LIBRO DE DISTRIBUCIÓN GRATUITA. PROHIBIDA SU VENTA

Matemática

Parte 2

12° grado

MATEMÁTICA
DUODÉCIMO GRADO
PARTE 2

MATEMÁTICA

Duodécimo grado

Parte 2

Sistematización

Prof. Zulema Cuadrado González
Prof. Richard Naredo Castellanos
Dra. Celia Rizo Cabrera

EDITORIAL
PUEBLO Y EDUCACIÓN

Este libro forma parte del conjunto de trabajos dirigidos al Perfeccionamiento Continuo del Sistema Nacional de Educación en la Educación General Politécnica y Laboral. Ha sido elaborado por un colectivo de autores, integrado por metodólogos, maestros, profesores y especialistas, y revisado por la subcomisión correspondiente de la Comisión Nacional Permanente para la Revisión de Planes, Programas y Textos de Estudio del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas del Ministerio de Educación.

Agradecemos la colaboración que en la elaboración de este libro han brindado los colectivos de investigadores sobre la Sistematización de grado doce del Departamento de Metodología del Instituto Superior Pedagógico Enrique José Varona y del Departamento de Matemática del Instituto Superior Pedagógico para la Enseñanza Técnica y Profesional.

Agradecemos también al Dr. Sergio Ballester Pedroso por sus valiosas recomendaciones para la escritura de este material.

Ilustración: Yuri Martínez Ramos

ISBN 978-959-13-1659-2 Obra completa
ISBN 978-959-13-1654-7 Parte 2

EDITORIAL PUEBLO Y EDUCACIÓN
Ave. 3ra. A No. 4601 entre 46 y 60,
Playa, La Habana, Cuba. CP 11300.
epe@enet.cu

ORIENTACIONES SOBRE EL TRABAJO CON ESTE LIBRO.

Para estudiar por este libro debes tener en cuenta que el contenido del mismo corresponde al Capítulo 4, Sistematización de grado doce.

El mismo está dividido en 9 epígrafes. En cada uno de ellos encontrarás los contenidos fundamentales estudiados en la enseñanza media, algunos de ellos destacados en recuadros, y ejemplos resueltos que ilustran cómo debes actuar para resolver ejercicios importantes que corresponden a ese contenido.

Al final de cada epígrafe aparecen ejercicios que debes resolver y que corresponden a la materia estudiada en cada uno. En algunos ejemplos y ejercicios se hacen referencias a puntos del Memento (resumen de contenidos de grados anteriores que aparece al final del libro) los que debes consultar siempre que consideres necesario.

En la últimas páginas del libro aparecen las respuestas de la mayoría de los ejercicios propuestos, lo que te permitirá autocontrolar tu trabajo.

ÍNDICE

pág.

CAPÍTULO 4: Sistematización 1

CÁLCULO ARITMÉTICO Y ALGEBRAICO 1
1. Cálculo numérico 1
2. Cálculo con expresiones algebraicas 14

ECUAÇIONES, INECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES 27
3. Resolución de ecuaciones 27
4. Sistemas de ecuaciones 42
5. Resolución de inecuaciones 56

TRIGONOMETRÍA 67
6. Identidades y ecuaciones trigonométricas 67

CÁLCULO Y DEMOSTRACIONES GEOMÉTRICAS 77
7. Repaso de propiedades geométricas elementales 77
8. Igualdad y semejanza de triángulos 95
9. Cálculo de áreas y volúmenes 106

Respuestas de los ejercicios 118
ANEXO 133
Tablas 133
Memento 143

CAPÍTULO 4: SISTEMATIZACIÓN

CÁLCULO ARITMÉTICO Y ALGEBRAICO

1. Cálculo numérico

Al realizar el cálculo con números en expresiones donde aparezcan varias operaciones, estas se realizan siguiendo un orden :

1 - Potenciación y radicación.
2 - Multiplicación y división.
3 - Adición y sustracción.

Ejemplo 1

Calcula: a) $10 - 3 \cdot 4^2$ b) $\frac{4}{5} + \frac{2\sqrt{9}}{3}$

c) $\sqrt[3]{8} + 6 \cdot 5^0 - \frac{2}{3}$

Resolución

a) $10 - 3 \cdot 4^2 = 10 - 3 \cdot 16 = 10 - 48 = -38$

b) $\frac{4}{5} + \frac{2\sqrt{9}}{3} = \frac{4}{5} + \frac{2 \cdot 3}{3} = \frac{4}{5} + 2 = \frac{4 + 10}{5} = \frac{14}{5}$

c) $\sqrt[3]{8} + 6 \cdot 5^0 - \frac{2}{3} = 2 + 6 \cdot 1 - \frac{2}{3}$ (punto 2 del Memento)

$$= 8 - \frac{2}{3} = \frac{24 - 2}{3} = \frac{22}{3} \quad ■$$

Si aparecen signos de agrupación (paréntesis, corchetes y llaves) se realizan primero las operaciones que aparecen dentro de los mismos. La raya de dividir y el signo radical desempeñan el mismo papel que un signo de agrupación.

Ejemplo 2

Calcula : a) $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right)\frac{3}{4}$ b) $\frac{2}{5} - \left[3\left(\frac{4}{7} + \frac{2}{3}\right) - 2{,}1\right]$

c) $\frac{2 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}}{1{,}1} - \frac{\sqrt{6^2 - 4 \cdot 5}}{(2 + 0{,}1)^2}$

Resolución

a) $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right)\frac{3}{4} = \left(\frac{4 + 1}{6}\right)\frac{3}{4} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{8}$

b) $\frac{2}{5} - \left[3\left(\frac{4}{7} + \frac{2}{3}\right) - 2{,}1\right] = \frac{2}{5} - \left[3\left(\frac{12 + 14}{21}\right) - 2{,}1\right]$

$$= \frac{2}{5} - \left[3 \cdot \frac{26}{21} - 2{,}1\right]$$

$$= \frac{2}{5} - \left[\frac{26}{7} - \frac{21}{10} \right]$$

$$= \frac{2}{5} - \left[\frac{260 - 147}{70} \right]$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{113}{70}$$

$$= \frac{28 - 113}{70} = - \frac{85}{70} = - \frac{17}{14}$$

c) $$\frac{2 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}}{1,1} - \frac{\sqrt{6^2 - 4 \cdot 5}}{(2 + 0,1)^2} = \frac{\frac{12 + 3 - 4}{6}}{1,1} - \frac{\sqrt{36 - 20}}{2,1^2}$$

$$= \frac{\frac{11}{6}}{\frac{11}{10}} - \frac{\sqrt{16}}{4,41}$$

$$= \frac{11}{6} \cdot \frac{10}{11} - \frac{4}{4,41} = \frac{5}{3} - 0,$$

$$= 1,67 - 0,907 = 0,763$$ ■

También has aplicado el cálculo numérico en situacio como:

- **el cálculo del valor numérico de expresiones alg braicas,**
- **la determinación de imágenes de funciones,**
- **el cálculo del límite de una función en un punto**
- **el cálculo logarítmico y el trigonométrico.**

Ejemplo 3

a) Halla el valor numérico de la expresión $3a^2 + \frac{1}{ab} - 5$ $a = \frac{1}{2}$ **y** $b = \sqrt{2}$.

b) Dada la función $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 5}{x - 1}$, **halla** $f(\sqrt{5})$.

c) Calcula $\lim\limits_{x \to 1/2} \frac{x^3 + \frac{3}{4} x + 2}{2 + x}$.

d) Calcula $\log \frac{a^2 + 5a + 6}{2a^2 + 4a} + \log \frac{a + 9}{2a}$ **si** $a = 1$

e) Calcula $$\frac{\frac{3}{2} \operatorname{sen}^3 \frac{\pi}{2} + \cos \frac{2\pi}{3}}{\tan \frac{\pi}{3} + \cos (-2\pi)}$$

Resolución

a) $3a^2 + \frac{1}{ab} - 5 = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} - 5$

$$= 3 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 5 = \frac{3}{4} + \frac{2}{\sqrt{2}} - 5$$

$$= \frac{3}{4} + \sqrt{2} - 5 = -\frac{17}{4} + \sqrt{2} = -4,25 + 1,41$$

$$= -2,84$$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 5}{x - 1}$,

$f(\sqrt{3}) = \dfrac{(\sqrt{3})^2 + 3\sqrt{3} - 5}{\sqrt{3} - 1}$ (punto 15 del Memento)

$$= \frac{3 + 3\sqrt{3} - 5}{\sqrt{3} - 1} = \frac{3\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3} - 1}$$

$= \dfrac{(3\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}$ (punto 14 del Memento)

$$= \frac{3(\sqrt{3})^2 + \sqrt{3} - 2}{3 - 1} = \frac{9 + \sqrt{3} - 2}{2} = \frac{7 + 1,73}{2} = 4,37$$

c) $\lim\limits_{x \to 1/2} \dfrac{x^3 + \frac{3}{4}x + 2}{2 + x} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + 2}{2 + \frac{1}{2}}$ (punto 15 del Memento)

$$= \frac{\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + 2}{\frac{5}{2}} = \frac{\frac{1}{2} + 2}{\frac{5}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = 1$$

d) $\log \dfrac{a^2 + 5a + 6}{2a^2 + 4a} + \log \dfrac{a + 9}{2a}$

$$= \log \frac{1 + 5 + 6}{2 + 4} + \log \frac{1 + 9}{2} = \log \frac{12}{6} + \log \frac{10}{2}$$

$= \log 2 + \log 5 = \log(2 \cdot 5)$ (punto 3 del Memento)

$$= \log 10 = 1$$

e) $\dfrac{\frac{3}{2}\,\text{sen}^3 \frac{\pi}{2} + \cos \frac{2\pi}{3}}{\tan \frac{\pi}{3} + \cos(-2\pi)} = \dfrac{\frac{3}{2}(1)^3 + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{3} + \cos 2\pi}$ (puntos 30 y 31 del Memento)

$$= \frac{\frac{3}{2} - \cos\frac{\pi}{3}}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{\sqrt{3} + 1} = \frac{1}{\sqrt{3} + 1}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$= \frac{1,73 - 1}{2} = 0,365 \quad \blacksquare$$

Ejercicios (epígrafe 1)

1. **Efectúa:**

a) $70 - 42,63$ b) $20 + 4,5 - 0,03$

c) $15,62 - 6,28 + 7$ d) $3,42 \cdot 5,6 : 100$

e) $25 : 0,50 + 3,4$ f) $215 \cdot 0,1 : 0,4$

g) $0,004 : 64$ h) $(0,5 + 0,76)\, 5$

i) $14 \cdot 3,15 - 0,1 \cdot 10$ j) $\frac{0,3 + 0,5 - 0,25}{55}$

k) $\frac{5}{0,5} + 16 : 0,64$ l) $\frac{0,9}{0,3} - 0,325$

m) $\frac{0,03 + 0,456 + 8}{2,5}$ n) $\left(\frac{6}{5} - 0,2\right) : \frac{0,27}{0,009}$

ñ) $\dfrac{\dfrac{\frac{1}{16}}{0,5} + \dfrac{\frac{1}{20}}{0,4}}{\dfrac{\frac{1}{25}}{0,04} + \dfrac{\frac{1}{50}}{0,02}}$ o) $\frac{(8,006 + 0,452 + 0,15) : 0,1}{4\ (8 - \ ,1 + 0,32)}$

2. **Calcula:**

a) $\frac{7}{8} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{5} + \frac{1}{10} - \frac{4}{5}$

c) $2 + \frac{5}{6} - \frac{1}{3}$ d) $2\frac{3}{4} + 1\frac{3}{10} - \frac{1}{8}$

e) $7 - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$ f) $\frac{5}{6} + \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\right)$

g) $4 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right)$ h) $\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)$

i) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} : \frac{4}{5}$ j) $\frac{2}{9} \cdot \frac{6}{7} : \frac{8}{21}$

k) $\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right)$ l) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) 6$

m) $\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) \frac{1}{5}$ n) $\left(\frac{7}{8} \cdot \frac{2}{9}\right) \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{10}\right)$

ñ) $\left(\frac{7}{5} - \frac{2}{3}\right) : \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{10}\right)$ o) $\left(\frac{0,1}{0,01} + 3\frac{1}{7}\right) : \left(\frac{3}{7} - \frac{1}{5}\right)$

p) $\left(\frac{7}{6}+\frac{6}{7}\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right):\left(\frac{11}{8}-\frac{2}{3}\right)$

q) $\dfrac{\frac{3}{7}-\frac{1}{10}}{\frac{2}{5}-\frac{1}{7}}$ r) $\dfrac{\frac{\frac{2}{3}}{5}+\frac{4}{\frac{6}{7}}}{\frac{1}{\frac{1}{5}}-\frac{1}{\frac{1}{3}}}$

3. Calcula:

a) $1 - 6{,}2 : 3{,}1 + (0{,}6)^2$ b) $53 - 2^5 + 3^2 + \sqrt{49} : 1^6$

c) $\sqrt[4]{16} + 3^3\left(6^2:4 + \sqrt[5]{32}\right)$ d) $\dfrac{\left(\frac{3}{4}\right)^2 : \frac{3}{16}}{1-\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}$

e) $\dfrac{0{,}3 \cdot 0{,}5}{3{,}5 - 2} - 0{,}1$ f) $\dfrac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{4}} + \dfrac{\frac{1}{5}}{\left(1-\frac{4}{5}\right)^2}$

g) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} + 4\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - 0{,}25$ h) $\dfrac{(-2)^3 \cdot 2^2}{(-2)^2 \cdot 2}$

i) $\left[-2\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2\right] : (-2)^2$ j) $\dfrac{(2^3 \cdot 3)^3}{(2\cdot 3)^2}$

k) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^{-3} \cdot \left(\frac{5}{3}-\frac{3}{5}\right)^0$ l) $\dfrac{-3^2 - (-2)^3}{10} + \frac{3}{5}$

m) $\dfrac{|-2|^2 + 4^3}{|16|}$ n) $\dfrac{|(-3)^3|}{2^5} \cdot \dfrac{(-2)^3}{3}$

ñ) $\dfrac{6{,}3 + 2{,}7}{4{,}5} + 3{,}5 \cdot 10^2 - 5^3$ o) $\dfrac{(2 - |-3|)^3}{5^{-2}}$

p) $\dfrac{\left(1-\frac{3}{4}\right)\left(1+\frac{3}{4}\right)}{7\cdot 2^{-4}}$ q) $\dfrac{8\cdot 5^3}{25} + \sqrt{121} - 3{,}4\cdot 2{,}1$

r) $\dfrac{5\sqrt[3]{8} - 7\sqrt[4]{81}}{2\sqrt{8}}$ s) $\dfrac{16 - 2^3\cdot 2 + 3\sqrt{4}}{\sqrt{2}}$

t) $\dfrac{12^3 : 6^3}{8^{-1}} + \dfrac{4}{\sqrt{3}}$ u) $\dfrac{\sqrt{10 - \sqrt{83 - \sqrt{4}}}}{2 - \sqrt{5}}$

v) $3^3 \cdot 9^{-1} + 2\cdot 5^2 - \dfrac{45\cdot 0{,}1}{9}$ w) $\dfrac{\sqrt{2}+5}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{3}{4}$

x) $1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}$

y) $2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{1}{3}}}$

z) $1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{2}{4 + \cfrac{3}{1 + \cfrac{1}{4}}}}$

4. **Calcula**

a) $(3^2)^2 - \left[(-2)^3\right]^2 - (-5^2)^2$

b) $4^{-2} - 2^{-3} + \left[(-2)^3\right]^{-1}$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(1\frac{1}{2}\right)^2 - \left[(0,5)^3\right]^2$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - \left(-2\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(-\frac{5}{2}\right)^{-2}$

e) $\dfrac{2^0 - 2^{1/3} \cdot 2^{-1} \cdot 2^{5/3}}{(-8)^{-1/3} - 2^{-1}}$

f) $\dfrac{(-27)^{1/3} - 3^{-1}}{3^0 - 3^{3/4} : 3^{-2} \cdot 3^{1/4}}$

g) $\dfrac{2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} \cdot \frac{2}{5}}{-4\sqrt{3}}$

h) $\dfrac{\sqrt{25}\,\sqrt{16} - \frac{3}{5}\left(-\frac{5}{4}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sqrt{\frac{4}{9}} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)}$

i) $\dfrac{3^{1/2} \cdot \sqrt{27}}{81 : 3^3} - 5\sqrt{2} + \sqrt{18}$

j) $\dfrac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} + 4\left[\sqrt[3]{\sqrt{8}}\right] + \sqrt{50}$

k) $\dfrac{-\sqrt{\sqrt{16}} \cdot 2,25 + \sqrt[3]{8} : 2}{3 + 0,5 + 1,99 - 1}$

l) $\dfrac{\sqrt{16}\,\sqrt{4} - \frac{3}{5}}{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 + \sqrt{\frac{9}{64}} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)}$

m) $\sqrt{\sqrt{3^4 \cdot 10}} + 2\sqrt[4]{10} - \dfrac{\sqrt[4]{6}\,\sqrt[4]{5}}{\left(\sqrt[3]{3}\right)^2}$

n) $(5\log_3 3 - \log_4 1)^2 + \dfrac{\frac{1}{\log_2 8} \cdot \log_3 27}{\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{4}}$

ñ) $\log_8 \log_4 \log_2 16 - \log_2 \log_3 \sqrt{\sqrt[4]{3}}$

o) $\log_3 \sqrt{3} + \log_6 \frac{1}{6} \cdot \log_5^2 125$

p) $4^{\log_4 0,5} \cdot \log 0,01 + \log \sqrt{10}$

q) $36^{\log_6 5} + 10^{1-\log 2} - 3^{\log_3 36}$

5. **Verifica si se cumple que:**

a) $\dfrac{(25^2)^{1/4}}{4^0} - 5^{1/3}\sqrt[3]{25} = 0$

b) $\dfrac{(10^{1/2})^{-4} \cdot 10^5}{5^3} - 3^0 = 7$

c) $3\sqrt{5} + \sqrt{3}\sqrt{2} + \dfrac{(\sqrt{6}+3)(\sqrt{6}-3)}{\sqrt{6}} - \sqrt{45} + \sqrt{54} = \frac{7}{2}\sqrt{6}$

d) $\sqrt{20} + 2\sqrt{8} - \dfrac{5}{\sqrt{5}} + \sqrt[4]{4} = \sqrt{5} + 5\sqrt{2}$

e) $\dfrac{-\sqrt[3]{8} + 16^{1/4} - (-2)^2 + 27^{1/3}}{-1 - (-1)^{1/3}} = \dfrac{1}{4}$

f) $\dfrac{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 4 + \frac{9}{2}\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 9}}{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 10 + \frac{5}{2}\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 9}} = \sqrt{13}$

6. **Halla el valor numérico de las siguientes expresiones para:** $a = 1$; $b = 0,2$; $c = 4,2$; $m = -\frac{1}{2}$; $n = \frac{2}{3}$;

$p = \frac{1}{4}$; $x = 0$; $d = -1$

a) $(a + b)(c - d)$ b) $(b - m)(c - n) + 4a^2$

c) $2mx + 6(b^2 + c^2 - 4d^2)$ d) $\dfrac{4(m + p)}{9} : \dfrac{a^2 + b^2}{c^2}$

7. **Halla el valor numérico de las siguientes expresiones para las condiciones impuestas a las variables:**

a) $\dfrac{\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right)}{ab + \frac{1}{ab}}$ si $a = 1$; $b = 2$

b) $\dfrac{x^2 + y^2 + z^2 - 5xyz}{x + y + z}$ si $x = -2,3$; $y = 5,04$; $z = -2,74$

c) $\dfrac{x^2 - 2xy + 7y^2}{xy} + \dfrac{1}{y^2} + 3$ si $x = -1$; $y = -2$

d) $2a^2 - 5ab + 2b^2$ si $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ y $b = \sqrt{2} - \sqrt{3}$

e) $g(x) = 2x^2 - 8x + 7$ si $g\left(\dfrac{\sqrt{3} + 1}{2}\right)$

f) $3a^2 + 2^b + 4ab$ si $a = \log_2 16$ y $b = \log_2 \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

g) $f(x) = \dfrac{1}{1 - x} + \dfrac{1}{1 + x} + \dfrac{4x}{1 + x^2}$ para $f(\sqrt{3})$

h) $a^3 + \dfrac{a}{b} - \dfrac{ab}{2}$ si $a = 2 \log_3 9$ y $b = \log 10^{\sqrt{2}}$

i) $\frac{1}{2} \sqrt{2(y^2 + z^2) - x^2}$ para $x = 13$; $y = 12$; $z = 5$

j) $\frac{2}{x} \sqrt{p(p - x)(p - y)(p - z)}$ para $x = 3$; $y = 4$; $z = 5$ sabiendo que: $2p = x + y + z$

k) $\log a + \frac{1}{2} \log b - \log c$ para $a = 35{,}2$; $b = 9$; $c = 16$

l) $\dfrac{2 \log a + \log b}{\log b}$ para $a = 3$; $b = 5$

m) $\dfrac{1}{2(m + n)} + \dfrac{m}{m + n}$ para $m = \log 20$; $n = \log 857$

8. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 + 4x^2 + x}{x + 3}$

b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + 25}{2x^3 + 6x^2 + 3}$

c) $\lim\limits_{x \to -4/5} \dfrac{5x^2 + 10x - 4}{5x + 5}$

d) $\lim\limits_{x \to 3/2} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 5x - 4}{x^2 + \frac{1}{2} x + \frac{1}{4}}$

e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2}$

f) $\lim\limits_{x \to -1} p(x)$ si $p(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2 - 8x}}{x + 3}$

g) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x + 5}}{\sqrt{x^2 + 4}}$

h) $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$

i) $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} f(x)$ si $f(x) = \dfrac{x^3 + x - 3}{x + 1}$

j) $\log_2 \left(\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 + 4x + 11}{x - 1} \right)$

9. Si $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 + x}{x}}$ y $g(x) = x^2 + 1$ calcula:

a) $f(-1) + 3g(\sqrt{8})$ b) $\dfrac{f(8) - \left[f(\sqrt{2})\right]^2}{f(1)}$

c) $f(x^2 - 1) + g(x + 2)$

10. Calcula el valor numérico de a en las siguientes funciones si sabes que:

a) $f(x) = 3x^2 + ax + a$ si $f(1) = 7$

b) $g(x) = ax^2 - 2x + a$ si $g(2) = 4$

c) $h(x) = x^4 - ax^2 - 2a - a$ si $h(-1) = 10$

d) $p(x) = 2x^4 - ax^3 - ax^2 - 2$ si $p(1 + \sqrt{8}) = -2$

11. Calcula (puntos 30 y 31 del Memento)

a) $\dfrac{\operatorname{sen} 30^\circ + \cos 60^\circ}{\tan 45^\circ}$ b) $\dfrac{2 \cos 30^\circ - 4 \operatorname{sen} 60^\circ}{\tan 30^\circ}$

c) $\dfrac{\tan 45^\circ + \operatorname{sen} 240^\circ - \cos 135^\circ}{\cot 120^\circ - \operatorname{sen} 45^\circ}$

d) $\dfrac{\operatorname{sen} 30^\circ + \cos 45^\circ + \tan 60^\circ}{\operatorname{sen} 120^\circ + \tan 240^\circ - \cos 135^\circ}$

e) $\dfrac{\cos \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} + \tan 0}{2 \cot \frac{5\pi}{6} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}}$ f) $\dfrac{\tan \frac{\pi}{6} \cot 60^\circ + \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}}{\dfrac{\cos \frac{\pi}{4}}{\operatorname{sen} 30^\circ} - \dfrac{1}{\cos \pi}}$

g) $\dfrac{\cos \frac{2\pi}{3} + \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}}{\tan \left(-\frac{\pi}{4}\right)} - \dfrac{\cot \frac{2\pi}{3}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{3}}$

h) $\dfrac{\cos \frac{\pi}{6} - \tan \frac{\pi}{6}}{\operatorname{sen}(-\pi) + \cos \pi} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}$

i) $\dfrac{\operatorname{sen} \frac{3\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} \left(-\frac{3\pi}{4}\right)} + \dfrac{\cos \frac{5\pi}{6}}{\cot \frac{\pi}{3}} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}$

j) $\dfrac{\cot \left(-\frac{\pi}{4}\right) \left[\tan(-\pi) - \cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]}{\left[\cos \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] \cos \frac{3\pi}{4}}$

k) $\dfrac{10 \operatorname{sen} 56{,}1^\circ + \tan 35^\circ}{\cos 25{,}8^\circ}$

l) $\dfrac{5 \tan 222{,}8^\circ - 0{,}5 \cos 68{,}9^\circ}{4{,}45 \operatorname{sen}^2 90^\circ}$

m) $\dfrac{\cot 43{,}6^\circ + 5 \operatorname{sen} (-65{,}5^\circ)}{0{,}7 \tan^2 60^\circ}$

n) $\dfrac{\tan 85{,}6^\circ - \cot 365{,}6^\circ}{\operatorname{sen} 278{,}1^\circ - \cos 90^\circ}$

12. Prueba que:

a) $\dfrac{\operatorname{sen} 30^\circ}{\cos \frac{\pi}{4}} - \cos \dfrac{\pi}{6} \cdot \tan 30^\circ = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}$

b) $\dfrac{\dfrac{1}{\cos 60^\circ} - \cos 30^\circ}{\tan \frac{\pi}{4} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}} = 4 - \sqrt{3}$

c) $3 \cot^2 \dfrac{\pi}{3} \cdot \cos \dfrac{\pi}{6} \cdot \operatorname{sen} 60^\circ = \dfrac{3}{4}$

d) $\dfrac{4 \cos^2 \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{\pi}{3}}{3 \cos^2 \frac{\pi}{6} - 2 \cos^2 \frac{\pi}{4}} + \dfrac{\cos^2 \frac{\pi}{6}}{5 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{6}} = \dfrac{4\sqrt{3} + 3}{5}$

e) $3 \tan \dfrac{2\pi}{3} \cdot \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{3} - 3\sqrt{3} \cos 150^\circ = 0$

13. Si $A = \lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 4x - 6}{3x + 2}$; $B = \dfrac{2 \cos 45^\circ}{\operatorname{sen} 120^\circ}$. Prueba que:

a) $A \cdot B + \dfrac{4A}{B} = \dfrac{5\sqrt{6}}{4}$ b) $\dfrac{2AB + 3B}{\sqrt{27}} = \sqrt{2}$

14. Dadas las funciones siguientes, calcula $f'(x_o)$ (punto 17 del Memento).

a) $f(x) = x^3 + 2x + 5$; $x_o = \sqrt{5}$

b) $f(x) = (x^2 + 3)(x - 5)$; $x_o = \frac{1}{2}$

c) $f(x) = (x^2 + 2x)^3$; $x_o = -1$

d) $f(x) = \dfrac{4 - x}{2x + 3}$; $x_o = -2{,}5$

e) $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$; $x_o = 4$

f) $f(x) = \ln(x^3 + 3x^2 + 1)$; $x_o = \sqrt{2}$

g) $f(x) = \cos^2 x + \operatorname{sen} 3x$; $x_o = \frac{\pi}{3}$

15. Un trabajador gana \$100 mensuales y gasta como promedio \$85. ¿Cuántos meses tendrá que ahorrar para comprar un radio de \$60?

16. Un estudiante tiene que hacer 30 problemas. Un día resuelve $\frac{3}{10}$ y al día siguiente los $\frac{4}{7}$ del resto. ¿Cuántos problemas le faltan por resolver aún?

17. Un padre deja al morir $4500 para repartir entre sus tres hijos. El mayor debe recibir $\frac{2}{9}$ de la herencia; el segundo $\frac{3}{5}$ de la parte del anterior y el tercero lo restante. ¿Cuánto recibirá cada uno?

18. Tres brigadas de estudiantes llevaron a cabo la recogida de papas en una CPA, la brigada No.1 recogió $\frac{1}{3}$ del total de la jornada y la brigada No.3 la cuarta parte del resto. ¿Qué brigada recogió mayor cantidad de papas?

19. Los 6 trabajadores de una unidad de comercio interior se han propuesto recaudar un día de haber para las MTT. De ellos 3 tienen un salario mensual de $145,25 , dos de $163,50 y uno de $190,85. ¿A cuánto asciende el aporte de este centro para las MTT? (considera 24 días hábiles en el mes)

20. Un camión conduce unos fardos de mercancías. El primero pesa 72,7 kg , el segundo 8 kg menos que el primero, el tercero 6,1 kg más que los dos anteriores juntos, y el cuarto tanto como los tres anteriores. ¿Cuál es el peso del quinto fardo si el peso total de las mercancías es de 960,3 kg?

21. Un empleado que gana $75 quincenales, ahorra cada quincena una cierta suma de dinero. En el período de tiempo que ganó $450, ahorró $31,20. ¿Cuánto dinero ahorró quincenalmente?

22. Un tanque de agua puede llenarse por dos llaves, una que vierte 65 L/min y otra que vierte 55 L/min. Si la capacidad del tanque es de 3600 L y estando vacío se abren al mismo tiempo las dos llaves, ¿qué tiempo tardará en llenarse?

23. Un tanque tiene dos llaves y un desagüe. La primera llave vierte 45 L cada 3 minutos y la segunda 100 L cada 5 minutos y por el desagüe salen 200 L cada 4 min

Si estando lleno el tanque se abren al mismo tiempo las dos llaves y el desagüe, se vacía en hora y media. Halla su capacidad.

24. En una zafra el plan de siembra de caña fue de 11 556 caballerías. Si se sembró el 74% antes de las lluvias, ¿cuántas caballerias faltan por cumplir el plan?
25. En un parqueo de reparaciones agrícolas con un plan de 8876 equipos se habían reparado en el tercer trimestre el 89% de los equipos. ¿Cuántos equipos se tienen que reparar en el cuarto trimestre para cumplir el plan?
26. Una escuela estuvo representada en las competencias de atletismo por 17 estudiantes, de ellos 4 niñas. ¿Qué por ciento de niños participó en las competencias?
27. Una finca tiene 480 ha .El 30% de la mitad de la finca está sembrado de caña y el resto de la finca de frutos menores. ¿cuántas hectáreas están sembradas de frutos menores?
28. Un obrero ahorró el año pasado $840 que es el 20% de su salario anual.¿Cuál es su salario mensual?
29. Un soldado en Egipto observó que cuando su bastón colocado verticalmente arrojaba una sombra de 65 cm de largo, la Gran Pirámide de Cheops arrojaba una sombra de unos 153 pasos de largo, medidos partiendo del centro de la base. Si el bastón tenía una longitud de 85 cm y el paso del soldado abarcaba unos 75 cm, ¿qué altura en metros tenía la pirámide?
30. Un motorista averigua que en cierto viaje de prueba recorrió 90 km con 18 L de gasolina. ¿Cuántos litros de gasolina necesitará para un viaje de 1000 km, viajando en las mismas condiciones?
31. Si 20 hombres pueden hacer un trabajo en 15 días. ¿Cuántos hombres más se necesitarán tomar para realizar el trabajo en los $\frac{4}{5}$ de ese tiempo?
32. Se quiere cercar un terreno rectangular que mide 10,3 m de largo y 7,25 m de ancho. ¿Cuántos metros de cerca hay que utilizar? ¿Cuánto mide el área cercada?

33. En la figura 1 se representa la planta baja de un edificio. Calcula el área de la misma.

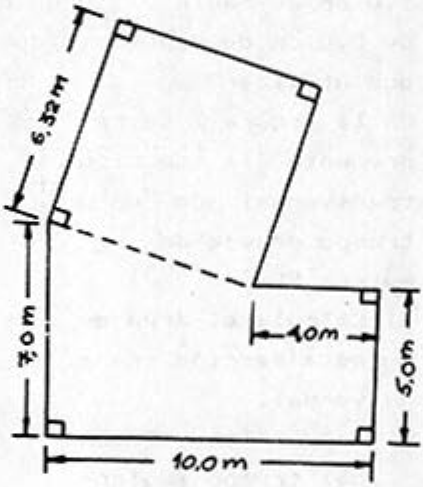


Fig. 1

34. Un paseo de 4,0 m de ancho bordea un estanque circular. ¿Cuál es el costo para la construcción del paseo, si el diámetro del estanque es de 50 m y el metro cuadrado de paseo vale \$1,25?
35. Un recipiente cilíndrico tiene una altura de 4,0 dm y un diámetro de 1,4 dm . ¿Cuántos recipientes de este tipo se necesitan en una empresa química para almacenar 15 000 cm^3 de ácido clorhídrico?
36. En un recipiente cilíndrico con diámetro interior de 65 mm, se vierten 240 cm^3 de agua. Se debe añadir ácido sulfúrico hasta una marca situada a 102 mm de altura. ¿Cuántos cm^3 de ácido sulfúrico se deben añadir?
37. Pequeños tubos de 3,0 cm de diámetro y 5,0 cm de altura se empacan en una caja cuyas dimensiones son: 5 × 12 × 18 cm . ¿Cuánto espacio se desperdicia dentro de la caja entre los tubos?
38. Un tanque de gasolina tiene la forma de un cilindro con extremos semiesféricos. Suponiendo que el diámetro de la parte cilíndrica es de 4,0 m y su longitud total de 14 m, ¿cuántos galones contendrá cuando esté lleno? (Considera que un galón es aproximadamente 5 L)
39. Se quiere construir un recipiente plástico de forma cilíndrica sin tapa que tiene medidas exteriores de

1,0 dm de radio y 3,0 dm de altura. Si las paredes son de 2,0 cm de espesor, ¿qué cantidad de plástico hay que utilizar?

40. En la figura 2 se representa la sección transversal de un trompo de eje de simetría EF.

a) Calcula el área de esta sección transversal.

b) Calcula el volumen del trompo sabiendo que está compuesto por conos y cilindros.

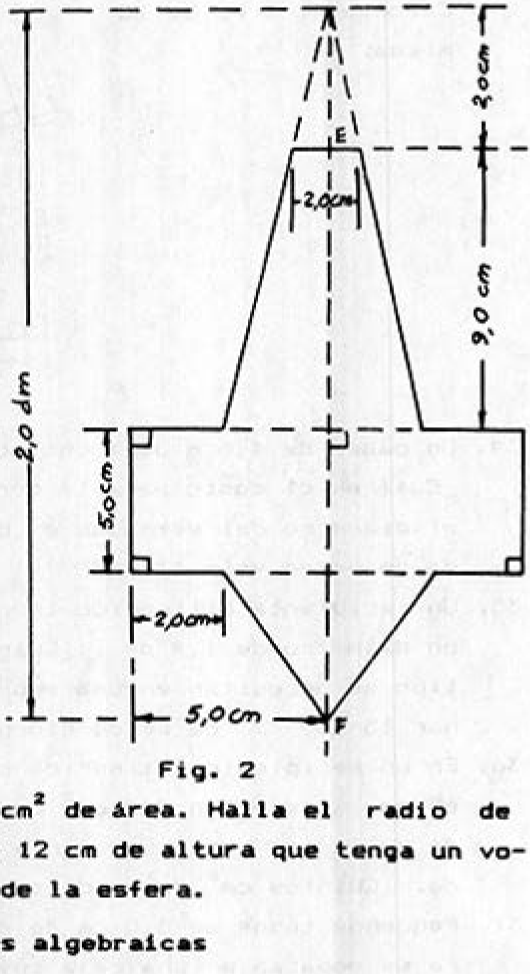


Fig. 2

41. Una esfera tiene 452 cm^2 de área. Halla el radio de la base de un cono de 12 cm de altura que tenga un volumen equivalente al de la esfera.

2. Cálculo con expresiones algebraicas

En el trabajo con variables se cumplen las mismas propiedades y se efectúan las mismas operaciones que ya has estudiado con los números reales.

- Los términos semejantes se reducen operando con los coeficientes y manteniendo la parte literal.
- Los signos de agrupación precedidos de un signo + se eliminan conservando el signo de cada término incluido dentro de ellos. Si está precedido de signo − , el signo de cada término cambia.

$\boxed{\text{Ejemplo 1}}$

Efectúa: a) $5a + 3x^2 - 3ax^2 - x^2 + 2{,}3a$

b) $-4y^2 + (3y^2 - 4z) + 2z - (-5y^2 + 3z)$

c) $3x^2 - [3y + (3x^2 - 2y)] - 5$

Resolución

a) $5a + 3x^2 - 3ax^2 - x^2 + 2{,}3a = 7{,}3a + 2x^2 - 3ax^2$

b) $-4y^2 + (3y^2 - 4z) + 2z - (-5y^2 + 3z)$

$= -4y^2 + 3y^2 - 4z + 2z + 5y^2 - 3z = 4y^2 - 5z$

c) $3x^2 - [3y + (3x^2 - 2y)] - 5 = 3x^2 - [\,3y + 3x^2 - 2y] - 5$

$= 3x^2 - [y + 3x^2] - 5$

$= 3x^2 - y - 3x^2 - 5$

$= -y - 5$ ■

Para la multiplicación de expresiones algebraicas, multiplicas cada término de una expresión por cada uno de los términos de la otra (aplicas la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma) y finalmente agrupas términos semejantes si existen.

Las multiplicaciones pueden abreviarse si se utilizan los llamados productos notables:

$$\boxed{\begin{array}{l} (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \\ (a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \\ (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab \\ (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \end{array}}$$

$\boxed{\text{Ejemplo 2}}$

Efectúa los productos siguientes:

a) $(a + b)(c + d)$ b) $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$

c) $(2x + 3)(x^2 + \frac{1}{2}x)$ d) $(m + 7)(m - 4)$

e) $(3p^2 + \frac{1}{2})(3p^2 - \frac{1}{2})$ f) $(2a + \sqrt{5})(2a + \sqrt{5})$

g) $(5m + 2)(5m + 2)(5m + 2)$

Resolución

a) $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$

b) $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$

$= a^3 - b^3$

c) $(2x + 3)(x^2 + \frac{1}{2}x) = 2x^3 + x^2 + 3x^2 + \frac{3}{2}x$

$$= 2x^3 + 4x^2 + \frac{3}{2}x$$

d) $(m + 7)(m - 4) = m^2 + 3m - 28$

e) $(3p^2 + \frac{1}{2})(3p^2 - \frac{1}{2}) = 9p^4 - \frac{1}{4}$

f) $(2a + \sqrt{5})(2a + \sqrt{5}) = (2a + \sqrt{5})^2$

$$= 4a^2 + 4\sqrt{5}\,a + 5$$

g) $(5m + 2)(5m + 2)(5m + 2) = (5m + 2)^3$

$$= 125m^3 + 150m^2 + 60m + 8$$ ■

El proceso contrario de multiplicar es la descomposición en factores.

Para descomponer en factores, o sea, transformar sumas en productos, se utilizan el factor común, los productos notables y otros conocimientos sobre la multiplicación.

Observa en el ejemplo 2 inciso b que si tienen una diferencia de cubos, es decir, $a^3 - b^3$, esta la puedes descomponer en factores fácilmente pues

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

de forma similar podrías descomponer una suma de cubos, pues

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Compruébalo efectuando el producto.

El esquema siguiente te resume el orden en que debes proceder para descomponer en factores.

Factor Común

Binomios
- $a^2 - b^2$
- $a^3 \pm b^3$

Trinomios
- Cuadrado perfecto
- $x^2 + px + q$
- $mx^2 + px + q$

Polinomios de 4 ó más términos
- Agrupamiento
- Método de Ruffini

Combinación de casos

Ejemplo 3

Descompón en factores las siguientes sumas:

(punto 13 del Memento)

a) $25k^2 - 20\,k + 4$ **b)** $x^2 - x - 6$

c) $2am^2 - 32a$ **d)** $6x^2 - 15x - 36$

e) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ **f)** $x^4 - 6x^2 - 27$

g) $x^3 - 8$ **h)** $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

Resolución

a) $25k^2 - 20\,k + 4 = (5k - 2)^2$ es un trinomio cuadrado perfecto

b) $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$ es un trimonio de la forma $x^2 + px + q$

c) $2am^2 - 32a = 2a(m^2 - 16)$

$= 2a(m + 4)(m - 4)$ se extrajo factor común y se aplicó diferencia de cuadrados.

d) $6x^2 - 15x - 36 = 3(2x^2 - 5x - 12)$

$= 3(2x + 3)(x - 4)$ se extrajo factor común y se descompuso el trinomio $mx^2 + px + q$

e) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

Como no existe factor común y es un polinomio de tercer grado, apliquemos Ruffini.

	1	2	-5	-6
2		2	8	6
	1	4	3	0

divisores de -6:

$\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x - 2)(x^2 + 4x + 3)$

$= (x - 2)(x + 3)(x + 1)$ se continuó la factorización descomponiendo el $x^2 + px + q$

f) $x^4 - 6x^2 - 27$

En este caso estamos en presencia de un trinomio $y^2 + py + q$ donde $y = x^2$. Se descompone como un trinomio de la forma $x^2 + px + q$, es decir:

$x^4 - 6x^2 - 27 = (x^2)^2 - 6x^2 - 27$ **luego:**

$x^4 - 6x^2 - 27 = (x^2 - 9)(x^2 + 3)$

$= (x + 3)(x - 3)(x^2 + 3)$ se aplicó también la diferencia de cuadrados.

Observa que en este caso también puedes aplicar Ruffini colocando ceros en los términos correspondientes a x^3 y a x, es decir:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -6 & 0 & 27 \\ -3 & & -3 & 9 & -9 & 27 \\ \hline & 1 & -3 & 3 & -9 & 0 \end{array}$$

Divisores de 27

± 1; ± 3; ± 9; ± 27

Los factores son: $(x + 3)(x^3 - 3x^2 + 3x - 9)$. Aplicando nuevamente Ruffini o factor común por agrupamiento resulta, $(x + 3)(x - 3)(x^2 + 3)$.

g) $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ se aplicó diferencia de cubos.

Observa que por ser un polinomio de tercer grado otra vía para descomponerlo sería aplicando Ruffini, colocando ceros en los términos correspondientes a x^2 y a x.

h) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

En este caso se puede aplicar Ruffini, pero si se agrupan convenientemente los términos se puede factorizar aplicando factor común.

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 - 4x - 12 &= (x^3 + 3x^2) + (-4x - 12) \\ &= x^2(x + 3) - 4(x + 3) \\ &= (x + 3)(x^2 - 4) \\ &= (x + 3)(x + 2)(x - 2) \end{aligned}$$ ■

La descomposición factorial facilita la simplificación de cocientes. Si los términos no están descompuestos en factores, al igual que en la aritmética, para poder simplificar debes realizar dicha descomposición.

Ejemplo 4

Simplifica los siguientes cocientes:

a) $\dfrac{a^2 - ab}{a^2 - b^2}$ b) $\dfrac{b^2 + 2b - 15}{b^2 - 6b + 9}$ c) $\dfrac{x^3 + 5x^2 - 2x - 24}{2x^2 - 3x - 2}$

Resolución

a) $\dfrac{a^2 - ab}{a^2 - b^2} = \dfrac{a(a - b)}{(a + b)(a - b)} = \dfrac{a}{a + b}$

b) $\dfrac{b^2+2b-15}{b^2-6b+9} = \dfrac{(b+5)(b-3)}{(b-3)^2} = \dfrac{b+5}{b-3}$

c) $\dfrac{x^3+5x^2-2x-24}{2x^2-3x-2} = \dfrac{(x+4)(x+3)(x-2)}{(2x+1)(x-2)}$

$$= \frac{(x+4)(x+3)}{2x+1}$$

$$= \frac{x^2+7x+12}{2x+1} \quad \blacksquare$$

Al realizar las operaciones con cocientes (adición, sustracción, multiplicación y división) utilizas las mismas reglas conocidas para calcular con números reales (punto 12 del Memento).

Ejemplo 5

Calcula:

a) $\dfrac{x^3-7x-6}{x+4} \cdot \dfrac{x^2+4x}{x^2+3x+2}$

b) $\dfrac{x-2}{x^2-x} - \dfrac{x+3}{x^2+3x-4} + \dfrac{x^2+12x+16}{x^4+3x^3-4x^2}$

c) $\dfrac{9a^2-16}{3a^2-11a-20} : \dfrac{a^2+2a-15}{a^2-25} - \dfrac{3a^2+3}{a^2-9}$

Resolución

a) $\dfrac{x^3-7x-6}{x+4} \cdot \dfrac{x^2+4x}{x^2+3x+2}$

$$= \frac{(x-3)(x+1)(x+2)}{x+4} \cdot \frac{x(x+4)}{(x+2)(x+1)}$$

$$= x(x-3) = x^2-3x$$

b) $\dfrac{x-2}{x^2-x} - \dfrac{x+3}{x^2+3x-4} + \dfrac{x^2+12x+16}{x^4+3x^3-4x^2}$

$$= \frac{x-2}{x(x-1)} - \frac{x+3}{(x+4)(x-1)} + \frac{x^2+12x+16}{x^2(x+4)(x-1)}$$

$$= \frac{x(x+4)(x-2) - x^2(x+3) + x^2+12x+16}{x^2(x+4)(x-1)}$$

$$= \frac{x^3+2x^2-8x-x^3-3x^2+x^2+12x+16}{x^2(x+4)(x-1)}$$

$$= \frac{4x + 16}{x^2(x + 4)(x - 1)}$$

$$= \frac{4(x + 4)}{x^2(x + 4)(x - 1)} = \frac{4}{x^2(x - 1)} = \frac{4}{x^3 - x^2}$$

c) $$\frac{9a^2 - 16}{3a^2 - 11a - 20} : \frac{a^2 + 2a - 15}{a^2 - 25} - \frac{3a^2 + 3}{a^2 - 9}$$

$$= \frac{(3a + 4)(3a - 4)}{(3a + 4)(a - 5)} \cdot \frac{(a + 5)(a - 5)}{(a + 5)(a - 3)} - \frac{3a^2 + 3}{(a + 3)(a - 3)}$$

$$= \frac{3a - 4}{a - 3} - \frac{3a^2 + 3}{(a + 3)(a - 3)} = \frac{(3a - 4)(a + 3) - (3a^2 + 3)}{(a + 3)(a - 3)}$$

$$= \frac{3a^2 + 5a - 12 - 3a^2 - 3}{(a + 3)(a - 3)} = \frac{5a - 15}{(a + 3)(a - 3)} = \frac{5(a - 3)}{(a + 3)(a - 3)}$$

$$= \frac{5}{a + 3} \quad \blacksquare$$

Ejercicios (epigrafe 2)

1. Simplifica las siguientes expresiones y calcula el valor numérico del resultado para los valores indicados:

a) $(2a + 3b) + (a + 6b + 4c) + (7a + 9b + 12c)$;

$$a = \frac{1}{2}, \; b = \frac{1}{3}, \; c = \frac{1}{4}$$

b) $a - (b - c) + a + (b - c) + b - (c + a)$;

$$a = 1{,}25 \; ; b = 3{,}75 \; ; \; c = 2$$

c) $(8b - 3x - c + 2y^2) - (3b - c + 7x - y^2)$;

$$b = \frac{1}{5}, \; x = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}, \; y = \sqrt{2} + 1$$

d) $-5x - \{3y - 2y - [2x - (2y + x) + y]\}$; $x = \frac{3}{8}$, $y = \frac{1}{10}$

e) $2b - \{c - [7x - 8y + (2xy - yz^3) + 3c] + 7x - 7y\} + y$

$$b = 0{,}5 \; ; \; c = 0{,}25 \; ; \; x = \frac{1}{2} \; ; \; y = \sqrt{2} \; ; \; z = -1$$

f) $3a - \{a + b - [a + b + c - (a + b + c + d)]\}$;

$$a = \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4}, \; b = \cos \frac{4\pi}{3}, \; d = \frac{3}{2} \tan^2 \frac{11\pi}{6}$$

g) $-\{a + [a - (a - x) - (a + 2x) - 2a] - a\}$;

$$a = \frac{\sqrt{3}}{13} \; ; \; x = \frac{3}{4 + \sqrt{3}}$$

h) $-\{a - [a + (x - a) - (3x - a) - a] - 3a\}$;

$$a = \log_4 8 \; ; \; x = \frac{3}{2}$$

i) $2x^2 - \{x^2 + 3ab + [xy^3 - 2ab] + 2xy^3\} + ab + 2$;

$x = \log_4 2$; $y = \frac{1}{3}$

2. Efectúa los productos siguientes:

a) $(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$ b) $(x + 7)(x - 3)$

c) $(3x - 2)(x + 3)$ d) $(3y + 2x)^2$

e) $(m + n)(m^2 - mn + n^2)$ f) $(5 - x)(x + 6)$

g) $(0,5x + 0,1)(10x - 5)$ h) $(2p - \frac{1}{3})^3$

i) $(2 - x + 3y)(2x - 3y)$ j) $(5y + \sqrt{5})(5y - \sqrt{5})$

k) $(2m - 5)(4m^2 + 10m + 25)$ l) $(ab + c^2)^3$

m) $(x^2 + x)(x^{n+1} + 2x^{n+2} - x^{n+3})$

3. Reduce las siguientes expresiones y calcula el valor numérico del resultado.

a) $(3a + 2)^2 - (1 - a)$, $a = \frac{1}{3}$

b) $3(a^2 + a + 1) + 2(a^2 + 2a - 2) - (a^2 + 3a - 3)$; $a = \frac{\sqrt{5}}{4}$

c) $2x + 3(3 - 2x) - 2(1 - x)$; $x = \cos 60^\circ$

d) $(3a^2 - 2b)(3a^2 + 2b)$; $a = \frac{\sqrt[4]{18}}{3}$, $b = \frac{1}{2}$

e) $(a + b)^2 - (a - b)^2$; $a = 3,1$, $b = 6,7$

f) $(x + 2)^2 + x^3 - (x - 1)^3$; $x = -\frac{2}{3}$

g) $(m - 1)^2 + (m + 1)(m - 1)$; $m = -1$

h) $(p + 3)(p - 4) - [(2p + 1)^2 + (2 - 2p)^2]$; $p = \operatorname{sen} \frac{7\pi}{6}$

4. Sabiendo que:

a) $M = 2b$, $N = 5b + \frac{1}{2} b$, $P = (b + x)^2$, $Q = \frac{b}{3} + x - 1$

Calcula:

$M + N + Q$ $M - (N + Q)$ $P + 3Q - \frac{1}{2} M$

$MN - P$, $P - MQ$

b) $A = x^2 + 4x + 3$ $B = x^3 - 27$

$C = x^2 + 3x + 9$ $D = x^2 - 9$

Simplifica la expresión $R = \frac{A \cdot B}{C \cdot D}$

Demuestra que $R^2 - 2R + 1 = x^2$

5. Descompón en factores:

a) $5y^3 + 10y$ b) $25p^2 - 125pq$

c) $x^4 + 2x^2$ d) $8m^2n^3 - 16m^3$

e) $6x^3 - 12x^2y + 24x^4$ f) $33a^2b^3c + 11a^3b^2c^2 - 66a^2d$

g) $5p^2q - 10pq^2 + 5p^2q^2$ h) $\frac{3}{4} a^6 - \frac{1}{4} a^3$

i) $3x(y + 2) - 7(y + 2)$

j) $2x^2 - 3xy - 4x + 6y$

k) $m + 2 - 3(m + 2)$

l) $(3+x+y)2 + a^2(3+x+y)$

m) $3m(x - y) + y - x$

n) $(b-5)(b+3) + 3b(-2b-6)$

ñ) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

o) $12 + x^3 - 4x - 3x^2$

p) $a^2x - ax^2 - 2a^2y + 2axy + x$

q) $\cos^3 x + \cos^2 x$

r) $x^{2n} - x^n$

s) $x^{n+3} + x^{n-1}$

t) $5\tan^2 x + 10 \tan x$

u) $2e^{5x} + 4e^x$

6. Expresa como un producto:

a) $\frac{1}{4} y^2 - 25$

b) $0{,}36b^4 - 9$

c) $8x^3 - 1$

d) $x^3 + 27$

e) $5y^3 - 5y$

f) $64 - 16b^4$

g) $\frac{9}{4} - b^8$

h) $2y^3 - 2$

i) $z^3 - \frac{1}{8}$

j) $27 + 125x^3$

k) $a^3 - x^6$

l) $a^6 + 8b^{12}$

m) $a^{10} - 0{,}49b^2$

n) $x^9 + 0{,}064y^3$

ñ) $x^3y^6 - 216y^9$

o) $an^3 + a^4$

p) $(a + b)^2 - 0{,}01$

q) $\frac{4}{9} - (x + y)^2$

r) $216 + (m + n)^3$

s) $\operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen} x$

t) $1 - e^{2x}$

u) $e^{4x} - 36e^{2x}$

v) $\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x$

w) $8\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x$

7. Factoriza los trinomios siguientes:

a) $b^2 + 20b + 100$

b) $x^2 - 10x + 25$

c) $y^6 + 22y^3 + 121$

d) $4m^4 - 36m^2n^2 + 81n^4$

e) $y^2 - 13x^2y + 36x^4$

f) $b^2 + 4b - 12$

g) $1 - 18x^2 + 81x^4$

h) $x^4 + 6x^2 - 7$

i) $15 + 2x - x^2$

j) $3x^2 + 4x - 4$

k) $12x^2 + 5x - 2$

l) $6x^4 + 13x^2 - 5$

m) $12 + 2n - 4n^2$

n) $\cos^2 x - 2\cos x + 1$

ñ) $\operatorname{sen}^2 x - 9\operatorname{sen} x + 20$

o) $e^{2x} - 3e^x - 4$

p) $2\tan^2 x + \tan x - 10$

8. Factoriza los polinomios siguientes:

a) $x^2 + xy + ax + ay$

b) $2x - ax + 2y - ay$

c) $3 - x^2 + 2abx^2 - 6ab$

d) $a^2 - 9 + 2ab - 6b$

e) $3b - 2c + 9b^2 - 4c^2$

f) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

g) $x^3 + 6x^2 - 13x - 42$

h) $x^3 + 8x^2 + 21x + 18$

i) $x^3 + 4x^2 + x - 6$

j) $x^3 - 28x + 48$

k) $x^3 - 19x + 30$

l) $x^3 - 12x + 16$

m) $x^3 - 27x + 54$

n) $y^4 - 4y^3 + 3y^2 + 4y - 4$

ñ) $x^4 - 11x^2 - 18x - 8$

o) $x^4 + 10x^3 + 31x^2 + 30x$

p) $x^5 - 4x^3 - 8x^2 + 32$

q) $y^5 - 8y^2 - 9y^3 + 72$

r) $x^3 - 3x^2 + 4$

s) $x^4 + 8x^3 + 17x^2 - 2x - 24$

9. Descompón en factores:.

a) $x^8 - 36y^2$

b) $4x^2y^3 - 8x^2y^2 + 20xy$

c) $1 - 14y + 49y^2$

d) $3a^5 - 12a^3b^4$

e) $2a^3 + a^2b - 3ab^2$

f) $\frac{25}{4} - y^6$

g) $x^2 + 4xy - 21y^2$

h) $6m^2 - 7mn - 3n^2$

i) $x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 4x - 12$

j) $1 + a - a^3mn - a^2mn$

k) $(a - 3b)^2 - 25x^2$

l) $x^2y^2 - 48xyz - 100z^2$

m) $64 + z^3$

n) $16 - 2x^3$

ñ) $9p^3q + 15p^2q - 6pq$

o) $x^3y - 5x^2y - 4xy + 20y$

p) $3\operatorname{sen}^3 x + 3 \operatorname{sen} x \cos^2 x$

q) $\cos^2 x + 3 \cos x - 18$

r) $6 \tan^2 x - 4 \tan x - 2$

10. Simplifica y determina para qué valores de la variable no está definido el resultado:

a) $\dfrac{8a^4b^3c^2}{12a^6b^3c}$

b) $\dfrac{5ac - bc}{25a^2 - b^2}$

c) $\dfrac{x^3y - x^2y^2}{2x^2y^2 - 2xy^3}$

d) $\dfrac{ax - bx}{b^2 - a^2}$

e) $\dfrac{4x^2 + 8x}{x^2 + 4x + 4}$

f) $\dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$

g) $\dfrac{x^4 - x^2 - 12}{x^4 - 16}$

h) $\dfrac{9a^2 + 12ab + 4b^2}{3a^2b + 2\,ab^2}$

i) $\dfrac{9x^2 - 25}{3x^2 - 2x - 5}$

j) $\dfrac{x^3 - 8}{x^3 - x^2 - 2x - 12}$

k) $\dfrac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^2 - 2x - 3}$

l) $\dfrac{x^3 + 23x + 9x^2 + 15}{2x^2 + 8x + 6}$

11. Calcula:

a) $\lim\limits_{x \to 2/3} \dfrac{9x^2 - 4}{3x - 2}$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{\sqrt{x - 3}}$

d) $\lim\limits_{x \to -3/2} \dfrac{2x^2 + 5x + 3}{2\,x + 3}$

e) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^3 + 64}{x^2 + 7x + 12}$

f) $\lim\limits_{x \to -5} \left[\dfrac{x^2 + 8x + 15}{x + 5} + \dfrac{x^3 + 125}{x^2 - 25} \right]$

12. Efectúa y di para qué valores de la variable se indefine el resultado:

a) $\dfrac{b - a}{20b} + \dfrac{a - 2b}{15a}$

b) $\dfrac{4}{1 + m} - \dfrac{3}{1 - m^2}$

c) $\dfrac{3y}{y^2 + 7y + 10} + \dfrac{5}{y + 2}$

d) $\dfrac{x - y}{x + y} - \dfrac{x^2 - y^2}{(x + y)^2}$

e) $\dfrac{v}{v^2 - 1} + \dfrac{v + 1}{(v - 1)^2}$

f) $\dfrac{x + 2}{2x} + \dfrac{3}{5} + \dfrac{x^2 + 2}{6x^2}$

g) $\dfrac{2}{z + z^2} - \dfrac{1 - 3z}{z - z^3} - \dfrac{1}{z - z^2}$

h) $\dfrac{x - y}{y} + \dfrac{4x}{x - y} + \dfrac{x^3 + 3x^2y}{y^3 - x^2y}$

i) $\dfrac{b - 2}{b - 3} + \dfrac{b - 3}{b - 2} - \dfrac{b^2 - 8}{b^2 - 5b + 6}$

j) $\dfrac{8}{y + 3} - \dfrac{y + 3}{y - 3} + \dfrac{y^2 + 3}{y^2 - 9}$

k) $\dfrac{4}{x^2 - 13x + 42} + \dfrac{3}{15x - x^2 - 56} - \dfrac{5}{x^2 - 14x + 48}$

l) $\dfrac{2x + 3}{x^3 + 2x^2 - 9x - 18} - \dfrac{2x - 1}{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}$

13. Resuelve y di para qué valores de la variable está definido el resultado:

a) $\dfrac{m^2 + 4m}{m^2 + 3m - 10} : \dfrac{m^2 - m - 20}{m^2 - 25} \cdot \dfrac{2m^2 - 11m + 14}{5m^2 - 15m}$

b) $\dfrac{3x^2 + 16x - 12}{x^2 - 4x} \cdot \dfrac{x^2 - 8x + 16}{27x^3 - 8} : \dfrac{x^3 - 28x + 48}{9x^2 + 6x + 4}$

c) $\dfrac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 3x + 9} : \dfrac{4x^2 - 20x + 25}{x^2 - 9} \cdot \dfrac{x^3 + 27}{x^3 - 7x + 6}$

d) $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} : \left(\dfrac{x^2 + y^2 + xy}{x^3 - y^3} : \dfrac{x^3y - 2x^2y + 4xy}{x^3 + 8} \right)$

e) $\left(\dfrac{3x^2 + 2x - 8}{6x - 8} : \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4} \right) \dfrac{4}{x^3 + x^2 - 4x - 4}$

f) $\dfrac{2a^2 - 13a - 7}{2a^2 - 15a - 8} : \left[\dfrac{a^2 - 8a + 7}{a^2 - 6a + 16} \cdot \dfrac{a^2 + 2a}{a^2 - 1} \right]$

g) $\log \dfrac{x - 1}{x^2 - 1} + \log \dfrac{2x^2 + 7x + 5}{2x + 5}$

h) $\log \dfrac{2}{3x^2 - 4x - 15} - \log \dfrac{1}{3x^2 + 5x}$

14. ¿Para qué valores de la variable está definido el resultado de las siguientes operaciones?

a) $\dfrac{1}{1 - a} + \dfrac{1}{1 + a} - \dfrac{2a}{1 + a^2}$

b) $\dfrac{1}{a^2 + a} - \dfrac{1}{a^2 + 3a + 2} + \dfrac{1}{a^2 + 4a + 3}$

c) $\dfrac{a}{a^2 - 1} + \dfrac{a^2 + a - 1}{a^3 - a^2 + a - 1} + \dfrac{a^2 - a - 1}{a^3 + a^2 + a + 1} - \dfrac{2a^3}{a^4 - 1}$

d) $\dfrac{5x + 3}{5x^2 + 13x + 6} + \dfrac{1}{2} : \dfrac{x + 2}{x + 1}$

e) $\dfrac{-3 - a^2}{a^2 + 4a - 5} + \dfrac{2a - 2}{2a^2 - 50} \cdot \dfrac{a^2 - 4a - 5}{3a + 3}$

f) $\dfrac{3x + 6}{2x^2 + 8x + 6} + \dfrac{x}{x - 3} : \dfrac{1}{x + 3}$

g) $\left(\dfrac{6}{x + 4} - \dfrac{2x}{x^2 + 7x + 12} \right) : \dfrac{3x}{x + 4}$

h) $\left(\dfrac{3n^2 - 3}{n^3 - 3n + 2} + \dfrac{1}{n^2 + n - 2} \right) : \dfrac{6n + 8}{(n^2 - 4)(n^3 - 1)}$

i) $\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x + 2} + \dfrac{3}{x + 3} \right) : \left(\dfrac{x}{x + 2} + \dfrac{x}{x + 3} + \dfrac{6}{x^2 + 5x + 6} \right)$

j) $\left(\dfrac{x + y}{x - y} - \dfrac{x - y}{x + y} \right) : \left(\dfrac{x + y}{x - y} - \dfrac{x - y}{x + y} \right)$

k) $\left(\dfrac{1 + x}{1 - x} - \dfrac{1 - x}{1 + x} \right) : \left[\left(\dfrac{1 + x}{1 - x} - 1 \right) \left(1 - \dfrac{1}{1 + x} \right) \right]$

l) $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \right) \left[(x - y)^2 + 2xy \right] + \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} \right) \left[(x - y)^2 - 2xy \right]$

m) $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \right) \left[(x - y)^2 + xy \right] + \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} \right) \left[(x - y)^2 - xy \right]$

n) $\dfrac{\dfrac{m}{1 + m} + \dfrac{1 - m}{m}}{\dfrac{m}{1 + m} - \dfrac{1 - m}{m}}$ ñ) $\dfrac{\dfrac{z}{z - a} + \dfrac{a}{z + a}}{\dfrac{z}{z - a} - \dfrac{a}{z + a}}$

o) $\dfrac{\dfrac{p - q}{p + q} - \dfrac{p^2 + q^2}{p^2 - q^2}}{\dfrac{p + q}{p - q} + \dfrac{p^2 + q^2}{p^2 - q^2}}$ p) $\dfrac{1 + \dfrac{b}{a - b} - \dfrac{b^2}{a^2 - ab}}{a - \dfrac{ab}{a + b}}$

q) $\dfrac{x - a}{x - a - \dfrac{x}{1 - \dfrac{x}{x - a}}}$ r) $\dfrac{x^2}{x - \dfrac{x^2 + y^2}{x + y}} + \dfrac{y^2}{y - \dfrac{x^2 + y^2}{x + y}}$

s) $\dfrac{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b + c}}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b + c}} \left(1 + \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$

t) $\dfrac{\dfrac{3a^2 + 13a + 15}{a^3 - 27a + 54} - \dfrac{a - 6}{a^2 + 3a - 18}}{\dfrac{4a^2 - 49}{a^2 + 6a}} (2a - 7)$

15. Comprueba que:

a) $\dfrac{(2a + b)^2 - (2a + b)(2a - b)}{2a + b} = 2b$

b) $\dfrac{(x + y)^2 + (x - y)^2}{(x + y)^2 - (x - y)^2} : \dfrac{x^4 - y^4}{2xy(x - y)} = \dfrac{1}{x + y}$

c) $\dfrac{a^2 - 9}{5a^3b^3} : \left[\dfrac{a + 3}{10a^4} \cdot \dfrac{2a - 6}{ab^4}\right] = a^2b$

d) $\dfrac{a^3 - b^3}{a^2 - 2ab + b^2} \cdot \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + ab} = \dfrac{a^2 + ab + b^2}{a}$

e) $\left(\dfrac{a + 5}{5a - 1} + \dfrac{a + 5}{a + 1}\right) : \dfrac{a^2 + 5a}{1 - 5a} + \dfrac{a^2 + 5}{a + 1} = a - 1$

f) $\left(\dfrac{b - 3}{7b - 4} - \dfrac{b - 3}{b - 4}\right) \cdot \dfrac{7b - 4}{9b - 3b^2} + \dfrac{b^2 - 14}{4 - b} = -(b + 4)$

16. Dadas las siguientes funciones:

$f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$; $g(x) = -x^3 - 2x^2 + 4x + 8$;

$h(x) = \dfrac{x - 1}{x + 2}$; $p(x) = \dfrac{x + 2}{1 - x}$

halla: $f(x) + g(x)$, $f(x) - 3g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $h(x) + p(x)$,

$p(x) \cdot h(x)$, $h(x) + p(x)$, $f(x) \cdot h(x)$

17. Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{2x^2 + 6}{x - 1}$; $g(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$.

Calcula:

a) $h(x) = f'(x) \cdot g'(x)$ b) $p(x) = \left(\dfrac{x - 1}{x + 1}\right)^3 f'(x) : g'(x)$

c) $q(x) = f'(x) - g'(x)$

d) $t(x_o) = h(x_o) + p(x_o) : q(x_o)$; $x_o = 0$

18. Comprueba que la diferencia entre las áreas de un triángulo rectángulo isósceles de catetos a + b y otro rectángulo escaleno de catetos a + b y a − b (a > b) es igual al área de un rectángulo de lados b y a + b.

ECUACIONES, INECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES

3. Resolución de ecuaciones

Desde grados anteriores has aprendido a resolver ecuaciones.

- Las ecuaciones del tipo $ax + b = c$ $(a \neq 0)$ se denominan lineales en una variable y se resuelven despejando la x, o sea, $x = \frac{c - b}{a}$.
- Las ecuaciones del tipo $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ se denominan cuadráticas y se resuelven mediante la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde $D = b^2 - 4ac$ es el discriminante.

- si $D > 0$ la ecuación tiene dos soluciones reales diferentes.
- si $D = 0$ la ecuación tiene dos soluciones reales iguales.
- si $D < 0$ la ecuación tiene dos soluciones complejas conjugadas.

Cuando el trinomio $ax^2 + bx + c$ tiene descomposición factorial, se puede utilizar este procedimiento para resolver la ecuación reduciéndola a dos ecuaciones lineales.

Ejemplo 1

Resuelve las ecuaciones:

a) $2x + 3 - (x + 4 - 2x) = 5 - (x + 2)$

b) $x(x + 3) = 5x + 3$

c) $4 = 5 - x(3x - 1)$

d) $x^2 = 6x - 10$

Resolución

a) $2x + 3 - (x + 4 - 2x) = 5 - (x + 2)$ — suprimiendo signos de agrupación se obtuvo una ecuación lineal.

$2x + 3 - x - 4 + 2x = 5 - x - 2$

$3x - 1 = 3 - x$ — Reduciendo términos semejantes.

$4x = 4$ — Transponiendo variables a un miembro y constantes a otro.

$x = 1$ — Despejando x

La solución es: $x = 1$

b) $x(x + 3) = 5x + 3$ — Efectuando el producto. Como la ecuación es cuadrática se iguala a cero.

$x^2 + 3x = 5x + 3$

$x^2 - 2x - 3 = 0$ — El trinomio puede descomponerse en factores fácilmente.

$(x - 3)(x + 1) = 0$ — Igualando a cero cada factor.

$x - 3 = 0 \quad x + 1 = 0$

$x_1 = 3$ y $x_2 = -1$

Las soluciones o raíces de la ecuación son: $x_1 = 3$; $x_2 = -1$

c) $4 = 5 - x(3x - 1)$

$4 = 5 - 3x^2 + x$

$3x^2 - x - 1 = 0$ — aplicando la fórmula general

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(3)(-1)}}{2 \cdot 3}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 12}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \approx \frac{1 + 3,6}{6} = \frac{4,6}{6} = 0,77$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{6} \approx \frac{1 - 3,6}{6} = \frac{-2,6}{6} = -0,43$$

Las soluciones o raíces de la ecuación son:

$x_1 = 0,77$ y $x_2 = -0,43$

d) $x^2 = 6x - 10$

$x^2 - 6x + 10 = 0$ — aplicando la fórmula general

$$x_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2-4(1)(10)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{6 \pm 2i}{2}$$

$$x_1 = \frac{6 + 2i}{2} = 3 + i$$

$$x_2 = \frac{6 - 2i}{2} = 3 - i$$

Las soluciones o raices de la ecuación son:

$$x_1 = 3 + i \text{ y } x_2 = 3 - i$$

En las ecuaciones lineales y cuadráticas aunque la comprobación es recomendable pues te da mayor seguridad de que el valor obtenido es la solución, desde el punto de vista matemático no es necesario pues no se introducen raíces extrañas.

También ya conoces otras ecuaciones como las fraccionarias, las ecuaciones con radicales, las logarítmicas, las exponenciales y las trigonométricas, que para resolverlas se realizan transformaciones para reducirlas a una lineal o a una cuadrática.

En estas transformaciones se pueden introducir raíces extrañas, por lo que sí es necesario comprobar los valores hallados en la ecuación original.

Ejemplo 2

Resuelve las ecuaciones:

a) $\dfrac{x + 2}{x} + \dfrac{x - 1}{x - 2} = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 - 2x}$ b) $\sqrt{5x + 1} + \sqrt{x} = 1$

c) $\log(x + 4) + \log(2x + 3) = \log(1 - 2x)$

d) $\dfrac{2^{x^2}}{2^{2x}} = 8^{x-2}$ e) $2 \operatorname{sen}^2 x - 7 \operatorname{sen} x + 3 = 0$

Resolución

a) Es una ecuación fraccionaria. Como aparece la variable en el denominador multipliquemos por el m.c.m de los denominadores

$$\frac{x + 2}{x} + \frac{x - 1}{x - 2} = \frac{x^2 - 2}{x^2 - 2x} \qquad \text{m.c.m } x(x-2)$$

$$(x + 2)(x - 2) + x(x - 1) = x^2 - 2$$

$$x^2 - 4 + x^2 - x = x^2 - 2$$ se obtiene una ecuación cuadrática por lo que igualamos a cero.

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

$$x - 2 = 0 \qquad x + 1 = 0$$

$$x = 2 \quad \text{ó} \quad x = -1$$

Para $x = 2$ los denominadores $x - 2$ y $x^2 - 2x$ se anulan, y como la división por cero no está definida $x = 2$ no está en el dominio de la ecuación y es una raíz extraña. Por tanto la solución es $x = -1$.

b) Es una ecuación con radicales. Como la variable aparece bajo el signo radical, racionalicemos la ecuación.

$$\sqrt{5x + 1} + \sqrt{x} = 1$$

$$\sqrt{5x + 1} = 1 - \sqrt{x}$$ se aisló un radical

$$5x + 1 = \left(1 - \sqrt{x}\right)^2$$ elevando al cuadrado

$$5x + 1 = 1 - 2\sqrt{x} + x$$

$$4x = -2\sqrt{x}$$ aislando el segundo radical

$$2x = -\sqrt{x}$$

$$4x^2 = x$$ elevando al cuadrado

$$4x^2 - x = 0$$

$$x(4x - 1) = 0$$

$$x_1 = 0 \qquad 4x - 1 = 0$$

$$x_2 = \frac{1}{4}$$

Comprobación:

para $x_1 = 0$

M.I: $\sqrt{5(0) + 1} + \sqrt{0} = \sqrt{1} = 1$ M.D: 1

M.I. = M.D.

para $x_2 = \frac{1}{4}$

M.I: $\sqrt{5(\frac{1}{4}) + 1} + \sqrt{\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4} + 1} + \sqrt{\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} + \frac{1}{2}$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

M.D: 1

$$M.I. \neq M.D.$$

La solución de la ecuación es $x = 0$

c) Es una ecuación logarítmica.

$$\log(x + 4) + \log(2x + 3) = \log(1 - 2x)$$ aplicando propiedades de los logaritmos

$$\log[(x + 4)(2x + 3)] = \log(1 - 2x)$$

$$(x + 4)(2x + 3) = 1 - 2x$$

$$2x^2 + 11x + 12 = 1 - 2x$$

$$2x^2 + 13x + 11 = 0$$

$$(2x + 11)(x + 1) = 0$$

$$2x + 11 = 0 \qquad x + 1 = 0$$

$$x_1 = -\frac{11}{2} = -5{,}5 \qquad x_2 = -1$$

Para $x_1 = -5{,}5$ $\log(x + 4)$ y $\log(2x + 3)$ no están definidos, pues resultan $\log(-1{,}5)$ y $\log(-8)$; luego la solución es $x_2 = -1$.

d) Es una ecuación exponencial.

$$\frac{2^{x^2}}{2^{2x}} = 8^{x-2}$$

$$2^{x^2-2x} = (2^3)^{x-2}$$ aplicando prop. de las potencias y transformando en base 2

$$2^{x^2-2x} = 2^{3x-6}$$

$$x^2 - 2x = 3x - 6$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

$x - 2 = 0$; $x - 3 = 0$ de donde $x = 2$ ó $x = 3$

Los valores de x hallados satisfacen la ecuación original, luego las soluciones son $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$.

e) Es una ecuación trigonométrica.

$$2\,\text{sen}^2 x - 7\,\text{sen}\,x + 3 = 0$$

Se reduce a una ecuación cuadrática, donde la variable es la función sen x.

$$2\,\text{sen}^2 x - 7\,\text{sen}\,x + 3 = 0$$

$$(2\,\text{sen}\,x - 1)(\text{sen}\,x + 3) = 0$$ se factorizó el trinomio

$2 \operatorname{sen} x - 1 = 0$ $\operatorname{sen} x + 3 = 0$

$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ $\operatorname{sen} x = -3$ imposible, pues: $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$

$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

luego, las soluciones son: $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ y $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. ■

Ejercicios (epígrafe 3)

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $4 + 4(4x - 9) = 8(x - 1) + 4(x - 3)$

b) $\frac{x + 2}{x} = 2$

c) $\frac{1}{2}(x - 1) = \frac{3}{4}x + \frac{5}{6}$

d) $2y - 5[3y - 7(4y - 9)] = 66$

e) $z - 2(1 - 3z) = 6 + 3(1 - z)$

f) $0{,}7x - 0{,}3 = 0{,}05x + 1$

g) $5(x + 1) - 3(x + 7) = 2x + 4$

h) $3(x - 5) - 7(3 - 2x) = 11 + 3(2x - 12)$

i) $(x + 1)(2x + 1) = (x + 3)(2x + 3) - 4$

j) $0{,}2(x - 1) + 0{,}5(3x - 9) = \frac{x}{3} - 2$

k) $(x + 1)(x - 1) - (x + 6)^2 = 1{,}5$

l) $1 - (x - 5)^2 - (4 + x)^2 = (1 + 2x)(\frac{1}{2} - x)$

m) $15y(y - 1) = (y + 2)^3 - (y - 3)^3$

n) $2(x^2 - 2{,}5) = (x + 1)^2 + (x - 2)^2$

ñ) $\frac{3y - 2}{5} = 4 - \frac{1}{2}y$

o) $\frac{x - 8}{7} + \frac{x - 3}{5} = -\frac{5}{2}$

p) $\frac{x + 4}{14} = 2 - \frac{x - 4}{6}$

q) $\frac{0{,}75 - x}{3} - \frac{0{,}47 + 2x}{5} = \frac{4{,}4x}{1{,}5}$

r) $\frac{3x + 5}{6} - \frac{5x + 4}{9} = 1 - \frac{x}{18}$

s) $3(x - 1) - \frac{2x - 3}{4} + \frac{11}{6} = \frac{4x - 1}{3} + x + \frac{1}{12}$

2. Halla el conjunto solución de:

a) $x(x + 9) = 2x - 12$

b) $(x + 2)(x - 3) + 9x = 3(x^2 - 5) - 1$

c) $(x + \frac{1}{2})(\frac{x}{8} + 2) = 0$

d) $2(x^2 + \frac{5}{2}\, x) = -2$

e) $4x(x + 2) - 5 = 12 - (x - 4)^2$

f) $(x + 2)^2 = 2x(x + 2) + 12$

g) $15x = 3(2 - 3x^2)$

h) $(3x - 5) - (5 - 3x) = 20$

i) $2x(3x + 5) = -(2x + 5)^2$

j) $9(a - 1)^2 + (a + 1)^2 = 6(a^2 - 1)$

k) $(5x - 4)^2 - (3x + 5)(2x - 1) = 20x(x - 2) + 27$

l) $(2t - 3)^2 - (t + 5) = 23$

m) $(2x + 1)^2 - 5(2x + 1) + 4 = 0$

n) $9t + 1 = 3(t^2 - 5) - (t - 3)(t + 2)$

ñ) $3(x - 2)^2 - \dfrac{3(2 - x^2)}{4} = x - \dfrac{3}{2}$

3. Determina los valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{5(x - 1)}{x + 1} = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$

b) $\dfrac{5}{x - 2} + \dfrac{x - 6}{(x - 2)^2} = 2$

c) $\dfrac{4}{3(x^2 - 1)} + \dfrac{5}{9} = \dfrac{5}{x + 1} - \dfrac{2}{3}$

d) $\dfrac{2}{x - 2} - \dfrac{3}{2x - 4} = \dfrac{x}{3x - 6} - \dfrac{1}{2}$

e) $\dfrac{7}{x + 1} + \dfrac{5}{x + 3} = \dfrac{70}{x^2 - 4x + 3}$

f) $\dfrac{2}{x^2 - x - 2} + \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{8}{x^2 - 1}$

g) $\dfrac{x + 1}{3x - 6} - \dfrac{x - 1}{2x + 4} = \dfrac{10 - x^2}{6x^2 - 24}$

h) $\dfrac{3x - 1}{2x - 1} + \dfrac{3x + 2}{2x + 1} = 3 - \dfrac{1}{4x^2 - 1}$

i) $5 - \dfrac{x - 13}{x} = \dfrac{10(5x + 3)}{x^2}$

j) $\left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)^2 + \dfrac{x + 1}{x - 1} = 6$

k) $\dfrac{3x + 1}{8} + \dfrac{x - 8}{3x - 1} = \dfrac{17}{12}$

l) $2\left(x - \frac{1}{x}\right) - 3\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0$

m) $\dfrac{x}{1 - \frac{1}{x}} + \dfrac{\frac{1}{x}}{1 - x} = 1 + x + \dfrac{1}{x}$

4. En las siguientes fórmulas, despejar las letras que se indican:

a) $m = \frac{n}{3}(r + p)$; despejar r

b) $V = \frac{1}{3}\pi r^2$; despejar r

c) $b = a + (c + 3)d$; despejar c

d) $s = \dfrac{t + 1}{t}$; despejar t

e) $e = v_o + \frac{1}{2}at^2$; despejar a

f) $E = \dfrac{F}{\frac{G}{3} - H}$; despejar H

g) $y = \sqrt{2x + 3}$; despejar x

h) $5 + \sqrt{3 - u} = 2p$; despejar u

i) $e^{2t} = 8$; despejar t

j) $\log x = a + 2$; despejar x

k) $a = \dfrac{e}{c + f}$; despejar c

l) $m = \dfrac{2np}{1 - 2p}$; despejar p

5. Determina el valor de λ para que se cumpla cada una de las siguientes igualdades:

a) $\dfrac{2a}{3} = \dfrac{4a^2}{\lambda}$

b) $\dfrac{9x^2}{5} = \dfrac{\lambda}{20a}$

c) $\dfrac{3(x - a)}{\lambda} = \dfrac{-3(x - a)}{x + a}$

d) $\dfrac{x - y}{6(x^2 - 2xy + y^2)} = \dfrac{\lambda}{12}$

e) $\dfrac{\sqrt{a^2 - 25}}{\lambda} = \dfrac{\sqrt{3a^2 + 15a}}{\sqrt{6a}}$

6. Para qué valores de k en las ecuaciones

$3x^2 - kx + 3 = 0$; $\dfrac{x(x - 2k)}{k + 9} = -k$ las soluciones son:

a) Reales. b) Complejas.

7. Sin resolver la ecuación, determina el carácter de las raíces de $2x^2 - 6x + 3m = 0$ si: a) $m = 2$ b) $m = \frac{3}{2}$.

8. Para qué $x \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes igualdades:

a) $3 + 5\sqrt{x} = 13$

b) $\sqrt{x+5} + 1 = x$

c) $\sqrt{x^2 - 5x - 13} - 1 = 0$

d) $4 + \sqrt{2x+3} = x - 2$

e) $\sqrt{x} + \sqrt{x+7} = 7$

f) $2\sqrt{x} - \sqrt{x+5} = 1$

g) $4x - 3\sqrt{x} = 27$

h) $\sqrt{x^2 - 7} + 1 = x$

i) $\dfrac{3+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}} = 2$

j) $\sqrt{x+9} = 1 + \sqrt{x}$

k) $\sqrt{x+2} = 2 + \sqrt{x-6}$

l) $3\sqrt{x} - \sqrt{5x-4} = 2$

m) $\sqrt{x+4} - \sqrt{5x+24} = 4$

n) $\sqrt{x+13} - \sqrt{x-2} = 3$

ñ) $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2} = \sqrt{4x+1}$

o) $\sqrt{x+10} + \sqrt{x+3} = \sqrt{4x+25}$

p) $\sqrt{x+8} = \sqrt{4x-3} - \sqrt{x+3}$

q) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} - \sqrt{3x-2} = 0$

r) $x - \sqrt{9 + x\sqrt{x^2-3}} = 3$

s) $1 - x = \sqrt{1 - x\sqrt{4 - 7x^2}}$

t) $(x+1)^{\frac{1}{2}} = 2 + (x-7)^{\frac{1}{2}}$

u) $\sqrt{x+5} - (x-2)^{\frac{1}{2}} = 1$

v) $\sqrt{\sqrt{x-3} - x} = 1$

w) $\sqrt{3 + \sqrt{4x+12}} = 3$

x) $\dfrac{\sqrt{2x+3}}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{4x-3}$

y) $\sqrt{\sqrt{3x-5} + \sqrt{3x-14}} = 3$

z) $\sqrt{x^2+9} + \dfrac{15}{\sqrt{x^2+9}} = 8$

9. Halla los puntos de intersección entre las gráficas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$; $q(x) = -x - 3$

b) $g(x) = \sqrt{x + 5}$; $h(x) = x - 7$

c) $y = \sqrt{2x - 1}$; $h(x) = \sqrt{x + 4}$

d) $y = \sqrt{3x^2 + x - 3}$; $y = \sqrt{2x^2 + 5x - 6}$

e) $h(x) = \sqrt{2x - 6}$; $p(x) = \sqrt{5x} - 3$

f) $y = 2\sqrt{x} - 1$; $y = \sqrt{2x + 1}$

10. Si $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x + 5}}{x + 1}$; $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 6}}{x + 1}$

a) Determina el dominio de f y g.

b) Halla los valores de x que satisfacen la condición $f(x) = g(x)$.

11. Demuestra que $y = \dfrac{-a^2}{2a + b}$ es solución de la ecuación $(y + a)^2 = y(y - b)$. Determina los valores que no puede tomar dicha solución.

12. Para qué valores de "a" y "b" la ecuación:

$(x - a)(x - b) = -(x + a)(x - 2a) = b(a - 2) + 3a$

tiene solución en el dominio de los números reales.

13. Determina los ceros de las siguientes funciones: (punto 15 del Memento)

a) $f(x) = 1 - 4\cos^2 x$

b) $g(x) = 4\,\mathrm{sen}^2 x + 1 - 4\,\mathrm{sen}\, x$

c) $h(x) = 2(1 - \mathrm{sen}^2 x) - 3\,\mathrm{sen}\, x$

d) $r(x) = \tan x\,(6\tan x + 11) - 10$

e) $s(x) = \mathrm{sen}\, x\,(1 - \mathrm{sen}\, x) + \dfrac{3}{4}$

f) $p(x) = \sqrt{2}\,(1 - \cos^2 x) + \cos x$

g) $n(x) = (1 - \cos^2 x)^2 + \cos^4 x - \dfrac{5}{8}$

h) $q(x) = \dfrac{\tan x + 1}{1 - \tan x} - \dfrac{2}{\tan x} + 1$

i) $t(x) = \dfrac{2\tan x}{1 + \tan^2 x} + \tan x - 2$

j) $v(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x$

14. Resuelve:

a) $7^{x+2} - 49^x = 0$ b) $8^{x-2} = 2\sqrt{2}$

c) $5 \cdot 3^{x+\frac{1}{2}} = \dfrac{5}{\sqrt[3]{3}}$ d) $2 \log x = \frac{1}{3} \log 2 + \frac{1}{3} \log 32$

e) $\log_2 (7x - 13) = 4 \log_2 3 - \log_2 27$

f) $\log (6x - 2) + \log 2 = 3 \log 2$

g) $4^{x^2} \cdot 64 = \dfrac{4^5}{\sqrt{4^7}}$

h) $3 \cdot 5^{2x^2 + 4x} = 3 \cdot 5^4$

i) $3^{2x} + 9 = 10 \cdot 3^x$

j) $10^{2x-4} = 0{,}1$

k) $\left[(\sqrt{2})^x \right]^{x+1} = \frac{1}{2}$

l) $\log (4x^2 - 15) = \cos \frac{3\pi}{2}$

m) $2^{x^2-8x} = \log_3 (\tan \frac{\pi}{4})$

n) $\left[(\frac{1}{2})^2 \right]^{2-x} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$

ñ) $\log (x - 2) = \log (9x - 18) + \log_3 3$

o) $\log (x - 2) + \log (x - 3) = 1 - \log 5$

p) $e^{\frac{2x}{2} - 1} = 1$

q) $\dfrac{\log (3x - 5)}{\log (3x^2 + 25)} = \frac{1}{2}$

r) $\log_2 (x + 5) - \log_2 x = 5 + \log_2 3$

s) $\log (x - 2) + \log (x - 3) = 1 - \log 5$

t) $\log_x (2x^2 - 4x + 3) = 2$

15. Determina ceros y polos de las siguientes funciones: (punto 15 del Memento).

a) $f(x) = \dfrac{x(x^2 - 1)}{x - 3}$ b) $g(y) = \dfrac{\log y}{y + 1}$

c) $t(x) = (x^2 - 4) \operatorname{sen} x$ d) $q(t) = \dfrac{(4 - t)\sqrt{t}}{4}$

e) $g(x) = \dfrac{x - 4}{x\sqrt{4 - x}}$ f) $p(m) = \dfrac{4 - 3m}{8\sqrt{m}}$

g) $q(n) = \dfrac{2n^2 - 3n - 14}{n^2 + 7n + 12}$ h) $h(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - 4x + 3}$

i) $f(z) = \dfrac{\sqrt{2z + 3} - 3}{\log\left[z(4z + 5) - 5\right]}$

j) $s(x) = \dfrac{\cos^2 x - \sqrt{5}\cos x}{\operatorname{sen} x + (\operatorname{sen} x - \sqrt{3})\operatorname{sen} x}$

k) $k(a) = \dfrac{a\sqrt{a + 3} - 2}{a^3 - 4a^2 + a + 6}$

l) $n(x) = \dfrac{(x + 1)e^{x^2 + 5x + 6}}{x^2 + 4}$

16. Halla el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) $1 - \sqrt{1 - x^2} = x^2$

b) $x^3 - 4x^2 + 6 + x = 0$

c) $2^{\log_2(x-3)} = 2x - 5$

d) $\log_2(x + 1) + \log_4(x + 1) = 0$

e) $x(x - 5) - x^2 + 3(x + 8) = 24$

f) $\dfrac{6}{x^2 - 1} - \dfrac{2}{x - 1} = 2 - \dfrac{x + 4}{x - 1}$

g) $\log_x(2x^2 - 7x + 12) = 2$

h) $\dfrac{\log(2x - 5)}{\log(x^2 - 8)} = 0{,}5$

i) $\dfrac{x - 2}{\sqrt{2x - 7}} = \sqrt{x - 4}$

j) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x\,(\operatorname{sen} x - \sqrt{2}) = 0$

k) $\tan^2 x + \sqrt{2}\tan x - 1 = 0$

17. Determina si existen los extremos locales de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x + 5$ b) $g(x) = x^2(x - 12)^2$

c) $p(x) = x\,e^x$ d) $q(x)\ \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$

e) $m(x) = \frac{1}{2}(2 - x)\sqrt{x}$ f) $n(x) = \frac{6 - 2x}{12\sqrt{x}}$

18. Según datos tomados del libro "La crisis económica y social del mundo" se estima que en los fondos marinos existen 6 300 millones de toneladas entre cobre, cobalto y manganeso. El número de toneladas de manganeso es 25 veces el de cobre y el número de toneladas de cobalto es la cuarta parte del cobre. ¿Cuántos millones de toneladas de cada uno de estos minerales hay?

19. Halla la amplitud de los ángulos interiores de un triángulo si se conoce que uno de estos es el doble del primero aumentado en 5 y el tercero es igual al triplo del primero disminuido en 11.

20. Calcula la longitud del lado de un cuadrado, sabiendo que si aumentara en 2,0 dm el área del cuadrado aumentaría en 35 dm^2.

21. El perímetro de una sala rectangular es de 56 m. Si el largo se hubiera disminuído en 2,0 m la sala sería cuadrada. Halla las dimensiones de la sala.

22. Una persona gasta en un viaje $\frac{1}{3}$ de los ahorros para sus vacaciones, después, en medicinas $\frac{1}{4}$ de lo que le quedaba y del sobrante gasta $\frac{1}{4}$ en libros, quedándole finalmente \$ 81, ¿cuánto tenía ahorrado?

23. Un viajero recorre cada día una distancia igual a $\frac{2}{3}$ de lo recorrido el día anterior. Si en tres días recorrió 57 km , ¿cuántos km recorrió el primer día?

24. En una cartera hay \$ 280 en billetes de \$ 5, \$ 10 y \$ 20. Al contar el número de billetes se determinó que eran 26, y que entre ellos había igual número de billetes de \$ 5 que de \$ 20, ¿cuántos billetes de cada denominación hay en la cartera?

25. Se divide un ángulo recto en tres ángulos desiguales, el segundo es el doble del primero y el tercero es igual al triplo del primero menos 12°. Calcula la am-

plitud de cada uno de los ángulos.

26. A un alumno se le dice un número y se le pide que haga las siguientes operaciones: "súmale 1, réstale 4 y multiplica los resultados". Se equivoca y procede del siguiente modo: le resta 1, le suma 4 y multiplica los resultados. Sin embargo, obtiene la misma solución que si no se hubiera equivocado. ¿Qué número se le dijo?

27. En un tonel hay agua. Se saca primero la tercera parte del total y luego la quinta parte de lo que le quedaba y aún quedan 16 litros. ¿Cuántos litros había al principio?

28. El año en que nació Lope de Vega (siglo XVI), está representado por un número de cuatro cifras cuya suma es 14, siendo la cifra de las decenas el triplo que la de las unidades. ¿En qué año nació Lope de Vega?

29. El año en que nació Miguel de Cervantes (siglo XVI), está representado por un número de cuatro cifras cuya suma es 17 y la cifra de las unidades de ese número excede en 3 a la de las decenas. ¿En qué año nació Cervantes?

30. Un triángulo tiene 3,0 m más de altura que de base y su área es 20 m^2. Halla su base y su altura.

31. Un rectángulo tiene 6,0 m más de largo que de ancho; si su área es de 16 m^2. ¿Cuál es su perímetro?

32. En un terreno rectangular, el largo es el doble del ancho. Si el largo se aumenta en 40 m y el ancho en 6,0 m el área se duplica. Halla las dimensiones del terreno.

33. Encuentra tres números consecutivos, sabiendo que el cociente que resulta al dividir su producto por su suma es 5.

34. El cociente que resulta al dividir 84 por cierto número excede en 5 a este número. Halla el número.

35. Encuentra cinco números consecutivos para los cuales se cumple que la suma de los cuadrados de los tres primeros sea igual a la suma de los cuadrados de los restantes.

36. La diferencia entre el valor numérico del perímetro y el área de un cuadrado es 3, siendo el área el número menor. Halla la longitud del lado del cuadrado.

37. Se quiere construir un cilindro tal que su diámetro sea $\frac{2}{3}$ de la altura y tenga un volumen de 15,7 dm^3. ¿Cuáles son las dimensiones del cilindro?

38. Demuestra que la suma de las dos raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ es $-\frac{b}{a}$ y su producto es $\frac{c}{a}$.

39. Halla el área del triángulo ABC rectángulo en C, cuyas longitudes de sus catetos x e y cumplen:

$$\frac{x-2}{x^2+8x+7} = \frac{2x-5}{x^2-49} - \frac{x-2}{x^2-6x-7} \quad ; \quad \frac{y}{y-2} - \frac{2y-1}{y^2+2y} = \frac{y^2+3}{y^2-4y}$$

40. En un edificio de apartamentos se necesitan hacer unos arreglos. El costo promedio es de \$ 200; los vecinos de 8 aptos no pueden colaborar. Prescindiendo de esos 8, el costo es de \$ 250 por cada uno. ¿Cuántos apartamientos hay?, ¿cuánto cuesta la obra?

41. El denominador de una fracción es 5 unidades mayor que el numerador. Si el denominador se aumenta en 7 unidades, el valor de la fracción es $\frac{1}{2}$. ¿Cuál es la fracción original?

42. En los Juegos Panamericanos celebrados en 1987, un atleta recorrió 72 km en un cierto tiempo. Si hubiera ido a 3km/h más, hubiera tardado 2 horas menos. ¿Cuál fue su velocidad?

43. Un depósito se puede llenar en $33\frac{1}{3}$ minutos por dos llaves abiertas simultáneamente. Si una de las llaves, trabajando sola, tarda 15 minutos más que la otra en llenar el depósito, ¿cuánto tiempo tardará cada una de las llaves, por separado, en llenar el depósito?

44. Halla dos números cuya suma sea 60 de tal manera que el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.

45. Descompón un número positivo dado (x) en dos sumandos de tal forma que su producto sea el mayor posible.

46. Se desea construir una caja abierta en forma de ortoedro de base cuadrada y con una capacidad de 108 L ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que tenga una superficie mínima?

4. Sistemas de ecuaciones

Los sistemas de ecuaciones que has estudiado son lineales o cuadráticos.

- Los sistemas lineales (de 2 ó 3 ecuaciones lineales) se resuelven transformándolos en una ecuación lineal en una sola variable, eliminando una de las variables y utilizando, por lo general, el método de sustitución o el de adición y sustracción (reducción).

  El significado geométrico de resolver un sistema de dos (tres) ecuaciones lineales es el de buscar los puntos de intersección, si existen, de las rectas (planos) representadas por sus ecuaciones. Cuando el sistema no tiene solución, no existen puntos de intersección.

- Los sistemas cuadráticos en dos variables se resuelven transformándolos en una ecuación cuadrática en una sola variable, eliminando una de ellas. Se utiliza, por lo general, el método de sustitución.

  El significado geométrico de resolver un sistema cuadrático es el de buscar los puntos de intersección, si existen, de las curvas representadas por sus ecuaciones. Cuando el sistema no tiene solución, no existen puntos de intersección.

Ejemplo 1

Resuelve analítica y gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -6x - 9y = 3 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = -5 \\ 3x + 6y = -15 \end{cases}$

Resolución

Son sistemas de dos ecuaciones lineales en dos variables.

a) A modo de ejemplo resolvamos este inciso por ambos métodos de resolución.

- Aplicando el método de reducción.

$$\begin{cases} 2x - y = 4 & (1) \\ x - 2y = -1 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} -4x + 2y = -8 & \\ \underline{x - 2y = -1} & \end{array}$$ multiplicando (1) por -2 para cancelar la variable y

$$-3x \quad = -9$$

$$x = 3$$

Sustituyendo $x = 3$ en (2):

$$3 - 2y = -1$$
$$-2y = -4$$
$$y = 2$$

La solución es: $x = 3$; $y = 2$.

- Aplicando el método de sustitución.

$$\begin{cases} 2x - y = 4 & (1) \\ x - 2y = -1 & (2) \end{cases}$$

despejando x en (2) tenemos: $x = 2y - 1$ (3)

sustituyendo (3) en (1) se tiene:

$$2(2y - 1) - y = 4$$
$$4y - 2 - y = 4$$
$$3y = 6$$
$$y = 2$$

sustituyendo $y = 2$ en (3) tenemos:

$$x = 2\cdot 2 - 1 = 3$$

la solución es: $x = 3$; $y = 2$.

Gráficamente tendremos (fig. 3):

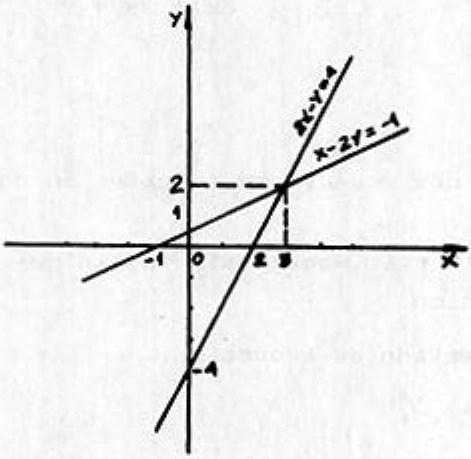


Fig. 3

Las rectas se intersecan en el punto (3;2) pues la solución del sistema es única.

Observa que las pendientes son diferentes, además, los cocientes de los coeficientes de las variables correspondientes son desiguales.

Para controlar tu trabajo puedes comprobar la solución hallada en ambas ecuaciones.

b) $\begin{cases} -6x - 9y = 3 & (1) \\ 2x + 3y = 2 & (2) \end{cases}$

$$\begin{array}{r} -2x - 3y = 1 \\ \underline{2x + 3y = 2} \\ 0 = 3 \end{array}$$

dividiendo (1) por 3 para eliminar la variable x

Esta igualdad equivale a $0y = 3$ y no existe ningún número real que la satisfaga.

Este sistema no tiene solución, luego, no existen puntos de intersección entre las rectas correspondientes.

Gráficamente tenemos (fig. 4):

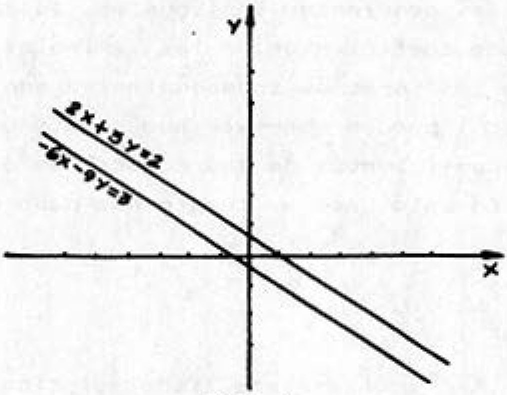


Fig. 4

Las rectas son paralelas, no hay puntos de intersección. Observa que las pendientes de estas rectas son iguales, además, los cocientes de los coeficientes de las variables correspondientes son iguales y desigual al de los términos independientes.

c) $\begin{cases} x + 2y = -5 & (1) \\ 3x + 6y = -15 & (2) \end{cases}$

$$\begin{array}{rl} -3x - 6y = 15 & \text{multiplicando (1) por -3 para eliminar} \\ \underline{3x + 6y = -15} & \text{la variable x} \\ 0 = 0 & \text{Esta igualdad significa } 0y = 0 \text{ que se} \\ & \text{satisface para todo } y \in \mathbb{R} \end{array}$$

Luego, el sistema tiene infinitas soluciones.

Gráficamente tenemos (fig. 5):

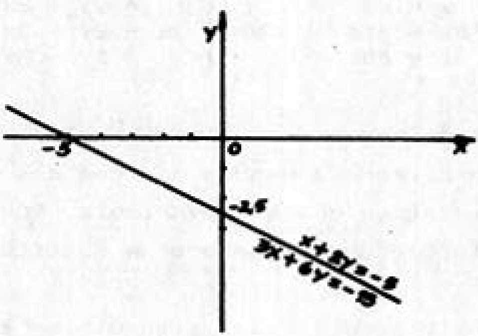


Fig. 5

Las rectas son coincidentes, hay infinitos puntos comunes.

Observa que las pendientes son iguales, además, los cocientes de los coeficientes de las variables correspondientes y de los términos independientes son iguales. ■

En el ejemplo 1 puedes observar que existe una relación entre los coeficientes de las ecuaciones del sistema y su solución. En este caso se cumple que dado el sistema:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

entonces si:

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ el sistema tiene solución única (rectas que se cortan).

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ el sistema no tiene solución (rectas paralelas).

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ el sistema tiene infinitas soluciones (rectas coincidentes).

Al intersecarse tres planos en el espacio, el sistema que se forma es lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas, el cual se resuelve reduciéndolo a un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas aplicando el método de reducción o el método de sustitución.

Ejemplo 2

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 5x - 2y + z = 24 \\ 2x + 5y - 2z = -14 \\ x - 4y + 3z = 26 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 5y + 2z = 3 \\ 3x - 2y - 3z = -1 \\ 3y - z = -6 \end{cases}$

Resolución

Son sistemas de tres ecuaciones lineales en tres variables. Se reduce primero a uno de dos con dos y después a una ecuación lineal en una sola variable. Puedes utilizar, según te sea más cómodo, el método de sustitución o el de reducción.

En este ejemplo se utilizará este último método.

a) $\begin{cases} 5x - 2y + z = 24 & (1) \\ 2x + 5y - 2z = -14 & (2) \\ x - 4y + 3z = 26 & (3) \end{cases}$

De las ecuaciones (1) y (2) eliminemos la variable z:

$$\begin{array}{r} 10x - 4y + 2z = \ 48 \\ \underline{2x + 5y - 2z = -14} \\ 12x + \ y \qquad = 34 \end{array} \quad (4)$$

multiplicando la ecuación (1) por 2

De las ecuaciones (1) y (3) eliminemos z

$$\begin{array}{r} -15x + 6y - 3z = -72 \\ \underline{x - 4y + 3z = 26} \\ -14x + 2y \qquad = -46 \end{array}$$

multiplicando (1) por -3

$$7x - y = 23 \quad (5)$$ dividiendo la ecuación por -2

Formemos con las ecuaciones (4) y (5) un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y resolvámoslo.

$$\left\{ \begin{array}{r} 12x + y = 34 \\ \underline{7x - y = 23} \end{array} \right.$$

$$19x \qquad = 57$$

$$x = 3$$

Sustituyendo x = 3 en (4):

$$36 + y = 34$$

$$y = -2$$

Sustituyendo x = 3 ; y = -2 en (1):

$$15 + 4 + z = 24$$

$$19 + z = 24$$

$$z = 5$$

La solución es: x = 3; y = -2; z = 5.

b) $\left\{ \begin{array}{rl} x + 5y + 2z = 3 & (1) \\ 3x - 2y - 3z = -1 & (2) \\ 3y - z = -6 & (3) \end{array} \right.$

Simultaneando las ecuaciones (1) y (2) tenemos:

$$\begin{array}{r} -3x - 15y - 6z = -9 \\ \underline{3x - 2y - 3z = -1} \\ -17y - 9z = -10 \end{array}$$

multiplicando (1) por -3

$$17y + 9z = 10 \quad (4)$$ multiplicando por -1

Formemos con las ecuaciones (3) y (4) un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left\{ \begin{array}{rl} 3y - z = -6 & (3) \\ 17y + 9z = 10 & (4) \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} 27y - 9z = -54 \\ \underline{17y + 9z = 10} \\ 44y \qquad = -44 \end{array}$$

multiplicando por 9

$$y = -1$$

Sustituyendo y = -1 en (3):

$$-3 - z = -6$$
$$z = 3$$

Sustituyendo $y = -1$; $z = 3$ en (1):

$$x - 5 + 6 = 3$$
$$x = 2$$

La solución es: $x = 2$; $y = -1$; $z = 3$. ■

Ejemplo 3

Resuelve analítica y gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} (x+3)^2 + y^2 = 9 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 = 2(y+1) \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 = 4y \\ 2y^2 = x \end{cases}$

Resolución

Son sistemas cuadráticos por lo que es conveniente utilizar el método de sustitución.

a) $\begin{cases} (x+3)^2 + y^2 = 9 & (1) \text{ ecuación de una circunferencia (punto 27 del Memento).} \\ x - y + 3 = 0 & (2) \text{ ecuación de una recta (punto 27 del Memento).} \end{cases}$

Despejemos la variable y en la ecuación (2):

$$y = x + 3 \quad (3)$$

Sustituyendo la ecuación (3) en (1):

$$(x+3)^2 + (x+3)^2 = 9$$
$$2(x+3)^2 = 9$$
$$2x^2 + 12x + 18 = 9$$
$$2x^2 + 12x + 9 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 72}}{4} = \frac{-12 \pm \sqrt{72}}{4} = \frac{-12 \pm 6\sqrt{2}}{4}$$

$$x_{1,2} = -3 \pm \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$x_1 = -3 + \frac{3}{2}\sqrt{2} = -3 + 1{,}5 \cdot 1{,}4 = -3 + 2{,}1 = -0{,}9$$

$$x_2 = -3 - 2{,}1 = -5{,}1$$

Sustituyendo $x_1 = -0{,}9$ en (3) se tiene:

$$y_1 = -0{,}9 + 3 = 2{,}1$$

Sustituyendo $x_2 = -5{,}1$ en (3) se tiene:

$$y_2 = -5{,}1 + 3 = -2{,}1$$

Las soluciones son: $(-0{,}9;\ 2{,}1)$ y $(-5{,}1;\ -2{,}1)$.

Gráficamente tenemos: (fig. 6)

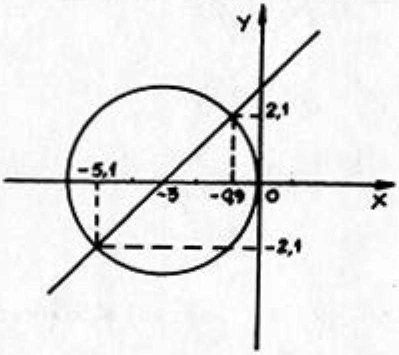


Fig. 6

b) $\begin{cases} x^2 = 2(y+1) & (1) \text{ ecuación de una parábola (punto 27 del Memento)} \\ 2x - y - 3 = 0 & (2) \end{cases}$

Despejemos la variable y en la ecuación (2):

$$y = 2x - 3 \quad (3)$$

Sustituyendo (3) en (1):

$$x^2 = 2(2x - 3 + 1)$$

$$x^2 = 2(2x - 2)$$

$$x^2 = 4x - 4$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 0$$

$$x = 2$$

Sustituyendo $x = 2$ en (3)

$$y = 2 \cdot 2 - 3 = 1$$

La solución es: $(2;1)$

Gráficamente tenemos (fig. 7):

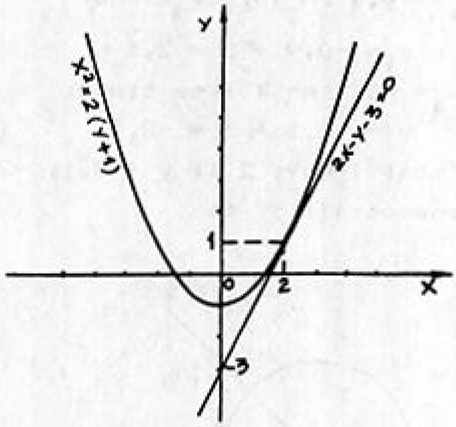


Fig. 7

c) $\begin{cases} x^2 = 4y & (1) \\ 2y^2 = x & (2) \end{cases}$

Como en la ecuación (2) la variable x está despejada, sustituyamos (2) en (1):

$$(2y^2)^2 = 4y$$
$$4y^4 = 4y$$
$$y^4 - y = 0$$
$$y(y^3 - 1) = 0$$
$$y_1 = 0 \qquad y^3 - 1 = 0$$
$$y_2 = 1$$

Sustituyendo $y_1 = 0$ en (2) se tiene: $x_1 = 0$

Sustituyendo $y_2 = 1$ en (2) se tiene: $x_2 = 2$

Luego, las soluciones son: (0; 0) y (2; 1)

Gráficamente tenemos (fig. 8):

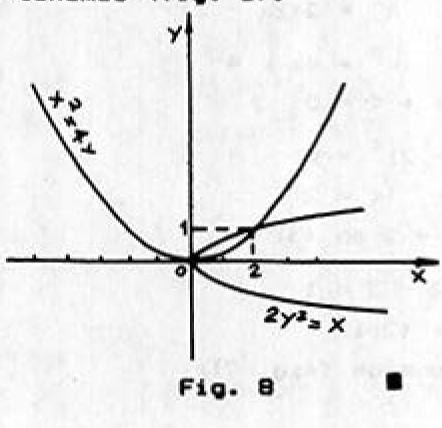


Fig. 8 ■

Ejercicios (epígrafe 4)

1. **Determina el par ordenado (x; y) que satisface los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ 4x + y = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 13 \\ 3x + y = 14 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 9x + 20y = 33 \\ 8x + 15y = 21 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 10x - 10y = 19 \\ 4x + 5y = 22 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 0{,}3x - y = 0 \\ 0{,}5x + 0{,}4y = 12{,}4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 0{,}2x + 0{,}3y = 8 \\ 0{,}5x - 0{,}4y = -3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + y = -16 \\ 7x = -6 - y \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 3x - 20 = -y \end{cases}$

i) $\begin{cases} 6x + 2(y + 3) = 0 \\ 3(x + y) = -11 \end{cases}$ j) $\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y = 3 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 4{,}25 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x = \frac{3}{2}y - 9 \\ y = \frac{3}{4}x + 3 \end{cases}$ l) $\begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 5 \\ x - y = 4 \end{cases}$

m) $\begin{cases} \frac{2x}{3} + y = 16 \\ x + y = 14 \end{cases}$ n) $\begin{cases} \frac{x}{9} + \frac{y}{7} = 10 \\ \frac{x}{3} + y = 50 \end{cases}$

ñ) $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 0 \\ 2(x - 3) - y = 10 \end{cases}$ o) $\begin{cases} \frac{x - y}{3} = x - 4 \\ \frac{x + y}{2} = x - y + \frac{1}{2} \end{cases}$

p) $\begin{cases} 5(x - 3) = 4x - 2(y + 3) \\ \frac{y}{2} = \frac{1}{2} + \frac{x}{3} \end{cases}$ q) $\begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{y}{3} = \frac{1}{6} \\ 2(x + y) - 3y = 7 \end{cases}$

r) $\begin{cases} \frac{3x - 2y}{3} - \frac{x - y}{2} = 2 \\ 2(x + y) - 3(x - y) = 10 \end{cases}$ s) $\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 18 \\ \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = -5 \end{cases}$

t) $\begin{cases} \frac{4}{x} - \frac{y}{4} = 1 \\ \frac{6}{x} + \frac{y}{6} = \frac{11}{3} \end{cases}$ u) $\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{3}{5y} = 4{,}2 \\ \frac{9}{2x} - \frac{6}{y} = 2{,}5 \end{cases}$

v) $\begin{cases} \frac{1}{x + y} - \frac{1}{x - y} = 2 \\ \frac{3}{x + y} + \frac{4}{x - y} = 7 \end{cases}$

2. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y + z = 15 \\ x - y + z = 5 \\ x - y - z = -9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x + y + 2z = 4 \\ x - 10y - 2z = 7 \\ 5x - 2y + z = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + 2z = 11 \\ 2x + y + z = 7 \\ 3x + 4y + z = 14 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 3y + 4z = 14 \\ x + 2y + z = 7 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 4y - z = 6 \\ 2x + 5y - 7z = -9 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2x - y + z = 7 \\ x + 2y - z = 6 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x - 4y = 6z - 16 \\ 4x - y = z + 5 \\ 3y + 2(z - 1) = x \end{cases}$ h) $\begin{cases} 6x + 2y - 5z = 13 \\ 3x + 3y - 2z = 13 \\ 7x + 5y - 3z = 26 \end{cases}$

i) $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{z}{3} = 3 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{2} = 13 \\ \frac{x}{6} - \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 0 \end{cases}$ j) $\begin{cases} x + \frac{1}{2}(y + z) = 5 \\ y + \frac{1}{2}(x + z) = 5 \\ z + \frac{1}{2}(x + y) = 5 \end{cases}$

3. Determina el conjunto solución de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x^2 = 12y \\ y = \frac{x}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + 1 = 2y \\ y - x = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y^2 - x^2 = 8 \\ y - 3x = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y^2 = 2x + 1 \\ y - x + 1 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} (y - 1)^2 = 8(x - 2) \\ y - x = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ y^2 + x = 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} y^2 = 4(x - 1) \\ y + 2 = 2x \end{cases}$ h) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 41 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{3} \\ y - 2x + 1 \end{cases}$ j) $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y + 1 = \frac{1}{2}x \end{cases}$

k) $\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y - 2x = 0 \end{cases}$ l) $\begin{cases} \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

m) $\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{5y^2}{9} = 1 \\ y = 3 - x \end{cases}$ n) $\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{(y - 2)^2}{16} = 1 \\ 4x - 5y = 6 \end{cases}$

ñ) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{81} = 1 \\ y = \dfrac{9}{10}x - 9 \end{cases}$ o) $\begin{cases} \dfrac{3(x-2)^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1 \\ y = 3 - \dfrac{1}{2}x \end{cases}$

p) $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x + y = b \end{cases}$ q) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 98 \\ x - y = 2 \end{cases}$

r) $\begin{cases} x = 2y - 5 \\ x^2 + y^2 = 2x + y \end{cases}$ s) $\begin{cases} 2x^2 - 3y = 23 \\ 3y^2 - 8x = 59 \end{cases}$

4. Determina, si existen, los puntos de intersección de las siguientes curvas dadas por sus ecuaciones. Identifica en cada caso dichas curvas (punto 27 del Memento).

a) $2x - 8 = y + 2$
$x = 2y + 8$

b) $x^2 = 4(y - 1)$
$2x - y = 2$

c) $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 16$
$x - 2y - 5 = 0$

d) $16x^2 + 25y^2 = 400$
$y = x - 5$

e) $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$
$2y = x - 2$

f) $4x + 3y = 7$
$3x - 4 = 10 - x - 3y$

g) $(y - 2)^2 = x - 2$
$(y - 2)^2 = x$

h) $4(x - 3)^2 + 9(y - 2)^2 = 36$
$2x + 3y - 6 = 0$

5. Calcula los vértices del triángulo cuyos lados están dados por las ecuaciones.

a) $4x - 3y + 12 = 0$; $5x + y - 4 = 0$; $x + 4y + 3 = 0$

b) $x - 3y + 4 = 0$; $3x - y - 4 = 0$; $x + y = 0$

c) $5y = 4x + 20$; $y - 4 = -2x$; $y = 0$

d) $2x + 7y = 29$; $x - 4y + 8 = 0$; $x + y = 2$

e) $y - 2 = 0$; $5x + 8y + 20 = 0$; $x = 4$

f) $y = 6x$; $x + y = 7$; $x - 6y = 0$

6. Determina la relación de posición entre las rectas dadas por sus ecuaciones sin resolver el sistema.

a) $2x + 5y = 3$; $3x - 5y - 4 = 0$

b) $12x - 9y - 6 = 0$; $-4x + 3y - 6 = 0$

c) $6x - 3y = 4$; $18x - 9y = 12$

d) $0{,}5x + 0{,}3y = 2$; $0{,}15x + 0{,}09y = 4$

e) $14x - 8y = 6$; $2x + 2y = 3$

f) $-4x + 5y - 3 = 0$; $8x - 10y = -6$

g) $3x + 7y - 21 = 0$; $-x + y - 7 = 0$

h) $2x + 5y = 9$; $-4x - 10y + 3 = 0$

i) $x + y + 4 = 0$; $0{,}5x + 0{,}5y = -2$

7. Verifica si se cortan o no en un mismo punto las tres rectas en cada caso:

a) $2x + 3y - 1 = 0$; $4x - 5y + 5 = 0$; $3x - y + 2 = 0$

b) $3x - y + 3 = 0$; $5x + 3y - 7 = 0$; $x - 2y - 4 = 0$

c) $2x - y + 1 = 0$; $x + 2y - 17 = 0$; $x + 2y - 3 = 0$

8. Determina para qué valores de a y b las dos rectas

1) $ax - 2y - 1 = 0$; $6x - 4y - b = 0$

2) $ax + 8y + b = 0$; $2x + ay - 1 = 0$

a) tienen un punto común

b) son paralelas

c) son coincidentes

9. ¿Cuál es la función del tipo $f(x) = ax^2 + bx + b$ para la cual $f(1) = 4$ y $f(-1) = b$.

10 Halla la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ definida en el intervalo $[-1;3]$, si conoces que en los extremos del intervalo toma el valor máximo 8, y $f(1) = 4$ es su valor mínimo.

11. El perímetro de un rectángulo es 28 cm. Si el duplo del lado mayor es igual al lado menor aumentado en 10, halla la longitud de los lados.

12. Se desea conocer las dimensiones de un rectángulo, sabiendo que si aumenta el lado mayor en 4 m y el menor disminuye en 2 m, el área del rectángulo aumenta en 8 m^2, mientras que si el lado mayor aumentara en 2 m y el menor disminuyera en 4 m, el área del rectángulo disminuiría en 48 m^2.

13. Si al numerador de una fracción se resta 1 , el valor de la fracción es $\frac{1}{3}$; y si al denominador se resta 2, el valor de la fracción es $\frac{1}{2}$. Halla la fracción.

14. Dos bolsas tienen 200 bolas. Si de la bolsa que tiene más bolas se sacan 15 y se echan en la otra, ambas tendrán la misma cantidad de bolas. ¿Cuántas tiene cada bolsa?.

15. Cierto número de personas alquiló un ómnibus para una

excursión. Si hubieran ido 10 personas más, cada una habría pagado 5 pesos menos, y si hubieran ido 6 personas menos, cada una habría pagado 5 pesos más. ¿Cuántas personas iban en la excursión y cuánto pagó cada una?.

16. Un número está compuesto por tres cifras cuya suma es el doble de la cifra de las decenas. La cifra de las centenas es $\frac{1}{2}$ de la de las unidades, y cuando se invierte el orden de sucesión de las cifras el número aumenta en 198. ¿De qué número se trata?
17. Tres cooperativas, A, B y C, están situadas formando triángulo. Para ir de A a B, pasando por C, se recorren 27 km ; el recorrido de B a C, pasando por A, es de 29 km, y el de C a A, pasando por B, es de 32 km . ¿Qué distancia hay entre cada dos cooperativas?
18. De un triángulo se conoce que la suma del mayor de sus ángulos con el mediano es 135° y la suma del mediano y el menor es 110°. Halla la amplitud de los ángulos del triángulo.
19. La suma de los valores absolûtos de las tres cifras de un número es 14. La cifra de las decenas es igual a la suma de las cifras de las centenas y las unidades. Si del número se resta 99 se obtiene otro número que se compone de las mismas cifras pero en orden inverso, ¿cuál es el número original?
20. Si del triplo de un número se resta el doble de otro, el resultado es 5; pero si se suma el duplo del segundo número al cuádruplo del primero, la suma es 9. ¿Cuáles son los números?
21. La suma de los cuadrados de las cifras de un número de dos cifras es igual a 10. Si del número buscado sustraemos 18, obtenemos un número escrito con esas mismas cifras pero de orden inverso. Halla el número.
22. Un rectángulo tiene 18 m de perímetro y 20 m^2 de superficie. Determina las dimensiones del mismo.
23. Determina los coeficientes a, b y c de modo que el trinomio $ax^2 + bx + c$ se anule al hacer $x = 3$ y $x = 2$, y

tome valor 12 para $x = 0$.

24. Si dividimos un número de dos cifras por la suma de estas, en el cociente obtenemos 7 y en el resto 6. Si ese mismo número de dos cifras se divide por el producto de sus cifras, en el cociente obtendremos 3 y el resto es un número igual a la suma de sus cifras. Halla el número.
25. La suma de dos números de dos cifras, escritos con cifras iguales pero de orden inverso es igual a 77. Halla dichos números si la suma de los cuadrados de sus cifras es 29.
26. ¿Qué valores deben tomar los coeficientes a y c en la ecuación $y = ax^2 + c$ que representa una función de segundo grado, para que la gráfica de dicha función pase por los puntos $M(-1;-3)$ y $P(3;0)$?.
27. La diferencia de dos números es a su producto como $1 : 24$ y la suma de estos números es a su diferencia como $5 : 1$ Halla estos números.
28. La suma de dos números de tres cifras, escritos con cifras iguales pero en orden inverso, es igual a 1252. Halla dichos números si la suma de sus cifras es igual a 14 y la suma de los cuadrados de ellas es 84.

8. Resolución de inecuaciones

A las desigualdades con variables en grados anteriores las hemos denominado inecuaciones.

Las inecuaciones del tipo $ax + b \leq 0$ ó $ax + b \geq 0$ con $a \neq 0$ se denominan lineales en una variable y se resuelven de forma análoga a las ecuaciones lineales, pero teniendo en cuenta que cuando se multiplica o divide en ambos miembros por un número negativo, el signo de la desigualdad se invierte.

$\boxed{\text{Ejemplo 1}}$

Resuelve las siguientes inecuaciones y representa gráficamente las soluciones:

a) $5x - 2 \geq \frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2} - 3x > 4$

c) $(2x + 5)(x - 1) \leq 2x(x - 6) + 10$

Resolución

a) $5x - 2 \geq \frac{1}{2}$

$$5x \geq \frac{1}{2} + 2$$

$$5x \geq \frac{5}{2}$$

$$x \geq \frac{1}{2}$$

La solución gráfica es: (fig. 9)

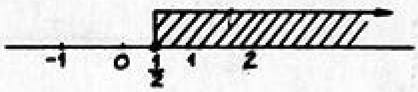


Fig. 9

b) $-\frac{1}{2} - 3x > 4$

$$-3x > 4 + \frac{1}{2}$$

$$-3x > \frac{9}{2}$$

$$x < -\frac{3}{2}$$ se invierte el signo de la desigualdad pues $-3<0$

La solución gráfica es: (fig. 10)

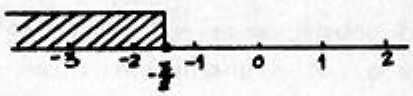


Fig. 10

c) $(2x + 5)(x - 1) \leq 2x(x - 6) + 10$

$$2x^2 + 3x - 5 \leq 2x^2 - 12x + 10$$

$$15x \leq 15$$

$$x \leq 1$$

La solución gráfica es: (fig. 11)

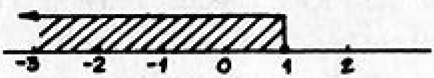


Fig. 11

■

Las inecuaciones del tipo

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad ó \quad ax^2 + bx + c \leq 0$$

con $a \neq 0$ se denominan cuadráticas y se resuelven descomponiendo en factores el trinomio $ax^2 + bx + c$ (que es equivalente a buscar sus ceros reales resolviendo la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$) y analizando el signo de ese trinomio en los intervalos determinados por los ceros.

Para determinar las soluciones debes tener en cuenta que si x_1 y x_2 $(x_1 < x_2)$ son ceros, entonces:

- Si $a > 0$, para los valores de x comprendidos entre los ceros el signo del trinomio es negativo y para los que están fuera de ese intervalo, el signo del trinomio es positivo (fig. 12)

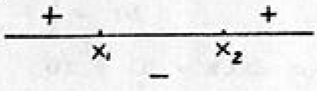


Fig. 12

- Si $a < 0$, el comportamiento es inverso al del caso anterior. (fig. 13)

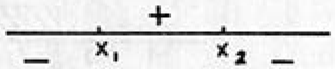


Fig. 13

Nota: En casos como este, podemos reducirlo al primero multiplicando la inecuación por -1.

En ambos casos si $x_1 = x_2$ (el discriminante del trinomio es cero) el signo del trinomio es mayor o igual que cero si $a > 0$ y menor o igual que cero si $a < 0$.

Si el trinomio no tiene descomposición en factores reales (el discriminante es menor que cero) su signo es constante e igual al signo de a y la solución es, todos los $x \in \mathbb{R}$ si la desigualdad dada coincide con el signo del trinomio o el conjunto vacío si es el contrario.

$\boxed{\text{Ejemplo 2}}$

Resuelve las siguientes inecuaciones y representa gráficamente la solución:

a) $x(x + 3) \geq 5x + 3$ b) $4(x^2 + 3) - 8x < 10x$

c) $x(x - 6) + 10 > 1$ d) $3x(x - 2) - (x - 6) < 23(x - 3)$

e) $x(x + 2) > -(7 + x)$

Resolución

En todos los casos al transformar se obtiene una ecuación cuadrática.

a) $x(x + 3) \geq 5x + 3$

$x^2 + 3x \geq 5x + 3$

$x^2 - 2x - 3 \geq 0$ Es una inecuación cuadrática.

$(x - 3)(x + 1) \geq 0$

Los ceros del trinomio son:

$x - 3 = 0 \qquad x + 1 = 0$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = -1$

Los signos del trinomio y la representación gráfica de las soluciones se representan en la figura 14,

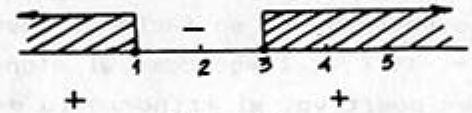


Fig. 14

luego la solución es: $x \in (-\infty;-1] \cup [3;+\infty)$

b) $4(x^2 + 3) - 8x < 10x$

$4x^2 + 12 - 18x < 0$

$4x^2 - 18x + 12 < 0$

$2x^2 - 9x + 6 < 0$

Para hallar los ceros del trinomio $2x^2 - 9x + 6$ apliquemos la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 48}}{4} = \frac{9 \pm \sqrt{33}}{4} = \frac{9 \pm 5,74}{4}$$

$$x_1 = \frac{9 + 5,74}{4} = 3,19$$

$$x_2 = \frac{9 - 5,74}{4} = 0,815$$

Los signos del trinomio y la representación gráfica de las soluciones se representan en la figura 15

Fig. 15

luego, la solución es $0,815 < x < 3,19$

c) $x(x - 6) + 10 > 1$

$x^2 - 6x + 9 > 0$

$(x - 3)^2 > 0$

Este trinomio es positivo para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$

d) $3x(x - 2) - (x - 6) < 23(x - 3)$

$3x^2 - 6x - x + 6 < 23x - 69$

$3x^2 - 30x + 75 < 0$

$x^2 - 10x + 25 < 0$

$(x - 5)^2 < 0$

Este trinomio es no negativo para todo $x \in \mathbb{R}$, luego la inecuación no tiene solución.

e) $x(x + 2) > -(7 + x)$

$$x^2 + 2x > -7 - x$$

$$x^2 + 3x + 7 > 0$$

Es imposible descomponer en factores puesto que el discriminante $D = -19 < 0$, luego como el signo de a (coeficiente de x^2) es positivo, el trinomio lo es también y además la desigualdad dada coincide con este signo (> 0), entonces la solución es $x \in \mathbb{R}$. ∎

Debes tener en cuenta que la afirmación anterior sólo es válida para polinomios de grado par.

Las *inecuaciones fraccionarias* son aquellas en las que la incógnita aparece en algún denominador.

Para resolver estas inecuaciones debe tenerse en cuenta lo siguiente:

- Transformar la inecuación algebraicamente hasta que resulte un cociente comparado con cero $\left[\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \text{ ó } \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0\right]$
- Descomponer en factores tanto el numerador como el denominador del cociente y simplificar, si es posible.
  En los ceros de cada uno de los factores obtenidos, si esos factores no aparecen elevados a un exponente par, es donde cambia de signo el cociente.
- Reflexionar mediante las reglas de los signos en el producto, cómo debe ser el signo de los factores para que el cociente sea mayor (menor) que cero. Cuando son muchos factores es conveniente representar ordenadamente, en un eje numérico los ceros del numerador y los del denominador y analizar el signo del cociente en cada uno de los intervalos determinados por los ceros.
  Esto último hay que hacerlo teniendo en cuenta que hay factores con signo constante o que se simplifican.
- Tener en cuenta, para la respuesta, el dominio de definición del término (cuando se simplifican factores hay que excluir del dominio y, por tanto, de la respuesta los ceros de esos factores que se simplifican) y si la desigualdad es estricta o no.

Ejemplo 3

Resuelve las siguientes desigualdades:

a) $\dfrac{x+3}{x-1} \geq 0$ b) $\dfrac{x^2+2x-8}{x+1} < 0$

c) $\dfrac{x^3-6x^2+9x}{x^2-3x-10} \geq 0$ d) $\dfrac{x^3+4x^2-5x}{x^2+7x+10} < 0$

e) $x - 10 \leq -\dfrac{36x-180}{x^2-3x-10}$

Resolución

a) $\dfrac{x+3}{x-1} \geq 0$

ceros del numerador: $x + 3 = 0$, $x = -3$

ceros del denominador: $x - 1 = 0$, $x = 1$

analicemos el signo de la fracción (fig. 16)

Fig. 16

Respuesta: $x \leq -3$ ó $x > 1$

b) $\dfrac{x^2+2x-8}{x-1} < 0$

$\dfrac{(x+4)(x-2)}{x+1} < 0$ descomponiendo en factores el numerador

ceros del numerador: $x + 4 = 0$, $x = -4$; $x - 2 = 0$, $x = 2$

ceros del denominador: $x + 1 = 0$, $x = -1$

Análisis del signo de la fracción (fig. 17)

Fig. 17

Respuesta: $(-\infty;-4)\cup(-1;2)$

c) $\dfrac{x^3-6x^2+9x}{x^2-3x-10} \geq 0$

$\dfrac{x(x^2-6x+9)}{(x-5)(x+2)} \geq 0$ descomponiendo en factores el numerador y el denominador

$$\frac{x(x-3)^2}{(x-5)(x+2)} \geq 0$$

ceros del numerador	ceros del denominador
$x = 0$; En $x = 3$ no hay cambio de signo por estar $x - 3$ elevado al cuadrado.	$x - 5 = 0$ $x + 2 = 0$ $x = 5$ $x = -2$

Análisis del signo de la fracción (fig. 18)

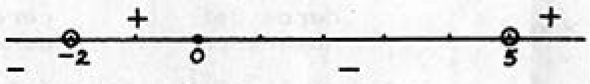


Fig. 18

Respuesta: $-2 < x \leq 0$ ó $x > 5$

d) $$\frac{x^3 + 4x - 5x}{x^2 + 7x + 10} < 0$$

$$\frac{x(x^2 + 4x - 5)}{(x+5)(x+2)} < 0$$

$$\frac{x(x+5)(x-1)}{(x+5)(x+2)} < 0$$

$$\frac{x(x-1)}{x+2} < 0$$

ceros del numerador	ceros del numerador
$x = 0$ $x - 1 = 0$ $x = 1$	$x + 2 = 0$ $x = -2$

Análisis del signo de la fracción (fig. 19)

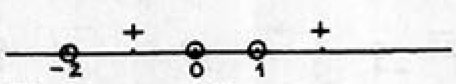


Fig. 19

Como hubo simplificación hay que eliminar de la respuesta el cero correspondiente al factor que se simplificó (-5), luego la respuesta es:

$$x < -2 \text{ , } x \neq -5 \quad ó \quad 0 < x < 1$$

e) $x - 10 \leq -\dfrac{36x - 180}{x^2 - 3x - 10}$

$$x - 10 + \frac{36x - 180}{x^2 - 3x - 10} \leq 0$$

$$\frac{(x - 10)(x^2 - 3x - 10) + 36x - 180}{x^2 - 3x - 10} \leq 0$$

$$\frac{x^3 - 13x^2 + 20x + 100 + 36x - 180}{x^2 - 3x - 10} \leq 0$$

$$\frac{x^3 - 13x^2 + 56x - 80}{x^2 - 3x - 10} \leq 0$$ se factorizó el numerador aplicando Ruffini.

$$\frac{(x - 4)^2 (x - 5)}{(x - 5)(x + 2)} \leq 0$$

$$\frac{(x - 4)^2}{x + 2} \leq 0$$

ceros del numerador	ceros del denominador
En $x = 4$ no hay cambio de signo.	$x + 2 = 0$ $x = -2$

Análisis del signo de la fracción (fig. 20)

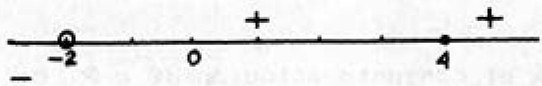


Fig. 20

Respuesta: $(-\infty; -2)$ ■

Ejercicios (epígrafe 5)

1. Resuelve las inecuaciones siguientes:

a) $3{,}2x - 6 > 2 - 0{,}8x$ b) $x(x - 3) + 5 < x(x - 5) + 3$

c) $7 - \frac{7x}{2} \geq 4(3 - x)$ d) $2x - 4 + 2(x+3) > 3 + 2(x+3)$

e) $21 - 7(2x-9) > 3x$ f) $5(3 - x) - 3(x - 4) < 16x$

g) $x + \frac{2}{5}(x - 5) \leq -x + 10$

h) $3x^2 + 2x < 2x\left[\frac{3}{2}x - 1\right] + 4$

i) $\frac{2x - 1}{3} + 1 - \frac{5x}{6} < 4x + \frac{7}{2}$

j) $x - \left[\frac{3x}{4} - \left(\frac{3x}{2} + \frac{3}{10}\right)\right] > 1$

k) $(x - 4)(x + 7) - (x - 0{,}5) \geq x^2 + 10(x - 0{,}1)$

l) $\frac{1}{3}(3 - 2x - \frac{1}{6}(4 - 5x) > \frac{1}{5}(x + 4) - 16$

2. Halla los valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen las siguientes inecuaciones:

a) $x^2 - 4x - 21 > 0$ b) $3x^2 - 11x + 6 \leq 0$

c) $(2x + 1)(2-x) \geq 0$ d) $x^2 - 4 \leq 0$

e) $\frac{1}{4} - x^2 > 0$ f) $4x^2 + 4x > -17$

g) $4x^2 + 4x + 1 \leq 0$

h) $(x + 5)(x - 5) \geq (3x - 1)^2 - 9x^2 - 15$

i) $\left(\frac{1}{2} + x\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 > 3$

j) $x^2 + (x + 2)(x - 2) \geq (x - 2)^2$

k) $(x + 4)^2 - (x - 5)^2 + (x - 3)^2 > 17x + 24$

l) $(4x - 1)(x - 2) - (2x - 1)(2x + 1) \leq 5$

m) $x^2 + \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 < \left(x + \frac{1}{4}\right)^2$

n) $(0{,}1 + x)^2 - (0{,}1 - x)^2 \geq -x^2$

ñ) $\frac{3x - 1}{6} - \frac{(2x + 2)(x - 5)}{8} > \frac{1}{24}$

o) $4x^2 + 6\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 > 2$

p) $x(x - 1) - 6 > x(5 - x)$ $(x > 0)$

q) $\frac{1}{4}x^2 < 3(x + 5)$

3. Determina el conjunto solución ($S \subset \mathbb{R}$) de las inecuaciones siguientes:

a) $\frac{x - 1}{x + 5} < 0$ b) $\frac{x^2 + x - 4}{x} < 1$

c) $\frac{3x^2 - 5x + 2}{5 - 2x} > 0$ d) $\frac{x^3 + x^2 + x}{9x^2 - 25} \geq 0$

e) $\frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 4x - 5} < 0$ f) $\frac{x^2 - 10x + 24}{x - 2} > 0$

g) $\frac{x^3 + 8x^2 + 7x}{x^2 - 8x + 9} \geq 0$ h) $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2(x^2 - 4)} > 0$

i) $\frac{1}{x + 1} + \frac{2}{x + 3} > \frac{3}{x + 2}$ j) $\frac{2}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} > 3$

k) $\frac{12x + 25}{x^2 - 4} \leq -4$ l) $\frac{x - 2}{x^2 - 3x + 2} \leq \frac{2x - 4}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$

m) $x + \frac{49x}{x^2 + 2x} < 12$

4. ¿Cuáles son los valores de $x \in \mathbb{R}$ que cumplen la condi-

ción:

a) $(3x - 2)(2x - 3) - (2x + 1)(x + 2) + 6x > (2x - 3)^2$

b) $(4x - 3)(x + 2) > x + 2$

c) $2(x - 1) - 3(2x - 3) > 6 - 3(x + 5)$

d) $4(5x - 4)^2 \leq 144$

e) $\frac{1}{6}(2x + 24) - 0,1(x + 1) > \frac{2x}{5} - 0,3(2 - 3x)$

f) $x^3 - 2x^2 + x > 0$

g) $(2x + 3)(x - 7) - (23x - 11) \leq 2(x + 8)(x - 2)$

h) $\sqrt{6}\; x^2 - 2\sqrt{2}\; x - \sqrt{3}\; x + 2 \leq 0$

i) $\frac{5x - 1}{4} - \frac{3x - 10}{2} < \frac{x - 1}{2} - \frac{1}{3}$

j) $\frac{1}{2} x^2 - 2x + \frac{3}{2} > x(x - 1) + 4$

k) $x(x - 3) - 2 \leq 3x - (x^2 + 2)$?

5. ¿Será $(-2; 1)$ subconjunto del conjunto de todas las soluciones de las siguientes desigualdades?

a) $7x - 3(2x + 3) > 2(x - 4)$

b) $\frac{x + 1}{4} < \frac{5}{2} - \frac{1 - 2x}{3}$ c) $x^2 - 4x + 3 > 0$

d) $x(x - 1) - 6 > 5x - x^2$

e) $x(x - 3) - 2 < 3x - (x^2 + 2)$

f) $3x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 2x - 8 > 0$

g) $\frac{5x^2 - 5x}{2x^2 + 3x - 2} \leq 0$ h) $\frac{x^2 + 3x - 10}{x(2x - 3) - 2} > 0$

6. Dadas las funciones $f(x) = 10 + 3x - x^2$, $g(x) = \frac{2x - 1}{x - 1}$ y $p(x) = 1$, determina los valores de x tales que:

a) $f(x) > 0$ b) $g(x) < 0$ c) $g(x) \geq p(x)$

7. Analiza los intervalos de monotonía y los extremos locales si existen de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{2} x^2 - 5x$ b) $g(x) = 2x^3 + 7x^2 - 9$

c) $h(x) = \frac{1}{4} x^4 + \frac{4}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 - 6x$

d) $k(x) = (3x + 1)(x - 2)$

e) $f(x) = (x + 5)(2x - 1) - 2x^2$

f) $i(x) = 3x^2 + \left[x - \frac{1}{3}\right](x + 1)$

g) $n(x) = \dfrac{2x}{9x - 1}$ h) $j(x) = \dfrac{3x^2 + 3}{5x}$

i) $p(x) = \dfrac{x^2 - 8}{x + 3}$ j) $m(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x - 2}$

8. ¿Cuál es el dominio de las siguientes funciones?

a) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ b) $g(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x + 1}}$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$ d) $p(x) = x\sqrt{2 - x^2}$

e) $k(x) = \log_3\left(4 - \dfrac{x}{2}\right)$ f) $g(x) = \sqrt{x + \dfrac{1}{4}} + 2x - 1$

g) $m(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$ h) $n(x) = \sqrt{x^3 - 2x}$

i) $q(x) = \sqrt{\dfrac{6(x^2 - 1) - 5x}{x^2 - 12x + 36}}$

j) $h(x) = \log_2\left[\dfrac{6x^2 + 7x - 3}{x^2 - 25}\right]$

k) $f(x) = \log\left[x - 3 - \dfrac{x}{x - 4}\right]$

9. Determina todos los valores reales negativos que cumplen la condición:

a) $x - \dfrac{1}{x} > 0$ b) $x + \dfrac{1}{x} > 0$

10. ¿Qué valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que $x \in [-1;1]$ cumplen la condición $x^2 - 2x \geq 0$?

11. Para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se cumple:

a) $2^{8x-2} \geq 1$ b) $\log(3x + 1) \leq 0$

c) $\log(x^2 - 2x - 3) > 0$ d) $3^{x^2 - 7x + 10} > 81$

e) $\log_2(2x^2 - 5x + 5) \geq 3$ f) $2^{x^3 + 6x^2 + 11x} \geq \dfrac{1}{64}$

12. Dadas las siguientes expresiones

$$A = \frac{x^2 - 81}{x^2 - 3x - 54} \quad ; \quad B = \frac{4x + 8}{x^2 + x - 30} - \frac{2}{x + 6}$$

$$C = \frac{x^2 + 5x + 6}{x - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x} \quad ; \quad D = \frac{x^2 + 6x + 9}{2x - 1}$$

determina los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que:

a) $[A : B]x \geq 0$ b) $C : D \leq 0$

6. Identidades y ecuaciones trigonométricas

Una ecuación de la forma $f(x) = g(x)$ es una identidad si se satisface para cada x del dominio. Los números reales que no pertenecen al dominio se llaman valores inadmisibles. Las identidades más conocidas por ti son las identidades trigonométricas.

Para demostrar que una cierta igualdad es una identidad trigonométrica no existen reglas de validez general que lo permitan, no obstante te recordamos que debes tener en cuenta:

1. Iniciar la demostración por el miembro que ofrece mayor posibilidad para transformar en el otro. Si no puedes decidirte aplica el procedimiento de trabajar en ambos miembros.
2. Si es posible, utiliza la descomposición en factores y la simplificación.
3. Si no encuentras un camino propicio para empezar las transformaciones, reduce todas las funciones trigonométricas a senos y cosenos.
4. Ten en cuenta que todas las transformaciones efectuadas sean válidas en el dominio de la identidad.

Te será útil recordar algunas identidades trigonométricas que estudiaste en grados anteriores y que se consideran básicas para el trabajo con otras identidades y ecuaciones trigonométricas, las que resumimos a continuación:

- $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$
- $\tan x \cdot \cot x = 1$
- $\cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$
- $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$
- $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $\operatorname{sen} (\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$
- $\cos (\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$

Ejemplo 1

Si $\text{sen}\, x = \frac{3}{4}$ y $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$, calcula: cos x, tan x, sen 2x

Resolución

. $\cos x = \pm\sqrt{1 - \text{sen}^2 x} = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \pm\sqrt{1 - \frac{9}{16}}$

$= \pm\sqrt{\frac{7}{16}} = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$

como $x \in$ II C entonces $\cos x < 0$ por tanto $\cos x = -\frac{\sqrt{7}}{4}$

. $\tan x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \frac{\frac{3}{4}}{-\frac{\sqrt{7}}{4}} = -\frac{3}{\sqrt{7}} = -\frac{3\sqrt{7}}{7}$

. $\text{sen}\, 2x = 2\,\text{sen}\, x \cos x = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{7}}{8}$ ■

Ejemplo 2

Demuestra las siguientes identidades para los válores admisibles de la variable:

a) $(\text{sen}\, \alpha + \cos \alpha)^2 + (\text{sen}\, \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$

b) $\text{sen}^2 x\, (1 + \cot^2 x) = 1$

c) $\tan \theta = \frac{\text{sen}\, 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$

d) $\cos \beta + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \beta\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \beta\right) = 0$

Resolución

a) $(\text{sen}\, \alpha + \cos \alpha)^2 + (\text{sen}\, \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$

$(\text{sen}\, \alpha + \cos \alpha)^2 + (\text{sen}\, \alpha - \cos \alpha)^2$

$= \text{sen}^2\alpha + 2\text{sen}\, \alpha \cos \alpha + \cos^2\alpha + \text{sen}^2 x - 2\text{sen}\, \alpha \cos \alpha +$

$+ \cos^2\alpha$

$= 1 + 1 = 2$

b) $\text{sen}^2 x\, (1 + \cot^2 x) = 1$

$\text{sen}^2 x\, (1 + \cot^2 x) = \text{sen}^2 x + \text{sen}\, x^2 \cot^2 x$

$= \text{sen}^2 x + \text{sen}^2 x \cdot \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x}$

$= \text{sen}^2 x + \cos^2 x$

$= 1$

c) $\tan \theta = \frac{\text{sen}\, 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$

$$\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{1 + \cos 2\theta} = \frac{2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{1 + \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta} = \frac{2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{\cos^2\theta + \cos^2\theta}$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{2 \cos^2\theta} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

d) $\cos \beta + \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \beta\right) + \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \beta\right) = 0$

$$\cos \beta + \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \beta\right) + \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \beta\right)$$

$$= \cos \beta + \cos \frac{2\pi}{3} \cos \beta + \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \operatorname{sen} \beta + \cos \frac{2\pi}{3} \cos \beta -$$

$$- \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \operatorname{sen} \beta$$

$$= \cos \beta + 2 \cos \frac{2\pi}{3} \cos \beta$$

$$= \cos \beta \left[1 + 2 \cos \frac{2\pi}{3} \right]$$

$$= \cos \beta \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{2}\right)$$

$$= \cos \beta \,(1 - 1) = 0$$

■

En el epígrafe 3 trabajaste ecuaciones trigonométricas sencillas. Ahora, resolverás ecuaciones trigonométricas donde es necesario aplicar identidades.

Para resolver estas ecuaciones debes tener en cuenta los siguientes pasos:

1. Expresar todas las funciones trigonométricas que aparecen en la ecuación con el mismo ángulo aplicando identidades.
2. Expresar todas las funciones trigonométricas en término de una sola función.
3. Resolver la ecuación haciendo transformaciones, considerando como incógnita la función trigonométrica en que quedó expresada la ecuación (factorizando o de cualquier otra forma).
4. Determinar los valores de x que satisfacen las ecuaciones transformadas.

Ejemplo 3

Determina el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ b) $5 \cos^2 x = 9 - 9 \text{ sen } x$

c) $\text{sen } x + \cos x = \sqrt{2}$ d) $3 \cot^2 x - \dfrac{1}{\text{sen}^2 x} = 1$

Resolución

a) $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$

$\cos^2 x - \text{sen}^2 x + \cos x = 0$ Expresando las funciones trig. con el mismo ángulo

$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + \cos x + 1 = 0$ Expresando la ec. en término de una sola función

$\cos^2 x - 1 + \cos^2 x + \cos x + 1 = 0$

$2 \cos^2 x + \cos x = 0$ Resolviendo la ec. por factorización

$\cos x \; (2 \cos x + 1) = 0$

$\cos x = 0$

soluciones principales: $x_1 = \dfrac{\pi}{2}$; $x_2 = \dfrac{3\pi}{2}$

$2 \cos x + 1 = 0$

$\cos x = -\dfrac{1}{2}$ Utilizando las fórmulas de reducción obtenemos las soluciones en el intervalo fundamental (valor auxiliar $\pi/3$)

soluciones principales: $x_3 = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$

$x_4 = \pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3}$

$$S = \left\{ (2k + 1)\frac{\pi}{2} \; ; \; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \; ; \; \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Nota: Se ha denominado solución principal a las que pertenecen al intervalo fundamental $0 \leq x \leq 2\pi$

b) $5 \cos^2 x = 9 - 9 \text{ sen } x$ Como las funciones trigonométricas tienen el mismo ángulo, la expresamos en término de una sola función

$5(1 - \text{sen}^2 x) = 9 - 9 \text{ sen } x$

$5 - 5 \text{ sen}^2 x = 9 - 9 \text{ sen } x$

$5 \text{ sen}^2 x - 9 \text{ sen } x + 4 = 0$

$(5 \text{ sen } x - 4)(\text{sen } x - 1) = 0$

$5 \text{ sen } x - 4 = 0$

$\text{sen } x = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$ **las soluciones principales son:**

$x_1 = 53{,}1^\circ$ $x_2 = 126{,}9^\circ$

$\text{sen } x - 1 = 0$

$\text{sen } x = 1$ **la solución principal es:** $x_3 = 90^\circ$

$$S = \left\{ 53{,}1^\circ + 360^\circ k \ ; \ 126{,}9^\circ + 360^\circ k \ ; \ 90^\circ + 360^\circ k \ ; \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

c) $\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2}$

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{2} - \cos x$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros para utilizar las identidades, esta elevación puede introducir raíces extrañas.

$$\operatorname{sen}^2 x = \left(\sqrt{2} - \cos x\right)^2$$

$$1 - \cos^2 x = 2 - 2\sqrt{2}\cos x + \cos^2 x$$

$$2\cos^2 x - 2\sqrt{2}\cos x + 1 = 0$$

Trinomio cuadrado perfecto

$$\left(\sqrt{2}\cos x - 1\right)^2 = 0$$

$$\sqrt{2}\cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Las soluciones principales son:

$$x_1 = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

Comprobación

para $x_1 = \frac{\pi}{4}$

MI: $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ MD: $\sqrt{2}$

MI = MD

para $x_2 = \frac{7\pi}{4}$

MI: $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4} + \cos\frac{7\pi}{4} = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

MD: $\sqrt{2}$ MI $\neq$ MD

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

d) $3\cot^2 x - \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = 1$

$$\frac{3\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = 1$$

Multiplicando por $\operatorname{sen}^2 x$ para eliminar denominadores (esta eliminación de denominadores puede introducir raíces extrañas)

$$3\cos^2 x - 1 = \operatorname{sen}^2 x$$

$$3\cos^2 x - 1 = 1 - \cos^2 x$$

$$4\cos^2 x = 2$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Las soluciones principales son:

$$x_1 = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad x_2 = \frac{3\pi}{4} \quad ; \quad x_3 = \frac{5\pi}{4} \quad ; \quad x_4 = \frac{7\pi}{4}$$

Como los valores de x encontrados no anulan el factor por el que hemos multiplicado la ecuación ($\text{sen}^2 x$), entonces todos estos valores son solución.

$$S = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi \; ; \; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \; ; \; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \; ; \; \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}\right\}_{\blacksquare}$$

Observa que en los incisos c y d del ejemplo anterior al elevar al cuadrado o eliminar denominadores se pueden introducir raíces extrañas, por lo que debes de comprobar de alguna forma las soluciones.

Ejercicios (epígrafe 6)

1. Calcula sen 2x, cos 2x y tan 2x si:

   a) $\text{sen } x = \frac{3}{4}$; $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ b) $\cos x = \frac{2}{3}$; $\text{sen } x < 0$

   c) $\tan x = 2$; $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ d) $\text{sen } x = \frac{1}{2}$; $\cos x < 0$

   e) $\cos x = -\frac{1}{3}$; $\tan x > 0$ f) $\tan x = 1{,}5$; $0 < x < \pi$

2. Demuestra las siguientes identidades para los valores admisibles de la variable.

   a) $(\text{sen } \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \text{sen } 2\alpha$

   b) $\cot^2 x = \cos^2 x + (\cot x \cos x)^2$

   c) $\text{sen}^3 x + \cos^3 x = (\text{sen } x + \cos x)(1 - \text{sen } x \cos x)$

   d) $\frac{1 + \cos 2x}{2} = \cos^2 x$

   e) $\cos 2\beta = \cos^4 \beta - \text{sen}^4 \beta$

   f) $\cos (60^\circ + \alpha) = \frac{\cos \alpha - \sqrt{3} \text{ sen } \alpha}{2}$

   g) $\text{sen } (x + 45^\circ) = \frac{\text{sen } x + \cos x}{\sqrt{2}}$

   h) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\text{sen } 2\alpha} = \tan \alpha$

   i) $\frac{\cos 2\gamma + \text{sen}^2 \gamma}{1 - \cos^2 \gamma} = \cot^2 \gamma$

   j) $3(1 - 2 \text{ sen}^2 \theta) = 3 \text{ sen } \left[2\theta + \frac{\pi}{2}\right]$

k) $\frac{1}{2}$ sen 2x cot x − sen²x = cos 2x

l) $\dfrac{\text{sen } 2x}{2 - 2\,\text{sen}^2 x} + \cot x = \dfrac{2}{\text{sen } 2x}$

m) $2\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha + (\text{sen }\alpha + \cos\alpha)^2 = 2 + \text{sen } 2\alpha$

n) $\cot x + \cot y = \dfrac{\text{sen }(x + y)}{\text{sen } x \text{ sen } y}$

ñ) $\dfrac{\cos\alpha}{1 + \text{sen }\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{1 - \text{sen }\alpha} = \dfrac{2}{\cos\alpha}$

o) $\dfrac{\dfrac{1}{\cos x} + \tan x}{\dfrac{1}{1 - \text{sen } x}} = \cos x$

p) $\dfrac{\tan^2 x + 1}{2\cos(-x) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \dfrac{1}{\cos^3 x}$

3. **Sean las funciones f y g. Demuestra que para todo valor admisible de la variable, se verifica que $f(x) = g(x)$.**

a) $f(x) = \text{sen } 2x$; $g(x) = \dfrac{-2\cos(\pi - x) - 2\cos^3 x}{\text{sen } x}$

b) $f(x) = \dfrac{\frac{1}{4}\text{sen}^2 2x - \text{sen}^4 x}{1 - \cos^2 x}$; $g(x) = \cos 2x$

c) $f(x) = \dfrac{2}{\text{sen } 2x} - \tan x$; $g(x) = \dfrac{2\cos^2 x}{\text{sen } 2x}$

d) $f(x) = \text{sen } 2x \cos x + 2\,\text{sen}^3 x$; $g(x) = 2\sqrt{1 - \cos^2 x}$

e) $f(x) = \cos 2x$; $g(x) = \dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

f) $f(x) = \cot x$; $g(x) = \dfrac{\text{sen } 2x}{1 - \cos 2x}$

g) $f(x) = \text{sen } 3x$; $g(x) = 4\,\text{sen } x \text{ sen}(60^\circ + x)\text{ sen}(60^\circ - x)$

h) $f(x) = 2\tan x - \text{sen } 2x$; $g(x) = \dfrac{2\,\text{sen}^2 x}{\cot x}$

i) $f(x) = \tan 3x$; $g(x) = \tan x \tan(60^\circ + x)\tan(60^\circ - x)$

4. **Prueba que:**

a) $\text{sen}(x + y)\text{ sen}(x - y) = \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 y$

b) $\dfrac{2\text{sen } x \cos(2\pi - x) - 2\text{sen } x \cos^3 x}{\text{sen } 2x \cos^2 x} = \tan^2 x \quad \left(x \neq \frac{k\pi}{2}\right)$

c) $\dfrac{2\text{sen }\beta - 2\text{sen}^3\beta}{\cos\beta} + \cos^2\beta - \text{sen}^2\beta = \text{sen } 2\beta + \cos 2\beta$

$\left(x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$

g) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $g(x) = 3 \tan^2 x$

h) $f(x) = \operatorname{sen} x$; $g(x) = \cot x$

i) $f(x) = \tan x$; $g(x) = \cos x$

j) $f(x) = \operatorname{sen} x$; $g(x) = \cos x$

k) $f(x) = \operatorname{sen} x$; $g(x) = \cos \frac{x}{2}$

l) $f(x) = 5 \operatorname{sen} x - 2$; $g(x) = \cos 2x + 3 \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x$

m) $f(x) = \cos 2x + \operatorname{sen} 2x$; $g(x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x$

n) $f(x) = \tan^3 x + \tan^2 x$; $g(x) = 3 + 3 \tan x$.

8. Halla los ceros de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3 \cos^2 x + 9 \cos x - 12$

b) $g(x) = \tan^2 x - \frac{3}{2} \tan x - 1$

c) $g(x) = 2 \cos^2 x + \operatorname{sen} x - 2$

d) $p(x) = 4 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x$

e) $q(x) = \cos 2x + 5$ c 2

73

f) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x$

g) $g(x) = \cos^2 x - 4 \operatorname{sen} x + 5 \operatorname{sen}^2 x$

h) $p(x) = 4 \cos 2x + 3 \cos x - 1$

i) $q(x) = \operatorname{sen} x - \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cos x$

j) $f(x) = \cos 2x + 2(3 \cos^2 x + \cos x)$

k) $p(x) = \operatorname{sen} 2x + 3 \cos x$

l) $f(x) = 2 \operatorname{sen}^3 x - \cos 2x - \operatorname{sen} x$

9. Demuestra que si $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$; $g(x) = \cos^2 x$; $h(x) = \tan x$ (punto 17 del Memento).

a) $f'(x) + g'(x) = 0$

b) $f'(x) - g'(x) = 2 \operatorname{sen} 2x$

c) $h'(x) \cdot f(x) = \tan^2 x$

d) $f'(x) \cdot g'(x) + 4 \operatorname{sen}^2 x = 4 \operatorname{sen}^4 x$

e) $h'(x) - g(x) = h^2(x) + f(x)$

7. Repaso de propiedades geométricas elementales

Pares de ángulos

- En dos rectas que se cortan se forman pares de ángulos adyacentes y pares de ángulos opuestos por el vértice (fig. 21).
  Los ángulos adyacentes suman 180° y los opuestos por el vértice son iguales. Por ejemplo, en la figura 21 α y β son adyacentes y α y γ opuestos por el vértice.

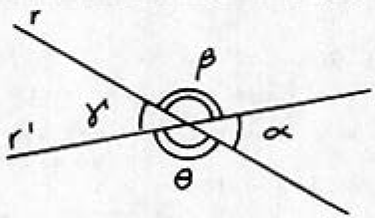


Fig. 21

- En dos rectas paralelas cortadas por una secante se forman pares de ángulos correspondientes, alternos y conjugados (fig.22).
  Los correspondientes y los alternos son iguales. Los conjugados suman 180°.
  Por ejemplo en la figura 22 el $\angle 1$ es correspondiente con el $\angle 2$, alterno con el $\angle 4$ y conjugado con el $\angle 3$.

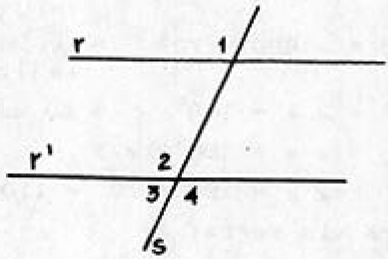


Fig. 22

En general puede concluirse que si dos rectas paralelas son cortadas por una secante se cumple:

- Si la secante es perpendicular a las paralelas todos los ángulos que se forman son iguales.
- Si la secante no es perpendicular a las paralelas
  - todos los ángulos agudos (obtusos) que se forman son iguales.
  - los pares de ángulos formados por uno agudo y uno obtuso suman 180°.

Ejemplo 1

Si AB || CD (fig. 23)

$\angle 1 = 40^\circ$

BD: bisectriz del $\angle$ ABC.

Halla: $\angle x$

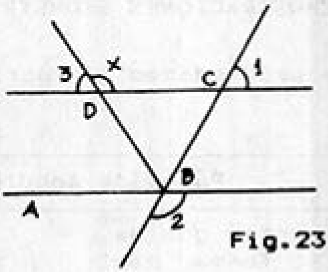


Fig.23

Resolución

Una vía para resolver este ejercicio es:

$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ por ser conjugados entre AB || CD y BC secante

$\angle 2 = 180^\circ - \angle 1$

$\angle 2 = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$

$\angle ABC = \angle 2 = 140^\circ$ por opuestos por el vértice.

$\angle ABD = \frac{\angle ABC}{2} = 70^\circ$ por ser BD bisectriz del $\angle$ ABC. (punto 21 del Memento)

$\angle 3 = \angle ABD = 70^\circ$ por ser correspondientes entre AB || CD y BD secante.

$\angle 3 + \angle x = 180^\circ$ por adyacentes.

$\angle x = 180^\circ - \angle 3$

$\angle x = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

Otra vía sería:

$\angle x = \angle BCD + \angle DBC$ (1) por ángulo exterior al $\triangle$BCD.

Calculemos los ángulos BCD y DBC

$\angle BCD = \angle 1 = 40^\circ$ por ángulos opuestos por el vértice

$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ por ser conjugados entre CD || AB y CB secante.

$\angle 2 = 180^\circ - \angle 1$

$\angle 2 = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$

$\angle ABC = \angle 2 = 140^\circ$ por opuestos por el vértice.

$\angle DBC = \frac{\angle ABC}{2} = 70^\circ$ por ser BD bisectriz del $\angle$ ABC.

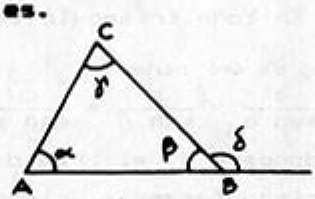
Sustituyendo $\angle$ DBC y $\angle$ BCD en (1) se tiene:

$\angle x = 70^\circ + 40^\circ = 110^\circ$ ■

Observa que en el ejemplo anterior se ha utilizado una propiedad de los ángulos en el triángulo, la de los ángulos exteriores, que se incluye en el resumen que aparece a continuación.

TRIÁNGULOS

- En todo triángulo se cumple que cada lado es menor que la suma de los otros dos y menor que su diferencia (desigualdad triangular) y a lados (ángulos) iguales se oponen ángulos (lados) iguales.
- En un triángulo hay ángulos interiores y exteriores. Los interiores suman 180° y cada exterior es adyacente con un interior e igual a la suma de los dos interiores no adyacentes a él (fig. 24)

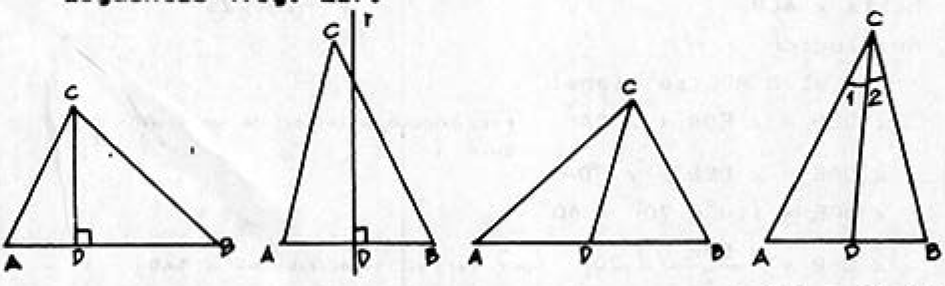


$\alpha + \beta + \gamma = 180°$ (INTERIORES)
$\delta = \alpha + \gamma$ (EXTERIOR)

Fig. 24

- Los triángulos según sus ángulos se clasifican en:
  - *acutángulo*: tiene todos sus ángulos agudos,
  - *obtusángulo*: tiene un ángulo obtuso,
  - *rectángulo*: tiene un ángulo recto,

  también se clasifican según sus lados en :
  - *escaleno*: sus tres lados son desiguales,
  - *isósceles*: dos lados son iguales (en consecuencia los ángulos que se oponen a esos lados son iguales),
  - *equilátero*: sus tres lados son iguales (en consecuencia sus tres ángulos son iguales y con una de amplitud de 60°).
- En todo triángulo se pueden trazar las *rectas notables* siguentes (fig. 25):



$\overline{CD}$ ALTURA SOBRE $\overline{AB}$
$\overline{CD} \perp \overline{AB}$

r: MEDIATRIZ DE $\overline{AB}$
$r \perp \overline{AB}$
$\overline{AD} = \overline{DB}$

$\overline{CD}$: MEDIANA SOBRE $\overline{AB}$
$\overline{AD} = \overline{DB}$

$\overline{CD}$: BISECTRIZ DEL $\measuredangle ACB$
$\measuredangle 1 = \measuredangle 2$

Fig. 25

- En los triángulos isósceles, la altura sobre la base coincide con la bisectriz, la mediana y la mediatriz. Si es equilátero, la altura sobre cada lado coincide con las restantes rectas notables.
- En todo triángulo se cumple (fig. 26):

. *ley de los senos*

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma} = 2R$$

donde R es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.

. *ley de los cosenos*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

En particular el triángulo es rectángulo si y solo si

$a^2 = b^2 + c^2$ (*Teorema de Pitágoras*) (fig. 27)

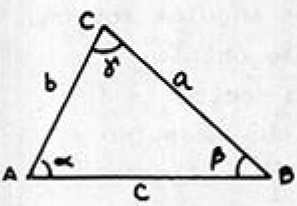


Fig. 26

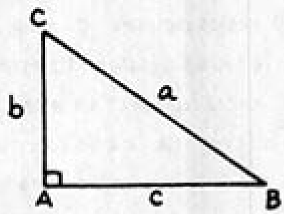


Fig.27

Ejemplo 2

En la figura 28 se tiene:

AC bisectriz del ∠ DAB

∠ DEB = 110°

∠ ADE = 70°

∠ CBA = 60°

halla ∠ ACB

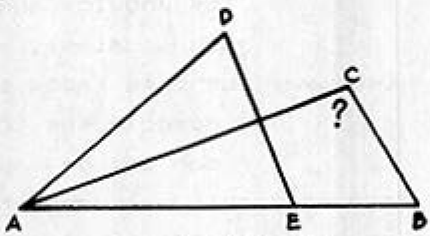


Fig. 28

Resolucion

En el Δ ADE se tiene:

∠ DEB = ∠ EDA + ∠ DAE por ángulo exterior de un triángulo.

∠ DAE = ∠ DEB − ∠ EDA

∠ DAE = 110° − 70° = 40°

$\angle \text{CAB} = \dfrac{\angle \text{DAE}}{2} = 20°$ por ser AC bisectriz del ∠ DAB

luego en el Δ ABC tenemos que:

∠ ACB = 180° − (∠ CBA + ∠ CAB) por suma de ángulos interiores de un triángulo

∠ ACB = 180° − (60° + 20°) = 100° ■

Ejemplo 3

En el $\triangle$ ABC isósceles de base AB (fig. 29) se tiene:

$\overline{AC} = 10$ cm

$\overline{BD} = 4,0$ cm

$\angle ACB = 28,8°$

Halla $\overline{CD}$ y $\angle$ CDB

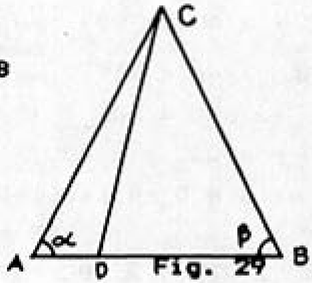


Fig. 29

Resolución

En el $\triangle$ ABC isósceles de base $\overline{AB}$ se tiene:

$\overline{BC} = \overline{AC} = 10$ cm y $\alpha = \beta$

$2\beta + \angle ACB = 180°$ por suma de ángulos interiores

$$\beta = \frac{180° - \angle ACB}{2} = \frac{180° - 28,8°}{2} = 75,6°$$

En el $\triangle$ BCD se tiene:

$\overline{CD}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{BC}\cdot\overline{BD}\cos\beta$ ley de los cosenos

$\overline{CD}^2 = 4^2 + 10^2 - 2\cdot4\cdot10\cos 75,6°$

$\overline{CD}^2 = 16 + 100 - 80\cdot0,249$

$\overline{CD}^2 = 116 - 19,9$

$\overline{CD}^2 = 96,1$

$\overline{CD} = 9,8$ cm

Aplicando ley de los senos se tiene:

$$\frac{\overline{BC}}{\text{sen} \angle CDB} = \frac{\overline{CD}}{\text{sen}\,\beta} \quad \text{luego}$$

$$\text{sen} \angle CDB = \frac{\overline{BC}\,\text{sen}\,\beta}{\overline{CD}} = \frac{10\,\text{sen}\,75,6°}{9,8} = \frac{10\cdot0,969}{9,8}$$

$= 0,9888$

entonces $\angle CDB = 81,4° \approx 81°$ ■

Ejemplo 4

En el $\triangle$ ABC rectángulo en B (fig. 30) se tiene:

$\triangle$ BCD isósceles de base $\overline{BC}$

$\angle ACB = 40°$.

Prueba que: $\overline{BD}$ es mediana sobre el lado $\overline{AC}$.

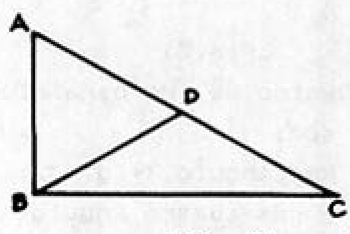


Fig. 30

Resolución

Hay que probar que $\overline{AD} = \overline{DC}$

En el $\triangle$ ABC rectángulo en B tenemos:

$\angle$ BAC + $\angle$ ACB = 90° por ángulos agudos de un triángulo rectángulo

$\angle$ BAC + 40°= 90° por datos

$\angle$ BAC = 50°

$\angle$ ABD + $\angle$ DBC = $\angle$ ABC por suma de ángulos

Como el $\triangle$ BCD es isósceles de base $\overline{BC}$ entonces:

$\angle$ DBC = $\angle$ ACB = 40°

ahora $\angle$ ABD + $\angle$ DBC = 90° por ser el $\triangle$ ABC rectángulo en B

$\angle$ ABD + 40°= 90°

$\angle$ ABD = 50°

luego en el $\triangle$ ABD se tiene que:

$\overline{AD} = \overline{DB}$ por ser lados que se oponen a ángulos iguales en un triángulo.

como $\overline{DB} = \overline{DC}$ por ser el $\triangle$ BCD isósceles de base $\overline{BC}$

por tanto $\overline{AD} = \overline{DC}$ como se quería. ■

CUADRILÁTEROS

Al igual que en los triángulos los cuadriláteros convexos también tienen su clasificación, pero, en este caso atendiendo al paralelismo de sus lados.

Estos cuadriláteros se clasifican en: *paralelogramos trapecios y trapezoides*

- Los paralelogramos (fig. 31) cumplen:

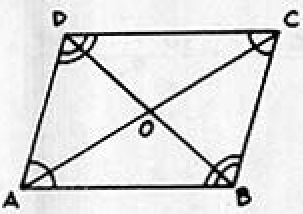


Fig.31

  - sus lados opuestos son paralelos e iguales,
  - sus ángulos opuestos son iguales y los consecutivos suman 180°,
  - las diagonales se cortan en su punto medio.

Dentro de los paralelogramos existen casos especiales que son:

- Rectángulo (fig. 32)
  - sus cuatro ángulos son rectos,
  - sus diagonales son iguales.

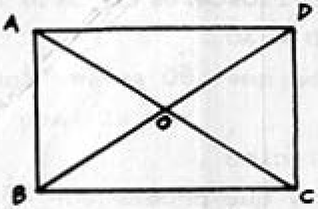


Fig. 32

● Rombo (fig. 33)

- sus cuatro lados son iguales,
- sus diagonales son perpendiculares y bisecan los ángulos de donde parten.

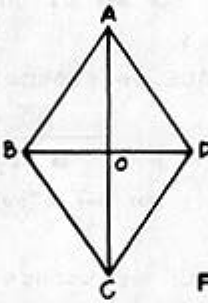


Fig. 33

El *cuadrado* es un paralelogramo que es a la vez rectángulo y rombo.

● Los trapecios (fig. 34) son los cuadriláteros convexos que tienen al menos un par de lados paralelos que se denominan bases.

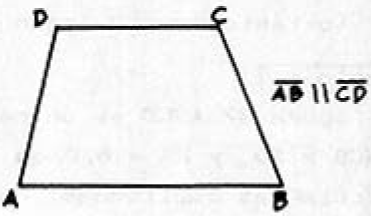


Fig. 34

● Los trapezoides (fig. 35) son los cuadriláteros convexos que no tienen ningún par de lados paralelos

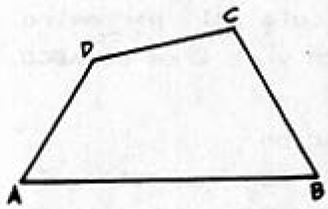


Fig. 35

Ejemplo 5

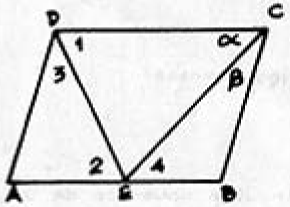


Fig. 36

Sea ABCD (fig. 36) un paralelogramo. $\overline{DE}$ es bisectriz del ∠ ADC y E punto medio de $\overline{AB}$. Prueba que:

$\overline{CE}$ es bisectriz del ∠ DCB

Resolución

Para probar que $\overline{CE}$ es bisectriz del ∠ DCB basta con probar que $\alpha = \beta$ (fig. 36)

∠ 1 = ∠ 2 por alternos entre AB ∥ CD y DE secante.

$\angle 1 = \angle 3$ por ser $\overline{DE}$ bisectriz del $\angle$ ADC.

luego $\angle 2 = \angle 3$

por lo que Δ ADE es isósceles de base $\overline{DE}$ entonces

$$\overline{AD} = \overline{AE}$$

pero $\overline{AD} = \overline{BC}$ por lados opuestos de un paralelogramo.

$\overline{AE} = \overline{BE}$ por ser E punto medio de $\overline{AB}$.

luego $\overline{BC} = \overline{BE}$

por lo que Δ BCE es isósceles de base $\overline{EC}$ de aquí que:

$\beta = \angle 4$

pero $\alpha = \angle 4$ por alternos entre AB || CD y CE secante.

por lo tanto $\alpha = \beta$ como se quería. ■

Ejemplo 6

En la figura 37 ABCD es un rectángulo y ANCM es un rombo. Si $\angle$ NCB = 30° y $\overline{NB}$ = 6,0 cm

a) Calcula las amplitudes de los ángulos interiores del rombo.

b) Calcula el perímetro de ANCM y el área de ABCD.

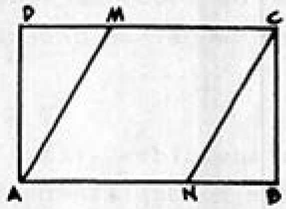


Fig. 37

Resolución

El Δ BCN es rectángulo en B por ser el $\angle$ BCN un ángulo del rectángulo ABCD luego:

a) $\angle BNC + \angle NCB = 90^\circ$ por suma de los ángulo agudos de un triángulo rectángulo.

$\angle BNC + 30^\circ = 90^\circ$

$\angle BNC = 60^\circ$

$\angle ANC + \angle BNC = 180^\circ$ por ángulos adyacentes.

$\angle ANC + 60^\circ = 180^\circ$

$\angle ANC = 120^\circ$

luego $\angle AMC = \angle ANC = 120^\circ$ por ángulos opuestos de un rombo.

$\angle MAN + \angle ANC = 180^\circ$ por ser ángulos consecutivos de un rombo.

$\angle MAN + 120^\circ = 180^\circ$

$\angle MAN = 60^\circ$

luego $\angle MCN = \angle MAN = 60^\circ$ por ángulos opuestos de un rombo

b) Para hallar el perímetro del rombo ANCM basta con hallar uno de sus lados y multiplicar por cuatro (punto 24 del Memento).

En el Δ BCN tenemos:

$$\overline{CN} = \frac{\overline{NB}}{\text{sen} \measuredangle NCB} = \frac{6}{\text{sen } 30^\circ} = \frac{6}{0,5} = 12$$

luego $p_{ANCM} = 4 \cdot \overline{CN} = 4 \cdot 12 = 48$; $P_{ANCM} = 48$ cm

Para hallar el área del rectángulo ABCD debemos hallar la longitud de dos lados consecutivos (punto 25 del Memento),

$\overline{AB} = \overline{AN} + \overline{NB}$ por suma de segmentos.

$= 12 + 6 = 18$ cm

$\overline{CB} = \sqrt{\overline{CN}^2 - \overline{NB}^2}$ por teoerma de Pitágoras.

$= \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{144 - 36} = \sqrt{108} = 10,\ 39$

luego $A_{ABCD} = \overline{AB} \cdot \overline{CB} = 18 \cdot 10,39 = 187,02$; $A_{ABCD} \cong 1,9 \cdot 10^2$ cm^2 ■

ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

El ángulo que tiene su vértice en el centro de la circunferencia se llama *ángulo central* (fig. 38) y el ángulo que tiene su vértice en la circunferencia y los lados la intersecan en otros dos puntos se llama *ángulo inscrito* en la circunferencia.

- La amplitud de todo ángulo inscrito es igual a la mitad del ángulo central (arco) que le corresponde (fig. 39)

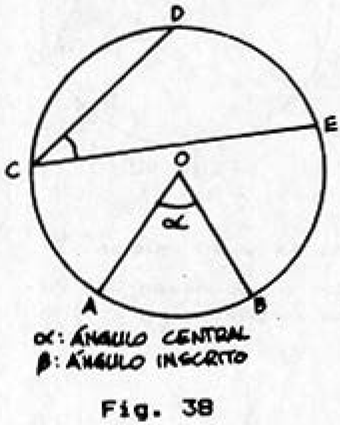


Fig. 38

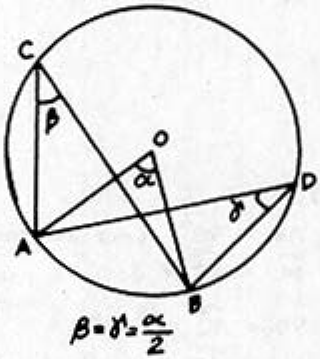


Fig. 39

- Todo ángulo central o inscrito en una circunferencia determina un arco y, por tanto, una cuerda, luego si dos ángulos centrales o inscritos son iguales las cuerdas correspondientes también lo son y viceversa (fig.39 y 40)
- Si un ángulo está inscrito en un diametro (la mayor de todas las cuerdas) este ángulo mide $90°$ (fig. 41).

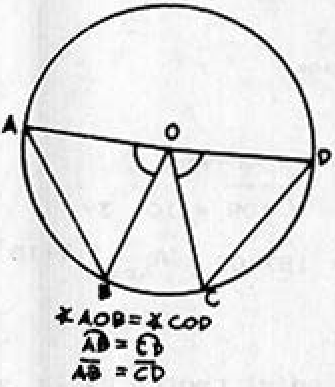


Fig. 40

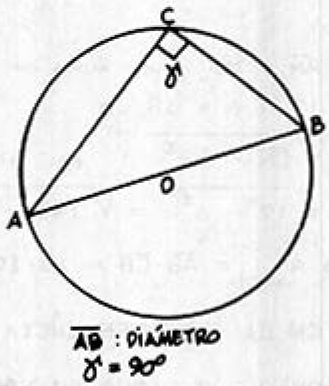


Fig. 41

Ejemplo 7

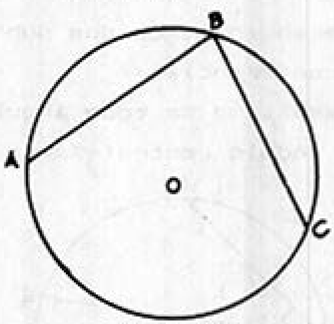


Fig. 42

En la figura 42 las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son iguales, $\overset{\frown}{AB} = 98°$ Calcula $\overset{\frown}{AC}$.

Resolución

$\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AB} = 98°$ por ser las cuerdas AB y BC iguales.

$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AC} = 360°$ porque estos arcos suman una circunferencia completa.

$98° + 98° + \overset{\frown}{AC} = 360°$

$\overset{\frown}{AC} = 360° - 196°$

$\overset{\frown}{AC} = 164°$ ■

Ejemplo 8

En la figura 43 el $\angle$ ACB está inscrito en la circunferencia de centro O

$\angle ACB = 35^\circ$

$OB \perp AC$

calcula $\angle OAD$

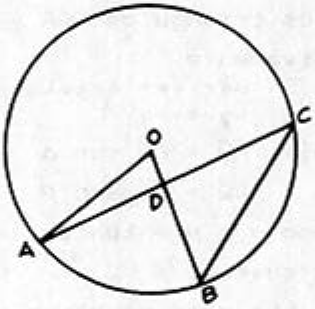


Fig. 43

Resolución

$\angle ACB = \dfrac{\angle AOB}{2}$ por relación entre ángulo central inscrito.

$\angle AOB = 2 \cdot \angle ACB$

$\angle AOB = 2 \cdot 35^\circ$

$\angle AOB = 70^\circ$

Como $OB \perp AC$ el Δ OAD es rectángulo en D, luego

$\angle AOB + \angle OAD = 90^\circ$ por suma de ángulos agudos de un triángulo rectángulo.

$70^\circ + \angle OAD = 90^\circ$

$\angle OAD = 20^\circ$ ■

Ejemplo 9

En la figura 44 las rectas AQ y BQ son tangentes a la circunferencia de centro O en los puntos A y B. Si $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB}$, prueba que: $\overline{AQ} = \overline{BQ}$

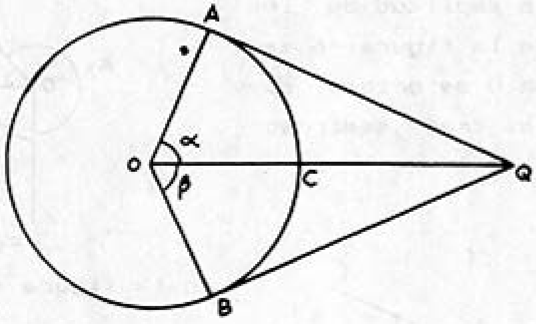


Fig. 44

Resolución

$\left.\begin{array}{l}\overline{OA} \perp \overline{AQ} \\ \overline{OB} \perp \overline{BQ}\end{array}\right\}$ porque toda tangente es perpendicular al radio en el punto de tangencia.

luego los triángulos OQA y OQB son rectángulos en A y B respectivamente.

$\alpha = \beta$ por ser ángulos centrales que tienen arcos iguales.

entonces $\overline{AQ} = \overline{OQ}$ sen α (punto 28 del Memento)

$\overline{BQ} = \overline{OQ}$ sen β

pero como $\alpha = \beta$ entonces sen α = sen β, por tanto, $\overline{AQ} = \overline{BQ}$ como se quería. ■

Otra vía para resolver el ejemplo anterior es utilizando la igualdad de triángulos que trataremos en el siguiente epígrafe.

Ejercicios (epígrafe 7)

1. Si $\angle$ AOC = $\angle$ BOD (fig. 45). Prueba que: $\alpha = \beta$

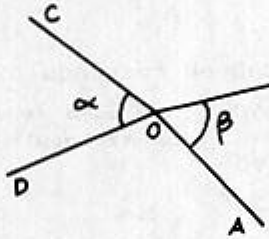


Fig. 45

2. En un par de ángulos adyacentes, uno tiene cinco veces la amplitud del otro. Indica cuánto mide cada uno.

3. Calcula la amplitud de los ángulos de la figura 46 sabiendo que O es origen común de las tres semirrectas dadas.

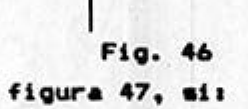


Fig. 46

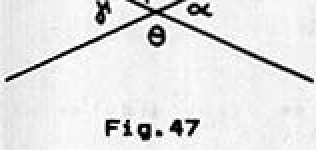
4. 

Fig.47

En la figura 47, si: $\beta = \dfrac{5\alpha + 80^\circ}{2}$. calcula α, β, γ y θ

5. Demuestra que si dos ángulos son adyacentes, sus bisectrices son perpendiculares.

6. En la figura 48, determina todos los pares de ángulos adyacentes, opuestos por el vértice, correspondientes, alternos y conjugados que hay y calcula sus amplitudes si: $\angle 3 = 60°$

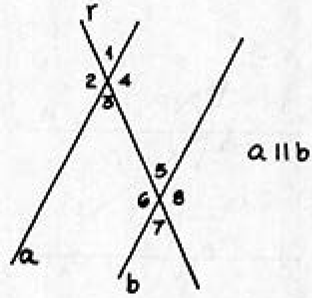


Fig. 48

7. Dada la amplitud del ángulo doblemente marcado en la figura 49, donde AB ‖ CD y MN secante. Calcula las amplitudes de los restantes ángulos señalados.

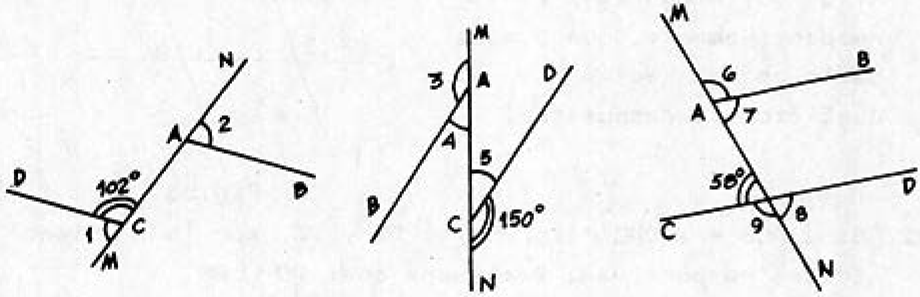


Fig. 49

8. En la figura 50, AB ‖ DE, CB ‖ FG y $\angle B = 45°$. Calcula: α, β, γ, θ

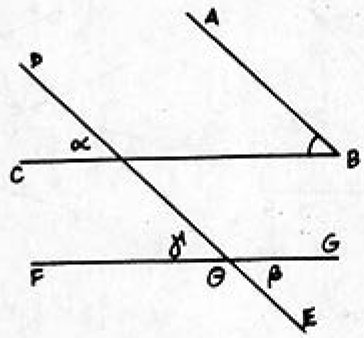


Fig. 50

9. Si AB ‖ CD figura 51, AE: bisectriz del $\angle$ BAD y $\angle ADC = 40°$. Halla α.

10. Si $\alpha = \alpha'$, AD || BC, BE || AC (fig.52).
Prueba que: $\beta = \beta'$

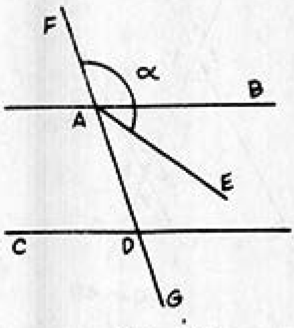


Fig.51

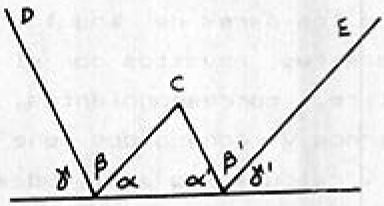


Fig. 52

11. Si los ángulos γ y δ (fig. 53) miden 104° y 76° respectivamente, qué puedes decir de las rectas r y s. Justifica tu respuesta.

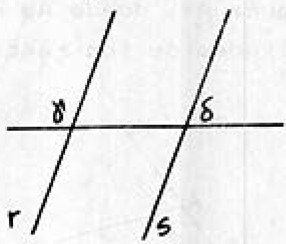


Fig.53

12. Si ∠ AOB = ∠ OBC (fig. 54) , DO y BE son sus bisectrices respectivas. Demuestra que: DO || BE.

13. Si ∠ 7 + ∠ 9 = 180° y ∠ 2 = ∠ 8 (fig.55). Prueba que: AB || CD y EB || FG.

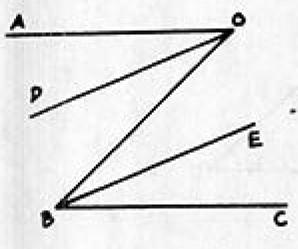


Fig. 54

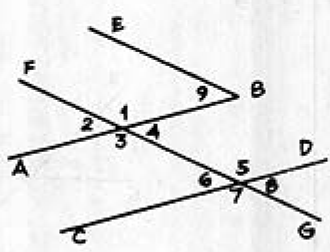


Fig.55

14. Determina si es posible construir un triángulo con tres segmentos que miden respectivamente:

a) 5, 12 y 4 cm b) 23, 36 y 50 cm

c) 21,4; 8,13 y 17 m d) 4, 8 y 13 cm

15. En la figura 56, D es un punto cualquiera interior al Δ ABC, l, m y n sus distancias a los vértices. Prueba que:

$a + b + c < 2(l + m + n)$

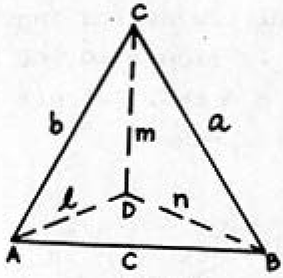


Fig.56

16. Los ángulos interiores de un triángulo miden respectivamente x, 2x , 3x. Calcula las amplitudes de los mismos.
17. ¿Cuántos ángulos rectos puede tener un triángulo? ¿Cuántos obtusos? ¿Por qué?
18. En un triángulo rectángulo, uno de los ángulos agudos es el doble del otro. ¿Cuánto miden los ángulos agudos de dicho triángulo?
19. Si los ángulos agudos de un triángulo rectángulo miden respectivamente $2x + 30^\circ$ y $3x + 15^\circ$, calcula el valor de dichos ángulos.
20. La amplitud del ángulo principal de un triángulo isósceles es la mitad de la amplitud de los ángulos bases. Calcula la amplitud de estos ángulos.
21. En la figura 57, Prueba que $\alpha' + \gamma' = 180^\circ + \beta$
22. La suma de las amplitudes de dos ángulos exteriores de un triángulo es de 258°. Cual es la amplitud del ángulo interior que no es adyacente a ninguno de estos dos ángulos exteriores.
23. En la figura 58 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, AH $\parallel$ DG, $\angle A = 35^\circ$, $\angle B = 45^\circ$ Calcula α y β

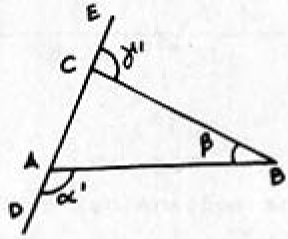


Fig. 57

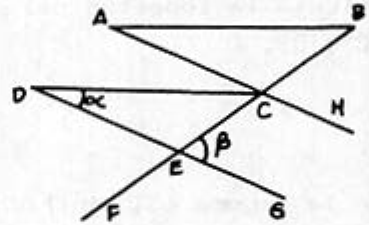


Fig. 58

24. Sean h y r dos rectas paralelas (fig. 59). Calcula la amplitud de los ángulos α y β

25. En la figura 60, AD || EF, $\delta = 60°$, $\overline{AB} = 5$ cm , $\overline{BC} = 4$ cm . Calcula la longitud del $\overline{AC}$ y la amplitud del ∠ ACB.

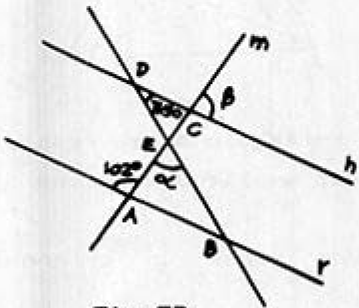


Fig.59

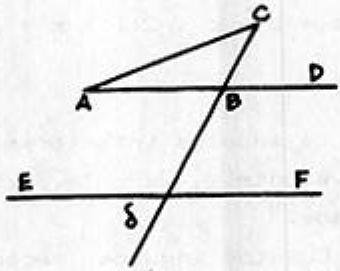


Fig.60

26. En la figura 61,
$r \perp s$, $r' \perp s$
$\theta = 42°$
$\overline{CB} = 4{,}0$ cm
Calcula: $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$.

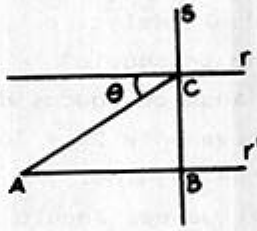


Fig. 61

27. Sea AB || EF (fig.62), sabiendo que $\overline{DC}$ es una mediana del Δ ABD,
$\overline{AB} = 8{,}0$ cm
∠ ADC = 30°
∠ EHC = 100°
Calcula la longitud del $\overline{DC}$ y $\overline{DB}$.

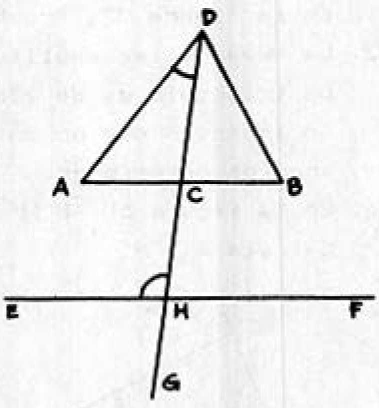


Fig. 62

28. En la figura 63, AB || CD, $\overline{EF}$ una mediana del Δ AEB, $\overline{AB} = 8{,}0$ cm; ∠ FBE = 30 y $\overline{EB}$ bisectriz del ∠ FED. Calcula la longitud de $\overline{AE}$ y $\overline{EB}$.

29. Calcula $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\measuredangle A$ (fig.64) si: $\overline{BC}$: bisectriz del $\measuredangle FBE$, $\overline{AB}$ bisectriz de $\measuredangle FBD$, $\measuredangle C = 40°$ y $\overline{BC} = 5{,}2$ cm

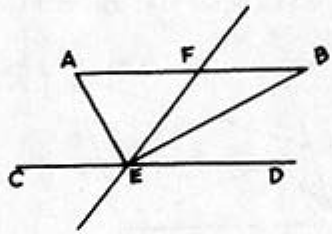


Fig. 63

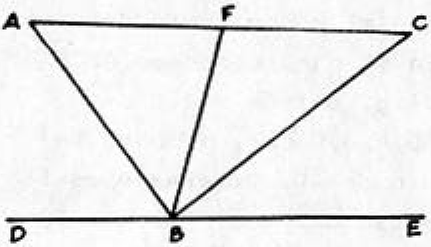


Fig. 64

30. Halla la amplitud de los ángulos interiores de un triángulo rectángulo, si la altura sobre la hipotenusa divide a ésta en segmentos que están en la razón 1:3

31. Dado un paralelogramo de 5 y 8 cm de lado, si uno de sus ángulos mide 60°, calcula la longitud de los lados del paralelogramo que se forma al unir los puntos medios de sus lados.

32. Si en un cuadrilátero ABCD, $\measuredangle A = 3x$, $\measuredangle B = \frac{13x}{3}$, $\measuredangle C = \frac{53x}{5}$ y $\measuredangle D = \frac{91x}{15}$, halla la amplitud de dichos ángulos.

33. En un paralelogramo , ¿qué relación existe entre dos ángulos consecutivos?, ¿y entre dos ángulos opuestos?

34. A y B son dos ángulos consecutivos de un paralelogramo. Si $\measuredangle A = 4x$ y $\measuredangle B = 5x$. ¿Cuánto miden los ángulos de dicho paralelogramo?

35. Dos ángulos opuestos de un paralelogramo miden $2x + 10°$ y $3x - 15°$. ¿Cuánto miden sus ángulos?

36. Si en un trapecio isósceles uno de sus ángulos mide 71,5°. Halla los restantes.

37. En el Δ ABC, $\overline{AE}$ y $\overline{BD}$ medianas (fig. 65), $\overline{BF} = 2\overline{BD}$ y $\overline{AG} = 2\overline{AE}$ Prueba que: ABGC y ABCF son paralelogramos.

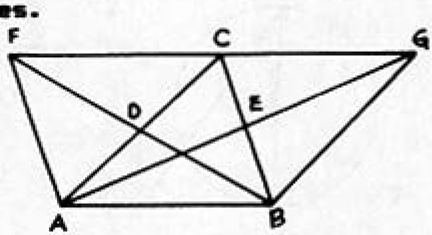


Fig. 65

38. En una circunferencia de radio $r = 4{,}0$ cm se tiene una cuerda de 2,0 cm . Halla la longitud del segmento que se obtiene al unir uno de los extremos de la cuerda con el punto medio del arco que esta cuerda determina.

39. En el paralelogramo ABCD (fig. 66) $\overline{AB} = 4{,}0$ cm $\overline{AD} = 3{,}0$ cm , E punto medio de $\overline{AD}$. Si el $\angle A$ es la mitad del $\angle D$. Calcula la longitud de $\overline{EC}$ y $\overline{EB}$.

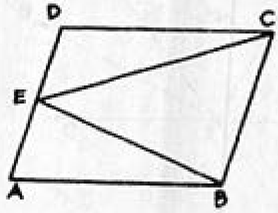


Fig. 66

40. El cuadrado ABCD tiene 3,0 cm de lado (fig.67), $\overline{AF} = \frac{1}{3}\overline{AB}$ $\overline{DG} = \frac{2}{3}\overline{DC}$, E: punto medio de $\overline{AD}$.

Prueba que: ΔFBG es isósceles

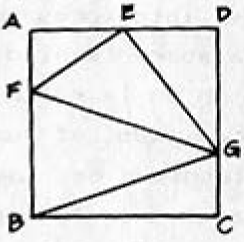


Fig. 67

41. El rombo MNPQ tiene 6,0cm de lado, (fig. 68)

$\angle P = 60^\circ$

E: punto medio de $\overline{NP}$

Calcula: $\overline{ME}$, $\overline{MP}$ y $\angle EMP$

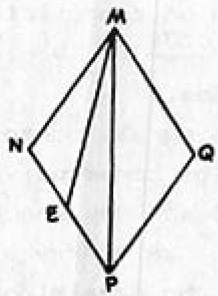


Fig.68

42. En la figura 69 $\overline{RT}$ es tangente a la circunferencia de ràdio $\overline{OA}$. Si :

a) $\overline{RT} = 12$ cm , $\angle A = 35^\circ$

Halla $\overline{RA}$, $\overline{OA}$ y $\angle R$

b) $\overline{OT} = 5{,}0$ cm , $\overline{RT} = 8{,}0$ cm

Halla: $\angle A$, $\overline{RA}$ y $\angle R$

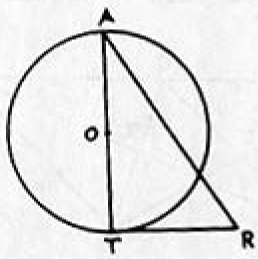


Fig. 69

43. Si $\overline{QT}$ es tangente a la circunferencia de centro O (fig. 70). $\overline{BT}$: diámetro, $\overline{QC}$ = 4,0 cm, $\overline{QB}$ = 9,0 cm y $\overline{BT}$ = 6,0 cm.
Halla $\overline{QT}$, $\overline{CT}$, $\overline{BC}$.

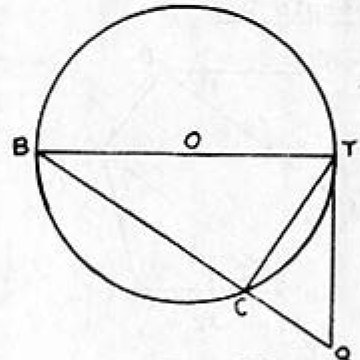


Fig. 70

8. Igualdad y semejanza de triángulos

Para demostrar la igualdad (congruencia) de triángulos nos apoyamos en los siguientes criterios de igualdad.

> Dos triángulos son iguales si tienen respectivamente iguales:
> - un lado y los ángulos adyacentes a ese lado (a.l.a.), o
> - dos lados y el ángulo comprendido (l.a.l.),o
> - sus tres lados (l.l.l.)

Ejemplo 1

Si ABCD es un paralelogramo (fig. 71) y EC || AF.
Prueba que: Δ ABF = Δ CDE .

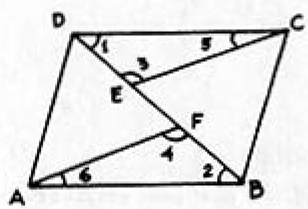


Fig. 71

Resolución

$\overline{AB} = \overline{DC}$ por lados opuestos del paralelogramo ABCD

$\angle 1 = \angle 2$ por alternos entre AB || CD y DB secante

$\angle 3 = \angle 4$ por alternos entre BC || AF y DB secante

$\angle 5 = \angle 6$ por terceros ángulos de un triángulo

por tanto Δ ABF = Δ CDE por tener un lado y los ángulos adyacentes a ese lado respectivamente iguales. ■

Ejemplo 2

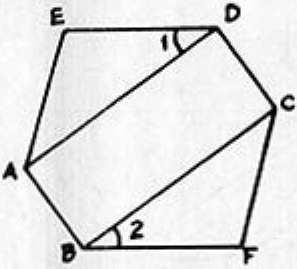


Fig. 72

Demuestra que: Δ ADE = Δ BCF (fig. 72) si sabes que ABCD es un rectángulo, $\overline{ED} \parallel \overline{BF}$ y $\overline{ED} = \overline{BF}$.

Resolución

$\overline{AD} = \overline{BC}$ por ser lados opuestos de un rectángulo

$\angle 1 = \angle 2$ por ser ángulos agudos que tienen sus lados respectivamente paralelos

$\overline{ED} = \overline{BF}$ por datos

luego Δ ADE = Δ BCF por tener respectivamente iguales dos lados y el ángulo comprendido. ■

Ejemplo 3

En el Δ ABC isósceles de base $\overline{AB}$ (fig. 73) se tiene que:

$$\overline{AD} = \overline{BE}$$

Prueba que:

Δ AEC = Δ BCD

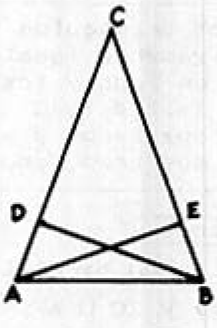


Fig. 73

Resolución

$\overline{AC} = \overline{BC}$ por ser el ΔABC isósceles de base AB

$\overline{AD} + \overline{DC} = \overline{BE} + \overline{EC}$ (1) por suma de segmentos

$\overline{AD} = \overline{BE}$ (2) por datos

de (1) y (2) tenemos: $\overline{DC} = \overline{EC}$

$\angle$ BCD = $\angle$ ACE por ángulo común

por tanto ΔAEC = ΔBCD por tener respectivamente iguales dos lados y el ángulo comprendido ■

Al igual que en la igualdad de triángulos para la semejanza existen criterios que nos permiten demostrar esta.

Dos triángulos son semejantes si tienen respectivamente:
- iguales dos ángulos, o
- proporcionales dos lados e igual el ángulo comprendido, o
- proporcionales los tres lados.

Para la aplicación de estos criterios es muy importante el teorema de las transversales y su recíproco.

Si $a \parallel b$, r y r' transversales que se cortan en O (fig. 74) entonces:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}}$$

y

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{CD}}$$

El recíproco del teorema también se cumple.

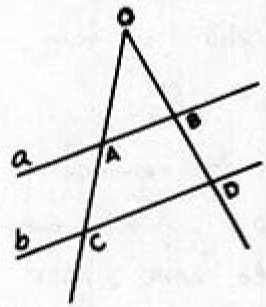


Fig. 74

Ejemplo 4

En la figura 75, $\overline{BC} \parallel \overline{MN}$, A, C, M y N puntos de la circunferencia.

a) Prueba que: $\triangle CME \sim \triangle ABC$

b) Establece la proporcionalidad entre los lados homólogos.

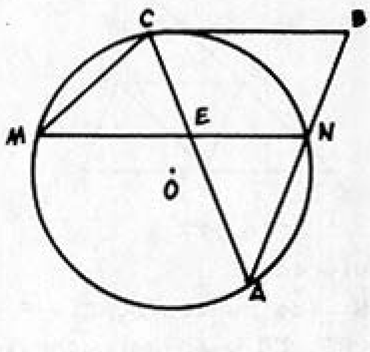


Fig. 75

Resolución

a) En los triángulos CME y ABC tenemos:

$\angle BCA = \angle CEM$ por alternos entre $\overline{BC} \parallel \overline{MN}$ y $\overline{BA}$ secante

$\angle CMN = \angle CAN$ por estar inscritos en el mismo arco

por tanto $\triangle CME \sim \triangle ABC$ por tener respectivamente iguales dos ángulos

b) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CM}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{ME}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{CE}}$. ■

Ejemplo 5

En el $\triangle ABC$ (fig. 76) si

$\overline{AG} = 2\overline{GD}$ y

$\overline{BG} = 2\overline{GE}$

Prueba que:

$\triangle ABG \sim \triangle DEG$

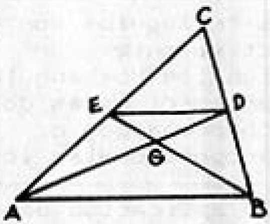


Fig. 76

Resolución

$\overline{AG} = 2\overline{GD}$ por datos $\qquad$ $\overline{BG} = 2\overline{GE}$ por datos

$\dfrac{\overline{AG}}{\overline{GD}} = 2 \quad (1) \qquad\qquad \dfrac{\overline{BG}}{\overline{GE}} = 2 \quad (2)$

de (1) y (2) tenemos $\dfrac{\overline{AG}}{\overline{GD}} = \dfrac{\overline{BG}}{\overline{GE}}$

$\angle EGD = \angle AGB$ por opuestos por el vértice

por tanto $\triangle ABG \sim \triangle DEG$ por tener respectivamente proporcionales dos lados e igual el ángulo comprendido. ■

Ejemplo 6

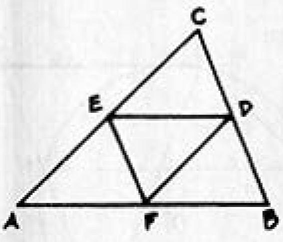


Fig. 77

Si D, E y F son los puntos medios de los lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$ del $\triangle ABC$ (fig. 77).

Prueba que:

$\triangle DEF \sim \triangle ABC$

Resolución

Si los puntos D, E y F son los puntos medios de los lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$ del $\triangle ABC$ entonces $\overline{ED}$, $\overline{DF}$ y $\overline{FE}$ son paralelas medias en el $\triangle ABC$ (punto 22 del Memento), luego se cumple:

$$\overline{ED} = \frac{1}{2}\overline{AB}$$

$$\overline{DF} = \frac{1}{2}\overline{AC}$$

$$\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{BC}$$

de donde $\dfrac{\overline{ED}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{DF}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \dfrac{1}{2}$

por tanto $\Delta DEF \sim \Delta ABC$ por tener respectivamente proporcionales sus tres lados ■

Ejercicios (epígrafe 8)

1. En la figura 78, $\overline{AG}$ y $\overline{HD}$ medianas, $\overline{FB} = \overline{EC}$, $\overline{FB} \parallel \overline{EC}$, $\overline{AH} = \overline{GD}$. Prueba que: $\Delta AGF = \Delta CDH$ y $\Delta AGB = \Delta DEH$

2. Si ABCD y AFCE son paralelogramos (fig. 79), prueba que: $\Delta ABF = \Delta CDE$

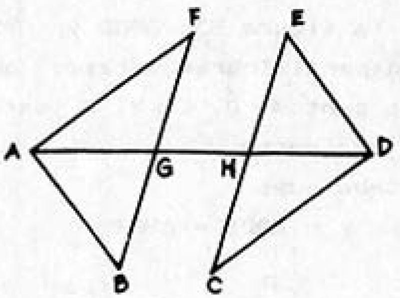


Fig. 78

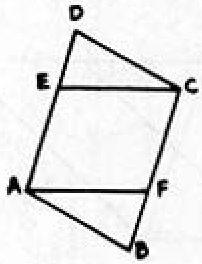


Fig. 79

3. En la figura 80, ABCD trapecio isósceles, $\overline{AD} \parallel \overline{EC}$, E punto medio de $\overline{AB}$. Prueba que: Los triángulos AED; EBC; ECD son iguales e isósceles.

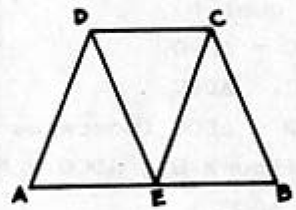


Fig. 80

4. ABCD es un cuadrado (fig. 81), E punto medio de $\overline{AB}$. Prueba que: ΔDEC es isósceles.

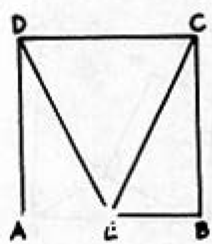


Fig. 81

5. En la figura 82, ABCD es un cuadrado.

   E: punto medio de $\overline{AB}$

   F: punto medio de $\overline{DC}$

   G: punto medio de $\overline{AF}$ y $\overline{DE}$

   H: punto medio de $\overline{EC}$ y $\overline{FB}$

   Prueba que:

   a) $\triangle AGE = \triangle DGF = \triangle EHB = \triangle HCF$,

   b) $\triangle AGD = \triangle BCH$,

   c) todos los triángulos anteriores son isósceles.

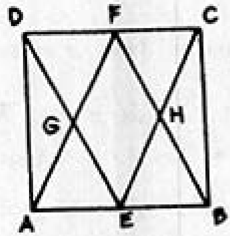


Fig. 82

6. En la figura 83, ABCD y ABXY son paralelogramos tales que los puntos D, C, Y, X están en una recta.

   Prueba que:

   $\triangle ADY = \triangle BCX$

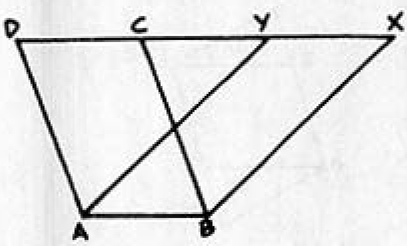


Fig. 83

7. Si ABCD es un trapecio isósceles de bases $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ (fig. 84).

   Prueba que:

   a) $\triangle ABC = \triangle ABD$

   b) $\triangle ADC = \triangle DBC$

   c) $\triangle AOB$ y $\triangle DOC$ isósceles d) $\triangle AOD = \triangle BOC$

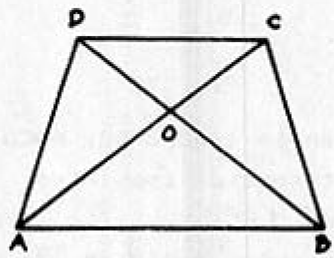


Fig. 84

8. En la figura 85, ABCD y AEFG son cuadrados. Prueba que: $\triangle ABE = \triangle ADG$

9. Si $\triangle AEB$, $\triangle ACD$ isósceles de bases $\overline{BE}$ y $\overline{CD}$ respectivamente (fig. 86) y $\alpha = \beta$. Prueba que: $\triangle ABC = \triangle AED$

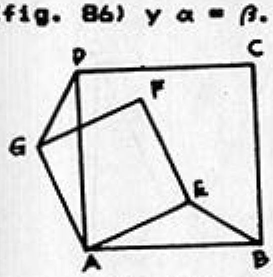


Fig. 85

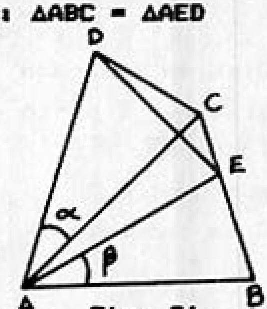


Fig. 86

10. En la figura 87, $\overline{AD}$ es un diámetro, $\overline{BH} = \overline{HC}$, $\overline{OM}$ y $\overline{ON}$ distancias de O a $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente. Prueba que: $\overline{EN} = \overline{MF}$

11. Si $\overline{AB} = \overline{CD}$ (fig.88) $\overline{AD}$ y $\overline{EF}$ diámetros. Prueba que $\overline{ON} = \overline{OM}$.

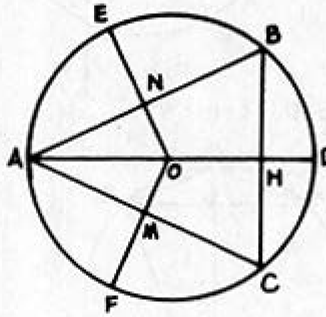


Fig.87

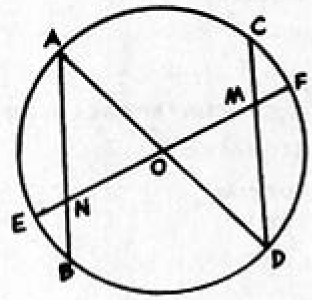


Fig.88

12. Si $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} = 80°$ (fig.89)

$\overline{ON}$: distancia de O a $\overline{AB}$

$\overline{OM}$: distancia de O a $\overline{CD}$

Prueba que:

a) $\triangle ANO = \triangle OMC$

b) Calcula el valor del $\angle$ MOC

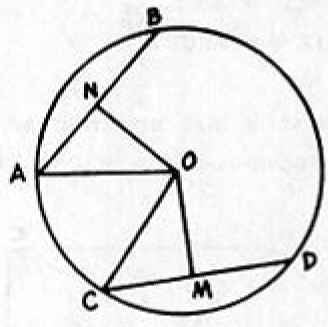


Fig. 89

13. Si $\overline{QE}$ pasa por O (fig. 90), $\overline{AD} \perp \overline{QE}$ y $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{MC}$. Prueba que: $\overline{AB} = \overline{DC}$, si A y D son puntos de la circunferencia

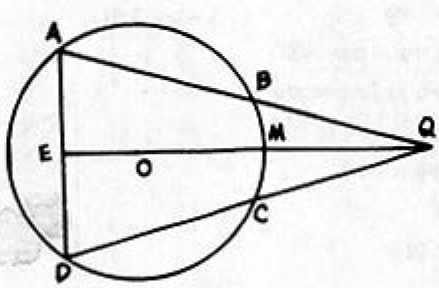


Fig. 90

14. A, B, C, y D son puntos de la circunferencia de centro O (fig. 91), $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$ cuerdas que se cortan en E $\overline{DE} = \overline{AE}$.

Prueba que:

$\triangle ABE = \triangle CDE$

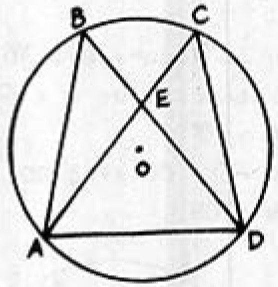


Fig. 91

15. En la circunferencia de centro O (fig. 92),

$\overline{CD}$: diámetro

$\overline{AB}$: cuerda

$\overline{CD} \perp \overline{AB}$

$\overline{AC} = \overline{CB}$

Prueba que:

a) $\triangle ADE = \triangle BDE$

b) $\triangle ACE = \triangle BCE$

c) $\triangle DCA = \triangle DCB$

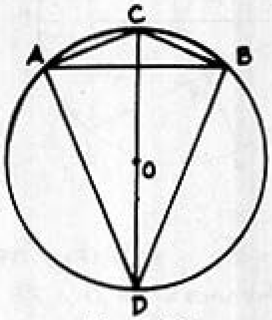


Fig. 92

16. Demuestra que en todo triángulo isósceles las alturas correspondientes a los lados iguales, son iguales.

17. En la figura 93, ABCD es un rectángulo y AEDF un cuadrado.

a) Prueba que: $\triangle AEB = \triangle DEC$

b) Si $\overline{CE} = 4{,}0$ cm , ¿cuál es la longitud del segmento $\overline{BE}$? Justifica tu respuesta.

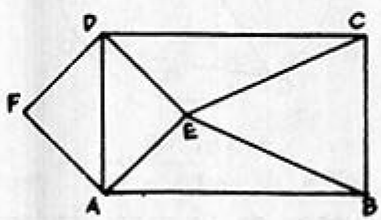


Fig. 93

18. Si los triángulos AED y BCD son equiláteros (fig. 94). C, D y E puntos alineados.

Prueba que:

a) $\triangle ADC = \triangle BDE$

b) $\overline{BE} = \overline{AC}$

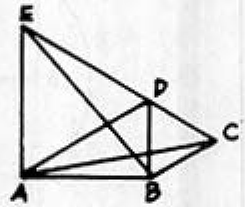


Fig. 94

19. ABCDE: pentágono regular (fig. 95)

EMCD: rombo

$\angle$ AEM = $\angle$ MCB

Prueba que:

a) $\triangle AME = \triangle MBC$

b) $\triangle ABM$ es isósceles

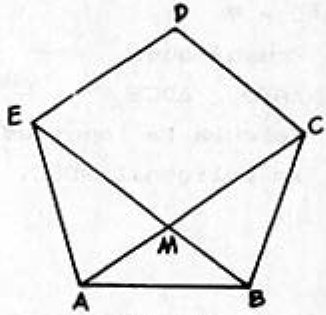


Fig. 95

20.

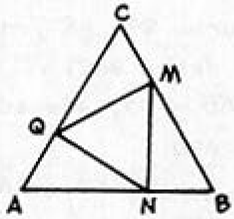


Fig. 96

Si ABC es un triángulo equilátero (fig. 96) y

$\overline{CM} = \overline{BN} = \overline{AQ}$

Prueba que:

$\triangle MNQ$ es equilátero.

21. En la figura 97,

E: punto medio de $\overline{FD}$ y $\overline{AC}$

D: punto medio de $\overline{BC}$

Prueba que:

a) $\triangle AEF = \triangle EDC$

b) $\triangle AEF \sim \triangle ABC$

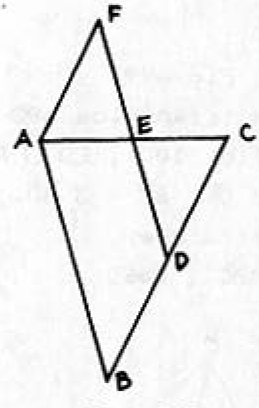


Fig. 97

22. Dos ángulos de un triángulo miden 43° y 77°. Si dos de los ángulos de otro triángulo miden 60° y 43°, prueba que estos triángulos son semejantes.

23. Si el ángulo desigual de un triángulo isósceles mide 50° y un ángulo exterior de la base de otro triángulo isósceles mide 115°, di si estos triángulos son semejantes.

24. En el rectángulo ABCD (fig.98), $\overline{CE} \perp \overline{BD}$, $\overline{AB} = 12$ y $\overline{AD} = 9$

a) Prueba que: $\triangle ABD \sim \triangle DCE$

b) Calcula la longitud de la poligonal ADEC.

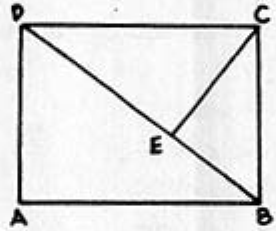


Fig. 98

25.

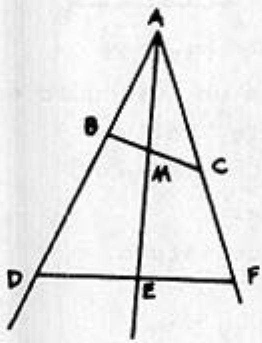


Fig. 99

En la figura 99, $\overline{AE}$ es la bisectriz del $\measuredangle BAC$, $\overline{AC} = 10$ $\overline{AM} = 9$ y $\overline{AD} = 30$, además, $\measuredangle AMC = \measuredangle AED$

a) Prueba que: $\triangle AED \sim \triangle AMC$

b) Calcula $\overline{ME}$

26. En los triángulos ABC y DEB (fig. 100), $\overline{ED} \parallel \overline{AB}$, $\overline{AB} = 3\ \overline{DE}$, $\overline{BC} = 3\ \overline{BD}$.

Demuestra que:

$\triangle ABC \sim \triangle BED$

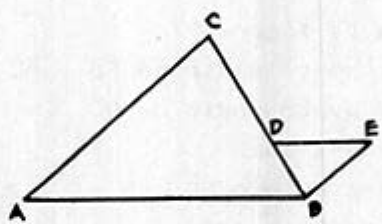


Fig. 100

27.

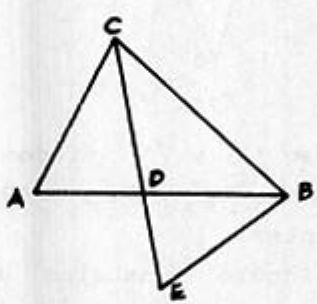


Fig. 101

En la figura 101

$\measuredangle CAB = \measuredangle CEB$

$\overline{CD}$: bisectriz del $\measuredangle ACB$

Demuestra que:

a) $\triangle ACD \sim \triangle DBE$

b) $\triangle ADC \sim \triangle CBE$

28. Los lados de un triángulo miden 15, 30 y 18 cm respectivamente; si los lados de otro triángulo son de 20, 40 y 24 cm respectivamente, di si los mismos son seme-

jantes. Justifica tu respuesta.

29. En el paralelogramo ABCD (fig. 102)
E: punto medio de $\overline{BC}$
D, E y F puntos alineados. Prueba que:
$\Delta DEC \sim \Delta BEF \sim \Delta AFD$

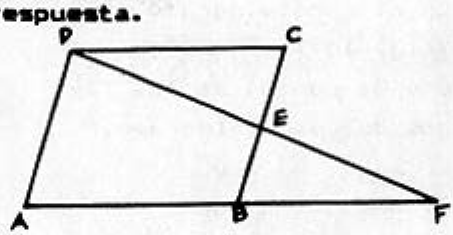


Fig. 102

30.

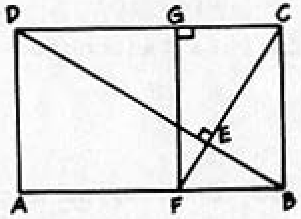


Fig. 103

En el rectángulo ABCD (fig.103), $\overline{CE} \perp \overline{BD}$ y $\overline{FG} \perp \overline{DC}$
Prueba que:
$\Delta CED \sim \Delta CEB \sim \Delta BCD \sim \Delta BCF$ y establece la proporcionalidad entre sus lados.

31. En el ΔABC (fig. 104)
$\angle A = \angle D = 90°$
Prueba que:
$\Delta ABC \sim \Delta DEB$ y establece la proporcionalidad entre sus lados.

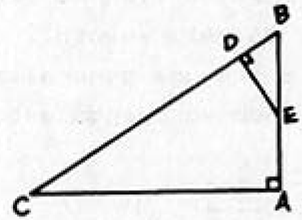


Fig. 104

32. En la figura 105 para probar que: $\dfrac{\overline{QA}}{\overline{QD}} = \dfrac{\overline{QC}}{\overline{QB}}$

a) ¿Qué triángulos habrá que seleccionar para demostrar que son semejantes?
b) Demuestra la semejanza de los mismos.
c) ¿Cuáles son los lados homólogos?
d) Prueba que: $\overline{QA} \cdot \overline{QB} = \overline{QD} \cdot \overline{QC}$

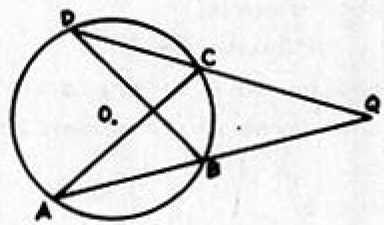


Fig. 105

33.

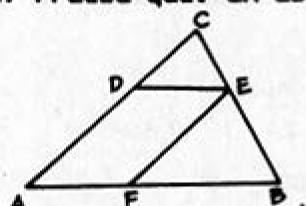


Fig. 106

Si en el ΔABC (fig. 106),
$\overline{DE} \parallel \overline{AB}$
y $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$
Prueba que:
$\overline{CD} \cdot \overline{FB} = \overline{EF} \cdot \overline{DE}$

34. En el paralelogramo ABCD (fig. 107), $F \in \overline{DB}$, E y G: puntos de los lados del paralelogramo, $\overline{EF} \perp \overline{BD}$, $\overline{BG} \perp \overline{DC}$

a) Demuestra que:

$\Delta EFB \sim \Delta BDG$

b) Si $\overline{EB} = 8{,}0$ cm ;

$\overline{BD} = 10$ cm ; $\overline{EF} = 6{,}0$ cm . Calcula la longtud de $\overline{BG}$.

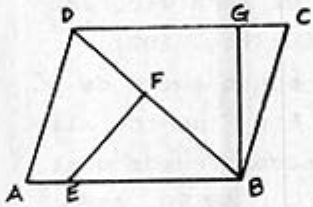


Fig. 107

9. Cálculo de áreas y volúmenes

En grados anteriores has estudiado fórmulas para calcular el área de figuras planas y el volumen de cuerpos (puntos 25 y 26 del Memento), además, aplicando el cálculo integral hiciste una generalización para el cálculo de áreas.

Teniendo en cuenta esto analicemos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1

En la figura 108, ABCD es un rectángulo, $\overline{AB} = 4{,}0$ cm ; $\overline{BC} = 6{,}0$ cm ;

E y F puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ respectivamente,

G: punto de $\overline{DC}$.

Con centro en O se traza EHF.

Halla el área de la superficie rayada.

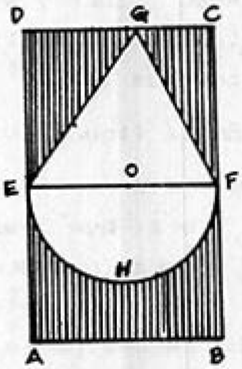


Fig. 108

Resolución

El área sombreada es la diferencia entre el área del rectángulo ABCD y de la figura GEHF compuesta por un triángulo y un semicírculo.

Cálculo del área del rectángulo ABCD (A_1)

$$A_1 = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 4 \cdot 6 = 24 \quad ; \quad A_1 = 24 \text{ cm}^2$$

Cálculo del área del triángulo GEF (A_2)

En el ΔGEF, $\overline{EF}$: base y $\overline{CF}$: altura.

Como los puntos E y F son los puntos medios de los lados $\overline{AD} = \overline{BC}$ del rectángulo respectivamente entonces:

$$\overline{EF} = \overline{AB} = 4{,}0 \text{ cm}$$

$$\text{y} \quad \overline{CF} = \frac{1}{2}\,\overline{BC} = 3{,}0 \text{ cm} \quad \text{luego}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\,\overline{EF}\cdot\overline{CF} = \frac{1}{2}\cdot 4 \text{ cm}\cdot 3 \text{ cm} = 6{,}0 \text{ cm}^2$$

Cálculo del área del semicírculo EHF (A_3)

El área del círculo es $A_c = \pi r^2$, pero EHF es un semicírculo, luego $A_3 = \frac{1}{2} A_c$.

Como O es el punto medio de $\overline{EF}$ tenemos que:

$$r = \overline{OE} = \frac{1}{2}\,\overline{EF} = 2{,}0 \text{ cm} \;;$$

entonces, $A_3 = \frac{1}{2} A_c = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\cdot 3{,}14\cdot 4 \text{ cm}^2 = 6{,}28 \text{ cm}^2$

por tanto $A_s = A_1 - (A_2 + A_3) = 24 - (6 + 6{,}28) = 11{,}72$

$$A_s = 12 \text{ cm}^2 \quad ■$$

Ejemplo 2

La sección transversal de una pieza tiene la forma que se muestra en la figura 109 donde $\overline{AG} \perp \overline{AB}$, $\overline{BC} \perp \overline{AB}$, $\overline{AG} = \overline{BC} = 5{,}0$ cm, $\overline{AB} = 10$ cm, $\overline{FD} = 6{,}0$ cm, $\overline{FD} \parallel \overline{GC}$ y FED un semicírculo de centro en el punto medio de $\overline{FD}$.

Si la altura de la pieza es de 15 cm, calcula el área de esta sección.

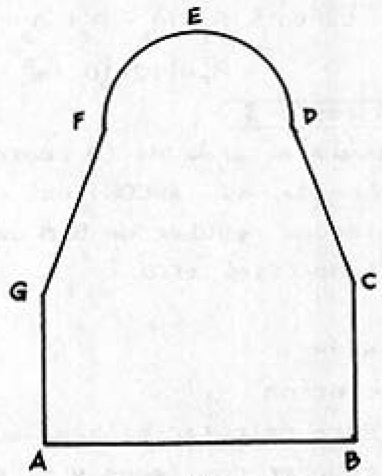


Fig. 109

Resolución

Para hallar el área de la sección transversal de la pieza podemos descomponerla en tres figuras planas conocidas, según los datos estas son:

ABCG: rectángulo

GCDF: trapecio

FED: semicírculo

Cálculo del área de ABCG (A_1)

$$A_1 = \overline{AB}\cdot\overline{BC} = 5\cdot 10 = 50 \;;\quad A_1 = 50 \text{ cm}^2$$

Cálculo del área de FED (A_2)

Como tiene su centro en el punto medio de FD entonces

$$r = \frac{\overline{FD}}{2} = 3 \text{ cm} \quad \text{por tanto}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\cdot 3{,}14 \cdot 9 = 14{,}1 \; ; \; A_2 = 14{,}1 \text{ cm}^2$$

Cálculo del área de GCDF (A_3)

Para calcular el área de este trapecio conocemos las longitudes de las bases y debemos calcular su altura (h).

Como la pieza tiene una altura total de 15 cm y conocemos que $\overline{BC}$ = 5,0 cm y el radio del semicírculo es 3,0 cm entonces:

$$h = 15 - (5 + 3) = 15 - 8 = 7$$

luego $A_3 = \dfrac{\overline{FD} + \overline{GC}}{2} \cdot h = \dfrac{6 + 10}{2} \cdot 7 \; ; \; A_3 = 56 \text{ cm}^2$

por tanto $A_T = A_1 + A_2 + A_3 = 50 + 56 + 14{,}1 = 120{,}1$

$$A_T = 12 \cdot 10 \text{ cm}^2$$ ■

Ejemplo 3

Calcula el área de la región sombreada, si ABCDE es un pentágono regular de 5,6 cm de lado (fig. 110)

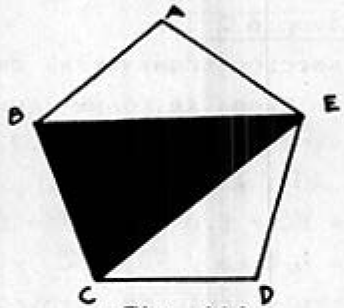


Fig. 110

Resolución

Para calcular el área sombreada (ΔBCE) una vía posible es conocer dos lados y el ángulo comprendido entre estos lados; conocemos el lado $\overline{BC}$ (lado del pentágono), podemos buscar $\overline{CE}$ y ∡ BCE.

Cálculo de $\overline{CE}$

En el ΔCDE, aplicando la ley de los cosenos tenemos que

$$\overline{CE}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DE}^2 - 2\,\overline{CD}\cdot\overline{DE}\cos \measuredangle CDE \quad (1)$$

$$\overline{CD} = \overline{DE} = 5{,}6 \text{ cm} \quad \text{por ser lados del pentágono}$$

luego (1) se reduce a:

$$\overline{CE}^2 = 2\overline{CD}^2(1 - \cos \measuredangle CDE) \quad (2)$$

Como ∡ CDE es un ángulo interior del pentágono y la suma de los ángulos interiores de un polígono regular es

$180^\circ(n-2)$ entonces:

$$\angle CDE = \frac{1}{5}\left[180^\circ(n-2)\right] = \frac{1}{5}\cdot 180^\circ\cdot 3 = 36^\circ\cdot 3 = 108^\circ$$

luego sustituyendo en (2) tenemos:

$$\begin{aligned}\overline{CE}^2 &= 2\cdot(5{,}6)^2(1-\cos 108^\circ)\\ &= 2(31{,}4)(1+\cos 72^\circ)\\ &= 62{,}8(1+0{,}039)\\ &= 62{,}8\cdot 1{,}309\\ &= 82{,}2052\\ &= 82{,}21\\ \overline{CE} &= 9{,}07\end{aligned}$$

Cálculo del $\angle$ BCE

Como el ΔCDE es isósceles de base $\overline{CE}$ entonces por suma de ángulos interiores tenemos:

$$2\angle ECD + \angle CDE = 180^\circ$$

$$\angle ECD = \frac{180^\circ - \angle CDE}{2}$$

$$\angle ECD = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2}$$

$$\angle ECD = 36^\circ$$

además, $\angle BCE + \angle ECD = 108^\circ$

$$\angle BCE = 108^\circ - \angle ECD$$

$$\angle BCE = 108^\circ - 36^\circ$$

$$\angle BCE = 72^\circ$$

Cálculo del área del ΔBCE

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2}\,\overline{BC}\cdot\overline{CE}\ \text{sen}\ \angle BCE\\ &= 0{,}5\cdot 5{,}6\cdot 9{,}07\ \text{sen}\ 72^\circ\\ &= 25{,}396\cdot 0{,}951\\ A &= 24\ cm^2\end{aligned}$$ ■

Observa en el ejemplo anterior que otra vía posible para calcular dicha área es calcular el área del pentágono (semiperímetro por apotema) y restarle el área de los triángulos.

Ejemplo 4

Calcula el área sombreada de acuerdo con los datos de la figura 111.

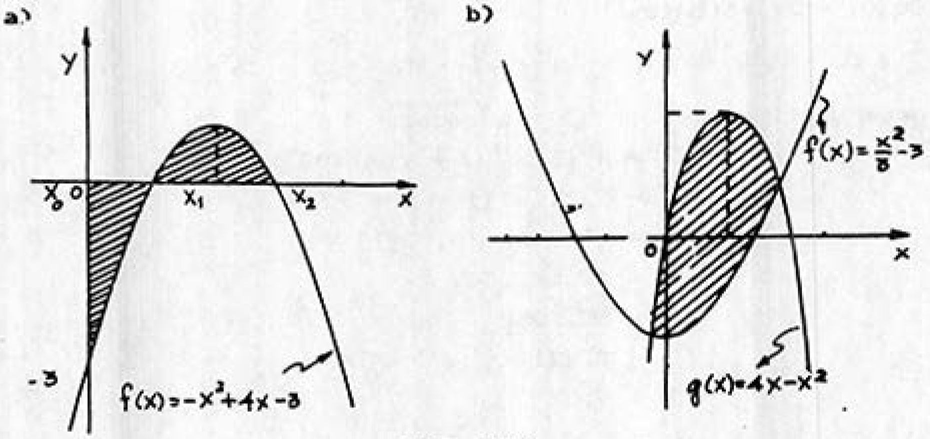


Fig. 111

a) El área a calcular se encuentra en el intervalo $[x_0;x_2]$ (fig. 111). En el intervalo $[x_0;x_1]$ la curva se encuentra bajo el eje x, luego para calcular el área de esa porción del plano se plantea el módulo de la integral definida en ese intervalo, y en $[x_1;x_2]$ la curva se encuentra por encima de dicho eje, por tanto:

$$A = \left|\int_{x_0}^{x_1} f(x)\ dx\right| + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\ dx \qquad (1)$$

Cálculo de los límites de integración

$x_0 = 0$ por datos

x_1 y x_2 son los ceros de la función, luego:

$$f(x) = 0$$
$$-x^2 + 4x - 3 = 0$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$(x-3)(x-1) = 0$$
$$x_1 = 1 \quad y \quad x_2 = 3$$

Cálculo del área.

Sustituyendo en (1) tenemos:

$$A = \left|\int_0^1 f(x)\ dx\right| + \int_1^3 f(x)\ dx$$

$$= \left|\int_0^1 (-x^2 + 4x - 3)\ dx\right| + \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)\ dx$$

$$= \left|\left. -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right]_0^1\right| + \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right]_1^3$$

$$= \left|-\frac{1}{3} + 2 - 3\right| - \frac{27}{3} + 18 - 9 - \left(-\frac{1}{3} + 2 - 3\right)$$

$$= \left| -\frac{4}{3} \right| - 9 + 18 - 9 - \left[-\frac{4}{3} \right]$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}\ u^2$$

b) Cálculo de los límites de integración (puntos de intersección de los gráficos de la funciones)

$$g(x) = f(x)$$

$$4x - x^2 = \frac{x^2}{3} - 3$$

$$12x - 3x^2 = x^2 - 9$$

$$4x^2 - 12x - 9 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 144}}{8} = \frac{12 \pm \sqrt{288}}{8} = \frac{12 \pm 17}{8}$$

$$x_1 = \frac{12 + 17}{8} = \frac{29}{8} = 3{,}625 = 3{,}6$$

$$x_2 = \frac{12 - 17}{8} = -\frac{5}{8} = -0{,}625 = -0{,}6$$

Cálculo del área

$$A = \left| \int_{-0,6}^{3,6} (g(x) - f(x))\,dx \right|$$

$$= \left| \int_{-0,6}^{3,6} \left[4x - x^2 - \frac{x^2}{3} + 3 \right] dx \right|$$

$$= \left| \int_{-0,6}^{3,6} \left[3 + 4x - \frac{4x^2}{3} \right] dx \right|$$

$$= \left| 3x + 2x^2 - \frac{4x^3}{9} \right]_{-0,6}^{3,6} \Bigg|$$

$$= \left| 3(3{,}6) + 2(3{,}6)^2 - \frac{4(3{,}6)^3}{9} - \left[3(0{,}6) + 2(0{,}6)^2 - \frac{4(-03{,}6)^3}{9} \right] \right|$$

$$= \left| 10{,}8 + 25{,}92 - 20{,}736 - (-1{,}8 + 0{,}72 + 0{,}096) \right|$$

$$= \left| 15{,}984 - (-0{,}984) \right|$$

$$= \left| 15{,}984 + 0{,}984 \right| = 16{,}968\ u^2 = 17\ u^2 \quad ■$$

Ejemplo 5

Un prisma recto tiene por base un triángulo rectángulo, uno de cuyos catetos mide 6,0 cm y el otro 8,0 cm . Sabemos que el área de la cara mayor es de 200 cm² . Halla el volumen del prisma.

Resolución

El volumen del prisma se calcula a través de la fórmula

$$V = A_B h \quad (1)$$

Como la base es un triángulo rectángulo su área es igual al semiproducto de sus catetos, luego:

$$A_B = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24 \; ; \; A_B = 24 \text{ cm}^2 \quad (2)$$

Cálculo de la altura del prisma

El área de la cara mayor del prisma está determinada por la altura de este y por el lado mayor del triángulo rectángulo base (la hipotenusa a) (fig. 112), luego:

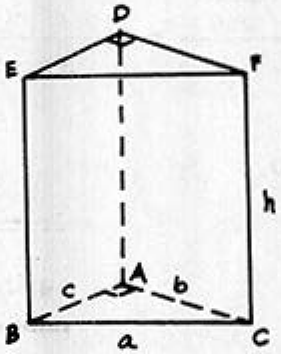


Fig. 112

$$A_{BCFE} = a \cdot h$$

$$h = \frac{A_{BCFE}}{a} \quad (3)$$

En el ΔABC rectángulo en A calculemos a:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} \qquad \text{Teorema de Pitágoras}$$

$$= \sqrt{36 + 64}$$

$$= \sqrt{100} = 10 \; ; \; a = 10 \text{ cm}$$

luego sustituyendo en (3) obtenemos

$$h = \frac{200}{10} = 20 \quad (4)$$

Sustituyendo (2) y (4) en (1) se tiene que:

$$V = 24 \cdot 20 = 480 \; ; \; V = 4{,}8 \cdot 10^2 \text{ cm}^3$$ ■

Ejemplo 6

Se quiere conocer el volumen de una pieza cilíndrica con hueco cónico como muestra la figura 113, sabiendo que la altura es de 10,0 cm y el ángulo que forma la generatriz con la base del cono es de 80°

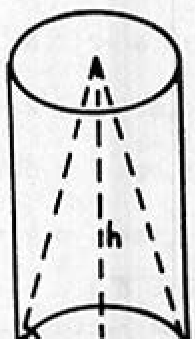


Fig. 113

Resolución

El volumen de la pieza se obtiene restándole al volumen del cilindro el del cono, es decir,

$$V_P = V_{CI} - V_{CO}$$

En este caso el radio y la altura del cilindro coinciden con la del cono, luego

$$V = \pi r^2 h - \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$V = \frac{2}{3} \pi r^2 h \qquad (1)$$

La altura de la pieza es conocida, debemos calcular previamente el radio.

$$\tan 80^\circ = \frac{h}{r}$$

$$r = \frac{h}{\tan 80^\circ} = \frac{10}{5{,}671} = 1{,}763$$

luego

$$V_P = \frac{2}{3} \cdot 3{,}142\ (1{,}763)^2\ 10$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 3{,}142 \cdot 3{,}108 \cdot 10$$

$$V_P = 65{,}1\ cm^3 \qquad \blacksquare$$

Ejericicios (epigrafe 9)

1. La altura de un rectángulo es el triplo de su base. Si su área es de 108 cm^2, ¿cuáles son sus dimensiones?

2. Un rectángulo tiene 700 cm^2 de área y 110 cm de perímetro. Halla sus dimensiones.

3. Un rectángulo tiene 616 m^2 de área. Si su base es 6 m mayor que su altura, ¿cuáles son sus dimensiones?

4. La diagonal de un rectángulo mide 25 cm y su base 20 cm Halla su área.

5. Si se triplican las dimensiones de un rectángulo el área de este nuevo rectángulo es equivalente a la de un cuadrado de 26,9 m de lado. Halla la altura del rectángulo primitivo sabiendo que su base mide 10 m .

6. Halla el área de un rectángulo cuya base y altura son respectivamente iguales al lado del triángulo equilátero y al exágono regular, inscrito en una circunferencia de 20 m de diámetro.

7. En el paralelogramo ABCD (fig. 114);

E: punto cualquiera de $\overline{AC}$

$\overline{GI}$ y $\overline{HF}$ pasan por E

$\overline{GI} \parallel \overline{AD}$ y $\overline{HF} \parallel \overline{AB}$

Prueba que:

$$A_{EIBF} = A_{EGDH}$$

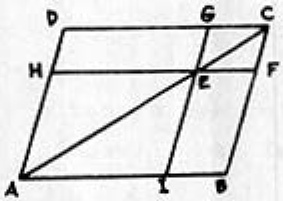


Fig. 114

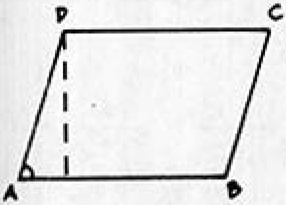
8. 

Fig. 115

En el paralelogramo ABCD (fig. 115);

$\overline{AB} = 45$ m , $\overline{AD} = 15$ m y

$\measuredangle A = 70°$

Halla A_{ABCD}

9. En el paralelogramo ABCD (fig. 116);

$\measuredangle A = 45°$, $\overline{AC} = 43$ m y

$h = 15$ m.

Halla A_{ABCD}

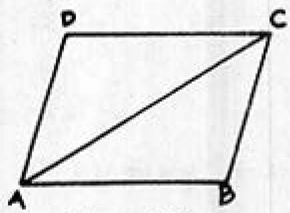


Fig. 116

10. La altura de un triángulo equilátero mide 6,92 m . Halla su área.

11. Demuestra que el área de un triángulo equilátero en función de su altura h está dada por la fórmula:

$$A = \frac{h^2\sqrt{3}}{3}$$

12. Un ángulo agudo de un triángulo rectángulo mide 30° y su área 13, 84 m^2 . Calcula la longitud de sus catetos.

13. La diagonal mayor de un rombo mide 40 m y uno de sus lados 25 m . Halla la otra diagonal y su área.

14. Un ángulo de un rombo mide 111,1° y la diagonal opuesta a dicho ángulo 8,246 m . Halla el lado del rombo y su área.

15. Si las bases de un trapecio miden 44 y 56 m respectivamente y su altura es de 20 m . ¿Cuál es su área?

16. La base menor de un trapecio es los $\frac{2}{3}$ de la mayor y la altura los $\frac{3}{2}$ de la diferencia de las bases. Si su área

es de 372 m^2 , calcula las bases y la altura.

17. La base menor de un trapecio rectángulo mide 12 cm , el lado no perpendicular a las bases 14,1 cm y este forma con la base mayor un ángulo de 45°. Calcula el área del trapecio.

18. En un trapecio isósceles sus bases miden 45 y 75 cm y cada lado 47,4 cm . Halla la medida de sus diagonales y el área.

19. En el trapecio ABCD (fig. 117), $\overline{BE} \perp \overline{AC}$, $\overline{DF} \perp \overline{AC}$

Prueba que:

$$A_{ABCD} = \frac{\overline{AC}}{2}\left[\overline{BE} + \overline{DF}\right]$$

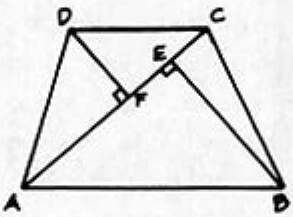


Fig. 117

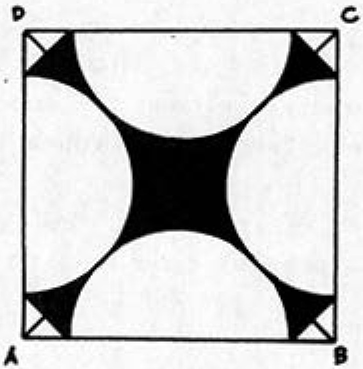
20. 

Fig. 118

Haciendo centro en cada uno de los puntos medios de los lados del cuadrado ABCD (fig. 118) se han trazado semicircunferencias tangentes a las diagonales, uniéndose los extremos de sus diámetros por segmentos para formar la cruz de la figura. Si $\overline{AB}$ = 20 cm halla:

a) el área de la figura no rayada,

b) el área de la figura rayada.

21. Tomando como diámetro el lado de un octógono regular se han trazado semicircunferencias, formándose el área rayada de la figura 119. Si el radio del octógono mide 10 m , halla el área de la figura rayada.

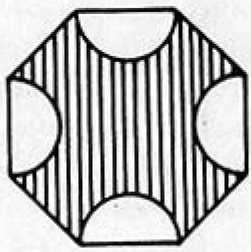


Fig .119

22.

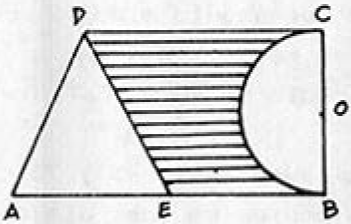


Fig. 120

ABCD: trapecio de base $\overline{AB}$ (fig. 120), $\overline{BC} \perp \overline{AB}$,

E: punto medio de $\overline{AB}$

O: punto medio de $\overline{CB}$

$\overline{DC} = 6{,}0$ cm ; $\overline{AB} = 10$ cm ; $\overline{CB} = 4{,}0$ cm .

Halla el área sombreada.

23.

El siguiente cuerpo (fig. 121) formado por un cilindro circular recto, un cono circular recto y una semiesfera. Si $r = 3{,}00$ cm y la altura del cilindro es 10,0 cm . Calcula el volumen sombreado.

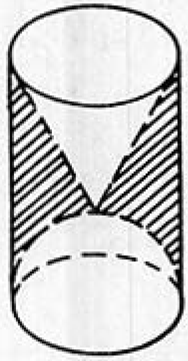


Fig. 121

24.

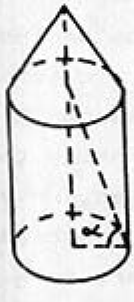


Fig. 122

Calcula el volumen del cuerpo representado en la figura 122 si:

$\alpha = 60{,}0°$; $r = 3{,}00$ cm y la altura del cono es 1,50 cm

25. El área de la base de un ortoedro rectangular es de 48,0 m^2 , la de una cara lateral 42,0 m^2 y la de un plano diagonal determinado por dos aristas laterales 70,0 m^2 . Calcula el área lateral de dicho cuerpo.

26. La altura de un prisma recto mide 6,0 m , su base es un rectángulo en el que uno de sus lados es el doble del otro y el área total del cuerpo es de 144 m^2. Calcula la longitud de una de las diagonales del prisma.

27. La base de una pirámide es un triángulo rectángulo isósceles de hipotenusa igual a 2,82 m . La arista lateral que contiene al vértice del ángulo recto de di-

cho triángulo es perpendicular a la base e igual a 3,00 m . Calcula el área total de la pirámide y el volumen.

28. Halla el volumen de un cubo sabiendo que la suma de todas sus aristas, de las diagonales del cuerpo y de las diagonales de las caras es igual a 32 m .

29. La generatriz de un cono es igual a la longitud de la circunferencia base y su área lateral 9,0 m^2 . Determina la altura y el volumen del cono.

30. Calcula el volumen de una esfera, sabiendo que un círculo menor de área igual a 12,56 m^2 dista del centro de ella 1,5 m .

31. Conservando la base de un cono de 5,0 cm de radio y 30 cm de altura, se obtuvo otro cono desperdiciando 471 cm^3 de su material. ¿En cuántos centímetros disminuyó la altura del primer cono?

32. En un cubo de arista 2,0 cm se hace pasar un plano por los puntos medios de tres aristas concurrentes en un vértice. Halla el área de la sección y el volumen del cuerpo que resulta si al cubo se le quita la esquina así determinada.

33. Calcula el área de la región comprendida entre la curva y el eje x.

a) $f(x) = 6x - x^2$ b) $f(x) = x^2 + 5x + 6$

c) $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$ d) $f(x) = \operatorname{sen} x \;;\; 0 \le x \le 2\pi$

e) $f(x) = 1 + \cos x \;;\; -\pi \le x \le \pi$

f) $f(x) = \sqrt{x} - 1 \;;\; 0 \le x \le 2$

34. Halla el área comprendida entre las curvas:

a) $f(x) = x + 3 \;;\; g(x) = x^2 - 3$

b) $f(x) = 2x^2 + 5x \;;\; g(x) = 2 - x^2$

c) $f(x) = \operatorname{sen} x \;;\; g(x) = x^2 - \pi x$

d) $f(x) = \sqrt{x} \;;\; g(x) = \frac{1}{2} x$

e) $f(x) = x^2 - 2x \;;\; g(x) = \sqrt{x}$

f) $f(x) = \cos x \;,\; 0 \le x \le 2\pi \;,\; g(x) = 1$

RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS

Epígrafe 1

1 a) 27,37 b) 24,47 c) 16,34 d) 0,19152
e) 53,4 f) 53,75 g) $6{,}25 \cdot 10^{-5}$ h) 6,3
i) 43,1 j) 0,01 k) 35 l) 1,4
m) 3,3944 n) $\frac{1}{30}$ ñ) $\frac{1}{8}$ o) 2,618

2 a) $\frac{5}{8}$ b) $-0{,}3$ c) 2,5 d) $3\frac{13}{16}$ e) $6\frac{3}{4}$
f) $1\frac{17}{24}$ g) $\frac{19}{6}$ h) $\frac{7}{6}$ i) $\frac{5}{4}$ j) 0,5
k) $\frac{5}{8}$ l) 1 m) 0,25 n) $\frac{7}{40}$ ñ) $\frac{616}{915}$
o) 57,5 p) $\frac{25}{7}$ q) $\frac{23}{18}$ r) 4

3 a) $-0{,}64$ b) 37 c) 299 d) $\frac{17}{4}$ e) 0
f) $\frac{16}{3}$ g) 13,75 h) -4 i) $-\frac{1}{8}$ j) 384
k) 729 l) $\frac{1}{2}$ m) 16 n) $-\frac{9}{4}$ ñ) 227
o) -25 p) 1 q) 43,86 r) $-1{,}1\sqrt{6}$ s) $3\sqrt{2}$
t) 66,3 u) $-4{,}24$ v) 52,5 w) 9,8 x) 1,4
y) $\frac{33}{13}$ z) $\frac{101}{85}$

4 a) -608 b) $-0{,}1875$ c) 2,36 d) 2,81 e) 1
f) -5 g) -1 h) $-19{,}24$ i) 0,18 j) 13,1
k) $-0{,}78$ l) $-94{,}72$ m) $4\sqrt[4]{10}$ n) 24,75 ñ) 3
o) $-8{,}5$ p) $-0{,}5$ q) -6

5 a) Sí b) Sí c) Sí d) Sí e) No f) Sí

6 a) 6,24 b) $\frac{971}{150}$ c) 82,08 d) $-1{,}88$

7 a) 2 b) N.S. c) 15,75 d) 25 e) $-0{,}19$
f) 24,4 g) 0,73 h) 64 i) 6,5 j) 4
k) 0,8195 l) 0,9542 m) 0,425

8 a) 11 b) $\frac{29}{11}$ c) $-8{,}8$ d) $-\frac{17}{26}$ e) 1
f) $\sqrt{a}$ g) $0{,}3\sqrt{6}$ h) 3,73 i) 0,18 j) 4

9 a) 12 b) $-0{,}455$ c) 18,2

10 a) $a = 2$ b) $a = \frac{8}{5}$ c) $a = -\frac{9}{4}$ d) $a = 4$

11 a) 1 b) -3 c) $-0{,}645$ d) 0,8892 e) $-0{,}351$

f) 0,342 g) $\frac{2}{3}$ h) -0,144 i) -2,5 j) $-\sqrt{3}$

k) 10 l) 1 m) $\frac{1}{3}$ n) 2,83

14 a) 17 b) $-\frac{5}{4}$ c) 0 d) $-\frac{11}{4}$ e) $\frac{4}{5}$ f) 1,47 g) -3,87

15 4 meses **16** 9 problemas

17 Mayor: \$1000 , Segundo: \$600 , Tercero: \$2900

18 la No. 2 **18** \$39,72 **20** 398,5 kg **21** \$5,20

22 30 min **23** 1 350 L **24** 3 004,56 cab

25 977 **26** 76,5% **27** 408 ha **28** \$350

29 150,06 m **30** 200 L **31** 5

32 Cerca: 35,1 m ; Area: 74,7 m^2 **33** 96 m^2

34 \$847,8 **35** 3 **36** 98 cm^3

37 $2,2\cdot10^2$ cm^3 **38** $3,2\cdot10^4$ galones **39** 1,6 dm^3

40 a) 98 cm^2 b) $5,3\cdot10^2$ cm^3 **41** 8,5 cm

Epigrafe 2

1 a) $10a + 18b + 16c$; V.N: 15 b) $a + b - c$; V.N: 3

c) $5b - 10x + 3y^2$; V.N: $-4\sqrt{2}$ d) $-4x - 2y$; V.N: -1,7

e) $2b + 2c + 2xy - yz^3$; V.N: 1,5 f) $2a - b - d$; V.N: $\sqrt{2}$

g) $3a + x$; V.N: $\frac{12}{13}$ h) $2a - 2x$; V.N: 0

i) $x^2 - 3xy^3 + 2$; V.N: $\frac{79}{80}$

2 a) $a^4 - b^4$ b) $x^2 + 4x - 21$

c) $3x^2 + 7x - 6$ d) $9y^2 + 12xy + 4x^2$

e) $m^3 + n^3$ f) $-x^2 + 11x - 30$

g) $5x^2 - 1,5x - 0,5$ h) $8p^3 - 4p^2 + \frac{2}{3}p - \frac{1}{27}$

i) $-2x^2 - 9y^2 + 9xy + 4x - 6y$ j) $25y^2 - 3$

k) $8m^3 - 125$ l) $a^3b^3 + 3a^2b^2c^2 + 3abc^4 + c^6$

m) $x^{n+2} + 3x^{n+3} + x^{n+4} - x^{n+5}$

3 a) $9a^2 + 13a + 3$; V.N: $\frac{25}{3}$ b) $4a^2 + 4a + 2$; V.N: 4,48

c) $7 - 2x$; V.N: 6 d) $9a^4 - 4b^2$; V.N: 1

e) $4ab$; V.N: 83,08 f) $4x^2 + x + 5$; V.N: $\frac{55}{9}$

g) $2m^2 - 2m$; V.N: 4 h) $-7p^2 + 3p - 17$; V.N: $-\frac{81}{4}$

$\boxed{4}$ a) $\frac{22}{3}b + \frac{3}{2}x - 1$; $-\frac{10}{3}b - \frac{3}{2}x - 1$

$b^2 + x^2 + 2bx + 3x - 3$; $9b^2 - x^2 - bx$; $\frac{b^2}{3} + x^2 + 2b$

b) $x + 1$

$\boxed{5}$ a) $5y(y^2 + 2)$ b) $25p(p - 5q)$ c) $x^2(x^2 + 2)$

d) $8m^2(n^3 - 2m)$ e) $6x^2(x - 2y + 4x^2)$

f) $11a^2(3b^3c + ab^2c^2 - 6d)$ g) $5pq(p - 2q + pq)$

h) $\frac{1}{4}a^3(3a^3 - 1)$ i) $(y + 2)(3x - 7)$

j) $(x - 2)(2x - 3y)$ k) $-2(m + 2)$

l) $(3 + x + y)(a^2 + 2)$ m) $(x - y)(3m - 1)$

n) $-5(b + 3)(b + 1)$ ñ) $(x + 2)(x + 1)(x - 1)$

o) $(x + 2)(x - 2)(x - 3)$ p) $(x - 2y)(a^2 - ax + x^2)$

q) $\cos^2 x(\cos x + 1)$ r) $x^n(x^n - 1)$

s) $x^{n-1}(x^4 + 1)$ t) $5\tan x(\tan x + 2)$

u) $2e^x(e^{4x} + 2)$

$\boxed{6}$ a) $(\frac{1}{2}y + 5)(\frac{1}{2}y - 5)$ b) $(0{,}6b^2 + 3)(0{,}6b^2 - 3)$

c) $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$ d) $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$

e) $5y(y + 1)(y - 1)$ f) $16(2 - b^2)(2 + b^2)$

g) $(\frac{3}{2} - b^4)(\frac{3}{2} + b^4)$ h) $2(y - 1)(y^2 + y + 1)$

i) $(z - \frac{1}{2})(z^2 + \frac{z}{2} + \frac{1}{4})$ j) $(3 + 5x^2)(9 - 15x^2 + 25x^4)$

k) $(a - x^2)(a^2 + ax^2 + x^4)$ l) $(a^2 + 2b^4)(a^4 - 2a^2b^4 + 4b^8)$

m) $(a^5 - 0{,}7b)(a^5 + 0{,}7b)$

n) $(x^3 + 0{,}4y)(x^6 - 0{,}4yx^3 + 0{,}16y^2)$

ñ) $(xy^2 - 6y^3)(x^2y^4 + 6xy^5 + 36y^6)$

o) $a(n + a)(n^2 - an + a^2)$

p) $(a + h + 0{,}1)(a + b - 0{,}1)$

q) $(\frac{2}{3} + x + y)(\frac{2}{3} - x - y)$

r) $(6 + m + n)(m^2 + n^2 + 2mn - 6m - 6n + 36)$

s) $\operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x + 1)(\operatorname{sen} x - 1)$

t) $(1 + e^x)(1 - e^x)$

u) $e^{2x}(e^x + 6)(e^x - 6)$

v) $(\operatorname{sen} x + \cos x)(\operatorname{sen} x - \cos x)$

$\boxed{7}$ a) $(b + 10)^2$ b) $(b - 5)^2$

c) $(y^3 + 11)^2$ d) $(2m^2 - 9n^2)^2$

e) $(y - 4x^8)(y - 9x^8)$ f) $(b + 6)(b - 2)$

g) $(1 - 9x^2)^2$ h) $(x^2 + 7)(x + 1)(x - 1)$

i) $(5 - x)(x + 3)$ j) $(3x - 2)(x + 2)$

k) $(4x - 1)(3x + 2)$ l) $(3x^2 - 1)(2x^2 + 5)$

m) $-2(2n + 3)(n - 2)$ n) $(\cos x - 1)^2$

ñ) $(\text{sen } x - 5)(\text{sen } x - 4)$ o) $(e^x - 4)(e^x + 1)$

p) $(2 \tan x + 5)(\tan x - 2)$

8 a) $(x + y)(x + a)$ b) $(x + y)(2 - a)$

c) $(3 - x^2)(1 - 2ab)$ d) $(a - 3)(a + 3 + 2b)$

e) $(3b - 2c)(3b + 2c + 1)$ f) $(x - 2)(x - 1)^2$

g) $(x + 2)(x - 3)(x + 7)$ h) $(x + 2)(x + 3)^2$

i) $(x + 3)(x + 2)(x - 1)$ j) $(x + 6)(x - 4)(x - 2)$

k) $(x - 2)(x - 3)(x + 5)$ l) $(x + 4)(x - 2)^2$

m) $(x + 6)(x - 3)^2$ n) $(x - 2)^2(x + 1)(x - 1)$

ñ) $(x + 2)(x - 4)(x + 1)^2$ o) $x(x + 2)(x + 3)(x + 5)$

p) $(x - 2)^2(x + 2)(x^2 + 2x + 4)$

q) $(y - 2)(y - 3)(y + 3)(y^2 + 2y + 4)$

r) $(x - 2)^2(x + 1)$ s) $(x - 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)$

9 a) $(x^4 - 6y)(x^4 + 6y)$ b) $4xy(xy^2 - 2xy + 5)$

c) $(1 - 7y)^2$ d) $3a^3(a + 2b^2)(a - 2b^2)$

e) $a(a - b)(2a + 3b)$ f) $(\frac{5}{2} + y^3)(\frac{5}{2} - y^3)$

g) $(x + 7y)(x - 3y)$ h) $(3m + n)(2m - 3n)$

i) $(x - 1)(x + 2)^2(x + 3)$ j) $(a + 1)(1 - mna^2)$

k) $(a - 3b - 5x)(a - 3b + 5x)$

l) $(xy - 50z)(xy + 2z)$ m) $(a + z)(16 - 4z + z^2)$

n) $2(2 - x)(4 + 2x + x^2)$ ñ) $3qp(3p - 1)(p + 2)$

o) $y(x - 2)(x - 5)(x + 2)$ p) $3\text{sen } x$

q) $(\cos x + 6)(\cos x - 3)$ r) $2(3\tan x + 1)(\tan x - 1)$

10 a) $\frac{2}{3a^2}$; $a = 0$ b) $\frac{c}{5a + b}$; $b = -5a$

c) $\frac{x}{2y}$; $y = 0$ d) $-\frac{x}{a + b}$; $a = -b$

e) $\frac{4x}{x + 2}$; $x = -2$ f) $\frac{x^2 + 3x + 9}{x + 3}$; $x = -3$

g) $\frac{x^2 + 3}{x^2 + 4}$; está definido para todo $x \in \mathbb{R}$

h) $\frac{3a + 2b}{ab}$; $a = b = 0$ i) $\frac{3x + 5}{x + 1}$; $x = -1$

j) $\frac{x - 2}{x - 3}$; $x = 3$ k) $x - 2$ está definido para todo $x \in \mathbb{R}$

l) $\frac{x + 5}{2}$; está definido para todo $x \in \mathbb{R}$

11 a) 4 b) 4,5 c) 0 d) −0,5 e) −16 f) −9,5

12 a) $\frac{7ab - 3a^2 - 8b^2}{60ab}$; $a = b = 0$

b) $\frac{1 - 4m}{1 - m^2}$; $m = \pm 1$ c) $\frac{8y + 25}{(y + 5)(y + 2)}$; $y = -5$, $y = -2$

d) 0 ; está definido para todo $x \in \mathbb{R}$

e) $\frac{v^2 + 1}{(v + 1)(v - 1)^2}$; $v = \pm 1$ f) $\frac{19x^2 + 15x + 5}{15x^2}$; $x = 0$

g) 0 ; está definido para todo $x \in \mathbb{R}$

h) $\frac{3xy + y^2}{x^2 - y^2}$; $x = \pm y$ i) $\frac{b - 7}{b - 2}$; $b = 2$

j) $\frac{2y - 30}{y^2 - 9}$; $y = \pm 3$

k) $\frac{-4x + 21}{(x - 6)(x - 7)(x - 8)}$; $x = 6$; $x = 7$; $x = 8$

l) $\frac{6x - 9}{(x^2 - 4)(x^2 - 9)}$; $x = \pm 2$; $x = \pm 3$

13 a) $\frac{2m - 7}{5(m - 3)}$; $m \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$ b) $\frac{1}{x^2 - 2x}$; $x \in \mathbb{R}\setminus\{0;2\}$

c) $\frac{x^2 - 9}{2x^2 - 9x + 10}$; $x \in \mathbb{R}\setminus\{2;2,5\}$

d) $\frac{xy - y^2}{x + 2}$; $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$ e) $\frac{2}{x + 1}$; $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

f) $\frac{a + 1}{a}$; $a \in \mathbb{R}^*$ g) 0 ; $x \in \mathbb{R}$

h) $\log \frac{2x}{x - 3}$; $x < 0$; $x > 3$

14 a) $a \in \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$ b) $a \in \mathbb{R}\setminus\{0;-1;-2;-3\}$ c) $a \in \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$

d) $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$ e) $a \in \mathbb{R}\setminus\{-5;1\}$ f) $x \in \mathbb{R}\setminus\{\pm 3;-1\}$

g) $x \in \mathbb{R}\setminus\{0;-3\}$ h) $n \in \mathbb{R}$ i) $x \in \mathbb{R}^*$

j) $x, y \in \mathbb{R}$ k) $x \in \mathbb{R}^*$ l) $x \in \mathbb{R}^*$

m) $x \in \mathbb{R}^*$ n) $m \in \mathbb{R}\setminus\left\{\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ ñ) $z^2 + a^2 \neq 0$

o) $p \neq -q$ p) $a \in \mathbb{R}^*$ q) $x \neq -a$

r) $x, y \in \mathbb{R}^*$ s) $b, c \in \mathbb{R}^*$ t) $a \in \mathbb{R}\setminus\{3; -\frac{7}{2}\}$

$\boxed{16}$ $f + g = 0$; $f - 3g = 4x^3 - 8x^2 - 16x - 32$; $f : g = -1$

$h + p = -\dfrac{6x + 3}{x^2 + x - 2}$; $h \cdot p = -1$; $h : p = -\left(\dfrac{x - 1}{x + 2}\right)^2$

$f \cdot h = x^3 - x^2 - 4x + 4$

$\boxed{17}$ a) $h(x) = \dfrac{2x^2 - 18}{x^2 - 1}$ b) $p(x) = \dfrac{2(x - 3)}{x + 3}$

c) $q(x) = \dfrac{x^4 - 6x^2 - 24x - 3}{(x - 1)^2(x + 1)^2}$ d) $t(0) = \dfrac{52}{3}$

Epígrafe 3

$\boxed{1}$ a) 3 b) 2 c) $-\frac{16}{5}$ d) 3 e) 1,1 f) 2 g) N.S

h) 1 i) $-\frac{2}{3}$ j) $\frac{81}{41}$ k) $-3{,}21$ l) $\frac{81}{4}$ m) N.S

n) 5 ñ) 4 o) $-\frac{58}{24}$ p) 10 q) 0,04 r) N.S

s) 1

$\boxed{2}$ a) -4; -3 b) 5; -1 c) $-\frac{1}{2}$; -6 d) $-\frac{1}{2}$; -2

e) $\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$ f) $\pm 2\sqrt{2}\, i$ g) $\frac{1}{3}$; -2 h) 0; 3

i) $\dfrac{-3 \pm i}{2}$ j) 2 k) -6; -1 l) 4,34; $-1{,}09$

m) 0; 1,5 n) -1; 5 ñ) $1{,}73 \pm 0{,}443i$

$\boxed{3}$ a) $\frac{1}{3}$; 4 b) 3; 4 c) $\frac{28}{11}$; 2 d) 3 e) $\frac{11}{3}$ f) 3

g) 0,8 h) N.S i) $-\frac{3}{4}$; 10 j) 0,5; 3

k) 7; $-1{,}33$ l) 0,5; 1 m) $x \in \mathbb{R} \setminus \{1; 0\}$

$\boxed{4}$ a) $r = \dfrac{3m}{n} - p$ b) $r = \pm\sqrt{\dfrac{3V}{\pi}}$ c) $c = \dfrac{b - a - 3d}{d}$

d) $t = \dfrac{1}{s - 1}$ e) $a = \dfrac{2(e - v_o t)}{t^2}$ f) $H = \dfrac{B}{3} - \dfrac{F}{E}$

g) $x = \dfrac{y^2 - 3}{2}$ h) $u = 3 - (2p - 5)^2$ i) $t = \ln\sqrt{e}$

j) $x = 10^{a+2}$ k) $c = \dfrac{e}{a} - f$ l) $p = \dfrac{m}{2(m + n)}$

$\boxed{5}$ a) $6a$ b) $36ax^2$ c) $-(x + a)$ d) $\dfrac{2}{x - y}$ e) $\sqrt{2a - 10}$

$\boxed{6}$ a) $|k| \geq 6$; $k \leq 0$, $k \neq -9$ b) $|k| < 6$; $k > 0$

$\boxed{7}$ a) complejas b) Reales e iguales

$\boxed{8}$ a) 4 b) 4 c) -2 ; 7 d) 11 e) 9 f) 4

g) 9 h) 4 i) 1 j) 16 k) 7 l) 1; 4

m) ninguno n) 3 ñ) ninguno o) 6

p) ninguno q) 2 r) ninguno s) 0; $\frac{1}{2}$

t) 8 u) 11 v) 1 w) 6 x) 3 y) 10

z) 0 ; ± 4

$\boxed{9}$ a) −3 b) 11 c) 5 d) 1 y 3 e) 5 f) 4

$\boxed{10}$ a) Dom f: $x \geq -2{,}5$; $x \neq -1$, Dom g: $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ b) 1

$\boxed{11}$ $a = -\frac{b}{2}$ $\boxed{12}$ $a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}^*$

$\boxed{13}$ a) $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$; $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$; $\frac{5\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

b) $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$; $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

c) $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$; $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

d) $33{,}7° + 180°k$; $111{,}8° + 180°k$; $k \in \mathbb{Z}$

e) $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$; $\frac{11\pi}{6} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

f) $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$; $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

g) $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$; $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$; $\frac{5\pi}{3} + 2k\pi$;

$\frac{\pi}{6} + 2k\pi$; $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$; $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$; $\frac{11\pi}{6} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

h) $26{,}6° + 180°k$; $k \in \mathbb{Z}$ i) $\frac{\pi}{4} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

j) $k\pi$; $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{14}$ a) 3 b) 2,5 c) $-\frac{5}{6}$ d) 2 e) $\frac{16}{7}$ f) 1

g) N.S. h) −2; $\frac{2}{3}$ i) 0 ; 2 j) 1 k) N.S. l) ± 2

m) N.S. n) $\frac{11}{6}$ ñ) N.S. o) −5; 20 p) $\frac{2}{3}$ q) 5

r) $\frac{1}{19}$ s) 4 t) 3

$\boxed{15}$ a) ceros: 0; ± 1 polo: 3 b) cero: 1 polo: −1

c) ceros: ±2; $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ polos: no tiene

d) ceros: 0 ; 4 polos: no tiene

e) ceros: no tiene polo: 0 f) cero: $\frac{4}{3}$ polo: 0

g) ceros: −2; 3,5 polos: −3; −4

h) ceros: 0; −1; −2 polos: 1; 3 i) cero: 3 polo: $\frac{3}{4}$

j) ceros: $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ polos: $k\pi$; $(0{,}26 + 2k)\pi$; $(0{,}74 + 2k)\pi$

k) cero: 1 polos: −1; 2; 3

l) cero: -1 polos: No tiene

16 a) $(0;\ \pm 1)$ b) $(-1;\ 2;\ 3)$ c) N.S. d) (0)

e) (0) f) $(-2;\ 5)$ g) $(3;\ 4)$ h) $\{\frac{11}{8}\}$ i) (8)

j) $(180^\circ k;\ 24{,}2^\circ + 360^\circ k;\ 155{,}8^\circ + 360^\circ k;\ k \in Z)$

k) $(27{,}5^\circ + 180^\circ k;\ 117{,}4^\circ + 180^\circ k;\ k \in Z)$

17 a) max: -3; min: -1 b) max: 6; min: 0; 12

c) min: -1 d) max: 0

e) max: $\frac{2}{8}$ f) no tiene extremos

18 cobre: 240 millones de t, manganeso: 6000 millones de t

cobalto: 60 millones de t

19 31°; 67° y 82° **20** 7,0 dm

21 largo: 15 m ancho: 13 m **22** \$216 **23** 27 km

24 de \$5: 4 ; de \$10: 18 ; de \$20: 4 **25** 17°; 34°; 39°

26 0 **27** 30 L **28** año 1562 **29** año 1547

30 base: 5,0 m altura: 8,0 m **31** 20 m

32 ancho: 30 m largo: 60 m

33 3; 4 y 5 ó -5; -4 y -2 **34** -12 ó 7

35 10; 11; 12; 13 y 14 ó -2; -1; 0; 1 y 2

36 3 u ó 1 u **37** altura: 3,56 dm diámetro: 2,37 dm

39 2,5 u^2 **40** apartamientos: 40 costo: \$8000

41 $\frac{12}{17}$ **42** 9 km/k **43** menor: $9\ \frac{1}{d}$ mayor: $24\ \frac{1}{d}$

44 40 y 20 **45** $\frac{a}{2}$ **46** $h = 3{,}00$; $a = 6{,}00$

Epígrafe 4

1 a) $(2;1)$ b) $(3;5)$ c) $(-3;3)$ d) $(3{,}5;1{,}6)$

e) $(20;6)$ f) $(10;20)$ g) $(\frac{5}{8};-\frac{35}{8})$ h) $(6;2)$

i) $(\frac{1}{8};-4)$ j) $(6;5)$ k) $(36;30)$ l) $(10;6)$

m) $(-6;20)$ n) $(45;35)$ ñ) $(6;-4)$ o) $(5;2)$

p) $(3;3)$ q) $(3;-1)$ r) $(5;3)$ s) $(\frac{1}{2};\frac{1}{8})$

t) $(2;4)$ u) $(-;3)$ v) $(\frac{56}{15};-\frac{49}{15})$

2 a) (3;5;7) b) (-1;-2;6) c) (1;2;3) d) (-2;4;1)

e) (1;2;3) f) (3;4;5) g) (2;-2;5) h) (2;3;1)

i) (6;12;18) j) $(\frac{5}{2};\frac{5}{2};\frac{5}{2})$

3 a) {(0;0);(6;3)} b) {(1;1)} c) {(1;3);(-1;-3)}

d) {(0;-1);(4;3)} e) {(4;5)}

f) {(1;1);(-2;-2);(1,62;-0,62);(0,62;1,62)}

g) {(1;0);(2;2)} h) {(5;4);(-4;-5)} i) {(2;3)}

j) {(0;-1);(2;0)} k) {(0,95;1,9);(-0,95;-1,9)}

l) $\{(0;-3);(\frac{24}{11};\frac{15}{11})\}$ m) {(2;1);(3;0)}

n) {(4,91;2,73);(-0,91;-1,93)} ñ) {(0;-9);(10;0)}

o) {(4,48;0,76);(-4,48;5,24)}

p) $\left\{\left(\frac{a+b^2}{2b}\ ;\ \frac{b^2-a}{2b}\right)\right\}$ q) {(5;3);(-3;-5)}

r) {(1,74i ; 2,5 + 0,87i); (-1,74i ; 2,5 - 0,87i)}

s) {(2;-5);(-4;3);(4,46;5,6);(-2,46;-3,63)}

4 a) (4;-2) ; rectas

b) (6;10), (2;2) ; parábola y recta

c) (5;0), (8,2;1,6) ; circunferencia y recta

d) (5;0), (1,1;-3,9) ; elipse y recta

e) (1,6;-0,2), (0;-1) ; circunferencia y recta

f) No existen ; rectas paralelas

g) No existen ; parábolas

h) (3;0), (0;2) ; elipse y recta

5 a) (0;4), (-3;0), (1;-1) b) (2;2), (1;-1), (-1;1)

c) (0;4), (2;0), (-5;0) d) (4;3), (0;2), (-3;5)

e) (4;2), (4;-5), (-7,2;2) f) (0;0), (1;6), (6;1)

6 a) se cortan b) paralelas c) coincidentes

d) paralelas e) se cortan f) coincidentes

g) se cortan h) paralelas i) coincidentes

7 a) Se cortan en el punto $(-\frac{5}{11};\ \frac{7}{11})$

b) No se cortan en el mismo punto

c) No se cortan en el mismo punto

$\boxed{8}$ 1: a) $a \neq 3,\ b \in \mathbb{R}$ 2: a) $a \neq \pm 4,\ b \in \mathbb{R}$

b) $a = 3,\ b \neq 2$ b) $a = \pm 4,\ b \neq \pm 2$

c) $a = 3,\ b = 2$ c) $a = \pm 4,\ b = \pm 2$

$\boxed{9}$ $f(x) = -4x^2 + 4x + 4$ $\boxed{10}$ $f(x) = x^2 - 2x + 5$

$\boxed{11}$ mayor: 8,0 cm menor: 6,0 cm

$\boxed{12}$ mayor: 16 m menor: 12 m $\boxed{13}$ $\frac{5}{12}$ $\boxed{14}$ 115 y 85

$\boxed{15}$ personas: 30 costo: \$20 $\boxed{16}$ 264

$\boxed{17}$ de A a B: 17 km ; de B a C: 15 km ; de A a C: 12 km

$\boxed{18}$ 45°, 65° y 70° $\boxed{19}$ 473 $\boxed{20}$ 2 y 0,5 $\boxed{21}$ 31

$\boxed{22}$ 4,0 m y 5,0 m $\boxed{23}$ $a = 2,\ b = -10,\ c = 12$

$\boxed{24}$ 83 $\boxed{25}$ 52 y 25 $\boxed{26}$ $a = \frac{9}{8}$ y $c = -\frac{27}{8}$

$\boxed{27}$ 12 y 8 $\boxed{28}$ 428 y 824

Epígrafe 5

$\boxed{1}$ a) $x > 2$ b) $x < -1$ c) $x \geq 10$ d) $x > 3{,}5$

e) $x < \frac{84}{17}$ f) $x > \frac{9}{8}$ g) $x \leq 5$ h) $x < 1$

i) $x > -\frac{17}{25}$ j) $x > \frac{2}{5}$ k) $x \leq -3{,}31$ l) $x > 466$

$\boxed{2}$ a) $x < -3$ ó $x > 7$ b) $\frac{2}{3} \leq x \leq 3$ c) $-\frac{1}{2} \leq x \leq 2$

d) $-2 \leq x \leq 2$ e) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ f) Para todo $x \in \mathbb{R}$

g) $x = -\frac{1}{2}$ h) $x \leq -7{,}47$ ó $x \geq -1{,}47$

i) $x > \frac{3}{2}$ j) $x \leq -5{,}47$ ó $x \geq 1{,}47$

k) $x < -3$ ó $x > 8$ l) $x \geq -\frac{2}{9}$

m) $0 < x < 1$ n) $x \leq -0{,}4$ ó $x \geq 0$

ñ) $-0{,}625 < x < 6{,}63$ o) Para todo $x \in \mathbb{R}$

p) $x > 3{,}79$ q) $-3{,}8 < x < 15{,}8$

$\boxed{3}$ a) $\{x \in \mathbb{R}: -5 < x < 1\}$

b) $\{x \in \mathbb{R}: x < -2$ ó $0 < x < 2\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} : x < \frac{2}{3}$ ó $1 < x < 2{,}5\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} : -\frac{5}{3} < x \leq 0$ ó $x > \frac{5}{3}\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 5\}$

f) $\{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 4 \text{ ó } x > 6\}$

g) $\{x \in \mathbb{R} : -7 \leq x \leq -1 \text{ ó } 0 \leq x < 1{,}36 \text{ ó } x > 6{,}65\}$

h) $\{x \in \mathbb{R} : x < -2 \text{ ó } x > 2\}$

i) $\{x \in \mathbb{R} : -3 < x < -2 \text{ ó } -1 < x < 1\}$

j) $\{x \in \mathbb{R} : -1{,}26 < x < -1 \text{ ó } 1 < x < 1{,}59\}$

k) $\{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 2\}$

l) $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 3 \,;\, x \neq 2 \,;\, x \neq 1\}$

m) $\{x \in \mathbb{R} : x < -2\}$

$\boxed{4}$ a) ninguno   b) $x > 1$ ó $x < -2$ c) $x < 16$

d) $-\frac{2}{5} \leq x \leq 2$ e) $x < 4{,}22$ f) $x > 0$

g) $x \geq \frac{11}{23}$ h) $0{,}707 \leq x \leq 1{,}15$ i) $x > \frac{67}{9}$

j) ninguno   k) $0 \leq x \leq 3$

$\boxed{5}$ a) No   b) Si   c) No   d) No   e) No   f) No   g) No   h) No

$\boxed{6}$ a) $-2 < x < 5$ b) $\frac{1}{2} < x < 1$ c) $x > 1$ ó $x \leq 0$

$\boxed{7}$ a) M.C.: $x > 5$
M.D.: $x < 5$

b) M.C.: $x < -\frac{7}{3}$ ó $x > 0$
M.D.: $-\frac{7}{3} < x < 0$

c) M.C.: $-3 < x < -2$ ó $x > 1$
M.D.: $x < -3$ ó $-2 < x < 1$

d) M.C.: $x > \frac{5}{6}$
M.D.: $x < \frac{5}{6}$

e) M.C.: Para todo $x \in \mathbb{R}$

f) M.C.: $x > -\frac{1}{12}$
M.D.: $x < -\frac{1}{12}$

g) M.D.: Para todo $x \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{9}\}$

h) M.C.: $x < -1$ ó $x > 1$
M.D.: $-1 < x < 1$, $x \neq 0$

i) M.C.: $x < -4$ ó $x > -2$
MD: $-4 < x < -2$; $x \neq -3$

j) M.C.: $x > 4{,}45$ ó $x < -0{,}45$
M.D.: $-0{,}45 < x < 4{,}45$; $x \neq 2$

$\boxed{8}$ a) $x \in \mathbb{R}$ b) $x > -1$ c) $x > 0$ d) $|x| \leq \sqrt{2}$

e) $x < 8$ f) $x \geq -\frac{1}{4}$ g) $0 \leq x \leq 4$

h) $-\sqrt{2} \leq x \leq 0$ ó $x \geq \sqrt{2}$ i) $x \leq \frac{2}{3}$ ó $x \geq \frac{3}{2}$; $x \neq 6$

j) $-\frac{3}{2} < x < \frac{1}{3}$ ó $|x| > 5$ k) $2 < x < 4$ ó $x > 6$

$\boxed{9}$ a) $0 < x < 1$ ó $x > 1$ b) No existen $\boxed{10}$ $-1 \leq x \leq 0$

$\boxed{11}$ a) $x \geq \frac{2}{3}$ b) $-\frac{1}{3} < x \leq 0$ c) $x < -1{,}24$ ó $x > 3{,}24$

d) $x < 3$ ó $x > 4$ e) $x \leq -\frac{1}{2}$ ó $x \geq 3$

f) $-3 \leq x \leq -2$ ó $x \geq -1$

$\boxed{12}$ a) $x \leq 0$ ó $x \geq 5$ b) $-3 < x \leq -1$ ó $0 < x \leq \frac{1}{2}$

Epigrafe 6

$\boxed{1}$ a) $\text{sen } 2x = \frac{3\sqrt{7}}{8}$ b) $\text{sen } 2x = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$ c) $\text{sen } 2x = \frac{4}{5}$

$\cos 2x = -\frac{1}{8}$ $\cos 2x = -\frac{1}{9}$ $\cos 2x = -\frac{3}{5}$

$\tan 2x = -3\sqrt{7}$ $\tan 2x = 4\sqrt{5}$ $\tan 2x = -\frac{4}{3}$

d) $\text{sen } 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\text{sen } 2x = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ f) $\text{sen } 2x = \frac{12}{13}$

$\cos 2x = \frac{1}{2}$ $\cos 2x = -\frac{7}{9}$ $\cos 2x = -\frac{5}{13}$

$\tan 2x = -\sqrt{3}$ $\tan 2x = -\frac{4\sqrt{2}}{7}$ $\tan 2x = -\frac{12}{5}$

$\boxed{5}$ a) $\{k\pi;\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

b) $\{106{,}3^\circ + 360^\circ k;\ 253{,}7^\circ + 360^\circ k;\ k \in \mathbb{Z}\}$

c) $\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

d) $\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

e) $\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{4} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

f) $\{244{,}4^\circ + 360^\circ k;\ 295{,}6^\circ + 360^\circ k;\ k \in \mathbb{Z}\}$

g) $\{(2k + 1)\pi\ ;\ (4k + 1)\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\}$

h) $\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{7\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{11\pi}{6} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

i) $\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k;\ k \in \mathbb{Z}\}$

j) $\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ (4k + 1)\frac{\pi}{2}\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$

k) $\{(2k + 1)\frac{\pi}{2};\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

l) $\{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$ m) $\{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$ n) $\{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

ñ) $\{36{,}9^\circ + 360^\circ k;\ 143{,}1^\circ + 360^\circ k;\ 216{,}9^\circ + 360^\circ k;$
$323{,}1^\circ + 360^\circ k;\ k \in \mathbb{Z}\}$

o) $\{(2k + 1)\frac{\pi}{8};\ k \in \mathbb{Z}\}$

p) $\{17{,}6^\circ + 180^\circ k;\ 162{,}4^\circ + 180^\circ k;\ k \in \mathbb{Z}\}$

q) $\{30^\circ + 360^\circ k;\ 150^\circ + 360^\circ k;\ 192{,}8^\circ + 360^\circ k;$
$347{,}2^\circ + 360^\circ k;\ k \in \mathbb{Z}\}$ r) $\{\emptyset\}$

$\boxed{6}$ a) $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$ c) π; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$

d) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$ e) $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$ f) $\frac{3\pi}{4}$

g) $\frac{\pi}{4}$ h) $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$ $\frac{7\pi}{6}$ $\frac{11\pi}{6}$

i) $125{,}8^\circ$; $143{,}2^\circ$; 270°; 630° j) $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$

k) $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$ l) 0; π; 2π

m) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$ n) 135°; 315°; $63{,}4^\circ$; $243{,}4^\circ$

ñ) $33{,}7^\circ$; $213{,}7^\circ$; 135°; 315°

o) 60°; 300°; $115{,}9^\circ$; $244{,}1^\circ$

p) 45°; 225°; $139{,}8^\circ$; $319{,}8^\circ$ q) N.S

$\boxed{7}$ a) $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$; $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$; $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$; $\frac{11\pi}{6} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

b) $\frac{\pi}{6} + k\pi$; $\frac{5\pi}{6} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

c) $22{,}5^\circ + 180^\circ k$; $112{,}5^\circ + 180^\circ k$; $k \in \mathbb{Z}$

d) $41{,}8^\circ + k\,360^\circ$; $138{,}2^\circ + k\,360^\circ$; $k \in \mathbb{Z}$

e) $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$; $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$; $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

f) No existen g) $k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

h) $51{,}7^\circ + 360^\circ k$; $308{,}3^\circ + 360^\circ k$; $k \in \mathbb{Z}$

i) $38{,}3^\circ + 360^\circ k$; $141{,}7^\circ + 360^\circ k$; $k \in \mathbb{Z}$

j) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$; $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

k) $\pi + 4k\pi$; $3\pi + 4k\pi$; $\frac{\pi}{3} + 4k\pi$; $\frac{5\pi}{3} + 4k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

l) $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$; $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

m) $k\pi$; $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$; $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

n) $\frac{3\pi}{4} + k\pi$; $\frac{\pi}{3} + k\pi$; $\frac{2\pi}{3} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{8}$ a) $2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ b) $63{,}4^\circ + k180^\circ$; $153{,}4^\circ + k180^\circ$; $k \in \mathbb{Z}$

c) $k\pi$; $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$; $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

d) $k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ e) $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $\frac{5\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

f) $(2k + 1)\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$; $\frac{7\pi}{4} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

g) $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$; $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

h) $(2k + 1)\,180^\circ$; $51{,}3^\circ + k360^\circ$; $308{,}7^\circ + k360^\circ$; $k \in \mathbb{Z}$

i) $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$; $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$; $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$; $\frac{11\pi}{6} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

j) $75,5° + 360°k$; $284,5° + 360°k$; $120° + 360°k$;
$240° + 360°k$; $k \in Z$.

k) $(2k + 1)\frac{\pi}{2}$; $k \in Z$. l) $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$; $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$; $k \in Z$

Epígrafe 7

$\boxed{2}$ 30° y 150° $\boxed{3}$ 80°; 120°; 160°

$\boxed{4}$ $\alpha = \gamma = 40°$; $\theta = \beta = 140°$

$\boxed{6}$ adyacentes: 1 y 2; 2 y 3; 3 y 4; 5 y 6; 6 y 7; 7 y 8; 5 y 8

opuestos por el vértice: 1 y 3; 2 y 4; 5 y 7; 6 y 8

correspondientes: 1 y 5; 4 y 8; 2 y 6; 3 y 7.

conjugados: 1 y 8; 4 y 5; 2 y 7; 3 y 6.

alternos: $\measuredangle 1$ y $\measuredangle 7$; $\measuredangle 2$ y $\measuredangle 8$; $\measuredangle 3$ y $\measuredangle 5$; $\measuredangle 4$ y $\measuredangle 6$

$\measuredangle 1 = \measuredangle 3 = \measuredangle 5 = \measuredangle 7 = 60°$

$\measuredangle 2 = \measuredangle 4 = \measuredangle 6 = \measuredangle 8 = 120°$

$\boxed{7}$ $\measuredangle 1 = \measuredangle 2 = 78°$; $\measuredangle 3 = 150°$; $\measuredangle 4 = \measuredangle 5 = 30°$

$\measuredangle 6 = \measuredangle 9 = 122°$; $\measuredangle 7 = \measuredangle 8 = 58°$

$\boxed{8}$ $\alpha = \beta = \gamma = 45°$; $\theta = 135°$ $\boxed{9}$ $\alpha = 160°$

$\boxed{11}$ $r \parallel s$ por ocupar los ángulos suplementarios γ y δ posición de conjugados.

$\boxed{14}$ a) No b) Sí c) Sí d) No $\boxed{16}$ 30°; 60° y 90°

$\boxed{18}$ 30° y 60° $\boxed{19}$ 42° y 48° $\boxed{20}$ 72°; 72° y 36°

$\boxed{22}$ 78° $\boxed{23}$ $\alpha = 35°$; $\beta = 80°$

$\boxed{24}$ $\alpha = 67°$; $\beta = 78°$ $\boxed{25}$ $\measuredangle ABC = 120°$; $\overline{AC} = 7,8$ cm

$\boxed{26}$ $\overline{AC} = 6,0$ cm ; $\overline{AB} = 4,5$ cm

$\boxed{27}$ $\overline{DC} = 6,1$ cm ; $\overline{DB} = 6,7$ cm

$\boxed{28}$ $\overline{AE} = 4,0$ cm ; $\overline{EB} = 6,9$ cm

$\boxed{29}$ $\measuredangle A = 50°$; $\overline{AB} = 4,4$ cm ; $\overline{AC} = 6,8$ cm

$\boxed{30}$ 30°; 60° y 90° $\boxed{31}$ 3,5 cm y 5,7 cm

$\boxed{32}$ $\measuredangle A = 45°$; $\measuredangle B = 65°$; $\measuredangle C = 159°$ y $\measuredangle D = 91°$

$\boxed{34}$ $\measuredangle A = \measuredangle C = 80°$; $\measuredangle B = \measuredangle D = 100°$

$\boxed{35}$ 60° y 120° $\boxed{36}$ 71,5° y 108,5° $\boxed{38}$ 1,0 cm

$\boxed{39}$ $\overline{EB} = 3{,}5$ cm ; $\overline{EC} = 4{,}9$ cm

$\boxed{41}$ $\overline{MP} = 10{,}4$ cm ; $\overline{ME} = 7{,}9$ cm y $\measuredangle EMP = 10{,}9^\circ$

$\boxed{42}$ a) $\overline{DA} = 8{,}6$ cm ; $\overline{RA} = 21$ cm y $\measuredangle R = 55^\circ$
b) $\measuredangle A = 38{,}7^\circ$; $\measuredangle R = 51{,}3^\circ$ y $\overline{RA} = 13$ cm

$\boxed{43}$ $\overline{QT} = 6{,}7$ cm ; $\overline{CT} = 4{,}6$ cm y $\overline{BC} = 5{,}0$ cm

Epigrafe 8

$\boxed{12}$ b) $\measuredangle MOC = 40^\circ$ $\boxed{17}$ b) $\overline{BE} = 4{,}0$ cm por elemento homólogo con el lado $\overline{CE}$

$\boxed{23}$ Si $\boxed{24}$ b) poligonal ADEC: 25,8 cm $\boxed{25}$ b) $\overline{ME} = 18$

$\boxed{28}$ Si, por tener los tres lados proporcionales (razón $\frac{3}{4}$)

$\boxed{34}$ $\overline{BG} = 4{,}8$ cm.

Epigrafe 9

$\boxed{1}$ base: 6 cm , altura: 18 cm $\boxed{2}$ 20 cm y 35 cm

$\boxed{3}$ base: 28 m ; altura: 22 m $\boxed{4}$ $30 \cdot 10$ cm^2

$\boxed{5}$ altura: 8,0 m $\boxed{6}$ 173 m^2 $\boxed{8}$ 635 m^2

$\boxed{9}$ $3{,}8 \cdot 10^2$ m^2 $\boxed{10}$ 27,7 m^2 $\boxed{12}$ 6,9 m y 4,0 m.

$\boxed{13}$ diagonal: 30 m; Area: 600 m^2

$\boxed{14}$ lado: 5,019 m ; Area: 23,60 m^2

$\boxed{15}$ 1000 m^2 $\boxed{16}$ bases: 19,9 m y 29,9 m ; altura: 15 m

$\boxed{17}$ 168 cm^2 $\boxed{18}$ diagonales: 75 m ; $A = 2{,}7 \cdot 10^3$ cm^2

$\boxed{20}$ a) $3{,}3 \cdot 10^2$ cm^2 b) 71 cm^2 $\boxed{21}$ $1{,}9 \cdot 10^2$ m^2

$\boxed{22}$ 16 cm^2 $\boxed{23}$ 160 cm^3 $\boxed{24}$ 161 cm^3

$\boxed{25}$ 196 m^2 $\boxed{26}$ 9,0 m $\boxed{27}$ $A_T = 12{,}4$ m^2 ; $V = 1{,}98$ m^3

$\boxed{28}$ 0,71 m^3 $\boxed{29}$ $h = 4{,}18$ m ; $V = 1{,}99$ m^3 $\boxed{30}$ 65 m^3

$\boxed{31}$ 18 cm $\boxed{32}$ $A_B = 0{,}87$ cm^2 ; $V = 7{,}8$ cm^3

$\boxed{33}$ a) 36 u^2 b) $\frac{1}{6}$ u^2 c) $\frac{259}{12}$ u^2 d) 4 u^2 e) 6,28 u^2
f) 0,55 u^2

$\boxed{34}$ a) 20,8 u^2 b) 6,35 u^2 c) 7,17 u^2 d) 1,33 u^2
e) 3,7 u^2 f) 6,28 u^2

TABLA DE CUADRADOS

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,020	1,040	1,061	1,082	1,103	1,124	1,145	1,166	1,188
1,1	1,210	1,232	1,254	1,277	1,300	1,323	1,346	1,369	1,392	1,416
1,2	1,440	1,464	1,488	1,513	1,538	1,563	1,588	1,613	1,638	1,664
1,3	1,690	1,716	1,742	1,769	1,796	1,823	1,850	1,877	1,904	1,932
1,4	1,960	1,988	2,016	2,045	2,074	2,103	2,132	2,161	2,190	2,220
1,5	2,250	2,280	2,310	2,341	2,372	2,403	2,434	2,465	2,496	2,528
1,6	2,560	2,592	2,624	2,657	2,690	2,723	2,756	2,789	2,822	2,856
1,7	2,890	2,924	2,958	2,993	3,028	3,063	3,098	3,133	3,168	3,204
1,8	3,240	3,276	3,312	3,349	3,386	3,423	3,460	3,497	3,534	3,572
1,9	3,610	3,648	3,686	3,725	3,764	3,803	3,842	3,881	3,920	3,960
2,0	4,000	4,040	4,080	4,121	4,162	4,203	4,244	4,285	4,326	4,368
2,1	4,410	4,452	4,494	4,537	4,580	4,623	4,666	4,709	4,752	4,796
2,2	4,840	4,884	4,928	4,973	5,018	5,063	5,108	5,153	5,198	5,244
2,3	5,290	5,336	5,382	5,429	5,476	5,523	5,570	5,617	5,664	5,712
2,4	5,760	5,808	5,856	5,905	5,954	6,003	6,052	6,101	6,150	6,200
2,5	6,250	6,300	6,350	6,401	6,452	6,503	6,554	6,605	6,656	6,708
2,6	6,760	6,812	6,864	6,917	6,970	7,023	7,076	7,129	7,182	7,236
2,7	7,290	7,344	7,398	7,453	7,508	7,563	7,618	7,673	7,728	7,784
2,8	7,840	7,896	7,952	8,009	8,066	8,123	8,180	8,237	8,294	8,352
2,9	8,410	8,468	8,526	8,585	8,644	8,703	8,762	8,821	8,880	8,940
3,0	9,000	9,060	9,120	9,181	9,242	9,303	9,364	9,425	9,486	9,548
3,1	9,610	9,672	9,734	9,797	9,860	9,923	9,986	10,05	10,11	10,18
3,2	10,24	10,30	10,37	10,43	10,50	10,56	10,63	10,69	10,76	10,82
3,3	10,89	10,96	11,02	11,09	11,16	11,22	11,29	11,36	11,42	11,49
3,4	11,56	11,63	11,70	11,76	11,83	11,90	11,97	12,04	12,11	12,18
3,5	12,25	12,32	12,39	12,46	12,53	12,60	12,67	12,74	12,82	12,89
3,6	12,96	13,03	13,10	13,18	13,25	13,32	13,40	13,47	13,54	13,62
3,7	13,69	13,76	13,84	13,91	13,99	14,06	14,14	14,21	14,29	14,36
3,8	14,44	14,52	14,59	14,67	14,75	14,82	14,90	14,98	15,05	15,13
3,9	15,21	15,29	15,37	15,44	15,52	15,60	15,68	15,76	15,84	15,92
4,0	16,00	16,08	16,16	16,24	16,32	16,40	16,48	16,56	16,65	16,73
4,1	16,81	16,89	16,97	17,06	17,14	17,22	17,31	17,39	17,47	17,56
4,2	17,64	17,72	17,81	17,89	17,98	18,06	18,15	18,23	18,32	18,40
4,3	18,49	18,58	18,66	18,75	18,84	18,92	19,01	19,10	19,18	19,27
4,4	19,36	19,45	19,54	19,62	19,71	19,80	19,89	19,98	20,07	20,16
4,5	20,25	20,34	20,43	20,52	20,61	20,70	20,79	20,88	20,98	21,07
4,6	21,16	21,25	21,34	21,44	21,53	21,62	21,72	21,81	21,90	22,00
4,7	22,09	22,18	22,28	22,37	22,47	22,56	22,66	22,75	22,85	22,94
4,8	23,04	23,14	23,23	23,33	23,43	23,52	23,62	23,72	23,81	23,91
4,9	24,01	24,11	24,21	24,30	24,40	24,50	24,60	24,70	24,80	24,90
5,0	25,00	25,10	25,20	25,30	25,40	25,50	25,60	25,70	25,81	25,91
5,1	26,01	26,11	26,21	26,32	26,42	26,52	26,63	26,73	26,83	26,94
5,2	27,04	27,14	27,25	27,35	27,46	27,56	27,67	27,77	27,88	27,98
5,3	28,09	28,20	28,30	28,41	28,52	28,62	28,73	28,84	28,94	29,05
5,4	29,16	29,27	29,38	29,48	29,59	29,70	29,81	29,92	30,03	30,14

SENO

Grados	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	(1,0)	
45	0,7071	7083	7096	7108	7120	7133	7145	7157	7169	7181	7193	44
46	0,7193	7206	7218	7230	7242	7254	7266	7278	7290	7302	7314	43
47	0,7314	7325	7337	7349	7361	7373	7385	7396	7408	7420	7431	42
48	0,7431	7443	7455	7466	7478	7490	7501	7513	7524	7536	7547	41
49	0,7547	7559	7570	7581	7593	7604	7615	7627	7638	7649	7660	40
50	0,7660	7672	7683	7694	7705	7716	7727	7738	7749	7760	7771	39
51	0,7771	7782	7793	7804	7815	7826	7837	7848	7859	7869	7880	38
52	0,7880	7891	7902	7912	7923	7934	7944	7955	7965	7976	7986	37
53	0,7986	7997	8007	8018	8028	8039	8049	8059	8070	8080	8090	36
54	0,8090	8100	8111	8121	8131	8141	8151	8161	8171	8181	8192	35
55	0,8192	8202	8211	8221	8231	8241	8251	8261	8271	8281	8290	34
56	0,8290	8300	8310	8320	8329	8339	8348	8358	8368	8377	8387	33
57	0,8387	8396	8406	8415	8425	8434	8443	8453	8462	8471	8480	32
58	0,8480	8490	8499	8508	8517	8526	8536	8545	8554	8563	8572	31
59	0,8572	8581	8590	8599	8607	8616	8625	8634	8643	8652	8660	30
60	0,8660	8669	8678	8686	8695	8704	8712	8721	8729	8738	8746	29
61	0,8746	8755	8763	8771	8780	8788	8796	8805	8813	8821	8829	28
62	0,8829	8838	8846	8854	8862	8870	8878	8886	8894	8902	8910	27
63	0,8910	8918	8926	8934	8942	8949	8957	8965	8973	8980	8988	26
64	0,8988	8996	9003	9011	9018	9026	9033	9041	9048	9056	9063	25
65	0,9063	9070	9078	9085	9092	9100	9107	9114	9121	9128	9135	24
66	0,9135	9143	9150	9157	9164	9171	9178	9184	9191	9198	9205	23
67	0,9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9265	9272	22
68	0,9272	9278	9285	9291	9298	9304	9311	9317	9323	9330	9336	21
69	0,9336	9342	9348	9354	9361	9367	9373	9379	9385	9391	9397	20
70	0,9397	9403	9409	9415	9421	9426	9432	9438	9444	9449	9455	19
71	0,9455	9461	9466	9472	9478	9483	9489	9494	9500	9505	9511	18
72	0,9511	9516	9521	9527	9532	9537	9542	9548	9553	9558	9563	17
73	0,9563	9568	9573	9578	9583	9588	9593	9598	9603	9608	9613	16
74	0,9613	9617	9622	9627	9632	9636	9641	9646	9650	9655	9659	15
75	0,9659	9664	9668	9673	9677	9681	9686	9690	9694	9699	9703	14
76	0,9703	9707	9711	9715	9720	9724	9728	9732	9736	9740	9744	13
77	0,9744	9748	9751	9755	9759	9763	9767	9770	9774	9778	9781	12
78	0,9781	9785	9789	9792	9796	9799	9803	9806	9810	9813	9816	11
79	0,9816	9820	9823	9826	9829	9833	9836	9839	9842	9845	9848	10
80	0,9848	9851	9854	9857	9860	9863	9866	9869	9871	9874	9877	9
81	0,9877	9880	9882	9885	9888	9890	9893	9895	9898	9900	9903	8
82	0,9903	9905	9907	9910	9912	9914	9917	9919	9921	9923	9925	7
83	0,9925	9928	9930	9932	9934	9936	9938	9940	9942	9943	9945	6
84	0,9945	9947	9949	9951	9952	9954	9956	9957	9959	9960	9962	5
85	0,9962	9963	9965	9966	9968	9969	9971	9972	9973	9974	9976	4
86	0,9976	9977	9978	9979	9980	9981	9982	9983	9984	9985	9986	3
87	0,9986	9987	9988	9989	9990	9990	9991	9992	9993	9993	9994	2
88	0,9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	9997	9998	9998	9998	1
89	0,9998	9999	9999	9999	9999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0
	(1,0)	,9	,8	,7	,6	,5	,4	,3	,2	,1	,0	Grados

COSENO

TANGENTE

Grados	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	(1,0)	
0	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175	89
1	0,0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	88
2	0,0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507	0524	87
3	0,0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682	0699	86
4	0,0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857	0875	85
5	0,0875	0892	0910	0928	0945	0963	0981	0998	1016	1033	1051	84
6	0,1051	1069	1086	1104	1122	1139	1157	1175	1192	1210	1228	83
7	0,1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388	1405	82
8	0,1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566	1584	81
9	0,1584	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745	1763	80
10	0,1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	1944	79
11	0,1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	2126	78
12	0,2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	2309	77
13	0,2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	2493	76
14	0,2493	2512	2530	2549	2568	2586	2605	2623	2642	2661	2679	75
15	0,2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	2867	74
16	0,2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3057	73
17	0,3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3249	72
18	0,3249	3269	3288	3307	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3443	71
19	0,3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	3640	70
20	0,3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3839	69
21	0,3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	4040	68
22	0,4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	4245	67
23	0,4245	4265	4286	4307	4327	4348	4369	4390	4411	4431	4452	66
24	0,4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	4663	65
25	0,4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4877	64
26	0,4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	5095	63
27	0,5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	5317	62
28	0,5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	5543	61
29	0,5543	5566	5589	5612	5635	5658	5681	5704	5727	5750	5774	60
30	0,5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	6009	59
31	0,6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	6249	58
32	0,6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	6494	57
33	0,6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	6745	56
34	0,6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	7002	55
35	0,7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239	7265	54
36	0,7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	7536	53
37	0,7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	7813	52
38	0,7813	7841	7869	7898	7926	7954	7983	8012	8040	8069	8098	51
39	0,8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	8391	50
40	0,8391	8421	8451	8481	8511	8541	8571	8601	8632	8662	8693	49
41	0,8693	8724	8754	8785	8816	8847	8878	8910	8941	8972	9004	48
42	0,9004	9036	9067	9099	9131	9163	9195	9228	9260	9293	9325	47
43	0,9325	9358	9391	9424	9457	9490	9523	9556	9590	9623	9657	46
44	0,9657	9691	9725	9759	9793	9827	9861	9896	9930	9965	1,000	45
	(1,0)	,9	,8	,7	,6	,5	,4	,3	,2	,1	,0	Grados

COTANGENTE

TANGENTE

Grados	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	(1,0)	
45	1,000	003	007	011	014	018	021	025	028	032	036	44
46	1,036	039	043	046	050	054	057	061	065	069	072	43
47	1,072	076	080	084	087	091	095	099	103	107	111	42
48	1,111	115	118	122	126	130	134	138	142	146	150	41
49	1,150	154	159	163	167	171	175	179	183	188	192	40
50	1,192	196	200	205	209	213	217	222	226	230	235	39
51	1,235	239	244	248	253	257	262	266	271	275	280	38
52	1,280	285	289	294	299	303	308	313	317	322	327	37
53	1,327	332	337	342	347	351	356	361	366	371	376	36
54	1,376	381	387	392	397	402	407	412	418	423	428	35
55	1,428	433	439	444	450	455	460	466	471	477	483	34
56	1,483	488	494	499	505	511	517	522	528	534	540	33
57	1,540	546	552	558	564	570	576	582	588	594	600	32
58	1,600	607	613	619	625	632	638	645	651	658	664	31
59	1,664	671	678	684	691	698	704	711	718	725	732	30
60	1,732	739	746	753	760	767	775	782	789	797	804	29
61	1,804	811	819	827	834	842	849	857	865	873	881	28
62	1,881	889	897	905	913	921	929	937	946	954	963	27
63	1,963	971	980	988	997	006*	014*	023*	032*	041*	050*	26
64	2,050	059	069	078	887	097	106	116	125	135	145	25
65	2,145	154	164	174	184	194	204	215	225	236	246	24
66	2,246	257	267	278	289	300	311	322	333	344	356	23
67	2,356	367	379	391	402	414	426	438	450	463	475	22
68	2,475	488	500	513	526	539	552	565	578	592	605	21
69	2,605	619	633	646	660	675	689	703	718	733	747	20
70	2,747	762	778	793	808	824	840	856	872	888	904	19
71	2,904	921	937	954	971	989	006*	024*	042*	060*	078*	18
72	3,078	096	115	133	152	172	191	211	230	251	271	17
73	3,271	291	312	333	354	376	398	420	442	465	487	16
74	3,487	511	534	558	582	606	630	655	681	706	732	15
75	3,732	758	785	812	839	867	895	923	952	981	011	14
76	4,011	041	071	102	134	165	198	230	264	297	331	13
77	4,331	366	402	437	474	511	548	586	625	665	705	12
78	4,705	745	787	829	872	915	959	005*	050*	097*	145*	11
79	5,145	193	242	292	343	396	449	503	558	614	671	10
80	5,671	5,730	5,789	5,850	5,912	5,976	6,041	6,107	6,174	6,243	6,314	9
81	6,314	6,386	6,460	6,535	6,612	6,691	6,772	6,855	6,940	7,026	7,115	8
82	7,115	7,207	7,300	7,396	7,495	7,596	7,700	7,806	7,916	8,028	8,144	7
83	8,144	8,264	8,386	8,513	8,643	8,777	8,915	9,058	9,205	9,357	9,514	6
84	9,514	9,677	9,845	10,02	10,20	10,39	10,58	10,78	10,99	11,20	11,43	5
85	11 43	11,66	11,91	12,16	12,43	12,71	13,00	13,30	13,62	13,95	14,30	4
86	14,30	14,67	15,06	15,46	15,89	16,35	16,83	17,34	17,89	18,46	19,08	3
87	19,08	19,74	20,45	21,20	22,02	22,90	23,86	24,90	26,03	27,27	28,64	2
88	28,64	30,14	31,82	33,69	35,80	38,19	40,92	44,07	47,74	52,08	57,29	1
89	57,29	63,66	71,62	81,85	95,49	114,6	143,2	191,0	286,5	573,0	—	0
	(1,0)	,9	,8	,7	,6	,5	,4	,3	,2	,1	,0	Grados

COTANGENTE

LOGARITMOS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

MEMENTO SISTEMATIZACIÓN

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

Números reales

1 Subconjuntos de $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$; $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$; $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$

$[a;b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ $\quad$ $(a;b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

$(a;b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ $\quad$ $[a;b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

$(-\infty;a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ $\quad$ $(-\infty;a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$

$(a;+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ $\quad$ $[a;+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$

2 Potencias

Para todo número real positivo $(a \neq 1)$ y todo número real c, exixte un único número real $b > 0$ tal que: $a^c = b$ y recíprocamente a^c es la potencia de base a y exponente c

Las potencias tienen las propiedades siguientes:

Si $a > 0$, $b > 0$ y $s, r \in \mathbb{R}$.

1. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
2. $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$
3. $a^r : a^s = a^{r-s}$
4. $a^r : b^r = (a:b)^r$
5. $(a^r)^s = a^{rs}$
6. $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$

3 Logaritmos

Dados dos números reales a y b $(a > 0,\ a \neq 1$ y $b > 0)$ se llama logaritmo en base a de b y se denota $\log_a b$ al número x que satisface la ecuación $a^x = b$.

La logaritmación cumple las propiedades siguientes:

Si $b > 0$, $c > 0$ y $a > 0$ tal que $a \neq 1$, $c \neq 1$ entonces se cumple:

1. $\log_a a = 1$
2. $\log_a 1 = 0$
3. $a^{\log_a b} = b$
4. $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
5. $\log_a (b : c) = \log_a b - \log_a c$
6. $\log_a b^x = x \log_a b$
7. $\log_a c \cdot \log_c b = \log_a b$
8. $\log_{a^x} b = \frac{1}{x} \log_a b \quad (x \neq 0)$

4 Notación científica

Un número está expresado en notación científica si se escribe: $a = a_o \cdot 10^k$ con $1 \leq a_o < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$

Ejemplo: $1\,364 = 1{,}364 \cdot 10^3$; $0{,}098 = 9{,}8 \cdot 10^{-2}$

$\boxed{5}$ **Módulo de un número real** $\quad |a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$

$\boxed{6}$ **Reglas de redondeo**

Si el orden al cual se va a redondear (señalado con una flecha en los ejemplos) está seguido de 0; 1; 2; 3; 4; se redondea por defecto. Ejemplo:

$2\ \overset{\downarrow}{6}39 \approx 2\ 600 \qquad 4\ 7\overset{\downarrow}{8}1 \approx 4\ 780$

Si está seguido de 5; 6; 7; 8; 9; se redondea por exceso. Ejemplo:

$7\ \overset{\downarrow}{4}51 \approx 7\ 500 \qquad 3\ \overset{\downarrow}{8}80 \approx 3\ 900 \qquad 1\ \overset{\downarrow}{9}80 \approx 2\ 000$

$\boxed{7}$ **Valores aproximados**

En un valor aproximado se llaman cifras significativas, todas las que se encuentran a partir de la primera cifra diferente de cero; si un número está en notación científica, los ceros de la potencia de 10 no son cifras significativas. Ejemplo:

1 200	tiene 4 cifras significativas
0,024 0	tiene 3 cifras significativas
0,010 34	tiene 4 cifras significativas
0,000 001	tiene 1 cifra significativa
$1,2 \cdot 10^4$	tiene 2 cifras significativas

Un valor aproximado que se obtiene de uno exacto aplicando las reglas de redondeo, tiene todas sus cifras significativas correctas. Ejemplo:

1 es un valor aproximado de $\sqrt{2}$ con una cifra correcta

0,333 es un valor aproximado de $\frac{1}{3}$ con 3 cifras correctas

$1,4 \cdot 10^2$ es un valor aproximado de $\sqrt{20\ 000}$ con 2 cifras correctas.

$\boxed{8}$ **Regla fundamental del cálculo aproximado**

Cuando se calcula con valores aproximados el resultado debe darse con tantas cifras significativas como el dato que tenga menor número de cifras significativas. Los cálculos intermedios se realizan con una cifra significativa más que las que debe tener la respuesta; en caso que esto sea demasiado engorroso, se calcula con tantas cifras como debe tener la respuesta; nunca con menos.

$\boxed{9}$ **Proporciones** $\quad$ Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $ad = bc$

$\boxed{10}$ **Tanto por ciento**

a es el x% de b si se cumple que: $a = \frac{x}{100} \cdot b$

Para calcular otro de los elementos que intervienen en esta relación, se puede utilizar cualquiera de los procedimientos siguientes:

- despejo en la fórmula,
- razonamiento sobre proporcionalidad,

- razonamiento sobre fracciones (reducción a la unidad)

E x p r e s i o n e s   a l g e b r a i c a s

11 **Polinomio:** es una suma algebraica de monomios, se representa $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_o$; $a_n \neq 0$; grado: n

Fracción algebraica: es un cociente de polinomios.

- Si se multiplican o dividen el numerador y el denominador de la fracción por un mismo factor (diferente de cero) la fracción no cambia. Si se divide la fracción se simplifica; es conveniente operar con fracciones lo más simplificadas posibles. Ejemplo:

$$\frac{(x-2)^3(x+1)^2}{(x-2)^2(x-5)} = \frac{(x-2)(x+1)^2}{(x-5)}$$; se simplificó $(x-2)^2$

12 **Operaciones con cocientes**

Adición , sustracción: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$ b, d $\neq$ 0

Multiplicación: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ b, d $\neq$ 0

División: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ b, c, d $\neq$ 0

13 **Descomposición factorial**

Factor común: $ax + bx = (a + b)\,x$

Diferencia de cuadrados: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

T r i n o m i o s

Cuadrado perfecto: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

$x^2 + px + q$: $x^2 + px + q = (x + a)(x + b)$; con $p = a + b$; $q = ab$

$mx^2 + px + q$: $mx^2 + px + q = (ax + b)(cx + d)$; con $m = ac$; $p = ad + bc$; $q = bd$

Ejemplo: $2x^2 - 3x - 2 = (2x + 1)(x - 2)$

$$\begin{array}{ll} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ \hline 1 & -4 = -3 \end{array}$$

R u f f i n i :

$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = (x - a)(x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_n)$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & a_1 & a_2 & \ldots\ldots\ldots & a_n \\ a & & a & ab_2 & \ldots\ldots\ldots & ab_{n-1} \\ \hline & 1 & a+a_1 = b_2 & a_2 + ab_2 = b_3 & \ldots & a_n + ab_{n-1} = 0 \end{array}$$

Ejemplo: $x^3 - 2x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x^2 + x - 1)$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -4 & 3 \\ 3 & & 3 & 3 & -3 \\ \hline & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

14 Radicales

Radicales semejantes son los que tienen el mismo índice y la misma expresión subradical; se reducen como los términos semejantes. Ejemplo: Si $a \geq 0$

$$2\sqrt{a} - \sqrt{a^3} + 4\sqrt{a} = 2\sqrt{a} - a\sqrt{a} + 4\sqrt{a} = (6 - a)\sqrt{a}$$

Racionalizar es eliminar los radicales del denominador.

Ejemplo: $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$$\frac{2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{2(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}$$

con $a,b > 0$; $a \neq b$

Funciones

15 Función: Una función f, es una correspondencia que a cada elemento de un conjunto A, le hace corresponder exactamente un elemento de otro conjunto B. El conjunto A es el dominio de la función y se denota Dom f.

El elemento de B que corresponde a un elemento $x \in \mathrm{Dom} f$ se llama imagen de x y se denota $f(x)$; el conjunto de todas las imágenes es la imagen de la función y se denota Im f.

- Para hallar la imagen de una función en un punto se evalúa la función en ese punto.

  Ejemplo: $f(x) = x^2 + 3x + 1$; $x = \sqrt{2}$

  $$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 + 3\sqrt{2} + 1 \approx 2 + 3 \cdot 1{,}41 + 1 = 7{,}23$$

- Ceros de una función: Es el valor $x_o \in \mathrm{Dom}\, f$ para el cual se cumple que $f(x_o) = 0$
- Polo de una función racional:
  x_p es un polo de una función racional si y solo si en la expresión simplificada $y = \frac{P}{Q}(x)$, x_p anula al denominador, es decir, $Q(x_p) = 0$.
- Monotonía:
  Si f es una función derivable en el intervalo $(a;b)$ y para cada x con $a < x < b$ se cumple $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) entonces f es estrictamente creciente (decreciente) en el intervalo dado.
- Límite de una función racional.
  El cálculo del límite de una función racional se reduce a la evaluación de funciones, es decir,

  $$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o) \;;\; \lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_o)}{g(x_o)} \;;\; g(x_o) \neq 0$$

- Extremos locales de una función.
  Para que una función derivable en x_o tenga un extremo

local en x_o es necesario que $f'(x_o) = 0$.

x_o es un punto de:

- máximo local si $f'(x)$ pasa de positiva a negativa
- mínimo local si $f'(x)$ pasa de negativa a positiva.

16 Gráficas de funciones conocidas

Función Lineal (fig. M1)

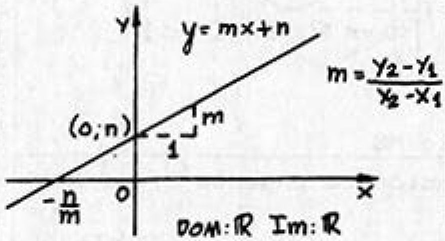


Fig. M1

Función cuadrática (fig. M2)

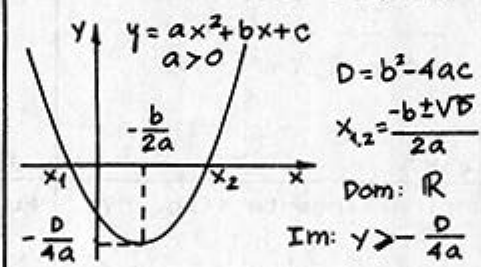


Fig. M2

Función de proporcionalidad inversa (fig. M3)

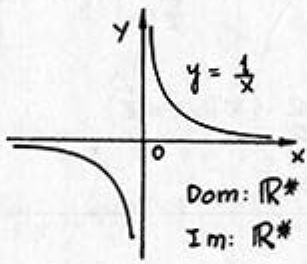


Fig. M3

Función radical (fig. M4)

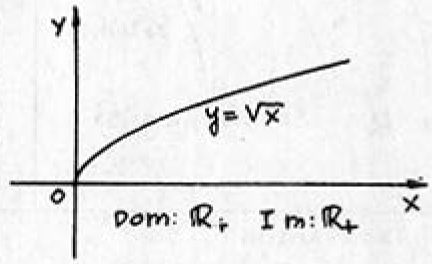


Fig. M4

Función logarítmica (fig.M5)

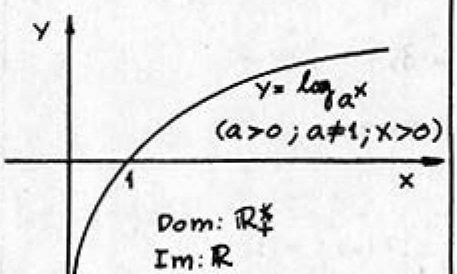


Fig M5

Función exponencial (fig.M6)

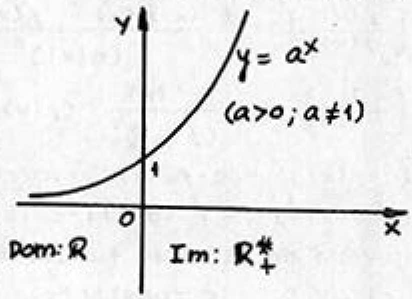
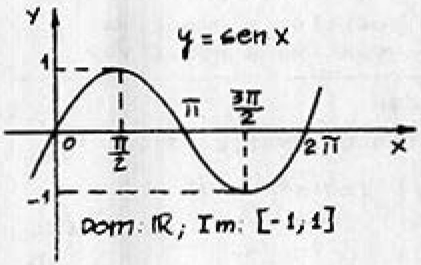


Fig M6

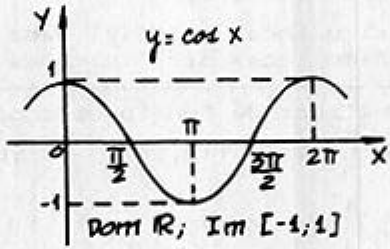
Función seno (fig. M7)



Dom: $\mathbb{R}$; Im: $[-1;1]$

Fig M7

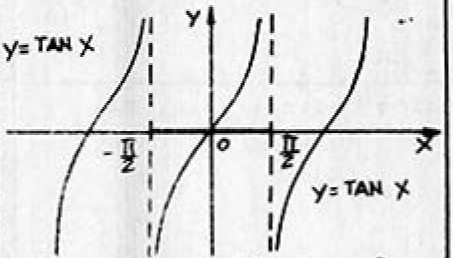
Función coseno (fig. M8)



Dom $\mathbb{R}$; Im $[-1;1]$

Fig M8

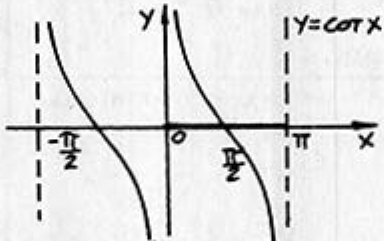
Función tangente (fig. M9)



Dom: $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z}\}$

Fig M9

Función cotangente (fig. M10)



Dom: $\mathbb{R} \setminus \{k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$
Im. $\mathbb{R}$

Fig M10

$\boxed{17}$ Derivación

- **Reglas de derivación**

  Si f y g son funciones derivables, se cumple:

  . $(f \pm g)' = f' \pm g'$. $(f \cdot g)' = f'g + f\,g'$

  . $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}$ $(g(x) \neq 0)$

  . $\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]' = -\dfrac{f'(x)}{(f(x))^2}$ $(f(x) \neq 0)$

  . $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$ (c constante)

  . $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

- **Derivada de algunas funciones.**

  . $(c)' = 0$ (c constante) . $(x)' = 1$

  . $(x^n)' = n\,x^{n-1}$. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. $(\text{sen}\, x)' = \cos x$

  . $(\cos x)' = -\text{sen}\, x$. $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

18 **Integración**

- **Integral definida:** $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

  donde $f(x)$ es una función continua en un intervalo I ($a, b \in I$)
  F es una primitiva cualquiera de f ($F'(x) = f(x)$)
  a y b límites de integración.
- **Reglas de integración.**
  Si f y g son funciones continuas en un intervalo I, $a, b \in I$ se cumple:
  - $\int_a^b c f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$ (c constante)
  - $\int_a^b \left[f(x) + g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
  - $\int_a^b f(cx + d)\,dx = \frac{1}{c}\,F(cx + d)\Big]_a^b$ donde $F'(x) = f(x)$
  - $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
  - $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ ($a < c < b$)
- **Integral de algunas funciones.**
  - $\int k\,dx = kx + c$ (k constante)
  - $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} + c$ ($n \neq -1$)
  - $\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$
  - $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c$
  - $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c$
  - $\int e^x\,dx = e^x + c$

Geometría y Trigonometría

19 **Ángulos complementarios:** Son aquellos cuya suma es 90°

Ángulos suplementarios: Son aquellos cuya suma es 180°

20 Los ángulos que tienen sus lados repectivamente paralelos o perpendiculares son iguales si ambos son agudos o ambos son obtusos. Son suplementarios si uno es agudo y el otro obtuso

21 Bisectriz de un ángulo: es la semirrecta que tiene su origen en el vértice del ángulo y divide a este en dos ángulos iguales.

22 **Paralela media de un triángulo**

El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercero e igual a su mitad .

[23] Circunferencia

La circunferencia es un conjunto de puntos que equidistan de uno llamado centro. La distancia de cualquier punto al centro es el radio.
El segmento determinado por dos puntos en una circunferencia es una cuerda, si el centro está en la cuerda es un diámetro.
Si una recta corta a la circunferencia en dos puntos es secante a la circunferencia y tangente si la toca en un solo punto. Las tangentes trazadas desde un punto a la circunferencia (son dos) son iguales y cada tangente es perpendicular al radio en el punto de contacto.
Por tres puntos no alineados pasa una circunferencia y solo una; su centro es el punto de intersección (circuncentro) de las mediatrices del triángulo que determinan.

Áreas, Perímetros y Volúmenes

[24] Perímetros

Triángulo: $a + b + c$ Paralelogramo: $2(a + b)$

Longitud de la circunferencia: $2\pi r$

Longitud del arco de amplitud $\alpha°$: $l = \dfrac{\pi\, r\, \alpha°}{180°} = \pi\, r\, \alpha_r$

(α_r medida en radianes)

[25] Áreas

- Triángulo: $A = \frac{1}{2} bh = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} \gamma$

$$= \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

donde p es el semiperímetro (fig. M11)

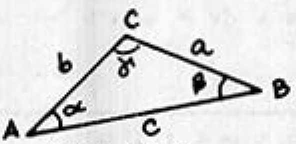


Fig. M11

- Rectángulo: $A = ab$
- Cuadrado: $A = a^2$
- Rombo: $A = \frac{1}{2} ab$ (a y b longitudes de las diagonales)
- Trapecio: $A = \left[\dfrac{b + b'}{2}\right] h$ (b y b' bases)
- Circunferencia: $A = \pi r^2$

$$A_{sector} = \frac{\pi\, r^2\, \alpha°}{360°} = \frac{r^2 (\alpha_r)}{2} \quad (\alpha_r\text{: medida en radianes})$$

- Área por integración
  . Área bajo una curva

$A = \int_a^b f(x)\, dx$, $(f(x) \geq 0)$ (fig.M12) ;

$$A = \int_a^b |f(x)|\, dx \text{ , (fig.M13)}$$

. Área entre dos curvas

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \quad \text{(fig.M14)}$$

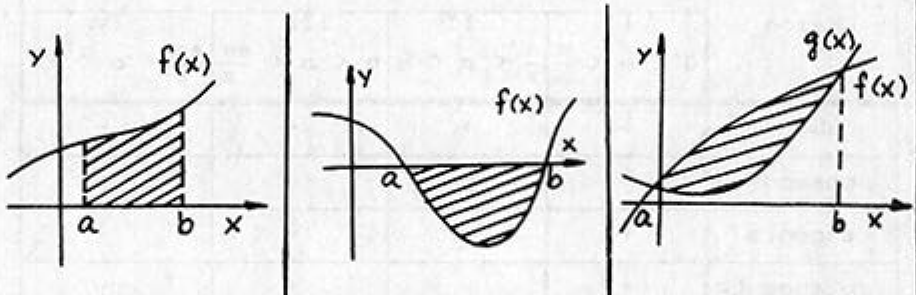


Fig.M12 Fig.M13 Fig.M14

26 **Volumen**

- Prisma: $V = A_B h$ (A_B: área de la base)
- Pirámide: $V = \frac{1}{3} A_B h$
- Cilindro: $V = \pi r^2 h$
- Esfera: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$
- Cono: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

G e o m e t r í a a n a l í t i c a

27 **Ecuación de la recta:** $Ax + By + C = 0$

Ecuaciones de las curvas de segundo grado:

- Con centro en el punto (h;k)
  - . Circunferencia: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
  - . Elipse: $\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$
  - . Hipérbola: $\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$
- Con vértice en el punto (h;k)
  - . Parábola: $(x - h)^2 = 4p(y - k)$

T r i g o n o m e t r í a

28 **Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo**

$$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{c} & \tan \alpha = \frac{a}{b} \\ \cos \alpha = \frac{b}{c} & \cot \alpha = \frac{b}{a} \end{array}\right\} \text{fig. M15}$$

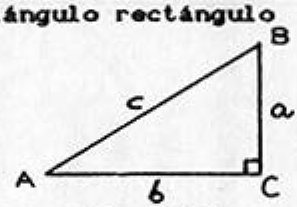


Fig. M15

29 Signos de las razones trigonométricas

Razón	Cuadrantes			
	I $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	II $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	III $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	IV $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
seno	+	+	−	−
coseno	+	−	−	+
tangente	+	−	+	−
cotangente	+	−	+	−

30 Fórmulas de reducción

	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$-\alpha$
sen	sen α	−sen α	−sen α
cos	−cos α	−cos α	cos α
tan	−tan α	tan α	−tan α
cot	−cot α	cot α	−cot α

31 Valores notables y axiales

x / $f(x)$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
sen x	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	−1	0
cos x	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	−1	0	1
tan x	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	−	0	−	0
cot x	−	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	−	0	−

SOYGRAF
IMPRESIONES GRÁFICAS
EMPRESA DE PERIÓDICOS
Impreso en la UEB Gráfica de Holguín
Tirada 8 134 ejemplares
Marzo de 2019

Colección
Preuniversitario

Este libro de texto te brinda el contenido correspondiente a la unidad de sistematización del programa vigente para el duodécimo grado, a partir del curso 1991-1992. Consta de nueve epígrafes: 1. Cálculo numérico, 2. Cálculo con expresiones algebraicas, 3. Resolución de ecuaciones, 4. Sistemas de ecuaciones, 5. Resolución de inecuaciones, 6. Identidades y ecuaciones trigonométricas, 7. Repaso de propiedades geométricas elementales, 8. igualdad y semejanza de triángulos, 9. Cálculo de áreas y volúmenes.

A través de todo el libro aparece ejemplos resueltos e ilustraciones que te facilitarán el aprendizaje. A lo largo del propio texto se destacan conceptos y relaciones fundamentales de grados anteriores, y al final se presenta un momento donde se recuerdan también otros aspectos primordiales precedentes. El libro cuenta además, con las tablas matemáticas que utilizarás en el grado.

EDITORIAL
PUEBLO Y EDUCACIÓN

9 789591 316547