$ J

9. $E_C = 180$ J, $v = 10{,}95$ m/s

10. $W = -4{,}5 \cdot 10^5$ J

11. $W = -80$ J $\Delta S = 26{,}6$ m

12. $W = -62\,500$ J

13. $W = -4$ J

14. $W = 1\,500$ J $f_r = 250$ N

15. $\Delta E_{pg} = -125$ J

16. $W_{Fg} = -100$ J

17. $W_{elás} = -8$ J

18. $W = -11{,}25$ J

19. $W = -1$ J

20. $h = 45$ m

21. $h = 1\,960$ m

22. a) $E_M = E_{Pg} = 400$ J b) $E_C = E_{Pg} = 200$ J, $E_M = 400$ J c) $E_C = E_M = 400$ J

23. a) $E_{C0} = 28\,125$ J b) $E_{Pg} = 1\,000$ J c) $E_{M0} = 38\,125$ J d) $v = 87{,}32$ m/s

24. $h = 250$ m

25. $x = 20$ m

26. $L = 20$ m

27. $W_{fr} = -300$ J $f_r = 67{,}35$ N

28. $W = -100$ J

29. $v = 4{,}47$ m/s $T = 0{,}1$ N

30. a) $v = 0{,}5$ m/s b) $h = 0{,}0125$ m

31. a) $\mu_c = 0{,}24$ b) $W_{fr} = -8{,}52$ J

32. $h = 0{,}165$ m

33. $x = 0{,}1108$ m

34. $h = 2{,}96$ m

35. $v = 36{,}67$ m/s

36. $v_A = -7{,}2$ m/s, $v_B = 4{,}8$ m/s

Capítulo 6

1. a) $\alpha = 2{,}0\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$ $\Delta\theta = 9{,}0$ rad b) $\omega = 4{,}0\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

2. $\omega = 78{,}7\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

3. a) $\omega = 8{,}0\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ b) $\Delta\theta = 16$ rad c) $a_t = 1{,}0\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

4. $E_{cd} = 2{,}0 \cdot 10^{-4}$ J , $E_{ce} = 3{,}2 \cdot 10^{-4}$ J

5. a) $\omega = 0{,}5$ rad/s b) $E_{c0} = 4{,}95$ J $E_{c0} \approx 5{,}0$ J $E_{cf} = 1{,}65$ J $E_{cf} \approx 1{,}7$ J

6. a) $I = 5{,}6 \cdot 10^{-3}$ kg · m² b) $I = 8 \cdot 10^{-4}$ kg · m²

7. a) $I = 60$ kg · m² b) $I = 4{,}44$ kg · m² $I \approx 4$ kg · m²

8. a) $\tau_1 = 8$ N · m $\tau_2 = 3$ N · m b) $\sum\tau = \tau_1 - \tau_2$ $\sum\tau = 5$ N · m
c) $X\ \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2$ $X \sum\vec{\tau}$

9. $F = 12{,}5$ N

10. $a = 0{,}5$ rad/s² $\omega = 10$ rad/s

11. a) $F = -12{,}5$ N b) $Q = -10^2$ J

12. $L = 392{,}5\ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$ $E_C = 30\,812{,}5$ J

13. a) $\omega_2 = 40$ rad/s b) $L_0 = 0{,}04\ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$ $L = 0{,}04\ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$

14. a) $a = 1$ rad/s² $\theta = 12{,}5$ rad b) $L = 80$ Nm · s $E_C = 200$ J

15. a) $a = 6{,}53$ m/s² b) $a = 65{,}3$ rad/s² c) $T = 3{,}27$ N

16. c) Para F_1, $b_1 = 1$ m; para F_2 es cero; para la normal y la fuerza de gravedad $\frac{l}{2} = 1$ m la fuerza que ejerce el eje sobra la barra, no tiene brazo.

d) $\tau_{F1} = 10$ Nm, $\tau_{F2} = 0$ Nm, $\tau_{Fg} = \tau_N = 20$ Nm e) $\alpha = 3{,}7 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$

17. $F_1 = (3M + m)g$

18. a) Sin deslizar $v = 3{,}3$ m/s y $\omega = 165\ \text{rad}/\text{s}$ b) Con deslizamiento $v = 3{,}9$ m/s

Capítulo 7

1. a) $T = 1{,}98$ s b) $\omega \approx \pi$ rad/s c) $x = 5 \cdot 10^{-2} \cos(\pi.t)$; (x ; s)
d) $V_m = 0{,}16$ m/s $a_m = 0{,}5$ m/s²

2. a) $x = 6{,}0 \cos(10^{-3}\ \pi t)$x ; s) b) $k = 4{,}9 \cdot 10^{-6}$ N/m
c) $X_m = 6$ m d) $V_m = 1{,}9 \cdot 10^{-2}$ m/s e) $a_m = -5{,}9 \cdot 10^{-5}$ m/s²

3. a) $x = 0$, $x = 4$ m, $v = V_m = 8\pi$ m/s $v = 0$, a = 0, $a = 16\pi^2$ m/s²

4. a) $X_m = 0{,}32$ m b) $v = 1$ Hz

5. a) $T = 4 \cdot 10^{-3}$ s b) $\omega = 5\pi \cdot 10^2$ rad/s c) $X_m = 4 \cdot 10^{-2}$ m
d) $x = 4 \cdot 10^{-2}\,\text{sen}(5\pi \cdot 10^2 t)$(x;s) e) $v = 0$, $a = a_m = 9{,}8 \cdot 10^4$ m/s²

6. a) $X_m = 25$ mm, $\omega = 4\pi$ rad/s b) $T = 0{,}5$ s, $v = 2$ Hz
c) $v = 0{,}314\cos 4\pi t \left(\frac{\text{m}}{\text{s}};\ \text{s}\right)$ $a = -3{,}94\,\text{sen}\,4\pi t \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2};\text{s}\right)$

7. a) $\omega = 1{,}58 \cdot 10^{-4}$ rad/s b) $T = 3{,}97 \cdot 10^4$s
c) $Vm = 7{,}9 \cdot 10^{-7}$ m/s d) $x = 5 \cdot 10^{-3}\cos(1{,}58 \cdot 10^{-4}\,t)$(m;s)

8. $t = \frac{T}{6}$

9. a) $E_p = 2$ J b) $E_p = E_M$ si E_C es nula c) $v_m = 1{,}41$ m/s
d) $T = 88{,}8$ s e) $x = 0{,}2\cos(7{,}1t)$ (m;s)

10. a) $v = 0{,}4$ Hz, $T = 25$ s, $\omega = 0{,}08\,\pi$rad/s
b) $x = 4 \cdot 10^{-2}\cos(0{,}08\pi t)$ (m;s) $v = 10^{-2}\,\text{sen}\,0{,}08\pi t\left(\frac{\text{m}}{\text{s}};\text{s}\right)$,
$a = -2{,}5 \cdot 10^{-3}\cos 0{,}08\pi t\left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2};\text{s}\right)$

11. a) $Vm = 9{,}42 \cdot 10^{-2}$ m/s, b) $a_m = 7{,}4 \cdot 10^{-2}$ m/s²
c) $v = 6{,}6 \cdot 10^{-2}$ m/s $a = 5{,}2 \cdot 10^{-2}$ m/s²

12. a) $E_{cmáx} = 2{,}2 \cdot 10^{-3}$ J b) $E_p = 2{,}2 \cdot 10^{-3}$ J, c) $E_M = 2{,}2 \cdot 10^{-3}$ J
d) $v = 0{,}09$ m/s, $a = 0{,}86\ {}^{m}/_{s^2}$ $E_C = 0{,}246$ J

14. $\omega = \omega_0$

15. $L_1 = 9$ cm y $L_2 = 25$ cm

16. $T_2 = 0{,}46$ s

17. $V = 9{,}48$ m/s

18. $\mu = 0{,}07$

Capítulo 8

1. a) Transversal. b) $\lambda = 8$ cm c) $y_{máx} = 0{,}05$ m d) $f = 2{,}5 \cdot 10^2$ Hz
e) $\omega = 5\pi \cdot 10^3$ rad/s $k = 25\pi\ {}^{\text{rad}}/_{\text{m}}$ f) $y = 5 \cdot 10^{-2}\,\text{sen}(5\pi \cdot 10^3 t - 25\pi x)$ (m;s)

2. b) $T = 4$ s $\omega = \frac{\pi}{2}\ {}^{\text{rad}}/_{\text{s}}$ c) $\lambda = 40$ m
d) $y = 3 \cdot 10^{-2}\,\text{sen}(0{,}5\pi t + 2 \cdot 10^{-2}\pi x)$ (m;s)) e) $y = 0$

3. a) $f = 4$ Hz b) $v = 0{,}16$ m/s

4. a) $v = 3{,}4 \cdot 10^{-2}$ m/s b) $\lambda = 1{,}4 \cdot 10^6$ m

5. $s = 680$ m

6. a) $T = 0{,}02$ s $f = 50$ Hz $\lambda = 0{,}3$ m b) $y = \text{sen}(100\pi t + 10\pi x)$(m;s)
c) $y = 0$

8. $y = \text{sen}(8\pi t - k4x)$(m;s)

10. $\Delta = 20\,\lambda$ se forma un máximo.

15. $\frac{\lambda_{ai}}{\lambda_{ag}} \approx 0{,}24$, cambia 0,24 veces.

16. a) El ángulo de refracción tiene un valor de 37,6°. b) $\hat{R} = 53{,}13°$

17. a) 50 cm b) 0,66 cm

18. $f_r = 1{,}01 \cdot 10^3$ Hz $\lambda_r = 0{,}3$ m

19. a) $f_r = 1{,}94 \cdot 10^3$ Hz b) $\lambda_r = 0{,}175$ m $\lambda_r = 0{,}170$ m

20. a) $A = 2 \cdot 10^{-2}$m b) $v = 0$ c) $V_{máx} = 5{,}0\ {}^{m}/_{s}$
d) Para el foco $y = 2 \cdot 10^{-2}\ \text{sen}(8\pi \cdot 10^{-2}t)$(m;s)
Para la onda $y = 2 \cdot 10^{-2}\ \text{sen}(8\pi \cdot 10^{-2}t - 2{,}7\ \pi x)$(m;s)

21. $v_r = 9\,010$ m/s.

BIBLIOGRAFÍA

Gil, P.D., Macedo, B., Torregrosa, M. J., Sifredo, B. C., Valdés, C. P., Vilches, A.: *¿Cómo promover el interés por la cultura científica? Una propuesta didáctica fundamentada para la educación de jóvenes de 15 a 18 años,* OREALC/UNESCO, Santiago de Chile, 2005.

Kikoin, I. K., Kikoin, A. K.: *Física 1*, Ed. MIR, Moscú, 1987.

French, A. P.: *Mecánica Newtoniana*, Ed. Reverte, España, 1988.

Nuñez, V. J., Sifredo, B. C., Hernández, B. J., Vilaú, P. E.: *Física Décimo grado*, Edit. Pueblo y Educación, La Habana, 2014.

Sifredo, B. C., Ayala, E. L.: *El trabajo experimental asistido por recursos informáticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Física*, Sello editor Educación Cubana, La Habana, 2012.

Sifredo, B. C., Elias, C. J: *Física Décimo. Orientaciones Metodológicas para la solución de problemas*, Edit. Pueblo y Educación, La Habana, 1987.

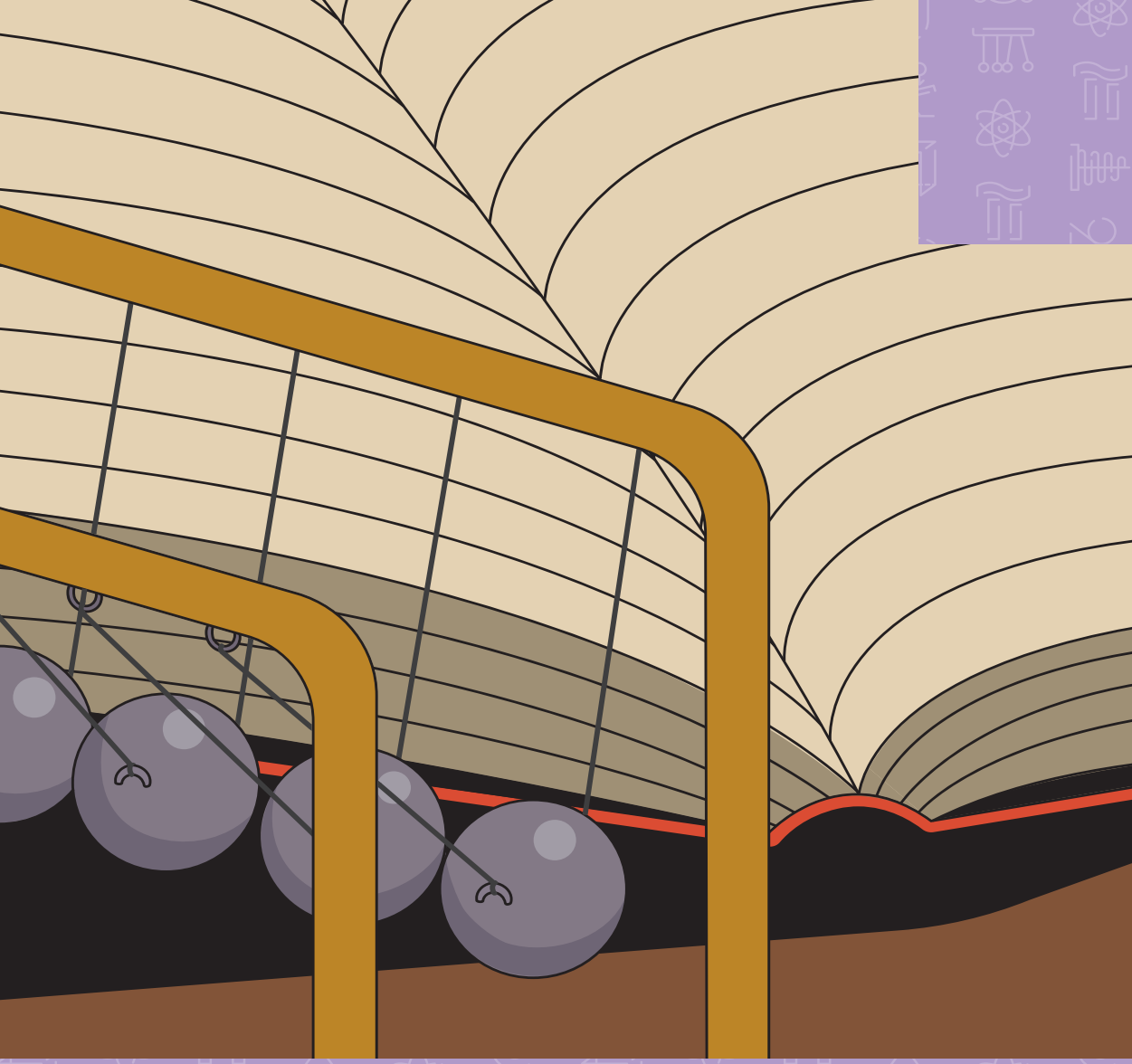
Resnick, R., Halliday, D. Krane, S. K.: *Física,* Volumen1, Ed. Continental, México,1999.

Serway, A. R., Jewett, W. J.: *Física para ciencias e ingeniería*, Volumen 1, Cengage Learning, 2014.

Yavorki, B. M., Pinski, A. A.: *Fundamentos de Física I*, Ed. MIR, Moscú,1983.

Young, H. D., Roger, A. F.: *Física Universitaria*, Volumen 1, Ed. Pearson, México, 2009.

Vocabulario Internacional de Metrología, Centro Español de Metrología, Tercera Edición, 2012.



EDITORIAL
PUEBLO Y EDUCACIÓN

9 789591 343567