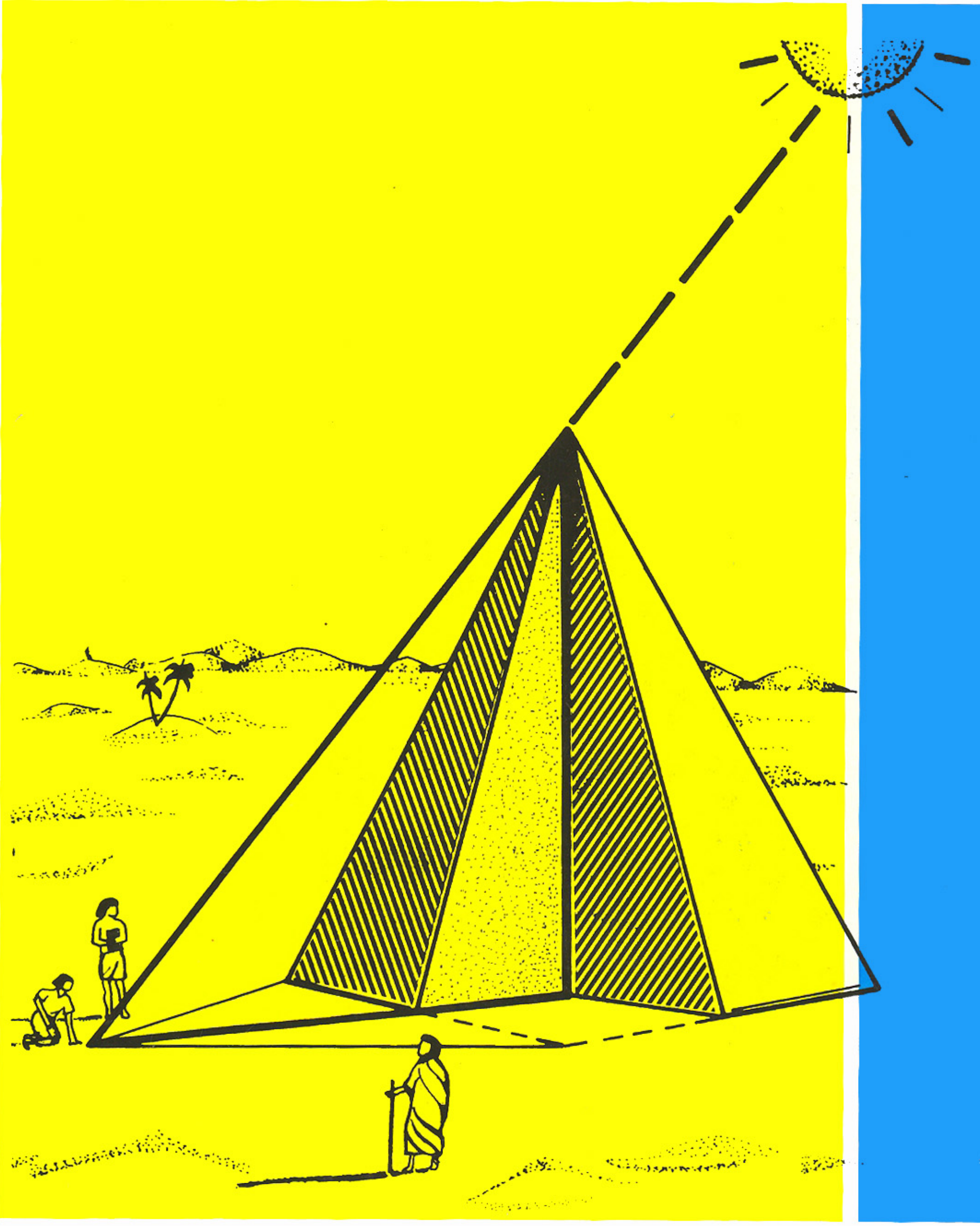
LIBRO DE DISTRIBUCIÓN GRATUITA. PROHIBIDA SU VENTA



Matemática

10º grado

Este libro forma parte del conjunto de trabajos dirigidos al Perfeccionamiento Continuo del Sistema Nacional de Educación en la Educación General Politécnica y Laboral. Ha sido elaborado por un colectivo de autores integrado por metodólogos, maestros, profesores y especialistas, y revisado por la subcomisión correspondiente de la Comisión Nacional Permanente para la Revisión de Planes, Programas y Textos de Estudio, del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas del Ministerio de Educación.

Edición: Prof. Adelaida Palma Matienzo
Lic. Laura Herrera Caseiro
Diseño: María Elena Gil Mc Beath
Ilustración: Lázaro Blanco Fernández

ISBN 959-13-0682-2

EDITORIAL PUEBLO Y EDUCACIÓN
Ave. 3ra. A No. 4605 entre 46 y 60,
Playa, Ciudad de La Habana,
Cuba. CP 11300.

ORIENTACIONES SOBRE EL TRABAJO CON ESTE LIBRO

Para estudiar por este libro debes tener en cuenta que el contenido se encuentra en los capítulos 1, 2, 3 y 4.

Cada capítulo esta dividido en epígrafes y algunos de estos en subepígrafes.

En cada epígrafe encontraras contenidos, algunos de ellos destacados en recuadros, y ejemplos resueltos que ilustran como debes actuar para resolver ejercicios importantes que corresponden a ese contenido. Al final de cada epígrafe aparecen los ejercicios que debes resolver, y al final de cada capítulo una colección de ejercicios que incluyen contenidos de cada uno de ellos. Los ejercicios que aparecen señalados con un asterisco, son los que presentan un mayor grado de dificultad.

En las ultimas paginas del libro aparecen las respuestas de la mayoría de los ejercicios propuestos. Esto te permitirá autocontrolar tu trabajo.

Aparece además un Anexo que contiene:

Las tablas de cuadrados y raíces cuadradas, cubos y raíces cúbicas, y las de las funciones seno, coseno, tangente y cotangente, que necesitaras para calcular y resolver ejercicios y problemas.

Un Memento o recordatorio donde se resumen algunos contenidos de grados anteriores que te serán necesarios para el trabajo en este grado.

¿CÓMO SURGE EL ÁLGEBRA?

La civilización de los sumerios, varios siglos a.n.e., dejó constancia del uso del trabajo con variables en su algebra escrita en las célebres tablillas de barro.

El algebra fue redescubierta por el matematico griego Diofanto de Alejandria (siglo III) en la solución de sus famosos problemas. Diofanto, para representar las variables y el trabajo con estas, utilizó cierto simbolismo; pese a ello los matemáticos que le sucedieron no lo conservaron y fueron creando sus propios símbolos.

Esta diversidad de símbolos y signos para el trabajo con variables trajo como consecuencia que los matemáticos para interpretarse entre ellos tuviesen que recurrir al lenguaje común.

Por ejemplo, una ecuación como $2x^2 + 5 - 3x = 0$ la expresaban utilizando palabras, entre ellas la palabra cosa para significar la variable, De este modo la ecuación anterior se expresaba como: "El duplo de la cosa al cuadrado, más cinco, menos el triplo de la cosa, es igual a cero".

En una obra del matematico Johan Müller, en 1464, empleando las palabras, como era costumbre, en latín, expresaba la ecuación como se muestra a continuación:

"2 census et 5 demptes 3 rebus aequatur zero".

Pocos años después, el italiano Luca Pacioli en su obra ***Sunma***, publicada en 1494, empezaba a utilizar en forma abreviada o sincopada el trabajo con variables, dando origen al álgebra sincopada. Pacioli representaba la ecuación anterior como sigue:

2 ce p 5 m 3 re al 0.

En esta expresión, ce es la abreviatura de census que quiere decir la cosa por si misma; p y m corresponden respectivamente a plus (+) y minus (–); re significaba restar y al significaba igual.

Menos de un siglo más tarde, Francois Vieta (1540-1603) inicia el álgebra simbólica aproximándose a la representación que usamos actualmente para el trabajo con variables. Él escribió la mencionada ecuación en la forma siguiente:

2 m Aquad + S – 3 in A ꟹ 0,

donde la letra A representaba a la variable, para el cuadrado quad y ꟹ para el signo =

Finalmente, en 1619, Rene Descartes presenta la ecuación casi como nosotros en el presente;

$2xx + 5 - 3x\alpha 0$.

¡Sin dudas, actualmente todo es mucho más fácil!

1

Trabajo con variables

Conjuntos

1. Conjuntos numéricos. Relaciones

De tus estudios previos conoces la existencia de conjuntos de distinta naturaleza y sus propiedades.

En general denotamos los conjuntos con letras mayúsculas y los elementos que los forman con letras minúsculas; para indicar que un elemento pertenece a un conjunto se usa el símbolo $\in$ y para indicar que no pertenece, el símbolo $\notin$
Por ejemplo:

> $a \in M$ indica que el elemento a pertenece al conjunto M y se lee "a pertenece a M".
> $b \notin M$ indica que el elemento b no pertenece al conjunto M y se lee "b no pertenece a M".
> Un conjunto de especial importancia es el conjunto vacío "ϕ" que no contiene ningún elemento.

De particular interés desde el punto de vista matemático, son los conjuntos numéricos. Recordemos mediante un cuadro sinóptico los principales conjuntos numéricos.

- Reales $\mathbb{R}$
  - Racionales $\mathbb{Q}$
    - Enteros $\mathbb{Z}$
      - Naturales $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; ...\}$
      - Enteros negativos $\{-1; -2; -3; -4; ...\}$
    - Fracciones positivas y negativas.
  - Irracionales

Los números reales se pueden representar como expresiones decimales infinitas; así, por ejemplo:

$\frac{1}{3} = 0{,}333\,3... = 0{,}\bar{3}$. De esta forma se indica que el 3 es un periodo; se lee, cero coma tres, periodo 3.

$\frac{1}{4} = 0{,}25 = 0{,}250\,00... = 0{,}25\bar{0}$. Las expresiones decimales finitas pueden considerarse periódicas de periodo 0.

$\pi = 3{,}141\,592\,653\,509\,793\,238...$ Aquí no aparecen periodos.

En los ejemplos anteriores se pone de manifiesto una propiedad.

Teorema 1

> Los números racionales se representan mediante expresiones decimales periódicas. Los números irracionales se representan por expresiones decimales no periódicas.

El teorema 1 se aplica para reconocer si un numero real es racional o irracional a partir de su expresión decimal.

Ejemplo 1

Determina si las siguientes expresiones decimales representan números racionales o irracionales.

a) $a = 3{,}2\bar{7}$ **b)** $b = 1{,}010\,010\,001\,000\,01\,...$ **c)** $c = 3{,}275\,8\overline{43}$

Resolución

a) $a \in \mathbb{Q}$, pues tiene período 7

b) $b \notin \mathbb{Q}$, puede verse que el número de ceros crece en uno cada vez, luego la expresión no es periódica.

c) $c \in \mathbb{Q}$, aparece el período 43. □

No siempre los números reales aparecen representados mediante expresiones decimales, también se representan utilizando números enteros y los signos de las operaciones, por ejemplo: $\frac{2}{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{4}$. En este caso se cumple:

> Los números racionales se representan en la forma $\frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Los números irracionales no pueden representarse de la forma $\frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$.

El conjunto de los números reales se puede representar sobre una recta (fig. 1.1), de forma tal que a cada número real se le haga corresponder un punto y viceversa Esta recta recibe el nombre de recta real.

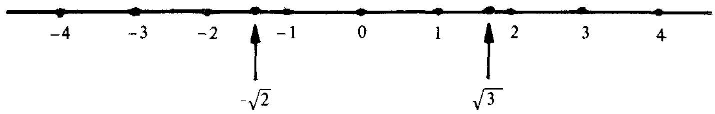


Fig. 1.1

Ejemplo 2

Representa sobre la recta real el conjunto de los números reales mayores o iguales que -2 y menores o iguales que $\sqrt{3}$ ($-2 \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$).

Resolución

Los números reales mayores que -2 se encuentran a la derecha de -2 y los menores que $\sqrt{3}$ se encuentran a la izquierda de $\sqrt{3}$, el conjunto pedido está formado por los puntos que están entre -2 y $\sqrt{3}$. Como x puede ser igual a -2 y a $\sqrt{3}$, ambos se incluyen. El conjunto pedido se destaca en la figura 1.2; los puntos rellenos en -2 y $\sqrt{3}$ indican que estos puntos se incluyen. ■

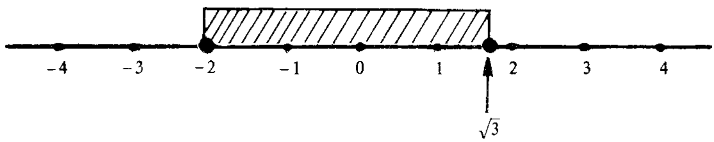


Fig. 1.2

Los conjuntos, como el del ejemplo 2, formados por todos los números reales comprendidos entre otros dos, se llaman **intervalos.** Cuando se incluyen ambos extremos (como en el ejemplo 2) reciben el nombre de **intervalos cerrados; cuando no se incluye ningún extremo, entonces se llaman abiertos.**

Para representar un intervalo (u otro conjunto formado, al igual que ellos, por infinitos puntos) se utiliza la notación:

$$\{x \in \mathbb{R} : -2 \leqslant x \leqslant \sqrt{3}\}$$

En esta notación $x \in \mathbb{R}$ indica que se toman elementos del conjunto de los números reales y después de los dos puntos aparece la condición que deben satisfacer los elementos.

Ejemplo 3

Representa gráficamente los intervalos:

a) $\{x$ E $\mathbb{R} : -2 < x < \sqrt{3}\}$ **b)** $\{x \in \mathbb{R} : -2 < x \leqslant$ 1/31

Resolución

a) En la figura 1.3a hemos destacado el intervalo, los puntos huecos indican que los extremos no pertenecen al intervalo.

b) En este caso (figura 1.3b), el punto hueco en –2 indica que no pertenece; el punto relleno en $\sqrt{3}$, que pertenece. ■

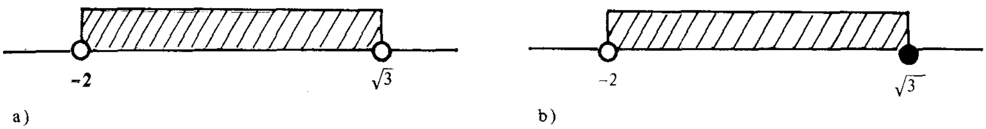


Fig. 1.3

El simbolo E indica una relacion entre elementos y conjuntos, el simbolo $\subset$ una relación entre conjuntos.

Con el símbolo $\subset$, denotamos si todos los elementos de un conjunto A pertenecen también a un conjunto B o lo que es lo mismo, que A es subconjunto de B $(A \subset B)$. Con el símbolo $\not\subset$ negamos la relación anterior. El símbolo $\subset$ se lee **incluido en.**

De acuerdo con las relaciones existentes entre los conjuntos numéricos, se cumple que: $\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$

Ejemplo 4

Di si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Justifica tu respuesta.

a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ **b)** $\{x \in \mathbb{R} : x \leqslant 3\} \subset \{x \in \mathbb{R} : x < \sqrt{20}\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{2} \leqslant x < \pi\} \subset \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{2} < x \leqslant 3\}$ **d)** $\phi \subset \mathbb{Z}$

Resolución

a) Verdadera, pues todo número natural es racional (recuerda que son válidas las inclusiones $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$).

b) Verdadera, pues como 3 < 1/20 , todo número menor o igual que 3 es menor o igual que 1/20 , en símbolos: si x á 3 entonces $x < \sqrt{20}$. Estos conjuntos pueden representarse como se indica en la figura 1.4.

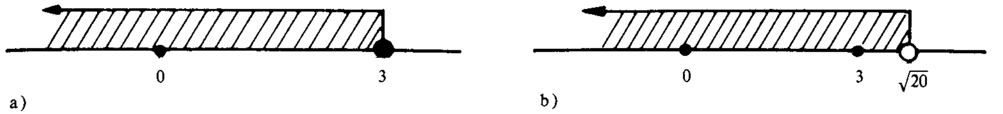


Fig. 1.4

c) Falsa, pues $\sqrt{2}$ pertenece al primer conjunto y no pertenece al segundo.

d) Verdadera, porque el conjunto vacío esta incluido en todo conjunto. ■

Ejercicios (epígrafe 1)

1. Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) $-2 \in \mathbb{Z}$ b) $5 \in \mathbb{Q}$ c) $\frac{4}{5} \in \mathbb{N}$ d) $\sqrt{2} \notin \mathbb{R}$ e) $2\frac{1}{5} \in \mathbb{Q}$

f) $3{,}4\overline{5} \in \mathbb{Q}$ g) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ h) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ i) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

2. Completa utilizando los símbolos $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$, de forma tal que se obtenga una proposición verdadera.

a) $-9\frac{1}{5}$ _____ $\mathbb{Z}$ b) $7\frac{1}{8}$ _____ $\mathbb{R}$ c) $9,\overline{3}$_____ $\mathbb{N}$ d) $\mathbb{Z}$ _____ $\mathbb{R}$

e) $\sqrt{2}$ _____ $\mathbb{Q}$ f) $\mathbb{R}$ _____ $\mathbb{Q}$ g) $9{,}48\overline{32}$ _____ $\mathbb{R}$ h) $\mathbb{N}$ _____ $\mathbb{Q}$

3. Dados los conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant -3\}$ $\quad B = \{x \in \mathbb{R} : -\sqrt{3} < x < 2\}$

$\mathbb{P}$: conjunto de los números naturales pares.

Completa los espacios en blanco con el símbolo adecuado, de forma que se obtenga una proposición verdadera.

a) 2 $\mathbb{P}$ b) 6 A c) A, _____ B d) -2 A e) $\mathbb{P}$ _____ A

f) $\sqrt{2}$_____ B g) 5 _____ $\mathbb{P}$ h) $\sqrt{3}$_____ B i) B _____ $\mathbb{P}$

4. En la figura 1.5 se representan gráficamente subconjuntos de números reales. Escribe los mismos de forma abreviada.

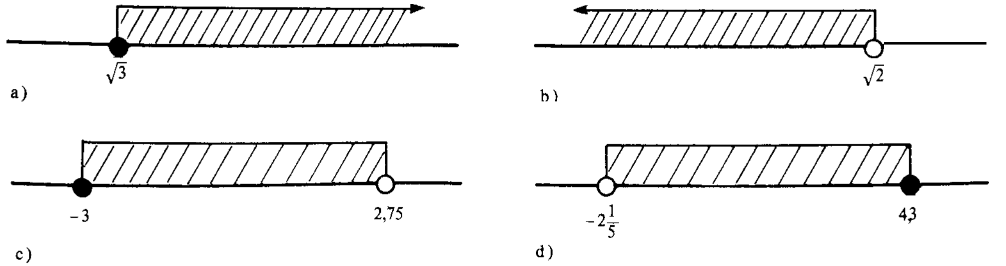


Fig. 1.5

5. Dados los conjuntos

$A = \{x \in \mathbb{R} : -6 \leqslant x < 3\}$ $B = \{x \in \mathbb{R} : x < 2{,}8\}$ $C = \{x \in \mathbb{R}: -3{,}\overline{52} \leqslant x < 4\}$

a) Representa gráficamente cada uno de los conjuntos dados.

b) Determina dos subconjuntos de cada uno de ellos.

2. *Operaciones con conjuntos*

Definición 1

Dados dos conjuntos A y B se define por:

a) Unión de A y B (se denota $A \cup B$) al conjunto formado por todos los elementos de ambos.

b) Intersección de A y B (se denota $A \cap B$) al conjunto formado por los elementos comunes a A y a B.

Ejemplo 1

Calcula $A \cup B$ **y** $A \cap B$ *si:*

a) $A = \left\{-5;\ 3;\ \sqrt{2}\ ;\ -2\frac{1}{5}\right\}$ $B = \left\{0{,}\bar{3};\ \sqrt{2}\ ;\ \frac{23}{4}\ ;\ -5\right\}$

b) $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 3\right\}$ $B = \left\{x \in \mathbb{R}: -2 \leqslant x < 5\right\}$.

Resolución

a) Para formar el conjunto $A \cup B$ se toman todos los elementos de A y todos los elementos de B, sin repetir los comunes.

$$A \cup B = \left\{-5;\ 3;\ \sqrt{2}\ ;\ -2\frac{1}{5}\ ;\ 0{,}\bar{3};\ \frac{23}{4}\right\}$$

Para formar $A \cap B$ se toman los elementos que están **a** la vez en A y en B,

$$A \cap B = \left\{\sqrt{2}\ ;\ -5\right\}$$

b) Representemos en una misma recta estos conjuntos para dar la solución (fig. 1.6).

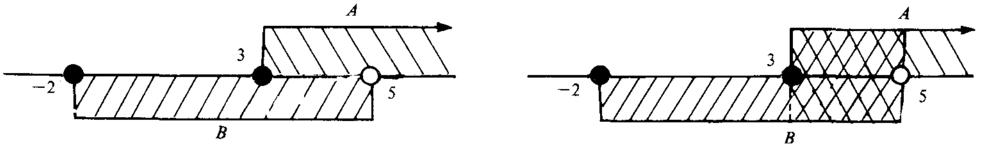


Fig. 1.6

$$A \cup B = \left\{x \in \mathbb{R} : x \geqslant -2\right\} \quad A \cap B = \left\{x \in \mathbb{R} : 3 \leqslant x < 5\right\} \quad \blacksquare$$

Definición 2

> Dados dos conjuntos A y B, se define como conjunto diferencia de A y B, en ese orden, (se denota $A \setminus B$), al conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B.

Ejemplo 2

Dados los conjuntos:

$$A = \left\{5;\ -\frac{3}{2};\ -\sqrt{7};\ 9{,}\overline{23}\right\} \qquad B = \left\{\frac{6}{7};\ -8;\ -\frac{3}{2};\ \sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$$

$$M = \left\{x \in \mathbb{R} : x < \frac{3}{4}\right\} \quad \text{y} \quad N = \left\{x \in \mathbb{R} : -\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 3\right\}$$

Calcula: a) $A \setminus B$ **b)** $B \setminus A$ **c)** $M \setminus N$ **d)** $N \setminus M$.

Resolución

a) Para determinar $A \setminus B$ se comparan ambos conjuntos, tomándose aquellos elementos que están en el conjunto A y que no están en B.

$$A \setminus B = \{5;\ -\sqrt{7};\ 9{,}\overline{23}\}$$

b) Para determinar $B \setminus A$, se toman los elementos que están en B pero que no están en A. $\quad B \setminus A = \left\{\frac{6}{7};\ -8;\ \sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$

c) Representemos gráficamente en una misma recta ambos conjuntos (fig. 1.7).

$$M \setminus N = \left\{x \in \mathbb{R} : x < -\sqrt{2}\right\}$$

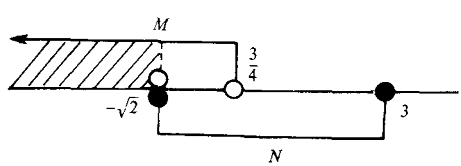


Fig. 1.7

d) Representemos en una recta los conjuntos N y M (fig. 1.8)

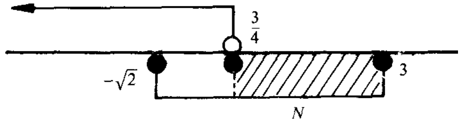


Fig. 1.8

$$N \setminus M = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{3}{4} \leqslant x \leqslant 3 \right\}. \quad \blacksquare$$

Del ejemplo 2 puedes observar que $A \setminus B \neq B \setminus A$ y que $M \setminus N \neq N \setminus M$, y es que de manera general la operación diferencia **no es conmutativa.**

Mediante la operación diferencia se puede expresar brevemente un subconjunto numérico del cual se exceptúan algunos elementos.

Por ejemplo, si se quiere escribir el conjunto de los números reales excepto el -3 y el 5, podemos hacerlo:

$\mathbb{R} \setminus \{-3; 5\}$.

En el caso que el número que se quiera exceptuar sea el cero, podemos escribir:

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ o $\mathbb{R}^*$.

Ejercicios (epígrafe 2)

1. Si $A = \left\{ 8{,}\overline{732}\ ;\ 2\frac{1}{5}\ ;\ -7;\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ 9 \right\}$ $\qquad B = \left\{ 3{,}2\overline{83}\ ;\ 9;\ -13;\ 2\frac{1}{5}\ ;\ 8{,}\overline{732} \right\}$

   $C = \left\{ 3{,}2\overline{83}\ ;\ -13;\ 2\frac{1}{5} \right\}$.

   Calcula: $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$; $B \cup C$; $B \cap C$; $B \setminus C$; $C \setminus B$.

2. Si $M = \{x \in \mathbb{N} : x \geqslant 2\}$ $\qquad N = \{x \in \mathbb{Z} : -3 \leqslant x \leqslant 5\}$

   $P = \{x \in \mathbb{Q} : 2x + 6 = 0\}$

   Calcula: $M \cup N$; $M \cap N$; $M \setminus N$; $N \setminus M$; $N \cup P$; $N \cap P$; $N \setminus P$; $P \setminus N$

3. Si $D = \left\{ x \in \mathbb{R} : x < \sqrt{2} \right\}$ $\qquad E = \left\{ x \in \mathbb{R} : -3\frac{1}{4} < x < 5 \right\}$

   $F = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 5\}$

   Calcula: $D \cup E$; $D \cap E$; $E \cup F$; $E \cap F$; $D \setminus E$; $F \setminus D$

4. Si $P = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x| \leqslant \frac{4}{3} \right\}$ $\qquad Q = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

   $S = \{x \in \mathbb{R} : -3 < x \leqslant 5\}$

   Calcula: $P \cup Q$; $P \cap S$; $Q \cup S$; $Q \cap S$; $Q \setminus S$; $P \setminus Q$.

3. *Valor numérico de una expresión algebraica. Reducción de términos semejantes*

En cursos anteriores has trabajado con términos y expresiones algebraicas. Si en estas expresiones se sustituyen las variables por números y efectúas las operaciones indicadas, el valor resultante (si existe) recibe el nombre de **valor numérico.**

Los valores de la variable para los cuales el valor numérico existe, son los **valores admisibles** de la variable.

Definición 1

> Se llama dominio de una expresión algebraica al conjunto de los valores admisibles.

Ejemplo 1

Dada la expresión algebraica $2x^3 - 6x^2y - 5xy^0$

a) Di para qué valores de la variable está definida.

b) Calcula su valor numérico para $x = -2,\ y = \frac{1}{3}$

Resolución

a) Para toda $x \in \mathbb{R}$ y toda $y \in \mathbb{R}^*$, porque si se sustituye por $y = 0$, se obtiene 0^0, que no está definido.

b) $2(-2)^3 - 6(-2)^2\left(\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)^0$ Sustituyendo valores.

$= 2(-8) - 6(4)\left(\frac{1}{3}\right) - 5(-2)(1)$ Efectuando potencias.

$= -16 - 8 + 10$ Efectuando productos

$= -14$ Efectuando la suma. ■

Ejemplo 2

Dada la expresión algebraica

$$\frac{a^2b}{a-2} - \frac{3a - b^3}{2b+3} - 5a^{-3}$$

a) Determina para qué valor de las variables carece de valor numérico.
b) Calcula su valor numérico para $a = -0{,}5$; $b = -1$

Resolución

a) Si $a - 2 = 0$ o $2b + 3 = 0$, la expresión carece de valor numérico.

$a = 2$ o $b = -\frac{3}{2}$ Despejando.

y como $5a^{-3} = \frac{5}{a^3}$, si $a^3 = 0$ la expresión no tiene valor numérico. Esto se cumple para $a = 0$.

Luego para $a = 2$, $a = 0$ o $b = \frac{3}{2}$ la expresión carece de valor numérico.

b) $\dfrac{(-0,5)^2(-1)}{-0,5-2} + \dfrac{3(-0,5)-(-1)^3}{2(-1)+3} - 5(-0,5)^{-3}$

$= \dfrac{(-0,5)^2(-1)}{-0,5-2} - \dfrac{3(-0,5)-(-1)^3}{2(-1)+3} - \dfrac{5}{(-0,5)^3}$ Expresándolo con exponente positivo.

$= \dfrac{(0,25)(-1)}{-0,5-2} + \dfrac{3(-0,5)-(-1)}{2(-1)+3} - \dfrac{5}{-0,125}$

$= \dfrac{-0,25}{-0,5-2} + \dfrac{-1,5+1}{-2+3} - \dfrac{5}{-0,125}$

$= \dfrac{-0,25}{-2,5} + \dfrac{-0,5}{1} + \dfrac{5}{0,125}$

$= 0,1 - 0,5 + 40$

$= 39,6$ ■

Veamos mediante un ejemplo el procedimiento para efectuar la reducción de términos semejantes.

Ejemplo 3

Reduce términos semejantes en la expresión

$-8a^2x - 7ax - 5,2 - 2a^2x + 5ax - 4,3 + 6a^2x + 4ax.$

Resolución

$\underline{-8a^2x} - 7ax - 5,2 - \underline{2a^2x} + 5ax - 4,3 + \underline{6a^2x} + 4ax$ Identificando los términos semejantes.

$= (-8a^2x - 2a^2x + 6a^2x) + (-7ax + 5ax + 4ax) + (-5,2 - 4,3)$ Agrupando los términos semejantes.

$= -4a^2x + 2ax - 9,5$ Reduciendo. ■

En la práctica, se identifican los términos semejantes y se reducen, sin necesidad del segundo paso.

Ejercicios (epígrafe 3)

1. Determina para qué valores de las variables no están definidas las siguientes expresiones algebraicas.

a) $\dfrac{3x-8}{x}$ b) $\dfrac{4a}{a-2}$ c) $\dfrac{2y-4}{3y+5}$

d) $\dfrac{4}{b}+\dfrac{b+3}{3-b}$ e) $\dfrac{3z-8}{3z+4}+\dfrac{z+2}{5-4z}$

f) $\dfrac{3m-8}{m(2m-4)}$ g) $\dfrac{2a+3}{(3a-5)(a+\sqrt{2})}$

h) $\dfrac{5}{3x}-\dfrac{3x-7}{(2x-7)(5x-\sqrt{5})}$

2. Determina el dominio de las siguientes expresiones algebraicas

a) $\dfrac{2x+8}{x-4}$ b) $\dfrac{5a}{(4+a)(-2a+5{,}4)}$ c) $\dfrac{6y-4}{\left(\frac{1}{3}x+7\right)(0{,}5y-}$

d) $\dfrac{3y-9}{(2y+1)^2}-\dfrac{6}{5x}$ e) $\dfrac{2z+\sqrt{3}}{2z-\sqrt{3}}+3x^{-2}$

f) $\dfrac{5p}{\frac{2}{3}p+\frac{1}{5}}-\dfrac{3m-4}{\sqrt{2}\,m}$ g) $\sqrt{x}-\dfrac{7}{2x-4}$

3. Dadas las siguientes expresiones. determina su dominio y calcula su valor numérico para los valores indicados:

a) $5ab+3ac$ para $a=-2;\ b=-3;\ c=1$

b) $\dfrac{2}{3}mn-3mp$ para $m=-3;\ n=2;\ p=-1$

c) $\dfrac{6a}{b}+\dfrac{8b}{c}-\dfrac{2c}{a}$ *para* $a=-2;\ b=-4;\ c=1$

d) $8x^2y+6xy^3$ para $x=-\dfrac{1}{4}$; $y=2$

e) $5mn^{-2}-2m^2n^{3}$ para $m=0{,}5;\ n=-1$

f) $\dfrac{a^2}{3}-6ab^2-9b^3$ para $a=-1;\ b=\dfrac{2}{3}$

g) $\dfrac{4}{3}c^3-\dfrac{2}{3}c^2b+\dfrac{1}{4}cb^2$ para $c=-\dfrac{1}{2}$; $b=-3$

h) $\dfrac{5x^{-2}}{Y} + 7y^{-2}z - \dfrac{8x^{-1}}{z^2}$ para $x = -0{,}2;\ y = 0{,}3;\ z = 1$

i) $3a\,(b + c) - 2b\,(a - c)$ para $a = \dfrac{1}{2}$; $b = -2;\ c = \dfrac{1}{3}$

j) $\dfrac{x + y}{z} - \dfrac{y^2 + z^2}{x} - \dfrac{6x}{y + z}$ para $x = -0{,}2;\ y = -0{,}3;\ z = 0{,}1$

k) $\dfrac{4c + d^{-2}}{3a} - \dfrac{0{,}54c^{-3}}{(3a - 4d)^2}$ para $d = -\dfrac{1}{2}$; $c = -0{,}3;\ a = \dfrac{1}{6}$

l) $\dfrac{4x^2 - 4x + 1}{(x + 2)^2} - \dfrac{8x - 4}{x + 2}$ para $x = -7$

m) $\dfrac{mp - c^2}{(p - c)^3} - 8m^{-2}p^{-3}$ para $p = -2;\ m = 0{,}2;\ c = 0{,}5$

4. Verifica si las siguientes ecuaciones tienen como solución los valores que se indican:

a) $3x - 2 = 2x;\quad x = 3$

b) $9x - 2 = 12x + 4;\quad x = -2$

c) $3x - 3 = -1 - 7x;\quad x = 0{,}2$

d) $2(x + 1) - (x - 1) = 0;\quad x = -3$

e) $\dfrac{2}{3}x - \dfrac{3}{4} + \dfrac{x}{4} = x - \dfrac{5}{4};\quad x = 6$

f) $2x^2 - 5x = 3;\quad x = 3;\ x = -\dfrac{1}{2}$

g) $36x^2 - 12x = -1;\quad x = \dfrac{1}{6}$

h) $3(x + 4)^2 = 10x + 32;\quad x = -2;\ x = -\dfrac{8}{3}$

i) $\dfrac{x^2 - 1}{2} - 11x = 11;\quad x = -\dfrac{1}{4}$

j) $\dfrac{x}{x + 4} + \dfrac{4}{x - 4} = \dfrac{20}{x^2 - 16};\quad x = 2;\ x = -2$

k) $\left[\dfrac{6}{x - 1}\right]^2 + 4 = 5\left[\dfrac{6}{x - 1}\right];\quad x = \dfrac{4}{3}$

l) $\left[\dfrac{x + 2}{x - 1}\right]^2 - 5\left[\dfrac{x + 2}{x - 1}\right] = -6;\quad x = 4;\ x = \dfrac{5}{2}$

m) $2\left[\dfrac{x - 2}{3 - x}\right] + \left[\dfrac{3 - x}{x - 2}\right] = 3;\quad x = \dfrac{7}{3}$; $x = 2{,}5$

5. Dadas las funciones: $f(x) = 3x - 4$; $g(x) = x_2 - 5$;

$h(x) = 2x^2 - 5x - 1$; $i(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{5x}$; $m(x) = \dfrac{x^3 - 2x2}{x + 3}$

a) Determina el dominio de cada una de estas funciones
b) Calcula el valor de:

$f(2)$; $f(-2)$; $f\left(\frac{3}{4}\right)$; $g(0{,}3)$; $g(-1)$; $g\left(-\frac{1}{3}\right)$; $h(3)$

$h\left(\frac{1}{2}\right)$; $h(-0{,}1)$; $i(-2)$; $i\left(\frac{1}{4}\right)$; $i(0{,}4)$; $m(-4)$; $m\left(\frac{1}{2}\right)$;

$m(-0{,}3)$; $3g(-2)$; $\frac{4}{5}h\left(\frac{3}{4}\right)$; $i(-1) + m\left(\frac{1}{2}\right)$; $2g(-1) + m(-2)$

6. En las siguientes fórmulas, determina el valor de la variable del primer miembro, de acuerdo con los valores dados.

a) $v = g \cdot t$ $\quad g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$; $t = 3{,}0$ s

b) $s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$ $\quad a = 12{,}4\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$; $t = 2{,}00$ s

c) $v = a \cdot t$ $\quad a = 19{,}5\ \text{m/s}^2$; $t = 3{,}2$ s

d) $w = \frac{\theta}{t}$ $\quad \theta = 6{,}2$ rad ; $t = 0{,}50$ s

e) $v = \omega \cdot r$ $\quad \omega = 8{,}4$ rad/s ; r = 6,5 m

f) $F = m \cdot a$ $\quad m = 7{,}6$ kg; $a = 4{,}5\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

g) $M = F \cdot$ b $\quad$ F = 9,6 N ; $b = 5{,}0$ m

h) $V_x =$ V cos a $\quad V = 6{,}8$ m/s ; $u = 60''$

i) E, $= \frac{1}{2} mv^2$ $\quad m = 8{,}40$ kg; v = $5{,}00\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

j) $V_y =$ V sen α $\quad V = 7{,}3$ m/s ; $a = 45°$

7. Simplifica:

a) $3a - 5b + 6a - 2b$
b) $5m - 3p - 8m + 7p - 2m - 4p$
c) $5c - 6d^2 + 3c - 4d^2 - 6c + 9d^2$
d) $-2b^2 + 3b + 5b^2 - 7b + 2b^2 + 6b - 7b^2 - 2b$
e) $9x^3 - 2x^2 + 6x - 2x^3 - 7x^2 + 4x - 8x^3 + 6x^2 - 7x$
f) $-8y^2 + 6xy + 9x^2y - 9xy + 4x^2y - 6y^2 - 8x^2y - 3xy + 4y^2$
g) $0{,}3a^2 + 5a - 7{,}2a^2 + 9 - 4{,}2a - 2{,}7 + 1{,}5a - 4{,}6 + 2{,}1a^2$

h) $\frac{1}{3} x^{-2}y + \frac{1}{2} xy^{-1} + \frac{2}{5} x^{-2} - \frac{4}{3} x^{-2}y + \frac{3}{7} xy^{-1} - \frac{5}{6} x^{-2}$

8. Verifica si las siguientes igualdades son ciertas.

a) $5x^2 + 6x - 8 + 2x^2 - 7x - 2 = 7x^2 - x - 10$

b) $-6a^2y + 2ay - 4a^2y - 3ay + 5a^2y + ay = -5a^2y$

c) $3m^2y - 2my^2 + 5m^2y - 7my^2 - 2m^2y + 8my^2 - 9m^2y = -3m^2y - my^2$

d) $2a^2 - ab - 2ba + 2b^2 - 5a^2 + 8ab - 6b^2 - 7a^2 = -10a^2 + 5ab - 4b^2$

e) $4x^2 - 12x + 9 - 3x^2 + 6x - 2x^2 + 8x - 10 + x - x^2 = 3x - 1$

f) $5a^3 + 2a^2 - 6a - 3 + 3a^3 - 2a^2 + 5a - 8 + a = 8a^3 - 11$

g) $0{,}5a^{-2} - 3a^{-1} + 4{,}2 - 2{,}63a^{-2} + 4{,}07a^{-1} - 5{,}93 + 12{,}71a^{-2} - 1{,}1a^{-1} + 0{,}02 =$
$= 10{,}58a^{-2} - 0{,}03a^{-1} - 1{,}71$

4. *Operaciones con expresiones algebraicas. Uso de paréntesis*

Los paréntesis se utilizan cuando se desea indicar operaciones en las que intervienen los términos incluidos dentro de ellos, o cuando por otra razón se necesita agrupar determinados términos.

Por ejemplo, si se tienen las expresiones

$\boxed{3x^2 + 8x}$ $\quad \boxed{-7x + 2 - 5x^{-2}}$ $\quad$ y $\quad \boxed{3x - 6}$

y se quiere indicar:

a) que a la suma de las dos primeras se le resta la ultima, planteamos
$(3x^2 + 8x) + (-7x + 2 - 5x^{-2}) - (3x - 6)$,

b) el producto de las dos últimas, planteamos
$(-7x + 2 - 5x^{-2})(3x - 6)$,

c) que al producto de la primera y la última, se le resta la segunda, escribimos
$(3x^2 + 8x)(3x - 6) - (-7x + 2 - 5x^{-2})$.

Ejemplifiquemos los procedimientos para realizar operaciones en las que intervienen paréntesis, Para ello tengamos presente que:

> a) Si un paréntesis esta precedido del signo $+$, puede suprimirse este junto con el signo $+$ y los términos dentro de él conservan sus propios signos.
> b) Si un paréntesis esta precedido del signo $-$, puede suprimirse este junto con el signo $-$ siempre que se cambien los signos de cada uno de los términos incluidos dentro de él.

Ejemplo 1

Si $A = 3x - 4$, $\quad B = x^2 - 2x + 4$, $\quad C = -2x^{-2} + 5x - 2$, **calcula** y **simplifica:** $A + B - C$

Resolución

$(3x - 4) + (x^2 - 2x + 4) - (-2x^2 + 5x - 2)$ Planteo de la suma

$= 3x - 4 + x^{-2} - 2x + 4 + 2x^2 - 5x + 2$

$= 3x^{-2} - 4x + 2.$ ■

Ejemplo 2

Dados los binomios:

$5a^2 - 2a \qquad 3a + 4 \qquad 3a - 4$

Calcula: a) el producto de los dos primeros,
b) el producto de los dos últimos y réstale el cuadrado del primero.

Resolución

a) $(5a^2 - 2a)(3a + 4)$ Planteo del producto.

$= 15a^3 + 20a^2 - 6a^2 - 8a$ Efectuando el producto segun el esquema $(a + b)(c + d)$

$= 15a^3 + 14a^2 - 8a$

b) $(3a + 4)(3a - 4) - (5a^2 - 2a)^2$ Planteo de la operación.

$= (3a)^2 - (4)^2 - [(5a^2)^2 - 2(5a^2)(2a) + (2a)^2]$ Aplicando los productos notables $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

$= 9a^2 - 16 - 25a^4 + 20a^3 - 4a^2$

$= 5a^2 - 16 - 25a^4 + 20a^3$. ■

Además de los paréntesis ( ), existen otras formas de signos de agrupacion: los corchetes [ ] y las llaves { }.

En expresiones que contienen varios signos de agrupacion, se procede a su eliminación de forma más cómoda suprimiendo estos de adentro hacia afuera.

Ejemplo 3

Suprime los signos de agrupación y reduce los términos semejantes:

$5a^2 - \{-2a + 2\,[4{,}1 - (3a - 2)(a - 3) + a^2] - 3a\} - 6{,}3$

Resolución

$$\begin{aligned}
& 5a^2 - \{-2a + 2\,[4{,}1 - (3a^2 - 9a - 2a + 6) + a^2] - 3a\} - 6{,}3 \\
= {} & 5a^2 - \{-2a + 2\,[4{,}1 - 3a^2 + 9a + 2a - 6 + a^2] - 3a\} - 6{,}3 \\
= {} & 5a^2 - \{-2a + 8{,}2 - 6a^2 + 18a + 4a - 12 + 2a^2 - 3a\} - 6{,}3 \\
= {} & 5a^2 + 2a - 8{,}2 + 6a^2 - 18a - 4a + 12 - 2a^2 + 3a - 6{,}3 \\
= {} & 9a^2 - 17a - 2{,}5. \quad ■
\end{aligned}$$

Hay ocasiones en que es necesario asociar términos de una expresión algebraica mediante la utilización de paréntesis, ya sea precedido del signo + o del signo – Para ello se invertirá el proceso estudiado.

Ejemplo 4

Dada la suma: $5a^{-3}y - 6a^{-2}y^2 - 8a^{-1}y^3 + 2y^4$, encierra los dos últimos términos en Paréntesis precedido: a) del signo +, b) del signo – .

Resolución

a) $5a^{-3}y - 6a^{-2} + (-8a^{-1}y^3 + 2y^4)$ Se introducen los dos últimos sumandos manteniendo sus signos.

b) $5a^{-3}y - 6a^{-2} - (8a^{-1}y^3 - 2y^4)$ Se introducen los dos últimos sumandos cambiando sus signos. ■

Ejercicios (epígrafe 4)

1. Efectúa y simplifica:

a) $5(7 - 2x)$ b) $(3y - 7)(-3)$ c) $(5a^2 - 6) - 3$
d) $(-4)(3x^2 - 6x + 8)$ e) $2b(5b^2 - 3b)$ f) $-3z^2(-4z^2 + 2z)$
g) $-4z^2 - (-4z^2 + 2z)$ h) $(-6a^3 + 8a^2)(-2a^3)$ i) $(-6a^3 + 8a^2) - (2a^3)$
j) $(6y^3)(-4y^2a + 8y^3 - y^4)$ k) $(6y^3) - (-4y^2a + 8y^3 - y^4)$

2. Calcula y simplifica:

a) $(x + 4) + (x - 2)$ b) $(x + 4)(x - 2)$ c) $(a - 6) - (a - 3)$
d) $(a - 6)(-a - 3)$ e) $(2x^2 - 6) + (x^2 + 2)$ f) $(2x^2 - 6)(x^2 + 2)$
g) $(3a^3 + 2) - (4a^3 - 1)$ h) $(3a^3 + 3)(-4a^3 - 1)$ i) $(3x^4 + 7) + (3x^4 - 7)$
j) $(3x^4 + 7)(3x^4 - 7)$ k) $(4y + 5)^2$ l) $(3a^2 - 8)^2$

3. Efectúa y simplifica:

a) $2x + 3(4x - 8)$ b) $(2x + 3)(4x - 8)$
c) $3(4a - 1) - 2(2a - 5)$ d) $5y^2(y - 3) - 6(2y^2 - 3y)$
e) $5y^2 \cdot y - 3 - 6 \cdot 2y^2 - 3y$ f) $(m + 3)(m - 5) + 3m(-2m + 6)$
g) $m + 3 \cdot m - 5 + 3m \cdot (-2m) + 6$ h) $(2b - 3)(b - 4) - (-6b + b^2)$
i) $(3t + 2)(3t - 2) - (-7t)(2t - 5)$ j) $(4p - 3)(2p + 1) - p + 5(p - 1)$
k) $(4p - 3)(2p + 1) - (p + 5)(p - 1)$ l) $(2z^2 + 3z)(z - 2) - 2(z + 8)(2z - 3)$
m) $(2a + 3)^2 + (a - 1)^2$ n) $2a + 3^2 + a - 1^2$
ñ) $3(5b - 4)^2 - (8 + 2b)^2$ o) $3 \cdot 5b - 4^2 - 8 + 2b^2$
p) $(6m^2 + 5)^2 + 2(5 - 3m)^2$ q) $3p^2(6p^2 - 1)^2 - 4(p^2 + 4)^2$

4. Dados los trinomios:

$A = 3a - 6b - 2b^2$ $B = -2b + 3b^2 - 8a^2$ $C = 2a^2 - 6b + 4a$

Calcula las sumas indicadas y simplifica.

a) $A + B$ b) $B + C$ c) $A - C$ d) $A - B + C$
e) $B + A - C$ f) $C - A - B$ g) $3A + 2B$ h) $A - 2C - 4B$

5. Dados los polinomios:

S, $= 3y + 2$ S, $= y - 3$ S, $= -3y^2 + 4y$ $S_4 = 2y^2 - 3y + 2$

Calcula y simplifica.

a) S, – S, + S, – S, b) S, – S, – $S_4 + S_2$ c) S, · S_2 + S,
d) S, · $(S_2 + S_3)$ e) S, – S, · S_3 f) $(S_4 - S_2) \cdot S_3$
g) $2S_1 - (S_3 + S_4)$ h) $(S_1 + S_2) \cdot S_3 + S_4$

6. Dados los polinomios:

$x + 5$; $2x - 3$; $6x^2 - 6x + 5$; $8x^3 - 6x^2 + 8x - 4$

a) Efectúa la suma de los tres primeros.
b) De la suma de los dos primeros resta la suma de los dos últimos
c) Al producto de los dos primeros suma el último.

d) Del tercero, resta el producto del primero por el segundo.
e) De la suma de los cuadrados de los dos primeros, resta el tercero.
f) Del cuadrado de la diferencia de los dos primeros, suma el tercero.
g) Del cuadrado de la suma de los dos primeros, resta el último.

7. Suprime signos de agrupación y reduce términos semejantes:

a) $a + [3x - (2x - 3a)]$
b) $2m + [4n - (-7p + 2n) + 3m] - 8p$
c) $5x - [2x^2 + (-3 + 4x - x^2) + 9] - 6x$
d) $y - (4x - 2xy) - [4y - (-3x + 8y) - 2xy]$
e) $5 - [-(2b^{-1} + 6b - 8) + (-7b + 8b^{-1}) - 12] - 5b^{-1}$
f) $2a^2x + \{-3a - [2ax + (-6ax + 5a^2x - 7a)] - 6ax\}$
g) $-7x^2y - \{2xy + [-8xy^2 - xy(2 - 9x) + xy] - 5x^2y\} + 2xy^2$
h) $2c^{-2} - \{-5c^{-1} + 4[-2c^{-3} + 8c^{-1}] - 6c^{-2} - 7c^{-3}\} + 3c^{-1} - (7c^{-3} - 6c^{-4})$
i) $2b^2 - \{-12 + 2[-5b^2 + (2b - 3)(b + 4)] + 9b\} - 6$
j) $3x^2 - \{(2x + 7)(2x - 7) - 9x + [x^4 - (3x - 2)^2] + 12\} - 6x^4$

8. Introduce en un paréntesis precedido del: i) signo + ii) signo – . los tres últimos términos de cada una de las siguientes expresiones:

a) $-2x^2 + 6x - 4 + 3x^{-2}$
b) $3x^3y^4 - 5x^4y^3 + 2x^5y^2 - 9x^6y$
c) $-2{,}3a^5 + 0{,}4a^4 - 5{,}4a^3 - 7a^2 + 3{,}6$
d) $4 - 2{,}7b^3c + 9b^2c^3 + 0{,}76bc^4$
e) $8x^{-2} + 9{,}4x^{-1} - 7{,}5 - 3{,}2x$
f) $-\dfrac{4}{9}x^5 - 3{,}4x^{-5} - 8{,}5x^{-4} + 7x^{-2}$

9. Dadas las siguientes expresiones, agrúpalas en dos sumas con igual cantidad de términos e introduce cada una de ellas en paréntesis precedidos: i) del signo + ii) del signo – .

a) $3x^3 + 6x^2 - 2x + 9$
b) $-9a^2b - 6a + 3ab^2 - ab^3$
c) $3{,}4y^{-2} - 6x^{-1} + 8 - 3{,}7x$
d) $5x^2 - 3x^2y + 2p - 3p^2$
e) $2a^3 - 6a^2b - 3ab + 9b$
f) $5m^2n^3 + 14mn^4 - 2n^5 - 6m^{-1}n^6$
g) $4x^5 + 9x^4 - 7x^3 + 6x^2 + 15x - 8$
h) $1{,}2y^3 - 7y^2 - 4y - 8 + 7y^{-1} + 2y^{-3}$

5. *Multiplicación y división de polinomios*

En los epígrafes anteriores le hemos llamado polinomios a las expresiones algebraicas del tipo

$$3x^2 + \frac{1}{4}x - 8 \quad ; \quad 6x^4 - \sqrt{3}\,x^2 - 6x + 2$$

Los polinomios se pueden representar en forma abreviada por una letra mayúscula, indicando entre paréntesis la variable del polinomio: $P(x)$, $Q(x)$, $R(y)$,..., etcétera.

El **mayor exponente** al que aparece elevada la variable, es el **grado del polinomio.** Así, por ejemplo:

$$P(x) = 3x^2 + \frac{1}{4}x - 8 \qquad \text{es de grado } 2$$

$Q(x) = 6x^4 - \sqrt{3}\, x^2 - 6x + 2$ es de grado 4

$R(y) = y^7 - y^4 + \pi y - 1$ es de grado 7

$B(x) = 2$ es de grado 0 (todos los números reales son polinomios de grado cero)

Cuando se va a efectuar un producto de polinomios se escriben estos ordenando los monomios en orden decreciente (o en orden creciente) de sus grados para facilitar la forma de realizar dicho producto. A continuación te presentamos algunos ejemplos de multiplicación de polinomios.

Ejemplo 1

Si $M(x) = \mathbf{5}x^3 - \mathbf{3}x^2$, $R(x) = \mathbf{2}x + \mathbf{3}x^2 - \mathbf{4}y$, $C(x) = x^4 - \mathbf{2}x^2 + \mathbf{3}x$, calcula y simplifica: **a)** M · R, **b)** R · C – M.

Resolución:

a) $(5x^3 - 3x^2)(2x + 3x^2 - 4)$

$$\begin{array}{rrrrl}
\multicolumn{4}{l}{(5x^3 - 3x^2)(3x^2 + 2x - 4)} & \text{Planteando el producto ya ordenado.} \\
\hline
15x^5 + & 10x^4 - & 20x^3 & & \text{Producto de } 5x^3 \text{ por } 3x^2 + 2x - 4. \\
 - & 9x^4 - & 6x^3 + & 12x^2 & \text{Producto de } -3x^2 \text{ por } 3x^2 + 2x - 4. \\
\hline
15x^5 + & x^4 - & 26x^3 + & 12x^2 & \text{Suma de productos parciales}
\end{array}$$

Respuesta: $15x^5 + x^4 - 26x^3 + 12x^2$

b) $(x^4 - 2x^2 + 3x)(3x^2 + 2x - 4) - (5x^3 - 3x^2)$

$$\begin{array}{rrrrrr}
\multicolumn{6}{l}{(x^4 - 2x^2 + 3x)(3x^2 + 2x - 4)} \\
\hline
3x^6 + 2x^5 - & 4x^4 & & & & \\
 - & 6x^4 - & 4x^3 + & 8x^2 & & \\
 & & 9x^3 + & 6x^2 - & 12x & \\
\hline
3x^6 + 2x^5 - & 10x^4 + & 5x^3 + & 14x^2 - & 12x &
\end{array}$$

Planteando el producto ordenado y con los espacios en blanco correspondientes a las potencias que faltan.

$(3x^6 + 2x^5 - 10x^4 + 5x^3 + 14x^2 - 12x) - (5x^3 - 3x^2)$

$= 3x^6 + 2x^5 - 10x^4 + 5x^3 + 14x^2 - 12x - 5x^3 + 3x^2$

Respuesta: $3x^h + 2x^5 - 10x^4 + 17x^2 - 12x$ ■

División de un polinomio $P(x)$ por un binomio de la forma $x - a$. División sintética

En grados anteriores has estudiado cómo efectuar la división de un polinomio por un binomio. Ahora estudiarás una forma breve de realizarla. Para ello es necesario que recordemos el procedimiento ya estudiado.

Dividamos $5x^3 - 6x^2 - 11x - 7$ por $x - 2$. (Observa que el dividendo y el divisor están ordenados en potencias descendentes.)

Primer dividendo parcial	$5x^3 - 6x^2 - 11x - 7$		$x - 2$
Primer producto	$-5x^3 + \boxed{10}\,x^2$	$\xleftarrow{\cdot(+2)}$	$5x^2 + 4x - 3$
Segundo dividendo parcial	$\boxed{+4}\,x^2 \quad \boxed{-11}\,x$		
Segundo producto	$-4x^2 \quad \boxed{+8}\,x$	$\xleftarrow{\cdot(+2)}$	
Tercer dividendo parcial	$\boxed{-3}\,x \quad \boxed{-7}$		
Tercer producto	$+3x \quad \boxed{-6}$	$\xleftarrow{\cdot(+2)}$	
Resto	$\boxed{-13}$		

La división termina cuando se obtiene un dividendo parcial cuyo grado es menor que el grado del divisor.

En este caso se cumple que:

$$5x^3 - 6x^2 - 11x - 7 = (x - 2)(5x^2 + 4x - 3) + (-13)$$

Cuando dividimos un polinomio $P(x)$ de grado n, por un binomio de la forma $x - a$ (de grado 1), se cumple que

$$P(x) = (x - a)\,Q(x) + R$$

siendo el cociente $Q(x)$ de grado $n - 1$ y el resto R un número (de grado cero).

Observa que en la división del ejemplo:

a) se han destacado los primeros coeficientes de los dividendos parciales y los coeficientes del cociente, coincidiendo estos.

b) se han indicado en rectángulos cómo se obtienen los segundos coeficientes de los productos: multiplicando los coeficientes de los cocientes por +2, que es la a del divisor $x - a$.

Si observamos estas regularidades podemos realizar la división del ejemplo de forma abreviada. Para realizarla tomamos los coeficientes del dividendo (ordenado en potencias descendentes) y el valor de a en el divisor $x - a$ (en este caso 2) y los disponemos según el siguiente esquema:

$$\text{Valor de a} \rightarrow \begin{array}{r|rrrr} & 5 & -6 & -11 & -7 \\ 2 & & & & \\ \hline \end{array} \leftarrow \text{Coeficientes del dividendo}$$

Los coeficientes de los términos del cociente y el resto, se obtienen de la siguiente forma:

$$
\begin{array}{r|rrrrl}
 & 5 & -6 & -11 & -7 & \\
2 & & +10 & +8 & -6 & \\
\hline
 & 5 & 4 & -3 & -13 & \leftarrow \text{Resto}
\end{array}
$$

Coeficientes del polinomio cociente *(tienen un grado menor que el dividendo)*

Cociente Q (x): $5x^2 + 4x - 3$ Resto R: -13

El esquema anterior para obtener la división recibe el nombre de **división sintética,** método de Horner o regla de Ruffini.

Ejemplo 2

Aplica el esquema de la división sintética para obtener el cociente y el resto de la división del polinomio

$P(x) = 2x^3 + 7x^2 - 4x - 10$ **por** $x + 3$**.**

Resolución

Como $x + 3 = x - (-3)$, el valor de a es **-3.** Una forma cómoda para determinar el valor de a en el esquema de la división sintética es igualar a cero el divisor y despejar x. En este caso $x + 3 = 0$, **$x = -3$, y** el valor de a $= -3$.

$$
\begin{array}{r|rrrrl}
\text{Valor de } a & 2 & 7 & -4 & -10 & \leftarrow \text{Coeficientes del polinomio ordenado} \\
-3 & & -6 & -3 & +21 & \\
\hline
 & 2 & 1 & -7 & \boxed{11} &
\end{array}
$$

Respuesta: El cociente es $2x^2 + x - 7$ y el resto, es 11. ■

> Un polinomio P (x) es divisible por un binomio de la forma $x - a$, el resto es cero, si y solo si se puede expresar como
>
> $P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$

Ejemplo 3

Aplicando la regla de Ruffini, determina si el polinomio $P(x) = x^3 + 5x^2 + 10x + 8$ es divisible por $x + 2$. En caso de serlo expresa el polinomio $P(x)$ como un producto de factores.

Resolución

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & 10 & 8 \\ -2 & & -2 & -6 & -8 \\ \hline & 1 & 3 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

Observa que $(4) \cdot (-2) = -8$

Respuesta: Es divisible porque el resto es cero

$$P(x) = x^3 + 5x^2 + 10x + 8 = (x + 2)(x^2 + 3x + 4). \quad \blacksquare$$

Es importante señalar que para que el resto pueda ser cero, el termino independiente 8 debe ser un múltiplo de a, en este caso de -2.

> Para que un polinomio $P(x)$ sea divisible por un binomio de la forma $x - a$, es necesario que a sea un divisor del termino independiente.

Ejercicios (epígrafe 5)

1. Calcula y simplifica:

a) $(2y^2 - 3y)(y^3 + 2y^2 - 5y)$
b) $(5a^2 - 3a)(2a^3 - 7a^2 - 4a)$
c) $(3x^2 + 8x)(6x^2 - 5 - 8x)$
d) $(5y^3 - 6y^2)(4y^4 - 9y^3 - 2y^2)$
e) $(-3a^2 + a^3)(5a^2 - 7a^3 - 2a^4)$
f) $(3b^2 - 6b - 2)(-2b^2 + 3b - 7)$
g) $(-5x^2 + 8x^3 - 2x)(2 - 3x + 4x^2)$
h) $(2y^3 - 6y^2 - 3y)(5y - 4y^3 - 7y^2)$
i) $(6x^4 + 2x^i - 5x^3)(5x - 3 + 4x^2)$
j) $(2z^4 - 3 + 8z^3)(3z + 5z^3 - 7z^2)$
k) $(3a^2 - 6a + 2)^2$
l) $(5x^3 - 2x^2 - 4)^2$

2. Calcula y simplifica:

a) $(x^2 - 3x)(x^3 - 2x^2) + (6x^2 - 3x + 1)(x^4 - 6x^2 - 2x)$
b) $(2a^2 - 5a)(-3a^3 + 3a^2 - 7a) + (-2a^3 + 9a^2 - 6a)(6a^2 - 7a + 1)$
c) $(6y^2 - 3y + 4)(-y^3 + 5y^2 - 7y) - 2(y^4 - 2y^3)(3y - 5 - 4y^2)$
d) $(-5b^2 + 3b - 7)(2b^2 - 8) - (3b^2 - 2)^2 + (6b - 7b^2 + 3)(-4 + 5b^2 - 9b)$
e) $(-3z^3 + 2z - 5z^2)(3z^2 - 8z^3 + 2z) - (3z^2 - 5z)(3z^2 + 5z) -$
$- (3z^3 - z^2 + 2)(2z^2 + 8z - 7)$

3. Calcula, aplicando la regla de Ruffini, el cociente y el resto de la división de:

a) $x^3 - 2x^2 + 4x - 5$ por $x - 2$
b) $x^3 + 4x^2 - 7x + 3$ por $x + 4$
c) $2x^3 - x^2 + 3x - 7$ por $x - 3$
d) $3x^3 - 6x + 5x^2 - 4$ por $x + 1$
e) $x^3 - 32x + 8$ por $x - 6$
f) $3x^3 + 5x^2 - 4$ por $x + 2$
g) $2x^3 + 9x^2 + 25$ por $x + 5$
h) $5x^4 - 3x^3 + 2x - 3$ por $x - 2$
i) $-5x + 2x^3 + x^4 - 4$ por $x + 3$
j) $2x^4 + 4x^3 + x^2 - 4$ por $x + 2$

4. Si $P(x) = x^3 + 2x^2 + bx - 8$, determina el valor de b para que $P(x)$ sea divisible por: a) $x + 1$ b) $x - 2$ c) $x + 2$ d*) $2x - 1$.

5. Sin aplicar la división sintética, di si el polinomio $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ podría ser divisible por:
   a) $x + 5$ b) $x - 3$ c) $x + 7$ d) $x - 6$.
   Justifica.

6. *Repaso de la transformación de sumas en productos (descomposición factorial)*

Nos proponemos en este grado que profundices tus conocimientos de la descomposición factorial. Recuerda que cuando se descompone en factores, se continúa hasta que los factores tengan la forma más simple posible, de modo que no se pueda aplicar ninguno de los casos de descomposición factorial por ti estudiados.

Cuando se realiza una factorización, el orden a seguir es:

1. Factor común.
2. Binomios $\{$ Diferencia de cuadrados
   o
   Trinomios $\begin{cases} \text{Cuadrado perfecto} \\ x^2 + px + q \\ mx^2 + px + q \end{cases}$
3. Combinaciones de casos.

Ejemplo 1

Descompón en factores completamente. Verifica el resultado.

a) $36x^2a^3 - 90x^5b$ **b)** $r^2 - 25$ **c)** $x^2 - 11x + 28$
d) $2b^2 - 7b - 4$ **e)** $9w^2 - 12w + 4$.

Resolución

a) Para factorizar $36x^2a^3 - 90x^5b$ nuestro primer paso es determinar si existe factor común. Analicemos entonces:

1. **Si existe factor común numérico.** Para ello busquemos el mayor divisor común a 36 y a 90. En este caso es el 18.
2. **Si existe factor común literal.** Determinemos entonces las variables que estén comunes en cada uno de los términos de la suma, tomándose estas con el menor exponente.

Aquí tomaremos x^2, pues sólo existe la x como variable común. El factor común de la suma es $18x^2$.

$36x^2a^3 - 90x^5b = 18x^2(2a^3 - 5x^3b)$ Para determinar los sumandos del binomio, calculamos: $\dfrac{36x^2a^3}{18x^2} = 2a^3$ y $\dfrac{90x^5b}{18x^2} = 5x^3b$.

El binomio $2a^3 - 5x^3b$ no es posible descomponerlo en factores

Verificación:

$18x^2(2a^3 - 5x^3b) = 36x^2a^3 - 90x^5b$ Efectuando el producto.

b) Es un binomio en el cual no existe factor común; ahora bien, es una diferencia en que cada uno de sus términos es un cuadrado perfecto:

$\sqrt{r^2} = r$ y $\sqrt{25} = 5$.

$r^2 - 25 = (r + 5)(r - 5)$

Verificación: $(r + 5)(r - 5) = (r)^2 - (5)^2 = r^2 - 25$

c) Es un trinomio de la forma $x^2 + px + q$, que no presenta factor común. Al comparar con el producto notable $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ vemos que se tiene que cumplir $a \cdot b = 28$ y $a + b = -11$; es decir, hay que buscar dos números cuyo producto sea +28 y su suma algebraica −11. Como el producto es positivo, ambos factores tienen el mismo signo (los dos positivos o los dos negativos), y como su suma es negativa, los signos son menos. Para determinar las parejas de números cuyo producto sea 28, determinemos los factores de 28: 1; 2; 4; 7; 14; 28 y dispongamos las parejas

1	2	4
28	14	7

Los únicos números cuya suma es −11 y su producto +28 son −7 y −4, luego

$x^2 - 11x + 28 = (x - 7)(x - 4)$

Verificación: $(x - 7)(x - 4) = x^2 + (-4 - 7)x + (-4)(-7)$

$= x^2 - 11x + 28$

d) Este es un trinomio de la forma $mx^2 + px + q$, que no presenta factor común. Recordemos dos procedimientos para efectuar su descomposición.

Primer procedimiento: Por aplicación del producto

$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (bc + ad)x + bd$.

Recuerda que si dispones los coeficientes de los binomios en columnas y efectúas los productos como te indicamos puedes obtener los coeficientes del trinomio.

$$\begin{array}{ccc} a & & b \\ c & & d \\ \downarrow & bc + ad & \downarrow \\ ac & & bd \end{array}$$

Luego para descomponer el trinomio $2b^2 - 7b - 4$ busquemos las parejas de factores tales que $a \cdot c = 2$, $b \cdot d = -4$ y que cumplan que $bc + ad = -7$.

$$\begin{array}{ccc} \begin{matrix} 1 & & -2 \\ & \times & \\ 2 & & +2 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & & 4 \\ & \times & \\ 2 & & -1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & & -4 & \rightarrow b - 4 \\ & \times & & \\ 2 & & +1 & \rightarrow 2b + 1 \end{matrix} \\ +2 - 4 = -2 & -1 + 8 = 7 & +1 - 8 = -7 \end{array}$$

Luego $2b^2 - 7b - 4 = (b - 4)(2b + 1)$

Verificación: $(b - 4)(2b + 1) = 2b^2 + b - 8b - 4 = 2b^2 - 7b - 4$

Segundo procedimiento: Por reducción al trinomio $x^2 + px + q$.

Para reducirlo a este caso se multiplica el trinomio par el coeficiente del término en x^2, y para **que** no se altere, se divide por el mismo número, en este caso por 2, y procedemos como en el ejemplo 1c):

$2b^2 - 7b - 4 = \dfrac{2(2b^2 - 7b - 4)}{2}$ Multiplicando numerador y denominador por 2.

$= \dfrac{2(2b^2) - 2(7b) - 2(4)}{2}$ Aplicando la propiedad distributiva.

$= \dfrac{(2b)^2 - 7(2b) - 8}{2}$ Convirtiéndolo en un trinomio $x^2 + px + q$ pues: $2(2b^2) = (2b)^2$.

$= \dfrac{(2b - 8)(2b + 1)}{2}$ Factorizando el trinomio $x^2 + px + q$

$= \dfrac{2(b - 4)(2b + 1)}{2}$ Extrayendo el factor común 2 del primer binomio.

$= (b - 4)(2b + 1)$ Simplificando.

Nota: En **la** práctica, **los** dos primeros **pasos** se eliminan, comenzándose el ejercicio a partir del tercer paso.

c) En este caso, el primero y el ultimo término son positivos y **cuadrados** perfectos.

$$\begin{array}{ccc} 9w^2 & - 12w + & 4 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 3w & & 2 \end{array}$$

Verificamos si el término del medio es el doble producto de esas raíces cuadradas $2(3w)(2) = 12w$ y aplicamos el **producto** notable $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Tendremos entonces:

$$\begin{array}{ccc} 9w^2 & - 12w + & 4 = (3w - 2)^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 3w & & 2 \end{array}$$

Verificación: $(3w - 2)^2 = (3w)^2 - 2(3w)(2) + (2)^2 = 9w^2 - 12w + 4$.

Nota: Este trinomio también se puede descomponer como uno de la forma $mx^2 + px + q$ obteniéndose el mismo resultado. ●

A continuación te presentamos otros ejemplos **de factorización** con un grado mayor de complejidad.

Ejemplo 2

Factoriza:

a) $6m^2(a+3b)-7p(a+3b)$ b) $8m^2+m^4-48$

c) $3p^2-4pc^2-4c^4$ d) $5a^5-180ab^2$ e) $32r^3-16r^2b^3+2rb^6$

Resolución

a) $6m^2(a+3b)-7p(a+3b)=(a+3b)(6m^2-7p)$ Extrayendo factor común $a+3b$

b) $8m^2+m^4-48=m^4+8m^2-48$ Ordenando el trinomio.

$=(m^2+12)(m^2-4)$ Factorizando el trinomio x^2+px+q donde $x=m^2$

$=(m^2+12)(m+2)(m-2)$ Factorizando la diferencia de cuadrados.

c) $3p^2-4pc^2-4c^4$

Se trata de una generalización del trinomio de la forma mx^2+px+q a la forma $mx^2+pxy+qy^2$. En este caso $y=c^2$ y se descompone de la misma forma. Para ello busquemos las parejas de números cuyos productos sean 3 y -4 y en las cuales la suma de sus productos cruzados sea -4

$3 \quad +2 \rightarrow 3p+2c^2$

$1 \quad -2 \rightarrow p-2c^2$

$-6+2=-4$

Luego $3p^2-4pc^2-4c^4=(3p+2c^2)(p-2c^2)$

d) $5a^5-180ab^2=5a(a^4-36b^2)$ Extrayendo factor común $5a$.

$=5a(a^2-6b)(a^2+6b)$ Factorizando la diferencia de cuadrados

e) $32r^3-16r^2b^3+2rb^6=2r(16r^2-8rb^3+b^6)$

$=2r(4r-b^3)^2$ Factorizando el trinomio cuadrado perfecto. ■

Para descomponer un trinomio no siempre es posible utilizar los procedimientos del ejemplo 2. En esos casos es conveniente emplear la fórmula de resolución de la ecuación de segundo grado.

> Si x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ entonces $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Ejemplo 3

Factoriza x^2-4x-6.

Resolución

Este trinomio no se puede factorizar de acuerdo con los procedimientos hasta ahora empleados, pues no existen dos números enteros cuyo producto sea -6 y su suma algebraica -4.

Resolvamos entonces la ecuación $x^2 - 4x - 6 = 0$. Para hacerlo utilizamos la formula de la ecuación de segundo grado con $a = 1$, $b = -4$ y $c = -6$ y encontramos que

$$b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(-6) = 16 + 24 = 40 > 0,$$

luego las raíces serán

$$x_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{40}}{2(1)} \qquad x_2 = \frac{-(-4) - \sqrt{40}}{2(1)}$$

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{40}}{2} \qquad x_2 = \frac{4 - \sqrt{40}}{2}$$

y entonces $x^2 - 4x - 6 = \left(x - \dfrac{4 + \sqrt{40}}{2}\right)\left(x - \dfrac{4 - \sqrt{40}}{2}\right)$ ■

Ejercicios (epígrafe 6)

1. Descompón en factores:

a) $5b^4 - 3b^3$
b) $2x^5b + 9x^2b^4$
c) $12a^5 - 4a^3$
d) $36y^2z^5 + 12y^4z^3m$
e) $35p^3z^4 - 56p^4q^2$
f) $4x^4 - 7x^3 + 2x^2$
g) $22m^3 - 11m^2 + 55m^4$
h) $24x^3y^4 - 18x^4y^3 - 30x^5y^2$
i) $36m^4n + 24m^5n^3 + 48m^3$
j) $48a^4b^7c^2 - 60a^5b^6c^3 - 36a^6b^5$
k) $3x^2(x + 4) - 7(x + 4)$
l) $5a(x - 2y) + 3b(x - 2y)$
m) $8b(z + 3a) - 3x(z + 3a)$
n) $3a(2b - c) + (2b - c)(5d - 7)$
ñ) $(2q + 3)(11p - 8) - 6a(11p - 8)$
o) $8m(7b + q) - (4b - 3)(7b + q)$

2. Factoriza:

a) $3x^3 + x^2$
b) $63a^4b^3c^4 - 21ab^5$
c) $35m^5 + 27m^4 + 32m^3$
d) $6p^4q^5 - 12p^5q^3 + 27p^3$
e) $54x^6y^5 - 27x^5y^6 + 63x^4y^7$
f) $36c^6b^4 + 72c^5b^4 + 54c^7d^4$
g) $24m^5x^8 + 48m^6x^7 - 60m^4x^6$
h) $44p^8c^7a^3 - 33p^7a^4 - 55a^2c^6$
i) $60x^5y^6c^4 - 75x^4y^5c^3 - 55a^2c^6$
j) $96m^6p^8c^7 + 60m^5p^7c^4 + 48m^7p^4c^5$
k) $5x^2(3a^2 + b^3) - 6y^3(3a^2 + b^3)$
l) $3a(x - 2h) + (x - 2h)(7m - 3)$
m) $12a^2(b - 3c) + (b - 3c)^2$
n) $9q(a + 3b) - (m + 2n)(a + 3b)$
ñ) $(2m - 3)(5q - 6h) + (5q - 6h)(8a - 9b)$
o) $(15p + 8a)(2m - n) - (15p + 8a)(7b - 6c)$
p) $(3b + 8c) - 7q(3b + 8c)^2$
q) $(2a - b)(m - 3p) - (2a - b)^2$

3. Transforma en un producto:

a) $25a^2 - 1$
b) $36x^2 - 49y^2$
c) $16b^2 - 81c^2$
d) $4 - x^4$
e) $9y^6 - 64$
f) $\dfrac{36}{25} - b^4$
g) $c^6d^8 - \dfrac{49}{81}x^2$
h) $\dfrac{1}{9}m^{10} - 100a^4$
i) $\dfrac{121}{144}p^6 - a^4b^8$
j) $0{,}01m^2 - c^4$
k) $0{,}09p^4 - x^6y^{10}$
l) $0{,}25c^2 - 0{,}006\,4p^4c^{12}$

4. Expresa coma un producto de factores:

a) $4x^2 - 9y^2$ b) $64a^4b^2 - 81y^6$ c) $100m^2 - 49p^4y^6$ d) $\frac{1}{16}x^4y^{10} - 1$

e) $\frac{36}{25}m^4 - 121p^4y^6$ f) $0{,}49p^6 - 0{,}36c^4x^{10}$ g) $0{,}0081y^{12} - 1{,}21x^4z^{14}$

h) $(2x - y)^2 - 81y^6x^8$ i) $(m^2 + 3n)^2 - 144y^4$ j) $(5b^3 - 2c)^2 - 0{,}49y^4$

k) $(8m + 7p^3)^2 - 36x^6$ l) $9z^4 - (5x - y^3)^2$ m) $16p^6 - (3a - b^3)^2$

n*) $81(2a - 3)^2 - 16a^{6x}$ ñ) $y^2(x - 1)^2 - (2a + b)^2$ o) $\frac{25}{144}(3x+z)^2 - (2x-3)^2$

5. Factoriza:

a) $4x^3 - 49x$ b) $2y^3x^2 - 50y$ c) $24a^5 - 54a^3$ d) $5x^4y^6 \quad 80x^2m^8$

e) $13b^8c^5 - 52b^2c^7$ f) $8m^6n^3 - 200m^2n$ g) $d^4 - 1$ h) $m^8p^4 - 16$

i) $2x^6 - 162x^2y^{12}$ j) $80m^{11} - 5m^3$ k) $\frac{16}{81}a^7 - 0{,}0001a^3$

6. Descompon **en** factores:

a) $a^2 + 8a + 16$ b) $x^2 - 10x + 25$ c) $c^2 + 18c + 81$

d) $4b^2 - 18b + Y$ e) $36y^2 + 84y + 49$ S) $a^4b^6 - 16a^2b^3 + 64$

g) $100a^2 + 20ab^3c^4 + b^6c^8$ h) $9m^6p^2 - 30m^3px^2 + 25x^4$

i) $(x + 3)^2 - 6y^2(x + 3) + 9y^4$ j) $\frac{9}{4}x^4 + 12x^2y^4 + 16y^8$

k) $0{,}04m^6 - 0{,}2m^3p^2 + 0{,}25p^4$ l) $(2a + 5)^2 - 12w^5(2a + 5) + 36w^{10}$

7. Descompón en factores:

a) $x^2 + 7x + 10$ b) $a^2 - 9a + 14$ c) $y^2 - 2y - 15$ d) $m^2 + m - 20$

e) $c^2 - 10c + 24$ f) $x^2 - 15x - 54$ g) $y^2 + 21y - 72$ h) $a^6 - 19a^3 + 48$

i) $b^4 - 15b^2 + 36$ j) $m^{10} + 10m^5 - 75$ k) $x^4 - 10x^2a + 16a^2$

l) $y^6 - 12y^3z^4 - 64z^8$ m) $(3x)^2 - 11(3x) + 28$ n) $(5y)^2 - 8(5y) - 20$

ñ) $(7a)^2 + 6(7a) - 40$

8. Factoriza:

a) $2a^2 + 7a + 3$ b) $3b^2 - 11b + 6$ c) $5x^2 - 8x - 4$

d) $4y^2 + 5y - 6$ e) $6m^2 - 19m + 8$ f) $7p^2 - 19p - 6$

g) $3x^6 - 37x^3 + 12$ h) $5x^8 - 7x^4 - 6$ i) $6y^{10} + 7y^5 - 10$

j) $4m^4 - 15m^2p^3 + 9p^6$ k) $8a^6 - 29a^3p^5 - 12p^{10}$ l) $9c^8 + 48c^4m^5 + 15m^{10}$

9. Factoriza:

a) $x^2 + 6x + 9$ b) $a^4 - 10a^2 + 25$ c) $4c^6 \quad 4c^3 + 1$ d) $m^{10} - 6m^5 - 16$

e) $y^2 - 9y + 18$ f) $b^6 - 2b^3 - 24$ g) $d^{10} + 6d^5 - 40$ h) $p^8 + 17p^4 + 60$

i) $x^{10} - 26x^5 + 25$ j) $2a^2 - 11a + 12$ k) $6m^6 - 19m^3 - 7$ l) $10x^{14} - 43x^7 + 12$

10. Descompón en factores:

a) $x^4 - 12x^2 - 28$ b) $16b^6 - 24b^3a^2 + 9a^4$ c) $3y^4 - 4y^2b - 7b^2$
d) $m^6 - 5m^3b^2 + 4b^4$ e) $4x^8 - 24x^4b^3 + 11b^6$ f) $4a^3b^2 + b^4 - 12a^6$
g) $60y^3x^2 + 25x^4 + 36y^6$ h) $-2a^3b + a^6 - 24b^2$ i) $-48y^2x^5 + 64y^4 + 9x^{10}$
j) $3c^2 - 10p^8 - cp^4$ k) $-10x^4 + 5y^{10} + 23y^5x^2$

11. Factoriza completamente:

a? $5x^4 - 20x^3 - 60x^2$
b) $4y^5 - 40y^4 + 96y^3$
c) $12ab^4 - 24ab^3 - 96ab^2$
d) $12m^4n - 12m^3n^2 + 3m^2n^3$
e) $12x^3y - 30x^2y - 72xy$
f) $48b^2c^3 - 40b^2c^2 + 8b^2c$
g) $45d^5g^2 - 30d^4g^2 - 120d^3g^2$
h) $50m^5n^4 - 170m^4n^4 - 120m^3n^4$
i) $28x^4v - 84x^3y^2 + 63x^2y^3$
j) $2a^7b - 4a^5b - 48a^3b$
k) $6bc^{11} \quad 36bc^8 + 48bc^5$
l) $8d^{10}h^3 + 32d^6h^3 - 96d^2h^3$
m) $-55m^5n^2 + 45m^3n^2 + 10m^7n^2$
n) $-90p^5q + 48p^{11}q - 84p^8q$
ñ) $27x^6y^3 + 9x^8y^2 - 162x^4y^4$
o) $-12a^7b^3 - 72a^5b^4 + 144a^5b^2$

7. *Profundización en la descomposición factorial*

Estudiaremos ahora otras técnicas de descomposición factoriai **que nos** permitan realizar la descomposición en casos en los que los métodos estudiados no **son** aplicables.

En primer lugar veamos cómo la regla de Ruffini, con la **que** sabemos calcular el cociente y el resto de la división de un polinomio P (x) por un binomio de la forma x - a, puede aplicarse a la factorización de polinomios.

Ejemplo 1

Descompón en factores, aplicando la regla de Ruffini
$P(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 6$.

Resolución

El polinomio dado es divisible por un binomio de la forma x - a siempre que el resto sea cero, y para ello a tiene que ser un divisor de 6. Por tanto, determinemos los divisores de 6: ± 1; ± 2; ± 3; ± 6 y apliquemos sucesivamente la regla con estos valores **para** determinar los **que** anulan **el resto.**

	1	-4	+7	-6
+1		1	-3	+4
	1	-3	+4	$\boxed{-2}$

	1	-4	+7	- 6
-1		-1	+5	-12
	1	-5	+12	$\boxed{-18}$

	1	-4	+7	-6
+2		2	-4	+6
	1	-2	+3	0

Luego P(x) es divisible por $x - 2$, obteniéndose como cociente $x^2 - 2x + 3$ (trinomio no factorizable porque su discriminante es negativo].

Resulta que: $x^3 - 4x^2 + 7x - 6 = (x - 2)(x^2 - 2x + 3)$.

En algunos casos, se necesita realizar agrupamientos y utilizar de **manera** combinada los casos de factorización ya estudiados, **para** hacer la descomposición.

Ejemplo 2

Factoriza completamente:

a) $2bm - 3b + 4mc - 6c$ **b)** $3a^2x - 6ax + 10p - 5ap$
c) $2x^3 - 5 + 5x^2 - 2x$ **d)** $b^2 - 6ab + 9a^2 - 25x^2$.

Resolución

a) $2bm - 3b + 4mc - 6c$

Esta expresión contiene factor comun b en los dos primeros sumandos y factor comun $2c$ en los dos ultimas. Agrupemos estos sumandos en paréntesis precedidos del signo + y **extraigamos** los factores comunes **señalados.**

$2bm - 3b + 4mc - 6c = (2bm - 3b) + (4mc - 6c)$ **Agrupando.**

$= b(2m - 3) + 2c(2m - 3)$ Extrayendo factor común b y $2c$

$= (2m - 3)(b + 2c)$ Extrayendo factor común $2m - 3$.

b) $3a^2x - 6ax + 10p - 5ap$

$= (3a^2x - 6ax) + (10p - 5ap)$ Agrupando

$= 3ax(u - 2) + 5p(2 - a)$ **Extrayendo** factor común $3ax$ y $5p$

Las expresiones dentro de los paréntesis se diferencian solamente en los signos. Esta situación se resuelve haciendo un cambio de signo a los factores $5p$ y $(2 - a)$, obteniendose:

$3ax(a - 2) + 5p(2 - a) = 3ax(a - 2) - 5p(-2 + a)$

$= 3ax(a - 2) - 5p(a - 2)$ Ordenando el **segundo** paréntesis

$= (a - 2)(3ax - 5p)$ **Extrayendo factor** comun $o - 2$

c) $2x^3 - 5 + 5x^2 - 2x$

Primera vía: Por agrupamiento: Agrupando el primero y el tercer termino y el segundo y el cuarto.

$2x^3 - 5 + 5x^2 - 2x = (2x^3 t\ 5x^2) + (-2x - 5)$

$= x^2(2x + 5) - (2x + 5)$

$= (2x + 5)(x^2 - 1)$

$= (2x + 5)(x + 1)(x - 1)$ Factorizando la diferencia de cuadrados

Segunda via: **Aplicando** Ruffini

$2x^3 + 5x^2 - 2x - 5$ Ordenando el polinomio.

	2	+5	−2	−5
−1		−2	−3	+5
	2	+3	−5	$\boxed{0}$

Aplicando Ruffini

$$2x^3 + 5x^2 - 2x - 5 = (x + 1)(2x^2 + 3x - 5)$$
$$= (x + 1)(2x + 5)(x - 1)$$ **Factorizando el trinomio** $mx^2 + px + q$.

d) $h^2 - 6ab + 9a^2 - 25x^2$

Si realizamos aigún agrupamiento **como** *los* **hasta ahora efectuados, no obtendre-** mos **resultados positivas. Ensayemos** otra **forma de agruparlos.**

$(b^2 - 6ab + 9a^2) - 25x^2$ **Agrupando los tres primeros terminos.**

$= (b - 3a)^2 - 25x^2$ **Factorizando el trinomio cuadrado perfecto.**

$= (b - 3a + 5x)(b - 3a - 5x)$ **Factorizando la diferencia de cuadrados.** ■

Ejercicios (epígrafe 7)

1. **Descompón en factores:**

a) $a^3 - 4a^2 + 8a - 5$ b) $b^3 - 3b^2 + 4b - 4$ c) $x^3 + 4x^2 + 7x + 6$
d) $c^3 + 4c^2 + c - 6$ e) $x^3 + 4x^2 + 5x + 2$ f) $m^3 + m^2 - 14m - 24$
g) $a^3 - 5a^2 + 8a - 4$ h) $b^3 - 4b^2 + b + 6$ i) $x^3 - 7x + 6$
j) $a^3 - 3a^2 + 4$ k) $m^4 - 4m^3 + 3m^2 + 4m - 4$ l) $z^4 + 6z^3 + 9z^2 - 4z - 12$
m) $y^4 - 11y^2 - 18y - 8$ n) $x^3 - 12x - 16$

2. **Descompón en factores:**

a) $cx + dx + mc + md$ b) $ay - az + by - bz$ c) $bd + qd - bh - qh$
d) $ab - ax - bd + dx$ e) $rnp + 5m + 2p + 10$ f) $2ab - 3h + 10a - 15$
g) $x^2 + 2x - 3xy - 6y$ h) $4ax + 5x - 4a - 5$ i) $4x^3 - 16x^2 + 3x - 12$
j) $6am^2 - 15am - 4b^2m + 10b^2$ k) $4p^3 + 12p^2a - pa - 3a^2$
l) $18x^3 - 3xy^3 - 6x^2y + y^4$ m) $5a^3y - 15a^3z - 2by + 6bz$
n) $1 + x - x^2yz - x^3yz$ ñ) $a^5 + 5a^2b - 20b - 4a^3$
o) $8ax^3 - 12x^2 - 2ax + 3$ p) $-3a^3 - 6a^2 - 5ab^3 - 10b^3$
q) $ax + bx - ay - by + az + bz$ r) $x^3 + 2x^2y - zx - 2zy - 3x - 6y$

3. Descompón en factores:

a) $x^2 + 6x + 9 - a^2$ b) $4a^2 - 4a + 1 - 16y^2$
c) $Yy^2 + 30y + 25 - 64c^2$ d) $36p^2 - 84p + 49 - 81m^4$
e) $16x^2 - 25y^2 - 20y - 4$ f) $100p^2 - 49a^2 - 42ay - 9y^2$
g) $36x^2 \cdot y^2 + 14yz - 49z^2$ h) $121a^4 - 4a^2 - 36a - 81$
i) $30ab - 25a^2 + 4c^2 - 9b^2$ j) $48ax - 36a^2 + y^2 - 16x^2$

4. **Descompón en factores:**

a) $x^2 - 4 + ux - 2a$ b) $a^2 - 9 + 7ax + 21x$
c) $9m^2 - 4 \quad 12am + 8a$ d) $25a^4 - b^2 - 15a^3 + 3ab$
e) $6p^2 - 2p + 9p^2a^3 - a^3$ f) $12mb + 42m - 4b^2 + 49$
g) $3um + 6mb - 10b - 5a$ h) $3x^3 - 28a - 21x^2 + 4ax$
i) $x^2 + 12a - 9 - 4ax$ j) $25 + 4mb + 10m - 4b^2$
k) $9y^2 + 25 \quad 16x^2 - 30y$ l) $4x^4 - 25x^6 + 9 + 12x^2$
m) $42a + \frac{1}{4}c^4 - 9a^2 - 49$ n) $25 + x^2 - 36y^2 - 10x$
ñ) $4c^4d^2 - 25m^2n^4 + 9 - 12c^2d$

5'. Descompon en factores:

a) $b^2 - 7bc + 56c - 4b - 32$

b) $8xd + 13x - 42 - 56d - x^2$

c) $3y^4 - 5py^2 - 11y^2 + 20p - 4$

d) $5c^3 + 10p^2c^3 + 2 + 2p^2 - 25c^6$

e) $16x^2a - 3a - 10x^2 + 5 - 8a^2$

f) $8xy^2 - x^2y^2 - 16y + 10 - 3xy$

g) $-64n^2 + 4bm - 32bn + m^2$

h) $\frac{4}{81}x^4y^2 + 42x^2 - 9x^4 - 49$

i) $8y^2 - 10xy + 2y + 5x - 3$

j) $-2x^4 + 5x^2 + 18x^5 + 27x^3 + 12$

k) $6m^2p + 8p - 4 - 3m^2$

l) $27y^4 + 6z^2 - 3y^6 + 7y^3z + 18yz$

m) $27a^2p - 45a^2 + 20p^2 - 12p^3$

n) $2a^3 - a^2 + 4y^6 - 4a^2y^3$

ñ) $-10 - 24a^3b + 9a^6 - 16b - 9a^3$

o) $6mn^3 - n^6 + 15m^3 - 9m^2 - 5m^2n^3$

p) $25b - 20a + 4a^2 + 25 - 10ab$

Fracciones algebraicas

8. *Simplificación de fracciones. Multiplicación y división de fracciones algebraicas*

Simplificación

El procedimiento de simplificación de una fracción algebraica es conocido por haberlo estudiado ya desde noveno grado.

Ahora aplicaremos los casos combinados de factorización a la simplificación.

> **Para** simplificar una fracción **se factoriza el numerador y el denominador** y **se divide cada uno de ellos** entre cada factor que les sea común.

Ejemplo 1

Simplifica:

a) $\dfrac{8y^3z^2}{12yz^4(y^3 + z^2)}$

b) $\dfrac{x^4 - a^2}{ax^4 - a^2x^2}$

c) $\dfrac{(x - 3)(a - b)}{(3 - x)(a + b)}$

d) $\dfrac{2c^6 - 13c^3 + 6}{c^6 - 4c^3 - 12}$

e) $\dfrac{9x^{10} - 24x^5 + 16}{3ax^6 - 4b - 4ax + 3bx^5}$

f) $\dfrac{2m^3 - 9m^2 + 17m - 14}{4m^4 - 10m^3 + 35m - 49}$

Resolución

a) $\dfrac{8y^3z^2}{12yz^4(y^3 + z^2)}$

Como el numerador y el denominador están factorizados, para simplificar la fracción dividimos ambos por $4yz^2$, que es el mayor factor común.

$$\frac{8y^3z^2}{12yz^4(y^3+z^2)} = \frac{2y^2}{3z^2(y^3+z^2)}$$

b) $$\frac{x^4 - a^2}{ax^4 - a^2x^2} = \frac{(x^2+a)(x^2-a)}{ax^2(x^2-a)} = \frac{x^2+a}{ax^2}$$

c) $$\frac{(x-3)(a-b)}{(3-x)(a+b)}$$

En el inciso c, tal como aparece la fracción, no se puede realizar ninguna simplificación. Sin embargo, en ella aparecen dos factores que se diferencian solamente en los signos. **Si** le cambiamos los signos a uno de esos factores y a la fracción (o a otro factor), entonces sí podemos simplificar.

$$\frac{(x-3)(a-b)}{(3-x)(a+b)} = -\frac{(3-x)(a-b)}{(3-x)(a+b)} = -\frac{a-b}{a+b} = \frac{b-a}{a+b}$$

d) $$\frac{2c^6 - 13c^3 + 6}{c^6 - 4c^3 - 12} = \frac{(2c^3-1)(c^3-6)}{(c^3+2)(c^3-6)} = \frac{2c^3-1}{c^3+2}$$

e) $$\frac{9x^{10} - 24x^5 + 16}{3ax^6 - 4b - 4ax + 3bx^5}$$

Factorizando el numerador y el denominador, tendremos:

$9x^{10} - 24x^5 + 16 = (3x^5 - 4)^2$

$3ax^6 - 4b - 4ax + 3bx^5 = 3ax^6 + 3bx^5 - 4ax - 4b$

$= 3x^5(ax+b) - 4(ax+b) = (ax+b)(3x^5-4)$

$$\frac{9x^{10} - 24x^5 + 16}{3ax^6 - 4b - 4ax + 3bx^5} = \frac{(3x^5-4)^2}{(ax+b)(3x^5-4)} = \frac{3x^5-4}{ax+b}$$

f) $$\frac{2m^3 - 9m^2 + 17m - 14}{4m^4 - 10m^3 + 35m - 49}$$

Si se trata de realizar algún agrupamiento en el numerador, no se obtiene ningún resultado. Aplicando la regla de Ruffini para +2

	2	−9	+17	−14
+2		4	−10	+14
	2	−5	+7	$\boxed{0}$

Luego, $2m^3 - 9m^2 + 17m - 14 = (m-2)(2m^2 - 5m + 7)$

y $4m^4 - 10m^3 + 35m - 49 = (4m^4 - 49) + (-10m^3 + 35m) =$

$= (2m^2+7)(2m^2-7) - 5m(2m^2-7) = (2m^2-7)(2m^2+7-5m)$

$$\frac{2m^3 - 9m^2 + 17m - 14}{4m^4 - 10m^3 + 35m - 49} = \frac{(m-2)(2m^2-5m+7)}{(2m^2-7)(2m^2-5m+7)} = \frac{m-2}{2m^2-7}. \blacksquare$$

Multiplicación y división

La multiplicación de fracciones algebraicas se efectúa de igual forma que el producto de fracciones comunes.

Por ejemplo: $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$

> Al multiplicar dos o más fracciones algebraicas, el resultado es una fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores y el denominador es el producto de los denominadores de las fracciones dadas.
>
> Si tenemos las fracciones algebraicas $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$
>
> entonces $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$ $\quad B, D \neq 0$

Como **el resultado debe darse lo más simplificado posible,** es conveniente factorizar los numeradores y los denominadores de las fracciones dadas y simplificar los factores comunes a ellos, antes de efectuar las multiplicaciones.

El cociente de fracciones algebraicas se efectúa de igual manera que el cociente de fracciones comunes.

Por ejemplo: $\frac{3}{5} : \frac{7}{2} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 7} = \frac{6}{35}$

> Para dividir una fracción algebraica por otra, se efectúa el producto de la fracción dividendo por la fracción recíproca del divisor.
>
> Si tenemos las fracciones algebraicas $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$
>
> entonces $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$ $\quad B, D, C \neq 0$

Si se presentan multiplicaciones y divisiones combinadas, se efectúan en el orden en que se presentan (a menos que se quiera dar otro orden, para lo cual se utilizarían los paréntesis).

Ejemplo 2

Efectúa:

a) $\frac{-10a^5b^6}{25a^3} \cdot \frac{-15d^5}{-8a^6d^3}$

Resolución

$$\frac{-10a^5b^6}{25a^3} \cdot \frac{-15d^5}{-8a^6d^3} = \frac{+\ 3b^6d^2}{-4a^4} = -\frac{3b^6d^2}{4a^4}$$

b) $$\frac{4x^3y + 12x^2yz}{x^2 - 9z^2} \cdot \frac{(x - 3z)^2}{x(2x + 5z) - 3z(2x + 5z)}$$

Resolución

$$\frac{4x^2y(x + 3z)}{(x + 3z)(x - 3z)} \cdot \frac{(x - 3z)^2}{(2x + 5z)(x - 3z)} = \frac{4x^2y}{2x + 5z}.$$

c) $$\frac{3zm + nz - 6m - 2n}{(z - 2)(z + 2 - 4b)} : \frac{9m^2 - n^2}{3m^2 + 14mn - 5n^2}$$

Resolución

$$\frac{3zm + nz - 6m - 2n}{(z - 2)(z + 2 - 4b)} : \frac{9m^2 - n^2}{3m^2 + 14\ mn - 5n^2}$$

$$= \frac{3zm + nz - 6m - 2rt}{(z - 2)(z + 2 - 4b)} \quad \frac{3m^2 + 14mn - 5n^2}{9m^2 - n^2}$$

$$= \frac{(3m + n)(z - 2)}{(z - 2)(z + 2 - 4b)} \cdot \frac{(3m - n)(m + 5n)}{(3m + n)(3m - n)} = \frac{m + 5n}{z + 2 - 4b}$$

d) $$\frac{y^2 - 14y + 49 - 9x^2}{(3x - 7)(y + 3x - 7)} : (42x^2 + 18x^3 - 6x^2y)$$

Resolución

Factorizaciones

$y^2 - 14y + 49 - 9x^2 = (y^2 - 14y + 49) - 9x^2 = (y - 7)^2 - 9x^2 =$
$= (y - 7 + 3x)(y - 7 - 3x)$

$42x^2 + 18x^3 - 6x^2y = 6x^2(7 + 3x - y)$

$$\frac{y^2 - 14y + 49 - 9x^2}{(3x - 7)(y + 3x - 7)} : (42x^2 + 18^3 - 6x^2y)$$

$$= \frac{y^2 - 14y + 49 - 9x^2}{(3x - 7)(y + 3x - 7)} \cdot \frac{1}{42x^2 + 18x^3 - 6x^2y}$$

$$= \frac{(y - 7 + 3x)(y - 7 - 3x)}{(3x - 7)(y + 3x - 7)} \cdot \frac{1}{6x^2(7 + 3x - y)}$$

$$= -\frac{(y - 7 + 3x)(7 + 3x - y)}{(3x - 7)(y + 3x - 7)} \cdot \frac{1}{6x^2(7 + 3x - y)} = -\frac{1}{6x^2(3x - 7)}.$$ ■

Ejercicios (epígrafe 8)

1. **Simplifica las siguientes** fracciones:

a) $\dfrac{12a^3b^4}{54a^7b}$ b) $\dfrac{36x^5y^3}{-9x^4y^8}$ c) $\dfrac{-15m^5p^3}{-3m^7p^3}$ d) $\dfrac{-14c^2}{28c^6d^4}$

e) $\dfrac{32a^2(a-b)(a+b)}{4a^3(a-b)^2}$ f) $\dfrac{-12x^3y^2(x-y)^2}{-6x^5y^3(x-y)^3}$

g) $\dfrac{18m^5p\,(x-3+2y)}{-24m^3p^6(x-3+2y)}$ h) $\dfrac{2a^3(c-3d)}{10a^2(3d-c)}$

i) $\dfrac{-25x^3(x+5y)}{5x^4y^2(-x-5y)}$ j) $\dfrac{(2a-b)(3a+2b-4z)}{(2b-4z+3a)(b-2a)}$

k) $\dfrac{16x^4y^3(m-5p)^2}{-12x^3(5p-m)}$ l) $\dfrac{-15c^3d^4(m^2+2h)^2}{48cd^5(-m^2-2h)}$

m) $\dfrac{(m-6+3x)(m-6-3x)}{2m^2\,(m+6-3x)(3x+6-m)}$ n) $\dfrac{(x-2y)(x^2+5y-3)}{(2y-x)(3-x^2-5y)}$

2. Simplifica:

a) $\dfrac{5xy-3x}{5x^2y^2-3x^2y}$ b) $\dfrac{a^2-4}{a^2-2a}$ c) $\dfrac{x^2+x}{3x+3}$ d) $\dfrac{m^2+6m+9}{m^2-9}$

e) $\dfrac{4a^2-25}{4a^2-20a+25}$ f) $\dfrac{b^2-15b+54}{b^2-6b-27}$ g) $\dfrac{3c^2-14c+8}{4c^2-13c-12}$

h) $\dfrac{n^3-n}{n^2-5n-6}$ i) $\dfrac{3x^3+9x^2}{x^2+6x+9}$ j) $\dfrac{x^3-6x^2}{x^2-12x+36}$

k) $\dfrac{a^4+6a^2-7}{a^4+8a^2-9}$ l) $\dfrac{3x^2+19x+20}{6x^2+17x+12}$ m) $\dfrac{4a^4-15a^2-4}{a^2-8a-20}$

n) $\dfrac{16a^2x-25x}{12a^3-7a^2-10a}$ o) $\dfrac{6x^2-11x-10}{4x^2+4x-35}$ p) $\dfrac{24y^3-6y}{12y^4+12y^3+3y^2}$

q) $\dfrac{12x^3+48x^2}{x^3-6x^2-40x}$ r) $\dfrac{6a^4y-54a^2y}{2a^4+3a^3-20a^2}$ s) $\dfrac{4x^6-16x^4-48x^2}{4x^5-18x^3-36x}$

t) $\dfrac{6y^7-24x^2y}{2y^7-8y^4x+8yx^2}$

u) $\dfrac{3m^5y-4m^3y^2-15my^3}{18m^3y+12m^3y-30my^2}$

v) $\dfrac{x\,(3x^2-2)+(m-n)(3x^2-2)}{12x^4-5x^2-2}$

3. Simplifica:

a) $\dfrac{5x^2 + 20x + 8ax + 32a}{10a^2x^2 + 16a^3x}$

b) $\dfrac{b^3 - 4b^2 + 3b - 12}{b^2c - 2b - 4bc + 8}$

c) $\dfrac{m^3 + 3m - 6m - 18}{m^3 - 2m^2 - 6m + 12}$

d) $\dfrac{a^4 - 6a^3 - 5a + 30}{a^2 - 3a^2b^2 - 6a + 18b^2}$

e) $\dfrac{a^4 + 5a^2 + 4}{a^3 - 3a^2b^2 + 4a - 12b^2}$

f) $\dfrac{2a^3 - a^2 + 2a - 1}{a^3b + ab - 3a^2c - 3c}$

g) $\dfrac{y^2 + 10y + 25 - 16x^2}{16x^2 + 8xy + y^2 - 25}$

h) $\dfrac{9m^2 - 12mp + 4p^2 - 49x^2}{9m^2 + 42mx + 49x^2 - 4p^2}$

4. Simplifica:

a) $\dfrac{x^2 - 9 - ax - 3a}{2x^3 + 6x^2 + x + 3}$

b) $\dfrac{y^2 - 4 - 3ay + 6a}{y^2 + 4y + 4 - 9a^2}$

c) $\dfrac{a^3 - a + 3a^2 - 3}{a^3 - 7a + 6}$

d) $\dfrac{m^4 + 6m^2 + 9}{2m^3 + 6m - 3am^2 - 9a}$

e) $\dfrac{a^4 + 3a^2 - 10}{a^4 - 4 - 2a^2m + 4m}$

f) $\dfrac{3y^2 + 4y - 4}{y^3 + 2y^2 - 5y - 10}$

g) $\dfrac{b^4 - 9 + 2b^3 - 6b}{b^3 + b^2 + b - 3}$

5*. Simplifica

a) $\dfrac{a^3x - 3ab + 8a^2x - 24b}{a^2 + 6a - 16 - ax - 8x}$

b) $\dfrac{x^4 - 4 - x^3 + 2x}{x^3 - 5x^2 + 6x - 8}$

c) $\dfrac{4b^2 + 28b + 49 - 4x^2}{2x^2 + x - 21 + 2bx - 6b}$

d) $\dfrac{yz + 8z - y^2 - 5y + 24}{9 - z^2 + 2zy - y^2}$

e) $\dfrac{3xd - 5x - 3d^2 + 2d + 5}{15ad + 6d - 25a - 10}$

f) $\dfrac{2pd - 16 + d^2 - 8p}{md - d^2 + 16 - 4m}$

g) $\dfrac{8x^2 - 2x - 3 + 4xy + 2y}{4x^2 - 8x - 5 - 2xy - y}$

h) $\dfrac{10ax - 5x - 6a^2 - 9a + 6}{4ax - 2x - 8a^2 + 10a - 3}$

i) $\dfrac{15bz - 6z - 5b^2 - 18b + 8}{5bz^2 - 2z^2 - 10b^2 + 9b - 2}$

j) $\dfrac{2c^2 - 7c + 6 - 4xc + 8x}{2c^3 - 4c^2 + 4c - 8}$

k) $\dfrac{16d^2 - 4x^2 - 12x - 9}{4dx - 4d - 2x^2 - x + 3}$

l) $\dfrac{3a^3 - 8a^2 + 15a - 40}{a^2x + 5x - 2a^4 - 3a^2 + 35}$

m) $\dfrac{b^3 + 18 - 6b^2 - 3b}{b^4 - 3a + 4b^2 + ab^2 - 21}$

n) $\dfrac{5x^2 - 15xy - 7 - 2x + 21y}{9y^2 - 1 - 6xy + x^2}$

6. Efectúa y simplifica:

a) $\dfrac{3a^2b}{2ab^2}\cdot\dfrac{5a^2b^2}{3a^2b^3}$

b) $\dfrac{12x^3y}{4x^5}\cdot\dfrac{-2x^6y^3}{24y^4}$

c) $\dfrac{24a^2b^5}{-7m^3n^2} : \dfrac{-9a^7b^4}{2m^5b^3}$

d) $\dfrac{15y^9z^3}{2yt^5} : \dfrac{20y^6z^9t^3}{-24y^4z^8t^{10}}$

e) $\dfrac{18xy^2}{7yz}\cdot\dfrac{14x^2y}{3xz^2} : \dfrac{24y^2z^3}{5xz^2}$

f) $\dfrac{-26ab^3}{15a^2c} : \dfrac{8a^4b}{-25a^6c^3}\cdot\dfrac{-6b^2c}{65a^2b^3}$

g) $\dfrac{3a^2(a+b)}{(a+b)^2}\cdot\dfrac{(a+b)(a-b)}{a^2(a-b)^2}$

h) $\dfrac{-18x^2}{(x+5)(x-3)}\cdot\dfrac{2x(x+5)^2}{(x+5)}$

i) $\dfrac{32m^3n}{(n-7)(n+2)} : \dfrac{30m^3(n+2)}{6m(n+2)^2}$

j) $\dfrac{45c^4(c-4)^2}{6c^2(c-4)(c+3)} : \dfrac{15c^3}{c-4}$

k) $\dfrac{-5a^2(a-3)^2}{16a^4(a-3)}\cdot\dfrac{(a-5)(a+6)}{(a-5)^2}\cdot\dfrac{(a-5)(a-3)}{(2a+1)(a-3)}$

l) $\dfrac{3a(a-2b+c)}{-2b^3}\cdot\dfrac{b(a+2b-c)}{6a^2(a-2b+c)} : \dfrac{(a-2b+c)(a+2b-c)}{12ab}$

7. Efectua:

a) $\dfrac{a-2b}{2a+6b}\cdot\dfrac{a^2+3ab}{3a-6b}$

b) $\dfrac{x^2-16}{x^2-8x+16}\cdot\dfrac{2x^2-8x}{x^2+x-12}$

c) $\dfrac{2y^3-6y^2}{y^2+4y-21}\cdot\dfrac{y^2+14y+49}{y^2-49}$

d) $\dfrac{3z^3-24z^2}{3z^2-13z-24} : \dfrac{z^2+2z+1}{2z^2+5z+3}$

e) $\dfrac{2b^3-72b}{b^2+2b-24} : \dfrac{3b^2-17b-6}{3b^2+7b+2}$

f) $\dfrac{4a^2-9}{2a^2+11a+12}\cdot\dfrac{8a^3-32a^2}{a^2+2a-8}\cdot\dfrac{a^2+8a+16}{a-4}$

g) $\dfrac{b^2+2b-48}{3b^2+20b-32}\cdot\dfrac{18ab^3-24ab^2}{8a^3b} , \dfrac{b^2-36}{b^2-12b+36}$

h) $\dfrac{16x^4y^2+8x^3y^3}{(2x+y)(x-5)}\cdot\dfrac{4x^2+4xy+y^2}{8x^3y^3-12x^2y^4} : \dfrac{24x^3-6xy^2}{4x^2-12xy+9y^2}$

i) $\dfrac{a^2-5a+6}{3a^2-13a+14}\cdot\dfrac{6a^2-11a-7}{3-a} : (8a^3+4a^2)$

j) $\dfrac{9b^2-21bc+10c^2}{18b^4c-60b^3c^2+50b^2c^3} : \dfrac{16b^2c^2-24b^3c}{9b^2-25c^2}\cdot\dfrac{16b^3c^4}{3b-5c}$

k) $\dfrac{2x^4+5x^2-25}{4x^4-20x^2+25} : \dfrac{8x^5y+4x^3y^2}{4x^4-25} : \dfrac{x^2+5}{8x^2y}$

l) $\dfrac{m^6 - 11m^3n + 18n^2}{m^6 - 18m^3n + 81n^2} : \dfrac{9n - m^3}{5m^4n - 45mn^2} : \dfrac{4n^2 - m^6}{5m^6 - 43m^3n - 18n^2}$

m) $\dfrac{2x^8 - 32x^2y^2}{4x^6y - 4x^3y^2 - 80y^3} : \dfrac{x^6 - 10x^3y + 24y^2}{2x^6 - 9x^3y - 18y^2} : \dfrac{4x^6 + 12x^3y + 9y^2}{2x^6 - 7x^3y - 15y^2}$

n) $\dfrac{a^6 + 3a^3b^2 - 40b^4}{9a^6 - 24a^3b^2 + 16b^4} : \dfrac{6a^5 + 48a^2b^2}{b^2 - 4a^3} \cdot \dfrac{6a^6 + 7a^3b^2 - 20b^4}{8a^6 + 18a^3b^2 - 5b^4}$

8. Efectúa

a) $\dfrac{3m^2 + 9m}{b(m + 3) - 5(m + 3)} \cdot \dfrac{b^2 - 25}{6m^2}$

b) $\dfrac{x^2 - 5x - 24}{x^2 - 16x + 64} \cdot \dfrac{3(x - 8) + 2p(x - 8)}{2p + 3}$

c) $\dfrac{2a^2 - 5a - 12}{4ax + 6x - 6a - 9} \cdot \dfrac{4x^2 - 9}{(2x + 3)^2}$

d) $\dfrac{x^2 - 4xy + 4y^2}{(x + 2y)(x - 2y) + (x - 2y)} \cdot \dfrac{8x^2y + 16xy^2 + 8xy}{16x^3y}$

e) $\dfrac{6b^2 - 11b - 10}{4b^2 - 25 - 2bx + 5x} \cdot \dfrac{5 - x + 2b}{12b^3 + 8b^2}$

f) $\dfrac{(3c + 5 - 6a)^2}{9c^2 + 30c + 25 - 36a^2} : \dfrac{12c^2a}{12c^3 + 20c^2 + 24ac^2}$

g) $\dfrac{y^3 - 2y^2 + 3y - 6}{y^4 - 9} : \dfrac{y^3 + 12y}{y^4 + 9y^2 - 36}$

h) $\dfrac{m^3 - 3m^2 - 4m + 12}{3m^2 + m - 14} : \dfrac{4m^3 + 4m^4 - 8m^2}{3m^3 + 4m^2 - 7m}$

i) $\dfrac{9m^6 + 3m^3 - 2}{3m^4 - 6m^3 - m + 2} : \dfrac{m + 2}{4 - m^2}$

j) $\dfrac{am - 2mb + 3ap - 6bp}{3bm + 9bp - 5am - 15ap} \cdot \dfrac{12bp - 9b - 20ap + 15a}{16p^2 - 24p + 9}$

k) $\dfrac{x^3 - 3x^2 - 2x + 6}{xy - 4x - 3y + 12} \cdot \dfrac{y^3 - 4y^2 - y + 4}{y^4 - 1}$

l) $\dfrac{a^2b - a^2 + 3b - 3}{2b^2 - 2b} \cdot \dfrac{2b^3 - 2b^2 + 2b}{a^3 - 4a^2 + 3a - 12}$

9*. Efectúa:

a) $\dfrac{y^2 + 7y + 10 - 3xy - 6x}{y^2 - 9x^2 + 5y + 15x} : \dfrac{y^2 - 4x^2 - 8y + 16x}{y^2 + xy - 6x^2}$

b) $\dfrac{z^2 - 12z + 36 - 2zm + 12m}{z^2 - 14z + 48 + 2pz - 12p} : \dfrac{z^2 - 4z - 32 - 2pz - 8p}{z^2 - 16z + 64 - 4p^2}$

c) $\dfrac{3b^2 - 16b + 5 + 4bc - 20c}{8c^2 - 6c + 1 + 6bc - 3b} : \dfrac{6c^3 + 12c^2 + 6c^5}{2c^2 + 3c - 2 + 2c^4 - c^3}$

d) $\dfrac{3x^2 + 2x - 21 - 18xy + 42y}{8x^2 - 2x - 1 - 36xy - 9y} : \dfrac{6x^2 - 11x - 7 - 27xy + 63y}{4x^2 - 36xy + 81y^2 - 1}$

e) $\dfrac{2a^3 - 2a^2 + 3a - 3}{a^2 - 1 + 5ab - 5b} \cdot \dfrac{6a^2 - a - 1 - 12ab - 4b}{a^3b - 3ac - 4a^2b + 12c} \cdot$

$\cdot \dfrac{a^2 - 3a - 4 + 5ab - 20b}{6a^3 + 2a^2 + 9a + 3}$

f) $\dfrac{9d^2 - 16 + 3dx + 4x}{x^2 - 8x + 16 - 9x^2} \cdot \dfrac{3dx - 12d - 2x + 8 - 9dx + 6x}{d^2 - 3d - 28 + 3dx + 12x} :$

$: \dfrac{8x + 6xd - 12d - 9d^2}{6x^2 - 7xd - 3d^2 - 14x + 21d}$

g) $\dfrac{3x^4 - 12x^3 + 3x^2}{5x - 15y - x^2 + 9y^2} : \dfrac{2x^2 + 5x - 25 + 6xy - 15y}{-25 + x^2 + 6xy + 9y^2} :$

$: \dfrac{3x^3 - 13x^2 + 7x - 1}{3x^2 - x - 9xy + 3y}$

h) $\dfrac{4ab - 24b - a^2 + 13a - 42}{16b^2 - 8ab + a^2 - 49} : \dfrac{5a^3 - a^2 + 10a - 2}{20ab - 4b - 5a^2 - 34a + 7} :$

$: \dfrac{2a^3b^2 - 4ab^2 + 12ab^3}{a^4 - 4 + 6a^2b + 12b}$

10*. Si $A = \dfrac{3x^2 - 6x + 2zx - 4z}{x^3 - 6 - 2x^2 + 3x}$ $\qquad B = \dfrac{x^2 + 3x - 10 - 3xb + 6b}{3bx - 15b - x^2 + 25}$

$C = \dfrac{x^2 - 10x + 25 - 9b^2}{9bx - 12b - 3x^2 + 19x - 20}$

$D = \dfrac{10b^2x - 5x - 8b^4 - 2b^2 + 3}{15x^2 - 29x + 12 - 12b^2x + 16b^2}$

Calcula y simplifica: a) $A \cdot B$ $\qquad$ b) $\dfrac{B \cdot C}{D}$.

9. *Adición y sustracción de fracciones algebraicas*

Para adicionar o sustraer fracciones algebraicas se procede igual que en aritmética, en la que primero debes buscar el mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores.

Para determinar **el mcm de dos** expresiones algebraicas las descomponemos en factores y tomamos los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

Ejemplo 1

Determina el mcm de

a) $x^2 - 4;\quad x^3 - 2x^2$ **b)** $9a^2 - 6a + 1;\quad 3a^2 - 10a + 3.$

Resolución

a) Factoricemos cada uno de **los** binomios

$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2) \qquad x^3 - 2x^2 = x^2(x - 2)$

Respuesta: El mcm es $x^2(x + 2)(x - 2)$.

b) $9a^2 - 6a + 1 = (3a - 1)^2 \qquad 3a^2 - 10a + 3 = (3a - 1)(a - 3)$

Respuesta: El mcm es $(3a - 1)^2(a - 3)$. ■

El procedimiento para adicionar o sustraer fracciones algebraicas consiste **en:**

1. Buscar el mcm de los denominadores.
2. Ampliar todas las fracciones a un denominador común.
3. Sumar (o sustraer) los numeradores.
4. Simplificar el resultado si es posible

Ejemplo 2

Calcula:

a) $\dfrac{3x - 2}{9x} + \dfrac{x^2 + 4}{6x^2}$ **b)** $\dfrac{b - 2}{b - 3} + \dfrac{b - 3}{b - 2} - \dfrac{1}{b^2 - 5b + 6}$

c) $\dfrac{a + 3}{a^2 - a - 6} - \dfrac{a + 5}{a^2 + 2a - 15}$

Resolución

a) $\dfrac{3x - 2}{9x} + \dfrac{x^2 + 4}{6x^2} = \dfrac{2x(3x - 2) + 3(x^2 + 4)}{18x^2}$ ← Numeradores ampliados; ← mcm de $9x$ y $6x^2$.

$= \dfrac{6x^2 - 4x + 3x^2 + 12}{18x^2} = \dfrac{9x^2 - 4x + 12}{18x^2}$. No es posible simplificar el resultado

b) $$\frac{b-2}{b-3}+\frac{b-3}{b-2}-\frac{1}{b^2-5b+6}=\frac{b-2}{b-3}+\frac{b-3}{b-2}-\frac{1}{(b-2)(b-3)}$$

$$=\frac{(b-2)^2+(b-3)^2-1}{(b-3)(b-2)}=\frac{b^2-4b+4+b^2-6b+9-1}{(b-3)(b-2)}$$

$$=\frac{2b^2-10b+12}{(b-3)(b-2)}$$ El numerador del resultado se puede factorizar y se tiene que:

$$\frac{b-2}{b-3}+\frac{b-3}{b-2}-\frac{1}{b^2-5b+6}=\frac{2(b-2)(b-3)}{(b-2)(b-3)}=2$$

c) $$\frac{a+3}{a^2-a-6}-\frac{a+5}{a^2+2a-15}$$

$$=\frac{a+3}{(a+2)(a-3)}-\frac{a+5}{(a-3)(a+5)}$$ Es conveniente simplificar primero en la segunda fracción.

$$=\frac{a+3}{(a+2)(a-3)}-\frac{1}{(a-3)}=\frac{a+3-a-2}{(a+2)(a-3)}=\frac{1}{(a+2)(a-3)}.$$ ■

En ocasiones es necesario realizar sumas y productos combinados.

Ejemplo 3

Efectúa: $$\frac{c+3}{c}-\frac{cm+3c-2m-6}{(c-2)^2}:\frac{2m^2+5m-3}{6cm-3c}$$

Resolución

En este ejercicio hay que tener en cuenta que primero se realiza el cociente y después la resta.

$$\frac{cm+3c-2m-6}{(c-2)^2}:\frac{2m^2+5m-3}{6cm-3c}$$

$$=\frac{cm+3c-2m-6}{(c-2)^2}\cdot\frac{6cm-3c}{2m^2+5m-3}$$

$$=\frac{(c-2)(m+3)}{(c-2)^2}\cdot\frac{3c(2m-1)}{(m+3)(2m-1)}=\frac{3c}{c-2}$$

Ya obtenido el cociente, calculamos la diferencia

$$\frac{c+3}{c}-\frac{3c}{c-2}=\frac{(c+3)(c-2)-c(3c)}{c(c-2)}=\frac{c^2+c-6-3c^2}{c(c-2)}=$$

$$=\frac{-2c^2+c-6}{c(c-2)}.$$ ■

Ejercicios (epígrafe 9)

1. Determina el mcm de:

a) $18;\ 24$ b) $15;\ 20;\ 25$ c) $a^3x^5;\ a^2x^7b^3$

d) $c^5x^4y^2;\ c^6x^7;\ x^5z^4$ e) $12a^5b^2;\ 21a^2b^6$ f) $16d^3c^4;\ 30d^4c^6$

g) $m + 4;\ m^2n;\ 4m$ h) $xy;\ x + y$ i) $m^3p;\ m^2p(m^3 + p)$

j) $a + 3;\ a^2;\ 3a$ k) $(z - 3)^2;\ 5z(z - 3);\ 25z^2$

l) $(b - 3)(b + 5);\ 2b;\ (b - 3)^2$ m) $a^3;\ a^3 - a^2$

n) $b^2 - 1;\ b^2 - b$ ñ) $ax - a;\ 2a^2x - 2a^2;\ 4a^3$

o) $x^2 + x - 30;\ x^2 - 36$ p) $5m^2 + 8m - 4;\ m^2 + 4m + 4$

q) $2x^3 - 3x^2 - x - 2;\ \ x^2 - 4 - 3bx + 6b;\ \ x^2 - 6xb + 9b^2 - 4$

2. Efectúa las siguientes sumas:

a) $\dfrac{x^2}{a^2b} + \dfrac{y^2}{ab^2}$ b) $\dfrac{m}{3x^2} - \dfrac{2n}{15x}$

c) $\dfrac{m}{3x^2} + \dfrac{2a^2}{4xy^3} - \dfrac{3a^3}{6x^3y^2}$ d) $\dfrac{c + 1}{12c^2} + \dfrac{c^2 + 4}{4c^2}$

e) $\dfrac{y - 4x}{5x^2y} + \dfrac{5}{2xy}$ f) $\dfrac{2c - 3}{12c^2} + \dfrac{c - 2}{9c}$

g) $\dfrac{s + 2}{8rs} - \dfrac{2r - 5}{6r^2}$ h) $\dfrac{3x + 4y}{15xy} - \dfrac{x - 2y}{5x^2} + \dfrac{2x + y}{6y^2}$

i) $\dfrac{a + 2b}{12a^2b} + \dfrac{b^2 - a}{8ab^3} - \dfrac{2 - a}{18a^2}$ j) $\dfrac{2a^2b - 3}{10a^3b^2} - \dfrac{ab^2 + 4}{18a^2b^3} - \dfrac{2}{15ab}$

k) $\dfrac{2d^4y - c^2}{5c^2d^4} - \dfrac{6cy^2 + 1}{35c^3y} - \dfrac{3}{14d^3y^2}$ l) $\dfrac{3x - 5}{x + 2} + \dfrac{3}{2x}$

m) $\dfrac{3a - 2}{(a - 2)^2} + \dfrac{5a}{a - 2}$ n) $\dfrac{2y + 3}{y\ (y + 4)} - \dfrac{3}{y^2}$

ñ) $\dfrac{5n}{2m\ (3m + n)} - \dfrac{n - 4}{(3m + n)^2}$ o) $\dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{3x + 4} - \dfrac{x + 2}{(3x + 4)^2}$

p) $\dfrac{2}{4x + 3y} - \dfrac{1}{4x} - \dfrac{2}{3y}$ q) $\dfrac{1}{3b} - \dfrac{2}{(3b - 5)^2} + \dfrac{3}{3b - 5}$

r) $\dfrac{z - 8}{(z + 3)(z - 3)} + \dfrac{z + 2}{(z - 3)(z + 4)} - \dfrac{2z}{(z + 3)(z + 4)}$

s) $\dfrac{a + 4}{(a - 2)(a + 3)} + \dfrac{a - 2}{(a + 3)(5 - a)} + \dfrac{a + 6}{(a - 5)(2 - a)}$

t) $\dfrac{x + 3y}{(3x + 2y)(x - y)} + \dfrac{x + y}{(y - x)(x + 3y)} - \dfrac{2x - y}{(x + 3y)(3x + 2y)}$

3. Efectúa:

a) $\dfrac{2x-1}{x^2+3x}+\dfrac{4}{x^2}$ b) $\dfrac{a-4}{2a^2+6a}+\dfrac{a-5}{a^2-9}$ c) $\dfrac{b+2}{b^2-25}+\dfrac{b-5}{b^2+2b-15}$

d) $\dfrac{y+3}{y^2+4y-21}-\dfrac{2y}{2y^2+15y+7}$ e) $\dfrac{x-3}{x^2-11x+30}+\dfrac{x-5}{4x^2-21x-18}$

f) $\dfrac{z+3}{3z^2-13z+4}-\dfrac{z+2}{6z^2+z-1}$ g) $\dfrac{y+8}{2y^2+7y-15}+\dfrac{4y+7}{9-4y^2}$

h) $\dfrac{3a^2+4}{2am+4m-3a-6}+\dfrac{a-2}{2m-3}$ i) $\dfrac{(2x+5)^2}{x^3-2x^2-3x+6}-\dfrac{4x}{x^2-3}$

j) $\dfrac{3a}{a-2}+\dfrac{2a-3ab}{a^2-4-ab+2b}$

k) $\dfrac{m-4}{m^2-3m+2pm-6p}-\dfrac{m+5}{3m^2-mp-9m+3p}$

l) $\dfrac{a-8}{a^3+2a^2+a+2}\quad\dfrac{2a\quad 3}{a^3-2a^2+a-2}$

m) $\dfrac{a-6}{4a^2+4a}+\dfrac{3a-7}{2a^2-2a}-\dfrac{a-7}{a^2-1}$

4. Efectúa:

a) $\dfrac{x}{a^2-ax}+\dfrac{a+x}{ax}+\dfrac{a}{ax-x^2}$

b) $\dfrac{x}{xy-y^2}-\dfrac{1}{y}$

c) $\dfrac{3}{2x+4}+\dfrac{x-1}{2x-4}+\dfrac{x+8}{x^2-4}$

d) $\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{4x-7}{x^2-x-6}$

e) $\dfrac{1}{x+x^2}+\dfrac{1}{x-x^2}+\dfrac{x+3}{1-x^2}$

f) $\dfrac{a-b}{a^2+ab}+\dfrac{a+b}{ab}-\dfrac{a}{ab+b^2}$

g) $\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{4xy}{x^2-y^2}$

h) $\dfrac{x-y}{x+y}-\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{4x^2}{x^2-y^2}$

i) $\dfrac{1}{a-5} + \dfrac{a}{a^2-4a-5} + \dfrac{a+5}{a^2+2a+1}$

j) $\dfrac{x+1}{x^2-x-20} - \dfrac{x+4}{x^2-4x-5} + \dfrac{x+5}{x^2+5x+4}$

k) $\dfrac{2}{a+1} + \dfrac{a}{a^2+2a+1} + \dfrac{a+1}{(a+1)^3}$

l) $\dfrac{3x+2}{x^2+3x-10} - \dfrac{5x+1}{x^2+4x-5} + \dfrac{4x-1}{x^2-3x+2}$

m) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x^2+x-2} + \dfrac{x+1}{(x+2)(x^2+2x-3)}$

n) $\dfrac{x-2}{x^2-x} - \dfrac{x+3}{x^2+3x-4} + \dfrac{x^2+12x+16}{x^4+3x^3-4x^2}$

5. Calcula:

a) $\dfrac{b-6}{b^2+10b+24} + \dfrac{b-3}{b^2-2b-24} - \dfrac{3b-1}{36-b^2}$

b) $\dfrac{3a}{2a^3+2a^2+a+1} + \dfrac{3a-5}{a^2-1+ax+a}$

c) $\dfrac{y-4}{4y^2+7y-2} - \dfrac{y+2}{8y^2+10y-3} - \dfrac{4y+1}{2y^2+7y+6}$

d) $\dfrac{a+5}{a^3-2a^2+2a-4} - \dfrac{a^2-3}{12+4a^2-a^4} - \dfrac{a-4}{a^3-2a^2-6a+12}$

e) $\dfrac{x+2-5y}{(x-4)^2-9y^2} - \dfrac{2x-1}{(x^2-16)-3y(x+4)} - \dfrac{x-2}{(x^2-16)+3y(x+4)}$

f) $\dfrac{5z+3}{z^2+3zp-2z-6p} - \dfrac{2z-p}{z^2-2za+3pz-6ap} - \dfrac{3z-a}{z^2-2za-2z+4a}$

6. Calcula:

a) $\dfrac{3a-2}{a^2} \cdot \dfrac{a^3+3a^2}{9a^2-4} + \dfrac{5a-2}{3a}$

b) $\left[\dfrac{2}{a-2} - \dfrac{1}{a+2}\right] \cdot \dfrac{2a^3-4a^2}{a^2+a-30}$

c) $\dfrac{12x-6x^2}{2x^2+x-28} + \dfrac{3x(2ax-3)}{x^2-2x-24} \cdot \dfrac{(x-6)^2}{2ax^2-12ax-3x+18}$

d) $\dfrac{9b^2-16}{9b^2-24b+16}\cdot\dfrac{3b^2+11b-20}{b^2+3b-10}+\dfrac{5-b}{2b}$

e) $\left[\dfrac{c+2}{4c^2-20c+25}-\dfrac{c+3}{4c^2-10c}\right]\cdot\dfrac{6c^2-17c+5}{3c^2+14c-5}$

f) $\left[\dfrac{2x+1}{2ax-5x+6a-15}-\dfrac{x-3}{2ax-4a-5x+10}\right]\cdot\dfrac{6a^2-15a}{x^2-3x+7}$

g) $\dfrac{y+2}{2x}-\dfrac{y^4+6y^2+9}{y^3-y^2+3y-3}:\dfrac{2xy^2+6x}{y^2-1-2yx+2x}$

h) $\left[\dfrac{9a^2}{b^2}-4\right]:\left[\dfrac{5}{3a+2b-5}+1\right]\cdot\dfrac{6ab^2+4b^3+10b^2}{9a^2+12ab+4b^2-25}$

7*. Efectúa:

a) $\left[\dfrac{x+3y-3}{x-y}+2\right]\cdot\dfrac{\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{9x}{y}+6+\dfrac{y}{x}-\dfrac{9}{xy}}$

b) $\dfrac{\left[1+\dfrac{x^2+y^2-z^2}{2xy}\right]\cdot\left[\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{z}\right]}{\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{z}}$

Ecuaciones e inecuaciones

10. *Ecuaciones que se **pueden** transformar en ecuaciones lineales o cuadráticas*

Desde grados anteriores sabes resolver ecuaciones lineales y cuadraticas. En el epígrafe 6, ejemplo 3 aparece el procedimiento de resolución de las cuadraticas. Ahora nos ocuparemos de ecuaciones que al resolverlas nos conducen a ecuaciones lineales o cuadráticas.

En algunos casos obtenemos una ecuación de esos tipos efectuando y eliminando signos de agrupación.

Ejemplo 1

Resuelve y comprueba:

a) $3x+2=5x-4(2+x)$ **b)** $(x-2)^2-(x-3)(1-2x)=1.$

Resolución

a) $3x + 2 = 5x - 4(2 + x)$

$3x + 2 = 5x - 8 - 4x$ Al efectuar el producto se obtiene una ecuación **de** primer **grado.**

$3x - 5x + 4x = -8 - 2$ Transponiendo.

$2x = -10$ Reduciendo términos semejantes.

$$x = \frac{-10}{2} = -5 \quad \text{Despejando } x$$

Comprobación:

MI: $3(-5) + 2 = -15 + 2 = -13$

MD: $= 5(-5) - 4[2 + (-5)] = -25 - 4(2 - 5) = -25 - 4(-3)$

$= -25 + 12 = -13$

MI = MD *Respuesta:* $x = -5$

b)
$$\begin{aligned}(x - 2)^2 - (x - 3)(1 - 2x) &= 1\\ (x^2 - 4x + 4) - (x - 2x^2 - 3 + 6x) &= 1\\ x^2 - 4x + 4 - x + 2x^2 + 3 - 6x - 1 &= 0\\ 3x^2 - 11x + 6 &= 0\\ (3x - 2)(x - 3) &= 0\end{aligned}$$

$$x = \frac{2}{3} \qquad x = 3$$

Comprobación: Para $x = \dfrac{2}{3}$

MI: $\left(\frac{2}{3} - 2\right)^2 - \left(\frac{2}{3} - 3\right)\left(1 - 2 \cdot \frac{2}{3}\right)$

$= \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - \left(-\frac{7}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{9} - \frac{7}{9} = 1$

MD: 1 MI = MD

Para $x = 3$

MI: $(3 - 2)^2 - (3 - 3)(1 - 3 \cdot 2) = 1 - (0)(-5) = 1$

MD: 1 MI = MD *Respuesta:* $x = \dfrac{2}{3}$, $x = 3$. ■

Despejo de fórmulas

Para despejar una variable en una **fórmula se** utilizan los **mismos procedimientos que** en la resolución de una ecuación de primer grado *o* de segundo **grado** en una variable.

Ejemplo 2

Despeja la variable indicada entre paréntesis en cada una de las siguientes fórmulas.

a) $s = \dfrac{1}{2} at^2 \quad (a)$ **b)** $\dfrac{m}{m'} = \dfrac{n \cdot M}{n' \cdot M'} \quad (n')$

c) $A = 2ab + 2ac + 2bc \qquad (b)$ **d)** $s = v_0 t + \dfrac{1}{2} at^2 \qquad (t)$

Resolución

a) $s = \dfrac{1}{2} at^2$

$2s = at^2$ Transponiendo el 2

$\dfrac{2s}{t^2} = a$ *Respuesta:* $a = \dfrac{2s}{t^2}$

b) $\dfrac{M}{m'} = \dfrac{n \cdot M}{n' \cdot M'}$

$m \cdot n' \cdot M' = m' \cdot n \cdot M$ Eliminando denominadores.

$n' = \dfrac{m' \cdot n \cdot M}{m \cdot M'}$ **Respuesta:** $n' = \dfrac{m' \cdot n \cdot M}{m \cdot M'}$

c) $A = 2ab + 2ac + 2bc$

$A - 2ac = 2ab + 2bc$ Agrupando en un mismo miembro los sumandos que contienen la b

$A - 2ac = b\,(2a + 2c)$ Extrayendo factor comun b

$\dfrac{A - 2ac}{2a + 2c} = b$ *Respuesta:* $b = \dfrac{A - 2ac}{2a + 2c}$

d) $s = v_0 t + \dfrac{1}{2} at^2$

$\dfrac{1}{2} at^2 + v_0 t - s = 0$ Escribiéndola como una ecuación de segundo grado

$$t_{1,2} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2as}}{2 \cdot \frac{1}{2}\, a} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2as}}{a}$$ Utilizando la fórmula de resolución

Respuesta: $t_1 = \dfrac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2as}}{a}, \; t_2 = \dfrac{-v_0 - \sqrt{v_0^2 + 2as}}{a}$. ■

Para resolver una ecuación fraccionaria es necesario eliminar sus denominadores para transformarla en otra más sencilla.

En este proceso hay que tener presente que se pueden introducir raices extrañas, es decir, soluciones de la ecuación transformada que no lo son de la **original; de** ahí la **necesidad de que** sean comprobadas obligatoriamente.

Ejemplo 3

Determina el conjunto solución de:

a) $\dfrac{3}{2(x+1)} + \dfrac{5}{4} = \dfrac{15}{8} - \dfrac{x}{x+1}$ b) $\dfrac{3}{x-1} = \dfrac{6}{x^2-1}$

c) $\dfrac{3}{x-5} + \dfrac{x^2+7}{x^2-2x-15} = -\dfrac{2}{x+3}$.

Resolución

a) $\dfrac{3}{2(x+1)} + \dfrac{5}{4} = \dfrac{15}{8} - \dfrac{x}{x+1}$ mcm: $8(x+1)$

$$\begin{aligned} 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2(x+1) &= 15(x+1) - 8x \\ 12 + 10x + 10 &= 15x + 15 - 8x \\ 3x &= -7 \\ x &= -\frac{7}{3} \end{aligned}$$

Comprobación: **Para** $x = -\dfrac{7}{3}$

MI: $$\frac{3}{2\left(-\frac{7}{3}+1\right)} + \frac{5}{4} = \frac{3}{2\left(-\frac{4}{3}\right)} + \frac{5}{4} = \frac{3}{-\frac{8}{3}} + \frac{5}{4} =$$

$$= -\frac{9}{8} + \frac{5}{4} = \frac{1}{8}$$

MD: $$\frac{15}{8} - \frac{-\frac{7}{3}}{-\frac{7}{3}+1} = \frac{15}{8} - \frac{-\frac{7}{3}}{-\frac{4}{3}} = \frac{15}{8} - \frac{7}{4} = \frac{15-14}{8} = \frac{1}{8}$$

MI = MD *Respuesta:* $S = \left\{-\dfrac{7}{3}\right\}$

b) $\dfrac{3}{x-1} = \dfrac{6}{x^2-1}$

$\dfrac{3}{x-1} = \dfrac{6}{(x+1)(x-1)}$ mcm: $(x+1)(x-1)$

$$\begin{aligned} 3(x+1) &= 6 \\ 3x + 3 &= 6 \\ 3x &= 6 - 3 \end{aligned}$$

Comprobación: **Para** $x = 1$

MI: $\dfrac{3}{1-1} = \dfrac{3}{0}$

Como **la división por cero** no **esta definida, la igualdad no se puede establecer y por** lo tanto $x = 1$ no es solución.

Respuesta: $S = \phi$

c) $\dfrac{3}{x-5} + \dfrac{x^2+7}{x^2-2x-15} = -\dfrac{2}{x+3}$

$$\frac{3}{x-5} + \frac{x^2+7}{(x-5)(x+3)} = -\frac{2}{x+3} \quad \text{mcm: } (x-5)(x+3)$$

$$3(x+3) + x^2 + 7 = -2(x-5)$$
$$3x + 9 + x^2 + 7 = -2x + 10$$
$$x^2 + 3x + 2x + 9 + 7 - 10 = 0$$
$$x^2 + 5x + 6 = 0$$
$$(x+3)(x+2) = 0$$

$x + 3 = 0$ $\qquad$ $x + 2 = 0$

$x_1 = -3$ $\qquad$ $x_2 = -2$

Comprobación: Para $x = -3$

MI: $\dfrac{3}{-3-5} + \dfrac{(-3)^2+7}{(-3)^2-2(-3)-15} = \dfrac{3}{-8} + \dfrac{9+7}{9+6-15} = -\dfrac{3}{8} + \dfrac{16}{0}$

como $\dfrac{16}{0}$ no **esta definido,** $x = -3$ **no** es **solución.**

Para $x = -2$

MI: $\dfrac{3}{-2-5} + \dfrac{(-2)^2+7}{(-2)^2-2(-2)-15} = \dfrac{3}{-7} + \dfrac{4+7}{4+4-15}$

$$= -\frac{3}{7} + \frac{11}{-7} = -2$$

MD: $-\dfrac{2}{-2+3} = -\dfrac{2}{1} = -2$

MI = MD $\qquad$ ***Respuesta:*** $S = \{-2\}$ □

Existen otras ecuaciones **que pueden reducirse a una de** segundo **grado mediante** un **cambio de variable.**

Ejemplo 4

Resuelve: $4x^4 - 9x^2 + 2 = 0$.

Resolución

Realizando el cambio **de** variable $\boxed{x^2 = y}$ entonces $x^4 = y^2$, **y sustituyendo** en **la** ecuación **dada** se obtiene:

$$4y^2 - 9y + 2 = 0$$
$$a = 4 \qquad b = -9 \qquad c = 2$$
$$b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4(4)(2) = 81 - 32 = 49$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y_{1,2} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{49}}{2(4)} = \frac{9 \pm 7}{8}$$

$$y_1 = \frac{9+7}{8} = \frac{16}{8} = 2 \qquad y_2 = \frac{9-7}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Para hallar los valores **de** x, como $x^2 = y$, entonces

$$x^2 = 2 \qquad x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = \pm\sqrt{2} \qquad x = \pm\frac{1}{2}$$

Respuesta: $x = \pm\sqrt{2}$; $x = \pm\dfrac{1}{2}$. ■

Ejercicios (epígrafe 10)

1. Resuelve y comprueba:

a) $3(x-3) + 5 = x$
b) $3(x+1) - 5(x+7) = 2x + 4$
c) $4(x+2) - 2(x-3) = 2x + 1$
d) $3(x+2) - 2(x+5) = x - 4$
e) $(x-3)^2 + 5x = x(x+2)$
f) $(x+5)(x-1) = 3x^2 - (2x^2 + 3)$
g) $(x+1)(x+4) = 4x(x-6) - 3(x-2)(x-1)$
h) $(x-3)(x+5) - 2x(x-1) = (x-3)(x-2) + 6 - 2x^2$
i) $(3x-1)^2 - 5(x-2) - (2x+3)^2 = (5x+2)(x-1)$
j) $(x-2)(x^2 - 2x + 5) - x^2(x-4) = 5(x-6)$
k) $(2x-3)^2 - (3x-2)(x^2 + 2x - 4) = x(6 - 3x^2)$
l) $(2x-1)(x^2 + 3x - 4) - (2x^2 + x + 1)(x+2) = (2x-1)(x-4)$

2. Resuelve:

a) $x(x+3) = 4$
b) $x(2x+5) = x(x-3)$
c) $2(x^2 - 3x) - x(x-6) = 25$
d) $2x(x-1) - 2(x+2) = x + 3$
e) $(x-1)(x+3) + 3x = -3(x+1)$
f) $2x(x-1) + (x+1)^2 = 12$
g) $9x + 1 = 3(x^2 - 5) - (x-3)(x+2)$
h) $(2x-3)^2 - (x+5)^2 = -23$
i) $(x-3)(x^2 - 3x - 2) + 2 = x(x^2 - 5x)$
j) $(x-3)(2x^2 + x - 4) - 2x(x+4)^2 = x(x-19) + 52$
k) $(x^2+3)(x-4) - (x-2)(x^2 + 2x + 4) = 3$

3. Despeja las variables indicadas entre paréntesis en cada una de las siguientes fórmulas:

a) $v = g \cdot t \quad (t)$
b) $w = \dfrac{\theta}{t} \quad (\theta, t)$
c) $M = \dfrac{m}{n} \quad (m, n)$
d) $E_c = \dfrac{1}{2} mv^2 \quad (m, v)$
e) $V_y = V \operatorname{sen} \alpha \quad (V)$
f) $C = \dfrac{m}{M \cdot v} \quad (m, v)$
g) $P = 2\pi r \quad (r)$
h) $A = \pi \cdot r^2 \quad (r)$
i) $A = \dfrac{1}{2} ab \operatorname{sen} \gamma \quad (a, b)$
j) $v = \dfrac{1}{3} \pi r^2 h \quad (h, r)$
k) $A_l = 2\pi rh \quad (h, r)$
l) $A_t = 2\pi rh + \pi r^2 \quad (h, r)$
m) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bcd \quad (d, b, c).$

4. Resuelve:

a) $\dfrac{4x + 3}{3} = \dfrac{6x + 5}{4}$
b) $\dfrac{3x + 1}{5} - \dfrac{7(x - 2)}{10} = \dfrac{2x - 5}{15} + 1$
c) $\dfrac{2x - 1}{3} - \dfrac{3x + 1}{4} = x - \dfrac{5x + 11}{6}$
d) $\dfrac{4 - x}{6} + \dfrac{2x + 8}{4} = \dfrac{4(x + 5)}{3} - x$
e) $\dfrac{1}{3x - 3} + \dfrac{1}{4x + 4} = \dfrac{1}{12x - 12}$
f) $\dfrac{1}{(x - 1)^2} - \dfrac{3}{2x - 2} = -\dfrac{3}{2x + 2}$
g) $\dfrac{2}{3} - \dfrac{6x^2}{9x^2 - 1} = \dfrac{2}{3x - 1}$
h) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{3x - 1}{x^2 - x} - \dfrac{2}{x - 1}$
i) $\dfrac{x(5x - 27)}{5x + 3} - \dfrac{1}{x} = x - 6$
j) $\dfrac{3x - 4}{x^2 - 3x} - \dfrac{2}{x - 3} = \dfrac{1}{x}$
k) $\dfrac{1}{x^2 + 3x - 28} - \dfrac{1}{x^2 + 12x + 25} = \dfrac{3}{x^2 + x - 20}$
l) $\dfrac{2(x + 2)}{x - 2} - \dfrac{3(x - 2)}{2x + 3} = \dfrac{x^2 - 52}{2x^2 - x - 6}$
m) $\dfrac{x - 2}{x^2 + 8x + 7} = \dfrac{2x - 5}{x^2 - 49} - \dfrac{x - 2}{x^2 - 6x - 7}$

5. Determina el conjunto solución:

a) $x + \dfrac{3}{x} = \dfrac{x^2 + 3 + 2x}{x}$
b) $\dfrac{x^2}{6} - \dfrac{x}{2} = 3(x - 5)$
c) $\dfrac{15}{x} - \dfrac{11x + 5}{x^2} = 1$
d) $\dfrac{5x - 8}{x - 1} = \dfrac{7x - 4}{x + 2}$

e) $\dfrac{(2x-1)^2}{x^2+4x+4} = \dfrac{8x-4}{x+2} - 3$ f) $\dfrac{x}{x-3} - \dfrac{3}{x+5} = \dfrac{24}{x^2+2x-15}$

g) $\dfrac{2x-3}{3} - \dfrac{x}{x+3} = \dfrac{2x}{12}$ h) $\dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{2x+9}{x+3} - \dfrac{x+1}{x-1}$

i) $\dfrac{x-2}{x^2-x-6} = \dfrac{x}{x^2-4} + \dfrac{3}{2x+4}$ j) $\dfrac{x+7}{3x-3} - \dfrac{x+3}{x+1} = \dfrac{4}{3}$

k) $\dfrac{x+2}{x-2} - \dfrac{2}{x-5} = \dfrac{2x}{x^2-7x+10}$ l) $\dfrac{x^2+x+3}{x^2-x+3} = \dfrac{2x+5}{2x+7}$

6*. **Resuelve:**

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ b) $3x^4 - 5x^2 + 2 = 0$ c) $(x^2 - 5)(x^2 + 3) = 2(x^2 - 9)$
d) $(x^2 - 4)^2 - 3 = 3(x^2 + 1)$ e) $(2x^2 + 3)^2 - (7 + 5x^2)(1 - x^2) = 9x^2$

11. *Problemas que conducen u una ecuación lineal o cuadrática con una variable*

El procedimiento para la resolución **de** un problema mediante el planteo de una ecuación con una variable, no siempre es fácil y *se* requiere una buena práctica. Con vistas a la resolución de un problema se dan las siguientes sugerencias:

1. Lee cuidadosamente el problema para comprender perfectamente la situación que *se* plantea.
2. Determina los datos y las incógnitas.
3. En caso de que exista una sola incógnita identifícala con una sola letra, *generalmente* x. En caso de que exista mas de una, elige de manera conveniente la que se **va** a representar mediante **x**, y expresa las otras cantidades **desconocidas** en términos **de** la misma.
4. Busca en el problema las relaciones o combinaciones existentes que te permitan formular la ecuación.
5. Resuelve la ecuación obtenida.
6. Comprueba la solución directamente en el enunciado **del** problema, nunca en la ecuación. Esta comprobación la puedes hacer en la mente.

Ejemplo 1

El número de asistentes a una base de campismo durante el mes de julio triplica la cantidad de los que asisten en el mes de enero. Si entre ambos meses asistieron 2 400 personas, ¿cuántas personas asistieron a la base en cada mes?

Resolución

enero: x julio: $3x$ **Asistencia** entre ambos meses: **2** 400

Ecuación: $x + 3x = 2\,400$

$$4x = 2\,400$$

$$x = \frac{2\,400}{4} = 600$$

enero → 600 personas, julio → 3(600) = 1 800 personas

Comprobación:

El triplo de 600 es 1 800 y 1 800 + 600 = **2 400**

Respuesta: **En enero** asistieron **600 personas y en** julio **1 800.** ■

Ejemplo 2

Un lado de un rectángulo es 2,5 cm más corto que el otro y su área es de 26 cm². ¿Cuánto miden sus lados?

Resolución

Un lado: x Otro lado: $x - 2{,}5$

Ecuación:

$$x(x - 2{,}5) = 26$$

$$x^2 - 2{,}5x = 26$$

$$x^2 - 2{,}5x - 26 = 0$$ **Multiplicando** por 2 para transformarla **en una** ecuación con coeficientes enteros.

$$2x^2 - 5x - 52 = 0$$

$$a = 2 \quad b = -5 \quad c = -52$$

$$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(2)(-52) = 25 + 416 = 441$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{441}}{2(2)} = \frac{5 \pm 21}{4}$$

$$x_1 = \frac{5 + 21}{4} = 6{,}5 \qquad x_2 = \frac{5 - 21}{4} = -4 \text{ Imposible.}$$

Un lado mide 6,5 cm y el otro 6,5 - 2,5 = 4 cm.

Respuesta: **Un lado mide 6,5 cm y** el otro lado **4** cm.[1] ●

[1] En los ejercicios con texto y problemas donde aparezcan cantidades de magnitud **se consideraran** todos los **datos** como **valores** exactos.

Ejemplo 3

Entre Félix y Mario han realizado 62 h de trabajo voluntaria. Si Félix hubiera realizado el doble de horas excedería en 4 h al triplo de tas horas realizadas por Mario. ¿Cuántas horas de trabajo voluntarlo ha realizada cada uno?

Resolución

Félix: x Mario: $62 - x$

Como el duplo de las horas **realizadas por Félix** ($2x$) **excede** en **4** h **al** triplo **de las horas realizadas** por Mario $3(62 - x)$, entonces **estas** 4 **h** las restamos al **duplo y ambos tendrán las mismas** horas. Por tanto, **se puede** establecer **la** ecuación:

$$2x - 4 = 3(62 - x)$$
$$2x - 4 = 186 - 3x$$
$$5x = 190$$
$$x = \frac{190}{5} = 38$$

Félix $\rightarrow$ **38 h** **Mario** $\rightarrow$ **62 - 38 = 24** h

Respuesta: Félix realizó 38 h y **Mario 24** h. ■

Ejemplo 4

Uii tanque se puede llenar por una llave en 12 h y en 8 h por la misma llave unida a una segunda llave. ¿En qué tiempo se podría llenar el tanque por la segunda llave solamente?

Resolución

	Hora que se demora en llenar el tanque	*Parte del tanque que se llena en 1 h*
Primera llave	12	$\frac{1}{12}$
Primera y segunda llaves	8	$\frac{1}{8}$
Segunda llave	x	$\frac{1}{x}$

Ecuación:

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{x} = \frac{1}{8}$$

La parte del tanque que llena **la** primera llave más la parte del tanque que llena la **segunda llave** en 1 h es igual a la parte del tanque que llenan las **dos** llaves juntas en **una** hora.

$$2x + 24 = 3x$$
$$24 = 3x - 2x \qquad \text{Luego } x = 24$$

Respuesta: El tanque se puede llenar por la segunda llave sola en 24 h.

Ejemplo 5

¿Cuántos litros de una solución de alcohol al 10 % se deben agregar a 6 1, de una solución al 20 %, para obtener una solución al 16 %?

Resolución

	Cantidad de litros	*Litros de alcohol que aporta*
Solución al 10%	x	$0,1x$
Solución al 20%	6	$6 \cdot 0,2$
Solución al 16%	$x + 6$	$0,16(x + 6)$

Ecuarion: $0,1x + 6 \cdot 0,2 = 0,16(x + 6)$
$$0,1 + 1,2 = 0,16x + 0,96$$
$$0,1x - 0,16x = 0,96 \quad 1,2$$
$$-0,06x = 0.24$$
$$x = \frac{-0,24}{-0,06} = 4$$

Respuesta: **Se** deben agregar **4** L de la solución *al* 10%.

Ejercicios (epígrafe 11)

1. El duplo de un número es igual al numero aumentado cn 8. Halla el número.

2. El triplo de un número es igual a su cuádruplo disminuido en 12. **Halla** el numero.

3. Ricardo tiene el triplo de horas de trabajo voluntario que Gladys y entre los **dos** lienen 64 h. ¿Cuántas horas de trabajo voluntario tiene cada uno?

4. La suma de la mitad, la cuarta y la sexta parte de un número es 55. ¿Cuál es el niimero?

5. Alfredo y Enrique cortan caña. Alfredo corta en un día $\frac{3}{4}$ de lo que corta Enrique. Si entre ambos cortan 105@ , ¿cuántas @ corta **cada** uno?

6. En un aula hay 48 alumnos. Si hay 6 hembras más que varones. ¿cuántas hembras y cuántos varones hay'?

7. El número de neumáticos recapados en una empresa se triplicó con respecto al año anterior. Si entre ambos años se rccaparon 68 124 unidades, ¿cuántos neumáticos se rccaparon cada año?

8. En una refinería se produjeron 160 000 t de gas combustible en dos años Si la producción de un año supero en 10 000 t a la del año anterior. ¿cuántas toneladas de gas se produjeron cn cada uno de las años?

9. Los ángulos *a* y β son ángulos conjugados entre paralelas. Si el ángulo *a* excede al ángulo β en 12°. ¿cuántos grados mide cada uno de estos ángulos?

10. De un par de ángulos adyacentes se conoce que la amplitud de uno es 5 veces la del otro ángulo. ¿Qué amplitud tiene cada uno de ellos?

11 El número de graduados de un preuniversitario en el campo durante tres años consecutivos fue de 420 alumnos. En el segundo año se graduaron 40 alumnos más que el primer ano y en el tercer año tantos alumnos como los dos años anteriores. ¿Cuántos alumnos se graduaron cada año'?

12. En un triángulo el mayor de los ángulos es igual al duplo del menor y el mediano excede en 20° al menor ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos?

13 En un trabajo voluntario Murta. Caridad y Ana Lilia trabajaron en total 18 h. Marta y Caridad trabajaron entre ambas 11 h y Ana Lilia trabajó una hora más que Marta. ¿Cuántas horas trabajó cada una'?

14. Para poner un ribete a un pedazo rectangular de un jardín cuya longitud era el doble que su ancho emplearon 312 ladrillos. Determina cuántos ladrillos se colocaron en cada lado.

15. El triplo del número de presas terminadas o en construcción en un año es igual al cuádruplo del numero del año anterior. Si existian 21 presas mas este año que el anterior, ¿cuántas presas existian en cada uno de estos años?

16. Entre las depósitos dc gasolina de dos automóviles caben 105 L. Si el triplo de capacidad del menor es igual al duplo de la capacidad del mayor, ¿cuál es la cantidad de gasolina que caben en cada uno de los depósitos?

17. Entre 1YHX y 1989 se sembraron en una cooperativa de producción agropecuaria 9,6 ha dc kenaf Si el duplo de las hectáreas que se sembraron en 1989 excede en 0,2 ha al triplo de lo que se sembró en 1988, ¿cuántas hectáreas de kenaf se sembraron en cada año?

18. Dos aviones de distinto tipo. parten a la vez dc un mismo aeropuerto con igual sentido de dirección. AL cabo dc 2 h están a 400 km uiio del otro. Determine

la velocidad de cada tino sabiendo que la velocidad del mas pequeño es $\frac{3}{5}$ de la del otro.

19. Un tractorista puede arar un terreno, en 5 días; otro tractorista puede hacer el mismo trabajo, con un tractor más pequeño, en 6 días ¿En cuántos días pueden arar el campo si trabajan juntos'!

20. Alberto puede hacer una obra en $1\frac{1}{2}$ días, Miriam en 6 días y Gabriel cn $2\frac{2}{5}$ días ¿En cuánto tiempo harán la obra los tres juntos?

21 Una llave puede llenar un depósito en 5 min, otra en 6 min y una tercera en 12 min ¿En cuanto tiempo llenarán el depósito las tres llaves abiertas al mismo tiempo?

22. Una llave puede llenar un depósito en 4 min y otra llave en 12 min. Ese depósito, cuando está lleno, se puede vaciar por un desagüe en 24 min. ¿En cuánto tiempo se llenará el depósito, si estando vacio y abierto el desagüe, se abren las dos llaves'!

23 ¿Cuántos litros de un liquido que tiene el 74% de alcohol se deben mezclar con 5 L de otro liquido que tiene el 90% de alcohol, si se desea obtener una mezcla con un 84% de alcohol'?

24. ¿Cuántos litros de solución de sal al 25% se deben mezclar con 10 L **de** solución de sal al 15% para producir una tercera solución al 17%?

25. Un número excede a otro en 4. Si el producto de ambos es igual a 140, ¿cuáles son los números?

26. Si al cuadrado dc un número se lc resta su cuádruplo, el resultado es igual a 96 ¿Cuál es el número?

27. La diferencia de dos números es 3 y la suma de sus cuadrados es 89. ¿Cuáles son los números?

28. Halla dos números enteros consecutivos cuyo producto sea 156

29. La suma de los cuadrados de dos enteros consecutivos es igual al mayor más diez veces la suma de ambos. ¿Cuáles son los números?

30. La suma de los cuadrados de dos números enteros impares consecutivos es 34. ¿Cuáles son los números?

31. La diferencia de los cuadrados de dos números pares consecutivos es 60. ¿Cuáles son los números?

32. El cuadrado de un número cxcedc en 36 unidades a 5 veces el número. ¿Cuál es el numero'!

33. **Si a** un numero se le cuma su recíproco el resultado es igual a 10,1. ¿Cuál es el número?

34. Si a un número se le suma el duplo de su recíproco el resultado es igual a 8,25. ¿Cuál es el numero'!

35. Si a la mitad dc un número se lc suma el triplo **de** su rcciproco, el resultado es igual a 7,7. ¿Cuál es el número?

36. La mitad del cuadrado de un numero excede en 8 unidades a su triplo. ¿Cuál es el número'?

37. La altura de un triángulo excede en 4 m a la base y su área es de 96 m^2. Calcula las longitudes dc la base y de la altura.

38. El largo de un terrcno rectangular excede en *6* m al ancho. Si el área es de 280 m^2, halla las dimensiones del terreno.

39. El perímetro de un terreno rectangular **es** 56 m **y** su área es de 153 m^2. Halla las dimensiones del terreno.

40. Un cateto de un triángulo rectángulo tiene 7 m mas que el otro y 2 m menos que la hipotenusa. Halla las longitudes dc los lados del triángulo.

41. Un cateto de un triángulo rectángulo tiene 12 cm de longitud. La hipotenusa es 4 cm mayor que el otro cateto. Calcula las longitudes de ese cateto y dc la hipotenusa.

42. El perímetro de un rectángulo es 42 cm y la longitud de sus diagonales es de **15 cm.** Calcula las longitudes de los lados del rectángulo.

43. Dos brigadas juntas realizan un trabajo en 10 h. Para este trabajo la primera brigada, sola, necesita 2 h menos que la segunda. ¿En que tiempo podría cada una de **las** brigadas realizas el trabajo?

44. Se necesita cavar un hueco de 5,0 m de profundidad para los cimientos **de** un edificio. Si el largo del terreno es X,0 m mayor que el ancho y el m^3 de excavación tiene un valor de $ 1,20, ¿cuáles son las dimensiones del terreno si la excavación costó % 288?

45. La base mayor de un trapecio mide 12 mm y la altura es el doble de la **base** menor. Si el área es igual a 160 mm^2, ¿cuánto miden la altura y la base menor?

46. Con un pedazo rectangular de cartón cuyo largo es el doble del ancho, se construye una caja abierta cortando en cada esquina cuadrados de 2,0 dm y doblando hacia arriba los rectángulos resultantes (de 2,0 dm de altura). Si la caja tiene un volumen de 96 dm^3, ¿cuál es el ancho **y** el largo del cartón original'?

47 Un parque tiene 480 m de largo y 320 m de ancho. Sc **decide** duplicar **su** área, conservando su forma rectangular Para ello se añaden franjas de terreno de igual ancho a dos lados consecutivos. Halla el ancho de las franjas.

48. Un terreno rectangular de 80 m de largo por 30 m **de** ancho **esta** rodeado por un camino de ancho constante. El área del **camino** es de 224 m^2. ¿Cuál es el ancho del camino?

12. *Inecuaciones*

Una **inecuación** es una desigualdad donde aparecen variables y resolverla es determinar el conjunto de valores reales que la satisfacen.

El procedimiento para **resolver** una **inecuación lineal en una variable** (el mayor exponente de la variable es uno) es muy similar al que se utiliza en la resolución de una ecuación.

En este caso se tiene en cuenta que:

a) Los sumandos se transponen de igual manera que en las ecuaciones, agrupando en un mismo miembro los términos que contienen la variable y los números en el otro.

b) El coeficiente de la variable se transpone de igual forma que en las ecuaciones, prestando atención a que:

si el coeficiente es positivo. la desigualdad no se altera.

si el coeficiente es negativo, cl signo de la **desigualdad** ***se*** invierte.

Ejemplo 1

Resuelve. Representa gráficamente la solución.

a) $5x - 8 + 3x > 6x - 14$ **b)** $(x - 3)^2 - (x + 2)(x - 2) \leqslant 11 - 3x$

Resolución

a)
$$5x - 8 + 3x > 6x - 14$$
$$5x + 3x - 6x > -14 + 8$$ Transponiendo los sumandos con signo contrario.
$$2x > 6$$
$$x > -\frac{6}{2}$$
$$x > -3$$

Solución gráfica (fig. 1.9).

Respuesta $\{x \in \mathbb{R} : x > -3\}$

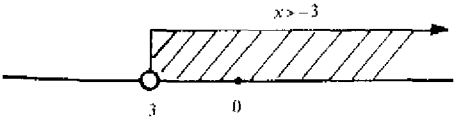


Fig. 1.9

Nota: Los procedimientos para comprobar una ecuación y una inecuación son diferentes, no siendo objeto de estudio en este grado, el de comprobar una inecuación.

b) $(x-3)^2-(x+2)(x-2) \leqslant 11-3x$

$(x^2-6x+9)-(x^2-4) \leqslant 11-3x$

$x^2-6x+9-x^2+4 \leqslant 11-3x$

$x^2-6x-x^2+3x \leqslant 11-9-4$

$-3x \leqslant -2$

$x \geqslant \dfrac{-2}{-3}$ Al dividir la **desigualdad por una** cantidad negativa (-3) se invierte **el signo de** la **desigualdad.**

$x \geqslant \dfrac{2}{3}$

Solución gráfica (fig. 1.10)

Respuesta: $\left\{ x \in \mathbb{R} : x \geqslant \dfrac{2}{3} \right\}$ ■

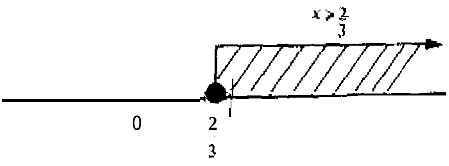


Fig. 1.10

En la resolución de inecuaciones, aparecen con mucha frecuencia **intervalos** y en lo que sigue utilizaremos para estos conjuntos una notación mas **simple,** que se indica a continuación.

$\{x \in \mathbb{R} : 1 \leqslant x \leqslant 7\} = [1 ; 7]$	$\{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 7\} = (1; 7)$
$\{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leqslant 7\} = (1 ; 7]$	$\{x \in \mathbb{R} : 1 \leqslant x < 7\} = [1; 7)$

Es decir, se indican solo los extremos del conjunto. Si el extremo en cuestión pertenece, se escribe un corchete, si no, un **paréntesis.**

Cuando el conjunto esta formado por todos los números mayores (o menores) que uno dado. se indica con el símbolo ∞ que el conjunto es ilimitado (se lee "infinito"). Por ejemplo:

$\left\{ x \in \mathbb{R} : x > -3 \right\} = (-3; \infty) \qquad \left\{ x \in \mathbb{R} : x \geqslant \dfrac{2}{3} \right\} = \left(\dfrac{2}{3} ; \infty \right)$

Atención. En el símbolo ∞ siempre se coloca paréntesis.

Para indicar el conjunto **de** los números reales menores que uno dado se **usa** el símbolo $-\infty$ (se **lee** "menos infinito")

$\{x \in \mathbb{R} : x < 3\} = (-\infty; 3) \qquad \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant 5\} = (-\infty; 5]$

Inecuaciones cuadraticas

Para resolver una **inecuación cuadrática en una variable** (el **mayor** exponente de la variable es 2) debemos recordar el signo del trinomio $ax^2 + bx + c$ con $a>0$, cuya representación gráfica es una **parábola que abre hacia arriba.** Como puedes apreciar en la figura 1.11, para valores muy grandes de x, el trinornio es siempre positivo. Ademas:

Si el trinornio tiene dos ceros, cambia de signo cn cada uno de ellos de modo que el eje queda dividido cn tres intervalos que se alternan en signos (fig. 1.11a).

Si el trinomio tiene un Único cero, se anula para el cero, pero su signo es positivo en el resto (fig. 1.11b).

Si no hay ceras, el trinornio tiene en todo momento signo positivo (fig. 1.11c).

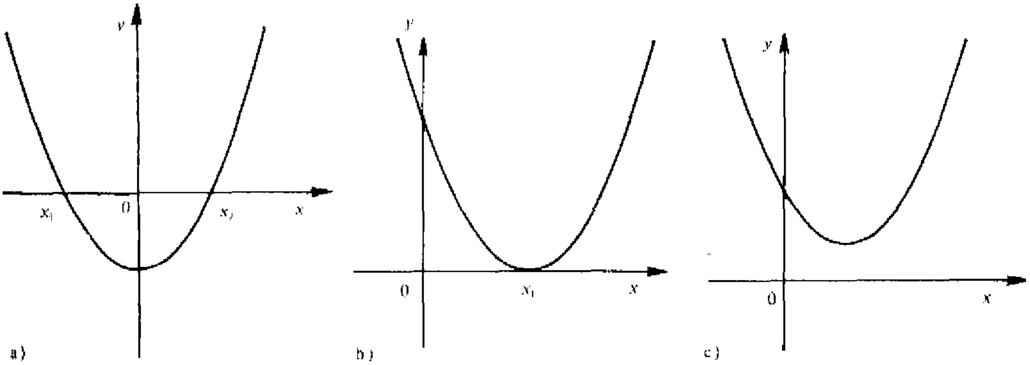


Fig. 1.11

Entonces, para resolver una inecuación cuadrática comenzaremos por transformarla, **de** forma tal, que **el segundo miembro sea cero y en el primer miembro, el coeficiente del término en x^2 sea positivo.**

Ejemplo 2

Resuelve:

a) $x^2 - 3x - 4>0$ **b)** $-3x^2 - 8x\geq 4$ **c)** $x^2 + 1 >2x$
d) $(2x - 1)^2\leq 8x - 8$ **e)** $(3 - x)(x + 4)<3(x + 6)$

Resolución

a) $x^2 - 3x - 4>0$ Inecuación de segundo grado comparada con 0 y en la que el coeficiente de x^2 es positivo.

$(x - 4)(x + 1)>0$

$(x - 4)(x + 1) = 0$ Planteo de la ecuación para determinar los ceros del trinomio.

$x - 4 = 0$ $x + 1 = 0$

$x = 4$ $x = 1$ Como son dos los ceros del trinomio, hay tres intervalos de signos alternos (fig. 1.12).

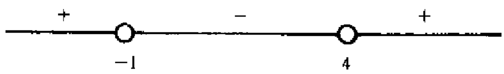


Fig. 1.12

Los intervalos de los extremos son los valores de x en los **que** el trinomio tiene signo positivo.

Respuesta: $x \in (4;\ \infty) \cup (-\infty;\ -1)$.

b) $-3x^2 - 8x \geqslant 4$

$3x^2 + 8x + 4 \leqslant 0$ Transponiendo sumandos y multiplicando por (-1). Atención: se invierte el sentido de **la desigualdad**

$(3x + 2)(x + 2) \leqslant 0$

$(3x + 2)(x + 2) = 0$

$3x + 2 = 0 \qquad x + 2 = 0$

$$x = -\frac{2}{3} \qquad x = -2$$

El signo del trinomio se representa en la figura 1.13.

Respuesta: $x \subset \left[-2;\ -\dfrac{2}{3}\right]$.

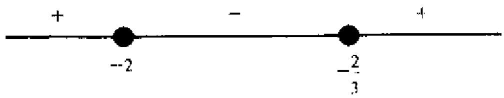


Fig. 1.13

c) $x^2 + 1 > 2x$

$x^2 \quad 2x + 1 > 0$

$(x - 1)^2 > 0$ Como **una expresión al cuadrado siempre es mayor** o **igual que cero**, la desigualdad es **valida para** todo $x \neq 1$. Luego $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Observa también gráficamente (fig. **1.14**) **que excepto** en $x = 1$ el signo **del** trinomio **es** positivo.

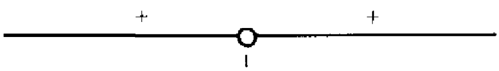


Fig. 1.14

Respuesta: Para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

d)
$$(2x - 1)^2 \leqslant 8x - 8$$
$$4x^2 - 4x + 1 \leqslant 8x - 8$$
$$4x^2 - 4x + 1 - 8x + 8 \leqslant 0$$
$$4x^2 - 12x + 9 \leqslant 0$$
$$(2x - 3)^2 \leqslant 0$$
$$(2x - 3)^2 = 0$$

Luego $x = \dfrac{3}{2}$

Respuesta: $x = \dfrac{3}{2}$.

e)
$$
\begin{aligned}
(3 - x)(x + 4) &< 3(x + 6) \qquad \text{(I)}\\
3x + 12 - x^2 - 4x &< 3x + 18\\
3x + 12 - x^2 - 4x - 3x - 18 &< 0\\
-x^2 - 4x - 6 &< 0\\
x^2 + 4x + 6 &> 0\\
x^2 + 4x + 6 &= 0
\end{aligned}
$$

Esta ecuación no se puede **resolver** por descomposición factorial. Apliquemos la **formula de** la ecuación **de segundo** grado:

$b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(1)(6) = 16 - 24 = -8 < 0$

Esta ecuación no tiene ceros, luego el signo del trinomio es constante y positivo. De ahí que la inecuación (I) se cumpla para todo número real.

Respuesta: Para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

Inecuaciones fraccionarias

Para resolver una inecuación fraccionaria (aparecen variables en los denominadores) se escribe como un cociente de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \geqslant 0$ o $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \leqslant 0$ de modo **que los** coeficientes de las mayores potencias de x sean positivos, se descompone en factores el numerador y el denominador y se simplifican, si es posible. Se marcan entonces en una recta numérica los ceros del numerador y del denominador. La **expresión** cambia de signo en estos puntos (a menos que el factor correspondiente esté elevado a exponente par, en cuya caso no **cambia** de signo).

Ejemplo 3

Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\dfrac{x^2 - 4x - 5}{x - 2} > 0$

b) $\dfrac{x - 1}{x^2 + 4x + 4} \leqslant 0$

c) $\dfrac{x^2 - 2x + 5}{-x^2 - 2x + 8} \leqslant 0$

d) $\dfrac{3x + 1}{9 - x^2} \geqslant -1$

Resolución

a) $\dfrac{x^2 - 4x - 5}{x - 2} > 0$ Inecuación de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ en que los coeficientes de las mayores potencias de $P(x)$ y $Q(x)$ son positivos.

$\dfrac{(x - 5)(x + 1)}{x - 2} > 0$ Factorizando.

Ceros del numerador:

$x - 5 = 0$ $\quad$ $x + 1 = 0$

$x = 5$ $\quad$ $x = -1$

Ceros del denominador:

$x - 2 = 0$

$x = 2$

El análisis del signo de la fracción se observa en la figura 1.15.

Existe cambio de signo en todos los ceros, siendo positivo **el** intervalo de la **derecha.**

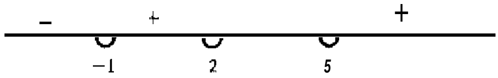


Fig. 1.15

Respuesta: $x \in (5;\ \infty) \cup (-1\ ;\ 2)$

b) $$\frac{x - 1}{x^2 + 4x + 4} \leqslant 0$$

$$\frac{x - 1}{(x + 2)^2} \leqslant 0$$

Cero **del numerador:** $x = 1$ Cero del denominador: $x = -2$

El análisis **del** signo de la fracción se observa en la figura 1.16.

No hay cambio **dc signo** en $x = -2$ por estar elevado el factor $x + 2$ a exponente par.

Fig. 1.16

La inecuación se cumple para $x \leqslant 1$, $x \neq -2$ porque -2 anula el denominador y por tanto no pertenece al dominio.

Respuesta: $x \in (-\infty;\ 2) \cup (2;\ 1)$

c) $$\frac{x^2 - 2x + 5}{-x^2 - 2x + 8} \leqslant 0$$

$$\frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 + 2x - 8} \geqslant 0 \quad (1)$$ Multiplicando por −1 el denominador y cambiando de sentido la desigualdad para que los coeficientes de x^2 sean positivos.

Ceros **del** numerador:

$x^2 - 2x + 5 = 0$

Como $D = (-2)^2 - 4(1)(5) = -16 < 0$

El numerador **no** tiene ceros, **siendo** *este* **de** signo constante, positivo.

Ceros del denominador:

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$(x + 4)(x - 2) = 0$

$x = -4 \qquad x = 2$

El análisis del signo de la fracción **se** observa en la figura 1.17.

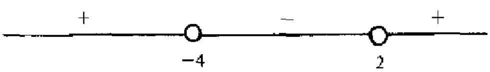


Fig. 1.17

Respuesta: Para $x \in (-\infty;-4) \cup (2;\infty)$

d) $$\frac{3x + 1}{9 - x^2} \geqslant -1$$

$$\frac{3x + 1}{9 - x^2} + 1 \geqslant 0$$ Transponiendo para comparar la inecuación con 0

$$\frac{3x + 1 + (9 - x^2)}{9 - x^2} \geqslant 0$$

$$\frac{3x + 1 + 9 - x^2}{9 - x^2} \geqslant 0$$

$$\frac{-x^2 + 3x + 10}{9 - x^2} \geqslant 0$$

$$\frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 9} \geqslant 0$$ Multiplicando por -1 numerador y denominador (¡¡Aquí no cambia de sentido la desigualdad!!)

$$\frac{(x - 5)(x + 2)}{(x + 3)(x - 3)} \geqslant 0$$

Ceros del numerador: $x = 5 \quad x = -2$

Ceros del denominador: $x = -3 \quad x = 3$

El análisis del signo de la fracción se observa en la figura 1.18.

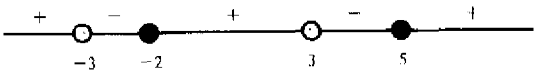


Fig. 1.18

Respuesta: $x \in (-\infty; -3) \cup [-2; 3) \cup [5; \infty)$. ■

Ejercicios (epígrafe 12)

1. Resuelve:

a) $9x + 8 - 4x < 3x + 12$

b) $5(x + 4) - 2(x - 3) > 8$

c) $4(2x + 1) \geqslant 6 - 3(4 - 3x)$

d) $6 - 3(x + 2) \leqslant 4(x - 3) + 5(x + 3)$

e) $(x - 5)(x - 3) - x(x - 10) < 1$

f) $(x - 3)^2 - (x - 4)(x + 2) \leqslant 5$

g) $(9x - 2)(x - 1) - (3x - 2)^2 \geqslant 4(x + 1)$

h) $x - \dfrac{3x}{5} - \left[4x - \left(\dfrac{3x}{2} + \dfrac{21}{10}\right)\right] > 0$

i) $3x + \dfrac{7x}{6} > 5 + \dfrac{2x}{3} + \dfrac{2(2x + 5)}{9}$

j) $\dfrac{(8x - 1)(2x + 5)}{4} - (2x + 3)^2 < -2x - 7{,}5$

k) $(x + 2)(x^2 - 3x - 4) \geqslant x(x^2 - x - 4) - 2$

l) $(2x - 1)(2 - x^2 - 3x) - (x + 4)(2x - 2x^2 + 5) < 3 + x^2$

2. **Resuelve:**

a) $x^2 - 4x > 0$ b) $x^2 - 7x - 8 \geqslant 0$ c) $x^2 + 10x + 16 < 0$

d) $2x^2 + 11x - 6 \leqslant 0$ e) $x^2 + 25 > 10x$ f) $4x^2 \leqslant 28x - 49$

g) $3x \geqslant 2x^2 + 5$ h) $-5x^2 + x \leqslant 2$ i) $x(x+3) > 5x + 3$

j) $(x+4)^2 \geqslant 2x(5x-1) - 7(x-2)$

k) $(3x-2)(x+4) - (3x-2)^2 > 14x$

l) $(3x+4)(3x-4) + 5x > (2x-1)^2 - 3(x-5)$

m) $(x+6)(x-3) - 7(x+1)(x-1) \leqslant -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

n) $(2x-4)(x^2-2x-4) - 2x^2(x-3) < -x^2$

ñ) $(3x-1)(2x^2+x-2) - (2x+1)(4x^2-2x+1) \leqslant 9 - 2x^3$

3. **Resuelve:**

a) $\frac{x-4}{3x+2} > 0$ b) $\frac{3x-6}{x} \geqslant 0$ c) $\frac{3}{x-5} > 0$

d) $\frac{7}{2x+4}$ SO e) $\frac{3-x}{2x+8} \geqslant 0$ f) $\frac{4+2x}{3-5x} \leqslant 0$

g) $\frac{(x-3)(x+8)}{x-1} > 0$ h) $\frac{2x+3}{x^2-x-12} < 0$ i) $\frac{3x^2+10x-8}{x-2} \geqslant 0$

j) $\frac{2x-6}{x^2+5x} \leqslant 0$ k) $\frac{x^2+3}{2x-5} \geqslant 0$ l) $\frac{5x-12}{x^2-3x+5} \leqslant 0$

m) $\frac{x^2-6x+9}{x-7} > 0$ n) $\frac{3x^2-x-10}{-x^2+6x-8} \geqslant 0$ ñ) $\frac{3x-4}{4x^2+20x+25} \leqslant 0$

o) $\frac{10-11x-6x^2}{-7x-6x^2-2} > 0$ p) $\frac{x^2-10}{x+2} \leqslant 1$ q) $\frac{4x^2+7x-68}{2x^2+3x-35} \leqslant 2$

r) $\frac{1}{x+6} + \frac{39-x^2}{x^2-36} \geqslant -1$ s) $\frac{3x-1}{3x-2} - \frac{2x-3}{9x^2-12x+4} > 1$

t) $\frac{2(3-x)}{5x^2-19x-4} \geqslant 2 - \frac{10x+3}{5x+1}$

u) $\frac{x^2}{x^2+4x-32} - \frac{1}{x+8} \leqslant -\frac{x}{x^2+4x-32}$

Sistemas de ecuaciones

13. *Sistemas de ecuaciones lineales*

La resolución **de** sistemas **de** 2 ecuaciones **lineales** con *2* incógnitas **ya** la has estudiado. Recordemos mediante **ejemplos** los dos **métodos estudiados** para resolverlos.

Ejemplo 1

Resuelve los siguientes sistemas:

a) $3x + y = 1$
$6x - 5y = -12$

b) $3x - 4y = -7$
$-5x + 6y = 13$

c) $x - 3y = 7$
$-2x + 6y = 14$

d) $12x - 8y = 4$
$9x + 6y = -3$

Resolución

a) $3x + y = 1$ (1) Enumerando las ecuaciones para su más fácil identificación.
$6x - 5y = -12$ (2)

Método de sustitución

$3x + y = 1$ (1)

$y = 1 - 3x$ Despejando y en (1).

Sustituyendo $y = 1 - 3x$ en (2)

$$6x - 5(1 - 3x) = -12$$
$$6x - 5 + 15x = -12$$
$$6x + 15x = -12 + 5$$
$$21x = -7$$
$$x = -\frac{7}{21} = -\frac{1}{3}$$

Método de adición y sustracción

$3x + y = 1$ (1) $\cdot$ 5 Multiplicando (1) por 5

$6x - 5y = -12$ (2)

$$\begin{array}{rcl} 15x + 5y & = & 5 \\ 6x - 5y & = & -12 \\ \hline 21x & = & -7 \end{array}$$

$$x = \frac{-7}{21}$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

Para hallar el valor de la y se sustituye $x = -\frac{1}{3}$ en cualquiera de las dos ecuaciones originales.

$3\left(-\frac{1}{3}\right) + y = 1$ Sustituyendo $x = -\frac{1}{3}$ en (1).

$-1 + y = 1$ $y = 2$

Aunque en la orden no se exige comprobar, lo haremos para ilustrar cómo puede acerse.

Comprobación **de** $x = -\frac{1}{3}$, $y = 2$

En (1) | En (2)

MI: $3\left(-\frac{1}{3}\right) + 2 = -1 + 2 = 1$

MD: 1 MI = MD

MI: $6\left(-\frac{1}{3}\right) - 5(2) = -2 - 10 = -12$

MD: -12 **MI = MD**

Respuesta: $x = -\frac{1}{3}$; $y = 2$

b) $3x - 4y = -7$ (1)
$-5x + 6y = 13$ (2)

Resolvamos este **sistema por el** método **de adición y sustracción, ya que en este** caso es más sencillo que por el método de sustitución.

$3x - 4y = -7$ (1)
$-5x + 6y = 13$ (2)

Multiplicando (1) por 3 y (2) **por 2 para poder cancelar la variable** y.

$$\begin{array}{rcl} 9x - 12y &=& -21 \\ -10x + 12y &=& 26 \\ \hline -x &=& 5 \end{array} \quad ; \quad x = -5$$

Para calcular y sustituiremos $x = -5$ en (2)

$-5(-5) + 6y = 13$
$25 + 6y = 13$

$$y = \frac{13 - 25}{6}; \; y = -2$$

Respuesta: $x = -5$; $y = -2$

c) $x - 3y = 7$ (1)
$-2x + 6y = 14$ (2)

Resolvamos el **sistema por** sustitución

$x = 3y + 7$ (3) **Despejando** x **en** (1).
$-2(3y + 7) + 6y = 14$ Sustituyendo (3) **en** (2).
$-6y - 14 + 6y = 14$
$-6y + 6y = 14 + 14$
$0 = 28$ **Esta igualdad equivale a** $0y = 28$, *y* ***no*** **existe ningún número real que la satisfaga.**

Respuesta: Este **sistema** no tiene solución.

d) $12x - 8y = 4$ (1)
$-9x + 6y = -3$ (2)

Multiplicando las ecuaciones por 3 y 4 respectivamente, para cancelar la variable y.

$$\begin{array}{r} 36x - 24y = 12 \\ -36x + 24y = -12 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

Al sumar se cancela todo, esto equivale a $0 \cdot y = 0$, que se satisface para todo y real.

Respuesta: Estas dos ecuaciones **son equivalentes,** es decir las infinitas soluciones **de** una de ellas lo son **de** la otra. El conjunto solución es en este caso; $\{x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R}:\ y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x\}$. ■

Algunos problemas se resuelven mediante sistemas de dos ecuaciones **lineales.**

Ejemplo 2

El triplo del menar de das números excede en 5 unidades al duplo del mayor. Si se divide la mitad del mayor entre la tercera parte del menor, el cociente es 2. Halla los números.

Resolución

Número menor: x — Numero mayor: y

Triplo del menor: $3x$ — Duplo **del mayor:** $2y$

$3x - 2y = 5$ (1) Porque la diferencia entre el triplo del menor y el **duplo del** mayor es de 5 unidades.

Mitad del mayor: $\frac{y}{2}$ — Tercera parte del menor: $\frac{x}{3}$

$$\frac{\frac{y}{2}}{\frac{x}{3}} = 2$$

Porque el cncicnte entre la mitad del mayor y la tercera **parte del menor** es 2

$$\frac{y}{2} = \frac{2x}{3}$$

$$3y = 4x$$

$$4x - 3y = 0 \quad (2)$$

Resolvamos el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2)

$3x - 2y = 5$ (1)

$4x - 3y = 0$ (2)

Multiplicando la ecuación (1) por 3 y la (2) por (−2) para eliminar la variable y.

$$\begin{array}{r} 9x - 6y = 15 \\ -8x + 6y = 0 \\ \hline x = 15 \end{array}$$

(Número menor)

Ejercicios (epígrafe 13)

1. Resuelve y comprueba los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ x - 2y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = -5 \\ 4x + 3y = 10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x + 3y = -8 \\ 2x + 3y = -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ 5x - 4y = -29 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 5x + 4y = -15 \\ 2x + 3y = -11{,}6 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 0{,}2y - 0{,}5z = 0{,}02 \\ 7y - 2z = -2{,}4 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x - y + 5 = 0 \\ 5x + 7y - 9 = 0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 6u + 5w + 34 = 0 \\ 2u - 7w - 6 = 0 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 2t = 7s \\ 6t - 5s = 16 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 4x = 10 + 3y \\ 6y - 8x + 20 = 0 \end{cases}$ k) $\begin{cases} 4u + 7v + 19 = 0 \\ 5u = 3v + 35 \end{cases}$ l) $\begin{cases} 2x = 3y + 5 \\ 4x - 6y = 8 \end{cases}$

m) $\begin{cases} \dfrac{2x - y}{3} = 5 \\ \dfrac{11x - 30}{2} = y \end{cases}$ n) $\begin{cases} \dfrac{x}{4} + 4y = 28 \\ 7x - \dfrac{y}{5} = 36 \end{cases}$ ñ) $\begin{cases} \dfrac{9}{x} - \dfrac{15}{y} = 1 \\ \dfrac{14}{x} + \dfrac{20}{y} = 3 \end{cases}$

o) $\begin{cases} \dfrac{10}{x} + \dfrac{6}{y} = 7 \\ \dfrac{14}{x} - \dfrac{9}{y} = 4 \end{cases}$ p) $\begin{cases} \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{3y} = 12 \\ \dfrac{1}{4x} + \dfrac{1}{9y} = 5 \end{cases}$

2. La suma de dos números es 48. La diferencia entre el duplo del mayor y el triplo del menor es 6. ¿Cuáles son los números?

3. Si la mitad del número se resta del mayor de dos números, el resultado es 36. Halla los números, si difieren en 35.

4. La diferencia de dos números racionales es $\frac{5}{8}$. El duplo del mayor menos el triplo del menor es igual a 1. ¿Cuáles son los números?

5. La suma del triplo de un número con el cuádruplo de otro es 85. La suma de la tercera parte del primero y la quinta parte del segundo es 7. ¿Cuáles son los números?

6. Para fabricar una pieza entre dos obreros se necesitan 48 min. Si la diferencia entre los tiempos empleados entre ambos es de 8 min, ¿qué tiempo empleó cada uno en la fabricación de la pieza?

7. Entre dos terminales marítimas se embarcan 2 000 t de azúcar por hora. Si las $\frac{2}{3}$ partes de lo que embarca la de mayor capacidad, equivale a lo que embarca la otra, ¿cuántas toneladas de azúcar embarca cada una de las terminales, por hora?

Hallemos **el valor de** la y

$3(15) - 2y = 5$ **Sustituyendo** $x = 15$ **en** (1).

$45 - 2y = 5$

$-2y = -45 + 5$

$y = \dfrac{-40}{-2} = 20$ (**Número** mayor)

Respuesta: El numero mayor es 20 **y el** menor *es* 15. ●

Ejemplo 3

Dos corredores parten de un mismo lugar corriendo a velocidad constante. Si hubieran corrido en el mismo sentido, a los 20 min la diferencia entre ambos hubiera sido de 200 m, pera si hubieran corrido en sentidos opuestos, la diferencia hubiera sido de 3 000 m. ¿Cuál es la velocidad de cada uno?

Resolución

Velocidades:

Primer corredor: x Segundo **corredor:** y

Como la velocidad es constante, la fórmula de la **velocidad** *es* $v = \dfrac{s}{t}$, en **que** $s = v \cdot t$

$20 \cdot x - 20 \cdot y = 200$ A los 20 min la diferencia entre ambos es de 200 m.

$x - y = 10$ (1) **Dividiendo por 20.**

$20 \cdot x + 20 \cdot s = 3\,000$ Al correr en sentidos **opuestos** sumamos las **distancias recorridas** en 20 miii.

$x + y = 150$ (2) **Dividiendo** por 20

Resolvamos el sistema formado **por** las ecuaciones (1) **y** (2)

$$\begin{array}{rl} x - y = 10 & (1) \\ x + y = 150 & (2) \\ \hline 2x = 160 & \end{array}$$

$x = \dfrac{160}{2} = 80$ **Velocidad en** metros **por minutos del que** corre más

Calculemos **el** valor **de** y

$80 + y = 150$ **Sustituyendo** $x = 80$ en (2).

$y = 150 - 80$

$y = 70$ Velocidad en metros por minutos del **que corre** menos

Respuesta: **Las velocidades de** los corredores son **de** 80 m $\cdot$ min^{-1} **y de** 70m $\cdot$ min^{-1} respectivamente. ■

20. La suma de las cifras de un numero dc dos lugares es 13. Si al número se le suma 9, el número resultante esta formado por las mismas cifras pero en orden inverso. Halla el número original.

21. En un numero de dos lugares, el duplo de la cifra de las decenas más el cuádruplo de la cifra de las unidades es igual a 26. Si el numero se divide entre la suma de los valores absolutos de sus cifras, el cociente es 6. ¿Cuál es el número?

22. Dos nadadores se entrenan para una competencia. Si partiendo de un punto nadan en cl mismo sentido, al cabo de 20 s la diferencia entre ambos es de 30 m, pero si nadan en sentidos opuestos la diferencia entre ambos es de 150 m. ¿Cuál es la velocidad de cada uno'?

23. Un hombre puede remar 10 km a favor de la corriente en 2 h o bien 8 km en contra de la corriente en 4 h. Halla la velocidad con que rema el hombre en aguas tranquilas y la velocidad de la corriente.

24. Un avión hace un viaje de 750 km en 3 h si vuela a favor del viento, pero si vuela en contra del viento entonces demora 3,75 h. Halla la velocidad del avión y la velocidad del viento.

25. Dos amigos recorren una pista circular de 400 m en un campo deportivo. Uno de ellos necesita para dar dos vueltas, el mismo tiempo que el otro para dar tres. Si ambos parten de un mismo punto de la pista y corren en sentidos opuestos, se encuentran cada 40 s. ¿A que velocidad corre cada uno'?

26. Dos amigos están a 300 m de distancia, Si corren en sentidos opuestos, uno hacia el otro, se encuentran en 20 s, pero si corren en el mismo sentido, el más rápido alcanza al otro en 5 min. Halla la velocidad de cada uno.

14. *Sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas*

Los procedimientos estudiados para la resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se generalizan a los sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, pudiendo estos tener una solución Única, no tener solución o tener infinitas soluciones.

Para la resolución de sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, aunque se puede aplicar cualquiera de los dos métodos estudiados, utilizaremos el método de adición y sustracción.

Para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

Se toman dos parejas dc ecuaciones cn las que se elimina la misma variable. Para obtener dos nuevas ecuaciones con solo dos variables.

Se resuelve el sistema formada por estas dos ecuaciones.

Se sustituyen los valores encontrados en una de las ecuaciones originales y se halla el valor de la otra variable.

8. En una tabla gimnástica, los 196 alumnos participantes forman 6 círculos y 4 estrellas. Para formar un circulo y una estrella sc necesitan 40 alumnos. ¿Con cuántos alumnos se forma un circulo y con cuántos una estrella?

9. La diferencia entre el duplo de las horas voluntarias realizadas por Mario y el triplo de las horas de Alexis es de 12 h. Si la mitad del número de horas voluntarias de Mario excede en 13 h a la tercera parte de las de Alexis, ¿cuántas horas de trabajo voluntario tiene cada uno?

10. En el décimo grado dc un preuniversitario, seis veces el número de varones es igual a cinco veces el numero de hembras, y la mitad del numero de varones excede cn 10 a la terccra parte del número de hembras. ¿Cuántas hembras y cuántos varones hay en el grado?

11. En un aula de 38 alumnos, la cuarta parte de los aprobados excede en 2 a los alumnos suspensos. ¿Cuántos alumnos aprobados y cuántos suspensos hay en el aula?

12. En un preuniversitario, la cuarta parte de los alumnos que practican pelota, sumados con la tercera parte de los quc practican natación es igual a 20. Si se divide el triplo del número de los que juegan pelota entre el número de las que practican natación, el cociente es 4. ¿Cuántos alumnos practican cada deporte?

13. A una obra en construcción se le envían en el mes 80 cargas con un total de 488 t de materiales. Algunos camiones cargan 5 t y los restantes 7 1. ¿Cuántas cargas de cada tipo *se* han enviado?

14. En un experimento se necesita obtener 500 mL de una solución salina al 18% a partir de soluciones salinas al 28% y al 12%. ¿Cuáles son las cantidades iniciales que se necesitan?

15. En una fabrica de productos quimicos se deben producir:
    a) **5** t de ácido sulfúrico al 84%,
    b) 4 t de ácido sulfúrico al 97%,
    a partir de acido sulfúrico al 96% y al 70%. ¿Cuáles **son** las cantidades iniciales que se necesitan?

16. Dos recipientes contienen leche, la leche de uno de ellos *contiene* el 3% de grasa y la leche del otro contiene el 7% de grasa. ¿Cuánta leche deberá sacarse de cada recipiente para producir 100 L dc una mezcla que contenga $4\frac{1}{2}$ % de grasa'?

17. La suma de las cifras básicas de un número de dos lugares es 12. Si se invierte el orden de ambas cifras. el numero no varía. ¿Cuál es el numero'?

18. La suma de las cifras básicas dc un número de dos lugares *es* Y. ***Si*** se invierte el orden de ambas cifras, se obtiene un numero menor en Y unidades que el número original. ¿Cuál es el numero?

19. La suma de las cifras básicas de un número de dos lugares es 7. Si se invierte el orden de ambas cifras se obtiene un número que excede en 2 al duplo del numero original. ¿Cuál *es* el número?

Ejemplo 1

Resuelve los sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{aligned} 5x - 6y + 2z &= -2 \\ x + 4y + 3z &= 10 \\ 3x + 5y + 7z &= 13 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 1 \\ -3x + 2y + 2z &= 14 \\ 4x - 4y + 3z &= 22 \end{aligned}$

Resolución

a) $5x - 6y - 2z = -2$ (1)
$x + 4y + 3z = 10$ (2) Enumerando las ecuaciones para su más fácil identificación.
$3x + 5y + 7z = 13$ (3)

Tomemos **las** ecuaciones (1) y (2) y eliminemos la **variable** x, **que** es la más fácil de eliminar porque en la ecuación (2) **su** coeficiente es 1.

$5x - 6y + 2z = -2$ (1) Multiplicando la ecuación (2) por **-5**.
$x + 4y + 3z = 10$ (2) $\cdot (-5)$

$5x - 6y$ t $22 = -2$
$-5x - 20y - 15z = -50$

$26y - 13z = -52$ Simplifiquemos esta ecuación dividiéndola por (-13).
$2y + z = 4$ (4) Nueva ecuación con dos variables.

Tornemos las ecuaciones (2) y (3) y eliminemos la variable x.

$x + 4y + 3z = 10$ (2) $\cdot (-3)$ Eliminemos la variable x multiplicando **la** ecuación (2) *por* -3
$3x + 5y + 7z = 13$ (3)

$-3x - 12y - 9z = -30$
$3x + 5y + 7z = 13$

$7y - 2z = -17$ (5)

Resolvamos el sistema formado por las ecuaciones (4) y (5).

$2y + z = 4$ (4) $\cdot 2$
$-7y - 2z = -17$ (5)

$4y + 2z = 8$
$-7y - 2z = -17$

$-3y = -9$

$$y = \frac{-9}{-3} = 3$$

Sustituyamos $y = 3$ en (4) **para** hallar el valor **de** z.

$2(3) + z = 4$; $z = -2$

Para. calcular el valor de la x sustituimos en una cualquiera de las ecuaciones originales los valores hallados.

$x + 4(3) + 31-2) = 10$ Sustituyendo $y = 3$ y $z = -2$ en (2)
$x + 12 - 6 = 10$
$x = 10 - 12$ t 6
$x = 4$

Respuesta: $x = 4$; $y = 3$; $z = -2$

b) $$\begin{array}{rl} 2x + 3y + 4z = 1 & (1) \\ -3x + 2y + 22 = 14 & (2) \\ 4x - 4y + 3z = 22 & (3) \end{array}$$

Como **los** coeficientes de **las** variables son todos **distintas** de la unidad, y no se puede simplificar ninguna de **las** ecuaciones, no existen facilidades para eliminar una **de** las variables. Eliminemos en dos parejas de ecuaciones la x.

$$\begin{array}{rll} 2x + 3y + 4z = 1 & (1) & \cdot 3 \\ -3x + 2y + 2z = 14 & (2) & \cdot 2 \\ \hline 6x + 9y + 12z = 3 & & \\ -6x + 4y + 4z = 28 & & \\ \hline 13y + 16z = 31 & (4) & \end{array}$$

$$\begin{array}{rll} 2x + 3y + 4z = 1 & (1) & \cdot (-2) \\ 4x - 4y + 3z = 22 & (3) & \\ \hline -4x - 6y - 82 = -2 & & \\ 4x - 4y + 3z = 22 & & \\ \hline -10y - 5z = 20 & & \text{Dividiendo por 5} \\ -2y - z = 4 & (5) & \end{array}$$

Resolvamos el sistema formado por las ecuaciones (4) y (5)

$$\begin{array}{rll} 13y + 16z = 31 & (4) & \cdot 2 \\ -2y - z = 4 & (5) & \cdot 13 \quad \text{Eliminando la variable } y. \\ \hline 26y + 32z = 62 & & \\ -26y - 13z = 52 & & \\ \hline 19z = 114 & & \end{array}$$

$$z = \frac{114}{19} = 6$$

Sustituyendo $z = 6$ en (2) **para** calcular y

$$-2y - 6 = 4$$
$$-2y = 4 + 6$$
$$y = \frac{4 + 6}{-2}$$
$$y = -5$$

Sustituyendo $y = 5$; $z = 6$ en (1) para calcular x

$$2x + 3(-5) + 4(6) = 1$$
$$2x - 15 + 24 = 1$$
$$x = \frac{1 + 15 - 24}{2}$$
$$x = \frac{-8}{2} = -4$$

Respuesta: $x = -4$; $y = -5$; $z = 6$. ■

Algunos problemas se resuelven mediante un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incognitas.

Ejemplo 2

La suma de las cifras básicas de un número de 3 lugares es 18. Si del número dado se resta el número con sus cifras invertidas, se obtiene 99. Si el número dado se divide por el número de dos cifras formado por sus decenas y unidades, el cociente es 9. ¿Cuál es el numero?

Calculemos el valor de la y sustituyendo $x = 6$ y $z = 5$ en (1)

$6 + y + 5 = 18 \; ; \; y = 7$

Respuesta: El número es 675.

Ejercicios (epígrafe 14)

1. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $x - 3y + 2z = 0$
$x - 3y - 2z = -2$
$4x + 3y + 2z = 2$

b) $3x - 2y - z = 1$
$2x + 3y - z = 4$
$x - y + 2z = 7$

c) $-2x + 3y + 4z = 1$
$x + 4y - 5z = 2$
$2x + 3y - z = -4$

d) $3x - 2y + 3z = 25$
$2x - 4y + 2z = 14$
$x - y - z = -4$

e) $5x + y + z = 3$
$7x - y + 2z = 4$
$3x + 5y - z = 2$

f) $5x - 2y + 3z = -4$
$3x + 3y + 8z = -11$
$2x - y - 4z = -11$

g) $5x + 3y + 2z = 2$
$2x + 4y - 3z = -1$
$2x + y - 5z = -1$

h) $3x + 2y + 4z = 5$
$6x + 3y - 2z = 2$
$3x - 4y + 8z = 5$

i) $2x + 3y = 12 - 2z$
$5x - 2y = 15 - z$
$3x + 2y = -13 - 5z$

j) $2x - 6y = 13 + 3z$
$3x + 2z = 4 - 2z$
$4y - 6z = -16 + x$

k) $2x + 4y - z = 2$
$6x + 2y + 4z = 15$
$4x - y - 2z = -4$

l) $3x - 4y = -6z + 145$
$3y - 2x = 5z + 35$
$3z - x = -8y - 40$

m) $2x - y = 11$
$3x + 5z = 17$
$2x + 5y + 4z = -3$

n) $x + 3z = -3$
$2y - z = 12$
$2x - y = 1$

2*. Resuelve y comprueba los siguientes sistemas:

a) $$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 9$$
$$\frac{x}{3} - \frac{y}{6} - \frac{z}{8} = -1$$
$$\frac{x}{6} + \frac{y}{2} - \frac{z}{8} = 6$$

b) $$\frac{3x}{2} + \frac{4y}{4} + \frac{5z}{4} = 3$$
$$\frac{5x}{4} + \frac{2y}{3} - \frac{5z}{8} = \frac{5}{6}$$
$$\frac{x}{20} + \frac{y}{15} + \frac{z}{12} = \frac{3}{20}$$

c) $$\frac{3}{x} + \frac{2}{y} - \frac{2}{z} = 30$$
$$\frac{2}{x} - \frac{3}{y} + \frac{4}{z} = -8$$
$$\frac{4}{x} - \frac{5}{y} - \frac{3}{z} = 10$$

d) $$\frac{2}{x} - \frac{1}{y} = 2$$
$$\frac{3}{y} - \frac{2}{z} = 2$$
$$\frac{1}{x} + \frac{3}{z} = 18$$

e) $$\frac{10}{x} + \frac{8}{y} = 4$$
$$\frac{15}{x} + \frac{20}{y} + \frac{6}{z} = 10$$
$$\frac{20}{x} + \frac{15}{z} = 9$$

Resolución

Cifra de las centenas	x
Cifra de las decenas	y
Cifra de las unidades	z
Número	$100x + 10y + z$
Número con las cifras en orden inverso	$100z + 10y + x$

$x + y + z = 18 \quad (1)$ Porque la suma de las cifras básicas es 18.

$(100x + 10y + z) - (100z + 10y + x) = 99$ La diferencia entre el número original y el número invirtiendo sus cifras es 99.

$$100x + 10y + z - 100z - 10y - x = 99$$
$$99x - 99z = 99$$
$$x - z = 1 \quad (2)$$ Dividiendo por 99.

$$\frac{100x + 10y + z}{10y + z} = 9$$ Cociente del número dado dividido por el número de 2 cifras formado por sus decenas y unidades e igualado a 9.

$$100\,x + 10y + z = 9(10y + z)$$
$$100x + 10y + z = 90y + 9z$$
$$100x - 80y - 8z = 0$$ Dividiendo la ecuación por 4.
$$25x - 20y - 2z = 0 \quad (3)$$

Resolvamos el sistema formado por (1), (2) y (3).

$$\begin{array}{rcrcrcll} x & + & y & + & z & = & 18 & (1) \quad \cdot 20 \\ x & & & - & z & = & 1 & (2) \\ 25x & - & 20y & - & 2z & = & 0 & (3) \end{array}$$

Como en la ecuación (2) falta la variable y, eliminemos la misma en las ecuaciones (1) y (3) para obtener una nueva ecuación en x y z.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 20x & + & 20y & + & 20z & = & 360 \\ 25x & - & 20y & - & 2z & = & 0 \\ \hline & & 45x & + & 18z & = & 360 \end{array}$$

$5x + 2z = 40 \quad (4)$ Dividiendo por 9.

Resolvamos el sistema formado por las ecuaciones (2) y (4):

$$\begin{array}{rcrcll} x & - & z & = & 1 & (2) \quad \cdot 2 \\ 5x & + & 2z & = & 40 & (4) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcl} 2x & - & 2z & = & 2 \\ 5x & + & 2z & = & 40 \\ \hline 7x & & & = & 42 \end{array}$$

Calculemos el valor de la z.

$6 - z = 1$ Sustituyendo $x = 6$ en (2)

$$-z = 1 - 6$$
$$-z = -5$$
$$z = 5$$

13. Un tanque se llena por tres llaves de agua *A*, *B* y *C*. Si se abren las tres llaves juntas se llena en 30 min, si se abren las llaves *A* y A se llena en 45 min y si se abren las llaves *B* y *C* se llena en *50* min. ¿En cuanto tiempo se llenará el tanque por cada una de las **llaves de** forma separada?

14. Una piscina tiene **dos** llaves *A* y B que la llenan y un desaguc. Si se abren simultáneamente las dos llaves y cl desague la piscina *sc* llena en 2,4 h, si se abre la llave *A* y el desague se llena la piscina cn 12 h y si se abre la llave *B* y el desagüe se llena en 6 h. ¿En qué tiempo se podrá llenar el tanque por cada una de las llaves de forma separada, y en qué tiempo se podrá vaciar por el desague?

15. *Sistemas cuadráticos*

Un sistema de ecuaciones se considera cuadrático cuando el mayor grado de al menos una de las ecuaciones es 2. Nosotros estudiaremos los sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas, una ecuacion lineal y una cuadrática.

Para resolver un sistema formado por una ecuación lineal y una cuadrática:

Se despeja tina variable cn la ecuación lineal.
Se sustituye la variable despejada en la ecuacion cuadrática
Se resuelve la ecuación de segundo grado obtenida.
Sc calculan los valores de la otra variable.

Ejemplo 1

Resuelve los siguientes sistemas:

a) $x^2 - 2x + y^2 = 1$
$y - x = -3$

b) $x^2 + 4y^2 = 25$
$x - 2y = -1$

c) $x^2 - 2x + y - 1 = 0$
$2x - 3y = -5$

Resolución

a) $x^2 - 2x + y^2 = 1 \quad (1)$
$y - x = -3 \quad (2)$
$y = x - 3 \quad (3)$ Despejando y en (2).
$x^2 - 2x + (x - 3)^2 = 1$ Sustituyendo (3) en (1).
$x^2 - 2x + x^2 - 6x + 9 - 1 = 0$
$2x^2 - 8x + 8 = 0$ Dividiendo por 2.
$x^2 - 4x + 4 = 0$
$(x - 2)^2 = 0$
$x = 2$

Para determinar el valor de y sustituyamos $x = 2$ en (3):
$y = 2 - 3 = -1$
Respuesta: $x = 2,\ y = -1$.

3. La suma de tres números es 19. El triplo del menor más el duplo del mediano menos el mayor, es igual a 18. El menor más el mediano excede en 3 unidades al mayor. Halla los números.

4. Un melón, una piña y un aguacate cuestan \$2,60; 2 melones y 3 piñas cuestan \$5,60; 2 piñas y 3 aguacates cuestan \$2,90. ¿Cuánto vale cada fruta?

5. El número de horas voluntarias realizadas por Norma, Caridad y Moraima suma 100. Entre Norma y Caridad han realizado el mismo número dc horas que Moraima, y cuatro veces las horas realizadas por Norma *es* igual al número de horas realizadas por Moraima y Caridad. ¿Cuántas horas de trabajo voluntario han realizado cada una?

6. La suma de las edades de Fermin, Leopoldo y Jorge es de 75 años. La suma de las edades de Fermín y Leopoldo es 45 años y el duplo de la edad de Jorge excede cn 15 años a la suma de las edades dc Fermín y Lcopoldo. ¿Qué edad tiene cada uno si Ferinin es 5 años menor que Leopoldo?

7. En un kiosko se venden 3 clases de revistas a \$0,15, \$0,20 y \$0,25 respectivamente. En un día se vendieron 255 revistas por un valor de \$52,50. Si el triplo de las **que** se venden a \$0,15 es igual al duplo dc las que se venden a \$0,25, ¿cuántas revistas de cada tipo se han vendido?

8. En un triángulo cualquiera la suma de las amplitudes del ángulo mediano y del ángulo menor exccdc en $36°$ al ángulo mayor y la suma de los ángulos mayor y mediano es igual al triplo del ángulo menor. ¿Cuántos grados mide cada uno?

9. En un número de tres cifras, la suma de ellas es 14. La suma del triplo de la cifra de las centenas con la cifra de las unidades es igual a la cifra de las decenas. Si al numero se le suma 99, el nueva número tiene las mismas cifras pero en orden inverso. ¿Cuál es el número?

10. En un numero dc tres cifras, la suma de ellas es 15. La suma de la cifras de las centenas y de las decenas es igual al cuádruplo de la cifra de las unidades, y si **al** numero se le resta 18 se intercambian las cifras de las unidades y de las decenas. ¿Cuál es el numero?

11*. En un numero de tres cifras, cuatro veces la cifra de las decenas es igual a la suma de las cifras de las centenas y de las unidades, y la suma de las cifras de las centenas y las decenas es igual a la cifra de las unidades. Si se divide dicho número por el número de dos cifras formado por sus decenas y unidades, el cociente es 13. ¿Cuál es el número?

12. Se tienen 3 recipientes que contienen respectivamente 30, 40 y 50 l. de ácido sulfúrico a distintas concentraciones. Si se juntan los contenidos de los tres recipientes se obtiene una mezcla al 12%, si se junta el primer recipiente con el segundo se obtiene una mezcla al 13,6% y si se junta el segundo recipiente con el tercero se obtiene una mezcla al 12%. Halla el % de ácido sulfúrico en cada uno de los recipientes.

j) $2x + y = 4$
$2x^2 - xy - y^2 = 20$

k) $3x - 2y = 8$
$x^2 + y^2 - 2x = 1$

l) $3y^2 - 9y - x - 2 = 0$
$3y - x - 2 = 0$

m) $y^2 + 2x^2 + 6x = 5$
$x - y = 1$

n) $x^2 - y^2 = 27$
$2x - 5y - 3 = 0$

ñ) $3x^2 - xy - y^2 = 1$
$2x = y + 4$

Ejercicios del capítulo

1. **Dados los** conjuntos:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : -2 \leqslant x \leqslant 4{,}3 \right\} \qquad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \geqslant -\frac{1}{3} \right\}$$

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} : x < \sqrt{5} \right\} \qquad D = \left\{ x \in \mathbb{R} : 1{,}\bar{8} < x \leqslant 6 \right\}$$

a) Completa con el símbolo adecuado de modo que se obtenga una proposición **verdadera:**

4 ____ A $\quad -\frac{2}{3}$ ____ B $\quad D$ ____ B $\quad A$ ____ C

b) Calcula: $A \cup B$; $A \cap D$; $B \cap C$; $A \setminus B$; $B \setminus C$; $D \setminus A$.

c) Con los conjuntos **dados,** tomados dos a dos. ¿cuántas uniones distintas se pueden obtener?, ¿cuántas diferencias **distintas?**

2. Dadas las expresiones algebraicas:

$$A = 5x^2y + 3x^3y^2 + 8x^{-1} \qquad B = \frac{a - 2b^2}{(a - 3)(b + 4)} + \frac{3a^3}{b^2}$$

a) Determina el dominio de cada expresión.

b) Calcula el valor numérico de A para: $x = 3,\ y = \frac{1}{2}$; $x = -2,\ y = -1$; $x = -1\ ,\ y = 0{,}1$.

c) Calcula el valor numérico de B para: $a = -1,\ b = \frac{2}{3}$; $a = -\frac{1}{2}\ ,\ b = -3$; $a = 3{,}1\ ,\ b = -3{,}9$.

3. Dados los polinomios:
$A = 2x - 3 \quad B = 2 - 4x \quad C = x^2 - 2x + 3 \quad D = -2x^3 + 5x - 2$. Calcula:

a) $A + B + C$ b) $A - C - D$ c) $A \cdot B$ d) $B \cdot C$ e) $A^2 + C$
f) $A \cdot C - D$ g) $D + C \cdot B$

4. Suprime signos de agrupación y efectúa
a) $5a^2 - [3a + 2a(a - 3) - 8] - 9a$
b) $3b + [5b^2 - 4(b^2 - 3b + 1) - 7b] - 8$
c) $3x^2 - 8x - [-2 + (2x - 3)(x + 5)] - x(x - 4)$
d) $3y(2y - 1) - \{-5y + [6 - 7(y + 1)(y - 3)] + 4y^2\} - 3$

b) $x^2 + 4y^2 = 25 \quad (1)$
$\quad x - 2y = -1 \quad (2)$

$x = 2y - 1 \quad (3)$ Despejando x en (2).

$(2y - 1)^2 + 4y^2 = 25$ Sustituyendo (3) en (1).

$$4y^2 - 4y + 1 + 4y^2 - 25 = 0$$
$$8y^2 - 4y - 24 = 0$$

$2y^2 - y - 6 = 0$ Dividiendo por 4.

$(2y + 3)(y - 2) = 0$ Descomponiendo en factores.

$$2y + 3 = 0 \qquad y - 2 = 0$$
$$y = -\frac{3}{2} \quad \text{o} \quad y = 2$$

Hallemos el valor **de** la x **de** acuerdo con **los** valores de la y:

Sustituyendo $y = -\dfrac{3}{2}$ en (3)

$$x = 2\left(-\frac{3}{2}\right) - 1$$
$$x = -3 - 1 = -4$$

Sustituyendo $y = 2$ en (3)

$$x = 2(2) - 1$$
$$x = 4 - 1 = 3$$

Respuesta: $x = -4 \quad y = -\dfrac{3}{2}$; $\quad x = 3 \quad y = 2$

c) $x^2 - 2x + y - 1 = 0 \quad (1)$
$\quad 2x - 3y = -5 \quad (2)$

$y = 1 + 2x - x^2 \quad (3)$ Despejando y en (1).

$2x - 3(1 + 2x - x^2) = -5$ Sustituyendo (3) en (2).

$$2x - 3 - 6x + 3x^2 + 5 = 0$$
$$3x^2 - 4x + 2 = 0$$

$a = 3 \quad b = -4 \quad c = 2$

$b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(3)(2) = 16 - 24 = -8 < 0$

Respuesta: El sistema no tiene solución. ■

Ejercicios (epígrafe 15)

1. Resuelve **los** siguientes sistemas **de** ecuaciones:

a) $y^2 - 4x = 0$, $x + y = 3$

b) $xy = 32$, $2x - y = 0$

c) $y^2 + 2x = 2$, $x + y = 2$

d) $xy = -4$, $x + 3y = 1$

e) $y = x^2 + 4x + 4$, $y - x = 4$

f) $x^2 + y^2 - 4x + 4 = 0$, $x + y = 2$

g) $7x^2 + 24xy + 9y^2 = 0$, $7x + 3y = 0$

h) $x^2 - 3xy - 2y^2 = 4$, $4x + y = 5$

i) $x^2 + 6x + 2 = y$, $5x \quad 3y = 6$

15. Determina el conjunto solución dc loa siguientes sistemas dc ecuaciones

a) $2x + 3y = 6$
$\quad x - 4y = -19$

b) $4x + 2y = 4$
$\quad 6x + 2y = 3$

c) $5x = -3y$
$\quad 2x - 4y = 26$

d) $x = 3y - 5$
$\quad 4x + 6y = 8$

e) $2(x + 5) - 3(y + 4) = 6$
$\quad 3(x + 2) - 5(y + 1) = 9$

f) $4(x - 2) = 2(y - 3)$
$\quad 3(x + 2) - 5(y + 1) = 9$

16. Kesuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $x + y - z = -5$
$\quad 3x - 2y + z = 17$
$\quad x - 3y + 2z = 6$

b) $x + y + z = 12$
$\quad 2x - y + z = 7$
$\quad x + 2y - z = 6$

c) $x + 4y - z = 6$
$\quad 2x + 5y - 7z = -9$
$\quad 3x - 2y + z = 2$

d) $-2x + 5y + z = 24$
$\quad 5x + 2y - 2z = -14$
$\quad 4x + y + 3z = 10$

e) $2x + 4y + 3z = 3$
$\quad 10x - 8y - 9z = 0$
$\quad 4x + 4y - 3z = 2$

f) $2x - z = 14$
$\quad y - z = 1$
$\quad 3x - y + 5z = 53$

17. Dadas **las** funciones: $f(x) = x^2 - 3x$, $g(x) = \dfrac{x^2 - Y}{x}$, $h(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x + 5}$

Para qué valores de x se cumple que:

a) $f(x) > 0$ b) $f(x) \leqslant 4$ c) $g(x) < 0$

d) $g(x) \geqslant 8$ e) $h(x) > 0$ f) $h(x) \leqslant 1$.

18. **Resuelve** los siguientes sistemas.

a) $x + y = 6$
$\quad x^2 - y = 0$

b) $4x = y - 5$
$\quad y + 27 = x^2 - 10x$

c) $x^2 + y^2 = 41$
$\quad 3x - y = 7$

d) $6x^2 + 4x = y + 3$
$\quad 2 = 5x - y$

5. Calcula, aplicando la regla de Ruffini, el cociente y el resto de la división de:

a) $x^3 + 5x^2 - 6x + 3$ por $x + 1$ b) $2x^3 - 6x^2 - 6$ por $x - 2$

c) $x^3 - 4x + 4$ por $x + 2$ d) $2x^4 - x^3 + 5x - 2$ por $x + 3$

6. Dado el polinomio $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + u$. Determina el valor de u para que la división de $P(x)$ por $x - 2$ sea exacta.

7. Factoriza:

a) $2y^3 - 2y$ b) $x^2 + x - 20$ c) $9 - 6c + c^2$ d) $3x(y + 2) - 7(y + 2)$

e) $2a^2 - 17a + 35$ f) $x^4 - 5x^2 - 36$ g) $8x^6 + 6x^3 - 5$ h) $(4a^2)^2 - 8(4a^2) - 9$

8. Factoriza:

a) $ax + 2ab - b^2x - 2b^3$ b) $25x^2 - 9 - 15ax + 9a$ c) $m^2 - 8m + 16 - 81y^4$

d) $x^3 - 5x^2 + x - 5$ e) $y^3 - y - 6$ f) $6a^2m + 21a^2 - 4m^2 + 49$

9. Si $A = 9y^2 - 64$ $B = 9y^2 - 48y + 64$ $C = 9y^2 - 24y$ $D = 6y^2 + 13y - 8$

Simplifica: a) $\frac{A}{B}$ b) $\frac{B}{C}$ c) $\frac{A}{D}$

10. Si $M = \frac{3x^2 - 3xy - 4x + 4y}{3x^2 + 5x - 12}$ $N = \frac{x^2 - 9}{4x^3 - 4x^2y}$ $P = \frac{1}{16x^3}$

Calcula: $M \cdot N : P$

11. Si $A = \frac{a^2 + 6a - 16}{a^2 - 64 - 3ay - 24y}$ $B = \frac{3a^2y - 24ay - 9ay^2}{(a - 2)^2}$ $C = \frac{1}{a^3 - 5a^2 + 11a - 10}$

Verifica que: $\frac{A \cdot B}{C} = 3ay\,(a^2 - 3a + 5)$

12. Si $P = \frac{4}{21x^2 - 6x}$ $Q = \frac{2x - 3}{49x^2 - 28x + 4}$ $R = \frac{a + 2}{49x^2 - 4 - 28ax + 8a}$

13. **Resuelve:**

a) $(x + 5)(x - 3) - x(2x + 5) = 8 - n^2$

b) $(3x - 4)(x - 3) - (x - 2)(x + 7) = 2x(x - 4)$

c) $(x + 7)(x - 2) + (2x - 1)^2 = x + 7$

d) $(2x - 8)(2x + 8) = (3x - 2)^2 - 100$

14. Determina el conjunto solución de:

a) $\frac{2}{x - 2} - \frac{4}{x + 2} = \frac{6}{x + 2}$ b) $\frac{1}{x + 5} + \frac{1}{x - 3} = \frac{6}{x^2 + 2x - 15}$

c) $\frac{2}{3x} + 1 = -\frac{1}{x^2 + 4x}$ d) $\frac{3}{2x - 5} - \frac{2x}{2x + 5} = \frac{x - 31}{4x^2 - 25}$

e) $\frac{3}{x - 3} - \frac{3}{x + 4} = \frac{x}{x - 3}$

CAPÍTULO 2

Potencias, Funciones potenciales

Potencias y raices

1. *Repaso y profundización de potencias y raíces*

Repaso de potencias de exponente entero

En grados anteriores se definieron las potencias de exponente entero y se analizaron sus propiedades, (puedes ver un resumen de ellas en el punto 10 del Memento). Veamos algunos ejercicios a manera de **ejemplos:**

Ejemplo 1

Calcula y simplifica aplicando las propiedades de las potencias:

a) 3^{-4} **b)** $7{,}4^0$ **c)** $a^2 \cdot a^5$ **d)** $a^6 \cdot b^6$

e) $\dfrac{(b \cdot c)^3}{d^3}$ $(d \neq 0)$ **f)** $6(a \cdot b)^2 \cdot \dfrac{a^2}{3b^2}$ $(b \neq 0)$ **g)** $4^2\,(4^{-2} + 2^2)$

h) $\dfrac{1}{6^{-1}} - (3^2 : 6^2)$ **i)** $b^2\,(1 + b)^2$ **j)** $\dfrac{(x^2 + 5x + 6)^3}{(x + 3)^3}$ $(x \neq -3)$

k) $(a - b)^5\,(a + b)^5$

Resolución

a) $3^{-4} = \dfrac{1}{3^4} = \dfrac{1}{81}$ b) $7{,}4^0 = 1$ c) $a^2 \cdot a^5 = a^7$

d) $a^6 \cdot b^6 = (a \cdot b)^6$ e) $\dfrac{(b \cdot c)^3}{d^3} = \left[\dfrac{b \cdot c}{d}\right]^3$

f) $6(a \cdot b)^2 \cdot \dfrac{a^2}{3b^2} = \dfrac{2a^2 \cdot b^2 \cdot a^2}{b^2} = 2a^4$

g) $4^2\,(4^{-2} + 2^2) = 4^0 + 8^2 = 1 + 64 = 65$

h) $\dfrac{1}{6^{-1}} - (3^2 : 6^2) = 6 - \left[\dfrac{1}{2}\right]^2 = 6 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{23}{4}$

¿Cómo surgió el signo de radical?

El simbolo radical que empleamos en nuestra notación actual es varias veces centenario. pero el concepto de radical es bastante más antiguo. Los griegos tenían ya la noción de radical y así puede apreciarse en la famosa fórmula de Herón de Alejandría (200 a.n.e.), que estudiaras en el capitulo 4.

Sin embargo, un símbolo para representar a los radicales aparece, quizás por primera vez, en las obras de los hindúes. En su escritura algebraica sincopada, Brahmagupta (siglo VII) y después Bhaskara (siglo XII), utilizan para representar $\sqrt{10}$ el símbolo **ka10**, en que ka es la abreviatura de la palabra karana que equivale a irracional..

Muchos años mas tarde Nicolás Oresme (1328-1382), profesor de la Universidad de París, introduce las raíces como potencias de exponentes fraccionarios y utiliza para expresarlas ciertos símbolos ideados por el.

Rafael Bombelli (1530-1579), incluye en su "Álgebra" un conjunto completo de notaciones con las que pretende simplificar el cálculo y facilitar las operaciones algebraicas. Representa por Rq a la raíz cuadrada y par Rc a los radicales cúbicos. En su primitiva álgebra simbólica. Bombelli escribe $\sqrt{2 + \sqrt[3]{38}}$ por Rq 2 p Rc 38.

Nuestro actual simbolo radical $\sqrt{\ }$ fue realmente introducido en 1525 por Christoff Rudolff en su libro "Die Coss". Este libro tuvo enorme influencia ,en Alemania en el siglo XVI y en 1552 se publicó por el matemático alemán Michael Stifel (1483-1567) una nueva edición mejorada de la obra de Rudolff. Se supone que lo adopto porque el simbolo $\sqrt{\ }$ semeja una *r* minúscula, inicial de la palabra raíz.

En este capitulo **vas** a aprender a calcular con radicales.

Ejemplo 2

Determina todas las raíces:

a) cuarta de 81

b) quinta de -32

c) séptima de $\frac{1}{128}$

d) sexta de -5

Resolución

a) 3 y -3 son raíces cuartas de 81 porque $3^4 = 81$ y $(-3)^4 = 81$

b) -2 es raíz quinta **de** -32 porque $(-2)^5 = -32$.

c) $\frac{1}{2}$ es raíz séptima de $\frac{1}{128}$ porque $\left[\frac{1}{2}\right]^7 = \frac{1}{128}$.

d) -5 no tiene raíz **sexta** pues *es* menor que cero y para todo x se cumple **que** $x^6 \geqslant 0$. ■

En general *se* cumple:

Teorema 1

> a) Si n es par, todo número real positivo tiene dos raices n-ésimas, una positiva y otra negativa. Los números reales negativos no tienen raíz n-ésima cuando n es par.
> b) Si n es impar, lodo número real a tiene una raíz n-ésima del mismo signo que a.

En el caso de n par *se* llama **raíz aritmética** a la **positiva** y en el caso de n impar la Única que existe se llama **raíz aritmética.**

Para indicar la raíz aritmética de a se utiliza **el** símbolo $\sqrt[n]{a}$, de él tenemos:

1. El símbolo $\sqrt{\ }$ es el signo de raiz y se llama **radical.**
2. El número a se llama **cantidad subradical** o **radicando y** es el numero al cual se le calcula la raíz n-ésima.
3. El numero natural n se llama índice del radical e indica el exponente al **que** hay que elevar la raiz para obtener la cantidad subradical; cuando $n = 2$ no se escribe Y se sobreentiende que se calcula la raiz cuadrada.

Normalmente se llama radical a cualquier raíz indicada de un número o de una expresión algebraica.

Ejemplo 3

Determina la raíz indicada:

a) $\sqrt[4]{81}$

b) $\sqrt[5]{-32}$

c) $-\sqrt[6]{4\ 096}$

i) $b^2(1+b)^2 = [b(1+b)]^2 = (b+b^2)^2$

j) $\dfrac{(x^2+5x+6)^3}{(x+3)^3} = \left[\dfrac{x^2+5x+6}{x+3}\right]^3 = \left[\dfrac{(x+2)(x+3)}{x+3}\right]^3 = (x+2)^3$

k) $(a-b)^5(a+b)^5 = [(a-b)(a+b)]^5 = (a^2+b^2)^5$. ■

Raíz n-ésima de un numero real

En la secundaria básica calculasle la raíz cuadrada y cúbica de números reales positivos utilizando tablas, por ejemplo calculaste:

$\sqrt{5} = 2.236 \qquad \sqrt{81} = 9$

$\sqrt[3]{9} = 2{,}080 \qquad \sqrt[3]{64} = 4$

También viste que la raíz cuadrada y la cúbica son operaciones inversas de elevar al cuadrado o al cubo respectivamente, es decir, que:

$\sqrt{81} = 9$ porque $9^2 = 81$, donde el símbolo $\sqrt{\ }$ se llama radical y su índice **2** no se escribe.

$\sqrt[3]{64} = 4$ porque $4^3 = 64$, en este caso el índice del radical es **3.**

Esta idea puede ser generalizada definiendo la raíz de índice n como la operación inversa dc la potenciación de exponente n. Para hacerlo **observa que:**

Todo número positivo tiene **dos** raíces cuadradas, una positiva y una negativa. por ejemplo:

5 es raíz cuadrada de 25 porque $5^2 = 25$ y
-5 cs raiz cuadrada de 25 porque $(-5)^2 = 25$

por lo que 25 tiene dos raices cuadradas. A la **raiz positiva se le** llama **raíz aritmética**.

Los números negativos no tienen raiz cuadrada.

Todo numero real tiene una raíz cúbica, **por** ejemplo:

2 es raíz cúbica dc 8 porque $2^3 = 8$ y
2 es raiz cúbica de -8 porque $(-2)^3 = -8$
esta raíz es única y es la raíz cúbica aritmética

Definición 1

Sea $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ se llama raíz n-ésima de a a todo número real x, que satisface **la** ecuación $x^n = a$. **Si** la ecuación no tiene solución a no tiene raíz n-ésima.

Ejemplo 4

Calcula. si existe:

a) $\sqrt[4]{16}$ **b)** $\sqrt[5]{-243}$ **c)** $\sqrt{(-9)^2}$

d) $\sqrt[3]{(-5)^3}$ **e)** $\sqrt[6]{(-64)}$ **f)** $\sqrt[6]{(-2)^6}$

Resolución

a) $\sqrt[4]{16} = 2$ porque $2^4 = 16$ y $2 > 0$

b) $\sqrt[5]{-243} = -3$ porque $(-3)^5 = -243$

c) $\sqrt{(-9)^2} = |-9| = 9$ porque $9^2 = (-9)^2$ y $9 > 0$

d) $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$

e) 1-64 no existe pues $-64 < 0$

f) $\sqrt[6]{(-2)^6} = |-2| = 2$ porque $2^6 = (-2)^6$ y $2 > 0$. ■

En resumen:

1. La raíz n-ésima de a para $a \geq 0$ **tiene sentido para cualquiera** sea **el** indice n **par** o impar.
2. **La** raíz n-ésima **de** a para $a < 0$ **tiene sentido solo** para cuando el **índice** n **es impar.**

Reducción **del** indice del radical

En el trabajo con los radicales podemos en muchas ocasiones simplificarlos sin que el resultado se altere y así trabajar con expresiones más simples, por ejemplo:

a) $\sqrt[12]{3^{24}} = 3^2$ porque $(3^2)^{12} = 3^{24}$ pero

$\sqrt[4]{3^8} = 3^2$ porque $(3^2)^4 = 3^8$ luego

$\sqrt[12]{3^{24}} = \sqrt[4]{3^8} = 3^2$

d) $\sqrt[7]{\frac{1}{128}}$ e) $\sqrt[8]{3^{16}}$ f) $\sqrt{-4}$

Resolución

a) $\sqrt[4]{81} = 3$ porque $3^4 = 81$

b) $\sqrt[5]{-32} = 2$ porque $(-2)^5 = -32$

c) $-\sqrt[6]{4\ 096} = -4$ porque $4^6 = 4\ 096$

d) $\sqrt[7]{\frac{1}{128}} - \frac{1}{2}$ porque $\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128}$

e) $\sqrt[8]{3^{16}} = 3^2$ porque $(3^2)^8 = 3^{16}$

f) $\sqrt{-4}$ no tiene sentido. pues **no existe** ningún número real x tal que $x^2 = -4$ por ser $x^2 \geqslant 0$. ■

Está claro que **para** cualquier número real a para el cual la raíz n-ésima $(\sqrt[n]{a})$ tiene sentido se cumple la igualdad:

$$\boxed{(\sqrt[n]{a})^n = a}$$

Observa que: $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$ si n es par. Así.

$\sqrt{(-2)^2} = 2 \qquad \sqrt{2^2} = 2$

$\sqrt[4]{(-3)^4} = 3 \qquad \sqrt[4]{3^4} = 3$

En general se cumple que:

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$$

$$\boxed{\textbf{En particular: } \sqrt{a^2} = |a|}$$

Ejemplo 5

Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt[8]{5^6}$ **b)** $\sqrt[6]{125}$ **c)** $\sqrt[9]{27x^6}$ **d)** $\sqrt[4]{256x^8y^{12}}$ $(y \geqslant 0)$

Resolución

a) $\sqrt[8]{5^6} = \sqrt[4\cdot2]{5^{3\cdot2}} = \sqrt[4]{5^3}$

b) $\sqrt[6]{125} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt{5}$

c) $\sqrt[9]{27x^6} = \sqrt[9]{(3x^2)^3} = \sqrt[3]{3x^2}$

d) $\sqrt[4]{256x^8y^{12}} = \sqrt[4]{(4x^2y^3)^4} = 4x^2y^3$. ■

Los radicales como $\sqrt[4]{125}$: $\sqrt{5}$ de los incisos **a)** y b) (como la mayor parte de **las** raíces) no son números racionales. Por esta razón no podemos representarlos mediante una expresion decimal finita o una fracción, como ocurre en los casos especiales en que la raíz es un número racional, como por ejemplo:

$$\sqrt{36} = 6 \; , \; \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

Utilizando métodos matemáticos de aproximación y los modernos medios de cómputo, es posible obtener aproximaciones decimales de las raices irracionales con tantas cifras como se quiera. Por ejemplo, si corres; en la computadora de tu escuela el siguiente programa, podrás obtener tantas cifras decimales de $\sqrt{2}$ como quieras:

```
10 REM "CÁLCULO DE RAIZ CUADRADA"
20 CLS
30 INPUT "Da una aproximación inicial:"; A
40 INPUT "Cantidad dc cifras correctas.", N
50 M = -N
60 B = (A + 2/A)/2
70 PRINT B
80 C = ABS(A - B)
90 A = B
100 IF C > 10^M GOTO 60
110 END
```

En grados posteriores podrás justificar por qué este programa te permite obtener aproximaciones de $\sqrt{2}$.

En algunos casos particulares importantes (raíces cuadradas y cúbicas, por ejemplo) las raíces se disponen en tablas como las que utilizas desde séptimo grado y que aparecen en el anexo de este libro.

b) $\sqrt[6]{2^{18}} = 2^3$ porque $(2^3)^6 = 2^{18}$ pero

$\sqrt[3]{2^9} = 2^3$ porque $(2^3)^3 = 2^9$ luego

$\sqrt[6]{2^{18}} = \sqrt[3]{2^9} = 2^3$.

Observa que en estos casos el indicc del radical y el exponente del radicando son divisibles por un mismo número entero positivo y el resultado no **se** ha **alterado.** En todos **estos ejemplos** la base u del radicando, cs un numero positivo

Teorema 2

> Dada $\sqrt[n]{a^m}$ con $a > 0$; $n, m \in \mathbb{Z}$; $n > 1$ se cumple
>
> $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$ con $k \in \mathbb{N}$; $k > 0$.

Demostración

Debemos demostrar que si $a > 0$, $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$ $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$

Sea $r = \sqrt[n]{a^m}$ (1) entonces

$r^n = a^m$ Por definición 1.
$(r^n)^k = (a^m)^k$ Elevando ambos miembros al exponente $k > 0$.
$r^{nk} = a^{mk}$ Propiedades de las potencias.

De donde $r = \sqrt[nk]{a^{mk}}$ (2)

De (1) y (2) se tiene que:

$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$.■

No/~Si existen $\sqrt[n]{a^m}$ y $\sqrt[nk]{a^{mk}}$ y $a < 0$, se cumple la igualdad del teorema 2 *siempre que* n y kn tengan la misma paridad. Por ejemplo:

$\sqrt[4]{(-1)^2} = \sqrt[8]{(-1)^4}$, $\sqrt[3]{-1} = \sqrt[9]{(-1)^3}$

Sin embargo, $\sqrt[3]{-1} \neq \sqrt[6]{(-1)^2}$.

Existen radicales en los que no se pueden simplificar su índice y el exponente del radicando, por ejemplo:

$\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^4}$, $\sqrt{8} = \sqrt{2^3}$

porque el indicc y el exponente del radicando son números **primos entre** si Al simplificar radicales debemos expresarlos en la forma anterior, es decir, con el índice menor posible

d) $\dfrac{8^{1-n} - 4^{-n}2^{n}}{4(2^{2n})^{-1}} = 2^{1-n} - 2^{n-2}$

5. Muestra, usando **la** definición 1, que **las** siguientes igualdades son verdaderas

a) $\sqrt[4]{81} = 3$ b) $\sqrt[3]{-125} = -5$ c) $\sqrt{0,25} = 0.5$

d) $\sqrt[5]{-\dfrac{32}{243}} = \dfrac{2}{3}$ e) $\sqrt[3]{x^6y^9} = x^2y^3$ f) $\sqrt[4]{(x+y)^8} = (x+y)^2$

g) $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = |a+b|$

h) $\sqrt{(a-b)^2(a+b)^2} = |a^2 - b^2|$

i) $\sqrt{\dfrac{x^4 - 6x^3 + 9x^2}{y^4}} = \left|\dfrac{x^2 - 3x}{y^2}\right| \quad (y \neq 0)$

6. Halla el valor de la raíz:

a) $\sqrt[4]{16}$ b) $\sqrt[5]{-32}$ c) $\sqrt[12]{1}$ d) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}}$ e) $\sqrt[6]{\dfrac{1}{64}}$

f) $\sqrt[7]{-1}$ g) $\sqrt{121}$ h) $\sqrt[3]{0,027}$ i) $\sqrt[4]{5\dfrac{1}{16}}$ j) $\sqrt[3]{-3\dfrac{3}{8}}$

7. Halla el valor **de** la expresión:

a) $5\sqrt{100}$ b) $-2\sqrt[4]{81}$ c) $\sqrt[5]{32} + \sqrt[3]{-8}$

d) $\sqrt[4]{625} - \sqrt[3]{-125}$ e) $12 - 6\sqrt[3]{0,125}$ f) $10 - \sqrt[4]{0,0081}$

g) $\dfrac{4m + \sqrt[3]{m}}{m}$ para $m = \dfrac{1}{8}$

h) $\dfrac{x + \sqrt{(x+y)^4}}{y}$ para $x = 5$; $y = \dfrac{1}{2}$

8. Di cuál es el dominio de definición de las expresiones siguientes:

a) $\sqrt[4]{x}$ b) $\sqrt[3]{x}$ c) $\sqrt[6]{x}$ d) $\sqrt[8]{x-2}$

Ejercicios (epígrafe 1)

1. Calcula aplicando las propiedades de las potencias y simplifica tanto como sea posible.

a) $\frac{4}{6}\ a^5 \cdot \frac{3}{6}\ a^2$

b) $\frac{6}{x^3} : 2y^{-3} \quad (x \neq 0;\ y \neq 0)$

c) $(a^{-1}b^{-2}c^3)^2 \quad (a \neq 0;\ b \neq 0)$

d) $(x + y)^8 : (x + y)^5 \quad (x \neq -y)$

e) $(a^{n-1} \cdot b^{-n})\ (a^{n} \cdot b^{2n} \cdot c) \quad (a \neq 0;\ b \neq 0)$

f) $\frac{abc}{a^{-2}b^{-2}c^{-2}} \quad (a,\ b,\ c \neq 0)$

g) $(r^{-4}s^{-3}t)^{-3} \quad (s \neq 0,\ r \neq 0,\ t \neq 0)$

h) $\frac{x^2 \cdot x^{-9}}{x^5 \cdot x^{-3}} \quad (x \neq 0)$

i) $\left[\frac{a^6}{2b^2}\right] \cdot \left[\frac{4b^5}{2a^3}\right]^3 (a \neq 0,\ b \neq 0)$

j) $\frac{(a - b)^{-2}}{(a^2 - b^2)^{-1}}\ (a \neq b)$

2. Aplica las propiedades dc las potencias y simplifica las bases.

a) $\frac{u^3x^7 - u^2x^5}{u^3x^6} \quad (u \neq 0,\ x \neq 0)$

b) $\frac{(x^2 + 6x + 8)^2}{(x^2 - 4)^2}\ (x \neq \pm 2)$

c) $\frac{(x + 3)^3}{(x^2 + 5x + 6)^3}\ (x \neq -3,\ x \neq -2)$

d) $\frac{(a^2 - b^2)^6}{(a^2 + 2ab + b^2)^3}\ (a \neq -b)$

e) $\frac{(a^2 - 9)^2}{a^2 + 6a + 9}\ (a \neq -3)$

f) $\frac{(a - b)^{-2}}{(a^2 - b^2)^{-2}}\ (a \neq b)$

3. Di cuáles **de** las siguientes expresiones son verdaderas *o* falsas; **las** falsas escríbelas correctamente.

a) $5^2 \cdot 5^3 = 5^6$

b) $x^3 : x^4 = x^2$

c) $\left[\frac{a^2}{4}\right]^3 = \frac{a^6}{4}$

d) $(3a^3)^2 = 9a^6$

e) $(x^n)^2 = x^{n+2}$

f) $2^2 \cdot 3^2 = 6^2$

g) $x^5 \cdot x^3 = x^2$

h) $x^2 \cdot y^2 = (xy)^4$

i) $\frac{4^5}{4^2} = 4^7$

4. Verifica que las siguientes igualdades se cumplen:

a) $\frac{3^{x+2} \cdot 9^{2x}}{27} = 3^{5x-1}$

b) $(x^{-2} - y^{-2})(x^2 - y^2)^{-1} = -(xy)^{-2}\ (x \neq 0, y \neq 0)$

c) $\frac{x^{-3}(2x) - (x^2 + 1)(-3x^{-4})}{x^{-6}} = 5x^4 + 3x^2\ (x \neq 0)$

Definición 1

> Si $a>0$:
>
> $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ con $m, n \in \mathbb{Z}$; $n>1$
>
> Si $a = 0$: $0^{m/n} = 0$ con $m>0$ y $n>1$.

Observa que con esta definición se ha extendido el concepto potencia a exponente racional.

En **particular si** $m = 1$ se cumple que $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$

Si m es múltiplo **de** n ($m = n \cdot k$) esta definición es compatible con la **de** potencia de exponente entero porque:

$$a^k = a^{(n \cdot k)/n} = \sqrt[n]{a^{n \cdot k}} = a^k$$

$$(a^2 = a^{8/4} = \sqrt[4]{a^8} = \sqrt[4]{a^{4 \cdot 2}} = a^2)$$

Atención: $\dfrac{km}{kn} = \dfrac{m}{n}$, luego **debe** cumplirse:

$a^{km/kn} = a^{m/n}$ con $m, n, k \in \mathbb{Z}$, $n > 1$, $k > 0$

pero esto se cumple ya **que:**

$$a^{km/kn} = \underbrace{\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}}_{\text{por teorema 2, epígrafe 1}} = a^{m/n} \text{ pues } a>0$$

Ejemplo 1

Calcula las siguientes potencias:

a) $3^{4/2}$ **b)** $8^{2/3}$ **c)** $4^{3/2}$ **d)** $25^{3/6}$ **e)** $2^{-1/2}$ **f)** $7^{8/12}$

Resolución

a) $3^{4/2} = 3^2 = 9$

b) $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

c) $4^{3/2} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$

d) $25^{3/6} = 25^{1/2} = \sqrt{25} = 5$

e) $2^{-1/2} = \sqrt{2^{-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$

Observa que $2^{-1/2} = \dfrac{1}{2^{1/2}}$ y esto se cumple en general.

e) $\sqrt[5]{x+3}$ f) $\sqrt{x^2-4}$ g) $\sqrt[4]{x^2-9}$ h) $\sqrt{x^2+6x+9}$

i) $\sqrt{4x-x^2}$ j) $\sqrt[3]{x^3-4x}$

9. Escribe las siguientes raíces con el menor indice **posible:**

a) $\sqrt[8]{3^4}$ b) $\sqrt[4]{7^6}$ c) $\sqrt[6]{5^2}$

d) $\sqrt[4]{4^3}$ e) $\sqrt[6]{x^2y^4}$ $(x \geqslant 0)$ f) $\sqrt[9]{(x+y)^6}$

g) $\sqrt[12]{6^4x^8}$ h) $\sqrt[20]{4x^2y^6z^8}$ $(x \geqslant 0; y \geqslant 0)$

10. Escribe las siguientes raices con el índice n **indicada:**

a) $\sqrt{5}$ $(n = 4)$ b) $\sqrt[3]{3^5}$ $(n = 6)$

c) $\sqrt{2^5}$ $(n = 4)$ d) $\sqrt[4]{6^3}$ $(n = 8)$

e) $\sqrt[5]{x^2y^3}$ $(y > 0)$ $(n = 10)$ f) $\sqrt[7]{\dfrac{x+y}{2}}$ $(n = 21)$

11. Resuelve **las** ecuaciones:

a) $x^3 = 4$ b) $x^3 = -4$
c) $x^4 = 64$ d) $x^4 = -10$
e) $x^6 = 49$ f) $x^{15} = 0$
g) $x^6 = 64$ h) $x^5 = 243$

12*. En el programa del cálculo de las aproximaciones de $\sqrt{2}$ realiza las variaciones necesarias para obtener las aproximaciones de las raíces de otros números.

Potencias de exponente racional. Propiedades

2. *Ampliación del concepto potencia*

El concepto potencia puede ser ampliado para incluir el caso de exponente racional. Para ello **nos limitaremos al caso en que la base es positiva *o* cero.**

3. *Propiedades de las potencias de exponente racional*

Para la potenciacion de exponente racional son **válidas** las mismas propiedades que ya conoces para exponente entero:

Para todos los números reales a y b $(a>0,\ b>0)$ y todos los números enteros m, n, p, q $(n>1,\ q>1)$ se cumple:

1. $a^{m/n} \cdot a^{p/q} = a^{m/n+p/q}$ (se escribe la misma base y se suman **los** exponentes).
2. $a^{m/n} \cdot b^{m/n} = (a \cdot b)^{m/n}$ (se multiplican las bases y se eleva al mismo exponente.)
3. $a^{m/n} : a^{p/q} = a^{m/n-p/q}$ (se escribe la misma base y se restan los exponentes).
4. $a^{m/n} : b^{m/n} = (a : b)^{m/n}$ (se dividen las bases y se eleva al mismo exponente).
5. $[a^{m/n}]^{p/q} = a^{mp/nq}$ (se toma la misma base y se multiplican los exponentes).

Además se cumple que:

$$\text{si } \frac{m}{n} < \frac{q}{p} \text{ entonces } \begin{cases} a^{m/n} < a^{p/q} & \text{si } a>1 \\ a^{m/n} > a^{p/q} & \text{si } a<1 \end{cases}$$

Ejemplo 1

Aplica las propiedades de las potencias:

a) $4^{1/2} \cdot 4^{1/3}$ **b)** $(-2)^{1/5} \cdot 3^{1/5}$ **c)** $6^{2/7} : 6^{1/4}$
d) $6^{1/6} : 3^{1/6}$ **e)** $[4^{3/4}]^{1/2}$ **f) Compara:** $4^{1/3}$ **y** $4^{1/2}$

Resolución

a) $4^{1/2} \cdot 4^{1/3} = 4^{1/2+1/3} = 4^{5/6}$

b) $(-2)^{1/5} \cdot 3^{1/5} = (-2 \cdot 3)^{1/5} = (-6)^{1/5}$

c) $6^{2/7} : 6^{1/4} = 6^{2/7-1/4} = 6^{1/28}$

d) $6^{1/6} : 3^{1/6} = (6 : 3)^{1/6} = 2^{1/6}$

e) $(4^{3/4})^{1/2} = 4^{3/4 \cdot 1/2} = 4^{3/8}$

f) $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ luego $4^{1/3} < 4^{1/2}$. ■

Demostremos las propiedades 1 y 2; las restantes las puedes demostrar como ejercicios.

1. $a^{m/n} \cdot a^{p/q} = a^{m/n+p/q}$

Demostración

Consideremos $a^{m/n} = a^{mq/nq} = u$ y $a^{p/q} = a^{np/nq} = v$, luego

$$a^{mq} = u^{nq} \text{ y } a^{np} = v^{nq}$$

multiplicando ambas igualdades miembro a miembro tenemos:

$$a^{mq} \cdot a^{np} = u^{nq} \cdot v^{nq}$$

aplicando las propiedades de la multiplicación de las potencias de exponente entero obtenemos:

f) $7^{8/12} = 7^{2/3} = \sqrt[3]{7^2} = \sqrt[3]{49} \approx 3{,}66$ ■

Nota: La potencia $a^{m/n}$ de exponente **racional** con **base** negativa puede definirse de igual forma que **la** de base **positiva,** excepto **en los** casos **en que** n sea par.

Por ejemplo $(-1)^{1/2}$, $(-3)^{3/4}$, $(-5)^{2/4}$ no están definidas.

Si en la fracción $\frac{m}{n}$, n es par, y en la fracción irreducible $\frac{m'}{n'}$, n' es impar, entonces también se puede definir estableciendo que: $a^{m/n} = a^{m'/n'} = \sqrt[n']{a^{m'}}$

Por ejemplo: $(-1)^{2/6} = (-1)^{1/3} = \sqrt[3]{-1}$

Atención: En ~si caso *no* se puede escribir directamente que $(-1)^{2/6} = \sqrt[6]{(-1)^2}$ pues **la definición exige que se simplifique primero, antes de pasar al radical**

Ejercicios (epígrafe 2)

1. Escribe **las siguientes** potencias como raíces:

a) $5^{1/2}$ b) $6^{2/3}$ c) $13^{1/4}$ d) $\left[\frac{4}{9}\right]^{2/3}$

e) $x^{2/7}$ f) $(xy)^{3/11}$ g) $(x^2)^{5/6}$ h) $\left[\frac{m}{n}\right]^{4/5}$ $(n \neq 0)$

i) $13^{-1/3}$ j) $21^{-1/4}$ k) $\left[\frac{5}{8}\right]^{-1/3}$ l) $(0{,}06)^{-2/3}$

2. **Halla el valor de las siguientes expresiones:**

a) $4^{1/2}$ b) $8^{1/3}$ c) $81^{1/4}$ d) $16^{3/2}$
e) $125^{2/3}$ f) $32^{2/5}$ g) $64^{4/6}$ h) $16^{2/4}$

3. Escribe **las** siguientes raíces como potencias:

a) $\sqrt[3]{5}$ b) $\sqrt{11^3}$ c) $\sqrt[4]{10}$ d) $\sqrt[3]{4^2}$

e) $\sqrt[5]{\left[\frac{1}{2}\right]^2}$ f) $\sqrt[3]{\left[\frac{5}{6}\right]^4}$ g) $\sqrt[7]{x^2}$ h) $\sqrt{32^{-3}}$

i) $\sqrt[6]{(ab)^3}$ $(a \cdot b \geqslant 0)$ j) $\sqrt[5]{\left[\frac{1}{2}\right]^3}$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones aplicando **la** definición **del** epígrafe 1.

a) $\sqrt[3]{x} = 3$ b) $\sqrt{x^3} = 8$ c) $\sqrt[4]{(x+2)^2} = 4$

d) $\sqrt[6]{x^2 - 6x + 9} = 2$ e) $\sqrt[5]{\frac{3-x}{x}} = 2 (x \neq 0)$

3. **Transforma las siguientes potencias en un producto de potencias:**

a) $a^{4/5}$ b) $x^{1/2}$ $(x \geqslant 0)$ c) $6^{2/3}$

d) $(x^2 - y^2)^{1/3}$ e) $(a^2 + 2ab + b^2)^{4/7}$ f) $(x^2 + 7x + 12)^{2/9}$

4. **Transforma las siguientes potencias en un cociente de potencias:**

a) $a^{3/4}$ b) $3^{5/6}$ c) $\left[\dfrac{2}{3}\right]^{1/3}$

d) $(-2)^{4/5}$ e) $\left[-\dfrac{1}{2}\right]^{1/3}$ f) $\left[\dfrac{3}{4}\right]^{3/4}$

g) $(b + 1)^{5/8}$ $(b \geqslant 1)$ h) $(x + y)^{2/7}$ $(x \neq -y)$

5. **Efectúa las operaciones indicadas dejando la respuesta con exponente racional.** Considera positivas las variables.

a) $(x^{1/3} - x^{1/2})\, x$ b) $(a^{1/2} + b^{1/2})(a^{1/2} - b^{1/2})$

c) $(a^{1/2} + a^{-1/2})^2$ d) $(x^{1/2} \cdot y^{1/2})^{1/4}$

e) $(2x^{1/2} + 3 + x^{-1/2})(x + x^{1/2})$ f) $(x^{1/3} + y^{1/3})(x^{2/3} - x^{2/3}y^{1/3} + y^{2/3})$

6. **Calcula aplicando las propiedades de las potencias y da tu respuesta en** forma **de raíz:**

a) $\sqrt[10]{x} \cdot \sqrt[15]{x}$ $(x \geqslant 0)$ b) $\sqrt[7]{y^2} \cdot \sqrt[3]{y^{-1}}$ $(y \neq 0)$

c) $\sqrt[8]{a^3} \cdot \sqrt[12]{a}$ $(a \geqslant 0)$ d) $\sqrt[3]{b^2\sqrt{b}}$ $(b \geqslant 0)$

e) $\sqrt[10]{y\sqrt{y^2}}$ $(y \geqslant 0)$ f) $\sqrt[5]{x^2\sqrt[4]{x^{-3}}}$ $(x > 0)$

g) $\sqrt[8]{x\sqrt{x^3}}$ $(x \geqslant 0)$ h) $\sqrt{\sqrt[3]{4x}}$ $(x \geqslant 0)$

i) $\left(\sqrt{x} - \sqrt{x + 3}\right)^2$ $(x \geqslant 0)$

7. **Verifica si las igualdades siguientes se cumplen para los valores admisibles de la variable transformando en exponente fraccionario:**

a) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}}{\sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{a}}} = 1$ b) $\dfrac{\sqrt[6]{a^3\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[9]{a^5\sqrt{a}}} = 1$ c) $\dfrac{a\sqrt[3]{b^2a}}{b\sqrt{ab}} = 1$

8. Halla el valor de las siguientes expresiones:

a) $4x^{1/3} + 5x^{-1/3} - 6x^{2/3}$ para $x = 8$

$c^{-1} + \dfrac{3}{x^{-1}} + \dfrac{1}{2x^0} - 8x^{1/2} + 4x^{-3/2}$ para $x = 9$

extrayendo raíz de índice nq

$$\sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{(mq+np)/nq} = u \cdot v$$

aplicando en el exponente la propiedad distributiva de la división con respecto a la adición obtenemos:

$$a^{m/n + p/q} = u \cdot v$$

sustituyendo $u = a^{m/n}$ y $v = a^{p/q}$ se tiene: $a^{m/n} \cdot a^{p/q} = a^{m/n + p/q}$.

2. $a^{m/n} \cdot b^{m/n} = (a \cdot b)^{m/n}$

Demostración: Consideremos $u = a^{m/n}$. $v = b^{m/n}$, entonces:

$$u^n = a^m; \; v^n = b^m$$

multiplicando ambas igualdades miembro a miembro obtenemos:

$$u^n \cdot v^n = a^m \cdot b^m$$

aplicando la propiedad de la multiplicación de potencias de igual exponente entero obtenemos:

$$(u \cdot v)^n = (a \cdot b)^n$$

según la definición de exponente racional tenemos:

$$u \cdot v = (a \cdot b)^{m/n}$$

sustituyendo $u = a^{m/n}$ y $v = b^{m/n}$ queda: $a^{m/n} \cdot b^{m/n} = (a \cdot b)^{m/n}$

Ejercicios (epígrafe 3)

1. Aplica las propiedades de las potencias y simplifica en los casos posibles:

a) $a^{1/3} \cdot a^{1/2}$ $(a \geqslant 0)$
b) $a^{-1/4} \cdot a^{4/6} \cdot a^{2/3}$ $(a \geqslant 0)$
c) $x^{-2/3} \cdot y^{1/6} \cdot x^{1/2}$ $(x > 0,\ y \geqslant 0)$
d) $(x^6)^{1/2}$ $(x \geqslant 0)$
e) $(a^5)^{1/2}$ $(a > 0)$
f) $[a^{3/2}]^{4/9}$ $(a \geqslant 0)$
g) $(2a^4\, b^6)^{3/2}$
h) $a^{-1/2} : b^{1/2}$ $(a > 0,\ b > 0)$

2. Determina el valor de x de forma tal que se cumpla la igualdad:

a) $a^{1/3} \cdot x = a^{4/5}$
b) $x \cdot 3a^{1/2} = 6a^{7/6}$
c) $z^{2/3} \cdot x = (zy)^{2/3}$ $(z \neq 0)$
d) $(x)^{2/3} = a^{1/8}$ $(a \geqslant 0,\ x > 0)$
e) $3^{1/2} \cdot 3^{4/5} = 3^x$
f) $3^{1/4} : x = 3^{1/2}$
g) $x : 5^{1/2} = 3^{1/2}$
h) $x^{7/8} \cdot 5^{7/8} = 15^{7/8}$
i) $x : 2^{5/6} = 2^{3/8}$

j*) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^x\right]^6 = x^2$

k*) $\left[\frac{1}{2}\right]^{6/5} \cdot x^{6/5} = \left[\frac{3}{5}\right]^x$

l*) $x^{1/3} : 3^x = \left[\frac{1}{9}\right]^x$

Teorema 1

> Sean a, b, r, s, $(a > 0; b > 0)$ números reales cualesquiera, entonces se cumple:
> 1. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
> 2. $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$
> 3. $a^r : a^s = a^{r-s}$
> 4. $a^r : b^r = (a : b)^r$
> 5. $(a^r)^s = a^{rs}$
> 6. si $r < s$ entonces
> $a^r < a^s$ si $a > 1$ y
> $a^r > a^s$ si $a < 1$

5. *Logaritmación*

La potenciación y la radicación san operaciones inversas:

$a^n = b$	y	$\sqrt[n]{b} = a$
Dados a y n obtenemos b		Dados b y n obtenemos a

Por ejemplo, de $2^3 = 8$ resulta $\sqrt[3]{8} = 2$.

Pero como la potenciación **no** es **conmutativa** (en general $a^b \neq b^a$), si se quiere determinar el exponente dadas la potencia y la **base** no se puede utilizar la radicacibn.

En este caso se introduce una nueva operación, **la logaritmación**, que también es una operación inversa de la potenciación.

Definición 1

> Dada una base $a > 0$, $a \neq 1$ y un número $b > 0$, se llama logaritmo de b en base a y *se* denota $\log_a b$, al numero c al cual hay que elevar la base para obtener el número: $a^c = b$.

Simbólicamente la definición anterior se escribe:

$$\boxed{\log_a b = c \text{ si y solo si } a^c = b.}$$

Por lo que podemos plantear **que:**

$$\boxed{a^{\log_a b} = b \text{ (Identidad fundamental)}}$$

c) $x^{3/4} - x^{1/2} + 2x^{1/4} + 9 \qquad 2x^{-1/4} + 5x^{-1/2} - x^{-3/4}$ **para** $x = 16$.

4. *Potencias de exponente irracional. Propiedades*

Hemos definido **las** potencias de exponente **racional** $a^{m/n}$ **para todo** $a \in \mathbb{R}$. **Si** $a > 0$ se puede definir u' para todo $c \in \mathbb{R}$, **puesto que:**

Si $a > 0$ para todos los números reales a y c existe un Único numero real b tal que $a^c = h$.

En este libro solo ilustraremos como se pueden obtener valores aproximados de potencias de exponente irracional. Para ello se utilizan las aproximaciones racionales de los números irracionales, es decir, si quisiéramos calcular $3^{\sqrt{2}}$ haríamos previamente aproximaciones racionales del exponente $\sqrt{2}$, es decir:

$$\begin{array}{rcl}
1 & < \sqrt{2} < & 2 \\
1,4 & < \sqrt{2} < & 1,5 \\
1,41 & < \sqrt{2} < & 1,42 \\
1,414 & < \sqrt{2} < & 1,415 \\
1,4142 & < \sqrt{2} < & 1,4143 \\
\ldots & & \ldots
\end{array}$$

entonces para la potencia b = $3^{\sqrt{2}}$ tendremos:

$$\begin{array}{rcl}
3 = 3^1 & < b < & 3^2 = 9 \\
4,65554 \approx 3^{1,4} & < b < & 3^{1,5} \approx 5,19615 \\
4,70697 \approx 3^{1,41} & < b < & 3^{1,42} \approx 4,75896 \\
4,72770 \approx 3^{1,414} & < b < & 3^{1,415} \approx 4,73289 \\
4,72874 \approx 3^{1,4142} & < b < & 3^{1,4143} \approx 4,72926 \\
4,72879 \approx 3^{1,41421} & < b < & 3^{1,41422} \approx 4,72884 \\
4,72880 \approx 3^{1,414213} & < b < & 3^{1,414214} \approx 4,72881 \\
\ldots & & \ldots
\end{array}$$

Si nos fijamos en estas desigualdades el miembro derecho va disminuyendo su valor y el miembro izquierdo va aumentando. esto hace que nos vayamos acercando cada vez **más** al valor de la potencia, luego: $3^{\sqrt{2}} \approx 4,728\ 80\ldots$

Para representar la potencia con todas las cifras correctas, debemos tomar solamente las cifras que coinciden en ambos miembros, por ejemplo:

con dos cifras correctas: $3^{\sqrt{2}} = 4,7$
con tres cifras correctas: $3^{\sqrt{2}} = 4,72$
con cinco cifras correctas: $3^{\sqrt{2}} \approx 4,728\ 8$

Con estas ideas puedes elaborar un programa de computación que te permita calcular aproximaciones decimales de cualquier potencia de exponente irracional Inténtalo.

Para las potencias de exponente real se cumplen las propiedades ya conocidas de la potenciación.

4. Comprueba que las siguientes igualdades son verdaderas:

a) $\log_2 4 + \log_2 8 = \log_2 32$ b) $\log_3 9 + \log_3 27 = \log_3 243$
c) $2 \log_3 9 = \log_3 81$ d) $\log_3 27 - \log_3 9 = \log_3 3$
e) $3 \log_2 4 = \log_2 64$ f) $\log_4 64 - \log_4 4 = \log_4 16$

Radicales. Operaciones con radicales

6. *Propiedades de los radicales. Simplificación de radicales*

Debido a que $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ **para** $a>0$, los radicales cumplen propiedades que son consecuencia inmediata de las propiedades de las potencias **de** exponente racional:

Propiedades de los radicales

1. $a^{1/n} \cdot b^{1/n} = (a \cdot b)^{1/n}$	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
2. $a^{1/n} : b^{1/n} = (a : b)^{1/n}$	$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$
3. $[a^{1/n}]^m = a^{m/n}$	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
4. $[a^{1/n}]^{1/m} = a^{1/mn}$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
5. $a^{km/kn} = a^{m/n}$	$\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$

Estas propiedades son de mucha aplicación en las operaciones con radicales, en la introducción y extracción de factores en el radical, en la racionalización de denominadores y en la simplificación de radicales.

En el **trabajo** con los **radicales es** conveniente trabajar con ellos simplificados.

Un radical está simplificado cuando:

El índice no tiene factores comunes can el exponente del radicando.
Se han extraido los factores que son raices **exactas.**
El radicando no tiene denominador.

Ejemplo 1

Calcula los siguientes logaritmos y fundamenta:

a) $\log_8 64$ **b)** $\log_3 \left(\frac{1}{3}\right)$ **c)** $\log_{81} 9$

d) $\log_a 1$ **e)** $\log_a a$

Resolución

a) $\log_8 64 = 2$ ya que $8^2 = 64$

b) $\log_3 \left(\frac{1}{3}\right) = -1$ ya que $3^{1} = \frac{1}{3}$

c) $\log_{81} 9 = \frac{1}{2}$ **ya que** $81^{1/2} = 9$

d) $\log_a 1 = 0$ ya **que** $a^0 = 1$

e) $\log_a a = 1$ ya que $a^1 = a$. ■

Ejercicios (epígrafe 5)

1. **Halla los** siguientes logaritmos:

a) $\log_{10} 100$ b) $\log_7 49$ c) $\log_2 \sqrt{2}$

d) $\log_4 1$ e) $\log_3 \frac{1}{9}$ f) $\log_{10} 0{,}001$

g) $\log_{0.5} 8$ h) $\log_{1/3} \left(\frac{1}{27}\right)$ i) $\log_{\sqrt{2}} 4$

j) $\log_{\sqrt{3}} (3\sqrt{3})$ k) $\log_{\sqrt[3]{3}} (3\sqrt[3]{9})$ l) $\log_{\sqrt[4]{2}} \sqrt[12]{2}$

2. Escribe en notación logarítmica las siguientes expresiones exponenciales:

a) $5^2 = 25$ b) $10^{1} = 0{,}1$ c) $6^{1/3} = \sqrt[3]{6}$

d) $2^{2} = 0{,}25$ e) $10^{1{,}3979} = 25$ f) $(\sqrt{3})^4 = 9$

g) $2^{2{,}3219} = 0{,}2$ h) $3^{-0{,}2} = 0{,}803$ i) $3^{3{,}4} = 41{,}90$

j) $2^{5{,}6724} = 51$ k) $10^{0{,}2553} = 1{,}8$ l) $10^{2{,}8} = 631{,}0$

3. Expresa en forma exponencial los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 8 = 3$ b) $\log_4 2 = 0{,}5$ c) $\log_6 216 = 3$

d) $\log_a P = m\ (a > 0)$ e) $\log_b Q = n + 1\ (b > 0)$ f) $\log_{\sqrt[3]{4}} 16 = 6$

g) $\log_5 \sqrt[3]{5} = \frac{1}{3}$ h) $\log_{16} 8 = \frac{3}{4}$ i) $\log_2 0{,}125 = -3$

j) $\log_{10} 6 = 0{,}77815$ k) $\log_5 0{,}2 = -1$ l) $\log_4 8 = \frac{3}{2}$

Observa que en la practica se extraen del radical los factores cuyo exponente es mayor o igual que el índice. En esos casos se **divide** el exponente por el **índi-ce** y el **cociente** es el exponente de la potencia que "sale". mientras que el resto es el exponente de la potencia que "queda" en el radical.

En efecto, $\sqrt[n]{a^{nk+r}} = \sqrt[n]{a^{nk} \cdot a^r} = \sqrt[n]{a^{nk}} \cdot \sqrt[n]{a^r} = a^k \sqrt[n]{a^r}$

A veces es necesario introducir factores en un radical, para ello **es** necesario **ele-varlo** a un exponente igual al índice del radical.

Ejemplo 3

Introduce el factor a en el radical $a\sqrt[5]{b^3c^2}$.

Resolución

$$a\sqrt[5]{b^3c^2} = \sqrt[5]{a^5} \cdot \sqrt[5]{b^3c^2} = \sqrt[5]{a^5b^3c^2} . \quad \blacksquare$$

Ejemplo 4

Simplifica los siguientes radicales (Considera **que** las variables y expresiones que aparecen son todas positivas.)

a) $\sqrt[4]{a^2x^6}$ **b)** $\sqrt{x(x+y)^3}$ **c)** $\left[\sqrt{a+1}\right]^5$

d) $\sqrt{1\ \mathbf{OSO}}$ **e)** $\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}$ **f)** $\sqrt[4]{\dfrac{a^5+a^4}{16x^4}}$

g) $\sqrt[4]{a^2+2ab+b^2}$

Resolución

a) $\sqrt[4]{a^2x^6} = \sqrt[4]{(ax^3)^2} = \sqrt{ax^3} = x\sqrt{ax}$

b) $\sqrt{x(x+y)^3} = (x+y)\sqrt{x(x+y)}$

c) $\left[\sqrt{a+1}\right]^5 = \sqrt{(a+1)^5} = (a+1)^2\sqrt{a+1}$

d) $\sqrt{1\ 080} = \sqrt{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5} = 2 \cdot 3\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5} = 6\sqrt{30}$

e) $\sqrt{\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[6]{a^4} = \sqrt[3]{a^2}$

Por ejemplo, están simplificados los siguientes radicales

$$\sqrt{a},\ \sqrt[3]{a^2},\ 2\sqrt[3]{x},\ a^2b\sqrt[5]{a}.$$

No están expresados en su forma mas simple (simplificados) los siguientes radicales:

$$\sqrt[6]{a^4},\ \sqrt[3]{a^3b},\ \sqrt{\frac{x+y}{x}}.$$

Para simplificar un radical es frecuente realizar las transformaciones siguientes:

Reducir el índice del radical.

Ejemplo 1

Reduce **el índice del radical siguiente:** $\sqrt[6]{a^3}$, $a > 0$.

Resolución

Se descomponen en faclores el índice y **el exponente**

$$\sqrt[6]{a^3} = \sqrt[2\cdot3]{a^{1\cdot3}}$$

se cancelan los factores comunes:

$$\sqrt[6]{a^3} = \sqrt[2\cdot3]{a^{1\cdot3}} = \sqrt{a}.\ \blacksquare$$

Extraer factores del radical

Ejemplo 2

Extrae todos los factores posibles del radical:

a) $\sqrt[3]{a^3b^6c^2}$ **b)** $\sqrt[4]{a^5b^2}$ $(a,\ b,\ c \geqslant 0)$

Resolución

a) En este caso a^3 y b^6 tienen raíces **exactas.** entonces:

$$\sqrt[3]{a^3b^6c^2} = \sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{b^6}\cdot\sqrt[3]{c^2} = ab^2\sqrt[3]{c^2}$$

b) En este caso ninguno de los factores tiene raíz **exacta.** pero como el exponente de a (5) es mayor **que el** índice (4) se puede escribir:

$$\sqrt[4]{a^5b^2} = \sqrt[4]{a^4\cdot a\cdot b^2} = \sqrt[4]{a^4}\cdot\sqrt[4]{ab^2} = a\sqrt[4]{ab^2}$$

i) $\sqrt[3]{\dfrac{8}{125}}$ j) $\sqrt[3]{3^6 : 5^3}$

k) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$ l) $\sqrt[6]{2}\ \sqrt[3]{\sqrt{5}}$

m) $\sqrt{a\sqrt{a}}\quad (a \geqslant 0)$ n) $\sqrt[4]{a^{2n+1}}\ \sqrt[4]{a^{-1}}\quad (a > 0)$

o) $\sqrt[5]{3^2 \cdot 5^3}\ \sqrt[5]{3^3 \cdot 5^2}$ p) $\sqrt[3]{9 + \sqrt{17}}\ \sqrt[3]{9 - \sqrt{17}}$

2. Di cuales de las siguientes relaciones **son verdaderas:**

a) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\ (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$ b) $\sqrt[n]{a - b} = \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}\ \ (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$

c) $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n+p]{a}\ \ (a \geqslant 0)$ d) $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}\ \ (a \geqslant 0)$

e) $\sqrt[n]{a + b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}\ (a \geqslant 0, b \geqslant 0)$ f) $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[np]{a}\ \ (a \geqslant 0)$

g) $\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p\quad (a \geqslant 0)$ h) $\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}\quad (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$

3. Simplifica **los** siguientes radicales:

a) $\sqrt[6]{16}$ b) $\sqrt[4]{a^2}\ \ (a \geqslant 0)$ c) $\sqrt[6]{a^3}\ \ (a \geqslant 0)$

d) $\sqrt[6]{(x+y)^8}\ \ (x > -y)$ e) $\sqrt[n]{a^{2n}}$ f) $\sqrt[n]{a^{n^2}}\ \ (a \geqslant 0)$

g) $\sqrt[4]{x^7}\ \ (x \geqslant 0)$ h) $\sqrt[3]{x^4 y}$ i) $\sqrt[3]{ab\,(a + b)^3}$

j) $\sqrt{24a\,(b+c)^3}\ \ (b \geqslant c)$ k) $\sqrt{4x^4 + 12x^6}$ l) $\sqrt[3]{64x^3 y^{-3} z^4}\ \ (y \neq 0)$

m) $\dfrac{2}{a}\ \sqrt[4]{16a^5 b^4}\ (a > 0;\ b \geqslant 0)$ n) $\sqrt{25x^3 - 50x^2}\quad (x \geqslant 2)$

o) $\sqrt[4]{\dfrac{128(a-b)^5}{81\,(a+b)^4}}\quad (a > b > 0)$ p) $\sqrt[4]{\dfrac{x^8 y^3}{81\,z^5}}\ \ (y \geqslant 0;\ z > 0)$

f) $\sqrt[4]{\dfrac{a^5 + a^4}{16x^4}} = \dfrac{\sqrt[4]{a^5 + a^4}}{\sqrt[4]{16a^4}} = \dfrac{\sqrt[4]{a^4(a+1)}}{2x} = \dfrac{a\sqrt[4]{a+1}}{2x}$

g) $\sqrt[4]{a^2 + 2ab + b^2} = \sqrt[4]{(a+b)^2} = \sqrt{a+b}$. ■

Ejemplo 5

Introduce en el radical el factor exterior:

a) $5\sqrt{3}$

b) $x^2y\sqrt[3]{z}$

c) $(a+b)\sqrt[3]{\dfrac{3}{a+b}}$ $(a+b>0)$

d) $\dfrac{1}{x+3}\sqrt{x^2+5x+6}$ $(x<-3 \text{ o } x \geqslant -2)$

Resolución

a) $5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{75}$

b) $x^2y\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{(x^2y)^3z} = \sqrt[3]{x^6y^3z}$

c) $(a+b)\sqrt[3]{\dfrac{3}{a+b}} = \sqrt[3]{\dfrac{3(a+b)^3}{a+b}} = \sqrt[3]{3(a+b)^2}$

d) $\dfrac{1}{x+3}\sqrt{x^2+5x+6} = \sqrt{\dfrac{x^2+5x+6}{(x+3)^2}} = \sqrt{\dfrac{x+2}{x+3}}$. ■

Ejercicios (epígrafe 6)

1. Calcula aplicando las propiedades **de** los radicales:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{13{,}5}$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{2}{5}} \cdot \sqrt[3]{-20}$

d) $\sqrt[4]{30} : \sqrt[4]{5}$

e) $\sqrt[3]{40} : \sqrt[3]{-5}$

f) $\sqrt[4]{a^2}$ $(a \geqslant 0)$

g) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^4$.

h) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{6}}$

Observa que al expresarlos con un índice común (18) hemos tomado el mínimo común múltiplo (mcm) entre **los índices** (9 **y** 6) **y el** factor k por el que hemos multiplicado el índice y el exponente del radicando ($k = 2$; $k = 3$) ***es*** el cociente entre el mcm y el índice del radical en cuestión.

Ejemplo 1

Reduce los siguientes radicales a un índice común:

a) $\sqrt{5}\ ,\ \sqrt[3]{4}$ **b)** $\sqrt[4]{a^3}\ ;\ \sqrt[3]{a}\ ;\ \sqrt[8]{a^5}$ $(a \geqslant 0)$

Resolución

a) $\sqrt{5}\ ,\ \sqrt[3]{4}$ mcm $(2; 3) = 6$ luego $\sqrt{5} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{125}$

$$\sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{4^2} = \sqrt[6]{16}$$

b) $\sqrt[4]{a^3}\ ;\ \sqrt[3]{a}\ ;\ \sqrt[8]{a^5}$ mcm $(3; 4; 8) = 24$ luego $\sqrt[4]{a^3} = \sqrt[24]{a^{18}}$

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[24]{a^8}$$

$$\sqrt[8]{a^5} = \sqrt[24]{a^{15}}\ .\ ■$$

La reducción de radicales a un indice comun nos permite comparar radicales Comparando solamente los radicandos.

Ejemplo 2

Ordena los siguientes radicales de menor a mayor (en forma creciente):

a) $\sqrt[6]{2}\ ;\ \sqrt[4]{5}\ ;\ \sqrt[3]{3}$ **b)** $\sqrt[4]{3}\ ;\ \sqrt{2}\ ;\ \sqrt[8]{5}$

Resolución

a) $\sqrt[6]{2};\ \sqrt[4]{5};\ \sqrt[3]{3}$ mcm $(3; 4; 6) = 12$

$$\sqrt[6]{2} = \sqrt[12]{2^2} = \sqrt[12]{4}$$

$\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$ como $4 < 81 < 125$

$\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}$ entonces $\sqrt[6]{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5}$

b) $\sqrt[4]{3};\ \sqrt{2};\ \sqrt[8]{5}$ mcm $(2; 4; 8)$

luego $\sqrt[4]{3} = \sqrt[8]{3^2} = \sqrt[8]{16}$

4. Introduce el factor en el radicando:

a) $7\sqrt{a}$ $(a \geqslant 0)$ b) $5\sqrt[3]{a^2}$ c) $2\sqrt[5]{3x^2y^2}$

d) $2x\sqrt{4y}$ $(y \geqslant 0)$ e) $a^2b\sqrt[3]{5}$ f) $a\sqrt[6]{\frac{3x}{a^2}}$ $(x \geqslant 0,\ a \neq 0)$

g) $\frac{1}{3}x\sqrt[3]{6a}$ h) $(x+y)\sqrt[4]{\frac{2}{x+y}}$ $(x+y>0)$

i) $(a+b)\sqrt[3]{a-b}$ $(a>b,\ b \geqslant 0)$

j) $(x+y)\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$ $(x>0,\ y>0,\ x>y)$

k) $\frac{1}{a-b}\sqrt{a^2-b^2}$ $(a>b>0)$ l) $a^2\sqrt[n]{a}$ $(a>0)$

7. *Reducción de radicales a un índice común. Comparación de radicales*

En la práctica se hace necesario calcular con radicales **que** tienen índices diferentes y, para hacerlo, en muchas ocasiones es necesario **reducirlos** a un **índice común**. Esta reducción a un indice común es completamente análoga a la **reducción do** fracciones a un denominador comun; recuerda que los radicales se pueden escribir como potencias de exponente racional.

Para reducir **dos** radicales **a** un índice comun:

Se busca el mcm **de** los indices.
En **cada radical,** se multiplica el indice **y** el exponente del radicando por el factor necesario para que el indice sea el mcm hallado.

Los radicales $\sqrt[9]{a^2}$, $\sqrt[6]{a}$ se pueden expresar con el mismo índice de la forma siguiente:

a) $\sqrt[9]{a^2} = \sqrt[9\cdot 2]{a^{2\cdot 2}} = \sqrt[18]{a^4}$

b) $\sqrt[6]{a} = \sqrt[6\cdot 3]{a^{1\cdot 3}} = \sqrt[18]{a^3}$

aplicando la propiedad $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$

d) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{x^2-3x}$ y $a^2\sqrt[4]{x^2-3x}$

no son semejantes $4\sqrt{2}$ y $6\sqrt[3]{2}$ tampoco lo son $8\sqrt[4]{x}$ y $3\sqrt{y}$.

Para sumar y restar radicales semejantes procedemos igual que cuando **reducimos** términos **semejantes.**

Ejemplo 1

Calcula:

a) $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}$

b) $-8\sqrt[3]{a}+6\sqrt[3]{a}$

c) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{a^3}+\frac{1}{3}\sqrt[4]{a^3}$ $(a\geqslant 0)$

d) $0{,}5\sqrt{x+y}-\sqrt{x+y}+3\sqrt{x+y}$ $(x\geqslant -y)$

e) $a\sqrt[5]{5b}+3\sqrt[5]{5b}-b\sqrt[5]{5b}$

f) $5\sqrt[6]{3xy}-2\sqrt[5]{a}+4\sqrt[6]{3xy}$ $(xy\geqslant 0)$

Resolución

a) $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

b) $-8\sqrt[3]{a}+6\sqrt[3]{a}=-2\sqrt[3]{a}$

c) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{a^3}+\frac{1}{3}\sqrt[4]{a^3}=\frac{5}{6}\sqrt[4]{a^3}$

d) $0{,}5\sqrt{x+y}-\sqrt{x+y}+3\sqrt{x+y}=2{,}5\sqrt{x+y}$

e) $a\sqrt[5]{5b}+3\sqrt[5]{5b}-b\sqrt[5]{5b}=(a+3-b)\sqrt[5]{5b}$

f) $5\sqrt[6]{3xy}-2\sqrt[5]{a}+4\sqrt[6]{3xy}=9\sqrt[6]{3xy}-2\sqrt[5]{a}$. ■

A menudo **es preciso** simplificar previamente cada sumando, antes de reducir **los** radicales semejantes como muestra el ejemplo siguiente:

Ejemplo 2

Calcula:

a) $3\sqrt{8}-2\sqrt{18}+4\sqrt{50}$ b) $4\sqrt[3]{5}-6\sqrt[6]{25}+\sqrt[9]{x^3}$

$\sqrt{2} = \sqrt[8]{3^2} = \sqrt[8]{9}$ como $5 < 9 < 16$

$\sqrt[8]{5}$ entonces $\sqrt[8]{5} < \sqrt[4]{3} < \sqrt{2}$

Ejercicios (epígrafe 7)

1. Reduce los siguientes radicales a un índice común. Considera positivas todas las variables y expresiones que aparecen.

a) $\sqrt{5}\ ;\ \sqrt[4]{a^3}$ b) $\sqrt[3]{9}\ ;\ \sqrt{64}$

c) $\sqrt{xy}\ ;\ \sqrt[3]{a^2 b}$ d) $\sqrt[3]{ax^2 - y^2}\ ;\ \sqrt[6]{a + b^2}\ ;\ \sqrt[9]{x - 1}$

e) $\sqrt[3]{xy}\ ;\ \sqrt{x}\ ;\ \sqrt[15]{xz}$ f) $\sqrt[8]{xzy}\ ;\ \sqrt[3]{\dfrac{z}{y}}\ ;\ \sqrt[12]{x}$

g) $\sqrt[3]{a^2}\ ;\ \sqrt[6]{a^5}\ ;\ \sqrt[9]{c^4}$

2. Si sabemos que $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ con $0 \leqslant a \leqslant b$, compara los siguientes radicales ordenándolos en forma decreciente:

a) $\sqrt{10}\ ;\ \sqrt[3]{11}\ ;\ \sqrt[4]{8}$ b) $\sqrt[6]{2}\ ;\ \sqrt[4]{5}\ ;\ \sqrt[5]{2}$

c) $\sqrt[5]{25}\ ;\ \sqrt[3]{3}\ ;\ \sqrt[6]{2}$ d) $\sqrt[4]{x}\ ;\ \sqrt{y^2}\ ;\ \sqrt[8]{x}$ $(x < y,\ x > 1)$

8. *Radicales semejantes. Adición y sustracción de radicales*

Desde grados anteriores conoces los términos semejantes y has trabajado con ellos. Cuando los términos con que se trabaja son radicales tenemos un caso especial de términos semejantes.

> Dos radicales que tienen igual índice e igual radicando se llaman radicales semejantes.

son semejantes los siguientes radicales:

a) $\sqrt{a}$ y $5\sqrt{a}$ b) $2\sqrt[3]{7}$ y $-5\sqrt[3]{7}$

c) $2a^2b\sqrt[5]{x + y}$ y $3ab^2\sqrt[5]{x + y}$

f) $\sqrt{20} + \sqrt{45} - 4\sqrt{5}$

g) $7\sqrt{\dfrac{a}{7}} - 2\sqrt{7a} + 2a\sqrt{\dfrac{7}{a}}$ $\quad (a > 0)$

h) $a\sqrt{ab^2c^3} + b\sqrt{a^3bc^2} + c\sqrt{a^2b^3c}$ $\quad (a \geqslant 0;\ b \geqslant 0;\ c \geqslant 0)$

i) $xy\sqrt[4]{x^5y^4} + \sqrt[4]{x^9y^8}$ $\quad (x \geqslant 0;\ y \geqslant 0)$

j) $\sqrt{x(x+y)^2} - \sqrt{x(x-y)^2} - \dfrac{1}{x}\sqrt{x^3y^2}$ $\quad (x \geqslant 0;\ y \geqslant 0)$

k) $4x\sqrt{\dfrac{3a}{x}} - 9a\sqrt{\dfrac{x}{3a}} + ax\sqrt{\dfrac{3}{ax}}$ $\quad (a > 0;\ x > 0)$

l) $\sqrt{8m^3} - \dfrac{1}{2}\sqrt{50m} + 5\sqrt{\dfrac{m}{2}} - 3m\sqrt{\dfrac{2}{9m}}$ $\quad (m > 0)$

m) $\sqrt{\dfrac{ab^2}{2}} - \sqrt{\dfrac{a^4b}{3}} + \sqrt{\dfrac{a^3}{8}} + \sqrt{\dfrac{3b}{a^2}}$ $\quad (a > 0,\ b > 0)$

n) $\sqrt{\dfrac{2a^3}{b^3}} + a^2\sqrt{\dfrac{18}{ab^3}} + \dfrac{b}{5}\sqrt{\dfrac{50a}{b^5}} - \dfrac{b^2}{a}\sqrt{\dfrac{32a^5}{b^7}}$ $\quad (a > 0;\ b > 0)$

o) $\sqrt[6]{\dfrac{c^2}{64a^2b^2}} - \sqrt[9]{\dfrac{c^3}{512a^3b^3}} + \sqrt[12]{\dfrac{c^4}{a^4b^4}}$ $\quad (a > 0;\ b > 0;\ c \geqslant 0)$

p) $\sqrt{x(x+1)^2} - \sqrt{\dfrac{xy^2}{(x+1)^2}} + (x+1)\sqrt{\dfrac{x^3y^2}{(x+1)^2}}$ $\quad (x > -1)$

q) $xy^2\sqrt[m]{x^{m+1}} + \sqrt[m]{x^{2m+1}y^{2m}}$ $\quad (x \geqslant 0;\ y \geqslant 0)$

r) $\sqrt{8a^3b^3} + \sqrt[3]{ab} - \sqrt{\dfrac{2}{ab}} - \sqrt{8a^4b^4} - \sqrt[4]{4a^2b^2}$. $\quad (a > 0;\ b > 0)$

9. *Multiplicación y división de radicales*

En la multiplicación y **división** de radicaics se aplican las propiedades:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\ 1} \qquad \text{y} \qquad \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b} \qquad a,b > 0$$

por tanto, es necesario que los radicales tengan el mismo índice.

c) $3\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} + \dfrac{4}{x-1}\sqrt{x^2-1} - \sqrt[4]{\dfrac{x^2+2x+1}{(x-1)^2}}$ $(x>1)$

Resolución

a) $3\sqrt{8} - 2\sqrt{18} + 4\sqrt{50}$

$$= 3\sqrt{4 \cdot 2} - 2\sqrt{9 \cdot 2} + 4\sqrt{25 \cdot 2}$$

$= 6\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 20\sqrt{2} = 20\sqrt{2}$ (se extrajeron factores del radical y se calculó).

b) $4\sqrt[3]{5} - 6\sqrt[6]{25} + \sqrt[9]{x^3}$

$$= 4\sqrt[3]{5} - 6\sqrt[6]{5^2} + \sqrt[9]{x^3} = 4\sqrt[3]{5} - 6\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{x}$$

$= -2\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{x}$ (se simplificó el índice del radical y se redujeron radicales semejantes)

c) $3\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} + \dfrac{4}{x-1}\sqrt{x^2-1} - \sqrt[4]{\dfrac{x^2+2x+1}{(x-1)^2}}$

$$= 3\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 4\sqrt{\frac{x^2-1}{(x-1)^2}} - \sqrt[4]{\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}}$$

$$= 3\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 4\sqrt{\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2}} - \sqrt[4]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}$$

$$= 3\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 4\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = 6\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

(se introdujeron factores en el radicando, se simplificó el índice del radical y se efectuó la suma)

Ejercicios (epígrafe 8)

1. Efectúa:

a) $4\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$

b) $5\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2}$

c) $7\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{x} - 8\sqrt[5]{x} + 15\sqrt[5]{x}$

d) $2\sqrt{x} - 13\sqrt{y} - 6\sqrt{x} + 8\sqrt{x} + 22\sqrt{y}$ $(x \geq 0\ ;\ y \geq 0)$

e) $4x\sqrt{b} - 5y\sqrt{b} + 6z\sqrt{b}$ $(b \geq 0)$

g) $(8\sqrt{x} - 5\sqrt{y})(3\sqrt{x} + 4\sqrt{y}) = 24x + 17\sqrt{xy} - 20y$

h) $(\sqrt{x} + 3\sqrt{y})^2 = x + 6\sqrt{xy} + 9y$. ■

Ejercicios (epígrafe 9)

1. Efectúa las siguientes multiplicaciones (todas las variables y expresiones **que** aparecen son **positivas).**

a) $0,5\sqrt[4]{3} \cdot 2\sqrt[4]{3}$ b) $-2\sqrt[3]{5} \cdot 4\sqrt[3]{25}$

c) $a\sqrt{b} \cdot b\sqrt{a}$ d) $-3ab^2\sqrt{y} \cdot ab\sqrt{x}$

e) $\sqrt[3]{4x^2} \cdot \sqrt[3]{2x}$ f) $\sqrt{xy} \cdot \sqrt{yz} \cdot \sqrt{zx}$

g) $\sqrt[5]{-5x^2} \cdot \sqrt[5]{3x^3}$ h) $a\sqrt{x} \cdot b\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

i) $3\sqrt{2a} \cdot x\sqrt{7b}$ j) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2}$

k) $3\sqrt[3]{4} \cdot 2\sqrt[4]{5}$ l) $a\sqrt{2x} \cdot 3b\sqrt[4]{8x^3}$

m) $\sqrt{xy} \cdot \sqrt[3]{xy}$ n) $\dfrac{3}{a}\sqrt[4]{a^2b^3c} \cdot \dfrac{1}{b}\sqrt[6]{a^3b^5c^2}$

o) $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$ p) $(\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{5})$

q) $(2\sqrt{5} - 3)(7\sqrt{5} - 10)$ r) $(2 - \sqrt{3})^2$

s) $(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2$ t) $(\sqrt{a} - 2\sqrt{b})^2$

u) $\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}\right)\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}\right)$

v) $\sqrt{7 + \sqrt{13}} \cdot \sqrt{7 - \sqrt{13}}$

w) Halla el valor de la expresión algebraica: $x^2 - 6x + 7$ **para** $x = 3 - \sqrt{2}$.

x) Halla el valor de la expresión algebraica: $x^2 - 2x - 4$ para $x = 1 + \sqrt{5}$.

2. **Efectúa** las siguientes divisiones (considera positivas todas las variables y expre**siones que** aparecen).

a) $\sqrt{10} : \sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{88} : \sqrt[3]{11}$

c) $6\sqrt{10} : 2\sqrt{15}$ d) $\sqrt[3]{a^4b} : \sqrt[3]{a}$

En la práctica:

> Para multiplicar o dividir radicales diferenciamos dos casos:
>
> a) los radicales tienen igual indice.
> b) los radicales tienen índices diferentes.
>
> En el primer caso aplicamos directamente las propiedades anteriores.
> En el segundo caso reducimos primero a un indice común y aplicamos las propiedades.

Ejemplo 1

Efectúa:

a) $4\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{2}$ **b)** $ab\sqrt[3]{x} \cdot bc\sqrt[3]{x}$

c) $2\sqrt{5} \cdot 6\sqrt[3]{2}$ **d)** $\sqrt{18} : \sqrt{6}$

e) $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x+1}}$ $(x \geqslant 1)$ **f)** $\dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt[3]{x}}$ $(x > 0,\ y \geqslant 0)$

g) $\left(8\sqrt{x} - 5\sqrt{y}\right)\left(3\sqrt{x} + 4\sqrt{y}\right)$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$

h) $\left(\sqrt{x} + 3\sqrt{y}\right)^2$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$

Resolución

a) $4\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{2} = 20\sqrt{6}$

b) $ab\sqrt[3]{x} \cdot bc\sqrt[3]{x} = ab^2c\sqrt[3]{x^2}$

c) $2\sqrt{5} \cdot 6\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[6]{5^3} \cdot 6\sqrt[6]{2^2} = 12\sqrt[6]{125 \cdot 4} = 12\sqrt[6]{500}$

d) $\sqrt{18} : \sqrt{6} = \sqrt{18 : 6} = \sqrt{3}$

e) $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x+1}} = \sqrt{\dfrac{(x+1)(x-1)}{x+1}} = \sqrt{x-1}$

f) $\dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{\sqrt[6]{x^3y^3}}{\sqrt[6]{x^2}} = \sqrt[6]{\dfrac{x^3y^3}{x^2}} =$

e) $\sqrt{\frac{a}{b}} : \sqrt{\frac{b}{c}}$

f) $\sqrt{\frac{x^2}{y}} : \sqrt{\frac{x}{y}}$

g) $\dfrac{8a^2b\sqrt{x^2y}}{6ab^2\sqrt{xy}}$

h) $\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

i) $\dfrac{3b\sqrt{2}}{\sqrt{72b}}$

j) $3\sqrt{6} : 2\sqrt[4]{3}$

k) $\sqrt{3c^2} : \sqrt[3]{9c}$

l) $\sqrt[4]{a^5b^3} : \sqrt[6]{ab}$

m) $y\sqrt[3]{x^2y} : \sqrt{xy}$

n) $2x\sqrt[3]{4y} : 3\sqrt{2x}$

o) $\sqrt{\frac{2x}{y}} : \sqrt[3]{\frac{x}{2y^2}}$

p) $\dfrac{\sqrt{xy} + \sqrt[3]{x^2y}}{\sqrt{x}}$

q) $\dfrac{\sqrt{(x-y)^3} + \sqrt[3]{(x-y)^4}}{(x-y)\sqrt{x-y}}$

10. *Racionalización de denominadores*

Para simplificar completamente un radical es necesario, como ya se dijo, **que** no aparezcan fracciones en el radical o lo que es equivalente que no aparezcan radicales en el denominador, Esto puede lograrse mediante un procedimiento que se conoce como **racionalización de los denominadores.**

Ejemplo 1

Racionaliza las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **b)** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ **c)** $\dfrac{x^2 - y^2}{2x\sqrt{x+y}}$ $(x \neq 0,\ x > -y)$

Resolución

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$ se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{2}$ para eliminar el radical del denominador.

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

c) $\dfrac{x^2 - y^2}{2x\sqrt{x+y}} = \dfrac{(x^2 - y^2)\sqrt{x+y}}{2x\sqrt{x+y}\;\sqrt{x+y}}$

$= \dfrac{(x^2 - y^2)\sqrt{x+y}}{2x\,(x+y)} = \dfrac{(x-y)\sqrt{x+y}}{2x}$

En el ejemplo anterior los denominadores contienen un solo **radical,** se trata de denominadores monomios **que,** como **ves,** se racionalizan muy fácilmente.

Cuando en el denominador aparecen dos radicales **que** no son semejantes se **ha**bla de denominadores binomios y para racionalizarlos se hace uso del concepto siguiente:

> Las **expresiones** $\sqrt{a}$ **t** $\sqrt{b}$ y $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ $a, \boldsymbol{b} > 0$ ***se*** llaman conjugadas.

Dado que:

$[\sqrt{a} + \sqrt{b}\,]\,[\sqrt{a} - \sqrt{b}\,] = [\sqrt{a}\,]^2 - [\sqrt{b}\,]^2 = a - b \quad (a,\ b>0)$

> Si un denominador binomio se multiplica por su conjugada, se 'eliminan los radicales.

Ejemplo 2

Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3} - 1}$

c) $\dfrac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \quad (x > 0, y > 0, x \neq y)$

d) $\dfrac{\sqrt{x}}{ax + b\sqrt{x}} \quad \left(x>0, x \neq \dfrac{b^2}{a^2}\right)$

l) $\dfrac{2}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$

m) $\dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$

n) $\dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ $(a > 0;\ b > 0)$

o) $\dfrac{\sqrt{x + 1}}{1 + \sqrt{x + 1}}$ $(x > -1)$

p) $\dfrac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2\sqrt{2} + 3\sqrt{6}}$

q) $\dfrac{\sqrt{x + y} - \sqrt{x - y}}{\sqrt{x + y} + \sqrt{x - y}}$ $|y| < x$

2. Efectúa las operaciones indicadas:

a) $\left(\sqrt{\dfrac{x}{y}} - \sqrt{xy}\right)^2$ $(xy > 0)$

b) $\left[\left(\dfrac{\sqrt{a}}{b} + \dfrac{\sqrt{b}}{a}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{b}}{a} - \dfrac{\sqrt{a}}{b}\right)^2\right]\sqrt{ab}$ $(a > 0;\ b > 0)$

c) $\sqrt{3a^2} + a\sqrt{3} - \sqrt{\dfrac{12a^2}{25}} - \dfrac{9a}{5}\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ $(a \geqslant 0)$

d) $\dfrac{\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x}}{\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x}}$ $(|x| < a,\ x \neq 0)$

e) $\dfrac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}$ $(x > 0;\ y > 0)$

f) $\sqrt{\dfrac{a - x}{x - b}} + \sqrt{\dfrac{x - b}{a - x}}$ $(a < x < b)$

g) $\sqrt{\dfrac{a - b}{a + b}} - 2\sqrt{\dfrac{a^2}{a^2 - b^2}} + \sqrt{\dfrac{a + b}{a - b}}$ $(|a| > b)$

h) $\dfrac{\sqrt{1 + x}}{\sqrt{1 - x}} + \dfrac{\sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 + x}} - \dfrac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$ $(|x| < 1)$

i) $\left[1 + \dfrac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right] : \left(x + \sqrt{a^2 + b^2}\right)$ $(a \neq 0;\ b \neq 0)$

Resolucion

a) $$\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}$$
$$= \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3})}{-1} = 2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

b) $$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{5}}{3-1}$$
$$= \frac{\sqrt{15}+\sqrt{5}}{2}$$

c) $$\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$$
$$= \frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y} = \sqrt{x}-\sqrt{y}$$

d) $$\frac{\sqrt{x}}{ax+b\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(ax-b\sqrt{x})}{(ax+b\sqrt{x})(ax-b\sqrt{x})} = \frac{ax\sqrt{x}-bx}{a^2x^2-b^2x}$$
$$= \frac{a\sqrt{x}-b}{a^2x-b^2}. \quad ■$$

Ejercicios (epígrafe 10)

1. Racionaliza **las** siguientes **expresiones:**

a) $\frac{2}{\sqrt{a}}$ $(a > 0)$ b) $\frac{3b}{\sqrt[3]{3}}$ c) $\frac{2\sqrt{3x}}{\sqrt{7y}}$ $(x \geqslant 0,\ y > 0)$

d) $\frac{a}{y\sqrt[4]{x^3y}}$ $(xy > 0)$ e) $\frac{2x}{\sqrt[4]{2xy^3}}$ $(xy > 0)$

f) $\frac{\sqrt{7x}}{\sqrt[3]{9x^2}}$ $(x > 0)$ g) $\sqrt{\frac{3}{x-1}}$ $(x > 1)$

h) $\sqrt{\frac{a}{b^2c}}$ $(a \geqslant 0;\ b,c > 0)$ i) $\frac{x}{\sqrt[n]{y^n+1}}$ $(y \neq 0)$

j) $\sqrt{\frac{1}{x^{n-1}}}$ $(x \neq 0)$ k) $\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

En resumen:

El algoritmo para resolver una ecuación con radicales es el siguiente:

1. **Racionalizar la ecuación**: Esto consiste **en** eliminar los radicales de la ecuación; para ello seguimos dos pasos:
   a) Aislar el radical.
   b) Elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación.
2. **Resolver la ecuación obtenida.**
3. **Comprobar** en la ecuación original las raices obtenidas para desechar las que no la satisfacen (raices extrañas).

Ejemplo 1

Determina el conjunto solución de las ecuaciones siguientes:

a) $\sqrt{x+4} - 3 = 0$ **b)** $-3 = \sqrt{6x+9} - x$

c) $\sqrt{5x+7} - \sqrt{2x-1} = 0$

Resolución

a) $\sqrt{x+4} - 3 = 0$

$$\sqrt{x+4} = 3$$
$$x+4 = 9$$
$$x = 5$$
$$S = \{5\}$$

Comprobación:

MI: $\sqrt{5+4} - 3 = \sqrt{9} - 3$

$= 3 - 3 = 0$

MD: 0 MI = MD

b) $-3 = \sqrt{6x+9} - x$

$$x - 3 = \sqrt{6x+9}$$
$$(x-3)^2 = 6x+9$$
$$x^2 - 6x + 9 = 6x + 9$$
$$x^2 - 12x = 0$$
$$x(x-12) = 0$$
$$x_1 = 0 \quad x_2 - 12 = 0$$
$$x_2 = 12$$

$$S = \{12\}$$

Comprobación: para $x_1 = 0$

MI: -3

MD: $\sqrt{6 \cdot 0 + 9} - 0 = \sqrt{9}$

$= 3$ MI $\neq$ MD

($x_1 = 0$ es una raiz extraña)

para $x_2 = 12$

MI: -3

MD: $\sqrt{6 \cdot 12 + 9} - 12$

$= \sqrt{72 + 9} - 12$

$= \sqrt{81} - 12 = 9 - 12$

$= -3$ MI = MD

11. *Ecuaciones con radicales*

Las ecuaciones con radicales son aquellas que tienen la variable bajo el signo radical. Para resolver este tipo de ecuación es necesario transformarla en otra en la que la variable no aparezca en el radicando.

Ilustremos **el procedimiento de resolución de estas ecuaeiones en el ejemplo:**

$$\sqrt{4x-3}-x=0$$

primero aislamos el radical,

es decir, **despejamos el radical**

$$\sqrt{4x-3}=x$$

elevamos ambos miembros al cuadrado

$$\left(\sqrt{4x-3}\right)^2=x^2$$

con lo que se obtiene la ecuación:

$$4x-3=x^2,$$

que no tiene radicales.
Resolvemos esta ecuación de segundo grado:

$$x^2-4x+3=0$$
$$(x-3)(x-1)=0$$
$$x_1-3=0 \qquad x_2-1=0$$
$$x_1=3 \qquad x_2=1$$

por ultimo **comprobamos las raíces en la ecuacidn original, pues al elevar al cuadrado** pueden introducirse **soluciones de la** ecuación **transformada que no sean** solución **de la original.**

para $x_1=3$

MI: $\sqrt{4\cdot 3-3}-3=\sqrt{12-3}-3=\sqrt{9}-3=3-3=0$

MD: 0 MI = MD

para $x_2=1$

MI: $\sqrt{4\cdot 1-3}-1=\sqrt{4-3}-1=\sqrt{1}-1=1-1=0$

MD: 0 MI = MD

S = {1;3}

u) $-3 + \sqrt{3x + 9} = x - 6$ v) $7 + \sqrt{x + 6} = 13 - x$

w) $x = \sqrt{45x + 10} - 8$ x) $x + \sqrt{x + 4} = 2x - 2$

y) $x + \sqrt{3x + 4} = 8$ z) $9 + \sqrt{6x + 4} = x + 7$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x\sqrt{2} - \sqrt{x + 1} = 0$ b) $x + \sqrt{x} = 6$

c) $\sqrt{x + 10} - x = -2$ d) $\sqrt{2x + 3} + 5 = x - 1$

e) $\sqrt{4x + 8} - 2 - 4x = 0$ f) $\sqrt{2x - 1} = \dfrac{2(x - 3)}{\sqrt{2x - 10}}$

g) $\sqrt{x - 7} + \sqrt{x} = \dfrac{21}{\sqrt{x - 7}}$

h) $\sqrt{x + 1} + \dfrac{2}{\sqrt{x + 1}} = \sqrt{x + 6}$

i*) $\sqrt{\log_4(x + 3)} = 1$

j*) $\log_9\left(x - \sqrt{x - 1}\right) = \dfrac{1}{2}$

3. El período para una oscilación completa de un péndulo está dado por la fórmula $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ ($g \approx 10$ m/s^2) donde el período T es el tiempo en segundos, l la longitud en metros del péndulo y g la aceleración de la gravedad. Determina la longitud de un péndulo que da una oscilación completa en un segundo.

Funciones potenciales

12. *Repaso y profundización*

Uno de los conceptos matemáticos más importantes es el de función. En cursos anteriores estudiaste la función lineal $f(x) = mx + n$, la función cuadratica $f(x) = ax^2 + bx + c$ y la función de proporcionalidad inversa $f(x) = x^{-1}$. En **cada**

c) $\sqrt{5x + 7} - \sqrt{2x + 1} = 0$

$$\sqrt{5x + 7} = \sqrt{2x + 1}$$
$$5x + 7 = 2x + 1$$
$$3x = -6$$
$$x = -2$$

Comprobación:

MI: $\sqrt{5(-2) + 7} - \sqrt{2(-2) + 1}$

$S = \emptyset$ $\quad = \sqrt{-10 + 7} - \sqrt{-4 + 1}$

$= \sqrt{-3} - \sqrt{-3}$ no está definido en $\mathbb{R}$. ■

Ejercicios (epígrafe 11)

1. Determina el conjunto solución de las ecuaciones siguientes:

a) $\sqrt{2x} - 3 = 3$

b) $\sqrt{x + 1} = 3$

c) $\sqrt{5x + 6} = 4$

d) $\sqrt{x - 2} = -3$

e) $\sqrt{3x - 2} = 4$

f) $\sqrt{x + 3} - 3 = 0$

g) $\sqrt{x - 2} - 2 = 0$

h) $\sqrt{x - 1} - 5 = 0$

i) $\sqrt{x - 5} - 6 = 0$

j) $2 + 3\sqrt{2x + 1} = 5$

k) $\sqrt{5x - 7} - \sqrt{2x + 10} = 0$

l) $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{7x - 2} = 0$

m) $\sqrt{5x + 7} - \sqrt{2x + 1} = 0$

n) $\sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{5x - 8} = 0$

o) $x + \sqrt{x - 2} = 4$

p) $\sqrt{x - 1} - x = -1$

q) $\sqrt{x + 4} + 8 = x$

r) $\sqrt{x + 7} + x = 5$

s) $x = \sqrt{4x + 16} - 4$

t) $\sqrt{x^2 + 5x + 1} + 1 = 2x$

c) $f_3 = \{(x\ ;\ y) : y = x^2\ ,\ x \in \mathbb{R}\}$
La representación grafica de esta función se muestra en la figura 2.3.

d) $f_4 = \{(x\ ;\ y)\ :\ y = x,\ x \in \mathbb{R}\}$
La representación gráfica de esta función se muestra en la figura **2.4.**

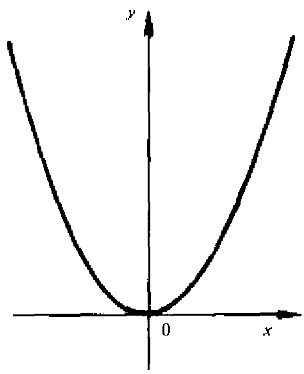


Fig. 2.3

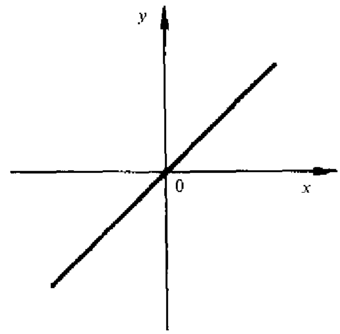


Fig. **2.4**

Observa que si trazamos una recta vertical (paralela el eje y) por cada punto del gráfico, esta contiene uno y solo un punto de la función.
No son funciones:

a) $f = \{(-2;1), (-1;1), (-1;2), (0;4), (1;3), (2;2), (3;1)\}$
pues los pares ordenados $(-1;2)$ y $(-1;1)$ tienen la misma coordenada $x = -1$.

b) El conjunto **de** pares ordenados que se muestra en la figura 2.5 no es una función; si trazamos una paralela al **eje** y, esta corta al gráfico en dos puntos.

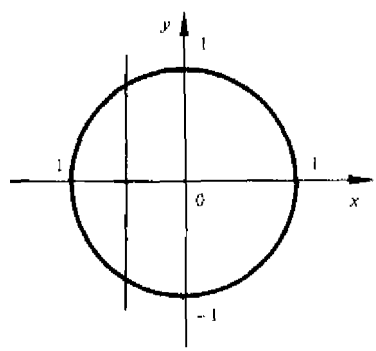


Fig. 2.5

Las funciones estudiadas $f_1(x) = mx + n$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = \dfrac{1}{x}$ las podemos expresar **segun** la definición 1 como:

a) $f_1 = \{(x\ ;\ y)\ :\ y = mx + n,\ x \in \mathbb{R}\}$
b) $f_2 = \{(x\ ;\ y)\ :\ y = x^2\ ,\ x \in \mathbb{R}\}$
c) $f_3 = \{(x\ ;\ y)\ :\ y = x^{-1},\ x \in \mathbb{R}^*\}$.

También estudiaste el efecto que se produce en la grafica de una función si su ecuación se multiplica por un factor o si *se* le suma un número; esto *se* resume en la figura **2.6.**

una de ellas se establece una correspondencia entre los elementos de $\mathbb{R}$ de forma tal **que** a **cada** x **del** dominio ($x \in \mathbb{R}$) le hacemos corresponder uno y solo un elemento imagen y de $\mathbb{R}$; ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

Los gráficos de estas funciones puedes encontrarlos en el Memento (punto 18).

La correspondencia la podemos representar por un conjunto de pares ordenados (x ; y). El conjunlo X de valores que puede tomar la primera componente x del par **se denomina dominio** de la función y el conjunto de valores que puede tomar la segunda componente y se llama **Imagen** de la función. Se acostumbra a escribir f: $X \to Y$ y se lee "f es una funcion de X en Y"

Definición 1

> Una Punción f: $X \to Y$ es un conjunto de pares ordenados $(x ; y)$ **tal que cada** $x \in X$ aparece como la primera coordenada de solo un par ordenado.

Son funciones los siguientes conjuntos de pares ordenados:

a) $f_1 = \{(0;1), (1;1), (0{,}5;2), (-1;0), (-2; -3)\}$
cuyo dominio es $X = \{0; 1; 0{,}5; -1; -2\}$
y su imagen $Y = \{-3; 0; 1; 2\}$. La representación gráfica de esta función se muestra en la **figura** 2.1.

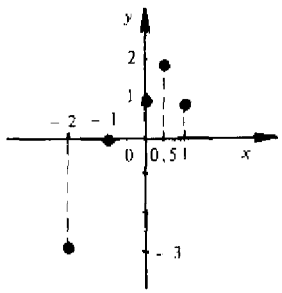


Fig. 2.1

b) $f_2 = \{(-4;-1), (-3;0), (-2;1), (-1;2), (0;2), (1;2), (2;3), (3;2)\}$
cuyo dominio es $X = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ y su imagen $Y = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$.
La representación gráfica de esta función se muestra en la figura 2.2.

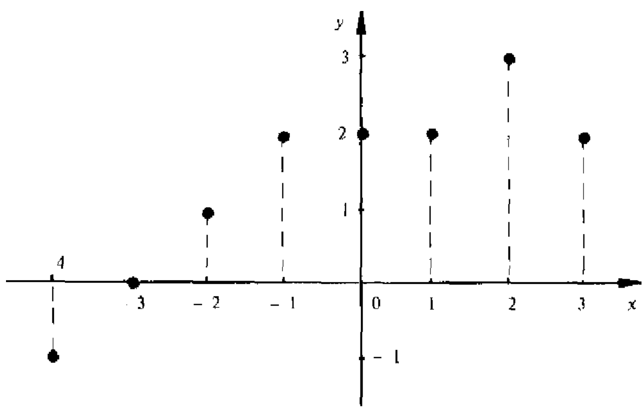


Fig. 2.2

b) Fig. 2.8

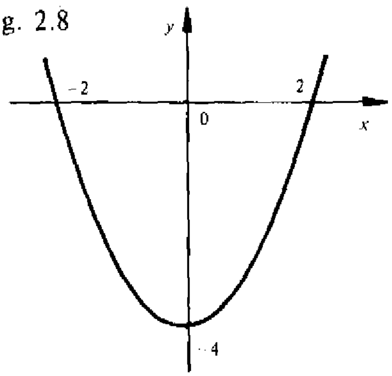


Fig. 2.8

Dominio: $\mathbb{R}$
Imagen: $y \geqslant -4$

Monotonía: $\begin{cases} \text{creciente: para } x \geqslant 0 \\ \text{decreciente: para } x \leqslant 0 \end{cases}$

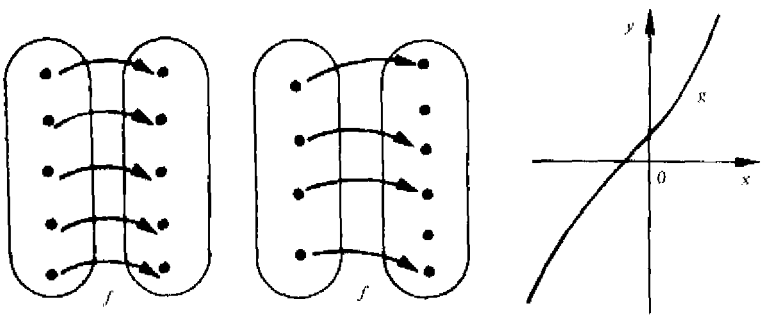
Ceros: $x_1 = -2$; $x_2 = 2$
Paridad: par (es simétrica respecto al eje y). **U**

Función inyectiva

Definición *2*

Una función es inyectiva si para dos valores iguales **de la** imagen le correspon-den valores iguales del dominio.

En símbolos: $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$.
Los siguientes gráficos y diagramas representan funciones inyectivas (fig. 2.9).



a) b) c)

Fig. 2.9

Observa en la figura 2.9 que si trazamos rectas horizontales (paralelas al eje x) estas cortan al gráfico de la función inyectiva en un solo punto. No son inyectivas las funciones que *se* representan en la figura 2.10.

Observa en la figura 2.10b que **si** trazamos rectas horizontales. algunas cortan al gráfico de la función en más de un punto, esto quiere decir **que** a un valor de la **h a -** %& le **corresponde** más de un valor en el dominio.

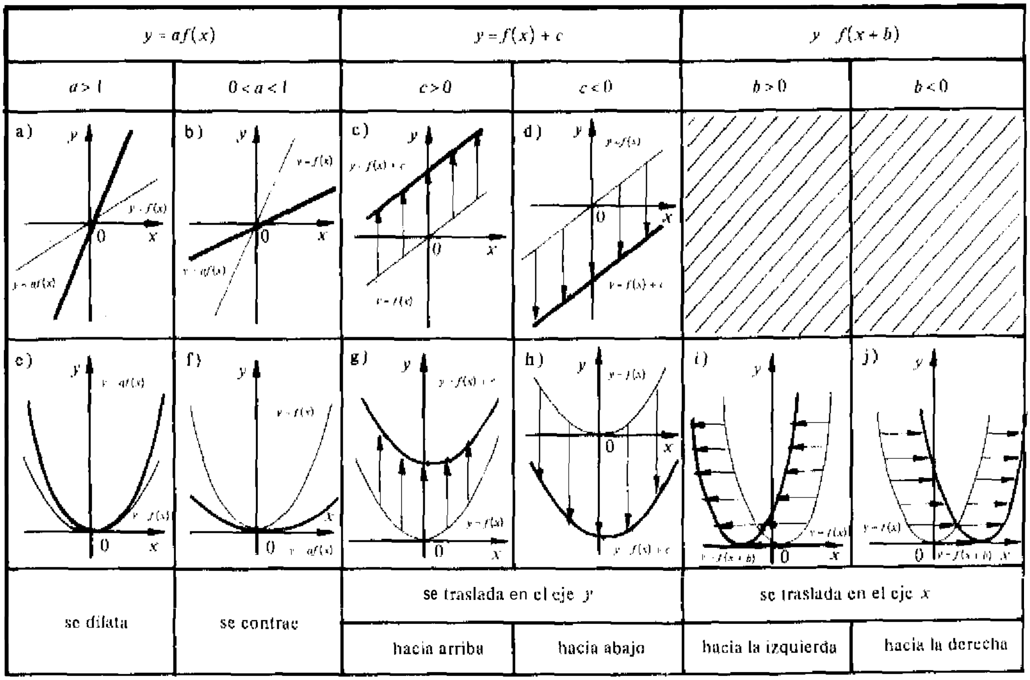


Fig. 2.6

Ejemplo 1

Representa gráficamente las funciones:

a) $y = -x^2$ **b)** $y = x^2 - 4$

y analiza dominio, imagen, ceros, monotonía y paridad de la función del inciso b.

Resolución

a) Fig. 2.7

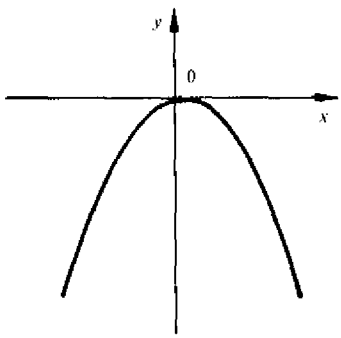


Fig. 2.7

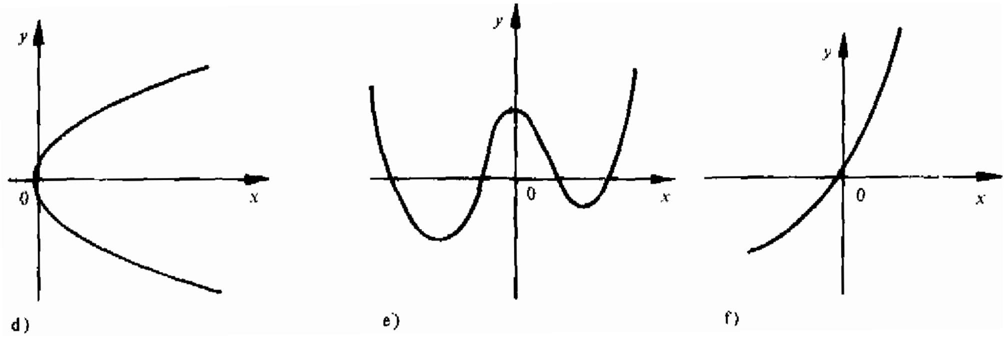


Fig. 2.11

13. *Estudio* **de la** *función* $y = x^3$

La correspondencia que a cada numero real le asocia su cubo es una función; expresada como conjuntode pares ordenados sería:

$f = \{(x\ ;\ y) : y = x^3,\ x \in \mathbb{R}\}.$

Veamos una tabla de algunos valores de esta función:

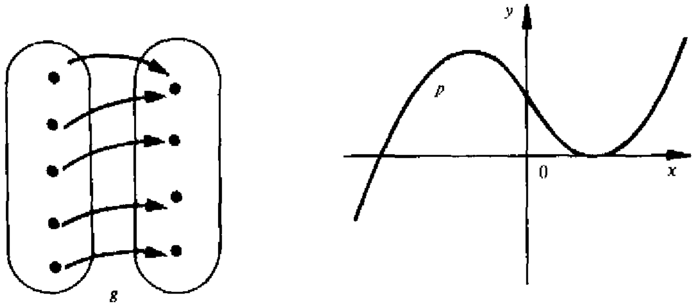
x	− 2,5	− 2	− 1,5	− 1	− 0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
y	− 15,6	− 8	− 3,4	− 1	− 0,125	0	0,125	1	3,4	8	15,6

Al representar estos pares ordenados en un sistema de coordenadas se obtiene una gráfica coma **la** que se muestra en la figura 2.12.

Si aumentamos el numero de puntos obtenemos una idea cada **vez** mas aproximada de la gráfica de la función. Si considerarnos todas las $x \in \mathbb{R}$ obtenemos el gráfico de esta función como muestra la figura 2.13.

En **esta figura** se aprecian algunas propiedades como:

Dominio: $\mathbb{R}$.
Imagen: R.
Monotonía: Creciente en todo su dominio.
Cero: tiene un único cero en $x_c = 0$.
Paridad: impar.



a) b)

Fig. **2.10**

Ejercicios (epigrafe 12)

1. Escribe como conjunto de pares ordenados las siguientes funciones:
   a) A cada numero real se le hace corresponder su duplo.
   b) **A** cada numero real se le hace corresponder su duplo aumentado en 5.
   c) A cada numero real se le hace corresponder su cuadrado disminuido en 2.
   d) **A** cada numero real se le hace corresponder su mitad disminuida en 6.
   e) **A** cada número real se le hace corresponder su cuadrado disminuido en su duplo.
   f) A cada numero real distinto de cero se le hace corresponder su recíproco disminuido **en** 10.
   g) **A** cada numero real distinto de cero se le hace corresponder el duplo de su reciproco.
   h) **A** cada numero real distinto de cero se le hace corresponder el duplo de su recíproco aumentado en su triplo.

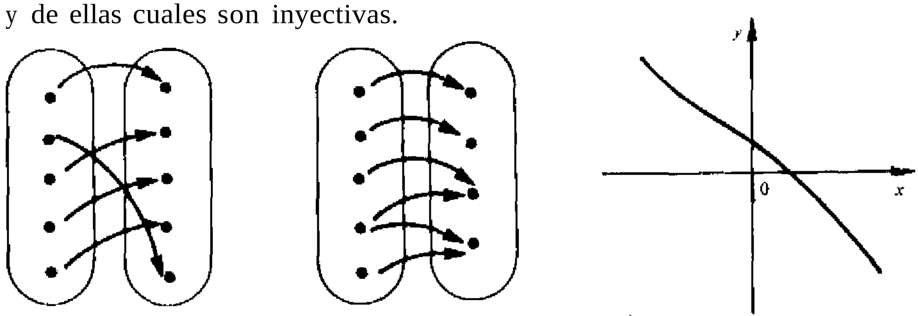
2. Representa gráficamente, a partir de la grafica de la función $y = x^2$, las funciones siguientes y analiza sus propiedades:,

   a) $f(x) = 3x^2$ b) $g(x) = \frac{1}{4}x^2$ c) $p(x) = x^2 + 2{,}5$

   d) $q(x) = x^2 - 3$ e) $m(x) = (x + 2)^2$ f) $p(x) = (x - 4)^2$

   g) $h(x) = (x - 1{,}5)^2 - 3{,}5$ h) $k(x) = (x - 2)^2 + 2{,}5$

3. Determina cuáles de las representaciones gráficas de la figura 2.11 son funciones y de ellas cuales son inyectivas.



a) b) c)

c) La funcion tiene un solo cero porque el gráfico corta en un solo punto al eje x.
d) Como el gráfico es simétrico con respecta al origen de coordenadas la función es impar.
La paridad de esta funcion se exgrcsa simbólicamente como
$f(-x) = -f(x)$
lo cual *se* nota cn los valores de la tabla

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f(-1) = -1 \end{array}\right\} \text{ luego } f(-1) = -f(1)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = 8 \\ f(-2) = -8 \end{array}\right\} \text{ luego } f(-2) = -f(2)$$

Ejercicios (epigrafe 13)

1. Determina si los siguientes puntos pertenecen' al gráfico de la función $y = x^3$.

a) $A(2;8)$, $C(3;9)$, $E(-4;-64)$, $G\left(\frac{3}{4};\frac{27}{64}\right)$, $I\left(\frac{5}{3};\frac{125}{27}\right)$, $K(-2;7)$

b) $B(-3;-27)$, $D\left(\frac{1}{2};\frac{1}{8}\right)$, $F\left(\frac{2}{3};\frac{4}{8}\right)$, $H\left(-\frac{5}{3};-\frac{125}{27}\right)$, $J(6;216)$,

$L(\frac{1}{4};10)$

2. Determina en **cada** caso el valor de a si sabemos que los pares ordenados siguientes son puntos del gráfico de la función $y = x^3$.

a) $(a;27)$ b) $(2,5;a)$ c) $\left(a;\frac{1}{3}\right)$

d) $(\sqrt{5};a)$ e) $\left(a;\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ f) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};a\right)$

g) $(\sqrt[6]{9};a)$ h) $\left(a;\frac{27}{\sqrt{32}}\right)$

3. **Si sabemos que** la funcion $y = x^3$ es una función impar, determina el par ordenado que es simétrico **a:**

a) $(2;8)$ b) $(-1;-1)$ c) $(0,0)$

d) $(-3;-27)$ e) $\left(\frac{\sqrt[3]{9}}{3};\frac{1}{3}\right)$ f) $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{64}\right)$

g) $(x^2;x^6)$ h) $(a-1;(a-1)^3)$

4. Dadas las siguientes funciones calcula sus ceros y represéntalas gráficamente

a) $f(x) = 8x^3$
$g(x) = x^3 - 1$
$p(x) = (x-2)^3$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^3$
$g(x) = x^3 + 2$
$p(x) = (x+4)^3 - 1$

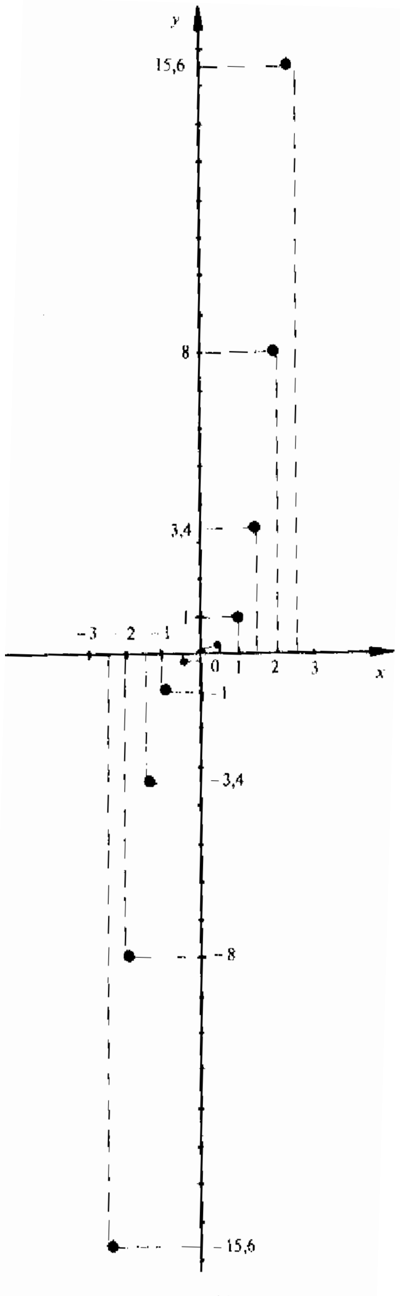


Fig. 2.12

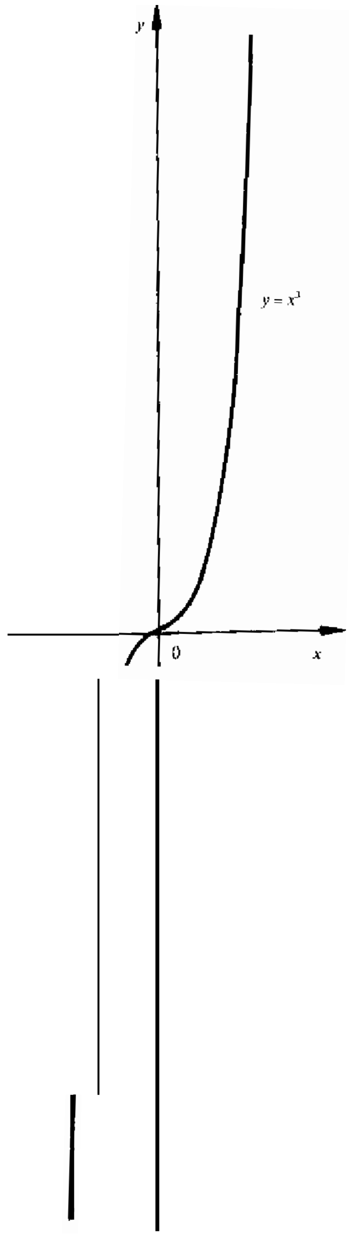


Fig. 2.13

Observa que:

a) El dominio y la imagen de esta función es $\mathbb{R}$ porque Las proyecciones del gráfico ocupan todo el eje x y el eje y respectivamente.

b) La función es monótona creciente en todo su dominio porque a medida que crecen los valores del dominio van creciendo los valores de la imagen.

c) La función tiene un solo cero porque el gráfico corta en un solo punto al eje x.
d) Como el gráfico es simétrico con respecto al origen de coordenadas la función es impar.
La paridad de esta función se expresa simbólicamente como
$f(-x) = -f(x)$
lo cual se nota en los valores de la tabla

$\left.\begin{matrix} f(1) = 1 \\ f(-1) = -1 \end{matrix}\right\}$ luego $f(-1) = -f(1)$

$\left.\begin{matrix} f(2) = 8 \\ f(-2) = -8 \end{matrix}\right\}$ luego $f(-2) = -f(2)$

Ejercicios (epígrafe 13)

1. Determina si los siguientes puntos pertenecen al grafico de la función $y = x^3$.

a) $A(2;8)$, $C(3;9)$, $E(-4;-64)$, $G\left(\frac{3}{4};\frac{27}{64}\right)$, $I\left(\frac{5}{3};\frac{125}{27}\right)$, $K(-2;7)$

b) $B(-3;-27)$, $D\left(\frac{1}{2};\frac{1}{8}\right)$, $F\left(\frac{2}{3};\frac{4}{8}\right)$, $H\left(-\frac{5}{3};\frac{125}{27}\right)$, $J(6;216)$,

$L\left(\frac{1}{4};10\right)$

2. Determina en cada caso el valor de a si sabemos que los pares ordenados siguientes son puntos del gráfico de la función $y = x^3$.

a) $(a;27)$ b) $(2{,}5;a)$ c) $\left(a;\frac{1}{3}\right)$

d) $(\sqrt{5};a)$ e) $\left(a;\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ f) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};a\right)$

g) $(\sqrt[6]{9};a)$ h) $\left(u;\frac{27}{\sqrt{32}}\right)$

3. Si sabemos que la función $y = x^3$ es una función impar, determina el par ordenado que es simétrico **a:**

a) $(2;8)$ b) $(-1;-1)$ c) $(0{,}0)$

d) $(-3;-27)$ e) $\left(\frac{\sqrt[3]{9}}{3};\frac{1}{3}\right)$ f) $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{64}\right)$

g) $(x^2;x^6)$ h) $(a-1;(a-1)^3)$

4. Dadas las siguientes funciones calcula sus ceros y represéntalas gráficamente.

a) $f(x) = 8x^3$
$g(x) = x^3 - 1$
$p(x) = (x-2)^3$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^3$
$g(x) = x^3 + 2$
$p(x) = (x+4)^3 - 1$

5. De las funciones siguientes analiza: dominio, imagen, monotonía, ceros **y haz su** representación gráfica.

a) $f(x) = x^3 - 8$
$g(x) = (x - 4)^3$
$h(x) = (x + 2)^3 + 3$

b) $f(x) = x^3 + 5$
$g(x) = (x + 1)^3$
$h(x) = (x - 5)^3 - 3$

6. Los gráficos de la figura 2.14 corresponden a funciones del tipo $f(x) = (x + b)^3 + c$. Escribe la ecuación que le corresponde a cada caso.

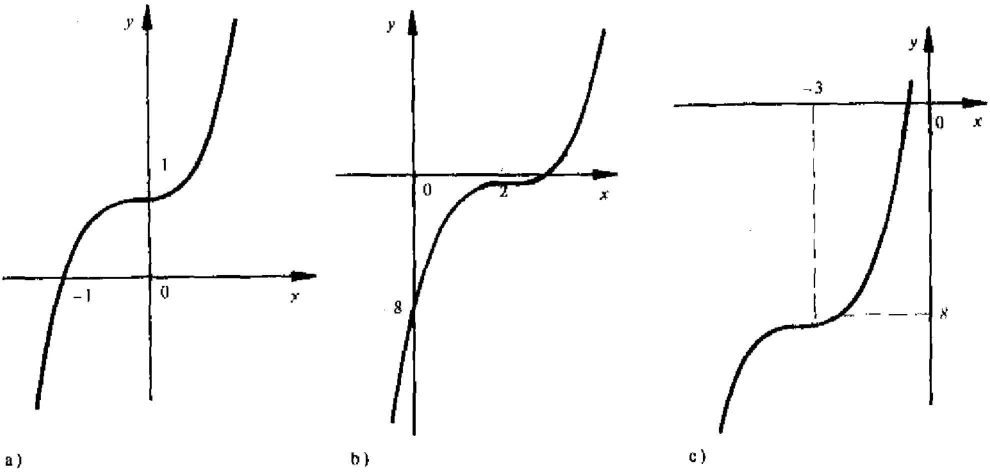


Fig. 2.14

7. Determina los valores b y c de la ecuación $y = (x + b)^3 + c$ si el gráfico de la función contiene a los puntos:

a) $(-b;2)$ y $(1;-6)$
b) $(0;0)$ y $(-2;-8)$
c) $(0;-1)$ y $(1;6)$
d) $(0;123)$ y $(-4;-1)$
e) $(3;5)$ y $(5;7)$
f) $(-b;b)$ y $(3;-1)$

14. *Función inversa. Interpretación gráfica*

Consideremos la función f: A— A **inyectiva según** muestra la figura 2.15a (A y B son subconjuntos **de** $\mathbb{R}$).

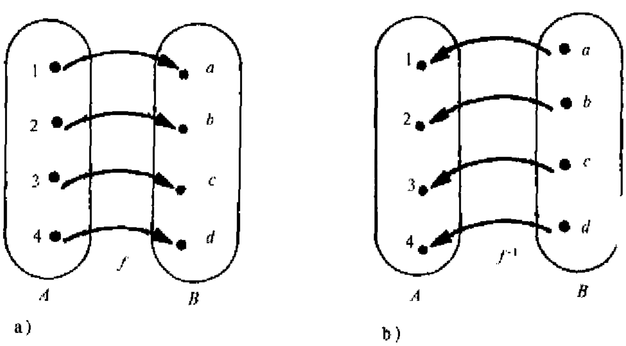


Fig. 2.15

Recuerda que en una función inyectiva un elemento no puede ser imagen de dos elementos diferentes del dominio (a cada elemento de la imagen llega una sola flecha).

> **Si** $b = f(a_1)$ **y** $b = f(a_2)$ entonces $f(a_1) = f(a_2)$ **y** $a_1 = a_2$ por ser f inyectiva.

Luego, por ser f inyectiva tenemos que a cada elemento del conjunto Im f le podemos hacer corresponder **uno** y solo un elemento del conjunto Dom f, determinándose así una nueva funcion **que** denotaremos f^{-1}: Im $f \rightarrow$ Dom f (fig. 2.15b) también inyectiva y **que** llamaremos función inversa de f.

> Si **f** es una función inyectiva con dominio A e imagen B, entonces la función inversa f^{-1} tiene dominio B e imagen A y se define por:
> $f^{-1}(y) = x$ si $f(x) = y$ para todo $y \in B$.

La funcion f (fig. 2.15a) está definida por los pares **ordenados:**

$f = \{(1;a), (2;b), (3;c), (4;d)\}$ y su inversa (fig. 2.15b) por
$f^{-1} = \{(a;1), (b;2), (c;3), (d;4)\}$.

Como puedes notar, los pares ordenados de una función y su inversa intercambian sus coordenadas y por lo tanto sus gráficos son simétricos respecto a la recta $y = x$ (fig. 2.16).

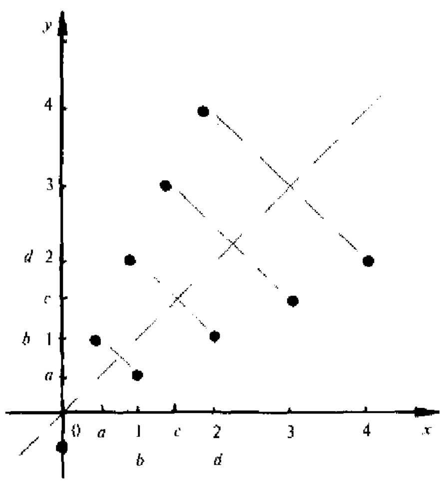


Fig. 2.16

Ejemplo 1

1. La función $y = x^3$ es inyectiva; si trazamos paralelas al eje x, cada una corta al gráfico en un punta, luego tiene una función inversa que es $y = \sqrt[3]{x}$ (de dominio $\mathbb{R}$) la cual se obtiene reflejando la función en la recta $y = x$ (fig. 2.17).

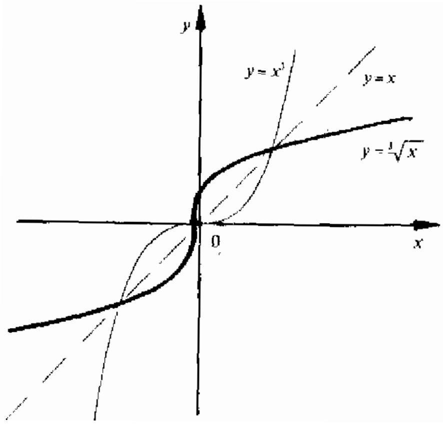


Fig. 2.17

2. La función f de la figura 2.18 no es inyectiva ya que como muestra el gráfico, para un mismo punto de la imagen (y_0) se obtienen varios valores distintos en el dominio.(x_1, x_2 y x_3) luego esta función no tiene inversa; si la reflejamos en la recta $y = x$ el gráfico que se obtiene no corresponde al gráfico de una función.

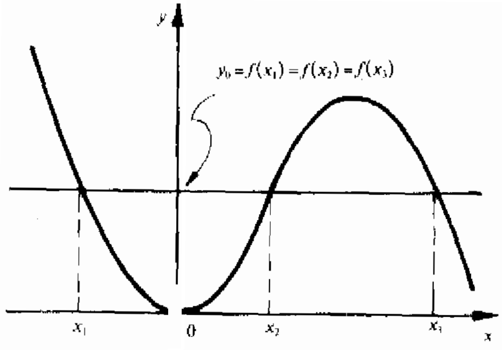


Fig. 2.18

■

Resumiendo:

Para decidir si una función tiene inversa es necesario determinar previamente si dicha función es inyectiva.

Ejercicios (epígrafe 14)

1. Dados **los** gráficos de **las** funciones representadas en la figura 2.19, analiza si **se** puede determinar la funcion inversa Fundamenta.

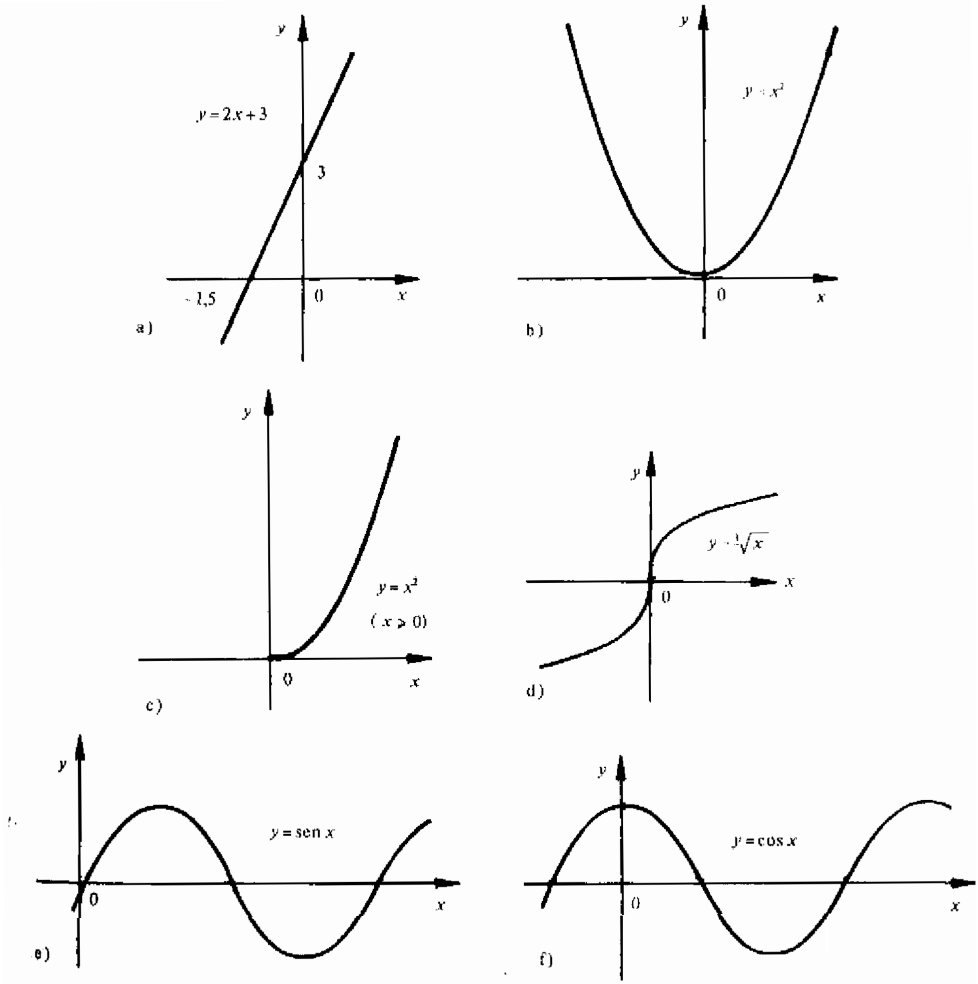


Fig. 2.19

2. **Representa** gráficamente las funciones siguientes y **si es** posible obtén el gráfico de su funcion inversa. Fundamenta en todos los **casos** tus respuestas.

a) $f(x) = 5 - 4x$ b) $q(x) = (x + 1)^2$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad (x \neq 0)$ d) $g(x) = x^2 - 2$

e) $h(x) = x^2 + 3 \quad (x \geqslant 0)$ f) $g(x) = \sqrt{x + 2}$

g) $p(x) = (x - 3)^3$ h) $f(x) = (x - 2)^2 \quad (x \geqslant 0)$

i) $h(x) = x^3 + 1$

15. *Estudio de la función* $y = \sqrt{x}$

Si quisiéramos determinar la función $f(x) = x^2$, nos encontraríamos can la dificultad que esta no es inyectiva (fig. 2.20a), pues **para** un mismo valor **de** la **imagen** y_0 obtenemos das valores distintos del dominio: x_0 y $-x_0$. Por eso para obtener una función inyectiva basta considerar en el dominio solo a los valores **de** $x \geqslant 0$ (fig. 2.20b).

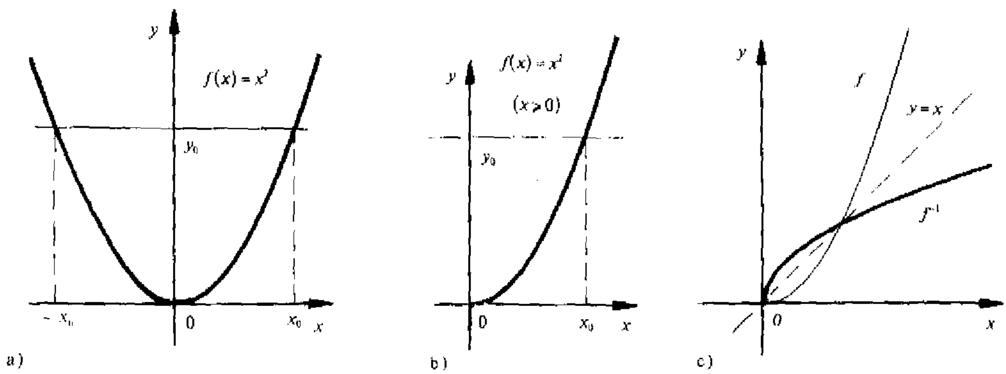


Fig. 2.20

Esto significa que si limitamos el dominio de la función en la forma indicada para un solo valor de la imagen (y_0) se tiene un único valor del dominio (x_0) por lo que la función obtenida es inyectiva y tiene inversa. Si el gráfico lo reflejamos en la recta $y = x$ obtenemos el gráfico de la Función inversa (fig. 2.20c).

Los pares ordenados de la función $y = x^2$ tienen la forma $(x_0 ; x_0^2)$ y los de la inversa **serían** $(x_0^2 ; x_0)$, en estos pares la segunda componente x_0 es la raíz cuadrada **de la** primera x_0^2, luego si denotamos la primera componente por $x (x \geqslant 0)$ entonces la segunda seria $\sqrt{x}$ obteniéndose el par $(x ; \sqrt{x})$ para la función inversa, por tanto su ecuación sería:

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} \quad \text{con } (x \geqslant 0)$$

El gráfico **de** esta función ($y = \sqrt{x}$) **se** muestra en la figura 2.21

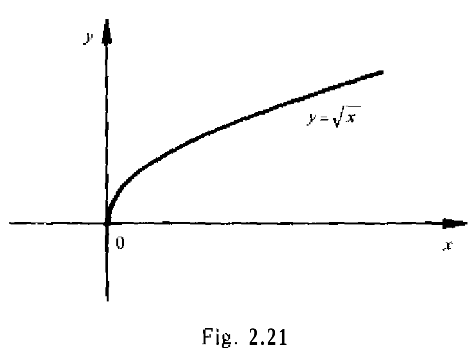


Fig. 2.21

Las propiedades de la función $y = \sqrt{x}$ son:

Dominio: $x \geqslant 0$	La proyección del gráfico cubre el semieje positivo de las "x".
Imagen: $y \geqslant 0$	La proyección del gráfico cubre el semieje positivo de las "y".
Cero: $x = 0$	En este punta la gráfica corta al eje "x".
Monotonía: Creciente en todo su dominio.	A medida que crecen los valores del dominio van creciendo los valores de la imagen.

Ejercicios **(epígrafe** 15)

1. Determina si los siguientes puntos pertenecen al grafico de la función $y = \sqrt{x}$.

   a) $A(4;2)$, $B\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $C(5;2)$, $D\left(\frac{1}{9};\frac{1}{3}\right)$, $E\left(\frac{4}{5};\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, $F(9;4)$

   b) $G\left(\frac{1}{3};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $H(16;4)$, $I(0{,}25;0{,}5)$, $J\left(\frac{5}{6};\frac{\sqrt{30}}{6}\right)$, $K(0{,}36;0{,}7)$, $L(8;2{,}9)$

2. Representa graficamente las siguientes funciones y calcula su cero.

   a) $f(x) = \sqrt{x}$ b) $g(x) = \sqrt{x} + 3$

   c) $p(x) = \sqrt{x+1}$ d) $g(x) = 2\sqrt{x+7}$

   e) $k(x) = \sqrt{x+3} - 2$ f) $h(x) = \sqrt{x-4} + 5$

3. De las funciones siguientes analiza: dominio, imagen, monotonía, ceros y represéntalas gráficamente.

   a) $f(x) = -\sqrt{x}$ b) $g(x) = \sqrt{x+8}$

   c) $n(x) = 3\sqrt{x}$ d) $m(x) = \sqrt{x} + 4$

   e) $p(x) = \sqrt{x+2} - 3$ f) $q(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x-1} + 2$

4. De las funciones g, n, m y p del ejercicio 3 obtén el gráfico de su función inversa reflejando en la recta $y = x$.

5. Los gráficos de la figura 2.22 corresponden a funciones del tipo $g(x) = \sqrt{x+b} + c$. Escribe la ecuación que le corresponde a cada uno.

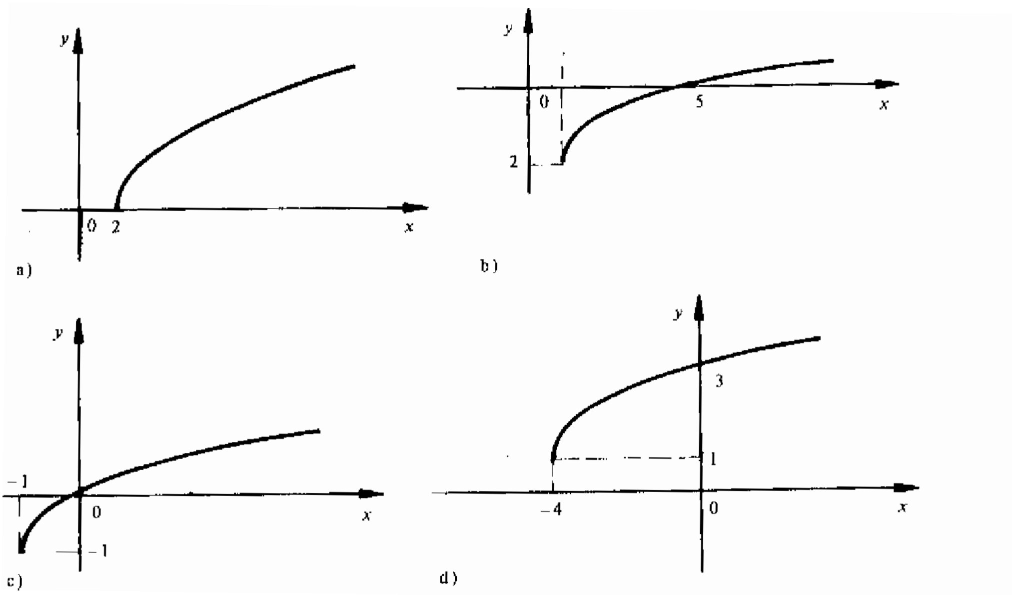


Fig. 2.22

Ejercicios ***del*** *capitula*

1. Calcula:

a) $-4\sqrt[3]{27}$

b) $\sqrt[4]{2^4 : 7^8}$

c) $\sqrt[4]{81\ c^2}$ si $c = 2$

d) $4^{2} + 4^{-1/2}$

e) $(8^{1/3} + 16^{1/2}) - (32^{1/5} + 4^0)$

f) $5\sqrt{125} + 6\sqrt{45}$

g) $4\sqrt[3]{32} - \sqrt[3]{20}\ \sqrt[3]{25}$

h) $\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)^2$

i) $(37^2 - 35^2)^{1/2}$

j) $(9^2 - 7^2)^{2/5}$

k) $\left(\sqrt{10} - \sqrt{20}\right)^3$

l) $\left(\sqrt{2} + 1\right)^4$

2. Calcula el valor numérico de las siguientes **expresiones para los** valores indicados de la variable. Si lo crees conveniente multiplica previamente.

a) $(a^{3/5} \quad a^{-1/5} + a^{1/5})(a^{2/5} - 2 - a^{-2/5})$ para $a = 32$

b) $(2a^{1/3}x^{2/3} + a^{2/3}x^{1/3})(x^{4/3} + 2a^{1/3} + 3a^{2/3}\ x^{2/3})$ para $a = 8,\ x = \dfrac{1}{8}$

c) $(x^{-3/4}\ y^{3/2} + 3x^{1/4}\ y)\ (x^{-5/4}\ y^{1/2} - 3x^{-3/4} - x^{-1/4}\ y^{-1/2})$ para $x = 3,\ y = 6$

d) $(a^{-2/3}\ b^{1/2} + 2a^{-4/3}\ b - a^{2}b^{3/2})(3a^{2/3}\ b^{-1/2} + 1 + a^{-2/3}\ b^{1/2})$ para $a = 8,\ b = 4$

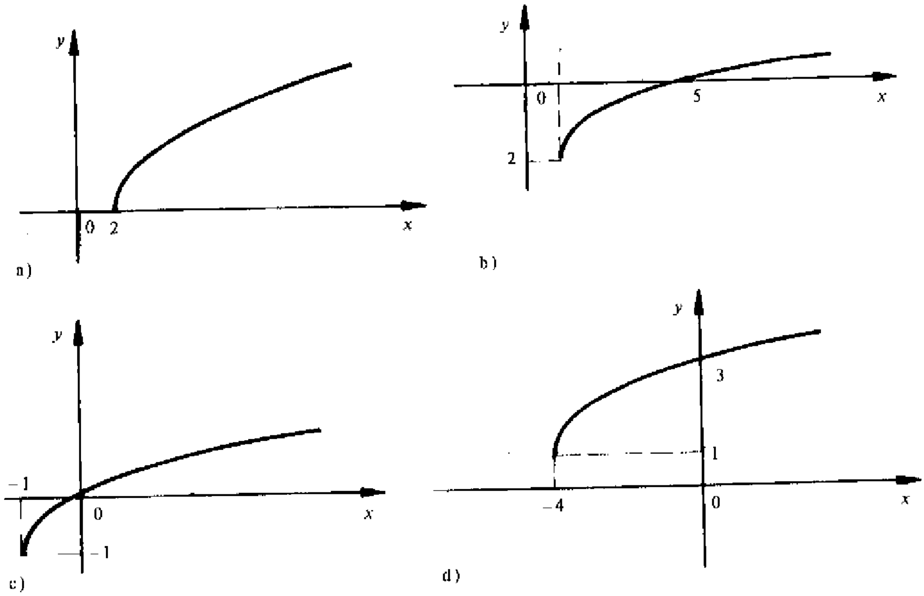


Fig. 2.22

Ejercicios del capítulo

1. Calcula:

a) $-4\sqrt[3]{27}$

b) $\sqrt[4]{2^4 : 7^8}$

c) $\sqrt[4]{81\ c^2}$ si $c = 2$

d) $4^{2} + 4^{-1/2}$

e) $(8^{1/3} + 16^{1/2}) - (32^{1/5} + 4^0)$

f) $5\sqrt{125} + 6\sqrt{45}$

g) $4\sqrt[3]{32} - \sqrt[3]{20}\ \sqrt[3]{25}$

h) $\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)^2$

i) $(37^2 - 35^2)^{1/2}$

j) $(9^2 - 7^2)^{2/5}$

k) $\left(\sqrt{10} - \sqrt{20}\right)^3$

l) $\left(\sqrt{2} + 1\right)^4$

2. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones para los valores indicados de la variable. Si lo crees conveniente multiplica previamente.

a) $(a^{3/5} - a^{-1/5} + a^{1/5})(a^{2/5} - 2 - a^{-2/5})$ para $a = 32$

b) $(2a^{1/3}x^{2/3} + a^{2/3}x^{1/3})(x^{4/3} + 2a^{1/3} + 3a^{2/3}\ x^{2/3})$ para $a = 8,\ x = \dfrac{1}{8}$

c) $(x^{-3/4}\ y^{3/2} + 3x^{1/4}\ y)\ (x^{-5/4}\ y^{1/2} - 3x^{-3/4} - x^{-1/4}\ y^{-1/2})$ para $x = 3,\ y = 6$

d) $(a^{-2/3}\ b^{1/2} + 2a^{-4/3}\ b - a^{2}b^{3/2})(3a^{2/3}\ b^{-1/2} + 1 + a^{-2/3}\ b^{1/2})$ para $a = 8,\ b = 4$

3 Coloca en orden decreciente.

a) $\sqrt[6]{10},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt{2}$

b) $\sqrt{2},\ \$6,\ \sqrt[10]{33}$

c) $\sqrt{3},\ \sqrt[3]{7},\ \sqrt[4]{25}$

d) $\sqrt[3]{4},\ \sqrt{2},\ \sqrt[4]{5},\ \sqrt[6]{13}$

e) $\sqrt{a+b},\ \sqrt[4]{a^2+b^2}\quad (a>0;\ b>0)$

4. **Calcula las i'racciones** siguientes racionalizando previamente. **Utiliza la tabla para los datos que necesites.**

a) $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}$

c) $\dfrac{4}{2+\sqrt{3}}$

d) $\dfrac{8}{3-\sqrt{5}}$

e) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

f) $\dfrac{5-\sqrt{6}}{3-\sqrt{6}}$

g) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

h) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

5. Calcula. Considera positivas **todas** las variables *y* **expresiones que** aparecen.

a) $\sqrt{a^3} - 2a\sqrt[4]{a^2} + 3a\sqrt[6]{a^3} - \sqrt[8]{a^{12}}$

b) $2\sqrt{m^2n} - \sqrt{9m^2n} + \sqrt{16mn^2} - \sqrt{4mn^2}$

c) $5m\sqrt[6]{(m-n)^3} + \sqrt{(m-n)^3} + n\sqrt[4]{(m-n)^2}$

d) $2\sqrt{a^4x+3a^4y} - a^2\sqrt{9x+27y} + \sqrt{25a^4x+75a^4y}$

e) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}} + \sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{a}} + \sqrt[3]{a^4}$

f) $3a\sqrt{\dfrac{a+1}{a^2}} - \sqrt{4a+4} + (a+1)\sqrt{\dfrac{a}{a+1}}$

g) $4x\sqrt{\dfrac{3a}{x}} - 9a\sqrt{\dfrac{x}{3a}} + ax\sqrt{\dfrac{3}{ax}}$

h) $(a-b)\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}} - (a+b)\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}} + (2a-2b)\sqrt{\dfrac{1}{a-b}}$

i) $\dfrac{12b^2}{a^2}\sqrt{\dfrac{a^3}{3b^3}} - \dfrac{4}{b}\sqrt{\dfrac{3b^3}{a}} - \dfrac{2b}{3}\sqrt{\dfrac{27}{ab}}$

j) $$\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} + a\,\frac{-\dfrac{a}{x^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{a^2}{x^2}}}$$

6. Efectúa **para** los **valores admisibles de** las variables:

a) $$\sqrt[5]{x^2\sqrt[4]{x^3}}$$

b) $$\sqrt[3]{x-1}\,\sqrt{x+1} - 3\sqrt[6]{(x-1)^2(x+1)^3}$$

c) $$\frac{2}{a^2 + \sqrt{a - 1}}$$

d) $$\frac{1}{\sqrt{a}\,(\sqrt{a} + 2)}$$

e) $$\frac{a - \sqrt{a}}{a + \sqrt{a}}$$

f) $$\frac{\sqrt{ax} - \sqrt{bx}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

g) $$\frac{\sqrt{ax} + \sqrt{ay} + \sqrt{bx} + \sqrt{by}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

h) $$\frac{\sqrt[3]{z} - 6\sqrt[3]{27x^6y^3z}}{1 - 18x^2y}$$

i) $$\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 4\sqrt{xy}}{x + y}$$

j) $$\frac{\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[4]{y^3}}{\sqrt[3]{\sqrt{x}}\,(\sqrt{y})^6}$$

k) $$\frac{\sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 + 2}}$$

7. Halla el valor de las siguientes expresiones:

a) $\log_2 4 + \log_3 81 + \log_4 64 - \log_6 216$

b) $\log_2 64 - \log_2 1 - \log_3 9 + \log_{11} 121$

c) $\log_3 81 - \log_2 1\,024 + \log_4 4\,096$

d) $\log_4 256 + \log_5 625 - \log_3 243$

e) $$\left(\frac{\log_4 16 + \log_5 125 - \log_2 64}{\log_{0.2} 25 \cdot \log_3 27}\right)^2$$

f) $$\left[\frac{\log_{0.5}\left(\frac{1}{8}\right) + \log_3 81}{\log_2 128 \cdot \log_4 16}\right]^{1/2}$$

8. **Resuelve las siguienles** ecuaciones:

a) $\sqrt{5x+1} - 4 = 0$

b) $\sqrt{6x+3} = \sqrt{10x-1}$

c) $\sqrt{x^2+2x+1} = 9 - x$

d) $x + 2\sqrt{x-1} - 4 = 0$

e) $\dfrac{1+\sqrt{x-1}}{1-\sqrt{x-1}} = -3$

f) $\sqrt{x} + \sqrt{x+5} = \dfrac{10}{\sqrt{x}}$

g) $\dfrac{2x-3}{\sqrt{x-2}} = 2\sqrt{x-2} + 1$

h) $\sqrt{3+x} + \sqrt{x} = \dfrac{6}{\sqrt{3+x}}$

i) $\sqrt{8x-7} - \dfrac{2x-2}{\sqrt{2x+3}} = \sqrt{2x+3}$

9. **Determina** cuáles de las siguientes **correspondencias son funciones** y exprésalas como conjunto **de** pares **ordenados.**
   a) **A cada madre le corresponden sus hijos.**
   b) **A cada** numero **real no negativo se le hacen corresponder sus raíces cuadradas.**
   c) **A cada número entero se le hace** corresponder **su cuadrado disminuido en** su **duplo.**
   d) **A cada número real distinto de** cero **se le hace corresponder el cubo de su recí**proco **aumentado en su cuadrado.**
   e) **A cada** número **real se le hace corresponder** su **cuadrado aumentado en** su **triple disminuido en seis.**
   f) **A cada número real no** negativo **se le** hace **corresponder su** raíz **cuadrada disminuida en tres.**
   g) **A cada** número **real** positivo **se** le hace corresponder **su** logaritmo **en base dos.**

10. **De** las gráficas y diagramas de **la figura** 2.23, **di** cuáles **representan una** función y de **ellas** cuáles **son inyectivas.**

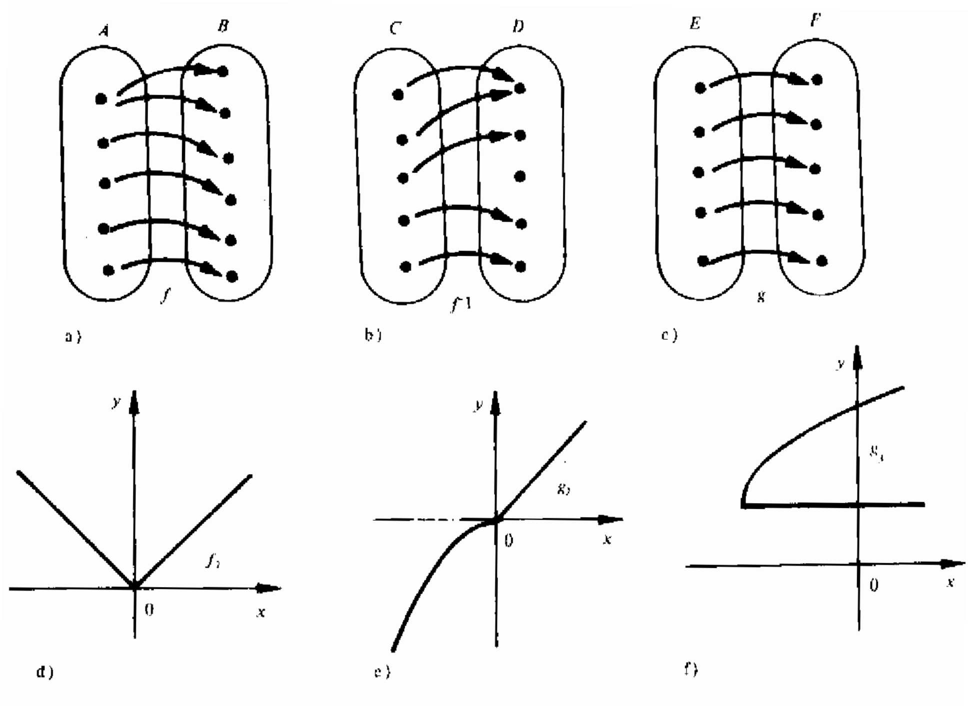


Fig. 2.23

11. Determina cuáles de los gráficos siguientes representan funciones inyectivas, en los casos posibles obten el gráfico de **la inversa** (fig. **2.241.**

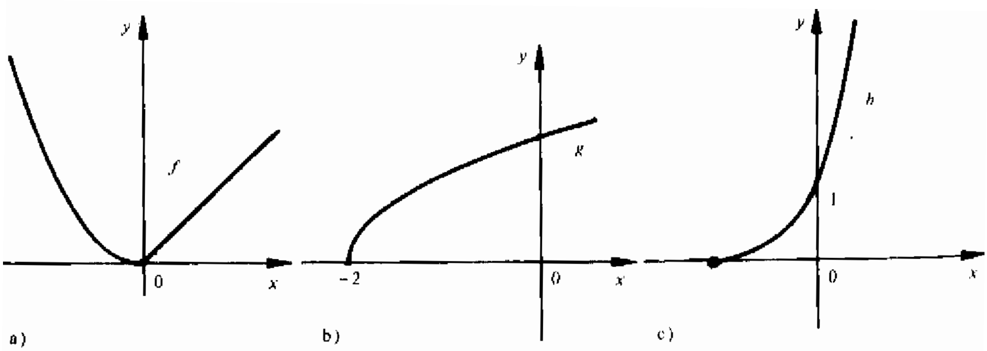


Fig. 2.24

12. Determina **la** función inversa de cada una de las funciones siguientes:

a) $f_1 = \left\{\left(-2;\ -\frac{7}{2}\right),\ (-1; -2), \left(0; \frac{1}{2}\right)\right\}$

b) $f_2 = \left\{(0; 2), (1; 3), (3; 11), (4; 18)\right\}$

c) $f_3 = \left\{(-2;\ 3{,}2),\ (-1;\ 0{,}2),\ \left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{80}\right),\ (0;\ 0)\right\}$

d) $f_4 = \{(0;\ -1),\ (1;0),\ (8;1),\ (27;2)\}$
e) $f_5 = \{(1;\ 2),\ (2;\ 4),\ (3;\ 6),\ (4;\ 8),\ (5;\ 10)\}$
f) $f_6 = \{(a;\ b),\ (c;\ d),\ (e;\ f),\ (h;\ i),\ (j;\ k)\}$

13. Traza los gráficos de las siguientes funciones $y = \sqrt{x}$; $y = \sqrt[3]{x}$ y **reflejalas en** el eje **de** las x. Indica las ecuaciones, dominio e imagen de las funciones obtenidas por reflexión.

14. Determina el dominio **de** definición de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \sqrt{3x + 5}$
b*) $g(x) = \sqrt[3]{2x - 3}$

c) $p(x) = \sqrt{x^2 - x}$
d*) $q(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$

e) $k(x) = \sqrt{x^2 - 16}$
f) $m(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$

g) $n(x) = \sqrt{x^2 - x - 12}$
h) $h(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x}}$

15. De **los** pares ordenados siguientes determina a cuáles de las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $h(x) = \sqrt{x}$, $p(x) = \sqrt[3]{x}$ pertenecen:

a) $(1;\ 1)$
b) $(1;\ 2)$
c) $(3;\ 9)$
d) $(0{,}2;\ 0{,}008)$
e) $[\sqrt{2};\ \sqrt[4]{2}]$
f) $(16;\ 2\sqrt{2})$
g) $[2\sqrt{2};\ \sqrt{2}]$
h) $[\sqrt[3]{2};\ \sqrt[6]{2}]$
i) $[\sqrt[4]{2};\ \sqrt{2}]$
j) $(3;\ 27)$
k) $(2;7)$
l) $(-1;\ -1)$

16. Representa gráficamente las siguientes funciones:

$f(x) = a(x + b)^3 + c$, $g(x) = a\sqrt{x + b} + c$,
$p(x) = a(x + b)^2 + c$ y analiza en cada caso sus propiedades si:

a) $a = 1;\ b = 0;\ c = 0$
b) $a = 1;\ b = -2;\ c = 0$
c) $a = 1;\ b = -3;\ c = 0$
d) $a = 1;\ b = 4;\ c = 0$
e) $a = 1;\ b = 0;\ c = 1{,}5$
f) $a = 1;\ b = 0;\ c = -3{,}5$
g) $a = 2;\ b = 0;\ c = 0$
h) $a = 3;\ b = 1;\ c = 0$
i) $a = 1;\ b = 2;\ c = 3$
j) $a = 1;\ b = -2;\ c = -3$
k) $a = 1;\ b = 3;\ c = -1$
l) $a = 1;\ b = -4;\ c = 2$

¿Cómo surge la trigonometria?

La trigonometria (del griego trigônom triángulo; metros medida) tuvo sus orígenes en Grecia y Egipto.

Una mirada retrospectiva para hallar sus orígenes nos conduce hasta el siglo II. En este siglo el matemático Hiparco, nacido en Nicea, Asia Menor y considerado el más destacado de los astrónomos griegos, inicia el uso de una tabla de cuerdas de la circunferencia que en cierto modo equivalia a una tabla rudimentaria de valores del seno.

En su astronomía, Hiparco habia introducido la división sexagesimal **de** los babilonios y Claudio Ptolomeo solo unos pocos años mas tarde continua el uso **de** esta división, y en su obra el **Almagesto,** también del siglo 11, calcula una tabla de cuerdas y llega a expresiones en las que si se cambia la palabra "cuerda" por "doble del seno del arco mitad" podrían obtenerse **algunas** de las fórmulas de nuestra actual trigonometría.

En el siglo IV una obra hindú va mucho mas allá de la trigonometría griega y presento con una mayor precisión una tabla de valores del seno.

La trigonometria hindú es adaptada y desarrollada por los arabes y **ya** en el siglo IX el astrónomo Al Battani usa, además del seno, la tangente y la cotangente y da un paso importante al aplicar, en cierto modo, el álgebra a la trigonomeiria.

El primer texto árabe en el **que** aparece la trigonometria como una ciencia independiente se debe al astronomo persa Nassir-eddin (1201-1274).

Después **que** los árabes penetran en Europa y difunden sus conocimientos matemáticos, se publica el primer tratado de trigonometria escrita en 1464 en latín. Su autor fue el matemático alemán J. Müller y en su obra demuestra de una forma sencilla y elegante el 'Teorema de los **senos.**

El importante desarrollo **que** Francois Vieta (1540-1603) ha logrado con el álgebra simbólica le permite aplicar esta de modo sistemático a la trigonometria y llega asi a obtener, por procedimientos algebraicos, casi todas las identidades fundamentales de la actual trigonometría. dando de este modo el paso definitivo hacia nuestra presente trigonometria elemental, parte de la cual **vas** a aprender en este grada.

CAPÍTULO 3

Funciones trigonométricas

Razones trigonométricas

1. *Razones trigonométricas de un ángulo agudo*

En los grados anteriores has estudiado relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo (como **el** teorema **de** Pitágoras, por ejemplo) y también entre sus ángulos.

Además de estas relaciones, existen otras entre lados y ángulos, que se expresan **mediante** las razones trigonométricas: seno, coseno y tangente.

Definición 1

> Sea a un ángulo agudo de vértice A en un triángulo rectángulo ABC (fig. 3.1), **sean** a y b los catetos y c la hipotenusa, se llama:
>
> **seno de** a y se denota sen α a la razón $\frac{a}{c}$, entre el cateto opuesto a a y **la** hipotenusa.
>
> coseno de a y ***se*** denota **cos** a a la razón $\frac{b}{c}$, entre el cateto adyacente a α y la hipotenusa.
>
> tangente de α y **se denota tan** α **a la** razón $\frac{a}{b}$, entre el cateto opuesto y el **adyacente a dicho** ángulo.

$$\text{sen } \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos a = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{u}{b}$$

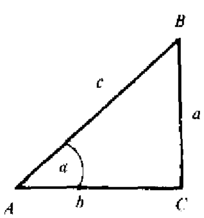


Fig. 3.1

Esquemáticamente las razones trigonométricas se **pueden** recordar en la forma:

seno: $\dfrac{\text{cat. opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ coseno: $\dfrac{\text{cat.adyacente}}{\text{hipotenusa}}$ tangente: $\dfrac{\text{cat.opuesto}}{\text{cat.adyacente}}$

Como la hipotenusa cs mayor que los catetos, de las definiciones anteriores resulta:

$$\boxed{\text{sen } a \leqslant 1;\ \cos \alpha \leqslant 1}$$

Las razones trigonométricas definidas no dependen del triángulo rectángulo elegido, san las mismas para todos los ángulos **que** tienen la misma amplitud

Teorema 1

Si ARC y A'B'C' son dos triángulos rectángulos en C y C', tales que a = a', entonces: sen α = sen α'; cos a = cos a'; tan α = tan u'

Demostración

De la condición α = a' **y** y = γ' se deduce que los triángulos ***ABC*** y A'B'C ' son semejantes. luego $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$ (fig. *3.2)*

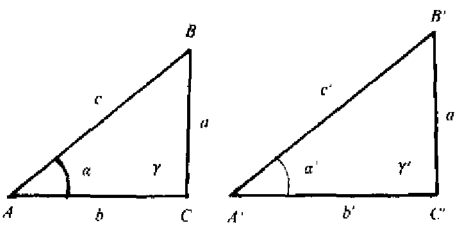


Fig. 3.2

De aquí resulta: $\dfrac{a}{c} = \dfrac{a'}{c'}$; $\dfrac{b}{c} = \dfrac{b'}{c'}$; $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$

y esto implica:

sen α = sen a'; cos a = cos $\boldsymbol{a'}$; **tan** α = tan α' como se quería.■

Ejemplo 1

Traza un triángulo con un ángulo $\alpha = 30^\circ$, mide sus lados y calcula las razones trigonométricas de α.

Resolución

Trazamos el triángulo como se indica en la figura 3.3; al medir sus lados obtenemos:

$a = 3{,}0$ cm; $b = 5.2$ cm; $c = 6{,}0$ cm.

Luego, $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{3}{6} = 0{,}50$

$\cos \alpha = \dfrac{5{,}2}{6} = 0.87$

$\tan \alpha = \dfrac{3}{5{,}2} = 0{,}58.$ ■

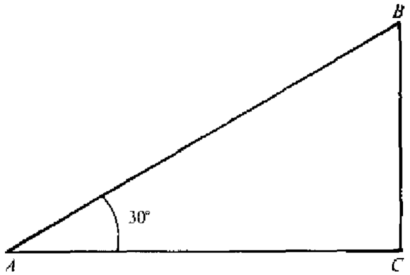


Fig. 3.3

Los resultados obtenidos en el ejemplo anterior son valores aproximados; con medidas más precisas pueden obtenerse con mayor número de cifras correctas[1]

Como resultado del teorema 1 vemos que es posible escribir

$\operatorname{sen} 30^\circ = 0{,}50; \quad \cos 30^\circ = 0{,}87; \quad \tan 30^\circ = 0{,}58$

En lo que sigue escribiremos indistintamente las razones trigonométricas de un ángulo o de una cantidad de amplitud. Como hemos visto, esto no da lugar a confusiones.

También es consecuencia del teorema 1 que el ángulo está determinado por una de sus razones trigonométricas pues si las razones son iguales los triángulos son semejantes y los ángulos coinciden.

Ejemplo 2

Si $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{1}{3}$, calcula $\cos \alpha$ y $\tan \alpha$.

Resolución

Como solo nos interesan razones entre lados, podemos trabajar en cualquier triángulo rectángulo en el que la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa sea $\dfrac{1}{3}$. En un triangulo ABC en el que: $a = 1$; $c = 3$; se tiene

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{9 - 1} = \sqrt{8}$$

[1] En general (con pocas excepciones) las razones trigonométricas son numeros irracionales y no pueden representarse exactamente mediante expresiones decimales

entonces, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ y $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. ■ [1]

Observa que conocido el seno **hemos** determinado univocamente **el** ángulo.

Ejercicios (epígrafe 1)

1. En un triangulo ABC rectángulo en C los catetas a y b miden respectivamente:
   a) 3,00 cm y 4,00 cm b) 9,40 cm y 10,0 cm
   c) 0,20 dm y 10 cm d) 1,41 cm y 1,00 cm
   Determina las razones trigonométricas de los ángulos agudos a y β.

2. En un triangulo ABC rectangulo en A se tiene a = 13 cm y c = 12 cm. Calcula las razones trigonométricas de sus ángulos agudos.

3. La **medida** de la hipotenusa de un triangulo rectángulo isosceles ABC ($\sphericalangle A = 90°$) es **2.** Calcula las razones trigonométricas de B.

4. Sean a y β las amplitudes de los angulos agudos **de** un triangulo rectángulo ABC ($\gamma = 90°$).
   a) Si sen a = 3/5; calcula cos a, tan a y **sen** β.
   b) **Si** cos β = 12/13; calcula sen β, tan β y cos a.
   c) Si tan a = 4/3; calcula sen α, cos a, sen β y cos β.
   d) Si tan β = 1; calcula sen β, cos β y tan a.

5. Construye el angulo agudo α, tal **que:**
   a) sen α = 1/2 b) cos α = 4/5 c) tan α = 3/4.

6. Dado sen a = 5/13, construye **el** angulo a **y** halla cos a y tan a.

7. **Dado** cos β = 3/4; construye el angulo β y halla sen β y **tan** β.

8. Si tan y = 3, construye el angulo y y halla sen y y cos y.

9. En un triangulo ABC rectángulo en A, tan y = $4\frac{2}{3}$. Calcula: sen y, cos γ, sen β, cos β y **tan** β.

10. Halla la longitud de la hipotenusa de un triangulo ABC rectángulo en A sabiendo que cos y = 4/5 y b = 16 **cm.**

11. En un triangulo ABC rectangulo en C, sen β = 4/5 y b = 40 **cm.** Halla la longitud de **la** hipotenusa **del** triangulo y **los** valores **de** cos β y **tan** a.

[1] Cuando las razones trigonométricas se expresen en esta forma, como cociente de dos enteros, se trata de un ejercicio no relacionado con la practica y asumimos que el valor dado es exacto. Por eso la respuesta se expresa sin aproximar.

12. Si tan $\alpha = 2\frac{1}{3}$ y $0° < \alpha < 90°$, calcula sen α y cos a.

13. **Sea** ***ABC*** rectangulo en ***A***, sen y = 5/6 **y** *a* = **18** cm. Calcula la longitud del cateto *b*, cos p y tan y.

14. En $\triangle$ ***ABC*** rectángulo en *C*, a = 30° **y** *b* = 3,0 cm. Calcula la longitud **de** la hipotenusa.

15. En $\triangle ABC$ rectangulo en *C*, $\alpha = 45°$ y ***c*** = 4,0 cm. Halla la longitud de los catetos y el valor de sen β, cos β y tan β.

16. Demuestra que en un triángulo ***ABC*** rectángula en *C* se cumple:
   a) sen a = sen $(\gamma - \beta)$ b) cos a = cos $(\gamma - \beta)$
   c) tan a = tan $(\gamma - \beta)$

2. *Ángulos notables*

Existen algunos ángulos cuyas razones trigonomktricas son sencillas y aparecen con mucha frecuencia en la práctica por lo que es conveniente memorizarlas; son los llamados "ángulos notables" y sus razones trigonométricas se calculan en los siguientes teoremas.

Teorema 1

> Si un triángulo rectangulo tiene un ángulo agudo de *30"* el cateto opuesto a ese ángulo es la mitad de la hipotenusa.

Demostración

Sea ABC un triángulo rectangulo en *C* en el cual α = 30" y tracemos *CD* de forma tal **que** $\sphericalangle DCB = 60°$, entonces $\sphericalangle DCA = 30°$ (fig. **3.4).**

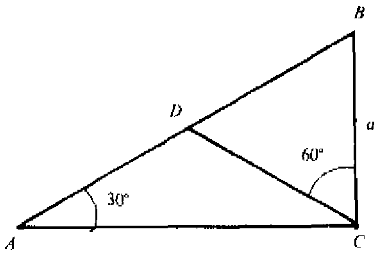


Fig. 3.4

El triángulo *BCD* es equilátero (ángulos interior& de 60°) y por tanto a = *BD* = *DC*. **Además,** el triángulo *ACD* es isósceles y entonces *AD* = *DC*(= ***a).***
De aquí resulta
c = *AD* + *DB* = *a* + *a* = 2*a*. ■

Teorema 2

> **Se** cumple:
>
> a) $\text{sen } 30^\circ = \dfrac{1}{2}$; $\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
>
> b) $\text{sen } 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$; $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$
>
> c) $\text{sen } 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan 45^\circ = 1$

Demostración

En el triángulo AAC (fig. 3.5)

tenernos $c = 2a$ y $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3} \cdot a.$

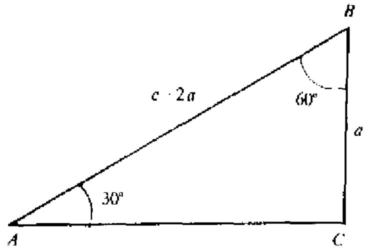


Fig. 3.5

Entonces:

a) $\text{sen } 30^\circ = \text{sen } \alpha = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$

$\cos 30^\circ = \cos \alpha = \dfrac{\sqrt{3}\, a}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 30^\circ = \tan \alpha = \dfrac{a}{\sqrt{3}\, a} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\text{sen } 60^\circ = \text{sen } \beta = \dfrac{\sqrt{3}\, a}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60^\circ = \cos \beta = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$

$\tan 60^\circ = \tan \beta = \dfrac{\sqrt{3}\, a}{a} = \sqrt{3}$

c) **Sea** ABC un triángulo rectangulo isósceles, es decir, sus ángulos agudos son iguales y $a = b$ (fig. 3.6). Se tiene:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2} \cdot a$$

luego $\text{sen } 45^\circ = \text{sen } \alpha = \dfrac{a}{\sqrt{2}\, a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

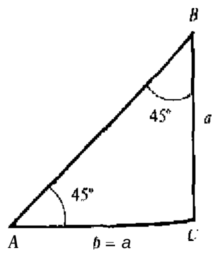


Fig. 3.6

$$\cos 45° = \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{2}\, a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45° = \tan \alpha = \frac{a}{a} = 1. \blacksquare$$

Ejemplo 1

a) Calcula $\dfrac{\text{sen } 30° + \cos 60°}{\tan 60° \cdot \tan 30°}$

b) Una fuerza de 20,0 N forma un ángulo de 45,0° con la horizontal. Calcula sus componentes horizontal y vertical.

c) En un triángulo rectángulo en C, b = 3,8 cm y c = 7,6 cm. Calcula el ángulo α.

Resolución

a) $$\frac{\text{sen } 30° + \cos 60°}{\tan 60° \cdot \tan 30°} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{\frac{3}{3}} = 1$$

b) En este caso se trata de valores tomados **de** la práctica con **3** cifras, luego el resultado tendrá 3 cifras.
En la figura 3.7 se tiene:

$$\cos 45° = \frac{F_x}{|F|}; \ \text{sen } 45° = \frac{F_y}{|F|}$$

Luego, $F_x = |F| \cos 45° = 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \mathbf{10}\sqrt{2} = 14{,}1$

$$F_y = |F| \text{ sen } 45° = 20 \ \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} = 14{,}1$$

Las componentes son ambas **de** 14,1 N.

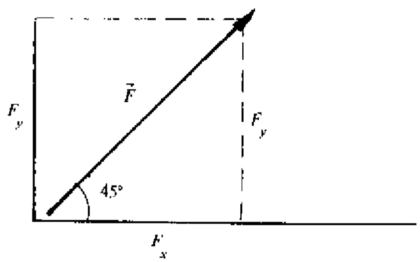


Fig. 3.7

c) En este caso son datos **que** representan valores de **la** práctica con solo 2 cifras correctas, la respuesta **debe darse** con dos cifras significativas.

En la figura 3.8 se aprecia

$\cos a = \frac{3,8}{7,6} - 0,50;$

del teorema **2**

inferirnos que $\alpha = 60°$. ■

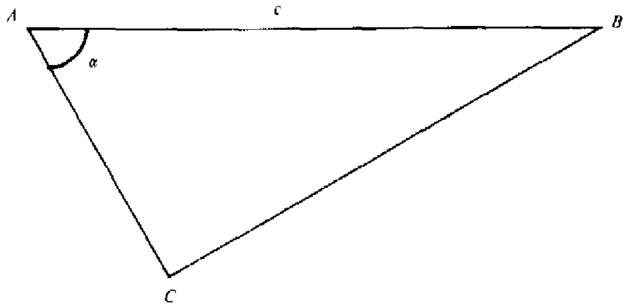


Fig. 3.8

Las definiciones **dadas** hasta ahora no incluyen las razones trigonométricas **de** 0° ni de 90°. Para incluirlas, consideremos la situación que se ha representado en la **fi**gura **3.9. En ella se ha** dibujado un sistema de coordenadas **de** modo que **el** vértice **A del** triangulo ABC coincide con el origen y el eje "x" contiene al cateto b. En esas condiciones las razones trigonométricas de α pueden expresarse utilizando las coordenadas $(x; y)$ del vértice B:

$$\text{sen } \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\tan a = \frac{Y}{x}$$

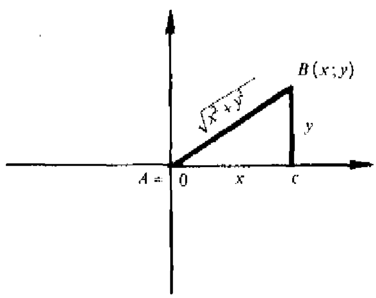


Fig. 3.9

Observa que si el ángulo $\alpha = 0$o, el punto B estará en el eje **"x" si** el ángulo $a = 90°$, el punto B estará en el eje "y".

Estas consideraciones nos permiten ampliar las razones trigonométricas con los siguientes valores natables:

$\text{sen } 0° = \dfrac{0}{\sqrt{x^2 + 0^2}} = 0$

$\text{sen } 90° = \dfrac{Y}{\sqrt{0^2 + y^2}} = 1$

$\cos 0° = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 0^2}} = 1$

$\cos 90° = \dfrac{0}{\sqrt{0^2 + y^2}} = 0$

$\tan 0° = \dfrac{0}{x} = 0$

$\tan 90°$: ¡no definido!

Atención: No es posible definir la tangente para 90° **pues** en ese caso $x = 0$ y la división por cero no esta definida.

Ejemplo 2

Calcula: $\dfrac{1 + \tan 45° - \text{sen } 90°}{\cos 0° \cdot \text{sen } 30° - \cos 90°}$

Resolución

Sustituyendo los valores obtenidos resulta:

$$\frac{1 + \tan 45° - \text{sen } 90°}{\cos 0'' \cdot \text{sen } 30° - \cos YO^c} = \frac{1 + 1 - 1}{1 \cdot \frac{1}{2} - 0} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2..$$

En la siguiente tabla se resumen los valores de las razones trigonométricas de los ángulos notables.

α	0°	30°	45°	60°	90°
sen α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{7}$	0
tan α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

Puedes comprobar que en esta tabla **se** cumple para cada valor de α:

$\cos \alpha = \text{sen}\,(90^\circ - al$	$\text{sen}\,\alpha = \cos\,(90'' - \alpha)$
$0 \leqslant \text{sen}\,\alpha \leqslant 1$	$0 \leqslant \cos\,\alpha \leqslant 1$

Observa, además, que los valores del seno empiezan en 0 (para 0°) y crecen hasta 1 (para 90°), mientras **que** los del coseno empiezan en 1 y **disminuyen** hasta 0.

Estas relaciones se cumplen para todo ángulo a.

Fíjate que **solo tienes** que memorizar los valores del **seno** porque:

el coseno de un hngulo es el seno del ángulo complementarlo,
la tangente es el cociente del seno entre el coseno.

Ejercicios (epígrafe 2)

1. Halla el valor numérico de las siguientes expresiones:

a) $\text{sen}\,30^\circ \cdot \cos 45^\circ$ b) $\tan 45^\circ - \cos 30''$

c) $\cos 30^\circ + \tan 60''$ d) $\text{sen}\,30^\circ \cdot \cos 45'' \text{ t } \tan 60^\circ$

e) $\dfrac{\text{sen}\,30^\circ}{\cos 45^\circ} \text{ t } \dfrac{1}{\cos 45^\circ \cdot \tan 45^\circ}$

f) $\text{sen}^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ$ [1] g) $\tan 60^\circ - \dfrac{\cos^2 45''}{\text{sen}^2 45^\circ} \cos 30^\circ$

h) $\text{sen}^2\, 30 - 2\tan^2 60^\circ$ i) $\dfrac{\text{sen}\,45^\circ}{\tan 60^\circ} - \dfrac{\cos^2 60^\circ}{\text{sen}\,30^\circ}$

2. Si $A = \cos 60^\circ$ y $B = \dfrac{1}{\cos 45''}$. Calcula **el** valor de $2A - 3B$.

3. Si $M = \text{sen}\,30^\circ$, $N = \cos 60^\circ$, $P = \tan 45^\circ$ y $Q = \cos 30^\circ$

Calcula el valor de $\dfrac{M + 2N}{P - Q}$.

4. Si $a = 30^\circ$, $b = 60^\circ$ y $c = 45^\circ$. Halla **el** valor **de las** expresiones

$$\frac{\text{sen}^2 a + \cos b}{\cos c + 1}; \quad \sqrt{\frac{\cos^2 a + 2\,\text{sen}\,a}{\tan c - 2/9}}$$

5. Comprueba que:

a) $2\,\text{sen}\,30^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \tan 60^\circ + \text{sen}\,45^\circ = \dfrac{3 + \sqrt{2}}{2}$

1 La notación $\text{sen}^2 \alpha$ se utiliza en lugar de $(\text{sen}\,\alpha)^2$; lo mismo es válido para cualquier potencia de las razones trigonométricas.

b) $\dfrac{2}{\cos 45^\circ} + \dfrac{3 \cos 30^\circ \cdot \cos 60^\circ}{\text{sen } 60^\circ} = \dfrac{4\sqrt{2} + 3}{2}$

c) $\dfrac{\text{sen } 30^\circ}{\cos 45^\circ} - \cos 60^\circ \cdot \tan 30^\circ = \dfrac{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{6}$

d) $\sqrt{3} \tan 30^\circ \cdot \cos 30^\circ - \text{sen } 60^\circ = 0$

e) $\dfrac{\dfrac{1}{\cos 60^\circ} - \cos 30^\circ}{\tan 45^\circ - \text{sen } 60^\circ} = 5 + 2\sqrt{3}$

f) $2 \text{ sen}^2 60^\circ + 3 \dfrac{\cos 45^\circ}{\text{sen } 45^\circ} - \dfrac{1}{\cos^2 30^\circ} = 3\dfrac{1}{6}$

g) $\dfrac{3 \cos^2 60^\circ \cdot \cos 30^\circ}{\text{sen}^2 60^\circ} - \text{sen } 60^\circ = 0$

h) $\dfrac{\dfrac{3 \tan^2 30^\circ}{\cos^2 45^\circ}}{1 - \dfrac{\cos^2 60^\circ}{\text{sen}^2 60^\circ}} = 3$

i) $\dfrac{4 \cos^2 30^\circ \cdot \text{sen}^2 45^\circ \cdot \tan 60^\circ}{3 \dfrac{\cos^2 30^\circ}{\text{sen}^2 30^\circ} - 2 \cos^2 45^\circ} + \dfrac{\cos^2 60^\circ}{16 \text{ sen}^2 60^\circ} = \dfrac{1 + 9\sqrt{3}}{48}$

6. Una fuerza de 50,0 N forma un ángulo de 60,0° con la horizontal. Calcula sus componentes horizontal y vertical.

7. Una fuerza forma un ángulo de 30,0° con la horizontal y su proyección vertical es 15,3 N. Determina la fuerza y su proyección horizontal.

8. Calcula el valor de las siguientes expresiones:

a) $2 \text{ sen } 90^\circ - \cos 0^\circ + \tan 45^\circ$

b) $\dfrac{3}{4} \tan 0^\circ + \dfrac{\text{sen } 90^\circ}{3 \cos 0^\circ} - \text{sen}^2 60^\circ \cdot \cos 45^\circ$

c) $\dfrac{2 \text{ sen } 30^\circ}{\cos 0^\circ} + \dfrac{1}{\text{sen } 90^\circ} \text{ sen } 0^\circ - \tan^2 30^\circ$

d) $\dfrac{2 \tan 0^\circ}{\cos 0^\circ} - \sqrt{\dfrac{\text{sen}^2 90^\circ}{\cos^2 0^\circ \cdot \text{sen } 30^\circ}} + \tan 45^\circ$

9. Prueba que:

a) $\text{sen } 90^\circ + \tan 0^\circ \cdot \cos 0^\circ = 1$

b) $\dfrac{\tan 45^\circ + \dfrac{1}{\cos 0^\circ}}{\operatorname{sen} 90^\circ - \cos 60^\circ} + \dfrac{1}{\cos 0^\circ + \operatorname{sen} 0^\circ} = 5$

c) $\sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}^2 45^\circ \cdot \cos 0^\circ + 1}{2 \operatorname{sen} 90^\circ \cdot \tan^2 60^\circ}} + \dfrac{\tan 0^\circ}{2} - \cos 30^\circ = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2}$

d) $\sqrt{\dfrac{\cos^2 0^\circ + 3 \tan 30^\circ \cdot \operatorname{sen} 90^\circ}{1 + 3 \tan 30^\circ}} = 1$

10. Halla el valor de x en:
 a) $x + \operatorname{sen} 30^\circ - \cos 60^\circ = \tan 30^\circ + \operatorname{sen} 90^\circ + 2 \cos 0^\circ$
 b) $2x \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \cos 30^\circ = \cos 60^\circ \cdot \operatorname{sen} 30^\circ - \cos 90^\circ \cdot \operatorname{sen} 0^\circ$.

11. Investiga en cada caso si los pares de angulos que corresponden a las amplitudes **indicadas** son complementarios:
 a) $\{14^\circ; 76^\circ\}$ b) $\{28{,}5^\circ; 51{,}5^\circ\}$ c) $\{26{,}3^\circ; 64{,}7^\circ\}$ d) $\{58{,}5^\circ; 31{,}5^\circ\}$.

12. **Determina el** ángulo complementario **de** cada **uno** de los ángulos siguientes:
 a) $38{,}7^\circ$ b) $54{,}8^\circ$ c) $14{,}9^\circ$ d) 45°

13. ¿Cuáles de los valores siguientes son iguales? Escribe las **igualdades correspondientes.**
 a) $\operatorname{sen} 35^\circ$; $\operatorname{sen} 60^\circ$; $\operatorname{sen} 42{,}3^\circ$; $\cos 55^\circ$; $\cos 44{,}7^\circ$; $\cos 30^\circ$
 b) $\cos 75^\circ$; $\operatorname{sen} 15^\circ$; $\operatorname{sen} 29{,}7^\circ$; $\operatorname{sen} 60{,}3^\circ$; $\cos 60{,}3^\circ$; $\cos 59{,}3^\circ$
 c) $\operatorname{sen} 51^\circ$; $\operatorname{sen} 37^\circ$; $\cos 10{,}7^\circ$; $\operatorname{sen} 79{,}3^\circ$; $\cos 85^\circ$; $\cos 43^\circ$; $\operatorname{sen} 5^\circ$; $\cos 39^\circ$.

14. Determina una solución de cada una **de las** ecuaciones siguientes:
 a) $\operatorname{sen} 30^\circ = \cos a$
 b) $\operatorname{sen} \alpha = \cos 37{,}5^\circ$
 c) $\cos 15^\circ = \operatorname{sen} a$
 d) $\cos a = \operatorname{sen} 22{,}3^\circ$
 e) $\operatorname{sen} x = \cos 82{,}3^\circ$
 f) $\operatorname{sen} 17^\circ = \cos x$
 g) $\cos \beta = \operatorname{sen} \beta$
 h) $\operatorname{sen} y = \cos 0^\circ$
 i) $\operatorname{sen} y = \cos 37{,}1^\circ$

15. **Simplifica:**
 a) $\operatorname{sen} x + \cos (90^\circ - x)$
 b) $\dfrac{2 \cos (90^\circ - x) \cdot \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x}$
 c) $2 \operatorname{sen} (90^\circ - x) + \operatorname{sen} x$
 d) $\dfrac{\operatorname{sen} (90^\circ - x) \cdot \cos x}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\cos x}$

3. *Identidades trigonométricas fundamentales*

Las razones trigonométricas de un ángulo están relacionadas entre si por algunas **igualdades** que se conocen como identidades trigonométricas fundamentales por las numerosas aplicaciones **que** poseen y **que** es conveniente aprender de memoria.

Teorema 1

> Se cumple:
>
> a) $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
>
> b) $\tan a = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \qquad (\alpha \neq 90°)$
>
> c) $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \qquad (\alpha \neq 90°)$

Demostración

a) En todo triángulo rectángulo en C se cumple
$a^2 + b^2 = c^2$ (teorema de Pitágoras)
dividiendo toda la igualdad por c^2 obtenemos:

$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$ lo que significa:

$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ para $0 < \alpha < 90°$
Para $0°$ y $90°$ se cumple $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ pues $0^2 + 1^2 = 1$
Entonces la igualdad es cierta para todo α, como se quería.

b) Sea ABC un triángulo rectángulo en C

entonces: $$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \tan\alpha.$$

Si $\alpha = 0$, $\tan 0 = 0 = \dfrac{0}{1} = \dfrac{\operatorname{sen} 0}{\cos 0}$.

c) Si $a \neq 90°$, $\cos a \neq 0$ y se puede dividir en ambos miembros de al por $\cos^2\alpha$ con lo que resulta:

$$\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos a}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$\tan^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; o lo que es lo mismo

$$\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1. \blacksquare$$

Ejemplo 1

a) Transforma la siguiente expresión de modo que sólo contenga sen z y calcula su valor para sen $z = \dfrac{3}{5}$

$$\frac{\operatorname{sen} z}{1 + \cos z} + \frac{1 + \cos z}{\operatorname{sen} z} \qquad (z \neq 0^\circ)$$

b) Simplifica: $\dfrac{\cos z}{\tan z} - \dfrac{1 - 2\operatorname{sen}^2 z}{\operatorname{sen} z} \qquad (z \neq 0^\circ;\ z \neq 90^\circ)$

Resolución

a) **Efectuando obtenemos:**

$$\frac{\operatorname{sen} z}{1 + \cos z} + \frac{1 + \cos z}{\operatorname{sen} z} = \frac{\operatorname{sen}^2 z + (1 + \cos z)^2}{\operatorname{sen} z \cdot (1 + \cos z)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 z + 1 + 2\cos z + \cos^2 z}{\operatorname{sen} z \cdot (1 + \cos z)}$$

como $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$, **resulta:**

$$\frac{\operatorname{sen} z}{1 + \cos z} + \frac{1 + \cos z}{\operatorname{sen} z} = \frac{2 + 2\cos z}{\operatorname{sen} z \cdot (1 + \cos z)} = \frac{2(1 + \cos z)}{\operatorname{sen} z \cdot (1 + \cos z)}$$

como $1 + \cos z \neq 0$, **es posible simplificar y queda**

$$\frac{\operatorname{sen} z}{1 + \cos z} + \frac{1 + \cos z}{\operatorname{sen} z} = \frac{2}{\operatorname{sen} z}$$

Sustituyendo resulta: $\dfrac{2}{\frac{3}{5}} = \dfrac{10}{3}$

b) **Transformando la tangente, la expresión se convierte en**

$$\frac{\cos z}{\tan z} - \frac{1 - 2\operatorname{sen}^2 z}{\operatorname{sen} z} = \frac{\cos z}{\frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}} - \frac{1 - 2\operatorname{sen}^2 z}{\operatorname{sen} z} = \frac{\cos^2 z}{\operatorname{sen} z} - \frac{1 - 2\operatorname{sen}^2 z}{\operatorname{sen} z}$$

$$= \frac{1 - \operatorname{sen}^2 z}{\operatorname{sen} z} - \frac{1 - 2\operatorname{sen}^2 z}{\operatorname{sen} z}$$

$$= \frac{1 - \operatorname{sen}^2 z - 1 + 2\operatorname{sen}^2 z}{\operatorname{sen} z} = \frac{\operatorname{sen}^2 z}{\operatorname{sen} z}$$

$$\frac{\cos z}{\tan z} - \frac{1 - 2\operatorname{sen}^2 z}{\operatorname{sen} z} = \operatorname{sen} z. \quad \blacksquare$$

Estas **identidades fundamentales pueden ser utilizadas en la** demostración de otras igualdades **de validez general que también reciben el nombre de identidades.**

Ejemplo 2

Prueba que:

a) $(\text{sen}\ \alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\ \text{sen}\ a \cdot \cos a$
b) $\text{sen}^2 A + \text{sen}^2 A \cdot \tan^2 A = \tan^2 A \qquad (A \neq 90°)$

c) $\dfrac{1}{\cos x} - \tan x\ .\ \text{sen}\ x = \cos x \qquad (x \neq \text{YO}^n)$

Resolución

En general transformaremos el **miembro izquierdo para obtener** el derecho:

a) **En este caso efectuamos:**

$$\begin{aligned}(\text{sen}\ a + \cos\alpha)^2 &= \text{sen}^2 a + 2\ \text{sen}\ n \cdot \cos a + \cos^2 a \\ &= (\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha)\ t\ 2\text{sen}\ a\ .\ \cos a \\ &= 1 + 2\text{sen}\ a \cdot \cos a\end{aligned}$$

b) **En este** caso **extraemos factor común:**

$$\begin{aligned}\text{sen}^2 A + \text{sen}^2 A \cdot \tan^2 A &= \text{sen}^2 A \cdot (1 + \tan^2 A) = \text{sen}^2 A \cdot \frac{1}{\cos^2 A} \\ &= \left(\frac{\text{sen A}}{\cos \text{A}}\right)^2 = \tan^2 \text{A}\end{aligned}$$

c) **En este caso sustiiuimos tan x y calculamos:**

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos x} - \tan x \cdot \text{sen}\ x &= \frac{1}{\cos x} - \frac{\text{sen}\ x}{\cos x} \cdot \text{sen}\ x \\ &= \frac{1}{\cos x} - \frac{\text{sen}^2 x}{\cos x} = \frac{1 - \text{sen}^2 x}{\cos x} \\ &= \frac{\cos^2 x}{\cos x} = \cos x. \blacksquare\end{aligned}$$

Ejercicios (epígrafe 3)

.**Transforma las siguientes expresiones de modo que sólo** contengan **la** razón trigonométrica **que se indica y calcula su valor para el dato correspondiente.**

a) $\dfrac{1}{1 + \cos a} + \dfrac{1}{1 - \cos a} \qquad a \neq 0°$ (sen a, **dato sen** $a = 4/5$)

b) $\dfrac{\tan^2 a}{1 + \tan^2 a} \cdot \dfrac{1 + \dfrac{1}{\tan^7 n}}{\dfrac{1}{\tan^2 a}} \qquad \alpha \neq 0°, 90°$

(tan a, dato cos $a = 5/13$)

2. **Simplifica** las **siguientes expresiones tanto como sea posible.**

a) $\dfrac{1}{1 + \cos a} + \dfrac{\cos a}{\operatorname{sen}^2 a}$ $\quad a \neq 0°$ b) $\dfrac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x$ $\quad x \neq 90°$

c) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} - \dfrac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha}$ $\quad \alpha \neq 0°$

3. **Prueba que se cumple:**

a) $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2 \cos^2 x - 1$ b) $\cos^2 a + \cos^2 a \cdot \dfrac{1}{\tan^2 n} = \dfrac{1}{\tan^2 \alpha}$

c) $\operatorname{sen}^3 \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \operatorname{sen} \alpha$ d) $\left(1 + \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\right) \operatorname{sen}^2 x = 1 \quad (x \neq 0°)$

e) $(1 + \tan^2 a)(1 - \cos^2 a) = \tan^2 a \quad (a \neq 90°)$

f) $\dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} a} + \dfrac{1}{1 - \operatorname{sen} a} = \dfrac{2}{\cos^2 a} \quad (a \neq 90°)$

g) $\dfrac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x = 1 \quad (x \neq 90°)$

h) $\left(\dfrac{1}{\tan a} + 1\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\tan a} - 1\right)^2 = \dfrac{2}{\operatorname{sen}^2 a} \quad (a \neq 90°,\ a \neq 0°)$

i) $(1 - \operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 2(1 - \operatorname{sen} x)(1 + \cos x)$

j) $\dfrac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \cdot \dfrac{1 + \dfrac{1}{\tan^2 \alpha}}{\dfrac{1}{\tan^2 \alpha}} = \tan^2 \alpha \quad (\alpha \neq 0°,\ \alpha \neq 90°)$

k) $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2$ t $(\operatorname{sen} x - \cos x)^2 = 2$

l) $\dfrac{\tan \alpha + \dfrac{1}{\tan \beta}}{\dfrac{1}{\tan \alpha} + \tan \beta} = \dfrac{\tan \alpha}{\tan \beta} \quad (\alpha \neq 0°,\ \alpha \neq 90°)\ (\beta \neq 0°,\ \beta \neq 90°)$

m) $\tan^2 \alpha + \dfrac{1}{\cos^2 \beta} = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha} + \tan^2 \beta \quad (\beta \neq 90°,\ \alpha \neq 0°)$

4. **Demuestra que las siguientes igualdades son ciertas,**

al $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

b) $\tan a + \dfrac{1}{\tan a} = \dfrac{1}{\operatorname{sen} a \cdot \cos a} \quad (u \neq 0°,\ a \neq 90°)$

c) $\operatorname{sen} x\,(1 + \tan x) + \cos x \left(1 + \dfrac{1}{\tan x}\right) = \dfrac{\operatorname{sen} x \text{ t } \cos x}{\cos x \cdot \operatorname{sen} x} \quad (x \neq 0°,\ x \neq 90°)$

d) $\dfrac{\operatorname{sen} a}{1 + \cos a} + \dfrac{1}{\tan a} = \dfrac{1}{\operatorname{sen} a} \qquad (a \neq 0^\circ,\ a \neq 90^\circ)$

e) $1 - \tan^2 a = 2 - \dfrac{1}{\cos^2 a} \qquad (a \neq 90^\circ)$

4. *Tablas trigonométricas*

No siempre *es* posible calcular con angulos notables ni determinar las razones como se hizo en el ejemplo 1 del epígrafe 1; es muy engorroso e **inexacto.** Por eso en el trabajo con las razones trigonométricas se utilizan valores que han sido calculados y con suficiente precisión.

En las páginas desde la 335 hasta la 338 aparecen las **tablas** con las que trabajaremos en décimo grado. En estas tablas se dan los valores **de las** razones con **4** cifras correctas para los ángulos de 0° a 90° con incremento de 0,1°.

Las **ramas de las páginas** ***335*** y 336 contienen los valores del seno y el coseno. El valor de la razón aparece en la intersección **de** la fila **que** corresponde al número **de** grados y la columna que corresponde a las décimas.

Cada valor corresponde al seno de un ángulo y al coseno del ángulo complementario; para el seno los grados aparecen en la columna del extremo izquierdo y crecen de arriba hacia abajo, para el coseno los grados aparecen en la columna del extremo derecho y crecen de abajo hacia arriba. En la tabla solo aparecen las cifras decimales, la parte entera que es 0 para todos los valores se escribe únicamente en la columna **que** corresponde a 0 décimas (fig. 3.10).

seno

G	,0	,1	,2	...	,6	,7	,8	,9		
0	0,0000	0,0017	0035	...	0105	0122	0140	0157	0175	89
1	0,0175	0192	0209	...	0279	0297	0314	0332	0349	88
2	0,0349	0366	0384	...	0454	0471	0488	0506	0523	87
3	0,0523	0541	0558	...	0628	0645	0663	0680	0698	86
4	0,0698	0715	0732	...	0802	0819	0837	0854	0872	85
5	0,0872	0889	0906	...	0976	0993	1011	1028	1045	84
6	0,1045	1063	1080	...	1149	1167	1184	1201	1219	83
7	0,1219	1236	1253	...	1323	1340	1357	1374	1392	82
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
39	0,6293	6307	6320	...	6374	6388	6401	6414	6428	50
40	0,6428	6441	6455	...	6508	6521	6534	6547	6561	49
41	0,6561	6574	6587	...	6639	6652	6665	6678	6691	48
42	0,6691	6704	6717	...	6769	6782	6794	6807	6820	47
43	0,6820	6833	6845	...	6896	6909	6921	6934	6947	46
44	0,6947	6959	6972	...	7022	7034	7046	7059	7071	45
...		,9	,8	...	,4	,3	,2	,1	0	G

coseno

Fig. 3.10

Ejemplo 1

Busca en la tabla:

a) sen 32° **b) cos 35°** **c) sen 47,5°** **d) cos 59,3°**

Resolución

a) **En la columna más a la izquierda en la tabla encontramos la fila que comienza por 32 y en la intersección con la columna encabezada par ,0 encontramos el valor buscado: 0,5299. Luego sen 32° = 0,5299 (fig. 3.11a).**

b) **En este caso se trata del coseno y debemos buscar 35 en la columna mas a la derecha en la tabla, no aparece en la primera pagina si no en la pagina 336. En la intersección de esta fila con la columna en cuyo pie aparece ,0 encontramos el valor buscado: 8192. Estas son las cifras decimales, luego cos 35° = 0,8192 (fig. 3.11b).**

seno

G	,0 ...	,7	,8 ...	1	
30	5000	5105	5120	5150	59
31	5150	5255	5270	5299	58
32	5299	5402	5417	5446	57
33	5446	5548	5563	5592	56
34	5592	5693	5707	5736	55
35	5736	5835	5850	5878	54
	(1,0)...	,3	,2 ...	,0	G

coseno

a)

seno

G	,0 ...	,5	,6 ...	1	
45	7071	7133	7145	7193	44
46	7193	7254	7266	7314	43
47	7314	7373	7385	7431	42
	....				
53	7986	8039	8049	8090	36
54	8090	8141	8151	8192	35
	,5		,4	,0	G

coseno

b)

Fig. 3.11

c) **La fila que en su extremo izquierdo comienza por 47 aparece en la página 336, en la intersección de esta fila y la columna encabezada por ,5 encontramos 7373. Luego sen 47,5° = 0,7373 (fig. 3.11b).**

d) La fila en cuyo extremo derecho aparece 59 esta en la pagina 335, en su intersección con la columna que tiene como pie ,3 aparece 5105.
Luego cos 59,3° = 0,5105 (fig. 3.11a). ∎

Si los ángulos aparecen con una precisión mayor que las décimas, se hace necesario redondear y en ese caso se está introduciendo un error, esto significa que no todas las cifras de la tabla se pueden asumir correctas, en estos casos sólo resultan correctas 3 de las 4 cifras que da la tabla y eso hace que la precisión del resultado final quede limitada a tres cifras significativas.

Ejemplo 2

Busca en la tabla:

a) sen 54,18° **b) cos 77°20'**

Resolución

a) Redondeamos la amplitud a las décimas, que es la precisión de la tabla, y obtenemos 54,2°. En la tabla encontramos sen 54,2° = 0,8111. Como no podemos garantizar tantas cifras, damos el resultado con tres: sen 54,18° = 0,811.

b) En este caso debemos expresar los minutos como una fracción decimal de grado.

Tenernos 20' = $\left(\frac{20}{60}\right)^{\circ}$ = 0,333°, luego sen 77°20' = sen 77,333° y redondeando hasta las décimas obtenemos 77,3°. La tabla da el valor:

cos 77,3° = 0,2198 y cuando redondeamos resulta cos 77°20' = 0,220. ∎

Recuerda que en la practica la mayor parte de los números que surgen son valores aproximados como los de este ejemplo; sin embargo mantenemos el convenio de escribir el signo igual en todos los casos.

Las tablas de las páginas 337 y 338 contienen los valores de la tangente, en esta tabla los grados se encuentran en la columna más a la izquierda y crecen hacia abajo+

La estructura de la tabla en la pagina 337 donde se encuentran los ángulos menores que 45° es como la de la tabla de senos y cosenos pues en este intervalo tan $\alpha \leqslant 1$.

En la página 338 aparecen los ángulos mayores que 45° cuya tangente es mayor que 1; en ella hasta los 63° se mantiene la estructura pero el primer valor de cada fila contiene una parte entera diferente de cero que es la que corresponde a los ángulos de esa fila, excepto los valores destacados con un asterisco que corresponden a la parte entera de la fila siguiente (fig. 3.12)

Tangente

Grados	,0	...	,5	,6 ...	
45	1,000	...	018	... 021	tan 45,5° = 1,018
.	.	...	.		
.	.	...	.		
.	.	...	.		
61	1,804	...			
62	1,881				
63	1,963		*006	*014 ...	tan 63,5° = 2,006
64	2,050				

Fig. 3.12

Ejemplo 3

Busca en la tabla:

a) tan 37,2° b) tan 62°3' c) tan 71,6° d) tan 88.9°

Resolución

a) En **la** intersección de la fila 37 y la columna encabezada por ,2 encontramos la **sucesión** de cifras 7590, luego: tan 37,2° = 0,7590 (fig. 3.13a).

b) Tenemos: 3' = $\left[\frac{3}{60}\right]^{\circ}$ = 0,05°. Debemos buscar **tan 62,05°** y redondeando lo transformamos en tan 62,1°. En la **intersección de** la **fila** 62 y la columna encabezada por ,1 encontramos la sucesión de cifras 889; como el primer valor de la fila anterior es 1,804, sera: tan 62,1° = 1,889. Redondeando a 3 cifras resulta **finalmente, tan 62,05° = 1,89 (fig. 3. 13b).**

c) En **la** intersección de **la fila** 71 y de la columna ,6 encontramos *006; el asterisco indica que **estas** son las cifras **decimales,** pero que **la** parte **entera que** le corresponde es la que aparece en la fila siguiente: 3.
Luego tan 71,6° = 3,006 (fig. 3.13 b)

d) En la intersección de **la fila** 88 y **la columna** ,9 encontramos 52,08 lo que significa: **tan** 88,9° = 52,08. a

Grados	Tangente ,0	,1	,
.			
.			
.			
37	0,7536	...	7590
tan 37,2° =	0,7590		

a)

Grados	Tangente ,0	,1	.	,6 ... ,9
61	1,804			
62		889		
.				
.				
.				
71	2,904			*006
72	3,078			

b)

Fig. 3.13

Cuando los datos representan valores tomados **de** la practica, **el resultado** debe expresarse con tantas cifras significativas como tenga el dato que menos tiene. Esto vale tanto para **las** amplitudes como **para** las razones **y longitudes.**

Ejemplo 4

a) Calcula $\dfrac{\text{sen } 35{,}2^{\circ} + \cos 57^{\circ}}{\tan 57^{\circ}}$

b) En el triángulo ABC **rectángulo en** C**, se tiene** c = **12,3** y a = **67,3°. Calcula** a.

Resolución

a) En este casa se trata de datos que no están referidos a ningún problema práctico, es decir, no se trata de valores aproximados. De todas maneras trabajaremos los valores con tres cifras significativas como es usual:

$$\frac{\text{sen } 35{,}2^\circ + \cos 57^\circ}{\tan 57^\circ} = \frac{0{,}576 + 0{,}545}{1{,}54} = 0{,}728$$

Todos los valores han **sido redondeados** a **tres** cifras.

b) En este caso se trata de datos que proceden de mediciones con tres cifras significativas, el resultado debe tener también 3 cifras significativas.
$a = c \cdot \text{sen } a$ (cat. opuesto: hiputcnusa · seno)
$a = 12{,}3 \cdot \text{sen } 67{,}3^\circ = 12{,}3 \cdot 0{,}923 = 11{,}4.$ ■

Ejercicios (epígrafe 4)

1. Busca los siguientes valores:

a) sen 14° b) cos 76° c) tan 34°
d) sen 3° e) cos 75° f) tan 4°
g) cos 3° h) cos 0,9° i) sen 0,7°
j) cos 34,8° k) sen 27,3° l) tan 63,5°
m) tan 89,5° n) cos 48,9° ñ) sen 12,7°
o) sen 8,23° p) cos 35,39° q) tan 71,85°
r) sen 32°2' s) cos Y°33' t) tan 20° 15'
u) sen 1°1' v) cos 23°12' w) tan 10,325°
x) sen 15,121°

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) sen 25,4° = y b) cos 48,9° = y c) sen 53,6° = y
d) cos 83,3° = y e) tan 77,4° = y f) tan 43,2° = y
g) tan 33,4° = y h) tan 62,5° = y i) sen 39,12° = y
j) cos 82,45° = y k) tan 2,23° = y l) sen 23°15' = y
m) tan 89,5° = y n) scn 48,9° = y ñ) sen 12,7° = y
o) sen 8,23° = y p) cos 2°37' = y q) tan 12°57' = y
r) sen 37° = y s) cos 25° = y

3. Resuelve las siguientes ecuaciones; $0^\circ \leqslant x \leqslant 90^\circ$

a) sen x = 0,9781 b) cos x = 0,6244 c) tan x = 0,1908
d) tan x = 3,487 e) cos x = 0,8980 f) sen x = 0,4337
g) tan x = 0,9965 h) tan x = 2,145 i) sen x = 0,5158
j) cos x = 0,9042 k) tan x = 0,5200 l) tan x = 0,1321
m) sen x = 0,9580 n) cos x = 0,218 ñ) sen x = 0,12
o) tan x = 1,5 p) sen x = 0,523 q) cos x = 0,81
r) tan x = 5,21 s) tan x = 6,3

Calcula el valor de las siguientes expresiones:

a) 2 sen 17,4° – cos 21,5°

b) $\dfrac{3/5 \tan 4^\circ + 2 \operatorname{sen} 39{,}5^\circ}{\cos 39{,}2^\circ \cdot \operatorname{sen} 1{,}5^\circ}$

c) $\sqrt{\dfrac{\operatorname{sen} 15{,}2^\circ \cdot \cos 49{,}3^\circ}{2 \tan 5^\circ}}$

d) $\sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}^2 31{,}2^\circ + 4}{2 \cos 85^\circ}} - \dfrac{\tan 43{,}9^\circ}{\operatorname{sen} 5^\circ}$

e) $\dfrac{\operatorname{sen}^2 29^\circ 15' + \cos 84{,}35^\circ}{2 \tan 7^\circ 11'}$

f) $\dfrac{(1/2 \tan 3{,}258^\circ + \operatorname{sen} 75^\circ 12') \cos^2 25^\circ 1'}{\operatorname{sen} 4{,}5^\circ + \cos 87{,}23^\circ}$

5. *Ecuaciones trigonométricas sencillas*

Las **tablas** también pueden utilizarse **para** encontrar la amplitud, conocida una razón trigonométrica, **es** decir, para resolver ecuaciones trigonométricas.

Ejemplo 1

Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) sen α = 0,5240 **b) tan a = 0,904** **c) cos α = 0,81**

Resolución

a) Buscamos en la tabla la sucesión de cifras 5240 y la encontramos en la página 335 en la intersección de la fila 31 (a la izquierda) y la columna ,6 luego el ángulo será: $a = 31{,}6^\circ$ (fig. 3.14 a).

b) Buscamos en la tabla de tangentes en la pagina 337 (pues es aqui donde $\tan a < 1$) la sucesion de cifras 904. Como la tabla tiene 4 cifras debemos redondear mentalmente los valores hasta la tercera cifra; en la intersección de la fila 42 y la columna ,1 encontramos un valor *que* al redondear conduce a esta sucesión: $9036 \simeq 904$.
Luego $\alpha = 42{,}1^\circ$ con 3 cifras significativas (fig. 3.14b).

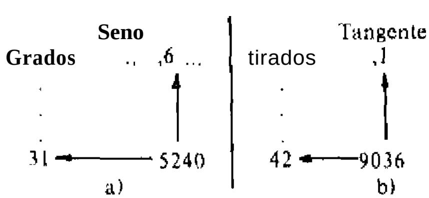


Fig. 3.14

c) **En este** caso el valor dado tiene 2 cifras, luego se debe redondear mentalmente hasta la segunda cifra al buscar en la tabla. En la pagina 336 encontramos varios valores que conducen a la sucesión de cifras buscada: en las filas 35° y 36° (por la derecha); estos valores comienzan en 35,5° y terminan en 36,4° (recuerda que para el coseno, los valores crecen **hacia** arriba). Esto nos hace comprender que no podemos garantizar la cifra de las décimas y debemos expresar el ángulo con 2 cifras significativas: α = 36° (fig. 3.15). ■

seno

G.	,0	,1	...	,4	,5	,6	...	,8	,9	1	
						8049	...	8070	8080	8090	36
54	0,8090	8100	...	8131	8141						35
	(1,0)	,9	...	,6	,5	,4	...	,2	,1	0	

coseno

Fig. 3.15

También hay **que** tener cn cuenta las reglas de aproximación cuando se trabaja con datos **que** representan valores de la practica.

Ejemplo 2

a) Los catetos a y b de un triángulo rectángulo miden 5,26 cm y 3,42 cm . Calcula el ángulo p.

b) La proyeccibn horizontal de una fuerza es 41 N. Si su módulo es SU N, ¿cuál es el ángulo que forma con la horizontal?

Resolución

a) En este caso los datos representan valores procedentes de mediciones con tres cifras significativas, la respuesta debemos darla con 3 cifras.

En la figura 3.1ha) se aprecia que $\tan \beta = \frac{b}{a} = \frac{3,42}{5,26} = 0,650$

y en la tabla encontramos β = 33,0°.

El ángulo pedido es β = 33°.

Nota: En estos casos, cuando des la respuesta en forma oral. puedes decir simplemente que β = 33° y omitir el cero.

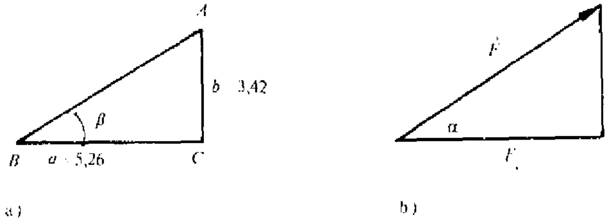


Fig. 3.16

b) Sea a el ángulo que forma la fuerza con la horizontal, en la figura 3.16b) se aprecia $\cos \alpha = \frac{F_x}{|F|} = \frac{41}{50} = 0{,}82$ (este es un resultado intermedio y puede ser considerado con 3 cifras, aunque el 0 final no necesitamos escribirlo), es decir, en la tabla buscamos la sucesión 820 y encontramos $a = 34{,}9°$.
El ángulo que forma la fuerza con la horizontal es $35°$.
En este caso los datos representan valores de la practica con 2 cifras significativas, por *eso* la respuesta debe tener 2 cifras significativas aunque los cálculos intermedios se hacen con 3 cifras. ■

En algunos casos se presentan ecuaciones trigonometricas mas complejas que requieren la utilización de las identidades trigonometricas fundamentales.

Ejemplo 3

Resuelve las ecuaciones:[1]

a) $3 \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 2$ **b)** $3 \operatorname{sen} x = \cos x$

c) $3\cos x + \operatorname{sen}^2 x - 3 = 0$

Resolución

a) Para resolver la ecuación la transformamos de modo que aparezca una sola razón:

$3 \operatorname{sen}^2 x + (1 - \operatorname{sen}^2 x) = 2$ **Utilizamos** la **identidad** $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

$3 \operatorname{sen}^2 x + 1 - \operatorname{sen}^2 x = 2$

$2 \operatorname{sen}^2 x = 2 - 1 = 1$

$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}$ **que** implica $\operatorname{sen} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ pero sólo tomamos en cuenta el valor positivo:

$\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y entonces $x = 45°$

El conjunto solución es $\{45°\}$.

b) En este caso para obtener una sola razón dividimos ambos miembros por $\cos x$.

$\frac{3 \operatorname{sen} x}{\cos x} = 1$ **Puede llegar a** ser $\cos x = 0$ **y en ese caso se pierde** como solución. **Hay** que considerar **aparte** la **ecuacion** $\cos x = 0$ **y comprobar las soluciones.**

$3 \tan x = 1$ $\cos x = 0$

$\tan x = \frac{1}{3} = 0{,}3333$ $x = 90°$

calculamos con 4 cifras para buscar en la **tabla** sin tener que redondear (recuerda que partimos de valores exactos).

$x = 18{,}4°$

1 Este tipo de ecuaciones las consideramos ejercicios formales **de calculo, es decir, trabajamos** con valores exactos, Comprobamos ahora ambas soluciones

MI: $3 \operatorname{sen} 18{,}4^\circ = 3 \cdot 0{,}3156 = 0{,}9468$ MI: $3 \operatorname{sen} 90^\circ = 3$

MD: $\cos 18{,}4^\circ = 0{,}9489$ MD: $\cos 90^\circ = 0$

Es claro que $x = 90^\circ$ no es solución pues 3 y 0 son **valores** exactos y $3 \neq 0$. **Se** trata **de** una raiz exlraña. La solución $x = 18.4^\circ$ requiere un análisis más detallado.

Hemos dado el valor del ángulo con 3 cifras correctas, en un valor aproximado y por tanto los valores del seno y del coseno que calculamos al comprobar. tienen a **lo sumo** tres cifras correctas. En estos casos (cuando no se garantizan todas las cifras) es **de** esperar que la ultima no **sea** correcta **y**, por tanto, comprobamos la ecuacion utilizando una cifra menos que en la respuesta:

MI: $0{,}9468 \approx 0{,}95 \approx 0{,}9489$:MD.

La solución de la ecuación es $x = 18{,}4^\circ$.

c) En este caso nuevamente reducimos a una sola razón **aplicando** la identidad de Pitagoras:

$3 \cos x + (1 - \cos^2 x) - 3 = 0$ Es una costumbre aconsejable escribir las expresiones entre paréntesis.

$3 \cos x - \cos^2 x - 2 = 0$

$\cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0$ (1) Multiplicando por -1.

$y^2 - 3y + 2 = 0$ Sustituyendo $y = \cos x$.

$(y - 2)(y - 1) = 0$ Descomponiendo en factores.

Se obtienen las ecuaciones:

$\cos x - 2 = 0$ y $\cos x - 1 = 0$

$\cos x = 2$ $\cos x = 1$

no tiene solución pues $\cos x \leqslant 1$. $x = 0^\circ$

El conjunto solución es $\{0^\circ\}$.

La ecuación (1) también puede resolverse utilizando la fórmula de resolución de la ecuación de segundo grada. ■

En **la** practica no es necesario realizar explícitamente la sustitución como se hizo en el ejemplo anterior. Si lo prefieres puedes conservar en todo el trabajo las razones trigonométricas.

Ejercicios (epígrafe 5)

1. Resuelve las ecuaciones:

a) $4 \operatorname{sen} \alpha = 2$

b) $2 \cos a = \sqrt{3}$

c) $\sqrt{3} \tan u = 1$

d) $2 \cos \alpha - 1 = 0$

e) $\tan a - 1 = 0$

f) $4 \operatorname{sen} \alpha - 1 = 2 \operatorname{sen} u$

g) $\dfrac{4}{3} \cos \alpha = 1$

h) $\operatorname{sen} (90^\circ - \alpha) = \dfrac{1}{2}$

i) $\operatorname{sen}^2 \alpha = \dfrac{1}{2}$

j) $\cos^2 \alpha = \dfrac{3}{4}$

l) $4 \operatorname{sen}^2 a - 1 = 0$

n) $\operatorname{sen} a = 0{,}9816$

ñ) $\cos\alpha = 0{,}6921$
o) $\tan a = 0{,}1871$
p) $\text{sen}\ a = 0{,}8965$
q) $\cos a = 0{,}8453$
r) $\tan a = 0{,}9930$
s) $\text{sen}\ a = 0{,}5140$
t) $\cos a = 0{,}9648$
u) $\tan a = 5{,}005$
v) $\text{sen}\ a = 0{,}958$
w) $\cos a = 0{,}251$
x) $\tan a = 1{,}37$
y) $\text{sen}\ a = 0{,}82$
z) $\cos a = 0{,}74$

2. Determina el valor de x en las siguientes igualdades $(0° \leqslant k \leqslant 90°)$.

a) $3\ \text{sen}\ x - 1 = 0$
b) $5 \cos x - 2 = 1$
c) $\tan x - 1 = 4{,}5$
d) $2\ \text{sen}\ x + 2{,}1 = 3$
e) $9\ \text{sen}^2 x - 8 = -3$
f) $5 \cos^2 x + 2 = 3$
g) $7 \tan^2 x - 9 = 2$
h) $10\ \text{sen}^2 x + 3 = 2\ \text{sen}^2 x + 10$
i) $5 \tan^2 x - 1 = 2 \tan^2 x + 4$

3. Determina el conjunto solución de las ecuaciones:

a) $\cos x = \cos^2 x$
b) $2\ \text{sen}^2 x - \text{sen}\ x = 0$
c) $\tan^2 x = \tan x$
d) $\tan^2 x - \sqrt{3} \tan x = 0$
e) $3\ \text{sen}\ x = 2 - 2\ \text{sen}^2 x$
f) $4 \cos^2 x + 4 \cos x = 3$
g) $2\ \text{sen}^2 x - 4 = 5 \cos x$
h) $3 \cos^2 x = 7 - \text{sen}\ x$
i) $3 \tan^2 x = 1 + 2 \tan x$
j) $2 \cos^2 x + 4\ \text{sen}^2 x = 3$
k) $2\ \text{sen}^2 x + 3 \cos x = 0$
l) $\cos^2 x - \dfrac{1}{2} = \text{sen}^2 x$
m) $1 + \text{sen}^2 x = 7 \cos^2 x$
n) $2\ \text{sen}^2 x - \cos^2 x = 2$
ñ) $4 \cos x = \dfrac{1}{\cos x}$
o) $\tan x = \dfrac{3}{\tan x}$
p) $\dfrac{3}{\cos x} - 2 = \cos x$
q) $\tan^2 x + \dfrac{1}{\cos x} = 1$
r) $\dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} - \dfrac{2\ \text{sen}\ x}{\cos x} + 1 = 0$
s) $3(1 + \cos x) = 2\ \text{sen}^2 x$
t) $2\ \text{sen}\ x - \sqrt{3} \tan x = 0$

4. Resuelve las ecuaciones:

a) $4 - 4 \cos x = 3\ \text{sen}^2 x$
b) $6 - 6 \cos^2 x = 2 + \text{sen}\ x$
c) $5 = 2\ \text{sen}^2 x + 5 \cos x$
d) $\text{sen}^2 x - \cos^2 x = 0{,}25$
e) $\tan x + \dfrac{8}{\tan x} = 6$
f) $\tan x - \dfrac{1}{\tan x} = 1$
g) $\tan x = \dfrac{4}{\tan x}$
h) $\dfrac{1 - \text{sen}^2 x}{\cos x} = \dfrac{1}{3}$
i) $17\ \text{sen}\ x + 15 = 15 \cos^2 x - 4$
j) $\dfrac{\text{sen}\ x}{1 - \text{sen}^2 x} - \dfrac{1}{3}$

5. Los catetos a y b de un triángulo rectangulo ABC miden respectivamente:

a) 2,35 cm y 4,21 cm	b) 6,12 cm y 5,02 cm
c) 1,02 cm y 3,93 cm	d) 0,95 cm y 12 mm

Determina en cada caso la amplitud del ángulo β.

6. La hipotenusa c y el cateto b de un triángulo rectangulo ABC miden respectivamente:

a) 5,23 cm y 2,41 cm	b) 7,84 cm y 3,91 cm
c) 2,2 cm y 0,12 cm	d) 2,65 cm y 1,41 cm

Determina en cada caso la amplitud del ángulo a.

7. Las proyecciones horizontal y vertical de una fuerza $\vec{F}$ son de 35 N y 42 N respectivamente. Determina el ángulo que forma la fuerza $\vec{F}$ con la horizontal.

8. Una fuerza de 60 N y su proyeccion horizontal de 24 N forman un ángulo y. ¿Que amplitud tiene dicho ángulo?

Circunferencia trigonométrica

6, *Razones trigonométricas de ángulos obtusos*

En la figura 3.9 se ilustro cómo definir las razones trigonométricas en un plano coordenado, esta idea puede ser utilizada para definir las razones trigonométricas de ángulos que no son agudos.

Para llevar a la práctica esta idea, consideremos un sistema de coordeiiadas y una circunferencia con centro en el origen; todo angula puede ser colocado (y de una sola manera) de forma tal que su vértice coincida con el origen de coordenadas, uno de sus lados (llamado lado inicial) coincida con la semirrecta positiva OX y que el otro lado (llamado lado terminal) quede ubicado (a partir del inicial) en la zona barrida en sentido contraria al de las manecillas del reloj (fig. 3.17).

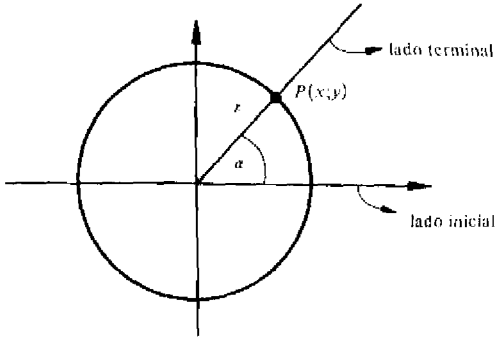


Fig. 3.17

De esta forma, el lado terminal de cada ángulo intcrseca en un Único punto a la circunferencia y podemos asociar al ángulo ese punto de una manera unívoca. Esto nos Permite definir las razones trigonométricas utilizando las coordenadas de esos puntos.

Una circunferencia colocada como la que se ha descrito recibe el nombre **de** circunferencia trigonométrica.

Definición 1

Sean α un ángulo **y** $P(x,y)$ el punto que le corresponde en la circunferencia trigonométrica **de** radio r, entonces $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ **y definimos:**

$$\text{sen } \alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} \qquad (\alpha \neq 90°;\ \alpha \neq 270°)$$

En la figura 3.18 se ilustra esta definición para ángulos de los cuatro cuadrantes, observa que para ángulos u: $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$, la nueva definición **coincide** con la conocida, cs decir. aquella es un caso particular de esta.

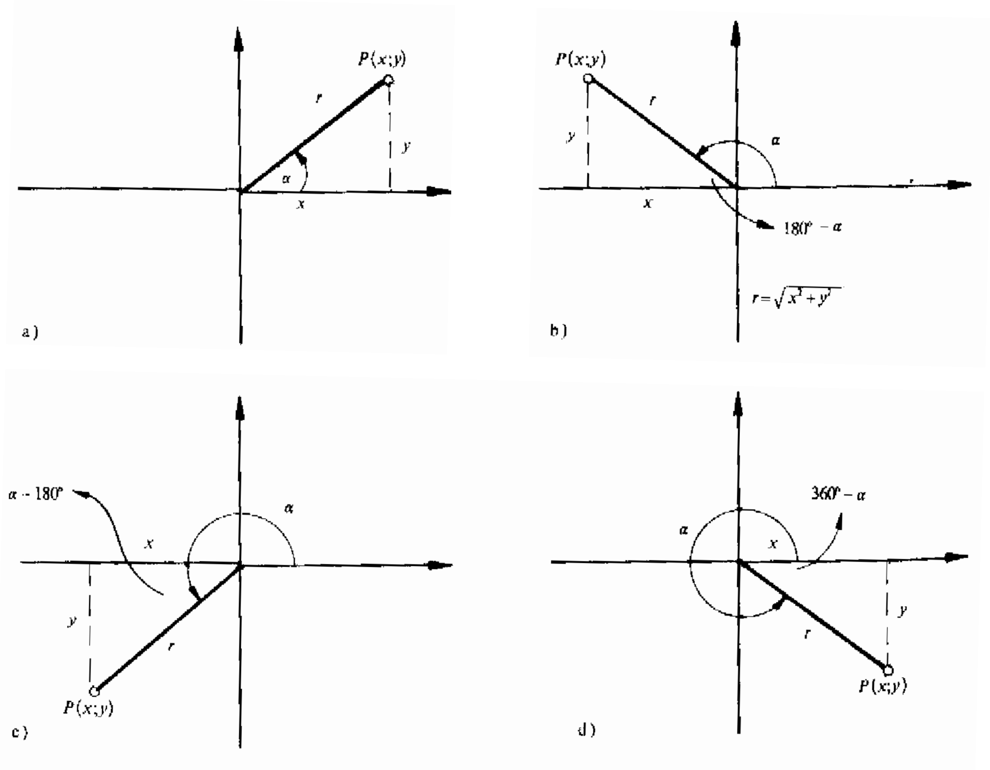


Fig. 3.18

Con esta definición las razones trigonométricas pueden ser negativas, pero el seno y el coseno en módulo no pueden ser mayores que 1:

$$\boxed{-1 \leqslant \operatorname{sen} \alpha \leqslant 1 \quad \text{y} \quad -1 \leqslant \cos \alpha \leqslant 1}$$

Ejemplo 1

Calcula las razones trigonométricas de 150°.

Resolución

Sea P el punto que corresponde al ángulo de 150° en la circunferencia trigonométrica y P' su proyección sobre el eje x (fig. 3.19). P esta en el **II cuadrante y entonces** $\sphericalangle POP' = 30°$. En el triángulo rectángulo POP' se tiene:

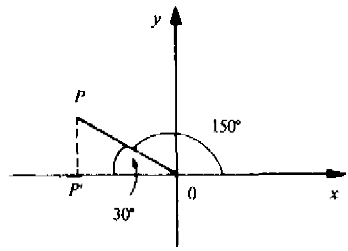


Fig. 3.19

$y = \frac{1}{2} r$, $x = -\frac{\sqrt{3}}{2} r$ (en el II cuadrante $x \leqslant 0$).

Luego;

$$\operatorname{sen} 150° = \frac{y}{r} = \frac{\frac{1}{2} \cdot r}{r} = \frac{1}{2} \quad (= \operatorname{sen} 30°)$$

$$\cos 150° = \frac{x}{r} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} r}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (= -\cos 30°)$$

$$\tan 150° = \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{2} \cdot r}{-\frac{\sqrt{3}}{2} r} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (= -\tan 30°). \blacksquare$$

Como puede verse las razones de 150° coinciden en valor absoluto con las de 30°.

El ejemplo 1 ilustra que las razones trigonometricas pueden ser positivas o negativas y que su signo depende de los signos de las coordenadas de los puntos en los diferentes cuadrantes. A continuación se resumen los signos de las razones trigonométricas en los diferentes cuadrantes.

$r > 0$

(II) $x \leqslant 0;\ y \geqslant 0$ $\operatorname{sen} \alpha \geqslant 0$ $\tan \alpha \leqslant 0$ $\cos \alpha \leqslant 0$	(I) $x \geqslant 0;\ y \geqslant 0$ $\operatorname{sen} \alpha \geqslant 0$ $\tan \alpha \geqslant 0$ $\cos \alpha \geqslant 0$
$x \leqslant 0;\ y \leqslant 0$ $\operatorname{sen} \alpha \leqslant 0$ $\tan \alpha \geqslant 0$ $\cos \alpha \leqslant 0$ (III)	$x \geqslant 0;\ y \leqslant 0$ $\operatorname{sen} \alpha \leqslant 0$ $\tan \alpha \leqslant 0$ $\cos \alpha \geqslant 0$ (IV)

En resumen, como el radio es siempre positivo:

> El seno es positivo donde lo es y, en el semiplano superior, es decir, I y II cuadrantes.
> El coseno es positivo donde lo es x, en el semiplano derecho, es decir, I y IV cuadrantes.
> La tangente es positiva donde ambas coordenadas tienen el mismo signo, I y III cuadrantes.

Ejemplo 2

Calcula las razones trigonométricas de 225°.

Resolución

Sea P el punto que corresponde al ángulo de 225° en la circunferencia trigonométrica y P' su proyección sobre el eje x (fig. 3.20). El punto P esta en el tercer cuadrante y entonces $\sphericalangle POP' = 45°$; observa (compara con el ejemplo 1) que las razones de 225° coinciden en valor absoluto con las de 45°, luego:

$$\operatorname{sen} 225° = -\operatorname{sen} 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

En este cuadrante $\operatorname{sen} \alpha \leqslant 0$.

$$\cos 225° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

En este cuadrante $\cos \alpha \leqslant 0$.

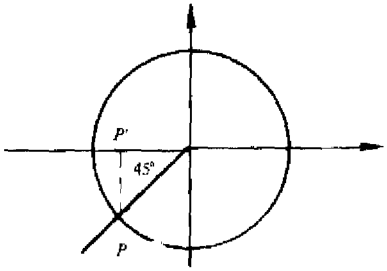


Fig. 3.20

$\tan 225° = \tan 45° = 1$ En este cuadrante $\tan \alpha \geqslant 0$. ■

Ejemplo 3

Calcula las razones trigonométricas de α si $\tan \alpha = -\dfrac{3}{5}$ y $\cos \alpha \geqslant 0$.

Resolución

Construimos el triángulo rectángulo ABC con $a = 3$ y $b = 5$ (fig. 3.21)

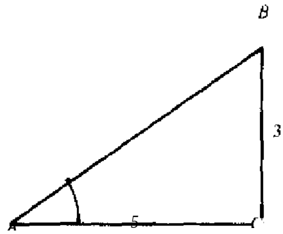


Fig. 3.21

entonces $c = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 25}$
$= \sqrt{34} = 5{,}83$

como $\tan \alpha \leqslant 0$ y $\cos \alpha \geqslant 0$, a *es* un angula del IV cuadrante y tendremos:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{5}{\sqrt{34}} = -\frac{5\sqrt{34}}{34} \quad \operatorname{sen} \alpha = -\frac{a}{c} = -\frac{3}{\sqrt{34}} = -\frac{3\sqrt{34}}{34}. \quad \blacksquare$$

Observemos finalmente que las identidades fundamentales introducidas en el epígrafe 3 continúan siendo validas con **las** nuevas **definiciones.**

Ejemplo 4

Resuelve el ejemplo 3 utilizando identidades trigonométricas fundamentales.

Resolución

Sabemos que: $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$, luego

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 + \frac{9}{25} = \frac{34}{25}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{25}{34}$$

$$|\cos \alpha| = \frac{5\sqrt{34}}{34}$$

como, **ademas,** $\cos a \geqslant 0$; $\cos a = \dfrac{5\sqrt{34}}{34}$

El seno y **el** coseno se relacionan en la identidad:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

luego $\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \dfrac{25}{24} = \dfrac{9}{34}$

$$|\operatorname{sen} \alpha| = \frac{3\sqrt{34}}{34}$$

como, además, sen a $\leq$ 0 pues a está en el IV cuadrante:

$$\text{sen } a = -\frac{3\sqrt{34}}{34}. \blacksquare$$

En el epigrafe 2 calcularnos las razones trigonométricas de 0° y 90° y las consideramos valores notables; de la misma forma es conveniente considerar las de 180" y 270°. En la tabla que sigue se resumen los valores de las razones trigonométricas de estos 4 ángulos llamados ángulos axiales porque su lado terminal coincide con un semieje de coordenadas.

$\diagdown\alpha$	0°	90°	180°	270°
sen α	0	1	0	−1
cos α	1	0	−1	0
tan α	0	–	0	–

Ejercicios (epígrafe 6)

1. Di en que cuadrante pudiera estar situado el ángulo θ si:

   a) $\text{sen } \theta = -\frac{1}{2}$ b) $\text{sen } 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{3}$

   d) $\tan \theta = 2$ e) $\tan \theta = -1$ f) $\cos \theta = \frac{1}{3}$

   g) $\cos \theta = 0{,}32$ h) $\text{sen } \theta = -0{,}15$

2. Di en que cuadrante estará situado a si:

   a) sen a $>$ 0 y cos α $>$ 0 b) tan a $>$ 0 y cos α $<$ 0

   c) cos α $<$ 0 y sen a $>$ 0 d) tan a $<$ 0 y sen a $<$ 0

   e) sen a $<$ 0 y cos a $>$ 0

3. Determina si son posibles las siguientes combinaciones de signos:

   a) sen $\beta>0$, cos $\beta<0$ y tan $\beta<0$

   b) sen $\beta<0$, cos $\beta>0$ y tan $\beta>0$

   c) sen $\beta>0$, cos $\beta>0$ y tan $\beta<0$

   En los casos posibles, señala en qué cuadrante está situado β.

4. De las siguientes combinaciones, ¿cuáles son verdaderas? Fundamenta.

   a) sen y $>$ 0, cos y = 0 y tan y no definida

   b) sen $\beta<0$, tan $\beta = 1$; $-1 < \cos \beta < 0$

   c) sen β = 0, cos β = 0 y tan β = 0

5. Calcula las razones trigonometricas de los siguientes ángulos.

   a) 120°. b) 210° c) 315° d) 240° e) 330° f) 135°

6. $P(-4; 8)$ es un punto de una circunferencia. **trigonométrica que** pertenece al lado terminal del ángulo **x.**
Calcula sen **x,** cos **x** y tan **x.** **¿A que** cuadrante pertenece el ángulo **x?**

7. En cada uno de los incisos siguientes se da un punto de una circunferencia trigonométrica que pertenece al lado terminal de un ángulo **x.** Determina las razones trigonométricas de dicho ángulo y el cuadrante al que este pertenece en cada caso.

a) $r = 2$ y $P(1\ ;\ \sqrt{3})$
b) $r = 2$ y $P(\sqrt{3};\ -1)$
c) $r = 2$ y $P(0\ ;\ 2)$
d) $r = 5$ y $P(-4\ ;\ 3)$
e) $r = 5$ y $P(-3\ ;\ -4)$
f) $r = \sqrt{2}$ y $P(1\ ;\ -1)$
g) $r = \sqrt{2}$ y $P(-\sqrt{2};\ 0)$

8. En cada uno de los siguientes casos **determina** las razones **trigonométricas** del ángulo θ bajo las condiciones dadas.

a) sen $\theta = \frac{3}{4}$ y θ esta en el II cuadrante

b) $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ y sen $U < 0$

c) sen $0 = \frac{5}{13}$ y $\cos \theta < 0$

d) $\tan \theta = -\frac{3}{4}$ y $\cos A > 0$

e) sen $\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ y coa $U < 0$

f) cos $0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y θ pertenece al IV cuadrante

9. Calcula las razones trigonometricas de a si:

a) **sen** $\alpha = \frac{3}{5}$ b) $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ c) **tan** $a = 4$ d) **sen** $u = -\frac{2}{7}$

e) $\cos \alpha = -\frac{20}{29}$ f) $\tan \alpha = -2$ g) $\tan \alpha = 2\frac{3}{5}$ h) sen $a = -\frac{3}{4}$

10. Conocidos $\tan a = \frac{2}{3}$ y $180° < a < 270°$. Calcula **sen** a y cos a.

11. Calcula **las** razones trigonométricas de a sabiendo que:

$\tan \alpha = -\frac{2}{5}$ y $90° < \alpha < 180°$

Calcula todas las razones trigonométricas de α si sen $\alpha = 0{,}6$ y $90° < \alpha < 180°$.

13. En las tablas siguientes se dan valores de las razones trigonométricas para un angula α en determinado intervalo.
Determina en cada caso el valor pedido.

a)

	$180° < \alpha < 360°$	$90° < \alpha < 180°$	$90° < \alpha < 270°$
dado	$\cos \alpha = 3/4$	$\operatorname{sen} \alpha = 0{,}4$	$\operatorname{sen} \alpha = 0{,}1$
se busca	$\operatorname{sen} \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$

b)

	$0° < \alpha < 180°$	$90° < \alpha < 270°$	$270° < \alpha < 360°$	$90° < \alpha < 180°$
dado	$\cos \alpha = -\frac{1}{4}$	$\operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{5}$	$\cos \alpha = \frac{2}{5}$	$\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{10}$
se busca	$\operatorname{sen} \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\tan \alpha$

14. Calcula:

a) $$\frac{\operatorname{sen} 90° - \cos 180° + \tan 360°}{2 \cos 0°}$$

b) $$\frac{\cos 180° - 2 \tan 0° + \operatorname{sen} 270°}{\operatorname{sen} 30°}$$

c) $$\sqrt{\frac{\tan 180° \cdot \operatorname{sen} 270° - \cos 180° \cdot \operatorname{sen} 90°}{-4 \operatorname{sen} 270° + 5 \cos 360°}}$$

15. Pruebe que:

a) $\operatorname{sen} 90° + \tan 180° - \cos 360° = 0$

b) $\cos 30° - \cos 180° - \tan 360° \cdot \operatorname{sen} 45° = \dfrac{\sqrt{3} + 2}{2}$

16. Si $a = 30°$; $b = 180°$; $c = 90°$ y $d = 270°$. Calcula:

a) $$\frac{\operatorname{sen}^2 a + 2 \cos b}{\tan^2 b - \operatorname{sen} c}$$

b) $$\sqrt{\frac{\cos^2 a + 2 \operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} c + \tan b}}$$

c) $$\frac{\dfrac{5}{\operatorname{sen} d} - 3 \cos^2 b}{1 - \tan^2 b - \cos b} - \cos^2 a$$

7. *Fórmulas de reducción*

En el epígrafe anterior hemos calculado las razones trigonométricas de algunos ángulos obtusos utilizando los valores correspondientes de ciertos ángulos agudos; estas ideas pueden sistematizarse para reducir el calculo de razones trigonométricas a los ángulos agudos, es decir, al primer cuadrante.

Teorema 1

> Si α es un ángulo agudo, se cumple:
>
> a) $\operatorname{sen}(180° - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$
>
> b) $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$
>
> c) $\tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha$

Demostración (fig. 3.22)

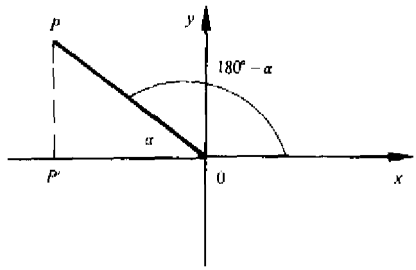


Fig. 3.22

a) $\operatorname{sen}(180° - \alpha) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \dfrac{PP'}{OP} = \operatorname{sen}\alpha$

b) $\cos(180° - \alpha) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\dfrac{OP'}{OP} = -\cos\alpha$

c) $\tan(180° - \alpha) = \dfrac{y}{x} = -\dfrac{PP'}{OP'} = -\tan\alpha$. ∎

Observa que por ser α un ángulo agudo, $180° - \alpha$ es un ángulo del II cuadrante. En la practica, para calcular las razones de un ángulo del II cuadrante, se resta de 180° y se toman las razones del ángulo agudo obtenido con el signo que le corresponde en el II cuadrante,

Ejemplo 1

Calcula cos 153,7°.

Resolución

Como 153,7° es un ángulo del II cuadrante, ya que $90° \leq 153{,}7° \leq 180°$, (fig. 3.23) calculamos su suplemento:

$180° - 153{,}7° = 26{,}3°$ y entonces

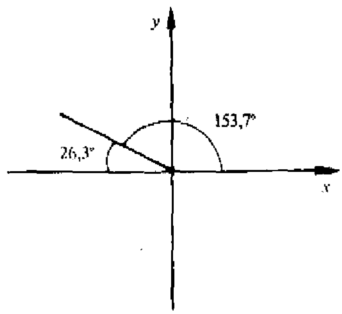


Fig. 3.23

$\cos 153{,}7° = \cos(180° - 26{,}3°) = -\cos 26{,}3° = -0{,}8965.$ ■

En forma completamente análoga se establece (figs. 3.24 y 3.25):

Teorema 2

> Si α es un ángulo agudo, se cumple:
>
> a) $\operatorname{sen}(180° + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$
>
> b) $\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$
>
> c) $\tan(180° + \alpha) = \tan\alpha$

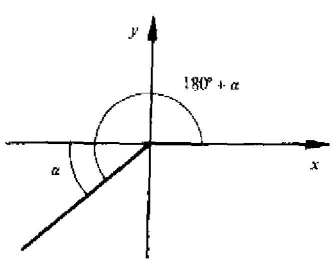


Fig. 3.24

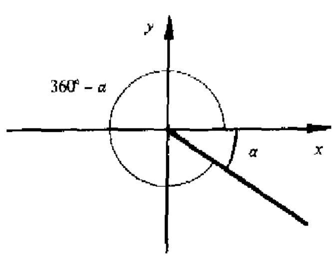


Fig. 3.25

Teorema 3

> **Si** α es un ángulo agudo, se cumple:
> a) $\operatorname{sen}(360° - \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$
> b) $\cos(360° - \alpha) = \cos \alpha$
> c) $\tan(360° - \alpha) = -\tan \alpha$

Si escribirnos $\alpha' = 180° + \alpha$ y $\alpha'' = 360° - \alpha$, tendremos:

$\alpha = \alpha' - 180°$ y $\alpha = 360° - \alpha''$. Luego para calcular las razones trigonométricas: a los angulos del III cuadrante se les resta 180° y los ángulos del IV se restan de 360°.

Ejemplo 2

a) Calcula tan 231,4°. **b) Calcula sen 321,2°.**

Resolución

a) 231,4° es un ángulo del III cuadrante ya que $180° \leqslant 231{,}4° \leqslant 270°$ (fig. 3.26a), entonces calculamos $231{,}4° - 180° = 51{,}4°$ y finalmente:
$\tan(231{,}4°) = \tan(180° + 51{,}4°) = \tan 51{,}4° = 1{,}2527$.

b) 321,2° es un ángulo del IV cuadrante pues se cumple $270° \leqslant 321{,}2° \leqslant 360°$ (fig. 3.26b), calculamos entonces:
$360° - 321{,}2° = 38{,}8°$
$\operatorname{sen} 321{,}1° = \operatorname{sen}(360° - 38{,}8°) = -\operatorname{sen} 38{,}8° = -0{,}6266$. ■

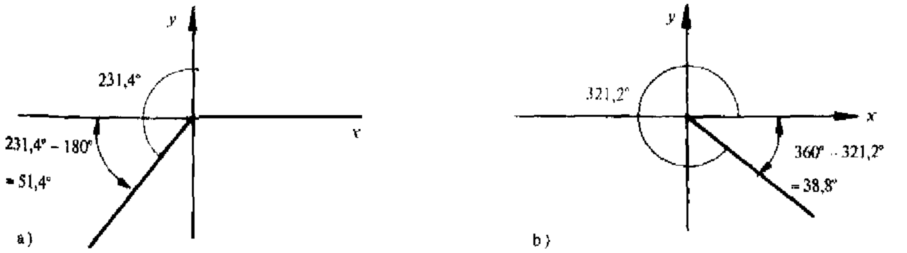


Fig. 3.26

En resumen, para calcular las razones trigonométricas de un ángulo obtuso hallamos su diferencia con el mas próximo entre los valores 180° y 360"; las razones trigonométricas coincidirán en módulo con las de la diferencia y tendrán el signo que corresponde al cuadrante. Para esto es coveniente esbozar el ángulo en un sistema de coordenadas como hemos hecho en los ejemplos anteriores.

Ejemplo 3

Resuelve la ecuación 3 $sen^2x + cos^2x = 2$

Resolución

Transformamos la ecuación de modo que sólo contenga **sen x** :

$$3\ sen^2x + (1 - sen^2x) = 2$$
$$3sen^2x + 1 - sen^2x = 2$$
$$2sen^2x = 2 - 1 = 1$$

$$sen^2x = \frac{1}{2}$$

Kesultan las ecuaciones:

$$sen\ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad y \quad sen\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Observa **que** ahora la respuesta no **es** única pues a cada valor corresponden dos ángulos: **uno** en cada uno de los cuadrantes donde el seno tiene el signo dado. También es importante que notes que ya no desechamos las respuestas negativas pues el seno es negativo en el III y el IV cuadrantes.

Comenzamos, en cada caso, por buscar el ángulo del I cuadrante cuyo seno es el valor absoluto del miembro derecho; en este caso ambas ecuaciones nos conducen al mismo angulo **x,** = 45". Utilizando las fórmulas de reducción encontramos los ángulos cuyos senos tienen el mismo valor absoluto y el signo necesario:

$x_2 = 180° - 45'' = 135°$

(el seno **es positivo** en **el** II cuadrante)

$x_3 = 180° + 45° = 225°$

$x_4 = 360°\ \ 45° = 315°$

(el seno **es** negativo cn **el** III y IV cuadrantes)

El conjunto solución es: {45°; 135"; 225°; 315°}. ■

Resumen **de** las fórmulas de reducción

	$180° - \alpha$	$180° + \alpha$	$360° - \alpha$
sen	sen α	$-$ sen α	$-$ sen α
cos	$-$ cos α	$-$ cos α	cos α
tan	$-$ tan α	tan α	$-$ tan α

Ejercicios (epígrafe 7)

1. **Resuelve las** ecuaciones siguientes:

a) $180° = 143° + x$ b) $360° = 283° + x$ c) $180° = 243° - x$
d) $360° - x = 293°$ e) $180° + x = 245°$ f) $180° - x = 127°$
g) $152° + x = 180°$ h) $314° + x = 260°$ i) $238° - x = 180°$
j) $284° = 360° - x$ k) 21ú° = 180" + x l) $173° = 180° - x$

2. Expresa las cantidades de amplitud siguientes como una suma de la forma $180^\circ + x$, o como una diferencia de las formas $180^\circ - x$ o $360^\circ - x$, de modo **que** $0^\circ < x < 90^\circ$.

a) 125°	b) 217"	c) 314°
d) 162"	e) 265°	f) 285°
g) 174°	h) 98°	i) 269°
j) 216°	**k) 263"**	l) 294°
m) 119°	n) 214°	o) 274°
p) 223°	q) 255°	r) 342°

3. Calcula los valores **siguientes:**

a) sen 135°	b) cos 120°	c) tan 210°
d) **tan** 330°	el cos 225"	f) sen 315°
g) tan 240°	h) tan 315°	i) **sen** 330°
j) cos 240°	k) sen 225°	l) cos 330°
m) tan 120°	n) sen 300°	ñ) cos 135°
o) sen 120°	p) cos 315°	q) tan 135°

4. Halla el valor de las siguientes razones trigonométricas:

a) **sen** 121°	b) cos 139°	c) tan 153"
d) sen 215°	e) cos 253"	f) tan 262°
g) sen 312°	h) cos 295°	i) tan 282°
j) sen 145,2°	k) cos 239,5°	l) tan 321,3°
m) sen 232°12'	n) cos 325,33°	ñ) tan 149°35'.

5. Simplifica **las** siguientes **expresiones**:

a) $\dfrac{\cos x}{\cos(180^\circ - x)} - \dfrac{\operatorname{sen}(360^\circ + x)}{-\operatorname{sen} x}$

b) $\dfrac{\operatorname{sen}(180^\circ + a)}{\operatorname{sen} a} + \dfrac{\cos(90^\circ - a)}{\operatorname{sen} a}$

c) $\dfrac{\operatorname{sen}(180^\circ + 30^\circ)}{\tan(90^\circ - 45^\circ)} \cdot \dfrac{\tan(360^\circ - 60^\circ)}{\cos(180^\circ - 45^\circ)}$

d) $\tan 210^\circ \cdot \cos 210^\circ \cdot \dfrac{1}{\operatorname{sen} 210''}$

e) $\dfrac{\cos 120'' \cdot \cos 225^\circ}{\left(1 + \dfrac{1}{\cos 240^\circ}\right) \operatorname{sen} 225^\circ}$

f) $\dfrac{\operatorname{sen} 210^\circ \cdot \tan(90^\circ - 30^\circ) \cdot \cos(-300^\circ)}{\dfrac{1}{\cos 315^\circ}}$

6. **Prueba que:**

a) $\cos 330° - \operatorname{sen} 60° = 0$

b) $\cos 225° - \tan 210° \cdot \operatorname{sen} 300° = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{2}$

c) $$\frac{\tan 45° - \dfrac{1}{\tan 150°}}{\cos 210° - \dfrac{1}{\cos 60°}} = -\frac{6\sqrt{3} + 2}{13}$$

d) $\operatorname{sen}(90° - x) \cdot \operatorname{sen}(180° + x) + \cos(90° - x) \cdot \cos(360° - x) = 0$

7. **Si** $a = \operatorname{sen} 240°$; $b = \cos 90°$ y $c = \operatorname{sen} 270°$. Calcula:

a) el valor de $\sqrt{\dfrac{3a^2}{c^2} - b}$

b) Si $A = \tan 150°$; $B = \cos 210°$; $C = \operatorname{sen} 315°$ y $D = \cos 0°$

Calcula: $\dfrac{3A + 2B}{D \cdot C}$

8. **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\cos 60° \cdot x + \operatorname{sen} 210° = \tan 180°$

b) $(3 \operatorname{sen} 215° \cdot x)^2 - 4 \cos^2 150° \cdot x = \tan 45°$

9. **Resuelve las ecuaciones siguientes;** $0° < a < 360°$.

a) $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{1}{2}$ b) $\cos a = \dfrac{1}{2}$ c) $\operatorname{sen} a = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\cos \alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\operatorname{sen} \alpha = -\dfrac{1}{2}$ f) $\cos a = -1$

g) $\tan a = 1$ h) $\cos a = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ i) $\tan a = -\sqrt{3}$

j) $\tan \alpha = -\dfrac{1}{3}\sqrt{3}$ k) $\tan a = 0$ l) $\tan u = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

10. **Demuestra que en un** $\triangle ABC$ **se** cumple:

a) $\operatorname{sen} a = \operatorname{sen}(\beta + \gamma)$ b) $\cos a = -\cos(\beta + \gamma)$

c) $\tan a = -\tan(\beta + \gamma)$ d) $\operatorname{sen} a = -\operatorname{sen}(2\alpha + \beta + \gamma)$

e) $\operatorname{sen} \beta = -\operatorname{sen}(\alpha + 2\beta + \gamma)$

11. **Resuelve las siguientes ecuaciones** con $0° \leqslant x \leqslant 360°$

a) $6 \operatorname{sen} x = 3$ b) $\tan x + 1 = 0$

c) $3 \operatorname{sen} x = 2 - 2 \operatorname{sen}^2 x$ d) $\tan x = \dfrac{3}{\tan x}$

e) $2\ sen^2x + 3\cos x = 0$

f) $\cos^2 x - \frac{1}{2} = sen^2 x$

g) $\frac{3}{\cos x} - 2 = \cos x$

h) $\tan^2 x + \frac{1}{\cos x} = 1$

i) $3(1 + \cos x) = 2 sen^2 x$

j) $2\ sen^2 x - \cos^2 x = 2$

k) $3\ sen\ x - 1 = 0$

l) $2\cos x + 7 = -3\cos x - 2$

m) $2\tan x + \sqrt{5} = 0$

n) $3 - 7\cos x = 6\ sen^2 x$

ñ) $\tan^2 x - 3\tan x = 2 - \tan^2 x$

o) $12 - 5\ sen\ x = 12\cos^2 x + 2$

p) $\frac{1 + sen\ x}{3\cos x} = \cos x$

q) $\frac{5\ sen^2 x}{\cos x} = -2\tan x$

8. Sistema *circular de medida de ángulos*

El sistema sexagesimal de medida de ángulos que **conoces desde la escuela primaria** tiene limitaciones. En matcmatica **se usa con** mucha frecuencia otro sistema: **el sistema** circular. **En este** sistema se utiliza, para **medir** el ángulo, **la** razón entre la longitud del arco de una circunferencia, interceptada por el ángulo y el radio de dicha circunferencia.

Esta razón puede **utilizarse** para medir **el** ángulo **porque es** constante para un **mismo** ángulo, cualquiera sea el radio de la circunferencia empleada.

En efecto, **desde** la Secundaria Basica conoces **que** la longitud de un arco de circunferencia es proporcional al radio, si denotamos por l la Longitud **del** arco **de** circunferencia, por α° la amplitud del ángulo en **el** sistema **sexagesirnal y por** r el radio de la circunferencia tenemos:

$$\boxed{\frac{l}{r} = \frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ}}$$

Y esto significa **que** dicha razón depende solamente dc la **amplitud** del ángulo (fig. 3.27a).

Definición 1

> Un radian (en simbolos 1 rad) **es** la amplitud de un angulo en el **que** la longitud del arco es igual al radio (fig. 3.27b).

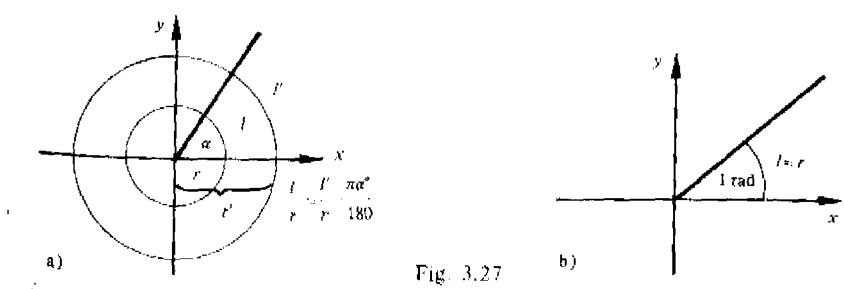


Fig. 3.27

La definición anterior establece la unidad del sistema circular de medida **de ángulos y significa** que **para** calcular **la** medida de un ángulo en este sistema se calcula **la** razón entre la longitud **del** arco y el radio: $\frac{l}{r}$

Ejemplo 1

Calcula la medida en el sistema circular de:

a) un ángulo llano **b) un ángulo de 20°**

Resolución

a) La amplitud de un ángulo llano *es* 180°, luego cualquiera sea el radio tenemos:

$$\frac{l}{r} = \frac{\pi 180^\circ}{180^\circ} = \pi$$

La medida **de un** ángulo llano en el sistema circular es π.

b) En este caso $\alpha^\circ = 20^\circ$ y la razón será:

$$\frac{l}{r} = \frac{\pi \cdot 20^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{9}$$

Luego, si denotamos por α_{rad} la amplitud del ángulo en el sistema circular tendremos: $\alpha_{rad} = \frac{\pi}{9}$. ■

Los razonamientos anteriores pueden ser utilizados para convertir la medida **de** los ángulos de un sistema a otro; si denotamos por α_{rad} la medida en el sistema circular **del** ángulo α y por α° **a su** medida sexagesimal, **tendremos** que:

$$\boxed{\alpha_{rad} = \frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ} \qquad \alpha^\circ = \frac{\alpha_{rad} \cdot 180^\circ}{\pi}}$$

Ejemplo 2

Expresa en el sistema circular: a) 15° b) 214°

Resolución

a) $\frac{\pi}{180^\circ} \cdot 15^\circ = \frac{\pi}{12}\text{rad}$

b) $\frac{\pi}{180^\circ} \cdot 214^\circ = 4{,}74$ rad. ■

Observa que. cuando es posible, la medida en el sistema circular se expresa como una parte fraccionaria sencilla de π.

Ejemplo 3

Expresa en el sistema sexagesimal: a) $\frac{\pi}{6}$ **b)** $4{,}57$

Resolución

a) $\frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{\pi}{6} = 30^\circ$.

b) $\frac{180^\circ}{\pi} \cdot 4{,}57 = 262^\circ$ (Aunque 4,57 puede considerarse como un valor exacto, la respuesta debe tener 3 lugares pues se utiliza una aproximación para π con 3 lugares). ■

En los ejemplos anteriores debes haber notado que la medida de un ángulo en el sistema circular no tiene dimensiones pues es el cociente de das longitudes. Esta observacion nos permite calcular las razones trigonométricas de un número real si consideramos que es la medida de un ángulo en el sistema circular.

Ejemplo 4

Calcula:

a) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$ b) $\cos \frac{2\pi}{3}$ c) $\tan 5{,}25$.

Resolución

a) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \operatorname{sen} \left(\frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos \frac{2\pi}{3} = \cos \left(\frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{3}\right) = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$.

c) $\tan 5{,}25 = \tan \left(\frac{180^\circ}{\pi} \cdot 5{,}25\right) = \tan 301^\circ = -1{,}66$. ■

En la práctica *es* conveniente que recuerdes de memoria la tabla de conversión para las medidas de los ángulos notables del primero y segundo cuadrantes que se representa a continuación:

grad	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Ejercicios (epígrafe 8)

1. Expresa en radianes las cantidades de amplitud siguientes dadas en grados sexagesimales:

a) 15°	b) 315°	c) 42°	d) 75°
e) 210°	f) 200°	g) 102°	h) 144°
i) 43,8°	j) 72,5°	k) 221,3°	l) 60,5°
m) 138,5°	n) 47,6°	o) 300°	p) 318°
q) 6,72°	r) 81,52°	s) 70°15'	t) 33°23'
u) 8,42°	v) 123,13°	w) 2°04'	

2. Determina la medida en grados sexagesimales de los siguientes ángulos expresados en radianes:

a) $\frac{5\pi}{4}$	b) $\frac{11\pi}{6}$	c) $\frac{5\pi}{12}$	d) $\frac{\pi}{6}$
e) $\frac{7\pi}{4}$	f) $\frac{3\pi}{11}$	g) $\frac{3\pi}{5}$	h) 3,76
i) 1,48	j) 0,937	k) 4,84	l) 0,84
m) [illegible]5	n) 5,64	ñ) 1,16	o) 0,36
p) [illegible]35	q) 5,21	r) 6,2	s) 6,193

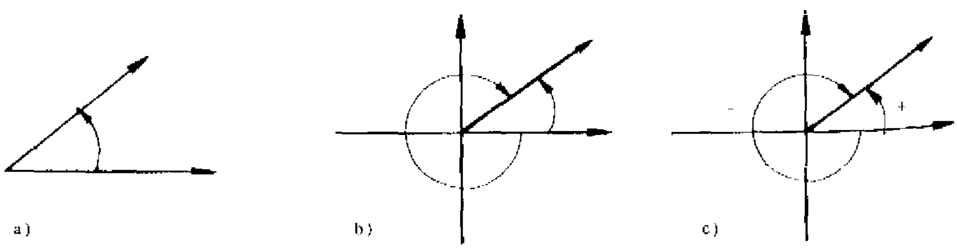
3*. Si un arco de circunferencia mide $\frac{2}{3}$ del radio, ¿cuál es la medida de su ángulo central correspondiente en grados y en radianes?

4*. Un mortero de las FAR de 122 mm tiene una amplitud de tiro de 49°, el alcance máximo del mortero es 11,8 km. ¿Cuál es la longitud del arco máximo que puede ser barrido por el mortero?

9. *Generalización del concepto ángulo*

Hasta ahora hemos utilizado el concepto geométrico ángulo; con este concepto las medidas de los ángulos tienen todas el mismo signo y toman valores entre 0° y 360° (0 y 2π). Este concepto es suficiente para resolver todos los problemas que se plantean en la geometría; sin embargo, en la practica se necesita trabajar con las razones trigonométricas de valores mayores o que son números negativos.

En el resto de este capítulo trabajaremos con un concepto mas general de ángulo (fig. 3.28).



a) b) c)

Fig. 3.28

> Dado un par de semirrectas de origen común, consideramos que el ángulo está determinado por la rotación que lleva la primera semirrecta sobre la segunda.

En nucstrn caso consideraremos ángulos con vértices en el origen de coordcnadas y el lado inicial sera el semieje positivo de las x; en estas condiciones cada semirrecta puede ser resultado de dos rotaciones; una en el sentido contrario a las manecillas del reloj y la otra en el sentido de las manecillas del reloj (fig. 3.78 b).

> Al ángulo determinado por una rotación de sentido contrario a las manecillas del reloj lo consideraremos positivo y al determinado por una del mismo sentido que las manecillas del reloj, negativo (fig. 3.28 c).

En **la** figura 3.28c **puedes** apreciar que el ángulo negativo determinado por una sernirrecta se obtiene restando $360°$ (2π) al ángulo positivo:

$$-45° = 315° - 360° \qquad -\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} - 2\pi$$

$$-210° = 150° - 360° \qquad -\frac{7\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} - 2\pi$$

Resulta intuitivamente claro que una sernirrecta puede llegar a su posición final realizando más de una vuelta alrededor del origen de coordenadas. Esta observación permite definir ángulos mayores que $360°$ (2π) (fig. 3.29).

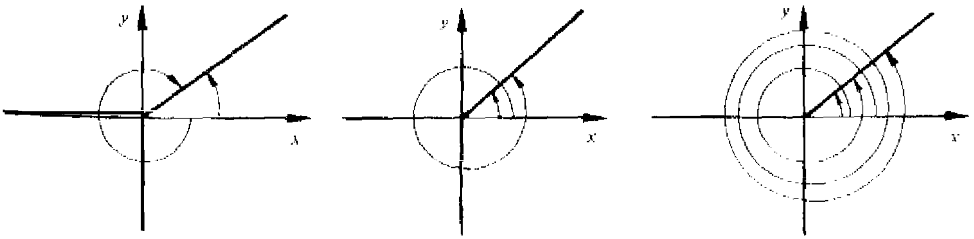


Fig. 3.29

En la figura 3.29 se aprecia que la misma semirrecta determina infinitos ángulos positivos y negativos.

> Los ángulos determinados por una misma semirrecta se llaman ángulos coterminales y se diferencian en un múltiplo entero de $360°$ o lo que es lo mismo en un múltiplo entero de 2π.

Ejemplo 1

Determina para cada uno de los siguientes ángulos, un ángulo coterminal entre y 360° o entre 0 y 2π según el sistema utilizado:

a) 1 938° **b)** $-\dfrac{9\pi}{6}$ **c)** $-$ 2 523,8° **d)** $\dfrac{17\pi}{5}$

Resolución

a) Dividimos 1 938 entre 360 y obtenemos:

1 938 = 5 · 360 + 138 luego el único ángulo que satisface las condiciones pedidas es 138° pues 1 938° − 138° = 5 · 360°.

b) Como en modulo el ángulo dado es menor que 2π, basta sumar 2π a su **medida:**

$$-\frac{9\pi}{6} + 2\pi = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

c) Para obtener un ángulo **que** satisfaga esas condiciones debemos sumar el primer multiplo de 360° que exceda a 2 523,8° (que es el módulo del valor dado). Dividiendo obtenemos 2 523,8 = 7 . 360° + 3,8°; luego el primer múltiplo que excede es 8 · 360° y − 2 523,8° + 8 · 360° = 356,2°

El ángulo pedido es 356,2°

d) El múltiplo **de** 2π más próximo es el propio 2π, luego

$$\frac{17\pi}{5} - 2\pi = \frac{7\pi}{5}$$

y el ángulo pedido es $\dfrac{7\pi}{5}$ ●

En los epígrafes anteriores hemos visto que las razones trigonometricas de un ángulo dependen solamente de las coordenadas de un punto situado en el lado terminal. Esto significa que *se* pueden calcular las razones trigonométricas de ángulos cualesquiera utilizando las definiciones conocidas. En la practica procedemos como se indica **a** continuación:

Para calcular las razones trigonométricas de un ángulo, buscamos un ángulo del intervalo fundamental [0°; 360°[([0;2π[) que sea coterminal con él y calculamos sus razones.

Ejemplo 2

Calcula las razones trigonométricas de los ángulos siguientes:

a) $-$ 45° **b)** $\dfrac{8\pi}{3}$ **c)** 793,5° **d)** 13,62

Resolución

a) Utilizando el procedimiento indicado antes:

$\text{sen}\,(-45^\circ) = \text{sen}\,(-45^\circ + 360^\circ) = \text{sen}\,(360^\circ - 45^\circ) = -\,\text{sen}\,45^\circ$

$\cos\,(-45^\circ) = \cos\,(-45^\circ + 360^\circ) = \cos\,(360^\circ - 45^\circ) = \cos 45^\circ$

$\tan\,(-45^\circ) = \tan\,(-45^\circ + 360^\circ) = \tan\,(360^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ$

b) $\text{sen}\,\dfrac{8\pi}{3} = \text{sen}\,\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ Porque $\dfrac{8\pi}{3}$ y $\dfrac{2\pi}{3}$ son coterminales.

$\cos\dfrac{8\pi}{3} = \cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}.$

$\tan\dfrac{8\pi}{3} = \tan\dfrac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}.$

c) $\text{sen}\,793{,}5^\circ = \text{sen}\,73{,}5^\circ = 0{,}9588$ $\quad 793{,}5 = 2 \cdot 360 + 73{,}5$

$\cos 793{,}5^\circ = \cos 73{,}5^\circ = 0{,}2840$

$\tan 793{,}5^\circ = \tan 73{,}5^\circ = 3{,}3759$

d) El valor dado se encuentra en el sistema circular; **para** buscar un ángulo del intervalo fundamental le restamos el múltiplo **más** próximo de 2π (6,28). Para encontrarlo dividimos entre 6,28 y tomamos la parte entera del cociente:
13,48 : 6,28 = 2,...; **la** parte entera **es** 2. Entonces $13{,}48 - 2 \cdot 6{,}28 = 0{,}92$ y para calcular las razones trigonométricas lo expresamos en el sistema sexagesimal y buscamos en la tabla: $\text{sen}\,0{,}92 = \text{sen}\left(\dfrac{180^\circ}{\pi} \cdot 0{,}92\right)^\circ = \text{sen}\,52{,}7^\circ = 0{,}796$

$\cos 0{,}92 = \cos\left(\dfrac{180^\circ}{\pi} \cdot 0{,}92\right)^\circ = \cos 52{,}7^\circ = 0{,}606$

$\tan 0{,}92 = \tan\left(\dfrac{180^\circ}{\pi} \cdot 0{,}92\right)^\circ = \tan 52{,}7^\circ = 1{,}31.$ □

En el último inciso damos la respuesta con tres cifras porque al calcular hemos utilizado aproximaciones de π.

Resumiendo tenemos:

$\text{sen}\,(x + k \cdot 360^\circ) = \text{sen}\,x$	$\text{sen}\,(x + 2k\pi) = \text{sen}\,x$
$\cos\,(x + k \cdot 360^\circ) = \cos x$	$\cos\,(x + 2k\pi) = \cos x$
$\tan\,(x + k \cdot 180^\circ) = \tan x$	$\tan\,(x + k\pi) = \tan x$

Observa que para el caso de la tangente, debido a la fórmula de reducción:

$\tan\,(x + k \cdot 180^\circ) = \tan x \qquad \tan\,(x + k\pi) = \tan x$

los valores se repiten cada media vuelta.

En el inciso a) del ejemplo 2 hemos visto que las razones trigonometricas de ángulos negativos se reducen a las de ángulos positivos. De una forma completamente análoga se demuestra el siguiente teorema que incluye nuevas fórmulas de reducción:

Teorema 1

Para todo angulo α *se* cumple:
sen $(-\alpha) = -$ sen u
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
$\tan(-\alpha) = -$ tan a

El teorema 1 reduce el cálculo de razones trigonométricas al caso de ángulos positivos pues, aunque han sido demostradas para ángulos del intervalo fundamental, **las fórmulas de reducción son válidas para ángulos cualesquiera.**

Ejemplo 3

Calcula: sen (– 987°).

Resolución

$$\text{sen}(-987°) = -\text{sen } 987° = -\text{sen } 267° = 0{,}999. \quad ■$$

Ahora, al resolver ecuaciones, el conjunto solución es infinito como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4

Resuelve:

a) $\text{sen } x = 1$ **b)** $\cos x = 0{,}487$ **c)** $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 2\tan^2 x - 2$

Resolución

a) En el intervalo fundamental $[0°;360°]$ o $[0;2\pi)$ se tiene una única solución: $x = 90°$ *o* $x = \frac{\pi}{2}$. Cada vez que *se* suma al ángulo 360° o 2π se obtiene un ángulo coterminal y el valor del seno se repite; resultan entonces las igualdades'

$$\text{sen}(90° + k \cdot 360°) = \text{sen } 90° = 1 \quad \text{o} \quad \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \text{sen}\frac{\pi}{2} = 1$$

y entonces el conjunto soluciones:

$$\{x = 90° + k \cdot 360°;\ k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{o} \quad \left\{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Observa que en el conjunto solucion hay que incluir todos los ángulos coterminales con las soluciones del intervalo fundamental.

b) En este caso, en el primer cuadrante tenemos $x = 60{,}9°$. Como el coseno es positivo en el cuarto cuadrante, las soluciones en el intervalo fundamental son: $x = 60{,}9°$ y $y = 360° - 60{,}9° = 299{,}1°$ o también $x = -60{,}9°$.

El conjunto solución es:

$\{x : x = 60{,}9° + k \cdot 360° \quad \text{o} \quad x = 299{,}1° + k \cdot 360°;\ k \in \mathbb{Z}\}$

que también puede representarse en la forma:

$\{x : x = \pm 60{,}9° + k \cdot 360°;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Observa que no escribimos la solución en el sistema circular porque 60,9° no *se* expresa coma una fracción racional sencilla de π.

c) En este caso es necesario reducir a una sola función:

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 2\tan^2 x - 2$$

$$1 + \tan^2 x = 2\tan^2 x - 2$$
$$\tan^2 x = 3$$

$$\tan x = \sqrt{3} \qquad \tan x = -\sqrt{3}$$

$$x = \frac{\pi}{3} \qquad x = -\frac{\pi}{3}$$

$$\left\{x : x = \frac{\pi}{3} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\} \qquad \left\{x : x = -\frac{\pi}{3} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

es decir, el conjunto solución *es:*

$$\left\{x : x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ o } x = -\frac{\pi}{3} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$ que puede escribirse:

$$\left\{x : x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

En el caso de la tangente **es** conveniente considerar como intervalo básico $(-90°; 90°)$ *o* $\left(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ en lugar **de** $[0; 180°]$ **pues** de esa forma se trabaja con ángulos agudos y sus opuestos y todos los valores del intervalo están debidos. ■

Ejercicios (epígrafe 9)

1. **Considera el** origen de coordenadas como vértice de los ángulos **cuyas amplitudes son las siguientes:** 45°, 135°, 305°, 710°, −30°, −120°, −315°, −430°. ¿En que cuadrante se encuentra el lado terminal de cada uno de estos ángulos?

2. Representa gráficamente los ángulos generados en cada uno de los conjuntos siguientes, para $k = 0; \pm 1; \pm 2$

   a) $\{0° + k \cdot 180°\}$ b) $\{90° + 2k \cdot 180°\}$ c) $\{0° + 2k \cdot 180°\}$
   d) $\{180° + k \cdot 90°\}$ e) $\{45° + k \cdot 90°\}$ f) $\{60° + k \cdot 180°\}$

3. Determina para cada uno de los siguientes ángulos un ángulo coterminal entre 0° y 360° o entre 0 y 2π según el sistema utilizado.

   a) 4 380° b) 3 675° c) 27 134° d) 515,6°
   e) 7 584,4° f) 438,5° g) 3 205,6° h) − 1 573°

i) – 157°   j) – 479,7°   k) – 47,6°   l) – 3 721,3°

ni) ***22n***   n) $\frac{17\pi}{2}$ ñ) $\frac{14\pi}{3}$ o) – 17π

p) – $\frac{16\pi}{5}$ q) – $\frac{13\pi}{4}$ r) 7,12   s) – 2,04

t) – 6,13   u) – 0,25   v) – 22,3   w) – 12,51

4. Dados Los conjuntos de cantidades de **amplitudes siguientes,** comprueba en qué casos se trata de ángulos coterminales y determina en **esos casos,** cual **es la** amplitud principal correspondiente.

a) {2 015°; 1 295°; 575°}   b) {473°; – 247°; 1 193°}
c) {395°; 1 115"; 1 315°}   d) {445°; 1 165°; 1 885°}
e) {444°; 1 164°; 1 514°}   f) {893°; – 547°; 1 253°}

5. Reduce al primer cuadrante las **razones** trigonométricas **de** los siguientes ángulos y calcula su valor.

a) 285"   b) 310"   c) 294°   d) 306°21'   e) 276°
f) 148°   g) – 42°   h) – 125°   i) – 222"   j) – 315"
k) 748°12'   l) 847°   m) 1 035°   n) 3 889°   ñ) 5 390°
o) 6 120°   p) – 1 235°   q) 2,23   r) 0,85   s) – 1,20
t) – 7,24   u) – 6,01   v) $\frac{17\pi}{2}$ w) $\frac{14\pi}{3}$ x) – $\frac{16\pi}{5}$
y) 22π

6. Calcula el valor dc:

a) sen (– 45")   b) cos (– 30°)   c) tan (– 120°)   d) cos (– 135°)
e) tan (– 210°)   f) sen (– 300°)   g) tan (– 240")   h) sen (– 225")
i) cos (– 315°)   **j)** sen 1 000°   k) cos 10   l) tan 3,21

7. Halla el valor de las siguientes razones trigonométricas:

a) sen 1 125°   b) cos 2 820°   c) **tan** 1 **320"**
d) tan (– 1 500°)   e) cos (– **4** 680°)   f) sen (– 1 500°)
g) sen $\frac{11\pi}{4}$ h) cos $\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$ i) tan $\left(-\frac{17\pi}{3}\right)$
j) tan (– 2,2)   k) sen (– 0,81)   l) cos 2,28

Funciones trigonométricas

10. *Definición de las funciones trigonométricas*

Cada número real representa la medida en radianes de un ángulo, esto significa **que** al número real se pueden hacer corresponder las razones trigonométricas de ese **ángulo.**

Definición 1

Se llama función **seno** a **la** función **que** a cada número real x le asocia **sen x.**

En otras palabras la función seno está formada por los pares ordenados $(x;\ \text{sen}\ x)$ con $x \in \mathbb{R}$.

Esta función tiene como dominio al conjunto de los números reales, en símbolos: Dom (sen x) = $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1

a) Calcula los valores que se indican de la función $f(x)$ = sen x: sen $\frac{\pi}{4}$; sen $\frac{4\pi}{3}$; sen 1,5.

b) ¿Cuáles de los siguientes números pueden ser valores de la función $f(x)$ = sen x: $\sqrt{3}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4; $\sqrt{2}$ − $\frac{1}{2}$; 0.

c) Determina para qué valores de x la función y = sen x alcanza el valor: 1, −1, $-\frac{1}{2}$.

Resolución

a) sen $\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\pi}{4}$ es un ángulo notable y conocemos su valor

$$\text{sen}\ \frac{4\pi}{3} = -\text{sen}\ \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

1,5 no representa un ángulo notable y utilizamos la tabla:

$$\text{sen}\ 1{,}5 = \text{sen}\left[1{,}5 \cdot \frac{180}{\pi}\right]^{\circ} = \text{sen}\ 86{,}0^{\circ} = 0{,}998$$

b) Sabemos que $|\text{sen}\ x| \leqslant 1$, luego la función no puede tomar valores fuera del intervalo $[-1\ ;\ 1]$, o sea,

no puede tomar los valores $\sqrt{3}$, 4, $-\sqrt{2}$

Puede tomar los valores: $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $-\frac{1}{2}$; 0.

c) Para contestar a estas preguntas se deben resolver las ecuaciones: sen x = 1 ; sen x = −1; sen x = $-\frac{1}{2}$. Sabemos obtener el conjunto solución de cada una de ellas:

Para sen x = 1:

$$\left\{x \in \mathbb{R}:\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}:\ x = (4k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\};$$

para sen $x = -1$

$$\left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x = (4k+3)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\};$$

para sen $x = \frac{1}{2}$: $\left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \text{ o } \ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Definición 2

> Se llama función **coseno** a la funcion que a cada número real x le hace corresponder cos **x.**

En otras palabras. esta función está formada por los pares ordenados $(x\ ;\ \cos x)$

La función coseno tiene corno dominio al conjunto de los números reales, en simbolos: Dom $(\cos x) = \mathbb{R}$.

Ejemplo 2

a) **Calcula los valores que se indican** de la **función** $f(x) = \cos x$; $\cos \frac{11\pi}{2}$; $\cos(-2\pi)$; $\cos 7{,}4$.

b) **Determina para qué valores dc** x **la función** $y = \cos x$ **alcanza los valores siguientes:** $\frac{}{2}$. $\sqrt{2}$, 0.

Resolución

a) $\cos \frac{11\pi}{2} = \cos \frac{3\pi}{2} = 0$;

$\cos(-2\pi) = \cos 2\pi = 1$;

$\cos 7{,}4 = \cos\left[7{,}4 \cdot \frac{180}{\pi}\right]^{\circ} = \cos 424{,}0^{\circ} = \cos 64{,}0^{\circ} = 0{,}438$;

b) Para contestar a esta pregunta se deben resolver las ecuaciones: $\cos x = \frac{1}{2}$, $\cos x = \sqrt{2}$, $\cos x = 0$.
Conocemos el conjunto solución de cada una de ellas ; para $\cos x = \frac{1}{2}$.

$$\left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{o} \quad x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\};$$

para $\cos x = \sqrt{2}$: como $|\cos x| \leqslant 1$, no **existe x** tal que $\cos$ **x** $= \sqrt{2}$, $S = \phi$, o sea, no se cumple la igualdad para ningún valor de x.

para $\cos x = 0$: $\left\{x \in \mathbb{R} : x = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. ■

Definición 3

> **Se** llama función **tangente** a la función que a cada número real $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ se le hace corresponder **tan** x.

El dominio de la función tangente es entonces el conjunto de los números reales que no son múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$, es decir. en los que la función coseno no **se** anula y, por tanto, esta definida la tangente. En símbolos:

$$\text{Dom}(\tan x) = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \in \mathbb{R} : x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \; ; \; k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{o}$$

$$\text{Dom}(\tan x) = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \right\}$$

En otras palabras, **la** función tangente está formada por los pares ordenados:

$(x \; ; \tan x)$ con $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$

Ejemplo 3

a) Calcula, si está definido, el valor de la función $y = \tan x$ en los puntos siguientes: $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{2}$; 1; $-\frac{\pi}{6}$.

b) Resuelve las ecuaciones $\tan x = 0$; $\tan x = 3$; $\tan x = -\sqrt{3}$, $\tan x = 0{,}5$.

Resolución

a) $\tan \frac{\pi}{4} = 1$.

La tangente no está definida en $\frac{3\pi}{2}$, **pues** $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$ y, por tanto, $\frac{3\pi}{2} \notin$ Dom **(tan** x).

Para calcular tan 1 es necesario utilizar la tabla:

$$\tan 1 = \tan \left[1 \cdot \frac{180}{\pi} \right]^{\circ} = \tan 57{,}3^{\circ} = 1{,}56$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -0{,}577.$$

b) Ya conocemos el conjunto solución de la ecuación $\tan x = 0$: $\{x \in \mathbb{R} : x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$;

como en ningún ángulo notable $\tan x = 3$, es necesario buscar en la tabla y encontramos: $\tan 71{,}6^\circ = 3{,}0061 \approx 3{,}01$, luego con tres cifras esenciales el ángulo es de $71{,}6^\circ$ en el sistema sexagesimal; para obtener el valor de x es necesario expresarlo en el sistema circular ; $71{,}6^\circ \cdot \dfrac{\pi}{180^\circ} = 1{,}25$ y el conjunto solución es : $\{x \in \mathbb{R} : = 1{,}25 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$;

para $\tan x = -\sqrt{3}$ conocemos el conjunto solución.

$$\left\{x \in \mathbb{R} : x = -\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}. \quad \blacksquare$$

Ejercicios (epígrafe 10)

1. Analiza si los pares ordenados siguientes son elementos de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$.

   a) $(-\pi;1)$ b) $\left[\dfrac{3\pi}{2};0\right]$ c) $\left[-\dfrac{7\pi}{2};1\right]$

   d) $(18;0)$ e) $(12\pi;0)$ f) $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

   g) $\left[-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{1}{2}\right]$ h) $\left[\dfrac{5\pi}{3};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$ i) $\left[\dfrac{7\pi}{6};\dfrac{1}{2}\right]$

   j) $\left[\dfrac{19\pi}{2};1\right]$

2. Determina para qué valores de x la función $y = \operatorname{sen} x$ alcanza el valor: $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $0{,}25$; $0{,}1$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$

3. Analiza si los pares ordenados siguientes son elementos de la función $y = \cos x$

   a) $(0;1)$ b) $(\pi;1)$ c) $\left[\dfrac{9\pi}{2};0\right]$

   d) $(6\pi;1)$ e) $(-2;1)$ f) $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

   g) $\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{1}{2}\right]$ h) $\left[\dfrac{5\pi}{6};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$ i) $\left[\dfrac{5\pi}{4};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

4. Determina para qué valores de x la función $y = \cos x$ alcanza los valores siguientes: 0 ; $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $0{,}12$; $0{,}24$; $\sqrt{5}$; $-\sqrt{7}$

5. Analiza si los pares ordenados siguientes son elementos de la función $y = \tan x$.

a) $(0\ ;\ 0)$ b) $(\pi\ ;\ 1)$ c) $\left(\frac{\pi}{2}\ ;\ 1\right)$

d) $(-12\pi\ ;\ 0)$ e) $\left(\frac{\pi}{4}\ ;\ 1\right)$ f) $\left(\frac{7\pi}{4};\ 1\right)$

g) $\left(\frac{\pi}{6}\ ;\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ h) $\left(\frac{5\pi}{3};\ \sqrt{3}\right)$ i) $(3\ ;\ 0)$

j) $(8\pi\ ;\ 0)$

6. Determina para qué valores de x la función $y = \tan x$ alcanza los valores siguientes: 1; 0; $\sqrt{3}$; $\frac{4}{3}$; $0{,}21$; $2{,}23$

7. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$, calcula:

a) $\dfrac{f(5\pi/4) + 2f(0) + f(3\pi/4)}{3f(\pi/6)}$ b) $2f(5\pi/6) \cdot f^2(\pi/4) \quad 3\, f(4\pi/3)$

8. Si $g(x) = \cos x$ y $h(x) = \tan x$, calcula:

a) $\frac{1}{2}\, g(\pi/4) + h(4\pi/3)$ b) $\dfrac{2}{g(3\pi/4)} + \dfrac{\frac{3}{2}\, g(5\pi/6)}{h(\pi/4)}$

c) $\sqrt{\dfrac{g^2(11\pi/6) + h(5\pi/4)}{1 + h(\pi)}}$ d) $\sqrt{\dfrac{h^2(4\pi/3) + 8\, g^2(7\pi/6)}{g(0)}}$

e) $\dfrac{g(5\pi/4) \cdot g(\pi/4) + 3g(4\pi/3)}{h^2(2\pi/3)}$ f) $\dfrac{g^3(2\pi/3) \quad h(\pi/6) \cdot g(\pi/4)}{g(0) \cdot h(5\pi/4)}$

9. Prueba las siguientes igualdades, si $f(x) = \cos x$, $g(x) = \operatorname{sen} x$ y $h(x) = \tan x$

a) $\dfrac{2f^2(\pi/3) \cdot g(-\pi/6)}{h(5\pi/4)} + \dfrac{1}{2}\, f(\pi/3) = 0$

b) $\dfrac{4f^2(\pi/6)}{12f^2(5\pi/6)} \quad \dfrac{g^2(7\pi/4) \cdot h(4\pi/3)}{2g^2(5\pi/4)} + h(\pi/4) = \dfrac{3\sqrt{3} + 16}{16}$

c) $\dfrac{1}{f(11\pi/6)} - f(\pi) \quad h(2\pi) \cdot g(3\pi/4) = \dfrac{22 - \sqrt{3}}{16}$

d) $f(-\pi/4) \cdot h(\pi) \quad 2g(2\pi/3) \cdot \dfrac{1}{h(\pi/6)} = -3$

e) $$\frac{\dfrac{f^2(2\pi/3)}{g(\pi/6)} - \dfrac{f(-\pi)\cdot h(5\pi/4)}{1+f^2(3\pi)}}{2 - \dfrac{h^2(5\pi/3) + 12\, f(\pi/3)}{1 - 2\, g(3\pi/4)}} = \frac{9\sqrt{2} - 11}{41}$$

10. Resuelve las siguientes ecuaciones si $0 < x < 2\pi$

a) $2 \operatorname{sen} x + 1 = 0$ b) $\tan x - 1 = 0$

c) $\dfrac{1}{\cos x} = \sqrt{2}$ d) $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 0$

11. Resuelve las ecuaciones del ejercicio 10 para $x \in \mathbb{R}$.

12. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $$\frac{\tan^2 x + 1}{\operatorname{sen}(-x) + \cos(-x)} \cdot \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}(\pi + x) - \operatorname{sen}(\pi - x)}{-\dfrac{1}{\operatorname{sen}(\pi/2 - x)}}$$

b) $$\frac{\tan(\pi/2 + \theta)}{\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta} \cdot [\tan(\pi - \theta) + 1]$$

c) $$\frac{\operatorname{sen}^2 x - 1}{\cos(\pi + x)} \cdot \frac{1}{\cos(-x)\,[1 + \tan^2(-x)]}$$

13. Determina el dominio de definición de las siguientes igualdades:

a) $\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2}\cos(\pi/4 - x)$

b) $\dfrac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} = \cot^2 x$ c) $\sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} = \tan \dfrac{x}{2}$

11. *Función seno, representación gráfica y propiedades*

Como la función seno satisface $\operatorname{sen}(x + 2k\pi) = \operatorname{sen} x$, $k \in \mathbb{Z}$, basta representarla en un intervalo de longitud 2π. Para hacerlo en el intervalo $(0; 2\pi)$ calculamos algunos valores y los representamos en una tabla como la siguiente:

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$
sen$x$	0	0,26	0,5	0,71	0,87	0,97	1,0	0,97	0,87	0,71	0,5	0,26
x	π	$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{19\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{23\pi}{12}$
sen$x$	0	,26	,5	–,71	,87	–,97	1	–,97	–,87	–,71	–,5	–,26

Al representar estos pares ordenados en un sistema de coordenadas se obtiene una gráfica como la que se muestra en la figura 3.30.

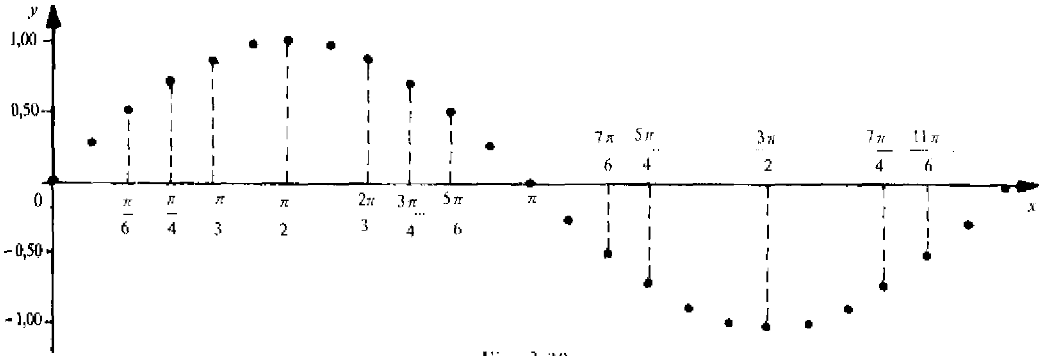


Fig. 3.30

Si aumentamos el número **de** puntos se obtiene una idea cada vez mas aproximada de la gráfica de **la** función seno. En cursos posteriores podrás convencerte de que esta gráfica es una curva que contiene todos los puntos de la forma $(x;\ \text{sen}\ x)$ **que puedes** obtener (fig. 3.31).

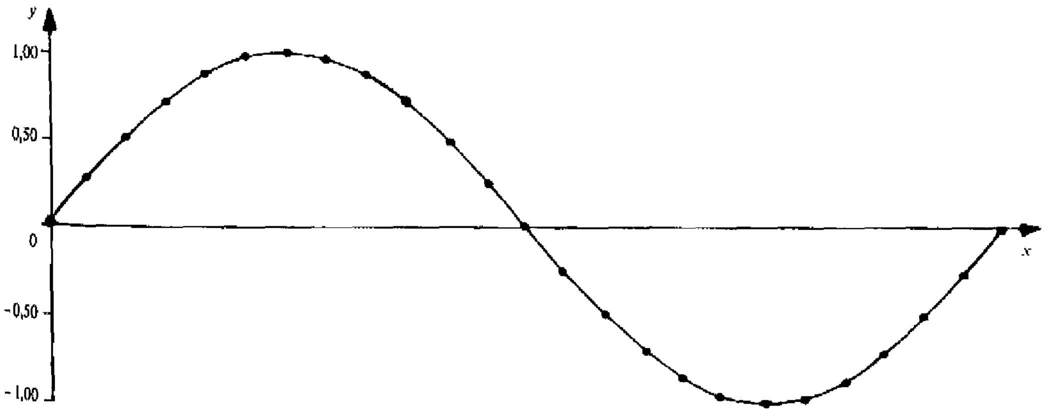


Fig. 3.31

Como los valores del seno se repiten en cada intervalo de longitud 2π, la gráfica de la función seno en todo intervalo de la forma $[-A;\ A]$ se obtiene trasladando la porción de gráfico que corresponde al intervalo $[0;\ 2\pi]$ en ambos sentidos tantas veces como sea necesario. En otras palabras "se repite" a derecha e izquierda el gráfico de la figura 3.31 (fig. 3.32).

En este gráfico pueden apreciarse algunas de las propiedades de la función seno.

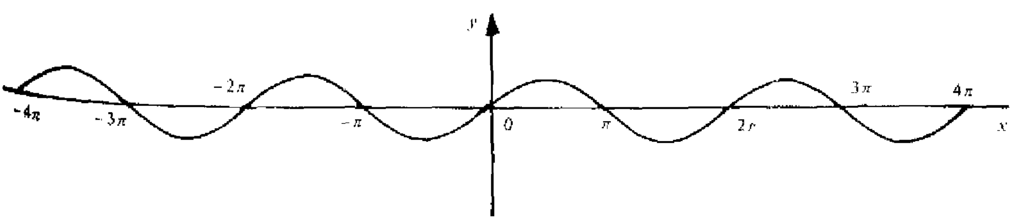


Fig. 3.32

Dominio: $\mathbb{R}$	La proyección de la gráfica cubre todo el eje "Y"
Imagen: $[-1;1]$	La proyección sobre el eje "y" cubre este intervalo pues $\|\text{sen } x\| \leq 1$.
Ceros: $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	En **estos** puntos sen $x = 0$ y la gráfica corta al eje "x".
Paridad: impar	La gráfica es simétrica respecto al origen pues sen$(-x)$ = $-$sen x.
Monotonía: no es monótona	Se alternan intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Aunque la función seno no es monótona, en cada cuadrante si lo ***es***. por lo que es muy fácil recordar cómo varia la función seno en el intervalo fundamental $[0;\ 2\pi]$:

subintervalo	$[0;\pi/2]$ I cuad.	$[\pi/2;\pi]$ II cuad.	$[\pi;3\pi/2]$ III cuad.	$[3\pi/2;2\pi]$ IV cuad.
variación	creciente 0 a 1	decreciente 1 a 0	decreciente 0 a -1	creciente 1 a 0
signo	+	+	$-$	

Atención: Si recuerdas el gráfico de la función seno en el intervalo $[0;\ 2\pi]$, puedes fijar con facilidad estas propiedades.

Ejemplo 1

¿Cuáles de los siguientes números pueden ser valores de la función seno:

$$0{,}5;\ 3;\ \sqrt{2};\ \frac{\sqrt{3}}{3};\ 0;\ -1;\ -1{,}5;\ \ 0{,}4;\ \ \frac{1}{2}$$

Resolución

Como la imagen de la función seno es el intervalo $[-1;\ 1]$, no puede tomar los valores que quedan fuera de ***ese*** intervalo: 3; $\sqrt{2}$ y $-1{,}5$. Entonces la función seno puede tomar los valores:

$$0{,}5;\ \frac{\sqrt{3}}{3};\ 0;\ \ -1;\ \ 0{,}4 \text{ y } \ \frac{1}{2}\ . \ \blacksquare$$

Ejemplo 2

Analiza la monotonía de la función seno en el intervalo dado:

a) $[3\pi/4;\ 5\pi/4]$ **b)** $[7\pi/6;\ 2\pi]$

Resolución

a) $\frac{3\pi}{4}$ es un ángulo del segundo cuadrante y $\frac{5\pi}{4}$ es un ángulo del tercer cuadrante. En el segundo cuadrante la función seno es decreciente y en el tercero también (fig. 3.33a), luego la función es monótona decreciente en el intervalo dado.

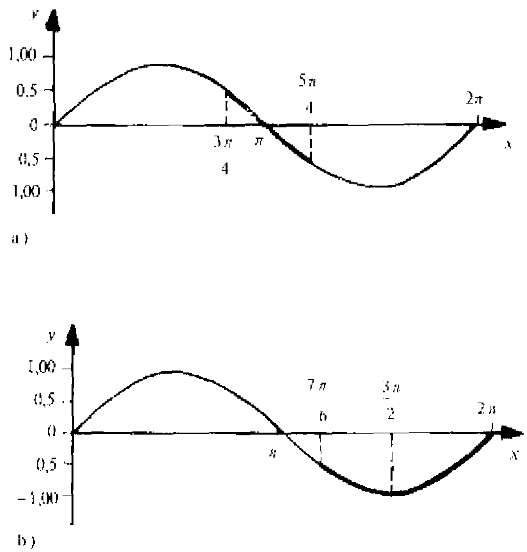


Fig. 3.33

b) $\frac{7\pi}{6}$ es un ángulo del tercer cuadrante y 2π es el extremo superior del cuarto cuadrante; la función seno es decreciente en el tercer cuadrante y creciente en el cuarto (fig. 3.33b), luego el intervalo dado no es un intervalo de monotonía y es necesario descomponerlo en dos subintervalos: $[7\pi/6 \,;\, 3\pi/2]$ comprendido en el tercer cuadrante y $[3\pi/2 \,;\, 2\pi]$ comprendido en el cuarto cuadrante.
La función seno es decreciente en el primer subintervalo y creciente en el segundo. ■

Como sabemos, todos los ángulos coterminales con uno dado tienen el mismo seno: sen $(\alpha + 2k\pi)$ = sen α, $k \in \mathbb{Z}$. Esta igualdad representa una propiedad de la función seno que es un caso particular de una propiedad general.

Definición 1

> Una función real, f, es periódica si existe un número real T, tal que para todo elemento, x, del dominio de la función se cumple $f(x) = f(x + T)$. El número T recibe el nombre de periodo de la función.

Ahora puede afirmarse:

> La función seno es periodica, cualquier múltiplo entero de 2π es un periodo de la función seno.

En la gráfica, la periodicidad de la función puede apreciarse porque puede obtenerse "repitiendo" indefinidamente la gráfica de cualquier intervalo de longitud 2π. Estos hechos permiten comprender mejor por qué las ecuaciones trigonométricas tienen infinitas soluciones.

Ejemplo 3

Resuelve e interpreta gráficamente la ecuación sen $x = 0,5$.

Resolución

Ya conocemos el conjunto solución de esta ecuación:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ o } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Para la interpretación gráfica observemos que el conjunto solución debe estar formado por las abscisas de los puntos de intersección de la gráfica de la función seno y la recta $y = 0,5$ (fig. 3.34). En la gráfica puede comprenderse que este conjunto es infinito. ■

En la gráfica de la función seno también pueden apreciarse otras propiedades de esta función.

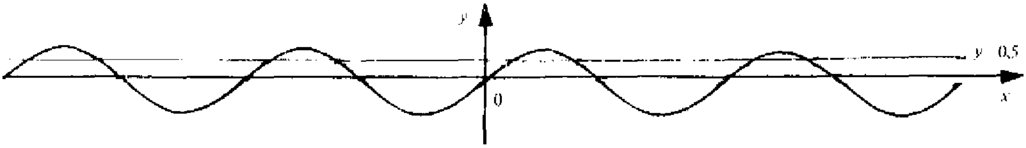


Fig. 3.34

El **valor máximo** que alcanza la función seno es 1 y lo alcanza en los puntos $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi = (4k + 1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; estos son los **puntos de máximo** de la función seno.

El **valor mínimo** que alcanza la función seno es -1 y lo alcanza en los puntos $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi = (4k + 3)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, estos son los **puntos de mínimo** de la función seno.

Ejercicios (epígrafe 11)

1. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones tienen solución y cuáles no? Fundamenta.

   a) **sen $x = 1.3$** b) $|\text{sen } x| = 4$ c) $3 \text{ sen } x = 2$

d) $4 \operatorname{sen} x + 2 = 0$ e) $\operatorname{sen} x = -0{,}83$ f) $|\operatorname{sen} x| = \frac{1}{2}$

g) $-2 \operatorname{sen} x = 4$ h) $3 \operatorname{sen} x - 6 = -4$ i) $2 \operatorname{sen} x = 0$

2. ¿Posee la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ ceros en los intervalos siguientes? Determínalos si existen.

   a) $-\pi/2 \leqslant x \leqslant 0$ b) $\pi/3 \leqslant x \leqslant 3\pi/2$ c) $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$
   d) $14 \leqslant x \leqslant 15$ e) $-7 \leqslant x \leqslant -3$ f) $-\pi/2 \leqslant x \leqslant 5\pi/2$

3. Determina el signo de la función $y = \operatorname{sen} x$ en los siguientes intervalos.

   a) $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ b) $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi$ c) $\pi/3 \leqslant x \leqslant 2\pi$
   d) $-3\pi/2 \leqslant x \leqslant 0$ e) $\pi/2 \leqslant x \leqslant 2\pi$ f) $\pi/2 \leqslant x \leqslant 5x12$
   g) $\pi/4 \leqslant x \leqslant 5\pi/4$ h) $0 \leqslant x \leqslant \pi/3$

4. Determina en qué puntos de los siguientes intervalos la función $y = \operatorname{sen} x$ posee valores máximos o mínimos, determina además estos valores.

   a) $0 \leqslant x \leqslant \pi$ b) $-\pi \leqslant x\ S\ \pi/2$ c) $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi$
   d) $-2\pi \leqslant x \leqslant 0$ e) $3\pi/2 \leqslant x \leqslant 5\pi/2$ f) $\pi \leqslant x \leqslant 3\pi$
   g) $\pi/2 \leqslant x \leqslant 5\pi/2$ h) $-\pi/2 \leqslant x \leqslant 0$

5. Determina gráfica y analíticamente los puntos de intersección de las gráficas de las funciones.

   a) $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \sqrt{3}/2$
   b) $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \sqrt{2}/2$
   c) $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = 0{,}7$
   d) $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = -0{,}5$

12. *Función coseno, representación gráfica y propiedades*

Al igual que para la función seno, es suficiente representar gráficamente la función coseno en el intervalo $[0;2\pi]$. Calculemos algunos valores y construyamos la tabla siguiente:

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$
$\cos x$	1	0,97	0,87	0,71	0,5	0,26	0	-,26	,5	-,71	-,87	,97
x	π	$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{19\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{23\pi}{12}$
$\cos x$	1	-,97	-,87	,71	-,5	-,26	0	0,26	0,5	0,71	0,87	0,97

Al representar estos pares ordenados en un sistema de coordenadas se obtiene una gráfica como la que se muestra en la figura 3 35

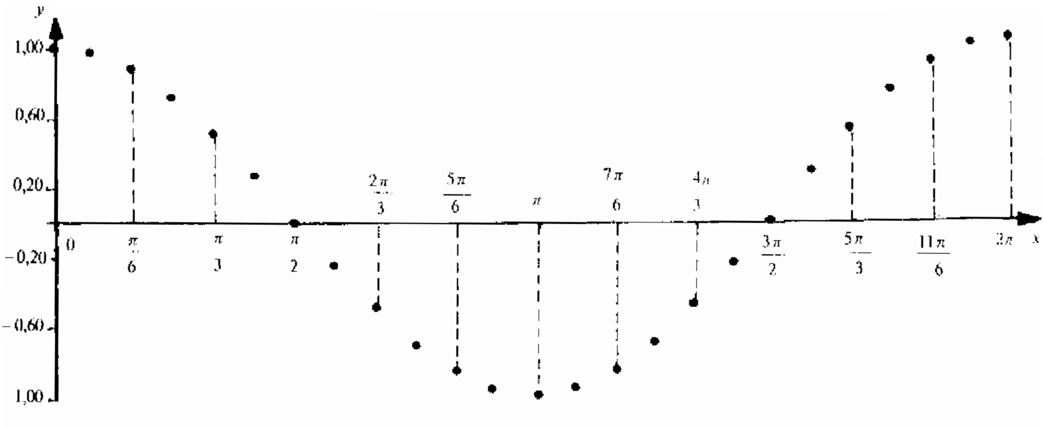


Fig. 3.35

Si aumentamos el número de puntos se obtiene una **idea** cada vez más aproxi**mada** de la gráfica de la función coseno. En cursos posteriores podrás convencerte de que esta gráfica es una curva que contiene todos los puntos de la forma $(x;\ \cos x)$ que puedes obtener (fig. 3.361.

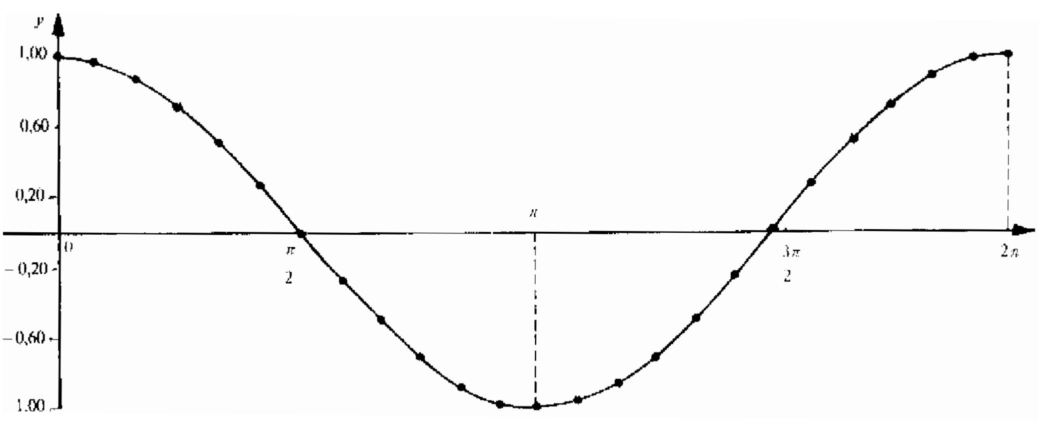


Fig. 3.36

Al igual que en el caso **de** la función seno, la gráfica de la función coseno en todo R se obtiene trasladando el gráfico correspondiente al **intervalo** $[0;\ 2\pi]$ en ambos sentidos tantas veces como sea necesario. En otras palabras "se repite" a derecha e izquierda el gráfico de la figura 3.36 (fig. 3.37).

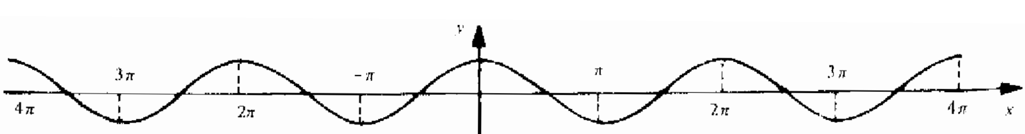


Fig. 3.37

También en este caso utilizamos el gráfico para reconocer las propiedades de la función coseno:

Dominio: $\mathbb{R}$	La proyección de la gráfica cubre todo el eje "x".
Imagen: $[-1; 1]$	La proyección sobre el eje "y" cubre este intervalo pues $\lvert\cos x\rvert \leq 1$.
Ceros: $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$	En estos puntos cos x = 0 y la gráfica corta al eje "x"
Valor máximo: 1	Es el extremo superior de la imagen
Puntos de máximo: $2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	En estos puntos $\cos x = 1$
Valor mínimo: -1	Es el extremo inferior dc la imagen.
Puntos de mínimo: $(2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	En estos puntos $\cos x = -1$.
Paridad: par	La gráfica es simétrica respecto al eje "y" **pues** $\cos(-x) = \cos x$.
Monotonía: no es monótona	*Se* alternan intervalos de crecimiento y decrecimiento.
Período: $2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	El gráfico se obtiene "repitiendo" cualquier sección de longitud $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Igual **que** la función seno, **la** función coseno es monótona, en cada cuadrante. El cuadro que sigue resume la variación de la función coseno cn el intervalo fundamental $[0; 2\pi]$:

subintervalo	$[0; \pi/2]$ I cuad.	$[\pi/2; \pi]$ II cuad.	$[\pi; 3\pi/2]$ III cuad	$[3\pi/2; 2\pi]$ IV cuad.
variación	decreciente 1 a l)	dccrecienlc 0 a 1	creciente -1 a 0	creciente 0 a 1
signo	t	$-$		+

Atención: Debes recordar el gráfico de la función coseno en el intervalo $[0; 2\pi]$, **para fijar con facilidad estas propiedades.**

Ejemplo 1

Analiza la monotonía de la función coseno en el intervalo [12,8; 14,3].

Resolución

Al dividir 12,8 entre 2π (6,28) encontrarnos que la parte entera del cociente es 2, luego 12,8 es coterminal con:

$$12{,}8 - 2 \cdot 6{,}28 = 0{,}24$$

como $0 < 0{,}24 < 1{,}57$; 0,24 es un ángulo del primer cuadrante.

Análogamente: $14{,}3 - 2 \cdot 6{,}28 = 1{,}74$ y como $1{,}57 < 1{,}74 < 3{,}14$; $1{,}74$ es un ángulo del segundo cuadrante.

Luego, la función coseno es decreciente en el intervalo dado (fig. 3.38). ■

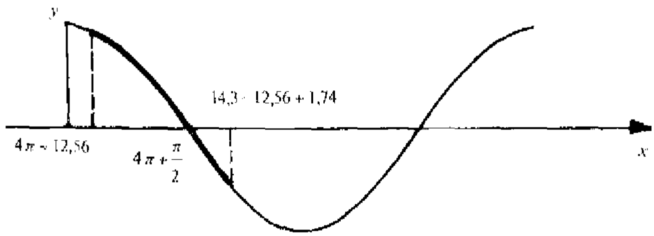


Fig. 3.38

Ejemplo 2

Indica el valor máximo y el valor mínimo de la función coseno en el intervalo dado:

a) $[\pi/6; 3\pi/8]$ **b)** $(3\pi/5; 4\pi/3]$ **c)** $[2\pi/3; 13\pi/4]$

Resolución

a) **Ambos** ángulos son del primer cuadrante, en este cuadrante la función **es** decreciente y, por tanto, alcanza el máximo en $\frac{\pi}{6}$ y el mínimo **en** $\frac{3\pi}{8}$:

valor máximo: $\cos\frac{\pi}{6} = 0{,}866$ valor mínimo: $\cos\frac{3\pi}{8} = 0{,}3827$

b) $\frac{3\pi}{5}$ es un ángulo del segundo cuadrante y $\frac{4\pi}{3}$ del tercero, como la función

coseno es decreciente en el segundo cuadrante y creciente en el tercero, alcanza su valor mínimo en π **que** es el valor **que separa ambos cuadrantes.** Para encontrar el **valor** máximo comparamos los valores en los extremas del intervalo: $\cos\frac{3\pi}{5} = -0{,}309 > -0{,}5 = \cos\frac{4\pi}{3}$ Luego:

valor máximo: $\cos\frac{3\pi}{5} = -0{,}309$ valor mínimo: $\cos\pi = -1$

c) $\frac{13\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} = \frac{31\pi}{12} > 2\pi$, luego este intervalo incluye un periodo completo de

la función y necesariamente alcanza sus valores máximo y minimo:

valor máximo $= 1$ valor mínimo $= -1$. ■

Ejercicios (epígrafe 12)

1. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones tienen solución y cuales no? Fundamenta.

a) $\cos x = 0$ b) $4 \cos x = 3$ c) $|\cos x| = 0{,}5$
d) $2 \cos x - 3 = 0$ e) $|\cos x| = 1{,}5$ f) $\cos x = -2{,}3$
g) $2 \cos x + 5 = 3$ h) $2 \cos x = 3\sqrt{3}$

2. ¿Posee la función $f(x) = \cos x$, ceros en los intervalos siguientes? Determínalos si existen.

a) $-\pi \leqslant x \leqslant \pi/2$ b) $\pi/6 \leqslant x \leqslant 2\pi$ c) $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi$
d) $3 \leqslant x \leqslant 12$ e) $-2 \leqslant x \leqslant 0$ f) $-5\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/4$

3. Determina el comportamiento de la función $y = \cos x$ respecto a la monotonía en los intervalos siguientes:

a) $-\pi/2 \leqslant x \leqslant 0$ b) $-\pi \leqslant x \leqslant \pi/2$ c) $\pi \leqslant x \leqslant 3\pi$
d) $\pi/3 \leqslant x \leqslant 3\pi/2$ e) $\pi/4 \leqslant x \leqslant 3\pi/4$ f) $-\pi/3 \leqslant x \leqslant \pi/3$

4. Determina el signo de la función $y = \cos x$ en los intervalos siguientes:

a) $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ b) $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$ c) $-2\pi \leqslant x \leqslant 0$
d) $0 \leqslant x \leqslant 3\pi/4$ e) $\pi/2 \leqslant x \leqslant 11\pi/6$ f) $3\pi/2 \leqslant x \leqslant 3\pi$

5. Determina en qué punto de los siguientes intervalos la función $f(x) = \cos x$ posee valores máximos o mínimos; determina, además, estos valores.

a) $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$ b) $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ c) $-2\pi \leqslant x \leqslant -\pi/2$
d) $0 \leqslant x \leqslant \pi$ e) $\pi \leqslant x \leqslant 5\pi$ f) $3\pi/2 \leqslant x \leqslant 7\pi/2$
g) $\pi/2 \leqslant x \leqslant 3\pi$ h) $-3\pi/2 \leqslant x \leqslant 2\pi$

6. Determina gráfica y analíticamente los puntos de intersección de los gráficos de las funciones:

a) $g(x) = \cos x$ y $f(x) = 0{,}5$ b) $g(x) = \cos x$ y $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $g(x) = \cos x$ y $h(x) = -\sqrt{2}/2$ d) $g(x) = \cos x$ y $h(x) = 0{,}2$

13. *Función tangente, representación gráfica y propiedades*

Como para la función tangente se cumple **que:** $\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha$. basta representarla en un intervalo de longitud π.

Como además, esta función no esta definida en los múltiplos impares de $\dfrac{\pi}{2}$, escogeremos el intervalo $(-\pi/2; \pi/2)$ para trabajar en un intervalo en el cual esta definida en todos los puntos.

x	$-\frac{5\pi}{12}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{12}$	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$
$\tan x$	-3,7	-1,7	-1	-,58	,27	0	0,27	0,58	1	1,7	3,7

Al representar en un sistema de coordenadas los pares contenidos en la tabla anterior, se obtiene una gráfica como la representada en la figura 3.39.

Al igual que en las restantes funciones, si determinamos más puntos, como se ha hecho en la figura 3.40 donde se han determinado 12 puntos más, podemos tener una idea más aproximada de la gráfica; en este caso aparece otra dificultad que no existe para las funciones seno y coseno: determinar cómo es la gráfica con x próximo a $\frac{\pi}{2}$ y a $-\frac{\pi}{2}$. En cursos posteriores podrás demostrar que la gráfica es una curva que contiene todos los puntos obtenidos (fig. 3.40) y se aproxima a las rectas perpendiculares al eje "x" en $\frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2}$ indefinidamente sin llegar a tocarlas. Las rectas con esa propiedad se llaman **asíntotas** de la curva.

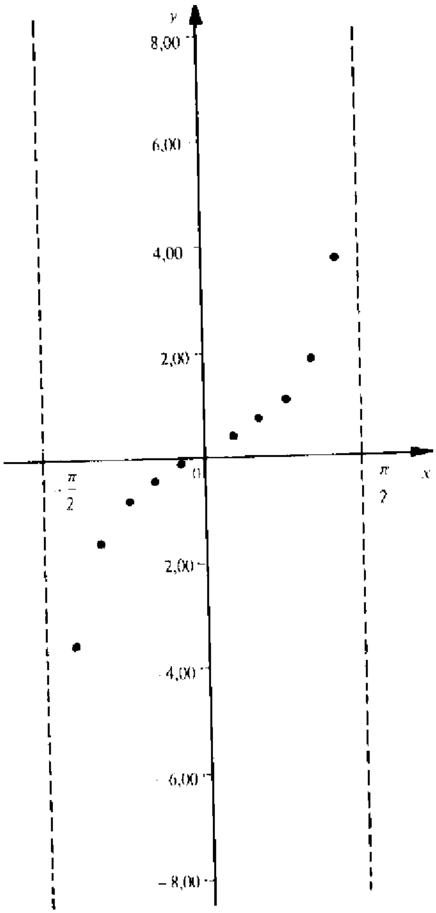


Fig. 3.39

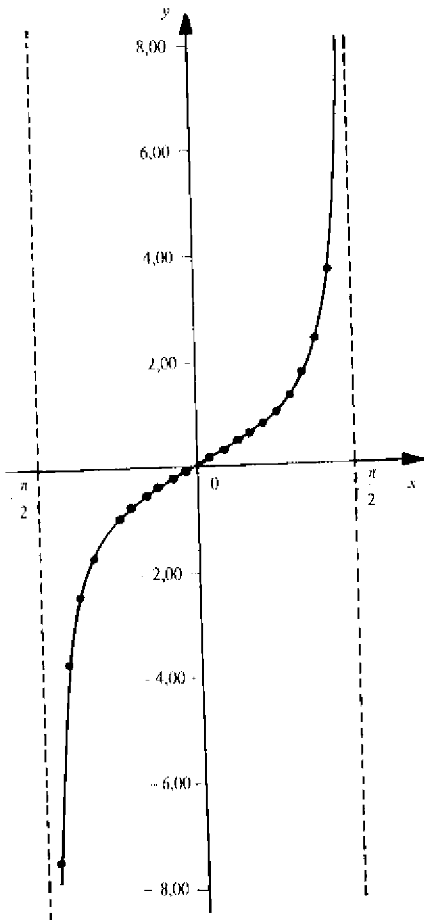


Fig. 3.40

La gráfica de la función en todo $\mathbb{R}$ se obtiene trasladando la gráfica obtenida en ambos sentidos indefinidamente (fig. 3.41).

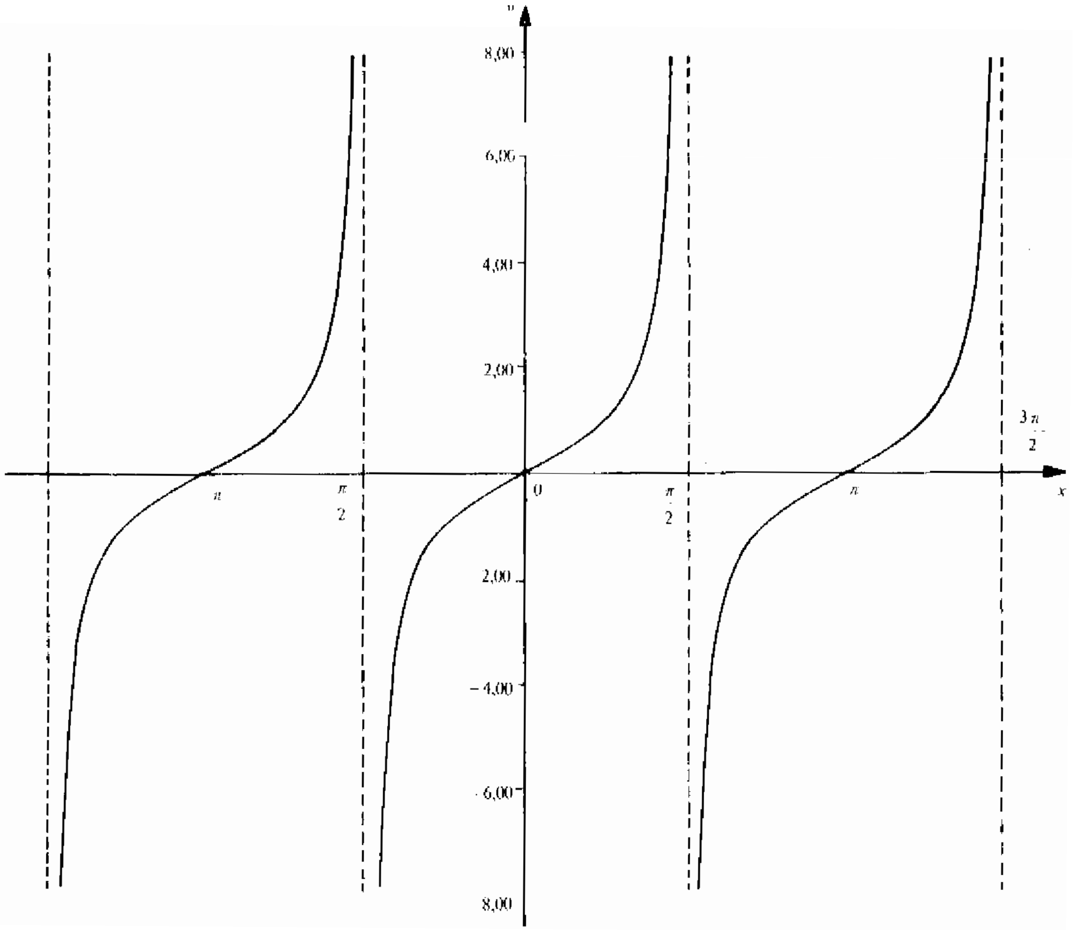


Fig. 3.41

De esta gráfica se pueden obtener algunas propiedades de la función tangente:

Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\ ; k \in \mathbb{Z}\}$	La tangente no está definida en los puntos que excluimos.
Imagen: $\mathbb{R}$	La proyección cubre el eje "y".
Ceros: $x = k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$	En esos puntos la gráfica corta al eje "x": $\tan k\pi = 0$.
Valor máximo: no tiene	Toma todos los valores reales.
Valor mínimo: no tiene	Toma todos los valores reales.
Paridad: impar	La gráfica es simétrica respecto al origen $\tan(-x) = -\tan x$
Período: $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$	$\tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha$ (fig. 3.41):

En la grafica se aprecia que en cada intervalo **que** no contiene múltiplos impares **de** $\frac{\pi}{2}$ **la** función es creciente; sin embargo, la **tangente no es monótona porque al** pasar dc uno de ***esos*** intervalos a otro no crece. Por **ejemplo:**

$$\frac{\pi}{3} < \pi \text{ pero } \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} > 0 = \tan \pi.$$

Ejemplo 1

a) Calcula los valores que se indican:

$$\tan\frac{\pi}{4}; \ \tan\frac{5\pi}{4}; \ \tan 7.$$

b) Resuelve las ecuaciones:

$$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \tan x = -6; \quad \tan x = 11{,}0524.$$

Resolución:

a) $\tan\frac{\pi}{4} = 1$; $\frac{\pi}{4}$ es un ángulo notable.

$$\tan\frac{5\pi}{4} = \tan\frac{\pi}{4} = 1.$$

$$\tan 7 = \tan(2 \cdot 3{,}14 + 0{,}72) = \tan 0{,}72 = \tan\left[0{,}72 \cdot \frac{180}{\pi}\right]^{\circ}$$

$$= \tan 41{,}3^{\circ} = 0{,}877.$$

b) $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$: $S = \{x = \frac{\pi}{6} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

tan $x = -6$; cn la tabla encontramos: $\tan 80{,}5^{\circ} = 5{,}9758$ y

$$80{,}5^{\circ} = \left[80{,}5^{\circ} \cdot \frac{\pi}{180^{\circ}}\right] \text{rad} = 1{,}41 \text{ rad, luego}$$

$S = \{x = -1.41 + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

$\tan x = 0{,}0524$; en la **tabla** encontramos : $\tan 3^{\circ} = 0{,}0524$ y

$$3^{\circ} = \left[3^{\circ} \cdot \frac{\pi}{180^{\circ}}\right] \text{rad} = 0{,}0524 \text{ rad, luego}$$

$S = \{x = 0{,}0524 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. ■

Observa que para valores pequeños del argumento ($|x| < 0{,}1$) se cumple que $\tan x \approx x$.

Ejemplo 2

Muchas veces se usa la función definida por la igualdad $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$, para los valores de x tales que $\tan x \neq 0$. Representa esta función gráficamente y analiza sus propiedades.

Resolución

Como tan x **Lime** periodo π, **basta** representarla en un intervalo de longitud π y como tan x = 0 (la función cot x **no** esta **definida cn** 0) escogemos el intervalo $(0\ ;\ \pi)$:

x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$
cot x	3,7	1,7	1	0,58	0,27	0	-,28	-,58	-1	-1,7	-3,7

Al rcpresenlar en un sistema de coordenadas **los** pares contenidos en la **tabla** anterior, se obtiene una gráfica como la representada en la figura **3.42.**

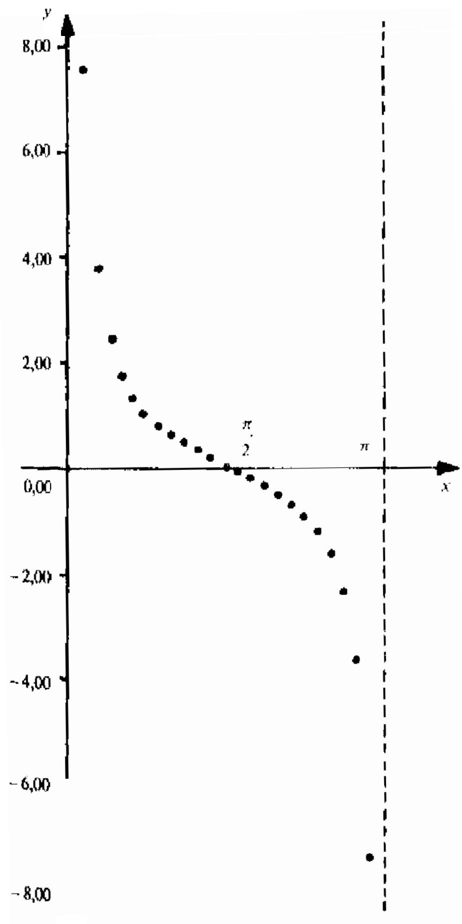


Fig. 3.42

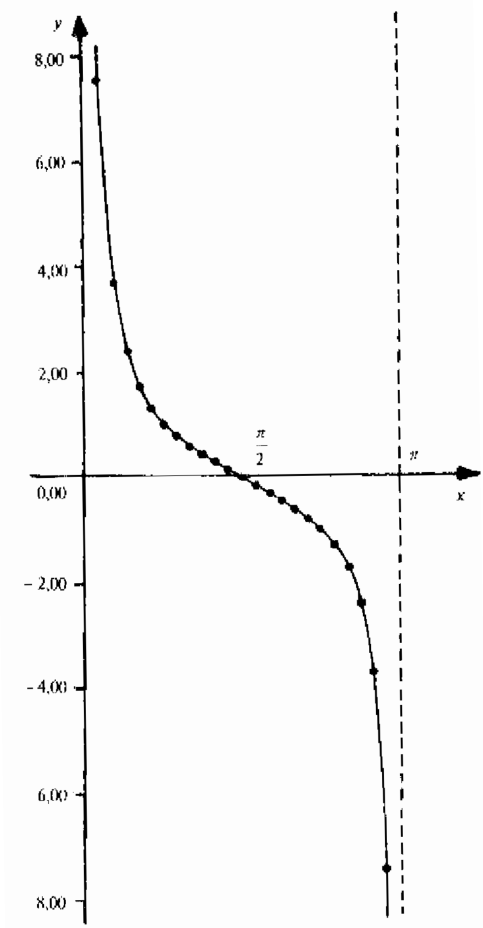


Fig. 3.43

Como sabemos que la gráfica de la tangente es una curva, la gráfica de la nueva función debe ser una curva que contenga los puntos encontrados (fig. 3.43). En este caso las asíntotas son las rectas $x = 0$ y $x = \pi$. Trasladando la gráfica obtenida en ambos sentidos se obtiene la gráfica pedida (fig. 3.44). ■

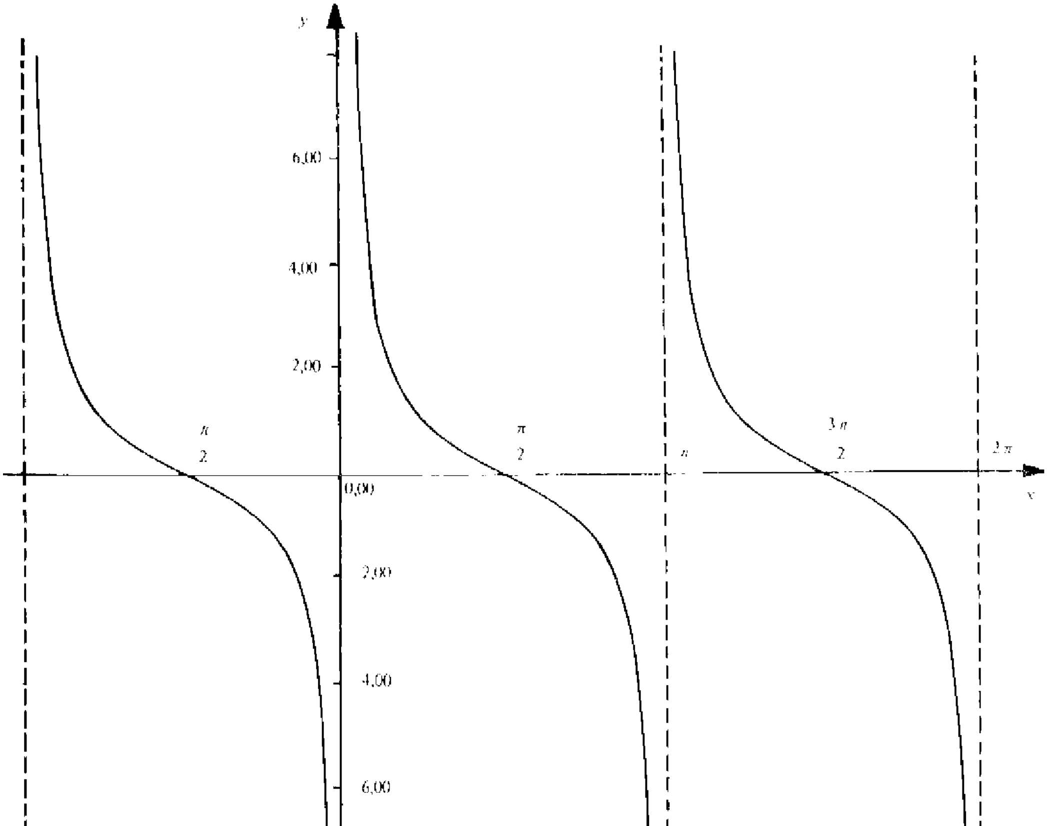


Fig. 3.44

Las propiedades pueden inferirse de la observación de la gráfica:

Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$	En los puntos excluidos: $\tan x = 0$
Imagen : $\mathbb{R}$	La proyección cubre el eje y.
Ceros: $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$	En esos puntos la gráfica corta al eje x: $\cot(2k+1)\frac{\pi}{2} = 0$.
Valor máximo: no tiene	Toma todos los valores reales.
Valor mínimo: no tiene	Toma todos los valores reales.
Paridad: impar	La gráfica es simétrica respecto al origen $\cot -x = -\cot x$
Período: $k\pi$	$\cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha$.
Monotonía: no es monótona	En cada intervalo que no contiene puntos de indefinición es decreciente.

Ejercicios (epígrafe 13)

1. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones tienen solución y cuáles no? Fundamenta.

   a) $\tan x = 0$ b) $3 \tan x = 1$ c) $\tan x \cdot 1{,}5 = 122$
   d) $2 \tan x + 5 = 10^{12}$ e) $\tan x = -10^{100}$ f) $|\tan x| = 23{,}4$

2. ¿Posee la función $f(x) = \tan x$ ceros en los intervalos siguientes? En caso afirmativo determínalos.

   a) $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ b) $-2\pi \leqslant x \leqslant -\pi$ c) $3 \leqslant x \leqslant 6{,}2$
   d) $-2\pi \leqslant x \leqslant \pi/2$ e) $-\pi/2 \leqslant x \leqslant 3\pi/4$ f) $\pi \leqslant x \leqslant -\pi/3$

3. ¿En qué puntos de los siguientes intervalos no está definida la función $y = \tan x$?

   a) $0 \leqslant x \leqslant 3\pi$ b) $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ c) $\pi/3 \leqslant x \leqslant 5\pi$
   d) $-2\pi \leqslant x \leqslant 0$ e) $3\pi/2 \leqslant x \leqslant 5\pi/2$ f) $2\pi \leqslant x \leqslant 7\pi$

4. Determina el signo de la función $y = \tan x$ en los siguientes intervalos:

   a) $0 \leqslant x \leqslant 3\pi$ b) $\pi < x < 0$ c) $\pi/2 < x < 5\pi/2$
   d) $\pi/3 < x < 3\pi/2$ e) $0 < x < 5\pi/4$ f) $-11\pi/6 < x < 0$

5. Representa gráficamente la función $f(x) = \tan x$ en los intervalos siguientes:

   a) $\pi/4 \leqslant x \leqslant 3\pi/4$ b) $\pi \leqslant x < \pi/2$ c) $-3\pi \leqslant x \leqslant 0$
   d) $\pi/6 \leqslant x \leqslant 5\pi/6$ e) $0 \leqslant x \leqslant \pi$ f) $-\pi/2 \leqslant x \leqslant 2\pi$

6. Determina gráfica y analíticamente los puntos de intersección de los gráficos de las funciones:

   a) $y = \tan x$ y $y = \sqrt{3}$ b) $y = \tan x$ y $y = -1$
   c) $y = \tan x$ y $y = 2$ d) $y = \tan x$ y $y = -4{,}2$

14. *Oscilaciones armónicas*

Numerosos fenómenos físicos se pueden describir mediante ecuaciones de la forma:

$y = A \operatorname{sen} (\omega t + \varphi)$ $\qquad$ $y = A \cos (\omega t + \varphi)$

Estas son las **ecuaciones de las oscilaciones armónicas** y las representaciones gráficas de las funciones definidas por ellas son sinusoides; para trazarlas y analizarlas se utilizan las propiedades de las funciones trigonométricas estudiadas.

Ejemplo 1

Representa gráficamente y analiza las propiedades de la función definida por la ecuación $y = 2 \operatorname{sen} t$.

Resolución

Sabemos que el factor 2 representa una dilatación en el sentido del eje y, es decir, la gráfica de la función se obtiene duplicando las ordenadas de la función seno (fig. 3.45).

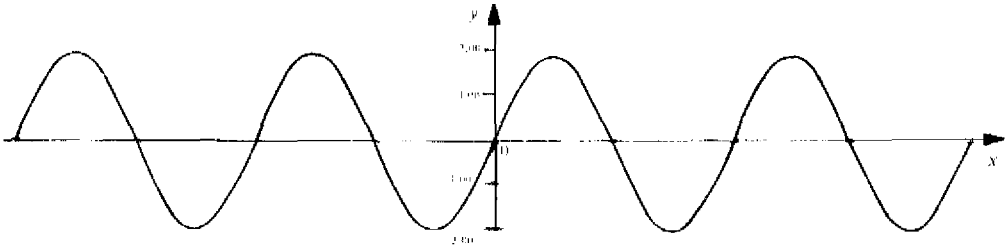


Fig. 3.45

De esta gráfica pueden obtenerse las propiedades de la función:

Dominio: $\mathbb{R}$

Imagen: $[-2\ ;\ 2]$ — La proyección cubre este intervalo.

Ceros: $x = k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

Paridad: impar

Período: $2k\pi$

Valor máximo: 2 — Valor mínimo: -2

Puntos de máximo: $x = (4k+1)\dfrac{\pi}{2}$ — puntos de mínimo: $x = (4k+3)\dfrac{\pi}{2}$

Variación en $[0\ ;\ 2\pi]$:

subintervalo	$[0;\pi/2]$ I cuad.	$[\pi/2;\pi]$ II cuad.	$[\pi;3\pi/2]$ III cuad.	$[3\pi/2;2\pi]$ IV cuad.
variación	creciente 0 a 2	decreciente 2 a 0	decreciente 0 a -2	creciente 2 a 0
signo	+	+		−

Todas estas propiedades se obtienen directamente de la gráfica y de las propiedades conocidas de la función seno. ■

Ejemplo 2

Representa gráficamente y analiza las propiedades de la función definida por la ecuación $y = \cos 2x$

Resolución

El factor 2 representa una contracción en el eje x; más exactamente la gráfica se obtiene dividiendo por 2 las abscisas en la gráfica de la función coseno. Para comprobarlo se construye una tabla como la siguiente:

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4}{3\pi}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$
$2x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\cos 2x$	1	0,87	0,50	0,00	,5	-,87	1	-,87	,5	0,00	0,50	0,87

Fíjate que cada valor del coseno lo toma en una abscisa que es la mitad dc la que corresponde al coseno, por ejemplo: toma el valor $\frac{1}{2}$ en $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{3}$ y el coseno toma el valor $\frac{1}{2}$ en $\frac{\pi}{3}$. De esta forma se obtiene un período completo en el intervalo $[0 ; \pi]$ que se obtiene dividiendo en dos partes al intervalo $[0 ; 2\pi]$ (fig. 3.46).

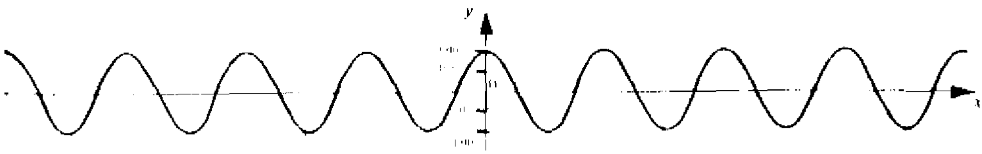


Fig. 3.46

De esta gráfica pueden obtenerse las propiedades de la función:

Dominio: $\mathbb{R}$

Imagen: $[-1 ; 1]$

Ceros: $x = (2k + 1)\frac{\pi}{4}$; $k \in \mathbb{Z}$ — Se obtienen dividiendo por 2 los ceros de la función coseno.

Paridad: par

Periodo: $\frac{2k\pi}{7}$. $k\pi$ — Se divide por 2 el período

Valor máximo: 1 — Valor mínimo: 1

Puntos de máximo: $x = \frac{2k\pi}{2} = k\pi$ — Puntos de mínimo: $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$

Se dividen por 2 los puntos de máximo y mínimo.

La variación en $[0 ; \pi]$ se muestra en la siguiente tabla, en la que los intervalos se han dividido a la mitad:

subintervalo	$[0 ; \pi/4]$	$[\pi/4;\pi/2]$	$[\pi/2;3\pi/4]$	$[3\pi/4;\pi]$
variación	decreciente 1 a 0	decreciente 0 a -1	creciente -1 a 0	creciente 0 a 1
signo	+	-	-	+

■

Ejemplo 3

Representa gráficamente y analiza las propiedades de la función definida por la ecuación $y = \operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$.

Resolución

Ya conocemos que el sumando $\frac{\pi}{4}$ representa una traslación de $\frac{\pi}{4}$ **unidades** en el sentido negativo del eje x, **luego la** gráfica se **obtiene desplazando** la gráfica **de** la función seno, $\frac{\pi}{4}$ unidades a la izquierda (fig. 3.47).

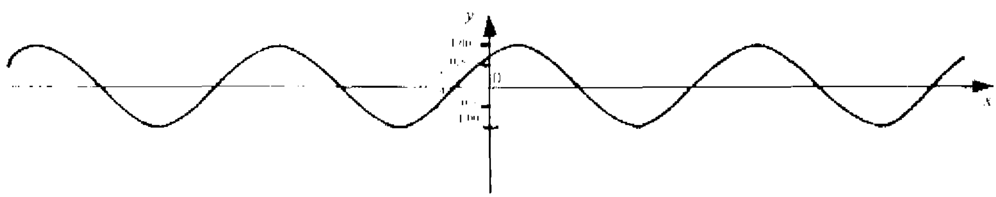


Fig. 3.47

De esta gráfica se pueden obtener **las** propiedades:

Dominio: $\mathbb{R}$

Imagen: $[-1;\ 1]$

Ceros: $x = k\pi - \frac{\pi}{4} = (4k-1)\frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$ — Se resta $\frac{\pi}{4}$ a los **ceros de** la función seno.

Paridad: no es par ni impar — No es simétrica respecto al origen ni al eje y.

Periodo: $2k\pi$

Valor máximo: 1

Puntos de máximo: $x = (4k+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = (8k+1)\frac{\pi}{4}$

Valor mínimo: -1

Puntos de mínimo: $x = (4k+3)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = (8k+5)\frac{\pi}{4}$

Se resta $\frac{\pi}{2}$ a los puntos de máximo y mínimo de la función **seno.**

De la misma forma que los casos particulares puede investigarse el caso general; sin embargo, no lo haremos así. En cada oportunidad que sea necesario nos apoyaremos en **el** análisis del gráfico teniendo en cuenta las observaciones siguientes:

En las funciones definidas por ecuaciones de la forma:
y = A sen $(\omega t + \varphi)$ $\qquad$ $y = A \cos(\omega t + \varphi)$
$|A|$ recibe el nombre de **amplitud** de la oscilación, es el módulo de los valores máximo y mínimo de la función.
ω está relacionada con el periodo por la ecuación $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$
recibe el nombre de frecuencia angular.
φ representa el valor del argumento cuando $t = 0$. Se le llama ángulo de fase inicial.

■

Ejemplo 4

Representa gráficamente la función definida por la ecuación $y = 3\cos(2t - \pi)$. Determina su amplitud, período y ángulo de fase inicial.

Resolución

Directamente por comparación de la ecuación dada con la forma general de las ecuaciones de las oscilaciones armónicas obtenemos:

$|A| = 3$; es la amplitud y la imagen será $[-3; 3]$.

$\omega = 2$; el período será: $T = \dfrac{2k\pi}{2} = k\pi$.

$\varphi = -\pi$; es el ángulo de fase inicial.

Para representar la función debemos tener en cuenta que su gráfica está comprendida entre las rectas $y = 3$ y $y = -3$. Cuando $t = 0$, $y = \cos(-\pi) = \cos \pi = 1$ (la fase inicial es $-\pi$), luego la gráfica está desplazada. Para hallar el desplazamiento escribimos: $y = \cos(2t - \pi) = \cos 2\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right)$ y esto significa que la gráfica se ha desplazado $\dfrac{\pi}{2}$ unidades o sea medio período a la derecha (porque φ es negativo). La función está "atrasada" respecto al coseno (para $t = 0$ su argumento es negativo) (fig. 3.48).

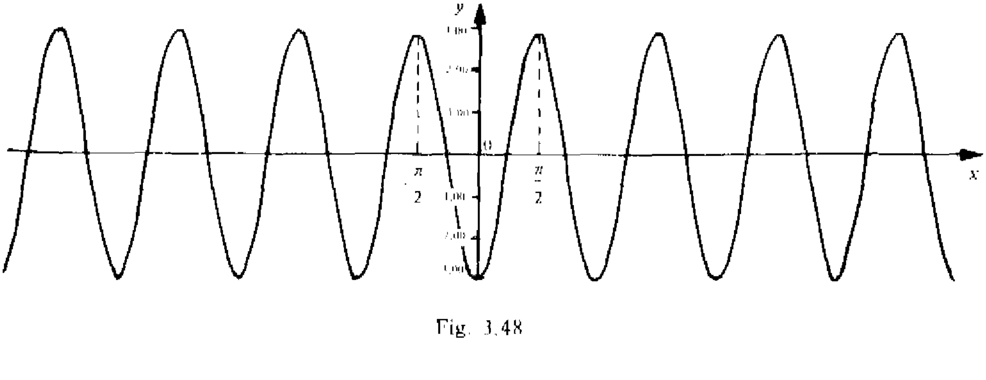


Fig. 3.48

En la **figura 3.49** puedes observar que como

$$\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \text{sen } t$$

la gráfica del coseno es **la** misma **gráfica** del seno pero desplazada $\frac{\pi}{2}$ unidades a la **izquierda.** El seno *se* "retrasa" respecto al coseno en la cuarta parte de un periodo. **La gráfica** es la misma con un desfasaje de $\frac{\pi}{2}$ y es, por tanto, suficiente considerar oscilaciones **de la** forma $y = A \text{ sen } (\omega t + \varphi)$.

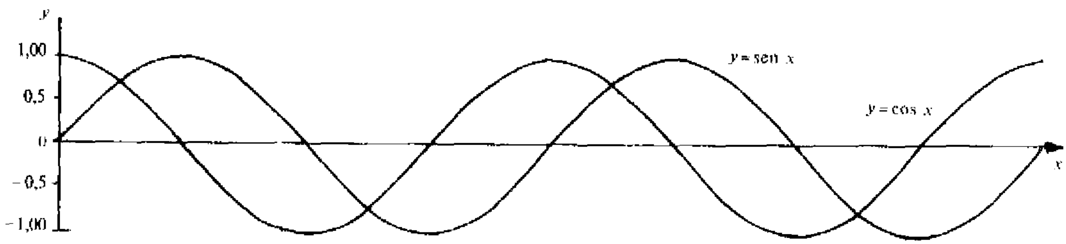


Fig. 3.49

Ejercicios (epígrafe 14)

1. Representa gráficamente las funciones siguientes y analiza sus propiedades
   a) $y = \text{sen } 5t$ b) $y = \text{sen } t/3$ c) $y = \text{sen } 2\pi t$
   d) $y = \text{sen } \frac{3}{2} t$ e) $y = \text{sen } 8t$ f) $y = \text{sen } \frac{2t}{3}$

2. Representa gráficamente las funciones siguientes y analiza sus propiedades:
   a) $y = 4 \text{ sen } t$ b) $y = 2{,}5 \text{ sen } t$ c) $y = 0{,}2 \text{ sen } t$
   d) $y = \frac{1}{2} \text{ sen } t$ e) $y = 3 \cos t$ f) $y = 3{,}1 \cos t$

3. Representa gráficamente las funciones siguientes y analiza sus propiedades
   a) $y = 4{,}5 \text{ sen } t$ $(-2\pi \leqslant t \leqslant 2\pi)$
   b) $y = 0{,}75 \text{ sen } t$ $(-3\pi \leqslant t \leqslant 3\pi)$
   c) $y = 2{,}5 \text{ sen } 2t$ $(-\pi \leqslant t \leqslant 2\pi)$
   d) $y = 3 \text{ sen } t/2$ $(0 \leqslant t \leqslant 5\pi)$
   e) $y = 0{,}5 \cos \frac{2}{3} t$ $(-3\pi \leqslant t \leqslant 3\pi)$
   f) $y = 2 \cos t/2$ $(-2\pi \leqslant t \leqslant \pi)$
   g) $y = 1{,}5 \cos 2t$ $(-\pi \leqslant t \leqslant 2\pi)$
   h) $y = \frac{1}{5} \cos t/2$ $(-\pi \leqslant t \leqslant 2\pi)$

4. Determina los valores máximos y mínimos de las siguientes funciones en los intervalos dados:

a) $y = 3 \text{ sen } t \qquad (\pi \leqslant t \leqslant 2\pi)$
b) $y = 5 \cos t \qquad (0 \leqslant t \leqslant \pi/3)$
c) $y = 2 \text{ sen } t/2 \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$

5. Calcula los ceros de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{3} \text{ sen } \frac{5}{7} t \qquad (-4\pi \leqslant t \leqslant 3\pi)$

b) $y = 8 \text{ sen } \frac{2}{7} t \qquad (-\pi \leqslant t \leqslant 3\pi)$

c) $y = 2 \cos t/2 \qquad (-\pi \leqslant t \leqslant \pi)$
d) $y = 0{,}5 \cos 2t \qquad (-2\pi \leqslant t \leqslant 2\pi)$

6. Determina en cada caso la ecuación que se indica con los elementos dados:

a) $y = a \text{ sen } bt$ con $-2{,}3 \leqslant y \leqslant 2{,}3 \quad PP = 3\pi$

b) $y = a \text{ sen } bt$ con $-4 \leqslant y \leqslant 4 \quad PP = \frac{\pi}{2}$

c) $y = a \text{ sen } bt$ con $-1 \leqslant y \leqslant 1 \quad PP = \frac{\pi}{10}$

7. Determina el periodo P de las siguientes funciones:

a) $y = 2{,}5 \text{ sen } (4t - 2\pi/3)$ b) $y = 0{,}5 \text{ sen } (3t + \pi/6)$
c) $y = 1{,}2 \cos (2t + \pi/4)$ d) $y = 0{,}3 \cos (t/2 - \pi/6)$

8. Esboza los gráficos de las siguientes funciones. e indica el periodo P y la amplitud A.

a) $y = 2 \text{ sen } (t + 3\pi/4)$ b) $y = 0{,}8 \text{ sen } (3t - \pi/2)$
c) $y = 1{,}5 \cos (t/3 - \pi/6)$ d) $y = 0{,}2 \cos (2t + \pi/4)$

9. Determina en cada caso la ecuación que se indica con los elementos dados (t: variable independiente).

a) $y = A \text{ sen } (\omega t + \varphi) \qquad -3 \leqslant y \leqslant 3; \; PP = \pi; \; \varphi = 1$
b) $y = A \cos (\omega t + \varphi) \qquad |y| \leqslant 1/27 \; PP = 2\pi/3; \; \varphi = -2$

Fórmulas de adición. Consecuencias

15. *Fórmulas de adición*

Las identidades trigonométricas que hemos estudiado hasta ahora, relacionan los valores de las funciones de un mismo ángulo; en la práctica se necesitan identidades que relacionen las funciones de dos ángulos.

Teorema 1

> Para todo par de ángulos α y β se cumple:
>
> $$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

Demostración

Consideremos en un sistema de coordenadas una circunferencia unitaria con centro en el origen y representemos de dos formas diferentes el ángulo $\alpha - \beta$ (fig. 3.50).

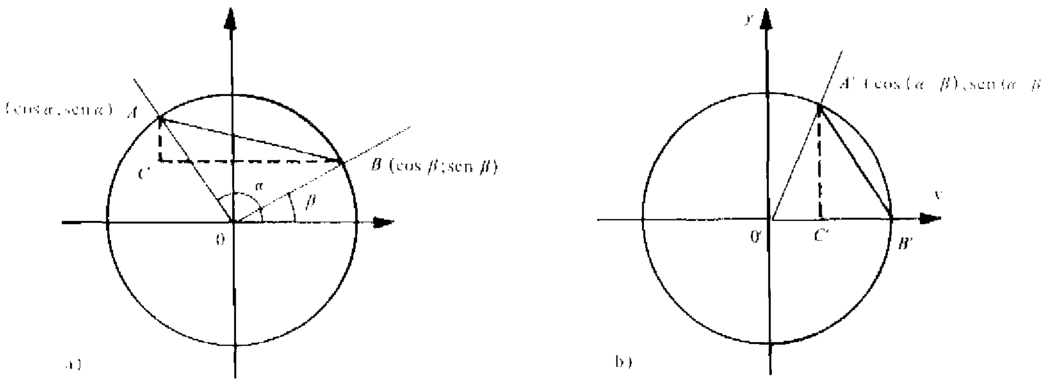


Fig. 3.50

Se tiene entonces que $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ porque:

$|OA| = |O'A'| = |OB| = |O'B'| = 1$ y $\sphericalangle AOB = \sphericalangle A'O'B' = \alpha - \beta$

De la congruencia de los triángulos se deduce que

$|AB| = |A'B'|$.

Por otra parte en el triángulo rectángulo ABC se tiene:

$|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2}$; pero

$|AC| = |\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta|$ y $|BC| = |\cos\alpha - \cos\beta|$

luego

$$|AB| = \sqrt{|\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta|^2 + |\cos\alpha - \cos\beta|^2} \qquad (1)$$

y análogamente en el $\triangle A'B'C'$ $|A'B'| = \sqrt{|A'C'|^2 + |B'C'|^2}$ con

$|A'C'| = |1 - \cos(\alpha - \beta)|$ y $|B'C'| = |\operatorname{sen}(\alpha - \beta)|$; por tanto,

$$|A'B'| = \sqrt{|1 - \cos(\alpha - \beta)|^2 + |\operatorname{sen}(\alpha - \beta)|^2} \qquad (2)$$

De (1) y (2) se deduce:

$$|\cos\alpha - \cos\beta|^2 + |\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta|^2 = |\operatorname{sen}(\alpha - \beta)|^2 + |1 - \cos(\alpha - \beta)|^2$$

de donde se obtiene sucesivamente:

$$\cos^2\alpha - 2\cos\alpha \cdot \cos\beta + \cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}^2\beta =$$
$$= \cos^2(\alpha - \beta) - 2\cos(\alpha - \beta) + 1 + \operatorname{sen}^2(\alpha - \beta).$$
$$2 - 2\cos\alpha \cdot \cos\beta - 2\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta = 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$$

y, finalmente

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta. \quad \blacksquare$$

Ejemplo 1

Calcula $\cos\frac{\pi}{12}$ conocidas las funciones trigonométricas de $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{6}$

Resolución

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}[\sqrt{3} + 1]. \quad \blacksquare$$

Teorema 2

> Para todo par de ángulos α y β se cumple:
>
> a) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$
> b) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$
> c) $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$

Demostración

a) Observemos que $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta))$ entonces se tiene por lo demostrado en el teorema 1:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}(-\beta)$$
$$= \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

porque $\cos(-\beta) = \cos\beta$ y $\operatorname{sen}(-\beta) = -\operatorname{sen}\beta$

b) Se tiene que:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right]$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \operatorname{sen}\beta$$
$$= \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

c) $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}(\alpha + (-\beta))$
$$= \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos(-\beta) + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}(-\beta)$$
$$= \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta. \quad \blacksquare$$

Ejemplo 2

Calcula sen 75° utilizando los valores de las razones trigonométricas de los ángulos notables.

Resolución

Como $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$, **podemos** escribir:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 75^\circ &= \operatorname{sen}(45^\circ + 30^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \operatorname{sen} 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Teorema 3

Si α y β son dos ángulos tales que $\tan\alpha$, $\tan\beta$ y $\tan(\alpha+\beta)$ están definidas, se cumple:

a) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\cdot\tan\beta}$.

b) $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\cdot\tan\beta}$

Demostración

a) $$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}$$

dividiendo numerador y denominador por $\cos\alpha\cdot\cos\beta$, resulta:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

El inciso b) se demuestra en forma completamente análoga. ■

Ejemplo 3

Calcula tan 75° utilizando los valores de la tangente de los ángulos notables.

Resolución

$$\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ\cdot\tan 30^\circ}$$

$$\tan 75^\circ = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{(3 + \sqrt{3})^2}{(3 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})}$$

$$= \frac{9 + 6\sqrt{3} + 3}{9 - 3} = \frac{6 \cdot (2 + \sqrt{3})}{6} = 2 + \sqrt{3}. \quad \blacksquare$$

Las fórmulas de los teoremas 1, 2 y 3 reciben el nombre de formulas **de** adición y debes aprenderlas de memoria pues se usan muy **a** menudo en la transformación de expresiones trigonométricas.

> Fórmulas de adición
>
> $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$
> $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$
>
> $$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

Ejemplo 4

a) Simplifica: $\operatorname{sen}(\theta + 30^\circ) + \cos(\theta + 60^\circ)$

b) Dado $\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{sen}\beta = \frac{12}{13}$ y sabiendo que ambos ángulos son agudos, halla $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ y $\cos(\alpha + \beta)$.

c) Prueba que $\cot(\alpha + \beta) = \dfrac{\cot\alpha \cdot \cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$

d) Simplifica: $\dfrac{\tan(2\pi/9) + \tan(\pi/9)}{1 - \tan(2\pi/9)\tan(\pi/9)}$.

Resolución

a) **Aplicando** las fórmulas **de** adición obtenemos:

$\operatorname{sen}(\theta + 30^\circ) = \operatorname{sen}\theta \cdot \cos 30^\circ + \cos\theta \cdot \operatorname{sen} 30^\circ$
$\cos(\theta + 60^\circ) = \cos\theta \cdot \cos 60^\circ - \operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen} 60^\circ$

luego,

$$\operatorname{sen}(\theta + 30^\circ) + \cos(\theta + 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\theta$$

$$= \cos\theta.$$

b) Como α y β son agudos, **sus** cosenos son **positivos:**

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \left[\frac{5}{13}\right]^2} = \frac{12}{13} \qquad \cos\beta = \sqrt{1 - \left[\frac{12}{13}\right]^2} = \frac{5}{13}$$

Aplicamos entonces las fórmulas de adición y resulta:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta \\ &= \left[\frac{5}{13}\right]\cdot\left[\frac{5}{13}\right] + \left[\frac{12}{13}\right]\cdot\left[\frac{12}{13}\right] \\ &= \left[\frac{5}{13}\right]^2 + \left[\frac{12}{13}\right]^2 \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta \\ &= \left[\frac{12}{13}\right]\cdot\left[\frac{5}{13}\right] - \left[\frac{5}{13}\right]\cdot\left[\frac{12}{13}\right] \\ &= 0\end{aligned}$$

c) $$\cot(\alpha+\beta) = \frac{1}{\tan(\alpha+\beta)} = \frac{1}{\dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\cdot\tan\beta}}$$

$$= \frac{1 - \tan\alpha\cdot\tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta}$$

Dividiendo numerador y denominador por $\tan\alpha \cdot \tan\beta$ obtenemos:

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{1}{\tan\alpha\cdot\tan\beta} - 1}{\dfrac{1}{\tan\alpha} + \dfrac{1}{\tan\beta}} \quad \text{y como } \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\alpha \cdot \cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$$

d) Comparando con la fórmula para $\tan(\alpha+\beta)$, reconocemos:

$$\frac{\tan(2\pi/9) + \tan(\pi/9)}{1 - \tan(2\pi/9)\tan(\pi/9)} = \tan\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{\pi}{9}\right) = \tan\frac{3\pi}{9} = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}. \quad \blacksquare$$

Observa que de esta forma **puedes** obtener el valor de la expresión en forma exacta y rápida, sin usar **las** tablas.

Ejercicios (epígrafe 15)

1. Calcula sin hacer uso de las tablas el seno, el coseno y la tangente de los siguientes ángulos

   a) 75° b) 15° c) 105° d) 165° e) 285°

2. Simplifica las siguientes expresiones:

   a) $\operatorname{sen}(\pi/4 + \alpha) + \cos(\pi/4 - \alpha)$
   b) $2\cos(\pi/6 - \beta) - \operatorname{sen}(\pi/3 + \beta)$
   c) $\tan(\pi/4 + \alpha) - \tan(\pi/4 - \alpha)$

3. Demuestra la validez de las siguientes igualdades:

   a) $\operatorname{sen}(\pi/4 + x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \operatorname{sen} x)$

   b) $\cos(60^\circ + x) = \dfrac{1}{2}(\cos x - \sqrt{3}\operatorname{sen} x)$

   c) $\tan(45^\circ - x) = \dfrac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$

4. Si $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{3}{5}$ y $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$; $0^\circ < \alpha, \beta < 90^\circ$, halla:

   a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ b) $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$ c) $\cos(\alpha + \beta)$
   d) $\cos(\alpha - \beta)$ e) $\tan(\alpha + \beta)$ f) $\tan(\alpha - \beta)$

5. Simplifica:

   a) $\dfrac{\tan(5\pi/12) - \tan \pi/12}{1 + \tan(5\pi/12) \cdot \tan \pi/12}$

   b) $\dfrac{\operatorname{sen}\pi/10 \cdot \cos(3\pi/20) + \cos\pi/10 \cdot \operatorname{sen}(3\pi/20)}{\cos\pi/10 \cdot \cos(3\pi/20) - \operatorname{sen}\pi/10 \cdot \operatorname{sen}(3\pi/20)}$

6. Prueba que las siguientes igualdades son ciertas.

   a) $\operatorname{sen}(x + y) \cdot \operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y$
   b) $\cos(x + y) \cdot \cos(x - y) = 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y$

16. *Funciones trigonométricas del ángulo duplo*

Utilizando las fórmulas de adición se pueden expresar las funciones trigonométricas del duplo de un ángulo en términos de las funciones trigonométricas de dicho ángulo.

Teorema 1

> Se cumple:
>
> a) $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha$
> b) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$
>
> c) $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2\alpha}$ $\quad \alpha \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$; $\quad \alpha \neq (2r+1)\dfrac{\pi}{4}$; $\quad k, r \in \mathbb{Z}$

Demostración

a) $\operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{sen}(\alpha + \alpha) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha = 2\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha$
b) $\cos 2\alpha = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

c) Si $\alpha = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$, $\tan \alpha$ no esta definido: si $\alpha = (2r+1)\dfrac{\pi}{4}$; $r \in \mathbb{Z}$, el denominador se anula. Para los restantes valores de α puede escribirse:

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \alpha} = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2\alpha}. \blacksquare$$

Ejemplo 1

a) Si $\cos \theta = 0{,}20$ y θ es agudo, calcula $\operatorname{sen} 2\theta$, $\cos 2\theta$ y $\tan 2\theta$
b) Prueba que $\cos 2\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

c) Simplifica $\dfrac{\operatorname{sen} 2\theta}{\operatorname{sen} \dfrac{\theta}{2} \cdot \cos \dfrac{\theta}{2}}$; $\theta \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) Calcula sen 15°, cos 15° y tan 15° utilizando las razones trigonométricas de 30°.
e) Simplifica $0{,}125 - \cos^2\alpha + \cos^4\alpha$.

Resolución

a) Si $\cos \theta = 0.20$ entonces $\operatorname{sen} \theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$ pues θ es agudo, es decir

$$\operatorname{sen} \theta = \sqrt{1 - (0{,}20)^2} = \sqrt{1 - 0.04} = \sqrt{0{,}96} = 0{,}98.$$

Luego,
$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta = 2 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}2 = 0{,}39$
$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = (0{,}2)^2 - (0{,}98)^2 = 0{,}04 - 0{,}96 = -0{,}92$

$$\tan 2\theta = \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{0{,}39}{-0{,}92} = -0{,}43.$$

b) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$.
$\cos 2\theta = \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) = \cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

c) $$\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2}} = \frac{2\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta}{\frac{1}{2}\left[2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2}\right]}$$; como $\theta \neq k\pi$, sen $\theta \neq 0$ y

$$\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2}} = \frac{4\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = 4\cos\theta.$$

d) $\cos 30^\circ = \cos 2 \cdot 15^\circ = 1 - 2\operatorname{sen}^2 15^\circ$ (inciso b), luego

$$\operatorname{sen}^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$\operatorname{sen} 15^\circ = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

análogamente $\cos^2 15^\circ = \dfrac{2 + \sqrt{3}}{4}$ y $\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$

entonces,

$$\tan 15^\circ = \frac{\operatorname{sen} 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}}{\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \frac{\left[\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right]^2}{\sqrt{4 - 3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

e) $$0{,}125 - \cos^2\alpha + \cos^4\alpha = \frac{1}{8} - \cos^2\alpha \cdot (1 - \cos^2\alpha)$$

$$= \frac{1}{8} - \cos^2\alpha \cdot \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1}{8} - \frac{1}{4}(2\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha)^2$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2\alpha = \frac{1}{8}(1 - 2\operatorname{sen}^2 2\alpha)$$

$$= \frac{1}{8}\cos 4\alpha$$ (inciso b) con $U = 2\alpha$). ■

Ejercicios (epígrafe 16)

1. Halla sen $2x$; cos $2x$ y tan $2x$ dados los siguientes valores de sen x y cos x.

   a) sen $x = \frac{1}{2}$; cos $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) sen $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; cos $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

   c) sen $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; cos $x = \frac{1}{2}$ d) sen $x = \frac{3}{5}$; cos $x = \frac{4}{5}$

   e) sen $x = \frac{1}{7}$; cos $x = \frac{\sqrt{48}}{7}$ f) sen $x = \frac{2}{3}$; cos $x = \frac{\sqrt{5}}{3}$

2. Sabiendo que sen $\alpha = \frac{x}{5}$ y $\pi/2 < \alpha < \pi$. Calcula sen 2α, cos 2α y tan 2α.

3. ¿Por qué $\cos(\pi/2 - \alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha/2 \cdot \cos \alpha/2$?

4. Si sen $x = \frac{4}{5}$ y $x \in$ II cuadrante, calcula:

   a) $\operatorname{sen}(\pi + 2x)$ b) $\cos(\pi - 2x)$ c) $\tan(2\pi - 2x)$
   d) $\operatorname{sen}(\pi/2 - 2x)$ e) $\cos(\pi/2 - 2x)$

5. Obtén a partir de las relaciones estudiadas fórmulas para sen $3x$, cos $3x$, sen $x/2$ y cos $x/2$.

6. Si cos $x = \frac{3}{4}$. Halla sen $\frac{x}{2}$ y cos $\frac{x}{2}$.

7. Halla sen 9° y cos 9° si sen 18° $= \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$

8. Calcula sin hacer uso de tablas:

$$\frac{\operatorname{sen} 75^\circ - \operatorname{sen} 15^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ} \cdot \tan 30^\circ$$

9. ¿Cómo calcularías sen 22,5°, conociendo cos 45°?

10. Demuestra que sen A + sen $B = 2 \operatorname{sen} \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2}$

11. Demuestra que cos A + cos $B = 2 \cos \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2}$

12. Simplifica:

    a) $\dfrac{4 - 2 \operatorname{sen}^2(x/2)}{\operatorname{sen} 2x}$ b) $\dfrac{\cos 2x}{4 \cos^4 x - 1}$

    c) $\dfrac{\tan \alpha/2 \cdot \operatorname{sen} \alpha}{(1 + \tan^2 \alpha/2) \cdot \operatorname{sen} \alpha/2 \cdot \cos \alpha/2}$

17. *Identidades trigonométricas*

En los epígrafes anteriores hemos encontrado con frecuencia igualdades que satisfacen todos los valores de la variable para los que tienen sentido, son las llamadas identidades.

Estas identidades desempeñan un importante papel en la transformación de las expresiones trigonométricas tanto en Matemática como en Ingeniería, por eso le dedicaremos ahora una atención especial.

Recordemos que:

> Si f y g son funciones, el dominio de la igualdad $f(x) = g(x)$ coincide con el dominio de la función $f(x) - g(x)$.

Por ejemplo, el dominio de la igualdad sen x = tan x es el dominio de la función sen x − tan x, es decir. el conjunto $\mathbf{R} \setminus \left\{ x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \;;\; k \in \mathbb{Z} \right\}$

Definición 1

> Una ecuación de la forma $f(x) = g(x)$ es una identidad si se satisface para cada x del dominio, los números reales que no pertenecen al dominio se llaman valores inadmisibles.

Ejemplo 1

Prueba que: $\dfrac{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha} = \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha$ **es una identidad.**

Resolución

El dominio de la igualdad es: $\mathbb{R} \setminus \{x : \operatorname{sen} x + \cos x = 0\}$ y para esos valores puede escribirse

$$\frac{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha} = \frac{(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)(\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha)}{\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha} = \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha.$$

Observa que pasa los valores de α tales que $\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha = 0$ el miembro izquierdo no está definido y el miembro derecho si, pero esos valores no pertenecen al dominio y. por tanto, no hay que considerarlos para decidir si *es* una identidad. ■

En la práctica, al comprobar que una igualdad es una identidad, no es necesario escribir los valores inadmisibles explícitamente, pero debe trabajarse con cuidado y garanlizar que las transformaciones utilizadas son válidas en todo el dominio. **Así,** por ejemplo, $\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$ **no puede ser sustituido** por sen a en la comprobación de una identidad, puesto **que** la cadena dc igualdades

$$\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha} = \operatorname{sen}\alpha$$

sólo es válida cuando sen o $\geqslant 0$ (pues $\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha} = |\operatorname{sen}\alpha|$) pero su dominio es $\mathbb{R}$, luego **no es una identidad.**

Sabemos que, en general, no es fácil verificar que una igualdad es una identidad; sin embargo. muchas veces es sencillo comprobar que una igualdad no es una identidad, pues es suficiente encontrar un valor **del** dominio que no la satisface.

Ejemplo 2

Comprueba que la igualdad $\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \operatorname{sen}\alpha$ no es una identidad.

Resolución

Basta encontrar un valor del dominio para el cual no se cumple la igualdad. Tomemos, por ejemplo, $\alpha = \frac{3\pi}{2}$

$$\sqrt{1 - \cos^2\frac{3\pi}{2}} = \sqrt{1} = 1 \neq -1 = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}. \quad \blacksquare$$

> Es muy importante tener en cuenta que el procedimiento del ejemplo anterior sólo sirve para comprobar que una igualdad no es una identidad pero no puede ser usado **para** demostrar **que** lo *cs*.

Ejercicios (epígrafe 17)

1. Determina los valores inadmisibles de la variable en cada una de las siguientes **ex**presiones:

a) $\frac{1}{\cos x}$ b) $\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}$ c) $\frac{\cot x}{\cos x + 1}$

d) $\tan\theta \cdot \cos\theta$ e) $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\tan\theta - 1}$ f) $\frac{1}{\tan\theta - \cot\theta}$

2. Determina si las siguientes igualdades son identidades. Fundamenta

a) $\operatorname{sen}\theta = \tan\theta \cdot \frac{1}{\cos\theta}$ b) $\frac{1}{\cos x} = \operatorname{sen} x + 1$

c) $\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \tan x = 2$

d) $\operatorname{sen} x - \tan x = \cos x - 1$

e) $\tan x \cos x = \operatorname{sen} x$

f) $\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta} = \tan\theta$

g) $\dfrac{\tan x + 1}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{1}{\cos x}$

h) $\tan 2\alpha - \cot 2\alpha = 0$

i) $\operatorname{sen} 2x \quad \cos x + 1 = 0$

j) $\dfrac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \operatorname{sen}^2 x$

k) $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 + (\operatorname{sen} x - \cos x)^2 = 2$

3. Demuestra **que** las siguientes igualdades no son identidades.

a) $\operatorname{sen}^2\theta = 1 + \cos^2\theta$

b) $\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta} + 1$

c) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} = 1 - \dfrac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$

d) $\tan^2 x + \cot^2 x = 1$

e) $\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x = 1$

4. Demuestra que las siguientes igualdades **son** identidades:

a) $\tan\theta \cdot \cos\theta = \operatorname{sen}\theta$

b) $\dfrac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta} = \cot\theta$

c) $\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\tan^2\theta = \tan^2\theta$

d) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} + \dfrac{1}{\cos^2\theta} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta}$

e) $\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen} x \cos^2 x = \operatorname{sen} x$

f) $\dfrac{\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen} x \cos^2 x}{\cos x} = \tan x$

g) $\operatorname{sen}^2\theta\left[1 + \dfrac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\right] = 1$

h) $\dfrac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta} = \dfrac{2}{\cos\theta}$

i) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + \tan^2 x + \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{1 + \operatorname{sen}^2\theta}{1 - \operatorname{sen}^2\theta}$

18. *Demostración de identidades*

Aunque no existen reglas dc validez general para la demostración de identidades, Pueden recomendarse dos procedimientos de trabajo. Ilustraremos estos procedimientos con ejemplos.

I) Trabajar en ambos miembros.

Ejemplo 1

Demuestra la identidad:

$$\frac{\cos^2 x}{1 - \operatorname{sen} x} = 1 + \operatorname{sen} x$$

Rasolucion

En el dominio de la identidad se tiene que $1 - \operatorname{sen} x \neq 0$ (para que el denominador sea diferente de 0) entonces se pueden multiplicar ambos miembros por $1 - \operatorname{sen} x$ y **obtenemos:**

$$\cos^2 x = (1 + \operatorname{sen} x) \cdot (1 - \operatorname{sen} x) = 1 - \operatorname{sen}^2 x$$

Hemos transformado la identidad original en otra de la cual sabemos que es verdadera. Con esto no hemos demostrado la identidad, solo hemos inducido una vía para su demostración; la demostración se realiza invirtiendo los pasos, es decir, comenzando con la igualdad conocida y terminando con la que deseamos demostrar:

$$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$$
$$\cos^2 x = (1 - \operatorname{sen} x) \cdot (1 + \operatorname{sen} x)$$

si $1 - \operatorname{sen} x \neq 0$, se divide en ambos miembros y resulta:

$$\frac{\cos^2 x}{1 - \operatorname{sen} x} = 1 + \operatorname{sen} x.$$

Para invertir los pasos debemos estar seguros de que todas las transformaciones realizadas pueden ser invertidas, si en alguna se introducen valores inadmisibles no pueden estar en el dominio de la identidad. Eso es lo que ocurre con los valores que anulan $1 - \operatorname{sen} x$. ■

Ejemplo 2

Demuestra la identidad:

$$\tan x + \cot x = \frac{2}{\operatorname{sen} 2x} \quad \left(x \neq \frac{k\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\right)$$

Resolución

En este caso se han indicado cuales son los valores inadmisibles de la variable; en muchas ocasiones se hace así, de lo contrario debes analizar cuáles son. Para realizar la demostración, transformamos el miembro izquierdo

$$\tan x + \cot x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}$$

y transformamos el miembro derecho

$$\frac{2}{\operatorname{sen} 2x} = \frac{2}{2\operatorname{sen} x \cdot \cos x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}$$

Hemos demostrado:

$$\tan x + \cot x = \frac{1}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} = \frac{2}{\operatorname{sen} 2x} \quad \left(x \neq \frac{k\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\right).$$

En este caso hemos utilizado solamente igualdades, eso garantiza que los pasos son reversibles. ■

Como vemos, este procedimiento consiste en lo siguiente:

> a) Se transforma la identidad en otra conocida mediante sustituciones y transformaciones algebraicas que pueden afectar ambos miembros, bien sea en forma conjunta (ejemplo 1) o independiente (ejemplo 2).
> b) Se invierten los pasos dados en a) y se deduce la **identidad de** otras conocidas; para hacerlo es necesario comprobar que los pasos de a) son verdaderamente reversibles. Hay que tener cuidado de que los valores que resulten excluidos al transformar sean valores inadmisibles.

II) Transformar un miembro en otro.

Ejemplo 3

Demuestra las identidades de los ejemplos 1 y 2 trabajando en un solo miembro.

Resolución

En la identidad $\dfrac{\cos^2 x}{1 - \operatorname{sen} x} = 1 + \operatorname{sen} x$, escogemos para transformar, el miembro izquierdo ya que ofrece más posibilidades para simplificar:

$$\frac{\cos^2 x}{1 - \operatorname{sen} x} = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{1 - \operatorname{sen} x} = \frac{(1 - \operatorname{sen} x) \cdot (1 + \operatorname{sen} x)}{1 - \operatorname{sen} x}$$

como en el dominio $1 - \operatorname{sen} x \neq 0$, simplificamos y obtenemos:

$$\frac{\cos^2 x}{1 - \operatorname{sen} x} = 1 + \operatorname{sen} x. \text{ como se quería.}$$

En la identidad $\tan x + \cot x = \dfrac{2}{\operatorname{sen} 2x}$ también escogemos el miembro izquierdo que es más fácil de transformar:

$$\tan x + \cot x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$ Transformaciones en senos y cosenos pues **hay** que llegar a **sen** $2x$

$$\tan x + \cot x = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} = \frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2}} = \frac{2}{\operatorname{sen} 2x}. \quad ■$$

Como se aprecia, en la demostración de identidades es necesario recordar y utilizar:

Las identidades trigonométricas fundamentales.
Las fórmulas de adición.
Las operaciones con expresiones algebraicas.
La descomposición en factores.
La simplificación de expresiones algebraicas.

Ejemplo 4

Demuestra la identidad:

$$\frac{1+\operatorname{sen} 2x}{1-\operatorname{sen} 2x}=\frac{(\tan x+1)^2}{(\tan x-1)^2}$$

Resolución

I) Transformando el miembro izquierdo:

$$\frac{1+\operatorname{sen} 2x}{1-\operatorname{sen} 2x}=\frac{1+2\operatorname{sen}x\cdot\cos x}{1-2\operatorname{sen}x\cdot\cos x}=\frac{\cos^2x+\operatorname{sen}^2x+2\operatorname{sen}x\cdot\cos x}{\cos^2x+\operatorname{sen}^2x-2\operatorname{sen}x\cdot\cos x}$$

Aqui hemos sustituido 1 por $\operatorname{sen}^2x+\cos^2x$, observa que a veces es necesario realizar transformaciones que, en apariencia, hacen mas compleja la expresión. Ahora tenemos un trinomio cuadrado perfecto en el numerador y otro en el denominador.

$$\frac{1+\operatorname{sen} 2x}{1-\operatorname{sen} 2x}=\frac{(\operatorname{sen} x+\cos x)^2}{(\operatorname{sen} x-\cos x)^2}=\frac{\left[\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{\cos x}\right]^2}{\left[\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}-\dfrac{\cos x}{\cos x}\right]^2}$$

Dividiendo numerador y denominador por $\cos^2x \neq 0$.

$$=\frac{(\tan x+1)^2}{(\tan x-1)^2}$$

II) Transformando el miembro derecho:

$$\frac{(\tan x+1)^2}{(\tan x-1)^2}=\frac{\tan^2x+2\tan x+1}{\tan^2x-2\tan x+1}=\frac{(1+\tan^2x)+2\tan x}{(1+\tan^2x)-2\tan x}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{\cos^2x}+2\tan x}{\dfrac{1}{\cos^2x}-2\tan x}=\frac{\dfrac{1+2\tan x\cdot\cos^2x}{\cos^2x}}{\dfrac{1-2\tan x\cdot\cos^2x}{\cos^2x}}\qquad(\cos x\neq 0)$$

$$=\frac{1+\dfrac{2\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot\cos^2x}{1-\dfrac{2\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot\cos^2x}=\frac{1+2\operatorname{sen} x\cdot\cos x}{1-2\operatorname{sen} x\cdot\cos x}=\frac{1+\operatorname{sen} 2x}{1-\operatorname{sen} 2x}$$

Observa que en este caso transformar el miembro derecho es **más** sencillo que transformar el miembro izquierdo.

Por último te sugerimos que al demostrar identidades tengas en cuenta **los** consejos siguientes:

1. Inicia la demostración por el miembro **que** te da más posibilidades para transformar. Si **no** puedes decidirte, aplica el **procedimiento** de trabaiar en ambos miembros (¡Atiende a la reversibilidad de los pasos!).
2. Si es posible, utiliza la descomposición en factores o simplifica.
3. Si no se le ocurre un camino para empezar a transformar, reduce todas las funciones trigonométricas a senos y cosenos.
4. Ten cuidado de comprobar que todas las transformaciones son validas en el dominio **de** la identidad.

Ejercicios (epígrafe 18)

1. Prueba las siguientes identidades:

a) $\tan^2\theta - \dfrac{1}{\cos^2\theta} = -1$

b) $\dfrac{\cos^2\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} + \dfrac{\cos^2\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta} = 2$

c) $\tan x + \cot x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}$

d) $\left[\cot x - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right]^2 = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

e) $\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$

f) $\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}{\tan^2 x} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^4 x}$

2. Demuestra la validez de las siguientes igualdades, para todo valor admisible de la variable.

a) $(\cos x + \operatorname{sen} x)^2 = \operatorname{sen} 2x + 1$
b) $(\cos x/2 \quad \operatorname{sen} x/2)^2 = 1 - \operatorname{sen} x$
c) $\tan(45^\circ + a) - \tan(45^\circ - a) = 2 \tan 2a$
d) $\operatorname{sen}(45^\circ + x) - \cos(45^\circ - x) = 0$
e) $\operatorname{sen}(60^\circ + x) \quad \operatorname{sen}(60^\circ - x) = \operatorname{sen} x$
f) $\cos(45^\circ - x) - \operatorname{sen}(45^\circ + x) = 0$
g) $\cos(45^\circ + x) + \cos(45^\circ - x) = \sqrt{2}\cos x$
h) $\operatorname{sen}(30^\circ + a) + \cos(30^\circ - a) = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}(\operatorname{sen} a + \cos a)$

i) $\dfrac{\text{sen}\,(a-b)}{\text{sen}\ o\ \text{sen}\ b} = \dfrac{\text{Lana} - \tan b}{\tan a \tan b}$

j) $\dfrac{\tan(x-y) + \tan y}{1 - \tan(x-y)\tan y} = \tan x$

k) $\dfrac{\cos(x-y)}{\sim \text{o xs} \sim \text{o ys}} = \tan x + \dfrac{1}{\tan y}$

l) $\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a - \text{sen}^2 b$

m) $\dfrac{\text{sen}^3 2\theta}{1 + \cos 20 - \cos^2 2\theta - \cos^3 2\theta} = \tan\theta$

n) $\dfrac{\text{sen}\,2x}{1 - \cos 2x} = \dfrac{1}{\tan x}$

ñ) $\text{sen}\,3x = \text{sen}\,x\,(3\cos^2 x - \text{sen}^2 x)$

o) $\dfrac{\text{sen}\,2a}{1 - \cos a} \cdot \dfrac{1 + \cos u}{\cos a} = \dfrac{2(1 + \cos a)^2}{\text{sen}\,a}$

p) $\dfrac{1 - \cos 2\theta}{\text{sen}\,2\theta} = \tan\theta$

q) $\dfrac{1 + \text{sen}\,2x}{\cos 2x} = \dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$

r) $2\,\text{sen}(x+y)\cos(x-y) = \text{sen}\,2x + \text{sen}\,2y$

s) $[\text{sen}(x+y) - \cos(x\ t\ y)]^2 = 1 - \text{sen}(2x + 2y)$

t) $\cos^4\alpha - \text{sen}^4\alpha = \cos 2\alpha$

u) $\dfrac{\cos 2a}{1 + \text{sen}\,2\alpha} = \tan(\pi/4 - \alpha)$

v) $\dfrac{\text{sen}\,2x}{\cos 2x} = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

3. Transforma en producto:

al $1 + 2\cos\alpha + \cos 2\alpha$ b) $\dfrac{1 + \text{sen}\,a - \cos\alpha}{\text{scn}\,\alpha/2}$

19. *Ecuaciones trigonométricas*

En los epígrafes anteriores hemos encontrado y resuelto ecuaciones trigonométricas, ahora las retotnairios aplicando las nuevas transformaciones estudiadas.

Recordemos que el conjunto solución de una ecuación está formado por el con junto de todos los valores de la variable **que** la satisfacen; cn este curso estudiaremos ecuaciones trigonométricas para las cuales ese conjunto es infinito.

No existen reglas generales para la resolución de ecuaciones trigonométricas, en muchos casos los siguientes procedimientos resultan de utilidad para reducir la ecuación a una de la forma: $\text{sen}\,x = a$; $\cos x = b$; $\tan x = c$.

I) Descomponer en factores.

Ejemplo 1

Resuelve: sen x − sen x . cos x = 0

Resolución

Extrayendo factor común se obtiene:

$$\operatorname{sen} x \cdot (1 - \cos x) = 0$$

de donde resultan las ecuaciones

$$\operatorname{sen} x = 0 \qquad\qquad 1 - \cos x = 0$$

$$x = k\pi \qquad\qquad \cos x = 1$$

$$x = 2k\pi$$

Luego el conjunto solución es

$$\left\{x \in \mathbb{R} : x = k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

o también $\{x = k \cdot 180°;\ k \in \mathbb{Z}\}$. ■

La solución de una ecuación puede expresarse en el sistema circular o en el sexagesimal indistintamente. Es costumbre expresarla en cualquiera de los dos sistemas cuando la solución es un ángulo notable y en el sexagesimal si no lo es.

II) Obtener una ecuación algebraica mediante sustituciones.

Ejemplo 2

Resuelve: sen$^2 x$ − sen x − 1 = 0

Resolución

Mediatite la sustitución $y = \operatorname{sen} x$, obtenemos la ecuación

$$y^2 - y - 1 = 0$$

las soluciones de esta ecuación son $y_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Resultan entonces las ecuaciones trigonométricas:

$\operatorname{sen} x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}618$ que no tiene raíces y

$\operatorname{sen} x = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} = -0{,}618$ cuyas soluciones en el intervalo fundamental son:

$x_1 = 321{,}8°$ $\quad x_2 = 218{,}2°$.

El conjunto solución será:

$$\{x = 218{,}2^\circ + k \cdot 360^\circ \quad \text{o} \quad x = 321{,}8^\circ + k \cdot 360^\circ \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}. \ \blacksquare$$

En la práctica no es necesario hacer la sustitución explícitamente, pero puedes **hacerla si** te resulta mas cómodo.

III) Expresar todas las funciones en términos de una sola.

Ejemplo 3

Resuelve: $\cos x - \operatorname{sen}^2 x = 1$

Resolución

Transformamos la ecuación de modo que solo aparezca la función coseno:

$$\begin{aligned}
\cos x - (1 - \cos^2 x) &= 1\\
\cos x - 1 + \cos^2 x - 1 &= 0\\
\cos^2 x + \cos x - 2 &= 0\\
(\cos x + 2)(\cos x - 1) &= 0
\end{aligned}$$

obtenemos entonces las ecuaciones:

$\cos x + 2 = 0$ y $\cos x - 1 = 0$

$\cos x = 2$ $\qquad$ $\cos x = 1$

no tiene solución $\qquad$ $x = 2k\pi$

El conjunto solución ***es*** $\{x \in \mathbb{R} : x = 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. $\blacksquare$

IV) Aplicar las fórmulas de adición, reducción *o* del ángulo duplo, si es necesario.

Ejemplo 4

Resuelve: $\cos 2x - \operatorname{sen} x = 0$.

Resolución

Desarrollando $\cos 2x$, la ecuación se transforma en:

$$\begin{aligned}
\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x &= 0\\
1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x &= 0\\
1 - 2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x &= 0\\
2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 &= 0\\
(2\operatorname{sen} x - 1)(\operatorname{sen} x + 1) &= 0
\end{aligned}$$

$2\operatorname{sen} x - 1 = 0$ $\qquad$ $\operatorname{sen} x + 1 = 0$

$\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $\operatorname{sen} x = -1.$

En el intervalo fundamental se tienen las soluciones:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} \ ; \ x_2 = \frac{5\pi}{6} \ ; \quad x_3 = \frac{3\pi}{2}$$

y el conjunto solución es:

$$\left\{x \in \mathbb{R}:\ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \text{ o } \ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \ \text{ o } \ x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right\} \quad \blacksquare$$

V) Al realizar transformaciones no equivalentes, se debe hacer la prueba pues pueden introducirse raíces extrañas.

Ejemplo 5

Resuelve: sen θ + cos θ = 1

Resolución

Transponiendo $\cos\theta$ obtenemos:

$\text{sen}\,\theta = 1 - \cos\theta$

$\text{sen}^2\theta = (1 - \cos\theta)^2$ Elevamos al cuadrado ambos miembros para utilizar las identidades fundamentales. Puede añadir raíces.

$\text{sen}^2\theta = 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta$ Efectuando.

$1 - \cos^2\theta = 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta$ Utilizando $\text{sen}^2x + \cos^2x = 1$

$2\cos^2\theta - 2\cos\theta = 0$ Transponiendo y simplificando.

$2\cos\theta(\cos\theta - 1) = 0$ Extrayendo factor común.

Se obtienen las ecuaciones:

$\cos\theta = 0$ $\qquad\qquad$ $\cos\theta - 1 = 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\ \ \cos\theta = 1.$

En el intervalo fundamental resultan las soluciones:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{o} \quad \theta = \frac{3\pi}{2} \quad \text{o} \quad \theta = 0$$

Comprobando encontramos:

$$\theta = \frac{\pi}{2}:\ \text{MI} = \text{sen}\,\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1 = \text{MD}$$

$$\theta = \frac{3\pi}{2}:\ \text{MI} = \text{sen}\,\frac{3\pi}{2} + \cos\frac{3\pi}{2} = -1 + 0 \neq 1 = \text{MD}$$

$$\theta = 0:\ \text{MI} = \text{sen}\,0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1 = \text{MD}$$

Luego $\frac{3\pi}{2}$ es una raíz extraña. El conjunto solución es:

$$\left\{x \in \mathbb{R}:\ x = 2k\pi \ \text{ o } \ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\right\}. \quad \blacksquare$$

Ejercicios (epígrafe 19)

1. Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $\cos x + 1 = -\cos 2x$

b) $\cos 2x + \cos^2x = 5\,\text{sen}^2x$

c) $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x$
d) $\tan 2x - \tan x = 0$
e) $\cos 2x = \operatorname{sen} x$

f) $\dfrac{\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x} + \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = 0$

g) $\cos 2x + \operatorname{sen} x = 1$
h) $\cos 2x + \cos x = 0$
i) $\cos x \cos 2x + 2 \cos^2 x = 0$
j) $\cos 2x + \operatorname{sen} x = 4 \operatorname{sen}^2 x$
k) $4 \cos 2x + 3 \cos x = 1$
l) $6 \cos 2x + 6 \operatorname{sen}^2 x = 5 + \operatorname{sen} x$

m) $\operatorname{sen} 2x + \dfrac{1}{2} = \operatorname{sen} x + \cos x$

n) $3 \cos 2x + \operatorname{sen} x (3 \operatorname{sen} x + 5) = 5$
o) $\operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x \cos x = 0$

p) $\operatorname{sen} x \cos \dfrac{\pi}{2} + \cos x \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2} = 1$

q) $\cos x \cos \dfrac{\pi}{4} - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{4} = 1$

r) $\operatorname{sen} 2x = \tan x$
s) $\tan x \cos 2x = \operatorname{sen} x$
t) $3 \operatorname{sen}^2 x + \cos 2x - 2 \cos^2 x = 1{,}2$

u) $\operatorname{sen} (2x + \pi/4) \cos (2x + \pi/4) = -\dfrac{1}{2}$

Ejercicios del capítulo

1. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $3\sqrt{2}$ y $4\sqrt{2}$.

2. En un triángulo ABC rectángulo en B se conoce que $\operatorname{sen} \alpha = 0{,}50$ y $b = 12$ cm. Calcula las razones trigonométricas del ángulo γ.

3. Halla el valor de la expresión:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 a + \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} c - \operatorname{sen} d} : \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 d + 2 \operatorname{sen} c}{\operatorname{sen}^2 b + 1}}$$

para $a = \dfrac{\pi}{4}$; $b = \dfrac{\pi}{2}$; $c = \dfrac{\pi}{6}$; $d = \dfrac{3\pi}{2}$

4. **Prueba que:**

a) $\dfrac{\operatorname{sen} 30°}{\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{4}} - \cos \dfrac{\pi}{6} \cdot \tan 30° = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}$

b) $\dfrac{1 + \tan 225^\circ + \text{sen } \dfrac{3\pi}{2}}{\cos 2\pi \cdot \text{sen } \dfrac{5\pi}{6} - \cos 90^\circ} = 2$

c) $\dfrac{\dfrac{1}{\cos 300^\circ} - \cos \dfrac{7\pi}{6}}{\tan 45^\circ - \text{sen } 120^\circ} = 11 + 6\sqrt{3}$

5. Demuestra que las igualdades siguientes son identidades:

a) $[1 + \tan^2\alpha] \cdot [1 - \cos^2\alpha] = \tan^2\alpha$

b) $(\cot \beta + 1)^2 + (\cot \beta - 1)^2 = \dfrac{2}{\text{sen}^2\beta}$

c) $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \cdot \text{sen}(\pi + x) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos(2\pi - x) = 0$

d) $\dfrac{\text{sen}^3x + \cos^3x}{\text{sen } x + \cos x} = 1 - \dfrac{\text{sen } x}{2}$

e) $1 - \cos\theta = 2\,\text{sen}^2 \dfrac{\theta}{2}$

6. Si $\cos x = \dfrac{4}{7}$ y $\dfrac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi$. Calcula $\tan x$.

7. Si $\text{sen } \alpha = -\dfrac{3}{5}$ y α pertenece al III cuadrante, calcula

a) $\cos\alpha$ b) $\text{sen } \dfrac{\alpha}{2}$ c) $\cos 2\alpha$.

8. Halla los valores de a para los que tiene solución la ecuación:

a) $2 \text{ sen } x = a$ b) $3 \cos x = a - 1$ c) $4 \tan^2 x = a$

d) $\text{sen } x = 2 - \dfrac{5a + 1}{4}$ e) $1 + \text{sen } x = a^2$

9. Resuelve las ecuaciones:

a) $9 \text{ sen } x - 5\sqrt{3} = 5 \text{ sen } x - 3\sqrt{3}$ b) $6 \cos^2 x = 9 \text{ sen } x$

c) $2 \cos 2x + 1 + \text{sen } x = 0$ d) $2 \text{ sen}^3x - \sqrt{2}\,\text{sen}^2x = 2 \text{ sen}^2x - \sqrt{2}\,\text{sen } x$

¿CÓMO SE UTILIZÓ LA TRIGONOMETRÍA?

Se considera que Hiparco nacido en Nicea, Ciudad del Asia Menor en el año 161 a.n.e., es el más destacado de los astrónomos de la antigua Grecia. Siendo to**davía** un adolescente, al salir de su clase de Geometría se preguntaba en que medida podian serle Útiles los conocimientos que había recibido en relación con la amplitud y las propiedades de los ángulos.

Su preocupación encontró respuesta algunos años después, pues Hiparco que siempre fue aficionado a la observación de la esfera celeste, se dispuso a calcular la distancia entre la tierra y algunos de los astros **que** en su tiempo eran conocidos.

Para **lograr** sus propósitos **midió la** amplitud **de** ciertos ángulos bajo los cuales *se* veía la Luna desde distintas posiciones en la Tierra. De **este** modo pudo calcular. mediante un rudimentario dispositivo para medir ángulos ("el Astrolabio"), con una precisión increíble para su época, **que** la distancia máxima entre ambos astros era unos 400 000 km. Esta medida comparada con los cómputos actuales **que** estiman la distancia entre los dos astros a unos 385 000 km **ofrece solo** un error **de** 3.5 % (fig. I).

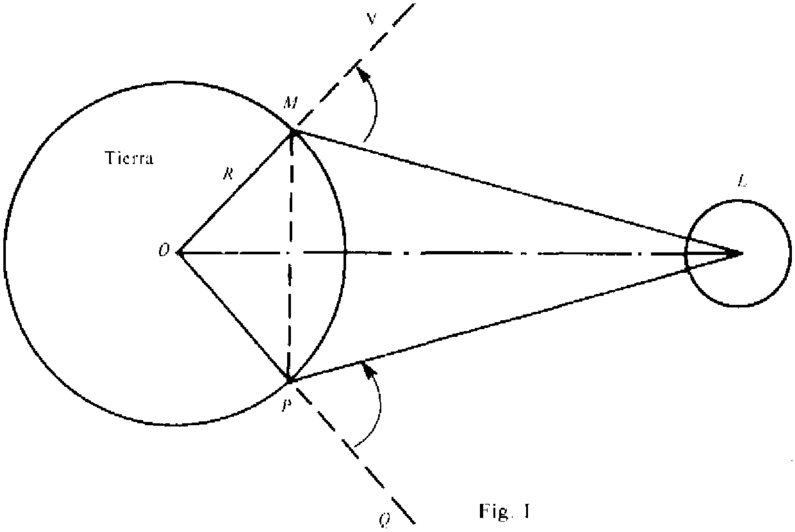


Fig. I

Hiparco procedio del modo siguiente. midió con el Astrolabio las amplitudes de los ángulos LMN y LPQ, halló la longitud MP entre los dos puntos de observación y la amplitud de sus ángulos adyacentes. Empleó para ello el valor del radio R de la Tierra, que habia sido calculado por Eratóstenes casi un siglo antes, y las latitudes de M y de P para calcular el a MOP y con estos datos resolvió el triángulo LMP del que obtuvo su altura que es aproximadamente la distancia de la Tierra a la Luna.

En este grado vas a aprender a "resolver un triángulo".

CAPÍTULO 4

Aplicaciones de la trigonometria

En el presente capítulo estudiaremos algunas aplicaciones de la trigonometría y veremos que no solo nos permiten calcular elementos de un triángulo, sino que mediante su uso. es también posible resolver, de un modo sencillo, muchos problemas de la vida practica cuya solución presentaría grandes dificultades por otros métodos o seria imposible.

Resolución de triángulos rectángulos

1. *Repaso y profundización de la resolución de triángulos rectángulos*

Todo triángulo tiene seis elementos fundamentales: tres lados y tres ángulos.
Sabemos que no todos los elementos de un triángulo pueden ser dados independientemente pues existen ciertas relaciones que deben cumplirse. Estas relaciones ligan los elementos de modo que conocidos tres de ellos (uno de los cuales, al menos, debe ser un lado) es posible en ciertos casos calcular los restantes, ya que:

> Un triángulo está unívocamente determinado si se conocen:
>
> a) Tres lados.
> b) Dos lados y el ángulo comprendido.
> c) Un lado y los dos ángulos adyacentes.

Esto se debe a qiie en cada uno de esos casos se puede aplicar uno de los criterios de igualdad de triángulos (ver punto 32 del Memento) que garantiza su unicidad.
Observa que siempre es necesario conocer un lado. Si se tienen los tres ángulos, el triángulo no esta unívocamente determinado, pues todos los triángulos semejantes entre si tienen tres ángulos respectivamente iguales. Por ejemplo, todos los triángulos equiláteros tienen sus tres ángulos iguales a $60°$ (fig. 4.1).

> Resolver un triángulo es. conocidos tres de sitc elementos, calcular todos los elementos desconocidos

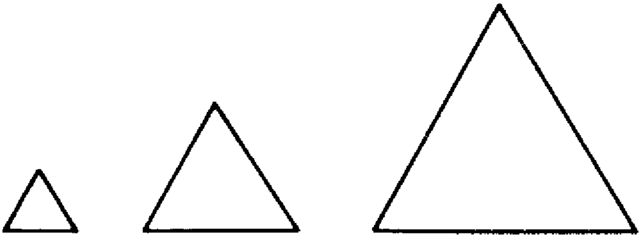


Fig. 4.1

Si el triángulo es rectángulo solo es necesario conocer dos elementos pues uno es conocido siempre. el ángulo recto.

Veamos algunos ejemplos de resolución de triángulos rectángulos.

Ejemplo 1

Resuelve el triángulo de la figura 4.2.

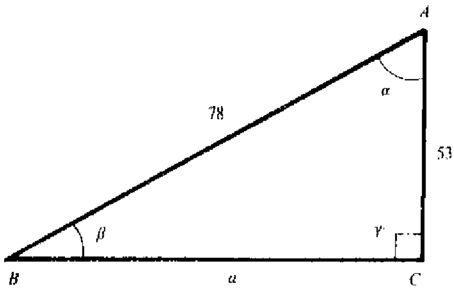


Fig. 4.2

Resolución

En ejercicios como este en el que los datos no proceden de mediciones (no representan cantidades de magnitud), en este libro consideraremos los datos como valores exactos.

Conocemos la hipotenusa y un cateto. Para resolver el triángulo debemos hallar el otro cateto y los dos ángulos agudos.

Para calcular el cateto desconocido a podemos aplicar el teorema de Pitágoras.

$$a^2 = c^2 - b^2$$
$$a^2 = 78^2 - 53^2 = 3\ 275$$
$$a = 57{,}2$$

Para calcular el ángulo β debemos utilizar una razón trigonométrica de este ángulo, la cual escogemos analizando cuál de ellas lo relaciona con los elementos dados, como conocemos el cateto opuesto y la hipotenusa utilizamos el seno de β.

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{53}{78} = 0{,}6795 \qquad \beta = 42{,}8^\circ$$

Para hallar el otro ángulo (α) seguimos el mismo procedimiento tomando en este caso la función coseno por ser la que lo relaciona con los datos.

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{53}{78} = 0{,}6795 \qquad \alpha = 47{,}2^\circ$$

y el triángulo está resuelto. ■

Observa que para hallar este último elemento también puede utilizarse la relación $\alpha = 90^\circ - \beta$ pues los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios; pero siempre que sea posible debemos utilizar los elementos originales para evitar arrastrar el error que se introduce en el cálculo. Esta relación $\alpha + \beta = 90^\circ$ puede servirnos para comprobar los resultados obtenidos.

Ejemplo 2

Calcula los elementos desconocidos en el triángulo de la figura 4.3.

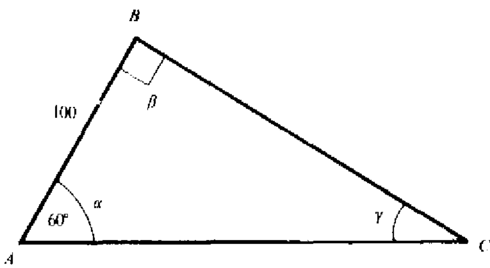


Fig. 4.3

Resolución

Conocemos un cateto y un ángulo agudo.

Debemos calcular el otro ángulo agudo, la hipotenusa y el otro cateto.

Para calcular el ángulo desconocido (γ) aplicamos la relación: $\gamma = 90^\circ - \alpha$ **de donde** $\gamma = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Para calcular uno cualquiera de los lados desconocidos utilizamos, al igual que en el ejemplo anterior, una razón trigonométrica que relacione los elementos dados con el lado que queremos hallar.

Para la hipotenusa (b) utilizamos el coseno de α

$$\cos \alpha = \frac{c}{b}$$

de donde

$$b = \frac{c}{\cos \alpha} = \frac{100}{\cos 60^\circ} = \frac{100}{0{,}5} = 200$$

Para hallar el cateto a utilizamos la tangente de α.

$$\tan \alpha = \frac{a}{c}$$

de donde $a = c \cdot \tan \alpha = 100 \cdot \tan 60^{\circ} = 100 \cdot \sqrt{3} = 173$
y el triángulo está resuelto. ■

Resumiendo:

> Para resolver un triángulo rectángulo debes seguir los siguientes pasos:
>
> 1. Dibujas un triángulo rectángulo señalando los elementos conocidos y desconocidos.
> 2. Cuando se conoce un ángulo agudo, se puede calcular el otro ángulo agudo restándolo de 90° ya que son complementarios.
> 3. Para hallar un elemento desconocido se escoge una relación que contenga a dicho elemento y a otros dos conocidos, y se despeja en ella el elemento que se busca.
>
> La relación escogida puede ser una razón trigonométrica o el teorema de Pitágoras.

Ejercicios (epígrafe 1)

1. En los triángulos rectángulos de la figura 4.4, halla la longitud del lado designado por x (el ángulo recto se ha indicado con el símbolo ⌐).

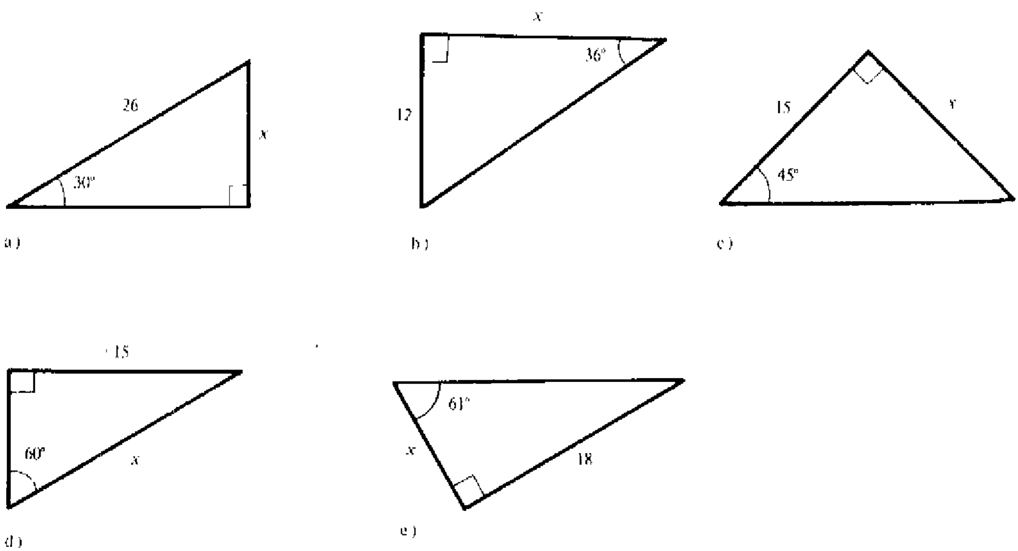


Fig. 4.4

2. Halla la medida, en grados, del ángulo designado por θ (fig. 4.5)

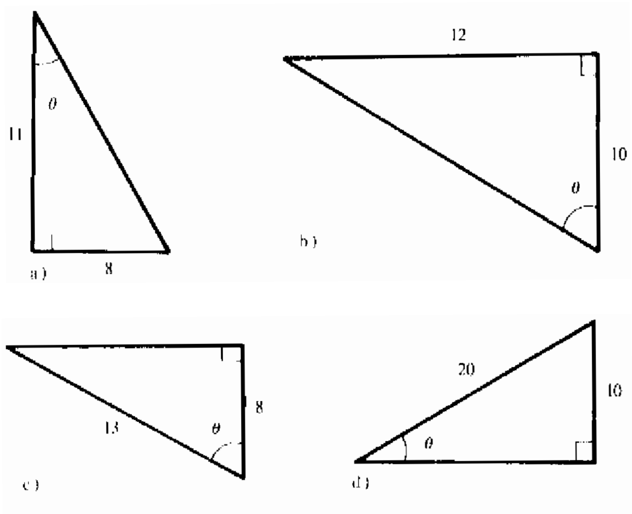


Fig. 4.5

3. Halla el valor de x en la figura 4.6

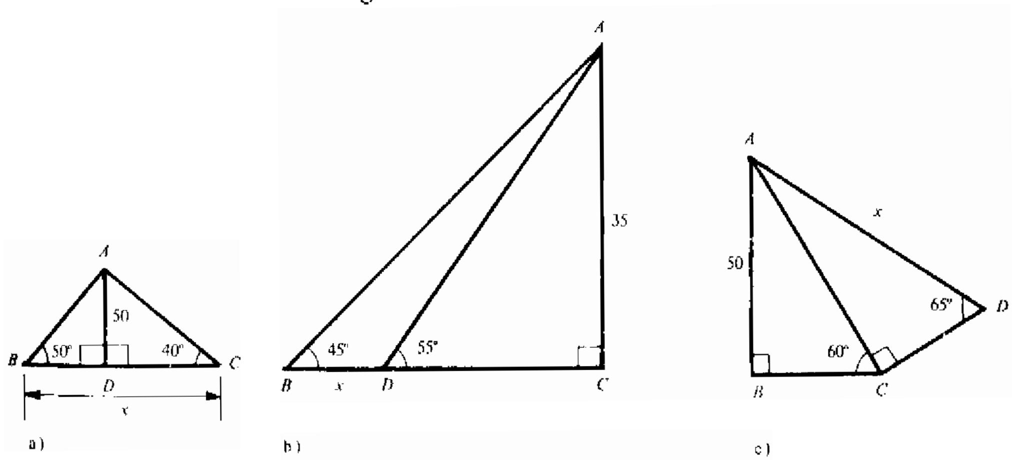


Fig. 4.6

4. Resuelve el triángulo ABC, si $\beta = 90°$

a) $\alpha = 33°$, $b = 11$

b) $\gamma = 42°$, $c = 8$

c) $\gamma = 78{,}3°$, $a = 1{,}32$

d) $\alpha = 11{,}2°$, $a = 104$

e) $a = 130$, $c = 264$

f) $a = 15$, $\gamma = 100°$

g) $b = 40{,}7$, $c = 24$

h) $b = 4$, $a = 15$

2. *Aplicaciones*

Veamos ahora algunos ejemplos de aplicación de la resolución de triángulos rectángulos.

Ejemplo 1

Una escalera de 6,5 m de largo está recostada a una pared. Si el pie de la escalera está separado de la pared 1.9 m, halla el ángulo formado por la escalera y la pared.

Resolución

Comenzaremos haciendo una interpretación del problema mediante una modelación matemática de este. En estos casos es conveniente confeccionar una figura de análisis.

En el problema dado, para hacer la figura de análisis haremos una abstracción y consideraremos la pared como una línea vertical totalmente recta y el piso como una línea horizontal. sin irregularidades. De este modo, al cortarse la pared y el piso formarán un ángulo recto (fig. 4.71.

Consideraremos la escalera como un segmento que tocará a la pared en el punto A y al piso en el punto C, formándose el triángulo rectángulo ABC, del cual conocemos la hipotenusa $\overline{AC}$ (longitud de la escalera) y el cateto $\overline{BC}$ (distancia del pie de la escalera a la pared) cuyas longitudes deben destacarse en el gráfico.

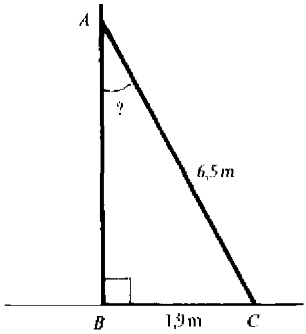


Fig. 4.7

Nótese que para resolver el problema dado no es necesario resolver el triángulo completo ya que solo nos interesa calcular el ángulo que forma la escalera con la pared. o sea. el ángulo α.

Después de hecho este análisis solo nos resta hallar el elemento pedido, para ello utilizaremos el seno del ángulo α

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1,9}{6,5} = 0,292$$

luego $\alpha = 17^\circ$

Por último se debe dar la respuesta al problema planteado

Respuesta: El ángulo que forma la escalera con la pared es aproximadamente 17°.[1] ∎

Antes de resolver los siguientes problemas es conveniente aclarar algunas cuestiones del lenguaje que sera utilizado.

1 En los ejercicios con texto y problemas donde aparezcan cantidades de magnitud se realizarán los cálculos intermedios sin tener en cuenta la unidad correspondiente, pero en la respuesta sí debe considerarse. En estos casos, los datos si son números aproximados luego para el cálculo y la respuesta se deben tener en cuenta las orientaciones que aparecen en el punto 22 del Memento.

El ángulo formado por una línea horizontal y otra cualquiera no horizontal, se llama **de elevación** si está por encima de la horizontal y **de depresión** si está por debajo (fig. 4.8).

Cuando se trata de un observador, a esa línea no horizontal que va desde el ojo del observador al objeto se le llama **visual.**

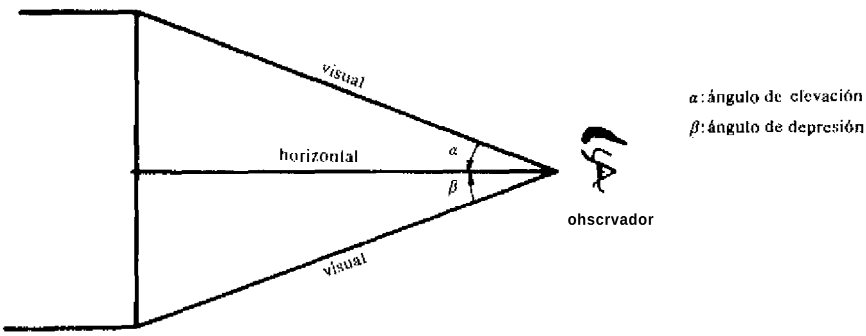


Fig. 4.8

Ejemplo 2

Un árbol proyecta una sombra de 12 m de largo cuando el ángulo de inclinación del Sol es de 31". Halla la altura del árbol.

Antes de dar solución al problema anterior consideramos necesario hacer la siguiente aclaración:

Ángulo de inclinación del **Sol** es el formado por uno cualquiera de sus rayos y la superficie de la Tierra, considerada horizontal.

Resolución

Consideraremos la altura del árbol como un segmento vertical ($\overline{AC}$) que pasa por su centro desde el extremo superior hasta el suelo, y **la** sombra, cuino un segmento horizontal ($\overline{AB}$), despreciando las irregularidades del suelo (fig. 4.9).

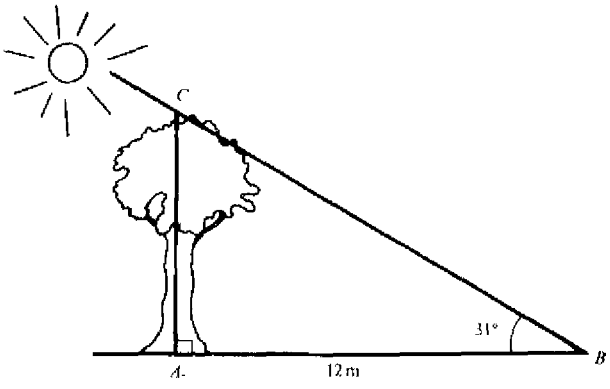


Fig. 4.9

El ángulo de inclinación del Sol lo mediremos, en nuestro problema, como el formado por cl suelo **y** un rayo **de sal** que pasa por el extremo B de la sombra y por el extremo superior C **del** árbol **De este** modo se forma el triángulo rectángulo ARC' del cual conocemos el ángulo β (inclinación del Sol) y el cateto $\overline{AB}$ (longitud de la sombra). Debemos hallar el cateto $\overline{AC} = h$, es decir, la altura del árbol. Para ello utilizamos:

$$h = \overline{AB} \cdot \tan \beta$$
$$h = 12 \cdot \tan 31^\circ = 12 \cdot 0{,}601 = 7{,}2$$

Respuesta: La altura del árbol es aproximadamente 7,2 m. ■

Ejemplo 3

Desde un avión sc observan das barcos con ángulos de depresión de 35" y 48" respectivamente. Si la distancia del primer barco al avión es de 420 m, ¿a qué altura vuela el avión?, ¿cuál es la distancia entre los barcos? (fig. 4.10)

Resolución

En la figura 4.10 los puntos A y B representan **las** barcos y C el avión, $\overline{CD} = h$ altura del avioii.

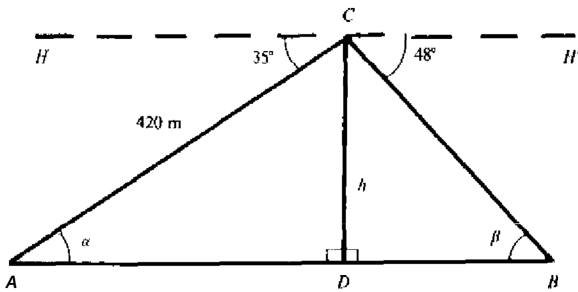


Fig. 4.10

Tenemos que:

$$\overline{AC} = 420 \text{ m}$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \sphericalangle ACH = 35^\circ \\ \beta = \sphericalangle BCH' = 48^\circ \end{array}\right\} \text{ alternos entre paralelas}$$

En A ADC, rectángulo en D tenemos:

$$h = \overline{AC} \cdot \text{sen } \alpha$$
$$h = 420 \cdot \text{ion } 35^\circ = 420 \cdot 0{,}574 = 241$$

luego $\boxed{h \approx 240 \text{ m}}$

Además, $\overline{AD} = h \cdot \cos 35^\circ = 420 \cdot 0{,}819$
$\overline{AD} = 344$ m

En $\triangle CDB$, rectángulo en D tenemos:

$$\tan \beta = \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}$$

$$\overline{DB} = \frac{\overline{CD}}{\tan \beta}$$

$$\overline{DB} = \frac{241}{\tan 48°} = \frac{241}{1,11} = 217$$

$\overline{DB} = 217$ m

pero $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB}$

luego $\overline{AB} = 344 + 217 = 561$

$\boxed{\overline{AB} \approx 560 \text{ m}}$

Respuesta: El avión vuela a una altura de 0.24 km y la distancia entre los dos barcos es de *0.50* km. **M**

Ejemplo 4

Los lados iguales de un triángulo isósceles tienen cada uno 40,8 cm de largo y los ángulos en la base tienen una amplitud de 25° Calcula la amplitud del ángulo principal, la longitud del lado desigual y el Arca del triángulo.

Resolución

Este problema es diferente a todos los anteriores pues no estamos en presencia de un triángulo rectángulo. Para encontrar su solución necesitamos reducirlo a un caso conocido

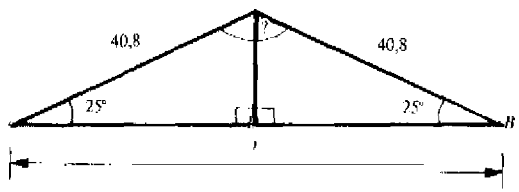


Fig. 4.11

haciendo alguna construcción auxiliar para obtener un ángulo recto

Nótese que si trazamos la altura $\overline{CD}$ relativa al lado desigual (fig. 4.11), el triángulo dado queda dividido en dos triángulos rectángulos iguales ADC y CDB; y trabajando en uno cualquiera de ellos se puede dar solución al problema planteado.

Debemos calcular $\gamma = \sphericalangle BCA$, $\overline{AB}$ y $A_{\triangle ABC}$

En $\triangle ABC$ tenemos:

$\gamma + 25° + 25° = 180°$ (por suma de ángulos interiores de un triángulo)

luego $\gamma = 180° - 50° = 130°$

además en $\triangle ADC$, $\overline{AD} = \overline{AC} \cdot \cos 25°$

$\overline{AD} = 40{,}8 \cdot 0{,}906 = 37$

luego $\overline{AB} = 2\,\overline{AD} = 2 \cdot 37$

$\overline{AB} = 74$ cm.

Para hallar el área necesitamos además la altura $\overline{CD}$.

$\overline{CD} = \overline{AC} \cdot \operatorname{sen} 25°$

$\overline{CD} = 40{,}8 \cdot 0{,}423$

$\overline{CD} = 17{,}3$ cm

Por lo tanto $A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{CD}$

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 74 \cdot 17{,}3 = 640$$

Respuesta: El ángulo principal es de 130°, el lado desigual mide 74 cm y el área 6.4 . 10^2cm^2 o simplemente 6,4 dm^2. ■

De todo lo anterior se deduce qric la resolución de un triángulo isósceles puede reducirse a la resolución de un triángulo rectángulo.

Ejercicios (epígrafe 2)

1 Una torre proyecta una sombra de 86,9 m de largo cuando la altura del Sol sobre el horizonte es tic 56.5° ¿Cuál es la altura de la torre?

2 Un muchacho empinando un papalote ha soltado 135 m de hilo. Ul papalote sc halla situado verticalmente sobre un punto que está a 75 in de distancia del muchacho. Admitiendo que el hilo no forma onda y sin tener en cuenta la altura del muchacho, ¿a qué altura se encuentra el papalote y cuál es el ángulo de elevación?

3. Un poste se dobló de forma tal que su extremo choca con el piso y dista 8,75 m de la base del poste formando un ángulo de 40,4° con el suelo. Halla la altura original del poste.

4. A través del telescopio de una batería antiaérea se observa un avión que se encuentra a 6,3 km de distancia del observador bajo un ángulo de 11,6°. ¿A qué altura vuela el avión en el momento de observación?

5 Desde un faro situado a 44 m sobre el nivel del mar, el ángulo de depresión de un barco es 55,3°. ¿A qué distancia del faro se halla el barco?

6. Desde una avioneta que vuela a una altura de 400 m se observa, con un ángulo de depresión de 39,4°, otra avioneta que vuela a 200 m de altura. ¿A qué distancia se encuentran ambos aparatos?

7. Desde la cima de un acantilado de 70 m de alto, se observan dos pequeños botes en la misma dirección, con ángulos de depresión de 10,5° y 13,3° respectivamente. Calcula la distancia:
a) del acantilado al bote más cercano,
b) entre los dos botes.

8. Un helicóptero vuela sobre un puente a una altura de 300 m. Cuando está situado exactamente sobre el punto medio del puente se observan sus extremos bajo un ángulo de 80°. ¿Cuál es la longitud del puente?

9 Con el fin de hallar el ancho de un río se ha medido una distancia AC de 350 m a lo largo de una de sus orillas. Sobre la orilla opuesta se toma un punto

B tal que $\overline{CB}$ sea perpendicular a $\overline{AC}$. También se ha medido el ángulo CAB y resulta ser de 52,2°. Halla el ancho del río.

10. Desde dos estaciones situadas en la dirección Este Oeste y a 1,6 km de distancia se observa que el ángulo de elevación de un globo es de 45°. Si el globo se encuentra hacia el noroeste y noreste de las estaciones respectivamente, ¿a qué altura está?

11. Desde dos barcos observan un avión con ángulos de elevación de 50° y 40° respectivamente. Si la distancia del primer barco al avión es de 1.25 km, ¿qué distancia hay entre los dos barcos?

Resolución de triángulos cualesquiera

3. *Ley de los senos*

Para resolver un triángulo no rectángulo necesitamos conocer como mínimo tres de sus elementos, ya que en este caso no tenemos ningún elemento conocido implícitamente. Uno de los elementos conocidos debe ser, como sabemos, al menos un lado. En el caso de estos triángulos necesitaremos algunos teoremas adicionales a los conocidos para triángulos rectángulos.

Teorema 1 (ley de los senos)

> En todo triángulo, el cociente de la longitud de un lado y el seno del ángulo opuesto a ese lado, es constante e igual al duplo del radio de la circunferencia circunscrita.

Demostración

Debemos demostrar que en todo triángulo ABC se cumple que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} = 2R$$

donde R es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Sea el triángulo ABC (acutángulo) inscrito en la circunferencia de centro O y radio R (fig. 4.12).

Trazando el diámetro CD se forma el $\triangle\ DBC$ rectángulo en β por estar inscrito en una semicircunferencia.

En $\triangle\ DCB$ tenemos que:

$$a = \overline{CD} \cdot \operatorname{sen} \theta \qquad (1)$$

pero $\overline{CD} = 2R$ y $\theta = \alpha$ por estar inscrito en el mismo arco (o cuerda).

luego $\quad a = 2\ R \operatorname{sen} \alpha$ Sustituyendo en (1).

de donde $\quad \dfrac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = 2R.$

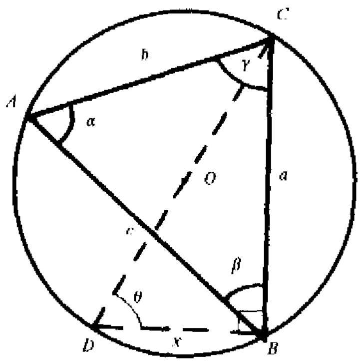


Fig. 4.12

Como esto puede hacerse con cualquier ángulo, trazando cada vez el diámetro que pase por su vértice, se obtiene:

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma} = 2R$$

Como todo triángulo se puede inscribir en una circunferencia, la demostración anterior es válida para cualquier tipo de triángulo. La única diferencia se presenta al considerar el ángulo obtuso de un triángulo obtusángulo.

En este caso, trazando el diámetro CD se obtiene el triángulo CBD rectángulo en B (fig. 4.13), en el cual tenemos:

$$a = \overline{CD} \cdot \text{sen } \theta$$

ahora bien $\alpha + \theta = 180°$

(por estar inscrito en dos arcos cuya suma es 360°).

luego $a = 2R \cdot \text{sen } (180° - \alpha)$

$a = 2R \cdot \text{sen } \alpha$ y la demostración continúa igual. ■

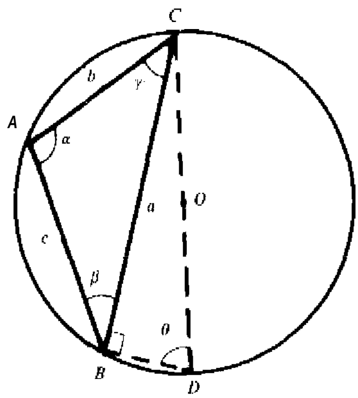


Fig. 4.13

Ejemplo 1

Dados $\alpha = 65{,}3°$; $\beta = 40{,}5°$ y $a = 50{,}1$; resuelve el triángulo ABC.

Resolución

Hagamos una figura señalando los elementos conocidos y desconocidos (fig. 4.14).

Como se conocen dos ángulos podemos hallar el tercero aplicando la relación:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

de donde $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$

$$\gamma = 180^\circ - (65{,}3^\circ + 40{,}5^\circ) = 74{,}2^\circ$$

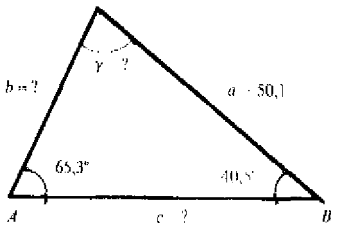


Fig. 4.14

Como conocemos el lado a y el ángulo opuesto (α) podemos emplear la ley de los senos, pero debemos tener cuidado de escoger la razón de tal manera que no aparezca más de un elemento desconocido. Así, para hallar el lado b utilizaremos

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} \text{ de donde } b = \frac{a \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$b = \frac{50{,}1 \cdot \operatorname{sen} 40{,}5^\circ}{\operatorname{sen} 65{,}3^\circ} = \frac{50{,}1 \cdot 0{,}649}{0{,}909} = 35{,}8$$

Análogamente para hallar el lado c, usamos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} \text{ de donde } c = \frac{a \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$c = \frac{50{,}1 \cdot 0{,}962}{0{,}909} = 53{,}1. \quad \blacksquare$$

Ejemplo 2

Dados $\alpha = 30^\circ$, $a = 3$ y $b = 4$. Calcula el ángulo β.

Resolución

Apliquemos la ley de los senos, pues disponemos de todos los datos para hacerlo.

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta}$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{b \operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{4 \cdot 0{,}5}{3} = \frac{2}{3} = 0{,}6667$$

y entonces

$$\beta = 41{,}8^\circ \quad \text{o} \quad \beta = 180^\circ - 41{,}8^\circ = 138{,}2^\circ$$

Observa que en este caso hay dos posibles soluciones pues el seno es positivo también en el II cuadrante y no podemos afirmar que el triángulo sea acutángulo, es decir, no sabemos si $\beta < 90^\circ$ o $\beta \geqslant 90^\circ$.

En otras palabras, hay dos soluciones posibles pues hay dos triángulos no congruentes con los valores dados de a, b y α. $\blacksquare$

En el ejemplo 2 no se cumple lo planteado al inicio del epígrafe 1, pues, se trata de un problema que no está incluido en los tres casos allí enunciados. En efecto, no conocemos ningún teorema de igualdad que refiera a dos triángulos que coincidan en dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos (ver punto 32 del Memento)

Pueden suceder aun otros casos distintos a los del ejemplo 2.

Ejemplo 3

Dados a – 30°, a – 3 y b = 7, calcula el ángulo β

Resolución

En este caso obtenemos:

$$\text{sen } \beta = \frac{b \text{ seri } \alpha}{a} - \frac{7 \cdot 0{,}5}{3} = 1.17$$

y esta ecuación no tiene solución, luego no existe β y, por tarito, no existe ningún triángulo que satisfaga las condiciones dadas. ■

En las condiciones dadas en los ejemplos 2 y 3 cxistc un caso en el cual se puede asegurar la existencia y unicidad de la solución:

Teorema 2

Un triángulo está determinado unívocamente si se conocen dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos.

Demostración

Supongamos que del triángulo ABC se conocen dos lados a y b con $a > b$ y el ángulo α opuesto al lado a; para que el triángulo es18 unívocamente determinado es suficiente que el ángulo β exista y sea único, pues entonces:

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$$

y se conocen dos lados y el ángulo coitiprendido, caso ya estudiado

Trataremos de calcular el ángulo β utilizando la ley de los senos

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta}$$

resulta $\quad \text{sen } \beta = \frac{b}{a} \text{ seri } \alpha \qquad (1)$

y como $\quad \frac{b}{a} \text{ sen } \alpha < \text{ sen } \alpha < 1 \qquad$ porque $\quad \frac{b}{a} < 1$

existen dos ángulos β ($0° < \beta < 180°$) que satisfacen la igualdad (1).

Ahora bien de $b < a$ resulta $\beta < \alpha$ y. por tanto, $\beta \leqslant 90°$ ya que en un triángulo hay, a lo sumo. un ángulo obtuso.

De esta forma resulta que existe un único ángulo β, lo que significa que el triángulo ABC existe y es único. ■

Ejemplo 4

Resuelve el triángulo *ABC* si se sabe que $a = 10{,}4$; $b = 8{,}6$ y $\alpha = 83{,}2°$

Resolución

Como $a > b$, el triángulo está unívocamente determinado; para resolverlo aplicamos la ley de los senos.

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta}$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{b}{a} \operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{8{,}6}{10{,}4} \cdot \operatorname{sen} 83{,}2° = 0{,}821$$

$$\beta = 55{,}2°$$

$\beta = 180° - 55{,}2° = 124{,}8°$ no es solución pues $\beta < \alpha = 83{,}2°$ ahora calcularemos γ.

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$$
$$\gamma = 180° - (83{,}2° + 55{,}2°) = 41{,}6°$$

y el lado c se puede calcular a partir de la ley de los senos:

$$c = \frac{a \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$c = \frac{10{,}4 \cdot 0{,}664}{0{,}993} = 6{,}91.$$ ■

El teorema 2 significa que dos triángulos que coincidan en dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos son iguales, de donde resulta un nuevo criterio de igualdad de triángulos.

Teorema 3

> Dos triángulos que tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos, son iguales

Cuando se conocen dos lados y el ángulo opuesto al menor de ellos puede ocurrir que el problema tenga dos soluciones o que no exista solución como hemos visto en los ejemplos 2 y 3.

Pero también en este caso puede ocurrir que exista una única solución si en la igualdad (1) se tiene:

$$\frac{b \operatorname{sen} \alpha}{a} = 1$$ o sea, el triángulo es rectángulo.

No trataremos de dar reglas para decidir de qué caso se trata, en cada problema procederemos como en los ejemplos y determinaremos si hay solución o no y si es única.

Ejercicios (epígrafe 3)

1. Dado el $\triangle ABC$ si:
   a) $a = 35$, $b = 22$ y $\alpha = 45°$. Halla β
   b) $\alpha = 40°$, $b = 37$ y $\gamma = 32°$. Halla a
   c) $b = 25$, $c = 50$ y $\beta = 30°$. Halla α
   d) $a = 21{,}3$, $\alpha = 47{,}3°$ y $b = 28{,}2$. Halla β
   e) $a = 20$, $c = 60$ y $\alpha = 30°$. Halla γ

2. Resuelve el triángulo ABC si se sabe que:
   $a = 422$, $b = 300$, $\alpha = 33{,}4°$

4. *Ley de los cosenos*

A continuación estudiaremos otro teorema importante que relaciona lados y ángulos de un triángulo, y que nos permite también resolver dicho triángulo

Teorema 1 (ley de los cosenos)

> En todo triángulo, el cuadrado de la longitud de un lado es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados menos el doble producto de las longitudes de estos dos **lados** por el coseno del ángulo que forman.

Demostración

En el triángulo ABC trazamos la altura $h = \overline{AD}$ relativa al lado BC con lo que obtenemos los dos triángulos rectángulos ADB y ADC (fig. 4.15).

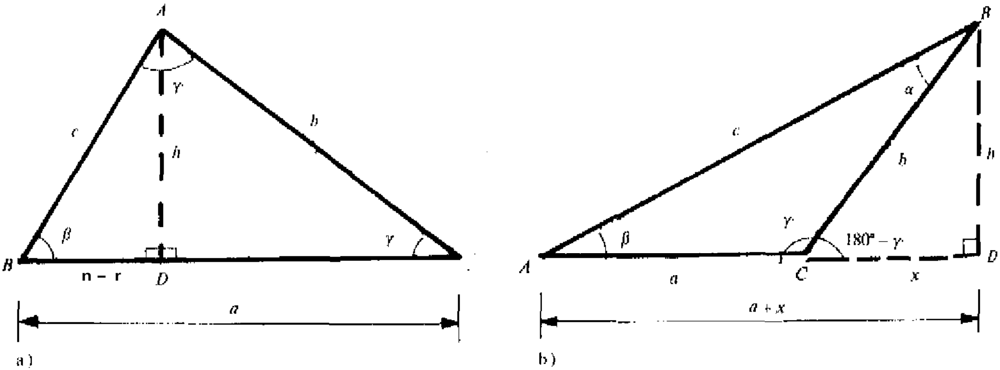


Fig. 4.15

En $\triangle$ *ADB* tenemos (fig. 4.15a)

$c^2 = (a - x)^2 + h^2$

$c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + h^2 \quad (1)$

pero en $\triangle$ *ADC* se tiene:

$x = b \cos \gamma$

y $b^2 = x^2 + h^2$

que sustituidos en (1) queda:

$c^2 = a^2 - 2ab \cos \gamma + b^2$

o sea:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

En $\triangle$ *ABD* tenemos (fig. 4.15b)

$c^2 = (a + x)^2 + h^2$

$c^2 = a^2 + 2ax + x^2 + h^2 \quad (1)$

pero en $\triangle$ *ADC* se tiene:

$x = b \cos (180^\circ - \gamma)$

o $x = - b \cos \gamma$ y $b^2 = x^2 + h^2$

que sustituidos en (1) queda:

$c^2 = a^2 + 2a (- b \cos \gamma) + b^2$

o sea:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

Luego en todo triángulo se cumple:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.} \quad ■$$

Trazando las alturas relativas a los otros dos lados obtenemos las otras dos formis de la ley de los cosenos.

Las tres formas de la ley de los cosenos son:

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned}}$$

Despejando en estas expresiones el coseno del ángulo obtenemos otra forma de expresar esta ley.

$$\boxed{\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos \beta &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ \cos \gamma &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{aligned}}$$

Ejemplo 1

En el triángulo *ABC* sabiendo que: $\alpha = 47^\circ$; $b = 8$ y $c = 10$, calcula el lado a

Resolución

Como conocemos dos lados y el ángulo comprendido (fig. 4.16), podemos utilizar la ley de los cosenos para hallar el lado a.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

$a^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 47^\circ$

$a^2 = 64 + 100 - 160 \cdot 0{,}682 = 54{,}88$

$a = 7{,}41.$ ■

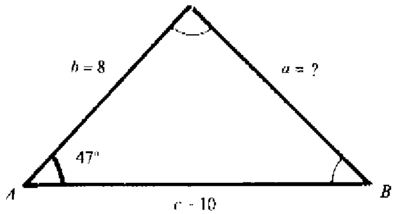


Fig. 4.16

Ejemplo 2

De un triángulo ABC se sabe que $a = 7{,}0$ cm ; $b = 3{,}0$ cm y $c = 5{,}0$ cm . Halla los tres ángulos.

Resolución

Para hallar un ángulo, conocidos los tres lados, utilizaremos la ley de los cosenos. Para el ángulo α:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos \alpha = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 3 \cdot 5} = -\frac{15}{30} = -0{,}5$$

$$\alpha = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

Para el ángulo β:

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos \beta = \frac{7^2 + 5^2 - 3^2}{2 \cdot 7 \cdot 5} = \frac{65}{70} = 0{,}929$$

$$\beta = 21{,}7^\circ \simeq 22^\circ$$

El tercer ángulo puede hallarse aplicando la relación:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad \text{de donde} \quad \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$
$$\gamma = 180^\circ - (120^\circ + 21{,}7^\circ) = 38{,}3^\circ \simeq 38^\circ. \quad \blacksquare$$

Ejemplo 3

Se desea construir un túnel recto a través de una montaña y se han medido las distancias desde los puntos de entrada y salida del túnel a un tercer punto fuera de la montaña. Si las distancias medidas son de 3,15 km y 7,10 km respectivamente y el ángulo que forman entre si es de 125,4°, ¿qué longitud tendrá el túnel?

Resolución

En la figura 4.17 los puntos A y B representan la entrada y salida del túnel respectivamente. C es el punto fuera de la montaña. Se forma el $\triangle ABC$ del cual conocemos los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ y el ángulo γ. Queremos hallar la longitud ($\overline{AB}$) que tendrá el túnel, para ello podemos utilizar la ley de los cosenos:

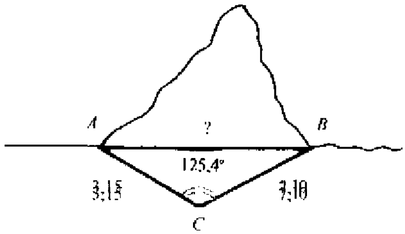


Fig. 4.17

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$
$$c^2 = 7{,}1^2 + 3{,}15^2 - 2(7{,}1)(3{,}15) \cos 125{,}4^\circ$$
$$c^2 = 50{,}41 + 9{,}923 - 44{,}73(-0{,}579) = 86{,}23$$
$$c \simeq 9{,}29$$

Respuesta: El túnel tendrá una longitud de 9,29 km aproximadamente. ■

Ejercicios (epígrafe 4)

1. Dado el triángulo ABC, determina los elementos que faltan si se sabe que:
   a) $a = 795$; $\alpha = 79{,}9^\circ$; $\beta = 44{,}7^\circ$
   b) $b = 0{,}804$; $\beta = 52{,}3^\circ$; $\gamma = 101{,}7^\circ$
   c) $b = 29$; $\alpha = 87{,}6^\circ$; $\gamma = 33{,}2^\circ$
   d) $a = 77{,}9$; $b = 83{,}4$; $\gamma = 72{,}3^\circ$
   e) $b = 2{,}3$; $c = 3{,}7$; $\alpha = 62{,}1^\circ$
   f) $a = 5{,}6$; $b = 4{,}3$; $c = 4{,}9$
   g) $a = 111$; $b = 145$; $c = 40$

2. ¿Cuál es el diámetro de la circunferencia circunscrita a un triángulo isósceles cuya base mide 12,5 cm y su ángulo principal es de 20°?

3. Halla el ángulo mas pequeño del triángulo cuyos lados son: 1,68 ; 2,04 y 2,91 respectivamente.

4. Un barco situado en la posición A es observado desde dos posiciones M y N de la playa, separadas 1,28 km, siendo los ángulos AMN y ANM de 59,6° y 78,2° respectivamente. Halla la distancia del barco a la posición más lejana.

5. Si la fachada de un edificio se ve bajo un ángulo de 60° cuando el ojo del observador esta a 5,0 m de uno de los extremos y a 8,0 m del otro, ¿cuál es la longitud de la fachada del edificio?

6. La distancia entre dos trincheras Y y Q es de 426 m y los ángulos que forma dicha distancia con las visuales dirigidas a otra trinchera enemiga R, son de 70,4° y 44,2°. Calcula la distancia que hay de la trinchera Y a la trinchera enemiga.

7. Una torre de 426 m de altura se inclinó al paso de un huracán. Un hombre observa la parte superior de la torre con un ángulo de elevación de 52,1°. ¿A qué distancia se encuentra el hombre del pie de la torre si el ángulo de inclinación de esta es de 78,3° (desprecia la estatura del hombre y considera que la torre está inclinada hacia él).

8. Un barco está a 15 km directamente al sur de un puerto. Si el barco navega al nordeste 4.8 km, ¿a que distancia se encuentra del puerto?

9. Dos nadadores se encuentran a 250 m uno de otro. Ambos están nadando hacia el mismo punto, que se halla a 423 m del primero y a 360 m del otro. ¿Qué ángulo forman las direcciones de ambos?

5. *Área de un triángulo*

Teorema 1

> El área de un triángulo es igual al semiproducto de las longitudes de dos lados por el seno del ángulo que estos forman.

Demostración

En el triángulo ABC tracemos la altura $h = \overline{CD}$ relativa al lado c (fig. 4.18 a y b).

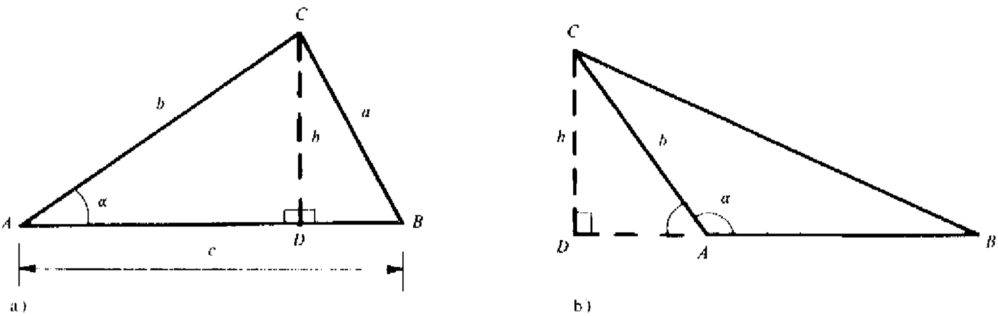


Fig. 4.18

En ambas figuras se tiene que:

$$A = \frac{1}{2} c \cdot h, \qquad \text{pero} \qquad h = b \text{ sen } \alpha$$

luego sustituyendo h se tiene:

$$\boxed{A = \frac{1}{2} c \cdot b \text{ sen } \alpha}$$

Análogamente, trazando las alturas relativas a los lados a y b se obtiene:

$$A = \frac{1}{2} a \cdot b \operatorname{sen} \gamma$$

$$A = \frac{1}{2} a \cdot c \operatorname{sen} \beta$$

■

Ejemplo 1

Halla el área de un triángulo ABC si se sabe que: $b = 20$ cm, $c = 15$ cm y $\alpha = 60°$

Resolución

$$A = \frac{1}{2} b \cdot c \operatorname{sen} \alpha$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A = 75\sqrt{3} = 75 \cdot 1{,}73 = 129{,}8$$
$$A \approx 130 \text{ cm}^2$$

Respuesta: El área del triángulo es aproximadamente $1{,}3 \cdot 10^2 \text{cm}^2$. ■

Ejercicios (epígrafe 5)

1. Calcula el área del triángulo ABC si se sabe que:
   a) $b = 8$; $c = 5$; $\alpha = 60°$
   b) $a = 40{,}5$; $b = 32$; $\gamma = 63{,}2°$
   c) $\alpha = 50°$; $\beta = 75°$; $c = 60$

2. Una carretera y un arroyo, ambos rectilíneos, se cortan formando un ángulo de 72°. Desde un punto del arroyo. cien metros mas abajo del cruce con la carretera, se tiende una cerca también rectilínea, que encuentra a la carretera a 150 m del cruce de esta con el arroyo ¿Cuál será la extensión del terreno que limita la cerca, el rio y la carretera? ¿Cuál será la longitud de la cerca, si esta es la más corta posible?

Aplicaciones

Aunque el origen de la trigonometria es la medición de triángulos, esta no es su única aplicación importante. La trigonometria nos permite, además, resolver diversos problemas geométricos y físicos.

6. *Polígonos regulares*

Entre las figuras planas mis importantes tenemos los poligonos regulares que como sabemos son aquellos que tienen todos sus lados y todos su?;ángulos iguales.

El cálculo de un elemento cualquiera de un polígono regular se facilita mucho con la trigonometría.

En un polígono regular si se trazan los radios de la circunferencia circunscrita este se descompone en triángulos isósceles, por eso la resolución de un polígono regular se reduce a la resolución de un triángulo isósceles.

Por elementos de un polígono regular entendemos:

n : número de lados
l : longitud de un lado
R : **radio** de **la** circunferencia circunscrita
a : apotema

Conocidos el número de lados de un polígono regular y otro cualquiera **de sus** elementos, siempre es posible hallar los restantes.

Ejemplo 1

El lado de un decágono regular (fig. 4.19) es igual a 10 cm, halla el radio de la circunferencia circunscrita y la apotema del polígono.

Resolución

Como n = 10 tenemos:

$$x = \frac{180^\circ}{n}$$

$$x = \frac{180^\circ}{10} = 18^\circ$$

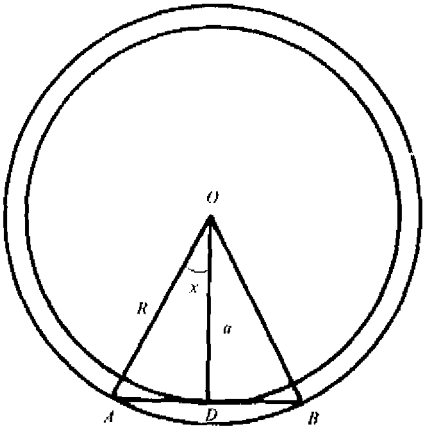


Fig. 4.19

En el triángulo determinante ADO tenemos:

$$\text{sen } 18^\circ = \frac{5}{R}$$

$$R = \frac{5}{\text{sen } 18^\circ} = \frac{5}{0{,}309}$$

$$R = 16{,}1 \approx 16$$

$$\tan 18^\circ = \frac{5}{a}$$

$$a = \frac{5}{\tan 18^\circ} = \frac{5}{0{,}325}$$

$$= 15{,}4 \approx 15$$

Respuesta: El radio de la circunferencia circunscrita es 16 cm y la apotema 15 cm, aproximadamente. ■

Teorema 1

> El área de un polígono regular es $A = p \cdot a$ donde p es el semiperímetro y a la apotema del polígono.

Demostración

En la figura 4.20 tenemos:

$$A = n \cdot A_{\triangle ABO}$$

$$A = n \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot a$$

$$A = \frac{nl}{2} \cdot a = \frac{P}{2} \cdot a$$

$$A = p \cdot a. \quad \blacksquare$$

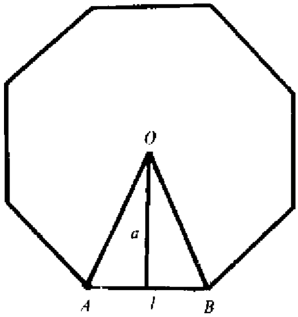


Fig. 4.20

En el ejemplo 1 el área del decágono será:

$$A = p \cdot a$$

$$A = \frac{10 \cdot 10}{2} \cdot 15{,}4 = 50 \cdot 15{,}4 = 770$$

luego el área es $7{,}7 \cdot 10^2$ cm^2

Ejercicios (epígrafe 6)

1. En cada inciso se conocen, de los cuatro elementos de un polígono regular (n, l, a, R) n y otro elemento. Calcula los restantes y el área
   a) $ti = 7$; $l = 13{,}2$ cm b) $n = 6$; $a = 17{,}4$ cm
   c) $n = 10$; $R = 23{,}5$ cm

2. El lado de un pentágono regular es de 24 cm. Halla el radio de la circunferencia circunscrita. la apotema y el área del pentágono.

3. El lado **de** un octógono regular mide 24 cm. Halla su área.

4*. El área de un octógono regular es 23.4 m^2; halla l, a, y R

5. El perímetro **de** un polígono regular de 11 lados es 23,5 m; calcula el radio de la circunferencia circunscrita al mismo y la apotema.

6. La diferencia entre **las** áreas de un exágono regular y de un cuadrado inscritos en una misma circunferencia es de 24.0 m^2. Calcula el hrca del circulo.

7. *Cálculo de cuerpos*

El cálculo de cuerpos también se facilita con el uso de la trigonometría. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1

Halla el volumen del prisma que se muestra en la figura 4.21.

Resolución

$V = A_B \cdot h$

Como conocemos dos lados y el ángulo comprendido podemos hallar el área de la base.

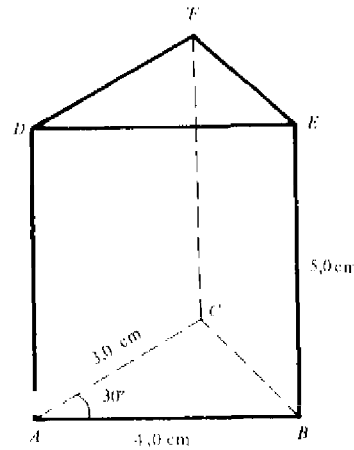


Fig. 4.21

$$A_B = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \text{ sen } \alpha$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \text{sen } 30°$$

$$= 6 \cdot 0,5 = 3$$

luego $V = 3 \cdot 5 = 15$

Respuesta: El volumen del prisma es de 15 cm³. ■

Ejemplo 2

Calcula el volumen del cuerpo representado en la figura 4.22 si se sabe que: α 0 ; 1 3,00 cm y la altura del cono es 1,50 cm.

Resolución

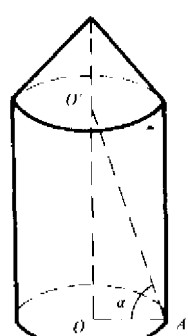


Fig. 4.22

$$V_c = V_{co} + V_{cil} \quad (1)$$

$$V_{co} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$V_{co} = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 3^2 \cdot 1,5$$

$$V_{co} = 14,13 \; (1)$$

$$V_{cil} = \pi r^2 h.$$

En $\triangle OAO'$ rectángulo en O tenemos:

$h' = r \tan 60°$

$h' = 3 \cdot 1,73 = 5,19$

luego $V_{cil} = 3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 5{,}19$
$V_{cil} = 146{,}7$ (2)

sustituyendo (1) y (2) en (I) se tiene: $V_c = 161$

Respuesta: El volumen del cuerpo es 161 cm^3. ■

Ejemplo 3

Halla el volumen y el área total del ortoedro *ABCDEFGH* que se muestra en la figura 4.23.

Resolución

$V = A_B \cdot h$ (I)

$A_B = 8 \cdot 6 = 48$ (1)

Hallemos la altura $h = \overline{DH}$

En $\triangle ABD$ rectángulo en A tenemos:

$\overline{DB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2$ (teorema de Pitágoras)

$\overline{DB}^2 = 64 + 36 = 100$

$\overline{DB} = 10$

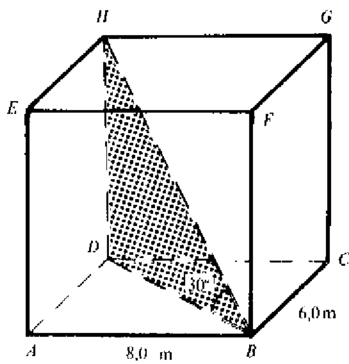


Fig. 4.23

En $\triangle HDB$ rectángulo en D tenemos:

$h = \overline{DB} \tan 30°$

$h = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 10 \cdot \frac{1{,}73}{3}$

$h = 5{,}77$ (2)

sustituyendo (1) y (2) en (I) se tiene: $V = 277 \approx 280$

$A_T = 2A_{\square ABFE} + 2A_{\square BCGF} + 2A_B$

$A_T = 2 \cdot 8 \cdot 5{,}77 + 2 \cdot 6 \cdot 5{,}77 + 2 \cdot 48$

$A_T = 258 \approx 260$

Respuesta: El volumen y el área del ortoedro son $2{,}8 \cdot 10^2$ m^3 y $2{,}6 \cdot 10^2$ m^2 respectivamente. ■

Ejemplo 4

La figura 4.24 representa uria pirámide regular de base cuadrada de 3,5 dm de altura. Si la altura de uria de sus caras forma un ángulo de 60° con el plano de la base, calcula el área total y el volumen del cuerpo.

Nota: El ángulo entre una recta y un plano es el formado por la recta y su proyección sobre el plano.

Resolución

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot h \qquad A_B = l^2$$

Como la base es un cuadrado, la paralela media $\overline{FG} = l$ y $\overline{OF} = \frac{l}{2}$.

Como el $\triangle FOE$ es rectángulo en O tenemos:

$$\tan 60° = \frac{OE}{OF} = \frac{h}{\frac{l}{2}}$$

$$\frac{l}{2} = \frac{h}{\tan 60°}$$

$$l = \frac{2 \cdot 3{,}5}{1{,}73} = 4{,}05$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 4{,}05^2 \cdot 3{,}5 = 19.$$

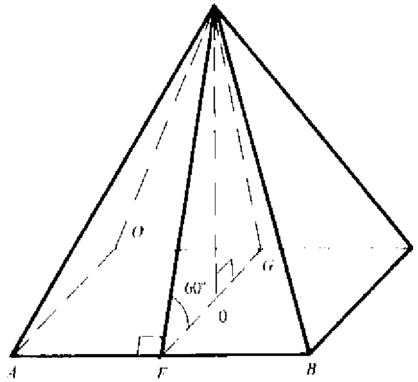


Fig. 4.24

Como la pirámide es regular, sus cuatro caras son iguales, luego:

$$A_T = A_B + 4A_{\triangle ABE}$$

$$A_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} \cdot l \cdot EF$$

Pero como el $\triangle EFG$ es equilátero, entonces $\overline{EF} = l = 4{,}05$ por lo que

$$A_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} l^2 = \frac{1}{2} \cdot 4{,}05^2 = 8{,}20$$

entonces $\quad A_T = 4{,}01^2 + 4 \cdot 8{,}2 = 49.$

Respuesta: El área total del cuerpo es de 49 dm^2 y su volumen 19 dm^3. ■

Ejercicios (epígrafe 7)

1. Calcula el volumen de los prismas rectos que aparecen en la figura 4.25.

2. Halla el volumen y el área lateral de una pirámide regular cuya base es un cuadrado de 36 cm de lado y sus caras son triángulos equiláteros

3[E]. Halla el volumen de una pirámide exagonal regular de 30 cm de altura, cuyas aristas laterales forman un ángulo de 60° con el plano de la base.

4. Una pirámide recta de base cuadrada tiene un volumen $V = 138$ cm^3 y las aristas laterales forman un ángulo de 72,5° con el plano de la base. ¿Cuál es la longitud de estas aristas?

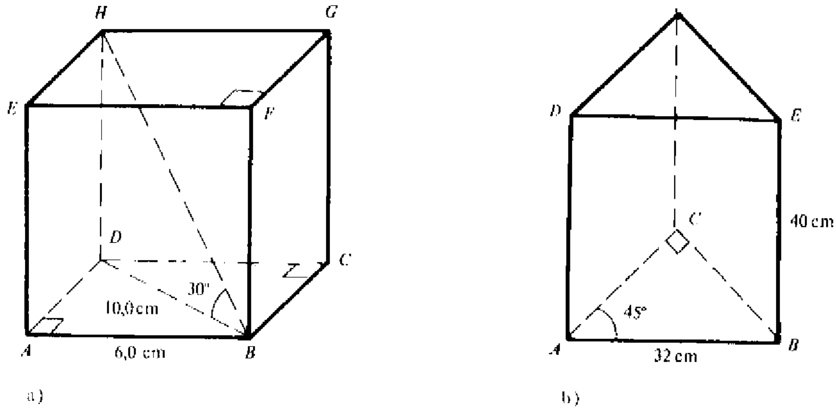


Fig. 4.25

5*. El ángulo de abertura de un cono circular recto es de 64° y la longitud de la circunferencia de la base es de 126 cm. ¿Cuáles son el área total y el volumen del cuerpo?

6. Dado el siguiente cuerpo formado por una pirámide de base rectangular y un prisma recto. Calcula su volumen sabiendo que (fig. 4.26)
$a = 4{,}0$ cm ; $b = 3{,}0$ cm;
$c = 2{,}5$ cm ; $\alpha = 26{,}6°$; $h' = 5{,}2$ cm.

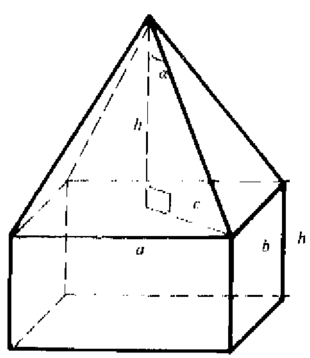


Fig. 4.26

7*. Una pirámide regular de base cuadrada de 12 cm de altura se corta por un plano paralelo a la base y distante 8,0 cm del vértice. Si el ángulo que forma la altura con las caras es de 60°, halla el volumen del cuerpo que resulta de eliminar la pirámide superior.

8. La base de un cono recto es un círculo de 1,0 m de radio y la generatriz forma un ángulo de 45° con el plano de la base
a) Calcula el volumen del cono

b) Si el cono es cortado por un plano paralelo a la base a la mitad de su altura, calcula el volumen del cuerpo que resulta si se le quita el cono superior.

8. *Cálculo en figuras planas*

Otra de las aplicaciones de la trigonometría es el cálculo en figuras planas. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1

La base menor de un trapecio rectángulo mide 12 cm, el lado no perpendicular a las bases mide 14,1 cm y forma con la base mayor un ángulo de 45°. Calcula el área del trapecio.

Resolución

En el trapecio rectángulo $ABCD$ (fig. 4.27), tenemos:

$$A = \frac{b + b'}{2} \cdot h \qquad (1)$$

En el $\triangle AHD$, rectángulo en H se tiene:

$$h = \overline{AD} \cdot \text{sen } 45^\circ$$
$$= 14{,}1 \cdot 0{,}707 = 9{,}96$$

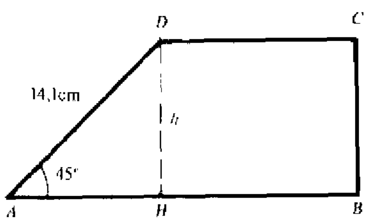


Fig. 4.27

Como el $\triangle AHD$ es rectángulo y tiene un ángulo agudo de 45°, es isósceles de base $\overline{AD}$; luego $h = \overline{AH}$ y como $\overline{DC} = \overline{HB}$ (por ser lados opuestos de un rectángulo) entonces:

$$\overline{AB} = \overline{AH} + \overline{HB} = 9{,}96 + 12 = 22$$

sustituyendo en (1): $A = \dfrac{(12 + 22)}{2} \cdot 9.96 = 169 \approx 170$

Respuesta: El area del trapecio es 1,7 dm² aproximadamente. ■

Ejemplo 2

Los catetos de un triángulo rectángulo miden 22 m y 11 m. Por un punto del cateto mayor, distante 8,0 m del vértice opuesto a la hipotenusa se traza una recta que forma con el otro cateto un ángulo de 60°, como se muestra en la fig. 4.28. Calcula el área del cuadrilátero que se forma.

Resolución

Sea el $\triangle ABC$ rectángulo en B (fig. 4.28)

$$\overline{AB} = 22;\ \overline{BC} = 11;\ \overline{EB} = 8{,}0$$

y $\sphericalangle BFE = 60°$.

Tenemos que:

$$A_{\square AEFC} = A_{\triangle ABC} - A_{\triangle EBF}$$

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \ \overline{AB} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot 11 = 121$$

$$A_{\triangle EBF} = \frac{1}{2} \ \overline{EF} \cdot \overline{FB}$$

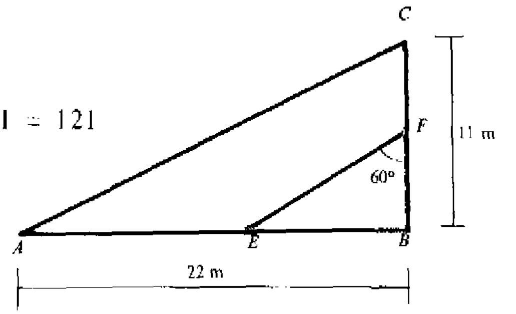


Fig. 4.28

En $\triangle EBF$ rectángulo en B tenemos:

$$\tan 60^\circ = \frac{\overline{EB}}{\overline{FB}}$$

$$\overline{FB} = \frac{\overline{EB}}{\tan 60^\circ} = \frac{8}{\sqrt{3}} = 4{,}62$$

luego $\quad A_{\triangle EBF} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4{,}62 = 18{,}5$

por lo tanto $\quad A_{\square AEFC} = 121 - 18{,}5 = 102{,}5 \approx 100$

Respuesta: El área del cuadrilátero es $1{,}0 \cdot 10^2$ m². ■

Ejemplo 3

El pentágono $ABCDE$ de la figura 4.29 está constituido por un trapecio isósceles $ACDE$ y un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa $\overline{AC}$ coincide con la base mayor del trapecio. Sabiendo que las bases del trapecio miden respectivamente 70 cm y 40 cm y que los ángulos EAB y BCD tienen amplitud de 105°, calcula el perímetro y el área del pentágono.

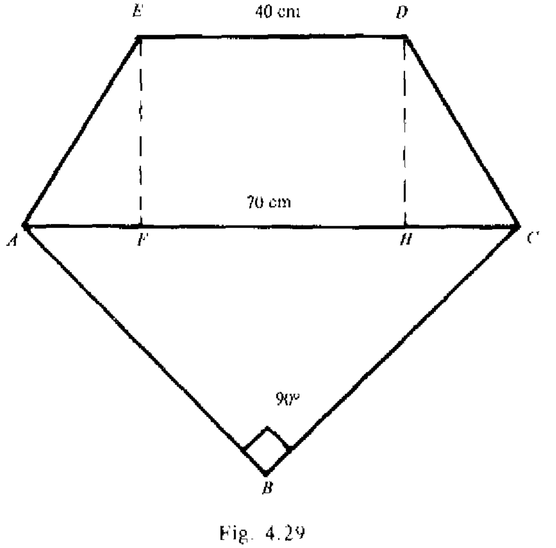


Fig. 4.29

Resolución

Perímetro: $P = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{AE}$

$= 2\overline{AB} + 2\overline{DC} + \overline{ED} \quad (\overline{AB} = \overline{BC} \text{ y } \overline{AE} = \overline{CD})$

$\overline{AB}$ podemos calcularlo en:

$\triangle ABC$, rectángulo en B e isósceles (fig. 4.29), ya que:

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ (t. Pitágoras)

y $4900 = 2\,\overline{AB}^2$

$\overline{AB} \approx 49{,}5$

Para calcular $\overline{CD}$, consideramos el $\triangle DHC$ rectángulo en H, que se obtiene trazando las alturas del trapecio tenemos que: $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD - \sphericalangle BCH$

pero $\sphericalangle BCA = 45°$ (ángulo base en un triángulo rectángulo isósceles) luego $\sphericalangle ACD = 105° - 45° = 60°$,

además, $\overline{AF} = \overline{HC} = \dfrac{70 - 40}{2} = 15$

y $\sphericalangle CDH = 90° - \sphericalangle ACD = 90° - 60° = 30°$

luego $\overline{DC} = 2\overline{HC} = 30$ (teorema 1, epigrafe 2, capítulo 3)

$P = 2 \cdot 49{,}5 + 2 \cdot 30 + 40 = 199$

$P \approx 200$ cm

Para el área necesitamos conocer:

$\overline{DH} = \overline{DC} \operatorname{sen} 60° = 30 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 26$, entonces:

$A_{\bigcirc ABCDE} = A_{\triangle ABC} + A_{\square ACDE}$

$= \dfrac{1}{2}\,\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \dfrac{1}{2}\,(\overline{AC} + \overline{ED}) \cdot \overline{DH}$

$= \dfrac{1}{2} \cdot 49{,}5^2 + \dfrac{1}{2}\,(70 + 40) \cdot 26$

$= 1\,225 + 1\,430 = 2\,655$

$A \approx 2700 \text{ cm}^2$

Respuesta. El perímetro del pentágono es $2{,}0 \cdot 10^2$ cm y el área $2.7 \cdot 10^3$ cm² □

Ejercicios (epígrafe 8)

1. Un triángulo equilátero tiene por lado 11,4 cm. Halla su altura y su área

2. Halla el área de un triángulo isósceles cuya base es 80 cm y los ángulos adyacentes de 30°.

3. Las diagonales de un rectángulo miden 6,50 m y el ángulo entre ellas es de 55°. ¿Qué longitud tienen los lados?

4. **En** un triángulo **sus** lados miden 38 cm, 38 cm y 22 cm respectivamente. Halla los tres ángulos de dicho triángulo así como la altura relativa al lado menor.

5. De un rombo se conocen el **lado** (longitud 6,5 m) y un ángulo (45°) Calcula las longitudes de las diagonales.

6. Dos lados consecutivos de un paralelogramo miden **90** y 98,7 **m** respectivamente y forman un ángulo de 45°. Halla el área del paralelogramo.

7. En el paralelogramo *ABCD* (fig. 4.30) $\sphericalangle DAB = 45°$; $\overline{AC} = 25$ m ; $h = 15$m . Halla $A_{\square ABCD}$.

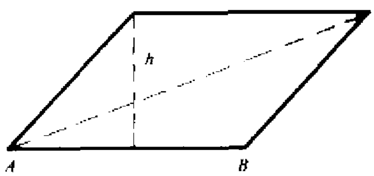


Fig. 4.30

8*. Demuestra que el área de un paralelogramo es igual al producto **de** dos lados adyacentes por el seno del angu**lo** comprendido.

9. De un trapecio isósceles sabemos que sus **bases** miden 15 cm y 25 cm respectivamente. **Si** los **lados** no paralelos forman con la base mayor un ángulo de 60°, calcula su área.

10 Los ángulos agudos de un trapecio tienen una amplitud de 60° y 45" Sabiendo que el lado oblicuo adyacente al ángulo de 60° y la base menor miden 22 cm y 12 cm respectivamente, calcula el area y el perimetro del trapecio.

11. Calcula el área del polígono *ABCDE* **con** los datos que se acotan en la figu**ra** 4.31.

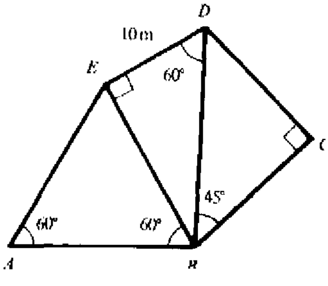


Fig. 4.31

12*. **Se tienen** tres círculos tangentes exteriormente dos a **dos** con radios 35 cm, 50 cm y 65 ctn respectivamente, Encuentra los ángulos del triángulo que se forma al **unir** sus centros.

13*. Si con un hilo se puede formar el contorno de un triángulo equilátero de 5,0 cm de radio, ¿qué longitud, en centímetros, tendrá el radio de la circunferencia que se puede formar con este hilo?

9. *Cálculo de áreas*

Además del cálculo de elementos de una figura plana, también es posible calcular áreas de figuras combinadas aplicando los procedimientos trigonométricos.

Ejemplo 1

La circunferencia de centro O está inscrita en un exágono regular de 12 cm de lado, halla el área de la superficie sombreada (fig. 4.32).

Resolución

$A = A_{\text{⬡}ABCDEF} - A_{\circ} = p \cdot a - \pi a^2$ (1)
(área de un polígono regular y un círculo).

Para calcular la apotema: tracemos el radio OA y la apotema $OM = a$ del exágono.
Tenemos que:

$\overline{OA} = 12$ (el lado del exágono es igual al radio de la circunferencia circunscrita)

$\alpha = \dfrac{180^\circ}{6} = 30^\circ$, entonces $a = OA \cos \alpha$

$a = 12 \cos 30^\circ = 12 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$

luego, sustituyendo en (1) se tiene

$A \approx \dfrac{6 \cdot 12}{2} \cdot 6 \cdot 1{,}73 - 3{,}14 \cdot (6\sqrt{3})^2$

$\approx 374 - 339 = 35$

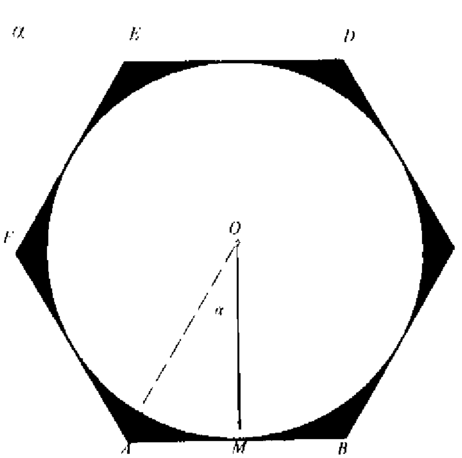


Fig. 4.32

Respuesta: El área de la superficie sombreada es de 35 cm². ■

Ejercicios (epígrafe 9)

1. Sobre el lado AB del cuadrado $ABCD$ de 8,0 cm de lado (fig. 4.33), se ha construido el triángulo equilátero ABE y se ha trazado el segmento DE. Halla el área del $\triangle DAE$.

2. En la figura 4.34, BC: diámetro, AB = 30 cm y $\sphericalangle ACB = 30°$
Halla el área de la región sombreada.

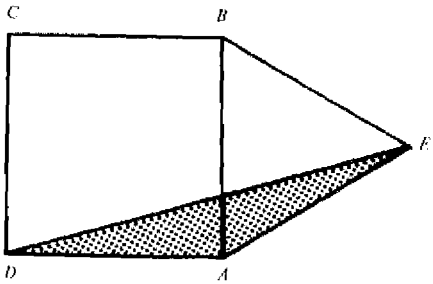


Fig. 4.33

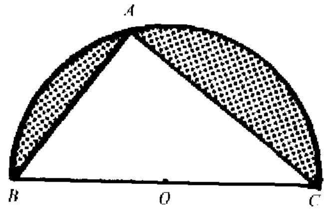


Fig. 4.34

3. En el exágono regular $ABCDEF$ de 2,0 cm de lado, se trazan las diagonales $\overline{AE}$ y BD (fig. 4.35). Halla el área de la parte sombreada.

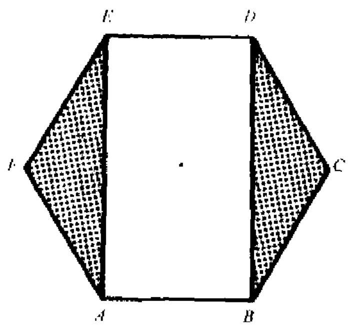


Fig. 4.35

4. En la figura 4.36 AT y AT' son tangentes a la circunferencia, OT = 100 cm y $\sphericalangle\ TAT'$ = 60°. Halla el área de la región sombreada.

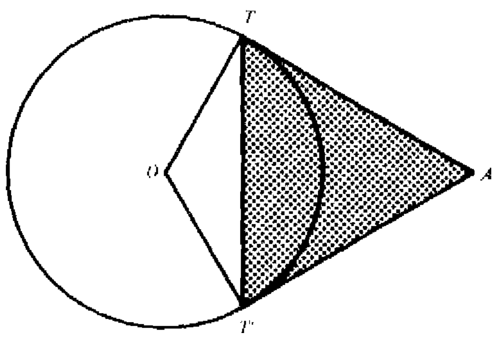


Fig. 4.36

5*. Un exágono regular y un triángulo equilátero están inscritos en una misma circunferencia de radio 10 m y los vértices del triángulo coinciden con los vértices del exágono. Halla el área de la región comprendida entre el exágono y el triángulo.

6. Haciendo centro en cada uno de los puntos medios del triángulo ABC se han trazado semicircunferencias. Si $AB = 50$ cm, $BC = 42$ cm y $\measuredangle ABC = 39°$, halla el área de la región sombreada (fig. 4.37).

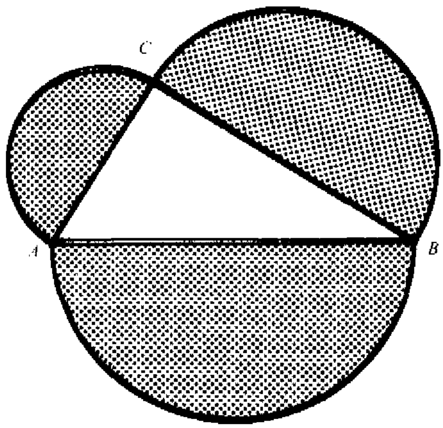


Fig. 4.37

10. *Aplicaciones a demostraciones*

Utilizando la trigonometría es posible demostrar, de manera muy simple, algunas propiedades geométricas importantes cuya demostración por métodos puramente geométricos resulta, a veces, muy complicada.

Ejemplo 1

Demuestra que la longitud de la mediana relativa al lado c de un triángulo cualquiera ABC en función de sus lados es:

$$m = \sqrt{\frac{1}{2}\left[a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}\right]}$$

Demostración

Sean el $\triangle ABC$ y $CM = m$ la mediana relativa al lado c (fig. 4.38).

Aplicando la ley de los cosenos tenemos:

En $\triangle MBC$: $a^2 = m^2 + \left[\frac{c}{2}\right]^2 - 2m\left[\frac{c}{2}\right]\cos\theta \quad (1)$

En $\triangle AMC$: $b^2 = m^2 + \left[\frac{c}{2}\right]^2 - 2m\left[\frac{c}{2}\right]\cos\delta \quad (2)$

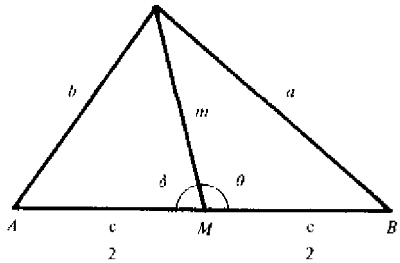


Fig. 4.38

pero $\theta = 180^\circ - \delta$ (ángulos adyacentes)
luego $\cos\theta = \cos(180^\circ - \delta) = -\cos\delta$
y la expresión (1) queda:

$$a^2 = m^2 + \left[\frac{c}{2}\right]^2 + 2m\left[\frac{c}{2}\right]\cos\delta \qquad (3)$$

sumando (2) y (3) se obtiene: $a^2 + b^2 = 2m^2 + 2\left[\frac{c}{2}\right]^2$

de donde $m^2 = \frac{1}{2}\left[a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}\right]$

por lo tanto $m = \sqrt{\frac{1}{2}\left[a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}\right]}$ ■

Ejemplo 2

En todo triángulo, la bisectriz de cualquiera de sus ángulos interiores divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados.

Demostración: Sean el $\triangle ABC$ y $\overline{CD}$ la bisectriz del ángulo γ (fig. 4.39). Sean $\overline{AD} = x$ y $\overline{DB} = y$

Debemos demostrar que: $\frac{x}{y} = \frac{b}{a}$

Aplicando la ley de los senos tenemos:

En $\triangle ADC$: $\dfrac{x}{\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\theta}$ (1)

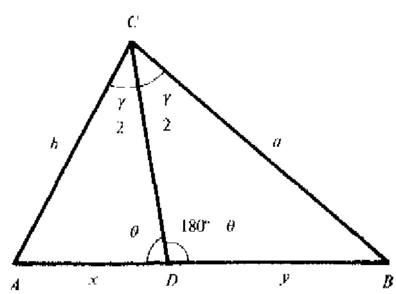


Fig. 4.39

En $\triangle DBC$: $\dfrac{y}{\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}} = \dfrac{a}{\operatorname{sen}(180^\circ - \theta)}$

o sea $\dfrac{y}{\operatorname{sen}\dfrac{\gamma}{2}} = \dfrac{a}{\operatorname{sen}\theta}$ (2)

dividiendo (1) por (2) se obtiene: $\dfrac{x}{y} = \dfrac{b}{a}$. ■

Ejemplo 3

El área de un triángulo ABC cualquiera viene dada por la fórmula de Herón:

$$A_{\triangle ABC} = \sqrt{p\,(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \textbf{donde } p = \frac{a+b+c}{2}$$

Resolución

En $\triangle\ ABC$ tenemos

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\, b\, c \operatorname{sen}\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\, b\, c \sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{1}{2}\, b\, c \sqrt{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}$$

$$= \frac{1}{2}\, b\, c \sqrt{\left[1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right]\left[1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right]} \text{ (ley de los cosenos)}$$

$$= \frac{1}{2}\, b\, c \sqrt{\left[\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}\right]\left[\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4}\cdot\frac{a^2-(b-c)^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{b+c+a}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}}$$

pero como $\dfrac{b+a+c}{2} = p$, entonces

$$\frac{b+c-a}{2} = p-a\ ;\quad \frac{a+b-c}{2} = p-c \quad \text{y} \quad \frac{a-b+c}{2} = p-b$$

luego,

$$A_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ .\ ■$$

Nota: Esta fórmula es muy útil para calcular el área de un triángulo conocidos sus tres lados. En lo adelante puedes utilizarla en la resolución de los ejercicios.

Ejercicios (epígrafe 10)

1. Halla el área del $\triangle ABC$ aplicando la fórmula de Herón, si sus lados son:
   a) $a = 12$ m, $b = 14$ m, $c = 18$ m
   b) $a = 28$ cm , $b = 36$ cm, $c = 42$ cm

2. Demuestra que el lado de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de radio r es igual a $r\sqrt{3}$.

3. Halla una expresión para calcular el lado de un polígono regular de n lados en función del radio de la circunferencia circunscrita.

4. Demuestra que en todo paralelogramo la suma de los cuadrados de sus diagonales es igual a la suma de los cuadrados de sus lados.

5. Demuestra que si dos triángulos tienen un ángulo igual, sus áreas son proporcionales a los productos de los lados que forman dicho ángulo.

6. Un exágono regular y un triángulo equilátero están inscritos en una misma circunferencia. Prueba que la apotema del triángulo es igual a la mitad del lado del exágono.

11. *Otras aplicaciones*

Muchos problemas sencillos de la Física y la Astronomía pueden ser resueltos utilizando los conocimientos de trigonometría. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1

Sobre un plano que posee una inclinación de 23,5° se desliza hacia abajo un cuerpo sobre el cual actúa la fuerza de gravedad (490 N) con una velocidad constante. Calcula el módulo de las componentes de la fuerza de gravedad sobre cada eje (fig. 4.40).

Resolución

En la figura 4.40

$|\vec{F}_x| = \overline{OS}$; $|\vec{F}_g| = \overline{OR} = 490$

$|\vec{F}_y| = \overline{OQ}$

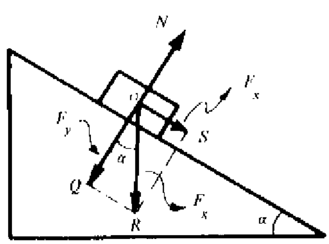


Fig. 4.40

$\alpha' = \alpha$ por ser ambos agudos con sus lados respectivamente perpendiculares.

En $\triangle$ OQR rectángulo en Q tenemos:

$\overline{OQ} = \overline{OR} \cos \alpha$ $\qquad$ $\overline{OS} = \overline{OP} \operatorname{sen} \alpha$

$\overline{OQ} = 490 \cdot 0{,}917$ $\qquad$ $\overline{OS} = 490 \cdot 0{,}399$

$\overline{OQ} = 449$ $\qquad$ $\overline{OS} = 196$

Respuesta: los módulos de las componentes pedidas son:

$|\vec{F_v}| = 196$ y $|\vec{F_u}| = 499$ ■

Ejemplo 2

Dos trenes parten al mismo tiempo de una tnisina estación siguiendo vías rectilíneas que forman entre si un ángulo de 30°. Uno de los trenes con una velocidad de 70 km/h y el otro a 80 km/h. ¿A qué distancia se encontrarán los trenes al cabo de media hora?

Resolución

Sean A la estación, $\overline{AB} = c$ y $\overline{AC} = b$ las vías (fig. 4.41). B y C representan las posiciones de los trenes al cabo dc la media hora.

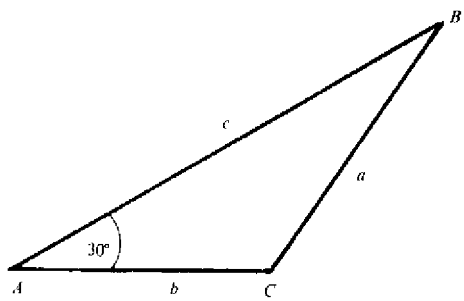


Fig. 4.41

Tenemos que. $s = v \cdot t$

luego $c = 80 \cdot 0{,}5 = \mathbf{40}$ y $b = 70 \cdot 0{,}5 = 35$

En $\triangle ABC$ tenemos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ (ley de los cosenos)

$a^2 = 35^2 + 40^2 - 2 \cdot 35 \cdot 40 \cdot 0{,}866$

$a^2 \approx 400$

luego $a = 20$

Respuesta: Los trenes se encontrarán a SO km de distancia al cabo de media hora. ■

Ejemplo 3

Desde lo alto de una montaña a 4 700 m sobre el nivel del mar *se* observa que el ángulo de depresión del horizonte es de 2,1° Halla el radio de la Tierra suponiendo que sea esférica.

Resolución

En la figura 4.42 (que no **está dibujada a escala), el circulo de** centro O representa **la** Tierra.

$\overline{AB} = h$ altura **de la** montaña.
BC: plano horizontal que pasa por el observador.
BH: visual dirigida al horizonte.
$\sphericalangle C'HH = \theta$. ángulo **de** depresión del horizonte.
$\overline{OA} = \overline{OH} = r$ radio de **la** Tierra.

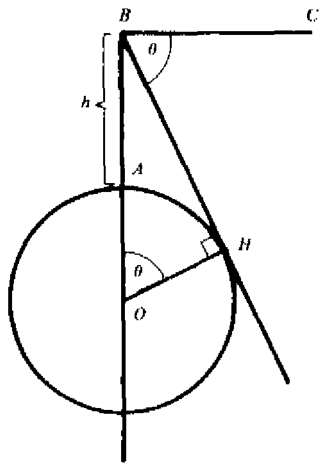


Fig. 4.42

En $\triangle$ OHB rectángulo **en** H **(por** ser BH tangente) tenemos **que:**

$$\cos\theta = \frac{\overline{OH}}{\overline{OA} + h}$$

$$\cos\theta = \frac{r}{r+h}$$

de donde $r = \dfrac{h\cos\theta}{1-\cos\theta}$

$$\text{o } r = \frac{h\cos\theta}{2\,\mathrm{sen}^2\dfrac{\theta}{2}}$$ (Ver ejercicio 5e **del capitulo** 3)

$$r = \frac{4\,700 \cdot 0{,}999}{2 \cdot 0{,}019^2}$$

$$r = \frac{4\,700 \cdot 0{,}999}{2 \cdot 3{,}61 \cdot 10^{-4}}$$

$$r = 6503186 \approx 6500000$$

Respuesta: **El** radio **de** la Tierra es **aproximadamente** $6{,}5 \cdot 10^6$ m. ■

Nota: Al hacer los cálculos se ha utilizado la expresión $2\,\mathrm{sen}^2\dfrac{\theta}{2}$ en lugar **de** $1 - \cos\theta$, **pues al** ser **esta** última una diferencia tan próxima a cero, se pierde mucha precisión **en** los mismos.

Ejercicios (epígrafe 11)

1. Dos ciclistas parten de un mismo sitio al mismo tiempo. Uno se dirige hacia el sur a 13 km/h y el otro hacia el este a 11 km/h. ¿A qué distancia se encontrarán el uno del otro tres horas después de la salida?

2. Un caballo tira de una vagoneta con una fuerza de 735 N. en una dirección que forma con la horizontal un ángulo de 35°. Determina la componente horizontal, la vertical y el ángulo que forma con esta.

3. Un avión meteorológico sube 8,0 m/s y su velocímetro señala 420 km/h
   a) ¿Qué altura alcanza el avión a los 10 min?
   b) ¿Qué ángulo forma la trayectoria del avión con la horizontal?

4. Durante un ejercicio de Las FAR un observador ve dos nidos de ametralladoras enemigas A y B bajo un ángulo de unos 130°. Oye un disparo de A, 7 s después de ver el fogonazo, y uno de B, 8 s después. ¿A qué distancia están los nidos de ametralladoras uno del otro? (Tómese la velocidad de propagación del sonido igual a 340 m/s.)

Ejercicios del capítulo

1. Resuelve el $\triangle ABC$ y halla su área si se sabe que:
   a) $a = 44{,}6$; $b = 34{,}1$; $\gamma = 90°$
   b) $c = 11{,}5$; $a = 20{,}4$; $\alpha = 90°$
   c) $\alpha = 30{,}3°$; $a = 13$; $\beta = 90°$
   d) $\alpha = 79{,}9°$; $\beta = 44{,}6°$; $b = 56{,}8$
   e) $a = 8{,}04$; $\beta = 45{,}1°$; $\gamma = 35{,}4°$
   f) $b = 83{,}4$; $c = 95{,}2$; $\alpha = 51{,}1°$
   g) $a = 7{,}3$; $b = 8{,}2$; $c = 9{,}1$

2. Un aviador desea hallar el ancho AB de la entrada de una bahía (fig. **4.43**). Los aparatos del avión le indican que va volando a una altura de 500 m. Si se encuentra directamente sobre el punto A y el $\sphericalangle AOB$ mide 37,6°, ¿cuál es el ancho de la bahía?

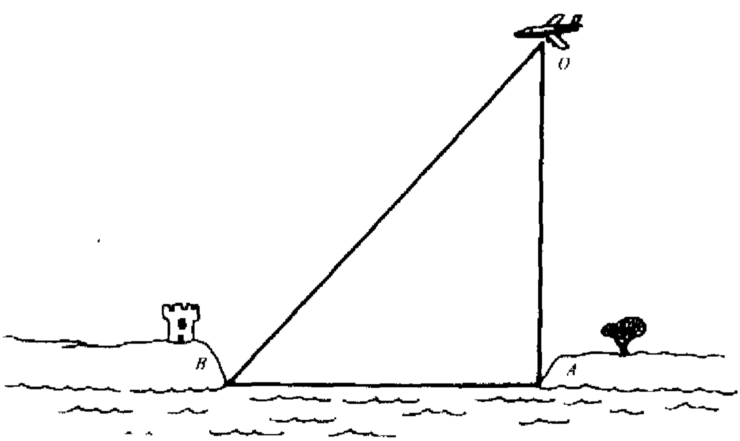


Fig. 4.43

3. En una circunferencia de centro O. la cuerda AB mide 60 cm y $\sphericalangle$ AOB = 70°. Halla el radio de la circunferencia.

4. El ángulo de elevación del extremo superior de un monumento es de 18,2° desde un cierto punlo. Si se caminan 100 m hacia el monumento, el ángulo de elevación es entonces de 45°. ¿Cuál es la altura del monumento?

5. El techo de la nave de un almacén está sostenido por una estructura de vigas, una de cuyas unidades se ilustra en la figura 4.44.

Si $\sphericalangle$ BDE = 58,5°
BAD – 26,3°
AD = 16,6 tn,
halla la longitud de la viga AB

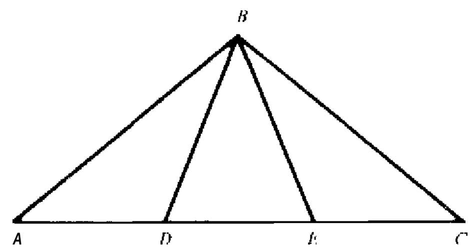


Fig. 4.44

6. En un triángulo ABC, a = 48,96 cm; β = 48,3° y y = 57.4':'. llalla el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo y el área dc este.

7. Los postes de una porteria de fútbol están separados 7.32 m. Un muchacho patea la pelota desde un punto del terreno que se encuentra a 15,2 m de un poste y a 17,5 m del otro. ¿Bajo qué ángulo tiene que dar el golpe para anotar un gol?

8. En un AABC, CD es la mediana relativa al lado $\overline{AB}$; $\overline{AB}$ = 84 m; $\overline{CD}$ = 42 m y $\sphericalangle ADC$ = 60,5°. Halla el área del triángulo.

9. Un cayo se ve bajo un ángulo de 33,9° desde un punto que dista 3,0 km de uno de sus extremos y 7,0 km del otro. Calcula el largo del cayo.

10*. Se dirigen visuales a dos objetos inaccesibles A y B desde dos estaciones C y D, situadas a un mismo lado de la recta que une a los primeros. Las dos estaciones distan entre si 562 m, se miden los siguientes ángulos: $\sphericalangle ACR$ = 62,2° $\sphericalangle BCD$ = 41,1°, $\sphericalangle$ ADB = 60,8° y $\sphericalangle ADC$ = 34,9°. llalla la distancia que separa a ambos objetos.

11. El lado de un pentágono regular es de 21,8 cm. Halla la longitud de sus diagonales.

12. Un lado de un paralelogramo mide 35 m y una de sus diagonales 63 m Calcula la longitud de la otra diagonal sabiendo que el ángulo formado por ellas es 21,6°.

13. Calcula el radio de una circunferencia inscrita en un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa mide 8,0 m y uno de sus ángulos 60°.

14. Calcula el área de la figura limitada por los contornos de dos exágonos regulares, uno inscrito y otro circunscrito en una circunferencia de 10 m **de radio.**

15. **La cuerda** común **de** dos círculos secantes es lado del triángulo equilátero inscrito en el primer circulo y **lado** del cuadrado inscrito en el **segundo.** Si el radio del primer circulo es 3,0 m. calcula:
a) el área de la figura constituida por el triángulo y el cuadrado,
b) el área de la superficie común a los dos círculos.

16. **Calcula el** área de un octógono regular inscrito en una circunferencia de 6,8 m de radio.

17. Un tanque de agua está constituido por un cilindro de 1,5 m de radio y dos semiesferas (fig. 4.45). Si el ángulo α es igual a 60°, halla el volumen del tanque.

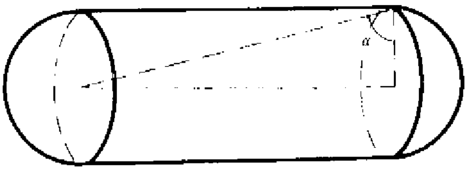


Fig. 4.45

18*. Demuestra que el área **de** un cuadrilátero cualquiera es igual a la mitad del producto de sus diagonales por el seno del ángulo que forman.

19*. Siendo *ABCDEF* un exágono regular (fig. 4.46), calcula el área del trapecio *DEGH*.

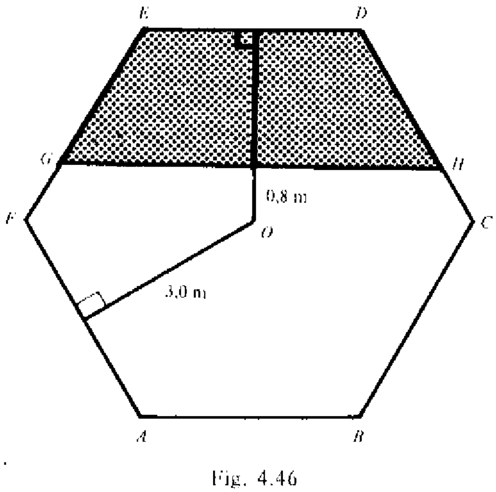


Fig. 4.46

20. Desde un moderno helicóptero que vuela a 600 m de altura se observa un punto del terreno 16 s después de sobrevolarlo y bajo un ángulo de 32". ¿Qué velocidad llevaba el helicóptero?

21*. Un satélite viaja en una órbita circular a 1 600 km sobre la Tierra y pasará sobre una estación de rastreo al mediodía. Si se demora dos horas para completar su órbita y el radio de la Tierra es aproximadamente 6 500 km, calcula a qué hora el satélite sera detectado por una antena dirigida 30° sobre el horizonte (fig. 4.47).

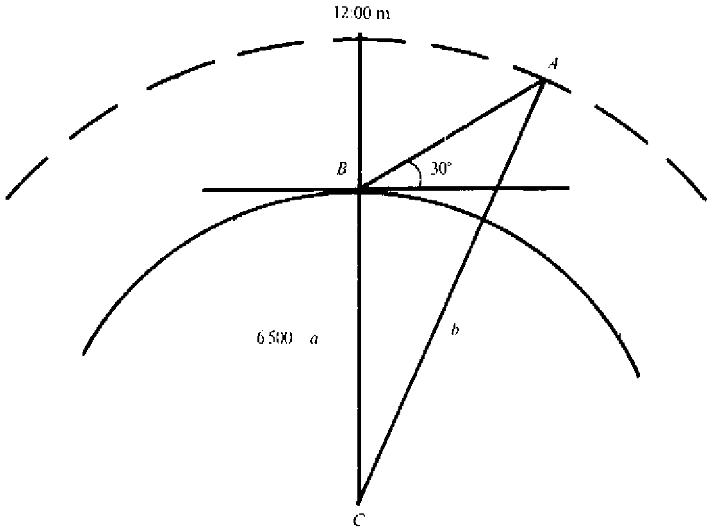


Fig. 4.47

Respuestas de los ejercicios

CAPÍTULO 1

Epígrafe 1

$\boxed{1}$ a) V, b) V, c) F, d) F, e) V, f) V, g) V, h) V, i) V.

$\boxed{2}$ a) $\notin$, b) $\in$, c) $\notin$, d) $\subset$, e) $\notin$, f) $\subset$, g) $\in$, h) $\subset$,

$\boxed{3}$ a) $\in$, b) $\in$, c) $\not\subset$, d) $\in$, e) $\subset$, f) $\in$, g) $\notin$, h) $\notin$, i) $\not\subset$

$\boxed{4}$ a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant \sqrt{3}\}$, b) $B = \{x \in \mathbb{R} : x < \sqrt{2}\}$.

c) $C = \left\{x \in \mathbb{R} : -3 \leqslant x < 2{,}75\right\}$, d) $D = \left\{x \in \mathbb{R} : -2\frac{1}{5} < x \leqslant 4{,}\overline{3}\right\}$.

Epígrafe 2

$\boxed{1}$ $A \cup B = \left\{8{,}\overline{732}\ ;\ 2\frac{1}{5}\ ;\ 7;\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ 3{,}2\overline{83}\ ;\ 9;\ -13\right\}$;

$A \cap B = \left\{2\frac{1}{5}\ ;\ 9;\ 8{,}\overline{732}\right\}$;

$A \setminus B = \left\{-7;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$, $B \setminus A = \{3{,}2\overline{83}\ ;\ -13\}$; $B \cup C = B$,

$B \cap C = C$, $B \setminus C = \{9;\ 8{,}7\overline{32}\}$, $C \setminus B = \phi$.

$\boxed{2}$ $M \cup N = \{x \in \mathbb{Z} : x \geqslant -3\}$, $M \cap N = \{x \in \mathbb{N} : 2 \leqslant x \leqslant 5\}$, $M \setminus N = \{x \in \mathbb{N} : x > 5\}$,
$N \setminus M = \{x \in \mathbb{Z} : -3 \leqslant x < 2\}$, $N \cup P = N$, $N \cap P = \{-3\}$,
$N \setminus P = \{x \in \mathbb{Z} : -2 \leqslant x \leqslant 5\}$, $P \setminus N = \phi$.

$\boxed{3}$ $D \cup E = \left\{x \in \mathbb{R} : x < 5\right\}$; $D \cap E = \left\{x \in \mathbb{R} : -3\frac{1}{4} < x < \sqrt{2}\right\}$

$E \cup F = \left\{x \in \mathbb{R} : x > -3\frac{1}{4}\right\}$; $E \cap F = \phi$; $D \setminus E = \left\{x \in \mathbb{R} : x \leqslant -3\frac{1}{4}\right\}$;

$F \setminus D = F$.

$\boxed{4}$ $P \cup Q = \left\{x \in \mathbb{R} : x \geqslant -\frac{4}{3}\right\}$, $P \cap S = P$, $Q \cup S = \left\{x \in \mathbb{R} : x > -3\right\}$,

$Q \cap S = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leqslant 5\}$, $Q \setminus S = \{x \in \mathbb{R} : x > 5\}$,

$P \setminus Q = \left\{x \in \mathbb{R} : -\frac{4}{3} \leqslant x \leqslant 0\right\}$.

1 a) $x = 0$, b) $a = 2$, c) $y = -\frac{5}{3}$,

d) $b = 0$; $b = 3$, e) $z = -\frac{4}{3}$; $z = \frac{5}{4}$, f) $m = 0$; $m = 2$,

g) $a = \frac{5}{3}$; $a = -\sqrt{2}$, h) $x = 0$; $x = \frac{7}{2}$; $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

2 a) $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 4$; b) $a \in \mathbb{R}$, $a \neq -4$, $a \neq 2{,}7$; c) $x \cdot y \in \mathbb{R}$, $x \neq -21$, $y \neq 4$;

d) $x,y \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $y \neq -\frac{1}{2}$; e) x, $z \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $z \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$;

f) $m,p \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, $p \neq -\frac{3}{10}$; g) $x \in \mathbb{R}$, $x \geqslant 0$, $x \neq 2$.

3 a) $a,b,c \in \mathbb{R}$; 24; b) $m,n,p \in \mathbb{R}$; -13; c) $a,b,c \in \mathbb{R}^*$, -28;

d) $x,y \in \mathbb{R}$; -11; e) $m \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{R}^*$; 3; f) $a,b \in \mathbb{R}$; $\frac{1}{3}$; g) $c,b \in \mathbb{R}$; $-\frac{19}{24}$;

h) $x,y,z \in \mathbb{R}^*$; $534{,}\bar{4}$; i) $a \cdot b \cdot c \in \mathbb{R}$; $-\frac{11}{6}$;

j) $x,y,z \in \mathbb{R}$; $x,z \neq 0$, $y + z \neq 0$; $-10{,}5$; k) $a,c,d \in \mathbb{R}^*$, $3a - 4d \neq 0$; 8,8;
l) $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -2$; -3; m) $c,m,p \in \mathbb{R}$, $m,p \neq 0$, $p \neq c$; 25,0416.

a) No. b) **Sí.** c) ***Sí,*** d) **Sí,** e) **Sí,** f) **Sí,** g) **Sí,**
h) **Sí,** i) No, j) **Sí,** k) No, l) **Sí,** m) Sí.

a) dom f: $\mathbb{R}$; dom g : $\mathbb{R}$; dom h : $\mathbb{R}$; dom i : $\mathbb{R}^*$; dom m : $x \in \mathbb{R}$ $x \neq -3$
o $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, b) $f(2) = 2$; $f(-2) = -10$; $f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{7}{4}$; $g(0{,}3) = -4{,}91$;

$g(-1) = -4$; $g\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{44}{9}$; $h(3) = 2$; $h\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$; $h(-0{,}1) = -0{,}48$;

$i(-2) = -\frac{7}{5}$; $i\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}$, $i(0{,}4) = -0{,}44$; $m(-4) = 96$;

$m\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{28}$; $m(-0{,}3) = 0{,}07\bar{6}$; $3g(-2) = -3$; $\frac{4}{5}\, h\left(\frac{3}{4}\right) = -2{,}9$;

$i(-1) + m\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{31}{28}$; $2g(-1) + m(-2) = -24$.

6 a) $v = 29$ m/s, b) $s = 24{,}8$ m, c) $v = 62$ m/s,
d) $w = 12$ rad/s, e) $v = 55$ m/s, f) $F = 34$ N, g) $M = 48$ Nm,
h) $v_x = 3{,}4$ m/s, i) $E_c = 105$, j) $v_y = 5{,}1$ m/s.

7 a) $9a - 7b$, b) $-5m$, c) $2c - d^2$, d) $-2b^2$, e) $-x^3 - 3x^2 + 3x$,
f) $-10y^2 - 6xy + 5x^2y$, g) $-4{,}8a^2 + 2{,}3\,a + 1{,}7$,

h) $-\frac{13}{30}\,x^2 - x^2\,y + \frac{13}{14}\,xy^{-1}$.

8 Todas son verdaderas excepto el inciso e) que es $-2x^2 + 3x - 1$

Epígrafe 4

1 a) $35 - 10x$, b) $21 - 9y$, c) $5a^2 - 9$, d) $-12x^2 + 24x - 32$, e) $10b^4 - 6b^2$, f) $12z^4 - 6z^3$, g) $-2z$, h) $12a^6 - 16a^5$, i) $-8a^3 + 8a^2$, j) $-24y^5 a + 48y^6 - 6y^7$, k) $-2y^3 + 4y^2a + y^4$.

2 a) $2x + 2$, b) $x^2 + 2x - 8$, c) -3, d) $-a^2 + 3a + 18$, e) $3x^2 - 4$, f) $2x^4 - 2x^2 - 12$, g) $-a^3 + 3$, h) $-12a^6 - 11a^3 - 2$, i) $6x^4$, j) $9x^8 - 49$, k) $16y^2 + 40y + 25$, l) $9a^4 - 48a^2 + 64$.

3 a) $14x - 24$, b) $8x^2 - 4x - 24$, c) $8a + 7$, d) $5y^3 - 27y^2 + 18y$, e) $5y^3 - 12y^2 - 3y - 3$, f) $-5m^2 + 16m - 15$, g) $-6m^2 + 4m + 1$, h) $b^2 - 5b + 12$, i) $23t^2 - 35t - 4$, j) $8p^2 + 2p - 8$, k) $7p^2 - 6p + 2$, l) $2z^3 - 5z^2 - 32z + 48$, m) $5a^2 + 10a + 10$, n) $3a + 8$, ñ) $71b^2 - 152b - 16$, o) $2b^2 + 15b - 24$, p) $36m^4 + 78m^2 - 60m + 75$, q) $108p^6 - 40p^4 - 29p^2 - 64$.

4 a) $b^2 - 8a^2 - 8b + 3a$, b) $3b^2 - 6a^2 - 8b + 4a$, c) $-2b^2 - 2a^2 - a$, d) $10a^2 - 5b^2 - 10b + 7a$, e) $b^2 - 10a^2 - 2b - a$, f) $10a^2 - b^2 + 2b + a$, g) $-16a^2 + 9a - 22b$, h) $28a^2 - 14b^2 - 5a + 14b$.

5 a) $-5y^2 + 9y + 3$, b) $y^2 + 3y - 3$, c) $-3y - 6$, d) $-9y^3 + 9y^2 + y - 6$, e) $3y^3 - 11y^2 + 9y + 2$, f) $-6y^4 + 20y^3 - 31y^2 + 20y$, g) $y^2 + 5y + 2$, h) $-12y^3 + 21y^2 - 7y + 2$.

6 a) $6x^2 - 3x + 7$, b) $-8x^3 + x + 1$, c) $8x^3 - 4x^2 + 15x - 19$, d) $4x^2 - 13x + 20$, e) $-x^2 + 4x + 29$, f) $7x^2 - 22x + 69$; g) $-8x^3 + 15x^2 + 4x + 8$.

7 a) $4a + x$, b) $5m + 2n - p$, c) $-x^2 - 5x - 6$, d) $5y - 7x + 4xy$, e) $13b + 9 - 11b^{-1}$, f) $-3a^2x - 2ax + 4a$, g) $11x^2y - xy + 10xy^2$, h) $14c^{-2} + 8c^{-3} - 24c^{-1}$, i) $8b^2 - 19b + 30$, j) $-7x^4 + 8x^2 - 3x + 41$.

8 a) $2x^2 + (6x - 4 + 3x^{-2})$; $-2x^2 - (-6x + 4 - 3x^{-2})$,
b) $3x^3y^4 + (-5x^4y^3 + 2x^5y^2 - 9x^6y)$; $3x^3y^4 - (5x^4y^3 - 2x^5y^2 + 9x^6y)$,
c) $-2{,}3a^5 + 0{,}4a^4 + (-5{,}4a^3 - 7a^2 + 3{,}6)$; $-2{,}3a^5 + 0{,}4a^4 - (5{,}4a^3 + 7a^2 - 3{,}6)$,
d) $4 + (-2{,}7b^3c + 9b^2c^3 + 0{,}76bc^4)$; $4 - (2{,}7b^3c - 9b^2c^3 - 0{,}76bc^4)$,
e) $8x^{-2} + (9{,}4x^{-1} - 7{,}5 - 3{,}2x)$; $8x^{-2} - (-9{,}4x^{-1} + 7{,}5 + 3{,}2x)$,
f) $\frac{4}{9}x^5 + (-3{,}4x^{-5} - 8{,}5x^{-4} + 7x^{-2})$; $\frac{4}{9}x^5 - (3{,}4x^{-5} + 8{,}5x^{-4} - 7x^{-2})$.

9 a) $(3x^3 + 6x^2) + (-2x + 9)$; $-(-3x^3 - 6x^2) - (2x - 9)$,
b) $(-9a^2b - 6a) + (3ab^2 - ab^3)$; $-(9a^2b + 6a) - (-3ab^2 + ab^3) - (3ab - 9b)$,
c) $(3{,}4y^{-2} - 6x^{-1}) + (8 - 3{,}7x)$; $-(-3{,}4y^{-2} + 6x^{-1}) - (-8 + 3{,}7x)$,
d) $(5x^2 - 3x^2y) + (2p - 3p^2)$; $-(-5x^2 + 3x^2y) - (-2p + 3p^2)$,
e) $(2a^3 - 6a^2b) + (-3ab + 9b)$; $-(-2a^3 + 6a^2b) - (3ab - 9b)$,
f) $(5m^2n^3 + 14mn^4) + (-2n^5 - 6m^{-1}n^6)$; $-(-5m^2n^3 - 14mn^4) - (2n^5 + 6m^{-1}n^6)$,
g) $(4x^5 + 9x^4 - 7x^3) + (6x^2 + 15x - 8)$; $-(-4x^5 - 9x^4 + 7x^3) - (-6x^2 - 15x + 8)$,
h) $(1{,}2y^3 - 7y^2 - 4y) + (-8 + 7y^{-1} + 2y^{-3})$; $(1{,}2y^3 + 7y^2 + 4y) - (8 - 7y^{-1} - 2y^{-3})$.

Epígrafe 5

1 a) $2y^5 + y^4 - 16y^3 + 15y^2$, b) $10a^5 - 41a^4 + a^3 + 12a^2$, c) $18x^4 + 24x^3 - 79x^2 - 40x$, d) $20y^7 - 69y^6 + 44y^5 + 12y^4$,

e) $-2a^7 - a^6 + 26a^5 - 15a^4$, f) $-6b^4 + 21b^3 - 35b^2 + 36b + 14$,
g) $32x^5 - 44x^4 + 23x^3 - 4x^2 - 4x$, h) $-8y^6 + 10y^5 + 64y^4 - 9y^3 - 15y^2$,
i) $24x^6 + 10x^5 - 35x^4 + 25x^3 - 6x^2$,
j) $10z^7 + 26z^6 - 50z^5 + 24z^4 - 15z^3 + 21z^2 - 9z$,
k) $9a^4 - 36a^3 + 48a^2 - 24a + 4$, l) $25x^6 - 20x^5 + 4x^4 - 40x^3 + 16x^2 + 16$.

2 a) $6x^6 - 2x^5 - 40x^4 + 12x^3 - 2x$,
b) $-18a^5 + 89a^4 - 130a^3 + 86a^2 - 6a$,
c) $8y^6 - 28y^5 + 55y^4 - 81y^3 + 41y^2 - 28y$,
d) $-54b^4 + 99b^3 + 27b^2 - 75b + 40$,
e) $24z^5 + 25z^5 - 68z^4 + 25z^3 + 18z^2 - 16z + 14$.

3 a) $x^2 + 4;\ 3$, b) $x^2 - 7;\ 31$, c) $2x^2 + 5x + 18;\ 47$,
d) $3x^2 + 2x - 8;\ 4$, e) $x^2 + 6x + 4;\ 32$, f) $3x^2 - x + 2;\ -8$,
g) $2x^2 - x + 5;\ 0$, h) $5x^3 + 7x^2 + 14x + 30;\ 57$,
i) $x^3 - x^2 + 3x - 14;\ 38$, j) $2x^3 + x - 2;\ 0$.

4 a) $b = -7$, b) $b = -4$, c) $b = -4$, d) $b = -\frac{59}{4}$.

5 a) No, b) Sí, c) No, d) Sí.

Epígrafe 6

1 a) $b^3(5b - 3)$, b) $x^2b(2x^3 + 9b^3)$, c) $4a^3(3a^2 - 1)$,
d) $12y^2z^3(3z^2 + y^2m)$, e) $7p^3(5z^4 - 8pq^2)$, f) $x^2(4x^2 - 7x + 2)$,
g) $11m^2(2m - 1 + 5m^2)$, h) $6x^3y^2(4y^2 - 3xy - 5x^2)$,
i) $12m^3(3mn + 2m^2n^3 + 4)$, j) $12a^4b^5(4b^2c^2 - 5abc^3 - 3a^2)$,
k) $(x + 4)(3x^2 - 7)$, l) $(x - 2y)(5a + 3b)$,
m) $(z + 3a)(8b - 3x)$, n) $(2b + c)(3a + 5d - 7)$,
ñ) $(11p - 8)(2q + 3 - 6a)$, o) $(7b + q)(8m - 4b + 3)$.

2 a) $x^2(3x + 1)$, b) $21ab^3(3a^3c^4 - b^2)$, c) $m^3(35m^2 + 27m + 32)$,
d) $3p^3(2pq^5 - 4p^2q^3 + 9)$, e) $9x^4y^5(6x^2 - 3xy + 7y^2)$,
f) $18c^5(2cb^4 + 4b^4 + 3c^2d^4)$, g) $12m^4x^6(2mx^2 + 4m^2x - 5)$,
h) $11a^2(4p^8c^7a - 3p^7a^2 - 5c^6)$, i) $5c^3(12x^5y^6c - 15x^4y^5 - 11a^2c^3)$,
j) $12m^5p^4c^4(8mp^4c^3 + 5p^3 + 4m^2c)$, k) $(3a^2 + b^3)(5x^2 - 6y^3)$,
l) $(x - 2h)(3a + 7m - 3)$, m) $(b - 3c)(12a^2 + b - 3c)$,
n) $(a + 3b)(9q - m - 2n)$, ñ) $(5q - 6h)(2m - 3 + 8a - 9b)$,
o) $(15p + 8a)(2m - n - 7b + 6c)$, p) $(3b + 8c)(1 - 21bq - 56qc)$,
q) $(2a - b)(m - 3p - 2a + b)$.

3 a) $(5a + 1)(5a - 1)$, b) $(6x + 7y)(6x - 7y)$, c) $(4b - 9c)(4b + 9c)$,
d) $(2 + x^2)(2 - x^2)$, e) $(3y^3 - 8)(3y^3 + 8)$, f) $\left(\frac{6}{5} + b^2\right)\left(\frac{6}{5} - b^2\right)$,
g) $\left(c^3d^4 + \frac{7}{9}x\right)\left(c^3d^4 - \frac{7}{9}x\right)$, h) $\left(\frac{1}{3}m^5 - 10a^2\right)\left(\frac{1}{3}m^5 + 10a^2\right)$;
i) $\left(\frac{11}{12}p^3 - a^2b^4\right)\left(\frac{11}{12}p^3 + a^2b^4\right)$, j) $(0{,}1m + c^2)(0{,}1m - c^2)$,
k) $(0{,}3p^2 - x^3y^5)(0{,}3p^2 + x^3y^5)$, l) $(0{,}5c - 0{,}08p^2c^6)(0{,}5c + 0{,}08p^2c^6)$.

4 a) $(2x - 3y)(2x + 3y)$, b) $(8a^2b - 9y^3)(8a^2b + 9y^3)$,

c) $(10m^4 - 7p^2y^3)(10m^4 + 7p^2y^3)$, d) $\left(\frac{1}{4}x^2y^5 - 1\right)\left(\frac{1}{4}x^2y^5 + 1\right)$,

e) $\left(\frac{6}{5}m^2 - 11p^2y^3\right)\left(\frac{6}{5}m^2 + 11p^2y^3\right)$,

f) $(0{,}7p^3 - 0{,}6c^2x^5)(0{,}7p^3 + 0{,}6c^2x^5)$, g) $(0{,}09y^6 - 1{,}1x^2z^7)(0{,}09y^6 + 1{,}1x^2z^7)$,
h) $(2x - y - 9y^3x^4)(2x - y + 9y^3x^4)$, i) $(m^2 + 3n - 12y^2)(m^2 + 3n + 12y^2)$,
j) $(5b^3 - 2c - 0{,}7y^2)(5b^3 - 2c + 0{,}7y^2)$,
k) $(8m + 7p^3 + 6x^3)(8m + 7p^3 - 6x^3)$, l) $(3z^2 + 5x - y^3)(3z^2 - 5x + y^3)$,
m) $(4p^3 + 3a - b^3)(4p^3 - 3a + b^3)$, n) $(18a - 27 - 4a^{15})(18a - 27 + 4a^{15})$,
ñ) $(xy - y + 2a + b)(xy - y - 2a - b)$,

o) $\left(-\frac{3}{4}x + \frac{5}{12}z + 3\right)\left(\frac{13}{4}x + \frac{5}{12}z - 3\right)$.

$\boxed{5}$ a) $x(2x + 7)(2x - 7)$, b) $2y(yx - 5)(yx + 5)$, c) $6a^3(2a + 3)(2a - 3)$,
d) $5x^2(xy^3 - 4m^4)(xy^3 + 4m^4)$, e) $13b^2c^5(b^3 + 2c)(b^3 - 2c)$,
f) $8m^2n(m^2n + 5)(m^2n - 5)$, g) $(d^2 + 1)(d + 1)(d - 1)$,
h) $(m^4p^2 + 4)(m^2p + 2)(m^2p - 2)$, i) $2x^2(x^2 + 9y^6)(x + 3y^3)(x - 3y^3)$,
j) $5m^3(4m^4 + 1)(2m^2 + 1)(2m^2 - 1)$,

k) $a^3\left(\frac{2}{3}a + 0{,}1\right)\left(\frac{2}{3}a - 0{,}1\right)\left(\frac{4}{9}a^2 + 0{,}01\right)$.

$\boxed{6}$ a) $(a + 4)^2$, b) $(x - 5)^2$, c) $(c + 9)^2$, d) $(2b - 3)^2$, e) $(6y + 7)^2$,
f) $(d^2b^3 - 8)^2$, g) $(10a + b^3c^4)^2$, h) $(3m^3p - 5x^2)^2$, i) $(x + 3 + 3y^2)^2$,

j) $\left(\frac{3}{2}x^2 + 4y^4\right)^2$, k) $(0{,}2m^3 - 0{,}5p^2)^2$, l) $(2a + 5 - 6w^5)^2$.

$\boxed{7}$ a) $(x + 5)(x + 2)$, b) $(a - 7)(a - 2)$, c) $(y - 5)(y + 3)$,
d) $(m + 5)(m - 4)$, e) $(c - 6)(c - 4)$, f) $(x + 3)(x - 18)$,
g) $(y + 24)(y - 3)$, h) $(a^3 - 16)(a^3 - 3)$, i) $(b^2 - 12)(b^2 - 3)$,
j) $(m^5 + 15)(m^5 - 5)$, k) $(x^2 - 8a)(x^2 - 2a)$,
l) $(y^3 - 16a^4)(y^3 + 4z^4)$, m) $(3x - 7)(3x - 4)$,
n) $5(y - 2)(5y + 2)$, ñ) $(7a + 10)(7a - 4)$.

$\boxed{8}$ a) $(2a + 1)(a + 3)$, b) $(3b - 2)(b - 3)$, c) $(5x + 2)(x - 2)$,
d) $(4y - 3)(y + 2)$, e) $(3m - 8)(2m - 1)$, f) $(7p + 2)(p - 3)$,
g) $(3x^3 - 1)(x^3 - 12)$, h) $(5x^4 + 3)(x^4 - 2)$, i) $(6y^5 - 5)(y^5 + 2)$,
j) $(4m^2 - 3p^3)(m^2 - 3p^3)$, k) $(8a^3 + 3p^5)(a^3 - 4p^5)$, l) $(9c^4 + 3m^5)(c^4 + 5m^5)$.

$\boxed{9}$ a) $(x + 3)^2$, b) $(a^2 - 5)^2$, c) $(2c^3 - 1)^2$, d) $(m^5 - 8)(m^5 + 2)$,
e) $(y - 6)(y - 3)$, f) $(b^3 - 6)(b^3 + 4)$, g) $(d^5 + 10)(d^5 - 4)$,
h) $(p^4 + 12)(p^4 + 5)$, i) $(x^5 - 1)(x^5 - 25)$, j) $(2a - 3)(a - 4)$,
k) $(2m^3 - 7)(3m^3 + 1)$, l) $(10x^7 - 3)(x^7 - 4)$.

$\boxed{10}$ a) $(x^2 + 2)(x^2 - 14)$, b) $(4b^3 - 3a^2)^2$, c) $(3y^2 - 7b)(y^2 + b)$,
d) $(m^3 - 4b^2)(m^3 - b^2)$, e) $(2x^4 - b^3)(2x^4 - 11b^3)$,
f) $(b^2 + 6a^3)(b^2 - 2a^3)$, g) $(5x^2 + 6y^3)^2$, h) $(a^3 - 6b)(a^3 + 4b)$,
i) $(8y^2 - 3x^5)^2$, j) $(c - 2p^4)(3c + 5p^4)$, k) $(5y^5 - 2x^2)(y^5 + 5x^2)$.

$\boxed{11}$ a) $5x^2(x + 2)(x - 6)$, b) $4y^3(y - 6)(y - 4)$, c) $12ab^2(b - 4)(b + 2)$,
d) $3m^2n(2m - n)^2$, e) $6xy(2x + 3)(x - 4)$, f) $8b^2c(3c - 1)(2c - 1)$,
g) $15d^3g^2(3d + 4)(d - 2)$, h) $10m^3n^4(5m + 3)(m - 4)$,
i) $7x^2y(2x - 3y)^2$, j) $2a^3b(a^2 - 6)(a^2 + 4)$,
k) $6bc^5(c^3 - 4)(c^3 - 2)$, l) $8d^2h^3(d^4 + 6)(d^4 - 2)$,

m) $5m^3n^2(2m^2 - 9)(m + 1)(m - 1)$, n) $6p^5q(4p^3 + 3)(2p^3 - 5)$,
ñ) $9x^4y^2(x^2 - 6y)(x^2 + 3y)$, o) $-12a^5b^2(a^2b + 6b^2 - 12)$.

Epígrafe 7

1 a) $(a - 1)(a^2 - 3a + 5)$, b) $(b - 2)(b^2 - b + 2)$, c) $(x + 2)(x^2 + 2b + 3)$,
d) $(c - 1)(c + 3)(c + 2)$, e) $(x + 1)^2(x + 2)$, f) $(m + 3)(m - 4)(m + 2)$,
g) $(a - 1)(a - 2)^2$, h) $(b - 2)(b - 3)(b + 1)$, i) $(x - 1)(x + 3)(x - 2)$,
j) $(a + 1)(a - 2)^2$, k) $(m + 1)(m - 1)(m - 2)^2$, l) $(z - 1)(z + 2)^2(z + 3)$,
m) $(y + 1)^2(y + 2)(y - 4)$, n) $(x + 2)^2(x - 4)$.

2 a) $(c + d)(x + m)$, b) $(a + b)(y - z)$, c) $(b + q)(d - h)$,
d) $(b - x)(a - d)$ o $(x - b)(d - a)$, e) $(m + 2)(p + 5)$,
f) $(2a - 3)(b + 5)$, g) $(x + 2)(x - 3y)$,
h) $(4a + 5)(x - 1)$, i) $(x - 4)(4x^2 + 3)$,
j) $(2m - 5)(3am - 2b^2)$ o $(5 - 2m)(2b^2 - 3am)$, k) $(p + 3a)(4p^2 - a)$,
l) $(6x^2 - y^3)(3x - y)$, o $(y^3 - 6x^2)(y - 3x)$,
m) $(y - 3z)(5a^3 - 2b)$ o $(3z - y)(2b - 5a^3)$, n) $(1 + x)(1 - x^2yz)$,
ñ) $(a^3 + 5b)(a + 2)(a - 2)$, o) $(2ax - 3)(2x + 1)(2x - 1)$,
p) $(a + 2)(-3a^2 - 5b^3)$ o $(-a - 2)(3a^2 + 5b^2)$ o $-(a + 2)(3a^2 + 5b^3)$,
q) $(a + b)(x - y + z)$, r) $(x + 2y)(x^2 - z - 3)$.

3 a) $(x + 3 - a)(x + 3 + a)$, b) $(2a - 1 - 4y)(2a - 1 + 4y)$,
c) $(3y + 5 - 8c)(3y + 5 + 8c)$, d) $(6p - 7 + 9m^2)(6p - 7 - 9m^2)$,
e) $(4x - 5y - 2)(4x + 5y + 2)$, f) $(10p + 7a + 3y)(10p - 7a - 3y)$,
g) $(6x - y + 7z)(6x + y - 7z)$, h) $(11a^2 + 2a + 9)(a - 1)(11a + 9)$.
i) $(2c + 5a - 3b)(2c - 5a + 3b)$, j) $(y - 6a + 4x)(y + 6a - 4x)$.

4 a) $(x - 2)(x + 2 + a)$, b) $(a + 3)(a - 3 + 7x)$, c) $(3m - 2)(3m + 2 - 4a)$,
d) $(5a^2 - b)(5a^2 + b - 3a)$, e) $(3p - 1)(2p + 3a^3p + a^3)$,
f) $(2b + 7)(6m - 2b + 7)$, g) $(3m - 5)(a + 2b)$, h) $(x - 7)(3x^2 + 4a)$,
i) $(x - 3)(x + 3 - 4a)$ o $(3 - x)(4a - x - 3)$, j) $(5 + 2b)(5 - 2b + 2m)$,
k) $(3y - 5 - 4x)(3y - 5 + 4x)$, l) $(2x^2 + 3 + 5x^3)(2x^2 + 3 - 5x^3)$,
m) $\left(\frac{1}{2}c^2 - 3a + 7\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 3a - 7\right)$, n) $(x - 5 + 6y)(x - 5 - 6y)$,
ñ) $(2c^2d - 3 - 5mn^2)(2c^2d - 3 + 5mn^2)$.

5 a) $(b - 8)(b + 4 - 7c)$, b) $(x - 7)(8d - x + 6)$,
c) $(y + 2)(y - 2)(3y^2 + 1 - 5p)$, d) $(5c^3 + 1)(2p^2 - 5c^3 + 2)$,
e) $(8a - 5)(2x^2 - a - 1)$, f) $(xy - 2)(8y - xy - 5)$, g) $(m - 8n)(m + 8n + 4b)$,
h) $\left(\frac{2}{9}x^2y + 3x^2 - 7\right)\left(\frac{2}{9}x^2y - 3x^2 + 7\right)$, i) $(2y - 1)(4y + 3 - 5x)$,
j) $(2x^2 + 3)(9x^3 - x^2 + 4)$, k) $(2p - 1)(3m^2 + 4)$,
l) $(3y^2 + 2z)(9y - y^3 + 3z)$, m) $(3p - 5)(3a + 2p)(3a - 2p)$,
n) $(a - 2y^3)(2a^2 - a - 2y^3)$, ñ) $(3a^3 + 2)(3a^5 - 5 - 8b)$,
o) $(3m - n^3)(5m^2 - 3m + n^3)$, p) $(2a - 5)(2a - 5 - 5b)$.

Epígrafe 8

1 a) $\frac{2b^3}{9a^4}$, b) $\frac{4x}{y^5}$, c) $\frac{5}{m^2}$, d) $-\frac{1}{2c^4d^4}$, e) $\frac{8(a + b)}{a(a - b)}$.

f) $\frac{2}{-x^2y\,(x - y)}$; g) $-\frac{3m^2}{4p^5}$, h) $-\frac{a}{5}$, i) $\frac{5}{xy^2}$, j) -1,

k) $-\frac{4xy^3(5p - m)}{3}$, l) $\frac{5c^2(m^2 + 2h)}{16d}$,

m) $-\frac{m - 6 + 3x}{2m^2(m + 6 - 3x)}$, n) 1.

$\boxed{2}$ a) $\frac{1}{xy}$, b) $\frac{a + 2}{a}$, c) $\frac{x}{3}$, d) $\frac{m + 3}{m - 3}$, e) $\frac{2a + 5}{2a - 5}$,

f) $\frac{b - 6}{b + 3}$, g) $\frac{3c - 2}{4c + 3}$, h) $\frac{n\,(n - 1)}{n - 6}$, i) $\frac{3x^2}{x + 3}$, j) $\frac{x^2}{x - 6}$,

k) $\frac{a^2 + 7}{a^2 + 9}$, l) $\frac{x + 5}{2x + 3}$, m) $\frac{(a - 2)(4a^2 + 1)}{a - 10}$,

n) $\frac{x\,(4a + 5)}{a\,(3a + 2)}$, o) $\frac{3x + 2}{2x + 7}$, p) $\frac{2(2y - 1)}{2y^2 + y}$,

q) $\frac{12x}{x - 10}$, r) $\frac{6y\,(a - 3)(a + 3)}{(2a - 5)(a + 4)}$, s) $\frac{2x^3 + 4x}{2x^2 + 3}$,

t) $\frac{3y^3 + 6x}{y^3 - 2x}$, u) $\frac{m^2y - 3y^2}{6m^2 - 6y}$, v) $\frac{x + m - n}{4x^2 + 1}$.

$\boxed{3}$ a) $\frac{x + 4}{2a^2x}$, b) $\frac{b^2 + 3}{bc - 2}$, c) $\frac{m + 3}{m - 2}$, d) $\frac{a^3 - 5}{a - 3b^2}$, e) $\frac{a^2 + 1}{a - 3b^2}$,

f) $\frac{2a - 1}{ab - 3c}$, g) $\frac{y + 5 - 4x}{4x + y - 5}$, h) $\frac{3m - 2p - 7x}{3m + 7x + 2p}$.

$\boxed{4}$ a) $\frac{x - 3 - a}{2x^2 + 1}$, b) $\frac{y - 2}{y + 2 + 3a}$, c) $\frac{a + 1}{a - 2}$, d) $\frac{m^2 + 3}{2m - 3a}$,

e) $\frac{a^2 + 5}{a^2 + 2 - 2m}$, f) $\frac{3y - 2}{y^2 - 5}$, g) $\frac{b^2 - 3}{b - 1}$.

$\boxed{5}$ a) $\frac{a^2x - 3b}{a - 2 - x}$, b) $\frac{x^2 - 2}{x - 4}$, c) $\frac{2b + 7 - 2x}{x - 3}$, d) $\frac{y + 8}{3 - z + y}$,

e) $\frac{x - d - 1}{5a + 2}$ f) $\frac{-d + 4 + 2p}{4 + d - m}$ o $\frac{-d + 4 + 2p}{m - 4 - d}$, g) $\frac{4x - 3 + 2y}{2x - 5 - y}$

h) $\frac{5x - 3a - 6}{2x - 4a + 3}$, i) $\frac{3z - b - 4}{z^2 - 2b + 1}$, j) $\frac{2c - 3 - 4x}{2c^2 + 4}$, k) $\frac{4d + 2x + 3}{x - 1}$,

l) $\frac{3a - 8}{x - 2a^2 + 7}$, m) $\frac{b - 6}{a + b^2 + 7}$, n) $\frac{5x - 7}{x - 3y - 1}$.

$\boxed{6}$ a) $\frac{5a}{2b^2}$, b) $\frac{x^4}{4}$, c) $\frac{16b^4m^2}{21a^5n^2}$, d) $-9y^6z^2t^2$, e) $\frac{5x^3}{2z^4}$, f) $-\frac{bc^3}{2a}$,

g) $\frac{3}{a-b}$, h) $-\frac{36x^3}{x-3}$, i) $\frac{32mn}{5(n-7)}$, j) $\frac{(c-4)^2}{2c\,(c+3)}$,

k) $\frac{5(a+6)(a-3)}{16a^2(2a+1)}$, l) $\frac{3}{b\,(a-2b+c)}$.

$\boxed{7}$ a) $\frac{a}{6}$, b) $\frac{2x}{x-3}$, c) $\frac{2y^2}{y-7}$, d) $\frac{3z^2}{z+1}$, e) $\frac{2b(b+2)}{b-4}$,

f) $\frac{8a^2(2a-3)}{a-2}$, g) $\frac{3b\,(b+6)}{4a^2}$, h) $\frac{(2x+y)(2x-3y)}{3y\,(x-5)(2x-y)}$

i) $-\frac{1}{4a^2}$, j) $\frac{c^2}{b}$, k) $\frac{2(2x^2+5)}{x\,(2x^2+y)}$, l) $\frac{5mn\,(5m^3+2n)}{2n+m^3}$,

m) $\frac{x^2}{2y}$, n) $-\frac{a^3-5b^2}{6a^2(3a^3-4b^2)}$.

$\boxed{8}$ a) $\frac{b+5}{2m}$, b) $x+3$, c) $\frac{a-4}{2x+3}$, d) $\frac{x-2y}{2x^2}$, e) $\frac{1}{4b^2}$,

f) $\frac{3c+5-6a}{3a}$, g) $\frac{y-2}{y}$, h) $\frac{m-3}{4m}$, i) $3m^3-2$,

j) $\frac{a-2b}{4p-3}$, k) $\frac{x^2-2}{y^2+1}$, l) $\frac{b^2-b+1}{a-4}$.

$\boxed{9}$ a) $\frac{y+2}{y+2x-8}$, b) $\frac{z-6-2m}{z+4}$, c) $\frac{b-5}{6c^2}$, d) $\frac{x+3-6y}{4x+1}$,

e) $\frac{2a-1-4b}{a^2b-3c}$, f) $\frac{(x+3d-4)(3d-2)}{2(x-2)(d+4)}$, g) $\frac{3x^2}{5-2x}$, h) $\frac{a-6}{2ab^2}$.

$\boxed{10}$ a) $\frac{(3x+2z)(x-2)}{(x^2+3)(5-x)}$, b) $\frac{(x-2)(x+3b-5)}{(x-5)(2b^2-1)}$

Epigrafe 9

$\boxed{1}$ a) 72, b) 300, c) $a^3x^7b^3$, d) $c^6x^7z^4y^2$, e) $84a^5b^6$,
f) $240d^4c^6$, g) $4m^2n\,(m+4)$, h) $xy(x+y)$, i) $m^3p(m^3+p)$,
j) $3a^2\,(a+3)$, k) $25z^2\,(z-3)^2$, l) $2b\,(b-3)^2(b+5)$, m) $a^3(a-1)$,
n) $b\,(b+1)(b-1)$, ñ) $4a^3(x-1)$, o) $(x+6)(x-6)(x-5)$,
p) $(m+2)^2(5m-2)$, q) $(x-2)(2x^2+x+1)(x-3b+2)(x-3b-2)$.

$\boxed{2}$ a) $\frac{bx^2+ay^2}{a^2b^2}$, b) $\frac{5m-2nx}{15x^2}$, c) $\frac{4mxy^3+6a^2x^2-6a^3y}{12x^3y^3}$,

d) $\dfrac{3c^2+c+13}{12c^2}$, e) $\dfrac{2y+17x}{10x^2y}$, f) $\dfrac{4c^2-2c-9}{36c^2}$, g) $\dfrac{6r+20s-5rs}{24r^2s}$

h) $\dfrac{11x^2y+2xy^2+12y^3+10x^3}{30x^2y^2}$, i) $\dfrac{15ab^2+4b^3-9a^2+4ab^3}{72a^2b^3}$

j) $\dfrac{a^2b^2-27b-20a}{90a^3b^3}$, k) $\dfrac{16cd^4y^3-14c^3y^2-2d^4y-15dc^3}{70c^3d^4y^2}$

l) $\dfrac{6x^2-7x+6}{2x(x+2)}$, m) $\dfrac{5a^2-7a-2}{(a-2)^2}$, n) $\dfrac{2y^2-12}{y^2(y+4)}$, ñ) $\dfrac{5n^2+13mn+8m}{m(3m+n)^2}$

o) $\dfrac{15x^2+30x+16}{3x\,(3x+4)^2}$, p) $\dfrac{-16x^2-9y^2}{12xy}$, q) $\dfrac{36b^2-81b+25}{3b\,(3b-5)^2}$

r) $\dfrac{7z-26}{(z-3)(z+3)(z+4)}$, s) $\dfrac{a^2+6a+42}{(a-2)(a+3)(5-a)}$, t) $\dfrac{6y^2-4xy-4x^2}{(3x+2y)(x+3y)(x-y)}$.

3 a) $\dfrac{2x^2+3x+12}{x^2\,(x+3)}$, b) $\dfrac{3a^2-17a+12}{2a\,(a+3)(a-3)}$, c) $\dfrac{2b^2-11b+19}{(b+5)(b-5)(b-3)}$

d) $\dfrac{13y+3}{(y+7)(y-3)(2y+1)}$, e) $\dfrac{5x^2-19x+16}{(x-6)(x-5)(4x+3)}$

f) $\dfrac{z^2+9z+11}{(3z-1)(z-4)(2z+1)}$, g) $\dfrac{2y^2+8y+24}{(3-2y)(y+5)(2y+3)}$,

h) $\dfrac{4a^2}{(a+2)(2m-3)}$, i) $\dfrac{28x+25}{(x-2)(x^2-3)}$, j) $\dfrac{3a^2+8a-6ab}{(a-2)(a+2-b)}$

k) $\dfrac{2m^2-17m-3pm-6p}{(m-3)(m+2p)(3m-p)}$, l) $\dfrac{-a^2-11a+22}{(a+2)(a-2)(a^2+1)}$,

m) $\dfrac{3a^2+13a-8}{4a\,(a+1)(a-1)}$.

4 a) $\dfrac{2a}{x\,(a-x)}$, b) $\dfrac{1}{x-y}$, c) $\dfrac{x+4}{2(x-2)}$, d) $\dfrac{1}{x-3}$, e) $\dfrac{x+2}{x\,(1-x)}$,

f) $\dfrac{3}{a+b}$, g) $\dfrac{2(x+y)}{x-y}$, h) $\dfrac{4x}{x+y}$, i) $\dfrac{3a^2+3a-24}{(a+1)^2(a-5)}$,

j) $\dfrac{x-10}{(x+1)(x-5)}$, k) $\dfrac{3}{a+1}$, l) $\dfrac{2x^2+27x-5}{(x-1)(x-2)(x+5)}$,

m) $\dfrac{x+5}{(x-1)(x+3)}$, n) $\dfrac{4}{x^2\,(x-1)}$.

5 a) $\dfrac{5b^2+2b+14}{(b+6)(b-6)(b+4)}$, b) $\dfrac{9a^2-10a+3ax-5}{(a+1)(2a+1)(a-1+x)}$

c) $\dfrac{-15y^2-9y-15}{(4y-1)(y+2)(2y+3)}$, d) $\dfrac{a^3+7a^2-11a-16}{(a-2)(a^2+2)(a^2-6)}$,

e) $\dfrac{2x^2+21x-8xy-4-23y}{(x+4)(x-4+3y)(x-4-3y)}$, f) $\dfrac{9az+7z-6a+3ap-8pz-2p}{(z+3p)(z-2)(z-2a)}$.

6 a) $\dfrac{18a^2+13a-4}{3a(3a+2)}$, b) $\dfrac{2a^2}{(a+2)(a-5)}$, c) $\dfrac{-9x}{(2x-7)(x+4)}$,

d) $\dfrac{5b^2+15b-10}{2b(b-2)}$, e) $\dfrac{3}{2c(2c-5)}$, f) $\dfrac{3a}{(x+3)(x-2)}$,

g) $\dfrac{2x+1}{2x}$, h) $6a-4b$.

7 a) $\dfrac{x+y}{xy(3x+y+3)}$, b) $\dfrac{(x+y+z)(x+y-z)}{2xy}$.

Epígrafe 10

1 a) 2, b) -9, c) **N.S.**, d) Indeterminado $\{x \in \mathbb{R}\}$, e) **3**,

f) 0,5, g) $-0{,}5$, h) 3, i) 0,2, j) 5, k) $\dfrac{1}{2}$, l) $-\dfrac{1}{2}$; -2

2 a) 1 y -4, b) 0 y **8**, c) **5** y **5**, d) 1 y 3.5, e) 0 y 8,

f) $\dfrac{\sqrt{11}}{3}$ y $-\dfrac{\sqrt{11}}{3}$, g) -1, y 5, h) 7 y $\dfrac{1}{3}$, i) 1 y 8, j) N.S., k) N.S

3 d) $v=\sqrt{\dfrac{2h_k}{m}}$, f) $v=\dfrac{m}{C'M}$, l) $h=\dfrac{A_t-\pi r^2}{2\pi r}$ m) $d=\dfrac{a^2-b^2-c^2}{2bc}$

4 a) $-\dfrac{3}{2}$, b) 4, c) 5, d) N.S., e) 0, f) 2, g) $-\dfrac{4}{9}$,

h) $\{x : x \in \mathbb{R},\ x \neq 0,\ x \neq 1\}$, i) $\dfrac{3}{13}$, j) N.S., k) -4, l) $x=-2$, m) 5

5 a) $\emptyset$, b) $\{6;\ 15\}$, c) $\emptyset$, d) $\left\{4\ ;\ \dfrac{5}{2}\right\}$, e) $\{3\ ;\ -7\}$, f) $\emptyset$,

g) $\{-2\ ;\ 3\}$, h) $\left\{3\ ;\ -\dfrac{5}{3}\right\}$, i) $\left\{1\ ;\ \dfrac{10}{3}\right\}$, j) $\left\{2\ ;\ -\dfrac{5}{3}\right\}$,

k) $\left\{\dfrac{7-\sqrt{73}}{2};\ \dfrac{7+\sqrt{73}}{2}\right\}$, l) $\{-1\}$.

6 a) $\pm 2\ ;\ \pm 1$, b) $\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3};\ \pm 1$, c) $\pm\sqrt{3};\ \pm 1$, d) $\pm\sqrt{10};\ \pm 1$, e) N.S.

1 8.
2 12.
3 $R \rightarrow 48$; $G \rightarrow 16$.
4 60.
5 $E \rightarrow 60$; $A \rightarrow 45$.
$H \rightarrow 27$; $V \rightarrow 21$.
Año anterior: 17 031; **Año** actual: **51 093.**
Año anterior **75** 000; Año actual 85 000.
9 $\alpha = 96°$; $\beta = 84°$.
10 30° y 150°.
11 1erAño: 85, 2doAño: **125.** 3erAño: 210,
12 80°; 60° y 40°.
13 Marta, 6; Caridad, 5; Ana Lilia, 7.
14 **104** en cada lado mayor y 52 en cada lado menor
15 84 este año y 63 el anterior
16 63 en el mayor y 42 en el menor.
17 1988: 3,8 ha; 1989: 5,8 ha.
18 300 km/h y 500 km/h
19 $2\frac{6}{11}$ días.
20 $\frac{4}{5}$ día.
21 $2\frac{2}{9}$ min.
22 $3\frac{3}{7}$ min.
23 3 L.
24 $2\frac{1}{2}$ L.
25 14; 10 o 10 ; -14.
26 12 o −8.
27 −5; −8 o 5; 8.
28 −13; −12 o 12; 13.
29 10 y 11.
30 −5; −3 o 3; 5.
31 14 y 16.
32 −4 o 9.

33 10 o $\frac{1}{10}$.

34 8 o $\frac{1}{4}$

35 $\frac{2}{3}$ o 15

36 8 o −2.

37 Base: 12 m, Altura: 16 m

38 Largo: 20 **m. Ancho:** **14** m.

21 m y 7,4 m.

8 m; 15 m y 17 m.

16 cm y 20 cm.

42 9.0 cm y 12 cm.

43 19,1 h y 21,1 h.

44 Ancho: 4,0 m, Largo: 12 m.

Altura: 16 mm, Base menor: 8,0 mm.

46 Ancho: 8,0 dm, Largo: 16 dm.

47 160 m.

48 1,0 m.

Epigrafe 12

1 a) $x < 2$, b) $x > 6$, c) $x \leqslant 10$, d) $x \geqslant -\frac{1}{4}$,

e) $x < -7$, f) $x \geqslant 3$, g) $x \leqslant 2$, h) $x < 1$, i) $x > 2$,

j) $x < \frac{11}{2}$, k) $x \leqslant -1$, l) $x > \frac{25}{6}$.

2 a) $x > 4$ o $x < 0$, b) $x \geqslant 8$ o $x \leqslant 1$, c) $-8 < x < -2$,

d) $-6 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, e) $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 5$, f) $x = \frac{7}{2}$, g) N.S.,

h) $x \in \mathbb{R}$, i) $x < -1$ o $x > 3$, j) $-\frac{1}{9} \leqslant x \leqslant 2$,

k) **N.S.,** l) $x > \frac{8}{5}$ o $x < -4$, m) $x \in \mathbb{R}$,

n) $x > 4$ o $x < 4$, ñ) $1 \leqslant x \leqslant 8$.

3 a) $x > 4$ o $x < -\frac{2}{3}$, b) $x \leqslant 2$ o $x < 0$, c) $x > 5$,

d) $x < 2$, e) $-4 < x \leqslant 3$, f) $x > \frac{3}{5}$ o $x \leqslant -2$,

g) $x > 3$ o $-8 < x < 1$, h) $-\frac{3}{2} < x < 4$ o $x < -3$,

i) $x > 2$ o $-4 \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}$, j) $0 < x \leqslant 3$ o $x < -5$,

k) $x > \frac{5}{2}$, l) $x \leqslant \frac{12}{5}$, m) $x > 7$, n) $\frac{5}{3} \leqslant x < 4$; $x \neq 2$,

ñ) $x \leqslant \frac{4}{3}$; $x \neq -\frac{5}{2}$, o) $x < -\frac{5}{2}$ o $-\frac{2}{3} < x < -\frac{1}{2}$ o $x > \frac{2}{3}$.

p) $x \leqslant -3$ o $-2 < x \leqslant 4$, q) $-2 \leqslant x < \frac{7}{2}$ o $x < -5$,

r) $x > 6$ o $-6 < x \leqslant 3$, s) $x > -1$; $x \neq \frac{2}{3}$,

t) $2 \leqslant x < 4$ o $x < -\frac{1}{5}$, u) $-8 < x < 4$.

Epígrafe 13

1 a) $x = 3$; $y = -2$, b) $x = -\frac{1}{2}$; $y = 4$, c) $x = -2$; $y = \frac{2}{3}$.

d) $x = -1$; $y = 6$, e) $x = 0{,}2$; $y = -4$, f) $y = -0{,}4$; $z = -0{,}2$, g) $x = 1$; $y = 2$,

h) $u = -4$; $w = -2$, i) $t = \frac{7}{2}$; $s = 1$, j) $x \in \mathbb{R}$; $y = \frac{4x - 10}{3}$,

k) $u = 4$; $v = -5$, l) N.S., m) $x = 0$; $y = -15$, n) $x = \frac{16}{3}$; $y = \frac{20}{3}$,

ñ) $x = 6$; $y = 30$, o) $x = 2$; $y = 3$, p) $x = \frac{1}{12}$; $y = \frac{1}{18}$.

2 a) 30 y 18.

3 37 y 2.

m $\frac{7}{8}$ y $\frac{1}{4}$.

5 15 y 10.

6 2s y 20.

1200 y 800

Circulo: 18, Estrella: 22.

9 Mario: 42, Alexis: 24.

10 Hembras: 120, **Varones:** 100.

Aprobados: 32, Suspensos: **6**.

Pelota: 40; Natación: 30.

36 de 5t y **44** de 7t.

187,5 mL al 28% y 312,5 mL al 12%.

15 a) $2\frac{9}{13}$ t al 96 %; $2\frac{4}{13}$ **t al 70%, b) Imposible.**

16 37,5 L al 7 % y 62,5 al 3 %

17 66.

18 54.

19 25.

20 67.

21 54.

22 4,5 m/s y 3 m/s.

23 Hombre: $3\frac{1}{2}$ km/h; Corriente: $1\frac{1}{2}$ km/h.

Avión: 225 km/h; Viento: *25* km/h.

25 6 m/s y 4 m/s.

8 m/s y 7 m/s.

Epigrafe 14

1 a) $\left(0; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$, b) (2;1;3), c) (3;1;1), d) (3;1;6),

e) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right)$, f) (−4;−5;2), g) (2;−2;−1), h) $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$,

i) (4;2;−1), j) (2;−2;1), k) $\left(\frac{1}{2}; 0; 3\right)$, l) (5;−10;15), m) (4;−3;1), n) (3;5;−2).

2 a) (6;12;8), b) $\left(\frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}\right)$, c) $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{2}\right)$,

d) $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}\right)$, e) (5;4;3).

3 8,7 y **4.**

4 $1,30 (melón); $1,00 (piña); $0,30 (aguacate)

5 Norma 20 h; **Caridad** 30 h ; Moraima *50* **h.**

6 Fermín 20; Leopoldo 25; Jorge 30.

7 60 ($0,15); 105 ($0,20); YO ($0,25).

8 72°; 45°; **63".**

9 293.

10 753.

11 325.

12 12 % (1ero) ; 14,8 %(2do) ; 9,76 % (3ero).

13 *A* (75 min) ; *B* (112,5 min); *C* (90 min).

14 La **llave** *A* en 4 h. la llave ***B*** en **3 h y el** desagüe **en** 6 h.

Epígrafe 15

1 a) $(1;2)$; $(9;-6)$, b) $(4;8)$; $(-4;-8)$, c) N.S., d) $(4;-1)$; $\left(-3;\frac{4}{3}\right)$, e) $(0;4)$; $(-3;1)$, f) $(2;0)$, g) $(3;\ 7)$; $(-3;7)$, h) $(2;-3)$; $\left(\frac{27}{19};\ -\frac{13}{19}\right)$, i) N.S., j) $(3;-2)$, k) $(2;-1)$; $\left(\frac{30}{13};\ -\frac{7}{13}\right)$, l) $(-2,0)$; $(10;4)$, m) $(-2;-3)$; $\left(\frac{2}{3};\ \frac{1}{3}\right)$, n) $(-6;\ -3)$; $\left(\frac{38}{7};\ \frac{11}{7}\right)$, ñ) $(1;\ -2)$; $\left(\frac{17}{3};\ \frac{22}{3}\right)$.

Ejercicios **del** capitulo

1 a) $\in$; $\notin$; $\subset$; $\not\subset$, b) $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} ; x \geqslant -2\}$;
$A \cap D = \{x \in \mathbb{R};\ 1{,}8 < x \leqslant 4{,}3\}$; $B \cap C = \{x \in \mathbb{R}:\ -\frac{1}{3} \leqslant x < \sqrt{5}\}$;
$A \setminus B = \left\{x \in \mathbb{R}\ :\ -2 \leqslant x < -\frac{1}{3}\right\}$; $B \setminus C = \{x \in \mathbb{R}\ :\ x \geqslant \sqrt{5}\}$;
$D \setminus A = \{x \in \mathbb{R}: 4{,}3 < x \leqslant 6\}$; c) uniones **6.** diferencias 12.

2 a) Dom A : $x \in \mathbb{R}^*$, $y \in \mathbb{R}$; Dom B : $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{-4 ; 0\}$,
b) 45.4; -48; -7.52, c) $-6{,}65$; 5.24 ; 2 726,12.

3 a) $x^2 - 4x + 2$, b) $2x^3 - x^2 - x - 4$, c) $-8x^2 + 16x - 6$,
d) $-4x^3 + 10x^2 - 16x + 6$, e) $5x^2 - 14x + 12$,
f) $4x^3 - 7x^2 + 7x - 7$, g) $-6x^3 + 10x^2 - 11x + 4$.

4 a) $3a^2 - 6a + 8$, b) $b^2 + 8b - 12$, c) $-11x + 17$, d) $9y^2 - 12y - 30$.

5 a) cociente: $x^2 + 4x - 10$; resto: 13,
b) cociente: $2x^2 - 2x - 4$; resto: -14,
c) cociente: $x^2 - 2x$; resto: 4,
d) cociente: $2x^3 - 7x^2 + 21x - 58$; resto: 172.

6 $a = 12$.

7 a) $2y(y - 1)(y + 1)$, b) $(x + 5)(x - 4)$, c) $(3 - c)^2$,
d) $(y + 2)(3x - 7)$, e) $(a - 5)(2a - 7)$,
f) $(x^2 + 4)(x - 3)(x + 3)$, g) $(4x^3 + 5)(2x^3 - 1)$,
h) $(2a - 3)(2a + 3)(4a^2 + 1)$.

8 a) $(x + 2b)(a - b^2)$, b) $(5x - 3)(5x + 3 - 3a)$,
c) $(m - 4 + 9y^2)(m - 4 - 9y^2)$, d) $(x - 5)(x^2 + 1)$,
e) $(y - 2)(y^2 + 2y + 3)$, f) $(2m + 7)(3a^2 - 2m + 7)$.

9 a) $\frac{3y + 8}{3y - 8}$, b) $\frac{3y - 8}{3y}$, c) $\frac{3y - 8}{2y - 1}$.

10 $4x(x - 3)$.

12 a) $\dfrac{-6x^2 + 37x - 8}{3x(7x - 2)^2}$, b) $\dfrac{14x^2 - 15ax - 31x + 14a - 2}{(7x - 2)^2(7x - 4a + 2)}$

c) $\dfrac{34x - 16a + 8 + 3ax}{3x(7x - 2)(7x - 4a + 2)}$.

13 a) $-\dfrac{23}{3}$, b) $x = 2{,}6$, c) $x = \pm 2$, d) $x = -\dfrac{8}{5}$; $x = 4$.

14 a) $S = \{3\}$, b) $S = \{2\}$, c) $S = \left\{-1;\ -\dfrac{11}{3}\right\}$,

d) $S = \left\{-2;\ \dfrac{23}{4}\right\}$, e) $S = \{-7\}$.

15 a) $S = \{(-3;4)\}$, b) $S = \left\{\left(-\dfrac{1}{2};3\right)\right\}$, c) $S = \{(3;-5)\}$,

d) $S = \left\{\left(-\dfrac{1}{3};\ \dfrac{14}{9}\right)\right\}$, e) $S = \{(16;8)\}$, f) $S = \left\{\left(-\dfrac{3}{7};\ -\dfrac{13}{7}\right)\right\}$.

16 a) $(16;52;73)$, b) $(3;4;5)$, c) $(1;2;3)$, d) $(-2;3;5)$,

e) $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{3}\right)$, f) $(10;7;6)$.

17 a) $x < 0$ o $x > 3$, b) $-1 \leqslant x \leqslant 4$,
c) $x < -3$ o $0 < x < 3$, d) $-1 \leqslant x < 0$ o $x \geqslant 9$,
e) $-5 < x < 0$ o $x > 3$, f) $x < -5$ o $-1 \leqslant x \leqslant 5$.

18 a) $(-3;9)$ y $(2;4)$, b) $(16;69)$ y $(-2;-3)$, c) $\left(\dfrac{1}{5};\ -\dfrac{32}{5}\right)$ y

$(4;5)$, d) $\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$ y $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

CAPÍTULO 2

Epígrafe 1

1 a) $\dfrac{1}{4}a^7$, b) $\dfrac{3y^3}{x^3}$, c) $\dfrac{c^6}{a^2b^4}$, d) $(x + y)^3$, e) $a^{2n-1}b^nc$,

f) $a^3b^3c^3$, g) $\dfrac{r^{12}s^9}{t^3}$, h) x^{-9}, i) $\dfrac{4b^{13}}{a^3}$, j) $\dfrac{a + b}{a - b}$.

2 a) $\dfrac{ax^2 - 1}{ax}$, b) $\left(\dfrac{x + 4}{x - 2}\right)^2$, c) $\dfrac{1}{(x + 2)^3}$, d) $(a - b)^6$, e) $(a - 3)^2$,

f) $(a + b)^2$

3 a) F (5^5), b) F (x^{-1}), c) F $\left(\dfrac{a^6}{64}\right)$, d) V, e) F (x^{2n}), f) V.

g) F (x^6), h) F $(xy)^2$, i) F (4^3).

$\boxed{6}$ a) 2, b) -2, c) 1, d) $\frac{1}{2}$, e) $\frac{1}{2}$, f) -1, g) -11, h) $0{,}3$,

i) $\frac{3}{2}$, j) $-\frac{3}{2}$.

$\boxed{7}$ a) 50, b) -6, c) 0, d) 10, e) 9, f) $9{,}7$, g) 8, h) $70{,}5$.

$\boxed{8}$ a) $x \geqslant 0$, b) $x \in \mathbb{R}$, c) $x \leqslant 0$, d) $x \geqslant 2$, e) $x \subset \mathbb{R}$,
f) $|x| \geqslant 2$, g) $|x| \geqslant 3$, h) $x \subset \mathbb{R}$, i) $0 \leqslant x \leqslant 4$, j) $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{9}$ a) $\sqrt{3}$, b) $\sqrt{7^3}$, c) $\sqrt[3]{5}$, d) $\sqrt{2^3}$, e) $\sqrt[3]{xy^2}$, f) $\sqrt[3]{(x+y)^2}$,

g) $\sqrt[3]{6x^2}$, h) $\sqrt[10]{2xy^3z^4}$.

$\boxed{10}$ a) $\sqrt[4]{5^2}$, b) $\sqrt[6]{3^{10}}$, c) $\sqrt[4]{2^{10}}$, d) $\sqrt[6]{6^6}$, e) $\sqrt[10]{x^4y^6}$,

f) $\sqrt[21]{\frac{(x+y)^3}{8}}$.

$\boxed{11}$ a) $x = \sqrt[3]{4}$. b) $x = \sqrt[3]{-4}$, c) $x = \pm\sqrt{2^3}$, d) **N.S.**,

e) $x = \pm\sqrt[3]{7}$, f) $x = 0$, g) $x = \pm 2$, h) $x = 3$.

Epígrafe 2

$\boxed{1}$ a) $\sqrt{5}$, b) $\sqrt[3]{6^2}$, c) $\sqrt[4]{13}$, d) $\sqrt[3]{\frac{16}{81}}$, e) $\sqrt[7]{x^2}$,

f) $\sqrt[11]{(xy)^3}$, g) $\sqrt[5]{x^5}$, h) $\sqrt[5]{\left(\frac{m}{n}\right)^4}$, i) $\sqrt[3]{13^{-1}}$, j) $\sqrt[4]{21^{-1}}$,

k) $\sqrt[3]{\frac{8}{5}}$, l) $\sqrt[3]{(0{,}06)^{-2}}$.

$\boxed{2}$ a) 2, b) 2, c) 3, d) 64, e) 25, f) 4, g) 16, h) 4.

$\boxed{3}$ a) $5^{1/3}$, b) $11^{-3/2}$, c) $10^{1/4}$, d) $4^{2/3}$, e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2/5}$, f) $\left(\frac{5}{6}\right)^{4/3}$,

g) $x^{2/7}$, h) $32^{3/2}$, i) $(ab)^{1/2}$, j) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3/5}$.

$\boxed{4}$ a) $x = 27$, b) $x = 4$, c) $x_1 = 14$; $x_2 = -18$, d) $x_1 = 11$; $x_2 = -5$, e) $x = \frac{1}{11}$.

Epígrafe 3

$\boxed{1}$ a) $a^{1/6}$, b) $a^{1/4}$, c) $x^{7/6}y^{1/6}$, d) x^3, e) $a^{5/2}$, f) $a^{2/3}$,

g) $2^{3/2}a^6b^9$, h) $\left(\frac{b}{a}\right)^{1/2}$.

$\boxed{2}$ a) $a^{7/15}$, b) $2a^{2/3}$, c) $y^{2/3}$, d) $a^{3/16}$,

e) $\frac{13}{10}$, f) $3^{1/4}$, g) $15^{1/2}$, h) 3, i) $2^{29/24}$, j) $\frac{1}{3}$, k) $\frac{6}{5}$, l) $\frac{1}{3}$.

$\boxed{5}$ a) $x^{4/3} - x^{3/2}$, b) $a - b$, c) $\frac{(a+1)^2}{a}$, d) $x^{-1/8}\, y^{1/8}$,

e) $2x^{3/2} + 5x + 4x^{1/2} + 1$, f) $x + y$.

$\boxed{6}$ a) $\sqrt[6]{x}$, b) $\frac{1}{\sqrt[21]{y}}$, c) $\sqrt[24]{a^{11}}$, d) $\sqrt[6]{b^5}$, e) $\sqrt[5]{y}$, f) $\sqrt[4]{x}$,

g) $\sqrt[16]{x^5}$, h) $\sqrt[6]{4x}$, i) $2x + 3 - 2\sqrt{x^2 + 3x}$.

$\boxed{8}$ a) $-\frac{27}{2}$, b) $\frac{221}{54}$, c) $\frac{137}{8}$.

Epigrafe 5

$\boxed{1}$ a) 2, b) 2, c) $\frac{1}{2}$, d) 0, e) 2, f) -3, g) 3, h) 3, i) 4,

j) 3, k) 5, l) $\frac{1}{3}$.

Epigrafe 6

$\boxed{1}$ a) $\sqrt{6}$, b) 3, c) 2, d) $\sqrt[4]{6}$, e) 2, f) $\sqrt{a}$, g) $2\sqrt[3]{2}$,

h) $\sqrt[12]{6}$, i) $\frac{2}{5}$, j) $\frac{9}{5}$, k) $\sqrt[6]{2}$, l) $\sqrt[6]{10}$, m) $\sqrt[4]{a^3}$,

n) $\sqrt{a^n}$, o) 15, p) 4.

$\boxed{2}$ a) V, b) F, c) F, d) V, e) F, f) F, g) V, h) V.

$\boxed{3}$ a) $\sqrt[3]{4}$, b) $\sqrt{a}$, c) $\sqrt{a}$, d) $(x + y)\sqrt[3]{x + y}$,

e) a^2, f) a^n, g) $x\sqrt[4]{x^3}$, h) $x\sqrt[3]{xy}$, i) $(a + b)\sqrt[3]{ab}$,

j) $2(b + c)\sqrt{6a(b + c)}$, k) $2x^2\sqrt{1 + 3x^2}$, l) $4xy^{-1}z\sqrt[3]{z}$,

m) $4b\sqrt[4]{a}$, n) $5x\sqrt{x - 2}$, o) $\frac{2(a - b)}{3(a + b)}\sqrt[4]{8(a - b)}$,

p) $\frac{x^2}{3z}\sqrt[4]{\frac{y^3}{z}}$.

$\boxed{4}$ a) $\sqrt{49a}$, b) $\sqrt[3]{125a^2}$, c) $\sqrt[5]{96x^2y^2}$, d) $\sqrt{16x^2y}$,

e) $\sqrt[3]{5a^6b^3}$, f) $\sqrt[6]{3xa^4}$, g) $\sqrt[3]{\frac{2}{9}ax^3}$, h) $\sqrt[4]{2(x+y)^3}$,

i) $\sqrt[3]{(a+b)^3(a-b)}$, j) $\sqrt{x^2-y^2}$, k) $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$,

l) $\sqrt[n]{a^{2n+1}}$.

Epigrafe 7

$\boxed{1}$ a) $\sqrt[4]{25}$; $\sqrt[4]{a^3}$, b) $\sqrt[6]{81}$; $\sqrt[6]{(64)^3}$, c) $\sqrt[6]{x^3y^3}$; $\sqrt[6]{a^4b^2}$,

d) $\sqrt[18]{(ax^2-y^2)^6}$; $\sqrt[18]{(a+b)^3}$; $\sqrt[18]{(x-1)^2}$,

e) $\sqrt[30]{(xy)^{10}}$; $\sqrt[30]{x^{15}}$; $\sqrt[30]{(xz)^2}$, f) $\sqrt[24]{(xyz)^3}$; $\sqrt[24]{x^8y^8}$;

$\sqrt[24]{x^2}$, g) $\sqrt[18]{a^{12}}$; $\sqrt[18]{a^{15}}$; $\sqrt[18]{c^8}$.

$\boxed{2}$ a) $\sqrt{10} > \sqrt[3]{11} > \sqrt[4]{8}$, b) $\sqrt[4]{5} > \sqrt[5]{2} > \sqrt[6]{2}$,

c) $\sqrt[5]{25} > \sqrt[3]{3} > \sqrt[6]{2}$, d) $\sqrt{y^2} > \sqrt[4]{x} > \sqrt[8]{x}$

Epigrafe 8

$\boxed{1}$ a) $6\sqrt{3}$, b) $3\sqrt[3]{2}$, c) $15\sqrt[5]{x}$, d) $4\sqrt{x} + 9\sqrt{y}$,

e) $(4x - 5y + 6z)\sqrt{b}$, f) $\sqrt{5}$, g) $\sqrt{7a}$,

h) $abc\left(\sqrt{ac} + \sqrt{ab} + \sqrt{bc}\right)$, i) $2x^2y^2\sqrt[4]{x}$, j) $y\sqrt{x}$,

k) $2\sqrt{3ax}$, l) $(2m\ 1)\sqrt{2m}$,

m) $\left(\frac{2b+a}{2}\right)\sqrt{\frac{a}{2}} + \left(\frac{3-a^3}{a}\right)\sqrt{\frac{b}{3}}$, n) $\frac{1}{b}\sqrt{\frac{2a}{b}}$,

o) $\sqrt[3]{\frac{c}{ab}}$, p) $\left(x + 1 - \frac{y}{x+1} + xy\right)\sqrt{x}$, q) $2x^2y^2\sqrt[m]{x}$,

r) $(2ab - 1)\sqrt{2ab} + \sqrt[3]{ab} - \sqrt{\frac{2}{ab}} - 2a^2b^2\sqrt{2}$.

Epigrafe 9

1 a) $\sqrt{3}$, b) -40, c) $ab\sqrt{ab}$, d) $-3a^2b^3\sqrt{xy}$, e) $2x$,

f) xyz, g) $x\sqrt[5]{-15}$, h) $ab\sqrt{y}$, i) $3x\sqrt{14ab}$, j) $\sqrt[6]{108}$,

k) $6\sqrt[12]{32\ 000}$, l) $6abx\sqrt[4]{2x}$, m) $\sqrt[6]{x^5y^5}$, n) $3\sqrt[12]{b^7c^7}$,

o) 1, p) 2, q) $100 - 41\sqrt{5}$, r) $7 - 4\sqrt{3}$,

s) $8 + 4\sqrt{3}$, t) $a - 4\sqrt{ab} + 4b$, u) $x + y$, v) 6, w) 0, x) 0.

2 a) $\sqrt{2}$, b) 2, c) $3\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, d) $a\sqrt[3]{b}$, e) $\dfrac{1}{b}\sqrt{ac}$,

f) $\sqrt{x}$, g) $\dfrac{4a}{3b}\sqrt{x}$, h) $\sqrt{10}$, i) $\dfrac{1}{2}\sqrt{b}$, j) $\dfrac{3}{2}\sqrt[4]{12}$,

k) $\sqrt[6]{\dfrac{c^4}{3}}$, l) $a\sqrt[12]{ab^7}$, m) $\sqrt[6]{xy^5}$, n) $\dfrac{2}{3}\sqrt[6]{2x^3y^2}$,

o) $\sqrt[6]{32xy}$, p) $\sqrt{y} + \sqrt[6]{xy^2}$, q) $1 + \sqrt[6]{\dfrac{1}{x-y}}$.

Epigrafe 10

1 a) $\dfrac{2\sqrt{a}}{a}$, b) $b\sqrt[3]{9}$, c) $\dfrac{2\sqrt{21xy}}{7y}$, d) $\dfrac{a\sqrt[4]{xy^3}}{xy^2}$, e) $\dfrac{\sqrt[4]{8x^3y}}{y}$,

f) $\dfrac{\sqrt[6]{3\ 087\ x^5}}{3x}$, g) $\dfrac{\sqrt{3(x-1)}}{x-1}$, h) $\dfrac{\sqrt{ac}}{bc}$, i) $\dfrac{x\sqrt[n]{y^{n-1}}}{y^2}$,

j) $\dfrac{\sqrt{x^{n+1}}}{x^n}$, k) $1 + \sqrt{6}$, l) $\dfrac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{2}$, m) $2 - \sqrt{3}$,

n) $\dfrac{a - 2\sqrt{ab} + b}{a - b}$ o) $-\dfrac{\sqrt{x+1} - x - 1}{x}$ p) $\dfrac{7\sqrt{3} + 3}{23}$,

q) $\dfrac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{y}$.

2 a) $\dfrac{x}{y} - 2x + xy$, b) 4, c) $a\sqrt{3}$, d) $\dfrac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}$

e) $\dfrac{x - 2\sqrt{xy} + y}{x - y}$, f) $\dfrac{(a - b)\sqrt{(a - x)(x - b)}}{(x - b)(a - x)}$

g) 0, h) 0,

i) $\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}$

Epígrafe 11

$\boxed{1}$ a) $S = \{18\}$, b) $S = \{8\}$, c) $S = \{2\}$, d) $S = \phi$, e) $S = \{6\}$,
f) $S = \{6\}$, g) $S = \{6\}$, h) $S = \{26\}$,

i) $S = \{41\}$, j) $S = \{0\}$, k) $S = \left\{-\dfrac{17}{3}\right\}$,

l) $S = \left\{\dfrac{3}{4}\right\}$, m) $S = \phi$, n) $S = \{2 ; 3\}$,

o) $S = \{3\}$, p) $S = \{1;2\}$, q) $S = \{12\}$, r) $S = \{2\}$,
s) $S = \{-4; 0\}$, t) $S = \{3\}$, u) $S = \{9\}$,
v) $S = \{3\}$, w) $S = \{2; 27\}$, x) $S = \{5\}$,
y) $S = \{4\}$, z) $S = \{10\}$.

$\boxed{2}$ a) $S = \{1\}$, b) $S = \{4\}$, c) $S = \{6\}$, d) $S = \{11\}$,

e) $S = \left\{\dfrac{1}{4}\right\}$, f) $S = \{13\}$, g) $S = \{16\}$,

h) $S = \{3\}$, i) $S = \{1\}$, j) $S = \{5\}$.

$\boxed{3}$ $l = \dfrac{5}{2\pi^2}$.

Epigrafe 12

$\boxed{1}$ a) $f = \{(x ; y) : y = 2x ; (x \in \mathbb{R})\}$,
b) $f = \{(x ; y) : y = 2x + 5 ; (x \in \mathbb{R})\}$,
c) $f = \{(x ; y) : y = x^2 - 2 ; (x \in \mathbb{R})\}$,

d) $f = \left\{(x ; y) : y = \dfrac{x}{2} - 6; (x \in \mathbb{R})\right\}$,

e) $f = \{(x ; y) : y = x^2 - 2x ; (x \in \mathbb{R})\}$,

f) $f = \left\{(x ; y) : y = \dfrac{1}{x} - 10 ; (x \in \mathbb{R}^*)\right\}$,

g) $f = \left\{(x ; y) : y = \dfrac{2}{x} ; (x \in \mathbb{R}^*)\right\}$,

h) $f = \left\{(x ; y) : y = \dfrac{2}{x} + 3x ; (x \in \mathbb{R}^*)\right\}$.

☐ a) función inyectiva b) no es función, c) función inyectiva, d) no es función, e) función no inyectiva, g) función inyectiva.

Epígrafe 13

a) A, E, G, I pertenecen y el resto no;
b) B, D, H, J pertenecen y el resto no.

2 a) $a = 3$, b) $a = 15{,}625$, c) $a = \frac{\sqrt[3]{9}}{3}$, d) $a = 5\sqrt{5}$,

e) $a = \frac{\sqrt[3]{9\sqrt{6}}}{3}$, f) $a = \frac{\sqrt{2}}{4}$, g) $a = 3$, h) $a = \frac{3}{2}\sqrt[6]{2}$.

3 a) $(-2;-8)$, b) $(1;1)$, c) $(0;0)$, d) $(3;27)$,
e) $\left(-\frac{\sqrt[3]{9}}{3}; -\frac{1}{3}\right)$, f) $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{64}\right)$, g) $(-x^2;-x^6)$,
h) $(1 - a; -(a - 1)^3)$.

4 a) $f : x = 0$; $g : x = 1$; $p : x = 2$, b) $f : x = 0$; $g : x = \sqrt[3]{-2}$; $p : x = -3$.

6 a) $f(x) = x^3 + 1$, b) $f(y) = (x - 2)^3$, c) $y = (x + 3)^3 - 8$.

7 a) $b = -3$; $c = 2$, b) $b_1 = 0$; $c_1 = 0$; $b_2 = 2$; $c_2 = -8$,
c) $b_1 = -2$; $c_1 = 7$; $b_2 = 1$; $c_2 = -2$, d) $b_1 = 5$; $c_1 - 2$; $b_2 = -1$; $c_2 = 124$,
e) $b = -4$; $c = 6$; f) $b = -2$; $c = -2$.

Epigrafe 14

☐ Los incisos (a - c - d) corresponden a funciones inyectivas por lo que tienen inversa. Los incisos (b - e - f) no inyectivas (no tienen inversa).

Epígrafe 15

☐ a) A, B, D, y E pertenecen, el resto no;
b) G, H, I, y J pertenecen, el resto no.

2

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
ceros	$X = 0$	–	$X = 1$	$X = -7$	$X = 1$	

3

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
Dominio	$X \geq 0$	$X \geq 8$	$X \geq 0$	$X \geq 0$	$X \geq -2$	$X \geq 1$
Imagen	$Y \leq 0$	$Y \geq 0$	$Y \geq 0$	$Y \geq 4$	$Y \geq 3$	$Y \geq 2$
Monotonía	M.D.	M.C.	M.C.	M.C.	M.C.	M.C.
Ceros	$X = 0$	$X = -8$	$X = 0$	–	$X = 7$	–

$\boxed{5}$ a) $g(x) = \sqrt{x-2}$, b) $g(x) = \sqrt{x-1} - 2$, c) $g(x) = \sqrt{x+1} - 1$,
d) $g(x) = \sqrt{x+4} + 1$.

Ejercicios del capítulo

$\boxed{1}$ a) -12, b) $\frac{2}{49}$, c) $3\sqrt{2}$; d) $\frac{9}{16}$, e) 3, f) $43\sqrt{5}$,
g) $3\sqrt[3]{4}$, h) $8 - 2\sqrt{15}$, i) 12, j) 4, k) $70\sqrt{10} - 100\sqrt{5}$,
l) $17 + 12\sqrt{2}$.

$\boxed{2}$ a) $\frac{133}{8}$, b) $\frac{339}{16}$, c) $2 - 6\sqrt{2} - 18\sqrt{3} + 3\sqrt{6}$, d) $\frac{105}{16}$.

3 a) $\sqrt[6]{10}$; $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt{2}$, b) $\sqrt[5]{6}$; $\sqrt[10]{33}$; $\sqrt{2}$, c) $\sqrt[4]{25}$; $\sqrt[3]{7}$; $\sqrt{3}$,
d) $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[6]{13}$; $\sqrt[4]{5}$; $\sqrt{2}$, e) $\sqrt{a+b}$; $\sqrt[4]{a^2+b^2}$.

$\boxed{4}$ a) 0,817; b) 0,408; c) 1,08; d) 10,5; e) −3,14;
f) 4,63; g) 9,89; h) − 0,230.

$\boxed{5}$ a) $a\sqrt{a}$, b) $2n\sqrt{m} - m\sqrt{n}$, c) $6m\sqrt{m-n}$,
d) $4a^2\sqrt{x+3y}$, e) $\frac{\sqrt[3]{a}\,(a^2+1)}{a}$, f) $(\sqrt{a} + 1)\sqrt{a+1}$,
g) $2\sqrt{3ax}$, h) $2\sqrt{a-b}$, i) $-\frac{2\sqrt{3ab}}{a}$ j) $\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$;

$\boxed{6}$ a) $\sqrt[4]{x}$, b) $-2\sqrt[3]{x-1}\ \sqrt{x+1}$, c) $\frac{2(a^2 - \sqrt{a-1})}{a^4 - a + 1}$
d) $\frac{a - 2\sqrt{a}}{a(a-4)}$, e) $-\frac{(\sqrt{a} - 1)^2}{a - 1}$, f) $\frac{\left[\sqrt{a\sqrt{x}} - \sqrt{b\sqrt{x}}\right]^2}{a - b}$
g) $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, h) $\sqrt[3]{z}$, i) $\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{x+y}$,
j) $\frac{\sqrt[4]{x^2y^3}}{y^3}$, k) $\frac{\sqrt{x^4-4} - x^2}{2}$.

$\boxed{7}$ a) 6, b) 6, c) 0, d) 3, e) $\frac{1}{36}$, f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8 a) $S = \{3\}$, b) $S = \{1\}$, c) $S = \{4\}$, d) $S = \{2\}$, e) $S = \{5\}$, f) $S = \{4\}$, g) $S = \{3\}$, h $S = \{1\}$, i) $S = \{11\}$.

a) No es función, b) No es función,
c) $f = \{(x; y) : y = x^2 - 2x;\ x \in \mathbb{Z}\}$,

d) $f = \{(x; y) : y = \dfrac{1}{x^3} + x^2;\ x \in \mathbb{R}^*\}$,

e) $f' = \{(x; y) : y = x^2 + 3x - 6;\ x \in \mathbb{R}\}$,
f) $f = \{(x; y) : y = \sqrt{x} - 3;\ x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0\}$,
g) $f = \{(x; y) : y = \log_2 x;\ x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$.

10 a) No es función, b) Función (no inyectiva), c) Función **(inyectiva),** d) Función (no inyectiva), e) Funcion (inyectiva), f) No es función.

11 Inyectivas b) y c).

12 a) $f_1^{-1} = \left\{\left(\dfrac{7}{2};\ 2\right); \left(-2; -1\right); \left(\dfrac{1}{2};\ 0\right)\right\}$.

b) $f_2^{-1} = \{(2; 0); (3; 1); (11; 3); (18; 4)\}$,

c) $f_3^{-1} = \left\{(3{,}2; -2); (0{,}2; -1); \left(\dfrac{1}{80}; -\dfrac{1}{2}\right); (0; 0)\right\}$.

d) $f_4^{-1} = \{(-1; 0); (0; 1); (1; 8); (2; 27)\}$,
e) $f_5^{-1} = \{(2; 1); (4; 2); (6; 3); (8; 4); (10; 5)\}$,
f) $f_5^{-1} = \{(b; a); (d; c); (f; e); (i; h); (k; j)\}$.

14 a) Dom f : $x \geqslant -\dfrac{5}{3}$, b) Dom g: $x \in \mathbb{R}$,

c) Dom p: $\{x \in \mathbb{R};\ x \leqslant 0$ o $x \geqslant 1\}$, d) Dom q: $x \in \mathbb{R}$,
e) Dom k: $\{x \in \mathbb{R};\ |x| \geqslant 4\}$, f) Dom m: $x \in \mathbb{R}$,
g) Dom n: $\{x \in \mathbb{R};\ x \leqslant -3$ o $x \geqslant 4\}$,
h) Dom h: $\{x \in \mathbb{R};\ 0 < x \leqslant 1$ o $x \geqslant 3\}$.

15 a) $(1; 1) \in f$) $(1; 1) \in g$, $(1; 1) \in h$, $(1; 1) \in p$.
b) No pertenece a ninguna función dada, c) $(3; 9) \in f$,
d) $(0{,}2; 0{,}008) \in g$, e) $[\sqrt{2}; \sqrt[4]{2}] \in h$,

f) $[16; 2\sqrt[3]{2}] \in p$, g) $[2\sqrt{2}; \sqrt{2}] \in p$,

h) $[\sqrt[3]{2}; \sqrt[6]{2}] \in h$, i) $[\sqrt[4]{2}; \sqrt{2}] \in f$,

j) $(3; 27) \in g$, k) No pertenece a ninguna función dada,
l) $(-1; -1) \in g$, $(-1; -1) \in p$.

CAPÍTULO 3

Epígrafe 1

1 a) sen α = 0,600; cos α = 0,800; tan α = 0.750; cos β = 0,600; sen β = 0,800; tan β = 1.33;
b) sen α = 0,685; cos α = 0,729; tan α = 0,940; sen β = 0.729; cos β = 0.685; tan β = 1,06;

c) sen a = 0,20; cos α = 0,98; tan α = 0,20; sen β = 0.98; cos β = 0,20; tan β = 5,0;

d) sen n = 0,815; cos α = 0,578: tan α = 1,41; sen β = 0,578; cos β = 0,816; tan β = 0,709.

☐ sen β = 0.38; cos β = 0,92; tan β = 0.42; sen y = 0,92; cos y = 0,38; tan y = 2,4.

☐ sen $\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$; cos $\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$; **tan** β = 1.

[4] a) cos a = 4/5; tan α = 314; sen β = 4/5,
b) sen β = 5/13; tan β = 5/**12;** cos a = 5/13,
c) sen α = 4/5; cos a = 3/5;sen β = 3/5; cos β = 415,
d) sen β = cos $\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$; tan α = 1

☐ cos α = 12/13; tan α = 5/12.

[7] sen $\beta = \frac{\sqrt{7}}{4}$; tan $\beta = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

m sen $y = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, cos $\gamma = \frac{\sqrt{10}}{10}$

[9] cos $\gamma = \frac{3\sqrt{205}}{205}$; sen $\gamma = \frac{14\sqrt{205}}{205}$; sen $\beta = \frac{3\sqrt{205}}{205}$;

cos $\beta = \frac{14\sqrt{205}}{205}$; tan $\beta = \frac{3}{14}$.

☐ u = 20 cm.

[11] c = 50 cm ; cos β = 0,60; tan α = 0,75.

[12] sen $\alpha = \frac{7\sqrt{58}}{58}$; cos $\alpha = \frac{3\sqrt{58}}{58}$.

☐ b = 10 cm; cos β = 0,83; tan y = 1,5.

[14] a = 3,4 cm.

[15] $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ = 2,X cm; sen α = 0,71; cos α = 0.71; tan a = 1,0

Epígrafe 2

[1] a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$, b) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$, c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, d) $\frac{\sqrt{2}+4\sqrt{3}}{4}$,

e) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, f) 1, g) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, h) $-23/4$, i) $\frac{\sqrt{6}-3}{6}$

[2] $1-3\sqrt{2}$.

3 $6 + 3\sqrt{3}$.

4 $\frac{6 - 3\sqrt{2}}{4}$; $\frac{3}{2}$.

6 $F_x = 25,0$ N; $F_y = 43,3$ N.

7 $F = 30,6$ N; $F_x = 26,5$ N.

8 a) 2, b) $\frac{8 - 9\sqrt{2}}{24}$, c) 2/3, d) $1 - \sqrt{2}$.

10 a) $x = \frac{9 + \sqrt{3}}{3}$, b) $x = \frac{\sqrt{6}}{12}$.

11 a) **Si,** b) No, c) No, d) **Si.**

12 a) 51.3"; b) 35,2°; c) 75,1°; d) 45".

☐ a) sen 35" = cos 55°; sen 60° = cos 30°,
b) sen 15° - cos 75": sen 29,7° = cos 60,3°,
c) sen 51° - cos 39°; sen 79,3 = cos 10,7°; sen 5° = cos 85°.

14 a) $\alpha = 60°$, b) $\alpha = 52,5°$, c) $\alpha = 75°$, d) $\alpha = 67,7°$, e) $x = 7,7°$
f) $x = 73°$, g) $\beta - 45°$ h) $= 90°$ i) y = 52,9°.

☐ a) 2sen ***s*.** b) 2 cos x + sen x, c) 2, d) $\frac{\cos x - 1}{\text{tos } x}$

Epígrafe 3

1 a) $\frac{2}{\text{sen}^2\alpha}$; $\frac{25}{8}$, b) $\tan^2\alpha$; $\frac{144}{25}$.

2 a) $\frac{1}{\text{sen}^2\alpha}$, b) 1. c) 1.

Epigrafe 4

☐ a) 0,2419; b) 0,2419; c) 0,6745; d) 0,0523; e) 0,2588;
f) 0,0699; g) 0,9986: h) 0,9999; i) 0,0122; j) 0,8211;
k) 0,4586; l) 2,006; m) 114,6; ti) 0.6574; ñ) 0,2198;
o) 0,143; p) 0,815; q) 3,06; r) 0,530; s) 0,986;
t) 0,370; u) 0,018; v) **0,Y**19; w) 0,182; x) 0.261.

2 a) $y = 0,4289$; b) $y = 0.6574$; c) $y = 0,8049$; d) $y = 0,1167$;
e) y = 4,474; f) $y = 0,9391$; g) y = 0.6594; h) $y = 1.921$;
i) $y = 0,631$; j) $y = 0,131$; k) $y = 0,038$; l) $y = 0.396$;
m) $y = 114,6$; **n)** y = **0,6574;** **ñ)** y = **0,2198** o) y = **0,142**
p) $y = 0,999$; **q)** y = **0,229;** r) $y = 0,6018$; s) $y = 0,9063$

3 a) $x = 78,0°$; b) $x = 51,4°$; c) $x = 10,8°$; d) $x = 74°$;
e) $x = 26,1°$; f) $x = 25,7°$; g) $x = 44,9°$; h) $x = 65,0°$; i) $x = 31,1°$;
j) $x = 25,3°$; k) $x = 27,5°$; l) $x = 7,5°$; **m) x = 73,3°;**
n) x = 77,4; **ñ) x = 6,9°;** **o) x = 56,3°;**
p) $x = 31,5°$; q) $x = 35,9°$; r) $x = 79,1°$; s) $x = 81°$.

4 a) 0,332; b) 64,7; c) 0,988; d) 16,0; e) 1,34; f) 6,44.

Epígrafe 5

$\boxed{1}$ a) $\alpha = 30°$; b) $\alpha = 30°$; c) $\alpha = 30°$; d) $\alpha = 60°$; e) $\alpha = 45°$; f) $\alpha = 30°$; g) $\alpha = 41{,}4°$; h) $\alpha = 60°$; i) $= 45°$; j) $\alpha = 30°$; k) $\alpha = 52{,}8°$; l) $\alpha = 30°$; m) $\alpha = 32{,}9°$; n) $\alpha = 79°$; ñ) $\alpha = 46{,}2°$; o) $\alpha = 10{,}6$; p) $\alpha = 63{,}7°$; q) $\alpha = 32{,}3°$; r) $\alpha = 44{,}8°$; s) $\alpha = 30{,}9°$; t) $\alpha = 15{,}2°$; u) $\alpha = 78{,}7°$; v) $\alpha = 73{,}3°$; w) $\alpha = 75{,}5°$; x) $\alpha = 53{,}9°$; y) $\alpha = 55°$; z) $\alpha = 42°$.

$\boxed{2}$ a) $x = 19{,}5°$; b) $x = 53{,}1°$; c) $x = 79{,}7°$; d) $x = 26{,}7°$; e) $x = 48{,}2°$; f) $x = 63{,}4°$; g) $x = 51{,}3°$; h) $x = 69{,}3°$; i) $x = 52{,}2°$.

$\boxed{3}$ a) $\{0°;90°\}$, b) $\{0°;30°\}$, c) $\{0°;45°\}$, d) $\{0°;60°\}$, e) $\{30°\}$, f) $\{60°\}$, g) ϕ, h) ϕ, i) $\{45°\}$, j) $\{45°\}$, k) ϕ,
l) $\{30°\}$, m) $\{60°\}$, n) $\{90°\}$,
ñ) $\{60°\}$, o) $\{60°\}$, p) $\{0°\}$,
q) $\{0°\}$, r) $\{45°\}$, s) ϕ, t) $\{0°;30°\}$.

$\boxed{4}$ a) $x_1 = 0°$; $x_2 = 70{,}5°$, b) $x = 41{,}8°$; c) $0°$, d) $x = 52{,}2°$, e) $x_1 = 76°$; $x_2 = 63{,}4°$, f) $x = 58{,}3°$, g) $x = 63{,}4°$, h) $x_1 = 90°$; $x_2 = 70{,}5°$, i) no solución, j) $x = 17{,}5°$.

$\boxed{5}$ a) $60{,}8°$; b) $39{,}4°$; c) $75{,}4°$; d) $52°$.

$\boxed{6}$ a) $62{,}6°$; b) $60{,}1°$; c) $87°$; d) $57{,}9°$.

$\boxed{7}$ $50°$.

$\boxed{8}$ $66°$.

Epígrafe 6

$\boxed{}$ a) III a IV, b) I o II, c) II o III, d) I o III, e) II o IV, f) I o IV, g) I o IV, h) III u IV

$\boxed{2}$ a) I, b) III, c) II, d) IV, e) IV.

$\boxed{}$ a) Sí, II; b) No; c) Sí, IV.

$\boxed{}$ a) Verdadera, b) Verdadera, c) Falsa

$\boxed{5}$ a) $\operatorname{sen} 120° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 120° = -\dfrac{1}{2}$; $\tan 120° = -\sqrt{3}$.

b) $\operatorname{sen} 210° = \dfrac{1}{2}$; $\cos 210° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan 210° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

c) $\operatorname{sen} 315° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 315° - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan 315° = -1$,

d) $\operatorname{sen} 240° - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 240° = -\dfrac{1}{2}$; $\tan 240° = \sqrt{3}$,

e) $\operatorname{sen} 330° = -\dfrac{1}{2}$; $\cos 330° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan 330° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

f) $\operatorname{sen} 135° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 135° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan 135° = 1$.

6 $\operatorname{sen} x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$; $\tan x = -2$.

7 a) $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos x = \frac{1}{2}$; $\tan x = \sqrt{3}$; I,

b) $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$; $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; IV,

c) $\operatorname{sen} x = 1$; $\cos x = 0$; $\tan x$ no definido;

d) $\operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$; $\cos x = -\frac{4}{5}$; $\tan x = \frac{3}{4}$; II,

e) $\operatorname{sen} x = -\frac{4}{5}$; $\cos x = -\frac{3}{5}$; $\tan x = \frac{4}{3}$; III,

f) $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan x = -1$; IV,

g) $\operatorname{sen} x = 0$; $\cos x = -1$; $\tan x = 0$; ángulo axial

8 a) $\cos \theta = -\frac{\sqrt{7}}{4}$; $\tan \theta = -\frac{3\sqrt{7}}{4}$,

b) $\operatorname{sen} \theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\tan \theta = 2\sqrt{2}$,

c) $\cos \theta = -\frac{12}{13}$; $\tan \theta = -\frac{5}{12}$,

d) $\operatorname{sen} \theta = -\frac{3}{5}$; $\cos \theta = \frac{4}{5}$,

e) $\cos \theta = -\frac{2}{3}$; $\tan \theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$, f) $\operatorname{sen} \theta = -\frac{1}{2}$; $\tan \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

9 a) $\cos \alpha = \pm\frac{4}{5}$; $\tan \alpha = \pm\frac{3}{4}$, b) $\operatorname{sen} \alpha = +\frac{12}{13}$; $\tan \alpha = \pm\frac{12}{5}$,

c) $\operatorname{sen} \alpha = \pm\frac{4\sqrt{17}}{17}$; $\cos \alpha = \pm\frac{\sqrt{17}}{17}$, d) $\cos \alpha = \pm\frac{3\sqrt{5}}{7}$; $\tan \alpha = \mp\frac{2\sqrt{5}}{15}$,

e) $\operatorname{sen} \alpha = \pm\frac{21}{29}$; $\tan \alpha = +\frac{21}{20}$,

f) $\operatorname{sen} \alpha = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\cos \alpha = \mp\frac{\sqrt{5}}{5}$,

g) $\operatorname{sen} \alpha = 13\frac{\sqrt{194}}{194}$; $\cos \alpha = \pm\frac{5\sqrt{194}}{194}$,

h) $\cos\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{7}}{4}$; $\tan\alpha = \mp 3\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

10 $\operatorname{sen}\alpha = -\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$; $\cos\alpha = -\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$.

11 $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{2\sqrt{29}}{29}$; $\cos\alpha = \dfrac{5\sqrt{29}}{29}$.

12 $\cos\alpha = -0{,}8$; $\tan\alpha = -0{,}75$.

13 a) $\operatorname{sen}\alpha = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$; $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{21}}{5}$; $\tan\alpha = \pm 0{,}1$,

b) $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$; $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$; $\tan\alpha = -\dfrac{\sqrt{21}}{2}$; $\tan\alpha = -\dfrac{3\sqrt{91}}{91}$.

14 a) 1, b) -4, c) $\dfrac{1}{3}$.

16 a) $\dfrac{7}{4}$, b) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$, c) $\dfrac{19}{4}$.

Epígrafe 7

1 a) $x = 37°$, b) $x = 77°$, c) $x = 63°$, d) $x = 67°$, e) $x = 65°$, f) $x = 53°$, g) $x = 28°$, h) $x = 46°$, i) $x = 58°$, j) $x = 76°$, k) $x = 36°$, l) $x = 7°$.

2 a) $180° - 55°$, b) $180° + 37°$, c) $360° - 46°$, d) $180° - 18°$, e) $180° + 85°$, f) $360° - 75°$, g) $180° - 6°$, h) $180° - 82°$, i) $180° + 89°$, j) $180° + 36°$, k) $180° + 83°$, l) $360° - 66°$, m) $180° - 61°$, n) $180° + 34°$, o) $360° - 86°$, p) $180° + 43°$, q) $180° + 75°$, r) $360° - 18°$.

3 a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, b) $-0{,}5$, c) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, d) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, e) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, f) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

g) $\sqrt{3}$, h) -1, i) $-\dfrac{1}{2}$, j) $-\dfrac{1}{2}$, k) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, l) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, m) $-\sqrt{3}$,

n) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ñ) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, o) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, p) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, q) -1.

4 a) 0,8572; b) 0,7547; c) −0,5095; d) −0,5736; e) −0,2924; f) 7,115; g) −0,7431; h) 0,4226; i) −4,705; j) 0,5707; k) −0,5075; l) −0,8012; m) −0,7902; n) 0,822; ñ) 0,5867.

5 a) 0, b) 0, c) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, d) 1, e) $\dfrac{1}{2}$, f) $-\dfrac{\sqrt{6}}{8}$.

7 a) $\frac{3}{2}$, b) $2\sqrt{6}$.

8 a) 1, b) $x_1 = 7,57$; $x_2 = -1,57$

9 a) $\alpha_1 = 30°$; $\alpha_2 = 150°$; b) $\alpha_1 = 60°$; $\alpha_2 = 300°$,
c) $\alpha_1 = 225°$; $\alpha_2 = 315°$, d) $\alpha_1 = 135°$; $\alpha_2 = 225°$,
e) $\alpha_1 = 210°$; $\alpha_2 = 330°$, f) $\alpha = 180°$, g) $\alpha_1 = 45°$; $\alpha_2 = 225°$,
h) $\alpha_1 = 120°$; $\alpha_2 = 240°$, i) $\alpha_1 = 120°$; $\alpha_2 = 300°$,
j) $\alpha_1 = 150°$; $\alpha_2 = 330°$, k) $\alpha_1 = 0°$; $\alpha_2 = 180°$,
l) $\alpha_1 = 30°$; $\alpha_2 = 210°$.

a) $x_1 = 30°$; $x_2 = 150°$, b) $x_1 = 135°$; $x_2 = 315°$,
c) $x_1 = 30°$; $x_2 = 150°$, d) $x_1 = 60°$; $x_2 = 240°$, $x_3 = 120°$, $x_4 = 300°$;
e) $x_1 = 120°$; $x_2 = 240°$, f) $x_1 = 30°$; $x_2 = 150°$; $x_3 = 210°$; $x_4 = 330°$,
g) $x_1 = 0°$; $x_2 = 360°$, h) $x_1 = 120°$; $x_2 = 240°$; $x_3 = 0°$; $x_4 = 360°$,
i) $x_1 = 120°$; Y = 0 . = 180°, j) x_1 = YO"; $x_2 = 270$".
k) Y = 19,5°; , 100.5". l) no solución,
m) $x_1 = 131,8°$; $x_2 = 311,8°$, n) $x_1 = 109,5°$; $x_2 = 250,5°$,
ñ) $x_1 = 63,4°$; $x_2 = 243,4°$; $x_3 = 153,4°$; $x_4 = 333,4°$,
o) $x_1 = 194,5°$; $x_2 = 345,5°$; $x_3 = 41,8°$; $x_4 = 138,2°$,
p) $x_1 = 41,8°$; $x_2 = 138,2°$,
q) $x_1 = 0°$; $x_2 = 180°$; $x_3 = 360°$; $x_4 = 203,6°$; $x_5 = 336,4°$.

Epígrafe 8

1 a) $\frac{\pi}{12}$; b) $\frac{7\pi}{4}$; c) $\frac{7\pi}{30}$; d) $\frac{5\pi}{12}$; e) $\frac{7\pi}{6}$; f) $\frac{10\pi}{9}$;

g) $\frac{17\pi}{30}$; h) $\frac{3\pi}{4}$; i) 0,764; j) 1,26; k) 3,863; l) 1,06; m) 2,41;

n) 0,830; o) $\frac{5\pi}{3}$; p) $\frac{53\pi}{30}$; q) 0,117; r) 1,423; s) 1,23;

t) 0,581; u) 0,147; v) 2,15; w) 0,036.

2 a) 225°; b) 330°; c) 75°; d) 30°; e) 315°; f) 49,1°; g) 108°;
h) 216°; i) 84,8°; j) 53,7°; k) 277°; l) 48°; m) 54,4°; n) 323°;
ñ) 66,5°; o) 21°; p) 135°; q) 299°; r) 355°; s) 355°;

☐ 38,2°; $\frac{2}{3}$ rad.

☐ 10 km.

Epígrafe 9

1 I; II; IV; IV; III; III; I; IV.

3 a) 60°; b) 75°; c) 134°; d) 155,6°; e) 24,4°; f) 78,5; g) 325,6°;
h) 227°; i) 203°; j) 240,3°; k) 312,4°; l) 238,7°;

m) 0; n) $\frac{\pi}{2}$; ñ) $\frac{2\pi}{3}$; o) π; p) $\frac{4\pi}{5}$; q) $\frac{3\pi}{4}$; r) 0,84;

s) 4,24; t) 0,15; u) 6,03; v) 2,82; w) 0,05.

4 a) **Si,** 215°; b) **Si,** 113°; c) No d) **Si,** 85°, *e)* No; f) **Si.** 173"

Se dan en orden seno, coseno y tangente de cada ángulo:
a) –0,9659; 0,2588; –3,732, b) –0,7660; 0,6428; –1.192,
c) –0.9135; 0,4067, 2,246, d) –0,805; 0,593; –1,36,
e) –0,9945; 0,1045, –9,514; f) 0,5299; –0,8480; 0.6249,
g) 0,6691; 0,7431; –0.9004. h) 0,8192; 0,5736; 1,428,

i) 0,6691; –0,7431; –0,9004, j) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 1,

k) 0,4726; 0,8813; 0,5362, l) 0,7986; –0,6018; –1,327,

m) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; -1, n) 0,9455; 0,3256; – 2,904,

ñ) –0,1736; 0,9848; –0,1763, o) 0; 1; 0,
p) –0,4226; –0,9063; 0,4663, q) 0,790; –0,613; –1,29,
r) 0,751; 0,660; 1,14, s) –0,932; 0,362; –2,58,
t) –0,818; 0,575; –1,42, u) 0,266; 0,964; 0,275;

v) 1; 0; no definido. w) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2}$; $-\sqrt{3}$,

x) 0,588; –0,809; –0,727, y) 0; 1; 0.

6 a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\sqrt{3}$; d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; e) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

g) $-\sqrt{3}$; h) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; i) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; j) –0,9848; k) –0,837; l) 0,0699.

7 a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\sqrt{3}$; d) $-\sqrt{3}$; e) 1; f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

g) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; h) 0; i) $\sqrt{3}$; j) 1,37; k) – 0,724; l) –0,651.

Epígrafe 10

1 a) No, b) No, c) **Si,** d) No, e) **Si.** f) ***Sí,*** g) No, h) **Si,**
i) Sí, j) Si.

2 a) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$; $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, b) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$; $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$,

c) $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$; $x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$, d) $x = 0,25 + 2k\pi$; $x = 2,89 + 2k\pi$,

e) $x = 3,24 + 2k\pi$; $x = 6,18 + 2k\pi$, f) No existe **x,** g) No **existe** x.

☐ a) Sí, b) No, c) Sí, d) Sí, e) No, f) Sí, g) Sí, h) No, i) Sí, j) Sí.

4 a) $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, b) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, c) $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$,

) $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, e) $\pm 1{,}45 + 2k\pi$ f) $\pm 1{,}33 + 2k\pi$,

g) No existe x, h) No existe x.

5 a) Sí, b) No, c) No, d) Sí, e) Sí, f) Sí, g) No, h) Sí, i) No, j) Sí.

6 a) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, b) $x = k\pi$, c) $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$,

d) $x = 0{,}926 + k\pi$, e) $x = 0{,}21 + k\pi$, f) $x = 5{,}13 + k\pi$,

7 a) 0, b) $\frac{1 + 3\sqrt{3}}{2}$.

8 a) $\frac{\sqrt{2}}{4} + \sqrt{3}$, b) $-2\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}$, c) $\frac{\sqrt{7}}{2}$, d) 3, e) $-\frac{2}{3}$,

f) $-\frac{3+4\sqrt{6}}{24}$.

10 a) $x_1 = \frac{7\pi}{6}$; $x_2 = \frac{11\pi}{6}$, b) $x_1 = \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{5\pi}{4}$,

c) $x_1 = \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{7\pi}{4}$, d) $x_1 = \frac{\pi}{2}$; $x_2 = \pi$; $x_3 = \frac{3\pi}{2}$

11 a) $x_1 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$; $x_2 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$, b) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$,

c) $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, d) $x_1 = k\pi$; $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

13 a) $\mathbb{R}$, b) $\mathbb{R} \setminus \{x = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$, c) $\mathbb{R} \setminus \{x = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Epígrafe 11

☐ a) No. b) No, c) Sí, d) Sí e) Sí, f) Sí, g) No, h) Sí, i) Sí.

☐ a) Sí; $x = 0$, b) Sí; $x = \pi$, c) Sí; $x_1 = -\pi$; $x_2 = 0$; $x_3 = \pi$, d) No, e) Sí; $. = -2\pi$; π, 0, f) Sí; $x_1 = 0$; $x_2 = \pi$; $x_3 = 2\pi$.

3 a) positivo, b) $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0$ negativa; $0 < x < \pi$ positiva,

c) $\frac{\pi}{3} \leqslant x < \pi$ positiva; $\pi < x < 2\pi$ negativa,

d) $-\frac{3\pi}{2} \leqslant x < -\pi$ **positiva;** $-\pi \leqslant x \leqslant 0$ **negativa,**

e) $\frac{\pi}{2} \leqslant x < \pi$ positiva; $\pi < x < 271$ negativa.

f) $\frac{\pi}{2} \leqslant x < \pi$ positiva; $x < x \leqslant 2\pi$ **negativa;** $2\pi < x < \frac{5n}{2}$ negativa,

g) $\frac{\pi}{4} \leqslant x < \pi$ positiva; $\pi < x \leqslant \frac{5\pi}{4}$ negativa.

$\boxed{4}$ a) máximo: 1 en $\frac{\pi}{2}$; mínimo: 0 en 0 y π,

b) máximo: 1 en $\frac{71}{2}$; minimo: -1 en $-\frac{\pi}{2}$,

c) máximo: 1 en $\frac{\pi}{2}$; mínimo: -1 en $-\frac{\pi}{2}$,

d) máximo: 1 en $-\frac{3\pi}{2}$; minimo: -1 en $-\frac{71}{2}$,

e) maximo: 1 en $\frac{5n}{2}$; mínimo: -1 en $\frac{3\pi}{2}$,

f) maximo: 1 en $\frac{5\pi}{2}$; minimo: -1 en $\frac{3\pi}{2}$,

g) máximo: 1 en $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{5\pi}{2}$; mínimo: -1 en $\frac{3\pi}{2}$,

h) minimo: -1 cn $-\frac{\pi}{2}$

$\boxed{5}$ Se dan las abscisas **de** los puntos de intersección.

a) $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$,

b) $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$; $x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$,

c) $x_1 = 0{,}75 + 2k\pi$; $x_2 = 2{,}36 + 2k\pi$,

d) $x_1 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$; $x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$

Epígrafe 12

$\boxed{}$ a) **Si,** b) **Si,** c) Si, d) No, e) No, f) No, g) **Si,** h) No.

$\boxed{2}$ a) Si; $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$, b) Si; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$, c) Si; $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$; d) $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{2}$,

e) Si; $-\frac{\pi}{2}$, f) Si; $-\frac{5\pi}{2}$; $-\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$.

$\boxed{3}$ a) creciente, b) $-\pi \leqslant x \leqslant 0$ creciente; $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ decreciente,

c) $\pi \; S \; x \leqslant 2\pi$ creciente; $2\pi \leqslant x \leqslant \pi$ decreciente,

d) $\dfrac{\pi}{3} \leqslant x \; S$ ir decreciente; $\pi \leqslant x \leqslant \dfrac{3\pi}{2}$ creciente;

e) decrcciente. f) $-\dfrac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant 0$ creciente; $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{3}$ decreciente

4 a) $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ positiva; $-\pi \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}$ negativa $\dfrac{\pi}{2} < x \leqslant \pi$ negativa,

b) positiva.

c) $-2\pi \leqslant x < \dfrac{3\pi}{2}$ positiva; $\dfrac{3\pi}{2} < x < -\dfrac{\pi}{2}$ negativa;

$\dfrac{\pi}{2} < x \leqslant 0$ positiva,

d) $0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}$ positiva; $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{4}$ negativa;

e) $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$ negativa; $\dfrac{3\pi}{2} < x \leqslant \dfrac{11\pi}{6}$ positiva,

f) $\dfrac{3\pi}{2} < x < \dfrac{5\pi}{2}$ positiva; $\dfrac{5\pi}{2} < x \leqslant 3\pi$ negativa.

5 a) máximo: 1 en 0; mínimo: 0 en $\dfrac{\pi}{2}$ y $-\dfrac{\pi}{2}$,

b) máximo: 1 en 0; mínimo: 1 en π y π,
c) máximo: 1 en 2π; mínimo: -1 en ir,
d) máximo: 1 en 0; mínimo: -1 en π,
e) máximo: 1 en 2π y 4π; mínimo: -1 en π, 3π y 5π,
f) máximo: 1 en 2π; mínimo: 1 en 3π,
g) máximo: 1 en 2π; mínimo: -1 en π y 3π,
h) máximo: 1 en 0 y 2 ; mínimo: -1 en $-\pi$ y π.

6 Se indican las abscisas de los puntos de intersección.

a) $x_1 = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$; $x_2 = \dfrac{5n}{3} + 2k\pi$, b) $x_1 = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$; $x_2 = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi$,

c) $x_1 = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$; $x_2 = -\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$, d) $x_1 = 1{,}37 + 2k\pi$; $x_2 = 4{,}91 + 2k\pi$.

Epígrafe 13

1 a) **Sí.** b) **Sí.** c) **Sí,** d) **Sí.** e) **Sí,** f) **Sí.**

2 a) Sí; $x_1 = \pi$, $x_2 = 0$, $x_3 = \pi$; b) Sí; $x_1 = -2\pi$, $x_2 = -n$;
c) Sí; $x = \pi$; d) Sí; $x_1 = -2\pi$, $x_2 = -\pi$, $x_3 = 0$;
e) Sí; $x = 0$; f) Sí; $x = -\pi$.

$\boxed{3}$ a) $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{3\pi}{2}$, $x_3 = \frac{5\pi}{2}$; b) $x_1 = -\frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$;

c) $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{3\pi}{2}$, $x_3 = \frac{5\pi}{2}$, $x_4 = \frac{7\pi}{2}$, $x_5 = \frac{9\pi}{2}$;

d) $x_1 = -\frac{3\pi}{2}$, $x_2 = -\frac{\pi}{2}$

e) $x_1 = -\frac{3\pi}{2}$, $x_2 = -\frac{\pi}{2}$, $x_3 = \frac{\pi}{2}$, $x_4 = \frac{3\pi}{2}$, $x_5 = \frac{5\pi}{2}$;

f) $x_1 = \frac{5\pi}{2}$, $x_2 = \frac{7\pi}{2}$, $x_3 = \frac{9\pi}{2}$, $x_4 = \frac{11\pi}{2}$, $x_5 = \frac{13\pi}{2}$.

$\boxed{4}$ a) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ positiva. $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ negativa, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ positiva.

$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ negativa, $2\pi < x < \frac{5\pi}{2}$ positiva. $\frac{5\pi}{2} < x < 3\pi$ negativa;

b) $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$ positiva, $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ negativa;

c) $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ negativa, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ positiva, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ negativa.

$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ positiva, $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ negativa, $2\pi < x < \frac{5\pi}{2}$ positiva;

d) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$ positiva, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ negativa, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ positiva;

e) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ positiva, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ negativa, $\pi < x < \frac{5\pi}{4}$ positiva;

f) $-\frac{11\pi}{6} < x < -\frac{7\pi}{2}$ **positiva,** $-\frac{3\pi}{2} < x < -\pi$ negativa,

$-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$ positiva, $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ negativa.

$\boxed{6}$ a) $\left(\frac{\pi}{3} + k\pi;\ \sqrt{3}\right)$. $k \in \mathbb{Z}$, b) $\left(\frac{3\pi}{4} + k\pi;\ -1\right)$ $k \in \mathbb{Z}$,

c) $(1.11 + kn;\ 2)$ $k \in \mathbb{Z}$, . d) $(1.8 + k\pi;\ -4{,}2)$ $k \in \mathbb{Z}$.
d) $(-1{,}34 + k\pi;\ -4{,}2)$ $k \in \mathbb{Z}$.

Epigrafe 14

$\boxed{4}$ a) mínimo: -3; máximo: 0, b) máximo: 5; mínimo: 2,5,
c) mínimo: 0; máximo: 2.

$\boxed{5}$ a) $-\frac{14\pi}{5}$, $-\frac{7\pi}{5}$, 0, $\frac{7\pi}{5}$, $\frac{14\pi}{5}$;

b) $-\frac{2\pi}{3}$, 0, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, 2π, $\frac{8\pi}{3}$;

c) $x_1 = \pi$, $x_2 = -\pi$;

d) $x_1 = -\frac{7\pi}{4}$, $x_2 = -\frac{5\pi}{4}$, $x_3 = -\frac{3\pi}{4}$, $x_4 = -\frac{\pi}{4}$,

$x_5 = \frac{\pi}{4}$, $x_6 = \frac{3\pi}{4}$, $x_7 = \frac{5\pi}{4}$, $x_8 = \frac{7\pi}{4}$

$\boxed{6}$ a) $y = 2.3 \operatorname{sen} \frac{2}{3} t$, b) $y = 4 \operatorname{sen} 4t$, c) $y = \operatorname{sen} 20 t$.

$\boxed{7}$ a) $\frac{\pi}{2}$, b) $\frac{2\pi}{3}$, c) π, d) 4π.

$\boxed{8}$ a) $p = 2\pi$, $a = 2$; b) $p = \frac{2\pi}{3}$, $a = 0{,}8$; c) $p = 6\pi$, $a = 1{,}5$;

d) $p = \pi$, $a = 0{,}2$.

$\boxed{9}$ a) $y = 3 \operatorname{sen} 2 (t + 1)$, b) $y = 0{,}5 \cos 3 (y - 2)$.

Epigrafe 15

$\boxed{1}$ a) $\operatorname{sen} 75^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$, $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, $\tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$

$\cot 75^\circ = 2 - \sqrt{3}$;

b) $\operatorname{sen} 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$,

$\cot 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$;

c) $\operatorname{sen} 105^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ $\cos 105^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$, $\tan 105^\circ = -2 - \sqrt{3}$,

$\cot 105^\circ = \sqrt{3} - 2$;

d) $\operatorname{sen} 165^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, $\cos 165^\circ = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$;

e) $\tan 165^\circ = \sqrt{3} - 2$, $\cot 165^\circ = -\sqrt{3} - 2$;

f) $\operatorname{sen} 285^\circ = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$, $\cos 285^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$\tan 285^\circ = -2 - \sqrt{3}$, $\cot 285^\circ = \sqrt{3} - 2$.

$\boxed{}$ a) $\sqrt{2} (\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)$, b) $\frac{13}{2} \cos \beta + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \beta$, c) $\frac{4 \tan \alpha}{1 - \tan^2\alpha}$.

$\boxed{4}$ a) $\frac{56}{65}$, b) $-\frac{16}{65}$, c) $\frac{33}{65}$, d) $\frac{63}{65}$, e) $\frac{56}{33}$, f) $-\frac{16}{63}$.

$\boxed{5}$ a) $\sqrt{3}$, b) 1

Epígrafe 16

$\boxed{1}$ a) sen $2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, cos $2x = \frac{1}{2}$, tan $2x = \sqrt{3}$;

b) sen $2x = -1$ cos $2x = 0$, tan $2x$ (no definida);

c) sen $2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, cos $2x = -\frac{1}{2}$, **tan** $2x = \sqrt{3}$;

d) sen $2x = \frac{24}{25}$, cos $2x = \frac{7}{25}$, tan $2x = \frac{24}{7}$;

e) sen $2x = \frac{2\sqrt{48}}{49}$, cos $2x = \frac{47}{49}$, tan $2x = \frac{2\sqrt{48}}{47}$;

f) sen $2x = \frac{4\sqrt{5}}{9}$, cos $2x = \frac{1}{9}$, tan $2x = 4\sqrt{5}$.

$\boxed{2}$ sen $2\alpha = \frac{2x\sqrt{25 \quad x^2}}{25}$, cos $?a = \frac{25 \quad 2x^2}{25}$

$$\tan 2\alpha = \frac{2x\sqrt{25 - x^2}}{2x^2 - 25}$$

$\boxed{3}$ porque $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen} \alpha = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$ pues α es el duplo de $\frac{\alpha}{2}$.

$\boxed{4}$ a) $\frac{24}{25}$, b) $\frac{7}{25}$, c) $-\frac{24}{7}$, d) $-\frac{7}{25}$, e) $-\frac{24}{25}$.

$\boxed{5}$ sen $3x = 3$ sen $x - 4$ sen^3x, cos $3x = 4$ cos$^3x - 3$ cos x,

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \cos \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}.$$

$\boxed{6}$ sen $\frac{x}{2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$, cos $x = \pm \frac{\sqrt{14}}{4}$.

$\boxed{7}$ sen $9° = \frac{\sqrt{8 - 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}}{4}$, cos $9° = \frac{\sqrt{8 + 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}}{4}$.

8 $\tan^2 30^\circ = \dfrac{1}{3}$.

☐ $\operatorname{sen} 22{,}5^\circ = \sqrt{\dfrac{1 - \cos 45^\circ}{2}}$.

☐ a) $\dfrac{3 + \cos x}{\operatorname{sen} 2x}$, b) $\dfrac{1}{2\cos^2 x + 1}$, c) $\operatorname{sen} \alpha$.

Epígrafe 17

1 a) $\left\{x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, b) $\left\{x = \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, c) $\left\{x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $\left\{x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right\}$, e) $\left\{x = (4k+1)\dfrac{\pi}{4}\right\}$,

f) $\left\{x = \dfrac{k\pi}{2} \text{ o } x = (4k+1)\dfrac{\pi}{4} \text{ o } x = (4k+3)\dfrac{\pi}{4};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2 a) No, para $x = \pi/4$ no se cumple, b) No, para $x = \pi/3$ no se cumple,
c) No, para $x = \pi/4$ no se cumple, d) No, para $x = \pi/3$ no se cumple,
e) Si, f) Si, g) No, para $x = \pi/4$ no se cumple,
h) No, para $x = \pi/6$ no se cumple, i) No, para $x = \pi/6$ no se cumple,
j) Si. k) Si.

Epígrafe 19

1 a) $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ o $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ o $x = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi$,

b) $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$ o $x = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi$,

c) $x = k\pi$ o $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ o $x = \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi$,

d) $x = k\pi$, e) $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ o $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$ o $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$,

f) $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$ o $x = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi$,

g) $x = k\pi$ o $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ o $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$,

h) $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ o $x = \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi$ o $x = (2k+1)\pi$,

i) $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ o $30{,}1^\circ + k \cdot 360^\circ$ o $x = 329{,}9^\circ + k \cdot 360^\circ$,

j) $x = 30^\circ + k \cdot 360^\circ$ o $x = 150^\circ + k \cdot 360^\circ$ o $x = 199{,}5^\circ + k \cdot 360^\circ$ o $x = 340{,}5^\circ + k \cdot 360^\circ$,

k) $x = 51{,}3^\circ + k \cdot 360^\circ$ o $x = 308{,}7^\circ + k \cdot 360^\circ$ o $x = (2k + 1)180^\circ$,
l) $x = 330^\circ + k \cdot 360^\circ$ o $x = 160{,}5^\circ + k \cdot 360^\circ$
o $x = 210^\circ + k \cdot 360^\circ$ o $x = 19{,}5^\circ + k \cdot 360^\circ$,

m) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ o $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ o $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ o $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$,

n) $x = (4k + 1)\, 90^\circ$ o $x = 41{,}8^\circ + k \cdot 360^\circ$ o $x = 138{,}2^\circ + k \cdot 360^\circ$,
o) $x = k \cdot 90^\circ$ o $x = 37{,}8^\circ + k \cdot 360^\circ$ o $x = 322{,}2^\circ + k \cdot 360^\circ$,

p) $x = 2k\pi$, q) $x = (8k - 1)\,\frac{\pi}{4}$,

r) $x = k\pi$ o $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ o $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$,

s) $x = k\pi$ o $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ o $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$,

t) $x = 58{,}9^\circ + k \cdot 180^\circ$ o $x = 121{,}1^\circ + k \cdot 180^\circ$, o $k \cdot 180^\circ \pm 58{,}9^\circ$,

u) $x = (2k + 1)\frac{\pi}{4}$

Ejercicios **del capitulo**

$\boxed{1}$ **Siendo** α el menor **de los** ángulos **agudos,** sen $\alpha = \frac{3}{5}$, cos $\alpha = \frac{4}{5}$,

$\tan \alpha = \frac{3}{4}$, $\operatorname{sen} \beta = \frac{4}{5}$, $\cos \beta = \frac{3}{5}$, $\tan \beta = \frac{4}{3}$

$\boxed{2}$ $\cos \gamma = 0{,}50$; sen $\gamma = 0{,}87$; **tan** $\gamma = 1{,}7$.

$\boxed{}$ 1.

$\tan x = -\frac{\sqrt{33}}{4}$.

$\boxed{7}$ a) $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, b) $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, c) $\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$ o $-\frac{7}{25}$.

$\boxed{8}$ a) $-2 \leqslant a \leqslant 2$, b) $-2 \leqslant a \leqslant 4$, c) $a \geqslant 0$, d) $-\frac{13}{5} \leqslant a \leqslant -1$,
e) $-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant \sqrt{2}$.

$\boxed{9}$ a) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ o $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$,

b) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ o $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$,

c) $x = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$ o $x = 228{,}6^\circ + k \cdot 360^\circ$ o $x = 311{,}4^\circ + k \cdot 360^\circ$,

d) $x = k\pi$ o $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ o $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ o $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

CAPÍTULO 4

Epígrafe 1

1 a) 13, b) 16,5, c) 15, d) 17,3, e) 10.

a) 36°, b) 50,2°, c) 52°, d) 30°.

a) 102, b) 10,5, cl 63,7.

a) $a = 6$; $c = 9,2$; $y = 57°$, b) $\alpha = 48''$; $b = 12$; $a = 8,9$,
c) $c = 6,38$; $b = 6,51$; $a = 11,7°$, d) $b = 535,7$; $c = 525,4$; $y = 78,8°$,
e) $b = 294,3$; $\alpha = 26,2°$; $\gamma = 63,8°$. f) No tiene solución;
g) $a = 32,9$; $\alpha = 53,8°$; $\gamma = 36,2°$. h) No tiene solución.

Epígrafe 2

131 m .

1,1 hm ; 56".

19,0 m .

1,3 km.

30,5 m .

6 315 m .

a) 3,0 hm; b) 82 m .

8 1,1 hm.

452 m .

0,8 km

1,9 km

Epígrafe 3

a) $\beta = 26,4°$; b) $a = 25$; c) $a = 43.3$; d) $\beta = 76,7°$ o $\beta = 103,3°$;
e) No tiene solución.

$\beta = 23,1°$; $y = 123,5°$; $c = 640$.

Epígrafe 4

1 a) $\gamma = 55,4°$; $b = 567$; $c = 665$, b) $c = 0,995$; $a = 0,445$; $\alpha = 26,0°$,
c) $a = 33,7$; $c = 18,5$; $\beta = 59,2°$, d) $c = 95,2$; $\alpha = 51,2°$; $\beta = 56,5°$,
e) $a = 3,32$; $\beta = 37,6°$; $\gamma = 80,3°$, f) $\alpha = 75°$; $\beta = 48°$; $\gamma = 57°$,
g) $\alpha = 27,4°$; $\beta = 143,1°$; $\gamma = 9,5°$.

2 37 cm .

3 34,3°.

4 1,86 km .

5 7,0 m .

6 327 m .

7 411 m .

8 12 km

9 $36,1^{\circ}$.

Epígrafe 5

1 a) 17, b) 579, c) 1625,8

2 $7,1 \cdot 10^{3}$ m^{2} ; $1,5 \cdot 10^{2}$ m .

Epígrafe *6*

1 a) o = 13,7 cm ; *R* = 15.2 cm; *A* = 633 cm^{2},
b) *l* = 20 cm; *R* = 20 cm; *A* = $1,04 \cdot 10^{3}$ cm^{2},
c) *l* = 14.5 cm; *a* = 22.3 cm; *A* = 16,2 dm^{2} .

2 *R* = 20 cm; *a* = 17 cm; *A* = 9,9 dm^{2} .

3 *28* dm^{2} .

4 *l* = 2,20 m; *a* = 2,66 m; *R* = 2,88 m .

5 *R* = 3,79 m; *a* = 3,64 m .

6 127 m^{2} .

Epígrafe 7

1 a) 0,28 dm^{3}, b) 10 dm^{3} .

2 A = 22 dm^{2} ; *V* = 11 dm^{3} .

3 7,8 dm^{3} .

4 13,4 cm.

5 *A*, = 3,7 cm^{2}; V = 1,4 dm^{3}

6 *V* = 82 cm^{3} .

7 $4,8 \cdot 10^{3}$cm^{3} .

8 a) 1.0 m', b) 0,92 m^{3} .

Epígrafe 8

1 *h* = 9,86 cm; *A* = 56,2 cm^{2}

2 $9,2 \cdot 10^{2}$ cm^{2} .

3,0 m y 5,X ni.

4 73°; 73°; 34°; 36 ctn .

5 5,0 cm ; 12 cm .

6 62,8 dam^{2} .

7 75 m^{2} .

9 $1,7 \cdot 10^{2}$ cm^{2} .

10 *A* = 5,1 dm^{2}; *P* = 1,0 m .

11 3,2 dam^{2} .

12 76°; 46°; 58°.

13 4,1 cm .

Epigrafe 9

[1] 16 cm^2 .

[ ] $6{,}3 \cdot 10^2$ cm^2 .

[3] 3,4 cm^2 .

[ ] 1,3 m^2 .

[5] $1{,}3 \cdot 10^2$ m^2.

[ ] 21 drn².

Epígrafe 10

[1] a) 84 m^2, b) $5{,}0 \cdot 10^2$ cm^2

[ ] $l = 2\ R \text{ sen } \frac{180°}{n}$

Epígrafe 11

[ ] 51 km.

[2] $\vec{F}_x = 6 \cdot 0 \cdot 10^2$ N ; $\vec{F}_y = 4{,}2 \cdot 10^2$ N ; 55"

[ ] a) 4,8 km, b) 3,9°.

[4] 4,6 km .

Ejercicios del capitulo

[1] a) $c = 56{,}1$; $\beta = 37{,}4°$; $\alpha = 52{,}6°$; $A = 760{,}4$,
b) $b = 16{,}8$; $\beta = 55{,}7°$; $\gamma = 34{,}3°$; $A = 96{,}89$,
c) $\gamma = 59{,}7°$; $b = 25{,}8$; $c = 22{,}3$; $A = 144{,}6$,
d) $c = 66{,}7$; $\gamma = 55{,}5°$; $a = 79{,}7$; $A = 1\ 865$
e) $\alpha = 99{,}5°$; $b = 5{,}8$; $c = 4{,}7$; $A = 13{,}4$,
f) $a = 77{,}7$; $\beta = 56{,}6°$; $\gamma = 72{,}3°$; $A = 3\ 088{,}5$,
g) $\alpha = 49{,}6°$; $\beta = 58{,}8°$; $\gamma = 71{,}6°$; $A = 28{,}4$.

[2] 385 m .

[3] 52 cm .

[4] 49 m .

[5] 26,6 m .

[6] $R = 25{,}4$ cm; $A = 783$ cm^2

[ ] 24,6°,

[8] $1{,}5 \cdot 10^3$ rn² .

[9] 4,8 km .

[10] 729 m .

[11] 35,3 cm .

[12] 7,6 m ó $1{,}2 \cdot 10^2$ m

[13] 1,5 m .

[14] 87 m^2 .

$\boxed{15}$ a) $39\ m^2$; b) $9{,}4\ m^2$

$\boxed{16}$ $1{,}3 \cdot 10^2\ m^2$.

$\boxed{17}$ $32\ m^3$.

$\boxed{19}$ $10\ m^2$.

$\boxed{20}$ $60\ m/s$.

$\boxed{21}$ 11 : 55 a.m.

Anexo

Tabla de cuadrados

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,020	1,040	1,061	1,082	1,103	1,124	1,145	1,166	1,188
1,1	1,210	1,232	1,254	1,277	1,300	1,323	1,346	1,369	1,392	1,416
1,2	1,440	1,464	1,488	1,513	1,538	1,563	1,588	1,613	1,638	1,664
1,3	1,690	1,716	1,742	1,769	1,796	1,823	1,850	1,877	1,904	1,932
1,4	1,960	1,988	2,016	2,045	2,074	2,103	2,132	2,161	2,190	2,220
1,5	2,250	2,280	2,310	2,341	2,372	2,403	2,434	2,465	2,496	2,528
1,6	2,560	2,592	2,624	2,657	2,690	2,723	2,756	2,789	2,822	2,856
1,7	2,890	2,924	2,958	2,993	3,028	3,063	3,098	3,133	3,168	3,204
1,8	3,240	3,276	3,312	3,349	3,386	3,423	3,460	3,497	3,534	3,572
1,9	3,610	3,648	3,686	3,725	3,764	3,803	3,842	3,881	3,920	3,960
2,0	4,000	4,040	4,080	4,121	4,162	4,203	4,244	4,285	4,326	4,368
2,1	4,410	4,452	4,494	4,537	4,580	4,623	4,666	4,709	4,752	4,796
2,2	4,840	4,884	4,928	4,973	5,018	5,063	5,108	5,153	5,198	5,244
2,3	5,290	5,336	5,382	5,429	5,476	5,523	5,570	5,617	5,664	5,712
2,4	5,760	5,808	5,856	5,905	5,954	6,003	6,052	6,101	6,150	6,200
2,5	6,250	6,300	6,350	6,401	6,452	6,503	6,554	6,605	6,656	6,708
2,6	6,760	6,812	6,864	6,917	6,970	7,023	7,076	7,129	7,182	7,236
2,7	7,290	7,344	7,398	7,453	7,508	7,563	7,618	7,673	7,728	7,784
2,8	7,840	7,896	7,952	8,009	8,066	8,123	8,180	8,237	8,294	8,352
2,9	8,410	8,468	8,526	8,585	8,644	8,703	8,762	8,821	8,880	8,940
3,0	9,000	9,060	9,120	9,181	9,242	9,303	9,364	9,425	9,486	9,548
3,1	9,610	9,672	9,734	9,797	9,860	9,923	9,986	10,05	10,11	10,18
3,2	10,24	10,30	10,37	10,43	10,50	10,56	10,63	10,69	10,76	10,82
3,3	10,89	10,96	11,02	11,09	11,16	11,22	11,29	11,36	11,42	11,49
3,4	11,56	11,63	11,70	11,76	11,83	11,90	11,97	12,04	12,11	12,18
3,5	12,25	12,32	12,39	12,46	12,53	12,60	12,67	12,74	12,82	12,89
3,6	12,96	13,03	13,10	13,18	13,25	13,32	13,40	13,47	13,54	13,62
3,7	13,69	13,76	13,84	13,91	13,99	14,06	14,14	14,21	14,29	14,36
3,8	14,44	14,52	14,59	14,67	14,75	14,82	14,90	14,98	15,05	15,13
3,9	15,21	15,29	15,37	15,44	15,52	15,60	15,68	15,76	15,84	15,92
4,0	16,00	16,08	16,16	16,24	16,32	16,40	16,48	16,56	16,65	16,73
4,1	16,81	16,89	16,97	17,06	17,14	17,22	17,31	17,39	17,47	17,56
4,2	17,64	17,72	17,81	17,89	17,98	18,06	18,15	18,23	18,32	18,40
4,3	18,49	18,58	18,66	18,75	18,84	18,92	19,01	19,10	19,18	19,27
4,4	19,36	19,45	19,54	19,62	19,71	19,80	19,89	19,98	20,07	20,16
4,5	20,25	20,34	20,43	20,52	20,61	20,70	20,79	20,88	20,98	21,07
4,6	21,16	21,25	21,34	21,44	21,53	21,62	21,72	21,81	21,90	22,00
4,7	22,09	22,18	22,28	22,37	22,47	22,56	22,66	22,75	22,85	22,94
4,8	23,04	23,14	23,23	23,33	23,43	23,52	23,62	23,72	23,81	23,91
4,9	24,01	24,11	24,21	24,30	24,40	24,50	24,60	24,70	24,80	24,90
5,0	25,00	25,10	25,20	25,30	25,40	25,50	25,60	25,70	25,81	25,91
5,1	26,01	26,11	26,21	26,32	26,42	26,52	26,63	26,73	26,83	26,94
5,2	27,04	27,14	27,25	27,35	27,46	27,56	27,67	27,77	27,88	27,98
5,3	28,09	28,20	28,30	28,41	28,52	28,62	28,73	28,84	28,94	29,05
5,4	29,16	29,27	29,38	29,48	29,59	29,70	29,81	29,92	30,03	30,14

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	30,25	30,36	30,47	30,58	30,69	30,80	30,91	31,02	31,14	31,25
5,6	31,36	31,47	31,58	31,70	31,81	31,92	32,04	32,15	32,26	32,38
5,7	32,49	32,60	32,72	32,83	32,95	33,06	33,18	33,29	33,41	33,52
5,8	33,64	33,76	33,87	33,99	34,11	34,22	34,34	34,46	34,57	34,69
5,9	34,81	34,93	35,05	35,16	35,28	35,40	35,52	35,64	35,76	35,88
6,0	36,00	36,12	36,24	36,36	36,48	36,60	36,72	36,84	36,97	37,09
6,1	37,21	37,33	37,45	37,58	37,70	37,82	37,95	38,07	38,19	38,32
6,2	38,44	38,56	38,69	38,81	38,94	39,06	39,19	39,31	39,44	39,56
6,3	39,69	39,82	39,94	40,07	40,20	40,32	40,45	40,58	40,70	40,83
6,4	40,96	41,09	41,22	41,34	41,47	41,60	41,73	41,86	41,99	42,12
6,5	42,25	42,38	42,51	42,64	42,77	42,90	43,03	43,16	43,30	43,43
6,6	43,56	43,69	43,82	43,96	44,09	44,22	44,36	44,49	44,62	44,76
6,7	44,89	45,02	45,16	45,29	45,43	45,56	45,70	45,83	45,97	46,10
6,8	46,24	46,38	46,51	46,65	46,79	46,92	47,06	47,20	47,33	47,47
6,9	47,61	47,75	47,89	48,02	48,16	48,30	48,44	48,58	48,72	48,86
7,0	49,00	49,14	49,28	49,42	49,56	49,70	49,84	49,98	50,13	50,27
7,1	50,41	50,55	50,69	50,84	50,98	51,12	51,27	51,41	51,55	51,70
7,2	51,84	51,98	52,13	52,27	52,42	52,56	52,71	52,85	53,00	53,14
7,3	53,29	53,44	53,58	53,73	53,88	54,02	54,17	54,32	54,46	54,61
7,4	54,76	54,91	55,06	55,20	55,35	55,50	55,65	55,80	55,95	56,10
7,5	56,25	56,40	56,55	56,70	56,85	57,00	57,15	57,30	57,46	57,61
7,6	57,76	57,91	58,06	58,22	58,37	58,52	58,68	58,83	58,98	59,14
7,7	59,29	59,44	59,60	59,75	59,91	60,06	60,22	60,37	60,53	60,68
7,8	60,84	61,00	61,15	61,31	61,47	61,62	61,78	61,94	62,09	62,25
7,9	62,41	62,57	62,73	62,88	63,04	63,20	63,36	63,52	63,68	63,84
8,0	64,00	64,16	64,32	64,48	64,64	64,80	64,96	65,12	65,29	65,45
8,1	65,61	65,77	65,93	66,10	66,26	66,42	66,59	66,75	66,91	67,08
8,2	67,24	67,40	67,57	67,73	67,90	68,06	68,23	68,39	68,56	68,72
8,3	68,89	69,06	69,22	69,39	69,56	69,72	69,89	70,06	70,22	70,39
8,4	70,56	70,73	70,90	71,06	71,23	71,40	71,57	71,74	71,91	72,08
8,5	72,25	72,42	72,59	72,76	72,93	73,10	73,27	73,44	73,62	73,79
8,6	73,96	74,13	74,30	74,48	74,65	74,82	75,00	75,17	75,34	75,52
8,7	75,69	75,86	76,04	76,21	76,39	76,56	76,74	76,91	77,09	77,26
8,8	77,44	77,62	77,79	77,97	78,15	78,32	78,50	78,68	78,85	79,03
8,9	79,21	79,39	79,57	79,74	79,92	80,10	80,28	80,46	80,64	80,82
9,0	81,00	81,18	81,36	81,54	81,72	81,90	82,08	82,26	82,45	82,63
9,1	82,81	82,99	83,17	83,36	83,54	83,72	83,91	84,09	84,27	84,46
9,2	84,64	84,82	85,01	85,19	85,38	85,56	85,75	85,93	86,12	86,30
9,3	86,49	86,68	86,86	87,05	87,24	87,42	87,61	87,80	87,98	88,17
9,4	88,36	88,55	88,74	88,92	89,11	89,30	89,49	89,68	89,87	90,06
9,5	90,25	90,44	90,63	90,82	91,01	91,20	91,39	91,58	91,78	91,97
9,6	92,16	92,35	92,54	92,74	92,93	93,12	93,32	93,51	93,70	93,90
9,7	94,09	94,28	94,48	94,67	94,87	95,06	95,26	95,45	95,65	95,84
9,8	96,04	96,24	96,43	96,63	96,83	97,02	97,22	97,42	97,61	97,81
9,9	98,01	98,21	98,41	98,60	98,80	99,00	99,20	99,40	99,60	99,80

Tabla de cubos

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,030	1,061	1,093	1,125	1,158	1,191	1,225	1,260	1,295
1,1	1,331	1,368	1,405	1,443	1,482	1,521	1,561	1,602	1,643	1,685
1,2	1,728	1,772	1,816	1,861	1,907	1,953	2,000	2,048	2,097	2,147
1,3	2,197	2,248	2,300	2,353	2,406	2,460	2,515	2,571	2,628	2,686
1,4	2,744	2,803	2,863	2,924	2,986	3,049	3,112	3,177	3,242	3,308
1,5	3,375	3,443	3,512	3,582	3,652	3,724	3,796	3,870	3,944	4,020
1,6	4,096	4,173	4,252	4,331	4,411	4,492	4,574	4,657	4,742	4,827
1,7	4,913	5,000	5,088	5,178	5,268	5,359	5,452	5,545	5,640	5,735
1,8	5,832	5,930	6,029	6,128	6,230	6,332	6,435	6,539	6,645	6,751
1,9	6,859	6,968	7,078	7,189	7,301	7,415	7,530	7,645	7,762	7,881
2,0	8,000	8,121	8,242	8,365	8,490	8,615	8,742	8,870	8,999	9,129
2,1	9,261	9,394	9,528	9,664	9,800	9,938	10,08	10,22	10,36	10,50
2,2	10,65	10,79	10,94	11,09	11,24	11,39	11,54	11,70	11,85	12,01
2,3	12,17	12,33	12,49	12,65	12,81	12,98	13,14	13,31	13,48	13,65
2,4	13,82	14,00	14,17	14,35	14,53	14,71	14,89	15,07	15,25	15,44
2,5	15,63	15,81	16,00	16,19	16,39	16,58	16,78	16,97	17,17	17,37
2,6	17,58	17,78	17,98	18,19	18,40	18,61	18,82	19,03	19,25	19,47
2,7	19,68	19,90	20,12	20,35	20,57	20,80	21,02	21,25	21,48	21,72
2,8	21,95	22,19	22,43	22,67	22,91	23,15	23,39	23,64	23,89	24,14
2,9	24,39	24,64	24,90	25,15	25,41	25,67	25,93	26,20	26,46	26,73
3,0	27,00	27,27	27,54	27,82	28,09	28,37	28,65	28,93	29,22	29,50
3,1	29,79	30,08	30,37	30,66	30,96	31,26	31,55	31,86	32,16	32,46
3,2	32,77	33,08	33,39	33,70	34,01	34,33	34,65	34,97	35,29	35,61
3,3	35,94	36,26	36,59	36,93	37,26	37,60	37,93	38,27	38,61	38,96
3,4	39,30	39,65	40,00	40,35	40,71	41,06	41,42	41,78	42,14	42,51
3,5	42,88	43,24	43,61	43,99	44,36	44,74	45,12	45,50	45,88	46,27
3,6	46,66	47,05	47,44	47,83	48,23	48,63	49,03	49,43	49,84	50,24
3,7	50,65	51,06	51,48	51,90	52,31	52,73	53,16	53,58	54,01	54,44
3,8	54,87	55,31	55,74	56,18	56,62	57,07	57,51	57,96	58,41	58,86
3,9	59,32	59,78	60,24	60,70	61,16	61,63	62,10	62,57	63,04	63,52
4,0	64,00	64,48	64,96	65,45	65,94	66,43	66,92	67,42	67,92	68,42
4,1	68,92	69,43	69,93	70,44	70,96	71,47	71,99	72,51	73,03	73,56
4,2	74,09	74,62	75,15	75,69	76,23	76,77	77,31	77,85	78,40	78,95
4,3	79,51	80,06	80,62	81,18	81,75	82,31	82,88	83,45	84,03	84,60
4,4	85,18	85,77	86,35	86,94	87,53	88,12	88,72	89,31	89,92	90,52
4,5	91,13	91,73	92,35	92,96	93,58	94,20	94,82	95,44	96,07	96,70
4,6	97,34	97,97	98,61	99,25	99,90	100,5	101,2	101,8	102,5	103,2
4,7	103,8	104,5	105,2	105,8	106,5	107,2	107,9	108,5	109,2	109,9
4,8	110,6	111,3	112,0	112,7	113,4	114,1	114,8	115,5	116,2	116,9
4,9	117,6	118,4	119,1	119,8	120,6	121,3	122,0	122,8	123,5	124,3
5,0	125,0	125,8	126,5	127,3	128,0	128,8	129,6	130,3	131,1	131,9
5,1	132,7	133,4	134,2	135,0	135,8	136,6	137,4	138,2	139,0	139,8
5,2	140,6	141,4	142,2	143,1	143,9	144,7	145,5	146,4	147,2	148,0
5,3	148,9	149,7	150,6	151,4	152,3	153,1	154,0	154,9	155,7	156,6

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,4	157,5	158,3	159,2	160,1	161,0	161,9	162,8	163,7	164,6	165,5
5,5	166,4	167,3	168,2	169,1	170,0	171,0	171,9	172,8	173,7	174,7
5,6	175,6	176,6	177,5	178,5	179,4	180,4	181,3	182,3	183,3	184,2
5,7	185,2	186,2	187,1	188,1	189,1	190,1	191,1	192,1	193,1	194,1
5,8	195,1	196,1	197,1	198,2	199,2	200,2	201,2	202,3	203,3	204,3
5,9	205,4	206,4	207,5	208,5	209,6	210,6	211,7	212,8	213,8	214,9
6,0	216,0	217,1	218,2	219,3	220,3	221,4	222,5	223,6	224,8	225,9
6,1	227,0	228,1	229,2	230,3	231,5	232,6	233,7	234,9	236,0	237,2
6,2	238,3	239,5	240,6	241,8	243,0	244,1	245,3	246,5	247,7	248,9
6,3	250,0	251,2	252,4	253,6	254,8	256,0	257,3	258,5	259,7	260,9
6,4	262,1	263,4	264,6	265,8	267,1	268,3	269,6	270,8	272,1	273,4
6,5	274,6	275,9	277,2	278,4	279,7	281,0	282,3	283,6	284,9	286,2
6,6	287,5	288,8	290,1	291,4	292,8	294,1	295,4	296,7	298,1	299,4
6,7	300,8	302,1	303,5	304,8	306,2	307,5	308,9	310,3	311,7	313,0
6,8	314,4	315,8	317,2	318,6	320,0	321,4	322,8	324,2	325,7	327,1
6,9	328,5	329,9	331,4	332,8	334,3	335,7	337,2	338,6	340,1	341,5
7,0	343,0	344,5	345,9	347,4	348,9	350,4	351,9	353,4	354,9	356,4
7,1	357,9	359,4	360,9	362,5	364,0	365,5	367,1	368,6	370,1	371,7
7,2	373,2	374,8	376,4	377,9	379,5	381,1	382,7	384,2	385,8	387,4
7,3	389,0	390,6	392,2	393,8	395,4	397,1	398,7	400,3	401,9	403,6
7,4	405,2	406,9	408,5	410,2	411,8	413,5	415,2	416,8	418,5	420,2
7,5	421,9	423,6	425,3	427,0	428,7	430,4	432,1	433,8	435,5	437,2
7,6	439,0	440,7	442,5	444,2	445,9	447,7	449,5	451,2	453,0	454,8
7,7	456,5	458,3	460,1	461,9	463,7	465,5	467,3	469,1	470,9	472,7
7,8	474,6	476,4	478,2	480,0	481,9	483,7	485,6	487,4	489,3	491,2
7,9	493,0	494,9	496,8	498,7	500,6	502,5	504,4	506,3	508,2	510,1
8,0	512,0	513,9	515,8	517,8	519,7	521,7	523,6	525,6	527,5	529,5
8,1	531,4	533,4	535,4	537,4	539,4	541,3	543,3	545,3	547,3	549,4
8,2	551,4	553,4	555,4	557,4	559,5	561,5	563,6	565,6	567,7	569,7
8,3	571,8	573,9	575,9	578,0	580,1	582,2	584,3	586,4	588,5	590,6
8,4	592,7	594,8	596,9	599,1	601,2	603,4	605,5	607,6	609,8	612,0
8,5	614,1	616,3	618,5	620,7	622,8	625,0	627,2	629,4	631,6	633,8
8,6	636,1	638,3	640,5	642,7	645,0	647,2	649,5	651,7	654,0	656,2
8,7	658,5	660,8	663,1	665,3	667,6	669,9	672,2	674,5	676,8	679,2
8,8	681,5	683,8	686,1	688,5	690,8	693,2	695,5	697,9	700,2	702,6
8,9	705,0	707,3	709,7	712,1	714,5	716,9	719,3	721,7	724,2	726,6
9,0	729,0	731,4	733,9	736,3	738,8	741,2	743,7	746,1	748,6	751,1
9,1	753,6	756,1	758,6	761,0	763,6	766,1	768,6	771,1	773,6	776,2
9,2	778,7	781,2	783,8	786,3	788,9	791,5	794,0	796,6	799,2	801,8
9,3	804,4	807,0	809,6	812,2	814,8	817,4	820,0	822,7	825,3	827,9
9,4	830,6	833,2	835,9	838,6	841,2	843,9	846,6	849,3	852,0	854,7
9,5	857,4	860,1	862,8	865,5	868,3	871,0	873,7	876,5	879,2	882,0
9,6	884,7	887,5	890,3	893,1	895,8	898,6	901,4	904,2	907,0	909,9
9,7	912,7	915,5	918,3	921,2	924,0	926,9	929,7	932,6	935,4	938,3
9,8	941,2	944,1	947,0	949,9	952,8	955,7	958,6	961,5	964,4	967,4
9,9	970,3	973,2	976,2	979,1	982,1	985,1	988,0	991,0	994,0	997,0

Tabla de senos y cosenos

seno

Grad.	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	(1,0)	
0	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175	89
1	0,0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	88
2	0,0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	0523	87
3	0,0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	0698	86
4	0,0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	0872	85
5	0,0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028	1045	84
6	0,1045	1063	1080	1097	1115	1132	1149	1167	1184	1201	1219	83
7	0,1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374	1392	82
8	0,1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547	1564	81
9	0,1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719	1736	80
10	0,1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	1908	79
11	0,1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	2079	78
12	0,2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2233	2250	77
13	0,2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	2419	76
14	0,2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	2588	75
15	0,2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	2756	74
16	0,2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	2924	73
17	0,2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3090	72
18	0,3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3256	71
19	0,3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	3420	70
20	0,3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3584	69
21	0,3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3746	68
22	0,3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3907	67
23	0,3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	4067	66
24	0,4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	4226	65
25	0,4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	4384	64
26	0,4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	4540	63
27	0,4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	4695	62
28	0,4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	4848	61
29	0,4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	5000	60
30	0,5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	5150	59
31	0,5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	5299	58
32	0,5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	5446	57
33	0,5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	5592	56
34	0,5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	5736	55
35	0,5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	5878	54
36	0,5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	6018	53
37	0,6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	6157	52
38	0,6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	6293	51
39	0,6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	6428	50
40	0,6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	6561	49
41	0,6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	6691	48
42	0,6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	6820	47
43	0,6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	6947	46
44	0,6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	7071	45
	(1,0)	,9	,8	,7	,6	,5	,4	,3	,2	,1	,0	Grad.

coseno

Tabla de senos y cosenos (continuación)

seno

Grad.	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	(1,0)	
45	0,7071	7083	7096	7108	7120	7133	7145	7157	7169	7181	7193	44
46	0,7193	7206	7218	7230	7242	7254	7266	7278	7290	7302	7314	43
47	0,7314	7325	7337	7349	7361	7373	7385	7396	7408	7420	7431	42
48	0,7431	7443	7455	7466	7478	7490	7501	7513	7524	7536	7547	41
49	0,7547	7559	7570	7581	7593	7604	7615	7627	7638	7649	7660	40
50	0,7660	7672	7683	7694	7705	7716	7727	7738	7749	7760	7771	39
51	0,7771	7782	7793	7804	7815	7826	7837	7848	7859	7869	7880	38
52	0,7880	7891	7902	7912	7923	7934	7944	7955	7965	7976	7986	37
53	0,7986	7997	8007	8018	8028	8039	8049	8059	8070	8080	8090	36
54	0,8090	8100	8111	8121	8131	8141	8151	8161	8171	8181	8192	35
55	0,8192	8202	8211	8221	8231	8241	8251	8261	8271	8281	8290	34
56	0,8290	8300	8310	8320	8329	8339	8348	8358	8368	8377	8387	33
57	0,8387	8396	8406	8415	8425	8434	8443	8453	8462	8471	8480	32
58	0,8480	8490	8499	8508	8517	8526	8536	8545	8554	8563	8572	31
59	0,8572	8581	8590	8599	8607	8616	8625	8634	8643	8652	8660	30
60	0,8660	8669	8678	8686	8695	8704	8712	8721	8729	8738	8746	29
61	0,8746	8755	8763	8771	8780	8788	8796	8805	8813	8821	8829	28
62	0,8829	8838	8846	8854	8862	8870	8878	8886	8894	8902	8910	27
63	0,8910	8918	8926	8934	8942	8949	8957	8965	8973	8980	8988	26
64	0,8988	8996	9003	9011	9018	9026	9033	9041	9048	9056	9063	25
65	0,9063	9070	9078	9085	9092	9100	9107	9114	9121	9128	9135	24
66	0,9135	9143	9150	9157	9164	9171	9178	9184	9191	9198	9205	23
67	0,9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9265	9272	22
68	0,9272	9278	9285	9291	9298	9304	9311	9317	9323	Y330	9336	21
69	0,9336	Y342	9348	Y354	9361	4367	9371	9379	9385	9391	9397	20
70	0,9397	9403	9409	9415	9421	9426	9432	9438	9444	9449	9455	19
71	0,9455	9461	Y466	9472	Y478	9483	9419	9494	9500	9505	9511	18
72	0.9511	9516	9521	9527	9532	9537	9542	9548	9553	9558	9563	17
73	0,9563	9568	9573	9578	9583	9588	9593	9598	9603	9608	9613	16
74	0,9613	9617	Y622	Y627	9632	9636	Y641	9646	9650	9655	9659	15
75	0,9659	9664	9668	9673	9677	9681	9686	9690	9694	9699	9703	14
76	0,9703	9707	9711	9715	Y720	9724	9728	9732	9736	9740	9744	13
77	0,9744	9741	9751	9755	9759	9763	9767	9770	9774	9778	Y781	12
78	0,9781	9785	9789	9792	9796	9799	9803	9006	9810	9813	9816	11
79	0,9816	9620	9823	9826	9829	9833	9836	9839	9842	9845	9848	10
80	0,9848	9851	9854	9857	9860	9863	9866	9869	9871	Y874	9877	9
81	0.9877	9880	9882	9885	9888	9890	9893	9895	9898	9900	9903	8
82	0.9903	9905	9907	9910	9912	9914	9917	9919	9921	9923	9925	7
83	0,9925	9928	9930	9932	9934	9936	9938	9940	9942	9943	9945	6
84	0,9945	9947	4949	9951	9952	9954	9956	9957	9959	9960	9962	5
85	0.9962	9963	9965	9966	9968	9969	9971	9972	9973	9974	9976	4
86	0.9976	9977	9978	9979	9980	9981	9902	9983	9984	9985	9986	3
87	0.9986	9987	9988	9989	Y990	9990	9991	9992	9993	9992	9994	2
88	0,9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	Y997	9998	9998	9998	1
89	0,9998	9999	9999	9999	9999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0
	(1,0)	,9	,8	,7	,6	,5	,4	,3	,2	,1	,0	Grad

coseno

Tabla de tangentes y cotangentes

tangente

Grad.	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	(1,0)	
0	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175	89
1	0,0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	88
2	0,0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507	0524	87
3	0,0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682	0699	86
4	0,0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857	0875	85
5	0,0875	0892	0910	0928	0945	0963	0981	0998	1016	1033	1051	84
6	0,1051	1069	1086	1104	1122	1139	1157	1175	1192	1210	1228	83
7	0,1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388	1405	82
8	0,1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566	1584	81
9	0,1584	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745	1763	80
10	0,1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	1944	79
11	0,1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	2126	78
12	0,2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	2309	77
13	0,2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	2493	76
14	0,2493	2512	2530	2549	2568	2586	2605	2623	2642	2661	2679	75
15	0,2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	2867	74
16	0,2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3057	73
17	0,3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3249	72
18	0,3249	3269	3288	3307	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3443	71
19	0,3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	3640	70
20	0,3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3839	69
21	0,3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	4040	68
22	0,4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	4245	67
23	0,4245	4265	4286	4307	4327	4348	4369	4390	4411	4431	4452	66
24	0,4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	4663	65
25	0,4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4877	64
26	0,4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	5095	63
27	0,5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	5317	62
28	0,5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	5543	61
29	0,5543	5566	5589	5612	5635	5658	5681	5704	5727	5750	5774	60
30	0,5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	6009	59
31	0,6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	6249	58
32	0,6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	6494	57
33	0,6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	6745	56
34	0,6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	7002	55
35	0,7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239	7265	54
36	0,7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	7536	53
37	0,7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	7813	52
38	0,7813	7841	7869	7898	7926	7954	7983	8012	8040	8069	8098	51
39	0,8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	8391	50
40	0,8391	8421	8451	8481	8511	8541	8571	8601	8632	8662	8693	49
41	0,8693	8724	8754	8785	8816	8847	8878	8910	8941	8972	9004	48
42	0,9004	9036	9067	9099	9131	9163	9195	9228	9260	9293	9325	47
43	0,9395	9358	9391	9424	9457	9490	9523	9556	9590	9623	9657	46
44	0,9657	9691	9725	9759	9793	9827	9861	9896	9930	9965	1,000	45
	(1,0)	,9	,8	,7	,6	,5	,4	,3	,2	,1	,0	Grad.

cotangente

Tabla de tangentes y cotangentes (continuación)

tangente

Grad.	,0	,1	,2	,3	,4	,S	,6	,7	,8	,9	(1,0)	
45	1,000	003	007	011	014	018	021	025	028	032	036	44
46	1.036	039	043	046	050	054	057	061	065	069	072	43
47	1,072	076	OSO	084	087	091	095	099	103	107	111	42
48	1,111	115	118	122	126	130	134	138	142	146	150	41
49	1,150	154	159	163	167	171	175	179	183	188	192	40
50	1,192	196	200	205	209	213	217	222	226	230	235	39
51	1,235	239	244	248	253	257	262	266	271	275	280	38
52	1,280	285	289	294	299	303	308	313	317	322	327	37
53	1,327	332	337	342	347	351	356	361	366	371	376	36
54	1,376	381	387	392	397	402	407	412	418	423	428	35
55	1,428	433	439	444	450	455	460	466	471	477	483	34
56	1,483	488	494	499	505	511	517	522	528	534	540	33
57	1,540	546	552	558	564	570	576	582	588	594	600	32
58	1,600	607	613	619	625	632	638	645	651	658	664	31
59	1,664	671	678	684	691	698	704	711	718	725	732	30
60	1,732	739	746	753	760	767	775	782	789	797	804	29
61	1,804	811	819	827	834	842	849	857	865	873	881	28
62	1,881	889	897	905	913	921	929	937	946	954	963	27
63	1,963	971	980	988	997	*006	*014	*023	*032	*041	*050	26
64	2,050	059	069	078	087	097	106	116	125	135	145	25
65	2,145	154	164	174	184	194	204	215	225	236	246	24
66	2,246	257	267	278	289	300	311	322	333	344	356	23
67	2,356	367	379	391	402	414	426	438	450	463	475	22
68	2,475	488	500	513	526	539	552	565	578	592	605	21
69	2,605	619	633	646	660	675	689	703	718	733	747	20
70	2,747	762	778	793	808	824	840	856	872	888	904	19
71	2,904	921	937	954	971	989	*006	*024	*042	*060	*078	18
72	3,078	096	115	133	152	172	191	211	230	251	271	17
73	3,271	291	312	333	354	376	398	420	442	465	487	16
74	3,487	511	534	558	582	606	630	655	681	706	732	15
75	3,732	758	785	812	839	867	895	923	952	981	*011	14
76	4,011	041	071	102	134	165	198	230	264	297	331	13
77	4,331	366	402	437	474	511	548	586	625	665	705	12
78	4,705	745	787	829	872	915	959	*005	*050	*097	*145	11
79	5,145	193	242	292	343	396	449	503	558	614	671	10
80	5,671	5,730	5,789	5,850	5,912	5,976	6,041	6,107	6,174	6,243	6,314	9
81	6,314	6,386	6,460	6,535	6,612	6,691	6,772	6,855	6,940	7,026	7,115	8
82	7,115	7,207	7,300	7,396	7,495	7,596	7,700	7,806	7,916	8,028	8,144	7
83	8,144	8,264	8,386	8,513	8,643	8,777	8,915	9,058	9,205	9,357	9,514	6
84	9,514	9,677	9,845	10,0	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	5
85	11,43	11,66	11,91	12,16	12,43	12,71	13,00	13,30	13,62	13,95	14,30	4
86	14,30	14,67	15,06	15,46	15,89	16,35	16,83	17,34	17,89	18,46	19,08	3
87	19,08	19,74	20,45	21,20	22,02	22,90	23,86	24,90	26,03	27,27	28,64	2
88	28,64	30,14	31.82	33.69	35,80	38.19	40,92	44.07	47,74	52,08	57,29	
89	57·29	63,66	71,62	81,85	95,49	114,6	143,2	0	286,5	573,0	- - -	
	(1.0)	,9	,8	,7	,6	,5	,4	,3	,2	,1	,0	Crad.

cotangente

Memento

Aritmetica y álgebra

(1) Termino:

Un numero, una variable o cualquier **combinación** de **números** y variables **relacionadas** por las **operaciones** de **multiplicación**, división y **potenciación** se **llama término**. Ejemplo: $5x^2y^{-1}$. El número 5 es el **coeficiente**, x^2y^{-1} es **la** parte literal.

(2) Términos semejantes:

Dos o más términos **son** semejantes si tienen **la** misma parte literal.

(3) **Expresión algebraica:**

Es cualquier **combinación** de **términos relacionados** por las **operaciones** de cálculo

(4) Monomio:

Es el término en el que las variables están relacionadas mediante la **multiplicación** y la **potenciación con exponente** natural.

[redacted]

Es **la** suma algebraica de dos monomios.

(6) Trinomio:

Es la suma algebraica de tres monomios.

(7) **Polinomio:**

Los **monomios**, binomios. trinomios y, en general, **toda suma algebraica** de **monomios** es un **polinomio.**

(8) **Fracción** algebraica:

Es el **cociente** de dos **polinomios**.

(9) **Potencia de exponente entero:**

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n\text{-veces}} \quad a, n \in \mathbb{N};\ n > 1$$

$$a^0 = 1 \cdot a^1 = a \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

(10) Propiedades de las **potencias:**

Para **todo** $r, s \in \mathbb{Z}$ **y** $a \neq 0$; $b \neq 0$ para $r < 0$; $s < 0$ se cumple.

1. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
2. $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$
3. $a^r : a^s = a^{r-s}$
4. $a^r : b^r = (a : b)^r$
5. $(a^r)^s = a^{rs}$

(11) **Productos notables:**

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \qquad (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + a \cdot b \qquad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$

(12) Descomposición factorial:

factor común: $ax + ay = a\,(x + y)$
diferencia de cuadrados: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
Trinomios:

cuadrado perfecto: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$
$x^2 + px + q$: $x^2 + px + q = (x + a)(x + b)$ donde $p = a + b$; $q = ab$
$mx^2 + px + q$: $mx^2 + px + q = (ax + b)\,(cx + d)$ donde $m = ac$; $p = ad + bc$; $q = bd$

(13) Fórmula de resolución de la ecuación de segundo grado:

$ax^2 + bx + c = 0$ $(a, b, c \in \mathbb{R};\ a \neq 0)$

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Discriminante $\boxed{D = b^2 - 4ac}$

$D > 0$ La ecuación tiene dos soluciones.
$D = 0$ La ecuación tiene una solución.
$D < 0$ La ecuación no tiene solución.

Descomposición factorial: $ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)(x - x_2)$

(14) Notación científica:

Se dice que un número real está expresado en notación científica cuando se escribe en la forma $a_0 \cdot 10^k$ donde $1 \leqslant a_0 < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$
Ejemplos: $1\,364{,}5 = 1{,}3 \cdot 10^3$; $0{,}098 = 9{,}8 \cdot 10^{-2}$

(15) Raíz cuadrada y cúbica:

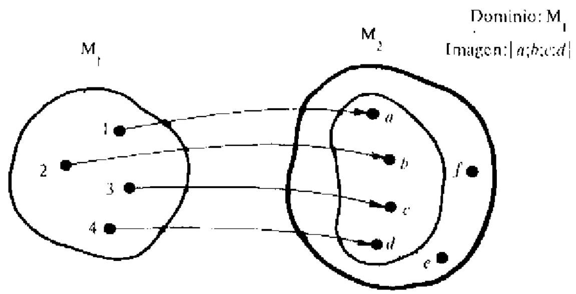
Se denomina raíz cuadrada (cúbica) de un número no negativo a cualquiera, al número real b, tal que: $b^2 = a$ $(b^3 = a)$

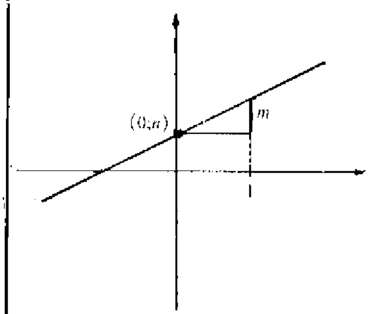
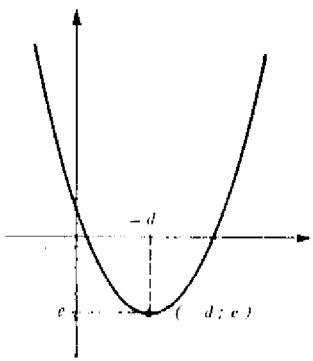
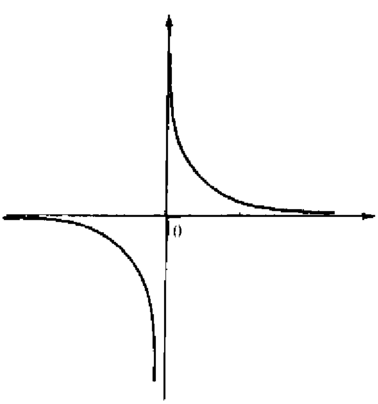
(16) Módulo de un número real:

$$|a| = \begin{cases} a \text{ si } a \geqslant 0 \\ -a \text{ si } a \leqslant 0 \end{cases}$$

(17) Función:

Una función es una correspondencia entre dos conjuntos M_1 y M_2 tal que a cada elemento $x \in M_1$ le corresponde uno y solo un elemento $y \in M_2$.
El conjunto M_1 es el Dominio de la función y al conjunto formado por los elementos $y \in M_2$ que corresponden a los elementos de M_1 se llama Imagen de la función.



(18) Gráfica	Ecuación	Propiedades
Recta  	$y = mx + n$	**Dominio:** $\mathbb{R}$ **Imagen:** $\mathbb{R}$ **Monotonia** $\begin{cases} \text{creciente si } m > 0 \\ \text{decreciente si } m < 0 \end{cases}$ Cero: $x_0 = -\dfrac{n}{m} \quad (m \neq 0)$
Parábola  	$y = (x + d)^2 + e$ $y = (ax^2 + bx + c)$	Dominio: $\mathbb{R}$ **Imagen:** $y > e$ **Monotonia** $\begin{cases} \text{creciente para } x > -d \\ \text{decreciente para } x < -d \end{cases}$ Ceros $x_0 = -d \pm \sqrt{-e}$ si $e \leq 0$ **Paridad:** no es par ni impar
Hipérbola  	$y = x^{-1}$	**Dominio:** $\mathbb{R}^*$ **Imagen:** $\mathbb{R}^*$ **Monotonia** decreciente **Ceros: no tiene** **Paridad: impar**

(19) **Conjuntos numéricos:** $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$:

Conjuntos numéricos con exclusión del cero:

$\mathbb{N}^*$; $\mathbb{Z}^*$; $\mathbb{Q}^*$; $\mathbb{R}^*$

Elementos no negativos de los dominios numéricos:

$\mathbb{Z}_+$; $\mathbb{Q}_+$; $\mathbb{R}_+$

(20) **Redondeo (Reglas** do redondeo):

Si el orden en el que se va a redondear (señalado con ↓ en los ejemplos) esta seguido de:

1, 2, 3, 4 se redondea por defecto. Ejemplos:

1 842 ≈ 1 800; 1 847 ≈ 1 800

5, 6, 7, 8, 9 se redondea por exceso. Ejemplos:

1 751 ≈ 1 800; 1 650 ≈ 1 700; 1 980 ≈ 2 000

(21) Valores **aproximados**:

En un valor aproximado se llaman cifras significativas todas las que se encuentran a la derecha de la primera diferente de cero; si un número está escrito en notación científica, los ceros de la potencia de 10 no son cifras significativas.

Ejemplos: 1 200 tiene 4 cifras significativas
0,024 0 tiene 3 cifras significativas
0,010 34 tiene 4 cifras significativas
0,000 01 tiene 1 cifra significativa
$1,2 \cdot 10^3$ tiene 2 cifras significativas

Un valor aproximado que se obtiene aplicando las reglas de redondeo tiene todas sus cifras significativas correctas.

Ejemplos: 1 es un valor aproximado de $\sqrt{2}$ con 1 cifra correcta pues se obtiene redondeando a las unidades.

0.333 es un valor aproximado de $\frac{1}{3}$ con 3 cifras correctas pues se obtiene redondeando a las milésimas.

$1,4 \cdot 10^2$ es un valor aproximado de $\sqrt{20\,000}$ con 2 cifras correctas pues se obtiene redondeando a las decenas.

(22) Regla **fundamental** del **calculo aproximado:**

Cuando se calcula con valores aproximados la respuesta debe darse con tantas cifras significativas como el dato que menos número de cifras significativas tenga.
Los cálculos intermedios deben realizarse con una cifra significativa adicional; en caso de que esto sea demasiado engorroso, se pueden realizar con el mismo numero de cifras que tenga la respuesta.

(23) Tanto por ciento:

a es el $x\%$ dc b si se cumplc yuc:

$$x = \frac{a}{b} \cdot 100$$

Para calcular otro dc los elementos que intervienen eii esta relación se puede utilizar cualquiera de los procedimientos siguientes:

despejo en la fórmula,
razonamientos sobre pruporcinnalidad.
razonamientos sobre fracciones (reducción a la unidad)

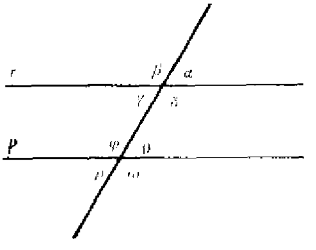
GEOMETRÍA

Ángulos

(24) Un **ángulo** es la intersección o **unión** de dos **semiplanos**.

(25) **Angulos complementarios** son aquellos cuya suma es **un ángulo de** YO°.

(26) Ángulos entre **paralelas**
$r || p$ y s: secante
alternos: α y ρ; β y ω; γ y 0, δ y φ
correspondientes: α y 0; β y φ; δ y ω; γ y ρ
conjugados: α y ω; β y ρ; γ y φ; δ Y 0

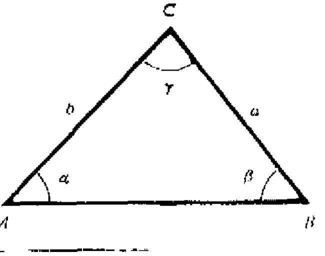


Los ángulos alternos y los correspondientes entre paralelas son iguales.
Los ángulos conjugados entre paralelas son suplementarios, rs decir, suman 180°.
Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos o perpendiculares, son iguales o suplementarios. Sun iguales en el caso en que ambos sean agudos u obtusos.

Triángulos

(27) Tndo polígono de **tres** lados se llama triángulo:

Notación
Los vértices se denotan por letras mayúsculas de nuestro alfabeto (A, B, .. , Z) y la correspondiente letra minúscula denota al ladn opuesto a cada vértice.
Los ángulos se denotan con las letras griegas correspondientes.



(28) **Clasificación** de **los triángulos**:

según sus lados
Escaleno: Todos sus lados son desiguales.
Isósceles: Tiene dos lados iguales.
Equilátero: Tiene sus tres lados iguales.

segun sus ángulos
Acutángulo: Todos sus ángulos svn agudos.
Rectángulo: Tiene un ángulo α recto (90°). Se cumple:
$a^2 = b^2 + c$ (teorema de Pitágoras)
Obtusángulo: Tiene un ángulo obtuso (>90°)

(29) Rectas notables de un triángulo:

Alturas: son los segmentos de perpendicular trazadas desde los vertices hasta los lados opuestos. (Los pies de las perpendiculares se llaman *pies* de las alturas.)

Medianas: son los segmentos determinados por los vértices y el punto medio del lado opuesto.

Mediatrices: son las perpendiculares que pasan por Los puntos medios de cada uno de los lados de un triángulo.

Bisectrices: son los segmentos que dividen en dos ángulos iguales cada uno de los ángulos interiores de un triángulo

(30) Puntos notables en un triángulo:

En todo triángulo:

Las *alturas* se *cortan en* un punto llamado ortocentro.

Las medianas se cortan en un punto llamado baricentro (centro de gravedad).

Las mediatrices se cortan en un punto que es el circuncentro (centro de la circunferencia circunscrita).

Las bisectrices se cortan en un punto que es el incentro (centro de la circunferencia inscrita).

(31) Suma de ángulos interiores de un triángulo:

Los ángulos interiores de un triángulo suman 180°.

(32) Criterios de igualdad de triángulos:

Dos triángulos son iguales si tienen respectivamente iguales:

un lado y los ángulos adyacentes (*a. l. a*),

dos lados y el ángulo comprendido (*l.* u. *l*),

sus tres lados (*l. l. l*).

(33) Criterios de semejanza de triángulos.

Dos triángulos son semejantes si:

tienen sus tres ángulos iguales (*a.* o. *a*),

tienen un lado proporcional y los ángulos adyacentes a ese lado respectivamente iguales (*a. l. a*),

tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos respectivamente igual (*l. a. l*).

Cuadriláteros

(34) Todo polígono de cuatro lados se llama cuadrilátero.

(35) Clasificación y propiedades de los cuadriláteros:

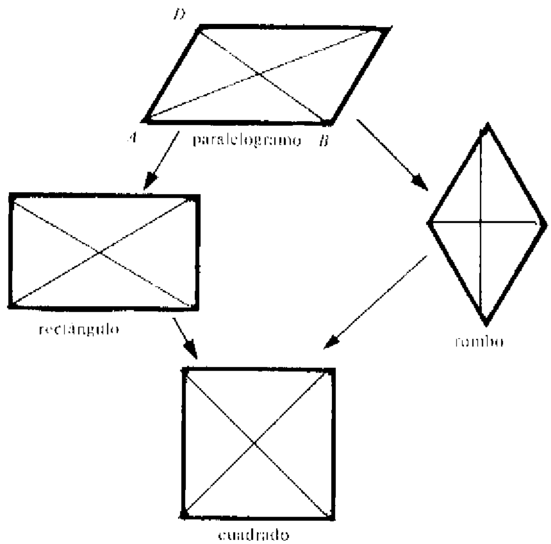
Paralelogramos

Los paralelogramos tienen sus lados opuestos iguales y paralelos. Sus ángulos opuestos son iguales y los consecutivos suman 180°. Las diagonales se cortan en su punto medio.

Los rectángulos y los rombos son paralelogramos especiales.

Rectángulo	Rombo
Sus cuatro ángulos son rectos.	Sus cuatro lados son iguales.
Sus diagonales son iguales	Sus diagonales son perpendiculares y biseccan el ángulo de donde parten.

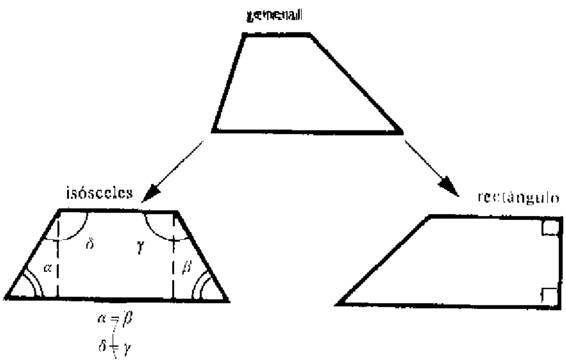
El cuadrado es un paralelogramo que es a la vez rectángulo y rombo.



Trapecio

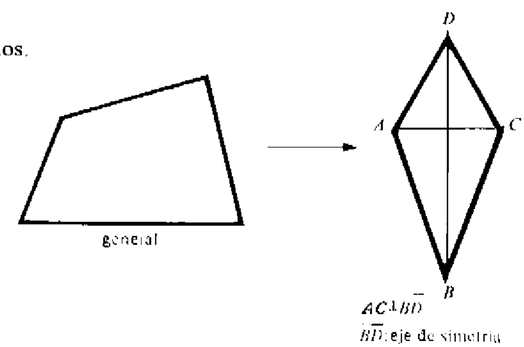
Los trapecios **son** cuadriláteros **que** tienen **un par de lados** paralelos. Los lados **paralelos** se llaman **bases del trapecio.**

El segmento **que une** los **puntos medios de los** lados no paralelos **de un trapecio** (paralela **media) es paralelo a** las **bases** y **su longitud es igual a la** semisuma de las longitudes **de ellas.**



Trapezoide

El cuadrilátero que no tiene lados paralelos.



(36) **Suma de ángulos interiores de un** cuadrilátero:

Los ángulos **interiores de un** cuadrilátero suman 360°.

(37) Área de figuras planas

Triángulo: $A = \frac{1}{2} bh$

Rombo: $A = \frac{1}{2} ab$ (a y b longitudes de los lados)

Rectángulo: $A = ab$

Cuadrado: $A = a^2$

Trapecio: $A = \left[\frac{b + b'}{2}\right]h$ (b y b' bases)

Circunferencia $A = \pi r^2$

(38) Circunferencia

Una circunferencia es un conjunto de puntos que todos equidistan de un punto en el plano llamado centro.

Ángulos en la circunferencia:

Angulo central: Es el ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia

Angulo inscrito: Es el ángulo cuyo vértice es un punto de la circunferencia y sus lados son secantes

Angulo semiinscrito: Es el ángulo cuyo vértice pertenece a la circunferencia y tiene un lado secante a la circunferencia y otro tangente en su vértice.

Radio: Es el segmento que va del centro de la circunferencia a un punto de ella.

Cuerda: Es un segmento que tiene sus extremos en la circunferencia.

Diámetro Es la mayor de las cuerdas y pasa por el centro de la circunferencia. Su longitud es igual a dos veces el radio.

(39) Polígonos:

Un polígono de:

5 lados, se llama pentágono;
6 lados, se llama exágono;
7 lados, se llama eptagono;
8 lados se llama octógono.

En general un polígono de n lados se llama n-ágono.
Un polígono es regular si sus ángulos interiores son iguales entre sí y sus lados también.
La suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $(n - 1) \cdot 180°$.

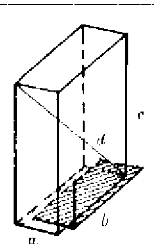
(40) Polígonos regulares:

Para todo polígono regular existe una circunferencia circunscrita.
El centro de esa circunferencia es el centro del polígono.
El radio de la circunferencia circunscrita se llama radio del polígono y la perpendicular a un lado trazada desde el centro es la apotema.
El ángulo central α que subtiende un lado del polígono regular es:

$\alpha = \frac{360°}{n}$, donde n es el número de lados.

(41) Cuerpos geométricos:

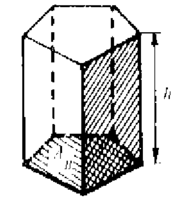
Ortoedro:



$V = abc$

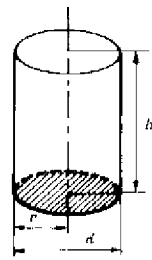
$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Prisma:



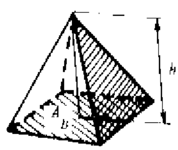
$$V = A_B \cdot h$$

Cilindro circular:



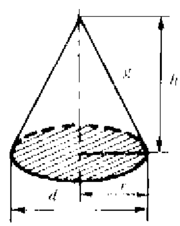
$$V = \pi r^2 h$$
$$A_L = 2\pi r h$$

Pirámide:



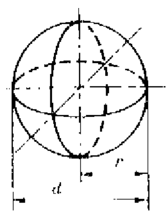
$$V = \frac{1}{3} A_B h$$

Cono circular:



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$
$$A_L = \pi r g;\ g^2 = r^2 + h^2$$

Esfera:



$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$
$$A = 4 \pi r^2$$

ÍNDICE