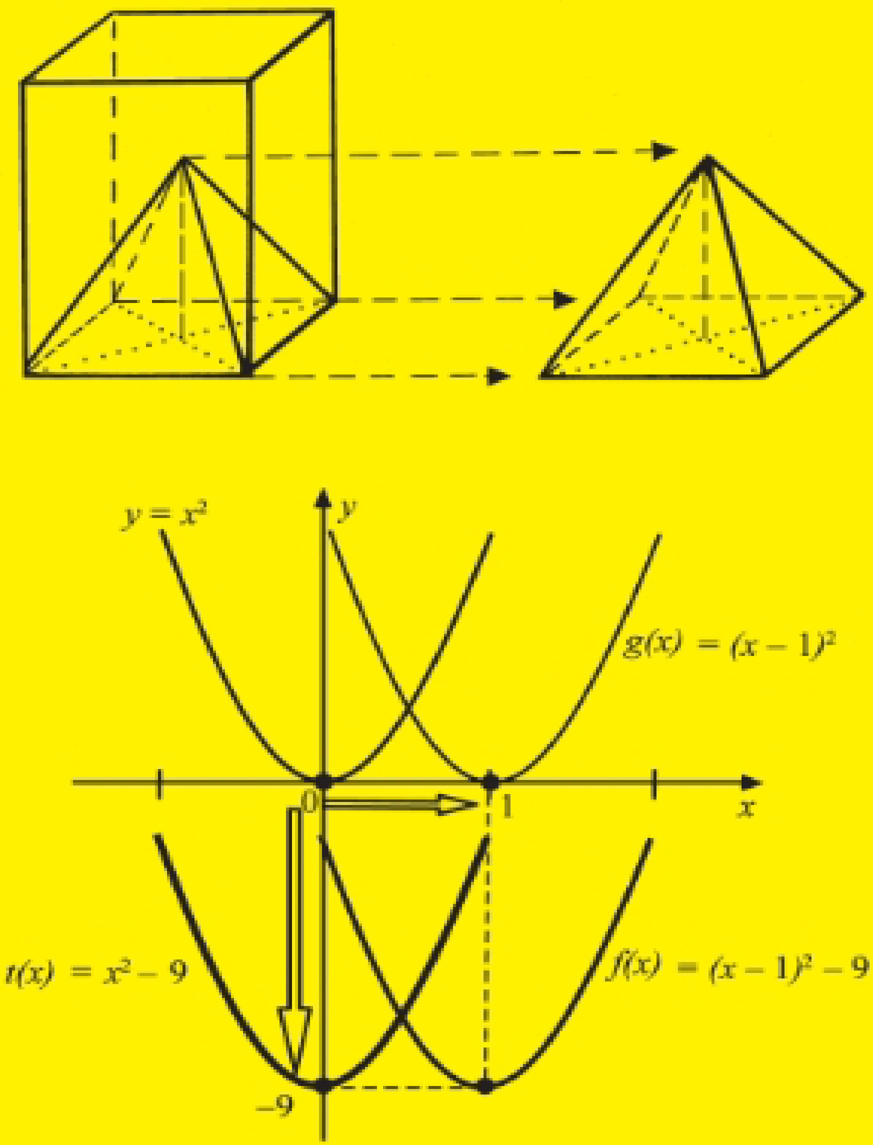
LIBRO DE DISTRIBUCIÓN GRATUITA. PROHIBIDA SU VENTA



Matemática

9.º grado

MATE
MÁ
TICA

MATEMÁTICA

9º. GRADO

MSc. Susana Acosta Hernández
Dr. C. Aurelio Quintana Valdés
MSc. Margarita Gort Sánchez
MSc. Lourdes Báez Arbesú
MSc. Rita María Cantero Pérez
MSc. Jesús Cantón Arenas
MSc. Oscar Domínguez Escobar

Editorial
Pueblo y Educación

Edición: Lic. Laura Herrera Caseiro
Diseño: Elena Faramiñán Cortina
Ilustración: Martha María González Arencibia
María Elena Duany Alayo
Carlos Alberto Prieto Cañedo
Luis Bestard Cruz
Ángel García Castañeda
Corrección: Esmeralda Ruiz Rouco
Emplane: Elier Guzmán Lajud

ISBN 978-959-13-2901-1

EDITORIAL PUEBLO Y EDUCACIÓN
Ave. 3ra. A No. 4601 entre 46 y 60,
Playa, La Habana, Cuba. CP 11300.
epe@enet.cu

Índice

Orientaciones para el trabajo con el libro

El contenido de este libro está estructurado en cinco capítulos, cada uno está dividido en epígrafes y estos a su vez en subepígrafes.

Al hojear sus páginas te percatarás de que cuenta con una pequeña introducción del tema que se tratará y diferentes secciones, que se distinguen por un logotipo que las identifica.

Estas secciones son:

Recuerda: abarca recuadros con propiedades, fórmulas, definiciones, teoremas o aspectos importantes del contenido que debes saber.

Ejemplo: incluye tanto ejemplos, como ejercicios resueltos, que muestran procedimientos de trabajo.

¡!: situación problémica planteada.

R ¡!: respuesta de la situación problémica planteada.

Ejercicios: contiene los ejercicios que se proponen para cada epígrafe.

Ejercicios del capítulo: agrupa ejercicios que integran los contenidos tratados en todo el capítulo.

Para la autoevaluación: tiene dos partes, la primera con un grupo de interrogantes para reflexionar sobre lo aprendido y la segunda un "Ponte a prueba" para que evalúes los contenidos adquiridos en el capítulo.

Respuestas de los ejercicios: contiene las respuestas de los ejercicios de cada capítulo.

Debes cuidarlo, pero sobre todo: ¡usarlo mucho! y junto a tus profesores ofrecer todas las sugerencias que permitirán perfeccionar las futuras ediciones.

Te deseamos el mayor de los éxitos en el trabajo con la asignatura.

LOS AUTORES

CAPÍTULO 1

Estadística descriptiva

1.1 Sistematización

Mis objetivos se van haciendo realidad. ¡Ya estoy en noveno grado! (Fig. 1.1)

Figura 1.1

Me propongo nuevas metas en el cumplimiento de los deberes escolares; quiero mejorar mis calificaciones en todas las asignaturas, por eso voy a retomar mi compromiso con el estudio, descubrir una vez más cuánta sabiduría encierran los libros y tener un buen profesor o una buena profesora.

¿La Matemática?... En esa asignatura tengo que seguir mejorando mucho más los resultados alcanzados, porque no estoy conforme con lo que he logrado, aunque es grande el esfuerzo que he hecho; sin embargo no puedo decir que ha sido en vano: ya sé trabajar con rapidez y con mucha seguridad por lo que ahora puedo aplicar mejor la Matemática, además, he comprendido que mucho de lo estudiado permite solucionar problemas de diversas esferas de la vida.

Ante el cumplimiento de estas nuevas metas siempre buscaré alternativas para dar solución a los problemas que se presenten: el apoyo de mi familia, los profesores, la comunidad, mis amistades, de toda la sociedad, me dará la oportunidad de adquirir conocimientos y nuevas formas de comportarme, todo ello me preparará para ser un adulto mejor.

Este curso escolar es decisivo para el resto de mi vida porque tendré que definir mi continuidad de estudios, ya sea en un preuniversitario o en un centro de la Educación Técnica y Profesional o, ¿por qué no?, en una Escuela Pedagógica (fig. 1.2) como bien dice el mural de Formación Vocacional de mi escuela; así seré cada día mejor, me haré de una profesión o un oficio, que es hacerme útil.

Figura 1.2

Para esto es esencial tener un buen promedio y una buena conducta.

Este septiembre viene acompañado de muchas preguntas, pero a todas les voy a encontrar la respuesta correcta, tengo la seguridad de que así será.

¡Bienvenido seas a este nuevo curso! El colectivo de autores de este libro se ha esmerado, como hizo en los textos de séptimo y de octavo, para que la Matemática no sea la barrera que impida el cumplimiento de todos tus propósitos en noveno. Esta es nuestra modesta contribución, porque como tú bien sabes se impone la sistematicidad en su estudio, que es sinónimo fundamentalmente, de atender a clases y de no dejar de realizar las tareas que se orienten; lo cual te hará ser muy responsable, por eso serás capaz de lograr tus sueños y de poder vivirlos. Sea cual sea la continuidad de estudios que alcances, seguirá junto a ti la Matemática; disponte a conocer mucho más de ella, te deseamos ¡éxitos!

Este capítulo se inicia con una sistematización de los números reales, también aprenderás una cuestión interesante de este dominio numérico, y de la estadística descriptiva, muchísimo más. Así que, ¡adelante!

Resuelve este ejercicio y podrás repasar muchos de los contenidos referidos al Cálculo numérico que has estudiado en grados anteriores.

Intenta recordar esos temas y verás el gran tamaño de la lista. Escríbelos todos en tu libreta.

1. Únete a un grupo de estudiantes y determinen el valor de A, B, C, D, E, F, G, H e I.

$$A = -\sqrt[3]{-343} - 2{,}2^{25} \cdot \left(\frac{22}{10}\right)^{-23} + 2\,025^{0}$$

$$B = (-7{,}7)^{98} : (-7{,}7)^{96} - \sqrt{121} : (-4)$$

$$C = 2{,}5^{4} \cdot 4^{4} - 5 \cdot 12^{3}$$

$$D = -\left(\frac{36}{15}\right)^{2} \cdot 5^{2} - 1{,}2^{3}$$

$$E = (3{,}15^{2} : 0{,}63^{2} + \sqrt[3]{125}) : 5$$

$$F = \left(-\frac{6}{5}\right)^{3} : \left(\frac{12}{5}\right)^{3} + \sqrt[3]{\frac{1}{512}}$$

$$G = 1 - \left(17^{39}\right)^{53} : \left(17^{86}\right)^{24}$$

$$H = 3^{-1} + 4^{-2} + 9^{-1}$$

I es el opuesto de $\sqrt[3]{17}$

1.1 Escribe cómo se lee cada resultado obtenido.
1.2 ¿Cuántos de los valores hallados son números racionales? ¿Por qué?
1.3 Ubica en la recta numérica todos los valores.
1.4 ¿A qué conjunto numérico más restringido pertenecen los valores hallados?
1.5 Halla el opuesto de A, C, E y G.
1.6 ¿Cuál es el valor absoluto de B, D, F y H?
1.7 ¿Entre qué números enteros consecutivos se encuentra cada valor hallado?
1.8 ¿Cuántos números enteros hay entre el menor y el mayor valor hallados? ¿Cuáles son?

Los dos últimos incisos te hacen pensar en lo que has estudiado de conjuntos y dominios numéricos y a partir de hoy, en un concepto matemático de muchísima importancia:

El conjunto de los números reales se puede representar sobre una recta (fig. 1.3) de forma tal que a cada número real se le haga corresponder un punto y viceversa. Esta recta recibe el nombre de recta real.

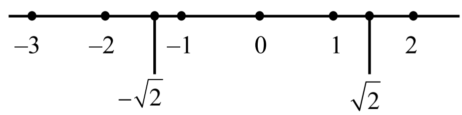


Figura 1.3

Ejemplo 1:

Representa sobre la recta real el conjunto de los números reales mayores o iguales que –2 y menores o iguales que $\sqrt{3}$.

Solución:

Los números reales mayores que –2 se encuentran a la derecha de –2 y los menores que $\sqrt{3}$ se encuentran a la izquierda de $\sqrt{3}$, el conjunto pedido está formado por los puntos que están entre –2 y $\sqrt{3}$. Además, x puede ser igual a –2 y a $\sqrt{3}$, ambos se incluyen. El conjunto pedido se destaca en la figura 1.4, los puntos rellenos –2 y $\sqrt{3}$ indican que estos puntos se incluyen. Observa que podemos representarlo de la forma siguiente: $-2 \leq x \leq \sqrt{3}$.

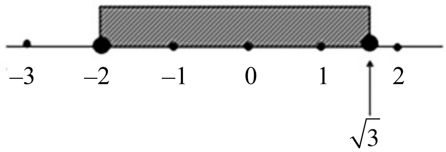


Figura 1.4

Los conjuntos, como el del ejemplo 1, formados por todos los números reales comprendidos entre otros dos, se llaman *intervalos.* Cuando se incluyen ambos extremos (como en el ejemplo 1) reciben el nombre de *intervalos cerrados;* cuando no se incluye ningún extremo, entonces se llaman *intervalos abiertos.* Cuando se incluye un extremo y el otro no, recibe el nombre de *intervalo semicerrado* o *semiabierto.*

Para representar un intervalo (u otro conjunto formado, al igual que ellos, por infinitos puntos) se utiliza la notación: $\left\{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq \sqrt{3}\right\}$.

En esta notación, $x \in \mathbb{R}$ indica que se toman elementos del conjunto de los números reales y después de los dos puntos aparece la condición que deben satisfacer los elementos.

Ejemplo 2:

Representa gráficamente los intervalos siguientes:

a) $\left\{x \in \mathbb{R} : -2 < x < \sqrt{3}\right\}$ b) $\left\{x \in \mathbb{R} : -2 < x \leq \sqrt{3}\right\}$

Solución:

a) En la figura 1.5a hemos destacado el intervalo, los puntos huecos (blancos) indican que los extremos no pertenecen al intervalo (intervalo abierto).
b) En este caso (fig. 1.5b), el punto hueco en –2 indica que no pertenece; el punto relleno en $\sqrt{3}$, que pertenece.

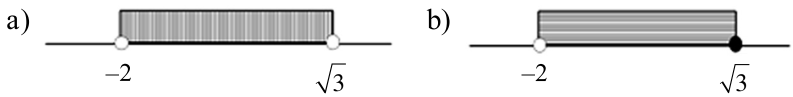


Figura 1.5

Ejemplo 3:

Di si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes. Justifica tu respuesta.

a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$

b) $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 3\} \subset \{x \in \mathbb{R} : x < \sqrt{20}\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < \pi\} \subset \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{2} < x \leq 3\}$

d) $\phi \subset \mathbb{Z}$

Solución:

a) Verdadera, pues todo número natural es racional.

b) Verdadera, porque como $3 < \sqrt{20}$, todo número menor o igual que 3 es menor o igual que $\sqrt{20}$, se puede expresar también: si $x \leq 3$, entonces $x < \sqrt{20}$. Estos conjuntos pueden representarse como se indica en la figura 1.6.

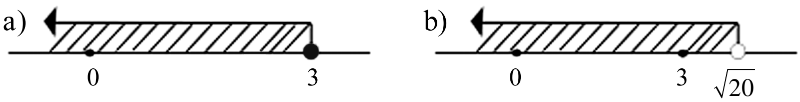


Figura 1.6

c) Falsa, pues $\sqrt{2}$ pertenece al primer conjunto y no pertenece al segundo; o 1 pertenece al primer conjunto y no pertenece al segundo.

d) Verdadera, porque el conjunto vacío está incluido en todo conjunto.

Otra manera de denotar los intervalos es con el uso de *corchetes* y *paréntesis.* Los corchetes cuando el intervalo es cerrado, los paréntesis cuando es abierto y la combinación de estos cuando es semiabierto o semicerrado.

Ejemplo 4:

Utilizando esta notación, representar los intervalos de los ejemplos 1 y 2.

Solución:

El intervalo del ejemplo 1, se denotaría $\left[-2; \sqrt{3}\right]$ y los intervalos del ejemplo 2a y 2b, se denotarían $\left(-2; \sqrt{3}\right)$ y $\left(-2; \sqrt{3}\right]$.

Ejercicios

1. En la figura 1.7 se representan gráficamente subconjuntos de números reales. Escribe estos subconjuntos.

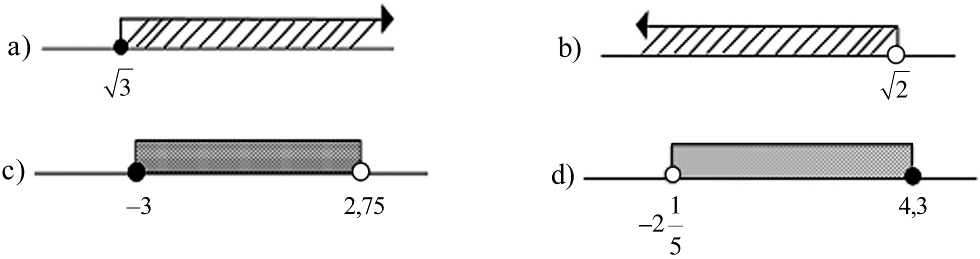


Figura 1.7

2. Dados los conjuntos siguientes:

$$A=\{x\in \mathbb{R}: -6\leq x<3\} \qquad B=\{x\in \mathbb{R}: x<2{,}8\} \qquad C=\{x\in \mathbb{R}: -3{,}\overline{52}\leq x<4\}$$

   a) Representa gráficamente cada uno de los conjuntos dados.
   b) Determina dos subconjuntos y tres elementos de cada uno de ellos.

Para el estudio de la estadística descriptiva en este grado, es de suma importancia que comprendas cuándo un número real pertenece o no a un intervalo numérico.

A continuación, algunas situaciones de la vida que nos hacen pensar en intervalos de números reales.

Los horarios hacen pensar en un rango de tiempo y así, organizamos las actividades que se van a realizar.

La cafetería Tapiñao está abierta cualquier día, siempre *desde las 9 de la mañana hasta las 9 de la noche* (fig. 1.8).

Figura 1.8

Las tarifas indican cuánto hay que pagar según la manera en que se utilice el servicio.

En la figura 1.9, según los kilowatts hora consumidos, se indica el importe que se debe pagar y te hace pensar en un motivo más para ahorrar.

AVISO DE CONSUMO
UNIÓN ELÉCTRICA
UNE

Oficina Comercial	Ruta	Folio	Tarifa	Importe
Plaza	HA	6261	B1	5.67

ID: 2302511149617 ENERO/2014

Contador	Lectura	Fecha
2983013	29814	25/12/13

JUNTA DE ADMON
27 DE NOV 315 P3 A3

Consumo Histórico

Mes	Año	kWh
01	13	18
02	13	18
03	13	20
03	13	20
04	13	18
05	13	22
06	13	23
07	13	29
08	13	24
09	13	24
10	13	21

Promedio Mensual 21.3

Desglose por rangos de Consumo

Rango (Cons.)	Consumo (kWh)	Precio (Pesos)	Importe (Pesos)
0 - 100		0.09	
101 - 150		0.30	
151 - 200		0.40	
201 - 250		0.60	
251 - 300		0.80	
301 - 350		1.50	
351 - 500		1.80	
501 - 1000		2.00	
1001 - 5000		3.00	
Más de 5000		5.00	

Consumo 19
Crédito 0.00
Total a Pagar 5.67

Oficina Comercial	Ruta	Folio	Importe
Plaza	HA	6261	5.67
JUNTA DE ADMON	25/12/13		

Fecha

Para el pago en bancos, correos y bodegas: ***Esta cuenta se pagará tres días antes de la fecha señalada en esta factura***

Figura 1.9

La cubanísima Ranita de Monte Iberia *(Eleutherodactylus iberia),* mide *entre 9,0 y 10,5 mm* (fig. 1.10).

Si has visto o ves un anfibio de ese tamaño, ¡ya sabes! Acabas de observar uno de nuestros representantes en el celebérrimo libro de las marcas absolutas: el *Guinness.*[1]

Figura 1.10

El 25 de abril de 2013 el órgano de prensa *Granma* informó que en Cuba viven en la actualidad 1 551 hombres y mujeres *mayores de 100 años.*

Larga longevidad

[1] *Juventud Rebelde,* La Habana, 18 de noviembre de 2012.

Desde el año 2008, en Cuba se efectuó la entrega de tierras en usufructo, pues se puso en vigor el Decreto Ley 259.

Hasta la primera quincena de junio de 2012, 166 247 personas en todo el país se habían acogido a esta opción.

De ellas 11 121 son jóvenes *entre 18 y 25 años* y 32 816, *de 26 a 35 años,* según apuntó Pedro Olivera Gutiérrez, director del Centro Nacional de Control de la Tierra.[2]

Los huracanes según la escala Safir-Simpson, se clasifican en categorías atendiendo a los vientos máximos sostenidos:[3]

Categoría	Vientos máximos sostenidos (km/h)
1	118 - 153
2	154 - 177
3	178 - 209
4	210 - 250
5	> 250

Averigua cuál es el huracán que más se recuerda en tu localidad en el momento en que estudias este contenido y cuál fue su categoría.

Te ponemos como ejemplo la trayectoria del huracán Arthur (4 de julio de 2014[4]) (fig. 1.11).

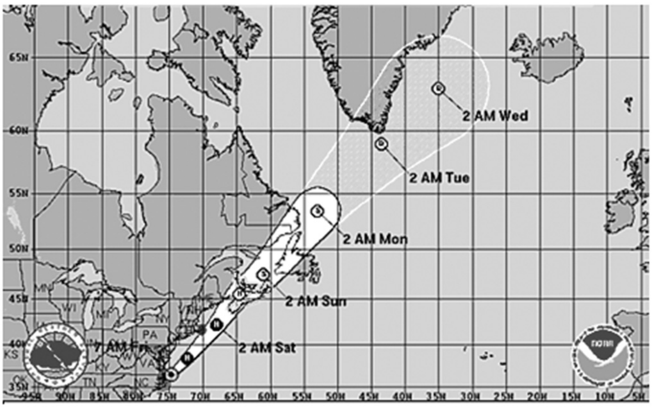


Figura 1.11

Para saber cuán intenso es un terremoto, hay que saber de intervalos numéricos, esta es la escala sismológica de Richter[5] (tabla 1.1).

[2] *Juventud Rebelde,* La Habana, 17 de junio de 2012.

[3] Gilberto Norberto Ayes Ametller: "Impacto ambiental", en *Medio ambiente: impacto y desarrollo,* Ed. Científico Técnica, La Habana, 2003, p. 83.

[4] Consulta al Centro Internacional de Huracanes (www,nhc.noaa.gov) el 4 de julio de 2014.

[5] Consulta en *Wikipedia* el 13 de enero de 2014.

Tabla 1.1

Magnitud	Descripción	Efectos de un sismo
Menos de 2,0	Micro	Los microsismos no son perceptibles.
2,0-2,9	Menor	Generalmente no son perceptibles.
3,0-3,9		Perceptibles a menudo, pero rara vez provocan daños.
4,0-4,9	Ligero	Movimiento de objetos en las habitaciones que genera ruido. Sismo significativo, pero con daño poco probable.
5,0-5,9	Moderado	Puede causar daños mayores en edificaciones débiles o mal construidas. En edificaciones bien diseñadas los daños son leves.
6,0-6,9	Fuerte	Pueden llegar a destruir áreas pobladas, en hasta unos 160 km a la redonda.
7,0-7,9	Mayor	Puede causar serios daños en extensas zonas.
8,0-8,9	Gran	Puede causar graves daños en zonas de varios cientos de kilómetros.
9,0-9,9		Devastadores en zonas de varios miles de kilómetros.
10,0+	Épico	Nunca registrado.

La III encuesta nacional de tabaquismo en jóvenes realizada a adolescentes de *entre 12 y 15 años* en 2010 (fig. 1.12), mostró que el 9,7 % son fumadores activos, el 24,6 % ha fumado alguna vez, mientras el 10,7 % son susceptibles a iniciarse.[6]

Figura 1.12

El índice de masa corporal (IMC) es una medida de asociación entre el peso y la talla de un individuo ideada por el estadístico belga Adolphe Quetelet, por lo que también se conoce como índice de Quetelet.

Se calcula según la expresión matemática: IMC = masa (kg) / (estatura (m))^2.

En el caso de los adultos se ha utilizado como uno de los recursos para evaluar su estado nutricional, de acuerdo con los valores propuestos por la Organización Mundial de la Salud[7] (tabla 1.2).

[6] *Trabajadores,* La Habana, 27 de mayo de 2013.

[7] Consulta en *Wikipedia* el 13 de enero de 2014.

Tabla 1.2

Clasificación	IMC (kg/m^2)	
	Valores principales	**Valores adicionales**
Bajo peso	< 18,50	< 18,50
Delgadez severa	< 16,00	< 16,00
Delgadez moderada	16,00 - 16,99	16,00 - 16,99
Delgadez leve	17,00 - 18,49	17,00 - 18,49
Normal	18,5 - 24,99	18,5 - 22,99
		23,00 - 24,99
Sobrepeso	≥ 25,00	≥ 25,00
Preobeso	25,00 - 29,99	25,00 - 27,49
		27,50 - 29,99
Obesidad	≥ 30,00	≥ 30,00
Obesidad leve	30,00 - 34,99	30,00 - 32,49
		32,50 - 34,99
Obesidad media	35,00 - 39,99	35,00 - 37,49
		37,50 - 39,99
Obesidad mórbida	≥ 40,00	≥ 40,00

La tabla 1.3 fue confeccionada con información extraída del *Anuario Estadístico de Salud 2010*.

¡Aquí los intervalos nos hacen pensar en el peligro del tabaquismo!

Tabla 1.3

	Incidencia de cáncer bronquios-pulmón	
Edad (años)	**Número de casos** **Masculino**	**Femenino**
[15 - 19]	0	0
[20 - 24]	3	2
[25 - 29]	2	1
[30 - 34]	7	7
[35 - 39]	18	16
[40 - 44]	49	32
[45 - 49]	138	76
[50 - 54]	204	140
[55 - 59]	366	235
Más de 60	2 605	1 200

Estos son nuestros ejemplos, tú puedes encontrar los tuyos, no será tarea difícil si has entendido el concepto de intervalo numérico y si sabes observar, ¡proponte hacerlo, no es tarea difícil!

A continuación, una colección de problemas matemáticos te permitirá reactivar lo que has estudiado de Cálculo numérico y aplicar lo que ahora aprendes de intervalos numéricos. Unos elaborados con datos reales, otros son situaciones ficticias, pero muy cercanas a la verdad, esperamos que se cumpla el propósito para el que fueron confeccionados.

Ejercicios

3. Sean las funciones $f(x) = 2x - 3$; $g(x) = x^2 - 5x + 2$ y $h(x) = \frac{2}{x}$ (con $x \neq 0$).

   a) Halla $f(5)$; $g(-2)$; $h(0{,}4)$ b) Calcula $f(7{,}3) + g(8)$ c) Efectúa $g(-3) \cdot h(5)$

   d) Prueba que: $\dfrac{f\left(\frac{5}{2}\right) - g(10)}{h(3)} = -75$ e) Resuelve $\dfrac{6h(3) + g\left(\sqrt{2}\right) - f\left(\frac{7}{4}\right)}{0{,}5}$

4. Selecciona, de entre las tres posibilidades dadas, la descripción más acertada para el conjunto dado:

   a) $A = \{1; 4; 9; 16\}$
      a_1) El conjunto formado por 4 cuadrados perfectos.
      a_2) El conjunto formado por los cuadrados perfectos menores que 20.
      a_3) El conjunto formado por 4 números naturales.
   b) $B = \{x; y; z\}$
      b_1) El conjunto formado por las 3 últimas letras del alfabeto.
      b_2) El conjunto formado por 3 consonantes del alfabeto.
      b_3) El conjunto formado por 3 letras.

5. ¿Cuál es el dominio numérico más restringido al que pertenecen estos números?

   a) $\frac{3}{4}$ b) 1 c) – 5 d) 0,375 e) – 0,375

   f) 0 g) $-\frac{375}{23}$ h) 4 i) $\sqrt{2}$ j) $\sqrt[3]{-8}$

6. Escribe auxiliándote de los recursos de la Matemática la información que aparece subrayada. En cada caso indica un valor que pertenezca al intervalo.

   Información

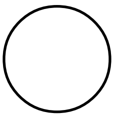
   En Chile fue inaugurado el observatorio más potente del mundo.
   En la zona existe una oscilación térmica en el año de 40 °C (–20 °C a 20 °C), de manera que se debe lograr que el funcionamiento de los equipos no varíe a pesar de esos cambios de temperatura.[8]

[8] *Orbe,* La Habana, 16 al 22 de marzo de 2013.

El microorganismo tardígrado u oso de agua puede llegar a medir entre 0,1 y 1,5 mm.[9]
China crea poderosa cámara fotográfica que soporta temperaturas de – 20 °C a 55 °C.[10]
Desde la zona central de Canadá hasta la costa del Atlántico, los termómetros se sitúan en marcas por debajo de los 20 °C bajo cero, dada la ola de frío en ese país.[11]
En los Estados Unidos, las temperaturas estuvieron entre –22 °C y –11 °C, en varias zonas dado el frente gélido que golpea a la región central de esa nación.[12]

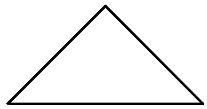
7. Utilizando el procesador de textos *Word,* copia en un documento las figuras (fig. 1.13) y con los recursos que te brinda la barra de dibujo de *Microsoft Word* sombrea:

a) 20 % de la superficie del círculo.



b) 25 % de la superficie del cuadrado.

c) 50 % de la superficie del triángulo isósceles.



d) 75 % de la superficie del paralelogramo.

e) 10 % de la superficie del rectángulo.

Figura 1.13

8. El domingo 14 de octubre de 2012, el austriaco Félix Baumgartner se lanzó desde la estratosfera, en el borde del espacio, y pasó a la historia como el primer ser humano en romper, en caída libre, la barrera del sonido, a un poco más de 39 km de altura y demoró en realizarlo 10 min a una velocidad máxima de 1 342 km/h.[13]
Investiga qué es la barrera del sonido y calcula en cuántos kilómetros por hora la superó Félix.
9. Una familia italiana de Perdasdefogu, Cerdeña, se ha ganado el título de más longeva del mundo: las edades de los seis hermanos Melis suman 818 años y 205 días. Determina el promedio de las edades.[14]

[9] *Juventud Rebelde,* La Habana, 10 de mayo de 2013.

[10] *Orbe,* La Habana, 13 al 19 de julio de 2013.

[11] *Granma,* La Habana, 3 de enero de 2014.

[12] *Granma,* La Habana, 7 de enero de 2014.

[13] *Granma* y *Juventud Rebelde,* La Habana, 19 de octubre de 2012.

[14] *Juventud Rebelde,* La Habana, 23 de septiembre de 2012.

10. ¿Dónde, cuándo y cómo surgió la vida? Ata, el humanoide de Atacama, encontrado en Chile en el año 2003, posee ADN humano,[15] por lo tanto, ahora son otras las respuestas. Si el llamado Pulgarcito de Atacama mide 15 cm, halla la razón entre su estatura y la tuya.
11. 30 000 semillas de orquídea pesan 1 g.[16] ¿Cuánto pesa una semilla?
12. RoboBee, el robot volador más pequeño, puede mover sus alas 120 veces por segundo.[17] ¿Cuánto las habrá movido en una hora?
13. ¿Sabías que cada 28 años los calendarios son exactamente iguales en todas las fechas? ¿Qué calendario podrás utilizar dentro de 28 años?
14. Las catástrofes naturales costaron al mundo 125 mil millones USD aproximadamente en el año 2013. En los más recientes 10 años los hechos de este tipo provocaron pérdidas por un promedio de 184 mil millones USD en el planeta.[18]

    a) Escribe cada cifra en notación exponencial.
    b) ¿Aproximadamente, de cuánto fue la pérdida mensual en 2013?
    c) ¿Aproximadamente, de cuánto fue la pérdida anual en el período 2004-2013?

15. Después de dos décadas de un activo intercambio comercial, Vietnam concluyó 2012 con un superávit de 284 millones USD, pues las ventas al exterior alcanzaron un valor de 114 631 000 000 USD para un incremento del 18,3 %, en comparación con 2011.[19] ¿Cuánto exportó la nación indochina en 2011?
16. A Solenne San José, vecina de Burdeos, Francia, por poco se le paraliza el corazón cuando la compañía de teléfono *Bouygues Telecom* le presentó una cuenta de ¡11 721 000 000 000 000!, todo fue un error, pues el importe a pagar solo era de 117, 21 €.[20] ¿Por qué potencia de 10 se multiplicó dicho importe?
17. El mar Amarillo de China se ha teñido de verde, se investigan las causas que han provocado la presencia de algas en las playas, ya alcanzan las 7 335 t y cubren 28 900 km^2. Piensa en las dimensiones de un triángulo, un trapecio, un paralelogramo, un rectángulo, un rombo y un cuadrado cuya área coincida con la de la afloración de algas que hace que el famoso mar pierda el nombre.[21]
18. Para muchos la cantidad de oro en el mundo constituye un misterio. Los datos más frescos sobre el tema arrojaron 171 300 t, por lo que un cubo, puede tener esa cantidad si sus aristas miden 20,7 m.[22] Verifica la información con los recursos que te brindan el Cálculo Numérico y la Física.

[15] *Juventud Rebelde,* La Habana, 10 de mayo de 2013 y *Orbe,* 4 al 10 de mayo de 2013.

[16] *Zunzún,* no. 309, La Habana, julio de 2013.

[17] *Juventud Técnica,* no. 373, La Habana, julio-agosto de 2013.

[18] *Granma,* La Habana, 8 de enero de 2014.

[19] *Granma,* La Habana, 26 de diciembre de 2012.

[20] *Juventud Rebelde,* La Habana, 21 de octubre de 2012.

[21] *Granma,* La Habana, 6 de julio de 2013.

[22] *Orbe,* La Habana, 20 al 26 de abril de 2013.

19. Todos los estudiantes de noveno grado de un centro participaron activamente en la preparación de la gala cultural *Dile no a las adicciones.* Del total de alumnos, $\frac{2}{7}$ trabajaron en la limpieza de los locales, el 80 % del resto en la confección de murales alegóricos al tema y los 19 restantes prepararon la merienda que se repartió.

"Que el alcohol no marque tu vida"

a) ¿Cuál es la matrícula de noveno grado?
b) Propón una actividad que harías en tu centro para hacerle ver a tus compañeros de grupo el peligro de las adicciones.

20. El 31 de mayo Joel repartió afiches sobre la importancia del uso del condón. En la primera hora distribuyó el 20 % de todos los que tenía, en la segunda hora repartió las dos terceras partes del resto y aún le quedan 16 afiches.

a) En total, ¿cuántos tenía que repartir?
b) ¿Qué harías tú para repartir esa cantidad?

21. Como parte de las tareas de prevención de una secundaria básica, el Instructor de Arte, especialista en Pintura convocó a un concurso de esa especialidad y la mayoría de los estudiantes de noveno grado participó.

En el primer trimestre del curso, el 25 % del total de estudiantes ya había entregado su trabajo; de diciembre a febrero, lo hizo la mitad del resto de la matrícula, en el tercer trimestre del período lectivo, se sumaron a la propuesta artística, 116 estudiantes y al participar la octava parte que faltaba, ya se puede afirmar que todos los alumnos de noveno dijeron *Sí* a tan hermoso concurso. ¿Cuál es la matrícula de noveno de dicho centro?

22. Luis resolvió la Colección de Ejercicios de Matemática que orientó su profesor de la forma siguiente:

El primer día contestó el 40 % del total de preguntas; el segundo día, la tercera parte del resto; 18 preguntas el tercer día, y 10 el último día; quedándole por resolver 2 preguntas por dudas que tenía.

a) ¿Cuántas preguntas tenía la guía?
b) ¿Qué tanto por ciento del total de preguntas no pudo resolver?

23. Los estudiantes de un grupo se distribuyeron en tres equipos para realizar trabajos de ambientación y limpieza en su aula. A $\frac{1}{9}$ del total le correspondió la confección del mural; a $\frac{5}{8}$ del resto, la pintura y a los restantes se les asignó la tarea de limpiar el

aula. Si para la confección del mural y la pintura se seleccionaron 18 alumnos, ¿qué parte del total se encargó de la limpieza y cuál es la matrícula del grupo.

1.2 Estadística descriptiva

En octavo grado estudiaste cuestiones relacionadas con la *estadística,* ampliaste tus conocimientos sobre sus orígenes, su historia y cómo esta ha ido evolucionando hasta nuestros días.

Te propongo continuar ampliando tus conocimientos sobre este tema y otros relacionados con sus aplicaciones a la ciencia y la tecnología.

Sabías que: en el siglo XVIII la estadística matemática se consideró una ciencia, y que en la actualidad está muy difundida, su uso es inevitable y se manifiesta en la recopilación, procesamiento y análisis de información relacionada con datos económicos, políticos, sociales, biológicos, geográficos, psicológicos, físicos, químicos, etc., y que el desarrollo de la informática y las posibilidades crecientes de comunicación, beneficiaron sustancialmente la aplicación de la estadística en todas las esferas de la vida.

Hoy en día, es relativamente fácil acceder a múltiples datos de alcance local, nacional o mundial, relacionados con temas de la cotidianidad o de cualquier gestión investigativa que se esté abordando, a la vez que se dispone de eficaces sistemas, tabuladores electrónicos y asistentes matemáticos para el procesamiento estadístico. Esto significa que la preparación del hombre en el uso de la Estadística y de las nuevas tecnologías es el principal reto de hoy, al cual no se puede renunciar.

Te invito a que investigues sobre el origen de la palabra *estadística,* sobre su historia y aplicaciones hoy día a la ciencia y la tecnología.

En octavo grado recordaste algunos conceptos relacionados con el procesamiento de datos que aprendiste en séptimo grado, además, ampliaste tus conocimientos sobre el tema a partir de los conceptos básicos que caracterizan la estadística, la distribución de frecuencias, la construcción de gráficos y medidas de tendencia central para datos simples (generalmente en variables discretas), así como las formas de proceder que te han permitido hacer la interpretación de datos representados en tablas y gráficos y dar respuesta a situaciones de la vida que requieren de la realización de análisis y valoraciones. Te propongo continuar ampliando tus conocimientos sobre el tema y aprender otros nuevos relacionados con la estadística, específicamente para datos agrupados y en variables continuas.

Recuerda que:

La **estadística** es la ciencia que provee de métodos que permiten recolectar, organizar, resumir, presentar y analizar datos relativos a un conjunto de individuos u observaciones, con la finalidad de extraer conclusiones válidas y tomar decisiones lógicas basadas en dichos análisis.

¿Qué aspectos caracterizan la estadística?

Para responder la pregunta, puedes consultar el libro de texto de octavo grado u otros libros que traten el tema.

Ejercicios

1. Identifica cuáles de las situaciones siguientes corresponden a estudios realizados dentro de la estadística y fundamenta el porqué en el caso que no corresponda. Redacta una situación relacionada con el tema que exija de estudios estadísticos.
   a) La calificación obtenida por un estudiante en un trabajo de control parcial.
   b) Los índices de mortalidad infantil de los países latinoamericanos durante los 10 últimos años.
   c) La calidad de los bombillos incandescentes producidos en una fábrica durante el primer semestre del año.
   d) La enfermedad de una persona.
   e) La talla de los niños comprendidos entre las edades de 5 a 10 años en una región del país.
2. ¿Cómo procederías tú, si tuvieras que hacer el estudio de "la calidad de los bombillos incandescentes producidos en una fábrica durante el primer semestre del año". Y de "los índices de mortalidad infantil de los países latinoamericanos durante los 10 últimos años"? Explica el procedimiento utilizado en cada caso.

¿Recuerdas de qué se ocupa la estadística descriptiva?

Te invito a que consultes en el libro de texto de octavo grado y otros libros que estén a tu alcance la definición de estadística descriptiva y su objeto de estudio, y elabores un resumen de las cuestiones principales que la caracterizan.

1.2.1 Sistematización sobre los conceptos básicos

En octavo grado realizaste trabajos que te exigían del estudio de hechos y fenómenos en que aplicabas el procesamiento de datos.

Recuerda:

- Para hacer este estudio primeramente hacías el *análisis de la situación inicial* objeto de estudio lo que te llevaba a la necesidad de la *obtención de los datos* necesarios para luego hacer la *simplificación de los datos* recopilados y, a partir de este, hacer el análisis y *comunicar los resultados* como fase final del proceso.
- Los conceptos básicos de la estadística descriptiva estudiados en octavo grado.

Ejercicios

1. Completa la tabla 1.4 escribiendo a la derecha el concepto que le corresponda.

Tabla 1.4

Población	
Muestra	
Variable estadística	
Variable estadística cualitativa	
Variable estadística cuantitativa	
Variable estadística discreta	

2. Clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas. Escribe V o F en la línea dada. De las que sean falsas, justifica por qué lo son.

   a) ____ La estadística se caracteriza por realizar estudios de hechos aislados que ocurren en la sociedad.
   b) ____ La población en estadística se caracteriza por el conjunto de individuos que tienen características diferentes.
   c) ____ Cualquier subconjunto representativo de una población se denomina muestra.
   d) ____ Cualquier característica o propiedad de los miembros de una población susceptible de tomar determinados valores, se denomina variable estadística.
   e) ____ Las variables cualitativas se refieren a atributos que expresan una cantidad o cantidad de magnitud.
   f) ____ La variable estadística cuantitativa se clasifica como discreta cuando solo puede tomar un número finito o a lo sumo numerable de valores.

3. Lee detenidamente cada una de las situaciones siguientes e identifica: población, muestra y variable estadística (clasifícala en cualitativa o cuantitativa).

   a) De un consultorio del médico de la familia de una circunscripción, se seleccionaron 45 personas de la tercera edad para hacer un estudio de la hipertensión arterial.
   b) En una fábrica de perfumes se producen 50 000 unidades diariamente. Para efectuar un control de calidad se analizan 50 unidades de la producción registrada en un día.
   c) Se desea hacer un estudio del nivel profesional de las personas que asisten al Festival de Cine Latinoamericano, para ello, se aplicaron encuestas a 100 personas de las que asistieron diariamente durante los días del Festival.
   d) En un hospital materno se controló la masa (en kilogramo) de 40 de los recién nacidos durante un mes.
   e) Se aplica una encuesta a 100 estudiantes de una escuela secundaria básica para conocer sus preferencias sobre los programas televisivos que emitió la televisión cubana durante la programación del verano.

1.2.2 Distribución de frecuencias para datos agrupados en clases

Recuerda que en octavo grado ampliaste tus conocimientos sobre el significado de distribución de frecuencias, su clasificación, los conceptos de frecuencia absoluta y relativa, así como sus características y el procedimiento para construir tablas de frecuencia.

Te invito a que estudies este contenido por el libro de texto de octavo grado, hagas un resumen escrito de los principales conceptos y resuelvas los ejercicios siguientes.

Ejercicios

1. Di cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Escribe V o F en la línea dada y de las que sean falsas justifica por qué lo son.

   a) ____ Las distribuciones de frecuencia se confeccionan con el propósito de mostrar de una manera resumida los datos para facilitar su descripción.
   b) ____ El estudio que realiza un director de empresa del nivel profesional de sus trabajadores corresponde a una distribución de frecuencia numérica.
   c) ____ La frecuencia absoluta de un dato es el número de veces que aparece repetido el dato.
   d) ____ El cociente de las frecuencias absolutas por el número de observaciones es a lo que se le llama frecuencia relativa.
   e) ____ La suma de las frecuencias relativas es igual a la cantidad total de datos.

2. Un estudiante de un grupo de noveno grado, desea hacer un estudio de la cantidad de horas semanales que dedican aproximadamente al estudio de la Matemática cada uno de sus compañeros del grupo. Para eso les reparte una hoja para que escriban la cantidad de horas que aproximadamente dedica cada uno de ellos al estudio. Una vez recogida la hoja de cada uno de sus compañeros, anota en su libreta los resultados siguientes:

6	1	0	1	8	5	2	8	2	4	6	6	8	5
6	3	6	1	2	0	5	0	2	3	8	6	2	1

   a) Identifica la variable estadística objeto de estudio. Clasifícala.
   b) Clasifica el tipo de distribución de frecuencia.
   c) Organiza la información en una tabla de frecuencias, donde aparezcan la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa (expresada como expresión decimal).
   d) Describe los pasos que seguiste para construir la tabla.
   e) Calcula, aproximadamente, la cantidad de horas promedio que los estudiantes de ese grupo dedican al estudio de la Matemática. Da tu valoración al respecto.
   f) Te invito a que tú realices un estudio similar en tu grupo y des tus valoraciones al respecto. Para eso debes seguir las acciones que conoces de grados anteriores en relación con el procesamiento de datos.

Los datos siguientes muestran las anotaciones del entrenador, de cada uno de los resultados (longitud del lanzamiento en metro) obtenidos en 30 de los lanzamientos realizados por la jabalinista cubana Osleydis Menéndez (fig. 1.14), campeona mundial y olímpica, durante la preparación para sus competencias.

Figura 1.14

58,00	58,60	58,95	58,95	59,04	59,26
59,30	59,35	59,35	60,00	61,50	62,20
62,50	63,20	64,55	65,40	65,65	66,00
66,85	67,00	67,20	67,25	67,25	68,30
68,75	69,00	69,05	69,40	69,70	70,00

Si los técnicos hubiesen querido analizar cómo iban comportándose los resultados de la preparación, seguramente tendrían que haber hecho un estudio estadístico de los resultados que iba logrando Osleydis durante todos los entrenamientos.

Con la finalidad de facilitar el análisis, ¿qué acciones realizarían los técnicos? Seguramente pensaste que primeramente debían organizar los datos como se muestra a continuación.

58,00	58,60	58,95	58,95	59,04	59,26
59,30	59,35	59,35	60,00	61,50	62,20
62,50	63,20	64,55	65,40	65,65	66,00
66,85	67,00	67,20	67,25	67,25	68,30
68,75	69,00	69,05	69,40	69,70	70,00

Esta organización facilita realizar el conteo de los datos para hacer la distribución de frecuencias.

¿Te sería factible construir una tabla de frecuencias absolutas como las que estás acostumbrado a construir en grados anteriores para datos simples?

Seguramente reflexionarás que te quedará muy extensa, como se muestra en la tabla 1.5, ya que hay 27 datos diferentes, lo que no daría una idea clara del comportamiento del fenómeno que se analiza.

Tabla 1.5

Longitud del lanzamiento en metro	**Frecuencia absoluta**	**Longitud del lanzamiento en metro**	**Frecuencia absoluta**
58,00	1	65,65	1
58,60	1	66,00	1
58,95	2	66,85	1
59,04	1	67,00	1
59,26	1	67,20	1
59,30	1	67,25	2
59,35	2	68,30	1
60,00	1	68,75	1
61,50	1	69,00	1
62,20	1	69,05	1
62,50	1	69,40	1
63,20	1	69,70	1
64,55	1	70,00	1
65,40	1		

Además, si observas, la longitud del lanzamiento puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo real.

A este tipo de variable cuantitativa que puede tomar cualquier valor real dentro de un intervalo, se le denomina *variable cuantitativa continua.*

En casos como este, cuando se tienen grandes cantidades de datos, sean discretos o continuos, el procedimiento preliminar más adecuado para su tratamiento consiste en distribuirlos en *clases o categorías,* de acuerdo con el número de casos que pertenecen a cada una de las clases, a las que se les denomina *clases de frecuencias.*

Recuerda *la definición de clase de frecuencia:*

Clase de frecuencia: es el conjunto de todos los individuos u observaciones de la variable, que se encuentran entre determinados límites.

Se pueden escribir de las formas siguientes:

Ejemplo 1:

Forma *A*	Forma *B*
20-24	$60 \leq x < 62$
25-29	$62 \leq x < 64$
30-34	$64 \leq x < 66$

Para realizar una distribución de frecuencia en que se agrupa un conjunto de datos mediante clases de frecuencias, es necesario que aprendas determinados conceptos y términos que te harán falta para este tipo de distribución:

Límites de clase: son los valores extremos, que delimitan cada clase. El menor es el límite inferior L_i y el mayor es el límite superior L_s.
Cuando se habla de los *límites* de las clases se refiere a los puntos superior e inferior de cualquier clase.

Ejemplo 2:

En la forma *A*:
Son límites inferiores 20; 25 y 30 y límites superiores 24; 29 y 34.
En la forma *B*:
Son límites inferiores 60; 62 y 64 y límites superiores 62; 64 y 66.

Recuerda *la definición de amplitud de clase:*

Amplitud de clase: es la amplitud del intervalo de clase. Se obtiene calculando la diferencia: $L_s - L_i$.

Ejemplo 3:

En la forma *A* para la clase 20-24:
El límite inferior L_i es 20 y el límite superior L_s es 24.
La amplitud de la clase $L_s - L_i = 4$.
En la forma *B* para la clase $60 \leq x < 62$:
El límite inferior L_i es 60 y el límite superior L_s es 62.
La amplitud de la clase $L_s - L_i = 2$.

Recuerda *la definición de marca de clase:*

Marca de clase: es el punto medio de la clase y se obtiene, sumando los límites de clase inferior y la superior y dividiendo entre 2.

En la forma *A* para la clase 20-24: la marca de clase es 22.
En la forma *B* para la clase $60 \leq x < 62$: la marca de clase es 61.
En este caso hay que aclarar que los límites presentados no son los límites de clase reales.
Siempre que se trate de variables continuas hay que tener presente *los límites de clase reales,* los cuales obtenemos sumando media unidad (0,5) al límite superior y restando media unidad al inferior.

Ejemplo 4:

En el caso presentado, en la forma *A* para la clase 20-24 serían 19,5-24,5.

Para la distribución de frecuencias en datos agrupados es necesario aplicar el concepto de rango o recorrido de la variable.

Recuerda *la definición de rango o recorrido de la variable:*

Rango o recorrido de la variable: es la diferencia entre el dato mayor y el dato menor del conjunto de valores que toma la variable.

Recomendaciones para la distribución de frecuencias por clases:

- Las clases deben ser exhaustivas y abarcar todas las mediciones.
- Deben ser mutuamente excluyentes, o sea, cada medición debe pertenecer a una y solo una de las clases.
- El número de clases no puede ser muy pequeño ni excesivamente grande. (Cuando el número de clases es pequeño se puede producir concentración de los datos y cuando es muy grande se puede producir dispersión. En ambos casos puede haber pérdida de la información).
- Las clases deben tener, siempre que sea posible, igual amplitud.
- Deben evitarse clases nulas, o sea, no deben existir clases que no tengan mediciones.
- El número de clases se puede determinar de acuerdo con el número de mediciones disponibles.

Veamos cómo proceder para hacer la distribución de frecuencia, en el ejemplo propuesto de la jabalinista Osleydis Menéndez, agrupando los datos en clases:

1. Hallar el *recorrido* o *rango* de la variable (datos):

   Para eso se identifican de los datos dados el mayor y el menor y se calcula la diferencia entre estos.
   Dato menor: 58,00; dato mayor: 70,00; diferencia: 70 – 58 = 12
   Por tanto, 12 es el recorrido o rango.

2. Determinar el número de clases:

   Se piensa en el *número de clases* que se desea obtener en correspondencia con el rango o recorrido de la variable de manera que propicien una distribución adecuada de estos donde no se favorezca la concentración ni la dispersión de los datos.
   En este caso, como el recorrido es igual a 12, se pueden elegir 6 clases.

3. Hallar la *amplitud* de cada clase:

   Para eso, dividimos el valor del recorrido entre el número de clases determinado.
   12 : 6 = 2. Luego, cada clase tendrá una *amplitud* igual a 2.

4. Determinar las *clases:*

   La primera clase tendrá por límite inferior el valor del dato más pequeño, y por límite superior la *suma* del número que corresponde al dato más pequeño con el número que corresponde a la amplitud de la clase.

En este caso es: $58 \leq x < 60$ (esta notación significa que esta clase abarca los datos desde 58 hasta 60, incluye el 58, no así el 60).

Las clases siguientes tienen por límite inferior, el límite superior de la anterior y para obtener el límite superior, se suma al límite inferior de cada clase la amplitud.

Para obtener el límite superior de la última clase, se le suma al límite inferior el valor correspondiente al recorrido o rango.

$60 \leq x < 62$ $62 \leq x < 64$ $64 \leq x < 66$ $66 \leq x < 68$ $68 \leq x \leq 70$. (El límite superior de la última clase puede o no estar incluido, depende si existe ese dato entre los que se analizan).

5. Construir la tabla de frecuencias en datos agrupados como se presenta en la tabla 1.6.

Tabla 1.6

Longitud del lanzamiento (en metro)	**Frecuencia absoluta**
$58 \leq x < 60$	9
$60 \leq x < 62$	2
$62 \leq x < 64$	3
$64 \leq x < 66$	3
$66 \leq x < 68$	6
$68 \leq x \leq 70$	7

Como se puede observar, esta tabla es mucho más representativa del comportamiento de los datos, lo que facilita hacer el análisis de la situación objeto de estudio y de su análisis.

Ejercicios

3. En el laboratorio de un policlínico, se analiza la sangre de 25 pacientes que asistieron con la finalidad de realizarse un análisis de sangre para la determinación del calcio en sangre y los resultados obtenidos fueron:

   9,7 9,3 10,1 9,2 9,1 9,3 9,4 8,7 8,8 8,7 9,2 8,3
   10,2 9,5 9,6 9,7 9,2 9,3 8,8 9,5 9,8 9,1 9,2 9,6 8,4

   a) Di cuál son la población y la muestra.
   b) Identifica la variable objeto de estudio.
   c) Clasifica la variable en discreta o continua.
   d) Clasifica la distribución de frecuencia en numérica o categórica.
   e) Construye una tabla de frecuencias que incluya las clases, la frecuencia absoluta de cada clase y la marca de clase. ¿Qué acciones realizaste para construir la tabla?
   f) ¿Qué importancia tiene para el organismo la presencia de calcio en la sangre?
   g) Busca en la tabla periódica la nomenclatura del calcio y en el libro de texto de Química de noveno grado sus propiedades.

4. Los datos siguientes corresponden a las puntuaciones alcanzadas por 32 de los estudiantes que participaron en un concurso de Matemática, el cual fue calificado sobre 35 puntos:

   4 23 7 16 12 18 21 14 13 9 17 29 33 12 16 22
   11 15 22 30 21 16 25 20 27 23 20 18 26 20 20 21

   a) Di cuál es la población y la muestra.
   b) ¿Cuál es la variable objeto de estudio?
   c) Clasifica la variable en discreta o continua.
   d) Construye una tabla de frecuencias de datos agrupados que incluya la frecuencia absoluta y la relativa de cada clase.

5. En una fábrica de balones de fútbol se han fabricado en un día balones de distintos volúmenes. Al medirse, en centímetros cúbicos, se han registrado los resultados que aparecen en la tabla 1.7

   a) ¿Qué amplitud de clase se utilizó para agrupar los datos?
   b) ¿Cuál es la variable estadística objeto de estudio?
   c) ¿Es la variable discreta o continua? ¿Por qué?
   d) Calcula el rango de la variable. Explica cómo procediste para el cálculo.
   e) Completa la tabla.
   f) ¿Cuántos balones se produjeron en el día?

Tabla 1.7

Volumen (cm^3)	**F.A.**	**Marca de clase**	**F.R.**
$1\,500 \leq x < 2\,000$	125		
$2\,000 \leq x < 2\,500$	129		
$2\,500 \leq x < 3\,000$	139		
$3\,000 \leq x \leq 3\,500$	124		

1.2.3 Representación gráfica de datos agrupados en clases. Histograma y polígono de frecuencia

En los grados anteriores resolviste ejercicios y problemas que te exigían el análisis e interpretación de gráficos (de barras, poligonales, pictogramas y circulares o de pastel), aprendiste que una de las formas de presentar la distribución de frecuencia era mediante gráficos, los cuales permiten una fácil e inmediata captación visual que te facilita describir inmediatamente las características del fenómeno que es objeto de estudio; estudiaste las características de cada uno de ellos, su utilidad y, además, en octavo grado aprendiste su construcción.

Seguramente recuerdas que, uno de los tipos de gráfico que se utilizan con más frecuencia son los gráficos de barras, los que son muy útiles para comparar el comportamiento de los datos en la información y que en estas gráficas, las barras se colocaban separadas, pues la distribución de frecuencia se hacía para datos simples y en variables discretas.

Sin embargo, cuando los datos están agrupados en clases o son variables continuas, las características del gráfico de barra en cuanto a su separación no es el adecuado, pues entre dos valores enteros siempre hay infinitos valores reales.

Para representar los datos cuando están agrupados en clases, suelen emplearse los *histogramas* y los *polígonos de frecuencia.*

Histograma: Consiste en un conjunto de columnas o rectángulos unidos, empleando una columna para representar la frecuencia de acuerdo con cada clase.

En el eje *x* (horizontal) se marcan las bases de estos rectángulos, que son dados por las clases (pueden ser los límites reales o los límites de anotaciones).

En el eje *y* (vertical) se marca la altura de los rectángulos, la cual está determinada por la frecuencia absoluta o la relativa de las clases correspondientes.

En estos se representan distribuciones de variables continuas o discretas (que, por su elevado número de datos, se suelen agrupar en clases); al igual que en los gráficos de barras hay que indicar en los ejes la categoría y los valores de la frecuencia absoluta en una escala adecuada.

En el caso en que las clases no tuviesen la misma amplitud, las alturas de los rectángulos ya no podrían corresponder a las frecuencias absolutas, y habría que calcular las áreas de los rectángulos proporcionales a las frecuencias de cada clase.

Para su construcción se sigue el mismo procedimiento que utilizas para construir un gráfico de barra.

Si dibujamos el histograma que corresponde a la longitud del lanzamiento realizado por Osleydis Menéndez en un entrenamiento, quedaría como se muestra en la figura 1.15.

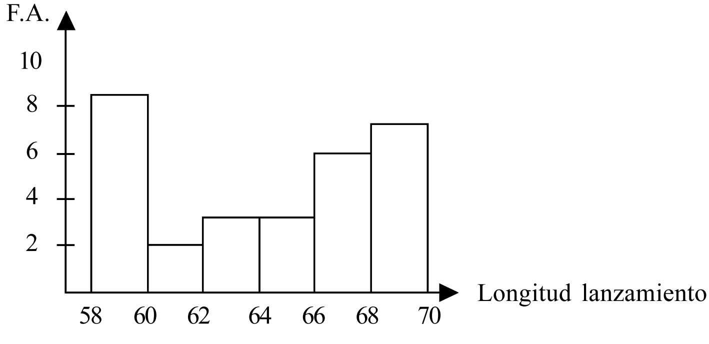


Figura 1.15

El *histograma* sirve para mostrar cómo se distribuyen los datos internamente.

Para la elaboración de los gráficos utilizando el programa *Word,* se procede de la manera siguiente:

- En la barra de menú seleccionar la opción insertar.
- Seleccionar la opción gráfico.
- Seleccionar el tipo de gráfico.
- Dar clic en aceptar.
- Introducir la matriz de los datos.
- Dar clic en siguiente e introducir los nombres de los ejes.
- Dar clic en finalizar.

Representación mediante polígonos de frecuencia

Recuerda que:

Polígono de frecuencia: consiste en una gráfica de líneas, dibujada a partir de la línea poligonal que se forma uniendo los puntos medios de cada clase. Para su construcción, se sigue el mismo procedimiento que para los histogramas, pero las frecuencias se marcan en los puntos medios de cada clase y no en sus límites, luego, se unen los puntos consecutivamente y queda representado el polígono (fig. 1.16).

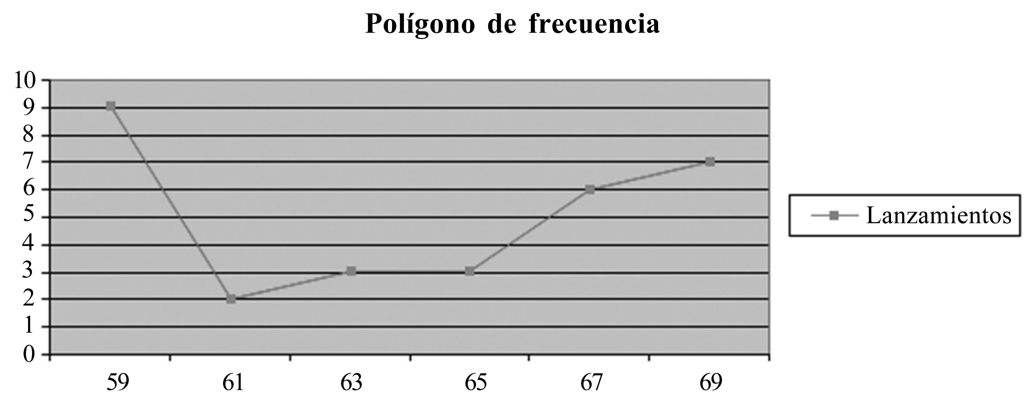


Figura 1.16

Ejercicios

1. Enlaza con una línea las características de los gráficos descritas en la columna *A* con la clasificación dada en la columna *B*.

Columna *A*	Columna *B*
a) Consiste en un conjunto de columnas o rectángulos separados en que se emplea una columna para cada categoría.	1. Polígono de frecuencia
b) Es muy útil cuando se realiza el análisis de las partes con respecto a un todo.	
c) Cada figura o símbolo alusivo representa la misma cantidad.	2. Gráfico de barra
d) Consiste en una gráfica de líneas, dibujada en función del punto medio de las clases.	3. Gráfico poligonal
e) Consiste en una gráfica de segmentos en la que las categorías aparecen en el eje horizontal y en el vertical, la frecuencia.	4. Gráfico de pastel
f) Consiste en un conjunto de columnas o rectángulos unidos, empleando una columna para representar la frecuencia de acuerdo con cada clase.	5. Pictograma
g) Es recomendable para el análisis de tendencias de un determinado fenómeno.	6. Histograma
h) La altura del rectángulo está dada por la frecuencia que corresponde a la categoría que representa.	

2. Los datos siguientes corresponden a las calificaciones obtenidas por 50 estudiantes que participaron en un concurso de conocimientos y habilidades (calificaciones de 0 a 100 puntos).

40 – 44	1	60 – 64	4	80 – 84	5
45 – 49	3	65 – 69	6	85 – 89	4
50 – 54	2	70 – 74	10	90 – 94	2
55 – 59	4	75 – 79	8	95 – 99	1

Representa estos datos en un histograma y en un polígono de frecuencia.

3. Durante el mes de febrero en un país se han registrado en grado Celsius las temperaturas máximas siguientes por día:

2,7	2,5	2,8	3,2	4	4,5	4,7	5	6	12
7	8,1	9	10,5	11	7,5	8,5	9,5	3,9	3
10,5	5	6,5	5	6,5	8	2	7	11,5	10

a) Según la información recogida, ¿es un país cálido o frío? Justifica tu respuesta.
b) ¿Durante cuántos días se realizó el control de la temperatura?
c) ¿Cuál es la variable objeto de estudio? Determina el recorrido o rango de la variable.

d) Construye una tabla de frecuencias absoluta y relativa.
e) Representa la información en un gráfico. ¿Por qué seleccionaste este tipo de gráfica?
f) Menciona cinco posibles países en que se pueden registrar estas temperaturas y di en qué continente se encuentra cada uno de ellos.

1.2.4 Medidas de tendencia central para datos agrupados

En grados anteriores conociste las medidas de tendencia central (media aritmética, moda y mediana), sus conceptos, el significado de cada una de estas, su utilidad para el análisis y procesamiento de datos, así como los procedimientos para determinarla, los cuales aplicaste a la resolución de ejercicios y problemas que te exigían hacer descripciones y analizar el comportamiento de datos a partir de una problemática objeto de estudio preferiblemente en variables discretas para datos simples. También supiste de algunas de sus características, ventajas y desventajas de su utilización.

Te invito a que resuelvas los ejercicios siguientes los cuales te permitirán recordar los conceptos, además de las características para aplicarlos a la resolución de ejercicios y problemas.

Ejercicios

1. Di cuáles de las proposiciones siguientes son verdaderas o falsas. Escribe V o F en la línea dada y de las que sean falsas justifica por qué lo son.

   a) ____ La media aritmética es el valor promedio alrededor del cual se encuentran los datos de un conjunto de datos.
   b) ____ La media aritmética de un conjunto de datos no es única.
   c) ____ La media aritmética se puede calcular cuando la distribución de frecuencia es numérica.
   d) ____ La moda es el dato que tiene mayor frecuencia absoluta en un conjunto de datos.
   e) ____ La moda es única.
   f) ____ La media aritmética se calcula sumando los valores medidos en un conjunto de datos y dividiéndolos por el número de datos.
   g) ____ La mediana siempre ocupa el valor central de un conjunto de datos.
   h) ____ La mediana se puede calcular solamente en distribuciones de frecuencias que sean numéricas.
   i) ____ La moda puede no ser única.
   j) ___La moda se calcula adicionando la frecuencia absoluta de cada uno de los datos y dividiéndola por el total de estos.
   k) ____ La moda se utiliza únicamente en el análisis de situaciones en que intervienen variables cualitativas.

l) ____ La media aritmética está influenciada por valores extremos lo que dificulta su confiabilidad.
m) ____ La mediana siempre existe y es única.
n) ___ La mediana se calcula adicionando la cantidad de datos y dividiéndola por dos.
ñ) ____ La mediana es el valor que equidista de los extremos en un conjunto de datos ordenados en forma creciente o decreciente.

2. Elabora una tabla que te resuma los conceptos de media, moda y mediana, así como sus características fundamentales. Puedes consultar el libro de texto de octavo grado u otro que trate estos contenidos.
3. La tabla 1.8 muestra las notas obtenidas por los 15 estudiantes de un grupo. Calcula media, moda y mediana de las notas obtenidas por los estudiantes del grupo.

Tabla 1.8

Notas obtenidas	**Frecuencia absoluta**
6	1
7	2
8	4
9	6
10	2

4. Formula dos problemas en que para resolverlos, se exija el cálculo de la media aritmética, dos que exijan la determinación de la moda y dos, la mediana.

¿Cómo proceder cuando los datos están agrupados en clases?

En este grado aprenderás cómo proceder ante el análisis de las medidas de tendencia central cuando los datos están agrupados en clases.

Cálculo de la media aritmética para datos agrupados

Para ilustrar cómo calcular la media aritmética para datos agrupados, te invito a calcular la media aritmética de los 30 lanzamientos que realizó Osleydis Menéndez durante ese período de entrenamiento.

Es evidente que si se quiere hallar el producto de cada dato por su frecuencia como procedimos para el cálculo con datos simples, no es posible, ya que al estar agrupados los datos en clases hay varios valores dentro de cada clase que podríamos escoger.

Para solucionar este problema es necesario aplicar el concepto de marca de clase, el cual es un valor representativo de la variable que se estudia. Esta se determina calculando la media aritmética de los valores correspondiente al límite inferior y superior de cada clase. Así, la marca de la clase *i* es: $x_i = \dfrac{L_s + L_I}{2}$ (tabla 1.9).

Tabla 1.9

Longitud (metro)	Frecuencia absoluta	Marca de clase
$58 \le x < 60$	9	59
$60 \le x < 62$	2	61
$62 \le x < 64$	3	63
$64 \le x < 66$	3	65
$66 \le x < 68$	6	67
$68 \le x \le 70$	7	69

Ahora multiplicamos la marca de clase por la frecuencia absoluta de cada clase y dividimos el resultado por la cantidad de datos, que en este caso es 30 como se ilustra a continuación:

$$\frac{9 \cdot 59 + 2 \cdot 61 + 3 \cdot 63 + 3 \cdot 65 + 6 \cdot 67 + 7 \cdot 69}{30}$$

$$= \frac{531 + 122 + 189 + 195 + 402 + 483}{30} = 64$$

Este resultado nos permite decir que: Osleydis Menéndez logró una media aproximada de 64 m en sus 30 lanzamientos.

En general:

Si la serie de datos está presentada en una distribución de frecuencias, todos los valores que se encuentran en la clase dada se consideran coincidentes con el punto medio de esta, entonces podemos utilizar la fórmula siguiente:

$$\overline{X} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + ... + f_n x_n}{f_1 + f_2 + ... + f_n}$$

donde *X,* significa la media aritmética, f_i es la frecuencia absoluta y x_i es la marca de clase.

Cálculo de la moda para datos agrupados

En este nivel solo se limitarán a determinar la *clase modal,* la cual te permite tener una idea del posible valor de la moda.

Recuerda *la definición de clase modal:*

La **clase modal** es la clase de mayor frecuencia cuando las anotaciones se presentan reunidas en clases.

Para su determinación, se acostumbra a tomar por la moda el punto medio de dicha clase, que es un valor aproximado.

En el ejemplo sobre los resultados de la jabalinista Osleydis Menéndez la clase modal es $58 \leq x < 60$, porque es la clase de mayor frecuencia absoluta y la moda es aproximadamente de 59 m.

Cálculo de la mediana para datos agrupados

Para la determinación de la mediana cuando los datos están agrupados en clase, como en el caso de la moda, se aplican fórmulas que se estudiarán en décimo grado.

En este nivel también solo se limitarán a determinar la *clase mediana.*

Recuerda *la definición de clase mediana:*

La **clase mediana** es la clase donde se encuentra ubicada la mediana.

Cuando una serie de datos están agrupados en una distribución de frecuencias, la mediana, por definición, será el punto que indique el 50 % de los casos.

Para determinar la clase mediana se acostumbra a realizar los pasos siguientes:

- Se determina la mitad de la cantidad de los datos de la distribución,
- Se determina la clase donde la frecuencia acumulada es inmediatamente superior a la mitad de los datos.

En el ejemplo que se analiza, la clase mediana es $64 \leq x < 66$, pues es donde está situado el 50 % de los casos.

Ejercicios

5. Di cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Escribe V o F en la línea dada y de las que sean falsas justifica por qué lo son.

   a) ____ La media aritmética para datos agrupados se calcula multiplicando la marca de clase por la frecuencia absoluta de cada clase y dividiendo el resultado por la cantidad de datos.
   b) ____ La clase modal es la clase donde está ubicado el valor central del conjunto de datos.
   c) ____ La clase mediana es la clase en que se encuentra el mayor número de datos.

6. Al realizar el control, en una revisión médica, del ritmo cardíaco a varias personas, se han obtenido los resultados de la tabla 1.10 en pulsaciones por minuto.
   (Se considera normal un ritmo cardíaco de 60 a 100 pulsaciones por minuto).

Tabla 1.10

Pulsaciones por minuto	Frecuencia absoluta
$46 \leq x < 60$	10
$60 \leq x < 74$	50
$74 \leq x < 88$	40
$88 \leq x < 102$	30
$102 \leq x \leq 116$	20

a) ¿Cuántas personas se controlaron?
b) ¿Qué amplitud de clase se utilizó en la confección de la tabla 1.10?
c) Halla la frecuencia relativa de cada clase, y exprésala en tanto por ciento.
d) Determina la clase modal y la clase mediana.
e) Calcula la media aritmética del ritmo cardíaco de las personas controladas.
f) Representa la información en un histograma.
g) Si ninguna persona tuvo 101 pulsaciones por minuto, ¿qué porcentaje de las personas controladas no tenían un ritmo cardíaco normal?
h) Investiga las principales causas que pueden afectar el ritmo cardíaco en las personas y sus consecuencias en la salud de estas.

7. Para hacer un estudio sobre la obesidad de los estudiantes en un grupo de noveno grado, el profesor guía les solicitó a estos pesarse en su consultorio médico y traer los resultados en kilogramos. Al recibir la información se registraron los datos siguientes:

40	46,2	50	50	55	66	56,8	57	42,5	51
52	53	62,5	48,2	50,5	56,5	56	58	57	63
61	53,5	54	47	52,5	52	58,5	55	60	67

a) ¿Qué valor tiene el rango de los pesos obtenidos?
b) Construye la tabla de frecuencias con los datos agrupados en clase.
c) Representa la información en un histograma. Explica cómo procediste para su construcción.
d) Halla el peso promedio del grupo. ¿Cómo lo calculaste?
e) Determina la clase modal y clase mediana.
f) Consulta con tu profesor de Educación Física, la relación talla/peso y elabora un informe en el que valores los resultados obtenidos.

8. Se realiza una encuesta a varias personas sobre el tiempo promedio diario que dedican a la lectura. La tabla 1.11 muestra los resultados obtenidos.

8.1 Selecciona cuál de las proposiciones siguientes es falsa.

a) ____ 55 personas leen menos de 30 min.
b) ____ El tiempo promedio de lectura de los encuestados es de media hora.
c) ____ La clase modal y la mediana coinciden.
d) ____ Tres de cada cuatro encuestados leen más de 45 min, como promedio.

Tabla 1.11

Tiempo promedio en minuto dedicado a la lectura	**Frecuencia absoluta**
$0 \leq x < 15$	15
$15 \leq x < 30$	40
$30 \leq x < 45$	20
$45 \leq x < 60$	25

8.2 ¿Qué tipo de libro es el que más te gusta leer? ¿Por qué?
8.3 ¿Qué importancia tiene para ti la lectura?

9. La gráfica de la figura 1.17 muestra el comportamiento de la estatura de los jugadores de la preselección de baloncesto de una escuela de deportes.

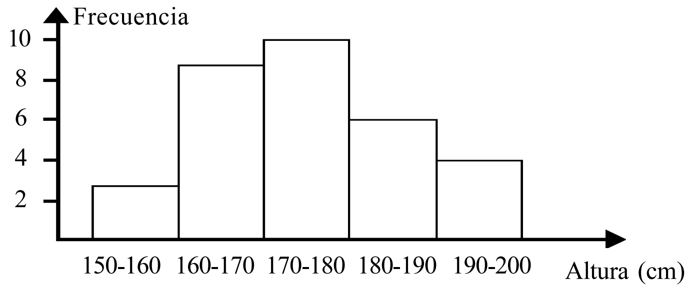


Figura 1.17

a) ¿Cuántos jugadores tiene la preselección?
b) ¿Qué amplitud de clase se utilizó para agrupar los datos?
c) ¿Cuál es la clase que muestra la estatura más frecuente de los jugadores?
d) Halla la estatura media de la preselección.
e) Determina la clase mediana y explica cómo procediste.

10. La tabla 1.12 muestra el consumo eléctrico, en kilowatt hora, durante un mes en los apartamentos que hay en un edificio.

Tabla 1.12

Consumo	**No. de apartamentos**
$50 < x \leq 100$	2
$100 < x \leq 150$	8
$150 < x \leq 200$	6
$200 < x \leq 250$	3
$250 < x \leq 300$	2

a) ¿Cuántos apartamentos hay en el edificio?
b) ¿Cuál fue el consumo promedio de los apartamentos durante ese mes?

c) Si el plan de consumo para cada apartamento era hasta 200 kWh, ¿qué porcentaje de ellos incumplió con su plan?
d) Halla la frecuencia relativa de la clase modal.
e) Di la amplitud de clase utilizada.
f) Controla el consumo eléctrico de tu casa durante diez días, elabora una tabla de frecuencia y construye un gráfico donde se reflejen estos resultados.

11. Recopila en tu grupo con tus compañeros los datos que corresponden al consumo de agua del mes anterior de cada una de las casas.

a) Identifica el tipo de variable.
b) Construye una tabla de frecuencia absoluta.
c) Representa los datos en un gráfico utilizando los recursos informáticos de que dispones.
d) Calcula la media aritmética e identifica la clase modal y la mediana.
e) ¿Cómo valoras el consumo de agua en las viviendas de los integrantes de tu grupo?
f) ¿Qué medidas propondrías para propiciar el ahorro en los casos en que consideres que hay despilfarro?
g) ¿Cuál es la composición química del agua? Represéntala con la nomenclatura correspondiente.
h) Prepara una presentación digital con el uso del *PowerPoint* que ilustre los resultados del estudio realizado.

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO

1. En un cuadrado mágico la suma de las tres casillas horizontales, verticales y diagonales es la misma.
En el cuadrado mágico de la figura 1.18: $A + B + C = 2{,}1$. Determina el valor de A, B y C.

3,1	A	1,5
	B	
–0,1	C	

Figura 1.18

2. Los monitores de noveno grado de una secundaria básica, le proponen a la guía base realizar una fiesta del saber.
Los de Matemática proponen se respondan las interrogantes siguientes.

Sean:

$$A = \frac{\dfrac{\frac{2}{3}}{5} + \dfrac{\frac{4}{6}}{7}}{\dfrac{1}{\frac{1}{5}} - \dfrac{1}{\frac{1}{3}}} \qquad\qquad B = \frac{6,3 + 2,7}{4,5} + 3,5 \cdot 10^2 - 5^3$$

$$C = \frac{\sqrt{10 - \sqrt{83 - \sqrt{4}}}}{2 - \sqrt[3]{27}} \qquad\qquad D = \frac{12^3 : 6^3}{8^{-1}} + \frac{4}{\sqrt{256}}$$

a) Determina el valor de A, B, C y D.
b) ¿Cuál es el dominio numérico más restringido al que pertenecen los valores hallados?

3. Si $m^n = 3$, determina el valor numérico de P si $P = m^{4n} - 5$.
4. Una secundaria básica tiene una matrícula de 720 estudiantes. El 25 % de ellos está incorporado al círculo de interés de deportes, las $\frac{2}{5}$ partes de los estudiantes restantes están vinculados a los culturales y los estudiantes que quedan se dedican al estudio del medio ambiente.
   a) ¿Cuántos estudiantes se dedican a cada actividad?
   b) ¿Qué tanto por ciento representan del total de la matrícula los que se dedican al estudio del medio ambiente?
5. En una fábrica de la capital del país, los trabajadores que pertenecen al colectivo de innovadores lograron por medio del ahorro de materiales, que el costo de producción de una pieza se reduzca en un 9 % y es ahora de $ 455,00. ¿En qué cantidad de dinero se ha reducido el costo de una pieza?
6. Dada la suma de los recíprocos de 2; 3; 4; 5; 6; 7 y 8; ¿qué fracciones debes eliminar para que la suma sea igual a 1?
7. Como parte de la "Misión Milagro" se midió la vista a 200 personas en un poblado de Bolivia. Se considera con agudeza visual normal, a las personas que tengan medidas de 0,7 a 1,0 y a los que tienen medidas por debajo de 0,7 se les diagnostica catarata. La tabla 1.13 muestra los resultados obtenidos.

7.1 Señala cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles falsas. En el caso de las falsas, argumenta el porqué.

Tabla 1.13

Medida	**Cantidad de personas**
$0,5 \leq x < 0,6$	2
$0,6 \leq x < 0,7$	
$0,7 \leq x < 0,8$	70
$0,8 \leq x < 0,9$	5
$0,9 \leq x < 1,0$	3

a) ____ El 50 % del total de personas fue diagnosticado con catarata.
b) ____ En la información brindada se aprecian dos clases modales.
c) ____ Tres de cada cuatro personas tiene su visión normal.
d) ____ La clase mediana en esta distribución es la tercera.
e) ____ La amplitud de cada clase es 1,0.
f) ____ La marca de clase de la cuarta es 0,85.

7.2 Localiza en el mapa de América a Bolivia.
Indaga sobre su población, extensión territorial y características climatológicas.

7.3 Elabora un párrafo en el que valores las relaciones existentes entre Cuba y Bolivia.

8. El Índice de Masa Corporal (IMC) es un parámetro que se utiliza en la medicina para estudiar el peso ideal de las personas, según su talla y su peso. Se calcula utilizando la fórmula:

$\text{IMC} = \frac{p}{t^2}$, donde p es el peso, en kilogramo, y t la talla, en metro.

Una persona cuyo IMC esté por debajo de 18,5; es considera con bajo peso y de 25 en adelante, se considera con sobrepeso.
La directora de una Secundaria Básica orientó a sus profesores entregar un informe, con el IMC de cada estudiante de su grupo. Al recoger los informes, se construyó la figura 1.19 con los resultados generales de la escuela.

a) ¿Cuántos estudiantes tiene la escuela?
b) ¿En cuántas clases se distribuyó la información?
c) ¿Cuál fue la amplitud de clase utilizada?
d) ¿Cuál es el IMC medio de los estudiantes?
e) Di cuál es la clase modal y la clase mediana.
f) ¿Qué parte de la matrícula tiene bajo peso? ¿Y sobrepeso?
g) ¿Qué tanto por ciento de la matrícula tiene un peso adecuado?

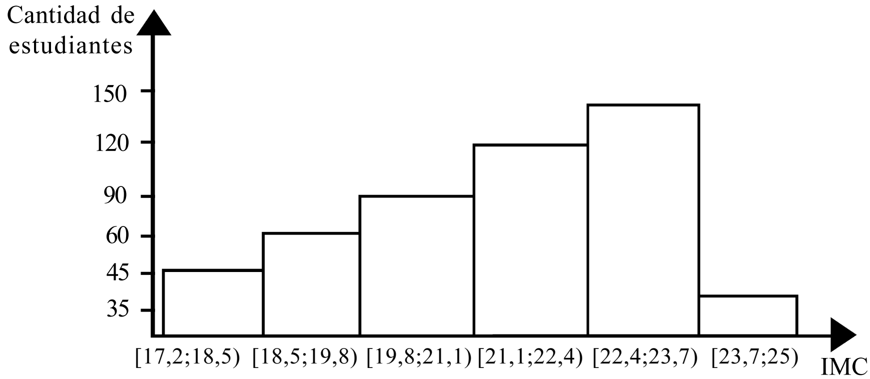


Figura 1.19

9. La situación siguiente muestra algunas de las cuestiones del contenido de una encuesta aplicada a personas seleccionadas al azar de un CDR.

Señala con una cruz (X) donde corresponda:

Sexo	*Estado civil*	*Preferencia*
A. Femenino ____	*A*. Soltero ______	En los ratos libres prefiere:
B. Masculino ____	*B*. Casado ______	*A*. Escuchar música_____
	C. Viudo _______	*B*. Leer _____
	D. Separado ____	

Supongamos que esta encuesta se aplica a una muestra representativa constituida por 10 personas. Las respuestas obtenidas aparecen reflejadas en la tabla 1.14.
S: variable sexo *EC*: variable estado civil *P*: variable preferencia

Tabla 1.14

Sujetos	***S***	***EC***	***P***
1	*A*	*B*	*B*
2	*A*	*A*	*A*
3	*B*	*C*	*A*
4	*A*	*D*	*B*
5	*B*	*C*	*A*
6	*B*	*A*	*B*
7	*A*	*A*	*A*
8	*A*	*B*	*A*
9	*B*	*B*	*B*
10	*A*	*C*	*A*

a) Construye la tabla de frecuencias.
b) Clasifica las variables medidas en esta encuesta, ¿cómo son?
c) ¿Hay diferencias notables entre los solteros, casados y viudos?
d) ¿Qué es más frecuente en la muestra, encontrar mujeres u hombres? ¿Será posible encontrar la media del sexo? Justifica tu respuesta.

10. Recopila en tu grupo con tus compañeros los datos que corresponden al consumo eléctrico del mes anterior de cada una de las casas.

    a) Identifica la población y la muestra.
    b) Di cuál es la variable y clasifícala.
    c) Ordena la lista de mayor a menor.
    d) Construye una tabla de frecuencia absoluta y relativa.
    e) Compara el primero de los datos de la lista y el penúltimo. ¿A qué conclusión llegas?
    f) Calcula la media aritmética e identifica la clase modal y la mediana.
    g) ¿Qué puedes inferir a partir de los datos recopilados?
    h) Elabora un informe con el procesador de texto *Word* que refleje los resultados del estudio realizado. Ilustra los resultados mediante gráficos construidos haciendo uso de la informática.

11. Recopila en tu grupo con tus compañeros los datos que corresponden al pago del teléfono del mes anterior de cada una de las viviendas.
    a) Organiza los datos recopilados.
    b) Construye una tabla de frecuencia absoluta y relativa.
    c) Representa los datos en el gráfico que consideres más adecuado utilizando los recursos informáticos.
    d) Calcula la media aritmética del pago telefónico e identifica la clase modal y la mediana. Comprueba la media calculada utilizando los recursos informáticos.
    e) Analiza el recibo del teléfono de tu casa del mes anterior y desglosa el pago por diferentes conceptos. ¿A qué conclusión puedes llegar?
    f) ¿Cómo valoras el pago del teléfono en las viviendas de los integrantes de tu grupo?
    g) Elabora un informe en *Word* que resuma los resultados del estudio realizado y haz una presentación digital.

PARA LA AUTOEVALUACIÓN

Reflexiona sobre lo aprendido

1. ¿Qué es un número real?
2. ¿Qué conjuntos numéricos son subconjuntos del conjunto de los números reales?
3. De cuántas formas puedes escribir un subconjunto de números reales.
4. ¿Qué operaciones sabes hacer con números reales?
5. ¿Conoces los pasos que se deben seguir para resolver un ejercicio de operaciones combinadas de números reales?
6. ¿Por qué es importante dominar el procedimiento general para el procesamiento de datos?
7. ¿Qué es una variable cuantitativa continua?
8. ¿A qué se denomina clase de frecuencias?
9. ¿Qué es la amplitud de clases y la marca de clase?
10. ¿Qué es el rango o recorrido de la variable?
11. Recuerdas cómo proceder para realizar la distribución de frecuencia por clases.
12. ¿Cuáles son los gráficos más apropiados para representar gráficamente los datos agrupados en clases? Cómo realizarlos.
13. ¿Cuáles son las medidas de tendencia central para datos agrupados? ¿Cómo obtenerlas?

Ponte a prueba

1. Clasifica las proposiciones siguientes en verdaderas o falsas y escribe V o F en la línea según corresponda. En el caso de las proposiciones falsas, justifica por qué lo son:

a) ____ La operación de sustracción no se puede realizar de manera ilimitada en el conjunto de los números naturales.

b) ____ $\frac{1}{6}$ es un número fraccionario que es a la vez menor que 0,6 y mayor que $\frac{1}{5}$.

c) ____ La estadística se caracteriza por realizar estudios de datos relativos a conjuntos de datos, individuos u observaciones lo más numerosas posibles y ocurridos en diferentes instantes de tiempo.

d) ____ La estadística descriptiva estudia una muestra, derivando conclusiones sobre un grupo mayor que esta.

e) ____ El estudio que realiza un director de empresa de la edad de sus trabajadores corresponde a una distribución de frecuencia categórica.

f) ____ El rango o recorrido de la variable es la diferencia entre el dato mayor y el dato menor del conjunto de valores que toma la variable.

g) ____ La marca de clase es el punto medio de la clase y se obtiene, restando los límites de clase superior e inferior y dividiendo entre 2.

h) ____ La clase modal es la clase de menor frecuencia cuando las anotaciones se presentan reunidas en clases.

i) ____ La clase mediana es la clase en que se encuentra el mayor número de datos.

2. Selecciona la respuesta correcta marcando con una cruz en la línea dada:

Si $C = \{x \in \mathbb{N}: x^2 \leq 144\}$ y $D = \{y \in \mathbb{R}: -12 \leq y \leq 12\}$, entonces:

a) ____ $C \cup D = C$
b) ____ $C \cup D = D$
c) ____ $C \cup D = \{-12; 12; 144\}$
d) $C \cup D = \{z \in \mathbb{R}: -12 \leq z \leq 144\}$

3. En un hospital materno se controló la masa (en kilogramo) de 50 de los recién nacidos durante un mes y se obtuvieron los resultados registrados de la manera siguiente:

3	3	3,3	2,5	2,6	4,5	3,5	3,5	4	4
3	3,3	3,4	3,6	3,7	3,2	3,3	3,4	3	3
3,9	3,7	3,5	3,1	3,1	3,2	4,3	4,2	4	4
2,7	2,8	2,9	3,4	3,2	3,1	2,5	3,3	3	3
3,6	3,8	3,5	3,1	3,2	4,1	4,2	3,6	3,9	3,2

a) ¿Los datos registrados corresponden a la población o a una muestra? Justifica tu respuesta.

b) ¿Cuál es la variable objeto de estudio? Clasifícala.

c) Construye una tabla de frecuencias con amplitud de clase igual a 0,5. ¿La distribución de frecuencia es numérica o categórica? ¿Por qué?

d) Representa en un histograma la información recogida.

e) ¿Qué porcentaje de recién nacidos tienen peso inferior a 3,2 kg?

f) Calcula el peso promedio de los recién nacidos.

g) Si un kilogramo es aproximadamente igual a 2,2 lb, ¿cuántos niños nacieron con más de 8 lb? ¿Cómo consideras el peso de este conjunto de niños?

h) Visita el consultorio del médico de la familia al cual perteneces y registra el peso de los niños nacidos en los últimos 6 meses.

Epígrafe 1.1

1. a) $\left\{x \in \mathbb{R} : x \geq \sqrt{3}\right\}$ b) $\left\{x \in \mathbb{R} : x < \sqrt{2}\right\}$

c) $\{x \in \mathbb{R}: -3 \leq x < 2{,}75\}$ d) $\left\{x \in \mathbb{R} : -2\frac{1}{5} < x \leq 4{,}3\right\}$

2. a), b), c) figura 1.20

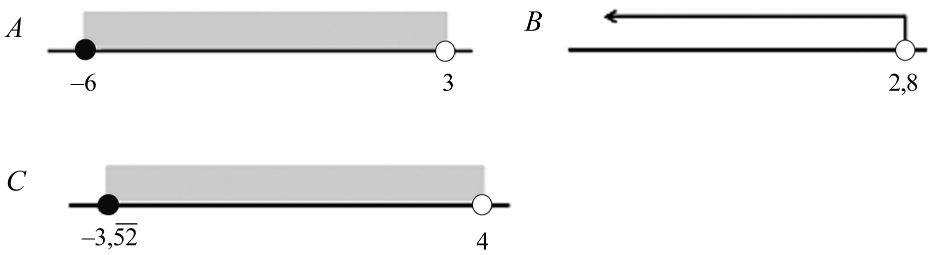


Figura 1.20

3. a) $f(5) = 7$; $g(-2) = 16$ b) 37,6 c) 10,4 e) 0,9

4. a) El conjunto formado por los cuadrados perfectos menores que 20.
   b) El conjunto formado por las tres últimas letras del alfabeto.

5. a) $\mathbb{Q}_+$ b) $\mathbb{N}$ c) $\mathbb{Z}$ d) $\mathbb{Q}_+$ e) $\mathbb{Q}$
   f) $\mathbb{N}$ g) $\mathbb{Q}$ h) $\mathbb{N}$ i) $\mathbb{I}$ j) $\mathbb{Z}$

9. Aproximadamente 136 años.

11. Una semilla pesa $3{,}\overline{3} \cdot 10^{-5}$ g.

12. En una hora las habrá movido 432 000 veces.

14. a) $1{,}25 \cdot 10^{11}$; $1{,}84 \cdot 10^{11}$
    b) Aproximadamente 104 166 667 USD mensualmente.
    c) Aproximadamente 18 400 000 000 USD anualmente.

15. En 2011 la nación indochina exportó 97 144 915 254 USD.

16. 10^{13}

19. a) 133 estudiantes

20. a) Tenía que repartir en total 60 afiches.

21. La matrícula de noveno grado es de 464 estudiantes.

22. a) La guía tenía 75 preguntas.
    b) No pudo resolver el 2,6 % del total de preguntas.

23. La tercera parte del total se encargó de la limpieza y el grupo tiene 27 estudiantes en total.

Epígrafe 1.2

1. a) No corresponde a estudios realizados dentro de la estadística descriptiva, pues se está realizando un estudio de un hecho aislado que es la calificación obtenida por un estudiante en un trabajo de control.
   b) Sí corresponde a estudios realizados dentro de la estadística descriptiva, pues se está realizando el estudio de un conjunto de datos que se obtienen a partir de los índices de mortalidad infantil de los países latinoamericanos durante los 10 últimos años.
   c) Sí corresponde a estudios realizados dentro de la estadística descriptiva, pues se está realizando el estudio a partir de un conjunto de datos que se obtienen de la calidad de los bombillos incandescentes durante un período de tiempo.
   d) No corresponde a estudios realizados dentro de la estadística descriptiva, pues se está realizando un estudio de un hecho aislado que es la enfermedad de una persona.
   e) Sí corresponde a estudios realizados dentro de la estadística descriptiva, pues se está realizando el estudio de un conjunto de datos que se obtienen de la talla de los niños comprendidos entre la edades de 5 a 10 años.

Epígrafe 1.2.1

1. Ver la tabla 1.15.

Tabla 1.15

Población	Conjunto de individuos (objetos, sucesos o procesos) que poseen entre sus características una común y que va a ser objeto de estudio.
Muestra	Cualquier subconjunto de una población, o sea, es la parte de la población que se estudia.
Variable estadística	Cualquier característica o propiedad de los miembros de una población susceptible de tomar determinados valores mediante un procedimiento de medición, de modo que dichos valores pueden ser clasificados de forma exhaustiva en un cierto número de categorías posibles.
Variable estadística cualitativa	Aquellas que se refieren a características o atributos que expresan una cualidad que no puede tomar valores numéricos.
Variable estadística cuantitativa	Aquellas que se refieren a características o atributos que expresan una cantidad o cantidad de magnitud y, por tanto, toma valores numéricos.
Variable estadística discreta	Aquellas que solo pueden tomar un número finito o a lo sumo numerable de valores que suelen coincidir con números enteros.

2. a) Falsa, porque la estadística descriptiva estudia datos relativos a un conjunto de individuos u observaciones con el objetivo de describirlos o caracterizarlos, para poner de manifiesto, de forma gráfica o analítica, sus propiedades.
   b) Falsa, porque el conjunto de individuos debe tener una característica común.
   c) Verdadera.
   d) Verdadera.
   e) Falsa, porque expresan una cualidad que no puede tomar valores numéricos.
   f) Verdadera.

3. Ver la tabla 1.16.

Tabla 1.16

Población	**Muestra**	**Variable estadística**	**Cualitativa**	**Cuantitativa**
a) Las personas de la tercera edad	Las personas seleccionadas, que fueron 45	Hipertensión arterial		X
b) La producción de perfumes producidos (5 000)	Las unidades seleccionadas, que fueron 50	Calidad del perfume	X	
c) Las personas que asistieron al festival de cine	Las personas seleccionadas para la encuesta, que fueron 100	Nivel profesional de las personas	X	
d) Los recién nacidos durante un mes	Los recién nacidos seleccionados, que en este caso fueron 40	Masa de los recién nacidos		X
e) Estudiantes de la escuela secundaria básica seleccionada	Los estudiantes seleccionados para la encuesta, que en este caso fueron 100	Preferencia por los programas televisivos	X	

Epígrafe 1.2.2

1. a) Verdadera.
   b) Falsa, porque es categórica.
   c) Verdadera.
   d) Verdadera.
   e) Falsa, porque la suma es igual a la unidad (1) o al 100 % si se expresa en porcentaje.

2. a) Cantidad de horas semanales que le dedican aproximadamente al estudio de la Matemática. Cuantitativa.
   b) Distribución de frecuencia numérica.
   c) Ver la tabla 1.17.

Tabla 1.17

Cantidad de horas semanales	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia relativa**
0	3	0,107
1	4	0,143
2	5	0,179
3	2	0,071
4	1	0,036
5	3	0,107
6	6	0,214
7	0	0,000
8	4	0,143

e) Los estudiantes de ese grupo estudian como promedio aproximadamente 2,6 h o 2 h y 36 min.

3. a) Población: Pacientes que asistieron al policlínico ese día.
   Muestra: Pacientes seleccionados para hacer el estudio, que en este caso fueron 25.
   b) Determinación del calcio en sangre.
   c) Variable continua.
   d) Numérica.
   e) Ver la tabla 1.18.

Tabla 1.18

Clase	**Frecuencia absoluta**	**Marca de clase**
$8,3 \leq x < 8,8$	4	8,55
$8,8 \leq x < 9,3$	8	9,05
$9,3 \leq x < 9,8$	10	9,55
$9,8 \leq x \leq 10,3$	3	10,55

4. a) Población. Estudiantes participantes en el concurso de Matemática.
   Muestra: Estudiantes seleccionados para hacer el estudio, que en este caso son 32.
   b) Puntuación obtenida por los estudiantes que participaron en el concurso.
   c) Variable continua.
   d) Ver la tabla 1.19.

Tabla 1.19

Clase	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia relativa**
$4 \leq x < 11$	3	0,093 8
$11 \leq x \leq 18$	10	0,312 5
$18 \leq x \leq 25$	13	0,406 3
$25 \leq x \leq 32$	6	0,187 5

5. a) 500
   b) Volumen de los balones.
   c) Continua, porque puede tomar cualquier valor real dentro de un intervalo.
   d) 2 000
   e) Ver la tabla 1.20.

Tabla 1.20

Volumen (cm^3)	**Frecuencia absoluta**	**Marca de clase**	**Frecuencia relativa**
$1\,500 \le x < 2\,000$	125	1 750	0,24
$2\,000 \le x < 2\,500$	129	2 250	0,25
$2\,500 \le x < 3\,000$	139	2 570	0,27
$3\,000 \le x \le 3\,500$	124	3 250	0,24

   f) 500 balones

Epígrafe 1.2.3

1. a) – 2; b) – 4; c) – 5; e) – 3; f) – 6; g) – 3; h) – 6
3. a) Es un país frío.
   b) Durante 30 días.
   c) Temperatura en grado Celsius. El rango de la variable es de 9,5.
   d) Ver la tabla 1.21.

Tabla 1.21

Clase	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia relativa**
$2 \le x < 3{,}9$	6	0,2
$3{,}9 \le x < 5{,}8$	7	0,23
$5{,}8 \le x < 7{,}7$	6	0,2
$7{,}7 \le x < 11{,}5$	11	0,37

Epígrafe 1.2.4

1. a) Verdadera.
   b) Falsa, porque la media aritmética es única.
   c) Verdadera.
   d) Verdadera.
   e) Falsa, porque puede existir más de una moda.
   f) Falsa, esa condición es de la mediana cuando el conjunto de datos ordenados es par.
   g) Falsa, pues esa condición corresponde a la mediana cuando el conjunto de datos ordenados es impar.
   h) Falsa, pues se puede determinar también en distribuciones de frecuencias categóricas.

i) Verdadera.
j) Falsa, pues la moda es el dato que más se repite, la condición que se da corresponde al cálculo de la media aritmética para datos simples.
k) Falsa, pues puede utilizarse en situaciones en que intervienen variables cualitativas y cuantitativas.
l) Verdadera.
m) Verdadera.
n) Falsa, para calcularla hay que ordenar los datos y en función de la cantidad de estos, sea par o impar, se determina.
ñ) Verdadera.

3. Media: 8,4; moda: 9; mediana: 9

5. a) Verdadera.
   b) Falsa, pues la clase modal es aquella en que se concentra la mayor frecuencia absoluta.
   c) Falsa, pues la clase mediana es aquella en que está ubicado el valor central del conjunto de datos.

6. a) 150
   b) 14
   c) Frecuencia relativa:
   Primera clase: 6,7 %; segunda clase: 33,3 %; tercera clase: 26,7 %; cuarta clase: 20 %; quinta clase: 13,3 %.
   d) Clase modal: $60 \leq x < 74$; clase mediana: $74 \leq x < 88$.
   e) La media del ritmo cardíaco es de 81 pulsaciones por minuto.
   g) No tenían ritmo cardíaco normal el 20 %.

7. a) El rango es 27.
   b) Ver la tabla 1.22.

Tabla 1.22

Clases	**Frecuencia absoluta**
$40 \leq x < 44,5$	2
$44,5 \leq x < 49$	3
$49 \leq x < 53,5$	8
$53,5 \leq x < 58$	9
$58 \leq x < 62,5$	4
$62,5 \leq x < 67$	4

   d) El peso promedio del grupo de estudiantes es de 54,68 kg.
   e) La clase modal es: $53,5 \leq x < 58$. La clase mediana es: $53,5 \leq x < 58$.

8.1 La falsa es la proposición d).

9. a) La preselección tiene 30 jugadores.
   b) 10
   c) 170-180
   d) La estatura media es 175,3 cm.
   e) La clase mediana es 170-180.

10. a) En el edificio hay 21 apartamentos.
    b) El consumo promedio fue de 165 kWh.
    c) El 16 %
    d) La frecuencia relativa de la clase modal es 0,38.
    e) La amplitud de las clases es 50.

Ejercicios del capítulo

1. $A = -2{,}5$; $B = 0{,}7$; $C = 3{,}9$

2. a) $A = 4$; $B = 227$; $C = -1$; $D = \dfrac{257}{4}$ o $64\dfrac{1}{4}$
   b) $\mathbb{N}$; $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Q}_+$

3. $P = 76$

4. a) 180 estudiantes están incorporados al círculo de interés de deporte; 216, a las actividades culturales y 424 se dedican al estudio del medio ambiente.
   b) 54,9 %

5. El costo de una pieza se ha reducido en $ 45,00.

6. $\dfrac{1}{4}$; $\dfrac{1}{5}$; $\dfrac{1}{7}$ y $\dfrac{1}{8}$

7.1 a) Falsa, pues es el 61 %.
    b) Falsa, pues se aprecia solo una.
    c) Falsa, pues son 4 de cada 5 personas.
    d) Falsa, pues es la segunda.
    e) Falsa, es 0,1.
    f) Verdadera.

8. a) La escuela tiene 500 estudiantes.
   b) En 6 clases.
   c) La amplitud de la clase es de 1,3.
   d) El IMC medio de los estudiantes es 21,11.
   e) La clase modal es: $22{,}4 \leq x < 23{,}7$; la clase mediana es $21{,}1 \leq x \leq 22{,}4$.
   f) Tienen bajo peso 45 estudiantes que representa el 9 % de la matrícula.
   g) El 91 % de la matrícula tiene el peso adecuado.

10. a) Ver la tabla 1.23.

Tabla 1.23

Variable	*A*	*B*	*C*	*D*
Sexo	6	4		
Estado civil	3	3	3	1
Preferencia	6	4		

b) Las tres son variables cualitativas.

CAPÍTULO 2

Geometría plana

En este capítulo conocerás relaciones geométricas que se presentan en la realidad cotidiana, en la técnica o en distintas formas de expresión artística y, en particular, aplicarás procedimientos para calcular longitudes de segmentos y construir figuras geométricas, algunos de los cuales fueron planteados por el hombre desde hace miles de años. Pero también, podrás estimar cálculos y realizar demostraciones de propiedades sencillas. En fin, nuevos conocimientos para describir, analizar, explicar y comprender mejor el mundo, apreciar la belleza de sus formas y consolidar ideas con las que un día podrás contribuir a transformarlo.

2.1 Segmentos proporcionales y sus aplicaciones

Para el estudio de los nuevos temas de geometría de este capítulo, es necesario que recuerdes algunos conocimientos que posees sobre razones y proporciones, desde la enseñanza primaria, séptimo y octavo. Completarás tu estudio aprendiendo conceptos nuevos y resolviendo los ejercicios del epígrafe 2.1.1 u otros similares que te oriente tu profesor, así estarás en condiciones de enfrentar con éxito las aplicaciones de la proporcionalidad de segmentos. Te invitamos a que nos sigas…

2.1.1 Sistematización sobre razones y proporciones entre longitudes de segmentos

¡! La profesora de Matemática le dejó de tarea a su grupo encontrar la longitud de un segmento $\overline{MN}$, dadas las condiciones siguientes:

$\overline{PQ} = 5{,}8 \text{ cm}$

La razón $\dfrac{\overline{MN}}{\overline{PQ}} = \dfrac{3}{2}$

¿Cómo procederías tú?

Hagamos primero algunas precisiones necesarias para calcular razones y proporciones y, en particular, para hallar la razón entre la longitud de dos segmentos, a partir de algunos ejemplos.

Ejemplo 1:

La gráfica de la figura 2.1 muestra la cantidad de materia prima, en kilogramo, recolectada por los grupos noveno 1 y noveno 2 de una secundaria básica. ¿Cómo determinar cuántas veces más recogió el grupo 2 la cantidad que recogió el grupo 1?

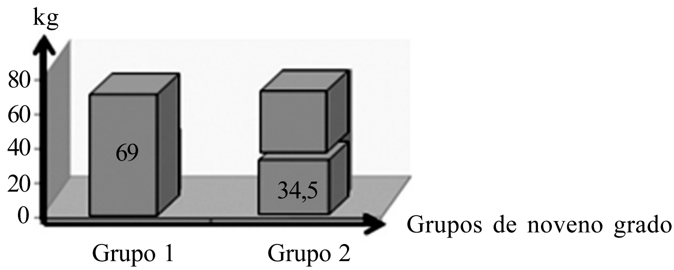


Figura 2.1

Solución:

Para saber cuántas veces más recogió el grupo 2 la cantidad que recogió el grupo 1, planteamos la razón entre estas dos cantidades, tal como aprendiste en grados anteriores. Fíjate que la razón entre 69 kg y 34,5 kg es la fracción:

$$\frac{69\text{ kg}}{34{,}5\text{ kg}} = 2$$

Como en toda razón, sus términos son:

$$\frac{69 \longrightarrow \text{Antecedente}}{34{,}5 \longrightarrow \text{Consecuente}}$$

Respuesta: El grupo noveno 2 recogió dos veces más la cantidad de materia prima que recogió el grupo noveno 1.

Ejemplo 2:

Alberto investigó en el círculo de interés patriótico de su escuela las dimensiones que tiene cada tipo de la bandera cubana: la de gala, la de diario y la de tempestad, para establecer entre sus dimensiones relaciones de proporcionalidad.
¿Cómo procedió Alberto para lograr su propósito?

Solución:

Alberto observó que la bandera tiene forma rectangular (fig. 2.2) y que su largo y su ancho, geométricamente, lo determinan segmentos.

Figura 2.2

Midió el largo y el ancho de esos segmentos en cada tipo de bandera cubana:

Bandera de gala: 6 m de largo por 3 m de ancho.
Bandera de diario: 3 m de largo por 1,5 m de ancho.
Bandera de tempestad: 18 dm de largo y 0,90 m de ancho.

Para expresar matemáticamente estas relaciones, recordó que la razón de segmentos es la razón entre sus medidas, *expresadas estas en la misma unidad* y escribió tres razones, con la igualdad entre cada dos de estas razones planteó las tres proporciones posibles entre ellas:

Razones: $\frac{6}{3}; \frac{3}{1,5}; \frac{1,80}{0,90}$

Como te darás cuenta en los tres casos la razón es igual a 2. Fíjate que para la bandera de tempestad, Alberto tuvo que hacer las conversiones de unidad necesarias para *expresar primero la medida de los segmentos en la misma unidad de longitud:* 18 dm = 1,80 m.

Proporciones: $\frac{6}{3} = \frac{3}{1,5} \quad \frac{3}{1,5} = \frac{1,80}{0,90} \quad \frac{6}{3} = \frac{1,80}{0,90}$

En estos casos se dice que los segmentos de las dimensiones de los tres tipos de banderas son respectivamente proporcionales entre sí.

También pueden escribirse así: 6 : 3 = 3 : 1,5

3 : 1,5 = 1,80 : 0,90
6 : 3 = 1,80 : 0,90

Por lo cual, si: $\frac{6}{3} = \frac{1,80}{0,90}$, entonces $6 \cdot 0,90 = 3 \cdot 1,80$.

En ese caso se lee: 6 “*es a*” 3 “*como*” 1,80 “*es a*” 0,90.

Extremo Medio

$$\frac{6}{3}=\frac{1{,}80}{0{,}90}$$

Medio Extremo

$$6 : \overbrace{3 = 1{,}80}^{\text{Medios}} : 0{,}90$$

Extremos

Todo esto se cumple para las tres proporciones y en general, para toda proporción.

Respuesta: Alberto comprobó que en cada una de las banderas, la longitud del largo es siempre el doble de la longitud del ancho.

Sistematizando sus conocimientos en la clase de repaso, Luis le dice a Alberto:

Siempre se cumple que un medio es igual al producto de los extremos dividido entre el otro medio y un extremo es igual al producto de los medios dividido entre el otro extremo.

Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, aplicando propiedad fundamental de las proporciones $a \cdot d = b \cdot c$, entonces

despejando: $a=\frac{b \cdot c}{d},\ b=\frac{a \cdot d}{c},\ c=\frac{a \cdot d}{b},\ d=\frac{b \cdot c}{a}$.

Recíprocamente se cumple que si el producto de dos números es igual al producto de otros dos, con los cuatro factores se puede formar una proporción, siendo extremos los dos factores de un producto y medios los del otro producto.

También en una proporción:

- al intercambiar los medios,
- al intercambiar los extremos,
- y al invertir las razones;

se obtiene de nuevo, en cada caso, una proporción.

Ejemplo 3:

Halla el valor de x en las proporciones siguientes y comprueba:

a) $\frac{x}{6}=\frac{12}{18}$ b) $\frac{0{,}05}{1{,}5}=\frac{1{,}5}{x}$ c) $\frac{3}{x}=\frac{x}{12}$

Solución:

a) $\frac{x}{6}=\frac{12}{18}$

$x \cdot 18 = 6 \cdot 12$ (aplicando la propiedad fundamental de las proporciones)
$x \cdot 18 = 72$ (despejando la x)

$x=\frac{72}{18}$

$x = 4$

En general, la *cuarta proporcional* de tres números dados a, b y c es el cuarto término x, que cumple la condición: $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$ donde $x=\frac{b \cdot c}{a}$.

Comprobando: $\frac{4}{6}=\frac{12}{18}$ (sustituyendo la x)

$4 \cdot 18 = 6 \cdot 12$
$72 = 72$

b) $\frac{0,05}{1,5}=\frac{1,5}{x}$

$0,05 \cdot x = 1,5 \cdot 1,5$ (aplicando la propiedad fundamental de las proporciones)
$0,05 \cdot x = 2,25$ (despejando la x)

$x=\frac{2,25}{0,05}$

$x = 45$

En general, la *tercera proporcional* a dos números a y b, es el cuarto término x, que cumple la condición: $\frac{a}{b}=\frac{b}{x}$ donde $x=\frac{b^2}{a}$.

Comprobando: $\frac{0,05}{1,5}=\frac{1,5}{45}$ (sustituyendo la x)

$0,05 \cdot 45 = 1,5 \cdot 1,5$
$2,25 = 2,25$

c) $\frac{3}{x}=\frac{x}{12}$

$x^2 = 36$ (aplicando la propiedad fundamental de las proporciones)

$x = \sqrt{36}$ (hallando la raíz cuadrada)

$x = 6$

En general, la *media proporcional* a dos números a y b, es el valor x, que cumple la condición: $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ donde $x^2 = a \cdot b$; $x = \sqrt{a \cdot b}$.

Comprobando: $\frac{3}{6} = \frac{6}{12}$ (sustituyendo la x)

$3 \cdot 12 = 6 \cdot 6$

$36 = 36$

Respuesta: $x = 4$; $x = 45$; $x = 6$

R¡! Ahora ya puedes resolver la problemática inicial planteada:

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{PQ}} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{\overline{MN}}{5{,}8} = \frac{3}{2} \text{ (se sustituye } \overline{PQ} = 5{,}8 \text{ cm)}$$

$2 \cdot \overline{MN} = 3 \cdot 5{,}8$ (aplicando la propiedad fundamental de las proporciones)

$\overline{MN} = \frac{17{,}4}{2}$ (despejando $\overline{MN}$)

$\overline{MN} = 8{,}7\ cm$

Observa que los segmentos $\overline{MN}$ y $\overline{PQ}$ están en la razón $\frac{3}{2}$.

Ejemplo 4:

¿Cuál es la razón entre las longitudes de dos segmentos dados en la figura 2.3, de los cuales no se conoce la longitud?

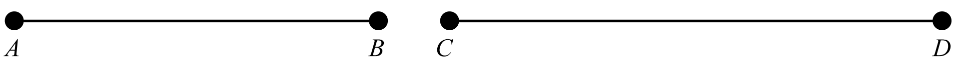


Figura 2.3

Solución:

Debemos determinar primero la longitud de estos segmentos, porque la razón entre segmentos es la razón entre sus medidas, expresadas estas en la misma unidad.

Al medir la longitud de un segmento realizamos la comparación con otro (segmento unidad) convenientemente seleccionado, o sea, investigamos cuántas veces el segmento unidad está contenido en el segmento que medimos.

Tomando como unidad de medida, un segmento conveniente de longitud u (unidad), en este caso, el segmento $\overline{AB} = 5\text{ u}$ y el segmento $\overline{CD} = 7\text{ u}$ (fig. 2.4).

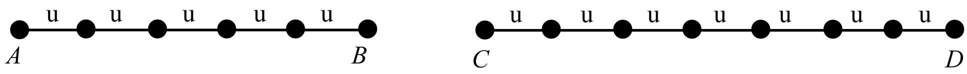


Figura 2.4

Luego si $\overline{AB} = 5\text{ u}$, el número 5 es la medida y u es la unidad, de igual forma sucede con $\overline{CD} = 7\text{ u}$, el número 7 es la medida y u es la unidad.

Entonces la razón de $\overline{AB}$ a $\overline{CD}$ es $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{5}{7}$; esta relación se lee “la razón entre los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ es $\dfrac{5}{7}$.”

Respuesta: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{5}{7}$

Para encontrar fácilmente y de manera precisa la razón entre dos segmentos dados, de los cuales no se conoce la longitud, se aplica un procedimiento basado en los teoremas que estudiarás en el próximo subepígrafe.

Ejercicios

1. Amplía las fracciones siguientes por $n = 2; 3; 4; 5\ldots$

   a) $\dfrac{1}{4}$ b) $\dfrac{2}{3}$

2. Halla la razón entre:

   a) 10 y 2 b) 18 y 12 c) $\dfrac{15}{7}$ y $\dfrac{5}{13}$ d) 0,8 y 1,6

3. Completa los espacios en blanco según corresponda:

   a) La razón entre 9 y 45 es ____. b) La razón entre 10 y ____ es 4.

   c) La razón entre 10^{-1} y 10^{2} es ____. d) La razón entre ____ y 20 es $\dfrac{1}{15}$.

4. Selecciona de las parejas de números siguientes la que está en la misma razón de:

a) $\frac{4}{5}$

I) ____ 12 y 20
II) ____ 28 y 35
III) ____ 40 y 60
IV) ____ Ninguno de los anteriores.

b) $\frac{7}{3}$

I) ____ 14 y 12
II) ____ 21 y 15
III) ____ 0,7 y 0,3
IV) ____ Ninguno de los anteriores.

c) 4 : 11

I) ____ 0,4 y 0,11
II) ____ 60 y 165
III) ____ 0,04 y 1,1
IV) ____ Ninguno de los anteriores.

5. Selecciona el valor de x que corresponda en cada caso para que se mantenga la proporción:

a) $\frac{x}{10} = \frac{24}{40}$

I) ____ $x = 8$
II) ____ $x = 6$
III) ____ $x = 12$
IV) ____ Ninguno de los anteriores.

b) $\frac{1,5}{2} = \frac{3}{x}$

I) ____ $x = 2,25$
II) ____ $x = 1$
III) ____ $x = 4$
IV) ____ Ninguno de los anteriores.

c) $\frac{4}{x} = \frac{x}{16}$

I) ____ $x = 64$
II) ____ $x = 4$
III) ____ $x = 8$
IV) ____ Ninguno de los anteriores.

d) $\frac{\frac{1}{2}}{x} = \frac{2}{\frac{2}{3}}$

I) ____ $x = \frac{1}{6}$
II) ____ $x = 6$
III) ____ $x = \frac{2}{3}$
IV) ____ Ninguno de los anteriores.

6. Completa los espacios en blanco de forma tal que se cumpla que es una proporción:

   a) La cuarta proporcional de la serie de números 24; 51; 104 es _____.

   b) La tercera proporcional a $5\frac{1}{4}$ y 7 es _____.

   c) La media proporcional entre 7 y 63 es _____.

7. Un recipiente contiene 4 L de alcohol, se le añade 0,4 L de agua. ¿En qué relación se encuentra el agua con el alcohol?

8. La edad del padre de Carlos es 42 años. Si conoces que la razón entre la edad de Carlos y la de su padre es $\frac{2}{7}$, ¿qué edad tiene Carlos?

9. Halla la razón de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, si se sabe que:

   a) $\overline{AB} = 36\text{ cm}$ y $\overline{CD} = 12\text{ cm}$

   b) $\overline{AB} = 0{,}25\text{ m}$ y $\overline{CD} = 75\text{ cm}$

   c) $\overline{AB} = 0{,}7\text{ dm}$ y $\overline{CD} = 28\text{ cm}$

   d) $\overline{AB} = 1\frac{2}{5}\text{ mm}$ y $\overline{CD} = 9{,}8\text{ mm}$

9.1 Di si son verdaderas (V) o falsas (F) las proposiciones siguientes. Convierte en verdaderas las falsas.

   a) ____ Si $\overline{AB} = 0{,}2\text{ m}$ y $\overline{BC} = 199\text{ mm}$, entonces $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < 1$.

   b) ____ Si $\overline{AB} = x$ u; $\overline{BC} = y$ u y $x = \frac{3}{5}y$, entonces $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{5}{3}$ (u: unidades).

   c) ____ Si el área de un cuadrado 1 es a^2 y el área de un cuadrado 2 es $16a^2$, entonces la razón entre los lados del cuadrado 1 con respecto a los lados del cuadrado 2 es $\frac{1}{4}$.

   d) ____ Si el ancho (a) de un rectángulo es 18 cm y el largo (L) excede al ancho en 6 cm, entonces $\frac{a}{L} = \frac{3}{2}$.

10. El segmento $\overline{AB}$ (fig. 2.5) se ha dividido en 15 segmentos iguales. En él se han ubicado los puntos C, D, E y F.

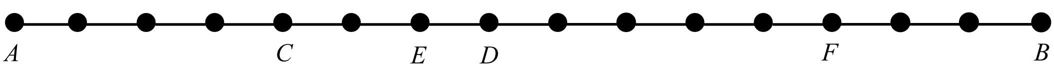


Figura 2.5

Selecciona la razón numérica de la columna II que le corresponda a la razón de segmentos de la columna I.

I	II
1. $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BD}}$	a) $\dfrac{7}{3}$
2. $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{CD}}$	b) 1
3. $\dfrac{\overline{ED}}{\overline{FB}}$	c) $\dfrac{1}{2}$
4. $\dfrac{\overline{CE}}{\overline{AC}}$	d) 2
5. $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{EF}}$	e) $\dfrac{1}{4}$

11. En la figura 2.6 se tienen representados tres segmentos con sus respectivas medidas. ¿Qué longitud debe tener un cuarto segmento $\overline{GH}$ para que se cumpla la proporción $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{GH}}$.

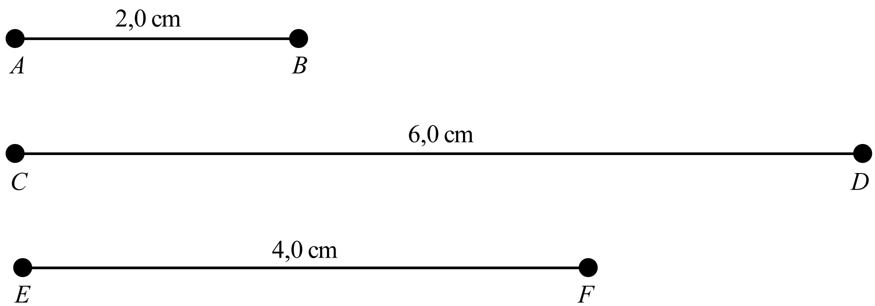


Figura 2.6

12. El segmento $\overline{AB}$ (fig. 2.7) se ha dividido en 12 segmentos iguales y se ha ubicado el punto C.

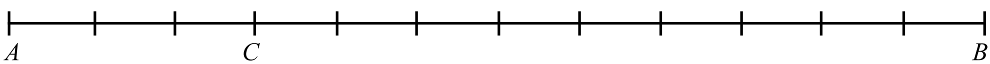


Figura 2.7

a) Determina la razón en la que el punto C divide al segmento $\overline{AB}$.

b) Ubica un punto D en el segmento $\overline{AB}$ de forma tal que se cumpla $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$.

13. Completa los espacios en blanco de forma tal que se cumpla que $\dfrac{\overline{MN}}{\overline{PQ}} = \dfrac{\overline{RT}}{\overline{EF}}$.

a) Si $\overline{MN} = 15$ cm; $\overline{PQ} = 3{,}0$ cm y $\overline{RT} = 4{,}5$ cm, entonces $\overline{EF} =$ _______.

b) Si $\overline{PQ} = 2{,}5$ cm; $\overline{RT} = 42$ mm y $\overline{EF} = 0{,}7$ cm, entonces $\overline{MN} =$ _______.

c) Si $\overline{MN} = 180$ mm; $\overline{RT} = 3{,}60$ mm y $\overline{EF} = 12{,}0$ cm, entonces $\overline{PQ} =$ _______.

d) Si $\overline{MN} = 2{,}8$ cm; $\overline{PQ} = 1{,}4$ mm y $\overline{EF} = 3{,}2$ cm, entonces $\overline{RT} =$ _______.

14. Construye un segmento $\overline{AB}$ y otro $\overline{MN}$ que sean proporcionales a los segmentos $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$ (fig. 2.8) respectivamente si:

a) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{MN}}{\overline{EF}} = \dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{MN}}{\overline{EF}} = 3$

Figura 2.8

15. En la figura 2.9 aparecen representados cuatro segmentos con sus respectivas longitudes. Plantea todas proporciones posibles entre los segmentos.

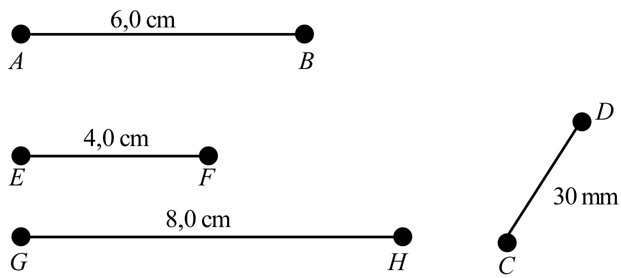


Figura 2.9

16. Dos autos deben recorrer 60 y 80 km respectivamente. Cuando el primer auto ha avanzado 12 km, ¿cuántos kilómetros ha avanzado el segundo auto si ambos han recorrido la misma parte?

17. Mientras un peatón recorre 3 600 m, otro recorre 5 400 m. Halla la razón de sus velocidades.

18. En la figura 2.10, la longitud de la circunferencia de centro *O* y radio $r_1 = \overline{OA}$ es igual a 62,8 cm, la razón entre r_1 y r_2 es igual a $\frac{2}{3}\cdot$ Halla la longitud del radio r_2.

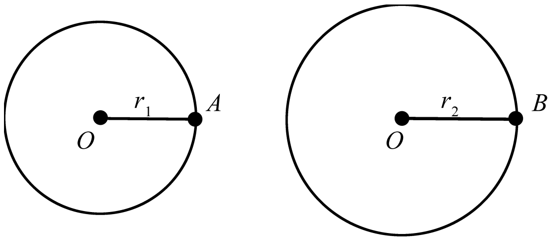


Figura 2.10

19. En la figura 2.11, se sabe que la razón de las alturas de los postes *A* y *B*, es igual a la razón de las sombras que proyectan. ¿Cuál es la altura del poste *A*?

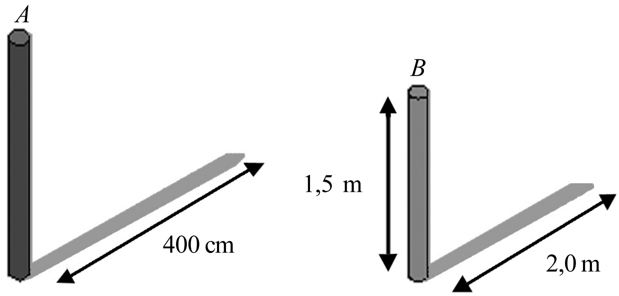


Figura 2.11

2.1.2 Teorema de las transversales

¡! En una actividad de exploración y campismo un grupo de pioneros de noveno grado quiere medir la distancia entre dos puntos *A* y *C* separados por una laguna artificial, como se muestra en la figura 2.12.

Figura 2.12

Luisito plantea que es imposible, pero Roberto refiere que sí se puede. Situación parecida él la había encontrado en el libro *Geometría Recreativa* en la biblioteca de la escuela.

¿Será cierto lo que plantea Roberto?

Ahora vamos a estudiar un teorema sobre segmentos proporcionales, de mucha importancia por su aplicación a la resolución de problemas, tanto geométricos como de la vida práctica, que nos ayudará a resolver el problema antes propuesto, este teorema se denomina **teorema de las transversales,** descubierto por el famoso matemático Tales de Mileto (625-546 a.n.e.).

Para comprender mejor ese teorema, debes primero interpretar correctamente la definición que sigue:

Recuerda *la definición de segmentos de semirrectas correspondientes:*

Son aquellos segmentos de semirrectas de origen común que tienen sus extremos respectivamente en la misma paralela secante a dichas semirrectas o aquellos que tienen un extremo común y el otro en la misma paralela secante a ambas semirrectas.

Ejemplo 1:

En la figura 2.13, son correspondientes: $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$; $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$; $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$.

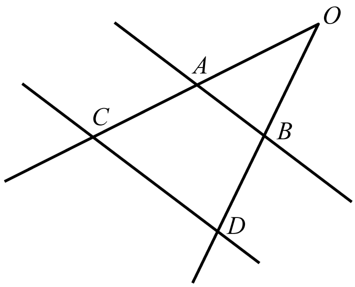


Figura 2.13

El teorema de las transversales se estudia dividido en tres partes. Queremos que tú mismo llegues a encontrar la primera parte de este teorema, a partir de la búsqueda de relaciones entre segmentos. Para eso realiza los siguientes pasos utilizando los instrumentos de dibujo:

1. Traza dos semirrectas de origen común O, cortadas por dos rectas paralelas, como las de la figura 2.13.
2. Mide los segmentos $\overline{OA}$; $\overline{OC}$; $\overline{OB}$ y $\overline{OD}$.
3. Calcula la razón entre los segmentos $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OC}}$ y $\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OD}}$.
4. Compara los resultados obtenidos.

Otra forma mediante la que puedes llegar al planteamiento de la primera parte del teorema de las transversales es con el empleo del *software* de geometría dinámica *El Geómetra* (fig. 2.14), sigue para esto el algoritmo anterior.

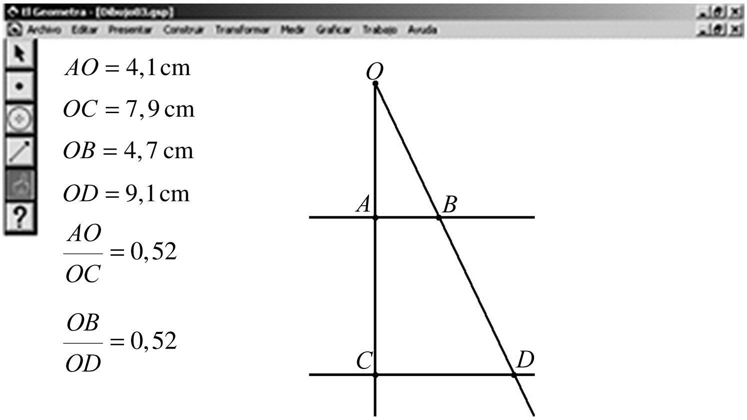


Figura 2.14

Posteriormente, se comprueba, al variar la posición del punto O moviéndolo con el puntero, que las razones continúan siendo las mismas, bajo las condiciones consideradas. Así, llegas a la obtención de este teorema.

Recuerda *la primera parte del teorema de las transversales:*

Teorema 1:

Si dos semirrectas de origen común son cortadas por varias rectas paralelas, entonces se cumple que la razón entre dos segmentos de una de ellas es igual a la razón entre los dos segmentos correspondientes en la otra.

Vamos a realizar la demostración del teorema, utilizando la figura 2.15.

Demostración:

Premisa: Sean las rectas $AB \,||\, CD$, las que cortan a las semirrectas OC y OD. Según la cual son correspondientes: $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$, luego obtenemos tres proporciones para la tesis.

Tesis: (1) $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{BD}}$ (2) $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{OD}}$

(3) $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{OC}} = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{OD}}$

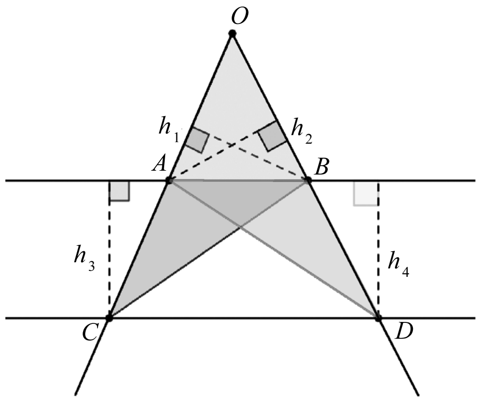


Figura 2.15

Realicemos la demostración para la proporción (1).

En el ΔOAB, trazamos las alturas h_1 y h_2 respectivas a los lados $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$. Entonces se cumple que:

$$A_1 = \frac{\overline{OA} \cdot h_1}{2} = \frac{\overline{OB} \cdot h_2}{2}, \text{ luego } \overline{OA} \cdot h_1 = \overline{OB} \cdot h_2 \ (1)$$

Trazamos los segmentos $\overline{AD}$; $\overline{BC}$; h_3 y h_4.

En el ΔABC se cumple que: $A_2 = \frac{\overline{AC} \cdot h_1}{2}$.

En el ΔABD se cumple que: $A_3 = \frac{\overline{BD} \cdot h_2}{2}$.

h_3 y h_4 son las alturas al lado común $\overline{AB}$ de los triángulos ABC y ABD y como $h_3 = h_4$ (por ser la distancia entre las rectas AB y CD, $AB \parallel CD$), luego se cumple que $A_2 = A_3$,

porque $\frac{\overline{AB} \cdot h_3}{2} = \frac{\overline{AB} \cdot h_4}{2}$, por lo tanto, se cumple $\frac{\overline{AC} \cdot h_1}{2} = \frac{\overline{BD} \cdot h_2}{2}$, o sea,

$$\overline{AC} \cdot h_1 = \overline{BD} \cdot h_2 \ (2)$$

Dividiendo miembro a miembro (1) y (2), obtenemos:

$\frac{\overline{OA} \cdot h_1}{\overline{AC} \cdot h_1} = \frac{\overline{OB} \cdot h_2}{\overline{BD} \cdot h_2}$ simplificando en cada miembro, obtenemos $\frac{\overline{OA}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{BD}}$.

Te propongo que demuestres las proposiciones 2 y 3.

R¡! Solución del problema planteado

Roberto tiene razón, para medir de forma indirecta la distancia $\overline{AC}$ entre dos puntos extremos separados por la laguna artificial (fig. 2.16), se puede proceder utilizando el teorema de las transversales.

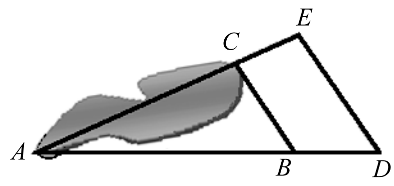


Figura 2.16

1. Se selecciona un punto E alineado con A y C.
2. Se construye $\overline{AD}$ y $\overline{ED}$.
3. Se construye $\overline{BC} \parallel \overline{ED}$.
4. Se miden las longitudes de $\overline{CE}$, $\overline{AB}$ y $\overline{BD}$.

Aplicando la proporción (1), se obtiene:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} \text{ de donde } \overline{AC}=\frac{\overline{CE}\cdot\overline{AB}}{\overline{BD}}.$$

Observa que el teorema que acabamos de demostrar, es absolutamente general, se cumple para cualquier número de rectas paralelas *AE*; *BF*; *CG* y *HD* y para cualquier posición de las transversales *HE* y *AD* (fig. 2.17).

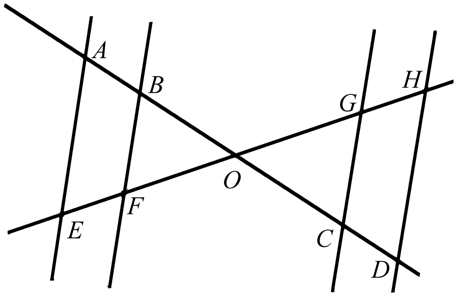


Figura 2.17

Para una mejor comprensión de las dos partes restantes del teorema de las transversales, tienes que interpretar correctamente las definiciones siguientes.

Recuerda *las definiciones siguientes:*

Haz de semirrectas es el conjunto de todas las semirrectas que tienen un origen común.
Haz de rectas paralelas es el conjunto de todas las rectas paralelas entre sí.
Segmentos correspondientes de dos paralelas son los segmentos contenidos en dos rectas paralelas determinados por su intersección con dos segmentos de semirrectas correspondientes.
Segmentos correspondientes de una paralela son los segmentos contenidos en una paralela, determinados por su intersección con tres segmentos de semirrectas correspondientes.

Ejemplo 2:

a) En la figura 2.18, son segmentos correspondientes de dos paralelas: $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, además, $\overline{CE}$ y $\overline{DF}$.

b) En la figura 2.18, son segmentos correspondientes de una paralela: $\overline{AC}$ y $\overline{CE}$, además, $\overline{BD}$ y $\overline{BF}$.

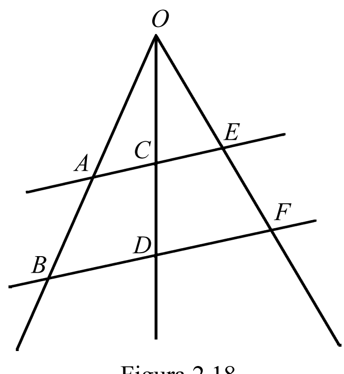


Figura 2.18

Recuerda *la segunda y tercera partes del teorema de las transversales:*

Segunda parte: La razón entre dos segmentos de una semirrecta es igual a la razón entre los dos segmentos correspondientes de paralelas a ellos.
Observa que según el teorema, en la figura 2.17 se cumple:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} \text{ y } \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{DF}}$$

Nota: los segmentos de semirrectas tienen que tener siempre un extremo que coincide con el origen de las semirrectas.

Tercera parte: La razón entre dos segmentos de una paralela es igual a la razón entre los dos segmentos de paralela correspondientes en otra paralela.
Observa que según el teorema, en la figura 2.17 se cumple:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DF}} \text{ y } \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{BF}}$$

Ejemplo 3:

En la figura 2.19, $QS \,||\, PR$;
$\overline{OP}=2{,}0\,\text{cm}$; $\overline{PQ}=4{,}0\,\text{cm}$ y $\overline{OR}=3{,}0\,\text{cm}$. Halla la longitud de los segmentos $\overline{RS}$; $\overline{OS}$ y $\overline{OQ}$.

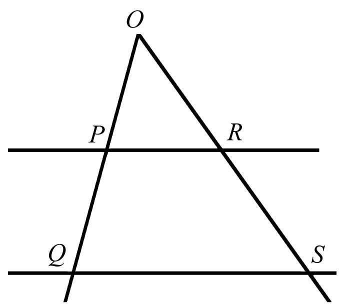


Figura 2.19

Solución:

Podemos aplicar la primera parte del teorema de las transversales.

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{PQ}}=\frac{\overline{OR}}{\overline{RS}}$$

Sustituyendo los segmentos por las longitudes conocidas obtenemos:

$$\frac{2}{4}=\frac{3}{\overline{RS}}$$

$2\cdot\overline{RS}=4\cdot 3$ (aplicando la propiedad fundamental de las proporciones)

$\overline{RS}=\dfrac{4\cdot 3}{2}$ (despejando $\overline{RS}$)

$\overline{RS}=6{,}0\,\text{cm}$

Para calcular las longitudes $\overline{OS}$ y $\overline{OQ}$, podemos hacerlo mediante la suma de segmentos.

$\overline{OS} = \overline{OR} + \overline{RS}$

$\overline{OS} = 3\text{ cm} + 6\text{ cm}$

$\overline{OS} = 9{,}0\text{ cm}$

$\overline{OQ} = \overline{OP} + \overline{PQ}$

$\overline{OQ} = 2\text{ cm} + 4\text{ cm}$

$\overline{OQ} = 6{,}0\text{ cm}$

Respuesta: $\overline{RS} = 6{,}0\text{ cm}$; $\overline{OS} = 9{,}0\text{ cm}$; $\overline{OQ} = 6{,}0\text{ cm}$

Ejemplo 4:

Sea el triángulo ABC (fig. 2.20), se conoce que:

- $\overline{EG} \parallel \overline{BC}$.
- F punto de intersección de $\overline{AD}$ y $\overline{EG}$.
- B, C y D puntos alineados.

$\overline{AE} = 3{,}5\text{ cm}$; $\overline{AB} = 7{,}0\text{ cm}$; $\overline{EG} = 2{,}5\text{ cm}$ *y* $\overline{BD} = 3{,}0\text{ cm}$.

Calcula la longitud de $\overline{EF}$ y $\overline{DC}$.

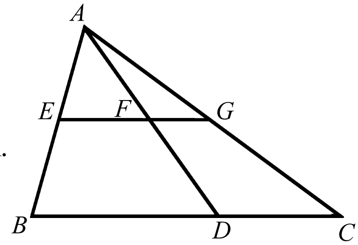


Figura 2.20

Solución:

Para calcular la longitud de $\overline{EF}$ podemos formar la proporción siguiente:

$\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{BD}}$ (segunda parte del teorema de las transversales)

$$\frac{3{,}5}{7} = \frac{\overline{EF}}{3}$$

$$3{,}5 \cdot 3 = 7 \cdot \overline{EF}$$

$$\overline{EF} = \frac{3{,}5 \cdot 3}{7}$$

$$\overline{EF} = 1{,}5\text{ cm}$$

Para calcular la longitud de $\overline{DC}$, podemos formar la proporción siguiente:

$\dfrac{\overline{EF}}{\overline{FG}} = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$ (tercera parte del teorema de las transversales)

Para calcular la longitud de $\overline{FG}$, podemos hacerlo mediante la sustracción de segmentos.

$$\overline{FG} = \overline{EG} - \overline{EF}$$

$$\overline{FG} = 2{,}5 - 1{,}5$$

$$\overline{FG} = 1{,}0\text{ cm}$$

$$\frac{1{,}5}{1} = \frac{3}{\overline{DC}}$$

$$1{,}5 \cdot \overline{DC} = 3 \cdot 1$$

$$\overline{DC} = \frac{3}{1{,}5} = 2{,}0\text{ cm}$$

Respuesta: $\overline{EF} = 1{,}5\text{ cm}$; $\overline{DC} = 2{,}0\text{ cm}$.

Después de estudiado el teorema de las transversales. ¿Qué pasará si intercambiamos una de las condiciones de la premisa y la tesis? Has pensado sobre el recíproco de la primera parte, entonces obtendrías un teorema muy apropiado para demostrar el paralelismo entre dos rectas.

Recuerda *el recíproco del teorema de las transversales:*

Teorema 2:

Si dos semirrectas de origen común son cortadas por varias rectas de manera que la razón entre dos segmentos de una de ellas es igual a la razón entre los dos segmentos correspondientes en la otra, entonces esas rectas son **paralelas.**

Vamos a demostrar este teorema mediante una demostración indirecta, a partir de suponer que no se cumple la tesis (fig. 2.21).

Premisa: las rectas AB y CD cortan a las semirrectas OC y OD, y $\frac{\overline{OA}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{BD}}$.

Tesis: $AB \parallel CD$.

Demostración:

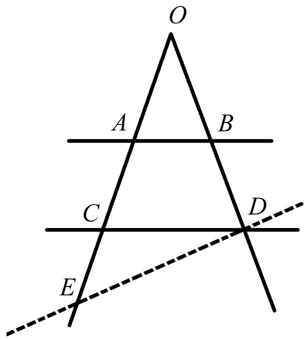


Figura 2.21

Supongamos que las rectas no son paralelas.
Si $AB \nparallel CD$, entonces la recta paralela a AB que pasa por D cortaría a la semirrecta OC en un punto E diferente de C y, según el teorema de las transversales se cumple que:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{BD}} \qquad (1)$$

Pero la premisa establece que:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{BD}} \qquad (2)$$

De (1) y (2) obtenemos que $\frac{\overline{OA}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{AC}}$; pero esta proporción es falsa, porque $\overline{AC} \neq \overline{AE}$; entonces se ha llegado a una contradicción, por lo tanto, la suposición que $AB \nparallel CD$ no es verdadera y se cumple lo contrario, es decir, que $AB \parallel CD$.

Ejercicios

1. En la figura 2.22, $AC \parallel DF$ y $GI \nparallel DF$, intersecan a las semirrectas OG, OH y OI. Di si son verdaderas (V) o falsas (F) las siguientes proposiciones. Las falsas conviértelas en verdaderas.

   a) ____ $\overline{BH}$ es un segmento de semirrecta.

   b) ____ $\overline{DE}$ es un segmento de paralela.

   c) ____ $\overline{OD}$ es el segmento correspondiente al segmento $\overline{DG}$.

   d) ____ $\overline{DG}$ no es el segmento correspondiente al segmento $\overline{FI}$.

   e) ____ $\overline{OE}+\overline{EH}$ es el segmento correspondiente al segmento $\overline{OI}$.

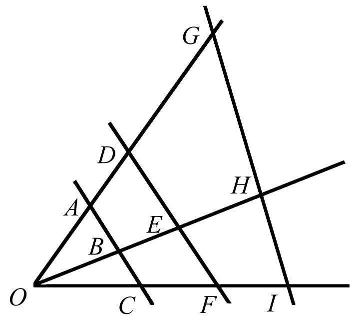


Figura 2.22

2. En la figura 2.23, ABC es un triángulo,

   $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$, $\overline{DF} \parallel \overline{AC}$, G es punto de intersección de $\overline{EF}$ y $\overline{CD}$. Identifica qué parte del teorema de las transversales se ha utilizado en cada una de las proporciones escritas.

   a) $\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\dfrac{\overline{CG}}{\overline{GD}}$ ___________________________.

   b) $\dfrac{\overline{BF}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{FD}}{\overline{CA}}$ ___________________________.

   c) $\dfrac{\overline{GD}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{FB}}{\overline{CB}}$ ___________________________.

   d) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DB}}=\dfrac{\overline{EF}}{\overline{GF}}$ ___________________________.

   e) $\dfrac{\overline{CF}}{\overline{CB}}=\dfrac{\overline{FG}}{\overline{BD}}$ ___________________________.

   f) $\dfrac{\overline{BF}}{\overline{BD}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BA}}$ ___________________________.

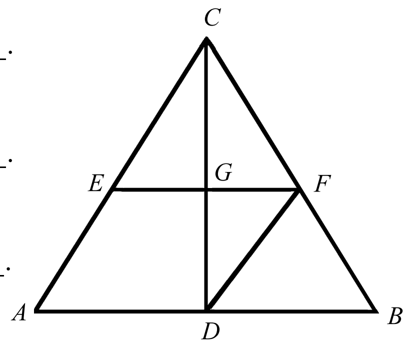


Figura 2.23

3. En la figura 2.24 se muestra un haz de semirrectas con origen en Z cortadas por $AG \parallel BH \parallel CI$.
   Completa los espacios en blanco por el segmento correspondiente para que se cumplan las proporciones siguientes.

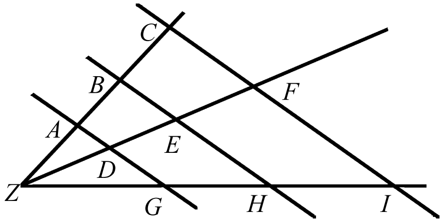


Figura 2.24

a) $\dfrac{\overline{GH}}{\overline{HI}} = \dfrac{\_\_\_\_}{\overline{BC}}$

b) $\dfrac{\overline{EH}}{\overline{EB}} = \dfrac{\overline{FI}}{\_\_\_\_}$

c) $\dfrac{\overline{ZA}}{\_\_\_\_} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{CF}}$

d) $\dfrac{\_\_\_\_}{\overline{ZG}} = \dfrac{\overline{BH}}{\overline{AG}}$

e) $\overline{AD} : \_\_\_\_ = \overline{BE} : \overline{BH}$

f) $\dfrac{\_\_\_\_}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{HZ}}{\overline{GI}}$

g) $\dfrac{\overline{DE}}{\_\_\_\_} = \dfrac{\_\_\_\_}{\overline{BC}}$

h) $\overline{CF} : \_\_\_\_ = \_\_\_\_ : \overline{EH}$

i) $\dfrac{\overline{AG}}{\overline{GI}} = \_\_\_\_$

4. En la figura 2.25, se cumple que:

   - Las rectas r y s se intersecan en O.
   - Los puntos A; D y F pertenecen a r.
   - Los puntos B; C y E pertenecen a s.
   - $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$.

   Di si las siguientes proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F). En el caso de las falsas, argumenta.

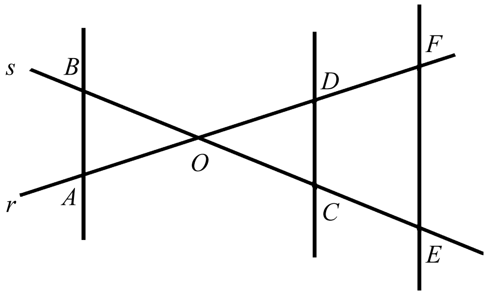


Figura 2.25

a) ____ Si $\dfrac{\overline{DF}}{\overline{OF}} = \dfrac{\overline{CE}}{\overline{OE}}$, entonces $\overline{CD} \parallel \overline{EF}$.

b) ____ $\dfrac{\overline{OD}}{\overline{DF}} = \dfrac{\overline{DC}}{\overline{FE}}$ por la segunda parte del teorema de las transversales.

c) ____ $\dfrac{\overline{OB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{AD}}$ por la primera parte del teorema de las transversales.

d) ____ $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OF}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{FE}}$ por la segunda parte del teorema de las transversales.

5. En la figura 2.26 se cumple:

- $AC \,||\, BD$ e intersecan a las semirrectas OB y OD.
- $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{4}$; $\overline{AB} = 12 \text{ cm}$ y $\overline{OD} = 1{,}6 \text{ dm}$

  Calcula la longitud de los segmentos $\overline{OA}$; $\overline{OC}$ y $\overline{CD}$.

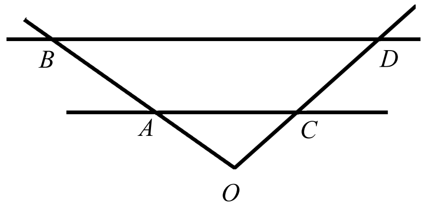


Figura 2.26

6. La figura 2.27 muestra un triángulo EFG, donde $\overline{AB} \,||\, \overline{CD} \,||\, \overline{EF}$, con G, A, C y E puntos alineados; así como los puntos G, B, D y F. Si $\overline{AC} = 2{,}0 \text{ cm}$, $\overline{GB} = 3{,}0 \text{ cm}$, $\overline{BD} = 4{,}0 \text{ cm}$, $\overline{EF} = 7{,}84 \text{ cm}$ y $\overline{AB} = 2{,}4 \text{ cm}$; calcula las longitudes de los segmentos $\overline{AG}$; $\overline{CD}$; $\overline{GF}$; $\overline{DF}$; $\overline{CE}$ y $\overline{GE}$.

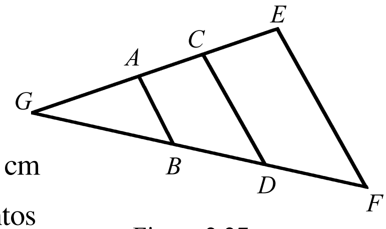


Figura 2.27

7. En la figura 2.28, $ABCD$ es un rectángulo, $\overline{FD}$ interseca a $\overline{BC}$ en E, A, B y F puntos alineados. Se cumple, además, que $\dfrac{\overline{BE}}{\overline{BC}} = \dfrac{3}{4}$, $\overline{AF} = 16 \text{ cm}$ y $\overline{BE} = 4{,}5 \text{ cm}$

   a) Identifica el cuadrilátero $ABED$.
   b) Calcula el área del rectángulo.

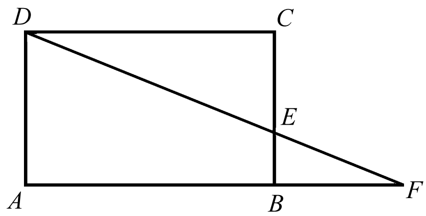


Figura 2.28

8. En la figura 2.29, $ABCD$ es un trapecio de bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, E es el punto medio de $\overline{CD}$, $\overline{AB} \,||\, \overline{EG}$ y $\overline{CF} = \overline{AD}$, además, se cumple que B, G, C y F están alineados; así como A, E y F.

   a) Prueba que $\Delta ADE = \Delta EFC$.
   b) Calcula la longitud de $\overline{EF}$, $\overline{EG}$, $\overline{BG}$ y $\overline{BF}$ si, $\overline{AB} = 6{,}0 \text{ cm}$, $\overline{AE} = 4{,}0 \text{ cm}$ y $\overline{FG} = 5{,}0 \text{ cm}$.

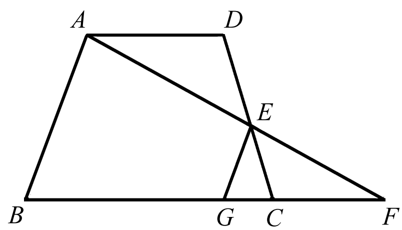


Figura 2.29

9. En la figura 2.30, $ABCD$ es un paralelogramo, E es el punto de intersección de las rectas $\overline{CB}$ y $\overline{DF}$. Se cumple, además, que $\dfrac{\overline{EF}}{\overline{ED}} = \dfrac{2}{3}$. Calcula las longitudes de los lados del paralelogramo $ABCD$ si $\overline{AF} = 20 \text{ cm}$ y $\overline{BE} = 3{,}0 \text{ cm}$.

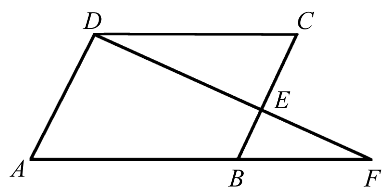


Figura 2.30

10. En la figura 2.31, DEF es un triángulo rectángulo en F y $\overline{PQ} \parallel \overline{DF}$.

a) Si se sabe que $\overline{DE} = 10\,\text{cm}$, $\overline{DF} = 6{,}0\,\text{cm}$, $\overline{EF} = 8{,}0\,\text{cm}$ y $\overline{FQ} = 2{,}4\,\text{cm}$; calcula el área del triángulo EPQ.

b) Calcula el perímetro del cuadrilátero $DPQF$.

c) ¿Qué tanto por ciento del área del triángulo DEF representa el área del triángulo PQE?

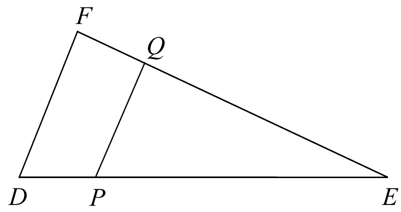


Figura 2.31

11. En la figura 2.32, se representa un triángulo ABC rectángulo en A, además, se conoce que:

- $D \in \overline{AB}$ y $E \in \overline{BC}$
- $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$
- $\overline{AC} = \overline{AD} = 4{,}00\,\text{cm}$
- $\overline{AB} = 16{,}0\,\text{cm}$

a) Halla la longitud de $\overline{BD}$ y $\overline{BE}$.

b) Calcula el área del cuadrilátero $ADEC$.

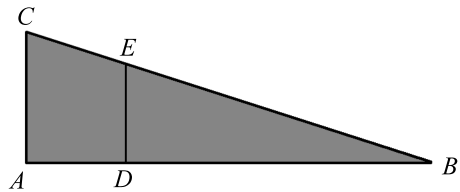


Figura 2.32

12. En la figura 2.33, $\overline{AC}$ es tangente en B y en C a $C_1(O_1; r_1)$ y $C_2(O_2; r_2)$ respectivamente. Además, se cumple que:

- $\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{1}{2}$
- Los puntos A, D, O_1, E y O_2 están alineados.
- $E = C_1 \cap C_2$

a) Demuestra que O_1 es el punto medio de $\overline{AO_2}$.

b) Demuestra que $\overline{AO_2} = 6\,r_1$.

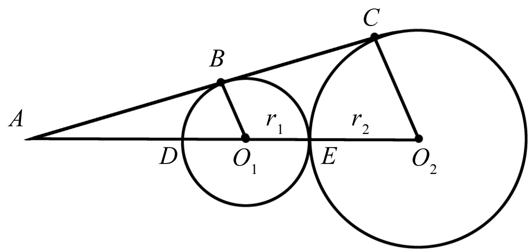


Figura 2.33

13. En la figura 2.34, ABC es un triángulo.

Ubica el punto D en $\overline{AB}$ y el punto E en $\overline{AC}$, tal que: $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = \dfrac{3}{5}$.

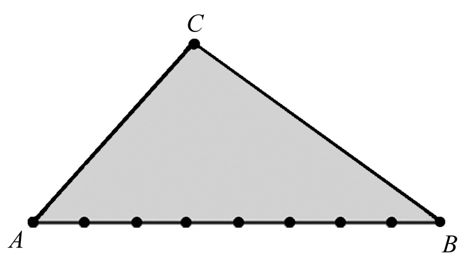


Figura 2.34

14. En la figura 2.35, ABC es un triángulo.

$\overline{DE} \parallel \overline{AB}$, $\overline{DE} = 9$ u

(u: unidades)

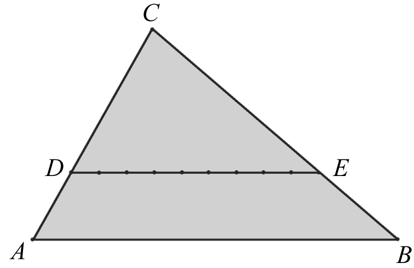


Figura 2.35

a) Ubica el punto F en $\overline{DE}$ y el punto G en $\overline{AB}$, tal que:

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{GB}} = \frac{4}{5}.$$

b) ¿Cuántas unidades (u) mide el segmento $\overline{AB}$, si $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{CA}} = \dfrac{1}{2}$.

15. En la figura 2.36, ABC es un triángulo, $\overline{CD}$ es la bisectriz del ángulo exterior ACE y los puntos B, A y D están alineados. Además, se cumple que $\overline{AF} \parallel \overline{CD}$.

Demuestra que: $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{CA}} = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{AD}}$.

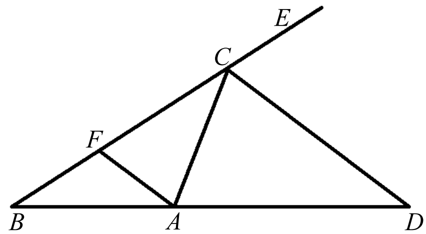


Figura 2.36

16. En la figura 2.37, se ha representado el triángulo ABC rectángulo en B; D es el punto medio del lado $\overline{AC}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$.

a) E es punto medio de $\overline{AB}$. Justifica esta afirmación.

b) Prueba que: $\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{BD}$.

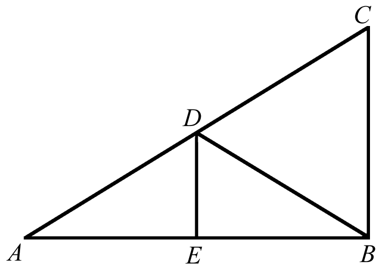


Figura 2.37

2.1.3 Aplicaciones del teorema de las transversales

Desde la antigüedad los hombres utilizaban la razón entre segmentos en la práctica. Uno de los edificios más famosos de los tiempos antiguos es el Partenón, en la antigua Grecia (fig. 2.38). La razón entre el ancho y la altura del frente de esta construcción es la conocida razón áurea o número de oro. Actualmente, las dimensiones de algunas construcciones, cuadros, libros, cuadernos y hasta las banderas de diversos países corresponden a estas proporciones.[1]

[1] Luis J. Davidson: *Ecuaciones y matemáticos,* Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2010.

Figura 2.38

En este epígrafe aprenderás a resolver problemas para construir segmentos que estén en una razón dada, cuya interpretación corresponde al significado geométrico de la cuarta, tercera o la media proporcional de segmentos dados.

Conocida la razón entre dos segmentos y la longitud de uno de ellos, ¿cómo construir el otro segmento?

Si tenemos un segmento $\overline{AB}$, podemos construir un segmento $\overline{CD}$ de manera que dichos segmentos estén en una razón dada (k) y que se cumpla que el cociente de $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = k$, luego se puede expresar $\overline{CD} = k \cdot \overline{AB}$ (observa que el segmento $\overline{CD}$ es un múltiplo del segmento $\overline{AB}$).

Ejemplo 1:

Dado el segmento $\overline{AB}$ construir el segmento $\overline{CD} = 4 \cdot \overline{AB}$.

Solución:

Trazamos una recta r y sobre esta a partir de un punto cualquiera C transportamos $\overline{AB}$ (4 veces) y obtenemos el segmento $\overline{CD}$ (fig. 2.39).

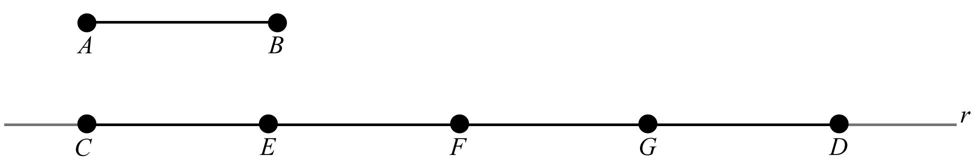


Figura 2.39

¿Cómo proceder para dividir un segmento en segmentos proporcionales que estén en una razón dada?

Ejemplo 2:

Dado el segmento $\overline{AB}$ (fig. 2.40), construye el segmento $\overline{AC}$, de manera que $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \dfrac{2}{5}$.

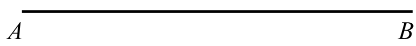


Figura 2.40

Solución:

Aplicando el teorema de las transversales:

- Sobre el extremo A de $\overline{AB}$ (fig. 2.41), se traza la semirrecta AD.
- Se transporta cinco veces el segmento arbitrario de longitud u, consecutivamente, sobre la semirrecta a partir de A y se obtiene $\overline{AD}$.
- Se une el extremo D con el extremo B.
- Se trazan cuatro rectas paralelas a $\overline{BD}$ por los puntos obtenidos en $\overline{AD}$ y se obtienen cinco segmentos iguales en $\overline{AB}$.

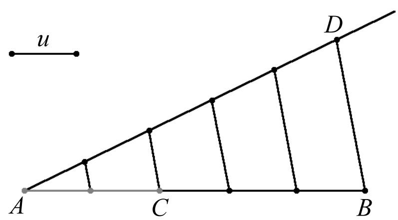


Figura 2.41

Respuesta: El segmento $\overline{AC}$, tal que $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \dfrac{2}{5}$ aparece en la figura 2.41.

Ejemplo 3:

Dado el segmento $\overline{AB}$ (fig. 2.42), dividirlo en dos segmentos que estén en la razón $\dfrac{3}{4}$.

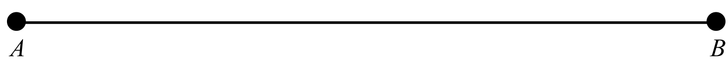


Figura 2.42

Solución:

- Se traza con origen en A una semirrecta (fig. 2.43).
- Se transporta siete veces el segmento arbitrario de longitud u, consecutivamente, sobre la semirrecta a partir de A y se obtiene $\overline{AC}$.
- Se une el extremo C con el extremo B.
- Se determina sobre $\overline{AC}$ el punto E que lo divide en dos segmentos cuya razón es $\frac{3}{4}$.
- Se traza por el punto E una recta paralela a $\overline{BC}$ que corta a $\overline{AB}$ en el punto D, quedando dividido en dos segmentos cuya razón es $\frac{3}{4}$.

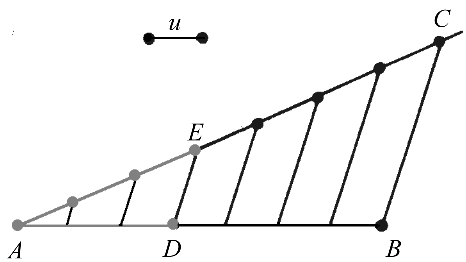


Figura 2.43

Respuesta: Luego por el teorema de las transversales, se cumple: $\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{3}{4}$.

Ejemplo 4:

Halla la cuarta proporcional a tres segmentos dados a, b y c (fig. 2.44).

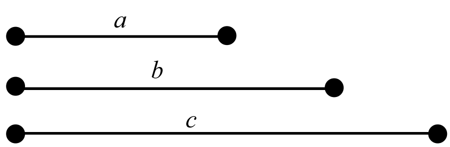


Figura 2.44

Solución:

Observa que para hallar este segmento se aplica el teorema de las transversales.

- Se trazan con origen común O dos semirrectas (fig. 2.45).
- Sobre una de las semirrectas con origen O, se transportan consecutivamente los segmentos a y b, obteniendo los puntos A y B respectivamente.
- Sobre la otra semirrecta con origen O, se transporta el segmento c y se obtiene el punto C.

- Se unen los puntos A y C y se obtiene el segmento $\overline{AC}$.
- Se traza por B una recta paralela a $\overline{AC}$ y se determina en la otra semirrecta el punto D y se obtiene el segmento $x = \overline{CD}$ que es la cuarta proporcional a los segmentos a, b y c.

Luego por el teorema de las transversales, se cumple: $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ o $\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{CD}}$.

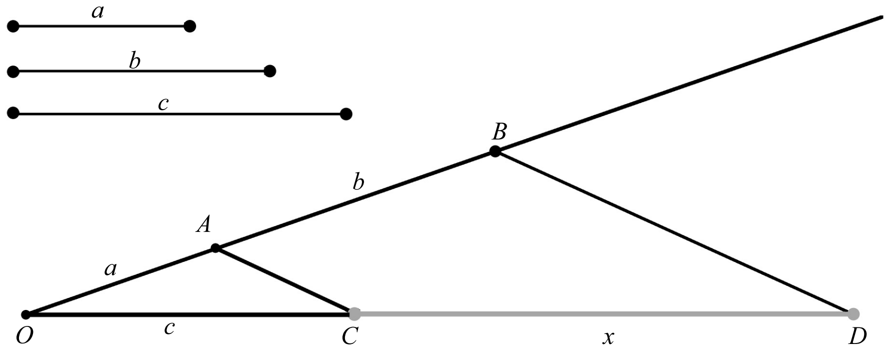


Figura 2.45

Respuesta: La cuarta proporcional a los tres segmentos dados de longitudes respectivas: a, b y c es $x = \overline{CD}$ de la figura 2.45.

Ejemplo 5:

Halla la tercera proporcional a dos segmentos dados a y b (fig. 2.46).

Solución:

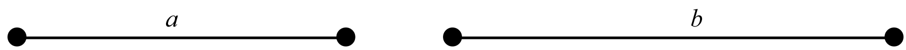


Figura 2.46

Observa que este es un caso particular de la cuarta proporcional con los términos medios iguales, entonces se cumple que es también una aplicación del teorema de las transversales.

- Se trazan con origen común O dos semirrectas (fig. 2.47).
- Sobre una de las semirrectas con origen O, se transportan consecutivamente los segmentos a y b, obteniéndose los puntos A y B respectivamente.
- Sobre la otra semirrecta con origen O, se transporta el segmento b y se obtiene el punto C.
- Se unen los puntos A y C y se obtiene el segmento $\overline{AC}$.

- Se traza por B una recta paralela a $\overline{AC}$ y se determina en la otra semirrecta el punto D y se obtiene el segmento $x = \overline{CD}$ que es la tercera proporcional a los segmentos a y b.

Luego por el teorema de las transversales, se cumple: $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$ o $\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{CD}}$.

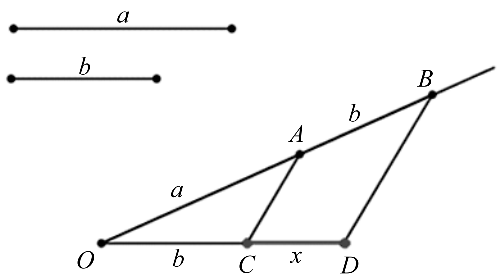


Figura 2.47

Respuesta: La tercera proporcional a los dos segmentos dados de longitudes respectivas a y b es $x = \overline{CD}$ de la figura 2.47.

Ejercicios

1. En la figura 2.48, AC y AD son semirrectas de origen en A.

   Construye sobre la semirrecta AD, un segmento $\overline{AE}$, tal que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}}$.

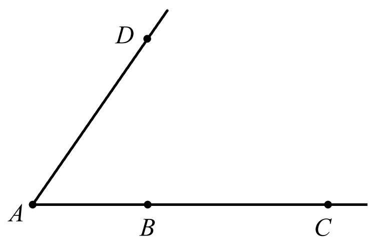


Figura 2.48

2. Halla gráficamente la cuarta proporcional a segmentos que tienen una longitud igual a:

   a) 2,0 cm; 3,0 cm y 4,0 cm b) 1,5 cm; 9,0 mm y 2,0 cm

3. Halla gráficamente la tercera proporcional a segmentos que tienen una longitud igual a:

   a) 3,0 cm y 4,0 cm b) 4,0 cm y 60 mm

4. Describe y fundamenta los pasos que se deben seguir, aplicando la primera parte del teorema de las transversales, para calcular la distancia que separa a los dos puntos inaccesibles A y B de la figura 2.49.

Figura 2.49

5. Alejandro y Joan se encuentran en una base de campismo y al recorrer sus alrededores se percatan de la existencia de un terreno limpio muy apropiado para acampar. De inmediato se proponen calcular el área aproximada de este terreno para saber si el grupo de amigos que lo acompañan puede instalarse en ese lugar. Para eso sitúan una estaca en la tierra que se identifica en el gráfico (fig. 2.50) por el punto *O*. Alejandro le dice a Joan que solamente necesitan medir las distancias $\overline{OA}, \overline{OB}$ y $\overline{AC},$ lo cual realizan utilizando una soga y considerando que un metro es aproximadamente igual a cuatro pasos consecutivos de Joan. Este último agrega: "Se debe considerar, además, que $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ sean perpendiculares a $\overline{OB}$".

   a) ¿Tiene razón Alejandro en su planteamiento? Justifica.
   b) ¿Es necesaria la observación que hace Joan? ¿Por qué?
   c) Si las mediciones realizadas son:

      - De *O* a *A* hay 130 pasos.
      - De *O* a *B* hay 200 pasos.
      - De *A* a *C* hay 55 pasos.

   Calcula el área aproximada del terreno.

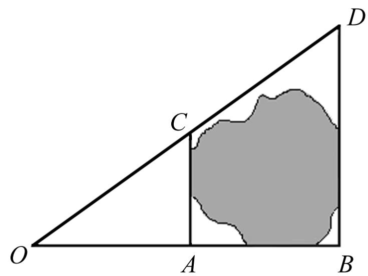


Figura 2.50

6. Un explorador observa una torre a través de un aro en forma de circunferencia (fig. 2.51). Describe y fundamenta los pasos que se deben seguir, aplicando la segunda parte del teorema de las transversales para calcular la altura de la torre, conociendo el diámetro del aro, la distancia del observador al aro y a la torre respectivamente. *Observación:* El ojo del observador, el centro del aro y el punto medio de la torre están alineados.

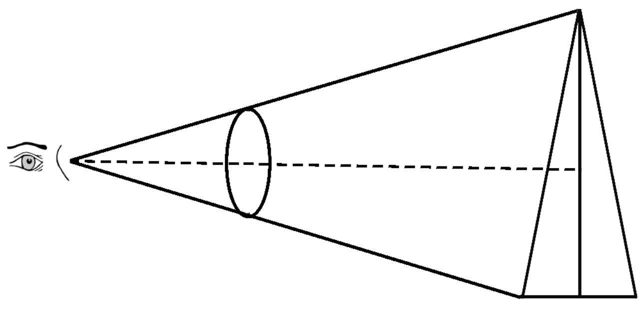


Figura 2.51

2.2 Figuras semejantes

¡! En séptimo grado conociste que dos figuras *A* y *A'* son congruentes o iguales si al superponerlas coinciden, como ocurre con la figura 2.52. En tal caso estas figuras tienen la misma forma e iguales dimensiones. ¿Será la congruencia la única relación que se puede establecer entre dos figuras geométricas?

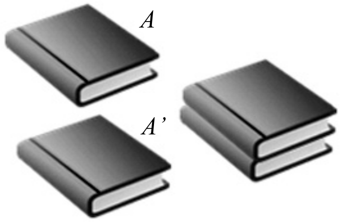


Figura 2.52

Veamos algunas interrogantes cuyas respuestas te permitirán llegar a conclusiones interesantes.

¿Qué relación existe entre una fotografía y una ampliación de esta, como, por ejemplo, las de la figura de la 2.53?

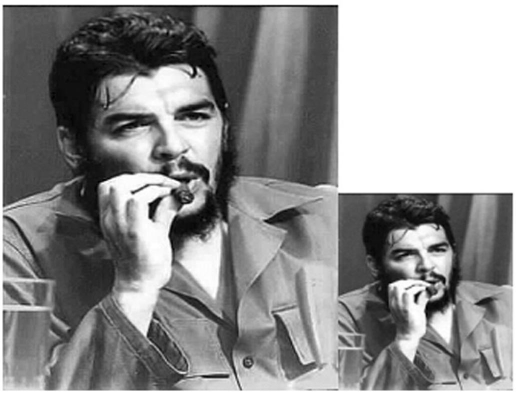


Figura 2.53

Al comparar parejas de objetos de diferentes tamaños como los que se muestran en la figura 2.54, ¿qué particularidades observas en cada pareja?

Figura 2.54

¿Y si comparas los mapas de la figura 2.55? ¿Sucede lo mismo?

Figura 2.55

Habrás notado que en todos los casos anteriores a pesar de tener tamaños diferentes la forma de las figuras es la misma.

Cuando la "forma" de dos figuras es la misma, las denominamos *figuras semejantes o figuras equiformes*. ¿Qué significa que tengan "la misma forma"? ¿Qué relación tiene con esta denominación el prefijo *equi* que se utiliza para nombrarlas?

Veamos otros ejemplos con figuras geométricas conocidas, por ejemplo, los polígonos, ¿recuerdas qué es un polígono?, ¿de qué dependerá que dos polígonos F y F′ sean semejantes?

Ejemplo 1:

Observa las parejas de figuras geométricas que se dan en las figuras 2.56 a 2.58. ¿Serán figuras geométricas semejantes? Compara las amplitudes de sus respectivos ángulos y la longitud con respecto a la unidad u de sus lados correspondientes:

a) Rectángulos *MNPQ* y *M'N'P'Q'*, tales que:

$\overline{MN} = 3{,}0$ u; $\overline{NP} = 2{,}0$ u; $\overline{M'N'} = 6{,}0$ u y $\overline{N'P'} = 4{,}0$ u (fig. 2.56).

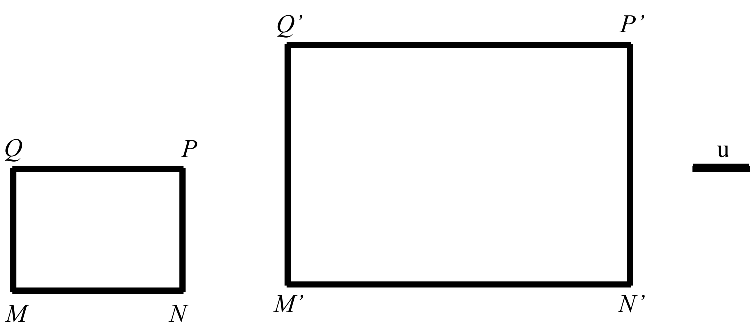


Figura 2.56

b) Rectángulos $ABCD$ y $A'B'C'D'$ con $\overline{AB} = 5{,}0$ u; $\overline{BC} = 2{,}0$ u; $\overline{A'B'} = 3$ u y $\overline{B'C'} = 1{,}0$ u (fig. 2.57).

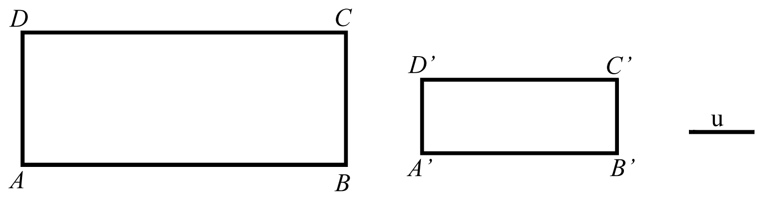


Figura 2.57

c) Trapecios isósceles $EFGH$ y $E'F'G'H'$, donde las dimensiones del segundo triplican a las del primero y $\angle H = \angle H'$ (fig. 2.58).

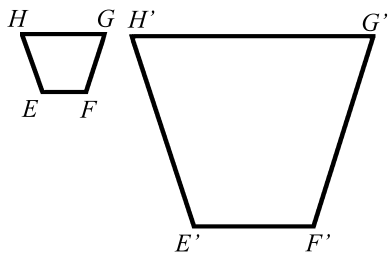


Figura 2.58

Solución:

1. a) Observa que en este caso los ángulos de ambos rectángulos son respectivamente iguales, es decir, $\angle M = \angle M'$, $\angle N = \angle N'$, $\angle P = \angle P'$ y $\angle Q = \angle Q'$ y, además, la longitud de cada lado del rectángulo $MNPQ$ es la mitad de la longitud de su lado correspondiente en el rectángulo $M'N'P'Q'$; fíjate que:

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{M'N'}} = \frac{\overline{NP}}{\overline{N'P'}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{P'Q'}} = \frac{\overline{MQ}}{\overline{M'Q'}} = \frac{1}{2} \text{ (fig. 2.59).}$$

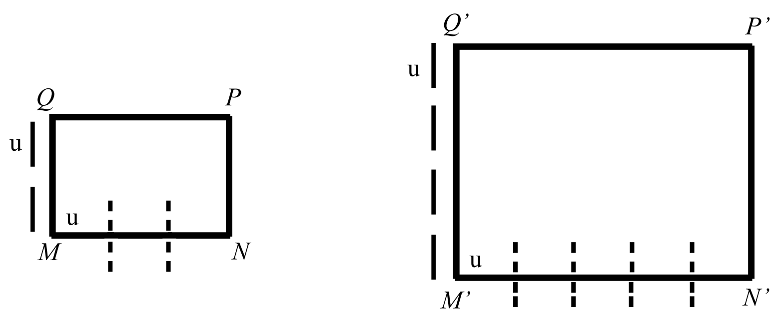


Figura 2.59

Por tanto, sus respectivos lados son segmentos proporcionales.

b) Sin embargo, en este caso, se puede apreciar que aunque los ángulos de los rectángulos son respectivamente iguales; sus lados no son proporcionales:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{5}{3} \neq \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{D'A'}} = \frac{2}{1} \text{ (fig. 2.60).}$$

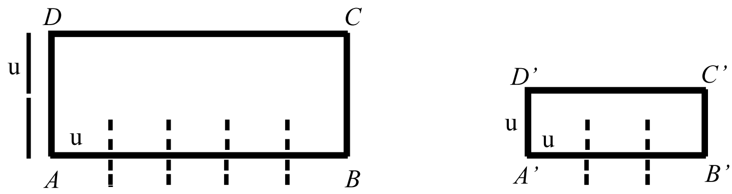


Figura 2.60

c) También en este otro caso los ángulos de ambos trapecios son respectivamente iguales: $\angle E = \angle E'$, $\angle F = \angle F'$, $\angle G = \angle G'$ y $\angle H = \angle H'$ y fíjate que como las dimensiones del segundo trapecio triplican a las del primero, puede decirse también que la longitud de cada lado del primero es la tercera parte de la longitud de su lado correspondiente en el segundo, es decir: $\frac{\overline{EF}}{\overline{E'F'}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{F'G'}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{G'H'}} = \frac{\overline{EH}}{\overline{E'H'}} = \frac{1}{3}$; sus respectivos lados son segmentos proporcionales.

R!¡ Entonces la semejanza de dos polígonos *F* y *F'* depende de la igualdad de sus ángulos y de la proporcionalidad de sus lados.

Vamos a definir esta nueva relación y ya puedes responder la interrogante formulada al inicio. Obviamente existe otra relación que se puede establecer entre dos figuras: la semejanza.

Recuerda *la definición de polígonos semejantes:*

Dos polígonos *F* y *F'* son **semejantes** si tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos son proporcionales. El coeficiente de esa proporcionalidad también se denomina **razón de semejanza.** Notación: $F \sim F'$

Respuesta: Por lo tanto:

a) *MNPQ* y *M'N'P'Q'* tienen sus ángulos iguales y sus lados proporcionales, son polígonos semejantes.
b) *ABCD* y *A'B'C'D'* aunque tienen sus ángulos iguales sus lados no son proporcionales, no son semejantes.

c) *EFGH* y *E'F'G'H'* tienen sus ángulos iguales y sus lados proporcionales, son polígonos semejantes.

En octavo grado estudiaste los lados homólogos en los triángulos iguales.

¿Te acuerdas?, los lados que se oponen a los ángulos respectivamente iguales son lados homólogos, por ejemplo: en los trapecios isósceles del inciso 1c), el lado $\overline{EF}$ es homólogo al lado $\overline{E'F'}$.

Debes tener en cuenta que los **lados homólogos** de dos polígonos semejantes son los que unen los vértices que corresponden a los ángulos respectivamente iguales.

Ejemplo 2:

En la figura 2.61 se muestran los polígonos *ABCD* y *A'B'C'D'* que cumplen las igualdades siguientes: $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$ y $\angle D = \angle D'$; además, en *A'B'C'D'*: $\overline{A'B'} = 7{,}0$ u; $\overline{B'C'} = 5{,}0$ u; $\overline{C'D'} = 3{,}5$ u y $\overline{A'D'} = 6{,}0$ u y en *ABCD*: $\overline{AB} = 14$ u, $\overline{BC} = 10$ u, $\overline{CD} = 7{,}0$ u y $\overline{AD} = 12$ u.

a) ¿Son semejantes los polígonos dados? Fundamenta.
b) ¿Cuál es el coeficiente de proporcionalidad o razón de esa semejanza?

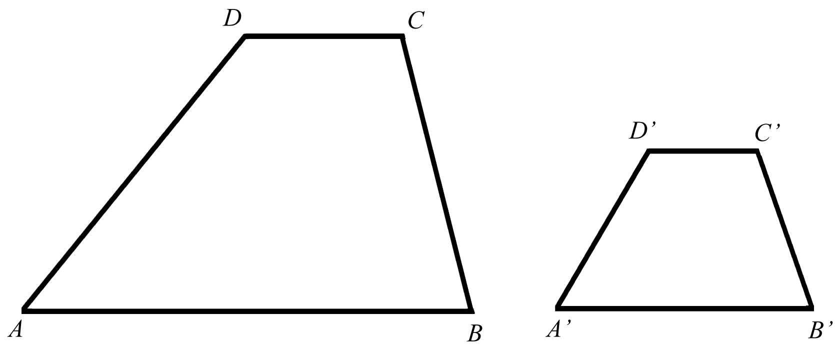


Figura 2.61

Solución:

a) Para saber si los polígonos *ABCD* y *A'B'C'D'* son semejantes comparamos sus ángulos: $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$ y $\angle D = \angle D'$ que según los datos son respectivamente iguales; además, debemos determinar la razón entre la longitud de sus respectivos lados que unen los vértices de ángulos iguales, o sea, entre: $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$; $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$; $\overline{CD}$ y $\overline{C'D'}$; $\overline{AD}$ y $\overline{A'D'}$.

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}} = 2$, se sigue de sustituir las longitudes de los segmentos dados en los datos y al calcular según la definición de razón entre segmentos.

Respuesta: Por tanto, $ABCD \sim A'B'C'D'$ por tener sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos proporcionales.

b) Tomamos una pareja de lados homólogos cualquiera para calcular la razón entre sus longitudes y así, obtener el coeficiente de proporcionalidad o razón de semejanza, tomemos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = 2$.

Respuesta: El coeficiente de proporcionalidad es $k = 2$.

En el ejemplo anterior el cuadrilátero *ABCD* tiene mayores dimensiones que el cuadrilátero *A'B'C'D',* es decir, la figura *ABCD* es una "ampliación" o "dilatación" con respecto a *A'B'C'D'.* Esto ocurre cuando el coeficiente de proporcionalidad *k* es mayor que 1, en el caso de este ejemplo, se calcula $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = 2 > 1$. Fíjate que se pone en el antecedente de la razón un lado del polígono mayor.

Pero si por el contrario, tomamos como referencia el polígono *A'B'C'D',* decimos que este es una "reducción" o "contracción" del polígono *ABCD*; lo cual sucede si el coeficiente de proporcionalidad *k* es menor que 1, en el caso particular del ejemplo, se calcula $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{2} < 1$. Fíjate que se pone en el antecedente de la razón un lado del polígono menor.

Cuando el coeficiente de semejanza es $k = 1$, se obtiene una **igualdad de figuras** como caso especial de la semejanza.

Recuerda *las propiedades de las figuras semejantes:*

Para figuras *F, F' y F"* cualesquiera y, en particular, para polígonos semejantes, se cumplen las propiedades siguientes: a) $F \sim F$ (Propiedad reflexiva o idéntica de la semejanza) b) Si $F \sim F'$, entonces $F' \sim F$ (Propiedad simétrica de la semejanza) c) Si $F \sim F'$ y $F' \sim F''$, entonces $F \sim F''$ (Propiedad transitiva de la semejanza)

La semejanza de figuras tiene aplicaciones en diversas esferas de la vida práctica, por ejemplo, en la fotografía, la cartografía, la arquitectura, el diseño, la mecánica, la industria, la pintura, entre otros.

Como ya apreciamos, la semejanza de figuras está ligada a la razón de dos segmentos y esta a su vez a las escalas, pero… ¿qué son las escalas?

Si bien el término **escala** tiene diversos significados atendiendo al contexto donde se utiliza, desde el punto de vista matemático, *en una representación sobre un plano* se asocia a la razón que existe entre las dimensiones reales y las del dibujo que representa y se escribe como la razón $\dfrac{a}{b}$ o ($a : b$), donde el antecedente a indica el valor en el plano y el consecuente b, el valor en la realidad.

Una escala puede ser *natural, de reducción o de ampliación* según se considere respectivamente la medida de la representación en el plano igual, menor o mayor que la medida en la realidad. Veamos algunos ejemplos de escalas:

a) La escala E: 1:500 significa que 1 cm en el plano equivale a 500 cm en la realidad.
b) La escala E: 1:1 corresponde a una escala natural.
c) Las escalas E: 1:2, E: 1:5, E: 1:1 000, E: 1:10 000 000 corresponden a escalas de reducción.
d) Las escalas E: 2:1, E: 10:1 corresponden a escalas de ampliación.

Ejemplo 3:

En la figura 2.62 puedes apreciar el cuadro *La Gioconda,* también conocido como *La Mona Lisa.* Es una obra pictórica de Leonardo Da Vinci, cuyas dimensiones son de 77 cm × 53 cm. Si se fuera a hacer una reducción de este con escala E: 1:10, ¿qué dimensiones tendría esa representación?

Figura 2.62

Solución:

Escala: 1:10
Ancho del cuadro original: $a = 53$ cm
Altura del cuadro original: $h = 77$ cm
Ancho de la reducción: $a' = ?$
Altura de la reducción: $h' = ?$

$$\frac{1}{10} = \frac{a'}{a} \text{ (definición de proporción)}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{a'}{53} \text{ (sustituyendo)}$$

$a' = \frac{53}{10}$ (propiedad fundamental de las proporciones)

$a' = 5{,}3$ cm

Análogamente se obtiene que $h' = 7{,}7$ cm.

Respuesta: Las dimensiones del dibujo serían: ancho: 5,3 cm y altura: 7,7 cm.

Ejemplo 4:

La figura 2.63 muestra la sortija de *El Señor de los Anillos*. En una representación que ocupa la superficie de un cuadrado de 3,0 cm de lados, ¿qué superficie debe tener un óleo para hacer una ampliación de la figura con una escala E: 20:1?

Figura 2.63

Solución:

Escala: 20:1
Lado original: $l = 3{,}0$ cm
Lado ampliado: $l' = ?$
Superficie del óleo: $A = ?$

$\frac{20}{1} = \frac{l'}{l}$ (definición de proporción)

$\frac{20}{1} = \frac{l'}{3}$ (sustituyendo)

$l' = 3 \cdot 20$ (propiedad fundamental de las proporciones)

$l' = 60$ cm

$A = l'^2 = 60^2 = 3\ 600$ cm^2

$A = 36$ dm^2

Respuesta: El óleo debe tener una superficie de 36 dm^2.

De los ejemplos anteriores puedes concluir que:

- Al aplicar la escala de reducción para hallar una medida en el plano, conocida la medida real, es preciso dividir esta por el término consecuente de la escala. Si se tratara del proceso inverso, habría que multiplicar el término consecuente de la escala por la medida en el plano.
- Al aplicar la escala de ampliación para hallar una medida en el plano, conocida la medida real, es preciso multiplicar esta por el término antecedente de la escala. Si se tratara del proceso inverso habría que dividir la medida en el plano por el término antecedente de la escala.

¡! Desde la Educación Primaria ya has trabajado con los mapas. Primero, claro está, con el mapa de Cuba y luego con los mapas de otras regiones, pero… ¿Qué utilidad tienen las escalas en los mapas? ¿Cómo se representan estas escalas en los mapas?

De las tantas utilidades de las escalas, una específica es su presencia en los mapas (fig. 2.64).

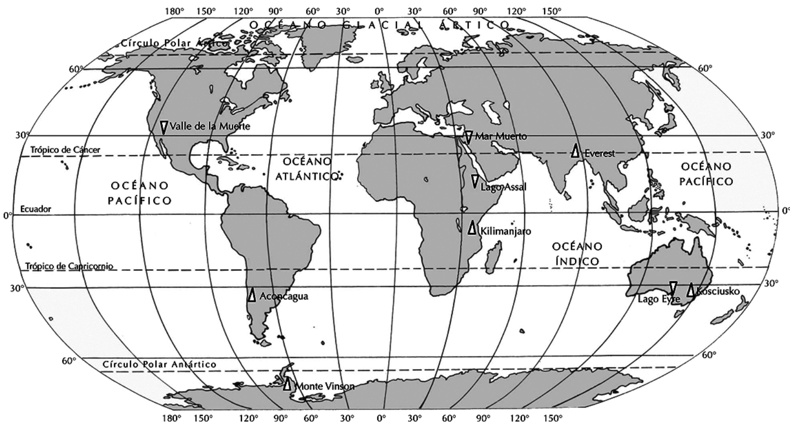


Figura 2.64

Si sobre un mapa tomamos medidas de distancias, ángulos o superficies, ¿cómo podemos determinar sus medidas reales? Observa que los mapas se elaboran sobre la base de una escala de reducción.

Como habrás podido observar en tu trabajo con los mapas, estos traen indicado en su parte inferior una escala, que puede ser expresada de tres maneras diferentes:

Escala numérica: es la forma que hemos visto más arriba (ejemplo: E: 1:100 000).
Escala unidad por medida: se relacionan las dos medidas (real y en el plano) por un signo de igualdad (ejemplo: E: 1 cm = 4 km).
Escala gráfica: Se dibuja un segmento cuya longitud en centímetros es igual a la medida real que se indica (fig. 2.65).

0 ———————— 10 km

Escala gráfica

Figura 2.65

R!¡ Ya puedes responder las preguntas anteriores formuladas acerca de las escalas. ¿Estás en condiciones de resolver los ejercicios siguientes?

Ejercicios

1. Los lados de dos polígonos están en la razón 2 : 7. ¿Se puede afirmar que son semejantes? ¿Por qué?
2. Dos heptágonos son equiángulos. ¿Se puede afirmar que son semejantes? ¿Por qué?

3. ¿Son semejantes dos triángulos equiláteros cualesquiera? Fundamenta tu respuesta.
4. Dos polígonos regulares de *n* lados, ¿son semejantes? ¿Por qué?
5. ¿Son semejantes dos rectángulos cualesquiera? Fundamenta tu respuesta.
6. El perímetro de un rombo es la cuarta parte del perímetro del otro. ¿Son semejantes? Explica tu respuesta.
7. Dos rectángulos son semejantes. Los anchos respectivos tienen una longitud de 16 y 24 m y el primero tiene 30 m de largo. ¿Cuál es el largo del segundo rectángulo?
8. Los lados de dos decágonos regulares miden 2,0 y 5,0 cm, respectivamente. Halla las razones de:

   a) sus lados, b) sus radios, c) sus diámetros, d) sus perímetros, e) sus apotemas.

9. Considera un paralelogramo *ABCD* y traza los puntos medios *E* y *F* de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$, respectivamente. Si $\overline{AB} = 4{,}0\text{ cm}$ y $\overline{BC} = 3{,}0\text{ cm}$, ¿son semejantes los polígonos *ABCD* y *AEFD*? ¿Y los polígonos *AEFD* y *EBCF*? Fundamenta tu respuesta.
10. Dos canteros en forma de cuadrado ocupan una superficie de 64 y 36 dm^2, respectivamente.

    a) ¿Cuál es la razón de semejanza de los cuadrados?
    b) ¿Cuál es la razón entre sus perímetros?
    c) ¿Cuál es la razón entre sus áreas?

11. En un croquis se aprecia un rectángulo de 40 cm de largo y 30 cm de ancho que representa un recinto ferial utilizado durante una feria expositiva. Si el croquis fue realizado con una escala E: 1:50, ¿cuál es el perímetro del recinto ferial?
12. El área de un cuadrado es de 121 cm^2. Si este representa, con escala E: 10:1, una de las caras de un dado, ¿cuál es la superficie total del dado?
13. La base de un monumento tiene forma rectangular y su ancho y profundidad miden 4,0 y 2,5 m, respectivamente. ¿Con qué escala habrá que hacer un esbozo de esta si se desea que su perímetro sea de 130 cm en el plano de dibujo?
14. Un campesino dibuja su finca con una escala E: 1:10 000, resultando un cuadrilátero cuyos lados $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ y $\overline{AD}$ miden 24; 18; 14 y 20 cm, respectivamente. ¿Qué cantidad de alambre requerirá el campesino para cercar su finca con tres vueltas de alambre?
15. Construye a escala E: 1:100 el plano de tu aula de clase.
16. ¿Qué procedimiento práctico seguirías para calcular la distancia verdadera entre dos lugares ubicados en un mapa, conociendo la escala del mapa?
17. En un plano de La Habana realizado con una escala E: 1 cm = 750 m se aprecia que entre Ciudad Escolar Libertad y el teatro García Lorca media una distancia de 11,5 cm. ¿Qué distancia real existe entre estos puntos?
18. Entre la colina Lenin, localizada en el municipio Regla de La Habana, y la Biblioteca Nacional José Martí, ubicada en el municipio Plaza de la Revolución de la

misma provincia, existe una distancia de 6,4 km aproximadamente. ¿A qué distancia se hallarán los puntos que los representan sobre un mapa elaborado con una escala E: 1:75 000?

19. Un turista desea viajar desde la ciudad de Camagüey a la ciudad de Guantánamo. Si dispone de un mapa de Cuba, realizado a escala E: 1:5 000 000, en el que se puede ver que la distancia entre estas ciudades es de 6,2 cm, ¿qué tiempo demorará el turista en realizar el viaje a una velocidad de 80 km/h?
20. En sus ratos de óseo, Yunior se dedica a confeccionar modelos en miniatura de medios de transporte y objetos relacionados con estos. Conociendo que las vías férreas tienen un ancho de 1 435 mm, recientemente confeccionó varios modelos miniaturas de estas a diferentes escalas. ¿Qué ancho de vía tienen los ferrocarriles miniaturas hechos por Yunior, con escalas de transformación:

    a) 1:87 b) 1:120 c) 1:160

21. En la oficina de turismo nacional se encuentra un mapa en escala 1:50 000 u y se indica que la distancia entre La Habana y Holguín es aproximadamente 734 km (fig. 2.66). ¿Cuántos centímetros medirá la distancia en el papel entre ambas ciudades ajustada a esta escala?[2]

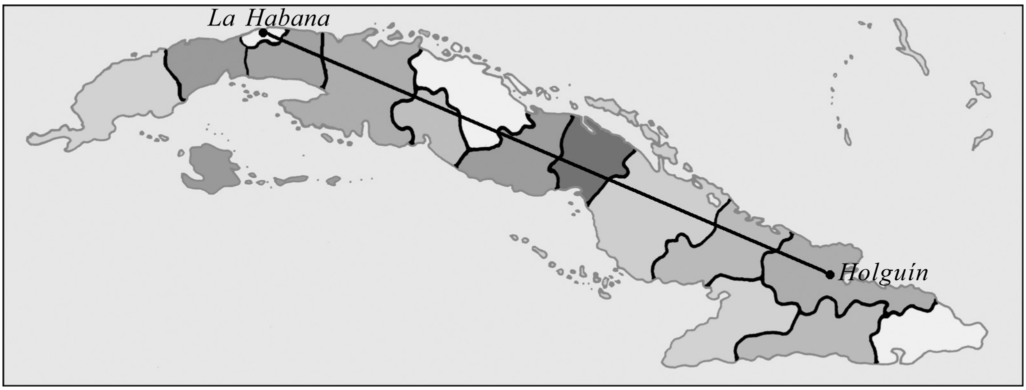


Figura 2.66

2.3 Semejanza de triángulos

¡! Cuentan que en la antigüedad, el célebre matemático Tales de Mileto midió la altura de la Gran Pirámide de Keops auxiliado solamente de su bastón, con bastante precisión. ¿Te gustaría saber cómo lo hizo? Los teoremas que estudiarás en este epígrafe te permitirán comprender ese procedimiento (fig. 2.67).

[2] Alexis Carrasco Trujillo: *Heurística. Aprender Matemática resolviendo problemas,* Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2012, p. 113.

Figura 2.67

De cursos anteriores te habrás percatado de la importancia de los triángulos, que precisamente son polígonos de tres lados y como tales, deben cumplir las propiedades de los polígonos semejantes que ya estudiamos, por eso ahora para profundizar en el estudio de la semejanza de triángulos, podemos formular una definición similar para los triángulos semejantes.

Recuerda *la definición de triángulos semejantes:*

> Dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos respectivamente iguales y los lados opuestos a estos ángulos respectivamente proporcionales.
> En triángulos semejantes se denominan lados homólogos a los que se oponen a los ángulos respectivamente iguales.

Ejemplo 1:

En los ΔMNP y $\Delta M'N'P'$ de la figura 2.68 se cumple que: $\angle PMN = \angle P'M'N' = 90°$ y $\angle MNP = \angle M'N'P'$

$\overline{MN} = 4{,}0$ u; $\overline{NP} = 5{,}0$ u; $\overline{MP} = 3{,}0$ u

$\overline{M'N'} = 8{,}0$ u; $\overline{N'P'} = 10{,}0$ u; $\overline{M'P'} = 6{,}0$ u

¿Son semejantes estos triángulos? ¿Cuál es la razón de semejanza?

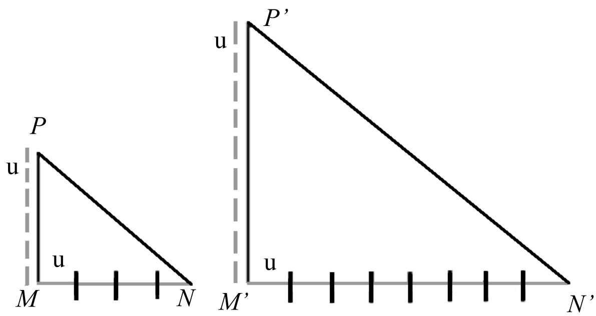


Figura 2.68

Solución:

(1) Los ángulos de ambos triángulos son respectivamente iguales, pues:

$\angle PMN = \angle P'M'N' = 90°$ y $\angle MNP = M'N'P'$ según los datos dados, se cumple por el teorema de terceros ángulos que: $\angle NPM = \angle N'P'M'$.

(2) Debemos determinar la razón entre la longitud de los lados homólogos, que son los que se oponen a los ángulos iguales, o sea, entre: $\overline{MN}$ y $\overline{M'N'}$; $\overline{NP}$ y $\overline{N'P'}$;

$\overline{PM}$ y $\overline{P'M'}$: $\dfrac{\overline{MN}}{\overline{M'N'}} = \dfrac{4}{8}$; $\dfrac{\overline{NP}}{\overline{N'P'}} = \dfrac{5}{10}$; $\dfrac{\overline{PM}}{\overline{P'M'}} = \dfrac{3}{6}$ $\therefore$ $k = \dfrac{1}{2}$.

Luego, podemos afirmar que los lados homólogos de esos triángulos son proporcionales.

Respuesta: Por cumplir los requisitos (1) y (2) los triángulos dados son semejantes, lo cual se expresa simbólicamente como: $\Delta MNP \sim \Delta M'N'P'$.
Al valor k o coeficiente de proporcionalidad entre los lados homólogos, que en este ejemplo es $k = \dfrac{1}{2}$, se le denomina también *razón de semejanza.*

Ejemplo 2:

¿Son semejantes dos triángulos iguales?

Solución:

Claro que sí, pues en ese caso también sus ángulos son iguales y la razón de semejanza es $k = 1$, porque sus lados tienen la misma longitud.

Respuesta: Los triángulos semejantes, como polígonos particulares de tres lados, cumplen también las propiedades de la semejanza de figuras.

Recuerda *las propiedades de la semejanza de triángulos:*

Para triángulos *MNP*, *M'N'P'* y *M''N''P''* cualesquiera, se cumplen las propiedades siguientes:

a) $\Delta MNP \sim \Delta MNP$ (Propiedad reflexiva o idéntica)
b) Si $\Delta MNP \sim \Delta M'N'P'$, entonces $\Delta M'N'P' \sim \Delta MNP$ (Propiedad simétrica)
c) Si $\Delta MNP \sim \Delta M'N'P'$ y $\Delta MNP \sim \Delta M''N''P''$, entonces $\Delta MNP \sim \Delta M''N''P''$ (Propiedad transitiva)

La proporcionalidad de lados homólogos de los triángulos semejantes, es de gran importancia por su aplicación al cálculo de longitudes y a la demostración de propiedades geométricas sobre razón, proporción, áreas o perímetros. Por tal motivo queremos insistirte en el procedimiento para establecer dicha proporcionalidad.

Ejemplo 3:

¿Cómo establecer la proporcionalidad entre los lados homólogos de dos triángulos semejantes ABC y $A'B'C'$ con $\angle A = \angle A'$, $\angle B = B'$, $\angle C = \angle C'$?

Solución:

Organiza cada razón asociada a una pareja de ángulos iguales y escribe como *antecedentes* de estas razones, los lados homólogos correspondientes a cada pareja de ángulos de solamente uno cualquiera de los dos triángulos. Por ejemplo:

$$\begin{array}{ccccc} \angle C = \angle C' & & \angle A = \angle A' & & B = \angle B' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \overline{AB} & = & \overline{BC} & = & \overline{CA} \end{array} \leftarrow \text{Antecedentes}$$

Ahora, convenientemente, escribe como *consecuentes,* los lados homólogos del otro triángulo, que se corresponden con cada antecedente planteado:

$$\begin{array}{ccccc} \angle C = \angle C' & & \angle A = \angle A' & & B = \angle B' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} & = & \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} & = & \dfrac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Antecedentes} \\ \leftarrow \text{Consecuentes} \end{array}$$

Respuesta: Así concluye el proceso, pero en la medida que tengas más práctica para identificar los lados homólogos, no será necesario escribir al inicio las parejas de ángulos iguales, puesto que las identificarás mentalmente y directamente pasarás a escribir cada razón.

2.3.1 Teoremas de semejanza de triángulos

Para fundamentar que dos triángulos son semejantes a partir de la definición de triángulos semejantes, es evidente que deben justificarse seis condiciones geométricas: la igualdad de las tres parejas de sus respectivos ángulos y la igualdad de las tres razones entre sus respectivos lados. ¿Existirá una vía más sencilla para fundamentar que dos triángulos son semejantes?

Esta vía se concreta en los denominados *criterios de semejanza de triángulos* y el denominado *teorema fundamental de la semejanza de triángulos,* que constituyen un grupo de teoremas que permiten probar la semejanza de dos triángulos a partir de menos propiedades que cuando lo hacemos aplicando la definición de triángulos semejantes.

Recuerda *el teorema fundamental de la semejanza de triángulos:*

Toda recta paralela a un lado de un triángulo, forma con los otros dos lados (o con sus prolongaciones) otro triángulo que es semejante al triángulo dado.

Fíjate que según el enunciado del teorema, para fundamentar que dos triángulos sean semejantes debe justificarse solamente una relación de paralelismo.

El teorema fundamental de la semejanza de triángulos fue demostrado por Tales de Mileto en la antigüedad. Para hacer la demostración, es necesario distinguir los dos casos que existen a partir de las premisas del teorema (fig. 2.69). ¿Estás de acuerdo con los dos que se plantean?

Figura 2.69

Vamos a demostrar el primero de ellos, pero análogamente se demuestra el otro (fig. 2.70).

Demostración:

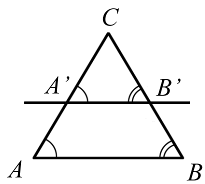


Figura 2.70

Sea ΔABC cualquiera:

Premisa: $r \parallel \overline{AB}$

$r \cap \overline{AC} = \{A'\}$

$r \cap \overline{BC} = \{B'\}$

Tesis: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C$

En los triángulos ABC y $A'B'C$ se cumple que:

(1) $\angle ACB$ es común a ambos triángulos.

(2) $\angle CAB = CA'B'$ por ser ángulos correspondientes entre $r \parallel \alpha = L \cdot \dfrac{b}{360°}$ y la secante $\overline{AC}$.

(3) $\angle CBA = \angle CB'A'$ por ser ángulos correspondientes entre $r \parallel \overline{AB}$ y la secante $\overline{BC}$.

(4) $\dfrac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = \dfrac{\overline{CB'}}{\overline{CB}}$ parte 1 del teorema de las transversales.

(5) $\dfrac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ parte 2 del teorema de las transversales.

(6) $\dfrac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = \dfrac{\overline{CB'}}{\overline{CB}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ por transitividad de la igualdad (4) y (5).

De (1), (2), (3), (4), (5) y (6) se cumple: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C$ por definición de triángulos semejantes. *l.q.q.d.*

Veamos ahora los teoremas que emplearemos como criterios de semejanza de triángulos.

Recuerda *el teorema de semejanza de triángulos (dos ángulos iguales aa):*

Si dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente iguales, entonces son semejantes.

Demostración:

Premisa:

Sean dos triángulos cualesquiera ΔABC y ΔPQR tales que: $\angle PQR = \angle ABC$ y $\angle QRP = \angle BCA$.

Tesis: $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (fig. 2.71)

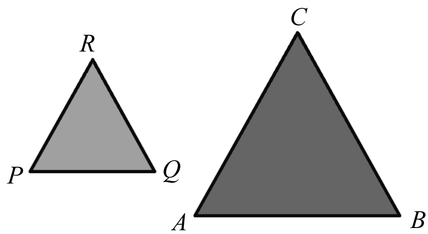


Figura 2.71

Como según la premisa: $\angle PQR = \angle ABC$ y $\angle QRP = \angle BCA,$ entonces por teorema de terceros ángulos se tiene también igual la tercera pareja de ángulos respectivos: $\angle RPQ = \angle CAB$ (1). Comparemos ahora los lados $\overline{CA}$ y $\overline{PR}$.

Si $\overline{CA} = \overline{PR},$ entonces los triángulos dados serían iguales por el teorema de un lado y los ángulos adyacentes a él respectivamente iguales (*ala)* y según el ejemplo 2, serían también semejantes, de lo cual se sigue la tesis.

Sin perder generalidad, consideremos $\overline{CA} > \overline{PR}$ y tomemos en la semirrecta *CA,* a partir del punto *C*, otro punto *A'* tal que $\overline{CA'} = \overline{PR}$ y tracemos por él una paralela *A'B'* al lado $\overline{AB}$, que corta al lado $\overline{BC}$ en el punto *B'*, como observas en la figura 2.72. Así, se ha determinado el $\Delta A'B'C$.

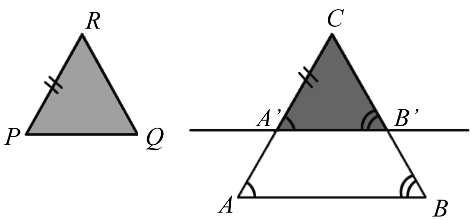


Figura 2.72

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C$ (1) por el teorema fundamental de la semejanza
$\Delta A'B'C = \Delta PQR$ por el teorema un lado y los ángulos adyacentes a él respectivamente iguales (*ala*), pues: $\overline{CA'} = \overline{PR}$ según el transporte de segmentos realizado y porque tienen dos parejas de ángulos iguales, lo cual se fundamenta a continuación:

a) $\angle RPQ = \angle CA'B'$ por transitividad, pues

$\angle RPQ = \angle CAB$ según (1) y $CAB = \angle CA'B'$ por ser correspondientes entre $A'B' \,||\, \overline{AB}$ y secante $\overline{CA}$.

b) $\angle QRP = \angle B'CA'$ por transitividad, pues

$\angle QRP = \angle BCA$ por premisa y
$\angle BCA = \angle B'CA'$ ángulo común

$\Delta A'B'C \sim \Delta PQR$ (2) porque $\Delta A'B'C = \Delta PQR$, ya que dos triángulos iguales son semejantes.
De (1) y (2) por transitividad se cumple que: $\Delta ABC \sim \Delta PQR$. *l.q.q.d.*

Según este teorema, para que dos triángulos sean semejantes, deben cumplir solamente dos condiciones: ¡dos parejas de ángulos respectivamente iguales!

Por eso junto al teorema fundamental de la semejanza, son los teoremas más utilizados para demostrar que dos triángulos son semejantes.

También son aplicados para probar semejanza de triángulos otros dos criterios o teoremas de semejanza que permiten fundamentar la semejanza de dos triángulos a partir de solamente tres condiciones. Veamos estos criterios a continuación:

Recuerda *el teorema de semejanza de triángulos (pap):*

Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente proporcionales e igual el ángulo comprendido entre dichos lados, entonces esos triángulos son semejantes.

Recuerda *el teorema de semejanza de triángulos (ppp):*

Si dos triángulos tienen tres lados respectivamente proporcionales, entonces esos triángulos son semejantes.

Ejemplo 1:

En el triángulo isósceles *ABC* de base $\overline{AB}$ de la figura 2.73:

A, M, N, B alineados; $\overline{QM} \perp \overline{AB}$ y $\overline{PN} \perp \overline{AB}$ con $Q \in \overline{AC}$; $P \in \overline{BC}$.

a) Demuestra que son semejantes los triángulos *AMQ* y *NBP*.

b) Establece la proporcionalidad entre sus lados homólogos.

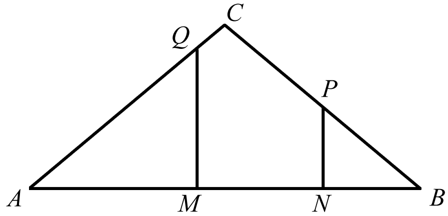


Figura 2.73

Solución:

a) En los triángulos AMQ y NBP se cumple que:

(1) $\angle QAM = \angle NBP$ por ángulos base del triángulo isósceles ABC.

(2) $\angle AMQ = \angle BNP = 90°$ porque $\overline{QM} \perp \overline{AB}$ y $\overline{PN} \perp \overline{AB}$.

Respuesta: De (1) y (2) se cumple que: $\Delta AMQ \sim \Delta NBP$ por teorema dos ángulos respectivamente iguales (*aa*). *l.q.q.d.*

b) $\angle QAM = \angle NBP$ $\quad$ $\angle AMQ = \angle BNP$ $\quad$ $\angle MQA = \angle BPN$

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$

Respuesta: $\dfrac{\overline{MQ}}{\overline{PN}} = \dfrac{\overline{QA}}{\overline{BP}} = \dfrac{\overline{AM}}{\overline{NB}}$

Ejemplo 2:

En la figura 2.74:
$DEFG$ cuadrado de lado de 3,0 cm
D, I, J, E puntos alineados
$GI \cap FJ = \{H\}$

$\overline{IJ} = 1{,}5$ cm

a) Demuestra que $\Delta GHF \sim \Delta IHJ$.
b) Calcula la razón de semejanza.

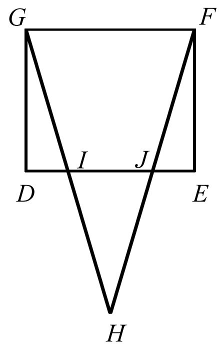


Figura 2.74

Solución:

a) Primera vía de solución: por el teorema fundamental de la semejanza.

En los triángulos GHF y IHJ se cumple que: $\overline{IJ} \,||\, \overline{GF}$ porque están contenidos en lados opuestos del cuadrado $DEFG$ según los datos.

Respuesta: De donde: $\Delta GHF \sim \Delta IHJ$ por el teorema fundamental de la semejanza de triángulos.

Segunda vía de solución: por el teorema de dos ángulos respectivamente iguales (*aa*).

En los triángulos *GHF* y *IHJ* se cumple que:

(1) $\angle GHF = \angle IHJ$ por ser ángulo común

(2) $\angle FGH = \angle JIH$ porque son ángulos correspondientes entre $\overline{GF} \parallel \overline{IJ}$ (en lados opuestos del cuadrado *DEFG*) y la secante $\overline{GH}$.

Respuesta: De (1) y (2) se cumple que: $\Delta GHF \sim \Delta IHJ$ por el teorema dos ángulos respectivamente iguales (*aa*).

Tercera vía de solución el teorema dos lados respectivamente proporcionales e igual el ángulo comprendido entre dichos lados (*pap*).

En los triángulos *GHF* y *IHJ* se cumple que:

(1) $\angle GHF = \angle IHJ$ por ser ángulo común.

(2) $\dfrac{\overline{HG}}{\overline{HI}} = \dfrac{\overline{HF}}{\overline{HJ}}$ por parte 1 del teorema de las transversales, pues:

$\overline{GH} \parallel \overline{IJ}$ (en lados opuestos del cuadrado *DEFG*)

$\overline{GH} \cap \overline{FH} = \{H\}$ lados del ΔGHF con vértice común *H*.

Respuesta: De (1) y (2) se cumple que: $\Delta GHF \sim \Delta IHJ$ por el teorema dos lados respectivamente proporcionales e igual el ángulo comprendido entre dichos lados (*pap*).

Cuarta vía de solución: por el teorema tener tres lados respectivamente proporcionales (*ppp*).
En los triángulos *GHF* y *IHJ* se cumple que:

(1) $\dfrac{\overline{HG}}{\overline{HI}} = \dfrac{\overline{GF}}{\overline{IJ}}$ por parte 1 del teorema de las transversales, pues:

$\overline{GH} \parallel \overline{IJ}$ (en lados opuestos del cuadrado *DEFG*)

$\{H\} = \overline{GH} \cap \overline{FH}$ pues son lados del ΔGHF con vértice común H

(2) $\dfrac{\overline{HG}}{\overline{HI}} = \dfrac{\overline{HF}}{\overline{HJ}}$ por parte 2 del teorema de las transversales, pues:

$\overline{GH} \parallel \overline{IJ}$ (en lados opuestos del cuadrado *DEFG*)

$\{H\} = \overline{GH} \cap \overline{FH}$ pues son lados del ΔGHF con vértice común *H*

Respuesta: De (1) y (2): $\dfrac{\overline{HG}}{\overline{HI}} = \dfrac{\overline{GF}}{\overline{IJ}} = \dfrac{\overline{HF}}{\overline{HJ}}$ se cumple que: $\Delta GHF \sim \Delta IHJ$ por el teorema tener tres lados respectivamente proporcionales (*ppp*).

b) Para determinar la razón de semejanza, tomamos respectivamente en cada triángulo el lado que se opone a un ángulo igual, cuya longitud sea dada o se pueda calcular con los datos, en este caso es conocida la longitud de los lados que se oponen al ángulo común y son: $\overline{IJ} = 1{,}5\text{ cm}$ y $\overline{GF} = 3{,}0\text{ cm}$.

Respuesta: $k = \dfrac{\overline{GF}}{\overline{IJ}} = \dfrac{3{,}0}{1{,}5} = 2$

Ejemplo 3:

En la figura 2.75:

$\overline{QM} = 6{,}0\text{ cm}$; $\overline{MP} = 9{,}0\text{ cm}$; $\overline{QP} = 7{,}0\text{ cm}$;
$\overline{MS} = 1{,}8\text{ dm}$; $\overline{ST} = 1{,}4\text{ dm}$; $\overline{MT} = 1{,}2\text{ dm}$

a) Demuestra que: $\Delta MQP \sim \Delta STM$.
b) Señala las parejas de ángulos iguales que se corresponden con cada pareja de lados homólogos.
c) Calcula la razón de semejanza.

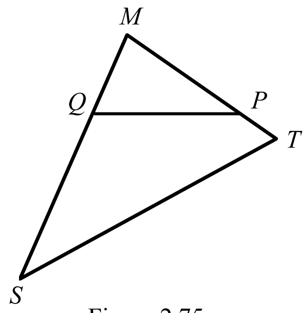


Figura 2.75

Solución:

a) Como no tenemos datos sobre amplitudes de ángulos ni sobre rectas paralelas, sino solamente sobre longitudes de lados, estamos obligados a aplicar el teorema de semejanza, tres lados respectivamente proporcionales (*ppp*).

Se relacionan entre sí los lados que se oponen a los ángulos iguales, pero… ¿cómo lo hacemos si desconocemos las amplitudes de los ángulos de los triángulos dados?

¡Ah! Pero conocemos un teorema que plantea que en un triángulo, al mayor lado se opone el mayor ángulo y viceversa, entonces de una ojeada a los datos, comparando y ordenando las longitudes dadas, podemos deducir que:

En ΔMQP: $\overline{QM} = 6{,}0\text{ cm} < \overline{QP} = 7{,}0\text{ cm} < \overline{MP} = 9{,}0\text{ cm}$

En ΔSTM: $\overline{MT} = 1{,}2\text{ dm} < \overline{ST} = 1{,}4\text{ dm} < \overline{MS} = 1{,}8\text{ dm}$

De esta forma vamos a calcular la razón entre la longitud de las parejas de lados:

$\overline{QM}$ y $\overline{MT}$; $\overline{QP}$ y $\overline{ST}$; $\overline{MP}$ y $\overline{MS}$

Falta un detalle: debes hacer las conversiones necesarias para que todas las longitudes estén expresadas en la misma unidad de medida, antes de hacer los cálculos. Ahora debemos calcular la razón que corresponde a cada pareja de lados, para determinar si son iguales. Así planteamos que:

$\dfrac{\overline{QM}}{\overline{MT}} = \dfrac{6}{12}$; $\dfrac{\overline{QP}}{\overline{ST}} = \dfrac{7}{14}$; $\dfrac{\overline{MP}}{\overline{MS}} = \dfrac{9}{18}$

Luego $\dfrac{\overline{QM}}{\overline{MT}} = \dfrac{\overline{QP}}{\overline{ST}} = \dfrac{\overline{MP}}{\overline{MS}} = \dfrac{1}{2}$

Respuesta: $\Delta MQP \sim \Delta STM$, porque sus lados son proporcionales por el teorema tres lados respectivamente proporcionales (*ppp*).

b) Como ya están determinadas las parejas de lados homólogos, fácilmente se determinan las parejas de ángulos iguales que se oponen a estas en cada triángulo.

$$\begin{array}{ccc} \angle P = \angle S & \angle M = \angle M & \angle Q = \angle T \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

Respuesta: $\dfrac{\overline{QM}}{\overline{MT}} = \dfrac{\overline{QP}}{\overline{ST}} = \dfrac{\overline{MP}}{\overline{MS}}$

c) Toma cualquiera de las anteriores parejas de lados homólogos para calcular la razón de semejanza, por ejemplo: $\dfrac{\overline{QM}}{\overline{MT}} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$.

Respuesta: $k = \dfrac{1}{2}$

R!¡ Ya estás en condiciones de comprender el procedimiento que empleó Tales para la medición de la altura de la Pirámide de Keops. Observa la figura 2.76. Tales esperó el momento en que la sombra de su bastón clavado perpendicularmente sobre el suelo fuera igual a la longitud del bastón y midió la sombra de la pirámide. ¿Ingenioso verdad? ¿Pero en qué basó su idea?

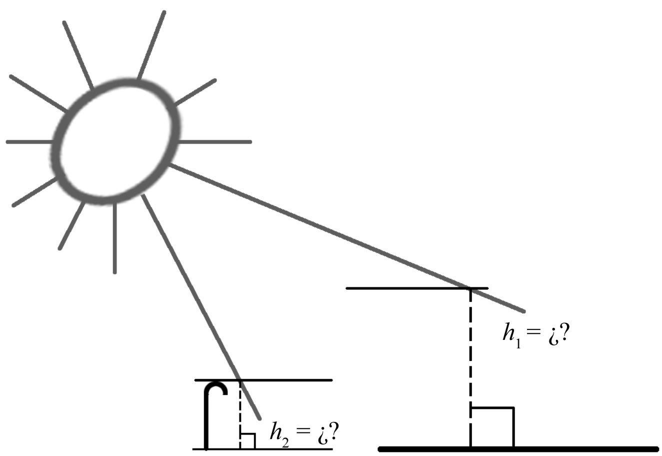


Figura 2.76

Con las condiciones planteadas podemos imaginar en el plano que tenemos delante o plano frontal a dos triángulos rectángulos isósceles semejantes: el primero, determinado por la longitud del bastón y su sombra, y el segundo, determinado por la altura de la pirámide y su sombra. Observa esos triángulos en la figura 2.77. ¿Por qué son triángulos semejantes? ¿Qué criterio de semejanza permite fundamentar la semejanza entre ellos? ¿Por qué la longitud de la sombra de la Pirámide es igual a su altura?

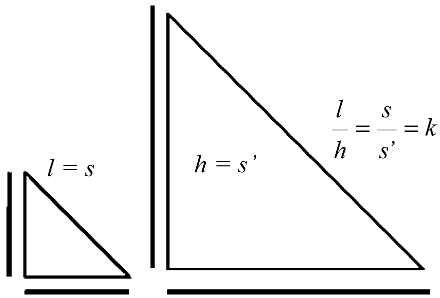


Figura 2.77

2.3.2 Razón entre perímetros y áreas en triángulos semejantes

La profesora de David, un estudiante de noveno grado, orientó de tarea calcular el área y el perímetro de los triángulos del ejemplo 10, pero antes debían trazar la altura relativa a los lados $\overline{QP}$ y $\overline{ST}$, la longitud de la primera es de 4,0 cm y la otra es de 0,8 dm. Te invito a calcular.

Seguro habrás obtenido que el área del triángulo ΔMQP es de 14 cm^2 y la del ΔSTM es de 56 cm^2. ¿Qué relación existe entre estas áreas? ¿Cuál es la razón entre ellas?

Ahora estudiaremos dos teoremas que te permitirán calcular perímetros y áreas de dos triángulos semejantes y que tiene también otras aplicaciones.

Recuerda *el teorema sobre el perímetro de triángulos semejantes:*

Si $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$; k la razón de esa semejanza; P el perímetro del ΔABC y P' el perímetro del $\Delta A'B'C'$, entonces se cumple que: $P' = k \cdot P$.

Recuerda *el teorema sobre el área de triángulos semejantes:*

Si $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$; k la razón de esa semejanza; A el área del ΔABC y A' el área del $\Delta A'B'C'$, entonces se cumple para esas áreas que: $A' = k^2 \cdot A$.

Recuerda siempre que esos dos teoremas se cumplen en triángulos semejantes, pero también puedes aplicarlos en otros polígonos semejantes.

Ejemplo 1:

En la figura 2.78 aparecen representados los triángulos *MNP* y *MQR*, se cumple también que $\overline{PN} \,||\, \overline{QR}$.

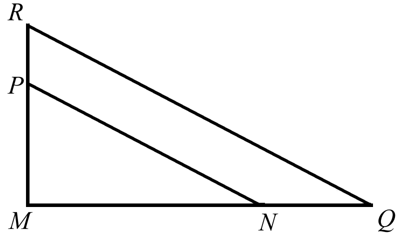


Figura 2.78

a) Fundamenta por qué los triángulos *MNP* y *MQR* son semejantes.

b) Si $\frac{\overline{MN}}{\overline{MQ}} = \frac{2}{3}$ y el área del triángulo *MNP* es igual a 12,6 cm^2; calcula el área del triángulo *MQR*. Fundamenta tu respuesta.

Solución:

a) En los triángulos *MNP* y *MQR* se cumple que: $\overline{PN} \,||\, \overline{QR}$ según los datos. Por lo cual: $\Delta MNP \sim \Delta MQR$ por el teorema fundamental de la semejanza de triángulos.
b) En la semejanza de triángulos anterior, se cumple por propiedad del área de triángulos semejantes, con *A'*: área del ΔMNP y *A*: área del ΔMQR, que es la que debemos calcular, puede plantearse que:

$A' = k^2 \cdot A$ y sustituyendo: $k = \frac{\overline{MN}}{\overline{MQ}} = \frac{2}{3}$ y $A' = 12{,}6$ cm^2

$$12{,}6 = \frac{2^{2}}{3^{2}}{}^{2} \cdot A$$

$$12{,}6 \cdot \frac{9}{4} = A$$

$A = 28{,}35$ cm^2

Respuesta: El área del ΔMQR es aproximadamente 28,4 cm^2.

Ejemplo 2:

Dadas las longitudes de los tres lados del *MNR* y del lado $\overline{QS}$ del ΔMQS semejante a él (fig. 2.79) $\overline{QS} = 7{,}0$ cm; $\overline{MN} = 1{,}8$ dm; $\overline{NR} = 1{,}4$ dm; $\overline{RM} = 12$ cm. Calcula el perímetro de ambos triángulos.

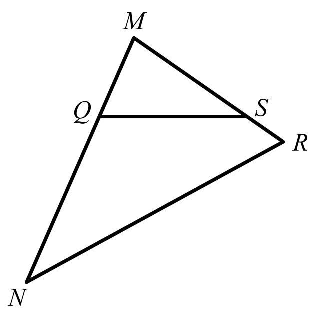


Figura 2.79

Solución:

En los triángulos semejantes dados *MNR* y *MQS:*
P' perímetro del ΔMNR y *P* perímetro del ΔMQS.

Debemos hacer primero las conversiones de unidades que sean necesarias para después calcular k, P' y P:

Calculemos: $k = \dfrac{\overline{QS}}{\overline{NR}} = \dfrac{7}{14} = \dfrac{1}{2}$

$P' = \overline{MN} + \overline{NR} + \overline{RM}$
$P' = 18 + 14 + 12$
$P' = 44$ cm

Por propiedad del perímetro de triángulos semejantes puede plantearse que:
$P = k \cdot P'$

$P = \dfrac{1}{2} \cdot 44 = 22 \text{ cm}$

Respuesta: El perímetro P' del ΔMNR es 44 cm y el perímetro P del ΔMQS es 22 cm.

Ejercicios

1. En los grupos de triángulos de las figuras 2.80 a 2.83, en cada inciso se han marcado de la misma forma los ángulos iguales y, además, se dan otros datos. Selecciona las parejas de triángulos semejantes en cada inciso y fundamenta tu selección.

a) ΔQPS equilátero (fig. 2.80).
$E \in \overline{QS}$; $F \in \overline{QP}$; $G \in \overline{PS}$

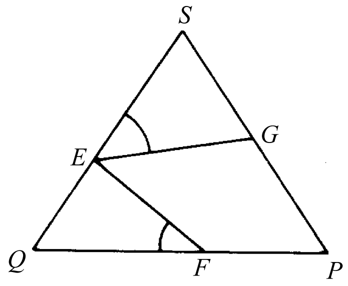


Figura 2.80

b) $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$ (fig. 2.81).

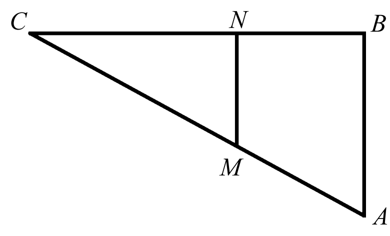


Figura 2.81

c) (fig. 2.82)

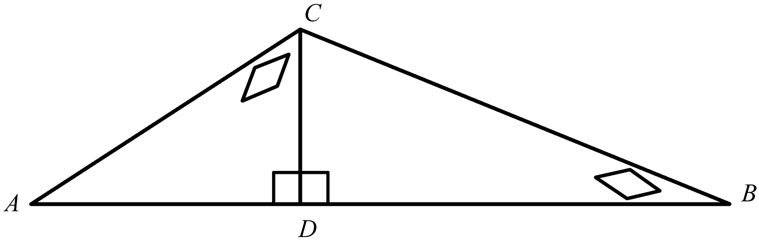


Figura 2.82

d) (fig. 2.83)

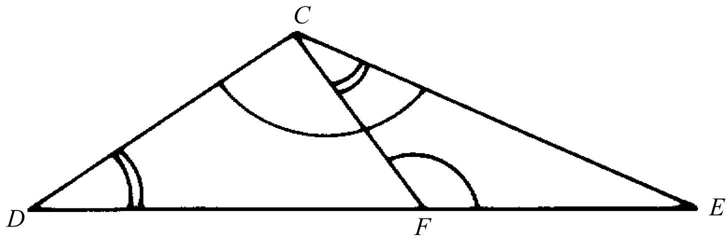


Figura 2.83

2. Establece la proporcionalidad entre los lados homólogos de las parejas de triángulos que seleccionaste en el ejercicio anterior.

3. En la figura 2.84 se muestra la circunferencia $C(O;\ r)$, D, F, G son puntos de la circunferencia, $\angle FDG = \angle GOH$ y $\overline{HG}$ tangente en G.

   a) El $\angle DFG$ es recto por ____________________.

   a) El $\angle HGO$ es recto por ____________________.
   c) $\Delta DFG \sim \Delta GHO$ por ________________________.

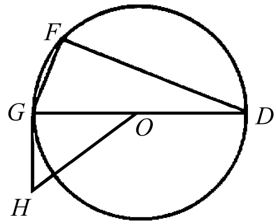


Figura 2.84

4. En la figura 2.85, $ABCD$ es un rectángulo, E y F son los puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{AB}$ respectivamente. Prueba que los triángulos AEF y BCD son semejantes. Establece la proporcionalidad entre sus lados homólogos.

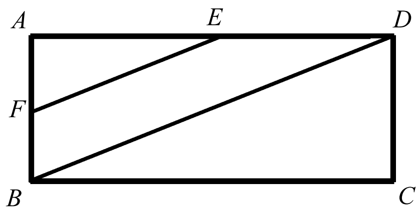


Figura 2.85

5. Responde verdadero o falso y justifica en cada caso las respuestas falsas.

   a) ___ Todos los cuadrados son semejantes entre sí.
   b) ___ Todos los rectángulos son semejantes entre sí.
   c) ___ Si dos triángulos son semejantes y el coeficiente de proporcionalidad es 3 y el área de uno de ellos es igual a 18 u^2, entonces el área del otro es igual a 6 u^2.
   d) ___ Si la figura A es semejante a la figura B y el coeficiente de proporcionalidad que permite obtener la figura B en la figura A es k^2, entonces el área de la figura A es mayor que la de la figura B.

e) ___ Si dos paralelogramos son semejantes entre sí y los lados de uno miden 4,0 cm y 6,0 cm, y los lados del otro son iguales a 8,0 cm y 12 cm, entonces el coeficiente de proporcionalidad es igual a 2.

6. Construye un rectángulo semejante al dado en la figura 2.86, utilizando como coeficiente de proporcionalidad:

$$k = 2;\ k = \frac{1}{2};\ k = 3{,}5;\ k = \frac{2}{3}$$

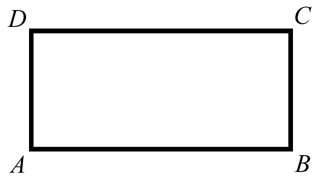


Figura 2.86

7. Sea *ABCD* un cuadrado (fig. 2.87); *E*, *F* y *G* son puntos de *AD*, *AB* y *EC* respectivamente. $FG \perp EG$,

$\frac{ED}{EG} = \frac{CD}{FG} = 2$; $EC = 2\sqrt{5}$ cm de la figura 2.87.

Entonces *EF* mide:

a) ___ $2\sqrt{5}$ cm   b) ___ $\sqrt{5}$ cm

c) ___ $4\sqrt{5}$ cm   d) ___ no sé.

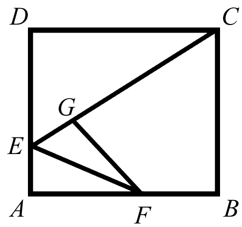


Figura 2.87

Porque: ____

8. En los triángulos *ABC* y *NKL*; $\overline{AB} = 3{,}0$ cm; $\angle A = 72°$; $\angle C = 63°$; $MK = 9{,}0$ cm; $\angle M = 72°$ y $\angle K = 45°$.
   a) Fundamenta por qué $\Delta ABC \sim \Delta MKL$.
   b) Halla la razón de semejanza.

9. En la figura 2.88, $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$, los puntos *B*, *A* y *D* están alineados y $\angle C = \angle E$. Demuestra que:
   a) $\Delta ABC \sim \Delta BDE$
   b) $\overline{AB} \cdot \overline{DE} = \overline{AC} \cdot \overline{DB}$

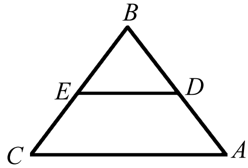


Figura 2.88

10. Calcula el valor de *x* apoyándote en la figura 2.89.

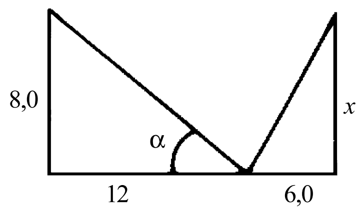


Figura 2.89

11. En la figura 2.90:

- *MNPQ* es un rombo, *R* y *T* pertenecen a $\overline{MQ}$ y $\overline{QP}$ respectivamente.
- $\angle MNT = \angle RNP$.

a) Prueba que el triángulo *RNT* es isósceles de base $\overline{RT}$.
b) Si el área del triángulo *MNR* es igual a 10,5 cm², la altura *h*, relativa al lado $\overline{NR}$ es igual a 35 mm y la razón entre las longitudes de los lados $\overline{NR}$ y $\overline{RT}$ del triángulo *RNT* es igual a 3,0. Calcula el perímetro del triángulo *RNT*.

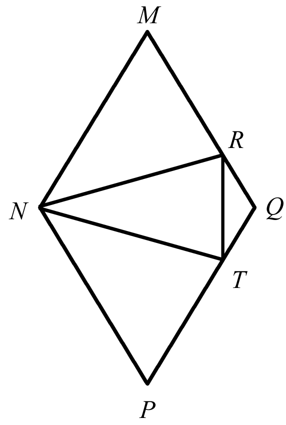


Figura 2.90

12. En la figura 2.91:
M, *N*, *P* son puntos de la circunferencia de centro *O* y diámetro $\overline{MN}$; $\overline{QM} \perp \overline{MP}$; $\overline{QR} \parallel \overline{MN}$; *R* pertenece a $\overline{MP}$.

a) Demuestra que: $\overline{NP} \cdot \overline{MR} = \overline{QM} \cdot \overline{MP}$
b) Si se conoce que: $\overline{ON} = 5{,}0 \text{ cm}; \overline{PN} = 8{,}0 \text{ cm}$ y la razón de semejanza entre los lados homólogos de los triángulos *MNP* y *QMR* es igual a 2, calcula el perímetro del pentágono *MNPRQ*.

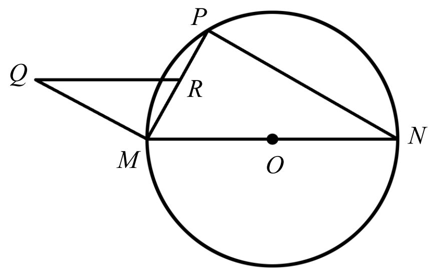


Figura 2.91

13. Dada la circunferencia de centro *O* y radio $\overline{OA}$, donde las cuerdas $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se cortan en el punto *E* (fig. 2.92).
Prueba que $\Delta ADE \sim \Delta BEC$.

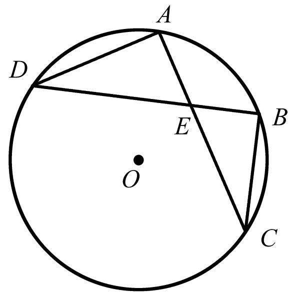


Figura 2.92

14. En la figura 2.93:

- *MNPQ* es un cuadrado,
- *T* y *S* puntos de $\overline{MN}$ y $\overline{NP}$ respectivamente,
- *MNR* triángulo equilátero,
- $\overline{RQ}$ y $\overline{MS}$ se cortan en *U* y
- $\Delta SMQ = \Delta PQT$.

a) Prueba que $\Delta NSM \sim \Delta TQM$.

b) Prueba que $\overline{NS} = \overline{MT}$.

c) Calcula la amplitud del ángulo $\angle MRQ$.

d) Si el perímetro del cuadrado es 32 cm, halla el área del triángulo ΔMRQ.

15. En la figura 2.94:

- $ABCD$ es un cuadrado de 16,0 cm^2 de área.
- $\overline{DH} = \overline{FB} = 1{,}0$ cm.
- I punto medio de $\overline{AC}$, donde se cortan $\overline{AC}$ y $\overline{HF}$.

a) Prueba que $\Delta FAI \sim \Delta HIC$.

b) Halla el área del trapecio $EIHD$ de bases $\overline{EI}$ y $\overline{DH}$.

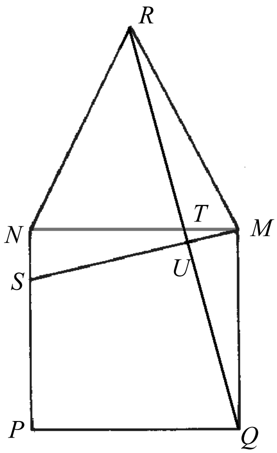


Figura 2.93

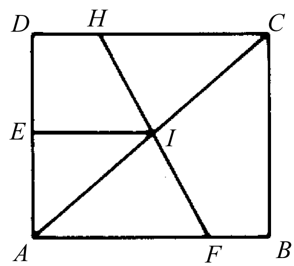


Figura 2.94

16. En la figura 2.95 se muestra un semicírculo de centro O y diámetro $\overline{AB}$ en el que se ha inscrito el triángulo ADB.

$\overline{BC}$ tangente al semicírculo en el punto B.

A, D y C puntos alineados.

El perímetro del semicírculo es igual a 10,28 cm y $\angle BAC = 30°$.

a) Demuestra que $\Delta ADB \sim \Delta BDC$

b) Halla el área de la región sombreada.

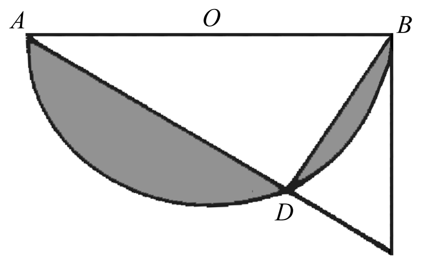


Figura 2.95

17. En la figura 2.96, C es un punto de la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB}$; $\overline{AD}$ es tangente a la circunferencia en A; $E \in \overline{AB}$, $\overline{ED} \parallel \overline{CB}$, $\overline{AC} \cap \overline{DE} = \{F\}$ y $\overline{AE} = \overline{CB}$.

Prueba que:

a) $\overline{ED} = \overline{AB}$.
b) $\Delta ABC \sim \Delta AFD$.
c) Halla $\overline{DF}$ si $\overline{BC} = 6{,}0$ cm, $\overline{AC} = 8{,}0$ cm y $\overline{AF} = 5{,}0$ cm.

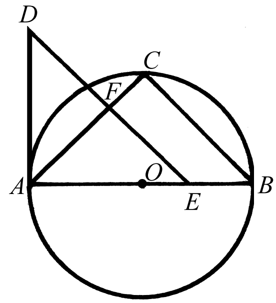


Figura 2.96

2.4 Grupo de teoremas de Pitágoras

Para sostener la cubierta de una nave industrial, un soldador necesita cinco vigas metálicas como se muestra en la figura 2.97.

Si solo conoce la longitud de dos de las vigas que empleará como base de esta pieza metálica en forma de triángulo rectángulo con un soporte de altura relativa a su base, ¿cómo calcular la longitud del resto de las vigas necesarias?

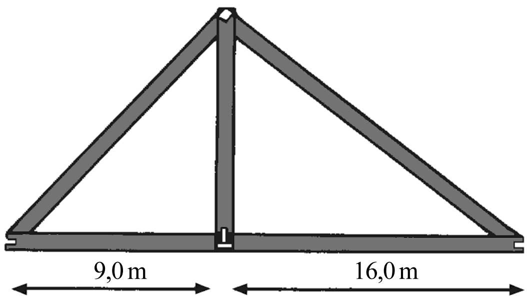


Figura 2.97

Te invito a solucionar este problema utilizando lo estudiado sobre la semejanza de triángulos, para eso te guiarás por los pasos siguientes:

1. Construye una figura de análisis donde denotes todos los triángulos y los ángulos agudos que en ella aparecen (fig. 2.98).

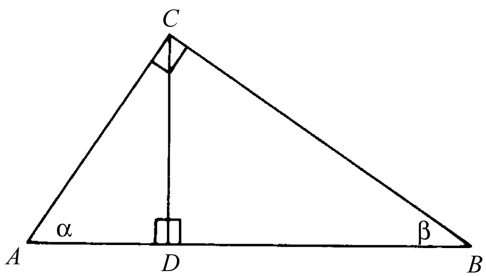


Figura 2.98

2. Nombra los elementos denotados en la figura en el ΔABC rectángulo en C.

   $\overline{AB}$: hipotenusa

   $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$: catetos

   $\overline{CD}$: altura relativa a $\overline{AB}$

   α y β: ángulos agudos

   $\angle ACB$: ángulo recto
3. Determina cuántos triángulos aparecen en la figura y nómbralos.
   Son tres triángulos, ΔABC, ΔADC, ΔDBC
4. Encuentra cuáles de estos triángulos son semejantes.

   Como puedes observar los tres triángulos son rectángulos, luego tienen un ángulo de 90°; por tanto, para probar que estos triángulos son semejantes, nos faltaría encontrar que tienen un ángulo agudo igual.

   Los ΔABC y ΔADC tienen el ángulo α común y en el caso de los ΔABC y ΔDBC tienen el ángulo β.

   Entonces $\Delta ABC \sim \Delta ADC$ y $\Delta ABC \sim \Delta DBC$ por tener dos ángulos respectivamente iguales.

   Por tanto, $\Delta ABC \sim \Delta ADC \sim \Delta DBC$ por carácter transitivo.
5. Denota los lados por una sola letra para facilitar el procedimiento como aparece en la figura 2.99.

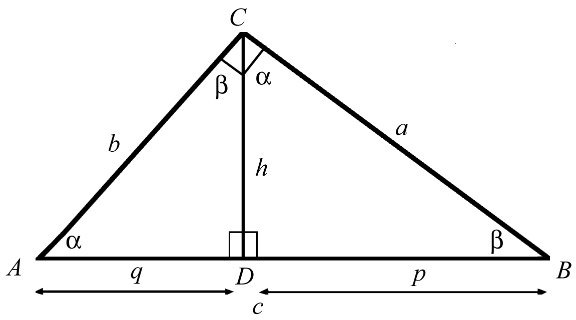


Figura 2.99

6. Establece los lados homólogos en estos triángulos, auxíliate de la tabla 2.1.

Tabla 2.1

	ΔABC	ΔADC	ΔDBC
Hipotenusa	c	b	a
Cateto opuesto al ángulo de amplitud α	a	h	p
Cateto opuesto al ángulo de amplitud β	b	q	h

7. Determina las proporciones entre los lados homólogos de los triángulos semejantes.

7.1 En los $\Delta ADC \sim \Delta BDC$ se cumple que: $\frac{h}{q} = \frac{p}{h}$; aplicando el teorema fundamental de las proporciones, obtenemos: $h \cdot h = p \cdot q$ y resolviendo el producto quedará: $h^2 = p \cdot q$.

La relación en los triángulos rectángulos obtenida se corresponde con uno de los tres teoremas que estudiarás.

Recuerda *el teorema de las alturas:*

> En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la altura relativa a la hipotenusa es igual al producto de las longitudes de los segmentos que la altura determina sobre la hipotenusa.

Continúa determinando las proporciones entre los lados homólogos de los otros triángulos semejantes.

7.2 En los $\Delta ADC \sim \Delta ABC$ se cumple que: $\frac{b}{q} = \frac{c}{b}$, aplicando el teorema fundamental de las proporciones obtenemos: $b \cdot b = c \cdot q$ y resolviendo el producto quedará: $b^2 = c \cdot q$.

7.3 En los $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ se cumple que: $\frac{a}{p} = \frac{c}{a}$, aplicando el teorema fundamental de las proporciones obtenemos: $a \cdot a = c \cdot p$ y resolviendo el producto quedará: $a^2 = c \cdot p$. Observa que la altura determina sobre la hipotenusa dos segmentos, el correspondiente a un cateto determinado es el que tiene con él un extremo común.

Ejemplo: en la figura 2.99 al cateto a le corresponde el segmento p y al cateto b le corresponde el segmento q.

Recuerda *el teorema de los catetos:*

> En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de cada cateto es igual al producto de la longitud de la hipotenusa por la longitud del segmento de hipotenusa correspondiente al cateto.

Estos dos teoremas que acabas de obtener, junto al teorema de Pitágoras que estudiaste desde la primaria, reciben el nombre de *grupo de teoremas de Pitágoras*.

Recuerda *el teorema de Pitágoras:*

> En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.

Este teorema lo has aplicado con frecuencia en la resolución de problemas. Te propongo deducirlo ahora aplicando el teorema de los catetos.

Ya conoces que: $a^2 = c \cdot p$ y $b^2 = c \cdot q$ por teorema de los catetos

Sumando miembro a miembro de estas dos igualdades, obtendrás:

$$\begin{array}{r} a^2 = c \cdot p \\ + \, b^2 = c \cdot q \\ \hline a^2 + b^2 = p \cdot c + q \cdot c \end{array}$$

Aplicando la propiedad distributiva en el miembro derecho, les queda:

$a^2 + b^2 = c \cdot (p + q)$ (1)

pero como $p + q = c$ (2) por suma de segmentos, entonces sustituyendo 2 en 1 tenemos que: $a^2 + b^2 = c^2$.

Ahora ya puedes determinar la longitud de las restantes vigas necesarias para la cubierta de la nave industrial que plantea el ejercicio inicial.

R¡!

Ver la figura 2.100.

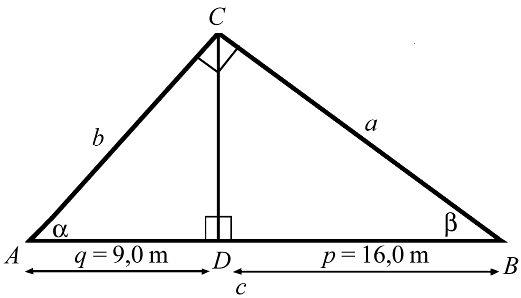


Figura 2.100

Datos:

$p = 16{,}0$ m

$q = 9{,}0$ m

h-?

a-?

b-?

$h^2 = p \cdot q$

$h^2 = 16 \cdot 9 = 144$

$h = \sqrt{144} = 12$

$h = 12$ m

$a^2 = c \cdot p$

$a^2 = 25 \cdot 16$

$a^2 = 400$

$a = \sqrt{400}$

$a = 20$ m

$b^2 = c \cdot q = b^2 = 25 \cdot 9 = 225$

$b = \sqrt{225}$

$b = 15$ m

Respuesta: Las longitudes de las vigas metálicas serán aproximadamente de 12; 20 y 15 m.

¿Será posible afirmar que si se cumplen algunas de las igualdades obtenidas en los teoremas del grupo de Pitágoras, entonces el triángulo es rectángulo?

¡! En una tarea, a Enrique y a Frank les correspondió resolver el ejercicio que aparece en la figura 2.101.

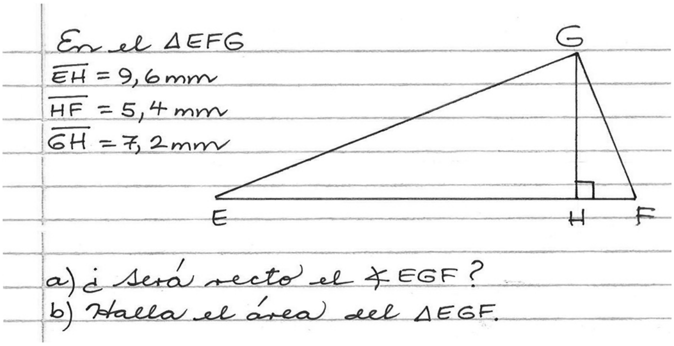


Figura 2.101

Este fue el algoritmo que siguieron:

1. Pensaron en las maneras de demostrar que un triángulo es rectángulo y optó por una de ellas.
2. Construyeron un triángulo semejante al dado (fig. 2.102).

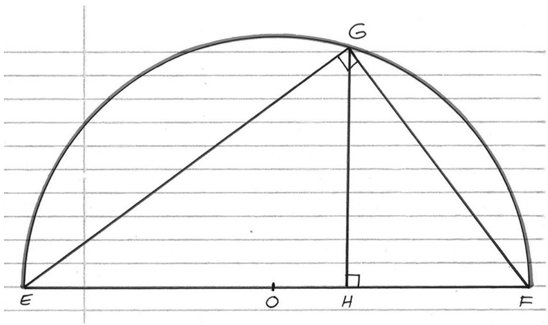


Figura 2.102

3. Buscaron el punto medio de $\overline{EF}$ y lo llamaron *O*.
4. Con centro en *O* trazaron la semicircunferencia.
5. Al ver que el punto *G* pertenecía a ella concluyeron que el $\angle G$ es recto por el recíproco del teorema de Tales.
6. De ahí que el ΔEFG es rectángulo, pues este que se construyó es semejante al dado. El área pedida ya sabes cómo hallarla.

Pienso que estés de acuerdo con Frank y Enrique, aunque después de haber construido el triángulo semejante, puedes comprobar con un cartabón que la amplitud del ángulo *G* es de 90°. Ahora conocerás otra vía (Ya sabes que no siempre se garantiza exactitud en la medición). Sucede que también se cumple el recíproco del teorema de las alturas, ¿te atreves a enunciarlo?

Cuando se desea formar el recíproco de un teorema, es necesario diferenciar claramente la premisa de la tesis. Para lo cual es conveniente expresar el teorema en la forma de **si-entonces**.

Si tenemos un teorema *Si A entonces B* y la proposición recíproca *Si B entonces A* es verdadera, entonces esta última proposición es el teorema recíproco del primero.

Recuerda *el recíproco del teorema de las alturas:*

Si en un triángulo, el cuadrado de la longitud de la altura relativa al mayor de los lados es igual al producto de las longitudes de los segmentos que la altura determina en dicho lado, entonces el triángulo es rectángulo.

R¡! Si conoces el recíproco del teorema de las alturas, puedes resolver el ejercicio de la tarea rápidamente, porque al cumplirse que:

$\overline{HG}^2 = \overline{HE} \cdot \overline{HF} = 9{,}6 \cdot 5{,}4 = 51{,}84 \text{ mm}^2$ y como $\overline{HG}^2 = (7{,}2 \text{ mm})^2 = 51{,}84 \text{ mm}^2$, entonces se puede afirmar que el triángulo es rectángulo y que el ángulo G es recto.

¡! En la portada de una revista como aparece en la figura 2.103 plantea el siguiente acertijo, ¿puedes ayudar a resolverlo?

Figura 2.103

R¡! El acertijo se parece mucho al teorema de los catetos, más que al teorema, a su recíproco, que también se cumple, por tanto, se puede afirmar que el ΔEFG es rectángulo.

Vamos a formular el recíproco de ese teorema.

Recuerda *el recíproco del teorema de los catetos:*

Si en un triángulo, el cuadrado de la longitud de cada uno de los dos lados más pequeños es igual al producto de la longitud del lado mayor por el segmento de lado mayor que le corresponde al trazar la altura relativa a este, entonces el triángulo es rectángulo.

Verifica que en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud del lado mayor es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados. Busca la amplitud del ángulo que se opone al lado mayor.

Recuerda *el recíproco del teorema de Pitágoras:*

Si en un triángulo, el cuadrado de la longitud del lado mayor es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, entonces el triángulo es rectángulo.

Estos teoremas son de gran utilidad en la resolución de los más disímiles problemas, por eso es importante que elabores un resumen que te ayude a comprender teoremas y recíprocos.

Ejemplo 1:

Demuestra que los ΔABC y ΔPQR de la figura 2.104 son semejantes teniendo en cuenta los datos que aparecen en la figura.

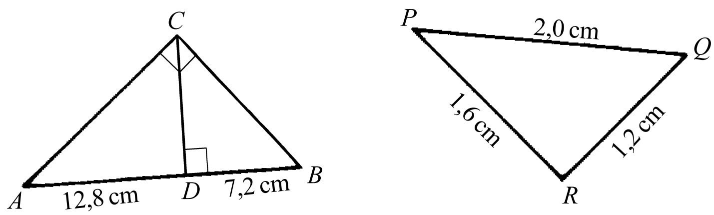


Figura 2.104

- Lee cuidadosamente el ejercicio para que comprendas su enunciado, aquí es más que evidente, pero nunca está de más hacerlo.
- Centra tu atención en los datos, fíjate que en el ΔABC te dan la longitud de los segmentos que determina en la hipotenusa la altura relativa a esta y en el ΔPQR, las longitudes de los tres lados.
- Piensa en las maneras que tienes de probar que dos triángulos son semejantes: muchas pueden ser tus ideas, sin embargo no debe faltar lo que plantean los criterios de semejanza de triángulos.
- Fíjate que te dan información de longitudes de lados por lo que una buena idea será aplicar el teorema de tres lados respectivamente proporcionales (*ppp*).

- Si vas por ese camino, te estarás preguntando de qué forma hallar la longitud de $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, se impone aplicar el teorema de los catetos.
- Rápidamente obtienes que $\overline{BC} = 12$ cm y $\overline{AC} = 16$ cm.
- No cabe duda. $\frac{\overline{AC}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{RQ}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}} = 10$, los lados son respectivamente proporcionales.

  Por tanto, los triángulos son semejantes y quedó resuelto el problema.
- Es bueno que critiques todo el trabajo que realizaste, de ese modo analizas una vez más la estrategia que te condujo a la resolución del ejercicio; también piensas en los conocimientos y destrezas que tuviste que poner en práctica.
- Comprueba la validez de la solución, es sumamente útil. A propósito, la que se siguió aquí, ¿es única?

Seguidamente te presentamos una colección de ejercicios para que apliques las proposiciones del grupo de teoremas de Pitágoras y otros muchos contenidos que has aprendido de Geometría.

A continuación un comentario que vale la pena:

Para resolver los ejercicios del 3 al 6 es necesario recordar algunos temas sobre triángulos. Buscar las respuestas de las actividades de la 7 a la 13 implica recordar temáticas de trapecios, paralelogramos y paralelogramos especiales. También tendrás que reactivar lo estudiado sobre cálculo de cuerpos.

Lo estudiado sobre circunferencia y círculo es fundamental para resolver las situaciones intramatemáticas de la 14 a la 17.

Las últimas siete situaciones, muy cercanas a la vida práctica, deben resultarte más sencillas.

También será muy cómodo que elabores todas las respuestas con la frase siguiente: Hay ángulo(s) recto(s) si:

Ejemplo:

- Tenemos ángulos adyacentes iguales.
- Dos rectas paralelas que son cortadas por una perpendicular a ellas.

Ahora, cuatro consejos para asumir el reto:

1. Enfrenta la resolución de un ejercicio con todo el ánimo, la confianza, el optimismo y la motivación posibles, piensa que eres la persona que mejor preparada está para encontrar la solución.
2. No te desesperes, ni te angusties: resolver un ejercicio lleva su tiempo y en ocasiones requiere, además, de mucho esfuerzo, pero eso no quiere decir que no lo logres.
3. Un ejercicio puede resolverse por diferentes vías, aunque puedes encontrarte alguno que no tenga solución.

4. Al equivocarte en la resolución de un ejercicio, no te aflijas, aprende de ese error, es una provechosa experiencia.

Ejercicios

1. Lee detenidamente la pregunta y responde:

1.1 Clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas (V) o falsas (F). De las que consideres falsas argumenta por qué lo son.

a) ___ En todo triángulo rectángulo la longitud de la altura relativa a la hipotenusa es media proporcional entre las longitudes de los segmentos que ella determina en dicho lado.

b) ___ En todo triángulo rectángulo el área del cuadrado cuyo lado tiene una longitud igual a la longitud de la altura relativa a la hipotenusa difiere del área del rectángulo cuyos lados tienen las longitudes de los segmentos que dicha altura determina sobre la hipotenusa.

c) ___ Existen triángulos en los que la longitud de la altura relativa a la hipotenusa es igual a la de los segmentos que ella determina en dicho lado.

d) ___ En cualquier triángulo el cuadrado de la longitud de la altura relativa al lado mayor es igual al producto de las longitudes de los segmentos que esa altura determina en dicho lado.

e) ___ En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de cada cateto es igual al producto de la longitud de la hipotenusa por la longitud de la proyección del cateto sobre la hipotenusa.

f) ___ En todo triángulo rectángulo e isósceles la longitud de los catetos está dada por el término $\sqrt{2}a$, donde a es la longitud de la altura relativa a la hipotenusa.

g) ___ Existen triángulos isósceles en los que el cuadrado de la longitud del lado mayor es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados.

h) ___ Existen triángulos rectángulos en los que el cuadrado de la longitud de la altura relativa al mayor de los lados difiere del producto de las longitudes de los segmentos que la altura determina en dicho lado.

1.2 Selecciona la respuesta correcta en cada caso, marcando con una X en la línea dada. Justifica tu selección. Observa la figura 2.105.

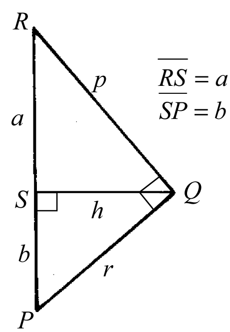


Figura 2.105

1.2.1 El cuadrado de h coincide con:

a) ___ $a \cdot b$ b) ___ a c) ___ $a^2 + b^2$

d) ___ $\frac{a}{b}$

(NA: ninguno de los anteriores
ND: no se puede determinar)

1.2.2 La raíz cuadrada aritmética de r es:

a) ___ $\sqrt{b^2 + a \cdot b}$ b) ___ $\sqrt{a^2 + a \cdot b}$ c) ___ $\sqrt{a \cdot b}$ d) ___ NA

1.2.3 La suma de los cuadrados de p y r es

a) ___ $a \cdot b$ b) ___ $a^2 + b^2$ c) ___ $(a + b)^2$ d) ___ NA

1.2.4 La diferencia de los cuadrados de r y b es:

a) ___ $a \cdot b$ b) ___ $a + b$ c) ___ $a - b$ d) ___ ND

2. Plantea para las alturas de ΔACF, ΔCFE y ΔACE de la figura 2.106, las ecuaciones correspondientes al teorema de las alturas. Plantea, además, las del teorema de los catetos.

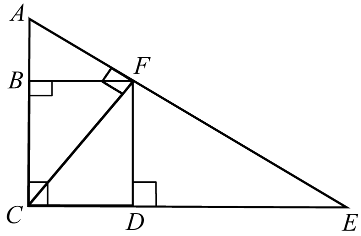


Figura 2.106

3. Un punto interior de un ángulo recto se encuentra a las distancias a y b de los lados del ángulo. ¿Cuál es la distancia del punto al vértice del ángulo?
4. Las longitudes de los lados de un triángulo son proporcionales a los números 26, 24 y 10. Demuestra que este triángulo es rectángulo.
5. Los lados de un ΔABC miden 9,0; 12 y 15 cm. Calcula las tres alturas.

6.* Sea M un punto cualquiera de la altura $\overline{AH}$ de un ΔABC. Demuestra que $\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{CM}^2 - \overline{BM}^2$.

7. En la figura 2.107 se tiene el paralelogramo $ABCD$. $\angle ADB$ y $\angle DEB$ son rectos. $\overline{DE} = 12\,\text{cm}$ y $\overline{EB} = 9{,}0\,\text{cm}$. Halla el área y el perímetro del cuadrilátero $EBCD$.

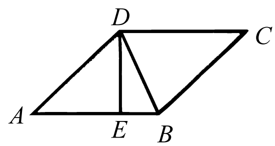


Figura 2.107

8. En un trapecio isósceles las bases miden 10 y 24 cm respectivamente y los lados no paralelos miden 25 cm. Calcula la altura del trapecio.
9. En el trapecio rectángulo $ABCD$ de bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ de la figura 2.108, $P(\Delta BCD)$ = 66 cm, $\overline{CD} = 11\,\text{cm}$, $\overline{BC} = 25\,\text{cm}$ y $\overline{AB} = 18\,\text{cm}$. Halla el$A(ABCD)$ y el $A(\Delta BCD)$.

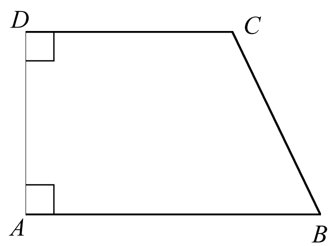


Figura 2.108

10. Prueba que si en un cuadrilátero las diagonales se cortan perpendicularmente, las sumas de los cuadrados de las longitudes de los lados opuestos son iguales.
11. Demuestra que la diferencia entre los cuadrados de las longitudes de las diagonales de un trapecio rectángulo, es igual a la diferencia entre los cuadrados de las longitudes de las bases.

12. El rectángulo *ABFE* de la figura 2.109 es una de las caras laterales de un prisma recto de base cuadrada. Halla el volumen y el área total de dicho prisma si $\overline{QB} = 6{,}4 \text{ cm}$ y $\overline{EQ} = 3{,}6 \text{ cm}$.

13. En la figura 2.110, se tiene que *ABCD* es un rombo $\overline{OP} \perp \overline{AB}$, si $\overline{AP} = 1{,}6 \text{ dm}$ y $\overline{PB} = 0{,}9 \text{ dm}$, halla el área y el perímetro del rombo y el área y el perímetro del cuadrilátero *PBCO*.

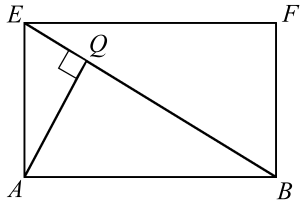


Figura 2.109

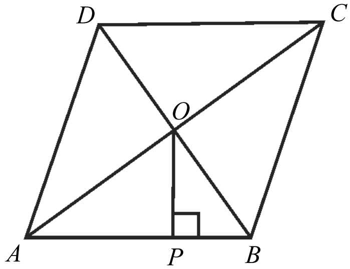


Figura 2.110

14. En la figura 2.111, *ACB*, es una semicircunferencia de centro en O, $R \in \overline{OD}$, $\overline{BR} \perp \overline{OD}$, $\overline{OB} = 4{,}0 \text{ cm}$, $\overline{OR} = 3{,}2 \text{ cm}$, $\overline{BD} = 3{,}0 \text{ cm}$ y $\overline{RD} = 1{,}8 \text{ cm}$.

    a) Determina la relación de posición entre la semicircunferencia y la recta que contiene a $\overline{BD}$.
    b) Halla el área de toda la figura.

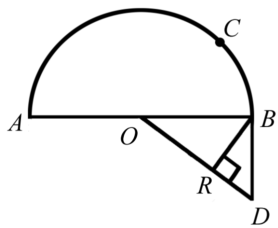


Figura 2.111

15. En la figura 2.112 se tiene que *A*, *D*, *B* y *C* pertenecen a la circunferencia de centro *O*.

    A, *O*, *R* y *B* están alineados, el punto medio de $\overline{CD}$ es *R*.
    Si $\overline{AR} = 4{,}0 \text{ cm}$ y $\overline{RB} = 2{,}25 \text{ cm}$, halla el *P*(*ADBC*) y el área sombreada.

16. En la figura 2.113 se tiene que los puntos *A*, *B* y *C* pertenecen a la $C(O; \overline{OB})$. Si el $\angle C$ tiene una amplitud de 45°, $\overline{OB} = r$ y $\overline{OP} \perp \overline{AB}$, demuestra que $\overline{OP} = \overline{AP} = \overline{PB} = \frac{\sqrt{2}}{2} r$.

    Dato: $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

17.* En la figura 2.114 se tiene que el punto *C* pertenece a la circunferencia de centro *O* y a $\overline{AB}$. Si $\overline{OB} = 32 \text{ cm}$, $\overline{OA} = 24 \text{ cm}$ y $\overline{AB} = 40 \text{ cm}$, halla el área sombreada.

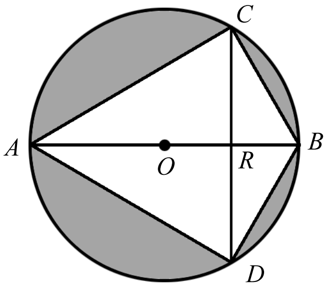


Figura 2.112

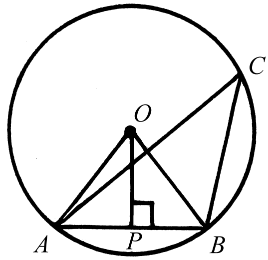


Figura 2.113

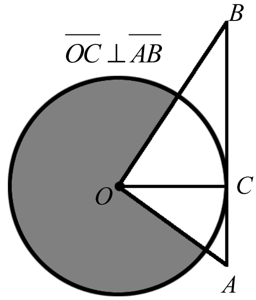


Figura 2.114

18. Una antena de 66 m de altura debe ser sujetada por cuatro cables a una altura equivalente a $\frac{5}{6}$ de esta. Los cables están sujetos al suelo a una distancia de 48 m del pie de la antena (fig. 2.115). Calcula la longitud de cada cable.

    Nota: P_1, P_2, P_3 y P_4 son los pies de los cables con el piso, B es el pie de la antena, C un punto de la antena y T su punto cima.

    Al considerar la antena un segmento perpendicular al piso, te será muy fácil hallar la longitud de cada cable.

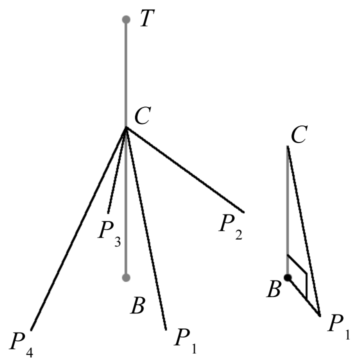


Figura 2.115

19. Se tienen estructuras metálicas formadas por ocho triángulos rectángulos, tal y como se ilustra en la figura 2.116, con las dimensiones que se indican. Piensa cómo puedes utilizar la cantidad de estructuras que desees para elaborar diferentes objetos, por ejemplo, una reja, una separación entre dos locales, etc. ¿Tendrán forma rectangular todos los objetos? ¿Alguno tendrá forma de cuadrado? Crea tu objeto y halla el área que ocupa y su perímetro.

    Nota: no puedes separar las estructuras. Solo se pueden unir por los lados de igual longitud.

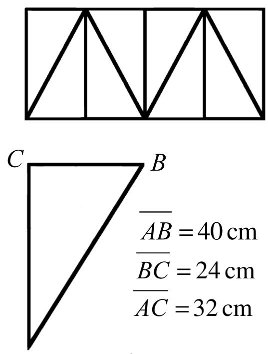


Figura 2.116

20. Se tienen pedazos de linóleo de diseños diferentes, de igual forma triangular, tal y como se muestra en la figura 2.117. Determina las dimensiones del área de forma rectangular más pequeña que podemos cubrir si usamos una cantidad par de pedazos de los dos colores. ¿Se podrá cubrir con estos una superficie de forma cuadrada?

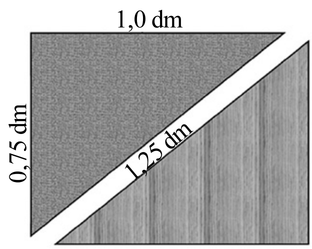


Figura 2.117

21. Elabora un triángulo de papel o cartón con las medidas que se dan en la figura 2.118 y ponlo a girar al considerar como eje el lado $\overline{HI}$.

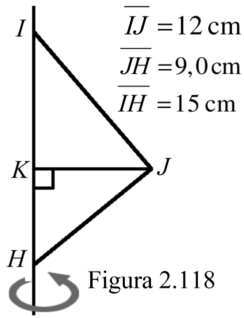


Figura 2.118

a) Determina la longitud de la circunferencia que describe el punto J al efectuarse el giro.
b) Cuando estudies con profundidad un cuerpo geométrico llamado cono circular recto haz un modelo del cuerpo que se obtiene al efectuar el giro.

22. Después de estudiar las proposiciones del grupo de teoremas de Pitágoras, el profesor Ramón analiza con sus estudiantes una manera más de hallar la altura de un poste y la de un tensor que lo sostiene, observa cuidadosamente la figura 2.119 y lee los pasos que siguieron:

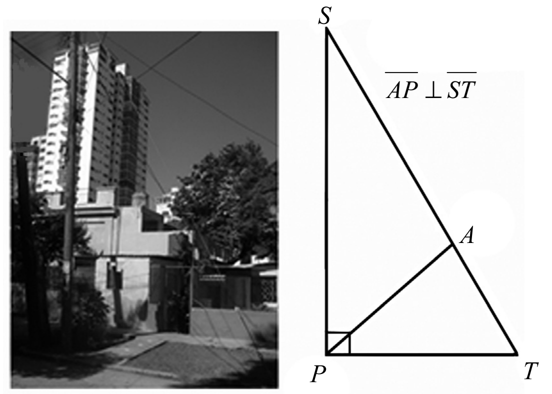


Figura 2.119

- Realizaron la modelación correspondiente.
- Con ayuda de una cinta métrica y con mucho cuidado determinaron la longitud de $\overline{PT}, \overline{PA}$ y $\overline{AT}$.
- Al aplicar el teorema de las alturas en el ΔSPT, se cumple que $\overline{AP}^2 = \overline{SA} \cdot \overline{AT}$, de ahí que $\overline{SA} = \dfrac{\overline{AP}^2}{\overline{AT}}$.
- $\overline{ST} = \overline{SA} + \overline{AT}$, por tanto, ya tenemos la longitud del tensor.
- $\overline{SP}^2 = \overline{SA} \cdot \overline{ST}$, al aplicar teorema de los catetos,
- $\overline{SP} = \sqrt{\overline{SA} \cdot \overline{ST}}$, por tanto, ya tenemos el tamaño del poste.

a) ¿Estás de acuerdo con esa vía? ¿Por qué?
b) ¿Con cuál de las vías que conoces te quedas? Justifica tu respuesta.

23. Osmani, Jefe de la Cátedra de Monitores de Matemática de noveno grado de su Secundaria Básica, afirma en una reunión de trabajo lo siguiente:

“Basta con tener dos de los elementos: a, b, c, p, q y h, para que podamos hallar los cuatro restantes” (fig. 2.120). Completa la tabla 2.2 para que determines si estás de acuerdo o no con él. (Te ejemplificamos una de las posibilidades).

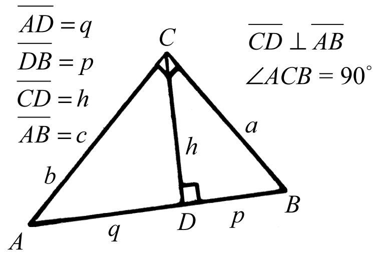


Figura 2.120

Tabla 2.2

Elementos dados	Elementos que puedo hallar	¿Qué aplico?
a y b	c	Teorema de Pitágoras en ΔABC
	p	Teorema de los catetos en ΔABC
	q	Teorema de los catetos en ΔABC
	h	Teorema de las alturas en ΔABC
a y q		
a y p		
a y c		
a y h		
b y q		
b y p		
b y h		
b y c		
c y q		
c y p		
c y h		
p y h		
p y q		
q y h		

24. Ya conoces las proposiciones del grupo de teoremas de Pitágoras. Por eso te proponemos elaborar la ficha “Yo pensé en el GTP” a partir de la observación de un objeto que te haga pensar en el grupo de teoremas de Pitágoras, verás que no es tarea difícil, solo es proponértelo, aquí tienes dos ejemplos que te indicarán los parámetros que tendrás en cuenta:

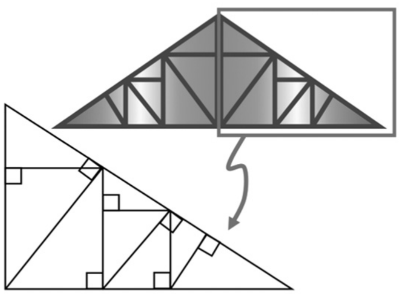


Figura 2.121

Objeto: Vitral que adorna una casa de campo

Función social: Ornamentación

Lugar en que lo vi: Excursión con mis compañeros de grupo

Dibujo del objeto y modelación matemática: Figura 2.121

Objeto: Puente giratorio sobre el río cubano San Juan

Función social: Paso de las embarcaciones sobre ese río matancero.

Lugar en que lo vi: Foto del artículo

Los puentes de Matanzas en el número 316 de la revista *Zunzún*

Foto del objeto y modelación matemática: Figura 2.122[1]

Figura 2.122

Entrega la ficha a tu profesor.

2.5 Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo

Determinar distancias entre dos puntos o hallar las amplitudes de ángulos no siempre resulta fácil, muchas veces es imposible emplear algún instrumento de medición o utilizar algún recurso geométrico, porque nos encontramos que uno de los puntos o ambos son inaccesibles o porque existe entre estos un obstáculo insuperable.

Mediante la semejanza de triángulos has podido resolver algunos de estos problemas, pero... ¿existirá otra manera de determinarlas?

… Si conocieras relaciones matemáticas entre los lados y los ángulos de un triángulo, ¿podrías calcular estas longitudes?

[1] La imagen es el resultado de una búsqueda en *Google* el 11 de agosto de 2014.

¿Cómo hallar la altura de un poste y la longitud del tensor que lo sostiene? Ya conoces varias vías para hacerlo (fig. 2.123).

La geometría nos enseña a construir un triángulo si se conocen tres de sus seis elementos fundamentales, pero no nos permite calcular los elementos restantes sin recurrir a procedimientos geométricos.

Precisamente estudiarás cómo hallar los elementos de un triángulo mediante el cálculo, siendo los resultados más exactos.

La trigonometría es la rama de la matemática que nos permitirá resolver estos problemas, porque de ocupa de las relaciones existentes entre los lados y los ángulos de los triángulos, lo que posibilita operar con dichas magnitudes, de ahí su importancia.

Etimológicamente significa *medida de triángulos* (fig. 2.124).

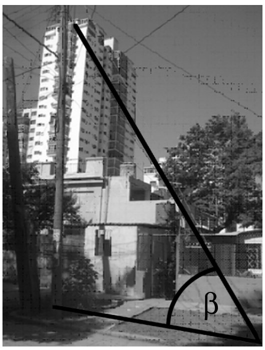


Figura 2.123

Figura 2.124

Te invito a conocer algunas de estas relaciones.

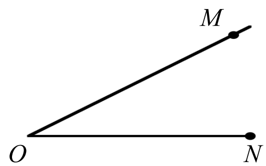


Figura 2.125

1. Traza en tu libreta un ángulo agudo y denótalo por $\angle MON$ (fig. 2.125).
2. Traza rectas perpendiculares al lado $\overline{ON}$ que intersequen al otro lado (fig. 2.126).

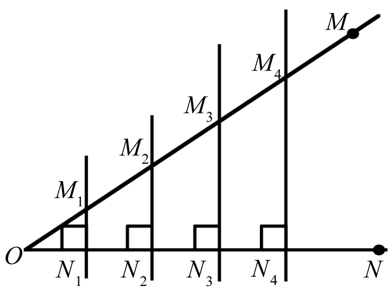


Figura 2.126

Los cuatro triángulos que se forman son semejantes entre sí por tener respectivamente iguales dos ángulos (el $\angle O$ y el ángulo recto).

3. Establece las razones iguales entre el lado que se opone al ángulo común *MON* y la hipotenusa en cada triángulo.

$$\frac{\overline{N_1M_1}}{\overline{OM_1}}=\frac{\overline{N_2M_2}}{\overline{OM_2}}=\frac{\overline{N_3M_3}}{\overline{OM_3}}=\frac{\overline{N_4M_4}}{\overline{OM_4}}=k_1$$

4. Establece las razones iguales entre el otro cateto y la hipotenusa.

$$\frac{\overline{ON_1}}{\overline{OM_1}}=\frac{\overline{ON_2}}{\overline{OM_2}}=\frac{\overline{ON_3}}{\overline{OM_3}}=\frac{\overline{ON_4}}{\overline{OM_4}}=k_2$$

5. Establece las razones iguales entre el cateto que se opone al ángulo común *MON* y el otro cateto.

$$\frac{\overline{N_1M_1}}{\overline{ON_1}}=\frac{\overline{N_2M_2}}{\overline{ON_2}}=\frac{\overline{N_3M_3}}{\overline{ON_3}}=\frac{\overline{N_4M_4}}{\overline{ON_4}}=k_3$$

También pudieras plantear otras tres series de razones iguales formadas por las razones recíprocas de las anteriores.

Te percatarás de que para el mismo ángulo agudo *MON* la razón entre dos lados de uno de los triángulos rectángulos formados y las razones de sus lados homólogos en los otros, son iguales (permanece constante). Por tanto, su valor no depende de los lados de los triángulos.

Sin embargo, si varía la amplitud del $\angle MON$ y hacemos el mismo análisis, comprobaremos que las razones consideradas son desiguales.

Efectivamente, si las amplitudes de los ángulos *M'ON* y *MON* son diferentes, entonces $\Delta OM'N'$ y ΔOMN no son semejantes y las razones consideradas son desiguales (fig. 2.127).

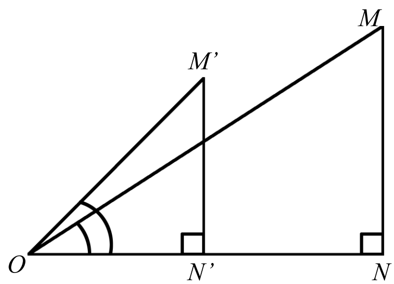


Figura 2.127

Se tiene que los valores de las razones de los lados de un triángulo rectángulo dependen solo de las amplitudes de los ángulos agudos, y para cada ángulo diferente hay un conjunto diferente de valores. A estas razones se les da el nombre de **razones trigonométricas en un triángulo rectángulo.**

En un triángulo rectángulo llamaremos *cateto opuesto* a un ángulo agudo, al cateto que se opone a este, y al otro cateto lo llamaremos *cateto adyacente* a este, ángulo.

Ejemplo 1:

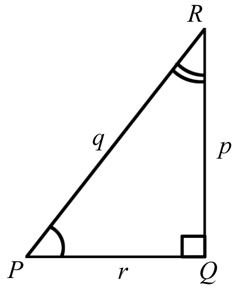


Figura 2.128

En el ΔPQR de la figura 2.128, el ángulo Q es recto.
El lado p es el cateto opuesto al ángulo P.
El lado r es el cateto adyacente al ángulo P.
El lado r es el cateto opuesto al ángulo R.
El lado p es el cateto adyacente al ángulo R.
Estas son las definiciones de las tres *razones trigonométricas* que estudiarás en este curso.

Recuerda *la definición de seno de un ángulo agudo:*

Seno de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es la razón entre la longitud del cateto opuesto a este ángulo y la longitud de la hipotenusa.

Recuerda *la definición de coseno de un ángulo agudo:*

Coseno de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es la razón entre la longitud del cateto adyacente al ángulo y la longitud de la hipotenusa.

Recuerda *la definición de seno de un ángulo agudo:*

Tangente de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es la razón entre la longitud del cateto opuesto y la longitud del cateto adyacente al ángulo.

Para designar el seno, el coseno y la tangente de un ángulo A, utilizaremos la notación siguiente: sen A, cos A y tan A, respectivamente.

Ejemplo 2:

En el ΔPQR de la figura 2.128, tenemos que:

$$\text{sen } P = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{p}{q}$$

$$\cos P = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{r}{q}$$

$$\tan P = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{p}{r}$$

Es importante que conozcas que existe la razón trigonométrica cotangente, la cual es el recíproco de la tangente. Cotangente de un ángulo A se denota cot A.

¿Sucederá que para conocer las razones trigonométricas de un ángulo agudo habrá que construir un triángulo rectángulo que tenga dicho ángulo y efectuar el cálculo correspondiente?

No, es bueno que sepas que en la práctica, para no tener que calcularlos cada vez que se necesitan, existen tablas de fácil manejo donde aparecen los valores del seno, el coseno, la tangente y la cotangente de cualquier ángulo α con $0° \leq \alpha \leq 90°$. Estas tablas aparecen al final de este libro.

Los valores que encontramos en las tablas han sido calculados con suficiente precisión, se dan los valores de las razones con cuatro cifras correctas para los ángulos de 0 a 90° con incremento de 0,1°. Casi siempre la mayor parte de las cantidades con que trabajamos son valores aproximados, sin embargo mantendremos el convenio de escribir el signo igual en todos los casos.

Las tablas de las páginas 476 y 477 contienen los valores del seno y el coseno. El valor de la razón aparece en la intersección de la fila que corresponde al número de grados con la columna que corresponde a las décimas.

Cada valor corresponde al seno de un ángulo y al coseno del ángulo complementario.[2] Para el seno, los grados aparecen en la columna del extremo izquierdo y crecen de arriba hacia abajo; para el coseno, los grados aparecen en la columna del extremo derecho y crecen de abajo hacia arriba. En la tabla solo aparecen las cifras decimales, la parte entera que es 0 para todos los valores se escribe únicamente en la columna que corresponde a 0 décimas.

Ejemplo 3:

Busca en la tabla: a) sen 4° b) sen 9,3° c) cos 47° d) cos 54,4°

Solución:

a) En la columna más a la izquierda en la tabla encontramos la fila que comienza por 4 y en la intersección con la columna encabezada por ,0 encontramos el valor buscado: 0,0698. Luego sen 4° = 0,0698. (Ver la ejemplificación en la tabla 2.3).

Tabla 2.3

Grad.	,0
0	0,0000
1	0,0175
2	0,0349
3	0,0523
4	0,0698

[2] Dos ángulos agudos son complementarios cuando sus amplitudes suman 90°.

b) Buscamos la fila que en su extremo izquierdo comienza con 9 y la columna encabezada por ,3; en la intersección, encontramos 1616. Luego sen 9,3° = 0,1616. (Ver la ejemplificación en la tabla 2.4).

Tabla 2.4

Grad.	,0	,1	,2	,3
0	0,0000	0017	0035	0052
1	0,0175	0192	0209	0227
2	0,0349	0366	0384	0401
3	0,0523	0541	0558	0576
4	0,0698	0715	0732	0750
5	0,0872	0889	0906	0924
6	0,1045	1063	1080	1097
7	0,1219	1236	1253	1271
8	0,1392	1409	1426	1444
9	0,1564	1582	1599	$\boxed{1616}$

c) Buscamos 47 en la columna más a la derecha en la tabla. En la intersección de esta fila con la columna en cuyo pie aparece ,0 encontramos el valor buscado: 6820. Estas son las cifras decimales luego cos 47° = 0,6820. (Ver la ejemplificación en la tabla 2.5).

Tabla 2.5

6691	48
$\boxed{6820}$	47
6947	46
7071	45
,0	Grad.

d) Buscamos la fila que en su extremo derecho comienza con 54 y la columna en cuyo pie aparece ,4; en la intersección, encontramos 5821. Luego cos 54,4° = 0,5821. (Ver la ejemplificación en la tabla 2.6).

Tabla 2.6

$\boxed{5821}$	5835	5850	5864	5878	54
5962	5976	5990	6004	6018	53
6101	6115	6129	6143	6157	52
6239	6252	6266	6280	6293	51
6374	6388	6401	6414	6428	50
6508	6521	6534	6547	6561	49
6639	6652	6665	6678	6691	48
6769	6782	6794	6807	6820	47
6896	6909	6921	6934	6947	46
7022	7034	7046	7059	7071	45
,4	,3	,2	,1	,0	Grad.

Las tablas de las páginas 478 y 479 contienen los valores de la tangente y la cotangente, el valor de la razón aparece en la intersección de la fila que corresponde al número de grados con la columna que corresponde a las décimas.

Cada valor corresponde a la tangente de un ángulo y a la cotangente del ángulo complementario; para la tangente, los grados aparecen en la columna del extremo izquierdo y crecen de arriba hacia abajo; para la cotangente, los grados aparecen en la columna del extremo derecho y crecen de abajo hacia arriba.

La estructura de la tabla de la página donde se encuentran los ángulos menores que 45° es como la de la tabla de senos y cosenos, pues en ese intervalo tan $\alpha \leq 1$.

En la página aparecen los ángulos mayores que 45° cuya tangente es mayor que 1; en esta hasta los 63° se mantiene la estructura, pero el primer valor de cada fila contiene una parte entera diferente de cero que es la que corresponde a los ángulos de esa fila, excepto los valores destacados con un asterisco que corresponden a la parte entera de la fila siguiente.

Ejemplo 4:

Busca en la tabla: a) tan 52° b) tan 50,43° c) cot 10° d) cot 11,1°

Solución:

a) En la columna más a la izquierda en la tabla encontramos la fila que comienza por 52 y en la intersección con la columna encabezada por ,0 encontramos el valor buscado: 1,280. Luego tan 52° = 1,280. (Ver la ejemplificación en la tabla 2.7).
b) Redondeamos la amplitud a las décimas, que es la precisión de la tabla y obtenemos 50,4°.
En la columna más a la izquierda en la tabla encontramos la fila que comienza por 50 y en la intersección con la columna encabezada por ,4 encontramos: 209. Luego tan 50,4° = 1,209. (Ver la ejemplificación en la tabla 2.8).

Tabla 2.7

Grad.	,0
45	1,000
46	1,036
47	1,072
48	1,111
49	1,150
50	1,192
51	1,235
52	1,280

Tabla 2.8

Grad.	,0	,1	,2	,3	,4	,5
45	1,000	003	007	011	014	018
46	1,036	039	043	046	050	054
47	1,072	076	080	084	087	091
48	1,111	115	118	122	126	130
49	1,150	154	159	163	167	171
50	1,192	196	200	205	209	213
51	1,235	239	244	248	253	257

Al hacer el redondeo a la amplitud del ángulo se introdujo un error, esto significa que no todas las cifras de la tabla se pueden asumir como correctas, solo resultan válidas, tres. La precisión del resultado final queda limitada a tres cifras significativas, por eso tan 50,43° = 1,21.

c) Buscamos 10 en la columna más a la derecha en la tabla. En la intersección de esta fila con la columna en cuyo pie aparece ,0 encontramos el valor buscado: 671. Estas son las cifras decimales luego cot 10° = 5,671.
La parte entera es 5. (Ver la ejemplificación en la tabla 2.9).

Tabla 2.9

671	10
6,314	9
7,115	8
8,144	7
9,514	6
11,4	5
14,30	4
19,08	3
28,64	2
57,29	1
- -	0
,0	Grad.

d) Buscamos la fila que en su extremo derecho comienza con 11 y la columna en cuyo pie aparece ,1; en la intersección, encontramos *097. Luego cot 11,1 = 5,097, porque la parte entera que le corresponde es la que aparece en la fila siguiente: 5. (Ver la ejemplificación en la tabla 2.10).

Tabla 2.10

*097	*145	11
614	671	10
6,243	6,314	9
7,026	7,115	8
8,028	8,144	7
9,357	9,514	6
11,2	11,4	5
13,95	14,30	4
18,46	19,08	3
27,27	28,64	2
52,08	57,29	1
573,0	- - -	0
,1	,0	Grad.

También puedes recurrir a las tablas para hallar la amplitud de un ángulo agudo si conoces el valor de una de las razones trigonométricas.

Ejemplo 5:

Busca el valor de α, β y C en cada caso:

a) $\tan \alpha = 1{,}046$ b) $\cos \beta = 0{,}55$ c) sen $C = 0{,}072$

Solución:

a) Buscamos en la tabla la sucesión de cifras 046 y la encontramos en la intersección de la fila 46 (a la izquierda) y la columna ,3 luego el ángulo será $\alpha = 46{,}3°$. (Tabla 2.11)

Tabla 2.11

Grad.	,0	,1	,2	,3
45	1,000	003	007	011
46	1,036	039	043	$\boxed{046}$

b) En este caso el valor dado tiene 2 cifras, luego se debe redondear mentalmente hasta la segunda cifra al buscar en la tabla. Hay varios valores que conducen a la sucesión de cifras buscadas: en las filas 56° (por la derecha); estos valores comienzan en 56,4° y terminan 56,9° (Recuerda que para el coseno los valores crecen hacia arriba). Esto nos hace pensar que no podemos garantizar la cifra de las décimas y debemos expresar la amplitud del ángulo con dos cifras significativas: $\beta = 56$. (Tabla 2.12)

Tabla 2.12

5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	5592	56
5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	5736	55
5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	5878	54
5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	6018	53
6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	6157	52
6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	6293	51
6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	6428	50
6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	6561	49
6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	6691	48
6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	6820	47
6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	6947	46
6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	7071	45
,9	,8	,7	,6	,5	,4	,3	,2	,1	,0	Grad.

c) Buscamos en la tabla la sucesión de cifras 072. Como la tabla tiene 4 cifras debemos redondear mentalmente los valores hasta la tercera cifra; en la intersección de la fila 4 con la columna ,1 encontramos un valor que al redondearlo conduce a esta sucesión: 0715 ≈ 072. (Tabla 2.13)
Luego $C = 4{,}1°$, con 2 cifras significativas.

Tabla 2.13

Grad.	,0	,1
0	0,0000	0017
1	0,0175	0192
2	0,0349	0366
3	0,0523	0541
4	0,0698	$\boxed{0715}$

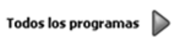
Trabajamos con igualdades que contienen variables, en cada caso la variable es la amplitud del ángulo. ¿Serán ecuaciones? Pregúntale a tu profesor(a).

Para el trabajo con los valores de estas tablas, tendrás en cuenta la Regla fundamental del cálculo aproximado que ya conoces.

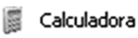
Te percatarás de que: hallar la amplitud de un ángulo agudo si conocemos el valor de una de las razones trigonométricas es un recurso certero. La mayoría de las veces, encontrarlo implica obtener el cociente de las longitudes de segmentos, hasta las cien milésimas, para redondearlo hasta cuatro cifras correctas y hacer uso de las tablas con la mejor precisión.

Las calculadoras científicas nos brindan la posibilidad de hallar las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de ángulos agudos. En la calculadora de una PC puedes hallar las razones trigonométricas de un ángulo agudo.

1. Haz clic izquierdo en Inicio 

2. Haz clic izquierdo en Todos los programas 

3. Haz clic en Accesorios 

4. Haz clic en Calculadora 

(Puede que la encuentres directamente al hacer clic en Inicio). Y percátate de que esté en Científica, Decimal y Sexagesimal (fig. 2.129).

Figura 2.129

5. Fíjate en las teclas que te hemos señalado, ellas te permitirán hallar las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de un ángulo agudo, por ejemplo: para hallar el seno de 45°, haz clic en 45 y luego en sin (fig. 2.130).
¡Compruébalo tú mismo!
El sen 45° ≈ 0,7071067811865475244008443621048 5…

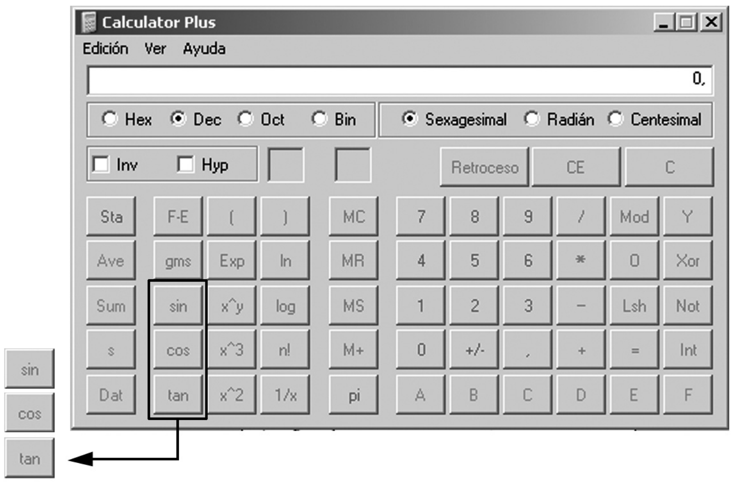


Figura 2.130

En la calculadora científica de un teléfono móvil, también puedes hallar las razones trigonométricas de un ángulo agudo, aunque puede suceder que al intentar hallar el sen 45 (así, sin los grados), obtengas un error, pues en vez de escribir sin 45, tienes que escribir: sin $\frac{\pi}{4}$. ¿Por qué? Te propongo investigarlo.

R¡! Es fácil hallar la longitud del segmento cuyos extremos son la base del poste y la base del tensor (fig. 2.131). No es difícil saber la amplitud del ángulo cuyos lados son el tensor y el segmento ya citado.
Si a la longitud del segmento le llamas d, a la altura del poste le llamas p y a la longitud del tensor, t (fig. 2.131), se cumple que $\tan\beta = \frac{p}{d}$, al despejar p, puedes hallar la altura del poste, $p = d \cdot \tan\beta$.
Para determinar la longitud del tensor, puedes aplicar que $\cos\beta = \frac{d}{t}$, y despejando obtienes $t = \frac{d}{\cos\beta}$.

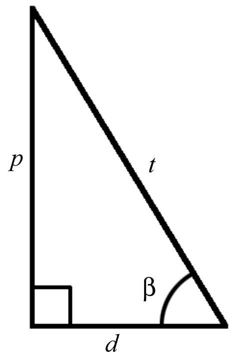


Figura 2.131

Los ejercicios siguientes te permitirán aplicar lo que ya has aprendido de la trigonometría y reactivar muchísimo lo que conoces de geometría. Resolver estas situaciones propias de la matemática y de la vida te permitirá confirmar la valía de la amplitud de un ángulo agudo y la longitud de un lado en un triángulo rectángulo.

Los consejos para asumir este reto ya los conoces, una vez más, ponlos en práctica.

Ejercicios

1. En la figura 2.132, todos los triángulos son diferentes, determina en cada caso el término que designa el seno, el coseno y la tangente de los ángulos agudos.

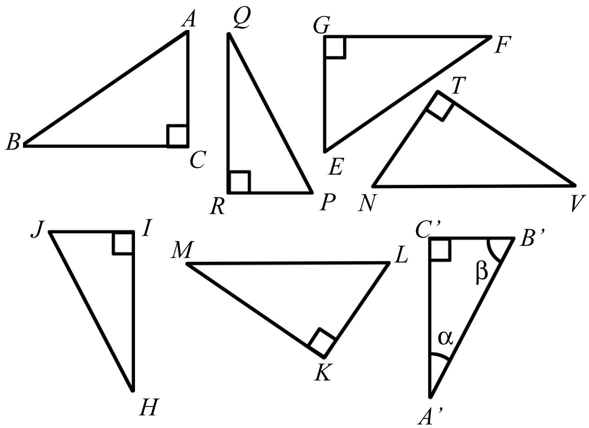


Figura 2.132

2. Indica a cuáles de los triángulos de la figura 2.133 corresponden las características siguientes:

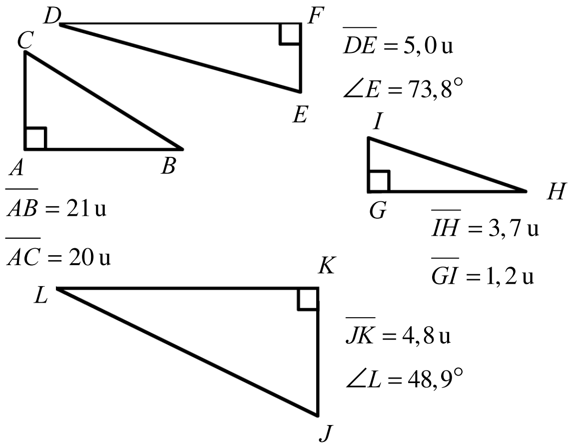


Figura 2.133

a) ___ El seno de uno de sus ángulos es aproximadamente 0,724 1.
b) ___ Los ángulos agudos suman 90°.
c) ___ El coseno de uno de sus ángulos es 0,96.
d) ___ La cotangente de un ángulo es aproximadamente 1,145 8.
e) ___ Uno de los catetos mide aproximadamente 1,4 u.
f) ___ La tangente de uno de sus ángulos es aproximadamente 2,92.
g) ___ Uno de sus ángulos tiene una amplitud de 43,6°.
h) ___ El seno de uno de sus ángulos agudos es 2.

3. Completa en cada caso según corresponda:

a)

α	17°	84°	73°
sen α			

b) (β; cos β)
(20°;)
(12°;)
(87,7°;)

c) (Fig. 2.134)

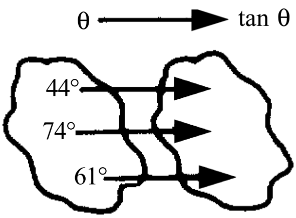


Figura 2.134

d) Sea $t(x) = \cot x$
$t(5,2^\circ) =$ ___
$t(26,5^\circ) =$ ___
$t(53,5^\circ) =$ ___

4. En un ΔDEF, $\overline{DE} = 77\ mm$, $\overline{EF} = 36\ mm$ y $\overline{DF} = 85\ mm$. ¿Será posible hallar las razones trigonométricas de los ángulos agudos? Si tu respuesta es afirmativa, hazlo.

5. En un triángulo rectángulo, los valores del seno y la tangente de uno de sus ángulos agudos son $\frac{24}{40}$ y $\frac{24}{32}$ respectivamente. Di las longitudes de los lados de un triángulo que cumpla las dos condiciones. Justifica tu respuesta.
6. En el ΔGHI rectángulo en I, $\angle IGH = 58°$ y $\overline{GH} = 75$ dm.
   a) Calcula $\overline{HI}$.
   b) Calcula $\overline{IG}$ y $\angle IHG$.
7. Representa en un sistema de coordenadas rectangulares los puntos $A(2; -3)$, $B(5; -2)$ y $C(4; 1)$ vértices de un triángulo.
   a) Clasifícalo según la amplitud de sus ángulos y la longitud de sus lados.
   b) Si tu respuesta es *rectángulo* e *isósceles*, ¿cuál es el seno de sus ángulos agudos?
8. La gráfica de una función lineal es una recta. El valor de la pendiente de una función lineal coincide con la tangente del ángulo que forma la recta con el semieje positivo de las abscisas.
   a) Determina la ecuación de la función lineal cuya gráfica forma un ángulo de 49° con el semieje x positivo y pasa por el punto $P(20; 60)$.
   b) ¿Cuál es el ángulo de inclinación con respecto al semieje positivo de las abscisas de la gráfica de una función lineal que pasa los puntos $Q(-1; -2)$ y $R(1; 8)$.
9. Sea cual sea la vía que utilices para hallarlos, el seno y el coseno de un ángulo agudo siempre es un valor que está entre 0 y 1. Ejemplifícalo para el caso de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo.
10. Demuestra que en un triángulo rectángulo: $\tan\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$ si $0 < \alpha < 90°$.
11.* Comprueba que en un triángulo rectángulo: $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$ si $0 < \alpha < 90°$.
12. Con lo que has estudiado de trigonometría, ¿te será posible hallar las razones trigonométricas de los ángulos agudos de:
    a) un triángulo que tenga el ortocentro en un vértice?,
    b) un triángulo que tenga el circuncentro en el lado mayor?

    Justifica tu respuesta en cada caso.
13. En la figura 2.135, P punto medio de $\overline{AB}$, $\angle APD = 30°$ y $\angle CPD = 60°$.

    Demuestra que: $\overline{BC} = 3 \cdot \overline{DA}$

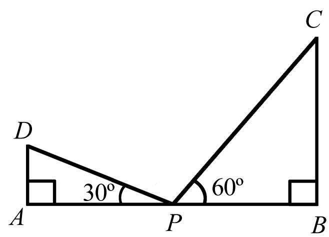


Figura 2.135

14. Dada la figura 2.136, demuestra que el área del ΔABC, se puede calcular al utilizar las fórmulas:

$$\frac{\overline{AC}\cdot\overline{AB}\cdot\operatorname{sen}\alpha}{2} \text{ o } \frac{\overline{BC}\cdot\overline{AB}\cdot\operatorname{sen}\beta}{2} \text{ o } \frac{\overline{BC}\cdot\overline{AC}\cdot\operatorname{sen}\varphi}{2}.$$

Nota: Primero considera que el ΔABC es acutángulo y después que es rectángulo. Investiga qué sucederá si es obtusángulo.

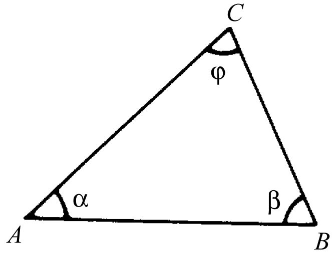


Figura 2.136

a) A partir del trabajo realizado, piensa en otra forma de hallar el área de un paralelogramo.

15. En la figura 2.137 se tiene que *ABCD* es un trapecio de bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. ΔDPA es rectángulo en *P*, *A*, *B* y *P* son puntos alineados.

Si $\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2} = 2{,}8\text{ u}$, $\overline{AP} = 1{,}3\text{ u}$ y $\alpha = 81{,}2°$, halla el área del trapecio *ABCD*.

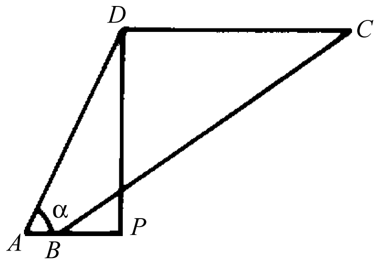


Figura 2.137

16. En la figura 2.138 se tiene que *ABCD* es un trapecio rectángulo de bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. ΔCEB es rectángulo en *E*. Si $\overline{AE} = 14{,}1\text{ u}$, $\overline{BC} = 8{,}9\text{ u}$ *y* $\angle B = 64°$, halla el área y el perímetro del trapecio *ABCD*.

17.* En la figura 2.139 se tiene que *ABCD* es un trapecio isósceles de bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. Si $\overline{AB} = 4{,}0\text{ u}$, $\overline{DA} = 65\text{ u}$ y $\angle DAB = 104{,}1°$, halla el área y el perímetro del trapecio *ABCD*.

18. En la figura 2.140 se tiene que *ABCD* es un rombo, cuyo perímetro es 100 mm. Si $\angle BCD$ = 32,6°, halla el área del rombo.

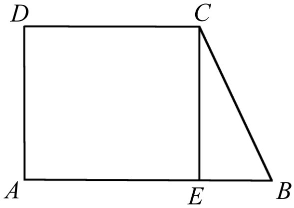


Figura 2.138

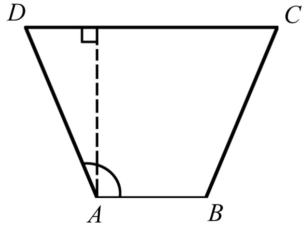


Figura 2.139

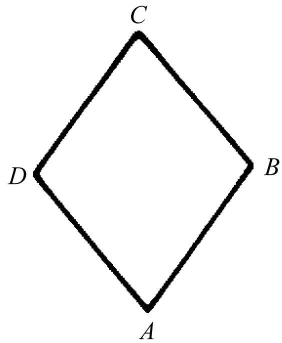


Figura 2.140

19. En la figura 2.141, *ABCDEFGH* es un prisma recto de base rectangular. Si $\overline{HB} = 17$ cm, $\overline{AD} = 6{,}0$ cm y $\alpha = 61{,}9°$, halla el volumen y el área total de dicho prisma.

20.* En la figura 2.142 se tiene una pirámide recta cuya base es un rombo. Si su altura mide 12 cm, $\angle ASO$ = 53,1° y $\angle SBO$ = 67,4°, halla el volumen y la suma de las aristas.

21. En la figura 2.143 se tiene una circunferencia de centro *O* y diámetro $\overline{AB}$, *Q* y *R* pertenecen a ella. Si $\overline{BR} = 33$ mm y $\angle BQR = 30{,}5°$, halla la longitud de la circunferencia.

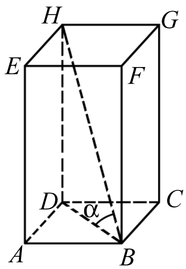


Figura 2.141

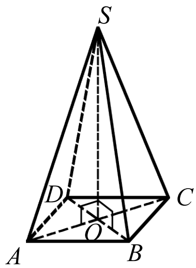


Figura 2.142

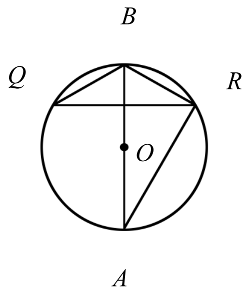


Figura 2.143

22. En la figura 2.144 se tiene que el punto *C* pertenece a la circunferencia de centro *O* y diámetro $\overline{AB}$. Si $\overline{AB} = 84{,}5$ cm, $\overline{AC} = 59{,}5$ cm y $\overline{BC} = 60$ cm, halla el área del círculo y del sector circular limitado por el arco *AC* y los lados del $\angle AOC$.

23. En la figura 2.145 se tiene que $\overline{QR}$ es tangente en *Q* a la semicircunferencia de centro *O* y diámetro $\overline{PQ}$. Si el radio tiene una longitud de 25 mm y α = 50°, halla el área sombreada.

24. En la figura 2.146 se tiene que $\overline{CD}$ es tangente a la circunferencia de centro *O* y diámetro $\overline{RQ}$. Si $\angle QCD$ = 49° y $\overline{CQ} = 23$ u, halla el perímetro del ΔCQR y la longitud de la circunferencia.

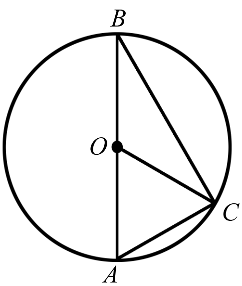


Figura 2.144

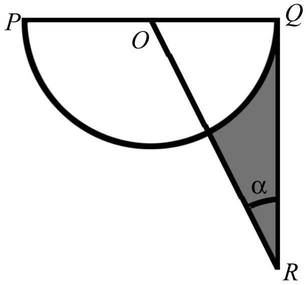


Figura 2.145

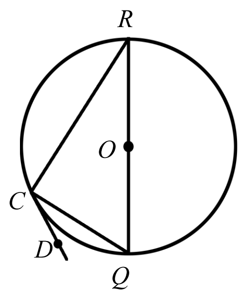


Figura 2.146

25.* En la figura 2.147 se tiene una circunferencia de centro O y radio $\overline{OC}$, ΔBOA rectángulo en $\angle AOB$. Si $\angle A = 36{,}9°$ y $\overline{OC} = 8{,}0\ \text{cm}$, determina cuántos centímetros cuadrados tiene la superficie del ΔABC que no pertenece al círculo de centro O.

26. En la figura 2.148 se tiene que los puntos C y Q pertenecen a la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB}$ y longitud 10π. $\overline{AK}$ es tangente en A. Si $\overline{AC} = 8{,}0\ \text{dm}$ y $\overline{AK} = 12\ \text{dm}$, halla la amplitud de los ángulos interiores de los dos triángulos y el área del sector circular limitado por el arco QB y los lados del $\angle QOB$.

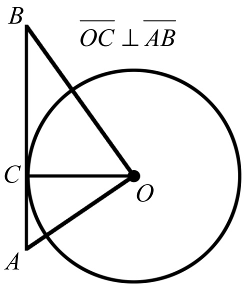


Figura 2.147

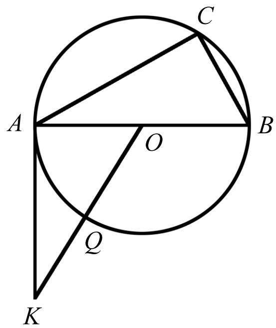


Figura 2.148

27. A partir de tu experiencia describe un algoritmo de cuatro pasos que se deben seguir para resolver una situación de la vida práctica, que se modela con un triángulo rectángulo, en el que se tienen un lado y un ángulo agudo de este.

28. En la imagen de la cubierta del libro de la figura 2.149, el futbolista se encuentra en el vértice del ángulo α a una distancia de 23 y 24 m de los extremos de la portería. ¿Qué valores puede tener el ángulo de tiro α para que la pelota entre en la portería?

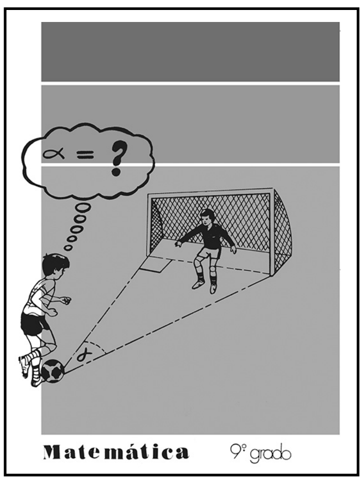


Figura 2.149

29.* Por el paso de un huracán, un árbol se cayó de forma tal que su extremo choca con el piso y dista 8,85 m de su base formando un ángulo de 41,4° con el suelo. ¿Qué harías para confirmar que la altura del árbol es aproximadamente 20 m?

30. Para medir la distancia desde el punto A hasta el punto inaccesible C se puede realizar una construcción como la que se ilustra en la figura 2.150. Calcula $\overline{AC}$ si $\beta = 60°$ y $\overline{AB} = 45$ m.

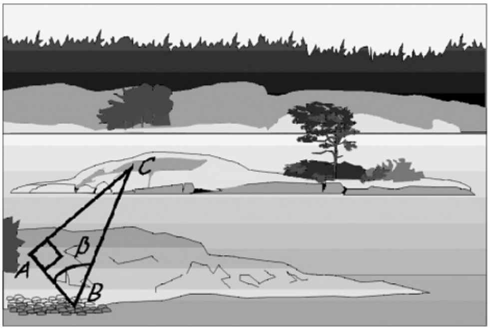


Figura 2.150

31. Busca una expresión que permita hallar la distancia entre las puntas de un compás, si se conoce la longitud de sus brazos y el ángulo que estos forman.

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO

1. Se tienen tres segmentos a, b y c tales que $a : b = 4 : 3$ y $b : c = 1 : 3$, si $a = 8{,}0$ cm, entonces c es igual a:

   a) ___ 6,0 cm b) ___ 2,0 cm c) ___18 cm

2. Los segmentos con longitudes 0,3 cm y 1,5 cm son proporcionales a los segmentos que miden:

   a) ___ 0,1 dm y 5 cm b) ___ 2 cm y 2,0 dm c) ___15 cm y 30 cm

3. Utilizando uno de los asistentes geométricos *(Geómetra o El Geogebra)* traza un triángulo isósceles de perímetro 16 cm, tal que su base a y la altura h, estén en la razón: $\frac{h}{a} = \frac{2}{3}$.

   a) Entonces la longitud de los lados iguales es:

   ___ 4 cm ___ 5 cm ___ 6 cm

   b) El área del triángulo es igual a:

   ___3 cm^2 ___16 cm^2 ___ 12 cm^2

4. En la figura 2.151, las semirrectas $\overline{AC}$ y $\overline{AE}$, son cortadas por las rectas $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$ y se cumple que:

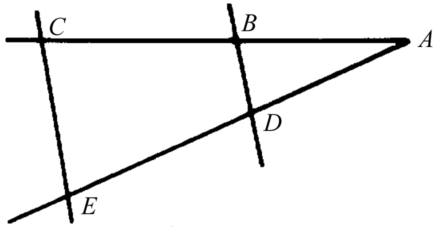


Figura 2.151

- La longitud $\overline{AB}$ es igual a la tercera parte de la longitud de $\overline{AC}$.
- La longitud de $\overline{DE}$ excede en 5 u a la longitud de $\overline{AD}$ y $\overline{AE} = 15$ u.

Prueba que $\overline{CE} \mid\mid \overline{BD}$.

5. En la figura 2.152, $EGCD$ es un cuadrado, $\overline{EF} // \overline{AB}$, E pertenece a $\overline{AD}$. G es el punto de intersección de $\overline{BC}$ y $\overline{EF}$, $\overline{BG} = \frac{1}{3}\overline{GC}$ y el ΔBFG es isósceles de base $\overline{BF}$.

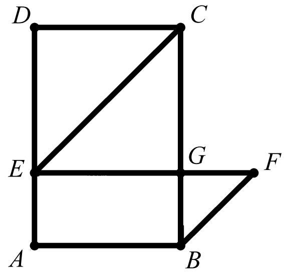


Figura 2.152

a) Clasifica el cuadrilátero $ABFE$.
b) Halla la amplitud del $\angle ABF$.
c) Demuestra que $\Delta BFG \sim \Delta EGC$.

6. En la figura 2.153, I pertenece a la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{GH}$, $L \in \overline{GI}$, $LOHI$ es un trapecio de bases $\overline{HI}$ y $\overline{OL}$, $\angle G = 35°$.

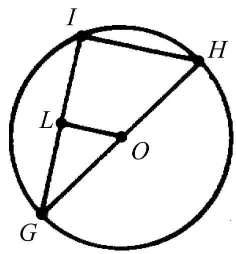


Figura 2.153

a) Halla la amplitud del $\angle LOH$.
b) Demuestra que $\Delta OLG \sim \Delta GHI$.
c) Si el área del triángulo OLG es igual a 6,0 cm^2, calcula el área del triángulo GHI.

7. Responde verdadero o falso y justifica en cada caso las respuestas falsas.

a) Todos los cuadrados son semejantes entre sí.
b) Todos los rectángulos son semejantes entre sí.
c) Si dos triángulos son semejantes, el coeficiente de proporcionalidad es $\frac{1}{2}$ y el área de uno de ellos es igual a 18 u^2, entonces el área del otro es igual a 6 u^2.
d) Si la figura A es semejante a la figura B y el coeficiente de proporcionalidad que permite obtener la figura B en la figura A es $\frac{5}{3}$, entonces el área de la figura A es mayor que la de la figura B.

e) Si dos paralelogramos son semejantes entre sí y los lados de uno miden 4,0 cm y 6,0 cm, y los lados del otro son iguales a 8,0 cm y 12 cm, entonces el coeficiente de proporcionalidad es igual a 2.

8. El polígono D es mayor que el polígono C y se conoce que sus áreas son iguales a 20 cm^2 y 12,8 cm^2 respectivamente; además, se sabe que el perímetro del polígono D es igual a 15 cm. Calcula el perímetro del polígono C.

9. En la figura 2.154, $ADEF$ es un cuadrado, G es punto de intersección de $\overline{BC}$ y $\overline{DE}$, D pertenece a $\overline{AB}$ y C pertenece a $\overline{EF}$.

a) Si $\angle B = 50°$, halla la amplitud del $\angle CGD$.
b) Demuestra que $\Delta BGD \sim \Delta GEC$.
c) Si $\overline{BD} = 3{,}0$ cm, calcula la longitud de $\overline{BG}$.

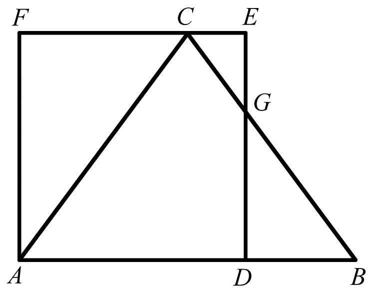


Figura 2.154

10. En la figura 2.155, F pertenece a la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AD} = 20$ mm, $ABCD$ es un cuadrado, $\overline{DF} \parallel \overline{OB}$.

a) Demuestra que $\Delta OAB \sim \Delta AFD$.
b) Prueba que $\overline{OB} \cdot \overline{AF} = 4r^2$ (r, radio de la circunferencia).
c) Si el ángulo $\angle ABO = 27°$, halla la longitud de $\overline{OB}$.

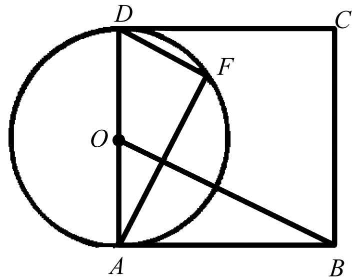


Figura 2.155

11. En la figura 2.156, ΔABC isósceles de base $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ es la altura del ΔABC y $\overline{DE} \perp \overline{AB}$, además, $\overline{AD} = 4{,}0$ cm, $\overline{BC} = 6{,}0$ cm y $\overline{BE} = 1{,}8$ cm.

a) Prueba que $\Delta EBD \sim \Delta ABD$.
b) Halla la razón entre los lados proporcionales de los triángulos EBD y ABD.
c) Calcula el perímetro y el área del triángulo ABC.

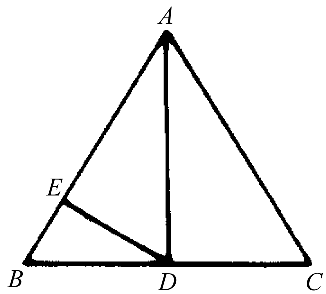


Figura 2.156

12. En la figura 2.157:

i. El ΔABC es rectángulo en A.
ii. El ΔABD es equilátero.
iii. Los puntos AEB y BDC están alineados respectivamente.
iv. $\overline{DE}$ altura del ΔABD.

a) Clasifica el ΔADC atendiendo a la longitud de sus lados.

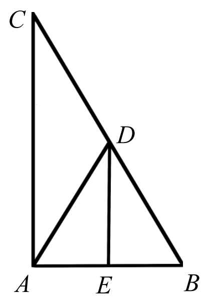


Figura 2.157

b) Demuestra que $\Delta BDE \sim \Delta ABC$.

c) Si $\overline{DE} = 2\sqrt{3}$ cm y $\overline{AB} = 4{,}0$ cm, calcula el área del ΔABC.

13. En la figura 2.158:

i. $ABCD$ es rectángulo.

ii. $EFCD$ trapecio rectángulo de bases $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$.

iii. $\overline{DE} \perp \overline{AC}$.

iv. $\overline{AB} = 4{,}0$ cm, $\overline{AC} = 8{,}0$ cm y $\operatorname{sen}\angle CDE = 0{,}5$.

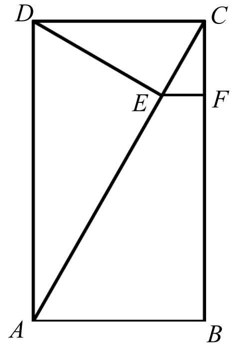


Figura 2.158

a) Halla la razón $\dfrac{\overline{CE}}{\overline{CD}}$.

b) Halla la longitud de $\overline{EF}$.

c) Prueba $\Delta CDE \sim \Delta ABC$.

14. En la figura 2.159:

- Circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB}$.
- $\overline{CD}$ tangente en C a la circunferencia.
- $\overline{BD} \,||\, \overline{AC}$

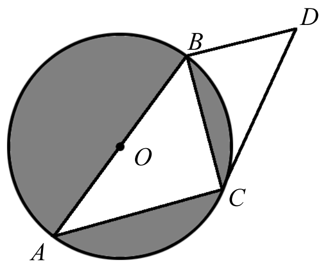


Figura 2.159

a) Prueba que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$.

b) Si $\overline{AC} = 8{,}0$ cm y $\overline{AC} = 6{,}0$ cm; halla el área sombreada.

15. En la figura 2.160, el triángulo ABC es rectángulo en B, $\overline{AC} = 5{,}0$ cm, $\overline{AB} = 4{,}0$ cm, tal que:

- M = sen α, N = cos α y P = tan α
- Q = sen γ, R = cos γ y S = tan γ

Calcula el valor numérico de:

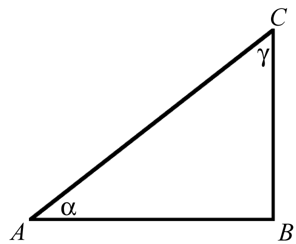


Figura 2.160

a) $T = \dfrac{M + 3 \cdot N}{P}$

b) $U = \sqrt{15(Q - R) \cdot S}$

16. En la circunferencia de centro en O y diámetro $\overline{AB} = 10$ cm, de la figura 2.161, se tiene que:

- C y D son puntos de la circunferencia.

- M punto de intersección de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$.
- $\angle BAD = 30°$.
- ΔAMC es isósceles de base $\overline{AM}$.

a) Prueba que los triángulos ΔAMC y ΔBMD son semejantes.
b) Calcula el área sombreada.
c) Verifica que M divide a $\overline{AD}$ en la razón: 0,73.

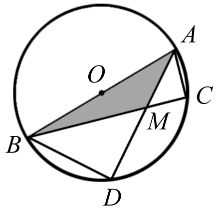


Figura 2.161

17. En la figura 2.162, $ABCD$ trapecio rectángulo de bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, F pertenece a la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{BF}$, los puntos E, F y G están alineados, $E \in \overline{AB}$, C es el punto de intersección de $\overline{AG}$ y la prolongación de $\overline{BF}$, ΔCFG es isósceles de base $\overline{FG}$ y $\overline{AD} \| \overline{EG}$.

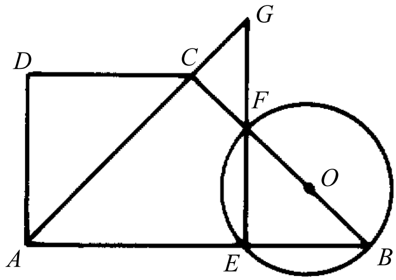


Figura 2.162

a) Demuestra que $\Delta BFE \sim \Delta ACD$.

b) Si el sen $\angle GAE = \dfrac{3}{4}$ y $\overline{EG} = 9{,}0$ cm, calcula cos $\angle GAE$ y tan $\angle GAE$ ($\sqrt{63} \approx 7{,}9$).

18. En la figura 2.163:

- $ABCD$ es un paralelogramo.
- $ABCE$ es un trapecio rectángulo en E y A.
- $E \in \overline{CD}$.

a) Demuestra que los triángulos AED y ABC son semejantes.
b) Si $\overline{AE} = 12$ cm y $\overline{DE} = 9{,}0$ cm, calcula el área del paralelogramo $ABCD$.

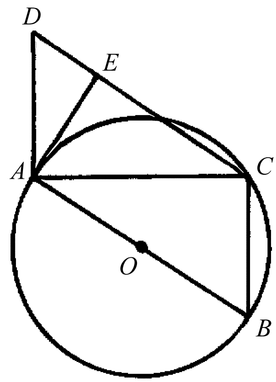


Figura 2.163

19. En la figura 2.164:

- $ABCD$ y $AEFC$ trapecios rectángulos de bases $\overline{AB}, \overline{CD}$ y $\overline{AC}, \overline{EF}$ respectivamente.
- $E \in \overline{AB}$ y $F \in \overline{BC}$.
- $\overline{EC} \perp \overline{AB}$.
- $\overline{AB} = 5{,}0$ cm y $\overline{EB} = 1{,}0$ cm.

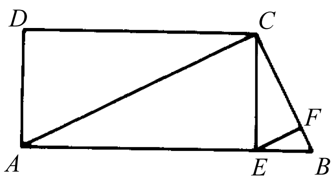


Figura 2.164

a) Demuestra que $\Delta ACD \sim \Delta EBF$.
b) Calcula el área del trapecio $ABCD$.

20. En la figura 2.165:

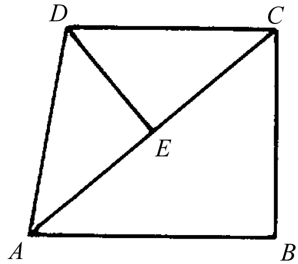


Figura 2.165

- $ABCD$ es un trapecio rectángulo de bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.
- $\overline{AC}$ bisectriz del $\angle BAD$.
- $\overline{DE} \perp \overline{AC}$.

a) Prueba que $\Delta ABC \sim \Delta AED$.
b) Si $\tan 40° \approx 0{,}84$ y $\overline{AB} = 8{,}0$ cm, calcula el área del ΔABC.

21. En la figura 2.166:

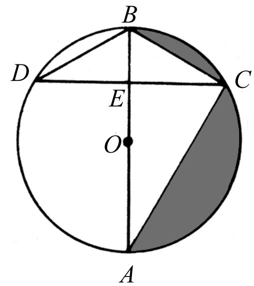


Figura 2.166

- C y D pertenecen a la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB}$.
- E punto medio de $\overline{CD}$.

a) Prueba que $\Delta ABC \sim \Delta BDE$
b) Si $\overline{AE} = 1{,}6$ cm y $\overline{BE} = 0{,}9$ cm, calcula el área sombreada.

22. En la figura 2.167:

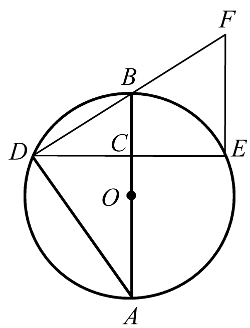


Figura 2.167

- D y E pertenecen a la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB}$.
- $BCEF$ trapecio rectángulo de bases $\overline{EF}$ y $\overline{BC}$.
- B punto medio del arco DE.

a) Prueba que $\overline{BD}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$
b) Si $\overline{AC} = 9{,}0$ cm, $\overline{CD} = 6{,}0$ cm, calcula el área del trapecio $BCEF$.

23. En la figura 2.168:

Las circunferencias de centros O y O' tienen 5,0 mm y 3,6 mm de radio respectivamente y el centro de la menor pertenece a la de mayor radio.

La recta $A'A$ es tangente a las dos circunferencias en esos puntos.

Halla la longitud de $\overline{AA'}$ y el área y el perímetro de $OO'A'A$.

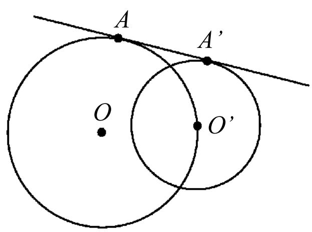


Figura 2.168

24. En la figura 2.169:

$ABCD$ es un paralelogramo.

$\overline{BD}$ es diagonal y altura.

$\overline{DQ}$ es la distancia de D a $\overline{BC}$.

Si $\overline{DQ} = 6{,}0\text{ u}$ y $\overline{QC} = 8{,}0\text{ u}$, halla el área y el perímetro del paralelogramo.

25. Dada la figura 2.170, demuestra que $\frac{a^2}{b^2} = \frac{p}{q}$.

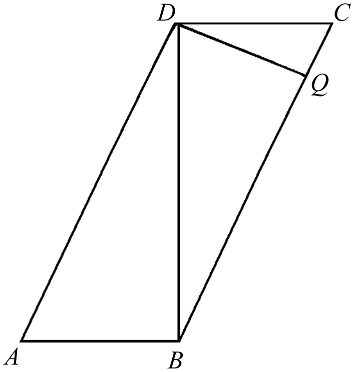


Figura 2.169

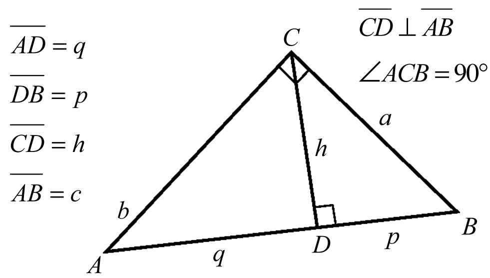


Figura 2.170

26. Clasifica las proposiciones siguientes en verdaderas (V) o falsas (F). De las que consideres falsas argumenta por qué lo son.

a) ___ El seno de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es la razón entre la longitud del cateto opuesto al ángulo y la longitud de la hipotenusa.
b) ___ El coseno de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo difiere de la razón entre la longitud del cateto adyacente al ángulo y la longitud de la hipotenusa.
c) ___ La tangente de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo difiere de la razón entre el seno y el coseno del ángulo.
d) ___ La cotangente de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es la razón entre la longitud del cateto adyacente al ángulo y el cateto opuesto a dicho ángulo.
e) ___ En un triángulo isósceles la tangente de los ángulos adyacentes a la base coincide con la razón entre la longitud de la mediana relativa a la base y la mitad de la longitud de dicha base.
f) ___ No existe ángulo agudo en el que el valor del seno y el coseno sean iguales.
g) ___ La tangente de un ángulo agudo no puede ser un número mayor que 1.
h) ___Si sen β = sen θ, β y θ son ángulos agudos, entonces $\beta = \theta$.

27. Observa cuidadosamente la imagen de la figura 2.171 en la que a cada elemento del conjunto A se le asocia el elemento del conjunto B.

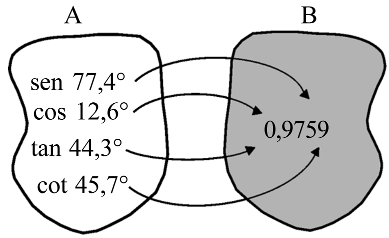


Figura 2.171

a) Verifica con el uso de las tablas trigonométricas que la información es real.
b) ¿En qué contenidos matemáticos te ha hecho pensar?
c) ¿Será esta correspondencia una función numérica? Argumenta.
d) ¿Por qué sen 77,4° = cos 12,6° y tan 44,3° = cot 45,7°?
e) ¿Existirá una función como la que se muestra en la tabla 2.14? ¿Por qué?

Tabla 2.14

Razones trigonométricas del ángulo agudo ω	sen ω	cos ω	tan ω	cot ω
Número real	k	k	k	k

28. Ahora, aviva tu curiosidad, capacidad de asombro, imaginación y mente abierta para que, dada la información, crees y resuelvas en cada caso tu ejercicio cuya solución te conduzca a trabajar con la razón trigonométrica que se indica.

El 14 de diciembre de 2013 el robot chino Yutu o Conejo de Jade (fig. 2.172) alunizó en nuestro satélite natural (…) Puede subir pendientes de hasta 30° y moverse a una velocidad de hasta 200 metros por hora.[3]

Seno

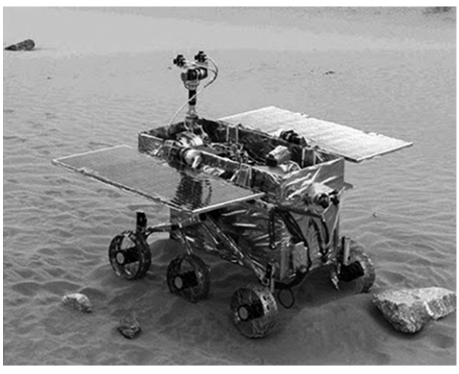


Figura 2.172

[3] *Juventud Rebelde,* La Habana, 27 de diciembre de 2014. Foto: Búsqueda en *Google* el 11 de agosto de 2014.

El tornillo de Arquímedes ha sido muy utilizado para elevar agua. (…) para su funcionamiento debes introducir la parte inferior del "tornillo" en el recipiente e inclinarlo aproximadamente 45°.[4]
¡El ángulo recto que necesitas está garantizado! Mira la maqueta de la figura 2.173.

Coseno

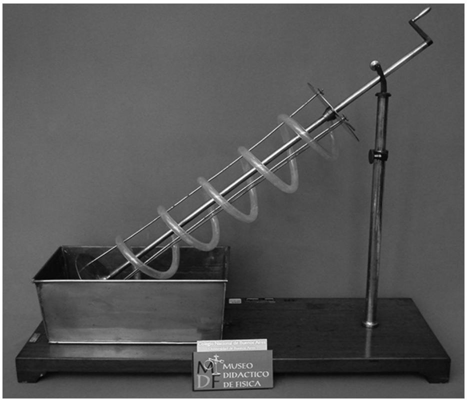


Figura 2.173

Esta es una escalera de tijeras o doble (fig. 2.174), una escalera transportable que se forma con dos escaleras de mano (conformada por dos largueros unidos por travesaños paralelos que son los peldaños) unidas en uno de los extremos.

Tangente

Figura 2.174

¡Aquí el ángulo lo determinas tú!

[4] Francisco H. Pérez Sanfiel, Michel Hernández Mazón y Ernesto Benítez Hechabarría: "Propiedades físicas de las sustancias y de los cuerpos. F 24 El tornillo de Arquímedes", en *Ciencia por doquier,* Ed. Gente Nueva, La Habana, 2008, pp. 87-89. Foto: Búsqueda en *Google* el 11 de agosto de 2014.

29. En la figura 2.175, $ABCD$ es un paralelogramo,

$\overline{MN}$: paralela media del ΔBCD.

$\overline{DP}$: mediana del ΔABD.

$\overline{BQ}$: mediana del ΔMBN.

Demuestra que:

a) $\Delta APD \sim \Delta BNQ$. b) $\overline{DP} \| \overline{BQ}$.

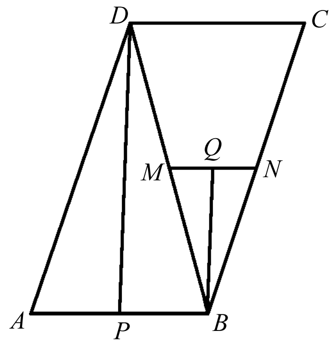


Figura 2.175

30. En el ΔAFH de la figura 2.176:

B: punto medio del $\overline{AC}$, C: punto medio del $\overline{BE}$, E: punto medio del $\overline{CF}$,

$\overline{CG}$: paralela media del ΔAFH y B, C, D y E puntos de $\overline{AF}$.

Demuestra que:

a) $\Delta ACH \sim \Delta CEG$.

b) $\Delta HCF \sim \Delta GEF$.

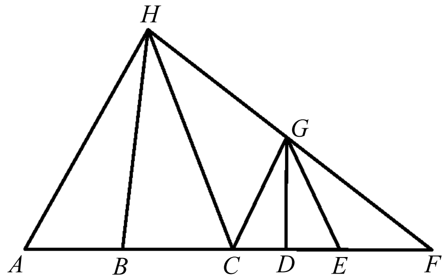


Figura 2.176

31. Los lados del ΔABC miden el triplo de los del ΔPQR semejante a él. Si la superficie del triángulo PQR es de 36 cm^2, ¿cuál es la razón de semejanza de los triángulos y el área del ΔABC?

32. En la circunferencia $C(O;\overline{OE})$ de la figura 2.177, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ tangentes a la circunferencia en A y B respectivamente, $\overline{OD} \| \overline{BC}$ y $\angle ACB = 60°$, $\overline{AB}$ diámetro.

a) Prueba que: $\Delta DBO \sim \Delta ABC$.

b) Calcula $\overline{AC}$ si $\overline{OE} = 7{,}2\,\text{cm}$.

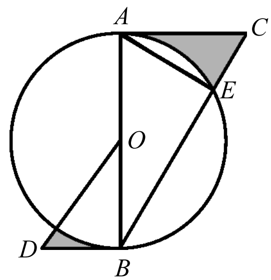


Figura 2.177

PARA LA AUTOEVALUACIÓN

Reflexiona sobre lo aprendido

1. ¿Sabes determinar la razón entre dos segmentos?
2. ¿Qué condición debe existir para que los segmentos sean proporcionales?
3. ¿Cómo construir un segmento que está en una razón dada?
4. ¿Sabes aplicar el teorema de las transversales?

5. ¿Cuándo dos figuras geométricas son semejantes?
6. ¿Cómo demostrar que dos triángulos son semejantes?
7. ¿Sabes calcular la altura relativa a un lado de un triángulo rectángulo?
8. ¿Se puede determinar la longitud de un cateto o la hipotenusa en un triángulo rectángulo? ¿Cómo lo harías?
9. ¿Conoces las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo?
10. ¿Cómo determinar la amplitud de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo conociendo la longitud de sus lados?
11. ¿Qué relación existe entre el área y el perímetro de los triángulos semejantes?
12. Establece un debate con tus compañeros(as) de grupo, toma como punto de partida la idea siguiente:
    El grupo de teoremas de Pitágoras son seis proposiciones matemáticas verdaderas que permiten establecer relaciones entre los seis elementos que aparecen al trazar la altura relativa al lado mayor en un triángulo rectángulo.
13. Enuncia las proposiciones matemáticas verdaderas del grupo de teoremas de Pitágoras en la forma si-entonces.
14. ¿En qué consiste la utilidad de esas proposiciones? Si lo crees necesario enriquece tu explicación con algunos ejemplos.
15. ¿Qué son las razones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo? ¿Cómo se definen las que estudiaste en noveno grado? ¿En qué se fundamenta su indiscutible valor? Escribe una igualdad en la que relaciones tres de ellas.

Ponte a prueba

1. Di cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. En caso de ser falsas justifica por qué lo son.

   a) ___ La razón entre dos segmentos es el cociente entre los números que expresan sus longitudes.
   b) ___ El seno de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es la razón entre los lados que determinan el ángulo.
   c) ___ El cuadrado de la razón de proporcionalidad en triángulos semejantes es igual al cociente de sus áreas.
   d) ___ Si un ángulo de un triángulo isósceles es igual a un ángulo de otro triángulo isósceles, entonces los triángulos son semejantes.
   e) ___ Todos los triángulos rectángulos son semejantes.
   f) ___ Dos polígonos iguales son también semejantes.
   g) ___ La longitud de la altura relativa a un lado de un triángulo rectángulo es igual al producto de la hipotenusa por este lado.

2. Las circunferencias $C_1(O, AO)$ y $C_2(O', O'B)$ de la figura 2.178 son tangentes en el punto T.

   a) Demuestra que $\Delta ADT \sim \Delta TBC$.

   b) Calcula $\overline{CT}$ y $\overline{TD}$ si se sabe que: $\overline{AO} = 6{,}0\text{ cm}, \overline{TO'} = 10\text{ cm}$ y $\overline{CD} = 3{,}2\text{ dm}$.

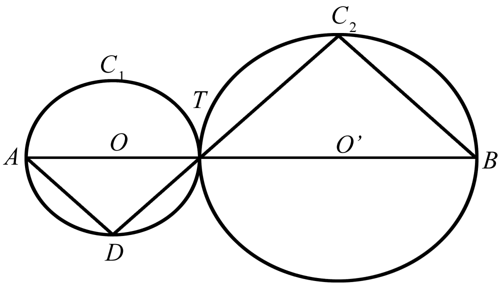


Figura 2.178

3. En la figura 2.179 se tienen dos rectángulos *ABCD* y *AEFG* con $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$, $\overline{DC} \parallel \overline{GF}$ y los tres tríos de puntos *A*, *B*, *E*; *A*, *C*, *F* y *A*, *D*, *G* están alineados.
   a) ¿Son semejantes los rectángulos *ABCD* y *AEFG*? Justifica tu respuesta.
   b) Calcula el perímetro y el área de ambos rectángulos si se sabe que $\overline{AB} = 5{,}0$ cm y $\overline{AD} = \overline{BE} = 3{,}0$ cm.

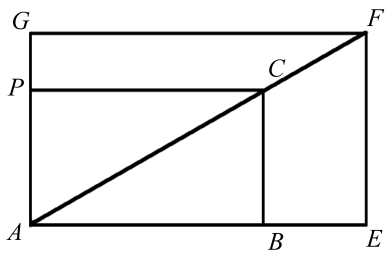


Figura 2.179

4. Construye el segmento de longitud: a) $\sqrt{m^2 + n^2}$ b) $\sqrt{m \cdot n}$ si.

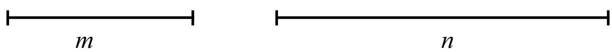


Figura 2.180

Sugerencia: Recuerda una vez más lo estudiado sobre construcción de triángulos y lo que plantean el teorema de Pitágoras, teorema de las alturas y teorema de Tales.

5. Una mina está fija por un cable de 90 pies. Cuando el cable está vertical la mina queda a 5,0 pies de la superficie del mar. Si una corriente la desvía, formando ahora el cable un ángulo de 48° con respecto a su posición vertical, ¿a qué distancia de la superficie se encuentra ahora la mina?

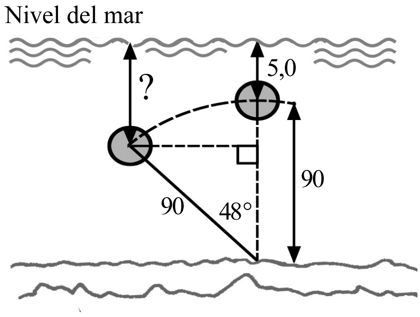


Figura 2.181

6. Analiza si con las imágenes de la figura 2.182, puedes elaborar una que ilustre lo que plantea el teorema de los catetos, si tu respuesta es afirmativa, constrúyela y justifica tu proceder.

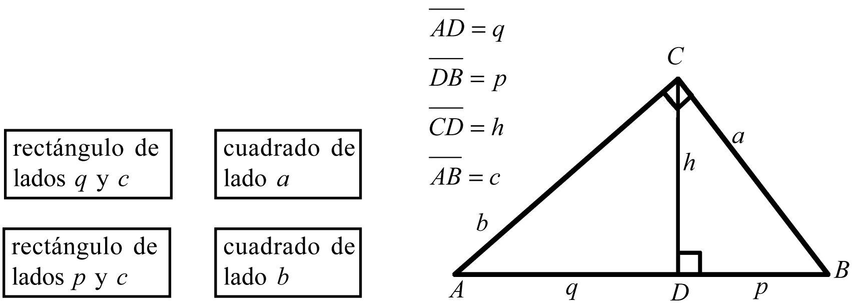


Figura 2.182

RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS

Epígrafe 2.2

Subepígrafe 2.1.1

1. a) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}$ b) $\frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}$

2. a) 5 b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{39}{7}$ d) $\frac{1}{2}$

3. a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{5}{2}$ c) $10^{-3} = 0{,}001\ 0$ d) $\frac{4}{3}$

4. a) II b) III c) I

5. a) II) b) III) c) III) d) I)

6. a) 221 b) $\frac{28}{3}$ c) 21

7. Datos:

 Total de litros de alcohol: 4 L
 Total de agua añadida: 0,4 L

$$\frac{\text{agua}}{\text{alcohol}} = \frac{0{,}4}{4} = \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

Respuesta: La relación del agua con respecto al alcohol es 1 es a 10.

8. Datos:

Edad de Carlos: c
Edad del padre: 42

$$\frac{c}{42} = \frac{2}{7}$$
$$7c = 84$$
$$c = 12$$

Respuesta: La edad de Carlos es 12 años.

9. a) $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{36}{12} = 3$ b) $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{25}{75} = \frac{1}{3}$ c) $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$ d) $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\frac{7}{5}}{\frac{98}{10}} = \frac{7}{5} \cdot \frac{10}{98} = \frac{1}{7}$

9.1 a) F, $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} > 1$ b) F, $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{3}{5}$ c) V d) F, $\frac{a}{L} = \frac{3}{4}$

10. 1-C; 2-A; 3-E; 4-C; 5-D

11. $\overline{GH} = 12\ \text{cm}$

12. a) $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ b) Ver la figura 2.183.

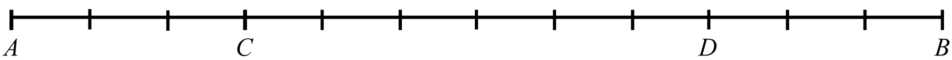


Figura 2.183

13. a) $\overline{EF} = 0{,}9\ \text{cm}$ b) $\overline{MN} = 15\ \text{cm}$ c) $\overline{PQ} = 600\ \text{cm}$ d) $\overline{RT} = 64\ \text{cm}$

14. La respuesta de este ejercicio es gráfica, como el factor de proporcionalidad está fijado, entonces:

a) $\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{CD}$ y $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{EF}$

b) $\overline{AB} = 3 \cdot \overline{CD}$ y $\overline{MN} = 3 \cdot \overline{EF}$

15. $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}} = \frac{1}{4}$ y $\frac{\overline{CD}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{GH}} = \frac{3}{4}$

16. Datos: Distancia a recorrer por el primer auto: 60 km.
Distancia a recorrer por el segundo auto: 80 km.
Distancia recorrida por el primer auto en un tiempo *t*: 12 km.
Distancia recorrida por el segundo auto en un tiempo *t*: *x*.

$$\frac{12}{60} = \frac{x}{80}$$

$$12 \cdot 80 = 60 \cdot x$$

$$x = \frac{960}{60}$$

x = 16 km

Respuesta: El segundo auto avanzó 16 km.

17. Datos:

Distancia recorrida por el primer peatón: 3 600 m.
Distancia recorrida por el segundo peatón: 5 400 m.

Velocidad del peatón 1: $v_1 = \frac{x}{t} = \frac{3\,600}{t}$

Velocidad del peatón 2: $v_2 = \frac{x}{t} = \frac{5\,400}{t}$

Razón entre las velocidades:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{3\,600}{t}}{\frac{5\,400}{t}} = \frac{3\,600}{5\,400} = \frac{2}{3}$$

Respuesta: La razón entre sus velocidades es $\frac{2}{3}$.

18. $L_2 = 2\,\pi r_2$ $\qquad \frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{3}$

$62{,}8 = 2\,\pi r_1$ $\qquad \frac{10\text{ cm}}{r_2} = \frac{2}{3}$

$62{,}8 = 6{,}28 \cdot r_1$ $\qquad 2 \cdot r_2 = 3 \cdot 10$ cm

$r_1 = \frac{62{,}8}{6{,}28}$ $\qquad 2 \cdot r_2 = 30$ cm

r_1 = 10,0 cm $\qquad r_2$ = 15,0 cm

19. Datos:

Altura del poste A: a

Altura del poste B: b

Sombra del poste A: s_a

Sombra del poste B: s_b

Luego se cumple que:

$$\frac{a}{b} = \frac{s_a}{s_b}$$

$$\frac{a}{1{,}5} = \frac{40}{2}$$

$2 \cdot a = 1{,}5 \cdot 40$

$2 \cdot a = 60$

$$a = \frac{60}{2}$$

$a = 30$ cm

Respuesta: La altura del poste A es 30 cm.

Subepígrafe 2.1.2

1. a) V b) V

   c) F, $\overline{OD}$ es segmento correspondiente con el segmento $\overline{OE}$.

   d) V e) F, porque $\overline{EH}$ no es segmento correspondiente con $\overline{FI}$ por no estar entre paralelas.

2. a) $\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \dfrac{\overline{CG}}{\overline{GD}}$ Primera parte del teorema de las transversales.

   b) $\dfrac{\overline{BF}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{FD}}{\overline{CA}}$ Segunda parte del teorema de las transversales.

   c) $\dfrac{\overline{GD}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{FB}}{\overline{CB}}$ Primera parte del teorema de las transversales.

   d) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{GF}}$ Tercera parte del teorema de las transversales.

   e) $\dfrac{\overline{CF}}{\overline{CB}} = \dfrac{\overline{FG}}{\overline{BD}}$ Segunda parte del teorema de las transversales.

   f) $\dfrac{\overline{BF}}{\overline{BD}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{BA}}$ Primera parte del teorema de las transversales.

3. a) $\dfrac{\overline{GH}}{\overline{HI}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ b) $\dfrac{\overline{EH}}{\overline{EB}}=\dfrac{\overline{FI}}{\overline{FC}}$ c) $\dfrac{\overline{ZA}}{\overline{ZC}}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{CF}}$ d) $\dfrac{\overline{ZH}}{\overline{ZG}}=\dfrac{\overline{BH}}{\overline{AG}}$

e) $\overline{AD}:\overline{AG}=\overline{BE}:\overline{BH}$ f) $\dfrac{\overline{BZ}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{HZ}}{\overline{GI}}$ g) $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{EF}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ h) $\overline{CF}:\overline{BE}=\overline{FI}:\overline{EH}$

i) $\dfrac{\overline{AG}}{\overline{CI}}=\dfrac{\overline{ZG}}{\overline{ZI}}$

4. a) V
   b) F, porque los segmentos de semirrectas tienen que tener siempre un extremo que coincida con el origen de las semirrectas.
   c) V d) V

5. $\overline{OA}=3{,}0$ cm; $\overline{OC}=3{,}2$ cm; $\overline{CD}=12{,}8$ cm

6. $\overline{AG}=1{,}5$ cm; $\overline{CD}=5{,}6$ cm; $\overline{GF}=9{,}8$ cm; $\overline{DF}=2{,}8$ cm; $\overline{CE}=1{,}4$ cm; $\overline{GE}=4{,}9$ cm

7. a) Trapecio b) A = 24 cm^2

8. b) $\overline{EF}=4{,}0$ cm; $\overline{EG}=3{,}0$ cm; $\overline{BG}=5{,}0$ cm; $\overline{BF}=10$ cm

9. Las longitudes de los lados del rectángulo son $\overline{AB}=\dfrac{20}{3}$ cm y $\overline{AD}=4{,}5$ cm.

10. a) A_{EPQ} = 11,76 cm^2 ≈ 12 cm^2
    b) P_{DPQF} = 15,6 cm ≈ 16 cm
    c) El área del triángulo *PQE* representa el 49 % del área del triángulo *DEF*.

11. a) $\overline{BD}=12{,}0$ cm y $\overline{BE}\approx 12{,}4$ cm b) A_{ADEC} = 14,0 cm^2

12. a) $\overline{O_1B}\perp\overline{AC}$ y $\overline{O_2C}\perp\overline{AC}$ por ser $\overline{AC}$ tangente en B y C respectivamente a las circunferencias $C_1(O_1;\ r_1)$ y $C_2(O_2;\ r_2)$.
    Luego $\overline{O_1E}\ ||\ \overline{O_2C}$.
    Entonces se cumple, por la segunda parte del teorema de las transversales, que $\dfrac{\overline{AO_1}}{AO_2}=\dfrac{r_1}{r_2}$, como $\dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{1}{2}$, sustituyendo: $\dfrac{\overline{AO_1}}{AO_2}=\dfrac{1}{2}$, podemos concluir que O_1 es el punto medio de $\overline{AO_2}$.

b) Como $\frac{r_1}{r_2}=\frac{1}{2}$, despejando obtenemos que $r_2 = 2r_1$, entonces $\overline{EO_2} = 2\ r_1$.

El segmento $\overline{O_1O_2} = \overline{O_1E} + \overline{EO_2}$

Sustituyendo $\overline{O_1E}$ y $\overline{EO_2}$ por r_1 y r_2:

$\overline{O_1O_2} = r_1 + r_2$

$\overline{O_1O_2} = r_1 + 2\ r_1$

$\overline{O_1O_2} = 3\ r_1$

Como O_1 es punto medio de $\overline{AO_2}$, entonces se cumple que $\overline{AO_2} = 6\ r_1$.

13. Ver la figura 2.184.

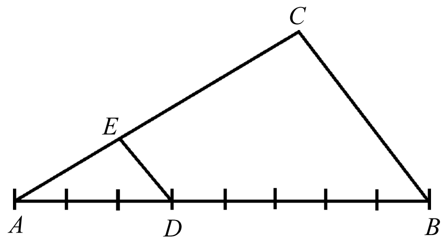


Figura 2.184

14. a) Ver la figura 2.185. b) $\overline{AB} = 18\,\text{u}$

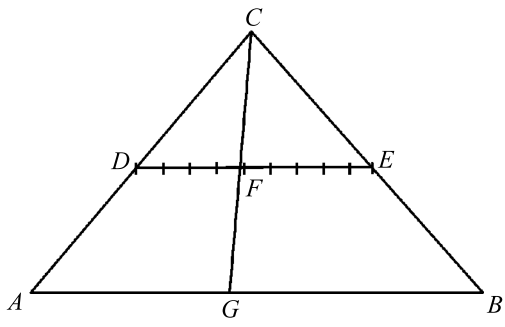


Figura 2.185

15. Considerando las rectas paralelas *AF* y *CD*, y las secantes *BC* y *BD* se puede plantear según la primera parte del teorema de las transversales que $\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FC}}$.

Por otra parte, $\overline{FC} = \overline{AC}$, ya que se puede demostrar fácilmente que el triángulo

ACF es isósceles de base $\overline{AF}$. Al sustituir $\overline{FC}$ en $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{FC}}$, se obtiene que

$\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$, es decir, $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{CA}} = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{AD}}$.

16. a) Del paralelismo entre las rectas BC y DE y por ser D el punto medio de $\overline{AC}$ se justifica la relación $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{2}$, es decir, $2\overline{AE} = \overline{AB}$, como, además, los puntos A, E y B están alineados, se cumple que E es el punto medio de $\overline{AB}$.

    b) De $\overline{DE} \parallel \overline{CB}$ y $\overline{CB} \perp \overline{AB}$, resulta que $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ (si dos rectas son paralelas entre sí y una tercera es perpendicular a una de ellas, entonces dicha recta es también perpendicular a la otra recta). De este resultado se puede inferir que $\overline{DE}$ es la altura relativa al lado $\overline{AB}$ en el triángulo ABD. Como en el inciso anterior se demostró que $\overline{AE} = \overline{EB}$, se cumple que $\overline{DE}$ es también la mediana relativa al lado $\overline{AB}$ en el triángulo ABD. De lo anterior resulta que el triángulo ABD es isósceles de base $\overline{AB}$, por lo que $\overline{BD} = \overline{AD}$. También se cumple que $\overline{AD} = \overline{DC}$ por ser D el punto medio de $\overline{AC}$.

    Resumiendo: $\overline{BD} = \overline{AD}$ y $\overline{AD} = \overline{DC}$, de donde $\overline{BD} = \overline{AD} = \overline{DC}$, es decir, $\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{BD}$.

Subepígrafe 2.1.3

1. Ver la figura 2.186.

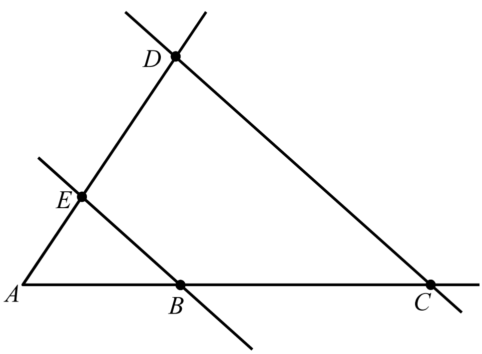


Figura 2.186

2. a) Ver la figura 2.187. b) Ver la figura 2.188.

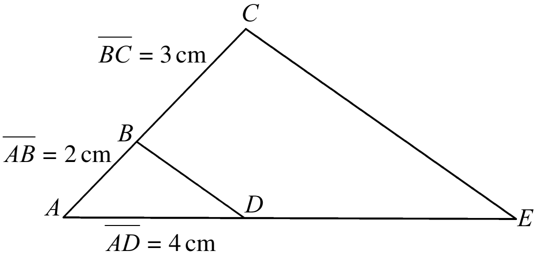


Figura 2.187

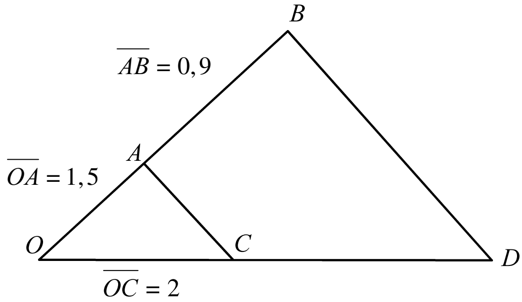


Figura 2.188

3. a) Ver la figura 2.189. b) Ver la figura 2.190.

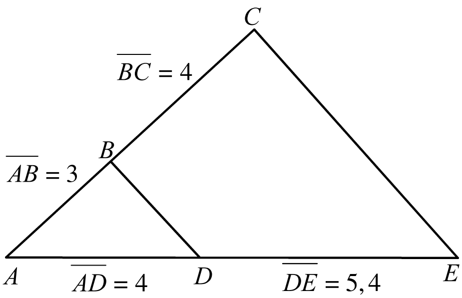


Figura 2.189

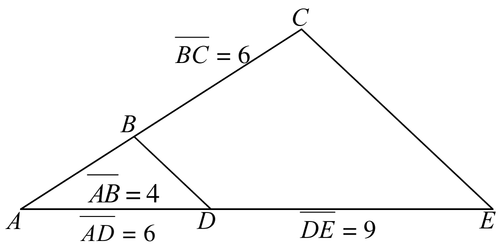


Figura 2.190

4. Pasos:

1. Ubicar un punto E como se muestra en la figura 2.191 de forma tal que pueda ser medible (accesible) el segmento $\overline{AE}$.
2. Ubicar un punto D en $\overline{AE}$ de forma tal que no existan obstáculos entre B y D.
3. Trazar la recta BD.
4. Trazar por E la recta paralela a la recta BD que corta a la recta AB en el punto C.

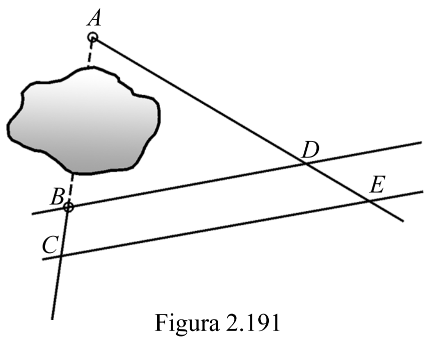


Figura 2.191

5. Calcular las longitudes de los segmentos $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ y $\overline{DE}$.
6. Determinar la distancia que separa a los puntos inaccesibles A y B al sustituir las longitudes de los segmentos correspondientes en la proporción $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{DE}}$.

5. a) Alejandro tiene razón en lo que se refiere a las longitudes que se necesitan calcular, pero con su planteamiento no garantiza que las rectas *AC* y *BD* sean paralelas.
   b) Sí, para garantizar el paralelismo entre las rectas *AC* y *BD* (ya que dos rectas perpendiculares a una misma son paralelas entre sí).
   c) De *O* a *A* hay 130 pasos lo que es aproximadamente igual a 32,5 m según las consideraciones realizadas.

   De *O* a *B* hay 200 pasos lo que es aproximadamente igual a 50 m según las consideraciones realizadas.

   De *A* a *C* hay 55 pasos lo que es aproximadamente igual a 13,75 m según las consideraciones realizadas.

   Aplicando la segunda parte del teorema de las transversales se puede calcular la longitud de $\overline{BD} \approx 21,2$ m.

   El área aproximada del terreno es de 306 m^2.

6. Descripción:

   A: observador

   O: centro del aro de diámetro $\overline{BF}$

   $\overline{CE}$: altura de la torre

   D: punto medio de $\overline{CE}$

   A, *O* y *D* están alineados y para garantizar el paralelismo, $\overline{BF} \parallel \overline{CE}$

   Garantizadas las condiciones para aplicar la segunda parte del teorema de las transversales se puede plantear que $\dfrac{\overline{AO}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{DC}}$, se conocen las medidas de los segmentos $\overline{AO}$ y $\overline{AD}, \overline{OB} = \dfrac{\overline{DF}}{2}$ por ser radio del aro, despejando $\overline{DC}$ obtenemos, $\overline{DC} = \dfrac{\overline{AD} \cdot \overline{OB}}{\overline{AO}}$, al calcular $\overline{DC}$ y como *D* es punto medio de $\overline{DC}$, entonces $\overline{CE} = 2 \cdot \overline{DC}$ que es la altura de la torre (fig. 2.192).

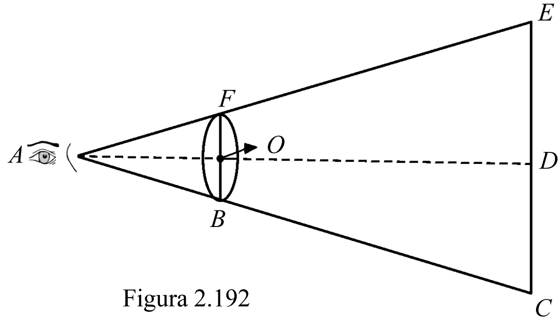


Figura 2.192

Epígrafe 2.2

1. No, porque para que dos polígonos sean semejantes se debe cumplir que tengan sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos proporcionales.

2. No, se debe cumplir que sus lados sean proporcionales.

3. Sí, porque sus tres ángulos son iguales y sus lados homólogos son proporcionales.

4. Sí, porque sus *n* ángulos son iguales y sus lados homólogos son proporcionales.

5. No siempre, para que sean semejantes deben cumplir que, además de tener sus ángulos iguales, deben tener sus lados homólogos proporcionales.

6. No, porque para que dos rombos sean semejantes se debe cumplir que tengan sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos proporcionales.

7. 45 cm

8. a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{2}{5}$

9. Los polígonos *ABCD* y *AEFD* no son semejantes, porque sus lados homólogos no son proporcionales, y los polígonos *AEFD* y *EBCF* sí son semejantes, porque se cumple que sus ángulos respectivos son iguales y sus lados homólogos proporcionales.

10. a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{9}{16}$

11. 70 m 12. 7,26 cm^2 13. 10 : 1 14. 22,8 km 17. 8,63 km 18. 8,5 cm

19. 8,5 cm 20. a) 39 mm b) 172 mm c) 21 mm

22. 6,8 cm

Epígrafe 2.3

1. a) $\Delta QFE \sim \Delta EGS$ por tener dos ángulos respectivamente iguales:

   - $\angle Q = \angle S = 60°$ por ser triángulos equiláteros.
   - $\angle QFE = \angle SEG$ por datos.

   b) $\Delta CMN \sim \Delta ABC$ por el teorema fundamental de la semejanza.
   c) $\Delta ADC \sim \Delta DBC$ por tener dos ángulos respectivamente iguales:

   - $\angle ADC = \angle CDB$
   - $\angle DCA = \angle DBC$

d) $\Delta DEC \sim \Delta FEC$ por tener dos ángulos respectivamente iguales:

- $\angle CDF = \angle ECF$
- $\angle ECD = \angle CFE$

2. a) $\dfrac{\overline{EF}}{\overline{EG}} = \dfrac{\overline{QE}}{\overline{SG}} = \dfrac{\overline{QF}}{\overline{SE}}$ b) $\dfrac{\overline{MN}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{CN}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{CM}}{\overline{CA}}$ c) $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}}$ d) $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{CE}} = \dfrac{\overline{CE}}{\overline{FE}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{CF}}$

3. a) El $\angle DFG$ es recto por ser inscrito en la circunferencia y corresponderle un arco de 180° (Teorema de Tales).
   b) El $\angle HGO$ es recto por ser $\overline{HG}$ tangente a la circunferencia en G.
   c) $\Delta DFG \sim \Delta GHO$ por tener dos ángulos respectivamente iguales.

4. En los triángulos AEF y BCD se cumple que:
   $\angle A = \angle A$ es común a los dos triángulos.

   $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{2}$ por ser F punto medio de $\overline{AB}$.

   $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \dfrac{1}{2}$ por ser E punto medio de $\overline{AD}$.

   Luego $\Delta AEF \sim \Delta BCD$ por tener dos lados proporcionales e igual el ángulo comprendido.

   $\dfrac{\overline{FE}}{\overline{BD}} = \dfrac{\overline{AF}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AD}}$

5. a) V b) F c) F d) V e) V

7. b) $\sqrt{5}$ cm

   Porque:

   $\overline{EC}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{CD}^2$ por Pitágoras.

   Si $\dfrac{\overline{ED}}{\overline{EG}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{FG}} = 2$, se cumple que: $\overline{ED} = 2\overline{EG}$ y $\overline{CD} = 2\overline{FG}$

   $$\left(2\sqrt{5}\right)^2 = \left(2\overline{EG}\right)^2 + \left(2\overline{FG}\right)^2$$

   $$20 = 4\overline{EG}^2 + 4\overline{FG}^2$$

   $$5 = \overline{EG}^2 + \overline{FG}^2$$

   $$\overline{EF}^2 = \overline{EG}^2 + \overline{FG}^2$$

   $$\overline{EF}^2 = 5$$

   $$\overline{EF} = \sqrt{5} \text{ cm}$$

8. a) En los triángulos ABC y MKL se cumple que:

$\angle A = \angle M = 72°$

$\angle L = 63°$ por suma de ángulos interiores de un triángulo, luego se cumple que

$\angle L = \angle C = 63°$

Entonces se cumple $\Delta ABC = \Delta MKL$ por tener dos ángulos respectivamente iguales

b) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{MK}} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$

9. Vía 1

a) En los triángulos ABC y BDE se cumple que $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$, luego los $\Delta ABC \sim \Delta BDE$ por el teorema fundamental de la semejanza.

Vía 2

$\angle C = \angle E$ por datos.
$\angle B = \angle B$ por ser ángulo común a los dos triángulos.
Entonces se cumple que $\Delta ABC \sim \Delta BDE$ por tener dos ángulos respectivamente iguales.

b) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{DE}}$, entonces se cumple que: $\overline{AB} \cdot \overline{DE} = \overline{AC} \cdot \overline{DB}$

10. 9 unidades

11. a) En los triángulos NRM y NPT se cumple que:

$\angle M = \angle P$ por ser ángulos opuestos del rombo $MNPQ$.

$\overline{MN} = \overline{NP}$ por ser lados del rombo $MNPQ$.
$\angle MNT = \angle RNP$ por datos y,
$\angle MNT = \angle MNR + \angle RNT$ por suma de ángulos.
$\angle RNP = \angle TNP + \angle RNT$ por suma de ángulos.
Por tanto, $\angle MNR = \angle TNP$ por sustracción de ángulos.
Entonces $\Delta NRM = \Delta NPT$ por tener un lado y los ángulos adyacentes a ese lado respectivamente iguales.

Se cumple que $\overline{NR} = \overline{NT}$ por ser lados homólogos de triángulos iguales, por tanto, se cumple que el triángulo RNT es isósceles de base $\overline{RT}$.

b) $P = 14$ cm

12. a) En los triángulos MRQ y MNP se cumple que:

$\angle P = 90°$ por el teorema de Tales.

$\angle QMP = 90°$ por ser $\overline{QM} \perp \overline{MP}$.

Luego $\angle P = \angle QMP$ por tener la misma amplitud.

$\angle QRM = \angle RMN$ por ser alternos entre $\overline{QR} \parallel \overline{MN}$.

Entonces se cumple que $\Delta MRQ \sim \Delta MNP$ por tener dos ángulos respectivamente iguales.

Luego $\dfrac{\overline{NP}}{\overline{QM}} = \dfrac{\overline{MP}}{\overline{MR}}$, entonces se cumple que $\overline{NP} \cdot \overline{MR} = \overline{QM} \cdot \overline{MP}$.

b) $P = 28$ cm

13. $\angle A = \angle B$ por ser ángulos inscritos en una circunferencia y corresponderle el mismo arco.
$\angle AED = \angle BEC$ por ser opuestos por el vértice.
Entonces se cumple que $\Delta ADE \sim \Delta BEC$ por tener dos ángulos respectivamente iguales.

14. a) En los triángulos NSM y TQM se cumple que:

$\angle MNS = \angle QMT$ por ser ángulos del cuadrado $MNPQ$.
$\angle SMQ = \angle PQT$ por datos.
$\angle SMQ + \angle SMN = \angle PQT + \angle MQT$ por suma de ángulos, luego se cumple.
$\angle SMN = \angle MQT$ por sustracción de ángulos.
Entonces se cumple que $\Delta NSM \sim \Delta TQM$ por tener dos ángulos respectivamente iguales.

b) Por la igualdad demostrada anteriormente de los ángulos y $\overline{MN} = \overline{QM}$ por ser lados del cuadrado $MNPQ$, entonces se cumple que $\Delta NSM = \Delta TQM$ por tener un lado y los ángulos adyacentes a él respectivamente iguales.

Por tanto, $\overline{NS} = \overline{MT}$ por ser lados homólogos de triángulos iguales.

c) $\angle RMN = 60°$ por ser ángulo de un triángulo equilátero.
$\angle QMN = 90°$ por ser ángulo de un cuadrado.
$\angle RMN + \angle QMN = \angle QMR = 150°$

Luego $\overline{QM} = \overline{MR}$, triángulo QMR isósceles de base $\overline{QR}$, entonces $\angle MRQ = 15°$

d) $A = 16$ cm^2

15. a) En los triángulos FAI y HIC se cumple que: $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$.

$\angle CHI = \angle IFA$ por ser alternos entre
$= \angle HIC = \angle FIA$ por ser opuestos por el vértice.
Luego $\Delta FAI \sim \Delta HIC$ por tener dos ángulos respectivamente iguales.
b) $A = 3$ cm^2

16. a) En los triángulos ADB y BDC se cumple que:

$\angle ADB = 90°$ por el teorema de Tales.

$\angle BDC = 90°$ por ser adyacente al $\angle ADB$, luego se cumple que $\angle ADB = \angle BDC$ por tener la misma amplitud.
$BAC = 30°$ por datos, entonces $\angle C = 60°$ por suma de ángulos interiores en el triángulo ABC y $\angle ADB = 60°$ por suma de ángulos interiores en el triángulo ABD, luego $\angle C = \angle ABD = 60°$.
Por tanto, $\Delta ADB \sim \Delta BDC$ por tener dos ángulos respectivamente iguales.

b) $A_S = 2{,}82 \text{ cm}^2$

17. a) En los triángulos ABC y AED se cumple que:
$\angle DAE = 90°$ por ser tangente a la circunferencia en A.
$\angle BCA = 90°$ por el teorema de Tales.
Luego $\angle DAE = \angle BCA = 90°$ por tener la misma amplitud.
$\angle AED = \angle ABC$ por alternos entre $\overline{ED} \parallel \overline{CB}$.
$\angle ADE = \angle BAC$ por terceros ángulos.
$\overline{AE} = \overline{CB}$ por datos.
Luego $\Delta ABC = \Delta AED$ por tener un lado y los ángulos adyacentes a él respectivamente iguales.
Se cumple que $\overline{ED} = \overline{AB}$ por ser lados homólogos en triángulos iguales.

b) Si se cumple que $\overline{ED} \parallel \overline{CB}$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta AFD$ por el teorema fundamental de la semejanza de triángulos.

c) $\overline{DF} = 6{,}25 \text{ cm}$

Epígrafe 2.4

1.1 a) V b) F, porque en todo triángulo rectángulo el área del cuadrado cuyo lado tiene una longitud igual a la longitud de la altura relativa a la hipotenusa es igual al área del rectángulo cuyos lados tienen las longitudes de los segmentos que dicha altura determina sobre la hipotenusa, por el teorema de las alturas.
c) V d) F, piensa en un triángulo obtusángulo.
e) V f) V g) V
h) F, piensa en el teorema de las alturas. En un triángulo rectángulo el lado mayor es la hipotenusa.

1.2 1.2.1 a) 1.2.2 a) 1.2.3 c) 1.2.4 a)

2.

Triángulos	Ecuaciones del teorema de las alturas	Ecuaciones del teorema de los catetos
		$\overline{AF}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$
ΔACF	$\overline{BF}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$	$\overline{FC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{AC}$
		$\overline{FC}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{CE}$

ΔCFE	$\overline{FD}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{DE}$	$\overline{FE}^2 = \overline{DE} \cdot \overline{CE}$
		$\overline{AC}^2 = \overline{AF} \cdot \overline{AE}$
ΔACE	$\overline{FC}^2 = \overline{AF} \cdot \overline{FE}$	$\overline{CE}^2 = \overline{EF} \cdot \overline{AE}$

3. Demostración:

   Ver la figura 2.193.
   $\angle RAQ$ es recto.

   R es la proyección del punto P en el lado $\overline{RA}$.

   Q es la proyección del punto P en el lado $\overline{QA}$.
   $AQPR$ es un rectángulo (es un cuadrilátero que tiene sus cuatro ángulos interiores rectos, por definición de distancia de un punto a un segmento).

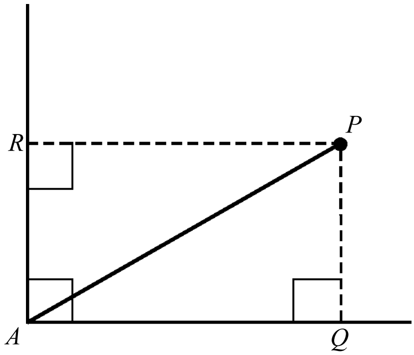


Figura 2.193

   Por eso $\overline{AQ} = \overline{RP}$ y $\overline{PQ} = \overline{RA}$ por ser pares de lados opuestos.

   $\overline{AP}$ es una de sus diagonales y es la distancia de P a A.

   $\overline{AP}^2 = \overline{AQ}^2 + \overline{PQ}^2$ por teorema de Pitágoras en el ΔAQP

   $\overline{AP} = \sqrt{\overline{AQ}^2 + \overline{PQ}^2}$

4. Las longitudes de los lados más pequeños son proporcionales a los números 24 y 10, por tanto, pueden escribirse como $24k$ y $10k$, el lado mayor puede escribirse como $26k$, siendo k el factor de proporcionalidad.
   $(24k)^2 + (10k)^2 = 576k^2 + 100k^2 = 676k^2$, el cuadrado del lado mayor es $676k^2$. Aplicando el recíproco de teorema de Pitágoras es fácil afirmar que el triángulo es rectángulo.

5. Ese triángulo es rectángulo, las alturas son 7,2 cm; 9,0 cm y 12 cm.

6.*
Demostración:

   Ver la figura 2.194

   $\overline{AH}^2 + \overline{HC}^2 = \overline{AC}^2$ (1) por el teorema de Pitágoras en ΔAHC.

   $\overline{AH}^2 + \overline{HB}^2 = \overline{AB}^2$ (2) por el teorema de Pitágoras en ΔAHB.

   Al restar miembro a miembro (2) de (1), se obtiene:

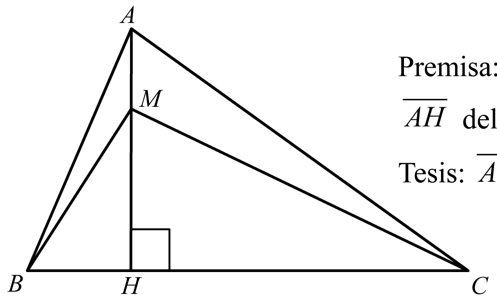
   $\overline{HC}^2 - \overline{HB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$ (3)

Al aplicar el teorema de Pitágoras en ΔMHC y ΔMHB y sustituir en (3) se obtiene que:

$$\overline{MC}^2 - \overline{HM}^2 - \left(\overline{BM}^2 - \overline{HM}^2\right) = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$$

Al eliminar el paréntesis se obtiene que:

$$\overline{MC}^2 - \overline{BM}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$$



Premisa: M un punto cualquiera de la altura $\overline{AH}$ del ΔABC.

Tesis: $\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{CM}^2 - \overline{BM}^2$

Figura 2.194

7. El área del cuadrilátero $EBCD$ es $2{,}0 \cdot 10^2$ cm^2 y el perímetro es 66 cm.

8. La altura del trapecio es 24 cm.

9. El área del cuadrilátero $ABCD$ es $3{,}5 \cdot 10^2$ cm^2 y el área del ΔBCD es $1{,}3 \cdot 10^2$ cm^2.

10.
Demostración

Premisa: Las diagonales del cuadrilátero $ABCD$ se cortan perpendicularmente en el punto O.

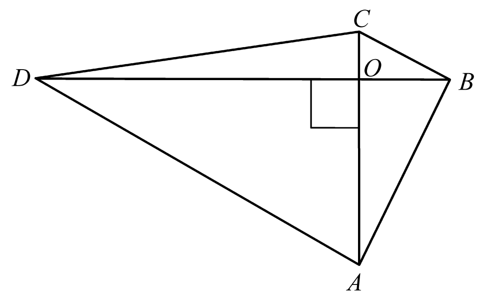


Figura 2.195

Tesis: $\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2$

Ver la figura 2.195

$\overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 = \overline{AB}^2$ (2) por el teorema de Pitágoras en ΔAOB.

$\overline{DO}^2 + \overline{CO}^2 = \overline{CD}^2$ (2) por el teorema de Pitágoras en ΔCOD.

Al adicionar miembro a miembro (1) y (2) y aplicar el teorema de Pitágoras en ΔAOD y ΔBOC, se obtiene:

$$\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2$$

Premisa:

ABCD trapecio rectángulo de bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$

$\angle A$ y $\angle D$ son rectos

Tesis: $\overline{AB}^2 - \overline{DC}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{AC}^2$

Ver la figura 2.196.

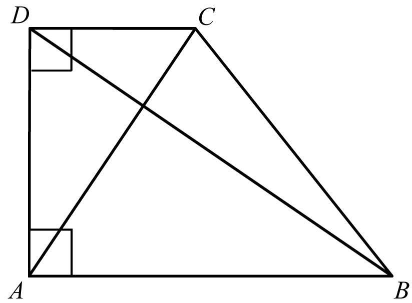


Figura 2.196

Demostración

$\overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BD}^2$ (1) por el teorema de Pitágoras en ΔADB.

$\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2$ (2) por el teorema de Pitágoras en ΔACD.

Al restar miembro a miembro (2) de (1), se obtiene:

$\overline{AB}^2 - \overline{DC}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{AC}^2$

12. El volumen es $3{,}8 \cdot 10^2$ cm^3 y el área total es $3{,}2 \cdot 10^2$ cm^2.
13.* El área del rombo *ABCD* es 6,0 dm^2 y el perímetro es 10 dm.
    El área del cuadrilátero *PBCO* es 2,0 dm^2 y el perímetro es 6,6 dm.
14. a) La recta es tangente a la semicircunferencia.
    b) El área de toda la figura es 31 cm^2.
15. El perímetro del cuadrilátero *ADBC* es 18 cm y el área sombreada es de 12 cm^2.
16. Ten en cuenta que el ΔAOB es rectángulo e isósceles de base $\overline{AB}$, por eso $\overline{OP}$ también es mediana, mediatriz y bisectriz. ΔOPB y ΔOPA también son rectángulos e isósceles de bases $\overline{OB}$ y $\overline{OA}$ respectivamente, al aplicar el teorema de Pitágoras en cualesquiera de ellos, ya completas tu demostración.
17.* El área sombreada es de $8{,}7 \cdot 10^2$ cm^2.
18. La longitud de cada cable es 73 m.
19. Sí. Dada la manera en que pueden ser unidas las estructuras. Sí, observa el esbozo de la figura 2.197, hay que tener presente que el mínimo común múltiplo de 24 y 32 es 96.

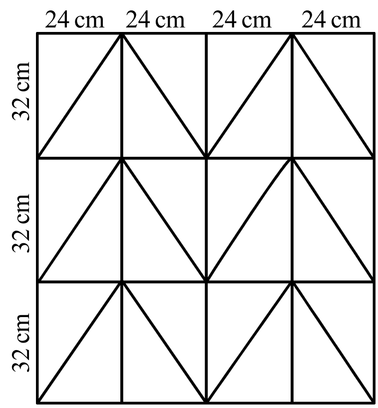


Figura 2.197

20. El área es 1,5 dm^2. Los pedazos son triángulos rectángulos.
Sí, se puede cubrir, mira el esbozo de la figura 2.198.

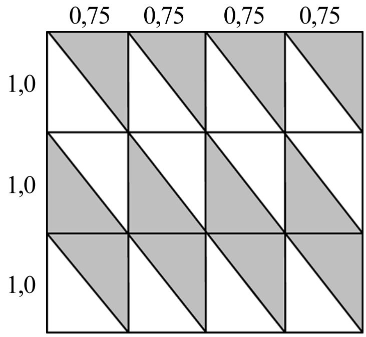


Figura 2.198

21. La longitud es de 45 cm.
22. a) La vía es correcta.
23. Ver la tabla 2.15

Tabla 2.15

Elementos dados	**Elementos que puedo hallar**	**¿Qué aplico?**
a y q	p	Teorema de los catetos en ΔABC para formular la ecuación $a^2 = p\ (p + q)$. Para resolverla pide ayuda a tu profesor(a).
	c	Sumo p y q
	h	Teorema de las alturas en ΔABC
	b	Teorema de Pitágoras en ΔABC
a y p	h	Teorema de Pitágoras en ΔCDB
	q	Teorema de las alturas en ΔABC
	c	Sumo p y q
	b	Teorema de Pitágoras en ΔABC
a y c	b	Teorema de Pitágoras en ΔABC
	p	Teorema de los catetos en ΔABC
	q	Resto p de c
	h	Teorema de las alturas en ΔABC
a y h	p	Teorema de Pitágoras en ΔCDB
	q	Teorema de las alturas en ΔABC
	c	Sumo p y q
	b	Teorema de Pitágoras en ΔABC
b y q	h	Teorema de Pitágoras en ΔACD
	p	Teorema de las alturas en ΔABC
	a	Teorema de Pitágoras en ΔCDB
	c	Teorema de Pitágoras en ΔABC
b y p	q	Teorema de los catetos en ΔABC para formular la ecuación $b^2 = q\ (p + q)$. Para resolverla pide ayuda a tu profesor(a).
	h	Teorema de las alturas en ΔABC
	c	Sumo p y q
	a	Teorema de Pitágoras en ΔABC

Tabla 2.15 (continuación)

Elementos dados	**Elementos que puedo hallar**	**¿Qué aplico?**
b y h	q	Teorema de Pitágoras en ΔACD
	p	Teorema de las alturas en ΔABC
	c	Sumo p y q
	a	Teorema de Pitágoras en ΔABC
b y c	a	Teorema de Pitágoras en ΔABC
	q	Teorema de los catetos en ΔABC
	p	Teorema de los catetos en ΔABC
	h	Teorema de las alturas en ΔABC
c y q	p	Resto q de c
	h	Teorema de las alturas en ΔABC
	b	Teorema de Pitágoras en ΔADC
	a	Teorema de Pitágoras en ΔABC
c y p	q	Resto p de c
	h	Teorema de las alturas en ΔABC
	a	Teorema de Pitágoras en ΔCDB
	b	Teorema de Pitágoras en ΔABC
c y h	q	Teorema de las alturas en ΔABC para formular la ecuación $h^2 = q\,(c - q)$. Para resolverla pide ayuda a tu profesor(a).
	p	Resto q de c
	b	Teorema de Pitágoras en ΔADC
	a	Teorema de Pitágoras en ΔABC
p y h	a	Teorema de Pitágoras en ΔCDB
	c	Teorema de los catetos en ΔABC
	q	Resto p de c
	b	Teorema de Pitágoras en ΔABC
p y q	c	Sumo p y q
	h	Teorema de las alturas en ΔABC
	a	Teorema de Pitágoras en ΔCDB
	b	Teorema de Pitágoras en ΔABC
q y h	b	Teorema de Pitágoras en ΔADC
	p	Teorema de las alturas en ΔABC
	a	Teorema de Pitágoras en ΔCDB
	c	Sumo p y q

Después de este análisis estarás de acuerdo con lo que planteó Osmani.

Epígrafe 2.5

1.

Triángulos	Ángulos	sen	cos	tan
ΔABC	$\angle A$	$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$	$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$	$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$
	$\angle B$	$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$	$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$	$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$

ΔPQR	$\angle P$	$\frac{\overline{QR}}{\overline{PQ}}$	$\frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}}$	$\frac{\overline{QR}}{\overline{PR}}$
	$\angle Q$	$\frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}}$	$\frac{\overline{QR}}{\overline{PQ}}$	$\frac{\overline{PR}}{\overline{QR}}$
ΔEFG	$\angle E$	$\frac{\overline{FG}}{\overline{EF}}$	$\frac{\overline{EG}}{\overline{EF}}$	$\frac{\overline{FG}}{\overline{EG}}$
	$\angle F$	$\frac{\overline{EG}}{\overline{EF}}$	$\frac{\overline{FG}}{\overline{EF}}$	$\frac{\overline{EG}}{\overline{FG}}$
ΔNVT	$\angle N$	$\frac{\overline{VT}}{\overline{NV}}$	$\frac{\overline{TN}}{\overline{NV}}$	$\frac{\overline{VT}}{\overline{TN}}$
	$\angle V$	$\frac{\overline{TN}}{\overline{NV}}$	$\frac{\overline{VT}}{\overline{NV}}$	$\frac{\overline{TN}}{\overline{VT}}$
ΔHIJ	$\angle H$	$\frac{\overline{IJ}}{\overline{JH}}$	$\frac{\overline{HI}}{\overline{JH}}$	$\frac{\overline{IJ}}{\overline{HI}}$
	$\angle J$	$\frac{\overline{HI}}{\overline{JH}}$	$\frac{\overline{IJ}}{\overline{JH}}$	$\frac{\overline{HI}}{\overline{IJ}}$
ΔKLM	$\angle L$	$\frac{\overline{KM}}{\overline{LM}}$	$\frac{\overline{KL}}{\overline{LM}}$	$\frac{\overline{KM}}{\overline{KL}}$
	$\angle M$	$\frac{\overline{KL}}{\overline{LM}}$	$\frac{\overline{KM}}{\overline{LM}}$	$\frac{\overline{KL}}{\overline{KM}}$
$\Delta A'B'C'$	α	$\frac{a}{c}$	$\frac{b}{c}$	$\frac{a}{b}$
	β	$\frac{b}{c}$	$\frac{a}{c}$	$\frac{b}{a}$

2. a) ΔABC b) A todos c) ΔDEF d) ΔJKL e) ΔDEF f) ΔGHI g) ΔABC
   h) A ninguno, el seno de un ángulo agudo siempre está entre 0 y 1.

3.

a) α	17°	84°	73°
sen α	0,292 4	0,994 5	0,956 3
b) β	20°	12°	87,7°
cos β	0,939 7	0,978 1	0,401
c) θ	44°	74°	61°
tan θ	0,965 7	3,487	1,804

d) | x | 5,2° | 26,5° | 53,5° |
|---|---|---|---|
| $\cot x$ | 10,99 | 2,006 | 0,740 0 |

También puedes encontrar cot 5,2° = 11,00.

4. Sí, es posible porque ese triángulo es rectángulo, lo que se demuestra al aplicar el recíproco del teorema de Pitágoras ($85^2 = 36^2 + 77^2$).

Razón trigonométrica	$\angle F$	$\angle D$
sen	0,905 9	0,423 5
cos	0,423 5	0,905 9
tan	2,139	0,467 5
cot	0,467 5	2,139

5. Las longitudes de los catetos pueden ser: 24 cm y 32 cm, y la de la hipotenusa, 40 cm, dadas las definiciones de seno y tangente.

6. a) $\overline{HI} = 64\text{ dm}$ b) $\overline{IG} = 39\text{ dm}$ y $\angle IHG = 32°$

7. a) El triángulo es *rectángulo* e *isósceles*, puedes demostrarlo si tienes presente cómo se representa en un sistema de coordenadas rectangulares y aplicas el teorema de Pitágoras o si te auxilias de un compás y de un semicírculo para medir.

   b) El seno de sus ángulos agudos es $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071$.

8. a) $y = 1,15x + 37$ b) 78,7°

9. Las longitudes de los catetos siempre son menores que la longitud de la hipotenusa, por eso siempre es propia la fracción que se obtiene al hallar el seno y el coseno de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo.

10. Apóyate en la figura 2.199.

Premisa:

$$\text{sen } \alpha = \frac{a}{c},\ \cos\alpha = \frac{b}{c}\ \text{ y }\ \tan\alpha = \frac{a}{b}$$

Tesis: $\tan\alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos\alpha}$

Demostración:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b}\ \text{ y }\ \tan\alpha = \frac{a}{b}$$

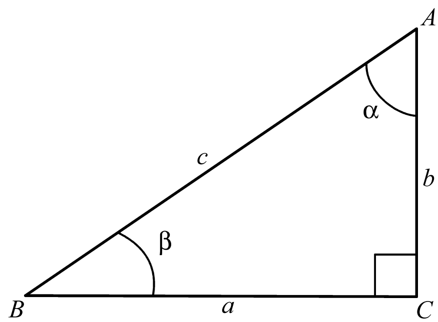


Figura 2.199

11. Apóyate en la figura 2.199.

Premisa:

ΔABC es rectángulo en C.

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{a}{c} \text{ y } \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Tesis: $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\beta = 1$

Demostración:

$a^2 + b^2 = c^2$ por el teorema de Pitágoras.

Al dividir por c^2 la igualdad anterior obtenemos:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

Al aplicar propiedades de la potencia, se tiene:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\beta = 1$

12. Sí, porque son triángulos rectángulos.

13. Premisa:

P punto medio de $\overline{AB}$, $\angle APD = 30°$ y $\angle CPD = 60°$

Tesis: $\overline{BC} = 3 \cdot \overline{DA}$

Demostración:

$$\tan 30° = \frac{\overline{DA}}{\overline{AP}} \quad \tan 60° = \frac{\overline{BC}}{\overline{PB}}$$

$$\overline{AP} = \overline{PB}$$

porque P es punto medio de $\overline{AB}$

$$\frac{\overline{DA}}{\tan 30°} = \frac{\overline{BC}}{\tan 60°} \qquad \frac{\overline{DA}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\overline{BC}}{\sqrt{3}}$$

Es evidente que $\overline{BC} = 3 \cdot \overline{DA}$.

14. Apóyate en la figura 2.200.

Premisa: ΔABC acutángulo

Tesis: Una de las maneras de hallar el área del ΔABC es $\dfrac{\overline{AC} \cdot \overline{AB} \cdot \text{sen}\,\alpha}{2}$.

Demostración:

$\overline{CD}$ es la altura relativa a $\overline{AB}$, por eso el $\angle ADC$ es recto y el ΔACD es rectángulo.

En ΔACD $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$ de ahí que:

$\overline{CD} = \overline{AC} \cdot \operatorname{sen}\alpha$.

Una de las formas de hallar el área del ΔACD es $\dfrac{\overline{CD} \cdot \overline{AB}}{2}$; al sustituir aquí la expresión que

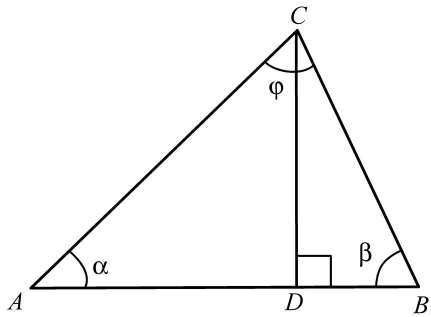


Figura 2.200

tenemos para $\overline{CD}$, se obtiene que una de las maneras de hallar el área del ΔABC es

$$\frac{\overline{AC} \cdot \overline{AB} \cdot \operatorname{sen}\alpha}{2}.$$

De forma parecida se trabaja para los otros casos. Si el triángulo es rectángulo hay que tener en cuenta que sen 90° = 1.

15. El área del trapecio *ABCD* es 24 u^2.
16. El área del trapecio *ABCD* es de $1{,}3 \cdot 10^2$ u^2 y el perímetro es de 49 u.
17. El área del trapecio *ABCD* es de $1{,}3 \cdot 10^3$ u^2 y el perímetro es de $1{,}7 \cdot 10^2$ u.
18. El área del rombo *ABCD* es de 337 mm^2.
19. El volumen del prisma *ABCDEFGH* es $4{,}8 \cdot 10^2$ cm^3 y el área total es de $3{,}4 \cdot 10^2$ cm^2.
20. El volumen de la pirámide *ABCDS* es $6{,}4 \cdot 10^2$ cm^3 y la suma de las aristas es $1{,}3 \cdot 10^2$ cm.
21. La longitud de la circunferencia es $2{,}0 \cdot 10^2$ mm.
22. El área del círculo es $5{,}6 \cdot 10^3$ cm^2 y la del sector circular, $1{,}4 \cdot 10^3$ cm^2.
23. El área sombreada es de 45 mm^2.
24. El perímetro del ΔCQR es de 74 u y la longitud de la circunferencia, de 96 u.
25. El área es de 17 cm^2.
26. $\angle K = 22{,}6°$ $\quad$ $\angle CAB = 36{,}9°$

    $\angle KOA = 67{,}4°$ $\quad$ $\angle ABC = 53{,}1°$

    $\angle OAK = 90°$ $\quad$ $\angle C = 90°$

    El área del sector circular es de 25 dm^2.
27. Posible respuesta:
    1. En la figura señalamos el valor de cada elemento conocido y en los desconocidos nos auxiliamos de variables. Si no la dan dibujamos una figura de análisis que consiste en un triángulo rectángulo o en una figura en la que aparezca este.
    2. Precisamos el(los) dato(s) y la(s) incógnita(s).
    3. Seleccionamos la(s) fórmula(s) de forma tal que en cada caso estén los datos y una incógnita.

4. Calculamos la(s) incógnita(s) al sustituir, en la(s) fórmula(s) escogidas, las cantidades conocidas por sus valores, despejar la(s) incógnita(s), efectuar las operaciones y obtener el(los) valor(es) buscado(s).

28. $0° < \alpha < 17°$

29. 1. Modelar mediante una figura de análisis (fig. 2.201).

    2. Hallar $\overline{PB}$ y $\overline{PE}$.

    3. Sumar $\overline{PB}$ y $\overline{PE}$.

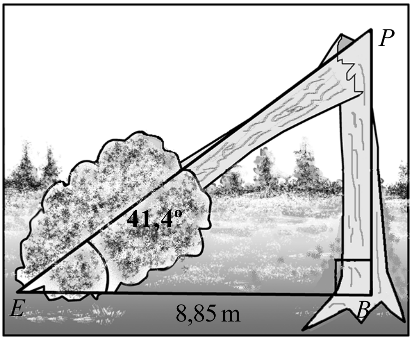


Figura 2.201

30. 78 m

31. Realiza una figura de análisis como la de la figura 2.202.
Datos:

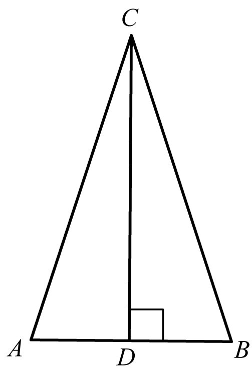


Figura 2.202

ΔABC es isósceles de base $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ es la altura relativa a $\overline{AB}$, por eso $\overline{CD}$ también es bisectriz y mediana.

$\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ representan los brazos del compás.

La amplitud del $\angle ACB$ es la del ángulo que forman los brazos.

La longitud de $\overline{AB}$ es la distancia entre las puntas del compás.

$\angle ACD = \angle BCD = \dfrac{\angle ACB}{2}$; D es punto medio de $\overline{AB}$ por eso $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{DB}$.

En ΔBCD, $\operatorname{sen} \angle BCD = \dfrac{\overline{DB}}{\overline{BC}}$, $\overline{DB} = \overline{BC} \cdot \operatorname{sen} \angle BCD$, por tanto:

$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BC} \cdot \operatorname{sen} \angle BCD$. $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BC} \cdot \operatorname{sen} \dfrac{\angle ACB}{2}$.

Ejercicios del capítulo

1. c) 18 cm   2. a) 0,1 dm y 5 cm   3. a) 5 cm   b) 12 cm^2

4. Si $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{1}{3}$ y $\overline{DE} = \overline{AD} + 5,$ entonces $\overline{DE} = 10$ u y $\overline{AD} = 5,$ luego $\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{1}{3}.$

   Entonces se cumple que $\overline{OL} \| \overline{HI}$ por el recíproco del teorema de las transversales.

5. d) El cuadrilátero *ABFE* es un trapecio por tener dos lados paralelos $\overline{EF} \| \overline{AB}$.
   e) $\angle ABF = 135°$.
   f) En los triángulos ΔBFG y ΔEGC se cumple:

   (1) $\angle FGB = \angle EGC$ por ser opuestos por el vértice.

   (2) $\overline{BG} = \frac{1}{3}\overline{GC}$ por datos.

   (3) $\overline{GF} = \frac{1}{3}\overline{EG}$ por ser $\overline{BG} = \overline{GF}$ por ser lados iguales del ΔBFG isósceles de base $\overline{BF}$ y $\overline{GC} = \overline{EG}$ por ser lados del cuadrado *EGCD*.

   De 1, 2 y 3 se cumple que $\Delta BFG \sim \Delta EGC$ por tener dos lados proporcionales y el ángulo comprendido respectivamente igual (*pap*).

6. a) $\angle LOH = 125°$
   b) En los ΔOLG y ΔGHI se cumple:

   $\overline{OL} \| \overline{HI}$ por ser bases del trapecio *LOHI*, luego por el teorema fundamental de la semejanza se cumple que $\Delta OLG \sim \Delta GHI$.
   c) $A_{GHI} = 24$ cm^2

7. a) V   b) V   c) F   d) V   e) V

9. a) $\angle CGD = 140°$
   b) En los triángulos *BGD* y *GEC* se cumple que:

   (1) $\angle CEG = \angle BDG$ por ser alternos entre $\overline{EF} \| \overline{AB}$.
   (2) $\angle BGD = \angle CGE$ por ser opuestos por el vértice.
   Entonces de 1 y 2 se cumple que $\Delta BGD \sim \Delta GEC$ por tener dos ángulos respectivamente iguales.
   c) $\overline{BG} \approx 4{,}7$ cm

10. a) En los triángulos *OAB* y *AFD* se cumple que:

   (1) $\angle FDA = \angle BOA$ por ser correspondientes entre $\overline{DF} \| \overline{OB}$
   (2) $\angle F = 90°$ por el teorema de Tales.
   $\angle OAB = 90°$ por ser ángulo de un cuadrado.

Luego $\angle F = \angle OAB = 90°$.
Entonces de 1 y 2 se cumple que $\Delta OAB \sim \Delta AFD$ por tener dos ángulos respectivamente iguales.

b) $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{OB}} = \dfrac{\overline{AF}}{\overline{AB}}$

$\overline{AD}$ es diámetro, luego $\overline{AD} = 2r$.

$\overline{AD} = \overline{AB}$ por ser lados de un cuadrado, luego $\overline{AB} = 2r$.

$\dfrac{2r}{\overline{OB}} = \dfrac{\overline{AF}}{2r}$

Por tanto, se cumple que: $\overline{OB} \cdot \overline{AF} = 4r^2$.

c) $\overline{OB} \approx 22$ mm

11. a) En los triángulos EBD y ABD se cumple que:

(1) $\angle B$ es común a los triángulos EBD y ABD.

(2) $\angle DEB = 90°$ por ser $\overline{DE} \perp \overline{AB}$.

$\angle ADB = 90°$ por ser $\overline{AD}$ la altura del ΔABC.
Luego $\angle DEB = \angle ADB = 90°$.
Entonces de 1 y 2 se cumple $\Delta EBD \sim \Delta ABD$ por tener dos ángulos respectivamente iguales.

b) $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{ED}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{EB}}{\overline{BD}} = \dfrac{3}{5}$

c) $P = 16$ cm; $A = 12$ cm^2

12. a) Isósceles.
b) En los triángulos BDE y ABC se cumple:

(1) $\angle B$ es común a los triángulos BDE y ABC.

(2) $\angle CAB = 90°$ por ser el ΔABC rectángulo en A y $\angle DEB = 90°$ por ser $\overline{DE}$ altura del ΔABD, luego $\angle CAB = \angle DEB = 90°$.

De 1 y 2 se cumple que $\Delta BDE \sim \Delta ABC$ por tener dos ángulos respectivamente iguales.

c) $A_{ABC} \approx 14$ cm^2

13. a) $\dfrac{\overline{CE}}{\overline{CD}} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$ b) $\overline{EF} = 1{,}0$ cm

c) En los triángulos ΔCDE y ΔABC se cumple:

(1) $\angle ACD = \angle CAB$ por ser alternos entre paralelas, por ser $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ lados opuestos de un rectángulo.

(2) $\angle CED = 90°$ por ser $\overline{DE} \perp \overline{AC}$ y $\angle B = 90°$ por ser ángulo de un rectángulo, luego $\angle CED = \angle B = 90°$.
De 1 y 2 se cumple que $\Delta CDE \sim \Delta ABC$ por tener dos ángulos respetivamente iguales.

14. a) En los triángulos ACB y DBC se cumple que:

(1) $\angle DBC = \angle BCA$ por ser alternos entre $\overline{BD} // \overline{AC}$
(2) $\angle BAC = \angle BCD$ por ser inscrito y seminscrito en una circunferencia y corresponderles el mismo arco.
Entonces por 1 y 2, se cumple que $\Delta ACB \sim \Delta DBC$ por tener dos ángulos respectivamente iguales. Por tanto, se cumple que $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$.

b) $A_S \approx 55 \text{ cm}^2$

15. a) $T = 4$ b) $U = 2$

16. a) En los triángulos ΔAMC y ΔBMD se cumple que:

(1) $\angle DMB = \angle AMC$ por ser opuestos por el vértice.
(2) $\angle C = \angle D = 90°$ por el teorema de Tales.
De 1 y 2 se cumple que $\Delta AMC \sim \Delta BMD$ por el teorema de dos ángulos iguales (aa).

b) $A_S \approx 9{,}1 \text{ cm}^2$

c) $\overline{AD} \approx 8{,}66 \text{ cm}$

$\overline{BD} = \overline{MD} = 5 \text{ cm}$ por ser lados del triángulo BDM isósceles rectángulo en D.

$\overline{AM} = \overline{AD} - \overline{MD} = 8{,}66 \text{ cm} - 5 \text{ cm} = 3{,}66 \text{ cm}$

Luego: $\frac{\overline{AM}}{\overline{MD}} = \frac{3{,}66 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = 0{,}73$

17. a) En los triángulos ΔBFE y ΔACD se cumple que:

(1) $\angle BFE = \angle GFC$ por ser opuestos por el vértice.

$\angle GFC = \angle FGC$ por ser ángulos bases del triángulo CFG isósceles de base $\overline{FG}$.

$\angle FGC = \angle GAD$ por ser alternos entre $\overline{AD} // \overline{EG}$.
Por tanto, $\angle BFE = \angle GAD$ por carácter transitivo.
(2) $\angle BEF = 90°$ por el teorema de Tales.
$\angle D = 90°$ por ser $ABCD$ trapecio rectángulo en D.
Por tanto, $\angle BEF = \angle D = 90°$ por tener la misma amplitud.
Entonces por 1 y 2 se cumple que $\Delta BFE \sim \Delta ACD$ por tener dos ángulos respectivamente iguales.

b) $\operatorname{sen} \angle GAE = \dfrac{\overline{EG}}{\overline{AG}}$ $\qquad \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{\overline{AG}}$ $\qquad \overline{AG} = 12 \text{ cm}$

$\overline{AG}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EG}^2$ teorema de Pitágoras

$12^2 = \overline{AE}^2 + 9^2$

$\overline{AE}^2 = 63$

$\overline{AE} = \sqrt{63} \approx 7{,}9$

$\cos \angle GAE = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AG}} \approx 0{,}658$

$\tan \angle GAE = \dfrac{\overline{EG}}{\overline{AE}} \approx \dfrac{9}{7{,}9} \approx 1{,}139$

18. a) En los triángulos ΔAED y ΔABC se cumple que:

(1) $\angle D = \angle B$ por ser opuestos del paralelogramo $ABCD$.
(2) $\angle BCA = 90°$ por el teorema de Tales.
$\angle CEA = 90°$ por ser $ABCE$ trapecio rectángulo en E.
Entonces por 1 y 2 se cumple que los triángulos AED y ABC son semejantes por tener dos ángulos respectivamente iguales.

b) $A_{ABCD} \approx 3{,}0 \text{ dm}^2$

19. a) En los triángulos ACD y EBF se cumple que:

(1) $\angle D = 90°$ por ser $ABCD$ un trapecio rectángulo de base $\overline{CD}$.

$\angle EFC = 90°$ por ser $AEFC$ un trapecio rectángulo de base $\overline{EF}$.
$\angle BFE = 90°$ por ser adyacente al $\angle EFC = 90°$.
Por tanto, $\angle D = \angle BFE = 90°$ por carácter transitivo.

(2) $\angle ACD = \angle CAE$ por alternos entre las bases $\overline{AB}, \overline{CD}$ del trapecio $ABCD$.

$\angle CAE = \angle FEB$ por correspondientes entre las bases $\overline{AC}, \overline{EF}$ del trapecio $AEFC$.
Por tanto, $\angle ACD = \angle FEB$ por carácter transitivo.
Entonces de 1 y 2 se cumple que $\Delta ACD \sim \Delta EBF$ por tener dos ángulos respectivamente iguales.

b) $A_T \approx 9{,}0 \text{ cm}^2$

20. a) En los triángulos ABC y AED se cumple que:

(1) $\angle B = 90°$ por ser $ABCD$ un trapecio rectángulo de base $\overline{AB}$.

$\angle AED = 90°$ $\overline{DE} \perp \overline{AC}$.
Por tanto, $\angle B = \angle AED = 90°$ por tener igual amplitud.

(2) $\angle DAE = \angle CAB$ por ser $\overline{AC}$ bisectriz del $\angle BAD$.

Entonces de 1 y 2, se cumple que $\Delta ABC \sim \Delta AED$ por tener dos ángulos respectivamente iguales.

b) $A_{\Delta ABC} \approx 27\ \text{cm}^2$

21. a) En los triángulos ABC y BDE se cumple que:

(1) $\angle BAC = \angle BDE$ por ser inscritos sobre el mismo arco de circunferencia.

(2) $\angle ACB = 90°$ por el teorema de Tales.

$\angle BED = 90°$ por ser E punto medio de la cuerda $\overline{CD}$, por tanto, el diámetro $\overline{AB}$ corta perpendicularmente la cuerda en E.

Entonces $\angle ACB = \angle BED = 90°$ por tener igual amplitud.

De 1 y 2 se cumple que $\Delta ABC \sim \Delta BDE$ por tener dos ángulos respectivamente iguales.

b) $A_S \approx 1{,}0\ \text{cm}^2$

22. a) En los triángulos ABD y CBD se cumple que:

(1) $\angle A = \angle BDE$ por estar inscritos en los arcos BD y BE de igual amplitud, ya que B es punto medio del arco DE.

(2) $\angle ADB = 90°$ por el teorema de Tales.

$\angle BCD = 90°$ por ser adyacente al $\angle BCE$ que corresponde al trapecio rectángulo de base $\overline{BC}$.

Luego $\angle ADB = \angle BCD = 90°$.

De 1 y 2 se cumple que $\Delta ABD \sim \Delta BCD$.

Entonces:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$$

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$$

b) $A_T \approx 36\ \text{cm}^2$

23. La longitud de $\overline{AA'}$ es 4,8 mm, el área de $OO'A'A'$ es 21 mm^2 y el perímetro, 18 mm.

24. El área de $ABCD'$ es 75 u^2 y el perímetro, 45 u.

26. a) V b) F, el coseno de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es la razón entre la longitud del cateto adyacente al ángulo y la longitud de la hipotenusa.

c) F, la tangente de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es la razón entre el seno y el coseno del ángulo.

d) V e) V f) F, sen 45° = cos 45 g) F, tan 58° = 1,6 h) V

27. c) Sí, a cada elemento del conjunto A se le hace corresponder uno y solo un elemento del conjunto B.

d) 77,4° y 12,6° son ángulos complementarios, lo mismo sucede con 44,3° y 45,7°, fíjate que sus amplitudes suman 90°.

e) No es posible, piensa en lo que has estudiado de las definiciones de las razones trigonométricas.

31. $k = 9$; $A_{\Delta ABC} \approx 29\ \text{dm}^2$

32. $AC \approx 25$ cm

CAPÍTULO 3

Sistemas de ecuaciones lineales

3.1 Introducción a los sistemas de ecuaciones lineales

¡! La cantidad de estudiantes integrantes del Círculo de Interés Pedagógico es el triplo de la cantidad de los pertenecientes al Círculo de Interés de Medicina Natural y Tradicional. Si se incorporan cinco estudiantes más al Círculo de Interés de Medicina Natural y Tradicional, entonces este círculo tendría la mitad de integrantes que tiene el Círculo de Interés Pedagógico. ¿Cuántos integrantes tiene cada uno de estos círculos de interés?

En grados anteriores has resuelto problemas con el auxilio de tus conocimientos algebraicos y has seguido determinadas indicaciones para encontrar una ecuación que te permita determinar la solución del problema.

Este problema trata sobre la cantidad de integrantes que tienen dos círculos de interés. Nota que en el texto aparece una relación existente entre la cantidad de estudiantes integrantes del Círculo de Interés Pedagógico y la cantidad pertenecientes al Círculo de Interés de Medicina Natural y Tradicional, pero no conoces cuántos integrantes tiene cada uno de estos círculos de interés. Si asignas a la variable x la cantidad de integrantes del Círculo de Interés Pedagógico y a la variable y la cantidad pertenecientes al otro círculo, entonces cuando traduces esta relación del lenguaje común al algebraico obtienes la ecuación $x = 3y$.

Observa que esta no es la única información que aparece en el texto del problema sobre los integrantes de estos círculos de interés, más adelante se plantea que si se incorporan cinco estudiantes más al Círculo de Interés de Medicina Natural y Tradicional, entonces este tendría la mitad de integrantes que tiene el Círculo de Interés Pedagógico. Luego, esto quiere decir que ahora el Círculo de Interés de Medicina Natural y Tradicional tiene $y + 5$ integrantes y que esa cantidad es la mitad de la cantidad de integrantes que tiene el Círculo de Interés Pedagógico, por lo tanto, cuando haces la traducción al lenguaje algebraico obtienes la ecuación $y+5=\frac{x}{2}$.

Luego, para encontrar la solución de este problema tienes que hallar los valores de las variables x y y que satisfagan estas dos ecuaciones, pero con lo que has estudiado hasta el momento no puedes resolver este problema, por lo que es necesario que continúes ampliando tus conocimientos sobre las ecuaciones.

3.1.1 Ecuaciones lineales con dos variables

En octavo grado estudiaste que las ecuaciones lineales con una variable son aquellas que pueden reducirse mediante las transformaciones equivalentes a la forma $ax + b = 0$ con a, b números reales y $a \neq 0$. Existen otras ecuaciones lineales.

Definición:

Una ecuación se denomina **ecuación lineal en dos variables** si y solo si puede reducirse utilizando las transformaciones equivalentes a la forma $ax + by = c$ donde a, b, c son números reales y a, b no sean simultáneamente cero.

Las ecuaciones $x = 3y$, $y + 5 = \frac{x}{2}$, que encontraste en el texto del problema son ecuaciones lineales en dos variables. Son también de este tipo las ecuaciones siguientes: $\frac{5}{8}a + \frac{1}{2}b = 2; -4m + 6n = 3; 5(x-8) = 17y.$

Las variables de estas ecuaciones toman los valores del conjunto de los números reales, si no se especifica otro dominio de definición para ellas. Como estas ecuaciones tienen dos variables, las soluciones son pares ordenados de números reales. Por tanto, el conjunto solución de estas ecuaciones es un conjunto cuyos elementos son pares ordenados de números reales.

Las ecuaciones lineales con dos variables tienen, en general, infinitas soluciones, lo que significa que existen infinitos pares ordenados de números reales que transforman la ecuación en una proposición verdadera. Por ejemplo, la ecuación $2x + 4y = 20$ tiene, entre otras, las soluciones siguientes $(-2; 6)$, $(0; 5)$, $(8; 1)$ y $(12; -1)$, en los que el valor del primer componente del par corresponde a la primera variable según el orden del alfabeto y el segundo componente a la segunda variable. Estos pares son soluciones de la ecuación, porque si sustituyes la variable x por el primer componente del par y la variable y por el segundo componente del par, obtienes una proposición verdadera:

$2(-2) + 4(6) = -4 + 24 = 20$
$2(0) + 4(5) = 0 + 20 = 20$
$2(8) + 4(1) = 16 + 4 = 20$
$2(12) + 4(-1) = 24 - 4 = 20$

Que una ecuación tenga infinitas soluciones no significa que todo par de números reales es solución de esta ecuación, pues, por ejemplo, el par $(1; 3)$ no es solución de la ecuación $2x + 4y = 20$, porque si sustituyes las variables por los valores del par ordenado, resulta $2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 2 + 12 = 14$ y obtienes una proposición falsa, ya que $14 \neq 20$.

Análogamente a las ecuaciones lineales con una variable, dos ecuaciones lineales con dos variables son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución en un dominio de la variable dado. Las transformaciones equivalentes que estudiaste en séptimo grado para las ecuaciones lineales con una variable son válidas para las ecuaciones lineales con dos variables y conducen a la obtención de una ecuación equivalente.

Ejemplo 1:

Calcula el valor de a para que una solución de la ecuación $2m - 3n = a$ sea:

a) (1; 2) b) (–3; 3) c) (0; –5) d) (–2; 0)

Solución:

a) $2m - 3n = a$
$2(1) - 3(2)$ sustituyendo las variables m y n por los valores del par ordenado (1; 2)
$= 2 - 6$
$= -4$
Luego, $a = -4$

b) $2m - 3n = a$
$2(-3) - 3(3)$
$= -6 - 9$
$= -15$
Por tanto, $a = -15$

c) $2m - 3n = a$
$= 2(0) - 3(-5)$
$= 0 + 15$
$= 15$
Entonces, $a = 15$

d) $2m - 3n = a$
$= 2(-2) - 3(0)$
$= -4 - 0$
$= -4$
Luego, $a = -4$

Ejemplo 2:

Determina cuáles de los pares ordenados siguientes son solución de la ecuación $5x - y = 8$.

a) (–1; 3) b) (1; –3) c) (–3; 1)

Solución:

a) Sustituyes la variable x por –1 y la variable y por 3 en la ecuación $5x - y = 8$:

$5(-1) - 3 = -5 - 3 = -8$ y $-8 \neq 8$.

Como obtienes una proposición falsa, el par (–1; 3) no es solución de la ecuación.

b) (1; –3)
$5(1) - (-3) = 5 + 3 = 8$ y $8 = 8$
Como obtienes una proposición verdadera, el par (1; –3) es solución de la ecuación.

c) (–3; 1)
$5(-3) - (1) = -15 - 1 = -16$ y $-16 \neq 8$.
Por lo tanto, el par (–3; 1) no es solución de la ecuación.

Fíjate que mientras que el par (1; –3) es solución de la ecuación, el par (–3; 1) no lo es, por lo que es importante que respetes el orden en que se le asignen los valores a las variables, recuerda que al primer componente del par le corresponde la primera variable, según el orden alfabético, y al segundo componente la otra variable.

Como sabes las funciones lineales se definen por ecuaciones del tipo $y = mx + n$, con m y n números reales, donde y es la variable dependiente y x, la variable independiente; luego, las ecuaciones de las funciones lineales son ecuaciones lineales con dos variables. Tú conoces que la representación gráfica de estas funciones es una recta del plano y que la ecuación de una recta es $ax + by + c = 0$ con a, b, c números reales, a y b distintos de cero, por lo que las coordenadas de los puntos del plano que pertenecen a una recta son los pares ordenados de números reales que son solución de su ecuación.

Un caso particular de las ecuaciones lineales con dos variables son las llamadas ecuaciones diofánticas. *Una ecuación diofántica es una ecuación en la que los coeficientes de las variables, el término independiente y las soluciones son números enteros. Resolver una ecuación diofántica consiste en determinar qué números enteros la transforman en una proposición verdadera. Este tipo de ecuación no siempre tiene solución y cuando es soluble tiene infinitas soluciones. Estas ecuaciones reciben este nombre del matemático Diofanto de Alejandría, quien, además de ser uno de los primeros en utilizar el simbolismo en álgebra, se dedicó entre otras cosas al estudio de estas ecuaciones. Aunque muchos problemas de la vida práctica se resuelven empleando ecuaciones diofánticas, no es propósito de la asignatura Matemática en la secundaria básica que aprendas a resolver ecuaciones de este tipo; no obstante, puedes investigar cuándo una ecuación diofántica con dos variables tiene solución y cuál es el procedimiento para encontrar el conjunto solución de este tipo de ecuaciones.*

3.1.2 Sistemas de ecuaciones lineales

¡! Al realizar la traducción del lenguaje común al algebraico de las relaciones que aparecen en el texto del problema del inicio de este capítulo, obtuviste dos ecuaciones lineales con dos variables $x = 3y$; $y + 5 = \frac{x}{2}$.

Está claro que como ambas ecuaciones representan relaciones existentes entre las cantidades que hay que determinar para resolver el problema, tienes que encontrar valores para las variables x y y que satisfagan simultáneamente estas ecuaciones.

Definición:

Se denomina sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables a dos ecuaciones de este tipo que puedan reducirse a la forma siguiente:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

donde a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 son números reales y a_1, a_2, b_1, b_2 no sean simultáneamente cero.

Por ejemplo, $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 11y = -3 \end{cases}$, $\begin{cases} 3{,}4m - 7n = 11{,}2 \\ 0{,}5m = 3{,}5n \end{cases}$, $\begin{cases} p = 3q - 2 \\ 8q + 3p = 5 \end{cases}$, son sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables.

Un par ordenado $(x_1; y_1)$ es solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables si y solo si es solución de cada una de las ecuaciones del sistema, es decir, si el par $(x_1; y_1)$ transforma cada una de las ecuaciones del sistema en una proposición verdadera.

Nota que esto significa que las soluciones de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables son las soluciones comunes de las dos ecuaciones que integran el sistema, por tanto, el conjunto solución de un sistema de ecuaciones es la intersección de los conjuntos solución de cada una de las ecuaciones del sistema.

¡! Como para resolver el problema del inicio del capítulo tienes que encontrar valores para las variables x, y que satisfagan ambas ecuaciones, debes obtener la solución del sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables $\begin{cases} x = 3y \\ y + 5 = \dfrac{x}{2} \end{cases}$.

La solución de sistemas de ecuaciones lineales forma parte de los problemas matemáticos más antiguos vinculados de forma directa con la práctica. Tanto en la matemática mesopotámica como en la china y la japonesa del medioevo aparecen sistemas de ecuaciones lineales.

En los Nueve capítulos sobre las artes matemáticas (Chiu Chang Suan Shu), *pieza más antigua de la matemática china, que no se conoce quién, ni cuándo, ni dónde la escribió, aparece un procedimiento elaborado en forma de pasos denominado* *fang-cheg para el tratamiento de los sistemas de ecuaciones lineales. En China en el año 1683 fue desarrollado el trabajo con sistemas de ecuaciones lineales por el matemático japonés Seki Shinsuke Kowa de una forma semejante a la que se emplea hoy.*

Ejemplo 1:

Determina si los pares ordenados siguientes son soluciones del sistema: $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 2 \end{cases}$

a) (2; 3) b) (3; 1) c) (1; 3) d) (5; 3)

Solución:

a) El par (2; 3) es solución de la ecuación $2x + y = 7$, pues $2 \cdot 2 + 3 = 4 + 3 = 7$, pero no es solución de la ecuación $x - y = 2$, ya que si sustituyes la variable x por 2 y la variable y por 3 no obtienes una proposición verdadera, porque $2 - 3 = -1 \neq 2$, luego, el par (2; 3) no es solución del sistema.
b) El par (3; 1) es solución de la ecuación $2x + y = 7$ porque $2 \cdot 3 + 1 = 7$ y también es solución de la segunda ecuación, pues $3 - 1 = 2$. Por tanto, el par (3; 1) es solución del sistema.
c) El par (1; 3) no es solución de la primera ecuación del sistema porque no la transforma en una proposición verdadera, ya que si sustituyes la variable x por 1 y la variable y por 3 obtienes, $2 \cdot 1 + 3 = 5$. Luego, el par (1; 3) no es solución del sistema.
d) El par (5; 3) es una solución de la segunda ecuación del sistema, porque si sustituyes la variable x por 5 y la variable y por 3 se transforma en una proposición verdadera, pero este par no es solución de la primera ecuación, fíjate que en este caso no se obtiene una proposición verdadera, pues $2 \cdot 5 + 3 = 13 \neq 7$. Por lo tanto, el par (5; 3) no es solución del sistema.

Ya tú conoces que las ecuaciones en general, pueden tener o no solución y que la solución puede ser única o ser infinita, ahora analizarás la solubilidad de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables.

Como toda ecuación de la forma $ax + by + c = 0$ con $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ y a y b no simultáneamente iguales a cero representa una recta en el plano coordenado y es una ecuación lineal con dos variables, las ecuaciones de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables son ecuaciones de dos rectas, que pueden tener diferentes posiciones en el plano. Ya has estudiado que dos rectas en el plano pueden intersecarse en un punto o ser paralelas, coincidentes o no.

En la figura 3.1, observa que las rectas r y s se intersecan en un punto P, esto quiere decir que existe un punto del plano que pertenece a las dos rectas, por lo tanto, las coordenadas de este punto satisfacen cada una de las ecuaciones de estas rectas, lo que significa que el par ordenado de números reales correspondiente a las coordenadas del punto de intersección de las dos rectas es solución de cada una de las ecuaciones y, por tanto, es la solución del sistema formado por las ecuaciones de esas rectas. Entonces, si las rectas se cortan en un punto, el sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables formado con las ecuaciones de estas rectas tiene solución única.

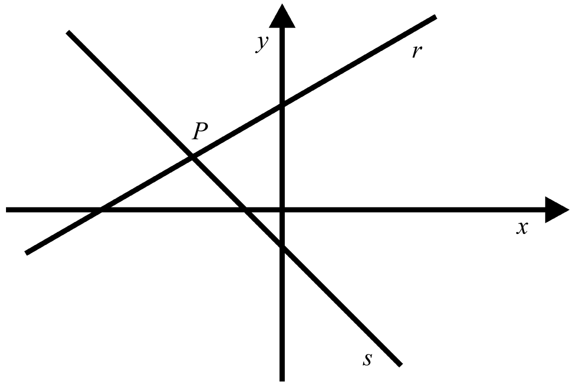


Figura 3.1

Fíjate, en la figura 3.2, que las rectas r y s son paralelas, esto quiere decir que no tienen ningún punto en común, luego, no existe ningún punto en el plano que pertenezca a las dos rectas, entonces no existe un par ordenado de números reales que sea solución de cada una de las ecuaciones de estas rectas, lo que significa que la intersección de los conjuntos soluciones de cada una de estas ecuaciones es el conjunto vacío, luego el sistema conformado por las ecuaciones de estas rectas no tiene solución. Por lo tanto, si las rectas son paralelas, el sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables formado con las ecuaciones de estas rectas no tiene solución.

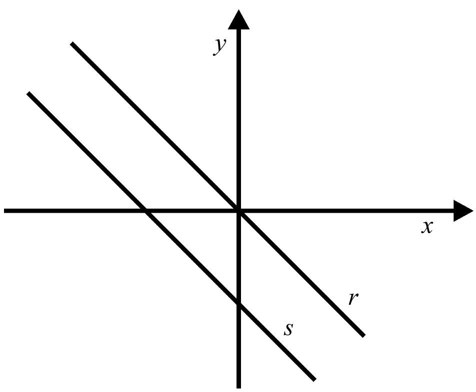


Figura 3.2

En la figura 3.3, nota que las rectas r y s coinciden. Esto significa que existen infinitos puntos del plano que pertenecen a ambas rectas, luego, hay infinitos pares ordenados de números reales que satisfacen las ecuaciones de estas rectas, lo que quiere decir que el sistema conformado por estas ecuaciones tiene infinitas soluciones. Entonces, si las rectas coinciden, el sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables formado con las ecuaciones de estas rectas tiene infinitas soluciones.

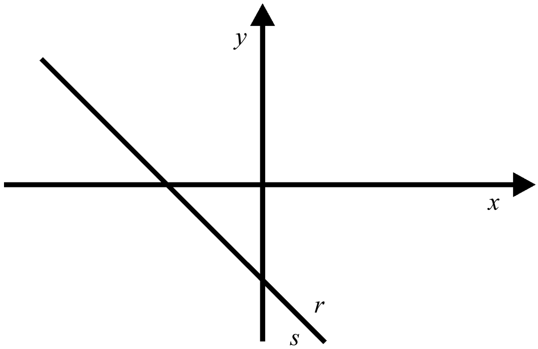


Figura 3.3

De todo lo anterior puedes concluir que un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables puede: o tener solución única o infinitas soluciones o ninguna solución, en dependencia de la posición relativa en el plano de las rectas cuyas ecuaciones conforman el sistema.

En octavo grado estudiaste que la pendiente de la recta es el valor de su inclinación con respecto al eje x, por lo tanto, existe una estrecha relación entre las pendientes de dos rectas y su posición relativa en el plano.

Si las pendientes de dos rectas son distintas, quiere decir que la inclinación de las rectas con respecto al eje de las x es diferente, por lo tanto, las rectas se cortan en un punto.

Por ejemplo, en las rectas cuyas ecuaciones son a: $6x - 7y + 5 = 0$ y b: $-4x + 3y = 1$, para determinar cuáles son sus pendientes y términos independientes ya sabes que hay que despejar la variable y en cada una de ellas.

$$y = \frac{6}{7}x + \frac{5}{7} \qquad\qquad y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$$

Para la recta a la pendiente es $\frac{6}{7}$ y el término independiente $\frac{5}{7}$, y para la recta b la pendiente es $\frac{4}{3}$ y el término independiente $\frac{1}{3}$. Fíjate que en este caso las pendientes de las rectas son diferentes.

Para representar gráficamente estas rectas en el mismo sistema de coordenadas solo necesitas las coordenadas de dos puntos que pertenezcan a cada una (fig. 3.4):

$$y=\frac{6}{7}x+\frac{5}{7}$$

x	–2	5
y	–1	5

$A(-2; -1)$, $B(5; 5)$

$$y=\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$$

x	–1	2
y	–1	3

$C(-1; -1)$, $D(2; 3)$

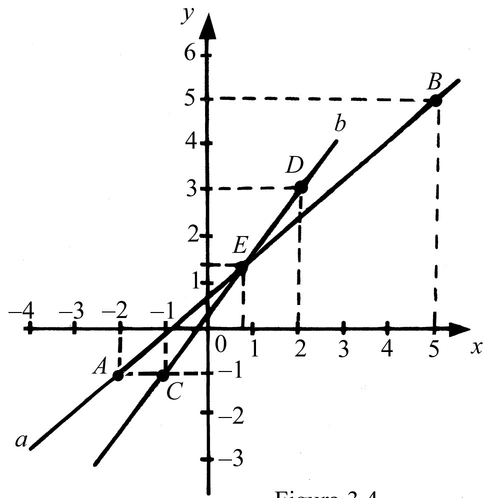


Figura 3.4

Observa que las rectas se cortan en el punto E.

Sin embargo, si las pendientes son iguales eso significa que tienen la misma inclinación con respecto al eje de las x, por lo que puede ocurrir que sean paralelas, coincidentes o no.

Por ejemplo, en las rectas de ecuaciones a: $6x-7y+5=0$ y b: $-6x+7y+9=0$, sus pendientes son iguales, pues si despejas la variable y, obtienes:

$$y=\frac{6}{7}x+\frac{5}{7} \qquad y=\frac{6}{7}x-\frac{9}{7}$$

Observa que en este caso los términos independientes son $\frac{5}{7}$ y $-\frac{9}{7}$, que son diferentes.

Cuando representas gráficamente estas rectas en el mismo sistema de coordenadas (fig. 3.5), se tiene:

$$y=\frac{6}{7}x+\frac{5}{7}$$

x	–2	5
y	–1	5

$A(-2; -1)$, $B(5; 5)$

$$y=\frac{6}{7}x-\frac{9}{7}$$

x	–2	5
y	–3	3

$C(-2; -3)$, $D(5; 3)$

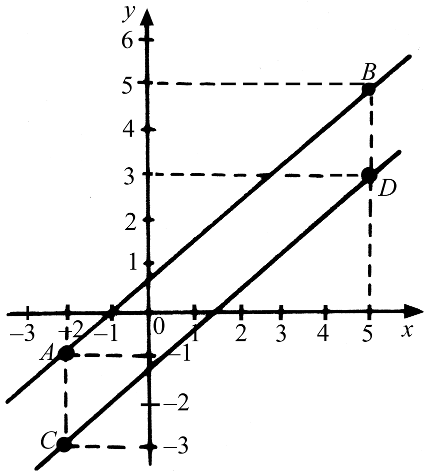


Figura 3.5

Fíjate que las rectas son paralelas, luego, cuando las pendientes de las rectas son iguales y los términos independientes de las ecuaciones son diferentes, las rectas son paralelas. Entonces, cuando las pendientes y los términos independientes de las rectas son iguales, las rectas coinciden.

Por ejemplo, en las rectas de ecuaciones a: $6x - 7y + 5 = 0$ y b: $-12x + 14y - 10 = 0$, sus pendientes son iguales al igual que sus términos independientes, porque cuando despejas la variable y, obtienes la misma ecuación:

$$y = \frac{6}{7}x + \frac{5}{7} \qquad\qquad y = \frac{6}{7}x + \frac{5}{7}$$

Si las representas gráficamente en un sistema de coordenadas (fig. 3.6), resulta:

x	–2	5
y	–1	5

$A(-2; -1)$, $B(5; 5)$

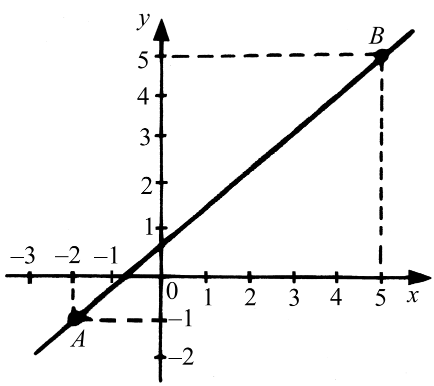


Figura 3.6

Luego, las rectas son coincidentes.

Como de la relación entre las pendientes de dos rectas y los términos independientes puedes determinar su posición relativa en el plano, esta relación te permite conocer cuántas soluciones tiene un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, siempre y cuando te sea posible determinar la pendiente de la recta, pues como conoces para las rectas paralelas al eje de las ordenadas la pendiente no está definida.

Recuerda que:

En un sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables representado en la forma $\begin{cases} y_1 = -\dfrac{a_1}{b_1}x - \dfrac{c_1}{b_1} \\ y_2 = -\dfrac{a_2}{b_2}x - \dfrac{c_2}{b_2} \end{cases}$ con $b_1 \neq 0$ y $b_2 \neq 0$ si:

- $-\dfrac{a_1}{b_1} \neq -\dfrac{a_2}{b_2}$, entonces el sistema tiene solución única.
- $-\dfrac{a_1}{b_1} = -\dfrac{a_2}{b_2}$ y $-\dfrac{c_1}{b_1} \neq -\dfrac{c_2}{b_2}$, entonces el sistema no tiene solución.
- $-\dfrac{a_1}{b_1} = -\dfrac{a_2}{b_2}$ y $-\dfrac{c_1}{b_1} = -\dfrac{c_2}{b_2}$, entonces el sistema tiene infinitas soluciones.

Ejemplo 2:

Analiza cuántas soluciones tienen los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables siguientes:

a) $\begin{cases} 2x+3y=22 \\ -3x+y=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=10 \\ x+y=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x-6y=-18 \\ -3x+2y=6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x=3y \\ y+5=\dfrac{x}{2} \end{cases}$

Solución:

a) $\begin{cases} 2x+3y=22 \\ -3x+y=0 \end{cases}$

Transformas el sistema de manera que puedas determinar las pendientes de las rectas cuyas ecuaciones lo conforman. Para eso despejas la variable y en las dos ecuaciones del sistema.

$$\begin{cases} y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{22}{3} \\ y = 3x \end{cases}$$

Después identificas cuál es la pendiente de cada una de las rectas. En este caso, la pendiente de la primera recta es $-\frac{2}{3}$ y la segunda es 3.

Luego comparas las pendientes de las rectas. Fíjate que las pendientes son diferentes. Como las pendientes son diferentes las rectas se intersecan en un punto y, por tanto, el sistema tiene solución única.

b) $\begin{cases} x+y=10 \\ x+y=2 \end{cases}$

Transformas el sistema:

$$\begin{cases} y=-x+10 \\ y=-x+2 \end{cases}$$

Fíjate que en este caso las pendientes de las rectas son iguales. Luego, para que puedas determinar el tipo de solución del sistema tienes que comparar los términos independientes de las ecuaciones. En este caso los términos independientes son 10 y 2, que son diferentes; por tanto, el sistema no tiene solución.

c) $\begin{cases} 9x-6y=-18 \\ -3x+2y=6 \end{cases}$

Transformas el sistema:

$$\begin{cases} y=\frac{3}{2}x+3 \\ y=\frac{3}{2}x+3 \end{cases}$$

Observa que en este caso tanto las pendientes de las rectas como sus términos independientes son iguales, por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones.

d) $\begin{cases} x=3y \\ y+5=\frac{x}{2} \end{cases}$

R¡! Este sistema es el que tienes que resolver para dar respuesta al problema del inicio del capítulo.

Transformas el sistema:

$$\begin{cases} y=\frac{1}{3}x \\ y=\frac{1}{2}x-5 \end{cases}$$

Las pendientes de las rectas son diferentes, luego, el sistema tiene solución única. Fíjate que todavía no sabes determinar la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, por lo que aún no puedes resolver el problema planteado al inicio del capítulo.

Ejemplo 3:

Encuentra una ecuación que con la ecuación $2x + 4y = 1$ forme un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables que tenga:

a) solución única, b) infinitas soluciones, c) ninguna solución.

Solución:

a) Como para que el sistema tenga solución única, las pendientes de las rectas de las ecuaciones que forman el sistema tienen que ser diferentes, debes determinar cuál es la pendiente de la recta cuya ecuación es $2x + 4y = 1$. Para ello despejas la variable y en esta ecuación, entonces obtienes que $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$, como la pendiente de esta recta es $-\frac{1}{2}$, cualquier ecuación de una recta con pendiente diferente de $-\frac{1}{2}$, puede conformar un sistema con la ecuación dada que tenga solución única. Por ejemplo, la ecuación $y = -2x + 5$. Fíjate que aquí la pendiente de la recta es -2 y obtienes la ecuación lineal en dos variables $2x + y = 5$. Entonces el sistema $\begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ tiene solución única.

b) Ya conoces que para que un sistema tenga infinitas soluciones las pendientes de las rectas y los términos independientes de las ecuaciones de la recta tienen que ser iguales. Luego, basta que multipliques la ecuación $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ por un número real distinto de cero, para que obtengas la ecuación de una recta que tiene la misma pendiente y el mismo término independiente de la ecuación dada. Por ejemplo, si multiplicas por 8 la ecuación $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$, resulta la ecuación $8y = -4x + 2$, y entonces el sistema $\begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ 4x + 8y = 2 \end{cases}$ tiene infinitas soluciones.

c) En este caso las pendientes de las rectas, cuyas ecuaciones conforman el sistema deben ser iguales y los términos independientes diferentes. Como la pendiente de la recta que tiene como ecuación $2x + 4y = 1$ es $-\frac{1}{2}$ y su término independiente es $\frac{1}{4}$, entonces, cualquier ecuación de una recta con pendiente $-\frac{1}{2}$ y término independiente diferente de $\frac{1}{4}$, conforma con la ecuación dada un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables sin solución.

Por ejemplo, la ecuación $y = -\frac{1}{2}x + 4$ tiene estas condiciones, por lo tanto, el sistema

$\begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ \frac{1}{2}x + y = 4 \end{cases}$ no tiene solución.

Ejemplo 4:

Determina el valor del parámetro *k* para que el sistema $\begin{cases} kx - 6y = 19 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$ tenga:

a) una solución, b) ninguna solución.

Solución:

a) Para poder determinar el tipo de solución debes despejar la variable *y* en las dos ecuaciones para determinar las pendientes de las rectas cuyas ecuaciones conforman el sistema.

$$\begin{cases} kx - 6y = 19 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6y = -kx + 19 \\ -2y = -3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{k}{6}x - \frac{19}{6} \\ y = \frac{3}{2}x \end{cases}$$

Como para que el sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables tenga una solución, las pendientes de las rectas tienen que ser diferentes, entonces $\frac{k}{6} \neq \frac{3}{2}$, luego, debes determinar para qué valores de *k* se cumple esta desigualdad. Basta que resuelvas la ecuación lineal en una variable $\frac{k}{6} = \frac{3}{2}$.

$$\frac{k}{6} = \frac{3}{2}$$

$$k = \frac{3}{2} \cdot 6$$

$k = 9$

Luego, el sistema tiene una solución para todo $k \in \mathbb{R}$ tal que $k \neq 9$.

b) Ya determinaste que para $k \neq 9$ las pendientes de las rectas son diferentes, entonces para $k = 9$ se cumple que son iguales. Fíjate que los términos independientes de las dos ecuaciones de este sistema son diferentes, por tanto, para $k = 9$ el sistema no tiene solución.

Ejercicios

1. Lee detenidamente la pregunta y responde:
   Clasifica las proposiciones siguientes en verdaderas o falsas. Escribe V o F en la línea dada. Justifica las que sean falsas.

   a) ___ El par (1; 5) es solución de la ecuación $3x - 2y = 13$.

   b) ___ Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables es hallar los pares ordenados de números reales que satisfacen simultáneamente cada una de sus ecuaciones.

   c) ___ Los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables pueden tener una solución, infinitas soluciones o ninguna solución.

   d) ___ Las ecuaciones lineales con dos variables no siempre tienen solución.

   e) ___ El sistema $\begin{cases} x + y = -3 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$ tiene solución única.

   f) ___ El sistema $\begin{cases} 3m - n = 2 \\ 6m - 2n = 2 \end{cases}$ tiene infinitas soluciones.

   g) ___ Una solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables es un par ordenado de números reales que transforma ambas ecuaciones en proposiciones verdaderas.

   h) ___ Todos los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables tienen solución.

   i) ___ El par (–3; 4) es solución del sistema $\begin{cases} p + q = 1 \\ 3p - q = -13 \end{cases}$

   j) _____ El par (1; 3) es solución del sistema $\begin{cases} x + y = 4 \\ y - x = 2 \end{cases}$, entonces el par (3; 1) también es solución de este sistema.

2. Dado el sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables $\begin{cases} 3m + 2n = 17 \\ 5m - n = 11 \end{cases}$, determina cuál de los pares siguientes es su solución:

   a) (4; 3) b) (3; 4) c) (5; 1) d) (3; 1)

3. Marca con una X la respuesta correcta.

3.1 El sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - 4y = 12 \end{cases}$ tiene como solución al par:

a) ___ (3; 1) b) ___ (4; –1) c) ___ (0; –2) d) ___ (1; –1)

3.2 El sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2m + 3n = 12 \\ 3m + 2n = 13 \end{cases}$ tiene como solución al par:

a) ___ (0; 4) b) ___ (2; 3) c) ___ (3; 2) d) ___ $\left(\frac{1}{3}; 6\right)$

3.3 El sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2a + 3b = 3 \\ 5a - 6b = 3 \end{cases}$ tiene como solución al par:

a) ___ $\left(1; \frac{1}{3}\right)$ b) ___ (0; 1) c) ___ (3; 2) d) ___ $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$

4. Comprueba que el par $\left(-2; \frac{1}{2}\right)$ es solución de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables siguientes:

a) $\begin{cases} 7x + 4y = -12 \\ 3x - 2y = -7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 2x + 6y = -1 \end{cases}$

5. Escribe un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables cuya solución sea:

a) (1; –2) b) (–3; 1) c) (–7; 0) d) (0; 5)

6. Escribe un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables tal que:

a) tenga infinitas soluciones,
b) no tenga solución,
c) tenga solución única.
Fundamenta tu respuesta.

7. Añade una ecuación a cada una de las ecuaciones siguientes de modo que en cada caso conformes un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables que tenga:

- única solución,
- infinitas soluciones,
- ninguna solución.

a) $x - y = 1$ b) $\frac{1}{2}m + n = 5$ c) $4p + 5q = 11$ d) $2x + 3y = 12$

8. Determina cuántas soluciones tienen los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} 3m - 4n = 6 \\ 4m - 5n = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3p + q = 10 \\ 2p - 3q = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} a + b = 4 \\ 2a + 2b = 8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -5v + w = 0 \\ 10v - 2w = 7 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \frac{2}{3}s + t = 0 \\ 6s + 9t = 0 \end{cases}$ g) $\begin{cases} 3j + 5k = 4 \\ 6j + 12k = -6 \end{cases}$

9. Determina el valor del parámetro k para que el sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + 6y = k \end{cases}$ tenga infinitas soluciones.

10. Halla el valor de a para que el sistema $\begin{cases} am + 5n = 1 \\ 3m - 2n = 7 \end{cases}$ tenga como conjunto solución a $S = \{(1; -2)\}$.

3.1.3 Procedimiento gráfico para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables

Hasta ahora has podido determinar cuántas soluciones tiene un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables a partir de la posición relativa de las rectas en el plano cuyas ecuaciones forman el sistema. Ya sabes que cuando las rectas son paralelas el sistema no tiene solución y en este caso el conjunto solución es el conjunto vacío y cuando las rectas coinciden el sistema tiene infinitas soluciones y al conjunto solución del sistema pertenecen todos los pares ordenados de números reales que son las coordenadas de los puntos que pertenecen a la recta. Luego, en estos casos ya sabes determinar el conjunto solución, solo te falta hallar el conjunto solución en el caso de que el sistema tenga solución única.

Ya conoces que el sistema tiene solución única cuando las rectas se cortan en un punto, lo que significa que el punto de intersección pertenece a las dos rectas, entonces, sus coordenadas satisfacen cada una de las ecuaciones de estas, luego, las coordenadas del punto de intersección son el par ordenado que satisface cada una de las ecuaciones del sistema y, por lo tanto, es la solución del sistema. ¿Cómo puedes determinar las coordenadas del punto de intersección de dos rectas? Está claro que si representas gráficamente las rectas cuyas ecuaciones forman el sistema puedes determinar las coordenadas del punto de intersección y encontrar el conjunto solución del sistema.

Por ejemplo, para el sistema $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=-4 \end{cases}$ representas gráficamente las rectas que tienen por ecuación las dadas en el sistema.

Para esto primeramente transformas las ecuaciones del sistema despejando la variable y.

$$\begin{cases} y=-x+2 \\ y=x+4 \end{cases}$$

Observa que las pendientes de las rectas son diferentes, lo que indica que las rectas se intersecan en un punto y, por tanto, el sistema tiene solución única.

Para representar gráficamente la recta, como conoces, basta con encontrar las coordenadas de dos puntos que pertenezcan a la recta, para esto con la ayuda de una tabla le das valores a la variable independiente x para así obtener los valores de la variable dependiente y (fig. 3.7). Recuerda que también puedes utilizar los puntos cómodos.

Recta a de ecuación $y = x + 4$ Recta b de ecuación $y = -x + 2$

x	-4	0
y	0	4

$A(-4; 0)$, $B(0; 4)$

x	0	2
y	2	0

$C(0; 2)$, $D(2; 0)$

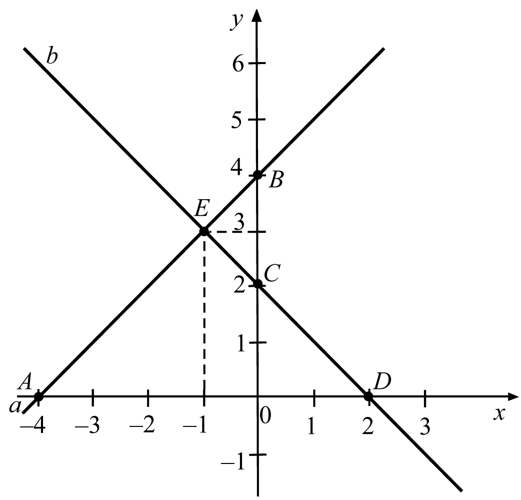


Figura 3.7

Después de representar gráficamente las dos rectas solo te resta determinar cuál es el punto de intersección de ambas. Fíjate que el punto E es el punto de intersección de estas dos rectas y sus coordenadas son $(-1; 3)$, por lo tanto, el par ordenado de números reales $(-1; 3)$ es la solución única del sistema dado y su conjunto solución es $S = \{(-1; 3)\}$.

Como la solución del sistema la encontraste a partir de la representación gráfica de las rectas cuyas ecuaciones conforman este sistema, es por eso que a este proceder se le denomina procedimiento gráfico para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables.

Ejemplo 1:

Determina el conjunto solución de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables siguientes:

a) $\begin{cases} 2x+4y=-2 \\ x+2y=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-y=11 \\ 9x-3y=6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+y=-3 \\ -x+3y=-2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x=3y \\ y+5=\dfrac{x}{2} \end{cases}$ e) $\begin{cases} 5x+6y=8 \\ -6x+7y=4 \end{cases}$

Solución:

a) $\begin{cases} 2x+4y=-2 \\ x+2y=-1 \end{cases}$

Transformas las ecuaciones del sistema de manera tal que la variable y quede despejada en las dos ecuaciones del sistema:

$$\begin{cases} 4y=-2-2x \\ 2y=-1-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{-2x-2}{4} \\ y=\dfrac{-x-1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2} \\ y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Observa que las pendientes de las rectas y los términos independientes son iguales, luego, las rectas en el plano coinciden, lo que significa que las coordenadas de los infinitos puntos que pertenecen a la recta satisfacen cada una de las ecuaciones del

sistema, es decir, que las coordenadas de cada uno de los puntos de la recta son solución del sistema.
Representas la recta a partir de determinar las coordenadas de dos puntos que pertenecen a esta (fig. 3.8).

x	1	3
y	–1	–2

$A(1; -1)$, $B(3; -2)$

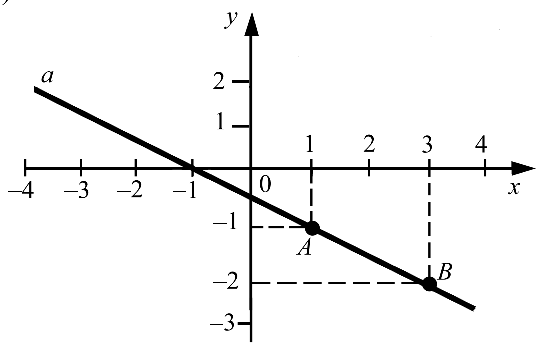


Figura 3.8

Por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones y su conjunto solución es:

$S = \{(x; y)\colon\ y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2},\ x \in \mathbb{R}\}.$

b) $\begin{cases} 3x - y = 11 \\ 9x - 3y = 6 \end{cases}$

Transformas las dos ecuaciones del sistema:

$$\begin{cases} y = 3x - 11 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$$

Fíjate que las pendientes de las rectas coinciden, pero sus términos independientes no, por tanto, las rectas son paralelas (fig. 3.9).

$y = 3x - 11$

x	3	4
y	–2	1

$A(3; -2)$, $B(4; 1)$

$y = 3x - 2$

x	1	2
y	1	4

$C(1; 1)$, $D(2; 4)$

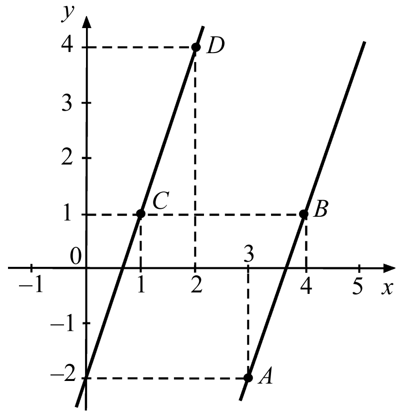


Figura 3.9

Luego, el sistema no tiene solución y su conjunto solución es $S = \phi$.

c) $\begin{cases} 2x + y = -3 \\ -x + 3y = -2 \end{cases}$

Transformas las dos ecuaciones del sistema:

$$\begin{cases} y = -2x - 3 \\ y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

En este caso las pendientes de las rectas no son iguales, por lo tanto, el sistema tiene solución única y para determinar el conjunto solución del sistema tienes que representar gráficamente las rectas cuyas ecuaciones lo forman.
Para esto basta que encuentres las coordenadas de dos puntos que pertenecen a cada una de las rectas, los represententes en un sistema rectangular de coordenadas y traces las rectas que pasan por cada pareja de puntos (fig. 3.10).

Recta $y = -2x - 3$

x	0	–1
y	–3	–1

$A(0; -3)$, $B(-1; -1)$

Recta $y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3}$

x	2	5
y	0	1

$C(2; 0)$, $D(5; 1)$

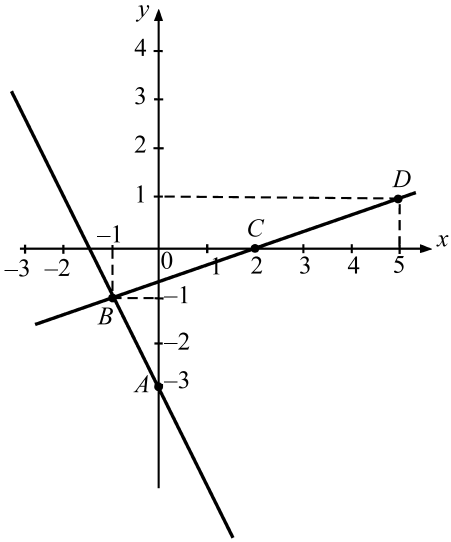


Figura 3.10

Fíjate que el punto B, en el que se cortan las rectas, tiene como coordenadas al par (–1; –1), luego, el conjunto solución del sistema es $S = \{(-1; -1)\}$.

d) $\begin{cases} x = 3y \\ y + 5 = \dfrac{x}{2} \end{cases}$

R¡! Ahora, utilizando el procedimiento gráfico vas a encontrar la solución del sistema que te permitirá resolver el problema planteado al inicio del capítulo.

Transformas el sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{3}x \\ y = \dfrac{1}{2}x - 5 \end{cases}$$

Representas gráficamente las dos rectas en un sistema de coordenadas (fig. 3.11).

Recta $y = \dfrac{1}{3}x$

x	0	3
y	0	1

$A(0; 0)$, $B(3; 1)$

Recta $y = \dfrac{1}{2}x - 5$

x	4	6
y	–3	–2

$C(4; -3)$, $D(6; -2)$

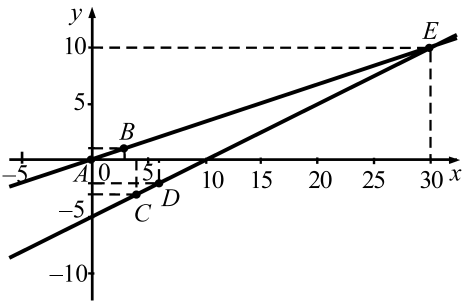


Figura 3.11

Como el punto de intersección de las dos rectas es el punto E de coordenadas (30; 10), entonces el conjunto solución del sistema es $S = \{(30; 10)\}$.

Fíjate que para poder determinar las coordenadas del punto de intersección se tuvo que utilizar otra escala diferente a las de los ejemplos anteriores, lo que hace que no siempre sea fácil determinar el conjunto solución por esta vía.

e) $\begin{cases} 5x+6y=8 \\ -6x+7y=4 \end{cases}$

Transformas las dos ecuaciones del sistema:

$$\begin{cases} y=-\dfrac{5}{6}x+\dfrac{8}{6} \\ y=\dfrac{6}{7}x+\dfrac{4}{7} \end{cases}$$

Representas gráficamente las dos rectas en un sistema de coordenadas (fig. 3.12).

Recta $y=-\dfrac{5}{6}x+\dfrac{8}{6}$

x	–2	4
y	3	–2

$A(–2; 3)$, $B(4; –2)$

Recta $y=\dfrac{6}{7}x+\dfrac{4}{7}$

x	–3	4
y	–2	4

$C(–3; –2)$, $D(4; 4)$

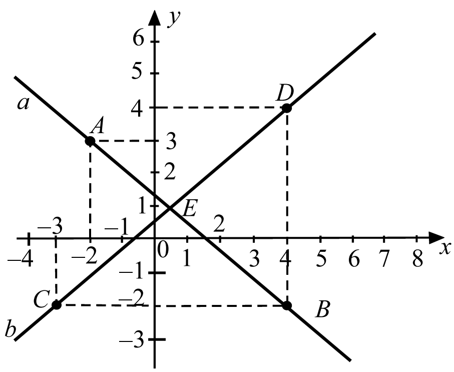


Figura 3.12

Fíjate que en este caso no se puede determinar la solución exacta, pues las coordenadas del punto de intersección de las dos rectas no se pueden determinar exactamente, las coordenadas del punto E son aproximadamente (0,5; 1).

Este procedimiento te permite analizar rápidamente el tipo de solución del sistema, pero no siempre se determinan soluciones exactas, a veces son aproximadas.

Cuando la solución es única siempre puedes encontrarla por el procedimiento gráfico, solo debes hacer una adecuada selección de las unidades de los ejes de coordenadas y tener en cuenta que la solución generalmente es aproximada. Esto significa que es necesaria la búsqueda de otros procedimientos que te permitan obtener la solución exacta.

Recuerda que:

Para determinar el conjunto solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables por el procedimiento gráfico, debes:

1. Representar gráficamente las rectas cuyas ecuaciones conforman el sistema.
2. Determinar el tipo de solución según la posición relativa de la rectas en el plano:
   - Si las rectas son paralelas, entonces el sistema no tiene solución y el conjunto solución es $S = \phi$.
   - Si las rectas coinciden, entonces el sistema tiene infinitas soluciones y el conjunto solución es el conjunto de pares ordenados que son las coordenadas de los puntos que pertenecen a la recta.
   - Si las rectas se intersecan en un punto, entonces el sistema tiene solución única.
3. Si el sistema tiene solución única, determinar las coordenadas del punto de intersección de las dos rectas y el conjunto solución es el conjunto cuyo único elemento es el par ordenado en el que sus componentes son las coordenadas del punto de intersección de las dos rectas.

Ejercicios

1. Escribe el conjunto solución de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables siguientes empleando el procedimiento gráfico.

a) $\begin{cases} x-2y=3 \\ x+3y=-2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+3y=8 \\ 4x+y=-1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x+y=3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x-3y=4 \\ 4x-8=6y \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+2y=2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x=4+3y \\ 4x=1-y \end{cases}$ g) $\begin{cases} 4x-6=-10y \\ 2x+5y=4 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2x+2y=0 \\ x+2y=-1 \end{cases}$

2. Escribe la ecuación de una recta que:

   a) sea paralela a la recta de ecuación $3x + 5y - 11 = 0$;

b) se interseca en un punto con la recta de ecuación $3x + 2y - 4 = 0$;
c) sea coincidente con la recta de ecuación $5x - 4y + 3 = 0$.

3. Con la ayuda de un asistente matemático determina el conjunto solución de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables siguientes utilizando el procedimiento gráfico.

a) $\begin{cases} x+2y=64 \\ 6y=5x \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x-3y=2 \\ x=3y \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2y=25-5x \\ 15x+10y=35 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 6x=22-5y \\ 15y=66-18x \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3x-2y+6=0 \\ 8x-7y+14=0 \end{cases}$

4. Escribe utilizando *El Geogebra* tres sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables tales que tengan:

a) solución única, b) infinitas soluciones, c) ninguna solución.

3.2 Procedimientos analíticos para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables

Como el procedimiento gráfico para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables no te permite encontrar la solución exacta de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables ahora estudiarás otros procedimientos.

Ejemplo 1:

Encontrar la solución del sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=0 \end{cases}$

Solución:

Para determinar el tipo de solución despejas la variable y en ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} y=-x+3 \\ y=2x \end{cases}$$

Como las pendientes de las rectas son diferentes puedes afirmar que el sistema tiene solución única. Ya conoces que la solución del sistema tiene que ser solución de cada ecuación del sistema, luego, para hallarla tienes que encontrar el par de números reales que satisfaga ambas ecuaciones del sistema. Para esto puedes utilizar una tabla y darle valores a una de las variables, sustituir en la primera ecuación el valor dado para hallar el valor de la otra variable y verificar en la segunda ecuación si esos valores de las variables la transforman en una proposición verdadera (tabla 3.1).

Tabla 3.1

x	–2	–1	0	1
$y = 3 - x$	$y = 3 - (-2) = 5$	$3 - (-1) = 4$	$3 - 0 = 3$	$3 - 1 = 2$
$2x - y$	$2(-2) - 5 = -9$	$2(-1) - 4 = -6$	$0 - 3 = -3$	$2 - 2 = 0$

Observa que para encontrar la solución:

- Le das un valor a la variable x.
- Sustituyes el valor dado a la variable x en la primera ecuación y hallas el valor de la variable y.
- Sustituyes las variables por los valores determinados en el miembro izquierdo de la segunda ecuación y compruebas si satisfacen la segunda ecuación.
- Repites este proceso hasta encontrar los valores de las variables que satisfacen la segunda ecuación.

Luego, la solución del sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables es el par (1; 2).

Está claro que este procedimiento es muy engorroso, pues no siempre las soluciones son números enteros ni se encuentran tan fácilmente, por lo que es necesario encontrar un proceder que posibilite determinar la solución, partiendo de lo que ya has estudiado en grados anteriores.

Primeramente vas a estudiar otras propiedades que son necesarias para encontrar el procedimiento de solución.

Teorema:

Para todo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ si se cumple que $a = b$ y $c = d$, entonces:

- $a + c = b + d$
- $a - c = b - d$
- $a \cdot c = b \cdot d$
- $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ $(c \neq 0, d \neq 0)$

Nota que este teorema expresa que si adicionas, sustraes, multiplicas o divides miembro a miembro dos igualdades, obtienes una igualdad. Esta propiedad es válida para las ecuaciones.

Definición:

Dos sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables son equivalentes si y solo si tienen el mismo conjunto solución en el mismo conjunto en el que toman valores las variables.

Ya conoces las transformaciones equivalentes de las ecuaciones lineales y que cuando aplicas transformaciones equivalentes a una ecuación, obtienes una nueva ecuación que es equivalente a la inicial, es decir, que tienen el mismo conjunto solución.

En un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables puedes aplicar a una de sus ecuaciones estas transformaciones y obtienes un sistema equivalente. Además, hay otras transformaciones equivalentes para los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables que se aplican en las dos ecuaciones del sistema y que como resultado de su aplicación resulta un sistema equivalente.

Transformaciones equivalentes:

- Intercambiar las ecuaciones del sistema.

  Por ejemplo, los sistemas $\begin{cases} 8x - \frac{1}{2}y = 5 \\ -x + 2y = 11 \end{cases}$ y $\begin{cases} -x + 2y = 11 \\ 8x - \frac{1}{2}y = 5 \end{cases}$ son equivalentes, observa que se han intercambiado sus ecuaciones.
- Sustituir una ecuación del sistema por otra que se obtiene al adicionarle (sustraerle) un múltiplo cualquiera de la otra ecuación del sistema.

Por ejemplo, en el sistema $\begin{cases} 3m + 7n = 13 \\ 3m + 2n = 8 \end{cases}$ la segunda ecuación la puedes sustituir por la ecuación que resulta de multiplicar la primera ecuación por –1 y adicionarla con la segunda. Multiplicas $3m + 7n = 13$ por –1 y resulta $-3m - 7n = -13$. Adicionas miembro a miembro las ecuaciones $-3m - 7n = -13$ y $3m + 2n = 8$ y obtienes la ecuación:

$$\begin{array}{r} -3m - 7n = -13 \\ 3m + 2n = 8 \\ \hline -5n = -5 \end{array}$$

Entonces, los sistemas $\begin{cases} 3m + 7n = 13 \\ 3m + 2n = 8 \end{cases}$ y $\begin{cases} 3m + 7n = 13 \\ \quad -5n = -5 \end{cases}$ son equivalentes.

Observa que cuando aplicaste esta transformación equivalente, obtuviste un sistema equivalente al dado, o sea, un sistema que tiene el mismo conjunto solución que el sistema original, fíjate que en el sistema obtenido se puede determinar el valor de la variable n y a partir de este, el valor de la variable m, por lo tanto, el propósito de emplear las transformaciones equivalentes es obtener un sistema en el que se pueda determinar fácilmente su conjunto solución.

3.2.1 Procedimiento de sustitución

Hasta ahora solo sabes determinar cuántas soluciones tiene un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables y con el procedimiento gráfico no siempre puedes determinar la solución exacta, luego, es necesario encontrar cómo resolver los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables. Como ya conoces el procedimiento de solución de las ecuaciones lineales en una variable, trata de transformar el sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables de forma tal que obtengas una ecuación lineal en una variable, que ya sabes resolver.

Por ejemplo, en el sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables siguiente:

$$\begin{cases} 3x+y=17 \\ 2x+y=12 \end{cases}$$

Ya conoces que si en un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables a una ecuación le aplicas transformaciones equivalentes, el sistema resultante es equivalente al original y, por lo tanto, tienen el mismo conjunto solución. Luego, si en la segunda ecuación del sistema despejas la variable y, obtienes el sistema equivalente:

$$\begin{cases} 3x+y=17 \\ \qquad y=12-2x \end{cases}$$

Como estás tratando de transformar el sistema en una ecuación lineal, observa que si sustituyes en la primera ecuación del sistema la variable y por la expresión algebraica $12 - 2x$, que obtuviste de despejar la variable y en la segunda ecuación del sistema dado, resulta una ecuación lineal en una variable: $3x + 12 - 2x = 7$.

Ahora, como ya conoces el procedimiento de solución de estas ecuaciones, puedes determinar el valor de la variable que es solución de esta ecuación.

$3x + 12 - 2x = 17$

$12 + x = 17$ (reduciendo términos semejantes)

$x = 17 - 12$ (trasponiendo términos de un miembro otro de la ecuación)

$x = 5$

Falta determinar el valor de la variable y, para esto sustituyes la variable x por el valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones del sistema dado.

Por ejemplo, sustituyes $x = 5$ en ecuación $y = 12 - 2x$:

$y = 12 - 2(5)$

$y = 12 - 10$

$y = 2$

Solo queda que compruebes que la solución hallada es la solución del sistema. Recuerda que para que un par ordenado de números reales sea solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables tiene que transformar cada una de las ecuaciones del sistema en una proposición verdadera, o sea, el par hallado tiene que ser solución de cada una de las ecuaciones del sistema, por lo tanto, tienes que comprobar la solución en cada ecuación del sistema.

Compruebas para $x = 5$, $y = 2$:

$3(5) + 2 = 15 + 2 = 17$
$2(5) + 2 = 10 + 2 = 12$

Luego, el par (5; 2) es solución del sistema y escribes su conjunto solución:

$S = \{(5; 2)\}$

En la práctica procedes así:

$$\begin{cases} 3x + y = 17 \\ 2x + y = 12 \end{cases}$$

Despejando la variable y en la segunda ecuación:

$y = 12 – 2x$

Sustituyendo $y = 12 – 2x$ en la ecuación $3x + y = 17$:

$$\begin{aligned} 3x + 12 - 2x &= 17 \\ 12 + x &= 17 \\ x &= 17 - 12 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Sustituyendo $x = 5$ en $y = 12 – 2x$:

$y = 12 – 2(5)$
$y = 12 – 10$
$y = 2$

Comprobación para $x = 5$, $y = 2$:

$3(5) + 2 = 15 + 2 = 17$
$2(5) + 2 = 10 + 2 = 12$
$S = \{(5; 2)\}$

Ejemplo 1:

Resuelve los sistemas de ecuaciones lineales con dos variables siguientes:

a) $\begin{cases} m + n = 10 \\ m + 5n = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 8x - 2y = 14 \\ y + 7 = 4x \end{cases}$ c) $\begin{cases} p - 5q = 8 \\ -7p + 8q = 25 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 8x - 5y = 13 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} a = 8 - 4b \\ a = -6 + 3b \end{cases}$ f) $\begin{cases} w = 4v \\ v + w = 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 4j + 2k = 8 \\ -5j - 23k = -51 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x = 3y \\ y + 5 = \dfrac{x}{2} \end{cases}$ i) $\begin{cases} a + 5(b - 1) = 4 \\ a = 8 - 5b \end{cases}$

Solución:

a) $\begin{cases} m + n = 10 \\ m + 5n = 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} m + n = 10 \\ m + 5n = 2 \end{cases}$$

Despejando la variable *m* en la primera ecuación:

$m = 10 - n$

Sustituyendo $m = 10 - n$ en la segunda ecuación del sistema:

$10 - n + 5n = 2$
$10 + 4n = 2$
$4n = 2 - 10$
$4n = -8$
$n = -2$

Sustituyendo $n = -2$ en $m + n = 10$, resulta:

$m - 2 = 10$
$m = 10 + 2$
$m = 12$

Comprobación:

$12 + (-2) = 12 - 2 = 10$
$12 + 5(-2) = 12 - 10 = 2$

Luego, la solución del sistema es (12; –2) y el conjunto solución es $S = \{(12; -2)\}$.

Nota que en este ejemplo despejaste la variable *m* en la primera ecuación, pero pudiste haberla despejado también en la segunda ecuación. En general, seleccionas cuál variable vas a despejar y en qué ecuación, donde más fácil te sea realizarlo.

b) $\begin{cases} 8x - 2y = 14 \\ \quad y + 7 = 4x \end{cases}$

Observa que en este caso es más fácil despejar la variable y en la segunda ecuación.

$$\begin{cases} 8x - 2y = 14 \\ \quad y + 7 = 4x \end{cases}$$

Despejando la variable y en la segunda ecuación:

$y = 4x - 7$

Sustituyendo $y = 4x - 7$ en la primera ecuación del sistema, resulta:

$$\begin{aligned} 8x - 2(4x - 7) &= 14 \\ 8x - 8x + 14 &= 14 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Observa que has obtenido una proposición verdadera para todo $x \in \mathbb{R}$, esto significa que todo número real satisface esta ecuación, luego el sistema tiene infinitas soluciones. Como la variable x puede tomar cualquier valor real y la variable y depende del valor de x, entonces el conjunto solución del sistema es $S = \{(x; 4x - 7): x \in \mathbb{R}\}$.

c) $\begin{cases} \quad p - 5q = 8 \\ -7p + 8q = 25 \end{cases}$

En este caso fíjate que la variable p es más fácil de despejar en la primera ecuación.

$$\begin{cases} \quad p - 5q = 8 \\ -7p + 8q = 25 \end{cases}$$

Despejando la variable p en la primera ecuación:

$p = 8 + 5q$

Sustituyendo $p = 8 + 5q$ en la segunda ecuación del sistema, resulta:

$$\begin{aligned} -7(8 + 5q) + 8q &= 25 \\ -56 - 35q + 8q &= 25 \\ -56 - 27q &= 25 \\ -27q &= 25 + 56 \\ -27q &= 81 \\ q &= \frac{81}{-27} \\ q &= -3 \end{aligned}$$

Sustituyendo $q = -3$ en $p - 5q = 8$, resulta:

$$\begin{aligned} p - 5(-3) &= 8 \\ p + 15 &= 8 \\ p &= 8 - 15 \\ p &= -7 \end{aligned}$$

Comprobación:

$-7 - 5(-3) = -7 + 15 = 8$
$-7(-7) + 8(-3) = 49 - 24 = 25$

Por tanto, la solución del sistema es el par $(-7; -3)$ y el conjunto solución es $S = \{(-7; -3)\}$.

d) $\begin{cases} 8x - 5y = 13 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$

Observa que la variable más fácil de despejar es la variable y en la segunda ecuación.

$$\begin{cases} 8x - 5y = 13 \\ \underline{3x + y = 2} \end{cases}$$

Despejando la variable y en la segunda ecuación:

$y = 2 - 3x$

Sustituyendo $y = 2 - 3x$ en la primera ecuación del sistema:

$$\begin{aligned} 8x - 5(2 - 3x) &= 13 \\ 8x - 10 + 15x &= 13 \\ -10 + 23x &= 13 \\ 23x &= 13 + 10 \\ 23x &= 23 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Sustituyendo $x = 1$ en $3x + y = 2$, resulta:

$$\begin{aligned} 3(1) + y &= 2 \\ 3 + y &= 2 \\ y &= 2 - 3 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Comprobación:

$8(1) - 5(-1) = 8 + 5 = 13$
$3(1) + (-1) = 3 - 1 = 2$

Luego, el par (1; –1) es la solución del sistema y su conjunto solución $S = \{(1; -1)\}$.

e) $\begin{cases} a = 8 - 4b \\ a = -\ 6 + 3b \end{cases}$

Aquí la variable a está despejada en las dos ecuaciones. Al sustituir la variable a en la primera ecuación por $a = -\ 6 + 3b$, resulta:

$$\begin{aligned} -\ 6 + 3b &= 8 - 4b \\ 3b + 4b &= 8 + 6 \\ 7b &= 14 \\ b &= 2 \end{aligned}$$

Este procedimiento es un caso particular del de sustitución, aquí está despejada la misma variable en las dos ecuaciones y a partir de sustituir la variable a en la primera ecuación por la expresión a que es igual la variable a en la segunda ecuación, fíjate que obtienes una igualdad entre los dos miembros de las ecuaciones en los que aparece nada más que una variable, la variable b. En la práctica al aplicar este proceder, que se conoce con el nombre de igualación, despejas la misma variable en las dos ecuaciones del sistema, igualas los miembros de las dos ecuaciones en los que aparece la otra variable y resuelves la ecuación lineal con una variable resultante.
Sustituyendo $b = 2$ en $a = 8 - 4b$, resulta:

$$\begin{aligned} a &= 8 - 4(2) \\ a &= 8 - 8 \\ a &= 0 \end{aligned}$$

Comprobación:

$$8 - 4(2) = 8 - 8 = 0 = a$$
$$-\ 6 + 3(2) = -\ 6 + 6 = 0 = a$$

Por tanto, el par (0; 2) es solución del sistema y su conjunto solución es $S = \{(0; 2)\}$.

f) $\begin{cases} w = 4v \\ v + w = 2 \end{cases}$

En la primera ecuación está despejada la variable w, despeja esta misma variable en la segunda ecuación para poder igualar las dos ecuaciones.

$$\begin{cases} w = 4v \\ w = 2 - v \end{cases}$$

Igualando los dos miembros derechos de ambas ecuaciones, resulta:

$$
\begin{aligned}
4v &= 2 - v \\
4v + v &= 2 \\
5v &= 2 \\
v &= \frac{2}{5}
\end{aligned}
$$

Sustituyendo $v = \frac{2}{5}$ en la primera ecuación del sistema:

$$w = 4\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$w = \frac{8}{5}$$

Comprobación:

$$4v = 4\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{8}{5} = w$$

$$v + w = \frac{2}{5} + \frac{8}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

Luego, el par $\left(\frac{2}{5}; \frac{8}{5}\right)$ es solución del sistema de ecuaciones lineales con dos variables y, por tanto, el conjunto solución es $S = \left\{\left(\frac{2}{5}; \frac{8}{5}\right)\right\}$.

g) $\begin{cases} 4j + 2k = 8 \\ -5j - 23k = -51 \end{cases}$

En este sistema no resulta tan fácil despejar una de las dos variables, pero conoces que en un sistema puedes aplicar a una ecuación las transformaciones equivalentes de las ecuaciones lineales y obtienes un sistema equivalente al original, es decir, con el mismo conjunto solución. Observa que si divides por dos la primera ecuación del sistema, obtienes una ecuación en la que puedes despejar la variable k fácilmente:

$$\begin{cases} 4j + 2k = 8 \quad (:2) \\ -5j - 23k = -51 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2j + k = 4 \\ -5j - 23k = -51 \end{cases}$$

Despejando la variable k en la primera ecuación:

$k = 4 - 2j$

Sustituyendo $k = 4 - 2j$ en la segunda ecuación del sistema:

$$\begin{aligned}
-5j - 23(4 - 2j) &= -51\\
-5j - 92 + 46j &= -51\\
-92 + 41j &= -51\\
41j &= -51 + 92\\
41j &= 41\\
j &= 1
\end{aligned}$$

Sustituyendo $j = 1$ en $4j + 2k = 8$:

$$\begin{aligned}
4 + 2k &= 8\\
2k &= 8 - 4\\
2k &= 4\\
k &= 2
\end{aligned}$$

Comprobación:

$$\begin{aligned}
4(1) + 2(2) &= 4 + 4 = 8\\
-5(1) - 23(2) &= -5 - 46 = -51
\end{aligned}$$

Entonces el par (1; 2) es solución del sistema y su conjunto solución $S = \{(1; 2)\}$.

h) $\begin{cases} x = 3y \\ y + 5 = \dfrac{x}{2} \end{cases}$

R¡! Observa que en este caso la variable x ya está despejada en la primera ecuación, luego, basta sustituir en la segunda ecuación la variable x por $3y$.

$$\begin{cases} x = 3y \\ y + 5 = \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

Sustituyendo $x = 3y$ en la segunda ecuación:

$$y + 5 = \frac{3y}{2}$$

$2(y + 5) = 3y$ (multiplicando por 2 ambos miembros de la ecuación)

$$\begin{aligned}
2y + 10 &= 3y\\
2y - 3y &= -10\\
-y &= -10\\
y &= 10
\end{aligned}$$

Sustituyendo $y = 10$ en $x = 3y$:

$x = 3\ (10) = 30$

Comprobación:

$x = 30$
$3y = 3(10) = 30$, luego, $x = 3y$
$y + 5 = 10 + 5 = 15$

$$\frac{x}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

Por lo tanto, el par (30; 10) es la solución del sistema. Observa que es la misma solución que la que obtuviste por el procedimiento gráfico.

i) $\begin{cases} a + 5(b-1) = 4 \\ a = 8 - 5b \end{cases}$

$$\begin{cases} a + 5(b-1) = 4 \\ \underline{\qquad\qquad a = 8 - 5b} \end{cases}$$

Sustituyendo $a = 8 - 5b$ en la primera ecuación:

$$\begin{aligned} 8 - 5b + 5(b - 1) &= 4 \\ 8 - 5b + 5b - 5 &= 4 \\ 3 &= 4 \end{aligned}$$

Fíjate que has obtenido una contradicción, esto quiere decir que no existe un número real que satisfaga esta ecuación, por lo tanto, el sistema no tiene solución y su conjunto solución es el conjunto vacío, luego, $S = \phi$.

Recuerda que:

Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables empleando el procedimiento de sustitución, debes:

1. Despejar una variable en una de las ecuaciones del sistema.
2. Sustituir en la otra ecuación del sistema la expresión obtenida en 1.
3. Resolver la ecuación lineal con una variable obtenida en 2.
4. Sustituir el valor de la variable hallada en cualquier ecuación del sistema y determinar el valor de la otra variable.
5. Comprobar que los valores determinados para las dos variables satisfacen las dos ecuaciones del sistema.

3.2.2 Procedimiento de adición-sustracción

Además del procedimiento que has estudiado, aplicando otras transformaciones equivalentes a los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables, puedes obtener un nuevo procedimiento para obtener la solución del sistema.

Por ejemplo, sea el sistema:

$$\begin{cases} 3x + y = 17 \\ 2x + y = 12 \end{cases}$$

Ya conoces que las transformaciones equivalentes conducen a sistemas equivalentes y el propósito de aplicarlas a los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables es obtener un sistema en el que se pueda determinar fácilmente el conjunto solución.

Observa que en este sistema los coeficientes de la variable y son iguales, luego, si a una ecuación le sustraes la otra, resulta una ecuación lineal con una sola variable.

$$\underline{\begin{cases} 3x + y = 17 \\ 2x + y = 12 \end{cases}}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 17 \\ \qquad x = 5 \end{cases} \text{ (sustrayendo a la primera ecuación la segunda ecuación)}$$

Fíjate que en la segunda ecuación la variable x ha quedado despejada, luego, ya has determinado su valor, por lo tanto, para determinar el valor de la variable y, solo tienes que sustituir la variable x por 5 en cualquiera de las ecuaciones del sistema.

Por ejemplo, sustituyendo $x = 5$ en la primera ecuación, resulta:

$$\begin{aligned} 3(5) + y &= 17 \\ 15 + y &= 17 \\ y &= 17 - 15 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

En la práctica procedes así:

$$\underline{\begin{cases} 3x + y = 17 \\ 2x + y = 12 \end{cases}}$$

$x = 5$ (sustrayendo a la primera ecuación la segunda ecuación del sistema)

Sustituyendo $x = 5$ en $3x + y = 17$:

$$\begin{aligned} 3(5) + y &= 17 \\ 15 + y &= 17 \\ y &= 17 - 15 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Comprobación:

$3(5) + 2 = 15 + 2 = 17$
$2(5) + 2 = 10 + 2 = 12$

Luego, el par (5; 2) es solución del sistema y su conjunto solución es $S = \{(5; 2)\}$.

Observa que lo esencial de este procedimiento es lograr que los coeficientes de una misma variable del sistema sean opuestos o iguales utilizando las transformaciones equivalentes, para así, adicionando o sustrayendo las ecuaciones, obtener una ecuación lineal con una variable.

Fíjate que para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos variables por este procedimiento, tienes primeramente que identificar en qué variable del sistema los coeficientes tienen esta característica y en caso de no tenerla, determinar por qué números distintos de cero hay que multiplicar las ecuaciones del sistema para llegar a tener una misma variable con coeficientes opuestos o iguales.

Como en este proceder las ecuaciones del sistema se adicionan o sustraen para obtener una ecuación lineal en una variable, se le denomina procedimiento de adición-sustracción.

Ejemplo 1:

Resolver los sistemas de ecuaciones lineales con dos variables siguientes:

a) $\begin{cases} 5x + 5y = 9 \\ 4x - 5y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3a + 4b = 18 \\ 5a + 4b = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2m - 5n = -1 \\ m + 8n = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x - y = 3 \\ -10x + 2y = 8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 9p - 2q = 30 \\ 7p + 3q = 37 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x = 3y \\ y + 5 = \dfrac{x}{2} \end{cases}$ g) $\begin{cases} 2(e - f) + 11f = 4(1 - e) \\ 7e + 3(3f + 5) = e + 19 \end{cases}$

Solución:

a) $\begin{cases} 5x + 5y = 9 \\ 4x - 5y = 0 \end{cases}$

Observa que en este sistema los coeficientes de la variable y son números opuestos, luego, si a la primera ecuación le adicionas la segunda, resulta una ecuación lineal en una sola variable.

$$\begin{cases} 5x + 5y = 9 \\ 4x - 5y = 0 \end{cases}$$

$9x = 9$ (adicionando ambas ecuaciones del sistema)
$x = 1$

Sustituyendo $x = 1$ en la ecuación $4x - 5y = 0$, resulta:

$$4 - 5y = 0$$
$$-5y = -4$$
$$y = \frac{4}{5}$$

Comprobación:

$$5(1) + 5\left(\frac{4}{5}\right) = 5 + 4 = 9$$

$$4(1) - 5\left(\frac{4}{5}\right) = 4 - 4 = 0$$

Entonces, el par $\left(1; \frac{4}{5}\right)$ es solución del sistema.

b) $\begin{cases} 3a + 4b = 18 \\ 5a + 4b = 6 \end{cases}$

Observa que en este caso la variable b en ambas ecuaciones tiene el mismo coeficiente, luego, si a la segunda ecuación le sustraes la primera, obtienes una ecuación lineal en una variable.

$$\begin{cases} 3a + 4b = 18 \\ 5a + 4b = 6 \end{cases}$$

$2a = -12$ (sustrayendo a la segunda ecuación la primera)

$a = -6$

Sustituyendo $a = -6$ en $3a + 4b = 18$, resulta:

$$3(-6) + 4b = 18$$
$$-18 + 4b = 18$$
$$4b = 36$$
$$b = 9$$

Comprobación:

$3(-6) + 4(9) = -18 + 36 = 18$

$5(-6) + 4(9) = -30 + 36 = 6$

Entonces, el par (– 6; 9) es solución del sistema.

c) $\begin{cases} 2m - 5n = -1 \\ m + 8n = 3 \end{cases}$

Fíjate que en este caso, tanto la variable *m* como la variable *n*, tienen coeficientes diferentes, pero si multiplicas la segunda ecuación, por ejemplo, por –2 se obtiene un sistema equivalente al inicial en el cual los coeficientes de la variable *m* son opuestos.

$$\begin{cases} 2m - 5n = -1 \\ \underline{m + 8n = 3} \quad (\cdot(-2)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2m - 5n = -1 \\ \underline{-2m - 16n = -6} \end{cases}$$

$-21n = -7$ (adicionando ambas ecuaciones del sistema)

$$n = \frac{7}{21}$$

$$n = \frac{1}{3}$$

Sustituyendo $n = \frac{1}{3}$ en $m + 8n = 3$:

$$m + 8\left(\frac{1}{3}\right) = 3$$

$$m + \frac{8}{3} = 3$$

$$m = 3 - \frac{8}{3}$$

$$m = \frac{1}{3}$$

Comprobación:

$$\frac{2}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{3}{3} = -1$$

$$\frac{1}{3} + \frac{8}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

Por tanto, el par $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ es solución del sistema.

d) $\begin{cases} 5x - y = 3 \\ -10x + 2y = 8 \end{cases}$

$\begin{cases} 5x - y = 3 & (\cdot\ 2) \\ \underline{-10x + 2y = 8} \end{cases}$

$\begin{cases} 10x - 2y = 6 \\ \underline{-10x + 2y = 8} \end{cases}$

0 = 14 (adicionando ambas ecuaciones del sistema)

Observa que has obtenido una contradicción, luego, el sistema no tiene solución.

e) $\begin{cases} 9p - 2q = 30 \\ 7p + 3q = 37 \end{cases}$

En este sistema los coeficientes de las dos variables son diferentes y uno no es múltiplo del otro, luego, debes decidir cuál es la variable que vas a eliminar. En estos casos es necesario que multipliques las dos ecuaciones por números distintos de cero para que los coeficientes de una de las variables sean iguales u opuestos. Observa que es más fácil transformar el sistema de manera tal que la variable q *tenga en las ecuaciones coeficientes opuestos. Para esto fíjate que basta que multipliques la primera ecuación por 3 y la segunda por 2.*

$\begin{cases} 9p - 2q = 30 & (\cdot 3) \\ \underline{7p + 3q = 37} & (\cdot 2) \end{cases}$

$\begin{cases} 27p - 6q = 90 \\ \underline{14p + 6q = 74} \end{cases}$

$41p = 164$ (adicionando ambas ecuaciones del sistema)

$p = \frac{164}{41}$

$p = 4$

Sustituyendo $p = 4$ en $7p + 3q = 37$:

$7(4) + 3q = 37$

$28 + 3q = 37$

$3q = 37 - 28$

$3q = 9$

$q = 3$

Comprobación:

9(4) – 2(3) = 36 – 6 = 30
7(4) + 3(3) = 28 + 9 = 37

Luego, el par (4; 3) es solución del sistema.

f) $\begin{cases} x = 3y \\ y + 5 = \dfrac{x}{2} \end{cases}$

R¡! Resuelve este sistema, pero ahora utilizando el procedimiento de adición-sustracción. Observa que para esto debes primero transformar las ecuaciones.

$$\begin{cases} x = 3y \\ y + 5 = \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ -\dfrac{x}{2} + y = -5 \quad (\cdot 2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ -x + 2y = -10 \end{cases}$$

$$-y = -10$$
$$y = 10$$

Sustituyendo $y = 10$ en $x = 3y$:

$x = 3(10) = 30$

Por tanto, el par (30; 10) es la solución del sistema.

Fíjate que este mismo sistema lo has resuelto por los tres procedimientos para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables que has estudiado.

g) $\begin{cases} 2(e - f) + 11f = 4(1 - e) \\ 7e + 3(3f + 5) = e + 19 \end{cases}$

Observa que en este caso, primeramente debes transformar las ecuaciones del sistema para llevarlo a la forma $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$.

$$\begin{cases} 2(e-f) + 11f = 4(1-e) \\ 7e + 3(3f+5) = e + 19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2e-2f + 11f = 4-4e \\ 7e + 9f + 15 = e + 19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2e+9f = 4-4e \\ 7e+9f+15 = e+19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2e+4e+9f = 4 \\ 7e+9f-e = 19-15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6e+9f = 4 \\ 6e+9f = 4 \end{cases}$$

$0 = 0$ (sustrayendo ambas ecuaciones del sistema)

Luego, el sistema tiene infinitas soluciones y todo par ordenado de la forma $\left(e; -\frac{2}{3}e+\frac{4}{9}\right)$ con $e \in \mathbb{R}$ es solución del sistema.

Recuerda que:

Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables empleando el procedimiento de adición-sustracción debes:

1. Transformar el sistema a la forma $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$.
2. Identificar la variable que se va a eliminar.
3. Determinar qué transformaciones equivalentes son necesarias aplicar para que los coeficientes de la variable seleccionada sean opuestos o iguales.
4. Aplicar las transformaciones equivalentes seleccionadas para que se obtenga que los coeficientes de una variable sean opuestos o iguales.
5. Adicionar o sustraer miembro a miembro las ecuaciones transformadas para obtener una ecuación lineal con una variable.
6. Resolver la ecuación lineal con una variable obtenida.
7. Sustituir el valor de la variable hallada en una de las ecuaciones del sistema para determinar el valor de la otra variable.
8. Comprobar que los valores determinados para las dos variables satisfacen las dos ecuaciones del sistema.

Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, puedes emplear cualquiera de los procedimientos estudiados, aunque siempre debes detenerte a analizar cuál de ellos es el más ventajoso utilizar en cada caso.

Por ejemplo:

$\begin{cases} 2x+3y=22 \\ y=3x \end{cases}$ Observa que en la segunda ecuación hay una variable que está despejada, por lo tanto, en este caso lo más recomendable es que utilices el procedimiento de sustitución.

$\begin{cases} 3x-y=21 \\ -8x+y=4 \end{cases}$ En este caso, fíjate que los coeficientes de la variable y son opuestos, luego, basta que adiciones las dos ecuaciones para reducir el sistema a una ecuación lineal con una variable, por lo tanto, el proceder más recomendable es el de adición-sustracción.

$\begin{cases} 3x+7y=13 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$ Nota que la variable x tiene el mismo coeficiente en las dos ecuaciones, por lo que si sustraes a la primera ecuación la segunda, eliminas una variable y obtienes una ecuación lineal con una variable, luego, en este caso, el procedimiento más recomendable es el de adición-sustracción.

$\begin{cases} x=10-y \\ x=y+2 \end{cases}$ Como en las dos ecuaciones la variable x está despejada, en este caso es mejor que utilices el procedimiento de igualación.

$\begin{cases} 9x+11y=42 \\ 5x+22y=13 \end{cases}$ Observa que el procedimiento de sustitución e igualación, en este caso es muy trabajoso, el más conveniente es el de adición-sustracción. Aquí los coeficientes de la variable x ni son iguales ni opuestos y lo mismo ocurre para la variable y, luego, es necesario que selecciones en qué variable es más fácil determinar el número por el que hay que multiplicar las ecuaciones para que los coeficientes de esa variable sean opuestos o iguales. Nota que aquí lo más ventajoso es seleccionar la variable y, pues multiplicando la primera ecuación por –2 ya se obtiene el opuesto del coeficiente de la variable y en la segunda ecuación.

$\begin{cases} 3(x+2)=2y \\ 2(y+5)=7x \end{cases}$ En este caso está claro que primeramente debes eliminar los signos de agrupación y llevar el sistema a la forma $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$. Cuando elimines los paréntesis observa que los coeficientes de la variable y son opuestos, luego, el procedimiento más ventajoso a utilizar es el de adición-sustracción.

Ahora, resuelve los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables anteriores por el procedimiento seleccionado.

Ejercicios

1. Resuelve los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables siguientes:

a) $\begin{cases} y = 4x - 34 \\ x - 5y = 18 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x = 21 + 15y \\ y = 2x - 14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ y = x - 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5a - b = 13 \\ 3a + b = 11 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} -p + q = -4 \\ p - q = 4 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 9m + n = 0 \\ 3m + n = 0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 3r - s = 9 \\ 3r + 2s = 25 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 3r + 4s = 7 \\ 2r + 4s = 16 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 2m - 4n = 6 \\ m + 2n = -1 \end{cases}$ k) $\begin{cases} 8w - v = 0 \\ w + 2v = 17 \end{cases}$ l) $\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

m) $\begin{cases} 3c - 6d = 16 \\ 3c - 2d = 0 \end{cases}$ n) $\begin{cases} 3w - 4v = 18 \\ -5w + v = -13 \end{cases}$ ñ) $\begin{cases} 4x - 2y = 10 \\ 3x - 5y = 14 \end{cases}$

o) $\begin{cases} 4m + 3n = 7 \\ 5m - 2n = 26 \end{cases}$ p) $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$ q) $\begin{cases} -0{,}2a + 0{,}5b = -0{,}7 \\ 0{,}7a + 0{,}5b = 2 \end{cases}$

r) $\begin{cases} 5p + 0{,}7q = 10{,}6 \\ 0{,}7p + 0{,}2q = 2{,}3 \end{cases}$ s) $\begin{cases} \frac{1}{2}w - \frac{3}{2}v = -2 \\ w - \frac{1}{2}v = 6 \end{cases}$ t) $\begin{cases} -\frac{2}{3}m + \frac{3}{2}n = 5 \\ \frac{1}{2}m - \frac{4}{3}n = -5 \end{cases}$

u) $\begin{cases} p + q = 35 \\ \frac{1}{2}p - \frac{1}{5}q = 7 \end{cases}$ v) $\begin{cases} \frac{1}{2}a - \frac{1}{5}b = 8 \\ b = 140 + a \end{cases}$ w) $\begin{cases} c + d = 60 \\ \frac{c}{6} + \frac{d}{3} = 16 \end{cases}$

x) $\begin{cases} \frac{w}{2} + \frac{v}{3} = 4 \\ \frac{w}{3} + \frac{v}{2} = 1 \end{cases}$ y) $\begin{cases} 4x + 3(y - 1) = 8 \\ 4x - y = 3 \end{cases}$ z) $\begin{cases} 2(n - 3) - 3m = 2 \\ n - 4m = 19 \end{cases}$

2. Halla el conjunto solución de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables siguientes:

a) $\begin{cases} 7(a + 1) + 2b = 1 \\ 4a - (b + 6) = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3(p + 2) - 4q = 10 \\ p - 3 - 2(q - p) = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} j - 3k + 2 = 0 \\ 2(j + k) - 36 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} = x-1 \\ \dfrac{x-y}{2} = y+1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \dfrac{m+3n}{2} = 5 \\ 4 - \dfrac{2m-n}{2} = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \dfrac{a+1}{4} + \dfrac{b+2}{10} = \dfrac{2(b-a)}{5} \\ \dfrac{a-1}{4} - \dfrac{b-2}{12} = \dfrac{3b-8a}{18} \end{cases}$

3. Resuelve sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables para completar la tabla 3.2.

Tabla 3.2

$x + y - 6$	$x - y + 4$	x	y
4	10		
6	–8		
$2x + 5y$	$3x + 3y$		
$5 - 3x$	$4 + 2(x + y)$		

4. Escribe el conjunto solución de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables siguientes:

a) $\begin{cases} 7p + 5q = -4 \\ 4p + 4q = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 14a - 7b = -21 \\ -2a + b = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -3c + 5d = -5 \\ 3c - 25d = -25 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4e + 3(f-4) = 10 - e \\ 2(e+1) + 5f = 7 \end{cases}$

5. En el sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables $\begin{cases} (2a+b)x - ay = b \\ (a-b)x + y = a + b \end{cases}$

determina el valor de a y b para que el par ordenado (–1; 2) sea solución del sistema.

3.3 Resolución de problemas que conducen a sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables

Como ya conoces procedimientos para encontrar la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables puedes dar respuesta al problema planteado al inicio del capítulo.

R¡! La cantidad de estudiantes integrantes del Círculo de Interés Pedagógico es el triplo de la cantidad de estudiantes pertenecientes al Círculo de Interés de Medicina Natural y Tradicional. Si se incorporan cinco estudiantes más al Círculo de Interés de Medicina Natural y Tradicional, entonces este círculo tendría la mitad de integrantes que tiene el Círculo de Interés Pedagógico. ¿Cuántos integrantes tiene cada uno de estos círculos de interés?

x: cantidad de estudiantes integrantes del Círculo de Interés Pedagógico

y: cantidad de estudiantes pertenecientes al Círculo de Interés de Medicina Natural y Tradicional

$$\begin{cases} x = 3y \\ y + 5 = \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ -\dfrac{1}{2}x + y = -5 \quad (\cdot 3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ -\dfrac{3}{2}x + 3y = -15 \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2}x = -15$$

$$x = -15 \cdot (-2)$$

$$x = 30$$

Sustituyendo $x = 30$ en $x - 3y = 0$, resulta:

$30 - 3y = 0$, luego, $y = 10$.

Observa que en este caso para resolver el sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables utilizaste el procedimiento de adición-sustracción y para eliminar la variable y, en esta ocasión multiplicaste la segunda ecuación por 3.

Compruebas en el texto del problema la solución encontrada. El Círculo de Interés Pedagógico tiene 30 integrantes y el de Medicina Natural y Tradicional 10. Pero, $30 = 3 \cdot 10$, luego, la cantidad de estudiantes integrantes del Círculo de Interés Pedagógico es *el triplo de la cantidad de estudiantes pertenecientes al Círculo de Interés de Medicina Natural y Tradicional.* $10 + 5 = 15$ y 15 es la mitad de 30, por tanto, *si se incorporan cinco estudiantes más al Círculo de Interés de Medicina Natural y Tradicional, entonces este círculo tendría la mitad de integrantes que tiene el Círculo de Interés Pedagógico.*

Respuesta: El Círculo de Interés Pedagógico tiene 30 integrantes y el de Medicina Natural y Tradicional, 10.

Observa que en el texto del problema aparecen dos relaciones que al traducirlas del lenguaje común al algebraico, obtuviste las dos ecuaciones del sistema y como se emplearon dos variables, escribiste el significado de cada una de ellas.

Recuerda que al resolver un problema, además de seguir los pasos que ya conoces, debes siempre reflexionar en cómo procediste y qué recursos empleaste para encontrar un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables que dé solución al problema y analizar si hay otra vía más sencilla para solucionarlo. Podrás comprobar que muchos problemas que has resuelto con ecuaciones lineales con una variable ahora los puedes resolver utilizando sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables y viceversa.

Ejemplo 1:

Como parte de la campaña de higienización de la ciudad, en un consejo popular se formaron dos brigadas de fumigación contra el mosquito *Aedes Aegypti.* Un fin de semana *las dos brigadas fumigaron un total de 451 viviendas.* Si *la Brigada 1 hubiese fumigado 20 casas más ese fin de semana, entonces hubiese fumigado el duplo de la cantidad de casas fumigadas por la Brigada 2.* ¿Cuál de las dos brigadas fumigó más cantidad de casas ese fin de semana?

Solución:

Este problema es sobre la cantidad de casas de un consejo popular que fumigan dos brigadas. En el texto se informa la cantidad de casas que fumigaron en total estas dos brigadas y una relación entre la cantidad de casas que fumigó cada una de estas, en la que aparecen las palabras clave más y duplo. Observa que para poder dar respuesta a la interrogante del problema debes conocer la cantidad de casas que fumigó cada brigada y las dos informaciones que aparecen en el texto te permiten establecer dos relaciones de igualdad entre la cantidad de casas que fumigaron cada una de las brigadas. Si asignas a la variable x la cantidad de casas fumigadas por la Brigada 1 y a la variable y, la cantidad de casas fumigadas por la Brigada 2 y traduces del lenguaje común al algebraico las dos relaciones que aparecen en el texto del problema, obtienes las ecuaciones $x + y = 451, x + 20 = 2y$ que conforman el sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables $\begin{cases} x + y = 451 \\ x + 20 = 2y \end{cases}$.

x: cantidad de casas fumigadas por la Brigada 1.

y: cantidad de casas fumigadas por la Brigada 2.

$$\begin{cases} x + y = 451 \\ x + 20 = 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 451 \\ \underline{x - 2y = -20} \quad (\cdot(-1)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 451 \\ \underline{-x + 2y = 20} \end{cases}$$

$$3y = 471$$

$$y = \frac{471}{3}$$

$$y = 157$$

Sustituyendo $y = 157$ en $x + y = 451$:

$$x + 157 = 451$$

$$x = 451 - 157$$

$$x = 294$$

Compruebas en el texto del problema la solución encontrada. La Brigada 1 fumigó 294 casas y la Brigada 2, 157. Pero, 294 + 157 = 451 luego, *las dos brigadas fumigaron 451 casas.* Además, 294 + 20 = 314 y 2 · 157 = 314, por tanto, *si la Brigada 1 hubiese fumigado 20 casas más, entonces hubiese fumigado el duplo de la cantidad de casas fumigadas por la Brigada 2.*

Respuesta: La brigada 1 fumigó más casas ese fin de semana.

Ejemplo 2:

A los estudiantes del noveno grado de una secundaria básica se les realizó una encuesta para conocer sus preferencias en la continuidad de estudios. La encuesta arrojó que *65 estudiantes desean en primera opción ingresar al preuniversitario o a la escuela pedagógica* y que *el duplo de la cantidad de estudiantes que prefieren el preuniversitario excede en 10 a la cantidad de estudiantes que optan por la escuela pedagógica.* ¿Cuántos estudiantes del noveno grado de esta secundaria básica desean ingresar al preuniversitario en primera opción y cuántos a la escuela pedagógica?

Solución:

El problema trata sobre la preferencia de los estudiantes de noveno grado en la continuidad de estudios. En el texto te informan la cantidad de estudiantes que desean ingresar en primera opción al preuniversitario y a la escuela pedagógica, pero no te dicen cuántos estudiantes desean ingresar en cada uno de estos tipos de centros de educación media superior. Si designas por p la cantidad de estudiantes que desean ingresar al preuniversitario en primera opción y por e la cantidad de estudiantes que desean ingresar a la escuela pedagógica en primera opción, entonces $p + e = 65$. Fíjate que en el texto del problema hay otra relación entre estas cantidades en la que aparecen las palabras clave duplo y excede. Al traducir del lenguaje común al algebraico esta relación, obtienes la ecuación $2p - 10 = e$. Observa que para resolver el problema se tienen que satisfacer las dos ecuaciones encontradas, luego, para encontrar la solución del problema hay que resolver el sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables $\begin{cases} p+e=65 \\ 2p-10=e \end{cases}$.

p: estudiantes que desean ingresar al preuniversitario en primera opción.

e: estudiantes que desean ingresar a la escuela pedagógica en primera opción.

$$\begin{cases} p+e=65 \\ \underline{2p-10=e} \end{cases}$$

Sustituyendo $e = 2p - 10$ en $p + e = 65$:

$$\begin{aligned} p+2p-10&=65 \\ 3p-10&=65 \\ 3p&=65+10 \\ 3p&=75 \\ p&=\frac{75}{3} \\ p&=25 \end{aligned}$$

Sustituyendo $p = 25$ en $p + e = 65$, resulta:

$$\begin{aligned} 25 + e &= 65 \\ e &= 65 - 25 \\ e &= 40 \end{aligned}$$

Fíjate que en este caso utilizaste el procedimiento de sustitución para resolver el sistema.

Compruebas en el texto del problema la solución encontrada. 40 estudiantes desean ingresar a la escuela pedagógica y 25 al preuniversitario y $40 + 25 = 65$, luego, hay *65 estudiantes que desean el ingreso al preuniversitario y a la escuela pedagógica como primera opción.* Además, $2 \cdot 25 = 50$ y 50 excede en 10 a 40, por lo tanto, *el duplo de la cantidad de estudiantes que prefieren el preuniversitario excede en 10 a la cantidad de estudiantes que prefieren la escuela pedagógica.* Ya puedes redactar la respuesta a la interrogante del problema.

Respuesta: De esa secundaria básica 40 estudiantes de noveno grado desean ingresar en la escuela pedagógica en primera opción y 25, al preuniversitario.

Otra vía:

Este problema lo puedes resolver también con una ecuación lineal en una variable.

p: estudiantes que desean ingresar al preuniversitario en primera opción.

$65 - p$: estudiantes que desean ingresar a la escuela pedagógica en primera opción.

$$\begin{aligned} 2p - 10 &= 65 - p \\ 2p + p &= 65 + 10 \\ 3p &= 75 \\ p &= 25 \end{aligned}$$

Sustituyendo $p = 25$ en la expresión $65 - p = 65 - 25 = 40$. Luego, 25 estudiantes desean ingresar al preuniversitario en primera opción y 40, a la escuela pedagógica.

Recuerda que siempre que resuelvas un problema debes detenerte a reflexionar cuál es la vía óptima para resolverlo.

Ejemplo 3:

Halla *dos números cuya suma es 184 y al dividirlos el cociente es dos y el resto siete.*

Solución:

El problema trata sobre dos números que hay que encontrar a partir de dos relaciones entre ellos. La primera relación es que la suma de los dos números es 184 y la segunda, que al dividir el mayor entre el menor la división no es exacta, siendo dos el cociente y el resto siete. Como no sabes cuáles son los números, si designas por m al número mayor y por n al número menor, y la suma de los dos números es 184, entonces obtienes la ecuación $m + n = 184$. Ya conoces la relación existente entre el dividendo, el divisor, el cociente y el resto en una división, es decir, que el dividendo es igual al cociente por el divisor más el resto, luego, la segunda relación que aparece en el texto del problema indica que $m = 2 \cdot n + 7$ y obtienes la segunda ecuación del sistema.

m: número mayor

n: número menor

$$\begin{cases} m + n = 184 \\ m = 2n + 7 \end{cases}$$

Sustituyendo $m = 2n + 7$ en $m + n = 184$:

$$\begin{aligned} 2n + 7 + n &= 184 \\ 3n + 7 &= 184 \\ 3n &= 184 - 7 \\ 3n &= 177 \\ n &= \frac{177}{3} \\ n &= 59 \end{aligned}$$

Sustituyendo $n = 59$ en $m = 2n + 7$, resulta:
$m = 2 \cdot 59 + 7 = 118 + 7 = 125$

Fíjate que en este caso el procedimiento más fácil para resolver el sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables es el de sustitución.

Compruebas en el texto del problema la solución encontrada: $125 + 59 = 184$, luego, *la suma de los dos números es 184.* Al efectuar la división de 125 por 59, resulta que *el cociente es dos y el resto siete:*

$$\begin{array}{r|l} 125 & 59 \\ \hline -118 & 2 \\ \hline 7 & \end{array}$$

Respuesta: Los números hallados son 125 y 59.

Ejemplo 4:

En un *triángulo isósceles, la razón entre la amplitud de uno de los ángulos de la base y la amplitud del ángulo opuesto a ella es 5 : 8.* Calcula la amplitud de los ángulos interiores del triángulo.

Solución:

Este problema trata sobre la razón existente entre las amplitudes de dos ángulos de un triángulo isósceles. Tienes que determinar la amplitud de cada uno de los ángulos del triángulo, como el triángulo es isósceles, las amplitudes de sus ángulos base son iguales, luego, si asignas a la variable a la amplitud del ángulo base y a la variable b la amplitud del tercer ángulo, y traduces al lenguaje algebraico la relación "la razón entre la amplitud de uno de los ángulos de la base y la amplitud del ángulo opuesto a ella es 5 : 8", obtienes la proporción $\frac{a}{b}=\frac{5}{8}$, de la que resulta la ecuación $8a = 5b$ (fig. 3.13). Fíjate que con esta sola ecuación no se pueden hallar las amplitudes de los ángulos interiores del triángulo, pero tú conoces que en todo triángulo la suma de las amplitudes de sus ángulos interiores es 180°, luego $2a + b = 180°$.

a: amplitud del ángulo base

b: amplitud del ángulo opuesto a la base

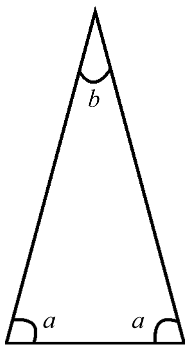


Figura 3.13

$$\begin{cases} 8a = 5b \\ \underline{2a + b = 180} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8a - 5b = 0 \\ \underline{2a + b = 180} \quad (\cdot 5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8a - 5b = 0 \\ \underline{10a + 5b = 900} \end{cases}$$

$$18a = 900$$

$$a = \frac{900}{18}$$

$$a = 50$$

Sustituyendo $a = 50$ en $2a + b = 180$, resulta:

$$2 \cdot 50 + b = 180$$

$$100 + b = 180$$

$$b = 180 - 100$$

$$b = 80$$

Compruebas las soluciones encontradas en el texto del problema $\frac{50}{80}=\frac{5}{8}$, luego, *la razón entre la amplitud de uno de los ángulos de la base y la amplitud del ángulo opuesto a ella es 5 : 8.*

Respuesta: Los ángulos base de triángulo tienen 50° de amplitud y el ángulo opuesto a la base, una amplitud de 80°.

Ejemplo 5:

Una entrada a un espectáculo musical cuesta veinte pesos y a un cine, dos pesos. Si *con 136 pesos compré en total 14 entradas,* ¿cuántas entradas compré para el cine?

Solución:

El texto del problema se refiere a la cantidad de entradas compradas de cine y teatro con una determinada cantidad de dinero; te informa cuánto cuesta cada tipo de entrada, la cantidad de entradas comparadas con 136 pesos y te piden determinar cuántas entradas se compraron para el cine.

Para encontrar las ecuaciones, te puedes auxiliar de una tabla como la 3.3.

Tabla 3.3

x: cantidad de entradas de teatro compradas	$20x$: cantidad pagada por las entradas de teatro
y: cantidad de entradas de cine compradas	$2y$: cantidad pagada por las entradas de cine
$x + y$: cantidad de entradas compradas en total	$20x + 2y$: cantidad de dinero empleada en la compra de entradas

Luego, obtienes dos ecuaciones lineales con dos variables:

$x + y = 14$ y $20x + 2y = 136$, que conforman el sistema $\begin{cases} x + y = 14 \\ 20x + 2y = 136 \end{cases}$

$$\begin{cases} x + y = 14 \quad (\cdot(-2)) \\ \underline{20x + 2y = 136} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x - 2y = -28 \\ \underline{20x + 2y = 136} \end{cases}$$

$$18x = 108$$

$$x = \frac{108}{18}$$

$$x = 6$$

Sustituyendo $x = 6$ en $x + y = 14$, resulta:

$x + y = 14$

$y = 14 - 6$

$y = 8$

Compruebas las soluciones encontradas en el texto del problema: $8 + 6 = 14$ y *compré en total 14 entradas.* Una entrada para el teatro cuesta 20 pesos y compré 6 entradas, luego, empleé 120 pesos en la compra de entradas del teatro. Una entrada para el cine cuesta dos pesos y me compré 8, luego, empleé 16 pesos en la compra de entradas del cine. $120 + 16 = 136$, por lo tanto, *con 136 pesos compré en total 14 entradas.*

Respuesta: Para el cine compré ocho entradas.

Este no es el único sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables que te permite resolver este problema, si le das otro significado a las variables, entonces la tabla te queda como la tabla 3.4.

Tabla 3.4

x: cantidad de dinero empleado en la compra de las entradas de teatro	$\frac{x}{20}$: cantidad de entradas de teatro compradas
y: cantidad de dinero empleado en la compra de las entradas de cine	$\frac{y}{2}$: cantidad de entradas de cine compradas
$x + y$: cantidad de dinero empleada en la compra de entradas	$\frac{x}{20} + \frac{y}{2}$: cantidad de entradas compradas en total

De donde obtienes las ecuaciones $x + y = 136$ y $\frac{x}{20} + \frac{y}{2} = 14$, por tanto, el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 136 \\ \frac{x}{20} + \frac{y}{2} = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 136 \\ \frac{x}{20} + \frac{y}{2} = 14 \quad (\cdot(-20)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 136 \\ -x - 10y = -280 \end{cases}$$

$$-9y = -144$$
$$y = 16$$

Sustituyendo $y = 16$ en $x + y = 136$, resulta:

$$x + 16 = 136$$
$$x = 136 - 16$$
$$x = 120$$

Compruebas las soluciones encontradas en el texto del problema: 120 + 16 = 136, luego la *cantidad de dinero empleada en la compra de entradas es 136 pesos.* En la compra de las entradas de teatro se destinaron 120 pesos y una entrada para el teatro cuesta 20 pesos, luego compré 6 entradas y en la compra de las entradas de cine se empelaron 16 pesos, como una entrada para el cine cuesta dos pesos, entonces compré 8 entradas para el cine, por tanto, $\frac{120}{20}+\frac{16}{2}=6+8=14$, luego, *con 136 pesos compré en total 14 entradas.*

Respuesta: Para el cine compré ocho entradas.

Ejemplo 6:

El *promedio de notas* de un estudiante de noveno grado *en las asignaturas de Matemática y Español* en el primer trabajo de control *es de 80 puntos.* Si *la nota de la asignatura Español supera en 8 puntos a la nota de Matemática,* ¿cuál es la nota de este estudiante en cada asignatura en el primer trabajo de control?

Solución:

En el problema tienes que determinar las notas de un estudiante en dos asignaturas en el primer trabajo de control. En el texto te informan el promedio alcanzado por el estudiante en estas dos asignaturas y una relación entre las dos notas obtenidas por él.

Tú conoces que promedio en un problema es una palabra clave que tiene información para ti, pues ya sabes cómo determinar el promedio de varias cantidades, como en este caso se refiere al promedio de dos notas que no se conocen, si designas por la variable m la nota de la asignatura Matemática en el primer trabajo de control y por la variable e la nota de la asignatura Español, entonces el promedio de estas notas lo expresas en el lenguaje algebraico por $\frac{m+e}{2}$ y como el promedio de esta notas es 80 obtienes la ecuación $\frac{m+e}{2}=80$.

En la segunda relación que aparece en el texto del problema sobre las notas de este estudiante también hay una palabra clave, supera, que ya sabes cómo se traduce del lenguaje común al algebraico, entonces como la nota de la asignatura Español supera en 8 puntos a la nota de Matemática, escribes en el lenguaje algebraico $e - 8 = m$.

Como se tienen que satisfacer las dos relaciones que aparecen en el texto del problema, tienes que resolver el sistema $\begin{cases} \frac{m+e}{2}=80 \\ e-8=m \end{cases}$ para darle solución.

m: nota de la asignatura Matemática en el primer trabajo de control

$$\begin{cases} \dfrac{m+e}{2} = 80 \quad (\cdot 2) \\ \underline{e-8=m} \end{cases}$$

e: nota de la asignatura Español en el primer trabajo de control

$$\begin{cases} m+e=160 \\ \underline{e-8=m} \end{cases}$$

Sustituyendo $m = e - 8$ en $m + e = 160$:

$e - 8 + e = 160$

$-8 + 2e = 160$

$2e = 160 + 8$

$2e = 168$

$$e = \frac{168}{2}$$

$e = 84$

Sustituyendo $e = 84$ en $e - 8 = m$, resulta:

$84 - 8 = m$

$76 = m$

Compruebas las soluciones encontradas en el texto del problema:

Promedio de las notas de las asignaturas de Matemática y Español en el primer trabajo de control: $\dfrac{84+76}{2} = \dfrac{160}{2} = 80$ y $84 - 76 = 8$, luego, *la nota de la asignatura Español excede en 8 puntos a la nota de Matemática.*

Respuesta: La nota del estudiante en la asignatura Español en el primer trabajo de control es 84 puntos y 76 en la asignatura Matemática.

Al igual que en grados anteriores puedes también, además de resolver problemas, formularlos a partir de datos recopilados por ti y que para encontrar la solución tengas que auxiliarte de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables.

Para esto, recuerda que debes seleccionar palabras clave que representen las relaciones existentes entre los datos y elaborar un texto donde de manera clara y precisa reflejes las relaciones existentes entre lo que se da en el problema y lo que se debe encontrar. No puede faltar que traduzcas el texto elaborado al lenguaje algebraico y verificar su correspondencia con los datos recopilados, así como resolver el problema.

Ejemplo 7:

Una fábrica envasa refresco en pomos de 1,5 y 2 L de capacidad respectivamente. *En enero envasaron, entre pomos de ambas capacidades, 14 000 L de* *refresco. En febrero* por problemas con los pomos de 2 L*, utilizaron un 20 % más de pomos de 1,5 L y un 20 % menos de pomos de 2 L respecto a los utilizados en enero,* por lo que se envasaron *en dicho mes 1 600 pomos más de 1,5 L que de 2 L.*

a) ¿Cuántos pomos se utilizaron de cada tipo en la fábrica en enero?
b) ¿Cuántos litros de refresco se envasaron en la fábrica en febrero?
c) ¿En qué porcentaje disminuyó la cantidad de refresco envasado de un mes a otro?

Solución:

Este problema es sobre una fábrica que envasa refresco y utiliza pomos de dos capacidades diferentes y en el texto te dan información sobre el envasado de refresco en los meses de enero y febrero. Fíjate que tiene tres incisos, por lo que debes dar respuesta a cada uno de ellos.

a) En este inciso debes determinar cuántos pomos de cada tipo utilizó la fábrica en enero, luego debes buscar en el texto del problema las relaciones que se establecen entre los tipos de envase. Como no conoces la cantidad de pomos utilizados de ambas capacidades, puedes, a la variable x, asignarle la cantidad de pomos de 1,5 L en los que se envasó refresco en enero y a la variable y, la cantidad de pomos de 2 L utilizados. En el texto te informan que en enero se envasaron 14 000 L de refresco en pomos de ambas capacidades, luego, la cantidad de litros envasados en pomos de 1,5 L más la cantidad de litros envasados en pomos de 2 L es igual a 14 000 L. Como se utilizaron x pomos de 1,5 L, entonces en este tipo de pomo se envasaron $1,5x$ L y de los pomos de 2 L se utilizaron y, entonces en estos se envasaron $2y$ L, luego, resulta la ecuación $1,5x + 2y = 14\,000$.
   La otra información que te ofrece el texto del problema está relacionada con la cantidad de envases utilizados en febrero. Fíjate que te informan que en este mes se utiliza un 20 % más de pomos de 1,5 L que en enero, por tanto, en febrero se utilizaron $x+\frac{1}{5}x$ pomos de 1,5 L, mientras que de los pomos de 2 L se utilizaron un 20 % menos, luego en febrero se usaron $y-\frac{1}{5}y$ pomos de 2 L.
   Finalmente en el texto se plantea una relación entre los envases utilizados en febrero, observa que te dicen que se envasaron en dicho mes 1 600 pomos más de 1,5 L que de 2 L, por tanto, $\left(x+\frac{1}{5}x\right)-1\,600=y-\frac{1}{5}y$ o $\left(x+\frac{1}{5}x\right)=\left(y-\frac{1}{5}y\right)+1\,600.$

Solución:

x: cantidad de pomos de 1,5 L utilizados en el mes de enero.

y: cantidad de pomos de 2 L utilizados en el mes de enero.

$$\begin{cases} 1{,}5x+2y=14\,000 \\ \left(x+\frac{1}{5}x\right)-1\,600=y-\frac{1}{5}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1{,}5x+2y=14\,000 \\ \frac{6}{5}x-\frac{4}{5}y=1\,600 \quad (\cdot 5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1{,}5x+2y=14\,000 \quad (\cdot 2) \\ 6x-4y=8\,000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+4y=28\,000 \\ 6x-4y=8\,000 \end{cases}$$

$$9x=36\,000$$

$$x=\frac{36\,000}{9}$$

$$x=4\,000$$

Sustituyendo $x = 4\,000$ en $1{,}5x + 2y = 14\,000$:

$$1{,}5(4\,000) + 2y = 14\,000$$

$$6\,000 + 2y = 14\,000$$

$$2y = 14\,000 - 6\,000$$

$$y=\frac{8\,000}{2}$$

$$y = 4\,000$$

Compruebas en el texto del problema la solución encontrada. En 4 000 pomos de 1,5 L se envasaron 4 000 · 1,5 L = 6 000 L y en 4 000 pomos de 2 L se envasaron 4 000 · 2 L = 8 000 L, luego *en enero se envasaron 6 000 L + 8 000 L = 14 000 L de refresco.*

En febrero se utilizaron 20 % más de pomos de 1,5 L y 20 % menos de pomos de 2 L respecto a los utilizados en enero, luego en febrero se utilizaron:

$$4\,000 + \frac{1}{5}x = 4\,000 + 800 = 4\,800 \text{ pomos de } 1{,}5 \text{ L}$$

$$4\,000 - \frac{1}{5}y = 4\,000 - 800 = 3\,200 \text{ pomos de } 2 \text{ L}$$

y 4 800 – 3 200 = 1 600, por tanto, *se envasaron en dicho mes 1 600 pomos más de 1,5 L que de 2 L.*

Observa que en este problema también puedes traducir al lenguaje de las variables la relación entre los envases utilizados en febrero de la manera siguiente:

Como en febrero se utilizó 20 % más de la cantidad de pomos de 1,5 L respecto a enero, esta cantidad representa el 120 %, luego, la cantidad de pomos de 1,5 L utilizados en febrero se representa por $\frac{120}{100}x = \frac{6}{5}x$.

Como en febrero se utilizó 20 % menos de la cantidad de pomos de 2 L respecto a enero, esta cantidad representa el 80 %, por tanto, se representa por $\frac{80}{100}x = \frac{4}{5}x$.

Por lo que la relación entre los envases utilizados en febrero la puedes expresar también mediante la ecuación $\frac{6}{5}x - 1\,600 = \frac{4}{5}y$.

Respuesta: En enero se utilizaron en la fábrica 4 000 pomos de 1,5 L y 4 000 pomos de 2 L.

b) En este inciso te piden la *cantidad de refresco* envasado en febrero. Para responder debes trabajar con la segunda ecuación donde se tiene la cantidad de pomos utilizados de cada tipo.

   Ya sabes que en febrero fueron utilizados 4 800 pomos de 1,5 L, luego, en estos pomos fueron envasados 4 800 · 1,5 L = 7 200 L de refresco y de 2 L se utilizaron en febrero 3 200 pomos, por tanto, se envasaron 3 200 · 2 L = 6 400 L de refresco.
   Finalmente hallas la cantidad de litros envasados en febrero:

   7 200 L + 6 400 L = 13 600 L

Respuesta: Fueron envasados en febrero 13 600 L de refresco.

c) Para hallar en qué porcentaje disminuyó la cantidad de refresco envasado de un mes a otro, debes buscar en cuántos litros disminuyó, o sea,
   14 000 – 13 600 = 400.

   Ahora planteas: $\frac{400}{14\,000} = \frac{x}{100}$, por lo que $x = \frac{400 \cdot 100}{14\,000} \approx 2{,}9\ \%$.

   Este inciso también lo puedes resolver hallando qué tanto por ciento representa la cantidad de refresco envasado en febrero respecto a enero:

   $\frac{13\,600}{14\,000} = \frac{x}{100}$; $x = \frac{13\,600 \cdot 100}{14\,000} \approx 97{,}1\ \%$.

   Luego, sustraes 100 % – 97,1 % = 2,9 %.

Respuesta: La cantidad de refresco envasada disminuyó en un 2,9 % aproximadamente.

Ejemplo 8:

En un local de una tienda se venden ventiladores y televisores. *Al ser abastecida contaba con un total de 50 equipos disponibles para la venta.* Después de 15 días *se* *había vendido el 25 % de los televisores y la mitad de los ventiladores, por lo que quedaban por vender aún 30 equipos.*

a) ¿Cuántos ventiladores y cuántos televisores tenía la tienda disponibles para la venta?
b) ¿Cuántos equipos de cada tipo fueron vendidos ya?

Solución:

En el texto del problema te informan la cantidad de equipos disponibles entre ventiladores y televisores al ser abastecida una tienda y la cantidad de equipos que quedaban después de 15 días de ventas.

a) Observa que no conoces la cantidad de ventiladores y televisores con que fue abastecida la tienda. Luego, puedes asignar a la variable t la cantidad de televisores disponibles para la venta y a la variable v la cantidad de ventiladores disponibles para la venta. Como la tienda dispone de 50 equipos en total, entonces $t + v = 50$.

   En el texto te dicen que se vendió el 25 % de los televisores, es decir, la cuarta parte de la cantidad de televisores y la mitad de los ventiladores y que quedan por vender 30 equipos, luego, se vendieron 20. Por tanto, $\frac{1}{4}t + \frac{1}{2}v = 20$.

   Fíjate que en este caso también puedes realizar el análisis siguiente: si se vendió el 25 % de los televisores, queda por vender el 75 % que representa las tres cuartas partes y si se vendió la mitad de los ventiladores, queda la otra mitad, por lo que $\frac{3}{4}t + \frac{1}{2}v = 30$. Por tanto, este problema lo puedes resolver con el sistema $\begin{cases} t + v = 50 \\ \frac{1}{4}t + \frac{1}{2}v = 20 \end{cases}$ o con el sistema $\begin{cases} t + v = 50 \\ \frac{3}{4}t + \frac{1}{2}v = 30 \end{cases}$

   t: cantidad de televisores disponibles para la venta.

   v: cantidad de ventiladores disponibles para la venta.

$$\begin{cases} t + v = 50 \\ \frac{1}{4}t + \frac{1}{2}v = 20 \qquad (\cdot\,(-4)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t + v = 50 \\ -t - 2v = -80 \end{cases}$$

$$-v = -30$$
$$v = 30$$

Sustituyendo $v = 30$ en $t + v = 50$:

$t + 30 = 50$

$t = 20$

Compruebas en el texto del problema la solución encontrada. Si hay 30 ventiladores y 20 televisores disponibles, 30 + 20 = 50, luego, *había un total de 50 equipos disponibles para la venta.* Se vendió el 25 % de la cantidad de televisores y el 25 % de 20 es 5, por tanto, se vendieron 5 televisores y como se vendió la mitad de la cantidad de ventiladores, entonces fueron vendidos 15 ventiladores, por lo que *quedaban por vender aún 30 equipos*.

Respuesta: Había disponible para la venta 30 ventiladores y 20 televisores.

b) Para obtener la cantidad de equipos vendidos de cada tipo debes trabajar con la segunda información del texto.

Cantidad de ventiladores vendidos: $\frac{30}{2}=15$

Cantidad de televisores vendidos: $\frac{20}{4}=5$

Respuesta: Fueron vendidos 15 ventiladores y 5 televisores.

Ejercicios

1. Marca con una X la respuesta correcta.

1.1 Un número excede en 15 a la tercera parte de otro número. Si m representa el número mayor y n, el número menor, entonces esta relación se puede expresar en el lenguaje de las variables:

a) ___ $15-n=\frac{1}{3}m$ b) ___ $m+15=\frac{n}{3}$ c) ___ $m-15=\frac{n}{3}$ d) ___ $n+15=\frac{1}{3}m$

1.2 La razón entre las longitudes de la base menor y la mayor de un trapecio es igual a $\frac{3}{7}$. Si representamos por x la longitud de la base mayor del trapecio y por y, la longitud de la base menor, entonces:

a) ___ $\frac{x}{y}=\frac{3}{7}$ b) ___ $7x - 3y = 0$ c) ___ $3y = 7x$ d) ___ $3x - 7y = 0$

1.3 El área de un trapecio es igual a 60 dm^2 y su altura tiene una longitud de 6,0 dm. Si representamos por a la longitud de la base mayor del trapecio y por b, la longitud de la base menor, entonces:

a) ___ $6(a + b) = 60$ b) ___ $a + b = 20$ c) ___ $3a + b = 60$ d) ___ $a + b = 120$

1.4 La tercera parte de la diferencia de dos números es igual a la unidad. Si p es un número y q es el otro, entonces:

a) ___ $\frac{1}{3}p-q=1$ b) ___ $3(p-q)=1$ c) ___ $p-q=3$ d) ___ $\frac{p-q}{3}=3$

1.5 Si de un número de dos cifras se escriben sus cifras en orden inverso, se obtiene otro número que excede en 15 al número inicial. Si d representa la cifra de las decenas y u, la cifra de las unidades del número inicial, entonces:

a) ___ $(10u + d) + 15 = 10d + u$ b) ___ $(10d + u) - 15 = 10u + d$
c) ___ $(10u + d) - 15 = 10d + u$ d) ___ $(10d + u) + 15 = 10u + d$

1.6 En dos depósitos A y B se tiene almacenada agua. Si extraigo dos litros de agua del depósito B y los vierto en el depósito A, ahora este contiene seis litros más que el depósito B. Si designamos por a la cantidad de litros de agua almacenados en el depósito A y por b, la cantidad de litros de agua almacenados en el depósito B, entonces:

a) ___ $a = b + 6$ b) ___ $b = a + 6$ c) ____ $b - 2 = a + 8$ d) ___ $b + 4 = a + 2$

1.7 Si 15 ejemplares de un libro y 10 ejemplares de una revista cuestan \$ 15,50 y 25 ejemplares de un libro y 13 ejemplares de una revista cuestan \$ 24,50 y se quiere conocer cuánto cuesta el libro y cuánto la revista, entonces el sistema que permite encontrar la solución, si a la variable x se le asigna el precio del libro y a la variable y el precio de la revista, es:

a) ___ $\begin{cases} 15x+25y=15{,}50 \\ 10x+13y=24{,}50 \end{cases}$ b) ___ $\begin{cases} 15x+10y=15{,}50 \\ 25x+13y=24{,}50 \end{cases}$

c) ___ $\begin{cases} 15x+10y=24{,}50 \\ 25x+13y=15{,}50 \end{cases}$ d) ___ $\begin{cases} 15x+13y=15{,}50 \\ 10x+25y=24{,}50 \end{cases}$

1.8 La longitud del largo de un rectángulo excede en 7,0 dm al triplo de la longitud de su ancho y su perímetro es 36 dm. El sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables que permite resolver este problema, donde a la variable p se le asigna la longitud del largo y a la variable q, la longitud del ancho, es:

a) ___ $\begin{cases} p-7=3q \\ p+q=36 \end{cases}$ b) ___ $\begin{cases} p+7=3q \\ 2(p+q)=36 \end{cases}$

c) ___ $\begin{cases} p-3q=7 \\ 2(p+q)=36 \end{cases}$ d) ___ $\begin{cases} p+7=3q \\ p+q=36 \end{cases}$

2. Dados los siguientes sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables escribe en el lenguaje común las relaciones que representan:

a) $\begin{cases} x+y=\dfrac{3}{4}x \\ x-2=2y \end{cases}$ b) $\begin{cases} m+n=4 \\ m-n=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} p+q=210 \\ \dfrac{1}{4}p-10=\dfrac{3}{4}q \end{cases}$ d) $\begin{cases} a=4b \\ a-5=3(b+5) \end{cases}$

3. El noveno grado de una secundaria básica tiene 72 estudiantes matriculados. En el segundo trabajo de control de la asignatura Matemática todos los estudiantes del grado examinaron y aprobaron 54. Si el 80 % de los varones y el 70 % de las hembras aprobaron, cuántos varones hay matriculados en el noveno grado de esa escuela.
4. La diferencia de dos números es 28 y la cuarta parte de su suma es 11. Halla los números.
5. Para transportar potes de helado y envases de jugo se emplean cajas de diferentes tamaños y diseños. Seis cajas de potes de helado tienen la misma masa que cuatro cajas de envases de jugo, mientras que una caja de potes de helado y una caja de envases de jugo tienen en total una masa de 50 lb. ¿Cuál es la masa de una caja de potes de helado?
6. Como parte de la preparación de una secundaria básica para el próximo curso escolar los estudiantes se comprometieron a restaurar los libros de la escuela durante dos semanas del período vacacional. En la primera semana restauraron el triplo de lo que restauraron en la segunda y en total restauraron 668 libros.

   a) ¿Qué cantidad de libros restauraron cada semana?
   b) ¿Qué porcentaje representan los libros restaurados en la segunda semana del total?
   c) ¿Qué parte del total se restauró en la primera semana?

7. En un laboratorio de Física de un centro de estudios hay en total 17 puestos de trabajo, de los cuales algunos son para tres estudiantes y otros para dos. Si en total el laboratorio tiene capacidad para 44 estudiantes, cuántos puestos de trabajo hay de cada tipo.
8. En un taller de reparación tienen tornos y fresadoras. El mes pasado se realizaron labores de mantenimiento a cinco tornos y a cuatro fresadoras por un costo de 3 405 pesos. Este mes se pagaron 3 135 pesos por el mantenimiento de tres tornos y cinco fresadoras. ¿Cuál es el costo del mantenimiento de cada tipo de máquina?
9. Con dos camiones cuyas capacidades de carga son respectivamente de tres y cuatro toneladas se hicieron en total 23 viajes para transportar 80 t de madera. ¿Cuántos viajes realizó cada camión?
10. El patio de mi casa tiene forma rectangular y su perímetro es de 40 m. Si se duplica su largo y se aumentara en seis metros su ancho, entonces tendría un perímetro de 76 m. ¿Qué largo y qué ancho tiene el patio de mi casa?

11. Encuentra dos números cuya suma sea 40 y su diferencia 14.
12. ¿Cuál es el área de un rectángulo cuyo perímetro es de 16 cm y la longitud del largo es el triplo de la longitud del ancho?
13. El noveno grado de una escuela tiene 60 estudiantes. Usan espejuelos el 16 % de los varones y el 20 % de las hembras. Si en total hay 11 estudiantes de noveno grado que usan espejuelos, ¿cuántas hembras y cuántos varones tiene el noveno grado de esta escuela?
14. Emilio le dice a Ernesto Fidel: “La cantidad de libretas que tengo es el doble de las que tienes tú” y Ernesto Fidel le responde: “Si tú me das seis libretas tendremos los dos igual cantidad”. ¿Cuántas libretas tenía cada uno?
15. Para la instalación de computadoras en una escuela se tiene un cable eléctrico de doce metros de longitud. Si el cable se corta en dos partes de manera que una es dos metros más larga que la otra, ¿cuál es la longitud de cada uno de los cables eléctricos?
16. Zoraida tiene 27 años más que su hija Yaima. Dentro de ocho años, la edad de Zoraida doblará a la de su hija. ¿Cuántos años tiene cada una?
17. La abuela le dice a la nieta: “Hoy tu edad es un cuarto de la mía, hace siete años no era más que un séptimo”. ¿Cuántos años tiene la abuela?
18. Para un encuentro de conocimientos de Matemática entre dos grupos de noveno grado, el profesor elaboró 30 ejercicios sobre resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables. Por cada ejercicio resuelto correctamente el profesor dio 5 puntos y por cada ejercicio resuelto incorrectamente el profesor quitó dos puntos. Si un grupo resolvió todos los ejercicios y obtuvo en total 94 puntos, ¿cuántos ejercicios resolvió correctamente?
19. La suma de la edad de Alejandro y de su papá es 39 y la diferencia es 25. ¿Cuál es la edad de Alejandro?
20. En un parqueo hay estacionados 154 vehículos entre carros y motos. Se sabe que en total hay 458 ruedas. ¿Cuántas motos hay estacionadas en este parqueo?
21. En una fábrica de conservas, para envasar la producción, se utilizaron como recipientes latas y frascos de cristal. La cantidad de frascos excede en 794 a la cantidad de latas existentes. Al concluir la primera etapa productiva se habían utilizado tres quintos de la cantidad de frascos y el 25 % del número de latas para un total de 1 102 recipientes. ¿Cuántos recipientes de cada tipo hay en la fábrica para envasar la producción?
22. Dos grupos de noveno grado de una secundaria básica se propusieron elaborar 110 juguetes para los círculos infantiles de la comunidad. Después que uno de los grupos había elaborado la mitad de lo que se había propuesto y el otro el 70 % de lo que debía elaborar, solo faltaban 51 juguetes. ¿Cuántos juguetes elaboró cada grupo de noveno grado?
23. Amanda y Anabel son monitoras de la asignatura Matemática en una secundaria básica y entre las dos seleccionaron 22 ejercicios para la preparación de sus compañeros para el trabajo de control de la asignatura. Si el doble de los ejercicios seleccionados por Amanda es mayor en 8 a los seleccionados por Anabel, ¿cuántos ejercicios seleccionó cada una?

24. Una brigada integrada por 25 estudiantes labora en la cosecha de café de este año. El duplo de los estudiantes que transportan el café recogido excede en 8 al 80 % de los que lo cosechan. ¿Qué cantidad de estudiantes hay en cada labor?
25. En un concurso provincial de artes plásticas participaron 159 estudiantes de secundaria básica. La cantidad de hembras participantes excede en 72 al duplo de los varones. ¿Cuántas hembras y cuántos varones participaron en el concurso?
26. Determina el número de dos cifras para el cual se cumple que la suma del duplo de la cifra de las decenas y el triplo de las unidades es 23, si se conoce que la diferencia entre el triplo de las decenas y el duplo de las unidades es 15.
27. Un profesor de Educación Física cuenta con 196 estudiantes de una secundaria básica para formar seis círculos y cuatro estrellas con estos estudiantes. Para formar un círculo y una estrella utiliza 40 estudiantes. ¿Con cuántos estudiantes forma un círculo y con cuántos una estrella?
28. El número de asistentes a una base de campismo durante el mes de agosto triplica la cantidad de asistentes durante el mes de enero. Si entre ambos meses asistieron 15 200 personas, ¿qué cantidad de personas asistieron en cada mes?
29. Para celebrar la constitución de la organización de pioneros dos grupos de estudiantes de noveno grado decidieron recoger entre los dos 120 kg de materia prima. Si la primera brigada hubiera recogido 12 kg más, entonces tendría el doble de la cantidad de kilogramos recogidos por la segunda brigada. ¿Cuántos kilogramos de materia prima recogió cada brigada?
30. Dos grupos A y B de onceno grado que emulan respecto a la incorporación de estudiantes a estudiar carreras pedagógicas tienen incorporados al predestacamento 16 estudiantes en total. Si el grupo A logra incorporar 6 estudiantes más, entonces ambos tendrían la misma cantidad de incorporados. ¿Cuántos estudiantes pertenecen al predestacamento de cada grupo?
31. Durante un trabajo voluntario realizado por los padres en una secundaria básica se repararon 55 artículos entre mesas y sillas. Si la diferencia entre el triplo de las mesas reparadas y el duplo de las sillas es cinco, ¿cuántas sillas y cuántas mesas se repararon en esa jornada?
32. El huracán Sandy, que en octubre de 2012 azotó a la región oriental de nuestro país, dejó pérdidas por más de mil millones de dólares. A consecuencia de este fueron afectadas un total de 132 733 viviendas. Se conoce que el séxtuplo de las viviendas que sufrieron derrumbes totales aumentado en 25 479 es igual al número de viviendas que sufrieron derrumbes parciales.[1]

    a) ¿Cuántas viviendas sufrieron derrumbes totales y cuántas parciales?
    b) ¿Qué medidas de la defensa civil tendrías en cuenta en caso de amenaza de ciclones, huracanes y desastres naturales?

33. Xiomara y Ana Lidia, durante dos días de recolección de café en las montañas, lograron llenar 104 latas del preciado grano entre las dos. Si Xiomara le cediera a

[1] *Granma*, 27 de octubre de 2012, p. 3.

Ana Lidia el 20 % de la cantidad de latas que logró llenar, ambas tendrían la misma cantidad de latas llenas de café.

a) ¿Cuántas latas de café llenó cada una?
b) Si entre ambas lograron recolectar el equivalente a 3 640 lb de café y en todas las latas había la misma cantidad de café, determina en cuántas libras la cantidad recolectada por Xiomara excede a la cantidad recolectada por Ana.

34. En un huerto hay sembrados el doble de hectáreas de papa que de tomate. Hoy se recogieron el 20 % de las hectáreas de tomate y la tercera parte de las de papa, por lo que faltan por recoger 32 ha.

a) ¿Cuántas hectáreas había sembradas de cada cultivo?
b) ¿Cuántas hectáreas se recogieron de cada cultivo?
c) Si el terreno tiene 50 ha, ¿qué tanto por ciento falta por sembrar?

35. Entre dos apartamentos consumieron durante el mes de marzo 400 kWh de energía eléctrica. Después de aplicarse medidas de ahorro en abril, el apartamento *A* redujo su consumo en un 20 % y el apartamento *B* lo redujo en 10 kWh. Si este último mes entre ambos consumieron 48 kWh menos que en marzo, ¿cuál fue el gasto de energía en cada uno de los apartamentos en el mes de marzo?

36. En diciembre de 2013 se realizó un análisis del consumo eléctrico en los núcleos de las viviendas *A* y *B*, y se comprobó que en la vivienda *A* se consumió el doble de lo consumido en la vivienda *B*. Sin embargo al aplicar medidas de ahorro en enero de 2014 con la nueva tarifa se comprobó que en la vivienda *A* se redujo el consumo al 80 % de lo que se consumió el mes anterior, mientras que la *B* disminuyó su consumo en 20 kWh. Si entre ambas viviendas se consumió un total de 292 kWh. ¿Cuántos kilowatt hora se consumió en cada vivienda en el mes de enero?

37. En un almacén de piezas de repuesto había almacenados dos tipos de piezas para la reparación de maquinarias agrícolas. La cantidad de piezas del tipo *A*, excedía en 24 a la cantidad de piezas del tipo *B*. Una empresa agrícola adquirió en una compra la mitad de la cantidad de las piezas del tipo *A* que había almacenadas y el 75 % de las piezas del tipo *B*. Si después de esta compra, lo que quedó en el almacén fue el 40 % de la cantidad de piezas que había inicialmente, calcula cuántas piezas de cada tipo fueron adquiridas por dicha empresa.

38. En una cooperativa agrícola en la que solo se cultivan tomates y cebollas, la cantidad de hectáreas de terreno dedicadas al cultivo de tomate excede en 10 a la cantidad de hectáreas en las que se cultiva cebolla. En una jornada de trabajo fueron abonadas el 50 % de las hectáreas dedicadas al cultivo de tomate y la cuarta parte de las hectáreas dedicadas al cultivo de la cebolla. Si en esa jornada de trabajo se abonaron 23 ha de tierra, ¿cuántas hectáreas de tierra están dedicadas al cultivo de cada producto?

39. En una Secundaria Básica trabajan 31 profesores. El triplo de la cantidad de profesoras excede en 15 al 25 % de la cantidad de profesores. ¿Cuántas profesoras trabajan en la escuela?

40. En una cooperativa de producción agropecuaria un campesino separó las frutabombas buenas de las que se echaron a perder. De las buenas, la tercera parte estaban maduras, las tres cuartas partes del resto estaban verdes y el resto pintonas. Si entre buenas y malas había 180 frutabombas y de ellas el 20 % estaban echadas a perder, ¿cuántas frutabombas estaban pintonas?
41. El ángulo *CAB* de un triángulo (fig. 3.14) tiene una amplitud de 30° y las amplitudes de los otros dos ángulos, *CBA* y *BCA*, están en la razón de 2:3. ¿Cuál es la amplitud de los ángulos *CBA* y *BCA*?

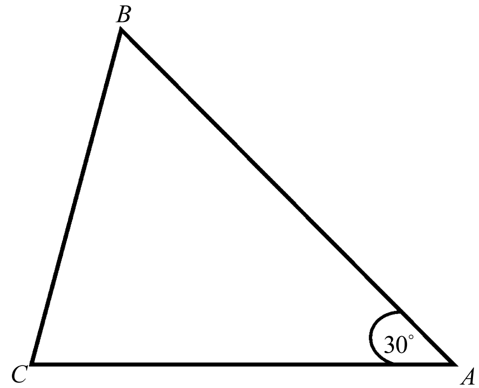


Figura 3.14

42. La razón entre las longitudes de los lados de un rectángulo es $\frac{11}{7}$, si las longitudes de cada uno de los lados aumentan en tres centímetros, el área se incrementa en 117 cm^2. Calcula el perímetro del rectángulo.
43. Redacta un problema cuya resolución conduzca al planteamiento de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables como los siguientes:

a) $\begin{cases} p+q=552 \\ 2p-q=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{m}{2}+\frac{n}{4}=14 \\ m+n=36 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{3}{10}x+\frac{1}{5}y=27 \\ x-15=y \end{cases}$ d) $\begin{cases} a+2b=52 \\ \frac{a}{b}=\frac{3}{5} \end{cases}$

44. Formula problemas utilizando los datos siguientes:

a) Resultados de las votaciones en las elecciones pioneriles (tabla 3.5).

Tabla 3.5

Candidatos	Cantidad de votos obtenidos
Luisa Margarita	368
Reinaldo	184

b) ABC triángulo, B punto de AD, $\angle ACB = 75°$ y $\angle CAB = \frac{3}{5}\angle DBC - 27°$.

c) Resultados del trabajo de control de dos grupos de noveno grado de una secundaria básica (tabla 3.6).

Tabla 3.6

Grupo	Matrícula	Aprobados
9.1	35	80 %
9.2	32	75 %

d) Composición de sacos de fertilizantes (tabla 3.7).

Tabla 3.7

Tipo de fertilizante	Composición de cada saco de fertilizante	
	Nitrógeno	Ácido
A	4 kg	2 kg
B	3 kg	3 kg

45. Busca datos actualizados de la prensa, revistas y otros medios de información y redacta tres problemas en los que para solucionarlos resuelvas sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables.

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO

1. Lee detenidamente la pregunta y responde:

Clasifica las proposiciones siguientes en verdaderas o falsas. Escribe V o F en la línea dada. Justifica las que sean falsas.

a) ___ El par $\left(\frac{3}{5}; \frac{2}{3}\right)$ no es solución de la ecuación $5p + 3q = 5$.

b) ___ La ecuación $2x + 4y = 7$ tiene solución para x, y números enteros.

c) ___ El sistema $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ -3x - 6y = 24 \end{cases}$ no tiene solución.

d) ___ Los sistemas $\begin{cases} m + 3n = 6 \\ 5m - 2n = 13 \end{cases}$ y $\begin{cases} m = 6 - 3n \\ 5m - 2n = 13 \end{cases}$ son equivalentes.

e) ___ Un sistema en el que sus dos ecuaciones lineales con dos variables son iguales, tiene infinitas soluciones.

f) ___ El conjunto solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables es o un conjunto vacío o un conjunto unitario o un conjunto infinito.

g) ___ Si los coeficientes de las variables de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables no son proporcionales, entonces el sistema tiene solución única.

h) ___ Si los coeficientes de las variables de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables son proporcionales, entonces el sistema puede tener infinitas soluciones o ninguna solución.

i) ___ Si en un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, una ecuación es un múltiplo de la otra, entonces el sistema tiene infinitas soluciones.

j) ___ El par (0; 4) es solución del sistema $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$, porque es solución de la ecuación $x + 2y = 8$.

k) ___ Los sistemas $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ -2x + 4y = 6 \end{cases}$ y $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 7y = 14 \end{cases}$ son equivalentes.

l) ___ En un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables se pueden permutar sus ecuaciones.

2. Determina si los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables siguientes son solubles o no, y en el caso afirmativo señala el tipo de solución que tienen.

a) $\begin{cases} 2p + 4q = 5 \\ p + q = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 7m - 14n = 35 \\ m - 2n = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x + 3y = 0 \\ 11x - 3y = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3a + 7b = 1 \\ -12a - 28b = 3 \end{cases}$

3. Completa los sistemas de dos ecuaciones con dos variables de la tabla 3.8 de manera tal que tengan el tipo de solución que se señala.

Tabla 3.8

Tipo de solución	$\begin{cases} \\ 5v - w = 32 \end{cases}$	$\begin{cases} p - 12q = -14 \\ \end{cases}$	$\begin{cases} \\ -8x + y = 4 \end{cases}$
Infinitas soluciones			
Solución única			
No tiene solución			

4. Halla el conjunto solución de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables siguientes:

a) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - 1 = y \end{cases}$ b) $\begin{cases} a - 18 = 5b \\ 34 + b = 4a \end{cases}$ c) $\begin{cases} m - 5n = 7 \\ n + 14 = 2m \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4p + 3q = -10 \\ 2p - 5q = 8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} a + b = 2 \\ 5a - 5b = 4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x = y + 4 \\ 6x + 6y = -15 \end{cases}$ g) $\begin{cases} w + 5v = 12 \\ 2w + v = 6 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 3c + 5d = 21 \\ c - 4d = -10 \end{cases}$

i) $\begin{cases} \frac{1}{2}m + 4n = 13 \\ m - n = -1 \end{cases}$ j) $\begin{cases} 3a - 11b = 2 \\ 6a - 4 = 22b \end{cases}$ k) $\begin{cases} 7p - 5q = 2 \\ 2p + 3q = 5 \end{cases}$ l) $\begin{cases} \frac{3}{4}a - 12 = \frac{1}{2}b \\ a + b = 56 \end{cases}$

m) $\begin{cases} s + 2t = 1 \\ 4s + 3t = 2 \end{cases}$ n) $\begin{cases} 7p - 2 = 5q \\ 15q = 6 + 21p \end{cases}$ ñ) $\begin{cases} 2x + 9y = 4 \\ 4x + 3y = 3 \end{cases}$ o) $\begin{cases} 3w + 5v = -21 \\ -2w + 7v = 14 \end{cases}$

p) $\begin{cases} g + 1 = h \\ 2(g + h) = 1 \end{cases}$ q) $\begin{cases} m - 5(m - n) = 6 \\ 3(m + 2) - 2(n - 5) = 1 \end{cases}$ r) $\begin{cases} 9a - 5(b + 2) = 12 \\ 3(a - 7) + 11 = 5b \end{cases}$

s) $\begin{cases} 7(w + 2) + 5v = 6(w + 4) \\ w - 3(v + 2) = -12 \end{cases}$ t) $\begin{cases} \frac{2(x+4)}{3} - \frac{y}{2} = \frac{9}{2} \\ x + 2y - \frac{1}{3}(3x - 2) = -\frac{4}{3} \end{cases}$ u) $\begin{cases} \frac{2m-1}{2} + \frac{n-3}{3} = \frac{11}{6} \\ -\frac{2m}{5} + \frac{n-1}{10} = -\frac{6}{5} \end{cases}$

5. Escribe un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables que tenga como conjunto solución a $S = \{(3; -5)\}$.

6. Determina el valor de k para que el sistema $\begin{cases} 2p + q = 7 \\ 3p + kq = 1 \end{cases}$ tenga solución única.

7. Halla el valor de m y n para que el par $(-1;\ 2)$ sea solución del sistema

$$\begin{cases} x(m-5) + y(2m+6n) = 5 \\ 3x(m+5n) + 2y(n-1) = 5 \end{cases}$$

8. Determina para qué valores de a el sistema $\begin{cases} 3x - y = a \\ x - 2y = 3a \end{cases}$ tiene como solución:

a) un par de números enteros,
b) un par de números naturales.

9. Un número excede en 12 unidades a otro; si restáramos 4 unidades a cada uno de los números, entonces el primero sería el duplo del segundo. ¿Cuáles son los números?
10. En una tienda se venden pilas AA y AAA. Hoy se han vendido 200 pilas de ambos tipos. Si se hubiesen vendido 20 pilas más AAA, esto representaría las cinco sextas partes de la cantidad vendida de pilas AA.

a) Si las pilas se venden en paquetes de 2 pilas cada uno, ¿cuántos paquetes se vendieron de cada tipo de pila?
b) Si en el almacén quedan aún 50 paquetes de pilas AA y 70 de pilas AAA, ¿qué tanto por ciento del total de paquetes que había quedan por vender?

11. El perímetro de un triángulo isósceles es de 19 cm. La longitud de cada uno de sus lados iguales excede en 2,0 cm al doble de la longitud del lado desigual. ¿Cuánto miden los lados del triángulo?
12. Camilo le dice a Gabriela: cuál es el número de dos cifras que su cifra de las decenas es la tercera parte de la cifra de las unidades y si inviertes el orden de las cifras, el número que obtienes excede en 45 al número 48. Ayuda a Gabriela a encontrar la respuesta.
13. La razón entre las edades de Patricia y Giselle es $\frac{2}{3}$, y Giselle es 15 años mayor que Patricia. ¿Cuál es la edad de cada una de ellas?
14. Para el embellecimiento de un aula de una secundaria básica hay almacenados dos recipientes que contienen pintura. La mitad de los litros contenidos en el recipiente que tiene menos pintura excede en 5 L a la tercera parte del que contiene más. Si el 20 % de la pintura del recipiente que tiene menos litros se traslada al otro recipiente, entonces este tendría ahora el doble de litros de pintura del otro. ¿Cuántos litros de pintura tenía cada recipiente originalmente?
15. En el tercer año de una escuela pedagógica solo se estudian la especialidad Primaria y la Preescolar. La tercera parte de la cantidad de estudiantes de la especialidad Primaria y la mitad de la cantidad de estudiantes de la especialidad Preescolar es de 108 estudiantes. Si se sabe que el duplo de los que estudian la especialidad Primaria excede en 16 a los que estudian la especialidad Preescolar.

    a) ¿cuántos estudiantes están en el tercer año de esta escuela pedagógica?,
    b) ¿qué tanto por ciento representan los estudiantes de la especialidad Preescolar del total de estudiantes de tercer año?

16. En un destacamento de 45 pioneros de una secundaria básica, el doble de la cantidad de varones disminuido en 9 es igual a la cantidad de hembras. ¿Cuántas hembras y cuántos varones integran este destacamento?
17. Carolina tiene ahorrado en una alcancía 110 pesos en monedas de uno y tres pesos. Si en total tiene 62 monedas, cuántas monedas tiene de tres pesos.
18. La suma de dos números es 85 y su diferencia es 19. ¿Cuáles son los números?
19. Una cooperativa agropecuaria se dedica a la cría de conejos y gallinas. Si los trabajadores de la cooperativa cuentan las cabezas, tienen 50 y si cuentan las patas, tienen 134. ¿Cuántos conejos y cuántas gallinas tienen en la cooperativa?
20. Un edificio en construcción tiene 96 apartamentos de dos y tres habitaciones. Si en total el edificio tiene 228 habitaciones, cuántos apartamentos de tres habitaciones tiene el edificio. ¿En qué cantidad excede el número de apartamentos de dos habitaciones al número de apartamentos de tres habitaciones?

21. El plan de producción de pienso de una fábrica A, excede en 30 t a lo planificado por otra fábrica B para el mismo año. Al concluir el primer semestre, la fábrica A había producido el 40 % de su plan y la B las tres décimas partes del plan, acumulando entre las dos 47 t de pienso.

    a) ¿Cuál es el plan de producción de cada fábrica?
    b) ¿Cuántas toneladas ha producido cada fábrica?

22. Al dividir un número por otro el cociente es dos y el resto 5. Si la diferencia entre el dividendo y el divisor es 51, ¿cuáles son los números?
23. En una secundaria básica hay matriculados 80 estudiantes en noveno grado y de ellos 60 son deportistas. Si se conoce que el 50 % de las hembras y el 90 % de los varones son deportistas, ¿cuántas hembras y cuántos varones tiene el noveno grado de esta escuela?
24. El organopónico que atiende un preuniversitario tiene 20 canteros, entre los cultivados y los recién creados. Para fertilizarlos se utilizaron 528 kg de fertilizante, y se conoce que los canteros cultivados requieren de 32 kg de fertilizante, mientras los recién creados solo necesitan 18 kg.

    a) ¿Cuántos canteros de cada tipo hay en el organopónico?
    b) ¿Qué tanto por ciento del total de fertilizante se utilizó en los canteros recién creados?

25. En una fábrica la cantidad de obreros calificados excede en 21 a los técnicos medios. Se fueron 5 obreros calificados de la fábrica, por lo que ahora el 20 % de los obreros calificados es igual a la cantidad de técnicos medios. ¿Cuántos obreros calificados hay actualmente en la fábrica?
26. En un almacén se tenían almacenados 450 L de agua en dos tanques de diferente capacidad, los cuales estaban completamente llenos. Durante el día se utilizó el 50 % de la cantidad de agua contenida en el tanque de menor capacidad y las tres quintas partes de la almacenada en el otro. Al finalizar el día había un total de 200 L de agua almacenada en los dos tanques.

    a) ¿Cuál es la capacidad de cada tanque?
    b) ¿Qué tiempo demora en llenarse el tanque de mayor capacidad, si estando vacío se abre una llave que vierte 12,5 L/min?

27. En un taller de reparaciones se envasaron 274 L de aceite lubricante en 22 recipientes de dos tipos: unos con una capacidad de 10 L y otros con una de 16 L. Los 22 recipientes están completamente llenos.

    a) ¿Cuántos recipientes de cada tipo se utilizaron para envasar todo el aceite?
    b) ¿Qué tanto por ciento de la cantidad de aceite se envasó en los recipientes de 16 L?

28. Con la intención de promover el ahorro energético en un sector residencial, dos grupos de estudiantes se comprometieron a visitar entre ambos cierto número de viviendas de un consejo popular. Las dos quintas partes de las viviendas asignadas

al grupo *B*, excede en 4 a las asignadas al grupo *A*. Al finalizar la tarea, todas las viviendas fueron visitadas; pero el grupo *B* visitó 20 viviendas menos de las que le habían asignado, por lo que ambos grupos visitaron la misma cantidad.

a) ¿Cuántas viviendas se comprometió a visitar cada grupo?
b) Calcula en qué tanto por ciento el grupo *B* cumplió su compromiso inicial.

PARA LA AUTOEVALUACIÓN

Reflexiona sobre lo aprendido

¿Cuándo un par ordenado de números reales es solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables?

¿Cuál es la relación existente entre la posición relativa de dos rectas en el plano y el tipo de solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables formado por las ecuaciones de esas rectas?

¿Cuál es la relación entre el tipo de solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables y las pendientes y términos independientes de las ecuaciones de las rectas que lo conforman?

¿Cuándo dos sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables son equivalentes? ¿Cuáles son las transformaciones equivalentes que se pueden aplicar a un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables?

¿Qué procedimientos puedes emplear para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables? ¿Cómo procedes en cada caso?

Ponte a prueba

1. Resuelve los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables siguientes:

a) $\begin{cases} 6m = 7n - 5 \\ 3n = 4m + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} b + a = 1 \\ 8a = -5b + 17 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4p - 3q = 5 \\ -8p + 6q = 10 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5r - 3 = 4s \\ 4s = -3 + 5r \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3c + 2d = 4 \\ 2c + 3d = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4x + 3y = 14 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$ g) $\begin{cases} 5v + 2w = 1 \\ -3v + 3w = 5 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 6b = 12 + 9a \\ 5 = 3a + 4b \end{cases}$

2. Determina el valor de *h* y *k* si el sistema $\begin{cases} (h+2)x + (10-3k)y = h+4 \\ 5x + (2h+4)y = 8k+2 \end{cases}$ tiene como conjunto solución a $S = \{(2; -3)\}$.
3. La cantidad de libros de Matemática para noveno grado que tiene una secundaria básica excede en 26 a la cantidad de libros de Física para este mismo grado. Al inicio

del curso se repartió el 75 % de la cantidad de libros de Matemática que tenía la escuela y la mitad de la cantidad de los libros de Física, y quedaron almacenados en la escuela 65 libros de estas asignaturas.

a) ¿Cuántos libros de estas asignaturas tiene esta escuela para el noveno grado?
b) Si el próximo curso la matrícula de noveno grado de esa escuela será 143 estudiantes, cuántos libros más de Matemática y de Física necesitará esta escuela.

RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS

Epígrafe 3.1.2

1. a) F, porque 3(1) – 2(5) = 3 – 10 = –7, luego, el par ordenado (1; 5) no transforma la ecuación en una proposición verdadera, por tanto, no es solución de la ecuación.
   b) V c) V d) V e) V
   f) F, pues las pendientes de las rectas cuyas ecuaciones conforman el sistema son iguales, pero sus términos independientes son diferentes, luego, el sistema no tiene solución.
   g) V
   h) F, porque existen sistemas que no tienen solución.
   i) V
   j) F, ya que al sustituir la variable *x* por 3 y la variable *y* por 1 en cada ecuación del sistema no se obtienen dos proposiciones verdaderas.

2. b)

3.1 b) 3.2 c) 3.3 a)

8. a) Solución única b) No tiene solución c) Solución única
   d) Infinitas soluciones e) No tiene solución f) Infinitas soluciones
   g) Solución única

9. $k = 12$

10. $a = 11$

Epígrafe 3.1.3

1. a) $S = \{(1; -1)\}$ b) $S = \{(-1; 3)\}$ c) $S = \{(2; -3)\}$
   d) $S = \{(x; y)\colon\ y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3},\ x \in \mathbb{R}\}$ e) $S = \{(0; 1)\}$ f) $S = \left\{\left(\frac{1}{2}; -1\right)\right\}$
   g) $S = \phi$ h) $S = \{(1; -1)\}$

3. a) $S = \{(24; 20)\}$ b) $S = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{6}\right)$ c) $S = \{(9; -10)\}$

d) $S = \{(x; y)\text{: } y = -\frac{6}{5}x + \frac{22}{5}, x \in \mathbb{R}\}$ e) $S = \{(-2{,}8; -1{,}2)\}$

Epígrafe 3.2

1. a) $x = 8, y = -2$ b) $x = 7, y = 0$ c) $x = 2, y = 1$ d) $a = 3, b = 2$

e) $x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}$ f) $p = 4 + q, q \in \mathbb{R}$ g) $m = 0, n = 0$ h) $r = \frac{43}{9}, s = \frac{16}{3}$

i) $r = -9,\ s = \frac{17}{2}$ j) $m = 1, n = -1$ k) $v = 8, w = 1$ l) $x = 2, y = 3$

m) $c = -\frac{8}{3}, d = -4$ n) $v = -3, w = 2$ ñ) $x = \frac{11}{7}, y = -\frac{13}{7}$

o) $m = 4, n = -3$ p) $x = 4, y = -3$ q) $a = 3, b = -0{,}2$ r) $p = 1, q = 8$

s) $v = 4, w = 8$ t) $m = 6, n = 6$ u) $p = 20, q = 15$ v) $a = 120, b = 260$

w) $c = 24, d = 36$ x) $v = -6, w = 12$ y) $x = \frac{5}{4}, y = 2$ z) $n = -5, m = -6$

2. a) $S = \{(2; -10)\}$ b) $S = \left\{\left(\frac{4}{3}; 0\right)\right\}$ c) $S = \{(13; 5)\}$

d) $S = \{(2; 0)\}$ e) $S = \{(4; 2)\}$ f) $S = \{(3; 8)\}$

3. Ver la tabla 3.9.

Tabla 3.9

$x + y - 6$	$x - y + 4$	x	y
4	10	8	2
6	-8	0	12
$2x + 5y$	$3x + 3y$	10	-4
$5 - 3x$	$4 + 2(x + y)$	3	-1

4. a) $S = \{(-2; 2)\}$ b) $S = \{(a; 2a + 3)\text{: } a \in \mathbb{R}\}$

c) $S = \left\{\left(\frac{25}{6}; \frac{3}{2}\right)\right\}$ d) $S = \{(5; -1)\}$

5. $a = 1$ y $b = -2$

Epígrafe 3.3

1.1 c) 1.2 d) 1.3 b) 1.4 c) 1.5 c) 1.6 d) 1.7 b) 1.8 c)

3. En el noveno grado de esa escuela hay 36 varones matriculados.
4. Los números son 36 y 8.
5. Una caja de potes de helado tiene una masa de 20 lb.
6. a) En la primera semana restauraron 501 libros y en la segunda, 167.
   b) En la segunda semana se restauró el 25 % del total.
   c) En la primera semana se restauraron las tres cuartas partes del total.
7. En el laboratorio hay 10 puestos de trabajo para tres estudiantes y 7 para dos estudiantes.
8. El costo de mantenimiento de un torno es de 345 pesos y de una fresadora, 420 pesos.
9. El camión de capacidad de carga tres toneladas realizó 12 viajes y el de cuatro toneladas, 11 viajes.
10. El patio de mi casa tiene 12 m de largo y 8 m de ancho.
11. Los números son 13 y 27.
12. El área del rectángulo es 12 cm^2.
13. El noveno grado de esta escuela tiene 35 hembras y 25 varones.
14. Emilio tenía 24 libretas y Ernesto Fidel, 12.
15. Una parte del cable mide 7 m y la otra 5 m.
16. Zoraida tiene 46 años y Yaima, 19.
17. La abuela tiene 56 años.
18. El grupo resolvió correctamente 22 ejercicios.
19. La edad de Alejandro es 7 años.
20. En el parqueo hay estacionadas 79 motos.
21. En la fábrica hay 1 530 frascos y 736 latas para envasar la producción.
22. Un grupo elaboró 90 juguetes y el otro 20.
23. Amanda seleccionó 10 ejercicios y Anabel 12.
24. Hay 15 estudiantes cosechando café y 10 transportando lo recogido.
25. En el concurso de artes plásticas participaron 130 hembras y 29 varones.
26. El número es 73.
27. Utiliza 18 estudiantes para formar un círculo y 22 para formar una estrella.
28. En enero asistieron al campismo 3 800 personas y en agosto, 11 400.
29. Una brigada recogió 76 kg de materia prima y la otra, 44 kg.
30. 5 estudiantes del grupo A pertenecen al predestacamento y 11 del grupo B.
31. En esa jornada se repararon 23 mesas y 32 sillas.
32. a) Sufrieron derrumbe total 15 322 viviendas y 117 411, derrumbe parcial.
33. a) Xiomara recolectó 65 latas de café y Ana Lidia 39.
    b) La cantidad recolectada por Xiomara excede en 910 lb a la cantidad recolectada por Ana Lidia.
34. a) Había sembradas 15 ha de tomate y 30 ha de papa.

b) De tomate se recogieron 3 ha y de papa, 10 ha.
c) Falta por sembrar el 10 % del total de hectáreas del terreno.

35. En marzo el gasto de energía del apartamento *A* fue de 190 kWh y el *B* de 210 kWh.
36. En enero la vivienda *A* consumió 192 kWh y la vivienda *B*, 100 kWh.
37. Fueron adquiridas por la empresa 36 piezas de cada tipo.
38. Al cultivo del tomate están dedicadas 34 ha y 24 ha a la cebolla.
39. En la escuela trabajan 7 profesoras.
40. Estaban pintonas 24 frutabombas.
41. El ángulo *CBA* tiene una amplitud de 60° y el ángulo *BCA*, de 90°.
42. El rectángulo tiene 72 cm de perímetro.

Ejercicios del capítulo

1. a) F, porque el par $\left(\frac{3}{5}; \frac{2}{3}\right)$ transforma la ecuación $5p + 3q = 5$ en una proposición verdadera, pues $5\left(\frac{3}{5}\right)+3\left(\frac{2}{3}\right)=5$.
b) F, pues para todo $x, y \in \mathbb{Z}$ el miembro izquierdo de la ecuación es un número par y el miembro derecho es un número impar, luego no existe un par de números enteros que sea solución de la ecuación $2x + 4y = 7$.
c) V d) V e) V f) V g) V h) V i) V
j) F, porque para que un par sea solución de un sistema tiene que ser solución de cada una de las ecuaciones del sistema.
k) V l) V

2. a) Solución única b) Infinitas soluciones
c) Solución única d) No tiene solución

4. a) $S = \{(1; 2)\}$ b) $S = \{(8; -2)\}$ c) $S = \{(7; 0)\}$ d) $S = \{(-1; -2)\}$
e) $S=\left\{\left(\frac{7}{5}; \frac{3}{5}\right)\right\}$ f) $S=\left\{\left(\frac{1}{2}; -3\right)\right\}$ g) $S = \{(2; 2)\}$ h) $S = \{(2; 3)\}$
i) $S = \{(2; 3)\}$ j) $S=\left\{\left(a; \frac{3}{11}a-\frac{2}{11}\right): a \in \mathbb{R}\right\}$ k) $S = \{(1; 1)\}$
l) $S = \{(32; 24)\}$ m) $S=\left\{\left(\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right)\right\}$ n) $S = \phi$ ñ) $S=\left\{\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)\right\}$
o) $S = \{(0; -7)\}$ p) $S=\left\{\left(-\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)\right\}$ q) $S = \{(-9; -6)\}$ r) $S=\left\{\left(2; -\frac{4}{5}\right)\right\}$

s) $S = \{(2; 0)\}$ t) $S = \{(2; -1)\}$ u) $S = \{(3; 1)\}$

6. El sistema tiene solución única para todo $k \in \mathbb{R}$ tal que $k \neq \frac{3}{2}$.
7. $m = -36$, $n = 9$
8. a) $a = 5$k con $k \in \mathbb{Z}$
   b) $a = 5k$ con $k \in \mathbb{Z}$ y $k \leq 0$

9. 28 y 16
10. a) De las pilas AAA se vendieron 40 paquetes y de las pilas AA, 60 paquetes.
    b) Queda por vender el 54,5 % de los paquetes que había en el almacén.

11. La base del triángulo isósceles mide 3 cm y los lados no base 8 cm.
12. El número es 39.
13. La edad de Giselle es 45 años y la de Patricia, 30.
14. Un recipiente tenía originalmente 150 L de pintura y el otro, 210 L.
15. a) En el tercer año de esa escuela pedagógica hay 245 estudiantes.
    b) Los estudiantes de tercer año de la especialidad Preescolar representan el 64,5 % de los estudiantes de este año.

16. Este destacamento lo integran 27 hembras y 18 varones.
17. Carolina tiene 24 monedas de tres pesos.
18. Los números son 33 y 52.
19. La cooperativa tiene 17 conejos y 33 gallinas.
20. La cantidad de apartamentos de dos habitaciones excede en 24 a la cantidad de apartamentos de tres habitaciones.
21. a) El plan de producción de pienso de la fábrica *A* es de 80 t y de la *B*, 50 t.
    b) La fábrica *A* ha producido 32 t de pienso y la fábrica *B*, 15 t.

22. El dividendo es 97 y el divisor es 46.
23. El noveno grado de esa escuela tiene 50 varones y 30 hembras.
24. a) En el organopónico hay 12 canteros cultivados y 8 canteros recién creados.
    b) En los canteros recién creados se utilizó el 27,3 % del total de fertilizante.

25. En la fábrica había 20 obreros calificados.
26. a) La capacidad de los tanques es de 200 L y 250 L.
    b) El tanque de mayor capacidad demora 20 min en llenarse.

27. a) Se utilizaron para envasar todo el aceite 13 recipientes de 10 L y 9 de 16 L.
    b) El 52,5 % del total del aceite se envasó en los recipientes de 16 L.

28. a) El grupo *A* se comprometió a visitar 20 viviendas y 60 el grupo *B*.
    b) El grupo *B* cumplió su compromiso inicial en un 66,6 %.

CAPÍTULO 4

Trabajo con variables, ecuaciones de segundo grado y funciones cuadráticas

4.1 Repaso sobre el trabajo con variables

¡! Una piscina tiene forma de prisma recto de base rectangular. Las dimensiones de la base exceden en 2,0 m y 1,0 m, respectivamente, a su profundidad.

a) ¿Cómo expresarías el volumen de la piscina mediante un polinomio?
b) ¿Cómo se clasifica el polinomio obtenido?

R¡! Como la piscina tiene forma de prisma recto de base rectangular, puedes hacer la figura de análisis 4.1.

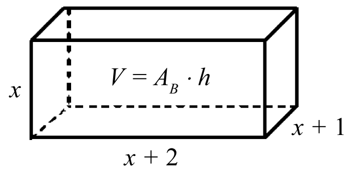


Figura 4.1

Si x representa la longitud de la profundidad de la piscina, entonces las longitudes de sus bases se representan por $(x + 2)$ y $(x + 1)$ respectivamente.

Ya conoces de séptimo grado, que el volumen del prisma se calcula multiplicando el área de su base por la altura, y como la base es rectangular, te queda el volumen expresado de la forma siguiente:

$V = (a \cdot b) \cdot h$ (ya que el área del rectángulo es $A = a \cdot b$)

Sustituyes las expresiones correspondientes a cada arista del prisma en la fórmula de volumen y obtienes:

$V = (x + 2)(x + 1) \cdot x$

Para expresar el volumen de la piscina mediante un polinomio y clasificarlo, debes efectuar el producto indicado entre los dos binomios y el monomio.

En grados anteriores estudiaste qué es un monomio, un polinomio, cómo determinar el grado de un monomio y de un polinomio, así como las operaciones que se realizan con estos.

En este caso debes efectuar algunas de ellas como el producto de dos binomios y de un monomio por un polinomio, además de la reducción de términos semejantes. Estas operaciones las puedes realizar de varias formas. Una de las cuales puede ser la siguiente:

1. Efectúas primero el producto de los binomios. Recuerda que debes multiplicar cada término del primer binomio por cada uno de los términos del otro.

$V = (x^2 + x + 2x + 2) \cdot x$ (efectuando el producto de los binomios)
$V = (x^2 + 3x + 2) \cdot x$ (reduciendo términos semejantes)

2. Efectúas el producto de un monomio por un polinomio. En este caso multiplicas el monomio por cada término del trinomio.

$V = x^3 + 3x^2 + 2x$ (efectuando el producto del monomio por el trinomio)

Respuesta del a): El volumen de la piscina se puede expresar mediante el polinomio $x^3 + 3x^2 + 2x$.

Respuesta del b): El polinomio está compuesto por la suma de tres monomios, luego se clasifica en *trinomio.*

Por medio de la situación inicial planteada has recordado algunas de las operaciones que aprendiste a realizar al trabajar con monomios y polinomios. Pero seguro recordarás que también efectuaste otras que te ayudaron a resolver algunos ejercicios donde se combinaban entre sí estas operaciones y hallaste también el valor numérico de varias expresiones.

A continuación, brevemente, te recordamos algunas de estas operaciones a partir de los ejemplos siguientes:

Ejemplo 1:

Sean $A = 2x - 3$; $B = x + 5$ y $C = 2x^2 + 9x - 5$

1.1 Calcula y simplifica:

a) $C - A \cdot B$ b) $A^2 - 2C + B$ c) $\dfrac{C}{B} - \dfrac{A}{2}$

1.2 Di el grado de los polinomios A, B y C.

Solución:

1.1 a) $(2x^2 + 9x - 5) - (2x - 3)(x + 5)$ (sustituyes cada letra por su expresión introduciendo los paréntesis)

Para eliminar los paréntesis debes aplicar la regla correspondiente en cada caso:

$= 2x^2 + 9x - 5 - (2x - 3)(x + 5)$ (el primer paréntesis está precedido de signo *más,* por lo que se elimina *dejando* cada término con *su signo*)

Observa que el producto está precedido de signo menos, por lo que *primero* se efectúa el *producto,* multiplicando los términos del primer binomio por cada término del segundo binomio, y luego debes *cambiar el signo* de cada término en el resultado.

$= 2x^2 + 9x - 5 - (2x^2 - 3x + 10x - 15)$
$= 2x^2 + 9x - 5 - 2x^2 + 3x - 10x + 15$

$= \underline{2x^2} + \underline{\underline{9x}} - \underbrace{5} - \underline{2x^2} - \underline{\underline{10x}} + \underline{\underline{3x}} + \underbrace{15}$ (identificas los términos semejantes)

$= 2x + 10$ (reduces los términos semejantes)

b) $A^2 - 2C + B$

$(2x - 3)^2 - 2(2x^2 + 9x - 5) + (x + 5)$ (sustituyes cada letra por su expresión introduciendo los paréntesis)

Para eliminar los paréntesis, debes aplicar la regla correspondiente en cada caso:

$= (2x - 3)(2x - 3) - 2(2x^2 + 9x - 5) + (x + 5)$ (expresas $(2x - 3)^2$ aplicando la definición de potencia como el producto de dos binomios)

$= 4x^2 - 6x - 6x + 9 - 4x^2 - 18x + 10 + x + 5$ (eliminas los paréntesis indicados)

El producto de binomios se efectúa multiplicando cada término del primer binomio por cada término del segundo, el segundo paréntesis se elimina aplicando la propiedad distributiva y en el tercero, cada término sale con su signo, ya que está precedido de signo más.

$= \underline{4x^2} - \underline{\underline{6x}} - \underline{\underline{6x}} + \underbrace{9} - \underline{4x^2} - \underline{\underline{18x}} + \underbrace{10} + \underline{\underline{x}} + \underbrace{5}$ (identificas los términos semejantes)

$= -29x + 24$ (reduces los términos semejantes)

c) $\dfrac{C}{B} - \dfrac{A}{2}$

$\dfrac{2x^2 + 9x - 5}{x + 5} - \dfrac{2x - 3}{2}$ (sustituyes cada letra por su expresión)

Observa que en este caso no son necesarios los paréntesis.

Para efectuar los cocientes indicados, debes recordar las reglas de división de un polinomio por un binomio y de un polinomio por un monomio.

Recuerda que:

Al dividir un polinomio por un monomio:

1. Planteas el cociente de cada término del polinomio por dicho monomio.
2. Efectúas cada división indicada.

Al dividir un polinomio por un binomio:

1. Ordenas el dividendo y el divisor en potencias decrecientes de la misma variable.
2. Divides el primer término del dividendo por el primer término del divisor. Pones el resultado en el lugar del cociente.
3. Multiplicas el divisor por el resultado obtenido en el paso previo (el primer término del cociente). Escribes el resultado debajo de los primeros dos términos del dividendo.
4. Sustraes a los términos correspondientes del dividendo original el producto obtenido en el paso anterior, y escribes el resultado.
5. Agregas al resto obtenido el próximo término del dividendo.
   Repites los pasos 2, 3 y 4, utilizando como dividendo el resultado obtenido en el paso anterior, hasta obtener un resto cuyo grado sea menor que el grado del divisor.

$$\begin{array}{rl} \cancel{2x^2} + 9x - 5 & \underline{|\,x + 5\,} \\ \underline{- \cancel{2x^2} - 10x\quad} & \quad 2x - 1 \\ - \cancel{x} - \cancel{5} & \\ \underline{\cancel{x} + \cancel{5}} & \\ 0 & \end{array} \qquad\qquad \frac{2x-3}{2} = \frac{2x}{2} - \frac{3}{2} = \boxed{x - \frac{3}{2}}$$

$(2x - 1) - (x - 1{,}5)$ (sustituyes los resultados obtenidos)
$= 2x - 1 - x + 1{,}5$ (eliminas los paréntesis precedidos de signos más y menos)
$= x + 0{,}5$ (reduces los términos semejantes)

1.2 Di el grado de los polinomios A, B y C.

Recuerda que:

El grado de un polinomio es el mayor grado de los monomios que lo componen.

$A = 2x - 3$, es de *grado 1,* ya que el monomio $2x$ tiene grado 1 y -3, grado 0.
$B = x + 5$, es de *grado 1,* ya que el monomio x tiene grado 1 y 5, grado 0.
$C = 2x^2 + 9x - 5$, es de *grado 2,* ya que el monomio $2x^2$ tiene grado 2, $9x$ tiene grado 1 y -5, grado 0.

En octavo grado también estudiaste la eliminación de paréntesis superpuestos y calculaste el valor numérico de expresiones algebraicas.

Ejemplo 2:

Sean $A = 2ab^2 - [(a + b)(a - b) - ab(a - 2b)] - a^2b$ y
$B = 3m - \{2m^2 - [(m + 1)(m - 2) + 5(m - 2)] + 3\}$

a) Calcula y simplifica las expresiones A y B.

b) Halla el valor numérico de la expresión A para $a = -1$ y $b = \frac{1}{2}$.

Solución:

a) En estas expresiones aparecen varios signos de agrupación. Para simplificar expresiones como estas, una de las formas más cómodas de eliminar los signos de agrupación es la de suprimir estos comenzando por los más interiores, es decir, de adentro hacia fuera.

$A = 2ab^2 - [a^2 - ab + ba - b^2 - a^2b + 2ab^2] - a^2b$ (eliminas los paréntesis)
$A = 2ab^2 - a^2 + ab - ba + b^2 + a^2b - 2ab^2 - a^2b$ (eliminas el corchete)
$A = \underline{2ab^2} - a^2 + \underbrace{ab} - \underbrace{ba} + b^2 + \underline{\underline{a^2b}} - \underline{2ab^2} - \underline{\underline{a^2b}}$ (identificas los términos semejantes)
$A = -a^2 + b^2$ (reduces los términos semejantes)

(Nota que los términos ab y ba son semejantes, lo que sus variables no están en el mismo orden).

En la expresión B, tienes tres signos de agrupación, puedes comenzar también de adentro hacia afuera como el anterior o puedes probar de afuera hacia adentro.

$B = 3m - \{2m^2 - [(m + 1)(m - 2) + 5(m - 2)] + 3\}$
$B = 3m - \{2m^2 - [m^2 - 2m + m - 2 + 5m - 10] + 3\}$ (eliminas los paréntesis)

Como puedes apreciar, dentro del corchete hay varios términos y algunos de ellos son semejantes, por lo que es conveniente antes de eliminarlo, reducir los términos semejantes para operar con menos términos en los pasos posteriores. Esto te ayuda a reducir la expresión y evitas cualquier omisión o cambio en alguno de sus términos.

$B = 3m - \left\{2m^2 - \left[m^2 - \underline{2m} + \underline{m} - \underline{\underline{2}} + \underline{5m} - \underline{\underline{10}}\right] + 3\right\}$ (identificas dentro del corchete los términos semejantes)
$B = 3m - \{2m^2 - [m^2 + 4m - 12] + 3\}$ (reduces los términos semejantes)
$B = 3m - \{2m^2 - m^2 - 4m + 12 + 3\}$ (eliminas el corchete)
$B = 3m - \{m^2 - 4m + 15\}$ (reduces los términos semejantes)
$B = 3m - m^2 + 4m - 15$ (eliminas las llaves)
$B = -m^2 + 7m - 15$ (identificas y reduces los términos semejantes)

b) Debes hallar ahora el valor numérico de A para los valores indicados.

Recuerda que:

> Se denomina **valor numérico de una expresión algebraica** al número que se obtiene cuando se sustituyen las variables de dicha expresión por números y se efectúan las operaciones indicadas.

$A = -a^2 + b^2$ para $a = -1$ y $b = \frac{1}{2}$.

$A = -(-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$ (sustituyes los valores de a y b en la expresión)

$A = -1 + \frac{1}{4}$ (efectúas cada cuadrado)

$A = -\frac{3}{4}$ (realizas la sustracción indicada)

Recuerda que:

> El valor numérico de una expresión algebraica se puede calcular en la expresión inicial o en la simplificada, por lo que también podías haber sustituido las variables por su valor en la expresión inicial y obtendrías el mismo resultado.

Sin embargo, puedes apreciar fácilmente que el trabajo en la expresión simplificada es más racional.

Ejercicios

1. Determina el valor numérico de las expresiones algebraicas siguientes para los valores de las variables que se indican y di a qué conjunto numérico más restringido pertenecen los valores numéricos obtenidos.

   a) $a^2b + 2c$ para $a = -2$; $b=\frac{3}{4}$ y $c = -5$

   b) $4x^0 - y^{-2}z^3$ para $x=-\frac{1}{5}$; $y = 3$; $z = -6$

   c) $(m - n) \cdot 3p$ para $m = 9{,}2$; $n = 4$; $p=-\frac{1}{2}$

   d) $(r^2 + s) : 4t$ para $r = -4$; $s = 8$; $t = -6$

   e) $\dfrac{6c^2+d}{e}$ para $c = 1{,}5$; $d = -10$; $e = -7$

   f) $\dfrac{x^3y-z}{x+5}$ para $x = -3$; $y=\frac{1}{3}$; $z = 11$

   g) $6t^0w^2-\sqrt{w+3u^{-1}}$ para $t=\frac{2}{3}$; $w=-\frac{1}{2}$; $u = 2$

2. Calcula y simplifica. Clasifica las expresiones obtenidas en monomio, binomio o trinomio. Señala en cada caso el grado del polinomio obtenido.

   a) $2(x - 5) + (7 - 2x) + 10$
   b) $x(x - 3) + 3(x - 1) - 4x$
   c) $(y - 1)(y + 3) - y(y + 1) - 3$
   d) $(2a + 1)(a - 2) - (a^2 + 2a + 3) + 5a$
   e) $(m + 2)^2 + 3(m - 5) + 7m - 1$
   f) $(2t - 1) - (2t + 1)(2t - 1) + 11t$
   g) $x(x^2 + x + 7) - (x + 3)^2 + 2(x - 9)$
   h) $(ab + 2)(ab - 3) + (a + b)^2 - b^2 + 6$
   i) $\dfrac{6m^3n^2+12m^4n^3}{3m^2n^2}-(2m-3m^2n)$
   j) $\dfrac{x^2+6x-7}{x+7}+\dfrac{x}{3}(9x-12)-2x^2$

3. Simplifica las expresiones algebraicas siguientes:

   a) $3a + [2a + 5(a + 4) - 2] - 8a$
   b) $-xy - 2[(x + 2)(y - 5) + 4xy] + 7y$
   c) $3m^2n + \{2m - [m(mn + 2) - nm^2] + 7m\}$
   d) $-\{3ab + [(3a + b)(a - b) - 3a^2] - 2ba\} - b^2$

4. Sean $A = (2x + 3)(x - 7)$; $B = \dfrac{2x}{3}$ y $C = 6x - 9$.

   a) Calcula y simplifica $D = B \cdot C - A$.
   b) Clasifica la expresión resultante y señala su grado.
   c) Halla el valor numérico de D para $x = -2$.

5. Sean $M = 4y - 1$; $N = (2y - 1)(2y + 1)$; $P = 3 - 2y^2$ y $R = -8y + 20$.

   a) Prueba que $M^2 - N + 6P = R$.

   b) Calcula y simplifica $\dfrac{R}{4} + 2(y - 2{,}5)$.

4.2 Algunos productos notables

¡! La profesora Sonia estimula en sus estudiantes el cálculo mental. Aprovechando el tema operaciones con polinomios y luego de varias clases de ejercitación, realizó un concurso de habilidades cuyo ganador sería el que más rápido calculara los productos siguientes:

a) $(x + 3)^2$ b) $(m + 5)(m - 5)$ c) $(n + 2)(n - 4)$

Los dos estudiantes más rápidos resultaron Aldo y Deysi, pero la ganadora fue Deysi, ya que terminó en menos tiempo.

R¡! Observa la respuesta de la hoja entregada por cada uno:

Aldo

a) $(x + 3)^2 = (x + 3)(x + 3)$
$= x^2 + 3x + 3x + 9$
$= x^2 + 6x + 9$

b) $(m + 5)(m - 5) = m^2 - 5m + 5m - 25$
$= m^2 - 25$

c) $(n + 2)(n - 4) = n^2 - 4n + 2n - 8$
$= n^2 - 2n - 8$

Deysi

a) $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

b) $(m + 5)(m - 5) = m^2 - 25$

c) $(n + 2)(n - 4) = n^2 - 2n - 8$

Como puedes apreciar Deysi terminó primero, ya que escribió la respuesta directamente sin realizar de manera escrita el procedimiento utilizado por Aldo.

¿Será realmente posible obtener estos resultados mentalmente?

Por supuesto que sí, ya que existen multiplicaciones con expresiones algebraicas cuyos productos cumplen reglas fijas, por lo que su resultado se puede escribir mediante simple inspección; resulta útil memorizarlos para así, no tener necesidad de efectuar las multiplicaciones correspondientes repetidas veces. Su aplicación simplifica y sistematiza la resolución de muchas multiplicaciones habituales. A estos productos se les suele llamar *productos notables*.

En este tema aprenderás algunos de estos y los aplicarás a lo largo del capítulo en ejercicios y problemas.

4.2.1 Cuadrado de la suma de dos términos

El primer producto notable que aprenderás recibe el nombre de *cuadrado de la suma de dos términos,* que algebraicamente se escribe, como ya conoces, $(a + b)^2$.

Ejemplo 1:

Calcula:

a) $(x + 1)^2$ b) $(x + 4)^2$ c) $(x + 10)^2$ d) $(2x + 3)^2$ e) $(a + b)^2$

Solución:

Para calcular estos productos escribes la base de la potencia dos veces como factor, aplicando la definición de potencia, y realizas el producto de dos binomios.

a) $(x + 1)(x + 1)$
$= x^2 + x + x + 1$ (efectúas el producto de los binomios)
$= x^2 + 2x + 1$ (reduces los términos semejantes)

b) $(x + 4)(x + 4)$
$= x^2 + 4x + 4x + 16$ (efectúas el producto de los binomios)
$= x^2 + 8x + 16$ (reduces los términos semejantes)

c) $(x + 10)(x + 10)$
$= x^2 + 10x + 10x + 100$ (efectúas el producto de los binomios)
$= x^2 + 20x + 100$ (reduces los términos semejantes)

d) $(2x + 3)(2x + 3)$
$= 4x^2 + 6x + 6x + 9$ (efectúas el producto de los binomios)
$= 4x^2 + 12x + 9$ (reduces los términos semejantes)

e) $(a + b)(a + b)$
$= a^2 + ab + ab + b^2$ (efectúas el producto de los binomios)
$= a^2 + 2ab + b^2$ (reduces los términos semejantes)

Observa las características comunes que tienen los resultados obtenidos:

1. En todos los casos obtuviste como respuesta un *trinomio.*
2. El primer término del trinomio es el *cuadrado* del *primer término* de los binomios.
3. El segundo término del trinomio es el *doble producto* de los dos términos que forman los binomios.

(Nota que los dos términos centrales del polinomio obtenido en cada inciso, al realizar el producto indicado, son *semejantes* y tienen el *mismo signo,* por lo que siempre se adicionan).

4. El tercer término del trinomio es el *cuadrado* del *segundo término* de los binomios.

Si realizas el mismo procedimiento con otros productos similares, llegarás al mismo resultado; por lo que este es uno de los productos que puedes realizar aplicando una *regla,* cuya demostración la constituye el resultado obtenido en el inciso e.

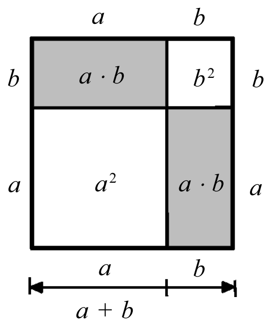
Recuerda *el producto notable del cuadrado de la suma de dos términos:*

El cuadrado de una suma de dos términos es igual al cuadrado del primer término, más el duplo del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo término. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Este producto notable también lo puedes comprender mejor, a partir de su interpretación geométrica.

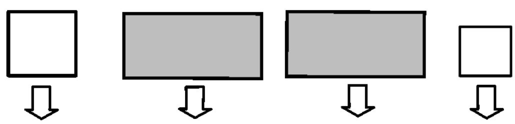
Ya desde la antigüedad, los griegos, a diferencia de los babilonios y los hindúes, realizaban la interpretación geométrica de los productos notables a partir del grado de desarrollo que habían alcanzado con la geometría.

Tomas un cuadrado y lo divides, trazando dos segmentos perpendiculares a sus lados, en dos cuadrados de lados a *y* b, *y dos rectángulos de dimensiones* a *y* b. *De esta manera, el cuadrado original tiene lado de longitud igual (*a + b*), como muestra la figura 4.2.*



Por fórmula: $A_{\text{cuadrado}} = l^2 = (a + b)^2$ (1)

Por suma de áreas:



$A_{\text{cuadrado}} = a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2$

$A_{\text{cuadrado}} = a^2 + 2ab + b^2$ (2)

Figura 4.2

De (1) y (2) se tiene que: $\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

4.2.2 Cuadrado de la diferencia de dos términos

El segundo producto notable que aprenderás recibe el nombre de *cuadrado de la diferencia de dos términos,* que algebraicamente se escribe, como ya conoces, $(a - b)^2$.

Ejemplo 2:

Calcula:

a) $(x-1)^2$ b) $(x-4)^2$ c) $(x-10)^2$ d) $(2x-3)^2$ e) $(a-b)^2$

Solución:

a) $(x-1)(x-1)$ (escribes el producto de dos binomios iguales)
$= x^2 - x - x + 1$ (efectúas el producto de los binomios)
$= x^2 - 2x + 1$ (reduces los términos semejantes)
b) $(x-4)(x-4)$ (escribes el producto de dos binomios iguales)
$= x^2 - 4x - 4x + 16$ (efectúas el producto de los binomios)
$= x^2 - 8x + 16$ (reduces los términos semejantes)
c) $(x-10)(x-10)$ (escribes el producto de dos binomios iguales)
$= x^2 - 10x - 10x + 100$ (efectúas el producto de los binomios)
$= x^2 - 20x + 100$ (reduces los términos semejantes)
d) $(2x-3)(2x-3)$ (escribes el producto de dos binomios iguales)
$= 4x^2 - 6x - 6x + 9$ (efectúas el producto de los binomios)
$= 4x^2 - 12x + 9$ (reduces los términos semejantes)
e) $(a-b)(a-b)$ (escribes el producto de dos binomios iguales)
$= a^2 - ab - ab + b^2$ (efectúas el producto de los binomios)
$= a^2 - 2ab + b^2$ (reduces los términos semejantes)

Observa las características comunes que tienen los resultados obtenidos:

1. En todos los casos obtuviste como respuesta un *trinomio.*
2. El primer término del trinomio es el *cuadrado* del *primer término* de los binomios.
3. El segundo término del trinomio es el *doble producto* de los dos términos que forman los binomios, pero con signo *menos.*

   (Nota que los dos términos centrales del polinomio obtenido en cada inciso, al efectuar el producto, son *semejantes* y tienen el *mismo signo,* por lo que siempre se adicionan).
4. El tercer término del trinomio, es el *cuadrado* del *segundo término* de los binomios. Si realizas el mismo procedimiento con otros productos similares llegarás al mismo resultado, por lo que este es otro de los productos que puedes realizar aplicando una *regla,* cuya demostración lo constituye también el resultado del inciso e.

Recuerda *el producto notable del cuadrado de la diferencia de dos términos:*

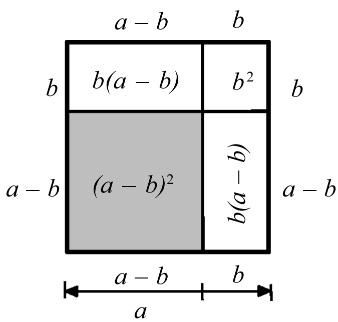
El cuadrado de una diferencia de dos términos es igual al cuadrado del primer término, menos el duplo del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo término. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Como puedes apreciar, estos dos productos notables se *diferencian solo en un signo,* por lo que puedes resumirlos de la manera siguiente:

$$\boxed{(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2}$$

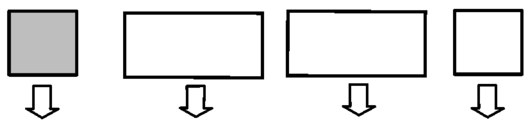
Al igual que en el cuadrado de una suma, conocer la interpretación geométrica del cuadrado de una diferencia te puede ser útil en su memorización.

Tomas un cuadrado de lado a *y le trazas dos segmentos perpendiculares a sus lados. El cuadrado queda dividido en cuatro rectángulos, cuyos lados y áreas se muestran en la figura 4.3. Para obtener el área del cuadrado sombreado, realizas el procedimiento que aparece en la figura 4.3.*



Por fórmula: $A_{cuadrado} = a^2$ (1)

Por suma de áreas:



$$A_{\text{cuadrado}} = (a-b)^2 + b(a-b) + b(a-b) + b^2$$

$$A_{\text{cuadrado}} = (a-b)^2 + ba - b^2 + ba - \cancel{b^2} + \cancel{b^2}$$

$$A_{\text{cuadrado}} = (a-b)^2 + 2ab - b^2 \qquad (2)$$

Figura 4.3

De (1) y (2) se tiene que: $a^2 = (a-b)^2 + 2ab - b^2$ (3)

Despejando en (3) $(a-b)^2$ se tiene que: $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

Ejemplo 3:

Calcula los productos notables siguientes:

a) $(x+2)^2$ b) $(-x-2)^2$ c) $(y-7)^2$ d) $(7-y)^2$ e) $(3x+1)^2$

f) $(3-4x)^2$ g) $\left(m+\frac{1}{2}\right)^2$ h) $(-p+0{,}7)^2$ i) $\left(\frac{p}{3}+\frac{3}{2}\right)^2$ j) $(-mn-2p)^2$

Solución:

a) $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$

1. Primer término al cuadrado: x^2.
2. Duplo del primer término por el segundo: $2 \cdot x \cdot 2 = 4x$.
3. Segundo término al cuadrado: $2^2 = 4$.

(Como es el cuadrado de una suma, todos los términos del trinomio resultante son positivos).

b) $(-x - 2)^2 = x^2 + 4x + 4$

1. Primer término al cuadrado: $(-x)^2 = x^2$.
2. Duplo del primer término por el segundo: $2 \cdot (-x) \cdot (-2) = 4x$.
3. Segundo término al cuadrado: $(-2)^2 = 4$.

(Al igual que en el inciso anterior los dos términos del binomio tienen el mismo signo, por lo que puedes expresar este producto como una suma).

$[(-x) + (-2)]^2$. Luego, el cuadrado de cada término siempre resulta positivo, mientras que el término central también es positivo, ya que el producto de dos factores de igual signo siempre es positivo).

c) $(y - 7)^2 = y^2 - 14y + 49$

1. Primer término al cuadrado: y^2.
2. Duplo del primer término por el segundo: $2 \cdot y \cdot (-7) = -14y$.
3. Segundo término al cuadrado: $(-7)^2 = 49$.

(Como es el cuadrado de una diferencia, el término del medio del trinomio resultante es negativo).

d) $(7 - y)^2 = 49 - 14y + y^2$

1. Primer término al cuadrado: $7^2 = 49$.
2. Duplo del primer término por el segundo: $2 \cdot 7 \cdot (-y) = -14y$.
3. Segundo término al cuadrado: $(-y)^2 = y^2$

(Estás en presencia del cuadrado de una diferencia, solo que ambos términos están en *otro orden* respecto al inciso c. Si ordenas el trinomio con los exponentes de mayor a menor, obtienes el mismo resultado que en dicho inciso).

e) $(3x + 1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$

1. Primer término al cuadrado: $(3x)^2 = 9x^2$
2. Duplo del primer término por el segundo: $2 \cdot 3x \cdot 1 = 6x$.
3. Segundo término al cuadrado: $1^2 = 1$.

f) $(3 - 4x)^2 = 9 - 24x + 16x^2$

1. Primer término al cuadrado: $3^2 = 9$
2. Duplo del primer término por el segundo: $2 \cdot 3 \cdot (-4x) = -24x$.
3. Segundo término al cuadrado: $(-4x)^2 = 16x^2$.

(Como es el cuadrado de una diferencia, el término del medio del trinomio resultante es negativo. Al calcular $(4x)^2$, hallas el cuadrado del coeficiente y de la parte literal).

g) $\left(m+\frac{1}{2}\right)^2 = m^2 + m + \frac{1}{4}$

1. Primer término al cuadrado: m^2.
2. Duplo del primer término por el segundo: $2 \cdot m \cdot \frac{1}{2} = m$.
3. Segundo término al cuadrado: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

h) $(-p + 0{,}7)^2 = p^2 - 1{,}4p + 0{,}49$

1. Primer término al cuadrado: $(-p)^2 = p^2$.
2. Duplo del primer término por el segundo: $2 \cdot (-p) \cdot 0{,}7 = -1{,}4p$.
3. Segundo término al cuadrado: $0{,}7^2 = 0{,}49$.

(Es el cuadrado de una diferencia, que también puedes escribir $(0{,}7 - p)^2$, por lo que el término del medio del trinomio resultante es negativo).

i) $\left(\frac{p}{3}+\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{9} + p + \frac{9}{4}$

1. Primer término al cuadrado: $\left(\frac{p}{3}\right)^2 = \frac{p^2}{9}$.
2. Duplo del primer término por el segundo: $2 \cdot \left(\frac{p}{3}\right) \cdot \frac{3}{2} = p$.
3. Segundo término al cuadrado: $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

(Al calcular el cuadrado de una fracción, hallas el cuadrado tanto del numerador, como del denominador. En el segundo paso simplificas el dos y el 3).

j) $(-mn - 2p)^2 = m^2n^2 + 4mnp + 4p^2$

1. Primer término al cuadrado: $(-mn)^2 = m^2n^2$.
2. Duplo del primer término por el segundo: $2 \cdot (-mn) \cdot (-2p) = 4mnp$.
3. Segundo término al cuadrado: $(-2p)^2 = 4p^2$.

(Como ambos términos del binomio tienen igual signo, estás en presencia del cuadrado de una suma, que puede escribirse $[(-mn) + (-2p)]^2$, de ahí que el término central del trinomio resultante sea positivo).

De los incisos a y b puedes llegar a la conclusión que: $(a + b)^2 = (-a - b)^2$, mientras que de los incisos c y d obtienes que: $(a - b)^2 = (b - a)^2$.

Recuerda que:

- El cuadrado de una suma y de una diferencia de dos términos se puede efectuar oralmente a partir de la regla: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
- El resultado es un *trinomio,* donde los términos *primero* y *tercero* son siempre *positivos,* mientras que el *término central o segundo* es *positivo (negativo)* si el cuadrado que hallas es de una *suma (diferencia).*
- Al aplicar este producto notable se cumple que:

$(a + b)^2 = (-a - b)^2$ y $(a - b)^2 = (b - a)^2$

Los productos notables son transformaciones algebraicas que mediante la utilización de las propiedades conmutativa y distributiva de los números reales, nos permiten obtener las relaciones que generan los productos correctos para las multiplicaciones que definen.

No sabemos con certeza quién descubrió estas fórmulas, sin embargo algunas culturas antiguas ya las utilizaban en sus cálculos en forma retórica, o bien buscaron demostrarlas en forma geométrica. Tal es el caso de los babilonios que, de acuerdo con lo estudiado en las tablillas que se conservan (fig. 4.4) como constancia de sus avances matemáticos, consiguieron obtener relaciones como:

Figura 4.4

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Expresándolos en su álgebra retórica en forma de problemas.
Los griegos, se cree que principalmente fueron los pitagóricos, consiguieron demostrar identidades algebraicas de este tipo por métodos geométricos, como se puede observar en la obra de Euclides, Elementos, *en la que diferentes proposiciones del libro II muestran formas de algunos productos notables como son:*

a) La proposición cuatro que establece en forma geométrica $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
b) La proposición cinco que equivale a $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.
c) La proposición siete da la demostración geométrica de $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

En China, Zhou Jijie (alrededor de 1280-1303), en su obra Espejos Preciosos de los Cuatro Elementos, *presenta en una de las primeras páginas, un diagrama del triángulo aritmético que llamamos Triángulo de Pascal (fig. 4.5), en el que desarrollan hasta la octava potencia los coeficientes de los términos de un binomio elevado a* *una potencia, aproximadamente 300 años antes de que el propio Pascal lo presentara en Occidente.*

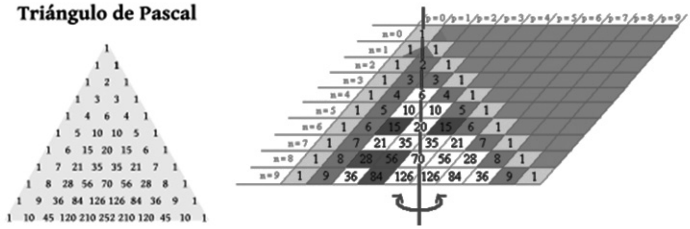


Figura 4.5

Al-Khwarizmi, en su obra Hisab al-yabr wa'l-muqqabala, *expone, en la primera parte, el principio de valor de los números y resuelve seis tipos de ecuaciones, mientras que en la segunda parte cita las reglas para multiplicar expresiones de la forma* (a + b)(a – b), (a + b)(a – c), etc,. *y las demostraciones geométricas de algunas de las ecuaciones tratadas en la primera parte.*
La humanidad tuvo que esperar hasta el siglo XVIII para ver generalizado por medio del Binomio de Newton (fig. 4.6) el desarrollo de cualquier binomio elevado a una potencia.

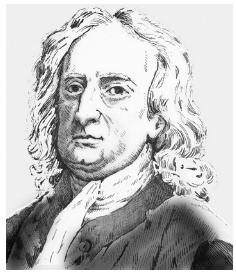


Figura 4.6

4.2.3 Suma por la diferencia de dos términos

En el epígrafe anterior, para introducir los productos notables estudiados, se presentaba el producto de dos binomios iguales, o sea, $(a + b)(a + b)$ o $(a - b)(a - b)$. Sin embargo, en ocasiones, el producto a realizar está formado por dos binomios con los mismos términos, pero que difieren en el signo entre ellos, tal es el caso del producto $(a + b)(a - b)$.

Precisamente este producto también cumple con una regla que te permite realizarlo de forma oral y rápida.

Observa el ejemplo siguiente:

Ejemplo 1:

Calcula:

a) $(x + 1)(x - 1)$ b) $(x + 4)(x - 4)$ c) $(2x + 3)(2x - 3)$

d) $\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{x}{3}+\frac{3}{2}\right)$ e) $(a + b)(a - b)$

Solución:

Para calcular este producto, recuerda que debes multiplicar cada término del primer binomio por cada uno de los términos del otro.

a) $(x + 1)(x - 1)$
$= x^2 - x + x + 1$ (efectúas el producto de los binomios)
$= x^2 - 1$ (reduces los términos semejantes)

b) $(x + 4)(x - 4)$
$= x^2 - 4x + 4x - 16$ (efectúas el producto de los binomios)
$= x^2 - 16$ (reduces los términos semejantes)

c) $(2x + 3)(2x - 3)$
$= 4x^2 - 6x + 6x - 9$ (efectúas el producto de los binomios)
$= 4x^2 - 9$ (reduces los términos semejantes)

d) $\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{x}{3}+\frac{3}{2}\right)$

$=\frac{x^2}{9}+\frac{x}{2}-\frac{x}{2}-\frac{9}{4}$ (efectúas el producto de los binomios)

$=\frac{x^2}{9}-\frac{9}{4}$ (reduces los términos semejantes)

e) $(a + b)(a - b)$
$= a^2 - ab + ab - b^2$ (efectúas el producto de los binomios)
$= a^2 - b^2$ (reduces los términos semejantes)

Observa las características comunes que tienen los resultados obtenidos:

1. En todos los casos obtuviste como respuesta un *binomio.*
2. El primer término del binomio resultante es el *cuadrado* del *primer término* de los binomios.
3. El segundo término del binomio resultante es el *cuadrado* del *segundo término* de los binomios.

(Nota que al efectuar el producto, los dos términos centrales del polinomio obtenido en cada inciso son *semejantes* y son *opuestos,* por lo que siempre se pueden cancelar).

Si realizas el mismo procedimiento con otros productos similares llegarás al mismo resultado, por lo que este es otro de los productos que puedes realizar aplicando una *regla,* cuya demostración la constituye el resultado obtenido en el inciso e.

Recuerda *el producto notable de la suma por la diferencia de dos términos:*

El producto de la suma por la diferencia de dos términos, es igual a la diferencia de sus cuadrados. $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

Ejemplo 2:

Efectúa los productos notables:

a) $(m + 7)(m - 7)$ b) $(3 + y)(3 - y)$ c) $(5x + 2)(5x - 2)$

d) $(mn - 2p)(mn + 2p)$ e) $\left(\frac{2}{5}d + 0,2\right)\left(\frac{2}{5}d - 0,2\right)$ f) $(-a + 11)(a + 11)$

Solución:

a) $(m + 7)(m - 7) = m^2 - 49$
   1. Primer término al cuadrado: m^2
   2. Segundo término al cuadrado: $7^2 = 49$

b) $(3 + y)(3 - y) = 9 - y^2$
   1. Primer término al cuadrado: $3^2 = 9$
   2. Segundo término al cuadrado: y^2

c) $(5x + 2)(5x - 2) = 25x^2 - 4$
   1. Primer término al cuadrado: $(5x)^2 = 25x^2$
   2. Segundo término al cuadrado: $2^2 = 4$

d) $(mn - 2p)(mn + 2p) = m^2n^2 - 4p^2$
   1. Primer término al cuadrado: $(mn)^2 = m^2n^2$
   2. Segundo término al cuadrado: $(2p)^2 = 4p^2$

e) $\left(\frac{2}{5}d + 0,2\right)\left(\frac{2}{5}d - 0,2\right) = \frac{4}{25}d^2 - 0,04$
   1. Primer término al cuadrado: $\left(\frac{2}{5}d\right)^2 = \frac{4}{25}d^2$
   2. Segundo término al cuadrado: $0,2^2 = 0,04$

f) $(-a + 11)(a + 11)$ (ordenas los binomios)
   $(11 - a)(11 + a) = 121 - a^2$
   1. Primer término al cuadrado: $11^2 = 121$
   2. Segundo término al cuadrado: a^2

   (Aunque no es imprescindible ordenar los binomios, es bueno que lo hagas para evitar cualquier error al colocar el signo menos)

   Al igual que en los dos casos anteriores, es posible realizar la interpretación geométrica de este producto notable, la cual se muestra a continuación para $a > b$.

Si al cuadrado de lado a *se quita el cuadrado de lado* b*, queda una figura de área* $a^2 - b^2$ *(fig. 4.7). Esta figura se transforma en un rectángulo de lados* (a + b) y (a – b), *moviendo el rectángulo sombreado* R *a la posición* R'.

De esta manera se obtiene que $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

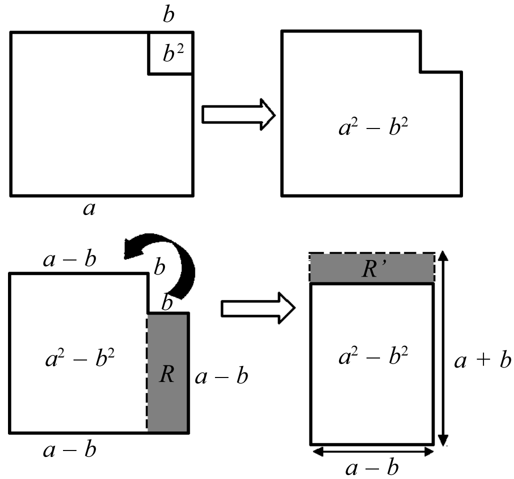


Figura 4.7

4.2.4 Producto de dos binomios que tienen un término común

En reiteradas ocasiones, al efectuar las operaciones con polinomios, tuviste que multiplicar también dos binomios cuyos segundos términos no eran iguales como en los productos anteriores. Este caso algebraicamente se puede representar como: $(x + a)(x + b)$ y recibe el nombre de *producto de dos binomios que tienen un término común.*

Por medio del ejemplo siguiente, obtendrás el otro producto notable que estudiarás en este grado.

Ejemplo 1:

Calcula:

a) $(x + 1)(x + 3)$ b) $(x - 4)(x - 5)$ c) $(x + 3)(x - 7)$ d) $(x - 5)(x + 11)$

e) $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)$ f) $(a + 2b)(a + 3b)$ g) $(x^2 + 3)(x^2 + 2)$ h) $(x + a)(x + b)$

Solución:

Para calcular este producto, recuerda que debes multiplicar cada término del primer binomio por cada uno de los términos del otro.

a) $(x + 1)(x + 3)$
$= x^2 + 3x + x + 3$ (efectúas el producto de los binomios)
$= x^2 + 4x + 3$ (reduces los términos semejantes)

(Como los dos términos semejantes tienen igual signo (+), los adicionas y mantienes su signo).

b) $(x - 4)(x - 5)$
$= x^2 - 5x - 4x + 20$ (efectúas el producto de los binomios)
$= x^2 - 9x + 20$ (reduces los términos semejantes)

(Como los dos términos semejantes tienen igual signo (–), los adicionas y mantienes su signo).

c) $(x + 3)(x - 7)$
$= x^2 - 7x + 3x - 21$ (efectúas el producto de los binomios)
$= x^2 - 4x - 21$ (reduces los términos semejantes)

(Como los dos términos semejantes tienen diferente signo, los restas y colocas el signo del término cuyo coeficiente tiene mayor módulo, o sea, el de $-7x$).

d) $(x - 5)(x + 11)$
$= x^2 + 11x - 5x - 55$ (efectúas el producto de los binomios)
$= x^2 + 6x - 55$ (reduces los términos semejantes)

(Como los dos términos semejantes tienen diferente signo, los restas y colocas el signo del término cuyo coeficiente tiene mayor módulo, o sea, el de $11x$).

e) $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)$

$= x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ (efectúas el producto de los binomios)

$= x^2 + x - \frac{3}{4}$ (reduces los términos semejantes)

(Como los dos términos semejantes tienen diferente signo, los restas y colocas el signo del término cuyo coeficiente tiene mayor módulo, o sea, el de $\frac{3}{2}x$).

f) $(a + 2b)(a + 3b)$
$= a^2 + 3ab + 2ab + 6b^2$ (efectúas el producto de los binomios)
$= a^2 + 5ab + 6b^2$ (reduces los términos semejantes)

(Como los dos términos semejantes tienen igual signo (+), los adicionas y mantienes su signo).

g) $(x^2 + 3)(x^2 + 2)$
$= x^4 + 2x^2 + 3x^2 + 6$ (efectúas el producto de los binomios)
$= x^4 + 5x^2 + 6$ (reduces los términos semejantes)

(Como los dos términos semejantes tienen igual signo (+), los adicionas y mantienes su signo).

h) $(x + a)(x + b)$
$= x^2 + xb + xa + ab$ (efectúas el producto de los binomios)
$= x^2 + (a + b)x + ab$ (reduces los términos semejantes)

(Como los coeficientes de los dos términos semejantes, a y b, son números reales y tienen igual signo (+), los adicionas y mantienes su signo).

Observa las características comunes que tienen los resultados obtenidos:

1. En todos los casos obtuviste como respuesta un *trinomio.*
2. El primer término del trinomio, es el *cuadrado* del *término común* de los binomios.
3. El segundo término del trinomio es el resultado de *adicionar* o *sustraer,* según los signos de sus coeficientes, los dos *términos semejantes* que se obtienen después de efectuar el producto indicado.
4. El tercer término del trinomio, es el *producto* de los términos no comunes de los binomios.

Si realizas el mismo procedimiento con otros productos similares llegarás al mismo resultado, por lo que este producto lo puedes realizar aplicando una *regla,* cuya demostración la constituye el resultado del inciso h.

Recuerda *el producto notable del producto de dos binomios que tienen un término común:*

El producto de dos binomios que tienen un término común es igual a: • el cuadrado del término común, • más la suma algebraica de los términos no comunes por el término común, • más el producto de los dos términos no comunes. Algebraicamente este producto se expresa de la forma siguiente: $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

Ejemplo 2:

Calcula efectuando el producto notable estudiado:

a) $(x + 2)(x + 9)$ b) $(x - 2)(x - 9)$ c) $(x + 2)(x - 9)$ d) $(x - 2)(x + 9)$

e) $\left(m - \frac{3}{5}\right)\left(m + \frac{5}{3}\right)$ f) $(n + 5p)(n - 3p)$ g) $(xy^2 + 1)(xy^2 + 4)$

Solución:

a) $(x + 2)(x + 9) = x^2 + 11x + 18$
1. Cuadrado del término común: x^2.
2. Suma algebraica de los términos no comunes por el término común: $(2 + 9)x = 11x$.
3. Producto de los dos términos no comunes: $2 \cdot 9 = 18$.

b) $(x - 2)(x - 9) = x^2 - 11x + 18$
1. Cuadrado del término común: x^2.
2. Suma algebraica de los términos no comunes por el término común: $[(-2) + (-9)]x = -11x$.
3. Producto de los dos términos no comunes: $(-2) \cdot (-9) = 18$.

c) $(x + 2)(x - 9) = x^2 - 7x - 18$
1. Cuadrado del término común: x^2.
2. Suma algebraica de los términos no comunes por el término común: $[2 + (-9)]x = -7x$.
3. Producto de los dos términos no comunes: $2 \cdot (-9) = -18$.

d) $(x - 2)(x + 9) = x^2 + 7x - 18$
1. Cuadrado del término común: x^2.
2. Suma algebraica de los términos no comunes por el término común: $[(-2) + 9]x = 7x$.
3. Producto de los dos términos no comunes: $(-2) \cdot 9 = -18$.

e) $\left(m - \frac{3}{5}\right)\left(m + \frac{5}{3}\right) = m^2 + \frac{16}{15}m - 1$
1. Cuadrado del término común: m^2.
2. Suma algebraica de los términos no comunes por el término común: $\left[\left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{5}{3}\right]m = \frac{16}{15}m$.
3. Producto de los dos términos no comunes: $\left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \frac{5}{3} = -1$.

f) $(n + 5p)(n - 3p) = n^2 + 2np - 15p^2$
1. Cuadrado del término común: n^2.
2. Suma algebraica de los términos no comunes por el término común: $[5p + (-3p)]n = 2np$.
3. Producto de los dos términos no comunes: $5p \cdot (-3p) = -15p^2$.

g) $(xy^2 + 1)(xy^2 + 4) = x^2y^4 + 5xy^2 + 4$
1. Cuadrado del término común: $(xy^2)^2 = x^2y^4$.
2. Suma algebraica de los términos no comunes por el término común: $(1 + 4)xy^2 = 5xy^2$.
3. Producto de los dos términos no comunes: $1 \cdot 4 = 4$.

Observa ahora la interpretación geométrica de este producto notable.

Tomas un cuadrado de lado x *y prolongas sus lados consecutivos con segmentos de dimensiones* a *y* b*. De esta manera se forma un rectángulo de lados (*x + a*) y* (x + b) *(fig. 4.8).*

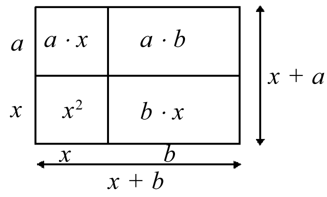


Figura 4.8

Por una parte, el área del rectángulo es igual al producto del largo por el ancho, o sea,

A = (x + a)(x + b)   *(1)*

Por otra parte, se tiene que el área del rectángulo es igual a la suma de las áreas de las figuras que lo forman, o sea,

A = x^2 + ax + bx + ab.

Adicionando los términos semejantes se obtiene que

A = x^2 + (a + b)x + ab   *(2)*

De (1) y (2) se obtiene que (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab.

Ejercicios

1. Transforma los siguientes productos (potencias) en sumas, aplicando los productos notables estudiados:

a) $(x + 3)^2$ b) $(y + 11)^2$ c) $(z + 30)^2$ d) $(m + 0{,}3)^2$ e) $\left(n+\frac{2}{3}\right)^2$

f) $(5 + 3x)^2$ g) $\left(2y+\frac{4}{5}\right)^2$ h) $\left(\frac{p}{5}+\frac{7}{2}\right)^2$ i) $(m^2 + 1)^2$ j) $(ab + 2c)^2$

k) $(x - 3)^2$ l) $(9 - b)^2$ m) $(4x - 5y)^2$ n) $\left(\frac{d}{2}-4\right)^2$ ñ) $\left(\frac{1}{3}m-n\right)^2$

o) $\left(1-\frac{y}{6}\right)^2$ p) $(p - 7q)^2$ q) $(r^3 - 1{,}5)^2$ r) $(-2n - 0{,}2)^2$ s) $\left(\frac{ab}{3}-\frac{c}{2}\right)^2$

2. Completa los espacios en blanco:

a) $(1 + 2x)^2 = 1 + 4x +$ ____   b) $\left(\frac{y}{2}-2\right)^2=\frac{y^2}{4}-$ _____ $+ 4$

c) $(3m -$ _____$)^2 = 9m^2-2m+\frac{1}{9}$ d) $\left(\frac{2}{3}x+\frac{5}{4}y\right)=\frac{4}{9}x^2+$ ______ $+\frac{25}{16}y^2$

3. Marca con una X la respuesta correcta.

3.1 Al calcular $\left(-x-\frac{1}{10}\right)^2$, se obtiene:

a) ___ $x^2-\frac{1}{5}x+0{,}01$ b) ___ $x^2+\frac{1}{5}x+0{,}01$

c) ___ $x^2+0{,}5x+0{,}01$ d) ___ $-x^2+\frac{1}{5}x-0{,}01$

3.2 Al expresar como producto $(a-3)^2$, se obtiene:

a) ___ a^2-9 b) ___ a^2+9 c) ___ a^2-6a+9 d) ___ a^2-6a+6

3.3 Al calcular $(-x+1)^2$, se obtiene:

a) ___ x^2-2x+1 b) ___ x^2+1
c) ___ $-x^2+2x+1$ d) ___ $-x^2-1$

4. Transforma los siguientes productos en sumas, aplicando el producto notable estudiado:

a) $(x+3)(x-3)$ b) $(y+15)(y-15)$ c) $(z+30)(z-30)$

d) $(m+0{,}3)(m-0{,}3)$ e) $\left(n+\frac{2}{3}\right)\left(n-\frac{2}{3}\right)$ f) $(5+3x)(5-3x)$

g) $\left(2y+\frac{4}{5}\right)\left(2y-\frac{4}{5}\right)$ h) $\left(\frac{p}{5}+\frac{7}{2}\right)\left(\frac{p}{5}-\frac{7}{2}\right)$ i) $(m^2+1)(m^2-1)$

j) $(ab+2c)(ab-2c)$ k) $(2m^2+3n^3)(2m^2-3n^3)$ l) $(0{,}1-1{,}2x)(0{,}1+1{,}2x)$

5. Selecciona la respuesta correcta marcando con una X.

5.1 Al calcular $(4x-5)(4x+5)$, se obtiene:

a) ___ $4x^2-25$ b) ___ $4x^2+25$ c) ___ $16x^2-25$ d) ___ $8x^2-25$

5.2 Al calcular $(y-0{,}2)(y+0{,}2)$, se obtiene:

a) ___ $y^2-0{,}04$ b) ___ $y^2+0{,}4$ c) ___ $y^2-0{,}4$ d) ___ $y^2+0{,}04$

5.3 Al expresar como producto $(x+2)(-x+2)$, se obtiene:

a) ___ 4 b) ___ $4-x^2$ c) ___ x^2-4 d) ___ x^2+4

5.4 Al calcular $\left(\frac{2}{5}-mn\right)\left(\frac{2}{5}+mn\right)$, se obtiene:

a) ___ $\frac{4}{25}-mn^2$ b) ___ $\frac{4}{25}-m^2n$ c) ___ $m^2n^2-\frac{4}{25}$ d) ___ $\frac{4}{25}-n^2m^2$

6. Transforma los siguientes productos en sumas, aplicando el producto notable estudiado:

a) $(x + 1)(x + 6)$ b) $(y + 11)(y + 8)$ c) $(z + 4)(z - 5)$

d) $(m + 12)(m - 13)$ e) $\left(n+\frac{1}{3}\right)\left(n-\frac{2}{3}\right)$ f) $(3x + 7)(3x - 4)$

g) $(x - 3)(x - 5)$ h) $(y - 2{,}5)(y - 1)$ i) $(z - \frac{1}{5})(z - \frac{5}{2})$

j) $(m - 0{,}4)(m + 2{,}5)$ k) $\left(p-\frac{4}{3}\right)\left(p-\frac{2}{3}\right)$ l) $(2x + 1)(2x - 3)$

m) $(x^2 + 3)(x^2 + 9)$ n) $(2 + y)(8 + y)$ ñ) $\left(\frac{x}{2}+10\right)\left(\frac{x}{2}-20\right)$

7. Coloca en el espacio en blanco el signo (+; –) o el término, según corresponda, para que se cumplan las igualdades siguientes:

a) $(x + 2)(x + 13) = x^2$ ___ $15x + 26$ b) $(y - 7)(y - 6) = y^2$ ___ $13y + 42$
c) $(z - 5)(z + 10) = z^2 - 5z$ ___ 50 d) $(p + 20)(p - 5) = p^2 +$ ___ -100
e) $(m - 9)(m + 12) = m^2 + 3m -$ ___ f) $(a^2b - 1)(a^2b - 2) =$ ___ $-3a^2b + 2$

8. Prueba que las igualdades siguientes son válidas:

a) $(x + 2)^2 - 2(x - 1) - 3 = x^2 + 2x + 3$
b) $(y - 7)^2 - (y + 3)(y - 1) + 8(2y + 6) = 100$
c) $(5 - m)^2 + m(m - 1) + (m - 5)(m + 5) = 3m^2 - 11m$
d) $(2a - 3)^2 - (3a + 1)^2 + 3a^2 = -2a^2 - 18a + 8$
e) $2b(b + 1) - (b + 2)(b - 2) - 2b = b^2 + 4$
f) $3(n - 3)^2 + (n + 3)(n + 6) - 3(n^2 + 15) = n^2 - 9n$
g) $(xy + 2)^2 - (5 + xy)(yx - 5) + (x - 10)(y + 4) + 11 = 5xy + 4x - 10y$
h) $\left(\frac{p}{2}-2\right)^2-\left(\frac{p}{2}-1\right)\left(\frac{p}{2}+2\right)+3p=\frac{p}{2}+6$

9. Sean $A = x + 12$; $B=\frac{1}{2}x$ y $C = 2x - 5$.

a) Calcula y simplifica $D = A^2 - B \cdot C - 100$.

b) Halla el valor numérico de D para $x=\frac{2^0}{2^{-1}}$.

10. Sean $M = 3 - 4x$; $N = 4 + 3x$.

   a) Calcula y simplifica $P = M^2 - N^2$.
   b) Marca con una X la respuesta correcta:
   El conjunto numérico más restringido al que pertenece el valor numérico de P para $x = -0{,}2$ es:
   ___ $\mathbb{N}$ ___ $\mathbb{Q}_+$ ___ $\mathbb{Z}$ ___ $\mathbb{Q}$

11. Sean $S = (x + 4)(x - 6) - (x + 9)^2 + (x + 6)(x - 6) + 141$ y $T = -x^2 + 20x$.

   a) Prueba que $S = -T$.
   b) Calcula $\dfrac{T}{2x}$.

4.3 Introducción a la descomposición factorial

¡! Una piscina tiene forma de prisma recto de base rectangular y su volumen está dado por la expresión $(x^3 + 3x^2 + 2x)$ m^3. Determina las expresiones correspondientes a las dimensiones de dicha piscina (fig. 4.9).

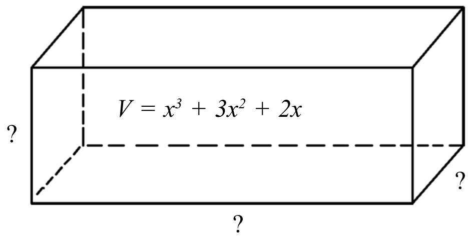


Figura 4.9

R¡! En el epígrafe anterior, a partir del conocimiento de las dimensiones de esta piscina, se te propuso determinar la expresión correspondiente a su volumen.

Para eso, efectuaste el producto de los tres factores que representaban sus dimensiones: x; $(x + 1)$ y $(x + 2)$, que dio como resultado la expresión: $x^3 + 3x^2 + 2x$.

En este caso estás ante una situación inversa, o sea, debes hallar las expresiones correspondientes a las dimensiones de la piscina, conocida la expresión de su volumen.

Por supuesto que la solución a este problema son las expresiones antes mencionadas: x; $(x + 1)$ y $(x + 2)$. Pero, cómo obtenerlas a partir de la información dada, cómo se realiza el procedimiento inverso al ya conocido de multiplicar polinomios. Precisamente en este tema aprenderás a realizar este procedimiento.

De grados anteriores conoces los factores o divisores de un número natural. Por ejemplo, *2* y *3* son *divisores* o *factores* de 6 al igual que 1 y 6, pues $2 \cdot 3 = 6$ y $6 \cdot 1 = 6$.

Al igual que los números, las expresiones algebraicas tienen también sus factores o divisores. De esta manera puedes decir que, si dos expresiones algebraicas A y B se multiplican y su producto es C, cada una de las expresiones A y B se dice que es un *factor* o *divisor* de C.

Por ejemplo, puesto que $a(a + b) = a^2 + ab$, decimos que a y $(a + b)$ son factores o divisores de $a^2 + ab$.

Del mismo modo $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$; luego, $(x + 2)$ y $(x - 2)$ son factores o divisores de $x^2 - 4$.

En nuestro ejemplo inicial, x; $(x + 1)$ y $(x + 2)$ son los factores o divisores del trinomio $x^3 + 3x^2 + 2x$.

Frecuentemente en la práctica, resulta conveniente determinar las expresiones que multiplicadas dan origen a un polinomio como sucede en este problema. A este procedimiento se le conoce como **factorización** o **descomposición factorial.**

4.3.1 Extracción del factor común

Ejemplo 1:

Expresa como suma los productos siguientes:

a) $2(x + 4)$ b) $y(y - 3)$ c) $5m(m + 1)$ d) $3(2p + 3)$ e) $ab(a + b + 2)$

Solución:

Como ya conoces de grados anteriores, para multiplicar un monomio por un polinomio, debes multiplicar el monomio por cada uno de los términos del polinomio.

a) $2(x + 4) = 2x + 8$ b) $y(y - 3) = y^2 - 3y$ c) $5m(m + 1) = 5m^2 + 5m$
d) $3(2p + 3) = 6p + 9$ e) $ab(a + b + 2) = a^2b + ab^2 + 2ab$

Como puedes apreciar, en todos los casos has convertido los productos en una suma algebraica de monomios. Pero, ya conoces que es posible también realizar el procedimiento inverso, o sea, la factorización, si buscas los factores o divisores que dan origen a esa suma algebraica.

Para realizar ese procedimiento, en cada uno de los incisos anteriores, es necesario buscar *un factor* que aparezca en *todos* los términos, al cual se le denomina *factor común*.

Así, tienes que en la expresión $2x + 8$ el factor común es 2, ya que esta se puede expresar como $2x + 2 \cdot 4$. Al extraer el 2, el segundo factor queda $(x + 4)$, que se obtiene realizando la operación inversa de efectuar el producto, o sea, en este caso divides cada término de la expresión por el factor común hallado.

$$\frac{2x}{2} = x; \frac{8}{2} = 4$$

Luego, $2x + 8 = 2(x + 4)$.

En la expresión $y^2 - 3y$ el factor común es $\boldsymbol{y}$, ya que $y^2 - 3y = \boldsymbol{y} \cdot y - 3 \cdot \boldsymbol{y}$, donde la variable aparece repetida en cada término.

Al dividir cada término del binomio por el factor común señalado, obtienes:

$$\frac{y^2}{y} = y \text{ y } \frac{3y}{y} = 3$$

Luego, $y^2 - 3y = y(y - 3)$.

En la expresión $5m^2 + 5m$ un factor común es **5** y otro factor común es $\boldsymbol{m}$, ya que

$5m^2 + 5m = \mathbf{5m} \cdot m + \mathbf{5} \cdot \boldsymbol{m}$, o sea, el 5 y la m se repiten como factor en cada término.

$$\frac{5m^2}{5m} = m; \frac{5m}{5m} = 1$$

Luego, $5m^2 + 5m = 5m(m + 1)$.

Observa que cuando el factor común coincide con uno de los términos de la expresión, al dividirlos obtienes 1, y es necesario escribirlo en la respuesta.

En la expresión $6p + 9$ el factor común es **3**, ya que esta se puede expresar como $\mathbf{3} \cdot 2\,p + \mathbf{3} \cdot 3$.

$$\frac{6p}{3} = 2p; \frac{9}{3} = 3$$

Luego, $6p + 9 = 3(2p + 3)$.

En la expresión $a^2b + ab^2 + 2ab$ un factor común es $\boldsymbol{a}$ y otro factor común es $\boldsymbol{b}$, ya que $\boldsymbol{a} \cdot a \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \cdot b + 2 \cdot \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$, o sea, $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ se repiten como factor en cada término del trinomio.

$$\frac{a^2b}{ab} = a; \frac{ab^2}{ab} = b \text{ y } \frac{2ab}{ab} = 2$$

Luego, $a^2b + ab^2 + 2ab = ab(a + b + 2)$.

Recuerda que:

El **factor común** puede ser un número, una variable o varias; pero también la combinación de estos.

De manera general, para factorizar una expresión algebraica aplicando la *extracción del factor común,* debes seguir el procedimiento siguiente:

Si en una expresión algebraica dada existe un factor que sea común a todos sus términos, esta puede descomponerse en el *producto* de dicho *factor común* por el *polinomio* que resulta al *dividir* cada uno de los términos de la expresión por ese factor común.

Ejemplo 2:

Factoriza las expresiones siguientes:

a) $16a + 8$ b) $b^3 - 5b^2$ c) $7c^5 + 14c^3 - 21c^2$ d) $12d + 18d^2$

e) $6m^2n - 9mn^2 + 3mn$ f) $0{,}16p^5 - 0{,}4p^2q$ g) $\frac{2}{5}x^3y^2 + \frac{4}{5}x^2y^3$

Solución:

a) $16a + 8 = 8(2a + 1)$

Aquí no existe factor común variable y entre los coeficientes 8 y 16 el factor común es 8, ya que $16 = 2 \cdot 8$.
Para obtener el otro factor, divides cada término del binomio por el factor común:

$$\frac{16a}{8} = 2a \text{ y } \frac{8}{8} = 1$$

Divides o simplificas los coeficientes.

b) $b^3 - 5b^2 = b^2(b - 5)$

Aquí no existe factor común numérico, ya que el coeficiente de b^3 es 1. Entre las variables b^3 y b^2 el factor común es b^2, que es el que tiene el menor exponente.
Para obtener el otro factor, divides cada término del binomio por el factor común:

$$\frac{b^3}{b^2} = b \text{ y } \frac{5b^2}{b^2} = 5$$

Al efectuar el cociente indicado entre las variables, aplicas la propiedad de las potencias, cociente de igual base.
Observa que en la respuesta se mantiene el signo del binomio que se factoriza.

c) $7c^5 + 14c^3 - 21c^2 = 7c^2(c^3 + 2c - 3)$

Los coeficientes 14 y 21 son múltiplos de 7, luego el factor común numérico es 7. La variable c se repite en todos los términos del trinomio, por lo que el factor común variable es la de menor exponente de ellos, o sea, c^2.
Para obtener el otro factor, divides cada término del trinomio por el factor común:

$$\frac{7c^5}{7c^2} = c^3; \frac{14c^3}{7c^2} = 2c \text{ y } \frac{21c^2}{7c^2} = 3$$

Simplificas en cada caso los coeficientes y al efectuar el cociente indicado entre las variables, aplicas la propiedad de las potencias, cociente de igual base.
Recuerda en la respuesta mantener el signo de cada término del trinomio.

d) $12d + 18d^2 = 6d(2 + 3d)$

Entre los coeficientes el factor común es 6, que es el mayor divisor común de 12 y 18.

La variable está en cada término del binomio y la de exponente menor, o sea, d es el factor común variable.

Para obtener el otro factor, divides cada término del binomio por el factor común:

$$\frac{12d}{6d} = 2 \text{ y } \frac{18d^2}{6d} = 3d$$

e) $6m^2n - 9mn^2 + 3mn = 3mn(2m - 3n + 1)$

Entre los coeficientes el factor común es 3, que es divisor común de 6 y 9.

En este caso hay dos variables que aparecen en cada término del trinomio. Tanto una como la otra aparecen elevadas a exponente 2 y 1, luego, el factor común contiene las dos variables m y n, que son las de menor exponente.

Para obtener el otro factor, divides cada término del trinomio por el factor común:

$$\frac{6m^2n}{3mn} = 2m; \frac{9mn^2}{3mn} = 3n \text{ y } \frac{3mn}{3mn} = 1$$

Recuerda colocar el 1 en el tercer término del segundo factor.

f) $0{,}16p^5 - 0{,}4p^2q = 0{,}4p^2(0{,}4p^3 - q)$

Entre los coeficientes el factor común es 0,4, ya que $0{,}16 = 0{,}4 \cdot 0{,}4$.
En el binomio aparecen dos variables, p y q, pero solo p se repite en cada término.
Luego, el factor común variable es p^2 que tiene el menor exponente.
Divides ahora cada término por el factor común $0{,}4p^2$.

$$\frac{0{,}16p^5}{0{,}4p^2} = 0{,}4p^3 \text{ y } \frac{0{,}4p^2q}{0{,}4p^2} = q$$

g) $\frac{2}{5}x^3y^2 + \frac{4}{5}x^2y^3 = \frac{2}{5}x^2y^2(x + 2y)$

Entre los coeficientes el factor común es $\frac{2}{5}$, ya que $\frac{4}{5} = 2 \cdot \frac{2}{5}$.

Aparecen dos variables y ambas están en los dos términos, elevadas en un caso a exponente 2 y en otro, a exponente 3, luego tomas las de menor exponente de cada una, o sea, x^2y^2.

Divides ahora cada término por el factor común $\frac{2}{5}x^2y^2$.

$$\frac{\frac{2}{5}x^3y^2}{\frac{2}{5}x^2y^2}=x \text{ y } \frac{\frac{4}{5}x^2y^3}{\frac{2}{5}x^2y^2}=2y$$

Recuerda que:

- Al extraer el factor común a una expresión algebraica debes considerar tanto los *coeficientes* como las *variables* que aparezcan.
- Entre los *coeficientes numéricos,* el factor común suele considerarse el *mayor* de los divisores *comunes* de dichos coeficientes, siempre que sea diferente de 1.
- Entre las *variables que se repiten,* se toma como factor común la que tenga el *menor exponente* entre los términos que forman la expresión.
- Al dividir cada término de la expresión por el factor común, los números se *dividen* o *simplifican* por las reglas que conoces sobre las operaciones con números reales, mientras que para dividir las variables aplicas la propiedad de la potencia, *cociente de igual base.*

De esta manera, aplicando la extracción del factor común, has podido expresar diferentes sumas como productos. Pero en todos los casos el factor común es un monomio o término compuesto por números, variables o la combinación de ambos. Sin embargo, es bueno que conozcas que una expresión algebraica dada puede tener como factor común un polinomio.

Ejemplo 3:

Descompón en factores:

a) $a(b + 2) + 3(b + 2)$ b) $2y(x + 5) - x - 5$ c) $(x - 1)(x - 3) + 4(x - 3)$

Solución:

a) $a(b + 2) + 3(b + 2) = (b + 2)(a + 3)$

La expresión está formada por dos términos, $a(b + 2)$ y $3(b + 2)$. En cada término aparece como factor el binomio $(b + 2)$, por lo que el factor común en esta expresión es $(b + 2)$.

Para obtener el otro factor, divides cada uno de los términos del binomio por el factor común:

$$\frac{a(b+2)}{b+2}=a \text{ y } \frac{3(b+2)}{b+2}=3$$

b) $2y(x + 5) – x – 5 = 2y(x + 5) – (x + 5) = (x + 5)(2y – 1)$

En este caso resulta conveniente introducir los dos últimos términos en un paréntesis precedido de signo menos, para lograr que ambos términos, x y 5, tengan igual signo que en el primer término, de esta manera obtienes:

$2y(x + 5) – (x + 5)$, donde el factor común es $(x + 5)$. Al dividir, resulta:

$$\frac{2y(x+5)}{x+5}=2y \text{ y } \frac{(x+5)}{x+5}=1$$

c) $(x – 1)(x – 3) + 4(x – 3) = (x – 3)[(x – 1) + 4] = (x – 3)(x + 3)$

El factor $(x – 3)$ es común en ambos términos del binomio, por lo que se extrae de factor común.

Para obtener el otro factor efectúas la división:

$$\frac{(x-1)(x-3)}{x-3}=x-1 \text{ y } \frac{4(x-3)}{x-3}=4$$

De esta manera has comprobado que el *factor común* en una expresión algebraica puede ser también un polinomio, por lo que no es necesario, cuando estés en presencia de ejercicios de factorización como los del ejemplo anterior, eliminar los paréntesis y reducir la expresión para expresarla como producto.

Sin embargo, en el inciso c, si calculas y simplificas la expresión, obtienes como resultado $x^2 – 9$.

Luego, la factorización de la expresión $x^2 – 9$ es $(x – 3)(x + 3)$ y en ella no existe un factor común.

¿Cómo puedes obtener los factores de este binomio, si no es posible extraer un factor común?

Precisamente el segundo caso de factorización que estudiarás en este tema está relacionado con binomios como este.

4.3.2 Diferencia de dos cuadrados

Ya conoces que $(x + a)(x – a) = x^2 – a^2$, es decir, el producto de una suma por su diferencia da como resultado una *diferencia de dos cuadrados,* el *cuadrado* del primer término menos el *cuadrado* del segundo término.

Luego, para obtener los factores de $x^2 - a^2$, debes realizar la operación inversa a la elevación al cuadrado, o sea, extraer la raíz cuadrada aritmética de cada término del binomio y escribir los dos factores con los signos diferentes.

Si se aplica este procedimiento al resultado del inciso c del ejemplo 3, te quedaría: $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$, ya que al extraer la raíz cuadrada aritmética de cada término obtienes x y 3.

Recuerda que:

La diferencia de dos cuadrados se descompone en el producto de la suma por la diferencia de las bases de estos cuadrados. $x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$

Nota: Para hallar las bases de los cuadrados, tendremos en cuenta solo las *raíces aritméticas* (positivas). En la práctica, el reconocimiento de estas raíces cuadradas debe hacerse mentalmente y escribir directamente los factores.

Observa cómo aplicar este nuevo caso de factorización mediante el ejemplo siguiente:

Ejemplo 4:

Descompón en factores:

a) $x^2 - 36$ b) $4a^2 - 9$ c) $\frac{1}{9} - 0,64y^2$

d) $m^2 - 5$ e) $b^2 + 1$ f) $p^4 - 16$

Solución:

a) $x^2 - 36 = (x + 6)(x - 6)$

La raíz cuadrada de x^2 es x y la de 36 es 6, luego los factores de cada binomio son $(x + 6)$ y $(x - 6)$.

Los signos en cada factor pueden colocarse en cualquier orden, o sea,

$(x + 6)(x - 6)$ o $(x - 6)(x + 6)$

b) $4a^2 - 9 = (2a - 3)(2a + 3)$

La raíz cuadrada de $4a^2$ es $2a$ y la de 9 es 3, luego los factores de cada binomio son $(2a + 3)$ y $(2a - 3)$.

c) $\frac{1}{9} - 0,64y^2 = \left(\frac{1}{3} + 0,8y\right)\left(\frac{1}{3} - 0,8y\right)$

La raíz cuadrada de $\frac{1}{9}$ es $\frac{1}{3}$ y la de $0,64y^2$ es $0,8y$.

d) $m^2 - 5 = (m + \sqrt{5})(m - \sqrt{5})$

Como puedes apreciar 5 no es un cuadrado perfecto, o sea, no tiene raíz cuadrada exacta, sin embargo, se puede factorizar la expresión si dejas indicada la raíz cuadrada de dicho término.

e) $b^2 + 1$ no tiene factorización.

A pesar de que ambos términos del binomio son cuadrados perfectos, *no es posible descomponerlo en factores,* ya que es una *suma* y no una diferencia.

Puedes concluir que, la suma de dos cuadrados no tiene factorización.

f) $p^4 - 16 = (p^2 + 4)(p^2 - 4) = (p^2 + 4)(p - 2)(p + 2)$

La raíz cuadrada de p^4 es p^2 y la de 16 es 4. Al colocar el producto de los factores que se obtiene notarás que el segundo factor, $(p^2 - 4)$, también es una diferencia de dos cuadrados y se debe proceder a descomponerlo en factores aplicando igual procedimiento.

Como ya ninguno de los otros factores admite a su vez una nueva factorización, se dice que has *descompuesto totalmente en factores* la expresión $p^4 - 16$.

En general, debes tener presente que el proceso de descomposición factorial de una expresión algebraica debe continuarse mientras sea posible, es decir, hasta tanto los factores que se obtengan no admitan a su vez una nueva factorización.

Analiza, mediante el siguiente ejemplo, cómo aplicar este procedimiento de factorización combinada.

Ejemplo 5:

Factoriza completamente las expresiones algebraicas siguientes:

a) $5x^3 - 20x$ b) $y^4 - 81$ c) $(mn^2 + 7n^2) - m - 7$ d) $2x^3 - 8x^2 + 8x$

Solución:

a) $5x^3 - 20x = 5x(x^2 - 4) = 5x(x - 2)(x + 2)$

Primero observas si existe factor común:

- Entre los coeficientes es el 5, ya que es el mayor divisor común de 5 y 20.
- Entre las variables es x, que es la de menor exponente.

Al extraer el factor común y efectuar la división de cada término por el factor común hallado, se obtiene como segundo factor $(x^2 - 4)$, que representa una diferencia de dos cuadrados. Factorizas esta diferencia y mantienes el factor común hallado inicialmente.

b) $y^4 - 81 = (y^2 - 9)(y^2 + 9) = (y + 3)(y - 3)(y^2 + 9)$
No existe factor común ni numérico, ni entre las variables. Te debes preguntar entonces, si la expresión representa una diferencia de dos cuadrados.
Al realizar la factorización, en uno de los factores se obtiene otra diferencia de dos cuadrados, la cual se factoriza nuevamente.
Recuerda que $y^2 + 9$ no se factoriza, ya que es una suma de dos cuadrados.

c) $(mn^2 + 7n^2) - m - 7 = n^2(m + 7) - (m + 7) = (m + 7)(n^2 - 1) = (m + 7)(n - 1)(n + 1)$
En el primer término de la expresión existe un factor común n^2, que al extraerlo queda como segundo factor de dicho término $(m + 7)$. Para obtener igual factor entre los otros dos términos es necesario introducir un paréntesis precedido de signo menos para que los signos del binomio resultante coincidan con los del binomio $(m + 7)$. Después extraes $(m + 7)$ como factor común y obtienes como segundo factor una diferencia de dos cuadrados, la cual factorizas.

d) $2x^3 - 8x^2 + 8x = 2x(x^2 - 4x + 4)$
La expresión es un trinomio, y entre los coeficientes el mayor divisor es 2, mientras que entre las variables la de menor exponente es x. Al extraer factor común $2x$, queda como segundo factor un trinomio y no un binomio como en casos anteriores.

¿Será posible factorizar el trinomio $x^2 - 4x + 4$?

¿Existirá algún procedimiento para factorizar trinomios?

Por supuesto que sí, y es el próximo caso de descomposición factorial que estudiarás en este grado.

4.3.3 Descomposición factorial de trinomios

Trinomio cuadrado perfecto

En este tema aprendiste cómo calcular el cuadrado de una suma y una diferencia, es decir, el cuadrado de un binomio:

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

Por ejemplo: $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$
Como puedes apreciar, al desarrollar el cuadrado de un binomio, obtienes como resultado un trinomio. Por tanto, si realizas el procedimiento inverso, y factorizas este trinomio, obtendrás como resultado el cuadrado de un binomio.
A este trinomio que se factoriza en el cuadrado de un binomio, se le denomina **trinomio cuadrado perfecto.**

Por lo tanto, todo trinomio que sea cuadrado perfecto se puede transformar en el cuadrado de un binomio. Para eso debes saber que:

Un trinomio es cuadrado perfecto si: • dos de sus términos son cuadrados perfectos, y • el término restante es igual al doble producto de las raíces cuadradas de dichos términos, o al opuesto de ese producto.

El trinomio se descompone en el cuadrado de la suma o de la diferencia de las raíces cuadradas aritméticas de los términos cuadrados perfectos, según el signo del término restante sea positivo o negativo.

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Ejemplo 6:

Comprueba si los trinomios siguientes son cuadrados perfectos. En caso afirmativo, exprésalo como el cuadrado de un binomio.

a) $x^2 + 4x + 4$ b) $x^2 - 4x + 4$ c) $y^2 + 6y + 9$ d) $4m^2 - 20m + 25$
e) $9a^2 + 6ab + b^2$ f) $x^2 + 5x + 4$ g) $4y^2 + 13y + 3$

Solución:

a) $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$
Observa que este trinomio contiene dos términos cuadrados perfectos (x^2 y 4), cuyas raíces cuadradas (aritméticas) son x y 2 respectivamente. El doble producto de estas raíces es $2 \cdot x \cdot 2 = 4x$ que coincide con el término central del trinomio.

$x^2 + 4x + 4$

Raíz cuadrada aritmética: x 2

Doble producto: $2 \cdot x \cdot 2 = 4x$ $\longrightarrow$ Como dicho término es *positivo,* entonces el trinomio se descompone en el cuadrado de una *suma.* Luego, resulta: $(x + 2)^2$.

b) $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$

$x^2 - 4x + 4$

Raíz cuadrada aritmética: x 2

Doble producto: $2 \cdot x \cdot 2 = 4x$

Este trinomio se diferencia del anterior solo en el signo del segundo término, por lo que contiene los mismos dos términos cuadrados perfectos (x^2 y 4), cuyas raíces cuadradas (aritméticas) son x y 2 respectivamente y el doble producto de estas raíces es también $4x$ que coincide con el término restante del trinomio. Sin embargo, ahora el término central es *negativo,* entonces el trinomio se descompone en el cuadrado de una *diferencia.* Luego, resulta: $(x - 2)^2$.

c) $y^2 + 6y + 9 = (y + 3)^2$

Observa que este trinomio contiene dos términos cuadrados perfectos (y^2 y 9), cuyas raíces cuadradas (aritméticas) son y y 3 respectivamente. El doble producto de estas raíces es $2 \cdot y \cdot 3 = 6y$ que coincide con el término central del trinomio.

$y^2 + 6y + 9$

Raíz cuadrada aritmética: y 3

Doble producto: $2 \cdot y \cdot 3 = 6y$

Como dicho término es *positivo,* entonces el trinomio se descompone en el cuadrado de una *suma.* Luego, resulta: $(y + 3)^2$

d) $4m^2 - 20m + 25 = (2m - 5)^2$

$4m^2 - 20m + 25$

Raíz cuadrada aritmética: $2m$ 5

Doble producto: $2 \cdot 2m \cdot 5 = 20m$

Hallas las raíces cuadradas de los términos cuadrados perfectos y verificas si el doble producto de ambas raíces coincide con el signo del término central.

Como el término central es *negativo,* entonces el trinomio se descompone en el cuadrado de una *diferencia.* Luego, resulta: $(2m - 5)^2$.

e) $9a^2 + 6ab + b^2 = (3a + b)^2$

$9a^2 + 6ab + b^2$

Raíz cuadrada aritmética: $3a$ b

Doble producto: $2 \cdot 3a \cdot b = 6ab$

Como el término central es *positivo,* entonces el trinomio se descompone en el cuadrado de una *suma.* Luego, resulta: $(3a + b)^2$.

f) $x^2 + 5x + 4$

$x^2 + \mathbf{5x} + 4$

Raíz cuadrada aritmética: x 2

Doble producto: $2 \cdot x \cdot 2 = \mathbf{4x}$

Como puedes apreciar, en este caso el doble producto de las raíces cuadradas *no coincide* con el término central del trinomio dado. El *trinomio no es cuadrado perfecto.*

g) $4y^2 + 13y + 3$

En este trinomio, el término 3, *no es un cuadrado perfecto.* El trinomio no es cuadrado perfecto, por lo que no se puede expresar como el cuadrado de un binomio.

En general, al descomponer trinomios cuadrados perfectos, solamente tendrás en cuenta las raíces cuadradas positivas (aritméticas) de los términos cuadrados perfectos, mientras que el análisis realizado en cada inciso del ejemplo anterior lo puedes hacer oralmente y escribir directamente la descomposición del trinomio.

Como has podido apreciar, no todos los trinomios son cuadrados perfectos, en unos casos porque el doble producto de las raíces cuadradas de los términos cuadrados perfectos no coincide con el término central y en otros, porque uno de los términos de los extremos del trinomio no es cuadrado perfecto.

¿Y se pueden factorizar los trinomios que no son cuadrados perfectos?

Por supuesto que sí, existe también para estos una regla la cual te presentamos a continuación.

Observa que los trinomios $x^2 + 5x + 4$ y $4y^2 + 13y + 3$ del ejemplo anterior tienen una característica que los distingue. En el primer caso, el coeficiente del término x^2 es **1**, mientras que en el segundo caso, el coeficiente de y^2 es **4**.

Es por eso que para estudiar la descomposición factorial de trinomios que no son cuadrados perfectos, vamos a diferenciar dos casos:

1. Los trinomios de la forma $x^2 + px + q$, donde el coeficiente de x^2 es 1.
2. Los trinomios de la forma $mx^2 + px + q$, donde el coeficiente de x^2 es distinto de 1, o sea, $m \neq 1$.

Trinomio de la forma $x^2 + px + q$

Entre los productos notables que estudiaste anteriormente, aprendiste a calcular el producto de dos binomios que tienen un término común.

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

Por ejemplo: $(x + 4)(x + 1) = x^2 + 5x + 4$

Observa que al efectuar este producto se obtiene el trinomio analizado en el inciso f del ejemplo 6, por lo que si realizas el procedimiento inverso obtendrás su descomposición factorial cuyos factores son $(x + 4)$ y $(x + 1)$. Como los factores son diferentes, no se puede expresar como el cuadrado de una suma o una diferencia como en los trinomios cuadrados perfectos.

Este trinomio lo llamamos trinomio de la forma $x^2 + px + q$, si haces en el producto notable, $a + b = p$ y $a \cdot b = q$.

¿Cómo realizar la descomposición factorial de este trinomio a partir del producto notable?

1. Observa que en la regla primero hallas el *cuadrado del término común,* luego, al realizar el procedimiento inverso, debes hallar la *raíz cuadrada aritmética* del término cuadrado perfecto y la colocas como primer término de cada factor:

$x^2 + 5x + 4 = (x \quad)(x \quad)$

2. En este caso: $p = a + b = 5$ y $q = a \cdot b = 4$.
   Buscas dos números ***a*** y ***b*** cuyo producto sea **4** y su suma algebraica sea **5**, en este caso son **4** y **1**.

3. Finalmente, colocas ambos números como segundo término de cada binomio:

$x^2 + 5x + 4 = (x + 4)(x + 1)$

Recuerda que:

Un trinomio de la forma $x^2 + px + q$ se puede descomponer en el producto de dos factores $(x + a)$ y $(x + b)$ siempre que puedas encontrar dos números a y b cuya suma algebraica sea igual a p y cuyo producto sea igual a q. O sea: $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$, donde $a + b = p$ y $ab = q$.

Ejemplo 7:

Descompón en factores los trinomios siguientes:

a) $x^2 + 3x + 2$	b) $y^2 + 9y + 20$	c) $p^2 + 2p - 3$	d) $m^2 - 2m - 3$
e) $n^2 - 4n + 3$	f) $d^2 + 10d + 25$	g) $m^2 - 7mn + 10n^2$	h) $x^4 - 5x^2 + 36$

Solución:

a) $x^2 + 3x + 2$ (en este trinomio, $p = 3$ y $q = 2$)

- Determinas la raíz cuadrada aritmética del término cuadrado perfecto y la colocas como primer término de cada factor: $(x \quad)(x \quad)$.
- Buscas dos números ***a*** y ***b*** cuyo producto sea **2** y su suma algebraica sea **3**, en este caso son **2** y **1**.
- Completas los paréntesis: $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$.

  Observa que como q es *positivo* los signos de a y b son *iguales* y como p también es *positivo,* entonces a y b también serán *positivos.*

b) $y^2 + 9y + 20$ (en este trinomio, $p = 9$ y $q = 20$)

- Determinas la raíz cuadrada aritmética del término cuadrado perfecto y la colocas como primer término de cada factor: $(y \quad)(y \quad)$.
- Buscas dos números ***a*** y ***b*** cuyo producto sea **20** y su suma algebraica sea **9**, en este caso son **4** y **5**.
- Completas los paréntesis: $y^2 + 9y + 20 = (y + 4)(y + 5)$.

  Observa que como q es *positivo* los signos de a y b son *iguales* y como p también es *positivo,* a y b serán también *positivos.*

c) $p^2 + 2p - 3$ (en este trinomio, $p = 2$ y $q = -3$)

- Determinas la raíz cuadrada aritmética del término cuadrado perfecto y la colocas como primer término de cada factor: $(p \quad)(p \quad)$.

- Buscas dos números ***a*** y ***b*** cuyo producto sea **–3** y su suma algebraica sea **2**, en este caso son **–1** y **3**.
- Completas los paréntesis: $p^2 + 2p - 3 = (p - 1)(p + 3)$.

Observa que como q es *negativo* los signos de a y b son *diferentes* y como $\boldsymbol{p}$ es *positivo,* el número de mayor módulo será el *positivo.*

d) $m^2 - 2m - 3$ (en este trinomio, $p = -2$ y $q = -3$)

- Determinas la raíz cuadrada aritmética del término cuadrado perfecto y la colocas como primer término de cada factor: $(m \quad)(m \quad)$.
- Buscas dos números ***a*** y ***b*** cuyo producto sea **–3** y su suma algebraica sea **–2**, en este caso son **1** y **–3**.
- Completas los paréntesis: $m^2 - 2m - 3 = (m - 3)(m + 1)$.

Observa que como q es *negativo* los signos de a y b son *diferentes* y como en este caso, a diferencia del anterior, p es *negativo,* el número de mayor módulo será el *negativo.*

e) $n^2 - 4n + 3$ (en este trinomio, $p = -4$ y $q = 3$)

- Determinas la raíz cuadrada aritmética del término cuadrado perfecto y la colocas como primer término de cada factor: $(n \quad)(n \quad)$.
- Buscas dos números ***a*** y ***b*** cuyo producto sea **3** y su suma algebraica sea **– 4**, en este caso son **–1** y **–3**.
- Completas los paréntesis: $n^2 - 4n + 3 = (n - 3)(n - 1)$.

Observa que como q es *positivo* los signos de a y b son *iguales* y como en este caso p es *negativo,* entonces a y b también serán *negativos.*

f) $d^2 + 10d + 25$ (en este trinomio, $p = 10$ y $q = 25$)

- Determinas la raíz cuadrada aritmética del término cuadrado perfecto y la colocas como primer término de cada factor: $(d \quad)(d \quad)$.
- Buscas dos números ***a*** y ***b*** cuyo producto sea **25** y su suma algebraica sea **10**, en este caso son **5** y **5**.
- Completas los paréntesis: $d^2 + 10d + 25 = (d + 5)(d + 5)$.

Observa que como q es *positivo* los signos de a y b son *iguales* y como p también es *positivo,* entonces a y b también serán *positivos.*

Como ambos factores son iguales, la respuesta se puede expresar como $(d + 5)^2$, lo que representa un binomio al cuadrado. Como ya sabes todo trinomio cuya factorización es el cuadrado de un binomio, representa un *trinomio cuadrado perfecto.* Es por eso, que para factorizar trinomios cuadrados perfectos también puedes apoyarte en este procedimiento.

g) $m^2 - 7mn + 10n^2$ (en este trinomio, $p = -7$ y $q = 10n^2$)

- Determinas la raíz cuadrada aritmética del término cuadrado perfecto y la colocas como primer término de cada factor: $(m \quad)(m \quad)$.

- Buscas dos números ***a*** y ***b*** cuyo producto sea $\mathbf{10}\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}$ y su suma algebraica sea $\mathbf{-7}\boldsymbol{n}$, en este caso son $\mathbf{-2}\boldsymbol{n}$ y $\mathbf{-5}\boldsymbol{n}$.
- Completas los paréntesis: $m^2 - 7mn + 10n^2 = (m - 2n)(m - 5n)$.

  Observa que como q es *positivo* los signos de a y b son *iguales* y como p es *negativo,* entonces a y b también serán *negativos.*

h) $x^4 - 5x^2 - 36$ (en este trinomio, $p = -5$ y $q = -36$)

Este trinomio es de la forma $x^2 + px + q$, puesto que se puede interpretar como: $(x^2)^2 - 5x^2 - 36$ y se suele llamar *trinomio bicuadrado.*

- Determinas la raíz cuadrada aritmética del término cuadrado perfecto y la colocas como primer término de cada factor: $(x^2 \quad)(x^2 \quad)$.
- Buscas dos números ***a*** y ***b*** cuyo producto sea **–36** y su suma algebraica sea **–5**, en este caso son **4** y **–9**.
- Completas los paréntesis: $(x^2 + 4)(x^2 - 9)$.

  Observa que como q es *negativo* los signos de a y b son *diferentes* y como p es *negativo,* entonces a y b tendrán *diferente* signo y 9 será el *negativo* por tener mayor módulo que 4.

  Como puedes apreciar, uno de los factores es una diferencia de dos cuadrados y el proceso de descomposición factorial debe continuarse mientras sea posible, por lo que la factorización aún puede continuar, quedando de esta manera:

  $x^4 - 5x^2 - 36 = (x^2 + 4)(x^2 - 9) = (x^2 + 4)(x - 3)(x + 3)$

  Ten presente que la suma de dos cuadrados no tiene factorización.

Recuerda que:

Para factorizar trinomios de la forma $x^2 + px + q$:

1. Buscas dos números cuya suma sea p y cuyo producto sea q.
2. Al escribir la respuesta ten en cuenta la regla de los signos siguiente:
   - Si q es *positivo,* los signos de a y b son *iguales* y dependen del signo de p.
   - Si q es *negativo,* los signos de a y b serán *diferentes* y colocas el signo de p al que tenga mayor valor absoluto entre a y b.

Si q positivo: $\begin{cases} p \text{ positivo: } (x + a)(x + b) \\ p \text{ negativo: } (x - a)(x - b) \end{cases}$

Si q negativo: $\begin{cases} p \text{ positivo y } a > b\text{: } (x + a)(x - b) \\ p \text{ negativo y } a > b\text{: } (x - a)(x + b) \end{cases}$

Es importante que conozcas que este algoritmo solo se aplica en aquellos trinomios donde sea posible encontrar los números que cumplen las condiciones dadas, lo cual solamente ocurre en determinados casos. Por lo que existen trinomios que *no tienen factorización* en $\mathbb{R}$, por ejemplo, $x^2 - x + 5$ y otros cuya factorización *no resulta evidente,* como $x^2 - x - 5$.

La descomposición factorial es utilizada en la matemática para resolver ejercicios y problemas relacionados con el álgebra, pero también puedes utilizarla en cálculos aritméticos como los que te presentamos a continuación:

Para calcular $99^2 - 1$ *(fig. 4.10) seguro efectúas primero el cuadrado de* 99, *multiplicando* $99 \cdot 99$, *lo que con una calculadora resulta muy rápido, sin embargo, sin ella puedes demorar algunos segundos.*

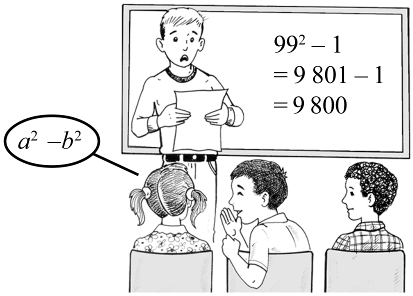


Figura 4.10

Si observas con atención, podrás relacionar esta expresión con uno de los casos de factorización estudiados, o sea, la diferencia de dos cuadrados. *Es por eso que resulta más cómodo proceder de esta manera:*

$99^2 - 1 = (99 + 1)(99 - 1) = 100 \cdot 98 = 9\ 800.$

Analiza este otro caso, $99^2 - 2 \cdot 99 - 3$, *este cálculo numérico lo puedes realizar rápidamente si lo relacionas con otro de los casos de factorización, el trinomio de la forma* $x^2 + px + q$.

$99^2 - 2 \cdot 99 - 3 = (99 + 1)(99 - 3) = 100 \cdot 96 = 9\ 600$

En ocasiones también es muy útil la extracción de un factor común, *como en este otro ejemplo:*

$$\frac{7^{20} + 7^{21}}{7^{20}} = \frac{7^{20} + 7^{20} \cdot 7^1}{7^{20}} = \frac{7^{20}\left(1 + 7\right)}{7^{20}} = 8$$

Como has podido apreciar la descomposición factorial es muy útil no solo en el trabajo con variables, sino también en el cálculo numérico.

Trinomio de la forma $mx^2 + px + q$, $m \neq 1$

Para encontrar el procedimiento de factorización de este tipo de trinomio, puedes partir del análisis del resultado que se obtiene al calcular el producto $(4y + 1)(y + 3)$.

Este producto como puedes apreciar no se corresponde con los productos notables estudiados en este capítulo. Es por eso que su resultado se obtiene a partir de la multiplicación de cada término del primer binomio por cada término del otro binomio como ya conoces de grados anteriores.

$(4y + 1)(y + 3) = 4y^2 + 12y + y + 3 = 4y^2 + 13y + 3$

Este trinomio es el que analizaste en un ejemplo anterior y es de la forma:

$mx^2 + px + q$, con $m = 4$; $p = 13$ y $q = 3$.
Aquí, los coeficientes m, p y q se obtienen de la manera siguiente:

$m = 4 = 4 \cdot 1$ (producto de los coeficientes de y)
$q = 3 = 3 \cdot 1$ (producto de los términos independientes)

$$\overset{m\,=\,4}{(4y + 1)(y + 3)}$$
$$q = 3$$

$p = 13 = 4 \cdot 3 + 1 \cdot 1$ (suma de los productos de los coeficientes de la variable por los términos independientes)

$$\overset{12}{(4y + 1)(y + 3)}$$
$$1$$

De modo general se cumple que:

$$\begin{aligned}(ax + b)(cx + d) &= acx^2 + (ad + bc)x + bd \\ &= mx^2 + px + q;\ \text{donde } m = ac;\ q = bd \text{ y } p = ad + bc\end{aligned}$$

Por lo tanto, siempre que sea posible determinar los números a, b, c y d, tales que $ac = m$; $bd = q$ y $ad + bc = p$ se cumple que:

$$mx^2 + px + q = (ax + b)(cx + d)$$

Para determinar estos números se aplica el procedimiento siguiente, el cual recibe el nombre de **método de los productos cruzados** o de los **coeficientes**.

1. Se ensaya una descomposición factorial para m y q ($m = ac$; $q = bd$), disponiendo de los factores en dos columnas:

$$\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}$$

2. Se calculan los productos cruzados ad y bc, y se adicionan.

$$\begin{array}{ccc} a & \times & b \\ c & & d \\ \hline \multicolumn{3}{c}{a \cdot d + c \cdot b} \end{array}$$

3. Si $bc + ad = p$, entonces los factores del trinomio dado son $(ax + b)$ y $(cx + d)$. En caso contrario, debe ensayarse con otra combinación de factores para m y q.

Observación: No siempre es posible encontrar p a partir de los factores m y q. En estos casos, el procedimiento descrito no es aplicable.

Ejemplo 8:

Descompón en factores los trinomios siguientes:

a) $2x^2 + 5x + 3$ b) $2x^2 + 7x + 3$ c) $3y^2 + 2y - 1$
d) $3y^2 - 2y - 1$ e) $5m^2 - 12m + 4$ f) $-7p^2 - 6p + 1$

Solución:

a) $2x^2 + 5x + 3$ ($m = 2$; $q = 3$; $p = 5$)

Como q es *positivo* los signos de sus factores son *iguales* y como p también es *positivo,* entonces todos los factores de m y q se escriben con signo *más.* Consideras $2 = 2 \cdot 1$ y $3 = 3 \cdot 1$.

Dispones los factores de la forma siguiente:

$$\begin{array}{cc l} 2 & 3 & \longrightarrow 2x + 3 \\ 1 & 1 & \longrightarrow x + 1 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{2 + 3 = 5 = p} & \end{array}$$

Al multiplicar cruzado y adicionar los productos, se obtiene el valor de p. Por lo que los factores seleccionados son los correctos y la factorización se escribe tomando los números que se encuentran uno al lado del otro *(no en forma cruzada)* y agregando la *variable* correspondiente del ejercicio.
Luego: $2x^2 + 5x + 3 = (2x + 3)(x + 1)$

Si la disposición de los factores no da el resultado deseado, debes cambiar de lugar los factores de m o de q, o ensayar con otros factores.

b) $2x^2 + 7x + 3$ ($m = 2$; $q = 3$; $p = 7$)
Como m y q son iguales que en el inciso anterior, los divisores serán los mismos y con el mismo signo. Sin embargo, ahora p debe dar 7 y no 5, por lo que la disposición de los factores no será la misma.

Dispones los factores de la forma siguiente:

$$\begin{array}{cc l} 2 & 1 & \longrightarrow 2x + 1 \\ 1 & 3 & \longrightarrow x + 3 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{6 + 1 = 7 = p} & \end{array}$$

Luego: $2x^2 + 7x + 3 = (2x + 1)(x + 3)$

c) $3y^2 + 2y - 1$ ($m = 3$; $q = -1$; $p = 2$)
Como q es *negativo* los signos de sus factores son *diferentes.*
Consideras $3 = 3 \cdot 1$ y $-1 = -1 \cdot 1$.

Dispones los factores de la forma siguiente:

$$\begin{array}{ccc} 3 & -1 & \longrightarrow 3y-1 \\ 1 & 1 & \longrightarrow y+1 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{3-1=2=p} & \end{array}$$

Observa que para que el valor de p sea *positivo,* el *mayor producto* debe ser *positivo,* luego, el signo *menos* se le coloca al uno del segundo factor que interviene en el *menor* de los productos.
Luego: $3y^2 + 2y - 1 = (3y - 1)(y + 1)$

d) $3y^2 - 2y - 1$ ($m = 3$; $q = -1$; $p = -2$)
Los valores de m y q en este caso son iguales a los del inciso anterior, sin embargo, ahora p es negativo.

Dispones los factores de la forma siguiente:

$$\begin{array}{ccc} 3 & 1 & \longrightarrow 3y+1 \\ 1 & -1 & \longrightarrow y-1 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{-3+1=-2=p} & \end{array}$$

Observa que para que el valor de p sea *negativo,* el *mayor producto* debe ser *negativo,* luego, el signo *menos* se le coloca al uno del segundo factor que interviene en el *mayor* de los productos.
Luego: $3y^2 - 2y - 1 = (3y + 1)(y - 1)$

e) $5m^2 - 12m + 4$ ($m = 5$; $q = 4$; $p = -12$)
Como q es *positivo* los signos de sus factores son *iguales* y como p es *negativo,* entonces los signos de los factores de q se escriben con signo *menos.*
Puedes comprobar que tomando 1 y 4 como divisores de q, no obtienes con ninguna disposición en la tabla el valor de p. Luego los factores que se deben seleccionar son 2 y 2.

Dispones los factores de la forma siguiente:

$$\begin{array}{ccc} 5 & -2 & \longrightarrow -5m-2 \\ 1 & -2 & \longrightarrow m-2 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{-10-2=-12=p} & \end{array}$$

Luego: $5m^2 - 12m + 4 = (5m - 2)(m - 2)$

f) $-7p^2 - 6p + 1$ ($m = -7$; $q = 1$; $p = -6$)
Como m es *negativo,* sus factores tendrán signos *diferentes,* mientras los de q serán con *igual signo* por ser positivo.

Dispones los factores de la forma siguiente:

$$\begin{array}{ccc} -7 & 1 & \longrightarrow -7p+1 \\ 1 & 1 & \longrightarrow p+1 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{1-7=-6=p} & \end{array}$$

Luego: $-7p^2 - 6p + 1 = (-7p + 1)(p + 1)$

Los trinomios de la forma $mx^2 + px + q$ ($m \neq 1$) también pueden descomponerse en factores reduciéndolos a la forma $x^2 + px + q$. Para ello se utiliza el procedimiento siguiente:

Se multiplica y se divide el trinomio dado por m, con lo que se obtiene: $mx^2 + px + q = \frac{(mx)^2 + p(mx) + mq}{m}$ Así, el numerador queda reducido a la forma $x^2 + px + q$ y considerando mx como una sola variable, se procede a descomponer dicho numerador en un producto de la forma $(mx + a)(mx + b)$ siempre que sea posible encontrar dos números que multiplicados den mq y que sumados den p.

Observa cómo se aplica este procedimiento en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 9:

Descompón en factores:

a) $2x^2 - 9x + 4$ b) $6y^2 - 7y - 3$

Solución:

a) $2x^2 - 9x + 4$

Multiplicas y divides por 2 que es valor de m en el trinomio dado:

$$2x^2 - 9x + 4 = \frac{2(2x^2 - 9x + 4)}{2}$$

$= \frac{(2x)^2 - 9(2x) + 8}{2}$ (reduces el numerador a la forma $x^2 + px + q$)

$= \frac{(2x - 8)(2x - 1)}{2}$ (buscas dos números que multiplicados den 8 y cuya suma algebraica dé –9)

$= \frac{\cancel{2}(x - 4)(2x - 1)}{\cancel{2}}$ (extraes factor común 2 y simplificas)

Luego, $2x^2 - 9x + 4 = (x - 4)(2x - 1)$

b) $6y^2 - 7y - 3$

Multiplicas y divides por 6 que es valor de m en el trinomio dado:

$$6y^2 - 7y - 3 = \frac{6(6y^2 - 7y - 3)}{6}$$

$= \frac{(6y)^2 - 7(6y) - 18}{6}$ (reduces el numerador a la forma $x^2 + px + q$)

$=\dfrac{(6y-9)(6y+2)}{6}$ (buscas dos números que multiplicados den –18 y cuya suma algebraica dé –7)

$=\dfrac{\cancel{3}(2y-3)\cancel{2}(3y+1)}{\cancel{6}}$ (extraes factor común 3 en el primer paréntesis y factor común 2 en el segundo. El producto de ambos factores comunes es 6, por lo que lo simplificas con el 6 del denominador).

Luego, $6y^2 - 7y - 3 = (2y - 3)(3y + 1)$

De esta manera has aprendido a descomponer en factores los trinomios cuadrados perfectos, los trinomios de la forma $x^2 + px + q$ y los de la forma $mx^2 + px + q$ ($m \neq 1$).

Es bueno que sepas, que los dos primeros trinomios son casos particulares del trinomio general $mx^2 + px + q$ ($m \neq 1$), por lo que el procedimiento estudiado para su factorización es aplicable a los trinomios anteriores. Sin embargo, es bueno que utilices los procedimientos particulares de cada uno de ellos para su mayor fijación.

En ejemplos resueltos anteriormente pudiste apreciar que los casos de descomposición factorial pueden aparecer combinados en ciertos ejercicios y que la factorización debe realizarse mientras aparezca algún caso de los estudiados. Por eso te proponemos un esquema que puedes aplicar en estos casos:

Descomposición factorial

$\Downarrow$

Factor común

Binomio
$a^2 - b^2$

Trinomios
Cuadrado perfecto
$x^2 + px + q$
$mx^2 + px + q$

Para aplicar este esquema al realizar ejercicios combinados de factorización debes proceder como se muestra en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 10:

Factoriza completamente las expresiones siguientes:

a) $2x^3 - 18x$ b) $3ab^2 - 6ab + 3a$ c) $3y^4 - \dfrac{3}{16}$

d) $p^5 - 5p^4 - 6p^3$ e) $6mn^2 - 4mn - 10m$ f) $x^4 + x^2 - 2$

Solución:

a) $2x^3 - 18x$

1. ¿Existe factor común? Sí, es $2x$ y entonces:

   $2x^3 - 18x = 2x(x^2 - 9)$

2. ¿El segundo factor es un binomio o un trinomio? Es un binomio.
   ¿Tiene descomposición factorial? Sí, ya que es una diferencia de dos cuadrados.
   Luego:

   $2x^3 - 18x = 2x(x^2 - 9) = 2x(x + 3)(x - 3)$

3. ¿Es posible continuar el proceso de descomposición factorial? No.
4. Escribes la solución: $2x^3 - 18x = 2x(x + 3)(x - 3)$

b) $3ab^2 - 6ab + 3a$

1. ¿Existe factor común? Sí, es $3a$ y entonces:

   $3ab^2 - 6ab + 3a = 3a(b^2 - 2b + 1)$

2. ¿El segundo factor es un binomio o un trinomio? Un trinomio cuadrado perfecto, por lo que se puede factorizar.
   Luego: $3ab^2 - 6ab + 3a = 3a(b^2 - 2b + 1) = 3a(b - 1)^2$
3. ¿Es posible continuar el proceso de descomposición factorial? No.
4. Escribes la respuesta: $3ab^2 - 6ab + 3a = 3a(b - 1)^2$

c) $3y^4 - \dfrac{3}{16}$

1. ¿Existe factor común? Sí, es 3 y entonces:

   $$3y^4 - \frac{3}{16} = 3\left(y^4 - \frac{1}{16}\right)$$

2. ¿El segundo factor es un binomio o un trinomio? Un binomio bicuadrado y representa una diferencia de dos cuadrados.

   Luego: $3y^4 - \dfrac{3}{16} = 3\left(y^4 - \dfrac{1}{16}\right) = 3\left(y^2 + \dfrac{1}{4}\right)\left(y^2 - \dfrac{1}{4}\right)$

3. ¿Es posible continuar el proceso de descomposición factorial? Sí, ya que uno de los binomios es también una diferencia de dos cuadrados.

Entonces: $3y^4 - \dfrac{3}{16} = 3\left(y^4 - \dfrac{1}{16}\right) = 3\left(y^2 + \dfrac{1}{4}\right)\left(y^2 - \dfrac{1}{4}\right) = 3\left(y^2 + \dfrac{1}{4}\right)\left(y + \dfrac{1}{2}\right)\left(y - \dfrac{1}{2}\right)$

4. ¿Es posible continuar el proceso de descomposición factorial? No.

5. Escribes la respuesta: $3y^4 - \dfrac{3}{16} = 3\left(y^2 + \dfrac{1}{4}\right)\left(y + \dfrac{1}{2}\right)\left(y - \dfrac{1}{2}\right)$

d) $p^5 - 5p^4 - 6p^3$

1. ¿Existe factor común? Sí, es p^3:

   $p^5 - 5p^4 - 6p^3 = p^3(p^2 - 5p - 6)$

2. ¿El segundo factor es un binomio o un trinomio? Un trinomio de la forma:

   $x^2 + px + q$ y se puede factorizar. Entonces:

   $p^5 - 5p^4 - 6p^3 = p^3(p^2 - 5p - 6) = p^3(p - 6)(p + 1)$

3. ¿Es posible continuar el proceso de descomposición factorial? No.
4. Escribes la respuesta: $p^5 - 5p^4 - 6p^3 = p^3(p - 6)(p + 1)$

e) $6mn^2 - 4mn - 10m$

1. ¿Existe factor común? Sí, es $2m$:

   $6mn^2 - 4mn - 10m = 2m(3n^2 - 2n - 5)$

2. ¿El segundo factor es un binomio o un trinomio? Un trinomio de la forma $mx^2 + px + q$ y se puede factorizar. Entonces:

   $6mn^2 - 4mn - 10m = 2m(3n^2 - 2n - 5) = 2m(3n - 5)(n + 1)$

3. ¿Es posible continuar el proceso de descomposición factorial? No.
4. Escribes la respuesta: $6mn^2 - 4mn - 10m = 2m(3n - 5)(n + 1)$

f) $x^4 + x^2 - 2$

1. ¿Existe factor común? No
2. ¿La expresión es un binomio o un trinomio? Un trinomio bicuadrado de la forma $x^2 + px + q$ y se puede factorizar. Entonces:

   $x^4 + x^2 - 2 = (x^2 + 2)(x^2 - 1)$

3. ¿Es posible continuar el proceso de descomposición factorial? Sí, ya que uno de los factores es una diferencia de dos cuadrados.

   $x^4 + x^2 - 2 = (x^2 + 2)(x^2 - 1) = (x^2 + 2)(x - 1)(x + 1)$

4. Escribes la respuesta: $x^4 + x^2 - 2 = (x^2 + 2)(x - 1)(x + 1)$

Las preguntas que aparecen en cada inciso no se escriben en la resolución del ejercicio propuesto, son preguntas que te haces para encontrar el procedimiento que debes seguir ordenadamente.

Ejercicios

1. Extrae factor común y expresa como productos las expresiones siguientes:

   a) $2x + 6$ b) $4y - 16$ c) $7z^2 + 7$ d) $\frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$

e) $0{,}5b + 0{,}25$ f) $12 + 22m$ g) $3t^3 + 6t - 15$ h) $9n + 21r$
i) $ab + ac$ j) $2p^2 + 3p$ k) $x^2 - 2x$ l) $x^3y^2 + 5x^2y^3$
m) $y^5 - 2y^4 + 3y^3$ n) $2xy - 10x$ ñ) $8m^2 - 12mn$ o) $5y^2 + 20y^3$
p) $2a^2 + 4ab - 6ac$ q) $4x^2yz^3 + 12x^2y^2z^2$
r) $(a + 5)x + (a + 5)y$ s) $2m(b - 7) + n(b - 7)$
t) $b(x + 2) + x + 2$ u) $d(r^2 + 2r + 5) + 3e(r^2 + 2r + 5)$
v) $(x + y)(z + 2) + 3(z + 2)$ w) $(c - 4)x - c + 4$

2. Marca con una X la respuesta correcta.

2.1 Al descomponer en factores la expresión $x^6 - x^3$ se obtiene:

a) ___ x^3 b) ___ x^9 c) ___ $x^3(x^3 - 1)$ d) ___ $x^3(x^3 - x)$

2.2 Al factorizar la expresión $6m^2n + 8mn$ se obtiene:

a) ___ $6mn(m + 2)$ b) ___ $2mn(3m + 4)$
c) ___ $2m^2n(3 + 4m)$ d) ___ $mn(6m + 8)$

2.3 Al expresar como producto la expresión $\frac{4}{7}x^3y^2z + \frac{2}{7}x^2y^2z - \frac{2}{21}xyz$ se obtiene:

a) ___ $\frac{2}{7}xyz\left(x^2y + xy - \frac{1}{3}\right)$ b) ___ $\frac{2}{7}xyz\left(\frac{2}{7}x^2y + xy - \frac{1}{3}\right)$

c) ___ $\frac{2}{7}xyz\left(2x^2y + xy - \frac{1}{3}\right)$ d) ___ $\frac{4}{7}xyz\left(x^2y + 2xy - \frac{2}{3}\right)$

3. Expresa como productos:

a) $a^2 - 16$ b) $b^2 - 144$ c) $4c^2 - 25$ d) $\frac{d^2}{4} - 1$

e) $e^2 - 0{,}04$ f) $49 - 64f^2$ g) $\frac{4}{9} - g^2$ h) $0{,}25h^2 - \frac{1}{81}$

i) $i^2p^2 - 81m^2$ j) $\frac{j^2}{256} - \frac{k^2}{0{,}36}$ k) $b^4 - 196$ l) $x^6 - 225y^2$

m) $\frac{49}{25}m^8 - \frac{1}{4}$ n) $(x + 2)^2 - 16$ ñ) $(y - 1)^2 - 144$

4. Marca con una X la respuesta correcta:

4.1 Al factorizar $x^2 - y^2$ se obtiene:

a) ___ $(y + x)(x - y)$ b) ___ $(x - y)^2$
c) ___ $2x - 2y$ d) ___ $(x + y)(x + y)$

4.2 Al descomponer en factores $2m^2 - \frac{1}{4}n^2$ se obtiene:

a) ___ $\left(2m + \frac{1}{2}n\right)\left(2m - \frac{1}{2}n\right)$ b) ___ $(\sqrt{2}m - 0{,}5n)(\sqrt{2}m + 0{,}5n)$

c) ___ $\left(\sqrt{2}m - \frac{1}{2}n\right)^2$ d) ___ ninguna de las anteriores

4.3 Al expresar como producto la expresión $(p + 5)^2 - 36q^6$ se obtiene:

a) ___ $(p + 5 + 6q)(p + 5 - 6q)$ b) ___ $(5p - 6q^3)5p + 6q^3)$
c) ___ $(p + 6q^3 + 5)(p - 6q^3 + 5)$ d) ___ ninguna de las anteriores

5. Descompón en factores los trinomios siguientes:

a) $x^2 + 12x + 36$ b) $y^2 - 12y + 36$ c) $z^2 + 16z + 64$ d) $z^2 - 16z + 64$

e) $m^2 + 14m + 49$ f) $n^2 - 14n + 49$ g) $p^2 - 3p + \frac{9}{4}$ h) $h^2 - 10hq + 25q^2$

i) $81 + 18x + x^2$ j) $64y^2 - 16yz + z^2$ k) $x^2 + x + \frac{1}{4}$ l) $\frac{y^2}{4} + \frac{3}{7}y + \frac{9}{49}$

m) $m^2 + 0{,}4m + 0{,}04$ n) $1{,}44n^2 + 1{,}44n + 0{,}36$ ñ) $p^6 + 10p^3 + 25$
o) $4d^2 - 2d + 0{,}25$ p) $16a^2 + 49b^2 - 56ab$

6. Factoriza:

a) $x^2 + 4x + 3$ b) $x^2 - 4x + 3$ c) $y^2 + 10y + 9$ d) $y^2 - 10y + 9$
e) $z^2 + 10z + 21$ f) $z^2 - 10z + 21$ g) $p^2 + 18p + 45$ h) $p^2 - 18p + 45$
i) $x^2 - 4x - 5$ j) $x^2 + 4x - 5$ k) $y^2 - 3y - 40$ l) $y^2 + 3y - 40$
m) $c^2 - c - 20$ n) $c^2 + c - 20$ ñ) $p^2 + 15p + 54$ o) $p^2 - 15p + 54$
p) $n^2 - 21 - 4n$ q) $x^2 + 5xy + 6y^2$ r) $b^2 - 11bc + 24c^2$ s) $a^2b^2 + ab - 42$

7. Descompón en factores los trinomios siguientes:

a) $2x^2 + 7x + 3$ b) $2x^2 - 7x + 3$ c) $3y^2 - 5y + 2$
d) $3y^2 - 7y + 2$ e) $6b^2 - 5b - 21$ f) $6b^2 + 5b - 21$
g) $3m^2 + 13m - 10$ h) $3m^2 - 13m - 10$ i) $4p^2 - 23p + 15$
j) $8z^2 + 6z - 5$ k) $10a^2 - 17a + 3$ l) $8y^2 - 37y - 15$
m) $3n^2 + n - 4$ n) $9a^2 - 10a + 1$ ñ) $2b^2 + 9b + 9$
o) $5x + 2x^2 - 3$ p) $-4d^2 + 11d + 15$ q) $16y - 12y^2 + 3$
r) $9n^2 + 6np - 8p^2$ s) $8x^2 - 6xy - 35y^2$ t) $4c^4 + 13c^2 + 3$

8. Factoriza completamente:

a) $2x^2 - 32$ b) $x^3 - 100x$ c) $4y^5 - y^3$

d) $2t^2 - \frac{2}{9}$ e) $\frac{9}{5}q^2 - \frac{4}{5}$ f) $0{,}36s^5 - s^3$
g) $2y^2 - 20y + 50$ h) $m^3 - 4m^2 + 4m$ i) $n^3 + 2n^2 - 3n$
j) $5p^2 - 10p - 315$ k) $6d^2 + 48d + 90$ l) $2a^3 + 4a^2 + 2a$
m) $20x^2 + 50x + 20$ n) $2y^5 - y^4 - 3y^3$ ñ) $9z^4 + 12z^3 + 3z^2$
o) $x^4y - 25x^2y$ p) $r^4 - 16$ q) $p^8 - 1$
r) $2b^4 + 4b^2 - 6$ s) $t^7 - 7t^5 - 18t^3$ t) $2m^5 - 26m^3 + 72m$

9. Marca con una X la respuesta correcta.

9.1 Al expresar como producto el trinomio $x^2 - 18x + 80$ se obtiene:

a) ___ $(x + 8)(x + 10)$ b) ___ $(x - 10)(x - 8)$
c) ___ $(x - 10)(x + 8)$ d) ___ $(x - 8)(x + 10)$

9.2 Al factorizar el trinomio $6m^2 + m - 15$ se obtiene:

a) ___ $(2m - 3)(3m + 5)$ b) ___ $(2m + 3)(3m - 5)$
c) ___ $(6m - 3)(m + 5)$ d) ___ $(3m - 3)(2m + 5)$

9.3 Al expresar como producto la expresión $a^2b^2 - 14abc + 49c^2$ se obtiene:

a) ___ $(ab - 7c)(ab + 7c)$ b) ___ $(abc + 7)^2$
c) ___ $(abc - 7)^2$ d) ___ $(ab - 7c)^2$

10. Simplifica las expresiones siguientes y descompón en factores, de ser posible, la expresión resultante.

a) $2x(x - 3) + (x + 7) - 10$ b) $(x + 3)^2 - x(2 - x) - 9$
c) $(2y - 1)^2 - y(y + 5) + (4y - 3)$ d) $(z + 5)(z - 5) + z(z^2 + 1) + 25$
e) $(2m + 3)(2m - 3) - 2(m - 4{,}5) - 2$ f) $(b + 7)(b - 3) - (4b + 123)$
g) $(x^3 + 4) - (x + 2)^2 - x(x + 11)$ h) $(x^2 + 4)^2 - 8(x^2 + 2) - 1$
i) $-(x + 10) - (x - 3)(x + 2) + 8$ j) $2y^2 - (y + 1)(y + 15) + 79$
k) $(2x + 7)^2 - 4(7x - 4) - 1$ l) $x^2(x^2 + 1) + 2x\left(x - \frac{14}{x}\right)$
m) $2b^3 - (2b + 11)^2 - (26b - 121)$ n) $x^3 - (2x + 1)^2 - x\left(x + 2 - \frac{1}{x}\right)$
ñ) $(2x + 3)^2 - x(x - 5) - 15$ o) $(3a - 2)(3a + 2) - 6\left(a - \frac{1}{2}\right) + 1$
p) $10x^2 - (3x - 4)(3x + 4) - 116$ q) $(3 - 4a)^2 - 2(17 - 12a)$
r) $x(x - 3) - (x + 1)^2 + 16$ s) $(x^2 - 3)(x^2 + 3) - 5(x^2 - 2) + 3$
t) $m^4(m^3 + 1) - (m^2 - 1)^2 - (2m^2 + m^3 - 1)$ u) $2x^3 - (2x - 3)^2 + 2(2x^2 + 4{,}5 - 22x)$
v) $(2b^2 + 1)^2 - b^2(b^2 - 8) - 16$ w) $n^3(n^2 - 8) - (n + 3)^2 + (n^2 - 3n + 9)$

11. Enlaza la expresión algebraica de la columna A con su expresión factorizada en la columna B.

A	B
$x^2 - 121$	$x(x + 4)(x - 4)$
$x^2 - 2x - 15$	$(2x + 5)(x - 3)$
$x^6 + x^3$	$(x + 11)(x - 11)$
$2x^2 - x - 15$	$(x + 5)(x - 3)$
$x^2 + 2x - 15$	$x(x + 8)(x - 8)$
$x^2 + 121$	$(x + 3)(x - 5)$
$x^3 - 16x$	$x^3(x^3 + 1)$
	$(2x + 3)(x - 5)$

12. Un cuadrado tiene un área de $(25x^2 + 20x + 4)$ cm^2. Determina la expresión correspondiente al lado del cuadrado y calcula su valor para $x = \frac{3}{5}$.

13. El área de un rectángulo viene dada, en cada caso, por las expresiones siguientes:

a) $x^2 - 8x$ b) $y^2 - 400$ c) $n^2 - 7n + 12$ d) $8a^2 + 2a - 15$

Determina las expresiones correspondientes a los lados del rectángulo.

14. El volumen de un prisma recto de bases rectangulares viene dado por la expresión $(x^3 + 3x^2 - 4x)$ dm^3. Determina las expresiones correspondientes a sus dimensiones.

15. Sean $P = 2m - 5$; $Q = (m + 3)(m - 3)$ y $R = 13 - 4m$.

a) Calcula y simplifica $P^2 + Q - R$.
b) Descompón en factores el resultado obtenido.
c) Halla el valor numérico de dicho resultado para $m = -2$.

16. Sean $M = 4ab + b^2$ y $N = (4a + b)(4a - b)$.

a Calcula $2M + N$.
b) Descompón en factores el resultado.

17. Sean $A = \frac{x}{2} + 1$; $B = \left(\frac{x}{2} + 1\right)\left(\frac{x}{2} - 1\right)$; $C = \frac{3}{7}(14x + 7)$ y $D = 7x + 3$.

a) Prueba que $A^2 - B + C = D - 2$.
b) Determina para qué valor de x se cumple que $A = D$.

18.* Demuestra que las proposiciones siguientes son verdaderas:

a) El cuadrado de un número natural impar es un número impar.

b) El producto de un número natural par y un número natural impar es un número par.
c) La diferencia de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es un número impar.
d) La suma de tres números naturales consecutivos es divisible por 3.
e) La diferencia entre un número de dos lugares y el número que se forma invirtiendo el orden de sus cifras básicas, es divisible por 9.

4.4 Ecuaciones cuadráticas o de segundo grado

4.4.1 Ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

¡! En un municipio del país, para construir un estadio de fútbol (fig. 4.11) y desarrollar este deporte, se le asignó a una comunidad un terreno con forma rectangular cuyo largo excede al ancho en 40 m y que tiene un perímetro de 320 m. ¿Qué dimensiones tiene el terreno asignado a la comunidad?

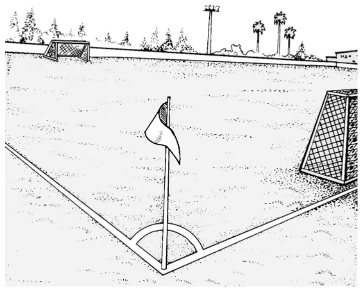


Figura 4.11

En grados anteriores aprendiste a resolver problemas como este, a partir del planteamiento de una ecuación lineal, y en este grado, estudiaste otra vía de solución a partir del planteo de un sistema de dos ecuaciones con dos variables.

R¡! A continuación se muestra, sintetizada, la solución de este problema por ambas vías estudiadas por ti:

Datos:

Largo del terreno: $x + 40$
Ancho del terreno: x
$P = 320$ m

Planteo de la ecuación y solución:

$$\begin{aligned} 2(x + x + 40) &= 320 \\ 2(2x + 40) &= 320 \\ 2x + 40 &= 160 \\ 2x &= 160 - 40 \\ 2x &= 120 \\ x &= 60 \end{aligned}$$

Longitud del largo: $60 + 40 = 100$

Datos:

Largo del terreno: x
Ancho del terreno: y

Planteo del sistema y solución:

$$\begin{aligned} x - y &= 40 \\ 2(x + y) &= 320 \\ \hline x - \cancel{y} &= 40 \\ x + \cancel{y} &= 160 \\ \hline 2x &= 200 \\ x &= 100 \\ y &= 60 \end{aligned}$$

Respuesta: El terreno asignado a la comunidad tiene 100 m de largo y 60 m de ancho.

En este problema se te ofrece como uno de los datos el perímetro del terreno rectangular, por ello el problema conduce al planteamiento de la ecuación lineal referida anteriormente o del sistema de ecuaciones, pero qué ocurre si en lugar del perímetro se te ofrece como dato el área del terreno.

Ejemplo 1:

El largo de un terreno rectangular excede en 40 m a la longitud de su ancho y tiene una superficie de 6 000 m^2. ¿Cuáles son sus dimensiones?

Solución:

Como ya conoces, el área de un rectángulo se calcula multiplicando el largo por el ancho. Manteniendo la declaración de variable para el problema inicial, planteas la ecuación $x(x + 40) = 6\,000$ y si efectúas el producto indicado, obtienes que:

$x^2 + 40x = 6\,000.$

Observa la ecuación obtenida y responde las interrogantes siguientes:

1. ¿La ecuación planteada se corresponde con la de una ecuación lineal? ¿Por qué?
2. ¿Cuál es el grado del polinomio del miembro izquierdo?
3. ¿Es posible despejar la variable x en la ecuación como hacías al resolver las ecuaciones lineales?
4. ¿Cómo proceder para resolver este nuevo tipo de ecuación?

De las respuestas a estas interrogantes podrás llegar a la conclusión que existen ecuaciones que no son lineales o de primer grado como las que has resuelto hasta ahora, luego necesitas:

- Definir este nuevo tipo de ecuación.
- Buscar un procedimiento para resolverla.

Recuerda *la definición de ecuación de segundo grado:*

Definición:

Toda ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) se denomina **ecuación de segundo grado o cuadrática** en una variable.

Los números a, b y c se llaman, primer coeficiente, segundo coeficiente y término independiente. Cuando está expresada en esa forma, se dice que la ecuación está escrita en su *forma general* o *estándar.*

Son ejemplos de ecuaciones cuadráticas las siguientes:

$2x^2 + 5x + 3 = 0$ ($a = 2$; $b = 5$ y $c = 3$)	$-x^2 + x - 2 = 0$ ($a = -1$; $b = 1$ y $c = -2$)	$4x^2 - 16 = 0$ ($a = 4$; $b = 0$ y $c = -16$)
$3x^2 - 8x = 0$ ($a = 3$; $b = -8$ y $c = 0$)	$2x^2 = 0$ ($a = 2$; $b = 0$ y $c = 0$)	$-\frac{1}{5}x^2 = 0$ ($a = -\frac{1}{5}$; $b = 0$ y $c = 0$)

Observa que las ecuaciones $2x^2 + 5x + 3 = 0$ y $-x^2 + x - 2 = 0$ tiene los tres términos, el monomio de segundo grado, el monomio de primer grado y el término independiente. Esto se debe a que los parámetros a, b y c son distintos de cero. En este caso se dice que son ecuaciones cuadráticas *completas.*

La ecuación $3x^2 - 8x = 0$ no tiene término independiente, o sea, el parámetro c es cero. Se dice que es una ecuación cuadrática *incompleta.*

A la ecuación $4x^2 - 16 = 0$ le falta el término en x, o sea, $b = 0$. Se dice también que es una ecuación cuadrática *incompleta.*

En las ecuaciones $2x^2 = 0$ y $-\frac{1}{5}x^2 = 0$, se tiene que $b = 0$ y $c = 0$, por lo que no aparecen los términos en x ni el término independiente. Son ecuaciones cuadráticas *incompletas.*

Recuerda que:

Una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$):

- es **completa** si $b \neq 0$ y $c \neq 0$;
- en los demás casos es **incompleta.**

Toda ecuación de segundo grado, después de aplicarle transformaciones algebraicas, se puede reducir a su expresión general. Por eso para clasificar una ecuación debes realizar primero las transformaciones que se indiquen.

Ejemplo 2:

Determina cuáles de las ecuaciones siguientes son lineales y cuáles son cuadráticas.

a) $x(x - 2) + 1 = 2x - 3$
b) $(x + 1)(x - 2) + x^2 = -2$
c) $(x + 1)(x + 3) + x = (x + 2)(x - 2)$
d) $(2x + 3)^2 = 5 + 12x$

Solución:

a) $x(x - 2) + 1 = 2x - 3$
$x^2 - 2x + 1 = 2x - 3$ (efectúas el producto indicado)
$x^2 - 2x - 2x + 1 + 3 = 0$ (transpones al miembro izquierdo $2x$ y -3)
$x^2 - 4x + 4 = 0$ (reduces los términos semejantes)

El mayor grado de la variable en el trinomio es 2, luego la ecuación $x(x - 2) + 1 = 2x - 3$ *es una ecuación cuadrática,* ya que se transforma a una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

b) $(x + 1)(x - 2) + x^2 = -2$
$x^2 - x - 2 + x^2 = -2$ (efectúas el producto notable indicado)
$x^2 - x - 2 + x^2 + 2 = 0$ (transpones al miembro izquierdo el -2)
$2x^2 - x = 0$ (reduces los términos semejantes)

El mayor grado de la variable en el binomio es 2, luego la ecuación $(x + 1)(x - 2) + x^2 = -2$ *es una ecuación cuadrática,* ya que se transforma a una ecuación de la forma $ax^2 + bx = 0$.

c) $(x + 1)(x + 3) + x = (x + 2)(x - 2)$
$x^2 + 4x + 3 + x = x^2 - 4$ (efectúas los productos notables en cada miembro)
$x^2 + 4x + 3 + x - x^2 + 4 = 0$ (transpones al miembro izquierdo x^2 y $- 4$)
$5x + 7 = 0$ (reduces los términos semejantes)

El mayor grado de la variable en el binomio es 1, luego la ecuación $(x + 1)(x + 3) + x = (x + 2)(x - 2)$ *no es una ecuación cuadrática,* es lineal, y se transforma en una ecuación de la forma $ax + b = 0$.

d) $(2x + 3)^2 = 5 + 12x$
$4x^2 + 12x + 9 = 5 + 12x$ (efectúas el producto notable cuadrado del binomio)
$4x^2 + 12x + 9 - 5 - 12x = 0$ (transpones al miembro izquierdo $12x$ y 5)
$4x^2 + 4 = 0$ (reduces los términos semejantes)

El mayor grado de la variable en el binomio es 2, luego la ecuación $(2x + 3)^2 = 5 + 12x$ *es una ecuación cuadrática,* ya que se transforma a una ecuación de la forma $ax^2 + c = 0$.

En los grados anteriores estudiaste conceptos relacionados con las ecuaciones lineales como: dominio de la variable, solución de la ecuación y conjunto solución de la ecuación; estos conceptos también se aplican a las ecuaciones de segundo grado.

Recuerda que:

- En las ecuaciones, las variables se sustituyen por valores de los conjuntos numéricos. A estos conjuntos numéricos se les denomina **dominio de la variable.**
- Si al sustituir la variable por un valor de su dominio, la ecuación se transforma en una proposición verdadera, entonces se dice que ese número por el que se sustituyó la variable es una **solución de la ecuación.**
- El conjunto formado por todas las soluciones de una ecuación se denomina **conjunto solución.**

Por ejemplo, en la ecuación cuadrática $x^2 - 4 = 0$ la variable x puede tomar cualquier valor real, por lo que el *dominio* de la variable en este caso es el conjunto de los *números reales*.

Para dar solución a la ecuación $x^2 - 4 = 0$ le asignas valores a la variable hasta que se transforme en una proposición verdadera.

En este caso, debes buscar qué números elevados al cuadrado dan 4, ya que al sustraerle 4 a dicho número el resultado sería cero, que es el miembro derecho de la ecuación.

Evidentemente los únicos números que cumplen la condición planteada anteriormente son 2 y –2.

$2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$
$(-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$

Al sustituir la x por 2 y –2, la ecuación se transforma en una proposición verdadera $0 = 0$; luego las *soluciones de la ecuación* son 2 y –2.

Si sustituyes otros valores en la variable x, no se obtiene una proposición verdadera, por lo que el conjunto solución de la ecuación es $S = \{2; -2\}$.

Hemos encontrado la solución de la ecuación planteada dando valores a x en la ecuación, pero como podrás deducir, si la ecuación es más compleja, dar valores a la variable aplicando el tanteo podría llevarte muchísimo tiempo e incluso no encontrar la solución, ya que x puede tomar infinitos valores y no sería un método racional.

Por eso al igual que las ecuaciones lineales, las ecuaciones cuadráticas tienen su procedimiento de solución.

¿Cuál es el procedimiento que se aplica para resolver las ecuaciones cuadráticas?

Te invito a obtener dicho procedimiento a partir de la ecuación anterior.

Si observas detenidamente podrás comprender que el miembro izquierdo de la ecuación $\boldsymbol{x^2} - 4 = 0$ es un binomio, que representa una *diferencia de dos cuadrados.* Este binomio se puede expresar como el producto de dos factores aplicando la regla $a^2 - b^2 =$ $= (a + b)(a - b)$, ya estudiada por ti en el epígrafe anterior.

Al factorizar obtienes: $(x - 2)(x + 2) = 0$.

Has llegado a un producto de dos factores cuyo resultado es cero.

¿Qué valores debe tomar x para que se cumpla que $(x - 2)(x + 2) = 0$?

Esta interrogante significa lo mismo que la siguiente:

¿Cuándo el producto de dos factores es igual a cero?

Para dar respuesta a estas interrogantes debes aplicar la propiedad siguiente:

Para todos los números reales a y b se cumple que $a \cdot b = 0$ si y solo si $a = 0$ o $b = 0$.

Aplicando esta propiedad obtienes las ecuaciones lineales $x - 2 = 0$ o $x + 2 = 0$, las cuales tienen como solución $x_1 = 2$ o $x_2 = -2$; que son las mismas obtenidas anteriormente.

Luego, el conjunto solución de la ecuación es $S = \{2; -2\}$.

Observa cómo aplicar el procedimiento anterior mediante el ejemplo siguiente:

Ejemplo 3:

Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $x^2 - 2x - 3 = 0$ b) $x^2 + 4x + 4 = 0$ c) $2x^2 - 3x + 1 = 0$
d) $3x^2 - 6x = 0$ e) $4x^2 - 9 = 0$ f) $x^2 + 1 = 0$

Solución:

a) $x^2 - 2x - 3 = 0$
$(x - 3)(x + 1) = 0$ (factorizas el trinomio $x^2 + px + q$)
$x - 3 = 0$ o $x + 1 = 0$ (igualas a cero cada factor aplicando la propiedad)
$x_1 = 3$ o $x_2 = -1$ (despejas la x)

Comprobación para $x_1 = 3$:	Comprobación para $x_2 = -1$:
M.I.: $3^2 - 2 \cdot 3 - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$	M.I.: $(-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$
M.D.: 0	M.D.: 0
Comparación: $0 = 0$	Comparación: $0 = 0$

Como puedes apreciar hay dos números que satisfacen la ecuación, de ahí que la ecuación tenga dos soluciones $x_1 = 3$ y $x_2 = -1$.
Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 3$ o $x_2 = -1$, que también pueden escribirse en forma de conjunto: $S = \{3; -1\}$.

b) $x^2 + 4x + 4 = 0$
$(x + 2)^2 = 0$ (factorizas el trinomio cuadrado perfecto)
$x + 2 = 0$ (ya que cero es el único número real cuyo cuadrado es cero)
$x_1 = -2$ (despejas la x)

Comprobación para $x_1 = -2$:

M.I.: $(-2)^2 + 4(-2) + 4 = 4 - 8 + 4 = 0$
M.D.: 0
Comparación: $0 = 0$
Luego $x_1 = -2$ o también $S = \{-2\}$.

Nota: Si al factorizar el trinomio lo expresas como $(x + 2)(x + 2) = 0$ y aplicas la propiedad, obtienes $x_1 = -2$ o $x_2 = -2$, o sea, dos soluciones reales iguales, por lo que la solución es -2.

c) $2x^2 - 3x + 1 = 0$
$(2x - 1)(x - 1) = 0$ (factorizas el trinomio $mx^2 + px + q$)
$2x - 1 = 0$ o $x - 1 = 0$ (aplicas la propiedad)

$x_1 = \frac{1}{2}$ o $x_2 = 1$ (despejas la x)

Comprobación para $x_1 = \frac{1}{2}$:

M.I.: $2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\cdot\frac{1}{2} + 1 = 2\cdot\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 1 = 0$

$= \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1 = -\frac{2}{2} + 1 = -1 + 1 = 0$

M.D.: 0

Comparación: $0 = 0$

Comprobación para $x_2 = 1$:

M.I.: $2 \cdot (1)^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 2 - 3 + 1 = 0$

M.D.: 0

Comparación: $0 = 0$

Luego, $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = 1$ o también $S = \left\{\frac{1}{2}; 1\right\}$.

d) $3x^2 - 6x = 0$
$3x(x - 2) = 0$ (factorizas el binomio extrayendo el factor común)
$3x = 0$ o $x - 2 = 0$ (igualas a cero cada factor aplicando la propiedad)

$x_1 = \frac{0}{3}$ o $x_2 = 2$ (despejas la x)

$x_1 = 0$ o $x_2 = 2$

Comprobación para $x_1 = 0$:

M.I.: $3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 = 0 - 0 = 0$
M.D.: 0
Comparación: $0 = 0$

Comprobación para $x_2 = 2$:

M.I.: $3 \cdot (2)^2 - 6 \cdot 2 = 3 \cdot 4 - 12 = 12 - 12 = 0$
M.D.: 0
Comparación: $0 = 0$

Luego, $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$ o también $S = \{0; 2\}$.

e) $4x^2 - 9 = 0$
$(2x - 3)(2x + 3) = 0$ (factorizas la diferencia de dos cuadrados)
$2x - 3 = 0$ o $2x + 3 = 0$ (aplicas la propiedad)

$x_1 = \frac{3}{2}$ o $x_2 = -\frac{3}{2}$ (despejas la x)

Comprobación para $x_1 = \frac{3}{2}$:

M.I.: $4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 9 = 4\cdot\frac{9}{4} - 9$
$9 - 9 = 0$
M.D.: 0
Comparación: $0 = 0$

Comprobación para $x_2 = -\frac{3}{2}$:

M.I.: $4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 9 = 4\cdot\frac{9}{4} - 9$
$9 - 9 = 0$
M.D.: 0
Comparación: $0 = 0$

Luego, $x_1 = \frac{3}{2}$ y $x_2 = -\frac{3}{2}$ o también $S = \left\{\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right\}$.

La ecuación resuelta en este inciso es de la forma $ax^2 + c = 0$, donde $a = 4$; $b = 0$ y $c = –9$. Las ecuaciones expresadas de esta forma pueden ser resueltas también por la vía del *despeje* de la variable.
Otra vía de solución:

$4x^2 – 9 = 0$
$4x^2 = 9$ (transpones el 9 al miembro derecho)

$x^2 = \frac{9}{4}$ (transpones el 4 dividiendo al miembro derecho)

$x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}}$ (despejas x planteando la raíz cuadrada)

$x = \pm\frac{3}{2}$ (hallas la raíz cuadrada de $\frac{9}{4}$)

De esta manera obtienes el mismo conjunto solución: $S = \left\{\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right\}$.

f) $x^2 + 1 = 0$
No es posible descomponer en factores este binomio, ya que no existe ningún número real que elevado al cuadrado y sumado con 1, dé como resultado 0.
Luego, la ecuación *no tiene soluciones* en el dominio de los números reales.
También puedes escribir la solución $S = \phi$.

Recuerda que:

Para resolver una ecuación cuadrática, se utiliza el procedimiento siguiente:

- Transformas la ecuación a la forma $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) aplicando las transformaciones necesarias.
- Descompones en factores el binomio o trinomio que se obtiene (si es posible).
- Igualas cada factor a cero aplicando la propiedad anterior.
- Resuelves las ecuaciones lineales que resultan del paso anterior.
- Compruebas las soluciones obtenidas. (Este paso es opcional).
- Escribes el conjunto solución.

Además, pudiste comprobar que las ecuaciones cuadráticas pueden tener dos soluciones, una solución o no poseer solución en el conjunto de los números reales.

Recuerda, además, que las *soluciones* de las ecuaciones también reciben el nombre de *raíces* de la ecuación.

El estudio de la ecuación de segundo grado y sus soluciones tienen origen antiguo.

En Grecia fue desarrollada por el matemático Diofanto de Alejandría (fig. 4.12), además, otro importante descubrimiento del mundo antiguo se puede encontrar en los escritos del matemático y científico griego Herón de Alejandría en el siglo I, *es un* método de aproximación *de la raíz positiva de ecuaciones como* $x^2 = 2$.

Los egipcios utilizaban el método de la falsa posición *para encontrar una raíz en ecuaciones de segundo grado sencillas.*

Figura 4.12

Para ecuaciones cuadráticas con un término en x, *como* $x^2 - 5x = 6$, *las primeras soluciones no se encuentran hasta en los libros de matemática babilonios del 2 000 a.n.e. Aunque los babilonios no conocían las raíces negativas, su método de búsqueda de las raíces positivas es el mismo que se utiliza en la actualidad.*

La solución de las ecuaciones de segundo grado fue introducida en Europa por el matemático judeo-español Abraham bar Hiyya, en su Liber embadorum *(1145), donde trata por primera vez en latín las ecuaciones de segundo grado.*

En 1629 el matemático francés Albert Girard aceptó raíces de ecuaciones negativas y fue, por tanto, capaz de finalizar el aún incompleto estudio que François Viète había realizado sobre la relación entre las raíces de una ecuación algebraica y sus coeficientes. Viète había descubierto que si a *y* b *son las raíces de* $x^2 - px + q = 0$, *entonces* $p = (a + b)$ *y* $q = a \cdot b$.

En la actualidad existen métodos más racionales que los utilizados mucho tiempo atrás, los cuales aprenderás en este tema.

En el ejemplo anterior las ecuaciones cuadráticas ya estaban expresadas en la forma general, pero, ¿siempre las ecuaciones están en la forma $ax^2 + bx + c = 0$?

Ya conoces que no, que hay ecuaciones en las que es necesario aplicar transformaciones para expresarlas en esa forma.

Ejemplo 4:

Halla el conjunto solución de las ecuaciones cuadráticas siguientes:

a) $x(x - 2) + 1 = 3x + 1$ b) $(a + 4)(a - 4) = 4a - 11$

c) $(2y - 1)^2 + 4y = 3y^2 + 26$ d) $x(x-2) = \frac{x}{2} + 1{,}5$

Solución:

a) $x(x - 2) + 1 = 3x + 1$

$x^2 - 2x + 1 = 3x + 1$ (efectúas el producto de monomio por binomio)
$x^2 - 2x + 1 - 3x - 1 = 0$ (transpones al miembro izquierdo $3x$ y 1)
$x^2 - 5x = 0$ (reduces los términos semejantes)
$x(x - 5) = 0$ (factorizas el binomio extrayendo factor común)
$x = 0$ o $x - 5 = 0$ (igualas a cero cada factor)
$x_1 = 0$ o $x_2 = 5$ (despejas x)
$S = \{0; 5\}$ (escribes el conjunto solución)

b) (a + 4)(a – 4) = 4a – 11
$a^2 - 16 = 4a - 11$ (efectúas el producto notable)
$a^2 - 16 - 4a + 11 = 0$ (transpones al miembro izquierdo $4a$ y -11)
$a^2 - 4a - 5 = 0$ (reduces los términos semejantes)
$(a - 5)(a + 1) = 0$ (factorizas el trinomio $x^2 + px + q$)
$a - 5 = 0$ o $a + 1 = 0$ (igualas a cero cada factor)
$a_1 = 5$ o $a_2 = -1$ (despejas a)
$S = \{5; -1\}$. (escribes el conjunto solución)

c) $(2y - 1)^2 + 4y = 3y^2 + 26$
$4y^2 - 4y + 1 + 4y = 3y^2 + 26$ (efectúas el producto notable $(a - b)^2$)
$4y^2 - 4y + 1 + 4y - 3y^2 - 26 = 0$ (transpones al miembro izquierdo $3y^2$ y 26)
$y^2 - 25 = 0$ (reduces los términos semejantes)
$(y + 5)(y - 5) = 0$ (factorizas la diferencia de dos cuadrados)
$y + 5 = 0$ o $y - 5 = 0$ (igualas a cero cada factor)
$y_1 = -5$ o $y_2 = 5$ (despejas y)
$S = \{5; -5\}$ (escribes el conjunto solución)

Nota: Recuerda que también en este caso puedes despejar x en la ecuación, o sea, $y^2 = 25$; $y = \pm\sqrt{25}$; $y = \pm\ 5$.

d) $x(x-2) = \frac{x}{2} + 1{,}5$

$x^2 - 2x = \frac{x}{2} + 1{,}5$ (efectúas el producto indicado)

$x^2 - 2x - \frac{x}{2} - 1{,}5 = 0$ (transpones al miembro izquierdo $\frac{x}{2}$ y 1,5)
$2x^2 - 4x - x - 3 = 0$ (multiplicas la ecuación por 2 para eliminar el denominador)
$2x^2 - 5x - 3 = 0$ (reduces los términos semejantes)
$(2x + 1)(x - 3) = 0$ (factorizas el trinomio $mx^2 + px + q$)
$2x + 1 = 0$ o $x - 3 = 0$ (igualas cada factor a cero)

$x_1 = -\frac{1}{2}$ o $x_2 = 3$ (despejas x)

$S = \left\{-\frac{1}{2}; 3\right\}$ (escribes el conjunto solución)

Después de haber aprendido el procedimiento de solución de las ecuaciones cuadráticas, ya puedes dar respuesta al problema del ejemplo 1 de este epígrafe.

Habías llegado al planteo de la ecuación $x^2 + 40x = 6\,000$, la cual se debe transformar:

$x^2 + 40x - 6\,000 = 0$ (transpones 6 000 al miembro izquierdo)
$(x + 100)(x - 60) = 0$ (factorizas el trinomio)
$x + 100 = 0$ o $x - 60 = 0$ (aplicas la propiedad)
$x_1 = -100$ o $x_2 = 60$ (despejas x)

Los números –100 y 60 satisfacen la ecuación cuadrática, pero en este caso, estás resolviendo un problema y declaraste como incógnita (x) la longitud del ancho del terreno. Luego, –100 *no puede ser* la longitud de un lado del terreno y quedaría 60 como respuesta a la longitud del ancho.

La longitud del largo es según los datos planteados $x + 40$, entonces:

$60 + 40 = 100.$

La respuesta al problema será: El terreno tiene 100 m de largo y 60 m de ancho.

Recuerda que:

- Las ecuaciones cuadráticas pueden tener dos soluciones, una solución o no tener soluciones en el conjunto de los números reales.
- Para resolver las ecuaciones cuadráticas, se reduce a la forma general $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ y se factoriza el binomio o trinomio obtenido, si es posible.
- En las ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$, se puede utilizar, además, para hallar la solución, el despeje de la variable.
- Las ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 = 0$ $(a \neq 0)$ se resuelven mediante el despeje y su solución siempre es $x = 0$.

Ejercicios

1. Determina cuáles de las siguientes ecuaciones son cuadráticas.

   a) $7x^2 - 3 = 0$ b) $3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$ c) $x^2 - 2x = -4$

   d) $\dfrac{x^5}{x^2 + 2x} = 1$ e) $\dfrac{x^2}{2} + 3x = \dfrac{3}{2}$ f) $x(x - 3) = 3x + 4$

   g) $9 - (x + 1)^2 = 2x$ h) $(x + 2)(x - 1)^2 = 3$

2. Resuelve las ecuaciones siguientes:

   a) $a^2 - 2a = 0$ b) $3x^2 - 9x = 0$ c) $y^2 + \dfrac{1}{3}y = 0$

   d) $4d^2 - d = 0$ e) $m^2 - 121 = 0$ f) $4b^2 - 9 = 0$

g) $c^2 + 1 = 0$ h) $\frac{1}{4}z^2 - 25 = 0$ i) $x^2 + 3x + 2 = 0$

j) $y^2 - 6y - 7 = 0$ k) $b^2 + 12 = 7b$ l) $x^2 - 8x = -16$

m) $4y^2 + 4y + 1 = 0$ n) $2a^2 - 3a + 1 = 0$ ñ) $3p^2 + 10p + 3 = 0$

o) $x(x - 4) = 5$ p) $(x + 2)(x - 1) = 5x - 6$

3. Halla el conjunto solución de las ecuaciones siguientes:

a) $5x^2 = 45$ b) $2z^2 + 5z = -2$ c) $3x^2 - 5 = 2x^2 + 11$

d) $5x^2 + 4 = 2(x + 2)$ e) $x(5x + 1) = 2(2x + 1)$ f) $x(x - 1) - 5(x - 2) = 2$

g) $(x - 6)(x + 1) = 7x - 33$ h) $(2x - 3)^2 - (x + 5) = 1$ i) $2(x^2 - 4x) = -x(4x - 5) - 5$

4. Di para qué valores de la variable se satisfacen las igualdades siguientes:

a) $(x + 3)^2 - (x + 2)^2 = x^2 + 2x + 1$ b) $(7 + x)^2 + (7 - x)^2 = 130$

c) $(2x + 1)(x - 1) + (2x + 3)(x - 1) = 0$ d) $(x - 1)(x + 2) = 2(x + 1)(2x - 1)$

e) $(x - 2)(x + 1) + 2(2 - x) = x - 2$ f) $3x(x + 1) + 2(x - 1) = 2(x^2 + 2x + 2)$

g) $(x + 3)^2 + (x - 3)^2 = 10$

5. Si una de las soluciones de la ecuación $4x^2 - 13x + m = 0$ es 4, determina el valor de m y la otra solución.

6. Escribe una ecuación cuadrática que posea las soluciones dadas en cada inciso:

a) $x_1 = 1$; $x_2 = -3$ b) $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = -\frac{3}{2}$ c) $x_1 = 0$; $x_2 = -2$

d) $x_1 = -2$; $x_2 = -3$ e) $x_1 = 1{,}2$; $x_2 = -2{,}5$ f) $x_1 = x_2 = 4$

7. Si x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación $x^2 + 9x + 18 = 0$, entonces el valor de $(x_1 + x_2)(x_1 \cdot x_2)$ es:

___ 162 ___ –54 ___ 81 ___ 54 ___ –162

8. Si $x = 0$ es una raíz de la ecuación $x^2 - 4x + 8k = 0$, entonces la otra raíz de la ecuación es:

___ –2 ___ 0 ___ 4 ___ Ninguna de las anteriores

9. La ecuación cuadrática cuyas soluciones son a y b es:

___ $x^2 - ax + b = 0$ ___ $x^2 - bx + a = 0$ ___ $x^2 + (a + b)x + ab = 0$

___ $x^2 - (a + b)x + ab = 0$ ___ $x^2 - bx - a = 0$

10. Para que una de las soluciones de la ecuación $kx^2 + 5x - 6 = 0$ sea $\frac{3}{4}$, el valor de k debe ser:

___ 3 ___ 4 ___ 5 ___ 6 ___ 7

11. La ecuación de segundo grado cuyas soluciones son recíprocas de las soluciones de la ecuación $3x^2 - 5x - 2 = 0$ es:

___ $x^2 + 5x - 3 = 0$ ___ $2x^2 + 5x - 3 = 0$
___ $2x^2 - 5x - 3 = 0$ ___ $3x^2 + 5x - 2 = 0$

12. Enlaza las ecuaciones de la columna A con su respectivo conjunto solución en la columna B.

A	B
1. $x^2 - 4 = 0$	a) $S = \{-9\}$
2. $5x^2 - 4x - 1 = 0$	b) $S = \{9\}$
3. $x^2 - 18x + 81 = 0$	c) $S = \{\pm 2\}$
4. $x^2 + 7 = 0$	d) $S = \phi$
5. $x^2 - 5x + 6 = 0$	e) $S = \{0\}$
6. $\frac{x^2}{2} = 0$	f) $S = \{-0{,}2; 1\}$
	g) $S = \{2; 3\}$
	h) $S = \{-3; -2\}$

4.4.2 Fórmula general de resolución de la ecuación de segundo grado

¡! Durante el siglo VI n.e., en India, vivieron dos matemáticos de los cuales se sabe que escribieron libros sobre variados temas. El más viejo y a la vez el más importante de los dos fue Aryabhata, cuya obra más conocida, escrita hacia el 499 n.e. y titulada *Aryabhatiya,* es un delgado volumen escrito en verso que cubre diversos temas de astronomía y matemática. En él aparecen escritos, en verso, varios problemas relacionados con las ecuaciones.

Uno de esos curiosos problemas (fig. 4.13) se tradujo así:

Regocíjanse los monos
divididos en dos bandos:
su octava parte al cuadrado
en el bosque se solaza.
Con alegres gritos, doce
atronando el campo están.
¿Sabes cuántos monos hay
en la manada, en total?

Figura 4.13

De grados anteriores conoces los pasos para resolver un problema y el primero de ellos es leer detenidamente el texto para lograr su comprensión.

Como puedes ver existen palabras en el texto que necesitas comprender como: *regocíjanse, solaza, atronando.* Busca en el diccionario su significado para realizar un mejor análisis del texto del problema.

No obstante, las palabras anteriores no interfieren directamente en la resolución del problema como podrás apreciar a continuación.

Del texto del problema puedes sacar las conclusiones siguientes:

- Lo que se nos pide hallar es la *cantidad de monos* en la manada, a lo que puedes asignarle la variable x.
- La manada está divida en *dos partes* lo que nos da idea de *dos sumandos* para formar la ecuación.
- La primera se solaza, que representa la *octava parte al cuadrado,* o sea, $\left(\frac{x}{8}\right)^2$.
- La segunda parte son *12,* atronando el campo están.

Por eso la ecuación que permite modelar este problema se puede plantear así:

$$x = \left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12$$

Para resolver la ecuación, como ya conoces, debes transformarla a la forma general. Para ello:

- Hallas el cuadrado indicado: $x = \frac{x^2}{64} + 12$
- Multiplicas la ecuación por 64 para eliminar el denominador:

$$x = \frac{x^2}{64} + 12 \quad (\cdot\, 64)$$

$64x = x^2 + 768$

- Igualas a cero la ecuación: $x^2 - 64x + 768 = 0$

Para hallar los factores, aplicas la descomposición factorial del trinomio obtenido.

Como puedes apreciar $c = 768$, por lo que buscar dos números cuyo producto sea 768 y su suma algebraica sea -64 no es muy fácil de encontrar.

¿Cómo proceder de otra manera para factorizar ese trinomio?

Para resolver la ecuación en estos casos, donde a simple vista no es posible aplicar la factorización, se utiliza una fórmula la cual obtendrás de la forma siguiente:

Considera la ecuación general $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) y vamos a descomponer el miembro izquierdo en factores, para lo cual dividimos ambos miembros de la ecuación por a y adicionamos a cada uno la expresión $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, para transformar el miembro izquierdo en un trinomio cuadrado perfecto.

$ax^2 + bx + c = 0$

$x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=0$ (dividiendo ambos miembros por $a \neq 0$)

$x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ (adicionando $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ a ambos miembros)

$x^2+\frac{bx}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$ (transponiendo $\frac{c}{a}$ al miembro derecho)

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ (efectuando la sustracción en el miembro derecho)

Observa que en la expresión $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ se cumple siempre que $4a^2 > 0$, pero $b^2 - 4ac$ puede ser positivo, cero o negativo, luego hagamos $D = b^2 - 4ac$ y consideremos los casos siguientes:

Caso 1: $D > 0$

Se puede plantear entonces:

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ o } x+\frac{b}{2a}=\frac{-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ o } x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

En este caso existen dos soluciones que se acostumbran a escribir así:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Caso 2: $D = 0$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$$

La solución de la ecuación es $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Caso 3: $D < 0$

En este caso el número $b^2 - 4ac$ es negativo y no es posible la extracción de su raíz cuadrada en el dominio de los números reales.

Por consiguiente la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) no tiene soluciones reales si $D < 0$.

Puesto que hemos analizado todos los casos posibles, podemos plantear que se cumple el teorema siguiente:

Teorema:

La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) tiene soluciones reales si y solo si $D = b^2 - 4ac \geq 0$.

- Si $D > 0$, entonces la ecuación tiene *dos soluciones:*

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Si $D = 0$, entonces la ecuación tiene *una sola solución:* $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Se llama fórmula general de resolución de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) a la expresión:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

La expresión $D = b^2 - 4ac$ se llama *discriminante* de la ecuación de segundo grado y te permite *discriminar, determinar, distinguir,* la cantidad de soluciones que tiene una ecuación antes de aplicar la fórmula general (fig. 4.14).

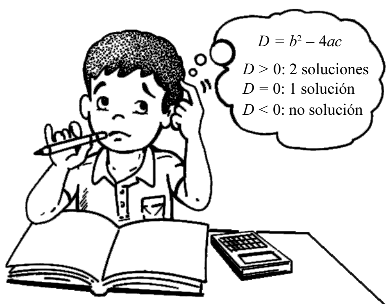


Figura 4.14

R¡! Ya puedes resolver la ecuación del problema planteado utilizando la fórmula general obtenida de la forma siguiente:

$x^2 - 64x + 768 = 0$
$a = 1$; $b = -64$ y $c = 768$
$D = b^2 - 4ac$
$D = (-64)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 768$
$= 4\,096 - 3\,072 = 1\,024 > 0$

La ecuación tiene dos soluciones, que se hallan aplicando la fórmula general:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-64) \pm \sqrt{1\,024}}{2 \cdot 1}$$ (sustituyendo los valores de a, b y c y el discriminante)

$$= \frac{64 \pm 32}{2}$$ (hallando el opuesto, la raíz cuadrada y el producto)

Separamos las soluciones y efectuamos las operaciones indicadas:

$$x_1 = \frac{64+32}{2} = \frac{96}{2} = 48 \qquad x_2 = \frac{64-32}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

Comprobamos si ambos valores pueden ser soluciones del problema:

Para $x_1 = 48$	Para $x_2 = 16$
M.I.: 48	M.I.: 16
M.D.: $\left(\frac{48}{8}\right)^2 + 12$	M.D.: $\left(\frac{16}{8}\right)^2 + 12$
$= 6^2 + 12 = 36 + 12 = 48$	$= 2^2 + 12 = 4 + 12 = 16$
$48 = 48$	$16 = 16$

El problema tiene dos soluciones posibles:

Respuesta: La manada puede tener 48 o 16 monos.

François Viète (1540-1603) (fig. 4.15), político y militar francés, fue magistrado y consejero del rey de Francia, tenía como pasatiempo favorito las matemáticas. También es conocido por su latinizado apellido Vieta.
Puede considerársele como el fundador del Álgebra Moderna. Logró la total liberación de esta disciplina de la aritmética, al introducir el uso de vocales para representar las incógnitas y consonantes para nombrar los parámetros conocidos.
Vieta calculó sin error los diez primeros decimales de π, valiéndose de polígonos de un gran número de lados.

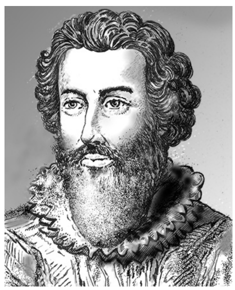


Figura 4.15

De sus estudios realizados sobre las soluciones de las ecuaciones cuadráticas y completados por el matemático italiano Gerolamo Cardano (1501-1576) (fig. 4.16) surgió el teorema siguiente:

Los valores x_1 *y* x_2 *son las raíces (soluciones) de una ecuación de la forma* $ax^2 + bx + c = 0$ *(*$a \neq 0$*) (*a, b *y* c *son números reales), solo si se cumplen las igualdades siguientes:* $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ *y* $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Figura 4.16

Además de sus logros en las diferentes ramas de las matemáticas, Vieta es recordado por su capacidad para descifrar claves secretas. Gracias a él, Francia descifró los mensajes que Felipe II de España enviaba a sus tropas en Flandes.

Observa algunos ejemplos para la aplicación de la fórmula general.

Ejemplo 5:

Calcula, si existen, las soluciones de las ecuaciones siguientes:

a) $x^2 - 2x = 1$

b) $-2x^2 - 5 = 3x$

c) $x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0$

d) $(2x + 3)^2 = 2(6x + 4)$

Solución:

a) $x^2 - 2x = 1$

$x^2 - 2x - 1 = 0$ (transpones 1 al miembro izquierdo)

$a = 1$; $b = -2$ y $c = -1$ (determinas los valores de a, b y c)

$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)$ (calculas el discriminante)

$= 4 + 4 = 8 > 0$

Como $D > 0$, la ecuación tiene dos soluciones distintas, las cuales se obtienen aplicando la fórmula general:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{8}}{2 \cdot 1} \approx \frac{2 \pm 2{,}83}{2}$$

$$x_1 \approx \frac{2 + 2{,}83}{2} \approx \frac{4{,}83}{2} \approx 2{,}42$$

$$x_2 \approx \frac{2-2,83}{2} \approx \frac{0,83}{2} \approx -0,42$$

Respuesta: Las soluciones de la ecuación son $x_1 \approx 2,42$ y $x_2 \approx -0,42$.

b) $-2x^2 - 5 = 3x$

$2x^2 + 3x + 5 = 0$ (transpones al miembro derecho $-2x^2$ y -5)

$a = 2$; $b = 3$ y $c = 5$ (determinas los valores de a, b y c)

$D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5$ (calculas el discriminante)

$= 9 - 40 = -31 < 0$

Como $D < 0$, la ecuación no posee soluciones en el dominio de los números reales.

Respuesta: La ecuación no tiene solución.

c) $x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0$

$a = 1$; $b = -3$ y $c = \frac{1}{2}$ (determinas los valores de a, b y c)

$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}$ (calculas el discriminante)

$= 9 - 2 = 7 > 0$

Como $D > 0$, la ecuación posee dos soluciones distintas, que se hallan aplicando la fórmula general:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{7}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 2,6}{2}$$

$$x_1 \approx \frac{3+2,6}{2} \approx \frac{5,6}{2} \approx 2,8$$

$$x_2 \approx \frac{3-2,6}{2} \approx \frac{0,4}{2} \approx 0,2$$

Respuesta: Las soluciones de la ecuación son $x_1 \approx 2,8$ y $x_2 \approx 0,2$.

d) $(2x + 3)^2 = 2(6x + 4)$

$4x^2 + 12x + 9 = 12x + 8$ (efectúas el producto notable y el producto)

$4x^2 + 12x + 9 - 12x - 8 = 0$ (igualas a cero la ecuación)

$4x^2 + 1 = 0$ (reduces los términos semejantes)

$a = 4$; $b = 0$ y $c = 1$ (determinas los valores de a, b y c)

$D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1$ (calculas el discriminante)

$= 0 - 16 = -16 < 0$

Como $D < 0$, la ecuación no posee soluciones en el dominio de los números reales.

Respuesta: La ecuación no tiene solución.

Recuerda que:

Cuando tengas que resolver una ecuación cuadrática, después de expresada en la forma $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), si vas a utilizar la fórmula puedes seguir el algoritmo siguiente:

1. Identifica los coeficientes a, b y c.
2. Calculas el discriminante sustituyendo los valores en la fórmula.
3. Si $D < 0$, entonces no posee soluciones reales.

Si $D = 0$, entonces posee una solución $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Si $D > 0$, entonces posee dos soluciones $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

4. Escribes el conjunto solución.

Importante:

La fórmula general de resolución de las ecuaciones cuadráticas *siempre* se puede aplicar, lo cual aventaja al procedimiento anterior, no obstante la *descomposición factorial es más práctica y racional* siempre que sea posible, pues evita el cálculo numérico que a veces es engorroso. Por eso al resolver una ecuación cuadrática trata *primero* de aplicar la *descomposición factorial.*

En general, para resolver una ecuación cuadrática o una que mediante transformaciones algebraicas se pueda llevar a esta forma, puedes seguir el esquema de razonamiento de la figura 4.17.

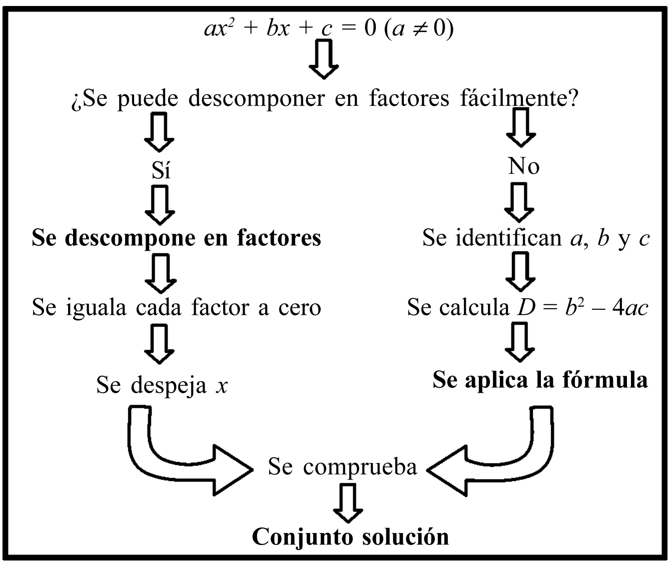


Figura 4.17

Las soluciones de las ecuaciones cuadráticas $ax^2 + bx + c = 0$ *(*$a \neq 0$*) cumplen interesantes propiedades.*

1. *La* suma *de las soluciones de una ecuación cuadrática cumple la condición (fig. 4.18).*

   $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$, *mientras que su producto,* $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

   En la ecuación $2x^2 - 7x + 3 = 0$, $a = 2$; $b = -7$ *y* $c = 3$.

   Las soluciones de la ecuación son $x_1 = \frac{1}{2}$ *y* $x_2 = 3$.

   Si sumas estas soluciones obtienes:

   $S = x_1 + x_2 = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$.

   Como $b = 7$ *y* $a = 2$, *se tiene* $\frac{-b}{a} = \frac{-(-7)}{2} = \frac{7}{2}$.

   Luego, $S = x_1 + x_2 = \frac{7}{2} = \frac{-b}{a}$.

   Si multiplicas las soluciones de la ecuación anterior obtienes:

   $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$

   Como $c = 3$ *y* $a = 2$, *se tiene* $\frac{c}{a} = \frac{3}{2}$.

   Luego, $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{2} = \frac{c}{a}$.

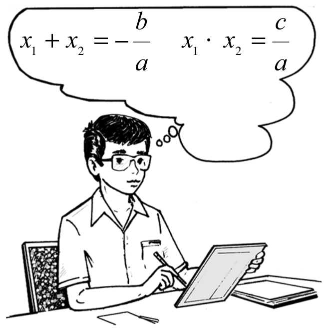


Figura 4.18

2. *Las soluciones de las ecuaciones cuadráticas* $ax^2 + bx + c = 0$ *y* $cx^2 + bx + a = 0$ *son recíprocas.*
   Por ejemplo: $2x^2 - 7x + 3 = 0$ $3x^2 - 7x + 2 = 0$.

   Sus soluciones son: $x_1 = \frac{1}{2}$ *y* $x_2 = 3$. $x_1 = \frac{1}{3}$ *y* $x_2 = 2$.

Ejercicios

1. Determina, sin resolver, cuántas soluciones tienen las ecuaciones siguientes:

   a) $x^2 - 2x + 2{,}5 = 0$ b) $3x^2 + \frac{1}{2}x - 1 = 0$ c) $x^2 - 1{,}2 = 0$

d) $x^2 + \frac{3}{2} = 0$ e) $\frac{3}{4}x^2 = -x - 1$ f) $x(x - 2) + 1{,}5x = 3{,}7$

g) $(x+1)^2 + \frac{3}{2}(2x - 6) = x - 12$ h) $3{,}4x - 2{,}3 = (2x - 1)(2x + 1) + 2$

2. Halla los valores de x que satisfacen las ecuaciones siguientes:

   a) $x^2 - 6x + 7 = 0$ b) $x^2 - 5x - 7 = 0$ c) $3x + 0{,}5 = 3x^2$
   d) $(x + 2)^2 = 2x(x + 2) - 8$ e) $3x(x - 2) - (x - 6) = 23(x - 3) - 5$

3. Enlaza la ecuación cuadrática de la columna A con el discriminante que le corresponde en la columna B.

A	B
$3x^2 - 7x + 1 = 0$	$D < 0$
$-x^2 - \frac{3}{5}x - 2 = 0$	$D = 0$
$2{,}25x^2 + 15x + 25 = 0$	$D > 0$

4. ¿Para qué valores de a tiene la ecuación $x^2 + 22x + a = 0$ exactamente una solución?
5. Determina para qué valores de k tiene la ecuación $x^2 + 6x + k = 0$ dos soluciones, una solución, o ninguna solución real.
6. ¿Qué valores puede asumir m para que la ecuación $x^2 + (2m + 2)x + (m + 3) = 0$ tenga exactamente una solución?
7. El valor del discriminante de la ecuación $-x^2 - 1 = 0$ es:

   ___ -4 ___ -3 ___ 1 ___ 4 ___ $\sqrt{-1}$

8. El o los valores de k para los cuales la ecuación $(k - 1)x^2 - (k + 2)x + 4 = 0$ tenga sus soluciones reales iguales es o son:

   ___ -10 o 2 ___ -10 o -2 ___ 10 o 2 ___ -10 o -10 ___ 10

4.4.3 Despeje de variables en fórmulas

¡! Una piscina, con forma de prisma recto, tiene su base cuadrada y cuenta con una profundidad de 5,0 m. Estando llena puede almacenar 45 m^3 de agua. ¿Cuál es la longitud de las aristas de su base?

Para resolver este problema, como ya estudiaste, debes plantear la fórmula del volumen de un prisma de base cuadrada, o sea, $V = a^2 \cdot h$.

Aquí, necesitas sustituir los valores conocidos y despejar la variable a, que representa la longitud del lado del cuadrado base.

¿Cómo proceder para despejar la variable en dicha ecuación?

Despejar una variable en una fórmula significa resolver una ecuación que expresa algún principio, regla o resultado general de índole matemática, física, química, biológica o relativa a cualquier otra ciencia, por lo que saberlas despejar resultan de gran utilidad.

En grados anteriores has realizado despejos en fórmulas donde la variable a despejar aparece con exponente 1, sin embargo, hay varias fórmulas donde necesitas frecuentemente despejar una variable elevada a un exponente superior a 1. En este tema realizarás despejes de variables que pueden aparecer con este tipo de exponente.

Ejemplo 1:

Despeja en cada inciso la variable que se indica.

a) $V = a^2 \cdot h$, despeja a. b) $s = \frac{gt^2}{2}$, despeja t.

c) $V = \frac{1}{3}\pi r^2$, despeja r. d) $A = \pi R^2 - \pi r^2$, despeja r.

Solución:

a) $V = a^2 \cdot h$

Para despejar la variable a en esta fórmula procedes de la manera siguiente:

- Transpones la h al miembro izquierdo dividiendo: $a^2 = \frac{V}{h}$.
- Extraes la raíz cuadrada de a, que es la operación inversa de la elevación al cuadrado: $a = \sqrt{\frac{V}{h}}$.

b) $s = \frac{gt^2}{2}$

Para despejar la variable t en esta fórmula procedes de la manera siguiente:

- Transpones el 2 al miembro izquierdo multiplicando: $2s = gt^2$
- Transpones g al otro miembro dividiendo: $t^2 = \frac{2s}{g}$.
- Extraes la raíz cuadrada de t: $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$.

c) $V = \frac{1}{3}\pi r^2$, despeja r.

Para despejar la variable r procedes de la manera siguiente:

- Transpones el 3 al miembro izquierdo multiplicando: $3V = \pi r^2$
- Transpones la constante π al otro miembro dividiendo: $r^2 = \frac{3V}{\pi}$.
- Extraes la raíz cuadrada de r: $r = \sqrt{\frac{3V}{\pi}}$.

d) $A = \pi R^2 - \pi r^2$

Como habrás notado esta es la fórmula para hallar el área de un anillo o corona circular, donde en ocasiones necesitas hallar uno de los radios de las circunferencias que lo limitan.

- Transpones $-\pi r^2$ al miembro izquierdo para que dicho término te quede positivo y A al otro miembro, en ambos casos con la operación inversa: $\pi r^2 = \pi R^2 - A$.
- Transpones la constante π al miembro derecho dividiendo: $r^2 = \frac{\pi R^2 - A}{\pi}$.
- Extraes la raíz cuadrada de la expresión obtenida: $r = \sqrt{\frac{\pi R^2 - A}{\pi}}$.

Otra vía de realizar el despeje puede ser la siguiente:

- Extraes factor común π: $A = \pi(R^2 - r^2)$.
- Transpones π dividiendo al otro miembro: $\frac{A}{\pi} = R^2 - r^2$.
- Transpones al otro miembro los términos $\frac{A}{\pi}$ y $-r^2$: $r^2 = R^2 - \frac{A}{\pi}$.
- Extraes la raíz cuadrada de la expresión obtenida: $r = \sqrt{R^2 - \frac{A}{\pi}}$.

Ejercicios

1. Despeja en cada inciso las variables que se indican:

a) $A = \pi r^2$ (r) b) $A = 4\pi r^2$ (r) c) $V = \pi r^2 h$ (r; h)

d) $c^2 = a^2 + b^2$ (c; a) e) $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ (v) f) $Q = I^2 R\Delta t$ (I)

2. Despeja en cada inciso la variable que se indica y calcula su valor para los datos dados:

a) $V = \frac{1}{3}a^2h$ (a) si $V = 800$; $h = 6$

b) $A = 2\pi r^2 + A_L$ (r) si $A = 36{,}28$; $A_L = 30$

c) $A = \frac{d^2}{2}$ (d) si $A = 32$

4.4.4 Problemas que conducen a la resolución de ecuaciones cuadráticas

Las ecuaciones cuadráticas tienen gran uso en la vida cotidiana para la resolución de diversos problemas.

En el campo laboral tienen utilidad, en química (fig. 4.19), para describir la variación en la concentración de reactantes respecto a la concentración de productos en un determinado tiempo.


Figura 4.19

En física para el movimiento parabólico.


Figura 4.20

En el ámbito militar (fig. 4.20) lo usan en artillería de cañones para hallar las trayectorias de las balas.

En economía usan las ecuaciones cuadráticas para representar modelos económicos de oferta y demanda en gráficas; este tipo de modelo se asemeja más a la realidad en comparación con el modelo que usa las ecuaciones de primer grado.

Además, ayudan a los economistas para tener una orientación de la situación económica de un mercado.

Desde los grados anteriores has utilizado las variables y realizado traducciones del lenguaje común al algebraico que te han permitido resolver distintos problemas de la matemática y la vida en general, que conducen a ecuaciones lineales o sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Igualmente has traducido del lenguaje algebraico al común.

En este tema has notado que también existen problemas que se resuelven a través del planteo de ecuaciones cuadráticas, por lo que es importante saber traducir al lenguaje algebraico situaciones donde las variables utilizadas aparecen con exponente 2.

Ejemplo 1:

Escribe en el lenguaje algebraico las siguientes situaciones prácticas señalando en cada caso el significado de la variable utilizada:

a) El cuadrado de un número disminuido en 4.
Si designas a la variable x el número, entonces la traducción al lenguaje algebraico es $x^2 - 4$.

b) El cuadrado del triplo de la edad de Juan.
Si designas a la variable e la edad de Juan, entonces la traducción al lenguaje algebraico es $(3e)^2$.

c) La mitad del área de una plancha de zinc cuadrada.
Si designas a la variable a la longitud del lado de la plancha cuadrada, entonces la traducción al lenguaje algebraico es $\frac{a^2}{2}$ o $\frac{1}{2}a^2$.

d) La suma de los cuadrados de dos números.
Si designas a las variables a y b como los números, entonces la traducción al lenguaje algebraico es $a^2 + b^2$.

e) El cuadrado de la suma de dos números.
Si designas las variables a y b como los números, entonces la traducción al lenguaje algebraico es $(a + b)^2$.

f) El cuadrado de la diferencia del precio que tenía un artículo y el rebajado en un 50 % es igual a $ 100,00.
Si designas la variable p como el precio anterior del artículo, entonces la traducción al lenguaje algebraico es $\left(p - \frac{p}{2}\right)^2 = 100$.

Ejemplo 2:

Traduce al lenguaje común:

a) $m^2 - n^2$ b) $a \cdot b - 6$ c) $(a + b + c)^2$

Solución:

a) $m^2 - n^2$

Puedes traducir esta situación de varias formas. Observa algunas de ellas:

La diferencia de los cuadrados de dos números. Donde la variable m es un número y la variable n el otro número.

La diferencia de las áreas de dos cuadrados de lados m *y* n *respectivamente.* Las variables m y n representan las longitudes de los lados de dos cuadrados.

b) $a \cdot b - 6$

El área de un rectángulo disminuida en 6. Las variables a y b son las longitudes de los lados del rectángulo.

El producto de las edades de dos personas disminuido en 6. Las variables a y b representan las edades de las dos personas.

La cantidad de dinero a pagar por persona por el alquiler de un ómnibus disminuida en 6 pesos. La variable a representa la cantidad de personas y la variable b, la cantidad de dinero a pagar por cada una.

c) $(a + b + c)^2$

El cuadrado de la suma de tres números. Las variables a, b y c representan los tres números.

El cuadrado del perímetro de un triángulo. Las variables a, b y c representan las longitudes de sus lados.

Realizar correctamente la traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico donde aparecen variables elevadas a exponente 2, te permitirá interpretar correctamente las situaciones que aparecen en los problemas que resolverás en este tema.

También, es necesario, para resolver cualquier problema seguir los pasos propuestos para los problemas sobre ecuaciones lineales y sistemas de dos ecuaciones con dos variables.

Recuerda que:

1. Leer el texto detenidamente.
2. Determinar el significado de la variable a utilizar.
3. Traducir al lenguaje algebraico las relaciones que se plantean en el texto.
4. Plantear la ecuación que se corresponde con el texto.
5. Resolver la ecuación planteada.
6. Comprobar que las soluciones de la ecuación satisfacen las condiciones que aparecen en el texto del problema.
7. Redactar la respuesta a la pregunta del problema.

Ejemplo 3:

En un triángulo rectángulo de hipotenusa igual 10 dm, la longitud de un cateto excede en 2,0 dm a la longitud del otro. Calcula el área del triángulo.

Solución:

El problema trata sobre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo y se pide calcular su área. La fórmula para calcular el área de un triángulo es, como ya conoces, $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$, donde la base y la altura serán las longitudes de los catetos, ya que son perpendiculares entre sí. De la relación que se te brinda sobre las longitudes de sus catetos, puedes asignar x a la longitud del cateto menor y $(x + 2)$, a la del cateto mayor. Para plantear la ecuación que permite modelar este problema, debes recordar qué teorema estudiado ya relaciona las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, la respuesta es el teorema de Pitágoras. Precisamente la ecuación a plantear está relacionada con ese teorema, o sea, $a^2 + b^2 = c^2$.

Longitud del cateto menor: x

Longitud del cateto mayor: $x + 2$

Longitud de la hipotenusa: 10 dm

$x^2 + (x + 2)^2 = 10^2$ (por el teorema de Pitágoras)

$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 100$ (efectúas el cuadrado del binomio)

$2x^2 + 4x + 4 - 100 = 0$ (transpones 100 al miembro izquierdo)

$2x^2 + 4x - 96 = 0$ (: 2) (divides la ecuación por 2)

$x^2 + 2x - 48 = 0$ (factorizas el trinomio)

$(x + 8)(x - 6) = 0$ (igualas cada factor a cero)

$x + 8 = 0$ o $x - 6 = 0$ (despejas x)

$x_1 = -8$ o $x_2 = 6$

Los números –8 y 6 son soluciones de la ecuación cuadrática resuelta, pero en nuestro problema, x es la longitud del cateto de un triángulo por lo que no puede tomar valor negativo. Luego la longitud del cateto menor es 6 dm y la del mayor, $6 + 2 = 8$ dm.

Para comprobar si la solución es correcta, verificas en el texto del problema. La diferencia entre las longitudes de ambos catetos es de 2 dm y $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$, que es el cuadrado de la longitud de la hipotenusa.

Ahora procedes a calcular el área pedida: $A = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = \dfrac{48}{2} = 24 \text{ dm}^2$.

Respuesta: El área del triángulo es de 24 dm^2.

Ejemplo 4:

Cada graduado de un grupo de noveno grado escribe la dirección de los demás compañeros del aula. Si en total se copian 600 direcciones, ¿cuántos estudiantes hay en el grupo?

Solución:

En este problema desconoces la cantidad de estudiantes del grupo, pero se te brinda la cantidad de direcciones copiadas. Si declaras n el número de estudiantes del grupo, cada estudiante copiará $(n - 1)$ direcciones, o sea, una dirección menos, la suya. Como en total se copiaron 600 direcciones, debes plantear la ecuación siguiente $n(n - 1) = 600$.

Cantidad de estudiantes en el grupo: n
Cantidad de direcciones que copia cada estudiante: $n - 1$
Total de direcciones copiadas: 600

$n(n - 1) = 600.$
$n^2 - n - 600 = 0$ (efectúas el producto e igualas a cero la ecuación)
$(n + 24)(n - 25) = 0$ (factorizas el trinomio)
$n + 24 = 0$ o $n - 25 = 0$ (igualas cada factor a cero)
$n_1 = -24$ o $n_2 = 25$ (despejas n)

Los números –24 y 25 son soluciones de la ecuación cuadrática resuelta, pero en nuestro problema, n es la cantidad de estudiantes del grupo por lo que no puede tomar valor negativo. Luego hay 25 estudiantes y la cantidad de direcciones copiadas será 24.

Comprobando en el texto del problema $24 \cdot 25 = 600$.

Respuesta: En el grupo hay 25 estudiantes.

Ejemplo 5:

Una maquinaria produce piezas de repuesto para equipos electrónicos. Los datos representados en la tabla 4.1 corresponden a magnitudes directamente proporcionales. ¿En qué tiempo se producirán 6 piezas?

Tabla 4.1

Tiempo (h)	x	x^2
Total de piezas	3	6

Solución:

A partir de la tabla se observa que la variable x representa la cantidad de horas necesarias para producir 3 piezas y nos dicen que los datos se corresponden con una *proporcionalidad directa,* luego, la ecuación que permite modelar el problema se obtiene de la formación de una proporción.

Cantidad de horas para producir 3 piezas: x
Cantidad de horas para producir 6 piezas: x^2

$\frac{x}{3} = \frac{x^2}{6}$ (planteas la proporción)
$6x = 3x^2$ (aplicas la propiedad fundamental de las proporciones)
$3x^2 - 6x = 0$ (igualas a cero la ecuación)
$3x(x - 2) = 0$ (factorizas el binomio obtenido)
$3x = 0$ o $x - 2 = 0$ (igualas a cero cada factor)
$x_1 = 0$ o $x_2 = 2$ (despejas x)

Los números 0 y 2 son soluciones de la ecuación cuadrática resuelta, pero en nuestro problema, x es la cantidad de horas por lo que no puede tomar valor cero.

Luego, x es igual a 2.

Respuesta: Se producirán 6 piezas en 4 h.

Ejemplo 6:

Lena preguntó a Jorgito cuántos años tenía su papá y este le dijo: mi papá tiene el décuplo de años que yo y dentro de 5 años su edad será igual al cuadrado de la mía. Lena rápidamente le respondió: eso es imposible. ¿Cuál de los dos tiene la razón?

Solución:

En este problema es necesario hallar la edad del padre de Jorgito y se te ofrece la relación entre las edades de Jorgito y su papá. Sin embargo, existen dos relaciones entre sus edades, la actual y dentro de 5 años. En este tipo de problemas es conveniente para tu mayor comprensión escribir los datos en forma de tabla (tabla 4.2).

Tabla 4.2

Edad actual de Jorgito: x	Edad de Jorgito dentro de 5 años: $x + 5$
Edad actual de su papá: $10x$	Edad de su papá dentro de 5 años: $10x + 5$

Para escribir la ecuación que permite modelar este problema tomas la segunda relación que te brinda el texto, o sea, *dentro de 5 años su edad será igual al cuadrado de la mía.*

$10x + 5 = (x + 5)^2$

$10x + 5 = x^2 + 10x + 25$ (efectúas el cuadrado del binomio)

$x^2 + 10x + 25 - 10x - 5 = 0$ (igualas a cero la ecuación)

$x^2 + 20 = 0$ (reduces los términos semejantes)

Como la ecuación obtenida es de la forma $ax^2 + c = 0$, puedes resolverla aplicando el despeje, el discriminante o por reflexión lógica como se muestra a continuación:

Despeje	Discriminante	Reflexión lógica
$x^2 + 20 = 0$ $x^2 = -20$ $x = \sqrt{-20}$ La ecuación no tiene solución, ya que en el conjunto de los números reales no se puede extraer la raíz cuadrada de números negativos.	$x^2 + 20 = 0$ ($a = 1$; $b = 0$ y $c = 20$) $D = b^2 - 4ac$ $D = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20$ $D = 0 - 80 = -80 < 0$ Como $D < 0$, la ecuación no tiene solución.	$x^2 + 20 = 0$ Cualquier valor que tome x, al elevarlo al cuadrado es una cantidad no negativa y al adicionarle 20, será siempre una cantidad positiva. Ningún valor de x satisface dicha ecuación.

Respuesta: La razón la tiene Lena.

Ejemplo 7:

Un campesino (fig. 4.21) tiene un pequeño terreno rectangular que tiene el doble de largo que de ancho. Para aumentar la producción, la Cooperativa a la que suministra su cosecha, le dio la posibilidad de duplicar su superficie aumentando el largo de su terreno en 40 m y el ancho en 6,0 m. ¿Cuáles serán las dimensiones del nuevo terreno?

Figura 4.21

Solución:

En este problema conoces la relación entre las dimensiones del terreno original, lo que te permite declarar la variable x como la longitud del ancho y $2x$ la del largo. La otra relación que se establece entre las nuevas dimensiones te permite escribir la ecuación que modela el problema.

Aquí también puedes escribir los datos en forma de tabla (tabla 4.3).

Tabla 4.3

Dimensiones del terreno original	**Dimensiones del nuevo terreno**
Ancho del terreno: x Largo del terreno: $2x$ Área: $x \cdot 2x = 2x^2$	Ancho: $x + 6$ Largo: $2x + 40$ Área: $(x + 6)(2x + 40)$

En el problema está la palabra clave *duplica,* lo que significa que el nuevo terreno tiene el *doble* del área que el anterior. Esto te permite escribir la ecuación siguiente: $(2x + 40)(x + 6) = 2(2x^2)$

$2x^2 + 12x + 40x + 240 = 4x^2$	(efectúas los productos indicados)
$2x^2 + 12x + 40x + 240 - 4x^2 = 0$	(transpones $4x^2$ al otro miembro)
$-2x^2 + 52x + 240 = 0$	(reduces los términos semejantes)
$x^2 - 26x - 120 = 0$	(divides ambos miembros por -2)
$(x - 30)(x + 4) = 0$	(factorizas el trinomio obtenido)
$x - 30 = 0$ o $x + 4 = 0$	(igualas a cero cada factor)
$x_1 = 30$ o $x_2 = -4$	(despejas x)

La solución -4 no satisface las condiciones del problema, ya que las dimensiones del rectángulo no pueden ser negativas.

Luego, el ancho del terreno original es de 30 m y el largo, $2 \cdot 30$ m = 60 m.

Las dimensiones del nuevo terreno son: 30 m + 6 m = 36 m y $2 \cdot 30$ m + 40 m = 100 m.

Antes de escribir la respuesta compruebas en el texto del problema:

Área del terreno original: 30 m · 60 m = 1 800 m^2.

Área del terreno nuevo: 36 m · 100 m = 3 600 m^2.

Como puedes apreciar el área del nuevo terreno es el doble de la otra.

Respuesta: Las dimensiones del nuevo terreno son 36 m de ancho y 100 m de largo.

Ejemplo 8:

Rosa confeccionó un mantel rectangular para colocar en el centro de su mesa de 4,0 dm x 5,0 dm. Ahora desea agregar un borde de igual ancho alrededor del mantel. Si dispone de 10 dm^2 de tela para colocar por todo el borde, ¿qué tan ancho debe hacer el borde para utilizar toda la tela?

Solución:

Haces un esquema del problema (fig. 4.22).

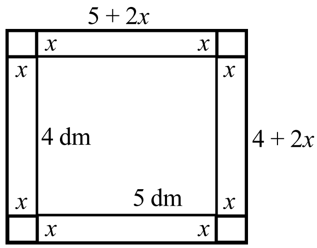


Figura 4.22

Como no conocemos el ancho del borde, le asignamos la variable x.

Como cada lado del mantel de 4 x 5 original tiene un borde de ancho x añadido, la longitud del mantel con el borde será de $(5 + 2x)$, y de $(4 + 2x)$.

Solo estás interesado en el área de las tiras del borde. Hay que escribir una expresión para el área del borde:

Área del borde = A(rectángulo exterior) – A(rectángulo interior)

Sustituyes por la expresión correspondiente cada área del rectángulo:

$$10 = (4 + 2x)(5 + 2x) - 4 \cdot 5$$

Efectúas los productos indicados: $10 = 20 + 8x + 10x + 4x^2 - 20$

Igualas a cero y formas la ecuación cuadrática: $4x^2 + 18x - 10 = 0$

Divides la ecuación por 2: $2x^2 + 9x - 5 = 0$

Factorizas el trinomio: $(2x - 1)(x + 5) = 0$

Igualas a cero cada factor y despejas la x: $x_1 = 0{,}5$ o $x_2 = -5$.

Como el ancho no puede ser una cantidad negativa, la respuesta será 0,5 dm.

Respuesta: Para utilizar toda la tela, el ancho del borde debe ser de 0,5 dm.

Como habrás podido apreciar, en los problemas que conducen a ecuaciones cuadráticas, generalmente, hay una información que te permite hacer la declaración de la variable y otra, escribir la ecuación que modela el problema. Para escribir la ecuación tomas la que esté relacionada con la palabra clave *cuadrado* o donde se plantea el *producto* de dos cantidades.

Recuerda que:

Para resolver un problema que conduce a una ecuación cuadrática debes:

1. Leer cuidadosamente el problema para comprender la situación que se plantea.
2. Identificar en el texto del problema cuál de las informaciones brindadas te permiten declarar la variable y cuál escribir la ecuación cuadrática.
3. Determinar los datos y la incógnita.
4. En caso de existir una sola incógnita identificarla con una letra, por ejemplo, x. En caso de existir más de una, elegir de manera conveniente la que se va a representar mediante x y expresar las otras cantidades desconocidas en términos de esta misma variable.
5. Escribir la ecuación que permite modelar el problema.
6. Resolver la ecuación planteada.
7. Comprobar la solución en el texto del problema. Esta comprobación puede ser oral.
8. Verificar, leyendo la pregunta del problema, si los valores hallados de la incógnita son ya la respuesta o debes realizar otros cálculos.
9. Escribir la respuesta literal del problema.

Ejercicios

1. Marca con una X la respuesta correcta.

   a) El enunciado: el cuadrado de la suma de dos números a y b es igual al doble de la diferencia de los cuadrados de esos números, se expresa:

   ___ $a^2 + b^2 = 2a^2 - b^2$ ___ $a^2 + b^2 = 2(a - b)^2$
   ___ $a^2 + b^2 = 2(a^2 - b^2)$ ___ $(a + b)^2 = 2(a^2 - b^2)$

   b) La expresión $(3x)^2$ se lee:

   ___ El triplo del cuadrado de un número
   ___ El cuadrado del triplo de un número
   ___ El cuadrado de la tercera parte de un número
   ___ El doble del triplo de un número

   c) El doble de un número n más su cuadrado se expresa por:

   ___ $2n^2$ ___ $2n^3$ ___ $n^2(n + 1)$ ___ $3n$ ___ $n(2 + n)$

   d) El 50 % del cuadrado de un número se expresa como:

   ___ $50x^2$ ___ $\dfrac{x^2}{50}$ ___ $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$ ___ $\dfrac{x^2}{2}$

2. Traduce al lenguaje común:

   a) $\dfrac{3}{5}x^2$ b) $n^2 - 5$ c) $2(a^2 + b^2)$ d) $\dfrac{p^2}{q^2}$ e) $y^2 - 4y$ f) $\dfrac{(r+1)^2}{5}$

3. El cuadrado de un número entero menos el doble del número es igual a 3. Halla el número.
4. Si se añade 25 al cuadrado de cierto número, la suma es igual a 169. ¿Cuál es el número?
5. El producto de un número disminuido en 5 por el número aumentado en 5 es 75. Halla el número.
6. Un número positivo es el 60 % de otro y el producto de ambos números es 2 160. Halla los números.
7. La diferencia de dos números naturales es 7 y su suma multiplicada por el número menor es igual a 184. Halla los números.
8. Halla un número de dos dígitos en el cual la cifra de las decenas sea igual al cuadrado de la cifra de las unidades y la suma de los dígitos sea 12.
9. Los dígitos de un número de tres cifras son números naturales consecutivos y la suma de sus cuadrados es igual a 50. ¿Cuántos números cumplen la condición planteada?
10. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 25 cm. Un cateto es 5,0 cm más largo que el otro. Halla el área del triángulo.
11. La base mayor de un trapecio mide 50 cm, la base menor es igual a la altura, y el área es de 1 200 cm^2. ¿Cuánto mide la base menor?
12. ¿En cuánto ha de ampliarse un cuadrado de 5,0 cm de lado para que el área del nuevo cuadrado sea de 64 cm^2?
13. Una cuerda de una circunferencia está a 6,0 cm de distancia del centro de esta. Dicha cuerda es 6,0 cm más larga que el radio de la circunferencia. Calcula el radio de la circunferencia.
14. El área de una lámina de acero de forma rectangular es de 48 cm^2 y el largo es $\frac{4}{3}$ del ancho. Halla el perímetro de la lámina.
15. Una caja tiene forma de ortoedro y volumen de 1 500 dm^3. Su altura es de 5,0 dm y su largo es 5,0 dm mayor que su ancho. ¿Cuáles son sus dimensiones?
16. Un jardín de forma rectangular tiene 2 700 m^2 de superficie y un perímetro de 210 m. ¿Cuáles son sus dimensiones?
17. Un jardín cuadrado tiene otro cuadrado interior plantado de césped de forma que los vértices del interior coinciden con los puntos medios de los lados del jardín. Si el cuadrado sembrado tiene un área de 8,0 m^2, calcula la longitud del lado del jardín.
18. Por cada metro cuadrado de fachada se ha gastado un kilogramo de pintura. Si la altura de la fachada tiene 2,0 m menos que la longitud de la base y se han utilizado 24 kg de pintura, ¿cuáles son las dimensiones de la fachada?
19. Tres segmentos miden, respectivamente, 8,0 cm; 10 cm y 1,0 cm. Si añadimos a cada segmento la misma longitud, puedes formar con los segmentos resultantes un triángulo rectángulo. Halla la longitud añadida.
20. En un torneo de ajedrez cada Gran Maestro juega una vez con cada uno de los restantes. Si en total se juegan 45 partidas, ¿cuántos jugadores toman parte en el torneo?

21. A una reunión asistieron varias personas, las que se saludaron al entrar estrechándose las manos. Uno de los asistentes contó 190 estrechones de mano. ¿Cuántas personas asistieron a la reunión?

4.5 Repaso sobre la función lineal

En octavo grado aprendiste el concepto de función y comenzaste el estudio de las funciones, con las lineales, que se definen por ecuaciones del tipo $y = mx + n$ con m y n números reales, así como sus propiedades y representación gráfica.

En este epígrafe actualizarás estos conocimientos, a través de ejemplos, que te servirán para iniciar el estudio de otra nueva función.

Recuerda que:

Una función es una correspondencia que **a cada** elemento de un conjunto A asocia **un único** elemento de un conjunto B.

Ejemplo 1:

Determina cuáles de las correspondencias siguientes son funciones y cuáles no. Fundamenta tu respuesta.

a) La correspondencia definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que a cada número real x asocia su tercera parte disminuida en 2.
b) La correspondencia definida de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ que a cada número natural asocia su mitad disminuida en 1.
c) Ver la figura 4.23.

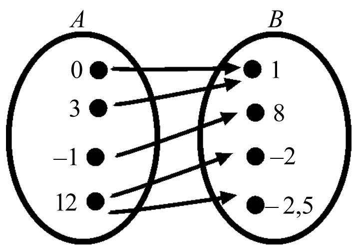


Figura 4.23

d)

x	–2,5	–1	0	3	4,3	10
y	–5	–3	2	6	8,2	15

e) Ver la figura 4.24.

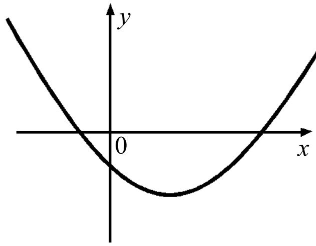


Figura 4.24

Solución:

a) Esta correspondencia se puede representar como: $x \rightarrow \frac{x}{3} - 2$

Sí es función, ya que la división y la sustracción de números reales tienen un resultado único.

b) Esta correspondencia se puede representar como: $x \rightarrow \frac{x}{2} - 1$

No es función, ya que la correspondencia es de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ y si asignamos a x valores naturales impares, al hallar su mitad y sustraerle 1, se obtiene una expresión decimal, que no representa un número natural.

c) No es función, ya que al elemento 12 del conjunto de partida A, le corresponden dos elementos (–2 y –2,5) del conjunto de llegada B.

d) Sí es función, ya que a cada elemento x se le asocia un único elemento y.

e) Sí es función, porque al trazar por cada valor de x rectas paralelas al eje y, estas cortan a la gráfica en un único punto.

Observa en la figura 4.25 este análisis para algunos valores de x:

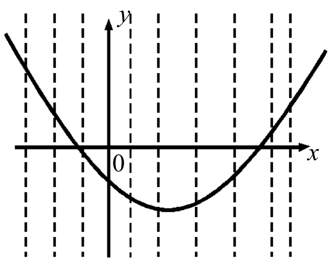


Figura 4.25

Recuerda que:

Definición:

La función que a cada $x \in \mathbb{R}$ le hace corresponder el número real $f(x) = mx + n$, donde m y n son números reales dados, se denomina **función lineal.**

Ejemplo 2:

Dadas las funciones lineales f, g y h, definidas en el conjunto de los números reales, por sus ecuaciones: $f(x) = 2x - 4$; $g(x) = -x + 1$ y $h(x) = 3$.

a) Represéntalas gráficamente.
b) Escribe sus propiedades.
c) Calcula $f(1) + 2g\left(-\frac{1}{2}\right) - h(10)$.
d) Verifica si el punto $H(-2{,}5; 3{,}5)$ pertenece a la representación gráfica de g.
e) Escribe la ecuación de una función lineal t, cuya gráfica pasa por los puntos $H(-2{,}5; 3{,}5)$ y $T(-2; 0)$.

Solución:

a) Para representar gráficamente una función lineal, le das valores del dominio a la variable independiente (x) y calculas los correspondientes valores de la imagen (y); recuerda que este procedimiento se llama *ploteo.* Luego, representas los puntos (x; y) obtenidos y trazas la recta que los une.

Como la gráfica de una función lineal es una recta, recuerda que basta con dos puntos para representarla y por comodidad se toman los puntos de intersección con los ejes de coordenadas, o sea, el cero de la función y el valor de n.

Cero: valor de x_0 en el par (x_0; 0). Para hallarlo, se sustituye en la ecuación la y por cero y se despeja la x.

f: $y = 2x - 4$	g: $y = -x + 1$	h: $y = 3$
$0 = 2x - 4$	$0 = -x + 1$	$0 \neq 3$
$2x = 4$	$x_0 = 1$	no tiene cero
$x_0 = 2$		

Intersección con y: par (0; y), donde la y coincide con el valor de n de la ecuación.

f: $y = 2x - 4$	g: $y = -x + 1$	h: $y = 3$
$n = -4$	$n = 1$	$n = 3$

Ubicas sobre el eje x el cero y sobre el eje y, el valor de n; luego unes los puntos mediante la recta (fig. 4.26).

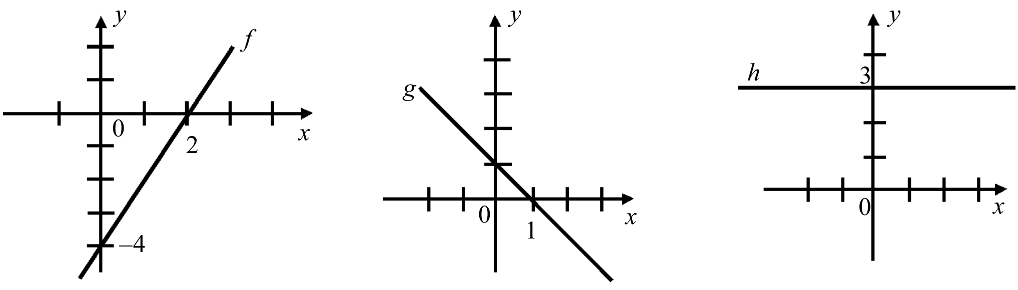


Figura 4.26

b) Propiedades:

$f(x) = 2x - 4$	$g(x) = -x + 1$	$h(x) = 3$
Dominio: $x \in \mathbb{R}$	Dominio: $x \in \mathbb{R}$	Dominio: $x \in \mathbb{R}$
Imagen: $y \in \mathbb{R}$	Imagen: $y \in \mathbb{R}$	Imagen: $y = 3$
Cero: $x_0 = 2$	Cero: $x_0 = 1$	Cero: No tiene
Monotonía: la función es monótona creciente.	Monotonía: la función es monótona decreciente.	Monotonía: la función es constante.

c) Calculas cada valor por separado:

- $f(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2 \quad g\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\left(-\dfrac{1}{2}\right) + 1 = \dfrac{1}{2} + 1 = 1{,}5 \quad h(10) = 3$
- Sustituyes cada valor numérico en la expresión: $-2 + 2 \cdot 1{,}5 - 3$
- Efectúas las operaciones indicadas: $-5 + 3 = -2$
- Escribes la respuesta: -2

d) Para verificar si el punto $H(-2{,}5;\ 3{,}5)$ pertenece a la representación gráfica de g:

- Sustituyes la abscisa del punto en la ecuación: $y = -\ (-2{,}5) + 1$
- Hallas el opuesto de $-2{,}5$: $y = 2{,}5 + 1$
- Calculas la suma: $y = 3{,}5$
- Comparas el resultado con la ordenada del punto: $3{,}5 = 3{,}5$
- Concluyes: El punto sí pertenece a la gráfica de la función.

e) Conoces dos puntos de la gráfica $H(-2{,}5;\ 3{,}5)$ y $T(-2;\ 0)$, pero no tienes el valor de la pendiente, ni el de n; por lo que es necesario hallar primero m.

- Escribes la fórmula: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- Sustituyes las coordenadas de los puntos: $m = \dfrac{0 - 3{,}5}{-2 - (-2{,}5)}$
- Efectúas las operaciones indicadas: $m = \dfrac{-3{,}5}{-2 + 2{,}5} = \dfrac{-3{,}5}{0{,}5} = -7$
- $m = -7$

Para hallar n:

- Sustituyes el valor hallado de m y las coordenadas de cualquiera de los puntos H o T en la ecuación:
  $y = mx + n$; $m = -7$ y $T(-2;\ 0)$
  $0 = (-7) \cdot (-2) + n$
- Efectúas el producto: $0 = 14 + n$
- Despejas n: $n = -14$

Ya puedes escribir la ecuación de la función t: $t(x) = -7x - 14$

Como recordarás, distintos procesos y fenómenos que ocurren a nuestro alrededor se pueden modelar a través de gráficos de funciones lineales. Algunos mediante una semirrecta y otros por varios tramos, ya que no mantienen un comportamiento estable todo el tiempo.

Ejemplo 3:

La gráfica de la figura 4.27 muestra cómo varía la temperatura de una sustancia durante cierto tiempo a partir de las 11:58 a.m.

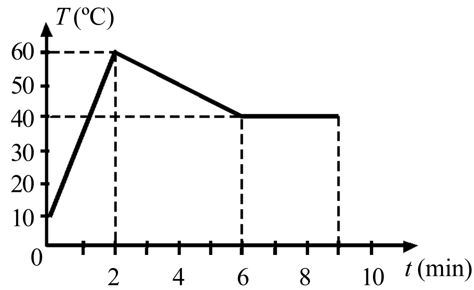


Figura 4.27

3.1 Completa los espacios en blanco:

a) La temperatura inicial de la sustancia fue de _______.
b) La temperatura máxima que alcanzó la sustancia fue ______.
c) La sustancia se estuvo enfriando durante ________ minutos.

3.2 Marca con una X la respuesta correcta.

a) La temperatura estuvo ascendiendo durante:

___ 2 h ___ 120 s ___ 60 min

b) La temperatura no varió durante:

___ 8 min y medio ___ 9 min ___ 3 min

c) La ecuación que describe la variación de la temperatura durante los primeros 2 min es:

___ $T = 10t + 60$ ___ $T = 2t + 10$ ___ $T = 25t + 10$ ___ $T = -25t + 10$

d) La sustancia alcanzó la temperatura máxima a las:

___ 1:58 p.m. ___ 12 m ___ 12 p.m. ___ 2:00 p.m.

3.3 ¿Qué temperatura tenía la sustancia a los 4 min de iniciado el proceso representado?

Respuestas:

3.1 a) 10 °C. (La gráfica parte de 10 en el eje horizontal).

b) 60 °C. (El valor más alto alcanzado por la gráfica en el eje vertical es 60).
c) 4 min. (La sustancia se enfría cuando la temperatura desciende, lo que se corresponde con el segundo tramo, que va de los 2 min a los 6 min).

3.2 a) 120 s (2 min = 120 s).

b) 3 min. (La temperatura no varía cuando el tramo es paralelo al eje horizontal. Esto ocurre de 6 min a 9 min, o sea, 3 min).
c) $T = 25t + 10$. (Calculas m con los puntos (0; 10) y (2; 60) por sustitución o por la fórmula:

Primera vía: $y = mt + 10$ $\quad$ $60 = 2m + 10$ $\quad$ $m = 25$

Segunda vía: $m = \dfrac{60-10}{2-0} = \dfrac{50}{2} = 25$

Otra vía de solución puede ser:

- La $n = 10$, queda descartada la primera opción.
- La gráfica asciende, luego $m > 0$, queda descartada la cuarta opción.
- Tomas el punto (2; 60) y lo sustituyes en las dos ecuaciones restantes:

$T = 2t + 10$	$T = 25t + 10$
$60 = 2 \cdot 2 + 10$	$60 = 25 \cdot 2 + 10$
$60 \neq 14$	$60 = 60$ se cumple

d) 12 m. (La máxima temperatura se alcanza a los dos minutos de iniciado el proceso y la hora de comienzo es las 11:58 a.m., por lo que adicionas dos minutos al 58).

3.3 Para hallar la temperatura a los 4 min, es necesario escribir la ecuación que describe la variación de temperatura en el tramo entre los 2 y los 6 min, ya que no se puede dar la respuesta a partir de la gráfica dada.

- Extraes los puntos (2; 60) y (6; 40) que pertenecen a dicho tramo.
- Como no conoces la pendiente, debes hallarla utilizando la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{40-60}{6-2} = \frac{-20}{4} = -5$$

- Compruebas el resultado obtenido comparando el signo de la pendiente y la posición del tramo, o sea, el tramo se inclina hacia abajo por lo que la pendiente tiene que ser negativa, como ocurrió.
- Hallas la n sustituyendo un punto cualquiera y la m hallada en la ecuación:

$y = mx + n$
$60 = (-5) \cdot 2 + n$
$60 = -10 + n$
$n = 70$

- Escribes la ecuación: $T = -5t + 70$
- Sustituyes $t = 4$ en la ecuación y calculas: $T = (-5) \cdot 4 + 70$

  $T = -20 + 70 = 50$
- Compruebas que el resultado es lógico, o sea, la temperatura es menor que 60 °C lo que se corresponde con la gráfica.

Respuesta: A los 4 min la temperatura de la sustancia fue de 50 °C.

Ejercicios

1. Determina cuáles de las correspondencias que aparecen en la figura 4.28 entre los conjuntos A y B, son funciones y cuáles no. Fundamenta tu respuesta.

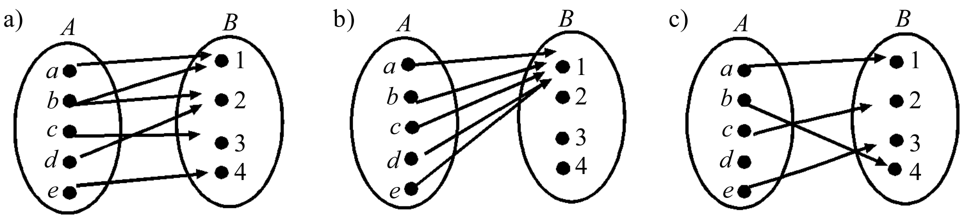


Figura 4.28

2. Determina cuáles de las correspondencias siguientes son funciones y cuáles no. Fundamenta tu respuesta.
   a) La correspondencia definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que a cada número real asocia su valor absoluto disminuido en 2.
   b) La correspondencia definida de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ que a cada número entero asocia su cuarta parte.
   c) La correspondencia definida de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ que a cada número racional asocia su raíz cuadrada.
   d) La correspondencia definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que a cada número real asocia la expresión $x^2 - 2x + 3$.

3. Representa gráficamente las siguientes funciones lineales y escribe sus propiedades.

   a) $y = x$ b) $y = -x$ c) $y = 2x$

   d) $y = x - 4$ e) $y = -x + 6$ f) $y = \frac{1}{2}x + 2$

   g) $y = -3x - 3$ h) $y = 4 - 2x$ i) $y = 6$

4. Determina la ecuación de la función lineal si:

   a) $m = -1$ y su gráfica pasa por el punto $P(0; 6)$.

b) $n=\frac{2}{3}$ y su gráfica pasa por el punto $M\left(-1;\frac{1}{3}\right)$.

c) Su gráfica pasa por los puntos $A(2; –2)$ y $B(5; –5)$.

4.1 Calcula el cero de cada una.

4.2 Determina la monotonía de cada una.

5. Dada la función lineal de ecuación $f(x) = 2x – 8$, con $–1 \leq x \leq 5$.

a) Calcula su cero.
b) Represéntala gráficamente.
c) Determina el conjunto imagen.
d) Di su monotonía.
e) Calcula $f(0,5)$.
f) Verifica si el par $(–1,5; –11)$ pertenece a la función f.

6. La figura 4.29 muestra la representación gráfica de las funciones lineales f, g y h.

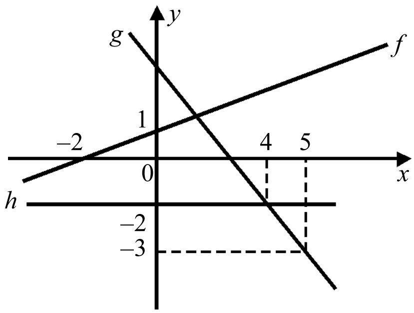


Figura 4.29

a) Escribe la ecuación de cada una.
b) Escribe la monotonía de cada una.
c) Halla el cero de la función g.

7. La gráfica de la figura 4.30 muestra la relación entre la distancia (d) recorrida por un ciclista con movimiento uniforme y el tiempo (t).

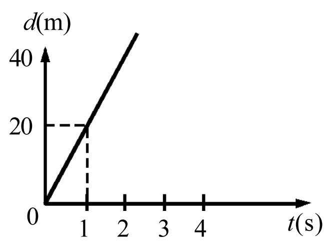


Figura 4.30

a) Escribe la ecuación que describe la relación distancia-tiempo.
b) ¿Qué distancia había recorrido el ciclista al cabo de 10 s?
c) ¿Qué tiempo demorará en recorrer 120 m?

8. La figura 4.31 ilustra la relación entre el peso (P) de un recipiente que vacío pesa 3 kg y la cantidad de agua (C), en litro, que contiene.

   a) Escribe la ecuación que describe la relación representada.
   b) ¿Qué cantidad de agua contiene el recipiente cuando el peso es de 20 kg?
   c) Si el recipiente contiene litro y medio de agua, ¿cuál es el peso?

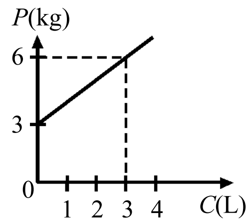


Figura 4.31

9. La figura 4.32 muestra la altura a la que se encuentra el agua en una piscina en función del tiempo, a partir de las 8:00 a.m. y hasta llenarse completamente.

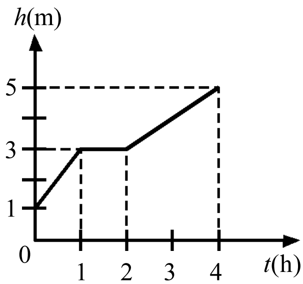


Figura 4.32

9.1 Completa los espacios en blanco.

   a) La altura inicial del agua en la piscina era _____.
   b) El agua alcanzó los 3 m al cabo de los ____ minutos.

9.2 Marca con una X la respuesta correcta:

   a) La ecuación que describe la variación de la altura del agua en la piscina durante la primera hora es:

   ___ $h = t$ ___ $h = 2t$ ___ $h = 2t + 1$ ___ $h = t + 1$

   b) La altura del agua no varió durante:

   ___ 1 min ___ 2 h ___ 60 s ___ 1 h

9.3 ¿Qué altura alcanzó el agua a las 11:00 a.m.?

9.4 ¿En cuál de los tramos, primero o tercero, el agua subió más rápidamente? Fundamenta tu respuesta.

9.5 ¿A qué hora se llenó completamente la piscina?

10. Dos recipientes A y B, de igual capacidad, se llenan por llaves que vierten diferente cantidad de agua por minuto. La gráfica de la figura 4.33 muestra la cantidad de agua que contiene cada recipiente hasta llenarse completamente.

   C: cantidad de agua en litro.
   t: tiempo en minuto.

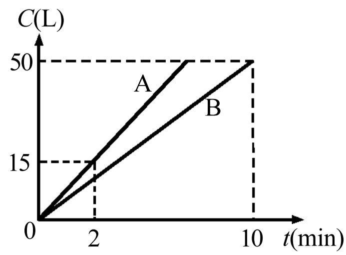


Figura 4.33

   a) Marca con una X la respuesta correcta.
   La ecuación de la función que describe el proceso de llenado del recipiente A es:

   ___ $C = 7{,}5t$ ___ $C = \dfrac{2}{15}t$ ___ $C = t$ ___ $C = \dfrac{35}{2}t$

b) ¿Qué llave vierte mayor cantidad de litros por minuto? Fundamenta.
c) Si el proceso comenzó a las 11:30 a.m., ¿a qué hora se llenó el recipiente *B*?

4.6 Concepto de función cuadrática

El cañonazo


Figura 4.34

¡! Con puntualidad más allá de la exactitud, todos los días del año, ya sean de fiesta o de duelo, a las nueve de la noche, ni un minuto más ni un minuto menos, desde la Fortaleza de San Carlos de la Cabaña se dispara un cañonazo (fig. 4.34), llamando a revisar los relojes.

Tradición nacida al calor de las murallas, inmenso cinturón de piedra, que ante el feroz ataque de corsarios y piratas, fueron construidas en la villa de San Cristóbal, durante casi toda una centuria desde 1674, por orden de la corona española para defenderse de tan peligrosos visitantes.

De esta forma, la pequeña ciudad quedó dividida en dos: La Habana de intramuros y La Habana de extramuros, como las llamó el pueblo. En un principio al recinto amurallado se le abrieron dos puertas, mas su longitud, con el paso del tiempo, exigió más entradas y salidas, por lo que llegó a tener hasta nueve.

A las cuatro y media de la mañana se anunciaba la apertura de sus puertas con un cañonazo. A las ocho de la noche, otra detonación, por el contrario, advertía su cierre, lo cual significaba, ni más ni menos, que quien fuera sorprendido por la descarga del otro lado del muro, debía de permanecer allí hasta el amanecer, pese a los rigores del tiempo o al atraco de los malhechores.

Con los años, el cierre de la ciudad se alargó hasta las nueve de la noche, pero la villa y su gente se desbordaban y con el desarrollo de las artes de la guerra, las murallas se volvieron inútiles.

El 8 de agosto de 1863 comenzó el derribo de las murallas de La Habana, (de las que aún se conservan algunos restos), pero la tradición del cañonazo de las nueve perdura hasta el presente como un llamado a conservar nuestras tradiciones.

En cualquier confín del mundo que se encuentre un habanero, jamás podrá olvidar una antiquísima costumbre de la tierra que lo vio nacer.

El lanzamiento de un proyectil, como la bala disparada por un cañón, describe una trayectoria representada por una línea curva (fig. 4.35). Cómo saber:

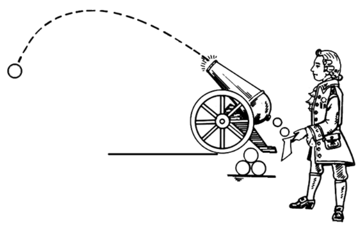


Figura 4.35

- qué distancia recorre la bala,
- qué altura máxima alcanza durante su recorrido,
- qué ecuación describe el comportamiento de la relación entre el tiempo transcurrido y la altura a la que se encuentra la bala,
- qué gráfica describe este fenómeno.

Como la trayectoria descrita por la bala no es una línea recta, es imposible responder esas preguntas con lo que ya aprendiste sobre la función lineal y la recta. En este capítulo estudiarás una nueva función numérica, que te permitirá responder a interrogantes como las anteriores, la *función cuadrática.*

Ejemplo 1:

Calcula el área de los cuadrados cuyos lados tienen longitudes 1,0 cm; 2,5 cm; 5,0 cm y 12 cm.

Solución:

El área de un cuadrado se obtiene calculando el cuadrado de la longitud de su lado, luego:

$1^2 = 1$ $\quad$ $2{,}5^2 = 6{,}25$ $\quad$ $5^2 = 25$ $\quad$ $12^2 = 144$

Por lo que las áreas pedidas serán de 1 cm^2; 6,25 cm^2; 25 cm^2 y 144 cm^2.

Esta correspondencia como puedes comprobar es una función, ya que el cuadrado de un número real siempre existe y es único.

Si llamas f a la función que asigna a cada longitud del lado del cuadrado, su área, puedes representarla mediante la ecuación $y = f(x) = x^2$.

Ejemplo 2:

Alex juega con su hermanito Luis. El juego consiste en que Luis dice un número real y Alex debe decir el número que se obtiene de elevar al cuadrado el número que dijo su hermano y sustraerle 4. Si Luis dijo los números: –2; 0; 0,5; 2 y 10, ¿qué números dijo su hermano?

Solución:

Luis dijo los números: –2; 0; 0,5; 2 y 10.
Alex dijo los números: 0; – 4; –3,75; 0 y 96, ya que:

$(-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$
$0^2 - 4 = 0 - 4 = -4$
$0{,}5^2 - 4 = 0{,}25 - 4 = -3{,}75$
$2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$
$10^2 - 4 = 100 - 4 = 96$

De manera general, puedes decir que si Luis dice un número real x, su hermano Alex dirá el número $x^2 - 4$.

Esta correspondencia como puedes comprobar es una función, ya que el cuadrado de un número real es único y al sustraerle 4, se obtiene un único resultado.

Si llamas g a la función que asigna a cada número real dicho por Luis, el correspondiente expresado por Alex, puedes representarla mediante la ecuación $y = g(x) = x^2 - 4$.

Como puedes apreciar en cada ejemplo, las correspondencias analizadas *son funciones* y se pueden expresar mediante una *ecuación,* en la que la imagen se obtiene como el *cuadrado de un número* en el primer caso, y en el segundo caso sustrayéndole, además, un número real.

Las funciones definidas por ecuaciones como estas donde el mayor exponente de la variable es dos, reciben el nombre de *funciones cuadráticas.*

Recuerda *la definición de función cuadrática:*

La correspondencia que a cada $x \in \mathbb{R}$ le hace corresponder el número real $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, donde a, b y c son números reales dados, se denomina **función cuadrática** o de **segundo grado.**

La ecuación correspondiente a esta función es $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

Son ejemplos de funciones cuadráticas los siguientes:

$y = x^2 - x + 1$ $(a = 1;\ b = -1;\ c = 1)$	$y = 3x^2 - 2x - 3$ $(a = 3;\ b = -2;\ c = -3)$	$y = -0{,}5x^2 + 3x + 0{,}2$ $(a = -0{,}5;\ b = 3;\ c = 0{,}2)$
$y = -x^2 + 5x$ $(a = -1;\ b = 5;\ c = 0)$	$y = 2x^2 - 6x$ $(a = 2;\ b = -6;\ c = 0)$	$y = \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x$ $(a = \frac{2}{3};\ b = \frac{1}{3};\ c = 0)$
$y = x^2 - 4$ $(a = 1;\ b = 0;\ c = -4)$	$y = 2x^2 + 8$ $(a = 2;\ b = 0;\ c = 8)$	$y = 9 - x^2$ $(a = -1;\ b = 0;\ c = 9)$
$y = x^2$ $(a = 1;\ b = 0;\ c = 0)$	$y = -3x^2$ $(a = -3;\ b = 0;\ c = 0)$	$y = \frac{1}{2}x^2$ $(a = \frac{1}{2};\ b = 0;\ c = 0)$

Observa que en las ecuaciones de las funciones cuadráticas, además de que el mayor exponente de la variable es dos, estas pueden tener forma de trinomio, binomio o monomio, en dependencia de los valores que tomen los parámetros a, b y c.

Puedes concluir que los parámetros b y c en las ecuaciones de las funciones cuadráticas pueden tomar valor cero, pero *nunca* puede ser cero el valor del parámetro a.

De manera general las ecuaciones de funciones cuadráticas pueden tener la forma siguiente:

$y = ax^2$ $\quad$ $y = ax^2 + bx$ $\quad$ $y = ax^2 + c$ $\quad$ $y = ax^2 + bx + c$

Como ya conoces del grado anterior, el *dominio* de una función es el conjunto de los valores que le puedes asignar a la variable independiente x; mientras que los valores correspondientes que se obtienen a partir del cálculo para la variable dependiente y, representan el *conjunto imagen* de la función.

El *dominio* de todas las funciones cuadráticas es (si no se establece ninguna restricción) el conjunto de los *números reales,* pues las operaciones que intervienen en la expresión $ax^2 + bx + c$ están definidas para todos los números reales.

Por eso si asignas distintos valores del dominio a la variable x, obtienes sus respectivas imágenes y viceversa, de esta manera se pueden calcular al igual que con las funciones lineales los valores funcionales de las funciones cuadráticas.

Ejemplo 3:

Sean las funciones f y g dadas por sus ecuaciones:

$f(x) = x^2 - 3x + 1$ y $g(x) = -x^2 + \dfrac{x}{3}$.

a) Halla la imagen de 0; 3; –1; $-\dfrac{1}{3}$; 0,2 por la función f.

b) Halla la imagen de 0; 3; –1; $-\dfrac{1}{3}$; 0,2 por la función g.

Solución:

a) Como ya sabes, en una función a cada valor del dominio le corresponde un único valor de imagen, luego aquí se trata de hallar el valor de la imagen, o sea, el valor de y, conocido el valor x del dominio.

$f(0) = 0^2 - 3 \cdot 0 + 1$ (sustituyes x por 0)
$= 0 - 0 + 1$ (efectúas el cuadrado y el producto)
$= 1$ (calculas)

Luego $f(0) = 1$, lo que significa que al elemento 0 del dominio le corresponde como imagen, el 1.

$f(3) = 3^2 - 3 \cdot 3 + 1$ (sustituyes x por 3)
$= 9 - 9 + 1$ (efectúas el cuadrado y el producto)
$= 1$ (calculas)

Luego $f(3) = 1$, lo que significa que al elemento 3 del dominio le corresponde también como imagen, el 1.

$f(-1) = (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 1$ (sustituyes x por -1)
$= 1 + 3 + 1$ (efectúas el cuadrado y el producto)
$= 5$ (calculas)

Luego $f(-1) = 5$, lo que significa que al elemento -1 del dominio le corresponde como imagen, el 5.

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{1}{3}\right)^2-3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+1 \qquad \text{(sustituyes } x \text{ por } -\frac{1}{3}\text{)}$$

$$=\frac{1}{9}+1+1 \qquad \text{(efectúas el cuadrado y el producto)}$$

$$=\frac{19}{9} \qquad \text{(calculas)}$$

Luego $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{19}{9}$, lo que significa que al elemento $-\frac{1}{3}$ del dominio le corresponde como imagen, el $\frac{19}{9}$.

$f(0{,}2) = 0{,}2^2 - 3 \cdot 0{,}2 + 1$ (sustituyes x por 0,2)
$= 0{,}04 - 0{,}6 + 1$ (efectúas el cuadrado y el producto)
$= 0{,}44$ (calculas)

Luego $f(0{,}2) = 0{,}44$, lo que significa que al elemento 0,2 del dominio le corresponde como imagen, el 0,44.

b) $g(x)=-x^2+\frac{x}{3}$

$g(0)=-0^2+\frac{0}{3}$ (sustituyes x por 0)
$= 0 - 0$ (efectúas el cuadrado y el producto)
$= 0$ (calculas)

Luego $g(0) = 0$, lo que significa que al elemento 0 del dominio le corresponde como imagen, el 0.

$g(3)=-3^2+\frac{3}{3}$ (sustituyes x por 3)
$= -9 + 1$ (efectúas el cuadrado y el producto)
$= -8$ (calculas)

Luego $g(3) = -8$, lo que significa que al elemento 3 del dominio le corresponde como imagen, el -8.

Observa que $-3^2 = -9$, ya que es el opuesto de 3^2, a diferencia de $(-3)^2 = 9$, donde el cuadrado es para el número -3 por estar dentro de un paréntesis.

$$g(-1) = -(-1)^2 + \frac{(-1)}{3} \qquad \text{(sustituyes } x \text{ por } -1\text{)}$$

$$= -1 - \frac{1}{3} \qquad \text{(efectúas el cuadrado y el producto)}$$

$$= -\frac{4}{3} \qquad \text{(calculas)}$$

Luego $g(-1) = -\frac{4}{3}$, lo que significa que al elemento -1 del dominio le corresponde como imagen, el $-\frac{4}{3}$.

Observa que $(-1)^2 = 1$, pero está precedido de signo menos, por lo que el resultado queda negativo.

$$g\left(-\frac{1}{3}\right) = -\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)}{3} \quad \text{(sustituyes } x \text{ por } -\frac{1}{3}\text{)}$$

$$= -\frac{1}{9} - \frac{1}{9} \quad \text{(efectúas el cuadrado y la división)}$$

$$= -\frac{2}{9} \quad \text{(calculas)}$$

Luego $g\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{9}$, lo que significa que al elemento $-\frac{1}{3}$ del dominio le corresponde como imagen, el $-\frac{2}{9}$.

Recuerda que: para dividir fracciones, se multiplica por el recíproco del divisor, en este caso el 3, por lo que te quedaría el producto $\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{9}$, y cambia el signo en la operación.

$$g(0,2) = -(0,2)^2 + \frac{0,2}{3} \quad \text{(sustituyes } x \text{ por 0,2)}$$

$$= -0,04 + \frac{\frac{1}{5}}{3} \quad \text{(efectúas el cuadrado y expresas como fracción 0,2)}$$

$$= -\frac{4}{100} + \frac{1}{15} \quad \text{(expresas 0,04 como fracción)}$$

$$= -\frac{1}{25} + \frac{1}{15} \quad \text{(simplificas } \frac{4}{100} \text{ y efectúas la sustracción)}$$

$$= \frac{2}{75}$$

Luego $g(0,2) = \frac{2}{75}$, lo que significa que al elemento 0,2 del dominio le corresponde como imagen, el $\frac{2}{75}$.

Observa que la fracción $\frac{1}{15}$ no se debe convertir a expresión decimal, pues el resultado no es exacto y el cálculo sería aproximado. En este caso expresas 0,04 como fracción y realizas la sustracción de fracciones hallando el m.c.m. de los denominadores.

Ejemplo 4:

Dadas las funciones h y t representadas por sus ecuaciones $h(x) = x^2 - 3$ y $t(x) = x^2 - 2x - 5$.

a) Halla los valores del dominio de la función h cuya imagen es: –2; 0; 1.
b) Halla los valores del dominio de la función t cuya imagen es: – 6; –5; 3.

Solución:

a) Para hallar el argumento o valor del dominio al que le corresponde un valor determinado de la imagen, se debe sustituir la y en la ecuación por el valor dado y encontrar el argumento x que satisface la ecuación de dicha función.
Como tenemos que $h(x) = x^2 - 3$ y conocemos que $y = h(x)$, obtenemos la ecuación equivalente $y = x^2 - 3$. Ahora sustituimos y por los valores dados.

$-2 = x^2 - 3$ (sustituyes y en la ecuación por –2)
$-2 + 3 = x^2$ (transpones –3 al miembro izquierdo y efectúas la sustracción indicada)
$x^2 = 1$ (realizas la operación inversa)
$x = \pm\sqrt{1}$ (calculas la raíz cuadrada de 1)
$x = \pm 1$

Luego, el elemento 1 de la imagen de la función h se obtiene cuando x toma valores – 1 y 1.
Este resultado puedes comprobarlo sustituyendo los valores de x hallados en la ecuación y efectuando las operaciones indicadas.

$0 = x^2 - 3$ (sustituyes y en la ecuación por 0)
$0 = x^2 - 3$ (transpones –3 al miembro izquierdo)
$x^2 = 3$ (realizas la operación inversa)
$x = \pm\sqrt{3}$ (planteas la raíz cuadrada de 3)

Luego, el elemento 0 de la imagen de la función h se obtiene cuando x toma valores $-\sqrt{3}$ y $\sqrt{3}$.

$1 = x^2 - 3$ (sustituyes y en la ecuación por 1)
$1 = x^2 - 3$ (transpones –3 al miembro izquierdo y efectúas la adición)
$x^2 = 4$ (realizas la operación inversa)
$x = \pm\sqrt{4}$ (calculas la raíz cuadrada)
$x = \pm 2$

Luego, el elemento 1 de la imagen de la función h se obtiene cuando x toma valores – 2 y 2.

b) $-6 = x^2 - 2x - 5$ (sustituyes y en la ecuación por – 6)
$x^2 - 2x + 1 = 0$ (transpones – 6 al miembro derecho y reduces los términos semejantes)
$(x - 1)^2 = 0$ (factorizas el trinomio cuadrado perfecto obtenido)
$x - 1 = 0$ (igualas a cero la base de la potencia)
$x = 1$ (despejas la x)

Luego, el elemento – 6 de la imagen de la función t se obtiene cuando x toma valor 1.
Este resultado lo puedes comprobar sustituyendo en la ecuación la x por 1.

$-5 = x^2 - 2x - 5$ (sustituyes y en la ecuación por –5)
$x^2 - 2x = 0$ (transpones –5 al miembro derecho y reduces los términos semejantes)
$x(x - 2) = 0$ (factorizas el binomio obtenido extrayendo el factor común)
$x = 0$ o $x - 2 = 0$ (igualas a cero cada factor)
$x_1 = 0$ o $x_2 = 2$ (despejas la x)

Luego, el elemento –5 de la imagen de la función t se obtiene cuando x toma valores 0 o 2.

$3 = x^2 - 2x - 5$ (sustituyes y en la ecuación por 3)
$x^2 - 2x - 8 = 0$ (transpones el 3 al miembro derecho y reduces los términos semejantes)
$(x - 4)(x + 2) = 0$ (factorizas el trinomio obtenido)
$x - 4 = 0$ o $x + 2 = 0$ (igualas a cero cada factor)
$x_1 = 4$ o $x_2 = -2$ (despejas la x)

Luego, el elemento 3 de la imagen de la función t se obtiene cuando x toma valores 4 o –2.

Observa en el diagrama de la figura 4.36 los resultados obtenidos en los ejemplos 1 a) y 2 b).

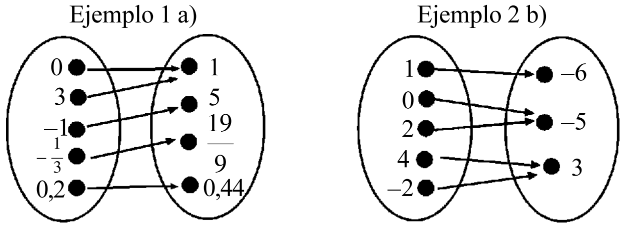


Figura 4.36

Nota que, tanto en uno como en otro, hay valores diferentes del dominio a los que les corresponde el mismo valor de imagen y viceversa, a un mismo valor de la imagen se le asocian dos valores diferentes del dominio.

Esta característica de las funciones cuadráticas tiene repercusión en la forma de su representación gráfica, como verás posteriormente.

Ejercicios

1. Determina cuáles de las funciones siguientes son cuadráticas y cuáles no. Señala en las funciones seleccionadas los valores de a, b y c.

a) $y = x^2 - 3$ b) $f(x) = x^2 - x + 1$ c) $g(x) = x^3 - 2x + 3$

d) $h(x) = -x^2 + \frac{x}{2} + 1$ e) $s(x) = 2x + 3x^2$ f) $r(x) = x^4 + 4x^2 + 2$

g) $y = \frac{1}{x^2}$ h) $t(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 1{,}5$ i) $k(x) = \frac{2x^2 + 4x}{2}$

j) $y = \frac{4}{9} - x^2$ k) $p(x) = x^3 + x^2 - x$ l) $b(x) = 2x - 5$

2. Marca con una X la respuesta correcta.
De las ecuaciones siguientes la que no corresponde a una función cuadrática es:

a) ___ $y = \frac{1}{5}x^2$ b) ___ $y = -x^2 + 7$ c) $y = -x^2 + \frac{1}{x} - 3$ d) $y = 2 - \frac{x^2}{3} + x$

3. Escribe la ecuación de una función cuadrática si conoces que:

a) $a = 1$; $b = -2$ y $c = 5$ b) $a = 3$; $b = \frac{1}{3}$ y $c = 0$ c) $a = -1$; $b = 0$ y $c = 0{,}2$

d) $a = \frac{2}{3}; b = -\frac{1}{4}$ y $c = 1$ e) $a = 2{,}5$; $b = 0$ y $c = 0$ f) $a = b = -2$ y $c = -3{,}5$

4. Sean las funciones f, g y h dadas por las ecuaciones: $f(x) = x^2 - 4x + 3$; $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ y $h(x) = 6 - x^2$. Calcula:

   a) La imagen de -2; $\frac{3}{2}$ y de 8 por la función f.

   b) La imagen de -2; $\frac{3}{2}$ y de 8 por la función g.

   c) La imagen de -2; $\frac{3}{2}$ y de 8 por la función h.

5. Sea la función f dada por su ecuación $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Calcula, si es posible, los valores del dominio que tienen como imagen:

   a) 1 b) 0 c) 3 d) -2

4.7 Representación gráfica de la función cuadrática $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ y sus propiedades

Ya conoces que las ecuaciones de funciones cuadráticas pueden tener la forma siguiente:

$y = ax^2$ $y = ax^2 + bx$ $y = ax^2 + c$ $y = ax^2 + bx + c$

Para estudiar su representación gráfica vamos a comenzar por la más sencilla $y = ax^2$ $(a \neq 0)$, considerando los casos $a = 1$ y $a = -1$.

Ejemplo 1:

Representa en un sistema de coordenadas rectangulares las funciones de ecuación:

a) $y = x^2$ b) $y = -x^2$

Solución:

a) El gráfico de esta función se obtiene representando en el sistema de coordenadas rectangulares todos los puntos cuyas coordenadas están determinadas por la ecuación $y = x^2$, como la variable x puede tomar cualquier valor real, es imposible representarlos todos, por lo que determinas las coordenadas de algunos puntos y los representas.

Puedes confeccionar la tabla 4.4.

Tabla 4.4

x	–2	–1,5	–1	– 0,5	0	0,5	1	1,5	2
x^2	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4

Trazas el sistema de coordenadas y representas cada par obtenido (fig. 4.37):

(–2; 4); (–1,5; 2,25);
(–1; 1); (– 0,5; 0,25);
(0; 0); (0,5; 0,25);
(1; 1); (1,5; 2,25) y (2; 4).

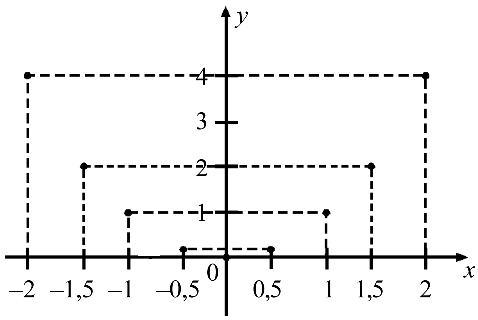


Figura 4.37

Observa que los puntos representados no quedan contenidos en una línea recta, ni en una poligonal abierta, por lo que la representación gráfica de esta función es una línea curva que se obtiene uniendo los puntos representados como se ilustra en la figura 4.38.

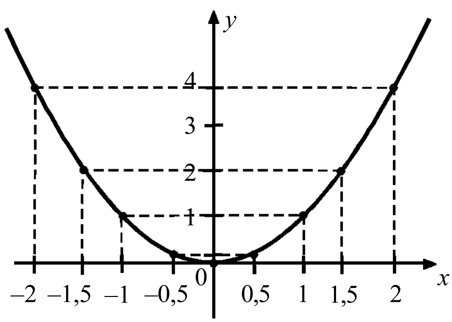


Figura 4.38

Como puedes apreciar para esta curva se cumple que:

- Tiene un punto situado sobre el eje x, que es el de menor ordenada de todos.

- Los puntos situados en el primer cuadrante están a la misma distancia del eje y que su correspondiente en el otro cuadrante.
- Está representada en el semiplano superior.
- Abre hacia arriba.

b) Para la función $h(x) = -x^2$ confeccionas otra tabla como la tabla 4.5.

Tabla 4.5

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
$-x^2$	-4	$-2{,}25$	-1	$-0{,}25$	0	$-0{,}25$	-1	$-2{,}25$	-4

Representas los pares ordenados obtenidos en el sistema de coordenadas y los unes como en el caso anterior (fig. 4.39).

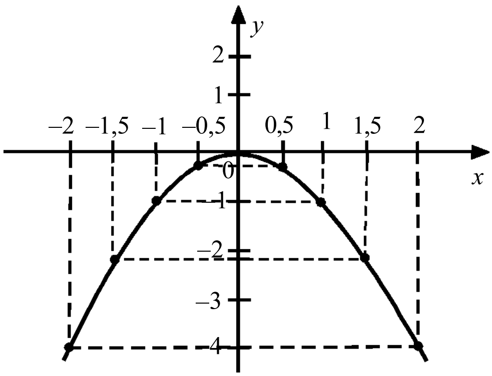


Figura 4.39

Como puedes apreciar para esta curva se cumple que:

- Tiene un punto situado sobre el eje x, que es el de mayor ordenada de todos.
- Los puntos situados en el tercer cuadrante están a la misma distancia del eje y que sus correspondientes en el otro cuadrante.
- Está representada en el semiplano inferior.
- Abre hacia abajo.

La curva que se obtiene al representar estas funciones cuadráticas y que tienen las características indicadas, se denomina **parábola** y como ya conoces, mientras más puntos representes de ella, más te aproximas a la forma del gráfico.

Recuerda que:

La representación gráfica de una función cuadrática, cuyo dominio es el conjunto de los números reales, es una **parábola**.

La parábola

En muchas ocasiones has encontrado a tu alrededor diferentes curvas que tienen forma de parábolas. *La* parábola *con forma de* U:

- *Puede describir trayectorias como el* lanzamiento de la bala *en el atletismo (fig. 4.40), el* tiro al aro *en el baloncesto (fig. 4.41), o los* chorros de agua *de una fuente (fig. 4.42).*

Figura 4.40

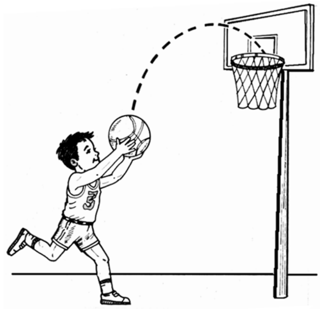


Figura 4.41

Figura 4.42

- *Ser utilizada en las* construcciones *de puentes o fachadas, cuya forma permite abaratar costos y mejorar la resistencia de las obras (fig. 4.43).*

Figura 4.43

- *Pueden ser incorporadas en estructuras como reflectores parabólicos que forman la base de los platos satelitales (fig. 4.44), a los espejos parabólicos en los faros de los coches, y a los radares y las antenas para radioastronomía y televisión por satélite.*

Figura 4.44

Propiedades de la función $y = ax^2$ ($a > 0$)

Apoyándonos en el gráfico de la función $y = x^2$, podemos determinar sus propiedades:

- Dominio: $x \in \mathbb{R}$

  Para analizar el dominio de una función cuadrática se proyecta su gráfica sobre el eje x.

Observa que la parábola se prolonga de manera infinita hacia arriba, hacia ambos lados, por lo que cada uno de sus infinitos puntos se puede proyectar sobre dicho eje (fig. 4.45).

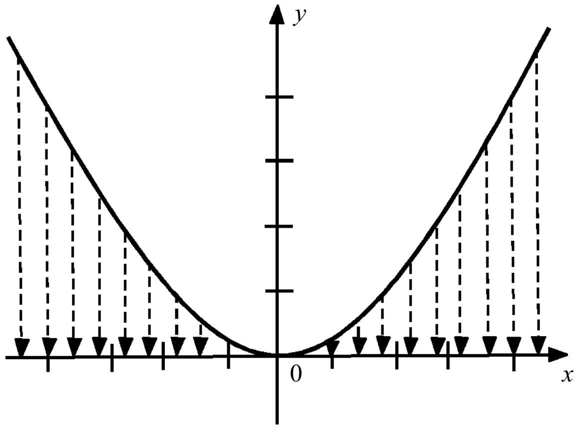


Figura 4.45

Puedes afirmar que la gráfica barre todo el eje x.

- Imagen: $y \in \mathbb{R}$; $y \geq 0$

  Para analizar la imagen de una función cuadrática se proyecta su gráfica sobre el eje y.
  Observa que hay un valor de y ($y = 0$) que es el menor de todos y a partir de ahí la gráfica solo toma valores positivos de y (fig. 4.46).

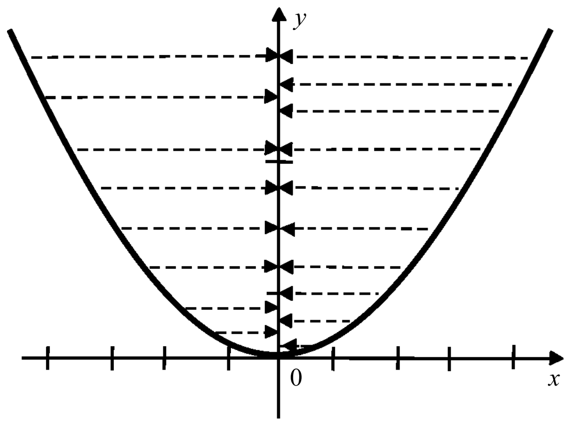


Figura 4.46

De ahí que los puntos de la gráfica solo se proyectan sobre el semieje vertical positivo.

- Ceros: $x_1 = 0$

  Recuerda que el cero es el valor de x del punto donde el gráfico de la función corta al eje de las abscisas y cómo puedes observar, la parábola toca al eje x en $x_1 = 0$.
  Para hallarlo analíticamente, al igual que hiciste con el cero de la función lineal, sustituyes por cero el valor de y en la ecuación de la función y resuelves la ecuación indicada, o sea, $x^2 = 0$; $x = \sqrt{0}$; $x = 0$.

- Monotonía

  Cuando se asignan valores a x, de izquierda a derecha, los valores de y disminuyen hasta que se le asigna a x el valor 0 (fig. 4.47).

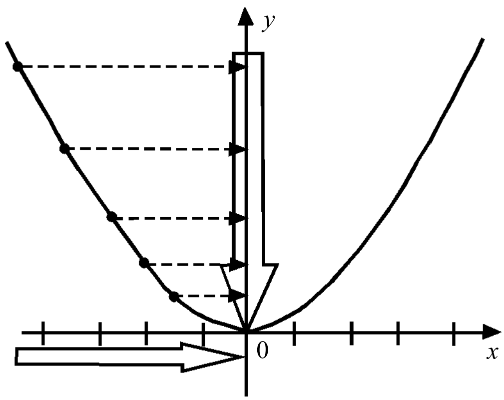


Figura 4.47

O sea, al *aumentar* los valores de x, *disminuyen* los valores de y, hasta que $x = 0$. Por tanto, la función es *monótona decreciente* para $x \leq 0$.
Mientras que a la derecha, a partir del cero, al *aumentar* los valores de x, *aumentan* también los valores de y, por tanto, la función es *monótona creciente* para $x \geq 0$ (fig. 4.48).

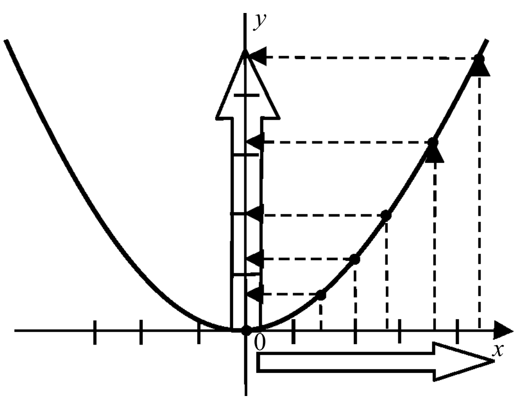


Figura 4.48

Resumiendo:

- Para $x \leq 0$ la función es *monótona decreciente.*
- Para $x \geq 0$ la función es *monótona creciente.*

• Valor mínimo: $y = 0$

Hay un valor de y ($y = 0$) que es el *menor* de todos, el cual se denomina valor mínimo. Este valor lo alcanza para $x = 0$. El punto $V(0; 0)$ se denomina vértice de la parábola.

• Eje de simetría: $x = 0$

La gráfica es simétrica respecto al eje y (recta $x = 0$), porque argumentos opuestos tienen imágenes iguales, la recta $x = 0$ se denomina eje de la parábola.

Propiedades de la función $y = ax^2$ ($a < 0$)

Apoyándonos en el gráfico de la función $y = -x^2$, podemos extraer sus propiedades:

• Dominio: $x \in \mathbb{R}$

Observa que la parábola se prolonga de manera infinita hacia abajo y hacia ambos lados, por lo que cada uno de sus infinitos puntos se puede proyectar sobre dicho eje (fig. 4.49). Puedes afirmar que la gráfica barre todo el eje x.

• Imagen: $y \in \mathbb{R}$; $y \leq 0$

Observa que hay un valor de y ($y = 0$) que es el mayor de todos y a partir de ahí la gráfica solo toma valores negativos de y.
De ahí que los puntos de la gráfica solo se proyectan sobre el semieje negativo vertical (fig. 4.50).

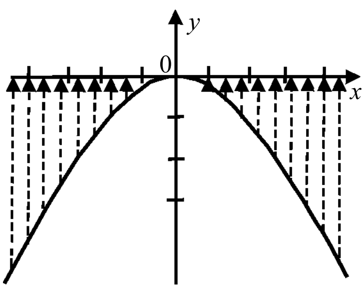


Figura 4.49

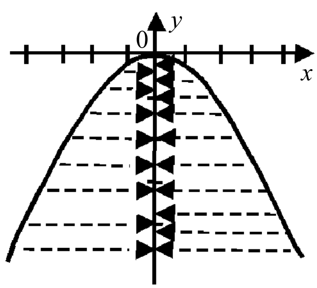


Figura 4.50

• Ceros: $x_1 = 0$

La gráfica toca al eje x en $x = 0$.

• Monotonía:

Cuando se asignan valores a x, de izquierda a derecha, los valores de y aumentan hasta que se le asigna a x el valor 0.

O sea, al *aumentar* los valores de x, *aumentan* también los valores de y, hasta $x = 0$ (fig. 4.51).

- Para $x \leq 0$ la función es *monótona creciente.*
  Mientras que a la derecha, a partir del cero, al *aumentar* los valores de x, *disminuyen* los valores de y (fig. 4.52).
- Para $x \geq 0$ la función es *monótona decreciente.*

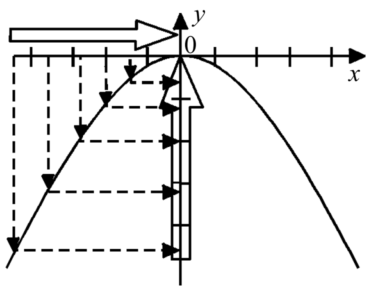


Figura 4.51

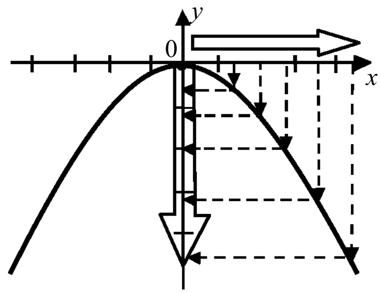


Figura 4.52

• Valor máximo: $y = 0$

Hay un valor de y ($y = 0$) que es el *mayor* de todos, el cual se denomina *valor máximo.* Este valor lo alcanza para $x = 0$, por lo que el punto $V(0; 0)$ se denomina *vértice* de la parábola.

• Eje de simetría: $x = 0$

La gráfica es simétrica respecto al eje y (recta $x = 0$), porque argumentos opuestos tienen imágenes iguales, la recta $x = 0$ se denomina eje de la parábola.

Ejemplo 2:

Representa en un mismo sistema de coordenadas rectangulares las funciones f y g definidas, en el conjunto de los números reales, por las ecuaciones $f(x) = 2x^2$ y $g(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Analiza sus propiedades.

Solución:

Confeccionas una tabla de valores para cada función (por comodidad tomas los mismos valores para cada función) (tablas 4.6 y 4.7).

Para la función $f(x) = 2x^2$:

Tabla 4.6

x	–2	–1	– 0,5	0	0,5	1	2
$2x^2$	8	2	0,5	0	0,5	2	8

Para la función $g(x)=\frac{1}{2}x^2$:

Tabla 4.7

x	-2	-1	$-0,5$	0	0,5	1	2
$\frac{1}{2}x^2$	2	0,5	0,125	0	0,125	0,5	2

Representas los puntos en el sistema de coordenadas y los unes mediante la parábola como en el ejemplo 1 (fig. 4.53).

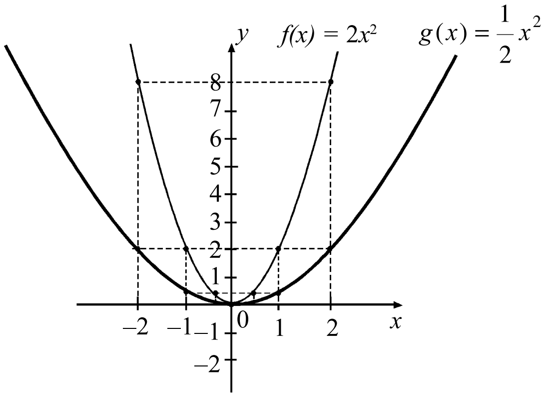


Figura 4.53

Propiedades de las funciones f y g representadas:

$f(x) = 2x^2$

Dominio: $x \in \mathbb{R}$
Imagen: $y \in \mathbb{R}$: $y \geq 0$
Ceros: $x_1 = 0$
Vértice $V(0; 0)$
Valor mínimo: $y = 0$
Eje de simetría: $x = 0$
Monotonía: para $x \leq 0$, decreciente
para $x \geq 0$, creciente

$g(x)=\frac{1}{2}x^2$

Dominio: $x \in \mathbb{R}$
Imagen: $y \in \mathbb{R}$: y ≥ 0
Ceros: $x_1 = 0$
Vértice $V(0; 0)$
Valor mínimo: $y = 0$
Eje de simetría: $x = 0$
Monotonía: para $x \leq 0$, decreciente
para $x \geq 0$, creciente

Como puedes apreciar en los ejemplos analizados las parábolas representadas pueden estar en semiplanos diferentes y tener diferente ancho, o sea, unas son más abiertas que otras, ¿a qué se debe esto?

Para responder esta pregunta vamos a colocar en un sistema de coordenadas las parábolas correspondientes a las funciones analizadas hasta ahora (fig. 4.54).

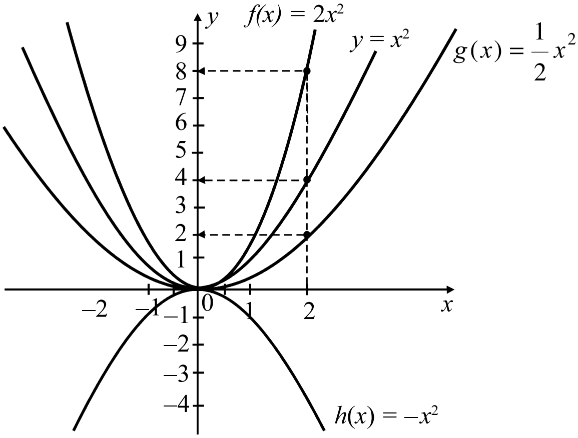


Figura 4.54

Observa que para un mismo valor de x se cumple que el valor de la imagen correspondiente y en:

a) $f(x) = 2x^2$, es *mayor* con respecto a $y = x^2$.
Por ejemplo, trazas una recta paralela al eje y por $x = 2$ y obtienes que su imagen por la función f es 8, mientras que por la función $y = x^2$, es 4 ($8 > 4$).
En este caso se dice que la gráfica de f se obtiene por una *dilatación* de la gráfica de la función $y = x^2$ respecto al eje de las x.

b) $g(x) = \frac{1}{2}x^2$, es *menor* respecto a $y = x^2$.
Por ejemplo, para $x = 2$ obtienes que su imagen por la función g es 2, mientras que por la función $y = x^2$, es 4 ($2 < 4$).
En este caso se dice que la gráfica de g se obtiene por una *contracción* de la gráfica de la función $y = x^2$ respecto al eje de las x.

c) $h(x) = -x^2$, es el *opuesto* respecto a $y = x^2$ y se dice entonces que la gráfica de $h(x) = -x^2$ se obtiene por una *reflexión* de la gráfica de $y = x^2$ considerando como eje de reflexión el eje x.
Como puedes apreciar, la forma de cada parábola está relacionada con el valor del parámetro a en cada una de las ecuaciones de las funciones.

Recuerda que:

De manera general, el gráfico de la función $\boldsymbol{y = ax^2}$ **(**$\boldsymbol{a \neq 0}$**)** se puede obtener del gráfico de la función $y = x^2$:

- por una *dilatación* si $a > 1$;
- por una *contracción* si $0 < a < 1$;
- y por una *reflexión* si $a = -1$.

Para los restantes valores de a ($a \neq 0$) el gráfico se puede obtener por una composición de las transformaciones anteriores.

Recuerda que:

Las funciones $y = ax^2$ ($a \neq 0$):

- Tienen como representación gráfica una **parábola.**
- Tienen dominio $x \in \mathbb{R}$.
- Tienen imagen $y \in \mathbb{R}$; $y \geq 0$ (si $a > 0$) o $y \in \mathbb{R}$; $y \leq 0$ (si $a < 0$).
- Tienen un único cero, $x_1 = 0$.
- Tienen un punto situado sobre el eje x en el origen de coordenadas (0; 0) el cual se nombra **vértice** de la parábola.
- El eje de las ordenadas es el **eje de simetría** de su gráfica.
- La parábola tiene un **mínimo** ($y = 0$) si $a > 0$ y un **máximo** ($y = 0$) si $a < 0$, por tanto, si $a > 0$ abre hacia arriba, y si $a < 0$, abre hacia abajo.
- Si $a > 0$, para $x \leq 0$ es **monótona decreciente,**
  para $x \geq 0$ es **monótona creciente.**
- Si $a < 0$, para $x \leq 0$ es **monótona creciente,**
  para $x \geq 0$ es **monótona decreciente.**
- Cuanto más pequeño es el valor absoluto del coeficiente a, más "abierta" es la parábola, y cuanto más grande es, más "cerrada" es la parábola.
- Las gráficas de las funciones $y = ax^2$ y $y = -ax^2$, son **simétricas**, respecto al eje x.

Para curiosos

Lanza una pelota con un ángulo de inclinación respecto al suelo y observa su trayectoria.

La trayectoria que sigue una bala disparada por un cañón es similar a la que sigue la pelota.

Este tipo de movimiento los estudia la balística.

Podrás observar que la pelota, primero inicia el ascenso hasta alcanzar una altura máxima, *que corresponde al* vértice *de la parábola; a partir de ahí empieza a descender, hasta llegar al suelo (fig. 4.55).*

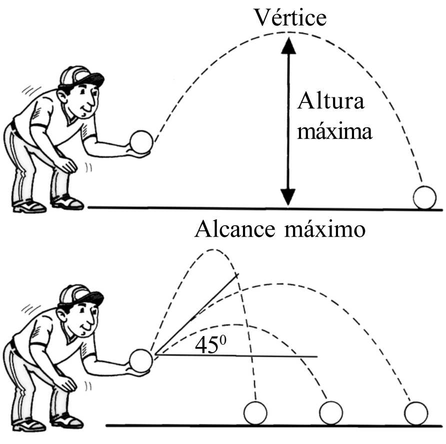


Figura 4.55

La distancia que separa el punto desde donde se lanza hasta el punto donde cae la pelota, se llama alcance máximo.

¿Sabes con qué ángulo de tiro la pelota llega más lejos?

Prueba a tirar la pelota con distintos ángulos de tiro procurando impulsarla con la misma fuerza. Observa con qué ángulo logras lanzarla más lejos.

La balística enseña que la pelota llega más lejos cuando el ángulo de tiro es de 45°.

Al igual que hiciste con las funciones lineales, a las funciones cuadráticas se les escribe la ecuación y se verifica cuáles puntos pertenecen a su representación gráfica y cuáles no.

Ejemplo 3:

Determina la ecuación de una función cuadrática de la forma $y = ax^2$, si su gráfica pasa por el punto $A(1; 3)$.

a) Verifica si el par $B = \left(\frac{1}{3}; 0,3\right)$ pertenece a la función.

b) Si el punto $M(x_0; 0,75)$ pertenece a la representación gráfica de la función, halla su abscisa.

Solución:

Como $A(1; 3)$ pertenece al gráfico de $y = ax^2$:

- Sustituyes sus coordenadas en la ecuación: $3 = a(1)^2$.
- Calculas el cuadrado y obtienes: $a = 3$.
- Escribes la ecuación: $y = 3x^2$.

a) Para verificar si el par $B = \left(\frac{1}{3}; 0,3\right)$ pertenece a la función, operas de la forma siguiente:

- Sustituyes la abscisa del punto en la ecuación de la función: $y = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$.
- Calculas el cuadrado: $y = 3 \cdot \frac{1}{9}$.
- Efectúas el producto: $y = \frac{1}{3}$.
- Comparas la ordenada del punto con el valor obtenido: $\frac{1}{3} \neq 0,3$.
- Concluyes: el par $B = \left(\frac{1}{3}; 0,3\right)$ no pertenece a la función.

Recuerda que para que el par pertenezca a la función, la ordenada del punto debe ser igual al valor de y calculado, en caso contrario, no pertenece.

b) Como el punto M pertenece a la representación gráfica de la función, satisface la ecuación $y = 3x^2$, por lo que procedes de la forma siguiente:

- Sustituyes la ordenada del punto en la ecuación: $0{,}75 = 3x^2$.
- Transpones el 3 al miembro izquierdo: $\frac{0{,}75}{3} = x^2$.
- Efectúas la división: $x^2 = 0{,}25$.
- Despejas la x con la operación inversa: $x = \pm\sqrt{0{,}25}$.
- Calculas la raíz cuadrada: $x = \pm\ 0{,}5$.

Respuesta: La abscisa del punto puede tomar valor 0,5 o – 0,5.

Recuerda que: en las funciones cuadráticas a un mismo valor de imagen y, le corresponden dos valores diferentes del dominio, excepto para el vértice de la parábola.

Ejercicios

1. Dadas las funciones siguientes:

$f(x) = 8x^2$; $g(x) = -\ 4x^2$; $h(x) = \frac{2}{3}x^2$ y $t(x) = -\frac{1}{5}x^2$

a) Señala cuáles tienen su representación gráfica en el semiplano superior respecto al eje x y cuáles en el inferior.
b) ¿Cuál es el vértice de cada una?
c) ¿Son todas simétricas respecto al eje y?
d) Indica cuál es la más "cerrada" y cuál es la más "abierta" respecto al eje vertical.

2. Representa en un sistema de coordenadas rectangulares las funciones siguientes:

a) $f(x) = -3x^2$ b) $g(x) = \frac{3}{2}x^2$ c) $h(x) = 3x^2$ d) $t(x) = -\ 0{,}3x^2$

3. Dadas las funciones f y g cuyas ecuaciones son $f(x) = 1{,}5x^2$ y $g(x) = -2x^2$.

3.1 Escribe verdadero o falso según corresponda. Argumenta las que consideres falsas.

a) ___ La parábola que se obtiene al representar gráficamente la función f abre hacia abajo.
b) ___ La imagen de la función g es $y \in \mathbb{R}$; $y \leq 0$.
c) ___ La función g es decreciente para $x \leq 0$.
d) ___ La función f tiene mínimo $y = 0$.
e) ___ $g(-\ 0{,}5) = 0{,}5$.

3.2 Marca con una X la respuesta correcta.

a) La parábola que representa la función f es más “cerrada” que la parábola que representa a la función:

___ $s(x) = 3x^2$ ___ $h(x) = 0{,}7x^2$ ___ $t(x) = \frac{5}{2}x^2$ ___ $p(x) = 12x^2$

b) Para la función g se cumple que:

___ Tiene su gráfica situada en el semiplano inferior.
___ Tiene máximo $x = 0$.
___ Su gráfica no es simétrica.
___ Tiene cero $x = -2$.

4. Utilizando algún asistente matemático a tu alcance, por ejemplo, *El Geogebra,* realiza las acciones siguientes:

a) Traza la gráfica de una función de la forma $f(x) = ax^2$ $(a \neq 0)$.
b) Varía el valor del parámetro a que seleccionaste dándole valores positivos y negativos y analiza cómo va cambiando la parábola respecto a la que trazaste inicialmente.
c) Escribe las conclusiones a las que arribaste.

5. Observa las parábolas de la figura 4.56.
Marca con una X la respuesta correcta:

___ $c > a > b$ ___ $a > b > c$

___ $b > c > a$ ___ $c > b > a$

6. Observa las parábolas de la figura 4.57.
Marca con una X la respuesta correcta:

___ $c > a > b$ ___ $a > b > c$

___ $b > c > a$ ___ $c > b > a$

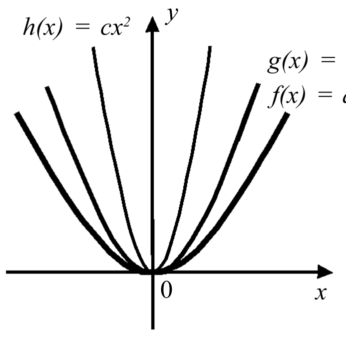


Figura 4.56

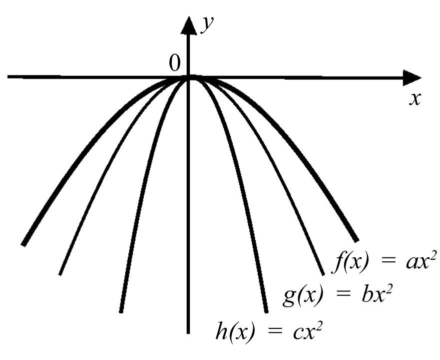


Figura 4.57

7. Las parábolas de la figura 4.58 representan las funciones que se indican.

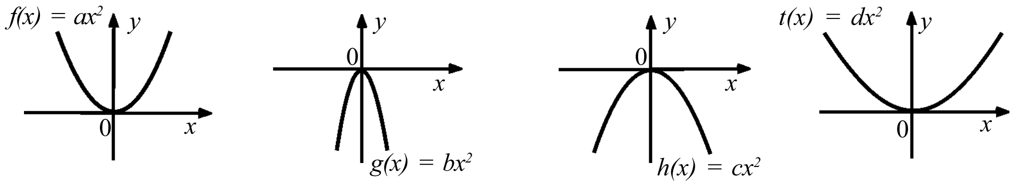


Figura 4.58

a) Señala qué coeficientes son positivos y cuáles son negativos.
b) Ordena de menor a mayor los parámetros a, b, c y d.

8. Escribe la ecuación de una función cuadrática de la forma $y = ax^2$ ($a \neq 0$), si su gráfica pasa por el punto:

a) $P(2; 8)$ b) $R(-2; -2)$ c) $S(1{,}5; 1)$

9. Sea la función $y = -\frac{1}{5}x^2$.

a) Represéntala gráficamente para $-5 \leq x \leq 5$.
b) Determina el conjunto imagen en el tramo representado.
c) Analiza la monotonía para $-5 \leq x \leq 1$.

10.* Determina analíticamente las coordenadas de los puntos de intersección de la parábola $y = 2x^2$ con la recta de ecuación:

a) $y = x$ b) $y = 4x$ c) $y = 8$ d) $5x - y + 3 = 0$

11. Expresa el área de un círculo en función de la longitud de la circunferencia. Traza el gráfico de la función obtenida para $0 \text{ cm} \leq L \leq 10 \text{ cm}$.

12. La relación entre la distancia recorrida y el tiempo empleado por un cuerpo para recorrerla en el movimiento uniformemente acelerado se expresa por $s = \frac{1}{2}at^2$ ($t \geq 0$ s).

a) Traza el gráfico de esta función para $a = 0{,}4 \text{ m/s}^2$ con $0 \text{ s} \leq t \leq 5 \text{ s}$.
b) Determina qué distancia ha recorrido el cuerpo al cabo de un minuto.

4.8 Función cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

¡! Para acceder a su escuela algunos estudiantes como Rey tienen que cruzar un puente sobre un río cuya arcada central es una parábola, como muestra la figura 4.59, que responde a la función cuadrática $y = -0{,}002x^2 + 0{,}2x$.

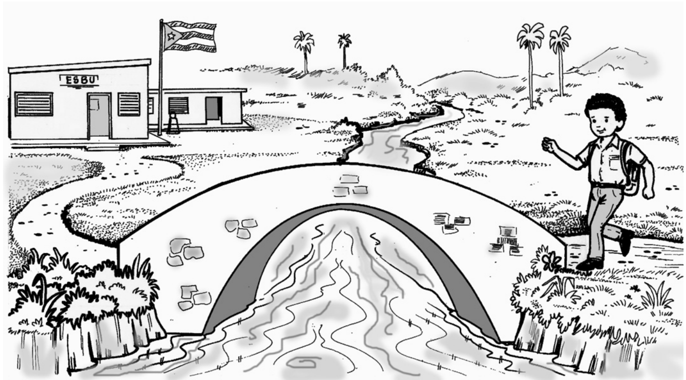


Figura 4.59

La profesora de Rey les orientó *representar* en un sistema de coordenadas rectangulares esta parábola, hallar la *altura máxima* del puente y calcular la *distancia* que hay de la entrada del puente a la salida.

Rey preocupado preguntó a la profesora cómo dar respuesta a estas interrogantes, si solo ha aprendido a representar funciones cuadráticas de la forma $y = ax^2$ ($a \neq 0$) y esta ecuación no tiene esa forma.

Tanto Rey como tú, podrán dar respuesta a estas interrogantes a partir del estudio de este epígrafe, donde estudiarás las funciones cuadráticas de la forma: $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), así como otras que se obtienen a partir de esta.

Ejemplo 1:

Representa en un sistema de coordenadas rectangulares y di las propiedades de las funciones cuyas ecuaciones son:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 8$ b) $g(x) = x^2 - 2x + 1$ c) $h(x) = -x^2 + 2x - 3$
d) $t(x) = x^2 - 9$ e) $s(x) = -x^2 + 4x$

Como ya conoces del epígrafe anterior, para representar las parábolas buscas las coordenadas de varios de sus infinitos puntos confeccionando una tabla, los ubicas en el sistema de coordenadas y los unes.

También desde octavo grado conoces que para representar las funciones lineales se tomaban los llamados "puntos cómodos", o sea, los puntos de intersección de la recta con los ejes de coordenadas. Para lo cual hallabas el *cero* de la función y el valor de n y obtenías los puntos $(x_0; 0)$ y $(0; n)$.

Sin embargo, para representar las *parábolas* también puedes, al igual que hiciste con las rectas, hallar los *puntos de intersección* con cada eje, pero en este caso no son suficientes, necesitas, además, determinar las coordenadas de al menos *dos de sus puntos simétricos* y las coordenadas de su *vértice,* para dar una representación más exacta.

Intersección de la gráfica con el eje de las abscisas

Como recordarás, para hallar el *cero* de la función lineal (intersección de la recta con el eje de las abscisas) sustituyes y por cero en la ecuación $y = mx + n$ y despejabas x.

Recuerda *la definición de cero de una función cuadrática:*

Los elementos del dominio de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) cuyas imágenes toman valor cero, se denominan **ceros** de esta función.

Cuando sustituyes y por cero obtienes la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, que como ya estudiaste puede tener dos soluciones, una solución o ninguna solución real. De ahí que la función cuadrática puede tener *dos ceros, un cero* o *no tener ceros.*

O sea, la existencia de los ceros de una función cuadrática depende del valor del *discriminante* $D = b^2 - 4ac$ de la ecuación cuadrática que la define.

Intersección de la gráfica con el eje de las ordenadas

Para hallar la intersección con el eje de las ordenadas, sustituyes x por cero en la ecuación y realizas los cálculos que se indiquen.

O sea, $y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$.

Obtención de dos puntos simétricos

Como ya sabes, dos puntos simétricos de una parábola tienen *igual ordenada,* por lo que sustituyes en la ecuación general la ordenada por un valor cualquiera de su imagen y determinas las abscisas a las que les corresponde ese valor.

Como toda parábola corta al eje de las y en $y = c$, puedes hallar las abscisas de puntos simétricos a los que les corresponde dicha ordenada de la forma siguiente:

$ax^2 + bx + c = c$ (sustituyes y por $\boldsymbol{c}$ en la ecuación general)

$ax^2 + bx = 0$ (reduces los términos semejantes)

$x(ax + b) = 0$ (factorizas el binomio obtenido)

$x_1 = 0$ o $x_2 = -\dfrac{b}{a}$ (obtienes las abscisas de los dos puntos simétricos)

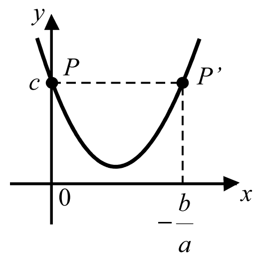


Figura 4.60

Los dos puntos simétricos buscados tienen coordenadas $P(0; c)$ y $P'\left(-\dfrac{b}{a}; c\right)$ (fig. 4.60).

Coordenadas del vértice

Como ya sabes, el vértice de una parábola está situado sobre su eje de simetría y, por tanto, su *abscisa* será el *punto medio* de las *abscisas* de dos puntos de la parábola que sean *simétricos* (fig. 4.61). Si tomas como referencia los dos puntos simétricos obtenidos en el paso anterior, cuyas abscisas son 0 y $-\frac{b}{a}$, la abscisa del vértice se puede hallar de la forma siguiente:

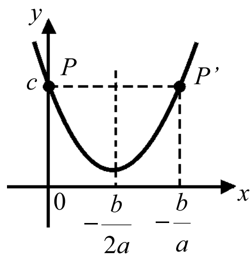


Figura 4.61

$$x_v = \frac{0+\left(-\frac{b}{a}\right)}{2} = \frac{-b}{2a} \text{ (hallando el valor medio entre 0 y } -\frac{b}{a}\text{)}$$

Luego, la abscisa del vértice será $x_v = \frac{-b}{2a}$.

Para hallar la ordenada del vértice, y_v, sustituyes el valor de x_v obtenido en la ecuación de la función cuadrática y realizas los cálculos indicados.

Observa ahora cómo aplicar cada uno de estos pasos en el ejemplo propuesto.

Solución:

a) 1. Hallas los ceros de la función $f(x) = x^2 - 2x - 8$.

$x^2 - 2x - 8 = 0$ (sustituyes y por cero)
$(x - 4)(x + 2) = 0$ (factorizas el trinomio)
$x - 4 = 0$ o $x + 2 = 0$ (igualas cada factor a cero)
$x_1 = 4$ o $x_2 = -2$ (despejas x en cada ecuación)

La parábola interseca al eje x en dos puntos (4; 0) y (–2; 0).

2. Determinas la intersección de la parábola con el eje y.
Para hallar este punto, que como sabes tiene la forma (0; y), sustituyes x por cero en la ecuación.

$y = 0^2 - 2 \cdot 0 - 8$ (sustituyes x por cero)
$y = 0 - 0 - 8$ (efectúas las operaciones indicadas)
$y = -8$

La parábola interseca al eje y en el punto (0; –8).

Nota: Observa que el valor de y del punto (0; –8) coincide con el valor de c en la ecuación de la función, por lo que en la práctica se puede escribir directamente las coordenadas de dicho punto (0; c).

3. Determinas las coordenadas del vértice.
Para determinar las coordenadas del vértice, se procede de la manera siguiente:

- Hallas la *abscisa* del vértice por la fórmula $x_v = \frac{-b}{2a}$:

En la ecuación $y = x^2 - 2x - 8$, $a = 1$ y $b = -2$.

$$x_v = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} \text{ (sustituyes los valores de } a \text{ y } b\text{)}$$

$$x_v = \frac{2}{2} = 1 \text{ (efectúas las operaciones indicadas)}$$

Luego, $x_v = 1$.

- Hallas la *ordenada* del vértice:

Para hallar la ordenada, sustituyes el valor hallado de la abscisa en la ecuación de la función y efectúas las operaciones indicadas:

$y_v = 1^2 - 2 \cdot 1 - 8$ (sustituyes x_v en la ecuación)
$y_v = 1 - 2 - 8 = -9$ (efectúas las operaciones indicadas).

Luego, $y_v = -9$.

Las coordenadas del vértice son $V(1; -9)$.

4. Determinas las coordenadas de dos puntos simétricos de la parábola.
Para hallar las coordenadas de dos puntos simétricos, tomas dos valores del dominio que se encuentren a la misma distancia de la abscisa del vértice (x_v).
Como $x_v = 1$, puedes escoger, por ejemplo el -1 y el 3 que están a dos unidades del 1.
$y = f(-1) = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 8 = 1 + 2 - 8 = -5$ (sustituyes y efectúas las operaciones indicadas en cada caso)
$y = f(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 - 8 = 9 - 6 - 8 = -5$

Las coordenadas de dos puntos simétricos son $(-1; -5)$ y $(3; -5)$

Nota: Recuerda que como son puntos simétricos tienen el mismo valor de y, luego en la práctica solo sustituyes en la ecuación una de las abscisas seleccionadas.

5. Representas los puntos determinados en un sistema de coordenadas rectangulares y unes los puntos (fig. 4.62).
Propiedades:

Dominio: $x \in \mathbb{R}$
Imagen: $y \in \mathbb{R}$; $y \geq -9$ (el menor valor que toma la y es la $y_v = -9$)
Ceros: $x_1 = -2$ o $x_2 = 4$ (tiene dos ceros)
Vértice: $V(1; -9)$
Monotonía: para $x \leq 1$ monótona decreciente
para $x \geq 1$ monótona creciente
(para escribir la monotonía, se toma como referencia la x_v)

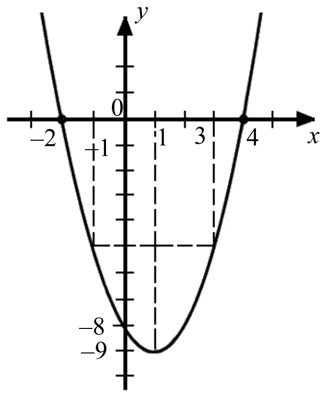


Figura 4.62

Valor mínimo: $y = -9$ (es la y del vértice y se alcanza para $x = 1$)
Eje de simetría: $x = 1$ (coincide con x_v)

Para comprobar si la gráfica está correcta, puedes verificar que:

Como $a > 0$, abre hacia arriba.
Los ceros están a la misma distancia de x_v, o sea, del eje de simetría.

b) 1. Hallas los ceros de la función $g(x) = x^2 - 2x + 1$.

$x^2 - 2x + 1 = 0$ (sustituyes y por cero)
$(x - 1)^2 = 0$ (factorizas el trinomio)
$x - 1 = 0$ (igualas el factor a cero)
$x_1 = 1$ (despejas x)

La parábola interseca al eje x en el punto (1; 0), o sea, tiene un solo cero.

2. Determinas la intersección de la parábola con el eje y.

$y = 0^2 - 2 \cdot 0 + 1$ (sustituyes x por cero)
$y = 0 - 0 + 1$ (efectúas las operaciones indicadas)
$y = 1$

Como viste en el inciso anterior, si $c = 1$, el punto buscado es (0; 1).

La parábola interseca al eje y en el punto (0; 1).

3. Determinas las coordenadas del vértice.
En la ecuación $y = x^2 - 2x + 1$, $a = 1$ y $b = -2$.

- Hallas la abscisa:

$x_v = \dfrac{-(-2)}{2 \cdot 1}$ (sustituyes los valores de a y b)

$x_v = \dfrac{2}{2} = 1$ (efectúas las operaciones indicadas)

Luego, $x_v = 1$.

- Hallas la ordenada del vértice:

Para hallar la ordenada, se sustituye el valor hallado de la abscisa en la ecuación de la función:

$y_v = 1^2 - 2 \cdot 1 + 1$ (sustituyes x_v en la ecuación)
$y_v = 1 - 2 + 1 = 0$ (efectúas las operaciones indicadas)

Luego, $y_v = 0$.

Las coordenadas del vértice son $V(1; 0)$.

4. Determinas las coordenadas de dos puntos simétricos de la parábola.
   Para hallar las coordenadas de dos puntos simétricos, tomas dos valores del dominio que se encuentren a la misma distancia de la abscisa del vértice (x_v).
   Como $x_v = 1$, puedes escoger, por ejemplo, el –1 y el 3.

   $g(-1) = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 1 = 1 + 2 + 1 = 4$ (sustituyes y efectúas las operaciones indicadas)
   $g(-1) = g(3) = 4$
   Las coordenadas de dos puntos simétricos son (–1; 4) y (3; 4).

5. Representas los puntos determinados en un sistema de coordenadas rectangulares y unes los puntos (fig. 4.63).
   Propiedades:

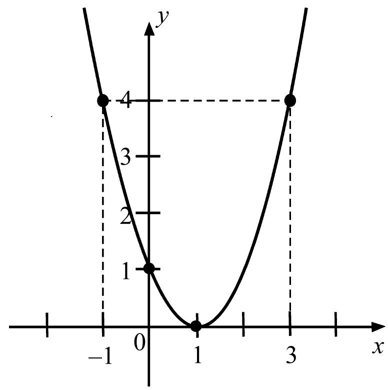


Figura 4.63

   Dominio: $x \in \mathbb{R}$
   Imagen: $y \in \mathbb{R}$; $y \geq 0$ (el menor valor que toma y es $y_v = 0$)
   Ceros: $x_1 = 1$ (tiene un solo cero)
   Vértice: $V(1; 0)$
   Monotonía: para $x \leq 1$ monótona decreciente
   para $x \geq 1$ monótona creciente
   (para escribir la monotonía, se toma como referencia x_v)
   Valor mínimo: $y = 0$ (es la y del vértice y se alcanza para $x = 1$)
   Eje de simetría: $x = 1$ (coincide con x_v)
   Nota que cuando la ecuación de la función es un trinomio cuadrado perfecto, la parábola toca al eje x en un solo punto que coincide con su vértice.

c) 1. Hallas los ceros de la función $h(x) = -x^2 + 2x - 3$.
   $-x^2 + 2x - 3 = 0$ (sustituyes y por cero)
   Este trinomio a simple vista parece no tener factorización y la ecuación no tendría solución, pero es necesario comprobarlo y ya conoces que para investigar la cantidad de soluciones de una ecuación cuadrática aplicas el *discriminante*.
   $D = b^2 - 4ac$ ($a = -1$; $b = 2$ y $c = -3$)
   $D = 2^2 - 4(-1)(-3) = 4 - 12 = -8 < 0$
   Como $D < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales y la función no tiene ceros.
   La parábola no interseca al eje x.

2. Determinas la intersección de la parábola con el eje y.
   En la ecuación $c = -3$.
   La parábola interseca al eje y en el punto (0; –3).

3. Determinas las coordenadas del vértice.

- Hallas la abscisa:

  En la ecuación $y = -x^2 + 2x - 3$, $a = -1$ y $b = 2$.

  $x_v = \dfrac{-2}{2 \cdot (-1)}$ (sustituyes los valores de a y b)

  $x_v = \dfrac{-2}{-2} = 1$ (efectúas las operaciones indicadas)

  Luego, $x_v = 1$.

- Hallas la ordenada del vértice:

  Para hallar la ordenada, se sustituye el valor hallado de la abscisa en la ecuación de la función:

  $y_v = -1^2 + 2 \cdot 1 - 3$ (sustituyes x_v en la ecuación)
  $y_v = -1 + 2 - 3 = -2$ (efectúas las operaciones indicadas)
  Luego, $y_v = -2$.
  Las coordenadas del vértice son $V(1; -2)$.

4. Determinas las coordenadas de dos puntos simétricos de la parábola.
   Como $x_v = 1$, puedes escoger, por ejemplo, el –2 y el 4.

   $h(-2) = -(-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 3 = -4 - 4 - 3 = -11$ (sustituyes y efectúas las operaciones indicadas)
   $h(-2) = h(4) = -11$

   Las coordenadas de dos puntos simétricos son $(-2; -11)$ y $(4; -11)$.

5. Representas los puntos determinados en un sistema de coordenadas rectangulares y unes los puntos (fig. 4.64).
   Propiedades:

   Dominio: $x \in \mathbb{R}$
   Imagen: $y \in \mathbb{R}$; $y \leq -2$ (el mayor valor que toma y es $y_v = -2$)
   Ceros: No tiene (no interseca al eje x)
   Vértice: $V(1; -2)$
   Monotonía: para $x \leq 1$ monótona creciente
   para $x \geq 1$ monótona decreciente
   (para escribir la monotonía se toma como referencia x_v)
   Valor máximo: $y = -2$ (es la y del vértice y se alcanza para $x = 1$)
   Eje de simetría: $x = 1$ (coincide con x_v)

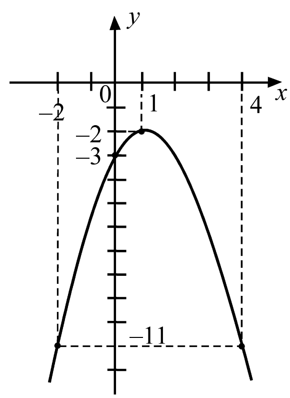


Figura 4.64

d) 1. Hallas los ceros de la función $t(x) = x^2 - 9$.

$$x^2 - 9 = 0 \text{ (sustituyes } y \text{ por cero)}$$
$$(x - 3)(x + 3) = 0 \text{ (factorizas el trinomio)}$$
$$x - 3 = 0 \text{ o } x + 3 = 0 \text{ (igualas cada factor a cero)}$$
$$x_1 = 3 \text{ o } x_2 = -3 \text{ (despejas } x \text{ en cada ecuación)}$$

La parábola interseca al eje x en los puntos (3; 0) y (–3; 0).

2. Determinas la intersección de la parábola con el eje y.
   En la ecuación dada $c = -9$.
   La parábola interseca al eje y en el punto (0; –9).

3. Determinas las coordenadas del vértice.

   • Hallas la abscisa:
   En la ecuación $y = x^2 - 9$, $a = 1$ y $b = 0$.

   $x_v = \dfrac{-0}{2 \cdot 1}$ (sustituyes los valores de a y b)

   $x_v = \dfrac{0}{2} = 0$ (efectúas las operaciones indicadas)

   Luego, $x_v = 0$.

   • Hallas la ordenada del vértice:

   Para hallar la ordenada, se sustituye el valor hallado de la abscisa en la ecuación de la función:

   $y_v = 0^2 - 9$ (sustituyes x_v en la ecuación)
   $y_v = 0 - 9 = -9$ (efectúas las operaciones indicadas)

   Luego, $y_v = -9$.
   Las coordenadas del vértice son $V(0; -9)$.

4. Determinas las coordenadas de dos puntos simétricos de la parábola.
   Como $x_v = 0$, puedes escoger, por ejemplo, el –2 y el 2.
   $t(-2) = (-2)^2 - 9 = 4 - 9 = -5$ (sustituyes y efectúas las operaciones indicadas)
   $t(-2) = t(2) = -5$
   Las coordenadas de dos puntos simétricos son (–2; –5) y (2; –5).

5. Representas los puntos determinados en un sistema de coordenadas rectangulares y unes los puntos (fig. 4.65).
   Propiedades:

   Dominio: $x \in \mathbb{R}$
   Imagen: $y \in \mathbb{R}$; $y \geq -9$ (el menor valor que toma y es $y_v = -9$)
   Ceros: $x_1 = -3$ o $x_2 = 3$ (tiene dos ceros)
   Vértice: $V(0; -9)$
   Monotonía: para $x \leq 0$ monótona decreciente
   para $x \geq 0$ monótona creciente
   (para escribir la monotonía se toma como referencia x_v)
   Valor mínimo: $y = -9$ (es la y del vértice y se alcanza para $x = 0$)
   Eje de simetría: $x = 0$ (coincide con x_v)

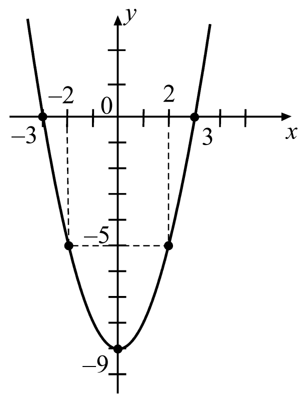


Figura 4.65

e) 1. Hallas los ceros de la función $s(x) = -x^2 + 4x$

$-x^2 + 4x = 0$ (sustituyes y por cero)
$-x(x - 4) = 0$ (factorizas el trinomio)
$-x = 0$ o $x - 4 = 0$ (igualas cada factor a cero)
$x_1 = 0$ o $x_2 = 4$ (despejas x en cada ecuación)

La parábola interseca al eje x en los puntos (0; 0) y (4; 0).

2. Determinas la intersección de la parábola con el eje y.
De la ecuación se observa que $c = 0$.
La parábola interseca al eje y en el punto (0; 0).

3. Determinas las coordenadas del vértice.

- Hallas la abscisa:
En la ecuación $y = -x^2 + 4x$, $a = -1$ y $b = 4$.

$x_v = \dfrac{-4}{2\cdot(-1)}$ (sustituyes los valores de a y b)

$x_v = \dfrac{-4}{-2} = 2$ (efectúas las operaciones indicadas)

Luego, $x_v = 2$.
- Hallas la ordenada del vértice:

Para hallar la ordenada, se sustituye el valor hallado de la abscisa en la ecuación de la función:

$y_v = -2^2 + 4 \cdot 2$ (sustituyes x_v en la ecuación)
$y_v = -4 + 8 = 4$ (efectúas las operaciones indicadas).

Luego, $y_v = 4$.

Las coordenadas del vértice son $V(2; 4)$.

4. Determinas las coordenadas de dos puntos simétricos de la parábola.

Como $x_v = 2$, puedes escoger, por ejemplo, el -1 y el 5.
$s(5) = -5^2 + 4 \cdot 5 = -25 + 20 = -5$ (sustituyes y efectúas las operaciones indicadas)
$s(-1) = s(5) = -5$

Las coordenadas de dos puntos simétricos son $(-1; -5)$ y $(5; -5)$.

5. Representas los puntos determinados en un sistema de coordenadas rectangulares y unes los puntos (fig. 4.66).
Propiedades:

Dominio: $x \in \mathbb{R}$

Imagen: $y \in \mathbb{R}$; $y \leq 4$ (el mayor valor que toma y es $y_v = 4$)
Ceros: $x_1 = 0$ o $x_2 = 4$ (tiene dos ceros)
Vértice: $V(2; 4)$
Monotonía: para $x \leq 2$ monótona creciente
para $x \geq 2$ monótona decreciente
(para escribir la monotonía, se toma como referencia x_v)
Valor máximo: $y = 4$ (es la y del vértice y se alcanza para $x = 2$)
Eje de simetría: $x = 2$ (coincide con x_v)

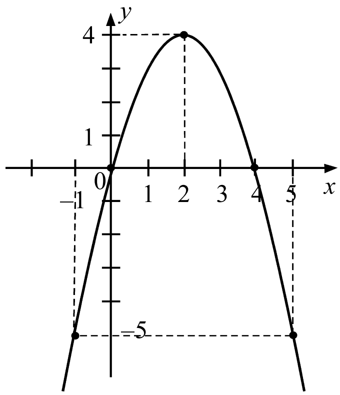


Figura 4.66

Recuerda que:

Para representar gráficamente una parábola:

1. Calculas los ceros, si los posee, aplicando la factorización o la fórmula general.
2. Determinas la intersección con el eje y sustituyendo x por cero en la ecuación o tomando el valor de c en la ecuación dada.
3. Hallas las coordenadas del vértice: x_v utilizando la fórmula $x_v = \frac{-b}{2a}$; mientras que y_v, sustituyendo x_v en la ecuación de la función, o sea, calculando $f(x_v)$.
4. Calculas las coordenadas de algunos puntos simétricos respecto al eje de la parábola.
5. Representas los puntos determinados, en un sistema de coordenadas rectangulares.
6. Unes los puntos representados mediante una parábola.

Recuerda que:

En una función cuadrática se cumple que:

- Su representación gráfica es una *parábola* que abre hacia *arriba* si $a > 0$ y abre hacia *abajo,* si $a < 0$.
- Su *dominio,* siempre que no se indique otra cosa, es el conjunto de los *números reales.*
- Su conjunto *imagen* son los números reales *mayores o iguales* que y_v, si $a > 0$ y *menores o iguales* que la y_v, si $a < 0$.
- El *vértice* es el *único punto* de la parábola:

  en el que a un valor de y le corresponde un solo valor de x;
  por donde pasa el eje de simetría.
- Tiene: *dos ceros* si $D > 0$, *un cero* si $D = 0$, y *ningún cero* si $D < 0$.
- Si $a > 0$, es *monótona decreciente* para $x \leq x_v$ y *monótona creciente* para $x \geq x_v$.
  Si $a < 0$, es *monótona creciente* para $x \leq x_v$ y *monótona decreciente* para $x \geq x_v$.
- Tiene un *mínimo* $y = y_v$, si $a > 0$ y un *máximo* $y = y_v$, si $a < 0$.
- Su gráfica tiene un *eje de simetría* que es una recta vertical cuya ecuación es $x = \frac{-b}{2a}$.

Función cuadrática

El estudio de las funciones cuadráticas resulta de interés no solo en la matemática, *sino también en otras áreas del conocimiento como por ejemplo: en* física, *la trayectoria de una pelota lanzada al aire, la trayectoria que describe un río al caer desde lo alto de una montaña, la forma que toma una cuerda floja sobre la cual se desplaza un equilibrista, el recorrido desde el origen, con respecto al tiempo transcurrido, cuando una partícula es lanzada con una velocidad inicial, tienen forma de* parábolas.

Puede ser aplicada en la ingeniería civil *para resolver problemas específicos, tomando como punto de apoyo la ecuación de segundo grado, en la construcción de puentes colgantes que se encuentran suspendidos en uno de los cables amarrados a dos torres (fig. 4.67).*

Figura 4.67

Los biólogos *utilizan las funciones cuadráticas para estudiar los efectos nutricionales de los organismos y la variación de la población de una determinada especie que responde a este tipo de función, para obtener así, información sin necesidad de recurrir a la experimentación.*

En economía, *las funciones cuadráticas también ayudan a predecir ganancias y pérdidas en los negocios (fig. 4.68).*

Figura 4.68

En arquitectura, *para dar mayor belleza y resistencia a las construcciones.*

Muchos de los objetos que usamos hoy en día, desde los carros hasta los relojes, no existirían si alguien, en alguna parte, no hubiera aplicado funciones cuadráticas para su diseño.

R¡! Ahora ya estás en condiciones junto con Rey de dar respuesta a la situación inicial de este epígrafe, la cual te recordamos más sintetizada en forma de ejemplo.

Ejemplo 2:

El arco de un puente es una parábola que responde a la función cuadrática de ecuación $y = -0{,}002x^2 + 0{,}2x$. Considerando el eje horizontal sobre la superficie plana que contiene la entrada y salida del puente:

a) Representa gráficamente la parábola que describe el arco del puente. (Considera las divisiones de cada eje en metros).
b) Halla, en metro, la altura máxima que alcanza el puente.
c) Calcula la distancia que hay de la entrada del puente a la salida.

Solución:

a) Hallas los ceros:

$-0{,}002x^2 + 0{,}2x = 0$

$x(-0{,}002x + 0{,}2) = 0$

$x = 0$ o $-0{,}002x + 0{,}2 = 0$

$x_1 = 0$ o $x_2 = 100$

Hallas las coordenadas del vértice:

$a = -0{,}002$ y $b = 0{,}2$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-0{,}2}{2\cdot(-0{,}002)} = 50$$

$y_v = -0{,}002 \cdot (50)^2 + 0{,}2 \cdot (50)$

$y_v = -5 + 10 = 5$

$V(50; 5)$

Hallas la intersección con y:

$y = -0{,}002 \cdot (0)^2 + 0{,}2 \cdot 0$

$y = 0 + 0 = 0$

$(0; 0)$

Representación gráfica en la figura 4.69.

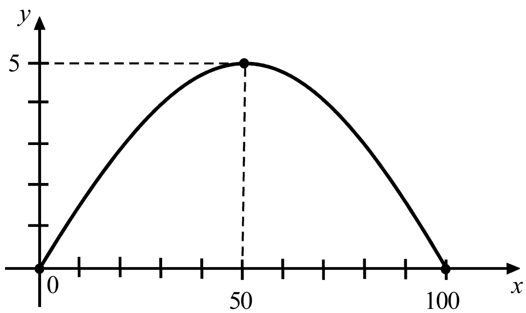


Figura 4.69

Puedes comprobar que:

- Como $a < 0$, la parábola abre hacia abajo.
- Los ceros están a la misma distancia de la abscisa del vértice.
- Tiene dos ceros, ya que $D > 0$.

b) La altura máxima del puente es de 5 m.

La altura máxima del puente coincide con el valor máximo de la parábola, que como sabes es la ordenada del vértice.

c) La distancia que hay de la entrada a la salida del puente es de 100 m.

La entrada del puente está sobre uno de los ceros y la salida sobre el otro cero.

Traslación de la parábola en la dirección de los ejes de coordenadas

Ya has aprendido a representar funciones cuadráticas cuyas ecuaciones son de la forma $y = ax^2$; $y = ax^2 + bx$; $y = ax^2 + c$ y $y = ax^2 + bx = c$, donde utilizaste el mismo procedimiento.

Sin embargo, es bueno que conozcas, que las parábolas que describen las funciones cuyas ecuaciones tienen las formas antes descritas, se pueden obtener a partir de la parábola que describe la función $y = x^2$.

Para analizar esta situación, te invito a situar en un mismo sistema de coordenadas rectangulares la parábola correspondiente a la función $y = x^2$, y las correspondientes a las funciones analizadas en el ejemplo 1:

$f(x) = x^2 - 2x - 8$; $g(x) = x^2 - 2x + 1$ y $t(x) = x^2 - 9$ (fig. 4.70).

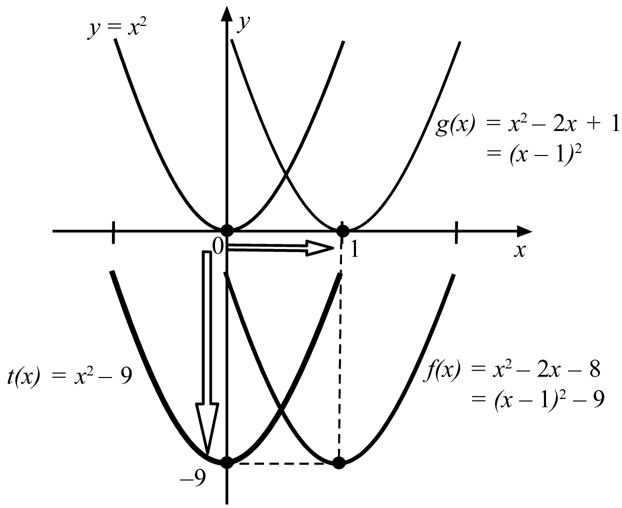


Figura 4.70

Observa que:

1. La función g tiene la forma $y = (x + d)^2$, donde $d = -1$. En este caso la gráfica de la función g se trasladó, en la dirección del eje x, *una unidad a la derecha.*
   De manera general, los gráficos de las funciones de la forma $y = (x + d)^2$ se obtienen por una *traslación* del gráfico de $y = x^2$ en la dirección del eje x. Si $d < 0$, hacia la derecha; si $d > 0$ hacia, la izquierda.
2. La función t tiene la forma $y = x^2 + e$, donde $e = -9$. En este caso la gráfica de la función t se trasladó, en la dirección del eje y, *nueve unidades hacia abajo.*
   De manera general, los gráficos de las funciones de la forma $y = x^2 + e$ se obtienen por una *traslación* del gráfico de $y = x^2$ en la dirección del eje y. Si $e > 0$, hacia arriba; si $e < 0$, hacia abajo.
   Nota que aquí hemos utilizado como parámetro la letra e en lugar de la letra c.
3. La función f tiene la forma $y = (x + d)^2 + e$, donde $d = -1$ y $e = -9$. En este caso la gráfica de la función h se trasladó, en la dirección del eje x, *una unidad a la derecha* y en la dirección del eje y, *nueve unidades hacia abajo.*
   De manera general, los gráficos de las funciones de la forma $y = (x + d)^2 + e$ se obtienen aplicándole a la parábola $y = x^2$ una composición de *dos traslaciones*

en la dirección de los ejes de coordenadas, teniendo en cuenta los casos anteriores.

Como puedes apreciar, las ecuaciones de las funciones cuadráticas pueden estar expresadas en la forma $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ o $y = (x + d)^2 + e$, donde se pueden observar las traslaciones analizadas anteriormente.

Ya sabes cómo representar las funciones del tipo $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ y señalar sus propiedades, pero para trabajar la función cuadrática expresada en la forma $y = (x + d)^2 + e$ es bueno que tengas en cuenta que:

- El *vértice* de la parábola no es necesario calcularlo, se obtiene atendiendo a las traslaciones, de la siguiente forma $V(-d; e)$, o sea, la *abscisa* es el *opuesto del parámetro d*, mientras la *ordenada* coincide con el valor del parámetro *e*.
- Para calcular los *ceros* puedes expresar la ecuación en la forma $y = ax^2 + bx + c$ efectuando el cuadrado del binomio y reduciendo los términos semejantes o *despejando la x* directamente en la ecuación $y = (x + d)^2 + e$. También puedes, si la expresión es una diferencia de dos cuadrados, factorizarla como ya sabes.

A continuación observa cómo aplicar estas recomendaciones para la función cuadrática $y = (x - 2)^2 - 4$.

Por ejemplo, como $d = -2$ se toma su opuesto y $e = -4$, con su signo. Luego, el vértice de la parábola de esta función es $V(2; -4)$.

Para hallar los ceros:

Primera vía:

$y = x^2 - 4x + 4 - 4$
$y = x^2 - 4x$
$0 = x^2 - 4x$
$0 = x(x - 4)$
$x_1 = 0$ o $x_2 = 4$

Segunda vía:

$(x - 2)^2 - 4 = 0$
$(x - 2)^2 = 4$
$x - 2 = \pm\sqrt{4}$
$x - 2 = \pm 2$
$x - 2 = 2$ o $x - 2 = -2$
$x_1 = 4$ o $x_2 = 0$

Tercera vía:

$(x - 2)^2 - 4 = 0$
$(x - 2 + 2)(x - 2 - 2) = 0$
$x(x - 4) = 0$
$x = 0$ o $x - 4 = 0$
$x_1 = 0$ o $x_2 = 4$

De la historia…

El primero en usar el término parábola *fue el griego Apolonio de Perge (fig. 4.71) (262-190 a.n.e.) en su tratado* Cónicas, *considerada obra cumbre sobre el tema de las matemáticas griegas.*


Figura 4.71

Es Apolonio quien menciona que un espejo parabólico *refleja de forma paralela los rayos emitidos desde su foco, propiedad usada hoy en día en las antenas satelitales. La parábola también fue estudiada por Arquímedes, nuevamente en la búsqueda de una solución para un problema famoso: la cuadratura del círculo, dando como resultado el libro* Sobre la cuadratura de la parábola.

Como ya conoces de la función lineal, es de interés en el trabajo con funciones, además de realizar su representación gráfica y conocer sus propiedades, escribir su ecuación para analizar el comportamiento posterior de los distintos fenómenos que se grafican mediante este tipo de curvas.

Veamos mediante el ejemplo siguiente algunos de los casos que se te pueden presentar.

Ejemplo 3:

Escribe la ecuación de una función cuadrática de la forma que se indica y con los elementos dados en cada inciso.

a) $y = (x + d)^2 + e$ y de vértice $V(–1; –3)$.
b) $y = x^2 + bx + c$ y tiene vértice $V(2; –1)$.
c) $y = x^2 + bx + c$ y su representación gráfica es la figura 4.72.
d) $y = –x^2 + bx + c$ y su representación gráfica es la figura 4.73.
e) $y = x^2 + bx + c$ y su representación gráfica pasa por los puntos $A(1; 1)$ y $B(4; 7)$.
f) $y = ax^2 + bx + c$ y su gráfica es la figura 4.74.

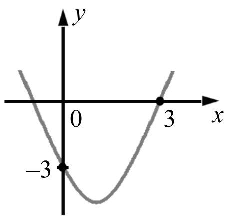


Figura 4.72

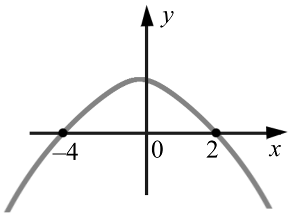


Figura 4.73

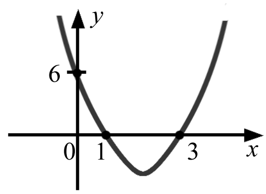


Figura 4.74

Solución:

a) $y = (x + d)^2 + e$ y de vértice $V(–1; –3)$.
Como sabes, las coordenadas del vértice de una parábola son $V(–d; e)$, de aquí se deduce que $d = 1$ y $e = –3$. Sustituyes en la ecuación dada los valores de d y e y obtienes la ecuación $y = (x + 1)^2 – 3$.

b) $y = x^2 + bx + c$ y tiene vértice $V(2; –1)$.
Escribes primero la ecuación en la forma $y = (x + d)^2 + e$, o sea, $y = (x – 2)^2 – 1$ y ahora la transformas a la forma pedida.
$y = (x – 2)^2 – 1 = x^2 – 4x + 4 – 1 = x^2 – 4x + 3$.
Luego, la ecuación pedida es $y = x^2 – 4x + 3$.

Otra vía de solución:

De la ecuación dada se conoce que $a = 1$ y la abscisa del vértice es 2, por lo que puedes proceder de la manera siguiente:

- Escribes la fórmula para hallar la abscisa del vértice: $x_v = \dfrac{-b}{2a}$.

- Sustituyes x_v y el valor de a en la ecuación: $2 = \frac{-b}{2 \cdot 1}$.
- Calculas el producto en el denominador y despejas b: $2 = \frac{-b}{2}$; $-b = 4$ y $b = -4$.

  De esta manera la ecuación va quedando así: $y = x^2 - 4x + c$, por lo que falta hallar el valor de c.

- Sustituyes las coordenadas del vértice en la ecuación: $-1 = 2^2 - 4 \cdot 2 + c$
- Efectúas la potencia y el producto indicados: $-1 = 4 - 8 + c$
- Despejas c: $c = -1 + 8 - 4$
- Calculas el valor de c: $c = -5 + 8 = 3$
- Escribes la ecuación pedida: $y = x^2 - 4x + 3$.

c) $y = x^2 + bx + c$ y su representación gráfica es la figura 4.72.
En este caso no conoces las coordenadas del vértice como en los incisos anteriores. De la gráfica puedes extraer dos puntos (0; –3) y (3; 0) y de la ecuación se deduce que $a = 1$ y del punto de intersección de la gráfica con el eje y obtienes el valor de c, o sea, $c = -3$.
La ecuación toma la forma $y = x^2 + bx - 3$, por lo que falta hallar el valor de b para completar la ecuación:

- Sustituyes las coordenadas del punto (3; 0) que es uno de los ceros de la función: $0 = 3^2 + b \cdot 3 - 3$.
- Efectúas la potencia: $0 = 9 + b \cdot 3 - 3$.
- Efectúas la sustracción: $0 = 6 + 3b$.
- Despejas b: $b = \frac{-6}{3}$.
- Calculas b: $b = -2$.
- Escribes la ecuación pedida: $y = x^2 - 2x - 3$.

d) $y = -x^2 + bx + c$ y su representación gráfica es la figura 4.73.
En este inciso se te ofrecen los ceros de la parábola: $x_1 = -4$ y $x_2 = 2$.
Recuerda que para hallar los ceros:

- Sustituyes en la ecuación la y por cero.
- Factorizas e igualas cada factor a cero.
- Despejas la x obteniendo los ceros.

Ahora estás en una situación inversa, o sea, conoces los ceros y quieres obtener la ecuación que los originó. Para lo cual realizas el procedimiento de atrás hacia delante.

- Partes de la ecuación con el trinomio expresado como producto $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- De la ecuación dada se obtiene que $a = -1$, por lo que sustituyes a y los ceros en la ecuación: $y = -(x + 4)(x - 2)$.

Nota que se ha sustituido en cada factor el opuesto de cada cero.

- Efectúas el producto indicado: $y = -(x^2 + 2x - 8)$.
- Eliminas el paréntesis: $y = -x^2 - 2x + 8$.
- Escribes la ecuación pedida: $y = -x^2 - 2x + 8$.

Otra vía:

Como la parábola es *simétrica,* los ceros están a la misma distancia de la abscisa del vértice, esto te permite hallar dicha abscisa:

- Hallas la abscisa del vértice: de – 4 a 2 hay 6 unidades y la abscisa está a la mitad de ellos, divides 6 : 2 = 3, por lo que cada cero está a 3 unidades de la abscisa. Cuentas 3 unidades a la izquierda de 2 o 3 unidades a la derecha de – 4 y obtienes que $x_v = -1$.
- Sustituyes en la fórmula de x_v la abscisa hallada y el valor de a:

$$x_v = \frac{-b}{2a}; -1 = \frac{-b}{2\cdot(-1)} = \frac{-b}{-2} = \frac{b}{2}; b = -2$$

- La ecuación toma la forma: $y = -x^2 - 2x + c$.
- Sustituyes las coordenadas de *cualquiera* de los puntos que se obtienen de la gráfica y despejas el valor de c:

Sustituyendo (2; 0): $y = -x^2 - 2x + c$

$$0 = -(2)^2 - 2\cdot 2 + c$$
$$0 = -4 - 4 + c$$
$$0 = -8 + c$$
$$c = 8$$

Puedes comprobar que con el punto (– 4; 0) se obtiene igual resultado para c.

e) $y = x^2 + bx + c$ y su representación gráfica pasa por los puntos $A(1; 1)$ y $B(4; 7)$
En este caso conoces dos puntos de la representación gráfica que *no son* vértice, ceros, ni intersección con los ejes y de la ecuación se obtiene que $a = 1$.
Faltarían por hallar los valores de los parámetros b y c.
Como los puntos de una parábola satisfacen la ecuación de la función cuadrática, puedes proceder de la manera siguiente:

- Sustituyes las coordenadas de ambos puntos en la ecuación:
  Para el punto $A(1; 1)$: $1 = 1^2 + b\cdot 1 + c$
  Para el punto $B(4; 7)$: $7 = 4^2 + b\cdot 4 + c$
- Efectúas los cuadrados: $1 = 1 + b + c$
  $7 = 16 + 4b + c$
- Transpones al otro miembro el 1 y el 16 y efectúas la sustracción, formando un *sistema de dos ecuaciones* con dos incógnitas que aprendiste a resolver en este grado:

$$b + c = 0$$
$$\underline{4b + c = -9}$$

Puedes utilizar cualquiera de los métodos de resolución estudiados. Aquí te lo mostramos utilizando el método de reducción:

$$\begin{array}{r} b + c = 0 \\ 4b + c = -9 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} b + c = 0 \ /(-1) & \text{(I)} \\ 4b + c = -9 & \text{(II)} \\ \hline -b - \cancel{c} = 0 & \text{multiplicas por } (-1) \text{ la ecuación (I) y calculas} \\ 4b + \cancel{c} = -9 & \text{término a término} \\ \hline 3b = -9 & \\ \boxed{b = -3} & \end{array}$$

Sustituyes $b = -3$ en (I):

$$-3 + c = 0$$
$$c = 3$$

- Escribes la ecuación pedida: $y = x^2 - 3x + 3$.

  Puedes comprobar que el resultado es correcto verificando si los puntos dados satisfacen la ecuación hallada.

f) $y = ax^2 + bx + c$ y su gráfica es la figura 4.74.
En este inciso se te ofrecen los ceros de la parábola, $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$ y la intersección con el eje y es 6, luego $c = 6$, no conoces los valores de a y b.

- Partes de la ecuación con el trinomio expresado como producto como en el inciso d. $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Sustituyes los ceros en la ecuación: $y = a\,(x - 1)(x - 3)$.

  Nota que se ha sustituido en cada factor el opuesto de cada cero.

- Efectúas el producto indicado: $y = a(x^2 - 4x + 3)$.
- Sustituyes las coordenadas del punto (0; 6) en la ecuación obtenida: $6 = a(0^2 - 4 \cdot 0 + 3)$
- Efectúas las operaciones dentro del paréntesis: $6 = 3a$.
- Despejas y calculas el valor de a: $a = 6 : 3 = 2$
- Sustituyes en la ecuación: $y = 2(x^2 - 4x + 3)$.
- Efectúas el producto: $y = 2x^2 - 8x + 6$.

La ecuación de la función es $y = 2x^2 - 8x + 6$.
Otra vía puede ser:

- Sustituyes el valor de c en la ecuación $y = ax^2 + bx + 6$.
- Sustituyes las coordenadas de los puntos dados en la gráfica: (1; 0) y (3; 0).

$$\begin{array}{l} 0 = a(1)^2 + b \cdot 1 + 6 \\ 0 = a(3)^2 + b \cdot 3 + 6 \\ \hline \end{array}$$

- Resuelves el sistema de ecuaciones obtenido:
  $a + b = -6$
  $9a + 3b = -6$
  cuya solución es $a = 2$ y $b = -8$.

La parábola en la vida

Perfiles luminosos parabólicos

Dispón una cartulina perpendicularmente a un haz luminoso (fig. 4.75 a); obtienes así un perfil circular sobre la cartulina.

Mueve la cartulina hasta obtener un perfil parabólico como el de la otra lámina (fig. 4.75 b).

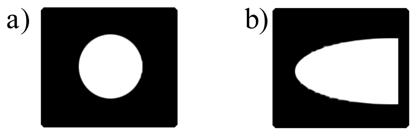


Figura 4.75

Trayectorias parabólicas

En una lata de conservas abre agujeros a distintas alturas (fig. 4.76). Llénala de agua y observa la trayectoria descrita por los chorros de agua que salen de los distintos agujeros.

Son medias parábolas; si tienes en cuenta la simetría, puedes imaginarte fácilmente las parábolas enteras.

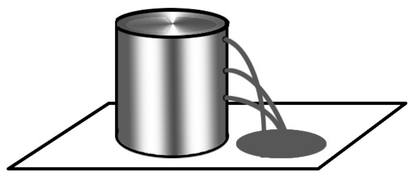


Figura 4.76

¿Qué parábola es más abierta? ¿Cuál la más cerrada?

¿Qué pelota llega antes al suelo?

Coloca en el borde de una mesa dos pelotas (fig. 4.77).

A una déjala caer libremente y a la otra dale un impulso horizontal.

¿Qué trayectoria sigue cada una? Repite este experimento tratando de que las dos pelotas se pongan en movimiento en el mismo instante.

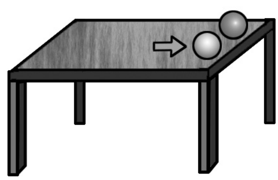


Figura 4.77

¿Qué pelota sigue una trayectoria más larga? ¿Cuál de las dos llega antes al suelo? ¿Acaso no llegan al mismo tiempo?

La física explica estos experimentos. Por ahora no está mal que conozcas al menos sus resultados.

Analiza estos otros ejemplos interesantes relacionados con las funciones cuadráticas que te ayudarán a aplicar lo aprendido en este epígrafe.

Ejemplo 4:

En la figura 4.78 se muestra la representación gráfica de una función cuadrática de la forma $f(x) = x^2 + bx + c$.

4.1 Marca con una X la respuesta correcta.

a) La ecuación de la función f es:

___ $f(x) = x^2 + 4x + 7$ ___ $f(x) = x^2 - 8x + 7$
___ $f(x) = -x^2 - 8x + 7$ ___ $f(x) = x^2 - 8x$

b) El otro cero de la función f es:

___ $x = 5$ ___ $x = 6$ ___ $x = 7$ ___ 4,5

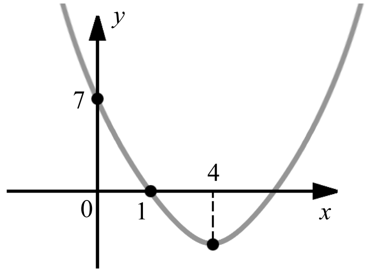


Figura 4.78

c) De los siguientes pares ordenados el que pertenece a la función f es:

___ (2; 5) ___ (4; 0) ___ (–3; 40)

4.2 Completa los espacios en blanco.

a) La función es decreciente para ____________.
b) El dominio de la función es _______________.
c) El eje de simetría es _________.
d) Al calcular $f(-0{,}5)$ se obtiene como resultado _________.

4.3 Escribe verdadero o falso según corresponda. Argumenta las respuestas.

a) ___ La imagen de la función f es $y \in \mathbb{R}$; $y \geq -9$.
b) ___ La gráfica de f interseca al eje de las ordenadas en el punto (7; 0).
c) ___ La función f tiene mínimo $y = 4$.
d) ___ El punto simétrico de $A(-1; 16)$ en la parábola representada es $B(9; 16)$.

Solución:

4.1 a) $f(x) = x^2 - 8x + 7$

Comentario:

- De la gráfica se obtiene que el valor de c es 7, ya que es la intersección con el eje y, por lo que queda descartada la última opción.
- La parábola abre hacia arriba, por lo que queda descartada la que tiene valor $a = -1$.
- Para seleccionar la correcta de las dos que quedan, puedes realizar una de las tres acciones siguientes:

1. Hallar la abscisa del vértice.

2. Tomar el par (1; 0) dado en la gráfica e investigar a cuál de las ecuaciones satisface.
3. Calcular los ceros y comprobar en cuál de ellas se obtiene $x = 1$.

b) El otro cero de la función f es $x = 7$.
Se puede calcular a partir de la ecuación seleccionada o por la simetría de la parábola, ya que ambos ceros tienen que estar a igual distancia de la abscisa del vértice, que en este caso es 4.

c) (–3; 40). Para verificar si un par ordenado pertenece a una función, sustituyes la abscisa en la ecuación y calculas el valor de la ordenada. Si la ordenada del par es igual al valor obtenido, el par pertenece, de lo contrario, no pertenece.

4.2 a) $x \leq 4$. Recuerda que para escribir la monotonía se toma como referencia la abscisa del vértice, y a la izquierda de 4, la gráfica desciende de izquierda a derecha.
b) $x \in \mathbb{R}$. El dominio de la función cuadrática son los reales, siempre que no se indique otra cosa.
c) $x = 4$. El eje de simetría contiene a la abscisa del vértice.
d) $f(-0,5) = 11,25$. Sustituyes en la ecuación la x por $-0,5$ y realizas las operaciones indicadas.

4.3 a) Verdadero. El menor valor que toma la imagen es la ordenada del vértice, que se obtiene sustituyendo la abscisa 4 en la ecuación y efectuando las operaciones indicadas.
b) Falso. La gráfica interseca al eje y en 7 y todo punto situado sobre este eje tiene la forma (0; y), el punto correcto es (0; 7).
c) Falso. El valor mínimo de la función es la ordenada del vértice que en este caso es –9.
d) Verdadero. Para que dos puntos de una parábola sean simétricos, la abscisa de cada uno de ellos debe estar a la misma distancia de la abscisa del vértice y, además, tener la misma ordenada.

Ejemplo 5:

En la figura 4.79 se muestra la representación gráfica de una función cuadrática de la forma:
$g(x) = (x + d)^2 + e$.

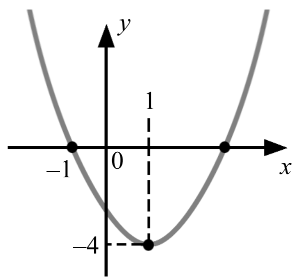


Figura 4.79

5.1 Marca con una X la respuesta correcta:

a) La ecuación de la función g es:

___ $g(x) = (x + 1)^2 - 4$ ___ $g(x) = (x - 1)^2 - 4$
___ $g(x) = (x + 1)^2 + 4$ ___ $g(x) = (x - 1)^2 + 4$

b) El otro cero de la función g es: ___ 2 ___ 2,5 ___ 3 ___ 4
c) La gráfica de la función g corta al eje de las ordenadas en:

___ – 4 ___ –1 ___ –3 ___ Otro valor

5.2 Completa los espacios en blanco:

a) La imagen de la función g es _____________.
b) La función g es monótona creciente para ______________.
c) El valor mínimo de g es _________.
d) El eje de simetría de la parábola representada es ______.

Solución:

5.1 a) $g(x) = (x - 1)^2 - 4$
(El vértice de la parábola tiene coordenadas $V(1; -4)$, por lo que la gráfica de g, respecto a la gráfica de $y = x^2$, se trasladó una unidad a la derecha en el eje horizontal, esto significa que $d = -1$; mientras que se desplazó 4 unidades hacia abajo, por lo que $e = -4$).
Otra forma de reconocer la ecuación pedida es verificando que uno de los puntos dados sobre la representación gráfica satisfaga alguna de las ecuaciones dadas. Por ejemplo, tomas la abscisa del vértice $x_v = 1$ y la sustituyes en cada una de las ecuaciones y en la que se obtenga $y = -4$, esa será la ecuación de esa función.
Comprueba en la ecuación seleccionada:

$y = (1 - 1)^2 - 4 = 0^2 - 4 = -4.$

Si realizas este procedimiento en las otras tres ecuaciones comprobarás que no se obtiene $y = -4$ en ninguna de ellas.

b) 3. Para hallar el otro cero puedes proceder de dos maneras:

1. Como la parábola es simétrica respecto a la recta vertical que pasa por su vértice, los ceros se encuentran a igual distancia de x_v. Luego, como de -1 a 1 hay dos unidades, cuentas dos unidades a la derecha de 1 y obtienes $x = 3$.
2. Como ya conoces la ecuación de la función, das valor cero a la y, factorizas la expresión y obtienes ambos ceros.

c) –3. (Para hallar la intersección con el eje de las ordenadas sustituyes la x por cero en la ecuación y calculas el valor de y).
O sea, $y = (0 - 1)^2 - 4 = (-1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3$.

5.2 a) $y \in \mathbb{R}$: $y \geq -4$. (El menor valor de y es -4 y a partir de ahí aumentan, ya que la gráfica abre hacia arriba).
b) $x \geq 1$. (Como recordarás, para analizar la monotonía se toma como referencia la x_v, y a la derecha de 1, a medida que aumentan los valores de x, también aumentan los valores de y).

c) $y = -4$. (Recuerda que el valor mínimo es la ordenada del vértice).
d) $x = 1$. (El eje de simetría es la recta vertical que pasa por el vértice y su ecuación es $x = x_v$).

Las funciones cuadráticas tienen muchas aplicaciones en la vida real; observa a continuación algunos problemas cuyo modelo matemático es la expresión de una función cuadrática.

Ejemplo 6:

Un nadador desciende al fondo del mar y luego emerge de nuevo a la superficie siguiendo la trayectoria que representa el gráfico de la función $y = 2x^2 + x - 6$ (fig. 4.80). (Considera el metro como unidad de medida).

a) Representa en un sistema de coordenadas rectangulares la trayectoria descrita por el nadador.

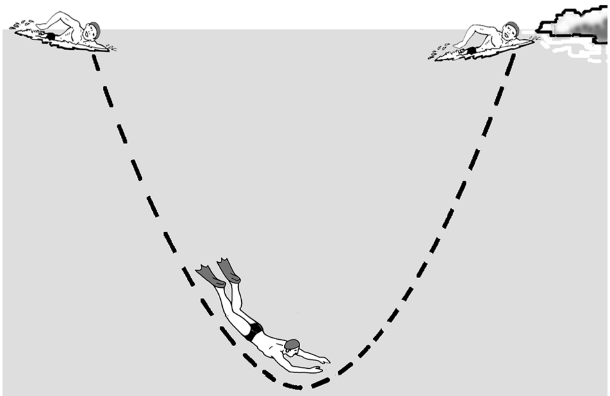


Figura 4.80

b) ¿A qué distancia del lugar de entrada emergió el nadador?
c) ¿Cuál fue la profundidad máxima que alcanzó?

Solución:

a) La trayectoria que describe una gráfica que representa a una función cuadrática es una parábola y como ya conoces es necesario, para trazarla, obtener las coordenadas del vértice y sus ceros como mínimo.

- Hallas las coordenadas del vértice:

  De la ecuación $y = 2x^2 + x - 6$ obtienes que: $a = 2$; $b = 1$ y $c = -6$.

  $$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{4} = -0,25$$

$y_v = 2(-0,25)^2 + (-0,25) - 6$
$y_v = 2 \cdot (0,062\,5) - 0,25 - 6 = 0,125 - 0,25 - 6 = -6,125.$
Las coordenadas del vértice son $V(-0,25; -6,125)$.

- Hallas los ceros: $2x^2 + x - 6 = 0$

  $(2x - 3)(x + 2) = 0$
  $2x - 3 = 0$ o $x + 2 = 0$
  $x_1 = 1,5$ o $x_2 = -2$

- Determinas la intersección de la parábola con el eje y.
  La intersección de la parábola con el eje y coincide con el valor de c, o sea $y = -6$.
- Representas los puntos obtenidos y los unes (fig. 4.81).

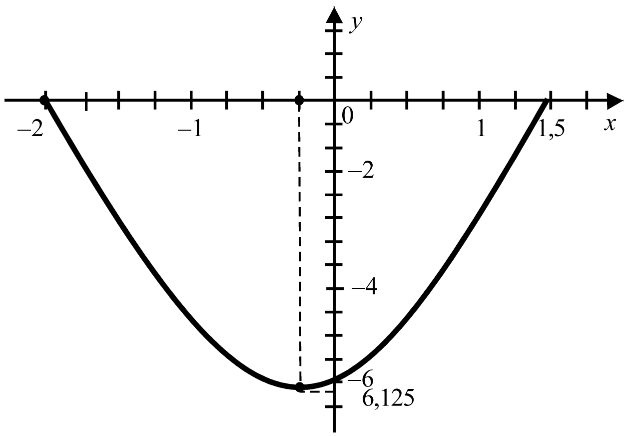


Figura 4.81

b) Consideras el eje horizontal situado sobre la superficie del agua, por lo tanto, el lugar de entrada coincide con el cero que se encuentra a la izquierda en la gráfica y el lugar por donde emergió, el cero que se encuentra a la derecha. Debes calcular la distancia entre los ceros.
Desde -2 hasta $1,5$ hay $3,5$ unidades $(1,5 - (-2))$

Respuesta: El nadador emergió a 3 m y medio del lugar de entrada.

c) La profundidad máxima que alcanzó coincide con la menor ordenada que toma la parábola, o sea, la ordenada del vértice que representa el *valor mínimo* de la parábola.
En este caso, al calcularla obtuviste $y = -6,125$. Esto significa que el nadador alcanzó una profundidad máxima de 6,125 m.

Nota: Observa que se toma el valor absoluto, ya que la profundidad no puede ser negativa, el signo *menos* te indica que se encuentra por debajo de la superficie del agua.

Ejemplo 7:

La altura (h) de una pelota lanzada verticalmente hacia arriba desde la azotea de un edificio (fig. 4.82), de 45 pies de altura, está dada por la ecuación $h = -16t^2 + 80t + 45$.
h: altura que alcanza la pelota en pie.
t: tiempo transcurrido, en segundo.

a) ¿Qué tiempo tarda la pelota en alcanzar su altura máxima?
b) ¿Cuál fue la altura máxima alcanzada por la pelota?

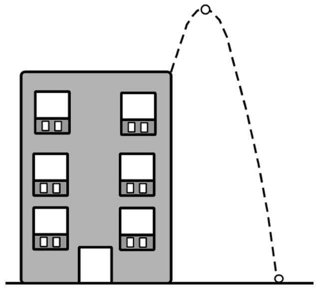


Figura 4.82

Solución:

a) Te piden el tiempo que demora la pelota en alcanzar la altura máxima. Como ya conoces el punto más alto de la parábola que abre hacia abajo es el *vértice* y la altura máxima es la ordenada del vértice que se alcanza en la abscisa de dicho punto.
Luego, es necesario calcular la *abscisa* del *vértice.*
De la ecuación $h = -16t^2 + 80t + 45$ se obtiene que $a = -16$; $b = 80$ y $c = 45$.

- Hallas t_v por la fórmula: $t_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-80}{2 \cdot (-16)} = \dfrac{-80}{-32} = 2{,}5.$

Respuesta: La pelota tarda en alcanzar su altura máxima a los 2,5 s.

b) Del análisis anterior puedes deducir que la altura máxima es la *ordenada* del vértice.

- Hallas h_v: $h_v = -16 \cdot (2{,}5)^2 + 80 \cdot (2{,}5) + 45 = -16 \cdot 6{,}25 + 200 + 45 = 145.$

Respuesta: La altura máxima alcanzada por la pelota fue 145 pies.

Ejemplo 8:

Un campesino dispone de 80 m de cerca. Determina el área rectangular máxima que puede encerrar con la cantidad de cerca disponible.

Solución:

Si la variable x representa el largo del rectángulo y la variable y, la longitud del ancho, entonces su perímetro (P) está dado por la expresión:

$P = 2(x + y)$ y su área (A) es igual al producto xy.

Por lo tanto:

$2(x + y) = 80$

- Despejas la variable y: $x + y = 40$, por lo que $y = 40 - x$.
- Como $A = xy$, entonces sustituyes y por la expresión obtenida: $A = x(40 - x)$.
- Efectúas el producto indicado: $A = 40x - x^2$.

Observa que el largo y el ancho del terreno rectangular están relacionados mediante una función cuadrática y su valor máximo representará el área máxima que se podrá cercar.

Como el coeficiente de x^2 es negativo, el área es máxima en la abscisa del vértice, o sea, en $x_v = \frac{-b}{2a}$.

- Hallas la abscisa del vértice: $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-40}{2(-1)} = \frac{-40}{-2} = 20.$

Como $x_v = 20$, el área es máxima cuando el largo mide 20 m.

A continuación determinas el valor de y:

$y = 40 - x = 40 - 20 = 20$

El ancho también mide 20 m. Se puede probar que el área de un rectángulo de perímetro dado es máxima cuando es un cuadrado.

El área máxima que puede cercar es: $A = 20\text{ m} \cdot 20\text{ m} = 400\text{ m}^2$.

Respuesta: El área máxima que puede encerrar el campesino con la cantidad de cerca que posee es de 400 m^2.

Ejercicios

1. Calcula, si existen, los ceros de las funciones cuadráticas siguientes. En caso de no existir, argumenta tu respuesta.

   a) $y = x^2 - 3x - 10$ b) $y = x^2 - 100$ c) $y = -x^2 - 12x$ d) $y = x^2 + 4$
   e) $y = x^2 - 10x + 25$ f) $y = 2x^2 - 3x - 2$ g) $y = x^2 + 10x$ h) $y = 25 - x^2$
   i) $y = -3x^2 + 2x - 1$ j) $y = x^2 - \frac{3}{2}x + 5$ k) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{2}$

2. Determina las coordenadas del vértice y el conjunto imagen de las funciones:

   a) $y = x^2 - 8x + 7$ b) $y = x^2 + 6$ c) $y = -x^2 + 3x$ d) $y = x^2 - 2$
   e) $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 1$ f) $y = -\frac{3}{2}x^2 + 0{,}5$ g) $y = 4x^2 - 0{,}8x + 2$

2.1 Señala su valor mínimo o su valor máximo según corresponda.

3. Analiza la monotonía de las funciones siguientes:

   a) $y = x^2 - 8x + 7$ b) $y = x^2 + 6x - 7$ c) $y = -x^2 + 4x + 5$
   d) $y = x^2 - 2x$ e) $y = x^2 + x$ f) $y = 6x - x^2$
   g) $y = x^2 - 9$ h) $y = -x^2 + 4$ i) $y = 2x^2 + 4x + 1$

4. Representa gráficamente las funciones cuadráticas siguientes y determina: dominio, imagen, intervalos de monotonía, valor máximo o valor mínimo y eje de simetría, en cada inciso.

a) $y = x^2 - 2x - 15$ b) $y = x^2 - 6x$ c) $y = -2x^2 - 8$
d) $y = x^2 - 2x + 1$ e) $y = -x^2 - 4x + 5$ f) $y = x^2 + 1$
g) $y = -x^2 + 2x$ h) $y = 2x^2 - x - 1$ i) $y = (x - 1)^2 - 4$
j) $y = (x + 2)^2 + 4$ k) $y = -(x + 3)^2 + 16$

5. En la figura 4.83 aparecen las representaciones gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 6x - 7$ y $g(x) = -x^2 - 6x$.

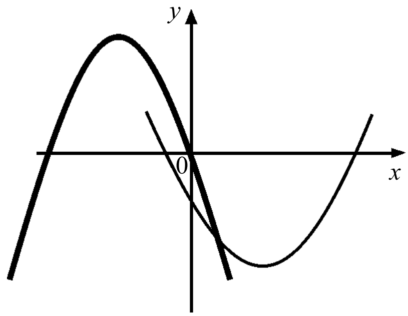


Figura 4.83

a) Señala al lado de cada gráfica cuál es la que corresponde a f y cuál a g. Argumenta tu selección.
b) Determina las coordenadas del vértice de f y de g.
c) Di la imagen de cada función.
d) Escribe para qué valores de x la función f es creciente.
e) Escribe para qué valores de x la función g es decreciente.
f) Halla los ceros de cada función.

6. Haz el esbozo gráfico de las parábolas definidas por las funciones siguientes en los dominios dados. Indica en cada caso el conjunto imagen.

a) $y = x^2 + 10x + 24$ para $-6 \le x \quad -2$ b) $y = x^2 - 10x + 25$ para $2 \le x \le 8$
c) $y = -x^2 + 2x - 1$ para $-2 \le x \le 0$ d) $y = x^2 + 4x + 1$ para $-4 \le x \le 0$
e) $y = -x^2 + 4$ para $-3 \le x \le 3$ f) $y = -x^2 + 4x$ para $0 \le x \le 4$

7. Sean las funciones cuadráticas siguientes cuya forma es $y = (x + d)^2 + e$:

$f(x) = (x + 3)^2$; $g(x) = (x - 3)^2$; $h(x) = x^2 + 4$; $t(x) = x^2 - 4$; $p(x) = (x + 3)^2 - 4$ y $q(x) = (x + 3)^2 + 4$.

a) Completa la tabla 4.8.

Tabla 4.8

Función	Vértice	Dominio	Imagen	Ceros	Monotonía	Eje de simetría
$f(x) = (x + 3)^2$						
$g(x) = (x - 3)^2$						
$h(x) = x^2 + 4$						
$t(x) = x^2 - 4$						
$p(x) = (x + 3)^2 - 4$						
$q(x) = (x + 3)^2 + 4$						

b) Representa en un mismo sistema de coordenadas las funciones f, t y p y analiza su desplazamiento a partir del gráfico de la función $y = x^2$.

8. Marca con una X la respuesta correcta:

a) De las funciones siguientes la que su gráfica no corta o toca al eje x es:

___ $f(x) = x^2 + 4x + 4$	___ $h(x) = -x^2 - 16$
___ $g(x) = -x^2 + 4x + 5$	___ $t(x) = x^2 - 2x$

b) De las funciones siguientes la que tiene imagen $y \in \mathbb{R}$: $y \leq 2$ es:

___ $f(x) = x^2 + 2$	___ $t(x) = -x^2 + 2$
___ $g(x) = -x^2 - 2$	___ $h(x) = x^2 - 2$

c) De las funciones siguientes la que tiene vértice V(–1; –2) es:

___ $f(x) = (x + 1)^2 + 2$	___ $g(x) = (x + 1)^2 - 2$
___ $h(x) = (x - 1)^2 + 2$	___ $g(x) = (x - 1)^2 - 2$

d) De las funciones siguientes la que su gráfica corta al eje y en el punto (0; 3) es:

___ $f(x) = 3x^2$	___ $h(x) = x^2 - 2x - 3$
___ $g(x) = -x^2 + 3x$	___ $t(x) = x^2 - 2x + 3$

e) El par $M(-2; -2)$ pertenece a la función cuya ecuación es:

___ $f(x) = 2x^2 - 6x$	___ $h(x) = x^2 - 2x - 6$
___ $g(x) = -x^2 - 3x$	___ $p(x) = x^2 - 2x - 10$

9. Calcula el valor del parámetro c para que la parábola cuya ecuación es $f(x) = x^2 - 5x + c$ pase por el punto (2; 2).

a) Verifica cuántos ceros tiene la función f. Fundamenta tu respuesta.
b) Halla su valor mínimo.

10. Enlaza la ecuación de las funciones dadas en la columna A con las propiedades que cumplen en la columna B.

A	B
$y = x^2 - 3x + 5$	Tiene imagen $y \in \mathbb{R}$; $y \leq 5$
$y = -2x^2 - 8x$	Su eje de simetría es $x = 0$
$y = 4x^2 + 4x + 1$	No tiene ceros
$y = -x^2 + 5$	Es creciente para $x \geq 1$
$y = x^2 + 5$	Tiene vértice $V(-2; 8)$
$y = x^2 - 2x + 1$	Tiene cero $x = -0{,}5$
$y = 3x^2$	Tiene cero $x = 0{,}5$
	Tiene valor mínimo $y = 5$

11. Escribe en cada inciso la ecuación de una función de la forma $y = x^2 + bx + c$ de la que conoces que:

a) El vértice es $V(1; -2)$.
b) Los ceros son $x_1 = 6$ y $x_2 = -2$.

c) Su gráfico pasa por los puntos $A(-1; 4)$ y $B(1; -2)$.
(Sugerencia para el inciso a: Escribe la ecuación en la forma $y = (x + d)^2 + e$ y transfórmala a la forma pedida).

12. Escribe en cada inciso dos ecuaciones de la forma $y = x^2 + bx + c$, si se conoce que la ecuación de la recta que representa el eje de simetría de la parábola correspondiente es:

a) $x = 5$ b) $x = -3$ c) $x = 0$

13. Escribe las ecuaciones del tipo $y = x^2 + bx + c$ que definen a las funciones representadas en la figura 4.84.

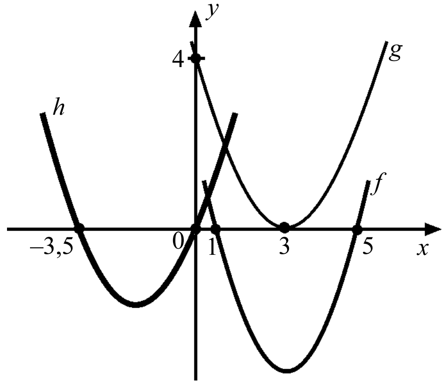


Figura 4.84

14. Escribe la ecuación del tipo $y = ax^2 + bx + c$, que define a cada una de las funciones representadas en la figura 4.85, si $|a| = 1$.

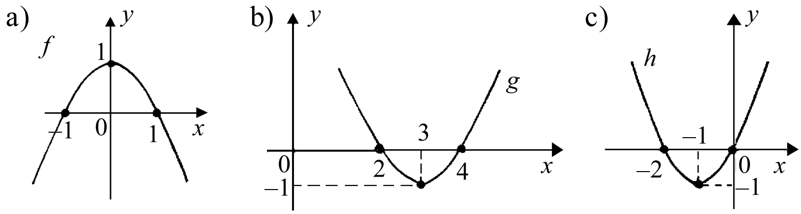


Figura 4.85

15. Escribe las ecuaciones del tipo $y = \pm (x + d)^2 + e$, según corresponda, que definen a las funciones representadas en la figura 4.86.

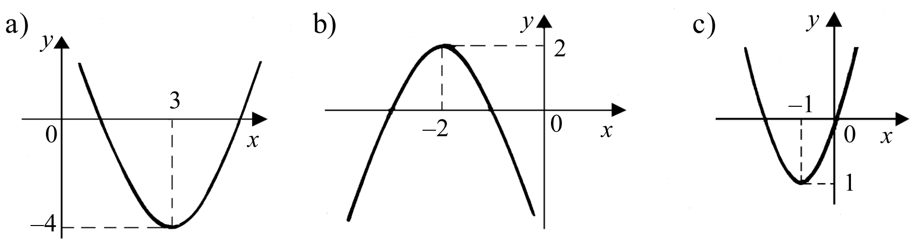


Figura 4.86

16.* Escribe para cada inciso una ecuación cuadrática de la forma $y = x^2 + bx + c$ de la que se conoce:

a) el eje de la parábola es la recta $x = 2$ y tiene dos ceros;
b) el eje de la parábola es la recta $x = 1$ y tiene un cero;
c) el eje de la parábola es la recta $x = 0{,}5$ y no tiene ceros.

17. La ecuación $V(a) = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$ representa la dependencia funcional del volumen (centímetro cúbico) de una pirámide de base cuadrada en función de la longitud de la arista de la base para un mismo valor de su altura h.

a) Representa esta función para $0 \leq a \leq 4$, si $h = 3$.
b) Apoyándote en el gráfico, determina el volumen máximo que puede alcanzar la pirámide en este tramo representado.

18. El perímetro de un rectángulo es de 20 cm y su base mide a cm. Expresa los valores de su área (A) en función de la longitud de la base y representa gráficamente esta dependencia para $0 \leq a \leq 10$.

19. Una pelota es lanzada hacia arriba, denotemos por h, en metro, la altura y por t, en segundo, el tiempo transcurrido a partir del instante en que se lanza. La dependencia de h en función del tiempo t se expresa mediante la fórmula $h = 25t - 5t^2$, sin tener en cuenta el viento.

a) ¿Cuál es la mayor altura que alcanza la pelota?
b) ¿Durante cuánto tiempo la pelota asciende? ¿Y durante cuánto tiempo desciende?
c) ¿Al cabo de cuánto tiempo de lanzada la pelota llega al suelo?

20. La suma de dos números es 24. Encuentra dichos números con la condición de que su producto sea el máximo.

21. Se necesita formar un rectángulo de tal forma que su perímetro sea de 120 m.

a) Determina la longitud de sus lados para que su área sea máxima.
b) Determina la magnitud del área máxima.

22. La utilidad mensual en miles de dólares, de una empresa se expresa mediante la ecuación $u(x) = -2x^2 + 20x - 15$, donde x representa el número de artículos, en cientos, que se producen y venden en un mes.

a) Determina la cantidad de artículos que la empresa debe producir y vender en un mes para que la utilidad sea máxima.
b) Halla el monto de la utilidad máxima.

23. Utilizando algún asistente matemático a tu alcance, por ejemplo, *El Geogebra,* realiza las acciones siguientes:

a) Traza la gráfica de la función $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

b) Varía el valor del parámetro a y analiza cómo va cambiando la parábola respecto a la que trazaste inicialmente.
c) Varía el valor del parámetro b y analiza cómo va cambiando la parábola respecto a la que trazaste inicialmente.
c) Varía el valor del parámetro c y analiza cómo va cambiando la parábola respecto a la que trazaste inicialmente.
d) Escribe las conclusiones a las que arribaste sobre cómo cambia la parábola al variar los parámetros a, b y c.

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO

1. Calcula y simplifica las expresiones siguientes aplicando los productos notables estudiados.

a) $(x + 2)^2 - (x - 5)(x + 5) + 2$ b) $(y - 6)^2 + (2y - 3)(2y + 3) - (y + 1)(y + 2)$
c) $(x + 2)(x + 15) - (x + 3)^2 - 25$ d) $(y - 1)(y + 2) + y(y + 7) - (y + 3)(y - 3)$
e) $2p(p + 1) - (p + 7)(p - 5) - p^2$ f) $(m + 20)(m - 12) + (m - 6)(m + 7) - 3m^2$
g) $(xy - 1)^2 + (xy + 2)(xy - 3) + 5(xy - 1) + 11$
h) $\left(\frac{n}{3}-5\right)\left(\frac{n}{3}+6\right)-2n\left(\frac{n}{18}+1\right)-(7-n)(7+n)+79$

2. Descompón en factores, si es posible, las expresiones siguientes:

a) $8a - 8b$ b) $x^2 - 2x - 48$ c) $y^2 - 49$ d) $2m^2 - 17m + 8$
e) $x^3y - 2yx$ f) $y^2 - 14y + 49$ g) $p^2 - \frac{1}{36}$ h) $3m^3 - 6m^2$
i) $y^2 - 7$ j) $5n^2 + 12n + 4$ k) $x^2 - x + 8$ l) $v^2 + 36 + 12v$
m) $18a^3 - 2a^2$ n) $5b^2 + 11b + 2$ ñ) $6c^2 - 7c - 20$ o) $4z^2 - 169$
p) $x^2 - 15x + 50$ q) $\frac{p^2}{16} - 1$ r) $a^2 - 15a + 54$ s) $x^2 + 7x - 44$
t) $4b^2 - 0{,}49c^4$ u) $8ab^2 - 4a^3b + 4a^2b^2$ v) $10y^2 + 21yz - 10z^2$

3. Factoriza completamente las expresiones algebraicas siguientes:

a) $8x^3 - 2x$ b) $3y^2 + 6y - 24$ c) $18z^3 - 50z$ d) $b^4 - b^2 - 12$
e) $a^5 - a$ f) $\frac{1}{4}(m+5) - x^2(m+5)$ g) $mp + 3p - m - 3$ h) $x^5 - 10x^3 + 9x$
i) $p^4 - 25p^2 + 144$ j) $2x^5 - 16x^3 + 32x$ k) $m^4 - 256$ l) $3y^7z - 3y^4z - 6yz$

4. Marca con una X la respuesta correcta.

4.1 La cuarta parte del área de un cuadrado es $\frac{x^2+4x+4}{4}$. El doble del perímetro de dicho cuadrado es:

a) ___ $x + 2$ b) ___ $(x + 2)^2$ c) ___ $4x + 8$
d) ___ $2x + 4$ e) ___ $8x + 16$

4.2 Si $ab = 10$ y $a^2 + b^2 = 29$, entonces el valor numérico de $(a - b)^2$ es:

a) ___ 3 b) ___ 9 c) ___ 19 d) ___ 21 e) ___ 18

5. Calcula y simplifica las expresiones siguientes:

a) $(x + 8)^2 - x(x + 3) - 5x$
b) $(1 - 2x)^2 + 2(2x - 5)$
c) $(y - 10)(y + 10) - 3(7y + 2) + 6$
d) $(m + 12)(m + 10) + 6(m + 5) + 46$
e) $3x(x - 1) - (x + 4)^2 + 21$
f) $(x^2 + 1)^2 + x(4x + 2) - (2x + 41)$
g) $(2z + 1)(z - 3) + z(z^2 - 2z) - (20z - 3)$
h) $(2p + 7)^2 - 4(4p + 10)$

5.1 Factoriza las expresiones obtenidas en cada inciso.

6. Sean $A = 2x + 3$; $B = x + 7$ y $C = x - 2$.

a) Calcula y simplifica $D = A^2 - B \cdot C - 21$.
b) Factoriza la expresión D.

7. Sean $M = 3 - \frac{x}{3}$ y $N = \left(\frac{x}{3} + 1\right)\left(\frac{x}{3} - 1\right) + 18$.

a) Calcula y simplifica $N - M^2 - x^2$.
b) Expresa como producto la expresión resultante.

8. Sean $T = (2x - 1)(x + 3) - x(2x + 1)$ y $S = 12x - 5$.

a) Calcula $T^2 + 2S$.
b) Descompón en factores la expresión resultante.

9. Dados $A = (x + 7)(x - 7)$; $B = 2x + 8$ y $C = x^2 - x - 53$.

a) Prueba que $A - \frac{B}{2} = C$.

b) Halla el valor numérico de la expresión A para $x = \frac{0{,}000\,002}{100^{-3}}$.

c) ¿Para qué valores de x se cumple que $C = 3$?

10. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $x^2 + 8x + 16 = 0$ b) $x^2 - 2x - 63 = 0$ c) $x^2 + 7x = 18$

d) $2x^2 + 3x + 1 = 0$ e) $4x^2 - 225 = 0$ f) $x^2 = 0{,}16$
g) $x^2 - 5x = 0$ h) $6x - 3x^2 = 0$ i) $x^2 + 3x + 5 = 0$
j) $x^2 + 3x - 5 = 0$ k) $x^2 - x - 0{,}5 = 0$ l) $2x^2 + x = 5$

11. Halla el conjunto solución de las ecuaciones siguientes:

a) $(x + 5)(x - 5) = -9$
b) $(x - 1)(x + 2) - (2x - 3)(x + 4) - x + 14 = 0$
c) $2x^2 - (x - 2)(x + 5) = 7(x + 3)$
d) $(x - 2)^2 - (2x + 3)^2 = -80$
e) $(x + 4)^2 = 2x(5x - 1) - 7(x - 2)$
f) $3(x^2 + 1) = 2x^2 + 52$
g) $(x - 3)^2 - (2x + 5)^2 = -16 - 2x$
h) $(x - 2)(x + 2) - 7(x - 1) = 21$
i) $(4x - 1)(2x + 3) = (x + 3)(x - 1)$
j) $6x^2 - 13x = 10x - 21$
k) $5x^2 + 4x + 1 = x(3x - 2)$
l) $x(x - 3) - 2x = 7$
m) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{2} + 1\right) = 0$
n) $(x - 0{,}2)(x + 0{,}2) + 2(x - 1{,}3) = -4{,}64$

12. Marca con una X la respuesta correcta.

12.1 Para que el producto de las soluciones de la ecuación $3x^2 + kx - 3 = 0$ sea igual $a - 1$, el valor de k debe ser:

a) ___ 3 b) ___ $\frac{1}{3}$ c) ___ $-\frac{1}{3}$ d) ___ –3 e) ___ 0

12.2 Si x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación $x^2 + 9x + 18 = 0$, entonces el valor de $(x_1 + x_2)(x_1 \cdot x_2)$ es igual a:

a) ___ –162 b) ___ –54 c) ___ 81 d) ___ 54 e) ___ 162

12.3 Si $x = 0$ es una de las soluciones de la ecuación $x^2 - 4x + 8k = 0$, entonces la otra solución es:

a) ___ –2 b) ___ 0 c) ___ 4 d) ___ Ninguna de ellas

12.4 De las ecuaciones cuadráticas siguientes la que tiene soluciones $x_1 = -2$ y $x_2 = 3$ es:

a) ___ $x^2 - x - 6 = 0$ b) ___ $x^2 + x - 6 = 0$ c) ___ $3x^2 - 3x - 12 = 0$
d) ___ $-2x^2 + 2x + 12 = 0$ e) ___ $5x^2 - 5x + 3 = 0$

12.5 La ecuación que tiene como soluciones $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$ es:

a) ___ $x^2 + 1 = 0$ b) ___ $x^2 + x = 0$
c) ___ $x^2 - x = 0$ d) ___ Ninguna de las anteriores

12.6 La ecuación cuadrática cuyas soluciones son a y b es:

a) ___ $x^2 - ax + b = 0$ b) ___ $x^2 - bx + a = 0$
c) ___ $x^2 + (a + b)x + ab = 0$ d) ___ $x^2 - (a + b)x + ab = 0$

13. En un cuadrado mágico (fig. 4.87) la suma de los números situados en las casillas horizontales, verticales y diagonales es la misma. Sabiendo que x es un número natural, completa el cuadrado mágico siguiente si dicha suma es igual a 12.

		$3x$
	x^2	
x		$-x$

Figura 4.87

14. Determina, sin resolver, cuántas soluciones tienen las ecuaciones cuadráticas siguientes:

a) $x^2 + x - 7 = 0$ b) $2y^2 + 5y - 12 = 0$ c) $9z^2 - 30z + 50 = 0$
d) $8p^2 + 15p - 27 = 0$ e) $2m^2 - 20m + 50 = 0$ f) $3n^2 - 6n + 5 = 0$

g) $15x^2 + x - 16 = 0$ h) $0{,}3b^2 + b + 0{,}4 = 0$ i) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{4}x + 3$

15. Marca con una X la respuesta correcta.
El valor del discriminante de la ecuación cuadrática $-x^2 - 1 = 0$ es:

a) ___ 4 b) ___ – 4 c) ___ –3 d) ___ 1

16. En un rectángulo, el ancho equivale a la tercera parte del largo y su superficie mide 48 m^2. Si con la longitud del largo se construyera un cuadrado, tendría una superficie de:

a) ___ 6 m^2 b) ___ 9 m^2 c) ___ 11 m^2 d) ___ 144 m^2

17. Si se multiplica un número por otro que lo excede en 10, se obtiene como resultado 459. ¿Qué números satisfacen esta condición?
18. La suma de dos números es 9 y la suma de sus cuadrados es 53. Halla los números.
19. El largo de una sala rectangular excede en 4,0 m a su ancho. Si cada dimensión se aumenta en 4,0 m, el área será el doble de la original. ¿Cuáles son las dimensiones de la sala?
20. Un conjunto de 180 hombres está dispuesto en filas. El número de hombres en cada fila es igual al número de filas aumentado en 8. ¿Cuántas filas hay y cuántos hombres en cada una de ellas?
21. El perímetro de un rectángulo es de 14 cm y su diagonal mide 5,0 cm. Halla las longitudes de sus lados.
22. La suma de los cuadrados de cuatro números enteros consecutivos es 630. Halla todos los cuartetos de números que cumplen esta condición.
23. Encuentra dos números enteros consecutivos impares cuyo producto sea 195.
24. ¿Cuáles son las edades de Paula y de Henry, si sabes que la diferencia de sus edades es de dos años y que la suma de los cuadrados de estas es de 1 060?
25. Encuentra la longitud del lado de un cuadrado en el cual el valor numérico de su perímetro es 45 cm menor que el valor numérico de su área.
26. Una parcela de tierra de 375 m^2 tiene forma rectangular, uno de sus lados tiene el 60 % de la longitud del otro lado. Halla las dimensiones de la parcela.

27. Un parque rectangular tiene el piso cubierto por losas y posee en su interior un jardín, también rectangular, cuyas dimensiones, en metro, se muestran en la figura 4.88. Si las losas cubren una superficie igual a 8 000 m^2,

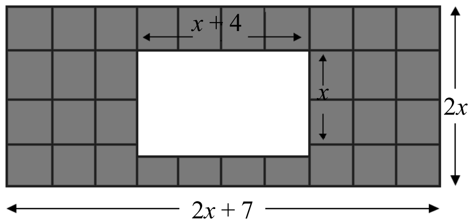


Figura 4.88

a) ¿cuáles son las dimensiones del parque?;
b) ¿qué tanto por ciento de la superficie total del parque está ocupada por el jardín?

28. Considera la fórmula $h = vt - 4{,}9t^2$ la cual nos permite calcular la altura que alcanza un objeto lanzado hacia arriba. ¿Cuántos segundos aproximadamente tardará una pelota de tenis en alcanzar una altura de 15,4 m si es arrojada con una velocidad de 20,3 m/s?

29. Para indicar el tamaño de la pantalla de un televisor, el fabricante proporciona las medidas del largo de una de sus diagonales. En un televisor de 20 pulgadas, la pantalla tiene 4 pulgadas más de largo que de ancho. Tomando en cuenta esto, ¿cuáles son las dimensiones aproximadas (largo y ancho) de la pantalla de dicho televisor?

Nota: El tamaño de la pantalla es la distancia en diagonal de un vértice de la pantalla al opuesto.

30. Representa gráficamente las funciones siguientes:

a) $y = x^2 - 6x - 7$	b) $y = x^2 + 8x - 9$	c) $y = 2x^2 - 3x + 1$
d) $y = 3x^2 - 4x - 2$	e) $y = x^2 + 4x$	f) $y = 2x^2 - 3x$
g) $y = x^2 - 1$	h) $y = 4x^2 - 9$	i) $y = -x^2 + 4x + 5$
j) $y = -x^2 - 3x - 2$	k) $y = -2x^2 + 4x$	l) $y = -x^2 + 4x$
m) $y = -x^2 + 4$	n) $y = x^2 - 4x + 4$	ñ) $y = -x^2 - 4x - 4$
o) $y = x^2 - 3x + 9$	p) $y = -x^2 + 3x - 9$	q) $y = (x - 1)^2 - 3$
r) $y = (x + 2)^2 - 4$	s) $y = -(x + 1)^2$	

30.1 Escribe las propiedades estudiadas para las funciones cuadráticas en cada inciso.

31. Determina la ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) de una función cuadrática f, si conoces que:

a) $a = 1$; $P(0; 3)$ y $Q(1; 6)$ pertenecen al gráfico de f.
b) $a = -1$; $x_1 = 4$ y $x_2 = 1$ son los ceros de f.
c) $a = 2$; $R(1; 6)$ y $S(-1; 0)$ pertenecen al gráfico de f.

d) $a = -2$, para $x \geq 1$, f es monótona decreciente y para $x \leq 1$, f es monótona creciente y $A(0; 5)$ pertenece al gráfico de f.
e) $a = -1$ y $V(3; -3)$.

32. Determina la ecuación, en la forma indicada, de las funciones cuadráticas representadas en la figura 4.89.

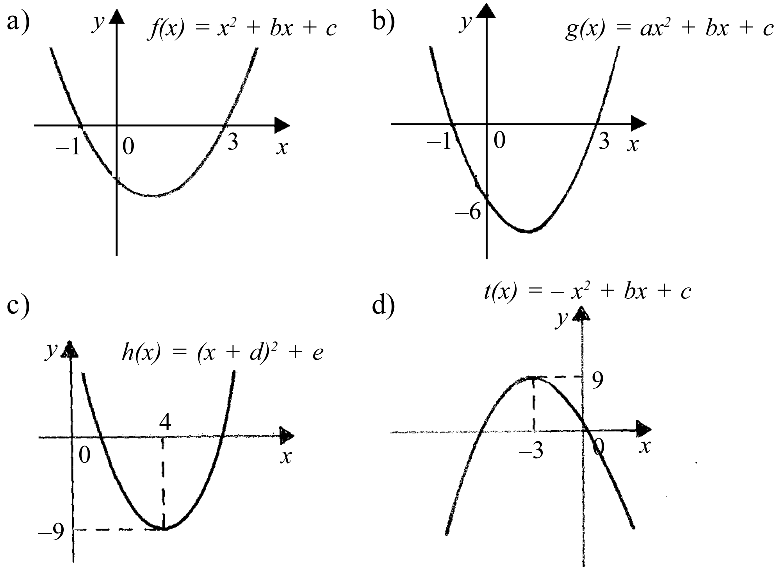


Figura 4.89

32.1 Escribe sus propiedades.

33. Dada la función cuadrática $f(x) = x^2 - 6x + 8$, escribe verdadero (V) o falso (F) según corresponda. Argumenta las que consideres falsas.

a) ___ La gráfica de la función abre hacia abajo.
b) ___ La ordenada del vértice es su valor mínimo.
c) ___ La gráfica de f interseca al eje y en $y = 8$.
d) ___ El vértice de la parábola que determina la función f tiene coordenadas $(-3; 1)$.
e) ___ El dominio de f es el conjunto de los números reales.
f) ___ Los ceros de f son $x_1 = 4$ o $x_2 = -2$.

34. El gráfico de la figura 4.90 corresponde a una función f definida en el conjunto de los números reales por la ecuación $f(x) = (x + d)^2 + e$.

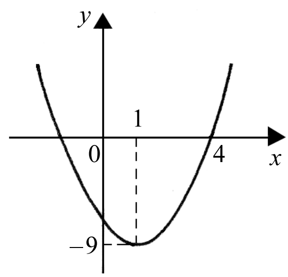


Figura 4.90

34.1 Completa los espacios en blanco.

a) El otro cero de f es _______.
b) La función f es monótona creciente para ______.

c) El eje de simetría tiene ecuación _____.
d) Las coordenadas del vértice de f son ______.

34.2. Marca con una X la respuesta correcta:

a) La ecuación de la función f es:

___ $f(x) = (x + 1)^2 + 9$ ___ $f(x) = (x + 1)^2 - 9$
___ $f(x) = (x - 1)^2 + 9$ ___ $f(x) = (x - 1)^2 - 9$

b) De la función f se puede afirmar que:

___ interseca al eje y en -9 ___ tiene imagen $\{y \in \mathbb{R}: y > -9\}$
___ tiene valor máximo $y = -9$ ___ $f(-2) > f(3)$

c) De los siguientes pares ordenados el que pertenece a la función f es:

___ (0; –9) ___ (–1; –5) ___ (–1; –13) ___ (0,5; –8,25)

35. El gráfico de la figura 4.91 corresponde a la función g definida en $\mathbb{R}$ por una ecuación de la forma $g(x) = x^2 + bx + c$, con $b, c \in \mathbb{R}$.

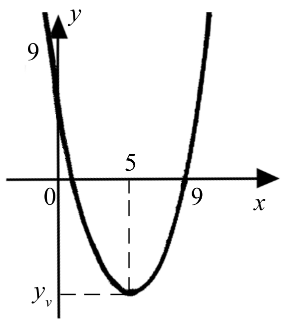


Figura 4.91

35.1 Marca con una X la respuesta correcta.

a) Para la función g se cumple que:

___ $b > a > c$ ___ $c > a > b$
___ $c = b > a$ ___ $c > b > a$

b) Se puede afirmar que:

___ El otro cero de g es 1 ___ La función g es creciente para $x \leq 5$.
___ La imagen de g es $y \in \mathbb{R}: y > -16$ ___ Tiene valor máximo $y = -16$

35.2 Escribe verdadero o falso. Argumenta las que consideres falsas.

a) ___ La función g tiene dominio $x \in \mathbb{R}$.
b) ___ El eje de simetría de la parábola tiene ecuación $y = 5$.
c) ___ El par (–1; 20) pertenece a g.
d) ___ El punto (10; 9) es el simétrico del punto (0; 9).
e) ___ $g(3) > g(-3)$.

36. Representa en un sistema de coordenadas rectangulares la función $h(x) = x^2 + 4x$ para $-3 \leq x \leq 3$.

a) Escribe su conjunto imagen.
b) Determina para qué valores de x la función f es monótona decreciente.
c) Di si la parábola representada tiene algún cero en ese tramo. En caso afirmativo, determina cuál es.
d) Escribe su valor mínimo.

37. Marca con una X la respuesta correcta.

37.1 La parábola de ecuación $y = x^2 - 4x + 3$, interseca al eje de las abscisas en los puntos:

a) ___ (–1; 0) y (–3; 0) b) ___ (1; 0) y (3; 0)
c) ___ (0; 1) y (0; 3) d) ___ (0; –1) y (0; –3)

37.2 Sea f una función de ecuación $f(x) = 3x^2 + 5kx$ definida en el conjunto de los números reales y $f(3) = 42$, entonces $f(-3)$ es igual a:

a) ___ –108 b) ___ – 42 c) ___ 12 d) ___ 42 e) ___ 96

37.3 El gráfico de la función $y = 2x^2 - 3x + 5$ corta al eje de las ordenadas en el punto:

a) ___ (0; 2) b) ___ (0; 3) c) ___ (0; 0)
d) ___ (0; –3) e) ___ (0; 5)

37.4 La representación gráfica de la función cuya ecuación es $y = -3x^2$ es una parábola de vértice:

a) ___ (0; 3) b) ___ (0; –3) c) ___ (0; 0)
d) ___ (–3; 0) e) ___ (3; 0)

37.5 El eje y es el eje de simetría de una parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ cuando:

a) ___ a < 0 b) ___ a > 0 c) ___ b < 0 d) ___ b > 0 e) ___ b = 0

37.6 Para que la parábola $y = 7x^2 - 4x + 2k - 10$ pase por el origen de coordenadas, el valor de k debe ser:

a) ___ 10 b) ___ 5 c) ___ 0 d) ___ –5 e) ___ ninguno de esos

37.7 Si $f(x) = kx^2 + 2x + 3$ y $k > 0$, entonces el gráfico (fig. 4.92) que corresponde a la función f es:

a) ___ b) ___ c) ___ d) ___

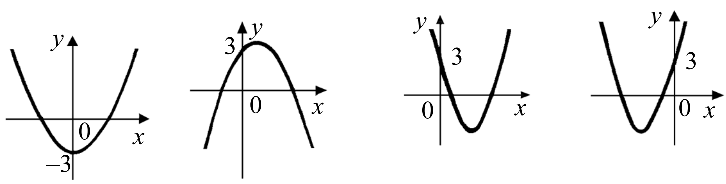


Figura 4.92

PARA LA AUTOEVALUACIÓN

Reflexiona sobre lo aprendido

1. ¿Qué es un producto notable?
2. ¿Para qué sirven los productos notables?
3. ¿Cuáles productos notables estudiaste en este capítulo?
4. ¿Cómo se llama el procedimiento que permite expresar una suma algebraica como producto?
5. ¿Cuáles son los casos de descomposición factorial que estudiaste?
6. ¿Qué es una ecuación cuadrática?
7. ¿Cuáles son sus métodos de resolución?
8. ¿Qué método utilizas cuando no puedes factorizar a simple vista?
9. ¿Cuál es la fórmula del discriminante? ¿Para qué se usa el discriminante?
10. ¿A qué llamamos función cuadrática?
11. ¿Cuál es su representación gráfica?
12. ¿De qué depende que la parábola abra hacia arriba o hacia abajo?
13. ¿Sabes escribir la ecuación de una función cuadrática?
14. ¿Cuáles son sus propiedades?
15. ¿Sabes hallar sus ceros?
16. ¿Qué valor tomas para escribir la imagen y el valor máximo o mínimo de una función cuadrática?
17. ¿Qué valor tomas para escribir la monotonía de una función cuadrática?

Ponte a prueba

1. Completa el crucigrama de la figura 4.93.

Horizontales

1. Valor que se obtiene como resultado de asignar valores a las variables y realizar las operaciones indicadas.
2. Regla de correspondencia que asigna a cada elemento de un conjunto un único elemento del otro conjunto.
3. Expresión algebraica formada por varios términos.
4. Términos que contienen la misma parte literal.
5. Expresión que indica la cantidad de soluciones de una ecuación cuadrática.

Verticales

1. Expresión algebraica formada por un solo término.
2. Descomponer en factores.
3. Producto que se puede realizar mediante una regla.
4. Único punto de la parábola situado sobre su eje.
5. Intersección de la gráfica con el eje de las abscisas.
6. Expresión algebraica formada por dos monomios.

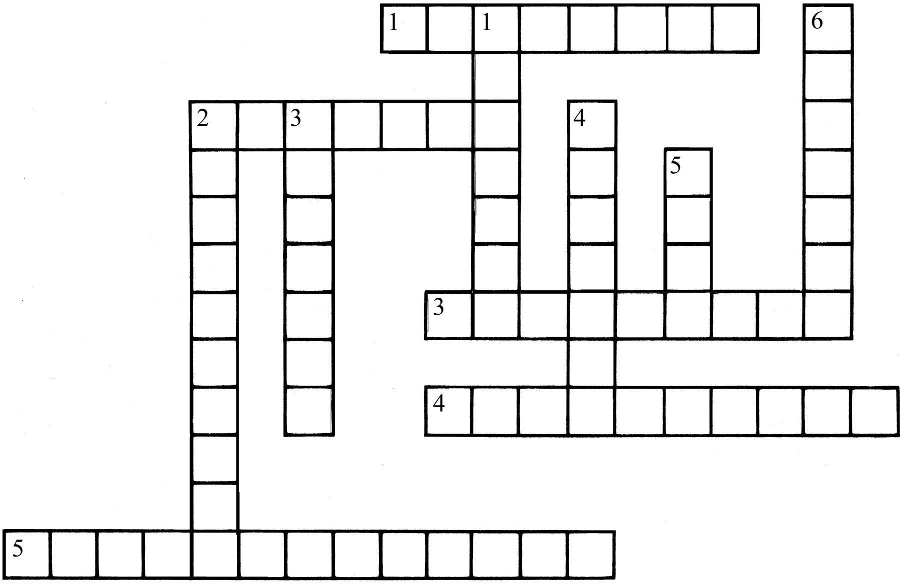


Figura 4.93

2. Sean $A = 2x + 7$; $B = (2x - 7)(2x + 7) - 5x$ y $C = (x + 2)(x - 5)$.

   a) Calcula y simplifica $D = A^2 - B + C$.

   b) Factoriza completamente la expresión $2x^5 - 26x^3 - 96x$.

   c) Halla el valor numérico de la expresión B para $x = \dfrac{0{,}000\,000\,16}{2^5 \cdot 100^{-4}}$.

   d) Halla el conjunto solución de la ecuación $C = -6$.

3. Determina si la ecuación $x^2 - 3x + 1 = 0$ tiene solución en el conjunto de los números reales. En caso afirmativo halla dichas soluciones, en caso contrario, argumenta por qué.
4. Genaro posee un terreno rectangular que tiene 2,0 m más de largo que de ancho. Pedro, por su parte, tiene un terreno con forma cuadrada cuyo lado tiene igual longitud que el ancho del terreno de Genaro. Si el duplo de la superficie que tiene el terreno de Pedro excede en 48 m^2 a la que tiene el terreno de Genaro, ¿cuáles son las dimensiones de ambos terrenos?
5. En la figura 4.94 aparecen representadas cuatro funciones cuadráticas cuyas ecuaciones son: $f(x) = (x - 2)^2 - 4$; $g(x)\ (x - 3)^2$; $h(x) = -x^2 + 4$ y $p(x) = x^2 + 4x + 3$.

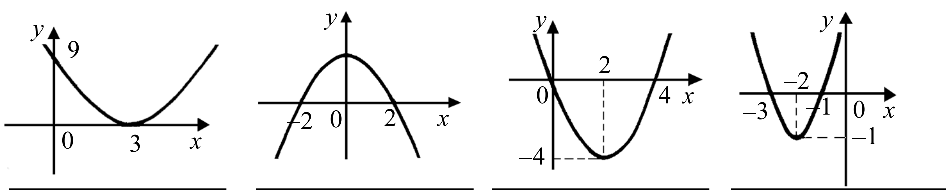


Figura 4.94

5.1 Coloca en la raya debajo de cada gráfico la ecuación que se corresponde con la parábola representada.

5.2 Escribe verdadero o falso según corresponda. Argumenta las que consideres falsas.

a) ___ La función h tiene valor máximo $y = 4$.
b) ___ La función f es decreciente para $x \leq -4$.
c) ___ La función g no tiene ceros.
d) ___ La imagen de la función p es $y \in \mathbb{R}$: $y \geq -1$.
e) ___ La parábola representada en la segunda gráfica tiene eje de simetría $y = 0$.

5.3 Prueba que: $\dfrac{2f(3)+h(-1)}{p(0)} + \sqrt[3]{g(11)} = 3$.

RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS

Epígrafe 4.1

1. a) –7. Conjunto más restringido: los enteros.
   b) 28. Conjunto más restringido: los naturales.
   c) –7,8. Conjunto más restringido: los racionales.
   d) –1. Conjunto más restringido: los enteros.
   e) – 0,5. Conjunto más restringido: los racionales.
   f) –10. Conjunto más restringido: los enteros.
   g) 0,5. Conjunto más restringido: los fraccionarios.

2. a) 7. Monomio de grado 0. b) $x^2 - 4x - 3$. Trinomio de grado 2.
   c) $y - 6$. Binomio de grado 1. d) $a^2 - 5$. Binomio de grado 2.
   e) $m^2 + 14m - 12$. Trinomio de grado 2. f) $-4t^2 + 13t$. Binomio de grado 2.
   g) $x^3 + 3x - 27$. Trinomio de grado 3. h) $a^2b^2 + ab + a^2$. Trinomio de grado 4.
   i) $7m^2n$. Monomio de grado 3. j) $x^2 - 3x - 1$. Trinomio de grado 2.

3. a) $2a + 18$ b) $-11xy + 10x + 3y + 20$ c) $3m^2n + 7m$ d) ab

4. a) $D = 2x^2 + 5x + 21$ b) Trinomio de grado 2. c) 19

5. b) 0

Epígrafe 4.2

1. a) $x^2 + 6x + 9$ b) $y^2 + 22y + 121$ c) $z^2 + 60z + 900$ d) $m^2 + 0{,}6m + 0{,}09$
   e) $n^2 + \frac{4}{3}n + \frac{4}{9}$ f) $25 + 30x + 9x^2$ g) $4y^2 + \frac{16}{5}y + \frac{16}{25}$ h) $\frac{p^2}{25} + \frac{7}{5}p + \frac{49}{4}$
   i) $m^4 + 2m^2 + 1$ j) $a^2b^2 + 4abc + 4c^2$ k) $x^2 - 6x + 9$ l) $81 - 18b + b^2$

m) $16x^2 - 40xy + 25y^2$ n) $\frac{d^2}{4} - 4d + 16$ ñ) $\frac{1}{9}m^2 - \frac{2}{3}mn + n^2$ o) $1 - \frac{y}{3} + \frac{y^2}{36}$

p) $p^2 - 14pq + 49q^2$ q) $r^6 - 3r^3 + 2{,}25$ r) $4n^2 + 0{,}8n + 0{,}04$ s) $\frac{a^2b^2}{9} - \frac{abc}{3} + \frac{c^2}{4}$

2. a) $4x^2$ b) $2y$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{5}{3}xy$

3. 3.1 b 3.2 c 3.3 a

4. a) $x^2 - 9$ b) $y^2 - 225$ c) $z^2 - 900$ d) $m^2 - 0{,}09$ e) $n^2 - \frac{4}{9}$ f) $25 - 9x^2$

g) $4y^2 - \frac{16}{25}$ h) $\frac{p^2}{25} - \frac{49}{4}$ i) $m^4 - 1$ j) $a^2b^2 - 4c^2$ k) $4m^4 - 9n^6$ l) $0{,}01 - 1{,}44x^2$

5. 5.1 c 5.2 a 5.3 b 5.4 d

6. a) $x^2 + 7x + 6$ b) $y^2 + 19y + 88$ c) $z^2 - z - 20$ d) $m^2 - m - 156$

e) $n^2 - \frac{1}{3}n - \frac{2}{9}$ f) $9x^2 + 9x - 28$ g) $x^2 - 8x + 15$ h) $y^2 - 3{,}5y + 2{,}5$

i) $z^2 - \frac{27}{10}z + \frac{1}{2}$ j) $m^2 + 2{,}1m - 1$ k) $p^2 - 2p + \frac{8}{9}$ l) $4x^2 - 4x - 3$

m) $x^4 + 12x^2 + 27$ n) $16 + 10y + y^2$ ñ) $\frac{x^2}{4} - 5x - 200$

7. a) más b) menos c) menos d) $15p$ e) 108 f) a^4b^2

9. a) $\frac{53}{2}x + 44$ b) 97

10. a) $P = 7x^2 - 48x - 7$ b) $2{,}88\ \mathbb{Q}_+$

11. b) $-0{,}5x + 10$

Epígrafe 4.3

1. a) $2(x + 3)$ b) $4(y - 4)$ c) $7(z^2 + 1)$ d) $\frac{1}{2}\left(p + \frac{1}{2}\right)$ e) $0{,}5(b + 0{,}5)$

f) $2(6 + 11m)$ g) $3(t^3 + 2t - 5)$ h) $3(3n + 7r)$ i) $a(b + c)$ j) $p(2p + 3)$

k) $x(x-2)$ l) $x^2y^2(x+5y)$ m) $y^3(y^2-2y+3)$ n) $2x(y-5)$
ñ) $4m(2m-3n)$ o) $5y^2(1+4y)$ p) $2a(a+2b-3c)$ q) $4x^2yz^2(z+3y)$
r) $(a+5)(x+y)$ s) $(b-7)(2m+n)$ t) $(x+2)(b+1)$
u) $(r^2+2r+5)(d+3e)$ v) $(z+2)(x+y+3)$ w) $(c-4)(x-1)$

2. 2.1 c 2.2 b 2.3 c

3. a) $(a+4)(a-4)$ b) $(b-12)(b+12)$ c) $(2c+5)(2c-5)$ d) $\left(\frac{d}{2}-1\right)\left(\frac{d}{2}+1\right)$

e) $(e+0{,}2)(e-0{,}2)$ f) $(7-8f)(7+8f)$ g) $\left(\frac{2}{3}-g\right)\left(\frac{2}{3}+g\right)$

h) $\left(0{,}5h+\frac{1}{9}\right)\left(0{,}5h-\frac{1}{9}\right)$ i) $(ip-9m)(ip+9m)$ j) $\left(\frac{j}{16}+\frac{k}{0{,}6}\right)\left(\frac{j}{16}-\frac{k}{0{,}6}\right)$

k) $(b-\sqrt{14})(b+\sqrt{14})(b^2+14)$ l) $(x^3-15y)(x^3+15y)$ m) $\left(\frac{7}{5}m^4-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{7}{5}m^4+\frac{1}{2}\right)$

n) $(x+2-4)(x+2+4)=(x-2)(x+6)$
ñ) $(y-1+12)(y-1-12)=(y+11)(y-13)$

4. 4.1 a 4.2 b 4.3 c

5. a) $(x+6)^2$ b) $(y-6)^2$ c) $(z+8)^2$ d) $(z-8)^2$ e) $(m+7)^2$ f) $(n-7)^2$

g) $\left(p-\frac{3}{2}\right)^2$ h) $(h-5q)^2$ i) $(9+x)^2$ j) $(8y-z)^2$ k) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ l) $\left(\frac{y}{2}+\frac{3}{7}\right)^2$

m) $(m+0{,}2)^2$ n) $(1{,}2n+0{,}6)^2$ ñ) $(p^3+5)^2$ o) $(2d-0{,}5)^2$ p) $(4a-7b)^2$

6. a) $(x+3)(x+1)$ b) $(x-3)(x-1)$ c) $(y+9)(y+1)$ d) $(y-9)(y-1)$
e) $(z+3)(z+7)$ f) $(z-3)(z-7)$ g) $(p+15)(p+3)$ h) $(p-15)(p-3)$
i) $(x-5)(x+1)$ j) $(x+5)(x-1)$ k) $(y-8)(y+5)$ l) $(y+8)(y-5)$
m) $(c-5)(c+4)$ n) $(c+5)(c-4)$ ñ) $(p+6)(p+9)$ o) $(p-6)(p-9)$
p) $(n-7)(n+3)$ q) $(x+3y)(x+2y)$ r) $(b-8c)(b-3c)$ s) $(ab+7)(ab-6)$

7. a) $(2x+1)(x+3)$ b) $(2x-1)(x-3)$ c) $(3y-2)(y-1)$ d) $(3y-1)(y-2)$
e) $(3b-7)(2b+3)$ f) $(3b+7)(2b-3)$ g) $(3m-2)(m+5)$ h) $(3m+2)(m-5)$
i) $(4p-3)(p-5)$ j) $(2z-1)(4z+5)$ k) $(5a-1)(2a-3)$ l) $(8y+3)(y-5)$
m) $(3n+4)(n-1)$ n) $(9a-1)(a-1)$ ñ) $(2b+3)(b+3)$ o) $(2x-1)(x+3)$
p) $(-4d+15)(d+1)$ q) $(-2y+3)(6y+1)$ r) $(3n+4p)(3n-2p)$
s) $(2x-5y)(4x+7y)$ t) $(4c^2+1)(c^2+3)$

8. a) $2(x+4)(x-4)$ b) $x(x+10)(x-10)$ c) $y^3(2y+1)(2y-1)$

d) $2\left(t+\frac{1}{3}\right)\left(t-\frac{1}{3}\right)$ e) $\frac{1}{5}(3q-2)(3q+2)$ f) $s^3(0{,}6s+1)(0{,}6s-1)$

g) $2(y-5)^2$ h) $m(m-2)^2$ i) $n(n+3)(n-1)$ j) $5(p-9)(p+7)$
k) $6(d+5)(d+3)$ l) $2a(a+1)^2$ m) $10(2x+1)(x+2)$ n) $y^3(2y-3)(y+1)$
ñ) $3z^2(3z+1)(z+1)$ o) $x^2y(x+5)(x-5)$ p) $(r^2+4)(r+2)(r-2)$
q) $(p^4+1)(p^2+1)(p+1)(p-1)$ r) $2(b^2+3)(b+1)(b-1)$
s) $t^3(t^2+2)(t+3)(t-3)$ t) $2m(m+2)(m-2)(m+3)(m-3)$

9. 9.1 b 9.2 a 9.3 d

10. a) $2x^2-5x-3=(2x+1)(x-3)$ b) $2x^2+4x=2x(x+2)$
c) $3y^2-5y-2=(3y+1)(y-2)$ d) $z^3+z^2+z=z(z^2+z+1)$
e) $4m^2-2m-2=2(2m+1)(m-1)$ f) $b^2-144=(b+12)(b-12)$
g) $x^3-2x^2-15x=x(x+3)(x-5)$ h) $x^4-1=(x^2+1)(x-1)(x+1)$
i) $-x^2+4=(2+x)(2-x)$ j) $y^2-16y+64=(y-8)^2$
k) $4x^2+64=4(x^2+16)$ l) $x^4+3x^2-28=(x^2+7)(x-2)(x+2)$
m) $2b^3-4b^2-70b=2b(b+5)(b-7)$ n) $x^3-5x^2-6x=x(x+1)(x-6)$
ñ) $3x^2+17x-6=(3x-1)(x+6)$ o) $9a^2-6a=3a(3a-2)$
p) $x^2-100=(x+10)(x-10)$ q) $16a^2-25=(4a+5)(4a-5)$
r) $-5x+15=5(-x+3)$ s) $x^4-5x^2+4=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$
t) $m^7-m^3=m^3(m^2+1)(m-1)(m+1)$ u) $2x^3-32x=2x(x+4)(x-4)$
v) $3b^4+12b^2-15=3(b^2+5)(b-1)(b+1)$
w) $n^5-8n^3-9n=n(n^2+1)(n-3)(n+3)$

11.

A	B
x^2-121	$x(x+4)(x-4)$
$x^2-2x-15$	$(2x+5)(x-3)$
x^6+x^3	$(x+11)(x-11)$
$2x^2-x-15$	$(x+5)(x-3)$
$x^2+2x-15$	$x(x+8)(x-8)$
x^2+121	$(x+3)(x-5)$
x^3-16x	$x^3(x^3+1)$
	$(2x+3)(x-5)$

12. $(5x+2)$ y 5 cm

13. a) $x(x-8)$ b) $(y-20)(y+20)$ c) $(n-3)(n-4)$ d) $(2a+3)(4a-5)$

14. x dm; $(x+4)$ dm y $(x-1)$ dm

15. a) $5m^2-16m+3$ b) $(5m-1)(m-3)$ c) 55

16. a) $16a^2+8ab+b^2$ b) $(4a+b)^2$

17. b) $x=-\dfrac{4}{13}$

Epígrafe 4.4.1

1. a) Sí b) No c) Sí d) No e) Sí f) Sí g) Sí h) No

2. a) 0 y 2 b) 0 y 3 c) 0 y $-\frac{1}{3}$ d) 0 y $\frac{1}{4}$ e) 11 y –11 f) $\frac{3}{2}$ y $-\frac{3}{2}$

g) N.S. h) 10 y –10 i) –1 y –2 j) –1 y 7 k) 3 y 4 l) 4 m) $-\frac{1}{2}$

n) $\frac{1}{2}$ y 1 ñ) – 3 y $-\frac{1}{3}$ o) 5 y –1 p) 2

3. a) $S = \{3; -3\}$ b) $S = \{-2; -0{,}5\}$ c) $S = \{4; -4\}$ d) $S = \left\{0; \frac{2}{5}\right\}$

e) $S = \left\{1; -\frac{2}{5}\right\}$ f) $S = \{2; 4\}$ g) $S = \{3; 9\}$ h) $S = \left\{3; \frac{1}{4}\right\}$ i) $S = \left\{\frac{1}{2}; \frac{5}{3}\right\}$

4. a) 2 y –2 b) 4 y – 4 c) 1 y –1 d) 0 y $-\frac{1}{3}$ e) 2 f) –3 y 2 g) N.S.

5. $m = -12$ y $-\frac{3}{4}$

6. a) $x^2 + 2x - 3 = 0$ b) $4x^2 + 4x - 3 = 0$ c) $x^2 + 2x = 0$ d) $x^2 + 5x + 6 = 0$
e) $x^2 + 1{,}3x - 3 = 0$ f) $x^2 - 8x + 16 = 0$

7. 162 8. 4 9. $x^2 - (a + b)x + ab = 0$ 10. 4 11. $2x^2 + 5x - 3 = 0$

12. 1 con c); 2 con f); 3 con b); 4 con d); 5 con g); 6 con e)

Epígrafe 4.4.2

1. a) N.S. b) 2 c) 2 d) N.S. e) N.S. f) 2 g) 1 h) N.S.

2. a) $x_1 \approx 4{,}4$; $x_2 \approx 1{,}6$ b) $x_1 \approx 6{,}1$; $x_2 \approx -1{,}1$ c) $x_1 \approx 1{,}15$; $x_2 \approx -0{,}15$
d) $x_1 \approx 3{,}5$; $x_2 \approx -3{,}5$ e) Ninguno

3. $3x^2 - 7x + 1 = 0$ tiene $D > 0$. $-x^2 - \frac{3}{5}x - 2 = 0$ tiene $D < 0$.

$2{,}25x^2 + 15x + 25 = 0$ tiene $D = 0$.

4. $a = 121$ 5. $k < 9$; $k = 9$; $k > 9$ 6. –2 y 1. 7. – 4 8. 10 o 2

Epígrafe 4.4.3

1. a) $r=\sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$ b) $r=\sqrt{\dfrac{A}{4\pi}}$ c) $r=\sqrt{\dfrac{V}{\pi h}};\ h=\dfrac{V}{\pi r^2}$

   d) $c=\sqrt{a^2+b^2};\ a=\sqrt{c^2-b^2}$ e) $v=\sqrt{\dfrac{2E_c}{m}}$ f) $I=\sqrt{\dfrac{Q}{R\Delta t}}$

2. a) $a=\sqrt{\dfrac{3V}{h}}$; 20 b) $r=\sqrt{\dfrac{A-A_L}{2\pi}}$; 1 c) $d=\sqrt{2A}$; 8

Epígrafe 4.4.4

1. a) $(a+b)^2=2(a^2-b^2)$ b) El cuadrado del triplo de un número

   c) $n(2+n)$ d) $\dfrac{x^2}{2}$

3. 3 o –1 4. 12 o –12

5. 10 o –10 6. 60 y 36 7. 8 y 15 8. 93

9. 345; 354; 435; 453; 534; 543

10. 150 cm^2 11. 30 cm 12. 3,6 cm 13. $r = 10$ cm 14. 28 cm

15. 15 dm; 20 dm y 5,0 dm 16. 60 m y 45 m 17. 4,0 m

18. 6,0 m y 4,0 m 19. 7,0 cm 20. 10 21. 20

Epígrafe 4.5

1. a) No, porque al elemento *b* corresponden dos elementos en *B*.
   b) Sí, porque a cada elemento de *A* corresponde un único elemento en *B*.
   c) No, porque hay un elemento de *A* al que no le corresponde ningún elemento en *B*.

2. a) Sí, porque cada número real tiene valor absoluto y es único.
   b) No, porque hay números enteros cuya cuarta parte no es un número entero, por ejemplo, 5.
   c) No, porque hay números racionales, como 3, cuya raíz cuadrada es irracional.
   d) Sí, porque todo número real tiene único cuadrado y un único duplo, además, su suma algebraica también va a ser un número real.

4. a) $y=-x+6$ b) $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$ c) $y=-x$

4.1 $x = 6$; $x = -2$; $x = 0$ 4.2 Decreciente; creciente; decreciente

5. a) $x = 4$ c) $-10 \leq y \leq 2$ d) Creciente e) –7 f) Sí

6. a) $f(x) = 0{,}5x + 1$; $g(x) = -x + 2$ y $h(x) = -2$
   b) f: creciente; g: decreciente y h: constante c) $x = 2$

7. a) $d = 20\,t$ b) 200 m c) 6 s

8. a) $P = C + 3$ b) 17 L c) 4,5 kg

9. 9.1 a) 1 m b) 60 min 9.2 a) $h = 2t + 1$ b) 1 h 9.3 4 m

9.4 En el primer tramo, ya que en 1 h sube 3 m, mientras que en otro tramo en 2 h sube 2 m.

9.5 12 m

10. a) $C = 7{,}5t$
    b) La que llena el recipiente A, ya que la gráfica de A está más inclinada hacia arriba con respecto a la gráfica de B.
    c) El B se llenó a las 11:40 a.m.

Epígrafe 4.6

1. a) $a = 1$; $b = 0$ y $c = -3$ b) $a = 1$; $b = -1$ y $c = 1$
   d) $a = -1$; $b = 0{,}5$ y $c = 1$ e) $a = 3$; $b = 2$ y $c = 0$
   h) $a = -\dfrac{1}{3}$; $b = 0$ y $c = 1{,}5$ i) $a = 1$; $b = 2$ y $c = 0$ j) $a = -1$; $b = 0$ y $c = \dfrac{4}{9}$

2. c 3. a) $y = x^2 - 2x + 5$ b) $y = 3x^2 + \dfrac{1}{3}x$ c) $y = -x^2 + 0{,}2$
   d) $y = \dfrac{2}{3}x^2 - \dfrac{1}{4}x + 1$ e) $y = 2{,}5x^2$ f) $y = -2x^2 - 2x - 3{,}5$

4. a) 15; $-\dfrac{3}{4}$; 35 b) 0; $-\dfrac{7}{8}$; 30 c) 2; $\dfrac{15}{4}$; –58

5. a) 0 y 1,5 b) 1 y 0,5 c) 2 y – 0,5 d) No existen

Epígrafe 4.7

1. a) Semiplano superior: f y h; semiplano inferior: g y t.
   b) (0; 0) c) Sí d) Más “cerrada”: f; más “abierta”: t.

3. 3.1 a) F, porque $a > 0$. b) V c) F, para $x \geq 0$. d) V e) F, $g(0,5) = -0,5$

3.2 a) $h(x) = 0,7x^2$ b) Tiene su gráfica situada en el semiplano inferior.

5. $c > b > a$ 6. $a > b > c$

7. a) Positivos: a y d; negativos: b y c.
   b) b, c, d, a

8. a) $y = 2x^2$ b) $y = -\frac{1}{2}x^2$ c) $y = \frac{4}{9}x^2$

9. b) $y \in \mathbb{R}$: $-5 \leq y \leq 0$ c) Creciente: $-5 \leq x \leq 0$ y decreciente: $0 \leq x \leq 1$.

10. a) (0; 0) y (0,5; 0,5) b) (0; 0) y (2; 8)
    c) (2; 8) y (–2; 8) d) (– 0,5; 0,5) y (3; 18)

11. $A = \frac{L^2}{4\pi}$

12. a) Ver la figura 4.95 b) 720 m

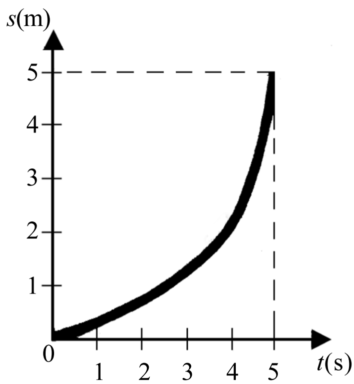


Figura 4.95

Epígrafe 4.8

1. a) $x_1 = 5$ o $x_2 = -2$ b) $x_1 = 10$ o $x_2 = -10$ c) $x_1 = 0$ o $x_2 = -12$
   d) No tiene e) $x_1 = 5$ f) $x_1 = 2$ o $x_2 = -0,5$ g) $x_1 = 0$ o $x_2 = -10$
   h) $x_1 = 5$ o $x_2 = -5$ i) No tiene j) No tiene k) $x_1 = 3$ o $x_2 = -3$

2. a) $V(4; -9)$ Imagen: $y \in \mathbb{R}$: $y \geq -9$ b) $V(0; 6)$ Imagen: $y \in \mathbb{R}$: $y \geq 6$

   c) $V = \left(\frac{3}{2}; \frac{9}{4}\right)$. Imagen: $y \in \mathbb{R}$: $y \leq \frac{9}{4}$ d) $V(0; -2)$. Imagen: $y \in \mathbb{R}$: $y \geq -2$

e) $V(4; -3)$. Imagen: $y \in \mathbb{R}$: $y \geq -3$ f) $V(0; 0{,}5)$. Imagen: $y \in \mathbb{R}$: $y \leq 0{,}5$
g) $V(0{,}1; 1{,}96)$. Imagen: $y \in \mathbb{R}$: $y \geq 1{,}96$

2.1. a) V. mínimo: $y = -9$ b) V. mínimo: $y = 6$ c) V. máximo: $y = \frac{9}{4}$
d) V. mínimo: $y = -2$ e) V. mínimo: $y = -3$ f) V. máximo: $y = 0{,}5$
g) V. mínimo: $y = 1{,}96$

3. a) M. decreciente: $x \leq 4$
M. creciente: $x \geq 4$
b) M. decreciente: $x \leq -3$
M. creciente: $x \geq -3$
c) M. decreciente: $x \geq 2$
M. creciente: $x \leq 2$
d) M. decreciente: $x \leq 1$
M. creciente: $x \geq 1$
e) M. decreciente: $x \leq -0{,}5$
M. creciente: $x \geq -0{,}5$
f) M. decreciente: $x \geq 3$
M. creciente: $x \leq 3$
g) M. decreciente: $x \leq 0$
M. creciente: $x \geq 0$
h) M. decreciente: $x \geq 0$
M. creciente: $x \leq 0$
i) M. decreciente: $x \leq -1$
M. creciente: $x \geq -1$

4. Ver la tabla 4.9.

Tabla 4.9

	Dominio	**Imagen**	**Monotonía**	**Máximo o mínimo**	**Eje de simetría**
a) $y = x^2 - 2x - 15$	$x \in \mathbb{R}$	$y \geq -16$	d: $x \leq 1$ c: $x \geq 1$	mín: $y = -16$	$x = 1$
b) $y = x^2 - 6x$	$x \in \mathbb{R}$	$y \geq -9$	d: $x \leq 3$ c: $x \geq 3$	mín: $y = -9$	$x = 3$
c) $y = -2x^2 - 8$	$x \in \mathbb{R}$	$y \leq -8$	d: $x \geq 0$ c: $x \leq 0$	máx: $y = -8$	$x = 0$
d) $y = x^2 - 2x + 1$	$x \in \mathbb{R}$	$y \geq 0$	d: $x \leq 1$ c: $x \geq 1$	mín: $y = 0$	$x = 1$
e) $y = -x^2 - 4x + 5$	$x \in \mathbb{R}$	$y \leq 9$	d: $x \geq -2$ c: $x \leq -2$	máx: $y = 9$	$x = -2$
f) $y = x^2 + 1$	$x \in \mathbb{R}$	$y \geq 1$	d: $x \leq 0$ c: $x \geq 0$	mín: $y = 1$	$x = 0$
g) $y = -x^2 + 2x$	$x \in \mathbb{R}$	$y \leq 1$	d: $x \geq 1$ c: $x \leq 1$	máx: $y = 1$	$x = 1$
h) $y = 2x^2 - x - 1$	$x \in \mathbb{R}$	$y \geq -\frac{9}{8}$	d: $x \leq 0{,}25$ c: $x \geq 0{,}25$	mín: $y = -\frac{9}{8}$	$x = 0{,}25$
i) $y = (x - 1)^2 - 4$	$x \in \mathbb{R}$	$y \geq -4$	d: $x \leq 1$ c: $x \geq 1$	mín: $y = -4$	$x = 4$
j) $y = (x + 2)^2 + 4$	$x \in \mathbb{R}$	$y \geq 4$	d: $x \leq -2$ c: $x \geq -2$	mín: $y = 4$	$x = -2$
k) $y = -(x + 3)^2 + 16$	$x \in \mathbb{R}$	$y \leq 16$	c: $x \leq -3$ d: $x \geq -3$	máx: $y = 16$	$x = -3$

5. b) f: $V(3; -16)$ y g: $V(-3; 9)$
c) Imagen f: $y \in \mathbb{R}$: $y \geq -16$; imagen g: $y \in \mathbb{R}$: $y \leq 9$

d) Creciente: $x \geq 3$ e) Decreciente: $x \geq -3$
f) f: $x_1 = 7$ o $x_2 = -1$; g: $x_1 = 0$ o $x_2 = -6$

6. a) $-1 \leq y \leq 8$ b) $0 \leq y \leq 9$ c) $-9 \leq y \leq -1$ d) $-3 \leq y \leq 1$
e) $-5 \leq y \leq 4$ f) $0 \leq y \leq 4$

7. Ver la tabla 4.10

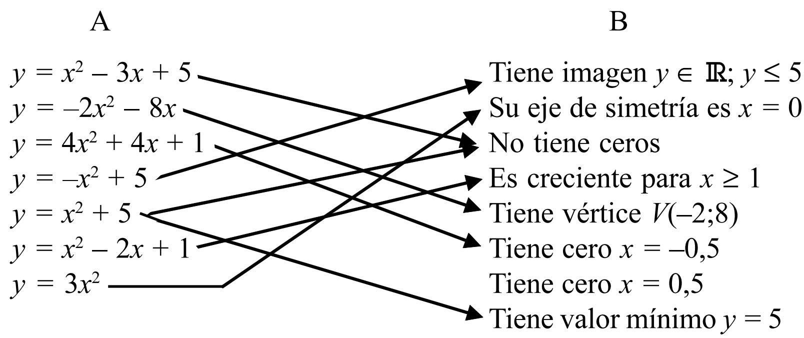
Tabla 4.10

Función	**Vértice**	**Dominio**	**Imagen**	**Ceros**	**Monotonía**	**Eje de simetría**
$f(x) = (x + 3)^2$	$(-3; 0)$	$x \in \mathbb{R}$	$y \in \mathbb{R}$: $y \geq 0$	$x_1 = -3$	Crece $x \geq -3$ Decrece $x \leq -3$	$x = -3$
$g(x) = (x - 3)^2$	$(3; 0)$	$x \in \mathbb{R}$	$y \in \mathbb{R}$: $y \geq 0$	$x_1 = 3$	Crece $x \geq 3$ Decrece $x \leq 3$	$x = 3$
$h(x) = x^2 + 4$	$(0; 4)$	$x \in \mathbb{R}$	$y \in \mathbb{R}$: $y \geq 4$	No tiene	Crece $x \geq 0$ Decrece $x \leq 0$	$x = 0$
$t(x) = x^2 - 4$	$(0; -4)$	$x \in \mathbb{R}$	$y \in \mathbb{R}$: $y \geq -4$	$x_1 = 2$ $x_2 = -2$	Crece $x \geq 0$ Decrece $x \leq 0$	$x = 0$
$p(x) = (x + 3)^2 - 4$	$(-3; -4)$	$x \in \mathbb{R}$	$y \in \mathbb{R}$: $y \geq -4$	$x_1 = -5$ $x_2 = -1$	Crece $x \geq -3$ Decrece $x \leq -3$	$x = -3$
$q(x) = (x + 3)^2 + 4$	$(-3; 4)$	$x \in \mathbb{R}$	$y \in \mathbb{R}$: $y \geq 4$	No tiene	Crece $x \geq -3$ Decrece $x \leq -3$	$x = -3$

8. a) h b) t c) g d) t e) p

9. $c = 8$ a) No tiene, porque el $D < 0$. b) $y = 1,75$

10.



11. a) $y = x^2 - 2x - 1$ b) $y = x^2 - 4x - 12$ c) $y = x^2 - 3x$
12. a) $y = x^2 - 10x + 24$ b) $y = x^2 + 6x + 8$ c) $y = 3x^2$
$y = -x^2 + 10x - 24$ $y = -x^2 - 6x - 8$ $y = -3x^2$

13. $f(x) = x^2 - 6x + 5$ $g(x) = x^2 - \frac{13}{3}x + 4$ $h(x) = x^2 + 3,5x$

14. a) $f(x) = -x^2 + 1$ b) $g(x) = x^2 - 6x + 8$ c) $h(x) = x^2 + 2x$

15. a) $y = (x - 3)^2 - 4$ b) $y = -(x + 2)^2 + 2$ c) $y = (x + 1)^2 - 1$

16. a) $y = x^2 - 4x + 3$ b) $y = x^2 - 2x + 1$ c) $y = x^2 - x + 1$

17. b) 16 cm^3

18. $A = a(10 - a)$

19. a) 31,25 m b) 2,5 s y 2,5 s c) 5 s

20. 12 y 12 21. a) 30 m y 30 m b) 900 m^2

22. a) 500 artículos b) 35 000 dólares

Ejercicios del capítulo

1. a) $4x + 31$ b) $4y^2 - 15y + 25$ c) $11x - 4$ d) $y^2 + 8y + 7$ e) 35
   f) $-m^2 + 9m - 282$ g) $2x^2y^2 + 2xy + 1$ h) $n^2 - \frac{5n}{3}$

2. a) $8(a - b)$ b) $(x - 8)(x + 6)$ c) $(y + 7)(y - 7)$ d) $(2m - 1)(m - 8)$
   e) $xy(x^2 - 2)$ f) $(y - 7)^2$ g) $\left(p - \frac{1}{6}\right)\left(p + \frac{1}{6}\right)$ h) $3m^2(m - 2)$
   i) $(y - \sqrt{7})(y + \sqrt{7})$ j) $(5n + 2)(n + 2)$ k) No es posible l) $(v + 6)^2$
   m) $2a^2(9a - 1)$ n) $(5b + 1)(b + 2)$ ñ) $(2c - 5)(3c + 4)$ o) $(2z - 13)(2z + 13)$
   p) $(x - 10)(x - 5)$ q) $\left(\frac{p}{4} + 1\right)\left(\frac{p}{4} - 1\right)$ r) $(a - 6)(a - 9)$ s) $(x + 11)(x - 4)$
   t) $(4b - 0{,}7c^2)\,(4b + 0{,}7c^2)$ u) $4ab(2b - a^2 + ab)$ v) $(5y - 2z)(2y + 5z)$

3. a) $2x(2x + 1)(2x - 1)$ b) $3(y + 4)(y - 2)$ c) $2z(3z + 5)(3z - 5)$
   d) $(b^2 + 3)(b + 2)(b - 2)$ e) $a(a^2 + 1)(a + 1)(a - 1)$ f) $(m + 5)(0{,}5 - x)(0{,}5 + x)$
   g) $(m + 3)(p - 1)$ h) $x(x + 3)(x - 3)(x + 1)(x - 1)$ i) $(p + 4)(p - 4)(p + 3)(p - 3)$
   j) $2x(x + 2)^2(x - 2)^2$ k) $(m^2 + 16)(m - 4)(m + 4)$ l) $3yz(y^3 - 2)(y^3 + 1)$

4. 4.1 e) 4.2 b)

5. 5.1. a) $8x + 64 = 8(x + 8)$ b) $4x^2 - 9 = (2x - 3)(2x + 3)$
   c) $y^2 - 21y - 100 = (y - 25)(y + 4)$ d) $m^2 + 28m + 196 = (m + 14)^2$
   e) $2x^2 - 11x + 5 = (2x - 1)(x - 5)$ f) $x^4 + 6x^2 - 40 = (x^2 + 10)(x - 2)(x + 2)$
   g) $z^3 - 25z = z(z + 5)(z - 5)$ h) $4p^2 + 12p + 9 = (2p + 3)^2$

6. a) $3x^2 + 7x + 2$ b) $(3x + 1)(x + 2)$

7. a) $-x^2 + 2x + 8$ b) $(-x + 4)(x + 2)$

8. a) $16x^2 - 1$ b) $(4x - 1)(4x + 1)$

9. b) – 45 c) Para $x_1 = -8$ o $x_2 = 7$

10. a) $x = -4$ b) $x_1 = 9$ o $x_2 = -7$ c) $x_1 = 2$ o $x_2 = -9$

d) $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ o $x_2 = -1$ e) $x_1 = -\dfrac{15}{2}$ o $x_2 = \dfrac{15}{2}$ f) $x_1 = 0{,}4$ o $x_2 = -0{,}4$

g) $x_1 = 0$ o $x_2 = 5$ h) $x_1 = 0$ o $x_2 = 2$ i) No tiene solución

j) $x_1 \approx 1{,}2$ o $x_2 \approx -4{,}2$ k) $x_1 \approx 1{,}37$ o $x_2 \approx -0{,}37$ l) $x_1 \approx 1{,}35$ o $x_2 \approx -1{,}85$

11. a) $S = \{-4; 4\}$ b) $S = \{-8; 3\}$ c) $S = \{-1; 11\}$

d) $S = \left\{-\dfrac{25}{3}; 3\right\}$ e) $S = \left\{-\dfrac{1}{9}; 2\right\}$ f) $S = \{-7; 7\}$ g) $S = \{-8; 0\}$

h) $S = \{-2; 9\}$ i) $S = \left\{-\dfrac{8}{7}; 0\right\}$ j) $S = \left\{\dfrac{7}{3}; \dfrac{3}{2}\right\}$ k) $S = \{-2{,}8; -0{,}18\}$

l) $S = \{-1{,}15; 6{,}15\}$ m) $S = \{-0{,}65; 2{,}65\}$ n) $S = \phi$

12. 12.1 e) 12.2 a) 12.3 c) 12.4 a) 12.5 d) 12.6 d)

13. Ver la figura 4.96

10	–4	6
0	4	8
2	12	–2

Figura 4.96

14. a) 2 b) 2 c) Ninguna d) 2 e) 1 f) Ninguna g) 2 h) 2 i) Ninguna

15. b) 16. d) 17. 27 y 17 o –17 y –27

18. 7 y 2 19. 12 m y 8 m 20. 10 filas y 18 hombres por fila.

21. 4 cm y 3 cm 22. 11, 12, 13 y 14 o –14, –13, –12 y – 11

23. Los números son 13 y 15.

24. La edad de Paula es 22 años y la de Henry 24 años.

25. La longitud del lado del cuadrado es de 9 cm.

26. 25 m de largo y 15 m de ancho.

27. a) 107 m de largo y 100 m de ancho. b) 25 %

28. 1 s

29. 12 pulgadas de ancho y 16 pulgadas de largo.

31. a) $y = x^2 + 2x + 3$ b) $y = -x^2 + 5x - 4$ c) $y = 2x^2 + 3x + 1$
d) $y = -2x^2 + 4x + 5$ e) $y = -x^2 + 6x - 12$

32. a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ b) $g(x) = 2x^2 - 4x - 6$
c) $h(x) = (x - 4)^2 - 9$ d) $t(x) = -x^2 - 6x$

32.1 Propiedades (tabla 4.11).

Tabla 4.11

	Dominio	**Imagen**	**Ceros**	**Monotonía**	**V. máximo o mínimo**	**eje**
f	$x \in \mathbb{R}$	$y \geq -4$	–1 y 3	dec: $x \leq 1$ crec: $x \geq 1$	mín: $y = -4$	$x = 1$
g	$x \in \mathbb{R}$	$y \geq -8$	–1 y 3	dec: $x \leq 1$ crec: $x \geq 1$	mín: $y = -8$	$x = 1$
h	$x \in \mathbb{R}$	$y \geq -9$	1 y 7	dec: $x \leq 4$ crec: $x \geq 4$	mín: $y = -9$	$x = 4$
t	$x \in \mathbb{R}$	$y \leq 9$	0 *y* – 6	dec: $x \geq -3$ crec: $x \leq -3$	máx: $y = 9$	$x = -3$

33. a) F, porque $a > 0$ b) V c) V
d) F, porque es (3; –1) e) V f) F, porque $x_2 = 2$.

34. 34.1 a) – 2 b) $x \geq 1$ c) $x = 1$ d) $V(1; -9)$

34.2 $f(x) = (x - 1)^2 - 9$ b) $f(-2) > f(3)$ c) (–1; –5)

35. 35.1 a) $c > a > b$ b) El otro cero es 1.

35.2 a) V b) F, es $x = 5$ c) V d) V
e) F, La imagen de – 3 por la función g es positiva y la de 3, negativa.

36. a) $-4 \leq y \leq 21$ b) $-3 \leq x \leq -2$ c) $x = 0$ d) $y = -4$

37. 37.1 b) 37.2 c) 37.3 e) 37.4 c) 37.5 e) 37.6 b) 37.7 c)

CAPÍTULO 5

Cuerpos

En este capítulo continuarás profundizando en el estudio de otros cuerpos geométricos, los llamados cuerpos redondos o cuerpos de revolución; estudiarás su definición, sus elementos y propiedades fundamentales, así como el cálculo de dichos elementos, aprenderás a reconocerlos en tu entorno, realizar su esbozo y la construcción en perspectiva caballera. Asimilarás nuevas fórmulas que expresan sus áreas y volúmenes, y las aplicarás a la resolución de ejercicios y problemas.

Pero antes debes realizar un repaso sistematizador, para el cual es importante que recuerdes los elementos del prisma y la pirámide que estudiaste en octavo grado, tales como bases, caras, aristas, alturas y ángulos, además, todas las propiedades relacionadas con ellos, las fórmulas para calcular el área total y el volumen del prisma y la pirámide respectivamente. Después completarás tu estudio tratando de resolver los diez ejercicios del primer epígrafe u otros similares que te oriente tu profesor y estarás en condiciones de enfrentar con éxito el estudio de los cuerpos con base circular.

5.1 Repaso sobre cálculo de áreas y volúmenes del prisma y la pirámide

En octavo grado estudiaste el prisma recto y la pirámide recta como cuerpos limitados por polígonos; en aquella oportunidad aprendiste a calcular el área total y el volumen de estos cuerpos, ahora tendrás la oportunidad de sistematizar estos contenidos.

Primero recordaremos algunas definiciones y propiedades del prisma y la pirámide.

Un *prisma* es un cuerpo geométrico limitado por dos polígonos iguales de n lados situados en planos paralelos, llamados bases y por n paralelogramos, llamados caras laterales (fig. 5.1).

Además, el prisma es *regular* cuando es *recto* y sus bases son *polígonos regulares,* (por ejemplo: un triángulo equilátero, un cuadrado, un pentágono regular, entre otros).

Los prismas se denominan por el número de lados de los polígonos de sus bases. Observa la figura 5.1, entonces el prisma *A* se llama triangular; el *B*, cuadrangular, el *C* pentagonal y el *D* exagonal, etcétera.

De octavo grado sabes que cuando en un prisma las aristas laterales no son perpendiculares a la base decimos que es un *prisma oblicuo* (fig. 5.1 *C*) y en caso contrario, prisma recto, observa en la figura 5.1 los ejemplos *A*, *B* y *D*.

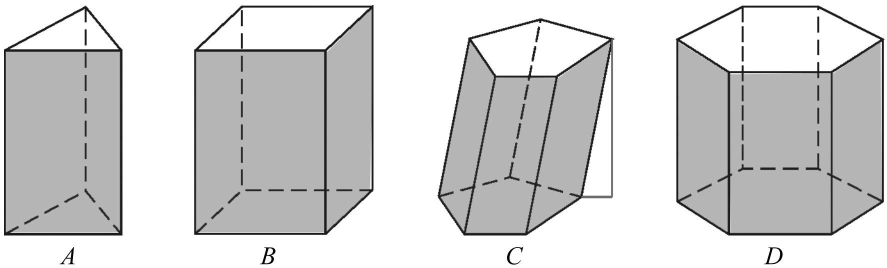


Figura 5.1

Una *pirámide* es un cuerpo geométrico limitado por un polígono llamado base de la pirámide, y por caras laterales, que son triángulos con vértice común (fig. 5.2).

Observa las pirámides *ABCDE* y *MNPQ* de la figura 5.2, las alturas respectivas parten de sus vértices y llegan hasta el centro de sus bases, entonces decimos que son *pirámides rectas,* en el caso de la pirámide *HIJKL* la altura es la arista lateral $\overline{LJ}$, por tanto, es *oblicua.*

Una pirámide es *regular* cuando es *recta* y su base es un polígono regular, entonces las aristas laterales son todas iguales y las caras laterales son triángulos isósceles y las alturas de estos triángulos reciben el nombre de apotema.

En la figura 5.2, la pirámide *ABCDE* es regular y $\overline{EG}$ es la apotema del triángulo *BCE*.

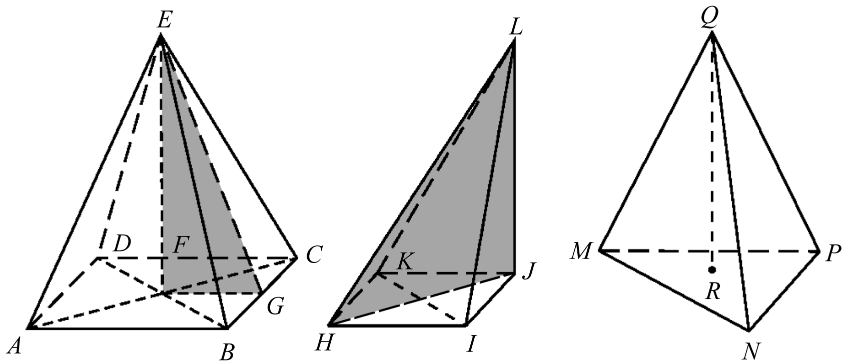


Figura 5.2

¿Cómo calcular áreas de estos cuerpos, o sea, el área lateral, el área de la base y el área total?

Recuerda que:

El área total del *prisma* se calcula utilizando la fórmula: $A_T = 2A_B + A_L$ A_B: Área de base. A_L: Área lateral, que es igual a la suma de las áreas de cada una de sus caras laterales, también se puede calcular por la fórmula: $A_L = P \cdot h$ (producto del perímetro de la base por la altura del prisma)

Ejemplo 1:

Sea *ABCDEFGH* (fig. 5.3) un prisma recto de base cuadrada de lado 1,5 m. La altura del prisma es igual a 2,0 m.

a) Calcula el área total del prisma.
b) Se tienen 12 cajas con dimensiones iguales al prisma de la figura 5.3 y se desea forrarlas con papel a color. ¿Qué cantidad aproximadamente se necesita?

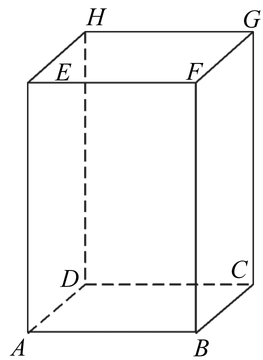


Figura 5.3

Solución:

a) Como la base es un cuadrado, el área se calcula: $A_B = \overline{AB}^2$
y el perímetro del cuadrado se calcula $P = 4 \cdot \overline{AB}$.

$A_T = 2A_{ABCD} + P_{ABCD} \cdot h$

$A_T = 2\overline{AB}^2 + 4 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AE}$

$A_T = 2 \cdot (1{,}5)^2 + 4 \cdot 1{,}5 \cdot 2$ (sustituyendo)

$A_T = 2 \cdot 2{,}25 + 8 \cdot 1{,}5$

$A_T = 4{,}5 + 12$

$A_T = 16{,}5 \text{ m}^2$

$A_T \approx 17 \text{ m}^2$

b) $17 \cdot 12 = 204 \text{ m}^2$

Respuesta: Se necesitan aproximadamente 204 m^2.

Recuerda que:

El área total de la pirámide se calcula utilizando la fórmula: $A_T = A_B + A_L$ A_B: área de base, A_L: área lateral, que se calcula como la suma de las áreas de las caras laterales (triángulos) que forman la pirámide.

Ejemplo 2:

En la figura 5.4, se muestra una pirámide recta cuya base $ABCD$ es un rectángulo, que cumple las condiciones siguientes:

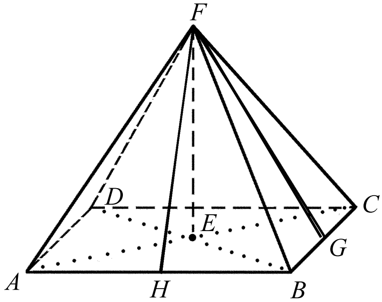


Figura 5.4

- $\overline{EF} = 8{,}0\text{ cm}$, altura de la pirámide
- $\overline{AB} = 12\text{ cm}$, largo del rectángulo de la base
- $\overline{BC} = 6{,}0\text{ cm}$, ancho del rectángulo de la base
- $\overline{GF} = 10\text{ cm}$, apotema del triángulo BCF
- $\overline{HF} = 8{,}5\text{ cm}$, apotema del triángulo ABF

Calcula el área lateral y el área total.

Solución:

El área lateral de la pirámide $ABCDF$ se calcula:

$$A_L = 2A_{ABF} + 2A_{BCF}$$

$$A_{ABF} = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{HF}\text{ (fig. 5.5)}$$

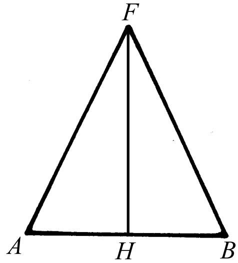


Figura 5.5

$$A_{ABF} = \frac{1}{2}\cdot 12\text{ cm}\cdot 8{,}5\text{ cm}$$

$$A_{ABF} = 51\text{ cm}^2$$

$$A_{BCF} = \frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{GF}\text{ (fig. 5.6)}$$

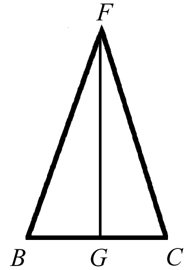


Figura 5.6

$$A_{BCF} = \frac{1}{2}\cdot 6\text{ cm}\cdot 10\text{ cm}$$

$$A_{BCF} = 30\text{ cm}^2$$

$A_L = 2 \cdot 51\text{ cm}^2 + 2 \cdot 30\text{ cm}^2$
$A_L = 102\text{ cm}^2 + 60\text{ cm}^2$
$A_L = 162\text{ cm}^2$
$A_L \approx 1{,}6\text{ dm}^2$

El área de la base de la pirámide $ABCDF$ es el rectángulo $ABCD$ (fig. 5.7) y se calcula:

Figura 5.7

$$A_B = \overline{AB}\cdot\overline{BC}$$

$A_B = 12\text{ cm} \cdot 6\text{ cm}$
$A_B = 72\text{ cm}^2$

El área total de la pirámide es igual a:

$A_T = A_B + A_L$
$A_T = 72\ \text{cm}^2 + 162\ \text{cm}^2$
$A_T = 234\ \text{cm}^2$
$A_T \approx 2{,}3\ \text{dm}^2$

¡! A una pieza maciza de madera en forma de prisma recto de base cuadrada se le realizó una perforación en forma de pirámide recta, que cumple las condiciones siguientes:

- La base de la pirámide coincide con la base inferior del prisma.
- La longitud de los lados del cuadrado de la base es igual a 2,0 dm.
- El prisma tiene una altura igual 1,8 dm.
- La longitud de la altura de la pirámide es $\frac{2}{3}$ de la longitud de la altura del prisma.

a) Calcula el volumen de la pieza de madera antes de la perforación.
b) Calcula el volumen de la pieza después de la perforación.

Para calcular los dos volúmenes que se desea, hay que calcular el volumen de dos cuerpos geométricos, o sea, el del prisma y el de la pirámide.

Recuerda la fórmula del volumen del prisma: $V = A_B \cdot h$
Recuerda la fórmula del volumen de la pirámide: $V = \frac{1}{3} A_B \cdot h$

Representación de los cuerpos en perspectiva caballera (fig. 5.8).

R¡!

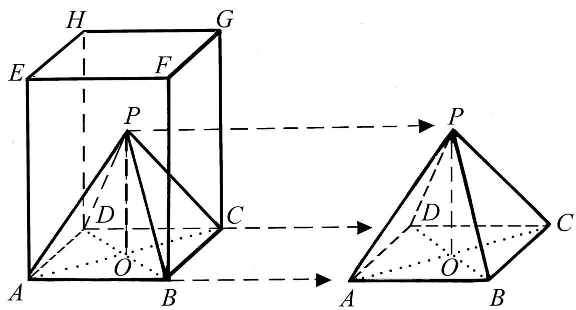


Figura 5.8

a) $V_{Prisma} = A_B \cdot h$

La base es un cuadrado, luego:

$A_B = \overline{AB}^2$
$A_B = (2\ \text{dm})^2$
$A_B = 4\ \text{dm}^2$
$A_{ABCDEFGH} = 4\ \text{dm}^2 \cdot 1{,}8\ \text{dm}$
$A_{ABCDEFGH} = 7{,}2\ \text{dm}^3$

Respuesta: El volumen de la pieza antes de perforar es igual a 7,2 dm^3.

b) Para calcular el volumen de la pieza después de perforada, se procede de la manera siguiente. Al volumen de la pieza antes de perforar se le sustrae el volumen de la pirámide.

$$V_{Pirámide} = \frac{1}{3} A_B \cdot h$$

Para calcular el volumen de la pirámide *ABCDP*, se procede así:

$$V_{ABCDP} = \frac{1}{3} A_{ABCD} \cdot \overline{OP}$$

Observa que las bases de los cuerpos coinciden, luego el área de la base de la pirámide es:

$$A_B = 4 \text{ dm}^2$$

La altura de la pirámide $\overline{OP}$ es $\frac{2}{3}$ de 1,8 dm, luego $\overline{OP}$ se calcula:

$$\overline{OP} = \frac{2}{3} \cdot \frac{18}{10} = \frac{6}{5} = 1,2 \text{ dm}$$

$$V_{ABCDP} = \frac{1}{3} 4 \text{ dm}^2 \cdot 1,2 \text{ dm}$$

$$V = 1,6 \text{ dm}^3$$

El volumen de la pirámide es igual a 1,6 dm^3.

Ahora calculamos el volumen de la pieza después de la perforación.

$$V_{ABCDEFGH} - V_{ABCDP} = 7,2 \text{ dm}^3 - 1,6 \text{ dm}^3 = 5,6 \text{ dm}^3$$

Respuesta: El volumen de la pieza después de la perforación es igual a 5,6 dm^3.

Ejercicios

1. Sean *MNPQR* en ese orden, una pirámide recta que tiene por base al cuadrado *MNPQ*, *R* vértice superior y *O* punto de intersección de las diagonales de la base de la pirámide.

1.1 Clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas (V) o falsas (F). Argumenta las falsas.

a) ___ La altura de la pirámide es perpendicular a la arista de la base $\overline{MN}$.
b) ___ Las caras laterales de la pirámide son triángulos isósceles.

c) ___ El volumen de la pirámide se calcula por la fórmula $V = \frac{A_B \cdot \overline{OR}}{3}$.

d) ___ El segmento que parte de *R* y es perpendicular a $\overline{MN}$ es la apotema del triángulo *MNR*.

e) ___ El área lateral de la pirámide se calcula por la fórmula $A_L = P \cdot h$ (*P*: perímetro de la base y *h*: altura de la pirámide).

f) ___ La pirámide *MNPQR* es regular.

2. Un prisma recto de base rectangular tiene una altura de 6,5 cm y las dimensiones de la base son 3,4 cm y 46 mm. Calcula su área lateral.
3. Halla el área total de un prisma recto cuya altura es igual a 5,4 cm y la base es un rombo cuyas diagonales miden 6,0 cm y 8,0 cm.
4. De un cuerpo macizo en forma de prisma de altura igual a 70 mm y la base un rectángulo donde el largo es el doble del ancho, se talló una pirámide donde se mantienen igual la altura y la base, el área lateral del prisma es 168 cm^2. Calcula el volumen de la pirámide.
5. Halla el área total de una pirámide recta de base cuadrada, cuya superficie de la base mide 196 cm^2 de área y la longitud de las alturas de sus caras representan las tres séptimas partes de las aristas de sus bases.
6. Calcula el área total del prisma recto representado en la figura 5.9.

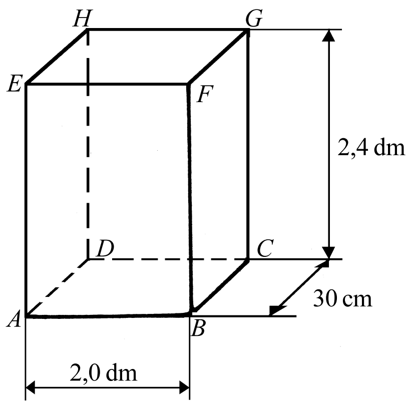


Figura 5.9

7. En la figura 5.10, se muestra una pirámide regular cuya base *ABCD* es un cuadrado, que cumple las condiciones siguientes:

   - El volumen es igual a 48 dm^3.
   - La altura de la pirámide $\overline{EF} = 4{,}0$ dm.
   - La apotema $\overline{EG}$ del triángulo *ABE* es igual a 5,0 dm.

   Calcula el área lateral y área total de la pirámide.

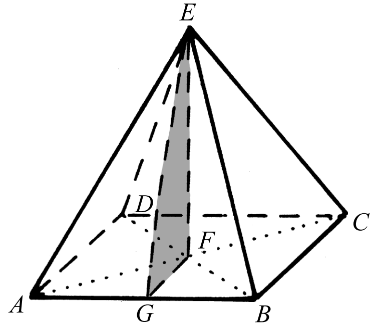


Figura 5.10

8. La figura 5.11 muestra una pirámide recta que tiene como base al cuadrado $ABCD$ de lado $\overline{AB} = 6,0$ cm y altura $\overline{OE} = 0,8$ dm.

a) Calcula el volumen de la pirámide.
b) Si el área lateral de la pirámide es igual a 102 cm^2, calcula la longitud de la altura del triángulo BCE.
c) Calcula el área total de la pirámide.

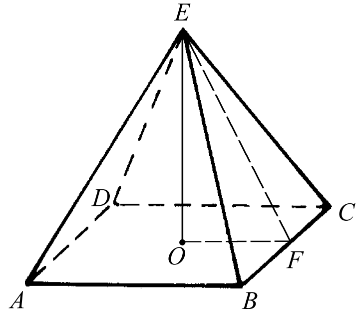


Figura 5.11

9. En la figura 5.12 se muestra un prisma recto $ABCDEFGH$ que tiene como bases los rectángulos $ABCD$ y $EFGH$, tal que:

- El volumen del prisma es 48 cm^3.
- $\overline{AE} = 6,0$ cm.
- $2 \cdot \overline{EH} = \overline{HG}$.

Calcula el área lateral del prisma $ABCDEFGH$.

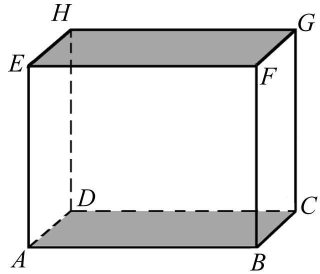


Figura 5.12

10. En la figura 5.13 se muestra un prisma recto de base rectangular tal que:

- El perímetro de la base es igual a 52 cm.
- El largo de la base excede en 60 mm al ancho.
- La altura del prisma es igual a 12 cm.

a) Calcula la longitud de a y b.
b) Calcula el área lateral del prisma.

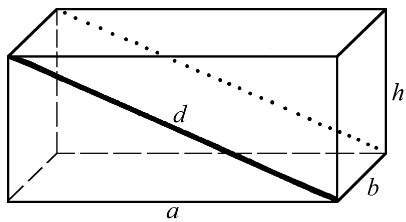


Figura 5.13

Si al prisma se le realiza un corte recto por una de sus diagonales (d), entonces se obtienen dos prismas rectos de base un triángulo rectángulo de catetos a y h e hipotenusa d, como se muestra en la figura 5.14.

c) Calcula el área del rectángulo sombreado en el prisma de la figura 5.14.

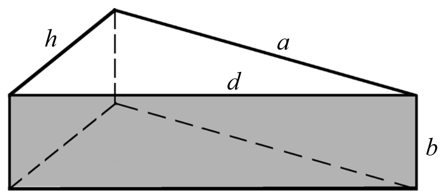


Figura 5.14

5.2 Cilindro, cono y esfera

En séptimo y octavo grados estudiaste los cuerpos geométricos limitados por caras planas; los llamados poliedros. Observa a tu alrededor, puedes ver muchos cuerpos que no son poliedros, sino que tienen alguna cara curva y que los utilizas a diario, en noveno grado te dedicarás al estudio de los cuerpos geométricos que tienen sus caras curvas o cuerpos redondos; el cilindro, el cono y la esfera.

Ejemplo 3:

Observa la imagen de la figura 5.15, la conoces desde tus clases de Geografía, es nuestro planeta Tierra que tiene forma esférica.

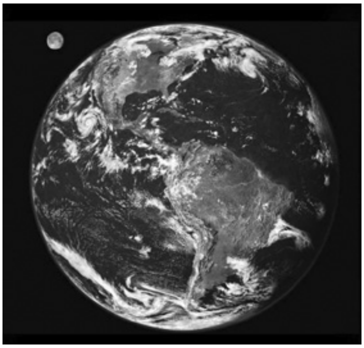


Figura 5.15

Sabes que desde la antigüedad las diferentes civilizaciones han utilizado los cuerpos geométricos redondos en sus construcciones. Observa las imágenes de la figura 5.16.

Figura 5.16

Otros ejemplos de cuerpos geométricos redondos son: las baterías eléctricas (fig. 5.17a), los instrumentos de percusión (fig. 5.17b) y la carpa del circo (fig. 5.17c).

a) 

b) 

c) 

Figura 5.17

Recuerda *la definición de cilindro:*

Llamamos **cilindro circular recto** al cuerpo geométrico que se obtiene por la rotación de un rectángulo alrededor de uno de sus lados.

Al aplicarle una rotación sobre uno de sus lados al *rectángulo* que aparece en la figura 5.18a, se obtiene el *cilindro circular recto* que aparece en la figura 5.18b.

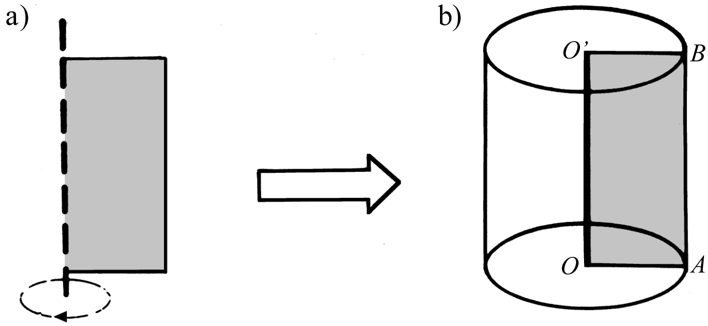


Figura 5.18

De los cuerpos representados en las figuras 5.16 y 5.17, ¿cuáles, según la definición dada, representan cilindros? Te darás cuenta que son: las baterías eléctricas, los instrumentos de percusión y la carpa del circo.

Observa detenidamente el cilindro circular recto de la figura 5.18a. ¿Cuáles son a tu juicio los elementos que lo componen?

Elementos del cilindro circular recto

1. Está limitado por dos círculos iguales llamados *bases* y una *superficie lateral curva*.
2. El *radio* del cilindro es el radio de sus bases: $\overline{OA}$.
3. La *altura* es la distancia entre sus bases: $\overline{OO'}$.
4. La *generatriz* es el segmento perpendicular a la base y cuyos extremos pertenecen a las circunferencias que las limitan: $\overline{AB}$, (además, se cumple que la generatriz es igual a la altura).

Veamos ahora el cono.

Recuerda *la definición de cono:*

Denominamos **cono circular recto** al cuerpo que se obtiene por la rotación de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

El cono circular recto de la figura 5.19b, se obtuvo al aplicarle una rotación al triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos (fig. 5.19a).

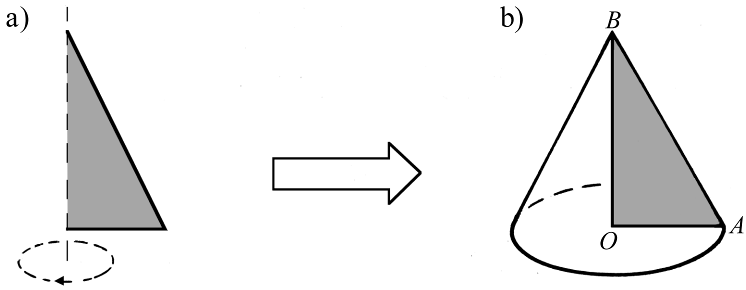


Figura 5.19

De los cuerpos representados en las figuras 5.16 y 5.17, ¿cuáles, según la definición dada, representan conos? Te darás cuenta que es la parte superior de la carpa del circo.

Observa detenidamente el cono circular recto de la figura 5.19b. ¿Cuáles son a tu juicio los elementos que lo componen?

Elementos del cono circular recto

1. Está limitado por un círculo llamado *base* y por una *superficie lateral curva.*
2. El *radio* del cono es el radio de su bases: $\overline{OA}$.
3. La *altura* es la distancia del vértice a la base: $\overline{OB}$.
4. La *generatriz* es cualquier segmento que tiene como extremo el vértice del cono y un punto de la circunferencia que limita la base: $\overline{AB}$.

Observa la figura 5.19b. En un cono de revolución, la altura y el radio son perpendiculares, o sea, $\left(\overline{OB} \perp \overline{OA}\right)$ y la altura, el radio y la generatriz forman un triángulo rectángulo en *O.* Esto va a ser útil para calcular los diferentes elementos del cono utilizando el teorema de Pitágoras, entonces se cumple que: $\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2$

Veamos ahora la esfera.

Recuerda *la definición de la esfera:*

Denominamos **esfera** al cuerpo geométrico que se obtiene por la rotación de un semicírculo alrededor de su diámetro.

La esfera de la figura 5.20b, se obtuvo al aplicarle una rotación al semicírculo alrededor de su diámetro (fig. 5.20a). El centro del semicírculo será el centro de la esfera y los demás elementos de la esfera están muy relacionados con los del semicírculo que la genera. Observa detenidamente la figura 5.20b, veamos sus elementos.

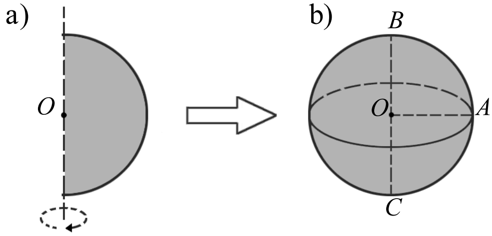


Figura 5.20

Elementos de la esfera

1. Está limitada por una *superficie curva.*
2. El *centro* de la esfera es el centro de los círculos y las circunferencias máximas. (La mayor circunferencia de la esfera es aquella cuyo plano pasa por el centro).
3. El *radio* es el segmento que une el centro de la esfera con un punto cualquiera de su superficie: $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$.
4. El *diámetro* de la esfera es cualquier segmento que pasa por su centro y que tenga sus extremos en la superficie curva que la limita: $\overline{BC}$.

5.2.1 Representación geométrica del cilindro, el cono y la esfera

Ya sabes desde octavo grado representar en el plano prismas y pirámides en *perspectiva caballera.* Te invito a realizar la representación de otros cuerpos como son el cilindro, el cono y la esfera.

La representación de estos cuerpos la haremos siguiendo el procedimiento siguiente.

Recordemos el procedimiento para representar cuerpos en perspectiva caballera

1. Los segmentos en la dirección del ancho y la altura se representan con la misma dirección y longitud que tienen en el cuerpo que queremos representar.
2. Los segmentos en la dirección de la profundidad se trazan formando un ángulo de 45° con la horizontal y con la mitad de la longitud que tienen en el cuerpo.

Observa que los cuerpos que queremos representar son cuerpos de revolución (un cuerpo de revolución es aquel que se origina al girar una figura plana alrededor de un eje); es necesario saber representar circunferencias en el plano utilizando el procedimiento descrito anteriormente.

Ejemplo 4:

Representa en perspectiva caballera una circunferencia de centro O y 2,0 cm de radio.

Solución:

1. Representemos la circunferencia de centro O y radio 2,0 cm (fig. 5.21).
2. Tracemos en la circunferencia los diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, que sean perpendiculares entre sí (fig. 5.22).

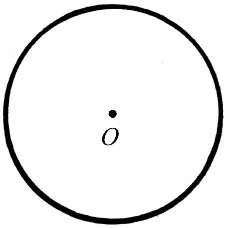


Figura 5.21

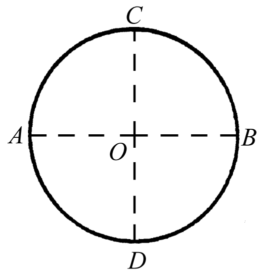


Figura 5.22

3. Representemos un cuadrado circunscrito a la circunferencia en los puntos A, B, C y D (fig. 5.23).
4. Representemos en perspectiva caballera el cuadrado $EFGH$ y así, queda representada la circunferencia como una elipse, caso particular de la proyección paralela oblicua (fig. 5.24).

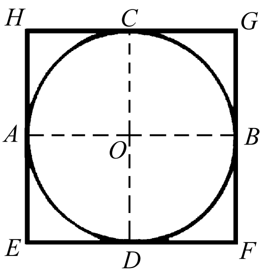


Figura 5.23

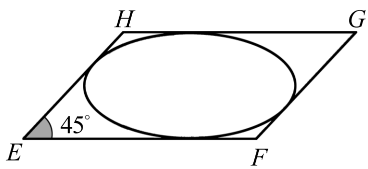


Figura 5.24

Hemos representado la circunferencia en perspectiva caballera.

Ejemplo 5:

Representa en perspectiva caballera un cilindro circular recto de 2,0 cm de radio y 6,0 cm de altura.

1. Trazamos la circunferencia de centro en O y radio igual a 2,0 cm de la base inferior siguiendo el procedimiento del ejemplo 4 (fig. 5.25).
2. Trazamos $\overline{OO'} \perp \overline{AB}$ donde $\overline{OO'} = 6,0\,\text{cm}$ (fig. 5.26).

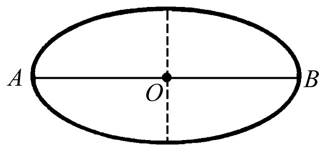


Figura 5.25

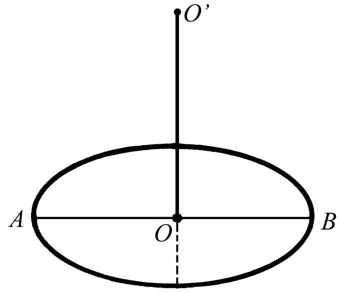


Figura 5.26

3. Con centro en O' se traza la circunferencia de radio igual a 2,0 cm, de la base superior (fig. 5.27).
4. Trazamos las generatrices $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ (fig. 5.28).

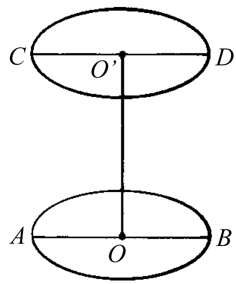


Figura 5.27

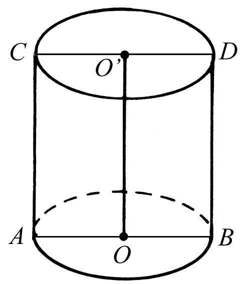


Figura 5.28

Hemos representado el cilindro circular recto de 2,0 cm de radio y 6,0 cm de altura.

Ejemplo 6:

Representa en perspectiva caballera un cono de 2,0 cm de radio y 4,0 cm de altura.

1. Trazamos la circunferencia de centro en O y radio igual a 2,0 cm de la base siguiendo el procedimiento del ejemplo 4 (fig. 5.29).
2. Trazamos $\overline{OO'} \perp \overline{AB}$ donde $\overline{OO'} = 4{,}0\text{ cm}$ (fig. 5.30).

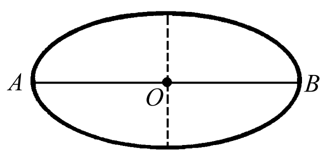


Figura 5.29

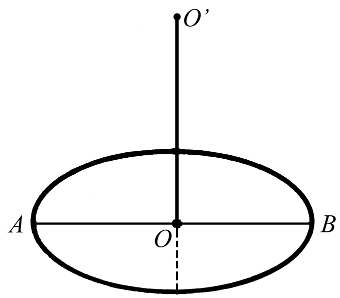


Figura 5.30

3. Trazamos las generatrices $\overline{AO'}$ y $\overline{BO'}$ (fig. 5.31).

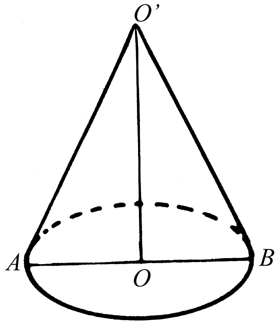


Figura 5.31

Hemos representado el cono de 2,0 cm de radio y 4,0 cm de altura.

Ejemplo 7:

Representa en perspectiva caballera una esfera de 3,0 cm de radio.

1. Trazamos la circunferencia de centro en O y radio igual a 3,0 cm de la base siguiendo el procedimiento del ejemplo 4 (fig. 5.32).
2. Trazamos una circunferencia máxima que se encuentre en el plano vertical que contiene a $\overline{AB}$ (fig. 5.33).
   Hemos representado la esfera de 3,0 cm de radio (fig. 5.34).

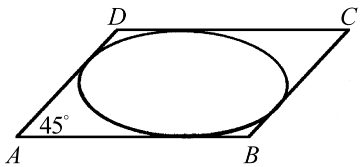


Figura 5.32

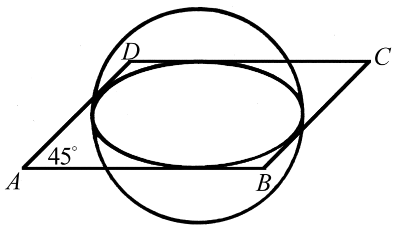


Figura 5.33

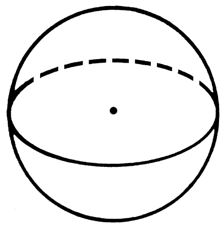


Figura 5.34

Ejercicios

1. Determina cuáles de las siguientes proposiciones son falsas. Fundamenta tu respuesta.
   a) ___ Si la generatriz de un cilindro es igual a su altura, entonces es un cilindro circular recto.
   b) ___ El cono está limitado por una superficie curva.
   c) ___ En el esbozo de una circunferencia en perspectiva caballera, si el diámetro en la dirección del ancho es igual a 4,0 cm, entonces el radio en la dirección de la profundidad es igual a 2,0 cm.
   d) ___ La esfera se obtiene al rotar un semicírculo alrededor de su diámetro.

2. Dibuja en perspectiva caballera:

   a) Un cilindro circular recto de 3,5 cm de altura y 1,0 cm de radio de la base.
   b) Un cono de 4,6 cm de altura y cuya base tenga 4,0 cm de diámetro.
   c) Una esfera engendrada por una circunferencia de 1,5 cm de radio.

3. Dibuja el cuerpo que se genera al hacer girar un triángulo rectángulo sobre el cateto de longitud igual a 6,0 cm y de hipotenusa igual a 1,0 dm.
4. Dibuja el cuerpo que se genera al girar un rectángulo sobre uno de sus lados de longitud igual a 5,0 cm, cuyo perímetro es 26 cm.
5. En la figura 5.35 se muestran cuerpos de revolución.

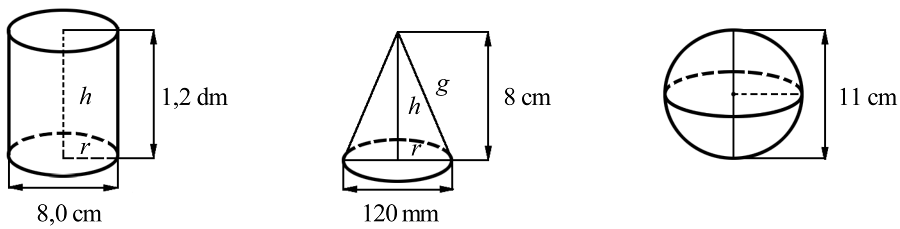


Figura 5.35

5.1 Completa los espacios en blanco de forma tal que obtengas proposiciones verdaderas.

   a) El radio del cilindro circular recto tiene una longitud igual a ______.
   b) El radio del cono tiene una longitud igual a ______.
   c) La generatriz del cono tiene una longitud igual a ______.
   d) El radio de la esfera tiene una longitud igual a ______.
   e) La longitud del diámetro del círculo máximo de la esfera es igual a ______.
   f) El área del círculo base del cilindro circular recto es igual a ______.
   g) La longitud de la circunferencia máxima de la esfera es igual a ______.
   h) En el cilindro, la amplitud del ángulo que se forma por la intersección de la altura y el radio es igual a ______.
   i) En el cono, si la amplitud del ángulo que se forma por la intersección de la altura y la generatriz es igual a 30°, entonces la amplitud del ángulo que se forma entre la generatriz y el radio es igual a ______.

5.3 Áreas lateral y total del cilindro y el cono mediante sus desarrollos

¡! ¿Qué cantidad de material se necesita para fabricar una lata de sardinas como la que se muestra en la figura 5.36 si se conoce que la base tiene un diámetro de 15,0 cm y la altura es de 6,50 cm?

El estudio de este epígrafe te permitirá responder esta interrogante.

Figura 5.36

Pasaremos ahora a estudiar cómo calcular las áreas de estos cuerpos: el área lateral, el área de las bases y el área total.

Recuerda *la definición de área total de un cuerpo geométrico:*

El **área total de un cuerpo geométrico** es igual a la suma del área lateral y el área de las bases.

5.3.1 Cálculo del área lateral y del área total del cilindro circular recto

En octavo grado estudiaste el procedimiento para calcular el área de la base, el área lateral y el área total del prisma y la pirámide mediante su desarrollo. Si cortas un cilindro por una generatriz, separas sus bases y lo extiendes sobre un plano, ¿qué figuras obtendrás?

Observa el desarrollo del cilindro circular en el ejemplo 1.

Ejemplo 1:

Representa el desarrollo del cilindro circular recto (fig. 5.37).

Halla el área lateral y el área total.

Procedemos a separar las dos bases del cilindro, observa que son 2 círculos y cortamos la superficie cilíndrica a lo largo de una generatriz (fig. 5.38).

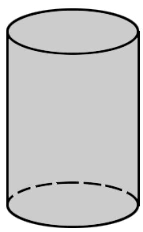


Figura 5.37

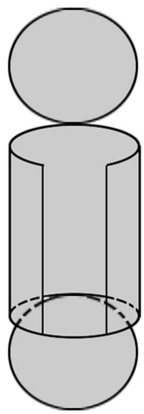


Figura 5.38

Al desarrollar la superficie lateral del cilindro (fig. 5.39), de radio r y altura h, se obtiene el rectángulo $ABCD$ de largo $\overline{AB}$ igual a la longitud de las circunferencias que limitan sus bases $(L = 2\pi r)$ y su altura $\overline{BC}$ es igual a la altura del cilindro (h).

El área del rectángulo $ABCD$ se calcula $A_{ABCD} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 2\pi r \cdot h$.

Luego el área lateral (A_L) del cilindro es igual al área del rectángulo *ABCD*:

$$A_L = 2\pi rh \quad (1)$$

Recuerda que las bases del cilindro son círculos y su área se calcula:

$$A_B = \pi r^2 \qquad (2)$$

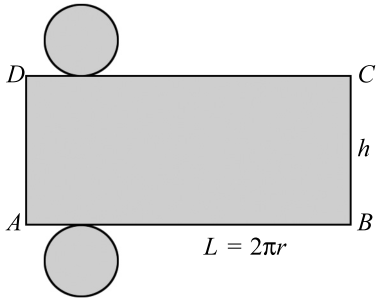


Figura 5.39

Entonces para calcular el área total del cilindro se procede:

$$A_T = A_L + 2A_B$$

Sustituyendo 1 y 2, obtenemos:

$$A_T = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

Ejemplo 2:

El radio de la base de un cilindro tiene una longitud de 2,0 dm y una altura de 5,0 dm. Calcula el área lateral y el área total del cilindro.

Solución:

El área lateral del cilindro se calcula utilizando la fórmula:

$$A_L = 2\pi rh$$

$$A_L = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}0\ \text{dm} \cdot 5{,}0\ \text{dm}$$

$$A_L = 62{,}8\ \text{dm}^2$$

El área total del cilindro se calcula utilizando la fórmula:

$$A_T = A_L + 2A_B \text{ (sustituyendo los valores del } A_B \ y\ A_L\text{)}$$

Como la base es un círculo, entonces su área se calcula:

$$A_B = \pi r^2$$

$$A_B = 3{,}14 \cdot (2\ \text{dm})^2$$

$$A_B = 3{,}14 \cdot 4\ \text{dm}^2$$

$$A_B = 12{,}56\ \text{dm}^2$$

Sustituyendo los valores del A_B y A_L en $A_T = A_L + 2A_B$, obtenemos el área total del cilindro:

$$A_T = 62{,}8\ \text{dm}^2 + 2 \cdot 12{,}56\ \text{dm}^2\ ^{1}$$
$$A_T = 62{,}8\ \text{dm}^2 + 25{,}12\ \text{dm}^2$$
$$A_T = 87{,}92\ \text{dm}^2$$
$$A_T \approx 88\ \text{dm}^2$$

R¡! Puedes identificar que la figura 5.36 tiene forma de cilindro circular recto y te piden calcular la cantidad de material que se necesita para fabricar dicho envase.

Luego se necesita calcular el área total.

Solución:

Datos:

$d = 15$ cm

$$r = \frac{d}{2} = \frac{15\ \text{cm}}{2} = 7{,}5\ \text{cm}$$

$h = 6{,}5$ cm

Para calcular el área total del cilindro, se utiliza la fórmula:

$$A_T = A_L + 2A_B$$

Para calcular el área lateral, se utiliza la fórmula:

$$A_L = 2\pi rh$$
$$A_L = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 7{,}5\ \text{cm} \cdot 6{,}5\ \text{cm}$$
$$A_L = 306{,}15\ \text{dm}^2$$

Para calcular el área de la base, se utiliza la fórmula:

$$A_B = \pi r^2 \quad \text{o} \quad A_C = \pi \cdot \frac{d^2}{4}$$

$A_B = 3{,}14 \cdot (7{,}5\ \text{cm})^2$
$A_B = 3{,}14 \cdot 56{,}25\ \text{cm}^2$
$A_B = 176{,}625\ \text{cm}^2$

[1] Para calcular el valor del área total se utiliza el valor del área lateral sin aproximación, en los cálculos intermedios no se aproxima.

$A_T = 306{,}15\ \text{cm}^2 + 2 \cdot 176{,}625\ \text{cm}^2$
$A_T = 306{,}15\ \text{cm}^2 + 353{,}25\ \text{cm}^2$
$A_T = 659{,}4\ \text{cm}^2$
$A_T \approx 659\ \text{cm}^2$

Respuesta: La cantidad de material que se necesita para fabricar las latas de envase de sardinas es aproximadamente de 659 cm^2.

5.3.2 Cálculo del área lateral y del área total del cono circular recto

Ejemplo 3:

Representa el desarrollo del cono de la figura 5.40.

Procedemos a separar la base del cono. Observa que es un círculo y cortamos la superficie cilíndrica a lo largo de una generatriz (fig. 5.41).

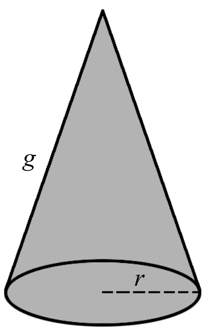


Figura 5.40

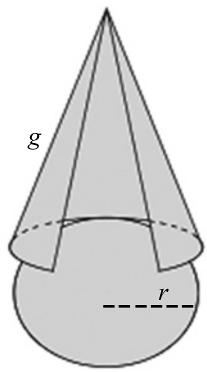


Figura 5.41

Al desarrollar la superficie lateral del cono de radio de la base (r) y generatriz (g), se obtiene una superficie plana (fig. 5.42) que es un sector circular de radio g (generatriz del cono) determinado por un arco b cuya longitud es igual a la longitud de la circunferencia de la base $(b = 2\pi r)$.

Por tanto: el área lateral A_L del cono es igual al área del sector circular obtenido.

Para calcular el área de un sector circular se utiliza la proporción siguiente:

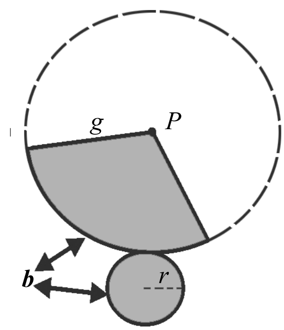


Figura 5.42

$$\frac{A_L}{A_C} = \frac{b}{L_C}$$

A_C: Área del círculo de centro P y radio g
L_C: Longitud de la circunferencia de centro P y radio g

El área del círculo de centro P y radio g se calcula: $A_C = \pi \cdot g^2$

La longitud de la circunferencia de la base se calcula: $b = 2\pi r$

La longitud de la circunferencia de centro P y radio g se calcula: $L_C = 2\pi g$

Sustituyendo en la proporción: $\frac{A_L}{A_C} = \frac{b}{L_C}$, obtenemos:

$$\frac{A_L}{\pi \cdot g^2} = \frac{2\pi r}{2\pi g}$$

Despejamos a A_L:

$$A_L = \frac{\pi g^2 \cdot 2\pi r}{2\pi g}$$ simplificando, obtenemos la expresión:

$$A_L = \pi r g$$

El área total del cono es igual a la suma del área lateral y el área de la base:

$$A_T = A_L + A_B$$

El área de la base es el círculo de radio r, se calcula: $A_B = \pi r^2$.

Sustituyendo en la fórmula general, obtenemos.

$A_T = \pi r g + \pi r^2$ (extrayendo factor común)

$A_T = \pi r (g + r)$

Ejemplo 4:

Calcula el área lateral y el área total de un cono de radio (r) igual a 2,5 cm y generatriz (g) igual a 6,0 cm.

Solución:

El área lateral del cono se calcula utilizando la fórmula:

$A_L = \pi r g$

$A_L = 3{,}14 \cdot 2{,}5\text{ cm} \cdot 6\text{ cm}$

$A_L = 47{,}1\text{ cm}^2$

$A_L \approx 47\text{ cm}^2$

El área total del cono se calcula utilizando la fórmula:

$A_T = A_L + A_B$

Como la base es un círculo, entonces su área se calcula:

$A_B = \pi r^2$
$A_B = 3{,}14 \cdot (2{,}5\ \text{cm})^2$
$A_B = 3{,}14 \cdot 6{,}25\ \text{cm}^2$
$A_B = 19{,}625\ \text{cm}^2$
$A_B \approx 19{,}6\ \text{cm}^2$

Sustituyendo los valores del A_B y A_L en $A_T = A_L + A_B$, obtenemos el área total del cilindro:

$A_T = 47\ \text{cm}^2 + 19{,}6\ \text{cm}^2$
$A_T = 66{,}6\ \text{cm}^2$
$A_T \approx 67\ \text{cm}^2$

Ejemplo 5:

En la figura 5.43 se muestra un cono circular recto de altura $h = \overline{OC}$, la base tiene como centro el punto O y diámetro $\overline{AB}$, el ángulo $\angle OBC = 50°$ formado por la generatriz $\overline{BC} = 10{,}0\ \text{cm}$ y la base del cono.

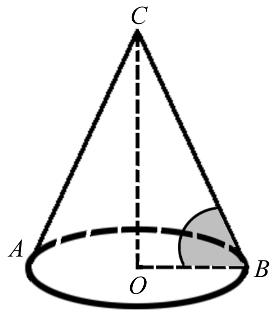


Figura 5.43

a) Calcula la longitud de $\overline{OC}$.
b) Si $\overline{OB} = 6{,}40\ \text{cm}$, calcula el área lateral y el área total del cono.

Solución:

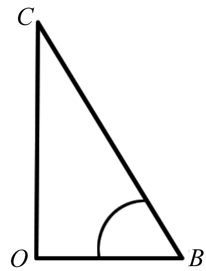


Figura 5.44

a) El triángulo OBC (fig. 5.44) es rectángulo en O, por ser $\overline{OC}$ altura del cono circular recto, luego para calcular la longitud de $\overline{OC}$ se puede utilizar una de las razones trigonométricas:

$$\text{sen}\ \angle OBC = \frac{\overline{OC}}{\overline{BC}}$$

sen 50° = 0,766 0 y $\overline{BC} = 10{,}0\ \text{cm}$, sustituyendo en la razón:

$$\text{sen}\ 50° = \frac{\overline{OC}}{10\ \text{cm}}$$

$$0{,}766\,0 = \frac{\overline{OC}}{10\ \text{cm}}$$

$\overline{OC} = 0,766\,0 \cdot 10\,\text{cm}$

$\overline{OC} = 7,660\,\text{cm}$

$\overline{OC} \approx 7,66\,\text{cm}$

b) El área lateral del cono se calcula utilizando la fórmula:

$A_L = \pi r h$
$A_L = 3,14 \cdot 6,4\ \text{cm} \cdot 10\ \text{cm}$
$A_L = 200,96\ \text{cm}^2$
$A_L \approx 201\ \text{cm}^2$

El área total del cono se calcula utilizando la fórmula:

$A_T = A_L + A_B$

Como la base es un círculo, entonces su área se calcula:

$A_B = \pi r^2$
$A_B = 3,14 \cdot (6,4\ \text{cm})^2$
$A_B = 3,14 \cdot 40,96\ \text{cm}^2$
$A_B = 128,614\,4\ \text{cm}^2$
$A_B \approx 128,6\ \text{cm}^2$

Sustituyendo los valores del A_B y A_L en $A_T = A_L + A_B$, obtenemos el área total del cilindro.

$A_T = 201\ \text{cm}^2 + 128,6\ \text{cm}^2$
$A_T = 329,6\ \text{cm}^2$
$A_T \approx 330\ \text{cm}^2$

5.3.3 Cálculo del área de la esfera

Recuerda que para calcular el área del cilindro y el cono, lo primero que se hace es desarrollarlo, en el caso de la esfera es imposible cortar por una línea recta, por tanto, no se puede desarrollar. ¿Cómo calcular el área de una esfera sin desarrollar?

Te invito a que realices la actividad experimental siguiente.

Consigue una esfera que puedas cortar en dos y realiza los pasos siguientes:

1. Clava una de las semiesferas encima de una superficie plana, con el círculo máximo hacia abajo, enrolla un cordel a partir del polo hasta cubrir toda la superficie (fig. 5.45).
2. Mide el largo del cordel que necesitaste.
3. Clava la otra semiesfera con el polo hacia la superficie plana y el círculo máximo hacia arriba y enrolla el mismo cordel hasta cubrir todo el círculo máximo (fig. 5.46).
4. Mide el largo del cordel que necesitaste.
5. Compara las medidas tomadas en los pasos 1 y 2.

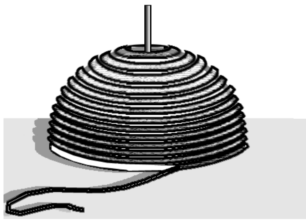


Figura 5.45

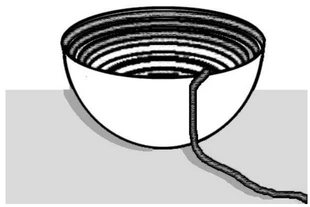


Figura 5.46

¿A qué conclusión has llegado?

Podrás comprobar que el trozo de cordel que cubre la semiesfera es el doble del que recubre la superficie circular, que es un círculo máximo de la esfera, luego la superficie de la semiesfera es igual a 2 veces el área del círculo máximo y, por tanto, el *área de toda la superficie de la esfera es igual a cuatro veces el área del círculo máximo:*

$$A_{Esfera} = 4\pi r^2$$

Ejemplo 1:

Calcula el área de una esfera de radio igual 5,0 cm.

Solución:

$A = 4\pi r^2$
$A = 4 \cdot 3{,}14 \cdot (5 \text{ cm})^2$
$A = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 25 \text{ cm}^2$
$A = 314 \text{ cm}^2$
$A \approx 3{,}1 \text{ dm}^2$

Ejercicios

1. El área lateral de un cilindro circular recto de 5,0 dm de altura y 3,0 dm de radio de la base es:

   a) 9,4 m^2 b) 942 cm^2 c) 94 dm^2 d) Ninguno de los anteriores

2. Si el área lateral de un cilindro circular recto de diámetro igual a 8,00 m es 126 m^2, entonces el área total de dicho cilindro es:

   a) 226 m b) 226 m^2 c) 0,23 km^2 d) Ninguno de los anteriores

3. Si el área lateral de un cilindro circular recto de altura igual a 100 cm es 157 m^2, entonces el radio de la base es:

   a) 250 m b) 25 m c) 2,5 m d) Ninguno de los anteriores

4. Si el radio de una esfera es igual a 7,00 cm, entonces su área total es:

a) 308 cm^2 b) 61,5 dm^2 c) 615 cm^2 d) Ninguno de los anteriores

5. Sea un cono circular recto de radio (r), generatriz (g), altura (h), área lateral (A_L) y área total (A_T).

5.1 Completa los espacios en blanco de forma tal que obtengas una proposición verdadera.

a) Si $r = 6,0$ cm y $g = 10$ cm, entonces h es igual a ___________.
b) Si $r = 1,6$ dm y $h = 12$ cm, entonces g es igual a ____________.
c) Si $A_L = 423,9\ dm^2$ y $g = 15,0$ dm, entonces r es igual a __________.
d) Si $A_T = 591\ m^2$ y $r = 9,00$ m, entonces el A_L es igual a __________.

6. En la figura 5.47, se muestra un cilindro circular recto, un cono circular recto y una esfera. Atendiendo a los datos que se dan, efectúa los cálculos y completa la tabla 5.1.

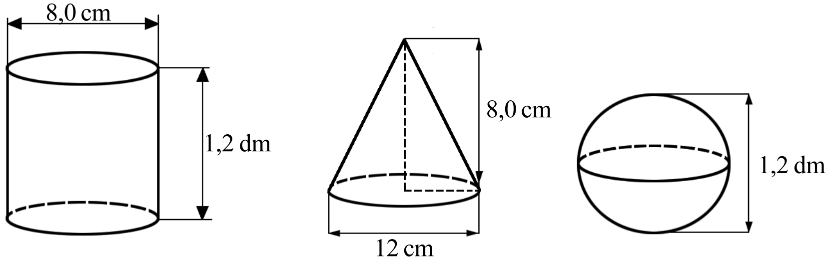


Figura 5.47

Tabla 5.1

Figuras	**Radio de la base**	**Altura**	**Área lateral**	**Área total**
Cilindro				
Cono				
Esfera	*	*	-----	

* Valor del radio y del diámetro del círculo máximo.

7. En la figura 5.48 se muestra un cilindro circular recto de base un círculo de radio (r) y una altura (h).

- El área lateral del cilindro es 471 dm^2.
- La razón entre el radio y la altura es 1 : 3.

a) Calcula la longitud del radio y la altura del cilindro.
b) Calcula el área total del cilindro.

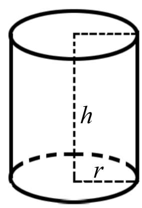


Figura 5.48

8. En la figura 5.49 se muestra un cono circular recto, $\overline{AB}$ es el diámetro del círculo base de centro en C, $\overline{CD}$ es la altura del cono, además, (A_L) área lateral y (A_B) área de la base del cono respectivamente, tal que:

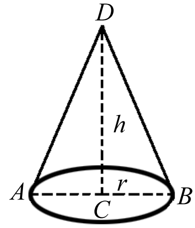


Figura 5.49

- $\overline{CB} = 5{,}0\ \text{cm}$
- $\dfrac{A_L}{A_B} = 2$

a) Halla la longitud de la generatriz del cono.
b) Calcula el área total del cono.

9. Se tienen 200 latas de conserva que tienen forma cilíndrica de 3,0 cm de radio y 9,0 cm de altura. Si se quiere colocar una etiqueta que cubra toda la superficie lateral, ¿qué cantidad de papel se necesita?
10. Se quieren confeccionar 60 gorritos cónicos iguales para un cumpleaños. Si sus medidas son 9,0 cm de radio y 12 cm de altura, ¿qué cantidad de cartulina es necesario utilizar?
11. Se quiere forrar una pelota esférica de diámetro igual a 30 cm, ¿qué cantidad de cuero se necesita para hacerlo?
12. ¿Qué cantidad de hojalata se necesita para construir una lata de leche condensada azucarada de forma cilíndrica que tiene 7,2 cm de diámetro y 7,6 cm de altura?
13. En la figura 5.50 se muestra un filtro, la parte superior tiene forma cilíndrica y la parte inferior, cónica. Calcula aproximadamente la cantidad de hojalata que se necesita para fabricarlo.
14. La figura 5.51 muestra un tanque para agua, formado por un cilindro circular recto y dos semiesferas iguales. Calcula la superficie total del tanque.

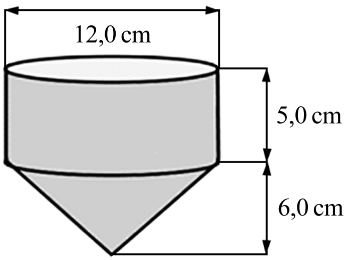


Figura 5.50

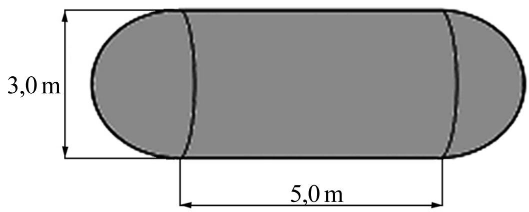


Figura 5.51

15. La figura 5.52 muestra un cilindro circular recto circunscrito a una esfera, en el cual se cumple:

- El diámetro de la esfera es igual a 2,0 dm.
- (A_{Te}) es el área total de la esfera.
- (A_L) es el área lateral del cilindro.
- (A_{Tc}) es el área total del cilindro.

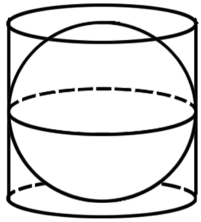


Figura 5.52

15.1 Al comparar el área lateral del cilindro y el área total de la esfera, resulta que:

a) $A_{Te} < A_L$ b) $A_{Te} = A_L$ c) $A_{Te} > A_L$

15.2 La razón entre el área total del cilindro y el área de la esfera es:

a) 2 b) $\dfrac{2}{3}$ c) $\dfrac{3}{2}$

5.4 Volumen de cilindros, conos y esferas

5.4.1 Volumen del cilindro

En séptimo grado estudiaste el volumen del cubo y del ortoedro, y en octavo grado estudiaste el volumen del prisma y la pirámide, ahora te dedicarás a determinar el volumen de los cuerpos geométricos de revolución.

¡! En varias provincias del país existen fábricas que tienen como misión principal asegurar y diversificar renglones que en la actualidad se importan. Sus líneas de producción están dirigidas al procesamiento de vegetales y frutas selectas, para el envasado de los productos utilizan recipientes de forma cilíndrica, como el que se observa en la figura 5.53. ¿Cuántos litros de pasta de tomate le caben a uno de estos recipientes si la altura es igual a 1,7 dm y el radio de la base es 0,8 dm?

Figura 5.53

¿Cómo calcular el volumen de un cilindro circular recto?

Inscribiendo y circunscribiendo un cilindro circular recto a un prisma regular, se obtiene su volumen (fig. 5.54).

Se divide en seis partes iguales la circunferencia base del cilindro y se unen con segmentos los puntos de división, así obtenemos un exágono, se trazan las generatrices correspondientes a los vértices y se unen también entre sí con segmentos a los puntos en que estas cortan a la otra base.

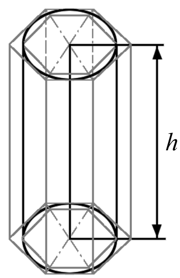


Figura 5.54

Se obtiene un prisma cuyas aristas laterales son generatrices del cilindro y cuyas bases están inscritas en las bases del cilindro. Se denomina *prisma inscrito en el cilindro.*

Si por los seis puntos obtenidos en la circunferencia base, trazamos las tangentes a esta, obtenemos un exágono regular circunscrito a la circunferencia; por los vértices del exágono levantamos las generatrices, luego realizamos igual construcción en la base superior y obtenemos un prisma cuyas caras laterales son tangentes a la superficie lateral del cilindro y cuyas bases están circunscritas a las bases del cilindro.

Observa que en la medida en que se aumenta el número de lados de los polígonos de las bases de los prismas, estos se aproximan más al cilindro circular recto, lo que permite inducir la fórmula para el cálculo del volumen del cilindro circular recto a partir del volumen del prisma, o sea:

$V_{Cilindro} = A_{Base} \cdot h \qquad (1)$

La base del cilindro circular recto es un círculo, luego el $A_B = \pi \cdot r^2$.
Entonces, sustituyendo el A_B en (1), obtenemos:

$V_{Cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Ejemplo 1:

Calcula el volumen de un cilindro circular recto de 10,0 cm de radio y 1,50 cm de altura.

Solución:

$V_{Cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot h$
$V_{Cilindro} = 3{,}14 \cdot (10\ cm)^2 \cdot 1{,}5\ cm$
$V_{Cilindro} = 3{,}14 \cdot 100\ cm^2 \cdot 1{,}5\ cm$
$V_{Cilindro} = 314\ cm^2 \cdot 1{,}5\ cm$
$V_{Cilindro} = 471\ cm^3$

R¡! Observa que el recipiente (fig. 5.53) tiene forma de cilindro circular recto y te piden calcular, ¿cuántos litros de pasta de tomate le caben a uno de estos recipientes?
Luego se necesita calcular el volumen.

Solución:

Datos:

$h = 1{,}7$ dm
$r = 0{,}8$ dm

Para calcular el volumen del cilindro se utiliza la fórmula:

$V_C = \pi \cdot r^2 \cdot h$
$V_C = 3{,}14 \cdot (0{,}8\ dm)^2 \cdot 1{,}7\ dm$
$V_C = 3{,}14 \cdot 0{,}64\ dm^2 \cdot 1{,}7\ dm$
$V_C = 3{,}416\ 32\ dm^3$
$V_C \approx 3{,}4\ dm^3$

Respuesta: Al recipiente le caben aproximadamente 3,4 L.

5.4.2 Volumen del cono

Para obtener el volumen del cono circular recto, lo podemos realizar utilizando similar razonamiento al que utilizamos para determinar el volumen del cilindro circular recto, o sea, inscribiéndolo y circunscribiéndolo a una pirámide regular.

Luego, la relación que existe entre los volúmenes de un prisma y de una pirámide que tengan iguales bases y altura, es la misma que existe entre los volúmenes de un cilindro y un cono que cumplan estas mismas condiciones.

Existe otro procedimiento que lo puedes realizar en tu aula, te invito a que realices el experimento siguiente:

Construye un cilindro y un cono que tengan la misma base y la misma altura, llena el cono de arena u otro material y vacíalo en el cilindro, repite la operación tantas veces te haga falta para llenar el cilindro.

¿Cuántas veces tienes que vaciar el cono en el cilindro para llenarlo completamente?

O sea, que tuviste que realizar la operación tres veces, luego el volumen de un cono de radio *r* y altura *h* es igual a la tercera parte del volumen del cilindro de igual radio y altura (fig. 5.55).

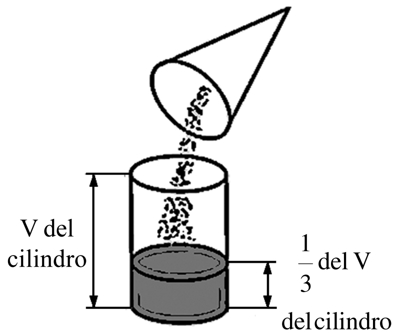


Figura 5.55

O sea, el volumen de un cono de radio *r* y altura *h* es igual a la tercera parte del volumen del cilindro de igual radio y altura:

$$V_{Cono} = \frac{1}{3} V_{Cilindro}$$

$$V_{Cono} = \frac{1}{3} A_B \cdot h$$

$$V_{Cono} = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Ejemplo 1:

Calcula el volumen de un cono circular recto de 5,00 cm de radio y 10,0 cm de altura.

Solución:

$$V_{Cono} = \frac{1}{3} A_B \cdot h$$

$$V_{Cono} = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V_{Cono} = \frac{1}{3} 3{,}14 \cdot (5 \text{ cm})^2 \cdot 10 \text{ cm}$$

$$V_{Cono} = \frac{1}{3} 3{,}14 \cdot 25 \text{ cm}^2 \cdot 10 \text{ cm}$$

$$V_{Cono} = 261{,}66 \text{ cm}^3$$

$$V_{Cono} \approx 262 \text{ cm}^3$$

5.4.3 Volumen de la esfera

¡! Dos arquitectos diseñaron bebederos para ganado, uno de forma semiesférica (*E*) y el otro de cono (*C*). Ambos bebederos tienen en común el diámetro, siendo la altura del cono igual al radio de la semiesfera. Si el ganado bebió toda el agua de los dos bebederos y el (*C*) contenía 50 L (fig. 5.56), ¿cuántos litros bebió el ganado del bebedero (*E*)[2]?

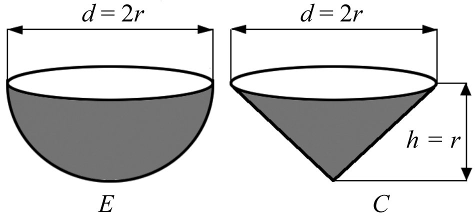


Figura 5.56

Observa que el bebedero *C* tiene forma de cono y ya sabes calcular el volumen del cono, pero el bebedero *E* tiene forma de semiesfera, luego, para calcular la capacidad, en litro, de dicho bebedero, debes calcular el volumen de una esfera y dividirlo por dos.

¿Cómo calcular el volumen de la esfera?

Recuerda de octavo grado, al estudiar la ley de Arquímedes, se comprobó que un cuerpo al sumergirlo en un recipiente lleno de agua, el volumen del líquido desalojado es igual al volumen del cuerpo sumergido.[3]

Aplicando la ley de Arquímedes, se puede deducir la fórmula para calcular el volumen de la esfera, por tanto, te invito a que realices el experimento siguiente:

Llena una probeta de agua, como la que se muestra en la figura 5.57, justo hasta el orificio de salida, introduce en él una esfera que tenga un diámetro de longitud (*d*) en el círculo máximo, de modo que el agua se derrame sobre un recipiente cilíndrico de diámetro (*d*) en la base y altura ($h = d$).

Comprobarás que el vaso cilíndrico se llena hasta las $\frac{2}{3}$ partes de su altura.

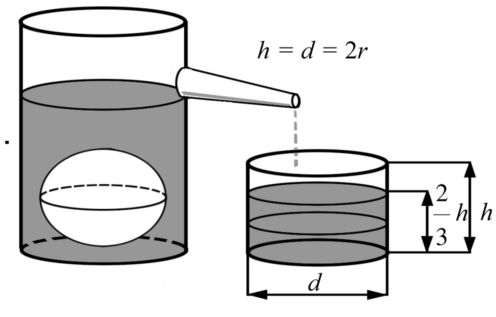


Figura 5.57

[2] Alexis Carrasco Trujillo: *Heurística. Aprender Matemática resolviendo problemas,* Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2012.

[3] Colectivo de autores: *Física. Noveno grado,* Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2002.

El volumen del cilindro es:

$V_C = \pi \cdot r^2 \cdot h \qquad (1)$

La altura del cilindro es $h = 2r$, sustituyendo en (1), obtenemos.

$V_C = \pi \cdot r^2 \cdot 2r$
$V_C = 2\pi \cdot r^3$

Luego, como el agua que desplazó la esfera es igual a $\frac{2}{3}$ del volumen del cilindro, tenemos que el volumen de la esfera es igual a:

$$V_E = \frac{2}{3} V_C$$
$$V_E = \frac{2}{3} 2\pi \cdot r^3$$
$$V_E = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$$

Esta es precisamente la obra principal de Arquímedes (fig. 5.58). En ella alcanza dos importantísimos resultados:

- *El volumen de la esfera es dos tercios del volumen del cilindro en que está inscrita.*
- *El área de la superficie de la esfera es dos tercios del área total del cilindro circunscrito a esta.*

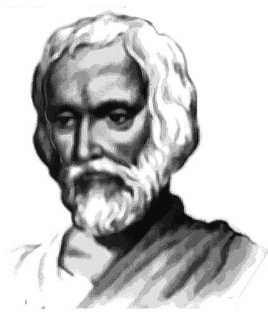


Figura 5.58

La belleza de ambos teoremas resultó muy atractiva para el siracusano que solicita lo graben en su losa (fig. 5.59).

Un siglo más tarde el famoso orador romano Marco Tulio Cicerón pudo hallar la tumba gracias a la grabación.

No obstante volvió a perderse y casi dos milenios después, en 1965, la tumba del Geómetra se reencontró cuando en Sicilia se fabricaba un nuevo hotel.[4]

Figura 5.59

[4] Luis J. Davidson San Juan: *Ecuaciones y matemáticos,* Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2012.

Ejemplo 2:

Calcula el volumen de una esfera de 5,0 cm de radio.

Solución:

$$V_E = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

$$V_E = \frac{4}{3}3{,}14 \cdot (5\ \text{cm})^3$$

$$V_E = \frac{4}{3}3{,}14 \cdot 125\ \text{cm}^3$$

$$V_E = 523{,}\overline{3}\ \text{cm}^3$$

$$V_E = 0{,}5\ \text{dm}^3$$

R¡! Observa que el recipiente *E* de la figura 5.60 tiene forma de semiesfera y el *C*, forma de cono; te piden que si el ganado del bebedero *C* ya bebió los 50 L, ¿cuántos litros bebió el ganado del bebedero *E*, si lo dejó completamente vacío?

Solución:

Si tomamos un cilindro de diámetro de la base *d* y altura *h* = *r,* y comparamos los volúmenes del cono y la esfera con el del cilindro, se cumple que:

$$V_{Cono} = \frac{1}{3} A_B \cdot h$$

$V_{Cono} = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$ sustituyendo *h* = *r*, obtenemos:

$$V_{Cono} = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot r$$

$$V_{Cono} = \frac{1}{3}\pi \cdot r^3$$

$V_{Esfera} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ dividiendo por 2, para obtener la fórmula de la semiesfera, obtenemos:

$$V_{SE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot r^3$$

Observa que el volumen de la semiesfera es el doble del volumen del cono de igual base que su círculo máximo y altura igual al radio. Por tanto, el ganado del bebedero *E*, bebió 100 L de agua.

Ejercicios

1. Si un cilindro circular recto tiene 3,00 m de radio y 40,0 dm de altura, entonces su volumen es:

   a) ___ 37,7 m^3 b) ___$1{,}13 \cdot 10^{-5}$ dm^3 c) ___ 113 m^3
   d) ___ Ninguno de los anteriores.

2. Si un cono circular recto tiene 10 cm de diámetro y 1,2 dm de altura, entonces su volumen es:

   a) ___ 0,3 dm^3 b) ___1,3 dm^3 c) ___ $1{,}2 \cdot 10^3$ cm^3
   d) ___ Ninguno de los anteriores.

3. Si el diámetro de una esfera es de 4,0 dm de diámetro, entonces su volumen es aproximadamente:

   a) ___ $2{,}7 \cdot 10^2$ dm^3 b) ___ 33 dm^3 c) ___ $2{,}7.10^5$ cm^3
   d) ___ Ninguno de los anteriores.

4. La generatriz de un cono es igual a 10,0 cm y su radio es igual a 6,00 cm. Calcula el volumen del cono.
5. El volumen de un cilindro circular recto es igual a 785 cm^3, su altura es igual a 10 cm. Calcula el radio de la base del cilindro.
6. A un trozo de madera en forma de cubo de arista igual a 3,00 dm (fig. 5.60a) se torneó y se le dio forma de esfera (fig. 5.60b).

   a) ¿Cuántos decímetros cúbicos de madera tenía el cubo?
   b) ¿Cuántos decímetros cúbicos se desperdiciaron?

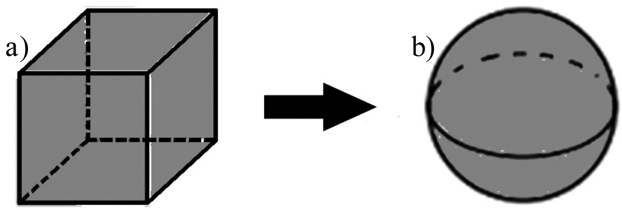


Figura 5.60

7. En la figura 5.61, se muestra un tanque cilíndrico plástico colocado horizontalmente que contiene agua:

   - El diámetro $d = 2{,}0$ m
   - El largo $l = 4{,}8$ m

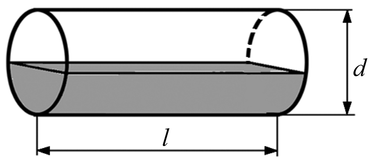


Figura 5.61

   a) Calcula la cantidad aproximada de metros cúbicos que le caben al tanque.
   b) Si se abre una llave que vierte un litro cada 3 s, ¿en qué tiempo se llena completamente el tanque si se encuentra al 50 % de su capacidad?

8. Un depósito para almacenar agua tiene forma de cilindro y termina en su parte inferior en una semiesfera, como se muestra en la figura 5.62.
¿Cuántos litros de agua caben en el depósito?
9. En la planta Aldo Santamaría hay un silo de almacenamiento de cereales que está compuesto de un cilindro unido por la base a un cono (fig. 5.63). ¿Cuál es la capacidad del silo si el radio del cilindro es igual a 2,0 m?[5]

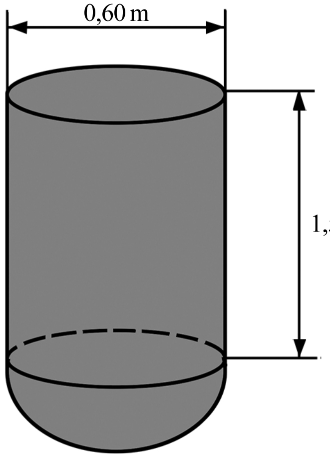


Figura 5.62

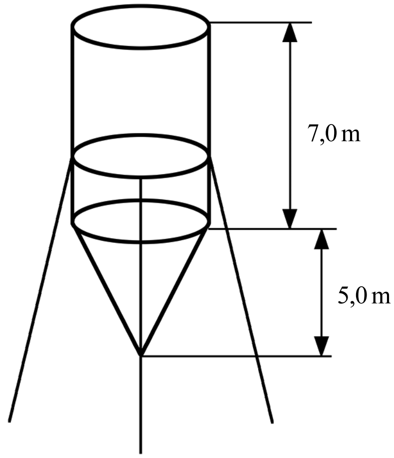


Figura 5.63

10. El radio del planeta Tierra es de 6 370 km. Suponiendo que la Tierra es una esfera, calcula el volumen.
11. Un cilindro y un cono circular rectos tienen bases de radios iguales a r. Las alturas del cilindro y del cono son H y h respectivamente ¿Qué relación debe existir entre H y h para que el $V_{Cilindro} = 5 \cdot V_{Cono}$?
12. En la figura 5.64 se muestra un cono circular recto de altura $h = \overline{OC}$, la base tiene como centro el punto O y el diámetro $\overline{AB} = 10,\text{dm}$ y $\angle BCO = 30°$ formado por la generatriz y la altura del cono.

 a) Calcula la longitud de $\overline{OC}$ y $\overline{BC}$.
 b) Calcula el volumen del cono.

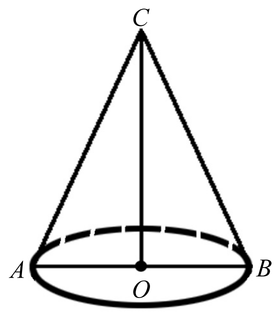


Figura 5.64

13. En la figura 5.65 se muestra un cono circular recto de vértice en A, altura $\overline{OA}$ y base el círculo de centro en O y diámetro $\overline{DE}$. Se han inscrito 4 conos más pequeños iguales, tales que:

 Cono 1: vértice en B, altura $\overline{O^1B}$ y base de centro en O^1 y diámetro $\overline{OD}$

[5] Alexis Carrasco Trujillo: *Heurística. Aprender Matemática resolviendo problemas,* Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2012.

Cono 2: vértice en C, altura $\overline{O^2C}$ y base de centro en O^2 y diámetro $\overline{OE}$

Cono 3: vértice en O, altura $\overline{O^3O}$ y base de centro en O^3 y diámetro $\overline{BC}$

Cono 4: vértice en A, altura $\overline{O^3A}$ y base de centro en O^3 y diámetro $\overline{BC}$

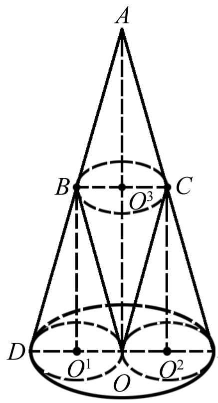


Figura 5.65

a) Si el volumen del cono 1 es igual a 84,78 cm^3 y $\dfrac{\overline{OD}}{\overline{O^1B}} = \dfrac{2}{3}$.

Halla la longitud de $\overline{OD}$ y $\overline{O^1B}$.

b) Calcula el volumen del cono mayor.

c) ¿Qué parte del volumen del cono mayor, ocupan los 4 conos pequeños?

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO

1. Selecciona el número que le corresponde a la fórmula en la columna B y colócalo junto al área o volumen que se indica del cuerpo geométrico que se encuentra en la columna A (tabla 5.2).

Tabla 5.2

A		B	
Área o volumen del cuerpo	**No.**	**Fórmulas**	**No.**
Área lateral del cilindro		$\pi r^2 h$	1
Área total del cono		πrg	2
Área lateral del cono		$\frac{4}{3}\pi r^3$	3
Área total del cilindro		$\frac{1}{3}\pi r^2 h$	4
Área total de la esfera		$\pi r(g + r)$	5
Volumen del cilindro		$2\pi r(h + r)$	6
Volumen del cono		$4\pi r^2$	7
Volumen de la esfera		$2\pi rh$	8

2. Un cilindro circular recto tiene un radio de la base igual a 4,00 cm y una generatriz igual a 10,0 cm, tiene área lateral:

a) ___ 251 cm^2 b) ___126 cm^2 c) ___251 cm^3 d) ___126 cm^3

3. Un cilindro circular recto de radio de la base igual a 2,0 dm y generatriz igual a 30 cm, tiene área total:

   a) ___ $6{,}3 \cdot 10^{-3}$ cm^2 b) ___ 63 dm^2 c) ___ 31,4 dm^2 d) ___ $3{,}1 \cdot 10^3$ dm^2

4. Un cono circular recto de radio de la base igual a 5,00 cm y generatriz igual a 9,00 cm, tiene área total:

   a) ___ 440 cm^2 b) ___ 220 cm^3 c) ___ 220 cm^2 d) ___ 440 cm^3

5. El volumen de una esfera es igual a 288π cm^3, entonces su radio es:

   a) ___ 6π cm b) ___ 12 cm c) ___ 12π cm d) ___ 6 cm

6. La razón entre los radios de las bases de dos recipientes cilíndricos que tienen la misma altura es 3. ¿Cuál es la capacidad del mayor de los recipientes si la del menor es de 10 L?
7. Se quiere construir una casa de campaña de forma cónica que tenga 6,0 m de diámetro y altura igual a 4,0 m. ¿Qué cantidad de lona se necesita para su construcción?
8. Una piscina cuya forma es de prisma recto de base rectangular, tiene 30 m de largo, 15 m de ancho y 30 dm de profundidad.

   a) Calcula la capacidad de la piscina.
   b) Si está revestida con azulejos de 0,04 m^2 de superficie, ¿cuántos azulejos se utilizaron?

9. Se desea construir un tanque cilíndrico con tapa de 2,0 m de diámetro.

   a) ¿Qué altura necesita tener para almacenar 15 700 L de agua?
   b) ¿Qué cantidad de material se necesita para fabricarlo?

10. El área del círculo de la base de un cono circular recto es 81π cm^2 y su altura mide 12 cm, calcula la longitud del radio y la generatriz.
11. Un balón tiene una superficie de 576π cm^2. Determina el diámetro y el volumen.
12. La pelota de beisbol tiene un radio de 4,0 cm; qué cantidad aproximada de cuero se utilizó para forrar 200 pelotas.
13. Un pozuelo para dulces tiene forma de semiesfera de 10 cm de diámetro. ¿Qué cantidad de plástico se necesita para fabricar 1 000 pozuelos de este tipo?
14. La figura 5.66 muestra un cuerpo compuesto, *ABCDEFGHI*, por un cubo de arista 80 cm y una pirámide recta la cual se encuentra superpuesta al cubo; la altura de la pirámide es igual a 3,0 dm y el área de una de sus caras es igual a 15 dm^2.

    a) Calcula el área total del cuerpo.
    b) Calcula el volumen del cuerpo.

15. La figura 5.67, muestra un cuerpo macizo en forma de cilindro circular recto, al cual se le perforó una semiesfera de igual radio al del cilindro, el área de la base es igual a 314 cm^2 y la razón entre el radio y la altura del cilindro es $r : h = 1 : 2$. Calcula el volumen del cuerpo resultante.

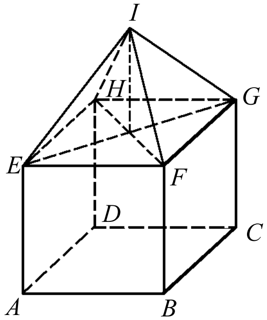


Figura 5.66

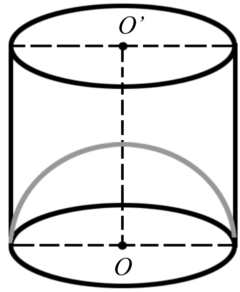


Figura 5.67

16. La figura 5.68, muestra un cilindro y un cono circular recto respectivamente, dentro de una caja en forma de prisma de base cuadrada; se cumple que:

- Las alturas del cilindro, el cono y el prisma son iguales.
- Las bases del cilindro y el cono son tangentes entre sí y a los lados del prisma respectivamente.
- $a = 12$ dm y $h = 40$ cm.

a) Calcula: $A_{L\ Cilindro} + A_{L\ Cono}$.

b) Calcula: $V_{Prisma} - \left(V_{Cilindro} + V_{Cono}\right)$.

17. En la figura 5.69, se muestra una pieza maciza de acero en forma cilíndrica, de la cual se construyó un tornillo que está compuesto por una semiesfera y un cilindro. La altura h del tornillo es igual a la altura del cilindro.

- $d = \dfrac{D}{3}$
- $h = 12{,}0$ cm y $d = 20{,}0$ mm

  Calcula la cantidad de material que se derrochó para construir el tornillo.

18. En la figura 5.70, se muestra un recipiente compuesto por tres piezas, un cilindro circular recto, un cono circular recto y una semiesfera. El cilindro tiene base común con la semiesfera y el cono y se cumple que:

$$d = \frac{2}{3}h \text{ y } h : H = 1 : 4$$

¿Cuál es la capacidad del recipiente?

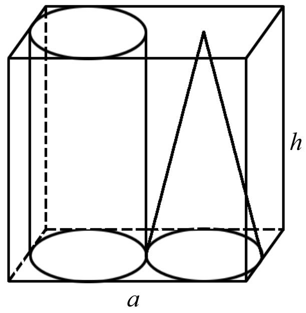


Figura 5.68

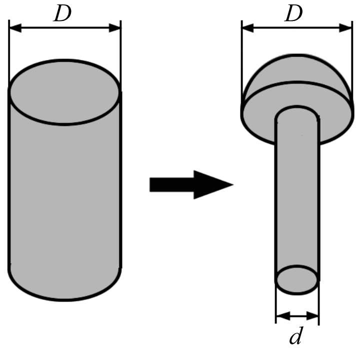


Figura 5.69

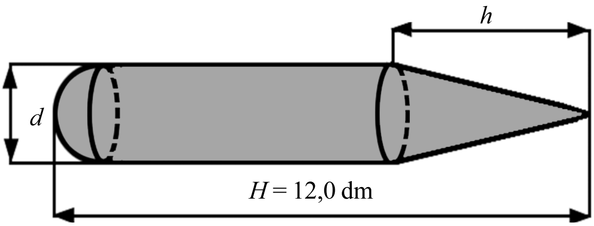


Figura 5.70

PARA LA AUTOEVALUACIÓN

Reflexiona sobre lo aprendido

1. ¿Cuáles son los elementos del cilindro, el cono y la esfera?
2. ¿Cómo calcular el área lateral y el área total del cilindro?
3. Si tuvieras qué calcular el área lateral y la total de un cono, ¿cómo lo harías?
4. ¿Qué elementos de la esfera intervienen en la ecuación para calcular su área total?
5. ¿Qué ecuación se utiliza para calcular el volumen del cilindro?
6. ¿Qué parte representa el volumen de un cono de radio r y altura h de un cilindro de radio r y altura h?
7. ¿Qué ecuación se utiliza para calcular el volumen de una esfera?

Ponte a prueba

1. El área lateral de un prisma recto de base cuadrada es de 204 cm^2 y el área de la base es igual a 36 cm^2. Halla su volumen.
2. Una pirámide recta de base rectangular tiene 12 cm y 6,0 cm de longitud en las aristas de la base y una altura cuya longitud es el 75 % de la longitud de la arista mayor. Calcula el volumen de la pirámide.
3. Se tiene un cilindro circular recto de radio $r = 2,0$ dm y altura $h = 3,0$ dm y se quiere construir un cono de radio igual al del cilindro. ¿Qué altura debe tener el cono para que tenga igual volumen al del cilindro?

4. En la figura 5.71 se tienen un cilindro y un cono circular recto de igual altura e igual base. Se cumple que:

   - La altura de ambos es igual a 4,0 cm.
   - El radio de las bases es igual a 3,0 cm.
   - La generatriz del cono es igual a 5,0 cm.

   a) Halla la razón entre el área total del cono (A_{TCono}) y el área total del cilindro ($A_{TCilindro}$).

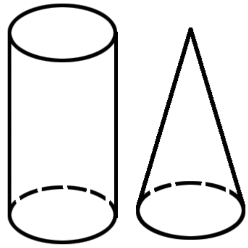


Figura 5.71

5. Un globo completamente esférico, con 20 cm de diámetro, contiene solamente el 60 % del aire que puede admitir. ¿Cuántos decímetros cúbicos de aire contiene el globo?

RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS

Epígrafe 5.1

1. 1.1 a) F, la altura de la pirámide es perpendicular a la base, ya que la pirámide es recta.
   b) V c) V d) V e) F, $A_L = A_B + 4 \cdot A_{\Delta MNR}$ f) V

2. $A_L \approx 1{,}0 \text{ dm}^2$
3. $A_T = 1{,}6 \text{ dm}^2$
4. $V \approx 75 \text{ cm}^3$
5. $A_T = 364 \text{ cm}^2$
6. $A_T = 36 \text{ dm}^2$
7. $A_L = 60 \text{ dm}^2$; $A_T = 96 \text{ dm}^2$
8. a) $V = 96 \text{ cm}^3$ b) $h = 8{,}5$ cm c) $A_T \approx 1{,}4 \text{ dm}^2$
9. $A_L = 72 \text{ cm}^2$
10. a) $a = 16$ cm y $b = 10$ cm b) $A_L = 6{,}2 \text{ dm}^2$ c) $A_r = 2{,}0 \text{ dm}^2$

Epígrafe 5.2

1. a) V
b) F, está limitado por un círculo llamado base y por una superficie curva.
c) F, el radio tiene longitud igual a 1 cm.
d) V

2. Ver la figura 5.72.

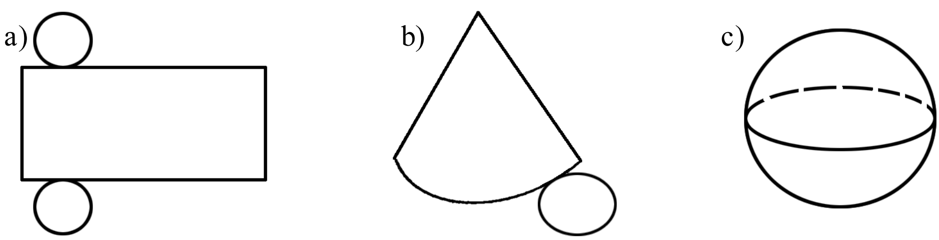


Figura 5.72

3. Ver la figura 5.73.
4. Ver la figura 5.74.

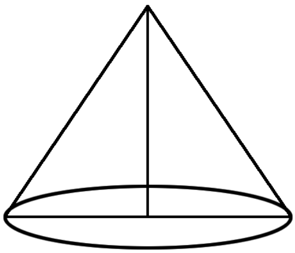


Figura 5.73

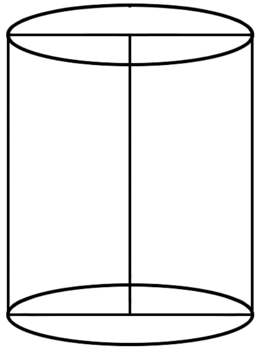


Figura 5.74

5. 5.1 a) 4 cm   b) 60 mm o 6 cm   c) 10 cm 0 100 mm   d) 5,5 cm
e) 11 cm   f) $A \approx 50$ cm²   g) $L \approx 35$ cm   h) 90°   i) 60°

Epígrafe 5.3

1. c) 94 dm²   2. b) 226 m²   3. b) 25 m   4. c) 615 cm²
5. 5.1 a) $h = 8$ cm   b) $g = 20$ cm o 2,0 dm   c) $r = 9,0$ dm   c) $A_L = 337$m²
6. Ver la tabla 5.3.

Tabla 5.3

Figuras	Radio de la base	Altura	Área lateral	Área total
Cilindro	4,0 cm	1,2 dm	3,0 dm²	5,5 dm²
Cono	6,0 cm	8,0 cm	1,36 dm²	1,5 dm²
Esfera	0,6 dm	1,2 dm	-----	4,5 dm²

7. a) $h = 15$ dm y $r = 5$ dm   b) $A_T = 628$ dm²
8. a) $g = 10$ cm   b) $A_T \approx 2,4$ dm²
9. Aproximadamente 3,4 m²
10. Aproximadamente 2,5 m²
11. Aproximadamente 28 dm²
12. Aproximadamente 2,5 dm²
13. Aproximadamente 3,8 dm²
14. Aproximadamente 75 m²
15.1 b) $A_{Te} = A_L$
15.2 c) $\frac{3}{2}$

Epígrafe 5.4

1. c) 113 m^3 2. a) 0,3 dm^3 3. b) 33 dm^3
4. V = 301 cm^3 5. r = 5 cm
6. a) 27 dm^3 b) Aproximadamente 13 dm^3
7. a) Aproximadamente 15 m^3 b) 6 h y 15 min
8. a) 480 L
9. Aproximadamente $1{,}1 \cdot 10^2$ m^3
10. $1{,}0 \cdot 10^{12}$ km^3
11. $H = \frac{5}{3}h$
12. $\overline{OC} \approx 0{,}6$ dm; $\overline{BC} \approx 0{,}1$ dm; $V = 26$ dm^3
13. a) $\overline{OD} = 6{,}0$ cm; $\overline{O_1B} = 9{,}0$ cm b) $V = 678{,}2$ cm^3 c) $\frac{1}{2}$

Ejercicios del capítulo

1. Ver la tabla 5.4.

Tabla 5.4

A		B	
Área o volumen del cuerpo	**No.**	**Fórmulas**	**No.**
Área lateral del cilindro	8	$\pi r^2 h$	1
Área total del cono	5	$\pi r g$	2
Área lateral del cono	2	$\frac{4}{3}\pi r^3$	3
Área total del cilindro	6	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$	4
Área total de la esfera	7	$\pi r(g + r)$	5
Volumen del cilindro	1	$2\pi r(h + r)$	6
Volumen del cono	4	$4\pi r^2$	7
Volumen de la esfera	3	$2\pi r h$	8

2. a) 251 cm^2 3. b) 63 dm^2 4. c) 220 cm^2
5. d) 6 cm 6. 90 L 7. 38 m^2
8. a) $1{,}3 \cdot 10^6$ L b) 18 000 azulejos
9. a) h = 5,0 m b) 35 m^2
10. r = 9,0 cm y g = 15 cm

11. $d = 24$ cm y $V = 72$ dm^3
12. 4,0 m^2
13. 16 m^2
14. a) $A_T = 4{,}4 \cdot 10^2$ dm^2 b) $V = 5{,}8 \cdot 10^2$ dm^3
15. $V = 4{,}2$ dm^3
16. a) $A_{LCilindro} + A_{LCono} = 1{,}2 \cdot 10^2$ dm^2
b) $V_{Prisma} - (V_{Cilindro} + V_{Cono}) = 4{,}3 \cdot 10^2$ dm^3

17. 254 cm^3 18. 45 dm^3

Tablas matemáticas

Tabla de cuadrados

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,020	1,040	1,061	1,082	1,103	1,124	1,145	1,166	1,188
1,1	1,210	1,232	1,254	1,277	1,300	1,323	1,346	1,369	1,392	1,416
1,2	1,440	1,464	1,488	1,513	1,538	1,563	1,588	1,613	1,638	1,664
1,3	1,690	1,716	1,742	1,769	1,796	1,823	1,850	1,877	1,904	1,932
1,4	1,960	1,988	2,016	2,045	2,074	2,103	2,132	2,161	2,190	2,220
1,5	2,250	2,280	2,310	2,341	2,372	2,403	2,434	2,465	2,496	2,528
1,6	2,560	2,592	2,624	2,657	2,690	2,723	2,756	2,789	2,822	2,856
1,7	2,890	2,924	2,958	2,993	3,028	3,063	3,098	3,133	3,168	3,204
1,8	3,240	3,276	3,312	3,349	3,386	3,423	3,460	3,497	3,534	3,572
1,9	3,610	3,648	3,686	3,725	3,764	3,803	3,842	3,881	3,920	3,960
2,0	4,000	4,040	4,080	4,121	4,162	4,203	4,244	4,285	4,326	4,368
2,1	4,410	4,452	4,494	4,537	4,580	4,623	4,666	4,709	4,752	4,796
2,2	4,840	4,884	4,928	4,973	5,018	5,063	5,108	5,153	5,198	5,244
2,3	5,290	5,336	5,382	5,429	5,476	5,523	5,570	5,617	5,664	5,712
2,4	5,760	5,808	5,856	5,905	5,954	6,003	6,052	6,101	6,150	6,200
2,5	6,250	6,300	6,350	6,401	6,452	6,503	6,554	6,605	6,656	6,708
2,6	6,760	6,812	6,864	6,917	6,970	7,023	7,076	7,129	7,182	7,236
2,7	7,290	7,344	7,398	7,453	7,508	7,563	7,618	7,673	7,728	7,784
2,8	7,840	7,896	7,952	8,009	8,066	8,123	8,180	8,237	8,294	8,352
2,9	8,410	8,468	8,526	8,585	8,644	8,703	8,762	8,821	8,880	8,940
3,0	9,000	9,060	9,120	9,181	9,242	9,303	9,364	9,425	9,486	9,548
3,1	9,610	9,672	9,734	9,797	9,860	9,923	9,986	10,05	10,11	10,18
3,2	10,24	10,30	10,37	10,43	10,50	10,56	10,63	10,69	10,76	10,82
3,3	10,89	10,96	11,02	11,09	11,16	11,22	11,29	11,36	11,42	11,49
3,4	11,56	11,63	11,70	11,76	11,83	11,90	11,97	12,04	12,11	12,18
3,5	12,25	12,32	12,39	12,46	12,53	12,60	12,67	12,74	12,82	12,89
3,6	12,96	13,03	13,10	13,18	13,25	13,32	13,40	13,47	13,54	13,62
3,7	13,69	13,76	13,84	13,91	13,99	14,06	14,14	14,21	14,29	14,36
3,8	14,44	14,52	14,59	14,67	14,75	14,82	14,90	14,98	15,05	15,13
3,9	15,21	15,29	15,37	15,44	15,52	15,60	15,68	15,76	15,84	15,92
4,0	16,00	16,08	16,16	16,24	16,32	16,40	16,48	16,56	16,65	16,73
4,1	16,81	16,89	16,97	17,06	17,14	17,22	17,31	17,39	17,47	17,56
4,2	17,64	17,72	17,81	17,89	17,98	18,06	18,15	18,23	18,32	18,40
4,3	18,49	18,58	18,66	18,75	18,84	18,92	19,01	19,10	19,18	19,27
4,4	19,36	19,45	19,54	19,62	19,71	19,80	19,89	19,98	20,07	20,16
4,5	20,25	20,34	20,43	20,52	20,61	20,70	20,79	20,88	20,98	21,07
4,6	21,16	21,25	21,34	21,44	21,53	21,62	21,72	21,81	21,90	22,00
4,7	22,09	22,18	22,28	22,37	22,47	22,56	22,66	22,75	22,85	22,94
4,8	23,04	23,14	23,23	23,33	23,43	23,52	23,62	23,72	23,81	23,91
4,9	24,01	24,11	24,21	24,30	24,40	24,50	24,60	24,70	24,80	24,90
5,0	25,00	25,10	25,20	25,30	25,40	25,50	25,60	25,70	25,81	25,91

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,1	26,01	26,11	26,21	26,32	26,42	26,52	26,63	26,73	26,83	26,94
5,2	27,04	27,14	27,25	27,35	27,46	27,56	27,67	27,77	27,88	27,98
5,3	28,09	28,20	28,30	28,41	28,52	28,62	28,73	28,84	28,94	29,05
5,4	29,16	29,27	29,38	29,48	29,59	29,70	29,81	29,92	30,03	30,14
5,5	30,25	30,36	30,47	30,58	30,69	30,80	30,91	31,02	31,14	31,25
5,6	31,36	31,47	31,58	31,70	31,81	31,92	32,04	32,15	32,26	32,38
5,7	32,49	32,60	32,72	32,83	32,95	33,06	33,18	33,29	33,41	33,52
5,8	33,64	33,76	33,87	33,99	34,11	34,22	34,34	34,46	34,57	34,69
5,9	34,81	34,93	35,05	35,16	35,28	35,40	35,52	35,64	35,76	35,88
6,0	36,00	36,12	36,24	36,36	36,48	36,60	36,72	36,84	36,97	37,09
6,1	37,21	37,33	37,45	37,58	37,70	37,82	37,95	38,07	38,19	38,32
6,2	38,44	38,56	38,69	38,81	38,94	39,06	39,19	39,31	39,44	39,56
6,3	39,69	39,82	39,94	40,07	40,20	40,32	40,45	40,58	40,70	40,83
6,4	40,96	41,09	41,22	41,34	41,47	41,60	41,73	41,86	41,99	42,12
6,5	42,25	42,38	42,51	42,64	42,77	42,90	43,03	43,16	43,30	43,43
6,6	43,56	43,69	43,82	43,96	44,09	44,22	44,36	44,49	44,62	44,76
6,7	44,89	45,02	45,16	45,29	45,43	45,56	45,70	45,83	45,97	46,10
6,8	46,24	46,38	46,51	46,65	46,79	46,92	47,06	47,20	47,33	47,47
6,9	47,61	47,75	47,89	48,02	48,16	48,30	48,44	48,58	48,72	48,86
7,0	49,00	49,14	49,28	49,42	49,56	49,70	49,84	49,98	50,13	50,27
7,1	50,41	50,55	50,69	50,84	50,98	51,12	51,27	51,41	51,55	51,70
7,2	51,84	51,98	52,13	52,27	52,42	52,56	52,71	52,85	53,00	53,14
7,3	53,29	53,44	53,58	53,73	53,88	54,02	54,17	54,32	54,46	54,61
7,4	54,76	54,91	55,06	55,20	55,35	55,50	55,65	55,80	55,95	56,10
7,5	56,25	56,40	56,55	56,70	56,85	57,00	57,15	57,30	57,46	57,61
7,6	57,76	57,91	58,06	58,22	58,37	58,52	58,68	58,83	58,98	59,14
7,7	59,29	59,44	59,60	59,75	59,91	60,06	60,22	60,37	60,53	60,68
7,8	60,84	61,00	61,15	61,31	61,47	61,62	61,78	61,94	62,09	62,25
7,9	62,41	62,57	62,73	62,88	63,04	63,20	63,36	63,52	63,68	63,84
8,0	64,00	64,16	64,32	64,48	64,64	64,80	64,96	65,12	65,29	65,45
8,1	65,61	65,77	65,93	66,10	66,26	66,42	66,59	66,75	66,91	67,08
8,2	67,24	67,40	67,57	67,73	67,90	68,06	68,23	68,39	68,56	68,72
8,3	68,89	69,06	69,22	69,39	69,56	69,72	69,89	70,06	70,22	70,39
8,4	70,56	70,73	70,90	71,06	71,23	71,40	71,57	71,74	71,91	72,08
8,5	72,25	72,42	72,59	72,76	72,93	73,10	73,27	73,44	73,62	73,79
8,6	73,96	74,13	74,30	74,48	74,65	74,82	75,00	75,17	75,34	75,52
8,7	75,69	75,86	76,04	76,21	76,39	76,56	76,74	76,91	77,09	77,26
8,8	77,44	77,62	77,79	77,97	78,15	78,32	78,50	78,68	78,85	79,03
8,9	79,21	79,39	79,57	79,74	79,92	80,10	80,28	80,46	80,64	80,82
9,0	81,00	81,18	81,36	81,54	81,72	81,90	82,08	82,26	82,45	82,63
9,1	82,81	82,99	83,17	83,36	83,54	83,72	83,91	84,09	84,27	84,46
9,2	84,64	84,82	85,01	85,19	85,38	85,56	85,75	85,93	86,12	86,30
9,3	86,49	86,68	86,86	87,05	87,24	87,42	87,61	87,80	87,98	88,17
9,4	88,36	88,55	88,74	88,92	89,11	89,30	89,49	89,68	89,87	90,06
9,5	90,25	90,44	90,63	90,82	91,01	91,20	91,39	91,58	91,78	91,97
9,6	92,16	92,35	92,54	92,74	92,93	93,12	93,32	93,51	93,70	93,90
9,7	94,09	94,28	94,48	94,67	94,87	95,06	95,26	95,45	95,65	95,84
9,8	96,04	96,24	96,43	96,63	96,83	97,02	97,22	97,42	97,61	97,81
9,9	98,01	98,21	98,41	98,60	98,80	99,00	99,20	99,40	99,60	99,80

Tabla de cubos

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,030	1,061	1,093	1,125	1,158	1,191	1,225	1,260	1,295
1,1	1,331	1,368	1,405	1,443	1,482	1,521	1,561	1,602	1,643	1,685
1,2	1,728	1,772	1,816	1,861	1,907	1,953	2,000	2,048	2,097	2,147
1,3	2,197	2,248	2,300	2,353	2,406	2,460	2,515	2,571	2,628	2,686
1,4	2,744	2,803	2,863	2,924	2,986	3,049	3,112	3,177	3,242	3,308
1,5	3,375	3,443	3,512	3,582	3,652	3,724	3,796	3,870	3,944	4,020
1,6	4,096	4,173	4,252	4,331	4,411	4,492	4,574	4,657	4,742	4,827
1,7	4,913	5,000	5,088	5,178	5,268	5,359	5,452	5,545	5,640	5,735
1,8	5,832	5,930	6,029	6,128	6,230	6,332	6,435	6,539	6,645	6,751
1,9	6,859	6,968	7,078	7,189	7,301	7,415	7,530	7,645	7,762	7,881
2,0	8,000	8,121	8,242	8,365	8,490	8,615	8,742	8,870	8,999	9,129
2,1	9,261	9,394	9,528	9,664	9,800	9,938	10,08	10,22	10,36	10,50
2,2	10,65	10,79	10,94	11,09	11,24	11,39	11,54	11,70	11,85	12,01
2,3	12,17	12,33	12,49	12,65	12,81	12,98	13,14	13,31	13,48	13,65
2,4	13,82	14,00	14,17	14,35	14,53	14,71	14,89	15,07	15,25	15,44
2,5	15,63	15,81	16,00	16,19	16,39	16,58	16,78	16,97	17,17	17,37
2,6	17,58	17,78	17,98	18,19	18,40	18,61	18,82	19,03	19,25	19,47
2,7	19,68	19,90	20,12	20,35	20,57	20,80	21,02	21,25	21,48	21,72
2,8	21,95	22,19	22,43	22,67	22,91	23,15	23,39	23,64	23,89	24,14
2,9	24,39	24,64	24,90	25,15	25,41	25,67	25,93	26,20	26,46	26,73
3,0	27,00	27,27	27,54	27,82	28,09	28,37	28,65	28,93	29,22	29,50
3,1	29,79	30,08	30,37	30,66	30,96	31,26	31,55	31,86	32,16	32,46
3,2	32,77	33,08	33,39	33,70	34,01	34,33	34,65	34,97	35,29	35,61
3,3	35,94	36,26	36,59	36,93	37,26	37,60	37,93	38,27	38,61	38,96
3,4	39,30	39,65	40,00	40,35	40,71	41,06	41,42	41,78	42,14	42,51
3,5	42,88	43,24	43,61	43,99	44,36	44,74	45,12	45,50	45,88	46,27
3,6	46,66	47,05	47,44	47,83	48,23	48,63	49,03	49,43	49,84	50,24
3,7	50,65	51,06	51,48	51,90	52,31	52,73	53,16	53,58	54,01	54,44
3,8	54,87	55,31	55,74	56,18	56,62	57,07	57,51	57,96	58,41	58,86
3,9	59,32	59,78	60,24	60,70	61,16	61,63	62,10	62,57	63,04	63,52
4,0	64,00	64,48	64,96	65,45	65,94	66,43	66,92	67,42	67,92	68,42
4,1	68,92	69,43	69,93	70,44	70,96	71,47	71,99	72,51	73,03	73,56
4,2	74,09	74,62	75,15	75,69	76,23	76,77	77,31	77,85	78,40	78,95
4,3	79,51	80,06	80,62	81,18	81,75	82,31	82,88	83,45	84,03	84,60
4,4	85,18	85,77	86,35	86,94	87,53	88,12	88,72	89,31	89,92	90,52
4,5	91,13	91,73	92,35	92,96	93,58	94,20	94,82	95,44	96,07	96,70
4,6	97,34	97,97	98,61	99,25	99,90	100,5	101,2	101,8	102,5	103,2
4,7	103,8	104,5	105,2	105,8	106,5	107,2	107,9	108,5	109,2	109,9
4,8	110,6	111,3	112,0	112,7	113,4	114,1	114,8	115,5	116,2	116,9
4,9	117,6	118,4	119,1	119,8	120,6	121,3	122,0	122,8	123,5	124,3
5,0	125,0	125,8	126,5	127,3	128,0	128,8	129,6	130,3	131,1	131,9
5,1	132,7	133,4	134,2	135,0	135,8	136,6	137,4	138,2	139,0	139,8
5,2	140,6	141,4	142,2	143,1	143,9	144,7	145,5	146,4	147,2	148,0
5,3	148,9	149,7	150,6	151,4	152,3	153,1	154,0	154,9	155,7	156,6

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,4	157,5	158,3	159,2	160,1	161,0	161,9	162,8	163,7	164,6	165,5
5,5	166,4	167,3	168,2	169,1	170,0	171,0	171,9	172,8	173,7	174,7
5,6	175,6	176,6	177,5	178,5	179,4	180,4	181,3	182,3	183,3	184,2
5,7	185,2	186,2	187,1	188,1	189,1	190,1	191,1	192,1	193,1	194,1
5,8	195,1	196,1	197,1	198,2	199,2	200,2	201,2	202,3	203,3	204,3
5,9	205,4	206,4	207,5	208,5	209,6	210,6	211,7	212,8	213,8	214,9
6,0	216,0	217,1	218,2	219,3	220,3	221,4	222,5	223,6	224,8	225,9
6,1	227,0	228,1	229,2	230,3	231,5	232,6	233,7	234,9	236,0	237,2
6,2	238,3	239,5	240,6	241,8	243,0	244,1	245,3	246,5	247,7	248,9
6,3	250,0	251,2	252,4	253,6	254,8	256,0	257,3	258,5	259,7	260,9
6,4	262,1	263,4	264,6	265,8	267,1	268,3	269,6	270,8	272,1	273,4
6,5	274,6	275,9	277,2	278,4	279,7	281,0	282,3	283,6	284,9	286,2
6,6	287,5	288,8	290,1	291,4	292,8	294,1	295,4	296,7	298,1	299,4
6,7	300,8	302,1	303,5	304,8	306,2	307,5	308,9	310,3	311,7	313,0
6,8	314,4	315,8	317,2	318,6	320,0	321,4	322,8	324,2	325,7	327,1
6,9	328,5	329,9	331,4	332,8	334,3	335,7	337,2	338,6	340,1	341,5
7,0	343,0	344,5	345,9	347,4	348,9	350,4	351,9	353,4	354,9	356,4
7,1	357,9	359,4	360,9	362,5	364,0	365,5	367,1	368,6	370,1	371,7
7,2	373,2	374,8	376,4	377,9	379,5	381,1	382,7	384,2	385,8	387,4
7,3	389,0	390,6	392,2	393,8	395,4	397,1	398,7	400,3	401,9	403,6
7,4	405,2	406,9	408,5	410,2	411,8	413,5	415,2	416,8	418,5	420,2
7,5	421,9	423,6	425,3	427,0	428,7	430,4	432,1	433,8	435,5	437,2
7,6	439,0	440,7	442,5	444,2	445,9	447,7	449,5	451,2	453,0	454,8
7,7	456,5	458,3	460,1	461,9	463,7	465,5	467,3	469,1	470,9	472,7
7,8	474,6	476,4	478,2	480,0	481,9	483,7	485,6	487,4	489,3	491,2
7,9	493,0	494,9	496,8	498,7	500,6	502,5	504,4	506,3	508,2	510,1
8,0	512,0	513,9	515,8	517,8	519,7	521,7	523,6	525,6	527,5	529,5
8,1	531,4	533,4	535,4	537,4	539,4	541,3	543,3	545,3	547,3	549,4
8,2	551,4	553,4	555,4	557,4	559,5	561,5	563,6	565,6	567,7	569,7
8,3	571,8	573,9	575,9	578,0	580,1	582,2	584,3	586,4	588,5	590,6
8,4	592,7	594,8	596,9	599,1	601,2	603,4	605,5	607,6	609,8	612,0
8,5	614,1	616,3	618,5	620,7	622,8	625,0	627,2	629,4	631,6	633,8
8,6	636,1	638,3	640,5	642,7	645,0	647,2	649,5	651,7	654,0	656,2
8,7	658,5	660,8	663,1	665,3	667,6	669,9	672,2	674,5	676,8	679,2
8,8	681,5	683,8	686,1	688,5	690,8	693,2	695,5	697,9	700,2	702,6
8,9	705,0	707,3	709,7	712,1	714,5	716,9	719,3	721,7	724,2	726,6
9,0	729,0	731,4	733,9	736,3	738,8	741,2	743,7	746,1	748,6	751,1
9,1	753,6	756,1	758,6	761,0	763,6	766,1	768,6	771,1	773,6	776,2
9,2	778,7	781,2	783,8	786,3	788,9	791,5	794,0	796,6	799,2	801,8
9,3	804,4	807,0	809,6	812,2	814,8	817,4	820,0	822,7	825,3	827,9
9,4	830,6	833,2	835,9	838,6	841,2	843,9	846,6	849,3	852,0	854,7
9,5	857,4	860,1	862,8	865,5	868,3	871,0	873,7	876,5	879,2	882,0
9,6	884,7	887,5	890,3	893,1	895,8	898,6	901,4	904,2	907,0	909,9
9,7	912,7	915,5	918,3	921,2	924,0	926,9	929,7	932,6	935,4	938,3
9,8	941,2	944,1	947,0	949,9	952,8	955,7	958,6	961,5	964,4	967,4
9,9	970,3	973,2	976,2	979,1	982,1	985,1	988,0	991,0	994,0	997,0

Tabla de senos y cosenos

seno

Grad.	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	(1,0)	
0	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175	89
1	0,0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	88
2	0,0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	0523	87
3	0,0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	0698	86
4	0,0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	0872	85
5	0,0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028	1045	84
6	0,1045	1063	1080	1097	1115	1132	1149	1167	1184	1201	1219	83
7	0,1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374	1392	82
8	0,1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547	1564	81
9	0,1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719	1736	80
10	0,1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	1908	79
11	0,1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	2079	78
12	0,2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2233	2250	77
13	0,2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	2419	76
14	0,2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	2588	75
15	0,2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	2756	74
16	0,2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	2924	73
17	0,2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3090	72
18	0,3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3256	71
19	0,3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	3420	70
20	0,3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3584	69
21	0,3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3746	68
22	0,3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3907	67
23	0,3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	4067	66
24	0,4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	4226	65
25	0,4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	4384	64
26	0,4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	4540	63
27	0,4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	4695	62
28	0,4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	4848	61
29	0,4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	5000	60
30	0,5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	5150	59
31	0,5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	5299	58
32	0,5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	5446	57
33	0,5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	5592	56
34	0,5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	5736	55
35	0,5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	5878	54
36	0,5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	6018	53
37	0,6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	6157	52
38	0,6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	6293	51
39	0,6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	6428	50
40	0,6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	6561	49
41	0,6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	6691	48
42	0,6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	6820	47
43	0,6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	6947	46
44	0,6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	7071	45
	(1,0)	,9	,8	,7	,6	,5	,4	,3	,2	,1	,0	Grad.

coseno

Tabla de senos y cosenos (continuación)

seno

Grad.	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	(1,0)	
45	0,7071	7083	7096	7108	7120	7133	7145	7157	7169	7181	7193	44
46	0,7193	7206	7218	7230	7242	7254	7266	7278	7290	7302	7314	43
47	0,7314	7325	7337	7349	7361	7373	7385	7396	7408	7420	7431	42
48	0,7431	7443	7455	7466	7478	7490	7501	7513	7524	7536	7547	41
49	0,7547	7559	7570	7581	7593	7604	7615	7627	7638	7649	7660	40
50	0,7660	7672	7683	7694	7705	7716	7727	7738	7749	7760	7771	39
51	0,7771	7782	7793	7804	7815	7826	7837	7848	7859	7869	7880	38
52	0,7880	7891	7902	7912	7923	7934	7944	7955	7965	7976	7986	37
53	0,7986	7997	8007	8018	8028	8039	8049	8059	8070	8080	8090	36
54	0,8090	8100	8111	8121	8131	8141	8151	8161	8171	8181	8192	35
55	0,8192	8202	8211	8221	8231	8241	8251	8261	8271	8281	8290	34
56	0,8290	8300	8310	8320	8329	8339	8348	8358	8368	8377	8387	33
57	0,8387	8396	8406	8415	8425	8434	8443	8453	8462	8471	8480	32
58	0,8480	8490	8499	8508	8517	8526	8536	8545	8554	8563	8572	31
59	0,8572	8581	8590	8599	8607	8616	8625	8634	8643	8652	8660	30
60	0,8660	8669	8678	8686	8695	8704	8712	8721	8729	8738	8746	29
61	0,8746	8755	8763	8771	8780	8788	8796	8805	8813	8821	8829	28
62	0,8829	8838	8846	8854	8862	8870	8878	8886	8894	8902	8910	27
63	0,8910	8918	8926	8934	8942	8949	8957	8965	8973	8980	8988	26
64	0,8988	8996	9003	9011	9018	9026	9033	9041	9048	9056	9063	25
65	0,9063	9070	9078	9085	9092	9100	9107	9114	9121	9128	9135	24
66	0,9135	9143	9150	9157	9164	9171	9178	9184	9191	9198	9205	23
67	0,9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9265	9272	22
68	0,9272	9278	9285	9291	9298	9304	9311	9317	9323	9330	9336	21
69	0,9336	9342	9348	9354	9361	9367	9373	9379	9385	9391	9397	20
70	0,9397	9403	9409	9415	9421	9426	9432	9438	9444	9449	9455	19
71	0,9455	9461	9466	9472	9478	9483	9489	9494	9500	9505	9511	18
72	0,9511	9516	9521	9527	9532	9537	9542	9548	9553	9558	9563	17
73	0,9563	9568	9573	9578	9583	9588	9593	9598	9603	9608	9613	16
74	0,9613	9617	9622	9627	9632	9636	9641	9646	9650	9655	9659	15
75	0,9659	9664	9668	9673	9677	9681	9686	9690	9694	9699	9703	14
76	0,9703	9707	9711	9715	9720	9724	9728	9732	9736	9740	9744	13
77	0,9744	9748	9751	9755	9759	9763	9767	9770	9774	9778	9781	12
78	0,9781	9785	9789	9792	9796	9799	9803	9806	9810	9813	9816	11
79	0,9816	9820	9823	9826	9829	9833	9836	9839	9842	9845	9848	10
80	0,9848	9851	9854	9857	9860	9863	9866	9869	9871	9874	9877	9
81	0,9877	9880	9882	9885	9888	9890	9893	9895	9898	9900	9903	8
82	0,9903	9905	9907	9910	9912	9914	9917	9919	9921	9923	9925	7
83	0,9925	9928	9930	9932	9934	9936	9938	9940	9942	9943	9945	6
84	0,9945	9947	9949	9951	9952	9954	9956	9957	9959	9960	9962	5
85	0,9962	9963	9965	9966	9968	9969	9971	9972	9973	9974	9976	4
86	0,9976	9977	9978	9979	9980	9981	9982	9983	9984	9985	9986	3
87	0,9986	9987	9988	9989	9990	9990	9991	9992	9993	9993	9994	2
88	0,9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	9997	9998	9998	9998	1
89	0,9998	9999	9999	9999	9999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0
	(1,0)	,9	,8	,7	,6	,5	,4	,3	,2	,1	,0	Grad

coseno

Tabla de tangentes y cotangentes

tangente

Grad.	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	(1,0)	
0	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175	89
1	0,0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	88
2	0,0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507	0524	87
3	0,0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682	0699	86
4	0,0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857	0875	85
5	0,0875	0892	0910	0928	0945	0963	0981	0998	1016	1033	1051	84
6	0,1051	1069	1086	1104	1122	1139	1157	1175	1192	1210	1228	83
7	0,1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388	1405	82
8	0,1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566	1584	81
9	0,1584	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745	1763	80
10	0,1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	1944	79
11	0,1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	2126	78
12	0,2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	2309	77
13	0,2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	2493	76
14	0,2493	2512	2530	2549	2568	2586	2605	2623	2642	2661	2679	75
15	0,2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	2867	74
16	0,2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3057	73
17	0,3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3249	72
18	0,3249	3269	3288	3307	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3443	71
19	0,3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	3640	70
20	0,3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3839	69
21	0,3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	4040	68
22	0,4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	4245	67
23	0,4245	4265	4286	4307	4327	4348	4369	4390	4411	4431	4452	66
24	0,4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	4663	65
25	0,4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4877	64
26	0,4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	5095	63
27	0,5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	5317	62
28	0,5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	5543	61
29	0,5543	5566	5589	5612	5635	5658	5681	5704	5727	5750	5774	60
30	0,5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	6009	59
31	0,6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	6249	58
32	0,6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	6494	57
33	0,6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	6745	56
34	0,6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	7002	55
35	0,7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239	7265	54
36	0,7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	7536	53
37	0,7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	7813	52
38	0,7813	7841	7869	7898	7926	7954	7983	8012	8040	8069	8098	51
39	0,8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	8391	50
40	0,8391	8421	8451	8481	8511	8541	8571	8601	8632	8662	8693	49
41	0,8693	8724	8754	8785	8816	8847	8878	8910	8941	8972	9004	48
42	0,9004	9036	9067	9099	9131	9163	9195	9228	9260	9293	9325	47
43	0,9395	9358	9391	9424	9457	9490	9523	9556	9590	9623	9657	46
44	0,9657	9691	9725	9759	9793	9827	9861	9896	9930	9965	1,000	45
	(1,0)	,9	,8	,7	,6	,5	,4	,3	,2	,1	,0	Grad.

cotangente

Tabla de tangentes y cotangentes (continuación)

tangente

Grad.	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	(1,0)	
45	1,000	003	007	011	014	018	021	025	028	032	036	44
46	1,036	039	043	046	050	054	057	061	065	069	072	43
47	1,072	076	080	084	087	091	095	099	103	107	111	42
48	1,111	115	118	122	126	130	134	138	142	146	150	41
49	1,150	154	159	163	167	171	175	179	183	188	192	40
50	1,192	196	200	205	209	213	217	222	226	230	235	39
51	1,235	239	244	248	253	257	262	266	271	275	280	38
52	1,280	285	289	294	299	303	308	313	317	322	327	37
53	1,327	332	337	342	347	351	356	361	366	371	376	36
54	1,376	381	387	392	397	402	407	412	418	423	428	35
55	1,428	433	439	444	450	455	460	466	471	477	483	34
56	1,483	488	494	499	505	511	517	522	528	534	540	33
57	1,540	546	552	558	564	570	576	582	588	594	600	32
58	1,600	607	613	619	625	632	638	645	651	658	664	31
59	1,664	671	678	684	691	698	704	711	718	725	732	30
60	1,732	739	746	753	760	767	775	782	789	797	804	29
61	1,804	811	819	827	834	842	849	857	865	873	881	28
62	1,881	889	897	905	913	921	929	937	946	954	963	27
63	1,963	971	980	988	997	*006	*014	*023	*032	*041	*050	26
64	2,050	059	069	078	087	097	106	116	125	135	145	25
65	2,145	154	164	174	184	194	204	215	225	236	246	24
66	2,246	257	267	278	289	300	311	322	333	344	356	23
67	2,356	367	379	391	402	414	426	438	450	463	475	22
68	2,475	488	500	513	526	539	552	565	578	592	605	21
69	2,605	619	633	646	660	675	689	703	718	733	747	20
70	2,747	762	778	793	808	824	840	856	872	888	904	19
71	2,904	921	937	954	971	989	*006	*024	*042	*060	*078	18
72	3,078	096	115	133	152	172	191	211	230	251	271	17
73	3,271	291	312	333	354	376	398	420	442	465	487	16
74	3,487	511	534	558	582	606	630	655	681	706	732	15
75	3,732	758	785	812	839	867	895	923	952	981	*011	14
76	4,011	041	071	102	134	165	198	230	264	297	331	13
77	4,331	366	402	437	474	511	548	586	625	665	705	12
78	4,705	745	787	829	872	915	959	*005	*050	*097	*145	11
79	5,145	193	242	292	343	396	449	503	558	614	671	10
80	5,671	5,730	5,789	5,850	5,912	5,976	6,041	6,107	6,174	6,243	6,314	9
81	6,314	6,386	6,460	6,535	6,612	6,691	6,772	6,855	6,940	7,026	7,115	8
82	7,115	7,207	7,300	7,396	7,495	7,596	7,700	7,806	7,916	8,028	8,144	7
83	8,144	8,264	8,386	8,513	8,643	8,777	8,915	9,058	9,205	9,357	9,514	6
84	9,514	9,677	9,845	10,0	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	5
85	11,43	11,66	11,91	12,16	12,43	12,71	13,00	13,30	13,62	13,95	14,30	4
86	14,30	14,67	15,06	15,46	15,89	16,35	16,83	17,34	17,89	18,46	19,08	3
87	19,08	19,74	20,45	21,20	22,02	22,90	23,86	24,90	26,03	27,27	28,64	2
88	28,64	30,14	31,82	33,69	35,80	38,19	40,92	44,07	47,74	52,08	57,29	1
89	57,29	63,66	71,62	81,85	95,49	114,6	143,2	191,0	286,5	573,0	- - -	0
	(1,0)	,9	,8	,7	,6	,5	,4	,3	,2	,1	,0	Grad.

cotangente

Matemática 9º. grado es el texto básico para los estudiantes de este nivel de la Educación General. Consta de cinco capítulos: Estadística descriptiva, Geometría plana, Sistemas de ecuaciones lineales, Trabajo con variables y Cuerpos; en todos ellos aparecen definiciones, teoremas, ejemplos y diferentes ejercicios que, en su conjunto, contribuyen a recordar lo aprendido y a enriquecer los conocimientos a partir de la práctica, con la posibilidad de comprobar las respuestas al final de cada capítulo. Se incluye, además, un examen para la autoevaluación.

Asimismo aparecen numerosas ilustraciones que facilitan la comprensión de los contenidos tratados; se incluyen las tablas de cuadrados y cubos, y las de seno, coseno, tangente y cotangente que resultan de gran utilidad para la solución de los ejercicios propuestos.

9 789591 329011