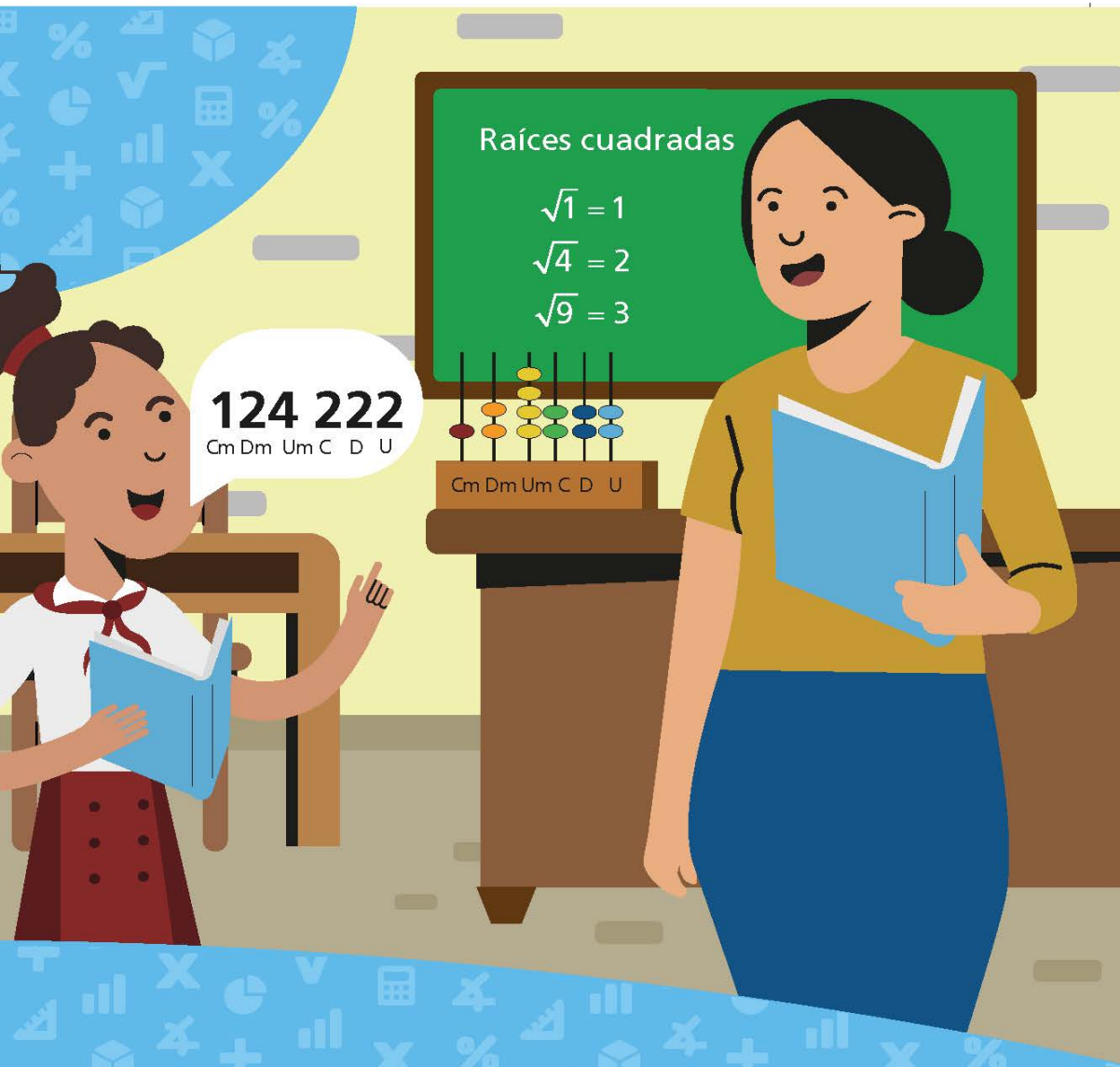


MATEMÁTICA

quinto grado

MATEMÁTICA

quinto grado

M. Sc. Maritza Rodríguez Valdés
Lic. Raúl González Rojas

EDITORIAL
PUEBLO Y EDUCACIÓN

Este material forma parte del conjunto de trabajos dirigidos al Tercer Perfeccionamiento Continuo del Sistema Nacional de la Educación General. En su elaboración participaron maestros, metodólogos y especialistas a partir de concepciones teóricas y metodológicas precedentes, adecuadas y enriquecidas en correspondencia con el fin y los objetivos propios de cada nivel educativo, de las exigencias de la sociedad cubana actual y sus perspectivas.

Ha sido revisado por la subcomisión responsable de la asignatura perteneciente a la Comisión Nacional Permanente para la revisión de planes, programas y textos de estudio del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas del Ministerio de Educación.

Queda rigurosamente prohibida, sin la autorización previa y por escrito de los titulares del ***copyright*** y bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, así como su incorporación a un sistema informático.

Material de distribución gratuita. Prohibida su venta

Colaboradores:
M. Sc. Jorge Sosa Ortiz • M. Sc. Magyory Suárez Navarrete • M. Sc. Asela Camacho Camacho • M. Sc. Ramón Rafael Catá Borges • M. Sc. Mercedes Timoneda Valdés • M. Sc. José E. Bermúdez Brito • Dra. C. Juana Albarrán Pedroso • M. Sc. Alina V. Parets Gómez • M. Sc. Milagros Díaz • M. Sc. Marta Borrego Nuñez • Dra. C. Celia Rizo Cabrera • Lic. Gladys García Baró • Prof. Ana Lidia Lorenzo Hernández • Prof. Mario García Fariñas • Lic. Caridad Suárez Fidalgo

Edición y corrección:
Lic. Martiza Rodríguez Valdés

Diseño, cubierta e ilustración:
Instituto Superior de Diseño

Emplane:
Yaneris Guerra Turró

Instituto Superior de Diseño:
• Anelís Simón Sosa • María Paula Lista Jorge • Sara Sofía Delgado Méndez • Isell Rodríguez Guerra • Daniela Domínguez Ramírez • Amanda Serrano Hernández • Rocio de la C. Ruíz Rodríguez • Evelio de la Sota Ravelo • Ana Laura Seco Abreu • Arianna Ruenes Torres • Reynier Polanco Somohano • Celia Carolina Céspedes Pupo • Elizabeth Diana Fajardo Céspedes • Laura Rosa Armero Fong • Elizabeth Blanco Galbán • Laura Reynaldo Jiménez • Daniela Arteaga Martínez • Daniela Alpízar Cespedes • Roberto Pérez Curbelo • Ariel Abreu Ulloa • M. Sc. Maité Fundora Iglesias • Dr. C. Ernesto Fernández Sánchez • D.I. Eric Cuesta Machado • D.I. Julio Montesino Carmona

© Ministerio de Educación, Cuba, 2024
© Editorial Pueblo y Educación, 2024

ISBN 978-959-13-4705-3 (Versión impresa)
ISBN 978-959-13-4706-0 (Versión digital)

EDITORIAL PUEBLO Y EDUCACIÓN
Ave. 3.ª A No. 4601 entre 46 y 60,
Playa, La Habana, Cuba. CP 11300.
epueblo@epe.gemined.cu

UNIDAD 1

Los números naturales

1.1 El sistema de numeración decimal

Algo de historia

Antes de que se establecieran los símbolos numéricos para la representación de cantidades, el hombre usó otros métodos para contar, utilizando para ello objetos como piedras, palitos de madera, nudos de cuerdas o simplemente los dedos. Más adelante comenzaron a aparecer los símbolos gráficos como señales para contar, por ejemplo, marcas en una vara o trazos específicos sobre la arena. Fue en Mesopotamia alrededor del año 4000 a.n.e. donde aparecen los primeros vestigios de los números que consistieron en grabados de señales en forma de cuñas sobre pequeños tableros

de arcilla empleando para ello un palito aguzado, de ahí el nombre de escritura cuneiforme (fig. 1.1). Como ves la numeración en aquella época se diferenciaba mucho de la actual.

Fig. 1.1

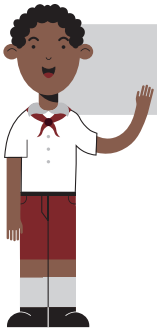
¿Cómo se denomina el sistema de numeración que utilizas y cuáles son sus propiedades?

¿Qué voy a aprender?

- Potencias de 10 hasta 1 000 000 000 000 000.
- Números de siete a quince lugares.
- Orden de los números naturales hasta 1 000 000 000 000.

¿Para qué me servirá?

Estos contenidos te permitirán emplearlos como instrumento para la lectura, la escritura y la compresión de informaciones expresadas con números naturales y para resolver ejercicios y problemas de la institución educativa y de la vida práctica.



¿Qué debo saber?

Leer, escribir e interpretar textos en los que aparecen números hasta 1 000 000. Por lo que debes conocer acerca de los principios que norman su formación, comparación y ordenamiento.

Recuerda que

En los números naturales las unidades simples se escriben y se leen:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
cero	uno	dos	tres	cuatro	cinco	seis	siete	ocho	Nueve

Estos números de un orden o lugar se llaman dígitos. Con la combinación de estos se representan los restantes números naturales atendiendo a determinados principios de formación.

Saber más

Los números que todos usamos son llamados números arábigos. Los árabes los popularizaron, pero su origen se remonta a los comerciantes fenicios que los usaban para contar y llevar la contabilidad comercial.

En el Sistema de Numeración Decimal las agrupaciones de hasta 9 unidades se representan con las cifras desde 1 hasta 9. Con 10 unidades se forma una decena (fig. 1.2).

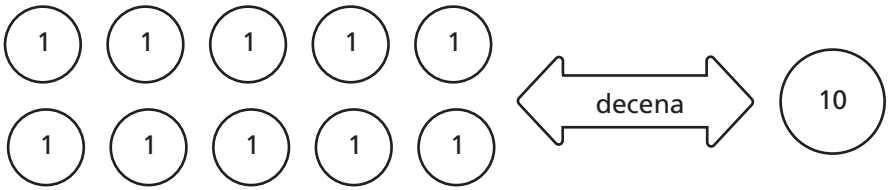


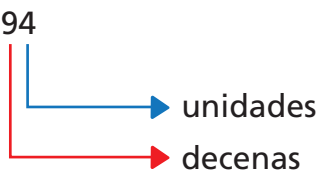
Fig. 1.2

Al agrupar hasta 9 decenas se forman los múltiplos de 10 hasta noventa.

10	20	30	40	50	60	70	80	90
diez	veinte	treinta	cuarenta	cincuenta	sesenta	setenta	ochenta	noventa

Los números como 19; 32; 45; 78 y 94 también son números de dos órdenes o lugares, representan cantidades de unidades que se pueden descomponer en decenas y unidades. Por ejemplo:

Lo que significa que con 94 unidades se pueden formar en total 9 decenas y quedan 4 unidades; el número 94 se descompone como suma de un múltiplo de 10 (90) y un número de un lugar (4) de la siguiente forma:

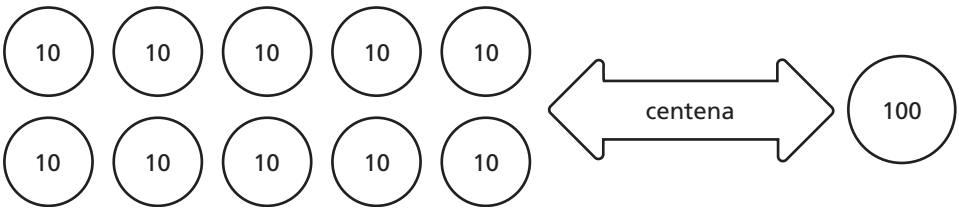


$94 = 90 + 4$, y como suma de productos,

$94 = 9 \cdot 10 + 4 \cdot 1$.

Los números de dos órdenes o lugares se forman bajo *el principio: adición de números de un lugar a múltiplos de 10 hasta 90*. A estos números también se les ha llamado números de dos cifras dado que en este sistema cada orden o lugar es ocupado por una cifra básica o dígito.

Con 10 decenas se forma una centena (fig. 1.3).



Al agrupar hasta 9 centenas se forman los números desde cien (100) hasta novecientos (900), como:

100	200	…	400	500	…	900
cien	doscientos		cuatrocientos	quinientos		novecientos
1 centena	2 centenas		4 centenas	5 centenas		9 centenas

Estos números son conocidos como *múltiplos de cien hasta 900.*

Con un proceso similar para la formación de los números de dos lugares, se forman los restantes números de tres órdenes o lugares. Estos representan cantidades de unidades con las que se pueden formar centenas y decenas o centenas y unidades. Los números de tres órdenes o lugares se forman *adicionando a múltiplos de cien hasta 900, números de uno o dos lugares.* A los números de tres órdenes o lugares también se les llama comúnmente números de tres cifras.

Reflexiona un instante

- Los números de dos lugares se forman adicionando números de un lugar a múltiplos de 10 hasta 90.
- Los números de tres lugares se forman *adicionando* números de uno o dos lugares a múltiplos de 100 hasta 900.
- Los números de cuatro lugares se forman adicionando números de uno, dos o tres lugares a múltiplos de 1 000 hasta 9 000.

¿Cómo se forman los números de 5; 6; 7 y más lugares?

Consejo

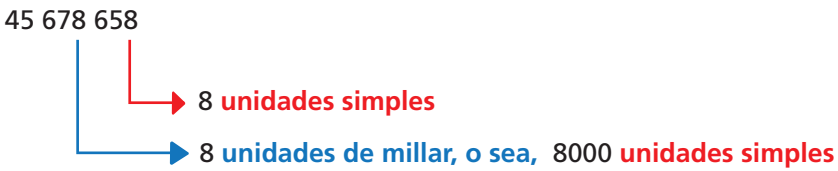
En el portal educativo CubaEduca puedes obtener mayor información sobre el Sistema de Numeración Decimal.

¿Cuáles son los principios del sistema de numeración decimal?

1. El principio de agrupación: ***con diez unidades de un orden se forma una unidad del orden inmediato superior.*** Es un sistema de numeración decimal o de base 10,
   10 unidades simples forman ***1 decena***,
   10 decenas simples forman ***1 centena***,
   10 centenas simples forman ***1 unidad de millar***,
   10 unidades de millar forman ***1 decena de millar***,
   10 decenas de millar forman ***1 centena de millar***.
   Y así sucesivamente se forman los números de órdenes mayores.
2. El principio posicional: ***cada dígito adquiere un valor que depende del orden o lugar que ocupa en la cifra.***

Ejemplo

En el número 45 678 658 el dígito 8 en el lugar de las unidades su valor relativo o posicional es de 8 unidades; en el lugar de las unidades de millar, su valor absoluto es 8 unidades y su valor relativo es 8 000 unidades.



El valor absoluto del 8 en esta cifra no varía, en cada caso representa **8 unidades**, pero en órdenes diferentes, y por tanto, valores diferentes: **8 unidades simples**, y **8 000 unidades simples** respectivamente.

Según los principios del Sistema de Numeración Decimal, el dígito ubicado en un orden o lugar en el número está representando a un múltiplo de una potencia de diez, de ahí que los números se

pueden descomponer como sumas de múltiplos de potencias de diez, ejemplo:

$45678658 = 40000000+5000000+600000+70000+8000+600+50+8$

y también como sumas de productos de potencias de diez expresadas en notación de potencia, ejemplo:

$45678658 = 4\cdot10^7+5\cdot10^6+6\cdot10^5+7\cdot10^4+8\cdot10^3+6\cdot10^2++5\cdot10+8\cdot1.$

Estos principios permiten, además, que de una cantidad que aparece en un texto puedas responder a preguntas como las siguientes. Por ejemplo, referidas al número 45 678 658:

¿Qué cifra básica ocupa el lugar de las decenas de millar? o ¿cuál es el valor absoluto de la cifra básica en el lugar de las decenas de millar? Respuesta (R/7).
¿Cuál es el valor que representa la cifra que ocupa el lugar de las decenas de millar? o ¿cuál es el valor relativo de la cifra básica en el lugar de las decenas de millar? (R/ 70 000).
¿Cuántas decenas de millar están representadas en este número? o ¿cuál es el total de decenas de millar que se pueden formar con 45 678 658 unidades? R/ (4 567 decenas de millar).

Para llegar a la respuesta en este u otro caso, ten en cuenta los órdenes decimales representados en la tabla de posición decimal y las indicaciones siguientes:

Lugar	8vo.	7mo.	6to.	5to.	4to.	3ro.	2do.	1er.
Orden	de los miles de millar		de los millares			de las unidades simples		
	Decenas	Unidades	Centenas	Decenas	Unidades	Centenas	Decenas	Unidades
Cifra	4	5	6	7	8	6	5	8
	4	***5***	***6***	***7***				

1. Escribe el número y destaca el dígito que ocupa el orden dado 45 6**7**8 658 (*7 es el dígito que ocupa el orden de las decenas de millar*).
2. Separa los dígitos a la izquierda hasta el orden destacado 45 6**7** / 8 658
3. El número formado por los dígitos a la izquierda, es la cantidad buscada.
   R/ En 45 678 658 hay representadas en total 4 567 decenas de millar o con 45 678 658 unidades se pueden formar hasta 4 567 decenas de millar.

En general la tabla de posición decimal se estructura teniendo en cuenta los órdenes, las clases y los períodos. En este momento solo hablaremos de órdenes y clases, como aparece en la ilustración siguiente.

Órdenes

... orden	Sexto orden	Quinto orden	Cuarto orden	Tercer orden	Segundo orden	Primer orden
...	Centenas de millar	Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades
	10 decenas de millar	10 millares	10 centenas	10 decenas	10 unidades	1

Clase de los millares | Clase de las unidades

Lee cuidadosamente el siguiente texto. ¿Cuáles expresiones dan idea de cantidad?

En el V Informe Nacional al Convenio sobre la Diversidad Biológica de la República de Cuba de dos mil catorce, se recoge la implementación de acciones por parte de múltiples entidades

del Ministerio de Ciencia, Tecnología y Medio Ambiente (CITMA) y de otros organismos de la Administración Central del Estado. El primero de los apéndices está referido a los datos del país, donde aparece reflejado que el presupuesto del estado para el dos mil trece fue de ciento sesenta y cinco millones setecientos noventa y nueve mil pesos para inversiones del Programa Forestal Nacional; el presupuesto para el Fondo Nacional de Desarrollo Forestal es de más de ciento noventa y cuatro millones de pesos en moneda nacional. Además, se registró en este informe el número de invertebrados marinos en Cuba que sobrepasa las cinco mil setecientas especies y la de cordados más de mil sesenta (principalmente peces).

Escribe los números que representan las cantidades identificadas en el texto.

Respuestas:
2014 (dos mil catorce: año en que se elaboró el V Informe Nacional al Convenio sobre la Diversidad Biológica de la República de Cuba).
2013 y **165 799 000** (dos mil trece: año presupuestado y ciento sesenta y cinco millones setecientos noventa y nueve mil pesos: monto del presupuesto).
194 000 000 (ciento noventa y cuatro millones de pesos: valor aproximado en CUP del presupuesto del Fondo Nacional de Desarrollo Forestal).
5 700; **1 060** (cinco mil setecientos: cantidad aproximada de especies de invertebrados marinos, mil sesenta: cantidad de cordados (principalmente peces).

Para escribir correctamente los números debes saber que: cada tres órdenes consecutivos tomados desde la derecha forman una clase. Las palabras mil, millones (entre otras) separan una clase de otra. Observa cómo se escriben los siguientes números.

a) Dos mil catorce (2 014).
b) Dos mil trece (2 013).

c) Ciento sesenta y cinco millones setecientos noventa y nueve mil (165 799 000).
d) Ciento noventa y cuatro millones (194 000 000).
e) Cinco mil setecientos (5 700).
f) Mil sesenta (1 060).

Recuerda que...

Para escribir un número:

- Lee (escucha) detenidamente el número dado.
- Separa mentalmente las clases que lo componen (cada tres lugares de derecha a izquierda, guíate por la palabra millones, mil, entre otras).
- Escribe los dígitos correspondientes a cada clase completando con ceros los lugares vacíos (comienza por la clase más a la izquierda).
- Comprueba leyendo el número escrito con cifras.

Ejemplo

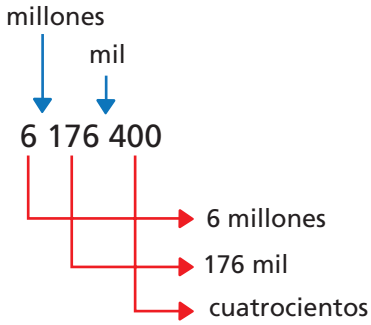
En las siguientes expresiones se recogen datos numéricos. Reescríbelas, usa las cifras que representan a cada uno de los números mencionados.

a) En el dos mil nueve participaron en actividades deportivas en nuestro país seis millones ciento setenta y seis mil cuatrocientas personas.
b) La luz recorre aproximadamente nueve billones cuatrocientos sesenta mil ochocientos millones de kilómetros en un año.

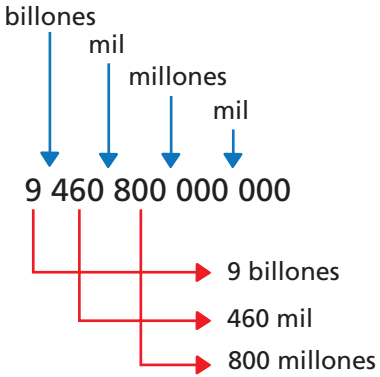
¿Podrás leer estos números con los conocimientos matemáticos que has adquirido?

Saber hacer

Para leer un número de seis o más órdenes o lugares, es conveniente separar los dígitos de tres en tres comenzando desde la derecha.



Se lee: 6 176 400
(seis millones ciento setenta y seis mil cuatrocientos).

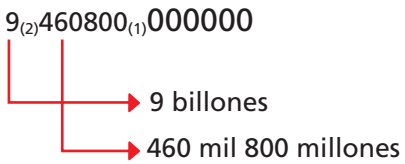


Se lee: 9 460 800 000 000
(nueve billones cuatrocientos sesentamil ochocientos millones).

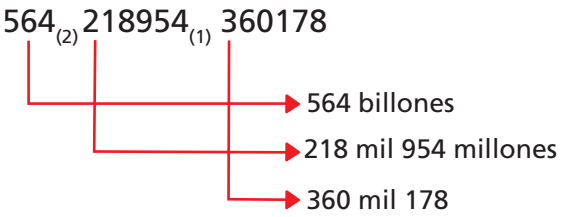
Una variante para la lectura de números grandes puede ser separando las cifras de 6 en 6 comenzando desde la derecha y leyendo como se ilustra en los siguientes casos. Los números colocados en los espacios indican millones (1), billones (2), y así sucesivamente.

Ejemplos

Se lee:
nueve billones cuatrocientos sesenta mil ochocientos millones.



Se lee:
quinientos sesenta y cuatro billones doscientos dieciocho mil novecientos cincuenta y cuatro millones trescientos sesenta mil ciento setenta y ocho.



¿Qué órdenes o lugares corresponden a estos números grandes en la tabla de posición?

Período de los billones			Período de los millones						Período de las unidades					
Clase de los billones			Clase de los millares de millones			Clase de los millones			Clase de los millares			Clase de las unidades		
10^{14}	10^{13}	10^{12}	10^{11}	10^{10}	10^{9}	10^{8}	10^{7}	10^{6}	10^{5}	10^{4}	10^{3}	10^{2}	10^{1}	1
C	D	U	C	D	U	C	D	U	C	D	U	C	D	U
								6	1	7	6	4	0	0
		9	4	6	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0
5	6	4	2	1	8	9	5	4	3	6	0	1	7	8

Es aconsejable usar la tabla de posición decimal para leer o escribir números grandes, hasta tanto hayas ganado práctica. Además de leer y escribir números debes saber compararlos y ordenarlos. Para ello desde grados anteriores has procedido empleando diversos criterios de comparación. ¿Cuál de ellos aplicarías para resolver el siguiente ejercicio?

Ejemplo

María estudia ciencias naturales y buscando información en la enciclopedia de la asignatura descubre que nuestra estrella más cercana, el sol, nació hace cuatro mil quinientos millones de años y que la muerte de muchas estrellas se produce con una gran explosión, llamada supernova, que expulsa gran cantidad de materia y energía al espacio. El brillo de una supernova puede llegar a superar el de mil millones de soles.

¿Cómo ayudarías a María a comparar los números correspondientes a los datos que aparecen en el texto?

Observa la vía de solución propuesta.

Solución
cuatro *mil* quinientos *millones* de años**:** 4 500 000 000.
mil millones: 1 000 000 000.

Como ambos tienen la misma cantidad de lugares y 4 >1, entonces, R/ 4 500 000 000 > 1 000 000 000.

Comenta con tus compañeros de aula ¿cómo proceder para comparar dos números cuando:

a) ¿Tienen la misma cantidad de lugares?
b) ¿No tienen la misma cantidad de lugares?

Resumen
Para comparar dos números naturales es conveniente:

1. Contar el número de lugares de los números y es mayor el que más lugares tenga.
2. Si tienen el mismo número de lugares se comparan las cifras básicas de igual orden comenzando por la izquierda, será mayor el que tenga mayor cifra básica en el primero de los órdenes desiguales.

Saber hacer

Compara los números:

a) 31 435 652 y 7 509 600
b) 6 767 634 y 3 864 123
c) 8 340 612 y 8 430 621
d) 3 216 907 y 3 216 904

Solución:

a) 31 435 652 > 7 509 600 porque el primero tiene más órdenes o lugares que el segundo.
b) **6** 767 634 y **3** 864 123 porque 6 > 3
c) 8 **3**40 612 < 8 **4**30 621 porque 8 = 8 y 3 < 4
d) 3 216 90**7** < 3 216 90**4** porque 4 < 7

Ejercicios del epígrafe 1.1

1. Armando ha propuesto que las potencias de diez sean representadas con ortoedros como los que aparecen en la ilustración (fig.1.4). Observa la imagen y escribe el número representado.

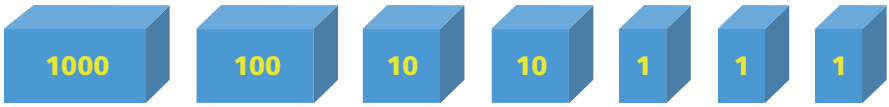


Fig. 1.4

2. Enlaza la imagen de la figura 1.5 con el número según corresponda.

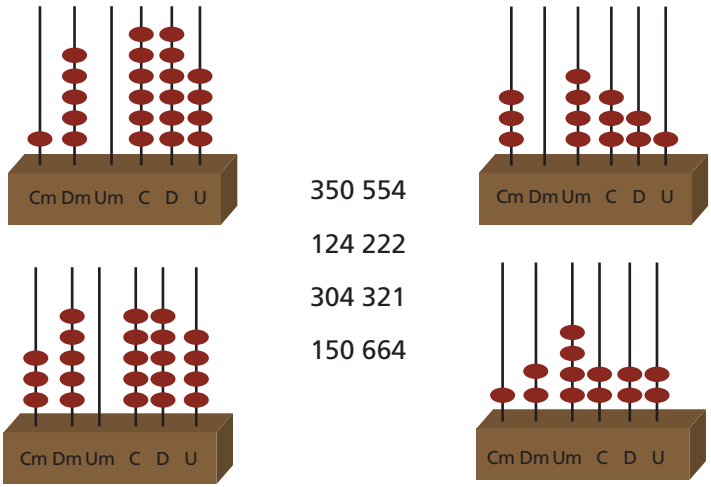


Fig. 1.5

3. Ubica en la tabla de posición los números naturales siguientes:

a) 67 305 200 b) 493 856;
c) 50 932 877 d) 7 009 116 608.

		a)	b)	c)	d)
Billones	Centenas				
	Decenas				
	Unidades				
Miles de millones	Centenas				
	Decenas				
	Unidades				
Millones	Centenas				
	Decenas				
	Unidades				
Millares	Centenas				
	Decenas				
	Unidades				
Unidades simples	Centenas				
	Decenas				
	Unidades				

4. Escribe como suma de múltiplos de potencias de 10:

a) 305 621 b) 1 600 125 c) 56 298 005
d) 201 003 943 e) 345 800 430 512 f) 123 650 900 000 345

5. Escribe los números que se leen:

a) Quinientos treinta.
b) Tres mil cinco.
c) Veintidós mil cuatrocientos treinta y uno.
d) Novecientos noventa y ocho mil doscientos noventa.
e) Nueve millones ciento cincuenta mil seiscientos sesenta.
f) Cuarenta y cinco millones cien mil cuarenta y siete.
g) Seiscientos veinte mil doscientos cincuenta y cuatro millones.

6. Escribe cómo se leen los siguientes números:

24 308; 120 003 142; 789 900 876; 34 008 564; 345 973 230; 3 007 456; 123 543 467 567; 324 125 174 308 512.

7. La gráfica de barras muestra el estado civil de la población cubana (fig. 1.6) (según los resultados del Censo de Población y Viviendas realizado en Cuba en el año 2002).

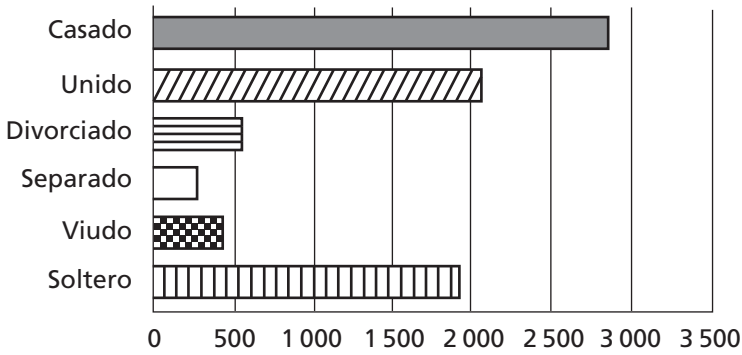


Fig. 1.6

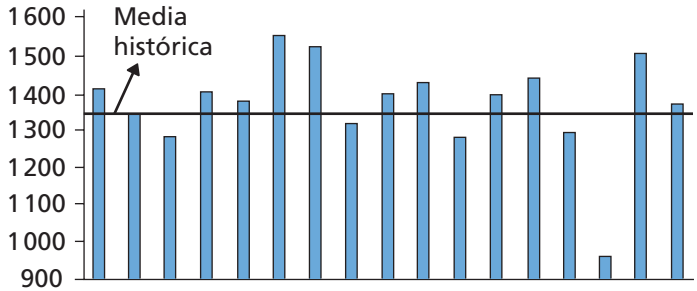
a) ¿Cuál es el estado civil que predomina entre los cubanos?

b) ¿Qué cantidad de la población se registra como unido en su estado civil según esta tabla? Responde aproximando la cifra a un múltiplo de 1 000.

c) ¿Cuántas centenas de divorciados hay en Cuba?

d) ¿Cuáles de los datos que se ilustran en la tabla tienen menos de un millar de personas?

8. La gráfica de barras (fig.1.7) recoge la media de precipitaciones anual de Cuba de 1990 a 2006, según estudios realizados por el CITMA, referidos a Cuba y el medio ambiente.



Lluvia media anual 1990-2006 (milimetros)
Fuente: Instituto Nacional de recursos Hidráulicos

Fig. 1.7

a) ¿Cuál es el año que reporta la mayor media de precipitaciones?

b) ¿Cuál es la media histórica de precipitaciones en el país?

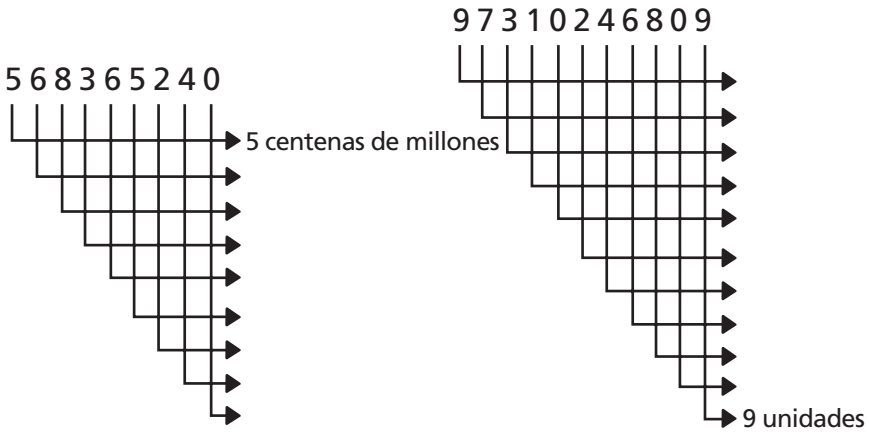
c) Escribe cómo se leen los datos de las respuestas anteriores.

9. En septiembre del año 2002, se realizó en Cuba el Censo de Población y Viviendas, el que, como gustan expresar los especialistas en la materia, es el más importante y completo de los estudios demográficos que realiza un país. Como resultado de este complejo estudio se recogieron los siguientes datos estadísticos:

Población total con residencia permanente	**11 177 743 habitantes**
Varones	5 597 233 habitantes
Hembras	5 580 510 habitantes
Urbana	8 479 329 habitantes
Rural	2 698 414 habitantes

Escribe cómo se leen los datos que se obtuvieron como resultado de la investigación.

10. Completa la ilustración de modo que esta muestre cómo están formados los números dados.



11. Ramiro pensó en un número de siete lugares que resultó ser: 7 386 540.

a) De las condiciones que te damos a continuación, marca con una (X) la que cumple el número dado.

1. ___ Representa en total 738 decenas y es divisible por 2.
2. ___ Representa en total 7 386 540 unidades y es divisible por 5.
3. ___ Representa en total 65 centenas y es divisible por 10.
4. ___ Representa en total 73 865 decenas y es divisible por 2 y 5 a la vez.

b) ___ Escribe cómo se lee el número dado.

c) ___ Descompón este número como suma de múltiplos de potencias de 10.

12. Plantea la suma de los valores relativos o posicionales de los dígitos que conforman cada número dado en el ejercicio 10 de este epígrafe.

13. Escribe 4 números distintos formados por:

a) Ocho dígitos que no se repitan, que tengan la cifra 4 en las unidades de millar.

b) Ubícalos en la tabla de posición.

14. Escribe el mayor número que reúne las características siguientes:

- Sus órdenes llegan hasta la potencia 10^9, ocupado por el mayor dígito par.
- Su valor está entre 85 y 86 centenas de millón.
- Los órdenes de los millares están ocupados por el quíntuplo de 25.
- Los órdenes de las decenas y las unidades de millón los ocupa el noveno múltiplo de 10 aumentado en 1.

a) Escribe cómo se lee este número.

15. Escribe el menor número que tiene las características siguientes:

- Sus órdenes llegan hasta la potencia 10^{12}.
- Su valor está entre las 87 y las 88 centenas de millares de millón.
- Las unidades de millón lo ocupa el segundo número par.
- Los dígitos que ocupan los órdenes desde 10^{7} hasta 10^{12} son los consecutivos al dígito que ocupa las unidades de millón.

a) Escribe cómo se lee este número.

16. Escribe un número natural con las características siguientes:

- Alcanza el orden de la potencia 10^{8}.
- Representa entre 9 790 y 9 791 centenas de millar.
- El lugar de las unidades de millón lo ocupa el menor dígito par.
- Las centenas y decenas simples lo forman el valor para el que se cumple: $x \cdot 10 = 340$.
- El resto de los lugares está ocupado por el mayor dígito.

17. Escribe el número de siete lugares para el que se cumple:

- La suma de las cifras que ocupan los lugares de las centenas y las unidades simples es 9.
- La suma de las cifras que ocupan los órdenes de las centenas, decenas y unidades simples es 11.
- La cifra en el lugar de las unidades excede en 1 a la de las decenas.
- Es el mayor de los números que satisface estas condiciones.

a) Escribe cómo se lee este número.

18. Escribe un número de 9 lugares que cumpla las siguientes condiciones:

- En el lugar de las unidades está un cero.
- La cifra que ocupa el lugar de las decenas es el mayor dígito par.

- La clase de los millares está ocupada con la suma de 102 y 329.
- Es el mayor de los números que satisface estas condiciones.

a) Descompón este número como suma de múltiplos de potencias de 10.

19. Escribe el número que cumple con las siguientes condiciones.

- Su mayor orden es la potencia 10^9.
- Los últimos tres lugares están ocupados por la potencia 12^2.
- El lugar de las centenas de millar lo ocupa el antecesor de 3.
- Es el menor de su clase.

20. Completa la lista con los números que faltan, sigue el patrón asumido para ordenarlos:

79 999; 80 004; _____; 80 014; 80 019; _____; _____; 80 029.

21. Completa la siguiente lista de números. Explica cuál es el patrón seguido para cada caso.

1) 0; ___; 12; 18; 24; …
2) 10; 30; ___; 70; ___; …
3) 10; 45; 80; ___; ___; …

22. Observa la tabla y completa los espacios en blanco teniendo en cuenta la información dada.

Escribo una lista ordenada de números	Procedo con el patrón
10; ____; ; ; ____	Sumo 20
256; ____; ____; ; ____	Divido por 4
72; 70; ; ; ____	Resto 2
*10; ____; ____; ; ____	Multiplico por 2 y adiciono 3
*2; 28; 2; 14; ____; ____; ____	?

23. Escribe el antecesor y el sucesor de los números.

a)

_____	97 305 400	_____
_____	6 005 301	_____
_____	35 800 109	_____
_____	498 510 200	_____
_____	1 721 604 003	_____

24. Completa la siguiente tabla:

$n + 1$	53 215 353	
n		49 315
$n - 1$		

25. Compara los siguientes números, escribe el signo correcto sobre la línea intermedia.

a) 6 260 ___ 15 400

b) 2 001 ___ 2 090

c) 47 162 ___ 47 612

d) 310 047 987 ___ 16 804

e) 98 765 432 ___ 98 765 432

26. Ordena de menor a mayor los números siguientes:

a) 7 865; 15 800; 435; 129 865; 156; 213 435.

b) 43 079; 77 659 231; 5 871 200; 43 009; 2 456 126; 77 654 00.

27. Ordena de menor a mayor: b; $b + 1$; $b - 2$; $b - 7$ $(b \geq 7)$.

28. Ordena de mayor a menor: $b + 1$; $b + 5$; $b - 3$; b $(b \geq 3)$.

29. Selecciona la sucesión de símbolos que representa el orden descendente, de los números dados por las igualdades. Marca con una (X) la respuesta correcta.

$\Delta = 105 + 729$ $\square = 27 \cdot 100 + 10$

$\triangle = 8 \cdot 109$ $\Phi = 4 \cdot 105 + 8 \cdot 103 + 6 \cdot 1$

a) ____ □, Δ, ⌂, Φ b) ____ Δ, □, ⌂, Φ

b) ____ ⌂, Φ, Δ, □ d) ____ □, Φ, Δ, ⌂

30. Compara sin sustituir los asteriscos y argumenta cada respuesta.

a) * 9 * * y * * * * 0 b) 5 3 * * * y 4 7 * * *

c) * * * * 0 y * * * 9 d) * 6 * * * y * 4 * * *

31. Escribe todos los números x para los que se cumple:

a) $877 < x < 882$

b) $34\,766 < x < 34\,771$

c) $123\,569 < x < 123\,575$

d) $230\,654\,980 < x < 230\,654\,986$

1.2 Solución de igualdades y desigualdades con variables

Algo de historia

Ya en el siglo XVI a.n.e. los egipcios resolvían problemas cotidianos que tenían que ver con la repartición de víveres, de cosechas y de materiales que eran equivalentes a resolver ecuaciones algebraicas simples; como la notación algebraica no existía usaban otros métodos.

Los matemáticos chinos de principios de nuestra era escribieron el libro el arte del cálculo, en el que plantearon diversos métodos para resolver ecuaciones. Hacia el año 950 de nuestra era, los árabes llevaron a Europa el álgebra, la cual aprendieron de los griegos, destacándose entre ellos Diofanto de Alejandría.

Diofanto de Alejandría (fig.1.8) matemático griego de la antigüedad. Generalmente se le atribuye la introducción del cálculo algebraico en las matemáticas. Dejó escrita una obra denominada aritmética en 13 libros, en los cuales se introducen los conceptos fundamentales de la aritmética.

Fig. 1.8

¿Qué voy a aprender?

- Conceptos de ecuación e inecuación.
- A utilizar la relación entre la adición y la sustracción en la solución de ecuaciones e inecuaciones.

¿Para qué me servirá?

Para la comprensión de informaciones expresadas en lenguaje común o algebraico con números naturales y resolver ejercicios y problemas de la institución educativa y en la vida práctica.

¿Qué debo saber?

- Significado práctico de las operaciones de adición y sustracción.
- Propiedades de las operaciones adición y sustracción.
- Adición y sustracción de números naturales.
- Solución de igualdades y desigualdades.

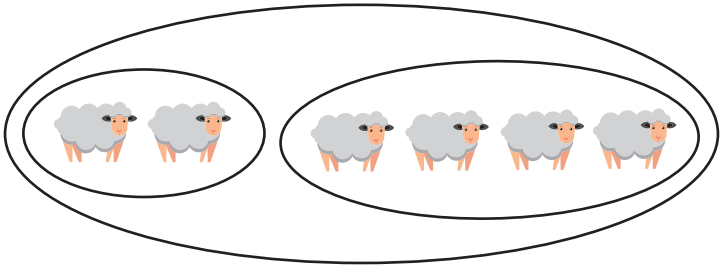
¿Cuáles son los términos de la adición y la sustracción? ¿Siempre podrás sustraer?

Recuerda que

Dados dos números naturales *a* y *b* siempre se puede calcular la suma *a* + *b*. Por eso decimos que la adición de números naturales siempre se puede realizar. En la igualdad de adición *a* + *b* = *c* a los términos *a* y *b* se les llama sumandos y a *c* suma o total. A la expresión *a* + *b* también se le llama suma.

Ejemplo

Observa la figura 1.9.



2 + 4 = 6

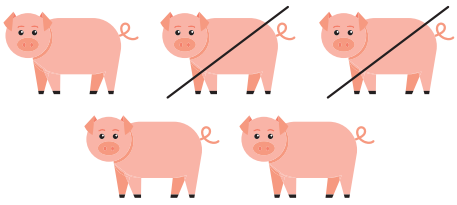
Fig. 1.9

Dados dos números naturales *a* y *b*, solo si *a* ≥ *b*, se puede calcular la diferencia *a* – *b*. En la igualdad de sustracción *a* – *b* = *c*, a los términos *a* y *b* se les denomina respectivamente minuendo y sustraendo y a *c*, diferencia, resto o exceso. A la expresión *a* – *b* también se le llama diferencia. Es porque el cálculo de *a* – *b* es posible solo si *a* ≥ *b*, se dice que la sustracción no siempre se puede realizar con números naturales.

Ejemplo

Observa la figura 1.10.

En la figura 1.10 se ha ilustrado la igualdad de sustracción 5 – 2 = 3, la que se puede comprobar por medio de la igualdad 3 + 2 = 5.



5 - 2 = 3

Fig. 1.10

Recuerda que...

Los sumandos pueden intercambiarse y la suma es igual, pues la adición es una operación que cumple con la **propiedad conmutativa**. En la sustracción esta propiedad no se cumple.

Ejemplo

55 + 23 = 23 + 55 = 78, sin embargo 55 – 23 = 32 y 23 – 55 no se puede realizar con los números naturales.

La adición es **asociativa**: en una adición con varios sumandos, dos sumandos consecutivos se pueden sustituir por su suma y la suma total no varía.

Ejemplo

$$(5 + 3) + 4 = 5 + (3 + 4)$$
$$8 + 4 = 5 + 7$$
$$12 = 12$$

¿Se cumplirá esta propiedad en la sustracción?

Sugerencia: antes de responder proponga otros ejemplos como el que aparece a continuación.

$$(8 – 5) – 2 = 8 – (5 – 2)$$
$$3 – 2 = 8 – 3$$
$$1 \neq 5$$

¿Cómo se adicionan dos o más números naturales?

Cuando se suman dos o más números naturales y el cálculo mental sea complejo, se recomienda aplicar el procedimiento escrito de la adición.

Ejemplo

Con la ayuda de la tabla de posición decimal se muestra el procedimiento escrito de la adición con varios sumandos.

	Millares			Unidades		
	C	D	U	C	D	U
		2	3	5	4	5
	1	2	3	9	8	4
+			6	4	2	8
	1	5	3	9	5	7

Unidades: 8 + 4 + 5 = 17 escribes el 7 y adicionas *1 decena* en el orden de las decenas. También se acostumbra a decir "se lleva 1".

Decenas: 1 + 2 + 8 + 4 = 15 escribes el 5 y adicionas *1 centena* en el orden de las centenas.

Centenas: 1 + 4 + 9 + 5 = 19 escribes el 9 y adicionas *1 millar* en el orden de las unidades de millar.

Unidades de millar: 1 + 6 + 3 + 3 = 13 escribes el 3 y adicionas *1 decena de millar* en el orden de las decenas de millar.

Decenas de millar: 1 + 2 + 2 = 5 escribes 5.

Centenas de millar: escribes 1 (no hay otra cifra distinta de 0).

Para comprobar el resultado, se aplica la propiedad conmutativa realizando las sumas en el orden inverso, si el resultado no es el mismo debes revisar para encontrar el error.

Para calcular la diferencia de dos números naturales mediante el procedimiento escrito de la sustracción procedes de forma similar a la adición para colocar el minuendo y el sustraendo.

Ejemplo

Calcula: 7 390 428 – 423 984

Se procede de la siguiente forma:

Millones		Millares			Unidades		
	U	C	D	U	C	D	U
	7	3	9	0	4	2	8
–		4	2	3	9	8	4
	6	9	6	6	4	4	4

Para comprobar si el resultado es correcto se suman la diferencia y el sustraendo, si el resultado no es el minuendo, debes revisar para encontrar el error.

Recuerda que...

En las operaciones combinadas de adición y sustracción se calcula en el orden en que aparecen las operaciones. Cuando aparece paréntesis, indica la prioridad al calcular.

Ejemplo

Calcula: 590 428 – 123 984 + 23 545

590 428	466 444
– 123 984	+ 23 545
466 444	489 989

Ecuaciones e inecuaciones

A menudo has resuelto ejercicios en los que debes calcular un término desconocido en una igualdad de adición o sustracción como las que aparecen a continuación (incisos a y b) o los valores que puede tener un término en una desigualdad ya sea de adición o de sustracción (inciso c).

a) $x + 15\,826\,497 = 15\,826\,747$ b) $x - 3\,456 = 4\,025$

c) $34 + x < 43$

¿Recuerdas cómo procedías? Procedías de la misma forma que con los tríos numéricos con los que memorizabas los ejercicios básicos de adición y sustracción, o sea, pensando en la relación que se da entre estas operaciones de cálculo.

Ejemplo

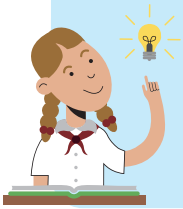
De la igualdad de adición 4 + 3 = 7 obtenías las igualdades de sustracción
7 – 3 = 4 y 7 – 4 = 3, o sea, *conocido un sumando y el total en una igualdad de adición se puede hallar el otro sumando mediante la sustracción, restando del total el sumando conocido.*

Para resolver la igualdad $x + 3 = 7$, debo calcular $x = 7 - 3 = 4$, luego para resolver la igualdad $x + 15\,826\,497 = 15\,826\,747$ debo calcular $x = 15\,826\,747 - 15\,826\,497$ resultando que $x = 250$.

Compruebo: 250 + 15 826 497 = 15 826 747

Reflexiona un instante

- ¿Con qué igualdad de adición se relaciona la igualdad de sustracción 9 – 5 = 4?
- ¿Cómo procederías para calcular el valor de x en la igualdad $x - 5 = 4$?
- ¿Cómo procederías para calcular el valor de x en la igualdad $9 - x = 4$?
  a) Comenta con tus compañeros las respuestas que tienes a estas preguntas.
  b) Plantea otras similares a partir de la igualdad de sustracción: 25 – 12 = 13



¿A qué denominamos variable?

Una **variable** es un **símbolo que representa un elemento no especificado de un conjunto de números dado.** A este conjunto se le denomina **dominio de la variable**.

Recuerda que

A las expresiones como: $x + 15\,826\,497 = 15\,826\,747$; $x - 3\,456 = 4\,025$ se les denomina igualdades con variables.

¿A qué llamamos ecuación?

Una igualdad en la que aparece al menos una variable se denomina *ecuación.*
Son ejemplos de ecuaciones:

$3x + 5 = 35$	$2c + b + 5 = 54 - c$	$2\,(4 + b) = 40$
$x - 6 = 12$	$26 - x = 20$	$4x = 28$
$5x + 1 = 26$	$2x - 3 = 15$	$8 - 3x = 5$

Las expresiones que se encuentran a ambos lados del signo **=**, según la posición que ocupan respecto a este, son llamadas *miembro izquierdo* y *miembro derecho*.

$$\underbrace{2r + 5}_{\text{miembro izquierdo}} = \underbrace{23}_{\text{miembro derecho}}$$

Los miembros están formados por términos.

Ejemplo

1. En la ecuación $2r + 5 = 23$, los términos del miembro izquierdo son: $2r$ y 5, se identifican porque se encuentran separados por los signos de las operaciones adición o sustracción, en el miembro derecho solo se identifica un término: 23.
2. En las ecuaciones siguientes, identifica sus miembros y subraya los términos en cada uno de ellos.

   a) $2c + b + 5 = 54 - c$ b) $2\,(4 + b) = 40$

Solución:

a) MI: $\underline{2c} + \underline{b} + \underline{5}$ MD: $\underline{54} - \underline{c}$

b) MI: $2\,(4 + \underline{b}) = \underline{8} + \underline{2b}$ MD: $\underline{40}$

Leyenda:

MI: miembro izquierdo

MD: miembro derecho

Saber más

A diferencia de la aritmética, que trata de los números y las operaciones fundamentales, el álgebra es la parte de la matemática que estudia los números, sus propiedades y la estructura que poseen los conjuntos numéricos. En el álgebra se introducen, entre otros, símbolos (variables) para representar cantidades desconocidas (incógnitas), usualmente se usan letras del alfabeto en minúscula para representar números; las más usadas son: *x*, *y*, *z*. En este curso aprenderás a resolver ecuaciones, que son expresiones características del álgebra y que te serán de gran utilidad en la solución de problemas.

¿A qué llamamos solución de una ecuación?

Cuando en una ecuación se sustituyen las variables por números del conjunto dado como dominio de la variable, las igualdades, así obtenidas, no siempre lo son en la realidad. Por ejemplo:

• Si se sustituye *r* por el número **7** ($r = 7$) en la ecuación $2r + 5 = 23$, se obtiene la igualdad:

$2 \cdot 7 + 5 = 23$. Esta igualdad es falsa, pues:

$14 + 5 = 23$

$19 = 23$ (no es verdad que $19 = 23$).

• Si se sustituye r por el número 9 ($r = 9$) en la ecuación $2r + 5 = 23$, se obtiene la igualdad:

$2 \cdot 9 + 5 = 23$. Esta igualdad es verdadera, pues:

$18 + 5 = 23$

$23 = 23$ (es verdad que $23 = 23$).

En este caso se dice que **el número 9 satisface la ecuación** $2r + 5 = 23$, esto convierte al número 9 en la **solución** de la ecuación.

Los **números que satisfacen una ecuación** se llaman **soluciones de la ecuación.**

Para hallar los números que satisfacen una ecuación, es necesario **resolver la ecuación,** o sea, encontrar sus soluciones.

¿Cómo se procede para resolver una ecuación?

Hay ecuaciones que son sencillas y para resolverlas se procede por simple inspección.

Ejemplo

$x + 3 = 7$; solución $x = 4$, pues a simple vista se puede relacionar la ecuación con el ejercicio básico $4 + 3 = 7$.

Otras no tan sencillas nos llevan a reflexionar acerca de las relaciones entre las operaciones de cálculo para determinar qué cálculos se deben realizar.

Ejemplo

$124 - x = 85$.

Esta ecuación (igualdad de sustracción) está relacionada con la ecuación:
$85 + x = 124$ (igualdad de adición) la que se puede resolver hallando la diferencia $124 - 85$, por lo que podemos plantear que $x = 39$.
Usualmente, los pasos seguidos, en la respuesta escrita, se escriben:

$124 - x = 85$

$124 = 85 + x$

$124 - 85 = x$, o también, $x = 124 - 85$
$39 = x$, o también, $x = 39$.

Recuerda que

1. La diferencia de dos números iguales es cero. ($a - a = 0$).
2. Si a dos cantidades iguales adicionamos o sustraemos la misma cantidad (diferente de cero), la igualdad se mantiene (fig. 1.11).

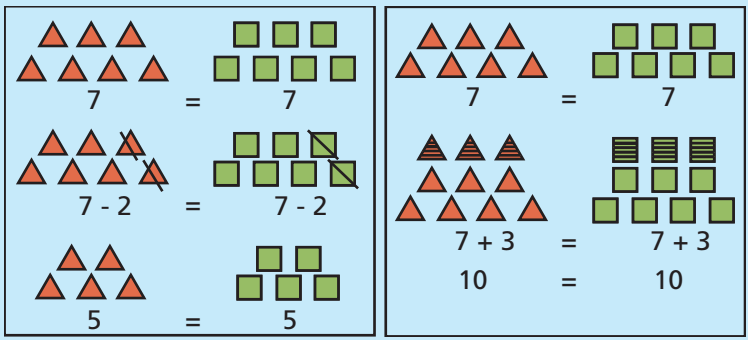


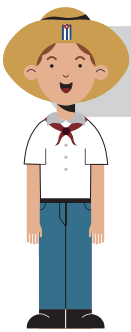
Fig. 1.11

¿A qué llamamos inecuaciones?

Se llaman inecuaciones las desigualdades con al menos una variable.

Son ejemplos de inecuaciones:

a) $x \leq 6$ b) $2z + 4 < 20$ c) $3b - 4 > 8$
d) $2x + 4 < x + 5$ e) $x - y > 0$



¿Cómo resolver este tipo de inecuaciones?

Al igual que para las ecuaciones, resolver una inecuación significa determinar los valores del dominio de la variable que satisfacen las desigualdades, o sea hallar los números que al sustituir la o las variables por ellos hacen que estas desigualdades sean verdaderas.

Ejemplos

Solución del inciso a) $x \leq 6$, es la forma más sencilla de expresar una inecuación. Se puede resolver por simple inspección, esta desigualdad la satisfacen varios números naturales.

Como $0 \leq 6$; 0 es solución de la inecuación $x \leq 6$; también lo son: 1, porque $1 \leq 6$; 2, porque $2 \leq 6$; 3, porque $3 \leq 6$; 4, porque $4 \leq 6$; 5, porque $5 \leq 6$ y 6, porque $6 \leq 6$. Para 7 y los naturales mayores que 7 la desigualdad resulta falsa, por lo que decimos que:

La inecuación $x \leq 6$ tiene como conjunto solución a $S = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Las inecuaciones como las presentadas en el ejemplo se resuelven de manera similar a las ecuaciones presentadas en este epígrafe. Estudia paso a paso los ejemplos que se presentan a continuación.

Solución del inciso b)

Escribo	Pienso y justifico
$2z + 4 < 20$	Procedo como si estuviera resolviendo la ecuación $2z + 4 = 20$ y mantengo el signo de la desigualdad. Resto 4 de cada miembro; MI: $2z + 4 - 4 = 2z$; MD: $20 - 4 = 16$.
$2z < 16$	Escribo la nueva inecuación y procedo como si estuviera resolviendo la ecuación $2z = 16$: El valor de z se calcula dividiendo $16 : 2 = 8$.
$z < 8$	Escribo la nueva inecuación y busco las soluciones: son soluciones los números naturales: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7.
$S = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$	Escribo el conjunto solución.

Nota: el número 8 y los mayores que 8 no satisfacen la desigualdad, pues cuando se sustituyen en la inecuación $2z + 4 < 20$, las desigualdades que resultan son falsas.

Ejemplo

$2z + 4 < 20$ $\quad 2 \cdot 8 + 4 < 20$ $\quad 20 < 20$ es una desigualdad falsa.

Solución del inciso c)

Escribo	**Pienso y justifico**
$3b - 4 > 8$	Procedo como si estuviera resolviendo la ecuación:
	$3b - 4 = 8$ aunque mantengo el signo de la desigualdad.
	$3b = 8 + 4$ en toda sustracción el minuendo es igual a la suma del sustraendo y la diferencia.
$3b > 8 + 4$	Hallo la suma: $8 + 4 = 12$.
$3b > 12$	Procedo como si estuviera resolviendo la ecuación
	$3b = 12$, el valor de b se calcula: $12 : 3 = 4$.
$b > 4$	Busco las soluciones: son soluciones todos los números naturales mayores que 4 : 5; 6; 7; 8; …
$S = \{5; 6; 7; ...\}$.	Escribo el conjunto solución.

Nota: el número 4 y los números menores que 4, no satisfacen la desigualdad:

$3b - 4 > 8$, una prueba de esto es que para $b = 3$:
$3 \cdot 3 - 4 > 8$;
$9 - 4 > 8$;
$5 > 8$ es una desigualdad falsa.

Consejos

En el portal educativo *CubaEduca* puedes consolidar los contenidos trabajados en este epígrafe y solucionar las actividades de aprendizaje que se te plantean.

Ejercicios del epígrafe 1.2

1. Calcula:

a) 98 645 + 632 005
b) 632 005 + 7 541
c) 5 940 007 + 17 584
d) 17 584 + 364 166
e) 456 893 + 0

2. Calcula:

a) 6 839 – 2 317 b) 48 607 – 3 017

d) 9 362 – 4 735 e) 5 671 – 1 021

f) 15 431 – 1 279 g) 751 067 – 693 507

h) 7 119 040 – 25 501 i) 439 225 – 140 533

j) 15 295 004 – 8 643 225

3. Calcula y comprueba:

a) 13 576 + 3 055 + 9 023 b) 126 000 – 58 735

c) 856 724 – 274 918– 492 d) 874 911 – 160 211 – 397 114

e) 98 645 + 632 005 + 7 541 f) $ 450 + $ 1 200 + $ 400

g) 2 000 km – 1 742 km – 46 km

h) 678 111 m – 403 797 m

4. Sustrae 2 427 a:

a) 32 908 b) 3 629 c) 17 512

d) 423 570 e) 56 376 f) 525 793

5. En cuanto excede 413 041 a:

a) 367 194 b) 321 347 c) 50 238 d) 200 431

6. Marca con una (X) el resultado correcto.
Al restar 936 286 – 323 754 se obtiene:

a) __ 2 613 532 b) __ 2 612 532

c) __ 3 260 040 d) __ 2 603 532

7. Marca con una (X) el resultado correcto. Al adicionar *A* y *B* se obtiene:

a) __ 106 499 999 b) __ 100 007 499

c) __ 92 499 999 d) __ 107 499 999

Si se sabe que:
A: es el mayor número natural de ocho cifras.
B: 75 centenas de millar.

8. Calcula, ten en cuenta el orden de las operaciones.

a) 252 009 + 12 349 281 – 17 304
b) 13 028 + (8 229 – 5 236)
c) 28 315 203 + 6 489 – 136 972
d) (63 304 112 – 45 635 809) + 400 321 005
e) 5 940 007 + 17 584 – 364 166

9. Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba:

a) $y - 13\,110 = 5\,691$ b) $75 - c = 19$
c) $2x + 8 = 38$

10. *¿Para qué valores de n se cumplen las ecuaciones siguientes?

a) $n - n = 0$ b) $n + 0 = n$
c) $n - 0 = 35$ d) $n - 0 = n$
e) $0 - n = 0$

11. ¿Cuáles son los valores que satisfacen la variable en las siguientes inecuaciones?

a) $z + 58 < 64$ b) $89 - q > 72$ c) $j + 112 \leq 121$

12. Marca con una (X) la respuesta correcta.

En las ecuaciones $180 + x = 920$ y $500 - y = 320$ obtenemos:

a) ___ $y = 220$; $x = 740$ b) ___ $y = 180$; $x = 840$
c) ___ $y = 180$; $x = 740$ d) ___ $y = 820$; $x = 1\,100$

13. La tabla muestra el consumo de energía de una vivienda en el período julio-noviembre del año 2022.

Consumo de energía de una vivienda en el período julio-noviembre del año 2022

Meses	Consumo en kW/h
Julio	218
Agosto	258
Septiembre	216
Octubre	182
Noviembre	188

a) ¿Cuál es el mes de mayor consumo de energía de la vivienda en el período de julio a noviembre?

b) ¿En cuánto excede el mayor al menor consumo de energía registrado?

c) Si el consumo promedio de energía por mes es aproximadamente 212 kW/h, los moradores de la vivienda ahorraron o despilfarraron energía en el mes de julio. Argumenta tu respuesta.

d) Calcula el consumo registrado en los 5 meses.

14. Completa la tabla siguiente:

j	k	$j + k$	$j - k$
3 248	472		
	2 500	38 970	
	211		5 275

15. En una comunidad vivían el primero de enero de un año 123 450 habitantes; durante ese año nacieron 269 niños, fallecieron 976 personas, 1 200 se mudaron para el pueblo y 701 se fueron para otros lugares. ¿Cuántas personas había a fines de ese año en la comunidad? Marca con una (X) la respuesta correcta.

a) ___ 120 842 b) ___ 121 242

c) ___ 123 242 d) ___ 120 304

16. En una fábrica de refrescos existen dos almacenes. En uno hay almacenadas 2 302 cajas de refrescos; en el otro, 6 978. ¿Cuántas cajas de refrescos hay almacenadas en total?

a) La misma fábrica de refrescos elabora el lunes 9 608 cajas de refrescos y el martes, 568 más que el lunes. ¿Cuántas cajas de refrescos elaboró el martes?

17. Juan está encargado de vender 500 entradas en un teatro. En la primera función vendió 115. En la segunda función vendió 95.

¿Cuántas entradas más debe vender para terminar el talonario? Marca con una (X) la respuesta correcta.

a) ___ 390 b) ___ 38 c) ___ 290 d) ___ 210

18. En el año 1827 en Cuba existían 1 000 ingenios azucareros, de los cuales solo 27 tenían máquinas de vapor y en 1861 la cantidad de ingenios ascendió a 1 365, de los cuales 900 tenían máquinas de vapor.

a) ¿En cuánto ascendió el número de ingenios en 1861?

b) ¿Cuántos ingenios más tenían máquinas de vapor en el año 1861?

19. Dayana recorrió 935 m para llegar a una cooperativa agropecuaria, después de un breve descanso recorrió 145 m hasta una biblioteca; para regresar a su casa, recorrió 890 m.

¿Cuántos metros recorrió Dayana en total?

20. El mapa de la figura 1.12 muestra algunas ciudades de Santiago de Cuba y las distancias entre algunas de ellas. Por ejemplo, entre Santiago de Cuba y San Luis hay 30 km. Calcula la distancia total que recorrerás en el orden que se indica:

Santiago de Cuba – Chivirico – Santiago de Cuba – San Luis.

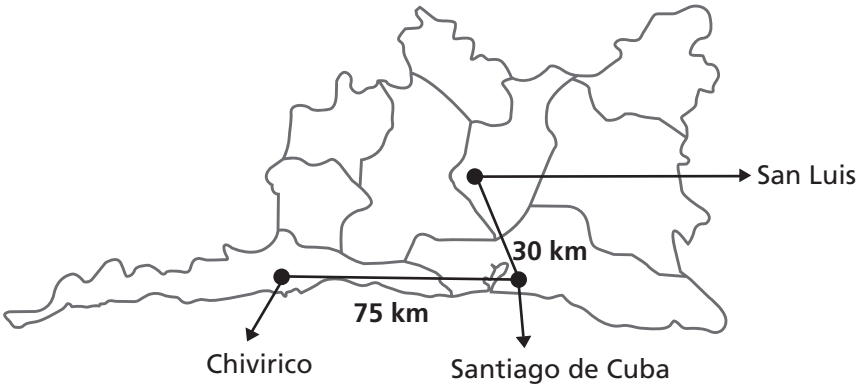


Fig. 1.12

21. Para el curso escolar y con el objetivo de garantizar el uniforme para los educandos, el estado cubano ubicó en una tienda minorista un cargamento que contiene camisas azules, blancas y carmelitas, de ellas 2 500 camisas son blancas y 1 800 son azules. En total hay 17 090 camisas.

a) ¿Cuántas camisas son carmelitas?

b) ¿En cuánto es mayor la cantidad de camisas carmelitas que las camisas blancas?

22. En el siguiente ejercicio las balanzas están en equilibrio (fig. 1.13). Determina en cada caso el valor de la variable.

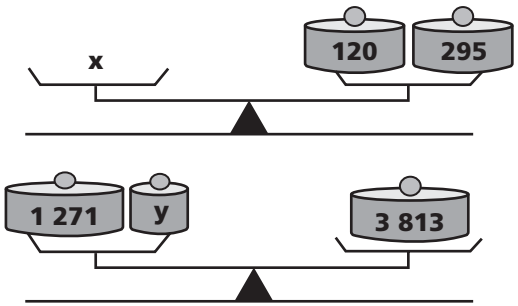


Fig. 1.13

1.3 Multiplicación, potenciación y radicación

Algo de historia

Las operaciones matemáticas de potenciación con exponente 2 y la raíz cuadrada (de índice 2) aparecen representadas por primera vez de forma matemática en los papiros egipcios llamados de Lahun (fig. 1.14).

Fig. 1.14 Papiros de Lahun.

René Descartes (fig. 1.15), también llamado Renatus Cartesius (1596-1650), fue un filósofo, matemático y físico francés, considerado como el padre de la geometría analítica y de la filosofía moderna. Adopta la notación de la potenciación que conocemos actualmente.

Fig. 1.15

¿Qué voy a aprender?

- Multiplicación por factores de tres o más dígitos.
- Conceptos de base y exponente.
- Significado de la radicación. El signo radical $\sqrt{}$, cantidad subradical o radicando, índice de la raíz y raíz.
- A resolver ecuaciones e inecuaciones en las que aparecen potencias o raíces, mediante reflexiones lógicas.
- Primeros 12 cuadrados perfectos de números naturales y los cubos de los primeros cinco y sus raíces correspondientes.
- A resolver ejercicios donde aparezcan combinadas las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, potenciación y radicación.

¿Para qué me servirá?

Para su aplicación a cálculos ventajosos y resolver nuevas clases de problemas de la institución educativa, de la vida práctica y geométricos, como los relacionados con la deter-

minación del lado de un cuadrado conocida su área o la arista de un cubo conocido su volumen.

¿Qué debo saber?

- Significado práctico de las operaciones de adición y multiplicación.
- Ejercicios básicos de multiplicación.
- Propiedades de las operaciones de adición y de multiplicación.
- Multiplicación de números naturales.
- Redondeo a múltiplos de 10, 100 y 1 000 y su aplicación en el estimado de resultados.

¿A qué significados responde la multiplicación en la práctica?

En la práctica del cálculo aritmético, la multiplicación se interpreta como una operación que permite resolver una adición de sumandos iguales.

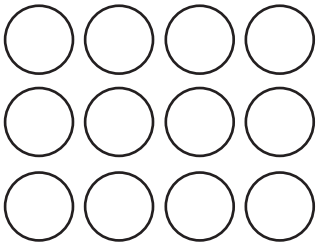
Ejemplo

$25 + 25 + 25 + 25 + 25 = 5 \cdot 25 = 125.$

También se interpreta como la operación que permite determinar la cantidad de elementos de un conjunto dispuestos en forma rectangular.

Ejemplo

¿Cuántos círculos hay en la ilustración?



Se resuelve multiplicando el número de filas por el número de columnas o viceversa:
$3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 12$.

Te recomendamos investigar otros significados para que puedas ampliar tus posibilidades de resolver problemas en la práctica. Como parte de tu participación en las olimpiadas populares de matemática debes resolver el ejercicio siguiente:

La Real Compañía de Comercio de La Habana fundada en 1740 obtuvo jugosas ganancias, por ejemplo, compraba en España el barril de harina de trigo a 5 o 6 pesos. Si luego lo vendía al séxtuplo o séptuplo de lo que había invertido:

¿En cuánto vendía los barriles de harina?
¿En cuánto mayor era el precio de venta?
¿Cuántos años se cumplieran de su fundación?

Resuélvelo y entrega tu respuesta, después de calificarla serás premiado por tu participación.

Para responder este ejercicio y otros tantos, debes conocer el significado de palabras tales como *duplo, triplo, cuádruplo, quíntuplo, séxtuplo, séptuplo*, entre otras, las que se refieren a los múltiplos de dos, tres, cuatro, cinco, seis y siete respectivamente. En el texto del problema planteado los términos indican hallar el producto de los precios dados por 6 y 7 para saber por qué precios vendían sus productos, para luego calcular las ganancias que obtenían en estas ventas. Con estas indicaciones y con lo que vas a aprender acerca de la multiplicación podrás resolver este y otros muchos problemas de la práctica cotidiana.

Recuerda que

En la igualdad de multiplicación $a \cdot b = c$, a los términos a y b se les llama factores; a cada uno de los miembros $a \cdot b$ y c, producto. Sugerencia: confecciona un cartel en el que expongas los términos de la multiplicación.

¿Qué propiedades cumple la multiplicación?

Ejemplo

$5 \cdot 7 = 7 \cdot 5$. Propiedad conmutativa.
$(6 \cdot 2) \cdot 3 = 6 \cdot (2 \cdot 3)$. Propiedad asociativa.

Además, entre la multiplicación y las operaciones de adición y sustracción también existe relación mediante la propiedad distributiva.

Ejemplo

$6 \cdot (4 + 2)$ se puede calcular $4 + 2$ y multiplicar por 6 el resultado o multiplicar por 6 ambos sumandos y adicionar los resultados. En este último caso se procede de la forma siguiente:
$6\ (4 + 2) = 6 \cdot 4 + 6 \cdot 2$.

Saber más

En la multiplicación todo número multiplicado por 1 da como resultado el propio número. (1 es el elemento neutro de la multiplicación).

Otros signos que indican multiplicación son el aspa (x) de uso común en las calculadoras y el asterisco (*) en las computadoras.

Se recomienda hacer un cálculo estimado antes de aplicar el procedimiento, ya que nos permite tener una idea previa del resultado. La estimación se puede hacer mentalmente. Para hacer el estimado debes seguir los pasos siguientes:

1. Redondear los factores a múltiplos de 10, 100 y 1 000 según la cantidad de lugares de los mismos.
2. Multiplicar aplicando los ejercicios básicos, agregando la cantidad de ceros que tengan los factores.

Ejemplo

a) Antes de calcular $235 \cdot 72$ en la mente puedes hacer el cálculo aproximado:
$200 \cdot 70 = 14\ 000$

b) Antes de calcular 2 025 · 123 en la mente puedes calcular:
2 000 · 100 = 200 000

Saber hacer

El procedimiento escrito que permite multiplicar dos números naturales se basa en la aplicación de la propiedad distributiva; se procede de la forma siguiente:

Calcula:

a) 246 · 72 b) 2 013 · 105

Solución:

a) Según la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición:

$$246 \cdot 72 = 246 \cdot (70 + 2)$$
$$= 246 \cdot 70 + 246 \cdot 2$$
$$= 17\,220 + 492 = 17\,712$$

En la práctica se procede de la forma siguiente:

a) 246 · 72

246·72	246·72
17220	492
492	17220
17712	17712

La escritura del 0 se puede omitir, pero su lugar se respeta.

b) 2 013 · 105

2013·105	2013·105
2013	10065
10065	2013
211365	211365

La escritura del 0 se puede omitir, pero su lugar se respeta.

Cuando termines de calcular puedes comprobar si el resultado obtenido es aproximado a la estimación realizada, volviendo a calcular cambiando el orden de los factores. Esto te permitirá autocontrolar tu trabajo.

¿Cómo se procede cuando estamos en presencia de varias operaciones?

Para resolver ejercicios donde aparecen operaciones combinadas de multiplicación, adición y sustracción debes seguir un orden determinado:

1. Las operaciones dentro de los paréntesis.
2. La multiplicación.
3. La adición y sustracción en el orden en que aparecen desde la izquierda.

Ejemplo

Calcula:

a) $165 - 15 \cdot 8 = 165 - 120 = 45$
b) $(356 + 349) \cdot 20 = 705 \cdot 20 = 14\,100$
c) $12 \cdot 3 + 7 \cdot 9 = 36 + 63 = 99$

Potenciación

¿A qué llamamos potenciación?

La operación de calcular la potencia, se denomina potenciación. Cuando estudiaste cómo escribir un número como suma de múltiplos de *potencias* de 10, utilizaste, por ejemplo, la notación 10^2 para expresar el número 100.

Observa que $100 = 10 \cdot 10 = 10^2$, es decir, que la potencia 10^2 no es más que una forma abreviada de expresar el producto donde el 10 aparece dos veces como factor.

La potencia es un producto de factores iguales.

Ejemplos

$6 \cdot 6 = 6^2$ (seis al cuadrado o seis a la dos)
$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5$ (cinco a la cinco)
$12 \cdot 12 = 12^2$ (doce al cuadrado o doce a la dos)
$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$ (cuatro al cubo)

En general, el producto $a \cdot a \cdot a \ldots a$ de n factores iguales puede escribirse como potencia de a^n. El número a es la *base* y el número n es el *exponente* de dicha potencia.

exponente
$3^2 = 9$
base potencia

El exponente indica el número de veces que debe tomarse la base como factor y el producto resultante recibe el nombre de potencia.

Puedes comprobar con un ejemplo que la base y el exponente de una potencia no *se puede conmutar*, pues se obtienen resultados diferentes. En la potenciación no se cumple *la propiedad conmutativa*.

Ejemplo

$3^4 = 81$ $4^3 = 64$

Saber hacer

Para calcular la potencia se toma la base como factor tantas veces como indica el exponente. En la práctica se procede así:

a) $7^5 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 16\,807$

b) $9^4 = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 6\,561$

Saber más

Son *cuadrados perfectos* las potencias de exponente 2 de los números naturales. Los doce primeros cuadrados perfectos son:

$1^2 = 1$ $4^2 = 16$ $7^2 = 49$ $10^2 = 100$

$2^2 = 4$ $5^2 = 25$ $8^2 = 64$ $11^2 = 121$

$3^2 = 9$ $6^2 = 36$ $9^2 = 81$ $12^2 = 144$

La potenciación y la radicación eran conocidas ya desde la antigüedad, los babilonios utilizaban la elevación a potencia como auxiliar de la multiplicación. Los griegos por su parte tenían predilección por los cuadrados y los cubos.

Las potencias de números naturales de exponente tres se denominan *cubos perfectos.* Los diez primeros son:

$1^3 = 1$ $4^3 = 64$ $7^3 = 343$ $10^3 = 1000$
$2^3 = 8$ $5^3 = 125$ $8^3 = 512$
$3^3 = 27$ $6^3 = 216$ $9^3 = 729$

La potenciación es utilizada en operaciones combinadas, siempre se calculan primero, excepto en el caso que un signo de agrupación le dé prioridad a otras.

Ejemplo

Calcula:

a) $4 \cdot 4^2 = 4 \cdot 16 = 64$ b) $29 - 3^3 = 29 - 27 = 2$

c) $(7 + 4)^2 = (11)^2 = 121$

Radicación

Algo de historia

Las raíces cuadradas son el resultado de plantear problemas geométricos como, por ejemplo, la longitud de la diagonal de un cuadrado y surgieron en la antigüedad. El Papiro de Ahmes (fig.1.16) o Papiro Rhind es un documento escrito por el escriba Ahmes aproximadamente en 1650 a.n.e. con contenidos matemáticos y de otra índole, muestra cómo los egipcios extraían raíces cuadradas.

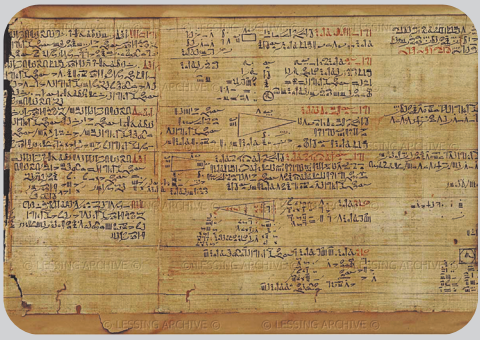


Fig. 1.16

El símbolo de la raíz cuadrada fue introducido en 1525 por el matemático Christoph Rudolff (fig. 1.17) para representar esta operación que aparece en su libro Coss, siendo el primer tratado de álgebra escrito en alemán vulgar. El signo no es más que una forma estilizada de la letra *r minúscula* para hacerla, más elegante, alargándola con un trazo horizontal, hasta adoptar el aspecto actual que representa la palabra latina *radix*, que significa raíz.

Fig. 1.17

Ileana conoce los términos de la potenciación, pero quiere saber: ¿cómo determinar la base si conoce la potencia y el exponente? ¿qué operación utilizaría para ello?

Para poder ayudar a Ileana debemos partir de un ejemplo:

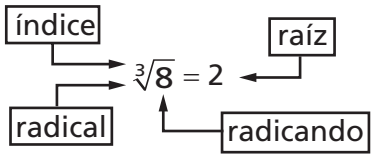
$x^3 = 8$ ¿qué número elevado al cubo es igual a 8?, o sea, ¿qué número usado 3 veces como factor es igual a 8?

En este ejemplo se conocen el exponente (3) y la potencia y se debe hallar la base de la potencia. El cálculo correspondiente a este problema se plantea de la forma siguiente: $\sqrt[3]{8} = 2$; 2 es la raíz cúbica de 8, o sea, 2 es el número que usado tres veces como factor es igual a 8 ($2^3 = 8$).

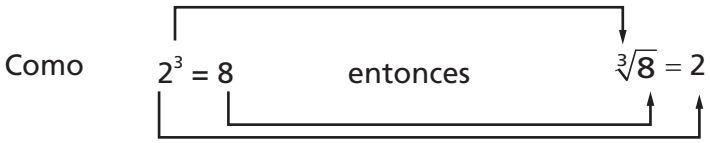
¿Cómo se denomina esta operación? ¿Cuáles son sus términos?

Se denomina radicación, es la operación que consiste en obtener la raíz de una cifra o de una expresión.

El signo $\sqrt{\ }$ se llama radical, lo que se escribe dentro del signo, cantidad sub radical o radicando y el que aparece en su parte superior izquierda, índice del radical que en el caso de la raíz cuadrada se omite su escritura.



Podemos argumentar que $\sqrt{36} = 6$ porque el cuadrado de 6 es 36, en resumen:



Las primeras raíces cuadradas y cúbicas que corresponden respectivamente a los cuadrados y cubos perfectos son:

Raíces cuadradas		Raíces cúbicas
$\sqrt{1}=1$	$\sqrt{49}=7$	$\sqrt[3]{1}=1$
$\sqrt{4}=2$	$\sqrt{64}=8$	$\sqrt[3]{8}=2$
$\sqrt{9}=3$	$\sqrt{81}=9$	$\sqrt[3]{27}=3$
$\sqrt{16}=4$	$\sqrt{100}=10$	$\sqrt[3]{64}=4$
$\sqrt{25}=5$	$\sqrt{121}=11$	$\sqrt[3]{125}=5$
$\sqrt{36}=6$	$\sqrt{144}=12$	

Observa que en el caso de las raíces cuadradas se omite el 2 como índice del radical.

La radicación como operación de cálculo es posible encontrarla en ejercicios del cálculo combinado, en ese caso, tendrá el mismo orden jerárquico que la potenciación:

1. Operaciones dentro del paréntesis.
2. Potenciación y radicación, en el orden en que aparecen comenzando por la izquierda.
3. Multiplicación y división, en el orden en que aparecen comenzando por la izquierda.
4. Adiciones y sustracciones, en el orden en que aparecen comenzando por la izquierda.

Ejercicios del epígrafe 1.3

1. Calcula:

a)	b)	c)
$22 \cdot 5$	$512 \cdot 47$	$956 \cdot 187$
$34 \cdot 3$	$163 \cdot 0$	$116 \cdot 358$
$147 \cdot 8$	$45 \cdot 620$	$567 \cdot 721$
$466 \cdot 9$	$261 \cdot 62$	$605 \cdot 734$

2. Enlaza los elementos de la columna A con sus correspondientes en la columna B.

A	B
852 · 805	311 472
462 · 409	22 638
2 023 · 805	685 860
1 008 · 309	188 958
	1 628 515

3. Completa la tabla siguiente:

a	b	a · b	a · b + a	a · b – a
2 345	67			
3 690	25			
908	0			
1	67 891			

4. 4. Una persona que consume 5 cigarrillos al día:

a) ¿Cuántos cigarrillos consume a la semana?

b) ¿En cuánto se acorta la vida de esta persona en la semana, si se estima que cada cigarrillo le resta 5 min de vida?

5. Resuelve las siguientes operaciones combinadas. Ten presente el orden en que se realizan.

a) 125 +32 · 18 b) 41 · (178 + 285)

c) 2 848 – 61 · 32 d) 51 · 42 – 47 · 42

e) (91 469 – 84 314) · 32 f) 1 518 · 47 + 34 200 – 11 815

6. Si $b = 22\,150$; $c = 110$ y $d = 352$. Calcula:

a) $b \cdot c$ b) $c \cdot d$ c) $b - d$ d) $b + c \cdot d$ e) $(b + c) \cdot d$

7. Para contribuir a la formación vocacional y orientación profesional se desarrolló la feria Provincial Agropecuaria. En ella se presentaron un total de 28 especialidades con una representación de 25 estudiantes cada una. Marca con una (X) la variante que completa correctamente la expresión: se presentaron.

a) ___ 600 estudiantes. b) ___ 700 estudiantes.
c) ___ 560 estudiantes. d) ___ 25 estudiantes.

8. En una olimpiada de cálculo Isabel resolvió 23 ejercicios y Ramsés el duplo de esa cantidad. ¿Cuántos ejercicios resolvió Ramsés?

9. Laura hizo un pulso con igual número de cuentas de 4 colores: rojo, azul, blanco y negro. Colocó 12 cuentas rojas. ¿Cuántas cuentas colocó en total? Selecciona una de las posibles respuestas dadas. Marca con una (X) la respuesta correcta.

a) ___ 4 b) ___ 12 c) ___ 16 d) ___ 48

10. En una institución educativa hay 536 educandos y el Ministerio de Educación garantiza que cada uno reciba 15 libretas. ¿Cuántas libretas se deben entregar en total?

11. Elena afirma que los resultados son iguales cuando:

a) Cada uno de los números 316 y 204 se multiplican por 23 y luego se suman ambos productos, o cuando.

b) Se suman primero 316 y 204 y esta suma se multiplica por 23.

¿Es cierta esta afirmación? ¿Por qué? Comprueba.

12. En la base de campismo Caletón Blanco en Santiago de Cuba una familia de 5 personas que deciden pasarse un día en la instalación debe pagar por concepto de entrada $ 15,00 y de alimentación $ 45,00 por cada integrante.

Selecciona entre las dadas, la variante que corresponde al costo total que la familia debe pagar por disfrutar de la instalación. Marca con una (X) la variante seleccionada.

a) __ $ 60,00 b) __ $ 45,00 c) __ $ 300,00 d) ___ $ 250,00

13. Escribe como potencias y calcula:

a) $5 \cdot 5$; b) $12 \cdot 12$; c) $3 \cdot 3 \cdot 3$; d) $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$;
e) $8 \cdot 8$; f) $4 \cdot 4 \cdot 4$; g) $13 \cdot 13$; h) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

14. Selecciona la forma correcta de escribir 5^3 como producto. Marca con una (X) la variante seleccionada.

a) __ $5 \cdot 5 \cdot 5$ b) __ $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ c) __ $5 \cdot 3$ d) __ $3 \cdot 5$

15. Escribe como producto cada potencia y calcula:

a) 1^3 b) 7^2 c) 5^3 d) 10^3

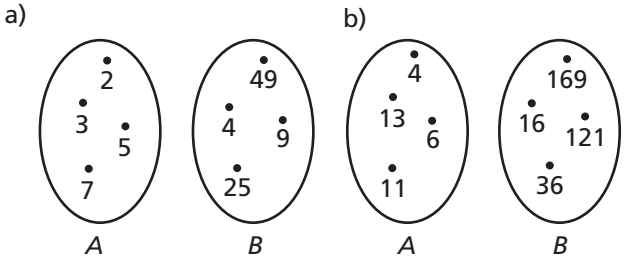
e) 9^2 f) 12^3 g) 4^4 h) 6^3

16. Calcula y compara los resultados:

a) 10^3 y 6^3 b) 2^4 y 4^2 c) 4^3 y 8^2 d) 12^2 y 2^{12}

e) 13^2 y $13 \cdot 2$ f) 1^4 y $4 \cdot 1$ g) 5^2 y $5 \cdot 2$ h) 11^2 y $11 \cdot 2$

17. Enlaza los elementos del conjunto A con los cuadrados perfectos del conjunto B (fig. 1.18).



18. Marca con una (X) la variante que completa correctamente la expresión: el resultado de calcular $3 \cdot 2 + 49 \cdot (78 - 42) - 3^2$ es

a) ___ 1 764 b) ___ 3 777 c) ___ 3 780 d) ___ 1 761

19. Calcula teniendo en cuenta el orden operacional.

a) $4^2 + 220$ b) $3\,216 - 5^3$ c) $(157 - 151)^3$

d) $(98 + 92) \cdot 10^2$ e) $18 \cdot 117 + 14^2$ f) $2^3 \cdot (146 + 122)$

g) $1\,800 - (19 - 9)^3$ h) $(4^3 + 2^7) - 12^2$ i) $3 + 5.\ 2^3 : 10$

20. Determina el valor de la variable en las ecuaciones que se relacionan a continuación.

a) $33 + x = 152$ b) $y + 53 = 36$

c) $162 - x = 122$ e*) $4x = 56$

21. Determina el valor de x, si $x^2 = 144$. Marca con una (x) la variante correcta.

a) ___ $x = 72$ b) ___ $x = 288$

c) ___ $x = 12$ d) ___ $x = 142$

22. Marca con una (X) la variante que completa correctamente la expresión: al sustraer 304 del cuadrado de 21, el resultado es

a) ___ 745 b) ___ 147 c) ___ 137

d) ___ Faltan elementos para determinarlo.

23. Cuentan que una vez encerraron a una princesa en un castillo. Delante del castillo había 7 árboles; cada árbol tenía 7 ramas y en cada una de ellas había 7 ramas más pequeñas. En cada una de estas ramas más pequeñas había 7 hojas de oro. Cada hoja de oro pesaba 7 gramos. El que liberara a la princesa podía llevarse todas las hojas. ¿Cuántos gramos de oro recibiría el que lograra liberar a la princesa?

24. Calcular la raíz que corresponde en cada caso:

a) $\sqrt{121}$ b) $\sqrt{196}$ c) $\sqrt[3]{27}$ d) $\sqrt[3]{125}$ e) $\sqrt[3]{216}$

25. Expresa la raíz cuadrada de 12, 49 y 81.

26. Marca con una (X) la variante que completa correctamente la expresión: al hallar la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados perfectos de 3 y 4, el resultado es

a) ___ 6 b) ___ 5 c) ___ 36

d) ___ Faltan elementos para determinarlo.

27. Calcula teniendo en cuenta el orden operacional.

a) $12^2 \cdot (753 - 124)$ b) $123 \cdot 45 - 1\,872 + \sqrt{64}$

c) $2^3 \cdot \sqrt{16} + 32 \cdot \sqrt{49}$ d) $\sqrt{221+179}\cdot 5$

e) $\sqrt[3]{281-156} + \sqrt[3]{27}$

28. Completa las tablas siguientes:

a)

x	x^2	$(x+1)^2$	$3x$
4			
	49		
			27

b)

z	z^2	$(z+1)^3$	$2z$
6			
		216	
			512

29. Completa la tabla siguiente:

x	$\sqrt{x}$	$\sqrt{x+25}$	$\sqrt[3]{x-19}$
144			
y	$\sqrt{y}$	$\sqrt{y+13}$	$\sqrt[3]{y-9}$
	6		
z	$\sqrt{z}$	$\sqrt{z+19}$	$\sqrt[3]{z-17}$
			4

1.4 División de números naturales

¿Qué voy a aprender?

- División exacta por números de tres lugares.
- División inexacta.
- A resolver ejercicios combinados donde aparezcan las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.

¿Para qué me servirá?

Para su aplicación a cálculos ventajosos y resolver nuevas clases de problemas de la escuela, de la vida práctica y geométricos.

¿Qué debo saber?

- Significado práctico de las operaciones de multiplicación y división.
- Ejercicios básicos de multiplicación y los cocientes básicos.
- Conceptos de dividendo, divisor y cociente.
- Imposibilidad de dividir por cero.
- Procedimiento escrito de la división por divisores de dos lugares.
- Propiedades de la división.
- Dividir números naturales por la unidad seguida de cero.
- Redondeo a múltiplos a 10, 100 y1 000 y su aplicación en el estimado de resultados.
- A resolver ecuaciones e inecuaciones.

En el año 1923 se realizó uno de los negocios más sucios de la República Neocolonial, la venta del convento de Santa Clara, el cual fue vendido a un precio de 2 360 000 pesos. Si se pagó al doble de su valor real aproximadamente, ¿qué operación de cálculo te permitiría hallar el valor del convento?

Para solucionar el ejercicio deberás dividir el precio al que fue vendido (dividendo) entre 2 (que es el divisor) para obtener el valor real (cociente).

2 360 000 : 2 = 1 180 000.

R/ El valor real del convento era aproximadamente de 1 180 000 pesos.

A continuación, se te presentan algunos elementos que debes tener en cuenta:

Recuerda que

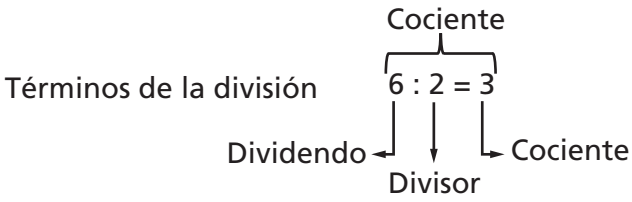
Como ya conoces de igualdades de multiplicación se pueden obtener dos igualdades de división: por ejemplo,

$3 \cdot 2 = 6$ $\quad 6 : 2 = 3$ $\quad 6 : 3 = 2$

Esta relación que existe entre la multiplicación y la división, es similar a la que hay entre la adición y la sustracción.

3 + 2 = 5 5 – 3 = 2 y 5 – 2 = 3

En una división, el número que se divide por otro se llama *dividendo*; el número por el cual se divide es el *divisor* y el resultado se llama *cociente.*



Saber más

En la división es muy importante que siempre tengas en cuenta que el divisor debe ser distinto de cero, pues la división por cero no se puede realizar. Sin embargo, el dividendo sí puede ser cero. En ese caso se cumple que: 0 : *a* = 0 para cualquier número a distinto de cero.

Algo de historia

Los dos puntos se deben a Leibniz (1684), quien los aconsejaba para aquellos casos en los que se quisiese escribir la división en una sola línea y la notación con raya de fracción no fuese, por tanto, adecuada.

Ya conoces del grado precedente el procedimiento escrito para dividir dos números naturales y en el cual, en nuestro país, se utiliza una forma muy usual la *galera* (⌊). Para comprobar si una división está bien realizada, se aplica una propiedad que muestra la relación entre esta operación y la multiplicación: *el dividendo es igual al producto del cociente por el divisor*.

Reflexiona un instante

Para dividir, primero debes de tener en cuenta un elemento fundamental y que nos permite tener una idea previa de un aproximado al resultado, es la estimación que podemos hacer redondeando mentalmente de forma conveniente antes de calcular.

Para buscar los posibles cocientes parciales, en muchos casos es útil redondear el divisor y trabajar con el menor número de cifras posibles.

Para que repases el procedimiento escrito de la división puedes estudiar los ejemplos que se proponen a continuación.

Ejemplos

Calcula:

a) 2 880 : 20 b) 1 311 : 57 c) 65 975 : 325 d) 32 508 : 756

Soluciones

El inciso **a)** se reduce a una división por un número de un lugar dividiendo por 10 el dividendo y el divisor:
2 880 : 20 = 288 : 2, este último lo puede resolver aplicando el cálculo oral:
288 : 2 = 144.

b) 1 311 : 57

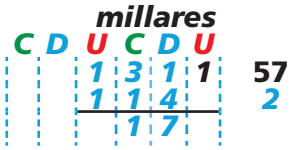
Cálculo estimado

1) Redondeo el divisor: 57 ≈ 60.
2) Redondeo el dividendo a un múltiplo del divisor redondeado: 1 200 ≈ 1 311.
3) Realizo el cálculo estimado: 1 200 : 60 = 20.

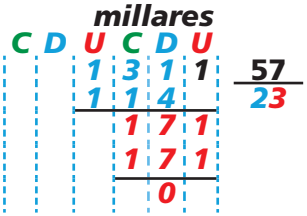
Cálculo del cociente

1. Formo el dividendo:
   Como 13 < 57, elijo 131 como primer dividendo parcial (131 decenas).

2. Hallo el dígito del cociente que corresponde:
   131 : 57 ≈ 2 ; 57 · 2 = 114, como 114 < 131.
3. Calculo el resto:
   131 – 114 = 17, como 17< 57, repito los pasos 1, 2 y 3.



1. Formo el dividendo:
   Con las 17 decenas del resto y la unidad que debo incorporar a la operación formo el número 171 (unidades).
2. Hallo el dígito del cociente que corresponde:
   171 : 57 = 3; 57 · 3 = 171, como 171 = 171.
3. Calculo el resto:
   171 – 171 = 0.



c) 65 975 : 325

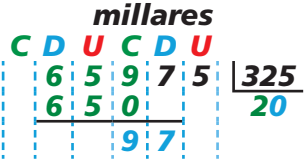
Cálculo estimado

1) Redondeo el divisor: 325 ≈ 300.
2) Redondeo el dividendo a un múltiplo del divisor redondeado:
   65 975 ≈ 60 000.
3) Realizo el cálculo estimado:

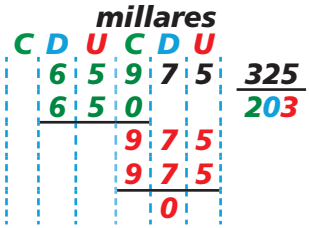
   60 000 : 300 = 200.

1. Formo el dividendo:
   Como 659 > 325, elijo 659 como primer dividendo parcial, (659 centenas).
2. Hallo el dígito del cociente que corresponde:
   659 : 325 ≈ 2 ; 325 · 2 = 650, como 650 < 659.
3. Calculo el resto:
   659 – 650 = 9, como 9 < 325.

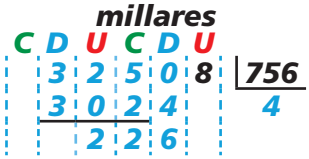
1. Formo el dividendo:
   Con las 9 centenas del resto y las 7 decenas que debo incorporar a la operación formo el número 97 (decenas).



2. Hallo el dígito del cociente que corresponde:
   Como 97 < 325, escribo 0 en el lugar de las decenas del cociente y formo el próximo dividendo tomando en cuenta que las 97 decenas quedan como resto.



1. Formo el dividendo:
   Con las 97 decenas del resto y las 5 unidades que debo incorporar a la operación formo el número 975 (unidades).
2. Hallo el dígito del cociente que corresponde:
   975 : 325 = 3 ; 325 · 3 = 975, como 975 = 975.
3. Calculo el resto:
   975 – 975 = 0.

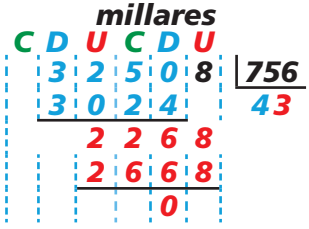


d) 32 508 : 756

Cálculo estimado

1) Redondeo el divisor: 756 ≈ 800.
2) Redondeo el dividendo a un múltiplo del divisor redondeado:
   32 508 ≈ 32 000.
3) Realizo el cálculo estimado:
   32 000 : 800 = 40.

1. Formo el dividendo:
   Como 325 < 756, elijo 3 250 como primer dividendo parcial, (3 250 decenas).
2. Hallo el dígito del cociente que corresponde:
   3 250 : 756 ≈ 4 ; 756 · 4 = 3 024, como 3 024 < 3 250.
3. Calculo el resto:
   3 250 – 3 024 = 226 , como 226 < 756.
1. Formo el dividendo:
   Con las 226 decenas del resto y las 8 unidades que debo incorporar a la operación formo el número 2 268 (unidades).
2. Hallo el dígito del cociente que corresponde:
   2 268 : 756 = 3; 756 · 3 = 2 268.



3. Calculo el resto:
   2 268 – 2 268 = 0.

Para comprobar los cálculos realizados recuerda que:

1) El cociente es próximo al resultado del cálculo estimado.
2) En las divisiones exactas o con resto cero, el producto del cociente por el divisor es igual al dividendo.

División inexacta o con resto diferente de cero

Las divisiones analizadas hasta ahora son exactas, pues el dividendo contiene un número exacto de veces al divisor; por eso el resto es cero. Ahora debes practicar otro tipo de división que es la división inexacta o con resto distinto de cero.

Para realizar un estudio sobre una de las variables climáticas, la temperatura, se recopiló información al azar de los valores registrados en tres ciudades de nuestro país, a la misma hora como se muestra en el gráfico de barras de la figura 1.19.

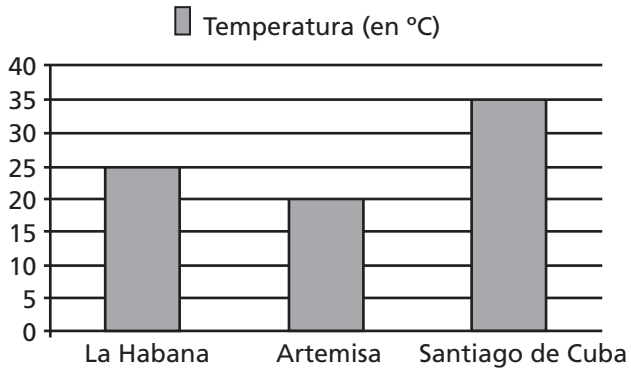
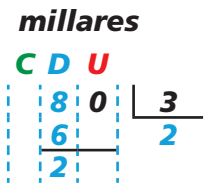


Fig. 1.19

a) ¿En qué provincia se registró el valor más elevado de temperatura?
b) ¿Cuál fue la temperatura promedio para ese día teniendo en cuenta lo registrado en estas tres provincias?

¿Qué hacer para responder esta última interrogante?

Para darle respuesta a esta situación debes adicionar los distintos registros de temperatura y dividirlos entre la cantidad de provincias:

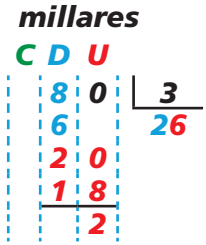


25 + 20 + 35 = 80
80 : 3 = ¿?

Si seguimos el procedimiento conocido:

Cálculo del cociente

1. Formo el dividendo:
Como 8 > 3, elijo 8 como primer dividendo parcial, (8 decenas).
2. Hallo el dígito del cociente que corresponde:
   8 : 3 ≈ 2 ; 3 · 2 = 6, como 6 < 8.
3. Calculo el resto:
   8 – 6 = 2, como 2 < 3, repito los pasos 1, 2 y 3.
1. Formo el dividendo:
   Con las 2 decenas del resto formo 20 (unidades).
2. Hallo el dígito del cociente que corresponde:
   20 : 3 ≈ 6; 6 · 3 = 18, como 16 < 20.
3. Calculo el resto:
   20 – 18 = 2.



Soluciones

a) El valor más elevado de temperatura se registró en Santiago de Cuba.
b) El promedio de temperatura entre las tres provincias es de aproximadamente 26°.

Como puedes observar el resto en esta división es diferente a cero, luego esta división se denomina *división inexacta* y sus términos se llaman de la misma forma que en las exactas.

¿Qué debemos hacer para comprobar el cálculo del cociente y el resto?

En la comprobación del cálculo del cociente y el resto se aplica una propiedad en la que se muestra la relación entre la división y las operaciones de multiplicación y adición que plantea: *en una*

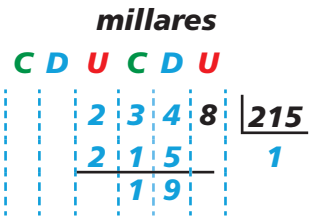
división inexacta el dividendo es igual a la suma del producto del cociente por el divisor y el resto.

Al dividir 80 entre 3, se obtiene cociente 26 y resto 2. ¿Es correcta esta afirmación?

Para saberlo: Se multiplica el cociente por el divisor: $3 \cdot 26 = 78$ y a este producto se le adiciona el resto: $78 + 2$, el resultado debe ser el dividendo: 80. Podemos responder: es correcta la afirmación. Observemos cómo se realiza en la práctica.

Ejemplo

Calcula y comprueba tu respuesta:
2 348 : 215

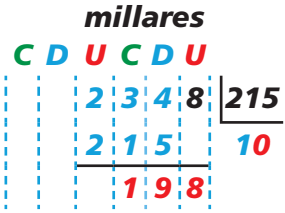


Cálculo estimado

1) Redondeo el divisor: $215 \approx 200$.
2) Redondeo el dividendo a un múltiplo del divisor redondeado: $2\,348 \approx 2\,000$.
3) Realizo el cálculo estimado: $2\,000 : 200 = 10$.

Cálculo del cociente

1. Formo el dividendo:
   Como $234 > 215$, elijo 234 como primer dividendo parcial, (234 decenas).
2. Hallo el dígito del cociente que corresponde:
   $234 : 215 \approx 1$; $215 \cdot 1 = 215$, como $215 < 234$.
3. Calculo el resto:
   $234 - 215 = 19$, como $19 < 215$, repito los pasos 1, 2 y 3.



1. Formo el dividendo:
   Con las 19 decenas del resto y las 8 unidades formo 198 (unidades).
2. Hallo el dígito del cociente que corresponde:como $198 < 215$, escribo cero en el cociente.
3. Calculo el resto: 198 unidades.

Para la comprobación, se compara el cociente con el cálculo estimado y luego se aplica la regla de comprobación que plantea:

en una división inexacta el dividendo es igual al producto del cociente por el divisor más el resto.

$215 \cdot 10 = 2\,150$
$2\,150 + 198 = 2\,348.$

Al igual que en epígrafes anteriores para resolver ejercicios donde aparezcan en forma combinada las operaciones, debes seguir un orden determinado.

Ejemplo

a) $32\,058 : 26 - 441$ b) $4^2 + (5\,234 - 615) - 7\,245 : 45$
c) $2^3 \cdot \sqrt{16} + 32 : \sqrt{64}$ d) $238 \cdot \sqrt{4} - (425 + 4^2) : 7$

Como recordarás el orden para resolverlas es el siguiente:

1. Operaciones dentro del paréntesis.
2. Potenciación y radicación en el orden en que aparecen.
3. Multiplicación y división en el orden en que aparecen.
4. Adición y sustracción en el orden en que aparecen.

a) $32\,058 : 26 - 441$

$1\,233 - 441 = 792$

b) $4^2 + (5\,234 - 615) - 7\,245 : 45$

$4^2 + 4\,619 - 7\,245 : 45$

$16 + 4\,619 - 7\,245 : 45$

$16 + 4\,619 - 161 = 4\,474$

c) $2^3 \cdot \sqrt{16} + 32 : \sqrt{64}$

$2^3 \cdot 4 + 32 : 8$

$8 \cdot 4 + 32 : 8$

$32 + 4 = 36$

d) $238 \cdot \sqrt{4} - (425 + 4^2) : 7$

$238 \cdot \sqrt{4} - (425 + 16) : 7$

$238 \cdot \sqrt{4} - \quad 441 : 7$

$238 \cdot 2 - 441 : 7$

$476 \quad - \quad 63 = 413$

Ya conoces las operaciones adición y sustracción, multiplicación y división, potenciación y radicación, sus términos y propiedades, y conoces importantes relaciones entre éstas. Este conocimiento te permite resolver ecuaciones e inecuaciones tales como:

a) $4x = 24$ b) $4x + 1 = 33$ c) $4x - 1 < 27$

y variados problemas de la práctica. Por ejemplo:

d) Resuelve el siguiente problema formando una ecuación con los datos que en él se te ofrecen.

Pedro y su hermano José sembraron juntos 225 posturas de café. José sembró cuatro veces las posturas que sembró su hermano Pedro. ¿Cuántas posturas de café sembró cada uno?

Para resolver este problema, puedes proceder escribiendo la ecuación que representa la situación descrita en el texto.

Para determinar esta ecuación, lee detenidamente el texto e identifica la incógnita que debes resolver, en este caso:

x: es la cantidad de posturas que sembró Pedro, y

$4x$: es la cantidad de posturas que sembró José.

225: es la cantidad de posturas sembradas por los dos juntos.

O sea, que la ecuación $4x + x = 225$ representa la situación descrita en el texto.

Ahora se debe resolver la ecuación: $4x + x = 225$

$5x = 225$ $x = 225 : 5$

$x = 45$, este valor nos dice la cantidad de posturas que sembró Pedro, para hallar la cantidad de posturas que sembró José debemos hallar $4x$.

$4 \cdot x = 4 \cdot 45 = 180$

Debemos comprobar que estas son las cantidades buscadas. Según el texto entre los dos sembraron 225 posturas.

Como puedes ver, los resultados obtenidos satisfacen los requisitos del problema: José sembró 4 veces las posturas que sembró su hermano:

$4 \cdot 45 = 180$ y los dos juntos sembraron $180 + 45 = 225$ posturas.

R/ José sembró 180 posturas de café y su hermano Pedro sembró 45.

Ejercicios del epígrafe 1.4

1. Lee detenidamente las afirmaciones que se hacen en cada inciso. Escribe (V) en las que son verdaderas y (F) en las que son falsas.

1.1 Justifica tu respuesta en el caso de las falsas.

1.2 Convierte las falsas en verdaderas.

a) ___ En el dominio de los números naturales la división como operación matemática siempre se puede realizar.

b) ___ Los términos de la división son: factores y producto.

c) ___ En toda división donde el dividendo es el menor número natural, el cociente es 0.

d) ___ Si en una división inexacta el divisor es 3, el cociente es el sucesor de 1 y se sabe que el cociente y el resto son iguales, entonces el dividendo es 8.

e) ___ En la operación $A + B : C - D$, el orden que se debe seguir para calcular es: división, adición y sustracción.

2. Marca con una (X) las respuestas correctas.

El grupo de María y Carlos se encuentra en un taller de carpintería desarrollando una clase práctica de educación laboral. El carpintero jefe del taller le entrega a María un listón de madera que mide 59 dm y a Carlos, un listón que mide 62 dm. A ambos les da la orden de dividir el listón en trozos de 3 dm.

a) ___ A María le sobró un trozo de madera menor que el de Carlos.

b) ___ A Carlos le sobró un trozo de madera menor que el de María.

c) ___ Al dividir la longitud de cada uno de los listones obtuvimos divisiones inexactas.

d) ___ A Carlos le sobró un trozo de madera mayor que el de María.

3. Calcula:

a) 348 : 3 b) 344 : 4 c) 120 : 5 d) 216 : 6
e) 108 : 9 f) 4 375 : 5 g) 1 247 : 1 h) 0 : 376

4. Calcula:

a) 1 243 : 11 b) 1 573 : 13 c) 5 508 : 18 d) 2 420 : 20
e) 7 350 : 30 f) 7 105 : 35 g) 25 192 : 47 h) 17 192 : 56
i) 137 280 : 64 j) 7 242 : 71 k) 4 984 : 89 l) 34 272 : 96
m) 34 : 99

5. Calcula de forma ventajosa:

a) 10 : 10 b) 100 : 10 c) 67 800 : 10
d) 23 570 : 10 e) 14 500 : 100 f) 890 000 : 1 000
g) 355 000 : 1 000 h) 704 000 : 100 i) 380 : (2 · 10)
j) 900 : 30 k) 4 800 : 120 l) 12 600 : 600

m) 56 000 : 700 n) 720 000 : 800

6. Calcula y comprueba los resultados:

a) 9 085 : 23 b) 80 442 : 654 c) 149 100 : 213
d) 303 750 : 810 e) 32 028 : 204 f) 639 630 : 207
g) 632 928 : 912 h) 221 046 : 554 i) 85 344 : 381
j) 448 857 : 477 k) 125 454 : 406 l) 41 720 : 745

7. Halla el cociente y el resto:

a) 672 : 5 b) 569 : 43 c) 308 : 97
d) 206 : 83 e) 38 995 : 201 f) 3 382 : 84
g) 12 150 : 423 h) 9 842 : 205

8. Calcula el cociente y el resto:

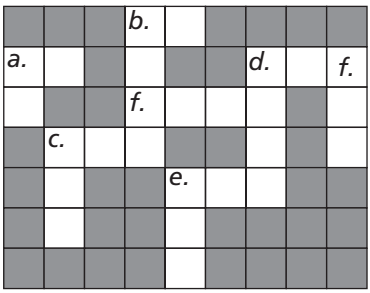
a) 16 275 y 36 b) 11 369 y 56
c) 47 733 y 74 d) 29 567 y 45

9. El dividendo es 15 087 y el divisor 47. Calcula el cociente.

10. Calcula el promedio de los números 345; 654; 345; 456 y 235.

11. Halla la tercera parte de 1 374.

12. Completa (fig. 1.20).



Vertical	Horizontal
a) 1 140 : 20	a) 2 295 : 45
b) 19 750 : 5	b) 1 260 : 36
c) 9 960 : 12	c) 9 240 : 11
d) 8 412 : 4	d) 5 796 : 21
e) 9 218 : 22	e) 9 959 : 23
f) 950 : 19	f) 15 243 : 3

13. Calcula. Sigue el orden de las operaciones.

a) $32\,058 : 26 - 441$ b) $2^3 \cdot \sqrt{16} + 320 : 64$
c) $238 \cdot \sqrt{4} - (425 + 4^2) : 7$ d) $84 \cdot \sqrt[3]{27} \cdot 8 + 432 : (43 - 31)^2$

e) $32 + 49\ (78 - 42) : \sqrt{81}$ f) $7245 \cdot 407 + 4^2 - (15\,234 - 8\,615)$
g) $243 + 336 : 28 + 115$ h) $(943 - 2\,769:3)^2$
i) $(\sqrt{144} + 320) : 83 - 4$ j) $418 - (9 \cdot 8) : 4 + 11^2$
k) $119 + 205 \cdot 2^4 - 144 : 6$ l) $84 - 3 \cdot 8 + 48 : 4^2$

14. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $j \cdot 25 = 450$ b) $k : 38 = 125$ c) $11x - 16 = 875$
d) $24p + 15 = 88\,767$ e) $8a - 4 = 14\,828$ f) $98 + x + 71 = 180$
g) $3x + 5 = 35$ h) $7a + 5 = 54$

15. Determina los valores de las variables en las inecuaciones siguientes:

a) $129q \cdot 1\,032$ b) $18m + 4 \geq 292$ c) $t : 4 - 5 \leq 6$
d) $13 + 2b \cdot 23$ e) $3x + 4 > 13$ f) $2z - 8 \cdot 4$

16. Si se duplica un número y de este producto se sustrae el número 7, se obtiene 71. ¿Cuál es el número?

17. Un número y su antecesor suman 65. ¿Cuáles son esos números?

18. Calcula el cociente de la suma de los números 830 y 747 entre su diferencia.

19. Marca con una (X) la variante que completa correctamente la expresión: el cuádruplo de 30, aumentado en el cubo perfecto de 5, disminuido en la raíz cuadrada de 81 es

a) ___ 27 011 b) ___ 176
c) ___ 126 d) ___ 236

20. Yolanda y su hermana Berta han ahorrado $ 351. Si Yolanda ha ahorrado la mitad de la cantidad del dinero de su hermana. ¿Cuánto ha ahorrado cada una?

21. Yoel y su hermano recogen latas de café durante tres días. El primer día recogen el triple del segundo día y el tercero,

108 latas que representan la mitad de las latas recogidas el primer día. ¿Cuántas recogieron el segundo día?

22. Observa los datos recogidos en la siguiente tabla y responde.

Elevaciones (altura en metros)	Lugar de ubicación
1 974 metros (Pico Turquino)	Sierra Maestra
699 metros (Pan de Guajaibón)	Sierra del Rosario
1 140 metros (Pico San Juan)	Montañas de Guamuaya
1 214 metros (La Gran Piedra)	Sierra Maestra

¿Cuál es el promedio de las alturas que aparecen relacionadas?

23. El monte Everest es la mayor altura del mundo con 8 848 m sobre el nivel del mar. Si el Pico Turquino es la mayor altura de nuestro país con 1 974 m, ¿cuántas veces está contenida la altura del menor en la del mayor?

24. A continuación, aparecen representados en una tabla los datos (en milímetro) de la cantidad de agua promedio caída en Santiago de Cuba en cada mes del año 2013.

Ene.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ago.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.
12	44	46	20	22	18	13	28	21	22	25	30

Marca con una (X) la variante que completa correctamente la expresión: el agua promedio caída es

a) ___ 30 mm b) ___ 23 mm c) ___ 25 mm d) ___ 22 mm

25. En este período vacacional participaron 78 500 personas en 500 de las bases de campismo de todo el país. Marca con una (X) la variante que completa correctamente la expresión: el promedio de participantes por bases de campismo fue

a) ___ 39 250 000 b) ___ 157
c) ___ 137 d) ___ no se puede determinar.

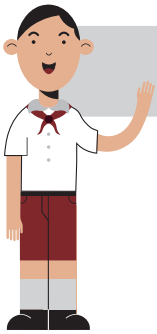
26. ¿Cuántos viajes tendrá que realizar un camión para transportar 1 598 cajas de tomate, si en cada viaje puede cargar como máximo 142 cajas?

27. * Un avión recorrió 8 820 km en 12 h de vuelo y otro necesitó 11 h para recorrer 8 250 km. ¿Cuál es más veloz?

28. Gladys tiene que resolver 32 problemas de una guía de estudio. El primer día resuelve la mitad de los problemas; al día siguiente, la mitad de los que le quedaban y al otro día, los restantes.

¿Cuántos problemas resuelve Gladys cada día?

1.5 Múltiplos y divisores. Reglas de divisibilidad. Mínimo común múltiplo y máximo común divisor



¿Qué voy a aprender?

- Conceptos de múltiplos y divisores de un número natural.
- Regla de divisibilidad por 3; 4; 6; 8; 9.
- Números primos menores que 30 y la descomposición en factores primos.
- Mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de números naturales.

¿Para qué me servirá?

Para su aplicación a cálculos ventajosos y resolver nuevas clases de problemas de la escuela, de la vida práctica y geométricos.

¿Qué debo saber?

- Significado práctico de las operaciones de multiplicación y división.
- Ejercicios básicos de multiplicación y los cocientes básicos.
- Conceptos de factor, producto, dividendo, divisor y cociente.
- Procedimiento escrito de la división por divisores de dos lugares.
- Propiedades de la división.
- Multiplicar y dividir números naturales por la unidad seguida de cero.
- Reglas de divisibilidad por 2; 5; 10; 100 y 1 000.
- Resolución de problemas vinculados a situaciones de la práctica.

¿A qué llamamos múltiplo de un número natural?

Ejemplo

Observa la figura 1.21

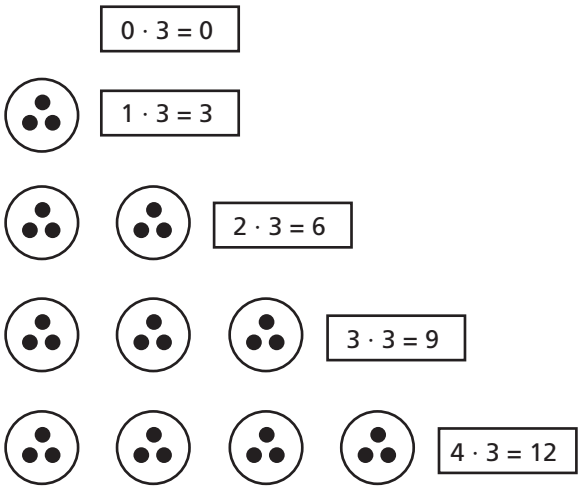


Fig. 1.21

Los números 0; 3; 6; 9; 12; … son resultado de *multiplicar* el número 3 por otro número natural. En este caso decimos que 0; 3; 6; 9; 12; … son múltiplos de 3. Si sigues multiplicando el 3 por otros números naturales te podrás dar cuenta de que existen infinitos múltiplos de 3.

Los múltiplos de 3 forman un conjunto que podemos representar de la siguiente forma M_3 y cuyos elementos son:

$M_3 = \{0; 3; 6; 9; 12; \ldots\}$.

Entonces podemos llegar a la conclusión de que:

- En toda igualdad de productos de números naturales *a, b* y *c*, donde: $a = b \cdot c$, *a* es múltiplo de *b* y *a* es múltiplo de *c; porque a es el producto de b y c.*
- Todo número es múltiplo de sí mismo: $(a \cdot 1 = a)$
- El cero es el menor múltiplo de cada número natural $(a \cdot 0 = 0)$

Propiedades de los múltiplos de un número

Podemos preguntarnos, ¿18 es múltiplo de 2?

Si multiplicamos $9 \cdot 2 = 18$, como existe un número que multiplicado por 2 es 18, entonces decimos que 18 es múltiplo de 2.

Observemos este otro ejemplo:

```
  2 3 2 2 | 43
 –2 1 5   | 54
    1 7 2
    1 7 2
      0
```

Sí es múltipo de 43 porque $2\,322 = 54 \cdot 43$

Divisor de un número natural

Los divisores de un número natural son los números que lo dividen exactamente.

Los divisores de 21 forman un conjunto que podemos representar de la siguiente forma D_{21}, cuyos elementos son:

$D_{21} = \{1; 3; 7; 21\}$, porque $1 \cdot 21 = 21$ y $21 = 3 \cdot 7$.

¿A qué llamamos divisores de un número natural?

Todo número distinto de cero que divida exactamente a otro es un divisor de él.

Propiedades de los divisores de un número natural

1. Todo número, distinto de 0, es divisor de sí mismo y es el mayor de sus divisores.
2. El 1 es divisor de todos los números y es el menor de sus divisores.
3. Todo divisor de un número distinto de cero es menor o igual que él, por tanto, el número de divisores es finito.

Si un número es divisor de otro, este es múltiplo del primero.

Como parte del estudio independiente para una evaluación sistemática, María Carla debe determinar cuáles son los divisores de 20 y debe explicar cómo resolverlo. Ella propuso el siguiente procedimiento:

$20 = 1 \cdot 20$
$20 = 2 \cdot 10$
$20 = 4 \cdot 5$

se buscan todos sus factores, se comienza por el menor factor y se termina cuando los pares de factores comienzan a repetirse.

En este ejemplo se termina en $4 \cdot 5$, pues el próximo par de factores sería $5 \cdot 4$ y ya comienzan a repetirse. Luego $D_{20} = \{1; 2; 4; 5; 10; 20\}$.

Otra forma de determinar los divisores de un número natural es dividiéndolo sucesivamente por los números menores que él. Los que al dividirlo, el cociente sea exacto (resto 0) son sus divisores, no es necesario probar con 1 y el propio número.

Consejos

Con el empleo del Portal *CubaEduca* puedes consolidar los contenidos trabajados en este epígrafe y conocer sobre los denominados "múltiplos sinceros".

Reglas de divisibilidad

Generalmente para hallar los divisores de un número natural es importante conocer determinadas condiciones que puede tener el número para ser *dividido exactamente por otro*, o sea, que este sea divisible por ese otro número. Estas condiciones se expresan en *las reglas de divisibilidad*.

Ya en grados anteriores conociste algunas de ellas.

Recuerda que

Reglas de divisibilidad por 10, 100 y 1 000

$10 \cdot 1 = 10$ $10 \cdot 2 = 20$ $10 \cdot 3 = 30$ $10 \cdot 4 = 40$ $10 \cdot 5 = 50$ Para multiplicar por 10 agregas un cero.	$10 : 1\not{0} = 1$ $20 : 1\not{0} = 2$ $30 : 1\not{0} = 3$ $40 : 1\not{0} = 4$ $50 : 1\not{0} = 5$ Para dividir por 10 quitas un cero.	Observa que los múltiplos de 10 terminan en 0 y que los números que terminan en 0 tienen el 10 como divisor. Entonces los únicos números *divisibles* por 10 son los que terminan en cero.

De la misma forma se obtiene que: los únicos números *divisibles por 100* son los que tienen ceros en *sus dos últimas cifras* y los únicos números divisibles por 1 000 son los que tienen ceros en *sus tres últimas cifras*.

Reglas de divisibilidad por los números 2 y 3.

Divisibilidad por 2	**2** · 1 = **2** **2** · 2 = **4** **2** · 3 = **6** **2** · 4 = **8** **2** · 5 = **10** **2** · 6 = **12**	Ten presente que los múltiplos de **2** son *números pares* y a la vez *todos los números pares* tienen el **2** como divisor. Entonces los únicos números *divisibles por 2 son los números pares* (su última cifra es 0, 2, 4, 6 u 8).

Divisibilidad por 5	**5** · 1 = **5** **5** · 2 = **10** **5** · 3 = **15** **5** · 4 = **20** **5** · 5 = **25** **5** · 6 = **30**	Ten presente que los múltiplos de **5** terminan en **0** o en **5** y a la vez cualquier número que termine en 0 o en 5, tiene como divisor el 5. Entonces los *únicos números divisibles por 5 terminan en 0 o en 5.*

Osvaldo va a participar en una olimpiada de cálculo donde van a medir su agilidad mental. Como parte de su preparación personal quiere saber si el número 23 457 es divisible por 3 y si existe un procedimiento más rápido que el de la división para saberlo.

¿Qué debe tener en cuenta Osvaldo para saber si un número es divisible por 3?

Divisibilidad por 3

Observemos:

3 · 1 = **3**
3 · 2 = **6**
3 · 3 = **9**
3 · 4 = **12**
3 · 5 = **15**
3 · 6 = **18**
3 · 7 = **21**
...
3 · 13 = **39**
...
3 · 24 = **72**

Procedimiento

1 + 2 = **3**
1 + 5 = **6**
1 + 8 = **9**
2 + 1 = **3**
...
3 + 9 = **12**
...
7 + 2 = **9**

Para saber si es divisible por 3, Osvaldo debe sumar las cifras o dígitos que forman dicho número y si el resultado final es un número que es múltiplo de 3, entonces el número es divisible por 3.

Ejemplo

23 457, sumamos sus cifras 2 + 3 + 4 + 5 + 7 = 21, luego 23 457 es múltiplo de 3, porque 21 es múltiplo de 3.

¿A qué conclusión podemos llegar?

Los únicos números *divisibles por 3* son aquellos en que la *suma de sus cifras básicas es múltiplo de 3.*

Divisibilidad por 4

¿Cuándo un número es divisible por 4?

Una vía es dividir el número por 4, si la división es exacta, entonces el número es divisible por 4 en caso contrario no lo es.

¿Existirá otra vía para conocer si un número es divisible por 4?

Observa la siguiente tabla.

Divisibilidad por 4	**Procedimiento**
4 · 1 = **4**	
4 · 4 = **16**	
4 · 10 = **40**	
4 · 346 = 13**84**	84 = 4 · 21
4 · 1 788 508 = 7 154 0**32**	32 = 4 · 8

¿Qué patrón caracteriza los últimos dos lugares de los productos del 4?

Siempre las dos últimas cifras básicas son múltiplos de 4.

Ejemplo

Dados los siguientes números se quiere saber si son divisibles por 4.

a) 1 384 b) 7 154 032 c) 425

Soluciones:

a) 1 3**84**

Sus dos últimas cifras básicas o dígitos forman un número divisible por 4 o lo que es lo mismo forman un número múltiplo de 4. Por tanto, el número es divisible por 4.

Verifiquemos:

84 : 4 = 21 1 384 : 4 = 346. El número 1 384 es divisible por 4.

b) 7 154 0**32**

Sus dos últimas cifras básicas o dígitos forman un número divisible por 4 o lo que es lo mismo forman un número múltiplo de 4. Por tanto, el número es divisible por 4.

Verifiquemos:

32 : 4 = 8 7 154 032 : 4 = 1 788 508. El número 7 154 032 es divisible por 4.

c) 425

Sus dos últimas cifras básicas o dígitos forman el número 25 que no es divisible por 4 o lo que es lo mismo forman un número que no es múltiplo de 4. Por tanto, el número 425 no es divisible por 4.

Podemos llegar a la conclusión de que: un número *es divisible por 4*, *si y solo si* el número formado por *sus dos últimas cifras básicas*, tomadas en el mismo orden del número dado, *es un número divisible por 4* o son ceros.

Divisibilidad por 6

¿Cuándo un número es divisible por 6?

Una vía es dividir el número por 6, si la división es exacta, entonces el número es divisible por 6 en caso contrario no lo es.

¿Existirá otra vía para conocer si un número es divisible por 6?

Observa la siguiente tabla.

Divisibilidad por 6		**Procedimiento**
	6 · 1 = **6**	
	6 · 3 = **18**	1 + 8 = 9
	6 · 12 = **72**	7 + 2 = 9
	6 · 24 = **144**	1 + 4 + 4 = 9
	6 · 112 = **672**	6 +7 + 2 = 15
	6 · 17 607 = **105 642**	1 + 0 + 5 + 6 + 4 + 2 = 18

Si te fijas con detenimiento en el procedimiento seguido notarás que todo múltiplo de 6 es par, o sea, que termina en 0; 2; 4; 6 u 8 y que también es divisible por 3. Prueba si en realidad estas son las condiciones que debe cumplir un número para que sea divisible por 6. Usa al menos dos vías para investigarlo.

¿Cómo puedes determinar si 105 642, es divisible por 6?

Una vía es dividir 105 642 entre 6, si obtienes una división exacta, es divisible por 6. También puedes multiplicar 6 por los elementos de una sucesión de números naturales, si obtienes 105 642 en el producto, entonces podrás afirmar que es divisible por 6, en ambos casos emplearás varios minutos para llegar a esa conclusión.

Ejemplo

Primera vía: divide 105 642 entre 6. ¿La división es exacta?
Segunda vía: halla la suma de los dígitos que forman a 105 642, ¿es 105 642 divisible por 3?

Observa el dígito que ocupa el lugar de las unidades simples, ¿es 105 642 divisible por 2?
¿Esto sucede para cada múltiplo de 6?
Organiza un equipo de trabajo y analicen la mayor cantidad de números que puedan atendiendo a las vías mostradas en el ejemplo anterior. ¿Qué pueden concluir?

¿Cuándo un número es divisible por 6?

Los **únicos números naturales** divisibles por 6 son los que son divisibles por 2 y por 3 a la vez.

Divisibilidad por 8

Llegar al criterio de divisibilidad por 8 resulta un proceso que puedes asumir junto con un equipo de educandos que estén dispuestos a hallarlo de forma independiente. Ya debes tener idea de cómo lograrlo actuando de forma similar a los casos anteriores.

¿Cuándo un número es divisible por 8?

Un número es *divisible por 8*, si y solo si el número formado por las *tres últimas cifras*, tomadas en el mismo orden del número dado, *es un número divisible por 8* o son ceros.

Un número es divisible por 8 cuando la mitad del número es divisible por 4. Ejemplo: 488 mitad 244.

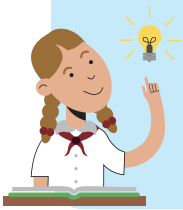
Divisibilidad por 9

¿Cuándo un número es divisible por 9?

Reflexiona un instante

¿Será el número 8 037 divisible por 9?

Observa el análisis que se hace de la sucesión de múltiplos de 9.



Divisibilidad por 9	**Procedimiento**
9 · 1 = 9	
9 · 2 = 18	1 + 8 = 9
9 · 3 = 27	2 + 7 = 9
9 · 500 = 4 500	4 + 5 + 0 + 0 = 9
9 · 892 = 8 028	8 + 0 + 2 + 8 = 18
9 · 893 = 8 037	8 + 0 + 3 + 7 = 18

Como habrás podido observar se sumaron las cifras básicas del número dado y el resultado es un múltiplo de 9, entonces podemos decir que un número *es divisible por 9*, *si y solo si la suma de sus cifras básicas es divisible por 9.*

Ahora puedes responder: el número 8 037 es divisible por 9, porque 8 + 3 + 9 = 18 y 18 es múltiplo de 9.

Todo número natural que es *divisible por 9 es también divisible por tres*, pero no todo número natural que es *divisible por tres lo es por 9*.

Observa detenidamente el siguiente número y di, según las reglas de divisibilidad, ¿por qué números es divisible 63 000?

Solución:

Para determinar por qué números es divisible 63 000, según las reglas de divisibilidad estudiadas, debemos tener presente: sus últimas cifras y la suma de sus cifras básicas.

Como sus tres últimos lugares están ocupados por ceros, se puede afirmar que 63 000 es divisible por 2; 4; 5; 8; 10; 100 y 1 000.

La suma de sus cifras básicas es 9, por tanto, es divisible por 3 y 9, como además resultó ser divisible por 2, también es divisible por 6.

Hasta ahora hemos recordado y aprendido algunas reglas de divisibilidad que te serán muy útiles para resolver tareas de la práctica escolar y de la vida.

Ya en este epígrafe estudiaste los múltiplos y divisores de un número natural, por lo que conoces que todos los divisores de un número natural también son sus factores.

Lee cuidadosamente el siguiente texto y extrae los datos que ofrecen el aumento de la temperatura del aire.

Las regiones polares (fig. 1.22) son altamente vulnerables al cambio climático debido a que:

- Durante el siglo xx, la temperatura del aire del Ártico aumentó unos 5°C. Este aumento ocurre diez veces más rápido que el de la temperatura de la superficie media global observada.
- En el Ártico, para los próximos100 años, se predice un calentamiento adicional de hasta 7°C.

Fig. 1.22

a) Escribe los divisores de los datos extraídos.

Como seguramente respondiste, los datos que ofrecen el aumento de la temperatura del aire son: 5°C y 7°C.

a) $D_5 = \{1; 5\}$ y el $D_7 = \{1; 7\}$

Después del análisis realizado para la solución del ejercicio te habrás podido percatar de que ambos números presentan como divisores al 1 y a ellos mismos.

¿Qué nombre reciben estos números?

A estos números se les denomina *números primos.*

Un número es primo, *si es mayor que 1* y *solo es divisible por 1* y *por sí mismo*.

Algo de historia

Pierre de Fermat (fig. 1.23) matemático y jurista francés (1601-1665) estableció el pequeño teorema de Fermat consistente en la formación de los números primos.

Fig. 1.23

Los números primos son infinitos, pero es importante que memorices los números primos menores que 30.

Números primos menores que 30: {2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29}.

Te preguntarás: *¿qué nombre reciben los números naturales mayores que 1 que no son primos?*

Estos se llaman *números compuestos.*

Ejemplo

4 y 12 $D_4 = \{1; 2; 4\}$ $D_{12} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$

Son **compuestos** los números mayores que 1 que tienen otros divisores además de 1 y ellos mismos.

Inclusión de conjuntos

Sean los conjuntos *N* de todos los divisores de 36 y *M* de todos los divisores de 36 que son números primos.

$N = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36\}$

$M = \{2; 3\}$

Todos los elementos del conjunto M, están incluidos en el conjunto N. En estos casos se plantea que M es un subconjunto de N y se escribe: $M \subset N$ ($\subset$: símbolo que indica subconjunto). En la figura 1.24 está representada gráficamente esta relación.

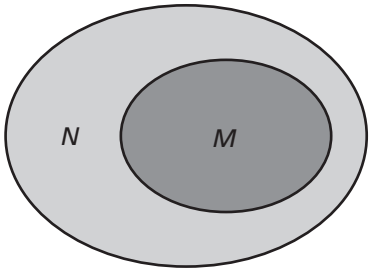


Fig. 1.24

Ejemplo

Descompón en factores primos los siguientes números: 8; 25; 72. Para realizar la descomposición debes proceder de la siguiente forma:

Se escribe	En la mente	
$8 \mid 2$ $4 \mid 2$ $2 \mid 2$ 1 $8 = 2^3$ $25 \mid 5$ $5 \mid 5$ 1 $25 = 5^2$	$8 : 2 = 4$ $4 : 2 = 4$ $2 : 2 = 1$ $25 : 5 = 5$ $5 : 5 = 1$	Dividir sucesivamente por todos los factores primos del número, comenzando por el menor y repitiéndolos si es necesario, como en este caso.
$72 \mid 2$ $36 \mid 2$ $18 \mid 2$ $9 \mid 3$ $3 \mid 3$ 1 $72 = 2^3 \cdot 3^2$	$72 : 2 = 36$ $36 : 2 = 18$ $18 : 2 = 9$ $9 : 3 = 3$ $3 : 3 = 1$	

Mínimo común múltiplo

Los educandos que participan en un programa complementario en una institución educativa quieren responder el siguiente ejercicio:

Escribe el conjunto (A) de los 7 primeros múltiplos de 3 y el conjunto (B) de los 6 primeros múltiplos de 9.

$A = \{0; 3; 6; 9; 12; 15; 18\}$

$B = \{0; 9; 18; 27; 36; 45\}$

Observa que en los conjuntos A y B existen elementos comunes, es decir, que pertenecen a ambos conjuntos.

Al conjunto formado por elementos comunes de dos o más conjuntos se le denomina *conjunto intersección y se denota con el símbolo* $\cap$ *por lo que:* $A \cap B = \{0; 9; 18\}$

En el conjunto intersección hay un elemento distinto de cero que es el menor de ellos, a este número se le llama *mínimo común múltiplo* de 3 y 9.

El mínimo común múltiplo (*mcm*) de dos o más números naturales es el menor de los múltiplos comunes diferente de cero.

Este procedimiento puedes utilizarlo para determinar el mínimo común múltiplo (*mcm*), pero puedes usar también la *descomposición en factores primos para hallar el mcm.*

Ejemplo

Hallemos el mínimo común múltiplo (mcm) de 30 y 12.

30	2	12	2
15	3	6	2
5	5	3	3
1		1	

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ $\quad 12 = 2^2 \cdot 3$

Se descomponen en factores primos 30 y 12.

El número buscado se forma con los factores primos, comunes y no comunes, en las descomposiciones respectivas con su mayor exponente: 3; 5; 2^2

Luego se multiplican estos factores y el resultado es el mínimo común múltiplo:

mcm (30; 12) = $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 4 \cdot 3 \cdot 5 =$ **60**

Saber hacer

Ejemplo

Hallemos el mínimo común múltiplo (mcm) de los números 13 y 60.

13	13	60	2
1		30	2
		15	3
		5	5
		1	

13 = 13 $\qquad$ 60 = $2^2 \cdot 3 \cdot 5$

Observa que entre 13 y 60 no hay factores primos comunes, o sea, no tienen divisores comunes diferentes de 1. En estos casos se dice que son primos entre sí y el mcm (13;60) = 13 · 60 = 780.

mcm (13;60) = $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 = 780$.

Observemos ahora el siguiente problema matemático:

Por una parada pasan dos rutas de guaguas. La primera cada 18 minutos y la segunda cada 12 minutos. A las 7:00 a.m. coinciden las dos en la parada. ¿Cuántos minutos deben pasar para que las dos rutas coincidan la próxima vez en la parada?

En este caso se trata de buscar un número que sea múltiplo de 18 y de 12 al mismo tiempo. Porque las guaguas pasan a intervalos de tiempo iguales una cada 18 min y la otra cada 12 min, es decir en tiempos marcados por los múltiplos de 18 y los múltiplos de 12. Además, este número ha de ser el menor posible, o sea, el mcm de 18 y 12.

Es esta otra aplicación en la práctica del mcm.

12	2	18	2
6	2	9	3
3	3	3	3
1		1	

$12 = 22 \cdot 3$ $\qquad$ $18 = 2 \cdot 32$

mcm (12;18) = $2^2 \cdot 3^2 = 36$

Respuesta: deben pasar 36 min para que las dos rutas coincidan la próxima vez en la parada.

Máximo común divisor

¿A qué llamamos máximo común divisor?

Como su palabra lo indica el mayor de los divisores comunes de dos o más números naturales.

Ejemplo

Calcula el máximo común divisor de 48 y de 60.

Este ejercicio lo podemos resolver por analogía con otros en los que determinamos el mcm.

Escribe el conjunto (*D48*) de los divisores de 48 y el conjunto (*D60*) de los divisores de 60.

D_{48}= {1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 48}

D_{60} = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12; 15; 20; 30; 60}

Observa que en los conjuntos D_{48} y D_{60} existen elementos comunes, es decir, que pertenecen a ambos conjuntos. Basta con seleccionar el mayor de ellos.

El máximo común divisor (*mcd*), de dos o más números naturales, es el mayor divisor común diferente de uno.

Este procedimiento puedes utilizarlo para determinar el máximo común divisor (*mcd*), pero al igual que para determinar el mínimo común múltiplo podemos utilizar la *descomposición en factores primos* para determinar el mcd.

Ejemplo

Determina el mcd de 24, 36 y 40.

24	2	36	2	40	2
12	2	18	2	20	2
6	2	9	3	10	2
3	3	3	3	5	5
1		1		1	

$24 = 2^3 \cdot 3$ $\quad 36 = 2^2 \cdot 3^2$ $\quad 40 = 2^3 \cdot 5$

mcd (24; 36; 40) $= 2^2 \cdot 3 = 12$

Como te habrás dado cuenta después de descomponer en factores primos, se tomaron solamente los factores comunes con su menor exponente (a diferencia del mcm que se toman todos los factores comunes y no comunes con su mayor exponente). Después se multiplican los factores anteriores y el producto obtenido es el máximo común divisor que se escribe (mcd).

Al igual que en el mínimo común múltiplo podemos utilizar el máximo común divisor en la resolución de problemas.

Para los damnificados del huracán Mattew en la provincia de Guantánamo una fábrica de refrescos *Hola* utiliza un recipiente especial que permite envasar 40 L sin que sobre ni falte refresco. Esto también se logra al envasar 84 L. ¿Cuál es la mayor capacidad que puede tener ese recipiente?

En este caso se busca un número que es divisor de 40 y 84 a la vez, el mayor de todos. Estamos refiriéndonos al mcd de 40 y 84.

40	2	84	2
20	2	42	2
10	2	21	3
5	5	7	7
1		1	

$40 = 2^3 \cdot 5$ $\quad 84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$

mcd (40; 84) $= 2^2 = 4$

Respuesta: la mayor capacidad que puede tener esa botella es de 4 L.

En resumen:

Procedimiento para determinar el mcm	Procedimiento para determinar el mcd
1. Se descomponen en factores primos los números dados. 2. Se toman todos los *factores comunes y no comunes* con su *mayor* exponente. 3. Se multiplican los factores anteriores y el producto obtenido es el mcm.	1. Se descomponen en factores primos los números dados. 2. Se toman solo los *factores comunes* con su *menor* exponente. 3. Se multiplican los factores anteriores y el producto obtenido es el mcd.

Ejercicios del epígrafe 1.5

1. Escribe el conjunto *X* formado por los primeros 6 múltiplos de 9 y el conjunto *Y* por los 5 primeros múltiplos de 15.

2. Marca con una (X) cuáles de los siguientes números son múltiplos de 23.

a) ____ 0 b) ____ 115 c) ____ 120
d) ____ 529 e) ____ 540 d) ____ 575

3. Halla los cinco primeros múltiplos de 7; 8 y 9.

4. Completa la secuencia con al menos cinco números más:

a) 0; 4; 8; 12; …

b) 0; 3; 6; 9; …

c) 0; 6; 12; 18; …

5. Enlaza con una línea cada elemento del conjunto *M* con el múltiplo que le corresponde en el conjunto *N* (fig. 1.25).

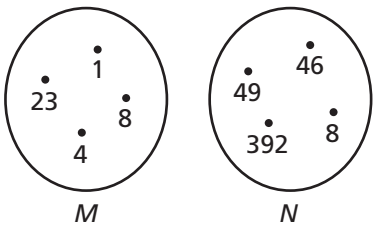


Fig. 1.25

6. De los siguientes números selecciona cuáles son divisores de 32 (fig. 1.26).

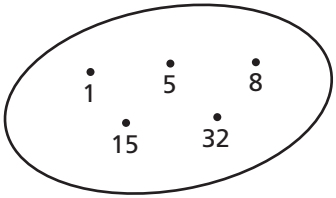


Fig. 1.26

7. Escribe el conjunto *D* de los divisores de:

a) 48 b) 56 c) 72 d) 15 y 45 (a la vez)

8. Completa la siguiente tabla:

Números	Divisores
12	
50	
64	
	1; 2; 4; 5; 10, 20; 25; 50; 100.

9. Escribe el mayor número que cumple las condiciones siguientes:

a) Tiene 7 millares.
b) El lugar de las centenas lo ocupa el sucesor del dígito 4.
c) Es múltiplo a la vez de 2; 3 y 5.

10. Forma con los dígitos 0, 2, 4 y 6 los números de cuatro cifras (sin repetirse ninguno) que sean múltiplos de 4 y 8 a la vez.

11. Estela y María estudian para una evaluación parcial. Estela plantea que todo número distinto de cero que divida exactamente a otro es un divisor de él, por lo que 12 es divisor de 144, por su parte María manifiesta que el divisor de un número es el resultado de multiplicarlo por otro número y que, por lo tanto, el 12 no es divisor de 144. Marca con una (X) quién tiene la razón.

a) ___ María. b) ___ Estela y María
c) ___ Estela. d) ___ Ninguna.

12. Escribe en tu libreta al lado de cada punto los elementos comunes a ambos conjuntos (fig.1.27).

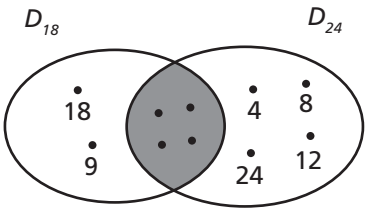


Fig. 1.27

13. ¿Es 2 000 divisible por 2; 5; 10; 100 y 1 000? Fundamenta tu respuesta.

14. Escribe el menor número de tres lugares que sea divisible por 2 y por 3 simultáneamente.

15. Escribe todos los números de tres lugares que son divisibles simultáneamente por 5; 10 y 100.

16. Los dígitos 0; 3; 5 y 4 pueden combinarse de varias maneras para obtener números de cuatro órdenes diferentes. Escribe en tu libreta las combinaciones teniendo en cuenta que el número que obtengas sea divisible por: 2; 3; 4 y 6 al mismo tiempo.

17. Marca con una (X) si el número es divisible por 2; 5; 10 o 100.

Divisibles por	2	5	10	100
745				
300				
46 000				
333				

18. Carlos debe formar triángulos equiláteros con 50 varillas metálicas que tienen las siguientes medidas: 18 miden 3 cm, 22 miden 2 cm, 7 miden 6cm y 3 miden 8 cm.

Marca con una (X) la respuesta correcta. Carlos puede formar:

a) ___ 50 triángulos equiláteros,
b) ___ 22 triángulos equiláteros,
c) ___ 16 triángulos equiláteros,
d) ___ ningún triángulo equilátero.

19. Completa el crucigrama de la figura 1.28.

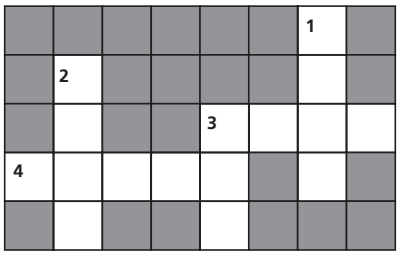


Fig. 1.128

Horizontales	Verticales
4. Todos los números cuya última cifra es 0 son divisibles por	1. Todos los números para los cuales la suma de sus cifra básicas es divisibles por 2. Si un número es divisible por 2 y por 3, entonces es divisibles por 3. Todos los números cuya última cifra es un número par (0; 2; 4; 6; 8) son divisibles por

20. Completa con los números primos que faltan en la secuencia.

19; 23; _____ ; _____; 37; _____.

21. Di si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones. Escribe (V) en las que son verdaderas y (F) en las que son falsas. El número 30 se descompone en factores primos de la forma siguiente:

a) ____ $6 \cdot 5$ b) ____ $2 \cdot 15$
c) ____ $1 \cdot 30$ d) _____ $2 \cdot 3 \cdot 5$

22. Halla el mínimo común múltiplo de los números 24; 60 y 250.

23. Se necesita cierta cantidad de tela de manera que la puedan dividir en pedazos de 12 m, 18 m y 20 m indistintamente. ¿Cuál es la menor longitud que puede tener esa pieza de tela?

24. Los linieros de la empresa Eléctrica de la provincia Granma en su gesto solidario con las provincias afectadas por el Huracán Irma colocaron varios metros de cables eléctricos para restablecer el fluido eléctrico. ¿Cuál es la menor longitud que puede tener el cable si se puede cortar en pedazos de 12 m, 15 m y 17 m?

25. Yaíma está ordenando por tamaño su colección de sellos de medios de transporte y se percata de que, si los coloca de 18 en 18, de 20 en 20 o de 12 en 12 siempre le sobran 2. ¿Cuántos sellos tiene Yaíma si esta cantidad es menor que 200?

26. Para llenar tres recipientes de 9 L, 15 L y 18 L hemos utilizado botellas iguales llenas de líquido. ¿Qué capacidad tienen esas botellas si para llenar esos recipientes se ha utilizado el menor número de ellas?

27. Calcula el mcd de 20 y 50; 42 y 56; 24 y 16; 150 y 36.

28. Escribe los divisores de 24, 32 y 36, encuentra su máximo común divisor. ¿Son primos entre sí, fundamenta la respuesta?

29. Marca con una (X) la variante que completa correctamente la expresión: el máximo común divisor de 100 y 140 es

a) ___ 100 b) ___ 20
c) ___ 140 d) ___ no tienen máximo común divisor.

30. Con 20 L puedes llenar varias veces una botella sin que sobre agua. También la puedes llenar con 32 L sin que sobre agua. ¿Cuál es la mayor capacidad que puede tener la botella?

31. En un almacén hay tres toneles de vino, cuyas capacidades son de 270 L, 306 L y 504 L respectivamente. Si su contenido se quiere envasar en la menor cantidad posible de tanques iguales, busca la capacidad máxima de cada tanque para lo-

grar envasar el vino contenido en cada uno de los tanques. Determina, además, cuántos tanques se necesitan.

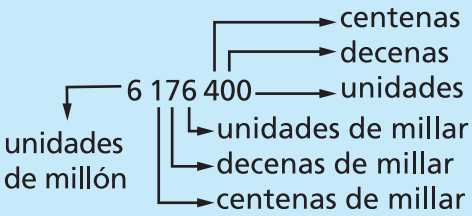
1.6 Ejercitación variada

Recuerda que

Sistema de numeración decimal

Dígitos o cifras

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9



$6\,176\,400 = 6 \cdot 10^6 + 1 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2$

Con estos *dígitos* se forman todos los números naturales.

Con cada diez unidades de un orden se forma una unidad del orden inmediato superior.

Operaciones con números naturales

Adición y sustracción

$$\begin{array}{r} 7\,111\,466\,444 \\ +\quad 23\,545 \\ \hline 7\,111\,489\,989 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7\,111\,489\,989 \\ -\quad 23\,545 \\ \hline 7\,111\,466\,444 \end{array}$$

La sustracción es la operación inversa de la adición.

Para adicionar y sustraer se colocan ordenadamente los números de modo que las unidades, decenas, centenas, … queden una debajo de la otra, y se van realizando las operaciones comenzando por la derecha.

Multiplicación y división

$$\begin{array}{r} 246 \cdot 72 \\ 1722 \\ \quad 492 \\ \hline 17\,712 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 17712 & 246 \\ \underline{1722} & 72 \\ 492 & \\ \underline{492} & \\ 0 & \end{array}$$

La división es la operación inversa de la multiplicación.

Para multiplicar (dividir) se van calculando los productos (cocientes) parciales.

En la multiplicación se adicionan los productos parciales. En la división se sustrae de cada dividendo parcial, el producto del cociente parcial por el divisor.

Potenciación y radicación

$9^4 = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 6\,561$

La potenciación es una multiplicación de factores iguales.

$\sqrt{36} = 6$, porque $6 \cdot 6 = 36$

La radicación es la operación que consiste en obtener la raíz de una cifra o un enunciado.

Orden de las operaciones

$$\begin{aligned} &(5-3)^2 \cdot 2 - \sqrt{16} : 2 \\ &= 2^2 \cdot 2 - 4 : 2 \\ &= 4 \cdot 2 - 2 \\ &= 8 - 2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Las operaciones se realizan en el siguiente orden:

- Operaciones dentro del paréntesis.
- Potenciación y radicación en el orden en que aparezcan.
- Multiplicaciones y divisiones en el orden en que aparezcan.
- Adiciones y sustracciones en el orden en que aparezcan.

Reglas de divisibilidad	
Grupo 1 20, 300, 5000, 48, 655, 288 *Grupo 2* 2 456 835 2 + 4 + 5 + 6 + 8 + 3 + 5 = 33 2 456 73 2 + 4 + 5 + 6 + 7 + 3 = 27 *Grupo 3* 42 4 + 2 = 6	Las reglas de divisibilidad quedarán agrupadas de la siguiente manera: Grupo 1: atendiendo a sus últimas cifras básicas (2; 4; 5; 8; 10 y sus potencias). Grupo 2: según la suma de sus cifras básicas (3 y 9). Grupo 3: cumplen con las condiciones de los dos grupos anteriores, según su última cifra básica y según la suma de sus cifras básicas (6).
Números primos y compuestos Primos: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31… Compuestos: 4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15…	Un número es primo si es mayor que uno y solo sí es divisible por 1 y por el mismo. Todos los números mayores que 1 que no son primos son compuestos.

Mínimo común múltiplo y máximo común divisor de dos o más números	
Procedimiento para determinar el mcm Se descomponen en factores primos los números dados. Se toman todos los *factores comunes y no comunes* con su *mayor* exponente. Se multiplican los factores anteriores y el producto obtenido es el mcm.	Procedimiento para determinar el mcd Se descomponen en factores primos los números dados. Se toman solo los *factores comunes* con su *menor* exponente. Se multiplican los factores anteriores y el producto obtenido es el mcd.

Ejercicios del epígrafe 1.6

1. Marca con una (X) la variante que completa correctamente la expresión: el numeral de 492 123 800 000 se escribe

___ cuatrocientos noventa y dos millones ochocientos mil.
___ cuatrocientos noventa y dos mil veintitrés ochocientos millones.
___ cuatrocientos noventa y dos mil ciento veintitrés millones ochocientos mil.
___ cuatrocientos noventa y dos millones cientos veintitrés millones ochenta mil.

2. Escribe el número cinco mil millones ochocientos noventa y cuatro mil.

3. Escribe los números siguientes como suma de múltiplos de potencias de 10:

a) 203 841 b) 5 342 608 c) 23 456 700 567

3.1 Ubícalos en una tabla de posición.

4. Escribe un número de 8 lugares que cumpla con las condiciones siguientes:

a) Tiene 74 unidades de millón.
b) En el lugar de las decenas de millar, el sucesor del número 3.
c) En el lugar de las unidades de millar, el triplo del número 2.
d) En las unidades, el antecesor del número 7.
e) Completa los restantes lugares con la cifra 0.

4.1 Escribe cómo se lee el número que formaste.

4.2 Coloca en la tabla de posición el antecesor del número que formaste.

5. Compara los siguientes números, recuerda utilizar el signo correcto.

a) 384 718 y 384 716

b) 8 342 500 y 8 432 500

c) 9 345 182 y 9 345 182

6. ¿Qué operación deberías realizar para encontrar el término que sigue en la sucesión? Marca con una (X) la respuesta correcta.

587, 1 000, 1 413, 1 826, _____.

a) ___ Restar 413. b) ___ Sumar 413.

c) ___ Sumar 513. d) ___ Sumar 513.

e) ___ Los datos que se ofrecen no son suficientes.

7. Marca con una (X) el resultado correcto. Al calcular $A + (B - C)$ se obtiene:

a) ___ 914 999 b) ___ 1 014 999

c) ___ 1 099 914 d) ___ 1 014 997

Si se sabe que:

A: es el menor número de 6 cifras.

B: es el sucesor de 999 998.

C: 85 unidades de millar.

8. Determina el valor de la variable.

a) $(x+9) : 5 = 3$ b) $4 . (x - 2) = 12$ c) $7 . c + 64 = 92$

d) $c + 381 \cdot 393$ e) $t - 23 > 16$ f) $10\ q + 715 \leq 755$

9. Determina el número que satisface la siguiente ecuación. Comprueba si el resultado es correcto.

$x - 5\ 641\ 079 = 479\ 605$

10. Un ómnibus sale cada 4 días; otro cada 5 y otro, cada 6 días de una ciudad *A* para una ciudad *B.* ¿Cada cuánto tiempo partirán los tres de la ciudad el mismo día?

11. Tres llaves de un tanque vierten respectivamente 20 L, 30 L y 50 L por minuto. Si cualquiera de ellas puede llenarlo en un número exacto de minutos, ¿cuál es la menor capacidad que puede tener el tanque?

12. Dos tanques de agua presentan salideros. El tanque *A* deja escapar 15 L de agua por cada hora y el tanque *B* derrama 36 L de agua en una hora. ¿Cuántos litros de agua se derrochan por los dos tanques juntos en una hora? ¿Qué harías para evitar ese derroche?

13. Marca con una (X) los incisos que indican la presencia de la división como operación matemática.

___ La unión de dos conjuntos.

___ El cociente es igual al dividendo y al divisor.

___ Le dio la mitad a su hermano.

___ Se repartieron a partes iguales los caramelos.

14. Lee detenidamente las proposiciones que se hacen en cada inciso. Coloca una (V) en los incisos que indiquen una proposición verdadera y una (F) en los que indiquen una falsa.

14.1 Justifica tu respuesta en el caso de las falsas.

14.2 Convierte las falsas en verdaderas.

___ En la inecuación $4p + 5 \leq 45$, los únicos valores que pueden asignarse a p son todos los naturales menores que 10.

___ El cociente del mayor número natural de tres lugares con el antecesor de 4 es mayor que la suma del producto del sucesor de 29 y 10 con 32.

___ Un futbolista que no ha logrado una óptima forma física debido a algunas ausencias a los entrenamientos no ha podido jugar los 90 min reglamentarios en todos los partidos de su equipo. De los 18 juegos en que ha participado, en 10 ha jugado los 90 min y en 8, solo 45 min. Entonces podemos afirmar que

en estos 18 juegos el jugador juega como promedio 70 min por partido.

15. Calcula:

a) $(456 - 301) \cdot (10 + 8^2)$ b) $277 + 3^3 - 105 + 21 \cdot \sqrt{49}$

c) $(95 : 19)^2 + 117 \cdot 201$ d) $3\,040 - (14 \cdot 5 : 10)^2 + 129$

16. Escribe el conjunto de todos los números entre 20 y 40 que sean divisibles por 2; 3 y 4 a la vez.

17. Forma el conjunto de todos los números entre 99 y 501 que sean divisibles por 5 y 100 a la vez.

18. Escribe el mayor número de cinco cifras cuyo antecesor sea divisible por:

a) 4 b) 6 c) 8 d) 9

19. Los dígitos 0, 3, 5 y 4 pueden combinarse de varias maneras para obtener números de cuatro cifras diferentes. Escribe los que sean divisibles por:

a) 2 b) 3 c) 6

20. *Un niño tiene una cantidad impar de libros. Si hace grupos de 3, de 5 o de 9 libros siempre le sobra 1 libro. Marca con una (X) la variante que completa correctamente la expresión: el niño cuenta con

a) _____ 135 libros b) _____ 10 libros

c) _____ 91 libros d) _____ 46 libros

21. Tres luminarias LED se encienden de forma intermitente a intervalos de18 s, 21 s y 28 s, respectivamente. Si todas ellas se encienden juntas al comenzar, encuentra cuántas veces más se encienden juntas en una hora.

22. Cecilia va a ver a su abuela todos los viernes; Zenaida, cada 10 días y Rafael, cada 20 días. Si los tres fueron juntos un

viernes del mes de enero, ¿cuántas veces más irán juntos a ver a su abuela en ese mismo año?

23. ¿Hay algún número mayor que 1 200 y menor que 1 300 que sea múltiplo común de 20; 25 y 30?

24. Entre todos los números que contienen a 150; 200 y 250 como factores, ¿cuáles son los tres más pequeños?

25. Se tienen 3 varillas de 60 cm, 80 cm y 100 cm de longitud respectivamente. Se quieren dividir en pedazos de la misma longitud sin que sobre ni falte nada. ¿Cuál es la mayor longitud posible para cada pedazo?

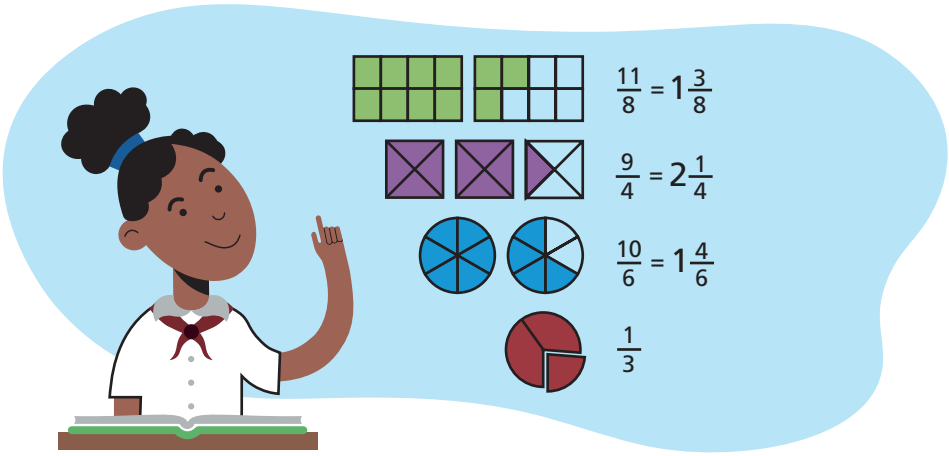
26. Un vendedor desea poner en cajas 12 028 manzanas y 12 772 naranjas, de modo que cada caja contenga el mayor número posible de frutas de un solo tipo y la misma cantidad, sin que sobre ninguna. Halla el número de frutas de cada caja y la cantidad de cajas necesarias para envasarlas.

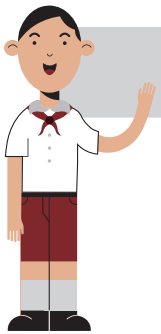
27. Una persona camina un número exacto de pasos andando 650 cm, 800 cm y 1 000 cm. Si la persona mantiene el mismo paso, ¿cuál es la mayor longitud posible de cada paso?

28. Se tienen tres cajas que contienen 1 600 lb, 2 000 lb, 3 392 lb de jabón respectivamente. El jabón de cada caja está dividido en bloques del mismo peso y el mayor posible. ¿Cuánto pesa cada bloque y cuántos bloques hay en cada caja?

UNIDAD 2

Fracciones numéricas. Cálculo con fracciones





¿Qué voy a aprender?

- Obtención de fracciones equivalentes por ampliación y simplificación de fracciones, reducción de fracciones a un común denominador y su comparación y ordenamiento.
- Fracciones decimales, su notación decimal, conceptos: décimas, centésimas y milésimas.
- Ampliación del sistema de numeración decimal a los órdenes decimales.
- Relación entre los órdenes decimales, comparación y ordenamiento de las expresiones decimales.
- Cálculo con fracciones comunes y expresiones decimales.

¿Para qué me servirá?

Con los nuevos conocimientos podrás resolver ejercicios y problemas variados de la escuela y del quehacer cotidiano.

¿Qué debo saber?

- Fracciones, su significado y representación tanto como partes de una unidad, como parte de un conjunto, fracciones propias e impropias y escritura de estas últimas como número mixto.
- Comparación, ordenamiento y cálculo con las cuatro operaciones básicas con números naturales.

2.1 Repaso

En la práctica predominan las situaciones en que alguna que otra vez compartes tu merienda y tus golosinas con tus compañeros, teniendo presente hacerlo de la forma más equitativa posible y para lograrlo aplicas tus conocimientos acerca de las fracciones, porque ya conoces que fraccionar significa en la práctica dividir, descomponer, separar en partes iguales algo considerado como una unidad o un todo.

Para continuar conociendo las fracciones te propongo hacer un breve recorrido por lo que ya has aprendido sobre ellas.

Saber más

Los griegos marcaban el numerador de una fracción con una tilde y el denominador con dos.

Los egipcios (fig. 2.1), la escritura de fracciones la expresaban con un óvalo, que significaba parte o partido,

y debajo, o al lado, ponían el denominador; el numerador no se ponía por ser siempre 1.

Fig. 2.1

Recuerda que...

Cuando nos referimos a una o varias partes iguales de una unidad o un todo, estamos en presencia de una fracción. Las fracciones se representa en la forma *a*/*b* donde:

Fracción → $\frac{a}{b}$ → **numerador** → **denominador** → Se lee: *a* sobre *b*

- **numerador**: indica la cantidad de partes iguales que componen la fracción
- **denominador**: indica en cuántas partes iguales se divide la unidad

La fracción $\frac{a}{b}$ la podemos considerar en general como la división $a : b$, luego el denominador b no puede ser cero, es decir, $b \neq 0$, pues eso significa que del todo no se obtienen partes iguales.

Saber más

Las fracciones han tenido varios nombres, se llamaron rotos y después quebrados, este último nombre todavía es utilizado.

Algo de historia

La barra horizontal de las fracciones (de origen árabe) ya era usada por Fibonacci en el siglo XIII, aunque no se generalizó hasta el siglo XVI. Es desde luego, la forma más satisfactoria, pues no solo indica la operación, sino que en el caso de que sean varias las operaciones que se van a realizar establece el orden de prioridad entre ellas (digamos que, además de signo, es paréntesis).

Las fracciones cuyos *denominadores* son *iguales* se llaman *fracciones de igual denominador* y las fracciones cuyos *denominadores* son de*siguales* se llaman *fracciones de diferentes denominadores.*

Las fracciones las podemos representar como se muestra en la figura 2.2.

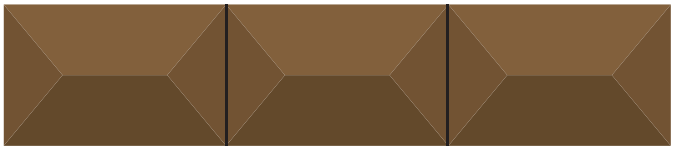


Fig. 2.2

Cada una de las partes de la barra de chocolate representa $\frac{1}{3}$, si reúno dos de esas partes de la barra de chocolate, a la parte de la barra que así se obtiene se le llama dos tercios y se representa con la fracción numérica: $\frac{2}{3}$ la que se puede leer *dos tercios o dos sobre tres*.

La fracción y el conjunto

En cuarto grado aprendiste a encontrar la solución de muchas interrogantes teniendo en cuenta la práctica y el análisis de la representación gráfica de fracciones como parte de un conjunto, te invito a recordar.

Ejemplos

1. Las tres cuartas partes de los 24 m de una tela son utilizadas para confeccionar manteles. ¿Cuántos metros de tela se utilizan para la confección de los manteles?

Tienes que conocer la fracción y la cantidad de elementos.

Podemos plantear: halla $\frac{3}{4}$ de 24 m.

$\frac{3}{4}$ de 24 m 6 m · 3 = 18 m.

Se reparte 24 en 4 partes iguales (24 : 4 = 6) y 6m · 3 = 18 m.

Luego $\frac{3}{4}$ de 24 m es igual a 18 m.

R/ En la confección de manteles se utilizan 18 m de tela.

2. De los 9 atletas que fueron a la competencia de lucha, $\frac{2}{3}$ ganaron la competencia. ¿Cuántos atletas ganaron competencia?

$\frac{1}{3}$ de 9 son 3	9 : 3 = 3
$\frac{2}{3}$ de 9 son 6	3 · 2 = 6

Luego $\frac{2}{3}$ de 9 es igual a 6.

R/ Ganaron la competencia 6 atletas.

También puedes hallar la fracción que representa a un número que es una parte del total. ¿Cómo calcular *esa fracción?*

3. Javier tiene 6 bolas, de ellas 2 son rojas y las 4 restantes son de diferentes colores.

¿Cuál es la fracción que representa a las bolas rojas?

Cada elemento es $\frac{1}{6}$ del conjunto. Si tomamos 2 elementos de este conjunto así dividido, hemos repetido 2 veces un sexto. Se cumple entonces que: 2 es $\frac{2}{6}$ de 6.

Reflexiona un instante

¿Cuál es la fracción que representa las 4 bolas restantes?

4. Conocida la fracción y el número que representa una parte del total, ¿cómo calcular el total?

Carlos sacó 6 lápices de una caja, lo que representaba $\frac{3}{5}$ del total de lápices que había en ella. ¿Cuántos lápices había en la caja? Se desconoce el total de elementos del conjunto, pero sabemos que: 6 lápices representan $\frac{3}{5}$ del conjunto (fig. 2.3), luego $\frac{1}{5}$ del conjunto son 2 lápices:

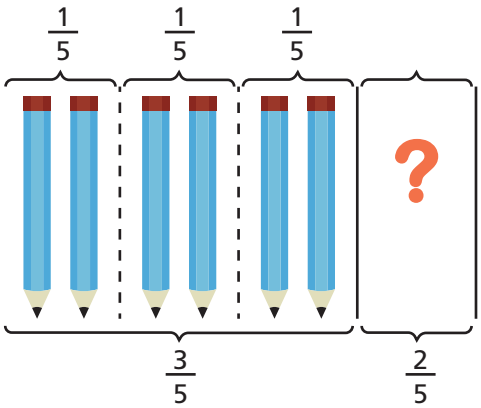


Fig. 2.3

El conjunto completo tiene 5 quintos $\left(\frac{5}{5}\right)$ (fig. 2.4) y como cada uno tiene 2 lápices, el conjunto completo tiene: $2 \cdot 5 = 10$ En la caja había 10 lápices.

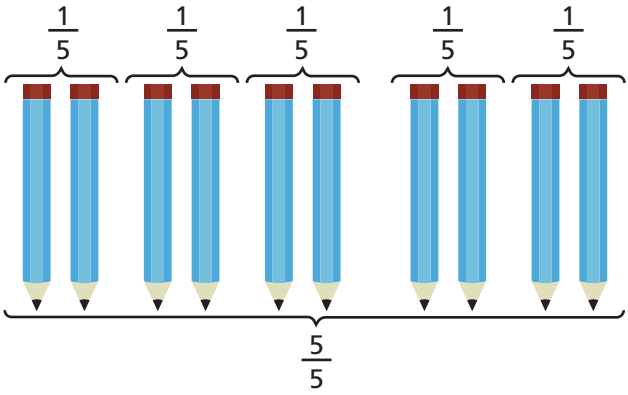


Fig. 2.4

Fracciones propias e impropias. Número mixto

Recuerda que...

Una fracción cuyo numerador es múltiplo del denominador se puede *representar mediante un número natural:*

$$\frac{6}{6}=1 \quad \frac{15}{3}=5.$$

Las fracciones cuyo numerador es menor que el denominador se llaman *fracciones propias:*

$$\frac{1}{3};\frac{9}{10};\frac{13}{21};\frac{45}{67}.$$

Las fracciones cuyo numerador es mayor o igual que el denominador se llaman *fracciones impropias:*

$$\frac{5}{3};\frac{7}{6};\frac{9}{9};\frac{35}{12};\frac{132}{132}.$$

Ejemplo

Observa la representación que aparece en la figura 2.5.

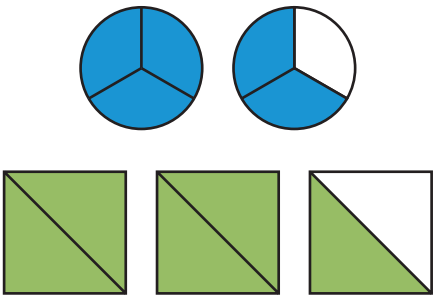


Fig. 2.5

$\frac{5}{3}$ es igual a una unidad y $\frac{2}{3}$ más de otra unidad. También se puede representar como $1\frac{2}{3}$.

$\frac{5}{2}$ es igual a dos unidades y $\frac{1}{2}$ más de otra unidad. También se puede representar como $2\frac{1}{2}$.

Las fracciones impropias se pueden escribir en la práctica como números mixtos, o como números naturales si el numerador es múltiplo del denominador.

Para leer un número mixto primero leemos el número natural y después la fracción: $7\frac{1}{3}$ se lee: siete y un tercio.

Saber hacer

Convertimos las fracciones impropias en números mixtos.

1. Divides el numerador entre el denominador.

$$\begin{array}{r|l} 13 & 4 \\ \hline 12 & 3 \\ \hline 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{divisor} \\ \rightarrow \text{cociente} \\ \rightarrow \text{resto} \end{array}$$

2. Con el cociente, el resto y el divisor se escribe el número mixto.

$$3\frac{1}{4} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{resto} \\ \rightarrow \text{divisor} \end{array}$$

cociente

Saber hacer

Los números mixtos se escriben como fracciones impropias.

Se multiplica el número natural por el denominador y al producto se le añade el numerador. Se mantiene el denominador de la fracción.

$$3\frac{1}{4} = \frac{4 \cdot 3 + 1}{4} = \frac{13}{4}$$

Comparamos y ordenamos fracciones

¿Se podrán comparar las fracciones $\frac{4}{9}$ y $\frac{7}{9}$? ¿Cómo lo harías?

Reflexiona un instante

Representemos las fracciones en el rayo numérico (fig. 2.6).

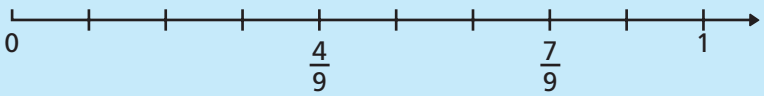


Fig. 2.6

Comparemos ahora las fracciones con igual denominador $\frac{3}{7}$ y $\frac{5}{7}$ (fig. 2.7).

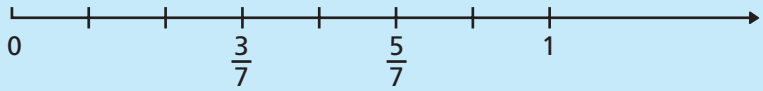


Fig. 2.7

La fracción $\frac{4}{9}$ está más a la izquierda en el rayo numérico; es la fracción que está más cerca de cero.

En el segundo caso la fracción $\frac{3}{7}$ está más a la izquierda en el rayo numérico; es la fracción que está más cerca del cero.

Observa que las dos fracciones comparadas en los dos casos tienen el mismo denominador, entonces cuando las fracciones tienen igual denominador, ¿cuál es la mayor?

Recuerda que...

De dos fracciones de igual denominador es mayor la que tiene mayor numerador.

Reflexiona un instante

¿Cuál de las siguientes fracciones es mayor?

$\frac{3}{5}$ o $\frac{3}{8}$

Observa los numeradores de las dos fracciones, ¿son iguales o diferentes?

Observa ahora los denominadores de las dos fracciones, ¿son iguales o diferentes?

Los denominadores son diferentes (las partes iguales en que se divide la unidad) y los numeradores son iguales (las partes iguales que componen la fracción).

Vamos a representar las fracciones (fig. 2.8).

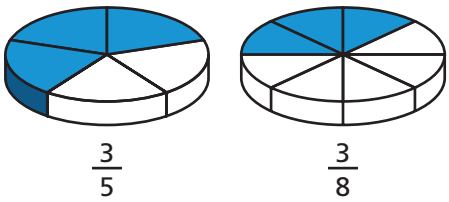


Fig. 2.8

Representemos en el rayo numérico las fracciones $\frac{3}{5}$ y $\frac{3}{8}$ (fig. 2.9).

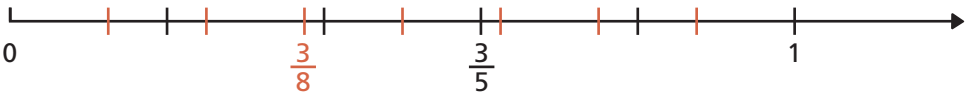


Fig. 2.9

La fracción $\frac{3}{8}$ está más a la izquierda en el rayo numérico, está más cerca de cero.

Entonces: $\frac{3}{8} < \frac{3}{5}$

Comparemos otras fracciones de igual numerador (fig. 2.10).

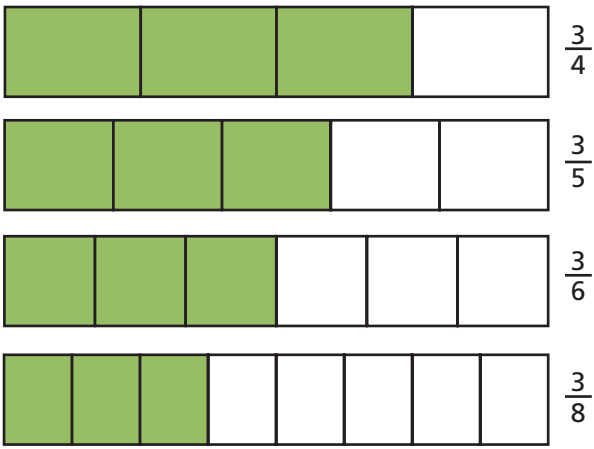


Fig. 2.10

Después de observar y comparar las fracciones representadas.

¿A qué conclusión puedes llegar?

De dos fracciones de igual numerador es mayor la que tiene menor denominador.

Mientras mayor es el número de partes en que dividimos la unidad, menor es el valor de cada una de las partes o unidades fraccionarias.

Comparemos con la unidad (fig. 2.11).

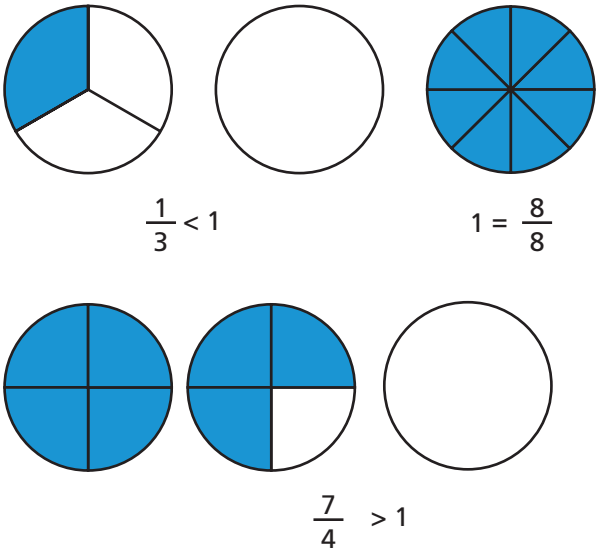


Fig. 2.11

Recuerda que...

Una fracción propia siempre es menor que 1 y que cualquier otra fracción impropia.

Toda fracción impropia distinta de 1, es mayor que 1.

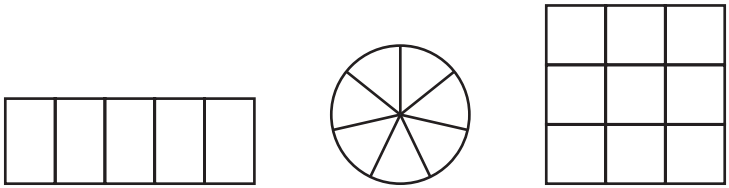
Ejercicios del epígrafe 2.1

1. Completa la tabla siguiente (fig. 2.12).

Figura geométrica	Total de partes	Partes coloreadas	Fracción	Numerador	Denominador

Fig. 2.12

2. Colorea la parte señalada (fig. 2.13).



$\frac{2}{5}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{1}{9}$

Fig. 2.13

3. Divide la figura 2.14 en tercios.

4. ¿Cuántos tercios se necesitan para formar una unidad?

5. ¿Qué parte es un tercio de una unidad?

6. Tienes un medio. ¿Cuántos medios te faltan para tener una unidad?

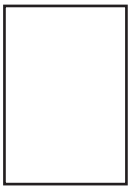


Fig. 2.14

7. Representa gráficamente:

a) Un quinto de un rectángulo.

b) Dos cuartos de un cuadrado.

c) Dos medios de un círculo.

d) Un noveno de un segmento.

8. Traza un segmento $\overline{MN}$ de 12 cm.

a) Representa en él las fracciones siguientes:

$\frac{1}{2}; \frac{3}{6}; \frac{3}{4}; \frac{5}{12}; \frac{1}{6}$.

b) Determina a qué fracción corresponde un punto situado sobre el segmento a 3 cm de *N*. Sitúala.

9. Representa en un rayo numérico (segmento unidad 4 cm) las fracciones:

$\frac{1}{4}; \frac{3}{8}; \frac{1}{2}; \frac{0}{4}; \frac{5}{8}; \frac{4}{4}$.

a) Traza un punto a 3 cm del comienzo del rayo. ¿A qué fracción corresponde? Sitúala.

10. La mamá de Eduardo hizo un pastel.

a) ¿En cuántas partes iguales debe dividirlo para obtener sextos?

b) Si coloca en un plato 5 de las partes iguales en que dividió el pastel, ¿qué fracción del pastel colocó en el plato?

11. Dibuja 12 círculos Colorea la fracción $\frac{1}{3}$ de los círculos. ¿Cuántos círculos coloreaste?

12. Dibuja 15 triángulos. Colorea $\frac{3}{5}$ de los triángulos. ¿Cuántos triángulos coloreaste?

13. Halla:

a) $\frac{1}{4}$ de 36 kg

b) $\frac{1}{3}$ de 27 m

c) $\frac{5}{12}$ de 24 lápices

d) $\frac{3}{7}$ de $ 35

e) $\frac{3}{8}$ de 24 h

14. ¿Cuántos centímetros hay en:

a) $\frac{2}{5}$ m b) $\frac{1}{4}$ m c) $\frac{3}{10}$ m d) $\frac{5}{20}$ m?

15. ¿Cuántos centímetros hay en:

a) $\frac{1}{2}$ m b) $\frac{1}{5}$ m c) $\frac{1}{10}$ m d) $\frac{4}{5}$ m?

16. ¿Cuántos minutos hay en:

a) $\frac{2}{5}$ de 1 h b) $\frac{3}{20}$ de 3 h c) $\frac{5}{10}$ de 2 h?

17. Si tengo un conjunto de 15 bolas, ¿qué tengo que hacer para obtener tercios?, ¿y para obtener cuartos?

18. Una casa de familia consumió en el mes de enero 150 kWh, pero al adoptar medidas de ahorro, durante el mes de febrero el consumo disminuyó en $\frac{2}{5}$; entonces el consumo de energía en este último mes fue de: _____.

19. Una tabla mide 96 cm. ¿Cuánto mide $\frac{1}{6}$ de la tabla?

20. La familia de Elena quiere comprar una mochila que cuesta $ 240, para regalársela en su cumpleaños. Su papá pagó la mitad, su mamá pagó $\frac{1}{4}$ y sus hermanos Laura y Daniel pagaron $\frac{1}{8}$ cada uno. Halla cuánto pagó cada uno de sus familiares.

21. ¿Qué parte es:

a) 1 de 5 b) 5 de 7 c) 7 de 9 d) 8 de 11?

22. La figura 2.15 representa un conjunto de 12 bolas.

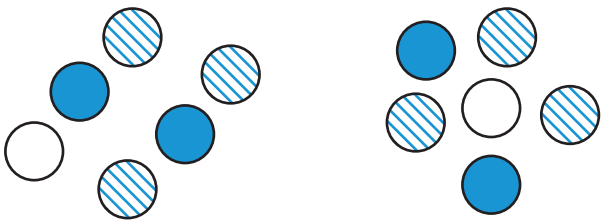


Fig. 2.15

a) ¿Qué parte del conjunto de bolas están rayadas?

b) ¿Qué parte del conjunto de bolas son blancas?

c) ¿Qué parte del conjunto de bolas son oscuras?

23. Si desde La Habana a Ceiba Mocha hay 66 km y ya se han recorrido 23 km, ¿qué parte queda por recorrer?

24. Durante el día tenemos 6 turnos de clases. Ya dimos el primero, que fue el de matemática. ¿Qué parte de los turnos ya se han dado?

a) Si ya diste todos los turnos de clases del día, con que fracción puedes representar esta situación.

25. ¿Qué parte es tu edad de la de tu papá?

26. ¿Qué parte es una moneda de 5 centavos de una de $ 1?

27. Halla de qué número es:

a) 15 las $\frac{3}{4}$ partes

b) 21 las $\frac{7}{9}$ partes

c) 18 las $\frac{9}{10}$ partes

d) 36 las $\frac{6}{7}$ partes

28. Llena los espacios en blanco:

a) $\frac{2}{5}$ de _____ es igual a 12.

b) $\frac{5}{8}$ de _____ es igual a 20.

c) $\frac{3}{4}$ de _____ es igual a 27.

d) $\frac{1}{6}$ de _____ es igual a 30.

29. Isabel ha colocado 38 piezas de su rompecabezas. Si las piezas colocadas representan las $\frac{2}{5}$ partes del total de piezas del rompecabezas, ¿cuántas piezas tiene el rompecabezas de Isabel?

30. Rosa ha leído 90 de las páginas de su libro. Esto representa $\frac{3}{8}$ partes de las páginas del libro. ¿Cuántas páginas tiene el libro de Rosa?

31. *Arturo quiere comprar una gorra deportiva. Para ello su papá le dio $ 20 que representa $\frac{1}{4}$ del precio de la gorra. Del resto que necesita para comprarla ya ha ahorrado $\frac{2}{3}$ del dinero. ¿Cuánto dinero le falta para comprar la gorra deportiva?

32. *Del destacamento de Rubén aprobaron en el concurso de matemática 9 estudiantes. Esto representa $\frac{3}{10}$ de los que se presentaron y ese número de estudiantes equivale a $\frac{5}{6}$ de los estudiantes matriculados.

a) ¿Cuántos estudiantes se presentaron al concurso?

b) ¿Qué matrícula tiene el destacamento?

33. Escribe la fracción que representa la parte sombreada en cada inciso (fig. 2.16). Clasifícala en propia o impropia. Las impropias escríbelas como número mixto.

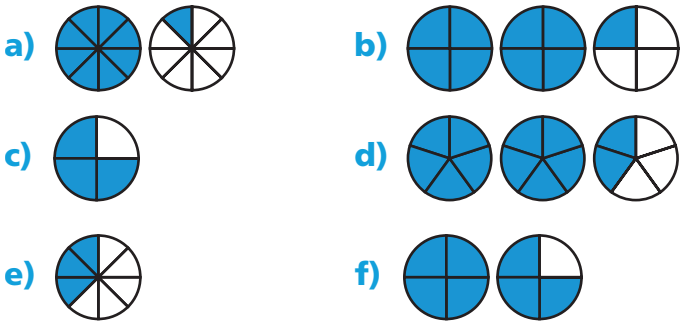


Fig. 2.16

34. *Escribe la fracción $\frac{a}{b}$ que cumpla las condiciones siguientes:

a)

$a + b$	$a \cdot b$	$\frac{a}{b}(a < b)$	$\frac{a}{b}(a > b)$
9	14		
14	48		
15	54		
14	40		
11	24		

b)

$a + b$	$a \cdot b$	$\frac{a}{b}(a < b)$	$\frac{a}{b}(a < b)$
7	12		
9	20		
13	30		
17	72		
20	75		

35. Expresa como número mixto.

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{25}{23}$ c) $\frac{13}{6}$ d) $\frac{118}{50}$

e) $\frac{33}{24}$ f) $\frac{45}{21}$ g) $\frac{13}{9}$ h) $\frac{113}{45}$

36. Convierte en fracciones impropias.

a) $4\frac{1}{3}$ b) $2\frac{1}{23}$ c) $4\frac{4}{7}$ d) $10\frac{1}{10}$

e) $7\frac{1}{2}$ f) $15\frac{3}{5}$ g) $16\frac{4}{9}$ h) $4\frac{1}{6}$

37. Enlaza cada fracción con el número mixto correspondiente.

$\frac{15}{7}$ $2\frac{3}{7}$

$\frac{37}{9}$ $3\frac{2}{9}$

$\frac{23}{7}$ $4\frac{1}{9}$

$\frac{17}{7}$ $2\frac{1}{7}$

$\frac{29}{9}$ $3\frac{2}{7}$

$3\frac{1}{7}$

38. Ordena las fracciones de mayor a menor. Representa las fracciones del inciso a) en el rayo numérico (segmento 5 cm).

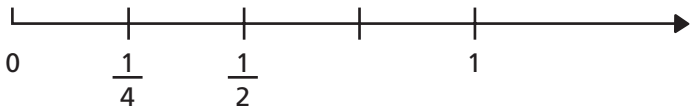
a) $\frac{11}{25}; \frac{21}{25}; \frac{9}{25}; \frac{25}{25}; \frac{1}{25}$.

b) $\frac{21}{43}; \frac{18}{43}; \frac{23}{43}; \frac{32}{43}; \frac{81}{43}$.

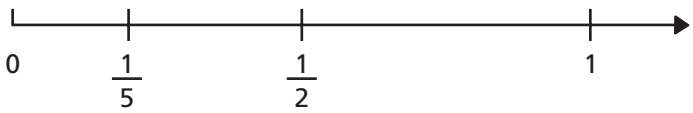
c) $\frac{23}{37}; \frac{17}{37}; \frac{32}{37}; \frac{61}{37}; \frac{4}{37}$.

39. Observa las ilustraciones (fig. 2.17) y determina cuál fracción es mayor:

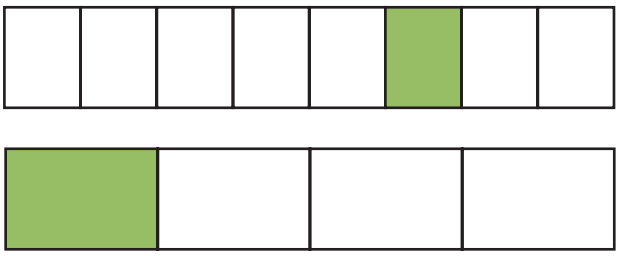
a)



b)

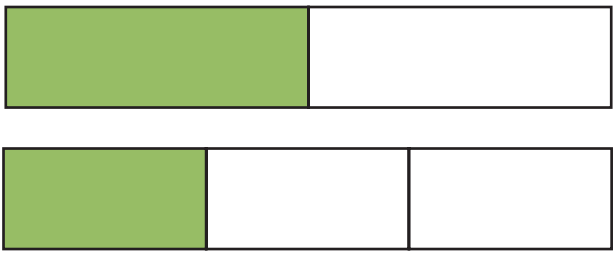


c)



$\frac{1}{8}$ ó $\frac{1}{4}$

d)



$\frac{1}{2}$ ó $\frac{1}{3}$

Fig. 2.17

40. Sin hacer representaciones, circula la fracción menor.

a) $\frac{1}{3}$ o $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{15}$ o $\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{18}$ o $\frac{1}{24}$ d) $\frac{1}{10}$ o $\frac{1}{40}$

e) $\frac{1}{7}$ o $\frac{1}{9}$ f) $\frac{1}{8}$ o $\frac{1}{7}$ g) $\frac{1}{9}$ o $\frac{1}{4}$ h) $\frac{1}{12}$ o $\frac{1}{21}$

41. Compara. Utiliza el signo de relaciones que convenga (=, <, >).

a) $\frac{2}{7}$ $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{9}$ c) $\frac{5}{3}$ 1 d) $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{50}$

e) $\frac{4}{15}$ $\frac{4}{12}$ f) 1 $\frac{1}{2}$ g) $\frac{4}{8}$ $\frac{4}{4}$ h) $\frac{10}{10}$ 1

42. Obtén una nueva fracción multiplicando por 3 solamente el denominador de la fracción $\frac{2}{5}$ ¿Cuál de las dos fracciones es mayor? ¿Por qué?

43. Compara:

$\frac{1}{9}$ de 72 kg con $\frac{1}{8}$ de 48 kg.

$\frac{4}{13}$ de 78 m con $\frac{4}{11}$ de 66 m.

$\frac{1}{9}$ de $ 36 con $\frac{4}{9}$ de $ 18.

$\frac{3}{10}$ de 30 m con $\frac{1}{3}$ de 27 m.

2.2 Fracciones equivalentes

Recuerda que...

En cuarto grado aprendiste que las fracciones que representan la misma parte de la unidad se llaman *fracciones equivalentes.*

Saber más

Los griegos y los romanos usaron también las fracciones unitarias, cuya utilización persistió hasta la época medieval.

Observa las fracciones que aparecen representadas en la figura 2.18.

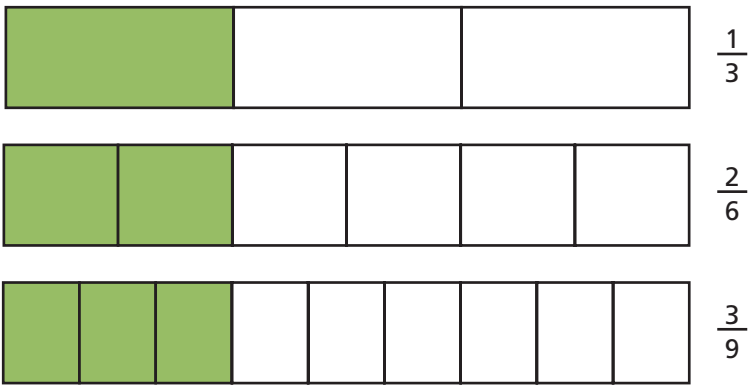


Fig. 2.18

Si representamos estas fracciones en el rayo numérico (fig. 2.19) observarás que les *corresponde el mismo punto*.

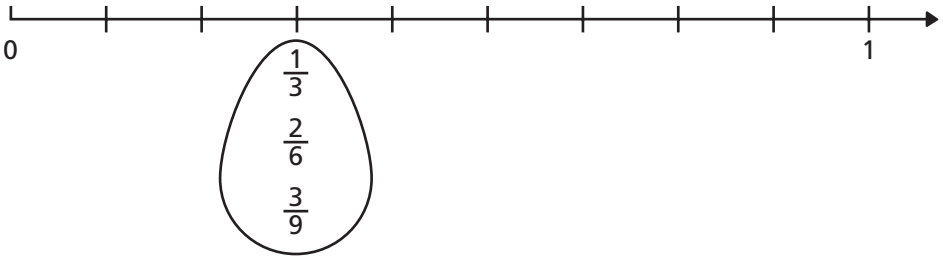


Fig. 2.19

Productos cruzados

Te invito a multiplicar los términos de estas fracciones en cruz, como se ilustra a continuación:

$\frac{1}{3} \times \frac{2}{6}$ $\qquad$ $\frac{2}{6} \times \frac{3}{9}$

Compara los resultados obtenidos y busca la relación entre tus reflexiones y los planteamientos siguientes:

- Si multiplicas en cruz los términos de dos fracciones equivalentes obtienes el mismo producto; en las fracciones equivalentes los productos cruzados son iguales.
- Análogamente se cumple: si los productos cruzados de dos fracciones son iguales, dichas fracciones son equivalentes.

Recuerda que...

Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes cuando se cumple que: $a \cdot d = b \cdot c$.

Ejemplo

$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$

Son equivalentes porque $1 \cdot 6 = 3 \cdot 2$

$\frac{1}{3} \neq \frac{3}{4}$

no son equivalentes porque $1 \cdot 4 \neq 3 \cdot 3$

Ya conoces que las fracciones $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{6}$ representan la misma parte de una unidad, son equivalentes.

Este criterio de los productos cruzados también te servirá para comparar fracciones cualesquiera.

Ejemplo

Sabes que $\frac{3}{7} < \frac{5}{7}$ porque $3 < 5$.

Observa que para estas fracciones también se cumple: $3 \cdot 7 < 7 \cdot 5$

Si $\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$, se cumple también que $5 \cdot 7 > 7 \cdot 3$.

Recuerda que...

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ siempre que $a \cdot d = b \cdot c$

Mediante este análisis podemos reducir la comparación de fracciones a la comparación de los números naturales resultantes de hallar los productos cruzados de sus términos.

Ejemplo

Compara y fundamenta:

a) $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$ b) $\frac{7}{5}$ y $\frac{5}{9}$ c) $\frac{3}{4}$ y $\frac{9}{12}$

Hallas los productos cruzados de los términos y comparas:

En la mente: $2 \cdot 5 < 5 \cdot 3$	entonces: $\frac{2}{5} < \frac{3}{5}$	Fundamentas. Porque: $2 \cdot 5 < 5 \cdot 3$
En la mente: $7 \cdot 9 > 5 \cdot 5$	entonces: $\frac{7}{5} > \frac{5}{9}$	Fundamentas. Porque: $7 \cdot 9 > 5 \cdot 5$
En la mente: $3 \cdot 12 = 4 \cdot 9$	entonces: $\frac{3}{4} < \frac{9}{12}$	Fundamentas. Porque: $3 \cdot 12 = 4 \cdot 9$

Recuerda que...

Siempre debes multiplicar primero $a \cdot d$ y después $b \cdot c$.

Ampliación de fracciones

Reflexiona un instante

¿Cómo se puede obtener $\frac{2}{6}$ a partir de $\frac{1}{3}$?

Si te fijas con detenimiento basta multiplicar el numerador y el denominador de la fracción $\frac{1}{3}$ por 2.

$\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$.

Entonces decimos que la fracción $\frac{1}{3}$ se ha ampliado por 2.

Se amplía una fracción $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$) mediante un número natural n ($n > 1$); multiplicando el numerador y el denominador de la fracción $\frac{a}{b}$ por el número natural $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$

Saber hacer

Amplía $\frac{4}{7}$ a una fracción de denominador 35.

Primero debes pensar por qué número vas a ampliar la fracción, para ello divides el denominador (35) entre el denominador dado (7) y luego multiplicas el numerador por el número de ampliación.

En este caso 5.

$35 : 7 = 5$

$4 \cdot 5 = 20$

Luego: $\frac{4}{7} = \frac{20}{35}$

Simplificación de fracciones

Te proponemos analizar con tus compañeros de grupo, ¿cómo se puede obtener $\frac{2}{5}$ a partir de $\frac{12}{30}$?

Del ejemplo anterior sabes que para ampliar una fracción se multiplican el numerador y el denominador por un mismo número.

Luego para simplificar una fracción se divide el numerador y el denominador por un mismo número, en este caso 6.

Se obtiene la fracción $\frac{2}{5}$.

Cuando esto sucede se dice que se ha simplificado la fracción $\frac{12}{30}$.

Simplificar una fracción es hallar otra equivalente a la dada pero de términos menores.

Recuerda que...

Se simplifica una fracción $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$) mediante un número natural n ($n > 1$); dividiendo el numerador y el denominador de la fracción $\frac{a}{b}$ entre un divisor común n. $\frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n}$

Saber hacer

Para simplificar una fracción puedes utilizar, siempre que sea posible, las reglas de divisibilidad que conoces. Te convidamos a simplificar las fracciones siguientes aplicando las reglas de divisibilidad.

a) $\frac{10}{35}$ b) $\frac{18}{24}$ c) $\frac{11}{33}$

Comparte con tus compañeros los resultados obtenidos y debate, si es posible siempre obtener la fracción con el menor denominador común a las dos fracciones.

a) En este caso puedes ver rápidamente que tanto el 10 como el 35 son divisibles por 5 (pues terminan en 0 o en 5).

$$\frac{\cancel{10}}{\cancel{35}} = \frac{2}{7}$$

$\frac{2}{7}$ no puede simplificarse más, pues 2 y 7 no tienen otro divisor común distinto de 1.

b) $\frac{18}{24}$, en este caso, el 18 y el 24 son a la vez divisibles por 2 y por 3, luego puedes dividir por 2 y por 3 sucesivamente.

$$\frac{\cancel{18}}{\cancel{24}} = \frac{3}{4}$$

En la práctica hay otro número que divide a 18 y 24 a la vez y obtienes el mismo resultado en un solo paso, entonces puedes simplificar por 6 que es el mayor divisor común.

c) En este inciso, no puedes aplicar ninguna regla de divisibilidad, pero observa que 11 es divisor de 33, luego puedes simplificar por él.

$$\frac{\cancel{11}}{\cancel{33}} = \frac{1}{3}$$

Reducción de fracciones a un común denominador

En muchas ocasiones es conveniente escribir dos o más fracciones dadas, pero de modo que tengan *igual denominador.*

Ejemplo

$\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ tienen distinto denominador, pero sus equivalentes $\frac{3}{6}$ y $\frac{2}{6}$ tienen el mismo denominador. Claro que existen muchas más fracciones equivalentes a $\frac{1}{2}$ y a $\frac{1}{3}$ que tienen el mismo denominador.

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \frac{7}{14}, \frac{8}{16}, \frac{9}{18}, \ldots\right\}$$

$$\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15}, \frac{6}{18}, \ldots\right\}$$

Reflexiona un instante

Observa con detenimiento las parejas de fracciones con igual denominador equivalentes a $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ respectivamente, analiza:

¿Cómo se han obtenido?

¿Cuántos pares de fracciones con igual denominador equivalentes a una fracción dada se pueden obtener?

Comenta con tus compañeros y tu docente las opiniones y escribe todas las ideas, comprueba si se relacionan con el planteamiento siguiente:

Reducir fracciones a un común denominador es buscar fracciones equivalentes a ellas que tengan el mismo denominador.

En la práctica al reducir fracciones a un común denominador, se utiliza como denominador común el mínimo común múltiplo de los denominadores dados.

Saber más

Reduce a un común denominador los siguientes pares de fracciones.

a) $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{8}$

Halla el mínimo común múltiplo (mcm) de 4 y 8.

En este caso ampliamos la fracción $\frac{3}{4}$ a denominador 8.

$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ $\frac{6}{8}$ y $\frac{5}{8}$

b) $\frac{1}{6}$ y $\frac{2}{10}$

El mcm (6; 10) = 30

$$\frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 5}{6 \cdot 5} = \frac{5}{30}$$

$$\frac{2}{10} = \frac{2 \cdot 3}{10 \cdot 3} = \frac{6}{30}$$

$\frac{5}{30}$ y $\frac{6}{30}$

c) $\frac{4}{18}$ y $\frac{5}{9}$

En ocasiones podemos trabajar simplificando una de las fracciones.

$\frac{4}{18} = \frac{4:2}{18:2} = \frac{2}{9}$ $\frac{2}{9}$ y $\frac{5}{9}$

Recuerda que...

En la práctica para reducir fracciones a un común denominador:

1. Determinamos el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones dadas.

2. Ampliamos las fracciones al denominador hallado.

En ocasiones es conveniente simplificar previamente las fracciones dadas.

Reflexiona un instante

Una vez aprendido el procedimiento para reducir fracciones a un común denominador, ¿crees que existe otra vía que se puede emplear en la comparación de fracciones? ¿Por qué?

Debate con tus compañeros y tu docente esta interrogante.

Luego prueba comparar las fracciones siguientes reduciéndolas al común denominador.

Compara: $\frac{5}{6}$ *y* $\frac{3}{4}$

Ejercicios del epígrafe 2.2

1. Observa la siguiente tabla, analiza y di si son equivalentes las fracciones dadas.

a) $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{6}$ b) $\frac{2}{6}$ y $\frac{5}{12}$ c) $\frac{2}{3}$ y $\frac{8}{12}$ d) $\frac{10}{12}$ y $\frac{5}{6}$

Unidad											
$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{3}$			
$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$	
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

2. Usando la tabla anterior escribe el numerador o el denominador que hace se cumpla la igualdad:

a) $\frac{1}{3}$ y $\frac{\quad}{6}$ b) $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{\quad}$ c) $\frac{3}{6}$ y $\frac{\quad}{12}$ d) $\frac{10}{12}$ y $\frac{5}{\quad}$

3. De las siguientes parejas de fracciones marca con una X las que son equivalentes.

a) ____ $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{6}$ b) ____ $\frac{2}{6}$ y $\frac{5}{12}$

c) ____ $\frac{2}{3}$ y $\frac{8}{12}$ d) ____ $\frac{10}{12}$ y $\frac{5}{6}$

4. Determina si las siguientes parejas de fracciones son equivalentes o no; sustituye los cuadraditos por el signo = o ≠ según convenga:

a) $\frac{3}{5} \square \frac{6}{10}$ b) $\frac{2}{3} \square \frac{4}{4}$ c) $\frac{3}{9} \square \frac{5}{15}$

d) $\frac{25}{50} \square \frac{1}{2}$ e) $\frac{2}{6} \square \frac{8}{24}$

5. Amplía las fracciones siguientes de modo que su denominador sea 36.

a) $\frac{2}{12}$ b) $\frac{5}{18}$ c) $\frac{3}{6}$ d) $\frac{7}{9}$ e) $\frac{3}{4}$

6. Halla el numerador o el denominador que falta.

a) $\frac{2}{10}$ y $\frac{\quad}{30}$ b) $\frac{5}{3}$ y $\frac{15}{\quad}$ c) $\frac{7}{25}$ y $\frac{\quad}{50}$

d) $\frac{5}{24}$ y $\frac{\quad}{48}$ e) $\frac{7}{28}$ y $\frac{49}{\quad}$ f) $\frac{1}{2}$ y $\frac{\quad}{16}$

7. Multiplica los dos términos de la fracción $\frac{3}{4}$ por un mismo número y obtén una nueva fracción. ¿Cómo son las dos fracciones? Explica por qué.

8. Simplifica tanto como sea posible:

a) $\frac{2}{10}$ b) $\frac{18}{54}$ c) $\frac{27}{81}$ d) $\frac{24}{60}$ e) $\frac{140}{70}$ f) $\frac{105}{21}$

9. Simplifica de modo que el denominador sea 2.

a) $\frac{4}{8}$ b) $\frac{48}{96}$ c) $\frac{43}{86}$ d) $\frac{81}{162}$ e) $\frac{35}{70}$ f) $\frac{102}{68}$

10. La mamá de Pepe hizo una panetela, la dividió en 4 pedazos iguales y dio uno a su hijo. La mamá de Rosa hizo otra panetela idéntica, la dividió en 8 pedazos iguales y le dio 2 a Rosa. ¿Recibieron ambos niños igual cantidad de panetela? ¿Por qué?

11. De un pastel cortado en 3 partes iguales te ofrecen 2, o sea, $\frac{2}{3}$. Si antes de darte el pastel hacen doble número de pedazos, es decir, 6, y te ofrecen en vez de 2, 4 pedazos más chiquitos. ¿Te están dando más, o menos que antes? ¿Por qué?

12. Compara los pares de fracciones siguientes. Fundamenta hallando los productos cruzados:

a) $\frac{1}{6}$ y $\frac{6}{36}$ b) $\frac{4}{3}$ y $\frac{28}{21}$ c) $\frac{3}{15}$ y $\frac{0}{20}$ d) $\frac{1}{5}$ y $\frac{15}{24}$

13. Reduce a un común denominador los pares de fracciones siguientes. Compáralas.

a) $\frac{1}{6}$ y $\frac{2}{5}$ b) $\frac{4}{3}$ y $\frac{16}{20}$ c) $\frac{3}{42}$ y $\frac{6}{7}$ d) $\frac{1}{9}$ y $\frac{15}{24}$

2.3 Expresiones decimales

Fracciones decimales

Para designar los precios de venta de las mercancías se utilizan expresiones como: 3,50 que significa $ 3 y 50 centésimas de peso o sea 50 centavos. Es característico de esta notación el uso de la coma para separar la cantidad de peso de la cantidad de centavos. Esta forma de escritura de expresar cantidades con coma la haz visto también para expresar otros datos de magnitudes como: 2,25 cm y 3,75 kg.

¿Alguna vez has sentido curiosidad por conocer cómo se llama la forma de escritura de los números?

Desde grados anteriores aprendiste que la regla que utilizas para trazar te permite medir en milímetros, centímetros y hasta decímetros. También conoces que entre estas unidades de medida existe la relación siguiente:
Cada centímetro se divide en 10 mm, luego cada milímetro es la décima parte de un centímetro (fig. 2.20).

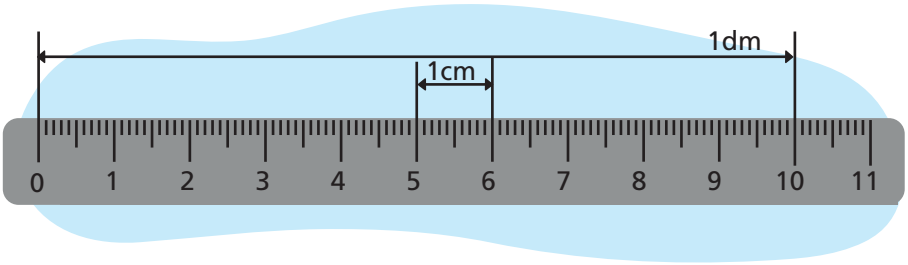


Fig. 2.20

1 mm = 0,1 cm 1 cm = 0,1 dm 1 mm = 0,01 dm

También conoces cómo representar fracciones utilizando figuras planas, por ejemplo las de la figura 2.21.

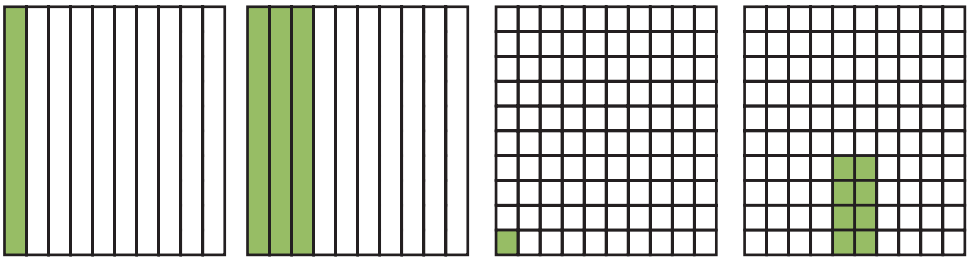


Fig. 2.21

Reflexiona un instante

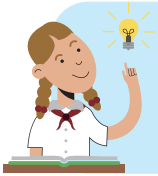
¿Qué tienen en común los denominadores de las fracciones relacionadas con las unidades de medida y las representadas en los cuadriláteros?

Como puedes observar los denominadores de las fracciones que se han utilizado son potencias de 10.

Las fracciones cuyos denominadores son potencias de 10 se llaman *fracciones decimales.*

Otros ejemplos de fracciones decimales son:

$\frac{92}{1000}; \frac{23}{100}; \frac{234}{100000}; \frac{8}{10000}.$



Reflexiona un instante

¿Podrás representar estas fracciones decimales en forma de escritura usando la notación exponencial? Argumenta.

Como puedes observar los denominadores de las fracciones son potencias de 10 y en cuarto grado aprendiste que las potencias de 10 se pueden escribir de forma abreviada empleando la notación exponencial:

$\frac{1}{10}$ (un décimo), $\frac{5}{10^2}$ (cinco centésimos), $\frac{3}{10^3}$ (tres milésimos).

Para representar fracciones decimales en la tabla de posición la ampliamos hacia la derecha para representar décimos, centésimos, milésimos, diezmilésimos, etcétera, como muestra la siguiente tabla.

Parte entera			Parte decimal					
100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10^2}$	$\frac{1}{10^3}$	$\frac{1}{10^4}$	$\frac{1}{10^5}$	
10^2	10^1	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$	$\frac{1}{100000}$	
			3					$\frac{3}{10}$
		3	4	5				$\frac{345}{100}$
			8	7				$\frac{87}{100}$
		2	0	2	8	5		$\frac{20285}{10000}$

Fracciones decimales representadas en notación decimal

Se pueden representar también las fracciones decimales mediante la escritura con coma. Esta forma de escritura se denomina *notación decimal.*

Saber hacer

Escribe en notación decimal:

a) $\frac{5}{10}$ b) $\frac{8}{100}$ c) $\frac{4}{1000}$ d) $\frac{236}{100}$

Solución:

a) $\frac{5}{10} = 0,5$

Se escribe el numerador. La cantidad de lugares después de la coma es igual al número de ceros del denominador

1 cero, 1 lugar después de la coma

b) $\frac{8}{100} = 0,08$ En este caso es necesario colocar un cero delante del ocho

2 ceros, 2 lugares después de la coma

c) $\frac{4}{1\,000} = 0,004$ En este caso es necesario colocar dos ceros delante del cuatro

3 ceros, 3 lugares después de la coma

d) $\frac{236}{100} = 2,36$

2 ceros, 2 lugares después de la coma

Recuerda que...

Para escribir una fracción decimal en notación decimal, se escribe el numerador y se completa el número colocando una coma (intercalando ceros si es necesario) de modo que haya después de ella tantos lugares decimales como ceros tenga el denominador.

Las fracciones decimales escritas en notación decimal se denominan *expresiones decimales*.

Análogamente se pueden escribir expresiones decimales como fracciones decimales:

Se considera como numerador el número, sin escribir la coma decimal y como denominador el uno seguido de tantos ceros como lugares decimales haya.

Ejemplo

a) $0,5 = \frac{5}{10}$ b) $0,08 = \frac{8}{100}$ c) $0,004 = \frac{4}{1000}$ d) $2,36 = \frac{236}{100}$

Recuerda que...

Los lugares decimales se nombran:

- Primer lugar después de la coma: décimas.
- Segundo lugar después de la coma: centésimas.
- Tercer lugar después de la coma: milésimas.
- Cuarto lugar después de la coma: diezmilésimas.

Saber hacer

Leer expresiones decimales:

0,3: hay un lugar después de la coma, la cifra es del orden de las décimas. Se lee *tres décimas* o también cero, coma, tres.

0,09: hay dos lugares después de la coma, la cifra es del orden de las centésimas. Se lee *nueve centésimas,* o también cero, coma, cero, nueve.

0,006: seis *milésimas* o cero, coma, cero, cero, seis.

73,8: setecientos treinta y ocho décimas o setenta y tres, coma, ocho. En este último ejemplo también se puede leer: setenta y tres y ocho décimas, o sea, primero la parte entera que es 73 y luego la parte decimal que es 8.

Recuerda que...

El valor de la expresión decimal no cambia cuando le agregamos uno o varios ceros a la derecha.

$\frac{1}{10} = \frac{10}{100}$, pues son fracciones equivalentes, por tanto, podemos decir también que 0,1 = 0,10.

Comparación de fracciones decimales

Ejemplo

Elena ha recorrido 2,3 km y Alina 1,5 km para llegar a la meta que son 3 km. ¿Quién está más cerca de la meta?

¿Cómo podemos conocer quién está más cerca de la meta? Podemos comparar los números y para ello representarlos en el rayo numérico (fig. 2.22).

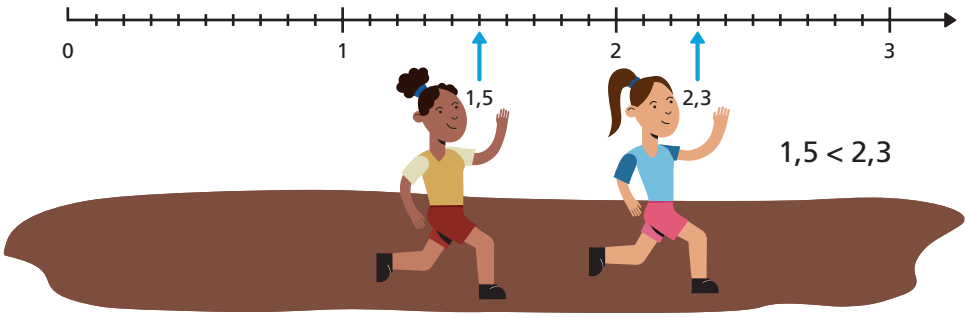


Fig. 2.22

Saber hacer

Comparas su parte entera y será mayor la que mayor parte entera tenga.

2 es mayor que 1, entonces 2,3 > 1,5.

Si tienen igual parte entera, incluyendo el caso en que ambas sean cero, comparas las partes decimales de forma análoga a la comparación con números naturales.

En la práctica se comparan también las expresiones decimales escribiéndolas con igual número de lugares decimales y comparándolas como si fueran números naturales sin tomar en consideración la coma decimal observen:

3,08 < 4,5 porque 308 < 450

0,05 < 0,20 porque 5 < 20

Reflexiona un instante

¿Qué debemos hacer para escribir una fracción cualquiera como expresión decimal?

Analiza cada una de las siguientes fracciones y piensa cuáles de los conocimientos adquiridos te pueden ayudar para representarlas como expresión decimal. Puedes comentar con tus compañeros y compartir sus ideas.

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{4}{20}$ c) $\frac{214}{25}$ d) $\frac{1}{13}$

a) $\frac{1}{2}$ no es una fracción decimal, pero ya conoces que puedes encontrar una equivalente que sí lo sea. En este caso, como10 es múltiplo de 2, o 2 es un divisor de 10, basta ampliar por 5.

$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0,5$

b) En este caso analizaste que se puede simplificar de forma conveniente: $\frac{4}{20} = \frac{2}{10}$ $\frac{2}{10} = 0,2$

c) $\frac{214}{25}$ no es fracción decimal, no es posible simplificarla a denominador 10, pero sí se puede ampliar a denominador 100, pues 100 es múltiplo de 25, o 25 es un divisor de 100.

Luego: $\frac{214}{25} = \frac{856}{100} = 8,56$

d) $\frac{1}{13}$ no es una fracción decimal y si tratas de ampliarla para obtener una equivalente que sea una fracción decimal verás que ningún múltiplo de 13 es una potencia de 10, este procedimiento no nos permite hallar la expresión decimal correspondiente a esta fracción, pues ningún múltiplo de 13 es una potencia de 10. En sexto grado aprenderás el procedimiento adecuado.

Recuerda que...

Para escribir una fracción común como expresión decimal debes convertir, si es posible, la fracción común en una fracción decimal equivalente. Esa fracción se puede escribir entonces como *expresión decimal.*

De forma análoga, las expresiones decimales se pueden escribir como fracciones comunes. Observa:

$\frac{5}{10} = 0{,}5$ luego $0{,}5 = \frac{5}{10}$

$8{,}56 = \frac{856}{100} = \frac{214}{25}$

Saber más

En la lengua española en la actualidad se emplean básicamente tres formas de anotar un número con parte decimal, según el signo empleado como separador decimal:

El punto decimal: se emplea un punto (.) para separar la parte entera de la parte decimal, este es el utilizado en las calculadoras electrónicas y en los ordenadores. 6.478 1.

La coma decimal: se emplea una coma (,) como separador, es la empleada por el Sistema Internacional de Unidades (SI). 6,478 1.

El apóstrofo decimal: el apóstrofo (') en ocasiones también llamado coma decimal es otra forma de separar la parte decimal de un número. 6'478 1.

En todos los casos, las cifras decimales no se separan en grupos con espacios en blanco u otro signo, sino que se escriben seguidas, sea cual sea el número de órdenes o lugares decimales que forme la parte decimal del número en cuestión.

Ejercicios del epígrafe 2.3

1. Di si las siguientes fracciones son decimales o no; fundamenta tu respuesta.

a) $\frac{5}{10}$ b) $\frac{7}{9}$ c) $\frac{43}{1000}$ d) $\frac{3}{100}$

e) $\frac{9}{15}$ f) $\frac{17}{200}$ g) $\frac{198}{100}$ h) $\frac{1896}{1000}$

2. Representa en el rayo numérico (segmento unidad: 1 dm) las siguientes fracciones decimales.

a) $\frac{8}{10}$ b) $\frac{12}{100}$ c) $\frac{56}{10}$ d) $\frac{9}{100}$

e) $\frac{26}{10}$ f) $\frac{310}{100}$ g) $\frac{118}{100}$ h) $\frac{130}{100}$

3. Escribe en la tabla de posición decimal. Lee las fracciones en cada caso.

a) $\frac{7}{10}$ b) $\frac{78}{100}$ c) $\frac{3\,874}{1\,000}$ d) $\frac{89}{100}$

e) $\frac{23}{1\,000}$ f) $\frac{312}{100}$ g) $\frac{28}{100}$ h) $\frac{1\,763}{1\,000}$

4. Escribe como expresiones decimales:

a) $\frac{5}{10}$ b) $\frac{3}{100}$ c) $\frac{86}{1000}$ d) $\frac{9}{10}$

e) $\frac{279}{10}$ f) $\frac{312}{100}$ g) $\frac{28}{100}$ h) $\frac{1\,763}{1\,000}$

5. Escribe como fracciones decimales:

a) 0,034 b) 0,7 c) 8,907 d) 4,76

e) 17,8 f) 2,491 g) 0,12 h) 0,000 4

6. ¿Cuál de las siguientes expresiones decimales se corresponde con la fracción decimal $\frac{5}{100}$?

a) 5,00 b) 0,05 c) 500,0 d) 0,5

7. Completa:

a) 3,562 = ▢ decenas ▢ unidades ▢ décimas ▢ centésimas ▢ milésimas

b) 31,062 = ▢ decenas ▢ unidades ▢ décimas ▢ centésimas ▢ milésimas

8. Escribe cómo se leen:

a) 0,6 b) 34,05 c) 0,009

d) 432,807 e) 1 087, 003 f) 23,907

9. Compara las siguientes expresiones decimales:

a) 0,6 y 0,9 b) 0,71 y 0,74 c) 0,09 y 0,090

d) 4,007 y 4,070 e) 0,087 y 0,09 f) 23,907 y 23,709

g) 8,004 y 3,005 h) 0,432 y 0,453

10. Ordena de acuerdo con su valor. Comienza por la expresión menor.

a) 0,000 2; 0,2; 0,02 b) 3,41; 34,1; 0,34; 341,0

11. Convierte en cada caso las expresiones decimales en fracciones comunes y compara. Fundamenta tus respuestas.

a) $0,6$ y $\frac{4}{5}$ b) $\frac{7}{5}$ y $0,25$ c) $0,9$ y $\frac{4}{4}$ d) $\frac{1}{2}$ y $0,5$

12. Convierte las fracciones comunes en expresiones decimales y ordénalas de forma ascendente primero y descendente después.

a) $\frac{1}{2}; 0,7; \frac{1}{10}; 0,8; 1,0$ b) $0,75; \frac{4}{5}; \frac{9}{2}; 2,5; \frac{1}{2}$

2.4 Operaciones con fracciones comunes y expresiones decimales. Problemas típicos

Adición y sustracción de fracciones de igual denominador

Ya conoces la necesidad de reciclar, por esta razón en la escuela se realizan campañas para la recogida de materia primas, te invito a resolver una situación relacionada con esta actividad.

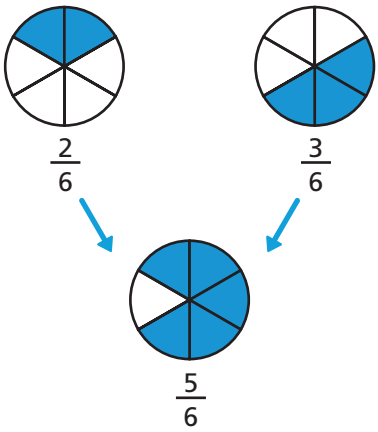
Ejemplo

El grupo A de quinto grado ha recogido $\frac{2}{6}$ kg de materia prima y el grupo B $\frac{3}{6}$ kg. ¿Cuántos kilogramos de materia prima recogieron entre los dos grupos?

De las operaciones de cálculo aprendidas por ti, ¿Cuáles permitirán dar respuesta a la situación planteada?

Vamos a representar la situación:

Tenemos dos partes: los kilógramos recogidos por el grupo A y los recogidos por el grupo B. (fig. 2.23).



Las dos fracciones unidas representan $\frac{5}{6}$ del círculo.

Luego:

$$\frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

Fig. 2.23

Reflexiona un instante

Observa la representación gráfica de las fracciones y el cálculo correspondiente.

Analiza con tus compañeros y determina una posible regla para realizar la adición de fracciones de igual denominador.

Observa que se suman los numeradores y se mantiene el mismo denominador.

Saber hacer

Para adicionar fracciones de igual denominador, $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{b}$ $(b \neq 0)$ se adicionan los numeradores y se mantienen los denominadores:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

Las fracciones de igual denominador siempre se pueden adicionar.

¿Se podrá establecer en la sustracción de fracciones de igual denominador la relación siguiente?

Reflexiona un instante

Analiza con tus compañeros y determina la posibilidad para realizar la sustracción de fracciones de igual denominador empleando un proceder semejante al de la adición.

La sustracción de fracciones de igual denominador se realiza de forma similar a la adición observa:

$\frac{3}{5}-\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$ porque $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$

Saber hacer

Para sustraer fracciones de igual denominador se sustraen los numeradores y se mantiene el mismo denominador. Las fracciones de igual denominador se pueden sustraer solamente si $\frac{a}{b}>\frac{c}{b}$ o $\frac{a}{b}=\frac{c}{b}$. La diferencia es única.

La sustracción de fracciones de igual denominador es la operación inversa de la adición de fracciones de igual denominador. Esto significa que al igual que en la adición de números naturales de: $\frac{5}{7}=\frac{2}{7}+\frac{3}{7}$ se obtiene: $\frac{5}{7}-\frac{2}{7}=\frac{3}{7}$ o $\frac{5}{7}-\frac{3}{7}=\frac{2}{7}$

Adición y sustracción de fracciones de diferentes denominadores

Reflexiona un instante

¿Podrás adicionar y sustraer fracciones de diferentes denominadores como lo has hecho con las fracciones de igual denominadores?

Analiza con tus compañeros y determina una posible vía para realizar la adición de las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ de diferentes denominadores a partir de los conocimientos adquiridos hasta el momento.

¿Cómo puedes reducir el nuevo cálculo a uno ya conocido?

Ya conoces:

- La ampliación o simplificación de fracciones para obtener fracciones equivalentes.
- La adición de fracciones de igual denominador.

Expresa a tus compañeros de aula si estás de acuerdo con el siguiente planteamiento, y ¿por qué?

- Analizar los denominadores.
- Obtener fracciones equivalentes con igual denominador.

Queremos adicionar $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$.

$\frac{1}{2}$ equivale a $\frac{3}{6}$ $\frac{1}{3}$ equivale a $\frac{2}{6}$

Obtienes fracciones equivalentes, reduces las fracciones a un común denominador, y procedes entonces como en la adición de fracciones de igual denominador.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$$

Ejemplos

Adiciona:

a) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$ b) $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$ c) $1\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$

a) Debemos reducir 2 y 4 a un denominador común. Cómo 4 es múltiplo de 2, ampliamos entonces la fracción $\frac{1}{2}$ a denominador 4, y adicionamos los numeradores.

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{2}{4}+\frac{3}{4}=\frac{2+3}{4}=\frac{5}{4}$$

b) Hallamos el menor múltiplo común de 3 y 4. En este caso es el 12, ampliamos las dos fracciones a denominador 12 y procedemos como en el inciso a.

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{8}{12}+\frac{3}{12}=\frac{8+3}{12}=\frac{11}{12}$$

c) En este caso escribimos el número mixto como fracción, luego hallamos el menor múltiplo común de 4 y 6. En este caso es el 12, ampliamos las dos fracciones a denominador 12 y procedemos como en el inciso a.

$$1\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{7}{4}+\frac{5}{6}=\frac{21}{12}+\frac{10}{12}=\frac{21+10}{12}=\frac{31}{12}=2\frac{7}{12}$$

Saber hacer

Para adicionar fracciones con diferentes denominadores se sustituyen estas por otras fracciones equivalentes con igual denominador y se adicionan.

Para sustraer fracciones de diferentes denominadores procedemos de manera similar.

Ejemplo

Resta: $\frac{3}{8}$ de $\frac{5}{6}$

Debemos reducir $\frac{5}{6}$ y $\frac{3}{8}$ a un denominador común. Hallamos el menor múltiplo común de 6 y 8. En este caso es el 24, ampliamos entonces las dos fracciones a denominador 24.

$$\frac{5}{6}-\frac{3}{8}=\frac{20}{24}-\frac{9}{24}=\frac{20-9}{24}=\frac{11}{24}$$

Saber hacer

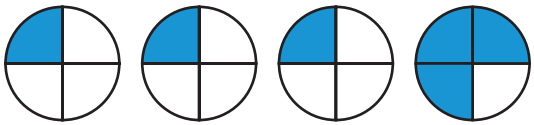
Para sustraer fracciones de diferentes denominadores, se sustituyen estas por otras fracciones equivalentes de igual denominador y se procede, entonces, como en la sustracción de fracciones de igual denominador.

La sustracción de fracciones, al igual que en los números naturales, se puede realizar solamente en el caso en que se cumple que el minuendo sea mayor o igual que el sustraendo.

Multiplicación y división de fracciones comunes

Al igual que los números naturales las fracciones se pueden multiplicar. En la práctica puedes utilizar la multiplicación de fracciones para resolver diferentes problemas. Por ejemplo:

1. Deseas saber el tiempo que inviertes cada semana en practicar la ortografía. Si 3 veces a la semana le dedicas $\frac{1}{4}$ de hora (fig. 2.24).



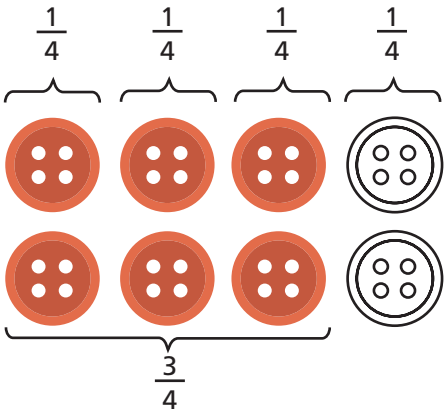
$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Como es una suma de sumandos iguales lo puedes también plantear como una multiplicación.

$3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Fig. 2.24

2. Necesitas conocer cuántos botones representan las $\frac{3}{4}$ partes de un conjunto de 8 botones (fig. 2.25).



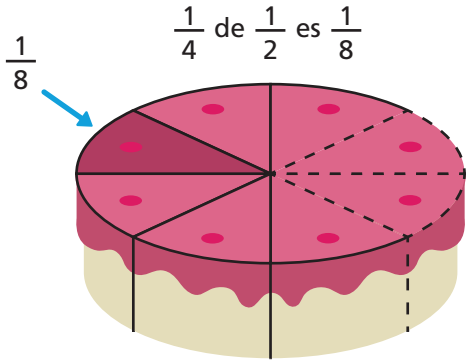
$\frac{3}{4} \cdot 8 = 6$

Para hallar una parte fraccionaria de un conjunto, también se utiliza la multiplicación.

$\frac{3}{4} \cdot 8 = 6$

Fig. 2.25

3. Quieres saber qué parte del pastel, se comió tu hermanita si le sirvieron $\frac{1}{4}$ de la mitad del pastel (fig. 2.26).



Para hallar una fracción de otra fracción, también se utiliza la multiplicación.

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Fig. 2.26

En los ejemplos anteriores has visto diferentes representaciones para la multiplicación; pero en todos los casos el producto se calcula de la misma forma. Observa que:

En todos los casos se han multiplicado las fracciones hallando los productos numerador por numerador y denominador por denominador.

$$3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 1}{1 \cdot 4} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} \cdot 8 = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{1} = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 1} = \frac{24}{6} = 6$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8}$$

Ejemplos

Halla el producto

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}$ b) $\frac{5}{18} \cdot \frac{9}{12}$ c) $2\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{14}$

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 2} = \frac{3}{10}$ Se multiplican los numeradores y los denominadores.

b) $\frac{5}{\cancel{18}_{2}} \cdot \frac{\cancel{9}^{1}}{12} = \frac{5 \cdot 1}{2 \cdot 12} = \frac{5}{24}$ Se simplifica primero, tanto como sea posible.

En la práctica se procede así simplificando directamente los factores.

$$\frac{5}{18}\cdot\frac{9}{12}=\frac{5}{24}$$

c) $2\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{14}=\frac{\cancel{7}^{1}\cdot\cancel{6}^{\cancel{2}^{1}}}{\cancel{3}_{1}\cdot\cancel{14}_{\cancel{2}_{1}}}$ Se expresa el número mixto como fracción impropia y se simplifica.

$$\frac{\cancel{7}^{1}\cdot\cancel{6}^{\cancel{2}^{1}}}{\cancel{3}_{1}\cdot\cancel{14}_{\cancel{2}_{1}}}=\frac{1}{1}=1$$

Saber hacer

La multiplicación de fracciones se realiza hallando los productos de los numeradores y los denominadores de las fracciones dadas. Es conveniente antes de calcular el producto simplificar las fracciones, tanto como sea posible. De lo contrario debes hacerlo en la fracción resultante. En general:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\,(b\neq 0;d\neq 0).$$

Recíproco de una fracción

Antes de comenzar el estudio de la división de fracciones es necesario que aprendas qué es el recíproco de una fracción, pues lo necesitarás en el procedimiento para dividir.

El recíproco de una fracción $\frac{a}{b}$ *es la fracción* $\frac{b}{a}$ *(*$a\neq 0$*;* $b\neq 0$*).*

Observa que, dada una fracción, para formar su recíproco basta *invertir* sus términos.

Ejemplos

Halla el recíproco de:

a) $\frac{1}{5}$ b) 4 c) $1\frac{4}{5}$ d) $0,5$

a) $\frac{1}{5}=\frac{5}{1}$. Formas otra fracción invirtiendo los términos de la original.

El recíproco de $\frac{1}{5}$ es 5.

b) $4=\frac{4}{1}$, luego el recíproco de 4 es $\frac{1}{4}$.

c) $1\frac{4}{5}=\frac{9}{5}$, luego el recíproco de $\frac{9}{5}$ es $\frac{5}{9}$.

Si la fracción está expresada como número mixto primero debes expresarla como fracción impropia y después buscas su recíproco.

d) $0,5=\frac{5}{10}$. *Se escribe la expresión decimal como fracción.*

El recíproco de $\frac{5}{10}$ *es* $\frac{10}{5}=2$.

División de fracciones comunes

Reflexiona un instante

¿Cómo se pueden dividir las fracciones y qué uso tendrá en la práctica esta operación?

Una costurera tiene 3 retazos de tela con forma rectangular y le han pedido confeccionar 2 servilletas iguales que tengan forma triangular de cada uno de los retazos de modo que alcancen los retazos y no le sobre ningún pedazo.

¿Cómo puede la costurera obtener dos servilletas triangulares iguales de cada uno de estos 3 retazos de modo tal que no sobre ni falte tela?

¿Cuántas servilletas debe obtener la costurera de cada retazo? (fig. 2.27).

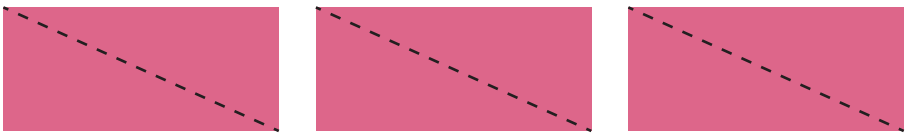


Fig. 2.27

De cada retazo de tela se deben obtener 2 servilletas triangulares (fig.2.28).

Fig. 2.28

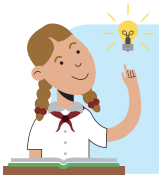
$$2 + 2 + 2 = 6$$

$$3 : \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{2}{1} = 6$$

En la práctica se ha dividido en partes iguales y eso en la matemática significa división. Donde el todo es el número de retazos y el contenido de cada parte es la mitad, es decir, un medio y el resultado de la división representa la cantidad de partes iguales.

Veamos otra situación.

Otra costurera debe confeccionar una alfombra, para lo cual toma un tercio de un retazo de tela que tiene forma rectangular y lo divide en dos partes iguales, para deshilachar una de ellas.



Reflexiona un instante

¿Qué parte del retazo debe deshilachar la costurera?

Representemos gráficamente la situación. El rectángulo mostrado representa la tela, la que a su vez representa la unidad (fig. 2.29).

Fig. 2.29

Se pide: qué parte de la tela se deshilacha.

Se sabe que: utiliza la tercera parte de la tela para dividirla en dos partes iguales para deshilachar una de estas, por tanto, se debe comenzar dividiendo en tres partes iguales el retazo y luego dividiendo a la mitad una de esas partes, como se muestra en la ilustración (fig.2.30).

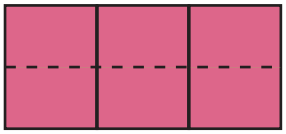


Fig. 2.30

Si dividió cada tercio a la mitad, la tela queda dividida en 6 partes iguales una de ellas es deshilachada (fig. 2.31).

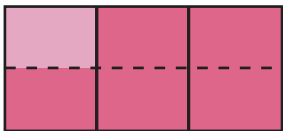


Fig. 2.31.

Numéricamente esta operación se representa de la manera siguiente:

$$\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

El resultado obtenido es el mismo que si multiplicamos un tercio por un medio, que es el recíproco de dos.

Otra situación que se puede plantear es: ¿Qué parte es $\frac{1}{10}$ de $\frac{2}{5}$?

Numéricamente expresamos:

$$\frac{1}{10} : \frac{2}{5} = \frac{1}{\cancel{10}_{2}} \cdot \frac{\cancel{5}^{1}}{2} = \frac{1}{4}$$

El resultado obtenido es el mismo que si multiplicamos un décimo por cinco medios, que es el recíproco de dos quintos.

Observación:

En los ejemplos presentados se ha divido:

a) Un número natural entre una fracción.

$$3 : \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{2}{1} = 6$$

b) Una fracción entre un número natural.

$$\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

c) Una fracción entre otra fracción.

$$\frac{1}{10} : \frac{2}{5} = \frac{1}{\cancel{10}_{2}} \cdot \frac{\cancel{5}^{1}}{2} = \frac{1}{4}$$

Saber hacer

La división de fracciones se realiza transformándola en una multiplicación en la cual el primer factor es el dividendo y el segundo es el recíproco del divisor. Después se procede como en la multiplicación.

En general: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}\quad (b\neq 0; c\neq 0; d\neq 0)$

Problemas típicos de fracciones

Al comienzo de esta unidad resolviste gráficamente y prácticamente problemas como:

a) Halla $\frac{3}{4}$ de 8. b) ¿Qué parte es 6 de 8?

c) ¿De qué número es 6 los $\frac{3}{4}$?

Ahora conocerás cómo resolverlos utilizando las operaciones de multiplicación y división de fracciones aprendidas.

Ejemplos

1. Halla una fracción de un número.

a) $\frac{3}{5}$ de 120 b) $\frac{7}{3}$ de 21

Ya tú sabes que hallar una fracción de un número equivale a multiplicar.

a) Hallamos el resultado efectuando la multiplicación:

$$\frac{3}{\cancel{5}_{1}}\cdot \cancel{120}^{24}=72$$

Fíjate que el producto obtenido es menor que el número dado porque la fracción por la que multiplicaste es propia.

$$\frac{3}{5}\cdot 120=72$$

b) Procedemos de la misma forma:

$$\frac{7}{3}\text{ de }21\text{ es }\frac{7}{\cancel{3}_{1}}\cdot \cancel{21}^{7}=49$$

Observa que el producto obtenido es mayor que el número dado, 49 > 21, porque la fracción por la que multiplicaste es impropia.

$$\frac{7}{3}\cdot 21=49$$

Recuerda que...

Para hallar una fracción de un número multiplicamos la fracción por el número dado.

2. Hallar qué parte es un número de otro.
   a) 8 de 12 b) 9 de 6

   Para hallar qué parte es un número de otro debes aplicar la división.

   a) Divides 8 entre 12 expresando la división en forma de fracción. Como es posible simplificas.

   $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

   8 es $\frac{2}{3}$ de 12

   Como estamos investigando qué parte es un número menor de otro mayor, la fracción es propia.

   b) Divides 9 entre 6 expresando la división en fracción y simplificas.

   $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

   9 es $\frac{3}{2}$ de 6

   Como estamos investigando qué parte es un número mayor de otro menor, la fracción es impropia.

Recuerda que...

Para hallar qué parte es un número de otro aplicas la división simplificando la fracción obtenida.

3. Hallar el número cuando se conoce una parte fraccionaria de él. De qué número es:

   a) 25 los $\frac{5}{6}$ b) 32 los $\frac{8}{3}$

a) Podemos plantear:

$\frac{5}{6}$ de un número es 25.

Si designamos el número por x diremos:

$$\frac{5}{6} \cdot x = 25$$

Despejamos la x (pasando $\frac{5}{6}$ al otro miembro dividiendo):

$$x = 25 : \frac{5}{6}$$

$$x = 25 \cdot \frac{6}{5}$$

$$x = \cancel{25}^{4} \cdot \frac{6}{\cancel{5}^{1}}$$

$$x = 30$$

Respuesta: el número es 30.

b) Procedemos de la misma forma ya de una manera más simplificada:

$$32 : \frac{8}{3} = \frac{\cancel{32}^{4} \cdot 3}{1 \cdot \cancel{8}_{1}} = 12$$

Respuesta: el número es 12.

En la práctica trabajamos así.

Recuerda que...

Para hallar el número cuando se conoce una parte fraccionaria, se divide el número que representa la parte fraccionaria entre la fracción.

Adición y sustracción de expresiones decimales

Algo de historia

La palabra papalote (*papalotl*) es de origen náhuatl y significa mariposa. Se cree que los primeros papalotes llegaron a México en el siglo XVII, en el llamado Galeón del Pacífico, que era la flota para el comercio con Asia; allá la estructura se hace con rajas de bambú

y la vela es de papel de arroz o de seda, y los decoran con colores aplicados a pincel. Los que se hacen aquí tienen carácter propio y son diferentes a los de otras partes del mundo. En México los hay de muy variadas formas, casi siempre geométricas.

Analiza el texto del siguiente problema y selecciona la vía de solución.

La cola del papalote de Rafael mide 5,23 m y la del papalote de Ángela mide 4,58 m. ¿Cuánto mide la cola de los dos papalotes juntos?

Prueba a resolver el problema aplicando los conocimientos que has acumulado durante tu paso por la escuela primaria acerca de las expresiones decimales y las operaciones del cálculo aritmético.

Reflexiona un instante

¿Cómo puedes reducir el nuevo cálculo a uno ya conocido?

La adición de fracciones decimales

Ya conoces:

$$5{,}23\text{ m} + 4{,}58\text{ m} = \frac{523}{100} + \frac{458}{100} = \frac{523 + 458}{100} = \frac{981}{100} = 9{,}81$$

En la práctica:

unidades — décimas — centésimas

$$\begin{array}{r} 5{,}23 \\ +\ 4{,}58 \\ \hline 9{,}81 \end{array}$$

Se adiciona como si fueran números naturales, escribiendo la coma debajo de la coma, de modo que las unidades del mismo orden queden una debajo de la otra. En el resultado se escribe la coma en el mismo lugar que en los sumandos.

Puedes dar respuesta a la interrogante del problema: la cola de los dos papalotes juntos mide 9,81 m.

Prueba a resolver el ejercicio de adición de expresiones decimales que se te propone a continuación aplicando el procedimiento empleado para realizar el cálculo anterior.

Reflexiona un instante

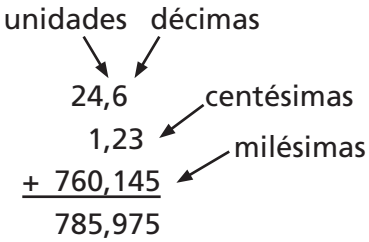
Calcula:

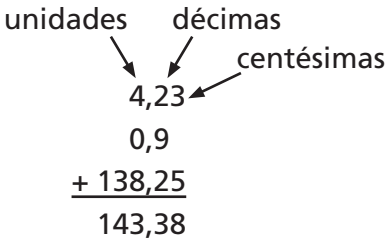
24,6 + 1,23 + 760,145

4,23 + 0,9 + 138,25

a) ¿En algún momento, al resolver este ejercicio, la cantidad de lugares decimales te impidió llegar a la suma o total?

b) Expresa tu opinión acerca del procedimiento para calcular la suma de expresiones decimales que tienen diferente número de lugares decimales.





Sustracción de expresiones decimales

Reflexiona un instante

¿Podrás sustraer expresiones decimales como lo has hecho en la operación de adición?

Ejemplos

a) 0,70 – 0,46

b) 3,7 – 0,87

unidades	décimas	centésimas	unidades	décimas	centésimas
0	,7	0	3	,7	0
− 0	,4	6	− 0	,8	7
0	,2	4	2	,8	3

Saber hacer

En la sustracción de expresiones decimales también se calcula como si fueran números naturales, colocando las cantidades de modo que la coma quede debajo de la coma; de esa forma las unidades de un mismo orden quedan una debajo de la otra. En la diferencia se coloca la coma entre los mismos lugares que en el minuendo y el sustraendo. Además, resulta conveniente igualar los lugares decimales colocando ceros si es necesario.

Multiplicación de expresiones en notación decimal

En el quehacer cotidiano se presentan situaciones como la siguiente:

Isabel deposita en su alcancía $6,30 una vez a la semana para comprar un regalo a su mamá. ¿Cuánto ha depositado Isabel en su alcancía en el transcurso de 5 semanas?

Reflexiona un instante

Teniendo en cuenta los conocimientos que has adquirido analiza las diversas vías para hallar la solución.

a) Conviertes los pesos en centavos y calculas como lo haces con los números naturales.

$ 6,30 = 630 ¢, calculas 5 · 630 ¢ = 3 150 ¢ = $ 31,50

b) Sustituyes la multiplicación por una adición de sumandos iguales.

5 · $ 6,30 = $ 6,30 + $ 6,30 + $ 6,30 + $ 6,30 + $ 6,30 = $ 31,50

c) Escribes la expresión decimal como una fracción decimal y adicionas fracciones de igual denominador.

$$\frac{630}{100}+\frac{630}{100}+\frac{630}{100}+\frac{630}{100}+\frac{630}{100}=\frac{630+630+630+630+630}{100}$$
$$=\frac{3150}{100}$$
$$=\$31{,}50$$

Se deposita una cantidad $ 6,30 que se repite 5 veces, puedes adicionar 5 veces la cantidad, pero sabes que la suma de sumandos iguales se calcula de forma más ventajosa aplicando la multiplicación. Entonces hay que calcular: 6,30 · 5.

Por cualquiera de las tres formas empleadas se obtiene que en el transcurso de 5 semanas Isabel depositará en la alcancía $ 31,50.

Reflexiona un instante

Prueba a calcular como si fueran números naturales, luego observa las cantidades de lugares decimales en el resultado y la cantidad de lugares en los factores. Comprueba si utilizaste un proceder semejante al que se muestra a continuación.

Dos lugares decimales

↓

6,30 · 5

31,50 ← Dos lugares decimales en el producto

Saber hacer

1. Se calcula el producto como si ambos factores fueran números naturales.
2. En el producto se separan mediante una coma tantos lugares decimales, como tienen los factores dados.

Ejemplos

Calcula:

a) $0{,}42 \cdot 3$

$$\begin{array}{r} 0{,}42 \cdot 3 \\ \hline 1{,}26 \end{array}$$

b) $41{,}2 \cdot 6$

$$\begin{array}{r} 41{,}2 \cdot 6 \\ \hline 247{,}2 \end{array}$$

c) $804 \cdot 0{,}26$

$$\begin{array}{r} 804 \cdot 0{,}26 \\ \hline 1608 \\ 4824 \\ \hline 209{,}04 \end{array}$$

Multiplicas una expresión decimal por otra expresión decimal.

Saber hacer

Se multiplican como si fueran números naturales.

En el producto se separan mediante una coma tantos lugares decimales como hay en los dos factores juntos.

Un lugar decimal — Un lugar decimal

$$\begin{array}{r} 2{,}1 \cdot 3{,}4 \\ \hline 63 \\ +\ 84 \\ \hline 7{,}4 \end{array}$$

Dos lugares decimales en el producto

Dos lugares decimales — Un lugar decimal

$$\begin{array}{r} 32{,}46 \cdot 1{,}2 \\ \hline 3246 \\ +\ 6492 \\ \hline 38{,}952 \end{array}$$

Tres lugares decimales en el producto

Al colocar la coma en el producto, a veces es necesario escribir ceros delante del resultado para obtener el número de lugares correcto.

Dos lugares decimales — Un lugar decimal

$$\begin{array}{r} 0{,}06 \cdot 0{,}7 \\ \hline 0{,}042 \end{array}$$

Tres lugares decimales en el producto

Multiplicamos y dividimos expresiones decimales por potencias de 10.

Cuando se multiplica o se divide una expresión decimal por una potencia de diez, o sea, por la unidad seguida de ceros, se pueden utilizar reglas muy sencillas.

Ejemplo

Calcula:

a) 2,347 · 10 b) 2, 347 · 100

c) 2,347 · 1 000 d) 2,347 · 10 000

Como estamos ante *el producto de una expresión decimal por un número natural*, podemos aplicar la regla antes estudiada.

a) 2,347 · 10 = 23,470 b) 2,347 · 100 = 234,700

c) 2,347 · 1 000 = 2347,000 d) 2,347 · 10 000 = 23 470,000

Respuestas

a) 23,47 b) 234,7 c) 2 347 d) 23 470

Ejemplo

Calcula:

a) 632 : 10 b) 632 : 100 c) 632 : 1 000 d) 632 : 10 000

Respuestas

a) $632 : 10 = \frac{632}{10} = 63,2$

b) $632 : 100 = \frac{632}{100} = 6,32$

c) $632 : 1\,000 = \frac{632}{1000} = 0,632$

d) $632 : 10\,000 = \frac{632}{10\,000} = 0,063\,2$

Son fracciones decimales y las podemos escribir en notación decimal. A la vez se ha dividido el número dado por una potencia de 10 y el cociente tiene las mismas cifras del número original, pero se ha corrido la coma hacia la izquierda tantos lugares como ceros tiene la potencia de 10.

En el inciso d) fue necesario completar con un cero, en el lugar posterior a la coma, pues las cifras del número no eran suficientes para cubrir los lugares decimales.

En la práctica no es necesario formar la fracción decimal, procedemos así: 632 : 10 = 63,2.

Ejemplos

a) 0,8 : 10 = 0,08

b) 0,67 : 100 = 0,006 7

c) 61,2 : 100 = 0,612

Recuerda que...

Para multiplicar expresiones decimales por 10; 100; 1 000; ... se traslada la coma hacia la derecha 1; 2; 3; ... lugares.

Para dividir una expresión decimal entre 10; 100; 1 000; ... se corre la coma en la expresión decimal 1; 2; 3; ... lugares hacia la izquierda.

Operaciones combinadas

En el estudio de los números naturales aprendiste que para realizar ejercicios donde aparecen en forma combinada la multiplicación, la adición y la sustracción, debes seguir un orden determinado. Con fracciones y expresiones decimales procederemos de la misma forma.

Ejemplos

Resuelve:

a) 2,5 + 5,4 – 3,5
= 7,9 – 3,5
= 4,4

Las operaciones indicadas de adición y sustracción en las que no hay signos de agrupación, se efectúan en el orden en que se hallan.

b) $1{,}58 + 0{,}8 \cdot 3 - 2{,}0$
$= 1{,}58 + 2{,}4 - 2{,}0$
$= 3{,}98 - 2{,}0$
$= 1{,}98$

En las operaciones indicadas en que hay multiplicaciones con adición y sustracción se hallan primero los productos y después las sumas y restas en el orden en que aparecen.

c) $(2{,}5 + 1{,}5) \cdot (4{,}0 - 3{,}5)$
$= 4{,}0 \cdot 0{,}5$
$= 2{,}00$

En las operaciones en que hay signos de agrupación deben efectuarse primero las operaciones encerradas en los paréntesis respetando el orden operacional.

Ejercicios del epígrafe 2.4

1. Adiciona, simplifica el resultado tanto como sea posible. Si son números mixtos exprésalos primero como fracciones impropias.

a) $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}$ b) $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$ c) $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}$ d) $\frac{4}{9}+\frac{3}{9}$

e) $2\frac{1}{3}+2\frac{2}{3}$ f) $3\frac{1}{4}+5\frac{2}{4}$ g) $1\frac{1}{14}+2\frac{3}{14}$ h) $\frac{4}{15}+\frac{6}{15}+\frac{7}{15}$

2. Halla el valor de x en las igualdades siguientes (x es un número natural).

a) $\frac{2}{4}+\frac{x}{4}=\frac{9}{4}$ b) $\frac{1}{5}+\frac{x}{5}=\frac{7}{5}$ c) $\frac{x}{7}+\frac{3}{7}=\frac{6}{7}$

d) $\frac{x}{14}+\frac{6}{14}=\frac{13}{14}$ e) $\frac{5}{23}+\frac{x}{23}=\frac{19}{23}$

3. Adiciona $\frac{8}{17}$ y $\frac{7}{17}$. ¿Cuál es la suma?

4. La diferencia de dos fracciones es $\frac{7}{26}$. El sustraendo es $\frac{15}{26}$. ¿Cuál es el minuendo?

5. La mamá de Elena hizo un flan lo dividió en 8 partes iguales. Elena se comió uno de los pedazos y su hermano Eduardito lo encontró tan sabroso que se comió dos pedazos. ¿Qué parte del flan se comieron entre los dos?

6. Para confeccionar una bandera cubana se utilizaron $\frac{8}{10}$ m de tela roja, $\frac{13}{10}$ m de tela blanca y $\frac{17}{10}$ m de tela azul. ¿Qué cantidad de tela se utilizó en total?

7. Calcula. Simplifica tanto como sea posible.

a) $\frac{3}{4}-\frac{2}{4}$ b) $\frac{4}{5}-\frac{3}{5}$ c) $\frac{3}{7}-\frac{2}{7}$ d) $\frac{5}{9}-\frac{3}{9}$

e) $2\frac{2}{3}-2\frac{1}{3}$ f) $7\frac{1}{4}-3\frac{2}{4}$ g) $1\frac{1}{11}-2\frac{3}{11}$ h) $\frac{9}{18}-\frac{5}{18}$

8. Calcula y comprueba mediante la adición.

a) $\frac{3}{4}-\frac{2}{4}$ b) $\frac{4}{5}-\frac{3}{5}$ c) $\frac{3}{7}-\frac{2}{7}$ d) $\frac{5}{9}-\frac{3}{9}$

e) $2\frac{2}{3}-2\frac{1}{3}$ f) $7\frac{1}{4}-3\frac{2}{4}$ g) $1\frac{1}{11}-2\frac{3}{11}$ h) $\frac{9}{18}-\frac{5}{18}$

9. Calcula la diferencia de $\frac{25}{46}$ y $\frac{18}{46}$.

10. La suma de dos fracciones es $\frac{57}{69}$. Uno de los sumandos es $\frac{39}{69}$. ¿Cuál es el otro?

11. Enrique y Alina han recorrido $\frac{5}{9}$ m de la distancia que hay desde su casa hasta la casa de su abuela. ¿Qué parte les queda por recorrer?

12. Alejandro necesita $\frac{3}{4}$ h para recorrer el camino de su casa a la institución educativa. Emilia necesita $\frac{1}{4}$ h menos. ¿Cuántos minutos necesita Emilia para llegar a la institución educativa?

13. El segmento $\overline{AB}$ tiene $\frac{3}{4}$ dm de longitud. El segmento $\overline{CD}$ tiene $\frac{1}{4}$ dm menos de longitud. El segmento $\overline{EF}$ tiene la misma longitud que los dos anteriores juntos. ¿Qué longitud tienen los tres segmentos juntos?

14. Copia cada ejercicio e investiga los números que convengan para a y b. Después halla la suma.

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ $\quad \frac{a}{6}+\frac{b}{6}$

b) $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}$ $\quad \frac{a}{8}+\frac{b}{8}$

c) $\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$ $\quad \frac{a}{10}+\frac{b}{10}$

d) $\frac{1}{7}+\frac{1}{3}$ $\quad \frac{a}{21}+\frac{b}{21}$

15. Calcula y simplifica tanto como sea posible. En el caso de los números mixtos conviértelos primero en impropios.

a) $\frac{2}{5}+\frac{2}{5}$ $\quad$ b) $\frac{3}{6}+\frac{1}{6}$ $\quad$ c) $\frac{4}{9}+\frac{2}{9}$ $\quad$ d) $\frac{2}{7}+\frac{1}{7}$

e) $3\frac{1}{4}+3\frac{2}{4}$ $\quad$ f) $3\frac{1}{7}+5\frac{1}{7}$ $\quad$ g) $2\frac{3}{9}+5\frac{1}{9}$ $\quad$ h) $3\frac{1}{15}+1\frac{4}{15}$

16. Adiciona. Simplifica tanto como sea posible.

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ $\quad$ b) $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}$ $\quad$ c) $\frac{3}{7}+\frac{2}{1}+\frac{4}{2}$ $\quad$ d) $\frac{8}{7}+\frac{7}{8}+\frac{1}{2}$

e) $\frac{5}{6}+\frac{3}{8}+\frac{3}{4}$ $\quad$ f) $\frac{11}{15}+\frac{1}{2}+\frac{4}{5}$ $\quad$ g) $\frac{9}{10}+\frac{4}{5}+\frac{1}{2}$ $\quad$ h) $\frac{4}{1}+\frac{6}{3}+\frac{7}{8}$

17. Del total de medallas alcanzadas por Cuba, en los juegos panamericanos de Río de Janeiro, año 2007; los hombres alcanzaron $\frac{39}{59}$ medallas de oro y $\frac{20}{35}$ medallas de plata. ¿Cuántas medallas alcanzaron en total?

18. Un atleta que se prepara para participar en las competencias de atletismo emplea $\frac{3}{4}$ h para correr, $\frac{1}{2}$ h para realizar abdo-

minales y $\frac{1}{4}$ h para realizar cuclillas. ¿Qué tiempo emplea en total para su preparación?

19. Calcula y simplifica tanto como sea posible.

a) $\frac{1}{5}-\frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{10}-\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{4}-\frac{1}{8}$ d) $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}$

e) $\frac{9}{18}-\frac{1}{3}$ f) $2\frac{3}{8}-1\frac{1}{4}$ g) $2\frac{3}{14}-1\frac{1}{14}$ h) $3\frac{3}{8}-2\frac{1}{6}$

20. Calcula en los siguientes ejercicios (x pertenece a los números naturales).

a) $\frac{11}{14}+\frac{x}{7}=\frac{15}{14}$ b) $\frac{x}{39}-\frac{7}{13}=\frac{1}{13}$

c) $\frac{13}{15}+\frac{x}{3}=\frac{6}{5}$ d) $\frac{x}{36}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$

21. Completa las tablas siguientes:

x	y	$x+y$	$x-y$	$y-x$
$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{10}$			
$\frac{6}{11}$	$\frac{7}{22}$			
$1\frac{7}{9}$			$\frac{5}{18}$	
	$1\frac{5}{12}$	$5\frac{37}{60}$		

a	b	$a+b$	$a-b$	$b-a$
$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$			
	$\frac{9}{13}$			$\frac{14}{39}$
$\frac{5}{12}$			$1\frac{13}{24}$	
$\frac{7}{15}$				1

22. La suma de dos fracciones es $\frac{7}{12}$. Uno de los sumandos es $\frac{1}{2}$. ¿Cuál es el otro sumando?

23. La casa de Pablo está a $\frac{9}{10}$ km de la institución educativa. La casa de Pepe está a $\frac{5}{8}$ km. ¿Cuánto más lejos está la casa de Pablo que la de Pepe?

24. Un depósito de agua está lleno hasta los $\frac{2}{3}$. Se añade agua hasta llenar $\frac{1}{4}$ más del depósito.

a) ¿Qué parte queda llena?

b) ¿Qué parte falta para llenarlo?

25. Elisa tenía 4 m de cinta. Gastó $1\frac{1}{6}$ m en adornar una bolsa para guardar pañuelos. ¿Cuánto mide la cantidad de cinta que queda?

26. Para confeccionar varias prendas de vestir una modista utiliza las siguientes cantidades de tela: para la primera, 1,62 m; para la segunda, 0,76 m, para la tercera, 2,15 m y para la cuarta, 1,45 m.

a) ¿Cuántos metros de tela utilizó en total?

27. *Alberto, que tiene $0,60, quiere reunir $3,75. Pide a su padre $1,75 y este le da $0,17 menos de lo que le pide, y a su hermano $0,30, y este le da $0,15 más de lo pedido. ¿Cuánto le falta para completar lo que quiere reunir?

28. Reconoce, escribe y resuelve la multiplicación representada en cada gráfico en la figura 2.32.

a)

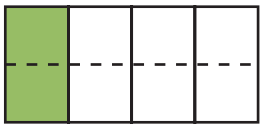
b) 

Fig. 2.32

c)

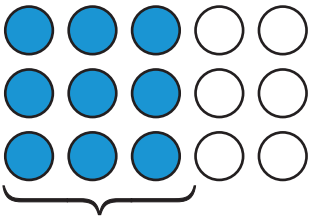


Fig. 2.32

29. Calcula. Simplifica antes de calcular donde sea posible.

a) $1 \cdot \frac{1}{3}$ b) $2 \cdot \frac{1}{6}$ c) $\frac{3}{5} \cdot 25$ d) $\frac{3}{4} \cdot 8$

e) $5 \cdot \frac{3}{6}$ f) $\frac{7}{8} \cdot 32$ g) $\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{3}$ h) $6\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

i) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8}$ j) $6\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{4}$ k) $\frac{11}{12} \cdot 3\frac{3}{5}$ l) $2\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{12}$

30. Halla el valor de la variable $x\,(x \in \mathbb{N})$.

a) $x \cdot \frac{15}{52} = \frac{45}{52}$ b) $x \cdot \frac{12}{25} = \frac{36}{25}$ c) $6 \cdot \frac{x}{35} = \frac{24}{35}$

d) $\frac{17}{27} \cdot \frac{x}{4} = \frac{51}{108}$ e) $x \cdot \frac{2}{16} = 1$ f) $\frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{x}{42}$

31. Triplica la fracción $\frac{3}{9}$.

32. Cuadruplica la fracción $\frac{1}{4}$.

33. Elena le ha dado a cada uno de sus 6 hijos $\frac{1}{2}$ pinta de helado. ¿Cuántas pintas de helado compró Elena?

34. Un reloj se adelanta $\frac{1}{2}$ min en cada hora. ¿Cuánto adelanta en 5 h; en un día y en una semana?

35. De las 45 pelotas que hay en el almacén las $\frac{2}{3}$ partes son para el béisbol y el resto de las pelotas son de futbol. ¿Cuántas pelotas de futbol hay?

36. Las $\frac{2}{5}$ partes del total de matrícula de una institución educativa, son hembras. Si la matrícula es de 250 educandos, ¿Cuántas hembras hay en la institución educativa?

37. En el estante de una cafetería hay 12 botellas de sirope de naranja, 3 botellas de sirope de limón y 15 botellas de sirope de cola. Cada botella contiene $\frac{7}{10}$. L de sirope. ¿Cuántos litros de sirope hay en total?

38. ¿Qué número se obtiene sumando 14 veces $12\frac{2}{7}$?

39. ¿En cuánto excede el producto de $12 \cdot 3\frac{1}{6}$ al producto de $5 \cdot 4\frac{1}{5}$?

40. En el refrigerador había $\frac{3}{4}$ de libra de mantequilla. La mamá de Sonia gastó la mitad de la mantequilla para hacer un dulce. ¿Qué parte de una libra gastó?

41. Melba tenía $\frac{5}{8}$ de libra de chocolate. Gastó $\frac{2}{5}$ del chocolate que tenía en preparar unas tazas de chocolate. ¿Qué parte de una libra gastó?

42. Martha ha conseguido la receta de un bizcocho grande de piña, que requiere $3\frac{1}{3}$ tazas de harina. ¿Qué cantidad de harina necesita para hacer uno que tenga la mitad del tamaño del que se obtiene empleando las medidas indicadas en la receta?

43. Escribe qué significa cada una de las siguientes expresiones:

a) $\frac{1}{2} : 3$ b) $3 : \frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{4} : \frac{1}{3}$

44. Completa las siguientes expresiones:

a) El recíproco de $\frac{1}{2}$ es _____.

b) El recíproco de $\frac{3}{4}$ es _____.

c) El recíproco de $\frac{9}{12}$ es _____.

d) _____ es el recíproco de 0,1.

45. Completa la siguiente tabla:

Fracción	$\frac{1}{8}$	$1\frac{1}{5}$			$4\frac{1}{5}$	
Recíproco			$\frac{4}{7}$	$\frac{10}{5}$		$\frac{7}{16}$

46. Forma el recíproco de las siguientes fracciones (los mixtos debes expresarlos previamente como fracciones impropias). Calcula el producto de cada fracción por su recíproco. ¿A qué conclusión llegas?

a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{2}{7}$ c) $\frac{13}{15}$ d) $\frac{19}{22}$ e) $1\frac{6}{7}$ f) $5\frac{1}{3}$

47. Halla el cociente. Simplifica siempre que sea posible.

a) $\frac{1}{2} : 3$ b) $\frac{1}{5} : 3$ c) $\frac{2}{3} : 14$ d) $2 : \frac{1}{2}$ e) $4 : \frac{4}{5}$

f) $\frac{3}{4} : 9$ g) $\frac{3}{4} : 5$ h) $\frac{1}{9} : 3$ i) $5 : \frac{5}{6}$ j) $7 : \frac{7}{15}$

48. Calcula. Simplifica tanto como sea posible.

a) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{5} : \frac{1}{6}$ c) $\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$ d) $\frac{2}{3} : \frac{2}{3}$ e) $\frac{2}{3} : \frac{1}{5}$

f) $\frac{3}{5} : \frac{1}{5}$ g) $\frac{3}{4} : \frac{15}{8}$ h) $7\frac{1}{2} : 1\frac{1}{4}$ i) $4\frac{4}{5} : \frac{8}{15}$ j) $6\frac{3}{5} : \frac{3}{5}$

49. ¿Por qué fracción multiplicas $\frac{5}{6}$ para obtener $2\frac{1}{7}$?

50. Pedro llevó a una excursión $\frac{1}{2}$ lb de queso. La repartió por igual entre él y dos compañeros más. ¿Qué parte de una libra tocó a cada uno?

51. María tenía $\frac{3}{4}$ m de cinta. La repartió por igual entre ella y Luisa. ¿Qué parte de la cinta le tocó a cada una?

52. El producto de dos fracciones es 6. Uno de los factores es $1\frac{1}{2}$ ¿Cuáles el otro?

53. El cociente de una división indicada es $\frac{3}{4}$. El dividendo es 3. ¿Cuál es el divisor?

54. Anita tenía 9 panquecitos. Los dividió en cuartos para repartirlos por igual entre varias compañeras. Cada una recibió $\frac{3}{4}$ de panqué. ¿Para cuántas personas alcanzaron los 9 panquecitos?

55. En el círculo de interés de costura las estudiantes confeccionarán mantelitos individuales. Para cada mantelito necesitan $\frac{1}{4}$ m. Han comprado 3 m de tela. ¿Cuántos mantelitos podrás confeccionar?

56. Cary tenía $\frac{3}{4}$ m de tela blanca. Gastó $\frac{1}{2}$ m en hacer una blusa a su hija. ¿Qué parte de lo que tenía fue lo que gastó?

57. Dos muchachos compraron $28\frac{3}{4}$ m de cordel para utilizarlo en dos papalotes. Lo dividieron en dos partes iguales. ¿Cuánto mide la parte que le tocó a cada uno?

58. En la clase de educación laboral los estudiantes van a confeccionar marcadores. Disponen de 3 m de cinta. Cada marcador tiene una longitud de $15\frac{1}{2}$ cm. ¿Para cuántos marcadores alcanzará la cinta?

59. Un obrero tarda $1\frac{3}{4}$ h en barnizar un estante de cocina. En 7 h de trabajo, ¿cuántos estantes habrá barnizado?

60. Halla:

a) $\frac{1}{4}$ de 4; de 12; de 24; de 40.

b) $\frac{3}{10}$ de 40; de 60; de 80; de 100.

c) $\frac{1}{5}$ de 20; de 25; de 30; de 50.

61. Halla:

a) $\frac{1}{9}$ de 81 b) $\frac{2}{3}$ de 51 c) $\frac{1}{4}$ de 96 d) $\frac{5}{9}$ de 81

e) $\frac{7}{8}$ de 80 f) $\frac{1}{6}$ de 120 g) $\frac{7}{6}$ de 120

h) $\frac{17}{12}$ de 240 i) $\frac{18}{15}$ de 450 j) $\frac{7}{10}$ de 1 000

62. Dice Celia que ella duerme $\frac{1}{3}$ de las 24 h del día. ¿Cuántas horas duerme Celia?

63. De una caja de 20 lápices vamos a coger $\frac{3}{4}$ de ellos. ¿Cuántos lápices cogeremos?

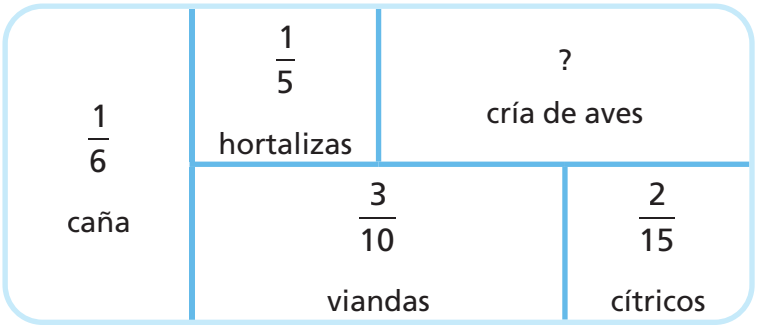
64. En un aula de 5ª hay matriculados 30 educandos, pero el pasado martes, por la lluvia, dejó de asistir $\frac{1}{5}$ de los educandos.

a) ¿Cuántos educandos faltaron por la lluvia?

b) ¿Cuántos asistieron?

65. Gladys tiene que resolver 30 problemas de una guía de estudio. Un día resolvieron $\frac{3}{10}$ de los problemas y al día siguiente $\frac{4}{7}$ del resto. ¿Cuántos problemas le faltan por resolver?

66. *La tabla siguiente muestra la distribución realizada con las 180 cab de una granja. ¿Cuántas caballerías se dedican a la cría de aves?



67. Un terreno de 200 m² se distribuyó del modo siguiente:

$\frac{1}{4}$ del terreno para siembra de cítricos,

$\frac{2}{3}$ del resto para frutos menores,

$\frac{1}{2}$ del nuevo resto para árboles frutales,y los metros cuadrados restantes para hortalizas.

¿Cuántos metros cuadrados mide cada parcela?

68. Resuelve las siguientes actividades dando siempre la respuesta en una fracción irreducible:

a) ¿Qué parte es 6 de 12?
b) ¿Qué parte es 5 de 10?
c) ¿Qué parte es 20 de 40?
d) ¿Qué parte es 18 de 12?
e) ¿Qué parte es 21 de 14?
f) ¿Qué parte es 9 de 18?

69. Enrique tiene 12 años y su papá 34 años. ¿Qué parte representa la edad de Enrique de la edad de su papá?

70. Halla qué parte de cada conjunto son los subconjuntos representados en las figuras correspondientes. En cada caso comprueba si la suma de las fracciones obtenidas equivale a la unidad.

Conjunto de 18 figuras geométricas

Fig. 2.33 Subconjunto de triángulos

Fig. 2.34 Subconjunto de rectángulos

Fig. 2.35 Subconjunto de círculo

71. Marlene desea lograr realizar 150 abdominales diarias. El primer día realizó 30 abdominales y el segundo 50.

a) ¿Qué parte de las 150 abdominales ha realizado cada día?

b) ¿Qué parte le falta por realizar para lograr su deseo?

72. Isabel asiste a clases 4 h, permanece en el gimnasio 2 h y durante 3 h realiza diversas actividades. ¿Qué parte del día dedica a cada actividad?

73. Adiciona:

a) 0,7 + 0,2 b) 0,38 + 0,27 c) 0,48 + 0,34

d) 1,3 + 0,9 e) 0,83 + 0,26

74. Calcula:

a) 32,16 + 234,9 + 8,9 + 0,765 + 2,31

b) 0,45 + 234,1 + 4,506 + 0,12 + 2 809,09

c) 51,23 dm + 7,3 dm + 2,02 dm + 0,21 dm

d) $ 45,3 + $ 34 + $ 46,32 + $ 89

75. Ramsés fue al mercado y gastó $ 89,4 en carne, $ 12 en platanitos, $ 45,70 en frutas y $ 20 en refrescos. ¿Cuánto gastó en total?

76. Sustrae:

a) 1,5 – 0,4 b) 5,03 – 0,64 c) 3,09 – 0,59

d) 6,07 – 3,45 e) 45,67 – 23,08 f) 856,34 – 45,987

g) 412,6 – 123,54 h) 400,0 – 213,37

77. Calcula. Antes de calcular convierte los datos en metros:

a) 45 m – 356 mm

b) 2,487 m – 346 mm

c) 8 m – 2 0044 mm

78. ¿Cuál es la diferencia entre 56,89 y la suma de 25,45; 2,31 y 0,6?

79. La suma de las longitudes de los tres lados de un triángulo es 34,6 cm. El lado *a* tiene 6,8 cm de longitud. El lado *b* es 3 cm más corto que el lado *a*. ¿Qué longitud tiene el lado *c*?

80. Adiciona. Expresa en la forma más ventajosa y calcula. Compara los resultados.

a) 0,06 + 0,06 + 0,06 + 0,06

b) 1,23 + 1,23 + 1,23 + 1,23 + 1,23 + 1,23

c) 0,062 + 0,062 + 0,062

81. Resuelve los siguientes ejercicios:

a) 0,3 · 4 b) 2,1 · 6 c) 4,65 · 3 d) 1,23 · 24

e) 7,6 · 85 f) 0,387 · 16 g) 6,283 · 73 h) 32,56 · 34

82. ¿Cuál es el cuádruplo de 0,46?

83. Halla el quíntuplo de 2,65.

84. Un lado de un rectángulo tiene 3,56 m de longitud. El otro lado es 44 cm más largo. Calcula la suma de sus 4 lados.

85. De un rollo de 15 m de tela se venden 3 veces 1,50 m y dos veces 1,40 m. ¿Cuántos metros de tela quedan?

86. De la serie de números escritos a la derecha de cada multiplicación, subraya la expresión que representa el producto de cada una de ellas.

a) $2,9 \cdot 0,4$	116,0;	1,16;	11,6;	0,116
b) $8,4 \cdot 0,7$	5,88;	0,588;	58,8;	588,0
c) $0,8 \cdot 0,7$	0,056;	56,0;	5,6;	0,56
d) $3,12 \cdot 0,06$	1,872;	18,72;	0,187 2;	187,2

87. Completa las siguientes tablas:

a	b	$a + b$	$a - b$	$b - a$	$a \cdot b$
1,2		5,4			
9			7,9		
1,67	2,7				

a	b	$a + b$	$a - b$	$b - a$	$a \cdot b$
6,3	10				
	6,4				14,72
1,67	2,7				

88. Luisa compró 3,5 m de cinta de $0,42 el metro. Su hermana compró 7,5 m de la misma cinta. ¿Cuánto pagaron las dos hermanas juntas por la cinta?

89. Multiplica:

a) $6,57 \cdot 10$	b) $7,34 \cdot 100$	c) $7,56 \cdot 1\,000$
d) $56,98 \cdot 100$	e) $67,8 \cdot 10$	f) $7,342 \cdot 100$
g) $21,435 \cdot 10\,000$	h) $34,213\,5 \cdot 10\,000$	

90. ¿Cuánto cuesta un millar de lápices si cada lápiz cuesta $ 0,50?

91. María compró 10 libretas a $ 5,50 cada una y 100 gomas de borrar de $1,80 cada una. ¿Cuánto gastó en total?

92. Divide:

a) 5,38 : 10 b) 34,612 : 10

c) 567,8 : 100 d) 43,876 : 10 000

93. Resuelve:

a) $\frac{3}{8}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{5}-\frac{1}{8}+\frac{3}{4}$

c) $\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{8}{9}$ d) $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}$

94. Calcula:

a) 0,5 + 2,35 – 1,8 b) 3,6 – 1,25 + 4,8

c) 0,5 + 0,76 · 7 d) 5 + 3,5 · 8 – 8,45

e) 3,6 + 0,8 · 4 + 0,5

95. Calcula:

a) $\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)$ b) $\left(\frac{11}{12}-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{7}{8}-\frac{1}{3}\right)$

c) $\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{8}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{12}\right)$ d) $\frac{5}{6}-\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\right)$

96. Calcula:

a) 68,7 – (44,7 + 13,5) b) $6,9 \cdot (3,9 + 2,5) \cdot 3^2$

c) (0,75 – 0,3) · 0,8 d) $(0,5 + 0,76) \cdot 5^2$

97. Si se triplica 0,3 y se le adiciona 0,1. ¿Qué expresión decimal se obtiene?

98. Adiciona 13,48 y 16,5. Duplica la suma hallada.

99. Sustrae de 16,486 la expresión decimal 5,49. Cuadruplica la diferencia obtenida.

100. *Resuelve:

a) $\frac{1}{2} \cdot 2,5 + 0,8 \cdot 1,5 + 1,6 \cdot 5$ b) $0,6 + \frac{2}{5} \cdot 10 + 0,2^2 \cdot 3^2$

c) $1{,}4 \cdot 100 - \frac{2}{5} \cdot 50$ d) $100 \cdot (1{,}4 - 0{,}4) - 50$

e) $0{,}4 \cdot (0{,}8 - 0{,}5) + 1{,}952$

2.5 Ejercitación variada

1. Escribe en forma de fracción:

a) Tres quintos. b) Cuatro sextos. c) Dos tercios.
d) Tres séptimos. e) Cinco sobre doce. f) Siete décimos.

2. a) Para expresar en días una fracción de semana, ¿qué denominador pondrías?

b) ¿Qué parte de la semana representan los días que no asistes a la institución educativa?

3. Han transcurrido 9 meses del año. ¿Qué fracción de año queda hasta el final?

4. Un flan se ha dividido en 9 partes iguales.

a) ¿Con qué fracción representarás la unidad fraccionaria?
b) Si se reparten 4 partes, ¿qué fracción queda?
c) Luis coge 2 de esas partes, ¿qué fracción cogió?

5. Un dulce se ha dividido en 10 partes iguales:

a) ¿Con qué fracción representarás cada parte?
b) Si se reparten 5 de esas partes, ¿qué fracción se ha repartido?
c) Carlos recibe 3 partes, ¿qué fracción ha recibido?
d) ¿Qué parte del dulce queda si se han repartido 8 partes?

6. Uniendo los puntos medios de los lados del triángulo equilátero de la figura 2.36 obtendrás cuatro triángulos equiláteros iguales. ¿Qué parte es cada uno del triángulo total?

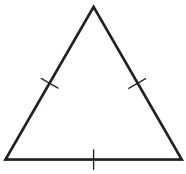


Fig. 2.36

7. Hay un conjunto de 12 lápices de colores.

a) ¿Cuántos lápices son del conjunto?

b) Si hay 3 lápices de tonos azules, ¿qué parte del conjunto representan?

8. Un obrero ahorra $ 60 mensuales, lo que representa de su salario $\frac{1}{4}$.

a) ¿Cuánto gana mensualmente este obrero?

b) Si quiere comprar a su hijo una mochila que cuesta $ 180, ¿en cuántos meses podrá haber ahorrado esa cantidad?

9. Dos educandos de quinto grado hacen comentarios sobre el concurso de Matemática. Alexis comenta: en mi destacamento hay 42 estudiantes y fueron al concurso $\frac{5}{7}$ del total. Aprobaron $\frac{14}{15}$ de los que se presentaron.

Rubén dice: de mi aula aprobaron 27 estudiantes. Este número representa $\frac{9}{10}$ de los que se presentaron y el número de estudiantes presentados equivale a $\frac{5}{6}$ de los estudiantes matriculados.

a) ¿Cuál de las dos aulas tiene más estudiantes matriculados?

b) ¿Cuál tuvo mayor número de estudiantes aprobados?

10. Analiza el recuadro siguiente:

$$\frac{1}{2};\frac{1}{5};\frac{2}{4};\frac{1}{3};\frac{6}{5};\frac{6}{18};\frac{9}{8};\frac{3}{6};\frac{3}{9};\frac{5}{10}.$$

$$\frac{7}{6};\frac{2}{10};\frac{4}{12};\frac{15}{14};\frac{2}{6};\frac{4}{8};\frac{5}{15};\frac{10}{9};\frac{19}{12};\frac{10}{20}.$$

a) Forma el conjunto *A* con todas las fracciones impropias que aparezcan en el cuadro.

b) Selecciona tres fracciones impropias, exprésalas como números mixtos.

c) Forma el conjunto *B* con todas las fracciones equivalentes a $\frac{1}{2}$.

d) Forma el conjunto *C* con todas las fracciones equivalentes a $\frac{1}{3}$.

11. Representa en el rayo numérico (segmento unidad 4 cm).

$$\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{3}{4};\frac{4}{8};\frac{2}{16};\frac{1}{8};\frac{9}{8};\frac{3}{2};\frac{2}{4}.$$

a) ¿Por qué hay fracciones a las que les corresponde el mismo punto que a otras?

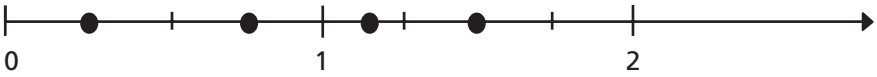


Fig. 2.37

12. Escribe dos fracciones para cada punto señalado en el rayo numérico de la figura 2.37.

13. Escribe en notación decimal:

a) $\frac{7}{10}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{8}{100}$

d) $\frac{9}{5}$ e) $\frac{3}{10}$ f) $\frac{24}{1000}$

g) $\frac{129}{1000}$ h) $2\frac{1}{5}$ i) $2\frac{1}{4}$

14. Escribe cómo se leen las siguientes expresiones decimales:

a) 0,6 b) 0,34 c) 2,004 d) 352,007

e) 2 167,8 f) 15,53 g) 8 002,034

15. Escribe:

a) El número decimal cuya parte entera es 24 y su parte decimal es 4 milésimas.

b) El número decimal formado por 7 enteros y 7 centésimas.

c) Cinco números decimales diferentes cuyas partes decimales sean 803 milésimas.

16. Traza un rayo numérico (segmento unidad 10 cm). Representa:

a) 0,6 b) 0,34 c) 0,23 d) 0,92

17. Compara cada pareja de fracciones. Fundamenta. Halla después la suma de las fracciones dadas.

a) $\frac{3}{5}$ y $\frac{3}{4}$ b) 0,8 y $\frac{3}{4}$ c) $\frac{3}{5}$ y 0,9

d) $\frac{5}{2}$ y 3,5 e) 0,7 y 0,76 f) $\frac{3}{4}$ y 0,75

18. Completa la tabla siguiente:

a	b	$a + b$	$a - b$	$b - a$
$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$			
$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{2}$			
$\frac{1}{4}$		0,5		
0,9				$\frac{1}{2}$

19. Halla el valor de y sabiendo que $y = x \cdot 0{,}5 + 0{,}5$.

x	1	0,8	1,2	4
y				

x	0,5	2	3,5	10
y				

20. Completa las siguientes tablas:

x	$x : 1\frac{4}{5}$
$\frac{7}{8}$	
0,45	
3,708	

x	***1,1: x***
$2\frac{1}{6}$	
0,22	
$\frac{11}{10}$	

21. Calcula y simplifica tanto como sea posible.

a) $\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\right)$

b) $\frac{3}{13}\cdot\left(\frac{7}{4}+\frac{1}{5}\right)$

c) $\left(\frac{7}{4}-\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{8}{11}$

d) $\left(3-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(2+\frac{4}{8}\right)$

e) $\left(\frac{15}{30}-\frac{4}{10}\right):\frac{1}{3}$

f) $\left(5-3\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\right)\cdot 4$

g) $\left(\frac{9}{12}+\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{1}{3}$

h) $\left(5\frac{4}{7}-1\frac{3}{4}\right):\frac{15}{14}$

22. Resuelve:

a) 0,3 · 32 + 0,5 · 12 + 1,91 · 4

b) 0,4 + 0,7 · 2 + 0,5 · 6

c) 1,4 · 100 – 0,2 · 30

d) (0,7 + 0,3) · (3,6 – 0,4) – 3,7

e) (0,5 + 0,9) · 3 – 0,6 · 7

23. Completa los ejercicios de cálculo:

a)
$$\begin{array}{r} 6,29 \\ +\square\square,\square\square \\ \hline 20,163 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 52,\square 31 \\ +\ \square,2\square 4 \\ \hline \square 1,09 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} \square 2,\square 4 \\ \square,96\square \\ \hline 91,2\square 2 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r} \square 0\square,\square \\ -\ 96,7\square \\ \hline 5,62 \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{r} 6,\square\cdot 3,4 \\ \hline \square\square 4 \\ 27\square \\ \hline 2\square,\square 2 \end{array}$$

24. *Completa los cálculos para que puedas ascender por la escalera (fig. 2.38).

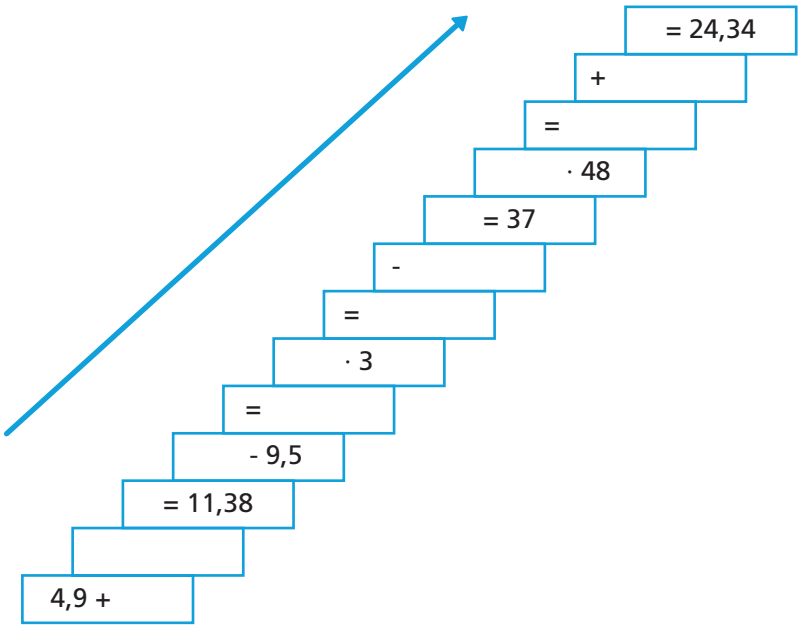


Fig. 2.38

25. Halla el valor de *x* (*x* representa una expresión decimal) (fig. 2.39).

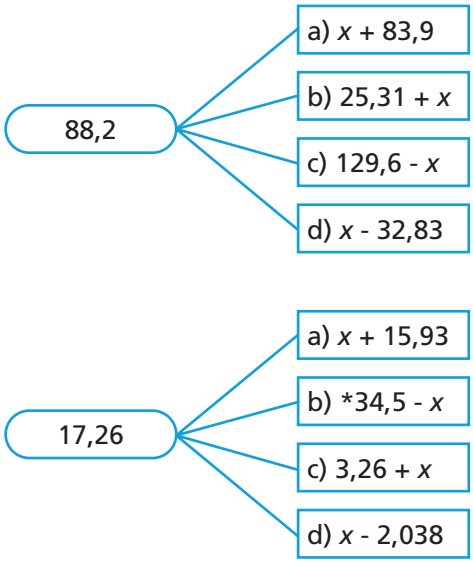


Fig. 2.39

26. Con las cifras básicas 7; 2; 3 y 5:

a) Escribe 4 expresiones en notación decimal con tres lugares decimales.

b) Ordénalas de mayor a menor.

c) Adiciona las tres expresiones que escribiste.

d) ¿En cuánto excede la mayor de esas expresiones decimales a la menor?

27. Escribe en la línea una expresión decimal que convenga:

a) $7 + _____ < 9{,}8$

b) $6{,}24 - _____ > 0$

c) $1{,}03 + _____ = 2{,}05 - 0{,}07$

d) $1{,}6 + _____ = 4{,}3 + 0{,}9$

28. En un elevador de carga se introducen cuatro cajas de materiales; las cajas pesan $8\frac{3}{4}$kg

a) ¿Cuánto pesan las cuatro cajas en total?

b) ¿Cuál de las cajas pesa más?

c) Ordena los pesos de las cajas de mayor a menor.

29. Según datos estadísticos, la temperatura máxima absoluta registrada por la estación Casablanca (La Habana), fue de 38,2 °C el día 12 de septiembre de 2015 y la mínima absoluta registrada por la estación Bainoa es de 0,6 °C el día 18 de febrero de 1996. ¿En cuánto excede la máxima a la mínima temperatura registrada por estas estaciones? *Fuente: Instituto de Meteorología.*

30. La tabla que aparece a continuación representa la lluvia total media anual de las provincias durante el año 2016 según datos estadísticos. *Fuente: Instituto Nacional de Recursos Hidráulicos.*

a) ¿En cuánto exceden las lluvias registradas en la provincia Artemisa a las registradas en la provincia Las Tunas?

Provincias de Cuba	Milímetros
Pinar del Río	1 484,7
Artemisa	1 667,7
La Habana	1 315,6
Mayabeque	1 346,4
Matanzas	1 325,7
Villa Clara	1 073,7
Cienfuegos	1 225,3
Sancti Spíritus	1 173,1
Ciego de Ávila	955,8
Camagüey	1 174,5
Las Tunas	945,9
Holguín	1 270,1
Granma	1 187,3
Santiago de Cuba	1 160,3
Guantánamo	1 661,6
Isla de la Juventud	1 457,5

b) ¿Cuál es el acumulado total de lluvias caídas entre las provincias Villa Clara, Cienfuegos, Sancti Espíritus y Ciego de Ávila?

c) Investiga con tus compañeros, docentes y familiares cuáles han sido las obras desarrolladas por el Instituto Nacional de Recursos Hidráulicos para lograr mejores condiciones en el abasto de agua.

31. En la tabla siguiente puedes apreciar el número de frentes fríos que azotó cada región, a partir de la información del Centro Nacional de Estudios del Clima, Instituto de Meteorología. *Fuente: Oficina Nacional de Estadística e Información.*

Categorías	Regiones (Unidad)		
	Occidental	Central	Oriental
Débiles	485	572	483
Moderados	321	83	54
Fuertes	20	7	3

a) ¿Qué parte representan los frentes fríos fuertes ocurridos en la zona Central de los ocurridos en la zona Oriental?

b) Calcula qué parte son los frentes fríos fuertes de los débiles ocurridos en la zona Oriental.

c) ¿En cuánto exceden los frentes fríos moderados de la zona Occidental a los de la zona Central?

32. Según datos estadísticos, en el año 2016 la superficie total cubierta de bosque fue de 3 240,9 miles de ha, de ellas 2 705,5 son naturales. ¿Cuántos miles de hectáreas no son naturales? *Fuente: Dirección Nacional Forestal. Ministerio de la Agricultura.*

33. Según datos estadísticos en la provincia Matanzas en 2015 las áreas protegidas terrestres son de 7 470,7 km^2 y la marina es de 2 261, 5 km^2 de superficie.

a) ¿Cuántos kilómetros cuadrados más hay de superficie terrestre protegida que de marina?

b) ¿Cuál es la superficie total de áreas protegidas entre la terrestre y marina en la provincia Matanzas? Fuente: Centro Nacional de Áreas Protegidas.

34. La venta de hortalizas en los mercados agropecuarios estatales de enero a marzo del año 2017 aparece recogida en la tabla siguiente:

Hortalizas	Toneladas
Tomate	6 357,7
Cebolla	3 206,1
Ajo	197,1
Calabaza	2 233,2
Col	2 935,0
Otras hortalizas	7 374,0

a) ¿Cuántas toneladas más de tomate que de calabaza se vendieron?

b) ¿Cuál fue el total de toneladas de ajo, cebolla, col y otras hortalizas vendidos?

35. La tabla muestra la tasa de natalidad en Cuba por 1 000 habitantes durante los años 2012 al 2016:

2012	2013	2014	2015	2016
11,3	11,2	10,9	11,1	10,4

a) ¿En cuánto excede la natalidad del año 2012 a la ocurrida en el año 2016?

b) ¿En cuánto ha disminuido la natalidad del año 2016 en relación con la del año 2015?

c) Representa en una gráfica de barras la natalidad en estos años. Redondea previamente los datos de manera conveniente.

36. Los $\frac{3}{4}$ de los ahorros de una persona son $ 21,00. ¿Cuánto dinero tiene ahorrado? Marca con una (X) la respuesta correcta.

a) ___ $ 147,00 b) ___ $ 28,00

c) ___ $ 49,00 d) ___ $ 12,00

37. Ya Luis completó los $\frac{3}{5}$ de su álbum de sellos. Para llenar la cuarta parte de lo que le falta necesita 36 sellos. ¿Cuántos sellos, en total, lleva su álbum? Marca con una (X) la respuesta correcta.

a) ___ 76 b) ___ 360 c) ___ 28 d) ___ 144

38. Amelia ahorró $ 120 y gastó $ 60. ¿Qué parte del dinero gastó? ¿Qué parte le quedó?

39. Pedro reparte $ 1 entre sus cuatro hijos. A uno le da $0,20, a otro $ 0,25, al otro $ 0,30 y el resto al cuarto. ¿Qué parte del peso le ha dado a cada uno de sus hijos?

40. De los $ 210 que tenía ahorrado Arturo, prestó $ 40 a su hermana y $ 90 a su hermano.

a) ¿Qué parte del dinero ahorrado por Arturo prestó a su hermana?

b) ¿Qué parte prestó a su hermano?

c) ¿Qué parte representa lo prestado a su hermana de lo que prestó a su hermano?

41. Ramsés y Yaniel deben recorrer la misma distancia. Ramsés ha recorrido $\frac{7}{8}$ m más que Yaniel. Si Yaniel ha recorrido $1\frac{3}{4}$ m.

a) ¿Cuántos metros han recorrido entre los dos?

42. Un camión carga $\frac{4}{5}$ m^3 de tierra como promedio. El camión ha realizado 35 viajes. ¿Cuántos metros cúbicos de tierra ha cargado?

43. Isabela ha respondido 75 ejercicios de los asignados para la preparación de concursos y Alberto ha respondido $\frac{14}{15}$ de los ejercicios resueltos por Isabela. ¿Cuántos ejercicios ha respondido Alberto?

44. Marta está haciendo un dulce; la receta dice que debe poner $1\frac{3}{4}$ taza de leche. Su hermana Elena quiso después hacer un dulce de la mitad del tamaño del que hizo Marta. ¿Qué cantidad de leche necesitó?

45. Un carpintero cortó una varilla de $4\frac{3}{4}$ dm. Después cortó otra que contenía $5\frac{1}{3}$ veces a la anterior. ¿Qué longitud tenía la última varilla cortada?

46. Un edificio tiene 28 m de altura y esa altura representa los $\frac{4}{7}$ de los $\frac{7}{8}$ de la altura de otro edificio. ¿Qué altura tiene el otro edificio?

47. María tiene 18 años. Si la edad de María es $\frac{3}{2}$ de la de su hermano Antonio, ¿qué edad tiene Antonio?

48. ¿Cuántos litros de agua contiene un depósito de 600 L que está ocupado en $\frac{3}{5}$ de sus partes? (fig. 2.40).

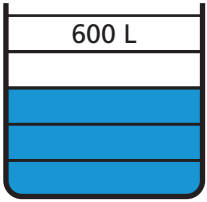


Fig. 2.40

49. Un depósito contiene 120 L de agua y está lleno las tres cuartas partes (fig. 2.41).

¿Qué capacidad tiene este depósito?

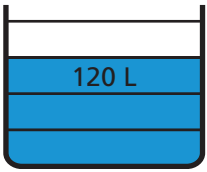


Fig. 2.41

50. En un bosque hay 310 árboles, se talaron sus $\frac{2}{5}$ partes, poco después se talaron $\frac{1}{3}$ de los árboles que quedaban. ¿Cuántos árboles no se talaron?

51. Alfredo gasta $\frac{1}{3}$ de su dinero en galletas de chocolate y $\frac{1}{5}$ en galletas de vainilla. ¿Qué fracción de su dinero queda para otros gastos?

52. Una empresa quiere embotellar 513 L de zumo de limón. Si cada botella tiene una capacidad de $\frac{2}{3}$ L ¿cuántas botellas necesitará?

53. Expresa la fracción de cuadrado que ocupa cada pieza del tangram de la figura 2.42.

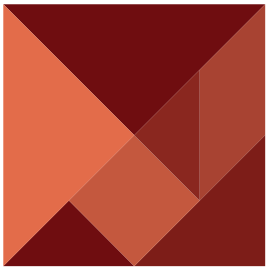


Fig. 2.42

54. Han votado 5 700 personas de las que tenían derecho al voto en unas elecciones, de las cuales $\frac{2}{5}$ son mujeres y el resto hombres. ¿Cuántas decenas de hombres votaron?

55. ¿Cuántos centímetros son los $\frac{2}{5}$ de los $\frac{3}{4}$ de 10 hm?

56. Con un botellón de refresco se han llenado 40 botellas de $\frac{3}{4}$ L. ¿Cuántos litros de refresco había el botellón?

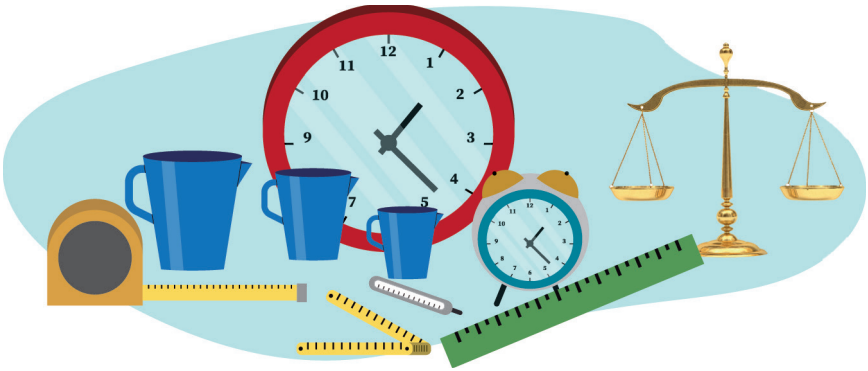
57. Enrique ha pedido un préstamo de $ 1 300 y ha pagado $\frac{1}{4}$ al contado y el resto en 6 plazos. ¿Cuál será el importe da cada plazo?

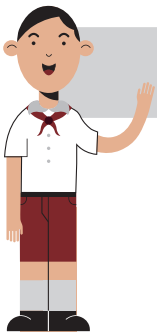
58. El padre de Andrés tiene 45 años, la madre, los $\frac{4}{5}$ de la edad del padre. Calcula la edad de Andrés, que es igual a los $\frac{2}{9}$ de la de su madre.

59. Carmen tiene 45 años y su hija menor un tercio de su edad. ¿Cuántos años suman entre la madre y la hija?

UNIDAD 3

Magnitudes



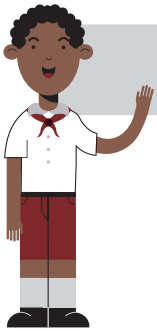


¿Qué voy a aprender?

- Nuevas unidades de longitud, masa, monetarias y de tiempo, y cómo medir, estimar y convertir empleando estas unidades de medida.
- Unidades de superficie, de volumen y de capacidad.
- A resolver ejercicios y problemas teniendo en cuenta estas unidades.

¿Para qué me servirá?

Con los nuevos conocimientos podrás resolver ejercicios y problemas variados de interés práctico en los que te serán de gran utilidad los conocimientos adquiridos acerca de las magnitudes y el cálculo con ellas.



¿Qué debo saber?

- Procedimientos del cálculo con números y cantidades de magnitud.

Algo de historia

En 1875, en París, fue implantado el Sistema Métrico Decimal (SMD) como sistema universal por el Tratado del Metro, confirmado por la primera Conferencia General de Pesas y Medidas que se desarrolló en 1889. Este sistema se fue perfeccionando hasta llegar a nuestros días tal y como lo vas conociendo.

Recuerda que

- Una magnitud es cualquier propiedad de los cuerpos que se puede comparar, que puede ser distinguida cuantitativamente.
- Medir es determinar cuántas veces un representante de una magnitud tomada como unidad está contenido en otro representante de la misma magnitud.
- Una cantidad medida (dato de magnitud) se expresa con un número y una unidad de medida.
- Algunas magnitudes convencionales del Sistema Métrico Decimal son: masa, longitud, superficie; capacidad y volumen.
  - La ***masa*** tiene como unidad de medida principal al kilogramo.
  - La ***capacidad*** tiene como unidad de medida principal al litro.
  - La ***longitud*** tiene como unidad de medida principal al metro.
  - La ***superficie*** tiene como unidad de medida principal al metro cuadrado.

- El ***volumen*** tiene como unidad fundamental al metro cúbico.

- Existen otras magnitudes no convencionales que son de importancia por lo extendido que esta su uso en nuestro entorno.
- El (SI) Sistema internacional de unidades agrupa las unidades de medida que corresponden a las magnitudes fundamentales: longitud, masa, tiempo, temperatura, intensidad de la luz y cantidad de sustancia.

3.1 Unidades de masa

Las magnitudes del Sistema Métrico Decimal se estudian a partir de una unidad básica: el metro, el gramo, el litro, entre otras.

Los múltiplos y submúltiplos de las unidades básicas conforman el sistema de unidades. Para los múltiplos se usan las palabras compuestas de los prefijos kilo, hecto y deca y la unidad básica. Para los submúltiplos se usan los prefijos deci, centi y mili y la unidad básica.

Nombre	Símbolo	Relación
hectogramo	hg	1 hg = 100 g
decagramo	dag	1 dag = 10g

Las unidades de masa que conoces del sistema métrico decimal se completan con las que aparecen en el cuadro siguiente:

La balanza es el instrumento con que se mide la masa. Una balanza en equilibrio expresa que los cuerpos colocados en sus respectivos platillos son de igual masa.

Analiza el esquema de la figura 3.1, observa que tienes las nuevas unidades que conocerás en el grado, compara estas unidades con las de longitud y con

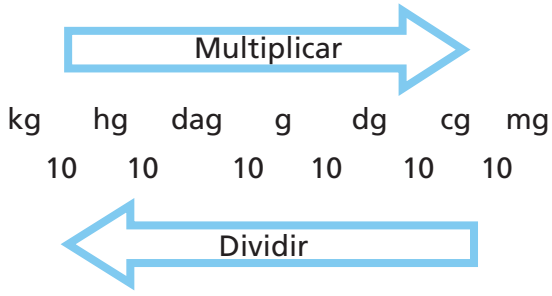


Fig. 3.1

el sistema de numeración decimal que ya estudiaste. Comenta la relación que encuentras.

Convertir una cantidad de medida es expresarla con otra unidad de medida. En la conversión de cantidades de magnitud son importantes: el número de conversión (expresa la relación entre las unidades involucradas en la conversión) y la comparación entre las unidades: si se va de una unidad mayor a una menor o si es a la inversa.

Ejemplo

a) Convertir 7 hg a decagramo.

El hectogramo es una unidad mayor que el decagramo; luego se multiplica el número de medida por el número de conversión: como 1 hg = 10 dag, el número de conversión es 10. Se debe calcular: $7 \cdot 10 = 70$.
R/ 7 hg = 70 dag.

b) Convertir 800 dag a kilogramo.

El decagramo es una unidad menor que el kilogramo; luego se divide el número de medida por el número de conversión: como 1 kg = 100 dag, el número de conversión es 100. Se debe calcular: $800 : 100 = 8$.
R/ 800 dag = 8 kg.

Reflexiona un instante

Observa y razona qué relaciones puedes encontrar entre las unidades de masa y el SND.

SND				UM	C	D	U
masa	kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
				2	4	6	9

¿Qué relación hay entre dos órdenes o lugares sucesivos? ¿Qué relación hay entre dos unidades de masa consecutivas?

2 469 mg se pueden descomponer en 2 g 4 dg 6 cg 9 mg.
2 469 se puede descomponer en 2 UM 4 C 6 D 9 U.

La tabla de posición, usada para representar cantidades de magnitud te puede facilitar el proceso de conversión.

Ejemplo

Observa con detenimiento la tabla y luego ejecuta la orden del ejercicio.

kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
	3	2	5			

¿Qué cantidad o dato de magnitud se ha representado en la tabla?

¿De cuántas formas diferentes los puedes escribir?

Son varias las posibilidades para escribir esa cantidad de magnitud. Por ejemplo, para expresarla en una unidad:

0,325 kg = 3,25 hg = 32,5 dag = 325 g = 3250 dg = 32500 cg = 325000 mg

En dos unidades diferentes: 3 hg 25 g = 3 hg 250 dg = ...

32 dag 5 g = 32 dag 50 dg = 32 dag 500 cg = ...

En tres unidades diferentes: 3 hg 2 dag 5 g.

La tabla también te puede facilitar el cálculo de sumas.

Ejemplo

Calcula 21 hg + 1 475 g + 324 dag auxiliándote de la tabla dada y da el total con una cantidad de magnitud expresada en una unidad.

	kg	hg	dag	g
21 hg	2	1		
1 475 g	1	4	7	5
324 dag	3	2	4	
		1	7 dg + 4 dg = 11 dag 11 dag = 1 hg 1 dag	
	6	8	1	5

La suma también se puede expresar en diferentes formas: 6 815 g o 681,5 dag o 68,15 hg o 6,815 kg.

Recuerda que

La propiedad fundamental de las unidades de masa: cada unidad es 10 veces mayor que la inmediata inferior y 10 veces menor que la inmediata superior.

Para medir la masa también se utilizan otras unidades mayores que el kilogramo que están relacionadas con las unidades del Sistema Internacional.

Quintal métrico (q) 1 q = 100 kg

Tonelada métrica (t) 1 t = 10 q = 1 000 kg

Dentro de las unidades de masa que no pertenecen al SI están: un quintal español (1 qq), una arroba (1 @), una libra (1 lb), una onza (1 oz), las que se relacionan entre sí de la manera siguiente:

1 qq = 4 @ = 100 lb

1 @ = 25 lb

1 lb = 16 oz

Otras relaciones con unidades del SI tales como:

1 lb = 460 g

1 kg = 2,2 lb

Saber más

Para convertir de una unidad de medida a otra puedes utilizar una aplicación que puedes incorporar a un teléfono celular.

Ejemplo

Observa las figuras 3.2 a 3.6.

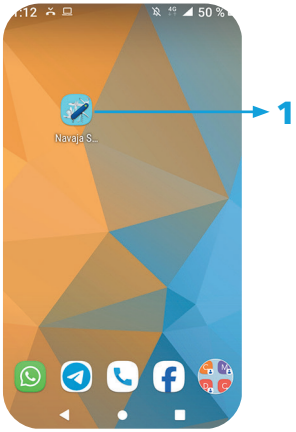


Fig. 3.2

Fig. 3.3

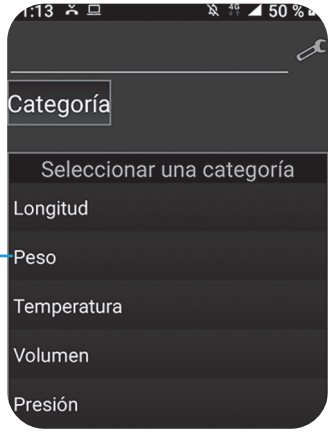


Fig. 3.4

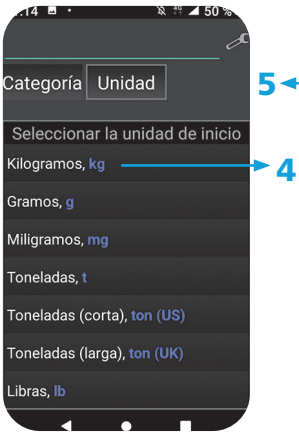


Fig. 3.5

Fig. 3.6

1. Aplicación Navaja Suiza

2. Se selecciona el conversor de unidades

3. A continuación se escoge una categoría en este caso Peso

4. Se selecciona la unidad inicio, aparece señalado el kg o selecciona otra

5. Se obtienen los resultados 1 kg es igual a las distintas unidades de masa que aparecen en la imagen

Ejercicios del epígrafe 3.1

1. Convierte en la unidad indicada entre paréntesis:

a) 7g (decigramo)

b) 2 kg 7 hg 8dag (hectogramo)

c) 0,3 hg (kilogramo)

d) 3 275 g (cuatro unidades de magnitud)

2. Calcula y expresa en la unidad menor:

a) 5,8 kg + 530 g b) 62 g – 578 cg

3. Escribe como suma de unidades de masa.

a) 0,4 dg b) 170,26 g c) 6,325 kg

4. Se desean envasar 20 t de papa en sacos que pueden contener hasta 50 kg. ¿Cuántos sacos se necesitarían?

Nota: cada saco debe quedar llenado a la máxima capacidad antes de usar el siguiente.

5. Completa las igualdades siguientes:

a) 3 mg 25 g = _____ dag _____ g

b) 483 mg = _____ dg _____ cg _____ mg

c) 76 dg = _____ mg

d) 4 dg 8 cg 3 mg = _____ cg

6. Individualmente resuelve los siguientes problemas y cuando termines compara tus respuestas con las de tus compañeros de equipo.

a) Claudia compró primero $\frac{3}{4}$ kg de guayaba y luego $\frac{1}{2}$ kg más. ¿Qué cantidad de guayaba compró en total?

b) Una bolsa de maíz de 200 gramos cuesta $ 1,69.

¿Cuántas bolsas necesitas comprar para tener 1 kg?

¿Cuál es el costo total?

c) Juan es gerente de un mercado especializado. La semana pasada recibió dos toneladas de azúcar en 40 sacos de 50 kg cada uno.

– Para su venta empaca el azúcar de un saco en bolsas de 500 g cada una. ¿Cuántas bolsas empacó?

- Otro saco de azúcar lo empacó en bolsas de 250 g. ¿Cuántas bolsas de estas obtuvo?
- Ulises pidió $\frac{3}{4}$ kg de azúcar. ¿Cuántas bolsas y de qué peso puede recibir?
- Luis necesitaba $2\frac{1}{2}$ kg de azúcar. ¿Cuántas bolsas recibió?
- Al finalizar la semana, el gerente Juan ha vendido 750 kg de azúcar de la que recibió. ¿Cuánta azúcar le queda en el mercado?

7. Escribe las cantidades de medida dadas en la tabla.

56,89 g; 4,309 g; 0,45 g; 2,65 g; 890 g; 24 g.

kg	hg	dag	g	dg	cg	mg

8. Ángela compró tres paquetes de harina lacteada de $1\frac{1}{2}$ kg y siete paquetes de 400 g. ¿Cuál es el peso de la harina que ella compró?

9. Un vagón de ferrocarril se cargó con cajas de 50 lb de peso. El peso total de la carga es de 2 t. ¿Cuántas cajas se cargaron en ese vagón?

10. Expresa la masa de los productos dados en gramos.

a) Mantequilla $\frac{1}{4}$ kg

b) Barra de guayaba $\frac{4}{5}$ kg

c) Pescado $\frac{3}{4}$ kg

11. Calcula y expresa en la unidad menor:

a) 5,8 kg + 530 g b) 62 g – 578 cg

12. Descompón como suma de cantidades de magnitud expresadas con una unidad.

a) 0,4 dg b) 170,26 g c) 6,325 kg

13. Calcula el peso en gramos en cada bolsa.

Bolsa A: 3 kg 375 g
Bolsa B: 2 kg 250 g

14. Una persona pesa 100 kg; sometida a un régimen de adelgazamiento pierde 175 g de peso cada día. ¿Cuánto pesa esta persona después de 60 días de adelgazamiento?

15. Cuando fue al médico, Yusnay pesó 23 kg 200 g. Él había aumentado 2 kg 350 g desde su última consulta. ¿Cuánto pesó cuando fue la vez pasada?

16. María le da a su gato 6 oz de comida todos los días. ¿Para cuántos días alcanzará una bolsa con 4 lb de comida?

17. Completa la tabla como se indica en el ejemplo.

kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
0,012	0,12	1,2	12	120	1 200	12 000
			280			
0,54						

18. La mamá de Minerva necesita 1 kg de queso para hacer un pastel, pero tiene varios trozos de queso de diferentes tamaños. ¿Con cuántos y cuáles de las variantes de cantidad trozos y peso tiene la cantidad de queso que necesita? Marca con una (X) la variante que consideras es la correcta.

a) ____ 4 trozos de $\frac{5}{4}$ kg b) ____ 4 trozos de $\frac{2}{4}$ kg

c) ____ 3 trozos de $\frac{1}{2}$ kg d) ____ 4 trozos de $\frac{1}{4}$ kg

19. Los siguientes niños compraron frijoles, observa el peso de las bolsas en la figura 3.7.

Fig. 3.7

¿Quiénes compraron la misma cantidad de frijoles? Marca con una (X) la variante que consideras es la correcta.

a) ____ Luis y Ana.
b) ____ Ángel y Ana.
c) ____ Luis y Ángel.
d) ____ Sara y Ángel.

3.2 Unidades de longitud

Recuerda que

A partir del metro se forman otras unidades llamadas múltiplos y submúltiplos del metro.

Los nombres de estas unidades se forman con los prefijos

kilo → mil
hecto → cien
deca → diez
deci → décima
centi → centésima
mili → milésima

Toda unidad de longitud equivale a 10 veces la unidad inmediata inferior y es la décima parte de la inmediata superior. Es decir, aumentan y disminuyen de 10 en 10.

Hay dos múltiplos del metro que completan el esquema que estudiaste en el grado anterior ellos son: el hectómetro y el decámetro.

Nombre	Símbolo	Relación
hectómetro	hm	1 hm = 100 m
decámetro	dam	1 dam = 10 m

Analiza el esquema de la figura 3.8, compara estas unidades con las de masa y con el sistema de numeración decimal que ya estudiaste. Comenta la relación que encuentras.

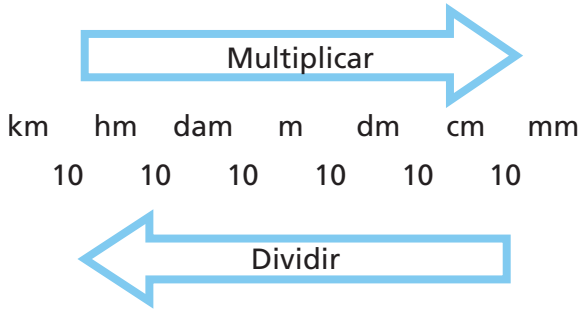


Fig. 3.8

Veamos mediante algunos ejemplos, los procedimientos más usados para convertir.

Ejemplos

a) Convierte 5 hm en dam.

El hectómetro es una unidad mayor que el decámetro; luego se multiplica el número de medida por el número de conversión: como 1 hm = 10 dam, el número de conversión es 10. Se debe calcular: $5 \cdot 10 = 50$.

R/ 5 hm = 50 dam.

b) Convierte 800 dam en km.

El decámetro es una unidad menor que el kilómetro; luego se divide el número de medida por el número de conversión: como 1 km = 100 dam, el número de conversión es 100. Se debe calcular: 800 : 100 = 8.

R/ 800 dam= 8 km.

c) Convierte 2 hm 23 m en metros.

Se trata de convertir una cantidad de magnitud expresada en dos unidades de magnitud en otra expresada en una sola unidad de magnitud.

Para ello, se convierte la parte del dato de magnitud con la mayor unidad en la menor y se suman los resultados. En este ejemplo se convierten los hectómetros a metros; 2 hm a m: el hectómetro es una unidad mayor que el metro; luego, se multiplica el número de medida por el número de conversión: como 1 hm = 100 m, el número de conversión es 100. Se debe calcular:

$2 \cdot 100 = 200$

2 hm = 200 m

200 m + 23 m = 223 m

R/ 2 hm 23 m= 223 m.

Saber más

¿Qué es una pulgada?

La pulgada es una unidad de longitud de origen inglés que no pertenece al SI pero que se usa en nuestro país, una pulgada (1 in) equivale aproximadamente a 2,54 cm.

Para convertir cantidades de medida expresadas en pulgadas (1 in) en otra unidad del Sistema Métrico Decimal, se procede de forma similar a los ejemplos mostrados en los que la conversión se realizaba con cantidades de magnitud del mismo sistema de medida: calculando previamente el número de conversión.

Ejemplo

Convierte 5 in a mm.

Si 1 in = 2,54 cm aproximadamente y 2,54 cm = 25,4 mm, entonces 1 in = 25,4 mm aproximadamente. El número de conversión que se debe considerar es entonces 25,4. Como la pulgada es una unidad de medida mayor que el milímetro, se debe calcular:

$5 \cdot 25{,}4 = 127{,}0$

R/ 5 in = 127 mm.

Saber más

Existen otras unidades de longitud que permiten medir enormes distancias, como la distancia de los planetas (fig. 3.9).

Fig. 3.9

Ejemplo

1 año luz (distancia que recorre la luz en un año) es aproximadamente 9,461 mil millones de kilómetros.

Perímetro de polígonos

Recuerda que conoces de geometría los polígonos de tres, cuatro y más lados (triángulos, cuadriláteros, pentágonos, entre otros) (fig. 3.10).

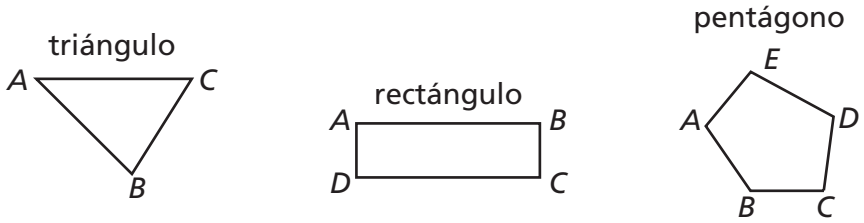


Fig. 3.10

Para determinar el perímetro de un polígono, se suman las longitudes de todos sus lados.

El perímetro de un polígono es la suma de las longitudes de sus lados.

Las fórmulas para el cálculo del perímetro de los polígonos se ajustan al número de lados y a las relaciones que se dan entre las longitudes de estos.

Perímetro del triángulo (fig. 3.11).

$P = a + b + c$

isósceles $P = 2a + b$

equilátero $P = 3 \cdot a$

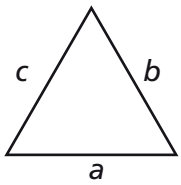


Fig. 3.11

Perímetro del cuadrilátero (fig. 3.12).

$P = a + b + c + d$

paralelogramos $P = 2(a + b)$

rombos $P = 4 \cdot a$

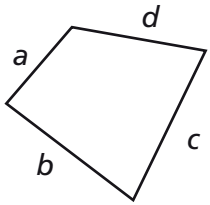


Fig. 3.12

La fórmula para calcular el perímetro de un cuadrado es: P = 4*a*, recuerda que en todo cuadrado las longitudes de sus lados son iguales.

Ejemplo

El perímetro de un cuadrado de 1,6 cm de lado se calcula 4 · 1,6 cm.
El perímetro del cuadrado es 6,4 cm.

Ejercicios del epígrafe 3.2

1. Un rollo de plástico para forrar libros tiene 15 m de largo. Se necesita una tira de 28 cm para forrar un libro. ¿Cuántos libros se pueden forrar con el rollo de plástico? ¿Qué cantidad del rollo se dejará de usar?

a) ¿Cómo cambian las respuestas, si se usaran 30 cm para forrar un libro?

2. Pedro trabaja en un mercado donde se dedica a los pequeños arreglos que surgen todos los días. Para realizar sus tareas, a veces tiene que resolver problemas matemáticos. Ayúdale.

Las estanterías del mercado tienen cuatro partes o (repisas), sobre las que se colocan las bebidas y los alimentos envasados. Los estantes rectangulares miden 200 cm de largo por 40 cm de ancho.

2.1 El encargado pide a Pedro que forre con cinta adhesiva los bordes de tres estanterías. ¿Cuántos metros de cinta necesita si la cinta adhesiva para el canto de las estanterías se vende en rollos cuya longitud viene expresada en distintas unidades de medidas? Marca con una (X) la variante que consideras es la correcta.

a) ____ 100dm b) ____ 750 dm c) ____ 5 000 cm
d) ____ 6 dam e) ____ 0,4 hm

2.2 ¿Qué modelo debe pedir si quiere que le sobre la menor cantidad de cinta que sea posible?

2.3 Al día siguiente, los empleados que reponen la mercancía preguntan a Pedro: entre dos estantes hay una altura de medio metro, y las latas de refresco que se colocan tienen una altura de 12 cm.

a) ¿Cuántas filas de latas podemos poner, colocadas unas sobre otras, para llegar lo más cerca posible al borde superior del estante?

b) ¿Cuántos centímetros de altura nos quedan libres?

3. Camila quiere decorar su cuarto y compra un papel decorado con mariposas que tienen 80 mm de ancho (fig. 3.13) ¿Cuántas mariposas completas puede tener en una pared que tiene 3 m de largo?

Fig. 3.13

4. En la figura 3.14 se muestran las distancias recorridas por cada animal.

el caracol avanzó 15 000 mm

la hormiga avanzó 1 500 cm

la tortuga avanzó 15 m

la cotorrita avanzó 150 cm

Fig. 3.14

¿Cuál de ellos hizo el menor recorrido? Marca con una (X) la respuesta que consideras es correcta.

a) ____ La hormiga. b) ____ La cotorrita.

c) ____ La tortuga. d) ____ El caracol.

5. Para resolver el siguiente problema primero encuentra el resultado de manera individual y después compáralo con el del resto de tus compañeros. Si hay diferencias, traten de encontrar los errores.

¿Cuánto queda de 5 m de tela después de cortar cuatro pedazos de 0,6 m cada uno?

6. Virginia avanza aproximadamente un metro cada dos pasos. En un paseo ha recorrido 1 hm 8 dam 9 m 50 dm. ¿Cuántos pasos ha debido dar para recorrer esa distancia?

Expresa la medida para la distancia recorrida en total por Virginia usando como única unidad, el metro.

7. Una lámina de acero de 29,343 cm de longitud se divide en 12 partes iguales. ¿Cuál es la longitud de cada parte, si en cada corte se pierde 0,93 mm del material?

8. Una cuadrilla de trabajadores asfaltó en el mes de enero 3 km de una carretera, en febrero 3 hm 8 m y en marzo 17 dam 4 m. ¿Cuántos hectómetros de carretera se han asfaltado en esos tres meses?

9. Dos tubos de 420 mm y 38,2 cm de longitud se sueldan por uno de sus extremos. Calcula la longitud del tubo resultante en centímetros.

10. Efectúa y expresa en metros la respuesta:

1,23 dam + 25,4 cm + 0,04 hm

11. ¿Cuántas varillas de 2,8 dm de longitud se podrán obtener de una varilla de 5 m 6 dm? Marca con una (X) la variante que consideras es la correcta.

a) ____ 36 b) ____ 18 c) ____ 20 d) ____ 40 e) ____ 48

12. Cierta persona compró 123,45 dam de cable eléctrico, de los cuales vende 0,004 km, utiliza 1 246 cm y dona 340 dm. ¿Cuánto le queda? Marca con una (X) la variante que consideras es la correcta.

a) ____ 116,5 dam b) ____ 1184,04 m c) ____ 11,84 dm

d) ____ 1184 cm e) ____ 116,52 m

13. Si:

A = 45,8 cm – 0,042 8 m

B = 0,82 dm + 14,3 cm

C = 2 (A – B) : 3

Hallar el exceso de A sobre C.

14. Indica si son verdaderas (V) o falsas (F) las desigualdades siguientes.

a) ____ 13,56 dm < 1 m 35 cm 6 mm

b) ____ 31,67 m > 3 m + 16 dm 7 cm

c) ____ 5,608 hm < 56 dm 8 m

d) ____ 2,24 dm < 0,2 m 24 cm

15. El perímetro de un rectángulo mide 1 500 mm y el ancho mide 25 cm, ¿Cuánto mide el largo del rectángulo? Expresa la respuesta en decímetros.

16. Calcula el perímetro del triángulo de la figura 3.15.

¿Cuánto mide el lado de un triángulo equilátero con igual perímetro que este?

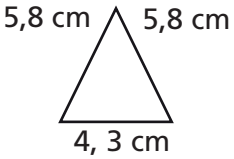


Fig. 3.15

17. Calcula el perímetro de la figura 3.16.

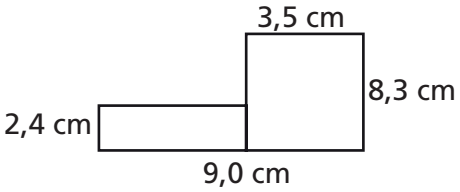


Fig. 3.16

18. La figura *ABCDEF* tiene un perímetro de 22,8 cm (fig. 3.17). Los lados *AB*, *FA* y *DE* de dicha figura tienen la misma longitud, igual a 3,0 cm. EF mide 2,0 cm. ¿Cuáles son las longitudes de los lados *BC* y *CD*, si estos son iguales?

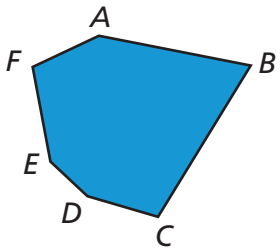


Fig. 3.17

19. Una lámina de acero de forma cuadrada con 1 430 mm de lado es reducida cortándole una franja de 138 cm de ancho. ¿Qué longitud tiene la pieza restante?

20. Calcula en metros las distancias que separan cada una de las casas de la institución educativa (fig. 3.18).

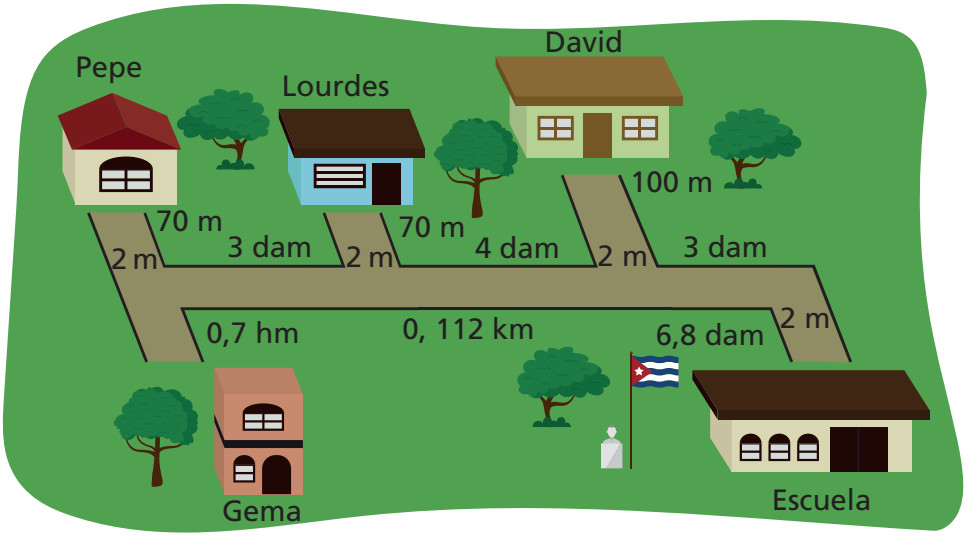


Fig. 3.18

21. ¿Cuál es el perímetro de la figura 3.19 representada? Marca con una (X) la respuesta que consideres es correcta.

a) ____ 21 m b) ____ 26 m

c) ____ 28 m d) ____ 34 m

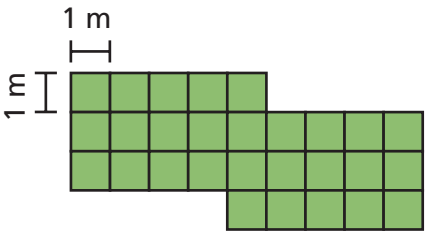


Fig. 3.19

22. En la figura 3.20 el lado mayor del triángulo sombreado mide 5 cm.

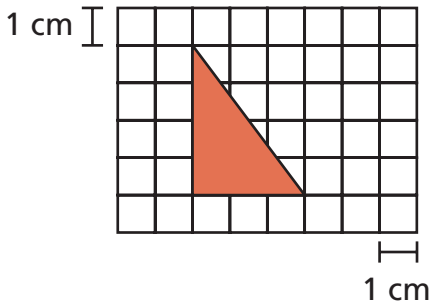


Fig. 3.20

¿Cuál es el perímetro de este triángulo? Marca con una (X) la variante que consideras es la correcta.

a) ____ 12 cm b) ____ 11 cm c) ____ 10 cm d) ____ 7 cm

23. Traza un rectángulo de 53 mm de largo y de 45 mm de ancho. Expresa su perímetro en centímetros.

24. ¿Cuántos metros de alambre se necesitan para cercar un terreno rectangular de 37 m de largo y 23 m de ancho si el terreno se quiere cercar con 4 hilos o pelos de alambre?

25. Un triángulo tiene dos lados de la misma longitud. El perímetro del triángulo es de 20 cm y los lados iguales miden 8 cm cada uno. ¿Cuánto mide el tercer lado?

26. En la casa de Luis Ángel hay una mesa de vidrio que tiene la forma de un cuadrilátero, cada uno de sus lados mide 120 cm. Su mamá quiere evitar cualquier accidente, por lo que va a comprar cinta para proteger toda la orilla de la mesa y así, asegurar que sus hijos no se corten. ¿Cuántos centímetros necesita comprar? Marca con una (X) la variante que consideras es la correcta.

a) ____ 120 b) ____ 140 c) ____ 240 d) ____ 480

3.3 Unidades de superficie

Reflexiona un instante

¿Es posible medir la superficie? ¿Cómo hacerlo?

Observa las figuras geométricas de la ilustración (fig. 3.21).

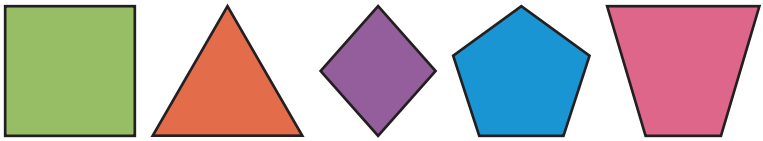


Fig. 3.21

Se conoce como superficie a la parte del plano que ocupa la figura.

Las unidades de longitud no sirven para medir la superficie, necesitamos otras unidades. En el Sistema Métrico Decimal se trabaja con cuadrados unidad. Una idea de cómo se mide una superficie usando cuadrados unidad se ofrece en la figura 3.22.

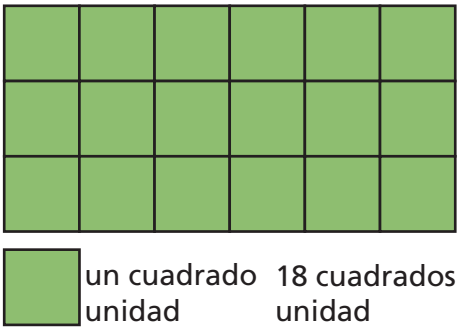


Fig. 3.22

Observa que para medir la superficie del polígono de la figura 3.22 se utilizó un cuadrado unidad con el que se cubrió toda la superficie del rectángulo. Ahora se puede afirmar que el rectángulo tiene una superficie igual a la de 18 cuadrados unidad. El conteo de la cantidad de cuadrados se facilitó aplicando uno de los significados de la multiplicación que ya conoces: 6 cuadrados por un lado y 3 por el otro hacen un total de: $6 \cdot 3 = 18$.

Podemos concluir planteando que una manera de medir la superficie de figuras planas es cubriéndolas con cuadrados unidad, dando el área como cantidad de cuadrados unidad. Esta vía da idea para calcular área de figuras rectangulares: para rectángulos la fórmula $A = a \cdot b$ (área es igual a largo por ancho) y para el cuadrado la fórmula es $A = a^2$ (recuerda que el cuadrado es un rectángulo con igual largo que ancho).

La unidad principal de medida de superficie del Sistema Métrico Decimal es el metro cuadrado. Su símbolo es m^2.

Para medir grandes extensiones de superficie se utilizan los múltiplos del metro cuadrado: kilómetro cuadrado (km^2), hectómetro cuadrado (hm^2) y decámetro cuadrado (dam^2).

Para medir pequeñas extensiones de superficie se utilizan los submúltiplos del metro: decímetro cuadrado (dm^2), centímetro cuadrado (cm^2) y milímetro cuadrado (mm^2).

Estas unidades aumentan o disminuyen de 100 en 100.

Unidades de superficie	Símbolo	Equivalencia
Kilómetro cuadrado	km^2	1 000 000 m^2
Hectómetro cuadrado	hm^2	10 000 m^2
Decámetro cuadrado	dam^2	100 m^2
Metro cuadrado	m^2	1 m^2
Decímetro cuadrado	dm^2	0,01 m^2
Centímetro cuadrado	cm^2	0,0001 m^2
milímetro cuadrado	mm^2	0,000 001 m^2

Para medir extensiones de tierra se usan como unidades de medida el área (a) y la hectárea (ha), que son medidas agrarias equivalentes al decámetro cuadrado y al hectómetro cuadrado.

1 dam^2 = 1a, equivalente a la extensión de un cuadrado de 10 m de lado. 1 hm^2 = 1 ha, equivalente a la extensión de un cuadrado de 100 m de lado.

La conversión de unidades de superficie es un procedimiento similar al que se sigue para convertir datos de la magnitud longitud, solo que las unidades de superficie aumentan y disminuyen de 100 en 100.

Ejemplo

Expresa 43 m^2 en decímetros cuadrados.

Entre el metro y el decímetro cuadrado hay un espacio en la sucesión de unidades de superficie, por tanto, el número de conversión entre estas es 100. Como el metro cuadrado es una unidad de medida mayor que el decímetro cuadrado se debe calcular $43 \cdot 100 = 4\,300$, luego:

$43\ m^2 = 4\,300\ dm^2$.

Analicemos cómo proceder cuando nos dan los datos expresados en varias unidades y debemos expresarlos en una sola unidad.

En estos casos convierten las cantidades en una sola unidad, la que indica la orden del ejercicio, y se adicionan.

Convierte en metros cuadrados:

$14\ km^2\ 62\ ha\ 4\ a\ 50\ m^2$

$14\ km^2 = 14\,000\,000\ m^2$

$62\ ha = 620\,000\ m^2$

$4\ a = 400\ m^2$

$50\ m^2 = 50\ m^2$

$14\,620\,450\ m^2$

Es muy importante tener representaciones claras de la relación de "tamaño" entre las diferentes unidades y del dominio del número de conversión. La relación que existe entre las unidades es:

$1\ cm^2 = 1\ cm \cdot 1\ cm = 10\ mm \cdot 10\ mm = 100\ mm^2$

$1\ dm^2 = 1\ dm \cdot 1\ dm = 10\ cm \cdot 10\ cm = 100\ cm^2$

$1\ m^2 = 1\ m \cdot 1\ m = 10\ dm \cdot 10\ dm = 100\ dm^2$

$1\ a = 1\ dam \cdot 1\ dam = 1\ dam^2 = 100\ m^2$

1 ha = 100 a

$1\ km^2 = 1\ km \cdot 1\ km = 10\ hm \cdot 10\ hm = 100\ hm^2 = 100\ ha$

Para las unidades de superficie se cumple que cada unidad es 100 veces mayor que la unidad inmediata inferior y 100 veces menor que la unidad inmediata superior.

Saber más

Otra unidad agraria de uso frecuente en la labor agrícola para medir la extensión de terrenos es la caballería.

Recuerda que

El ortoedro tiene seis caras, doce aristas, sus caras son rectángulos y por ser un cuerpo tiene largo (a); ancho (b) y altura (c).

Si este ortoedro lo desarrollamos en una hoja de papel o cartulina, obtenemos la superficie total del ortoedro (fig. 3.23 a) y b)).

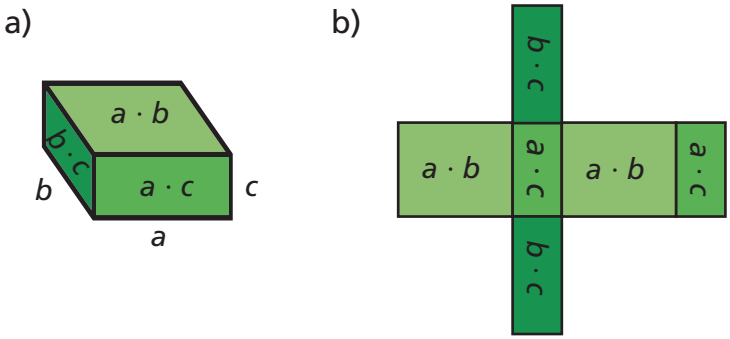


Fig. 3.23

Para determinar el área total de esta superficie debes determinar el área de cada una de las caras (rectangulares) que como conoces se calcula multiplicando el largo por el ancho. Como las

caras opuestas son iguales, por tanto, hay áreas que se repiten dos veces. El cubo tiene sus seis caras iguales.

La suma del área de las seis caras del ortoedro representa el área total del ortoedro. Para la que se emplea la fórmula: $At = 2 (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$

Ejercicios del epígrafe 3.3

1. Nombra objetos en que la unidad más adecuada para expresar su área sea el metro cuadrado (milímetro cuadrado, y así sucesivamente, sin olvidar unidades de área que no pertenecen al SI).

2. Escoge la unidad de medida más adecuada para expresar el área de:

a) Una pared de tu aula.
b) Un campo de béisbol.
c) La sección transversal de un tubo.
d) Tu libro de texto.
e) Un campo de boniato.

3. Convierte en la unidad indicada:

a) 3 000 cm^2 (dm^2)
b) 3 m^2 45 dm^2 (cm^2)
c) 0,3568 m^2 (dm^2)
d) 3 275 dam^2 (ha)

4. Calcula y expresa en la unidad menor:

a) 5,8 km^2 + 530 m^2
b) 62 m^2 – 578 cm^2

5. Escribe como suma de unidades de superficie.

a) 0,4 dm^2
b) 170,26 m^2
c) 6,325 km^2

6. Convierte en la unidad indicada.

a) 18 ha en a
b) 7,404 6 ha en m^2
c) 300 m^2 en a
d) 232,2 a en ha

7. Calcula el área de la figura 3.24.

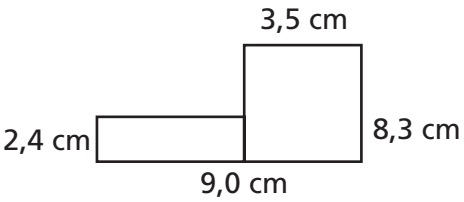


Fig. 3.24

8. Calcula el área de un rectángulo que mide 570 mm de largo y 7,6 cm de ancho. Expresa el resultado en centímetros cuadrados.

9. Un terreno deportivo rectangular tiene 40 m de largo y 30 m de ancho.

a) ¿De qué área se dispone para la práctica del deporte?

b) ¿Cuántos metros de tela metálica se necesitan para cercarlo?

c) Para garantizar la seguridad de los deportistas se ha decidido establecer una franja de 3 m de ancho por cada lado para la estancia de los espectadores, la que fue marcada por otra cerca interior. ¿En cuánto disminuyó el área que se disponía para la práctica del deporte? ¿Cuántos metros más de tela metálica se necesitarán?

d) *** ¿Qué otra transformación te gustaría hacerle al terreno deportivo? Elabora tu proyecto y muéstraselo a tus compañeros por medio de una maqueta o dibujo, explícales en qué consiste y analiza junto con ellos la disponibilidad de áreas para cada actividad en especial para la práctica de deportes. Fundamenta tu propuesta con los cálculos de áreas y perímetros correspondientes.

10. Una pintura rectangular se ha pegado en una hoja como se muestra en la figura 3.25.

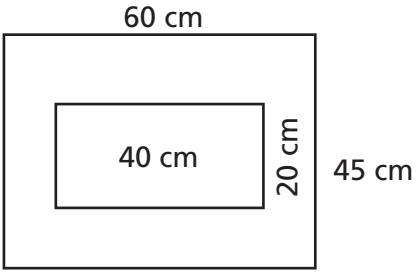


Fig. 3.25

¿Qué área del papel no ha sido cubierta por la pintura?

11. El cuadrado de la figura 3.26 está formado por cuadrados más pequeños (todos de un centímetro cuadrado), cada uno de ellos dividido en dos triángulos iguales.

Indica cuál de las siguientes proposiciones es verdadera. Marca con una (X) la variante que consideras es la correcta.

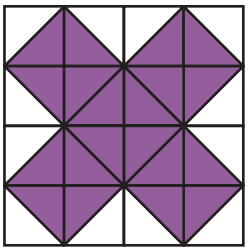


Fig. 3.26

a) ___ La fracción que representa el área de la figura sombreada respecto al área de la superficie no sombreada es $\frac{5}{4}$.

b) ___ El área de la figura sombreada es $\frac{5}{8}$ de la del cuadrado mayor.

c) ___ La parte sombreada tiene tantos triángulos pequeños como la no sombreada.

d) ___ El área de la parte no sombreada es 12 cm².

12. Determina aproximadamente el área de la figura 3.27.

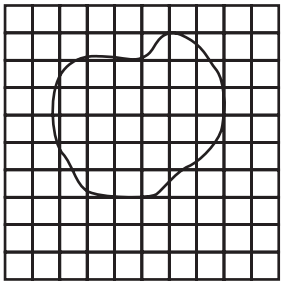


Fig. 3.27

13. Sofía hará unos portarretratos para regalarlos a sus amigas. En la figura 3.28 los cuadrados representan la superficie del portarretrato y el rectángulo su perímetro. Si cada cuadrado mide 2 cm², ¿cuántos centímetros cuadrados tiene el portarretratos? Marca con una (X) la variante que consideras es la correcta.

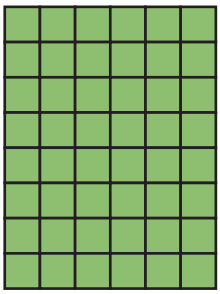


Fig. 3.28

a) ____ 24 cm² b) ____ 28 cm²

c) ____ 96 cm² d) ____ 48 cm²

14. El campesino Ángel quiere sembrar pasto en su terreno que tiene las medidas de la figura 3.29.

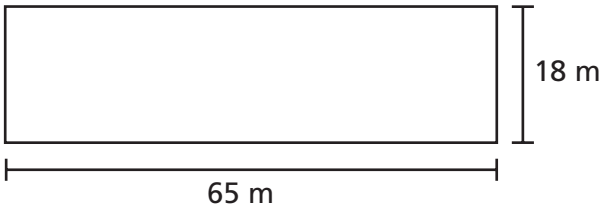


Fig. 3.29

¿Qué operación le permite saber cuántos metros cuadrados de pasto debe sembrar? Marca con una (X) la variante que consideras es la correcta.

a) ____ 65 : 18 b) ____ 65 – 18

c) ____ 65 · 18 d) ____ 65 + 18

15. Completa la tabla siguiente:

Área del rectángulo	Longitud del lado a	Longitud del lado b
	56 cm	0,2 m
52 a	130 dm	
360 ha		0,4 km
	72 mm	1 dm

	42 cm	2,1 dm
63 a		210 cm
104 ha	0,21 km	
	640 mm	10,2 cm

16. El embalaje de un televisor se realiza con un cartón corrugado que tiene las medidas siguientes: largo: 0,65 m; ancho: 35 cm y alto: 5 dm.

¿Cuántos metros cuadrados de cartón se necesitan para el embalaje de 30 televisores como este?

17. Un jardín rectangular tiene 42 m de largo y 24 m de ancho. Otro a su lado tiene el mismo largo y la mitad del ancho. ¿Cuál es el área de los dos jardines juntos?

18. Observa la figura 3.30 donde el lado de cada cuadradito mide 1 cm.
¿Cuántos centímetros cuadrados tiene el área total del rectángulo? Marca con una (X) la variante que consideras es la correcta.

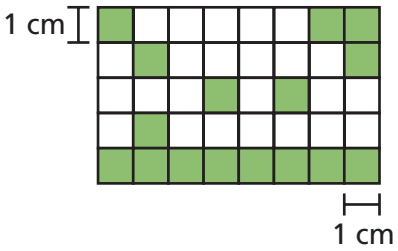


Fig. 3.30

a) ___ 40 cm^2 b) ___ 26 cm^2

c) ___ 24 cm^2 d) ___ 16 cm^2

19. Calcula y expresa en la unidad indicada.

a) 243 m^2 + 132,2 dm^2 (metro cuadrado)

b) 32,12 ha + 357,3 a (hectárea)

c) 5,5 m^2 – 2,35 m^2 (decímetro cuadrado)

20. ¿Qué cantidad de papel, como mínimo, debemos emplear para forrar dos caras consecutivas de un cubo cuya arista mide 20 cm?

3.4 Unidades de volumen y capacidad

¿Quieres aprender a medir la extensión de un ortoedro?

De un cuerpo se distinguen cualidades que de algún modo se manifiestan a partir de su tridimensionalidad. El volumen se puede entender de forma general como la extensión en tres dimensiones de una región del espacio. Los cuerpos ocupan un volumen por el hecho de extenderse en largo, ancho y alto. La unidad de medida de volumen en el Sistema Métrico Decimal es el metro cúbico.

La capacidad y el volumen son términos equivalentes, pero no iguales. La capacidad se refiere al volumen disponible en los recipientes que es suficiente para contener a otra u otras cosas. El volumen desde diferentes puntos de vista puede interpretarse en la práctica como:

Volumen interno: número de unidades que conforman un cuerpo.	Volumen encerrado: espacio encerrado en una superficie cerrada.
Volumen ocupado: parte que ocupa en el espacio	Volumen desplazado: la cantidad de líquido desplazado o al sumrgir un cuerpo en él.

Yanay ha pedido a sus educandos que obtengan el volumen de una taza. Amalia la llenó de agua y luego midió el líquido usando un recipiente graduado. Ángel metió la taza en un recipiente graduado y determinó la cantidad de líquido desplazada por esta. ¿Cuál de los dos determinó el volumen de la taza?

El volumen de un cubo (fig. 3.31) de 1 cm de lado es 1 cm^3.

Se lee: un centímetro cúbico.

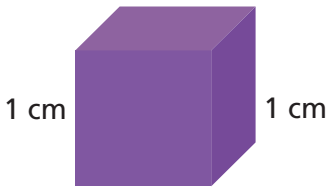


Fig. 3.31

El ortoedro representado en la figura 3.32 tiene un volumen equivalente a 60 cubos de 1 cm de lado.

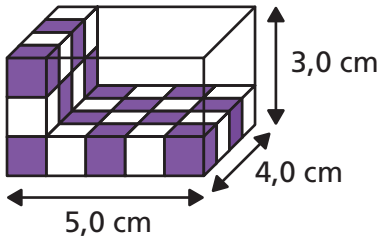


Fig. 3.32

Observa que:

Sobre el fondo se pueden colocar $5 \cdot 4 = 20$ cubos de 1 cm^3 de volumen.

Como hay espacio para 3 capas iguales a esta, se pueden colocar $20 \cdot 3 = 60$ cubos de 1 cm^3.

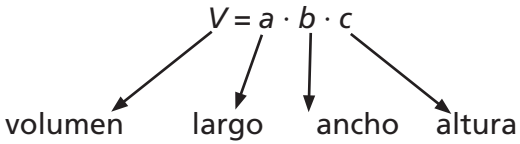
El volumen de ese ortoedro es de 60 cm^3, pues su extensión en el espacio es equivalente a la que ocupan 60 cubos de 1 cm^3.

El volumen de ese ortoedro se puede obtener también multiplicando el largo, por el ancho y la altura.

$V = 5\ cm \cdot 4\ cm \cdot 3\ cm$

$V = 60\ cm^3$

En general el volumen del ortoedro se calcula.



El volumen de un cubo con arista de longitud a se calcula.

$V = a \cdot a \cdot a$

$V = a^3$

Observa la figura 3.33 que representa un cubo de 1 dm de arista. Su volumen es de un decímetro cúbico, que se escribe 1 dm^3.

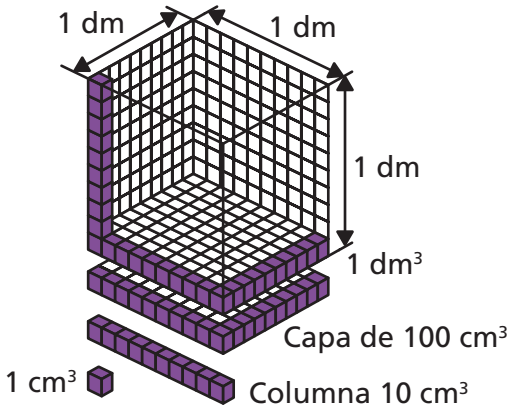


Fig. 3.33

Reflexiona un instante

¿Cuántos cm^3 tiene cada columna del cubo?

¿Cuántas capas componen el cubo?

Si cada capa está compuesta por 10 columnas, cuántos centímetros cúbicos (cm^3) caben dentro de ese cubo.

Debate con tus compañeros y comprueba si están de acuerdo con el siguiente planteamiento.

$1\ dm^3 = 10\ cm \cdot 10\ cm \cdot 10\ cm = 1\ 000\ cm^3$

Existe una unidad de volumen más pequeña que el centímetro cúbico y es la del volumen de un cubo de 1 mm de arista. Se llama milímetro cúbico y se escribe mm^3.

Existen otras unidades mayores que el metro cúbico como son el decámetro cúbico (dam^3), el hectómetro cúbico (hm^3) y el kilómetro cúbico (km^3). Estas unidades se usan para medir el volumen de cuerpos muy grandes.

Recuerda que

Las unidades de volumen aumentan y disminuyen de 1 000 en 1 000. Ejemplo:

$1\ dm^3 = 1\ dm \cdot 1\ dm \cdot 1\ dm = 10\ cm \cdot 10\ cm \cdot 10\ cm = 1\ 000\ cm^3$

$1\ m^3 = 1\ m \cdot 1\ m \cdot 1\ m = 10\ dm \cdot 10\ dm \cdot 10\ dm = 1\ 000\ dm^3$

Si pasas de una unidad a otra inmediata inferior entonces multiplicas, en este caso por 1 000, pues se trata de unidades de volumen. Si pasas de una unidad menor a la inmediata superior, divides por 1 000.

Unidades de capacidad

La capacidad de un cuerpo es una magnitud estrechamente vinculada con el volumen. La unidad principal para medir capacidad es el litro (L) (fig. 3.34).

Un litro es una unidad de capacidad y tiene relación con las unidades de volumen, pues es la capacidad de un decímetro cúbico.

$1\ L = 1\ dm^3$

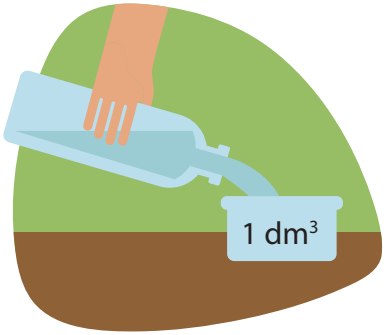


Fig. 3.34

Reflexiona un instante

¿La unidad de medida litro tendrá múltiplo y submúltiplos al igual que ocurre con la unidad de medida metro? Debate con tus compañeros de aula sus ideas y opiniones e intenten escribirlas.

Comprueba si las ideas escritas por ustedes coinciden con el texto planteado a continuación:

Múltiplos del litro:

Nombre	Símbolo	Relación
kilolitro	kL	1 000 L
hectolitro	hL	100 L
decalitro	daL	10 L

Submúltiplos del litro:

Nombre	Símbolo	Relación
decilitro	dL	0,1 L
centilitro	cL	0,01 L
mililitro	mL	0,001 L

Los múltiplos y submúltiplos se comportan igual que los del metro, aumentan y disminuyen de 10 en 10.

Tenemos 320,57 L y se quiere expresar en la unidad inmediata inferior.

Multiplicar por 10

kL	hL	daL	L	dL	cL	mL	
	3	2	0,	5	7		
	3	2	0	5,	7		
							3 205,7 dL
	3,	2	0	5	7		
							3,205 7 hL

Dividir por 10

Ejercicios del epígrafe 3.4

1. Calcula el volumen y el área total de la figura 3.35.

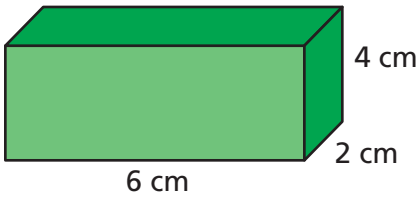


Fig. 3.35

2. Una caja de fósforos mide 5,0 cm de largo, 4,0 cm de ancho y 2,0 cm de alto.

a) ¿Cuál es el volumen de la caja de fósforos?

b) ¿Cuántas se podrían colocar en una caja cuyo volumen es 2,4 dm^3 si todo el espacio puede ser aprovechado en la colocación de las cajas?

3. Calcula el volumen y el área total de la figura 3.36.

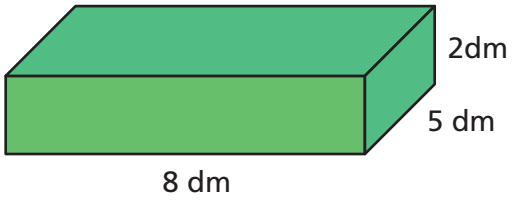


Fig. 3.36

4. Unos trozos de jabón en forma de cubo tienen 7,5 cm de arista.

¿Cuántos trozos como estos llenan una caja en la que sus aristas miden 60 cm?

5. Una maleta tiene 0,85 m de largo, 0,60 m de ancho y 0,3 m de alto. ¿Cuál es el volumen?

6. Una piscina tiene 40 m de largo y 20 m de ancho, alcanza una profundidad de $3\frac{1}{2}$ m. Del borde al nivel del agua hay una distancia de 5 dm. ¿Cuántos litros de agua contiene la piscina?

7. Para construir una pared se han empleado 1 324 ladrillos de 4,5 dm^3 cada uno. Halla el volumen de la pared sabiendo que se ha utilizado, además, 0,150 m^3 de cemento.

8. Sobre un campo rectangular de 150 m de largo y 115 m de ancho, ha caído 18,0 mm de agua durante un aguacero. ¿Cuántos metros cúbicos de agua han caído sobre este campo?

9. Una bomba extrae 90 L por minuto. ¿En cuántos minutos se vacía un depósito de 15,3 kL de capacidad?

10. Un lado de un cubo tiene 2,2 cm de arista.

a) ¿Cuál es el área de una de sus caras?
b) ¿Cuál es su volumen?
c) ¿Cuál es su área total?

11. Un depósito en forma de ortoedro de 3,45 m de alto, lleno contiene 8 625 dm^3 de alcohol.

a) ¿Cuál es el área de la base de dicho depósito?
b) ¿Cuántos litros de aceite le caben en total al depósito?

12. Si de un depósito de 800 L se sacan 150 L y luego 90 L más, ¿con cuál operación se sabe cuántos litros quedan en el depósito? Marca con una (X) la variante que consideras es la correcta.

a) _____ 150 + 90 = 240
b) _____ 800 – 90 = 710
c) _____ 800 – 150 = 650
d) _____ 800 – 150 – 90 = 560

13. Completa las igualdades siguientes.

a) 850 cL = ____ L
b) 61 L = ____ dal
c) 98,100 L = ____ kl
d) 15,45 kL= ____ L
e) 2,03 mL = ____ L

14. Un tonel se llena con 150 L. ¿Cuántos hectolitros se necesitan para llenar 6 toneles como ese?

15. En una estantería de la sección de limpieza de un mercado hay 60 pomos de detergente líquido de 25 dL y 45 pomos de suavizante de 75 cL.

a) ¿Cuántos litros de detergente hay en total?
b) ¿Cuántos litros de suavizante hay?

16. El encargado de colocar las bebidas en el mercado sabe que cada estante solo puede soportar 90 kg de peso.

a) Cuando llegue el nuevo pedido, ¿podrá poner en un estante 60 botellas de litro y medio de agua? (Recuerda que 1 L de agua pesa 1 kg).

17. La próxima semana es mi cumpleaños y voy a dar una fiesta para mis amigos. Ayúdame a realizar la compra.

a) Si en mi casa tengo vasos de 25 cL de capacidad, ¿cuántas botellas de refresco de 1,5 L tengo que comprar para darle un vaso a cada uno de mis 40 amigos?

b) Y si quiero comprar botellas para dar 2 vasos de refresco por persona, ¿cuántas de esas botellas debo comprar?

c) Si en la tienda a la que vamos a comprar las botellas de refresco se venden en paquetes de 6 botellas, ¿cuántos paquetes tendremos que comprar en cada caso?

18. Un pomo que contiene 4 L de refresco se reparte en vasos de 200 mL. ¿Cuántos vasos se llenan?

19. Keilis echa cuatro jarros llenos de agua para llenar un recipiente que tiene una capacidad de un litro. ¿Cuál es la capacidad en mililitros de cada jarro?

a) Con un pomo de litro y medio lleno de refresco, ¿cuántos jarros de los anteriores se pueden llenar?

20. La capacidad de un estanque con agua es de 14 m^3 16 dm^3. ¿Cuántos decilitros de agua contiene si está a la mitad de su capacidad?

21. Se construyó un estanque de 15 m de largo, 56 dm de ancho y 45 dm de profundidad. ¿Cuál es su capacidad en litros?

22. Con una botella que contiene tres cuartos de litro de miel, ¿cuántos frascos con 30 mL de miel se pueden llenar?

23. ¿Cuántos litros de miel se necesitan para llenar 40 frascos con 50 mL de miel cada uno?

24. ¿Cuántos cuartos de litro hacen falta para llenar un recipiente de 3,5 L que contiene 1 500 mL de agua?

3.5 Ejercitación variada

Ejercicios del epígrafe 3.5

1. Marca con una (X) la variante que consideras es la correcta.

a) El mililitro se emplea para medir:

____ La masa de algunos objetos.
____ La longitud de segmentos cortos.
____ Pequeñas cantidades de líquidos.
____ La superficie de un sello.

b) La unidad más adecuada para medir la cantidad de agua que contiene un cubo es:

____ El centilitro.
____ El metro cúbico.
____ El litro.
____ El kilolitro.

c) En farmacia una unidad de capacidad muy utilizada es:

____ El kilolitro.
____ El mililitro.
____ El milímetro.
____ El miligramo.

2. ¿Con tres vasos como el de la figura 3.37 se pueden llenar $\frac{3}{4}$ de un jarro de un litro? ¿Cuántos vasos de jugo se necesitan para llenarlo?

Fig. 3.37

3. Marca con una (X) la variante que consideras es la correcta.

a) El milímetro cuadrado se emplea para medir:

____ La superficie de una ventana.
____ La longitud de segmentos cortos.
____ Pequeñas cantidades de líquidos.
____ La superficie de un sello.

b) La unidad más adecuada para medir la superficie del piso de una habitación es:

____ El centímetro cuadrado.
____ El metro cuadrado.
____ El decímetro cuadrado.
____ Ninguna de las anteriores.

c) En la agricultura una unidad de superficie muy utilizada es:

____ El metro cuadrado.
____ La hectárea.
____ El milímetro cuadrado.
____ Ninguna de las anteriores.

4. Compara el área de los pares de objetos que te mencionamos a continuación.

a) La sala de tu casa y el aula en que estudias.

b) El aula en que estudias y el patio de la institución educativa.

c) La libreta de matemática y la mesa de tu aula.

d) Estima las veces que la menor de las áreas está contenida en la mayor.

e) Obtén las medidas de los objetos mencionados en los incisos a) y c) empleando las unidades más adecuadas para determinar sus áreas. Comenta con tus compañeros las incidencias en el desarrollo de la actividad.

5. Convierte en la unidad indicada:

a) 3 000 000 cm^3 (dm^3)

b) 334 m^3 453 dm^3 (cm^3)

c) 0,003 568 m^3 (dm^3)

d) 3 275 dam^3 (hm^3)

6. Calcula y expresa en la unidad menor:

a) 5,8 km^3 + 530 m^3 b) 62 m^3 – 578 cm^3

7. Descompón en las unidades que forman a:

a) 6,325 km^3

b) 1 704 325,26 m^3

c) 0,004 dm^3

8. El ortoedro de la figura 3.38 se sumergió en un recipiente que contenía 150 L de agua lleno hasta el borde. ¿Con qué cantidad de agua quedó el recipiente?

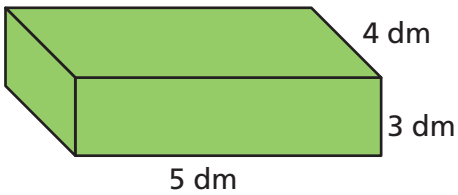


Fig. 3.38

9. Señala a qué magnitud corresponde cada pregunta e indica las unidades de medida de cada una.

	¿Qué hora es?	¿Cuánto cabe?	¿Cuánto pesa?	¿Cuánto mide?
Magnitud	Tiempo			
Unidades	Hora, minutos			
Volumen				

10. Sé un detective: ¡señala los segmentos de 1 pulgada y 1 cm! Los segmentos de 1 pulgada con 'X' (fig. 3.39), circula los de 1 cm.

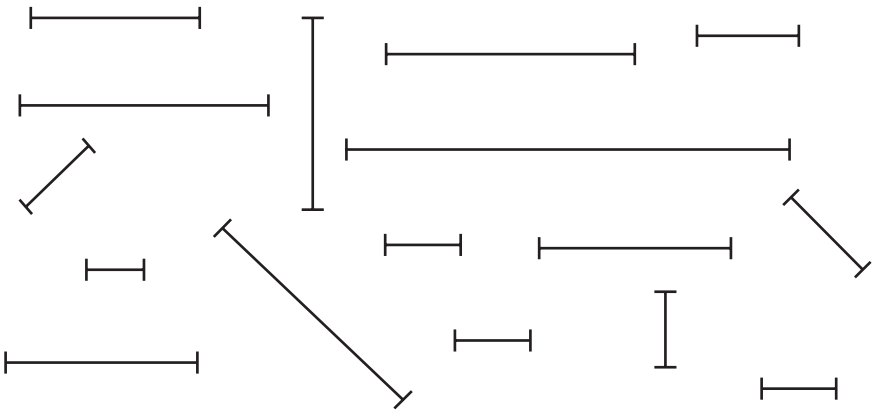


Fig. 3.39

11. * El embalaje de un televisor se realiza con un cartón corrugado que tiene las medidas siguientes: largo: 0,65 m, ancho: 35 cm y alto: 5 dm.

a) ¿Cuál es el volumen que alcanzarán los 30 televisores colocados en tres capas de dos por 5 unidades cada una?

b) Si colocas los televisores de otra manera, ¿sufrirá variaciones el volumen total?

12. Con dos regletas de 5 y 7 cm de largo respectivamente, ¿Qué otras longitudes puedes representar?

13. La mitad del agua que puede contener un depósito pesa 123 kg.

¿Cuántos decagramos pesarán las dos quintas partes del agua contenida cuando el depósito está lleno?

14. Los ladrillos en existencia en un almacén ocupan 48 m^3 del espacio disponible, ¿Cuántos ladrillos hay almacenados si cada uno tiene 4 dm de largo, 10 cm de ancho y 6 cm de alto?

15. Un terreno rectangular de 14 ha 8 a mide 45,6 dam de largo. ¿Cuántos metros tiene de ancho?

16. Las ruedas de un automóvil tienen una circunferencia de 2 m 6 dm 2 cm. ¿Cuántas vueltas dará cada rueda si el automóvil ha de recorrer 2 km 132 m 68 cm?

17. Un hombre camina 200 m cada 2 min y va de una ciudad a otra que dista 130 hm 14 dm. Al cabo de 25 min, ¿a qué distancia de la ciudad de destino se encuentra?

18. Si se poseen 5 L de refresco y se reparte un cuarto de litro por niño, determina cuántos niños toman refresco.

19. Determina cuántos litros de agua se necesitan para llenar 6 (8; 4; 5; 10) botellitas de 250 mL.

20. ¿Cuántos mililitros de agua contiene un recipiente de 12 L que está lleno hasta sus $\frac{2}{5}$ partes?

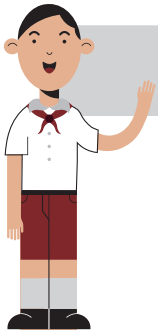
21. ¿Cuántas veces tengo que verter el contenido de una botella de 750 mL para llenar de agua un recipiente con 6 L de agua?

22. ¿Qué parte representan 750 mL de 6 L?

23. ¿Cuál es la capacidad de un recipiente, si las tres cuartas partes de ella equivalen a 1 200 mL?

UNIDAD 4

Geometría



¿Qué voy a aprender?

- Acerca de las figuras y cuerpos geométricos elementales y sus relaciones.
- Ubicación de puntos y el trazado de figuras simétricas, ejes de simetría y en especial la construcción de la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo mediante los procedimientos correspondientes.
- A construir figuras iguales aplicando las propiedades de los movimientos de reflexión, traslación, rotación y simetría central.

¿Para qué me servirá?

Los contenidos que aquí te ofrecemos te permitirán reconocer elementos de figuras geométricas importantes, construir figuras muy atractivas y llamativas por su disposición gráfica, resolviendo problemas propios de la clase de matemática, del entorno y la

vida. Además, podrás reconocer algunas de estas figuras en obras de las artes plásticas y en el patrimonio de la arquitectura de distintas épocas.

¿Qué debo saber?

Conocer significados que en la práctica tienen las formas de las superficies y las líneas que le sirven de contorno como basamento para denotar rectas, establecer relaciones de posición entre rectas, y entre rectas y puntos.

4.1 Repaso

Desde grados anteriores aprendiste que en nuestro entorno están muchos de los conocimientos que debes adquirir. Los objetos, sus cantidades y magnitudes, la diversidad de formas y la ubicación de estos te han ayudado a descubrir la matemática y esta a su vez te ha preparado para comprender. Cuanto sucede a tu alrededor y sobre todo, que un mundo mejor puede ser posible si sabes transformarlo con sabiduría, respeto y amor.

La geometría no está a simple vista, pero cuando observamos los objetos a nuestro alrededor apreciamos en sus formas similitudes y diferencias. Con lápiz y papel logramos dibujarlos; para establecer sus contornos o límites usamos las líneas, estas nos permiten detallar algunos de elementos que componen las formas de los objetos. Al colorear o sombrear destacamos las superficies, logrando casi siempre diferenciar las planas de las restantes formas, buscando que nuestra representación o dibujo se asemeje a la realidad.

Al observar y manipular un objeto, al describir sus cualidades y dibujarlo se puede descubrir lo esencial de su forma, para llegar a las ideas fundamentales que permiten comprender la geometría: los puntos, las líneas y las superficies en las figuras y los cuerpos.

Algo de historia

A Euclides se le conoce como “el Padre de la Geometría”.

Las figuras y los cuerpos geométricos

Los polígonos son figuras planas cuyos lados están formados por una línea poligonal cerrada incluyendo la parte del plano limitada por ella.

Cada segmento se denomina *lado* del polígono y los puntos que son comunes a dos lados consecutivos se llaman *vértices*. El segmento que une dos vértices no consecutivos se llama *diagonal*.

Los polígonos que más has estudiado son los triángulos y los cuadriláteros.

Los triángulos tienen tres lados, tres vértices y tres ángulos; según la longitud de sus lados tienen nombres especiales:

Triángulos (tres lados)		
Escalenos Tres lados desiguales	Isósceles Dos lados iguales	Equiláteros Tres lados iguales
	Todos los equiláteros son isósceles	

Los cuadriláteros tienen cuatro lados, cuatro vértices y cuatro ángulos. Si los lados y los ángulos de un cuadrilátero cumplen ciertas propiedades, entonces se clasifican como se muestra en la figura 4.1.

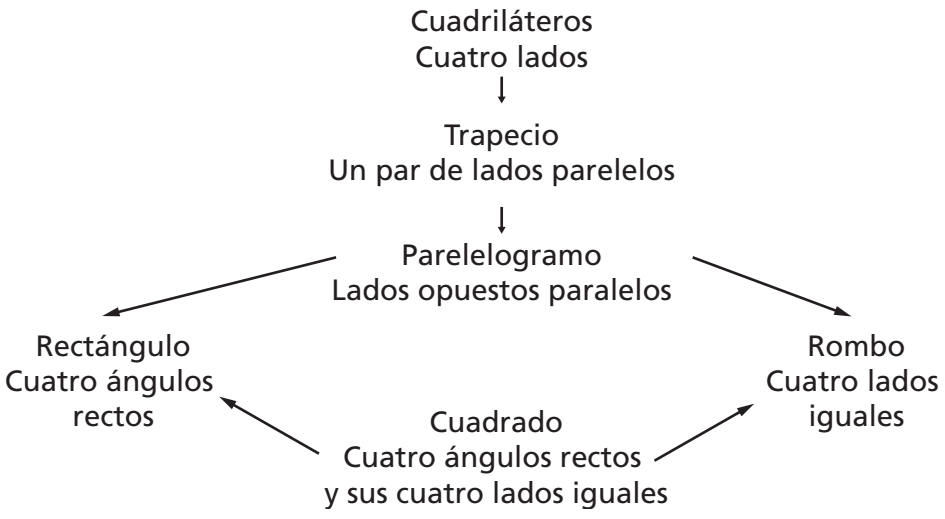


Fig. 4.1

El cubo, el ortoedro, la pirámide, el cilindro, el cono y la esfera son cuerpos geométricos que ya conoces (fig. 4.2).

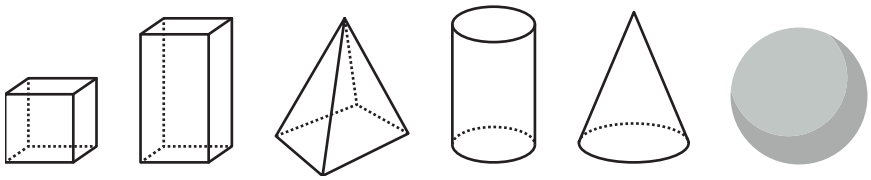


Fig. 4.2

El ortoedro, por ejemplo, está limitado por 6 superficies planas o caras con formas rectangulares. Las caras paralelas (que no tienen puntos comunes) son iguales. Dos caras consecutivas tienen una porción de línea recta en común, llamada arista. Las aristas son segmentos, los que a su vez son lados de los rectángulos que forman el ortoedro. Otro elemento singular de este cuerpo son sus vértices, estos se localizan en los extremos comunes de tres aristas (fig. 4.3).

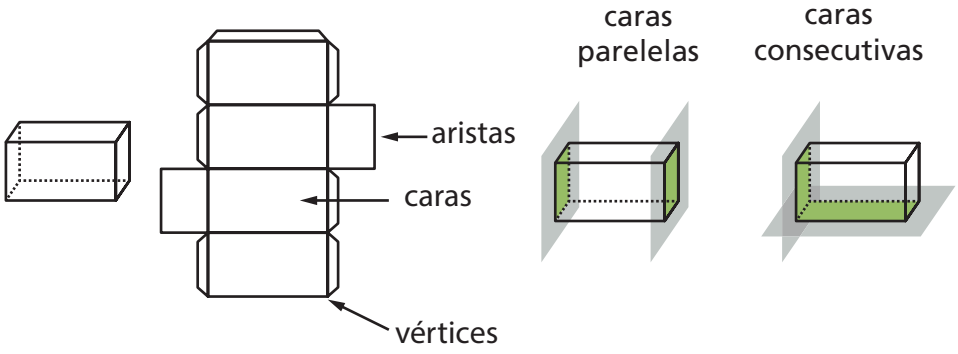


Fig. 4.3

Un caso particular de ortoedro es el cubo. El cubo tiene sus seis caras que son cuadrados iguales entre sí (fig. 4.4).

El cilindro a diferencia del ortoedro está formado por superficies planas y superficies curvas. Las superficies planas son círculos que están

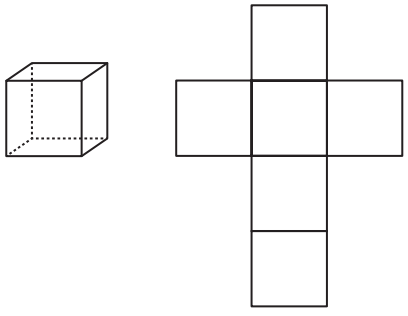


Fig. 4.4

en planos paralelos; son las bases del cilindro. Las líneas que las definen son circunferencias. Las líneas rectas a los lados se llaman generatrices. Estas, al observar el cilindro, no se aprecian de la misma forma que las aristas en el ortoedro; esto es debido a que ellas están en la superficie curva, paralelas a la recta que determinan los centros de las circunferencias base (fig. 4.5).

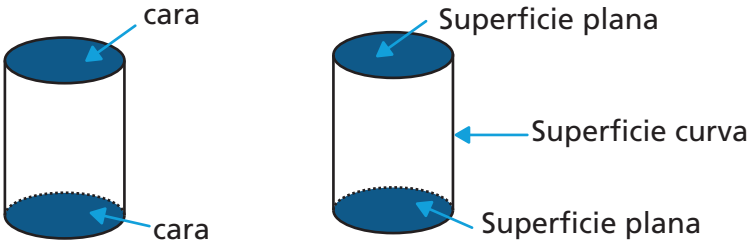


Fig. 4.5

Saber más

El cilindro es el cuerpo geométrico que se obtiene al girar un rectángulo una vuelta completa en torno a uno de sus lados.

En las superficies planas de los cuerpos podemos descubrir las figuras planas. Entre las figuras planas que conoces están los polígonos (fig. 4.6), son esenciales aquellos limitados por líneas poligonales cerradas como los triángulos, cuadriláteros, pentágonos, entre otros.

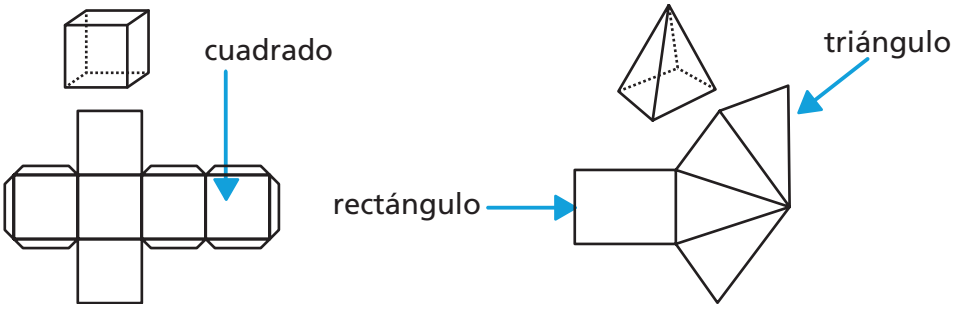


Fig. 4.6

En los cuerpos también puedes observar superficies planas limitadas por líneas curvas, son conocidas por ti el óvalo y el círculo, este último limitado por la circunferencia (fig. 4.7).

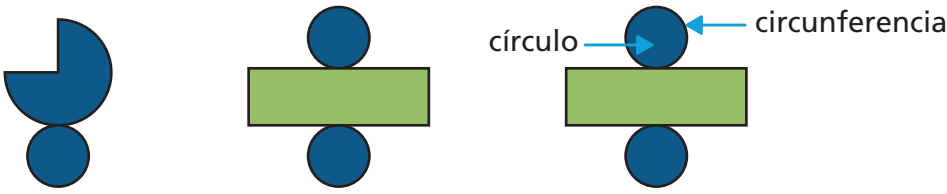


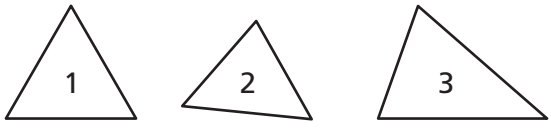
Fig. 4.7

Algo de historia

Una antigua opinión transmitida por el historiador Herodoto (484-425) atribuye el origen de la geometría a la necesidad de medir los terrenos después de las inundaciones periódicas del río Nilo, en Egipto.

Ejercicios del epígrafe 4.1

1. Mide la longitud de los lados de cada uno de los triángulos (fig. 4.8) y completa las afirmaciones:



a) El triángulo 1 es un triángulo _____ porque la longitud de sus lados es de _____ cm, _____ cm y _____ cm.

b) La longitud de los lados del triángulo 2 es de _____ cm, _____ cm y _____ cm y por eso es un triángulo _____.

c) La longitud de los lados del triángulo 3 es de _____ cm, _____ cm y _____ cm, entonces lo nombramos triángulo _____.

2. Di los nombres que pueden recibir los cuadriláteros de la figura 4.9. Comenta con tus compañeros y argumenten sus respuestas.

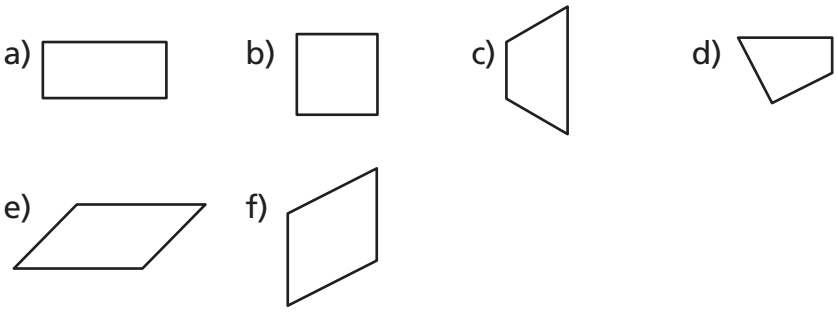


Fig. 4.9

3. ¿Cuál es el menor número de lados que puede tener un polígono? ¿Por qué?.

4. Traza en tu libreta un polígono semejante al que aparece en la figura 4.10, luego traza sus diagonales de modo que se descomponga en triángulos.

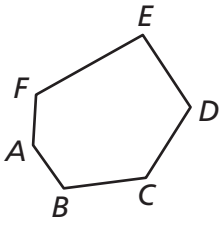


Fig. 4.10

5. Si quieres conocer las longitudes de las aristas de un cubo, ¿cuántas mediciones tienes que realizar? Fundamenta tu respuesta.

6. Observa los cuerpos de la figura 4.11 y explica en qué se parecen y en qué se diferencian cada una de las parejas siguientes:

Fig. 4.11

a) Cono-cilindro
b) Cilindro-prisma
c) Cono-pirámide
d) Prisma-pirámide

7. Analiza si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y fundamenta tus respuestas:

a) El número de vértices de una pirámide coincide con el número de lados de la base.

b) Todas las caras laterales de un prisma son rectangulares.

c) Todas las caras de una pirámide son triángulos.

Consejo

Utiliza el asistente matemático GeoGebra para resolver los ejercicios siguientes.

Actividades	Herramientas
8. Selecciona la herramienta Polígono y traza tres triángulos.	
a) Selecciona la herramienta Distancia o longitud, haz clic sobre cada uno de los lados en cada triángulo y clasifica cada triángulo según la longitud de sus lados.	
9. Selecciona la herramienta Polígono regular, y traza un polígono de 4 lados.	
a) Selecciona la herramienta Distancia o longitud, haz clic sobre cada uno de los lados del cuadrilátero.	
b) Selecciona la herramienta Ángulo y haz clic en cada uno de los vértices comenzando de derecha a izquierda. De acuerdo con la longitud de sus lados y la amplitud de sus ángulos, ¿cómo se nombra?	

4.2 Ángulos. Ángulos consecutivos

Al estudiar los polígonos aprendiste a identificar en ellos tres de sus elementos más sobresalientes: los vértices, los lados y los ángulos del polígono.

De los ángulos conoces que se localizan en la intersección de dos semiplanos cuyos bordes se cortan en un punto. Esta región del plano está limitada por dos semirrectas con origen común. Esto nos permite definir el ángulo de intersección.

Definición

A la intersección de dos semiplanos de un mismo plano cuyos bordes se cortan en un punto se le llama ángulo intersección (fig. 4.12).

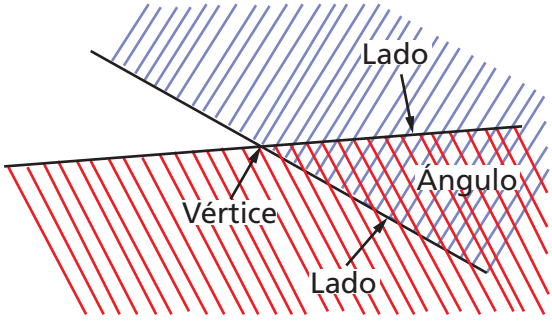


Fig. 4.12

Observa que el ángulo de intersección está limitado por dos semirrectas de origen común. Las semirrectas se denominan lados del ángulo y el origen común, vértice del ángulo.

Los ángulos se pueden transportar. ¿Qué significa transportar un ángulo?, ¿cómo se hace?

Al transportar un ángulo cambiamos solo su posición. En la práctica significa construir otro igual sobre un semiplano, tomando como lado a una de las semirrectas de su borde. Luego, antes de transportar el ángulo debemos determinar el semiplano y la semirrecta de su borde hacia donde será transportado.

Ejemplo

Dados el ángulo (p; q), el semiplano sombreado y la semirrecta p' (fig. 4.13).

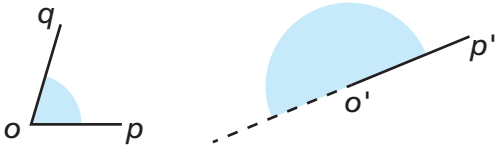


Fig. 4.13

Transportar el ángulo sobre el semiplano desde la semirrecta p'. Observa que solo falta trazar una semirrecta de la que se conoce su origen O'. Para hacerlo podemos escoger como instrumentos:

- Un transportador de papel.
- Una regla y un compás.

El transportador de papel es una herramienta muy sencilla que sirve para transportar segmentos y ángulos, lo puedes hacer de un pedazo de papel o cartulina, que debes doblar como se muestra en la figura 4.14.

Fig. 4.14

Para usar el transportador, procede según se indica en la secuencia de pasos siguiente:

- Se coloca el doblez del transportador sobre uno de los lados del ángulo.
- Se marcan en el transportador el vértice y el punto por donde se localiza al otro lado (fig. 4.15)
- Se coloca el transportador haciendo coincidir el doblez con la semirrecta y los vértices.
- Se marca el punto que corresponde al otro lado (fig. 4.16).
- Se traza el otro lado del ángulo (fig. 4.17).

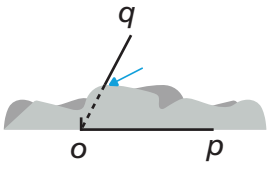


Fig. 4.15

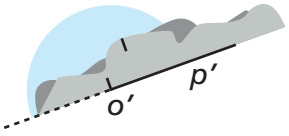


Fig. 4.16

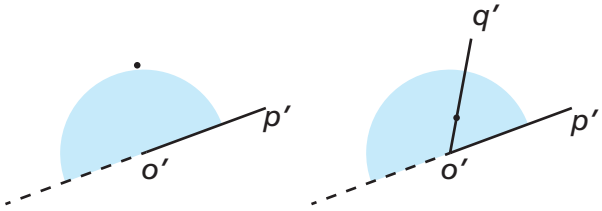


Fig. 4.17

Para usar la regla y el compás debes seguir la secuencia de pasos siguiente:

- Con centro en los vértices *O* y *O´* se trazan arcos de igual radio.
- Se denotan los puntos de intersección del arco y los lados del ángulo *P, Q* y *P´* respectivamente (fig. 4.18).

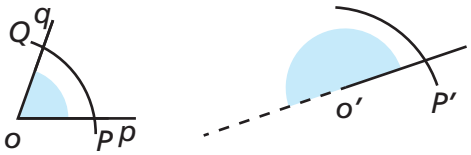


Fig. 4.18

- Con centro en *P´* se traza un arco de radio *PQ* que corte al arco trazado.
- Se denota Q´, el punto de intersección de ambos arcos (fig. 4.19).
- Se traza el otro lado (fig. 4.20).

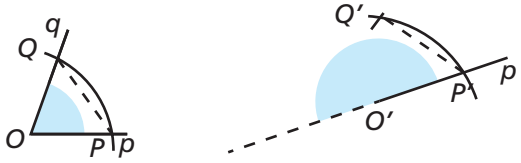


Fig. 4.19

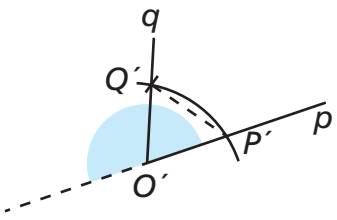


Fig. 4.20

Clasificación de los ángulos

Cuando los bordes de los semiplanos que forman el ángulo de intersección son perpendiculares, se dice que es un ángulo recto. Los ángulos de intersección menores que el ángulo recto se llaman ***agudos***, a los mayores que un ángulo recto y menores que un ángulo llano se les llama ***obtusos***. Cuando los bordes de los semiplanos coinciden y los lados del ángulo son semirrectas opuestas forman un ángulo llano. El ángulo llano es el mayor de los ángulos de intersección y es igual a dos ángulos rectos (fig. 4.21).

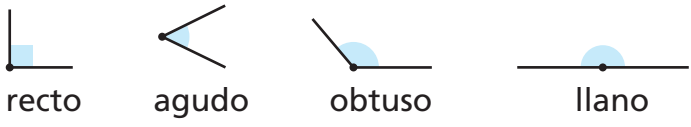


Fig. 4.21

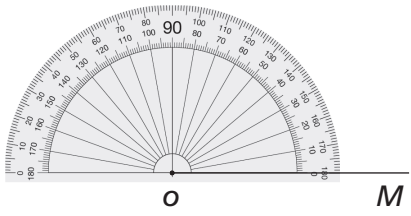
Los ángulos se pueden medir usando el semicírculo graduado. La unidad de medida fundamental de la amplitud de los ángulos es el grado sexagesimal.

Un ángulo recto mide 90°, por tanto, un ángulo llano mide 180°. Los ángulos agudos miden menos de 90° y los obtusos, más que 90° y menos que 180°.

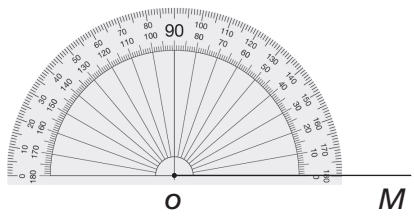
Medir y trazar ángulos con el semicírculo graduado son procedimientos similares. Los pasos para medir o trazar ángulos se pueden resumir como se muestra en la figura 4.22.

Colocación del semicírculo graduado respecto a un lado.

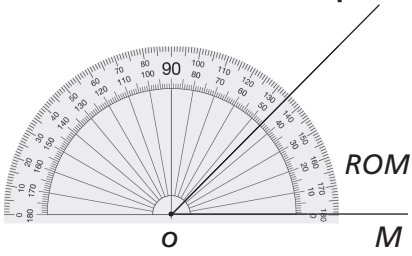
Medir ángulos



Trazar ángulos



Lectura de la medida o ubicación del punto por donde pasa el otro lado.



ROM = 45°

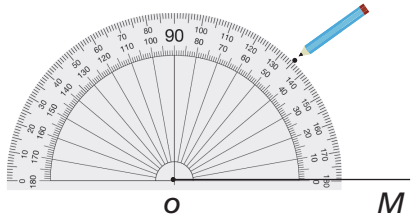


Fig. 4.22

Ángulo unión

Si observas con detenimiento las superficies que conforman dos semiplanos cuyos bordes se cortan en un punto podrás descubrir otra región del plano que es limitada por semirrectas de origen común. Todos los puntos de uno u otro semiplano están en esta región del plano, es decir, está formado por la unión de los semiplanos (fig. 4.23).

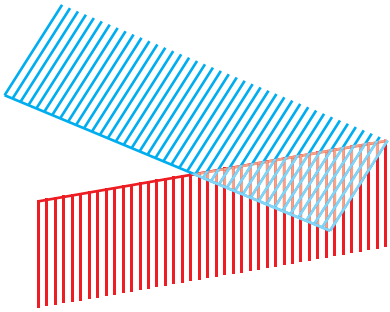


Fig. 4.23

Definición

A la unión de dos semiplanos de un mismo plano cuyos bordes se cortan en un punto se le llama ángulo unión.

Un ángulo unión es mayor que un ángulo llano (fig. 4.24). Un ángulo unión es sobreobtuso, es decir, que mide más que 180° y menos que 360°. Cuando el ángulo unión mide 360° se le llama ángulo completo, este es igual a cuatro ángulos rectos y es el mayor ángulo que conoces, abarca todo el plano, se representa como en la figura 4.25.

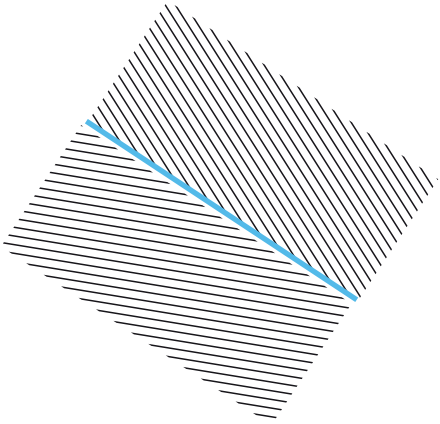


Fig. 4.24

En lo adelante debes considerar que también existe el ángulo nulo, se representa de forma similar al ángulo completo, solo que este no tiene amplitud, o sea, sus lados coinciden y su amplitud es de 0° (fig.4.26).

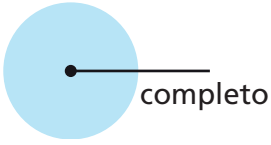


Fig. 4.25

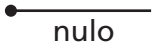


Fig. 4.26

Ejemplos

1. Mide el ángulo $\sphericalangle BOA$ dado en la figura 4.27a.
   a) Se prolonga uno de los lados del ángulo para descomponerlo en dos ángulos, uno de ellos es llano (fig. 4.27b).
   b) Se mide el ángulo BOA' ($\sphericalangle BOA' \approx 47°$) (fig. 4.27).
   c) Se suma esta amplitud a180°.
   180° + 47° =227°

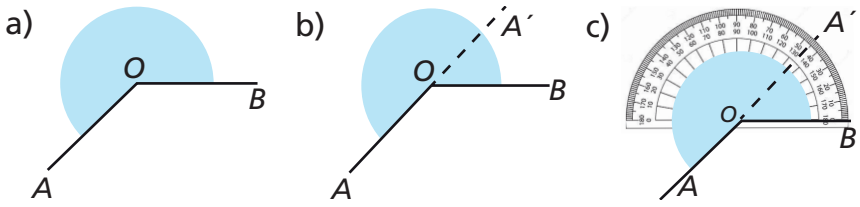


Fig. 4.27

Respuesta: $\sphericalangle BOA \approx 227°$.

2. Traza un ángulo $\sphericalangle POQ$ de 250°.
   Trazar un lado del ángulo y su semirrecta opuesta (fig.4.28).

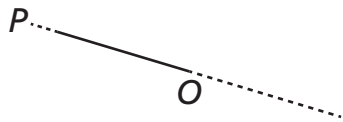


Fig. 4.28

   Hallar la diferencia de la amplitud dada con 180°.
   250° – 180° = 70°
   Trazar un ángulo de 70° sobre la semirrecta opuesta al lado dado (fig. 4.29).

Fig. 4.29

   Componer los ángulos de 70° y de 180°.

Algo de historia

Los egipcios calculaban con precisión el ángulo de sus pirámides para garantizar la resistencia de sus paredes.

Ángulos consecutivos

Un aspecto importante en el estudio de la geometría tiene que ver con las relaciones de posición de los ángulos en el plano.

Definición

A dos ángulos con igual vértice y que solo tienen un lado común se les llama ángulos consecutivos.

Ejemplo

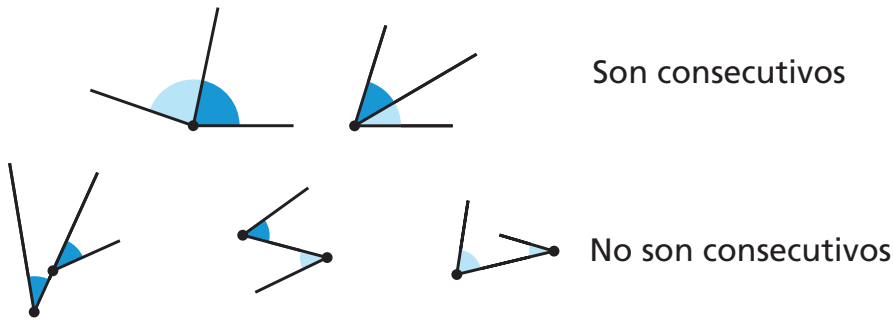


Fig. 4.30

Dos o más ángulos se dicen consecutivos si forman una sucesión de ángulos que se encuentran uno a continuación del otro, de modo que solo tengan en común el vértice y un lado (fig. 4.31).

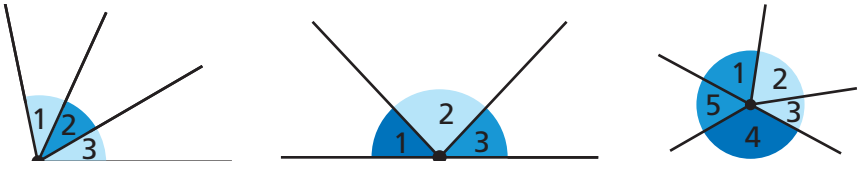


Fig. 4.31

La definición de ángulos consecutivos está relacionada con la suma de sus ángulos y de sus amplitudes.

Definición

Se llama ángulo suma de dos ángulos consecutivos al ángulo determinado por la unión de estos.

El ángulo suma está delimitado por los lados no comunes de cada uno de los ángulos.

Ejemplo

1. Si se parte de la definición de ángulo suma, se puede establecer un procedimiento para construir el ángulo suma de dos ángulos dados (fig 4.32).
   Toma como ejemplo la solución dada al siguiente ejercicio y elabora los pasos del procedimiento sugerido.
2. Halla el ángulo suma de los ángulos dados en la figura 4.33.

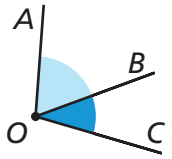


Fig. 4.32

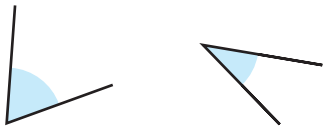


Fig. 4.33

Solución

Traza una semirrecta p y transporta el primer ángulo desde p sobre uno de sus semiplanos. Denota la otra semirrecta q (fig. 4.34).

Transporta el otro ángulo al otro lado de la semirrecta q (fig. 4.35). Verifica que ambos ángulos sean consecutivos.

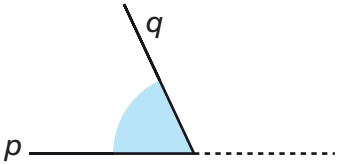


Fig. 4.34

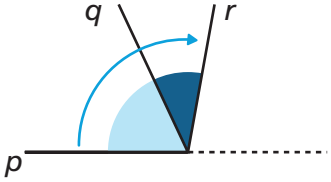


Fig. 4.35

- El ángulo $\sphericalangle(p; r)$ es el ángulo suma de los ángulos dados.

  Practica el procedimiento que has propuesto al realizar el ejercicio siguiente.

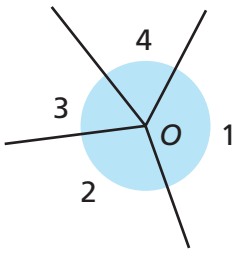
3. Cumple las indicaciones siguientes:

- Traza dos ángulos de 50° y 35° respectivamente.
- Construye el ángulo suma de estos ángulos.
- Mide la amplitud del ángulo suma.
- Debate con tus compañeros acerca de la posibilidad de que exista relación entre la suma de ángulos y la suma de sus amplitudes.

Los ángulos consecutivos pueden aparecer en secuencias, es decir, uno a continuación de otro, distribuidos alrededor de un punto y a un mismo lado de la recta.

Observa con detenimiento las dos secuencias de ángulos consecutivos que te mostramos en la figura 4.36.

Secuencia I



Secuencia II

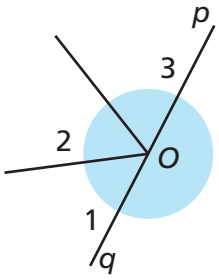


Fig. 4-36

Se dice que los ángulos ∢1; ∢ 2; ∢ 3 y ∢ 4 son consecutivos alrededor de un punto, en este caso es alrededor de *O,* pues:

- Los ángulos ∢ 1; ∢ 2; ∢ 3 y ∢ 4 tienen vértice común *O.*
- Los pares de ángulos ∢ 1 y ∢ 2, ∢ 2 y ∢ 3, ∢ 3 y ∢ 4, ∢ 4 y ∢ 1 son consecutivos.

Recuerda que

Para toda secuencia de ángulos consecutivos alrededor de un punto siempre se cumple que: la suma de las amplitudes de los ángulos consecutivos alrededor de un punto es igual a 360°.

En la secuencia II:

Se dice que los ángulos ∢ 1, ∢ 2 y ∢ 3 son consecutivos a un mismo lado de la recta, pues:

- Los ángulos ∢ 1, ∢ 2 y ∢ 3 tienen vértice común *O.*
- Los pares de ángulos ∢ 1 y ∢ 2, ∢ 2 y ∢ 3 son consecutivos.
- Las semirrectas *p* y *q* son semirrectas opuestas.

Para toda secuencia de ángulos consecutivos a un mismo lado de la recta siempre se cumple que:

La suma de las amplitudes de los ángulos consecutivos a un mismo lado de la recta es igual a 180°.

Ejercicios del epígrafe 4.2

1. Observa con detenimiento la secuencia de ángulos consecutivos representada en la figura 4.37 (*p* y *q* son semirrectas opuestas).

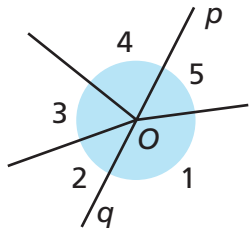


Fig. 4.37

- Completa los siguientes enunciados de modo que expresen ideas correctas:

a) Por su posición respecto a *O,* los ángulos ∢ 1; ∢ 2; ∢ 3; ∢ 4 y ∢ 5 son ángulos: _____.

b) Por su posición respecto a r (formada por p y q) los ángulos ∢ 2; ∢ 3 y ∢ 4 son ángulos: _____.

c) El ángulo suma ∢ 1+ ∢ 2 + ∢ 3 + ∢ 4 + ∢ 5 mide _____.

d) La suma de las amplitudes de los ángulos ∢ 2; ∢ 3 y ∢ 4 es _____.

e) El ángulo suma ∢ 1 + ∢ 5 mide _____ porque _____.

2. ¿Cuántos ángulos hay en las figuras a) y b)? (fig. 4.38) Nómbralos.

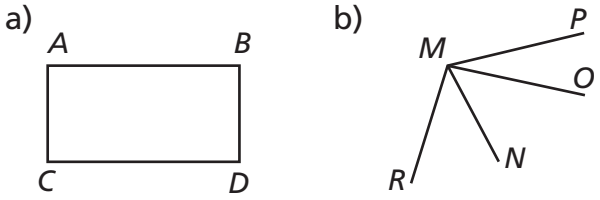


Fig. 4.38

a) Determina la amplitud de cada uno de los ángulos que aparecen en la figura 4.38.

b) Transporta a otro lugar del plano los ángulos $\sphericalangle PMO$ y $\sphericalangle BAC$.

3. Estima de cuántos grados constan los ángulos de la figura 4.39. Verifica las estimaciones al medir los ángulos:

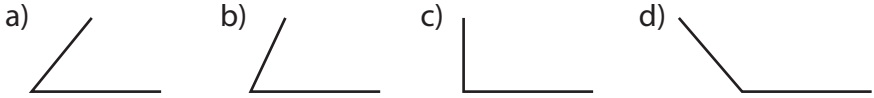


Fig. 4.39

4. Mide los ángulos dados en la figura 4.40.

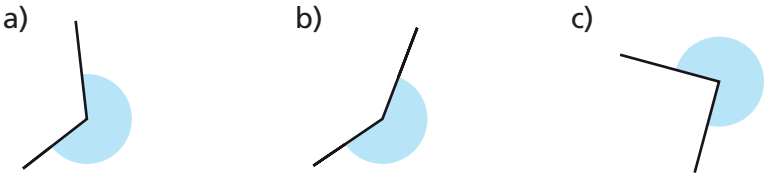


Fig. 4.40

5. Mide los ángulos de la figura 4.41 y clasifícalos según su amplitud.

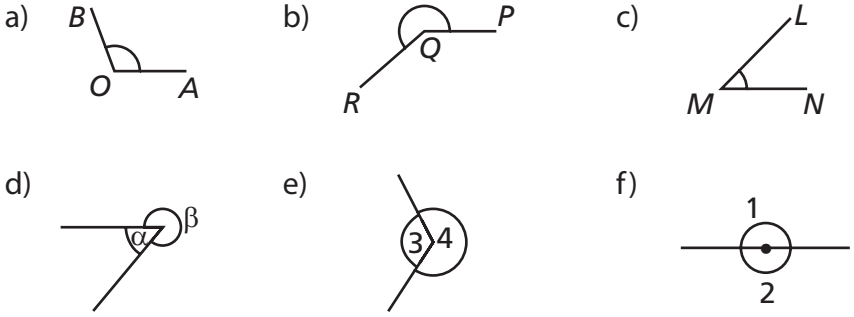


Fig. 4.41

6. Traza ángulos de las amplitudes siguientes:

a) 200° b) 320° c) 275°

7. Traza un ángulo:

a) Agudo. b) Obtuso. c) Recto.

8. En los triángulos de la figura 4.42 clasifica los ángulos según su amplitud. Explica a tus compañeros qué has tenido en cuenta para clasificarlos.

a) b) c)

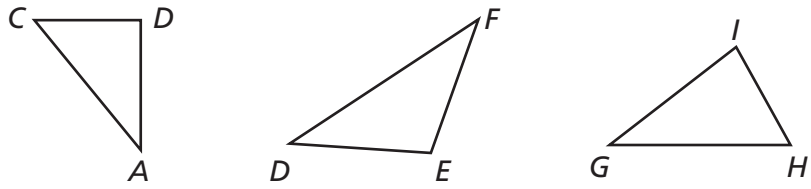


Fig. 4.42

9. Traza las diagonales del rectángulo *EFGH* (fig. 4.43) y llama *J* al punto de intersección.

a) Clasifica, en agudos y obtusos, los ángulos que se forman al cortarse las diagonales.

b) En la figura obtenida nombra los pares de ángulos que suman 90°.

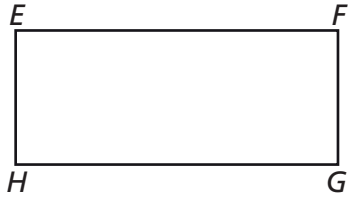


Fig. 4.43

10. De los ángulos que aparecen en la figura 4.44 selecciona los consecutivos y analiza con tus compañeros por qué los seleccionas.

a) b) c)

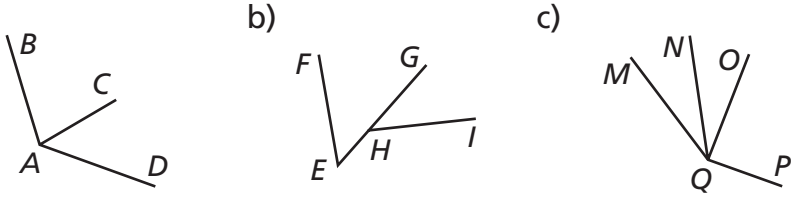


Fig. 4.44

11. Tres de los ángulos de la figura 4.45 se pueden poner consecutivos a un lado de una recta. ¿Cuáles son? ¿Por qué?

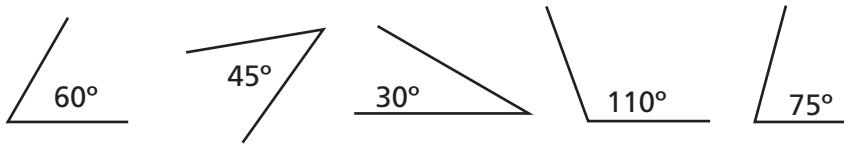


Fig. 4.45

12. Cuatro de los ángulos de la figura 4.46 se pueden poner consecutivos alrededor de un punto. ¿Cuáles son? ¿Por qué?

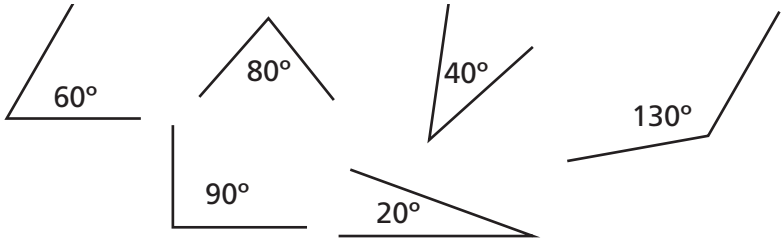


Fig. 4.46

4.3 Resolución de problemas que impliquen la recogida, la descripción y la interpretación de datos

Saber más

El ajedrez es un juego de mesa considerado internacionalmente un deporte (fig. 4.47). Además de entre dos personas, con el desarrollo de las técnicas de la informática y la computación, una partida de ajedrez puede desarrollarse por una persona contra un programa de ajedrez o por dos programas de ajedrez entre sí.

Fig. 4.47

Los implementos del juego son: un tablero cuadriculado de 8 · 8 casillas, alternadas en colores uno oscuro y otro claro. Cada jugador cuenta con dieciséis piezas: un rey, una dama, dos alfiles, dos caballos, dos torres y ocho peones, diferenciadas en colores blanco y negro. Es un juego de estrategias en el que cada jugador lucha por eliminar al rey del oponente, para ello un jugador debe amenazar la casilla que ocupa el rey de su oponente con alguna de sus piezas sin que este pueda defender a su rey, ya sea interponiendo una pieza entre su rey y la pieza que lo amenaza, mover su rey a una casilla libre o sacar del juego a la pieza que lo está amenazando, lo que trae como resultado el fin de la partida y el jaque mate con que se decreta el final de la partida.

Es un juego apasionante al que se le dedican muchas horas de estudio, por lo que el hombre se vio en la necesidad de registrar las partidas con fines documentales. Existen varios sistemas de notación para registrar partidas de ajedrez, el sistema algebraico es el utilizado y recomendado por la Federación Internacional de Ajedrez (FIDE). Por su relación con el desarrollo del tema coordenadas y gráficos, mostraremos algunas de las normas para la notación:

- Las filas del tablero se nombran con los números del 1 al 8 y las columnas del tablero se nombran con las letras minúsculas de la a hasta la h comenzando por la izquierda del jugador con piezas blancas (fig. 4.48).
- Las casillas reciben el nombre de la columna y la fila correspondientes (e8, d5, c6, etcétera).

8	a8	b8	c8	d8	e8	f8	g8	h8
7	a7	b7	c7	d7	e7	f7	g7	h7
6	a6	b6	c6	d6	e6	f6	g6	h6
5	a5	b5	c5	d5	e5	f5	g5	h5
4	a4	b4	c4	d4	e4	f4	g4	h4
3	a3	b3	c3	d3	e3	f3	g3	h3
2	a2	b2	c2	d2	e2	f2	g2	h2
1	a1	b1	c1	d1	e1	f1	g1	h1
	a	b	c	d	e	f	g	h

Fig. 4.48

Observa que al nombrar las casillas se hace combinando los nombres de las columnas y las filas en ese orden. Esto permite dar una ubicación exacta de cualquiera de las piezas en el tablero.

¿Qué son las coordenadas para la geometría?

Se llama coordenadas al par ordenado de números que indican exactamente la posición de un punto en un plano respecto a uno elegido como origen o centro de coordenadas en el sistema de coordenadas.

Observa con detenimiento la ilustración de un sistema de coordenadas rectangulares que se representa en la figura 4.49.

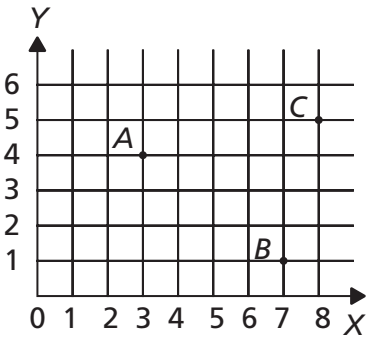


Fig. 4.49

En su forma más simple, el sistema de coordenadas consta de dos rayos, uno horizontal y otro vertical, que tienen su origen donde se intersecan los rayos del sistema de coordenadas. *A* los puntos del eje horizontal o de las x y del eje vertical o de las y se les asignan los números naturales desde 0, del mismo modo que a los rayos numéricos. Los ejes x y y son perpendiculares. En la figura 4.49 las coordenadas del punto *A* son (3; 4), las del *B* son (7; 1) y las del *C* son (8; 5). Al origen del sistema, corresponden las coordenadas (0; 0).

Comenta con tus compañeros lo que opinas de la afirmación: el orden en que se escriben las coordenadas es significativo.

En correspondencia con los ejemplos de las coordenadas de los puntos *A, B* y C, responde: ¿cuál de las coordenadas (x; y) o (y; x) es la correcta para un punto *P* cualquiera del sistema?

Los sistemas de coordenadas son empleados en muchos casos como base para la representación gráfica de datos, generalmente numéricos, para facilitar la visualización de las relaciones que estos

guardan entre sí. Entre estos tipos de gráficas, podemos mencionar las gráficas lineales, los gráficos de barras y los histogramas.

Gráfico lineal: los valores en dos ejes cartesianos ortogonales entre sí (fig. 4.50). Se recomiendan para representar secuencias de datos en el tiempo, y es donde se muestran valores máximos y mínimos; también se utilizan para varias muestras en un diagrama.

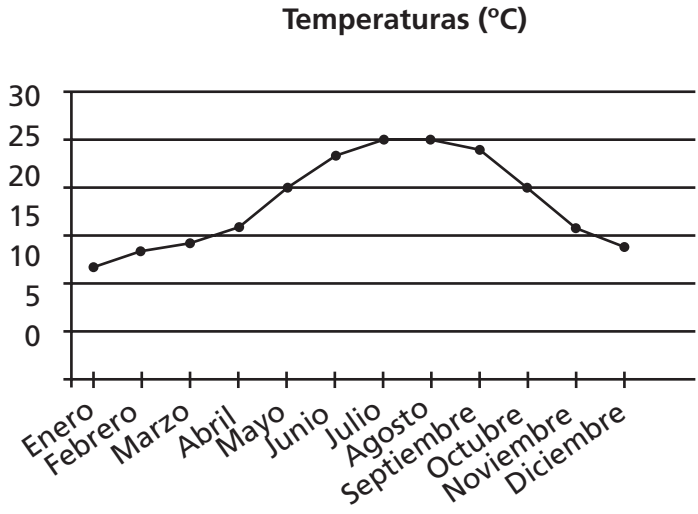
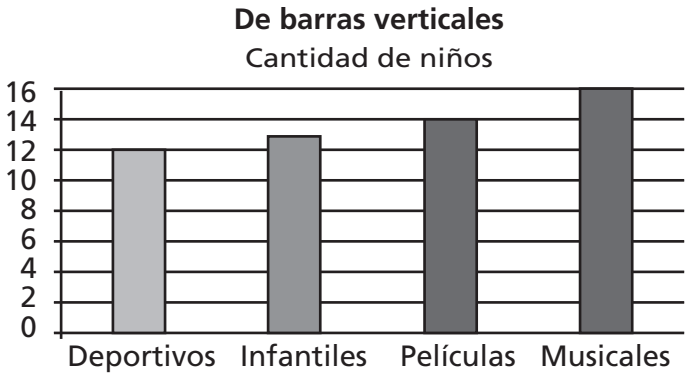


Fig. 4.50

Gráfico de barras: se usa cuando se pretende resaltar la representación de porcentajes de datos que componen un total. Una gráfica de barras contiene barras verticales u horizontales que representan valores numéricos, generalmente usando una hoja de cálculo. Sirve para comparar y tener una representación gráfica de los datos dados.

a) De barras verticales, de las preferencias por programas televisivos elaborado a partir de los datos recogidos en una encuesta aplicada a 95 niños de una primaria (fig. 4.51 a).
b) De barras horizontales, de la preferencia por animales elaborado a partir de los datos recogidos en una encuesta aplicada a 36 niños de una primaria (fig. 4.51 b).

a)



b)

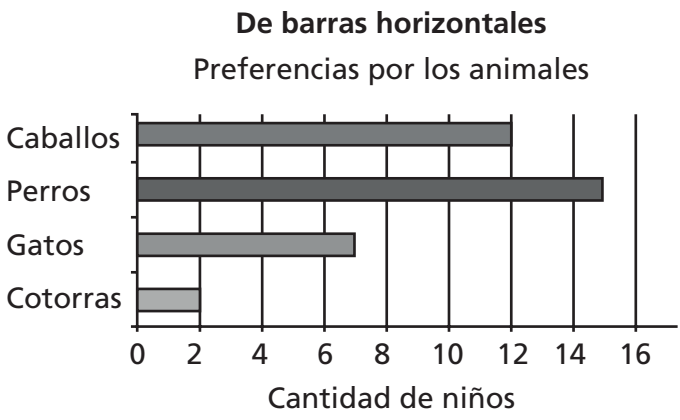


Fig. 4.51 a) y b)

Histograma: se emplea para ilustrar datos agrupados en intervalos (fig. 4.52). Está formado por rectángulos unidos a otros, cuyos vértices de la base coinciden con los límites de los intervalos. La altura de cada rectángulo es proporcional a la frecuencia del intervalo respectivo.

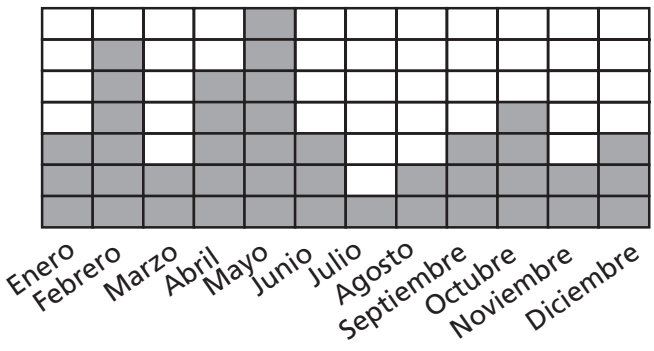


Fig. 4.52

Ejercicios del epígrafe 4.3

1. Determina en un sistema de coordenadas los puntos cuyas coordenadas damos a continuación:

a) A (4; 2) b) *B* (2; 4) c) *C* (3; 3) d) *D* (1; 7)
e) E (0; 5) f) *F* (6; 7) g) *G* (8; 1) h) *H* (9; 0)

2. Di cuáles son las coordenadas de los puntos que aparecen en la figura 4.53.

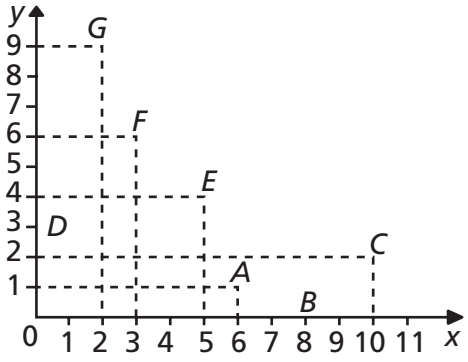


Fig. 4.53

3. Representa en una gráfica de barras los datos que te damos a continuación. Utiliza una escala en la que cada centímetro en el eje y represente 100 km de longitud.

Ríos	Cauto	Sagua la Grande	Zaza	Caonao	San Pedro
Longitud	370	163	155	133	124

a) ¿Cuál es el promedio de longitud de estos ríos?

4. En el gráfico de barras de la figura 4.54 se representan las longitudes de los ríos más importantes de Cuba.

a) Menciona 2 ríos que tengan una longitud mayor que el Toa.
b) ¿Cuál es el río de mayor longitud?
c) Investiga en qué provincia se encuentran estos ríos y localízalos en un mapa de Cuba.

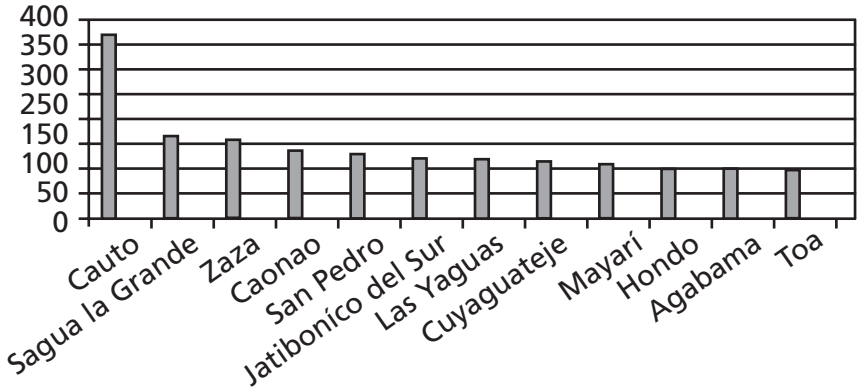


Fig. 4.54

Saber más

El nombre del río Toa procede de una voz indígena que significa rana.

El río Cauto fue fuente de inspiración de Carlos Manuel de Céspedes, quien en el año 1852 escribió una Oda al Río Cauto.

5. En el gráfico de líneas de la figura 4.55 se representa el índice aproximado de boscosidad por provincias en Cuba en el año 2012. (Unidad de medida; miles de ha)

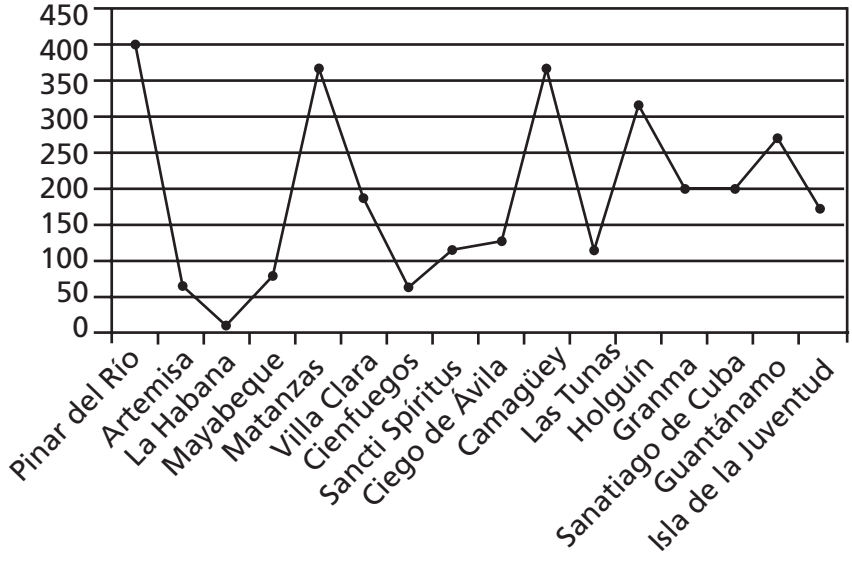


Fig. 4.55

a) ¿Cuál es la provincia de mayor área cubierta de bosques?

b) ¿Cuál es la provincia de menor boscosidad?

c) ¿Cuáles son las provincias con una boscosidad aproximada por encima de 200?

Consejo

6. Elabora una tabla con la matrícula por grados de tu institución educativa y utiliza la opción de gráfico que te ofrece Microsoft Word para elaborar una gráfica de barras con los datos recogidos.

7. Con la ayuda de tu docente recolecta los datos referidos a los años de trabajo de los docentes de la institución educativa, organízalos y represéntalos en un gráfico utilizando la opción que te ofrece Microsoft Word.

4.4 Figuras simétricas

¿Qué es la simetría?

La simetría es una propiedad que se manifiesta en diferentes áreas del conocimiento de forma variada (fig. 4.56).

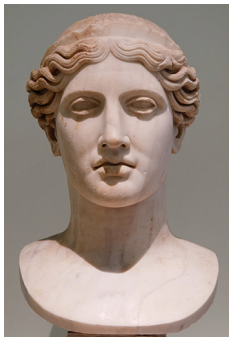


Fig. 4.56

Simetría en biología es la distribución equilibrada en el cuerpo de los organismos de aquellas partes que aparecen duplicadas. La mayoría de las especies animales tienen simetría bilateral. La simetría bilateral permite la definición de un eje corporal (fig.4.57).

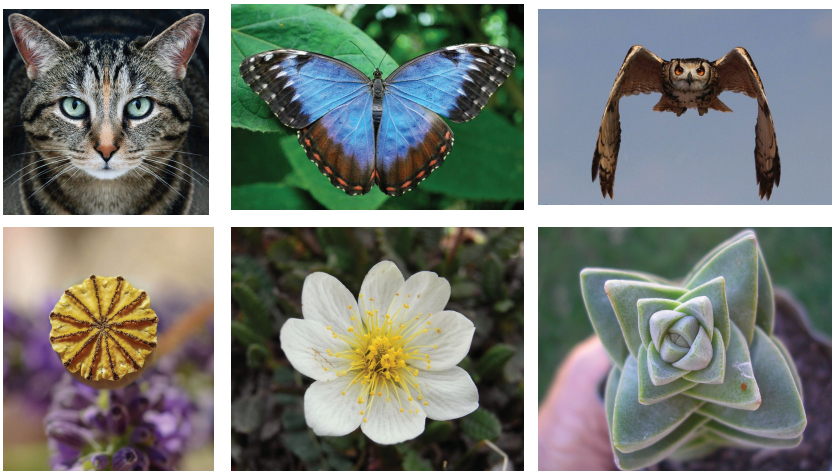
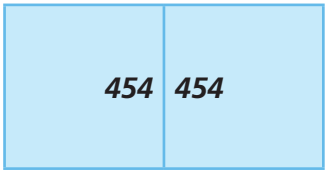


Fig. 4.57

En el lenguaje, la simetría está presente en los ***palíndromos***. Un palíndromo es una palabra, número o frase que se lee igual hacia adelante que hacia atrás. Si se trata de un número, también se le conoce como ***capicúa***. Es el caso de palabras tales como reconocer, anilina, arenera, oso, radar, salas, seres, somos, sometemos; frases como: se van sus naves o números como: 454 o 123 321.



En las artes plásticas se puede presentar este tipo de simetría en los cuadros de pintores famosos (fig. 4.58).

Fig. 4.58

En la matemática esta propiedad también se manifiesta en pares de figuras o en una figura, cuando estas o la mitad de una de ellas coinciden por medio de algún doblez de la hoja o la superficie en que se encuentran representadas. La recta representada por el doblez recibe el nombre de eje de simetría (fig. 4.59).

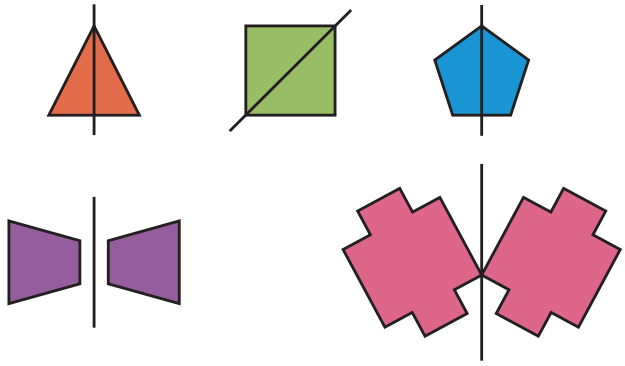


Fig. 4.59

Además de la simetría bilateral se habla también de la simetría central como otra forma de la simetría. Solo que esta última se considera respecto a un punto o centro de simetría, estrechamente relacionada con el movimiento de rotación.

Una figura simétrica tiene al menos un eje de simetría.

En esta definición de figura simétrica es importante hacer una clara diferenciación del concepto de eje de simetría. No todas las rectas que dividen a una figura a la mitad son ejes de simetría.

Observa las rectas *a* y *b* trazadas sobre el rectángulo *ABCD* (fig. 4.60).

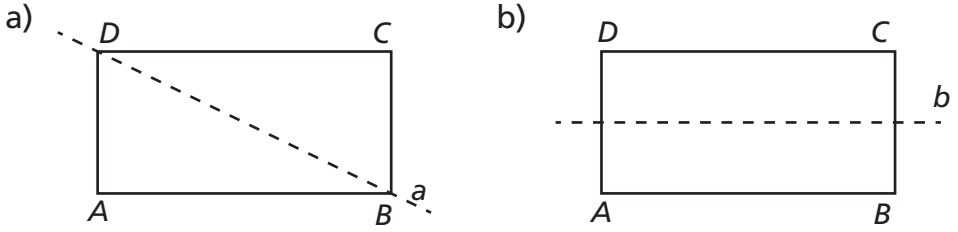


Fig. 4.60

a y *b* dividen al rectángulo *ABCD* en dos partes iguales o mitades.

Las mitades de la figura 4.60a no son simétricas respecto a la recta *a.* Al doblar la figura por esta, las mitades no coinciden.

Las mitades de la figura 4.60b son simétricas respecto a la recta *b*. Al doblar la figura por esta, las mitades coinciden.

Por tanto: la recta *a* no es ***eje de simetría*** del rectángulo *ABCD* y la recta ***b es eje de simetría*** de *ABCD*.

En la figura 4.60b, los pares de puntos: *A* y *D, B* y *C* son puntos simétricos respecto a la recta *b.*

Recuerda que...

Dos puntos simétricos están sobre una perpendicular al eje de simetría y a igual distancia de él. Si están en el eje, entonces coinciden.

El eje de simetría es mediatriz de todo segmento que este determina entre un punto y su imagen.

A la propiedad de las figuras de ser simétricas con respecto a una recta o eje de simetría se le llama ***simetría axial***.

Los segmentos y los ángulos son figuras simétricas. Los ejes de simetría de los segmentos y los ángulos son conocidos como mediatriz y bisectriz respectivamente.

Mediatriz de un segmento y bisectriz de un ángulo

La construcción de la mediatriz de un segmento y de la bisectriz de un ángulo se puede realizar de diferentes maneras. Las que se proponen se basan en las propiedades de las diagonales de los rombos.

Ejemplos

1. Construye la mediatriz *m* del segmento $\overline{AB}$ (fig. 4.61).

Fig. 4.61

Construcción de la mediatriz de un segmento usando una regla rectangular (fig. 4.62).

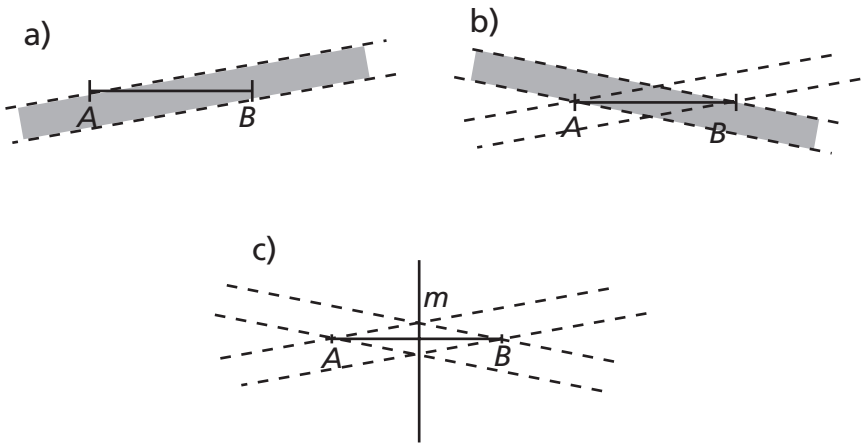


Fig. 4.62

Construcción de la mediatriz de un segmento con regla y compás. Trazar dos circunferencias con centros en los extremos del segmento y radio aproximado mayor que la mitad del segmento (fig. 4.63).

Trazar la recta que pasa por los puntos de intersección de las circunferencias (fig. 4.64).

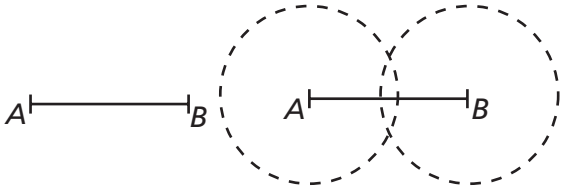


Fig. 4.63

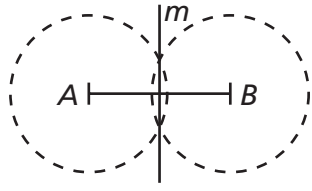


Fig. 4.64

2. Construye la bisectriz *b* del ángulo $\sphericalangle$ (*p*; *q*) (fig. 4.65).

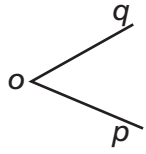


Fig. 4.65

Construcción de la bisectriz de un ángulo usando una regla rectangular (fig.4.66).

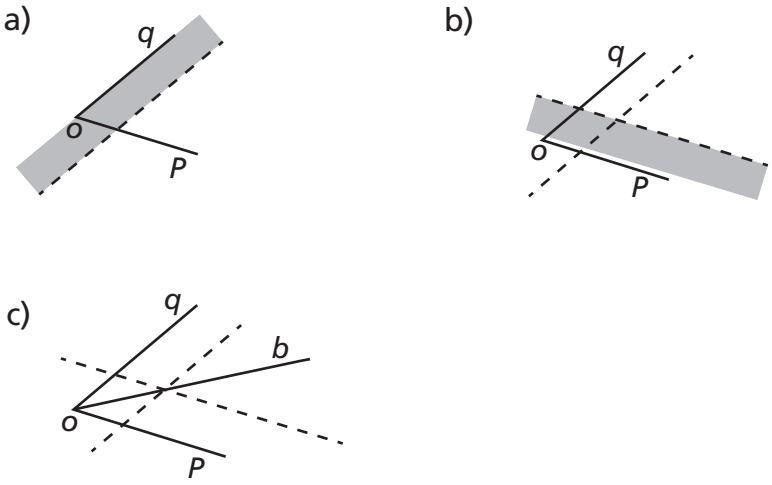


Fig. 4.66

Construcción de la bisectriz de un ángulo usando regla y compás.

Se traza un arco de circunferencia que corte los lados del ángulo.

Se denotan *P* y *Q* los puntos de intersección del arco con los lados (fig.4.67). Se trazan arcos de igual radio con centros en *Q* y *P*. Se denota R el punto de intersección de estos (fig.4.68a).

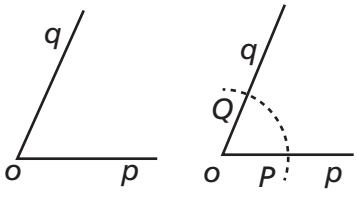


Fig. 4.67

Se traza la semirrecta de origen *O* que pasa por *R* y se denota por *b* (fig. 4.68b). A ***dos figuras simétricas*** corresponde un eje de simetría.

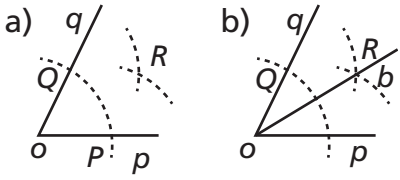


Fig. 4.68

En este caso se hace referencia a dos figuras dispuestas simétricamente, en el mismo plano, respecto a una recta que es su eje de simetría.

Las figuras ***axialmente simétricas*** se pueden identificar porque: a cada punto de una figura corresponde un punto de la otra que es su simétrico respecto al eje de simetría.

Las figuras a y b son simétricas respecto a la recta *r* que es su eje de simetría, es decir, son axialmente simétricas respecto al eje *r*, luego:

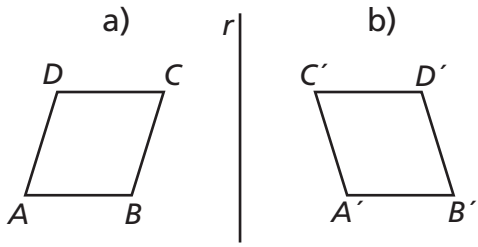


Fig. 4.69

- Al punto *A* de la figura 4.69a corresponden el punto *A´* de la figura 4.69b y viceversa, o sea, *A* y *A´* son simétricos respecto a *r*.
- Al punto *B* de la figura 4.69a corresponde el punto *B´* de la figura 4.69b y viceversa, o sea, *B* y *B´* son simétricos respecto a *r*.
- Al punto *C* de la figura 4.69a corresponde el punto *C´* de la figura 4.69b y viceversa, o sea, *C* y *C´* son simétricos respecto a *r*.
- Al punto *D* de la figura 4.69a corresponde el punto *D´* de la figura 4.69b y viceversa, o sea, *D* y *D´* son simétricos respecto a *r*.

Así sucede para cada punto de la figura 4.69a: tiene un correspondiente en la figura 4.69b que son simétricos respecto a *r*.

¿Hay simetría axial en los cuerpos?

Esta es una pregunta que seguramente te estarás haciendo, la respuesta es sí, solo que en los cuerpos la simetría axial o bilateral es apreciada respecto a un plano como lo muestran las imágenes en la figura 4.70.

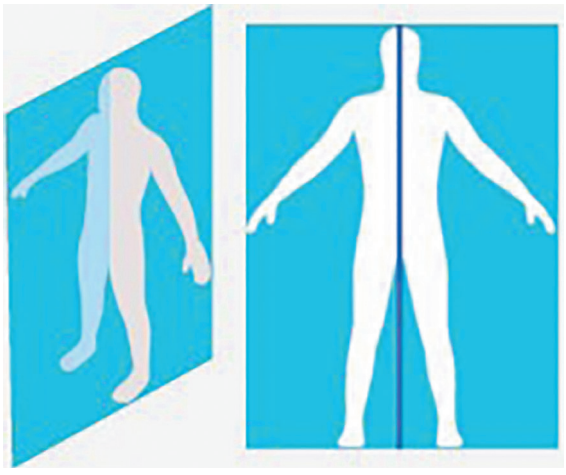


Fig. 4.70

También esta forma de simetría la podemos

observar en ciertas distribuciones de objetos, como te mostramos en la figura 4.71.

En el caso de los cuerpos, los pares de puntos simétricos se localizan en rectas perpendiculares al plano sagital y a igual distancia de este (fig. 4.72).

Fig. 4.71

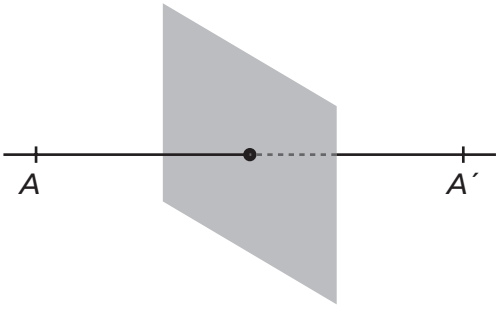


Fig. 4.72

Saber más

Para que un triángulo tenga ejes de simetría debe tener al menos dos lados iguales.

Ejercicios del epígrafe 4.4

1. Identifica entre las figuras dadas un par de figuras simétricas respecto a una recta (fig. 4.73).

2. Observa con detenimiento cada uno de los elementos geométricos que conforman nuestra

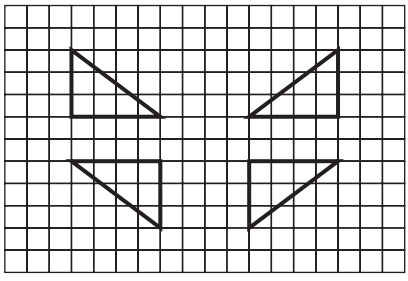


Fig. 4.73

bandera cubana (triángulo, rectángulo, trapecio, estrella) (fig. 4.74) y luego completa:

a) El triángulo rojo es simétrico, la _____ también lo es.

b) Las franjas blancas y azules son simétricas respecto a la recta que: _____.

Fig. 4.74.

3. Indica, en caso de ser simétricas, cuántos ejes de simetría tienen las figuras que aparecen sobre el papel cuadriculado (fig. 4.75). Traza dichos ejes, realizando primero las figuras en papel cuadriculado.

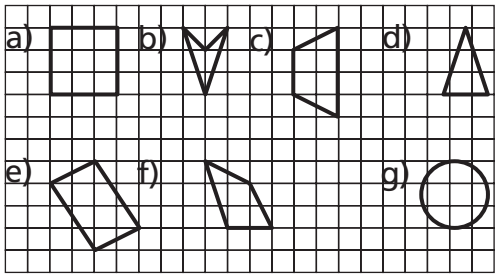
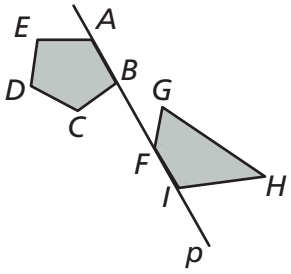


Fig. 4.75

4. Calca las figuras (fig. 4.76) y complétalas de modo que sean simétricas. Utiliza tus instrumentos de dibujo.

a)



b)

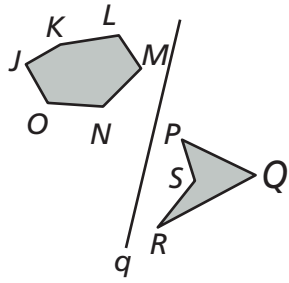


Fig. 4.76

En el inciso a) indica 4 pares de segmentos que sean correspondientes y en el inciso b) dos pares de ángulos. Explica, además, la relación que existe entre ellos.

5. Dibuja los segmentos: $\overline{MN}$ = 3,8 cm; $\overline{AB}$ = 4,1 cm y $\overline{PQ}$ = 6,3 cm. Traza con regla y compás la mediatriz de cada segmento. Señala en cada caso su punto medio.

6. Traza con regla y compás un eje de simetría de cada segmento de la figura 4.77.

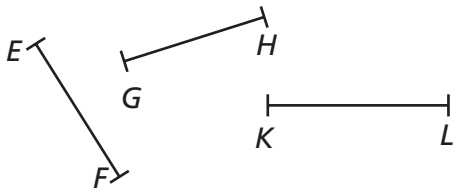


Fig. 4.77

7. Dibuja un segmento de 5 cm. ¿Cuánto miden los segmentos que se forman al trazar su mediatriz? ¿Por qué?

8. De uno de los extremos de un segmento a su mediatriz hay 2,5 cm. ¿Cuánto mide el segmento completo?

Consejo

9. Utilizando el asistente matemático GeoGebra traza:

a) Un rectángulo, un cuadrado y un rombo.

b) Los ejes de simetría de los cuadriláteros trazados.

c) Los ángulos $\beta = 30°$ y $\alpha = 128°$ y sus bisectrices.

10. Dibuja un ángulo recto, uno agudo y otro obtuso. Traza sus bisectrices y comprueba con el semicírculo la medida de los ángulos obtenidos.

11. Dibuja un ángulo llano y traza su bisectriz. ¿Qué observas?

12. La figura 4.78 representa un cuadrado que se ha dividido en cuatro cuadrados iguales. Completa las siguientes tablas de elementos correspondientes según los ejes de simetría que se indican.

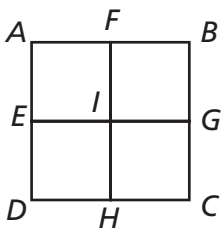


Fig. 4.78

a) Eje *FH*

Original	Imagen
A	
	G
I	
$\overline{AE}$	
	$\overline{IC}$
$\overline{BG}$	
D	

b) Eje *EG*

Original	Imagen
A	
	C
I	
$\overline{AE}$	
	$\overline{IC}$
$\overline{FB}$	
	A

c) Eje *AC*

Original	Imagen
D	
	C
I	
$\overline{AF}$	
	$\overline{EI}$
$\overline{DI}$	
$\measuredangle B$	

d) Eje *BD*

Original	Imagen
D	
	A
I	
	$\overline{HC}$
$\overline{EI}$	
$\overline{AI}$	
	$\measuredangle A$

13. * Argumenta los siguientes planteamientos o proposiciones:

a) En un triángulo isósceles, la mediatriz de la base pasa por el vértice opuesto a ella y es bisectriz del ángulo que tiene ese vértice.

b) En el rombo y el cuadrado, las diagonales se cortan perpendicularmente en el punto medio y son bisectrices de los ángulos que cortan.

14. Revisa diferentes fuentes de información (libros, revistas, enciclopedias, internet), selecciona y trae al aula ilustraciones que contienen figuras o pares de figuras simétricas. Comple-

menta tu propuesta con informaciones de la ilustración que a tu juicio son de interés para el resto de tus compañeros.

Ejemplo

La figura 4.79 muestra la bandera de Brasil; país suramericano cuya capital es Brasilia. El rectángulo, el rombo y el círculo: son simétricos, los ejes comunes a estos tres elementos son las rectas que contienen las diagonales del rombo.

Fig. 4.79

4.5 Igualdad y movimiento

Saber más

Transformaciones isométricas son aquellas que se realizan sin que cambien las formas y dimensiones de las figuras en el plano; la figura inicial y la final son geométricamente congruentes, o sea, que superpuestas coinciden. Son transformaciones isométricas los movimientos del plano: traslación, reflexión y rotación.

La palabra isometría tiene su origen en el griego iso (igual) y metria (medir), una definición cercana es igual medida.

Recuerda que

Por cada movimiento del plano, a cada punto de la figura original corresponde un único punto de la figura imagen y viceversa.

- Dos figuras son iguales, si superpuestas coinciden, es decir, una se obtiene de la otra por un movimiento del plano.
- Si dos figuras no son iguales, entonces no existe un movimiento del plano que las superpongan y las haga coincidir.

Saber más

En muchos programas mantener presionada la tecla MAYÚSCULA mientras arrastras la figura, preserva su forma, y la figura nueva es similar a la original. Prueba a hacerlo con Microsoft Word y verás.

Movimiento de reflexión

Se conoce como movimiento de reflexión por una recta al movimiento del plano que transforma una figura en otra del mismo plano, que es su simétrica. En la práctica significa voltear el plano tomando como eje, para la realización del movimiento, a una de sus rectas (fig. 4.80).

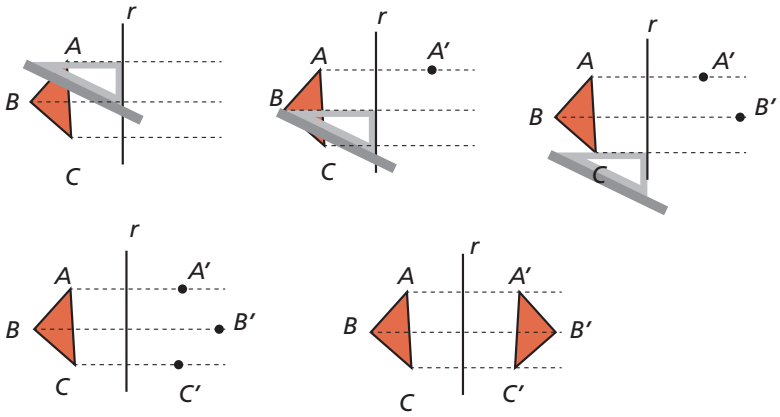


Fig. 4.80

Teniendo en cuenta el significado de puntos simétricos el movimiento de reflexión se puede definir de la siguiente forma:

Definición

Se llama reflexión del plano respecto a una recta r al movimiento del plano que a cada punto A hace corresponder un punto A' tal que:

- $\overline{AA'}$ es perpendicular a la recta r.
- $\overline{A}$ y $\overline{A'}$ están a la misma distancia de r.
- $\overline{A} = \overline{A'}$ para los puntos $\overline{A} \notin r$.

Ejemplo

Observa la figura 4.81, en la que: *A, A´; B, B´; D, D´; E, E´* y F, *F´* son puntos del plano y r es una recta de ese mismo plano.

Los pares de puntos *A*, *A´*; *B*, *B´*; *D*, *D´*; *E*, *E´* y *F*, *F´*; son parejas de puntos simétricos que equidistan de la recta *r*.

Los segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{DD'}$, $\overline{EE'}$, $\overline{EE'}$, $\overline{FF'}$ son perpendiculares a *r.*

El punto $\overline{C}$ es su propio simétrico. (*C* es un punto del eje de simetría).

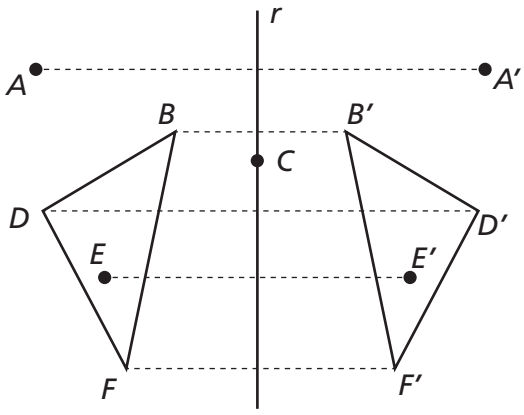


Fig. 4.81

Estos son argumentos que permiten identificar que en la ilustración se representa un movimiento de reflexión respecto a la recta *r*. Por esta reflexión, el triángulo *BDF* se transformó en el triángulo *B´D´F´*, luego, los triángulos *BDF* y *B´D´F´* son iguales.

¿Sabes cómo construir la imagen de una figura por una reflexión de eje r en el plano? ¿Qué datos necesitas tener?

Son muchos y variados los procedimientos mediante los cuales se puede obtener la imagen de una figura por reflexión. Todo depende de las condiciones y los medios con los que contamos.

Practica el transporte de segmentos y la construcción de perpendiculares y luego prueba en tu libreta a construir la imagen por reflexión, de un punto, un segmento y finalmente de figuras. ¿Qué datos necesitas tener?, eso es muy fácil de responder: el punto, el segmento o la figura y el eje de simetría.

Prueba a describir los pasos de la construcción que se muestra en la figura 4.82. En caso necesario, pide ayuda a tus compañeros de aula, tu docente o algún familiar.

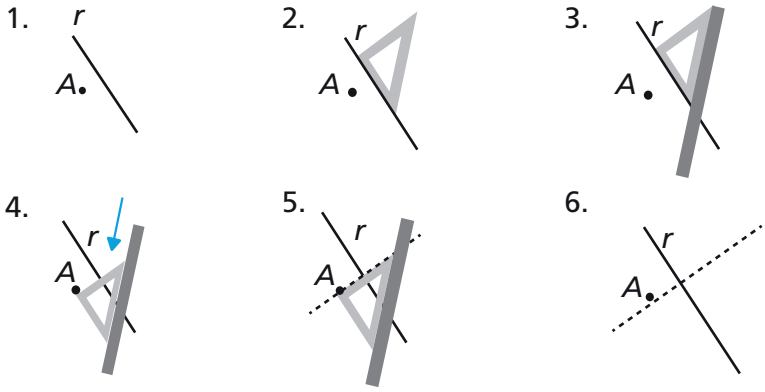


Fig. 4.82

La secuencia que se muestra en la figura 4.82 ilustra al detalle los primeros seis pasos desde que se dan el punto y la recta hasta que se construye la perpendicular a *r* que pasa por el punto *A*. Ahora te mostramos cómo localizar el punto *A´* con la ayuda de un transportador de segmentos elaborado con papel (fig. 4.83).

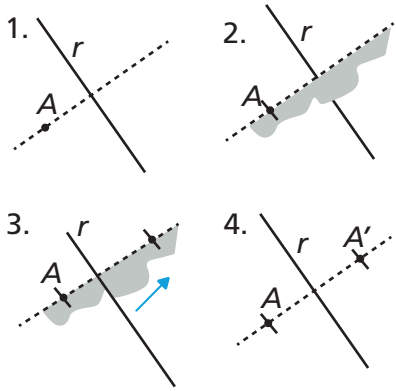


Fig. 4.83

Ahora solo tienes que repetir estos pasos para cada punto que sea indispensable para la reproducción de la figura en su nueva posición como imagen de la original.

Saber más

Los espejos son objetos muy utilizados en la vida cotidiana. Hay espejos en nuestras casas, en las tiendas y en los autos. Cuando nos acercamos a un espejo podemos vernos debido a que su superficie brillante refleja la luz que recibe.

Movimiento de traslación

Se conoce como movimiento de traslación de dirección *r* al movimiento del plano que transforma una figura en otra del mismo plano, moviendo todos sus puntos en una misma dirección, sentido y distancia. En la práctica significa deslizar la figura una distancia dada tomando la dirección y el sentido de una semirrecta de r. Los datos de longitud, dirección y sentido son dados mediante un segmento orientado o vector.

¿Qué es un segmento orientado o vector?

Observa las ilustraciones, apóyate en ellas para que des respuesta a esta pregunta y aprendas más acerca de los vectores (fig. 4.84). Comenta con tus compañeros del aula para que compartan las opiniones.

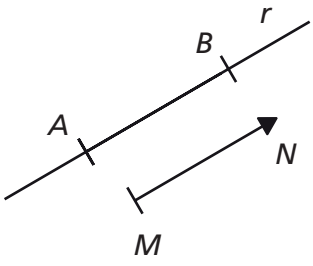


Fig. 4.84

1. El vector $\overrightarrow{MN}$, tiene la misma dirección que la recta *r*, la longitud del segmento $\overline{AB}$ y el sentido de la semirrecta *AB*. ¿Qué es un vector?, ¿en qué se diferencia un vector de un segmento?, ¿en qué se le parece?
2. Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{MN}$ son iguales, pues tienen igual longitud, dirección y sentido (fig. 4.85).

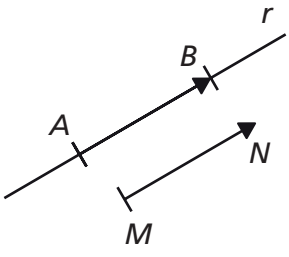


Fig. 4.85

3. Cuando entre dos vectores hay diferencias, ya sea entre sus longitudes o entre sus direcciones o entre sus sentidos, se dice que son desiguales. El movimiento se define como sigue:

Definición

Se llama traslación de vector $\overrightarrow{MN}$ al movimiento que a cada punto P del plano le hace corresponder un punto P' tal que $\overrightarrow{MN} = PP'$, o sea:

$$\overline{MN} \parallel \overline{PP'}$$
$$\overline{MN} = \overline{PP'}$$

la semirrecta MN es de igual sentido que la semirrecta PP'.

Ejemplo

Al triángulo ABC se le ha aplicado la traslación de vector $\overrightarrow{MN}$ observa en la figura 4.86 cómo queda ubicado un triángulo respecto a su imagen.

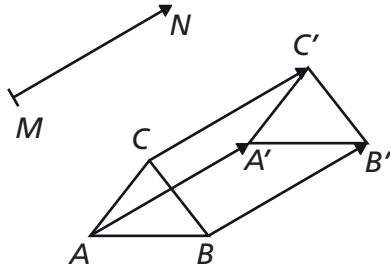


Fig. 4.86

Comprueba que:

$\Delta ABC = \Delta A'B'C'$

- $\overline{AA'} \parallel \overline{MN}$, $\overline{BB'} \parallel \overline{MN}$ y $\overline{CC'} \parallel \overline{MN}$
- $\overline{AA'} = \overline{MN}$, $\overline{BB'} = \overline{MN}$ y $\overline{CC'} = \overline{MN}$
- $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$ y $\overline{CA} \parallel \overline{C'A'}$
- $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ y $\overline{CA} = \overline{C'A'}$

¿Sabes cómo construir la imagen de una figura por una traslación de vector dado? ¿Qué datos necesitas tener?

Practica el transporte de segmentos y la construcción de paralelas a una recta dada y luego prueba en tu libreta a construir la imagen por traslación de un punto, un segmento y finalmente de figuras. ¿Qué datos necesitas tener?, eso es muy fácil de responder: el punto, el segmento o la figura y el vector de traslación.

Observa la secuencia de ilustraciones de la figura 4.87 que muestran paso a paso cómo se construye la imagen de un punto por traslación de vector conocido.

La secuencia de la figura 4.87 ilustra al detalle los cuatro primeros pasos desde que se dan el punto y el vector hasta que se construye la paralela al vector que pasa por el punto P. Ahora te mostramos cómo localizar el punto *P´* con la ayuda de un transportador de segmentos elaborado con papel (fig. 4.88).

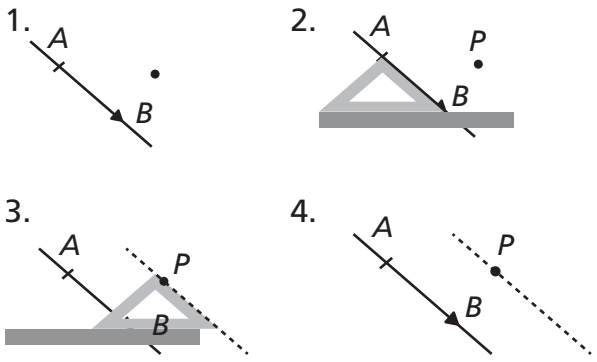


Fig. 4.87

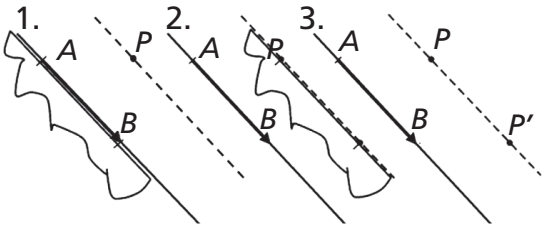


Fig. 4.88

Prueba a describir los pasos ilustrados de la construcción. Compara tu descripción con la realizada por otros de tus compañeros de aula.

Movimiento de rotación

Se conoce como movimiento de rotación de centro *O* al movimiento que a cada punto del plano hace corresponder otro que está a igual distancia de un punto *O*, que es el centro de rotación. En la práctica es el movimiento que hace girar los

puntos de un plano alrededor de uno que permanece estático. En la rotación del plano es importante tener en cuenta el centro de rotación, el ángulo de rotación y la distancia del punto al centro de rotación.

El ángulo de rotación es para este movimiento lo que el vector es para el movimiento de traslación. El ángulo de rotación tiene vértice en el centro de rotación y sus lados contienen respectivamente a un punto y su imagen por dicha rotación, además, el ángulo de rotación informa del sentido y amplitud del movimiento: a favor o en contra del movimiento de las manecillas del reloj. Es el ángulo que identifica la rotación de centro *O*, de amplitud igual a la amplitud del ángulo *POP´*, a favor de las manecillas del reloj (fig.4.89).

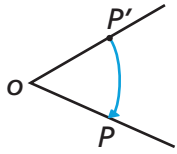


Fig. 4.89

Es el ángulo que identifica la rotación de centro *O*, de amplitud igual a la amplitud del ángulo POP´, contrario al movimiento de las manecillas del reloj (fig. 4.90).

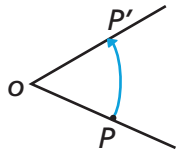


Fig. 4.90

A cada ángulo no orientado corresponden dos rotaciones una en cada sentido.

¿Cómo saber el sentido de la rotación?

Acordemos que:

- Cuando en el texto del ejercicio no se da como dato el sentido de la rotación, se realiza una de las dos rotaciones: a favor o contraria al movimiento de las manecillas del reloj.
- Para indicar el sentido de la rotación se hará textualmente o señalizado con una flecha en el ángulo dado.

El movimiento de rotación se define como sigue:

Definición

Se llama rotación de centro *O* y ángulo *AOB* al movimiento del plano que a cada punto *P* del plano hace corresponder un punto *P´* tal que: $\overline{OP} = \overline{O'P'}$.

- $POP' = AOB$ y tienen el mismo sentido.
- O es el único punto que permanece estático.

Ejemplo

Al triángulo ABC se le ha aplicado la rotación de ángulo COC´. Observa en la figura 4.91 cómo queda ubicado el $\Delta\, ABC$ respecto a su imagen Δ A´B´C´.

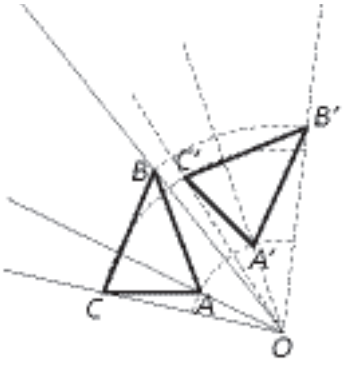


Fig. 4.91

Comprueba que:

- $AOA' = BOB' = COC'$
- $\overline{AO} = \overline{A'O}, \overline{BO} = \overline{B'O}$ y $\overline{CO} = \overline{C'O}$
- $\overline{AB} = \overline{A'B'}, \overline{BC} = \overline{B'C'}$ y $\overline{CA} = \overline{C'A'}$

¿Sabes cómo construir la imagen de una figura por una rotación de centro O y ángulo de lados p y q? ¿Qué datos necesitas tener?

Practica el transporte de segmentos y el transporte de ángulos con regla y compás y luego prueba en tu libreta a construir la imagen por rotación de un punto, un segmento y finalmente de figuras. ¿Qué datos necesitas tener?, eso es muy fácil de responder: el segmento o la figura, el centro de rotación y el ángulo de rotación.

No hay una manera única de realizar la construcción de la imagen por rotación de un punto, un segmento o una figura, la forma de proceder depende de los medios a nuestro alcance y de las destrezas que cada persona va desarrollando. Los principios son los mismos: el transporte de ángulos y de segmentos.

Prueba a describir los pasos de la construcción de la imagen por rotación que a continuación te mostramos en la figura 4.92. En caso necesario, pide ayuda a tus compañeros, docentes o familiares y amigos. Comparte los resultados de tu trabajo con el resto de tus compañeros.

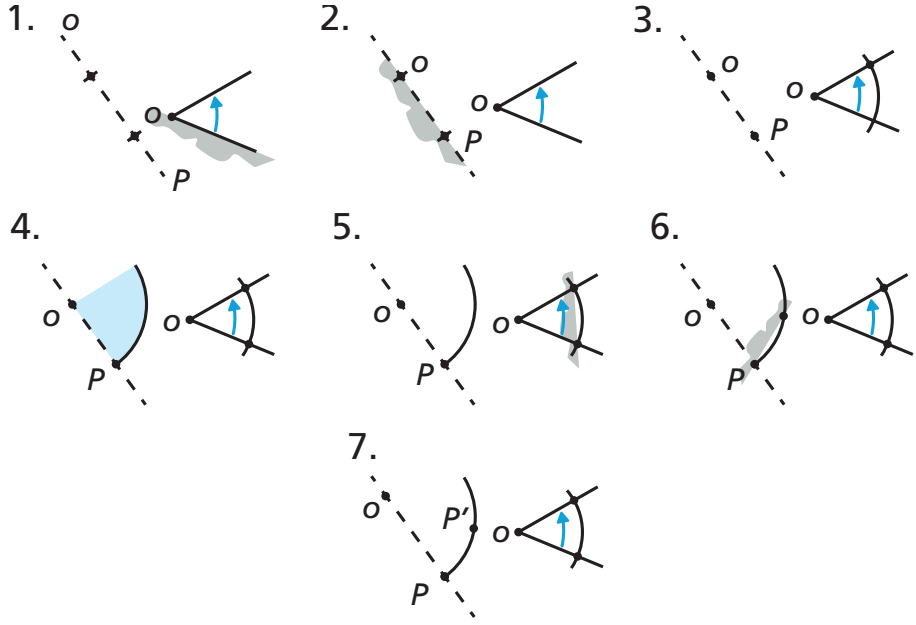


Fig. 4.92

Saber más

En el reloj, la aguja horario recorre, cada hora, un ángulo de 30°.

Una rotación especial: simetría central

Dentro del tema figuras simétricas se aborda el de las figuras simétricas respecto a un punto. La simetría central es un caso particular de la rotación. Se conoce como simetría central a la rotación con ángulo de 180°.

También se pueden reconocer como figuras centralmente simétricas a las de la figura 4.93.

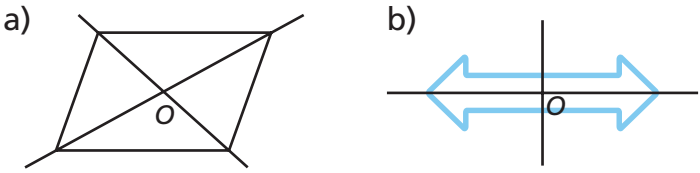


Fig. 4.93

En el caso de la figura del inciso b) es doblemente simétrica, o sea, axial y centralmente simétrica, pues lo es respecto a las rectas representadas y respecto a O.

Son centralmente simétricos la pareja de triángulos de la figura 4.94.

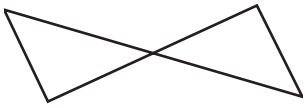


Fig. 4.94

El movimiento de simetría central se puede definir de la siguiente forma:

Definición

Se llama simetría de centro *O* a una rotación de centro *O* y ángulo de rotación de 180°.

O también:

Se llama simetría de centro *O* al movimiento del plano que a cada punto *P* del plano hace corresponder un punto *P´* tal que:

- la recta *PP´* contiene a *O.*
- *P* y *P´* están en semirrectas opuestas de origen *O.*
- $\overline{OP} = \overline{OP'}$.
- *O* es el único punto que permanece estático.

Ejemplo

Al triángulo *ABC* se le ha aplicado una simetría de centro *O.* Observa en la figura 4.95 cómo queda ubicado el Δ *ABC* respecto a su imagen Δ A´B´C´.

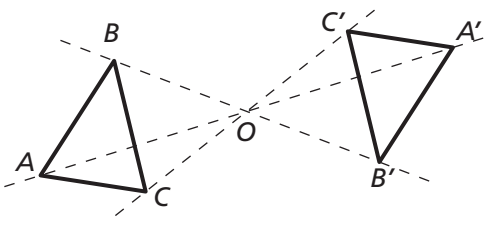


Fig. 4.95

Comprueba que:

- $\overline{AO} = \overline{AO'}$, $\overline{BO} = \overline{BO'}$, $\overline{CO} = \overline{CO'}$
- $\overline{AB} = \overline{AB'}$, $\overline{BC} = \overline{BC'}$, $\overline{CA} = \overline{CA'}$

¿Sabes cómo construir la imagen de una figura por una simetría de centro *O*? ¿Qué datos necesitas tener?

Construir la imagen de una figura por un movimiento de simetría de centro *O* se reduce al trazado de rectas y el transporte de segmentos. Para construir la imagen de una figura por una simetría central se necesita conocer la figura y el punto que es centro de simetría. En la figura 4.96 se ilustra la construcción de la imagen de un punto *P* por una simetría de centro *O*. Prueba a describir cada paso o momento de la construcción.

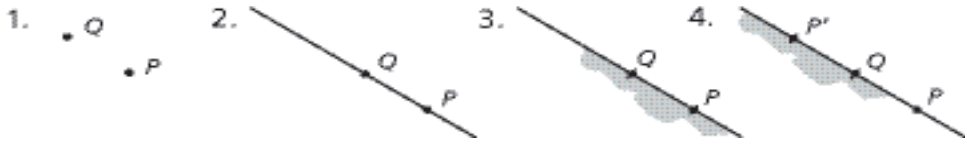


Fig. 4.96

Ejercicios del epígrafe 4.5

1. Di si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes. Escribe (V) en las que son verdaderas y (F) en las que son falsas.

a) _____ La imagen de un segmento de 7 cm es un segmento de 70 mm.

b) _____ Por un movimiento, si dos rectas son paralelas sus imágenes se cortan en un punto.

c) _____ Por un movimiento la imagen de una recta es una recta.

d) _____ Si un ángulo mide 45°, su imagen mide 54° al aplicarle un movimiento.

e) _____ Por un movimiento la imagen de un segmento es una semirrecta.

2. Marca con una (X) la respuesta correcta.

Por un movimiento la imagen de un segmento es:

a) ___ Una semirrecta. b) ___ Una recta.

c) ___ Un segmento.

Si un segmento tiene una longitud de 80 mm, entonces su imagen tendrá una longitud de:

a) ___ 8 dm b) ___ 8 cm c) ___ 8 m

Si a dos rectas paralelas se les aplica un movimiento, entonces:

a) ___ sus imágenes se cortan en un punto.

b) ___ sus imágenes son paralelas.

c) ___ no sucede nada.

3. En la figura 4.97 se ilustran diferentes correspondencias del plano, obsérvalas y di cuáles son movimientos y cuáles no. Argumenta tu respuesta.

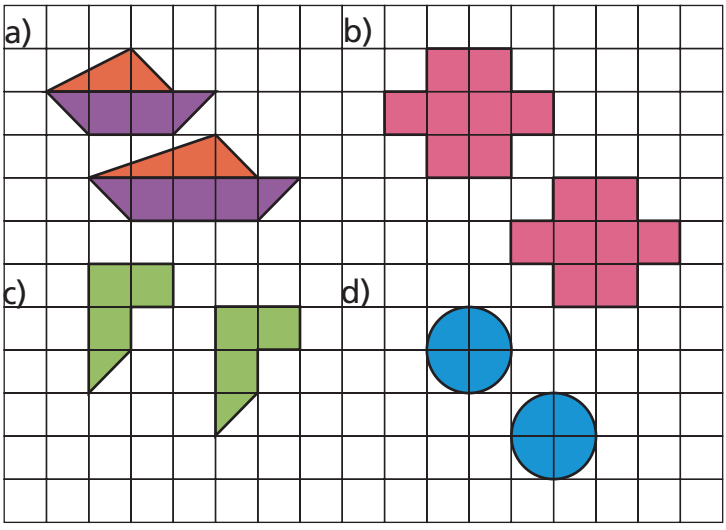
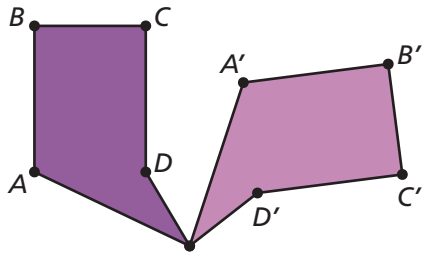


Fig. 4.97

4. En la figura 4.98 se han representado dos polígonos que son correspondientes por un movimiento. Selecciona de las siguientes proposiciones las verdaderas y las falsas. Escribe (V) en las que son verdaderas y (F) en las que son falsas. Argumenta a tus compañeros el porqué de tu selección.



$O = O'$

Fig. 4.98

a) _____ El polígono $ABCDO$ es igual al polígono $A'B'C'D'O'$.

b) _____ $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son paralelos y sus imágenes $\overline{A'B'}$ y $\overline{C'D'}$ no lo son.

c) _____ $\sphericalangle AOD = \sphericalangle A'O'D'$.

5. Reproduce en papel cuadriculado el triángulo y la recta que aparecen en la figura 4.99. Construye la figura que es simétrica a la dada.

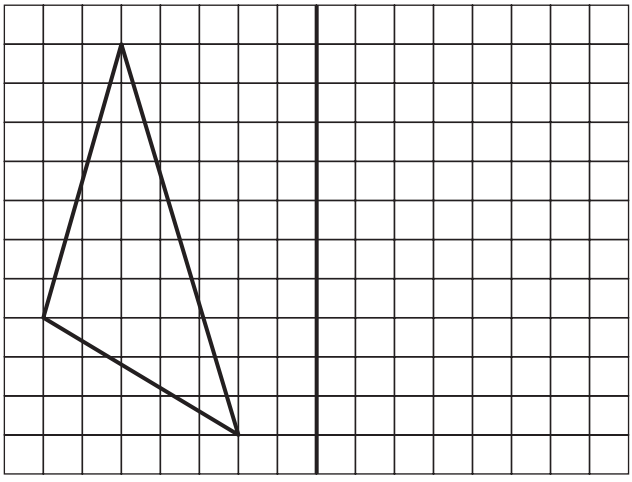


Fig. 4.99

6. Cambia la posición de la recta y vuelve a realizar el ejercicio anterior.

7. Completa la idea siguiente: al segmento $\overline{AB}$ se le aplicó una reflexión de eje *r,* este es a su vez, la mediatriz de $\overline{AB}$. Luego, la imagen de $\overline{AB}$ es _____.

8. En la figura 4.100 el punto *B* es la imagen de *A* por la reflexión de eje *g.*

a) ¿Cuál es la imagen de *B*?

b) Di cuáles son los puntos imágenes de *E, H* y *G* y cuáles son las coordenadas de dichas imágenes.

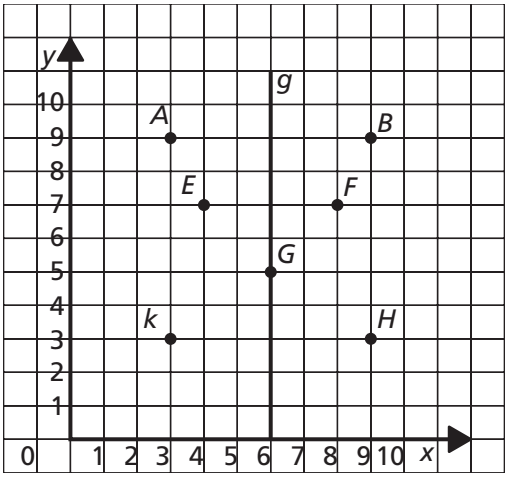


Fig. 4.100

9. En la figura 4.100, si se considera la reflexión que transforma *A* en K, completa los espacios en blanco:

a) Las imágenes de *E* y *F* son _____ y _____.

b) La imagen de *G* está en la recta _____.

c) Las coordenadas de la imagen de *H* son _____.

Argumenta a tus compañeros tus respuestas.

10. Traza en un sistema de coordenadas los puntos:

A (0; 8), *B* (2; 1), *C* (2; 7), *D* (3; 3), *E* (6; 1), *F* (9; 6), *G* (10; 0).

Traza la recta *g* paralela al eje y, que pase por el punto *P* (5; 10). Escribe las coordenadas de las imágenes de cada uno de los puntos dados, por la reflexión de eje *g*.

11. Completa las tablas de puntos correspondientes por una reflexión (fig. 4.101).

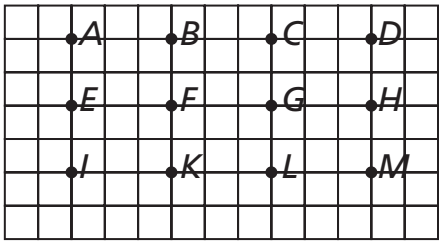


Fig. 4.101

Original	M	K	C		
Imagen	D			E	C

Original	F	A	H		
Imagen	G			K	M

12. En cuál de las rectas de la figura 4.102 se efectúa la reflexión mediante la cual:

a) A´ = *B* b) C´ = *D* c) E´ = *C* d) G´ = G

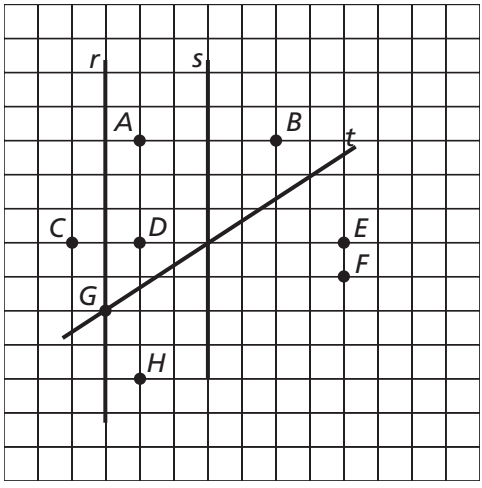


Fig. 4.102

13. Completa, según la figura 4.103, de modo que las proposiciones siguientes sean verdaderas.

a) Por la reflexión de eje r, el punto *B* es la imagen de _____.

b) Por la reflexión de eje s, el punto *H* es el original de _____.

c) El punto *E* tiene en la reflexión de eje *t* la _____ imagen.

d) EL punto *F* es la imagen de *E* en la reflexión de _____ eje. Según _____ la reflexión de _____ eje *t, FD* se transforma en _____.

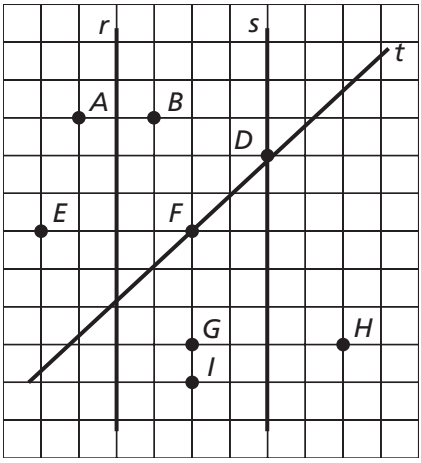


Fig. 4.103

14. Traza en un sistema de coordenadas una recta *g* que pase por los puntos (0; 4) y (10; 6).

a) Traza el punto *A* (4; 10) y construye su imagen *A´* según la reflexión de eje *g.* Escribe las coordenadas de A´.

b) Traza el punto *B* (11; 3), construye su imagen *B´* por la reflexión de eje *g* y describe la construcción que realizaste.

15. Traza con la plantilla perforada los puntos *A* (2), *B* (15), *C* (6) y *D* (9).

a) Construye la imagen *A´* de *A,* por la reflexión de eje *CD.*

b) Construye el punto imagen de *B* por la reflexión de eje *CD.*

Describe la construcción.

16. Traza con la plantilla los puntos *A* (13), *B* (9) y *C* (15).

a) Construye la imagen *D* del punto *B* por la reflexión de eje *AC.* ¿Qué clase de cuadrilátero es *ABCD*?

b) ¿Cuál es la imagen de *C* por la reflexión de eje *BD*? Argumenta tu respuesta.

17. Traza un rectángulo *ABCD* con *AB* = 5 cm y *BC* = 3 cm.

a) ¿Qué imágenes tienen *A* y *C* por la reflexión de eje *AC*?

b) Traza el eje de una reflexión que transforma el rectángulo en el mismo rectángulo.

18. Traza con la plantilla un triángulo isósceles *ABC* con *A* (15), *B* (10) y *C* (11).

a) Halla la imagen del triángulo *ABC* por la reflexión de eje *AC*.

b) ¿Qué tipo de cuadrilátero es el *ABCB´*? ¿Por qué?

19. Traza dos rectas que tengan:

a) La misma dirección. b) Distinta dirección.

20. Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas apóyate en la figura 4.104. Escribe (V) en las que son verdaderas y (F) en las que son falsas. Argumenta tu respuesta.

a) ___ $\vec{u} = \overrightarrow{DE}$. b) ___ $\vec{t} = \overrightarrow{AD}$.

c) ___ *C* es la imagen de *E* en la traslación de vector $\vec{v}$.

d) ___ *B* es el original de *D* por la traslación de vector $\vec{w}$.

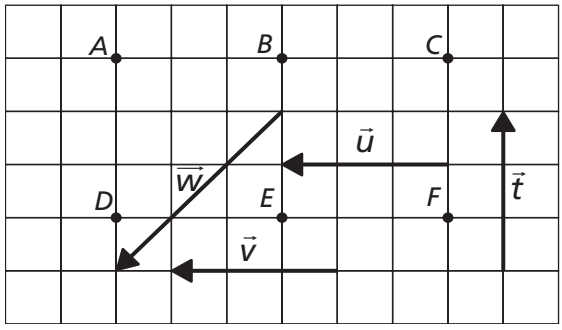


Fig. 4.104

21. Traza en un sistema de coordenadas los puntos *A* (2; 2), *B* (4; 6), *C* (5; 2), *D* (7; 0), *E* (10; 1), y *F* (11; 7).

a) Considera la traslación de vector $\overrightarrow{AB}$ y di cuáles son las coordenadas de los puntos imágenes de *C, D, F* y A.

b) * Considera ahora la traslación $\overrightarrow{CD}$ y di cuáles son las coordenadas de los puntos originales de *D, A, B* y E.

22. Traza en un sistema de coordenadas los puntos P (4; 2) y Q (7; 0). Considera la traslación $\overrightarrow{PQ}$ y completa las siguientes proposiciones de modo que sean verdaderas:

a) (7; 3) es la imagen de _____.

b) (4; 5) es el original de _____.

c) _____ es el original de (8; 5) y este es el original de _____.

d) (8; 0) es la imagen de _____ y este es la imagen de _____.

23. Traza con la plantilla perforada los puntos A (9), B (14) y C (10).

a) Traza la imagen C' del punto C por la traslación $\overrightarrow{AB}$. Clasifica el cuadrilátero $ABC'C$.

b) ¿Cuál es la imagen del punto A por esa traslación?

24. Traza una recta r y un vector $\vec{u}$ paralelo a r y otro $\vec{v}$ no paralelo a r.

a) ¿Cuál es la imagen de r por la traslación $\vec{u}$?

b) ¿Qué relación existe entre la recta r y su imagen r' por la traslación $\vec{v}$?

25. Dibuja en tu libreta el polígono $PQRST$ (fig. 4.105). Halla su imagen por la traslación $\overrightarrow{TR}$.

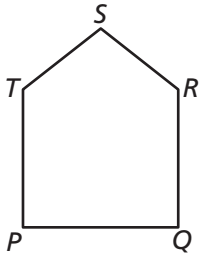


Fig. 4.105

26. Dibuja en papel cuadriculado la figura 4.106.

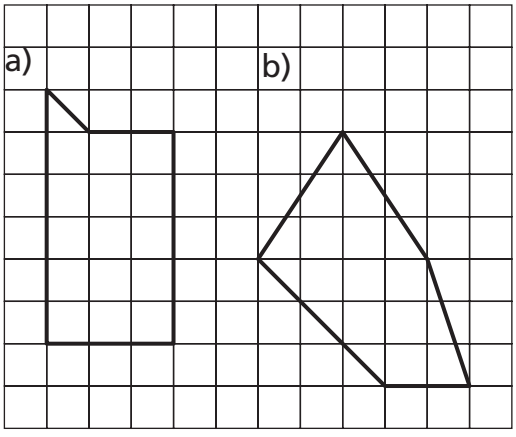


Fig. 4.106

Construye mediante una traslación (escoge tú el vector en cada inciso) figuras iguales a las dadas.
Relaciona en cada figura y su imagen los lados que son iguales.

27. En la figura 4.107 aparece un cuadrado que tiene en su interior cuadraditos iguales.

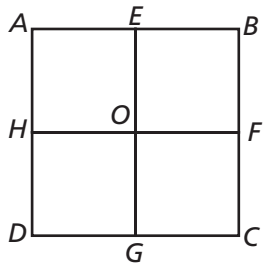


Fig. 4.107

Completa las tablas que aparecen a continuación según la traslación que se indica en cada inciso.

a)

Original	Imagen
A	*E*
	O
E	
D	
	C

b)

Original	Imagen
F	*O*
E	
	D
	H
G	

c)

Original	*H*	*O*		*D*	*G*
Imagen	*E*		*F*		

d)

Original	*O*		*E*	*H*	
Imagen	*C*	*O*			*F*

28. Traza en una hoja cuadriculada un triángulo escaleno *ABC* y un punto *Q* como aparecen en la figura 4.108 y determina la imagen del triángulo por una rotación de centro *Q* y ángulo de 90° en sentido contrario y a favor de las manecillas del reloj, de manera que sus vértices coincidan con los vértices de los cuadraditos. En la figura 4.108 se muestran las imágenes que se obtienen por estos movimientos.

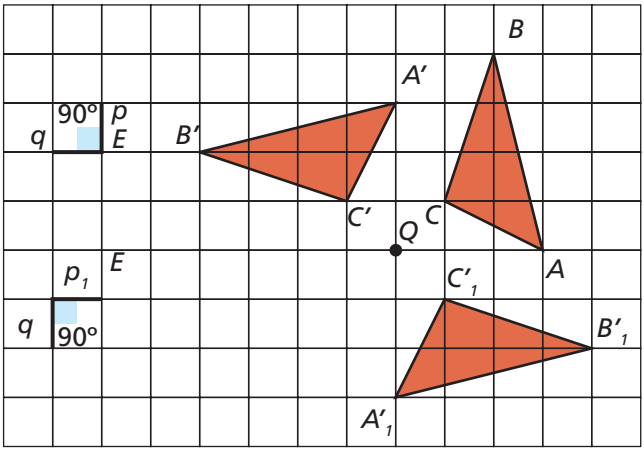


Fig. 4.108

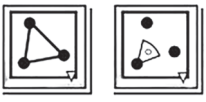
Esta construcción se ha realizado con el asistente GeoGebra.

29. Sea un triángulo *EFG* con un ángulo recto en *E*, rota el triángulo alrededor del punto *E* con un ángulo de rotación $\beta = 110°$.

30. Rota el segmento $\overline{CD} = 3{,}6$ cm alrededor del punto *C*, con un ángulo de rotación $\alpha = 35°$.

Consejo

Utiliza el asistente matemático Geogebra para resolver las actividades siguientes:

Actividades	Herramientas
31. Selecciona la herramienta indicada y traza un segmento de 4,5 cm. Rota el segmento con un ángulo de 45° con la herramienta indicada.	
32. Traza un triángulo *ABC*. Rota el triángulo con un ángulo de 120°.	
33. Traza un polígono de cuatro lados y rótalo con un ángulo seleccionado por ti.	

34. Traza en papel cuadriculado las figuras 4.109. Halla las imágenes de las figuras por una simetría central con respecto al punto *O*.

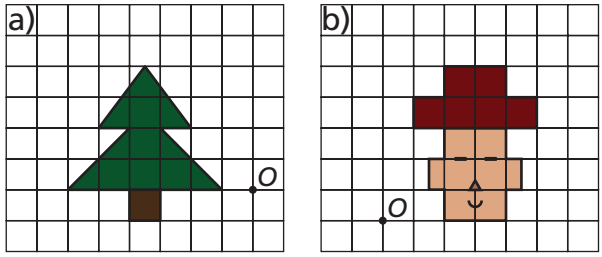


Fig. 4.109

35. En papel cuadriculado une dos puntos cada vez en las figuras 4.110, mediante segmentos que pasen por el punto *E*.

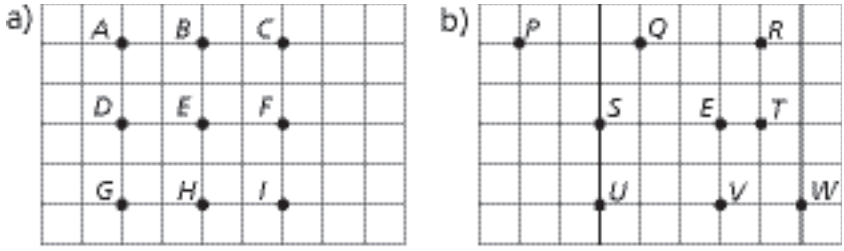


Fig. 4.110

Indica los pares de puntos que pudiste unir de esa forma y argumenta por qué son correspondientes por una simetría de centro *E* en cada caso.

36. En las ilustraciones de la figura 4.111 aparecen puntos correspondientes por una simetría. Determina el centro de simetría utilizando solo la regla. Usa papel cuadriculado.

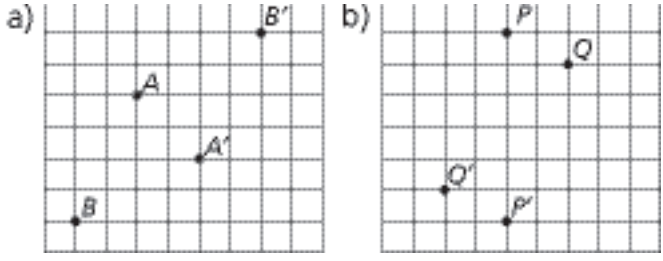


Fig. 4.111

37. Traza con la plantilla perforada el cuadrilátero *ABCD* con *A* (4), *B* (5), *C* (9) y *D* (8) y halla su imagen por una simetría de centro en *E* (12).

¿Qué relaciones puedes establecer entre los lados que son correspondientes? Comenta con tus compañeros tus respuestas.

38. Traza con la plantilla perforada el polígono *PQRST* con *P* (15), *Q* (16), *R* (19), *S* (21) y *T* (18) y halla su imagen por una simetría de centro en *S* (21).

a) Indica dos pares de ángulos que sean correspondientes por esa simetría y explica la relación que puedes establecer entre ellos.

39. *Traza en tu libreta el trapezoide *ABCD* que aparece en la figura 4.112 y traza sus diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ que se corten en *E*.

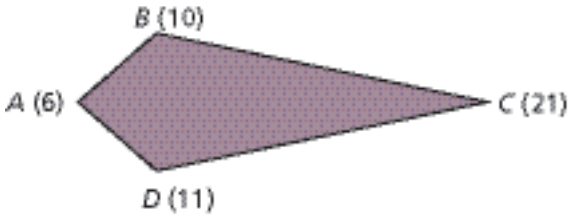


Fig. 4.112

a) Halla la imagen de *ABCD* por la simetría de centro *E.*

b) Explica por qué *ABA´D* y *BCDC´* son rombos.

40. * Traza en tu libreta el cuadrado *PQRT* que aparece en la figura 4.113.

a) Halla la imagen de *PQRT* por la simetría de centro *R.*

b) Explica por qué *TQT´Q´* es un paralelogramo.

c) Comprueba con tus instrumentos que es un cuadrado.

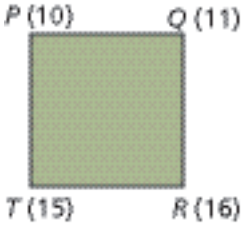


Fig. 4.113.

41. Traza en un sistema de coordenadas los puntos:

A (2; 2), *B* (3; 4), *C* (7; 0) y *D* (8; 2).

a) ¿Cuáles son las coordenadas del centro *E* de la simetría que transforma *A* en *D* y *B* en *C*?

b) Halla la imagen del paralelogramo *ABCD* por la simetría de centro en *F* (6; 5) y di cuáles son las coordenadas de E´, imagen de *E* por la simetría de centro en F.

42. En la figura 4.114 aparecen representadas una figura y su imagen por una simetría central. Describe cómo determinar el centro utilizando regla y compás.

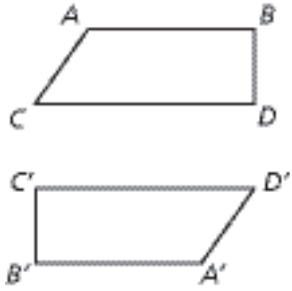


Fig. 4.114

43. En la figura 4.115 están representados:

a) Un segmento y su imagen por una simetría central.

b) Una recta y su imagen por una simetría central.

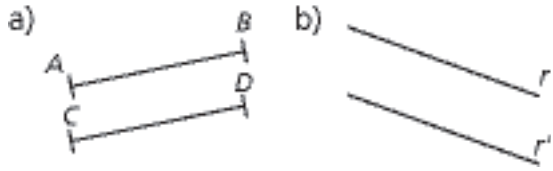


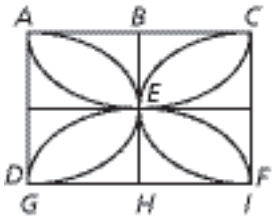
Fig. 4.115

Represéntalas en tu libreta y determina en cada caso un centro de simetría.

44. Describe cómo determinar, sin utilizar el compás, el centro de simetría de las figuras simétricas (fig. 4.116).

Fig. 4.116

45. En la figura 4.117 aparece un cuadrado formado por cuatro cuadraditos iguales con óvalos en su interior.



Original	E	I		G		F
Imagen	E		F		H	

Fig. 4.117

Completa la tabla de puntos correspondientes por una simetría central.

4.6 Ejercitación variada

1. Traza un segmento $\overline{AB}$. Considera un punto *P* entre *A* y B.

a) Nombra los segmentos que aparecen ahora.

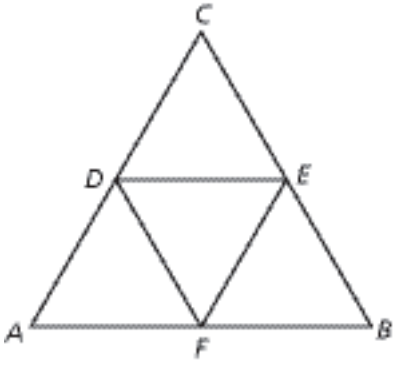
b) Nombra todos los segmentos que aparecen si consideras otro punto *Q* entre *P* y *B.*

2. Traza un ángulo *ABC* y considera dentro de él una semirrecta $\overline{BD}$.

a) Nombra todos los ángulos que aparecen ahora.

b) Nombra todos los ángulos que aparecen, si consideras otra semirrecta *BE* interior al ángulo *DBC*.

3. En el triángulo equilátero de la figura 4.118 los segmentos interiores son respectivamente paralelos a cada lado, e iguales a su mitad.



$\overline{DE} \parallel \overline{AB}$

Fig. 4.118

Nombra los 5 triángulos, 3 paralelogramos y 3 trapecios que se forman.

4. En el rectángulo de la figura 4.119 se ha trazado una diagonal y dos segmentos respectivamente paralelos a cada lado.

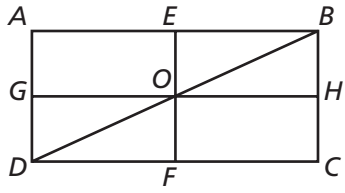


Fig. 4.119

Nombra los 6 triángulos, 9 rectángulos y 4 trapecios que se forman.

5. Traza con la plantilla perforada el polígono *ABCDE* con *A* (6), *B* (11), *C* (16), *D* (15) y *E* (10). Traza segmentos interiores de modo que se formen:

a) Un cuadrado y un triángulo isósceles.

b) Dos trapecios.

c) Tres triángulos.

d) Un cuadrilátero (no cuadrado) y un triángulo.

6. ¿Se trasladó, se reflejó o se rotó el pollito a la nueva posición? (fig.4.120).

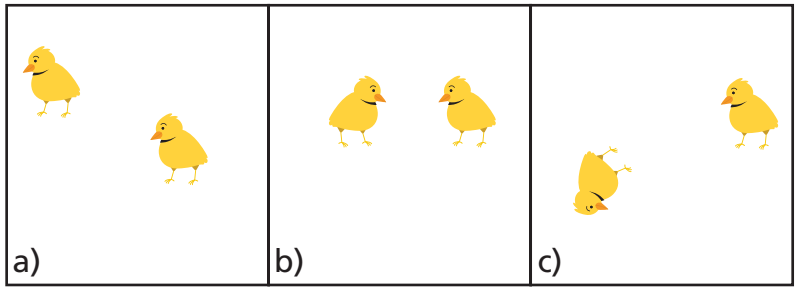
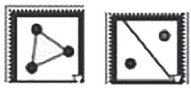
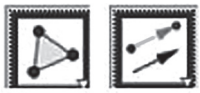
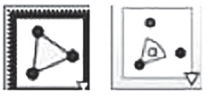


Fig. 4.120

Consejo

Utiliza el asistente matemático GeoGebra.

Actividades	Herramientas
7. Traza un triángulo y aplica un movimiento de reflexión.	
8. Traza un cuadrilátero y aplica un movimiento de traslación.	
9. Traza un polígono de cinco lados y rótalo con un ángulo de 55°.	
10. Traza un polígono de seis lados y refléjalo por uno de sus vértices.	

11. En la figura 4.121 aparecen representados, en cada inciso, puntos que son correspondientes por uno de los movimientos estudiados. Di de qué movimiento se trata y argumenta tu respuesta.

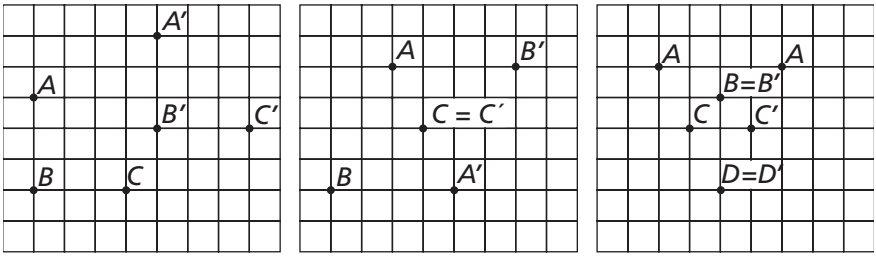


Fig. 4.121

12. Dibuja en una hoja cuadriculada la figura 4.122 y halla la imagen de cada polígono por:

a) Una reflexión de eje *AB*.

b) Una traslación de vector $\overrightarrow{AB}$.

c) Una simetría de centro en *B*.

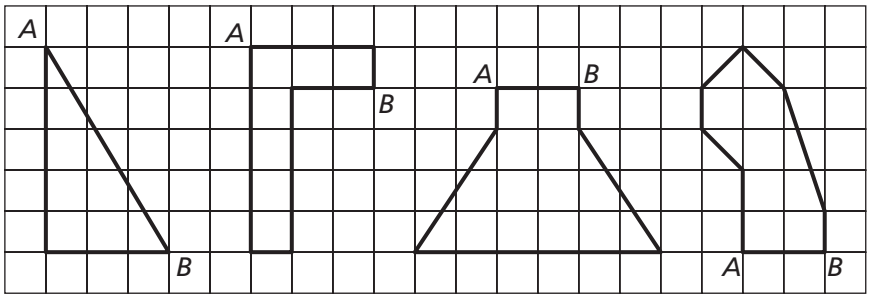


Fig. 4.-122

13. Dibuja con la plantilla perforada los polígonos que tienen como vértices:

a) *A* (1), *B* (2), *C* (5), *D* (4).

b) *A* (5), *B* (9), *C* (8).

c) *A* (8), *B* (5), *C* (10), *D* (15), *E* (12).

Halla la imagen de cada uno de esos polígonos por reflexión de eje *AC*, por la traslación de vector $\overrightarrow{BC}$ y por la simetría de centro *E* (14).

14. Traza en tu libreta el triángulo *ABC* con *A* (5), *B* (10) y *C* (12).

a) Traza la mediatriz *PQ* del lado $\overline{BC}$.

b) Halla la imagen del triángulo *ABC* por la reflexión de eje *PQ*.

15. Traza en tu libreta el triángulo *ABC* con *A* (12), *B* (15) y *C* (14).

a) Traza la bisectriz *BD* del ángulo *ABC*.

b) Halla la imagen del triángulo *ABC* por la reflexión de eje *BD*.

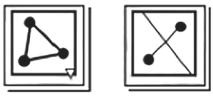
16. *Dibuja en tu libreta:

a) Un paralelogramo. b) Un rectángulo. c) Un círculo.

De las anteriores figuras di cuáles son simétricas con respecto a un eje y cuáles con respecto a un punto. En el primer caso di cuántos ejes de simetría tiene; trázalos todos, si es posible. En el segundo caso traza el centro de simetría.

Consejo

Utiliza el asistente matemático GeoGebra.

Actividades	Herramientas
17. Traza un segmento y su mediatriz. Determina la distancia del punto de intersección de la mediatriz hasta cada uno de los extremos del segmento. Comenta con tus compañeros qué relación existe entre la longitud de los segmentos que quedan determinados por el punto de intersección de la mediatriz del segmento.	
18. Traza un polígono de tres lados y la mediatriz de sus tres lados.	
19. Traza un trapecio y la bisectriz de uno de sus ángulos.	
20. Traza un polígono de seis lados y traza la mediatriz de uno de sus lados y la bisectriz de uno de sus ángulos.	

21. * Argumenta las siguientes afirmaciones:

a) En un paralelogramo, el punto donde se cortan las diagonales es a la vez el punto medio de cada una de ellas.

b) En un cuadrado las diagonales son perpendiculares, se cortan en su punto medio y determinan en cada vértice ángulos de 45°.

EDITORIAL
PUEBLO Y EDUCACIÓN

9 789591 347053