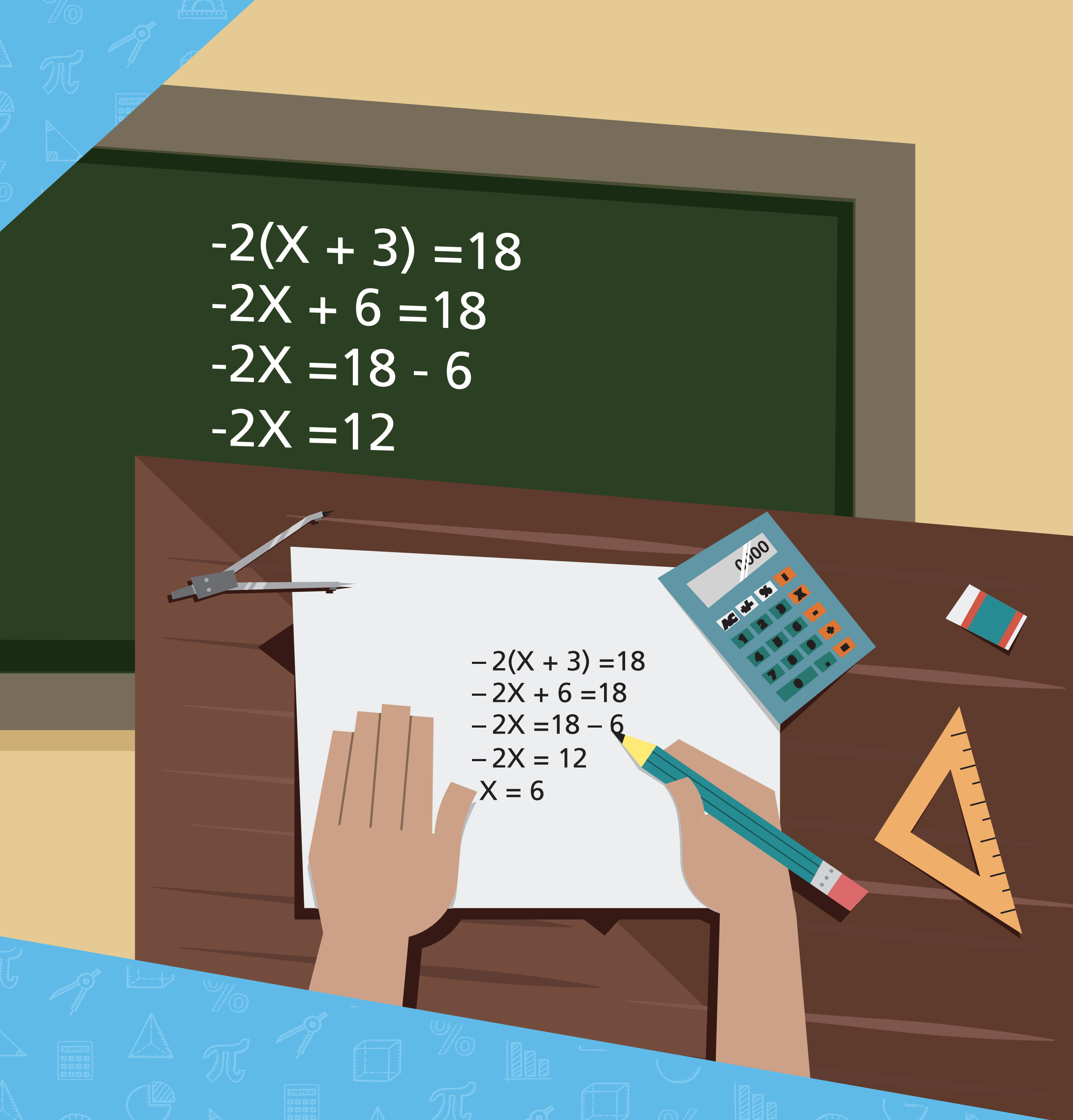


MATEMÁTICA

séptimo grado

MATEMÁTICA

SÉPTIMO GRADO

M. Sc. Susana Acosta Hernández
M. Sc. Oscar Domínguez Escobar
M. Sc. Margarita Gort Sánchez
M. Sc. Lourdes Báez Arbesú
Dr. C. Aurelio Quintana Valdés
Dra. Luisa García de la Vega
Dra. Cristina González Dogil
M. Sc. Rita María Cantero Pérez
M. Sc. Jesús Cantón Arenas

EDITORIAL
PUEBLO Y EDUCACIÓN

Edición y corrección:
- Lic. Laura Herrera Caseiro

Diseño, cubierta, ilustración y emplane:
- Instituto Superior de Diseño (ISDi)

Anelís Simón Sosa ◆ María Paula Lista Jorge ◆ Sara Sofía Delgado Méndez ◆ Isell Rodríguez Guerra ◆ Daniela Domínguez Ramírez ◆ Amanda Serrano Hernández ◆ Rocío de la C. Ruiz Rodríguez ◆ Evelio de la Sota Ravelo ◆ Ana Laura Seco Abreu ◆ Arianna Ruenes Torres ◆ Reynier Polanco Somohano ◆ Celia Carolina Céspedes Pupo ◆ Elizabeth Diana Fajardo Céspedes ◆ Laura Rosa Armero Fong ◆ Elizabeth Blanco Galbán ◆ Laura Reynaldo Jiménez ◆ Daniela Arteaga Martínez ◆ Daniela Alpízar Céspedes ◆ Roberto Pérez Curbelo ◆ Ariel Abreu Ulloa ◆ M. Sc. Maité Fundora Iglesias ◆ Dr. C. Ernesto Fernández Sánchez ◆ D.I. Eric Cuesta Machado ◆ D.I. Julio Montesino Carmona

ISBN 978-959-13-4127-3 (Versión impresa)
ISBN 978-959-13-4130-3 (Versión digital)

EDITORIAL PUEBLO Y EDUCACIÓN
Ave. 3.ª A No. 4601 entre 46 y 60,
Playa, La Habana, Cuba. CP 11300.
epe@enet.cu

A los educandos de Secundaria Básica

Para ti, educando de secundaria básica, es este libro de texto. El contenido de este libro está estructurado en tres capítulos, cada uno está dividido en epígrafes y estos a su vez en subepígrafes.

Al hojear sus páginas te percatarás que cuenta con una pequeña introducción del tema a tratar y diferentes secciones, que se distinguen por un logotipo que las identifican.

Estas secciones son:

De la historia. En esta sección se destacan aspectos de personalidades vinculadas al descubrimiento, surgimiento de nuevos contenidos o al origen y desarrollo de aspectos de la matemática, tratados.

Reflexiona. Presenta situaciones problémicas en las que debes pensar porque tiene que ver con un concepto, una relación o un procedimiento.

¿Sabías que...? Es una sección itinerante y variada para expresar brevemente informaciones relevantes en el tema: una noticia, un descubrimiento o una aplicación de la matemática.

Recuerda que. Presenta pequeños resúmenes de contenidos que debes saber para obtener otros nuevos.

¡Atención! Esta sección es una alerta en algunos aspectos para ser cuidadoso y no incurrir en errores. Tambvién destaca algunos elementos que se van a considerar en la resolución de las actividades o ejercicios propuestos.

Investiga y aprende. Se proponen tareas para investigar y así enriquecer el conocimiento con el aprendizaje de nuevos contenidos y procederes.

Saber más. Se trata de aspectos relacionados con el contenido que no corresponden al programa, es decir, una breve ampliación del tema, que puedes investigar utilizando los medios de comunicación.

Aplica tus conocimientos. Aparecen tareas para aplicar los conocimientos adquiridos que pueden solucionar nuevas problemáticas intramatemáticas y extramatemáticas.

Además, incluye:

Ejemplos. Pueden ser ejercicios resueltos que muestran procedimientos de trabajo.

Ejercicios. Contiene los que se proponen para cada epígrafe.

Ejercicios del capítulo. Agrupa los que integran los contenidos tratados en todo el capítulo.

Autoevaluación. Esta sección aparece al final de cada capítulo estructurada en dos tipos de test.

Respuesta de los ejercicios. contiene las soluciones de los ejercicios de cada capítulo al final del libro.

Esperamos que aproveche este material para aplicar los conocimientos que en este aparecen a lo largo de tu vida y los compartas con otros compañeros.

LOS AUTORES

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

Los números racionales

Una historia que queremos compartir contigo

Alejandro, un estudiante curioso, ha encontrado en la libreta de Matemática Financiera de su hermano lo siguiente, que es parte de la respuesta a un ejercicio:

$$Vc = 10\,000\ (1 + 0{,}081\,6) - 5$$

Le apasionan las matemáticas, por eso, se ha hecho muchas preguntas:

En el factor que no es el 10 000, ¿será que 1,081 6 se repite – 5 veces?, ¿tendrá sentido?

Si fuera cinco, sabría qué responder, pero con ese número cinco que tiene delante un signo menos, ¿qué hacer?

- Yo he visto números que tienen delante un signo menos y han representado temperaturas por debajo de 0 °C, profundidades de las fosas, deudas y descuentos de precios de productos, pero nunca había visto algo así.

¿Y tú qué crees? ¿Puedes ayudar a Alejandro a responder las preguntas que se ha formulado?

Estás en séptimo grado, hoy comenzarás el estudio de nuevos contenidos matemáticos que les permitirán a Alejandro y a ti aclarar las dudas, pues conocerás mucho más de esta asignatura.

Ahora, para comenzar a adentrarnos en estos nuevos temas de aritmética, te invitamos a recordar algunos contenidos.

[1] Asignatura técnica del primer año de la especialidad de Contabilidad en Cuba. Permite al contador asesorar las decisiones financieras de una empresa con el objetivo de obtener y administrar el dinero de la manera más eficaz y eficiente posible.

1.1 Sistematización de números fraccionarios

En este epígrafe recordarás muchos de los conceptos y propiedades relacionadas con los números fraccionarios que estudiaste en la escuela primaria, los cuales aplicarás a la resolución de nuevos ejercicios y problemas de la vida, donde podrás darte cuenta una vez más de su importancia. Te servirán, además, para enriquecer tu interpretación de datos cuantitativos, lo que te permitirá profundizar en el estudio de la rama de la matemática llamada estadística.

Identificación de los números naturales, las fracciones y las expresiones decimales en datos relacionados con situaciones de la vida

En el matutino del primer día de clase en la Educación General Media, la directora de nuestra escuela nos informó que en la provincia, otros nueve mil doscientos treinta estudiantes también comenzarían a estudiar en la secundaria básica, además, nos comentó el privilegio que nos brinda nuestra Revolución de estudiar de manera gratuita y la importancia de cumplir con todo rigor el Reglamento Escolar para que nuestra estancia en la escuela sea lo más provechosa posible, nos insistió en el cuidado de la base material de estudio, fundamentalmente de los libros de texto y cuadernos, explicó el valor de un libro de texto 74,25 CUP y el de un cuaderno, 19,25 CUP.

Si en mi grupo seremos 37, cerca de la décima parte o del 10 % de la matrícula total, cuánto invirtió el Estado en la compra de los libros de texto y cuadernos para los estudiantes de nuestro grupo.

Lee cuidadosamente el texto anterior e identifica los números naturales y fraccionarios que en él aparecen.

Respuesta:

Son naturales los números: nueve mil doscientos treinta y 37.

Son expresiones decimales: 74,25 y 19,25.

El fragmento "cerca de la décima parte o del 10 % de la matrícula total" nos hace pensar en la fracción $\frac{1}{10}$ y en la expresión 0,1.

¿Qué se tuvo en cuenta para dar esta respuesta?

Recuerda que...

El cardinal de un conjunto nos indica la cantidad de elementos que tiene este. A los conjuntos finitos que tienen el mismo número de elementos o el mismo cardinal, se les asocia el mismo número natural. Cada número natural está compuesto por dígitos o cifras. El número natural 143, tiene como cifras (o dígitos) a uno, cuatro y tres.

Los números naturales son los cardinales de los conjuntos finitos.

Fracción común es una división que escribimos de la forma:

$$\frac{1}{10}\begin{array}{l}\longrightarrow \text{numerador}\\ \longrightarrow \text{denominador}\end{array}$$

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \text{división}}}{8 : 7} = \underset{\substack{\downarrow\\ \text{fracción}}}{\frac{8}{7}}$$

división fracción

En general, podemos decir que una fracción se representa en la forma $\frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$ y se lee "a sobre b".

Las fracciones cuyos denominadores sean potencias de diez, por ejemplo, $\left(\frac{3}{10}; \frac{7}{100}; \frac{18}{1\,000}; \text{etc.}\right)$ se llaman fracciones decimales y se pueden representar como expresiones decimales (0,3; 0,07; 0,018; etcétera) .

¿Sabías que...?

Hay otras lenguas que utilizan el verbo "romper" para las fracciones. El término fracción proviene del latín *frangere,* que significa romper. En la actualidad hay lenguas que utilizan un derivado de este término para indicar las fracciones, como algunos autores ingleses que utilizan *broken numbers* "números rotos". El castellano también posee el término quebrado como significado de fracción y que expresa esta misma idea de romper o quebrar.[2]

[2] Carlos Gispert: *Progresiva enciclopedia interactiva de apoyo al estudio*, Ed. Océano, España, 2007, p. 1 059.

Ejercicios

(epígrafe 1.1)

1. Lee cuidadosamente el texto siguiente y ubica fragmentos que te hagan pensar en números naturales y fraccionarios o identifícalos directamente:

El lunes 12 de marzo de 1991, *Granma* publicaba la noticia:[3] "Tres horas y nueve minutos después del trabajo de un prestigioso equipo interdisciplinario cubano se implantó el primer corazón artificial cubano: el CORAMEC.

Durante nueve días, latió en el pecho de un paciente muy enfermo y trasmitía ¡sesenta pulsaciones por minuto!"

2. Pregunta en tu escuela los datos siguientes sobre el séptimo grado:

- Matrícula total.
- Matrícula por grupo.
- Cantidad de grupos.
- Cantidad de profesores.
- Número de escuelas primarias del municipio, cuyos estudiantes están ahora en el centro.
- Base material de estudio recibida por cada estudiante.
- Cantidad de estudiantes por centro.

Elabora un texto en el que haya números naturales, fraccionarios en diferentes representaciones; puedes enriquecer tu redacción con información que puedas obtener a partir de tus conocimientos de Aritmética de primaria.

Siempre justifica el trabajo realizado.

1.1.1 El significado de los números

Números son los que sobran o los que faltan en nuestras vidas, de eso no hay ninguna duda. ¿Alguna vez te has preguntado si brindan alguna información? ¿Cuál? Conozcamos acerca del tema.

[3] Órgano de prensa *Granma*, 12 de marzo de 2011.

Recuerda que...

El significado de un número es la información que nos brinda, dada la forma en que ha sido utilizado. Los números pueden tener cinco significados prácticos:

Tipo de significado.	¿Qué representa?
Cardinal o cantidad contable.	Cuántas veces ocurre un suceso.
Ordinal.	El lugar que ocupa determinado hecho.
Código o identificación.	Una manera única de distinguir.

Mediciones has realizado muchas en los más diversos momentos, los resultados obtenidos son cantidades de magnitud, que son aquellas que indican cuántas veces se repite una magnitud tomada como patrón o unidad de medida.

En el párrafo siguiente:

Pioneros granmenses visitaron el río Cauto, el de mayor longitud de Cuba con sus 343 km. Un poblador de la zona entregó a cada uno un souvenir, *que guarda 24 cm^3 de tierra de las márgenes de dicho río.*

Los números 343 km y 24 cm^3 son cantidades de magnitud, uno indica cuántas veces se repite la unidad de longitud kilómetro y el otro, la unidad de volumen, centímetro cúbico.

Recuerda que...

Significados prácticos que tienen las fracciones:

Significado	A qué se refiere	Ejemplo
Operador parte-todo	Identificar la unidad Realizar divisiones (el todo se conserva)	$\frac{5}{8}$ se puede referir a dividir un todo en ocho partes iguales y tomar cinco de estas
División o cociente	$\frac{m}{n}$ $(n \neq 0)$ se refiere a una operación de división indicada Donde m y n son números naturales $(n \neq 0)$	$\frac{3}{5}$ significa dividir la cantidad del numerador, en este caso tres entre cinco, que es la cantidad del denominador

Significado	A qué se refiere	Ejemplo
Relación de razón	$\frac{m}{n}$ $(n \neq 0)$ representa una relación entre dos cantidades	$\frac{8}{13}$ puede interpretarse como que ocho de cada trece personas hacen deportes
Fracción medidora	La mitad de… Un octavo de… Un cuarto de… Describe una cantidad o un valor de magnitud por medio de otro	La mitad de los estudiantes de un grupo son hembras
Porcentaje	Es "tantos de cada cien". Al dividir en cien partes el todo, tomamos uno	En una fábrica de ensamblar televisores el plan del mes se cumplió solo en un 70 % lo que se puede expresar mediante la fracción $\frac{70}{100}$

Ejemplo 1:
Para explicarles a sus compañeros el significado de los números, Pedro Luis, monitor de su grupo, elaboró y respondió el ejercicio siguiente:

Lee cuidadosamente la situación siguiente y determina qué significado tiene en cada caso el número 35.

Laura estudia ahora en otro centro. Está en un grupo de 35 estudiantes, es el No. 35 de la lista, la última, ya que en su escuela cada grupo solo puede tener 35 estudiantes. Se siente muy feliz y me cuenta muchas cosas de su interés; por ejemplo, que en la parcela escolar cada uno de los destacamentos dispone de 35 m^2 de área cultivable, que desde el curso escolar pasado cada grupo aporta el 35 % de los quintales cosechados al centro de salud más cercano y que, dados los excelentes resultados en la actividad, ocupan el lugar 35. en ese aspecto de la emulación, a nivel provincial, entre todas las secundarias básicas, que son 225. Dice que para este curso la escuela tiene previsto cosechar un 35 % más que lo que se recolectó el curso pasado, y está segura de que lo lograrán.

Solución:

Fragmento del texto	Significado del número 35
(…) grupo de 35 estudiantes, (…)	**cantidad contable** que indica la cantidad de estudiantes del grupo.
(…) es el No. 35 de la lista (…)	cantidad para **identificar** a Laura.
(…) cada grupo aporta el 35 % de los quintales cosechados (…)	**relación** mediante el tanto por ciento, indicándonos que **35 de cada 100 quintales recogidos** son entregados al centro de salud más cercano. $35\,\% = \frac{35}{100} = 0{,}35$, además, $\frac{35}{100} = \frac{7}{20}$ También expresa una relación mediante la razón: $\frac{7}{20}$, o sea, siete de cada 20 quintales cosechados son donados al centro de salud más próximo.
(…) ocupan el lugar 35. (…)	Número de **orden** que ocupa la escuela en ese aspecto emulativo.

Saber más

¿Qué relación tienen los números capicúas y los vocablos palíndromos?

Un número capicúa tiene la curiosa característica de ser idéntico al número leído en orden inverso. Por ejemplo 4 728 403 048 274. Las palabras palíndromos son aquellas que tienen la propiedad de que se pueden leer de derecha a izquierda y al revés exactamente igual.[4] *Por ejemplo: ama, oso, somos…*

[4] Carlos Gispert: *Progresiva enciclopedia interactiva de apoyo al estudio*, Ed. Océano, España, 2007, p. 1 063.

Investiga y aprende

Pitágoras,[5] hace quince siglos, demostró que los números 220 y 284 eran números amigos.[6] ¿Cuándo dos números enteros positivos son amigos?, averigua cuándo estos son perfectos o sociables.

Ejercicios

(epígrafe 1.1.1)

1. Lee cuidadosamente la situación siguiente:

En mi casa todo es alegría en los últimos quince días, porque gané un concurso de Matemática y el próximo día 15 será mi decimoquinto cumpleaños. Dicen en mi pueblo que mi fiesta será toda una sorpresa para mí, aunque ya me adelantan que 15 parejas bailarán una linda coreografía cubana y que para los asistentes, habrá una rifa de 15 regalos, que se sortearán uno cada 15 personas. Comentan, además, que mi fiesta es la número 15 que se celebra este año y que ese día celebraremos el 15 % de todas las fiestas del pueblo en este año. Todo está preparado para que la pasemos requetebién y espero que así sea.

Explica el significado del número 15 en cada caso, elabora y responde una situación parecida.

2. Situaciones como la de la figura 1.1 las encontramos por doquier, sin embargo, es poco lo que todavía se trabaja por lograr que todos hagamos un uso racional de ese preciado líquido, que es el agua.

a) Seguros estamos de que eres un(a) estudiante consciente de la necesidad de cuidar al máximo este importante recurso, por eso te invitamos a analizar cuidadosamente para explicar el significado de cada número que aparece en el cartel.

b) Confirma la información que aparece en el recuadro.

[5] Pitágoras (c. 569 a. C. Samos, Antigua Grecia c. 475 a. C. Metaponto) filósofo y matemático griego considerado el *primer matemático puro*. Contribuyó de manera significativa en el avance de la matemática helénica, la geometría, la aritmética, derivadas particularmente de las relaciones numéricas, y aplicadas, por ejemplo, a la teoría de pesos y medidas, a la teoría de la música o a la astronomía.

[6] "Números Amigos", disponible en: https://www.ecured.cu/Números_Amigos.

Lo que cuesta el despilfarro

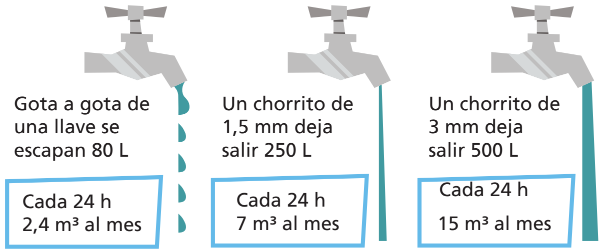


Fig. 1.1

3. Los estudiantes del círculo de interés Increíble Matemática nos invitan a resolver el ejercicio siguiente:

3.1 La Gran Pirámide de Keops está formada por unos 2 300 000 bloques de piedra, cada uno con un peso aproximado de 2,5 t, por lo que su peso es de unos seis millones de toneladas. Demoró 23 años en construirse, por eso para "moverla" serían necesarias alrededor de 6 000 locomotoras. Este prodigio de la antigüedad ocupó el primer lugar en altura hasta el año 1889 en que se construyó la torre de Eiffel.[7]

Clasifica las proposiciones siguientes en verdaderas (V) o falsas (F) . De las que consideres falsas, justifica por qué lo son.

a) ___ El número que indica la cantidad de bloques que forman la Gran Pirámide de Keops representa una cantidad contable.

b) ___ El peso de cada bloque es una cantidad de magnitud.

c) ___ En la última oración del párrafo el número representa un ordinal.

d) ___ El número que indica cuántos años demoró en construirse es una cantidad de magnitud.

e) ___ El número de locomotoras necesarias para "mover" la pirámide es una cantidad contable.

3.2 A nivel mundial, una de cada diez personas es zurda. El 13 de agosto es su día internacional. En Virginia del Norte, Estados Unidos, hay un pueblo llamado *Left Hand* (Mano Izquierda) por ser zurdos sus 450 habitantes.[8]

Selecciona la respuesta correcta marcando con una X en la línea dada.

[7] Revista *Zunzún* 283.

[8] Colectivo de *Zunzún*: "Para curiosos", colección Lee mucho, Ed. Abril, 2010.

3.2.1 El número 13:

a) ___ identifica el día del mes de agosto que los zurdos celebran,
b) ___ representa una cantidad de magnitud,
c) ___ representa una cantidad contable.

3.2.2 La frase "Una de cada diez personas es zurda" indica que:

a) ___ el 10 % de la población mundial es zurda,
b) ___ uno y diez son cantidades contables,
c) ___ el número de habitantes de *Left Hand* es la décima parte de la población mundial.

3.3 Completa los espacios en blanco de forma tal que se obtenga una proposición verdadera para cada caso:
El majestuoso monte Everest tiene una altura muy cercana a los 8 848 m, por eso es el mayor pico de nuestro planeta, sin embargo, así de enorme como es, su altura es un tercio de la del Mons Olimpos, que se encuentra en el planeta Marte y es la montaña más alta del sistema solar.[9]

La expresión un tercio ejemplifica el significado de fracción _________.
El número 8 848 representa una cantidad de _________.
La altura en metro de la elevación marciana es aproximadamente _________ y representa una cantidad de ___________.

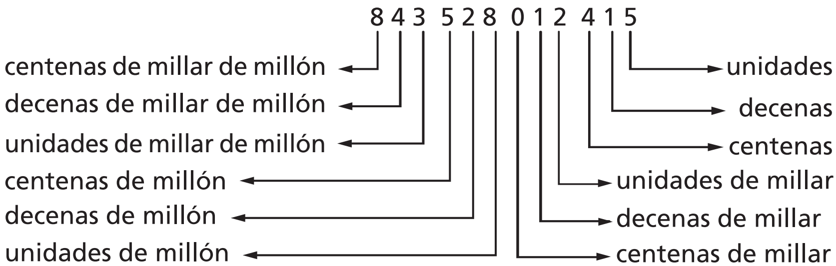
3.4 Lee detenidamente este párrafo para que clasifiques las proposiciones siguientes en verdaderas (V) o falsas (F) , en la línea dada. Justifica las que consideres falsas.
Para fabricar una tonelada de papel hay que talar 14 árboles de 25 m de altura y 20 cm de diámetro, y gastar 100 000 L de agua limpia.
a) ___ todos los números representan cantidades de magnitud,
b) ___ cuatro números representan cantidades de magnitud,
c) ___ solo un número representa una cantidad contable,
d) ___ un número permite identificar.

1.1.2 Lectura y escritura de números fraccionarios

Recordemos cómo se leen los números naturales.

Para tener éxito en la lectura y escritura de números naturales es imprescindible dominar la tabla posicional la cual te recordaremos mediante el ejemplo siguiente:

[9] Liliana Gómez Luna: *Libro de las curiosidades I*, Ed. Oriente, Santiago de Cuba, 2004.



¿Cómo leerías el número 843 528 012 415?

Observemos el significado de cada una de sus cifras.

Para que puedas leer con mayor facilidad un número, puedes separarlo en cifras de tres dígitos comenzando por la derecha (843 528 012 415), luego se lee: ochocientos cuarenta y tres mil quinientos veintiocho millones, doce mil cuatrocientos quince.

Atención

Los números mayores que veinte y menores que cien se pueden escribir con una sola palabra, por ejemplo: 48 puedes escribirlo cuarenta y ocho o cuarentaiocho. Debes tener en cuenta, que al unirlos la conjunción (y) se transforma en (i) , aquí otros ejemplos: 27, veintisiete; 31, treintaiuno; 99, noventainueve. Las palabras compuestas formadas se ajustan a las normas generales de acentuación: 52, cincuentaidós; 63, sesentaitrés.[10]

No obstante, la Real Academia Española (RAE) recomienda que los mayores de treinta, se escriban con dos palabras enlazadas por la conjunción (y) . Es importante que sepas diferenciar entre el significado de una cifra en un número y el valor que esta tiene por la posición que ocupa.

Ejemplo 1:

En el número 4 853 261:

a) ¿Cuál es la cifra de las centenas?

b) ¿Cuántas centenas tiene este número?

Solución:

Para responder el inciso a) basta con identificar en el número el orden a que se hace referencia y seleccionar la cifra que corresponde.

a) 4 853 <u>2</u>61. La cifra de las centenas es dos.

[10] Órgano de prensa *Granma,* 9 de julio de 2011.

Sin embargo, para responder el inciso b) , en la práctica, podemos señalar en el número las cifras desde la primera hasta la cifra del orden que nos piden y leer el número señalado. Fíjate que el número se descompone en $48\,532 \cdot 100 + 61$.

b) 4 853 261. Este número tiene 48 532 centenas.

Así mismo, podríamos decir que la cifra de las decenas de millar es cinco y que este número tiene 485 decenas de millar o que la cifra de las unidades de millón es cuatro y que el número tiene cuatro unidades de millón. Con la intención de reactivar importantes contenidos de Matemática de quinto y sexto grados, Leonel, profesor de la asignatura en séptimo grado ha propuesto a sus estudiantes el análisis de las noticias siguientes:

Más de 1 290 000 títulos vendió la 27. Feria Internacional del Libro en Cuba[11]

Santiago de Cuba, mayo 14. —Durante los tres meses y medio: del 1 de febrero al 13 de mayo que duró la 27. Feria del Libro de 2018 en Cuba, dedicada Dr. Eusebio Leal Spengler y a China como país invitado de honor, se vendieron 1 292 744 ejemplares, o sea, 123 589 más que en similar festejo de 2017.

La feria fue visitada por 2 147 305 personas de todas las edades, es decir 30 000 más que en 2017, y se refirió a un aspecto que pudiera parecer negativo pero deseable para los propósitos estratégicos de la Feria: es el hecho de que a pesar de haber vendido más libros se ingresaron 733 326 pesos menos, como resultado de un gran esfuerzo en la economía editorial, que permitió rebajar los precios en las ventas de ejemplares al público en La Cabaña, en La Habana, y en la mayoría de las provincias.

Al cierre[12]

4 000 títulos presentados en la recién concluida Feria Internacional del Libro.

600 novedades editoriales vieron la luz.

1 292 000 libros adquiridos, los cuales superan en 123 000 ejemplares los vendidos en el pasado año.

2 147 000 visitantes, que representan un 30 % más que en 2017.

10,4 precio promedio por libro en CUP, establecido en la edición anterior correspondiente a 2017.

7,5 promedio en pesos por ejemplares ofertados, según la rebaja planteada, en la recién concluida edición 2018.

[11] Órgano de prensa *Sierra Maestra,* Sección Culturales, 14 de mayo de 2018.

[12] Órgano de prensa *Granma,* 18 de mayo de 2018.

Entre los aspectos que hacen más certero este análisis está el saber leer y escribir correctamente fracciones comunes y expresiones decimales, de ahí el valor de esta temática.

Atención

Para convertir una fracción a expresión decimal se divide el numerador entre el denominador y se tienen dos posibilidades: que el resultado sea una expresión decimal finita o una expresión decimal infinita periódica o una expresión decimal infinita con un determinado período.

El **período** es la cifra o grupo de cifras que se repite indefinidamente y en el mismo orden.

Ejemplo 2:

Fracción	Expresión decimal	Tipo de expresión decimal
$\frac{3}{5}$	0,6	Expresión decimal finita
$\frac{4}{33}$	0,121212…	Expresión decimal infinita periódica
$\frac{4}{33}$	3,142857142857142857…	Expresión decimal infinita con un determinado período

Por tanto:

$\frac{3}{5} = 0{,}6$ $\qquad \frac{4}{33} = 0{,}\overline{12}$ $\qquad \frac{22}{7} = 0{,}\overline{142857}$

Recuerda que...

En un número escrito como expresión decimal, a la izquierda de la coma se escribe la parte entera (unidades, decenas, centenas, etc.) y a la derecha de la coma la parte decimal que no completa la unidad (décimas, centésimas, milésimas, en ese orden) .

¿Sabías que...?

¿Quién inventó la coma decimal?

El primero en usar la coma decimal (y también el punto) fue John Napier[13] en su obra *Rabdología* de 1 617. No obstante, científicos y matemáticos siguieron usando todo tipo de separadores (rayitas, cajas, puntos y comas, paréntesis, etc.) durante casi un siglo. Fue en este período durante el siglo XVIII cuando Alemania, Francia y España se decidieron por la coma decimal e Inglaterra por el punto como lo usas hoy en la calculadora.[14]

Ejemplo 3:

a) Al leer el número 25,176 podemos hacerlo de tres formas diferentes:
- Veinticinco coma uno, siete, seis.
- Veinticinco unidades y ciento setenta y seis milésimas.
- Veinticinco mil ciento setenta y seis milésimas.

b) Al leer el número $6,\overline{345}$, podemos hacerlo indicando su parte entera y las cifras del período, o sea, seis coma período trescientos cuarenta y cinco.

Recuerda que...

Números naturales, fracciones, expresiones decimales finitas y expresiones decimales infinitas periódicas conforman el conjunto de los números fraccionarios. Todo número fraccionario se puede representar de la forma forma $\frac{a}{b}$ donde $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$.

Ejercicios

(epígrafe 1.1.2)

1. Escribe cómo se leen los números siguientes que aparecen subrayados en cada curiosidad, también determina qué representan dichos números:

[13] John Napier barón de Merchiston, llamado también Neper o Nepair (Edimburgo, 1 de febrero de 1550-4 de abril de 1617) , matemático escocés, reconocido por ser el primero en definir los logaritmos. También hizo común el uso del punto decimal en las operaciones aritméticas.

[14] Carlos Gispert: *Progresiva enciclopedia interactiva de apoyo al estudio*, Ed. Océano, España, 2007, p. 1 068.

a) Si la Tierra estuviese situada a menos de 134 000 000 km del Sol, toda el agua de nuestro planeta se evaporaría.[15]

b) El 27 de agosto de 2003 el planeta Marte y la Tierra estuvieron muy cercanos: 55 763 108 km. Este suceso es único por el momento, pues debe repetirse cuando pasen cerca de 5 000 años.[16]

c) El astro más caliente del cosmos es la estrella NGC2440 de la nebulosa planetaria, pues su temperatura exterior es de 199 727 °C.[17]

d) Se sabe que la palabra que contiene más letras del mundo proviene del idioma inglés. Tiene la friolera de 1 999 letras y lo que hace es definir una parte del ADN.[18] Increíble pero totalmente cierto.[19]

e) Cuba suma entre sus maravillas una muñeca de trapo, considerada la más grande del mundo, con 22 m de altura y una masa que sobrepasa las 2 800 lb. Veintiséis laboriosas manos muñequeras trabajaron durante 26 976 h cosiendo y ensamblando su cuerpo. Fue nombrada Leonor en homenaje al hermoso cuento de la *Edad de Oro* escrito por José Martí.[20]

2. Selecciona el número que corresponde a la lectura siguiente:

veinticinco mil millones uno

25 000 100 000   25 000 000 001   25 000 001

3. Soy un número de cinco dígitos (cifras) que tiene el cuatro en el lugar de las unidades, un cero en el lugar de las decenas y un uno en el lugar de las unidades de millar, y la cifra que ocupa el lugar de las centenas es el antecesor de la cifra que ocupa la unidad de millar. ¡Ah! También soy el mayor de los números que pueden escribirse con estos dígitos.

a) ¿Qué número soy? ______

b) Escribe cómo tú me leerías ____________

[15] Liliana Gómez Luna: *Libro de las curiosidades I*, Ed. Oriente, Santiago de Cuba, 2004.

[16] Colectivo de Zunzún: *Para curiosos*, Colección Lee mucho, Ed. Abril, La Habana, 2010.

[17] Liliana Gómez Luna: *Libro de las curiosidades I,* Ed. Oriente, Santiago de Cuba, 2004.

[18] Material genético presente en la célula.

[19] "Curiosidades graciosas del mundo", disponible en: www.cienic.com/curiosidades-graciosas-del-mundo.

[20] "Curiosidades", disponible en: www.ecured.cu/Sistema:Curiosidades/Cuba.

4. Elena le dice a Daniela:

Piensa en un número de cuatro dígitos (cifras) diferentes que cumple las condiciones siguientes:

- Cada uno de los dígitos es un número impar.
- Es el menor número que se puede formar con esos dígitos.

Daniela responde correctamente. ¿Qué número crees que escogió Daniela? Señala la respuesta correcta.

1 327 1 357 1 537 1 137

5. Sean:

A: menor número de tres cifras no repetidas todas impares.

B: sucesor del menor número que tiene 48 centenas.

C: mayor número de cuatro cifras que tiene un cuatro en las unidades de millar.

a) Escribe los números representados por *A, B* y *C*.

b) Determina el sucesor de *B*.

c) Determina el antecesor de *C*.

d) ¿Cuál de estos números tiene mayor la cifra de las centenas?

e) ¿Cuál de estos números tiene mayor cantidad de centenas?

f) Ordena los números comenzando por el mayor.

6.* ¿Cuántos números comprendidos entre 100 y 1 000 tienen un nueve como cifra de las decenas?

7. ¿Cuál es el número de 12 cifras palíndromo?[21] Escribe cómo se lee este número.

8.* Un número *N* de diez cifras tiene las características siguientes: la cifra de la izquierda indica la cantidad de ceros que tiene *N*, la siguiente cifra indica la cantidad de veces que aparece el dígito uno en *N*, la tercera indica la cantidad de veces que aparece el dígito dos, y así sucesivamente. Halla el número *N* y escribe su numeral.

9. Escribe cómo se leen los números siguientes que aparecen subrayados en cada curiosidad.

a) La isla danesa Groenlandia es la más grande del planeta Tierra, el 84 % de su superficie, o sea, <u>1 827 912,24</u> km^2 corresponden a un glaciar.[22]

[21] Un número es palíndromo si se lee de la misma manera de derecha a izquierda y de izquierda a derecha.

[22] Liliana Gómez Luna: *Libro de las curiosidades II*, Ed. Oriente, Santiago de Cuba, 2007.

b) Es de Namibia la bacteria conocida más grande que existe: mide 0,75 mm.[23]

c) El peso de 1 500 huevos del gusano de seda es 0,001 kg.[24]

d) El cerebro humano puede pesar alrededor de 1,35 kg.[25]

e) En cada litro de sangre hay 0,34 kg de hemoglobina, proteína que transporta el dioxígeno por todo el cuerpo.[26]

10. Selecciona el número que corresponde a las lecturas siguientes:

a) Cuatro mil ochocientas veintiocho centésimas.

4,828 48,28 482,8

b) Ciento cincuenta milésimas.

150,000 0,150 1,50

c) Mil setecientas cinco décimas.

1 705,0 170,5 17,05

11. Considera el número 89 105 y coloca la coma de modo que obtengas:

a) Un número mayor que 1 000 y menor que 10 000.

b) Un número menor que 1 000 y mayor que 100.

c) Un número mayor que uno y menor que diez.

Escribe cómo se lee cada uno de estos.

12. Del número 4 835,724:

a) ¿Cuál es la cifra de las décimas?

b) ¿Cuántas milésimas tiene el número?

c) ¿Qué orden ocupa la cifra 2?

13. Selecciona el número determinado por las condiciones siguientes:

El mayor de los números de tres cifras enteras y tres decimales que tiene un cuatro en el orden de las milésimas.

999,994 999,004 999,400

[23] *"Thiomargarita namibiensis"*, disponible en: es.wikipedia.org/wiki/Thiomargarita-namibiensis.

[24] Colectivo de *Zunzún:* "Para curiosos", colección Lee mucho, Ed. Abril, La Habana, 2010.

[25] Liliana Gómez Luna: *Libro de las curiosidades I*, Ed. Oriente, Santiago de Cuba, 2004.

[26] Colectivo de *Zunzún:* "Para curiosos", colección Lee mucho, Ed. Abril, La Habana, 2010.

14. Circula la expresión decimal que corresponde a cada fracción:

a) $\frac{75}{100}$	0,75	7,5	75,0
b) $\frac{1}{8}$	1,8	0,125	1,25
c) $\frac{14}{13}$	14,3	$4,6\overline{6}$	$4,\overline{6}$

1.1.3 Criterios de divisibilidad

Investiga y aprende

Carlos Alberto, profesor de Matemática, propone en el mural de la asignatura el ejercicio siguiente:

Analiza si la división del número

122 333 444 455 555 666 666 777 777 788 888 888 999 999 999 por tres es exacta.

Utiliza la vía más sencilla posible.

Como puedes ver es un número enorme; si conoces, claro está que puedes dividirlo por tres, realiza la tarea en equipo, ¿por qué no? y analiza, si el resto es cero o no; sin embargo…, esa no es la vía más racional. Si recuerdas que para que la división por tres sea exacta, tiene el número que ser divisible por tres.

Recuerda que...

Un número natural n es un divisor del número natural m, si existe $x \in \mathbb{N}$, tal que $m = nx$, es decir, n divide a m y se dice que m es un múltiplo de n (de x), o dicho de otra manera, la división de m por n deja resto cero, hecho que como bien sabes no siempre sucede, por ejemplo: al dividir siete por tres el cociente es dos y el resto es uno.

Si llamamos C al número que propuso el profesor, en este caso hay que analizar si existe un número x, tal que $C = 3x$, por eso basta con saber si C es un número divisible por tres.

Recuerda que...

Los criterios o reglas de divisibilidad son proposiciones matemáticas verdaderas, que nos permiten determinar si un número es divisible por otro. Veamos los más importantes:

Un número **es divisible por dos** si la última cifra es cero, dos, cuatro, seis u ocho.

Un número **es divisible por tres** si la suma de sus cifras es un múltiplo de tres.

Un número **es divisible por cuatro** si sus dos últimas cifras de la derecha son cero o forman un múltiplo de cuatro.

Un número **es divisible por cinco** si la última cifra es cero o cinco.

Un número **es divisible por nueve** si la suma de sus cifras es un múltiplo de nueve.

Un número **es divisible por diez** si la última cifra es cero.

Si un número es divisible por dos números primos entre sí, será divisible por su producto.

Ejemplo 1:

a) 3 335 es divisible por cinco porque su última cifra es cinco.

b) ¿Es 160 divisible por seis? Para decidir si un número es divisible por seis debemos encontrar dos números primos entre sí que su producto sea seis: como seis es el producto de los números primos entre sí: dos y tres, entonces un número que sea divisible por dos y por tres será divisible por seis. Para lo cual la última cifra tiene que ser par y, además, la suma de sus cifras ser un múltiplo de tres. 160 es divisible por dos, porque su última cifra es cero; pero $1 + 6 + 0 = 7$ y siete no es múltiplo de tres, luego 160 no es divisible por seis.

Ahora puedes responder el ejercicio de Carlos Alberto: para saber si el número *C* es divisible por tres, basta con conocer si la suma de sus 45 cifras es un múltiplo de tres. La suma de los dígitos de *C* es:

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 = 285.$$

Este es un múltiplo de tres $(285 = 3 \cdot 95)$, por eso *C* es divisible por tres y esta es la forma más racional de responder el ejercicio del profesor Carlos Alberto.

Para dividir te serán muy útiles las reglas de divisibilidad que recordamos en otro momento de este epígrafe, por ejemplo, si te indican buscar el resultado de 17 715 : 5, ya sabes que el resto de esta división es cero, por ser exacta, pues el número 17 715 termina en cinco y por tanto es divisible por cinco.

Para simplificar fracciones son de suma utilidad los criterios de divisibilidad.

Ejemplo 2:

$\frac{75}{100} = \frac{6}{19}$ se simplifica aplicando los criterios de divisibilidad.

Ejercicios

(epígrafe 1.1.3)

1. Analiza si el número propuesto por el profesor Carlos Alberto es divisible por:

a) dos b) cuatro c) cinco d) seis e) nueve
f) 10 g) 12 h) 15 i) 36

2. Adivina quién soy:

a) ▸ Soy múltiplo común de tres, de cuatro y de ocho,
▸ soy menor que 100 y
▸ la suma de mis cifras es nueve.

b) ▸ Somos dos múltiplos de siete,
▸ nuestra suma es 49 y
▸ nuestra diferencia es 21.

3. Determina los valores de *b* y *c* para que se cumpla que el número $\overline{7bc}$ sea divisible por dos y tres simultáneamente.

4. Clasifica las proposiciones siguientes en verdaderas (V) o falsas (F) . Fundamenta las falsas.

a) ___ Un número que termina en cero es siempre divisible por cinco.
b) ___ Para que un número sea divisible por cuatro sus dos últimas cifras tienen que ser cero.
c) ___ El número $\overline{2k9}$ es divisible por once si $k = 4$.

5. Determina todos los números naturales *n* que cumplen las condiciones siguientes y fundamenta los razonamientos realizados:

▸ $305 \leq n \leq 420$,
▸ son divisibles simultáneamente por dos, tres y cinco, y
▸ la suma de las cifras de *n* es un número par.

6.* ¿Cuál es el mayor número de doce cifras:

- divisible por dos,
- divisible por seis,
- divisible por tres,
- divisible por ocho,
- divisible por cuatro,
- divisible por 12?

Escribe cómo se lee este número.

1.1.4 Representación en el rayo numérico de números fraccionarios

La tarea extraclase de Matemática de un grupo de séptimo grado consistía en representar en el rayo numérico los números siguientes:

$\frac{2}{3}$; 2; $1\frac{1}{4}$; 4,5; $\frac{5}{3}$. La profesora analizó la respuesta de dos estudiantes y de esa manera recordó el procedimiento para representar números fraccionarios.

Investiga y aprende

Analiza la ubicación de los números en el rayo numérico realizado por Solangel y David (fig. 1.2) . Determina en cada caso qué números ocupan la posición correcta. Argumenta tu respuesta.

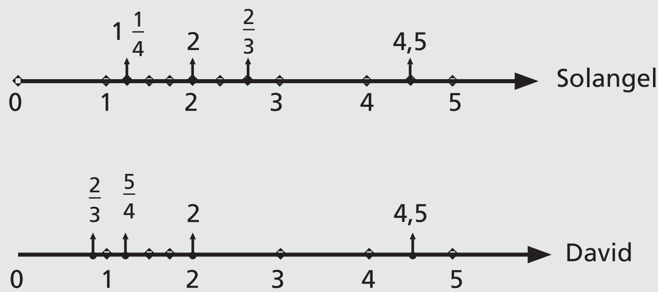


Fig. 1.2

Procedimiento para representar números fraccionarios

- Cuando el número es natural: el número coincide con las unidades enteras trazadas en el rayo numérico.
- Cuando el número está representado mediante una expresión decimal: se selecciona en el rayo numérico el valor de la parte entera (unidad, decena, centena, etc.) y después se divide la unidad siguiente del rayo numérico en diez partes iguales y se toma el valor que indica la parte decimal aproximada (ejemplo 5,86, en este caso la parte entera es cinco y la parte decimal 86 que se aproxima a 90 que se representa como 5,9 aproximadamente) .
- Cuando el número está representado mediante una fracción del tipo $\frac{a}{b}$, ($b \neq 0$) se debe analizar si esta es propia o impropia.
  - Para la fracción propia: se divide la primera unidad del rayo numérico en tantas partes como indica el denominador de la fracción y se toma la cantidad de partes que indica el numerador.
  - Para la fracción impropia: se dividen varias unidades del rayo numérico en tantas partes como indica el denominador y se toma la cantidad de partes que indica el numerador.
- Cuando el número es mixto: se selecciona en el rayo numérico el valor de la parte entera y se divide la unidad siguiente del rayo numérico en tantas partes como indica el denominador de la fracción y se toma la cantidad de partes que indica el numerador.

Los números de la tarea extraclase que se encuentran representados correctamente son: en el rayo numérico representado por Solangel: el número mixto $\left(1\frac{1}{4}\right)$, el número natural (2) y la expresión decimal (4,5) y por David: el número mixto $\left(1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}\right)$= , el número natural (2) y la expresión decimal (4,5) .

Consejos útiles

Las fracciones propias para su representación no puedes convertirlas en expresión decimal, porque se obtiene una expresión decimal infinita periódica o una expresión decimal infinita.

Ejercicios

(epígrafe 1.1.4)

1. Selecciona la respuesta correcta que más racionalice el trabajo:

a) Al representar 3,7 en un rayo numérico donde el segmento unidad tenga una longitud de 1 cm:

- Señalo 37 mm en el rayo.
- Señalo cuatro unidades en el rayo, divido la tercera unidad en diez partes iguales y tomo siete.
- Señalo cuatro unidades en el rayo, divido la cuarta unidad en diez partes iguales y tomo siete.

b) Cuando represento 2,3 en el rayo numérico y tomo como unidad a la longitud *a*, a cada una de estas unidades la divido en diez partes iguales, que llamo subdivisiones de *a*:

- Señalo 23 subdivisiones de *a* en el rayo numérico.
- Considero 3*a* en el rayo numérico, divido la segunda unidad *a* en diez subdivisiones de *a* y tomo tres de estas, en esta última subdivisión señalo 2,3.
- Considero 3*a*, divido la tercera unidad *a* en diez subdivisiones de *a* y tomo tres de estas, en esta última subdivisión señalo 2,3.

c) Cuando represento $4\frac{3}{5}$ en el rayo numérico y tomo como unidad a la longitud *a*, a cada una de estas unidades la divido en cinco partes iguales, que llamo subdivisiones de *a*.

- Señalo 23 subdivisiones de *a* en el rayo numérico.
- Considero 5*a* en el rayo numérico, divido la cuarta unidad *a* en cinco subdivisiones de *a* y tomo tres de estas, en esta última subdivisión señalo $4\frac{3}{5}$.
- Considero 5*a*, divido la quinta unidad *a* en cinco subdivisiones de *a* y tomo tres, en esta última subdivisión señalo $4\frac{3}{5}$.

2. Representa en el rayo numérico los números fraccionarios siguientes:

a) $1;\ 5;\ \frac{1}{4};\ \frac{5}{2};\ 2\frac{1}{2};\ 0{,}3;\ 3{,}4$

b) $0{,}25;\ \frac{1}{3};\ 3\frac{2}{5};\ 1{,}75;\ \frac{23}{10};\ 2{,}45;\ 5\frac{2}{3}$

3. Dada la lista de números siguiente:

$\frac{3}{5}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{7}{5}$; $2\frac{1}{3}$; $1\frac{3}{5}$; $\frac{17}{5}$; $2\frac{1}{5}$

a) Determina el número de la lista que corresponde a cada letra representada en el rayo numérico (fig. 1.3) .

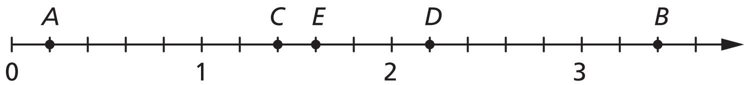


Fig. 1.3

b) Representa en este rayo los números fraccionarios que no correspondan a ninguna de las letras.

1.1.5 Orden y comparación de números fraccionarios

De gran utilidad resulta la comparación de **números,** esto lo hemos comprobado a diario en las actividades de nuestra vida cotidiana.

Recuerda que...

Al comparar **números fraccionarios** que estén representados en un rayo numérico, el que esté ubicado más a la izquierda (más cerca de cero) será el menor.

Veamos mediante algunos ejemplos los procedimientos que utilizamos para ordenarlos y compararlos.

Ejemplo 1:

Compara los números en cada una de las parejas siguientes:

a) 525 y 1 832 b) 423 y 21 c) 28 435 432 y 28 437 003

Solución:

En los dos primeros incisos es fácil la comparación, ya que el número que tenga mayor cantidad de cifras será el mayor.

a) $525 < 1\,832$ b) $423 > 21$

En el inciso c) , que tienen la misma cantidad de cifras, se van comparando de izquierda a derecha cada una de las cifras correspondientes a un mismo orden hasta encontrar la diferencia.

c) $28\,43\underline{5}\,432 < 28\,43\underline{7}\,000$ porque $5 < 7$

Al comparar **fracciones y expresiones decimales**, si las representas en un rayo numérico, se procede de forma análoga a los números naturales.

Ejemplo 2:

Compara:

a) 3,85 y 2,53 b) 0,41 y 0,515 c) 3,47 y 3,425

Solución:

Para comparar expresiones decimales se seleccionan las cifras enteras y se comparan como si fueran números naturales, en el caso de que las cifras enteras sean iguales se pasa a comparar las décimas y si estas son iguales se comparan las centésimas y así sucesivamente.

a) $3{,}85 > 2{,}53$; porque $3 > 2$ (aquí comparamos la parte entera) .
b) $0{,}41 < 0{,}515$, porque $4 < 5$ (aquí coincide la parte entera de ambas expresiones y pasamos a comparar las décimas) .
c) $3{,}47 > 3{,}425$ porque $7 > 2$, (en estas expresiones coincide la parte entera y la cifra de las décimas por lo que comparamos las centésimas) .

Recuerda que...

Para comparar las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ realizamos la operación siguiente.

Multiplicamos ***a* · *d*** y ***b* · *c***, o sea:

$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ si $a \cdot d < b \cdot c$ $\qquad \frac{a}{b} \quad \frac{c}{d}$ $\qquad b \neq 0$ y $d \neq 0$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si $a \cdot d = b \cdot c$

$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ si $a \cdot d > b \cdot c$

En el caso en que los productos sean iguales, entonces decimos que son **fracciones equivalentes.**

Ejemplo 3:

a) Ordena de menor a mayor los números siguientes:

$$2;\ \frac{4}{5};\ 0{,}4;\ 4{,}3;\ 0{,}3;\ 3\frac{1}{5};\ \frac{15}{2};\ 6$$

b) Representa en un rayo numérico los números anteriores.

c) Establece la relación entre la representación en el rayo numérico y el resultado del inciso a). Argumenta tu respuesta.

Solución:

a) Para ordenar estos números debemos compararlos y sabemos que: 0,4; 0,3; y $\frac{4}{5}$ están entre cero y uno.

También al comparar las expresiones decimales podemos plantear que $0{,}3 < 0{,}4$ por lo que nos quedaría comparar $\frac{4}{5}$ con esta y podemos hacerlo convirtiendo esta fracción en expresión decimal $\frac{4}{5} = 0{,}8$, entonces podemos ordenar estas tres expresiones como sigue $0{,}3 < 0{,}4 < 0{,}8$.

Ordenaremos ahora los valores que son mayores que 1: $\left(2;\ 4{,}3;\ 3\frac{1}{5};\ \frac{15}{2};\ 6\right)$.

Aquí podemos plantear que: $2 < \frac{31}{5} < 4{,}3 < 6$ (comparando la parte entera de estos números $2 < 3 < 4 < 6$) nos queda entonces $\frac{15}{2}$ que lo podemos expresar como número mixto $\left(7\frac{1}{2}\right)$ o como expresión decimal (7,5) y finalmente nos quedaría:

$$0{,}3 < 0{,}4 < \frac{4}{5} < 2 < 3\frac{1}{5} < 4{,}3 < 6 < \frac{15}{2}$$

b) Los números están representados en la figura 1.4.

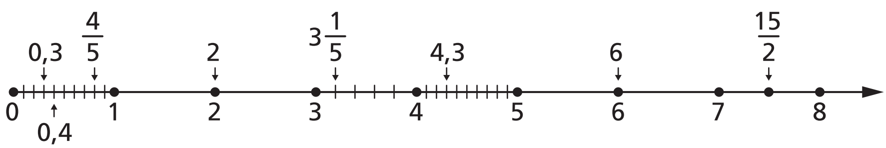


Fig. 1.4

c) Observamos que en la representación gráfica (fig. 1.4) los números quedan ordenados de la misma forma que en el inciso a).

Ejercicios

(epígrafe 1.1.5)

1. Identifica, cuáles de las proposiciones siguientes son verdaderas.

a) $53\,083 < 2\,525$ b) $1\,437 < 105\,430\,000$

c) $36\,825\,003 \leq 36\,825\,003$ d) $5{,}47 < 8{,}47$

e) $0{,}143 > 0{,}014\,3$ f) $\frac{5}{10} > 0{,}5$

g) $\frac{3}{5} > \frac{8}{3}$ h) $\frac{2}{9} < \frac{7}{9}$

i) $\frac{4}{5} > \frac{4}{9}$ j) $4\frac{1}{5} < \frac{18}{4}$

k) $11\frac{1}{3} > \frac{5}{3}$ l) $\frac{5}{2} < 2{,}41$

2. Compara los números fraccionarios siguientes utilizando los signos <, =, >. Fundamenta el trabajo realizado.

a) $2{,}\overline{5}$ ___ 3 b) $0{,}6$ ___ 0 c) $5{,}79$ ___ $5{,}8$

d) 2 ___ $\frac{5}{3}$ e) 1 ___ $\frac{4}{3}$ f) $2{,}\overline{2}$ ___ $\frac{22}{10}$

g) $\frac{4}{3}$ ___ $3{,}4$ h) $\frac{1}{2}$ ___ $\frac{2}{5}$

3. Sustituye el asterisco por un número de forma tal que obtengas las proposiciones siguientes.

a) $1{,}25 > 1{,}2*$ b) $0{,}36 < 0{,}*6$ c) $\frac{1}{*} > \frac{1}{2}$

d) $3{,}* > 3\frac{1}{4}$ e) $* < 3$ f) $\frac{*}{6} > \frac{5}{6}$

g) $\frac{*}{4} > 1$ h) $\frac{6}{*} > 2{,}06$ i) $3\frac{1}{5} = *{,}2$

j) $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{*}$ k) $3{,}2* = 3\frac{1}{4}$ l) $*\frac{4}{5} = \frac{24}{5}$

m) $1{,}3\overline{4} > 1{,}*4$ n) $4\frac{3}{7} < 4{,}*$ ñ) $*\frac{4}{5} = \frac{24}{5}$

4. En estos sacos están guardados productos diferentes (fig. 1.5). ¿Cuál de estos sacos tiene mayor masa[27] y cuál menor?

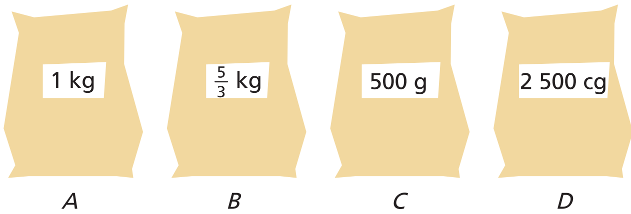


Fig. 1.5

5. En una cooperativa dos campesinos tienen parcelas iguales. El primero la ha dividido en cinco partes iguales y dedica tres de estas a la siembra de plátanos. Si el otro divide la suya en 15 partes iguales. ¿Cuántas partes debe dedicar a la siembra de plátanos para igualarse a su compañero?

6. Clasifica las proposiciones siguientes en verdaderas (V) o falsas (F) . Fundamenta las falsas.

___ Si $a \cdot d < b \cdot c$ entonces $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$; $(b \neq 0$ y $d \neq 0)$

___ Si $a \cdot d = b \cdot c$ entonces $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$; $(b \neq 0$ y $d \neq 0)$

___ Si $a \cdot d > b \cdot c$ entonces $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$; $(b \neq 0$ y $d \neq 0)$

1.1.6 Operaciones con números fraccionarios

Reflexiona

El 13 de septiembre de 2006, el órgano de prensa *Juventud Rebelde* anunció:

La almohadilla de olor que la célebre "niña de Guatemala" regaló a José Martí fue situada en la Fragua Martiana.

[27] Masa es lo que conoces erróneamente como peso.

La almohadilla tiene forma de ortoedro, mide 37,5 cm de largo, 25 cm de ancho y 3,0 cm de grosor.

Imagina que por determinado motivo tuvieras que proteger esta reliquia y solo contaras con un pedazo de cartulina de forma cuadrada de 40 cm de largo; si tuvieses las habilidades y materiales necesarios: ¿podrías elaborar una cajita para proteger esta almohadilla de amor?

Pensemos en la parte matemática que concierne a la solución de esta situación. Debes hacer uso de diferentes contenidos matemáticos de la asignatura. Por supuesto, fundamentalmente de tu imaginación espacial y de tus habilidades de cálculo en las operaciones con números fraccionarios.

Recuerda que…

Para adicionar y sustraer números naturales:

Se colocan ordenadamente los números de modo que las unidades, decenas, centenas… de cada número queden una debajo de la otra y se realizan las operaciones (adicionar o sustraer) comenzando por la cifra de la derecha.

$$\begin{array}{r} 1\,475 \\ +\ \ 312 \\ \hline 1\,787 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 1\,787 \\ -\ \ 312 \\ \hline 1\,475 \end{array}$$

La sustracción es la operación inversa de la adición.

Para multiplicar y dividir números naturales:

Se calculan los productos o cocientes parciales. En la multiplicación se adicionan los productos parciales. En la división se sustrae de cada dividendo parcial el producto de cociente parcial por el divisor.

$$\begin{array}{r} \underline{2866 \cdot 323} \\ 8\,598 \\ 5\,732 \\ +\quad 8\,598 \\ \hline 925\,718 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 925'7'1'8 & 323 \\ \cline{2-2} -\ 646 & 2866 \\ \cline{1-1} 2\,797 & \\ -\ 2\,584 & \\ \cline{1-1} 2\,131 & \\ -\ 1\,938 & \\ \cline{1-1} 1\,938 & \\ -\ 1\,938 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

La división es la operación inversa de la multiplicación.

Para adicionar y sustraer expresiones decimales:

Se colocan los números uno debajo del otro de manera que la parte entera se encuentre a la izquierda de la coma, en el caso de la sustracción el mayor número siempre se coloca encima del otro.

$$\begin{array}{r} 0{,}175 \\ +\ 4{,}2 \\ \hline 4{,}375 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 34{,}2 \\ -\ 12{,}99 \\ \hline 21{,}21 \end{array}$$

Para multiplicar expresiones decimales:

Se calcula el producto como si los factores fueran números naturales.

La coma se coloca en el producto de derecha a izquierda tantos lugares decimales tengan los dos factores juntos.

$$\begin{array}{r} 1{,}5 \cdot 2{,}4 \\ \hline 30 \\ +\quad 60 \\ \hline 360 \end{array}$$

Para dividir expresiones decimales:

Se elimina la coma del divisor multiplicando el dividendo y el divisor por una potencia de diez de manera que el dividendo se convierta en un número natural.

Se comienza a dividir el nuevo dividendo por el nuevo divisor siempre se tiene que comparar la parte entera del dividendo con el divisor, si:

- La parte entera del dividendo es mayor que el divisor, se mantiene el procedimiento de los números naturales, pero se coloca la coma inmediatamente después que se hayan dividido las unidades del dividendo.
- La parte entera del dividendo es menor que el divisor, entonces no es posible efectuar la división en este caso se coloca en el cociente cero y seguidamente la coma, para continuar la operación se toma la cifra siguiente del dividendo y se vuelve a comparar con el divisor hasta que el dividendo sea mayor que el divisor y así proceder con la división.

24 : 3,2

$$
\begin{array}{r|l}
240 & 32 \\ \cline{2-2}
-224 & 7{,}5 \\ \cline{1-1}
160 & \\
-160 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

2,4 : 3,2

$$
\begin{array}{r|l}
240 & 32 \\ \cline{2-2}
-224 & 0{,}75 \\ \cline{1-1}
160 & \\
-160 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

1,24 : 3,2

12,4 : 32

$$
\begin{array}{r|l}
124 & 32 \\ \cline{2-2}
-96 & 0{,}3875 \\ \cline{1-1}
280 & \\
-256 & \\ \cline{1-1}
240 & \\
-224 & \\ \cline{1-1}
160 & \\
-160 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Para adicionar o sustraer fracciones de:

- Igual denominador: se adicionan o sustraen los numeradores y se coloca el mismo denominador.
- Diferentes denominadores: se calcula el mínimo común múltiplo de los denominadores, se amplían los numeradores y después se adicionan o sustraen los numeradores de las fracciones halladas.

$$\frac{17}{24}+\frac{3}{8}=\frac{17+9}{24}=\frac{26}{24}=\frac{13}{12} \qquad \frac{7}{15}-\frac{5}{12}=\frac{28-25}{60}=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}$$

$$\frac{13}{3}-2\frac{1}{8}=\frac{13}{3}-\frac{17}{8}=\frac{104-51}{24}=\frac{53}{24}=2\frac{5}{24}$$

Para multiplicar fracciones:

Se multiplican los numeradores y denominadores.

Siempre que sea posible es conveniente antes de efectuar el producto simplificar las fracciones.

$$\frac{9}{24}\cdot\frac{12}{15}=\frac{9\cdot 12}{24\cdot 15}=\frac{108}{360}=\frac{12}{40}=\frac{3}{10}=0{,}3$$

Simplificando quedaría:

$$\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{2}{\cancel{24}}}\cdot\frac{\overset{1}{\cancel{12}}}{\underset{5}{\cancel{15}}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{10}=0{,}3 \qquad 2\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{34}=\frac{17}{6}\cdot\frac{7}{34}=\frac{1}{6}\cdot\frac{7}{2}=\frac{7}{12}$$

Para dividir fracciones:

Se transforma la división en multiplicación.

Se multiplica el dividendo por el recíproco del divisor.

$$\frac{5}{36} : \frac{35}{18} = \frac{5}{36} \cdot \frac{18}{35} = \frac{1}{14} \qquad \frac{3}{8} : 2 = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$$

Atención

La respuesta final de las operaciones básicas con fracciones siempre que sea posible se simplifica hasta su mínima expresión.

Saber más

La adición y sustracción de fracciones impropias también se pueden efectuar convirtiendo la fracción en número mixto.[28]

Por ejemplo, $\frac{13}{3} - \frac{17}{8}$ primero se convierten las fracciones impropias en mixtas $\frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$, $\frac{17}{8} = 2\frac{1}{8}$ después se amplía la fracción de cada uno de los números mixtos para obtener fracciones de igual denominador.

$$\begin{array}{rl} 4\frac{1}{3} = & 4\frac{8}{24} \\ -\ 2\frac{1}{8} = & 2\frac{3}{24} \\ \hline & 2\frac{5}{24} \end{array}$$

Estás en condiciones de determinar si con el pliego que te han dado, pudieras confeccionar una cajita para proteger la almohadilla de amor. ¿Te atreves?

[28] Dulce María Escalona Almeida: *Aprender aritmética*, Cuaderno sexto, Publicaciones Cultural S. A., 1958, p. 118.

Piensa en el tamaño de la cajita (fig. 1.6) :

Fig. 1.6

¿Cuántos pedazos de cartulina será necesario cortar y de qué tamaño es cada uno?

Tus conocimientos sobre las operaciones con expresiones decimales te permitirán hacer los cálculos para responder estas preguntas, en lo cual te ayudarán las representaciones de la figura 1.7.

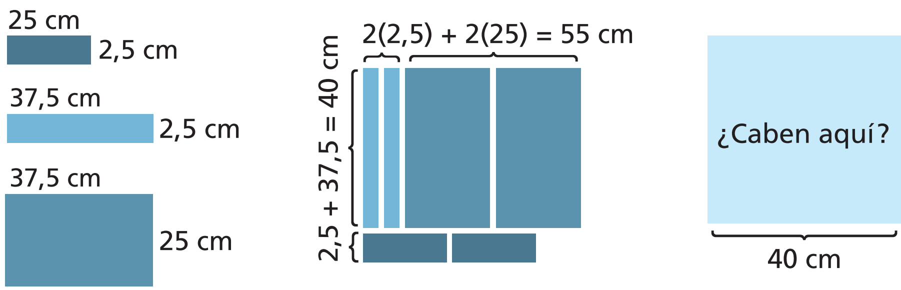


Fig. 1.7

Ejemplo 1:

En un huerto escolar de 250 m^2 se dedican las $\frac{3}{5}$ partes a la siembra de vegetales (fig. 1.8) , la cuarta parte del resto a la siembra de frutales y se sembraron 45 m^2 de viandas. ¿Qué superficie queda disponible para la siembra de plantas medicinales?

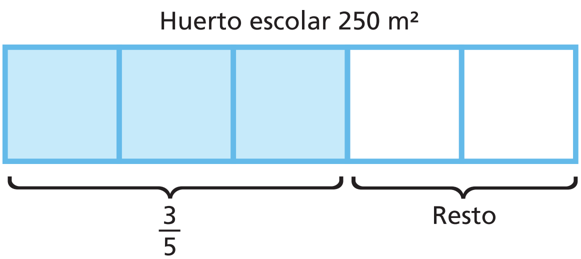


Fig. 1.8

Solución:

- Para resolver este problema recomendamos realizar un análisis gráfico de la situación como en la figura 1.7.
- Después, puedes determinar la cantidad de metros cuadrados que se dedicó a la siembra de vegetales: $\frac{3}{5} \cdot 250\ m^2 = 150\ m^2$.
- Ahora se necesita calcular el resto que se menciona para determinar qué parte de este se destinó a frutales y podemos proceder de dos formas diferentes:
  - Primera: si a los vegetales se dedicaron $\frac{3}{5}$ del huerto, el resto o lo que falta para completar la unidad es $\frac{2}{5}$ y $\frac{2}{5} \cdot 250\ m^2 = 100\ m^2$. El resto son $100\ m^2$.
  - Segunda: restando del total de metros cuadrados del huerto, lo que se dedicó a la siembra de vegetales: $250\ m^2 - 150\ m^2 = 100\ m^2$. El resto son $100\ m^2$.
- Como nos dicen que la cuarta parte del resto corresponde a la siembra de frutales (fig. 1.9) , podemos plantear: $\frac{1}{4} \cdot 100\ m^2 = 25\ m^2$.

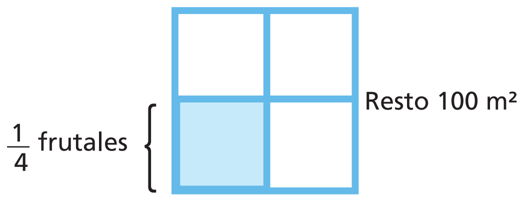


Fig. 1.9

Si adicionamos las cantidades utilizadas en cada tipo de siembra y lo restamos de la superficie del huerto, obtenemos la superficie que queda disponible para plantas medicinales, lo cual podemos plantear de la forma siguiente:

$= 250\ m^2 - (150\ m^2 + 25\ m^2 + 45\ m^2)$
$= 250\ m^2 - 220\ m^2$
$= 30\ m^2$

Observa que en este resultado se tuvo en cuenta el orden operacional, pues realizamos primero las operaciones que aparecen en el paréntesis y posteriormente la sustracción indicada.

Por último, debemos dar la respuesta:

Respuesta: Quedan disponibles para la siembra de plantas medicinales 30 m^2 del huerto escolar.

Aplica tus conocimientos

- Con cuatro números cuatro y las operaciones matemáticas básicas, intenta obtener los diez primeros números naturales.

Ejemplo: se obtiene el número uno de la forma siguiente: $\frac{44}{44} = 1$ y el número dos se consigue al calcular $\frac{4}{4} + \frac{4}{4} = 2$.

- Empleando las operaciones matemáticas básicas y los diez primeros números naturales obtén como resultado el número uno.

Ejercicios

(epígrafe 1.1.6)

1. Calcula:

a) (164 – 151) · (22 + 4)

b) 125 – 6 · 1 271

c) 332 : 4 – 76 + 50 · 68

d) 233 337 – 1 950 : 25 + 27

1.1 Determina el antecesor y el sucesor de cada resultado final obtenido.

1.2 Ordena los resultados de mayor a menor.

2. Sean $A = 56{,}4$; $B = 40{,}5$ y $C = 1{,}7$.

2.1 Calcula:

a) $A + B + C$

b) $A - B - C$

c) $A + B - C$

d) $A - B + C$

e) $A : 2 + B : 3 + C : 4$

f) $A : 4 - B : 9 - C : 4$

g) $A : 12 + B : 15 - C : 0{,}4$

h) $A : 3 - B : 3 + C : 0{,}4$

i) $(A + B + C) : 2$

j) $(A - B - C) : 4$

k) $(A + B - C) : 16$

l) $(A - B + C) : 4$

2.2 Escribe cómo se leen las expresiones decimales del resultado final de a) , c) , e) y g) .

2.3 ¿Entre qué números naturales consecutivos se encuentra el resultado final obtenido en i) ?

2.4 ¿Cuántos números naturales hay entre los resultados finales obtenidos en h) y j) ?

2.5 Escribe dos números naturales menores que el resultado final de k) .

2.6 Escribe tres expresiones decimales y tres fracciones mayores que el resultado final obtenido en l) .

3. Calcula:

a) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$

b) $\frac{3}{4} + \frac{2}{3}$

c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{6}$

d) $\frac{5}{8} - \frac{7}{12}$

e) $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6}$

f) $6 : \frac{3}{2}$

g) $\frac{2}{5} : \frac{4}{15}$

h) $\frac{5}{8} + \frac{1}{6} - \frac{3}{4}$

i) $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{9} : \frac{1}{6}$

j) $15 - 2 : \frac{1}{7}$

k) $70 + 24\frac{9}{18} + 5\frac{3}{6}$

l) $\left(1 - \frac{4}{5}\right) \cdot 10 + 6 : 2$

m) $\dfrac{5 - \frac{3}{4} \cdot 6}{\frac{1}{2} + 1}$

n) $\dfrac{\frac{1}{4} \cdot 8 + 3}{0{,}3 - \frac{1}{10}}$

ñ) $\frac{1}{30} + \frac{2}{15} : 18$

o) $\frac{4}{5} + \frac{11}{10} - \frac{9}{25}$

p) $\left(\frac{13}{14} - \frac{6}{7} + \frac{6}{35}\right) : \frac{1}{17}$

q) $2\frac{4}{13}\left(\frac{2}{9} - \frac{1}{18} + \frac{1}{20}\right)$

r) $\dfrac{\frac{7}{8} - \frac{1}{15} - \frac{7}{30}}{\frac{15}{16} - \frac{3}{5} - \frac{1}{8}}$

s) $\frac{105}{4}\left(\frac{6}{7}+\frac{20}{21}-\frac{7}{30}+\frac{3}{14}\right)$ t) $\left(0{,}25+\frac{5}{7}-\frac{3}{8}\right):11$

3.1 ¿Entre qué números naturales se encuentran cada uno de los resultados obtenidos?

4. Félix Andrés, que disfruta tanto el humor como la Matemática, decidió ponerle a esta caricatura "¿Poquito? ¡Las dos terceras partes!" (fig. 1.10) . Teniendo en cuenta lo que conoces de aritmética, ¿estás de acuerdo con él? ¿Por qué?

Fig. 1.10

a) ¿Qué título de los que te proponemos a continuación seleccionarías para la caricatura? Fundamenta tu respuesta.

- ¡Se comió la décima parte!
- ¡Le faltó $\frac{1}{5}$ por comer!
- ¡Nos dejó solo un tercio!

5. El famosísimo cubano Erick Hernández vuelve a hacer alarde de sus posibilidades sobrenaturales en el dominio del balón, su más reciente logro es que en medio minuto dio 195 toques a la pelota solo con la cabeza y quebró su anterior récord en diez toques. Pese a la satisfacción por el éxito, este singular atleta se muestra inconforme, pues considera que el límite está en <u>210 toques, a razón de siete por segundo.</u>[29]

a) Aproximadamente, ¿cuántos toques dio al balón en 15 s?
b) ¿Cuál fue su récord anterior?
c) Confirma la información que aparece subrayada.
d) A partir de su más reciente ejemplo de supremacía en el balón, ¿cuántos toques más tendría que realizar?
e) A lo mejor cuando realices este ejercicio ya Erick hizo realidad su sueño, investiga sobre el tema y compara con la mayor marca a la que se hace referencia.

[29] Órgano de prensa *Granma*, 14 de junio de 2011.

6. Selecciona la respuesta correcta en cada caso. Márcala con una X.

La media aritmética de M y N, donde $M = 9550 - 24 : \frac{1}{16}$ y

$$N = \left(\frac{8}{15} + \frac{2}{45} - \frac{7}{30}\right) : \frac{1}{90} \quad \text{es:}$$

a) ___ 459,85 b) ___ 4 583 c) ___ 76 223,5

d) ___ cuarenta y cinco mil novecientas ochenta y cinco décimas.

7. Susana ha llevado en cuenta el consumo eléctrico de su vivienda durante tres meses consecutivos y estos han sido de 120; 180 y 150 kWh respectivamente. Si se propone hacer un ahorro de 10 kWh durante el cuarto mes respecto al promedio del trimestre anterior, entonces el consumo de ese mes debe ser:

___ 110 kWh ___ 140 kWh ___ 150 kWh

8. El húngaro Peter Leko es hoy uno de los mejores ajedrecistas del orbe. Nació el 8 de septiembre de 1979 y obtuvo el título de Gran Maestro en 1994 con 14 años, cuatro meses y 22 días.[30]
¿Qué día obtuvo el título?

9. En las elecciones pioneriles Nerea obtuvo el 25 % de los votos, Leonardo, las tres quintas partes del resto y Jorge Luis, los demás. ¿Cuál de los tres obtuvo mayor cantidad de votos?

___ Nerea ___ Leonardo ___ Jorge Luis

10. Un ciclista debe recorrer una distancia de 250 km, para su entrenamiento, en tres días. El primer día recorrió el 60 % de la distancia, el segundo día la cuarta parte del resto. ¿Cuántos kilómetros más debe recorrer el tercer día que el segundo para cumplir el plan de entrenamiento?

11. En un Festival de Materias Primas realizado en un CDR, Nieves, Mary, Yury y Santiago recogieron 86 frascos plásticos, Yury recogió tres frascos más que Santiago y uno más que Mary. Si Yury recogió 21 frascos, ¿cuántos frascos recogió Nieves?

[30] Semanario *Orbe* del 10 al 16 de noviembre de 2009.

12. Un vagón de ferrocarril contiene cinco bultos de mercancías. El primero tiene una masa de 72,675 kg, el segundo tiene 8 kg menos que el primero, el tercero 6,104 kg más que los dos anteriores juntos y el cuarto tanto como los tres anteriores. ¿Cuál es la masa del quinto bulto, si la masa total de las mercancías es de 760,34 kg?

13. Asisten a un congreso internacional de ortopedia en nuestro país 2 310 delegados, de los que $\frac{1}{5}$ son africanos, $\frac{1}{6}$ de América Latina, $\frac{1}{7}$ de Asia y $\frac{3}{11}$ de Europa.

Completa la tabla 1.1:

Tabla 1.1

Región	Cantidad de delegados
África	
América Latina	
Asia	
Europa	
Otras regiones	

14. Descubre los errores que aparecen en la respuesta al numerograma:

10	x	5	+	8	= 58
–		+		:	
1	+	25	:	2	= 13
x		–		+	
9	x	5	–	2	= 43
= 81		= 25		= 6	

15.* Numera los vértices de un cubo (fig. 1.11) con los números naturales del uno al ocho, de tal forma que la suma de los vértices de cada cara lateral sea 18 y la semisuma de las caras de las bases sea también 18.

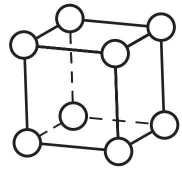


Fig. 1.11

16.* Se tienen cuatro números cualesquiera que sean, mayores que cuatro y menores que cinco.

Demuestra que hay al menos un par de estos cuya diferencia es menor que $\frac{1}{3}$.

17.* ¿Qué términos de la suma siguiente $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$ deben suprimirse para que la suma de los restantes sea uno?

18. ¿Qué valor deben tomar las variables para que se cumpla la secuencia de igualdades planteada:

$\frac{2}{3}+a=b$ $\qquad$ $b\cdot\frac{5}{2}=c$ $\qquad$ $c-\frac{1}{6}=2$

1.1.7 El significado del tanto por ciento

Investiga y aprende

Vivimos en un mundo en el que casi siempre encontramos relacionadas dos cantidades mediante el tanto por ciento. Te invitamos desde ya a “coleccionar porcentajes” y compartir con tus compañeros de grupo el resultado de tu trabajo. En este epígrafe verás algunos ejemplos de nuestra colección **¡Al cierre!**, los cuales fueron tomados fundamentalmente de los órganos de prensa.

¡Al cierre!: Balance de agua. El equilibrio entre disponibilidad y demanda[31]

Actualmente los recursos hidráulicos disponibles ascienden a algo más de trece mil seiscientos sesenta millones de metros cúbicos de agua y el desarrollo de la infraestructura hidráulica en el país permite poner a la disposición de las demandas económicas, sociales y ambientales, el 57 % de los recursos aprovechables.

a) ¿Qué significa el 57 % de los recursos aprovechables?

b) ¿Sobrepasa esta cantidad los 7 900 000 000 m^3 de agua?

[31] Órgano de prensa *Granma*, 26 de enero de 2012.

Recuerda que...

El tanto por ciento significa "**un tanto de cada cien**". El 1 % escrito como fracción común es $\frac{1}{100}$.

Ejemplo 1:

a) **¡Al cierre!**: Año Internacional de los Bosques[32]

El 26,69 % de la superficie terrestre cubana son bosques.

Esta expresión significa que los bosques representan el 26,69 % de la superficie terrestre de nuestro país o 26,69 de cada 100 km^2 de la superficie terrestre cubana son bosques o dicho de otra manera, aproximadamente 27 de cada 100 km^2 de la superficie terrestre en Cuba son bosques.

b) **¡Al cierre!**: Fertilizante ecológico ECOFEL[33]

Después de utilizar en las plantas ornamentales el fertilizante ecológico ECOFEL, el porcentaje de plantas marchitas se redujo a 2 %.

En esta expresión de tanto por ciento se declara que desde que se aplicó el producto ECOFEL, solo dos de cada 100 plantas se marchitaron.

c) **¡Al cierre!**: Ciudades: la mayor contaminante del planeta[34]

El 50 % de la población mundial vive en ciudades y según las predicciones, en unos 15 años será el 60 % de la humanidad la que habite en un contexto urbano.

En este cintillo de prensa se expresa que de cada 100 pobladores en el mundo, 50 habitan en ciudades y que dentro de 15 años, de cada 100 personas en el mundo, serán 60 las que vivan en ciudades.

En particular, los porcentajes: 50 % y 60 %, que aparecen en este último ejemplo, son considerados como **porcentajes cómodos**, porque al expresarlos como fracción facilitan el cálculo aritmético.

Debemos recordar también que al plantear el tanto por ciento como fracción, si la fracción considerada tiene simplificación, entonces debemos simplificarla, puesto que esto facilitará igualmente el cálculo.

[32] Semanario *Orbe*, octubre de 2012.

[33] Entrevista a un trabajador por cuenta propia.

[34] Órgano de prensa *Granma*, 26 de enero de 2012.

Recuerda que...

Algunos de los casos de porcentajes cómodos que más utilizamos en el cálculo son:

Porcentaje	Fracción	Operación a que se reduce
20 %	$\frac{1}{5}$	Determinamos la quinta parte del total, lo que equivale a dividir por cinco.
25 %	$\frac{1}{4}$	Determinamos la cuarta parte del total, lo que equivale a dividir por cuatro.
50 %	$\frac{1}{2}$	Determinamos la mitad del total lo que equivale a dividir por dos.
75 %	$\frac{3}{4}$	Determinamos las tres cuartas partes del total, lo que equivale a multiplicar por tres y dividir por cuatro.

Ahora puedes responder las interrogantes iniciales referidas al Balance de agua.

a) En la información que se brinda del periódico *Granma* sobre el balance de agua, el 57 % indica que 57 de cada 100 m^3 de agua útil será puesto a la disposición de las demandas económicas, sociales y ambientales en nuestro país.

b) Para responder la segunda interrogante:

¿Sobrepasa esta cantidad (el 57 %) a los 7 900 000 000 m^3 de agua?

Tenemos que comparar el 57 % de la cantidad de metros cúbicos dados, con 7 900 000 000, para ver si sobrepasa o no esta cantidad; esto impone indagar primero ¿cuánto es ese 57 %?

<u>Estamos buscando</u> un número (<u>la parte</u>) que representa un tanto por ciento (57 %) de un número conocido; que en este caso es 13 660 000 000 y que representa el total.

Para encontrarlo, basta con calcular el tanto por ciento del número conocido, esto es: 57 % de 13 660 000 000. Planteamos entonces la operación siguiente:

$$\frac{57}{100} \cdot 13\,660\,000\,000 = 7\,786\,200\,000$$

Respuesta: El 57% de los recursos aprovechables, no sobrepasa los 7 900 000 000 m^3 de agua.

Saber más

Las señales de tráfico como la que aparece en la figura 1.12 sirven para alertar a los conductores de la existencia del ángulo que forma la carretera con la horizontal. Esta señal triangular indica un porcentaje, en este caso 15 % lo cual significa que en 100 m de recorrido se subirán 15 m.[35]

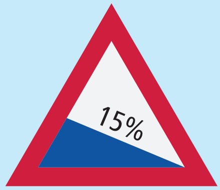


Fig. 1.12

Ejemplo 2:

¡Al cierre!: Del IX Congreso de la UJC[36]

Con nuestro esfuerzo construimos un módulo pecuario en el cual tenemos 115 gallinas, 133 codornices, 156 guineos, 43 patos, 56 chivos, 108 carneros, 214 cabezas de ganado vacuno, 36 toros en ceba, 92 conejos y 37 cerdos.

¿Qué porcentaje del módulo corresponde al ganado avícola?

Solución:

En este caso estamos **determinando qué tanto por ciento** es un número de otro, (qué tanto por ciento representa 447 de 990) .

Importante: En total hay en el módulo, 990 animales, solo son aves, 447.

Para resolver esta situación en la práctica dividimos **la parte** (447) , entre **el total** (990) y como queremos esta relación en tanto por ciento, se multiplica el resultado obtenido por 100.

El planteamiento podría quedar:

$$\frac{447}{990} \cdot 100 \approx 0{,}45\overline{15} \cdot 100 \approx 45\%$$

(En este caso el resultado es aproximado) .

Respuesta: El ganado avícola representa aproximadamente el 45 % del módulo pecuario.

[35] Carlos Gispert: *Progresiva enciclopedia interactiva de apoyo al estudio*, Ed. Océano, España, 2007, p. 1 141.

[36] Órgano de prensa *Juventud Rebelde*, 4 de abril de 2010.

Ejemplo 3:

¡Al cierre!: Embalses al 72,5 % de su capacidad. En La Habana, solo al 22 %[37]

Las abundantes precipitaciones del pasado mes contribuyeron a que al cierre del período lluvioso (mayo-octubre) los embalses administrados por el Instituto Nacional de Recursos Hidráulicos almacenen un volumen de agua de 6 000 677 000 m^3, cifra equivalente al 72,5 % de la capacidad total de llenado de los embalses.

Al ver informaciones como esta, casi estamos seguros de que te preguntas, ¿cuál será la capacidad total de la que se habla? Recordemos cómo hacerlo.

Aquí estamos buscando un número: **el total**, del cual conocemos un tanto por ciento, ¿cuál es el número del cual 6 000 677 000 es el 72,5 %?

Procedemos entonces dividiendo **la parte** (6 000 677 000) por el **tanto por ciento** que esta representa, expresado como fracción $\frac{72{,}5}{100} = \frac{725}{1\,000} = \frac{29}{40}$.

El planteamiento quedaría:

$$6\,000\,677\,000 : \frac{29}{40} = 6\,000\,677\,000 \cdot \frac{40}{29} \approx 8\,276\,795\,862.$$

Respuesta: La capacidad total de llenado de los embalses es 8 276 795 862 m^3 de agua.

Atención

Al interpretar las informaciones donde se utiliza el tanto por ciento, debemos distinguir con mucho cuidado en todos los casos: el total, la parte y el porcentaje, para identificar cuál de estos es el que debemos calcular y cuáles son los que constituyen datos.

Veamos entonces otras formas de utilizar el tanto por ciento, unas que se refieren a más del 100 % y otras, a menos.

Ejemplo 4:

¡Al cierre!: Crece volumen de carga transportada por el MITRANS.[38]

Las entidades del Ministerio del Transporte (MITRANS) han trasladado, desde enero hasta octubre del 2011, 12 593 800 t de carga, cifra que

[37] Órgano de prensa *Granma*, 12 de noviembre de 2011.

[38] Órgano de prensa *Granma*, 26 de enero de 2012.

representa un 3,8 % por encima del volumen transportado en igual período del 2010.

Al ver informaciones como estas, casi siempre nos preguntamos ¿cuál era la cifra del período anterior? En este caso, ¿cuántas toneladas trasladó el MITRANS desde enero hasta octubre en el año 2010?

Para determinar ese valor, tendríamos que determinar el número del cual 12 593 800 es el 103,8 % (100 + 3,8) , ya que nos informan que lo trasladado (12 593 800 t) fue superior en 3,8 % y se tiene que:

$$12\,593\,800 \cdot \frac{100}{103{,}8} \approx 12\,132\,755{,}3$$

Respuesta: Desde enero hasta octubre de 2010 el MITRANS trasladó alrededor de 12 132 755,3 t.

Ejemplo 5:

¡Al cierre!: Masa de hielo del Ártico en su mínimo histórico

(…) solo 4 280 000 km² permanecen congelados, un 23 % menos que en el año 2005.

¿De qué número es el 23 % menos? Dicho de otra forma, ¿cuál es el número de km² de terreno congelados en el año 2005, del cual la cantidad mencionada (4 280 000 km²) representa un 23 % menos de kilómetros cuadrados? Debemos hallar de qué número los 4 280 000 km² que permanecen congelados son un 23 % menos. Este 23 % menos significa:

100 % – 23 % = 77 %. Luego, hay que calcular **el total** del cual el 77 % es 4 280 000:

$$\frac{77}{100}\,x = 4\,280\,000, \text{ de donde: } x = \frac{4\,280\,000 \cdot 100}{77} = 5\,558\,441{,}55 \approx 5\,558\,442 \text{ km}^2.$$

Respuesta: En el año 2005 estaban congelados 5 558 442 km².

Tanto por mil

A lo mejor en tu empeño de ampliar tu colección te encuentras con noticias así:

Sancti Spíritus alcanza la tasa de mortalidad infantil más baja del país.[39]

Es una de las seis provincias del país que alcanzó al cierre de 2017 la tasa de mortalidad infantil más baja de Cuba.

[39] Órgano de prensa *Juventud Rebelde*, 2 de enero de 2018.

Estas también colecciónalas, guardan estrecha relación con las comparaciones matemáticas, y te permitirán ejemplificar el **tanto por mil.**

Debes conocer que no solo el **100** se toma como número para comparar; en estadística también se utiliza el **1 000,** por ejemplo, para conocer la **tasa de mortalidad** infantil en una etapa, buscamos el cociente de la división de la cantidad de niños fallecidos de 0 a 1 año, entre la cantidad de nacimientos y multiplicamos por 1 000.

Si queremos encontrar el *average* de un bateador utilizamos la fórmula siguiente:

$\frac{J}{VB} \cdot$ 1 000, donde J es el número de jits, y VB son las veces al bate.

La simbología que se utiliza es: ‰.

En el béisbol el average también se conoce como **promedio.**

Ejemplo 1:

En la noticia se informa que Sancti Spíritus concluyó el 2017 con una tasa de mortalidad infantil de 2,0 por cada mil nacidos vivos, o sea, que de cada mil niños de cero a un año que nacieron vivos, solo fallecieron dos.

Ejemplo 2:

Descendió tasa de mortalidad infantil.[40]

Cuba cerró el 2017 con una tasa de mortalidad infantil de 4,0 por cada mil nacidos vivos y en ese año hubo en nuestra nación 114 980 nacimientos.

¿Cómo saber cuántos niños menores de un año fallecieron?

Para calcular el tanto por mil se procede de forma análoga al cálculo del tanto por ciento, para responder la pregunta hay que buscar qué cantidad hizo que la mortalidad fuera de 4,0.

Ejercicios

(epígrafe 1.1.7)

1. Selecciona la respuesta correcta marcando con una X en la línea dada.

1.1 Que en una escuela el 73 % de los estudiantes están aprobados significa que aprobaron:

[40] Órgano de prensa *Granma*, 3 de enero de 2012.

a) ___ 73 estudiantes

b) ___ 73 de cada 1 000 estudiantes

c) ___ 73 de cada 100 estudiantes

d) ___ 73 estudiantes de los examinados

e) ___ Uno de cada 73 estudiantes

1.2 El tanto por ciento que representa 57 de 300 es:

a) ___ 19 % b) ___ 5,3 % c) ___ 18 % d) ___ 57 %

1.3 El número que representa el 95 % de 576 es:

a) ___ 547,2 b) ___ 54,72 c) ___ 5,472

1.4 Si A es el 17 % de 71 y B es el 71 % de 17, entonces:

a) ___ $A < B$ b) ___ $A > B$ c) ___ $A = B$ d) ___ $A \neq B$

1.5 Cuando divido un número por su 25 % entonces:

a) ___ obtenemos su cuarta parte,

b) ___ hallamos su cuádruplo,

c) ___ lo dividimos por 25,

d) ___ siempre es cuatro.

1.6 Si 50 es el 20 % de un número, entonces el 120 % de dicho número es:

a) ___ 140 b) ___ 310 c) ___ 300

2. En 17 de los 167 municipios cubanos, la tasa de mortalidad infantil fue cero en el año 2011. ¿Qué porcentaje representa dicha cifra del total?[41]
Alta mortalidad infantil en indígenas peruanos[42]

3. La mortalidad infantil entre las comunidades indígenas amazónicas peruanas alcanza a 49,2 por cada 1 000 nacidos, informa un documento del Fondo de Población de las Naciones Unidas (UNFPA, por sus siglas en inglés) . Las comunidades constituyen 1,21 % de la población peruana. (PL)

¿Puede afirmarse que murieron alrededor de cinco niños por cada 100 que nacieron?

[41] Órgano de prensa *Granma*, 2 de enero de 2011 y del 3 de enero de 2012.

[42] Órgano de prensa *Granma*, 7 de mayo de 2011.

4.* Un cubo, cuyas caras están pintadas, se ha dividido en 1 000 cubos más pequeños de iguales dimensiones. Determina qué porcentaje del total tendrá pintada cuando selecciones solamente:

a) Una cara b) Dos caras c) Tres caras

4.1 Imagina que echas en una bolsa todos los cubitos que tienen al menos una cara pintada y que escoges uno sin mirar. ¿Tienes más posibilidades de escoger uno de los que tiene tres caras pintadas? ¿Por qué?

5. Lee cuidadosamente la información siguiente, extraída de la página 256 del libro *Curiosidades beisboleras* de Jorge Alfonso:

Por primera vez se utilizaron las milésimas para definir el ganador de un campeonato en la pelota cubana en la temporada de 1979. En aquella oportunidad, los números favorecieron a Wilfredo Sánchez, quien conectó 80 indiscutibles en 212 turnos al bate contra Agustín Arias con 69 en 183 turnos.

Calcula el *average* en cada caso.

6. Con los resultados de tu colección elabora ocho ejemplos como los que se muestran al inicio del epígrafe y entrega a tu profesor el trabajo realizado.

1.1.8 Razones y proporciones

En una de las actividades de mantenimiento y reparación que se realiza en la asignatura Educación Laboral, los estudiantes integrantes del proyecto social se dieron a la tarea de reparar una cantidad de sillas de las 120 que estaban rotas en una escuela. Los estudiantes de octavo grado repararon 20 sillas y los de noveno grado, 32 sillas.

a) ¿Qué parte de la cantidad de sillas rotas fueron reparadas?

b) ¿Qué relación existe entre la cantidad de sillas reparadas por los estudiantes de octavo y los de noveno?

Solución:

a) Para determinar la parte que representa la cantidad de sillas que fueron reparadas debemos adicionar las cantidades reparadas por los estudiantes de los dos grados (52) y establecer el cociente entre las reparadas y el total de sillas rotas $\left(\frac{13}{30}\right)$.

b) La cantidad de sillas reparadas por los estudiantes de noveno grado es mayor que la cantidad de sillas reparadas por los estudiantes de octavo grado.

Otras posibles respuestas serían:

Calcular la **diferencia** entre estas cantidades (32 – 20 = 12) y plantear: el número de sillas que reparó noveno grado excede en 12 a la cantidad de sillas que reparó octavo grado.

Calcular el **tanto por ciento**, que representa 32 de 20 $\left(\frac{32}{20} \cdot 100 = 160\right)$ y plantear que lo reparado por noveno grado superó en 60 % a lo reparado por octavo grado.

Pero podemos también compararla utilizando la **razón** entre estas $\left(\frac{32}{20} = 1{,}6\right)$.

En este caso podemos decir que la cantidad de sillas reparadas por los estudiantes de noveno grado es 1,6 veces el número de sillas reparadas por octavo grado.

Recuerda que...

Se llama **razón** entre dos números *a* y *b* al cociente $\frac{a}{b}$ (a; $b \in \mathbb{Q}_+$; $b \neq 0$) que también se puede escribir $a : b$ y se lee: "*a* es a *b*".

Para buscar otra pareja de números que estén en la misma razón que $\frac{a}{b}$ basta con ampliar o reducir esta razón.

Ejemplo 1:

Selecciona de las parejas de números siguientes las que estén en la misma razón de $\frac{132}{1\,224}$.

a) 33 y 306
b) 11 y 102
c) 66 y 204

La pareja del inciso a) debe ser seleccionada, pues la razón se obtiene al simplificar por cuatro la razón original.

En el inciso b) los números 11 y 102 están en la misma razón que la razón dada, ya que $\frac{11}{102}$ podemos obtenerla al simplificar por 12 la razón original.

Los números 66 y 204 no están en la misma razón que $\frac{132}{1\,024}$

Recuerda que...

La igualdad entre dos razones recibe el nombre de **proporción.**

Una proporción se escribe $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ o $a : b = c : d$ con $a; b; c; d \in \mathbb{Q}_+$; $b \neq 0$; $d \neq 0$, donde:

$$\begin{matrix} \text{extremo} \longrightarrow & a & & c & \longrightarrow \text{medio} \\ & \overline{b} & = & \overline{d} & \\ \text{medio} \longrightarrow & & & & \longrightarrow \text{extremo} \end{matrix}$$

$$a \cdot d = b \cdot c$$

extremo

$a : b = c : d$

medios

La propiedad fundamental de las proporciones es de gran utilidad para determinar uno de los elementos de una proporción, conocidos los otros.

Propiedad fundamental: En toda proporción se cumple que el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

Ejemplo 2:

Isabela vende una trusa a 125 CUP o dos trusas a 200 CUP. Si me decido por la segunda opción, ¿cuánto me cuestan diez trusas?

Para resolver el problema debemos plantear la proporción que se puede establecer entre dos trusas y su precio.

$\frac{2}{200} = \frac{10}{x}$ aplicando la propiedad fundamental de las proporciones, nos quedaría $2\,000 = 2x$ despejando la variable.

$\frac{2\,000}{2} = x$ calculamos y nos queda 1 000.

Respuesta: Diez trusas me cuestan 1 000 CUP.

Ejemplo 3:

África construirá el mayor proyecto hidroeléctrico del mundo: una represa en las cataratas Inga, donde el río Congo cae 100 m y fluye a una velocidad de 43 m³/s, ¿cuántos metros cúbicos fluyen en una hora?[43]

Este problema se resuelve fácilmente al plantear la proporción siguiente:

$\frac{43\ m^3}{x} = \frac{1\ s}{3\,600\ s}$ donde x es la cantidad de metros cúbicos pedidos. Hay que tener en cuenta que una hora tiene 3 600 s.

Al despejar x, se obtiene que: $x = \frac{43\ m^3 \cdot 3\,600\ s}{1\ s}$, por lo que: $x = 154\,800\ m^3$.

Saber más

Las pirámides del antiguo Egipto fueron construidas teniendo en cuenta conceptos de proporcionalidad tan importantes como la llamada proporción áurea, presente a lo largo de los siglos en diversas manifestaciones artísticas sobre todo en la arquitectura.[44]

Investiga y aprende

¿En qué consiste la proporción áurea?

Ejercicios

(epígrafe 1.1.8)

1. Sustituye el símbolo ∇ para que se mantenga la proporción:

a) $\frac{88}{168} = \frac{11}{\nabla}$ b) $\frac{\nabla}{945} = \frac{4}{105}$ c) $\frac{164}{\nabla} = 41$

2. Enlaza la pregunta de la columna A con la proporción de la columna B que le pueda dar solución.

[43] Órgano de prensa *Granma*, 23 de noviembre de 2011.

[44] Caslos Gispert: *Progresiva enciclopedia interactiva de apoyo al estudio*, Ed. Océano, España, 2007, p. 1 080.

A	B
Un trabajador abona 16 surcos en dos jornadas de trabajo. ¿Cuántas jornadas más debe trabajar para terminar de abonar los 48 surcos del huerto?	$\frac{16}{48} = \frac{2}{x}$
Un trabajador abona 16 surcos en dos jornadas de trabajo. ¿Cuántas jornadas debe trabajar para abonar los 48 surcos del huerto?	$\frac{2}{x} = \frac{16}{144}$
Un trabajador abona 16 surcos en dos jornadas de trabajo. ¿Cuántas jornadas debe trabajar para realizar los tres pases de abono que llevan los 48 surcos del huerto?	$\frac{16}{2} = \frac{32}{x}$

3. De La Habana a Moscú existen 9 550 km, pero en un mapa de un Atlas Escolar, la distancia entre estas dos ciudades es de 13,4 cm, ¿cuál es la distancia real entre otras dos ciudades que en el mismo mapa distan 6,7 cm?

4. El rectángulo ha sido dividido en 20 cuadrados iguales (fig. 1.13). ¿Cuántos cuadrados se necesitan rayar para tener rayadas las tres quintas partes del rectángulo?

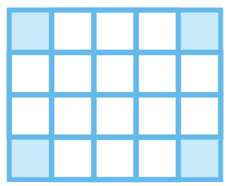


Fig. 1.13

5. En las instrucciones de un envase de pintura se puede leer “Rendimiento: 8 m^2 por litro”. Si se utilizó 3,5 envases de 4 L cada uno y se dieron dos manos a la misma habitación, qué superficie tiene dicha habitación.

6. Dada la proporción $x : y = z : t$, con $x; y; z; t \in \mathbb{Q}_+$; $y \neq 0$; $t \neq 0$. Intercambia los extremos y los medios y escribe otra proporción.

7. Con cuatro números fraccionarios diferentes de cero, ¿cuántas razones puedo establecer como mínimo?

8. Al multiplicar por 100 una razón, ¿qué hallamos?

9. Al adicionar a ambos miembros de una proporción la misma cantidad, ¿se mantiene la razón?

10.* Me contó un estudiante de séptimo grado que en su escuela se celebró el Festival de la R a la e dedicado a esa importantísima actividad que es el reciclaje. Él, excelente en Matemática, se percató de que la cantidad de pomos de plástico entregados es a la cantidad de libretas como dos es a tres y que la cantidad de libretas recolectadas es a la cantidad de latas de refresco como seis es a cinco. Piensa en un trío de posibles valores para cada cantidad.

1.2 Un nuevo conjunto numérico: los racionales. El conjunto de los números racionales

Reflexiona

En la situación inicial del libro Alejandro encontró la expresión siguiente $V_c = 10\,000(1 + 0{,}081\,6)^{-5}$ en una libreta de su hermano y le llamó la atención el valor del exponente que está precedido de un signo "menos", ¿será este valor un número natural o fraccionario?

Hasta ahora has estudiado los números fraccionarios, representados de diferentes maneras: expresiones decimales finitas, expresiones decimales infinitas periódicas y fracciones de la forma $\frac{a}{b}$ donde $a, b \in \mathbb{N}$; $b \neq 0$, que integran el conjunto de los números fraccionarios ($\mathbb{Q}_+$).

Recordemos algunos aspectos fundamentales sobre la Teoría de Conjuntos.

Conjuntos y sus relaciones

El concepto de conjunto es fundamental en todas las ramas de la Matemática. Podemos caracterizar a un conjunto como una lista, colección o grupos de objetos bien definidos, objetos que, como se verá en los ejemplos, pueden ser cualesquiera: números, personas, letras, objetos geográficos, etc. Estos objetos se llaman elementos o miembros del conjunto.

Mostremos ejemplos particulares de conjuntos.

No.	Ejemplos
1	Los números uno, dos, tres, cinco y 77.
2	El número fraccionario que satisface la igualdad $2{,}2x + 1 = 5$.
3	Las consonantes del abecedario español.
4	La cantidad de personas que habitan el planeta Tierra.
5	Los estudiantes de séptimo grado de tu escuela cuyo primer apellido comienza con la letra A.
6	Las profesoras que asistieron hoy a tu escuela.
7	Los países Venezuela, Bolivia y Ecuador.
8	Las ciudades capitales de Europa.
9	Los números en que el nombre del numeral comienza con la letra *D*.
10	Los ríos del continente africano.

Observa que los conjuntos de los ejemplos No. 1 y No. 7 están definidos, o sea, presentados, enumerando sus elementos y que, en el resto de los ejemplos se definen enunciando propiedades, o sea, reglas que deciden si un objeto particular es o no elemento del conjunto.

Es usual denotar los conjuntos por letras mayúsculas de nuestro abecedario: *A, B, X, Y,* y cuando es necesario se representan los elementos por letras minúsculas.

Al tener en cuenta la cantidad de elementos de un conjunto existen conjuntos finitos e infinitos.

Un conjunto es finito si consta de un cierto número de elementos diferentes, es decir, si al contar los diferentes elementos del conjunto el proceso de contar puede acabar. Si no, el conjunto es infinito.

Ejemplo 1:

El conjunto *X* formado por los estudiantes de séptimo grado de tu escuela en el momento en el que lees este ejemplo es un conjunto finito.

El conjunto de los números pares es un conjunto infinito.

El conjunto *R* formado por los puntos que pertenecen a un lado del ΔABC es un conjunto infinito.

Ejemplo 2:

2.1 Analiza cuidadosamente los conjuntos siguientes y determina qué tienen en común.

a) Pájaros que pueden volar hacia atrás.
b) Los cubanos que han ido al cosmos.
c) Los números pares que son primos.

Solución:

Todos se expresan al enunciar características que deciden que pertenecen a ese conjunto y todos están formados por un solo elemento.

a) El colibrí es el único pájaro que puede volar hacia atrás.
b) Solo Arnaldo Tamayo Méndez.
c) Solo el número dos.

Los conjuntos que están formados por un solo elemento se llaman conjuntos unitarios.

2.2 ¿Cuántos elementos forman estos conjuntos?

a) Números naturales que son a la misma vez pares e impares.
b) Triángulos que son rectángulos y equiláteros.
c) Puntos geográficos cubanos, que están ubicados simultáneamente en el Cabo de San Antonio y en la Punta de Maisí.

Solución:

Es fácil darse cuenta de que estos conjuntos carecen de elementos.

Los conjuntos que no tienen elementos se llaman conjuntos vacíos. Si el conjunto es vacío, se denota por el símbolo: ϕ o de esta manera: $\{\ \}$.

Los conjuntos se expresan de diferentes formas:

Descriptiva: al especificar las propiedades más representativas de sus elementos, se hace de dos formas: con palabras y con símbolos (forma constructiva).

Ejemplo 3:

C es el conjunto formado por los números primos menores que 35 y mayores que diez.

El conjunto C se expresó con palabras y en forma constructiva por $C = \{n \in \mathbb{N}: n \text{ es primo y } 10 < n < 35\}$.

Esta forma permite expresar tanto conjuntos finitos, como infinitos.

Por extensión: al expresar cada uno de sus elementos, también se hace con palabras y con símbolos, sin ordenamiento determinado de esos elementos (notación tabular).

Ejemplo 4:

B es el conjunto formado por los números 11; 13; 17; 19; 23; 29 y 31.

El conjunto *B* se expresó con palabras y en notación tabular se expresa por: $B = \{11; 13; 17; 19; 23; 29; 31\}$.

Atención

Los elementos de un conjunto se separan por coma (,) o punto y coma (;) y se encierran entre llaves: $B = \{11, 13, 17, 19, 23, 29, 31\}$ o $B = \{17; 13; 11; 31; 23; 29; 19\}$.

Esta manera de expresar conjuntos solo es válida cuando estos son finitos.

Al graficar mediante los llamados diagramas de Venn-Euler[45] o de Venn, o sea, representar un conjunto con un área plana; quedaría expresado el conjunto *C* como muestra la figura 1.14.

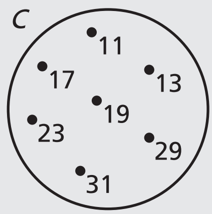


Fig. 1.14

Son muy útiles para representar cualquier tipo de conjunto al tener en cuenta la cantidad de elementos que lo forman.

En los conjuntos se pueden establecer relaciones.

Relación de pertenencia

Si un objeto *x* es elemento de un conjunto *A*, es decir, si *A* contiene a x como uno de sus elementos, se escribe $x \in A$, que se lee "*x* pertenece a *A*" o "*x* está en *A*". Si por el contrario, un objeto no es elemento de un conjunto *A*, es decir, si *A* no contiene a *x* entre sus elementos, se escribe: $x \notin A$.

Ejemplo 5:

Sea el conjunto $D = \{d \in \mathbb{N}$: d es divisor de 12$\}$

$1 \in D$, $2 \in D$, $3 \in D$, $4 \in D$, $6 \in D$, $12 \in D$, $8 \notin D$, $5 \notin D$, $7 \notin D$

[45] John Venn (1834-1923) matemático británico. Se destacó por sus investigaciones en la rama de la Lógica Matemática. Es especialmente conocido por su método de representación gráfica de proposiciones (según su cualidad). Leonhard Euler (1707-1783) matemático y físico suizo. El más brillante del siglo XVIII.

Ejemplo 6:

$A \in \overline{PQ}$, $C \notin \overline{PQ}$ (fig. 1.15)

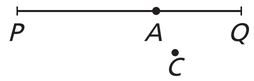


Fig. 1.15

$M \in \overline{AB}$ (fig. 1.16)
$M \in \overline{CD}$

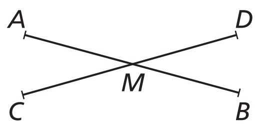


Fig. 1.16

Relación de inclusión

Si todo elemento de un conjunto K también es elemento de un conjunto M, entonces se dice que K es un subconjunto de M. Se denota esta relación por: $K \subset M$, que también se puede leer "K está contenido en M".

Si K no es subconjunto de M ($K \not\subset M$), entonces hay por lo menos un elemento de K, que no es elemento de M.

Ejemplo 7:

Sean los conjuntos:

$D = \{d \in \mathbb{N}: d$ es divisor de $12\}$ $\quad B = \{1, 2, 4, 6\}$

$F = \{1, 2, 4, 8, 9, 5\}$ $\quad E = \{71; 17\}$

Se cumple que: $B \subset D$, $B \not\subset F$, $E \not\subset F$.

Atención

Se utiliza una línea inclinada (/) que tacha el símbolo para indicar la negación del significado del símbolo.

Ejemplo 8:

$r \subset \alpha \qquad p \not\subset \alpha$ (fig. 1.17)

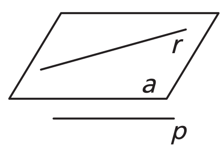


Fig. 1.17

En la teoría de conjuntos todo conjunto es subconjunto de sí mismo y el conjunto vacío se considera subconjunto de todo conjunto.

Hay que utilizar con mucho cuidado las relaciones de pertenencia e inclusión.

Relación de igualdad

Si un conjunto M es igual a un conjunto N $(M = N)$, entonces $N = M$.

Ejemplo 9:

$17 \in E$ significa que el elemento 17 es un elemento del conjunto E, pero $\{17\} \subset E$ expresa que el conjunto unitario formado por el elemento 17 es un subconjunto del conjunto E.

Observa detenidamente los conjuntos B y F, ¿hay algún elemento que coincide? ¿Cuál?

Tres elementos pertenecen a B y a F: uno, dos y cuatro. ¿Podremos decir que existe un conjunto formado por los elementos uno, dos y cuatro?

El ejemplo que acabas de analizar guarda estrecho vínculo con una de las operaciones con conjuntos.

Intersección

La intersección de dos conjuntos K y M, en símbolos $(K \cap M)$ es el conjunto de los elementos que pertenecen al conjunto K y al conjunto M simultáneamente, es decir, tanto a K como a M.

Ejemplo 10:

$B \cap F = T = \{1, 2, 4\}$ (fig. 1.18)

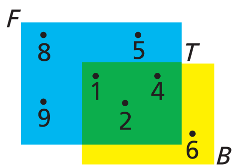


Fig. 1.18

Ejemplo 11:

$\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{M\}$ (fig. 1.19)

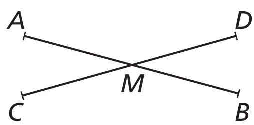


Fig. 1.19

Si observamos los elementos del conjunto E y los del conjunto B, podemos plantear que no tienen elementos comunes; estos se denominan **conjuntos disjuntos.** Puedes decir también que la intersección de estos conjuntos es el conjunto vacío. Simbólicamente $E \cap B = \phi$ expresados con los diagramas de Venn, como se muestra en la figura 1.20.

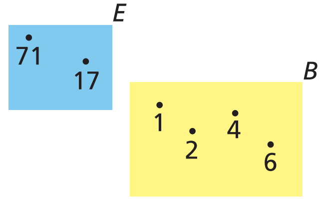


Fig. 1.20

Unión

La unión de dos conjuntos K y M, en símbolos ($K \cup M$) es el conjunto de los elementos que pertenecen a uno u otro conjunto (fig. 1.21).

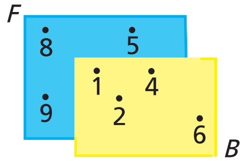


Fig. 1.21

$B \cup F = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9\}$
$F \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9\}$
$B \cup F = F \cup B$

¿Sabías que...?

El conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$) es un subconjunto del conjunto de los números fraccionarios ($\mathbb{Q}_+$), en símbolos: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}_+$.

De ahí que proposiciones como estas son correctas: $\mathbb{Q}_+ \not\subset \mathbb{N}$, $11{,}34 \notin \mathbb{N}$, $6 \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}_+ \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{N} = \mathbb{Q}_+$.

Si expresamos con dos diagramas de Venn los conjuntos numéricos que conocemos hasta el momento, tenemos lo siguiente (fig. 1.22):

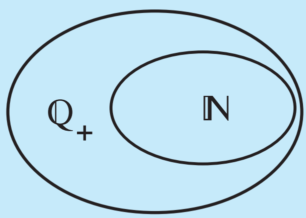


Fig. 1.22

Los números naturales son números fraccionarios, pero el conjunto numérico más restringido al que pertenecen estos números, es precisamente el conjunto de los números naturales. Por ejemplo: $5 \in \mathbb{N}$ y $5 \in \mathbb{Q}_+$ pero el conjunto numérico más restringido al que pertenece este número es al conjunto de los naturales.

1.2.1 Introducción de los números enteros negativos a partir de situaciones de la vida

¿Sabías que...?

Especialistas de un grupo espeleológico espirituano localizaron en el macizo montañoso de Guamuhaya la cavidad cársica más alta de Cuba, ubicada a 1 024 m sobre el nivel del mar; también en la serranía de esas elevaciones se encuentra la gruta más profunda del país, que según su última medición, en el 2007, está ubicada a 440 m por debajo del nivel del mar.[46]

Para medir cuán alta está "La furnia de los perros", nombre que pusieron los descubridores a tan singular cueva, y lo profunda que está la cueva Cuba-Hungría, se toma como referencia el nivel del mar.

En casos como estos es necesario considerar longitudes en sentido contrario a un nivel de referencia dado. Para establecer una diferencia entre estas longitudes se emplea un signo que permita distinguirlas. Ese es el signo menos, que ya tú conoces: **"–"**.

Luego, podemos dar a conocer tan extremos datos así: "La furnia de los perros" se ubica a 1 024 m y la más recóndita cueva cubana está a **– 440 m** (con respecto al nivel del mar) , como aparece en la figura 1.23.

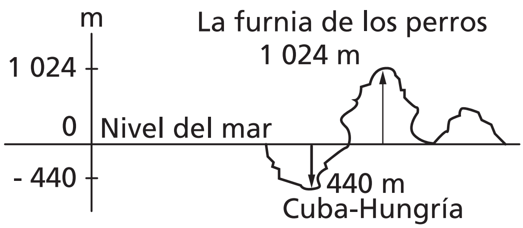


Fig. 1.23

Ejemplo 1:

El déficit comercial[47] ecuatoriano llegó a – 1 313 000 000 USD entre enero y octubre de 2010, principalmente por aumento de las importaciones de vehículos, neumáticos, refrigeradores, celulares y otros artículos.[48]

[46] Órgano de prensa *Granma*, 28 de febrero de 2012.

[47] El déficit comercial de una nación es una cantidad negativa que demuestra que en un período de tiempo determinado el país compró al exterior más de lo que vendió.

[48] Órgano de prensa *Granma*, 27 de enero de 2011.

Ejemplo 2:

De enero a diciembre de 2011, la economía española presentó un déficit de – 46 375 000 000 €, debido a unas ventas valoradas en doscientos catorce mil cuatrocientos cuarentaiocho millones de euros y unas importaciones por doscientos sesenta mil ochocientos veintitrés millones.[49]

Ejemplo 3:

La figura 1.24 muestra un mapa que nos indica la temperatura de un área geográfica europea el 2 de febrero de 2012, observa cómo se auxilian del signo menos para expresar los valores de temperatura por debajo de 0 °C.[50]

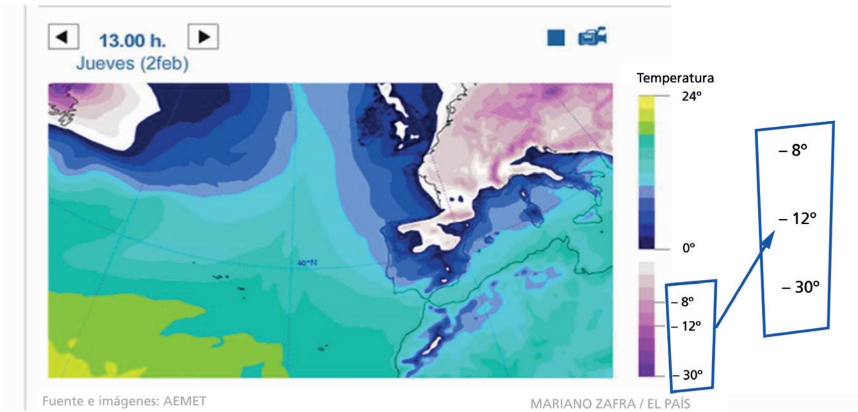


Fig. 1.24

Ejemplo 4:

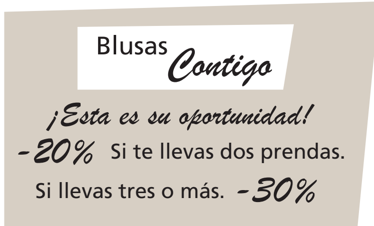
En una competencia realizada en La Rioja, España, el 23 de enero de 2012; entre otras cosas, describe el comentarista que el viento sopló en contra en ocasiones con rachas fuertes de – 4 m/s; así es difícil lograr buenas marcas, pero los atletas estuvieron ahí para intentarlo y hubo resultados interesantes.

[49] www.prensa-latina.cu, consultado el 29 de febrero de 2012.

[50] Google el 29 de febrero de 2012, disponible en: Mapa+de+la+temperatura+-de+un+área+geográfica+europea+el+2+de+febrero+de+2012.

Ejemplo 5:

En el anuncio siguiente se utiliza el signo menos para dar a conocer que el precio de una blusa tiene un descuento del 20 % o del 30 % bajo determinadas condiciones. El nivel de referencia es el precio de la blusa en un momento dado, de ahí la ventaja de asumirlo.



Ejemplo 6:

El mapamundi que muestra la figura 1.25 está dividido en una serie de bandas llamadas husos horarios. Cada huso está delimitado por meridianos. Al cruzar estos, la hora cambia hacia delante o hacia atrás según se cruce el huso en dirección este u oeste. El número que se encuentra en la parte baja de cada huso indica la variación horaria entre este y el huso 0, que es el meridiano de Greenwich. Este es el meridiano de partida, de modo que al este la variación es positiva y al oeste es negativa, o sea, cuando vemos que el número de la parte baja está precedido del signo menos. Así, un viajero que va hacia el oeste deberá atrasar su reloj una hora cada vez que cruce un huso distinto.[51]

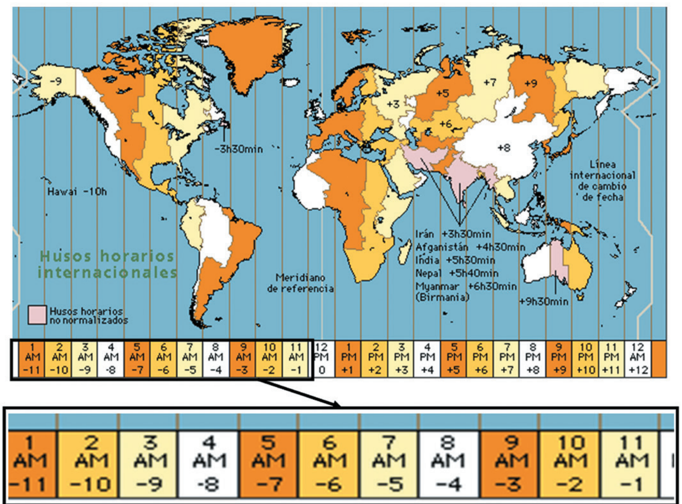


Fig. 1.25

[51] Ejemplo elaborado con la colaboración del Lic. René Alberto Cantero Pérez, especialista en Geografía.

Ejemplo 7:

En la figura 1.26 ilustramos dos móviles que parten de un mismo punto cero y que se han desplazado en sentido contrario (opuesto) por un camino recto.

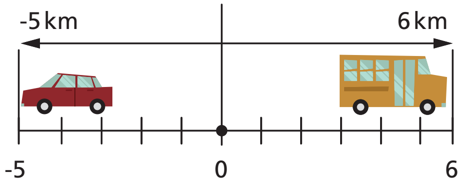


Fig. 1.26

Al cabo de cierto tiempo, el ómnibus recorrió 6 km y el automóvil 5 km, pero en **sentido opuesto** con respecto al punto de partida 0. Para diferenciar el sentido de ambos desplazamientos, también hemos empleado el signo "–", como habrás podido observar.

No olvidemos que un número precedido del signo "–", que conociste al comenzar esta unidad, fue el que hizo que Alejandro, protagonista de la historia del inicio, se hiciera muchísimas preguntas.

En el mundo existen cantidades negativas, que, junto a las positivas, de belleza el mundo visten.

De la historia

Los griegos no trabajaron con números negativos, a pesar de que los comerciantes tenían que calcular, es cierto, con deudas por una parte y con saldo activo por otra. Sin embargo, en la sociedad esclavista en que cualquier actividad productiva y cualquier forma de trabajo se trataban con desprecio, existía un profundo abismo entre la teoría y la práctica.[52]

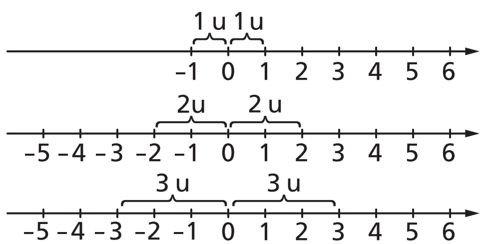
[52] Félix Muñoz Baños y otros: *Matemática 7*, Ed. Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana, 1989.

Cuenta la historia de la matemática que no fue nada fácil la prevalencia de estos *números que tienen delante un signo menos*; la matemática griega no los concebía en forma alguna; sin embargo, llegaron a ser parte fundamental de la matemática india y china en el siglo VII n. e.

Tuvo que pasar mucho tiempo para que esas cifras ocuparan su lugar de honor, para que se valorara su importancia, sobre todo en actividades vitales para la subsistencia, por ejemplo: el comercio. Comienza este reconocimiento a fines de la Edad Media, pero se impone en los siglos XV y XVI, aunque todavía con mucho cuidado; solamente a finales del siglo XVII se reconocieron como números perfectamente válidos. En otros momentos del capítulo conocerás algo más, pues queremos que hagas tuya la famosa frase de Aristóteles: "Un conocimiento profundo de las cosas no lo obtendremos, ni ahora ni nunca, mientras no las contemplemos en su crecer desde el principio".[53]

En general, sobre una línea horizontal y a partir de un punto de esta, se consideran las cantidades en un sentido como positivas y las tomadas en sentido contrario como negativas. Por convenio, se consideran positivas las cantidades tomadas hacia la derecha y negativas las tomadas hacia la izquierda, a partir de un punto dado.[54]

Veamos por el momento de qué manera se representan geométricamente dichas cantidades (fig.1.27) .



y así sucesivamente...

Fig. 1.27

[53] Luis Davidson San Juan: *Ecuaciones y matemáticos*, Ed. Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana, 2008.

[54] Consideraciones similares se tienen en cuenta también sobre una línea vertical; en este caso son positivas las cantidades tomadas hacia arriba y negativas las tomadas hacia abajo, a partir de un punto dado.

En el rayo numérico se representan los números fraccionarios.

Para representar las cantidades negativas (situadas a la izquierda de cero) tenemos que ampliar el rayo numérico a una recta que consideraremos a partir de ahora una recta numérica, como muestra la figura 1.28.

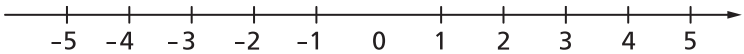


Fig. 1.28

La saeta a la derecha indica el sentido positivo. Los números naturales aparecen representados a la derecha del cero en la recta numérica. En la semirrecta opuesta (a la izquierda del cero) se representan los números negativos, que se denotan precedidos del signo "–".

Observa que para cada número natural existe un número negativo, tal que ambos están situados en la recta numérica simétricamente con respecto al cero.

Los números que cumplen esta condición se denominan *números opuestos.*

Ejemplo 8:

Por ejemplo: – 1 y 1; – 5 y 5; – 6 y 6. A estos pares de números se les da el nombre de números opuestos. Dos números enteros opuestos se diferencian solo en el signo:

El opuesto de 5 es -5.

El opuesto de -4 es 4.

El opuesto de 0 es 0 (caso particular) .

El opuesto de a es $-a$. Para todo $a \in \mathbb{Z}$.

Reflexiona

¿Cuál será el opuesto del opuesto de – 5?

Definición del conjunto de números enteros:

El conjunto formado por los números naturales y sus opuestos, constituye **el conjunto de los números enteros**, el cual se denota por $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z} = \{...; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...\}$. Es un conjunto infinito.

Los números enteros, que están situados en la recta numérica a la derecha de cero, reciben el nombre de *números enteros positivos.*

Los números enteros, que están situados en la recta numérica a la izquierda de cero, reciben el nombre de *números enteros negativos*, los cuales se denotan precedidos del signo "–".

Los números enteros positivos y el cero reciben el nombre de *números enteros no negativos* (se identifican con los números naturales) .

Los números enteros positivos pueden también escribirse precedidos del signo "+"; así, por ejemplo, puede escribirse + 3 en lugar de 3, + 27 en lugar de 27.

Los números enteros negativos y el cero reciben el nombre de *números enteros no positivos.*

¡Al menos, ya sabemos que el – 5, que vio Alejandro en la libreta, en la situación inicial del capítulo, es un número entero!

Investiga y aprende

¿Qué número entero satisface la igualdad $3 + x = 2$?

Módulo o valor absoluto de un número entero

Veamos una vez más la recta numérica (fig. 1.29) :

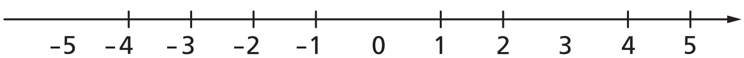


Fig. 1.29

Selecciona dos números naturales y dos enteros negativos, ¿cuál es la distancia que hay de cada número entero al cero? Imaginemos que seleccionaste 3, 5, – 2 y – 4.

La distancia de tres al cero es 3 u. La distancia de – 2 al cero es 2 u.

La distancia de cinco al cero es 5 u. La distancia de – 4 al cero es 4 u.

¿Qué significa esta distancia en cada caso?

Esta distancia se representa por un número al que llamaremos *valor absoluto o módulo.*

El valor absoluto o módulo de un número entero es la distancia desde el punto correspondiente del número en la recta numérica hasta el cero en dicha recta. Se determina de la forma siguiente:

Si el número entero es positivo, su módulo es el propio número.

Si el número entero es negativo, su módulo es el opuesto del propio número.

El módulo de cero es cero.

El valor absoluto se representa colocando el número entre dos rayas verticales: | |.

$$|a| = \begin{cases} a \text{ si } a \geq 0 \\ -a \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1:

|3| se lee "módulo de 3" o también "valor absoluto de 3" (fig. 1.30).

|– 5| se lee "módulo de – 5" o también "valor absoluto de – 5".

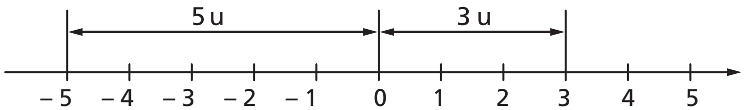


Fig. 1.30

Atención

El módulo de cualquier número entero **nunca es negativo**.

Selecciona dos números enteros que sean opuestos y halla el módulo de cada uno. Compara los resultados obtenidos.

Ejemplos: 31 212 y – 31 212; – 4 678 890 y 4 678 890; 888 y – 888.

El módulo de 31 212 es 31 212. El valor absoluto de – 31 212 es 31 212.

| – 4 678 890 | = 4 678 890 | 4 678 890 | = 4 678 890

El valor absoluto de 888 es 888. La distancia de – 888 al cero es 888.

Los módulos obtenidos del número y su opuesto son iguales.

Atención

Dos números enteros opuestos tienen **igual módulo.**

Al retomar lo estudiado sobre la teoría de conjuntos, tenemos lo siguiente (fig. 1.31) :

- El conjunto de los números naturales es el más restringido de los conjuntos estudiados.
- El conjunto de los números enteros no es denso porque entre dos números enteros consecutivos no existe otro entero, por eso en él existe el antecesor y el sucesor de un número y en su momento lo podrás hallar como mismo lo hacías en el conjunto de los números naturales.

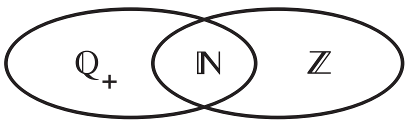


Fig. 1.31

Conjunto de los números racionales

Estudiantes del círculo de interés "Lo que me contó un número negativo" salieron a la "caza de esas cantidades", varios de los resultados llamaron su atención desde el punto de vista matemático, veamos tres de estos para entender por qué. Lee cuidadosamente cada uno:

1. ¡Al cierre!: Récord mundial de temperatura en Azizia y Vostok[55]

El récord mundial absoluto de calor lo posee la localidad libia El Azizia, que el 13 de septiembre de 1922 registró 58 °C, mientras que el de frío corresponde a – 89,2 °C en el lago antártico Vostok, el 21 de julio de 1983. La temperatura media anual más baja pertenece a la Meseta Antártica con – 56,6 °C.

Aquí las cantidades negativas – 89,2 y – 56,6 llaman la atención, sabemos que son temperaturas por debajo de 0 °C, pero esos números no son enteros.

[55] Oscar Rodríguez Díaz: *Geografía de las curiosidades*, Ed. Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana, 2007.

2. ¡Al cierre!: Cuidemos la casa común[56]

Esta es la variación neta anual de la superficie forestal 2000-2005 según la FAO, 2007.

En esta, solo aparece un número entero: el cero, en algunos techos de las barras y en el eje horizontal del gráfico, se han ubicado números negativos que no conocemos aún, todos nos indican que en ese período de tiempo ha ido disminuyendo la superficie forestal en la mayoría de las áreas geográficas (fig.1.32).

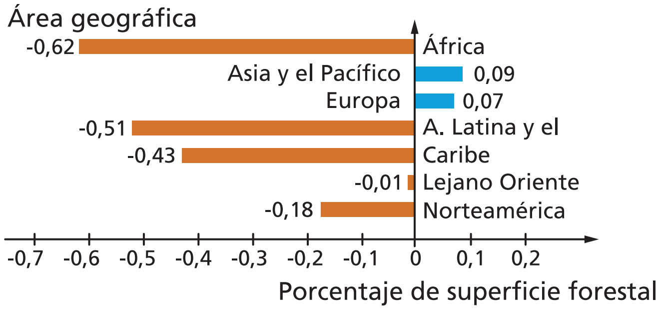


Fig. 1.32

3. ¡Al cierre!: ¡Que frío![57]

La ola de frío europea de inicios de 2012, congeló esta parte del planeta, aquí un ejemplo: en el sudeste de Polonia se registraron las temperaturas más bajas de Europa, tras alcanzar los – 38,5 °C.

Los números que llamaron la atención a los estudiantes del círculo de interés no son números enteros.

– 89,2; – 56,6; – 0,62; – 0,51; – 0,43; – 0,18; – 0,01; – 0,7; – 0,6; – 0,5; – 0,4; – 0,3; – 0,2; – 0,1 y – 38,5

Estos números no son naturales, pero tampoco fraccionarios, sin embargo, tienen la misma característica que los opuestos de los naturales que están precedidos del signo negativo y constituyen el conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$) ; pero en este caso son números fraccionarios, por tanto, son los números opuestos de los números fraccionarios, ¿qué nombre recibirán estos números?

[56] Curso Cambio Climático, Universidad para todos, Tabloide, parte 2, disponible en: reduniv.edu.cu/VIDEOCURSOS/MATERIALES CURSOS UNIVERSIDAD PARA TODOS/TABLOIDES/Cambio Climático/Texto general. Parte 2.pdf.

[57] Búsqueda en Google el 29 de febrero de 2012, disponible en: noticias.el tiempo.es/las-peores-olas-de-frio-registrados-e.

Definición del conjunto de los números racionales:

El conjunto formado por los números fraccionarios y sus opuestos, constituye el **conjunto de los números racionales,** el cual se denota por $\mathbb{Q}$.

Respuesta: ¡La base de la potencia que llamó la atención de Alejandro es un número racional!

Algunos de los números que sobresalían en las tres situaciones anteriores son números racionales, pues son opuestos de números fraccionarios:

El opuesto de 89,2 es – 89,2.

El opuesto de 0,62 es – 0,62.

El opuesto de 56,6 es – 56,6.

El opuesto de 0,51 es – 0,51.

Atención

El opuesto de *a* es – *a*, para todo $a \in \mathbb{Q}$.

Dos números racionales opuestos se diferencian solo en el signo.

El opuesto del opuesto de un número racional es el mismo número racional: $-[(-a)] = a$.

Ejercicios

(epígrafe 1.2.1)

1. En el espacio en blanco coloca el signo que corresponda ($\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$) de forma tal que obtengas proposiciones verdaderas:

a) -1 ___ $\mathbb{N}$

b) $\{1\,234\}$ ___ $\mathbb{N}$

c) $\mathbb{N}$ ___ $\mathbb{Z}$

d) $\left\{3\frac{1}{2};\ 4\frac{1}{7}\right\}$ ___ $\mathbb{Z}$

e) 0 ___ $\mathbb{Z}$

f) $\{-5; -7; 0\}$ ___ $\mathbb{Z}$

g) -100 ___ $\mathbb{N}$

h) $\left\{85; 29; 60\,006; \frac{1}{4}\right\}$ ___ $\mathbb{Q}_+$

i) $4,\overline{1}$ ___ $\mathbb{Q}_+$

j) $\left\{5; 4; \frac{1}{4}\right\}$ ___ $\mathbb{N}$

k) $\frac{1}{83}$ ___ $\mathbb{Z}$

l) $\left\{ 0;\ 5;\ \frac{1}{3} \right\}$ ___ $\mathbb{Q}_+$ m) 4 ___ $\mathbb{Z}$ n) 1,23 ___ $\mathbb{Q}_+$

ñ) 0 ___ $\mathbb{N}$ o) {– 252; – 79; – 10} ___ $\mathbb{Z}$

2. Es posible representar en un rayo numérico las cantidades siguientes. ¿Por qué?

a) Antecesor de 100 000.
b) El opuesto de cuatro.
c) Cuatrocientas setentaisiete milésimas.
d) El opuesto de 2 552.
e) El cero.
f) El opuesto de – 7.º
g) El menor número natural que sucede a $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$.
h) El valor absoluto de seis.

3. Completa la tabla 1.2 teniendo en cuenta que en la segunda columna se coloca el número racional que se identifica en cada situación y lo denominamos por *a*:

Tabla 1.2

Situación	***a***	**|*a*|**	**– (*a*)**	**– [– (*a*)]**	**Dominio numérico más restringido al que pertenece *a***
Los termómetros de mercurio solidifican a trece grados Celsius bajo cero					
Charo debe veinte pesos con cincuenta centavos					
Oscar ni perdió ni ganó					
75 años antes de nuestra era					
El cajetín escolar se coloca a diez milímetros del borde inferior derecho de la hoja de papel					

4. ¿Cuál de las igualdades siguientes es falsa con seguridad? Argumenta tu respuesta.

a) $|5| = 5$ b) $\left|-\frac{7}{11}\right| = \frac{7}{11}$ c) $|a| = -3{,}2$ d) $|b| = 4\frac{3}{13}$

5. Dado el listado de números siguiente:

$17;\ -3;\ 5\frac{1}{8};\ 0;\ -25\ 250\ 250;\ 11{,}3;\ -3\ 003;\ 5{,}34\overline{5}$

Clasifica las proposiciones siguientes en verdaderas (V) o falsas (F). De las que consideres falsas, justifica por qué lo son.
En el listado:
a) ___ Aparecen cinco números fraccionarios.
b) ___ Hay tres números naturales.
c) ___ Solo los números negativos son números enteros.
d) ___ Al hallar el opuesto a cada uno de los números negativos que aparecen, obtenemos números naturales.
e) ___ El valor absoluto de cada uno de los números enteros que aparecen en la lista, difiere de la distancia del cero en la recta numérica.

6. Anachel echó en una bolsa tarjetas marcadas con los números naturales del uno al 20 y otras 20 con los opuestos de estos. Cada vez que selecciona una tarjeta, ¿qué posibilidad tiene de extraer una que tenga un número entero?

¿Cuántos pares ordenados $(x;\ y)$ de números enteros no negativos existen tales que se cumplan las igualdades siguientes:
a) $x + y = 4$ b) $x + y = 20$ c) $x + y = n,\ n \in \mathbb{N}$?

1.2.2 Representación gráfica de los números racionales

Para representar los números enteros, se empleó el rayo numérico, los números opuestos de los números naturales se ubicaron a la izquierda de cero, construyendo una recta numérica, como la de la figura 1.33.

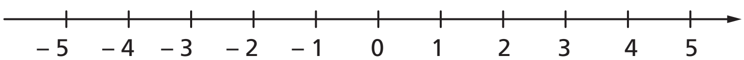


Fig. 1.33

Investiga y aprende

¿Cómo representarías los números racionales escritos como expresión decimal, fracción?

¿Será el proceso análogo para la representación de los números fraccionarios en el rayo numérico?

Intenta representar los números siguientes: -3; $-1{,}4$; $-\frac{1}{2}$.

Se cumplirá que a cada número racional le corresponde un punto en la recta numérica.

No debe existir dificultad para representar en la recta numérica números enteros, de forma general para representar números racionales primero trazamos una recta y situamos un punto al cual se le hace corresponder el cero, luego se determinan segmentos iguales a la derecha y a la izquierda del cero. El procedimiento para representar los números racionales positivos es el mismo que ya conoces, pues como tú bien sabes esos números son también números fraccionarios.

Veamos de qué manera representar en la recta numérica dos valores que llamaron la atención en la situación **¡Al cierre!** Récord mundial de temperatura en Azizia y Vostok (fig.1.34).

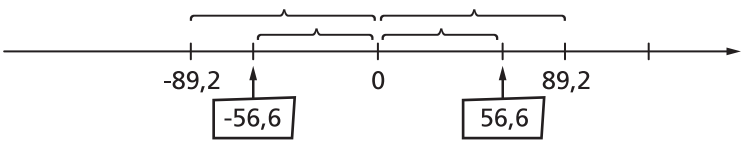


Fig. 1.34

Atención

- Los números racionales que están situados en la recta numérica a la derecha de cero, reciben el nombre de *números racionales positivos*.
- Los números racionales que están situados en la recta numérica a la izquierda de cero, reciben el nombre de *números racionales negativos*. Los cuales se denotan precedidos del signo "–".
- Los números racionales positivos y el cero reciben el nombre de *números racionales no negativos* y se identifican con los números fraccionarios.

¿Sabías que...?

Los números racionales positivos pueden también escribirse precedidos del signo "+"; así, por ejemplo, puede escribirse + 0,8 en lugar de 0,8; $+\dfrac{1}{2}$ en lugar de $\dfrac{1}{2}$, etcétera.

De la historia

La introducción del concepto de número negativo en Occidente no fue tarea fácil (fig. 1.35). Uno de los primeros occidentales que los utilizó fue el matemático milanés Girolamo Cardano en su obra Ars Magna *(1545). Cardano se refirió a estos números como numeri ficti (números inventados). Otro matemático, Michael Stifel (1487-1567) excelente algebrista e introductor de los números negativos por la misma época, los llamó números "absurdos".*[58]

Fig. 1.35

Sabes que todo número fraccionario puede ser escrito como el cociente de dos números naturales siempre que el divisor sea diferente de cero.

O sea, $\dfrac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, representa un número fraccionario.

¿Todo elemento de $\mathbb{Z}$ puede escribirse como el cociente de dos números enteros?

Sí, comencemos por los números naturales.

Todo número natural a se puede escribir de la forma: $\dfrac{a}{1}$, $a \in \mathbb{N}$ y todo número natural es un número entero.

Ejemplo 1:

a) $34 = \dfrac{34}{1}$; $\quad 0 = \dfrac{0}{1}$; $\quad 17 = \dfrac{17}{1}$

b) Todo número entero se puede escribir como el cociente de dos números enteros: $-12 = -\dfrac{24}{2} = -\dfrac{36}{3}$ ...

Ejemplo 2:

El opuesto de 5,66 y de 10,8 pueden escribirse en la forma $\frac{p}{q}$, con $q \neq 0$ y son respectivamente: $-5{,}66 = -\frac{566}{100} = -\frac{283}{50}$ y $-10{,}8 = -\frac{108}{10} = -\frac{54}{5}$.

Ejemplo 3:

1. ¿Cuál es la distancia del número $3{,}\overline{34}$ al cero?

2. Halla el valor absoluto de – 6,77.

3. ¿Qué números racionales tienen por módulo 34 567?

Solución:

1. La distancia del número $3{,}\overline{34}$ al cero es $3{,}\overline{34}$ u.

2. $|-6{,}77| = 6{,}77$.

3. Los números racionales 34 567 y – 34 567 tienen por módulo 34 567, pues dos números racionales opuestos tienen el mismo módulo.

Respuesta: Ya quedaron solucionadas todas las interrogantes de los integrantes del círculo de interés y fueron tratados otros importantes aspectos acerca del conjunto de los números racionales.

Después del análisis de estos ejemplos podemos resumir que:

- Todo número racional puede escribirse siempre en la forma: $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$.
- Los números racionales y sus opuestos se escriben como expresiones decimales, cuyo desarrollo es finito o infinito periódico.
- El valor absoluto o módulo de un número racional es la distancia desde el punto correspondiente del número en la recta numérica hasta el cero de dicha recta.
- El valor absoluto de un número racional, se determina de la forma siguiente:
  - Si el número racional es positivo, su módulo es el propio número.
  - Si el número racional es negativo, su módulo es el opuesto del propio número.
  - El módulo de cero es cero.
- El módulo de cualquier número racional *nunca* es negativo.
- Dos números racionales opuestos tienen el mismo módulo.

Atención

- El conjunto de los números fraccionarios $\mathbb{Q}_+$ es un subconjunto del conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$. En símbolos $\mathbb{Q}_+ \subset \mathbb{Q}$.
- $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ y, además: $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$, por consiguiente: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$.
- $\mathbb{N} \in \mathbb{Q}_+$.

Ejemplo 4:

a) Las relaciones conjuntistas anteriores se ilustran en el diagrama de la figura 1.36.

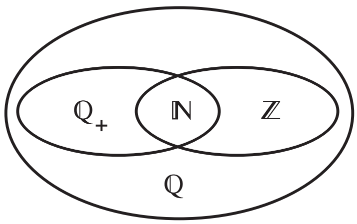


Fig. 1.36

Como puedes observar: $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q}_+ = \mathbb{N}$.

Entre dos números racionales cualesquiera, que sean diferentes, siempre se encuentran otros números racionales. Esto significa que el conjunto de los números racionales es denso, sin embargo, no cubren toda la recta numérica.

Los números racionales cumplen que:

- Se escriben de forma general como $\left(\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right)$.
- Su conjunto es denso, porque entre dos números racionales siempre es posible encontrar otro número racional.
- Existen puntos de la recta numérica a los que no les corresponde ningún número racional.
- Su módulo siempre es positivo.

Ejercicios

(epígrafe 1.2.2)

1. Representa en una recta numérica los números racionales siguientes. Fundamenta el procedimiento utilizado en cada caso. Escoge uno de los números, determina el opuesto y ubícalo en la recta.

$-3\frac{1}{4}$; $\frac{4}{3}$; 0; $-1{,}5$; 2,4; $\frac{1}{2}$; 3,2; $-0{,}4$; $-2\frac{1}{2}$

2. En la figura 1.37 aparecen representados con letras, varios puntos sobre la recta numérica. Selecciona de los números racionales siguientes los que responden a estos puntos.

0,5; 1,6; $-1{,}4$; $-\frac{3}{2}$; 2,2; $2\frac{1}{2}$; $-\frac{16}{10}$; $-2{,}4$

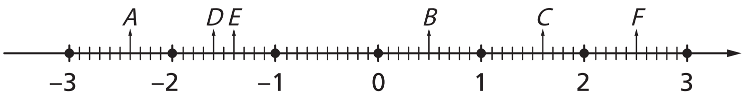


Fig. 1.37

3. Determina, apoyándote en una recta numérica, entre qué números enteros consecutivos están los números racionales siguientes.

a) 3,7 b) $-2{,}8$ c) $-\frac{3}{5}$ d) 0,49 e) $-1{,}2$

4. Cuáles de las proposiciones siguientes son falsas. Fundamenta tu respuesta.

a) $0{,}75 \in \mathbb{Q}$ b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ c) $-3 \in \mathbb{N}$

d) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}_+$ e) $-\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ f) $-0{,}3 \in \mathbb{Q}_+$

5. Halla el valor absoluto de los números racionales siguientes:

5; -5; 7,8; $-\frac{3}{4}$; 0; 3,4; $-1{,}75$

6. Sean $A = \sqrt{81} + 25 : 2$ y $B = 4^3 - 4 \cdot 7$

a) ¿Son números racionales A y B? ¿Por qué?

b) ¿Cuál de los dos es mayor?

c) Halla el opuesto de cada uno de estos.

d) ¿Cuántos números enteros hay entre A y el opuesto de B?

e) ¿Cuántos números racionales hay entre el opuesto de A y el antecesor de B?

f) ¿Cuál es la razón entre el módulo de A y el valor absoluto de B?

7. Sean $A = \{-1; 2; 33; 8; 17\}$ y $B = \{-33; -5; 0; 3\}$ conjuntos de números enteros:

a) Determina el conjunto C cuyos elementos están formados por los módulos de los números que pertenecen al conjunto B.

b) Halla la intersección de los conjuntos A y C.

8. Determina los números racionales que satisfacen las igualdades siguientes:

a) $|x| = 3$ b) $|y| = 0$ c) $|b| + 2 = 3{,}5$

d) $|z| = -4$ e)* $|a + b| = |a| + |b|$ para $a, b, x, y, z \in \mathbb{Q}$.

9. En un libro de Historia de la Humanidad, Léster encontró la figura 1.38; en este utilizan números negativos para representar los años antes de nuestra era, o sea, antes del año cero. Por ejemplo, 250 a.n.e. es expresado como – 250.

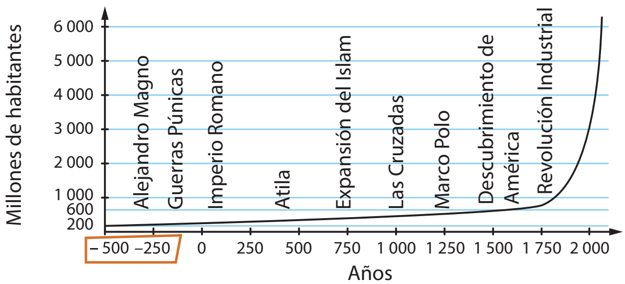


Fig. 1.38

Selecciona siete hechos de la Historia Antigua, recuerda su fecha y ubícala en una recta numérica creada por ti a partir de ese criterio.

1.2.3 Orden de los números racionales

Reflexiona

Analiza las problemáticas del acontecer mundial siguientes:

1. ¡Al cierre!: ¿Más frío o menos?[59]

En la temporada invernal cubana 2010-2011 hubo 16 frentes fríos y en la del 2009-2010, 25.

¿En cuál de las dos temporadas la cantidad de frentes fríos fue mayor?

Es muy fácil responder que hubo más frentes fríos en la del 2009-2010, pues $25 > 16$. Aquí aplicamos todo lo que conocemos de comparación en el conjunto de los números naturales.

[59] Órgano de prensa *Granma*, 30 de abril de 2011.

2. ¡Al cierre!: Ola de frío en Europa[60]

Una ola de frío azotó Europa del Este, en Serbia ha llegado a registrarse la temperatura de – 20 °C y en Rumania de – 27 °C.

¿En cuál de las dos naciones hubo más frío?

Respuesta: Hubo más frío en el país que la temperatura fue menor. Es más que evidente que hubo más frío en Rumania con sus 27 °C por debajo de 0 °C. ¿Podremos afirmar que – 27 < – 20? Ubiquemos estos dos números en la recta numérica:

En la recta numérica (fig. 1.39), – 27 está ubicado más a la izquierda que – 20, ¿será este un buen criterio para comparar números racionales? Sí, pues lo usamos para comparar números fraccionarios y estos son números racionales.

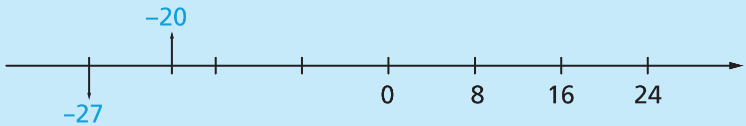


Fig. 1.39

En general, la relación de orden que ya conoces para los números fraccionarios, la haremos extensiva para los números racionales.

Atención

De dos números racionales diferentes, es menor el que está situado más a la izquierda en la recta numérica.

Ejemplo 1:

Observa la recta numérica de la figura 1.40:

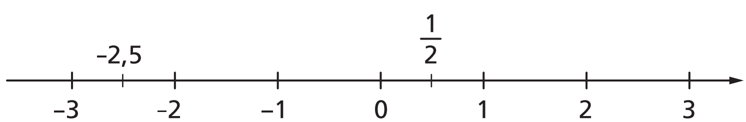


Fig. 1.40

$-3 < -2{,}5$ porque -3 está situado a la izquierda de $-2{,}5$ en la recta numérica.

Así también $-2 < -1$; $-1 < 0$; $0 < \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} < 1$; etcétera.

[60] Órgano de prensa *Granma*, 31 de enero de 2012.

En la práctica al comparar dos números racionales cualesquiera debes tener en cuenta que los números racionales no negativos se comparan como los números fraccionarios. Los números racionales negativos son menores que los números racionales no negativos, de dos números racionales negativos es menor el que tenga mayor módulo.

Ejemplo 2:

Compara los números racionales siguientes:

a) – 3 y 1,4 b) – 5 y – 2

Solución:

a) – 3 < 1,4 porque los números negativos son menores que los números no negativos.

b) – 5 < – 2 porque |– 5| > |– 2 | (5 > 2).

Atención

Para ordenar números racionales debes tener en cuenta que:

- De dos números racionales cualesquiera, es menor el que esté más a la izquierda en la recta numérica.
- De dos números racionales positivos, es mayor el que tiene mayor módulo.
- De dos números racionales negativos, es mayor, el que tiene menor módulo.
- El cero es mayor que cualquier número negativo y menor que cualquier número positivo.

Ejercicios

(epígrafe 1.2.3)

1. Ordena los números racionales siguientes en orden decreciente. Fundamenta.

$-1,75;\ -8;\ \frac{1}{10};\ 1;\ 0,5;\ -1,6$

2. En la recta numérica de la figura 1.41 se ubicaron varios números racionales representados por letras. (La distancia entre dos puntos consecutivos es igual a la unidad de medida "u" que se ha considerado). Subraya las proposiciones verdaderas.

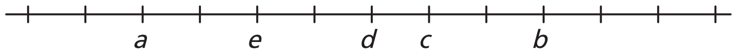


Fig. 1.41

$a > d$ $\quad a < e$ $\quad b > c$ $\quad c > e$ $\quad a < b$ $\quad d > c$

3. Completa los espacios en blanco.

a) $\frac{3}{4} < \frac{6}{5}$ porque ____.

b) El número – 100 pertenece al conjunto de los números ______________.

c) $-\frac{1}{21}$ ______ $-\frac{2}{42}$ porque tienen igual módulo.

d) El conjunto de los números fraccionarios es un subconjunto del conjunto ______________.

e) $0 > -\frac{1}{2}$ porque ____.

f) El módulo de – 2,45 es ____________.

4. Se buscan dos números racionales que sean mayores que $-\frac{1}{4}$ y menores que 0,1. Selecciona cuál de las parejas de números siguientes cumple la condición dada:

– 0,25 y 0 $\quad -\frac{1}{3}$ y 0,02 $\quad$ – 0,2 y $\frac{1}{100}$ $\quad$ – 0,15 y 0,2

5. ¿Cuál de los números racionales siguientes está más cerca de $\frac{1}{2}$? Selecciona la respuesta correcta:

$-\frac{1}{3}$ $\quad -\frac{3}{10}$ $\quad$ – 0,600 $\quad$ – 0,05

6. Escribe en notación tabular el conjunto formado por tres números negativos que sean:

a) Menores que – 0,4

b) Mayores que $\frac{3}{2}$

c) Divisibles por dos

7. Halla los valores de C y F si:

$C = 17{,}28 : 0{,}12 - 3^2$ $E = -9\ 099$ D es veinticinco milésimas

$F = \sqrt[3]{729} + \frac{7}{4} + 1$

Clasifica las proposiciones siguientes en verdaderas (V) o falsas (F). Justifica tu respuesta.

a) ___ El conjunto formado por C, E, D y F es un subconjunto del conjunto de los números racionales.

b) ___ Solo el valor de E es un número entero.

c) ___ El mayor valor es el de F.

d) ___ El menor de los valores es el de D.

e) ___ El conjunto numérico más restringido al que pertenecen los valores de D y F es el de los números fraccionarios.

f) ___ El que tiene mayor módulo es F.

g) ___ El que tiene menor valor absoluto es D.

h) ___ En la recta numérica el opuesto de F queda más cerca de cero, que el opuesto de C.

i) ___ El opuesto del mayor número de doce cifras, divisible por seis es mayor que el valor de E.

j) ___ Al sustituir el asterisco por uno, se cumple que: $-9{*}99 < -9\ 099$.

8. En la figura 1.42 aparece un envase de helado cubano, de la marca Alondra.

Observa que en él se especifica un dato sobre su conservación.

A partir de este dato, selecciona marcando con una X, a cuál de las temperaturas dadas se puede conservar este helado. Argumenta tu respuesta.

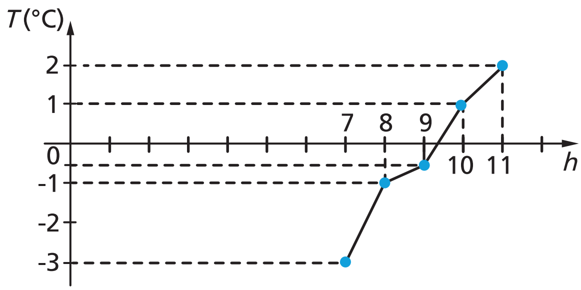
a) ___ – 21 °C b) ___ – 22 °C c) ___ – 19 °C d) ___ 0 °C

Fig. 1.42

9. ¡Insólito! Con el propósito de satisfacer las exigencias de los aparatos electrónicos del futuro se ha creado una batería de papel. La "nueva pila" tiene inigualables cualidades, por ejemplo, opera en una amplia gama de temperaturas, desde la máxima de 150 °C, hasta la mínima de – 70 °C.[61]

¿En cuántos valores enteros, de temperatura, puede funcionar la pila?

10. Como parte de una investigación sobre el estado del tiempo, en un área geográfica europea se ilustró con un gráfico (fig. 1.43) el comportamiento de la temperatura en las primeras horas de la mañana en la ciudad española de Soria, este fue el resultado de una de las mediciones:



Estudio sobre el estado del tiempo

Fig. 1.43

a) ¿Qué tipo de gráfico se utilizó? ¿Consideras que fue el más idóneo? ¿Por qué?

b) ¿A qué hora la temperatura fue mayor? ¿Cuándo fue menor? ¿Es correcto decir que a medida que avanzó el día subió la temperatura?

c) Los valores de temperatura, ¿son números racionales? Justifica tu respuesta.

d) ¿En algún momento la temperatura fue de 0 °C?

11. El 8 de febrero de 2018 el órgano de prensa *Granma* informó:

¡Enero, el más frío desde el 2011![62]

Favorecido por la ocurrencia de temperaturas máximas medias que en la mayoría de las estaciones meteorológicas de referencia estuvieron

[61] Google, 20 de marzo de 2012, disponible en: http://avatarenergía.com/la-pila-de-papel/.

[62] Órgano de prensa *Granma*, 8 de febrero de 2018.

entre las más bajas de los últimos 39 años, el pasado enero resultó el más frío reportado en el país desde el 2011 [...]
Según la información ofrecida por el Centro del Clima del Instituto de Meteorología en su más reciente Boletín de la Vigilancia del Clima, paradójicamente la temperatura mínima media mensual superó en 1,7 grados Celsius el valor habitual y no hubo ningún registro puntual de dicha variable por debajo de los seis grados, como suele suceder con frecuencia en esta etapa del calendario. En total entraron tres frentes fríos los días 1ro., 12 y 29, cifra inferior a lo esperado.
Llama la atención que pese a su condición de ser uno de los meses más secos del calendario, para las regiones central y oriental, enero del 2018 resultó el más lluvioso de 1961 a la fecha [...]

A partir de la información que se brinda, responde las preguntas siguientes:

a) ¿Qué valores están representados por números racionales?
b) Halla el opuesto de cada uno de los valores que aparecen e investiga con tu profesor de Geografía en qué espacios geográficos pueden reportarse temperaturas como estas o más bajas.
c) Investiga sobre las temperaturas más frías en tu provincia en la temporada invernal más próxima al momento en el que realizas este ejercicio y elabora un ejercicio como este. Si lo deseas únete a dos estudiantes.

12. Al atleta jamaicano Usain Bolt (1986-) le llaman el *Relámpago*, en tres oportunidades ha superado el récord establecido en cualquier época: 37,5 km/h. A continuación, algunos datos (tabla 1.3) que así lo confirman:[63]

Tabla 1.3

Velocidad (km/h)	Marca (s)	Distancia (m)	Velocidad del viento (m/s)	Fecha
37, 631	14,35	150	No aparece el dato	17.05.09
37,578	9,58	100	+ 0,9	16.08.09

[63] Revista *La Calle del Medio*, no. 41, septiembre de 2011.

37,520	19,19	200	– 0,3	20.08.09
37,306	19,30	200	– 0,9	20.08.08
37,152	9,69	100	0	16.08.08
37,113	19,40	200	+ 0,8	03.09.11
37,037	9,72	100	+ 1,7	31.05.08

a) ¿Son números racionales todas las cantidades que aparecen en la tabla? ¿Por qué?
b) ¿Qué marca obtuvo el día en que el aire estuvo más en su contra?
c) ¿Qué día el viento fue su mayor aliado?
d) ¿Aparecen en la tabla parejas de números opuestos? ¿Cuáles son? Ubícalos en la recta numérica.
e) ¿Qué gráfico utilizarías para describir la evolución del atleta al correr 100 m? Hazlo con los datos que se brindan.
f) Pregunta a tu profesor de Educación Física sobre el logro del hombre más rápido del planeta más cercano al momento en que realizas este ejercicio y enriquece la tabla.
g)* Para confirmar la velocidad, Alicia hizo lo siguiente:
1 km = 1 000 m por eso 150 m = 0,15 km
1 h = 3 600 s por eso 14,35 s = 0,003 986 111 h
0,15 km : 0,003 986 111 h = 37,630 66 ≈ 37,631 km/h
¿Estás de acuerdo con ella?

1.3 Operaciones con números racionales

Te has percatado que vivimos rodeados de números racionales. Constantemente se impone trabajar aritméticamente con estos. Hoy día, con el uso de las computadoras y otros medios auxiliares de cálculo, es posible realizar una gran cantidad de operaciones matemáticas con rapidez y absoluta confiabilidad. Utilizar estos medios de la manera más provechosa tiene su base fundamental en el conocimiento de los conceptos, leyes y procedimientos matemáticos que seamos capaces de dominar; por eso te invitamos a seguir operando con números racionales.

1.3.1 Adición de números racionales

Investiga y aprende

En la búsqueda de cantidades negativas, a partir de una tarea que indicó su profesora: Ana encontró la noticia siguiente:[64]

[…] La población de Puno (Perú) soporta una temperatura de 23 °C bajo cero, y podría descender 7 °C más.

Y María Elena:

El Lago Enriquillo, ubicado en el sur de República Dominicana, es un lugar único en el mundo y, al mismo tiempo, una rareza de la Naturaleza, pues su superficie está 40 m por debajo del nivel del mar. La isla Cabritos, dentro de este embalse, en su punto más alto se levanta 20 m por encima de la superficie.[65]

¿Podrás ayudar a Ana y a María Elena a adicionar las cantidades que aparecen en cada noticia?

Para ayudar a Ana y María Elena vamos a utilizar una gráfica similar a la de la figura 1.44 y así realizar el análisis:

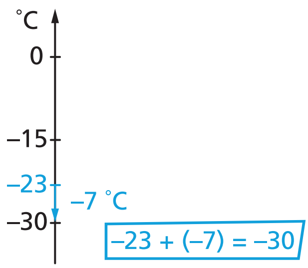


Fig. 1.44

Como puedes ver Ana tiene que adicionar dos números racionales negativos y así obtener – 30 °C.

En el caso de María Elena, utilizó también una gráfica como la que aparece en la figura 1.45 y analizó lo siguiente:

[64] Órgano de prensa *Granma*, 17 de julio de 2003.

[65] Semanario *Orbe*, del 22 al 28 de octubre de 2005.

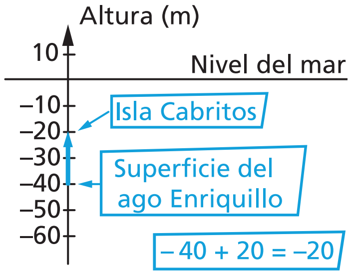


Fig. 1.45

Por lo que concluyó que la Isla Cabritos está a – 20 m (con respecto al nivel del mar) al adicionar dos números racionales de signos diferentes. ¿Tendrán razón Ana y María Elena?

Tienen razón, veamos por qué la adición de un número racional es un número racional único.

En los casos anteriores los sumandos no son números racionales de igual signo siempre por lo que para adicionar dos números racionales vamos a considerar dos casos, atendiendo a los signos de los sumandos.

Primer caso:

Los dos sumandos tienen signos iguales, ya sean positivos o negativos.

- Cuando los sumandos son números racionales positivos.

Se utiliza el mismo procedimiento de la adición de números fraccionarios.

Ejemplo 1:

El resultado de la adición de los números racionales dos y tres es cinco, porque (2 + 3 = 5); el de los números racionales $\frac{1}{5}$ y $\frac{3}{5}$ es $\frac{4}{5}$ porque $\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{4}{5}\right)$.

En ambos casos hemos aplicado el procedimiento que ya conoces de grados anteriores.

- Cuando los sumandos son números racionales negativos.

Consideremos los números racionales negativos – 2 y – 3. El resultado de la adición de estos números es – 5 y se puede obtener gráficamente como se ilustra en la figura 1.46.

En la gráfica se visualiza que:

$-2+(-3)=-5$

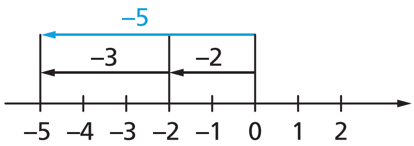


Fig. 1.46

Este mismo resultado se obtiene si aplicamos el procedimiento siguiente:
Procedimiento para adicionar dos números racionales negativos:

1. Determinar el módulo de cada sumando.
2. Se adicionan los módulos de los sumandos.
3. Al resultado se le coloca el signo "–".

Ejemplo 2:
Calcula:

a) $-2+(-3)$ b) $-3{,}2+(-4{,}3)$ c) $-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{4}\right)$

Solución:

a) $-2+(-3)=-5$

1. Se adicionan los módulos de los sumandos:
$2+3=5\ \left(|-2|\right)=2;\ \left(|-3|\right)=3$

2. Se le pone al resultado el signo "–".
$-2+(-3)=-5$

b) $-3{,}2+(-4{,}3)=-7{,}5$

Porque $3{,}2+4{,}3=7{,}5$ y se pone en el resultado el signo "–".

c) $-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{4}$ $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\right)$

Segundo caso:

Los dos sumandos tienen signos diferentes.
Retomemos el análisis gráfico como se ilustra en la figura 1.47.

a) Adición de – 3 y 5

b) Adición de 3 y – 5

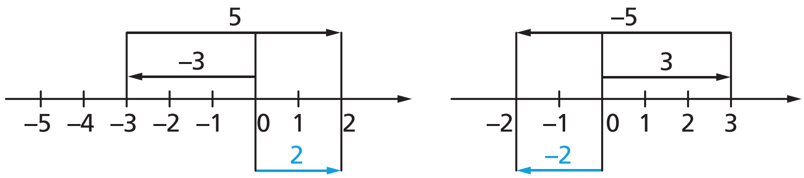


Fig. 1.47

Obtenemos $-3 + 5 = 2$

Obtenemos $3 + (-5) = -2$

Procedimiento para adicionar dos números racionales con signos diferentes:

1. Determinar el módulo de cada sumando.
2. Al sumando de mayor módulo se le sustrae el de menor módulo.
3. Al resultado se le coloca el signo del número de mayor módulo.

Ejemplo 3:

Calcula:

a) $3 + (-5)$

b) $-8 + 10$

c) $-7{,}5 + 6$

d) $\frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{6}\right)$

e) $-7{,}4 + 7{,}4$

Solución:

a) $3 + (-5) = -2$

1. Se sustraen del mayor módulo de estos números el menor:
$5 - 3 = 2$ $(|3| = 3;\ |-5| = 5)$ $(5 > 3)$
2. Se pone al resultado el signo del número que tiene mayor módulo ("–" en este caso):
$3 + (-5) = -2$

b) $-8 + 10 = 2$

$10 - 8 = 2$ porque se sustrae del mayor módulo de estos números el menor y el resultado es positivo (ya que el sumando que tiene mayor módulo es positivo).

c) $-7{,}5 + 6 = -1{,}5$

$7{,}5 - 6 = 1{,}5$ y el resultado lleva el signo del sumando de mayor módulo.

d) $\frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}$ $\qquad \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ y el resultado es positivo.

e) $-7{,}4 + 7{,}4 = 0$ $\qquad$ Pues en este caso, como los dos sumandos tienen igual módulo, la diferencia de estos es cero: $(7{,}4 - 7{,}4 = 0)$.
Esto ocurre siempre cuando los dos sumandos son números opuestos.

Atención

La suma de dos números racionales opuestos es *igual a cero*.

Investiga y aprende

El domingo Daniel llevó para su casa el registro de los depósitos de su papá (con números positivos) y extracciones (con números negativos) de la caja de la cafetería. Este fue el resultado de lo anotado en los primeros quince minutos de trabajo: $25 + (-2) + 40 + (-15) + 10 + (-5) + 3 + (-1) + 50 + (-20)$. Él quiere saber cuál fue el resultado de todas las operaciones hasta ese momento y se pregunta si es posible colocar primero los sumandos positivos y después los negativos para facilitar el cálculo, ¿podrá hacerlo?

Sabe que en la adición de números fraccionarios es posible cambiar de lugar los sumandos de una adición, así como agruparlos para obtener la suma de la manera más sencilla, por lo que piensa que su respuesta será afirmativa.

Veamos qué propiedades cumple la adición en el conjunto de los números racionales, para salir de dudas y responder la pregunta que se hizo Daniel.

Propiedades de la adición de números racionales:

- **Propiedad conmutativa** de la adición de números racionales:
  Para todo $a, b \in \mathbb{Q}$: $a + b = b + a$
- **Propiedad asociativa** de la adición de números racionales:
  Para todo $a, b, c \in \mathbb{Q}$; $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$

Ejemplo 4:

a) Observa que $-7+2=-5$ y también $2+(-7)=-5$, es decir, el orden en que se tomen los sumandos no altera la suma.

b) En la adición $-4+3+(-5)$ podemos asociar los sumandos de formas diferentes:

- $(-4+3)+(-5)=-1+(-5)=-6$
- $4+[3+(-5)]=-4+(-2)=-6$

Como puedes ver, el resultado es el mismo en ambos casos. Estas propiedades se pueden aplicar para resolver ejercicios de adición en la forma más ventajosa que consideres.

Por tanto, Daniel tiene razón y puede colocar sus anotaciones de la manera siguiente:

$25+40+10+3+50+(-2)+(-15)+(-5)+(-1)+(-20)$

$=128+(-43)=85$

Ejercicios

(epígrafe 1.3.1)

1. Calcula:

a) $-3\,291+(-78\,006)$ b) $-25+(-25)$ c) $-1\,174+(-17{,}23)$

d) $3\frac{1}{4}+\frac{3}{8}$ e) $-\frac{1}{2}+(-55)$ f) $2\,343\,771+289$

2. Efectúa:

a) $-1\,149+23\,587$ b) $-34{,}34+20$ c) $-213{,}4+25$

d) $-71{,}2+25{,}7$ e) $-\frac{5}{9}+\frac{5}{9}$ f) $6\,660+(-7{,}77)$

g) $-154+36$ h) $-12+\frac{7}{8}$ i) $25+(-17{,}2)$

j) $-1\,818+82$

3. Calcula:

a) $35{,}61+794{,}39$ b) $-\frac{1}{9}+\left(-\frac{7}{15}\right)$ c) $-\frac{1}{3}+(-0{,}28)$

d) $-2\,818+82$ e) $54{,}29+(-71{,}54)$ f) $\frac{1}{11}-\frac{1}{11}$

g) $-154+154$

4. Completa la tabla 1.4. Fundamenta tu proceder en cada caso.

Tabla 1.4

A	3	1,2	1,9	− 7	− 9,3
B		− 2		− 1,5	10
$a + b$	10				
$a + b < a$			F		
$a + b > a$			F		

Leyenda
F: falso
V: verdadero

5. Escribe la suma que se ha representado en cada recta numérica de la figura 1.48.

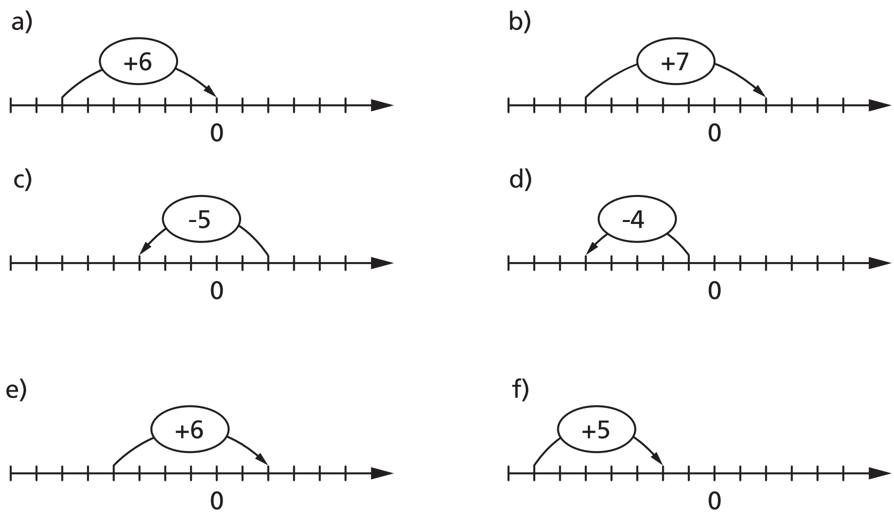


Fig. 1.48

6. Calcula:

a) $|-11 + (-17)|$ y $|-11| + |-17|$

b) $|11 + 17|$ y $|11| + |17|$

c) $|11 + (-17)|$ y $|11| + |-17|$

d) $|-11 + 17|$ y $|-11| + |17|$

6.1 Compara los resultados en cada caso.

6.2 ¿A qué conclusiones puedes llegar sobre el valor absoluto de una suma y de la suma de los valores absolutos de los sumandos?

7. Sean:

$A = -35 + 18{,}4$ $\quad B = -69 + (-76)$ $\quad C = \frac{3}{10} + \frac{1}{25}$

a) Halla los valores de *A*, *B* y *C*.

b) Todos los resultados obtenidos, ¿son números racionales? ¿Por qué?

c) ¿Es *C* un número entero? Justifica tu respuesta, halla su módulo y llámale *D*.

d) ¿Cuál es el opuesto del valor de *B*?

e) ¿Entre qué números enteros consecutivos se encuentra el valor de *A*?

f) Determina el número entero antecesor de *B* y llámale *E*.

g) ¿Cuántos números enteros hay entre *P* y *F* si $P = D + E$ y $F = -17$?

8. Efectúa:

a) $3 + (-7) + 17$

b) $121 + (-65) + (-73)$

c) $-498 + 6 + 40$

d) $-31 + 84 + (-1) + 48$

e) $-25{,}2 + 532 + 253 + (-74{,}8)$

f) $1 + (-0{,}76) + (-0{,}24)$

g) $[2 + (-3)] + (-5)$

h) $2 + [(-3) + (-5)]$

i) $\frac{4}{15} + \left(-\frac{1}{23}\right) + \frac{2}{25} + \left(-\frac{1}{69}\right)$

j) $-\frac{1}{2} + 5 + 6\frac{1}{2} + (-11)$

9. Selecciona tres números racionales de forma tal que la suma de estos coincida con uno de los sumandos.

1.3.2 Sustracción de números racionales

Reflexiona

El Panorama Económico y Social, Cuba 2010, Primera edición de la Oficina Nacional de Estadística e Información (ONEI) brindó información sobre la evolución y desarrollo de varios indicadores demográficos, económicos y sociales que reflejaron el comportamiento de nuestro país durante el año 2010.

Cuando Rocío y Amado, dos estudiantes de séptimo grado, consultaron este documento en el sitio digital: www.onei.cu, con el objetivo de enriquecer el mural "La Matemática de la Vida", tres números les llamaron la atención a ellos. En la cuarta columna de la tabla 1.5 todos los resultados son negativos.

Tabla 1.5 Indicadores demográficos. Cuba 2010

Concepto	2009	2010	Diferencia 10-09
Población residente al 31 de diciembre (U)	11 242 628	11 240 841	– 1 787
Mujeres	5 611 885	5 611 483	– 402
Hombres	5 630 743	5 629 358	– 1 385

Los estudiantes sabían que la diferencia era el resultado de una sustracción; pero en todos los casos el sustraendo y el minuendo eran números positivos, entonces por qué el resultado no era positivo. Rocío pensó en plantear la sustracción y Amado en que los valores del año 2010 son más pequeños que los del año 2009.

Con lo que conoces hasta ahora, ¿puedes tú ayudar a Rocío y a Amado a responder estas interrogantes? Claro que sí, auxiliándote del procedimiento gráfico aplicado en la adición.

Como los valores que aparecen en la tabla 1.5 son números de ocho cifras te propongo modelar una situación primero con los valores que aparecen en el ejemplo 1.

Ejemplo 1:

Calcula:

a) 7 – 3 b) 3 – 7 c) – 3 – (– 4)

Solución:

a) 7 – 3 = 4 Si analizamos el signo del sustraendo y el minuendo son iguales (positivos) y se sustrajo al de mayor módulo el de menor módulo quedando el resultado con el signo del número de mayor módulo.

b) 3 – 7 En este caso el signo del sustraendo y el minuendo son iguales (positivos); pero el minuendo es menor que el sustraendo, si nos apoyamos en la interpretación geométrica como aparece en la figura 1.49 nos percatamos que el resultado es – 4, si convertimos la sustracción en adición podemos obtener este resultado:

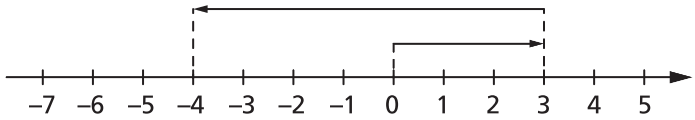


Fig. 1.49

3 – 7 = 3 + (– 7) = – 4. O sea, adicionamos al minuendo el opuesto del sustraendo.

Análogamente si le determinamos el módulo al sustraendo y al minuendo podemos sustraer al mayor el menor y mantenemos el resultado con el signo del número de mayor módulo en este caso (el sustraendo), luego 3 – 7 = – 4.

c) – 3 – (– 4) = – 3 + 4 = 1

Procedimiento para sustraer dos números racionales:

1. Transformar la sustracción en una adición.
2. Adicionar al minuendo el opuesto del sustraendo.
3. Efectuar el procedimiento de la adición de números racionales teniendo en cuenta si los signos son iguales o diferentes.

Atención

La sustracción de números racionales siempre puede realizarse.

Ejemplo 2:

¡Al cierre!: Déficit de la economía española[66]

De enero a diciembre de 2011, la economía española; presentó un déficit de – 46 375 000 000 €, debido a unas ventas valoradas en doscientos catorce mil cuatrocientos cuarentaiocho millones de euros y unas importaciones por doscientos sesenta mil ochocientos veintitrés millones.

[66] *www.prensa-latina.cu*, 29 de febrero de 2012, disponible en: www.bde.es/f/webbde/SES/Secciones/Publicaciones/PublicacionesAnuales/InformesAnuales/11/Fich/inf2011.pdf.

Si un déficit comercial está dado porque la diferencia entre exportaciones e importaciones es una cantidad negativa, vamos a verificar la información que se brinda: Observa que: 214 448 000 000 – 260 823 000 000 = – 46 375 000 000.

Atención

- En la práctica, para sustraer un número racional de otro, se procede directamente, interpretando cada caso como una adición.
- En lo adelante adición o sustracción de números racionales (independientemente de los signos que tengan sus términos) la denominaremos suma algebraica.
- La notación en forma de suma algebraica simplifica la escritura de los sumandos, pues no es necesaria la utilización de paréntesis.

Ejemplo 3:

Calcula las sumas algebraicas siguientes:

a) – 5 + 8 – 6 b) 4 – 9 + 1 – 3

Solución:

En estos casos, puedes reordenar y agrupar los sumandos en la forma que te sea más conveniente para realizar los cálculos.

a) – 5 + 8 – 6

Observa que puedes calcular:

$-5+8-6=-11+8=-3$ o $-5+8-6=3-6=-3$

Aquí puedes calcular, por ejemplo:

$4-9+1-3=5-12=-7$ o $4-9+1-3=-5-2=-7$

De la historia

Los números negativos sobresalieron después del descubrimiento de Las Américas (fig. 1.50), cuando la producción y el comercio experimentaron un impetuoso adelanto. En las oficinas de las casas de negocio los números negativos llegaron

Fig. 1.50

a ser un instrumento común y corriente de los encargados de la contabilidad de pequeños y grandes negocios.[67]

Reflexiona

Dada la información que aparece en el esquema de la figura 1.51, extraído de la revista *National Geographic* de septiembre de 1998, sobre el planeta Marte, responde:

a) ¿Cuánto asciende la temperatura máxima diurna de 1,5 m a la superficie?

b) ¿Cuánto desciende la temperatura mínima nocturna de 1,5 m a la superficie?

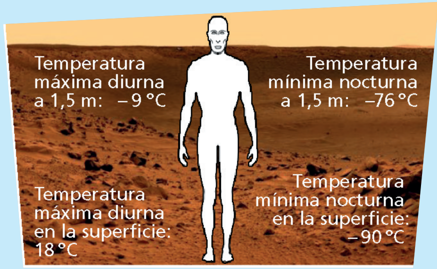


Fig. 1.51

Para responder el a), es necesario determinar qué valor de n satisface la igualdad: $-9 + n = 18$ y para resolver el b), hay que hallar el valor de m que hace que sea verdadera la igualdad: $-76 - m = -90$.

Si es n en cuanto asciende y m en lo que desciende la temperatura en cada caso:

$-9 + n = 18$, para resolverla es necesario encontrar un número racional n tal que $18 - n = -9$ luego $-n = -9 - 18$ entonces $n = 9 + 18 = 27$.

Al igual que para los números fraccionarios, en el conjunto de los números racionales se cumple que:

La sustracción de números racionales es la operación inversa de la adición.

Ejemplo 4:

Halla el valor de x que satisface la igualdad:

a) $x + 5 = 3$ b) $-6 + x = -7$ c) $5 - x = 8$

[67] Colectivo de autores: *Matemática 7*, Ed. Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana, 1979.

Solución:

a) $x + 5 = 3$

(El + 5 transpone restando, es decir, con la operación inversa).

$x = 3 - 5$

$x = -2$

Comprobación

Miembro izquierdo | Miembro derecho
$-2 + 5$ | 3
$= 3$

Comparación $3 = 3$

Luego: $x = -2$

b) $-6 + x = -7$

(El -6 transpone con la operación inversa).

$x = -7 - (-6)$

$x = -7 + 6$

$x = -1$

Comprobación

Miembro izquierdo | Miembro derecho
$-6 + (-1)$ | -7
$= -7$

Comparación $-7 = -7$

Luego: $x = -1$

c) $5 - x = 8$

(El cinco transpone con la operación inversa).

$-x = 8 - 5$

$-x = 3$

Como $-x$ (el opuesto de x) es tres, entonces $x = -3$.

Comprobación

Miembro izquierdo	Miembro derecho
$5 - (-3)$	8
$= 8$	

Comparación $8 = 8$

Luego: $x = -3$

Investiga y aprende

Halla el valor de m que hace que sea verdadera la igualdad: $-76 - m = -90$.

Ejercicios

(epígrafe 1.3.2)

1. Calcula:

a) $5 - 9$ b) $-7 - 3$ c) $-1 - 1$ d) $6 - (-9)$

e) $-4 - (-11)$ f) $4{,}6 - 6{,}4$ g) $-5 - 8{,}5$ h) $\frac{1}{10} - \frac{3}{5}$

i) $-\frac{3}{4} - \frac{1}{6}$ j) $-\frac{4}{9} - \left(-\frac{5}{12}\right)$

2. La tabla 1.6 presenta singulares accidentes geográficos:[68]

Tabla 1.6

Espacio geográfico	Punto culminante (m)	Mayor depresión (m)
América del Norte	Mc Kinley (6 194)	Valle de la Muerte (– 86)
América Central	Tajumulco (4 220)	Fondo del cráter de la Laguna de Apoyo (– 200).
América del Sur	Aconcagua (6 962)	Salinas Grandes (– 40)
África	Kilimanjaro (5 891,8)	Lago Assal (– 155)

[68] *Wikipedia*, 15 y 20 de marzo de 2012.

Espacio geográfico	Punto culminante (m)	Mayor depresión (m)
Eurasia	Everest (8 844,43)	Mar Muerto (– 416,6)
Australia	Kosciusko (2 228)	Lago Eyre (– 15)
Antártida	Macizo de Vinson (4 897)	Fosa subglacial Bentley,[69] (– 2 555)

a) ¿Qué altitud y qué profundidad está representada por un número racional?

b) ¿En qué área geográfica se ubica el mayor punto culminante?

c) Dada la información de la tabla 1.6, ¿cuál es la mayor depresión?

d) Di si la proposición siguiente es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tu respuesta:

"La media aritmética (en metro) de las alturas de los puntos culminantes americanos es 5 788".

e) Donde sea posible, halla la diferencia entre un punto ubicado en la mayor depresión y otro ubicado en el punto culminante. Imagina que son los extremos de un segmento perpendicular a la línea imaginaria que representa el nivel del mar.

f) Piensa en la manera de elaborar dos escalas para ilustrar la información de la tabla en un gráfico de barras.

3. Estos datos de aeropuertos fueron extraídos de la Wikipedia el 20 de marzo de 2012:

"El aeropuerto comercial de más altitud es el Qamdo Bangda, Tíbet, a 4 334 m sobre el nivel del mar y el de menor altitud es el de Schiphol, Holanda, a – 3,0 m con respecto al nivel del mar".

¿A qué distancia se encuentra un aeropuerto del otro?

Supón que se encuentran en la misma recta vertical con respecto al nivel del mar.

[69] Es el lugar más bajo de la Tierra no cubierto por océano, aunque sí por hielo.

4. Efectúa:

a) $-124 + 10$

b) $35 - 69{,}7$

c) $-80{,}8 - 20{,}2$

d) $5 - \dfrac{1}{11}$

e) $-\dfrac{23}{42} + 2$

f) $\dfrac{1}{14} + \dfrac{3}{10} - \dfrac{4}{35}$

g) $\dfrac{11}{12} + \dfrac{17}{30} - \dfrac{7}{36} - \dfrac{2}{15}$

h) $-1{,}75 + \dfrac{2}{9} - 15{,}25$

i) $\dfrac{6}{7} - 0{,}77 - \dfrac{13}{7} - 0{,}23$

5. Sea $P = \{25;\ -37{,}2;\ \dfrac{1}{4};\ -0{,}754;\ -127\ 734\ 066\}$

a) ¿Es P subconjunto del conjunto de los números enteros? ¿Por qué?
b) ¿Existen dos elementos del conjunto P cuya suma algebraica sea menor que – 10?
c) Escoge tres elementos del conjunto P cuya suma algebraica sea un número racional que se ubica a la izquierda de – 35 en la recta numérica.
d)* ¿Qué dos elementos del conjunto P cumplen con la condición siguiente: la suma algebraica de sus opuestos es un número que equidista de cero y de – 50,5?
e) ¿Cuál es el numeral del módulo de la diferencia entre el mayor y el menor elemento del conjunto P ?

6. Busca en cada caso el valor de la variable para que se cumpla la igualdad:

a) $x + 402 = -678$

b) $y - 91 = -35{,}35$

c) $34 + a = 0$

d) $-85 + b = -85$

e) $-\dfrac{9}{100} - d = 0{,}02$

f) $z + \dfrac{5}{6} = -\dfrac{2}{3}$

7. La suma de dos números es igual a 25. Si uno de los sumandos es – 9, calcula el otro sumando.

8. La diferencia entre dos números es igual a – 8.
a) Calcula el minuendo si el sustraendo es 15.
b) Calcula el sustraendo si el minuendo es – 2.

1.3.3 Multiplicación de números racionales

Reflexiona

Un grupo de estudiantes de séptimo grado, realizó una competencia de ortografía con el vocabulario técnico de la asignatura Matemática, que consistió en el dictado de diez palabras de diferente dificultad ortográfica. Por cada error tenían que descontarse 0,25 puntos. En la figura 1.52 aparecen la cantidad de puntos perdidos de seis de los estudiantes que participaron

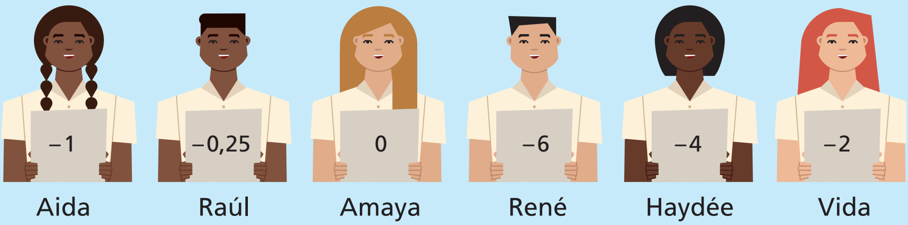


Fig. 1.52

¿Podremos afirmar que la cantidad de errores ortográficos cometidos por Aida es cuatro veces la cantidad de errores ortográficos cometidos por Raúl?

Para responder la pregunta de manera más racional es conveniente saber multiplicar números racionales.

Analicemos diferentes casos:

Ejemplo 1:

Calcula:

a) $3 \cdot 5$ b) $-3 \cdot (-5)$ c) $-4 \cdot 8$

d) $9 \cdot (-6)$ e) $-0,5 \cdot (-4)$ f) $-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$

Solución:

a) $3 \cdot 5 = 15$, en este caso el signo de los factores es igual (positivo) y el producto es positivo.

b) $-3 \cdot (-5)$, ahora también el signo de los factores es el mismo (negativo) por analogía el resultado debe ser positivo, $-3 \cdot (-5) = 15$.

Si analizamos la situación inicial podemos resolver el inciso c.

Aida perdió un punto por errores ortográficos que matemáticamente se representa por – 1, es porque adicionó – 0,25 cuatro veces, o sea, – 0,25 – 0,25 – 0,25 – 0,25 = – 1; si simplificamos la operación anterior quedaría 4 · (– 0,25) = – 1. En este caso un factor tiene signo positivo y el otro tiene el signo negativo, por tanto, son de signos diferentes y el producto es negativo.

c) $-4 \cdot 8 = -32$ d) $9 \cdot (-6) = -54$

e) $-0{,}5 \cdot (-4) = 2{,}0$ f) $-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$

Procedimiento para multiplicar dos números racionales:

1. Se multiplican sus módulos.
2. Si los factores tienen signos *iguales*, el producto es *positivo;* si los factores tienen signos *diferentes*, el producto es *negativo*.

Investiga y aprende

¿Existirá una manera más simple de resolver el ejercicio siguiente:

$-0{,}5 \cdot 2\,018 \cdot (-2)$? ¿Cuál y por qué?

Propiedades de la multiplicación de números racionales:

- **Propiedad conmutativa** de la multiplicación de números racionales:
  Para todo $a, b \in \mathbb{Q}$; $a \cdot b = b \cdot a$
- **Propiedad asociativa** de la multiplicación de números racionales:
  Para todo $a, b, c \in \mathbb{Q}$; $a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- **Propiedad distributiva** de la multiplicación con respecto a la adición de números racionales:
  Para todo $a, b, c \in \mathbb{Q}$; $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Ejemplo 2:

a) Observa que $-5 \cdot 2 = -10$ y también $2 \cdot (-5) = -10$; es decir, el orden de los factores no altera el producto. Como puedes ver, el resultado es el mismo en ambos casos.

b) En la multiplicación 2 · (– 3) · (– 4) podemos asociar los factores de formas diferentes:

[2 · (– 3)] · (– 4) = (– 6) · (– 4) = 24   o   2 · [(– 3) · (– 4)] = 2 · 12 = 24

Como puedes percibir, el resultado es el mismo en ambos casos.

Por eso la multiplicación de números racionales es: conmutativa y asociativa. Estas propiedades se pueden aplicar para resolver ejercicios de multiplicación en la forma más ventajosa que consideres.

c) En 4 · (– 0,5 + 2) puedes multiplicar el cuatro por cada sumando y luego adicionar los productos, o sea: 4 · (– 0,5 + 2) = 4 · (– 0,5) + 4 · 2 = – 2 + 8 = 6.

Observa que llegamos al mismo resultado si primero efectuamos la adición.

4 · (– 0,5 + 2) = 4 · (1,5) = 6

d) Este ejercicio (– 0,5 · 2 018 · – 2) se puede resolver de una manera más simple posible, conmutando los factores 2 018 y – 2:

– 0,5 · (– 2) · 2 018 = 1 · 2 018 = 2 018

Observa que el producto es positivo y hay dos factores negativos. Luego, para determinar el signo de un producto de varios números racionales debes tener en cuenta la cantidad de factores negativos que intervengan.

Atención

Un producto de números racionales es *positivo* si la cantidad de factores negativos es *par,* y es *negativo* si la cantidad de factores negativos es *impar.*

Ejemplo 3:

Calcula:

a) – 2 · (– 5) · 3 · (– 1)   b) – 4 · (– 3) · (– 1) · (– 2)

Solución:

a) – 2 · (– 5) · 3 · (– 1) = – 30   Observa que como intervienen 3 factores negativos, el producto es negativo.

b) – 4 · (– 3) · (– 1) · (– 2) = 24   Observa que como intervienen 4 factores negativos, el producto es positivo.

Ejercicios

(epígrafe 1.3.3)

1. Determina, sin calcular, cuáles de los productos siguientes son positivos y cuáles son negativos. Fundamenta cada caso.

a) $-17{,}17 \cdot (-22)$ b) $381 \cdot 99$

c) $-25 \cdot 1\,001$ d) $78{,}5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$

2. Calcula:

a) $-25 \cdot (-12)$ b) $3{,}24\,(-5)$ c) $-8{,}76 \cdot 0{,}01$

d) $25 \cdot \left(-\frac{5}{12}\right)$ e) $\frac{8}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)$ f) $\left(-\frac{24}{25}\right) \cdot \left(-\frac{5}{576}\right)$

g) $0 \cdot (-222)$ h) $17{,}67 \cdot (-1)$ i) $-1 \cdot 214{,}3$

j) $-1{,}75 \cdot \frac{4}{9}$

3. ¿Cuáles de las proposiciones siguientes son falsas? Fundamenta tu respuesta.

a) $2{,}5 \cdot (-2) = -5$ b) $0 \cdot (-7) = -7$ c) $-2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -4$

d) $-1 \cdot 4{,}5 = 4{,}5$ e) $0{,}5\,(-2) = -10$ f) $\frac{1}{2} \cdot (-10) = 5$

g) $-1{,}5(-5{,}6) = 9$ h) $-1\,(-28{,}5) = -28{,}5$

4. Si el producto de dos números racionales es – 24 y uno de los factores es:

a) 12 b) – 4 ¿cuál es el otro factor?

5. Indica en cada caso un número racional x de modo que se cumplan las desigualdades siguientes.

a) $-3x > 6$ b) $2x < -1$ c) $-4x < -4$

d) $5x > -20$ e) $-8x < 8$ f) $-7x > 7$

6. Determina en cada caso si a debe ser un número racional positivo o negativo, para que las relaciones siguientes sean verdaderas. Fundamenta.

a) $5a > 0$ b) $8a < 0$ c) $-3a < 0$

d) $-9a > 0$ e) $2a < a$ f) $-6a < a$

7. ¿De cuántas formas diferentes, pueden expresarse los números siguientes como producto de dos números enteros?

a) -16 b) 24 c) $-\dfrac{51}{3}$

8. Calcula:

a) $-4 \cdot (-7\,997) \cdot 1{,}25 \cdot (-22)$ b) $-\dfrac{27}{14} \cdot \dfrac{56}{9}$

c) $-24 \cdot \dfrac{7}{29} \cdot \left(-\dfrac{29}{7}\right) \cdot (-14)$ d) $4{,}4 \cdot \left(\dfrac{1}{196}\right) \cdot (-49)$

e) $3{,}3 \cdot 4 \cdot \dfrac{1}{99}$ f) $-14 \cdot \dfrac{5}{87} \cdot \left(-\dfrac{87}{5}\right) \cdot (-25)$

9. Dados: $A = -78 + 954$ y $B = -69 - 32$. Halla el producto de A con B.

10. Si multiplicamos los elementos del conjunto A, ¿cuántos números racionales diferentes puedes obtener?, si $A = \{-3; -2; 2; 7\}$.

11*. Sean $a, b \in \mathbb{Q}$. Demuestra que $|a - b| = |b - a|$, considera estas tres posibilidades:

$a > b$ $a < b$ $a = b$

12. Lee detenidamente y responde:

Sean: $A = (-2) \cdot (-0{,}54) \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 55 \cdot \left(-1\dfrac{8}{5}\right)$

$B = 2\,479\,810 \cdot (-0{,}75) \cdot \dfrac{1}{3} \cdot (-9) \cdot 4 \cdot \left(-\dfrac{1}{9}\right)$

12.1 Clasifica las proposiciones siguientes en verdaderas (V) o falsas (F). Justifica en cada caso tu respuesta.

a) ___ A y B son números negativos.

b) ___ Dos factores de A son números enteros.

c) ___ Todos los factores de B son números opuestos de números fraccionarios.

d) ___ A y B se ubican a la izquierda de cero en la recta numérica.

12.2 Selecciona la respuesta correcta marcando con una X en la línea dada. Argumenta.

12.2.1 El valor de A es:

a) ___ un número natural
b) ___ un número menor que – 56
c) ___ un número fraccionario
d) ___ – 55

12.2.2 El valor de B:

a) ___ no es un número entero
b) ___ tiene siete cifras
c) ___ no es un número racional
d) ___ es el opuesto de un número menor que cero

12.2.3 Los valores de A y B se encuentran entre los números enteros:

a) ___ 2 479 810 y – 54
b) ___ 247 981 000 y 2
c) ___ – 300 000 000 y – 53
d) ___ – 43 y – 247 981 000

13*. Sustituye en la multiplicación siguiente las letras diferentes por cifras distintas para que la operación resulte correcta.

$$-3 \cdot \text{ALAS} = -\text{VOLAR}$$

14. ¿De qué manera puedes hallar el opuesto de un número auxiliándote de la multiplicación de números racionales?

15. Determina tres factores de forma tal que el producto de estos sea igual a uno de los factores.

16. Completa la tabla 1.7.

Tabla 1.7

a	***b***	***c***	***a · b***	***a · c***	***|a| · |b|***	***a · (b + c)***
– 2,5	$\left(-\frac{8}{15}\right)$	– 25				
12	6,5	$\left(\frac{1}{4}\right)$				
$\left(\frac{7}{9}\right)$	$\left(-\frac{27}{14}\right)$	$\left(-\frac{18}{63}\right)$				

17. Comprueba que el cuadrado siguiente es mágico.[70]

a) ¿Cuál es el valor de la suma?

b) Multiplica cada número del cuadrado por – 5 y forma otro cuadrado con los resultados. Comprueba que el nuevo cuadrado es mágico

9	– 5	– 4	6
– 2	4	3	1
2	0	– 1	5
– 3	7	8	– 6

1.3.4 División de números racionales

Recuerdas la situación relacionada con la competencia de ortografía si quisiéramos saber cuántos errores ortográficos tuvo cada uno de los estudiantes que participaron en la competencia. La vía más idónea sería dividir la cantidad de puntos perdidos por cada estudiante entre – 0,25. Por ejemplo: la estudiante Haydeé perdió cuatro puntos entonces sería: – 3 : (– 0,25) ; pero, ¿cómo proceder en este caso?

Te invito a realizar un procedimiento similar al de la multiplicación.

Apoyémonos en los ejemplos siguientes:

Ejemplo 1:

Calcula:

a) 20 : 5 b) – 20 : (– 5) c) – 12 : 4

d) 12 : (– 4) e) – 1,8 : (– 2) f) $\frac{1}{3} : \left(-\frac{2}{5}\right)$

Solución:

a) 20 : 5 = 4 en este caso el signo del dividendo y el divisor son iguales (positivos) y el cociente es positivo.

[70] Cuadrado mágico: cuando la suma de los números de cada fila es igual a la suma de los números de cada columna e igual a la suma de cada diagonal.

b) – 20 : (– 5) ahora también el signo del dividendo y el divisor son iguales (negativos) por analogía el cociente debe ser positivo, – 20 : (– 5) = 4.

c) – 12 : 4 en este caso, el dividendo tiene signo negativo y el divisor tiene el signo positivo, por tanto, tienen signos diferentes, por analogía con la multiplicación entonces el cociente debe ser negativo, – 12 : 4 = – 3.

d) 12 : (– 4) = – 3 en este caso, el dividendo tiene signo positivo y el divisor tiene el signo negativo, por tanto, tienen signos diferentes, por analogía con la multiplicación entonces el cociente debe ser negativo.

e) – 1,8 : (– 2) = 0,9

f) $\frac{1}{3} : \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{5}{6}$

Procedimiento para dividir números racionales:

1. Se divide el módulo del dividendo entre el módulo del divisor.
2. Si el dividendo y el divisor tienen *signos iguales,* el cociente es *positivo;* si el dividendo y el divisor tienen *signos diferentes,* el cociente es *negativo.*

Atención

En el conjunto de los números racionales la división por cero no está definida.

Investiga y aprende

¿Qué número satisface la igualdad x : (– 7) = – 10?

Para esto hay que saber si en el conjunto de los números racionales la división es la operación inversa de la multiplicación.

Ejemplo 2:

Para calcular el cociente – 12 : 6, equivale a encontrar un número racional x, tal que $x \cdot 6 = -12$, este número es – 2; $-\frac{12}{6} = -2$, ya que $-2 \cdot 6 = -12$, por tanto, **la división de números racionales es la operación inversa de la multiplicación.**

Ejemplo 3:

Determina en cada caso el valor de la variable para que se cumpla la igualdad.

a) $2y = -10$ b) $\frac{p}{-8} = -5$ c) $-3q = -15$

Solución:

a) $2y = -10$

$y = \frac{-10}{2}$ (El dos se transpone con la operación inversa, dividiendo).

$y = -5$

Comprobación

Miembro izquierdo	Miembro derecho
$2 \cdot (-5) = -10$	-10

Comparación $-10 = -10$

Luego: $y = -5$

b) $\frac{p}{-8} = -5$

$p = -5 \cdot (-8)$ (El -8 se transpone con la operación inversa, multiplicando).

$p = 40$

Comprobación

Miembro izquierdo	Miembro derecho
$\frac{40}{-8} = -5$	-5

Comparación $-5 = -5$

Luego: $p = 40$

c) $-3q = -15$

$q = -15 : (-3)$ (El -3 se transpone con la operación inversa, dividiendo).

$q = 5$

Comprobación

Miembro izquierdo	Miembro derecho
$-3 \cdot 5 = -15$	-15

Comparación $-15 = -15$

Luego: $q = 5$

Investiga y aprende

En el buzón de la Matemática de los grupos de séptimo grado, los estudiantes se han propuesto enviar la actividad siguiente (fig. 1.53):

Para realizar este ejercicio utilizando el dato que nos dan, se impone averiguar si $-1\,234\,567\,890 : (-90)$

$= -1\,234\,567\,890 \cdot \left(\frac{1}{-90}\right)$

o lo que es lo mismo, indagar si existe el recíproco de un número racional diferente de cero y si puede interpretarse la división como la multiplicación del dividendo por el recíproco del divisor.

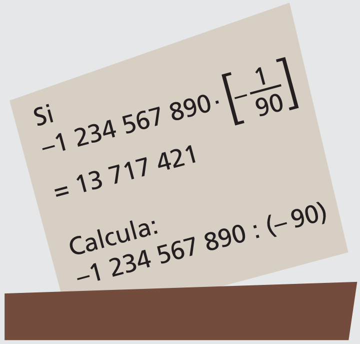


Fig. 1.53

Ejemplo 4:

En este ejemplo, el recíproco de:

a) -3 es $\frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$ b) $-\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{1}$ c) $-\frac{4}{5}$ es $-\frac{5}{4}$

- Para todo número racional *a*, diferente de cero, existe el número racional $\frac{1}{a}$ denominado *recíproco* de *a.*
- Para dividir dos números racionales, se multiplica el dividendo por el recíproco del divisor $a : b = a \cdot \frac{1}{b}$, $(a, b \in \mathbb{Q}, b \neq 0)$.

Reflexiona

¿Quién tiene la razón? Jorge y Antonio resolvieron el ejercicio: $-84 : 12 \cdot 5$

La respuesta de Jorge fue: $-84 : 12 \cdot 5 = -7 \cdot 5 = -35$, mientras Antonio respondió: $-84 : 12 \cdot 5 = -84 : 60 = -1{,}4$.

Para contestar la interrogante es necesario saber qué operación se realiza primero.

Recuerda que...

Cuando se combinan las operaciones de multiplicación y división estas se efectúan según el orden en que aparezcan.

Ejemplo 1:

Calcula:

a) $-24 : 4 \cdot 0{,}5$ b) $40 : (-2) : \frac{1}{4}$

Solución:

a) $-24 : 4 \cdot 0{,}5 = -6 \cdot 0{,}5 = -3$ b) $40 : (-2) : \frac{1}{4} = -20 : \frac{1}{4} = -80$

Ejercicios

(epígrafe 1.3.4)

1. Calcula:

a) $33{,}76 : (-24)$ b) $-264 : 0{,}3$ c) $-11\,330 : (-55)$

d) $0{,}9 : (-0{,}15)$ e) $-\frac{44}{75} : (-11)$ f) $-5{,}125 : 12{,}5$

g) $1\,717 : (-1)$ h) $0{,}791 : 9{,}99$ i) $0 : 1{,}\overline{3}$

j) $39 : 0$

2. Determina cuáles de las relaciones siguientes son falsas. Fundamenta tu respuesta.

a) $-544 : 2 = -272$ b) $-600 : (-5) < 0$ c) $-12{,}8 : (-12{,}8) = -1$

3. Para un estudio sobre el clima, han sido registrados los valores de temperatura de cinco días de enero, escogidos al azar en cinco lugares diferentes del planeta a la misma hora,[71] tal como se muestra en la tabla 1.8.

[71] Ejercicio elaborado con la colaboración del licenciado René Alberto Cantero Pérez, especialista en Geografía.

Tabla 1.8 Temperaturas en °C

Días / Lugares	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	Quinto
Toronto	– 21	– 17,3	– 20,3	– 17	– 21
Beijing	– 19	– 17	– 10	– 15,1	– 16
Bogotá	– 10	– 8	– 9,3	– 15,5	– 7
Moscú	– 25	– 24,8	– 20	– 22	– 28
Área de la Antártida	– 31	– 38	– 36	– 39	– 38

a) ¿Son enteros todos los números que aparecen en la tabla?
b) Halla la temperatura media, por lugar, en esos cinco días.
c) Ubica los resultados obtenidos en una recta numérica que simule un termómetro.
d) ¿En qué lugar la temperatura media fue mayor? ¿En cuál fue menor?

4. Resuelve las igualdades siguientes. Fundamenta.

a) $-4x = 48$ b) $12x = -60$ c) $-10b = -15$

d) $\frac{x}{5} = -6$ e) $-0,5z = -12$ f) $\frac{1}{2}a = -3$

g) $-\frac{3}{7}y = \frac{9}{49}$

5. Si el producto de dos números racionales es – 12,8 y uno de los factores es:

a) – 8 b) 0,4 calcula el otro factor.

6. El cociente de dos números racionales es – 4.

a) Calcula el dividendo si el divisor es – 15.
b) Calcula el divisor si el dividendo es 84.

7. Adiciona a ciento veinticinco diezmilésimas el cociente de seis y el recíproco de – 4.

8. Si – 346,5 : 3,3 = – 105, calcula $-346{,}5 \cdot \frac{10}{33}$

9. Calcula:

a) 515 : 5 · 3

b) $-205 : \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}$

c) – 350 · 1,6 : (– 24)

d) 2,8 : (– 4) · 0,5

e) – 155 · 0,4 : 2 · 13

f) – 0,1 · 2 : 0,5 · (– 4)

g) $42 : \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot 10 : (-24)$

h) $-36 : 4{,}5 : \left(-1\frac{1}{3}\right) \cdot 4$

i) $605 : (-0{,}605) : (-16) \cdot \frac{2}{5}$

j) – 42,4 : (– 0,8) · 10 : (– 2)

1.3.5 Operaciones combinadas con números racionales

Reflexiona

Un buzo desciende 38 m bajo el nivel del mar para observar un extraño pez de colores. Después asciende 21 m porque le parece ver un animal peligroso. Vuelve a sumergirse una cantidad de metros, que coincide con el doble de lo que ya había subido, para observar con atención los restos de un barco hundido. Finalmente sube 13 m porque ve otro pez de colores. ¿A cuántos metros bajo el nivel del mar se encuentra entonces?

Si hacemos una modelación gráfica de las acciones realizadas por el buzo como aparece en la figura 1.54, entonces puedes determinar que el buzo se encuentra a – 46 m con respecto al nivel del mar.

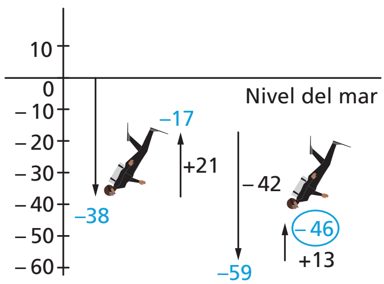


Fig. 1.54

Para determinar aritméticamente la posición final del buzo debes tener en cuenta el orden de las operaciones matemáticas.

Recuerda que...

- Primero se resuelven las operaciones encerradas entre paréntesis.
- Segundo se realizan las multiplicaciones y divisiones en el orden en que aparecen.
- Tercero se realizan las sumas algebraicas que resultan al final.

$- 38 + 21 - 2 \cdot 21 + 13$
$= - 38 + 21 - 42 + 13$
$= - 38 - 42 + 21 + 13$
$= - 80 + 34 = - 46$

Ejemplo 3:

Calcula: $- 5 - 6 : 0{,}4 \cdot (- 2) + 3$

Solución:

$= - 5 - 15 \cdot (- 2) + 3$ porque $- 6 : 0{,}4 = - 15$
$= - 5 + 30 + 3$ porque $- 15 \cdot (- 2) = 30$
$= 28$

Atención

Cuando un número negativo aparece después del símbolo de una operación matemática, el número tiene que escribirse entre paréntesis.

Ejercicios

(epígrafe 1.3.5)

1. Calcula:

a) $\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$

b) $\frac{1}{10} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right)$

c) $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \cdot 4{,}5$

d) $\frac{7}{4} : \left[\left(\frac{4}{3} - \frac{2}{8}\right) \cdot 3\right]$

e) $\left(\frac{7}{2} \cdot \frac{4}{5} - 2\right) \cdot \frac{5}{3}$

f) $\left(\frac{5}{4} - \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{9}\right) - \frac{4}{5} \cdot 2$

g) $\left(\frac{7}{8}\cdot 5-9\right)-\left(3\cdot\frac{4}{5}\right)$ h) $\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\right)\cdot 5-\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}\right)$

i) $\left[\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{5}\right)\cdot 5-\frac{1}{10}\right]\cdot\frac{3}{4}-\frac{6}{5}$ j) $8{,}3-\left(\frac{3}{2}\cdot 4\right)-\left[\frac{1}{3}:\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)\right]$

k) $16{,}1-\left[\frac{3}{2}\cdot 5-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{9}\right)\right]$ l) $\frac{14}{3}-\left[2:\left(\frac{1}{3}-1\right)+\frac{4}{5}\right]$

m)* $\frac{2}{3}+2\left(\frac{1}{4}-\sqrt{\frac{6+2^2+3\cdot 5}{64}\cdot\frac{1}{2^2}}\right)$

2. Efectúa las operaciones siguientes:

a) $-8+3\cdot 2$ b) $4{,}5\cdot 2-9$ c) $5+3:(-3)$ d) $-5\cdot(4-11)$

3. Sean:

$P=-28$ $Q=6{,}25$ $R=\frac{1}{7}$ $T=144$ $U=-0{,}\overline{3}$

3.1. ¿Es U un número racional? ¿Por qué?

3.2. Sustituye y calcula para los valores dados de las variables:

a) $P-Q\cdot T$ b) $T-P\cdot R$ c) $-T+P\cdot(-R)$

d) $-T:36+49\cdot R+P\cdot Q$ e) $P:4-Q:0{,}25-T:R$

4. Inspirados en la labor de científicos de su país,[72] adolescentes holandeses experimentan en la creación de una reserva de semillas vegetales, como una forma de proteger los principales cultivos en caso de que ocurra una catástrofe. Para esto cuentan con un terreno que debe mantenerse helado permanentemente, pues es preciso que las simientes se puedan conservar a una temperatura media[73] de – 18 °C.

Con lo que conoces de la media aritmética y el cálculo numérico en el conjunto de los números racionales, ayúdalos a completar una tabla como la 1.9.

Tabla 1.9

Mes	E	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Temperatura máxima (°C)												

[72] Semanario *Orbe* del 24 al 30 de junio de 2006.

[73] Ellos han considerado que la temperatura promedio de un terreno se calcula hallando el promedio de las temperaturas máximas de cada mes.

5.* El precio de un pantalón aumentó su décima parte. A la semana siguiente, lo rebajaron un 10 %. ¿Cuándo era más barato, antes de aumentar su precio o después de la rebaja?

6. Una finca dedicada a la siembra de cítricos tiene una extensión de 853 ha y 13 áreas. Por cada metro cuadrado se cosechan 205 toronjas para la exportación y se desechan nueve de cada ciento. ¿Cuántas unidades se comercializan?

7. Cada vez que una pelota cae al piso rebota $\frac{2}{3}$ de la altura desde la cual cayó. Si se quiere que a la cuarta vez rebote 64 cm, ¿desde qué altura debe caer la primera vez? Selecciona el resultado que corresponda.

216 cm   3 241 cm   486 cm   2 160 cm

1.4 Potenciación de exponente entero y de base un número racional

Reflexiona

Tienes en una caja dos bolas, una blanca y una negra (fig. 1.55). Si sacas una bola de una de estas y la repones y realizas esta acción dos veces más, cuántas posibles combinaciones se pueden efectuar.

Caso 1: Si sacas primero la bola blanca.   Caso 2: Si sacas primero la bola negra.

Fig. 1.55

Existen dos posibilidades de sacar primero la bola blanca o la bola negra, en cada caso existen cuatro combinaciones luego serían $2 \cdot 4 = 8$ combinaciones. Este producto se puede expresar con el mismo factor y se escribe de la manera siguiente: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$.

El factor que se repite es la base y el número de veces que se repite es el exponente de la potencia.

En general:

$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a = P$ $(a \in \mathbb{Q};\ n \in \mathbb{Z})$

a es la base, *n* es el exponente y *P* es la potencia.

El producto resultante recibe el nombre de potencia de base *a* y exponente *n*.

La operación de calcular la potencia se llama potenciación y su resultado es único.

Atención

Las potencias de exponente dos y tres reciben el nombre de **cuadrados** y **cubos** respectivamente.

Ejemplo 1:

Calcula: a) $(-3)^2$ b) 2^4 c) $\left(\frac{1}{4}\right)^3$

Solución:

a) $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$ b) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$

Observa que en cada caso se toma la base como factor tantas veces como indica el exponente.

Reflexiona

¿Siempre será positiva la potencia?

Si la base es un número racional ($a \in \mathbb{Q}$) y el exponente es un número entero positivo, qué signo tendrá la potencia.

Debemos analizar que la base sea un número racional positivo o negativo.

En el inciso a) del ejemplo uno la base es un número racional negativo y en el inciso b) la base es un número racional positivo; en los dos casos el exponente es un número entero positivo, pero observa que el exponente siempre es par, qué sucederá si el exponente es impar.

	Base positiva	Base negativa
Exponente par	$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$	$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$
Exponente impar	$4^5 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1\,024$	$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

Si el exponente es par, la potencia siempre es positiva.

Si el exponente es impar, la potencia tiene el mismo signo que la base.

Saber más

Escoge uno de los cálculos del "Deleite numérico" y compruébalo con lo que acabas de aprender de potenciación en el conjunto de los números racionales. Por ejemplo:

$(-10)^3 = (-10) \cdot (-10) \cdot (-10) = -1\,000$

$(-9)^3 - 1 - 45 \cdot 6$

$(-9)^3 = (-9) \cdot (-9) \cdot (-9) = -729$

$= -729 - 1 - 270 = -1\,000$

Deleite numérico

$(-1)^3 = 0^3 - 1 - 0 \cdot 6$

$(-2)^3 = (-1)^3 - 1 - 1 \cdot 6$

$(-3)^3 = (-2)^3 - 1 - 3 \cdot 6$

$(-4)^3 = (-3)^3 - 1 - 6 \cdot 6$

$(-5)^3 = (-4)^3 - 1 - 10 \cdot 6$

$(-6)^3 = (-5)^3 - 1 - 15 \cdot 6$

$(-7)^3 = (-6)^3 - 1 - 21 \cdot 6$

$(-8)^3 = (-7)^3 - 1 - 28 \cdot 6$

$(-9)^3 = (-8)^3 - 1 - 36 \cdot 6$

$(-10)^3 = (-9)^3 - 1 - 45 \cdot 6$

Investiga y aprende

Calcula $(-3)^2$ y -3^2. Llega a conclusiones con sus resultados.

Observa que:

$(-3)^2 \neq -3^2 \; 9 \neq -9$

En el caso de -3^2, se determina el opuesto 3^2 y por eso el resultado es -9.

Ejemplo 2:

Calcula:

a) 5^4 b) $(-1)^6$ c) $(-2)^5$ d) -8^3

Solución:

a) $5^4 = 625$ b) $(-1)^6 = 1$ c) $(-2)^5 = -32$ d) $-8^3 = -512$

Atención

Cuando la base es negativa, debe siempre escribirse entre paréntesis para evitar errores.

¿Sabías que...?

El 29 de septiembre de 2008, el proyecto de Informática distribuida GIMPS logró encontrar el mayor número primo,[74] y todo gracias a la conjunción de la eficacia de cálculo de decenas de miles de computadoras, que aplican una serie de cálculos para tratar de demostrar, uno a uno, que un número es primo o no.

Hallan el mayor número primo conocido:

$$2^{43\,112\,609} - 1$$

Ejercicios

(epígrafe 1.4)

1. Calcula: a) $(-6,2)^2$ b) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$ c) $(-3)^4$ d) $(-2)^5$

2. Indica, sin calcular en cada caso, cuáles de las potencias siguientes son positivas y cuáles son negativas. Fundamenta.

a) 5^6 b) $(-4)^{55}$ c) $(-3)^{8\,879}$ d) $0,2^7$ e) $(-1)^{100\,000}$

f) $\left(-\frac{2}{9}\right)^9$ g) $(-2,5)^7$ h) $(-0,1)^{67}$ i) $\left(-\frac{1}{4}\right)^3$

3.* Con los datos que aparecen a continuación se ha definido la operación aritmética Corazón (♥) de la manera siguiente:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\heartsuit} = (a^2 + b)(a - b^2)$$

m.c.d.$(a, b) = 1$, a, b son números enteros y $b \neq 0$.

Demuestra que:

[74] Google en: *www.taringa.net.*, 21 de marzo de 2012.

$$\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{\heartsuit} + 1\frac{1^{\heartsuit}}{2} - (0{,}2)^{\heartsuit}}{\frac{3^{\heartsuit}}{10}} = -18$$

4. Después de la primera clase de potenciación en el conjunto de los números racionales, la estudiante Yolanda elaboró el cuadro sinóptico siguiente:

Una potencia de base entera negativa es

positiva — negativa

y — y el opuesto de

un número

par — impar

siempre que el exponente sea un número

par — impar

¿Estás de acuerdo con el trabajo realizado? Si no estás de acuerdo justifica tu respuesta con ejemplos.

5.* Halla:

$(-1)^1 \cdot 1 + (-1)^2 \cdot 2 + (-1)^3 \cdot 3 + (-1)^4 \cdot 4 + (-1)^5 \cdot 5 + \ldots + (-1)^{1\,728} \cdot 1\,728.$

Si $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + 1\,727 = 746\,496$

y $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 1\,728 = 747\,360$.

1.4.1 Propiedades de las potencias

Reflexiona

¿Cómo expresarías A como una sola potencia de base tres, si $A = 3^{10} \cdot 3^8$?

Utilizando una calculadora puedes encontrar la respuesta, pero sería muy engorroso, aplicando la definición de potencia estudiada:

$$3^{10} \cdot 3^8 = \underbrace{\underbrace{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)}_{10 \text{ factores}} \cdot \underbrace{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)}_{8 \text{ factores}}}_{18 \text{ factores}}$$

Observa que estás en presencia de un producto de potencias donde las bases de cada factor son iguales y los exponentes diferentes, la potencia resultante mantuvo la base y su exponente es la suma de los exponentes de cada factor.

Luego: $3^{10} \cdot 3^{8} = 3^{10+8} = 3^{18}$

Producto de potencias de igual base

Al multiplicar potencias de igual base se obtiene una potencia de la misma base cuyo exponente es la suma de los exponentes de cada factor.

Esta propiedad puede expresarse, en general como:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Ejemplo 1:

Calcula:

a) $2^5 \cdot 2^3$

b) $(-3)^2 \cdot (-3)^4$

c) $x^2 \cdot x^3 \cdot x^4$

d) $y^8 \cdot y^{-5}$

e) $5^2 \cdot 5^{-4}$

Solución:

a) $2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3} = 2^8 = 256$

b) $(-3)^2 \cdot (-3)^4 = (-3)^{2+4} = (-3)^6 = 729$

c) $x^2 \cdot x^3 \cdot x^4 = x^{2+3+4} = x^9$

d) $y^8 \cdot y^{-5} = y^{8+(-5)} = y^3$

e) $5^2 \cdot 5^{-4} = 5^{2+(-4)} = 5^{-2}$

Reflexiona

¿Cómo calcularías $(5^2)^3$?

Realizando un procedimiento análogo al de la propiedad anterior utilizando la definición de potencia:

$(5^2)^3 = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2$

$= 5^{2+2+2}$ (por propiedad del producto de potencias de igual base)

$= 5^6$

Observa que estás en presencia de una potencia elevada a otro exponente, si buscamos la relación matemática entre estos exponentes y el exponente del resultado te percatarás que multiplicando los exponentes dados y manteniendo la base se obtiene la potencia resultante.

Luego: $(5^2)^3 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6$

Potencia de una potencia

Al calcular la potencia de una potencia, se obtiene otra potencia cuyo exponente es el *producto* de los exponentes.

Esta propiedad puede expresarse, en general como:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Ejemplo 2:

a) $(6^2)^7$ b) $\left[\left(\frac{1}{8}\right)^3\right]^4$ c) $[(9)^2]^{-5}$ d) $[(-7)^3]^8$

Solución:

a) $(6^2)^7 = 6^{14}$ b) $\left[\left(\frac{1}{8}\right)^3\right]^4 = \left(\frac{1}{8}\right)^{12}$ c) $[(9)^2]^{-5} = 9^{-10}$ d) $[(-7)^3]^8 = (-7)^{24}$

Reflexiona

Calcula el valor de $C : D$ si $C = 2^{15}$ y $D = 2^{10}$.

Utiliza las propiedades de las potencias estudiadas y la definición de potencia.

$$\frac{2^{15}}{2^{10}} = \frac{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}} = 2^5$$

Observa que estás en presencia de una división de potencias donde las bases del dividendo y el divisor son iguales y los exponentes diferentes y la potencia resultante mantuvo la base y su exponente es la diferencia del exponente del dividendo y el divisor.

Luego: $2^{15} : 2^{10} = 2^{15-10} = 2^5$

Cociente de potencias de igual base

Al dividir potencias de igual base, se obtiene una potencia de la misma base, cuyo exponente es la *diferencia* de los exponentes del dividendo y el divisor.

Esta propiedad puede expresarse, en general como:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ con } a \neq 0$$

Ejemplo 3:

Calcula:

a) $\frac{(-2)^6}{(-2)^2}$ b) $\frac{3^4}{3^3}$ c) $\frac{(-6)^{-3}}{(-6)^2}$

d) $\frac{4^{-9}}{4^{-13}}$ e) $7^{-5} : 7^{-5}$

Solución:

a) $\frac{(-2)^6}{(-2)^2} = (-2)^{6-2} = (-2)^4 = 16$ b) $\frac{3^4}{3^3} = 3^{4-3} = 3^1 = 3$

c) $\frac{(-6)^{-3}}{(-6)^2} = (-6)^{-3-2} = (-6)^{-5}$ d) $\frac{4^{-9}}{4^{-13}} = 4^{-9-(-13)} = 4^{-9+13} = 4^4 = 256$

e) $7^{-5} : 7^{-5} = 7^{-5-(-5)} = 7^{-5+5} = 7^0$

Reflexiona

En el ejemplo uno inciso e) $5^2 \cdot 5^{-4} = 5^{2+(-4)} = 5^{-2}$,

ejemplo dos inciso c) $[(9)^2]^{-5} = 9^{-10}$, ejemplo tres inciso c) $\frac{(-6)^{-3}}{(-6)^2} = (-6)^{-3-2} = (-6)^{-5}$,

los exponentes de la potencia resultante son negativos y en el caso del ejemplo 3 inciso e) $7^{-5} : 7^{-5} = 7^{-5-(-5)} = 7^{-5+5} = 7^0$ el exponente es cero.

¿Cómo calcular la potencia resultante en cada caso?

Apliquemos las propiedades estudiadas para resolver los ejercicios siguientes:

a) $\dfrac{(-2)^{142}}{(-2)^{144}}$ b) $(-6,1)^{20} : (-6,1)^{20}$

Solución:

a) $\dfrac{(-2)^{142}}{(-2)^{144}} = \dfrac{(-2)^{142}}{(-2)^{142} \cdot (-2)^{2}} = \dfrac{1}{(-2)^{2}}$ Efectuando la simplificación correspondiente.

Entonces $(-2)^{-2} = \dfrac{1}{(-2)^{2}}$, ¿siempre será así?

b) $(-6,1)^{20} : (-6,1)^{20} = (-6,1)^{0}$. Efectuando la propiedad de cociente de potencias de igual base, pero si simplificas, el resultado es uno, entonces $(-6,1)^{0} = 1$, ¿siempre será así? Los dos resultados son correctos.

- Todo número racional, diferente de cero, elevado al exponente cero, es igual a uno.
  $a^{0} = 1$ $(a \in \mathbb{Q};\ a \neq 0)$
- Todo número racional, diferente de cero, elevado a un exponente negativo, es igual a una fracción cuyo numerador es 1 y su denominador es el mismo número racional con el exponente positivo.
  $a^{-k} = \dfrac{1}{a^{k}}$ $(a \in \mathbb{Q};\ a \neq 0;\ k \in \mathbb{N})$

Con lo anterior se ha extendido la definición de potencia de exponente natural a exponente entero, por tanto, ahora puedes resolver las potencias que quedaron expresadas en los ejemplos anteriores.

e) $5^{2} \cdot 5^{-4} = 5^{2+(-4)} = 5^{-2} = \dfrac{1}{5^{2}} = \dfrac{1}{25}$ c) $\left[(9)^{2}\right]^{-5} = 9^{-10} = \dfrac{1}{9^{10}}$

c) $\dfrac{(-6)^{-3}}{(-6)^{2}} = (-6)^{-3-2} = (-6)^{-5} = \dfrac{1}{(-6)^{5}}$ e) $7^{-5} : 7^{-5} = 7^{-5-(-5)} = 7^{-5+5} = 7^{0} = 1$

Crees que puedas calcular el valor de la expresión que Alejandro encontró en una de las libretas de su hermano: $V_c = 10\,000(1 + 0{,}081\,6)^{-5}$.

Ya sabemos que en el factor, que no es el 10 000, la base es el número racional 1,081 6 y el exponente es el número negativo – 5, si te encuentras ante una situación como esta y no dispusieras de las tablas que se utilizan en la Matemática Financiera para esto y tampoco tuvieses una calculadora científica, ya cuentas con un recurso matemático para hallar cuánto es $1{,}081\,6^{-5}$, pues $1{,}081\,6^{-5} = \frac{1}{1{,}081\,6^{5}}$.

Reflexiona

En el cartel de la figura 1.56 aparece una misión que se plantea a los estudiantes de séptimo grado en una de las secciones del boletín El piropo matemático, promotor del interés por la asignatura.

El piropo matemático

PUBLICACIÓN MENSUAL A FAVOR DE LA MATEMÁTICA

La misión

El número $9^{924} \cdot 5^{917}$ tiene 920 cifras.

Demuéstralo.

Sugerencia: Escríbelo como uno de la forma $a \cdot 10^{n}$, $a, n \in \mathbb{N}$

Fig. 1.56

Intentemos resolverlo, asumamos la sugerencia, que es escribirlo como un producto en el que uno de los factores es una potencia de diez.

Al menos, tenemos en las bases de las potencias dos y cinco, cuyo producto es diez. Vamos a escribir el factor 2^{924} como un producto en el que aparezca la potencia 2^{917}, queda así: $2^{917} \cdot 2^{7}$, entonces $2^{924} \cdot 5^{917} = 2^{917} \cdot 2^{7} \cdot 5^{917} = 2^{917} \cdot 5^{917} \cdot 2^{7}$ al aplicar la conmutatividad de la multiplicación.

Al asociar los dos primeros factores, nos encontramos con un producto de potencias en las que el exponente es el mismo, hasta ahora no tenemos una propiedad que nos permita trabajar con productos con estas características, manteniendo el procedimiento aplicado en el resto de las propiedades podemos encontrar la solución, por ejemplo:

$(x \cdot y)^{3} = (x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \cdot (x \cdot y)$ (por definición de potencia)

$= (x \cdot x \cdot x) \cdot (y \cdot y \cdot y)$ (aplicando propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación)

$= x^{3} y^{3}$ (por definición de potencia)

De igual manera si es necesario $x^{3} \cdot y^{3} = (x \cdot y)^{3}$.

Potencia de un producto

Para elevar un producto indicado a un exponente, se eleva cada factor a dicho exponente.

Esta propiedad puede expresarse, en general como: $(a \cdot b)^{n} = a^{n} \cdot b^{n}$.

Y es precisamente esa propiedad la que necesitamos para cumplir la misión que aparece en el Piropo Matemático:

Entonces $2^{924} \cdot 5^{917} = 2^{917} \cdot 5^{917} \cdot 2^7 = 10^{917} \cdot 2^7 = 128 \cdot 10^{917}$ por lo que es fácil concluir que tiene 920 cifras, 917 del factor 10^{917} y tres del factor 128.

Reflexiona

Al llegar al aula los estudiantes de un grupo de séptimo grado, encontraron en la pizarra lo que aparece en la figura 1.57:

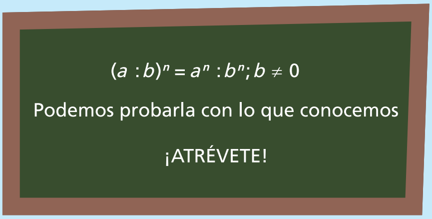


Fig. 1.57

Tú también puedes atreverte y demostrar que esa igualdad se cumple.

Escribe la base de la potencia que aparece en el miembro izquierdo de la igualdad como el producto de dos números racionales.

Obtienes $\left(a \cdot \frac{1}{b}\right)^n = a^n \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^n$ al aplicar la **propiedad potencia de un producto.**

$$\left(\frac{1}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{b}}_{n \text{ veces}} = \frac{1^n}{b^n}$$ por definición de potencia y de producto de fracciones.

$$a^n \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^n = a^n \cdot \frac{1}{b^n}$$ por definición de potencia.

$$a^n \cdot \frac{1}{b^n} = a^n : b^n$$ por propiedad de la división de números racionales

De ahí que: $(a : b)^n = a^n : b^n$; $b \neq 0$ igualdad que había que probar.

Potencia de un cociente

Para elevar un cociente indicado a un exponente, se elevan el dividendo y el divisor a dicho exponente.

Esta propiedad puede expresarse, en general como: $(a : b)^n = a^n : b^n$; $b \neq 0$.

Ejemplo 4:

Calcula:

a) $(3m)^2$ b) $\left(\dfrac{2}{b}\right)^3$; con $b \neq 0$ c) $\left(\dfrac{a^{-2} \cdot b}{c}\right)^4$; con $(a, c) \neq 0$

Solución:

a) $(3m)^2 = 3^2 \cdot m^2 = 9m^2$

b) $\left(\dfrac{2}{b}\right)^3 = \dfrac{2^3}{b^3} = \dfrac{8}{b^3}$; $b \neq 0$

c) $\left(\dfrac{a^{-2} \cdot b}{c}\right)^4 = \dfrac{(a^{-2} \cdot b)^4}{c^4} = \dfrac{a^{-8} \cdot b^4}{c^4} = \dfrac{b^4}{a^8c^4}$; $(a, c) \neq 0$

En la potenciación de exponente entero y de base un número racional se cumple que:

- Una potencia de base positiva siempre es positiva.
- Una potencia de base negativa, es positiva si el exponente es par y negativa si el exponente es impar.
- Las igualdades siguientes son propiedades de las potencias

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(a : b)^n = a^n : b^n$; $(b \neq 0)$
$a^m : a^n = a^{m-n}$; $a \neq 0$	$a^0 = 1$ $(a \in \mathbb{Q}; a \neq 0)$
	$a^{-k} = \dfrac{1}{a^k}$ $(a \in \mathbb{Q}; a \neq 0; k \in \mathbb{N})$

De la historia

En el libro Los Elementos, *el famosísimo Euclides (fig. 1.58) recopila gran parte del saber matemático de su época. La colosal obra está formada por trece volúmenes, los libros* VII, VIII *y* IX *son de Aritmética, en uno de estos aparece esta propiedad de la potencia que ya conoces:*[75]

$a^{n+m} = a^n \cdot a^m$.

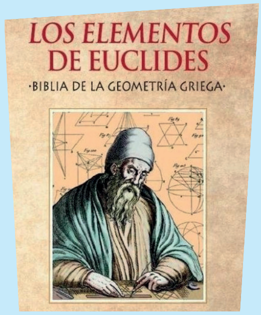


Fig. 1.58

Observa que junto al cálculo con números racionales las propiedades de las potencias te permiten dar solución a las más diversas situaciones de la vida práctica, incluso a partir de ahora podrás resolver ecuaciones en las que la variable aparece en el exponente de una potencia, por ejemplo: $2^x = (2^2)^3$ al aplicar en el miembro derecho; la propiedad **potencia de una potencia**, se obtiene que $2^x = 2^6$, puesto que el resultado de la potenciación es único y las bases de las potencias son iguales, para que la igualdad se cumpla solo hace falta que sean iguales los exponentes, de ahí que $x = 6$.

Ejercicios

(epígrafe 1.4.1)

1. Calcula:

a) $(-1{,}2\overline{7})^0$ b) $(-8)^{-1}$ c) $(0{,}125)^{-3}$ d) $98 : 7^2 + 94^0 - 2 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}$

2. Calcula aplicando las propiedades de la potencia que más convengan en cada caso:

a) $4^{2\,073} \cdot 4^{-2\,069}$ b) $(-6{,}8)^{25} : (-6{,}8)^{23}$ c) $(2^5)^{-2}$

d) $(-0{,}062\,5)^{-24} \cdot 16^{-24}$ e) $30{,}24^2 : (-0{,}36)^2$ f) $(a^{-19})^4 \cdot a^{76}$

g) $\dfrac{2^8 \cdot 2^3}{8^4}$ h) $(a^2)^3 \cdot a^4$ i) $\dfrac{x^4 y^3}{x^2 y}$

j) $(8 \cdot 10^{-1})^2$ k) $5x^{-2}y^4z^3 \cdot \dfrac{x^2}{10y^2 z^4}$

[75] Google 12 de octubre de 2020, es.m.wikipedia.org/wiki/Elementos de Euclides.

3. Lee detenidamente y responde:

3.1 Clasifica las proposiciones siguientes en verdaderas (V) o falsas (F). Justifica en cada caso tu respuesta.

a) ___ $-a^n = (-a)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Q}$ b) ___ $a^x + a^y = a^{x+y}$, $a \in \mathbb{Q}$, $x, y \in \mathbb{Z}$

c) ___ $7^2 \cdot 7^3 = 49^6$ d) ___ $1^c = 1$, $c \in \mathbb{Z}$

3.2 Selecciona la respuesta correcta marcando con una X en la línea dada. Argumenta.

3.2.1 Si $A = m^{12} \cdot m^{18} : m^{27}$ entonces:

a) ___ $A = m^{-3}$ b) ___ $A = m^{21}$ c) ___ $A = m^3$ d) ___ $A = m^0$

3.2.2 Si r satisface la igualdad $\dfrac{\frac{1}{5}\,(r^2)^{-5}}{r^{-9} : (-7)} = -\dfrac{14}{25}$, entonces:

a) ___ $r = -2{,}5$ b) ___ $r = -0{,}4$ c) ___ $r = 2{,}5$ d) ___ $r = 0{,}4$

3.2.3 $P = \dfrac{35^{300} \cdot 7^{-198}}{25^{151} \cdot 7^{100}}$ por eso:

a) ___ $P = 1\,225$ b) ___ $P = 196$ c) ___ $P = 1{,}96$ d) ___ $P = 19{,}6$

3.2.4 Sean los números $X = 3^{40}$, $Y = 5^{30}$ y $T = 7^{20}$, entonces se cumple que:

a) ___ $X < Y < T$ b) ___ $T < X < Y$ c) ___ $Y < X < T$ d) ___ $T < Y < X$

4.* Si $(-m)^n = 64$, halla $P = (-m)^{4n} - 5$ con $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$.

1.5 Notación científica o exponencial

Reflexiona

Gema, la profesora de Matemática, quiso una vez más hacer reflexionar a los estudiantes acerca de la importancia de una correcta higiene personal y colectiva, por esto leyó a sus estudiantes fragmentos de un singular relato:[76]

Examinemos a modo de ejemplo la rapidez con que se multiplica la mosca doméstica de todos conocida. Aceptemos que cada mosca deposita 120 huevecillos

[76] Google, *es.wikipedia.org/wiki/Musca domestica*, 31 de octubre de 2020.

y que lamentablemente están dadas todas las condiciones para que durante el verano tengan tiempo de aparecer siete generaciones, en cada una de las cuales la mitad son machos y la mitad, hembras. Supongamos que la mosca deposita por primera vez los huevos el 15 de abril y que cada hembra, en 20 días, crece lo suficiente para depositar ella misma nuevos huevos. En ese caso, la reproducción se desarrollará en la forma siguiente:

A comienzo de mayo nacen 120 moscas. El 5 de mayo, 60 moscas depositan 120 huevos; a finales de mayo aparecen 60 · 120 = 7 200 moscas.

El 25 de mayo cada una de las 3 600 hembras, deposita 120 huevos, por eso en la primera quincena de junio nacen 3 600 · 120 = 432 000 moscas.

El 14 de junio las 216 000 moscas depositan 120 huevos cada una, a principio de julio habrá 216 000 · 120 = 25 920 000 moscas.

Gema propuso a sus estudiantes calcular hasta concluir que en los primeros días de septiembre nacen 355 923 200 000 000 moscas. ¡Compruébalo tú mismo!

Todos quedaron convencidos de lo imprescindible que es la limpieza y van a confeccionar un relato parecido a este con la multiplicación del indeseable *Aedes Aegypti*, para mostrarla en la próxima audiencia sanitaria, pero muchos le comentaron a su profesora si no existía la posibilidad de operar con números más pequeños, pues las multiplicaciones se hicieron muy difíciles y hubo momentos en los que se equivocaron con tantos ceros; ella respondió que sí, veamos.

Las potencias de base diez y exponente racional debes haber visto que se utilizan para expresar cantidades muy grandes o muy pequeñas, por ejemplo: distancia de la Tierra al Sol $1,49 \cdot 10^{11}$ m, masa de la Luna $7,34 \cdot 10^{22}$ kg, cantidad de moléculas de agua en 18 g de agua $6,023 \cdot 10^{23}$ moléculas. Esta manera de expresar los números "en una forma breve" es llamada **notación científica o exponencial.**

Los números siguientes se han escrito en notación decimal y en notación científica:

Notación decimal		Notación científica
625,3	⟷	$6,253 \cdot 10^{2}$
0,000 387	⟷	$3,87 \cdot 10^{-4}$
981 000	⟷	$9,81 \cdot 10^{5}$

Observa que en notación científica el número se expresa como el producto de una potencia de diez y un número mayor o igual que uno y menor que diez.

Ejemplo 1:
Expresa en notación científica los números siguientes:

a) 234 000 b) 0,000 002 6

Solución:

a) $234\,000 = 2{,}34 \cdot 10^{5}$ b) $0{,}000\,002\,6 = 2{,}6 \cdot 10^{-6}$

La coma se corre 5 lugares a la izquierda. La coma se corre 6 lugares a la derecha.

c) Los virus son diminutos, miden aproximadamente 0, 000 002 5 cm, 50 000 rinovirus, los que provocan los catarros, cabrían en un poquitín más que un milímetro.[77] Verifica la información que aparece subrayada y ¡piensa en esta la próxima vez que estornudes sin taparte la boca!

Solución:
Para saber qué longitud se obtendría si ese ejército de rinovirus se dispusiera en línea recta, uno junto al otro, basta con multiplicar la longitud de uno de estos por 50 000. Conviene escribir el tamaño de un virus en notación exponencial.

$0{,}000\,002\,5 = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ y hacer lo mismo con la cantidad de rinovirus, $50\,000 = 5 \cdot 104$, esto hará los cálculos más sencillos: $2{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{4} = 12{,}5 \cdot 10^{-2}$ al aplicar las propiedades de la multiplicación y las de la potencia. La longitud es de $12{,}5 \cdot 10^{-2}$ cm, al expresar esa longitud en milímetros obtenemos 1,25 mm y se corrobora lo pedido.

Procedimiento para expresar un número de notación decimal en notación científica:

Se corre la coma decimal (hacia la izquierda o hacia la derecha) todos los lugares que se necesitan para obtener un número mayor o igual que uno y menor que diez y se multiplica ese número por una potencia de diez.

[77] *¿Sabía que…?*, Ed. Espasa Calpe, Madrid, España, 2007.

- El módulo del exponente de esa potencia es el número de lugares que se ha corrido la coma.
- El signo de ese exponente será *positivo*, si se corrió la coma hacia la izquierda, y será *negativo*, si se corrió hacia la derecha.

Ejemplo 2:

Escribe en notación decimal los números siguientes que están expresados en notación científica:

a) $5{,}67 \cdot 10^4$ b) $2{,}3 \cdot 10^{-5}$

Solución:

a) $5{,}67 \cdot 10^4 = 56\ 700$

Corro la coma cuatro lugares a la derecha.

b) $2{,}3 \cdot 10^{-5} = 0{,}\ 000\ 023$

Corro la coma cinco lugares a la izquierda.

Procedimiento para expresar un número en notación científica en notación decimal:

Para expresar en notación decimal un número dado en notación científica:

Sencillamente se efectúa el producto que aparece indicado en dicha notación científica, el producto del número por la potencia de diez.

¿Cómo? En el número se corre la coma decimal, la cantidad de lugares que indica el módulo del exponente de la potencia de diez: hacia la derecha si el signo de este es positivo y hacia la izquierda si es negativo.

Si es necesario se completan con ceros los lugares.

Ejercicios

(epígrafe 1.5)

1. Completa la poesía siguiente con las palabras que te indican y con lo que conoces de la notación científica:

científica	exponencial	diez	uno
módulo	número	positivo	derecha

¡Infinitamente grandes, infinitamente pequeñas![78]

[78] Ejercicio elaborado por la M. Sc. Rita María Cantero Pérez, 2011.

I) Esas sabias cantidades,
que parecen terroríficas.
De una forma las abrevio:
con la notación ___________.

II) Y recuerda Juan Ramón
una idea muy especial:
Afirma con gran pasión,
que esa útil notación
se apellida ____________.
De un producto tú te auxilias
si la vas a utilizar.
Un factor, dice Jerez
es un hermoso valor,
que es siempre menor que _____
y mayor o igual que _____.
El otro, me dice Bruno,
es una hermosa potencia
que tiene por base _____.
Y la coma decimal
tú la tienes que correr
hasta encontrar el _____
que nos contaba Jerez.

III) ¿Qué cuál es el exponente
de la potencia de Bruno?
Así recuerda y retoma
Hortensia, la inteligente:
El __________ del exponente
de la potencia de Bruno
es el _________ de lugares,
que se ha corrido la coma.
Si a la izquierda la has corrido,
sí, me refiero a la coma,
el susodicho exponente
siempre será ___________.
Y negativo será
el ya citado exponente
si la renombrada coma
a la ________ has corrido.
Y sí que sirve de mucho
esta notación de ciencia,
tú tranquilo, no te apresures
úsala con gran paciencia.

IV) Grandes, muy grandes, enormes,
y también chicas, muy chicas,
Las escribo en forma breve
con la notación __________.

2. (…) En Cuba actualmente los recursos hidráulicos disponibles ascienden a algo más de trece mil seiscientos millones de metros cúbicos (…)[79]
Marca con una X la respuesta correcta.
La cantidad que aparece subrayada, escrita en notación exponencial, es:

a) ___ $1{,}4 \cdot 10^{9}$ b) ___ $1{,}4 \cdot 10^{10}$
c) ___ $1{,}4 \cdot 10^{11}$ d) ___ ninguna de las anteriores

3. El gobierno japonés calcula que el costo de los daños que el terremoto y el tsunami del 11 de marzo de 2011 causaron en edificios, carreteras y puertos, asciende a más de ciento cuarenta y siete mil millones de euros.[80]

[79] Órgano de prensa *Granma*, 26 de enero de 2012.
[80] Órgano de prensa *Granma*, 25 de junio de 2011.

Completa con la respuesta correcta.
La cantidad que aparece subrayada, escrita en notación científica, es _______.

4. El macho de la mariposa Emperador tiene un desarrollado sentido de percepción de olores, él puede inhalar no menos de 0,001 000 1 g que la hembra le permite a una distancia de 11 km.[81]
Di si la proposición siguiente es verdadera o falsa. Justifica si es falsa.
La cantidad que aparece subrayada, escrita en notación científica es $1 \cdot 10^{-3}$.

5. La mayoría de las calculadoras y muchos programas de computadoras presentan resultados muy grandes y muy pequeños en notación científica.
La base diez se omite generalmente y se utiliza la letra E (mayúscula o minúscula) para indicar el exponente.
Por ejemplo:
238 294 360 000 = 2,3829436E11
0,000 314 16 = 3,1416E– 4.
Expresa en notación decimal el número de la pantalla de la calculadora de la figura 1.59.

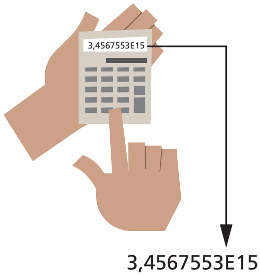


Fig. 1.59

6. Lee cuidadosamente la noticia:[82]
a) Escribe en notación científica la cantidad que aparece subrayada.
b) Confirma el total al que se hace referencia.
c) ¿Cuántos dominicanos había en 2002?

¡DOMINICANOS SUMAN 9,38 MILLONES!

La Oficina Nacional de Estadísticas (ONE). Presentó el informe sobre el Censo Nacional de Población y Vivienda 2010, el cual reveló que 9,38 millones de personas habitan en República Dominicana. El censo mostró un crecimiento de la población en 726 277 habitantes desde el anterior sondeo en el 2002. Se dio a conocer que, del total de pobladores, 4 707 000 son hombres y 4 670 000, mujeres.

[81] Órgano de prensa *Tribuna de La Habana*, 25 de marzo de 2012.
[82] Órgano de prensa *Granma*, 10 de marzo de 2011.

7. El deshielo en la Antártica aumentó en un 75 % en 10 años. Los científicos indicaron que la pérdida neta de hielo antártico aumentó de 112 gigatoneladas al año en 1996 a 196 gigatoneladas al año en el 2006.[83]
a) Escribe las cantidades de toneladas en notación científica, si se conoce que el prefijo giga (G) se utiliza en el Sistema Internacional de Unidades para expresar el valor 10^9.
b) Con los recursos que te brinda el cálculo porcentual, confirma la información que se brinda en la primera oración del texto dado.

8.* Determina la suma de las cifras del número $\dfrac{-(-10)^{3125}+2}{3}$.

9. Redacta un párrafo bajo el título "Ventajas y desventajas de la notación científica".

1.6 Cálculo de cuadrados y cubos de números racionales

Desde primaria conoces que cuando un número natural (entero no negativo) se eleva a la potencia dos, es decir, al cuadrado se obtiene otro número que se llama cuadrado perfecto y si el número es entero negativo su **cuadrado también** será perfecto.

Ejemplo 1:

Número entero

Positivo	Cuadrado del número	Negativo	Cuadrado del número
1	$1^2 = 1$	– 1	$(-1)^2 = 1$
3	$3^2 = 9$	– 3	$(-3)^2 = 9$

Positivo	Cubo del número	Negativo	Cubo del número
2	$2^3 = 8$	– 2	$(-2)^3 = -8$
5	$5^3 = 125$	– 5	$(-5)^3 = -125$

[83] Órgano de prensa *Granma*, 24 de enero de 2008 y tabloide del curso de Universidad para todos, "Nuevas tecnologías".

La operación mediante la cual, dado un número cualquiera, determinamos su cuadrado se denomina **elevación al cuadrado**.

La operación mediante la cual, dado un número cualquiera, determinamos su cubo, se denomina **elevación al cubo**.

Si el número es racional y está expresado en notación decimal o en fracción, el cálculo de su cuadrado o cubo sería más engorroso.

Para elevar al cuadrado o al cubo las expresiones decimales, se puede utilizar: la calculadora o la tabla de cuadrados o cubos que permiten agilizar la operación. En esta tabla pueden leerse los cuadrados o cubos de los números del 1,00 al 9,99. La mayoría de los cuadrados o cubos de estos números son valores aproximados, que tienen cuatro cifras correctas en la tabla.

Para calcular los cuadrados o cubos de números dados, utilizando la tabla, procedemos de la forma que se ilustra en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 2:

Calcula utilizando la tabla de cuadrados o cubos (tabla 1.10):

a) $(4,75)^2$ b) $(7,43)^3$

Tabla 1.10

	0	1	.	.	.	5
1,0	1,000	1,020	.	.	.	1,103
1,1	1,210	1,232	.	.	.	1,323
1,2	1,440	1,464	.	.	.	1,563
1,3	1,690	1,716	.	.	.	1,823
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
$\boxed{4,7}$	22,09	22,18	.	.	.	$\boxed{22,56}$

Solución:

a) $(4{,}75)^2$

Buscamos en la tabla de cuadrados (tabla 1.7) la fila 4,7.

Buscamos en la tabla la columna cinco.

En la intersección de la fila y la columna hallamos el 22,56.

Respuesta: $(4{,}75)^2 \approx 22{,}56$.

b) Buscamos en la tabla de cubos: fila 7,4; columna tres.

Respuesta: $(7{,}43)^3 \approx 410{,}2$.

Procedimiento para determinar el cuadrado o cubo de un número en su tabla:

Buscamos la fila que está determinada por las dos primeras cifras del número dado en la tabla correspondiente.

Seleccionamos la columna que está encabezada por la tercera cifra del número dado. En la intersección de la fila y la columna encontrada en la tabla correspondiente está el cuadrado o el cubo del número dado.

Aplica tus conocimientos

Con el objetivo de confeccionar una piñata, se quiere forrar una caja en forma de cubo, cuya arista mide 25,5 cm. ¿Cuántos centímetros cuadrados de papel harán falta?

Puesto que el cubo tiene seis caras que son cuadrados iguales, basta hallar el área de una de estas y multiplicar por seis el resultado para hallar la respuesta a la pregunta. El área de un cuadrado es igual a la longitud del lado al cuadrado, por tanto, hay que hallar $(25{,}5)^2$.

Respuesta: Hacen falta $3{,}90 \cdot 10^3$ cm^2 de papel aproximadamente.[84]

En los ejercicios con texto y problemas donde aparezcan cantidades de magnitud se realizarán los cálculos intermedios sin tener en cuenta la unidad correspondiente, pero en la respuesta sí debe considerarse.

[84] Aunque en este grado puedes utilizar respuestas como 3 901,8; debes saber que solo las tres primeras cifras de este número pueden ser correctas, pues se partió de un dato aproximado a tres cifras.

Ejercicios

(epígrafe 1.6)

1. Resuelve las operaciones siguientes.

a) 256^2 b) 7^3 c) $(467,2)^2$

d) 30^3 e) $(-7\ 300)^2$ f) $\left(-\frac{1}{4}\right)^3$

g) $(-0,67)^2$ h) $(0,035)^2$ i) $13,52^3 : 6,76^3$

2. Halla el valor que se indica en cada caso:

a) $(28,7)^2$ b) $(72,84)^3$ c) $4,7^5 : 4,7^3$

d) $9,86^8 \cdot 9,86^{-5}$ e) $((-3,286)^2)^2$

3. La expresión $5a^2$ permite hallar el volumen de todos los ortoedros cuya base es un cuadrado, su lado tiene una longitud de a unidades y la altura es de 5 u. Halla el volumen si: a) $a = 0,34$ u, b) $a = 0,056$ u y c) $a = 789$ u.

4. Selecciona la respuesta correcta

4.1 El cuadrado de 6,22 es:

a) ___ 38,44 b) ___ 38,69 c) ___ 38,81

4.2 El cuadrado de 6,132 es:

a) ___ 37,58 b) ___ 37,45 c) ___ 37,6

4.3 El cuadrado de 0,32 es:

a) ___ 10,24 b) ___ 0,102 4 c) ___ 1,024

4.4 Al calcular $(16,24)^3$ el resultado es:

a) ___ $4,283 \cdot 10^2$ b) ___ $4,28 \cdot 10^3$ c) ___ $42,8 \cdot 10^3$

4.5 Al calcular $(0,48)^{2\,018} : (0,48)^{2\,015}$ el resultado es:

a) ___ 0,110 6 b) ___ 1,106 c) ___ 110 600

1.7 Cálculo de raíces cuadradas y cúbicas de números racionales

Es conocido por ti que $5^2 = 25$ y $(-5)^2 = 25$; también $7^2 = 49$ y $(-7)^2 = 49$, observa que el cuadrado de un número entero es igual al cuadrado y su opuesto, o sea, el cuadrado perfecto 25 procede de elevar al cuadrado – 5 y cinco.

En los casos anteriores decimos que cinco y – 5 son raíces cuadradas de 25, así como siete y – 7 son raíces cuadradas de 49.

En general, si $a^2 = b$, entonces a es una raíz cuadrada de b, como $(-a)^2 = b$ resulta que $-a$ es otra raíz cuadrada y se escribe $\sqrt{b} = \pm a$.

Ejemplo 1:

Determina las raíces cuadradas de:

a) 16 b) 0,81 c) $\frac{1}{4}$

Solución:

a) Las raíces cuadradas de 16 son cuatro *y* – 4, porque $4^2 = 16$ *y* $(-4)^2 = 16$.

b) Las raíces cuadradas de 0,81 son 0,9 y – 0,9, porque $(0{,}9)^2 = 0{,}81$ y $(-0{,}9)^2 = 0{,}81$.

c) Las raíces cuadradas de $\frac{1}{4}$ son $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$, porque $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ y $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

A la raíz cuadrada *no negativa* de un número se le llama *raíz cuadrada aritmética*. En este libro trabajaremos solamente *las raíces aritméticas* y las llamaremos simplemente **raíces cuadradas.**

La extracción de la raíz cuadrada aritmética es la operación inversa de la elevación al cuadrado.

La raíz cuadrada de un número a se denota por el símbolo $\sqrt{a}$.

El símbolo $\sqrt{\ }$ se denomina radical.

El número *a* se llama cantidad subradical o radicando y es el número al cual se le calcula la raíz cuadrada. El índice es dos, pero no se escribe.

En general, se cumple que todo número racional (no negativo) posee exactamente una raíz cuadrada aritmética.

Ejemplo 2:

Calcula, en cada caso, la raíz cuadrada de los números siguientes:

a) $\frac{1}{9}$ b) 1 000 c) 10 000

Solución:

a) $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$ porque $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

b) $\sqrt{1\,000}$ No existe ningún número natural, ni una fracción evidente cuyo cuadrado sea 1 000.

c) $\sqrt{10\,000} = 100$ porque $100^2 = 10\,000$.

En el ejemplo anterior puedes observar que 100 y 10 000, es decir, 10^2 y 10^4 tienen raíz cuadrada exacta y que, además, esta raíz es una potencia de diez. Sin embargo, 1 000, es decir 10^3, no tiene una potencia de diez como raíz cuadrada.

- Las potencias de diez con exponente divisible por dos (es decir, par) tienen como raíz cuadrada otra potencia de diez cuyo exponente es la mitad del de la potencia original.
- Las potencias de diez con exponente impar no tienen como raíz cuadrada a una potencia de diez.

Como la extracción de la raíz cuadrada es la operación inversa de la elevación al cuadrado, se puede utilizar la calculadora o la tabla de cuadrados para calcular la raíz cuadrada. Como verás más adelante, podrás calcular $\sqrt{1000}$ y otras más.

En la tabla pueden localizarse raíces cuadradas cuando el radicando sea un número comprendido entre uno y 99,80 (son los cuadrados que están en la tabla). Si el radicando tiene más de cuatro cifras, debe redondearse.

Ejemplo 3:

Calcula utilizando la tabla de cuadrados, como se ilustra en el fragmento de la tabla 1.11:

El área de un cuadrado es 18,7 cm^2 y se desea hallar su perímetro. ¿Cómo proceder?

Solución:

Se necesita hallar la longitud del lado del cuadrado, como se tiene el área, podemos hallar la raíz cuadrada y después multiplicar por cuatro ese valor para hallar el perímetro. $\sqrt{18{,}7}$, el radicando 18,7 no aparece en la tabla, localizamos entonces el número más próximo a él, que es 18,66.

Luego, debemos determinar: $\sqrt{18,66}$.

Localizamos en el cuerpo de la tabla el número 18,66.

Tabla 1.11

x	0	1	2
1,0	1,000	1,020	1,103
1,1	1,210	1,232	1,323
1,2	1,440	1,464	1,563
1,3	1,690	1,716	1,823
.	.	.	.
$\boxed{4,3}$	10,43	10,58	$\boxed{18,66}$

A partir de este, determinamos respectivamente, el encabezado de la fila, en este caso 4,3 y de la columna, en este caso dos, donde localizamos este número.

$\sqrt{18,66} = 4,32$. Con ambos encabezados formamos la raíz cuadrada de este número.

El perímetro buscado es $4,32 \cdot 4 = 17,28$ cm.

Respuesta: El perímetro del cuadrado es aproximadamente 17,3 cm.

Para la extracción de la raíz cuadrada, también se cumple que, si el radicando es un número aproximado, la raíz cuadrada se debe dar con la misma cantidad de cifras que tenga el radicando.

Reflexiona

Felipe cursa el séptimo grado, y conoce muy bien todo lo estudiado sobre números racionales, por eso considera que ya sabe resolver un ejercicio como este: Determina qué valor de x satisface la igualdad: $x^3 + 15x = 124$. Fue probando y llegó a la conclusión de que $x = 4$. ¡Compruébalo tú mismo! Sin embargo, en la página web *Pura Matemática* encontró que un matemático italiano[85] halló una fórmula para darle solución a problemas como este, pues si $x^3 + px = q$; $p > 0$, $q > 0$, entonces el valor de x que satisface la igualdad es:

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2}\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Al intentar aplicarla obtuvo lo siguiente: $5+\sqrt[3]{-1}$ y ahí surgió su duda, ya que nunca había hallado la raíz cúbica de un número negativo. Preguntas se hizo muchas, todas las puede responder al estudiar el concepto raíz cúbica de un número racional.

Ya sabes que $3^3 = 27$ y $5^3 = 125$; etcétera. En los casos anteriores decimos que: tres es la *raíz cúbica* de 27 y cinco es la *raíz cúbica* de 125.

La operación de cálculo que consiste en determinar un número, dado su cubo, se denomina *extracción de la raíz cúbica*.

Ejemplo 4:

Determina la raíz cúbica de los números

a) Ocho b) – 1

Respuesta:

a) La raíz cúbica de ocho es dos, porque $2^3 = 8$.

b) La raíz cúbica de – 1 es – 1, porque $(-1)^3 = -1$.

Aquí aclaramos parte de la duda de Felipe, aunque ya puedes comprobar que el resultado también es $x = 4$.

La extracción de la raíz cúbica es la operación inversa de la elevación al cubo.

Del ejemplo anterior podemos concluir que la raíz cúbica de un número racional cualquiera *está determinada de manera única*, es decir, todo número racional posee exactamente una raíz cúbica. En este caso, la única raíz es la raíz aritmética del número.

La raíz cúbica x de un número dado a se denota $\sqrt[3]{a} = x$.

El símbolo $\sqrt[3]{\ }$ es el signo de raíz cúbica y el número a se llama radicando y el índice es el número tres.

Ejemplo 5:

Para determinar la ventaja de los levantadores de pesas, se emplea la ecuación de O'Carrol. Si un levantador que tiene una masa de b kg,

[85] Niccolò Fontana Tartaglia (1499-1557), uno de los principales matemáticos del siglo XVI. Se destaca en el álgebra, principalmente en la creación de métodos para resolver ecuaciones.

levanta w kg de pesas, entonces el peso de ventaja W, está expresado por: $W=\dfrac{w}{\sqrt[3]{b-35}}\;(b\neq 35)$.[86] Halla la ventaja de un pesista de 120 kg de masa, que levanta 250 kg.

Solución:

Al sustituir en la ecuación se tiene que $W=\dfrac{250}{\sqrt[3]{120-35}}$, por tanto, hay que hallar la raíz cúbica de 85, al utilizar la tabla de cubos, buscamos en esta el número más próximo al radicando, que es en este caso 85,18. El número 85,18 se encuentra en la fila 4,4 y en la columna cero.

Luego: $\sqrt[3]{85}\approx 4,40$

Respuesta: La ventaja de este levantador de pesas es 56,8 kg.

a) Si tuviésemos que hallar la raíz cúbica de 841,2, tenemos que: $\sqrt[3]{841,2}$

Respuesta: $\sqrt[3]{841,2}\approx 9,44$

Procedimiento para la extracción de la raíz cuadrada o cúbica de un número racional:

1. Se localiza el número (radicando) o el número más cercano en el cuerpo de la tabla.
2. Se toman las cifras que encabezan la fila y la columna, respectivamente donde se encuentre el radicando; estas tres cifras serán las que conformen la raíz cuadrada o cúbica aproximada del número dado.
3. Si el radicando es un número mayor que 100 o está entre cero y uno, es conveniente escribir dicho radicando como el producto de un número de los que aparecen en la tabla (entre uno y 100) por una potencia de diez que tenga raíz cuadrada o cúbica exacta, es decir, cuyo exponente sea divisible por dos o por tres.

Es importante que conozcas que la raíz cuadrada de un número racional, no siempre es un número racional, en octavo grado aprenderás por qué.

En el conjunto de los números racionales, solo las cantidades no negativas tienen raíz cuadrada, aunque esta no siempre es un número racional.

En el conjunto de los números racionales, todos los números racionales tienen raíz cúbica, este valor es único, aunque no siempre es un número racional.

[86] Joaquín Palacio Peña: *Colección de problemas matemáticos para la vida,* 2003.

Ejercicios

(epígrafe 1.7)

1. Determina:

a) $\sqrt{64}$ b) $\sqrt[3]{-64}$ c) $\sqrt{255}$ d) $\sqrt[3]{729}$

e) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ f) $\sqrt[3]{-\frac{27}{125}}$ g) $\sqrt{10^{-2}}$ h) $\sqrt[3]{10^{-18}}$

i) $\sqrt{5{,}760}$ j) $\sqrt[3]{2{,}460}$ k) $\sqrt{8}$ l) $\sqrt[3]{9}$

m) $\sqrt{1\,875}$ n) $\sqrt[3]{23\,400}$ ñ) $\sqrt{0{,}087}$ o) $\sqrt[3]{-247{,}5}$

p) $\sqrt{89{,}68}$ q) $\sqrt[3]{-10{,}36}$

2. Alexis conoció de una igualdad para hallar, en un triángulo (fig. 1.60), la longitud del lado que se opone a un ángulo de 60°, dadas las longitudes de los otros dos. Ayúdalo a hallar la longitud de $\overline{BC}$ en el $\triangle ABC$ si: $\overline{AB} = 4{,}06$ cm, $\overline{AC} = 6{,}85$ cm y $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{AB} \cdot \overline{AC}$.

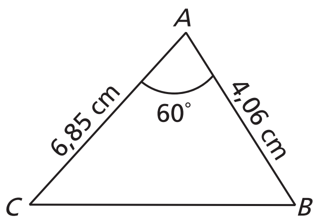


Fig. 1.60

3. Selecciona la respuesta correcta.

3.1 Al calcular $\sqrt{645{,}2}$ el resultado es:

a) ___ 2,534 b) ___ 2 534 c) ___ 25,34

3.2 Al calcular $\sqrt{0{,}358}$ el resultado es:

a) ___ 5,98 b) ___ 0,598 c) ___ 0,060

3.3 Al calcular $\sqrt{\frac{42}{4}}$ el resultado es

a) ___ 3,24 b) ___ 32,4 c) ___ 0,324

4. El artista ruso Anatoly Konenko creó el acuario más pequeño del mundo (fig. 1.61). Como especialista en la construcción de réplicas a menor escala, Konenko hizo un tanque de 30,0 mm de longitud, 14,0 mm de ancho y 24,0 mm de altura.[87] Halla la arista de un cubo, cuyo volumen coincide con el de la pequeñísima pecera.

Fig. 1.61

[87] Google, 16 de abril de 2012 y órgano de prensa *Juventud Rebelde*, 25 de septiembre de 2011.

5.* Halla el valor de x si: $\sqrt[3]{27^x} = 729$.

En la actualidad existen modernísimos medios de cálculo que nos permiten hallar el cuadrado y el cubo de un número racional, así como las raíces cuadradas si es posible y la raíz cúbica de un número racional, sin embargo, con el auxilio de las tablas de cuadrados y de cubos y tus conocimientos de aritmética, puedes hallar estos valores (aunque en ocasiones aproximados).

1.8 Resolución de ejercicios y problemas donde se apliquen las operaciones de cálculo con números racionales

Reflexiona

Un avión vuela a 7 400 m sobre el nivel del mar, baja 2 580 m y vuelve a subir 1 230 m. Finalmente desciende 3 640 m para aterrizar (fig. 1.62). ¿A qué altura sobre el nivel mar se encuentra el aeropuerto donde el avión toca tierra?

7 400 m – 2 580 m + 1 230 m – 3 640 m

= (7 400 m + 1 230 m) – (2 580 m + 3 640 m)

= 8 630 m – 6 220 m

= 2 410 m

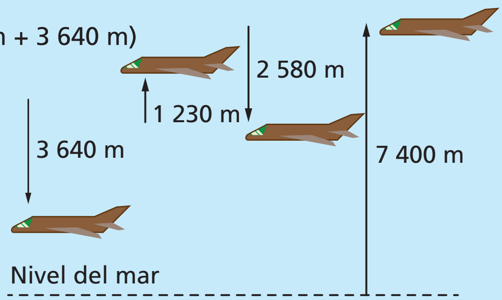


Fig. 1.62

Respuesta: El aeropuerto se encuentra a 2 410 m sobre el nivel del mar.

Aplica tus conocimientos

Amaury está muy contento con todo lo estudiado sobre los números racionales. Su excelente profesora Pilar le ha propuesto este ejercicio como parte de una Tarea Integradora que debe entregar al finalizar la unidad uno.

Clasifica las proposiciones siguientes en verdaderas (V) o falsas (F). Justifica en cada caso tu respuesta.

a) ___ El 50 % de 12^{20} es 6^{20}.

b) ___ La tercera parte de 9^{30} es 3^{59}.

c) ___ El cuadrado de la suma de dos números racionales es igual a la suma de los cuadrados de dichos números.

d) ___ La raíz cúbica de la diferencia de dos números racionales coincide con la diferencia de las raíces cúbicas.

e) ___ $\sqrt{a \cdot 10^{2n}} = \sqrt{a} \cdot 10^{n}$ a es un número racional, $a \geq 0$.

f) ___ $(a - b)^3 = a^3 - b^3$, a y b son números racionales.

Amaury ya pudo determinar el valor de verdad de las proposiciones, sin embargo, algunas guardan estrecha relación con el orden operacional que se debe seguir en un ejercicio de operaciones combinadas en el que aparezcan todas las operaciones de cálculo estudiadas.

Atención

Al resolver operaciones combinadas debes de seguir el orden operacional siguiente:

- Primero se resuelven las operaciones encerradas en los signos de agrupación (paréntesis corchetes y llaves).
- Segundo se calculan las potencias y raíces en el orden en que aparecen.
- Tercero se realizan las multiplicaciones y divisiones en el orden en que aparecen.
- Cuarto se realizan las sumas algebraicas que resultan al final.

Consejos útiles

- Si en una cantidad subradical aparece un ejercicio de operaciones combinadas, se resuelve este y después se halla la raíz que se indica.
- Si en la base y(o) exponente de una potencia aparece un ejercicio de operaciones combinadas, se resuelve y se efectúa la potencia que corresponda.
- Si en el numerador y(o) denominador de una fracción aparece un ejercicio de operaciones combinadas, se resuelve este y después se efectúa la división que se indique.
- Si en la resolución del ejercicio de operaciones combinadas es factible utilizar las tablas de cuadrados y(o) cubos y se permite su uso, seguirás las mismas reglas del cálculo aproximado que utilizabas en el conjunto de los números fraccionarios.

Ejemplo 1:

Resuelve: $5 \cdot 3^2 + \sqrt[3]{-729} : 0{,}15$

$= 5 \cdot 9 + (-9) : 0{,}15$ Al calcular las potencias y raíces en el orden en que aparecen.

En este caso se pueden hacer en un mismo paso la potencia que se indica, así como, la extracción de la raíz cúbica.

$= 45 + (-60)$ Al realizar las multiplicaciones y divisiones en el orden en que aparecen.

$= -15$ Al realizar la suma algebraica que resultó al final.

Finalizamos con esta pincelada histórica, que como podrás apreciar es un antiquísimo resumen de las propiedades de las operaciones de cálculo con números racionales.

De la historia

Brahmagupta (598-660 d.n.e.) (fig. 1.63) fue pionero en ofrecer las reglas para el empleo de los números negativos y emplea también el cero como símbolo operatorio brindando las reglas para este como sumando, sustraendo, factor, radicando y base de potencias.[88] *Aclara que los números pueden tratarse o como pertenencias o como deudas, pero, introduciendo los números negativos, los matemáticos hindúes no los utilizaban como elementos equitativos de la Matemática, considerándolos solo como algo del género de las posibilidades lógicas, ya que, según expresión de Bhaskara (1114-1185) (fig. 1.64), otro gran matemático hindú, las personas no están de acuerdo con ellos.*

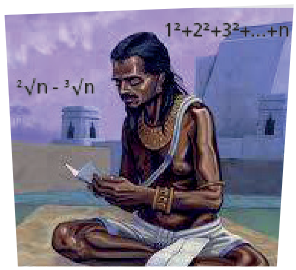


Fig. 1.63

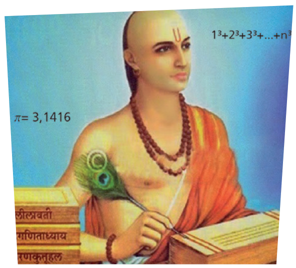


Fig. 1.64

Las reglas de operaciones con los números, entonces, son las siguientes:

- *La suma de dos pertenencias es una pertenencia.*

[88] Luis J. Davidson San Juan: *Ecuaciones y Matemáticos*, Ed. Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana, 2008.

- *De dos deudas, una deuda.*
- *De una pertenencia y una deuda, su diferencia, y si son iguales, es cero.*
- *La suma del cero y una deuda es una deuda.*
- *De una pertenencia y el cero, una pertenencia.*
- *El producto de dos pertenencias o dos deudas es una pertenencia.*
- *El resultado del producto de una pertenencia por una deuda representa una pérdida. Esta misma regla es válida también en la división.*
- *El cuadrado de una pertenencia o deuda es una pertenencia.*
- *La pertenencia tiene dos raíces: una constituye una ganancia y la otra una deuda.*
- *La raíz de una pérdida no existe, ya que tal no puede ser un cuadrado.*

Ejercicios

(epígrafe 1.8)

1. Sustituye en cada caso las variables por los números que se indican y calcula:

a) $A^2 + \sqrt{B} : 3$ $A = 4{,}8;\ B = 66{,}1$ b) $\sqrt{C} - D^3$ $C = 83{,}56;\ D = 2{,}36$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{M^2 \cdot N^2}}{5}$ $M = 13{,}7;\ N = 8{,}65$

2. Calcula el valor de cada variable:

$A = (-2)^3 + (-2)^{93} : (-2)^{91}$ $D = \sqrt[3]{-9 + (-0{,}125)^2 \cdot (8)^2}$

$B = -6{,}7 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{111} \cdot (0{,}5)^{-109}$ $E = \sqrt{15 + 3{,}43^2 : 0{,}49^2}$

$C = ((-48{,}1)^0 - 2^3)^2$ $F = (4^3)^4 : (4^2)^6 - 9{,}39$

2.1 Selecciona la respuesta correcta marcando con una X en la línea dada. Argumenta.

a) ___ $\{B; C\} \subset \mathbb{Z}$ b) ___ $\{B\} \subset \mathbb{Z}$ c) ___ $F < B$ d) ___ $A \cdot D \neq E$

2.2. Completa los espacios en blanco de forma tal que se obtenga una proposición verdadera para cada caso.

a) Los números enteros que están entre el valor de B y el de F son: ___________________.

b) En la recta numérica la distancia del número cero a A es: __________.

c) El valor de A y el de E son múltiplos de: __________.

3. Al copiar una fórmula, Julián se equivocó y en vez de $\sqrt{\dfrac{\frac{a}{2}-b}{c}}$ copió $\dfrac{\sqrt{\frac{a}{2}-b}}{c}$.

Al hallar el valor numérico para a = 394, b = 1 y c = 4. ¿En cuántas unidades se alteró el resultado?

4. El equipo de fútbol sala de Granma ganó el primer partido de la Liga por diez goles, el segundo lo perdió por tres goles, el tercero lo ganó por un gol y el cuarto lo volvió a ganar por cinco. Expresa el resultado final en forma de número entero y represéntalo en una recta numérica.

5. El presupuesto de una empresa dedicado a la fabricación de medicamentos es de 500 000 000 de dólares anuales. Se invierten 189 567 890 dólares en investigaciones, 45 678 556 dólares en salarios y 50 000 000 dólares en mantenimiento de maquinarias. ¿Qué porciento del presupuesto pueden invertir en compras de una nueva maquinaria?

6. Un reloj se atrasa $\frac{3}{4}$ de hora en una semana. ¿Cuánto se atrasaría en cuatro días? ¿Y en febrero cuando no es bisiesto?

1.9 El procesamiento de datos

Lee cuidadosamente la situación siguiente y te invito a pensar cómo resolverías la problemática planteada:

Investiga y aprende

En la asamblea de rendición de cuentas de una circunscripción, entre los planteamientos que hicieron los electores manifestaron opiniones y solicitudes sobre la atención médica que reciben del consultorio. ¿Cómo realizarías el estudio que te permita hacer una valoración sobre los criterios manifestados por los electores en esa asamblea?

Para responder la pregunta y dar solución a la problemática planteada, seguramente pensaste en la necesidad de hacer un estudio análogo al que emprendes cuando haces trabajos prácticos que requieren el procesamiento de datos.

De la historia

El procesamiento de datos en su forma más simple, tuvo sus orígenes en las civilizaciones antiguas (fig. 1.65). Se tiene conocimiento de hallazgos que expresan la cantidad de personas, animales y cosas, mediante representaciones en rocas, pieles, maderas, paredes de cuevas y otros medios.

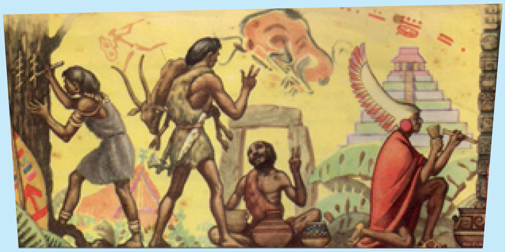


Fig. 1.65

Hay evidencias de que ***los babilonios****, alrededor del año 3000 (a.n.e.), usaban pequeñas tablillas de arcilla donde recopilaban datos relacionados con la producción agrícola, las ventas y los cambios o trueques propios de la época; también, que* ***los egipcios*** *del siglo XXXI (a.n.e.), anterior a la construcción de las pirámides, representaron datos sobre la población y sobre los índices de renta del país; que* ***los chinos****, antes del año 2000 (a.n.e.), realizaron estudios sobre la población y las posibilidades materiales de sus habitantes, y que* ***los griegos****, con el propósito de contar los impuestos, llevaron a cabo un censo de población cuyos resultados fueron utilizados hasta alrededor del año 594 (a.n.e.). Estos hechos, entre otros, demuestran que desde los tiempos más remotos, los pueblos necesitaron contar sus habitantes y sus recursos para organizar su vida.*

En la actualidad, el procesamiento y análisis de datos no se limita solamente al estudio demográfico y de la economía. Su campo de aplicación se extendió al análisis de datos en biología, medicina, biotecnología, física, psicología, industria, comercio, política, entre otras, y es relativamente fácil acceder a múltiples datos de alcance local, nacional o mundial, relacionados con temas de la cotidianidad o de cualquier gestión investigativa que se esté abordando, a la vez que se dispone de eficaces sistemas, tabuladores electrónicos y asistentes matemáticos para el procesamiento de datos.

En la primaria aprendiste algunos conceptos relacionados con el procesamiento de datos y formas de proceder que te han permitido hacer la interpretación de datos representados en tablas y gráficos, dar respuesta a situaciones de la vida que requieren de la realización de análisis y valoraciones. Te sugiero recordarlos y te propongo aprender otros nuevos.

Procedimiento general que te permite resolver una problemática o analizar una situación o fenómeno que requiere del procesamiento de datos:

1. El análisis de la situación inicial que es objeto de estudio.
2. La obtención de los datos.
3. La simplificación de los datos.
4. La comunicación de los resultados.

Para la aplicación de este procedimiento puedes auxiliarte en preguntas similares a las siguientes que te facilitarán su ejecución:

- Primer paso: ¿Es posible hacer el estudio de la situación planteada únicamente con la información dada? ¿Será necesario buscar otras informaciones? ¿Qué aspectos son los que debo estudiar para hacer el análisis? ¿Qué pregunta o preguntas debo responder sobre estos?
- Segundo paso: ¿Qué datos necesito para responder la pregunta? ¿Son suficientes los datos? ¿Será necesario encontrar otros datos en otras fuentes? ¿Cuáles son las conclusiones que debo extraer de estos? ¿Cómo voy a recogerlos?
- Tercer paso: ¿Cómo puedo reducir esta cantidad de datos? ¿De qué modo puedo representar los datos de manera más simplificada?
- Cuarto paso: ¿Qué significado puedo extraer de los datos representados? ¿Cómo se comporta la frecuencia en cada una de las categorías? ¿Cuál es el valor más frecuente en la tabla? ¿Cuál es el mayor o menor valor de los datos?

Pero sobre todo, es importante que para la elaboración de las conclusiones te hagas preguntas como las siguientes: ¿Se corresponden los resultados obtenidos con las conclusiones a las cuales arribé? ¿Cómo puedo justificar las conclusiones basadas en los datos? ¿Qué aspectos debo explicar del análisis de estos datos, según la pregunta que se quiere responder? ¿Cómo comunico la decisión tomada?

Ejercicios

(epígrafe 1.9)

1. En el punto segundo del acápite "Hechos" de la *Demanda del Pueblo de Cuba al gobierno de Estados Unidos por daños humanos*, se ofrecen informaciones sobre sabotajes realizados por los Estados Unidos a nuestro país.

a) ¿A qué hechos se refiere la información?

b) Recopila los datos y regístralos en tu libreta.

c) Ordénalos cronológicamente.

d) Construye una tabla con los datos recopilados.

e) Sobre la base de los incisos anteriores:

- Determina el día en que esas agresiones criminales causaron el mayor número de pérdidas.
- Valora las consecuencias económicas y políticas de esas acciones agresivas.

2. Busca el periódico *Granma* con fecha 2 de noviembre de 2018 en la biblioteca de tu escuela e investiga la cantidad de países que votaron a favor, en contra o se abstuvieron de poner fin al bloqueo impuesto por Estados Unidos contra Cuba, en el año 2018 y en la página web del Minrex (www.cubaminrex.cu) esta misma información desde el año 1999.

a) Construye una tabla donde ilustres los resultados de las votaciones de poner fin al bloqueo desde el año 1999 hasta el 2018.

b) Compara la cantidad de países que votaron a favor en los años 2016 y 2018.

c) A cuánto asciende la diferencia entre la cantidad de votos a favor en los años 1999 y 2018.

3. Se necesita hacer un estudio sobre las problemáticas siguientes:

a) Los índices de mortalidad infantil de Cuba durante los diez últimos años.

b) La preferencia por la música de los estudiantes de tu grupo.

c) El resultado de las votaciones en la ONU para condenar el bloqueo económico a nuestro país.

d) La integración política de los vecinos de tu cuadra.

e) El consumo eléctrico de las viviendas de tus compañeros de aula durante el mes de agosto.

f) La talla de los jóvenes comprendidos entre las edades de 12 a 15 años de tu escuela.

Determina en cada caso el objeto de estudio.

3.1 ¿Qué fuentes utilizarías para obtener los datos en cada caso?

3.2 ¿Cómo organizarías el proceso de obtención de los datos en cada caso? Descríbelos.

3.3 ¿De qué instrumentos te valdrías para obtener la información en cada caso?

3.4 ¿Qué acciones consideras que debes realizar durante el proceso de obtención en cada caso?

3.5 ¿Consideras útil los resultados que se obtienen del estudio realizado? ¿Por qué?

3.6 Elabora un resumen en el que expongas los resultados del estudio realizado y la importancia del trabajo con datos para la sociedad.

1.9.1 Distintas formas de representar los datos

Seguro has observado en la prensa plana o en la televisión que muchas de las informaciones se muestran en tablas o gráficos que facilitan su comprensión, así te actualizas de la situación nacional e internacional del mundo en que vivimos.

Desde los primeros grados has empleado en las diferentes asignaturas tablas y gráficos que te han posibilitado realizar una valoración certera de los datos que en estos aparecen, pero ¿en qué radican las diferencias de estas maneras de mostrar las informaciones?, ¿cuándo es más conveniente utilizar una u otra?

Recuerda que...

Las **tablas** constituyen una forma en que se pueden representar datos y permiten mostrar la información de situaciones, hechos, problemáticas y fenómenos de forma resumida, lo que facilita la descripción e interpretación del fenómeno que se desea estudiar en correspondencia con los datos que en esta se muestran.

Ejemplo 1:

Observa la tabla 1.12.

Tabla 1.12

Provincias	2000	2005	2015	2016	2017
Pinar del Río	6	5,7	3,4	2,1	2,1
Artemisa	8,5	5,9	5,8	5,4	3,7
La Habana	7,5	6,6	4,1	5	4,4
Mayabeque	5,3	5,1	4,4	5,4	5,3
Matanzas	6,4	4	4,5	5	5,7
Villa Clara	5	4,2	4,1	3,1	4,6
Cienfuegos	5,4	7	3,9	2,8	4,4
Sancti Spíritus	6,2	7,9	4,2	3,4	2
Ciego de Ávila	8,1	5,1	5	4,3	3,8
Camagüey	7	8	4,1	4,3	3
Las Tunas	7	6,4	5	4,1	4,2
Holguín	7,3	4,5	3,8	3,5	3,3
Granma	8,2	6,6	3,8	3,5	4,7
Santiago de Cuba	8,7	7,2	4,1	4,4	4
Guantánamo	9,1	8	5	6,2	4,7
Isla de la Juventud	4,9	3,7	6	2,1	4,7
Nacional	**7,2**	**6,2**	**4,3**	**4,3**	**4,0**

Recuerda que...

Los **gráficos** también constituyen una manera en que se presentan datos, se confeccionan con el propósito de condensar grandes grupos de datos y mostrarlos de forma tal que permitan una fácil e inmediata captación visual. Estos aportan mayor información, pues la visualización permite destacar los principales aspectos del fenómeno objeto de estudio.

Ejemplo 2:[89]

Observa la figura 1.66.

Ejecución del presupuesto y gastos por habitantes en Cuba

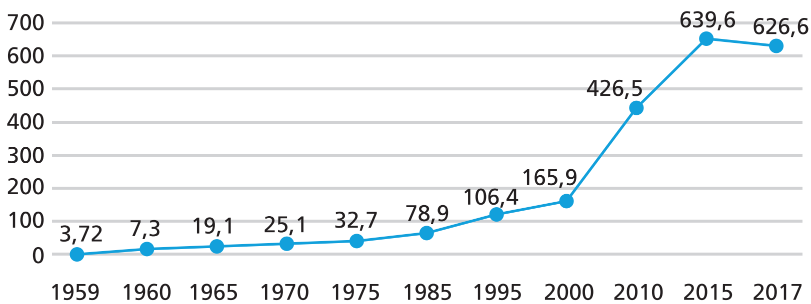


Fig. 1.66

Ejercicios

(epígrafe 1.9.1)

1. En la biblioteca de una escuela secundaria básica aparece en el mural la tabla 1.13:

Tabla 1.13 Asistencia a la biblioteca

Meses	Asistencia
Septiembre	751
Octubre	828
Noviembre	656
Diciembre	441
Enero	529

[89] Registro Administrativo de la Dirección de la Economía del Minsap, 2017.

a) ¿Qué información te brinda esta tabla?

b) ¿En qué mes asistieron menor cantidad de personas a la biblioteca?

c) ¿Cuántas personas más asistieron a la biblioteca en octubre que en enero?

d) El promedio de personas que asistieron a la biblioteca los tres últimos meses que aparecen en la tabla fue de:

1) ___ 656 2) ___ 641 3) ___ 542 4) ___ 3 205

e) Explica cómo procediste para hacer el razonamiento que te permitió seleccionar la respuesta del inciso anterior.

f) Si te dieran la responsabilidad de actualizar la tabla 1.10 con el comportamiento de la asistencia de los cinco meses restantes del curso, ¿qué acciones realizarías?

2. Lee detenidamente la información que muestra la tabla 1.14.[90]

Tabla 1.14 Medallero de los Juegos Centroamericanos y del Caribe Barranquilla 2018

Lugar	País	Oro	Plata	Bronce	Total
1	México	132	118	91	341
2	Cuba	102	72	68	242
3	Colombia	79	93	97	269
4	Venezuela	34	48	73	135
5	República Dominicana	25	29	53	107

2.1 Completa los espacios en blanco de forma tal que se obtenga una proposición verdadera para cada caso:

a) El total de medallas doradas obtenidas por estos cinco países es __________.

b) La cantidad total de medallas obtenida por ____________ superó en 99 a las obtenidas por _______________.

c) Los países que tienen una cantidad impar de preseas de plata son ________________.

[90] "Medallero de los Juegos Centroamericanos y del Caribe 2018". Disponible en: https://www.telesurtv.net/news/medallero-record-juegos-centroamericanos-caribe-barranquilla-2018, 30 de octubre de 2018.

d) Si Venezuela hubiera obtenido tres medallas de plata menos, entonces representaría la ______________ parte del total de medallas venezolanas.
e) Cuba obtuvo el ______ % de medallas de oro.
f) El total de medallas de plata de Cuba es al total de medallas de plata de los cinco primeros países como uno es a ________.

3. La fuerza laboral fue el recurso más eficiente al cierre de marzo de 2011 en el Campismo Popular, así lo demuestra la gráfica de la figura 1.67.

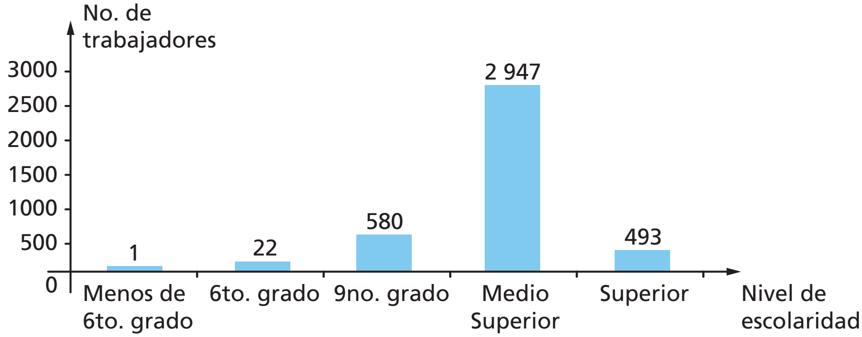


Fig. 1.67

a) ¿Qué título le pondrías al gráfico?
b) ¿Cuál es el total de trabajadores de esta sana opción recreativa? Si la fuerza laboral femenina está representada por 1 598 mujeres, ¿cuántos trabajadores son hombres y qué porcentaje representan del total?
c) ¿En qué nivel de escolaridad hay mayor cantidad de trabajadores? ¿Cómo te diste cuenta de esto?
d) ¿En cuánto excede la cantidad de trabajadores de nivel Medio Superior a la cantidad de graduados universitarios?
e) ¿Consideras que este gráfico es el más idóneo para ilustrar la información? ¿Por qué? De ser negativa tu respuesta, ¿qué gráfico tú utilizarías? Justifica tu respuesta.
f) ¿Son cantidades contables las que aparecen en el gráfico?

4. La gráfica de la figura 1.68 muestra en porcentaje el avance sostenido en los negocios en la Zona Especial de Desarrollo Mariel[91] en los cinco años de creada.

Negocios por sectores en la Zona Especial de Desarrollo Mariel

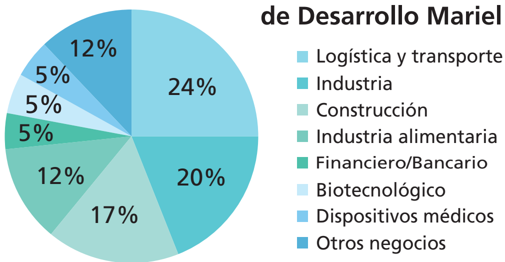


Fig. 1.68

[91] Órgano de prensa *Granma*, 2 de noviembre 2018.

a) Identifica el tipo de gráfica.
b) Si ya existen 41 negocios por sectores, ¿cuántos de estos negocios pertenecen al sector de Logística y transporte?
c) ¿En cuántos negocios supera el sector de Logística y transporte al de la Industria alimentaria?

1.9.2 Distribución de frecuencias

Reflexiona

Lee cuidadosamente la problemática siguiente.

El director de una escuela secundaria básica, con la finalidad de evaluar grupalmente el rendimiento de los estudiantes del séptimo uno, en la asignatura Matemática aplicó una prueba diagnóstico que le permitió clasificar individualmente a los 30 estudiantes en las categorías de E (excelente) MB (muy bien) B (bien) R (regular) y M (mal). Una vez calificados los trabajos registra en su libreta de control las clasificaciones atribuidas a cada estudiante de la forma siguiente:

E MB MB R M B M R B M B B B R M

MB B R R M R M R B E M B R MB B

Si tú fueras el director de esta escuela, ¿cómo evaluarías el rendimiento del grupo?

Observa los datos registrados, ¿te es posible dar una evaluación inmediata del rendimiento del grupo? Seguramente te percataste que los datos están desorganizados.

La organización de la información puede realizarse mediante **distribuciones de frecuencias.**

Definición de distribución de frecuencia

Distribución de frecuencia es la organización de los datos en una tabla convenientemente preparada, de manera que exprese un conjunto de puntuaciones ordenadas en un grupo de categorías establecidas.

Las distribuciones de frecuencia pueden clasificarse en **numéricas** o en **categóricas.**

La simbolización atribuida a los resultados de la prueba diagnóstico de cada estudiante en la situación inicial constituye una distribución de frecuencias en categorías.

Los datos presentados sobre las clasificaciones atribuidas a cada estudiante reciben el nombre de datos primarios. Estos pueden ordenarse en forma ascendente o descendente para facilitar su conteo y análisis. Los datos primarios ordenados de mayor a menor categoría quedarían de la manera siguiente:

E	E	MB	MB	MB	MB	B	B	B	B	B	B	B	B	B
R	R	R	R	R	R	R	R	M	M	M	M	M	M	M

¿Cómo agrupar los datos organizados para que la información sea más clara y precisa?

Debes estar pensando en construir una tabla donde los datos aparezcan agrupados por categorías, primero contamos la cantidad de datos que se incluyen en cada simbología de las categorías para ubicar cada simbología con su conteo. Este tipo de tabla se llama **tabla de distribución de frecuencia** porque el valor obtenido después de contar la cantidad de veces que aparece cada tipo de dato se conoce como frecuencia (repetición) .

¿Cómo se construye una tabla de distribución de frecuencia?

Se dibuja una tabla con dos columnas y tantas filas como tipos de datos tenga la situación.

En la primera columna se colocan los tipos de datos y en la segunda columna la cantidad de datos de cada tipo.

Las filas se corresponden con la clasificación de los datos según categorías o numéricos y las filas de la segunda columna se corresponden con la cantidad de datos de cada tipo o clasificación de datos (frecuencia, cantidad de veces que aparece el tipo de dato) .

Ejemplo 1:

Tabla de distribución de frecuencia con los datos de la situación inicial, en este caso se hace referencia a las diferentes categorías en que clasificó el profesor los resultados de cada estudiante (E, MB, B, R, M) .

Puedes auxiliarte del método de conteo de datos estudiado en primaria para determinar la cantidad de datos que se corresponden con cada categoría antes de elaborar la tabla.

(A cada valor contado le colocamos un pequeño trazo vertical "/" y formamos con estos pequeños grupos de cinco valores contados, pero escribimos el quinto trazo horizontalmente para facilitar el conteo. Ejemplo ~~////~~) .

En este caso nos quedaría el conteo de la manera siguiente: E (/ /) , MB (/ / / /) , B (~~////~~ / / / /) , R (~~////~~ / / /) , M (~~////~~ / /) (tabla 1.15) .

Tabla 1.15

Clasificación	Cantidad de estudiantes por categorías
E	2
MB	4
B	9
R	8
M	7

Definición de frecuencia absoluta

La **frecuencia absoluta** de un dato es el número de veces que aparece repetido este.

La frecuencia absoluta se denota por F_i , luego en la segunda columna de la tabla se puede sustituir su título por esta simbología.

La determinación de la frecuencia absoluta de un dato facilita la realización del análisis del conjunto de datos que se estudian, y mediante esta podemos determinar, por ejemplo:

La cantidad de estudiantes que son hijos únicos en una comunidad.

La cantidad de hermanos que tienen los estudiantes del grupo.

La cantidad de jóvenes que estudian por niveles de enseñanza en un municipio.

La cantidad de jóvenes que prefieren los distintos deportes en una escuela.

Aplica tus conocimientos

Calcula el porcentaje que representa la cantidad estudiantes a los que se les asignó la clasificación de bien (B) , utilizando los datos de la tabla 1.15.

Te debes haber percatado que cuando calculaste el porciento determinaste la razón entre la cantidad de datos que le correspondían en la segunda columna a la categoría designada por B entre la cantidad total de datos que se tenían en la tabla, o sea, se determinó la razón entre la frecuencia absoluta de esta categoría entre el tamaño de la muestra (cantidad total de datos) $\left(\frac{9}{30}\right)$.

Definición de frecuencia relativa

La **frecuencia relativa** es el cociente de la frecuencia absoluta entre el tamaño de la muestra.

La frecuencia relativa se denota por f_i.

Ejemplo 2:

Observa la tabla 1.16.

Tabla 1.16

Clasificación	Frecuencia absoluta (F_i)	Frecuencia relativa (f_i)
E	2	$\left(\frac{2}{30}\right)$
MB	4	$\left(\frac{4}{30}\right)$
B	9	$\left(\frac{9}{30}\right)$
R	8	$\left(\frac{8}{30}\right)$
M	7	$\left(\frac{7}{30}\right)$

En la tabla 1.15, el total de datos es 30, luego la frecuencia relativa para cada clasificación puede ser expresada como fracción común, como expresión decimal o en forma porcentual. Ejemplo, en el caso de la categoría de B nos quedaría: $\frac{9}{30} = \frac{3}{10}$, como fracción común, 0,3 expresión decimal y 30 % como valor porcentual (tabla 1.17) .

Tabla 1.17

Clasificación	F_i	f_i	f_i
E	2	$\frac{2}{30} = 0{,}067$	6,7 %
MB	4	$\frac{4}{30} = 0{,}133$	13,3 %
B	9	$\frac{9}{30} = 0{,}300$	30,0 %
R	8	$\frac{8}{30} = 0{,}267$	26,7 %
M	7	$\frac{7}{30} = 0{,}233$	23,3 %

Investiga y aprende

Si adicionamos todos los valores de las frecuencias absolutas obtenemos el tamaño de la muestra o total de datos, te propongo calcular la suma de la frecuencia relativa expresada en fracción común y en porciento, investiga el porqué de estos resultados.

Atención

Cuidado con la notación de las frecuencias absoluta y relativa, no olvides que la absoluta es una *F* mayúscula con una *i* en el subíndice mientras la relativa es *f* minúscula con una *i* en el subíndice.

Es recomendable verificar cuando concluyes la elaboración de la tabla de distribución que:

- La suma de las **frecuencias absolutas** es igual a la cantidad total de datos.
- La suma de las **frecuencias relativas** es igual a 1,00 o 100 % si se trata de frecuencias relativas porcentuales.

A veces para determinar la frecuencia relativa es necesario hacer redondeos, y si no se obtiene el valor 1,00 o el 100 % en la suma de las frecuencias absolutas, se hacen aproximaciones.

Las tablas de distribución de frecuencia también se pueden construir utilizando las aplicaciones informáticas que has estudiado.

Ejercicios

(epígrafe 1.9.2)

1. Se lanza un dado 19 veces y se obtienen las lecturas siguientes:
5; 2; 3; 5; 6; 2; 3; 4; 5; 2; 5; 2; 5; 3; 2; 6; 1; 4; 5
a) Organiza los datos en forma creciente.
b) Construye una tabla de frecuencias absoluta y relativa. Escribe en tu libreta los pasos que seguiste.
c) ¿Cuál es la lectura más frecuente?
d) ¿En cuántas tiradas se obtuvieron lecturas inferiores a cuatro?
e) Si se remplazan dos de las lecturas del número dos por el número tres y dos de las lecturas del número cinco por el seis. ¿Se alterará el valor promedio de las lecturas? ¿Cuáles? ¿Se alterará el valor de la lectura que ocupa la posición central del conjunto de datos ordenados? ¿Cuál es? Explica cómo se procede para hacer el razonamiento que te permitió llegar a la respuesta en cada caso.

2. Dados los datos siguientes:
Países ganadores de la Copa Mundial de Fútbol (1930-2018) :[92]
Uruguay, Italia, Italia, Uruguay, Alemania, Brasil, Brasil, Inglaterra, Brasil, Alemania, Argentina, Italia, Argentina, Alemania, Brasil, Francia, Brasil, Italia, España, Alemania y Francia.
a) Construye la tabla de frecuencia absoluta y frecuencia relativa.

[92] Google, 30 de octubre de 2018, disponible en: http://www.muyhistoria.es.

b) ¿Qué país ha obtenido la mayor cantidad de veces la Copa Mundial de Fútbol?

c) ¿Qué porcentaje representa del total el número de veces que Brasil ha ganado la Copa Mundial de Fútbol?

1.9.3 Tipos de gráficos estadísticos

¿Existe otra manera más ilustrativa de mostrar las informaciones recopiladas?

Los gráficos se confeccionan con el propósito de condensar grandes grupos de datos y mostrarlos de forma tal que sean captados más fácil y rápidamente, y sea casi inmediata su comprensión visual. Estos aportan mayor información, pues la visualización permite destacar los principales aspectos de un fenómeno u objeto de estudio. ¿Recuerdas qué nombre reciben los gráficos que aprendiste en la primaria y para qué se utilizan?

Los tipos de gráficos que pueden confeccionarse son: de barras, circulares o de pastel, poligonales y pictogramas, cada uno de estos posee diferentes características que permiten ser utilizados de acuerdo con el tipo de análisis que se realizará con los datos que aporta cada información, siendo unos más recomendables para lo que se desea emplear.

Recuerda que...

El **gráfico de barras** es un conjunto de columnas o rectángulos, en los cuales cada columna se corresponde con una categoría. El ancho del rectángulo, así como la separación entre estos es uniforme. La altura del rectángulo está dada por la frecuencia absoluta que pertenece a la categoría que representa. Las barras pueden ser representadas en forma vertical u horizontal. Es recomendable para la comparación de datos organizados por categorías.

Ejemplo 1:

Las figuras 1.69 y 1.70 muestran gráficas de barras. Como puedes apreciar se puede establecer de manera rápida y sencilla, una comparación de la cantidad de accidentes ocurridos desde el 2012 hasta el 2017 y la cantidad de personas fallecidas por rango de edad.

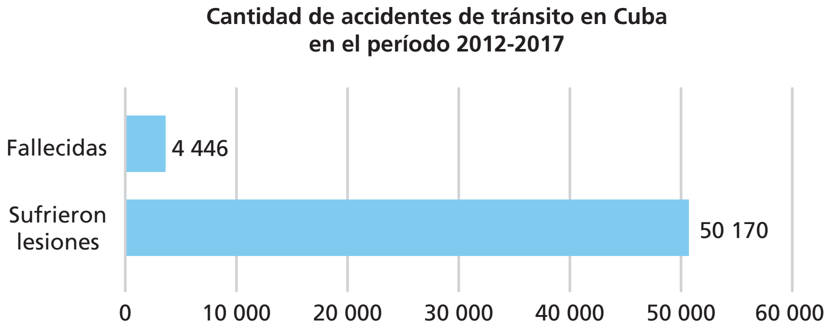


Fig. 1.69

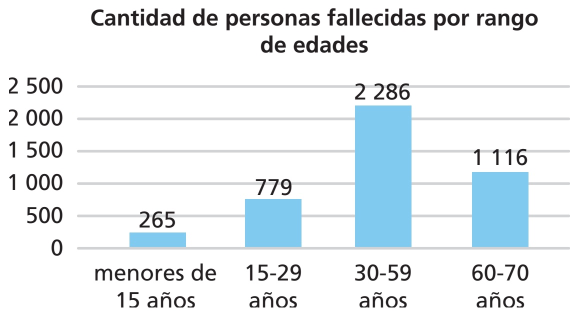


Fig. 1.70

Recuerda que...

El **gráfico circular o de pastel** es un círculo que está dividido en partes y cada porción representa una categoría cuyas amplitudes son proporcionales a la frecuencia relativa que le corresponde. Es recomendable para el análisis de las partes con respecto a un todo.

Ejemplo 2:

La figura 1.71 muestra el porcentaje de las principales causas de accidente de tránsito en Cuba durante la primera década del siglo XXI, en una gráfica circular.[93] Este gráfico te permite comparar fácilmente el porcentaje de las principales causas de accidente de tránsito, se puede observar que la circunferencia aparece dividida en varias porciones, a cada una le corresponde una causa diferente, la mayor porción pertenece a los accidentes por la pérdida del control del vehículo con un 38 %.

[93] Órgano de prensa *Juventud Rebelde,* 17 de octubre de 2010.

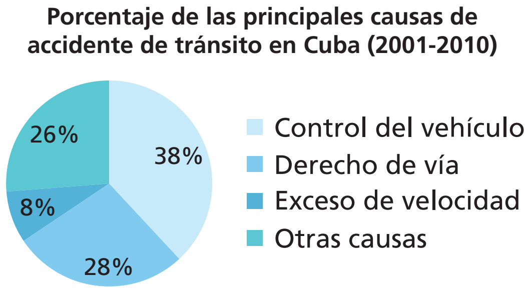


Fig. 1.71

Recuerda que...

El **gráfico poligonal** es una gráfica que representa la distribución de frecuencias que se obtiene por la unión de los segmentos que determinan los puntos coordenados de las categorías que aparecen en el eje horizontal con la frecuencia que se ubican en el eje vertical.

Es recomendable para el análisis de tendencias de un determinado fenómeno.

¿Sabías que...?

El gráfico poligonal es una de las gráficas más reconocidas a nivel mundial.

Ejemplo 3:

La figura 1.72 muestra una gráfica poligonal. Como puedes apreciar permite realizar análisis de tendencias del crecimiento de las instalaciones de los Joven Club.

A cada año se le hace corresponder la cantidad de Joven Club que se instalaron (el valor de la frecuencia) que se señala mediante un punto, que son unidos mediante segmentos que forman la línea poligonal. El crecimiento de las instalaciones de los Joven Club se evidencia en el comportamiento de esta línea poligonal.

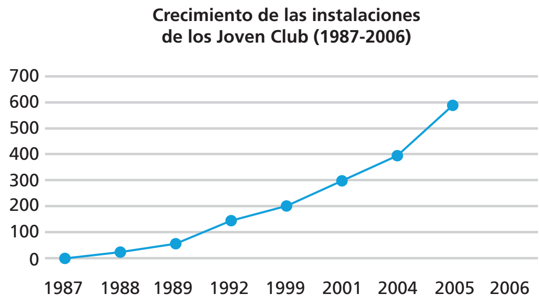


Fig. 1.72

Recuerda que...

Los **Pictogramas** son una forma de representar con el uso de figuras o símbolos referidos a los datos de la información dispuestos en filas o columnas colocadas de manera más atractiva.

Un símbolo o figura equivale a cierta cantidad de datos.

Es recomendable para visualizar de forma rápida la información.

Saber más

Los pictogramas[94] son, de alguna manera, un método de comunicación que se remonta a épocas inmemoriales, que se basa en la interpretación de señales que representan ciertas situaciones o recomendaciones. A menudo son dibujos simples, en colores básicos. Estas señales se pueden encontrar en muchos lugares que se suelen frecuentar, como los baños públicos, en donde se observa el cartel de una dama y un caballero, utilizado para indicar el baño para mujeres y el de hombres.

Su versión más antigua es llamada pintura rupestre, en dónde se representaban situaciones cotidianas, como el servir de las raciones de cerveza en los bares antiguos, cazar animales o criarlos y el humano adaptándose a la naturaleza.

Este tipo de comunicación ayudó a desarrollar la escritura, es decir, la simbología que utilizamos para poder ejercerla.

Mantienen ciertas categorías que los organizan dependiendo de sus funciones, así se ordenan en históricos, de escritura, sistema de conteo, además de diagramas y gráficos. Algunas de las señales más conocidas son las de seguridad o restricciones, que se pueden apreciar en las carreteras o lugares destinados al entretenimiento.

Ejemplo 4:

La figura 1.73 muestra un pictograma. Como puedes apreciar se visualiza fácilmente y de manera atrayente la información referente al estacionamiento de carros en diferentes horarios del día.

Carros estacionados en un parqueo

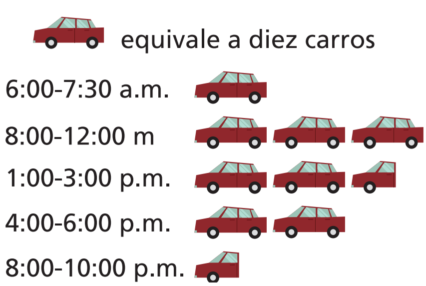


Fig. 1.73

[94] Google, 30 de octubre de 2011, disponible en: http://conceptodefinicion.de/pictogramas.

Cada dibujo representa la misma cantidad de carros. Si no está completa la figura de la leyenda que se utiliza, significa que se considera solo una parte de la cantidad asignada a esta, en este caso la mitad del símbolo son solamente cinco carros.

Ejercicios

(epígrafe 1.9.3)

1. En la gráfica de la figura 1.74 se representa la cantidad de pacientes (niños y adultos) relacionados con el accidente de Chernóbil atendidos en el Hospital Pediátrico de Tarará hasta el año 2002.[95]

Observa la gráfica y responde:

a) Identifica el tipo de gráfica.

b) Consideras adecuada la representación de estos datos en este tipo de gráfica. ¿Por qué?

c) ¿De qué lugar se recibió la mayor cantidad de pacientes?

d) ¿En cuánto superan la cantidad de niños atendidos de Rusia al número de adultos recibidos del mismo lugar?

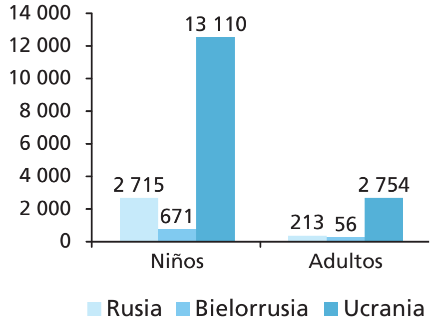


Fig. 1.74

e) ¿De qué lugar se recibió mayor cantidad de adultos? Calcula el promedio de niños atendidos entre los tres países.

2. La gráfica de la figura 1.75 muestra el comportamiento de la asistencia de los estudiantes de un grupo de séptimo grado que tiene una matrícula de 30 estudiantes durante los cinco primeros días de un mes.

a) Identifica el tipo de gráfica.

b) ¿Con qué finalidad consideras tú que se utilizó este tipo de gráfico para reflejar estos datos?

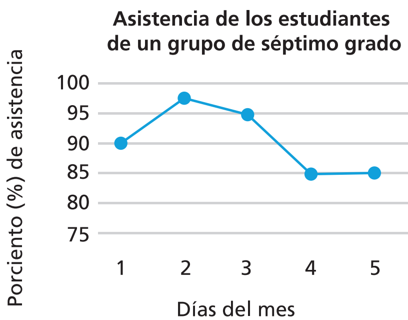


Fig. 1.75

[95] Órgano de Prensa *Granma,* 19 de septiembre de 2002.

c) ¿Cuál fue el día de mejor asistencia?
Calcula el tanto por ciento de asistencia alcanzado el noveno día, conociendo que ese día hubo una ausencia por enfermedad.
d) Investiga cuántos estudiantes faltaron a tu escuela durante esta semana y calcula qué tanto por ciento representa de la matrícula del centro.

3. En la gráfica de la figura 1.76 se muestra la cantidad de donaciones de sangre realizadas en un centro de trabajo.
a) ¿Qué nombre recibe el gráfico? Menciona sus características.
b) ¿En qué año se hizo la mayor cantidad de donaciones?
Si el total de donaciones es 39. Calcula el promedio de donaciones por año.

Donaciones de sangre en un centro de trabajo

4. En la recepción de una base de campismo aparece la gráfica como la de la figura 1.77, que informa la distribución (en porciento) de las 500 personas que asistieron un fin de semana, las cuales están identificadas en mujeres, hombres y niños. ¿Qué nombre le pondrías a la gráfica que ilustra los datos?

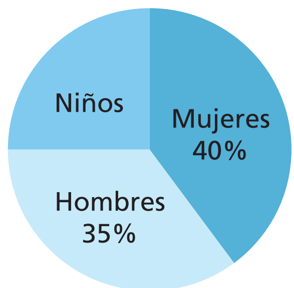


Fig. 1.77

4.1 Observa la gráfica y responde marcando con una X la respuesta correcta.
a) Se puede afirmar que:
1. ___ Asistieron a la base de campismo 25 niños.
2. ___ La minoría de las personas que asistieron a la base de campismo eran hombres.
3. ___ De cada 100 personas que asistieron a la base de campismo, 40 eran mujeres.

4. ___ Más de la cuarta parte de los que asistieron a la base de campismo eran niños.

b) Calcula la cantidad de hombres que asistieron a la base de campismo ese fin de semana

c) A continuación, se muestra una secuencia de acciones realizadas por el administrador para hacer el procesamiento de los datos que le permitió la construcción del gráfico.

1. Calcular el porcentaje de mujeres, hombres y niños que asistieron.

2. Cuantificar los datos, haciendo el conteo correspondiente.

3. Organizar los datos recopilados por categorías (mujeres, hombres y niños) .

4. Construir el gráfico tomando en consideración los cálculos realizados.

5. Recopilar los datos necesarios.

d) ¿Consideras tú que esa es la secuencia adecuada para hacer el procesamiento de datos? En caso negativo, propón una nueva secuencia tomando como referencia las acciones que se relacionaron anteriormente.

5. Un estudiante quiere saber las ventajas de presentar datos en forma gráfica y no en forma de tabla. ¿Cuál es tu respuesta?

1.9.4 Medidas de tendencia central: Media y moda

Investiga y aprende

Con el objetivo de calibrar la masa de unas piezas de repuesto para su producción a mayor escala, los técnicos del control de la calidad de una fábrica han realizado comprobaciones en una báscula industrial, tomando al gramo como unidad de medida. Las medidas de masa que comprobaron en las seis primeras piezas de la línea de producción de la fábrica son las siguientes:

46,2 g   50 g   48,7 g   51 g   49,3 g   50 g

¿Cuál es la masa media de las seis primeras piezas de repuesto de la primera línea de producción de la fábrica? ¿Explica cómo la calculaste? Seguramente para calcular la masa media, tuviste que hallar la media aritmética o promedio entre las masas registradas de cada pieza.

Recuerda que...

La media aritmética también llamada promedio o media es el valor característico de una serie de datos cuantitativos alrededor del cual se encuentran los datos, se obtiene sumando todos los datos cuantitativos y dividiendo la suma obtenida entre la cantidad de datos.

Si $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, n son los valores medidos de un conjunto de datos, entonces la media aritmética $\bar{x}$ se calcula mediante la ecuación: $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$

Ahora puedes determinar la masa media de las seis primeras piezas de repuesto de la primera línea de producción de la fábrica, pregunta de la situación inicial.

$$\bar{x} = \frac{49{,}2 + 50 + 48{,}7 + 51 + 49{,}3 + 50}{6} = \frac{298{,}2}{6} = 49{,}7$$

Respuesta: La media aritmética de la masa de las seis primeras piezas de repuesto es 49,7 g.

Esta medida de tendencia central es muy utilizada al analizar situaciones de la vida, por ejemplo, al calcular el promedio de: notas de los estudiantes de un grupo, del gasto de energía en una empresa, de personas que visitan diariamente un consultorio médico, entre otras.

Características de la media aritmética:

- Es de fácil comprensión.
- Solo puede calcularse cuando los datos son numéricos.
- Es única y fácil de calcular.
- Toma en cuenta todos los valores del conjunto de datos de forma individual.
- Si existen valores muy alejados de la mayoría de estos, entonces se distorsiona mucho y deja de reflejar la realidad.

Observa nuevamente el conjunto de datos de la situación inicial sobre la masa de las seis primeras piezas de repuesto. ¿Cuál es la masa más frecuente? Seguramente observaste que es 50 g. ¿Qué nombre recibe en el conjunto de datos?

La **moda** es el dato que más se repite o la categoría de datos que tiene mayor frecuencia absoluta en un conjunto de datos. Se determina por conteo.

Un conjunto de datos puede tener más de una moda y esto ocurre cuando son varios los datos que se repiten en igual cantidad, también puede no tener moda.

Ejemplo 1:

En un grupo de nueve estudiantes se realizó una encuesta de opinión sobre sus preferencias por las manifestaciones culturales. Tres de estos prefieren teatro; otros tres, la danza; dos la música y uno las artes plásticas. Como puedes apreciar existe mayor preferencia por el teatro y la danza, lo que te indica que existen dos datos que más se repiten con igual valor, lo que muestra que hay más de una moda.

Al mismo grupo se le preguntó sobre sus preferencias por la práctica del deporte y se comprobó que tres de estos prefieren el béisbol; tres el atletismo, y el resto, voleibol.

Como puedes apreciar no existe mayor preferencia por alguno de estos tres deportes, lo que te indica que no existe un dato que más se repita, lo que te indica que no hay moda.

Atención

Esta medida de tendencia central, la moda, es usualmente empleada para estudiar situaciones de la vida, cuando son utilizados datos cualitativos, pues no depende de cálculos como ocurre con la media aritmética.

La moda se puede utilizar, por ejemplo, para:

- Determinar la música preferida por los estudiantes de un grupo.
- Evidenciar la nota más frecuente que se obtuvo en una prueba aplicada en un grupo.
- Identificar el horario preferido por los pobladores de una ciudad en una encuesta.

Características de la moda:

- Es muy sencilla tanto para determinarla como para interpretarla.
- Se utiliza tanto para datos cuantitativos como cualitativos.
- No requiere cálculos, basta hacer conteos.
- Puede no existir o no ser única.

Ejemplo 2:

Los estudiantes de un grupo de séptimo grado participaron en la pasada Feria del libro, un estudiante representó en una tabla de distribución de frecuencia la cantidad de libros que compró cada uno de sus compañeros, como aparece en la tabla 1.18.

Tabla 1.18

Cantidad de libros comprados	F_i
Ninguno	3
2	8
4	6
5	2
6	4
8	2

¿Cómo determinar la media aritmética y la moda de los datos representados en la tabla anterior?

Para calcular la media aritmética, ¿procederías de manera similar a como calculaste la masa de las seis piezas de repuesto del problema propuesto al inicio del epígrafe 1.2.4?

Como puedes apreciar aquí, para cada dato (cantidad de libros) ya está determinada la frecuencia absoluta, por lo que la cantidad de sumandos se puede reducir haciendo uso del cálculo de los productos que se obtienen al multiplicar la cantidad de libros comprados por la frecuencia absoluta.

La suma de estos productos se divide por la cantidad total de observaciones y de esta forma obtenemos la media aritmética aplicando la expresión matemática siguiente:

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 \ldots + x_n \cdot f_n}{n}$$

Luego en este caso sería:

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 3 + 2 \cdot 8 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 8 \cdot 2 + 10 \cdot 1}{25}$$

$$= \frac{0 + 16 + 24 + 10 + 24 + 16 + 10}{25} = \frac{100}{25} = 4$$

El total de estudiantes del grupo que participaron en la feria fue 25, porque es la suma de las frecuencias absolutas que es igual a la cantidad total de datos; por lo que se realizaron 25 observaciones.

¿Cuál es la moda?

La categoría que más se repite, o sea, la de mayor frecuencia en la tabla es la que compraron dos libros, tiene frecuencia ocho. Se puede concluir que la moda es la categoría de estudiantes que compraron dos libros.

Atención

Para calcular la media aritmética o determinar la moda de datos sobre situaciones o fenómenos de la vida es recomendable realizar algunas preguntas tales como:

¿Cuál de las medidas caracteriza mejor el conjunto de datos? ¿Es posible calcular la media? ¿Con qué valores hay que operar para calcular la media? ¿Cómo se calcula la media? ¿Qué significado tiene este dato dentro del conjunto de datos? ¿Cuál es el valor más frecuente? ¿Qué información me aportan la media y la moda para la situación que estoy analizando? ¿Cómo explican la media y la moda la cualidad o características del mundo real que estoy estudiando? ¿Cuáles son los datos más cercanos a la media? ¿Cuáles son los más alejados de la media? ¿Cuáles datos tienen una frecuencia más baja?

Investiga y aprende

Se podrá determinar la moda y calcular la media aritmética utilizando alguna aplicación informática. ¿Cuál y cómo?

Ejercicios

(epígrafe 1.9.4)

1. En un grupo de 15 estudiantes seleccionados de una secundaria básica para hacer un análisis de las notas finales obtenidas por estos en sexto grado, en la asignatura Matemática, se registraron los resultados siguientes: 100; 70; 50; 90; 90; 80; 60; 60; 90; 70; 90; 60; 100; 50; 70.

1.1 Al hacer el análisis correspondiente se emitieron diferentes criterios. ¿Puedes ayudar a determinar el criterio más correcto? Selecciónalo marcando con una X.

a) ___ Todas las frecuencias absolutas son iguales.

b) ___ La frecuencia relativa correspondiente a la nota de 100 puntos es $\frac{10}{15}$.

c) ___ La media aritmética está alrededor de 75.

d) ___ La moda es 40.

e) ___ Hay seis estudiantes con notas iguales o superiores a 80 puntos.

1.2 Construye una tabla de frecuencia absoluta y relativa y analiza nuevamente las alternativas descritas en el 1.1. A qué conclusión puedes llegar.

2. Juan preguntó a sus compañeros del círculo de interés de Matemática la cantidad de hermanos que tiene cada uno y registró en la pizarra el resultado siguiente:

1 2 0 3 3 4 4 3 1 2 4 3 1 3 0

a) ¿Qué tanto por ciento del total de sus compañeros tiene más de dos hermanos?

b) Determina la media y la moda de la cantidad de hermanos que tienen los compañeros de Juan. Explica el procedimiento realizado.

3. La tabla 1.19 muestra la distribución de frecuencia de los puntos anotados por los jugadores, de un equipo de baloncesto, al finalizar un juego. Escribe verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

a) ___ El equipo está formado por 12 jugadores.

b) ___ El equipo anotó 55 puntos.

c) ___ La media de puntos anotados por jugador fue ocho.

d) ___ Más de la mitad de los jugadores del equipo anotó más de diez puntos.

e) ___ La moda de los puntos anotados es diez.

Tabla 1.19

Cantidad de puntos anotados	F_i
0	2
4	1
6	2
10	4
15	2
20	1

4. El gráfico en la figura 1.78 muestra la cantidad de estudiantes que participaron en los concursos de Matemática, Español, Historia y Biología de un municipio.
La mayor participación de los estudiantes fue en Matemática y la menor cantidad de participantes fue en Biología. Participaron más estudiantes en Español que en Historia.

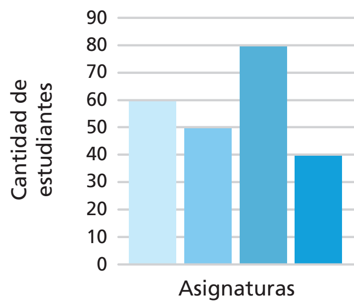


Fig. 1.78

4.1 Identifica el tipo de gráfica: _______________.

4.2 Marca con una X la respuesta correcta. Se puede afirmar que:

a) ___ Participaron en total 80 estudiantes.

b) ___ El 40 % de los participantes fue en Biología.

c) ___ La media de participantes por asignaturas está alrededor de 58.

d) ___ Participaron en Español 20 estudiantes menos que en Biología.

4.3 ¿Qué porcentaje de estudiantes participaron en Matemática?

4.4 ¿Cómo procederías, si tuvieras que hacer el análisis de los resultados de los estudiantes de tu grado en los concursos a nivel de escuela?

5. Un estudiante de secundaria básica analiza que el promedio de las notas de cuatro de las cinco asignaturas de Ciencias es 83 puntos. Determina la menor nota que puede obtener este estudiante en la prueba de la otra asignatura para tener 85 puntos de promedio.

6. Del periódico *Trabajadores*, con fecha del 14 de mayo de 2012, se extrajeron los datos siguientes sobre la actuación de seis de los equipos que han participado en las Ligas Mundiales de Voleibol.

Italia participó en 346 juegos y ganó 247, Bulgaria ganó 118 y perdió 80, Brasil participó en 361 y perdió 75, Cuba participó en 319, de estos, ganó 198 y perdió 121; Japón solo ganó 55 de los 230 en que participó y Francia, de los 209 juegos en que participó, ganó 96 y perdió 113.

a) Construye una tabla en la que los países queden organizados en forma descendente de acuerdo con la cantidad total de juegos en que participaron. ¿En qué tipo de gráfico representarías los datos? ¿Por qué?

b) Selecciona el país que obtuvo mejores resultados en las Ligas Mundiales de Voleibol. Fundamenta tu respuesta.

7. A continuación, se muestran las calificaciones de 15 estudiantes de dos grupos en una prueba de Matemática:

Grupo A

Estudiante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Calificación	80	90	46	80	50	90	90	70	80	70	80	60	90	80	60

Grupo B

Estudiante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Calificación	80	52	80	46	50	70	90	90	54	70	80	70	88	80	100

7.1 Construye una tabla de distribución de frecuencias para cada grupo que muestre los resultados de las calificaciones.

7.2 Determina:

a) La media aritmética de las calificaciones de los estudiantes de cada grupo.

b) La moda de cada grupo.

c) El porciento de estudiantes aprobados en cada grupo.

7.3 Selecciona el grupo que consideres con mejores resultados. Argumenta el porqué de tu selección.

7.4 ¿Qué gráfico consideras más idóneo para ilustrar los resultados de cada grupo?

8. En la tabla 1.20 se oculta información sobre las edades, en años, de un grupo de estudiantes de séptimo grado:

a) Completa la tabla 1.20.

b) ¿Cuál es el promedio de edades?

c) ¿Qué edad tiene la mayoría de los estudiantes?

d) ¿Qué gráfico consideras más idóneo para ilustrar la información que se muestra? ¿Por qué?

Tabla 1.20

Edad	F_i	f_i
11	7	0,2
12	21	
13		

9.* La media de cinco números es seis, si se elimina uno de los cinco números, la media se convierte en siete. ¿Cuál es el número eliminado?

10.* ¿Existirá algún conjunto de datos en el que coincidan numéricamente la media aritmética y la moda? Ejemplifícalo.

Ejercicios del capítulo 1

1. Un estudiante de séptimo grado tiene que resolver 30 problemas como parte de su preparación para el Concurso Municipal de Matemática. Un día resuelve $\frac{3}{10}$ y al día siguiente $\frac{4}{7}$ del resto. ¿Cuántos problemas le faltan por resolver para completar parte de su preparación?

2. En un concurso literario hay un premio en metálico para los tres primeros lugares, con un total de 4 500 CUP. El segundo lugar del concurso debe recibir $\frac{2}{9}$ del total; el tercer lugar $\frac{3}{5}$ de lo recibido por el segundo y el primer lugar lo restante. ¿Cuánto recibirá cada ganador del concurso?

3. Aprobaron el examen final de Matemática en un grupo de séptimo grado de una secundaria básica 28 estudiantes; esto representa $\frac{7}{8}$ de la matrícula del grupo, $\frac{2}{23}$ de la matrícula de la secundaria básica y $\frac{4}{11}$ de los estudiantes suspensos.

a) ¿Cuál es la matrícula del grupo?
b) ¿Cuántos aprobados tiene la secundaria básica?
c) ¿Qué porciento representan los aprobados de la matrícula total?
d) Redacta una posible pregunta sobre los datos de esta secundaria básica.

4. La media del precio en CUP de cuatro productos es 50,40 y la media de otros seis productos diferentes, es 40,30.
a) ¿Cuánto suma el precio de los cuatro primeros productos y cuánto el de los otros seis?
b) Calcula el precio medio del total de productos. Fundamenta, el porqué lo hiciste de ese modo y no de otro.

5. La masa corporal en kilogramo de nueve niños es:
14,8; 21,1; 15,5; 18,2; 20,0; 17,1; 19,9; 16,4; 19,0

a) ¿Cuál es la moda? ¿Por qué?

b) Si incluimos la masa de otro niño que es de 49,8 kg, ¿sería la media aritmética un buen representante de la masa de los 10 niños?

6. En una secundaria básica se aplicó una encuesta en un grupo de estudiantes escogidos al azar para conocer su preferencia por los programas de televisión: deportivos (D), musicales (M), infantiles (I), culturales (C) y noticieros (N). Para lo cual se registraron los datos siguientes:

M M M D D I N N I M C C D N I I
M D M D D C M C C M D D I I

a) Construye una tabla de frecuencias absoluta y relativa.

b) ¿Qué porcentaje de estudiantes tienen preferencia por los programas culturales?

c) ¿Cuál es el programa de menor preferencia?

d) Determina la moda.

e) ¿Es posible calcular la media aritmética? Si es posible, calcúlala y si no es posible, fundamenta el porqué.

f) Según tu opinión, di qué tipo de gráfica es más representativa para ilustrar los resultados de la encuesta.

g) Investiga en tu grupo de clase con tus compañeros sus preferencias por los programas televisivos y compara los resultados con los del estudio realizado. Indaga en las causas que originan el programa de menor preferencia.

7. A continuación, aparecen representados una tabla (tabla 1.21) y un gráfico (fig. 1.79), que expresan los datos (en milímetro) de la cantidad de agua caída (como promedio), en una ciudad del Caribe durante los doce meses de un año.

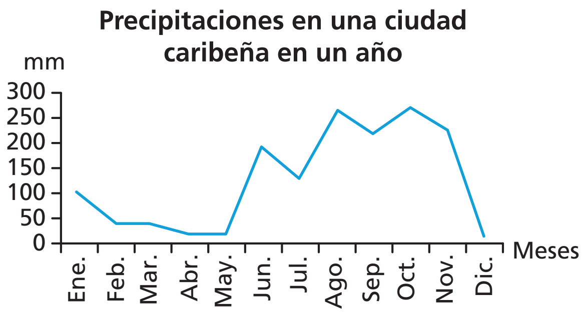


Fig. 1.79

Analiza la tabla y el gráfico que la acompaña en la figura 1.79.
Emite tu criterio sobre el comportamiento de las precipitaciones durante el año que se muestra.
¿Qué información te resultó más provechosa?

Tabla 1.21

Mes	Precipitación (mm)
Enero	101
Febrero	43
Marzo	41
Abril	20
Mayo	22
Junio	193
Julio	130
Agosto	264
Septiembre	220
Octubre	270
Noviembre	225
Diciembre	14

8*. Al calcular la media aritmética de un conjunto de valores, un estudiante planteó para el cálculo la operación combinada siguiente: $\dfrac{-3 \cdot 3 + 5 \cdot (-4)}{8}$.

9. Escribe el conjunto de datos y halla su moda.
Deborah Andollo (1967-) es una deportista cubana especializada en la natación e instructora de buceo. Es la única mujer en el mundo capaz de bajar a cuerpo libre a profundidades cercanas a los – 74 m (con respecto al nivel del mar), gracias a su gran capacidad pulmonar (6 L) y a su tenacidad.

Aquí algunas de sus excelentes marcas en la modalidad de cuerpo libre:[96]

Maravillas de la novia de Neptuno

Profundidad alcanzada (m)	Fecha	Cuba
– 50	mayo de 1992	Varadero
– 52	mayo de 1993	Varadero
– 60	noviembre de 1995	Isla de la Juventud
Récord mundial absoluto		
– 74	julio de 2001	Isla de la Juventud

a) ¿Podremos afirmar que a medida que ha pasado el tiempo han sido mejores las marcas? ¿Por qué?

b) Qué gráfico estadístico utilizarías para ilustrar esta información?

10. Sean:

$A = \dfrac{\sqrt{64,96} - 9}{2}$, $B = 10^3 \cdot \dfrac{0,34^{25} \cdot 0,34^{27}}{0,34^{50}} + 4$, $C = -6,25 + \sqrt[3]{2\,197} : 4$, $D = \dfrac{9}{40}$

a) Halla los valores de *A, B y C*.

b) El conjunto formado por *B* y *D*, ¿es un subconjunto del conjunto de los números enteros? ¿Por qué?

c) *C*, ¿es el menor de los valores hallados? Justifica tu respuesta.

d) Escribe en notación tabular un conjunto F formado por los opuestos de los valores de *B* y *D*.

e) ¿Cuántos números racionales hay entre el mayor y el menor número? ¿Cuál es la diferencia entre esas cantidades?

11. En su página deportiva, el semanario *Orbe* del 24 al 30 de marzo de 2012 dio a conocer que el pibe argentino Lionel Messi, del FC Barcelona, es el mejor futbolista, pues con solo 24 años, suma 234 goles con el FC Barcelona. El desglose de esa cantidad de goles es así: 153 en la Liga Española, 19 en Copa del Rey, 49 en la Liga de Campeones de Europa, 8 en Supercopa de España, 4 en Mundiales de Clubes, y 1 en Supercopa de Europa. ¿Seguirán siendo estos sus logros?

Mónica, monitora de Matemática, aprovechó esta información para motivar a sus compañeros para la realización de ejercicios de operaciones combinadas, este fue el ejercicio que propuso:

¡Calcula y confirma!

¡Lo que ha hecho el mejor!

[96] Google, 3 de marzo de 2012, disponible en: es.wikipedia.org/wiki.

Evento	Número de goles
Liga Española	$5^3 - 112 : \left(-3,76 + 0,12 \cdot (-2)\right)$
Copa del Rey	$\sqrt[3]{-27} + (-5)^2 + 8\frac{4}{7}\left(\frac{7}{15} - \frac{9}{20} - \frac{11}{30}\right)$
Liga de Campeones de Europa	$\sqrt{1024} + 0,85 : \sqrt[3]{0,000\,125}$
Supercopa de España	$\sqrt{81} - 10 \cdot \sqrt{0,01}$
Mundiales de Clubes	$-\left(\frac{4}{21}\right)^{-1} : \left(-\frac{7}{16}\right) - 2^3$
Supercopa de Europa	$-0,15 \cdot 5^2 + 5\sqrt{5^{-2}} + 3,75$

a) Analiza si cumple los dos propósitos que persigue.
b) Elabora un ejercicio como este con récords del béisbol cubano.

12. Expresa el número uno en un ejercicio matemático en el que aparezcan todos los números naturales del cero al nueve una sola vez. Hazlo de cinco maneras diferentes.

13. Imagina que eres el encargado de crear un anuncio de oferta de rebaja de un producto, ¿te auxiliarías de un número negativo? ¿Por qué?

14. El ejercicio que a continuación te proponemos tiene que ver con tu edad en el momento que lo realices, veamos por qué:

Problemas	Condición
14.1 Este es el titular de una noticia del órgano de prensa *Granma* del 30 de junio de 2011. Costo de Estado Unidos en guerras alcanzará los 3,7 millones de millones de dólares. a) Expresa en notación decimal y exponencial la cifra a la que se hace referencia. b) Investiga con tu médico de familia, el precio de un litro de sales de rehidratación oral y determina cuántos litros pudieran adquirirse con lo que se destinó a conflictos bélicos en Estado Unidos.	Si tienes 11 años.

14.2 Alrededor de **6 600 000 000** de dólares destinados por la Casa Blanca a fondos para la reconstrucción de Iraq, no se sabe hoy a dónde fueron a parar. Se considera, que la "pérdida" es el mayor robo de fondos de la historia de Estados Unidos de América. Para más información consulta el órgano de prensa *Granma* del 14 de junio de 2011.

Si tienes 12 años.

a) Expresa en notación científica la cantidad que aparece en negrita.

b) Indaga sobre el gasto de la construcción de un edificio y calcula qué cantidad pudieron construirse con ese fondo.

14.3 Israel pedirá **veinte mil millones** de dólares adicionales a Estados Unidos para ayuda militar y el presidente estadounidense Barak Obama indicó que podría resultar sensato para Washington invertir esta cantidad para mejorar la seguridad de Israel para la próxima generación.

Si tienes 13 años o más.

a) Escribe en notación decimal y científica la cantidad que aparece en negrita.

b) Investiga si con esa cifra se pudieran comenzar a resolver problemas medioambientales de nuestro continente.

15.* Esta actividad es una propuesta de los integrantes del círculo de interés matemático-pedagógico "Diofanto de Alejandría".[97]

Se basa en dos dados, que tienen el desarrollo que se muestra en la figura 1.80:

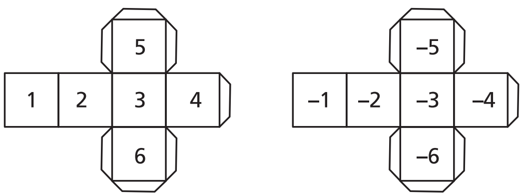


Fig. 1.80

[97] Diofanto de Alejandría (325-409), matemático griego, el que por su originalidad y sus aportaciones es considerado el padre de los algebristas modernos, en su notabilísima obra sobresale el inicio del empleo sistemático de símbolos para indicar números negativos.

Imagina que los lanzas al unísono y que todas las tiradas son diferentes.
a) ¿Qué posibilidad hay de que la suma algebraica de las cantidades de las caras visibles sea un número no positivo?
b) ¿Qué porcentaje de las potencias de base negativa, son números negativos?

16. Selecciona una noticia, artículo periodístico u otro tipo de texto relacionado con algunos de los contenidos tratados en el capítulo y elabora y responde un ejercicio matemático, entrega el trabajo realizado a tu profesor(a) con los datos siguientes:
a) Tus nombres, apellidos y número de lista.
b) Puntuación alcanzada en la última evaluación de Matemática que hiciste.
c) Fuente bibliográfica de adquisición del conocimiento utilizada.
d) Lugar en el que la encontraste.
e) Actividad humana con la que está más relacionada.
f) Motivo por el que te llamó la atención.
g) Tema matemático con el que más se vincula.

17. Escoge una de las ideas siguientes y confecciona un cartel que ilustre tu mensaje.
a) Los números racionales de belleza el mundo visten.
b) Vivimos rodeados de números racionales.
c) Más que útiles son los números racionales.

18. La tabla 1.22 muestra los resultados del medallero de los juegos olímpicos Tokio 2020.

Tabla 1.22 Medallero juegos olímpicos Tokio 2020

País	Oro	Plata	Bronce
Estados Unidos	39	41	33
China		32	18
Japón	27	14	17
Reino Unido	22	21	22
ROC	20	28	23

País	Oro	Plata	Bronce
Australia	17	7	22
Países Bajos	10	12	14
Francia	10	12	11
Alemania	10	11	16
Italia	10	10	
Canadá	7		11
Brasil	7	6	8
Nueva Zelanda	7	6	7
Cuba	7	3	5
Hungría	6	7	7

18.1 Completa los espacios en blanco que aparecen en la tabla con el análisis de la información siguiente:

a) El total de medallas doradas de China supera en 28 medallas a las de oro de Francia.

b) El número de medallas de bronce alcanzadas por Italia es la adición entre el número de medallas de plata de Estados Unidos con el opuesto del número de medallas de plata del Reino Unido.

c) La cantidad de medallas de plata obtenidas por Canadá representa el 25 % del total de medallas logradas por este país.

18.2 ¿Cuál es la cantidad de medallas de oro que más se repite?

18.3 Haciendo uso de los recursos informáticos construye un gráfico de barras que ilustre los resultados de las medallas de oro de los 15 países.

18.4 Calcula la media aritmética de las cantidades de medallas de bronce obtenidas por los quince países que muestra la tabla.

Reflexiona sobre lo aprendido

1. ¿Qué conjuntos numéricos son subconjuntos del conjunto de los números racionales?

2. ¿Qué operaciones sabes hacer con números racionales?

3. ¿Conoces los pasos que debes seguir para resolver un ejercicio de operaciones combinadas de números racionales? ¿Cuáles son?

4. ¿Sabes confeccionar una tabla de distribución de frecuencias? Explica cómo se construyen.

5. ¿Cómo calcular la media aritmética y determinar la moda cuando los datos están agrupados en una tabla de frecuencias?

6. ¿Qué información te aportan la media aritmética y la moda al hacer el análisis de un conjunto de datos?

7. ¿Por qué es importante dominar el procedimiento general para el procesamiento de datos?

Ponte a prueba

1. Di cuáles de las proposiciones siguientes son verdaderas o falsas. En caso de ser falsas justifica por qué lo son.
a) ___ El número – 5 pertenece al conjunto de los números naturales.
b) ___ El conjunto formado por los números – 3,2; cero y cuatro está incluido en el conjunto de los números enteros.
c) ___ Toda expresión decimal infinita periódica, representa un número racional.
d) ___ La operación de extracción de raíz cuadrada siempre tiene solución en el conjunto de los números racionales.
e) ___ La intersección del conjunto de los números fraccionarios y el conjunto de los números enteros es el conjunto de los números naturales.
f) ___ El módulo o valor absoluto de todo número racional siempre es un número racional positivo.
g) ___ La frecuencia absoluta de un dato es el número de veces que aparece el dato repetido.
h) ___ La media aritmética en un conjunto de datos siempre es el valor central de ese conjunto.
i) ___ La moda siempre existe en un conjunto de datos.

j) ___ La división de dos números enteros diferentes de cero siempre es un número entero.

k) ___ Una potencia de base negativa y exponente par siempre es un número positivo.

2. Gracias al singular método de alfabetización "Yo sí puedo" hasta mediados de diciembre de 2011, cinco millones setecientos treinta y seis mil seis personas de 28 países aprendieron a leer y a escribir. Alrededor de un 83 % de ellos son del continente Las Américas.

Desde la 1a. hasta la 65a. teleclase que lo conforman, sienten los estudiantes todo el infinito amor que han puesto sus creadores, de ahí que todos dicen sí a la valiosa oportunidad que se les brinda.[98]

Completa los espacios en blanco de forma tal que se obtenga una proposición verdadera para cada caso:

La cantidad de personas alfabetizadas es una cantidad ________________, que escrita con números es ____________________, el significado de la fracción que aparece es _______________ e indica que aproximadamente ____ de cada 100 alfabetizados son americanos 1a. y 65a. representan ___________.

3. La profesora Salomé para explicar los resultados de su estrategia de formación vocacional hacia los técnicos medios y obreros calificados de la familia agroindustrial, en un grupo de 35 estudiantes de séptimo a noveno grados, se auxilió del gráfico de la figura 1.81. Obsérvalo y responde:

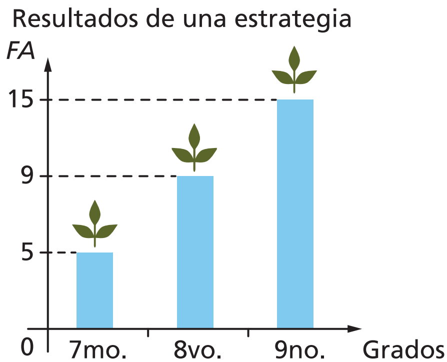


Fig. 1.81

[98] Órgano de prensa *Tribuna de La Habana*, 11 de diciembre de 2011.

a) ¿Qué porcentaje de la matrícula prefería estas especialidades en séptimo?, ¿qué parte del grupo en noveno?
b) El 80 % de los estudiantes que se decidió a estudiar estas carreras fueron varones, ¿cuántos son?
c) ¿Qué otro tipo de gráfico le recomendarías a la profesora para ilustrar su explicación?
d) ¿Crees que fue efectiva la estrategia? ¿Por qué?

4. Un profesor propone analizar la calidad de las notas obtenidas por 15 de sus estudiantes en Matemática y para esto las registra en la pizarra de la forma siguiente:

10; 6; 5; 9; 9; 9; 6; 6; 9; 7; 9; 6; 10; 5; 7

4.1 Pide a los estudiantes que analicen los datos.

- Talía dice que el 2 % de la cantidad de estudiantes obtuvo notas de diez.
- Luis dice que la moda es cinco.
- José responde que la moda es nueve y que la media está muy próxima a 7,5.
- Beatriz plantea que más de seis estudiantes tienen notas entre nueve y diez puntos y que el promedio de las notas obtenidas es ocho.
  ¿Cuál de los cuatro estudiantes tiene la razón? Marca con una X tu selección.

  a) Beatriz b) ___ Talía c) ___ José d)___ Luis

4.2 ¿Podrías explicar en qué consistió el error de cada uno de los otros tres estudiantes?

4.3 Si a ti el profesor te solicitara hacer el análisis de las notas, ¿qué acciones iniciales realizarías?

4.4 Construye una tabla de frecuencias absoluta con los datos dados.

4.5 Si reemplazas dos de las notas de nueve (cada una de estas) por ocho y una de las notas de siete por nueve. ¿Cuál de las posibles respuestas seleccionarías? Márcala con una X.

a) ___ Se alteran la media y la moda.
b) ___ Se altera la media y no la moda.
c) ___ No se altera la media y sí la moda.
d) ___ No se alteran ni la media y ni la moda.

5. Sean:

$X = -1{,}2^2 \cdot 23 + 0{,}81$

$Y = \sqrt[3]{-64} : 2 + 1515 : (-15)$

$W = 35\ \%$ de 40

$$T = \frac{\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{50}\right)^{8} : (-0{,}5)^{398} + 0{,}75}{(-0{,}2)^3}$$

Halla los valores de *X, Y, W* y *T*.

a) ¿Cuántos números enteros hay entre *T* y *Y*?

b) ¿Cuántos números enteros positivos hay entre *X* y *W*?

c) ¿Cuál es el antecesor de *Y*?

d) ¿Cuál es el sucesor de *T*?

e) Ubica los cuatro valores en la recta numérica y ordénalos de mayor a menor.

f) ¿Cuántas centésimas tiene el opuesto del valor de *X*?

g) ¿Cuál es el valor absoluto de *H* si *H* = *X* + *Y* – *W* – *T*?

h) ¿Cuáles son las tres quintas partes de *T*?

CAPÍTULO 2

Geometría plana y cuerpos

¿Qué aprenderás en este capítulo sobre geometría? Piensa que muchísimo, siempre es así. Confirmarás las ideas de un prestigioso sabio de la Antigüedad llamado Platón,[1] sobre la importancia de la geometría, porque los conocimientos geométricos están presentes en prácticamente toda la vida del hombre; él hizo escribir en la entrada de su academia[2] la inscripción, en su idioma, claro está, que aparece en la figura 2.1.

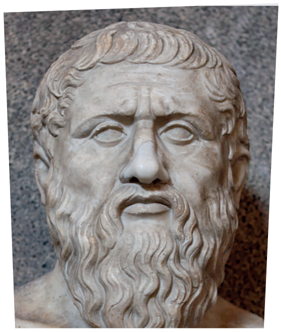


Fig. 2.1

De la historia

Para este sabio la geometría era muy importante: "[...] una ciencia de la cual ningún arte ni ningún conocimiento pudiera prescindir [...]", por eso sus discípulos dedicaban mucho tiempo a su estudio.

La *geometría* es una rama de la *matemática* que nació en Egipto y Babilonia. En un primer momento, agrupó conocimientos sobre medición de tierra (Geo: tierra y metría: medida), porque las crecidas del río Nilo borraban los límites

[1] Platón, matemático y filósofo griego de la Antigüedad. Búsqueda *web zaratustraenequilibrio.blogspot.com.*

[2] La Academia, óleo de Rafael pintado en 1509 sobre la academia de Platón.

de los terrenos de los egipcios y fue necesario buscar procedimientos para determinar nuevamente qué parte correspondía a unos y a otros.

Con el tiempo se llamó así a todos los conocimientos relacionados con las formas geométricas y sus propiedades. Surgen otros motivos para estudiar geometría: el cálculo de ángulos, distancias, áreas, volúmenes, la trayectoria de los cuerpos celestes ¡y hasta el pronóstico de los movimientos de los astros! De gran importancia, para los viajes por mar y tierra. ¡Es increíble que desde hace más de 2 000 años se hicieran estos cálculos con admirable precisión!

La acumulación de conocimientos geométricos tomó carácter de ciencia, cuando el hombre comenzó a pensar en su fundamentación, a partir de la civilización griega en el siglo VII a. n. e. con Thales de Mileto, que dedujo importantes relaciones geométricas. En el año 1637 el matemático francés René Descartes, inició la modernización de la geometría clásica. Pero hasta 1900 no se contó con una fundamentación rigurosa de la geometría con los trabajos de David Hilbert.

En este capítulo podrás comprender los conceptos de ángulo, polígono, triángulo, en fin, muchas propiedades de las figuras planas y de los diferentes tipos de movimientos del plano, pero también, de algunos cuerpos geométricos. Te deseamos muchísimos éxitos en su estudio.

2.1 Figuras planas

Reflexiona

Karla y Melisa, estudiantes de séptimo grado, van a estudiar a casa de Fabiola por la tarde y deben llegar allá, a partir de un croquis, que ella les entregó.

Observa el croquis de Fabiola en la figura 2.2. ¿Cómo representó en este las calles, las casas, los edificios y las personas?

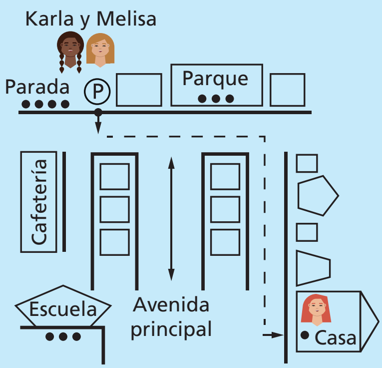


Fig. 2.2

Estarás de acuerdo en afirmar que utilizó diferentes figuras planas para representar en la hoja de papel objetos que nos rodean.

De igual forma, cuando miras a tu alrededor, puedes identificar en objetos de la vida cotidiana, diferentes figuras geométricas del plano y del espacio.

2.1.1 Figuras planas fundamentales y sus propiedades

Una figura es todo conjunto de puntos. Las figuras se pueden agrupar en figuras planas y cuerpos geométricos. Las figuras planas tienen todos sus puntos en el mismo plano y los cuerpos geométricos no tienen todos sus puntos en el mismo plano. ¿Cuáles son las figuras planas que se utilizan en el croquis de Fabiola? ¿Recuerdas las propiedades que estas figuras cumplen? Vamos a profundizar en el estudio de diferentes figuras planas, comenzaremos por las denominadas: *conceptos primarios* o representaciones básicas de los objetos de la realidad: plano, punto y recta.

Plano

Al pensar en un plano te representas una hoja de papel que se extiende ilimitadamente por cada uno de sus lados (fig. 2.3). El plano está formado por infinitos puntos y por supuesto, contiene infinitas rectas. Los planos se denotan por letras griegas: α, β, γ,… estas son las tres primeras del alfabeto griego antiguo. Se leen: alfa, beta, gamma.

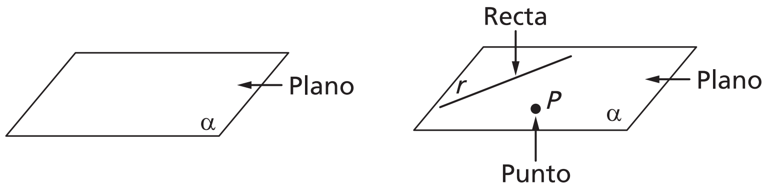


Fig. 2.3

Ejemplo 1:

Una página de tu libro de Matemática; la hoja de papel donde Fabiola hizo el croquis para que sus amigas supieran cómo llegar hasta su casa, que aparece en la figura 2.2, pueden también identificarse como un plano sobre el cual se dibujan puntos, rectas y otras figuras.

Punto

Para ilustrar este concepto debes imaginarte, el orificio que hace una aguja al perforar una hoja de papel. Los puntos se denotan por letras mayúsculas del alfabeto. En la figura 2.4, puedes apreciar los puntos: *A, C,* …, *F, M,* …

Fig. 2.4

Ejemplo 2:

En el croquis de la figura 2.2, identificamos puntos, en los lugares de partida y llegada del recorrido hacia la casa de Fabiola; en la representación de personas que permanecen en la parada del ómnibus, en la escuela y en el parque.

Recta

Las rectas están formadas por puntos, pero te has preguntado, ¿cuántos puntos están contenidos en una recta?

Verás que por muchos puntos que sitúes en esta, siempre encontrarás otros más que no has señalado. Esto significa que la recta es un conjunto infinito de puntos.

Puedes tener una idea de esta, si la comparas con un hilo bien tenso que se prolonga indefinidamente por sus dos extremos. En la figura 2.5, puedes apreciar que las rectas se denotan con letras minúsculas del alfabeto: *a, b, …, r, s, t, …* o por dos puntos de esta.

De esta forma decimos, la recta *r* o la recta *AB*.

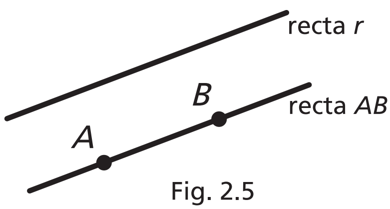


Fig. 2.5

Ejemplo 3:

Identificamos rectas en el croquis de la figura 2.2, por ejemplo, en la representación de las calles, aunque estas solo muestran una parte de la recta. Las calles están delimitadas; tienen inicio y fin en un determinado lugar, mientras que en geometría se considera que una recta no tiene punto inicial ni punto final.

Para realizar dibujos el hombre ha confeccionado diversos instrumentos, como la regla y el cartabón que se emplean en el trazado de rectas.

¿Sabes utilizar estos instrumentos? Vamos a usarlos en construcciones muy sencillas, las cuales te indicamos a continuación. Realicemos cada una en dibujos separados:

- *Traza una recta y denótala por* t*. Representa en el plano dos puntos que pertenezcan a la recta* t*, denótalos por* A *y* B*. ¿Puedes representar también dos puntos* C *y* D *que no pertenezcan a la recta* t*?*
- *Ubica ahora un punto* P *en el plano, ¿cuántas rectas puedes trazar que pasen por este punto?*
- *Considera dos puntos diferentes* M *y* N*, ¿cuántas rectas puedes trazar que contengan a estos dos puntos?*
- *Traza una recta m, representa dos puntos* E *y* F *que pertenezcan a esta, sitúa un punto* G *que se encuentre entre* E *y* F*. ¿Podrías ubicar otros puntos entre* E *y* F*? ¿Cuántos?*

Al analizar estas construcciones, podrás percatarte de algunas propiedades de los puntos y las rectas en un plano que son muy intuitivas, prácticamente evidentes. Por ello son consideradas axiomas, ya desde los tiempos de Euclides de Alejandría.

De la historia

¿Quién fue Euclides? (fig. 2.6)

Facsímil de una publicación de *Los Elementos*[3]
Fig. 2.6

Euclides (325-265 a. n. e.) fue un matemático griego. Pocos datos de su vida han llegado a nuestros días, salvo que vivió en Alejandría (actualmente en Egipto). Pero, su principal obra: Los Elementos*, inmortalizó su nombre y fue utilizada con apenas modificaciones durante más de 19 siglos. Todavía nos referimos a la geometría clásica como geometría euclidiana, en su honor.*

Los Elementos *tiene 13 tomos y en ellos se recopiló, organizó y argumentó todos los conocimientos geométricos que se tenían hasta ese momento. Entérate de que los seis primeros tomos se refieren a la geometría plana. En ellos se escribieron muchas propiedades que vamos a estudiar a continuación y consideraremos axiomas, en el sentido de que las aceptamos sin demostración y que son prácticamente evidentes.*

[3] *H. Wussing:* Conferencias sobre historia de la matemática*, 1989.*

Propiedades de los puntos y la recta

Un punto pertenece o no a una recta

Ejemplo 4:

En la figura 2.7 los puntos *A* y *B* están en la recta *t* y los puntos *C* y *D* no están en la recta *t*.

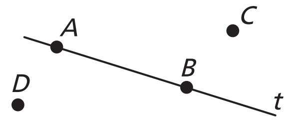


Fig. 2.7

Por un punto pasan infinitas rectas

Ejemplo 5:

En la figura 2.8 por el punto *P* pasan las rectas: *a, b, c*,…

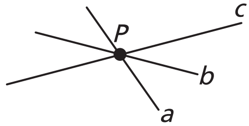


Fig. 2.8

Dos puntos determinan una única recta

Ejemplo 6:

En la figura 2.9 los puntos *M* y *N* determinan la recta *MN*, eso significa que, si pasa por estos otra recta, esa es igual a la recta *MN*.

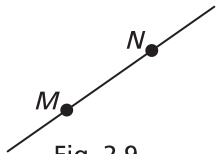


Fig. 2.9

Dos rectas si se cortan lo hacen en un único punto, o sea, determinan un punto

Ejemplo 7:

En la figura 2.10 las rectas *a* y *b* al cortarse determinan el punto *P*.

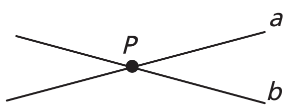


Fig. 2.10

La recta es ilimitada, no tiene ni primero ni último punto y tiene infinitos puntos

Ejemplo 8:

En la figura 2.11, en la recta *r*, existe otro punto *A*, antes del punto *B* y después de *B*, otro punto *C* y después otro punto *D* y así, sucesivamente.

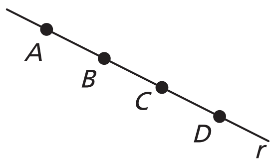


Fig. 2.11

Entre dos puntos cualesquiera de una recta, siempre existe un tercer punto, esta propiedad se denomina la densidad de la recta

Ejemplo 9:

En la figura 2.12 los puntos *G*, *H*, *I*…, están en la recta *m*, entre *E* y *F*.

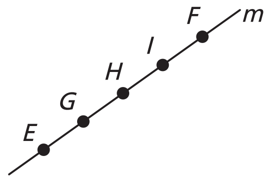


Fig. 2.12

¿Sabías que...?

La posición de barcos y aviones, tanto en aeropuertos como en ejercicios militares, se determina en la actualidad por modernos medios de cómputo, aunque esto está basado en el viejo principio básico de ubicar puntos en planos cuadriculados (fig. 2.13).

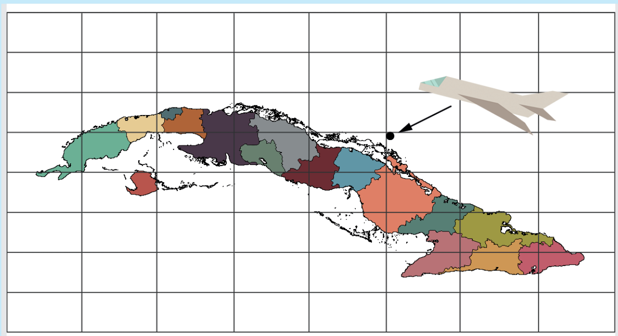


Fig. 2.13

Semirrecta

Observa en el croquis de Fabiola de la figura 2.2, que a partir de la parada puedes caminar en la dirección de la calle del parque, en dos sentidos opuestos, que allí se representan con dos saetas más oscuras (fig. 2.14):

– Uno, hacia la izquierda, en busca de la calle de la cafetería.
– Otro, hacia la derecha, buscando la calle que conduce a la casa de Fabiola.

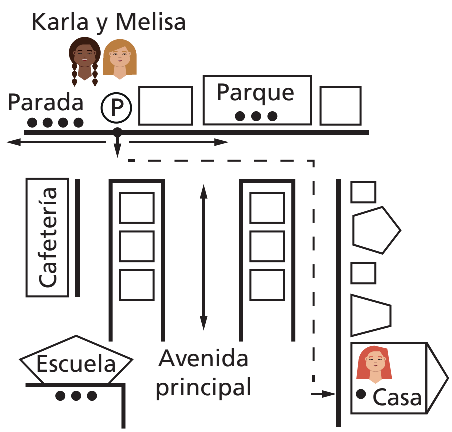


Fig. 2.14

Ubiquemos un punto *P* sobre una recta cualquiera *AB*, como se muestra en la figura 2.15. Fíjate que el punto *P* divide a la recta en dos subconjuntos o partes, según la recta se recorra hacia la izquierda o hacia la derecha, respecto a este punto. Podemos decir que este punto divide a la recta en dos conjuntos de puntos.

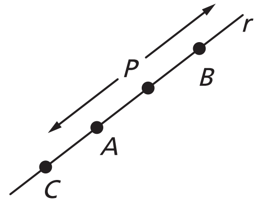


Fig. 2.15

¿Qué nombre recibe cada uno de ellos?

Definición de semirrecta:

Un punto cualquiera determina a cada uno de sus lados en una recta, dos conjuntos de puntos: los puntos que están a su izquierda y los que están a su derecha. Cada uno de esos conjuntos se llama **semirrecta o rayo de origen en ese punto.** Ambas semirrectas son entre sí, **semirrectas opuestas de origen en dicho punto.** Todos los puntos de una semirrecta están en la recta del mismo lado respecto a su origen. El punto de origen no pertenece a ninguna de las dos semirrectas, solamente las determina, porque este no puede estar en ninguno de los lados que él mismo determina. Se denota una semirrecta por dos puntos: su origen y uno de sus puntos.

Ejemplo 10:

En la figura 2.15 el punto *P* determina a cada uno de sus lados en la recta *r*, dos semirrectas de origen *P*. que denotamos *PA* y *PB*, ambas son entre sí, semirrectas opuestas. *PA* contiene todos los puntos de *r* que están en el lado de *P* que está *A*.

Semiplano

Observa en la figura 2.16 que la cafetería y la casa de Fabiola, están en regiones diferentes del croquis, respecto a la avenida principal. Te darás cuenta que esta avenida divide al plano del croquis en dos semiplanos. Una idea de semiplano la tendrás en cada parte de una hoja de papel cuando la doblas.

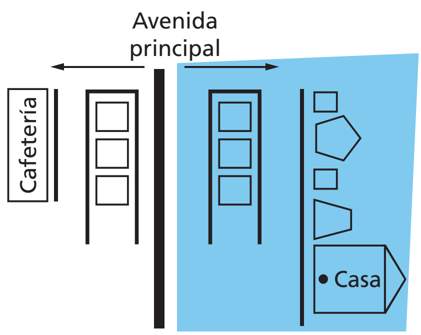


Fig. 2.16

Definición de semiplano:

Una recta cualquiera determina en el plano dos conjuntos de puntos, a un lado u otro de esta. Cada uno de estos conjuntos de puntos se llama **semiplano de borde en esa recta.** Ambos semiplanos son entre sí, **semiplanos opuestos de borde en dicha recta.** Todos los puntos de un semiplano están del mismo lado respecto a su borde. El borde no pertenece a ninguno de los dos semiplanos, solamente los determina. Se denota cada semiplano por tres puntos, los dos primeros indican la recta borde y el tercero es uno de sus puntos.

Ejemplo 11:

En la figura 2.17, observa que si *AB* es la recta que divide al plano β en dos semiplanos, llamamos al semiplano sombreado *ABC*, porque *AB* es su borde y el punto *C* está en dicho semiplano. *ABC* y *ABE* son semiplanos opuestos de borde *AB*.

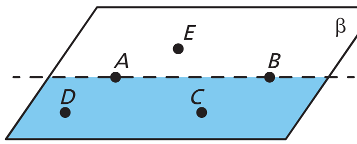


Fig. 2.17

Los puntos *C* y *D* pertenecen al semiplano *ABC*, porque están del mismo lado de la recta *AB*. El punto *E* está en el semiplano opuesto al semiplano *ABC* porque está del otro lado de la recta *AB*.

Segmento

Fabiola le especificó a Karla, que partiendo del punto inicial (*P*) del recorrido que le dibujó, recto por la calle de la parada, en dirección al parque, debían caminar dos cuadras y doblar a la derecha para llegar a su casa.

Piensa en las figuras estudiadas desde la Educación Primaria y observa el croquis de la figura 2.18. ¿Puedes identificar qué figura geométrica utilizó Fabiola para representar los trazos más gruesos que corresponden a estas dos cuadras? Seguramente coincides en que son **segmentos.**

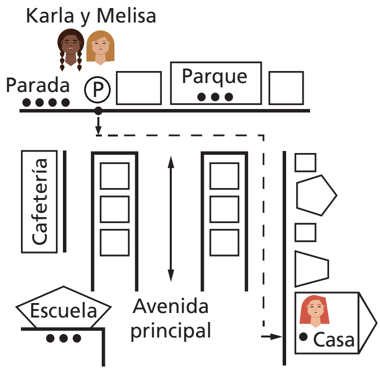


Fig. 2.18

Observa la figura 2.19, tenemos una recta y hemos ubicado dos puntos *A* y *B* en esta, Estos puntos delimitan una parte de la recta.

Fig. 2.19

Definición de segmento:

El conjunto formado por los puntos de una recta, que están situados entre dos de sus puntos se denomina **segmento**.

Consideramos también en el segmento a estos dos puntos, que los llamaremos extremos. Los segmentos se denotan con las dos letras mayúsculas de sus extremos, colocando sobre estas un pequeño guion.

Ejemplo 12:

En la figura 2.19, los puntos *A* y *B* de la recta *r*, determinan al segmento de extremos *A* y *B*. De esta forma se denota a dicho segmento como $\overline{AB}$ y se lee “segmento *AB*”.

Ahora podemos utilizar los segmentos para formular una condición que permita asegurar que dos puntos están en un mismo semiplano. Veámosla en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 13:

En la figura 2.20, los puntos *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, pertenecen al plano λ, en el cual se trazó la recta *EF*.

Relaciona convenientemente cada una de las afirmaciones siguientes con la posición de los extremos de los segmentos $\overline{CD}$ y $\overline{DG}$ en semiplanos opuestos o en el mismo semiplano con borde en la recta EF:

i) $\overline{CD} \cap EF \neq \phi$ ii) $\overline{DG} \cap EF = \phi$

¿A qué conclusión puedes llegar?

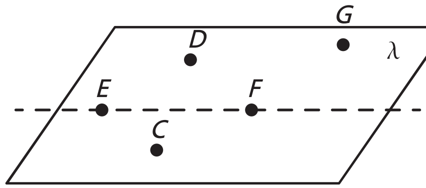


Fig. 2.20

Respuesta:

$\overline{CD} \cap EF \neq \phi$, estos puntos están en semiplanos opuestos respecto a la recta EF.

$\overline{DG} \cap EF = \phi$, estos puntos están en el mismo semiplano, respecto a esta recta.

Conclusión:

- Dos puntos situados en semiplanos opuestos determinan un segmento que corta a la recta borde.
- Dos puntos situados en el mismo semiplano determinan un segmento que no corta a la recta borde.

Nota: El símbolo λ es también una letra griega y se llama lambda.

Longitud de un segmento

Recuerda que...

Todo segmento tiene siempre una **longitud** mayor o igual que cero, determinada por la distancia entre sus extremos. Un **segmento** es **nulo** cuando sus extremos coinciden y su longitud es cero.

Si al superponer dos segmentos coinciden sus extremos, tienen la misma longitud, entonces son **iguales.** Cuando esto no sucede son **desiguales.**

Ejemplo 14:

En la figura 2.21 los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son iguales y los segmentos $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$ son desiguales, es decir:

$$\overline{AB} = \overline{CD};\ \overline{AB} \neq \overline{EF};\ \overline{CD} \neq \overline{EF}.$$

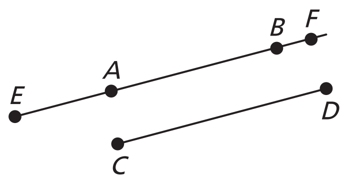


Fig. 2.21

Has empleado instrumentos de dibujo para representar rectas, semirrectas y segmentos. Pero también los puedes utilizar para determinar la longitud de un segmento. ¿Cómo? Midiéndolo. Haces coincidir un extremo del segmento que se quiere medir con el punto inicial de la escala que tiene divisiones iguales llamadas unidades de medida. Fíjate ahora en el número positivo más próximo al otro extremo del segmento, que constituye junto a la unidad de medida considerada, el resultado de esta medición que llamamos longitud del segmento.

En la figura 2.22 la longitud del lápiz es 11 cm porque el número positivo que indicó el otro extremo del lápiz fue 11 y las divisiones o unidades iguales tomadas en la regla son centímetros.

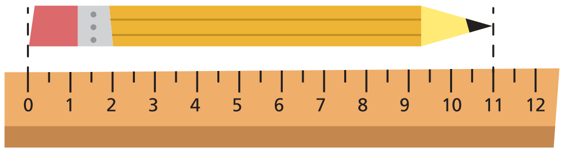


Fig. 2.22

Te invitamos a recordar algunas de las propiedades fundamentales relacionadas con los diferentes tipos de segmentos.

Recuerda que...

Dos **segmentos** son **consecutivos** cuando tienen **solamente un extremo en común.**

Ejemplo 15:

En la figura 2.23 los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son consecutivos.

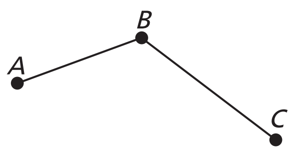


Fig. 2.23

Recuerda que......

Dos **segmentos consecutivos** son **alineados**, cuando están contenidos en la misma recta.

Ejemplo 16:

En la figura 2.24 los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son consecutivos alineados.

$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$

Fig. 2.24

Atención

Para considerar el segmento de longitud suma de las longitudes de otros dos segmentos, es necesario que estos dos segmentos sean segmentos consecutivos alineados.

Ejemplo 17:

En la figura anterior 2.24, la longitud del segmento $\overline{AC}$ se obtiene sumando las longitudes de los segmentos consecutivos alineados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, es decir, que:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

Recuerda que...

Punto medio de un segmento es el punto situado en él que lo divide en dos segmentos de igual longitud.

En la figura 2.25, M es el punto medio de $\overline{AB}$

$$\left.\begin{array}{l} M \in \overline{AB} \\ \overline{AM} = \overline{MB} \end{array}\right\} \quad M \text{ punto medio de } \overline{AB}$$

Fig. 2.25

Ángulos

Reflexiona

El profesor de Matemática de Javier comentó que en la vida diaria estamos rodeados de ángulos: la abertura de las tijeras forma un ángulo, los bordes que se cortan de la página de un libro, las agujas del reloj también los determinan..., Javier pensó en estos ejemplos de la figura 2.26 y al llegar a su casa le pidió un reloj a su abuelita y comenzó a analizar cómo colocar en diferentes posiciones las agujas del reloj para obtener la variedad de ángulos que había estudiado. Ahora tendrás la oportunidad de hacerlo tú también aquí.

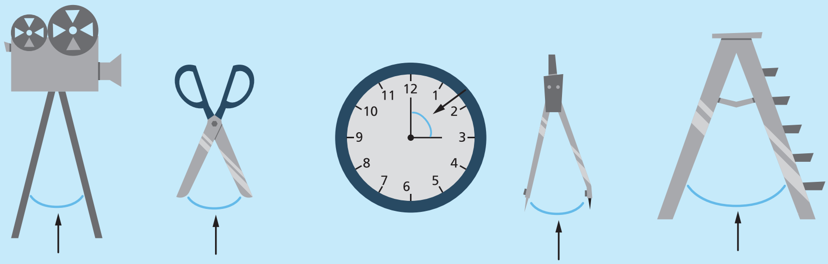


Fig. 2.26

Considera dos rectas r y s que se cortan en un punto O, que a su vez es el origen de las semirrectas a, b, contenidas en estas. El conjunto de puntos que representa respectivamente la unión o intersección de los semiplanos cuyos bordes están determinados por estas rectas, se denomina **ángulo.**

Las semirrectas a y b se llaman **lados** del ángulo y el punto O, **vértice** del ángulo. El ángulo se denota por, $\sphericalangle(a, b)$. En la figura 2.27 puedes apreciar su representación.

También se identifica un ángulo con la unión de dos semirrectas de origen común, como observas en la figura 2.28. Sus elementos son también, el vértice O y lados OA y OB. En este caso, se denota también por $\sphericalangle(a, b)$, pero puedes utilizar la notación:

$\sphericalangle AOB$, si $A \in a$ y $B \in b$.

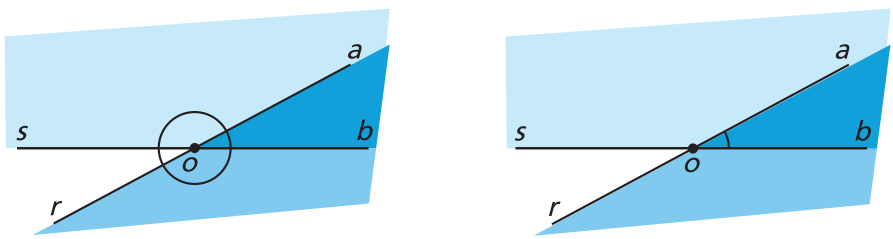


Fig. 2.27

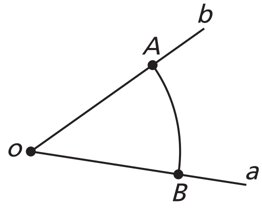


Fig. 2.28

Atención

Existen diferentes notaciones para denominar los ángulos: tres letras, como en la figura 2.28, las dos semirrectas de sus lados, una letra griega, un número o solamente la letra de su vértice, si no hay dudas de a cuál ángulo te refieres.

Ejemplo 19:

En la figura 2.29 a) $\sphericalangle AOB$ puede denotarse:

$\sphericalangle 1$ o $\sphericalangle \alpha$ o $\sphericalangle(a, b)$ o $\sphericalangle O$.

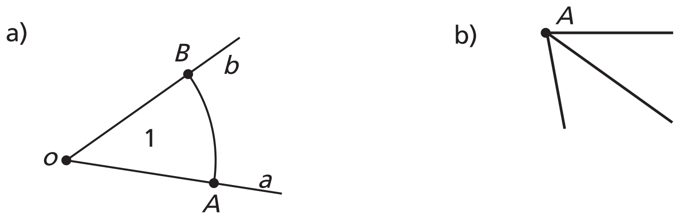


Fig. 2.29

En la figura 2.29 b) no puede denotarse $\sphericalangle A$ a ninguno de los tres ángulos representados, porque ¿cuál de ellos tres sería el ángulo al cual te refieres?

Si se fijan *b* como lado inicial y *a* como lado final, el ángulo $\sphericalangle(b, a)$ se denomina: ángulo orientado y se cumple que: $\sphericalangle(b, a) \neq \sphericalangle(a, b)$.

Recuerda que...

Amplitud de un ángulo

Todo ángulo tiene una medida, por lo general, en grados sexagesimales, que se llama **amplitud,** siempre mayor o igual que cero.

– Un ángulo es **nulo** si sus lados coinciden y su amplitud es de cero grado.

– Si el valor de la amplitud de dos ángulos es el mismo, entonces son **iguales** y si eso no sucede son **desiguales.**

Ejemplo 20:

En la figura 2.30 puedes ver representados: un ángulo nulo, dos ángulos iguales y dos ángulos desiguales.

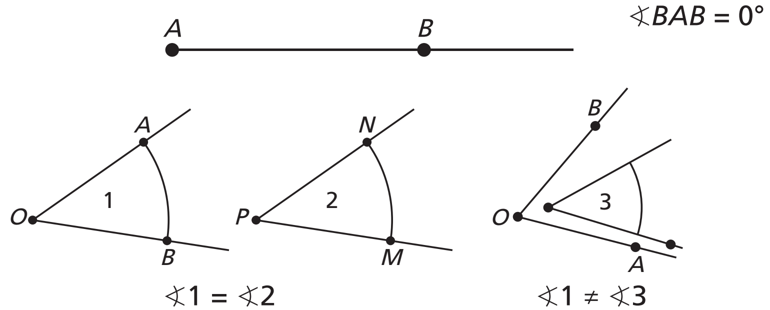


Fig. 2.30

El semicírculo se utiliza para determinar la amplitud de un ángulo. ¿Cómo?

Observa cómo en la figura 2.31 se hace coincidir el vértice del ángulo con el centro del semicírculo, de manera que un lado del ángulo pase por el cero de la escala. El número positivo de esta escala por el que pasa el otro lado del ángulo, indica su amplitud en grados. En este ejemplo, el otro lado indicó la división 30°.

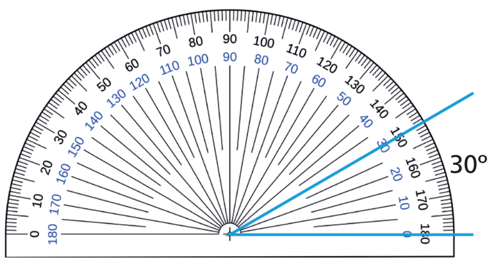


Fig. 2.31

Luego, **escribimos:** ∢$AOB = 30°$ y **leemos:** "el ángulo *AOB* tiene una amplitud de 30 grados" o "el ángulo *AOB* mide 30 grados".

Investiga y aprende

Investiga cómo puedes usar el cartabón para trazar ángulos de 30°, 45°, 60° o 90°.

Ahora veamos algunos de los ángulos que construyó Javier con las agujas del reloj y vamos a clasificarlos según su amplitud.

Ángulo agudo: su amplitud es menor que 90°.

Ejemplo 21:

Observa cuántos ángulos agudos puedes encontrar a tu alrededor:

a) Las agujas del reloj en la posición de la figura 2.32 han formado un ángulo agudo.

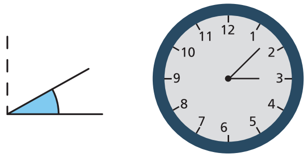


Fig. 2.32

b) En la figura 2.33 se aprecia en el ángulo de inclinación del espectacular salto del clavadista camagüeyano Jeinkler Aguirre, un ángulo agudo.[4]

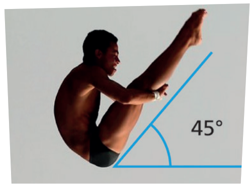


Fig. 2.33

c) Observa en la figura 2.34 que el ángulo del aserrado transversal y longitudinal, cuando utilizas correctamente el serrucho, son ángulos agudos.

Fig. 2.34

Ángulo recto: su amplitud es igual a 90°.

Ejemplo 22:

Aquí te presentamos ángulos rectos:

a) ¿Qué hora indica el reloj de la figura 2.35? Sus agujas determinan en esa hora un ángulo recto.

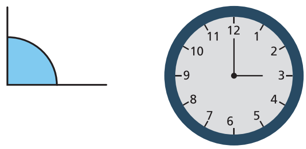


Fig. 2.35

b) Si observas atentamente la figura 2.36, las fichas del popular juego de entretenimiento, dominó, tienen ángulos rectos en sus "esquinas".

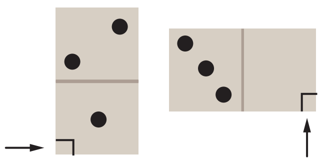


Fig. 2.36

[4] Órgano de prensa *Granma*, 16 de junio de 2012.

c) Los bordes de la carátula de los libros, de sus páginas y de muchos de nuestros materiales docentes, determinan ángulos rectos, como puedes ver también en la figura 2.37.

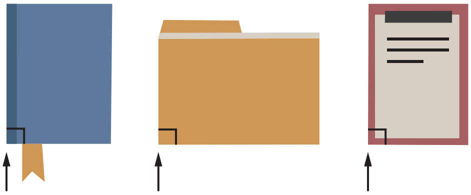


Fig. 2.37

Ángulo obtuso: su amplitud es mayor que 90º y menor que 180º.

Ejemplo 23:

a) Las agujas del reloj en la posición de la figura 2.38 forman un ángulo obtuso.

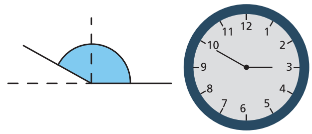


Fig. 2.38

En la figura 2.39 aparece esta tumbona plástica utilizada en las piscinas y centros turísticos con playa, para descansar. Ya sabes del ángulo obtuso que se inclinará tu espalda si te recuestas en el verano en una de estas.

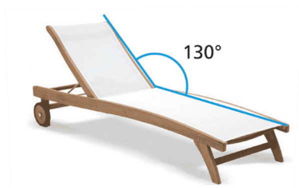


Fig. 2.39

Ángulo llano: su amplitud es igual a 180º.

Ejemplo 24:

a) En el reloj de la figura 2.40, las agujas indican un ángulo llano.

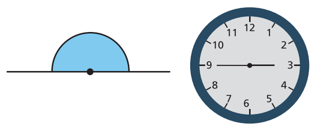


Fig. 2.40

b) La figura 2.41 contiene la imagen de Viengsay Valdés, *Prima Ballerina* del Ballet Nacional de Cuba durante una actuación en la que nos muestra con sus piernas un ángulo llano.

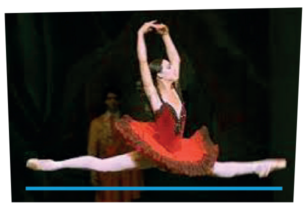


Fig. 2.41

Ángulo sobreobtuso: su amplitud es mayor que 180º y menor que 360º.

Ejemplo 25:

a) En el reloj de la figura 2.42, sus agujas indican ahora un ángulo sobreobtuso.

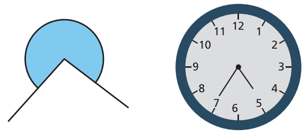


Fig. 2.42

b) Una de las posiciones básicas en *ballet* clásico, el *arabesque*, en la figura 2.43 muestra un ángulo que sobrepasa los 180°.

Fig. 2.43

Ángulo completo: su amplitud es igual a 360º.

Ejemplo 26:

Observa en la figura 2.44, que tanto las agujas del reloj como el hermoso abanico chino han determinado un ángulo completo.

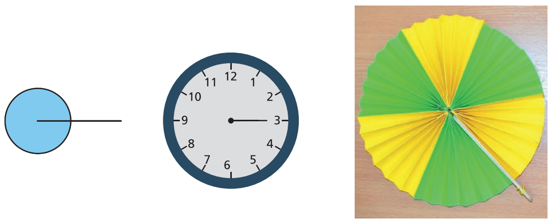


Fig. 2.44

Reflexiona

Observa los ángulos de las figuras 2.45, 2.46, 2.47 y determina qué características comunes tienen entre ellos:

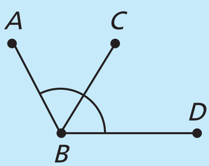


Fig. 2.45

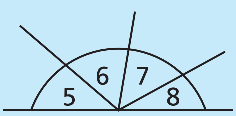


Fig. 2.46

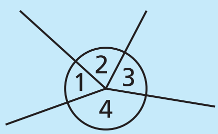


Fig. 2.47

En cada una de estas figuras, los ángulos que aparecen tienen el mismo vértice y cada dos ángulos, tienen un lado común. En particular, los de la figura 2.46 forman en conjunto un ángulo llano y los de la figura 2.47 forman un ángulo completo.

Recuerda que...

- Los ángulos que están ubicados uno a continuación de otro, con el vértice y un lado en común, se denominan **ángulos consecutivos.** Para determinar el ángulo cuya amplitud es la suma de las amplitudes de otros dos ángulos, esos ángulos tienen que ser consecutivos.
- Los **ángulos consecutivos a un lado de una recta** forman un ángulo llano y sus amplitudes suman 180°.
- Los **ángulos consecutivos alrededor de un punto** forman un ángulo completo y se cumple que sus amplitudes suman 360°.

Ejemplo 27:

a) En la figura 2.45, la amplitud del ángulo *ABD* se obtiene sumando las amplitudes de $\measuredangle ABC$ y $\measuredangle CBD$ que son ángulos consecutivos, o sea: $\measuredangle ABD = \measuredangle ABC + \measuredangle CBD$.

b) En la figura 2.46, los ángulos 5, 6, 7 y 8 son ángulos consecutivos a un lado de una recta, cuyas amplitudes suman 180° y en la figura 2.47, los ángulos 1, 2, 3 y 4 son ángulos consecutivos alrededor de un punto, cuyas amplitudes suman 360°.

Recuerda que...

Toda pareja de ángulos cuyas amplitudes suman 180°, cualquiera sea su posición en el plano, son **ángulos suplementarios** y toda pareja de ángulos cuyas amplitudes suman 90°, cualquiera sea su posición en el plano, son **ángulos complementarios.**

Ejemplo 28:

En la figura 2.48, los ángulos *RQP* y *CAB* son suplementarios y en la figura 2.49, los ángulos *RQP* y *CAB* son complementarios.

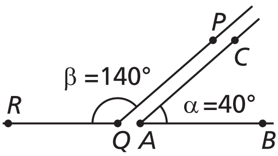


Fig. 2.48

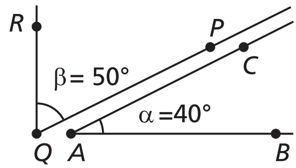


Fig. 2.49

Ejemplo 29:

Calcula los valores de los ángulos α, β y γ, con los datos de la figura 2.50, en la cual *a* y *b* son dos rectas que se cortan, y di cuáles de las afirmaciones siguientes son correctas:

a) $\measuredangle\alpha$ es agudo.
b) $\measuredangle\beta$ es sobreobtuso.
c) $\measuredangle\gamma = \measuredangle\alpha + 45°$ por ser consecutivos.
d) $\measuredangle\gamma + \measuredangle\beta = 180°$

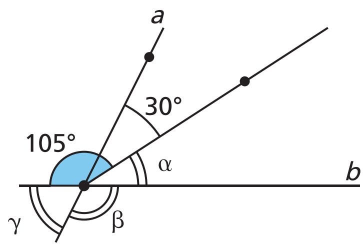


Fig. 2.50

Respuesta:

- $\measuredangle\alpha + 105° = 180°$ por ser dos ángulos consecutivos a un lado de una recta.
  $\measuredangle\alpha = 180° - 105° = 75°$
- $\measuredangle\beta + \measuredangle\alpha + 30° = 180°$ por ser tres ángulos consecutivos a un lado de una recta.
  $\measuredangle\beta = 180° - (\measuredangle\alpha + 30°) = 180° - (75° + 30°) = 180° - 105° = 75°$
- $\measuredangle\gamma + \measuredangle\beta + \measuredangle\alpha + 105° = 360°$ por ser ángulos consecutivos alrededor de un punto.
  $\measuredangle\gamma = 105°$.

  Con los resultados del cálculo, analicemos las afirmaciones dadas:

  a) α es agudo: es correcta porque $\measuredangle\alpha = 75°$ y $75° < 90°$.
  b) $\measuredangle\beta$ es sobreobtuso: es incorrecta porque $\measuredangle\beta = 75° < 180°$.
  c) $\measuredangle\gamma = \measuredangle\alpha + 45°$: es incorrecta, pues $\measuredangle\gamma = \measuredangle\alpha + 45° = 120°$ y $\measuredangle\gamma = 105°$.
  d) $\measuredangle\gamma + \measuredangle\beta = 180°$: es correcta porque $\measuredangle\gamma$ y $\measuredangle\beta$ son adyacentes.

Ejemplo 30:

En la figura 2.51, los puntos *P, R, Q* están situados en la misma recta. Selecciona de las medidas en grado que se dan a continuación, ¿cuál representa la amplitud del ángulo *QRS*?

10°　　20°　　40°　　70°　　140°

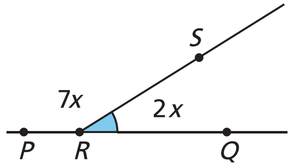


Fig. 2.51

Respuesta:
Es fácil reconocer que los ángulos $\sphericalangle PRS$ y $\sphericalangle SRQ$ son consecutivos a un lado de una recta, por lo que su suma es igual a 180°, es decir: $\sphericalangle PRS + \sphericalangle SRQ = 180°$.

Si sustituimos cada ángulo por su amplitud, tenemos entonces que: $7x + 2x = 180°$. Es esta una ecuación que ya sabes resolver, luego:

$$7x + 2x = 180°$$
$$9x = 180°$$
$$x = \frac{180°}{9}$$
$$x = 20°$$

Sustituyendo x en: $\sphericalangle SRQ = 2x$ se obtiene: $\sphericalangle QRS = 40°$.

Ejercicios

(epígrafe 2.1.1)

1. Ubica dos puntos A y B en una hoja de tu libreta.
a) Traza una recta que pase por B pero no por A.
b) Traza una recta que pase por A y no pase por B.
c) Traza una recta que no pase ni por A ni por B.

2. Copia en tu libreta las figuras 2.52, 2.53 y 2.54.

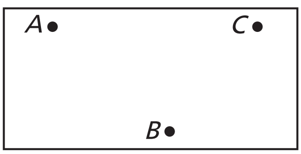


Fig. 2.52

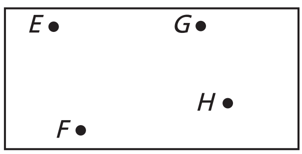


Fig. 2.53

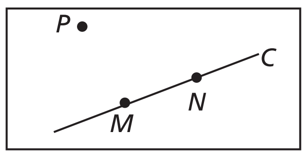


Fig. 2.54

a) Traza una recta por cada dos puntos en cada figura.
b) ¿Cuántas rectas pudiste trazar en cada figura?
c) Denota cada recta trazada.
d) ¿Cuántas semirrectas diferentes se determinan con los puntos denotados en cada figura?

3. Lee detenidamente esta información.
Una semirrecta está contenida en un semiplano si:

- Tiene su origen en la recta borde y al menos un punto en el semiplano.
- Es paralela a la recta borde y contiene al menos un punto en dicho semiplano.
- Tiene el origen y al menos un punto en el semiplano y no corta a la recta borde.

A partir de la información anterior, traza una recta *r*, considérala el borde de un semiplano y representa las diferentes posibilidades de semirrectas no contenidas en este.

4. a) Denota los puntos de intersección entre las rectas de las figuras 2.55 y 2.56.
b) Nombra los segmentos que reconozcas en las rectas.

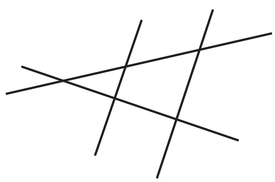


Fig. 2.55

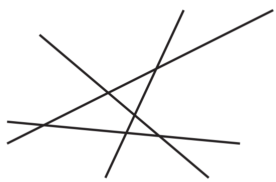


Fig. 2.56

5. Analiza las proposiciones siguientes, determina cuáles son falsas y conviértelas en verdaderas.
a) Dos puntos determinan una recta única.
b) Por un punto pasa una y solo una recta.
c) Un punto cualquiera sobre una recta determina dos semirrectas.
d) La recta es limitada.
e) Un segmento es un conjunto de puntos de una recta, limitado por dos puntos.
f) Un punto situado entre los puntos extremos de un segmento es su punto medio.
g) Una recta contenida en un plano, lo divide en semiplanos.
h) Dos segmentos consecutivos no tienen punto común.
i) Si dos puntos diferentes están en el mismo semiplano de borde *r*, el segmento que los une corta a la recta borde *r*.

6. Di cuántas rectas quedan determinadas por los puntos *A, B, C, D, E* si son puntos diferentes y no hay tres de ellos alineados. Dibújalos y fundamenta tu respuesta.

7. Traza un ángulo *ABC*, considera dentro de él un punto *P* y traza la semirrecta *BP*.

a) Nombra todos los ángulos que aparecen ahora.

b) Nombra los que aparecen, si consideras otra semirrecta *BE* interior al ∢*PBC*.

8. ¿Son consecutivos los pares de ángulos α y β en cada una de las figuras 2.57 y 2.58? Fundamenta tu respuesta.

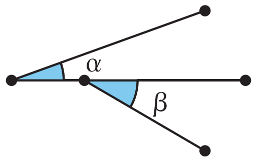


Fig. 2.57

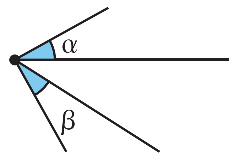


Fig. 2.58

9. a) Determina si es posible que algunos de estos ángulos que aparecen en la figura 2.59 se pueden colocar consecutivamente a un lado de una recta. En caso afirmativo realiza todas las combinaciones posibles.

b) Determina si es posible también que algunos de estos ángulos se puedan situar consecutivamente alrededor de un punto. ¿Qué combinaciones de estos ángulos puedes seleccionar para esto?

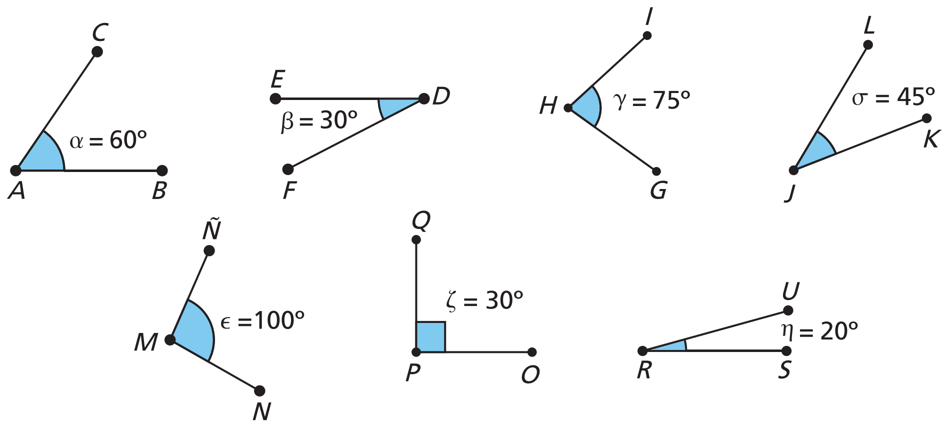


Fig. 2.59

10. Fundamenta, cuál de las proposiciones es falsa.
a) Dos lados de un ángulo recto son perpendiculares.
b) Un ángulo obtuso tiene mayor medida que su suplemento.
c) Dos ángulos complementarios entre sí son rectos.

11. La amplitud del ángulo α es el 75 % de la amplitud del ángulo β. Si $\alpha = 72°$, entonces la mitad de la amplitud del ángulo β es:
a) 108° b) 96° c) 72° d) 48° e) 36°

12. Clasifica los ángulos siguientes según su amplitud.
a) $\sphericalangle DEF = 275°$ b) $\sphericalangle MNP = 94°$ c) $\sphericalangle RST = 180°$
d) $\sphericalangle ABC = 56°$ e) $\sphericalangle ABC = 47°$

13. Demuestra que: "La diferencia entre las medidas del suplemento y el complemento de un ángulo cualquiera α es igual a 90°".

2.1.2 La línea poligonal y los polígonos

La gráfica de la figura 2.60 nos muestra la evolución de la temperatura de un enfermo de un hospital, en algunas horas del día.

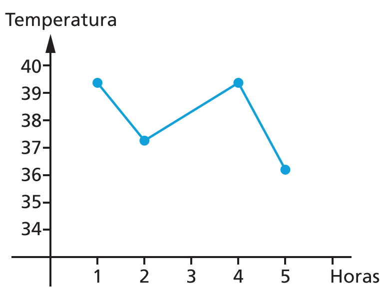


Fig. 2.60

¿Qué tipo de gráfico se empleó para representar el comportamiento de la temperatura? Conoces las distintas formas de representar gráficamente los datos, en este caso es un gráfico poligonal, a cada hora se le hace corresponder el valor de la temperatura que se señala mediante un punto, los que son unidos mediante segmentos, se forma así la línea poligonal.

¿Qué característica poseen estos segmentos?

Estos segmentos son consecutivos y los denominaremos lados de la poligonal.

En la figura 2.61 se muestra el diseño de una reja de la cual se han señalado dos adornos que constituyen líneas poligonales. Pero, ¿qué características los hacen diferentes?

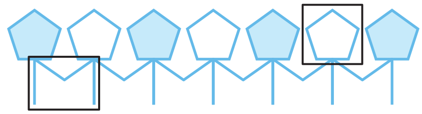


Fig. 2.61

En la línea poligonal de la figura 2.62, los extremos no coinciden en un punto, en este caso se dice que la línea poligonal es **abierta.**

En la línea poligonal de la figura 2.63 los extremos coinciden en un punto, se trata por ello de una línea poligonal **cerrada.**

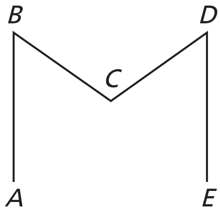


Fig. 2.62

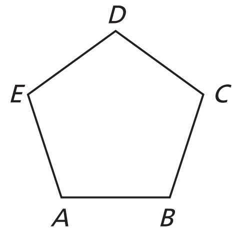


Fig. 2.63

Recuerda que...

Polígono: es la región del plano limitada por una línea poligonal cerrada que incluye a esta poligonal.

Saber más

En el cielo nocturno estrellado, el ser humano ha imaginado los más diversos polígonos. Te invitamos a que encuentres algunos tú también.

Fig. 2.64

Reflexiona

¿Son polígonos las figuras siguientes (figs. 2.65 y 2.66)?

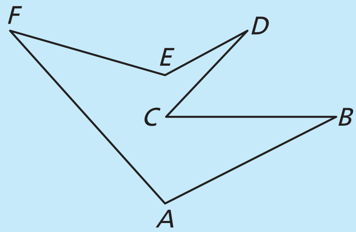


Fig. 2.65

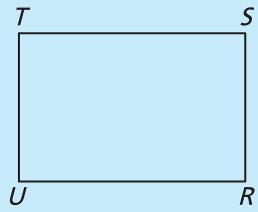


Fig. 2.66

Sí, las dos están limitadas por líneas poligonales cerradas. Cópialas en tu libreta y traza la recta que contiene al lado *CD* en la figura 2.65 y la recta que contiene al lado *UR* en la figura 2.66. ¿Qué sucede en cada caso?

Como puedes observar en la figura 2.67, al trazar la recta que contiene a uno de los lados del polígono dibujado, –en este caso, la recta *CD*– el polígono *ABCDEF*, no queda totalmente en el mismo semiplano. Una parte queda en el semiplano de la izquierda respecto a la recta *CD* y la otra parte está en el semiplano de la derecha.

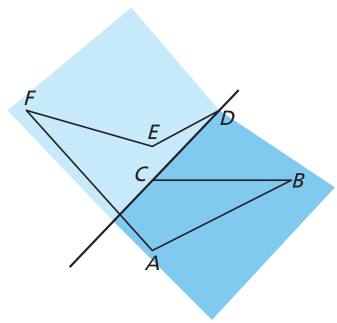


Fig. 2.67

Sin embargo, en la figura 2.68, al trazar la recta *UR* puedes observar que el polígono queda totalmente en uno de los semiplanos determinados por esa recta (semiplano superior de la recta *UR*). Si trazas otra de las rectas que contienen a alguno de los lados del polígono *URST*, sucederá lo mismo, la figura queda totalmente en un mismo semiplano determinado por esa recta, compruébalo.

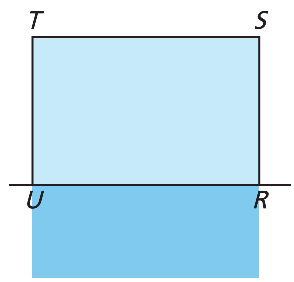


Fig. 2.68

Definición de polígono convexo:

El polígono que al trazar la recta que contiene a cualquiera de sus lados, queda totalmente contenido en uno de los dos semiplanos determinados por esta recta, lo denominamos polígono convexo.

Vamos a identificar en la figura 2.69 los elementos fundamentales de los polígonos convexos:

Elementos	Descripción
Lados: $\overline{AB}$; $\overline{BC}$; $\overline{CD}$; $\overline{DE}$; $\overline{EA}$	Segmento que une dos vértices consecutivos (lados de la poligonal)
Ángulos interiores: $\measuredangle A$; $\measuredangle B$; $\measuredangle C$; $\measuredangle D$; $\measuredangle E$	Ángulo determinado por cada dos lados consecutivos
Vértices: A; B; C; D; E	Punto de intersección de dos lados
Diagonales: $\overline{AC}$; $\overline{BD}$; $\overline{CE}$; $\overline{DA}$; $\overline{EB}$	Segmento que une dos vértices no consecutivos
Ángulos exteriores: $\measuredangle CBF$ y $\measuredangle DCG$ son ángulos exteriores (fig. 2.70)	Ángulo adyacente a un ángulo interior del polígono, formado en cada vértice por un lado y la prolongación de un lado consecutivo a él

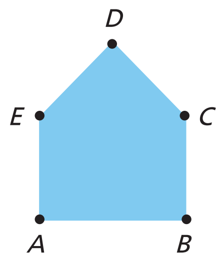


Fig. 2.69

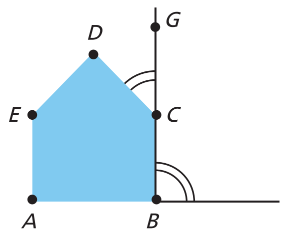


Fig. 2.70

Reflexiona

A cada polígono le corresponde un nombre diferente según la cantidad de lados que tiene. ¿Qué nombre le corresponderá al polígono de la figura 2.66 que tiene cuatro lados y al de la figura 2.69, que tiene cinco lados? En la tabla 2.1 puedes leer los nombres de los polígonos según sus lados.

Tabla 2.1

Triángulo (3 lados)	Heptágono (7 lados)	Endecágono (11 lados)
Cuadrilátero (4 lados)	Octágono (8 lados)	Dodecágono (12 lados)
Pentágono (5 lados)	Eneágono (9 lados)	Pentadecágono (15 lados)
Exágono (6 lados)	Decágono (10 lados)	Icocágono (20 lados)

Has observado los panales de las abejas. ¿Cuántos lados tienen los polígonos que los conforman? ¿Son iguales los lados de estos polígonos?

Los panales de las abejas son exágonos y todos sus lados son iguales. Sus ángulos interiores también son iguales (fig. 2.71).

Fig. 2.71

Recuerda que...

Los polígonos que tienen sus lados y sus ángulos iguales se denominan **polígonos regulares** y decimos que son equiláteros y equiángulos (el prefijo "**equi**" significa igual). Se nombran añadiéndoles la palabra regular al nombre que tiene el polígono según la cantidad de lados.

Ejemplo 1:

Un polígono de seis lados y seis ángulos, como en la figura 2.72 se llama: **exágono regular** *ABCDEF*.

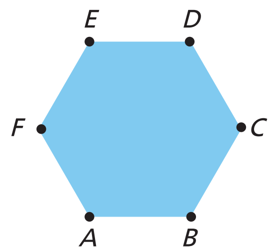


Fig. 2.72

Reflexiona

¿Cuál es el polígono que tiene la menor cantidad de lados?

El triángulo, que no por ser el polígono de solamente tres lados, deja de ser interesante.

El triángulo es una figura geométrica de gran aplicación práctica, por su rigidez. Por eso los objetos de forma triangular tienen más fortaleza. ¿Qué significa esto?

Investiga y aprende

Toma tres piezas de madera y únelas con tornillos, dos a dos, como aparece en la figura 2.73.

No puedes cambiar esa forma a menos que flexionemos las piezas.

¡Compruébalo tú también!

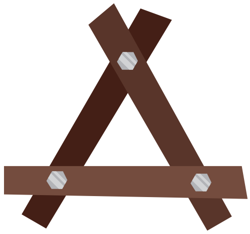


Fig. 2.73

¿Sabías que...?

Esta propiedad de la rigidez o "dureza del triángulo", como también suele llamársele, se aplica en las obras de ingeniería y arquitectura. Estructuras metálicas, puentes, postes y armazones de edificios se construyen a partir de triángulos (fig. 2.74).

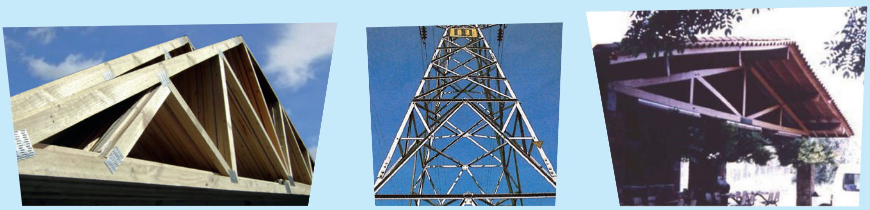


Fig. 2.74

Investiga y aprende

¿Ocurrirá así en los cuadriláteros y otros polígonos de más de tres lados?

Une ahora cuatro piezas de igual manera y verás que su forma cuadrangular se puede cambiar al ejercer una fuerza suficiente sobre cada madero, sin encorvar ni quebrar dichas piezas (fig. 2.75).

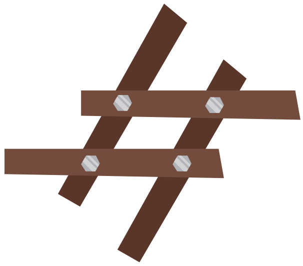


Fig. 2.75

¿Cómo lograr la rigidez en otros polígonos? Más adelante veremos cómo.

Saber más

Cuentan que un famoso investigador policial preguntó a un sospechoso de asesinato, que sorprendió en el lugar de los hechos (fig. 2.76):

— "¿Qué hace usted en la escena del crimen?"

— "¿Yo?, trataba de arreglar esta mesa que cojeaba"– respondió él.

A lo que el investigador, un gran estudioso de la geometría, respondió que:

— La mesa de tres patas nunca cojea, así que usted está mintiendo.

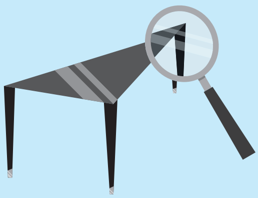


Fig. 2.76

Esta es otra aplicación del triángulo: tres puntos no alineados determinan un plano, tres puntos no alineados, nos hacen pensar en un triángulo.

Un triángulo es el polígono que tiene tres lados (fig. 2.77). Sus elementos son:

- Vértices: A, B y C.
- Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.
- Ángulos interiores: $\measuredangle A$, $\measuredangle B$ y $\measuredangle C$.
- Ángulos exteriores: $\measuredangle 1$, $\measuredangle 2$ y $\measuredangle 3$.
- Notación: ΔABC.

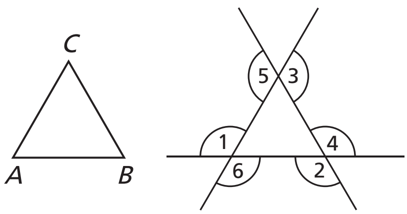


Fig. 2.77

Recuerda que...

La longitud de los lados de un triángulo es un parámetro para clasificarlos.

Tipos de triángulos según la longitud de sus lados (fig. 2.78)

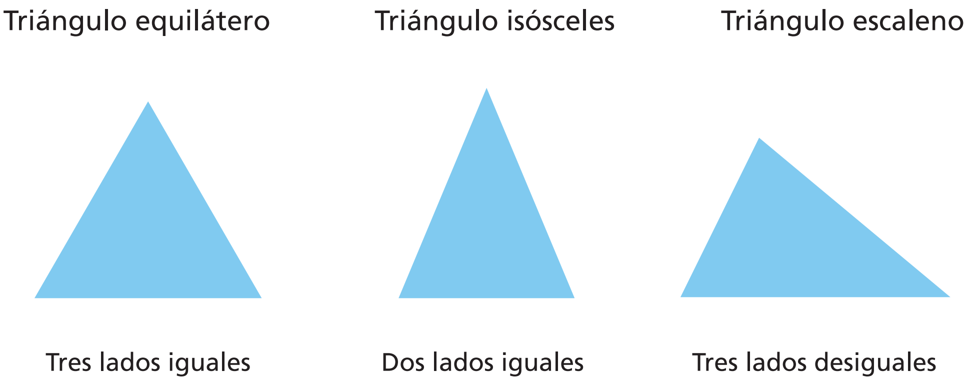


Fig. 2.78

Este análisis también puedes hacerlo con un diagrama de Venn (fig. 2.79).

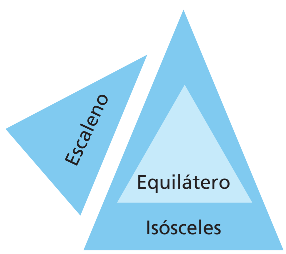


Fig. 2.79

Reflexiona

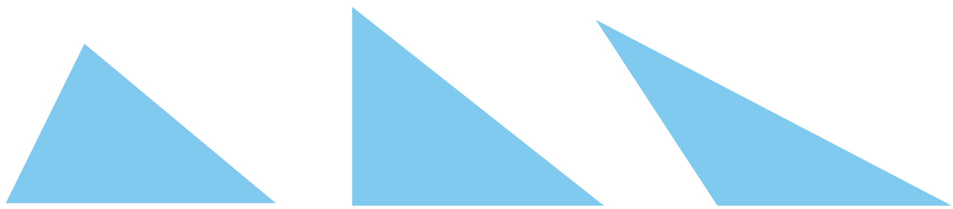
Al recordar las relaciones entre conjuntos confirmas que no existe un triángulo que sea escaleno e isósceles, pues estos conjuntos son disjuntos. Sin embargo, ¿crees tú que un triángulo isósceles sea necesariamente equilátero?

Todos los triángulos equiláteros son isósceles, el conjunto de los triángulos equiláteros es un subconjunto del conjunto de los triángulos isósceles. Pero algunos triángulos isósceles no cumplen todas las exigencias de los triángulos equiláteros, por eso el conjunto de los triángulos isósceles no es un subconjunto del conjunto de los triángulos equiláteros, sino a la inversa, el conjunto de los triángulos equiláteros está contenido en el conjunto de los triángulos isósceles.

Veamos otros tipos de triángulos, pero ahora según la amplitud de sus ángulos interiores (fig. 2.80).

Tipos de triángulos atendiendo a la amplitud de sus ángulos (fig. 2.80).

Triángulo acutángulo	Triángulo rectángulo	Triángulo obtusángulo



Tiene tres ángulos agudos	Tiene un ángulo recto	Tiene un ángulo obtuso

Fig. 2.80

Reflexiona

¿Podemos ilustrar la relación entre los tipos de triángulos atendiendo a la amplitud de sus ángulos mediante un diagrama conjuntista? (fig. 2.81)

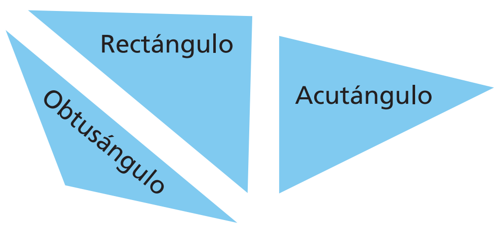


Fig. 2.81

La intersección de estos tres conjuntos es el vacío, por eso no puede existir un triángulo que tenga las dos denominaciones a la vez.

Representa en el plano cuatro puntos: *A, B, C, D* de los cuales tres no estén situados en una misma recta. Únelos de distintas maneras, formando poligonales cerradas de cuatro segmentos. ¿Cuántas figuras diferentes obtuviste? ¿Cuáles son similares a las trazadas en la figura 2.82?

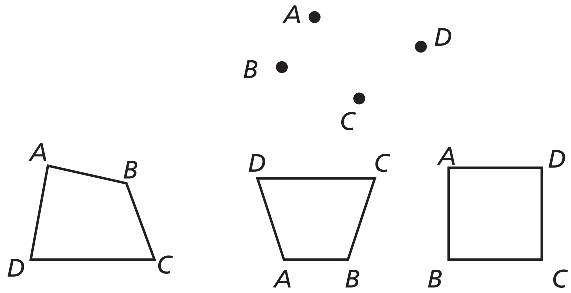


Fig. 2.82

¿Todas son polígonos convexos de cuatro lados? ¿Has observado qué forma tiene el terreno donde se practica béisbol? ¿Qué nombre recibe el lugar donde se realizan las peleas de boxeo? (fig. 2.83)

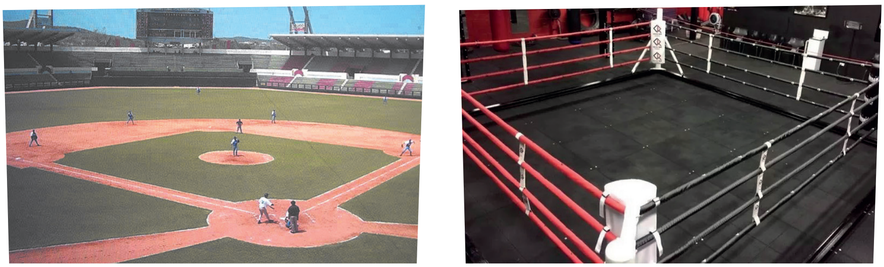


Fig. 2.83

Efectivamente tienen forma de cuadrilátero, polígono de cuatro lados. Si observas a tu alrededor te percatas de que esta figura también constituye una forma geométrica básica de nuestra civilización y de considerable importancia para la matemática.

Recuerda que...

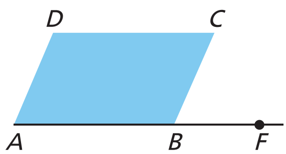
Se llama cuadrilátero convexo al polígono convexo de cuatro lados.

Reflexiona

¿Qué hacer para que no se deforme un cuadrilátero?

Para resolver el problema práctico al que se refiere esta interrogante puedes utilizar uno de los elementos del cuadrilátero, que se cita en la tabla 2.1 (fig. 2.84).

Tabla 2.1 Elementos de un cuadrilátero convexo

Lados: $\overline{AB}$; $\overline{BC}$; $\overline{CD}$; $\overline{DA}$;	Segmento que une dos vértices consecutivos	
Ángulos interiores: $\sphericalangle A$; $\sphericalangle B$; $\sphericalangle C$; $\sphericalangle D$;	Ángulo determinado por dos lados consecutivos	
Vértices: A; B; C; D	Punto de intersección de dos lados	
Diagonales: $\overline{AC}$; $\overline{BD}$;	Segmento que une dos vértices no consecutivos	
Lados opuestos: $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$, $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$	Lados que no tienen vértices comunes	 Fig. 2.84
Lados consecutivos: $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$, $\overline{DA}$ y $\overline{AB}$	Lados con un vértice común	
Ángulo exterior: $\sphericalangle CBF$	Adyacente a un interior	
Ángulos opuestos: $\sphericalangle A$ y $\sphericalangle C$, $\sphericalangle B$ y $\sphericalangle D$	Ángulos interiores cuyos vértices son extremos de una diagonal	
Ángulos consecutivos: $\sphericalangle A$ y $\sphericalangle B$, $\sphericalangle B$ y $\sphericalangle C$, $\sphericalangle C$ y $\sphericalangle D$, $\sphericalangle D$ y $\sphericalangle A$	Ángulos interiores cuyos vértices son extremos de un lado	

Debemos fijarle una pieza intermedia, es decir: ¡una diagonal! Y aquí vuelve a prevalecer la rigidez del triángulo, ya que de este modo se obtienen dos triángulos, que son indeformables. Para lograr la rigidez de un polígono es suficiente trazar cuantas diagonales se necesiten para descomponerlo en triángulos y que así no se deforme. ¿Has observado cuando un albañil pone el marco de una ventana, que le fija unas tablas que les llama *travesaños*? Estas no son más que las diagonales del "rectángulo" que representa ese marco (fig. 2.85).

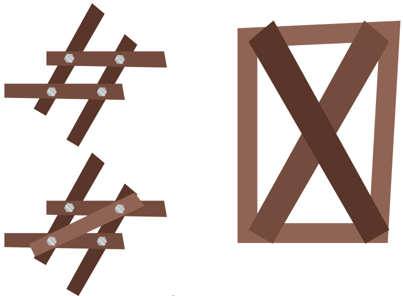


Fig. 2.85

Este recurso se aplica en la vida práctica, en la construcción de torres, puentes, en andamios y en diferentes estructuras (fig. 2.86).

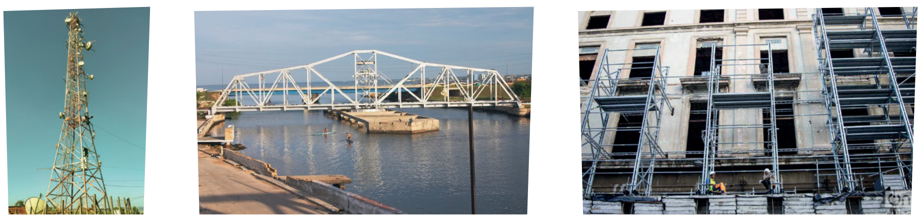


Fig. 2.86

Un profesor de Matemática dejó de tarea, completar la tabla 2.2 sobre cuadriláteros.

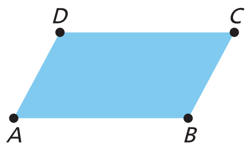
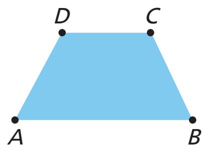
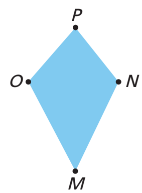
Tabla 2.2

Cuadrilátero	Dos pares de lados paralelos	Solo dos lados paralelos	Sin lados paralelos
Paralelogramo			
Trapecio			
Trapezoide			

Al analizar la tabla te percatas de que el tipo de cuadrilátero depende del paralelismo de sus lados opuestos. Como el número de lados es par, se tiene en cuenta el hecho de que alguno de los dos pares de lados opuestos o ambos pares, sean o no paralelos.

Recuerda que...

Atendiendo al paralelismo de los lados opuestos, los cuadriláteros convexos se clasifican en: **trapecios y trapezoides.**

El cuadrilátero convexo que tiene sus lados opuestos paralelos se denomina **paralelogramo** (fig. 2.87).	 $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ Fig. 2.87
El cuadrilátero convexo que tiene un par de lados opuestos paralelos se nombra **trapecio** (fig. 2.88).	 $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ Fig. 2.88
El cuadrilátero convexo que no tiene lados paralelos se llama **trapezoide** (fig. 2.89).	 Fig. 2.89

Estas relaciones se resumen en el diagrama de la figura 2.90.

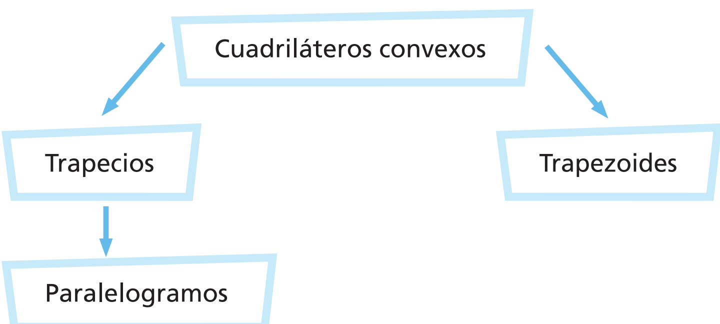


Fig. 2.90

Ahora intenta completar la tabla 2.2 (tabla 2.3).

Tabla 2.3

Cuadrilátero	Dos pares de lados paralelos	Solo dos lados paralelos	Sin lados paralelos
Paralelogramo	X		
Trapecio		X	
Trapezoide			X

De la historia

En la figura 2.91 puedes ver una página de una edición impresa de Los Elementos de Euclides, *hecha en Venecia, en el año 1509. Observa en esta ángulos, triángulos y cuadriláteros, los cuales se amplían en la figura 2.92 para que puedas apreciarlas mejor. Es una lástima que no podamos también leerla porque está escrita en griego.*

¿Te atreves, a partir de lo que observas, decir qué criterio se tuvo en cuenta en esta interesante clasificación de triángulos y cuadriláteros?

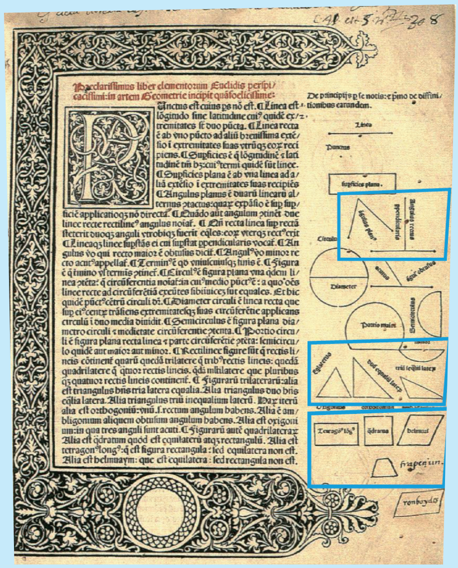


Fig. 2.91

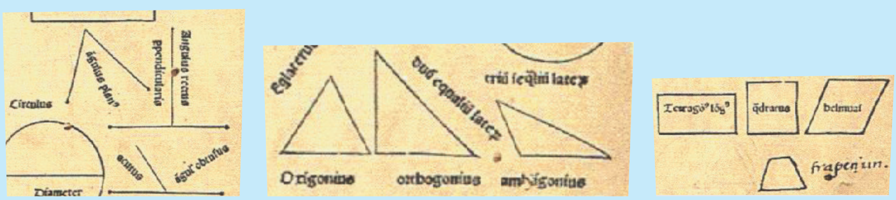


Fig. 2.92

Investiga y aprende

Cómo dibujar figuras geométricas utilizando aplicaciones geométricas y procesadores de textos.

Un ejemplo de aplicación geométrica es el asistente matemático GeoGebra. Para obtener figuras geométricas con este asistente después de instalarlo en un soporte digital y abrirlo, se deben realizar los pasos siguientes:

1. Activar la quinta herramienta (Polígono).
2. Seleccionar una de las opciones de esta herramienta de acuerdo con la figura geométrica que se quiere construir (fig. 2.93 a).
3. En la vista gráfica, colocar el cursor en un punto en el plano y activar un clic, así se obtiene un vértice de la figura, se mueve el cursor hasta otro punto del plano se activa clic otra vez y así sucesivamente se realiza la construcción de puntos de acuerdo con la cantidad de vértices que tenga la figura que se quiere construir, se termina su confección cuando el cursor se coloca en el punto inicial.
4. Para nombrar correctamente los vértices se activa la primera herramienta (Elige y mueve) y se mueve el nombre de cada vértice a la posición deseada (fig. 2.93 b).

a) b)

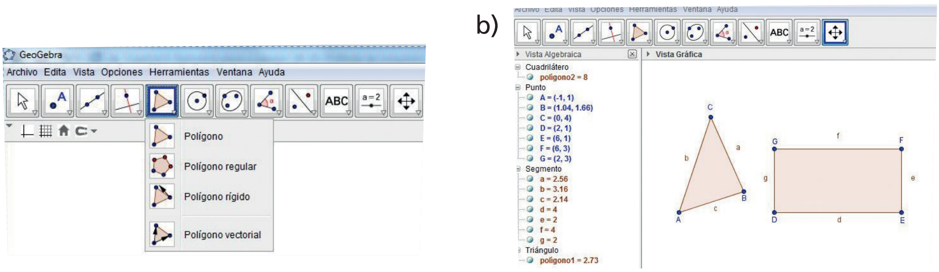


Fig. 2.93

Ejercicios

(epígrafe 2.1.2)

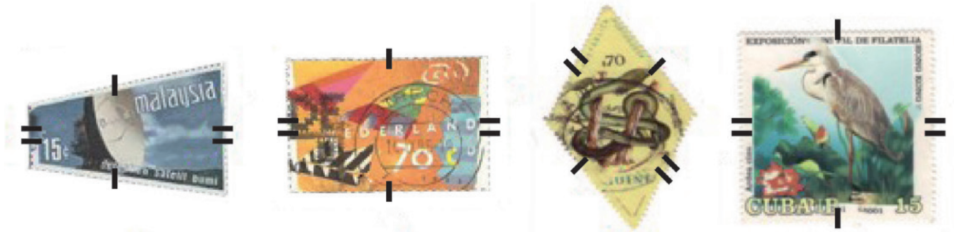
1. Traza las líneas poligonales que se indican, denótalas y nombra sus elementos en cada caso.

a) Una línea poligonal abierta de seis lados.

b) Una línea poligonal cerrada de cinco lados que no determine un polígono convexo.

c) Una línea poligonal cerrada de cuatro lados que determine un polígono regular.

2. Un filatelista colecciona sellos que tienen forma de diferentes tipos de cuadrilátero. Observa atentamente las estampillas postales que aparecen en la figura 2.94 y trata de clasificarlas para su álbum, según el tipo de cuadrilátero que representan, teniendo en cuenta que los lados paralelos entre sí de las estampillas postales se señalaron con la misma marca. Pero, analiza también, ¿son suficientes en todos los casos, los datos dados, para hacer esa clasificación?



A B C D

Fig. 2.94

3. ¿Puede ser regular un polígono que no sea convexo? Argumenta tu respuesta.

4. Valora esta otra definición de polígono convexo que suele aparecer en otros textos de geometría plana:
"Un polígono se llama convexo si contiene completamente al segmento que une dos de sus puntos cualesquiera".

5. Esta obra (fig. 2.95) es del cubano José Villa (1950), uno de los escultores más importantes de Cuba, se llama Espiral[5] ¿En qué tipo de poligonal te hace pensar?, ¿por qué?

Fig. 2.95

[5] Nerys Pupo: *Vamos a disfrutar del arte*, 2008.

6. Trabaja con el asistente matemático Geómetra, construye varios triángulos, mide sus lados y ángulos y agrúpalos según los tipos de triángulos estudiados.

7. Escribe debajo de cada polígono su nombre y determina cuáles son convexos (fig. 2.96).

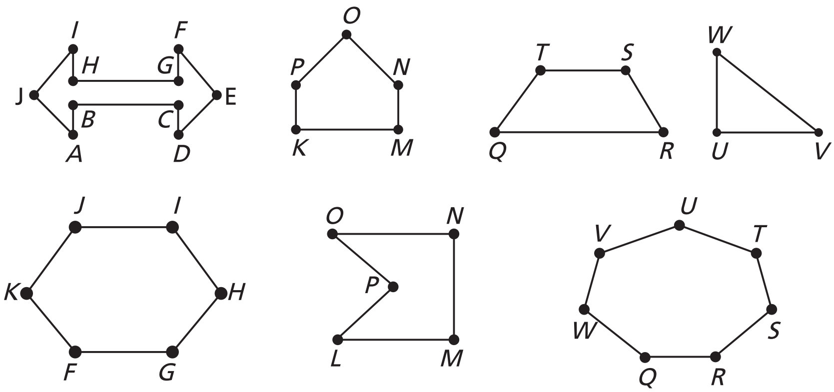
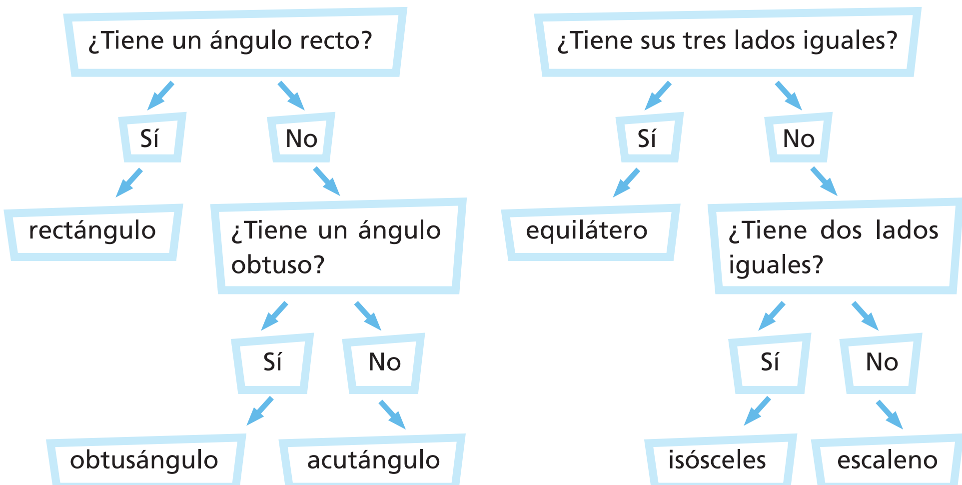


Fig. 2.96

8. Después de estudiar los tipos de triángulos según sus lados y según sus ángulos, Carla elaboró un procedimiento para seleccionar diferentes tipos de triángulos, el cual aparece en el esquema 2.1.

Procedimiento para seleccionar diferentes tipos de triángulos según sus ángulos

Procedimiento para seleccionar diferentes tipos de triángulos según sus lados



Esquema 2.1

a) ¿Estás de acuerdo con Carla? Justifica tu respuesta.
b) Crea tú mismo un procedimiento que permita clasificar ángulos según sus amplitudes.
c) Elabora un procedimiento que permita clasificar cuadriláteros.

9. Descifra estas adivinanzas:

"Dedicadas al menor"[6]

I

Latero significa lado
y equi significa igual
y el triángulo del que hablo
tú lo descubriste ya.

II

Sus tres lados diferentes,
dice seguro Diosdado,
y el triángulo del que hablo,
ya tú lo has clasificado.

III

Dos lados iguales son
y no admito confusión
en la clasificación.

IV

Tengo yo un ángulo recto.
¡Solo uno puedo tener!
Y si tú no me descubres,
mucho tienes que aprender.

10. Observa los triángulos de la figura 2.97 y clasifícalos según las características dadas.

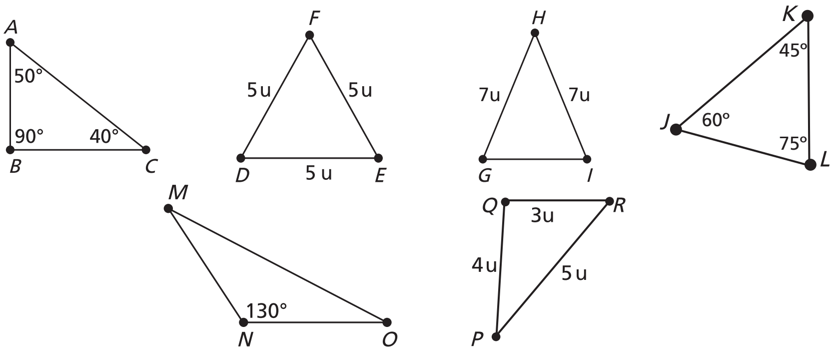


Fig. 2.97

2.2 Relaciones de posición en el plano

Desde esta vista del casco histórico de La Habana, puedes apreciar bellas construcciones de la etapa colonial (fig. 2.98).

Fig. 2.98

[6] M. Sc. Rita María Cantero Pérez.

Como elementos arquitectónicos que las distinguen, se observan en estos, vitrales y rejas, las cuales tienen variadas formas geométricas.

Si observas en la figura 2.99 aparecen otras obras arquitectónicas, pero más modernas, en estas también afloran diferentes formas geométricas.

Fig. 2.99

Investiga y aprende

Pero ¿te has puesto a pensar cómo lograr que estas construcciones tengan la forma precisa? Ingenieros y arquitectos diseñan previamente las obras que se van a realizar y en esto la geometría tiene un papel importante (fig. 2.100).

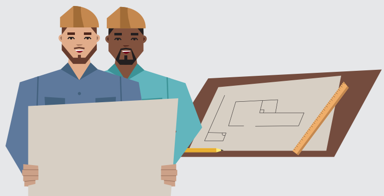


Fig. 2.100

El proyecto de una obra requiere de la construcción de paralelas, perpendiculares y de otros trazos, en los que se aplican propiedades geométricas, que se aprenden en la matemática escolar y que estudiarás en este epígrafe.

2.2.1 Posiciones relativas de dos rectas del plano

Para estudiar las construcciones geométricas básicas necesitamos precisar primero cuáles son las posiciones fundamentales que ocupan los puntos respecto a las rectas y las rectas entre sí.

Considera un punto P y una recta r del plano, ¿qué posición puede ocupar el punto P respecto a la recta r ? Efectivamente, existen solo dos posibilidades.

1. El punto P está contenido en la recta r, o el punto pertenece a la recta y para denotarlo utilizamos el símbolo "$\in$" (fig. 2.101). Escribimos: $P \in r$ y leemos: **"el punto *P* pertenece a la recta *r*".**

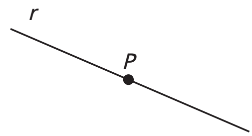


Fig. 2.101

2. El punto P está situado fuera de la recta r, o es un punto exterior a esta (fig. 2.102), en este caso escribimos: $P \notin r$ y leemos: **"el punto *P* no pertenece a la recta *r*".**

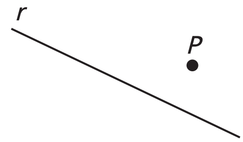


Fig. 2.102

Ahora bien, si nos referimos a dos rectas del plano, ¿qué relaciones de posición están determinadas?

1. Las rectas r y s coinciden, entonces escribimos: $r = s$ (fig. 2.103), en este caso todos los puntos de las rectas concuerdan.

Fig. 2.103

2. Las rectas r y s no tienen puntos comunes (fig. 2.104), entonces escribimos: $r \cap s = \phi$

   En los dos casos decimos que las rectas son paralelas y escribimos $r \,||\, s$.

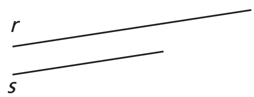


Fig. 2.104

Definición de rectas paralelas:

Dos rectas son paralelas si y solo si coinciden o no tienen puntos comunes.

3. Las rectas r y s tienen un punto común o se cortan en un punto (fig. 2.105), estas rectas se denominan secantes, entonces escribimos: $r \nparallel s$ o $r \cap s = \{P\}$

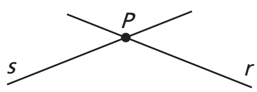


Fig. 2.105

Definición de rectas secantes:

Dos rectas son secantes si y solo si tienen un único punto común.

Un caso particular de las rectas secantes se tiene cuando las rectas al cortarse determinan al menos un ángulo cuya amplitud es de 90º, las rectas entonces se llaman perpendiculares y esa relación entre las dos rectas se denota con el símbolo: $\perp$.

Ejemplo 1:

En la figura 2.106 las rectas *r* y *s* son perpendiculares y esa relación en este caso se denota por: $r \perp s$.

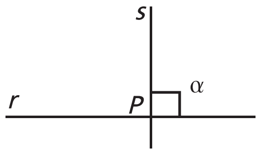


Fig. 2.106

Definición de rectas perpendiculares:

Dos rectas son perpendiculares si y solo si al cortarse en un punto determinan al menos un ángulo recto.

En el esquema 2.2 se resumen las posiciones relativas de dos rectas del plano.

Posiciones relativas de dos rectas

- Paralelas
  - Paralelas coincidentes (o iguales)

    Todos sus puntos son comunes
  - Paralelas no coincidentes

    (o paralelas diferentes)

    No tienen puntos comunes
- Se cortan
  - Se cortan en un punto formando un ángulo

    (Puede ser recto o de cualquier amplitud)

    Tienen un único punto común

Esquema 2.2

¿Sabías que...?

Observa en la figura 2.107 la pared azulejada de una cafetería. ¿Cómo es posible que las líneas de separación entre los azulejos blancos y negros parezcan curvas? Esto produjo gran desconcierto entre los clientes y dio fama al lugar en la década del setenta del siglo XX.[7]

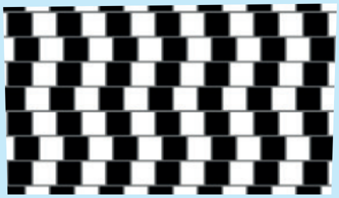


Fig. 2.107

La ilusión óptica ocurre por determinadas propiedades de un fenómeno que "impresionan" al ojo humano normal. La figura también muestra una pintura en la cual la posición de las vigas del techo da una idea tridimensional en la imagen.[8]

"Los pintores son los que con más frecuencia saben convertir en provechosa una percepción ilusoria general. En ello se basa todo el arte pictórico", escribió en el siglo XVIII el insigne matemático Euler. En el estudio de la geometría no podemos confiar en lo que vemos, sino en los datos dados.

Ejercicios

(epígrafe 2.2.1)

1. Investiga en la biblioteca, en la enciclopedia digital y en otras fuentes de consulta, datos sobre la vida del matemático Leonard Euler y sus apreciaciones acerca de las ilusiones ópticas. Pregunta a un profesor de Física, dónde puedes profundizar en esta temática.

2. Dadas las representaciones de la figura 2.108, identifica todas las relaciones de posición que observas entre un punto y una recta o entre dos rectas.

[7] Imagen tomada de la obra "A través de los ojos" de Ernesto Altshuler, 2002.

[8] Obra "Casa de Antonia Eiriz" del artista cubano Jorge Guanche, Museo de San Miguel del Padrón.

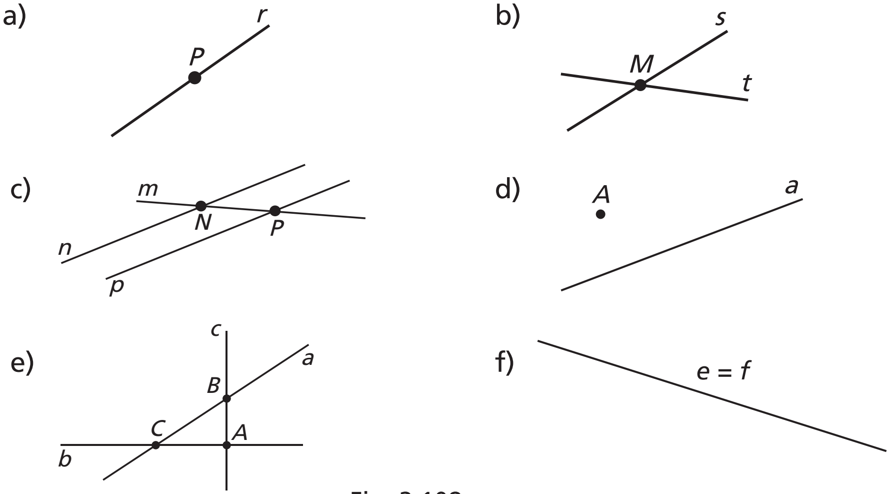


Fig. 2.108

3. Ilustra gráficamente todas las posibilidades que puedan ocurrir respecto a la posición de una recta y dos puntos.

4. Confecciona un esquema sobre todos los casos de la posición relativa de tres rectas cualesquiera del plano, similar al de las posiciones relativas de dos rectas.

5. Dados tres puntos como aparecen en la figura 2.109, en los incisos a y b. ¿Cuántas rectas puedes trazar en cada caso?

5.1 Por dos puntos.

5.2 Por tres puntos.

Fig. 2.109

6. Dos carros transitan con la misma velocidad constante por dos carreteras que en todo momento están a igual distancia una de la otra. Di si las carreteras son:

a) Perpendiculares b) Paralelas c) Coincidentes d) Se cortan

7.* Demuestra que si para dos rectas *a* y *b* se cumple que $a \parallel b$ entonces $b \parallel a$ (simetría del paralelismo de rectas).

8.* Demuestra que si dos rectas *r* y *s* tienen dos puntos comunes diferentes, entonces son iguales.

9.* Demuestra que dos rectas diferentes *a* y *b* tienen a lo sumo un punto común *P*.

10. Traza dos rectas *d* y *e* de modo que: *d* | | *e* y considera una recta *f* tal que *d* y *f* se corten en un punto *P*. ¿Cuál es la posición relativa entre las rectas *e* y *f* ? Repite este análisis con otras tres rectas. Elabora conclusiones acerca de ello.

2.2.2 Construcciones geométricas elementales

Después de conocer cuáles son las posiciones relativas de dos rectas solo falta saber cómo trazarlas con exactitud y para esto necesitaremos usar los instrumentos de dibujo. Los que utilizas en la escuela son la regla, el cartabón y el compás. Estos se emplean para resolver problemas de construcción, es decir, para encontrar determinados elementos como puntos, segmentos, rectas, circunferencias, etcétera, que deben satisfacer ciertas condiciones, relacionadas con otros elementos dados en el planteamiento del problema.

En el proceso de resolución de un problema encuentras con frecuencia que necesitas resolver otras construcciones más sencillas. Por ejemplo, para construir un cuadrado hay que trazar rectas paralelas y rectas perpendiculares. Precisamente son estas construcciones, llamadas elementales, las que aprenderás a realizar a continuación.

1. Construcción de la paralela a una recta por un punto exterior a esta.

Descripción de la construcción

Sea *r* una recta y *G* un punto que no pertenece a la recta *r*.

a) Se coloca un cartabón por uno de los lados que son perpendiculares sobre la recta *r* y la regla sobre otro lado perpendicular del cartabón.

b) Se desliza el cartabón a lo largo de la regla hasta que el lado colocado sobre la recta *r* pase por el punto *G*.

c) Se traza la paralela buscada, *p*, a lo largo del lado que no determina el ángulo recto del cartabón que pasa por *G*.

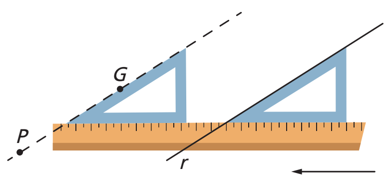


Fig. 2.110

Axioma de la unicidad del paralelismo de rectas:

Para cualquier recta *r* y para todo punto *P* que no está en la recta *r*, existe exactamente una recta *p* que pasa por *P* y es paralela a *r*.

Atención

Según este axioma no es posible en la geometría euclidiana trazar por un punto dos paralelas a una recta, sino una y solamente una.

2. Construcción de la perpendicular *s* a la recta *r* por un punto *G* (*G* puede pertenecer a la recta o ser exterior a esta).

Para realizar esta construcción utilizaremos el cartabón y la regla, pero a diferencia de la anterior, en este caso hay que tener mucho cuidado con el lado del cartabón que se escoge para colocar sobre la recta o sobre la regla.

¿Qué forma tiene el cartabón? Te has dado cuenta que es un triángulo rectángulo (fig. 2.111). Los lados que forman el ángulo recto reciben el nombre de *catetos* y el lado que se opone a este ángulo se llama *hipotenusa*.

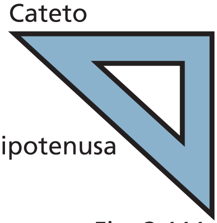


Fig. 2.111

Descripción de la construcción

Sean *a* y *b* los catetos y *c* la hipotenusa del cartabón (fig. 2.112). Entonces:

a) Se coloca un "cateto" del cartabón, por ejemplo *a*, sobre la recta *r* y la regla sobre la "hipotenusa" *c*,

b) Se desliza el cartabón a lo largo de la regla hasta que *b* pase por *G*.

c) Se traza la perpendicular buscada, *s*, a lo largo del lado de *b*.

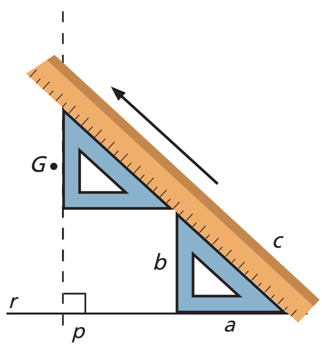


Fig. 2.112

Considera un segmento $\overline{AB}$, ¿cuántas rectas perpendiculares a él se pueden trazar por uno de sus puntos?

Recuerda que...

La unicidad de la perpendicularidad de rectas:

Por una recta *r* y un punto *G* cualquiera (puede estar en la recta *r* o no pertenecer a esta) existe exactamente una recta *p* que pasa por *G* y es perpendicular a la recta *r*.

Se pueden trazar infinitas rectas perpendiculares a un segmento dado, por cada uno de sus infinitos puntos, pero solamente la que pasa por su punto medio lo divide en dos segmentos iguales. Esta recta recibe el nombre de *mediatriz*.

Definición de mediatriz:

Se llama **mediatriz** de un segmento a la recta perpendicular a este que pasa por su punto medio.

3. Construcción de la mediatriz de un segmento

Descripción de la construcción

1. Se trazan con el compás las circunferencias de centro *A* y *B*, respectivamente y radios iguales *a*, longitud que es mayor que la mitad de la longitud del segmento $\overline{AB}$.
2. Sean *D* y *E* los puntos de intersección de esas circunferencias anteriores. La recta *b* que pasa por los puntos *D* y *E* es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, luego lo corta en su punto medio *F* (fig. 2.113).
3. Si consideramos los puntos *D* y *E* que utilizamos para trazar la mediatriz, podemos darnos cuenta que determinan con *A* y *B* un triángulo a cada lado del segmento $\overline{AB}$: ΔABD y ΔABE. Analiza las longitudes de los lados de estos triángulos.

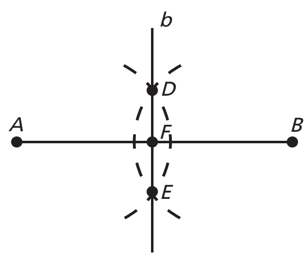


Fig. 2.113

¿Qué tipo de triángulo son estos? Observa la figura 2.114.

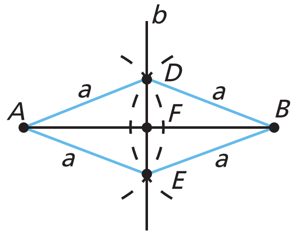


Fig. 2.114

Se trata de triángulos isósceles, pues los puntos *E* y *D* se obtienen por la intersección de dos circunferencias de centros *A* y *B* respectivamente y de radios iguales. Esta propiedad se cumple para cualquier punto que pertenece a la mediatriz de un segmento y la podrás demostrar en octavo grado. Así podemos concluir que:

Recuerda que...

Todo punto situado sobre la mediatriz de un segmento equidista de sus extremos.

Hasta el momento, para transportar segmentos y ángulos, has utilizado la regla y el cartabón para los primeros y el semicírculo, para los segundos. Aprenderás ahora a realizar estas operaciones con regla y compás.

4. Transporte de un segmento sobre una semirrecta

Descripción de la construcción

Sean $\overline{AB}$ un segmento y *OP* la semirrecta de origen *O* que pasa por el punto *P* (fig. 2.115).

a) Trazamos con un compás la circunferencia de centro *O* y radio igual a la longitud del segmento $\overline{AB}$ (fig. 2.116).

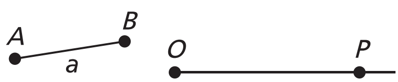


Fig. 2.115

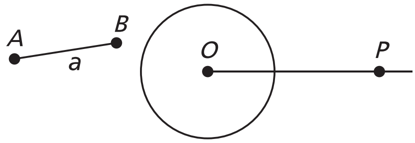


Fig. 2.116

b) Determinamos el punto *C* de intersección de la semirrecta *OP* y la circunferencia (fig. 2.117).

c) El segmento $\overline{OC}$ es igual al segmento $\overline{AB}$ (fig. 2.118).

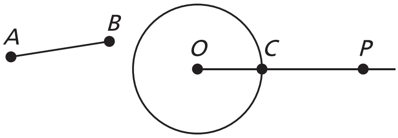


Fig. 2.117

Fig. 2.118

5. Transporte de un ángulo

Descripción de la construcción

Sean *ABC* un ángulo y *OP* la semirrecta de origen *O* que contiene al punto *P* (fig. 2.119).

a) Tracemos con el compás una circunferencia de centro *B* y radio *r* cualquiera. Denotemos por *N* y *Q*, respectivamente a los puntos de intersección de la circunferencia y los lados del ángulo $\measuredangle ABC$ (fig. 2.120).

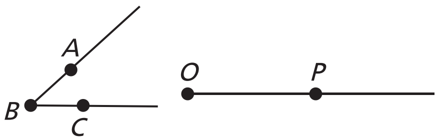


Fig. 2.119

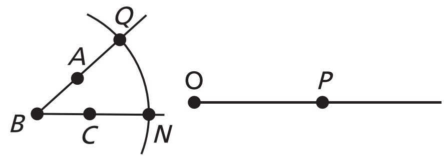


Fig. 2.120

b) Nuevamente con el compás, tracemos una circunferencia de centro *O* y radio *r* y denotemos por *H* el punto de intersección de la semirrecta *OP* y la circunferencia (fig. 2.121).

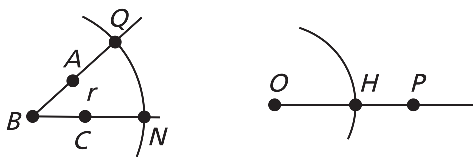


Fig. 2.121

c) Tracemos una circunferencia de centro *H* y radio igual a la longitud del segmento $\overline{NQ}$. Denotemos por *T* el punto de intersección de ambas circunferencias (fig. 2.122).

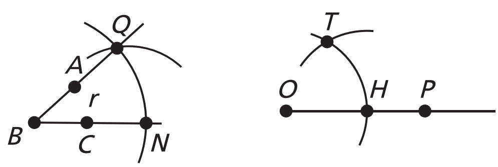


Fig. 2.122

d) Tracemos la semirrecta de origen *O* que pasa por el punto *T* (fig.2.123).

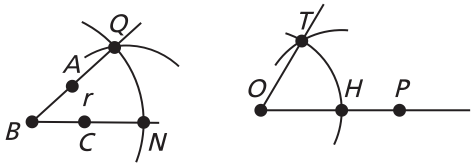


Fig. 2.123

El ángulo $\sphericalangle HOT$ es igual al ángulo $\sphericalangle ABC$.

Ejercicios

(epígrafe 2.2.2)

1. Construye la perpendicular *a* una recta *m* por un punto $P \in m$. Describe los pasos de esta construcción.

2. Traza un segmento de longitud 2,0 cm y a partir de lo aprendido en la construcción de paralelas, perpendiculares y el transporte de segmentos, construye un cuadrado *ABCD*.

3. Traza dos segmentos, uno de longitud 2,0 cm y otro de longitud 2,5 cm. A partir de lo aprendido en la construcción de paralelas, perpendiculares y el transporte de segmentos, construye un rectángulo *MNPQ*.

4. Traza un segmento $\overline{AB}$ y construye su mediatriz. Ubica un punto *M* cualquiera en la mediatriz y compara las distancias desde *M* a los extremos del segmento $\overline{AB}$. Selecciona otro punto *K* que no pertenezca a la mediatriz de $\overline{AB}$ y compara también las distancias de *K* a los extremos del segmento $\overline{AB}$. Fundamenta estas comparaciones.

5. Dado un triángulo *ABC*, construye un punto *P* que equidiste de los puntos *A* y *B* y de los puntos *A* y *C*. Fundamenta la construcción realizada.

6.* Demuestra que para tres rectas *a*, *b* y *c*, si $a \parallel b$ y $c \parallel b$ entonces $a \parallel c$ (principio de comparación respecto a un tercero).

7.* Demuestra que para tres rectas *a*, *b* y *c*, si $a \parallel b$ y $b \parallel c$ entonces $a \parallel c$ (transitividad del paralelismo de rectas).

8. Traza un ángulo agudo cualquiera β y construye otro ángulo cuyos lados sean respectivamente paralelos a los lados del ángulo β. Mide con el semicírculo las amplitudes de ambos ángulos y compáralas. Repite el procedimiento y elabora una conclusión respecto a ello.

9. Fernanda quiere medir la amplitud del ángulo de la figura 2.124 con un semicírculo, pero inexplicablemente no es posible acceder a su vértice ni prolongando las rectas que contienen sus lados. Determina un procedimiento práctico a partir de las construcciones estudiadas, para determinar la amplitud del ángulo *ABC*.

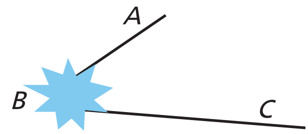


Fig. 2.124

10.* Traza un segmento de longitud *a* y construye un triángulo equilátero cuyos lados tengan longitud *a*. Describe la construcción realizada y fundaméntala a partir de las construcciones estudiadas.

11.* Demuestra la propiedad geométrica que obtuviste como resultado del análisis del ejercicio 10 del epígrafe anterior.

12.* Construye un triángulo *ABC* con un ángulo agudo α de vértice *A*, en cuyos lados ubicarás los vértices restantes *B* y *C*. ¿Cómo?
De manera que al transportar en uno de estos lados, un segmento $\overline{AC}$ de longitud cualquiera *b*, queda determinado el vértice *C* y al tratar de cortar con el compás, a partir de este vértice *C*, al lado *AB* con una longitud a tal que $a < b$, queda determinado el tercer vértice *B*. Analiza cuántas soluciones tiene este problema de construcción, según la relación entre la longitud *b* y la distancia de *C* a la recta *AB*.

2.2.3 Ángulos determinados por dos rectas que se cortan

Diferentes ramas de la técnica y la ciencia, como la astronomía y la topografía, necesitan de la medida precisa de los ángulos. Pero no siempre esto es posible lograrlo con el uso directo de instrumentos de medición. En muchos de estos casos es más fácil aplicar las relaciones que cumplen determinadas parejas de ángulos que determinan dos rectas. Vamos a estudiarlas a continuación (fig. 2.125).

Fig. 2.125

Si *r* y *s* son dos rectas que se cortan en un punto *P*, quedan determinados cuatro ángulos que denotaremos por los números naturales: 1, 2, 3 y 4. ¿Qué tipo de ángulo son ∢1 y ∢2, respecto a la recta *r*? (fig. 2.126)

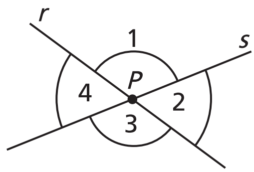


Fig. 2.126

Efectivamente, son ángulos consecutivos del mismo lado de la recta, pues tienen en común el vértice y un lado y están situados en el mismo semiplano de borde *r*.

Pero observa que el lado no común forma en la recta *r* dos semirrectas opuestas de origen en el vértice *P*. Esta pareja de ángulos así determinados se denomina: *ángulos adyacentes*.

¿Cuál es la suma de las amplitudes de dos ángulos adyacentes?

En la figura 2.126 se aprecia que el ángulo cuya amplitud es la suma de las amplitudes de los ángulos consecutivos ∢1 y ∢2 tiene como lados semirrectas opuestas, que determinan el punto *P* sobre la recta *r*, es decir, es un ángulo llano. Por lo cual, su amplitud suma es 180º.

Definición de ángulos adyacentes:

Una pareja de ángulos consecutivos situados del mismo lado de una recta, de manera que sus amplitudes suman 180º se denominan ángulos adyacentes.

Observa los ángulos ∢1 y ∢3. Tienen el vértice común y sus lados están formados por semirrectas opuestas (fig. 2.127). Los ángulos que cumplen estas características se llaman **ángulos opuestos por el vértice.**

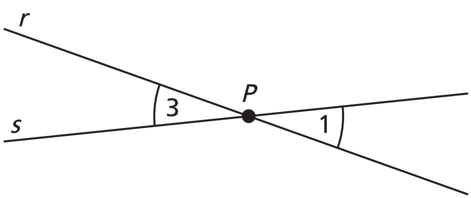


Fig. 2.127

¿Puedes establecer alguna relación entre las amplitudes de dos ángulos opuestos por el vértice?

Compara estas amplitudes de diferentes formas midiéndolas con un semicírculo o con una plantilla de uno de esos ángulos que superpones al otro o utilizando alguno de los asistentes geométricos que te permiten mover la figura, por ejemplo, el Geómetra, que puedes encontrar en el *software* educativo Elementos Matemáticos.

Teorema sobre los ángulos opuestos por el vértice:

Sean r y s dos rectas que al cortarse en un punto P determinan los ángulos $\sphericalangle 1$ y $\sphericalangle 3$ opuestos por el vértice, entonces estos ángulos tienen igual amplitud (fig. 2.128).

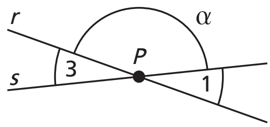


Fig. 2.128

Demostración
Premisa: $\sphericalangle 1$ y $\sphericalangle 3$ opuestos por el vértice
Tesis: $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$
Sea α el ángulo adyacente común a estos ángulos $\sphericalangle 1$ y $\sphericalangle 3$, entonces se cumple que: $\sphericalangle 1 + \alpha = 180°$ y $\sphericalangle 3 + \alpha = 180°$, por propiedad de ángulos adyacentes.
Comparando estas igualdades se cumple que: $\sphericalangle 1 + \cancel{\alpha} = \sphericalangle 3 + \cancel{\alpha}$
Por tanto: $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$.

Ejemplo 1:
En la figura 2.129, los puntos D, A, B y los puntos E, A, F son alineados, $\sphericalangle CAB = 97°$, $\sphericalangle DAE = 48°$. Calcula la amplitud de los ángulos:

a) $\sphericalangle DAC$ b) $\sphericalangle CAF$

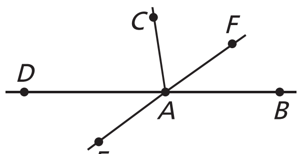


Fig. 2.129

Solución:

$\sphericalangle DAC + \sphericalangle CAB = 180°$ por ser ángulos adyacentes.
Como $\sphericalangle CAB = 90°$ por datos, sustituyendo y despejando, tenemos que:
$\sphericalangle DAC = 180° - \sphericalangle CAB = 180° - 97°$
$\sphericalangle DAC = 83°$

$\sphericalangle DAE = \sphericalangle FAB$ por ser ángulos opuestos por el vértice.
Luego $\sphericalangle FAB = 48°$
$\sphericalangle CAF + \sphericalangle FAB = \sphericalangle CAB$ por suma de amplitudes de ángulos consecutivos.
$\sphericalangle CAF + 48° = 97°$ por sustitución.
$\sphericalangle CAF = 49°$

Respuesta: La amplitud de los ángulos es: $\measuredangle DAC = 83°$ y $\measuredangle CAF = 49°$.

Definición de bisectriz:

Se llama **bisectriz** de un ángulo a la semirrecta de origen en el vértice del ángulo que pasa por su interior y lo divide en dos ángulos iguales.

Ahora toma un punto *P* cualquiera de la bisectriz del ángulo de la figura 2.130 y mide la distancia desde él a cada lado del ángulo y compara ambas distancias.

Por supuesto, al medir la distancia de un punto a una recta debe hacerse sobre la perpendicular. En este caso, para no dibujar sobre el libro, puedes medir sobre el ángulo recto del cartabón como en la figura 2.131.

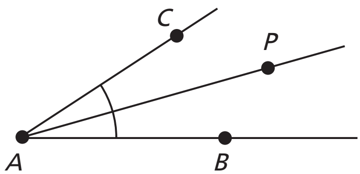


Fig. 2.130

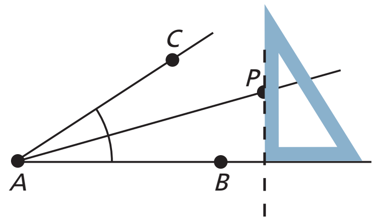


Fig. 2.131

Ubica otros puntos en la bisectriz y repite este procedimiento, ¿qué conclusión puedes elaborar sobre esto?

Recuerda que...

Todo punto situado en la bisectriz de un ángulo equidista de los lados del ángulo.

6. Construcción de la bisectriz de un ángulo

Descripción de la construcción

Sea *A* el vértice del ángulo $\measuredangle(a, b)$:

a) Se traza una circunferencia de centro *A* y de radio cualquiera *r* que corte a los lados *a*, *b* en *E* y *F*, respectivamente (fig. 2.132).

b) Con centro en *E* y en *F* se trazan dos circunferencias del mismo radio *r* que se cortan en un punto *G* diferente de *A* (fig. 2.133).

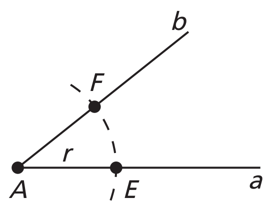


Fig. 2.132

c) La semirrecta f de origen A y que pasa por el punto G es la bisectriz del ángulo $\sphericalangle(a, b)$ (fig. 2.134).

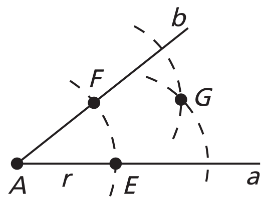


Fig. 2.133

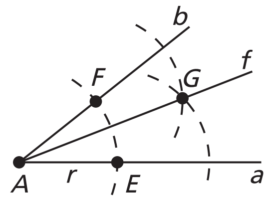


Fig. 2.134

Ejercicios

(epígrafe 2.2.3)

1. Selecciona la respuesta correcta:

a) Sean α y β dos ángulos adyacentes y $\alpha = 28°$, entonces:

$\beta = 82°$ $\beta = 28°$ $\beta = 152°$

b) Sean α y β dos ángulos opuestos por el vértice y β es agudo, entonces:

α es obtuso α es agudo α es recto

c) Sean el ángulo $\sphericalangle ABC$ agudo y P un punto cualquiera de su bisectriz, entonces:

- La distancia de P a los lados del ángulo ABC es diferente.
- Los ángulos $\sphericalangle ABP$ y $\sphericalangle PBC$ son iguales.
- El ángulo $\sphericalangle ABP$ es la tercera parte del ángulo $\sphericalangle ABC$.

d) Si m es la mediatriz de un segmento $\overline{AB}$ y P es un punto que está situado sobre la recta m, tal que $P \in \overline{AB}$ entonces:

- ABP es un triángulo isósceles.
- $\overline{AP} \neq \overline{BP}$.
- Los ángulos $\sphericalangle PAB$ y $\sphericalangle ABP$ son diferentes.

2. ¿Toda pareja de ángulos adyacentes son suplementarios? ¿Toda pareja de ángulos suplementarios son adyacentes? Fundamenta tu respuesta.

3. Completa los espacios en blanco:

- De un par de ángulos adyacentes, si uno es agudo, el otro es ______________.
- Si uno de los ángulos opuestos por el vértice es obtuso, el otro es ____________.

- Si dos ángulos opuestos por el vértice son rectos, las rectas que los determinan son ______________.

4. Las proposiciones siguientes no son verdaderas. Justifica su falsedad con un ejemplo.

- Si dos ángulos tienen un lado común, entonces son adyacentes.
- Si dos ángulos tienen el mismo vértice, entonces son adyacentes.
- Si dos ángulos tienen el mismo vértice, son opuestos por el vértice.

5. En la figura 2.135 las rectas *BE*, *AD* y *CF* se cortan en *M*. Compara las amplitudes de los ángulos. Justifica.

a) $\sphericalangle AMB$ ____ $\sphericalangle EMD$

b) $\sphericalangle BME$ ____ $\sphericalangle FMC$

c) $\sphericalangle AMB + \sphericalangle AMF$ ____ $\sphericalangle DME + \sphericalangle CMD$

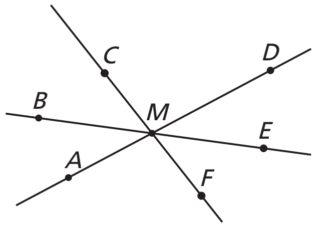


Fig. 2.135

6. Sean *AC* y *BD* dos rectas que se cortan en *O* (fig. 2.136). Si $\sphericalangle AOB = 43°$, calcula la amplitud de los ángulos restantes que se forman.

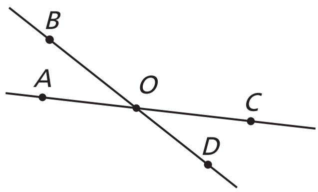


Fig. 2.136

7. Determina la veracidad de la proposición siguiente. Fundamenta.
"Si dos ángulos son consecutivos y sus amplitudes suman 180°, entonces son ángulos adyacentes".

8. En la figura 2.137, $\overline{OD} \perp \overline{OB}$.
Si $\sphericalangle AOB = 90° + \beta$

a) Completa: $\alpha = 90° +$ ______

b) Compara $\sphericalangle AOB$ ____ $\sphericalangle DOC$

c) ¿Cómo son dos ángulos obtusos de lados perpendiculares?

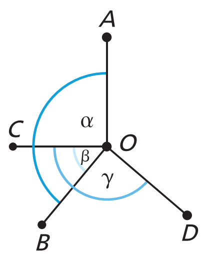


Fig. 2.137

9. Comprueba que los ángulos α y β tienen lados perpendiculares (figs. 2.138 y 2.139). Compara las amplitudes de estos ángulos en cada inciso y elabora una conclusión respecto a ello, según el tipo de ángulo que los datos nos informan.

a) α y β son agudos.

b) α es agudo y β es obtuso.

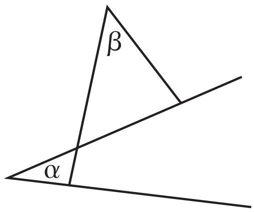


Fig. 2.138

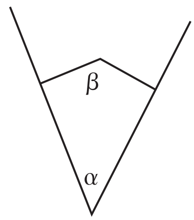


Fig. 2.139

10. Fundamenta en cada caso por qué las semirrectas *p* y *q* no son opuestas (figs. 2.140 y 2.141).

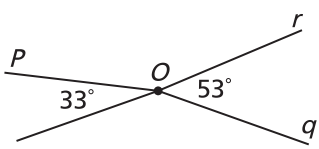


Fig. 2.140

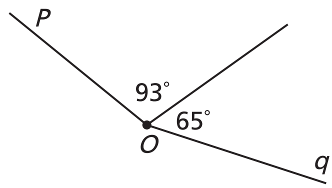


Fig. 2.141

11*. Demuestra que:

a) Todo ángulo de igual amplitud que su adyacente es recto.

b) Todo ángulo recto es de igual amplitud que su adyacente.

c) Si dos ángulos tienen igual amplitud, entonces sus respectivos ángulos adyacentes tienen igual amplitud.

d) Dos rectas *r* y *s* perpendiculares se cortan formando cuatro ángulos rectos.

2.2.4 Ángulos formados por dos rectas cortadas por una tercera

Sean *r* y *s* dos rectas cualesquiera del plano, estas determinan tres regiones en el plano que denominaremos externas o interna como se muestra en la figura 2.142.

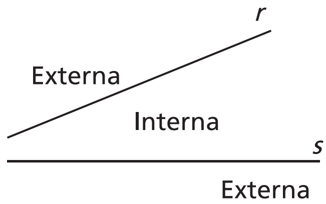


Fig. 2.142

Consideremos ahora otra recta *t* que corta a la recta *r* en el punto *P* y a la recta *s* en el punto *Q*. Esta recta recibe el nombre de **recta secante** (fig. 2.143).

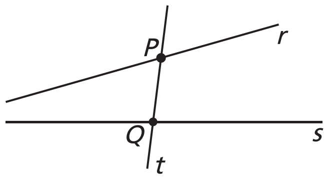


Fig. 2.143

Observa que se forman cuatro ángulos en la región interna (∢4, ∢3, ∢6 y ∢5) y cuatro en la región externa (∢1, ∢2, ∢7 y ∢8). Estos ángulos reciben diferentes denominaciones en función de la posición que ocupan respecto a las rectas (fig. 2.144).

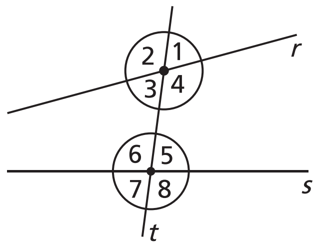


Fig. 2.144

Ángulos correspondientes: es una pareja de ángulos, situados al mismo lado de la secante, uno en la región interna y el otro en la externa y que no tienen el vértice común (∢1 y ∢5, ∢2 y ∢6, ∢3 y ∢7, ∢4 y ∢8) (fig. 2.145).

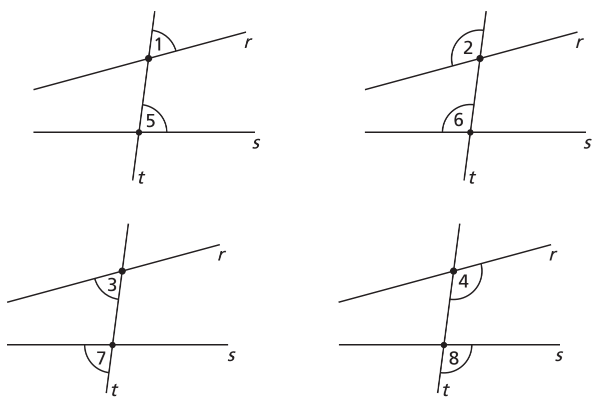


Fig. 2.145

Ángulos alternos: Son los que están situados a distintos lados de la secante y en la misma región (interna o externa) y no tienen el vértice común (∢1 y ∢7, ∢2 y ∢8, ∢3 y ∢5, ∢4 y ∢6) (fig. 2.146).

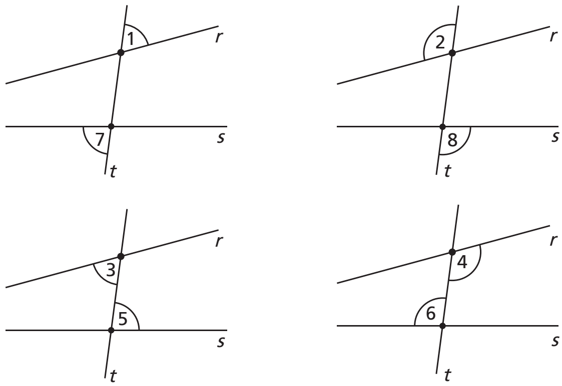


Fig. 2.146

Ángulos conjugados: Son los que están situados al mismo lado de la secante y en la misma región (interna o externa) y no tienen el vértice común (∢1 y ∢8, ∢2 y ∢7, ∢3 y ∢6, ∢4 y ∢5) (fig. 2.147).

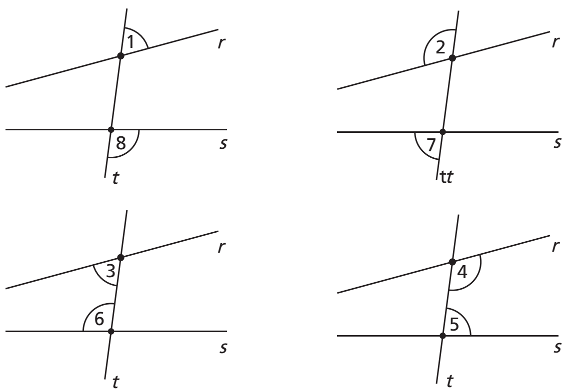


Fig. 2.147

¿Existe alguna relación entre las amplitudes de cada pareja de estos tipos de ángulos determinados por dos rectas que se cortan? Es decir, ¿entre las amplitudes de las parejas de correspondientes, alternos o conjugados? Si mides sus amplitudes podrás darte cuenta de que, por lo general, no es posible establecer una relación entre estas.

Reflexiona

¿Y si las rectas *r* y *s* fueran paralelas, se mantendría la conclusión anterior? En estas nuevas condiciones, al realizar una vez más el proceso de medición, verás que sí, es posible establecer relaciones entre las amplitudes de estos tipos de ángulos entre paralelas.

En el esquema 2.3 se resume la relación entre las amplitudes de los ángulos entre paralelas, que constituyen importantes teoremas de la geometría plana:

- Relación entre las amplitudes de ángulos entre paralelas
  - Sus amplitudes son iguales
    - Alternos
    - Correspondientes
  - Sus amplitudes suman 180°
    - Conjugados

Esquema 2.3

¿Sabías que...?

El teorema que plantea que la suma de las amplitudes de los ángulos conjugados entre paralelas es igual a 180°, es una propiedad equivalente al axioma de las paralelas que formuló Euclides en *Los Elementos*.

Podemos demostrar que los ángulos alternos o los ángulos correspondientes entre paralelas son respectivamente iguales, aplicando esa propiedad, que para nosotros es un teorema, veamos cómo.

Teorema sobre la amplitud de ángulos alternos entre paralelas

Si dos rectas paralelas *a* y *b* son cortadas por una secante *c*, entonces los ángulos alternos que se determinan tienen igual amplitud.

Demostración

Premisa: $a \parallel b$ y *c* secante

Tesis: los ángulos alternos que se determinan tienen igual amplitud. Sin perder generalidad, sean $\sphericalangle 1$ y $\sphericalangle 2$ una pareja de ángulos alternos cualquiera, la tesis expresada de forma más sencilla es: $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ (fig. 2.148).

Si consideramos $\sphericalangle 3$ conjugado con $\sphericalangle 2$ y adyacente al $\sphericalangle 1$, se tiene:

$\sphericalangle 1 + \sphericalangle 3 = 180°$ por adyacentes.

$\sphericalangle 3 + \sphericalangle 2 = 180°$ por conjugados con $a \parallel b$ y *c* secante.

$\sphericalangle 1 + \sphericalangle 3 = \sphericalangle 3 + \sphericalangle 2$ comparando ambas igualdades.

Por tanto: $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$.

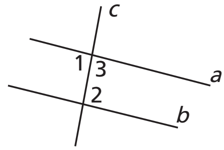


Fig. 2.148

De forma análoga se procede para demostrar la igualdad de los ángulos correspondientes entre paralelas. ¡Inténtalo tú!

Ejemplo 1:

Si *a* y *b* son dos rectas paralelas cortadas por la recta *c*, como puedes observar en la figura 2.149 y $\sphericalangle 2 = 143°$. Calcula las amplitudes de los ángulos: $\sphericalangle 3$ y $\sphericalangle 4$.

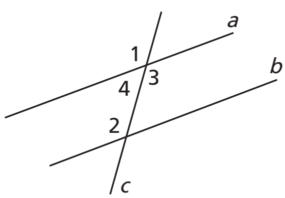


Fig. 2.149

Primera vía de solución

a) $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 2$ porque son ángulos alternos entre las paralelas *a* y *b*, cortadas por la secante *c*. Luego $\sphericalangle 3 = 143°$, porque $\sphericalangle 2 = 143°$ por datos.

b) $\sphericalangle 4 + \sphericalangle 2 = 180°$, porque son ángulos conjugados entre las paralelas *a* y *b*, cortadas por la secante *c*.

Sustituyendo $\sphericalangle 2 = 143°$, que se da como dato se tiene que:

$\sphericalangle 4 = 180° - \sphericalangle 2$

$= 180° - 143°$

$= 37°$

$\sphericalangle 4 = 37°$

Segunda vía de solución

a) $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 1$ por ángulos opuestos por el vértice.

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ por ángulos correspondientes entre las paralelas *a* y *b*, cortadas por la secante *c*.

Luego $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 2$

y como $\sphericalangle 2 = 143°$ por datos

$\sphericalangle 3 = 143°$

b) $\sphericalangle 4 + \sphericalangle 3 = 180°$ porque son ángulos adyacentes,

Luego: $\sphericalangle 4 = 180° - \sphericalangle 3$, sustituyendo el dato: $\sphericalangle 3 = 143°$

$\sphericalangle 4 = 180° - 143° = 37°$

$\sphericalangle 4 = 37°$

Ejercicios

(epígrafe 2.2.4)

1. Identifica las proposiciones falsas y fundaméntalas, teniendo en cuenta que en la figura 2.150 las rectas *r* y *s* son rectas secantes cortadas por la recta *t*.

a) ___ Los ángulos dos y cuatro son ángulos correspondientes.

b) ___ Los ángulos siete y uno son ángulos alternos.

c) ___ La amplitud del ángulo seis es igual a la amplitud del ángulo dos.

d) ___ Los ángulos tres y seis son adyacentes.

e) ___ La suma de las amplitudes de los ángulos cinco y ocho es 180°.

f) ___ Los ángulos uno y dos son opuestos por el vértice.

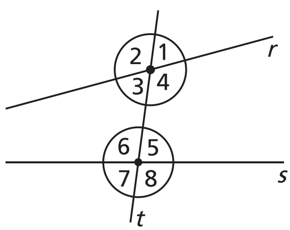


Fig. 2.150

2. Dada la figura 2.151, completa los espacios en blanco para obtener una proposición verdadera en cada inciso.

a) El ∢8 es ____________ con el ∢4 y este a su vez es ______________ con el ∢2.

b) El _____ es correspondiente con el ∢12 y opuesto por el vértice con el _____.

c) El ∢3 es ______________ con el ∢6 y a la vez alterno con ______.

d) El ∢11 es conjugado con el _______ y este a su vez _____________ con el ∢6.

e) El ______ es alterno con el ∢1 y a su vez conjugado con el ________.

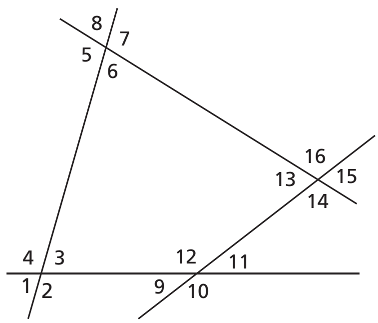


Fig. 2.151

3. Fundamenta por qué se cumplen las relaciones siguientes, si las rectas *m* y *n* son paralelas y *t* es una recta secante respecto a estas (fig. 2.152).

a) ∢*ABD* = ∢*BFE*

b) ∢*DBF* + ∢*BFE* = 180°

c) ∢*ABD* = ∢*GFH*

d) ∢*BFE* + ∢*EFH* = 180°

f) ∢*ABC* = ∢*DBF*

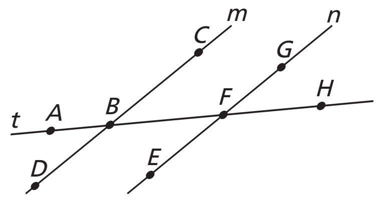


Fig. 2.152

4. Enjuicia la veracidad de las afirmaciones siguientes, fundamentando aquellas que consideras falsas.

a) Al trazar dos rectas cortadas por una secante, todas las parejas de ángulos alternos son de igual amplitud.

b) Al trazar dos rectas paralelas cortadas por una secante, todas las parejas de ángulos alternos son de igual amplitud.

c) Al trazar dos rectas paralelas cortadas por una secante, cada pareja de ángulos alternos tiene la misma amplitud.

5. Marca con una X las proposiciones falsas y justifica tu respuesta en esos casos, teniendo en cuenta que las rectas *c* y *d* son rectas paralelas, cortadas por la recta secante *t*, como se muestra en la figura 2.153.

a) ___ Los ángulos uno y dos son ángulos suplementarios.
b) ___ Los ángulos cuatro y seis son ángulos alternos.
c) ___ La amplitud del ángulo cuatro es igual a la amplitud del ángulo cinco.
d) ___ Los ángulos dos y cuatro son opuestos por el vértice.
e) ___ La suma de las amplitudes de los ángulos cinco y ocho es 180°.
f) ___ Los ángulos cuatro y ocho son opuestos por el vértice.

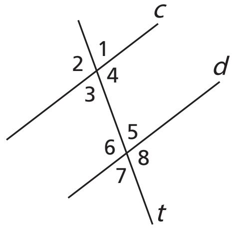


Fig. 2.153

6. En la figura 2.154, las rectas *m* y *n* son paralelas, cortadas por las rectas secantes *r* y *s*. Completa los espacios en blanco para obtener una proposición verdadera en cada inciso.

a) El ∢5 es ____________ con el ∢3 y este a su vez es ______________ con el ∢8.
b) El ______ es correspondiente con el ∢15 y opuesto por el vértice con el _____.
c) El ∢14 es _____________ con el ∢4 y a la vez conjugado con _________.
d) El ∢11 es alterno con el ________ y este a su vez es _________________ con el ∢9.

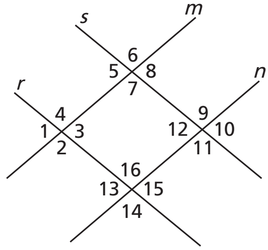


Fig. 2.154

7. En la figura 2.155, *d* y *e* son rectas paralelas cortadas por la recta *f*. Si $\alpha = 28°$, $\theta = 152°$ y *b* es la bisectriz de λ. Calcula la amplitud de β, λ y del ∢1.

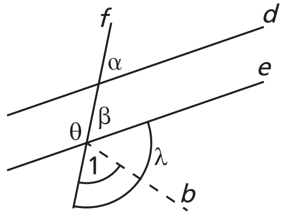


Fig. 2.155

8. Calcula los ángulos denotados por letras griegas en las figuras 2.156, 2.157 y 2.158; teniendo en cuenta las amplitudes de los ángulos que allí se dan y que las saetas indican rectas paralelas.

a)

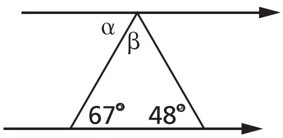


Fig. 2.156

b)

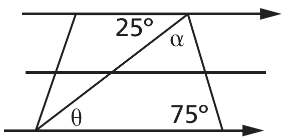


Fig. 2.157

c)

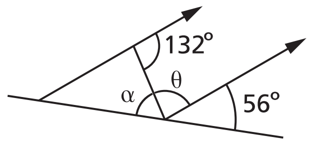


Fig. 2.158

9. En la figura 2.159, se tiene que $\alpha = 65°$ y $\theta = 115°$. Calcula con estos datos la amplitud de β.

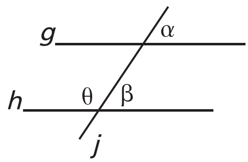


Fig. 2.159

10.* Para probar que dos rectas son paralelas, basta encontrar una pareja de ángulos alternos o correspondientes que sean iguales, o una pareja de ángulos conjugados que sumen 180°.
Teniendo en cuenta los resultados del ejercicio nueve y la afirmación anterior, analiza la figura 2.159 y demuestra que:
Si *h* y *g* son dos rectas cortadas por la recta *j* y se cumple que: $\alpha = 65°$ y $\theta = 115°$, entonces $h \mid\mid g$.

11.* Se tiene un punto *A* exterior a una recta *r*, construye la recta paralela a *r* que pasa por *A*. ¿En qué te fundamentas para asegurar que esta recta es paralela a la recta *r*?

12. Vanesa buscaba información en la prensa sobre el ahorro y la conservación de recursos hidráulicos para un trabajo práctico y vio la caricatura que aparece en la figura 2.160, la cual tituló: “Ahorrativa simetría”. ¿Por qué? ¿Qué título le pondrías tú? Este nombre se relaciona con los movimientos del plano que estudió en quinto grado y recordó algunas de sus muchas aplicaciones en la vida práctica.

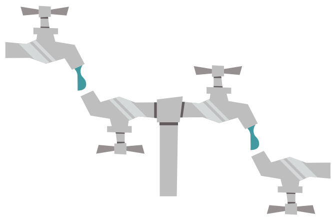


Fig. 2.160

2.3 Los movimientos del plano y sus propiedades

Vamos a ver aquí dos ejemplos.

¿Qué palabra está escrita en este renglón?

AMBULANCIA

Toma tu libro de Matemática y mostrando esta página, párate frente a un espejo e intenta leer el reflejo de esta palabra en él. ¿Qué diferencia puedes apreciar?

¡Por supuesto, leíste: AMBULANCIA!

¿Sabías que...?

¿Sabías que en la parte delantera de las ambulancias aparece escrito su nombre así, para que los choferes que van delante la identifiquen rápidamente por el retrovisor y le den paso (fig. 2.161)?

Fig. 2.161

Otro ejemplo se aprecia en la fachada del centro cultural "Raquel Revuelta".

Este centro está ubicado en la intersección de las calles Línea y B, en El Vedado, La Habana. El centro honra la memoria de una gran actriz cubana, fundadora de Teatro Estudio. El logotipo de la instalación nos hace pensar en un movimiento del plano (fig. 2.162), ¿cuál es?

Fig. 2.162

Propiedades generales de los movimientos del plano

Piensa en otros ejemplos de movimientos de la vida práctica: el lanzamiento de una pelota, el movimiento del péndulo de un reloj, de un tren por su línea férrea, entre otros. ¿Qué tienen en común y en qué se diferencian estos movimientos? (fig. 2.163)

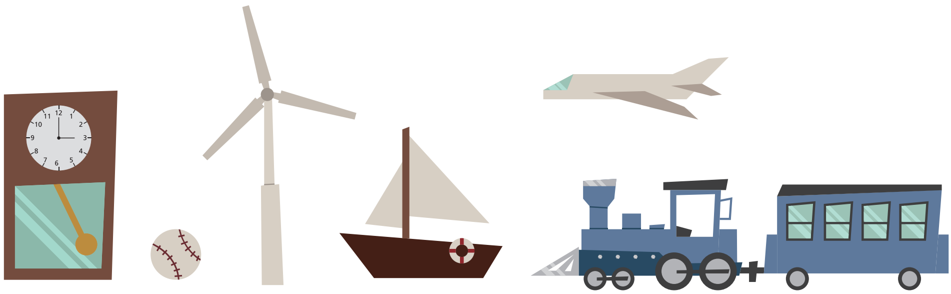


Fig. 2.163

Aunque estos son ejemplos de movimientos diferentes, sin embargo, todos los objetos se mantienen iguales, no se deforman como resultado del movimiento.

Puedes determinar si dos figuras son iguales, cuando al superponerlas coinciden (fig. 2.164). Para lograr esto es preciso "mover" una de estas hasta que esté situada sobre la otra, de modo que cada punto de la figura que se ha movido quede totalmente encima de su correspondiente en la otra figura.

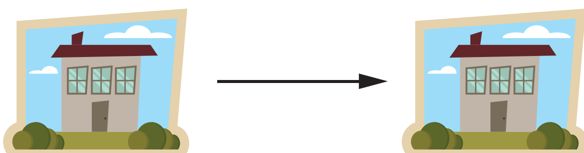


Fig. 2.164

Definición de movimiento del plano:

Toda correspondencia de puntos del plano, en la cual a cada punto original se le asocia exactamente un punto imagen y viceversa, de manera que siempre se conserven las distancias entre dos puntos cualesquiera, es un movimiento del plano.

Ejemplo 1:

Una figura cualquiera del plano, siempre es posible moverla hasta hacerla coincidir con otra figura igual a esta. En estos ejemplos puedes pensar cómo "moverías" las figuras iguales dadas para hacerlas coincidir (figs. 2.165 a la 2.168).

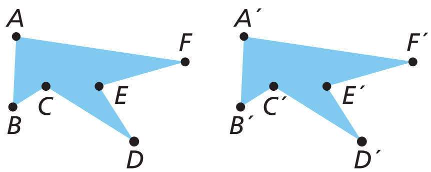


Fig. 2.165

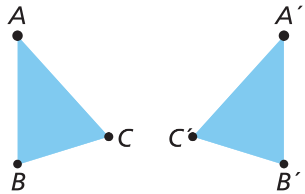


Fig. 2.166

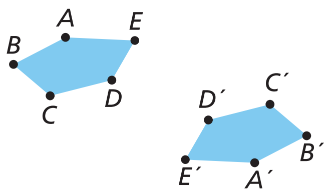


Fig. 2.167

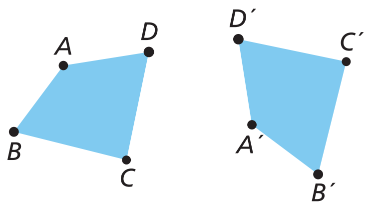


Fig. 2.168

Propiedades de los movimientos del plano:

a) Toda figura y su imagen por un movimiento son iguales.

b) Cuando se realiza un movimiento, las figuras conservan su forma y su tamaño, no sufren deformación alguna (fig. 2.169).

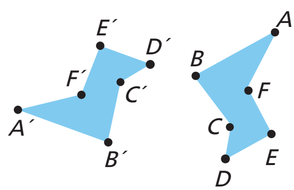


Fig. 2.169

c) Los segmentos, semirrectas y rectas se transforman, respectivamente, en segmentos, semirrectas y rectas (fig. 2.170).

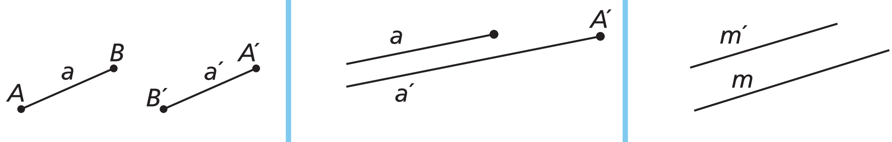


Fig. 2.170

d) Los segmentos y ángulos se transforman en segmentos y ángulos respectivamente, de la misma medida (figs. 2.171 y 2.172).

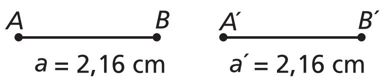


Fig. 2.171

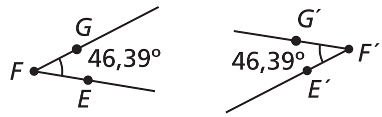


Fig. 2.172

e) Las rectas paralelas se transforman en rectas paralelas (fig. 2.173).

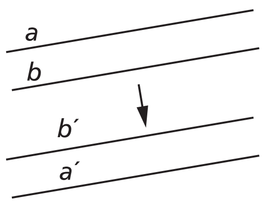


Fig. 2.173

f) Las rectas secantes se transforman en rectas secantes. Los puntos de intersección son correspondientes (fig. 2.174).

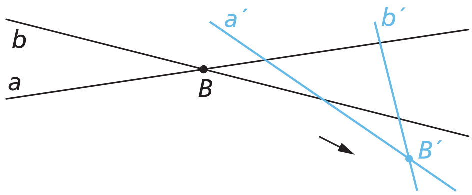


Fig. 2.174

Reflexión respecto a una recta o simetría axial

Investiga y aprende

Para tener una idea intuitiva de este movimiento toma una hoja de papel transparente y dibuja una figura cualquiera *F*. Luego dobla esta hoja a la mitad y calca la figura en el otro lado. Cuando abres el papel tienes la imagen de *F* dispuesta como en la figura 2.175, por la reflexión que tiene como eje la recta *d* que contiene la línea del doblado del papel.

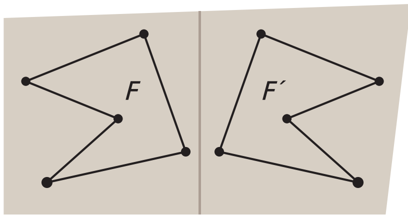


Fig. 2.175

Recuerda que...

La simetría axial está determinada por una recta del plano, llamada eje de reflexión o eje de simetría.

¿Cómo construir la imagen de un punto por una reflexión respecto a una recta?

Descripción de la construcción

Sea r una recta y P un punto cualquiera del plano (fig. 2.176).

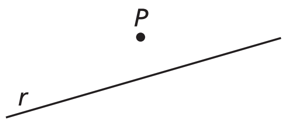


Fig. 2.176

a) Trazamos la perpendicular a la recta r que pasa por el punto P (fig. 2.177).

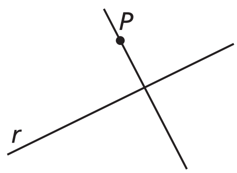


Fig. 2.177

b) Determinamos el punto de intersección de ambas rectas. Sea *M* este punto (fig. 2.178).

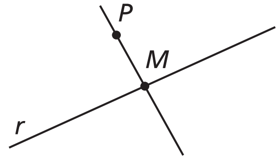


Fig. 2.178

c) Transportamos el segmento $\overline{PM}$ sobre la semirrecta opuesta a la semirrecta *MP*, queda así determinado el punto *P'*, que es la imagen del punto *P*, por la reflexión de eje *r* (fig. 2.179).

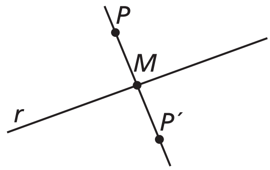


Fig. 2.179

El punto *P'* es entonces el simétrico del punto *P* por esa reflexión de eje *r*.

Ejemplo 1:
Determina la imagen del cuadrilátero *ABCD* por la reflexión de eje *a* (fig. 2.180).

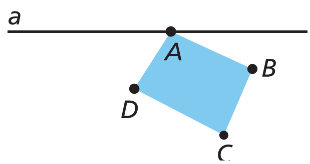


Fig. 2.180

Solución:
a) Construimos las imágenes *A'*, *B'*, *C'* y *D'* de los puntos *A*, *B*, *C* y *D* tal como se indicó en la descripción de la construcción (fig. 2.181).

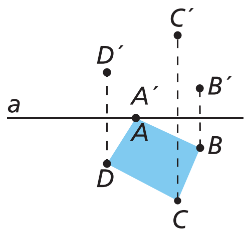


Fig. 2.181

b) Unimos los puntos *A'*, *B'*, *C'* y *D'* y obtenemos la imagen del cuadrilátero *ABCD* (fig. 2.182).

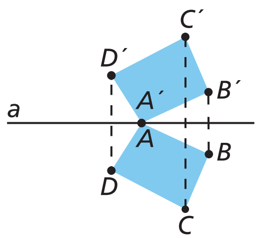


Fig. 2.182

En el movimiento de reflexión respecto a una recta, hay puntos y rectas que cumplen determinadas propiedades. Por ejemplo, observa las figuras 2.181 y 2.182 y trata de responderte las interrogantes siguientes:

¿Dónde está situado el punto *A*? ¿Dónde está situada su imagen? ¿Ocurrirá lo mismo si tomamos otro punto que esté en el eje de simetría?

Recuerda que...

Todo punto situado sobre el eje de reflexión coincide con su imagen.

Considera ahora el punto *D* y su imagen *D'* en la figura 2.182. ¿Qué representa el eje de simetría para el segmento determinado por estos dos puntos?

Recuerda que...

En el movimiento de reflexión respecto a una recta, el eje es la mediatriz de todo segmento determinado por un punto y su imagen.

Observa la figura 2.183. Si *b* es una recta paralela al eje de simetría *a*, ¿qué posición relativa tienen esta recta *b* y su imagen *b'*, por la reflexión de eje *a*?

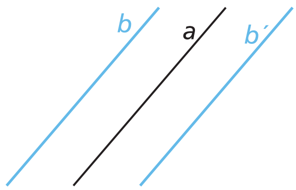


Fig. 2.183

Si la recta *b* no es paralela al eje de simetría *a*, ¿serán paralelas la recta *b* y su imagen *b'*, por la reflexión de eje *a*?, ¿dónde está situado el punto de intersección? La figura 2.184 cumple estas condiciones, ¿a qué conclusiones puedes llegar?

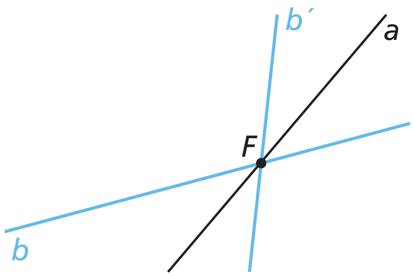


Fig. 2.184

Recuerda que...

- La imagen de una recta paralela al eje de reflexión es otra recta que es paralela a ambas.
- Si una recta contiene a un punto del eje de reflexión, su imagen –que contiene a todos los puntos-imagen de la recta– contiene también a ese punto del eje que es fijo y por consiguiente, este punto está en la recta, está en la imagen de la recta y está en el eje.

Ya puedes responder qué movimiento del plano evidencian las imágenes del logotipo del Centro Cultural Raquel Revuelta y de la caricatura que aparece al inicio de este epígrafe. Efectivamente, se realizó en ambas una reflexión. En el centro cultural, una reflexión con respecto a un eje y en la caricatura, una reflexión con respecto a un punto.

Reflexión respecto a un punto o simetría central

Para tener una idea intuitiva de este movimiento, toma una hoja de papel y dibuja una figura cualquiera *F* y un punto *O* (fig. 2.185).

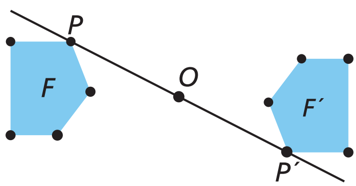


Fig. 2.185

Traza la recta que pasa por *O* y por un punto cualquiera de la figura *F*, se determinan dos semirrectas de origen *O*, una que contiene al punto de *F* y otra que no lo contiene.

Toma una hoja de papel transparente y calca en esta el punto *O*, la figura *F* y la recta *OP*.

Gira la hoja transparente de modo que el punto *O* te quede fijo y el punto de *F* te quede sobre la semirrecta que no lo contenía.

Reproduce la figura *F* en la nueva posición y has obtenido la imagen de la figura *F* por la reflexión en el punto *O*.

Recuerda que...

Todo movimiento de simetría central está determinado de manera única por un punto del plano considerado su centro de simetría.

¿Cómo construir la imagen de un punto por una reflexión respecto a un punto?

Descripción de la construcción

Sea *O* centro de reflexión y *P* un punto cualquiera del plano (fig. 2.186).

Fig. 2.186

a) Trazamos la recta *r* que pasa por los puntos *O* y *P* (fig. 2.187).

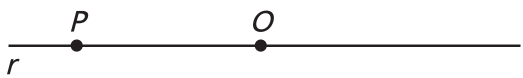


Fig. 2.187

b) Transportamos el segmento *OP* sobre la semirrecta opuesta a la semirrecta *OP*. Sea *P'* la imagen de *P* en esta semirrecta (fig. 2.188).

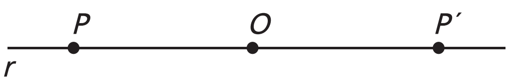


Fig. 2.188

El punto *P*' es el simétrico del punto *P* por la reflexión de centro *O*.

Ejemplo 1:

Determina la imagen del triángulo ΔRST por la reflexión de centro P (fig. 2.189).

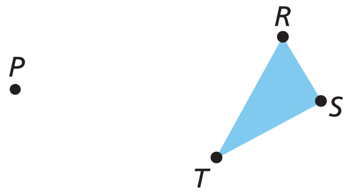


Fig. 2.189

Solución:

a) Construimos las imágenes R', S' y T' de los puntos R, S y T tal como se indicó en la descripción de la construcción (fig. 2.190).

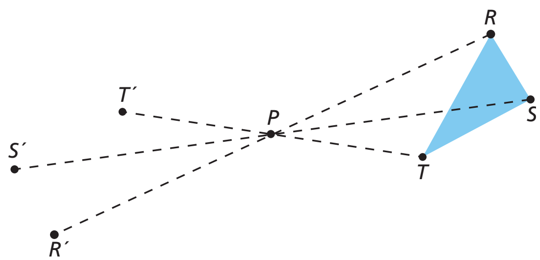


Fig. 2.190

b) Unimos los puntos R', S' y T' y obtenemos la imagen del triángulo ΔRST (fig. 2.191).

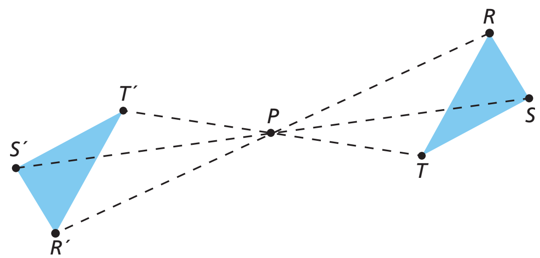


Fig. 2.191

Observa la construcción que acabas de realizar y responde las preguntas siguientes.

¿Dónde está situada la imagen del centro de simetría?

Efectivamente, el centro de simetría coincide con su imagen.

Recuerda que...

En todo movimiento de simetría central o reflexión respecto a un punto, el centro de simetría se transforma en sí mismo. Es un punto fijo.

¿Qué relación puedes establecer en la figura 2.191 entre las longitudes de los segmentos $\overline{RP}$ y $\overline{R'P}$? ¿Qué representa el centro de simetría para el segmento determinado por un punto y su imagen?

Recuerda que...

El centro de simetría es el punto medio de todo segmento determinado por un punto y su imagen por ese movimiento.

¿Qué posición relativa tienen las rectas RT y $R'T'$ en la figura 2.191? ¿Cuál es la posición relativa de una recta y su imagen por una reflexión en un punto?

Recuerda que...

En todo movimiento de simetría central o reflexión respecto a un punto, cada recta y su imagen son paralelas.

Traslación en el plano

En grados anteriores estudiaste que un vector tiene una dirección, un sentido y una longitud. Se representan mediante una flecha donde la punta indica el sentido y se denotan con dos letras mayúsculas (la primera es el origen y la segunda el extremo) o con una letra minúscula, colocándole una pequeña flecha encima: $\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}$

Se lee: vector $\overrightarrow{AB}$, vector $\vec{v}$.

Recuerda que...

Todo movimiento de traslación en el plano está determinado de manera única por el vector de traslación o por un punto y su imagen.

Investiga y aprende

Para tener una idea intuitiva de este movimiento toma una hoja de papel y dibuja una figura cualquiera *F* y una recta *r*.

Cubre la hoja de dibujo con una hoja de papel transparente y calca en esta la figura *F* y la recta *r*.

Desplaza la hoja transparente a lo largo de la recta *r*.

Ahora reproduce la figura *F* en la nueva posición (fig. 2.192). Has obtenido la imagen de la figura *F* por la traslación de dirección *r.* El vector de traslación está determinado por un punto y su imagen.

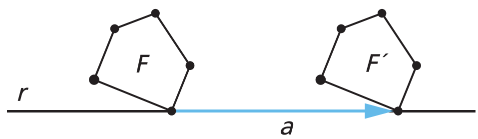


Fig. 2.192

¿Cómo construir la imagen de un punto por una traslación en el plano?

Descripción de la construcción

Sean *P* un punto cualquiera del plano y $\vec{a}$ el vector de traslación (fig. 2.193).

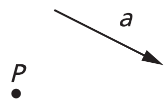


Fig. 2.193

a) Trazamos una semirrecta de origen *P*, paralela al vector $\vec{a}$ y con el mismo sentido (fig. 2.194).

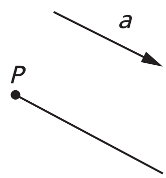


Fig. 2.194

b) El punto *P'* es la imagen del punto *P* por la traslación de vector $\vec{a}$ (fig. 2.195).

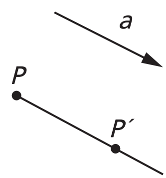


Fig. 2.195

Ejemplo 2:

Determina la imagen del polígono *MNPQR* por la traslación de vector $\vec{a}$ (fig. 2.196).

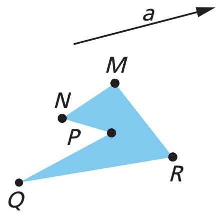


Fig. 2.196

Solución:

a) Construimos las imágenes *M'*, *N'*, *P'*, *Q'* y *R'* de los puntos *M*, *N*, *P*, *Q* y *R* tal como se indicó en la descripción de la construcción (fig. 2.197).

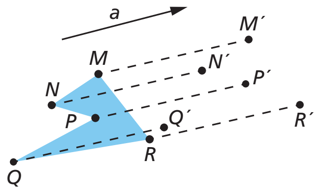


Fig. 2.197

b) Unimos los puntos *M'*, *N'*, *P'*, *Q'* y *R'* y obtenemos la imagen del polígono *MNPQR* (fig. 2.198).

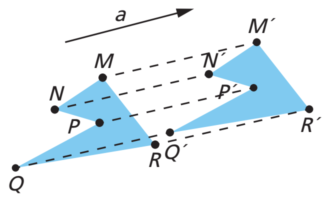


Fig. 2.198

En los movimientos anteriores observaste que existen puntos que se mantienen fijos, es decir, que se transforman en sí mismos ¿Existe algún punto del plano que coincida con su imagen por una traslación?

Recuerda que...

En todo movimiento de traslación, cada punto y su imagen son diferentes. No existen puntos fijos.

En la figura 2.198 del ejemplo 2, ¿cuál es la posición relativa de la recta *MN* y su imagen *N'M'* por la traslación de vector $\vec{a}$?

Recuerda que...

Toda recta y su imagen por un movimiento de traslación son paralelas.

Rotación en el plano

Ejemplos de este movimiento los vemos a diario en las ruedas de un automóvil, las manecillas del reloj, las ruedas de las bicicletas al girar y los engranajes de algunos mecanismos, entre otros. Para obtener una idea intuitiva de este movimiento, toma una hoja de dibujo y una hoja de papel transparente y marca un punto *O* en la hoja de dibujo y construye una figura cualquiera *F*.

Cubre la hoja de dibujo con el papel transparente y calca el punto *O*, así como la figura *F*.

Gira con un ángulo α la figura de la hoja de dibujo de manera que el punto calcado coincida con *O*.

Reproduce la figura *F*. Has obtenido la imagen de la figura *F* (fig. 2.199) por la rotación de centro *O*.

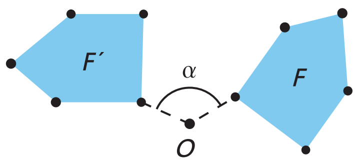


Fig. 2.199

Recuerda que...

El movimiento de rotación está determinado por una de estas dos condiciones:

- El centro de rotación y un punto y su imagen.
- El centro y el ángulo de rotación.

Este movimiento puede realizarse en dos sentidos: a favor o en contra de las manecillas del reloj (sentido horario o antihorario). Siempre que no se indique lo contrario, consideraremos la rotación en sentido antihorario.

¿Cómo construir la imagen de un punto por una rotación en el plano?

Descripción de la construcción

Consideremos un punto *O* del plano y un ángulo $\sphericalangle ABC$. Vamos a determinar la imagen de un punto cualquiera *P* del plano por la rotación de centro *O* y ángulo $\sphericalangle ABC$ (fig. 2.200).

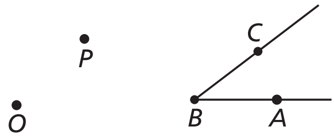


Fig. 2.200

a) Tracemos la semirrecta de origen O que pasa por el punto P (fig. 2.201).

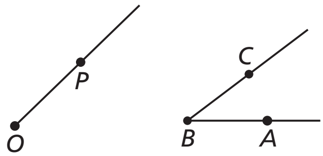


Fig. 2.201

b) Transportemos el ángulo $\sphericalangle ABC$ a partir de la semirrecta OP en sentido antihorario (fig. 2.202).

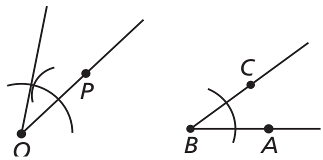


Fig. 2.202

c) Transportemos el segmento $\overline{OP}$ sobre el lado que acabamos de construir (fig. 2.203).

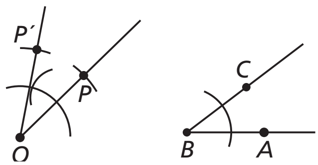


Fig. 2.203

El punto P' es la imagen del punto P por la rotación de centro O y ángulo $\sphericalangle ABC$.

Ejemplo 1:

Determina la imagen del triángulo $\triangle XYZ$ por la rotación de centro A y ángulo de 90° (fig. 2.204).

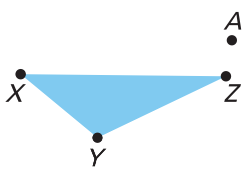


Fig. 2.204

Solución:

a) Construimos las imágenes X', Y' y Z' de los puntos X, Y y Z tal como se indicó en la descripción de la construcción (fig. 2.205).

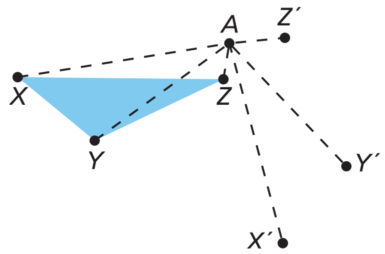


Fig. 2.205

b) Unimos los puntos X', Y' y Z' y obtenemos la imagen del triángulo XYZ.

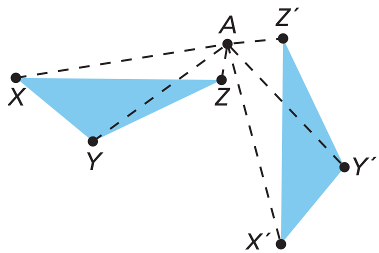


Fig. 2.206

Vamos a analizar qué propiedades cumple el movimiento de rotación, a partir de la figura 2.206 en la cual aparecen el $\triangle XYZ$ y su imagen por la rotación de centro A y ángulo de rotación: $\triangle XAX'$: Para ello, pensemos en las respuestas de las preguntas siguientes:

¿Cuál es la imagen del centro de rotación?

Recuerda que...

El centro de rotación coincide con su imagen. Es un punto fijo en este movimiento.

¿Qué relación existe entre las longitudes de los segmentos $\overline{AX}$ y $\overline{AX'}$?

Recuerda que...

El segmento que se forma al unir el centro de rotación con un punto y el que se forma al unir su imagen por esa rotación con el centro de rotación, tienen la misma longitud, es decir, todo punto y su imagen por rotación equidistan del centro de rotación.

¿Qué relación existe entre las amplitudes de los ángulos $\sphericalangle XAX'$ y $\sphericalangle YAY'$?

Recuerda que...

Todos los ángulos que tienen su vértice en el centro de rotación y que sus lados contienen respectivamente, a un punto y a su imagen, son iguales e iguales al ángulo de rotación.

Composición de movimientos del plano

El estudio de la composición o aplicación compuesta, asociada al concepto de correspondencia, tiene gran importancia por su utilización en diferentes ramas de la matemática. Trataremos en este epígrafe una composición en particular, la composición de movimientos.

Una idea general de la composición de movimientos, puedes tenerla si piensas en una aplicación sucesiva de los movimientos estudiados, es decir, cuando "movemos" una misma figura sucesivamente por dos o más movimientos. En el lenguaje matemático decimos que se le aplicó a la figura la composición de esos dos o más movimientos.

Recuerda que...

La aplicación sucesiva de dos o más movimientos del plano es también un movimiento del plano.

Por tratarse también de un movimiento, la composición de dos o más movimientos cumple las propiedades siguientes:

- Las figuras conservan su forma y su tamaño, no sufren deformación alguna.
- Los segmentos, semirrectas y rectas se transforman, respectivamente, en segmentos, semirrectas y rectas.
- Los segmentos y ángulos se transforman en segmentos y ángulos respectivamente, de la misma medida.
- Transforma rectas paralelas en rectas paralelas y rectas que se cortan en rectas que se cortan.

Ejemplo 1:

Determina la imagen del ΔPQR por la composición de la simetría axial con eje en la recta PQ y la traslación de vector de dirección: m, como se muestra en la figura 2.207:

Solución:

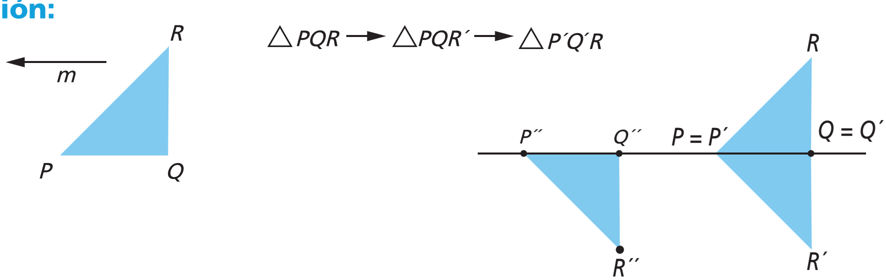


Fig. 2.207

Ejercicios

(epígrafe 2.3)

1. Construye un triángulo $\triangle MNP$ y determina su imagen por cada uno de los movimientos siguientes:

a) Reflexión de eje r: mediatriz del lado $\overline{MN}$.

b) Traslación de vector $\vec{a} = 2\overline{MP}$.

c) Reflexión de centro O: punto medio del lado $\overline{NP}$.

d) Rotación de centro M y ángulo de 45°.

2. En la figura 2.208 se muestra un hexágono regular de centro O. Los triángulos $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle COD$, $\triangle DOE$, $\triangle EOF$ y $\triangle FOA$ son equiláteros e iguales. Completa los espacios en blanco en cada una de las proposiciones siguientes:

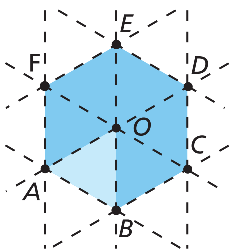


Fig. 2.208

a) La imagen del triángulo $\triangle AOB$ por una rotación de centro O y ángulo de 120° es ____________.

b) La imagen del $\triangle DOE$ por simetría central de centro O es ____________.

c) El ΔBOC es la imagen del $\triangle AOB$ por

____

d) El segmento ________ es la imagen del segmento $\overline{AO}$ por una traslación de vector $\overrightarrow{AB}$.

e) El segmento _________ es la imagen del segmento $\overline{AO}$ por una reflexión de centro O.

f) El segmento __________ es la imagen del segmento $\overline{FC}$ por una reflexión de eje FC.

g) La imagen del $\triangle DOE$ por una rotación de centro O y ángulo de 180° es ____.

h) Analiza tus respuestas b) y d). ¿Puedes establecer alguna relación entre rotación y simetría central?

3. Determina el eje de la simetría que transforma la figura G en la figura G' en cada caso, si se conoce que, mediante este movimiento, el punto A' es la imagen del punto A (fig. 2.209):

Fig. 2.209

4. Completa en tu libreta a partir de algunos puntos de referencia, las imágenes simétricas dadas a continuación, auxiliándote de las propiedades de la simetría axial (fig. 2.210).

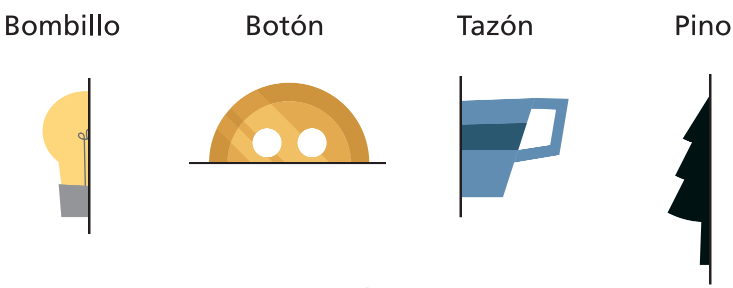


Fig. 2.210

5. Observa las figuras de la figura 2.211 y di en cuáles la recta trazada constituye uno de sus ejes de simetría, realiza para ello las mediciones de amplitudes y longitudes necesarias y argumenta tu respuesta.

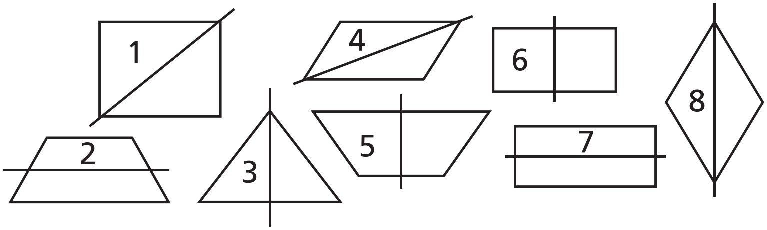


Fig. 2.211

6. En cada una de las figuras de la 2.212 a la 2.216, identifica el movimiento que transforma el cuadrilátero *ABCD* en el cuadrilátero *A'B'C'D'* y caracteriza los elementos que lo determinan.

a)

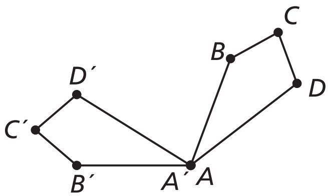


Fig. 2.212

b)

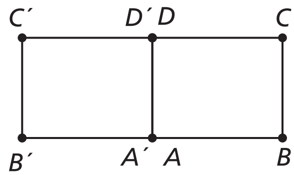


Fig. 2.213

c)

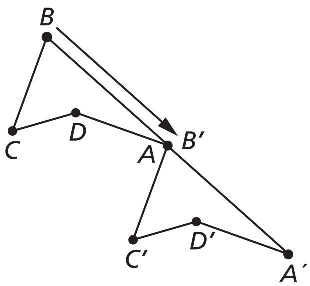


Fig. 2.214

d)

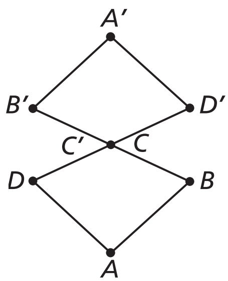


Fig. 2.215

e)

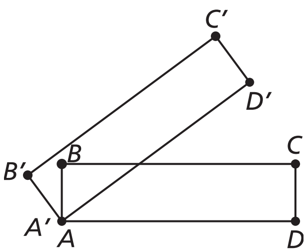


Fig. 2.216

7. a) Dibuja un rectángulo *ABCD* y tomando como eje de simetría axial a la recta que contiene al lado *CD*, dibuja el rectángulo simétrico de *ABCD*. Llámalo *A'B'C'D'*. Vuelve a aplicar **la misma simetría** al rectángulo *A'B'C'D'*. ¿A qué conclusión puedes llegar?
b) Aplica al rectángulo *ABCD* la composición de una simetría axial de eje en la recta *BC* y una rotación de centro *B* y ángulo de 90º.

8. Determina si las afirmaciones siguientes son verdaderas (V) o falsas (F). Justifica las falsas.
a) En el movimiento de rotación el centro de rotación coincide con su imagen.
b) Una recta y su imagen por una traslación son paralelas.
c) El movimiento de simetría central transforma toda semirrecta de origen en el centro de simetría en su semirrecta opuesta.
d) En el movimiento de simetría axial la imagen de la recta que pasa por un punto y su imagen es paralela al eje de simetría.
e) El movimiento de reflexión respecto a un punto es equivalente a una rotación de centro en el centro de reflexión y ángulo de 120º.
f) Todo movimiento del plano conserva las amplitudes de los ángulos.
g) Una figura y su imagen por un movimiento son diferentes.

9. Las ilustraciones uno, dos, tres y cuatro de la figura 2.218 están formadas por diferentes combinaciones de la unión de piezas iguales del tipo que aparece en la figura 2.217.
De esta forma, los ángulos que en una misma figura aparecen formados por dos de estas piezas consecutivas y con vértice en el punto *O*, tienen igual amplitud. Describe para cada una de estas ilustraciones uno, dos, tres y cuatro, todos los movimientos mediante los cuales permanecen invariantes.

Fig. 2.217

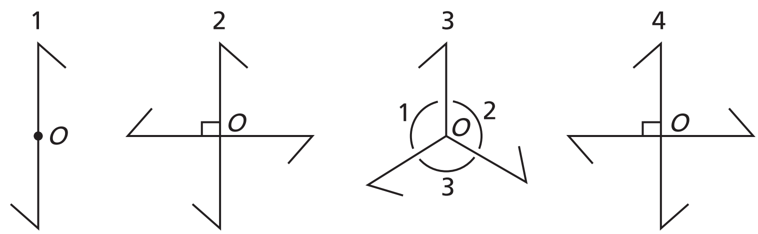


Fig. 2.218

10. La figura uno representa una cápsula de cristal que tiene grabada la palabra “MAR” y las figuras dos, tres y cuatro representan distintas posiciones de la misma cápsula (fig. 2.219).

a) ¿Cuál de las figuras dos, tres y cuatro representa a la cápsula uno mirada por detrás?

b) ¿Cuál de las figuras dos, tres y cuatro representa a la imagen de la cápsula uno por una simetría con eje en el lado *a*? ¿Cuál representa la imagen por una simetría con eje en el lado *b*?

c) ¿Cuál de las figuras dos, tres y cuatro es la imagen de la cápsula uno al aplicarle las dos simetrías anteriores consecutivamente?

Fig. 2.219

2.4 Relaciones entre los elementos de un triángulo y los de un cuadrilátero

Alejandro y Yadira están buscando relaciones entre los lados y ángulos de los triángulos y los cuadriláteros, para responder en la tarea de Matemática de séptimo grado (fig. 2.220). En este epígrafe estudiaremos esas propiedades. Realiza las actividades que se indican para que puedas obtenerlas.

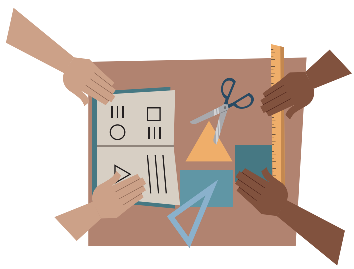


Fig. 2.220

2.4.1 Relaciones entre ángulos en el triángulo

Al triángulo *ABC* de la figura 2.221, cuyos ángulos interiores tienen amplitudes α, β, γ, se le ha borrado el vértice *A* y no puede medirse la amplitud α.

α = ¿?

β = 56,21°

γ = 76,62°

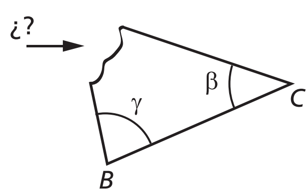


Fig. 2.221

Reflexiona

¿Podrá calcularse α a partir de las amplitudes de los dos ángulos restantes? ¿Podrán calcularse también las amplitudes de los ángulos exteriores del triángulo?

Investiga y aprende

Busca papel o cartulina y toma unas tijeras como Yadira y Alejandro, para que sigas los pasos que les indicó su profesora de Matemática, con el propósito de indagar relaciones entre los ángulos de un triángulo.

1. Construye la plantilla de un triángulo cualquiera *ABC* y recorta sus ángulos interiores, cuyas amplitudes llamaremos: α, β, γ (fig. 2.222).

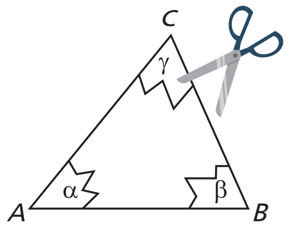


Fig. 2.222

2. Denota por *r* a una recta y por *O* a uno de sus puntos (fig. 2.223):

Fig. 2.223

3. Coloca los ángulos recortados sobre uno de los dos lados (lado sombreado) de la recta *r* con vértice en el punto *O* de forma consecutiva (fig. 2.224).

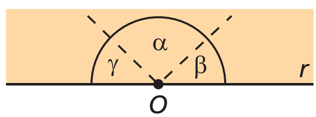


Fig. 2.224

¿Qué tipo de ángulo has obtenido? Seguramente afirmarás que has construido un **ángulo llano,** cuya amplitud es de 180°, por lo cual:

En $\triangle ABC$ se cumple: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ o $\sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA = 180°$. ¿Se cumplirá también esta relación en otros triángulos?

Teorema de la suma de las amplitudes de los ángulos de un triángulo:

En todo $\triangle ABC$ las amplitudes de sus ángulos interiores suman 180°.

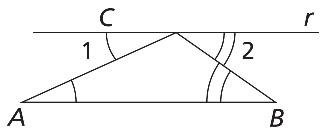


Fig. 2.225

Demostración

Premisa: $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ ángulos interiores de $\triangle ABC$ (fig. 2.225).

Tesis: $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$.

Sea r, con $r \parallel \overline{AB}$ por el punto C y si consideramos las secantes AC y BC, obtenemos así las parejas de ángulos alternos iguales: $\sphericalangle A = \sphericalangle 1$ y $\sphericalangle B = \sphericalangle 2$.

$\sphericalangle 1 + \sphericalangle C + \sphericalangle 2 = 180°$ porque están del mismo lado de la recta *r,* luego:

$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$ sustituyendo los ángulos respectivamente iguales a

$\sphericalangle 1$ y $\sphericalangle 2$ en esta suma de amplitudes.

Después, Alejandro y Yadira trazaron el ángulo α^*, exterior al triángulo *ABC* en el vértice *A*, recortaron los ángulos interiores de los dos vértices restantes: *B*, *C* y los colocaron sobre el ángulo exterior construido, como puedes observar en la figura 2.226.

¿A qué otra conclusión, ellos pudieron llegar?

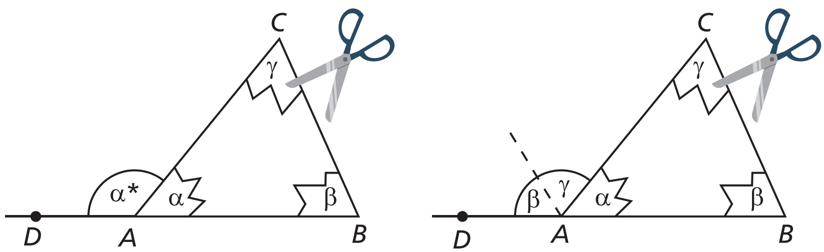


Fig. 2.226

Conclusión: en el triángulo *ABC* se cumple: $\alpha^* = \beta + \gamma$ o $\alpha^* = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA$.

Verifica que estas relaciones se cumplen también en otros triángulos.

Teorema del ángulo exterior:[9]

En todo triángulo, la amplitud de cada ángulo exterior es igual a la suma de las amplitudes de los dos ángulos interiores no adyacentes a él (fig. 2.227).

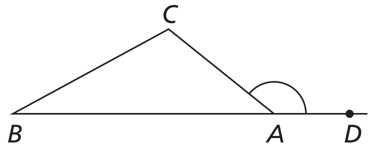


Fig. 2.227

Demostración

Sin perder generalidad, sean $\triangle ABC$ cualquiera y $\measuredangle CAD$ uno de sus ángulos exteriores.

Premisa: $\measuredangle A$, $\measuredangle B$, $\measuredangle C$ ángulos interiores de $\triangle ABC$ y $\measuredangle CAD$ ángulo exterior.

Tesis: $\measuredangle CAD = \measuredangle B + \measuredangle C$.

$\measuredangle A + \measuredangle CAD = 180°$ porque cada ángulo exterior es adyacente a su interior correspondiente, por definición de ángulo exterior.

$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$ por suma de las amplitudes de los ángulos interiores de $\triangle ABC$.

$\measuredangle \cancel{A} + \measuredangle CAD = \measuredangle \cancel{A} + \measuredangle B + \measuredangle C$ comparando ambas igualdades.

$\measuredangle CAD = \measuredangle B + \measuredangle C$

Solución del problema planteado en el Reflexiona

Sí, se puede calcular la amplitud del tercer ángulo interior de un triángulo y de sus ángulos exteriores, si se da como dato la amplitud de los dos ángulos interiores restantes. ¿Cómo?

- **Para un ángulo interior:** a 180° le restamos la suma de las dos amplitudes dadas y obtenemos la amplitud del tercer ángulo:
  $\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 180° - (56{,}21° + 66{,}72°)$
  $\alpha = 57{,}07°$

- **Para un ángulo exterior:** sumando las amplitudes de los dos ángulos interiores no adyacentes a este exterior: exterior α^* (adyacente a α) $\alpha^* = \beta + \gamma = 56{,}21° + 66{,}72° = 122{,}93$.
  exterior β^* (adyacente a β) $\beta^* = \alpha + \gamma = 57{,}07° + 66{,}72° = 123{,}79$
  exterior γ^* (adyacente a γ) $\gamma^* = \alpha + \beta = 57{,}07° + 56{,}21° = 113{,}28$

[9] En algunos textos llaman teorema del ángulo exterior al que plantea que este tiene una amplitud mayor que la de los ángulos interiores del triángulo no adyacentes a él y que aquí es consecuencia de este teorema. En estas decisiones priman criterios didácticos o convencionales, según el ordenamiento en la construcción de la geometría.

Ejemplo 1:

En el triángulo isósceles de base $\overline{FG}$, los puntos E, F, G son alineados y $\sphericalangle FGH = 50°$ (fig. 2.228).

a) Calcula la amplitud de los ángulos FHG y EFH.

b) Clasifica al ΔFGH según la amplitud de sus ángulos.

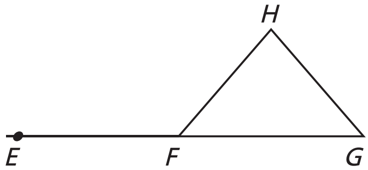


Fig. 2.228

Solución:

a) En el triángulo FGH: $\sphericalangle FGH = 50°$ por datos

$\sphericalangle HFG = 50°$ porque es el otro ángulo base igual al $\sphericalangle FGH = 50°$ en ΔFGH isósceles de base FG.

$\sphericalangle FHG = 80°$ porque $\sphericalangle FGH + \sphericalangle HFG + \sphericalangle FHG = 180°$ por suma de amplitudes de ángulos interiores del ΔFGH.

$50° + 50° + \sphericalangle FHG = 180°$ sustituyendo por las amplitudes.

$\sphericalangle FHG = 80°$ despejando y calculando.

$\sphericalangle EFH = \sphericalangle FHG + \sphericalangle HFG = 80° + 50° = 130°$ por ser ángulo exterior en el ΔFGH en F.

Por tanto, el triángulo FGH es acutángulo. Otras propiedades referidas a los ángulos y lados de un triángulo, que podrás verificar haciendo las mediciones y comparaciones necesarias, son las siguientes:

Nota: la amplitud de $\sphericalangle EFH$ también se puede calcular por ser ángulo adyacente con el $\sphericalangle HFG$.

Recuerda que...

- Si dos ángulos interiores tienen igual amplitud, los lados opuestos a estos ángulos, tienen igual longitud.
- Recíprocamente, si dos lados tienen igual longitud, entonces los ángulos interiores opuestos a estos lados tienen igual amplitud.
- De dos ángulos interiores, al de mayor amplitud, se opone el lado de mayor longitud entre los dos lados opuestos a estos dos ángulos.
- Recíprocamente, de dos lados, al lado de mayor longitud, se opone el ángulo interior de mayor amplitud entre los dos ángulos opuestos a dichos lados.

Ejemplo 2:

En la figura 2.229, clasifica el triángulo ABE según las longitudes de sus lados. ¿Cuál es su lado de mayor longitud si: $\sphericalangle AEB = 70°$ y $\sphericalangle EAB = 55°$?

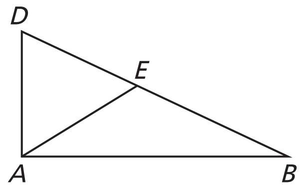


Fig. 2.229

$\sphericalangle ABE = 55°$ por suma de amplitudes de los ángulos interiores del triángulo ABE y con ello, las amplitudes respectivas de sus ángulos interiores son: 55°, 55° y 70°; por lo cual, tiene dos ángulos de igual amplitud y los lados opuestos a estos ángulos, tienen igual longitud y el triángulo es isósceles. El lado de mayor longitud es $\overline{AB}$, pues se opone al ángulo $\sphericalangle AEB$ de mayor amplitud.

Ejercicios

(epígrafe 2.4.1)

1. Calcula la amplitud del tercer ángulo interior de un triángulo si se sabe que los dos restantes miden 35° y 95° respectivamente.

2. Uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo mide 38°. ¿Cuánto mide el otro ángulo agudo?

3. El ángulo principal de un triángulo isósceles mide 46°. ¿Cuánto miden sus ángulos iguales?

4. Escribe tres medidas en grados que expresen respectivamente la amplitud de un ángulo exterior a un triángulo y de los dos ángulos interiores no adyacentes a él.

5. Halla la amplitud de los ángulos señalados en el triángulo de la figura 2.230, a partir de las amplitudes dadas en esta para el resto de los ángulos. Justifica tu respuesta.

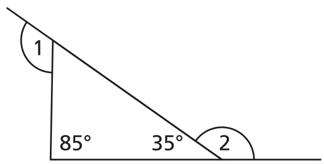


Fig. 2.230

6. Dibuja un triángulo cuyos ángulos midan 30°, 50° y 100°. Calcula la amplitud de sus ángulos exteriores. ¿Cuánto suman las amplitudes de sus ángulos exteriores?

7. Calcula la suma de las amplitudes de los ángulos exteriores de un triángulo cualquiera.

8. En el triángulo ABC de la figura 2.231: los puntos B, E, A, D son alineados; $\overline{CE} \perp \overline{AB}$ $\sphericalangle BCE = 55°$ y $\sphericalangle CAD = 115°$.
Determina la amplitud de los ángulos: $\sphericalangle CAE$, $\sphericalangle ACE$, $\sphericalangle ACB$, $\sphericalangle CBE$. Justifica tu respuesta.

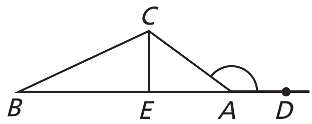


Fig. 2.231

9. Un ángulo exterior a la base de un triángulo isósceles ¿puede ser un ángulo recto, agudo u obtuso? Fundamente su respuesta.

10.* Demuestra el teorema de los terceros ángulos: si dos triángulos tienen respectivamente dos ángulos de igual amplitud, entonces los terceros ángulos también tienen igual amplitud.

2.4.2 Desigualdad triangular

En el epígrafe anterior utilizaste la propiedad de la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo, ¿existe alguna propiedad sobre la suma de las longitudes de los lados de un triángulo? En este epígrafe vamos a intentar descubrirlo, para lo cual te proponemos que analices el problema siguiente:

Dunia observó que casi todos sus compañeros cuando van al área deportiva desde la parada, siguen el caminito que dibujó con líneas discontinuas en el croquis de la figura 2.232. ¿Por qué?

Ellos no van por la acera, bordeando el triángulo de vértices en la parada (P), la escuela (E) y el área deportiva (A), en el recorrido que señaló con flechas.

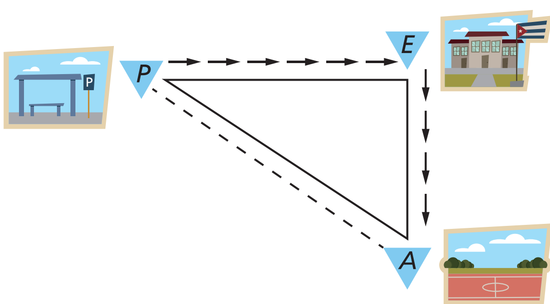


Fig. 2.232

Compara ambos recorridos, determinados por las longitudes de los segmentos: $\overline{PA}$ y $\overline{PE} + \overline{EA}$. ¿Por qué los compañeros de Dunia siguen ese caminito?

La respuesta es que la distancia $\overline{PA}$ es menor. Ello se fundamenta en una propiedad geométrica que todos los triángulos cumplen y que se denomina **desigualdad triangular.**

Teorema de la desigualdad triangular:

En todo triángulo, la longitud de cualquier lado siempre es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados.

Ejemplo 1:

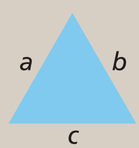
Se necesita cercar un terreno de forma triangular con 21 km de alambre. Si la cerca debe tener tres vueltas y la longitud de los lados del triángulo que forma el terreno son números naturales, ¿cuánto mide cada lado del terreno?

Solución:

- La cerca debe tener tres vueltas, luego una vuelta tendrá: 21 : 3 = 7 km.
- Para cada vuelta: $a + b + c = 7$, si a, b, c son las longitudes de los lados del terreno triangular, representadas por tríos de números naturales que deben cumplir también la desigualdad triangular: $b + c > a$. Fijemos la longitud de un lado y a partir de esta, demos valores de números naturales a las restantes longitudes, de manera que sumen 7 y cumplan la desigualdad triangular. Si fijas a, para $a = 1$, se cumple: $b + c = 6$ para que dé 7 y así, sucesivamente, obtenemos valores para b y c.

  Vamos a disponer estos valores en una tabla:

a	*b*	*c*
1	1	5
1	2	4
1	3	3



a	*b*	*c*
2	1	4
2	2	3
3	1	3

Como a representa la longitud de un lado cualquiera, a partir de la última fila de la segunda tabla se repiten los casos, ese es el tercero ya analizado, luego, se obtienen cinco casos y en ellos, dos soluciones que se circularon en la tabla.

Ejemplo 2:

Dados tres segmentos (fig. 2.233) ¿puede formarse con ellos siempre un triángulo? ¿Influye en esto las exigencias de la desigualdad triangular? Haz una diferenciación de casos.

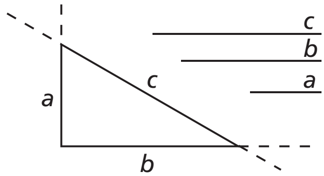


Fig. 2.233

Caso 1: toma tres varillas de longitudes: a, b y c, respectivamente, de manera que la longitud de una de estas, sea menor que la suma de las longitudes de las dos restantes, o sea: $a < b + c$, $b < a + c$ y $c < b + a$, ¿puedes formar un triángulo con estas?

Comprobarás que se puede formar un triángulo con estas cuando cumplen tal condición los tres segmentos seleccionados. ¿Y si no se cumple esta condición?

Caso 2: para que no se cumpla esta condición, basta con que la longitud de una varilla, no cumpla este requisito. Si a es la longitud que no lo cumple, pueden ocurrir *a*) o *b*), es decir:

Caso 2a): $a > b + c$ (fig. 2.234)

Caso 2b): $a = b + c$

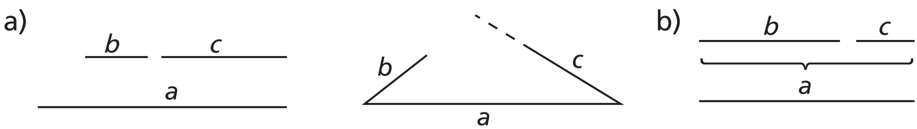


Fig. 2.234

¿Podrá formarse en esos casos un triángulo?

Intenta averiguarlo con lápices cuyas longitudes estén dispuestas, según estos casos.

Conclusión: para el caso 1 se puede construir tal triángulo, pero para los casos 2a) y 2b) no es posible hacerlo, porque no existe un triángulo cuyos lados no cumplan esta propiedad, que se denomina **desigualdad triangular.**

Atención

Dados tres segmentos, si la longitud de cualquiera de ellos es mayor o igual que la suma de las longitudes de los otros dos segmentos, no es posible construir un triángulo con estos, tal triángulo no existe en la geometría euclidiana.

Ejemplo 3:

En la respuesta de un ejercicio del concurso de Matemática, Daniel tiene dos posibilidades de solución sobre los lados *m*, *n* y *c* de un triángulo: la A y la B.

Daniel escogió para la respuesta la posibilidad B. Analízalas y responde, ¿es acertada la respuesta de Daniel? Explica por qué.

Posibilidades:

Posibilidad A: (lado m = 2 cm, lado n = 1 cm, lado c = 1 cm)

Posibilidad B: (lado m = 3 cm, lado n = 5 cm, lado c = 4 cm)

Respuesta: Sí, porque la longitud de los lados del triángulo en la posibilidad A no cumple la desigualdad triangular.

Ejercicios

(epígrafe 2.4.2)

1. Argumenta o refuta la veracidad de la afirmación siguiente: "el terreno de forma triangular donde está enclavada la escuela mide por cada lado 1 km, 2 km y 3 km respectivamente".

2. Dados en cada inciso tres segmentos de determinada longitud, argumenta si en cada caso es posible construir con ellos un triángulo:

a) 2 cm, 3 cm, 5 cm
b) 4 cm, 3 cm, 5 cm
c) 1 cm, 3 cm, 5 cm
d) 3 cm, 3 cm, 3 cm

3. El lado desigual de un triángulo isósceles mide 5, 0 cm, indica si es posible que la medida de sus lados iguales sea:

a) 3 cm
b) 2 cm
c) 2,5 cm

4. Los lados iguales de un triángulo isósceles miden 3,0 cm, indica si es posible que la longitud de su tercer lado sea:

a) 3 cm
b) 12 cm
c) 6 cm

5. Escribe tres números que expresados en centímetro pudieran corresponder a las longitudes de los lados de un triángulo.

6. Escribe tres números que expresados en centímetro no puedan corresponder a las longitudes de los lados de un triángulo.

7. Construye un cuadrado *MNPQ* y compara la longitud de su lado con la longitud de su diagonal. Fundamenta tu respuesta.

8. Construye un rombo *ABCD* y compara la longitud de su lado con la longitud de su diagonal. Fundamenta tu respuesta.

9. Observa que en la figura 2.235 aparecen dos cuadrados, el cuadrado *PRTV*, cuyos vértices son los puntos medios de los lados respectivos del cuadrado *OQSU*, de manera que $\overline{OQ} > \overline{PR}$. ¿Cuál de las desigualdades planteadas es correcta? Fundamenta tu respuesta.

a) $\overline{OP} + \overline{PQ} + \overline{QR} > \overline{PR} + \overline{RQ} + \overline{QS}$

b) $\overline{QS} + \overline{SU} < \overline{OS}$

c) $\overline{VT} + \overline{TR} > \overline{VR}$

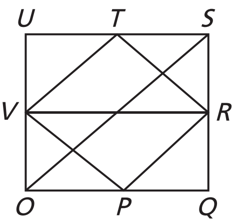


Fig. 2.235

10. En la figura 2.236 se ha trazado un rombo *ABCD* cuyas diagonales se cortan en el punto *O*. ¿Cuál es el recorrido más corto *AODBO* o *ABDCO*?

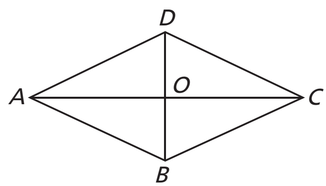


Fig. 2.236

2.4.3 Rectas, segmentos y puntos notables en un triángulo

Andy realizaba un trabajo práctico de educación vial en la biblioteca sobre qué vía y en qué dirección debemos caminar. En este argumentó que **los peatones debemos transitar siempre por la derecha en cualquier dirección que tomemos** y complementó su trabajo con la ilustración de diferentes señales previstos en el Código de Tránsito, para avisar a los conductores de vehículos que deben detenerse o seguir con cautela.

Andy observó que estas señales tienen la forma de diferentes figuras geométricas. ¿Qué figuras geométricas reconoces en las señales de la figura 2.237? ¿Y qué nos indica cada una de estas señales?

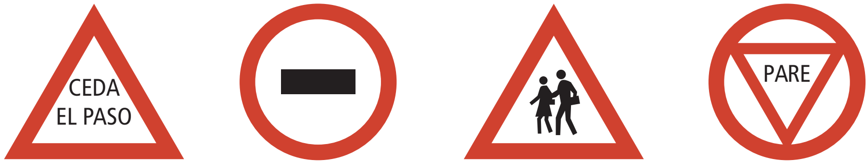


Fig. 2.237

Los mosaicos del piso de la biblioteca también tienen dibujos con figuras geométricas.

Aunque al primer vistazo, no parecen estar relacionadas, Andy observó que tanto en la conocida señal internacional de PARE, como en estos mosaicos está dibujada una circunferencia que contiene los tres vértices de un triángulo, mírala tú también en la figura 2.238, y se preguntó cómo podría construirse una circunferencia así.

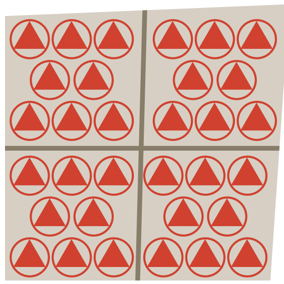


Fig. 2.238

Con el estudio en este epígrafe, de los elementos notables del triángulo, podrás decirle a Andy cómo construir una circunferencia que contiene los tres vértices de un triángulo y su utilidad práctica.

a) Mediatriz

La **mediatriz** de un lado de un triángulo (fig. 2.239) es la perpendicular trazada por el punto medio de dicho lado, que lo divide en dos segmentos de igual longitud. Al referirnos a esta, decimos: "**mediatriz del lado** $\overline{AB}$ **o mediatriz** $\boldsymbol{m_{AB}}$".

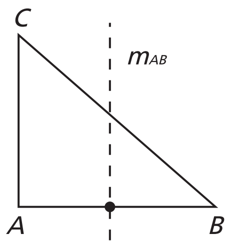


Fig. 2.239

Las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un punto llamado **circuncentro.** Para determinar el **circuncentro,** basta trazar solamente dos mediatrices, que al cortarse determinan, en el punto de intersección, al circuncentro. Por lo general, el circuncentro se denota con una letra *O* y puede ser un punto de un lado del triángulo, un punto interior o un punto exterior al triángulo, como puedes apreciar en la figura 2.240.

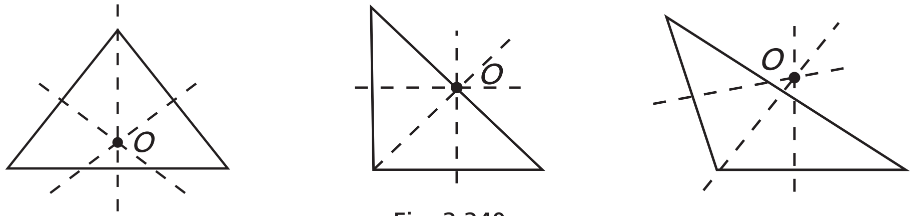


Fig. 2.240

Triángulo acutángulo
El circuncentro es un punto interior al triángulo.

Triángulo rectángulo
El circuncentro es un punto de un lado del triángulo.

Triángulo obtusángulo
El circuncentro es un punto exterior al triángulo.

Ahora podemos responder la interrogante que se planteó Andy: ¿Cómo puede construirse una circunferencia que pasa por los tres vértices de un triángulo?

Tal circunferencia tiene como centro al circuncentro del triángulo, es decir, el punto en que se cortan las mediatrices de los lados del triángulo. Haciendo centro en este punto y tomando como radio la longitud del segmento que une el circuncentro con uno de los vértices del triángulo basta para trazar tal circunferencia.

¿Qué utilidad práctica tiene esta circunferencia?

Pues que su centro está a la misma distancia de tres puntos no alineados, que en este caso son los vértices del triángulo. Al trazar una circunferencia determinas todos los puntos que están a la misma distancia de su centro, pero este problema es a la inversa; tenemos tres puntos cualesquiera no alineados ¿dónde ubicar uno que equidiste de ellos tres? Este punto es el circuncentro del triángulo que estos puntos forman.

b) Altura

La **altura** de un lado de un triángulo es el segmento perpendicular trazado desde un vértice hasta el lado opuesto o a su prolongación.

Por ejemplo, en la figura 2.241 al referirnos a esta decimos: ***“la altura del lado*** $\overline{AB}$***” o “la altura desde el vértice C”.***

En ocasiones se denota con la letra *h* o con esta letra tomando como subíndice el lado correspondiente. En esta figura sería: $\boldsymbol{h_{AB}}$.

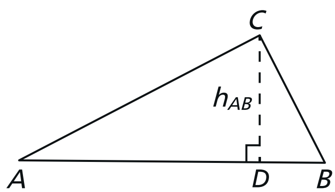


Fig. 2.241

¿Sabías que...?

En la práctica, los albañiles necesitan determinar con precisión la altura de un lado de un triángulo con una plomada, procedimiento que tú también puedes aplicar:

- Recorta una plantilla de cartulina del triángulo que quieres trazarle la altura o dibújalo en una hoja de papel y confecciona una plomada con un pedazo de hilo a cuyo extremo atas un pequeño objeto pesado.
- Pincha con un alfiler el otro extremo del hilo en el vértice del triángulo, desde el cual vas a trazar la altura, como en la figura 2.242.

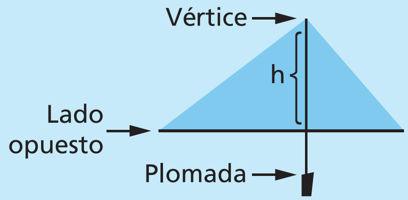


Fig. 2.242

La longitud *h* del segmento de hilo determinado desde ese vértice hasta el lado que se le opone en el triángulo, constituye la altura de ese lado. Indaga con tu profesor en qué se fundamenta este procedimiento.

Las rectas que contienen las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto llamado **ortocentro.** Para determinar el ortocentro, basta trazar solamente dos alturas, que al cortarse determinan en el punto de intersección al ortocentro.

Por lo general, el ortocentro se denota con una letra *H.*

El ortocentro puede ser un vértice, un punto interior o un punto exterior al triángulo, como puedes apreciar en la figura 2.243.

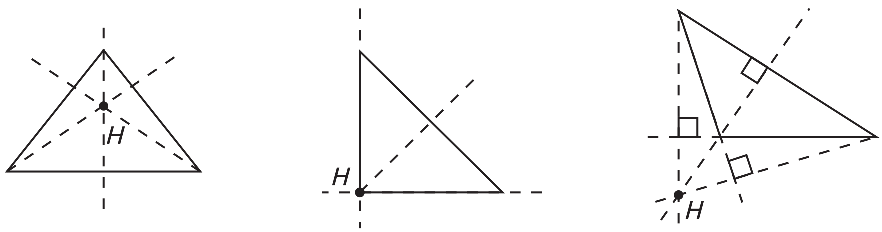


Fig. 2.243

Triángulo acutángulo
El ortocentro es un punto interior al triángulo.

Triángulo rectángulo
El ortocentro es un vértice del triángulo.

Triángulo obtusángulo
El ortocentro es un punto exterior al triángulo.

c) Mediana

Reflexiona

Daniel recortó la plantilla de un triángulo y la colocó sobre la punta de su dedo índice, que extendió verticalmente y le dijo a Mercedes: ¡Mira el triángulo no se me cae! (fig. 2.244).

¿Cómo Daniel logró que el triángulo no se cayera?

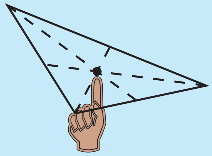


Fig. 2.244

Ahora estudiaremos una propiedad de las medianas de un triángulo que es la causa de este equilibrio.

La **mediana** de un lado de un triángulo es el segmento que une su punto medio con el vértice opuesto a este lado. Por ejemplo, en la figura 2.245 al referirnos a esta, si M es punto medio de $\overline{AB}$ decimos: "**la mediana del lado** $\overline{AB}$ **o la mediana** $\overline{CM}$".

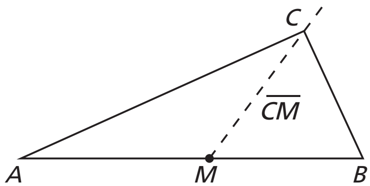
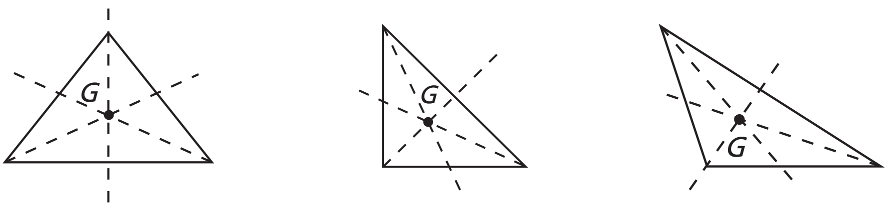


Fig. 2.245

Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto llamado **baricentro,** que es también el centro de gravedad del triángulo y por lo general, se denota con una letra G.

Para determinar el baricentro basta trazar solamente dos medianas, que al cortarse determinan en el punto de intersección al baricentro (fig. 2.246).



Triángulo acutángulo   Triángulo rectángulo   Triángulo obtusángulo

Fig. 2.246

El baricentro es un punto interior

Al trazar las tres medianas del triángulo y apoyar tu dedo índice en el baricentro, punto en que se cortan las medianas de un triángulo, el triángulo queda en equilibrio porque este punto es también el centro de gravedad del triángulo.

Puedes explicarle a Mercedes por qué Daniel logró el equilibrio en el triángulo.

d) Bisectriz

Investiga y aprende

Tres bases de campismo están en posición triangular, unidas dos a dos por una pequeña carretera de acceso, como observas en el croquis de la figura 2.247. ¿Dónde construir un puesto de mando que esté a la misma distancia de las tres carreteras?

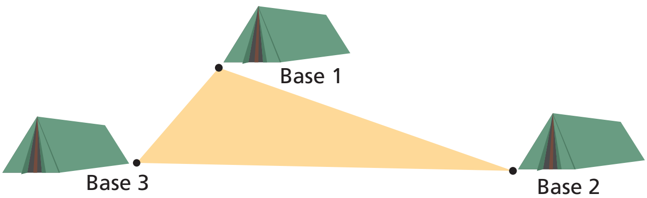


Fig. 2.247

Si se quisiera que el puesto de mando equidistara de cada base de campismo, ya sabes que estaría en el circuncentro del triángulo formado, pero se quiere que equidiste de las carreteras de acceso a cada base que supuestamente son los lados de este triángulo.

¿Dónde ubicamos el puesto de mando entonces? Vamos a estudiar las propiedades de la bisectriz para resolver este problema.

La **bisectriz** de un ángulo interior de un triángulo es el segmento contenido en la bisectriz de ese ángulo que une su vértice con el punto en que corta al lado opuesto (fig. 2.248).

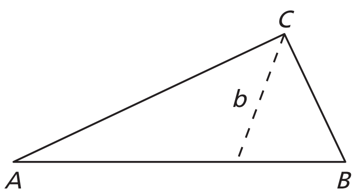


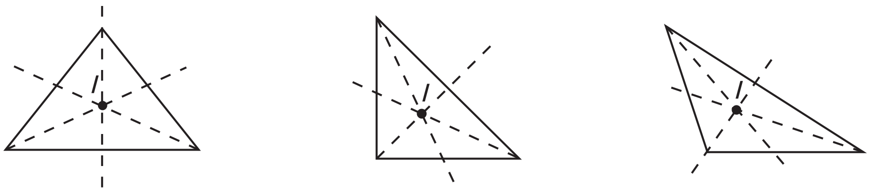
Fig. 2.248

Divide al ángulo en dos ángulos de igual amplitud. Al referirse a esta, por ejemplo, en la figura, decimos: **“la bisectriz del ángulo *ACB*”.**

Las tres bisectrices de un triángulo se cortan en un punto llamado **incentro.**

Por lo general, el incentro se denota con una letra *I.* Para determinar el incentro, basta trazar solamente dos bisectrices que al cortarse determinan en el punto de intersección al incentro.

El incentro es siempre un punto interior del triángulo, como aprecias en la figura 2.249.



Triángulo acutángulo Triángulo rectángulo Triángulo obtusángulo

Fig. 2.249

Ahora podemos resolver el problema relacionado con la base de campismo.

Las tres bases de campismo pueden considerarse vértices de un triángulo, cuyos lados son las carreteras que las unen (fig. 2.250).

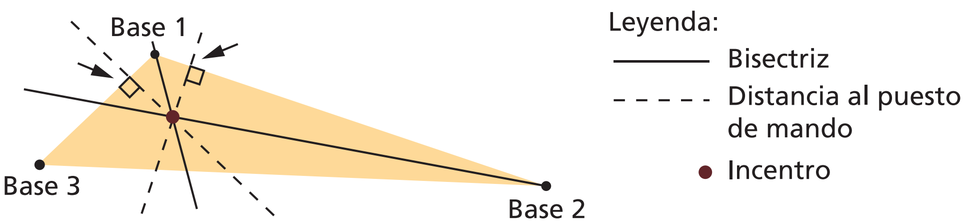


Fig. 2.250

El puesto de mando estaría en el incentro, que es el punto donde concurren las bisectrices, porque equidista de los lados del triángulo.

Luego para ubicarlo, basta trazar dos de las bisectrices del triángulo y en su intersección está el incentro.

En un triángulo llamaremos recta notable a la mediatriz de cada uno de sus lados, y segmentos notables a las medianas y las alturas de sus lados y a las bisectrices de sus ángulos interiores.

Ejercicios

(epígrafe 2.4.3)

1. Resuelve el crucigrama de la figura 2.251.

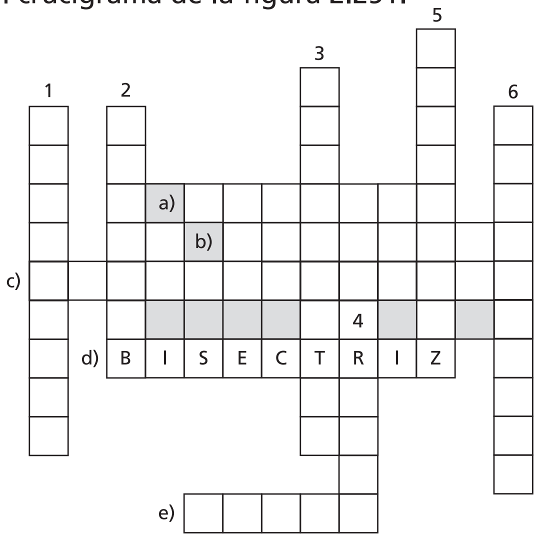


Fig. 2.251

VERTICALES:

1. Triángulo en el que coinciden la mediana y la altura de un solo lado.
2. Segmento trazado desde un vértice del triángulo y que corta perpendicularmente al lado opuesto.
3. Centro de gravedad del triángulo.
4. Tipo de ángulo que determina la altura al cortar a su lado correspondiente en el triángulo.
5. Recta notable perpendicular a un lado del triángulo que lo corta en su punto medio.
6. Punto de intersección de las alturas de un triángulo.

HORIZONTALES:

a) Segmento que une un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto.

b) Punto de intersección de las bisectrices de un triángulo.

c) Punto de intersección de las mediatrices de un triángulo.

d) Segmento que divide a un ángulo de un triángulo en dos ángulos de igual amplitud.

e) Nombre del punto que divide a un segmento en dos segmentos de igual longitud.

2. Determina cuáles afirmaciones son verdaderas y cuáles, falsas. Argumenta las falsas:
a) La bisectriz de un ángulo es su eje de simetría.
b) La bisectriz de un ángulo de un triángulo es un eje de simetría del triángulo.
c) El circuncentro equidista de los lados de un triángulo.
d) El incentro equidista de los vértices del triángulo.
e) Un triángulo tiene tres medianas.
f) Toda recta que pase por el punto medio de un lado del triángulo es su mediatriz.

3. Traza diferentes tipos de triángulos y construye el circuncentro de cada uno.

4. Traza diferentes tipos de triángulos y construye el ortocentro de cada uno.

5. Traza diferentes tipos de triángulos y construye el incentro de cada uno.

6. Traza diferentes tipos de triángulos y construye el baricentro de cada uno.

7. Recorta un triángulo de cartulina y determina su ortocentro, con una pequeña plomada que tú mismo confecciones.

8. Refuta o fundamenta lo que pensó Sonia:
Un triángulo tiene tres alturas, pero las tres tienen la misma longitud, porque la altura se utiliza para calcular el área del triángulo y el área del triángulo es única, un triángulo no tiene tres áreas diferentes.

9.* Demuestra que las bisectrices de dos ángulos adyacentes forman un ángulo recto.

10. **Para investigar...** ¿Pueden coincidir la mediatriz, la altura y la mediana de un triángulo? Formula a partir de esto una conclusión.

11. Para investigar... En el triángulo existe una recta llamada *Recta de Euler* cuyo trazado se relaciona con sus puntos notables. Queda ahora por ti consultar en otras fuentes de información cómo se traza esta recta. Traza un triángulo y determina su *Recta de Euler*.

2.4.4 Relaciones en el triángulo rectángulo

Investiga y aprende

Rebeca y Sofía están de acuerdo en que la mayor distancia que se puede recorrer entre dos puntos, en un terreno de forma rectangular de dimensiones 8,0 m y 6,0 m, es la longitud de la diagonal. Sin embargo, no saben cómo pueden calcularla (fig. 2.252).

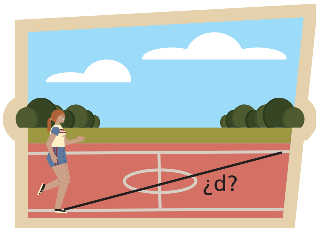


Fig. 2.252

Al trazar una diagonal del terreno, quedan determinados dos triángulos rectángulos, cuyas propiedades debes estudiar cuidadosamente para que puedas ayudar a Rebeca y Sofía a calcular esta distancia (fig. 2.253).

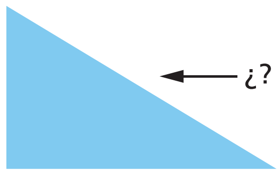


Fig. 2.253

Un triángulo rectángulo tiene un ángulo **recto** y los dos restantes **agudos.**

A los lados que forman al ángulo recto les llamaremos **catetos** y el lado que se opone al ángulo recto: **hipotenusa** (fig. 2.254).

Los triángulos rectángulos cumplen la importante propiedad denominada Teorema de Pitágoras.

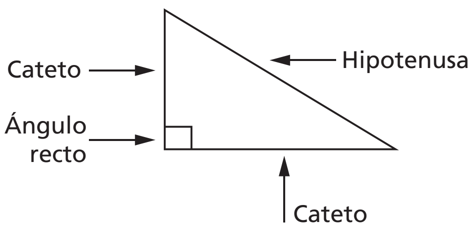


Fig. 2.254

Teorema de Pitágoras:

En un triángulo rectángulo ABC, con hipotenusa de longitud c y catetos de longitudes respectivas a y b (fig. 2.255), se cumple que el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de la longitud de cada cateto, es decir:

En $\triangle ABC$ rectángulo se cumple: $c^2 = a^2 + b^2$.

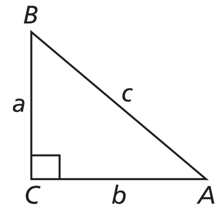


Fig. 2.255

Ahora, al igual que Rebeca y Sofía, ya puedes calcular la mayor longitud entre dos puntos en un terreno rectangular, que es la de su diagonal y que, además, constituye la hipotenusa o lado que se opone al mayor ángulo (en este caso al ángulo recto) en los dos triángulos rectángulos que esta determina (fig. 2.256). Para calcularla aplicamos el teorema de Pitágoras:

$d^2 = 6^2 + 8^2$

$d^2 = 36 + 64$

$d^2 = 100$

$d = \sqrt{100} = 10$

Respuesta: la mayor longitud que se puede recorrer en ese terreno entre dos puntos es 10 m.

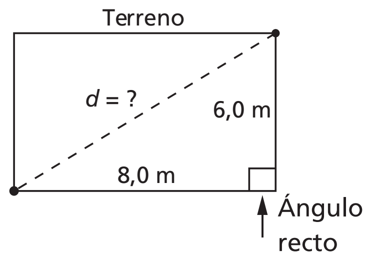


Fig. 2.256

Ejercicios

(epígrafe 2.4.4)

1. ¿Cuál es el mayor lado de un triángulo rectángulo? ¿Por qué?

2. Fundamenta la afirmación siguiente sobre los triángulos rectángulos: La longitud de la hipotenusa es menor que la suma de las longitudes de los catetos.

3. El pie de una escalera de 5,0 m está situado a 3,0 m de la pared a la cual está recostada, ¿qué altura alcanza la escalera en esta posición?

4. La base de un triángulo isósceles tiene longitud 6,0 cm. Halla la longitud de los lados iguales si su altura mide 4,0 cm.

5. ¿Puede decirse que los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios?

6. Se desea medir la distancia entre dos puntos *A* y *B* entre los cuales hay un edificio como obstáculo (fig. 2.257).
Para ello se trazó desde un punto *P* una perpendicular a uno de los dos puntos, en este caso *A* y se consideró el segmento que une este punto *P* con el otro punto *B*, como se aprecia en el croquis. A partir de esto se hicieron las mediciones de $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$. Calcula la distancia entre los puntos *A* y *B* con estos datos.

$\overline{AP} = 12$ m
$\overline{PB} = 20$ m

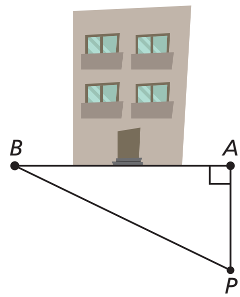


Fig. 2.257

7. Esta propiedad se conoce como la generalización del recíproco del teorema de Pitágoras:
Si en un triángulo el cuadrado de la longitud del lado mayor es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes respectivas de los dos lados restantes, el ángulo que se opone al lado mayor es un ángulo recto y como consecuencia, el triángulo es rectángulo.
Si el cuadrado del lado mayor es menor que tal suma, el triángulo es acutángulo y si es mayor se trata de un triángulo obtusángulo.
Aplica esa propiedad para clasificar al triángulo cuyos lados miden 12 cm, 22 cm y 15 cm, respectivamente.

8. Halla la longitud de la altura de un triángulo isósceles, si su base mide 8,0 cm y sus otros dos lados iguales miden 5,0 cm.

9*. ¿Por qué en todo triángulo acutángulo la suma de las longitudes de sus alturas es menor que la suma de las longitudes de sus lados? Fundamenta tu respuesta.

10*. Halla la altura de un triángulo equilátero cuyos lados miden 20 cm.

2.4.5 Relaciones en los paralelogramos

A una microbrigada social se le asignó un terreno para construir un edificio, que tiene la forma del cuadrilátero convexo *DCBA* de la figura 2.258.

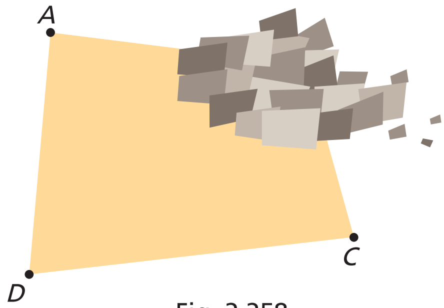


Fig. 2.258

Sin embargo, un grupo de escombros no permite acceder a uno de los vértices e impide hacer las mediciones necesarias para confeccionar el plano del proyecto.

Investiga y aprende

¿Cómo puede obtenerse la amplitud del ángulo *ABC* de dicho vértice a partir de las amplitudes del resto de los ángulos?

Datos: $\sphericalangle ADC = 70{,}09°$; $\sphericalangle DAB = 89{,}94°$; $\sphericalangle DCB = 81{,}34°$

Recuerda que...

- Las amplitudes de los ángulos interiores de los cuadriláteros convexos suman 360°.
- Las diagonales de un cuadrilátero convexo se cortan en un punto interior del cuadrilátero.

Demostración sobre la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de los cuadriláteros convexos.

Sea *ABDC* un cuadrilátero convexo cualquiera (fig. 2.259).

Premisa: *ABDC* cuadrilátero convexo.

Tesis: $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle D + \sphericalangle C = 360°$.

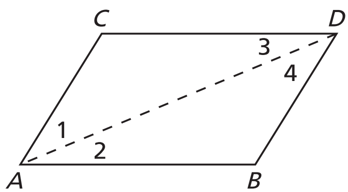


Fig. 2.259

¿Qué obtendremos como resultado de la suma de amplitudes $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle D + \sphericalangle C$?

Veamos:

$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle D + \sphericalangle C = (\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2) + \sphericalangle B + (\sphericalangle 3 + \sphericalangle 4) + \sphericalangle C$ sustituyendo $\sphericalangle A$ y $\sphericalangle D$.

$= (\sphericalangle 1 + \sphericalangle 3 + \sphericalangle C) + (\sphericalangle 2 + \sphericalangle 4 + \sphericalangle B)$ por conmutatividad y asociatividad.

$= 180° + 180°$ por suma de amplitudes en ΔADC y ΔADB.

$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle D + \sphericalangle C = 360°$.

Aplicando la propiedad anterior, puedes determinar la amplitud del ángulo que necesitan los microbrigadistas.

En el cuadrilátero convexo *DCBA* (fig. 2.260):

$\sphericalangle ADC = 70{,}09°$ $\sphericalangle DAB = 89{,}94°$ $\sphericalangle DCB = 81{,}34°$

$\sphericalangle ADC + \sphericalangle DCB + \sphericalangle ABC + \sphericalangle DAB = 360°$

$70{,}09° + 81{,}34° + \sphericalangle ABC + 89{,}94° = 360°$ por datos

$\sphericalangle ABC = 360° - 241{,}37° = 118{,}63° \approx 118{,}6°$

Respuesta: la amplitud del cuarto ángulo es 118, 6°.

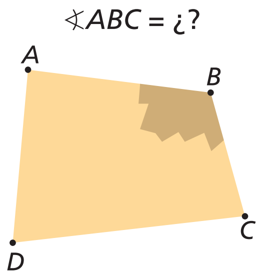


Fig. 2.260

Propiedades generales de los paralelogramos:

- La suma de las amplitudes de los ángulos interiores es 360°.
- Lados opuestos paralelos.
- Lados opuestos de igual longitud.
- Ángulos opuestos de igual amplitud.
- Las amplitudes de cada pareja de ángulos interiores consecutivos suman 180°
- Las diagonales se cortan en el punto medio.

Para probar que un cuadrilátero convexo es un paralelogramo, basta con fundamentar que tiene un par de lados opuestos iguales y paralelos o probar una de las propiedades del recuadro anterior.

¿Cómo aplicamos las propiedades de los paralelogramos?

Ejemplo 1:

En el paralelogramo *FGHI* (fig. 2.261), un ángulo interior mide 78°. ¿Cuánto miden los tres ángulos interiores restantes?

Solución:

- Sean *FGHI* el paralelogramo considerado y $\sphericalangle FGH$ el ángulo dado. Así, el ángulo que se le opone mide también 78°, porque en un paralelogramo los ángulos opuestos son iguales, luego $\sphericalangle FIH = 78°$.
- $\sphericalangle IFG$ y el ángulo dado son adyacentes al lado *FG*, suman 180°, por lo cual $\sphericalangle IFG = 102°$.

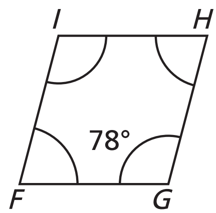


Fig. 2.261

- De igual forma, $\sphericalangle GHI = 102°$, porque junto al ángulo dado es adyacente al lado *HG*.

Respuesta: las amplitudes de los tres ángulos interiores restantes son 78°, 102° y 102°, respectivamente.

Ejemplo 2:

En el paralelogramo *EFGH* (fig. 2.262) se han trazado sus dos diagonales que se cortan en el punto *O*. Compara la longitud de las poligonales *OGHE* y *OEFG*. Argumenta tu respuesta.

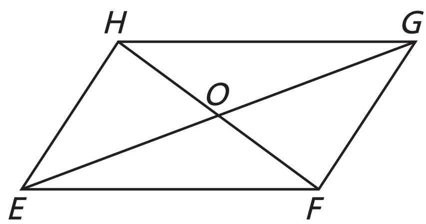


Fig. 2.262

Solución:

$\overline{OG} = \overline{OE}$, porque el punto *O* biseca a la diagonal $\overline{EG}$ del paralelogramo *EFGH*.
$\overline{GH} = \overline{EF}$, $\overline{HE} = \overline{FG}$, por ser lados opuestos del paralelogramo *EFGH*.

Luego: $\overline{OG} + \overline{GH} + \overline{HE} = \overline{OE} + \overline{EF} + \overline{FG}$

Respuesta: la longitud de las dos poligonales es la misma, porque están formadas por segmentos de igual longitud.

Paralelogramos especiales

Investiga y aprende

Está próximo el cuatro de abril y los pioneros de séptimo grado preparan su fiesta, para la cual quieren confeccionar unas tarjetas de invitación de forma cuadrada (fig. 2.263).

Yaíma y Mary recortan cuadrados de cartulina rosada, miden sus lados para ver si son iguales y comprueban así, que tienen forma de cuadrado.

Alberto y Reinier recortan cuadrados azules, pero comprueban que son cuadrados de manera diferente: ellos miden las diagonales para ver si son iguales. ¿Son correctos los procedimientos que utilizan estos estudiantes?

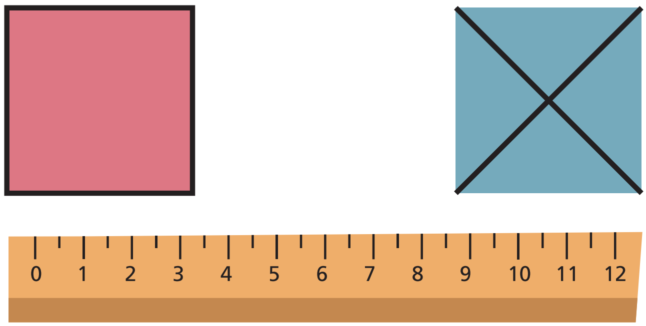


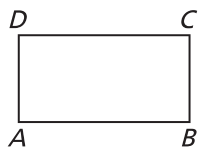
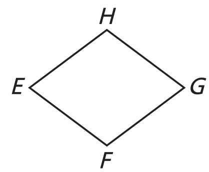
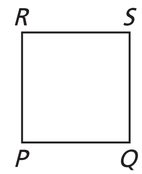
Fig. 2.263

Enjuiciar estos procedimientos, requiere dominar las propiedades del cuadrado.

El cuadrado es un paralelogramo especial. Los paralelogramos especiales, además de las propiedades generales de los paralelogramos, cumplen otras propiedades que permiten distinguirlos en rectángulos, rombos y cuadrados. ¿Conoces estas propiedades? Te invitamos a que las estudies en el cuadro que aparece a continuación, para que puedas determinar si son correctos los procedimientos que emplearon los pioneros en los preparativos del 4 de abril.

Propiedades de los paralelogramos especiales:

Paralelogramos especiales		
Rectángulos	**Rombos**	**Cuadrados**
Paralelogramos que tienen cuatro ángulos rectos.	Paralelogramos que tienen cuatro lados iguales.	Paralelogramos que tienen cuatro ángulos rectos y cuatro lados iguales.

Paralelogramos especiales		
Rectángulo *ABCD* (fig. 2.264)  Fig. 2.264	Rombo *EFGH* (fig. 2.265)  Fig. 2.265	Cuadrado *PQRS* (fig. 2.266)  Fig. 2.266
Propiedades que cumplen ▸ Propiedades generales de los paralelogramos. ▸ Todos los ángulos rectos. ▸ Diagonales de igual longitud.	Propiedades que cumplen ▸ Propiedades generales de los paralelogramos. ▸ Todos sus lados de igual longitud. ▸ Diagonales perpendiculares. ▸ Diagonales bisectrices de los ángulos interiores cuyos vértices unen.	Propiedades que cumplen ▸ Propiedades generales de los paralelogramos. ▸ Todas las propiedades de los rectángulos. ▸ Todas las propiedades de los rombos.

Ejemplo 3:

En el triángulo *ABC* rectángulo en el vértice *A* se cumple: $F \in \overline{AB}$; $D \in \overline{CA}$; $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{EF} \parallel \overline{CA}$ (fig. 2.267). Fundamenta que *AFED* es un rectángulo.

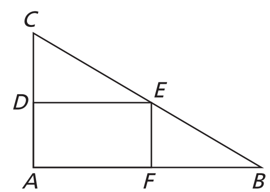


Fig. 2.267

Solución:

Para probar que el cuadrilátero *AFED* es un rectángulo, necesitamos fundamentar que:

Es un paralelogramo y sus ángulos interiores todos son rectos. Veamos.

1. *AFED* es un paralelogramo, porque sus lados opuestos son paralelos:
$\overline{DE} \parallel \overline{AF}$ pues $F \in \overline{AB}$ y $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ por datos.
$\overline{EF} \parallel \overline{AD}$ pues $D \in \overline{CA}$ y $\overline{EF} \parallel \overline{CA}$ por datos.

2. Los cuatro ángulos interiores del cuadrilátero *AFED* son rectos, ya que:

$\measuredangle A = 90°$ porque *ABC* rectángulo en *A*.

$\measuredangle AFE = 90°$ por ser conjugado al $\measuredangle A$ con $\overline{EF} \parallel \overline{CA}$.

$\measuredangle ADE = 90°$ por ser conjugado al $\measuredangle A$ con $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$.

$\measuredangle DEF = 90°$ por suma de las amplitudes de los ángulos de *AFED*.

De **1.** y **2.** *AFED* es rectángulo, porque es un paralelogramo con cuatro ángulos rectos.

Consejos útiles

Para comprobar que las plantillas de cuadrados de cartulina son cuadradas, no basta con medir sus lados, porque un rombo tiene sus lados iguales y no necesariamente es un cuadrado.

Tampoco es suficiente medir sus diagonales, porque los rectángulos y trapecios isósceles también tienen diagonales iguales y no son cuadrados, por tanto, estos procedimientos no son correctos.

Ejemplo 4:

Resume las propiedades de los paralelogramos especiales en una tabla.

Solución:

Ver la tabla 2.4.

Tabla 2.4

Paralelogramo especial	Diagonales			Lados iguales	
	Iguales	Perpendiculares	Se bisecan	Todos	Opuestos
Rectángulo	X		X		X
Rombo		X	X	X	X
Cuadrado	X	X	X	X	X

Reflexiona

Leticia resumió en un diagrama de Venn (fig. 2.268), las relaciones entre los diferentes tipos de paralelogramos, analízalo.

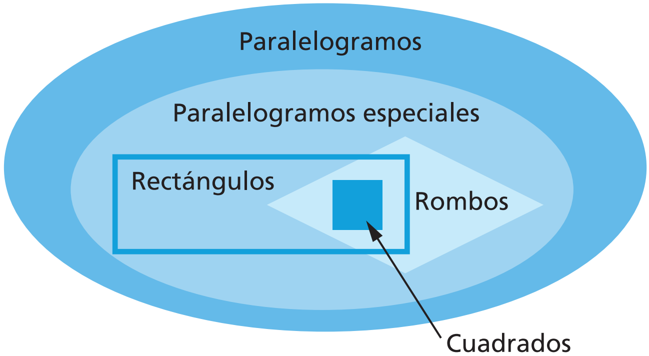


Fig. 2.268

Ejercicios

(epígrafe 2.4.5)

1. ¿Existen cuadriláteros convexos con todos sus ángulos interiores obtusos? ¿Por qué?

2. ¿Puede un cuadrilátero convexo tener los cuatro ángulos interiores agudos? ¿Por qué?

3. Un ángulo exterior de un paralelogramo mide 117°. Calcule todos sus ángulos interiores.

4. ¿Podemos decir que…?

- Un paralelogramo que tiene un ángulo recto es un rectángulo.
- Un cuadrilátero convexo que tiene cuatro lados iguales es un rombo.
- Un paralelogramo que tiene dos lados consecutivos iguales es un rombo.

5. ¿Quién soy? Tengo los lados iguales y no soy un cuadrado.

6. Un ángulo interior de un paralelogramo mide 57°. Calcula el resto de sus ángulos interiores.

7. Busca en la sopa de letras (tabla 2.5) las palabras convenientes para completar las propiedades de un paralelogramo que se plantean a continuación:

a) Los ángulos interiores de igual amplitud se denominan: ______________________.

b) Las diagonales _________________________.

c) Las amplitudes de los ángulos interiores consecutivos: _____________.

d) Los lados opuestos son ___________________ y ___________________.

Tabla 2.5

R	A	E	**I**	P	A	R	A	L	E	L	O	S
E	W	D	**G**	L	S	O	S	U	T	B	O	A
C	R	S	**U**	M	A	N	180°	Q	T	T	B	I
T	D	T	**A**	G	S	0	T	S	E	U	P	O
O	F	G	**L**	P	Ñ	U		E	V	F	P	O
S	G	S	**E**		B	I	S	E	C	A	N	F
A	B	I	**S**	E	C	T	R	I	C	E	S	H

8.* Demuestra que los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales.

9. **Para investigar...** El tangram es un rompecabezas chino de forma cuadrada, llamado también *CHI-CHAE-PAN*, que significa *Tabla de la sabiduría* o *Tabla de los siete elementos* porque está formado por siete figuras planas. Investiga cómo confeccionarlo para que tengas tu propio tangram, así con sus piezas puedes construir triángulos, cuadrados, rectángulos, paralelogramos y muchas otras figuras geométricas planas.

2.4.6 Relaciones en los trapecios y trapezoides

Andrés, Elia y Teresa recopilan información sobre fuentes de energía renovable para complementar las exigencias de la tarea de Matemática.

Teresa precisó que el aire es un recurso renovable que no se agota nunca y el viento no es más que el aire en movimiento.

Elia indagó las ventajas de la energía eólica que aprovecha la energía del viento y tiene una incidencia ambiental saludable y Andrés aportó un dato histórico interesante: ¡las tres carabelas: la Pinta, la Niña y la Santa María que llegaron a Cuba en 1492, dirigidas por Colón, vinieron impulsadas por el viento! Ahora solamente les resta resolver el problema geométrico siguiente.

Aplica tus conocimientos

En centros agropecuarios de diferentes puntos del territorio nacional cubano se pueden observar molinos de viento para el bombeo del agua, que reportan por cada uno, un ahorro mínimo de 1,5 toneladas de combustible diésel al año.[10]

La figura 2.269 ilustra el modelo Taíno 822 producido en Cuba.

Fig. 2.269

¿Cómo calcular las dimensiones de la vista frontal del soporte de la estructura de este modelo de molino de viento cubano?

Necesitamos estudiar las propiedades del trapecio para ayudar a Elia, Teresa y Andrés en su trabajo práctico.

"Hemos descubierto, afortunadamente, algo mucho más importante, el ahorro de energía, que es como encontrar un gran yacimiento"
Fidel, 5 de mayo de 2006.[11]

Todos los trapecios tienen un par de lados opuestos paralelos y cumplen también la propiedad relativa a su base media.

Propiedad de la base media de los trapecios:

La **paralela media** de un trapecio es el segmento que une los puntos medios de sus lados no paralelos y cuya longitud es igual a la semisuma de las longitudes de sus bases.

Ejemplo 1:

En el trapecio *CDHG* de la figura 2.270: $\overline{GH}$ base superior, *E* punto medio $\overline{HD}$, *F* punto medio $\overline{GC}$, $\overline{CD} = 2{,}2$ m; $\overline{FE} = 2{,}1$ m. Calcula la longitud de *GH*.

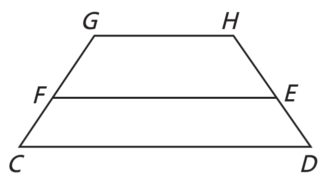


Fig. 2.270

[10] MINBAS: Ahorro de energía: la esperanza del futuro, Editora Política, La Habana, 2001.

[11] Discurso pronunciado por el Presidente de la República de Cuba, Fidel Castro Ruz, en la entrega de 101 vehículos a la Unión Eléctrica, efectuado en la Unión Eléctrica Nacional, el 5 de mayo de 2006.

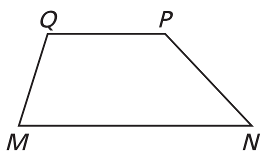
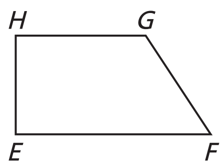
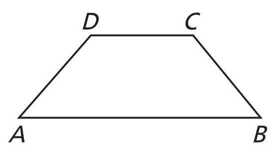
Solución:

$\dfrac{\overline{GH}+\overline{CD}}{2} = 2{,}1$ por propiedad de paralela media del trapecio *CDHG*.

$\dfrac{\overline{GH}+2{,}2}{2} = 2{,}1$; $\overline{GH} + 2{,}2 = 2{,}1 \cdot 2$; $\overline{GH} + 2{,}2 = 4{,}2$; $\overline{GH} = 2{,}0$ m.

Respuesta: la longitud de la base superior del trapecio *CDHG* es $\overline{GH} = 2{,}0$ m.

Propiedades de los trapecios:

Trapecio general	**Trapecio rectángulo**	**Trapecio isósceles**
Es un cuadrilátero convexo que tiene un par de lados opuestos paralelos (fig. 2.271).	Es un cuadrilátero convexo que tiene un par de lados opuestos paralelos y al menos un ángulo recto (fig. 2.272).	Es un cuadrilátero convexo que tiene un par de lados opuestos paralelos y los lados no paralelos de igual longitud (fig. 2.273).
 Fig. 2.271	 Fig. 2.272	 Fig. 2.273
Propiedades ▸ Propiedades de los cuadriláteros convexos. ▸ Propiedad de la base media.	**Propiedades** ▸ Propiedades de los cuadriláteros convexos. ▸ Propiedad de la base media. ▸ Dos ángulos rectos.	**Propiedades** ▸ Propiedades de los cuadriláteros convexos. ▸ Propiedad de la base media. ▸ Ángulos adyacentes a cada base de igual amplitud. ▸ Diagonales de igual longitud.

Los **trapezoides** son cuadriláteros convexos que no tienen lados paralelos. No los distingue ninguna propiedad, pero existe un trapezoide muy especial, es el llamado **trapezoide simétrico,** porque tiene la propiedad de ser simétrico respecto a una de sus diagonales.

En la figura 2.274, *CDEF* es un trapezoide simétrico.

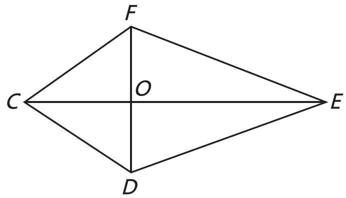


Fig. 2.274

Propiedades de los trapezoides simétricos:

- Es simétrico respecto a una de sus diagonales.
- Sus diagonales son perpendiculares.
- A consecuencia de su simetría tiene dos parejas de lados iguales. Cada pareja tiene un vértice común y sus dos lados son simétricos respecto a una diagonal, aquella que es eje de simetría y bisectriz de los ángulos interiores cuyos vértices corresponden a sus extremos.

Ejemplo 2:

En la figura 2.274, puedes apreciar que el trapezoide simétrico *CDEF* cumple que:

- Tiene como eje de simetría a la diagonal $\overline{CE}$.
- Se cumple que sus diagonales son perpendiculares: $\overline{CE} \perp \overline{DF}$.
- Sus parejas de lados simétricos e iguales son: $\overline{CF}$ y $\overline{CD}$; $\overline{FE}$ y $\overline{DE}$.
- La diagonal $\overline{CE}$ es bisectriz de los ángulos interiores con vértice en *C* y *E*.

Ejercicios

(epígrafe 2.4.6)

1. Si las bases de un trapecio miden 10 cm y 1,8 dm respectivamente, ¿cuánto mide su base media?

2. Si la base media de un trapecio mide 210 cm y una de sus bases mide 22 dm, ¿cuánto mide la otra base?

3. En la figura 2.275 está representado el trapecio *RSTU* rectángulo en *R*. Si $\sphericalangle S = 65°$, completa el resto de las amplitudes de sus ángulos interiores:

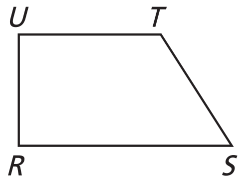


Fig. 2.275

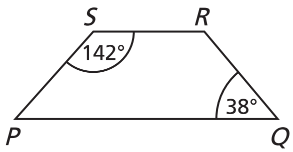
$\sphericalangle R =$ ________

$\sphericalangle U =$ ________

$\sphericalangle T =$ ________

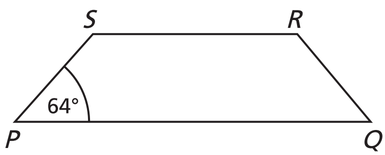
4. Si *PQRS* es un trapecio isósceles de bases $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$, calcula y completa las amplitudes de sus ángulos interiores que se exigen en cada inciso con los datos dados en la figura 2.276.

a)



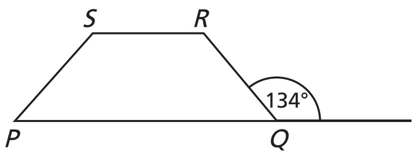
$\sphericalangle P =$ _____ $\sphericalangle R =$ _____

b)



$\sphericalangle Q =$ _____ $\sphericalangle R =$ _____ $\sphericalangle S =$ ____

c)



$\sphericalangle P =$ _____ $\sphericalangle Q =$ _____

$\sphericalangle R =$ _____ $\sphericalangle S =$ _____

Fig. 2.276

5. ¿Quién soy? Tengo las diagonales iguales y no soy un rectángulo.

6. Fundamenta por qué las amplitudes de cada pareja de ángulos adyacentes a cada uno de los lados no paralelos del trapecio suman 180°.

7. ¿Puede un trapecio rectángulo ser también un trapecio isósceles? ¿Por qué?

8. ¿Existe un trapecio con dos ángulos rectos? ¿Por qué?

9. ¿Existe un trapecio con tres ángulos rectos? ¿Por qué?

10.* Demuestra que en todo trapecio isósceles los ángulos adyacentes a una misma base son de igual amplitud.

2.5 Circunferencia y círculo

Reflexiona

Ocho estudiantes de séptimo grado reflexionaron sobre la importancia de no fumar por los daños que ocasiona a la salud este hábito, para ello decidieron sentarse de forma tal que todos pudieran ver a la vez una cajetilla de cigarros y exponer una razón para argumentar esta idea. ¿Puedes dar tú también una de estas razones?

Ellos se sentaron tal y como se ilustra en la figura 2.277. ¿Qué figura geométrica representa la posición en que se sentaron esos estudiantes? ¿Por qué?

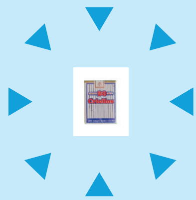


Fig. 2.277

Fig. 2.278

Seguramente has identificado a la circunferencia y al círculo. ¿Has pensado también en sus variadas aplicaciones prácticas?

Desde las antiguas civilizaciones puede verse la forma circular en la confección de instrumentos de trabajo, de carga, en medios para trasladarse, en escudos de guerra, entre otros (fig. 2.278).

Más tarde aparece en la esfera del reloj, en las poleas, anillos, pulseras y hasta en los discos compactos.

Saber más

En Cuba, la manifestación del uso de circunferencias en nuestros antepasados, nos ha llegado como arte rupestre, en la imagen de *La Cruz Pinera* (fig. 2.279), en la Isla de la Juventud. ¡Cuántas circunferencias! ¿Verdad?

En las galerías con muestras de obras de arte, tanto en pinturas como esculturas, habrás notado que nunca faltan estas figuras.

La cubana Alicia Leal (1957) es una de las artistas de la plástica cubana actual. De una hermosa manera trata el tema de la mujer en sus pinturas, fíjate como se auxilia de círculos en esta que te mostramos (fig. 2.280).

Fig. 2.279

Fig. 2.280

Vamos a comenzar el estudio de la circunferencia y el círculo. Demos paso a una situación que se le ha presentado a Raúl en la clase de Matemática, trabajemos juntos para darle una solución correcta.

¿Sabías que...?

El Parque Nacional *Ciénaga de Zapata* es el humedal mejor conservado del Caribe Insular y, además, reserva de la biosfera. Tiene una extensión de 34 000 hectáreas de superficie húmeda en la que habitan 115 especies de flora y 310 de fauna.

En la figura 2.281 se aprecia una de sus lagunas y en esta un bello arreglo floral natural. ¿De qué figura geométrica tiene forma su base?

Fig. 2.281

¿Cómo puede determinarse su centro para mantener con la poda las dimensiones del arreglo, durante su crecimiento?

Por supuesto, la base tiene forma de circunferencia; vamos a recordar algunas de sus propiedades fundamentales que nos permitirán determinar su centro.

2.5.1 Elementos principales de la circunferencia y el círculo

Hemos estudiado algunas de las figuras planas conocidas, solo nos falta la línea curva y cerrada que dibujas con un compás o marcando el borde de algunos objetos, como una moneda, el fondo de un vaso o botella (fig. 2.282), algunos botones, etcétera.

Fig. 2.282

Definición de circunferencia:

Se llama **circunferencia** al conjunto de todos los puntos del plano situados a la misma distancia de un punto fijo de dicho plano.

De la historia

La necesidad de efectuar cálculos en la circunferencia comenzó en la región situada entre los ríos Éufrates y Tigris hace unos 3 500 años a. n. e., denominada Mesopotamia, que precisamente significa país entre ríos.

En la actualidad este territorio pertenece a la República de Irán. Sus conocimientos han llegado a nuestros días mediante la escritura cuneiforme o en forma de cuña (fig. 2.283 a), que grababan en tablillas de barro de forma casi cuadrada, con un estilete de hueso.

Para trazar la circunferencia empleaban una cuerda o cordel estirado con uno de sus extremos fijo a una estaca (fig. 2.283 b).

a)

Tablillas de barro con escritura cuneiforme y el estilete de hueso para grabar en estas.

b)

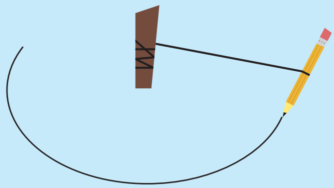


Fig. 2.283

En la clase de Matemática se traza la circunferencia utilizando un compás, pero se sigue empleando el procedimiento de la estaca para construir circunferencias con fines prácticos, por ejemplo, en jardinería o en albañilería. Intenta con tus compañeros de aula utilizar este procedimiento para trazar una circunferencia con tiza en el patio de la escuela.

Te invito a realizar la construcción de una circunferencia de 2,0 cm de radio, pero, ¿qué es el radio de una circunferencia?

Observa las ruedas de una bicicleta (fig. 2.284). Tienen forma de circunferencia, ¿cuáles son sus radios? No lo dudes, son los rayos de la bicicleta. Observa que todos concurren en el centro de la rueda.

Fig. 2.284

Comencemos a trabajar, necesitamos un compás y una regla o cartabón para realizar las indicaciones que siguen:

1. Fijamos con una longitud determinada las puntas del compás en la regla graduada o cartabón, longitud que es el radio de la circunferencia

que queremos trazar. (En este ejemplo vamos a tomar como longitud 2,0 cm (fig. 2.285), porque es esta precisamente el radio de nuestra circunferencia).

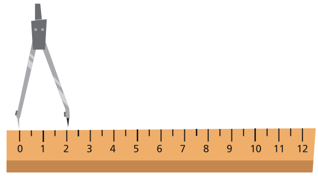


Fig. 2.285

2. Seleccionamos un punto cualquiera sobre la hoja de papel y denotamos a este punto por *O* (fig. 2.286).

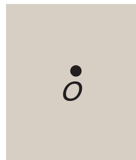


Fig. 2.286

3. Apoyamos la punta del compás sobre el punto *O* (fig. 2.287) y hacemos girar el compás alrededor de este punto ¡y ya está trazada la circunferencia!

El punto de apoyo del compás en el papel se llama **centro** de la circunferencia.

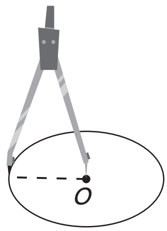


Fig. 2.287

En la figura de nuestro ejemplo el centro de la circunferencia es el punto *O*.

Recuerda que... utilizando el asistente matemático *Geómetra* también puedes realizar construcciones geométricas, relacionadas con la circunferencia. Sigamos ahora trabajando en la circunferencia trazada:

- Ubica en la circunferencia construida los puntos *A, B, C* (fig. 2.288).
- Mide la distancia de los puntos *A, B, C* al punto *O*.
- Compara las distancias del punto *A* al centro *O*, del punto *B* al centro *O* y del punto *C* al centro *O*.

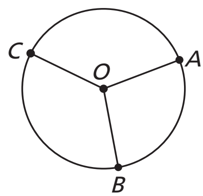


Fig. 2.288

Toda circunferencia queda determinada de manera única si se indican su centro y su radio.

Recuerda que...

Al punto fijo del plano se le llama **centro de la circunferencia** y a la distancia entre el centro y los puntos de la circunferencia se le denomina **radio de la circunferencia.**

Atención

¿Qué significa la frase: queda determinada de manera única?

Esto significa que basta o que es suficiente tener como datos el centro y el radio para trazar una determinada circunferencia. No existen dos circunferencias diferentes con iguales datos, como sucede si se diera solamente el centro como dato, porque hay muchas circunferencias diferentes con el mismo centro.

Por este motivo para denotar a la circunferencia se tienen en cuenta ambos elementos: el centro y el radio.

Recuerda que...

Una circunferencia de centro *O* y radio *r*, se denota como: *C(O; r)*.

Ejemplo 1:

En la figura 2.289, la circunferencia se denota por $C(O; \overline{OA})$, con *O* centro y $\overline{OA}$ su radio.

Si ubicas dos puntos *C* y *D* en una circunferencia: *C*(*O*; 3,0 cm) y trazas el segmento *CD*, ¿qué nombre recibe este segmento?

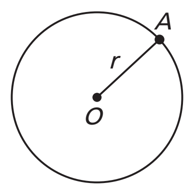


Fig. 2.289

Recuerda que...

El segmento que une dos puntos de la circunferencia se llama **cuerda** y la mayor cuerda de una circunferencia contiene o pasa por su centro y se llama **diámetro.**

Ejemplo 2:

En la figura 2.290, el segmento *CD* es una cuerda que denotamos: cuerda $\overline{CD}$.

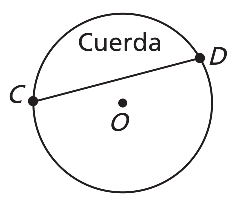


Fig. 2.290

Recuerda que...

En la figura 2.291 se trazó el diámetro de la circunferencia dibujada. Compara las longitudes del radio y el diámetro:

$(d > r)$

Dos radios forman un diámetro:

$d = 2r$

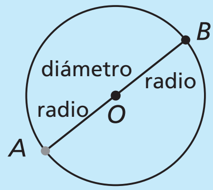


Fig. 2.291

$\overline{AB} = \overline{BO}$ radios

$\overline{AB}$ diámetro

$\overline{AB} = 2\overline{BO}$

La longitud del **diámetro** es el doble del **radio.**

Ejemplo 3:

Construye una circunferencia de 4 cm de radio (fig. 2.292). Traza en esta las cuerdas *CD* y *EF* que no sean paralelas.

Traza la mediatriz de cada cuerda. ¿Por qué punto de la circunferencia pasan ambas mediatrices?

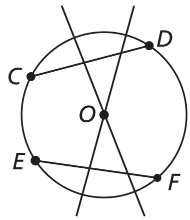


Fig. 2.292

Recuerda que...

La mediatriz de toda cuerda pasa por el centro de la circunferencia.

Ahora puedes ratificar la propiedad de la mediatriz de un segmento de equidistar de sus extremos: como el centro de la circunferencia es un punto de ambas mediatrices trazadas –se trata de su punto de intersección– se halla a la misma distancia de los extremos de los dos segmentos (cuerdas). ¡Pero estas distancias también son iguales porque son radios de la circunferencia!

¿Qué observas en la fotografía de la figura 2.293?

Pues nada menos que el túnel de La Habana. ¿Sabías qué es una de las maravillas de la ingeniería cubana? Tiene una longitud de 733 m. Cada senda tiene siete metros de ancho de los 22 m que tiene el ancho total.

¿Pero has apreciado la forma de las estructuras que adornan su entrada, ahora que estamos estudiando la circunferencia? Se trata de arcos de circunferencia.

Fig. 2.293

Cada cuerda divide en dos partes a la circunferencia, llamadas **arcos de circunferencia.**

Ejemplo 4:

¿Cuáles son los arcos en que divide la cuerda *CD* a la circunferencia de la figura 2.294?

Si consideras los dos semiplanos que determina la recta que contiene esta cuerda *CD*, quedan determinados dos arcos. El arco que se encuentra en el mismo semiplano que el centro de la circunferencia, que es el mayor y el otro, el menor, que está en el semiplano opuesto.

Observa los arcos determinados por el diámetro de una circunferencia, compara dichos arcos en la figura 2.295.

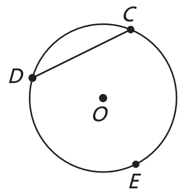


Fig. 2.294

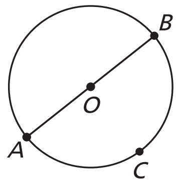


Fig. 2.295

Los arcos se denotan con los puntos de sus extremos, pero para el mayor se considera, además, otro punto que esté contenido en él.

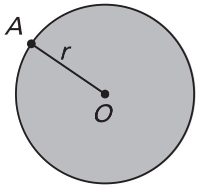
Recuerda que...

Los arcos en una circunferencia determinados por el **diámetro** son iguales y cada uno de estos se llama **semicircunferencia.**

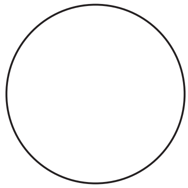
Ejemplo 5:

Si sombreas el interior de una circunferencia, estás destacando otro conjunto de puntos del plano. ¿Qué nombre recibe este conjunto de puntos que determina toda circunferencia y del cual también forma parte?

Es el **círculo** (fig. 2.296) y no puedes confundirlo con la circunferencia. Observa que la circunferencia es una línea curva y el círculo es una superficie.



Círculo $C(O; r)$



Circunferencia $C(O; r)$

Fig. 2.296

Definición de círculo:

Se llama **círculo** al conjunto formado por todos los puntos de una circunferencia y sus puntos interiores.

Relaciones de simetría en la circunferencia

Ahora estás en condiciones de responder la pregunta sobre cómo determinar el centro del arreglo floral de la laguna del Parque Nacional Ciénaga de Zapata (fig. 2.280), en las situaciones iniciales de este epígrafe.

Debes utilizar la relación estudiada entre las mediatrices de cuerdas no paralelas de una circunferencia. En el procedimiento que deberás seguir, darás los pasos siguientes:

1. Trazar dos cuerdas no paralelas en la circunferencia.
2. Construir las mediatrices de las cuerdas.
3. Determinar el punto donde se cortan estas mediatrices.

Anteriormente estudiaste los movimientos del plano, observa la figura 2.297. ¿Crees que la circunferencia es simétrica?

En la figura 2.297, P es un punto cualquiera de la circunferencia y por la reflexión del eje m, su imagen se encuentra sobre la recta PQ perpendicular a m. Como m es mediatriz de $\overline{PR}$ tenemos que P y R equidistan de O por la propiedad de la mediatriz de un segmento, es decir $\overline{PO} = \overline{RO} = r$, por tanto, $R \in C(O; r)$.

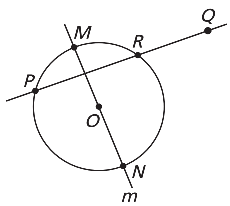


Fig. 2.297

- Una circunferencia es simétrica respecto a cualquier recta que pase por su centro.
- La circunferencia es una figura centralmente simétrica, su centro de simetría es su propio centro.

Observa en el fragmento que aparece la figura 2.298 de una de las páginas del famoso libro de Euclides, del que conoces su nombre, cómo también aparecen los elementos de la circunferencia.

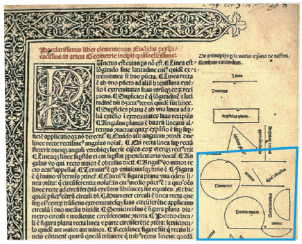


Fig. 2.298

Ejercicios

(epígrafe 2.5.1)

1. En la figura 2.299, P, Q, R, S, T son puntos de la circunferencia de centro O.

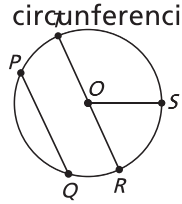


Fig. 2.299

Marca con una X la proposición verdadera.

1.1 El segmento $\overline{PQ}$ representa:

a) ___ Una cuerda b) ___ Un diámetro

c) ___ Un radio

1.2 La longitud de $\overline{TR}$ es igual a:

a) ___ $2\overline{PQ}$ b) ___ $\frac{1}{2}\overline{OS}$ c) ___ $2\overline{OR}$

1.3 La cuerda mayor de la circunferencia es:

a) ___ $\overline{PQ}$ b) ___ $\overline{TR}$ c) ___ $\overline{OS}$

1.4 El arco de semicircunferencia es:

a) ___ $\widehat{TS}$ b) ___ $\widehat{TR}$ c) ___ $\widehat{QR}$

2. Completa la tabla 2.6, apoyándote en la figura 2.300.

Tabla 2.6

Elementos de la circunferencia	Notación
Radios	
	$\overline{AD}$, $\overline{DB}$, $\overline{EB}$, $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{AB}$
Diámetro	
Arcos	

2.1 Compara, colocando convenientemente uno de los símbolos: <, >, = en los espacios en blanco:
a) $\overset{\frown}{EC}$ ___ 180° b) $\overset{\frown}{EAB}$ ___ 180° c) $\overset{\frown}{EBD}$ ___ 180°

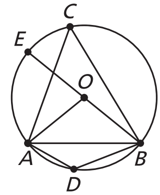


Fig. 2.300

3. Construye una circunferencia de centro *O* y radio 2,0 cm.

4. Construye una circunferencia de centro *O* y 1,5 cm de radio. Indica en la figura realizada (sin utilizar instrumentos) los puntos *P, Q* y *R*, tales que: $\overline{OP} > 1{,}5$ cm, $\overline{OQ} < 1{,}5$ cm, $\overline{OR} = 1{,}5$ cm

5. Ubica un punto *M* del plano y construye la figura formada por todos los puntos del plano cuya distancia al punto *M* es de 4,0 cm.

6. Selecciona las proposiciones falsas y conviértelas en verdaderas.
a) ___ El punto *P* pertenece a *C*(*P*; 2 cm).
b) ___ El punto *P* pertenece al círculo (*P*; 2 cm).
c) ___ Los puntos que se encuentran a una distancia del punto *P* menor o igual que 2 cm pertenecen a *C*(*P*; 2 cm).

7. Construye una circunferencia de 3 cm de radio.
a) Indica un punto *A* que pertenezca a esta.
b) Traza las cuerdas *AB*, *AC* y *AD* de longitud 4 cm; 5,5 cm y 5 cm respectivamente.

8. ¿Cuál es la mayor longitud que puede tener una cuerda de *C*(*O*; 7,0 cm)? Fundamenta.

9. Fundamenta la veracidad de la proposición siguiente:
"Si dos circunferencias tienen sus radios iguales, entonces son iguales".

10.* En la figura 2.301, $\overline{NQ}$ diámetro, $\overline{MN}$ cuerda.
Demuestra que: $\overline{NQ} > \overline{MN}$.

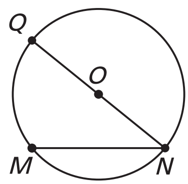


Fig. 2.301

2.5.2 Posición relativa de una recta con respecto a una circunferencia

Reflexiona

La profesora de Matemática propuso a sus estudiantes observar con cuidado la figura 2.302 que muestra varios objetos para responder la pregunta siguiente: ¿Existe alguna relación de posición entre los objetos que constituyen circunferencia y los que representan una recta en cada caso?

Fig. 2.302

Las opiniones de los estudiantes fueron diversas:

- La polea del pozo nos hace pensar en una recta que solo tiene un punto en común con una circunferencia.
- La recta que contiene a Maritza y a Laritza corta a la circunferencia en dos puntos.
- La recta que contiene al borde de la barra de la bicicleta no tiene ningún punto común con la circunferencia contorno de la rueda, eso es más que evidente.

Precisamente estudiaremos las posiciones relativas entre la circunferencia y la recta.

Hagamos una abstracción de cada una de estas situaciones geométricas y pensemos solamente en la recta y en la circunferencia de cada caso, representémosla de una manera más simple, como puedes apreciar en la figura 2.303.

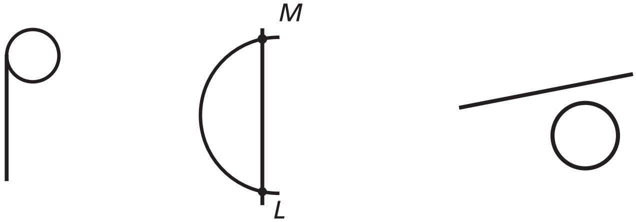


Fig. 2.303

Sabes que todos los puntos de una circunferencia equidistan de su centro, o sea, están a una misma distancia del centro. Esta distancia la conoces como radio.

Investiga y aprende

Observa los esquemas más simples, ¿puedes determinar cuáles son los puntos que están situados a una mayor o menor distancia del centro de la circunferencia?

Te propongo realizar el análisis de estas distancias, teniendo en cuenta la posición de un punto respecto a una circunferencia encontrando si existen puntos comunes entre estas y cuántos son.

Ejemplo 1:

En la figura 2.304 se muestra una circunferencia *C(O; r)* y las rectas *t, s, m*.

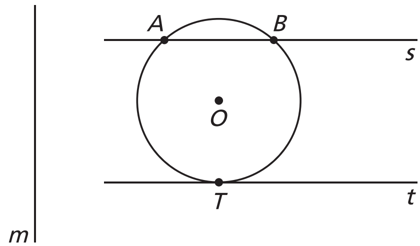


Fig. 2.304

a) Determina la distancia de cada una de las rectas al centro de la circunferencia.
b) Determina en cuántos puntos cada una de las rectas cortan a la circunferencia.
c) Compara la distancia determinada con la longitud del radio de la circunferencia.

Solución:

- La recta *s* corta a la circunferencia en dos puntos *(A, B)* y la distancia de esta al centro de la circunferencia es menor que la longitud del radio.
- La recta *t* corta a la circunferencia en un punto *(T)* y la distancia de esta al centro de la circunferencia es igual a la longitud del radio.
- La recta *m* no corta a la circunferencia en ningun punto y la distancia de esta al centro de la circunferencia es mayor que la longitud del radio.

¿Qué nombre recibirán las rectas con respecto a la circunferencia de acuerdo con su posición?

El estudio sobre las posiciones relativas entre una circunferencia y una recta, requiere de analizar si estas tienen puntos comunes y de tenerlos, cuántos son.

Para esto, es necesario comparar la distancia del centro de la circunferencia a la recta considerada *(d)*, con el radio de la circunferencia *(r)*. Solo existen tres casos posibles: 1) $d > r$, 2) $d = r$, 3) $d < r$.

Si la recta y la circunferencia **no** tienen **puntos comunes,** se dice que la **recta** es **exterior** a la circunferencia y la **distancia** de la recta al centro de la circunferencia es **mayor que** la longitud del **radio** *($d > r$)*.

Ejemplo 2:

En la figura 2.305 la recta *m* es una recta exterior a la circunferencia, fíjate que: $\overline{AO} > \overline{BO}$.

Si la recta y la circunferencia tienen **dos puntos comunes,** se dice que la *recta es secante* a la circunferencia y la *distancia* de la recta al centro de la circunferencia es *menor* que la longitud del *radio (d < r)*.

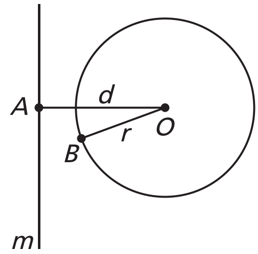


Fig. 2.305

Ejemplo 3:

En la figura 2.306 la recta *s* es una recta secante a la circunferencia, fíjate que: $\overline{AO} < \overline{BO}$.

Si la recta y la circunferencia tienen **un punto común,** se dice que la *recta* es *tangente* a la circunferencia. El punto común se denomina punto de tangencia y la *distancia* de la recta al centro de la circunferencia es *igual* a la longitud del *radio (d = r)*.

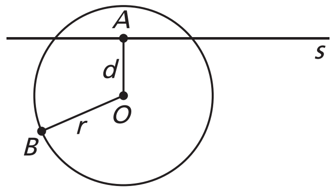


Fig. 2.306

Ejemplo 4:

En la figura 2.307, la recta *t* es una recta tangente a la circunferencia, fíjate que: $\overline{AO} = \overline{BO}$; *A* es el punto de tangencia.

t, recta tangente y $\overline{AO} = \overline{BO}$

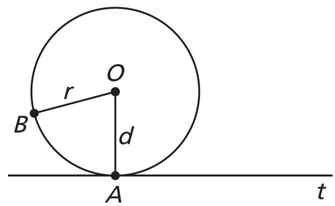


Fig. 2.307

Podrás ahora encontrar la similitud de las láminas que mostró la profesora de matemática con la posición de una recta respecto a una circunferencia.

Reflexiona

La lámina de la polea del pozo se asemeja a una recta tangente, la segunda, la de la estrella del parque de diversiones, ¿se te parece a una recta secante y la de la bicicleta te sugiere que es una recta exterior?

Teorema sobre la perpendicularidad de la tangente:

La recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que tiene como extremo el punto de tangencia. Llamamos a este segmento radio de tangencia.

Recíproco del teorema sobre la perpendicularidad de la tangente:

La recta perpendicular a un radio, en el extremo que pertenece a la circunferencia, es una recta tangente a dicha circunferencia en ese punto.

Ejemplo 5:

Demuestra que la recta tangente a la circunferencia, tiene solamente un punto común con esta (fig. 2.308).

Premisa: Sea t una recta perpendicular al radio de la circunferencia.

Tesis: t recta tangente a la circunferencia en el punto T.

Demostración:

Vamos a demostrar, suponiendo que existe otro punto de la recta perpendicular al radio de la circunfencia donde esta es también perpendicular al radio, por tanto, tangente, esto se conoce como una proposición por el absurdo, es decir, partir de suponer que no se cumple la tesis.

Sea, además de T, otro punto P que pertenece a la recta tangente t y a la circunferencia, situado a la derecha de T (fig. 2.308).

Trazamos los segmentos $\overline{OT}$ y $\overline{OP}$, se forma el triángulo OTP, que es rectángulo en T y en P al mismo tiempo, porque por la propiedad anterior: $\overline{OT}$ y $\overline{OP}$ son radios de tangencia. Pero no existe un triángulo con dos ángulos rectos, por lo cual lo supuesto es falso y se cumple la unicidad del punto de tangencia de la circunferencia y la recta.

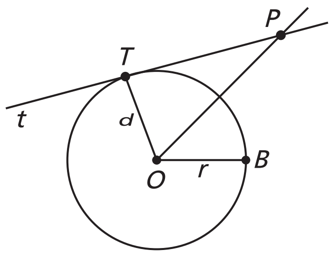


Fig. 2.308

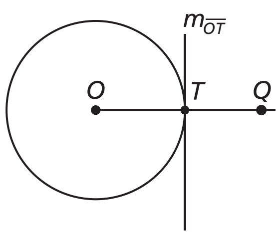


Fig. 2.309

Ejemplo 6:

Construye una recta tangente a una circunferencia en un punto dado de esta (fig. 3.309).

Solución:

Consideremos una circunferencia de centro O y un punto T en esta, por el cual vamos a trazar una tangente a la circunferencia.

Por el recíproco del teorema de la perpendicularidad de la tangente, sabemos que una recta perpendicular a un radio con el extremo de este que pertenece a la circunferencia, es tangente a dicha circunferencia.

Por tanto, tenemos que trazar un radio en ese punto T, es decir, el radio $\overline{OT}$ y una recta perpendicular a $\overline{OT}$ en el punto T.

La construcción la puedes hacer utilizando el cartabón, o empleando el procedimiento para trazar la mediatriz de un segmento con regla y compás que trabajamos en epígrafes anteriores. Trazamos la semirrecta OT que contiene al radio $\overline{OT}$ y en esta un punto Q tal que $\overline{OT} = \overline{TQ}$ y construimos la mediatriz de la cual T es punto medio; te invitamos a hacerlo con el Geómetra, también.

Ejemplo 7:

En la figura 2.310, $\overline{PT}$ es tangente a la circunferencia $C(O;\ 6{,}0\text{ cm})$ en el punto T y $\overline{OP} = 15$ cm.

Calcula la longitud de $\overline{PT}$.

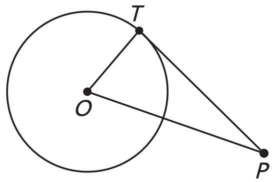


Fig. 2.310

Solución:

Por el teorema tenemos que: $\measuredangle OTP = 90°$, o sea, el triángulo OTP es rectángulo en T y, por tanto, aplicando el teorema de Pitágoras, podemos plantear que:

$$\overline{OT}^2 = \overline{OT}^2 + \overline{PT}^2$$

Si despejamos $\overline{PT}$ y sustituimos los valores conocidos, obtenemos que:

$$\overline{PT} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OT}^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{144} = 12\text{ cm}$$

Respuesta: la longitud de $\overline{PT}$ es 12 cm.

En resumen, las posiciones de una recta y una circunferencia puedes estudiarlas en el esquema 2.4.

Posiciones relativas de una recta con respecto a una circunferencia

- Exteriores (ningún punto común)
- Tangente (un punto común)
- Secante (dos puntos comunes)

Esquema 2.4

Ejercicios

(epígrafe 2.5.2)

1. Construye la circunferencia que pasa por tres puntos dados.

2. Los puntos *A* y *D* pertenecen a la circunferencia *C(O; r)* de la figura 2.311 y son vértices de un rectángulo. Los otros dos vértices *B* y *C* son simétricos de *A* y *D* respectivamente respecto a un diámetro de la circunferencia. Construye el rectángulo.

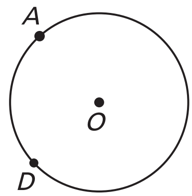


Fig. 2.311

3. En la figura 2.312 se representan dos circunferencias que tienen el mismo centro *O*. Los puntos *M* y *N* son vértices de un cuadrilátero cuyos otros vértices son simétricos de *M* y *N* respecto a un diámetro de la circunferencia de mayor radio. Construye el cuadrilátero y clasifícalo.

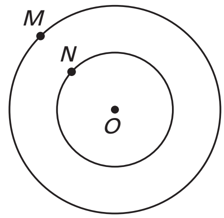


Fig. 2.312

4. Dada una circunferencia de 3,0 cm de radio y tres rectas.

4.1 Completa los espacios en blanco teniendo en cuentas las relaciones estudiadas:

Si la distancia de una de las rectas a la circunferencia es:

a) mayor que 3,0 cm, entonces la recta es ______________ a la circunferencia;

b) de 3,0 cm, la recta es ______________ a la circunferencia;

c) de 2,5 cm, la recta es ______________ a la circunferencia.

4.2 Enlaza la columna A con la columna B.

A	**B**
Tipo de recta con respecto a la circunferencia	Cantidad de puntos de intersección
Tangente	dos
Secante	ninguno
Exterior	uno

5. Construye un ángulo agudo y una circunferencia que sea tangente a sus dos lados. ¿Cuántas circunferencias que cumplan esta condición se pueden construir?

2.5.3 Posición relativa de dos circunferencias

Reflexiona

Enrique se ha percatado que en una bicicleta tenemos dos circunferencias como ruedas, que se encuentran a cierta distancia y que, en la máquina de coser de su abuela, también aparecen dos circunferencias unidas por una polea. ¿Te has puesto a pensar en objetos de la vida que representen dos circunferencias y de cuántas maneras pudieran colocarse estas?, por ejemplo, una delante de la otra, una al lado de la otra, una dentro de la otra…en fin, queremos que tú también medites en esto (fig. 2.313).

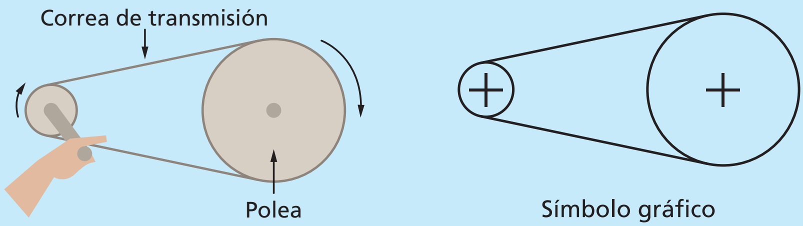


Fig. 2.313

Investiga y aprende

Observa las situaciones que te presentamos a continuación e imagina en estas a dos circunferencias del plano y las diferentes posiciones en que se encuentran. ¿Cuántos puntos comunes tienen estas circunferencias? ¿Bajo qué condiciones los tienen?

Realicemos el análisis diferenciando casos, comencemos con los casos generales, si estamos buscando cuántos puntos comunes tienen dos circunferencias y bajo qué condiciones, pensemos primero: **cuando tienen puntos comunes y cuando no los tienen** y a su vez, dentro de estos, otros dos, cuando son circunferencias exteriores e interiores.

Caso 1. Circunferencias que no tienen puntos comunes

Caso 1A: Circunferencias exteriores (sin puntos comunes)

El dispositivo de la figura 2.314 nos hace pensar en circunferencias exteriores que no tienen puntos comunes.

Fig. 2.314

Traza dos circunferencias exteriores de radios diferentes: $C_1(A, r_1)$ y $C_2(B, r_2)$ que no tengan puntos comunes, como en la figura 2.315.
Mide la distancia entre los centros de ambas circunferencias ($d = \overline{AB}$) y compárala con la suma de las longitudes de sus respectivos radios r_1 y r_2. ¿A qué conclusión llegaste?
Se cumple que:
$d = \overline{AB} > r_1 + r_2$
Verifica esta relación en la figura 2.315.

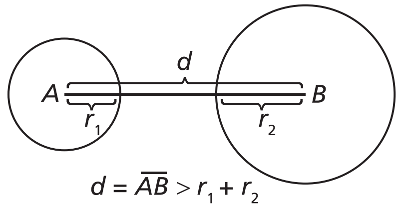


Fig. 2.315

Si dos circunferencias exteriores $C_1(A; r_1)$ y $C_2(B; r_2)$ cumplen que $d = \overline{AB} > r_1 + r_2$, entonces no tienen puntos comunes y se llaman circunferencias exteriores sin puntos comunes.

Caso 1B: Circunferencias interiores (sin puntos comunes)

En la figura 2.316 se aprecian diferentes circunferencias interiores con el mismo centro, que no tienen puntos comunes entre sí. ¿Será este el único caso? ¿Y si no tienen el mismo centro?

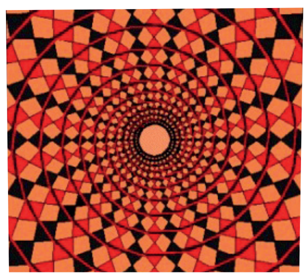
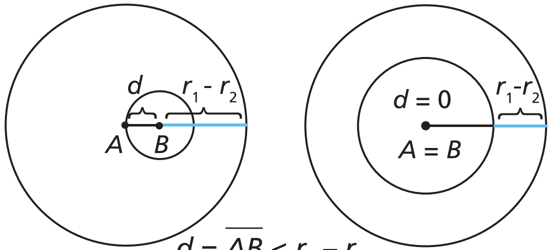


Fig. 2.316

Traza dos circunferencias interiores de radios diferentes: $C_1(A, r_1)$ y $C_2(B, r_2)$ que no tengan puntos comunes. Compara la distancia entre los centros de ambas circunferencias (longitud de $\overline{AB}$) con la diferencia de las longitudes de sus respectivos radios. ¿A qué conclusión llegaste? En un caso $d = 0$ (concéntricas), pero en ambas se cumple que: $d = \overline{AB} < r_1 - r_2$. Verifica esta relación en la figura 2.317.



$d = \overline{AB} < r_1 - r_2$

Fig. 2.317

Si dos circunferencias interiores $C_1(A, r_1)$ y $C_2(B, r_2)$ cumplen que $d = \overline{AB} < r_1 - r_2$, entonces no tienen puntos comunes y se llaman circunferencias interiores sin puntos comunes.

Caso 2. Circunferencias que tienen puntos comunes
Caso 2A: Circunferencias interiores (con un punto común) o tangentes interiores

El par de aretes de la figura 2.318 se asemeja a dos circunferencias interiores que tienen un punto común.

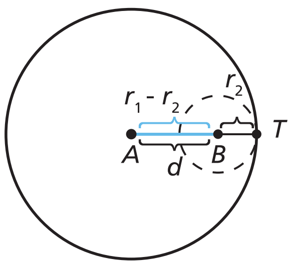
Fig. 2.318

Traza ahora dos circunferencias interiores: $C_1(A, r_1)$ y $C_2(B, r_2)$, con radios diferentes que tengan un punto común. Sea T el punto de intersección de estas circunferencias al que llamaremos punto de tangencia.

¿Qué relación hay entre la distancia determinada por los centros de ambas circunferencias ($d = \overline{AB}$) y la diferencia de las longitudes de los radios r_1 y r_2 de las circunferencias consideradas? ¿A qué conclusión llegaste? Se cumple que:

$$d = \overline{AB} = r_1 - r_2$$

Verifica esta relación en la figura 2.319.



$d = \overline{AB} < r_1 - r_2$

Fig. 2.319

Si dos circunferencias interiores $C_1(A;\, r_1)$ y $C_2(B;\, r_2)$ cumplen que

$d = \overline{AB} = r_1 - r_2$,

entonces tienen un punto común y se llaman **circunferencias tangentes interiores.**

Caso 2B: Circunferencias exteriores con un punto común

En la figura 2.320 se muestran cuatro lápices atados con una cinta adhesiva y un diagrama de la vista frontal de esta situación en el que puedes observar cuatro circunferencias. ¿Tienen puntos comunes las circunferencias de este diagrama? ¿Son circunferencias interiores o exteriores?

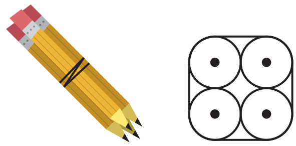
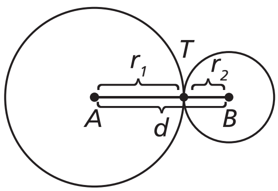


Fig. 2.320

Traza dos circunferencias exteriores de radios diferentes, $C_1(A,\, r_1)$ y $C_2(B,\, r_2)$, que tengan un punto común.

De igual forma que en los casos anteriores, compara $d = \overline{AB}$, con la suma de las longitudes r_1 y r_2 de los radios de estas circunferencias. ¿A qué conclusión llegaste? Se cumple que: $d = \overline{AB} = r_1 + r_2$. Verifica esta relación en la figura 2.321.



$d = \overline{AB} = r_1 + r_2$

Fig. 2.321

Si dos circunferencias exteriores $C_1(A;\, r_1)$ y $C_2(B;\, r_2)$ cumplen que $d = \overline{AB} = r_1 + r_2$, entonces tienen un punto común y se llaman **circunferencias exteriores con un punto común o circunferencias tangentes exteriores.**

Caso 2C: Circunferencias secantes

En el logotipo de los juegos olímpicos, cada circunferencia representa a uno de los cinco continentes en que está dividida la esfera terrestre. En este se concreta el último de los casos de circunferencias con puntos comunes, en particular dos y a las que vamos a llamar secantes (fig. 2.322).

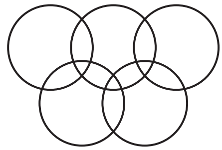


Fig. 2.322

Traza dos circunferencias $C_1(A;\, r_1)$ y $C_2(B;\, r_2)$, con radios diferentes o radios iguales que tengan dos puntos comunes.

Analiza las distancias entre los radios y los centros, como en los casos anteriores. ¿A qué conclusión llegaste?

Observa el triángulo de vértices: A, B y P_1. Nota que las longitudes de sus lados son r_1, r_2 y $\overline{AB}$. ¿Qué propiedad geométrica hemos estudiado sobre la suma de los lados de un triángulo?

¿Por qué $d = \overline{AB} \leq r_1 + r_2$? Verifica esta relación en la figura 2.323.

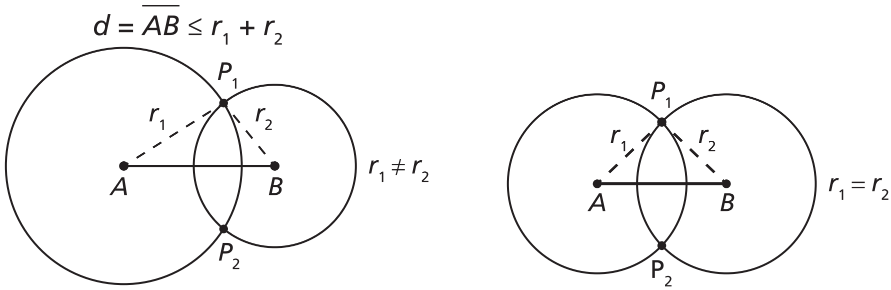


Fig. 2.323

Si dos circunferencias $C_1(A;\, r_1)$ y $C_2(B;\, r_2)$ cumplen que $d = \overline{AB} \leq r_1 + r_2$, entonces tienen dos puntos comunes y las llamaremos **circunferencias secantes.**

Ejemplo 1:

Raúl observa la figura 2.324 y le dice a Elena: *Estas circunferencias son concéntricas de diferentes radios, por tanto, no tienen puntos comunes.* Pero Elena le refuta: *Te equivocas tienen en común el centro de la circunferencia*. ¿Quién tiene la razón? ¿Por qué?

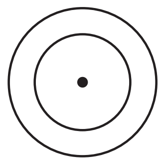


Fig. 2.324

Respuesta: Raúl tiene la razón porque las circunferencias no tienen puntos comunes, el centro de circunferencia no es un punto de la circunferencia sino uno de sus elementos y muy importante, por cierto, porque es uno de los que la determina, pero no cumple la condición de estar a la misma distancia del centro (aquí la distancia es cero), que el resto de los puntos, requisito que exige la definición de circunferencia para sus puntos.

Ejercicios

(epígrafe 2.5.3)

1. En la figura 2.325, *A, C, D* y *E* $\in$ $(O; \overline{OB})$; *O* punto de $\overline{EB}$.
a) Identifica los segmentos, qué son: ¿radios, diámetros y cuerdas?
b) Nombra los arcos que determinan los puntos *A, B, C, D* y *E*.
c) Determina cuáles de los arcos que aparecen, miden menos de 180°, miden 180° y cuáles más de 180°.

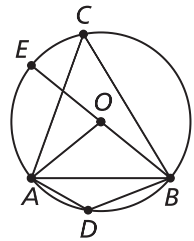


Fig. 2.325

2. Construye una circunferencia de centro *O* y radio 2,0 cm.
a) Traza en esta un radio, un diámetro y una cuerda, y denótalos.
b) Ubica un punto que se encuentre a 0,28 dm del centro *O* y nómbralo. ¿Estará el punto nombrado por ti dentro de la circunferencia? Fundamenta.
c) Ubica un punto que se encuentre a 15 mm del centro *O*. ¿Cómo se le llama a este punto según su posición respecto a la circunferencia? Fundamenta.
d) Ubica un punto que se encuentre a 30 mm del centro *O*. ¿Cómo se le llama a este punto según su posición respecto a la circunferencia? Fundamenta.

3. Clasifica en verdaderas o falsas las proposiciones siguientes y fundaméntalas todas gráficamente.
a) Si dos circunferencias tienen el mismo centro, entonces son iguales.
b) Si la distancia entre los centros de dos circunferencias es menor que la suma de sus radios, entonces estas tienen puntos interiores comunes.
c) Si dos cuerdas de una circunferencia pasan por su centro, entonces estas son iguales.

d) Los extremos de una cuerda cualquiera de una circunferencia son centralmente simétricos con respecto al centro de esta circunferencia.

e) El centro de una circunferencia no siempre equidista de los extremos de sus cuerdas.

4. Dadas dos circunferencias tangentes exteriores de radios 3,0 cm y 5,0 cm respectivamente, ¿cuál es la distancia entre sus centros?

5. Dibuja dos circunferencias secantes de radios 2,0 cm y 5,0 cm respectivamente. ¿Puede ser la distancia entre los centros de las circunferencias de 7,0 cm?

6. Si la longitud de los radios es 1,0 cm y 4,0 cm respectivamente. Las circunferencias son:

a) ___ Concéntricas b) ___ Tangentes exteriores c) ___ Secantes.

2.6 Cálculo de longitudes, áreas y volúmenes

Reflexiona

El médico de la familia le recetó al hermano de Ricardo, tomar paracetamol para la fiebre, su mamá debía suministrárselo en dosis de 30 mL diarios. Cuando Ricardo fue a comprar el medicamento a la farmacia, leyó en la caja (fig. 2.326) que el frasco tenía 120 mL y que cada cucharadita de 5 mL contiene 120 mg de paracetamol, 0,1 mg de tartrazina y 2 000 mg de sacarosa y se preguntó: ¿Qué significan mL y mg? ¿Por qué no se utiliza solamente una de estas unidades para las diferentes cantidades de medicamento que se mencionan?

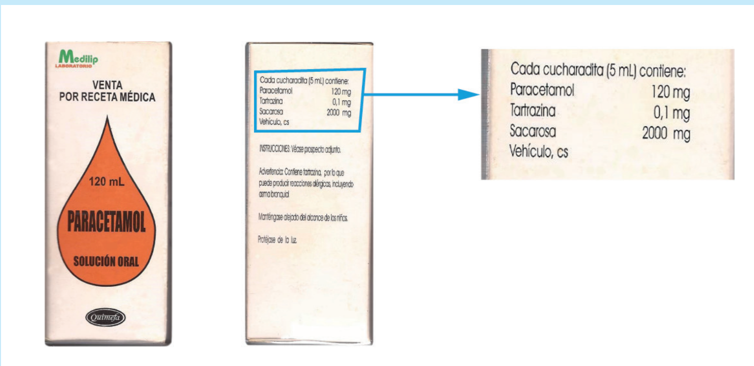


Fig. 2.326

De la historia

Desde la antigüedad el hombre necesitó medir para realizar diferentes actividades: construir, comerciar, sembrar, etc., para lo cual empleó o tomó como referencia algunas partes de su cuerpo, por ejemplo: las manos, los dedos, los codos, los pies y los brazos.

En un papiro egipcio fue hallado un texto que aproximadamente se traduce así:

"...una pirámide tiene de lado 140 codos, una inclinación de 5 palmos y un dedo, por cada codo..."

Más tarde el hombre creó instrumentos de medición, que fue perfeccionando con el tiempo, cada vez más (fig. 2.327).

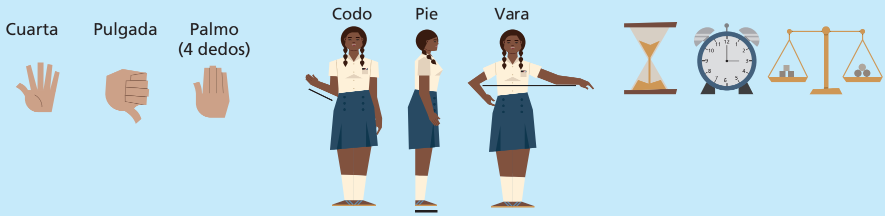


Fig. 2.327

2.6.1 Unidades de magnitud en que se expresan longitudes, áreas y masas

De grados anteriores conoces las unidades de magnitud que se emplean con mayor frecuencia en la vida práctica. Ahora vamos a precisar qué unidades de medida se emplean para cada tipo de magnitud y con esto comprenderás cuándo se utiliza mililitro (mL) y cuándo miligramo (mg). La selección de la unidad de medida depende del tipo de magnitud que se desea medir y de la cantidad de magnitud, pues cada magnitud tiene una unidad principal, a partir de la cual usamos múltiplos para medir grandes cantidades y submúltiplos para las pequeñas.

Unidades de longitud

Se utilizan para medir distancia entre dos puntos. Las más utilizadas son: el *kilómetro,* para medir grandes distancias; el *centímetro,* para medir pequeñas distancias y el *metro* (m), es la unidad principal y se utiliza para medir distancias ni tan grandes ni tan pequeñas.

Toda unidad de longitud equivale a diez veces la unidad inmediata inferior y es la décima parte de la inmediata superior. Esto significa que los múltiplos aumentan de diez en diez y los submúltiplos disminuyen de diez en diez (fig. 2.328).

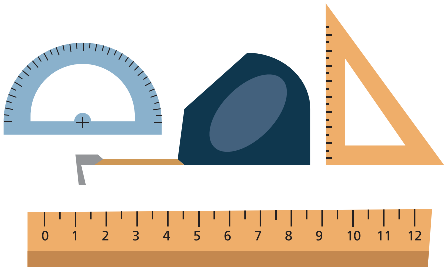


Fig. 2.328

Por eso, para convertir una unidad en uno de sus submúltiplos (→) se multiplica por 10, 100, 1 000… según sean uno, dos, tres… los lugares de la escala múltiplo-submúltiplo de unidades de longitud. Para convertir una unidad en uno de sus múltiplos (←), divides por 10, 100, 1 000… según sean uno, dos, tres… los lugares de la escala múltiplo-submúltiplo de unidades de longitud.

Recuerda que...

Escala múltiplo-submúltiplo de unidades de longitud:

(←) Múltiplos-submúltiplos (→)						
kilómetro (km)	hectómetro (hm)	decámetro (dam)	metro (m)	decímetro (dm)	centímetro (cm)	milímetro (mm)

Ejemplo1:

Selecciona la respuesta correcta.

Un ciclista debe recorrer 185,00 km. Después de transitar 76,200 m, ¿cuántos kilómetros le faltan al ciclista por recorrer?

a) 108,8 km b) 177,38 km c) 184,92 km

Solución:

Primero debemos expresar todas las distancias dadas en la misma unidad de longitud: en este caso en kilómetro o en metro. Es más conveniente, expresar ambas longitudes en kilómetro, porque debemos seleccionar la respuesta correcta y todas están expresadas en kilómetro, para comparar los cálculos que hagamos con las opciones de respuesta dadas en los incisos a), b) y c).

La distancia recorrida por el ciclista está expresada en metro, por tanto, debemos convertirla a kilómetro. Sería convertir 76,200 m a km, en este caso convertimos **de submúltiplo a múltiplo,** con tres lugares en la escala submúltiplo-múltiplo de unidades de longitud, que se contienen de diez en diez, **dividimos:**

76,200 : 1 000 = 0,076 200 km.

Pero si escoges convertir de kilómetro a metro quedaría: 185 km a m, se trata de una **conversión a submúltiplo,** con tres lugares en la escala múltiplo-submúltiplo de unidades de longitud, que se contienen de diez en diez, por tanto, **multiplicamos** por**:**

1 000, o sea, 185 · 1 000 = 185 000 m.

Para saber cuánto le falta por recorrer al ciclista, calculamos: 185 000 – 76,200 = 184 923,800 m. Vamos a convertir el resultado obtenido a kilómetro, para comparar con las opciones de respuesta, dadas así.

Esta es una **conversión a múltiplo,** con tres lugares en la escala múltiplo-submúltiplo de unidades de longitud, luego **dividimos** por 1 000:

184 923,800 : 1 000 = 184,92 km.

Respuesta: le faltan por recorrer 184,92 km y seleccionamos el inciso c.

Unidades de área

Se utilizan para medir superficies. La unidad principal es el metro cuadrado (m^2), cuyos múltiplos y submúltiplos, varían de 100 en 100.

Para convertir una unidad en un submúltiplo o en un múltiplo, se multiplica o divide, respectivamente, por 100, 10 000, 1 000 000…, según la cantidad de lugares de la escala múltiplo-submúltiplo de unidades de área (fig. 2.329).

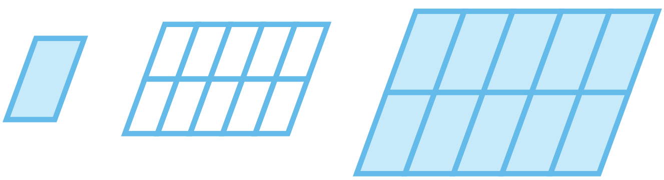


Fig. 2.329

Recuerda que...

Escala múltiplo-submúltiplo de unidades de área:

(←) Múltiplos-submúltiplos (→)						
kilómetro cuadrado (km^2)	hectómetro cuadrado (hm^2)	decámetro cuadrado (dam^2)	metro cuadrado (m^2)	decímetro cuadrado (dm^2)	centímetro cuadrado (cm^2)	milímetro cuadrado (mm^2)

Ejemplo 2:

El terreno de una cooperativa agropecuaria tiene 86 hm^2. ¿Cuál es su extensión en m^2?

Solución:

86 hm^2 a m^2, es ***una conversión a submúltiplos,*** con dos lugares en la escala múltiplo-submúltiplo de unidades de área, que se contienen de 100 en 100. Luego ***multiplicamos*** por 10 000: $86 \cdot 10\,000 = 860\,000$ m^2.

Respuesta: la extensión del terreno en metro es 860 000 m2.

Unidades de volumen

Se utilizan para medir el espacio que ocupa un cuerpo. La principal unidad es el metro cúbico (m^3). Sus múltiplos y submúltiplos varían de 1 000 en 1 000. Para convertir una unidad en un submúltiplo o en un múltiplo, se multiplica o divide, respectivamente, por: 1 000, 1 000 000, 1 000 000 000, … según la cantidad de lugares de la escala (fig. 2.330).

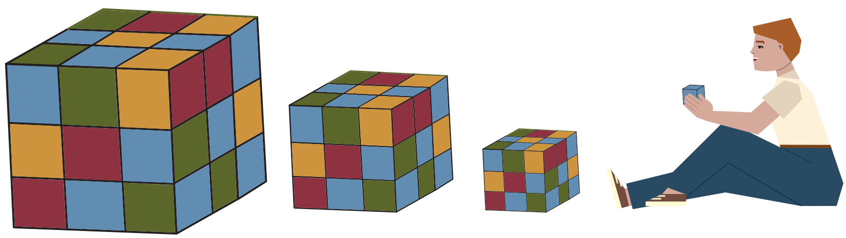


Fig. 2.330

Recuerda que...

Escala múltiplo-submúltiplo de unidades de volumen:

(←) Múltiplos-submúltiplos (→)						
kilómetro cúbico (km^3)	hectómetro cúbico (hm^3)	decámetro cúbico (dam^3)	metro cúbico (m^3)	decímetro cúbico (dm^3)	centímetro cúbico (cm^3)	milímetro cúbico (mm^3)

Ejemplo 3:

¿Cuántos metros cúbicos tiene un depósito con 6 026 dm^3 de volumen?

Solución:

6 026 dm^3 a m^3, ***es una conversión a múltiplos,*** con un lugar en la escala múltiplo-submúltiplo de unidades de volumen, que se contienen de 1 000 en 1 000, ***luego dividimos*** por 1 000: 6 026 : 1 000 = 6,026 m^3.

Respuesta: el depósito tiene 6,026 m^3 de volumen.

Unidades de masa

Se utilizan para medir la cantidad de masa sólida. La más utilizada es el kilogramo (kg), pero la principal es el gramo (g), a partir de la cual sus múltiplos y submúltiplos varían de 10 en 10. Por ello puedes hacer las conversiones entre unidades, al igual que con las unidades de longitud, que varían de igual forma que las unidades de la escala múltiplo-submúltiplo de unidades de masa (fig. 2.331).

Fig. 2.331

Recuerda que...

Escala múltiplo-submúltiplo de unidades de masa:

(←) Múltiplos-submúltiplos (→)						
kilogramo (kg)	hectogramo (hg)	decagramo (dag)	gramo (g)	decigramo (dg)	centigramo (cg)	miligramo (mg)

Ejemplo 4:

La vitamina C es una de las vitaminas más importantes para el fortalecimiento de nuestro sistema inmunológico.

Si en 100 g de guayaba hay 800 mg de vitamina C, ¿cuántos gramos de vitamina C consumes cada vez que comes 300 g de guayaba?

Solución:

Si en 100 g de guayaba hay 800 mg de vitamina C, en 300 g hay:

$800 \cdot 3 = 2\,400$ mg de vitamina C.

Ahora debemos expresar estos miligramos en gramo, se trata de una ***conversión a múltiplos,*** con tres lugares en la escala múltiplo-submúltiplo de unidades de masa, que se contienen de 10 en 10, *luego dividimos* por 1 000 a 2 400 mg: 2 400 mg : 1 000 = 2,4 g.

Respuesta: en 300 gramos de guayaba hay 2,4 mg de vitamina C.

Unidades de capacidad

Se utilizan para medir la cantidad de masa líquida. Su principal unidad es el litro (L) a partir de la cual se consideran los múltiplos, que aumentan de 10 en 10 y los submúltiplos, que disminuyen de 10 en 10, al igual que con las unidades de longitud y de masa. Están relacionadas con las unidades de volumen porque un litro tiene la capacidad de un decímetro cúbico: 1 L = 1 dm^3 (fig. 2.332).

Fig. 2.332

Recuerda que...

Escala múltiplo-submúltiplo de unidades de capacidad:

(←) Múltiplos-submúltiplos (→)						
kilolitro (kL)	hectolitro (hL)	decalitro (daL)	litro (L)	decilitro (dL)	centilitro (cL)	mililitro (mL)

Ahora puedes explicarle a Ricardo que:
Se utilizó *mL* para cada cucharadita de paracetamol, porque es un medicamento líquido y se utilizó *mg* para indicar la cantidad de sacarosa o paracetamol, porque son componentes sólidos de este medicamento (fig. 2.333).

Fig. 2.333

Ejemplo 5:
Si el frasco de paracetamol que compró Ricardo tiene 120 mL y cada cucharadita contiene 5 mL (fig. 2.333).

a) ¿Qué parte de un litro contiene el frasco?
b) ¿Cuántas cucharaditas contiene el frasco?

Solución:

a) 120 mL a L, es una conversión a múltiplo, con tres lugares en la escala múltiplo-submúltiplo de unidades de capacidad. Como se contienen de 10 en 10, dividimos por 1 000, luego:

$$120 : 1\,000 = 0{,}12 = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}\ \text{L}$$

b) 120 mL : 5 mL = 24

Respuesta: a) El frasco de paracetamol contiene 120 mL, lo cual representa $\frac{3}{25}$ de un litro.

b) El frasco contiene 24 cucharaditas.

De la historia

Para unificar las unidades de medida utilizadas por los diferentes pueblos y culturas se creó el Sistema Internacional de Unidades (SIU) en la XI Conferencia de Pesas y Medidas, celebrada en París en 1960, basado en seis unidades fundamentales: metro, kilogramo, segundo, ampere, kelvin, caloría. En 1971 se añadió el mol, que mide la cantidad de materia.

En Cuba se estableció en 1982 con carácter obligatorio su uso, no obstante, todavía son utilizadas con frecuencia en muchos lugares otras unidades de medida.

En la tabla 2.7, te ofrecemos diferentes tipos de unidades que todavía se utilizan en Cuba y su equivalencia aproximada con el Sistema Internacional de Unidades.

Tabla 2.7

No.	Unidad	Representación	Equivalencia con el SIU
1	Quintal métrico	q	1 q = 100 kg
2	Tonelada métrica	t	1 t = 10 q = 1 000 kg
3	Onza	oz	1 lb = 16 oz = 460 g
4	Libra	lb	
5	Arroba	@	1 @ = 25 lb
6	Pulgada	in	1 in = 2,5 cm
7	Vara española*	vara	1 vara = 3 pie = 0,835 m
8	Caballería	cab	1 cab = 134 202 m^2
9	Cordel	cordel	1 cordel = 20 m^2; 1 rosa = 18 cordeles
10	Milla	mi	1 mi = 1,6 km

* (Existe también la vara portuguesa que equivale a 1,10 m y la yarda igual a 0,914 m).

Estimación de longitudes

No siempre tenemos a la mano una cinta de medición o una regla graduada para realizar en la vida práctica, mediciones de distancias más o menos largas. En esos casos es conveniente hacer una estimación de la medición deseada, que debemos hacer con la mayor exactitud posible.

Investiga y aprende

¿Cómo realizar la medición de una longitud mediante la estimación?

Podemos estimar las distancias que recorremos, utilizando ***el paso*** (fig. 2.334). Para estimar mediante el paso es necesario saber cuál es la longitud de nuestro paso y contar los pasos que damos.
Por supuesto, los pasos no siempre se dan de la misma longitud, pero por lo general, son siempre iguales y calculando su longitud promedio (paso medio) tendremos un medio eficaz para estimar distancias con bastante precisión, que fácilmente puedes utilizar.

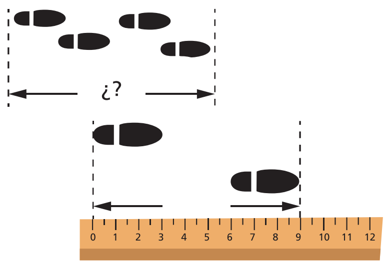


Fig. 2.334

Procedimiento para estimar longitudes que recorres mediante el paso:

1. **Calcular el paso medio:** mide una distancia de 20 m, recórrela caminando normalmente y cuenta el número de pasos que das en esta, la longitud del paso medio estará dada por el resultado de dividir 20 entre el número de pasos que diste al recorrer esa distancia.
   Puede ocurrir que tu paso no esté contenido un número exacto de veces en la longitud que se quiere medir. Si el tramo restante es menor que la mitad de la longitud de un paso, despreciamos esa distancia y si es mayor que la mitad de la longitud de un paso, lo contamos como un paso más.
2. **Contar los pasos que das al recorrer la distancia que quieres estimar:** para no equivocarte al contar los pasos en distancias largas, cuéntalos siempre

hasta 10 (o hasta 20) y cada vez que des 10 pasos anota un palote en una tabla que confeccionarás en una hoja de papel, de forma que hagas la tabulación de todos los palotes que escribas. Así podrás obtener el número de pasos, multiplicando por 10 la cantidad de trazos que anotaste en la tabla.

Tarjado o tabulación	///// //

3. **Realizar la estimación de la distancia que quieres determinar a partir del paso medio:** ahora ya puedes hacer la estimación, contando el número de pasos que des al recorrerla y multiplicando este número por la longitud del paso medio que siempre debes memorizar.

Procedimiento para estimar pequeñas longitudes:

1. **Tomar de referencia una unidad de medida:** que puede ser una parte de tu cuerpo, como, por ejemplo, un brazo, un dedo o de la falange de un dedo y hasta tu altura, entre otras.
2. **Determinar la longitud de la unidad de medida considerada:** debes medir previamente la parte de tu cuerpo tomada como unidad de medida u otra que hayas elegido.
3. **Estimar la longitud que deseas conocer:** observándola atentamente para determinar cuántas veces está contenida en esta la unidad de medida seleccionada.

Para comprobar que tu estimación ha sido correcta, verifica el resultado con el uso de un instrumento de medición.

Ejemplo 1:

Un joven que da pasos de medio metro contó 2 758 pasos de su casa a la escuela. ¿Cuántos kilómetros recorre durante esa trayectoria? Da la respuesta con dos cifras significativas.

Solución:

2 758 · 0,5 = 1 379,0 m

1 379 m a km: 1 379 : 1 000 = 1,379 km

Respuesta: la distancia que recorre el joven durante esa trayectoria es aproximadamente 1,4 km.

Ejercicios

(epígrafe 2.6.1)

1. Selecciona cuál de los objetos de la columna II, pueden ser utilizados como unidad, para hacer una estimación adecuada de la longitud de los objetos de la columna I.

Columna I	Columna II
1 Libreta	A El casquillo de un bolígrafo
2 TV del aula	B La cubierta de un CD
3 Puerta del aula	C Una libreta
4 Pizarra	D Un lápiz
5 Cuaderno de Matemática	E Tu estatura
	F Una caja de fósforos pequeña

2. Haz una estimación de la longitud de los objetos de la columna I del ejercicio anterior, teniendo en cuenta la unidad de medida que consideraste.

3. Calcula la longitud de tu paso medio. Completa la tabla 2.8, con la estimación que realices de las distancias que aparecen en la segunda columna, a partir de tu paso medio. Compara los resultados que obtuviste con tus compañeros de séptimo grado.

Tabla 2.8

Longitud de tu paso medio			
No.	**Distancias que se van a estimar**	**Cantidad de pasos dados**	**Estimación**
1	Distancia de la escuela a tu casa		
2	Distancia de la biblioteca a tu aula		
3	Distancia de tu casa a la parada de ómnibus más cercana		

4. Para medir la distancia entre las estrellas, se toma como unidad la distancia que recorre la luz en un año, que se denomina año-luz. Si en un segundo la luz recorre 300 000 km, en un año recorrerá 300 000 · 365 · 24 · 60 · 60 que representan aproximadamente unos nueve billones de kilómetros. Fundamenta la presencia de cada factor en esta multiplicación.

5. En la tabla 2.9 aparece un estimado del consumo mundial y de las reservas de combustibles fósiles (carbón, petróleo y gas natural) existentes en la actualidad.
a) Calcula a partir de estos, cuántos años pudieran durar tales reservas, suponiendo que se mantenga en el futuro el ritmo del consumo indicado en la tabla.
b) Valora la gravedad de la situación, a partir de tus cálculos y argumenta cómo piensas que esta situación podría atenuarse.[12]

Tabla 2.9

Combustible	**Carbón**	**Petróleo**	**Gas natural**
Reserva	$977\,576\,000 \cdot 10^3$	$1\,056\,805\,000 \cdot 10^3$	$146\,439\,000\,000 \cdot 10^3$
Consumo Anual	$4\,672\,658 \cdot 10^3$	$24\,345\,016 \cdot 10^3$	$2\,268\,329\,000 \cdot 10^3$
Estimación de años de consumo			

6. Las hojas de un libro miden 15 cm de largo, expresa esa medida utilizando la estimación, tomando como patrón una presilla para papel.

7. Realiza por simple inspección la estimación en centímetro de las longitudes de los objetos siguientes:
- Largo de la hoja del periódico *Granma*.
- Una tiza.
- Una bolsa de yogurt.
- El libro de Matemática.

[12] MINBAS: *Ahorro de energía: la esperanza del futuro*, Editora Política, La Habana, 2001.

8. Imagina que una estación espacial (EE) está a un año-luz de la Tierra. Haz un esquema y señala en este un punto que corresponda a una nave espacial que viaje hacia una EE y esté a 0,72 año-luz de la Tierra.

9. Toma como unidad de medida la falange de tu dedo meñique y haz una estimación de la longitud de los objetos que aparecen en la figura 2.335, los cuales medirás después, para valorar la eficacia de la estimación que realizaste. Confecciona una tabla para procesar los resultados: ¿Qué tan buena fue la estimación que realizaste?

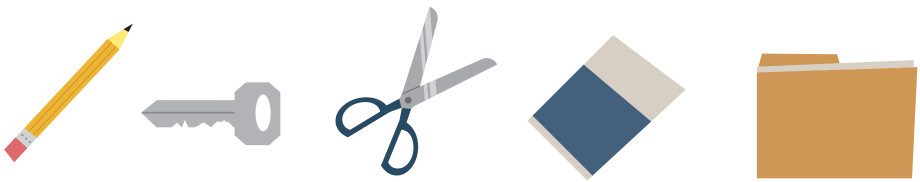


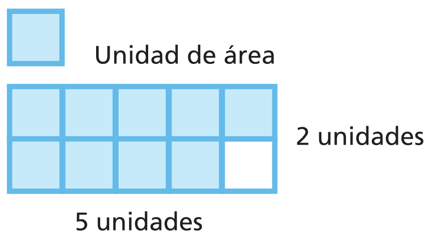
Fig. 2.335

2.6.2 Cálculo del área, el perímetro de figuras planas y del volumen de cuerpos

Reflexiona

¿Se podrá estimar el cálculo de áreas? ¿Qué sucede si trasladamos este procedimiento al cálculo del área?

Considerando un cuadradito de cierta área, como unidad de medida, al igual que en la figura 2.336, puedes calcular el área de diferentes figuras geométricas. Sobre todo, en figuras de forma irregular, como lo mapas. Para ello, cuentas la cantidad de cuadraditos que la cubre.



$A = 5 \cdot 2 = 10$
A = 10 cuadraditos
$A = 10\ u^2$

Fig. 2.336

Llamamos **área por exceso,** si contamos también los cuadraditos que tienen solamente una parte de la cuadrícula. Llamamos **área por defecto,** cuando no consideramos los cuadraditos que incluyen solamente una parte de la figura.

¿Cuál es el área por defecto de las ilustraciones que aparecen en la figura 2.337 en la unidad de área considerada? Reflexiona con tus compañeros de aula acerca de la unidad de área más conveniente para calcular estas áreas.

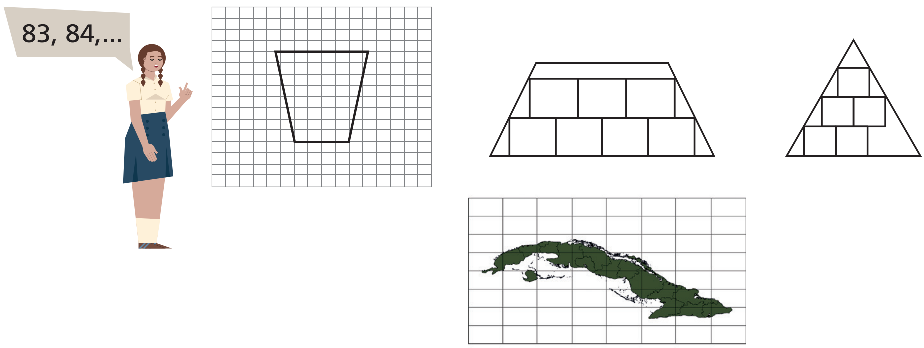


Fig. 2.337

Como puedes apreciar también en la figura 2.337, este procedimiento no siempre es tan exacto ni tan cómodo. Por esto recurrimos a las ecuaciones que permiten calcular el área y el perímetro de las figuras planas, que han sido obtenidas por matemáticos de generalizaciones de este procedimiento, considerando cada vez una unidad de área más pequeña.

Un recurso muy utilizado es aplicar la etimología de la palabra perímetro ya que: *peri:* significa alrededor y *metro:* proviene de la voz griega *metrón,* que quiere decir medida, esto se trascribe como la medida del borde, lo que matemáticamente significa la suma de la longitud de los lados de la figura. Por lo cual, si te sabes las propiedades de las figuras planas estudiadas, no tienes que memorizar las ecuaciones para calcular el perímetro de estas figuras, porque puedes aplicar el significado anteriormente explicado.

Por ejemplo, todo rectángulo tiene sus lados opuestos iguales, luego como para calcular el perímetro se suman las longitudes de los lados, si denotamos por a y b a cada lado desigual del rectángulo nos quedaría $a + a + b + b = 2a + 2b = 2(a + b)$.

Cuadro resumen de ecuaciones para el cálculo del área y perímetro:

Polígono	Elementos considerados	Perímetro	Elementos considerados	Área
Triángulo	Longitud *a*, *b*, *c* de sus lados	$P = a + b + c$	*b*: longitud de un lado *h*: altura de ese lado	$A = \frac{b \cdot h}{2}$
Paralelogramo	Longitud *a*, *b* de dos lados consecutivos	$P = 2(a + b)$	*b*: longitud de un lado *h*: altura de ese lado	$A = b \cdot h$
Rectángulo	Longitud *a*, *b* de dos lados consecutivos	$P = 2(a + b)$	Longitud *a*, *b* de dos lados consecutivos	$A = a \cdot b$
Rombo	Longitud *a* del lado	$P = 4a$	Longitud d_1 y d_2 de sus dos diagonales	$\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$
Cuadrado	Longitud *a* del lado	$P = 4a$	Longitud *a* del lado	a^2
Trapecio	Longitudes *a*, *b*, *c*, *d* de sus lados	$P = a + b + c + d$	*b*: longitud de la base menor *B*: longitud de la base mayor *h*: altura (distancia entre las bases)	$\frac{(B + b) \cdot h}{2}$

Atención

Para calcular tanto el área como el perímetro de una figura geométrica, todos los datos deben tener siempre la misma unidad de medida.

Ejemplo 1:

En la figura 2.338: *PQRS* rectángulo

$\overline{RQ} = 3{,}2$ dm

$\overline{MQ} = \overline{ST} = 15$ cm

$\overline{PM} = 61$ cm

Calcula el área del paralelogramo *PMRT*.

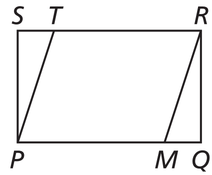


Fig. 2.338

Solución:

Primero expresaremos todos los datos en la misma unidad de longitud, luego:

$\overline{RQ} = 3{,}2 \text{ dm} = 32 \text{ cm}$

Primera vía de solución:

$A_R = A_{PMRT} = \overline{PM} \cdot \overline{RQ} = 61 \cdot 32 = 1\,952 \text{ cm}^2 \approx 20 \text{ dm}^2$

Segunda vía de solución:

$A_R = A_{PQRS} - (A_{MQR} + A_{PST})$

$= \overline{PQ} \cdot \overline{RQ} - [(\overline{MO} \cdot \overline{RQ}) : 2 + (\overline{ST} \cdot \overline{PS}) : 2]$

$= (61 + 15) \cdot 32 - [(15 \cdot 32) : 2 + (15 \cdot 32) : 2]$

$= 1\,952 \text{ cm}^2 \approx 20 \text{ dm}^2$

Atención

No olvides que el resultado final debe tener el menor número cifras significativas que poseen los datos.

Cálculo de volúmenes de cubos y ortoedros

Un cubo es un cuerpo geométrico que tiene iguales sus tres dimensiones: largo, ancho y altura. Decimos también en este caso, que la longitud de sus ***aristas*** (distancia entre cualesquiera dos de sus vértices) es siempre la misma (fig. 2.339).

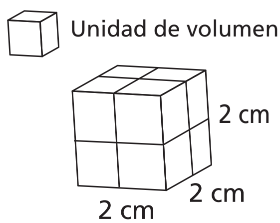


Fig. 2.339

Si un cubo tiene 1,0 cm de arista, decimos que tiene un volumen de 1,0 cm^3 y tomando a este como unidad de volumen, ***podemos estimar el volumen de otros cubos.*** Así, el volumen del cubo que queremos calcular es igual a la cantidad de cubos de 1,0 cm^3 que se necesitan para llenarlo.

Pero nota que se obtiene igual resultado, si multiplicas la longitud de las aristas del largo, el ancho y la altura, que por supuesto tienen la misma longitud.

$V = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8\ \text{cm}^3$

$V = 8\ \text{cm}^3$

Recuerda que...

El volumen se calcula (fig. 2.340) como:

$V = a \cdot a \cdot a = a^3$

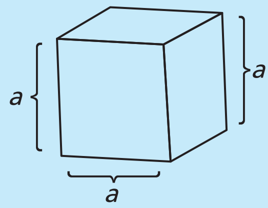


Fig. 2.340

Puedes también calcular el volumen de un ortoedro, si tomas como unidad de volumen a un determinado cubo. Pero de igual forma que pasaba con el cuadrado al calcular el área de figuras planas, este procedimiento no es tan cómodo ni tan preciso (fig. 2.341).

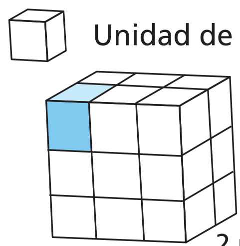


Fig. 2.341

Para esto, cuentas la cantidad de cubos que llena el cuerpo, considerando el **volumen por exceso,** si cuentas también los cubos que tienen solamente una parte del cuerpo y *volumen por defecto* cuando no los cuentas.

¿Cuál es el volumen de la caja de la figura 2.341?

El cuerpo se llena con 18 cubos de la unidad de volumen tomada, pero se obtiene igual resultado, si multiplicas la longitud de las aristas del largo, el ancho y la altura, tomando como unidad de longitud en estas, a la arista del cubo-unidad.

$V = 3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$

$V = 18$ cuadraditos

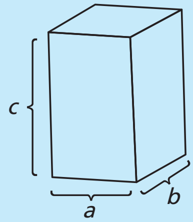
$V = 18\ \text{u}^3$

De la generalización de este procedimiento se obtiene la fórmula para calcular el volumen de un ortoedro.

Recuerda que...

El volumen de un ortoedro (fig. 2.342) se calcula multiplicando entre sí sus dimensiones: largo, ancho y altura, es decir, si un ortoedro tiene dimensiones de longitud: *a, b* y *c*, su volumen se calcula por la ecuación:

$V = a \cdot b \cdot c$



Ejemplo 2:

Las cajas que transporta la camioneta de la figura 2.343 son todas iguales y tienen forma de cubo, cuya arista es de longitud 1,0 m.
¿Cuál es el volumen de cajas que puede transportar la camioneta?

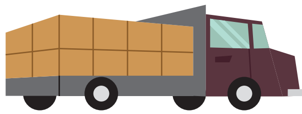


Fig. 2.343

Solución:

Para calcular el volumen podemos contar el número de cajas que contiene la camioneta, por la facilidad que para ello ofrecen los datos o a partir de la fórmula del volumen del ortoedro, que es una vía siempre segura:
$V = a \cdot b \cdot c = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24 \text{ m}^3$.

Respuesta: El volumen de cajas que puede transportar la camioneta de la figura 2.342 es 24 m^3.

Ejemplo 3:

Los estudiantes de séptimo grado montaron una pecera en el laboratorio de ciencias (fig. 2.344 a), cuyas dimensiones son: 1,0 m de largo, por 20 cm de ancho, por 50 cm de altura. ¿Cuántos cubos de agua de 10 L, como el de la figura 2.344 b, se necesitan para llenar la pecera con el nivel del agua a una altura de 30 cm?

a)

b)

Fig. 2.344

Solución:

Primero debemos expresar todos los datos en la misma unidad de longitud, en este caso seleccionamos el centímetro, porque la mayor parte de estos está expresada en centímetro, luego debemos convertir 1,0 m a centímetro: 1,0 m = 100 cm.

Otro aspecto importante es desechar los datos innecesarios. En este sentido debemos diferenciar: ***volumen de la pecera*** y *volumen del agua que contiene* y en este problema se debe calcular el volumen del agua que contiene, por lo cual es *innecesario el dato de la altura de la pecera* igual a 50 cm.

Como la pecera tiene forma de ortoedro, el volumen de agua adquiere también esta forma, por las propiedades físicas de las sustancias líquidas. Por tanto, el volumen de agua se calcula a partir de la ecuación: $V = a \cdot b \cdot c$, luego:

$V = 30 \cdot 20 \cdot 100 = 60\,000$ cm^3, pero para determinar la cantidad de cubos de 10 L que se necesitan, se requiere expresar en litro el volumen de agua calculada y para esto, debemos convertir el volumen ya calculado en cm^3, ahora en dm^3 porque sabemos que: 1 L = 1 dm^3.

Para convertir 60 000 cm^3 en dm^3 dividimos: 60 000 : 1 000 = 60 dm^3. Ahora solamente queda dividir por diez esta cantidad, para saber cuántos cubos de 10 L se necesitan para llenar la pecera:

60 : 10 = 6, luego se necesitan seis cubos.

Respuesta: La cantidad de cubos de 10 L que se necesitan, para llenar la pecera hasta una altura de 30 cm, es seis cubos de agua.

Otra forma de medir volúmenes

En la figura 2.345 hay dos cubos que tienen igual masa, 1 kg, pero sus dimensiones y el material por el que están compuestos son diferentes, uno es de oro y el otro, de plata.

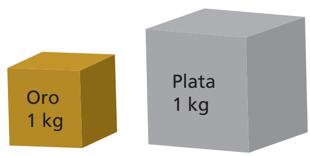


Fig. 2.345

Si se sumerge un cuerpo cualquiera en un recipiente lleno de agua, se derramará parte de esta, en dependencia de su volumen.

Así, la cantidad de agua derramada por el cubo de oro no es igual a la derramada por el cubo de plata, porque, aunque los cubos tienen la misma masa, sus volúmenes son diferentes (fig. 2.346).

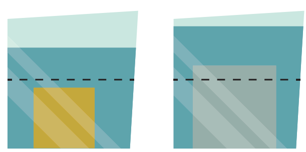


Fig. 2.346

El cubo de oro desplaza 64 cm^3 de agua y el cubo de plata 100 cm^3. La cantidad de agua derramada coincide con el volumen del cubo.

De la historia

Esta ingeniosa forma de calcular volúmenes fue utilizada por primera vez hace más de 2 000 años por el sabio griego Arquímedes de Siracusa en un episodio muy famoso.

En el siglo III a. n. e. Hierón, rey de Siracusa, entregó a un orfebre 1 kg de oro para que le hiciera una corona. Pasado un tiempo el rey recibió una maravillosa corona que pesaba exactamente un 1 kg. Pero no fiándose de que estuviera hecha solo de oro le preguntó a su amigo Arquímedes, cómo descubrir el posible fraude sin fundir la corona y así no estropear tan bello trabajo.

Arquímedes estaba dándole vueltas al problema, cuando entró en el baño público y observó que a medida que su cuerpo se sumergía en la bañera se derramaba más cantidad de agua.

Pensó entonces que el volumen de agua derramada depende del cuerpo introducido en el agua. Entusiasmado, salió del baño y, desnudo, corrió a su casa gritando ¡EUREKA, EUREKA!, que quiere decir: ¡lo encontré, lo encontré!

Llegado a su casa, hizo las mediciones oportunas y pudo razonar de la forma siguiente (fig. 2.347):

"Si la corona estuviera hecha con 1 kg de oro, su volumen sería 64 cm^3 y si fuera de 1 kg de plata, su volumen sería 100 cm^3. Como la corona tiene un volumen intermedio, esto quiere decir que está hecha de oro y de plata".

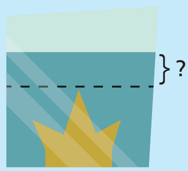


Fig. 2.347

Arquímedes descubrió de esa forma que el orfebre cometió un fraude.

Ejercicios

(epígrafe 2.6.2)

1. Selecciona la unidad de medida correcta en cada una de las situaciones siguientes:

1.1 La cantidad de agua que hay depositada en una cisterna.

a) ___ cm^3 b) ___ m^3 c) ___ L d) ___ ninguna de estas.

1.2 La capacidad de un recipiente plástico que se usa para envasar pintura.

a) ___ L b) ___ cm^3 c) ___ m^3 d) ___ ninguna de estas.

1.3 La cantidad de medicamento que contiene una ampolleta para inyecciones.

a) ___ mL b) ___ cm^3 c) ___ m^3 d) ___ ninguna de estas.

2. En la figura 2.348, *ABCD* cuadrado, *E* es el punto medio de $\overline{DC}$, $\overline{AB}$ = 6,0 cm.

a) Halla el perímetro del cuadrado.

b) Determina el área del trapecio *ABCE*.

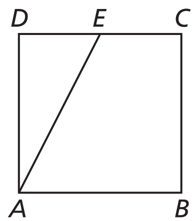


Fig. 2.348

3. En la figura 2.349, *ABCF* cuadrilátero y *ABE* triángulo isósceles de base $\overline{AB}$, $\overline{FC} \parallel \overline{AB}$; $\overline{AC}$ bisectriz del $\measuredangle A$; $\overline{AB} \perp \overline{BC}$; $\measuredangle ACF = 37°$.

a) Calcula la amplitud de los ángulos interiores del triángulo *ABE*.

b) Clasifica el cuadrilátero *ABCF* y calcula su área si se sabe que $\overline{AB}$ = 10 cm; $\overline{BC}$ = 7,5 cm; $\overline{FC}$ = 78 mm

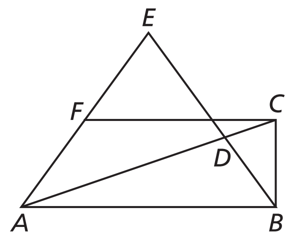


Fig. 2.349

4. En el trapecio *MNLP* que se muestra en la figura 2.350 $\overline{NL} \perp \overline{MN}$ y $\overline{NL} \perp \overline{PL}$. ¿Cuál es el área del trapecio *MNLP*? Señala la respuesta correcta.

a) 26 m^2 b) 27 m^2 c) 33 m^2 d) 84 m^2

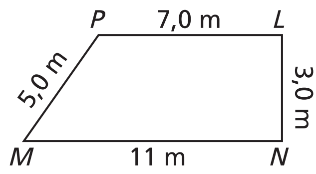


Fig. 2.350

5. ¿Cuál es el área en centímetro cuadrado de la figura 2.351? Los ángulos que se señalan son rectos. Argumenta los resultados según el tipo de figura.

a) 66 cm^2 b) 69 cm^2 c) 81 cm^2 d) 96 cm^2

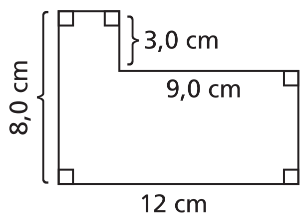


Fig. 2.351

6. Encierra en un círculo cuál de las medidas dadas corresponde al volumen de agua de una piscina olímpica.[13]

1	2	3	4	5
$0{,}37 \cdot 10^3$ m^3	$37 \cdot 10^3$ m^3	$3{,}7 \cdot 10^3$ m^3	$3{,}7 \cdot 10^3$ km^3	$0{,}37 \cdot 10^3$ km^3

7. La figura 2.352 muestra un triángulo *ABE* dentro de un cuadrado *ABCD*, de modo que $E \in \overline{CD}$. Según las longitudes dadas, ¿cuánto mide el área del triángulo?

a) 36 cm^2 b) 18 cm^2

c) No se puede calcular por falta de datos.

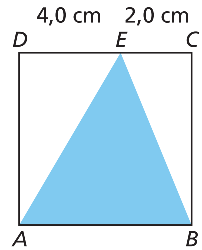


Fig. 2.352

8. En la figura 2.353 se tiene un cuadrado *ABCD*, con $\overline{AB} = 4{,}0$ cm. Si *E, F, G y H* son los puntos medios de sus lados.

El área sombreada es:

a) 2 % del área del cuadrado *ABCD*.

b) 12,5 % del área del cuadrado *ABCD*.

c) 25 % del área del cuadrado *ABCD*.

d) 50 % del área del cuadrado *ABCD*.

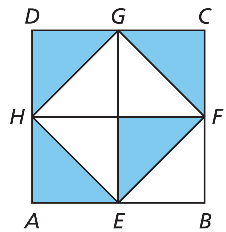


Fig. 2.353

9. En el cuadrado *ABCD* de la figura 2.354, *E, F, G* y *H* son puntos medios de sus lados. Si $\overline{AB} = 4{,}0$ cm, entonces el área sombreada es:

a) 10 cm^2 b) 6,0 cm^2 c) $\frac{3}{8}$ cm^2 d) 6,0 dm^2

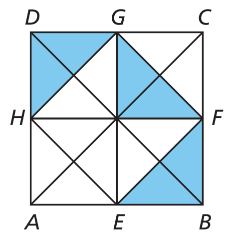


Fig. 2.354

10. La figura 2.355 muestra el rectángulo sombreado *MBED* contenido en el paralelogramo *ABCD*, de modo que: $E \in \overline{CD}$ y $M \in \overline{AB}$. ¿Cuál es el área del rectángulo sombreado?

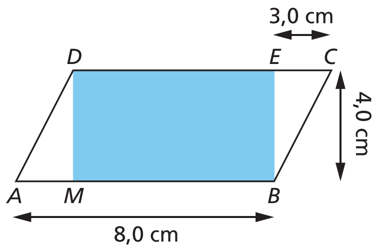


Fig. 2.355

[13] Argelia González Portales: Tesis de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas, Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona, La Habana, 2011, Ejemplo 1, Taller 5, p. 40.

11. En la figura 2.356 se muestran dos rectángulos iguales *ABCD* y *EFGH*, *M* y *N* son los puntos medios de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente. Si se sabe que el área sombreada es igual a 42 cm², selecciona la afirmación correcta:

a) El área del exágono *AEHMCD* es igual a 126 cm².
b) El área del exágono *AEHMCD* es igual a 147 cm².
c) El área del exágono *AEHMCD* es igual a 168 cm².
d) No se puede calcular el área del exágono *AEHMCD* por falta de datos.

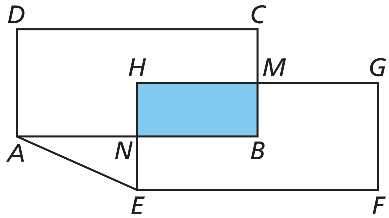


Fig. 2.356

12. Si en una sala rectangular de 6,5 m de largo y 40 dm de ancho se coloca una alfombra cuadrada de 2,0 m de lado.
a) Circula la respuesta correcta.
La superficie de la sala que no está cubierta por la alfombra es de:
6,5 m² 256 m² 22 m² No se puede calcular.
b) Calcula su volumen, si el local de esta sala tiene 3,0 m de altura.

13.* Alberto trajo una lata de pintura de vinil para pintar las paredes de su aula, que tiene las dimensiones que se indican en la figura 2.357.[14] En la etiqueta de la lata dice: Contiene: 4 L rendimiento: ≈ 10 m²/L. Agregar 20 % de agua.

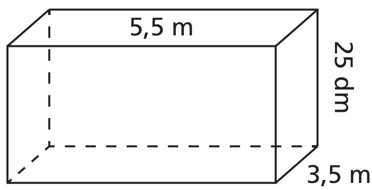


Fig. 2.357

a) Calcula el volumen del aula.
b) Si el aula tiene una ventana que abarca una superficie de 4,6 m², ¿alcanzará esa lata de pintura para dar una mano a las paredes del aula?

[14] Argelia González Portales: Tesis de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas, Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona, La Habana, 2011, Ejercicio 1, Hoja de trabajo 6, p. 67.

Ejercicios del capítulo

1. Encuentra todos los triángulos y cuadriláteros que aparecen en la figura 2.358.

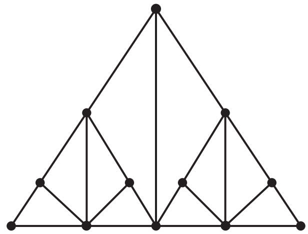


Fig. 2.358

2. La figura 2.359 muestra el rectángulo *ABCD* donde $\overline{AM}$ y $\overline{BM}$ son las bisectrices de los ángulos $\sphericalangle DAB$ y $\sphericalangle CBA$ respectivamente.

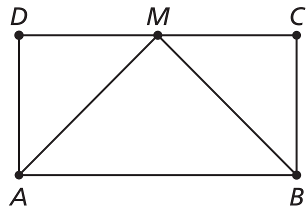


Fig. 2.359

a) Si $\overline{AM}$ y $\overline{BM}$ son las bisectrices de los ángulos $\sphericalangle DAB$ y $\sphericalangle CBA$, cómo se clasifican los triángulos *ADM*, *MCB* y *AMB*.
b) Nombra los pares de ángulos que tengan igual amplitud.
c) Prolonga el segmento $\overline{AM}$ y localiza otros pares de ángulos iguales.
d) Para los segmentos $\overline{AM}$ y $\overline{BM}$ identifica los pares de ángulos cuyas amplitudes suman 180°.
e) Identifica los triángulos que se forman en la figura y determina cuáles de ellos son isósceles. Justifica tu respuesta.

3. En la figura 2.360, $\overline{BF} \parallel \overline{CE}$, $\sphericalangle ABG = 114°$, *CH* es la bisectriz del $\sphericalangle ECD$. *A, B, C y D* puntos alineados. Halla la amplitud de los ángulos $\sphericalangle ABF$ y $\sphericalangle HCD$.

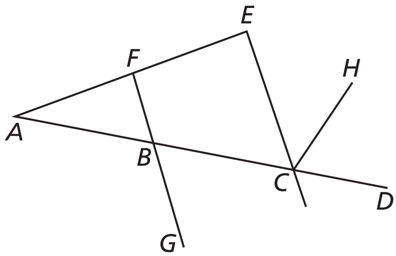


Fig. 2.360

4. Explica por qué los ángulos 1, 2 y 3 representados en la figura 2.361, suman 180°.

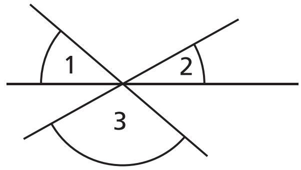


Fig. 2.361

5*. Fundamenta las afirmaciones siguientes:

a) Todo triángulo isósceles con un ángulo de 60° es equilátero.

b) La mediana de la hipotenusa en un triángulo rectángulo es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa.

c) La suma de las longitudes de las alturas en un triángulo es menor que la suma de sus lados.

6. Clasifica en verdaderas o falsas las proposiciones siguientes. Fundamenta las proposiciones que sean falsas:

a) En todo triángulo isósceles los ángulos base son desiguales.

b) Todo triángulo equilátero es obtusángulo.

c) La mediana de un triángulo es el segmento trazado desde un vértice al punto medio del lado opuesto a ese vértice.

d) En todo triángulo isósceles las alturas, medianas y mediatrices relativas a sus lados coinciden.

e) La cuerda mayor de una circunferencia es su diámetro.

f) El área de un cuadrado se puede determinar como: la cuarta parte de su perímetro elevado al cuadrado $A = \left(\frac{1}{4}P\right)^2$.

g) La longitud del diámetro de una circunferencia es la mitad de la de su radio.

h) Si la distancia del centro de una circunferencia a una recta es igual a la longitud de su radio, la recta es tangente a la circunferencia.

i) Todo cuadrilátero con un par de lados opuestos paralelos es un paralelogramo.

j) Todo rombo es un cuadrado.

k) En todo triángulo rectángulo la hipotenusa es mayor que la suma de los catetos.

l) Desde un punto exterior a la circunferencia se pueden trazar infinitas tangentes a la circunferencia.

m) Las circunferencias secantes se cortan en dos puntos.

7. En la figura 2.362:

- *ABCD* rectángulo,
- ΔGBH isósceles de base $\overline{HG}$,
- $\overline{EF} \parallel \overline{HG}$, $\sphericalangle DEF = 20°$.

Halla la amplitud del ángulo *GBH*.

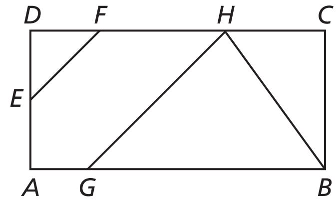


Fig. 2.362

8. En la figura 2.363, *MPRS* es un cuadrado, *N* punto medio de $\overline{MP}$ y *Q* punto medio de $\overline{PR}$. Selecciona la respuesta correcta.

El área de *NPQS* es igual a:

a) ___ La tercera parte del área del cuadrado *MPRS*.

b) ___ El 60 % del área del cuadrado *MPRS*.

c) ___ La suma de las áreas de los triángulos *MNS* y *QRS*.

d) ___ No se puede determinar por falta de datos.

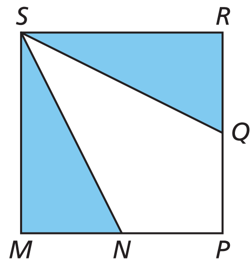


Fig. 2.363

9. Elio tiene que construir una pieza rectangular de cartón de 48 cm de largo y 37 cm de ancho.

a) Determina el perímetro en metro de la pieza que construirá Elio.

b) Elio debe cortar en cuadraditos de 5 cm de lado la pieza, ¿cuántos cuadraditos podrá cortar?

10. Para un trabajo de Artes Plásticas, Isabel y Rolando deben dibujar en una cartulina un cuadrado y dividirlo en 16 cuadraditos iguales y colorear con pintura algunos de manera que se asemeje a un mosaico para el piso. Analizando las figuras obtenidas (fig. 2.364), ¿cuál de los dos empleó más pintura para realizar su trabajo?

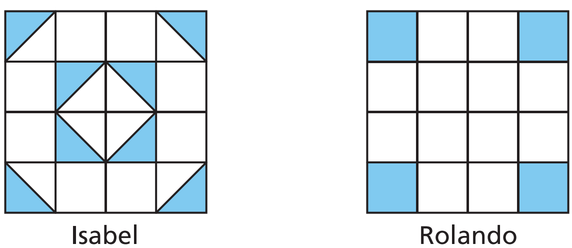


Fig. 2.364

11. En un campo se han cosechado 192 q de papas. El campo es triangular, tiene un lado de 160,0 m de longitud y su vértice opuesto está a 120,0 m de distancia de ese lado:

a) Realiza el esbozo del campo de papas.

b) Calcula el área de este campo.

12. Rota un ángulo de 38° con centro en su vértice y con un ángulo de rotación de 180°. ¿Qué compruebas?

13. Traza un rectángulo *ABCD* de 4,2 cm de largo y 2,3 cm de ancho:

a) Refleja este rectángulo en la recta *BC*.

b) Traslada 5,0 cm el rectángulo con sentido de dirección $\overrightarrow{DA}$.

c) Rota el rectángulo *ABCD* alrededor del punto *B* con un ángulo de 120°.

d) Compara las longitudes de los segmentos y las amplitudes de los ángulos de la figura original con las de la figura final.

14. Dibuja un triángulo equilátero cualquiera *ABC*. Traza la perpendicular desde el vértice *C* hasta el lado *c*.

a) ¿Qué nombre recibe la recta notable que has trazado?

b) Marca un punto *D* cualquiera en esta recta notable, únelo con *A* y *C*. Expresa todo lo que sepas sobre el triángulo *ABD*. Fundamenta tus afirmaciones.

15. Dado un triángulo isósceles cualquiera, construye las rectas notables relativas a su lado base. Analiza la posición de estas rectas y elabora tus propias conclusiones.

a) ¿Qué sucedería con las rectas notables en un triángulo equilátero? Fundamenta tu respuesta.

16. En la figura 2.365, $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ y $\overline{OA} > \overline{OB}$. Prueba que $\sphericalangle BOM < \sphericalangle MOA$.

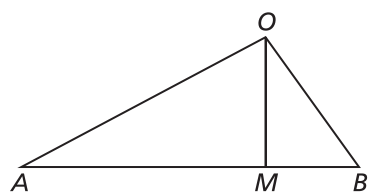


Fig. 2.365

17. El triángulo SRT de la figura 2.366 es equilátero y $\overline{TU}$ es su eje de simetría, S y R son puntos simétricos.
a) Calcula $\overline{TU}$ si se conoce que $\overline{SR} = 30$ cm.
b) Determina la amplitud de $\sphericalangle STU$.

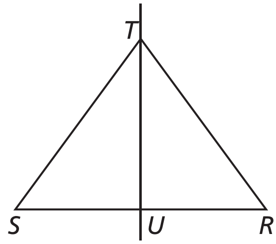


Fig. 2.366

18. Demuestra que si la bisectriz de un ángulo exterior de un triángulo es paralela a uno de los lados, entonces dicho triángulo es isósceles.

19. Lorena, Rafael y Milagros deben abrir un hoyo en la tierra para sembrar varios arbustos como contribución a la forestación de su localidad. Las dimensiones del hoyo deberán ser: 8,1 m de largo, 5,4 m de ancho y 1,8 m de profundidad. ¿Qué cantidad de tierra deben extraer estos estudiantes para sembrar los arbustos?

20. En la figura 2.367 se indican las amplitudes de tres ángulos. Prueba que: $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ y $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

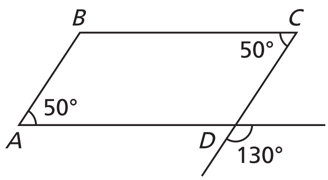


Fig. 2.367

21. En la figura 2.368, $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$ y triángulo ADC es isósceles de base $\overline{AC}$. Prueba que triángulo ABC es también isósceles.

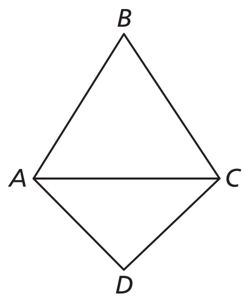


Fig. 2.368

22. Dado un triángulo ABC, en el cual $\sphericalangle C$ es recto y $CD \perp AB$. Prueba que $\sphericalangle A = \sphericalangle BCD$.

Para la autoevaluación

Reflexiona sobre lo aprendido

1. ¿Cuáles son las figuras planas que conoces?

2. ¿Qué características tienen los diferentes ángulos?

3. ¿Sabes clasificar los triángulos según las amplitudes de sus ángulos y las longitudes de los lados?

4. ¿Sabes construir rectas paralelas, perpendiculares, la mediatriz de un segmento, la bisectriz de un ángulo?

5. ¿Qué propiedades cumplen los diferentes movimientos del plano?

6. ¿Qué nombre y propiedad cumplen los ángulos que determinan dos rectas paralelas cortadas por una secante?

7. Dados cuatro puntos distribuidos en dos semiplanos opuestos, ¿de cuántas formas los puedo representar?

Ponte a prueba

1. Dos rectas r_1 y r_2 se cortan en el punto S formando un ángulo recto. Estas a su vez son cortadas por dos rectas paralelas p y q, de modo que:

- La intersección de p con r_1 es A y con r_2 es C.
- La intersección de q con r_1 es B y con r_2 es D.

a) Esboza la situación geométrica de este problema.

b) Señala una pareja de ángulos correspondientes que sean iguales. Justifica tu selección.

c) Si se cumple que $\overline{SA} = 6{,}0$ cm, $\overline{SA} = 8{,}0$ cm y el área del triángulo ASC es el 36 % del área del triángulo SBD. Calcula a partir de estas condiciones:

- La longitud de AC,
- El área del triángulo ASC, del triángulo SBD, del cuadrilátero $ABDC$.
- Clasifica el cuadrilátero $ABDC$. Justifica tu respuesta.

2. Observa detenidamente la figura 2.369 en la cual se representa un cuadrado que se ha dividido en cuadraditos iguales, dentro del cual se han dibujado los triángulos 1 y 2. Estima el área de estos dos triángulos y selecciona cuál de las afirmaciones siguientes es verdadera.

a) El área del triángulo uno es mayor que el área del triángulo dos.
b) El área del triángulo uno es menor que el área del triángulo dos.
c) El área del triángulo uno es igual al área del triángulo dos.
d) No es posible determinar la relación entre estas áreas.

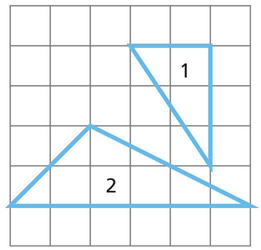


Fig. 2.369

3. La amplitud de un ángulo interior de un triángulo es 16° y la diferencia entre las amplitudes de los otros dos ángulos es 28°.
a) Halla las amplitudes de los ángulos interiores de dicho triángulo.
b) Clasifica al triángulo, de acuerdo con las amplitudes de sus ángulos.
c) Calcula la amplitud del ángulo exterior que tiene un vértice común con el ángulo interior de 16°.

4. En la figura 2.370 aparece la representación de un piso cubierto de mosaicos iguales y se destacan en este, los mosaicos *M, A, B* y *C*. ¿Qué movimiento del plano habrá que hacer para transformar el mosaico *M* en el mosaico *A*? ¿Qué movimiento habrá que hacer para transformar el mosaico *M* en el mosaico *B*?

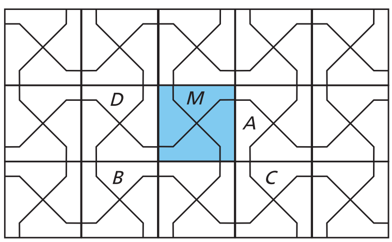


Fig. 2.370

5. Traza en tu libreta tres puntos no alineados y construye una circunferencia de radio igual a 3,0 cm que contenga a estos tres puntos. Justifica el procedimiento que utilices.
a)Traza el diámetro, una cuerda y un punto simétrico al diámetro.

CAPÍTULO 3

Trabajo con variables

Hasta ahora hemos estudiado un nuevo conjunto numérico y ampliado nuestros conocimientos sobre la geometría. Mis compañeros de grupo y yo estamos contentos; hemos aprendido, las orientaciones de mi profesora, incluidas sus explicaciones, siempre han sido muy valiosas. Ella nos llena de optimismo cuando hace falta, y eso siempre nos hace muy felices.

Casi al terminar el estudio de la geometría, ella dividió el grupo en tres equipos y a cada uno le asignó una tarea (tabla 3.1), todas relacionadas con el álgebra.

Tabla 3.1

Equipo	Tarea
1	Busca en tus libretas de Matemática de sexto grado ejemplos del uso de las variables para representar diversas situaciones.
2	Investiga en tus libretas de Matemática de séptimo grado ejemplos de situaciones que puedas representar utilizando variables.
3	Indaga en libros de Matemática y otras publicaciones el uso de las variables.

Yo integré el equipo tres y estos fueron algunos de mis resultados:

1) El opuesto de un número racional a es $-a$ ($a \neq 0$).

2) El valor absoluto o módulo de un número racional negativo b es $-b$.

3) La media aritmética de cinco números x, w, z, t, v es:

$$\frac{x + w + z + t + v}{5}$$

4) $\alpha + \beta = 180°$ (fig. 3.1)

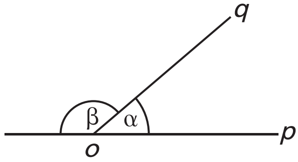


Fig. 3.1

5) En la figura 3.2 *ABCD* es un trapecio de bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, $\overline{CE}$ altura. La ecuación para hallar el área de ese trapecio es $A_{ABCD} = \dfrac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot \overline{CE}$.

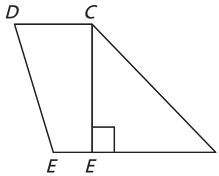


Fig. 3.2

De la historia

El uso de símbolos para simplificar el lenguaje es de gran importancia en las matemáticas. El álgebra es la parte de las matemáticas, en que las operaciones aritméticas son generalizadas empleando números, letras y signos.

La historia del álgebra comenzó en el antiguo Egipto y Babilonia, aproximadamente dos mil años antes de nuestra era, donde fueron capaces de resolver distintos tipos de ecuaciones, como las de la forma $ax = b$, *con* $a \neq 0$, *ya estudiada por ti.*

Fig. 3.3

Los árabes introdujeron en Occidente la numeración y el álgebra. Entre los matemáticos árabes sobresale Al Khuwarizmi (fig. 3.3*) (siglo* IX*) autor de la obra que trata sobre las operaciones para simplificar las ecuaciones. Una de ellas* "al – jabar" *que significa "reducir", es el origen de la palabra álgebra y fue empleada por primera vez por Al Khuwarizmi, su nombre dio origen a la palabra algoritmo. En sus trabajos no utilizó el simbolismo convencional que conocemos hoy, pero hizo referencia a las operaciones con expresiones, elementos de un cálculo algebraico y trató la resolución de ecuaciones.*

La obra más antigua que se conserva sobre álgebra es la de Diofanto de Alejandría, matemático griego del que se conoce parte de su obra y de quien se tiene escasa información sobre su vida: solo se sabe que nació a finales del siglo II *n.e. en Alejandría.*

3.1 Traducción de situaciones de la vida al lenguaje algebraico y viceversa

Los ejemplos anteriores nos confirman, además, que, como bien lo indica su nombre, una **variable** es aquello que varía o puede variar. Se trata de algo *inestable, inconstante y mudable*. En otras palabras, una variable es un *símbolo* que representa un elemento no especificado de un conjunto dado. Este *conjunto es denominado conjunto universal de la variable o dominio de la variable*, y cada elemento del conjunto es un *valor* posible de la variable. Para representar las variables se acostumbra a utilizar letras minúsculas.

De la historia

En la imagen de la figura 3.4 tenemos un manuscrito griego del siglo XII, *que muestra una de las páginas de* Los Elementos *de Euclides, observa que hemos señalado en él un cuadrado en el que se observa que se utilizaba la misma expresión para indicar la longitud de cada lado. ¡Interesante verdad!*

Fig. 3.4

Muchas situaciones de la vida diaria puedes escribirlas utilizando variables. En este caso decimos que realizamos una traducción del **lenguaje común al lenguaje algebraico.** También las expresiones donde aparecen variables pueden leerse o escribirse con el uso de la lengua materna, en este caso traducimos del **lenguaje algebraico al lenguaje común.**

Para realizar la traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico debes conocer que existen palabras de uso frecuente que tienen un significado matemático y pueden ser expresadas en el código del lenguaje de las variables, es decir, haciendo uso de las variables, signos y números. A estos vocablos acostumbramos a llamarlos palabras ***claves.***

Conoces muchas de estas palabras claves, como son: *aumentado en, disminuido en, la misma cantidad que, en total, excede en, más que, menos que, número de veces, la enésima parte, números consecutivos, par, impar, antecesor, sucesor,* entre otras.

Es importante que tengas en cuenta que para realizar correctamente la traducción del lenguaje común al algebraico debes comprender e interpretar el texto y buscar en el diccionario aquellas palabras cuyo significado desconozcas.

Por ejemplo, la palabra clave **excede** significa que aventaja, sobra, supera, rebasa, sobrepasa, que se pasa; luego, esta palabra se utiliza para establecer una relación entre dos números: un número mayor y otro menor. En situaciones en las que aparezca esta palabra clave, debes determinar ante todo cuál es el mayor y cuál es el menor de los números. Entonces, cuando leas en un texto "*a* excede en ocho a *b*", significa que "*a* supera en ocho a *b*", que "*a* sobrepasa en ocho a *b*", lo que quiere decir que *a* es el mayor y *b*, el menor de los números.

Ejemplo 1:

Representa utilizando variables:

a) El duplo de un número.

b) La cantidad de atletas participantes en los juegos escolares nacionales disminuida en cinco.

c) La diferencia de los precios de dos materiales de construcción para los damnificados.

d) La mitad de la producción de una empresa sideromecánica, aumentada en su triplo.

e) El 50 % del área del terreno de un proyecto de desarrollo local.

f) La mitad de la cantidad de operaciones oftalmológicas realizadas en el convenio "Operación Milagro" aumentado en tres.

g) La suma de dos números enteros consecutivos.

h) La edad de Layzel excede en siete años a la edad de Sulma.

Solución:

a) En esta situación la palabra clave es duplo, que es un pronombre numeral multiplicativo, que significa que el número se multiplica por dos. Luego, si designas por x al número, entonces la representación es $2x$.

b) Aquí la palabra clave es disminuido, que tiene un sentido matemático, pues significa reducir o sustraer en una cantidad determinada. Si designas por m la cantidad de atletas participantes en los juegos escolares nacionales, escribes $m - 5$.

c) Diferencia es el resultado de la operación matemática sustracción. Si designas por a y b los precios de dos materiales de construcción para los damnificados, la situación se representa por: $a - b$.

d) En este caso hay dos palabras claves: mitad, que significa dividir por dos y triplo, que significa multiplicar por tres. Si le asignas a la variable m la producción de una empresa sideromecánica, la representación es: $\frac{m}{2} + 3m$ o $\frac{1}{2}m + 3m$.

e) En esta situación tienes que utilizar el significado del tanto por ciento. Como conoces, el 50 % de un número equivale a calcular la mitad del número. Si la variable a tiene como significado el área del terreno de un proyecto de desarrollo local, esta situación se representa por: $\frac{a}{2}$ o $\frac{1}{2}a$.

f) Si designas por p la cantidad de operaciones oftalmológicas realizadas en el convenio "Operación Milagro", entonces esta situación se representa por: $\frac{1}{2}(p + 3)$.

g) Debes tener en cuenta cuándo dos números enteros son consecutivos. Sabes que el conjunto de los números enteros no es denso porque entre dos números enteros consecutivos no existe ningún otro número entero. Los números ocho y nueve son consecutivos, al igual que (– 4) y (– 3). Observa que los números consecutivos se diferencian en una unidad.

Si designamos por x un número entero, entonces x y $x+1$ son consecutivos y su suma la representamos por $x + (x + 1)$. También $x - 1$ y x son consecutivos, luego puedes representar esta situación por $(x - 1) + x$.

h) Observa que como la edad de Layzel excede en siete años a la edad de Sulma, Layzel es mayor que Sulma y se llevan siete años; luego, la diferencia de sus edades es siete, por lo que, si designas por x la edad de Layzel y por y la edad de Sulma, esta situación de la vida la puedes expresar como $x - y = 7$.

También la puedes escribir como $x - 7 = y$, porque Layzel es mayor que Sulma y tiene siete años más que ella; luego, la edad de Sulma (y) es igual a la edad de Layzel (x) menos siete años.

O puedes representarla como $y + 7 = x$, porque la edad de Layzel es igual a la de Sulma más siete años.

Observa que la diferencia entre el número mayor y el menor es igual al número que excede, que si al número mayor se le sustrae el número que excede, se obtiene el menor número y que si al menor número se le adiciona el número que excede, se obtiene el mayor.

Muchas de estas palabras claves son muy utilizadas en la vida diaria, por ejemplo, en cualquiera de los formatos de la prensa se muestra información en las que aparecen. A continuación, algunos ejemplos en los que te será fácil realizar la traducción correspondiente del lenguaje común al algebraico:

Reparación de ferrocarril duplica traslado de cargas. Fuente: Órgano de prensa *Granma*, 9 de mayo de 2012	La compañía japonesa Toyota, principal fabricante de vehículos en el país, experimentó en el año 2011 una caída del 30,5 por ciento en sus beneficios. Fuente: Semanario *Orbe*, 12 al 18 de mayo de 2012	La tasa de desempleo en Grecia durante el mes de marzo alcanzó el 21,9 % de la población activa. El cómputo oficial muestra que en un año esta tasa aumentó en un 6,2 %. Fuente: Órgano de prensa *Granma*, 8 de junio de 2012

Al realizar traducciones del lenguaje común al lenguaje algebraico se debe:

- Leer el texto tantas veces como sea necesario.
- Identificar las palabras claves.
- Buscar en el diccionario aquellas que no conozcas su significado.
- Escribir el significado que le asignarás a las variables que emplearás en la traducción.

Igualmente debes aprender a realizar traducciones del lenguaje de las variables al lenguaje común.

Ejemplo 2:

Traduce al lenguaje común las expresiones algebraicas siguientes:

a) $\frac{2}{5}p$ b) $2a + 2b$ c) $\frac{m+n}{2}$

Solución:

a)

- Las dos quintas partes de un número. La variable p significa un número.
- El 40 % de la matrícula de una secundaria básica participa en las Olimpiadas Populares de Matemática. La variable p significa la matrícula de la secundaria básica. Nota que la fracción $\frac{2}{5}$ se ha expresado como tanto por ciento.
- Las dos quintas partes de los profesionales de la salud son integrantes de la Brigada Henry Reeve especializada en situaciones de desastres. La variable p significa la cantidad de integrantes de la Brigada Henry Reeve.

b)

- La suma de los duplos de dos números. Las variables a y b son dos números cualesquiera.
- El perímetro de un paralelogramo. Las variables a y b representan la longitud de cada uno de los lados del paralelogramo.
- El duplo de la cantidad de tarjetas amarillas más el doble de la cantidad de tarjetas rojas mostradas por un árbitro en un partido de fútbol. La variable a representa la cantidad de tarjetas amarillas y b la cantidad de tarjetas rojas mostradas por un árbitro en el partido de fútbol.

c)

- El promedio de las notas de Pedro en las asignaturas de Matemática y Español. Las variables m y n representan las notas obtenidas por él, en estas asignaturas.
- La longitud de la paralela media de un trapecio. Las variables m y n son las longitudes de las bases del trapecio.
- El 50 % de la cantidad de desechos de cristal y plástico recogidos por los pioneros en una playa. Si designas por m la cantidad de desechos de cristal y por n la cantidad de desechos de plástico recogidos por los pioneros.

Cuando traduces del lenguaje común al algebraico utilizas números y variables relacionadas con las operaciones que conoces.

Una variable o combinaciones de variables y números por una o varias operaciones suelen llamarse **expresiones algebraicas.** Luego,

p; $-7t$; $2x + 3$; $a^2b - 2b$; $\frac{2}{3}m^5 + 0{,}9\,m^3 - 0{,}25m^2$; $r - 3n^2m$; $\frac{2xy}{3z}$; $\frac{1}{3}$ $\sqrt{x+5}$

son ejemplos de expresiones algebraicas.

3.1.1 Monomio. Valor numérico. Aplicaciones

En la secundaria básica de Amanda todos los estudiantes y profesores se han empeñado en perfeccionar el uso de la Lengua Materna, realizando diferentes actividades para eliminar las faltas de ortografía. Su profesora de Matemática le explicó que guiándose por la expresión algebraica $0{,}25x$, donde x es la cantidad de errores cometidos, puede conocer la cantidad de puntos que pierde en una evaluación escrita por cada error ortográfico. Amanda reconoció que en esta expresión aparece un número multiplicado por una variable y se percató una vez más del uso de las variables.

Definición de monomio:

Se denomina **monomio** a un número, una variable o cualquier combinación de números y variables relacionados por las operaciones de multiplicación y potenciación, en la que las variables solo están elevadas a un exponente natural.

Son ejemplos de monomios:

-2 $\quad m^5$ $\quad p$ $\quad -7t$ $\quad 4n$ $\quad \frac{2}{3}y^3$ $\quad 0{,}7$ $\quad 1{,}2a^2$ $\quad b$ $\quad 0{,}25x$.

Atención

Las expresiones algebraicas siguientes: $5 - 2x$; $\frac{a+b}{2}$; $3(x-4)$; $\sqrt{4x-1}$; $3x^{-2}y$; $\frac{7mn}{4p}$ no son monomios, pues los números y variables en estos casos están relacionados con otras operaciones que no son las que aparecen en la definición. En las dos últimas expresiones algebraicas aparece una variable en el denominador

y en la expresión $3x^{-2}y$ la variable x está elevada a un exponente que no es un número natural; luego, $3x^{-2}y = 3\left(\frac{1}{x}\right)^2 y = \frac{3y}{t^2}$. A las expresiones algebraicas en las que las variables aparecen en el denominador se les denomina **fracciones algebraicas.**

Atención

Un monomio está formado por:

- un número, que recibe el nombre de **coeficiente;**
- las variables, que es la **parte literal** del monomio.

A los monomios y fracciones algebraicas también se acostumbra a denominarlos **términos**.

Ejemplo 1:

En cada uno de los monomios siguientes determina el coeficiente y la parte literal.

a) $\frac{4}{7}$ b) $0{,}25x$ c) $2pq$ d) $-5x^2y^3$ e) $-m^2n$ f) $\frac{n}{9}$ g) $2^{-3}abc$

Solución:

a) Su coeficiente es $\frac{4}{7}$ y no tiene parte literal.

b) El coeficiente es 0,25 y la parte literal es x.

c) El coeficiente es 2 y la parte literal es pq.

d) Coeficiente: – 5, parte literal: x^2y^3.

e) Coeficiente: – 1, parte literal: m^2n.

f) Coeficiente: $\frac{1}{9}$, parte literal: n.

Atención

El cociente $\frac{n}{9}$ también lo puedes expresar como $\frac{1}{9}$ n.

g) Coeficiente: $2^{-3} = \frac{1}{8}$, parte literal: abc.

Aplica tus conocimientos

Si Amanda quiere saber la cantidad de puntos perdidos por cada error ortográfico cometido en el trabajo práctico de la asignatura Geografía, debe contar la cantidad de errores cometidos. La profesora le informa que tuvo cinco errores, ¿cuántos puntos perdió Amanda por los errores ortográficos?

Para saber cuántos puntos perdió Amanda por ortografía en el trabajo práctico tiene que sustituir la variable x por el número cinco en la expresión algebraica $0{,}25x$ y efectuar la operación indicada.

$0{,}25x = 0{,}25 \cdot 5 = 1{,}25$; luego, Amanda perdió un punto y veinticinco centésimas (ciento veinticinco centésimas) por errores ortográficos en el trabajo práctico de la asignatura Geografía.

Definición de valor numérico de un término:

Se denomina valor numérico de un término al número que se obtiene cuando se sustituyen las variables del término por números y se efectúan las operaciones indicadas.

Ejemplo 2:

Calcula, si es posible, el valor numérico en los términos siguientes:

a) $-4x$ para $x = -\frac{1}{4}$

b) $2y^2z^3$ para $y = 0{,}5$; $z = -1$

c) $-mn^2$ para $m = \frac{1}{3}$, $n = -3$

d) $\frac{x}{3z}$ para $x = 0{,}7$; $z = 0$

Solución:

a) Sustituyes x por $-\frac{1}{4}$ y efectúas la operación indicada para determinar el valor numérico del término:

$-4\left(-\frac{1}{4}\right) = 1$ (debes utilizar paréntesis al sustituir la variable porque el valor de x es negativo).

b) Cuando sustituyes los valores de cada variable obtienes:

$2 \cdot (0{,}5)^2 \cdot (-1)^3 = 2 \cdot 0{,}25 \cdot (-1) = -0{,}5$

c) $-\left(\frac{1}{3}\right) \cdot (-3)^2 = \frac{1}{3} \cdot 9 = -3$

d) Al sustituir las variables por su valor y efectuar las operaciones indicadas obtienes $\frac{0{,}7}{3 \cdot 0} = \frac{0{,}7}{0}$ el denominador se hace cero, luego no se puede determinar el valor numérico de este término.

Aplica tus conocimientos:

Conoces del capítulo anterior cómo determinar el área de figuras compuestas, por ejemplo, la figura 3.5 está compuesta por dos rectángulos iguales *ABCD* y *EFGH*, donde *M* y *N* son los puntos medios de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente. Si el área sombreada es igual a 42 cm², ¿qué expresión algebraica te permite calcular el área de la figura *ANEFGMCD*?

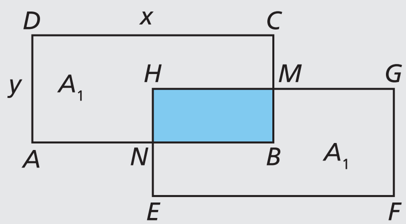


Fig. 3.5

Si $A_1 = A_{ABCD} = A_{EFGH}$ y $A_2 = A_{NBMH}$, entonces: $A_{ANEFGMCD} = A_1 + A_1 - A_2 = 2A_1 - A_2$.

Asignando a la variable x la longitud del lado $\overline{DC}$ y la longitud del lado $\overline{DA}$ por la variable y, entonces: $A_1 = xy$; luego, $A_{AEFGMCD} = 2xy - 42$.

El área de la figura 3.5 se ha expresado como la suma algebraica de dos monomios.

Definición de polinomio:

Se denomina polinomio a la suma algebraica de dos o más monomios.

Luego, la expresión algebraica $2xy - 42$ es un polinomio.

Son también polinomios las expresiones algebraicas siguientes:

$x^2 + 4x - 3$; $2ab + 2ah + 2bh$; $5x^5 - 4{,}5x^3 + 0{,}03x^2 - 1$; $2m^3 - m^2n + mn^2 - 5n^3$

Investiga y aprende

Anabel sueña tener una *masa ideal.* Ella conoce que la expresión algebraica $75t - 62{,}5$ permite hallarla para una estatura mayor que 150 cm, siendo t la estatura en centímetro. ¿Cómo puede Anabel saber si su masa es la ideal?

Para saber si la masa de una persona es la ideal, debes primeramente calcularla: sustituyes la variable t por la estatura en centímetro de la persona y efectúas las operaciones indicadas en la expresión algebraica $(75t - 62{,}5)$. El valor numérico que obtienes es la masa ideal de esa persona. Finalmente, comparas este valor con el valor de la masa de la persona obtenida con el instrumento de medición (balanza o báscula).

Recuerda que...

Para calcular el **valor numérico de un polinomio** se sustituyen las variables por números y se efectúan las operaciones indicadas, teniendo en cuenta el orden operacional.

Ejemplo 3:

Calcula el valor numérico de los polinomios siguientes para los valores que se asignan a las variables:

a) $0{,}75t - 62{,}5$ para $t = 167$

b) $-5x + 2y$ para $x = -2$; $y = 0{,}5$

c) $m^2n - \frac{1}{4}$ para $m = 1\frac{1}{2}$; $n = -1$

d) $2a^3 - 2b + 5$ para $a = -2$; $b = -\frac{3}{4}$

Solución:

a) Sustituyes la variable t por el valor indicado y calculas:

$0{,}75 \cdot 167 - 62{,}5 = 125{,}25 - 62{,}5 = 62{,}75$

b) Sustituyes las variables por su valor y calculas:

$-5(-2) + 2 \cdot 0{,}5 = 10 + 1 = 11$

c) $\left(1\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (-1)\frac{1}{4} = \frac{9}{4} \cdot (-1) - \frac{1}{4} = -\frac{9}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{10}{4}$

d) $2(-2)^3 - 2\left(-\frac{3}{4}\right) + 5 = 2(-8) - 2\left(-\frac{3}{4}\right) + 5 = -16 + \frac{3}{2} + 5 = -9{,}5$

Ejercicios

(epígrafe 3.1.1)

1. Determina en cada caso el coeficiente y la parte literal de los términos siguientes:

a) $2x$ b) $\frac{1}{3}ab$ c) $-0{,}7m^2$ d) $\frac{2}{5}p^3q^2$ e) $\frac{3x}{7}$

f) y^2z g) $-\frac{n}{2}$ h) $\frac{a^3b^2c}{5}$ i) -7 j) $\frac{1}{6}$

2. Escribe en cada inciso tres monomios que su coeficiente sea:
a) Un número natural y tiene una variable en su parte literal.
b) Un número entero negativo y tiene dos variables en su parte literal.
c) Uno y tiene una variable elevada al cubo en su parte literal.
d) Una fracción y no tiene parte literal.
e) Igual a cinco décimas y tiene dos variables en su parte literal, relacionadas por la operación de multiplicación.
f) Un número primo y su parte literal consta de tres variables elevadas a diferentes exponentes.

3. Representa mediante expresiones algebraicas las situaciones matemáticas siguientes:
a) El triplo de un número.
b) La tercera parte de un número.
c) Cinco veces un número.
d) El 35 % de un número.
e) Las dos terceras partes de un número.
f) La mitad de un número aumentada en cuatro.
g) El cuádruplo de un número, disminuido en ocho.
h) Un número que excede en seis a otro.
i) Un número disminuido en su octava parte.
j) Dos números naturales consecutivos.
k) Dos números enteros pares consecutivos.
l) Dos números naturales impares consecutivos.
m) La suma de un número natural y su antecesor.
n) El producto de un número natural y su sucesor.
ñ) El duplo de un número, disminuido en su mitad y aumentado en el triplo de otro número.
o) El 75 % de la mitad de un número.

4. En cada uno de los incisos siguientes selecciona, marcando con una X, la expresión algebraica correcta que refleja la situación planteada:
a) La expresión que representa dos unidades menos que x es:

___ $2x$ ___ $x - 2$ ___ $x + 2$ ___ $2 - x$ ___ x^2

b) El 25 % del doble de un número p se puede expresar como:

___ $50p$ ___ $25p$ ___ $\frac{1}{4}p$ ___ $\frac{1}{2}p$ ___ otra

c) Emilio tiene n cm de estatura y su papá tiene el doble de la estatura de su hijo aumentada en 6 cm. El padre de Emilio mide:

___ $2n$ cm ___ $(2n + 6)$ cm ___ n cm ___ $2(n + 6)$ cm

d) Alex y su primo Kevin coleccionan monedas. Alex tiene t monedas y su primo, tres veces la cantidad de monedas de Alex disminuida en dos. La cantidad de monedas del primo de Alex es:

___ $3(t - 2)$ ___ $3t$ ___ $\frac{t}{3} - 2$ ___ $3t - 2$

e) Los trabajadores de un centro turístico donaron este año a la sala pediátrica de un hospital 25 juguetes más que el año anterior. Si denotamos por la variable p la cantidad de juguetes donados por estos trabajadores del Turismo el año anterior, entonces la cantidad de juguetes aportados este año se expresa como:

___ $p + 25$ ___ $25 - p$ ___ $p - 25$ ___ $\frac{p}{25}$ ___ $25p$

5. Si denotamos por a la edad de Sergio, expresa algebraicamente las situaciones siguientes:
a) La edad que tendrá Sergio dentro de 15 años.
b) La edad que tenía Sergio el año pasado.
c) Los años que le faltan a Sergio para que se jubile a los 65 años.
d) La edad que tendrá Sergio cuando haya vivido otro tanto de lo vivido hasta ahora.

6. La tabla 3.2 muestra la longitud en kilómetro y la provincia donde se encuentran los ríos más importantes de nuestro país.

Tabla 3.2

Río	Longitud (km)	Provincia
Cauto	370	Granma
Sagua La Grande	163	Villa Clara
Zaza	155	Sancti Spíritus

Río	Longitud (km)	Provincia
Caonao	133	Ciego de Ávila
San Pedro	124	Camagüey
Jatibonico del Sur	119	Sancti Spíritus
Las Yeguas	117	Camagüey
Cuyaguateje	112	Pinar del Río
Mayarí	106	Holguín
Hondo	105	Pinar del Río
Agabama	105	Sancti Spíritus
Toa	100	Guantánamo

Clasifica las proposiciones siguientes en verdaderas (V) o falsas (F). Justifica las que consideres falsas por qué lo son.

a) ___ El río Cauto es el que tiene mayor diferencia de longitud con el resto de las longitudes de los otros ríos.

b) ___ La longitud de los ríos de las provincias centrales es menor que la del río de la provincia más oriental del país.

c) ___ La provincia Santi Spíritus tiene el cuádruplo de ríos que la provincia Holguín.

d) ___ La longitud del río San Pedro excede en 18 km a la longitud del río Mayarí.

e) ___ La longitud del río de Villa Clara es 63 km mayor que la del río de Guantánamo.

f) ___ La longitud del río de Ciego de Ávila sobrepasa en 23 km a la longitud del río de mayor longitud de Pinar del Río.

g) ___ El 25 % de la longitud del río San Pedro equivale a 17 km más que la diferencia entre las longitudes de los ríos Agabama y Jatibonico del Sur.

7. Escribe en el lenguaje de las variables las situaciones prácticas siguientes señalando en cada caso el significado de la variable utilizada:

a) La décima parte de los jóvenes de la enseñanza secundaria fuman activamente.[1]

b) El 65 % de los integrantes de la delegación cubana que asistió a los Juegos Panamericanos de Guadalajara 2011, participó por vez primera en este tipo de evento.

c) En los países pobres la mortalidad infantil en menores de un año es dos veces superior que en los países ricos.

d) El 85 % de la población mundial lo constituyen los países pobres.

e) La cosecha de papa en una empresa este año fue superior en 200 t a la del año anterior.

f) Félix Andrés aumentó su masa en un 5 % con respecto al mes anterior.

g) El precio de un artículo en el mercado disminuyó en un 10 %.

h) El precio de varias libras de tomate que se venden a $ 8,50 la libra.

i) El perímetro de un cuadrado.

j) El área de un rectángulo cuyo largo es el doble de su ancho.

k) La amplitud de un ángulo adyacente a otro ángulo.

8. Determina el conjunto numérico más restringido al que pertenece el valor numérico de $4x^2y$ para los valores de las variables siguientes:

a) $x = -1$; $y = \frac{1}{2}$ b) $x = \frac{1}{2}$; $y = -1$ c) $x = \frac{1}{2}$; $y = 1$ d) $x = -1$; $y = -1$

9. Halla, si existe, el valor numérico de las expresiones siguientes para los valores de las variables que se indican. De no existir, argumenta el porqué.

a) $-0{,}4mn^3$ para $m = -5$; $n = -1$

b) $\frac{5}{4}ab^{-1}$ para $a = 0{,}2$; $b = \frac{1}{4}$

c) $2x + y$ para $x = -2{,}5$; $y = 4{,}3$

d) $\frac{c}{4} - 3d$ para $c = 2$; $d = -\frac{2}{3}$

e) $2p - r^2$ para $p = -\frac{1}{4}$; $r = -1$

f) $3ab + c - 1$ para $a = \frac{2}{3}$; $b = -2$; $c = 0{,}1$

g) $\frac{3x - y}{4 - 2z}$ para $x = \frac{1}{3}$; $y = 5$; $z = 2$

h) $\frac{a^2 - 2bc}{4}$ para $a = 4$; $b = -1$; $c = -8$

i) $x^2y^{-2} - 3$ para $x = 1$; $y = 0$

j) $\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 9$ para $m = -\frac{2}{3}$; $n = \frac{2}{9}$

[1] Órgano de prensa *Granma*, 20 de junio de 2012.

k) $\frac{a}{3b} - \frac{c}{d}$ para $a = 4$; $b = -1$; $c = \frac{2}{3}$; $d = -2$

10. a) Elabora una tabla para calcular el valor numérico del término $4x$ para $x = -1$; $x = 0$; $x = \frac{1}{3}$; $x = 0{,}4$ y $x = 1$.

b) Calcula el valor numérico del término $6x - 2$ para $x = -1$; $x = 0$; $x = \frac{1}{3}$; $x = 0{,}4$ y $x = 1$ auxiliándote de una tabla.

c) Extrae conclusiones.

11. Calcula el valor numérico de $a - b \cdot c$ y $(a - b) \cdot c$ para $a = 2$, $b = -\frac{1}{2}$ y $c = 4$. Compara los valores numéricos de dichos términos y extrae conclusiones del resultado obtenido.

12. Marca con una X la respuesta correcta.

a) El valor numérico del polinomio $a^2 - ab - b^2$ para $a = 2$ y $b = -1$ es:

___ 7 ___ 6 ___ 5 ___ 3 ___ 1

b) Si $n = -2^0$, entonces el valor numérico del polinomio $n^3 - 2n^2 - n$ es:

___ -4 ___ -2 ___ 0 ___ 2 ___ 4

c) Si $a = 8$ y $b = \frac{5a}{2}$, entonces el valor numérico de $8a - 3b + 1$ es igual a:

___ 5 ___ 14,5 ___ 21 ___ $-3{,}5$ ___ -5

d) El valor numérico de $n + n^n + n^{n+1}$ para $n = \frac{4^0}{2^{-1}}$ es:

___ 10 ___ 12 ___ 14 ___ 36 ___ 64

e) Si $a = -\frac{2}{3}$, la fracción algebraica $\dfrac{1 - \frac{a}{3}}{\frac{a}{3} - 1}$ tiene como valor:

___ $-\frac{7}{3}$ ___ 1 ___ $\frac{7}{3}$ ___ -1 ___ Ninguno de ellos

f) La fracción algebraica $\frac{2n}{3n + 7}$, cuando $n = \sqrt[3]{-125}$, toma valor numérico igual a:

___ $\frac{5}{4}$ ___ $-\frac{5}{4}$ ___ $\frac{5}{11}$ ___ $-\frac{3}{5}$ ___ $\frac{1}{5}$

13. Completa la tabla 3.3:

Tabla 3.3

Situación matemática	Expresión algebraica en función de la variable *x*	Valor numérico de la expresión para $x = -2$
El triplo de un número, aumentado en siete	$3x + 7$	
	$\frac{2x}{5}$	
El 20 % del número disminuido en cinco		
	$\frac{x}{6} + 2x$	
La suma de un número natural y su sucesor		
El 40 % del número aumentado en seis		

14. Expresa algebraicamente, colocando el resultado en cada cuadradito, las sucesivas transformaciones y modificaciones de un número *x* al pasar por la máquina de cálculo siguiente:

$$\boxed{x} \xrightarrow{\cdot\, 4} \boxed{} \xrightarrow{+\,6} \boxed{} \xrightarrow{:\,2} \boxed{} \xrightarrow{-\,1} \boxed{}$$

15. Hay países como los Estados Unidos y Canadá en los que la temperatura se mide en grados Fahrenheit (°F) y no en grados Celsius (°C) como en nuestro país. La expresión $\frac{5}{9}F - \frac{160}{9}$ nos permite convertir cualquier temperatura expresada en grados Fahrenheit (°F) a grados Celsius (°C), donde *F* es el valor de la temperatura en grados Fahrenheit. En una competencia en Canadá, a un boxeador cubano en el chequeo médico previo, se le informó que tenía 97,7 °F de temperatura. ¿Pudo competir nuestro atleta?

16. Se suele utilizar el índice de masa corporal (IMC) para determinar si existe o no un exceso de masa. Este índice es el cociente entre la masa (m), expresada en kilogramo y el cuadrado de la estatura (h) de la persona, expresada en metro.
a) Escribe la expresión que determina el IMC utilizando las variables.
b) Si sabes que se considera sobremasa una cifra del IMC por encima de los 25 kg/m^2 y se hablaría de obesidad cuando el IMC estuviera por encima de los 30 kg/m^2, calcula tu IMC y valora el resultado obtenido.

3.2 Operaciones con monomios y polinomios

3.2.1 Términos semejantes. Reducción de términos semejantes

Aplica tus conocimientos

Ernesto, Ana y Patricia en la hora pico de alta demanda de consumo de electricidad, visitaron 21 viviendas de su localidad para constatar cuántas luces innecesarias habían encendidas y proponer medidas de ahorro de energía eléctrica en un trabajo investigativo de su escuela. Ana visitó el doble de la cantidad de viviendas que Ernesto y Patricia la tercera parte de la cantidad visitadas por Ernesto. ¿Cómo representas en el lenguaje de las variables la cantidad de hogares que visitó cada uno?

En el texto del problema aparecen en el lenguaje común relaciones entre la cantidad de viviendas visitadas por Ernesto, Ana y Patricia, para representarlas en el lenguaje algebraico, utilizamos una variable; solo debemos identificar la información de la cual dependerá el resto de los datos.

Respuesta: Si a la cantidad de viviendas visitadas por Ernesto le asignas la variable x, entonces la cantidad de hogares visitados por Ana se expresa: $2x$ y los visitados por Patricia: $\frac{1}{3}x$.
¿Cuál es la característica común que tienen las tres expresiones algebraicas obtenidas?
Los monomios que tienen la parte literal igual son **términos semejantes.** Luego, los monomios x, $2x$ y $\frac{1}{3}x$ son términos semejantes.

También son términos semejantes los monomios siguientes:

$3mn; -2mn; \frac{3}{8}mn$

$a^4b^2c; \frac{a^4b^2c}{3}$

$\frac{1}{5}p^3; p^3; 0{,}7p^3; -3p^3$

$0{,}6xy^2z; 7y^2xz; -3zy^2x$

Atención

No es necesario que las variables que conforman la parte literal de los términos semejantes aparezcan en el mismo orden ($0{,}6xy^2z; 7y^2xz; -3zy^2x$).

Ejemplo 1:

Señala cuáles de los términos siguientes son semejantes:

a) $2{,}7; 0{,}3x; 5; 2{,}1x; 7{,}2x; 8{,}9$

b) $7{,}2abc; 9xy; -2{,}85abc; -11abc; 0{,}63xy; \frac{1}{5}ab$

c) $4{,}3\, m^3n; -8mn^2; \frac{3}{5}m^2n^2; -0{,}25mn; -m^3n^3; 12mn^3; -\frac{8}{3}m^2n$

Solución:

a) Los números 2,7; 5 y 8,9 son términos semejantes.

Los términos $0{,}3x$; $2{,}1x$; $7{,}2x$, como tienen la misma parte literal, son semejantes.

b) Son términos semejantes $7{,}2abc$; $-2{,}85abc$; $-11abc$ y los otros términos semejantes son $9xy$; $0{,}63xy$.

c) Todos estos términos tienen las mismas variables m y n, pero están elevadas a diferentes exponentes; luego, no tienen la misma parte literal, por lo tanto, en este caso no hay términos semejantes.

Ya expresaste en el lenguaje de las variables la cantidad de casas visitadas por Ernesto, Ana y Patricia. ¿Cómo escribirías el total de casas visitadas por ellos?

Respuesta: $x + 2x + \frac{1}{3}x$

¿Esta expresión algebraica se podrá escribir como un monomio?

Cuando en una expresión algebraica los términos son semejantes estos se pueden reducir.

Recuerda que...

Para **reducir términos semejantes** se halla la suma algebraica de sus coeficientes y se escribe la misma parte literal.

Ejemplo 2:

Reduce los términos semejantes en los polinomios siguientes:

a) $x + 2x + \frac{1}{3}x$

b) $-4x + 5y + 2{,}8x$

c) $\frac{1}{3}ab + 2ab - 3b + 2a + 2ab$

d) $x^2y + 3xy^2 - 5x^2y + 2xy^2$

e) $-1{,}5p^3q + p^3q + 9pq - 7qp$

Solución:

a) Todos los términos de este polinomio son semejantes, entonces al reducirlos queda:

$$x + 2x + \frac{1}{3}x = \frac{10}{3}x$$

b) Son semejantes el primer y el tercer término. Para facilitar la reducción puedes, si lo deseas, primeramente, marcar (con rayitas, círculos, etcétera) los términos que son semejantes y después efectuar la suma algebraica de los coeficientes de los términos que son semejantes.

$$\underline{-4x} + 5y + \underline{2{,}8x} = -1{,}2x + 5y$$

c) Los términos semejantes son: el primero, segundo y quinto términos. Observa que el segundo y el quinto términos tienen coeficientes opuestos; luego, su suma es igual a cero; en estos casos se acostumbra a cancelar estos términos, quedando de esta manera:

$$\underline{\frac{1}{3}ab} + \underline{\cancel{2ab}} - 3b + 2a - \underline{\cancel{2ab}}$$

$$= \frac{1}{3}ab - 3b + 2a$$

d) Análogamente a los casos anteriores, después de identificar los términos que son semejantes, los reduces.

$$\underline{x^2y} + \underline{\underline{3xy^2}} - \underline{5x^2y} + \underline{\underline{2xy^2}}$$

$$= -4x^2y + 5xy^2$$

e) Los dos primeros términos son semejantes y los siguientes también, pues aunque las variables no están en el mismo orden, se consideran términos semejantes; puedes ordenarlas o simplemente calcular de esa manera.

$$\boxed{-1{,}5p^3q} + \boxed{p^3q} + 9pq - 7qp$$

$$= -0{,}5p^3q + 2pq$$

¿Sabías que...?

Las expresiones algebraicas se denominan según la cantidad de términos que tengan:

Binomio: suma algebraica de dos monomios que no son semejantes.

Trinomio: suma algebraica de tres monomios que no son semejantes.

Polinomio: suma algebraica de más de tres monomios que no son semejantes.

Atención

Los prefijos *bi* y *tri* indican la cantidad de términos en cada expresión algebraica.

Ejemplo 3:

¿Cuáles de las expresiones algebraicas siguientes son: monomios, binomios, trinomios y polinomios?

a) $\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}x - \frac{1}{7}x$

b) $-8{,}6m + 1{,}25mn + 4{,}36m$

c) $5x^3y^2z - 6 + 2x^3y^2z + xy^2z^3 - 11x^3y^2z + 9 + xy^2z^3$

d) $-ab + 5{,}3a - 2 + a^2b^2 + 8ab^2 + 2{,}7a - a^2b^2 - 3ab^2 + 3{,}42ab + 5{,}8a^2b^2 - 1{,}1a$

Solución:

a) Como los términos que aparecen en esta expresión algebraica son semejantes se deben reducir estos.

$$\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}x - \frac{1}{7}x$$

$$= \frac{4}{7}x$$

Respuesta: La expresión algebraica es un monomio.

b) $\underline{-8{,}6m} + 1{,}25mn + \underline{4{,}36m}$
$= 1{,}25mn - 4{,}24m$
Respuesta: La expresión algebraica es un binomio.

c) $\underline{5x^3y^2z} - 6 + \underline{2x^3y^2z} + \boldsymbol{xy^2z^3} - 1\underline{1x^3y^2z} + 9 + \boldsymbol{xy^2z^3}$
$= -4x^3y^2z + 2xy^2z^3 + 3$
Respuesta: La expresión algebraica es un trinomio.

d) $-ab + 5{,}3a - 2 + a^2b^2 + 8ab^2 + 2{,}7a - a^2b^2 - 3ab^2 + 3{,}42ab + 5{,}8a^2b^2 - 1{,}1a$
$= 6{,}9a + 2{,}42ab + 5ab^2 + 5{,}8a^2b^2 - 2$
Respuesta: La expresión algebraica es un polinomio.

Aplica tus conocimientos

Con ayuda de las operaciones con variables puedes asombrar a tus amigos. Pide a uno de ellos que piense un número y después le haces las indicaciones siguientes:

a) Multiplica el número pensado por tres.

b) Súmale diez al resultado.

c) Réstale al resultado el doble del número pensado.

d) Réstale al resultado seis.

e) Di el último número obtenido.

Ahora solo tienes que restarle cuatro al número que te diga y obtendrás el número pensado por tu amigo. ¿Sabes por qué?

Si expresas algebraicamente cada una de las indicaciones dadas sucesivamente, resulta la expresión $3x + 10 - 2x - 6$, siendo x el número pensado por tu amigo; si reduces términos semejantes obtienes: $x + 4$, es decir, el número que tu amigo pensó aumentado en cuatro. Si quieres asombrar a tus amigos complejiza esta expresión dando otras indicaciones, inténtalo.

Ejercicios

(epígrafe 3.2.1)

1. Cuáles de los términos siguientes son semejantes:

a) x; $3xy$; $2x$; $-0{,}2x$

b) $1{,}2a$; $3a^2$; $9a$; $-5a^2$

c) $\frac{b}{3}$; $-2b^3$; $0{,}8b^3$; $3bc$

d) ab; $-ab$; $2a$; $3b$; $-\frac{4}{3}a$

e) $-\frac{2}{3}mn$; m^2n; $6nm$; mn^2

f) $3xyz$; $-3{,}4yz$; $2{,}5yzx$; xzy; $8xy$

g) $-\frac{a^2b}{4}$; ab^2; $5a^2b^2$; $8{,}82b^2a$; $8a^2b$

h) $4{,}5m^2n^3p^4$; $-\frac{1}{2}m^3n^2p^4$; $709n^3p^4m^2$; $\frac{7}{5}n^3m^2p^4$; $0{,}9m^2n^3$

2. Reduce los términos semejantes en:

a) $a + 3a$ b) $4b - 2b$ c) $2{,}4c + 1{,}2c$ d) $7{,}5d - \frac{d}{2}$

e) $\frac{2}{5}e + 0{,}2e - e$ f) $14f^2 + 26f^2 - 40f^2$ g) $2mn - 2{,}9mn + 7nm$

h) $5y - 4z + 0{,}7z - 8y + y$ i) $-3x^2y + \frac{4}{5}xy^2 - \frac{2}{3}x^2y + \frac{xy^2}{5}$

j)) $5 - 2s + 0{,}5s - 2{,}4 + s^2$ k) $1{,}2p + 3{,}4q - 5pq + 0{,}8p - 3{,}5q$

l) $\frac{m}{5} + \frac{6}{5}n + \frac{3m}{4} - 3m - n$ m) $-5{,}3a + 3b - 7c + 2{,}5a + 1{,}7c - 8b + abc$

n) $4m^2n^3 + m^3n^3 - 4m^2n^3 + 3\frac{1}{2}n^3m^3$

ñ) $\frac{x^2y^3z}{4} + \frac{7}{4}x^2y^3z - 2xyz - 2x^2zy^3 + 1$

3. Completa la tabla 3.4:

Tabla 3.4

A	B	C	$A + B$	$A - C$	$A + B - C$
$4a$	$7a$	$2a$			
$2a + 3b$	a	$3b$			
$\frac{1}{2}m + 2n - 3$	$-\frac{1}{4}m - n + 1$	$2n$			
$7x^2y + 2xy + 2$	$x^2y + 2xy$	$4yx$			

4. Determina cuáles de las expresiones algebraicas siguientes son monomios, binomios o trinomios:

a) $3x + 3$ b) $-6xy$ c) $a^2 - 6a + 2$ d) $\frac{5y}{7}$

e) $5m - np$ f) $d^3 - \frac{d}{2}$ g) $0{,}34$ h) $2x - 3y + 5z$

i) $-0{,}5n$ j) $\frac{3p-q}{3}$ k) $3xy^2 + 2x^2y$ l) $ab - 2b + a$

m) $2xy^2z^3$ n) $\frac{p^5}{4}$

5. Enlaza la expresión literal de la columna A con la expresión algebraica que le corresponde en la columna B.

A	B
▸ Monomio con coeficiente entero y parte literal con dos variables.	$5x^2 - 3x + 7$
	$-\frac{3}{5}x^2$
▸ Trinomio donde los coeficientes de sus términos son números primos.	$-6ab^2$
▸ Monomio de coeficiente uno.	$0{,}2mn$
▸ Monomio que no tiene parte literal.	$2y^2 - 3y + 39$
▸ Binomio con un término elevado al cuadrado.	10
	$z^2 + 15$
▸ Monomio cuyo coeficiente es un número fraccionario y su parte literal tiene dos variables.	p^2q^3r
	$2x - y$

3.2.2 Multiplicación de monomios y polinomios por un monomio

Reflexiona

En un organopónico, como se muestra en la figura 3.6, uno de los canteros dedicados al cultivo de la lechuga tiene el doble de largo que de ancho. ¿Cómo expresarías el área de este terreno utilizando el lenguaje de las variables?

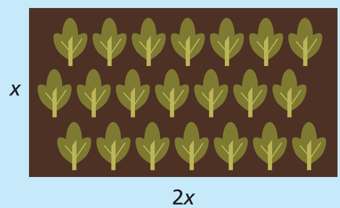


Fig. 3.6

Si designas por x la longitud del lado menor del terreno, entonces el área de este terreno la expresas: $2x \cdot x$.

¿Esta expresión algebraica se podrá escribir como un monomio?

Si multiplicas los monomios $2x \cdot x$, primero los coeficientes: $2 \cdot 1 = 2$ y luego la parte literal: $x \cdot x = x^2$ (propiedad del producto de potencias de igual base).

Entonces: $2x \cdot x = 2x^2$.

Ejemplo 1:

Efectúa:

a) $-3y^2 \cdot \frac{1}{3}y$ b) $0{,}4m^2n^3 \cdot 5mn^5$ c) $\frac{3}{5}pq \cdot \frac{50}{9}p^3$

Solución:

a) Multiplicas los coeficientes: $(-3) \cdot \frac{1}{3} = -1$

Multiplicas la parte literal: $y^2 \cdot y = y^3$

Entonces: $-3y^2 \cdot \frac{1}{3}y = -y^3$

b) $0{,}4m^2n^3 \cdot 5mn^5 = 2m^3n^8$ c) $\frac{3}{5}pq \cdot \frac{50}{9}p^3 = \frac{10}{3}p^4q$

Atención

Para efectuar la multiplicación de monomios, se multiplican los coeficientes y también la parte literal, aplicando la propiedad *producto de potencias* de igual base.

En la respuesta la parte literal debe quedar ordenada alfabéticamente.

Reflexiona

Ana tiene un jardín con forma cuadrada, pero quiere ampliarlo agregando un metro a cada uno de sus lados, como aparece en la figura 3.7. ¿Cómo expresarías el perímetro del jardín ampliado utilizando el lenguaje de las variables?

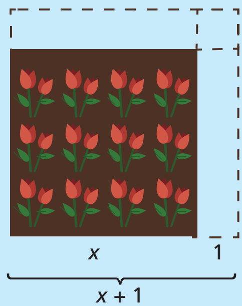


Fig. 3.7

Si designas por x la longitud del lado del jardín anterior, entonces la longitud del lado del jardín ampliado se expresa por $(x + 1)$ y el perímetro por $4(x + 1)$.

El polinomio que expresa el perímetro del jardín ampliado representa la multiplicación de un monomio por un binomio.

Para multiplicar un monomio por un binomio aplicas la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición: $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ con *a, b, c* números racionales.

Entonces: $4(x + 1) = 4 \cdot x + 4 \cdot 1 = 4x + 4$

Ejemplo 2:

Efectúa:

a) $-8y(y-3) = -8y^2 + 24y$

b) $\frac{1}{5}m^3n^2(5mn + 20m^2n^2)$

c) $-0{,}2a(-5a + 3a^2 + 7)$

Solución:

a) $-8y(y-3)$

$= (-8y) \cdot y + (-8y) \cdot (-3)$

$= -8y^2 + 24y$

b) $\frac{1}{5}m^3n^2(5mn + 20m^2n^2)$

$= \frac{1}{5}m^3n^2 \cdot 5mn + \frac{1}{5}m^3n^2 \cdot 20m^2n^2$

$= m^4n^3 + 4m^5n^4$

c) $-0{,}2a(-5a + 3a^2 + 7) = a^2 - 0{,}6a^3 - 1{,}4a = -0{,}6a^3 + a^2 - 1{,}4a$

En la respuesta debes ordenar los términos por el exponente de la variable, de manera ascendente o descendente.

Procedimiento para multiplicar un monomio por un polinomio

Para calcular el producto de un monomio por un polinomio, se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio.

Ejercicios

(epígrafe 3.2.2)

1. Efectúa:

a) $2a \cdot a$

b) $4{,}5b \cdot 6b^3$

c) $\frac{2}{5}c^5 \cdot 10c^5$

d) $-3d^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}d\right)$

e) $2mn \cdot 5m^2n^3$

f) $(-4x^4y^6) \cdot \left(-\frac{1}{4}x^4y^6\right)$

g) $a^2b^3 \cdot (3a^3x)$

h) $\left(-\frac{4}{5}m^2\right) \cdot \left(-\frac{15}{16}m^3n^2\right)$

i) $x^4y^6z^2 \cdot (-y^3z^6x)$

2. Calcula:

a) $2(a - 4)$ b) $b(b + 3)$ c) $-5(c + 10)$

d) $3d(d - 6)$ e) $12e\left(\dfrac{e}{4} + \dfrac{2}{3}\right)$ f) $-4d^2(0{,}5d^3 + 3d^5)$

g) $0{,}4p^2(1{,}5p^2 + 0{,}4p$ h) $(2x^2y + 0{,}7xy^3)(-3xy)$

i) $\dfrac{4}{3}m^3n^5p\left(\dfrac{2}{3}m^2n^2p^2 - 6mpn^4\right)$ j) $4(x^2 + 2x + 1)$

k) $y(2y^3 - 3y^2 + 2)$ l) $-5\left(3m^2 - 0{,}4m + \dfrac{1}{5}\right)$

m) $4p^3(p^2 + 0{,}5p - 2{,}5)$ n) $-\dfrac{2}{3}t\left(\dfrac{3}{8}t^5 - 6t^2 + 4{,}5t\right)$

ñ) $8{,}5e^2(e^2 + 2e + 1)$ o) $3x^5y(2xy - 4xy^3 + 5)$

p) $-4m^3x(m^4 - 3m^2 + 7n^4)$ q) $(x^3 - 4x^2y + 6xy^2)ax^3y$

r) $\left(\dfrac{3}{5}a - \dfrac{1}{6}t\right)\left(\dfrac{5}{3}at^2\right)$ s) $0{,}3pq(20pq^2 + 15q^3p^2)$

t) $-0{,}5a^3x^4y^3(0{,}4x^2 - \dfrac{1}{3}x^4y^2 + 0{,}1y^6)$ u) $\dfrac{2}{5}p^2q^3\left(\dfrac{5}{3}pq^2 + 15q - 12p\right)$

3.2.3 División de monomios y polinomios por un monomio

Reflexiona

¿Cuál es el área de un triángulo que su altura relativa a un lado es 12 cm?

Si a es la longitud del lado relativo a la altura del triángulo, entonces su área es: $A = \dfrac{12a}{2}$ cm².

¿Se podrá simplificar esta expresión?

Para simplificar esta expresión tienes que dividir el monomio $12a$ por el monomio dos.

Divides los coeficientes de los monomios del numerador y el denominador: $12 : 2 = 6$ y mantienes la parte literal del monomio del numerador, resulta:

$$A = \frac{12a}{2} = 6a.$$

¿Cómo determinar el cociente de dos monomios que tienen parte literal?

Por ejemplo: $\dfrac{7m^2n^3}{14mn}$ $(m \neq 0;\ n \neq 0)$

Divides los coeficientes: $7 : 14 = \dfrac{1}{2}$

Divides la parte literal: $\dfrac{m^2n^3}{mn} = m^{2-1}n^{3-1} = mn^2$

Para realizar la división de la parte literal aplicas la propiedad del cociente de potencias de igual base.

Entonces: $\dfrac{7m^2n^3}{14mn} = \dfrac{1}{2}mn^2$

Procedimiento para dividir un monomio por otro monomio:

Para calcular el cociente de dos monomios se dividen los coeficientes de cada monomio y la parte literal de cada uno.

Ejemplo 1:

Efectúa:

a) $\dfrac{300x^5y^8}{10x^5y^7}$ $(x \neq 0;\ y \neq 0)$

b) $-\dfrac{25b}{10b}$ $(b \neq 0)$

c) $\dfrac{36p^3}{9p^4}$ $(p \neq 0)$

d) $\dfrac{7r^2s^3t^2}{21r^2s^5t^8}$ $(r \neq 0;\ s \neq 0;\ t \neq 0)$

Solución:

a) $\dfrac{300x^5y^8}{10x^5y^7}$

Divides los coeficientes: $300 : 10 = 30$

Divides la parte literal: $\dfrac{x^5y^8}{x^5y^7} = x^{5-5}y^{8-7} = y$

Observa que en la parte literal del resultado no aparece la variable x, pues $x^0 = 1$, para $x \neq 0$.

Entonces: $\dfrac{300x^5y^8}{10x^5y^7} = 30y$

b) $-\dfrac{25b}{10b} = -2{,}5$

c) $\dfrac{36p^3}{9p^4} = 4p^{3-4} = 4p^{-1} = \dfrac{4}{p}$

d) $\dfrac{7r^2s^3t^2}{21r^2s^5t^8} = \dfrac{1}{3s^2t^6}$

Observa que, al igual que en el inciso anterior, el resultado de la división de los dos monomios es una fracción algebraica.

Reflexiona

Si a y b son las longitudes de las bases de un trapecio. ¿Cuál es la longitud de la paralela media de este trapecio?

La longitud de la paralela media del trapecio se expresa como $\frac{a+b}{2}$, que es la división de un binomio por un monomio. ¿Cómo efectuarías esta división?

Análogamente a la multiplicación de un monomio por un binomio, divides cada término del binomio por el monomio.

Procedimiento para dividir un polinomio por un monomio:

Para calcular el cociente de un polinomio por un monomio, se divide cada término del polinomio por dicho monomio.

Ejemplo 2:

Efectúa:

a) $\dfrac{15a + 30}{5}$

b) $\dfrac{2b^4 - 7b^3}{b^3}$

c) $\dfrac{64m^6n^4 + 16mn^3 + 4mn}{8mn}$

d) $\dfrac{x^2y^5 + 5x^3y^2 + 10x^4y^7}{10x^3y^7}$

Solución:

a) $\dfrac{15a + 30}{5}$

$= \dfrac{15a}{5} + \dfrac{30}{5}$ (Divides cada término del polinomio por cinco).

$= 3a + 6$

b) $\dfrac{2b^4 - 7b^3}{b^3}$

$= \dfrac{2b^4}{b^3} - \dfrac{7b^3}{b^3}$ (Divides cada término del polinomio por b^3).

$= 2b - 7$

c) $\dfrac{64m^6n^4 + 16mn^3 + 4mn}{8mn} = \dfrac{64m^6n^4}{8mn} + \dfrac{16mn^3}{8mn} + \dfrac{4mn}{8mn} = 8m^5n^3 + 2n^2 + \dfrac{1}{2}$

d) $\dfrac{x^2y^5 + 5x^3y^2 + 10x^4y^7}{10x^3y^7} = \dfrac{x^2y^5}{10x^3y^7} + \dfrac{5x^3y^2}{10x^3y^7} + \dfrac{10x^4y^7}{10x^3y^7} = \dfrac{1}{10xy^2} + \dfrac{1}{2y^5} + x$

Observa que el resultado de esta división no es un polinomio.

Ejercicios

(epígrafe 3.2.3)

1. Efectúa las divisiones siguientes:

a) $\dfrac{15a}{3a}$ b) $\dfrac{-4b}{2b}$ c) $\dfrac{-64c}{-8c}$ d) $\dfrac{3{,}3ab}{3ba}$

e) $\dfrac{-24m^4n^5}{12m^3n^2}$ f) $14a^3b^4 : (-7a^2b^3)$ g) $5x^3y^6z^9 : 15x^3y^5z$

h) $\dfrac{2}{3}m^{12}n^{20} : \dfrac{4}{21}m^{10}n^{19}$ i) $\left(-\dfrac{7}{5}r^2t^3q^5\right) : \dfrac{1}{25}t^3rq^2$ j) $\dfrac{\frac{2}{9}m^{30}n^{15}p^9}{-\frac{8}{27}m^{28}n^{14}p^7}$

k)* $\dfrac{35a^7b^6}{7a^7b^7}$ l)* $1\,000m^{100}n^{20} : (-25m^{99}n^{22})$

2. Halla el cociente en los casos siguientes:

a) $\dfrac{6a+2b}{3}$ b) $\dfrac{12m^3+24m^5}{6m}$ c) $\dfrac{2{,}5pq^7-2p^2q}{0{,}5pq}$ d) $\dfrac{3a^5b^{10}+9a^{12}b^6}{27a^5b^5}$

e) $\dfrac{15x^7-25x^8+35x^{10}}{5x^7}$ f) $\dfrac{4m^5+8m^6-m^9}{2m^3}$ g) $\dfrac{\frac{2}{3}p^{12}+\frac{5}{3}p^{10}-\frac{1}{9}p^{14}}{\frac{1}{6}p^{14}}$

h) $\dfrac{a^2b^2+ab^2-a^2b}{ab}$ i) $\dfrac{-36s^5t^{14}-12t^{20}s^{32}}{-6s^4t^{14}}$

j) $\dfrac{32mn^2p+16m^2np-mnp^2+4mp}{8mnp}$ k) $\dfrac{4a^8b+3b^9}{12ab^2}$

l) $\dfrac{8xy^3z^3+3x^6y^{16}z^5}{x^4y^2z^3}$ m) $(55x^2y-121x^3y^2+132xy^2) : 11xy$

n) $(mn^2p + m^2np - mnp^2 + 4mnp) : 8mpn$ ñ) $\dfrac{\frac{4}{7}a^8+\frac{3}{7}b^8}{\frac{7}{12}ab}$

o) $\dfrac{2{,}4x^5y^5z^6+0{,}9x^{10}y^{18}z^8}{0{,}3x^8z^6y^4}$

3. Coloca en cada espacio el monomio correspondiente para que se obtenga una igualdad en todos los casos.

a) $\dfrac{12a^5}{\square} = 2a^3$

b) $\dfrac{\square}{8m^{10}} = 0{,}5m$

c) $\dfrac{81x^{10}y^{20}}{\square} = 8{,}1y^{10}$

d) $\dfrac{\square}{\frac{2}{3}m^2n^2} = 0{,}5\dfrac{m}{n}$

e) $\dfrac{3b^6 + b^{10}}{\square} = 3b^2 + b^6$

f) $\dfrac{12m^7 - \square}{4m^5} = 3m^2 - 1$

g) $\dfrac{12a^8 + 45a^5 - \square}{\square} = 4a^5 + 15a^2 - 8$

h) $\dfrac{\square + 30m^4n^2 + \square}{5m^2n} = 3mn + 6m^2n^2 + \dfrac{1}{m}$

4. Divide el polinomio $105x^3y^4z^5 + 225x^4y^5z^6 - 75x^5y^6z^7$ por cada uno de los monomios siguientes:

a) $5x^2y^2z^2$

b) $3x^3y^2z$

c) $25x^3y^3$

d) $2{,}5y^4z^5$

*e) $15x^4y^6z^7$

*f) $10x^5y^4z^3$

5. Comprueba que estas dos máquinas son equivalentes. Es decir, si en ambas entra un mismo número, ambas entregan el mismo resultado.

$$\boxed{x} \xrightarrow{\cdot\, 2} \square \xrightarrow{:\, 3} \square \xrightarrow{+\, 1} \square$$

$$\boxed{x} \xrightarrow{\cdot\, 2} \square \xrightarrow{+\, 3} \square \xrightarrow{:\, 3} \square$$

3.3 Ecuaciones lineales

Reflexiona

En la balanza en equilibrio (fig. 3.8), halla la masa de un cubo.

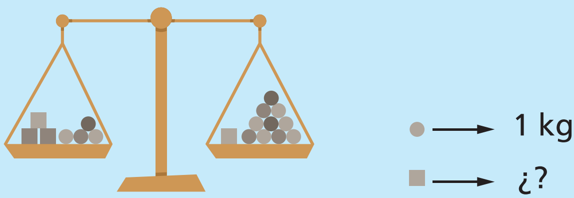


Fig. 3.8

Si x representa la masa en kilogramo de un cubo, entonces el problema puede expresarse en el lenguaje de las variables así:

$3x + 4 = x + 10$

Esta expresión representa una ecuación en la variable *x.* De grados anteriores conoces que las ecuaciones son igualdades que contienen variables y solo se transforman en proposiciones verdaderas para ciertos valores de la variable. El objetivo es descubrir esos valores. Más adelante en este capítulo profundizarás en el procedimiento para su solución.

En las ecuaciones, a las expresiones que se encuentran a la izquierda y a la derecha del signo *igual a*, se les denomina **miembros de la ecuación,** los cuales pueden tener varios **términos.**

$$\overbrace{3x + 4}^{\text{Miembro izquierdo}} = \overbrace{x + 10}^{\text{Miembro derecho}}$$

Términos

Las **incógnitas** de una ecuación son las variables cuyos valores debes obtener. En el ejemplo, la variable *x*, que se le ha asignado como significado la masa del cubo, es la incógnita de la ecuación. También puedes utilizar letras como *y, z, a, b, c,* etcétera.

De la historia

El uso de las letras x, y, z *para representar incógnitas y las primeras del abecedario para valores conocidos, aparece en el libro* La Geometría (fig. 3.9) *de Descartes* (1596-1650)*. Se cuenta que cuando el libro se estaba imprimiendo el editor le preguntó a Descartes si podía emplear otras letras para las ecuaciones. Descartes le respondió que le eran indiferente las letras que utilizase en las ecuaciones. El editor eligió la* x *porque en francés esa letra se utiliza poco.*

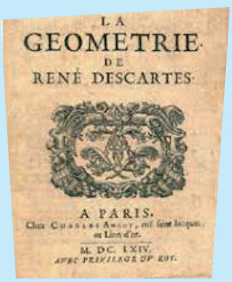


Fig. 3.9

Mucho antes Diofanto de Alejandría utilizaba la palabra aritmos *para designar la incógnita de una ecuación. Mientras que Al-Khwarizmi utilizaba para ello el término* sahy. *Los egipcios le llamaban* aha, *literalmente montón. Durante los siglos* XV *y* XVI *los algebristas franceses la llamaron* chose, *los alemanes* coss *y los italianos utilizaban la palabra* cosa, *más aún, el álgebra misma llegó a llamarse en Europa* El arte de la cosa.

La independencia del álgebra como rama de la matemática comienza con Francois Vieta (1540-1603) al crear el cálculo literal, que posibilitó un tratamiento similar para los números y las magnitudes geométricas.

Desde los primeros grados has resuelto ecuaciones de la forma $ax = b$ ($a \neq 0$), $ax + b = c$ ($a \neq 0$) y $ax + bx = c$ ($a \neq 0$ y $b \neq 0$) con a, b, c números fraccionarios. Ahora aprenderás a resolver estas ecuaciones con a, b, c números racionales y otra de la forma $ax + b = cx + d$ ($a \neq 0$ y $c \neq 0$) con a, b, c, d números racionales. Las ecuaciones en las que la variable aparece elevada al exponente uno, reciben el nombre de **ecuaciones lineales.**

Las ecuaciones siguientes son lineales:

$6x = 3$; $3 + 3a = 2$; $z = 4$; $\frac{y}{4} + 3 = y - 2$; $7(x + 1) - 2x = 3x + 4$

Atención

Las ecuaciones siguientes, no son lineales:

$x^2 + 4x - 8 = 0$; $\frac{x - 3(x - 5)}{x + 2} = 7 - x$; $x^3 - 8 = 0$; $\sqrt{2a + 5} = 3a$

En las ecuaciones, las variables se sustituyen por valores de los conjuntos numéricos. A estos conjuntos numéricos se les denomina **dominio de la variable.** Sabes que las afirmaciones que se les puede asignar un valor de verdad, es decir, que solo pueden ser verdaderas o falsas, son proposiciones. Si al sustituir la variable por un valor de su dominio, la ecuación se transforma en una proposición verdadera, se dice que ese número por el que se sustituyó la variable es una **solución de la ecuación.**

Atención

Las ecuaciones lineales pueden tener solución o no tener solución. Las ecuaciones lineales que tienen solución pueden tener una solución o infinitas **soluciones.**

El conjunto formado por todas las soluciones de la ecuación lineal se denomina **conjunto solución.**

En el ejemplo de la balanza, el número tres es la solución de la ecuación lineal $3x + 4 = x + 10$, pues al sustituir la variable x por el número tres se obtiene: $3 \cdot 3 + 4 = 13$ y $3 + 10 = 13$.

La proposición, por tanto, es verdadera para $x = 3$, y el conjunto solución está formado por el único valor que la satisface; luego, el conjunto solución de la ecuación es $S = \{3\}$.

Como para resolver una ecuación debes encontrar el valor del dominio de la variable que transforma la ecuación en una proposición verdadera, la solución de la ecuación depende del dominio de la variable, porque hay ecuaciones que tienen solución en un conjunto numérico y en otro no.

Por ejemplo, la ecuación $4x = 3$ no tiene solución si el dominio de la variable es el conjunto de los números naturales, pues no existe ningún número natural que multiplicado por cuatro sea igual a tres. En cambio, si el dominio de la variable es el conjunto de los números fraccionarios la ecuación es soluble, pues $4\frac{3}{4} = 3$ y $\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$.

La ecuación $x + 5 = 3$ no tiene solución si el dominio de la variable es el conjunto de los números fraccionarios, porque no existe ningún número fraccionario que adicionado con cinco sea igual a tres, sin embargo, tiene solución si el dominio de la variable es el conjunto de los números enteros, pues para $x = -2$ se cumple que $-2 + 5 = 3$ y $-2 \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo 1:

Identifica para qué dominio de la variable tienen solución las ecuaciones lineales siguientes. Fundamenta tu respuesta.

Ecuación	Dominio de la variable			
	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Q}_+$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$
a) $x + 1 = 5$				
b) $3x = 7$				
c) $2x = -6$				
d) $-5x = 3$				

Solución:

a) La ecuación $x + 1 = 5$ tiene solución en todos estos dominios de la variable porque se transforma en una proposición verdadera para el valor cuatro de la variable, y como cuatro es un número natural, también es un número fraccionario, entero y racional.

b) La ecuación $3x = 7$ tiene solución cuando el dominio de la variable es $\mathbb{Q}_+$ y $\mathbb{Q}$, pues se transforma en una proposición verdadera para $x = \frac{7}{3}$, pero $\frac{7}{3} \notin \mathbb{N}$ y $\frac{7}{3} \notin \mathbb{Z}$; luego, en estos dominios de la variable la ecuación no tiene solución.

c) La ecuación $2x = -6$ tiene solución en $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ porque se transforma en una proposición verdadera para $x = -3$ y (-3) es un número entero y racional, sin embargo, $-3 \notin \mathbb{N}$ y $-3 \notin \mathbb{Q}_+$, entonces la ecuación no es soluble en estos dominios de la variable.

d) La ecuación $-5x = 3$ no tiene solución en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}_+$ y $\mathbb{Q}$, pues se transforma en una proposición verdadera para $x = -\frac{3}{5}$ y este número no es natural ni fraccionario ni entero; pero como $-\frac{3}{5} \in \mathbb{Q}$, la ecuación tiene solución cuando el dominio de la variable es el conjunto de los números racionales.

Respuesta:

Ecuación	**Dominio de la variable**			
	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Q}_+$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$
a) $x + 1 = 5$	x	x	x	x
b) $3x = 7$	–	x	–	x
c) $2x = -6$	–	–	x	x
d) $-5x = 3$	–	–	–	x

Existen ecuaciones que tienen infinitas soluciones. Por ejemplo, la ecuación $0,3x + 7 - \frac{3}{10}x = 7$ tiene infinitas soluciones, pues al sustituir la variable x por cualquier número racional la ecuación lineal se transforma en una proposición verdadera.

x	$0{,}3x + 7 - \frac{3}{10}x = 7$
0	$0{,}3 \cdot 0 + 7 - \frac{3}{10} \cdot 0 = 0 + 7 - 0 = 7$; luego, cero es una solución de la ecuación.
5	$0{,}3 \cdot 5 + 7 - \frac{3}{10} \cdot 5 = 1{,}5 + 7 - 1{,}5 = 7$; y por tanto, cinco también es solución de la ecuación.
$\frac{2}{5}$	$0{,}3 \cdot \frac{2}{5} + 7 - \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{5} = 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 7 - \frac{3}{25} = 0{,}12 + 7 - 0{,}12 = 7$; lo que quiere decir que $\frac{2}{5}$ satisface esta ecuación.
-1	$0{,}3 \cdot (-1) + 7 - \frac{3}{10} \cdot (-1) = -0{,}3 + 7 - 0{,}3 = 7$; entonces (-1) es también solución de la ecuación.

Cuando una ecuación lineal tiene infinitas soluciones su conjunto solución es el dominio de la variable. Siempre que no se indique cuál es el dominio de la variable se asume el conjunto de los números racionales.

De la historia

Como ya conoces, Diofanto de Alejandría (fig. 3.10) fue uno de los grandes matemáticos de la antigua Grecia. De su vida se sabe muy poco, se cuenta que en su tumba hay escrito un acertijo sobre su vida que dice así:

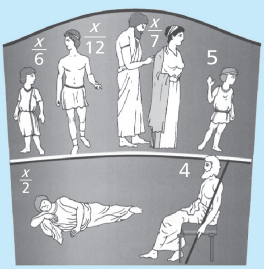


Fig. 3.10

"transcurrió en la niñez de Diofanto, un sexto de su vida, un doceavo en la adolescencia y, después de otra séptima de su existencia contrajo matrimonio y le nació un hijo a los cinco años de casado. Mas el hijo solamente vivió la mitad de la vida del padre y este, afligido, buscó consuelo en la ciencia de los números y a cuatro años de muerto el hijo, Diofanto falleció".

La resolución de una ecuación lineal, nos conduce a concluir que Diofanto vivió 84 años, ¡compruébalo!

Investiga y aprende

Te has percatado que existen ecuaciones lineales que tienen una única solución, otras tienen infinitas soluciones, pero, ¿será un mismo valor solución de varias ecuaciones? Verifícalo tú mismo.

Ejemplo 1:

Comprueba que $x = 1$ es solución de las ecuaciones siguientes:

a) $6x = 6$ b) $x + 3 = 4$ c) $\frac{x}{2} = 0{,}5$

Solución:

Sustituyes el valor de x por uno en cada ecuación y verificas que obtienes una igualdad.

a) $6 \cdot 1 = 6$ y $6 = 6$; entonces, uno es solución de la ecuación.
b) $1 + 3 = 4$ y $4 = 4$; luego, uno es solución de la ecuación.
c) $\frac{1}{2} = 0{,}5$ y $0{,}5 = 0{,}5$; por tanto, uno es solución de la ecuación.

Luego, uno es solución de cada una de estas ecuaciones.

Las ecuaciones lineales que tienen solución para un mismo valor de la variable tienen el mismo conjunto solución. Las ecuaciones lineales con igual dominio de la variable que tienen el mismo conjunto solución se denominan **ecuaciones equivalentes.** Por tanto, las ecuaciones $6x = 6$, $x + 3 = 4$ y $\frac{x}{2} = 0{,}5$ son **equivalentes.**

Saber más

Las transformaciones realizadas a una ecuación lineal que como resultado conducen a la obtención de ecuaciones equivalentes a la dada, se llaman **transformaciones equivalentes**.

Transformaciones equivalentes:

- Intercambiar los miembros de la ecuación.

Por ejemplo, las ecuaciones $-7 + 4x = 6x + 2$ y $6x + 2 = -7 + 4x$ son equivalentes, pues se obtiene una de otra por el intercambio de sus miembros.

- Adicionar (sustraer) el mismo término a ambos miembros de una ecuación.

Por ejemplo, las ecuaciones $6x + 2 = -7 + 4x$ y $6x = -9 + 4x$ son equivalentes, porque si en la ecuación $6x + 2 = -7 + 4x$ sustraes dos a ambos miembros de la ecuación obtienes $6x + 2 - 2 = -7 + 4x - 2$, es decir, la ecuación $6x = -9 + 4x$.

Es posible adicionar (sustraer) a ambos miembros de una ecuación el mismo número, porque ya conoces que los números también son términos y esta transformación la realizaste en grados anteriores al resolver ecuaciones lineales, pues sustraer dos a ambos miembros de la ecuación, es trasponer de un miembro a otro de la ecuación un término con la operación inversa, en este caso se traspone en $6x + 2 = -7 + 4x$ el dos para el otro miembro con la operación inversa: $6x = -7 + 4x - 2$

$$6x = -9 + 4x$$

En la ecuación $6x = -9 + 4x$ si sustraes $4x$ a ambos miembros de la ecuación obtienes $6x - 4x = -9 + 4x - 4x$, o sea, la ecuación $2x = -9$. Observa que en este caso se traspone el término $4x$ del miembro derecho al izquierdo para que en un mismo miembro estén agrupados todos los términos que tiene la variable x.

- Multiplicar (dividir) ambos miembros de la ecuación por un número distinto de cero.

Por ejemplo, las ecuaciones $2x = -9$ y $x = -\frac{9}{2}$ son equivalentes, pues si en la ecuación $2x = -9$ divides ambos miembros por dos, obtienes la ecuación $x = -\frac{9}{2}$. Observa que al dividir los miembros de la ecuación por dos has despejado la variable x.

Como esta última ecuación la obtienes por la aplicación sucesiva de transformaciones equivalentes, las ecuaciones $-7 + 4x = 6x + 2$ y $x = -\frac{9}{2}$, son equivalentes y por lo tanto, tienen el mismo conjunto solución, lo que significa que $x = -\frac{9}{2}$ es la solución de la ecuación $-7 + 4x = 6x + 2$.

Ejemplo 2:

¿Qué transformación equivalente debes aplicar en cada caso para obtener la segunda ecuación lineal de la primera? (Tabla 3.5)

Tabla 3.5

Primera ecuación	Segunda ecuación	Transformación equivalente
a) $9x = 36$	$x = 4$	
b) $x - 3 = -5$	$x = -2$	
c) $2x + 4 = 3 - 6x$	$8x = -1$	

Solución:

a) $9x = 36$

$$\frac{9x}{9} = \frac{36}{9}$$

$x = 4$

b) $x - 3 = -5$

$x - 3 + 3 = -5 + 3$

$x = -2$

c) $2x + 4 = 3 - 6x$

$2x + 4 - 4 = 3 - 6x - 4$

$2x = -1 - 6x$

$2x + 6x = -1 - 6x + 6x$

$8x = -1$

Respuesta: Ver la tabla 3.6

Tabla 3.6

Primera ecuación	Segunda ecuación	Transformación equivalente
a) $9x = 36$	$x = 4$	Dividir ambos miembros de la ecuación por un número distinto de cero.
b) $x - 3 = -5$	$x = -2$	Adicionar el mismo término a ambos miembros de la ecuación.
c) $2x + 4 = 3 - 6x$	$8x = -1$	Adicionar y sustraer el mismo término a ambos miembros de la ecuación.

Las transformaciones equivalentes las utilizarás para resolver ecuaciones lineales, observa que su aplicación te permite transformar la ecuación lineal en una equivalente de la forma $x = c$, con $c \in \mathbb{Q}$.

Ejemplo 3:

Halla el conjunto solución de las ecuaciones lineales siguientes:

a) $3x = 9$ b) $5m - 3 = 7$ c) $-4a + a = 2$ d) $3x + 4 = x + 10$

e) $2{,}5p - 1{,}4 = p + 0{,}1$ f) $\frac{2x}{3} + 1 = x - 3$

g) $3 + 5n - 6 = 3n + 2 + 2n - 3{,}5$ g) $2x + \frac{x}{3} - 3 = \frac{7x}{3} + 5 - 8$

Solución:

a) $3x = 9$ Dividir por tres ambos miembros de la ecuación.

$x = 3$

Observa que resolver esta ecuación lineal es buscar qué número racional multiplicado por el número tres da como resultado nueve.

La comprobación de la solución la realizas en la ecuación original y calculas el valor numérico de las expresiones algebraicas que conforman los miembros de la ecuación para el valor hallado de la variable.

Comprobando: miembro izquierdo: $3 \cdot 3 = 9$

miembro derecho: 9

Comparación: $9 = 9$

Luego, la solución de la ecuación es $x = 3$.

Respuesta: $S = \{3\}$.

b) $5m - 3 = 7$

$5m = 7 + 3$ Adicionar tres a ambos miembros de la ecuación.

$5m = 10$ Reducir términos semejantes.

$m = 2$ Dividir por cinco ambos miembros de la ecuación.

Comprobando: miembro izquierdo: $5 \cdot 2 - 3 = 10 - 3 = 7$

miembro derecho: 7

Comparación: $7 = 7$

La solución de la ecuación es $m = 2$.

Respuesta: $S = \{2\}$.

c) $-4a + a = 2$

$-3a = 2$ Reducir términos semejantes.

$a = -\frac{2}{3}$ Dividir por (-3) ambos miembros de la ecuación.

Comprobando: miembro izquierdo: $-4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$

Comprobando: miembro derecho: 2

Comparación: 2 = 2

Respuesta: $S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

Ahora puedes determinar el valor de la masa del cubo en la balanza del ejercicio inicial que coincide con la ecuación del inciso d.

d) $3x + 4 = x + 10$

$3x - x = 10 - 4$ Adicionar el término $(-x)$ a ambos miembros de la ecuación y sustraer cuatro a ambos miembros de la ecuación.

$2x = 6$ Reducir términos semejantes.

$x = \frac{6}{2}$ Dividir por dos ambos miembros de la ecuación.

$x = 3$

Comprobando: miembro izquierdo: $3 \cdot 3 + 4 = 9 + 4 = 13$

miembro derecho: $3 + 10 = 13$

Comparación: $13 = 13$

Respuesta: $S = \{3\}$.

e) $2{,}5p - 1{,}4 = p + 0{,}1$

$2{,}5p - p = 0{,}1 + 1{,}4$

$1{,}5p = 1{,}5$

$p = 1$

Comprobando: miembro izquierdo: $2{,}5 \cdot 1 - 1{,}4 = 2{,}5 - 1{,}4 = 1{,}1$

miembro derecho: $1 + 0{,}1 = 1{,}1$

Comparación: $1{,}1 = 1{,}1$

Respuesta: $S = \{1\}$.

f) $\frac{2x}{3} + 1 = x - 3$

$2x + 3 = 3x - 9$

$3x + 2x = -9 - 3$

$-x = -12$

$x = 12$

Comprobando: miembro izquierdo: $\frac{2 \cdot 12}{3} + 1 = 8 + 1 = 9$

miembro derecho: $12 - 3 = 9$

Comparación: $9 = 9$

Respuesta: $S = \{12\}$.

Consejos útiles

En la solución de ecuaciones lineales no es obligatorio que realices la comprobación, pues para resolverlas utilizas las transformaciones equivalentes, que siempre que se apliquen correctamente, conducen a ecuaciones equivalentes, que sabes tienen el mismo conjunto solución. No obstante, es una vía muy importante para que estés seguro de que no cometiste errores en la búsqueda de la solución de la ecuación. Te sugerimos que siempre compruebes tus resultados, aunque lo hagas de forma oral.

g) $3 + 5n - 6 = 3n + 2 + 2n - 3{,}5$

$$5n - 3 = 5n - 1{,}5$$

$$5n - 5n - 3 = -1{,}5$$

$$-3 = -1{,}5$$

Observa que has obtenido una proposición falsa; luego, la ecuación no tiene solución.

Respuesta: $S = \phi$.

Atención

Toda ecuación que se transforma en una proposición falsa para todo valor que se le asigne a la variable no tiene solución.

h) $2x + \frac{x}{3} - 3 = \frac{7x}{3} + 5 - 8$

$$\frac{7x}{3} - 3 = \frac{7x}{3} - 3$$

$$\frac{7x}{3} - \frac{7x}{3} = -3 + 3$$

$$0 = 0$$

En este caso al reducir los términos semejantes obtienes una proposición verdadera $\left(\frac{7x}{3} - 3 = \frac{7x}{3} - 3\right)$, lo que significa que la ecuación tiene infinitas soluciones, por tanto, no es necesario aplicar trasformaciones equivalentes para llegar a la igualdad $0 = 0$ y puedes concluir que el conjunto solución de la ecuación es el dominio de la variable.

Respuesta: $S = \{x\text{: } x \in \mathbb{Q}\}$ o $S = \mathbb{Q}$.

Atención

Toda ecuación que se transforma en una proposición verdadera para todo valor que se le asigne a la variable tiene infinitas soluciones.

Cuando se reduce una ecuación lineal mediante las transformaciones equivalentes a la forma $ax + b = 0$ con a, b números racionales se cumple que si:

- $a \neq 0$ entonces la solución es única, siempre que el dominio de la variable sea $\mathbb{Q}$.
- $a = 0$ y $b = 0$ entonces tiene infinitas soluciones y su conjunto solución es el dominio de la variable.
- $a = 0$ y $b \neq 0$ entonces no tiene solución y su conjunto solución es el conjunto vacío.

También existen ecuaciones lineales donde aparecen signos de agrupación que para resolverlas debes efectuar las operaciones estudiadas en este capítulo.

Ejemplo 4:

Halla el conjunto solución de las ecuaciones siguientes:

a) $5(x + 3) - 7 = 18$

b) $6 + 2(c + 1) = 3$

c) $3q + 4 = 2(q - 3)$

d) $y - 4(y - 1) = -2$

Solución:

a)
$$5x + 15 - 7 = 18$$
$$5x + 8 = 18$$
$$5x = 18 - 8$$
$$5x = 10$$
$$x = 2$$

Respuesta: $S = \{2\}$.

b)
$$6 + 2(c + 1) = 3$$
$$6 + 2c + 2 = 3$$
$$2c + 8 = 3$$
$$2c = 3 - 8$$
$$2c = -5$$
$$c = -\frac{5}{2}$$

Respuesta: $S = \left\{-\frac{5}{2}\right\}$.

c) $3q + 4 = 2(q - 3)$

$3q + 4 = 2q - 6$

$3q - 2q = -6 - 4$

$q = -10$

Respuesta: $S = \{-10\}$.

d) $y - 4(y - 1) = -2$

$y - 4y + 4 = -2$

$-3y + 4 = -2$

$-3y = -2 - 4$

$-3y = -6$

$y = \dfrac{-6}{-3}$

$y = 2$

Respuesta: $S = \{2\}$.

De la historia

Diofanto de Alejandría (325-409) (fig. 3.11) realizó un perfeccionamiento esencial de la notación matemática, añadió amplias perspectivas al objetivo del álgebra. Él ideó un sistema de símbolos para escribir ecuaciones. De ahí que las ecuaciones lineales que hoy resolvemos se escribían de singulares maneras, cuenta la historia que no empleó ningún signo para la adición. Por ejemplo, la ecuación $3x + 2 = x - 1$ *Diofanto la escribía como:*

ξ γβ ι ξ ⋔ α

Fig. 3.11

A continuación, te mostramos las acciones que debes realizar para resolver ecuaciones lineales donde se integran varios de los procedimientos algebraicos estudiados en este capítulo. Recuerda que, aunque la comprobación no es obligatoria realizarla, es importante que siempre verifiques tus resultados, como parte del autocontrol que debes realizar de tu trabajo.

Ejemplo 5:

Halla el conjunto solución de la ecuación: $2\left(\dfrac{3x}{2} - 1\right) + 6 = \dfrac{5x + 10}{5}$

Ver la tabla 3.7

Tabla 3.7

Procedimiento	$\mathbf{2\left(\dfrac{3x}{2} - 1\right) + 6 = \dfrac{5x + 10}{5}}$	**Explicación**
Eliminar paréntesis en el miembro izquierdo	$2 \cdot \dfrac{3x}{2} - 2 \cdot 1 + 6 = \dfrac{5x}{5} + \dfrac{10}{5}$	Para eliminar el paréntesis, multiplicas

Procedimiento	$2\left(\frac{3x}{2}-1\right)+6=\frac{5x+10}{5}$	Explicación
y dividir el binomio por el término en el miembro derecho de la ecuación	$3x-2+6=x+2$ $3x+4=x+2$	por dos cada término que está dentro de este, y en el miembro derecho divides cada término del binomio por cinco.
Agrupar los términos semejantes en cada miembro de la ecuación.	$3x-x=2-4$	El propósito es obtener una ecuación equivalente a la dada en la que la variable aparezca solo en un miembro de la ecuación. Para transponer términos de un miembro a otro utilizas las trasformaciones equivalentes.
Reducir los términos semejantes.	$2x=-2$	Reduces los términos semejantes que aparecen en cada miembro de la ecuación.
Despejar la variable.	$x=\frac{-2}{2}$	Para despejar la variable divides por dos cada miembro de la ecuación.
Calcular el valor de la variable.	$x=-1$	Efectúas la división indicada.

Procedimiento	$2\left(\frac{3x}{2}-1\right)+6=\frac{5x+10}{5}$	**Explicación**
Comprobar que el valor hallado satisface la ecuación.	MI: $2\left(\frac{3\cdot(-1)}{2}-1\right)+6$ $=2\left(\frac{-3}{2}-1\right)+6$ $=-3-2+6=1$ MD: $\frac{5(-1)+10}{5}=\frac{-5+10}{5}=1$ $1=1$	Calculas el valor numérico de la expresión algebraica de cada miembro de la ecuación, para el valor hallado de la variable y comparas los resultados.
Escribir el conjunto solución.	$S=\{-1\}$	Escribes en notación tabular el conjunto que está formado por la solución de la ecuación.

Nuestros periodistas también utilizan en sus escritos frases propias del trabajo con las variables, que te parece si buscas en revistas y periódicos algunas de estas, observa las que ya hemos encontrado (fig. 3.12).

Juventud Rebelde 4 de octubre de 2008

Tribuna de La Habana 3 de agosto de 2006.

Fig. 3.12

Ejercicios
(epígrafe 3.3)

1. Resuelve las ecuaciones lineales siguientes:

a) $5x = 10$ b) $16y = 64$ c) $2z = -5$
d) $-6x = -3$ e) $0{,}3p = 9$ f) $2x - 5 = 7$
g) $4y + 1 = 3$ h) $12z - 2 = 13$ i) $-0{,}7p + 0{,}5 = -0{,}2$
j) $3{,}5 - 2x = 0{,}5$ k) $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 2{,}5$ l) $\frac{2}{5}y - 1{,}2 = 0{,}8$
m) $-1 - 3p = 5$ n) $2(x + 1) = 4$ ñ) $-3(x - 2) = 9$
o) $12(y + 2) - 24 = 8$ p) $3 = 4 - 2(z + 1)$

2. Marca con una X la respuesta correcta:

2.1 El conjunto solución de la ecuación lineal $3t + 4 - 3t = 4$ es:
a) ___ $S = \{0\}$ b) ___ $S = \phi$ c) ___ $S = \mathbb{Q}$ d) ___ $S = \{1\}$

2.2 La ecuación lineal $-10z - 30z - 71 = 29$ se transforma en una proposición verdadera para el valor de la variable igual a:
a) ___ $\frac{5}{2}$ b) ___ 0 c) ___ 2,1 d) ___ $-\frac{5}{2}$

2.3 La solución de la ecuación $\frac{2}{9}z - \frac{3}{5}z = -85$ es:
a) ___ $z = -45$ b) ___ $z = 225$ c) ___ $z = 224$ d) ___ $z = -224$

2.4 La ecuación $-\frac{3}{4}x - \frac{7}{4}x = -2{,}5$ se satisface para el valor de la variable x:
a) ___ 2,5 b) ___ $-2{,}5$ c) ___ 1 d) ___ -1

2.5 La ecuación $\frac{3}{5}p - 0{,}3p = -1$ tiene como conjunto solución a:
a) ___ $S = \left\{-\frac{10}{3}\right\}$ b) ___ $S = \phi$ c) ___ $S = \{0{,}3\}$ d) ___ $S = \mathbb{Q}$

2.6 La ecuación $0{,}5y - 0{,}7y = 0{,}4$ tiene solución para:
a) ___ $y = 0{,}08$ b) ___ $y = 2$ c) ___ $y = -2$ d) ____ $y = 0{,}2$

3. Resuelve y comprueba las ecuaciones lineales siguientes:

a) $x + 3x = 24$ b) $2{,}5y - 1{,}5y = 3$ c) $6z - 8z = 8$
d) $-5n - 7n = -48$ e) $\frac{1}{3}m + \frac{4}{3}m = 10$ f) $\frac{2}{7}p - \frac{3}{7}p = -1$
g) $\frac{1}{3}n + \frac{1}{6}n = 1$ h) $\frac{1}{4}y + \frac{2}{3}y = 22$ i) $\frac{11}{2}d + \frac{7}{3}d = 94$

j) $-3{,}8p + 2{,}7p = -11$ k) $33x + 12x + 5 = 95$ l) $13y - 8y + 1 = 16$

m) $2{,}5t + 8{,}2t - 20{,}5 = 33$ n) $\frac{5}{7}x + \frac{1}{7}x + \frac{3}{7} = -\frac{3}{7}$ ñ) $\frac{1}{4}y - \frac{3}{4}y + 1 = -2$

o) $\frac{11}{5}z + \frac{7}{15}z + 16 = 80$ p) $\frac{8}{9}p - \frac{1}{6}p - \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$ q) $2{,}5x + \frac{5}{2}x + \frac{2}{11} = \frac{2}{11}$

4. ¿A qué conjunto numérico más restringido pertenece la solución de cada una de las ecuaciones lineales siguientes?

a) $2x + 4 = x + 2$ b) $3x - 5 = x + 7$ c) $0{,}5x + 1 = -0{,}5x - 3$

d) $\frac{a}{3} + \frac{2}{3} = a$ e) $\frac{y}{4} + 2 = \frac{3}{4}y - 5$ f) $z - 2{,}5 = \frac{2z}{5} + 6{,}5$

g) $5(b + 1) = 3b + 9$ h) $-2(y + 3) = 5y - 4$ i) $\frac{4}{5}(10z - 5) = 5z - 4$

j) $0{,}4(2n + 0{,}5) = n + 0{,}2$ k) $-\frac{1}{7}(14 + 2a) = \frac{5}{7}a - 2{,}4$ l) $\frac{2x + 4}{6} = 3 + \frac{x}{3}$

5. Determina el conjunto solución de las ecuaciones lineales siguientes:

a) $2x + 1 = 5$ ($x \in \mathbb{N}$) b) $5a = 3a - 1$ ($a \in \mathbb{Q}_+$)

c) $2x - 4x = -6$ ($x \in \mathbb{Z}$) d) $-4(x + 1) = 4$ ($x \in \mathbb{N}$)

e) $\frac{1}{3}m + \frac{2}{5}m = \frac{22}{3}$ ($m \in \mathbb{Z}$) f) $\frac{4x + 8}{2} = 1$ ($x \in \mathbb{Q}_+$)

6. ¿Cuál de las ecuaciones lineales siguientes no tiene como solución el número (– 7)?

a) ___ $2x + 19 = 5$ b) ___ $\frac{x}{2} = -\frac{21}{6}$

c) ___ $\frac{x + 14}{7} = 1$ e) ___ $3(2x + 6) = 5x + 2$

7. Enlaza la ecuación lineal de la columna A con su solución correspondiente en la columna *B.*

A	B
$3x + 2 = 2$	$S = \phi$
$\frac{1}{2}x - 2x = -6$	$S = \{-4\}$
$-0{,}2x = -2$	$S = \{0{,}1\}$
$4 - x = 8$	$S = \{-10\}$
$2x + x - 1 = 3x + 1$	$S = \{4\}$
$5(x - 2) + 3{,}5 = -6$	$S = \{0\}$
	$S = \{10\}$
	$S = \{9\}$
	$S = \{12\}$
	$S = \{-0{,}1\}$

8. Selecciona la respuesta correcta (tabla 3.8).

Tabla 3.8

La ecuación con $n, p, q, s, k \in \mathbb{Q}$	**Se transforma en una proposición verdadera**		
	Para todo valor de la variable	**Para un valor de la variable**	**Para ningún valor de la variable**
$n + 2 = 3$			
$2n - 3 = 3 - 2n$			
$q + 12 = s + 12$			
$p + q = p + s$			
$3(n + 3) = 3n + 3$			
$2(p - 5) = 2p - 10$			
$\frac{p + 4}{2} = p + 2$			

9. Escribe una ecuación lineal de la forma $ax = b$, $(a \neq 0)$ cuyo conjunto solución sea:
a) $S = \{2\}$ b) $S = \{-1\}$ c) $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ d) $S = \{0\}$ e) $S = \{2,4\}$

10. Escribe una ecuación lineal de la forma $ax + b = c$, $(a \neq 0)$ cuyo conjunto solución sea:
a) $S = \{2\}$ b) $S = \{-1\}$ c) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ d) $S = \{0\}$ e) $S = \{2,4\}$

11. Encuentra una ecuación lineal de la forma $ax + bx = c$, $(a \neq 0)$ cuyo conjunto solución sea:
a) $S = \{2\}$ b) $S = \{-1\}$ c) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ d) $S = \{0\}$ e) $S = \phi$

12. Halla una ecuación lineal de la forma $ax + b = cx + d$, $(a \neq 0$ y $c \neq 0)$ cuyo conjunto solución sea:
a) $S = \{2\}$ b) $S = \{-1\}$ c) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ d) $S = \{0\}$ e) $S = \{x: x \in \mathbb{Q}\}$

13. En cada una de las ecuaciones lineales siguientes halla el valor del parámetro indicado.

a) $ax + 6 = 8$ para que la solución de la ecuación sea $x = \frac{2}{3}$.

b) $ax - \frac{1}{5} = \frac{2}{3}$ para que la solución de la ecuación sea $x = -\frac{1}{3}$

c) $3x + bx = -3$ para que la solución de la ecuación sea $x = -1$.

d) $px - \frac{x}{2} = 6$ para que la solución de la ecuación sea $x = 4$.

14. Cuadrado mágico, en matemática, es la agrupación de diversos números colocados formando un cuadrado en el que la suma de estos en cada columna, en cada fila y en las diagonales siempre es la misma, denominada **suma mágica.**

En el cuadrado mágico que aparece en la figura 3.13, la suma mágica es 4,8. Determina el valor de la variable x y completa los números que faltan en el cuadrado.

4		2,4
	$2x$	
x		

Fig. 3.13

3.3.1 Resolución de problemas que conducen a ecuaciones lineales

De la historia

El papiro de Ahmés (fig. 3.14), más conocido y famoso que los demás papiros matemáticos, fue redactado por un escriba llamado Ahmés; se le conoce también como papiro de Rhind, pues fue adquirido en el año 1858 por el investigador inglés Henry Rhind (1833-1863). Contiene 85 problemas de variada índole y se conserva en el Museo Británico. Uno de sus problemas dice: Una cantidad y su séptima parte suman 24. ¿Cuál es la cantidad? Ahmés

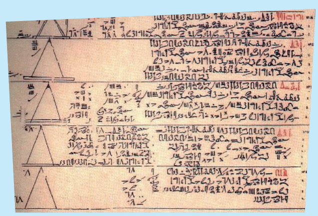


Fig. 3.14

De la historia

resuelve este sencillo problema aplicando los procedimientos de esa época como el método de la falsa posición: con la simbología de hoy planteamos la ecuación $x + \frac{x}{7} = 24$, *la cual ya sabes resolver.*

El procedimiento estudiado para la resolución de ecuaciones lineales es una herramienta muy útil para resolver numerosos problemas.

Analiza el problema siguiente:

En un colegio electoral la cantidad de electores hombres y la cantidad de electores mujeres son números naturales consecutivos. En dicho colegio votan 329 electores; si se sabe que hay más electores mujeres, ¿cuántos electores hay de cada sexo en ese colegio?

Responde las preguntas siguientes:

Preguntas	**Respuestas**
▸ ¿De qué trata el problema?	R: De la cantidad de electores de un colegio electoral.
▸ ¿Qué hay que determinar?	R: La cantidad de electores de cada sexo.
▸ ¿Qué información brinda el texto del problema?	R: El total de electores que tiene el colegio electoral y la relación entre las cantidades de electores hombres y mujeres.
▸ ¿Qué relaciones se establecen en el texto del problema?	R: Que la cantidad de electores hombres y la cantidad de electores mujeres son números naturales consecutivos.
▸ ¿Qué palabras claves aparecen en esta relación?	R: Números naturales consecutivos.
▸ ¿Cómo se representan dos números naturales consecutivos utilizando variables?	R: x, $x + 1$
▸ ¿Qué significado se le asigna en este caso a la variable x?	R: La cantidad de electores hombres.
▸ ¿Cómo representamos entonces la cantidad de electores mujeres?	R: $x + 1$

Preguntas	Respuestas
¿Qué cantidad de electores tiene este colegio electoral?	R: 329

Luego, si le asignamos la variable x a la cantidad de electores hombres, entonces la cantidad de electores mujeres se expresa como $x + 1$. En total hay 329 electores, por tanto la suma de la cantidad de electores hombres y la cantidad de electores mujeres se representa por la ecuación lineal: $x + x + 1 = 329$.

Solución:

Datos

x: cantidad de electores hombres

$x + 1$: cantidad de electores mujeres

$$x + x + 1 = 329$$
$$2x + 1 = 329$$
$$2x = 329 - 1$$
$$2x = 328$$
$$x = \frac{328}{2}$$
$$x = 164$$

Al sustituir en los datos, obtienes que el otro número es 165.

Antes de proceder a dar la respuesta literal del problema, debes verificar en el texto si los valores hallados cumplen las relaciones planteadas. Observa que el problema se refiere a cantidad de personas; luego, el valor de la variable x tiene que ser un número natural. 165 y 164 son números naturales consecutivos y la suma de estos números es 329; por lo tanto, se cumplen las relaciones del texto del problema.

Respuesta: En el colegio electoral hay 164 electores hombres y 165 electores mujeres.

Investiga y aprende

Este problema se ha resuelto algebraicamente, te invitamos a que busques cómo resolverlo aritméticamente, es decir, sin utilizar las variables.

Consejos útiles

Para resolver un problema puedes auxiliarte de preguntas que te ayuden a determinar los datos y a encontrar la ecuación lineal que soluciona el problema.

Ejemplo 1:

En una cooperativa de créditos y servicios dedicada a la producción lechera existe ganado vacuno de la raza Holstein con cuernos. Si entre <u>la cantidad de cuernos y patas de esta raza de vacas que hay en la cooperativa suman 90.</u> ¿Cuántas vacas tiene esta cooperativa?

El problema trata de la cantidad de vacas que hay en una cooperativa de créditos y servicios dedicada a la producción lechera. El texto informa la cantidad de patas y cuernos que tienen las vacas de esta cooperativa. Como conoces cada vaca tiene dos cuernos y cuatro patas y la palabra clave **suman,** significa que en total hay entre cuernos y patas 90. Como se desconoce la cantidad de vacas que tiene la cooperativa le asignas la variable x a esta cantidad, por tanto, la cantidad de cuernos se representa dos por cada vaca ($2x$) y la cantidad de patas cuatro por cada vaca ($4x$). Entonces, como la suma de la cantidad de cuernos y patas es 90 obtienes la ecuación lineal: $2x + 4x = 90$.

Solución:

Datos:

x: cantidad de vacas

$2x$: cantidad de cuernos

$4x$: cantidad de patas

$$\begin{aligned} 2x + 4x &= 90 \\ 6x &= 90 \\ x &= \frac{90}{6} \\ x &= 15 \end{aligned}$$

La cantidad de vacas es 15, resultado que es lógico porque es un número natural. Verifica con cálculos orales, si se cumplen las exigencias del problema:

cantidad de cuernos: $2 \cdot 15 = 30$

cantidad de patas: $4 \cdot 15 = 60$

total: $30 + 60 = 90$

Respuesta: La cooperativa de créditos y servicios tiene 15 vacas.

Ejemplo 2:

La edad de Luis excede en seis años a la de su hermano Andy. La quinta parte de la edad de Luis es menor en dos años que la edad de Andy. ¿Qué edad tiene cada uno?

Este problema trata de la edad de dos hermanos, las cuales debes determinar. En el texto te informan sobre las relaciones entre estas edades, que están subrayadas en el primer sintagma, se tiene que determinar la relación de dependencia de la edad de un hermano con respecto al otro, interpretando las palabras claves **excede, quinta parte y menor** se determina la ecuación lineal que permite solucionar el problema.

La edad de Luis depende de la edad de Andy, luego se le asigna la variable x a la edad de Andy y se traduce del lenguaje común al algebraico la relación "la edad de Luis excede en seis años a la de su hermano Andy", entonces la edad de Luis es: $x + 6$.

Al traducir al lenguaje algebraico la segunda relación que aparece en el texto del problema, primero se interpreta la frase *quinta parte de la edad de Luis* como $\frac{x+6}{5}$ después se analiza que esta parte es menor en dos años que la edad de Andy y se obtiene que: $\frac{x+6}{5} = x - 2$ o $\frac{x+6}{5} + 2 = x$ que constituye la ecuación lineal para solucionar el problema.

Solución:

Datos:

x: edad de Andy

$x + 6$: edad de Luis

$$\frac{x+6}{5} + 2 = x$$
$$x + 6 + 10 = 5x$$
$$x - 5x = -6 - 10$$
$$-4x = -16$$
$$x = \frac{-16}{-4}$$
$$x = 4$$

La edad de Andy es cuatro años y sustituyendo en los datos, obtienes que la edad de su hermano Luis es 10 años.

Verificas si se cumplen las relaciones dadas en el texto:

La edad de Luis excede a la de su hermano en seis años, ya que $10 - 6 = 4$.

La quinta parte de la edad de Luis ($10 : 5 = 2$), es menor en dos años que la de Andy ($4 - 2 = 2$).

Respuesta: Luis tiene 10 años y Andy cuatro.

Otra vía de solución:

Existen problemas como este, en el que puedes utilizar la segunda relación para poner los datos en función de la variable *x*, y la primera para el planteo de la ecuación. Te quedaría de esta manera:

Datos:

x: edad de Luis

$\frac{x}{5} + 2$: edad de Andy

$$x - 6 = \frac{x}{5} + 2$$
$$x - \frac{x}{5} = 8$$
$$5x - x = 40$$
$$4x = 40$$
$$x = 10$$

Consejos útiles

Cuando exista la posibilidad de resolver un problema por diferentes variantes es aconsejable que selecciones la vía más factible para ti.

Ejemplo 3:

Por el Día de la Tierra (22 de abril) los pioneros de una secundaria básica se propusieron reforestar un terreno rectangular de su comunidad. La longitud del largo del terreno es el duplo de su ancho, aumentado en un metro. Si el terreno tiene un *perímetro de* 302 *m*, ¿qué área tiene el terreno que van a reforestar los pioneros?

Este problema trata sobre las dimensiones de un terreno de forma rectangular que se proponen reforestar los pioneros de una secundaria básica y para esto necesitan calcular su área. En el texto te informan cuál es el perímetro del terreno, la relación existente entre las longitudes de sus lados y aparecen las palabras claves: **perímetro, duplo y aumentado en.** Para calcular el área del terreno de forma rectangular necesitas las longitudes de los lados del terreno, que se desconocen. Si designas por a la longitud del ancho del terreno, entonces al traducir del lenguaje común al algebraico la relación “longitud del largo es el duplo de su ancho, aumentado en un metro”, obtienes que la longitud del largo es: $2a + 1$. Conoces que el perímetro de un rectángulo se determina por la ecuación $P = 2(a + b)$, donde las variables a y b tienen como significado las longitudes del ancho y el largo del rectángulo, luego, como el perímetro de este terreno es 302 y designamos al ancho por a y al largo por $2a + 1$, sustituyendo en la ecuación del perímetro se obtiene la ecuación lineal que constituye la solución del problema $2(a + 2a + 1) = 302$.

Solución:

Datos:

$P = 302\ m$

$A = ¿?$

a: longitud del ancho

$2a + 1$: longitud del largo (fig. 3.15)

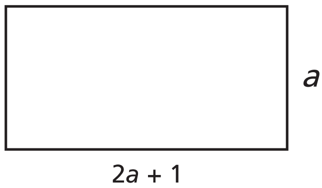


Fig. 3.15

$$2(a + 2a + 1) = 302$$
$$2(3a + 1) = 302$$
$$6a + 2 = 302$$
$$6a = 302 - 2$$
$$6a = 300$$
$$a = \frac{300}{6}$$
$$a = 50$$

Para obtener la longitud del largo sustituyes el valor numérico del ancho en la expresión algebraica asignada a la longitud del largo en los datos ($2a + 1$):

Largo: $2 \cdot 50 + 1 = 101$, entonces el ancho mide 50 m y el largo 101 m.

Verificas si las longitudes halladas satisfacen las relaciones del texto del problema:

El largo, 101 m representa el duplo de 50 aumentado en uno, y el perímetro es $2(101 + 50) = 2 \cdot 151 = 302$.

Ahora debes analizar lo pedido, o sea, la pregunta del texto antes de dar la respuesta, en este caso, la respuesta del problema no son las dimensiones del terreno, sino su área.

$A = 101\ m \cdot 50\ m = 5\ 050\ m^2$.

Respuesta: El terreno ocupa una superficie de 5 050 m^2.

Ejemplo 4:

En un almacén hay *cierta cantidad de kilogramos de arroz* destinados a la alimentación de los damnificados por un desastre meteorológico en un consejo popular. Un día llega a este establecimiento una asignación de 800 kg más de arroz. Al día siguiente se extraen 32 000 kg de arroz *del almacén para repartir a los damnificados, quedando en el almacén* la mitad de lo que había inicialmente. ¿Cuántos kilogramos de arroz quedaron en el almacén?

El problema trata sobre una cantidad de kilogramos de arroz almacenados en un establecimiento para conceder a los damnificados y se debe determinar la cantidad que queda en el almacén después de realizar operaciones de almacenaje y extracción de cantidades de kilogramos de arroz. En el texto no se conoce la cantidad de arroz que había inicialmente en el almacén, se informa la cantidad que se almacena un día y la que se extrae al otro día, por lo que la cantidad de arroz que queda en el almacén no es la misma que había inicialmente. Para saber la cantidad de arroz que queda en el almacén es necesario conocer la cantidad que había inicialmente, la cual se desconoce; para realizar la interpretación del texto se analizan las palabras claves: **mitad, 800 kg más, extraen 32 000 kg** que relacionan las cantidades.

Si designas por x la cantidad inicial de kilogramos de arroz que había en el almacén, entonces al entrar al establecimiento 800 kg más de arroz, ese día la cantidad de kilogramos de ese producto aumentó y esto se expresa como $(x + 800)$ kg de arroz, si al día siguiente se extraen del almacén 32 000 kg, quedan entonces: $x + 800 - 32\,000$. Como lo que queda en el almacén es la mitad de lo que había el primer día, es decir, $\frac{x}{2}$. Entonces es equivalente lo que quedó después de la extracción con la mitad de la cantidad del primer día, esto se expresa con la ecuación: $x + 800 - 32\,000 = \frac{x}{2}$.

Solución:

Datos:

x: cantidad inicial de kilogramos de arroz almacenados.

$$x + 800 - 32\,000 =$$
$$x - 31\,200 = \frac{x}{2}$$
$$x - \frac{x}{2} = 31\,200$$
$$\frac{x}{2} = 31\,200$$
$$x = 62\,400$$

En el almacén había inicialmente 62 400 kg, pero esa no es la respuesta al problema. Debes determinar cuántos kilogramos de arroz quedaron en el almacén para resolverlo. En el texto se informa que quedó en el almacén la mitad de lo que había el primer día, por lo que calculas:

$$\frac{62\,400}{2} = 31\,200$$

Respuesta: En el almacén quedaron 31 200 kg de arroz.

Otra vía de solución:

Datos:

x: cantidad inicial de kilogramos de arroz almacenados (fig. 3.16).

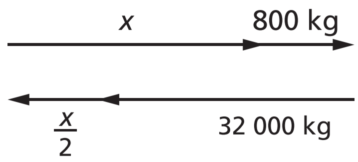


Fig. 3.16

$$
\begin{aligned}
x + 800 &= \frac{x}{2} + 32\,000 \\
x - \frac{x}{2} &= 32\,000 - 800 \\
\frac{x}{2} &= 31\,200 \\
x &= 62\,400
\end{aligned}
$$

Observa que en este problema utilizamos un modelo lineal, donde en la parte superior se indica la situación inicial y en la inferior, la final, que facilita la búsqueda de la ecuación que da solución al problema planteado.

Investiga y aprende

Resuelve este ejercicio por la vía aritmética utilizando el modelo gráfico.

Generalmente en los problemas para declarar las variables utilizamos letras como *x, y, a, b,* etc.; también puedes trabajar con las letras iniciales de palabras como el nombre de personas u objetos.

Consejos útiles

Siempre que resuelvas un problema debes meditar en cómo procediste para encontrar su solución, pues la vía utilizada te puede ser útil para resolver otros problemas. En los ejemplos se reformuló el texto para su mejor comprensión, se subrayaron las palabras en las que aparecen las relaciones entre lo que nos dan y lo que nos piden, se elaboraron modelos gráficos para representar la situación dada en el problema, se comprobó que el resultado obtenido fuera lógico y que satisface las condiciones que aparecen en el texto del problema, se buscaron otras vías de solución. A medida que resuelvas más problemas encontrarás otras acciones que te faciliten la búsqueda de la solución al problema.

Recuerda que...

Para resolver un problema debes:

1. Leer el texto detenidamente para lograr su comprensión.

2. Señalar el significado de la variable que se va a utilizar.

3. Traducir al lenguaje algebraico las relaciones que se plantean en el texto.

4. Plantear una ecuación.

5. Resolver la ecuación planteada.

6. Comprobar que la solución de la ecuación satisface las condiciones que aparecen en el texto del problema.

7. Retomar la pregunta del texto para verificar que la solución de la ecuación es la solución del problema.

8. Redactar la respuesta a la pregunta del problema.

Ejercicios

(epígrafe 3.3.1)

1. Marca con una X la ecuación que describe la situación planteada en cada inciso.

1.1 Un número p excede a otro número q en cinco unidades. La ecuación que representa la relación entre ambos números es:

a) ___ $p + 5 = q$ b) ___ $p - 5 = q$ c) ___ $5 - p = q$ d) ___ $p = 5q$

1.2 La longitud de la costa norte de Cuba excede en 672 km a la longitud de la costa sur. Si la costa sur tiene 2 537 km de longitud, entonces la longitud de la costa norte se puede determinar por la ecuación:

a) ___ $x + 672 = 2\,537$ b) ___ $x + 2\,537 = 672$

c) ___ $x - 672 = 2\,537$ d) ___ Ninguna de las anteriores

1.3 Sean las rectas a, b, c tales que $a \parallel b$ y c secante (fig. 3.17). La amplitud del ángulo β excede en 100° a la amplitud del ángulo α. La amplitud del ángulo α se puede determinar resolviendo la ecuación:

a) ___ $\alpha = \alpha + 100°$ b) ___ $2\alpha + 100° = 180°$

c) ___ $\alpha + 100° = 180°$ d) ___ $2\alpha - 100° = 180°$

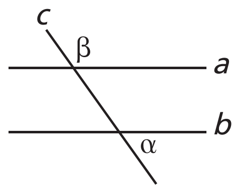


Fig. 3.17

1.4 En la figura 3.18 el rectángulo tiene un perímetro de 28 cm y la longitud de su largo es 8,5 cm. La longitud de su ancho se puede determinar resolviendo la ecuación:

a) ___ $2x + 8,5 = 28$ b) ___ $2x + 17 = 28$

c) ___ $x + 8,5 = 28$ d) ___ $x + 17 = 28$

Fig. 3.18

2. Marca con una X la respuesta correcta.

2.1 Al sustraer tres a las tres cuartas partes de *n*, se obtiene tres. El valor de *n* es:

a) ___ 0 b) ___ 8 c) ___ 12 d) ___ – 8 e) ___ – 2,25

2.2 Si al quíntuplo de un número se le sustrae su 25 %, se obtiene 19. El número es:

a) ___ 1 b) ___ 76 c) ___ 4 d) ___ 95 e) ___ 380

2.3 Si $x = 2y + 5$, entonces el valor de y cuando $x = 3$ es:

a) ___ 11 b) ___ 1 c) ___ $\frac{3}{2}$ d) ___ 4 e) ___ – 1

2.4 En un triángulo, uno de los ángulos exteriores triplica al ángulo interior adyacente a él. Entonces dicho triángulo no puede ser:

a) ___ equilátero b) ___ isósceles c) ___ rectángulo

d) ___ obtusángulo e) ___ acutángulo

3. El quíntuplo de un número es igual a 30. Halla el número.

4. La octava parte de un número es igual a cinco. Determina el duplo de dicho número.

5. El 40 % de un número es igual a 100. Halla el sucesor del número.

6. El perímetro de un triángulo equilátero es igual a 73,5 cm, ¿qué longitud tienen los lados del triángulo?

7. Si mi edad actual se multiplica por siete y se le adiciona tres, el resultado es 164. ¿Qué edad tendré dentro de seis años?

8. El décuplo de un número aumentado en cuatro es igual a 34. Determina el número.

9. En un mercado artesanal industrial (MAI) se realizó una rebaja del precio de algunos artículos. Una señora ha invertido 80 CUP en su compra; si ella adquirió dos camisas por el precio nuevo ahorrando 30 CUP, ¿cuál es el precio de cada camisa después de la rebaja?

10. El doble de la distancia de la ciudad de Cienfuegos a la de Matanzas aumentado en 44 km es igual a la distancia de la ciudad de Cienfuegos a la de Pinar del Río. Si la distancia entre las ciudades de Cienfuegos y Pinar del Río es de 430 km, ¿cuántos kilómetros separan a las ciudades de Cienfuegos y Matanzas?

11. Valora la frase siguiente:
"Para resolver un problema referente a números o relaciones abstractas de cantidades, basta con traducir dicho problema, del inglés u otra lengua, al idioma algebraico".
Isaac Newton (1642-1727)

12. En un grupo de una escuela de iniciación deportiva (EIDE), la cantidad de deportistas varones del séptimo grado excede en 10 a la cantidad de deportistas hembras.

a) Si hay 18 deportistas hembras, ¿cuál es la cantidad de deportistas que tiene el séptimo grado de esa escuela?
b) Hoy al entrenamiento asistió el 87 % aproximadamente de los deportistas. ¿Cuántos deportistas no asistieron al entrenamiento?

13. La mitad de la cantidad de años que tiene mi padre actualmente es mayor en diez años que la mía. Si tengo 20 años, ¿cuántos años tiene mi padre?

14. El perímetro de un triángulo isósceles es igual a 19 cm y el lado desigual tiene una longitud de 8,0 cm. Determina la longitud de cada lado.

15. La amplitud de un ángulo es igual al quíntuplo de la amplitud de su ángulo adyacente. ¿Cuál es la amplitud del ángulo agudo?

16. La suma de dos números enteros consecutivos es igual a 367. ¿Qué número racional es el que se encuentra a la misma distancia de dichos números consecutivos?

17. David resolvió entre lunes y martes 64 ejercicios de Matemática. La cantidad de ejercicios resueltos el martes es el 60 % de los que resolvió el lunes.
a) ¿Cuántos ejercicios más resolvió el lunes respecto al martes?
b) Si tiene que resolver 120 ejercicios, ¿qué porcentaje del total le falta por resolver?

18. En la campaña de recogida de café de este año la diferencia entre el duplo de la cantidad de sacos de café recogidos por Abel y el 50 % de dicha cantidad es igual a 30.
a) ¿Cuántos sacos de café recogió Abel?
b) Si para cumplir la norma debió recoger 25 sacos, ¿qué porcentaje de cumplimiento de la norma logró Abel?

19. Como parte de la protección al consumidor se realizó la rebaja de precio a un artículo. Si el precio del artículo disminuyó su precio en su tercera parte y ahora tiene un precio de \$ 3,00, ¿cuál era el precio del artículo antes de la rebaja?

20. Tatiana y Elena se propusieron entregar a la farmacia frascos de medicina para reciclarlos y utilizarlos en la industria farmacéutica. Elena entregó cuatro veces lo que entregó Tatiana y el triplo de la cantidad de frascos entregados por las dos es 75. ¿Cuántos frascos entregó cada una?

21. En una secundaria básica para realizar algunas actividades complementarias se debe pavimentar un terreno rectangular. Si el largo del terreno es cinco veces su ancho y su perímetro es 48 *m,* el albañil que ejecutará la obra necesita determinar la cantidad de materiales necesarios para su construcción. ¿Qué debe calcular este albañil y cuál es su valor para determinar la cantidad de materiales que empleará en la pavimentación del terreno?

22. El 20 % de la diferencia de un número y su cuádruplo es igual a – 12. Halla el número primo más cercano al número hallado.

23. Los pioneros Gabriela, Patricia y Camilo visitaron 14 viviendas de su consejo popular para la realización de un trabajo práctico y poder determinar la cantidad de personas que usan indebidamente estupefacientes y consumen alcohol.[2] Patricia visitó el doble de la cantidad de viviendas que Camilo, y Gabriela dos hogares más que Camilo. ¿Cuántas viviendas visitó cada pionero?

24. La suma de los dígitos de un número de tres cifras es 18. La cifra de las centenas es el triplo de la cifra de las unidades y la de las decenas excede en tres a la cifra de las unidades. Determina el antecesor y el sucesor de dicho número.

25. La edad actual de Ana aumentada en ocho es igual al duplo de dicha edad disminuido en tres. ¿Qué edad tendrá Ana al cabo de 15 años?

26. La cantidad de toneladas de salsa de tomate elaboradas por la MIPYME

[2] Objetivo 3 del Desarrollo Sostenible. Meta 5

El Edén (micro, pequeña y mediana empresa) de Jiguaní en Granma, este año es igual al 75 % de dicha cantidad aumentado en 3 000.

a) ¿Cuántas toneladas de salsa de tomate se elaboraron este año?

b) Si la MIPYME logró sobrecumplir el plan anual en un 20 %, ¿cuántas toneladas más de salsa de tomate elaboró?

27. En el famoso libro *Álgebra Recreativa* de Y. Perelman encontramos un problema titulado: La ecuación piensa por nosotros; al resolverlo descubrimos que las ecuaciones son a veces más previsoras que nosotros. Busca en este libro ese problema y soluciónalo, será una simpática y enriquecedora experiencia. ¡No dejes de hacerlo! (fig. 3.19).

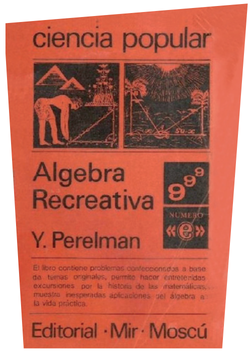


Fig. 3.19

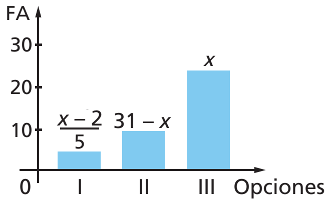
28. La firma de contratos entre productores agrícolas y el Turismo es una provechosa alternativa para consolidar el modelo económico cubano. El primer contrato de esta nueva modalidad consistió en la entrega por parte de la Cooperativa de Créditos y Servicios Fortalecidas (CCSF) Camilo Cienfuegos al hotel "Iberostar Taínos" de una buena cantidad de frutas y vegetales,[3] la tabla 3.9 oculta toda la información sobre el tema. ¿Cuántos kilogramos de cada producto se entregarán al hotel por la CCSF?

Tabla 3.9

Producto	Cantidad de kilogramos
Fruta bomba	$4x - 1{,}05$
Col blanca	$x + 2{,}15$
Tomate	x
Guayaba	$x + 4$
Total	154,9

[3] Órgano de prensa *Juventud Rebelde*, 8 de enero de 2012.

29. El gráfico de barras de la figura 3.20 muestra información sobre el interés vocacional de un grupo de 35 estudiantes de séptimo grado por optar por la especialidad de Maestro Primario en una Escuela Pedagógica. En este gráfico se puede apreciar que en cada techo de la barra aparece una expresión algebraica. ¿A cuántos estudiantes de ese grupo les gusta ser maestro(a) primario(a)?



Leyenda: I: Me gusta, II: Lo estudiaría, pero no es lo que más me gusta y III: No me gusta.

Fig. 3.20

30. En la fábrica donde trabaja el papá de Alexis han hecho un experimento en el que clasifican la basura para saber cuánto beneficio obtendrían si esta pudiera ser reciclada. Alexis con este resultado participó en el Ecocarnaval, evento didáctico de su escuela que promueve la protección del medio ambiente. Para motivar su exposición propuso un ejercicio matemático, utilizó una lámina como la que aparece en la figura 3.21. Analiza la situación siguiente y determina la cantidad de vidrio que se recolectó, si la cantidad de material que hay en cada envase denominados por A, B, C y D representan números naturales consecutivos impares en ese mismo orden y el total de kilogramos recogidos es 96.

Sugerencia: resolverlo por la vía algebraica y la aritmética.

Una experiencia medioambiental

Fig. 3.21

31. Elabora un problema que conduzca a una ecuación lineal con la información siguiente:

a) Cantidad de hembras y varones de tu grupo.
b) Tu edad y la de algún familiar.
c) El consumo de electricidad en tu casa o en tu escuela en dos meses consecutivos.
d) El precio de una tonelada de azúcar en el mercado mundial este año respecto al anterior.
e) La producción de vegetales en nuestro país, comparando con la producción de los dos últimos años.
f) Cantidad de medallas (oro, plata y bronce) obtenidas por Cuba en los últimos juegos panamericanos celebrados.

Ejercicios del capítulo

1. Escribe verdadero o falso según corresponda. En caso de las falsas, argumenta tu respuesta.

a) ___ Las ecuaciones lineales siempre tienen una sola solución.
b) ___ $2a^5 \cdot (-3a^7) = -6a^{35}$.
c) ___ La ecuación lineal $\frac{2}{3}x = \frac{3}{2}$ no tiene solución en el conjunto de los números enteros.
d) ___ El coeficiente del término $\frac{xy}{3}$ es tres.
e) ___ El valor numérico de la expresión $ab^{-1} + 2$, para $a = b$ y $b \neq 0$ es igual a tres.
f) ___ Las longitudes de los lados consecutivos de un rectángulo se expresan por a cm y b cm respectivamente, entonces su perímetro es $4ab$ cm.
g) ___ Al calcular $\frac{2m^2 + 6m^5}{3m^2}$ se obtiene $2m^3 + \frac{2}{3}$.
h) ___ Si dos ecuaciones lineales tienen el mismo conjunto solución con el mismo dominio de la variable, se puede afirmar que son equivalentes.
i) ___ El conjunto solución de la ecuación $3x + 7 = -7 + 3x$ es el conjunto vacío.
j) ___ Los términos $-3m^2n^3p$ y $3n^3pm^2$ no son semejantes.
k) ___ La expresión en lenguaje común: “el 40 % de un número aumentado en siete”, se puede escribir en lenguaje algebraico como $40x + 7$.

2. Marca con una X la respuesta correcta:

a) Si $x = 0{,}1$, entonces el valor numérico de la expresión $x^2 + x + 1$ es igual a:

___ 11,1 ___ 1,11 ___ 111 ___ 0,111 ___ 0,011 1

b) Sea la expresión $A = \left(\frac{p-q}{3}\right)^2$, el valor numérico de A para $p = 1$ y $q = -1$ es:

___ 0 ___ $\frac{1}{9}$ ___ $\frac{4}{9}$ ___ $\frac{1}{6}$ ___ $\frac{4}{3}$

c) Si $x + 0{,}8 = 0{,}7$ y $z - 0{,}9 = 0$, entonces $x + z$ es igual a:

___ $-0{,}8$ ___ $-0{,}6$ ___ 0,1 ___ 0,8 ___ 0,24

d) Si $a^3 = -216$, $\sqrt[b]{64} = 4$ y $5^c = 125$, entonces el valor numérico de $bc - a$ es igual a: ___ 0 ___ 3 ___ 12 ___ 15 ___ 18

e) Si $m = -1$, entonces $(-m)^3 + 3m$ toma valor:

___ -6 ___ -4 ___ -2 ___ 0 ___ 4

f) La longitud del ancho de un rectángulo se expresa por $(2a - 3b)$ dm y la del largo por $(a + b)$ dm. El perímetro de dicho rectángulo se puede expresar por:

___ $(3a - 2b)$ dm ___ $(6a - 2b)$ dm ___ $(6a - 4b)$ dm ___ $(6a - 8b)$ dm

g) Pedro tiene $(n + 1)$ años. Su edad dentro de n años más será:

___ $2 + n + 1$ ___ $n^2 + n + 1$ ___ $n^2 + n$ ___ $2n + 1$ ___ $2n + 2$

h) El perímetro de un triángulo equilátero se expresa por $(x - 6)$ cm, donde x es la longitud de los lados del triángulo. El perímetro de un cuadrado, que su lado tiene la longitud igual a la del lado del triángulo, se puede expresar en centímetro como:

___ $4x - 6$ ___ $\frac{4x}{3} - 2$ ___ $\frac{4x}{3} - 8$ ___ $\frac{4x}{3} - 6$ ___ $\frac{4x}{3} - 24$

i) El producto del cuadrado de $3m$ por el triplo de $4n$ se puede expresar como:

___ $36m^2n$ ___ $108m^2n$ ___ $72m^2n$ ___ $576m^2n^3$ ___ $12mn$

j) Las edades de varias personas se representan por las expresiones algebraicas siguientes, donde x es un número natural mayor o igual que 2:

$x;\ x + 2;\ 2x + 3;\ x;\ x;\ x - 1;\ x + 2;\ x;\ x + 2;\ 2x$

La media de las edades se expresa por:

___ $12x + 8$ ___ $6x + 4$ ___ $\frac{6}{5}x + 0{,}8$ ___ $\frac{x + 2x}{2}$ ___ Ninguna de estas

3. Piensa en una situación de la vida práctica relacionada con la Estadística que se traduzca al lenguaje de las variables mediante la expresión siguiente: $\dfrac{3x+4y+5z}{x+y+z}$.

4. Reduce:

a) $3a + 5b - 2,5a - 4b - b$

b) $\dfrac{x}{3} - 6,9 + \dfrac{2}{3}x + 6 - 2x$

c) $9y^2 - 6y + 2y^2 - 5 + 4y - 11y^2$

d) $3,2a^2b^3 - 1,5a^3b^2 + \dfrac{3}{2}a^3b^2 - 5,4a^2b^3$

e) $2,4x^4 \cdot 10x^5$

f) $-\dfrac{3}{5}y^{12} \cdot 15y^{18}$

g) $1,3a^6b^2z^8 \cdot \dfrac{5}{26}a^2b^4z$

h) $4p^{-2}q^3 \cdot 0,25p^5q^3$

i) $\dfrac{34a^{12}}{17a^9}$

j) $\dfrac{-6b^{35}}{2b^{40}}$

k) $\dfrac{\frac{3}{2}x^7y^8}{\frac{9}{20}x^7y^7}$

l)* $\dfrac{30m^{-5}n^{10}}{6m^{-6}n^{11}}$

m) $\dfrac{36x^8 + 18x^5}{6x^4}$

n) $\dfrac{-15y^{20} + 30y^6 + 25y^{14}}{5y^{14}}$

ñ) $\dfrac{8x^4y^6 - 4x^3y^2 - 12x^5y^6}{-8x^4y^3}$

5. Calcula:

a) $3a \cdot 2a^3$

b) $(-5xy) \cdot (-1,4x^3y^5)$

c) $\dfrac{m^2n}{4} \cdot \dfrac{2mn^3}{3}$

d) $0,7p^3q^4s^3 \cdot \dfrac{10}{7}p^2q^3s$

e) $2x^{-2} \cdot 3x^7$

f) $8y(2y + 7)$

g) $m^2n(3m^3n^2 - mn)$

h) $4p^5(\dfrac{3}{8}p^2 + 0,25p + 2,5)$

i) $\dfrac{256x^4y^5}{16x^2y^2}$

j) $\dfrac{0,3m^8n^{20}}{3m^8n^{21}}$

k) $\dfrac{\frac{2}{5}a^6}{\frac{4}{15}a^4}$

l) $\left(2x^3\right)^2 : 6x^5$

m) $\dfrac{36x^6 + 12x^3}{6x^3}$

n) $\dfrac{125a^5b - 25a^4b^2}{5a^3b}$

ñ) $\dfrac{\frac{1}{2}y^{18} + \frac{1}{4}y^{25}}{0,5y^{20}}$

o) $\dfrac{0,9m^4n^2 + 6m^2n^3 - 1,2mn}{3mn}$

6. Sean las expresiones algebraicas $A = 12x + 6$; $B = 3 - 7x$ y $C = 2x$. Calcula:

a) $A + B - C$

b) $0,5A + B$

c) $C \cdot B + A - 6$

d) $\dfrac{A}{3} - 2C + B$

7. Sean las expresiones algebraicas $M = 2x^2y^3 - x^3y^2$ y $N = 3x^3y^2 + y^3x^2$

a) Determina la expresión $P = 3M + N$.

b) Halla el valor numérico de P para $x = \dfrac{7^{15} \cdot 49^{30}}{7^{76}}$ y $y = \dfrac{0,000\,000\,001}{2^{-9} \cdot 5^{-9}}$ y di a qué conjunto numérico más restringido pertenece el resultado obtenido.

8. Completa la tabla 3.10.

Tabla 3.10

M	N	P	$M - N + P$	$M \cdot N$	$M : N$	$\dfrac{M+N}{P}$
$-3xy$	$\dfrac{2}{3}xy$	$6yx$				
$2a^2b$	$-a^2b$	$\dfrac{ab}{2}$				
$3a^2 + 9b$	$3b$	$6ab$				

9. Halla el conjunto solución de las ecuaciones lineales siguientes:

a) $18 = 3x$ b) $\dfrac{2x}{5} = 6$ c) $x - 2 = -7$ d) $16 - x = 10$

e) $\dfrac{x}{3} - 1 = 3$ f) $3x + 5x = 18$ g) $6x - 2x = -8$ h) $6x - 10x = -20$

i) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{3x}{2} = 2$ j) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} = 5$ k) $2x + 7 = x + 14$ l) $4x - 6 = 3 - 5x$

m) $x = \dfrac{x}{3} + 6$ n) $\dfrac{4x+8}{2} = 2x + 4$ ñ) $3(x - 2) = 2x + x$

10. Resuelve las ecuaciones lineales siguientes:

a) $1{,}5x - 3 = 0$ b) $-2y + 4y = 16$ c) $\dfrac{x}{5} - \dfrac{3x}{5} = 9$ d) $2x - \dfrac{1}{3}x + 1 = 3$

e) $5m + 0{,}5 = 2m + \dfrac{7}{2}$ f) $3x + 19x - 20 = 8x - 1$

g) $9 = 3(p + 2)$ h) $-4(a - 1) + 1 = 0$

i) $3\left(\frac{2}{3}x+1\right)=7$ j) $3x-4=6\left(x-\frac{1}{6}\right)$

11. Completa los espacios en blanco.

a) La mitad de un número aumentado en la unidad es igual a los tres cuartos del número. El número es igual a ________________.

b) La cuarta parte de x es un octavo, entonces el valor numérico de $x + 0{,}25x$ es igual a ________________.

c) El conjunto numérico más restringido al que pertenece la solución de la ecuación $5(x-2)+1=x-3$ es ________________.

d) Al multiplicar el quíntuplo de a^3 y el 20 % de a^2 se obtiene ________________.

e) Al calcular $\dfrac{30a^4b^7c^5+25a^3b^3c^3}{15a^3b^3c^4}$ se obtiene ________________.

12. Lee detenidamente la información siguiente:

– Teresa tiene x años.

– Su hija Sara tiene 25 años menos que ella.

– La edad del papá de Sara excede en seis años a la de su mamá.

a) Completa la tabla 3.11.

Tabla 3.11

Persona	Edad
Teresa	x
Sara	
Papá de Sara	

b) Si la suma de las edades de los tres es igual a 101 años, halla la edad de cada uno.

13. Un ángulo recto se divide en tres ángulos de amplitudes diferentes. La amplitud del mayor de dichos ángulos es el doble que la amplitud del menor y la amplitud del mediano excede en 10° a la del menor. Determina la amplitud de cada ángulo.

14. El consumo de electricidad de una vivienda disminuyó en 20 % en febrero respecto a lo que se consumió en enero. Si el consumo en febrero fue de 120 kWh, ¿cuál fue el consumo de la vivienda en el mes de enero?

15. En la figura 3.22, $\overline{CD}$ es paralelo al lado $\overline{AB}$ del ΔABC.

$\sphericalangle ACB = x$

$\sphericalangle CAB = \dfrac{x}{2} + 5°$

$\sphericalangle BCD = 70°$

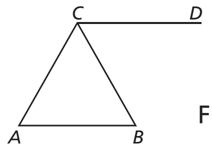


Fig. 3.22

Halla la amplitud de los ángulos interiores del triángulo *ABC.*

16. En una base de campismo para promover la actividad física y el ejercicio al aire libre se alquilan bicicletas. Por la primera hora de alquiler se deben pagar \$ 2,00, y por cada hora después de la primera se pagan \$ 2,50.

a) ¿Por cuánto tiempo alquiló la bicicleta una persona que pagó \$ 14,50?

b) Si una persona alquila la bicicleta por 10 h, ¿cuánto debe pagar?

17. En un triángulo isósceles, la longitud del lado base es igual al triplo de longitud de los lados iguales disminuido en 15 cm, si el perímetro del triángulo es de 40 cm, halla la longitud de cada lado.

18. Pablo realizó los exámenes de ingreso al IPVCE. En Matemática obtuvo cinco puntos más que en Física, y en Historia ocho puntos menos que en Física, por lo que su promedio fue de 94 puntos.

a) ¿Qué nota logró Pablo en cada asignatura?

b) ¿Qué nota debía lograr en Historia para que su promedio fuera de 97 puntos?

19. La madre de Ariel y Heidi les encargó la compra de varios productos agrícolas que le hacían falta para el almuerzo. En la tabla 3.12 se muestran los precios de esos productos.

a) Si Heidi compró un melón por un precio de $ 120,00, ¿cuántas libras tenía el melón?

Tabla 3.12

Producto	Precio
Malanga	$ 30,00 lb
Papa	$ 5,00 lb
Melón	$ 15,00 lb
Ajo	$ 10,00 c/u

b) Ariel, por su parte, compró la misma cantidad de libras de papa que de malanga y, además, 10 cabezas de ajo, por lo que tuvo que pagar un total de $ 625,00.
¿Cuántas libras de malanga compró Ariel?

20. La balanza de la figura 3.23 se encuentra en equilibrio, halla la masa de un cubo y de un cilindro.

Fig. 3.23

21. La torre de la figura 3.24 tiene tres pisos y 46 varillas.
a) Escribe una expresión algebraica que indique el número de varillas necesario para levantar una torre de igual base y n pisos de altura.
b) ¿Cuántas varillas será necesario utilizar para levantar una torre de diez pisos?
c) ¿Cuántos pisos tendrá una torre en la que se utilizaron 111 varillas?

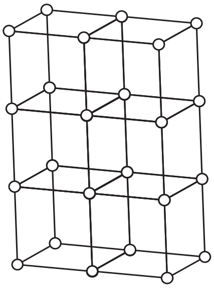


Fig. 3.24

Para la autoevaluación

Reflexiona

1. ¿Para qué se utilizan las variables en Matemática?

2. ¿Cuál es el procedimiento que se utiliza para resolver una ecuación lineal?

3. ¿Conoces los pasos que se deben seguir para resolver un problema con ayuda de las ecuaciones lineales?

Ponte a prueba

1. Lee detenidamente y responde:

1.1 Escribe verdadero (V) o falso (F) según corresponda. En el caso de las falsas, argumenta el porqué.

a) ___ $2a^2b^3c$ y $-\frac{1}{3}cb^3a^2$ son términos semejantes.

b) ___ Las ecuaciones $3x = 12$ y $2x + 3 = x + 7$ no son equivalentes.

c) ___ $\frac{3m^2 + 12m}{6m} = 2m + 2$

d) ___ Si $x_0 = 5$ es la solución de la ecuación $ax + 2 = -3$, entonces el valor de a es (-1).

1.2 Marca con una X la respuesta correcta.

1.2.1 Según el Ministerio de Trabajo y Seguridad Social el número de trabajadores por cuenta propia, hasta mayo de 2012, aumentó en 24 920 personas respecto al 2011. Si designamos por x la cantidad de trabajadores por cuenta propia en el año 2011, podemos afirmar que al cierre de mayo de 2012 ejercían el trabajo por cuenta propia:

a) ___ 24 920x personas b)___ (x + 24 920) personas
c) ___ (2x + 24 920) personas d) ___ (24 920 – x) personas

1.2.2 Si al cierre de mayo de 2012 eran 387 275 las personas que ejercían el trabajo por cuenta propia, entonces en 2011 lo ejercían:
a) ___ 362 355 b) ___ 412 195
c) ___ 26 931 d) ninguna de las anteriores.

1.2.3 Sean *a* y *b* las longitudes de los lados de un paralelogramo. La expresión $\frac{1}{2}(a + b)$ se puede expresar en el lenguaje común como:
a) ___ el 50 % del perímetro del paralelogramo.
b) ___ el 25 % del perímetro del paralelogramo.
c) ___ el duplo de la suma de las longitudes de los lados del paralelogramo.
d) ___ la mitad de la longitud del lado *a* más la longitud del lado *b*.

2. Sean $A = 2x^2$, $B = 3x - 2$ y $C = 0{,}4x \cdot (-10x)$
a) Calcula y simplifica $A \cdot B - C$.
b) Halla el valor numérico de la expresión resultante para $x = -0{,}5$ y di a qué conjunto numérico más restringido pertenece.

3. Con vistas al curso escolar 2012-2013 la Unión Poligráfica produjo, para entregar a las diferentes enseñanzas, entre libros y libretas 54 000 000 de útiles escolares.[4] El duplo de la cantidad de libros que hay que producir excede en 3 000 000 a la cantidad de libretas.
a) ¿Cuántas libretas y cuántos libros produjo la Unión Poligráfica para el curso 2012-2013?
b) Si para el inicio del curso en septiembre se entregaron 25 000 000 de libretas y 13 500 000 millones de libros, ¿qué porcentaje de la cantidad planificada de libretas faltaron por entregar?

[4] Órgano de prensa *Granma,* 2 de julio de 2012.

RESPUESTAS DEL CAPÍTULO 1

Epígrafe 1.1

1. Tres horas y nueve minutos: $3\frac{9}{60}$, números fraccionarios.

12, 1991, nueve días y sesenta pulsaciones: números naturales.

Epígrafe 1.1.1

1. quince días: cardinal, día 15: cardinal,
decimoquinto cumpleaños: ordinal, 15 parejas: contable,
15 regalos: contable, 15 personas: contable,
la número 15: identificación, 15 %: identificación de la fracción porcentaje.

2. a) $\frac{80 \text{ L}}{x} = \frac{24 \text{ h (un día)}}{30 \text{ días (cerca de un mes)}}$

$x = \frac{80 \cdot 30}{1}$ 1 m³ = 1 000 L

$x = 2\ 400$ L

$x = 2{,}4$ m³

3.1 a) V b) V c) V d) V be) V **3.2.1** a) **3.2.2** a)

3.3 Fracción medidora, cantidad de magnitud,
8 848 · 3 = 26 544 *m,* y es una cantidad de magnitud.

3.4 a) F, catorce árboles <u>no</u> es una cantidad de magnitud.
b) F, solo tres números (25 *m,* 20 cm y 100 000 L).
c) V d) F, ninguno lo permite

Epígrafe 1.1.2

1. a) Ciento treinta y cuatro millones.
b) Veintisiete; dos mil tres; cincuenta y cinco millones setecientos sesenta y tres mil ciento ocho; cinco mil.

c) Ciento noventa y nueve mil setecientos veintisiete.
d) Mil novecientos noventa y nueve.
e) Veintidós; dos mil ochocientos; veintiséis mil novecientos setenta y seis.

2. 25 000 000 001

3. a) 91 004 b) noventa y un mil cuatro

4. 1 357

5. a) A = 135; B = 4 801; C = 4 999 b) 4 802 c) 4 998
d) C e) C f) 4 999 > 4 801 > 135

6*. Del 190 al 199 son 10 los 9 que aparecen en las decenas, lo mismo ocurre de 290 a 299 y así sucesivamente, hasta llegar al del 990 al 999. Por lo que se tienen 10 · 9 = <u>90 números</u> en los que la cifra nueve ocupa el lugar de las decenas.

7. 100 000 000 001 — Cien mil millones uno

8.* Después de un buen razonamiento se puede concluir que el único número que satisface todas las condiciones del problema es: <u>6 210 001 000</u>; tiene diez cifras, tiene seis ceros, dos unos, un dos y un seis, de acuerdo con las condiciones planteadas en el problema. Seis mil doscientos diez millones mil.

9. a) Ciento ochenta y dos millones setecientos noventa y un mil doscientas veinticuatro décimas.
b) Setenta y cinco centésimas c) Una milésima
d) Ciento treinta y cinco centésimas e) Treinta y cuatro centésimas

10. a) 48,28 b) 0,150 c) 170,5

11. a) 8 910,5 — Ochenta y nueve mil ciento cinco décimas
b) 891,05 — Ochenta y nueve mil ciento cinco centésimas
c) 8,910 5 — Ochenta y nueve mil ciento cinco diez milésimas

12. a) 7

b) Cuatro millones ochocientos treinta y cinco mil setecientas veinticuatro milésimas
c) centésima

13. 999,994

14. a) 0,75 b) 0,125 c) 4,6

Epígrafe 1.1.3

1. a) No b) No c) No d) No e) No f) No g) No h) No i) No

2. a) 72 b) 35 y 14

3. Para que el número $7\overline{bc}$ sea divisible por dos y tres simultáneamente, c tiene que ser cero o un número par, entonces:

- cuando $c = 0$, b puede tomar el valor dos, cinco y ocho,
- cuando $c = 2$, b puede tomar el valor cero, tres, seis y nueve,
- cuando $c = 4$, b puede tomar el valor uno, cuatro y siete,
- cuando $c = 6$, b puede tomar el valor dos, cinco y ocho,
- cuando $c = 8$, b puede tomar el valor cero, tres, seis y nueve.

4. a) V
b) F, porque también es si sus dos últimas cifras son múltiplo de cuatro.
c) F, porque al dividirlo por 11 el resto no es cero.

5. 330; 390 y 420

6.* 999 999 999 948. Novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve millones novecientos noventa y nueve mil novecientos cuarenta y ocho.

Epígrafe 1.1.4

1. a) Señalo cuatro unidades en el rayo, divido la cuarta unidad en diez partes iguales y tomo siete.
b) Señalo 23 subdivisiones de a en el rayo numérico.
c) Considero 5a, divido la quinta unidad a en cinco subdivisiones de a y tomo tres, en esta última subdivisión señalo $4\frac{3}{5}$.

3. a) $A = \frac{1}{5}$ $C = 1\frac{2}{5}$ $E = 1\frac{3}{5}$ $D = 2\frac{1}{5}$ $B = 3\frac{2}{5}$

Epígrafe 1.1.5

1. a) F b) V c) V d) V e) V f) F
g) F h) V i) V j) V k) V l) V

2. a) $2{,}\overline{5} > 3$ b) $0{,}6 > 0$ c) $5{,}79 < 5,$ d) $2 > \frac{5}{3}$
e) $1 < \frac{4}{3}$ f) $2{,}\overline{2} > \frac{22}{10}$ g) $\frac{3}{4} < 3,$ h) $\frac{1}{2} < \frac{5}{3}$

3. a) $1{,}25 > 1{,}20$ b) $0{,}36 < 0{,}56$ c) $\frac{1}{1} > \frac{1}{2}$ d) $3{,}3 > 3\frac{1}{4}$
e) $1\frac{2}{3} < 3\frac{2}{3}$ f) $\frac{7}{6} > \frac{5}{6}$ g) $\frac{5}{4} > 1$ h) $\frac{6}{2} > 2{,}06$
i) $3\frac{1}{5} = 3{,}2$ j) $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ k) $3{,}25 = 3\frac{1}{4}$ l) $4\frac{4}{5} = \frac{24}{5}$
m) $1{,}34 > 1{,}3\overline{4}$ n) $4\frac{3}{7} < 4{,}5$ ñ) $6{,}125 = 6\frac{1}{8}$

4. El de mayor masa es el *B* y el de menor masa es el D.

5. Debe dedicar nueve partes.

6. Ninguna de estas es verdadera.

Epígrafe 1.1.6

1.

Resultado	Antecesor	Sucesor	Resultado	Antecesor	Sucesor
1.1. a) 338	337	339	b) n. s.		
c) 2 407	2 406	2 408	d) 233 232	233 231	233 233

1.2. 233 232 > 3 407 > 338

2. **2.1** a) 98,6 b) 14,2 c) 95,2 d) 17,6 e) 42,125 f) 9,175
g) 3,15 h) 9,55 i) 49,3 j) 3,55 k) 5,95 l) 4,4

2.2 a) Novecientas ochenta y seis décimas.
c) Novecientas cincuenta y dos décimas.
e) Cuarenta y dos mil ciento veinticinco milésimas.
g) Trescientas quince centésimas.

2.3 Entre 49 y 50 **2.4** Seis **2.5** Cuatro y cinco

2.6. Expresiones decimales: 4,45; 4,5 y 5,3 Fracciones $\frac{23}{5}$, $\frac{11}{2}$ y $\frac{19}{3}$.

3. a) $\frac{3}{3} = 1$ b) $\frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$ c) $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{24}$ e) $\frac{1}{10}$

f) Cuatro g) $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ h) $\frac{1}{24}$ i) Cuatro j) Uno

k) 100 l) Cinco m) $\frac{1}{3}$ n) 25 ñ) $\frac{11}{270}$ o) $\frac{77}{50} = 1\frac{27}{50}$

p) $\frac{289}{70} = 4\frac{9}{70}$ q) $\frac{1}{2}$ r) $\frac{46}{17} = 2\frac{12}{17}$ s) $\frac{703}{16} = 43\frac{15}{16}$ t) $\frac{3}{56}$

3.1 Los resultados obtenidos se encuentran entre los números naturales siguientes:

a) 0 y 2	b) 1 y 2	c) 0 y 1	d) 0 y 1	e) 0 y 1	f) 3 y 5
g) 1 y 2	h) 0 y 1	i) 3 y 5	j) 0 y 2	k) 99 y 101	l) 4 y 6
m) 0 y 1	n) 24 y 26	ñ) 0 y 1	o) 0 y 1	p) 3 y 4	q) 4 y 5
r) 0 y 1	s) 2 y 3	t) 46 y 48	u) 0 y 1		

5. a) Aproximadamente 98 toques.
b) 185 toques. d) 15 toques más.

6. d) 7. 140 kWh. **8.** El 30 de enero. **9.** Leonardo.

10. Primer día: 60 % de 250, por tanto, el primer día recorrió 150 km (fig. 1.82).
Segundo día: La cuarta parte del resto, entonces ; por tanto, el segundo día recorrió 25 km.
Tercer día: Para cumplir el plan de entrenamiento de 250 km en tres días, debe recorrer 75 km, o sea, 50 km más que el segundo día.

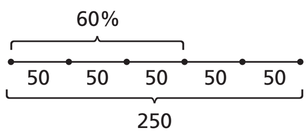


Fig. 1.82

11. Nieves recogió 27 frascos.

12. La masa del quinto bulto es de 198,732 kg.

13. Ver tabla 1.23

Tabla 1.23

Región	Cantidad de delegados
África	462
América Latina	385
Asia	660
Europa	630
Otras regiones	173

15. Ver la figura 1.83.

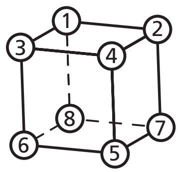


Fig. 1.83

16*. Podemos considerar tres puntos como se muestra en la figura 1.84, en los cuales la diferencia no es menor que $\frac{1}{3}$; pero al ubicar el cuarto punto en ese intervalo, necesariamente la diferencia de ese con uno cualquiera de los otros es menor que $\frac{1}{3}$.

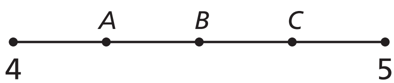


Fig. 1.84

17*. El mayor denominador que tenemos es 12 que contiene a 2, 4, 6 y 12; pero no contiene a 8 ni a 10, de aquí tenemos que:
$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{6+3+2+1}{12} = \frac{12}{12} = 1$, por tanto, los términos que deben suprimirse son $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{10}$.

18. a) $a = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ $\quad b = \frac{13}{15}$ $\quad c = \frac{13}{6}$

Epígrafe 1.1.7

1. **1.1** c) **1.2** a) **1.3** a) **1.4** c) $A = B$ **1.5** c) **1.6** c)

2. Aproximadamente el 10,18 % del total de municipios.

3. $\frac{49{,}2}{1\,000} = \frac{4{,}92}{100} \approx \frac{5}{100}$, sí puede afirmarse.

4.* En cada una de las seis caras, hay ocho cubos con solo una cara pintada, $\frac{64 \cdot 6}{1\,000} \cdot 100 = \frac{384}{10} = 38{,}4$ %.

En las aristas hay ocho cubos con cada uno de 12, solo con dos caras pintadas $\frac{8 \cdot 12}{1\,000} \cdot 100 = 19{,}6$ %.

En cada vértice (8) hay un cubo que tiene solamente tres caras pintadas, $\frac{8}{1\,000} \cdot 100 = 0{,}8$ %.

a) No, porque solo son ocho, hay más posibilidades de escoger uno de los 384 que solo tienen pintada una cara.

5. Wilfredo Sánchez. Al determinar el *average* tenemos:
$\frac{80}{212} \cdot 1\,000 = 377{,}35 \approx 377{,}4$

Agustín Arias. $\frac{69}{183} \cdot 1\,000 = 377{,}049 \approx 377{,}05 \approx 377{,}1$.

Se observa, que cuando se determinó el *average* de Arias hay una aproximación de otra aproximación, debía ser 377,05.

Epígrafe 1.1.8

1. a) 21 b) 36 c) 4

2. Enlaza la pregunta de la columna A con la proporción de la columna B que le pueda dar solución.

A	B
▸ Un trabajador abona 16 surcos en dos jornadas de trabajo. ¿Cuántas jornadas más debe	$\frac{16}{2} = \frac{32}{x}$

A	B
trabajar para terminar de abonar los 48 surcos del huerto?	
▸ Un trabajador abona 16 surcos en dos jornadas de trabajo. ¿Cuántas jornadas debe trabajar para abonar los 48 surcos del huerto?	$\frac{16}{48} = \frac{2}{x}$
▸ Un trabajador abona 16 surcos en dos jornadas de trabajo. ¿Cuántas jornadas debe trabajar para realizar los tres pases de abono que llevan los 48 surcos del huerto?	$\frac{2}{x} = \frac{16}{144}$

3. $\frac{9\ 950 \text{ km}}{x} = \frac{13{,}4 \text{ cm}}{6{,}7 \text{ cm}}$; $x = 4\ 775$ km

4. $\frac{3}{5}$ de $20 = 12$

5. $112\ m^2$

6. $t : z = y : x$, con $x; y; z; t \in \mathbb{Q}_+$; $z \neq 0$; $x \neq 0$

7. Son cuatro en total

8. El tanto por ciento

9. No

10.* Pomos plásticos: 12 Libretas: 18 Latas de refresco: 15

Epígrafe 1.2.1

1.

1.a) $\notin$	b) $\subset$	c) $\subset$	d) $\subset$	e) $\in$
f) $\subset$	g) $\notin$	h) $\subset$	i) $\in$	j) $\not\subset$
k) $\notin$	l) $\subset$	m) $\in$	n) $\in$	ñ) $\in$
o) $\subset$				

2.

a) Sí	b) No	c) Sí	d) No	e) Sí
f) Sí	g) Sí			

3. Ver la tabla 1.24

Tabla 1.24

Situación	a	$\|a\|$	$-(a)$	$-[-(a)]$	Dominio numérico más restringido al que pertenece a
Los termómetros de mercurio solidifican a trece grados Celsius bajo cero	– 13	13	13	– 13	Enteros ($\mathbb{Z}$)
Charo debe veinte pesos con cincuenta centavos	–20,50	20,50	20,50	–20,50	Racionales ($\mathbb{Q}$)
Oscar ni perdió ni ganó	0	0	0	0	Naturales ($\mathbb{N}$)
75 años antes de nuestra era	– 75	75	75	– 75	Enteros ($\mathbb{Z}$)
El cajetín escolar se coloca a diez milímetros del borde inferior derecho de la hoja de papel	10	10	–10	10	Naturales ($\mathbb{N}$)

4. c) , porque el módulo de cualquier número es positivo.

5. a) V b) F, porque solo hay dos, (0 y 17)
c) F, porque los números naturales también son enteros
d) V e) F, porque están a la misma distancia

6*. Siempre Anachel sacará un número entero porque los números naturales y sus opuestos son números enteros.

7*. a) 5 pares b) 21 pares c) $n + 1$ pares

Epígrafe 1.2.2

2. $A = -2{,}4$; $B = 0{,}5$; $C = 1{,}6$; $D = \frac{16}{10}$; $E = -1{,}4$; $F = 2{,}2$

3. a) 3 y 4 b) – 3 y – 2 c) – 1 y 0 d) 0 y 1 e) – 2 y – 1

4. c) F, porque es un número entero negativo.
d) F, porque los enteros negativos no pertenecen al conjunto de los números fraccionarios.
f) F, porque las expresiones decimales finitas negativas no pertencen al conjunto de los números fraccionarios.

5. $|5| = 5$; $|-5| = 5$; $|7{,}8| = 7{,}8$; $\left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$; $|0| = 0$; $|3{,}4| = 3{,}4$; $|-1{,}75| = 1{,}75$.

6. a) Sí, porque son números fraccionarios. b) B
c) – 21,5 y – 36 d) 22 e) Infinitos f) $\frac{215}{36}$

7. a) $C = \{33; 5; 0; 3\}$ b) $A \cup C = \{33\}$

8. a) 3y – 3 b) 0 c) 1,5y – 1,5 d) ninguno e) $x \in \mathbb{Q}$; $x \geq 0$

9. Porque solo tiene que pagar el 75 % del total.

Epígrafe 1.2.3

1. $1 > 0{,}5 > \frac{1}{10} > -1{,}6 > -1{,}75 > -8$

2. $a > d$ $\underline{a < e}$ $\underline{b > c}$ $\underline{c > e}$ $\underline{a < b}$ $d > c$

3. a) $\frac{3}{4} < \frac{6}{5}$ porque $\underline{15 < 24}$.
b) El número – 100 pertenece al conjunto de los números racionales.
c) $-\frac{1}{21} = -\frac{2}{42}$ porque tienen igual módulo.
d) El conjunto de los números fraccionarios es un subconjunto del conjunto <u>de los números racionales.</u>
e) $0 > -\frac{1}{2}$ porque $-\frac{1}{2}$ está situado a la izquierda del cero en la recta numérica.
f) El módulo de – 2,45 es <u>2,45.</u>

4. $-0{,}2$ y $\frac{1}{10}$

5. $-0{,}600$

6. $\{-1; -0{,}8; -0{,}6\}$ $\{-1{,}4; -1{,}2; -1\}$ $\{-10; -8; -6\}$

$C = 135$ $F = \frac{47}{4} = 11\frac{3}{4}$

7. a) V b) F, porque C también lo es. c) F, porque es el de C.

d) F, porque es el de E. e) V f) F, es E g) V h) V

i) F, porque E está más cerca de cero en la recta numérica. j) V

8. a) porque $-21\ °C < -20\ °C$

9. 211 valores enteros

10. a) Poligonal. Sí, porque se permite realizar análisis de la tendencia de la temperatura.

b) Mayor a las 11 horas, fue menor a las 7 horas.

c) Sí, porque son números enteros y $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}_+$ d) Sí, a las nueve horas

12. a) Sí b) 19,30 segundos c) 31/05/08

d) Sí, 0,9 y $-0{,}9$ e) Poligonal (fig. 1.85)

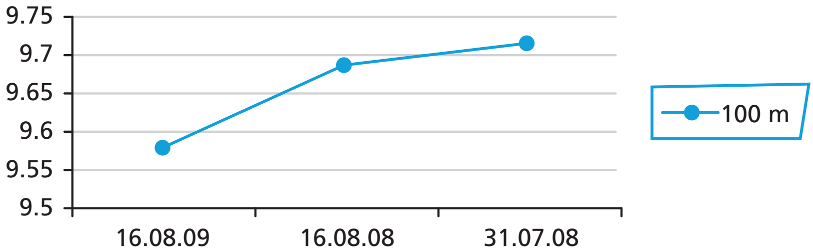


Fig. 1.85

Epígrafe 1.3.1

1. a) $-81\ 297$ b) -50 c) 1 191, 23 d) $\frac{29}{8} = 3\frac{5}{8}$

e) $-55{,}5$ f) 2 344 060

2. a) 22 438 b) $-45{,}5$ c) -118 d) $-1\ 736$ e) $-14{,}34$

f) 0 g) $-\frac{89}{8} = 11\frac{1}{8}$ h) $-188{,}4$ i) 6 652,23 j) 7,8

3. a) 830 b) – 17,25 c) $-\frac{26}{45}$ d) 0 e) $-\frac{46}{75}$ f) 0 g) – 2 736

4. Ver la tabla 1.25.

Tabla 1.25

A	3	1,2	1,9	– 7	– 9,3
B	7	– 2	0	– 1,5	10
$a + b$	10	– 0,8	1,9	– 8,5	0,7
$a + b < a$	F	V	F	V	F
$a + b > a$	V	F	F	F	V

5. a) – 6 + 6 = 0 b) – 5 + 7 = 2 c) 2 + (– 5) = – 3 d) – 1 + (– 4) = – 5
5.1 $A = -4 + 6 = 2$ $B = -7 + 5 = -2$ $A + B = 0$

6. a) 28 = 28 b) 28 = 28 c) 6 ≠ 28 d) 6 ≠ 28 Son diferentes los resultados.

7. a) $A = -16,6$; $B = -145$; $C = \frac{17}{50}$ b) Sí
c) No, porque es fraccionario. $D = -\frac{17}{50}$ d) 145
e) Entre – 17 y – 16 f) $E = -146$ g) 128

8. a) 13 b) – 17 c) – 452 d) 100 e) 685 f) 0 g) – 6 h) – 6 i) $-\frac{157}{1\,725}$ j) 0

9. – 1; 0 y 1 – 1 + 0 + 1 = 0

Epígrafe 1.3.2

1. a) – 4 b) – 10 c) – 2 d) 15 e) 7 f) – 1,8
g) – 13,5 h) $-\frac{1}{2}$ i) $-\frac{11}{12}$ j) $-\frac{1}{36}$

2. a) Todas. b) Eurasia. c) Fosa subglacial Bentley d) Falso

3. 4 337 m

4. a) – 114 b) – 34,7 c) – 101 d) $\frac{54}{11} = 4\frac{10}{11}$

e) $\frac{61}{42} = 1\frac{19}{42}$ f) $\frac{18}{70} = \frac{9}{35}$ g) $\frac{223}{180}$ h) $\frac{7}{9} - \frac{151}{9} = -16$ i) – 2

5. a) No, porque $\frac{1}{4} \notin \mathbb{Z}$ b) Sí

c) – 127 734 066; – 37,2 y – 0,754 d) 25 y $\frac{1}{4}$

e) Ciento veintisiete millones setecientos treinta y cuatro mil noventa y uno.

6. a) $x = -1\,080$ b) $x = 55{,}65$ c) $a = -34$ d) $b = 0$ e) – 0,11 f) $z = -\frac{3}{2}$

7. 34

8. a) $m = 7$ b) $s = 6$

Epígrafe 1.3.3

1. a) positivo b) positivo c) negativo

2. a) 300 b) – 16,2 c) – 0,087 6 d) $-\frac{1}{2}$ e) – 4

f) $\frac{1}{120}$ g) 0 h) – 17,67 i) – 214,3 j) $-\frac{7}{9}$

3. a) V b) F, es cero c) F, es uno d) V

e) F, es – 1,0 f) F, es – 5 g) F, es 8,4 h) F, es 28,5

4. – 2 y 6

5. a) – 3 b) – 0,6 c) 2 d) – 3,8 e) $-\frac{1}{3}$

f) $-1\frac{1}{5}$

6. a) positiva b) negativa c) positiva

d) negativa e) negativa f) positiva

7. a) De 5 b) De 8 c) De 4

8. a) – 879 670 b) – 12 c) – 336 d) – 1,1 e) $\frac{2}{15}$ f) – 350

9. – 88 476

10. Puedes obtener siete números racionales diferentes.

12. $A = -17{,}82$ $B = -2\,479\,810$

12.1 a) V b) V c) F, el opuesto de $\frac{1}{3}$ es $-\frac{1}{3} \notin \mathbb{Q}_+$ d) V

12.2.1 b) **12.2.2** b) **12.2.3** c)

13.* $A = 9$ $L = 4$ $S = 7$ $V = 2$ $O = 8$ $R = 1$

$-3(9\,497) = -28\,491$

14. Multiplicando por – 1

15. ocho; cuatro y cero

16. Ver la tabla 1.26.

Tabla 1.26

a	*b*	*c*	*a* · *b*	*a* · *c*	|*a*| · |*b*|	*a* · (*b* + *c*)
– 2,5	$\left(-\frac{8}{15}\right)$	– 25	$1\frac{1}{3}$	$62\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{3}$	$63\frac{5}{6}$
12	6,5	$\left(\frac{1}{4}\right)$	78	3	78	81
$\left(\frac{7}{9}\right)$	$\left(-\frac{27}{14}\right)$	$\left(-\frac{18}{63}\right)$	$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{9}$	$1\frac{1}{2}$	$-1\frac{13}{18}$

17. a) 6 b) Ver la tabla 1.27.

Tabla 1.27

– 45	25	20	– 30
10	– 20	– 15	– 5
– 10	0	5	– 25
15	– 35	– 40	30

Epígrafe 1.3.4

1. a) $-1,40\overline{6}$ b) -880 c) 206 d) -6 e) $0,05\overline{3}$
f) $-0,41$ g) $-1\,717$ h) $0,079\,\overline{179\,1}$ i) 0 j) No está definido.

2. a) V b) F, porque $-600 : (-5) = 120 > 0$ c) F, porque $-12,8 : (-12,8) = 1$

3. a) No
b) Toronto $-19,32 \approx -19,3$ Beijing $-15,42 \approx -15,4$
Bogotá $-9,96 \approx -10$ Moscú $-23,96 \approx -24$
Área de la Antártida $-36,4$
d) Mayor en Bogotá; menor en el área de la Antártida

4. a) $x = -12$ b) $x = -5$ c) $b = \frac{3}{2}$ d) $x = -30$
e) $z = 24$ f) $a = -6$ g) $y = -\frac{3}{7}$

5. a) $1,6$ b) -32

6. a) 60 b) -21

7. $-24,012\,5$

8. -105

9. a) 309 b) $-102,5$ c) $23,\overline{3}$ d) $-0,35$ e) -403
f) $1,6$ g) $87,5$ h) 24 i) 25 j) -265

Epígrafe 1.3.5

1. a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ c) $\frac{45}{8} = 5\frac{5}{8}$ d) $\frac{14}{26}$ e) $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ f) $-\frac{31}{60}$

g) $-\frac{281}{40} = -7\frac{1}{40}$ h) $\frac{1}{2}$ i) $\frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$ j) $\frac{59}{30} = 1\frac{29}{30}$ k) $0,1$

l) $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ m*) $\frac{41}{48}$

2. a) -2 b) 0 c) 4 d) 35 e) 2 f) $-0,75$ g) $\frac{149}{20}$

3. $P = -28$ $Q = 6,25$ $R = \frac{1}{7}$ $T = 148$ $U = -0,\overline{3}$

3.1 Sí, porque es el opuesto de una expresión decimal infinita periódica
3.2 a) – 928 b) 140 c) – 140 d) – 172 e) – 1 040

5*. Después de la rebaja

6. Se comercializan 15 951 140

7. 216 cm.

Epígrafe 1.4

1. a) 38,44 b) $-\frac{8}{125}$ c) 81 d) – 32

2. a) +, base positiva
b) –, base negativa exponente impar
c) –, base negativa exponente impar
d) +, base positiva
e) +, base negativa exponente par
f) –, base negativa exponente impar
g) –, base negativa exponente impar
h) –, base negativa exponente impar
i) –, base negativa exponente impar

3.* $\left(\frac{3}{4}\right) = (9+4)(3-16) = -169$ $\left(\frac{3}{2}\right) = (9+2)(3-4) = -11$

$\left(\frac{1}{5}\right) = (1+5)(1-25) = -144$ $\left(\frac{3}{1}\right) = (9+1)(3-1) = 20$

$$\frac{-169-11+144}{2} = \frac{-180+144}{2} = \frac{-36}{2} = -18$$

4. No, $(-3)^4 = 81$, $(-2)^5 = -32$.

5*. $2+4+\ldots+1\,728-1-3-5-\ldots-1\,727$
$747\,360 - 746\,496 = 864$

Epígrafe 1.4.1

1. a) 1 b) $-\frac{1}{8}$ c) 512 d) – 3

2. a) 256 b) 46,24 c) $\frac{1}{1\,024}$ d) 1 e) 7 056 f) 1 g) $\frac{1}{2}$

3. **3.1** a) V b) F, solo se cumple para el producto de potencias de igual base. c) F, es $7^5 = 49^2 \cdot 7$ d) V

3.2.1 c) **3.2.2** c) **3.2.3** c) **3.2.4** b) **4.*** $P = 16\ 777\ 211$

Epígrafe 1.5

1. I) científica II) exponencial, diez, uno, diez
III) módulo, número, positivo, derecha, IV) científica

2. Ninguna de las anteriores **3.** $1{,}47 \cdot 10^{11}$

4. F, es $1{,}001 \cdot 10^{-3}$ **5.** 3 456 755 300 000 000

6. a) $9{,}38 \cdot 10^{6}$ c) 8 653 723

7. a) Año 1996: $1{,}12 \cdot 10^{11}$ b) 75 % de 112 000 000 000 es: 84 000 000 000
Año 2006: $1{,}96 \cdot 10^{11}$ 112 000 000 000 + 84 000 000 000 = 196 000 000 000

8.* $(-10)^{3\,125} = -\underbrace{10 \ldots 0}_{3\,125 \text{ ceros}} = -(-\underbrace{10\ldots0}_{3\,125 \text{ ceros}}) = \underbrace{1\,0\ldots0}_{3\,125 \text{ ceros}}$

ningún cero: $\dfrac{10^0 + 2}{3} = 1$, un cero: $\dfrac{10^1 + 2}{3} = 4$,

dos ceros: $\dfrac{10^2 + 2}{3} = 34$, tres ceros: $\dfrac{10^3 + 2}{3} = 334$,

cuatro ceros: $\dfrac{10^4 + 2}{3} = 3\,334$, cinco ceros: $\dfrac{10^5 + 2}{3} = 33\,334$,

3 125 ceros: $\dfrac{10^{3\,125} + 2}{3} = \underbrace{3\ldots\ldots 3}_{3\,124 \text{ números } 3}4$

La cantidad de números tres es uno menos que el exponente.

Epígrafe 1.6

1. a) = 65 536 b) = 343 c) = 218 275,84 d) = 27 000
e) = 53 290 000 f) $= -\dfrac{1}{64}$ g) ≈ 0,448 9 h) ≈ 0,001 225 i) = 8

2. a) ≈ 823,7 b) ≈ 386 464,682 304 c) ≈ 22,09
d) ≈ 958,585 256 e) ≈ 116,5

3. a) $V \approx 0{,}578\ 0\ u^2$ b) $V \approx 0{,}015\ 680\ u^2$ c) $V \approx 3\ 112\ 500\ u^2$

4. **4.1** b) **4.2** c) **4.3** b)

Epígrafe 1.7

1. a) ocho b) – 8 c) 15 d) 9 e) $\frac{4}{5}$ f) $\frac{3}{5}$ g) 10^{-1} h) 10^{-6}
i) 2,4 j) ≈ 1,35 k) ≈ 2,82 l) ≈ 2,07 m) ≈ 43,301
n) ≈ 28,414 o) ≈ 0,295 p) ≈ 6,279 q) ≈ 9,47 r) ≈ 2,18

2. a) 2,4 b) 9,47 c) ≈ 2,82 d) ≈ 30,2 e) ≈ 43,3 f) ≈ 0,292

3. $\overline{BC} \approx 5{,}97$ cm **4.** **4.1** c) **4.2** c) **4.3** a)

Epígrafe 1.8

1. a) ≈ 26,13 b) ≈ – 4 c) ≈ 0,966

2. $A = -4$ $B = -6{,}45$ $C = 49$ D ≈ 2 E ≈ 8 $F = -8{,}39$
2.1 c) **2.2** a) – 67, …, – 8 b) 4 u c) 2

3. En cuatro unidades. **4.** a) 13

5. Aproximadamente 43 %

6. En cuatro días se atrasa 26 minutos aproximadamente y en cuatro semanas tres horas.

Epígrafe 1.9.1

1. a) Asistencia a la biblioteca. b) En diciembre con 441.
c) En octubre asistieron 299 personas más que en enero. d) El 3)

2. **2.1** a) El total de medallas doradas obtenidas por estos cinco países es 372.

b) La cantidad total de medallas obtenida por México superó en 99 a las obtenidas por Cuba.
c) Los países que tienen una cantidad impar de preseas de plata son Colombia y República Dominicana.
d) Si Venezuela hubiera obtenido tres medallas de plata menos, entonces representaría la tercera parte del total de medallas venezolanas.
e) Cuba obtuvo el 42 % de medallas de oro.
f) El total de medallas de plata de Cuba es al total de medallas de plata de los cinco primeros países como uno es a cinco.

3. b) El total de trabajadores es 4 043. Los trabajadores hombres son: 2 245 y representan aproximadamente el 66 % del total.
c) Hay mayor cantidad de trabajadores en el nivel medio superior, ya que es la barra de mayor altura.
d) La cantidad de trabajadores del nivel medio superior, excede en 2 454 trabajadores a la cantidad de graduados universitarios.
e) Sí, es el más idóneo, ya que permite comparar de una forma rápida y sencilla.
f) Sí son cantidades contables.

4. a) Circular o de pastel
b) Pertenecen diez negocios.
c) Lo supera en cinco negocios.

Epígrafe 1.9.2

1. a) 1; 2; 2; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 4; 4; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 6; 6
b) Ver la tabla 1.28.

Tabla 1.28

Lectura	Conteo	F_i	f_i
1	/	1	$\frac{1}{19} = 0{,}053$
2	~~////~~	5	$\frac{5}{19} = 0{,}263$
3	/ / /	3	$\frac{3}{19} = 0{,}158$

Lectura	Conteo	F_i	f_i
4	//	2	$\frac{2}{19} = 0{,}105$
5	~~////~~	6	$\frac{6}{19} = 0{,}316$
6	//	2	$\frac{2}{19} = 0{,}105$

Ordenar los datos de forma creciente.

1. Construir una tabla de siete filas y cuatro columnas, para distribuir las tiradas por lecturas y determinar el número de tiradas que pertenecen a cada una.

2. En la primera fila se escribe, la identificación de cada columna y en la primera columna, las lecturas en orden ascendente.

3. Como hay valores repetidos, se hace el conteo, se ubican en la segunda columna; en la tercera columna, la suma de cada conteo realizado, o sea, la F_i.

4. En la cuarta columna, se ubica el cociente entre la F_i y la cantidad total de datos, o sea, la f_i.

c) La lectura más frecuente es cinco.

d) En nueve tiradas.

e) No se altera, el valor que es cuatro, aunque se hagan los cambios y después se ordene, se mantiene el valor.

2. a) Ver la tabla 1.29.

Tabla 1.29

Países	F_i	f_i
Uruguay	2	$\frac{2}{21} = 0{,}09$
Francia	2	$\frac{2}{21} = 0{,}09$
Italia	4	$\frac{4}{21} = 0{,}19$
Alemania	4	$\frac{4}{21} = 0{,}19$

Países	F_i	f_i
Brasil	5	$\frac{5}{21} = 0,24$
Inglaterra	1	$\frac{1}{21} = 0,05$
Argentina	2	$\frac{2}{21} = 0,09$
España	1	$\frac{1}{21} = 0,05$

b) Brasil c) aproximadamente 24 %

Epígrafe 1.9.3

1. a) Gráfica de barra. b) Sí, permite comparar de manera muy sencilla.
c) De Ucrania. d) Lo supera en 2 502. e) De Ucrania.
f) 5 499 aproximadamente.

2. a) Gráfico poligonal.
b) Con el objetivo de analizar la tendencia del comportamiento de la asistencia en los primeros días del mes.
c) El segundo día. d) Aproximadamente 97 %.

3. a) Pictograma, es una forma organizada de ilustrar la información de una manera muy llamativa, en que se utilizan figuras o símbolos propios; para representar cantidades dispuestas en la misma fila o columna.
b) En el 2011 c) 13 donaciones por año.

4. Asistencia al campismo el fin de semana
4.1 a) La opción 3 b) 175 hombres
c) No, sería de la manera siguiente:
Recopilar los datos necesarios.
Organizar los datos recopilados por categorías (mujeres, hombres y niños).
Cuantificar los datos, haciendo el conteo correspondiente.
Calcular el porcentaje de mujeres, hombres y niños que asistieron.
Construir el gráfico tomando en consideración los cálculos realizados.

5. Los gráficos son más amigables para mostrar la información, sobre todo cuando son grandes grupos de datos y necesitamos procesar la información.

Epígrafe 1.9.4

1. **1.1** c) **1.2** Ver la tabla 1.30.

Tabla 1.30

Notas	Conteo	F_i	f_i
50	//	2	$\frac{2}{15} = 0{,}133$
60	///	3	$\frac{3}{15} = 0{,}2$
70	///	3	$\frac{3}{15} = 0{,}2$
80	/	1	$\frac{1}{15} = 0{,}06$
90	////	4	$\frac{4}{15} = 0{,}267$
100	//	2	$\frac{2}{15} = 0{,}133$

Es más fácil analizar las alternativas dadas.

a) Es evidente que todas las frecuencias absolutas no son iguales.

b) La FR correspondiente a la nota de 100 es: $\frac{2}{15}$.

c) La media es: $75{,}\overline{3}$.

d) La moda es la nota de 90 puntos con cuatro repeticiones.

e) Hay seis estudiantes con notas iguales o superiores a 80 puntos, por tanto, esta opción es la correcta.

2. a) 53,3 % b) La media es 2,3 y la moda es tres.

Para hallar la media aritmética, se multiplica cada categoría por su frecuencia absoluta (F_i), se adicionan los productos y la suma se divide por la suma de las frecuencias absolutas.

La moda es la categoría con la mayor frecuencia absoluta.

3. a) V b) V c) F d) F e) V

4. a) Gráfico de barra b) El 3) c) 34,8 %

5. 93 puntos.

6. a) Ver la tabla 1.31

Tabla 1.31

Persona	Participación en la Liga
Brasil	361
Italia	346
Cuba	319
Japón	230
Francia	209
Bulgaria	198

Los datos es conveniente representarlos en una gráfica de barras para poder comparar la participación de los países en la Liga.
b) Brasil, porque fue el país que más juegos ganó (286).

7. **7.1** Ver las tablas 1.32 y 1.33.

Tabla 1.32

Grupo A	
Calificación	F_i
46	1
50	1
60	2
70	2
80	**5**
90	4

Tabla 1.33

Grupo B	
Calificación	F_i
46	1
50	1
52	1
54	1
70	3
80	**4**
88	1
90	2
100	1

7.2 a) GA: 74,4 GB: 73,3 b) En ambos grupos la moda es 80 puntos.
c) GA: 86,7 % GB: $73,\overline{3}$ %

7.3 El grupo A es el de mejores resultados porque el promedio de notas es 74,4 y además solo dos estudiantes están suspensos.

7.4 El de barra.

8. T: Total de estudiantes. $\frac{7}{T} = 0,2$; $T = 35$.

a)

Edad	FA	FR
11	7	0,2
12	21	0,6
13	7	0,2

b) 12

c) La mayoría de los estudiantes tiene 12 años.

d) El de barras, porque permite comparar; también pudiera ser un gráfico de pastel,…

9*. $\frac{x + y + z + t + w}{5} = 6$ $\frac{x + y + z + t}{4} = 7$

Sustituyendo $28 + w = 30$ $x + y + z + t = 28$

$w = 2$

El número eliminado es 2.

10*. Sí, $X = \{6; 6; 6; 4; 8\}$ La moda es seis, con tres repeticiones.

La media aritmética $\frac{6 + 6 + 6 + 4 + 8}{5} = 6$

Ejercicios del capítulo 1

1. Le faltan por resolver nueve problemas para completar su preparación.

2. El primer lugar recibe 2 900 CUP, el segundo lugar recibe 1 000 CUP y el tercer lugar recibe 600 CUP.

3. a) La matrícula del grupo es de 32 estudiantes.
b) En la secundaria básica hay: 245 estudiantes aprobados y 77 estudiantes suspensos.
c) Los estudiantes aprobados representan aproximadamente el 76,1 % de la matrícula de la secundaria básica.

4. a) El precio de los cuatro productos es 201,60 CUP y el precio de los seis productos es 241,80 CUP.
b) El precio medio es aproximadamente 44,34 CUP.

5. a) No existe moda, todos los valores son diferentes.
b) No sería un buen representante porque la media sería 21,2 kg aproximadamente y solo hay un niño que tiene una masa corporal de 21,1 kg.

6. a)

Programas	FA	FR
M	8	0,26
D	8	0,26
I	6	0,2
N	3	0,1
C	5	0,16

b) El 16,7 % aproximadamente.
c) El noticiero.
d) Los musicales y deportivos.
e) No, porque la variable es cualitativa.

8*. Los datos son: – 3; – 3; – 3; – 4; – 4; – 4; – 4; – 4 y la moda es – 4 porque es el dato que más se repite.

9. a) Sí, porque ha descendido más.

10. a) $A = -0{,}47$ $\quad B = 119{,}6$ $\quad C = -3$ $\quad D = \frac{9}{40}$
b) No, porque son números fraccionarios.
c) Sí, porque $-3 < -0{,}47 < \frac{9}{40} < 119{,}6$ d) $F = \left\{-111{,}6; -\frac{9}{40}\right\}$
e) Infinitos. La diferencia es 122,6.

11. a) Sí, cumple con los dos propósitos.

12. * 125 6893 + 4 – 7 * 1234 567 890 * 123 456 7890
* $\frac{148}{296} + \frac{35}{70} = 1$ * 234 5679 – 8 – 1

14. 1. a) $3{,}7 \cdot 10^{12}$ 2. a) $6{,}6 \cdot 10^{9}$ 3. a) $2 \cdot 10^{10}$

15*. Los números no positivos son los negativos y el cero, por tanto, de 36 posibles tiradas diferentes, solo:

a) $\frac{21}{36} = \frac{7}{12}$ b) $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$, el 50 %

18. **18.1** Ver la tabla 1.34.

Tabla 1.34

País	Oro	Plata	Bronce
Estados Unidos	39	41	33
China	38	32	18
Japón	27	14	17
Reino Unido	22	21	22
ROC	20	28	23
Australia	17	7	22
Países Bajos	10	12	14
Francia	10	12	11
Alemania	10	11	16
Italia	10	10	20
Canadá	7	6	11
Brasil	7	6	8
Nueva Zelanda	7	6	7
Cuba	7	3	5
Hungría	6	7	7

18.2 La cantidad de medallas de oro que más se repite son diez y siete.

18.4

$$x = \frac{33 + 18 + 17 + 22 + 23 + 22 + 14 + 11 + 16 + 20 + 11 + 8 + 7 + 5 + 7}{15}$$

$x = \frac{234}{15}$ = 15,6 ≈ 16 medallas de bronce.

RESPUESTAS DEL CAPÍTULO 2

Epígrafe 2.1.1

2. b) Figura 2.52, tres rectas; figura 2.53, seis rectas; figura 2.54 dos rectas.
d) Figura 2.52, ocho semirrectas; figura 2.53, dieciséis semirrectas y figura 2.54, doce semirrectas.

5. b) Por un punto pasan infinitas rectas, d) La recta es ilimitada.
f) Un punto situado entre los puntos extremos de un segmento que equidista de ellos es su punto medio.
h) Dos segmentos consecutivos tienen solamente un extremo común.
i) Si dos puntos diferentes están en el mismo semiplano de borde *r*, el segmento que los une no corta a la recta borde *r*.

6. Diez rectas: *AB*, *AC*, *AD*, *AE*, *BC*, *BD*, *BE*, *CD*, *CE*, *DE*.

7. a) $\sphericalangle ABP$, $\sphericalangle PBC$, $\sphericalangle ABC$, b) $\sphericalangle ABP$, $\sphericalangle PBE$, $\sphericalangle EBC$, $\sphericalangle ABE$, $\sphericalangle PBC$, $\sphericalangle ABC$.

8. En la figura 2.57 no son consecutivos, no tienen igual vértice.
En la figura 2.58 no son consecutivos, no tienen un lado común.

9. a) Ángulos que se pueden colocar consecutivamente a un lado de una recta: $\sphericalangle CAB + \sphericalangle EDF + \sphericalangle QPO$; $\sphericalangle CAB + \sphericalangle IHG + \sphericalangle LJK$;
$\sphericalangle ÑMN + \sphericalangle URS + \sphericalangle ACB$; $\sphericalangle URS + \sphericalangle EDF + \sphericalangle LJK + \sphericalangle JHG$.
b) Se pueden formar seis ángulos consecutivos alrededor de un punto realizando la combinación de dos casos anteriores.

10. c) Es falsa porque dos ángulos complementarios entre sí suman 90°, si ambos fueran rectos sumarían 180°.

11. d) 48°

12. a) Sobreobtuso b) Obtuso c) Llano d) Agudo e) Agudo

13. Para un ángulo cualquiera α, su suplemento es $180° - \alpha$ y su complemento es $90° - \alpha$, por tanto, la diferencia entre el suplemento y el complemento sería:

$$180° - \alpha - (90° - \alpha) = 180° - \alpha - 90° + \alpha = 90°.$$

Epígrafe 2,1,2

2. *A*: Trapecio
B: No hay suficientes datos para clasificarla
C: Paralelogramo
D: Paralelogramo

3. Es fácil construir un polígono no convexo de lados iguales, por ejemplo, tú puedes construir un polígono no convexo análogo al de la figura 2.84, con lados iguales; pero la regularidad está dada en los polígonos no solamente por los lados iguales, sino también, por los ángulos interiores iguales y no puede construirse un polígono no convexo regular.

5. Pensamos en una poligonal abierta porque el punto inicial no coincide con el punto final.

7. *ABCDEFGHIJ*: decágono no convexo, *KMNOP*: pentágono convexo, *QRST*: cuadrilátero convexo, *UVW*: triángulo convexo, *FGHIJK*: exágono convexo, *LMNOP*: pentágono no convexo, *QRSTUVW*: heptágono convexo.

9. I: equilátero, II: escaleno, III: isósceles, IV: rectángulo.

10. *ABC* rectángulo, *HGI* isósceles, *JLK* acutángulo, *MNO* obtusángulo, *QRP* escaleno, *DEF* equilátero.

Epígrafe 2,2,1

2. a) $P \in r$ b) $r \cap s = \{M\}$ y $M \in r, s$ c) $n \cap m = \{N\}; m \cap p = \{P\}; M \in n, m; P \in m, p$ d) $A \notin a$ e) $a \cap b = \{C\}; c \cap b = \{A\}; a \cap c = \{B\}$ y $C \in a, b; B \in a, c; A \in b, c$ f) $e = f$, todos sus puntos coinciden.
Cinco posibilidades (fig. 2,371):

Fig, 2,371

5,1 a) Tres rectas b) Una recta **5,2** a) Ninguna b) Una recta

6. b) Paralelas

7.* Si $a \| b$ entones $b \| a$ **(Simetría del paralelismo de rectas)**
Premisa: $a \| b$ *Tesis*: $b \| a$
Demostración: Si $a \| b$ entonces $a = b$ o $a \cap b = \phi$ por definición de rectas paralelas.
De lo anterior, se cumple también que $b = a$ y $b \cap a = \phi$, por la relación igualdad de conjuntos y la operación intersección de conjuntos, (Capítulo 1, epígrafe 1,3,1).
De donde $b \| a$ por definición de rectas paralelas.

8.* Si dos rectas r y s tienen dos puntos comunes diferentes, entonces son iguales.
Premisa: $P, Q \in r; P, Q \in s; P \neq Q$ *Tesis*: $r = s$.
Demostración: por reducción al absurdo, supongamos que: $r \neq s$ y como $P, Q \in r; P, Q \in s$ y $P \neq Q$ por premisa, tenemos dos rectas diferentes que contienen dos puntos comunes distintos, lo cual contradice el axioma que plantea que la recta por dos puntos diferentes es única, Luego lo supuesto es falso y se cumple el teorema.

9.* Dos rectas diferentes a y b tienen a lo sumo un punto común P.
Premisa: $a \neq b$ *Tesis*: "tienen a lo sumo un punto común", eso significa que no tienen puntos comunes ($a \cap b = \phi$) o que tienen en común uno solamente ($a \cap b = \{P\}$).
Demostración: por reducción al absurdo, supongamos que no se cumple la tesis, es decir, que estas rectas no tienen ni uno ni ninguno de los puntos en común, por lo tanto, tienen por lo menos dos puntos comunes diferentes, Luego, aplicando la propiedad que acabamos de demostrar en el ejercicio 8*, estas rectas son iguales: $a = b$. ¡Contradicción en la premisa $a \neq b$!

10. *Conclusión*: Si una recta corta a una de dos rectas paralelas, entonces corta a la otra, Esta propiedad se demostrará en el próximo epígrafe.

Epígrafe 2,2,2

5. El punto P estará en la intersección de la mediatriz de $\overline{AB}$ y de la mediatriz de $\overline{AC}$, porque los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos del segmento,

6.* Si $a \parallel b$ y $c \parallel b$ entonces $a \parallel c$ **(Principio de comparación respecto a un tercero)**

Premisa: $a \parallel b$ y $c \parallel b$ *Tesis*: $a \parallel c$

Demostración: Si $a \parallel b$ entonces $a = b$ o $a \cap b = \phi$ por definición de rectas paralelas.

Si $c \parallel b$ entonces $c = b$ o $c \cap b = \phi$ por definición de rectas paralelas, Luego $a = b = c$, de donde $a = c$; solo faltaría fundamentar que $a \cap c = \phi$, lo cual probaremos por reducción al absurdo, Supongamos que las rectas a y c no son paralelas, es decir, se cortan en un punto P, entonces por el punto P pasa la recta a y $a \parallel b$ por premisa, pero también pasa por el punto P la recta c y ahora $c \parallel b$, Luego tenemos dos paralelas a y b a la recta c, por un punto exterior P y es única, ¡Contradicción!

7.* Si $a \parallel b$ y $b \parallel c$ entonces $a \parallel c$ **(Transitividad del paralelismo de rectas)**

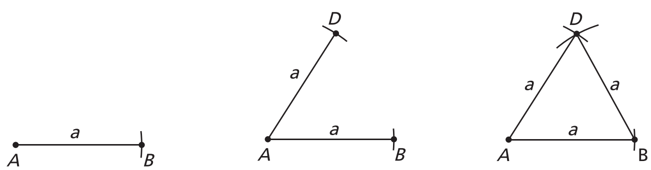
Premisa: $a \parallel b$ y $b \parallel c$ *Tesis*: $a \parallel c$

Demostración: Por premisa $a \parallel b$ y también $b \parallel c$, pero si aplicamos a esta última relación la simetría del paralelismo de rectas, propiedad ya demostrada en el ejercicio 7 del epígrafe anterior, tenemos que $c \parallel b$ y ahora podemos aplicar el principio de comparación respecto a un tercero, que se demostró en el ejercicio 6, anterior a este, de donde si $a \parallel b$ y $c \parallel b$ entonces $a \parallel c$.

8. *Conclusión*: Si dos ángulos tienen sus lados respectivamente paralelos, entonces son iguales.

9. Podemos utilizar la propiedad de la conclusión del ejercicio 7, es decir, trazar un ángulo cuyos lados sean paralelos al ángulo dado, tal ángulo es de igual amplitud que el ángulo dado, luego si lo medimos obtenemos la amplitud de ángulo deseado.

10.* Construcción del triángulo equilátero de lado de longitud a (fig. 2,372):

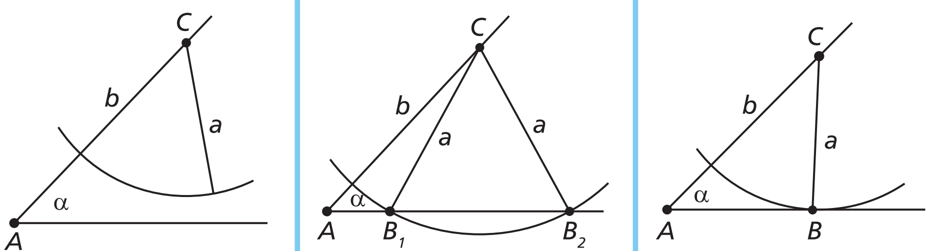


Fig, 2,372

11.* Propiedad geométrica: si una recta corta a una de dos rectas paralelas, entonces corta a la otra.
Premisa: sean $r \,||\, s$ y t una recta que corta a s en un punto P.
Tesis: t corta a r también.
Demostración: por reducción al absurdo, supongamos que: $t \,||\, r$ y como por premisa $s \,||\, r$ luego se tiene, aplicando el ejercicio 6 ya demostrado, que: $t \,||\, s$, ¡Contradicción! Pues por la premisa, la recta t corta a la recta s en un punto P, Lo supuesto es falso, se cumple el teorema.

12.* Construcción ΔABC con un ángulo agudo α y lados de longitud a y b con $a < b$.
Sea h la distancia de C al lado $\overline{AB}$ o altura del lado $\overline{AB}$, Existen tres posibilidades (fig. 2,373).

($a < h$) No hay solución	($a > h$) Hay dos soluciones *Soluciones*	($a = h$) Hay una solución



Fig, 2,373

Epígrafe 2,2,3

1. a) $\beta = 152°$ b) α es agudo c) Los ángulos $\measuredangle ABP$ y $\measuredangle PBC$ son iguales.
d) ABP es un triángulo isósceles.

2. Toda pareja de ángulos adyacentes son suplementarios, pero no toda pareja de ángulos suplementarios cumple los requisitos de los ángulos adyacentes.

3. Obtuso; obtuso; perpendiculares.

5. $\sphericalangle AMB = \sphericalangle EMD$; b) $\sphericalangle BME = \sphericalangle FMC$; c) $\sphericalangle AMB + \sphericalangle AMF = \sphericalangle DME + \sphericalangle CMD$

6. $\sphericalangle DOC = 43°$; $\sphericalangle BOC = 137°$; $\sphericalangle AOD = 137°$; $\sphericalangle AOC = 180°$; $\sphericalangle BOD = 180°$

7. Verdadera, porque si son consecutivos están ubicados uno a continuación de otro, con el vértice y un lado en común y si, además, suman 180°, cumplen todos los requisitos de los ángulos adyacentes.

8. a) β b) $\sphericalangle AOB = \sphericalangle DOC$ c) Iguales

9. *Conclusión*: Dos ángulos del mismo tipo que tienen lados perpendiculares son de igual amplitud.

10. Las semirrectas p y q no son opuestas porque no forman un ángulo $\sphericalangle(p, q)$ llano, pues:
a) $\sphericalangle(p, q) = \sphericalangle(p, r) + \sphericalangle(r, q) = 147° + 53° = 200°$
b) $\sphericalangle(p, q) = 93° + 65° = 158°$

11.* a) Todo ángulo igual a su adyacente es recto.
Premisa: α y β adyacentes, $\alpha = \beta$ *Tesis*: $\alpha = 90°$
Demostración:
$\alpha + \beta = 180°$ por adyacentes.
$\alpha + \alpha = 180°$ sustituyendo β
$2\alpha = 180°$
$\alpha = 90°$ lqqd.
b) Todo ángulo recto es igual a su adyacente.
Premisa: α y β adyacentes, $\alpha = 90°$ *Tesis*: $\alpha = \beta$
Demostración:
$\alpha + \beta = 180°$ por adyacentes.
$90° + \beta = 180°$ sustituyendo α.
$\beta = 90°$
Luego $\alpha = \beta$ lqqd.
c) Si dos ángulos son iguales, entonces sus adyacentes son iguales.
Premisa: $\alpha = \alpha^*$ y β, β^* sus respectivos adyacentes *Tesis*: $\beta = \beta^*$
Demostración:
$\alpha + \beta = 180°$ por adyacentes $\alpha^* + \beta^* = 180°$ por adyacentes
$\cancel{\alpha} + \beta = \cancel{\alpha^*} + \beta^*$ comparando igualdades

Luego $\beta = \beta^*$ lqqd.

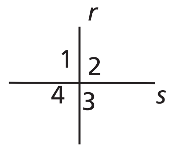
d) Dos rectas *r* y *s* perpendiculares se cortan formando cuatro ángulos rectos (fig. 2,374).

Premisa: sean *r* y *s* rectas con $r \perp s$, que determinan al cortarse $\sphericalangle 1$, $\sphericalangle 2$, $\sphericalangle 3$ y $\sphericalangle 4$.

Tesis: $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 = \sphericalangle 3 = \sphericalangle 4 = 90°$.

Demostración: Si $r \perp s$, por definición de perpendicularidad, uno de los ángulos $\sphericalangle 1$, $\sphericalangle 2$, $\sphericalangle 3$ o $\sphericalangle 4$ es recto, Sin perder generalidad sea: $\sphericalangle 1 = 90°$.

$\sphericalangle 3 = 90°$ por opuesto por el vértice con $\sphericalangle 1$, $\sphericalangle 2 = 90°$ y $\sphericalangle 4 = 90°$ por ser adyacentes respectivos de ángulos rectos $\sphericalangle 1$ y $\sphericalangle 3$, Luego: $\sphericalangle 1 = 90°$, $\sphericalangle 2 = 90°$, $\sphericalangle 3 = 90°$, $\sphericalangle 4 = 90°$,



Fig, 2,374

Epígrafe 2,2,4

1. Son falsas los incisos a), c), d) y f)

a) Falso, porque tienen un vértice común.

c) Falso, porque las rectas *r* y *s* no son paralelas.

d) Falso, porque los ángulos no tienen el vértice común y no están situados del mismo lado de una recta.

f) Falso, porque los ángulos no están formados por semirrectas opuestas.

2. a) Correspondiente; opuesto por el vértice b) $\sphericalangle 16$; $\sphericalangle 14$
c) Conjugado; $\sphericalangle 5$ d) $\sphericalangle 14$; correspondiente e) $\sphericalangle 7$; $\sphericalangle 2$

3. a) Por ser ángulos correspondientes entre paralelas, b) Por ser ángulos conjugados entre paralelas, c) Por ser ángulos alternos entre paralelas, d) Por ser ángulos adyacentes, e) Por ser ángulos opuestos por el vértice.

4. a) F, no se especifica que las rectas sean paralelas, b) F, no se especifica *cada pareja de alternos* porque todas las parejas de alternos no son iguales, c) V

5. Son falsas: c) $\sphericalangle 4$ y $\sphericalangle 5$ son conjugados sus amplitudes suman 180°, f) $\sphericalangle 4$ y $\sphericalangle 8$ son correspondientes.

6. a) Alterno; correspondiente b) $\sphericalangle 10$; $\sphericalangle 2$ c) Alterno; $\sphericalangle 15$ d) $\sphericalangle 16$; correspondiente.

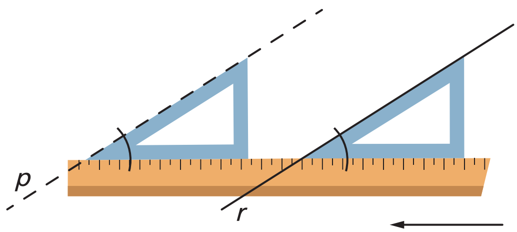
7. $\beta = 28°$; $\lambda = 152°$; $\sphericalangle 1 = 76°$

8. a) $\alpha = 67°$; $\beta = 65°$ b) $\theta = 25°$; $\alpha = 80°$ c) $\theta = 48°$; $\alpha = 76°$

9. $\beta = 65°$

10.* Como $\beta = 65°$ por los cálculos del ejercicio 8 y $\alpha = 65°$ por datos y son correspondientes, tenemos una pareja de ángulos correspondientes iguales y aplicando la afirmación dada se cumple que $h \parallel g$.

11.* Al realizar la construcción, la pareja de ángulos que se señala en la figura 2.375 tienen igual amplitud, pues se trata del mismo ángulo del cartabón, pero además de ser iguales son correspondientes, luego las rectas entre las cuales están estos ángulos son paralelas, según el ejercicio anterior, es decir, $p \parallel r$.



Fig, 2,375

Epígrafe 2,3

2. a) ΔCOD b) ΔAOB c) Simetría axial de eje OB d) $\overline{BC}$ e) $\overline{OD}$ f) $\overline{FC}$ g) ΔAOB h) La simetría central es una rotación particular con un ángulo de 180°.

5. En las figuras: 3, 5, 6, 7, 8 de la figura 2.211 la recta trazada es un eje de simetría.

6. a) Rotación de centro A y ángulo DAB b) Reflexión de eje AD c) Traslación de dirección $\overline{BB'}$ d) Simetría central de centro C

e) Rotación de centro *A* y ángulo *BAB'*.

7. *Conclusión:* al aplicar dos simetrías axiales consecutivas del mismo eje a una figura, esta se transforma en sí misma, La composición de dos simetrías axiales del mismo eje es igual a la transformación idéntica.

8. a) V b) V c) V d) F, esta recta es perpendicular al eje de simetría, e) F, porque el centro es el centro de la rotación, pero el ángulo tiene que ser de 180°, f) V g) F, toda figura y su imagen por un movimiento son iguales.

9. 1) Simetría central de centro *O*, 2) Rotación de centro *O* y ángulo de 90°, 3) Rotación de centro *O* y ángulo de 60°, 4) (2) Rotación de centro *O* y ángulo de 90°.

10. a) 2 b) 3 y 2 c) 4

Epígrafe 2,4,1

1. 50°

2. 52°

3. 67°

4. Según propiedades estudiadas,

5. $\measuredangle 1 = 120°$; $\measuredangle 2 = 145°$

6. 360°

7. 360°

8. $\measuredangle CAE = 65°$, $\measuredangle ACE = 25°$, $\measuredangle ACB = 80°$, $\measuredangle CBE = 35°$

9. No puede ser un ángulo recto porque sería su adyacente interior recto y su igual también recto y con ello, la suma de sus amplitudes daría mayor que 180° al sumar la amplitud del tercer ángulo del triángulo, Tampoco puede ser agudo porque su adyacente interior sería obtuso y con ello se tendrían los dos ángulos interiores iguales, obtusos y la suma de sus amplitudes daría mayor que 180° y sí pudieran ser obtusos, pues así sus ángulos interiores iguales serían agudos.

10.* Teorema de los terceros ángulos

Premisa: α, β, γ ángulos del $\triangle ABC$

α^*, β^*, γ^* ángulos del $\triangle A'B'C'$ con $\alpha = \alpha^*$ y $\beta = \beta^*$.

Tesis: $\gamma = \gamma^*$

Demostración: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ y $\alpha^* + \beta^* + \gamma^* = 180°$ por suma de amplitudes de los ángulos de un triángulo.

$\alpha + \beta + \gamma = \alpha^* + \beta^* + \gamma^*$ comparando ambas igualdades.

$\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \beta + \gamma^*$ sustituyendo $\alpha = \alpha^*$ y $\beta = \beta^*$,

$\gamma = \gamma^*$

Epígrafe 2.4.2

1. Es una afirmación falsa, porque no cumple con estas dimensiones la desigualdad triangular.

2. a) No b) Sí c) No d) Sí

3. a) 3 cm

4. a) 3 cm

5. y **6.** Deben escribirse estos números considerando la desigualdad triangular.

7. $d < a + a = 2a$.

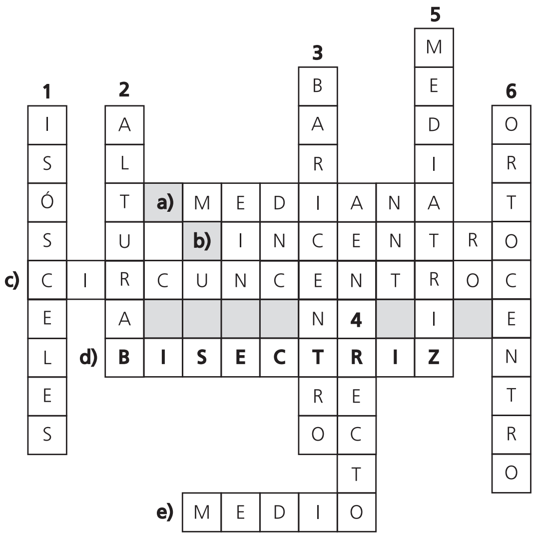
8. $d < a + a = 2a$.

9. La correcta es la c), porque se cumple la desigualdad triangular.

10. El recorrido más corto es *AODBO*.

Epígrafe 2.4.3

1. Crucigrama (fig. 2.376)



Fig, 2.376

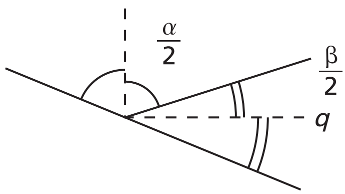
2. a) V b) F, solamente en triángulos equiláteros o si se trata de la bisectriz del ángulo principal de un triángulo isósceles, c) F, equidista de los vértices del triángulo, d) F, equidista de los lados del triángulo, e) V f) F, solo si pasa perpendicularmente.

8. Falso, cada altura corresponde a uno de los lados del triángulo y no necesariamente tienen que ser iguales las tres alturas, esto sucede en los triángulos equiláteros, Los triángulos isósceles tienen solamente dos alturas iguales, Aunque las alturas sean diferentes, para calcular el área del triángulo, se puede utilizar cualquiera de estas indistintamente, para multiplicarla por la longitud de su lado correspondiente y dividirla entre dos para obtener tal área.

9.* Si dos ángulos son adyacentes sus bisectrices forman un ángulo recto.
Premisa: α, β ángulos adyacentes cualesquiera y *p, q* sus respectivas bisectrices.
Tesis: $\sphericalangle(p, q)$ es recto.
Demostración: Ver la figura 2.377.

$$\sphericalangle(p, q) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} =$$

$$= \frac{\alpha + \beta}{2}$$



Fig, 2.377

$= \dfrac{180}{2}$

$= 90$

10. *Conclusión:* la mediatriz, la mediana y la altura de la base de un triángulo isósceles coinciden.

11. *Conclusión:* el baricentro, el ortocentro y el circuncentro de un triángulo están en una recta llamada Recta de Euler, Traza un triángulo, determina su baricentro, ortocentro y circuncentro y comprueba que están alineados.

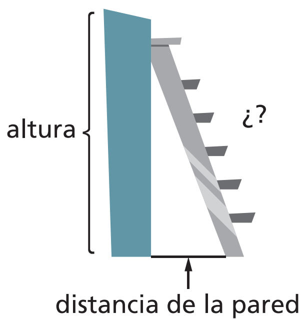
Epígrafe 2.4.4

1. La hipotenusa es el mayor lado de un triángulo rectángulo porque se opone al ángulo recto que es el ángulo mayor.

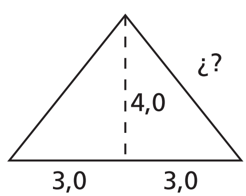
2. En los triángulos rectángulos la longitud de la hipotenusa es menor que la suma de las longitudes de los catetos por la desigualdad triangular.

3. Aplicando el teorema de Pitágoras (fig. 2.378) se puede calcular la altura que alcanza la escalera en esta posición:
$(\text{altura})^2 = (\text{longitud de la escalera})^2 - (\text{distancia a la pared})^2$
$h^2 = (5)^2 - (3)^2 = 25 - 9 = 16$
Si $h^2 = 16$ entonces $h = 4{,}0$ cm (altura de la escalera)

4. $l^2 = (3)^2 + (4)^2 = 9 + 16 = 25$ (fig. 2.379)
(Por el teorema de Pitágoras)



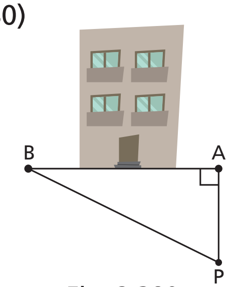
Fig, 2.378



Fig, 2.379

5. Sus ángulos agudos son complementarios, porque tiene un ángulo recto, por suma de las amplitudes de los ángulos interiores restan 90° para los dos ángulos agudos.

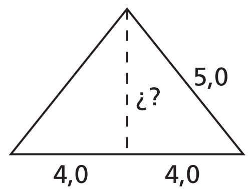
6. $\overline{PB}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AB}^2$ por teorema de Pitágoras (fig. 2.380)
$\overline{AP} = 12\ m$
$\overline{PB} = 20\ m$
$\overline{AB}^2 = 20^2 - 12^2 = 400 - 144 = 256$
$\overline{AB} = 16\ m$
Respuesta: La distancia entre A y B es 16 m.



Fig, 2.380

7. Comparamos $(22)^2$ y $(12)^2 + (15)^2$; 484 > 369, Respuesta: el triángulo es obtusángulo.

8. $h^2 = (5)^2 - (4)^2 = 25 - 16 = 9$ por el teorema de Pitágoras (fig. 2.381)
Respuesta: la longitud de la altura es 3.0 cm.



Fig, 2.381

9.* Porque cada una de sus alturas forma con su lado correspondiente y otro lado consecutivo, un triángulo rectángulo, en el cual este es cateto y el lado hipotenusa, Luego la suma de las tres alturas (catetos) es siempre menor que los lados del triángulo (hipotenusas) por desigualdad triangular.

10.* $h^2 = (20)^2 - (10)^2 = 400 - 100 = 300$ por el teorema de Pitágoras
$300 = 3 \cdot 100$; $\sqrt{300} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{100} = \sqrt{3} \cdot 10 = 1{,}7 \cdot 10 \approx 17$ cm
Respuesta: la longitud de la altura del triángulo es 17 cm.

Epígrafe 2.4.5

1. No existen cuadriláteros convexos con todos sus ángulos interiores obtusos porque la suma de sus amplitudes sería mayor que 360°.

2. No existen cuadriláteros convexos con todos sus ángulos interiores agudos porque la suma de sus amplitudes sería menor que 360°.

3. 63°, 117°, 63°, 117°

4.
- Un paralelogramo que tiene un ángulo recto es un rectángulo, porque como los ángulos opuestos son iguales y los consecutivos conjugados, los cuatro son rectos.
- Un cuadrilátero convexo que tiene cuatro lados iguales es un rombo, porque los lados opuestos son también iguales y luego es también un paralelogramo y si, además, todos los lados son iguales cumple las propiedades del rombo.
- Un paralelogramo que tiene dos lados consecutivos iguales es un rombo, porque si es paralelogramo los lados opuestos a estos son iguales y con ello todos los lados son iguales y de esta forma es un rombo.

5. Rombo.

6. La amplitud del ángulo opuesto al dado es 57° y los otros dos son de 123°.

7. a) Opuestos b) Se bisecan c) Suman 180° d) Iguales y paralelos (tabla 2.10).

Tabla 2.10

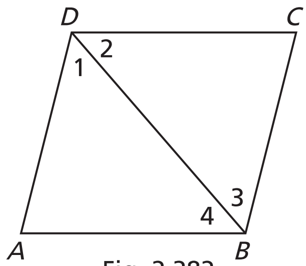
R	A	E	**I**	**P**	**A**	**R**	**A**	**L**	**E**	**L**	**O**	**S**
E	W	D	**G**	L	S	O	S	U	T	B	O	A
C	R	**S**	**U**	**M**	**A**	**N**	**180°**	Q	T	T	B	I
T	D	T	**A**	G	**S**	**0**	**T**	**S**	**E**	**U**	**P**	**O**
O	F	G	**L**	P	Ñ	U		E	V	F	P	O
S	G	**S**	**E**		**B**	**I**	**S**	**E**	**C**	**A**	**N**	F
A	B	I	**S**	E	C	T	R	I	C	E	S	H

8.* Los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales.
Premisa: *ABCD* paralelogramo de ángulos interiores $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$, $\sphericalangle D$
Tesis: $\sphericalangle A = \sphericalangle C$ y $\sphericalangle B = \sphericalangle D$
Demostración: Consideremos una diagonal de *ABCD* (fig. 2.382), Sin perder generalidad sea esta *BD* y sean las parejas de ángulos consecutivos determinadas por esta en los ángulos interiores: $\sphericalangle D = \sphericalangle 1 + \sphericalangle 2$ y $\sphericalangle B = \sphericalangle 3 + \sphericalangle 4$.

Por otro lado:

∢1 = ∢3 alternos determinados por los lados paralelos de *ABCD*: *AD* || *BC* y la secante *BD*.

∢2 = ∢4 alternos determinados por los lados paralelos de *ABCD*: *AB* || *CD* y la secante *BD*.



Fig, 2.382

De donde se sigue: ∢1 + ∢2 = ∢3 + ∢4, es decir: ∢*B* = ∢*D* (I)

Los triángulos *ABD* y *DBC* tienen dos parejas de ángulos iguales, luego por terceros ángulos: ∢*A* = ∢*C* (II), De I y II se cumple la tesis.

Epígrafe 2.4.6

1. 14 cm, **2.** 20 cm.

3. ∢*U* = 90°; ∢*R* = 90°; ∢*T* = 115°; ∢*S* = 65°.

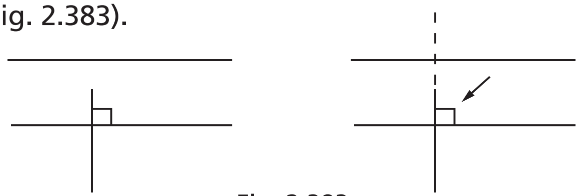
4. a) ∢*P* = 38°; ∢*R* = 142°, b) ∢*Q* = 64°; ∢*R* = 116°; ∢*S* = 116°.
c) ∢*P* = 46°; ∢*S* = 134°; ∢*R* = 134°; ∢*S* = 46°.

5. Trapecio isósceles o cuadrado.

6. Suman 180° porque también son ángulos conjugados entre los lados paralelos del trapecio que determinan estos ángulos y como tal tipo de ángulo sus amplitudes suman 180°.

7. Sí, en ese caso sería un trapecio particular: el rectángulo.

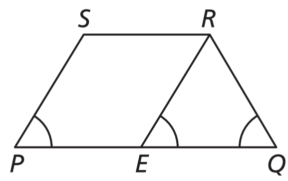
8. Sí, existe un trapecio con dos ángulos rectos, porque necesariamente al cortar perpendicularmente a una de dos paralelas (en este caso los lados paralelos del trapecio) se corta perpendicularmente también a la otra (fig. 2.383).



Fig, 2.383

9. Un trapecio de tres ángulos rectos por suma de amplitudes de los ángulos de un cuadrilátero tiene que tener el cuarto ángulo recto y es un trapecio particular: el rectángulo.

10.* En todo trapecio isósceles los ángulos adyacentes a una misma base son de igual amplitud.
Premisa: *PQRS* trapecio isósceles de bases $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$, o sea: $\overline{PS} = \overline{QR}$.
Tesis: $\measuredangle P = \measuredangle Q$ y $\measuredangle S = \measuredangle R$ (fig. 2.384)
Demostración: Considera la construcción auxiliar: $\overline{RE} \parallel \overline{PS}$ con $E \in \overline{PQ}$, así queda determinado *PERS* paralelogramo de lados opuestos iguales, en particular: $\overline{PS} = \overline{RE}$ y como $\overline{PS} = \overline{QR}$ por premisa, se sigue por transitividad: $\overline{RE} = \overline{RQ}$ y con esto ΔERQ isósceles de base $\overline{EQ}$ y sus ángulos base iguales: $\measuredangle E = \measuredangle Q$ (I).



Fig, 2.384

Pero $\measuredangle E = \measuredangle P$ (II) por correspondientes entre las paralelas *PS* y *RE*, con la secante *PQ*, de (I) y (II) tenemos: $\measuredangle P = \measuredangle Q$.
Falta probar $\measuredangle S = \measuredangle R$, pero como la demostración es más sencilla la dejamos al estudiante.

Epígrafe 2.5.1

1. **1.1** a) **1.2** c) **1.3** b) **1.4** b)

2. Ver la tabla 2.11.

Tabla 2.11

Elementos de la circunferencia	Notación
Radios	$\overline{AO}, \overline{EO}, \overline{OB}$
Cuerdas	$\overline{AD}, \overline{DB}, \overline{EB}, \overline{AC}, \overline{CB}, \overline{AB}$
Diámetro	$\overline{EB}$
Arcos	*EA, AD, DB, AB, CB, EC, CA, EB, ECB, ED*

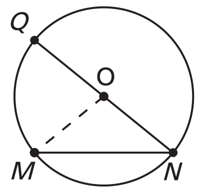
2.1 a) $\widehat{EC} < 180°$ b) $\widehat{EAB} = 180°$ c) $\widehat{EBD} > 180°$

6. a) P no pertenece a la circunferencia porque como centro su distancia al centro de la circunferencia es 0 cm, no es igual al radio 2 cm.
c) F, los puntos que se encuentran a una distancia menor que la longitud del radio no pertenecen a la circunferencia, todos los puntos de la circunferencia equidistan del centro.

8. El diámetro es la mayor de las cuerdas, por tanto, tiene 14 cm.

9. Esta es una condición suficiente, dos circunferencias iguales se diferencian solamente en su posición respecto al plano en que están situadas, existe un movimiento que transforma una en la otra, No sucede así con las circunferencias idénticas que deben tener igual

10.* centro también.
Premisa: $\overline{NQ}$ diámetro, $\overline{MN}$ cuerda.
Tesis: $\overline{NQ} > \overline{MN}$
Demostración: Tracemos el radio por el punto M (fig. 2.385).
$\overline{MO} + \overline{ON} > \overline{MN}$ por desigualdad triangular en MNO.
$r + r > \overline{MN}$ por definición de radio.
$2r > \overline{MN}$
$\overline{NQ} > \overline{MN}$ por definición de diámetro.



Fig, 2.385

Epígrafe 2.5.2

4.1 Exterior; tangente; secante.
4.2 Tangente 1 punto; secante 2 puntos; exterior ninguno.

Epígrafe 2.5.3

1. a) Radios: AO, BO, OE; diámetros: BE cuerdas: AC, BE
b) y c) Arcos: $\widehat{EC}$, $\widehat{AE}$, $\widehat{AD}$, $\widehat{AB}$, $\widehat{BC} < 180°$ b) $\widehat{EOB} = 180°$
$\widehat{EBC}$, $\widehat{ACE}$, $\widehat{ABD}$, $\widehat{ACB}$, $\widehat{BAC} > 180°$

3. a) F, No todas son iguales, porque las circunferencias concéntricas con radios diferentes no son iguales.

b) V, En este caso de los puntos como tal de la circunferencia tienen dos puntos comunes y son secantes, pero no deja de ser cierto que de los puntos llamados interiores van a tener puntos comunes, que es en definitiva lo que se afirma aquí.

c) V, Son iguales porque son diámetros, todos los diámetros tienen igual longitud.

d) F, Los extremos de toda cuerda son centralmente simétricos solo si se trata de un diámetro.

e) V, Siempre equidistan porque son puntos de la circunferencia y equidistan del centro a la distancia llamada radio.

4. 8,0 cm.

5. No puede ser 7,0 cm la distancia entre los centros porque no se cumpliría la desigualdad triangular en los dos triángulos formados por los dos centros y respectivamente cada uno de los puntos de intersección.

6. No son precisos los datos, porque es necesario conocer también la distancia entre los centros de las circunferencias, porque es posible con estos radios construir circunferencias que cumplan los tres casos a), b), c) y la respuesta no sería única.

Epígrafe 2.6.1

1. 1: *A, F* 2: *B, C, D* 3: *E, C, D, B* 4: *B, C, D* 5: *A, F*

4. Cada segundo de un año está representado al multiplicar 300 000 km recorridos por la luz en un segundo por 365 días del año, por las 24 h de cada día, por los 60 min de cada hora y por los 60 s de cada minuto.

5. Estos recursos podrían durar aproximadamente:
Carbón: 977 576 000 : 4 672 658 = 209,211 973
Petróleo: 1 056 805 000 : 24 345 016 = 43,409 501 14
Gas natural: 146 439 000 000 : 2 268 329 000 = 64,558 095 40

Epígrafe 2.6.2

1. **1.1** c) L **1.2** a) L **1.3** a) mL

2. a) 24 cm b) 27 cm^2

3. a) 74°, 74°, 32° b) Trapecio; 89 cm^2

4. b) 27 m^2 **5.** b) 69 cm^2

6. Opción 1: 370 m^3 de agua **7.** b) 18 cm^2

8. d) 50 % **9.** b) 6,0 cm^2

10. 20 cm^2 **11.** b) 147 cm^2 **12.** a) 22 m^2 b) 66 m^3

13.* a) Volumen del aula 48 m^3 b) Pintura con agua: 4,8 L; superficie que se quiere pintar: (45 m^2 – 4,6 m^2) = 40,4 m^2
Cálculo del rendimiento: 40,4 : 10 = 4,4 L para los 4,8 L que se tiene alcanza la pintura.

Ejercicios del capítulo

1. 19 triángulos y 7 cuadriláteros

2. a) Los triángulos *ADM*, *MCB* y *AMB* son isósceles rectángulos (isorrectángulo), b) $\sphericalangle DAM = \sphericalangle DMA = \sphericalangle MAB = \sphericalangle MBA = \sphericalangle CMB = \sphericalangle CBM = 45°$
$\sphericalangle ADM = \sphericalangle MCB = \sphericalangle AMB = \sphericalangle DAB = \sphericalangle CBA = 90°$

3. $\sphericalangle ABF = 66°$, $\sphericalangle HCD = 57°$

4. Porque el ángulo opuesto por el vértice al $\sphericalangle 2$, que tiene su misma amplitud por serlo, está del mismo lado que los ángulos $\sphericalangle 1$ y $\sphericalangle 3$ respecto a una misma recta, luego suman 180°.

5.* a) Si el ángulo de 60° es uno de los ángulos base, entre los dos sus amplitudes suman 120° y el tercero tiene que medir también 60° por la propiedad de la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo, Si es el ángulo principal el que mide 60°, por la propiedad de la suma mencionada los dos ángulos restantes juntos miden 120° y como se trata de los ángulos base que son iguales al dividir esta suma en dos ángulos iguales se obtiene 60°.

b) Porque esta y ambas mitades de la hipotenusa son radios de la circunferencia circunscrita al triángulo rectángulo, que existe según teorema de Tales.

c) Porque en cada uno de los tres triángulos rectángulos determinados por las alturas, respectivamente, cada altura es el cateto que es de menor longitud que cada lado del triángulo original que es hipotenusa en los tres pequeños triángulos, Si se suman estas tres desigualdades se obtiene la tesis planteada.

6. a) F, porque en un triángulo isósceles los lados que no son base tienen la misma longitud y a lados iguales se oponen ángulos iguales, por tanto, los ángulos base son iguales.

b) F, porque en un triángulo equilátero los ángulos interiores tienen una amplitud de 60°.

c) e) f) h) k) y m) son proposiciones verdaderas: V

d) F, porque la mediana, la altura, la mediatriz que coinciden son las relativas a la base.

g) F, porque la longitud del diámetro de una circunferencia es el doble de la su radio.

i) F, porque el cuadrilátero que posea un par de lados opuestos paralelos se llama trapecio, para ser paralelogramo debe tener dos pares de lados opuestos paralelos o ser un par de lados opuestos paralelos e iguales.

j) F, porque el rombo solo tiene los cuatro lados iguales y para ser cuadrado los lados tienen igual longitud y los ángulos interiores tienen una amplitud de 90°.

l) F, porque por un punto exterior a la circunferencia se pueden trazar infinitas rectas, pero estas son rectas exteriores a la circunferencia, además la recta tangente a la circunferencia pasa por un único punto que pertenece a la circunferencia y se llama punto de tangencia y esta recta tangente es perpendicular al radio.

7. $\sphericalangle GBH = 70°$

8. c)

9. $P = 1{,}7$ cm, podrá cortar seis cuadraditos.

10. Isabel y Rolando emplean la misma cantidad de pintura.

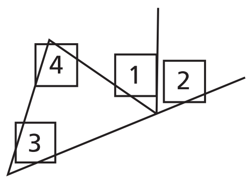
11. b) 9 600 m^2

15. En un triángulo isósceles la mediana, la altura, la mediatriz relativa a la base y la bisectriz del ángulo que se opone a la base coinciden.
a) En un triángulo equilátero la mediana, la altura, la mediatriz relativa a cada lado y la bisectriz del ángulo que se opone a cada lado coinciden.

16. Se justifica análogamente que la respuesta del ejercicio 5,* c)

17. $\overline{TU}$ = 15 cm b) ∢*STU* = 30°

18. Si la bisectriz de dicho ángulo exterior determina dos ángulos iguales entre sí (∢1 y ∢2) y a su vez, como este ángulo exterior, es también igual a la suma de las amplitudes de los dos ángulos interiores no adyacentes a él (∢3 + ∢4), por ser también dicha bisectriz paralela a un lado del triángulo, la suma de las amplitudes de los dos ángulos interiores mencionados es igual a la suma de los ángulos determinados por la bisectriz del ángulo exterior y como un ángulo de los determinados por dicha bisectriz (∢1) es alterno entre paralelas (bisectriz y lado del triángulo) con uno de los ángulos interiores del triángulo (∢4) y el otro ángulo determinado por dicha bisectriz (∢2) es correspondiente con otro de los ángulos interiores del triángulo (∢3) , luego son iguales los alternos (∢1 = ∢4) y los correspondientes entre las paralelas (∢2 = ∢3), entonces el triángulo es isósceles (fig. 2.386).



Fig, 2.386

19. 79 m^3.

20. Al calcular los dos ángulos interiores que faltan se verifica que las parejas de conjugados son suplementarios y con ello, las rectas que los determinan son paralelas y se cumple la tesis.

21. Por diferencia de parejas de ángulos iguales se llega a la igualdad de dos ángulos del triángulo *ABC* y de aquí se sigue que es isósceles.

22. Ambos ángulos ∢*A* y ∢*BCD* son complementarios del mismo ángulo ∢*B* respectivamente en los dos triángulos rectángulos diferentes formados: *ABC* y *CDB*,

RESPUESTAS DEL CAPÍTULO 3

Epígrafe 3.1.1

1.

Inciso	**Coeficiente**	**Parte literal**	Inciso	Coeficiente	**Parte literal**
a)	2	x	b)	$\frac{1}{3}$	ab
c)	$-0{,}7$	m^2	d)	$\frac{2}{5}$	p^3q^2
e)	$\frac{3}{7}$	x	f)	1	y^2
g)	$-\frac{1}{2}$	n	h)	$\frac{1}{5}$	a^3b^2c
i)	-7	no tiene	j)	$\frac{1}{6}$	no tiene

3.

a) $3a$ b) $\frac{b}{3}$ c) $5c$ d) $\frac{7}{20}d$

e) $\frac{2}{3}e$ f) $\frac{f}{2}+4$ g) $4g-8$ h) $x-y=6$

i) $i-\frac{i}{8}$ j) j y $j+1$ k) $2k$ y $2k+2$ l) $2r+1$ y $2r+3$

m) $m+(m-1)$ n) $n(n+1)$ ñ) $2ñ-\frac{ñ}{2}+3p$ o) $\frac{3}{8}o$

4.

a) $x-2$ b) $\frac{1}{2}p$ c) $(2n+6)$ cm d) $3(t-2)$ e) $p+25$

5.

a) $a+15$ b) $a-1$ c) $65-a$ d) $2a$

6.

a) V
b) F, porque la longitud del río de Guantánamo es la longitud menor que aparece en la tabla.
c) F, porque la provincia Santi Spíritus tiene tres ríos y la provincia Holguín uno, luego es el triplo, d) V e) V
f) F, porque la longitud del río de Ciego de Ávila es mayor en 21 km a la del río mayor de Pinar del Río (Cuyaguateje), g) V

7.

a) $\frac{1}{10}x$ (x: cantidad de jóvenes de secundaria)

b) $\frac{13}{20}y$ (y: cantidad de integrantes de la delegación cubana)

c) $2z$ (z: mortalidad infantil en menores de un año de los países ricos)

d) $\frac{17}{20}p$ (p: población mundial)

e) $t + 200$ (t: cantidad de toneladas de papa cosechadas el año anterior)

f) $m + \frac{1}{20}m$ (m: masa de Félix Andrés el mes anterior)

g) $x - \frac{1}{10}x$ (x: precio anterior del artículo)

h) $2{,}50y$ (y: cantidad de libras de tomate compradas)

i) $4a$ (a: longitud del lado del cuadrado)

j) $2b^2$ (b: longitud del ancho del rectángulo)

k) $180° - \alpha$ (α: amplitud del otro ángulo)

8. a) $\mathbb{N}$ b) $\mathbb{N}$ c) $\mathbb{N}$ d) $\mathbb{Z}$

9. a) – 2 b) 1 c) – 0,7 d) 2,5 e) – 1,5 f) – 4,9

g) No existe h) 0 i) No existe j) 0 k) – 1

10. a) $-4; 0; \frac{4}{3}; 1{,}6; 4$ b) – 8; – 2; 0; 0,4; 4

11. 4 y 10 (importante el orden de las operaciones)

12. a) 5 b) – 2 c) 5 d) 14 e) – 1 f) $\frac{5}{4}$

13. Ver la tabla 3,13.

Tabla 3.13

Situación matemática	Expresión algebraica en función de la variable x	Valor numérico de la expresión para $x = -2$
El triplo de un número, aumentado en siete	$3x + 7$	1
	$\frac{2x}{5}$	$-\frac{4}{5}$
El 20 % del número disminuido en cinco	$\frac{1}{5}(x - 5)$	$-\frac{7}{5}$

Situación matemática	Expresión algebraica en función de la variable *x*	Valor numérico de la expresión para $x = -2$
	$\frac{x}{6} + 2x$	$-\frac{13}{3}$
La suma de un número natural y su sucesor	$x + x + 1$	-3
El 40 % del número aumentado en seis	$\frac{2}{5}x + 6$	$-\frac{26}{5} = -5{,}2$

14. $\boxed{x} \xrightarrow{\cdot 4} \boxed{4x} \xrightarrow{+6} \boxed{4x+6} \xrightarrow{:2} \boxed{\frac{4x+6}{2}} \xrightarrow{-1} \boxed{\frac{4x+6}{2}-1}$

15. Sí pudo competir, ya que tiene 36,5 °C de temperatura.

16. a) $\frac{m}{h^2}$

Epígrafe 3.2.1

1. a) $(x;\ 2x;\ -0{,}2x)$ b) $(1{,}2a;\ 9a)$ y $(3a^2;\ -5a^2)$ c) $(-2b^3;\ 0{,}8b^3)$

d) $(ab;\ -ab)$ y $(2a;\ -\frac{4}{3}a)$ e) $\left(-\frac{2}{3}mn;\ 6nm\right)$ f) $(3xyz;\ 2{,}5yzx;\ xzy)$

g) $\left(-\frac{a^2b}{4};\ 8a^2b\right)$ y $(ab^2;\ 8{,}82b^2a)$ h) $\left(4{,}5m^2n^3p^4;\ \frac{7}{5}m^3n^2p^4;\ 709n^3p^4m^2\right)$

2. a) $4a$ b) $2b$ c) $3{,}6c$ d) $7d$ e) $-0{,}4e$ f) 0 g) $6{,}1mn$

h) $-3{,}3z - 2y$ i) $-\frac{11}{3}x^2y + xy^2$ j) $2{,}6 - 1{,}5s + s^2$ k) $2p - 0{,}1q - 5pq$

l) $-2{,}05m + \frac{n}{5}$ m) $-2{,}8a - 5b - 5{,}3c + abc$ n) $\frac{9}{2}m^3n^3$

ñ) $-2xyz + 1$

3. Ver la tabla 3.14.

Tabla 3.14

A	***B***	***C***	***A + B***	***A – C***	***A + B – C***
$4a$	$7a$	$2a$	$11a$	$2a$	$9a$
$2a + 3b$	a	$3b$	$3a + 3b$	$2a$	$3a$
$\frac{1}{2}m + 2n - 1$	$-\frac{1}{4}m - n + 1$	$2n$	$\frac{1}{4}m + n$	$\frac{1}{2}m - 1$	$\frac{1}{4}m - n$
$7x^2y + 2xy$	$x^2y + 2xy$	$4yx$	$8x^2y + 4xy$	$7x^2y - 2xy$	$8x^2y$

4. a) Binomio b) Monomio c) Trinomio d) Monomio
e) Binomio f) Binomio g) Monomio h) Trinomio
i) Monomio j) Binomio k) Binomio l) Trinomio
m) Monomio n) Monomio

5.

A

- Monomio con coeficiente entero y parte literal con dos variables.
- Trinomio donde los coeficientes de sus términos son números primos.
- Monomio de coeficiente uno.
- Monomio que no tiene parte literal.
- Binomio con un término elevado al cuadrado.
- Monomio cuyo coeficiente es un número fraccionario y su parte literal tiene dos variables.

B

$5x^2 - 3x + 7$

$-\frac{3}{5}x^2$

$-6ab^2$

$0{,}2mn$

$2y^2 - 3y + 39$

10

$z^2 + 15$

p^2q^3r

$2x - y$

Epígrafe 3.2.2

1. a) $2a^2$ b) $27b^4$ c) $4c^{10}$ d) d^3 e) $10m^3n^4$

f) x^8y^{12} g) $3a^5b^3x$ h) $\frac{3}{4}m^5n^2$ i) $-x^5y^9z^8$

2. a) $2a-8$ b) b^2+3b c) $-5c-50$ d) $3d^2-18d$

f) $-2d^5-12d^7$ g) $0{,}6p^4+0{,}16p^7$ h) $-6x^3y^2-2{,}1x^2y^4$

i) $\frac{8}{9}m^5n^7p^3-8m^4n^9p^2$ j) $4x^2+8x+4$ k) $2y^4-3y^3+2y$

l) $-15m^2+2m-1$ m) $4p^5+2p^4-10p^3$

n) $-\frac{1}{4}t^6+4t^3-3t^2$ ñ) $8{,}5e^4+17e^3+8{,}5e^2$

o) $6x^6y^2-12x^6y^4+15x^5y$ p) $-4m^7x+12m^5x-28m^3n^4x$

q) $ax^6y-4ax^5y^2+6ax^4y^3$ r) $a^2t^2-\frac{5}{18}at^3$ s) $6p^2q^3+4{,}5p^3q^4$

t) $-0{,}2a^3x^6y^3+\frac{1}{6}a^3x^8y^5-0{,}05a^3x^4y^9$ u) $\frac{2}{3}p^3q^5+6p^2q^4-\frac{24}{5}p^3q^3$

Epígrafe 3.2.3

1. a) 5 b) -2 c) 8 d) $1{,}1$ e) $-2mn^3$ f) $-2ab$

g) $\frac{1}{3}yz^8$ h) $\frac{7}{2}m^2n$ i) $-35q^3r$ j) $-\frac{3}{4}m^2np^2$ k)* $\frac{5}{b}$ l)* $-40\frac{m}{n^2}$

2. a) $2a+\frac{2}{3}b$ b) $2m^2+4m^4$ c) $5q^6-4p$ d) $\frac{1}{9}b^5+\frac{1}{3}a^7b$

e) $3-5x+7x^3$ f) $2m^2+4m^3-\frac{1}{2}m^6$ g) $\frac{4}{p^2}+\frac{10}{p^4}-\frac{3}{2}$

h) $ab+b-a$ i) $6s+2s^{28}t^6$ j) $4n+2m-\frac{1}{8}p+\frac{1}{2n}$

k) $\frac{a^7}{3b}+\frac{b^7}{4a}$ l) $\frac{8y}{x^3}+3x^2y^{14}z^2$ m) $5x-11x^2y+12y$

n) $\frac{n}{8}+\frac{m}{8}-\frac{p}{8}+\frac{1}{2}$ ñ) $\frac{a^7}{3b}+\frac{b^7}{4a}$ o) $\frac{8y}{x^3}+3x^2y^{14}z^2$

3. a) $6a^2$ b) $4m^{11}$ c) $10x^{10}y^{10}$ d) $\frac{1}{3}m^3n$ e) b^4 f) $4m^5$

g) $-24a^3$(numerador) y $3a^3$ (denominador)

h) $15m^3n^2$ (numerador) y $5mn$ (denominador)

4. a) $21xy^2z^3 + 45x^2y^3z^4 - 15x^3y^4z^5$ b) $35y^2z^4 + 75xy^3z^5 - 25x^2y^4z^6$

c) $4{,}2yz^5 + 9xy^2z^6 - 3x^2y^3z^7$ d) $42x^3 + 90x^4yz - 30x^5y^2z^2$

e) $\dfrac{7}{xy^2z^2} + \dfrac{15}{yz} - 5x$ f)* $\dfrac{10{,}5z^2}{x^2} + \dfrac{22{,}5yz^3}{x} - 7{,}5y^2z^4$

5.

$$\boxed{x} \xrightarrow{\cdot 2} \boxed{2x} \xrightarrow{:3} \boxed{\frac{2x}{3}} \xrightarrow{+1} \boxed{\frac{2x}{3}+1}$$

$$\boxed{x} \xrightarrow{\cdot 2} \boxed{2x} \xrightarrow{+3} \boxed{2x+3} \xrightarrow{:3} \boxed{\frac{2x+3}{3}}$$

$$\frac{2x}{3} + 1 = \frac{2x+3}{3}$$

$$\frac{2x}{3} + 1 = \frac{2x}{3} + \frac{3}{3}$$

$$\frac{2x}{3} + 1 = \frac{2x}{3} + 1$$

Epígrafe 3.3

1. a) $x = 2$ b) $y = 4$ c) $z = -2{,}5$ d) $x = 0{,}5$ e) $p = 30$ f) $x = 6$

g) $y = 0{,}5$ h) $z = \dfrac{5}{4}$ i) $p = 1$ j) $x = 1{,}5$ k) $x = 2$ l) $y = 5$

m) $p = -2$ n) $x = 1$ ñ) $x = -1$ o) $y = \dfrac{2}{3}$ p) $z = -\dfrac{1}{2}$

2. **2.1** c) **2.2** d) **2.3** b) **2.4** c) **2.5** a) **2.6** c)

3. a) $x = 6$ b) $y = 3$ c) $z = -4$ d) $n = 4$ e) $m = 6$ f) $p = 7$

g) $n = 2$ h) $y = 24$ i) $d = 12$ j) $p = 10$ k) $x = 2$ l) $y = 3$

m) $t = 5$ n) $x = -1$ ñ) $y = 2$ o) $z = 24$ p) $p = 3$ q) $x = 0$

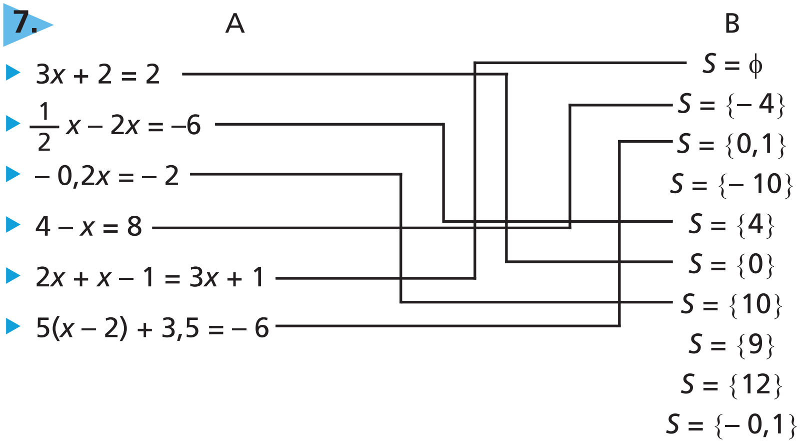
4. a) $-2 \in \mathbb{Z}$ b) $6 \in \mathbb{N}$ c) $-4 \in \mathbb{Z}$ d) $1 \in \mathbb{N}$ e) $14 \in \mathbb{N}$ f) $15 \in \mathbb{N}$

g) $2 \in \mathbb{N}$ h) $-\dfrac{2}{7} \in \mathbb{Q}$ i) $0 \in \mathbb{N}$ j) $0 \in \mathbb{N}$ k) $0{,}4 \in \mathbb{Q}$ l) N.T.S.

5. a) $S = \{2\}$ b) $S = \phi$ c) $S = \{3\}$ d) $S = \phi$ e) $S = \{10\}$ f) $S = \phi$

6. d)

7.



8. Ver la tabla 3.15.

Tabla 3.15

La ecuación con $n, p, q, s, k \in \mathbb{Q}$	Se transforma en una proposición verdadera		
	Para todo valor de la variable	Para un valor de la variable	Para ningún valor de la variable
$n + 2 = 3$		X	
$2n - 3 = 3 - 2n$		X	
$q + 12 = s + 12$		X	
$p + q = p + s$		X	
$3(n + 3) = 3n + 3$			X
$2(p - 5) = 2p - 10$	X		
$\frac{p + 4}{2} = p + 2$		X	

13. a) $a = 3$ b) $a = -\frac{13}{5}$ c) $b = 0$ d) $p = 2$

14. $x = 0{,}8$

Epígrafe 3.3.1

1. **1.1** b **1.2** c **1.3** b **1.4** b

2. **2.1** b **2.2** c **2.3** e **2.4** a

3. El número es seis,

4. El duplo del número es 80.

5. El sucesor del número es 251.

6. La longitud del lado es de 24,5 cm.

7. Dentro de seis años tendré 29,

8. El número es tres.

9. El precio de la camisa es $ 55,00.

10. A las ciudades de Cienfuegos y Matanzas las separan 180 km.

12. a) El séptimo grado de esa escuela tiene 47 deportistas.
b) Ese día no asistieron seis deportistas.

13. El padre tiene 60 años,

14. Los otros dos lados miden 5,5 cm.

15. El ángulo agudo mide 30º.

16. Entre dichos números se encuentra el número 183,5

17. a) Resolvió 16 ejercicios más.
b) Le falta por resolver un 46,7 % del total de ejercicios.

18. a) Abel recogió 20 sacos de café.
b) Abel logró un 80 % de cumplimiento de la norma.

19. El precio del artículo antes de la rebaja era de $ 4,50.

20. Tatiana entregó cinco frascos y Elena, 20.

21. El área del terreno es 80 m^2.

22. El número primo más cercano a 20 es el 19.

23. Camilo visitó tres casas, Patricia seis casas y Gabriela cinco casas.

24. El antecesor del número 963 es el 962 y su sucesor el 964.

25. Al cabo de 15 años Ana tendrá 26 años.

26. a) Este año se elaboraron 12 000 t de salsa de tomate.
b) La MIPYME elaboró 2 000 t más respecto a su plan.

28. La CCSF entregará al hotel 21,4 kg de tomate; 25,4 kg de guayaba; 23,55 kg de col blanca y 84,55 kg de frutabomba.

29. En ese grupo les gusta ser maestro primario a cuatro estudiantes.

30. 25 kg.

Ejercicios del capítulo

1. a) Falso, pueden tener infinitas soluciones o ninguna solución.
b) Falso, quedaría $-6a^{12}$, ya que en un producto de potencias de igual base, los exponentes se suman.
c) Verdadero.
d) Falso, el coeficiente es $\frac{1}{3}$.
e) Verdadero.
f) Falso, quedaría expresado por $2a + 2b$.
g) Verdadero.
h) Verdadero.
i) Verdadero.
j) Falso, porque tienen la misma parte literal.
k) Falso, quedaría traducido $\frac{2}{5}x + 7$.

2. a) 1,11 b) $\frac{4}{9}$ c) 0,8 d) 15 e) -2 f) $6a - 4b$ g) $2n + 1$ h) $\frac{4}{3}x - 8$
i) $108m^2n$ j) $\frac{6}{5}x + 0{,}8$

4. a) $0{,}5a$ b) $-x-0{,}9$ c) $-2y-5$ d) $-2{,}2a^2b^3$ e) $24x^9$ f) $-9y^{30}$
g) $0{,}25a^8b^6z^9$ h) p^3q^6 i) $2a^3$ j) $\frac{-3}{b^5}$ k) $\frac{10}{3}y$ l) $5\frac{m}{n}$ m) $6x^4+3x$
n) $-3y^6+\frac{6}{y^8}+5$ ñ) $-y^3+\frac{1}{2xy}+\frac{3}{2}xy^3$

5. a) $6a^4$ b) $7x^4y^6$ c) $\frac{m^3n^4}{6}$ d) $p^5q^7s^4$ e) $6x^5$ f) $16y^2+56y$ g) $3m^5n^3-m^3n^2$
h) $\frac{3}{2}p^7+p^6+10p^5$ i) $16x^2y^3$ j) $\frac{0{,}1}{n}$ k) $\frac{3}{2}a^2$ l) $\frac{2}{3}x$ m) $6x^3+2$
n) $25a^2-5ab$ ñ) $\frac{1}{y^2}+0{,}5y^5$ o) $0{,}3m^3n+2mn^2-0{,}4$

6. a) $3x+9$ b) $-x+6$ c) $-14x^2+18x$ d) $5-7x$

7. a) $7x^2y^3$ b) $-\frac{1}{7}\in\mathbb{Q}$

8. Ver la tabla 3.16.

Tabla 3.16

$M-N+P$	$M\cdot N$	$M:N$	$\frac{M+N}{P}$
$\frac{7}{3}xy$	$-2x^2y^2$	$-4{,}5$	$-\frac{7}{18}$
$3a^2b+\frac{ab}{2}$	$-2a^4b^2$	-2	$2a$
$3a^2+6b+6ab$	$9a^2b+27b^2$	$\frac{a^2}{b}+3$	$\frac{a}{2b}+\frac{2}{a}$

9. a) $S=\{6\}$ b) $S=\{15\}$ c) $S=\{-5\}$ d) $S=\{6\}$ e) $S=\{12\}$ f) $S=\left\{\frac{9}{4}\right\}$
g) $S=\{-2\}$ h) $S=\{5\}$ i) $S=\{1\}$ j) $S=\{6\}$ k) $S=\{7\}$ l) $S=\{1\}$
m) $S=\{9\}$ n) $S=\mathbb{Q}$ ñ) $S=\phi$

10. a) $x=2$ b) $y=8$ c) $x=-22{,}5$ d) $x=\frac{6}{5}$ e) $m=1$ f) $x=\frac{19}{14}$
g) $p=1$ h) $a=\frac{5}{4}$ i) $x=2$ j) $x=-1$

11. a) Dos b) 0,625 c) $\mathbb{Q}_+$ d) a^5 e) $2ab^4c + \dfrac{5}{3c}$

12. b) Teresa: 40 años, Sara: 15 años y su papá, 46 años.

13. 20°, 30° y 40°

14. 150 kWh,

15. $\measuredangle ACB = 70°$, $\measuredangle CAB = 40°$ y $\measuredangle ABC = 70°$

16. a) Por seis horas, b) $ 24,50,

17. 11 cm, 11 cm y 18 cm.

18. a) Pedro logró 100 puntos en Matemática, 95 puntos en Física y 87 puntos en Historia.
b) Debió obtener en Historia 96 puntos.

19. a) El melón pesaba ocho libras.
b) Ariel compró 15 lb de malanga.

20. La masa del cubo es de 30 g y la del cilindro, de 15 g.

21. a) $13n + 7$, n cantidad de pisos,
b) 137 barillas,
c) Ocho pisos.

ANEXOS

TABLA DE CUADRADOS

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,020	1,040	1,061	1,082	1,103	1,124	1,145	1,166	1,188
1,1	1,210	1,232	1,254	1,277	1,300	1,323	1,346	1,369	1,392	1,416
1,2	1,440	1,464	1,488	1,513	1,538	1,563	1,588	1,613	1,638	1,664
1,3	1,690	1,716	1,742	1,769	1,796	1,823	1,850	1,877	1,904	1,932
1,4	1,960	1,988	2,016	2,045	2,074	2,103	2,132	2,161	2,190	2,220
1,5	2,250	2,280	2,310	2,341	2,372	2,403	2,434	2,465	2,496	2,528
1,6	2,560	2,592	2,624	2,657	2,690	2,723	2,756	2,789	2,822	2,856
1,7	2,890	2,924	2,958	2,993	3,028	3,063	3,098	3,133	3,168	3,204
1,8	3,240	3,276	3,312	3,349	3,386	3,423	3,460	3,497	3,534	3,572
1,9	3,610	3,648	3,686	3,725	3,764	3,803	3,842	3,881	3,920	3,960
2,0	4,000	4,040	4,080	4,121	4,162	4,203	4,244	4,285	4,326	4,368
2,1	4,410	4,452	4,494	4,537	4,580	4,623	4,666	4,709	4,752	4,796
2,2	4,840	4,884	4,928	4,973	5,018	5,063	5,108	5,153	5,198	5,244
2,3	5,290	5,336	5,382	5,429	5,476	5,523	5,570	5,617	5,664	5,712
2,4	5,760	5,808	5,856	5,905	5,954	6,003	6,052	6,101	6,150	6,200
2,5	6,250	6,300	6,350	6,401	6,452	6,503	6,554	6,605	6,656	6,708
2,6	6,760	6,812	6,864	6,917	6,970	7,023	7,076	7,129	7,182	7,236
2,7	7,290	7,344	7,398	7,453	7,508	7,563	7,618	7,673	7,728	7,784
2,8	7,840	7,896	7,952	8,009	8,066	8,123	8,180	8,237	8,294	8,352
2,9	8,410	8,468	8,526	8,585	8,644	8,703	8,762	8,821	8,880	8,940
3,0	9,000	9,060	9,120	9,181	9,242	9,303	9,364	9,425	9,486	9,548
3,1	9,610	9,672	9,734	9,797	9,860	9,923	9,986	10,05	10,11	10,18
3,2	10,24	10,30	10,37	10,43	10,50	10,56	10,63	10,69	10,76	10,82
3,3	10,89	10,96	11,02	11,09	11,16	11,22	11,29	11,36	11,42	11,49
3,4	11,56	11,63	11,70	11,76	11,83	11,90	11,97	12,04	12,11	12,18
3,5	12,25	12,32	12,39	12,46	12,53	12,60	12,67	12,74	12,82	12,89
3,6	12,96	13,03	13,10	13,18	13,25	13,32	13,40	13,47	13,54	13,62
3,7	13,69	13,76	13,84	13,91	13,99	14,06	14,14	14,21	14,29	14,36
3,8	14,44	14,52	14,59	14,67	14,75	14,82	14,90	14,98	15,05	15,13
3,9	15,21	15,29	15,37	15,44	15,52	15,60	15,68	15,76	15,84	15,92
4,0	16,00	16,08	16,16	16,24	16,32	16,40	16,48	16,56	16,65	16,73
4,1	16,81	16,89	16,97	17,06	17,14	17,22	17,31	17,39	17,47	17,56
4,2	17,64	17,72	17,81	17,89	17,98	18,06	18,15	18,23	18,32	18,40
4,3	18,49	18,58	18,66	18,75	18,84	18,92	19,01	19,10	19,18	19,27
4,4	19,36	19,45	19,54	19,62	19,71	19,80	19,89	19,98	20,07	20,16
4,5	20,25	20,34	20,43	20,52	20,61	20,70	20,79	20,88	20,98	21,07
4,6	21,16	21,25	21,34	21,44	21,53	21,62	21,72	21,81	21,90	22,00
4,7	22,09	22,18	22,28	22,37	22,47	22,56	22,66	22,75	22,85	22,94
4,8	23,04	23,14	23,23	23,33	23,43	23,52	23,62	23,72	23,81	23,91
4,9	24,01	24,11	24,21	24,30	24,40	24,50	24,60	24,70	24,80	24,90

TABLA DE CUADRADOS

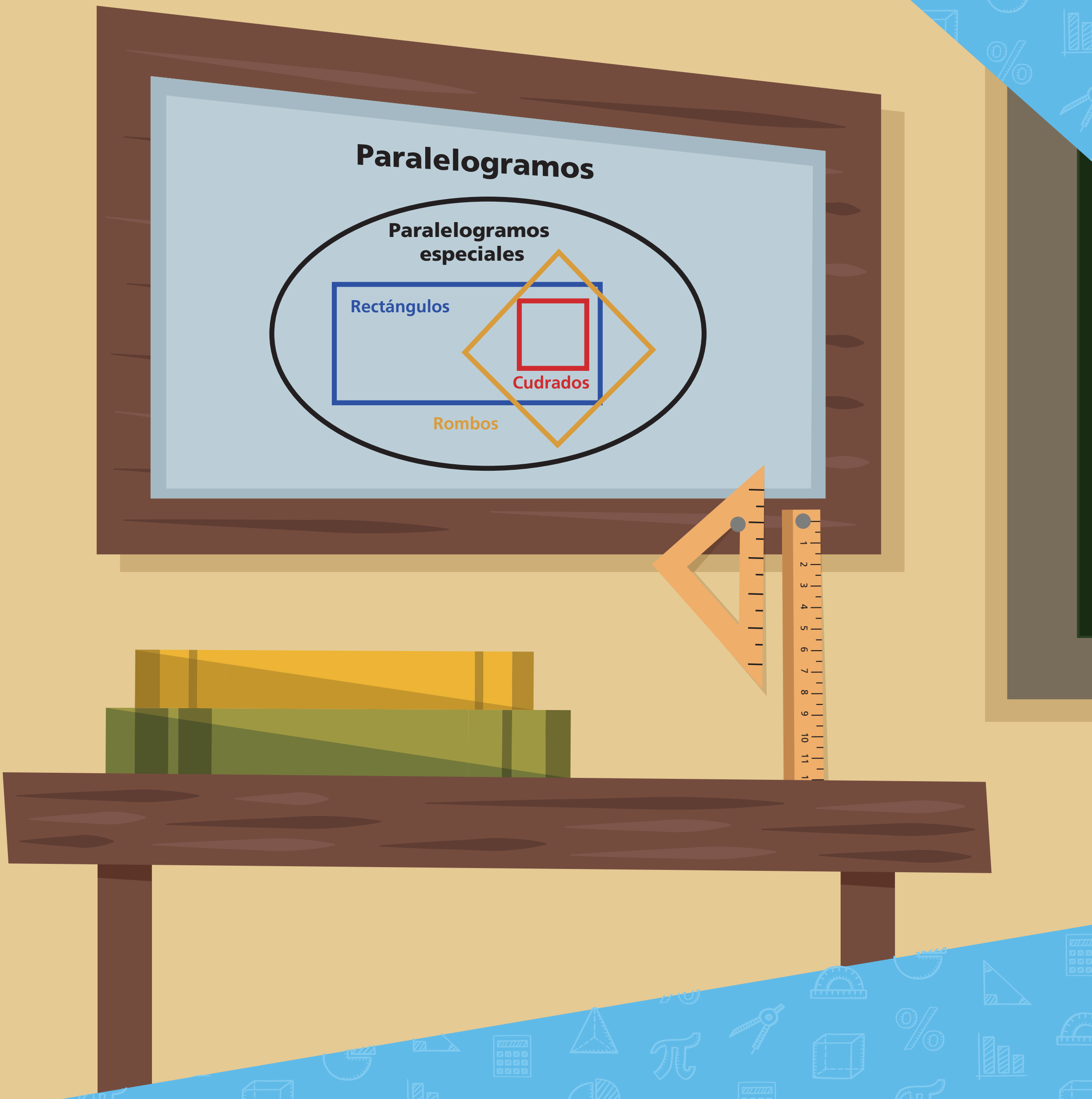
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,0	25,00	25,10	25,20	25,30	25,40	25,50	25,60	25,70	25,81	25,91
5,1	26,01	26,11	26,21	26,32	26,42	26,52	26,63	26,73	26,83	26,94
5,2	27,04	27,14	27,25	27,35	27,46	27,56	27,67	27,77	27,88	27,98
5,3	28,09	28,20	28,30	28,41	28,52	28,62	28,73	28,84	28,94	29,05
5,4	29,16	29,27	29,38	29,48	29,59	29,70	29,81	29,92	30,03	30,14
5,5	30,25	30,36	30,47	30,58	30,69	30,80	30,91	31,02	31,14	31,25
5,6	31,36	31,47	31,58	31,70	31,81	31,92	32,04	32,15	32,26	32,38
5,7	32,49	32,60	32,72	32,83	32,95	33,06	33,18	33,29	33,41	33,52
5,8	33,64	33,76	33,87	33,99	34,11	34,22	34,34	34,46	34,57	34,69
5,9	34,81	34,93	35,05	35,16	35,28	35,40	35,52	35,64	35,76	35,88
6,0	36,00	36,12	36,24	36,36	36,48	36,60	36,72	36,84	36,97	37,09
6,1	37,21	37,33	37,45	37,58	37,70	37,82	37,95	38,07	38,19	38,32
6,2	38,44	38,56	38,69	38,81	38,94	39,06	39,19	39,31	39,44	39,56
6,3	39,69	39,82	39,94	40,07	40,20	40,32	40,45	40,58	40,70	40,83
6,4	40,96	41,09	41,22	41,34	41,47	41,60	41,73	41,86	41,99	42,12
6,5	42,25	42,38	42,51	42,64	42,77	42,90	43,03	43,16	43,30	43,43
6,6	43,56	43,69	43,82	43,96	44,09	44,22	44,36	44,49	44,62	44,76
6,7	44,89	45,02	45,16	45,29	45,43	45,56	45,70	45,83	45,97	46,10
6,8	46,24	46,38	46,51	46,65	46,79	46,92	47,06	47,20	47,33	47,47
6,9	47,61	47,75	47,89	48,02	48,16	48,30	48,44	48,58	48,72	48,86
7,0	49,00	49,14	49,28	49,42	49,56	49,70	49,84	49,98	50,13	50,27
7,1	50,41	50,55	50,69	50,84	50,98	51,12	51,27	51,41	51,55	51,70
7,2	51,84	51,98	52,13	52,27	52,42	52,56	52,71	52,85	53,00	53,14
7,3	53,29	53,44	53,58	53,73	53,88	54,02	54,17	54,32	54,46	54,61
7,4	54,76	54,91	55,06	55,20	55,35	55,50	55,65	55,80	55,95	56,10
7,5	56,25	56,40	56,55	56,70	56,85	57,00	57,15	57,30	57,46	57,61
7,6	57,76	57,91	58,06	58,22	58,37	58,52	58,68	58,83	58,98	59,14
7,7	59,29	59,44	59,60	59,75	59,91	60,06	60,22	60,37	60,53	60,68
7,8	60,84	61,00	61,15	61,31	61,47	61,62	61,78	61,94	62,09	62,25
7,9	62,41	62,57	62,73	62,88	63,04	63,20	63,36	63,52	63,68	63,84
8,0	64,00	64,16	64,32	64,48	64,64	64,80	64,96	65,12	65,29	65,45
8,1	65,61	65,77	65,93	66,10	66,26	66,42	66,59	66,75	66,91	67,08
8,2	67,24	67,40	67,57	67,73	67,90	68,06	68,23	68,39	68,56	68,72
8,3	68,89	69,06	69,22	69,39	69,56	69,72	69,89	70,06	70,22	70,39
8,4	70,56	70,73	70,90	71,06	71,23	71,40	71,57	71,74	71,91	72,08
8,5	72,25	72,42	72,59	72,76	72,93	73,10	73,27	73,44	73,62	73,79
8,6	73,96	74,13	74,30	74,48	74,65	74,82	75,00	75,17	75,34	75,52
8,7	75,69	75,86	76,04	76,21	76,39	76,56	76,74	76,91	77,09	77,26
8,8	77,44	77,62	77,79	77,97	78,15	78,32	78,50	78,68	78,85	79,03
8,9	79,21	79,39	79,57	79,74	79,92	80,10	80,28	80,46	80,64	80,82
9,0	81,00	81,18	81,36	81,54	81,72	81,90	82,08	82,26	82,45	82,63
9,1	82,81	82,99	83,17	83,36	83,54	83,72	83,91	84,09	84,27	84,46
9,2	84,64	84,82	85,01	85,19	85,38	85,56	85,75	85,93	86,12	86,30
9,3	86,49	86,68	86,86	87,05	87,24	87,42	87,61	87,80	87,98	88,17
9,4	88,36	88,55	88,74	88,92	89,11	89,30	89,49	89,68	89,87	90,06
9,5	90,25	90,44	90,63	90,82	91,01	91,20	91,39	91,58	91,78	91,97
9,6	92,16	92,35	92,54	92,74	92,93	93,12	93,32	93,51	93,70	93,90
9,7	94,09	94,28	94,48	94,67	94,87	95,06	95,26	95,45	95,65	95,84
9,8	96,04	96,24	96,43	96,63	96,83	97,02	97,22	97,42	97,61	97,81
9,9	98,01	98,21	98,41	98,60	98,80	99,00	99,20	99,40	99,60	99,80

TABLA DE CUBOS

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,030	1,061	1,093	1,125	1,158	1,191	1,225	1,260	1,295
1,1	1,331	1,368	1,405	1,443	1,482	1,521	1,561	1,602	1,643	1,685
1,2	1,728	1,772	1,816	1,861	1,907	1,953	2,000	2,048	2,097	2,147
1,3	2,197	2,248	2,300	2,353	2,406	2,460	2,515	2,571	2,628	2,686
1,4	2,744	2,803	2,863	2,924	2,986	3,049	3,112	3,177	3,242	3,308
1,5	3,375	3,443	3,512	3,582	3,652	3,724	3,796	3,870	3,944	4,020
1,6	4,096	4,173	4,252	4,331	4,411	4,492	4,574	4,657	4,742	4,827
1,7	4,913	5,000	5,088	5,178	5,268	5,359	5,452	5,545	5,640	5,735
1,8	5,832	5,930	6,029	6,128	6,230	6,332	6,435	6,539	6,645	6,751
1,9	6,859	6,968	7,078	7,189	7,301	7,415	7,530	7,645	7,762	7,881
2,0	8,000	8,121	8,242	8,365	8,490	8,615	8,742	8,870	8,999	9,129
2,1	9,261	9,394	9,528	9,664	9,800	9,938	10,08	10,22	10,36	10,50
2,2	10,65	10,79	10,94	11,09	11,24	11,39	11,54	11,70	11,85	12,01
2,3	12,17	12,33	12,49	12,65	12,81	12,98	13,14	13,31	13,48	13,65
2,4	13,82	14,00	14,17	14,35	14,53	14,71	14,89	15,07	15,25	15,44
2,5	15,63	15,81	16,00	16,19	16,39	16,58	16,78	16,97	17,17	17,37
2,6	17,58	17,78	17,98	18,19	18,40	18,61	18,82	19,03	19,25	19,47
2,7	19,68	19,90	20,12	20,35	20,57	20,80	21,02	21,25	21,48	21,72
2,8	21,95	22,19	22,43	22,67	22,91	23,15	23,39	23,64	23,89	24,14
2,9	24,39	24,64	24,90	25,15	25,41	25,67	25,93	26,20	26,46	26,73
3,0	27,00	27,27	27,54	27,82	28,09	28,37	28,65	28,93	29,22	29,50
3,1	29,79	30,08	30,37	30,66	30,96	31,26	31,55	31,86	32,16	32,46
3,2	32,77	33,08	33,39	33,70	34,01	34,33	34,65	34,97	35,29	35,61
3,3	35,94	36,26	36,59	36,93	37,26	37,60	37,93	38,27	38,61	38,96
3,4	39,30	39,65	40,00	40,35	40,71	41,06	41,42	41,78	42,14	42,51
3,5	42,88	43,24	43,61	43,99	44,36	44,74	45,12	45,50	45,88	46,27
3,6	46,66	47,05	47,44	47,83	48,23	48,63	49,03	49,43	49,84	50,24
3,7	50,65	51,06	51,48	51,90	52,31	52,73	53,16	53,58	54,01	54,44
3,8	54,87	55,31	55,74	56,18	56,62	57,07	57,51	57,96	58,41	58,86
3,9	59,32	59,78	60,24	60,70	61,16	61,63	62,10	62,57	63,04	63,52
4,0	64,00	64,48	64,96	65,45	65,94	66,43	66,92	67,42	67,92	68,42
4,1	68,92	69,43	69,93	70,44	70,96	71,47	71,99	72,51	73,03	73,56
4,2	74,09	74,62	75,15	75,69	76,23	76,77	77,31	77,85	78,40	78,95
4,3	79,51	80,06	80,62	81,18	81,75	82,31	82,88	83,45	84,03	84,60
4,4	85,18	85,77	86,35	86,94	87,53	88,12	88,72	89,31	89,92	90,52
4,5	91,13	91,73	92,35	92,96	93,58	94,20	94,82	95,44	96,07	96,70
4,6	97,34	97,97	98,61	99,25	99,90	100,5	101,2	101,8	102,5	103,2
4,7	103,8	104,5	105,2	105,8	106,5	107,2	107,9	108,5	109,2	109,9
4,8	110,6	111,3	112,0	112,7	113,4	114,1	114,8	115,5	116,2	116,9
4,9	117,6	118,4	119,1	119,8	120,6	121,3	122,0	122,8	123,5	124,3
5,0	125,0	125,8	126,5	127,3	128,0	128,8	129,6	130,3	131,1	131,9
5,1	132,7	133,4	134,2	135,0	135,8	136,6	137,4	138,2	139,0	139,8
5,2	140,6	141,4	142,2	143,1	143,9	144,7	145,5	146,4	147,2	148,0
5,3	148,9	149,7	150,6	151,4	152,3	153,1	154,0	154,9	155,7	156,6
5,4	157,5	158,3	159,2	160,1	161,0	161,9	162,8	163,7	164,6	165,5
5,5	166,4	167,3	168,2	169,1	170,0	171,0	171,9	172,8	173,7	174,7
5,6	175,6	176,6	177,5	178,5	179,4	180,4	181,3	182,3	183,3	184,2
5,7	185,2	186,2	187,1	188,1	189,1	190,1	191,1	192,1	193,1	194,1
5,8	195,1	196,1	197,1	198,2	199,2	200,2	201,2	202,3	203,3	204,3
5,9	205,4	206,4	207,5	208,5	209,6	210,6	211,7	212,8	213,8	214,9

TABLA DE CUBOS

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6,0	216,0	217,1	218,2	219,3	220,3	221,4	222,5	223,6	224,8	225,9
6,1	227,0	228,1	229,2	230,3	231,5	232,6	233,7	234,9	236,0	237,2
6,2	238,3	239,5	240,6	241,8	243,0	244,1	245,3	246,5	247,7	248,9
6,3	250,0	251,2	252,4	253,6	254,8	256,0	257,3	258,5	259,7	260,9
6,4	262,1	263,4	264,6	265,8	267,1	268,3	269,6	270,8	272,1	273,4
6,5	274,6	275,9	277,2	278,4	279,7	281,0	282,3	283,6	284,9	286,2
6,6	287,5	288,8	290,1	291,4	292,8	294,1	295,4	296,7	298,1	299,4
6,7	300,8	302,1	303,5	304,8	306,2	307,5	308,9	310,3	311,7	313,0
6,8	314,4	315,8	317,2	318,6	320,0	321,4	322,8	324,2	325,7	327,1
6,9	328,5	329,9	331,4	332,8	334,3	335,7	337,2	338,6	340,1	341,5
7,0	343,0	344,5	345,9	347,4	348,9	350,4	351,9	353,4	354,9	356,4
7,1	357,9	359,4	360,9	362,5	364,0	365,5	367,1	368,6	370,1	371,7
7,2	373,2	374,8	376,4	377,9	379,5	381,1	382,7	384,2	385,8	387,4
7,3	389,0	390,6	392,2	393,8	395,4	397,1	398,7	400,3	401,9	403,6
7,4	405,2	406,9	408,5	410,2	411,8	413,5	415,2	416,8	418,5	420,2
7,5	421,9	423,6	425,3	427,0	428,7	430,4	432,1	433,8	435,5	437,2
7,6	439,0	440,7	442,5	444,2	445,9	447,7	449,5	451,2	453,0	454,8
7,7	456,5	458,3	460,1	461,9	463,7	465,5	467,3	469,1	470,9	472,7
7,8	474,6	476,4	478,2	480,0	481,9	483,7	485,6	487,4	489,3	491,2
7,9	493,0	494,9	496,8	498,7	500,6	502,5	504,4	506,3	508,2	510,1
8,0	512,0	513,9	515,8	517,8	519,7	521,7	523,6	525,6	527,5	529,5
8,1	531,4	533,4	535,4	537,4	539,4	541,3	543,3	545,3	547,3	549,4
8,2	551,4	553,4	555,4	557,4	559,5	561,5	563,6	565,6	567,7	569,7
8,3	571,8	573,9	575,9	578,0	580,1	582,2	584,3	586,4	588,5	590,6
8,4	592,7	594,8	596,9	599,1	601,2	603,4	605,5	607,6	609,8	612,0
8,5	614,1	616,3	618,5	620,7	622,8	625,0	627,2	629,4	631,6	633,8
8,6	636,1	638,3	640,5	642,7	645,0	647,2	649,5	651,7	654,0	656,2
8,7	658,5	660,8	663,1	665,3	667,6	669,9	672,2	674,5	676,8	679,2
8,8	681,5	683,8	686,1	688,5	690,8	693,2	695,5	697,9	700,2	702,6
8,9	705,0	707,3	709,7	712,1	714,5	716,9	719,3	721,7	724,2	726,6
9,0	729,0	731,4	733,9	736,3	738,8	741,2	743,7	746,1	748,6	751,1
9,1	753,6	756,1	758,6	761,0	763,6	766,1	768,6	771,1	773,6	776,2
9,2	778,7	781,2	783,8	786,3	788,9	791,5	794,0	796,6	799,2	801,8
9,3	804,4	807,0	809,6	812,2	814,8	817,4	820,0	822,7	825,3	827,9
9,4	830,6	833,2	835,9	838,6	841,2	843,9	846,6	849,3	852,0	854,7
9,5	857,4	860,1	862,8	865,5	868,3	871,0	873,7	876,5	879,2	882,0
9,6	884,7	887,5	890,3	893,1	895,8	898,6	901,4	904,2	907,0	909,9
9,7	912,7	915,5	918,3	921,2	924,0	926,9	929,7	932,6	935,4	938,3
9,8	941,2	944,1	947,0	949,9	952,8	955,7	958,6	961,5	964,4	967,4
9,9	970,3	973,2	976,2	979,1	982,1	985,1	988,0	991,0	994,0	997,0



EDITORIAL
PUEBLO Y EDUCACIÓN

9 789591 341303