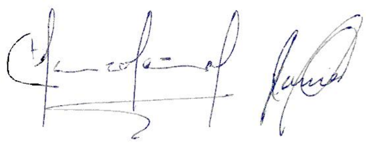
Memento de Matemática
12mo grado

- ✓ **Este memento incluye un resumen de los contenidos matemáticos de la enseñanza preuniversitaria.**
- ✓ **Este documento fue adquirido por quienes lo presentan con autoría de "Amador Suaréz Orama" del JCCE de Guáimaro.**
- ✓ **Esta nueva presentación no persigue restar autoría al trabajo, sólo presentamos una nueva versión en un formato casi idéntico pero que difiere del original en formatos propios del "Microsoft Word" donde fue creado.**
- ✓ **Estas nuevas modificaciones se realizaron con el fin de poder erradicar errores que se producían a la hora de modificar formatos de hojas o de margenes lo que no permitía que el folleto pudiera ser generalizado a usuarios con diferentes características antes mencionadas.**
- ✓ **Todas las modificaciones realizadas a este documento fue del punto de vista informático, no matemático, rogamos nos disculpen por molestias que esto puede causarle y sugerimos nos dirija sus recomendaciones a:**
  sntc@reduc.cmw.edu.cu
  cer@reduc.cmw.edu.cu
  sntc@finlay.cmw.sld.cu
  alcam@cejisoft.cmw.edu.cu
  Siempre adjuntando al Subject: Para Alcam's
- ✓ **Esperamos que las nuevas modificaciones de este material, así como él en su totalidad, le sirva en sus estudios y auguro para ustedes un próspero futuro.**

Con la mayor entrega para nuestros queridos estudiantes de:



- ✓ *Lic. Camilo Ernesto Blanco Peña.*
  Prof: Informática-Educativa
- ✓ *Javier Gutierrez Rodríguez.*
  Est. Informática-Educatica.

Siempre: ☺
Nunca: ☹

GEOMETRÍA

“P L A N I M E T R I A”

Triángulos.

Definición: *Polígono convexo de tres lados.*

Propiedades: *La suma de los ángulos interiores es 180º.*

- *La amplitud de un ángulo exterior es igual a la suma de las amplitudes de los ángulos interiores no adyacentes a él.*
- *La suma de las amplitudes de los ángulos exteriores es 360º.*

Rectas notables del Triángulo:

Bisectriz: *Es la recta que divide al ángulo en dos partes iguales.*

Lugar Geométrico: Es el conjunto de todos los puntos que equidistan de los lados de un ángulo.

Mediatriz: *Es la recta perpendicular a un segmento que pasa por su punto medio.*

Lugar Geométrico: Es el conjunto del punto que equidistan de dos puntos fijos del plano.

Mediana: Es el segmento de rectas que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

Altura: Segmento de recta que parte de un vértice y cae perpendicularmente al lado opuesto.

Puntos Notables en el Triángulo:

Ortocentro: *Es el punto donde se cortan las alturas de un triángulo.*

Incentro: *Es el punto donde se cortan las bisectrices de un triángulo, es además el centro de la cir√cunferencia inscrito al triángulo.*

Baricentro: *Divide a la mediana en dos segmentos, donde el segmento comprendido entre el Baricentro y el lado es un tercio de la Mediana y un medio del otro segmento.*

Circuncentro: *Es el punto donde se cortan las mediatrices de un triángulo; es además el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.*

Clasificación de Triángulos

Según sus lados	Según sus ángulos
Escaleno: Tres lados diferentes.	Acutángulo: Todos sus ángulos son agudos. **($\propto$<90º)**
Isósceles: Dos lados iguales.	Rectángulo: Un ángulo recto.
Equilátero: Tres lados iguales	Obtusángulo: Un ángulo obtuso.

Propiedades de triángulos isósceles

- *Dos lados iguales*
- *Dos ángulos iguales llamados bases.*
- *Todas las rectas notables coinciden respecto a la base del triángulo. (base: tercer lado).*
- *Si posee un ángulo de 60º entonces es equilátero.*

Propiedades de los triángulos equiláteros

- *Tres lados iguales.*
- *Tres ángulos iguales e iguales a 60º.*
- *Todas las rectas notables coinciden respecto a sus tres lados.*
- *Todos los puntos notables coinciden (O;B;I;C).*

Propiedades del triángulo rectángulo.

- *Un ángulo de 90º.*
- *El lado que se le opone al ángulo recto se denomina hipotenusa y los adyacentes catetos.*

Teoremas del triángulo rectángulo\

T-1 : *La hipotenusa: es el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo.*

T-2 : *La mediana relativa a la hipotenusa es igual ½ la hipotenusa.*

Recíproco *T-1 Si un triángulo esta inscrito en una circunferencia y un lado coincide con el diámetro entonces el triángulo es rectángulo.*

Recíproco *T-2 Si en un triángulo la mediana relativa a un lado es = ½ de ese lado entonces el triángulo es rectángulo y el ángulo opuesto a ese lado es de 90º.*

T-3*: Si un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 30º entonces el cateto que* se le opone es *½ de la hipotenusa o sea es igual al radio de la circunferencia circunscrita.*

Recíproco *T-3: Si en un triángulo rectángulo un cateto es la mitad de la hipotenusa, el ángulo que se le opone a dicho cateto es de 30º.*

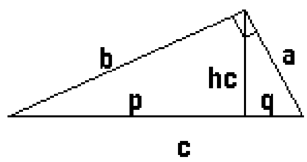
Grupo de Teoremas de Pitágoras

T-4 : *Teorema de Pitágoras:*

En todo triángulo rectángulo se cumple que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, es decir , $c^2 = a^2 + b^2$.

Recíproco del T-4*: Si en un triángulo se cumple que el cuadrado del lado mayor es igual a la suma de los cuadrados de los otros lados, entonces el triángulo es rectángulo en el vértice que se opone al lado mayor.* ***Ver figura T-4****.*

Figura T-4



T-5: Teoremas de las Alturas:

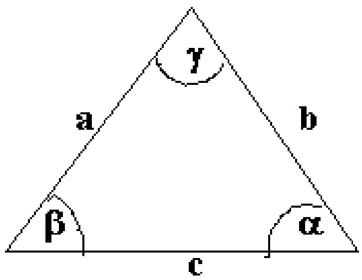
En todo triángulo rectángulo se cumple que el cuadrado de la altura relativa a la hipotenusa es igual al producto de los segmentos de hipotenusa que ella determina, es decir, $hc^2 = p.q$

T-6: Teorema de los Catetos:

En todo triángulo rectángulo se cumple que el cuadrado de la longitud de los catetos es igual al producto de la hipotenusa por el segmento de hipotenusa correspondiente al cateto, es decir, $b^2 = c.p$ *y* $a^2 = c.q$

- ✓ *Los recíprocos de los teoremas 5 y 6 son verdaderos por lo que también constituyen teoremas.*

Triángulos Cualesquiera



Ley de los Senos:

En todo triángulo se cumple que las razones entre los lados y los senos de los ángulos, que respectivamente se le oponen, es la misma y además son iguales a dos veces el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo, es decir:

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma} = 2R$$ *(R: Radio de la circunferencia circunscrita)*

Ley de los Cosenos:

El cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros lados, menos el doble producto de esos lados por el coseno del ángulo que se le opone al lado inicial, es decir:

1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$
2. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$
3. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$

- ✓ *El objetivo de estas leyes es la obtención o cálculo de elementos en cualquier tipo de triángulo, ya sea de forma directa o a través del despeje de las ecuaciones.*

Circunferencia y Círculo

Definición: (Circunferencia): *Son todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.*

Definición: (Círculo): *Está formado por la circunferencia y todos los puntos interiores de esta.*

Definición : (Radio): *Es el segmento de recta que une el centro con la circunferencia. También llamado distancia entre el centro de la circunferencia y la circunferencia.*

Definición : (Cuerda): *Es el segmento de recta que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia.*

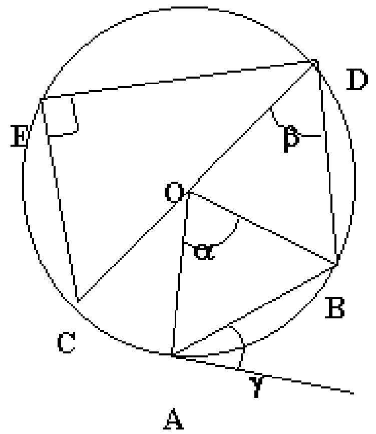
Definición: (Diámetro): *Es la mayor de las cuerdas. Es la cuerda que pasa por el centro de la circunferencia. Es la cuerda que contiene al radio.*

Ángulos en la circunferencia y el círculo.

Ángulo Central: *Es el ángulo cuyo vértice está en el centro de la circunferencia y sus lados son radios. Su amplitud es equivalente arco que le corresponde, es decir, $\alpha = AB$.*

Ángulo Inscrito: *Es el ángulo que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son cuerdas. Su amplitud es equivalente a la mitad de la amplitud del arco que le corresponde, o a la mitad del ángulo central que le corresponde a dicho arco, es decir:*

$$\beta = \frown{CB}/2 \text{ ó } \beta = \alpha/2$$



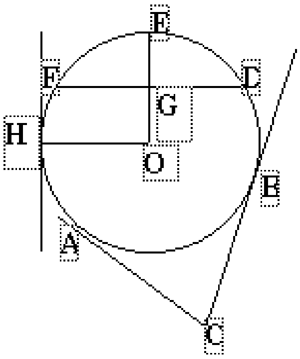
Ángulo Seminscrito: *Tiene su vértice en la circunferencia y sus lados están compuestos por una tangente a la circunferencia y una cuerda. Su amplitud es equivalente a la mitad del arco comprendido entre sus lados, es decir:*

$\gamma = AB/2$ ó $\gamma = \alpha/2$

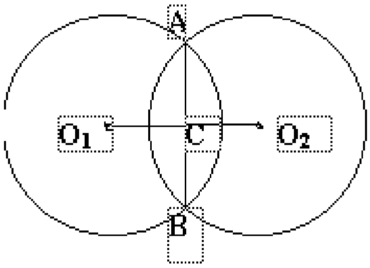
Teorema de Tales: *Si a un ángulo seminscrito le corresponde como arco una semicircunferencia entonces su amplitud es de 90º (Y viceversa).*

Propiedades y Relaciones en la Circunferencia.

- 🕮 *Todo ángulo central o inscrito en una circunferencia determina un arco y por lo tanto una cuerda; luego si dos ángulos centrales o inscritos son iguales entonces los arcos, y por tanto las cuerdas también lo son (y viceversa).*
- 🕮 *Si dos ángulos están inscritos sobre un mismo arco entonces los ángulos son iguales y viceversa.*
- 🕮 *Si a un ángulo inscrito y un seminscrito le corresponden el mismo arco, entonces los ángulos son iguales.*
- 🕮 *Si desde un punto exterior a un círculo se trazan dos tangentes, entonces los segmentos obtenidos entre el punto exterior y los puntos de tangencia son iguales, es decir, AC=BC.*



- Si un radio o diámetro es perpendicular a una cuerda entonces la divide en dos segmentos iguales y además el arco que le corresponde a la cuerda también es dividido en dos arcos iguales (y viceversa), es decir si $OE \perp FD$ entonces $FG=GD$ y $FE=ED$.
- Si una recta es tangente a la circunferencia, entonces el radio al punto de tangencia es perpendicular a la recta.



- Si dos circunferencias son secantes entonces la recta que pasa por los centros es perpen dicular al segmento que une los puntos donde se cortan las circunferencias y además lo corta en dos partes iguales, es decir:

  si $O_1O_2 \perp AB$; $AC=CB$

Cuadriláteros Convexos

Definición: *Polígono de cuatro lados.*

Propiedad: *La suma de sus ángulos interiores es de 360º.*

Tipos de cuadriláteros

Paralelogramo	Trapecio	Trapecio
Rectángulo	*Isósceles*	*Simétricos*
Rombo	*Rectángulo*	*Asimétricos*
Cuadrado		

Propiedades

Paralelogramos

a) Lados opuestos paralelos e iguales.

b) Ángulos opuestos iguales.

c) Ángulos consecutivos suman 180º.

d) *Las diagonales se cortan en su punto medio.*

Rectángulo: *Paralelogramo que:*

a) Sus ángulos interiores son rectos.(90º).

b) Las diagonales son iguales.

Rombo: *Paralelogramo que:*

a) Sus cuatro lados son iguales.

b) Sus diagonales se cortan perpendicularmente.

c) Sus diagonales bisecan los ángulos de donde parten.

Cuadrado: *Paralelogramo que es rectángulo y rombo a la vez.*

Trapecio: *Cuadrilátero que tiene un par de lados paralelos.*

Propiedad:

a) Los ángulos adyacentes a los lados no paralelos suman 180º.

Trapecio isósceles

Propiedades:

a) *Los lados no paralelos son iguales.*

b) *Las diagonales son iguales.*

Trapecio rectángulo

a) *Uno de los lados no paralelos es perpendicular a las bases, por lo que funciona como altura.*

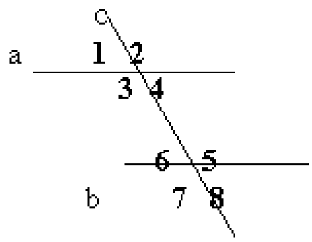
Trapezoide: *Cuadrilátero que no tiene lados paralelos.*

Trapezoide simétrico: *Cuadrilátero que tiene dos pares de lados consecutivos iguales.*

a) *Las diagonales se cortan perpendicularmente, una de ellas es eje de simetría por lo que biseca el ángulo de donde parte y divide la otra diagonal en dos partes iguales.*

<u>Ángulos entre paralelas</u>

Si dos rectas paralelas son cortadas por una tercera (a||b y c secante)



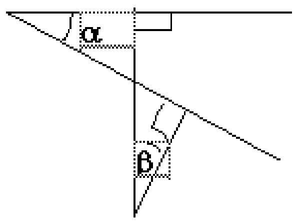
<u>Ángulos iguales</u>	<u>Suplementarios</u>
Correspondientes	*Conjugados*
Alternos	*Adyacentes*
Opuestos por el vértice	

- <u>*Correspondientes:*</u> $\sphericalangle$1y 6 ; $\sphericalangle$2 y 5 ; $\sphericalangle$3 y 7 ; $\sphericalangle$4 y 8.
- <u>*Alternos :*</u> $\sphericalangle$3 y 5 ; $\sphericalangle$4 y 6 ; $\sphericalangle$1 y 8 ; $\sphericalangle$2 y 7.
- <u>*Opuestos por el vértice:*</u> $\sphericalangle$1 y 4 ; $\sphericalangle$2 y 3 ; $\sphericalangle$5 y 7 ; $\sphericalangle$6 y 8.
- <u>*Conjugados*</u>: $\sphericalangle$1 y 7 ; $\sphericalangle$2 y 8 ; $\sphericalangle$3 y 6 ; $\sphericalangle$4 y 5.
- <u>*Adyacentes*</u>: $\sphericalangle$1 y 2 ; $\sphericalangle$2 y 4 ; $\sphericalangle$3 y 4 ; $\sphericalangle$3 y 1 ; $\sphericalangle$5 y 6 ; $\sphericalangle$5 y 8 ;$\sphericalangle$8 y 7 ; $\sphericalangle$7 y 6.

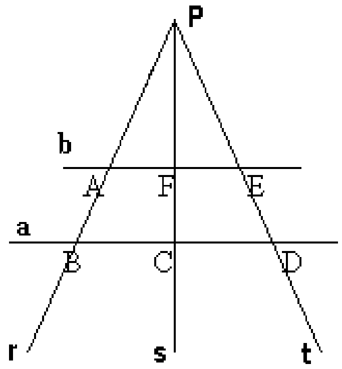
<u>*Recíproco:*</u>

✓ *Si dos ángulos alternos o correspondientes entre rectas son iguales, entoces las rectas son paralelas.*

✓ *Si dos ángulos son conjugados entre rectas y suman 180º, entonces las rectas son paralelas.*



Teorema: *Si dos ángulos tienen sus lados respectivamente perpendiculares, entonces son iguales, es decir,* $\alpha=\beta$.



Teorema de transversales

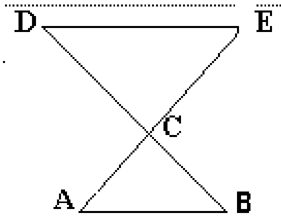
Teorema : *Si dos o más semirrectas de origen común son cortadas por rectas paralelas entonces la razón entre los segmentos que determinan en una de ellas es igual a la razón que determina en la otra.*

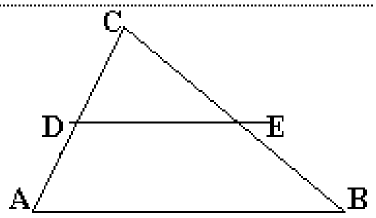
Si $a \parallel b$ *y P es el punto de intersección de r, s y t , entonces se cumple:*

$$\frac{PA}{AB} = \frac{PF}{FC} = \frac{PE}{ED} \; ; \; \frac{PA}{PB} = \frac{PF}{PC} = \frac{PE}{PD} \; ; \; \frac{PB}{AB} = \frac{PC}{FC} = \frac{PD}{ED}$$

Recíproco: *Si dos o más semirrectas de origen común son cortadas por rectas y además se cumplen las razones anteriores, entonces las rectas son paralelas.*

Semejanza de Triángulos





Definición de triángulos semejantes:

Dos triángulos son semenjantes si tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homologos son proporcionales.

Nota: En la práctica, para demostrar que dos triángulos son semejantes, puede utilizarse el teorema fundamental de la semejanza o los criterios que aparecen a continuación.

Teorema fundamental de la semejanza:

Teorema: *toda recta paralela a un lado de un triángulo forma con los otros dos lados (o con sus prolongaciones) otro triángulo que es semejante al triángulo dado.*

Si $DE \parallel AB$ *entonces* $\Delta\, DCE \sim \Delta ABC$.

Criterios de semejanza:

Teorema 1: *Si dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente iguales entonces son semejantes.(a.a)*

Teorema 2: *Si dos triángulos tienen lados respectivamente proporcionales e igual el ángulo comprendido entre dichos lados, entonces estos triángulos son semejantes.(p.a.p.)*

Teorema 3: *Si dos triángulos tienen sus lados respectivamente proporcionales, entonces son semejantes.(p.p.p)*

Nota*: Si denominamos k la razón de semejanza entre los lados de los triángulos, entonces se cumple que:*

- ✓ *La razón entre sus perímetros es también k.*
- ✓ *La razón entre sus áreas es k^2.*

<u>*Nota*</u>*: la definición dada de un triángulo semejante se puede generalizar para el caso de polígonos de n lados por lo que:*

Definición: *Dos polígonos son semejantes si tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos son proporcionales .*

Y para ello se cumplen los mismos casos respecto a la razón entre sus lados, perímetros y áreas que las vistas para triángulos.

<u>Igualdad de triángulos</u>

Definición: *Dos triángulos son iguales si tienen sus ángulos y sus lados respectivamente iguales.*

<u>*Nota:*</u> *En la práctica para demostrar que dos triángulos son iguales puede utilizarse los Criterios de Igualdad que aparecen a continuación.*

<u>Criterios de Igualdad</u>

<u>**Teorema:**</u> *Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales e igual el ángulo comprendido entre dichos lados, entonces los triángulos son iguales. (l.a.l).*

<u>**Teorema:**</u> *Si dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente iguales e igual el lado comprendido entre dichos ángulos, entonces los triángulos son iguales (a.l.a).*

<u>**Teorema:**</u> *Si dos triángulos tienen sus tres lados respectivamente iguales, entonces los triángulos son iguales (l.l.l).*

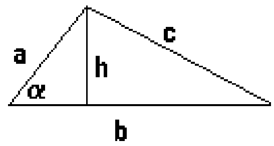
<u>**Teorema:**</u> *Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales e igual el ángulo que se le opone al mayor de los lados, entonces los triángulos son iguales (L.l.a).*

<u>**Proposición:**</u> *Si dos triángulos son iguales, entonces son semejantes y la razón de proporcionalidad es 1. (y viceversa).*

Áreas y perímetros de figuras planas

Triángulo:

Figura



Área y Perímetro:

A $= \frac{b \cdot h}{2}$ b: *Base.* h: *Altura.*

3

$= \frac{1}{2}\, \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \cdot sen\alpha$

$= p(p-a)(p-b)(p-c)$

donde: p: *Semiperímetro.*

$= \frac{c1 \cdot c2}{2}$

- *(Referida al triángulo rectángulo, siendo **c1** y **c2** catetos del mismo)*

$= \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$

- *(Referido al triángulo equilátero, siendo **l** el lado)*

P $= a + b + c$ *(Siendo a,b,c lados del triángulo)*

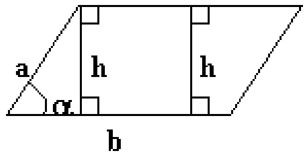
Nota: Si "R" es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo equilátero entonces se cumple que: $R = \frac{\sqrt{3}\ l}{3}$ *y* $R = \frac{2\ h}{3}$

Si "r" es el radio de la circunferencia inscrita entonces se cumple que:

$r = \frac{\sqrt{3}}{6}\ l$ *y* $r = \frac{1}{3}\ h$

Paralelogramo:

Figura



Área y Perímetro:

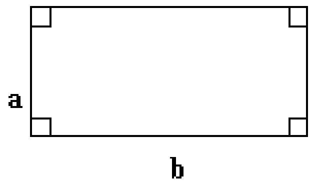
A $= b.h$

$= a.b.sen\alpha$

P $= 2(a+b)$ (a y b lados)

Rectángulo:

Figura



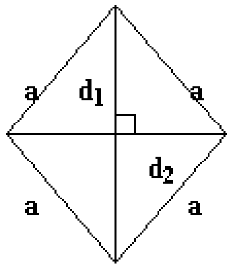
Área y Perímetro:

A $= a.b$ (a:ancho , b:largo)

P $= 2(a+b)$

Rombo:

Figura



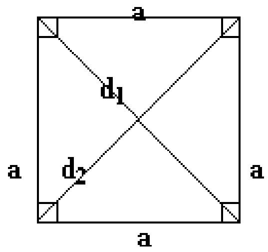
Área y Perímetro:

A $= \frac{d1.\ d2}{2}$ (d1 y d2 diagonales)

P $= 4a$ (a lado)

Cuadrado:

Figura



Área y Perímetro:

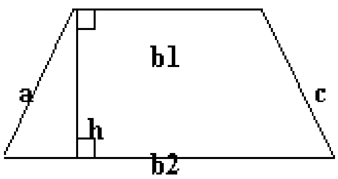
A $= a^2$ *(a: lado)*

$= \dfrac{d1 \cdot d2}{2}$ *(d1 y d2 diagonales)*

P $= 4a$

Trapecio:

Figura



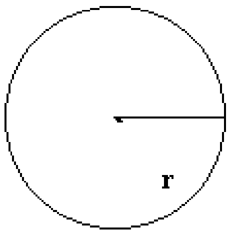
Área y Perímetro:

A $= \dfrac{(b1+b2)}{2} \cdot h$ *(b1 y b2 bases)*

P $= a+b1+b2+c$

Círculo:

Figura



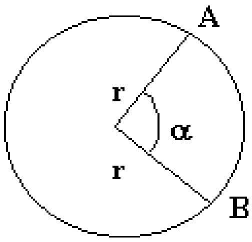
Área y Perímetro:

A $= \pi \cdot r^2$

L $= 2\pi \cdot r$ *(L: longitud de la circunferencia)*

Sector Circular:

Figura



Área y Perímetro:

$$A = \frac{\pi \cdot \alpha^{\circ} \cdot r^2}{360^{\circ}}$$

$$L = \frac{\pi \cdot \alpha^{\circ} \cdot r}{180^{\circ}}$$ *(L: longitud del arco AB de amplitud α)*

ESTEREOMETRÍA

<u>Teoremas y Definiciones más utilizados en la Estereometría:</u>

Definición: (*Recta perpendicular al plano)*
Si una recta es perpendicular al plano, entonces es perpendicular a todas las rectas del plano que pasan por su pie.

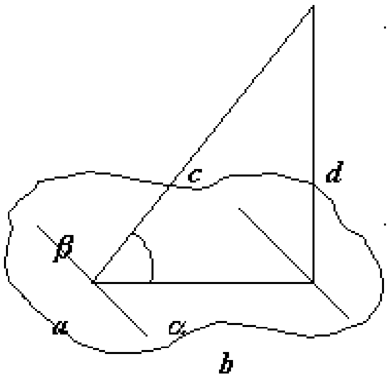
Teorema: *(Criterio de Perpendicularidad entre recta y plano)*
Si una recta es perpendicular a dos rectas del plano que se cortan en su pie, entonces la recta es perpendicular al plano.

Definición: *(Oblicua al plano)*
Se denomina a cualquier recta que interseca al plano y no sea perpendicular a este.

Definición: *(Proyección)*
Se denomina al segmento del plano que une el pie de la perpendicular y el pie de la oblicua trazadas desde un mismo exterior al plano.

Teorema: *Entre varias oblicuas trazadas desde un mismo punto exterior al plano se cumple que a mayor oblicua, mayor proyección, y viceversa.*

Definición: *(Angulo entre recta y plano) (α) (Ver figura)*
Se denomina al ángulo que forma la oblicua a un plano con su proyección .



Teorema: *(Teorema de las tres perpendiculares)*
Si una recta de un plano que pasa por el pie de una oblicua al plano es perpendicular a la proyección de la oblicua, entonces es perpendicular a la oblicua.

<u>En Símbolos</u>: Sea "c" oblicua al plano β, "b" proyección "a" recta del plano , "d" perpendicular se cumple:

Si $a \perp b$, entonces $a \perp c$.

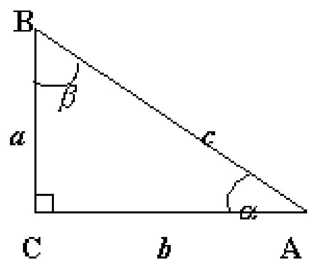
Recíproco: *Si una recta del plano que pasa por el pie de una oblicua al plano es perpendicular a la oblicua, entonces es perpendicular a la proyección de la oblicua.*

Fórmulas de Area y Volumen de Cuerpos Geométricos

Cuerpo	Areas y Volumen
Prisma: *Posee dos caras paralelas llamadas bases formadas por polígonos conocidos. Sus lados son rectángulos.*	V= $Ab \cdot h$ At= $2Ab + Al$ Al= $S1+S2+S3+...+Sn$ *(S: Area una cara)*
Cilindro: *Posee dos caras paralelas compuestas por círculos iguales. Su lado es una superficie uniformemente curva.*	V= $Ab \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$ Al= $2\pi \cdot r \cdot h$ At= $2Ab+Al=2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h$
Pirámide: *Posee un polígono como base y sus lados son triángulos.*	V= $\frac{Ab \cdot h}{3}$ At= $Ab+Al$ Al= $S1+S2+S3+...+Sn$ *(S: Area de un triángulo)*
Cono	V= $\frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$ Al= $\pi \cdot r \cdot g$ *(g: Generatriz)* At= $Ab+Al= \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot g$
Esfera	V= $\frac{4\pi \cdot r^3}{3}$ A= $4\pi \cdot r^2$

TRIGONOMETRÍA

Razones Trigonométricas en el triángulo Rectángulo



Teorema: *En todo triángulo rectángulo se cumple que el seno de un ángulo agudo equivale a la razón entre el cateto que se le opone y la hipotenusa.*

En símbolo: Si ABC es rectángulo entonces:

$$sen\alpha = a/c \quad y \quad sen\beta = b/c$$

Coseno: *Es la razón entre el cateto adyacente al ángulo y la hipotenusa.*
Es decir, $\cos\alpha = b/c$ *y* $\cos\beta = a/c$.

Tangente: *Es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y el cateto adyacente.*
Es decir, $\tan\alpha = a/b$ *y* $\tan\beta = b/a$.

Cotangente: *Es la razón entre el cateto adyacente al ángulo y el cateto opuesto.*
Es decir, $\cot\alpha = b/a$ *y* $\cot\beta = a/b$.

Nota: *Las razones trigonométricas solo son aplicables a los ángulos agudos del triángulo rectángulo.*

Identidades Trigonométricas

1. $sen^2x + \cos^2x = 1$
2. $sen^2x = 1 - \cos^2x$
3. $\cos^2x = 1 - sen^2x$
4. $sen2x = 2senx \cdot \cos x$
5. $\cos 2x = \cos^2x - sen^2x$
6. $\tan x = senx / \cos x$
7. $\cot x = \cos x / senx$
8. $1 + \tan^2x = 1/\cos^2x$
9. $sen(x \pm y) = senx \cdot \cos y \pm \cos x \cdot seny$
10. $Cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp senx \cdot seny$

Fórmulas de Reducción:

II Cuadrante III Cuadrante IV Cuadrante

$\pi - \alpha = x$ $\alpha - \pi = x$ $2\pi - \alpha = x$

Siendo α el ángulo dado y x el ángulo del primer cuadrante que le corresponde.

Paridad de las funciones trigonométricas conocidas:

1. *sen(-x)= - senx*
2. *cos(-x)= cosx*
3. *tan(-x)= - tanx*
4. *cot(-x)= - cotx*

Signos de las funciones por cuadrantes:

////////////	I Cuad	II Cuad	III Cuad	IV Cuad
Sen x	+	+	-	-
Cos x	+	-	-	+
Tan x	+	-	+	-
Cot x	+	-	+	-

Tabla de valores Notables y Axiales:

	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π	3π/2	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Sen x	*0*	*1/2*	*√2/2*	*√3/2*	*1*	*0*	*-1*	*0*
Cos x	*1*	*√3/2*	*√2/2*	*1/2*	*0*	*-1*	*0*	*1*
Tan x	*0*	*√3/3*	*1*	*√3*	-	*0*	-	*0*
Cot x	-	*√3*	*1*	*√3/3*	*0*	-	*0*	-

Algoritmo para resolver ecuaciones trigonométricas:

1. *Analizar si se puede factorizar o realizar alguna otra transformación algebraica.*
2. *Transformar todas las funciones a un mismo ángulo aplicando identidades.*
3. *Expresar todas las funciones trigonométricas en términos de una misma función.*
4. *Resolver la ecuación haciendo transformaciones, considerando como incógnita la función trigonométrica en que quedó expresada la ecuación (factorizando o de cualquier otra forma).*
5. *Determinar los valores de x que satisfacen las ecuaciones transformadas.*

***Nota**: Tener en cuenta si el dominio está restringido o no, para dar las soluciones debe analizarse si estas no indefinen ninguna de las expresiones de la ecuación original.*

Algoritmo para demostrar identidades:

1. *Iniciar la demostración por el miembro que ofrece mayor posibilidad para transformar en el otro. Si no puedes decidirte aplica el procedimiento de trabajar en ambos miembros.*
2. *Si es posible utiliza la descomposición en factores y la simplificación.*
3. *Si no encuentras un camino propicio para empezar las transformaciones, reduce las funciones trigonométricas a senos y cosenos.*
4. *Ten en cuenta que todas las transformaciones efectuadas sean válidas en el dominio de la identidad.*

Cositas Sueltas:

- ***senx = cosx*** *si y solo si x=45° y sus coterminales.*
- *El producto **senx· cosx** es máximo si x= 45° y sus coterminales y siempre se cumple que **senx· cosx= ½.***

PROBLEMAS

Tipos de Problemas:

1. *Aritméticos.*
2. *Algebraicos.*
   - *De Numeración.*
   - *De Móviles (Tener en cuenta la Fórmula V= S/T)*
   - *De Parte y tanto por ciento.*
   - *De Llaves.*
   - *De Concentración.*
3. *Geométricos.*

Pasos recomendables para resolver un problema:

1. *Leer y analizar detenidamente el texto del problema.*
2. *Designar mediante el lenguaje algebraico qué representan las incógnitas, así como las relaciones o combinaciones en que estas intervengan.*
3. *Plantear la o las ecuaciones correspondientes.*
4. *Resolver la o las ecuaciones obtenidas.*
5. *Comprobar las soluciones obtenidas en el texto del problema.*
6. *Dar respuesta atendiendo a lo que se pide en el enunciado de problema.*

"Que le aproveche y buena suerte..."

Anexos Sobre propiedades de Logaritmos , Potencias y Radicales

Logaritmos: $(b>0 , a>0, , c>0 , a\neq 1, x\in\Re)$

1. $Log_a\, a = 1$
2. $Log_a\, 1 = 0$
3. $a^{Log_a b} = b$
4. $Log_a(b\cdot c) = Log_a b + Log_a c$
5. $Log_a(b: c) = Log_a b - Log_a c$
6. $x Log_a b = Log_a b^x$

Definición: $Log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x$

Igualdad: $Log_a b = Log_a c \Leftrightarrow b = c$

Potencias: $(a>0, b>0, r,s\in\Re)$

1. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
2. $a^r : a^s = a^{r-s}$
3. $a^r \cdot b^r = (a\cdot b)^r$
4. $a^r : b^r = (a:b)^r$
5. $(a^r)^s = a^{r\cdot s}$
6. $a^{-r} = 1/a^r$
7. $a^0 = 1$
8. $a^1 = a$

Igualdad: Si $a^x = a^y$, entonces $x=y$.

Radicales: $(a\geq 0, b\geq 0, m, n, q, k\in Z, n>1, q>1, k>1)$

1. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b}$
2. $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a: b}$ $(b>0)$
3. $\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$
4. $\sqrt{a^2} = |a|$
5. $(\sqrt{a}) = \sqrt{a^p}$
6. $\sqrt{a^n} = a$
7. $\sqrt{a^{k\cdot m}} = \sqrt{a^m}$
8. $\sqrt{a^m} = a^{m/n}$

ALGEBRA

Métodos de Factorización

Factor Común: *Es el mayor elemento que divide a los sumandos.*

Ejemplo: $ax+ay=a(x+y)$, $a^2x^2+ax=ax(ax+1)$

Diferencia de Cuadrados: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

Ambos elementos de la diferencia deben ser cuadrados perfectos.

Suma y Diferencia de Cubos: $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$

Ambos elementos deben ser cubos perfectos.

Trinomios:

(I) $x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$ *si y solo si* $x_1 \cdot x_2=q$ *y* $x_1+x_2=-p$ ***(Teo. de Vietta)***

siendo x_1 *y* x_2 *ceros o soluciones del trinomio.*

(II) $mx^2+px+q=(ax+c)(bx+d)$ *si y solo si* $a\cdot b=m$, $c\cdot d=q$ *y* $a\cdot d+c\cdot b=p$

(Productos cruzados)

Descomposición por la Regla de Ruffini:

Este método se utiliza para polinomios de grados mayor o igual que tres donde exista además el término independiente.

Lo utilizamos para dividir polinomios P(x) entre binomios (x-a) donde a son los divisores del término independiente, y se dice que P(x) es divisible entre (x-a) si el resto de la división es cero.

Se trabaja ascendentemente con los divisores del término independiente y sus opuestos.

Ejemplo: Factorizar $x^3+5x^2+10x+8$ *divisores de 8:* $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & 10 & 8 \\ -2 & \downarrow & -2 & -6 & -8 \\ \hline & 1 & 3 & 4 & \underline{\underline{0}} \end{array}$$

Factores: $(x+2)(x^2+3x+4)$ *y se continúa descomponiendo de ser posible.*

Método de factor común por agrupamiento:

La agrupación puede hacerse generalmente de más de un modo, con tal que los términos que se agrupan tengan algún factor común y siempre que las cantidades que queden dentro de los paréntesis, después de sacar el factor común de cada grupo, sean exactamente iguales. Si esto no es posible lograrlo, la expresión dada no se puede descomponer por este método.

Ejemplo 1: $3m^2-6mn+4m-8n=(3m^2-6mn)+(4m-8n)=3m(m-2n)+4(m-2n)=(m-2n)(3m+4)$

Ejemplo 2:

$$
\begin{aligned}
& 2x^3-5+5x^2-2x \\
= \quad & (2x^3+5x^2)+(-2x-5) \\
= \quad & x^2(2x+5)-(2x+5) \\
= \quad & (2x+5)(x^2-1) \\
= \quad & (2x+5)(x+1)(x-1)
\end{aligned}
$$

<u>Algoritmo para la factorización</u>

1. *Extraer factor común de ser posible (no debe dejar de analizarse esta posibilidad).*
2. *Si es un binomio, analizar si es una diferencia de cuadrados.*
3. *Si es un trinomio, descomponer por los métodos conocidos.*
4. *Si es un polinomio, descomponer por Ruffini o por agrupamiento.*

<u>Productos Notables :</u>

Binomios al cuadrado:

$(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

Binomios al cubo:

$(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

$(a+b)(a-b) \quad = a^2-b^2$

$(x+a)(x+b) \quad = x^2+(a+b)x+ab$

$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

<u>Orden de las Operaciones:</u>

1ro: Potenciación y Radicación.

2do: Multiplicación y División.

3ro: Adición y Sustracción

Nota: *Si aparecen signos de agrupación (Paréntesis, Corchetes,Llaves) se realizan primero las operaciones que aparecen dentro de la misma. (La raya de dividir y el signo de radical desempeñan el mismo papel que un signo de agrupación.*

Operaciones con cocientes:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D} \qquad \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$$

Mínimo Común Múltiplo (mcm):

En la descomposición en factores primos se toman los factores comunes y no comunes de mayor exponente.

Adición de Fracciones:

$$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{A \cdot \frac{\text{mcm}(B,D)}{B} \pm C \cdot \frac{\text{mcm}(B,D)}{D}}{\text{mcm}(B,D)}$$

Máximo Común Divisor (MCD):

En la descomposición en factores primos se toman los factores comunes de menor exponente.

Nota: *El procedimiento del MCD es el que usualmente se utiliza, entre otras cosas, para hallar el factor común entre términos.*

Regla para el Tanto por Ciento:

Este método es utilizado para el cálculo directo y en la resolución de problemas.

Los términos que en él se emplean son:

Total: *Valor que está dado por el 100%*

Parte: *Valor que se asocia en el tanto por ciento (Porción del total)*

Proporción: T - 100% ó $\dfrac{T}{100\%} = \dfrac{P}{Tp}$

P - Tp

En el caso que se deseen calcular algunas de las variables definidas deben de tenerse las otras dos y se obtiene por producto cruzado.

Ejemplo: $T = \dfrac{P \cdot 100\%}{Tp}$

<u>Tipos de Ecuaciones:</u>

Lineales, Cuadráticas, Fraccionarias, con Radicales, Trigonométricas, Exponenciales y Logarítmicas. Combinaciones de ellas.

<u>Método o procedimiento para resolver una ecuación:</u>

<u>Lineal:</u>

1. *Transponer las variables para un miembro y los números para otro.*
2. *Agrupar y reducir términos semejantes siempre que sea posible.*
3. *Despejar la variable.*

<u>Ejemplo de Ecuaciones Lineales:</u>

a) $2x-1=3x+8$ b) $x-5=2(x+1)-3(4x-5)$

<u>Cuadráticas:</u>

1. *Transponer todos los términos para un miembro e igualar a cero.*
2. *Agrupar y reducir términos semejantes siempre que sea posible.*

3. *Factorizar por los métodos conocidos (siempre que sea posible sino aplicar la Fórmula General para resolver las Ecuaciones Cuadráticas, oα sea el método del Discriminante)*
4. *Hallar las soluciones.*

Ejemplo de Ecuaciones Cuadráticas:

a) $x^2+6x+5=0$ c) $4x^2-9=0$ e) $e^{2X}+3e^{X}+2=0$

b) $3x^2-5x=2$ d) $\log^2 x+4=4\log x$ f) $\operatorname{sen}^2 x-8\operatorname{sen} x+7=0$

Fórmula General para Resolver la Ecuación Cuadrática:

$ax^2+bx+c=0$ ($a,b,c\in\Re$, $a\neq 0$)

$D=b^2-4ac$ *es el discriminante*

Si $D>0$, *entonces* $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ *(Dos soluciones)*

Si $D=0$, *entonces* $x=\dfrac{-b}{2a}$ *(Una sola solución)*

Si $D<0$, *entonces el trinomio no tiene solución en* $\Re$.

Fraccionarias:

1. *Factorizar en cada fracción y simplificar siempre que sea posible.*
2. *Hallar el mínimo común múltiplo de los denominadores.*
3. *Multiplicar toda la ecuación por el m.c.m para eliminar los denominadores.*
4. *Resolver la ecuación resultante.*
5. *Comprobar soluciones (siempre en la ecuación original).*

Con Radicales:

1. *Aislar el radical.*
2. *Agrupar y reducir términos semejantes en el otro miembro siempre que se pueda.*
3. *Elevar al cuadrado en ambos miembros para eliminar el radical aislado.*
   Tener en cuenta para el otro miembro $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

4. *Resolver la ecuación resultante.*
5. *Comprobar las soluciones.*

Exponenciales:

1. *Expresar todas las potencias en función de una misma base.*
2. *Agrupar a una potencia en cada miembro aplicando propiedades.*
3. *Aplicar teorema sobre igualdad de potencias ($a^x=a^y$, entonces $x=y$).*
4. *Resolver ecuación resultante.*
5. *Comprobar soluciones.*

Logarítmicas:

1. *Expresar todos los logaritmos con igual base y coeficiente 1.*
2. *Agrupar en un solo logaritmo aplicando propiedades.*
3. *Eliminar los logaritmos aplicando la definición o la igualdad.*
4. *Resolver la ecuación resultante.*
5. *Comprobar soluciones en la ecuación original.*

Inecuaciones

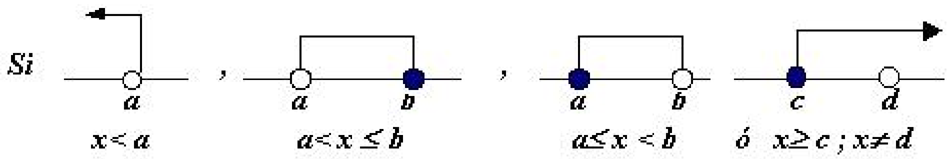
Tipos: *Lineales, Cuadráticas, Fraccionarias, Exponenciales y Logarítmicas.*

Algoritmo para su resolución: (*Se expondrá el tratamiento para la fraccionaria como resumen de los casos Lineales y cuadráticas*).

Fraccionaria:

1. *Comparar con cero agrupando todas la expresiones en un solo miembro de la inecuación.*
2. *Reducir a una sola fracción (de ser necesario y posible).*
3. *Factorizar numerador y denominador, analizar si existe simplificación, en este caso, calcular los ceros de dichos factores y mantenerlos en un lugar visible.*
4. *Hallar ceros del denominador y del denominador; tenerlos bien clasificados.*
5. *Ubicar los ceros, calculados en (4), en una recta numérica, teniendo en cuenta que:*
   a) *Si la desigualdad es estricta ($<$ ó $>$), ninguno de los ceros debe incluirse.*
   b) *Si la desigualdad no es estricta ($\geq$ ó $\leq$) " solo" se incluyen los ceros del numerador, a menos que coincida con alguno que se haya simplificado.*

6. *Determinar el signo del cociente, analizando el signo de la variable de mayor exponente tanto en el numerador como en el denominador y realizando la división de los mismos.*
7. *Ubicar los signos en los intervalos delimitados por los ceros de derecha a izquierda, teniendo en cuenta que si un cero es doble, el signo no varía a su alrededor.*
8. *Escoger los intervalos según el signo de la desigualdad en la inecuación:*
   a) *Si la desigualdad es $\geq$ ó $>$ tomaremos los intervalos No negativos ó positivos respectivamente.*
   b) *Si la desigualdad es $\leq$ ó $<$, tomaremos los No positivos o los negativos respectivamente.*
9. *Si existen ceros simplificados deberán ubicarse en el gráfico obtenido y, de quedar dentro de los intervalos soluciones, los trataremos como puntos excluyentes.*
10. *Expresar la solución teniendo en cuenta los siguientes ejemplos:*



Exponenciales:

1. *(Idem. Ecuación Exponencial).*
2. *(Idem. Ecuación Exponencial).*
3. *Eliminar bases aplicando criterios de desigualdad o monotonía de la potenciación.*

   a) *Para a>0, si $a^x > a^y$ entonces $x>y$.*

   b) *Para $0<a<1$, si $a^x > a^y$ entonces $x<y$.*
4. *Resolver inecuación resultante.*
5. *Dar conjunto solución.*

Logarítmicas:

1. *(Idem. Ecuación Logarítmica).*
2. *(Idem. Ecuación Logarítmica).*
3. *Eliminar logaritmo aplicando criterio de desigualdad o monotonía de la logaritmación.*

   a) *Para a>0, si $Log_a\, x > Log_a\, y$ entonces $x>y$.*

b) Para 0<a<1, si $Log_a\ x > Log_a\ y$ *entonces* $x<y$.

c) Para a>0, si $Log_a\ x > b$ *entonces* $x > a^b$.

d) Para 0<a<1, si $Log_a\ x > b$ *entonces* $x< a^b$.

4. *Resolver la inecuación resultante.*
5. *Hallar dominio de los logaritmos en la inecuación original.*
6. *Interseptar ambos gráficos.*
7. *Dar solución.*

SISTEMAS DE ECUACIONES

Tipos de sistemas más comunes:

1. *Lineales con dos variables. (2 X 2)*
2. *Lineales con tres variables. (3 X 3)*
3. *Cuadráticos con dos variables.*

<u>Algoritmo para resolver estos Tipos de Sistemas de Ecuaciones</u>:

1. Lineales con dos variables.

<u>*Método Aditivo:*</u>

1. *Buscar múltiplo conveniente para una de las ecuaciones, con vista a lograr que una de las variables adquieran igual módulo con signo opuesto.*
2. *Sumar miembro a miembro para eliminar dicha variable.*
3. *Hallar valor de la variable no eliminada.*
4. *Sustituir dicha variable en cualquiera de las ecuaciones originales para obtener el valor de la variable eliminada inicialmente.*
5. *Comprobar soluciones.*
6. *Dar conjunto solución.*

<u>*Método de Sustitución:*</u>

1. *Despejar una variable en una ecuación.*
2. *Sustituirla en la otra ecuación, quedando como resultado una ecuación lineal en función de una variable.*
3. *Hallar valor de dicha variable.*
4. *Sustituirla en la ecuación despejada inicialmente.*
5. *Calcular valor de la otra variable.*
6. *Comprobar soluciones.*
7. *Dar conjunto solución.*

2. Lineales con tres variables:

Método de Aditivo:

1. *Asociar ecuación I con ecuación II, buscar múltiplo para eliminar una variable.*
2. *Asociar ecuación I con ecuación III, buscar múltiplo para eliminar la misma variable que en el paso 1.*
3. *Asociar las ecuaciones resultantes en un sistema lineal de 2 X2.*
4. *Resolver el sistema obtenido.*
5. *Hallar valor de la variable eliminada en los pasos I y II.*
6. *Comprobar soluciones.*
7. *Dar conjunto solución.*

3. Cuadrático con dos variables:

Método de sustitución:

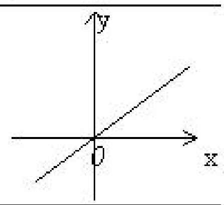
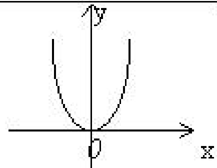
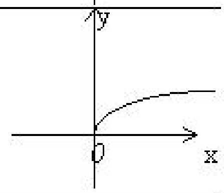
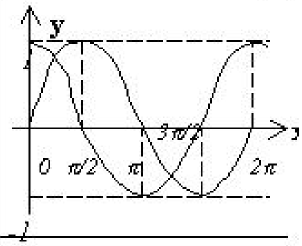
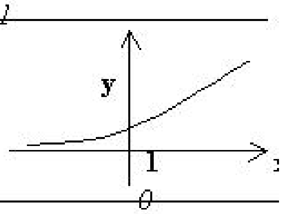
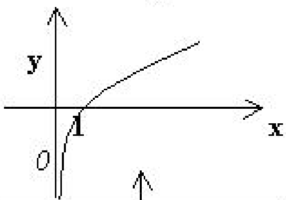
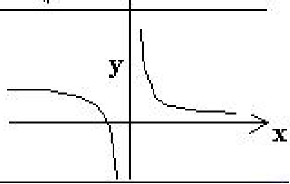
1. *Despejar una variable en la ecuación lineal.*
2. *Sustituir dicha variable en la ecuación cuadrática.*
3. *Resolver la ecuación cuadrática.*
4. *Sustituirlos en la ecuación despejada.*
5. *Obtener los valores para la otra variable.*
6. *Comprobar soluciones.*
7. *Dar conjunto soluciones.*

FUNCIONES

TIPOS	EJEMPLOS
1. *Lineales*	$y=4$, $g(x)=5x$, $f(x)=-3x+1/2$
2. *Cuadráticas*	$h(x)= 3x^2$, $s(x)= -5x^2+2x$, $t(x)= 2x^2-5x+3$
3. *Radicales*	$d(x)= \sqrt{5x}$, $e(x)= \sqrt{t(x)}$, $i(x)= \sqrt{j(x)}$
4. *Exponenciales*	$a(x)= 2^x$, $b(x)=3^{h(x)}$, $c(x)= e^{s(x)} + 1$
5. *Logarítmicas*	$j(x)= Log_3\,(x+1)$, $k(x)= Log\ c(x)$
6. *Trigonométricas*	$p(x)=$ sen x , $q(x)= \cos(x^2+1)$, $\tan(x+3) -3$
7. *Fraccionarias*	$m(x)= f(x)/s(x)$, $n(x)= 5+ r(x)/a(x)-3$

Dominio: *Valores admisibles, valores para los cuales está definida la función, valores para los cuales la función existe o tiene sentido, etc.*

- *A continuación presentamos el dominio de las funciones elementales acompañadas de sus respectivos gráficos.*

Función	Dominio	Simbología	Gráfico
Lineal ***y=x***	***Todo valor de x que pertenece a ℜ***	***$x \in \Re$ ó ℜ***	
Cuadrática ***$y=x^2$***	***Todo valor de x que pertenece a ℜ***	***$x \in \Re$ ó ℜ***	
Radical ***$y=\sqrt{x}$***	***Las x mayores e iguales que cero.***	***$x \in \Re: x \geq 0$***	
Trigonométrica *y= sen x* *y= cos x*	*Todo valor de x que pertenece a ℜ*	*$x \in \Re$*	
Exponencial *$y= a^x$* *(a > 0; a≠1)*	*Todo valor de x que pertenece a ℜ*	*$x \in \Re$*	
Logarítmica *y= Log x*	*Los valores de x que son mayores que cero.*	*$x \in \Re: x>0$*	
Inversa *y= 1/x*	*Los valores reales de x distintos de cero.*	*$x \in \Re : x \neq 0$*	

Nota: Si el índice de la función radical es impar entonces el dominio de dicha función son todos los reales.

Caso Especial :

Función Fraccionaria: *A(x)= B(x)/C(x), con C(x)≠0*

Dominio: *Dominio del numerador, interceptado con el dominio del denominador, distinto de los ceros del denominador.*

Simbología: $x \in \Re$*: DomB*$\cap$ *DomC\Ceros del denominador*

Nota: B(x) y C(x) pueden ser cualquiera de las funciones vistas anteriormente.

Ceros: Valores del dominio para los cuales:

- ✓ *Se anula una función.*
- ✓ *La gráfica corta al eje de las x.*
- ✓ *La función se hace cero.*

Polos de una función racional :

Xp es un polo de una función racional si y solo si en la expresión simplificada:
y= P(x)/Q(x) , Xp anula el denominador.