Modelos de entrenamiento

En esta sesión quisiera mostrar algunos modelos de entrenamiento utilizados en varias de las sesiones de trabajo del autor con estudiantes de preuniversitario que se preparan para participar en los diferentes concursos y olimpiadas que se realizan en Cuba.

El entrenamiento es la forma fundamental de trabajo con estos estudiantes y como clase tiene como objetivos fundamentales que los alumnos consoliden, profundicen, amplíen, integren y generalicen, sobre la base de la resolución de problemas matemáticos, determinados métodos de trabajo de la matemática que le permitan desarrollar habilidades y capacidades para utilizar y aplicar de modo independiente en la solución de diferentes problemas matemáticos.

La resolución de problemas es la vía fundamental que se utilizará en los entrenamientos con los estudiantes y en ellos hay que considerar que el grado de dificultad siempre es más alto con este tipo de estudiante que, por lo general, tiene una gran motivación por el estudio y la profundización de la asignatura.

Los entrenamientos deben tener una gran carga de resolución de problemas como una forma de desarrollar las habilidades y capacidades de estos estudiantes, es decir, que el aprendizaje mediante la resolución de problemas tiene que cumplir con las funciones: instructivas, educativas y de desarrollo al igual que en la resolución de ejercicios de matemática.

No se puede perder de vista que en la resolución de problemas, según han planteado diferentes estudiosos del tema, es posible distinguir varias acciones en su proceso y que aproximadamente comprenden cuatro fases o etapas que deben mantenerse:

1) Hay que comprender el problema.
2) Hay que concebir un plan para resolverlo.
3) Hay que ejecutar el plan concebido.
4) Hay que examinar la solución obtenida.

Tenemos que lograr que los estudiantes se enfrenten a dificultades durante esta etapa y puedan ir venciéndolas de acuerdo con las potencialidades que cada uno tenga. Cuando se organiza adecuadamente el trabajo de los estudiantes durante las clases y durante las tareas para la casa se posibilita su desarrollo.

ENTRENAMIENTO 1

Sobre polinomios

Podemos comenzar recordando los conceptos de polinomio, grado del polinomio, coeficientes, formas de representarlo, polinomio completo, polinomio mónico y los métodos de factorización de un polinomio. Poner algunos ejemplos donde se puedan comprobar los conocimientos que los estudiantes tienen de esto.

Por medio de un ejemplo como el siguiente podemos comprobar el dominio que tienen los estudiantes sobre algunas operaciones con polinomios.

Ejemplo 1.

1. Completa los espacios en blanco para que las igualdades siguientes sean ciertas:

   a) $(7x^4 - 5x^3 + \square x - 5) - (\square x^3 - 5x^2 - 3x + \square) = \square x^4 - 7x^3 + \square x^2 + 9x - 13$

   b) $(3x^5 + \frac{3}{5}x^3 - \square x)(\square x^4 + 5) = -x^9 - \frac{1}{5}x^7 + \square x^5 + \square x^3 + \square x$

Solución:

a) $(7x^4 - 5x^3 + 6x - 5) - (2x^3 - 5x^2 - 3x + 8) = 7x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 9x - 13$

b) $(3x^5 + \frac{3}{5}x^3 - 6x)(-\frac{1}{3}x^4 + 5) = -x^9 - \frac{1}{5}x^7 + 17x^5 + 3x^3 + -30x$

Puede proponerse como *ejemplo 2* una división de polinomios donde quede un resto diferente de 0, escribir la división realizada y generalizar que si $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ y $S(x)$ son polinomios en variable x y se divide $P(x)$ por $Q(x)$ y obtenemos $P(x) = Q(x)R(x) + S(x)$, entonces el grado de R es menor o igual que el de P y el grado de S es menor que el de Q. Si en la división $S = 0$, entonces la división es exacta y P es divisible por Q.

En el libro *Problemas de matemática para los entrenamientos II* del propio autor en las páginas 8 y 9 aparecen las cuestiones siguientes que se pueden comentar: el teorema del resto, el teorema de Bezout, las raíces de un polinomio, el teorema de Viète y el teorema de Descartes los cuales se muestran a continuación:

– Sea $P(x)$ un polinomio de grado n, si lo dividimos por un binomio de la forma $(x - a)$, entonces $P(x) = (x - a)Q(x) + R$ donde R es un número real.
  Si R es 0, entonces el polinomio es divisible por el binomio $(x - a)$ y se cumple que a es un divisor del término independiente de P; si R es diferente de cero, entonces P no es divisible por el binomio $(x - a)$.

Teorema de Bezout: El resto R de la división de un polinomio $P(x)$ por un binomio de la forma $(x - a)$ es igual al valor del polinomio $P(x)$ para $x = a$, es decir, $R = P(a)$.

– El polinomio $P(x)$ es divisible por el binomio $(x - a)$ si y solo si el valor del polinomio para $x = a$ es igual a cero, es decir, $P(a) = 0$.
– El polinomio $P(x) = x^n - a^n$ siempre es divisible por el binomio $(x - a)$ para n natural.
– El polinomio $P(x) = x^n - a^n$ es divisible por el binomio $(x + a)$ cuando n es un número par.
– El polinomio $P(x) = x^n + a^n$ es divisible por el binomio $(x + a)$ cuando n es un número impar.
– Consideremos que $P(x)$ es un polinomio con coeficientes reales; sean a y b números reales con $a < b$ tales que $P(a) \cdot P(b) < 0$, entonces existe al menos c con $a < c < b$ tal que $P(c) = 0$.

Raíces de un polinomio: Un número x_0 se denomina raíz del polinomio $P(x)$ siempre que $P(x_0) = 0$.

– Un número x_0 es la raíz del polinomio $P(x)$ si y solo si el polinomio $P(x)$ es divisible por el binomio $x - x_0$.
– Pueden ser raíces enteras de un polinomio con coeficientes enteros solo los divisores del término independiente del polinomio.
– Si un polinomio $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ cuyos coeficientes son enteros y el mayor de estos equivale a la unidad tiene raíz racional, esta raíz será un número entero.
– Si todos los coeficientes de un polinomio son números enteros y el coeficiente del monomio de mayor grado es igual a la unidad, entonces todas las raíces racionales de dicho polinomio son números enteros.
– Todo polinomio de coeficientes reales se descompone de modo único (salvo el orden de los factores) en forma de un producto de su coeficiente superior y de unos cuantos polinomios de coeficientes reales, algunos de los cuales son lineales de la forma $(x - a)$ correspondientes a sus raíces reales, y otros son cuadráticos de la forma $ax^2 + bx + c$, que corresponden a los pares de sus raíces imaginarias conjugadas.

Teorema de Descartes: El número de raíces positivas de un polinomio $P(x)$ contadas cada una tantas veces como indique su orden de multiplicidad, es igual al número de variaciones de signo que presenta el sistema de coeficientes de este polinomio (los coeficientes iguales a cero no se cuentan) o es menor que este número en un número par.

– Si un polinomio $P(x)$ no tiene coeficientes iguales a cero, el número de sus raíces negativas (contadas con su orden de multiplicidad) es igual al número de permanencias de signo que presenta el sistema de coeficientes o es menor que este en un número par.
– Si $c > 0$, entonces el número de variaciones de signo que presenta el sistema de coeficientes del polinomio $P(x)$, es menor en un número impar de variaciones de signo que presenta el sistema de los coeficientes del producto $(x - c)P(x)$.
– Si todas las raíces del polinomio $P(x)$ son reales y el término independiente es diferente de cero, el número k_1 de raíces positivas de este polinomio es igual al número s_1 de variaciones de signo que presenta el sistema de coeficientes, y el número k_2 de raíces negativas es igual al número s_2 de variaciones de signo que presenta el sistema de coeficientes del polinomio $P(-x)$.

Teorema de Viète: Sea el polinomio $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$ con raíces

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$, entonces se cumplirá que:

$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1} + \alpha_n = -a_1$

$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + ... + \alpha_{n-1}\alpha_n = a_2$

$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + ... + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = -a_3$

$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n = (-1)^n a_n$

– Si x_1 y x_2 son las raíces del polinomio $x^2 + px + q$, entonces:

I. $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$.
II. $x_1 + x_2 = -p$ y $x_1 \cdot x_2 = q$ (fórmula de Viète para la ecuación de segundo grado).

Ejemplo 3.

Puede utilizarse el ejercicio 5 de los problemas de entrenamiento.

Sean $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ y $Q(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1x + b_0$,

$P(x) = Q(x)$ si y solo si $n = m$ y, además, $a_n = b_m$; $a_{n-1} = b_{m-1}$; …; $a_1 = b_1$; $a_0 = b_0$.

Ejemplo 4.

Obtén un binomio de primer grado que elevado al cuadrado y sumado con $x^2 + 24x + 1$ dé como resultado $17x^2 + 10$.

Solución:

Sea $ax + b$ el polinomio buscado, debe cumplirse que

$(ax + b)^2 + x^2 + 24x + 1 = 17x^2 + 10$ calculando obtenemos

$(a^2 + 1)x^2 + (2ab + 24)x + b^2 + 1 = 17x^2 + 10$ de aquí se tiene que

$a^2 + 1 = 17$

$2ab + 24 = 0 \Rightarrow ab + 12 = 0$

$b^2 + 1 = 10$

Para resolver el sistema utilizamos dos de las ecuaciones y los resultados los comprobamos en la tercera, por ejemplo, $a^2 + 1 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$ y $b^2 + 1 = 10 \Rightarrow b = \pm 3$, que comprobando en la tercera ecuación, llegamos a la conclusión que hay dos polinomios que cumplen con estas condiciones: $4x - 3$ o $-4x + 3$.

A continuación se puede remitir a la página 9 del libro mencionado con anterioridad y comentar acerca del método de los coeficientes indeterminados.

Método de coeficientes indeterminados: Este método, llamado también de los coeficientes determinables, es debido a Descartes y se aplica cuando se quieren hallar los coeficientes de uno o varios polinomios enteros de una variable, que sometidos a determinadas operaciones deben dar un resultado conocido.

Consiste en designar los coeficientes desconocidos por letras y ejecutar con los polinomios las operaciones de que se trate, se llegará así a un resultado que deberá ser equivalente a uno conocido, y como los polinomios serán idénticos, podremos igualar los coeficientes de las mismas potencias de la variable, obteniendo un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son los coeficientes que se deben calcular, los cuales podrán obtenerse si el sistema tiene solución.

Los problemas que se utilizarán en la ejercitación durante la clase y para la tarea pueden ser seleccionados de los propuestos en este libro del 1 al 25.

ENTRENAMIENTO 2

Sobre congruencia aritmética

Consideremos la expresión $D = dc + r$, se puede pedir a los estudiantes que la asocien a las expresiones conocidas por ellos hasta concluir que es la forma que se utiliza para destacar la división euclidiana, donde D es el dividendo, d es el divisor, c es el cociente y r es el resto ($0 \leq r < d$).

Ahora, pasemos a analizar algunas divisiones entre números naturales tales como: $174 = 17 \cdot 10 + 4$; $242 = 17 \cdot 14 + 4$, observa que los números 174 y 274, ambos dejan el mismo resto en la división por 17 y que, además, $242 - 174 = 68 = 17 \cdot 4$, es decir, es un múltiplo de 17. Veamos otros casos considerando la división en el conjunto de los números enteros: $87 = 12 \cdot 7 + 3 = 12 \cdot 8 - 9$, además, $147 = 12 \cdot 12 + 3 = 12 \cdot 13 - 9$, pero se cumple que $147 - 87 = 60 = 12 \cdot 5$ que es un múltiplo de 12, esto nos lleva a tratar de probar que esta propiedad se cumple para todos los números enteros.

Sean a y b tales que $m = bc + r$ y $n = bd + r$, entonces $m - n = b(c - d)$ o $n - m = b(d - c)$ y ambos son múltiplos de b. Veamos la definición (libro citado anteriormente página 33).

Definición: Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}^*$, se dice que a es congruente con b módulo m y se escribe $a \equiv b$ (módulo m) si a y b dejan el mismo resto al ser divididos por m.

En esta definición hay que destacar el dominio numérico al cual se hace referencia, así como la notación que se utilizará para señalar la relación definida.

Puede pedirse a los estudiantes que den algunos ejemplos en que dos números sean (no sean) congruentes con respecto a un cierto módulo y poner algunos casos en que puedan mostrar el haber entendido la definición.

Hay que alertar lo interesante que resulta analizar relaciones de este tipo cuando el módulo es un número natural diferente de 1.

Puede destacarse el uso de esta relación en: las 24 horas del día, los 7 días de la semana, los 28, 30 o 31 días del mes, por ejemplo:

- Si son las 15:18 h, ¿qué hora será cuando hayan pasado 16 h?
- Si hoy es martes 28 de enero de 2010, ¿qué día de la semana será el próximo 28 de enero?

También en el hecho de la cifra en que termina alguna potencia de un número entero cualquiera, teniendo en cuenta que depende de la cifra en que este termine; veamos que cualquier número terminado en 0, 1, 5 o 6 su última cifra siempre va a ser la misma, pero los números terminados en 4 o en 9 dependen de la paridad del exponente: $\ldots 4^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$ termina siempre en 6, $\ldots 4^{2n+1}$ termina siempre en 4, lo mismo sucede con el 9 que puede terminar en 9 o en 1 según el exponente sea impar o par.

Sin embargo el resto de los números (los que terminan en 2, 3, 7, 8) tienen 4 posibilidades de terminación según sean los exponentes de la forma $4k$, $4k + 1$, $4k + 2$ o $4k + 3$ con $k \in \mathbb{Z}$. Pedir a los estudiantes que lo comprueben.

Veamos ahora algunas propiedades que esta relación cumple, para eso pueden tomarse del libro referenciado anteriormente en la página 33 y concluir con las relaciones que aparecen aquí. Se pueden hacer las demostraciones de algunas de ellas.

Propiedades de la congruencia

I. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}^*$; $a \equiv b$ (módulo m) si y solo si $a - b$ es divisible por m.

II. Sean $a, b, c, d, k \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}$; si $a \equiv b$ (módulo m) y $c \equiv d$ (módulo m), entonces:

- $a + c \equiv b + d$ (módulo m)
- $a - c \equiv b - d$ (módulo m)
- $a \cdot c \equiv b \cdot d$ (módulo m)
- $k \cdot a \equiv k \cdot b$ (módulo m)
- $k \cdot a \equiv k \cdot b$ (módulo $k \cdot m$)
- $a^n \equiv b^n$ (módulo m)
- $a : k \equiv b : k$ (módulo m) si mcd$(k,m) = 1$ y $a = kc$, $b = kd$.

III. La relación $a \equiv b$ (módulo m) define una relación de equivalencia, o sea, una relación que cumple las propiedades idéntica, simétrica y transitiva.

Idéntica: $a \equiv a$ (módulo m).

Simétrica: Si $a \equiv b$ (módulo m), entonces $b \equiv a$ (módulo m).

Transitiva: Si $a \equiv b$ (módulo m) y $b \equiv c$ (módulo m), entonces $a \equiv c$ (módulo m).

IV. Si dos números son congruentes respecto a varios módulos, son congruentes con respecto al mcm de estos.
Es decir, si $a \equiv b$ (módulo m_1), $a \equiv b$ (módulo m_2), ..., $a \equiv b$ (módulo m_n), entonces $a \equiv b$ (módulo M) siendo M el mcm$(m_1, m_2, ..., m_n)$.

V. En toda congruencia, el mcd de un miembro y el módulo, es el mismo que el del otro miembro y el módulo.
Es decir, si $a \equiv b$ (módulo m), entonces mcd(a,m) = mcd(b,m).

VI. Sea $a \equiv b$ (módulo m), con d / a, d / b y d / m, entonces $a : d \equiv b : d$ (módulo $m : d$),

VII. Sea p un primo, $a, b \in \mathbb{N}$: $a = a_k p^k + a_{k-1} p^{k-1} + ... + a_1 p + a_0$;
$b = b_k p^k + b_{k-1} p^{k-1} + \ldots + b_1 p + b_0$ donde $0 \leq a_i, b_i < p$ son números naturales para todo $i = 0, 1, 2, ..., k$,
luego $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k-1} \\ b_{k-1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ (mód p).

- Se tiene que $ax \equiv ay$ (mód m) si y solo si $x \equiv y \left(\text{mód} \dfrac{m}{\text{mcd}(a,m)} \right)$.
- Si $ax \equiv ay$ (mód m) y mcd$(a,m) = 1$, entonces $x \equiv y$ (mód m).
- Se tiene que $x \equiv y$ (mód m_i) para $i = 1, 2, ..., r$ si y solo si $x \equiv y$ (mód mcd$[m_1, m_2, ..., m_r]$).
- Si $x \equiv y$ (mód m), entonces mcd(x,m) = mcd(y,m).
- Sean a y m dos números primos entre sí. Sea $r_1, r_2, ..., r_n$ un sistema completo de restos módulo m. Entonces $ar_1, ar_2, ..., ar_n$ un sistema completo de restos módulo m.
- Un sistema reducido de restos módulo m es un conjunto de enteros r_i, tales que mcd$(r_i,m) = 1$, $r_i \equiv r_j$ (mód m) si $i \neq j$ y tales que todo x primo es congruente módulo m para algún miembro r_i del conjunto.

Veamos algunos ejemplos para aplicar lo estudiado con este tema.

Ejemplo 1.

Halla el resto de la división de 3^{243} por 16.

Solución:

Se tiene $3^4 = 81$ y	$81 \equiv 1 \pmod{16}$	definición de congruencia
	$81^{60} \equiv 1^{60} \pmod{16}$	propiedad II
	$3^{240} \equiv 1 \pmod{16}$	propiedad de potencia
	$3^{243} \equiv 27 \pmod{16}$	propiedad II
	$3^{243} \equiv 11 \pmod{16}$	definición de congruencia.

$\therefore$ el resto es 11.

Ejemplo 2.

Prueba que $13^n \cdot 2^{2n} - 1$ es divisible por 17 para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución:

$13^n \cdot 2^{2n} - 1 = 13^n \cdot 4^n - 1 = 52^n - 1$	propiedades de potencia
$52 \equiv 1 \pmod{17}$	definición de congruencia
$52^n \equiv 1 \pmod{17}$	propiedad II
$52^n - 1 \equiv 0 \pmod{17}$	propiedad II
$13^n \cdot 2^{2n} - 1$ es divisible por 17.	

Los problemas que se deben utilizar en la ejercitación durante la clase y para la tarea pueden ser seleccionados de los que aparecen propuestos en este libro y de los siguientes.

1. Dadas las congruencias $9\,815 \equiv 575 \pmod{m}$ y $442 \equiv 142 \pmod{m}$. Halla todos los valores posibles de m.
2. Sabiendo que $4^n \equiv 9 \pmod{13}$, determina un valor de x en $4^{n+1} \equiv x \pmod{13}$.
3. Determina todos los valores posibles de x que cumplen que $10^{n+1} \equiv x \pmod{7}$ sabiendo que $10^n \equiv 6 \pmod{7}$.
4. Se sabe que $53 \equiv 41 \pmod{m}$ y $41 \equiv 65 \pmod{m}$. Determina todos los valores de m para los cuales esto sea posible.
5. ¿Con qué cifra termina el número $24^{1\,524}$?
6. ¿Con qué cifra termina el número 118^{249}?
7. Halla la última cifra del número 4^{123}.
8. ¿Cuál es el dígito de las unidades del número $2\,137^{753}$?
9. Determina el resto de la división de $3^{1\,989}$ por 8.
10. Halla el resto al dividir 37^{13} por 17.
11. Halla el resto de la división de $7^{1\,990} + 3$ por 10.
12. Calcula el resto de la división de $22^{55} + 55^{22}$ por 7.
13. Prueba que $5^{32} - 1$ es divisible por 96.
14. Demuestra que el número $1\,986^{1\,986} - 1$ es divisible por 7.
15. Demuestra que $19^{1\,982} + 23^{1\,981}$ es divisible por 3.
16. Prueba que $9\,518^{42} - 4$ es múltiplo de 5.
17. Prueba que $5^{n+4} \cdot 7^n - 3^4$ es divisible por 17 para todo n natural.
18. Demuestra que para cualquier valor natural de n, el número $8^{2n+1} + 7^{n+2}$ es divisible por 57.
19. Demuestra que $3^{6n} - 2^{6n}$ es múltiplo de 35 para todo $n \in \mathbb{N}$.
20. Demuestra que $3^{2n} + 7$ es múltiplo de 8.

ENTRENAMIENTO 3

Sobre los teoremas de Menelao y de Ceva

Vamos a ver algunos teoremas que permiten garantizar la colinealidad de tres puntos, para eso comenzaremos proponiendo los problemas siguientes.

1. Demuestra que los seis segmentos determinados por una transversal sobre los lados de un triángulo son tales que el producto de tres segmentos no consecutivos es igual al producto de los otros tres.

Solución:

Para comenzar haremos una figura de análisis (fig. 1).

Sean ABC un triángulo cualquiera, r una recta tal que corta a los lados AB, BC y AC en los puntos L, M y N respectivamente.

Debemos probar que $AL \cdot BM \cdot CN = LB \cdot MC \cdot AN$.

Construcción auxiliar.

Tracemos $AQ \perp r$, $BP \perp r$ y $CR \perp r$, entonces $AQ \parallel BP \parallel CR$.

Aplicando el teorema de las transversales se cumple que:

$$\frac{AL}{LB}=\frac{AQ}{PB};\frac{BM}{MC}=\frac{PB}{CR};\frac{CN}{AN}=\frac{CR}{AQ}.$$

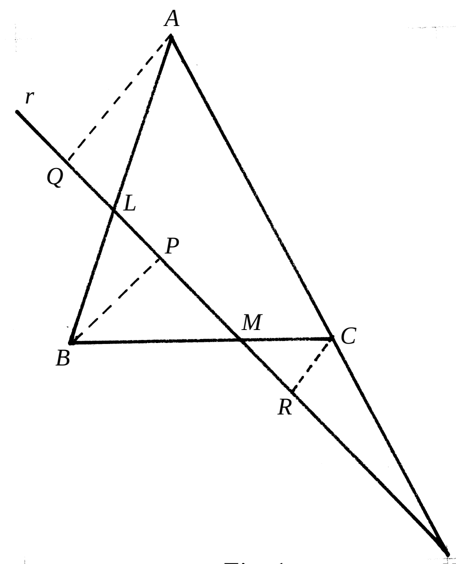

Fig. 1

Multiplicando ordenadamente, se tiene que $\frac{AL}{LB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{AN}=1$ por lo que $AL \cdot BM \cdot CN = LB \cdot MC \cdot AN$ como se quería probar.

Destacar que este resultado es el teorema de Menelao, pedir que enuncien el recíproco y que analicen si se cumple o no.

Teorema de Menelao: Los seis segmentos determinados por una transversal sobre los lados de un triángulo son tales que el producto de tres segmentos no consecutivos es igual al producto de los otros tres.

Recíproco del teorema de Menelao: Si tres puntos tomados en los tres lados de un triángulo determinan en esos lados seis segmentos tales que el producto de los tres segmentos no consecutivos es igual al de los otros tres, entonces los tres puntos son colineales.

2. Prueba que las rectas que unen los vértices de un triángulo dado a un punto dado, determinan en los lados del triángulo seis segmentos tales que el producto de tres de esos segmentos que no tengan punto común es igual al producto de los tres segmentos restantes.

Solución:

Destacar que el segmento determinado por un vértice del triángulo y un punto del lado opuesto se llama ceviana y que las alturas, las bisectrices y las medianas son casos particulares.

Para comenzar haremos una figura de análisis (fig. 2).

Sea ABC un triángulo cualquiera con AL, BM y CN tres cevianas que se cortan en el punto S.

Debemos probar que $BL \cdot MC \cdot AN = CL \cdot MA \cdot BN$.

Construcción auxiliar.

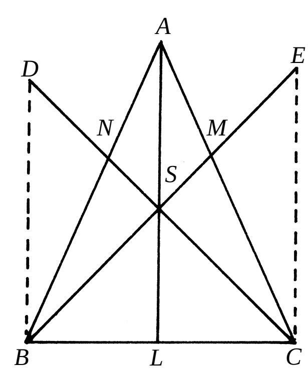

Fig. 2

Prolonguemos BM y CN a partir de M y N respectivamente, tracemos $CE \parallel AL$ y $BD \parallel AL$ siendo E un punto de la prolongación de BM y D un punto de la prolongación de BN.

En los triángulos CBD y CLS tenemos:

$\angle CBD = \angle CLS$ por correspondientes

$\angle BCD = \angle LCS$ común luego $\Delta CBD \sim \Delta CLS$ y $\frac{BD}{LS} = \frac{BC}{CL}$ por lo que $BD \cdot CL = LS \cdot BC$ (1)

En los triángulos BLS y BCE tenemos:

$\angle CBE = \angle LBS$ común

$\angle BCE = \angle BLS$ por correspondientes luego $\Delta BLS \sim \Delta BCE$ y $\frac{CE}{LS} = \frac{BC}{BL}$ por lo que

$CE \cdot BL = BC \cdot LS$ (2)

De (1) y (2) se tiene $BD \cdot CL = LS \cdot BC = CE \cdot BL$ por lo que $\frac{BL}{CL} = \frac{BD}{CE}$ (3)

Con el mismo razonamiento de acuerdo con la semejanza de los triángulos MCE con MAS y NAS con NBD se tiene: $\frac{MC}{MA} = \frac{EC}{AS}$ y $\frac{NA}{NB} = \frac{SA}{DB}$ (4), luego de (3) y (4) se obtiene que $\frac{BL}{CL} \cdot \frac{MC}{MA} \cdot \frac{NA}{NM} = 1$, por lo tanto, $BL \cdot MC \cdot AN = CL \cdot MA \cdot BN$ como se quería probar.

Destacar que este resultado es el teorema de Ceva, pedir que enuncien el recíproco y que analicen si se cumple o no.

Teorema de Ceva: Las rectas que unen los vértices de un triángulo dado a un punto dado, determinan en los lados del triángulo seis segmentos tales que el producto de tres de esos segmentos que no tengan punto común es igual al producto de los tres segmentos restantes.

Recíproco del teorema de Ceva: Si tres cevianas en un triángulo determinan en los lados del triángulo seis segmentos tales que el producto de tres de esos segmentos que no tengan punto común es igual al producto de los otros tres segmentos, entonces esas cevianas se cortan en un punto.

Los problemas que se deben utilizar en la ejercitación durante la clase y para la tarea pueden ser seleccionados de los que aparecen propuestos en este libro y de los siguientes.

1. Prueba que si el vértice A del triángulo ABC se une a un punto L de la recta BC, entonces
   $\frac{BL}{CL} = \frac{AB \cdot \operatorname{sen}\angle BAL}{AC \cdot \operatorname{sen}\angle CAL}$.
2. Prueba que la condición necesaria y suficiente para que sean concurrentes tres cevianas AD, BE y CF de un triángulo cualquiera ABC es que
   $\frac{\operatorname{sen}\angle BAD}{\operatorname{sen}\angle CAD} \cdot \frac{\operatorname{sen}\angle CBE}{\operatorname{sen}\angle ABE} \cdot \frac{\operatorname{sen}\angle ACF}{\operatorname{sen}\angle BCF} = 1$.
3. Prueba que las cevianas que van desde los vértices de un triángulo al punto de contacto del incírculo con los tres lados, son concurrentes.

ENTRENAMIENTO 4

Sobre principio de las casillas

En este entrenamiento vamos a ver el principio de las casillas o el principio del palomar, el cual está basado en la distribución de $n + 1$ objetos en n casillas, habrá al menos una casilla que recibe más de un objeto.

Esta idea es esencial que los estudiantes la entiendan porque en ella radica la esencia de este principio.

Principio de las casillas: Si se dispone de n casillas para colocar m objetos y $m > n$, entonces en alguna casilla deberán colocarse por lo menos dos objetos.

Es decir, tenemos una función cuyo dominio e imagen es el conjunto de los números naturales por lo que:
$f : \{1, 2, \ldots, n\} \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ con $n > k$, existen i, j con $i \neq j \mid f(i) \neq f(j)$. Vamos a ver algunos ejemplos utilizando este principio.

Ejemplo 1.

De un periódico escrito en el idioma español se escogen al azar 30 palabras. Demuestra que al menos dos de las palabras seleccionadas comienzan con la misma letra.

Solución:

El abecedario (alfabeto español) tiene 28 letras. Si se escogen al azar 30 palabras, solo 28 de estas pueden comenzar con letras diferentes, por lo que las otras dos palabras necesariamente comienzan con al menos una de las letras ya utilizadas, por lo que al menos dos de las palabras seleccionadas comienzan con la misma letra.

Ejemplo 2.

En una gaveta hay 10 pares de guantes blancos y 10 pares de guantes negros. ¿Cuál es la cantidad mínima de guantes que se debe extraer de la gaveta, sin mirar, para poder asegurar que al menos un par de guantes son del mismo color?

Solución:

Es necesario extraer 21 guantes, ya que hay 20 guantes de cada color.

Ejemplo 3.

Considera 6 puntos que se unen entre sí con líneas rojas o azules. Demuestra que no importa como se dibujen, siempre habrá un triángulo con sus tres lados del mismo color.

Solución:

Supongamos que del punto A salen tres líneas rojas a saber AB, AC, AD (fig. 3).

Si se pinta alguno de los segmentos BC, CD o BD con rojo habrá un triángulo rojo; si se pintan con azul, el triángulo BCD será azul.

Por lo tanto, siempre habrá un triángulo con sus tres lados del mismo color.

Los problemas que se deben utilizar en la ejercitación durante la clase y para la tarea pueden ser seleccionados de los que aparecen propuestos en este libro y de los siguientes.

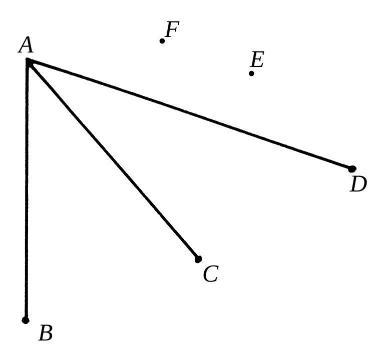

Fig. 3

1. Se escogen tres números al azar. Demuestra que existen al menos dos de estos cuya semisuma es un número entero.
2. Demuestra que en un conjunto cualquiera de 5 números naturales siempre existen tres cuya suma es divisible por 3.
3. Dados 9 puntos látices (puntos de coordenadas enteras) en el espacio euclidiano tridimensional, demuestra que existe un punto látice en el interior de uno de los segmentos que unen a dos de esos puntos.
4. En el interior de un rectángulo de 3 cm de largo por 2 cm de ancho se sitúan al azar 7 puntos, demuestra que existen al menos dos puntos que están separados a una distancia no mayor que 1,5 cm.

5. En el interior de un triángulo de 18 cm^2 de área se sitúan 13 puntos al azar de modo que ningún trío de puntos esté alineado. Demuestra que existen al menos tres de esos puntos que determinan un triángulo cuya área es menor o igual que 3 cm^2.
6. Demuestra que si se tienen 7 números naturales que son cuadrados perfectos, entonces existen al menos dos cuya diferencia es divisible por 10.
7. Se seleccionan 9 puntos al azar en el interior de un cuadrado de lado 1 u. Demuestra que 3 de esos puntos son los vértices de un triángulo cuya área es a lo sumo $\frac{1}{8}$ u^2.
8. Dado un conjunto de 10 números naturales menores que 100. Prueba que hay dos subconjuntos con iguales sumas de sus elementos.

Problemas de entrenamiento

1. El polinomio $-2x^3 + 2xy^2 - 7x^2z - 9xyz + 2y^2z + 2xz^2 + 7z^3$ puede escribirse como el producto de tres polinomios no constantes con coeficientes enteros. Determina estos tres polinomios.

2. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ con $x^2 + xy + y^2 = 4$, $x^4 + x^2y^2 + y^4 = 8$.
Halla el valor de $x^6 + x^3y^3 + y^6$.

3. Determina los valores de los parámetros a y b para que los polinomios:
$P(x) = a^2x^3 + b^2x^2 + ax + 2ab$ y $Q(x) = ax^3 + bx + 4$ dejen resto 5 al ser divididos por $x - 1$.

4. Determina los valores de A y B de tal modo que el trinomio $Ax^4 + Bx^3 + 1$ sea divisible por $(x - 1)^2$.

5. Un polinomio mónico de tercer grado, es divisible por $x - 2$ y por $x + 1$, y al dividirlo por $x - 3$ deja resto 20. ¿Qué resto dejará al dividir dicho polinomio por $x + 3$?

6. Encuentra todos los polinomios de grado menor o igual que dos que satisfacen la relación $P(x) \cdot P(-x) = P(x^2)$.

7. Los restos de la división de un polinomio en variable x, por los binomios $x + 1$, $x - 1$, $x - 2$ son, respectivamente 5, -1, -1. Halla el resto de la división de dicho polinomio por el producto $(x^2 - 1)(x - 2)$.

8. Dado el polinomio $p(x) = x^2 + (2m + 1)x + m^2 - 1$ con m real. ¿Para qué valores de m se cumple que $p(x) = 0$?

9. Halla el valor de S si $S = \frac{25}{8\cdot 9} + \frac{25}{9\cdot 10} + \frac{25}{10\cdot 11} + \frac{25}{11\cdot 12} + \ldots + \frac{25}{99\cdot 11}$.

10. Demuestra que para cualquier valor de b, el polinomio $x^3 - bx^2 - 5x + 5b$ tiene dos raíces opuestas.

11. Sea $p(x) = ax^2 + bx + c$, determina los valores de a, b y c para que
$p(x) = \sqrt{x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1}$.

12. Determina m, n y p para que el polinomio $P = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + mx^2 + nx + p$ sea divisible por $x^3 - 3x^2 - x + 3$.

13. Sea $P(x) = x^2 + bx + c$, donde b y c son enteros. Si $P(x)$ es un factor de $x^4 + 6x^2 + 15$ y de $3x^4 + 4x^2 + 28x + 5$. Halla $P(1)$.

14. Dados los polinomios $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + p$ y $q(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + q$.
a) Determina los valores de p y q para que los polinomios p y q tengan dos raíces comunes.
b) Halla las raíces de dichos polinomios.

15. Halla el resto de la división del polinomio $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$ por:

a) $x - 1$.
b) $x^2 - 1$.

16. Sea $P(x)$ un polinomio de cuarto grado cuyo primer coeficiente es la unidad y que cumple $P(1 - x) = P(x)$, $P(0) = 0$ y $P(-1) = 6$.

a) Halla el valor de $P(1)$ y de $P(2)$.

b) Determina el polinomio $P(x)$.

17. Dado el polinomio $4x^3 - 32x^2 - 11x + m$, determina m de modo que dicho polinomio dividido por $x + 2$ deje resto 225 y, resuelve la ecuación que resulta de igualar a cero dicho polinomio.

18. Halla la suma de los coeficientes del polinomio obtenido después de efectuar el producto $(1 - 3x + 3x^2)^{743}(1 + 3x - 3x^2)^{744}$.

19. Sea el polinomio $P(x) = 4(x^2 + ax + a^2)^3 - 27a^2x^2(x + a)^2$.
Resuelve la ecuación $P(x) = 0$, sabiendo que P es divisible por $(x - a)^2$ y que el cociente obtenido es un cuadrado perfecto.

20. Descompón en factores $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$.

21. Consideremos los polinomios
$P(x) = x^4 - 3x^3 + x - 3$, $Q(x) = x^2 - 2x - 3$ y $R(x) = x^2 - 5x + \alpha$
a) Halla α para que $x - 2$ divida a $R(x)$.
b) Prueba que $-x^2 + x + P(x) : Q(x) + 15$ es el cuadrado de un polinomio.

22. Halla los valores de a y b para que el polinomio
$2x^4 - 3x^3 + (a + b)x^2 + (b - 3a + 2)x + 3b(a - b - 1) + 20$
sea divisible por $x^2 - x + b$.

23. Las raíces de un polinomio son -1, 3, 5 y -2. Determina el resto al ser dividido por $(x - 4)$, si se sabe que toma el valor 144 para $x = 1$.

24. Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes enteros. Si conocemos que $p(b) - p(a) = 1$ con a y b enteros. Prueba que a y b difieren en 1.

25. Descompón en un producto de tres factores el polinomio $x^8 + x^4 + 1$.

26. Prueba que $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ es un número racional y calcúlalo.

27. Sean $a + b = 1$ y $ab \neq 0$. Prueba que $\dfrac{a}{b^3-1} - \dfrac{b}{a^3-1} = \dfrac{2(b-a)}{a^2b^2+3}$.

28. Si $\sqrt{a+4\sqrt{b+2}} = \sqrt{a-2} + \sqrt{2b}$, sabiendo que $a > b$, $a \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathbb{N}$, descompón en radicales simples $\sqrt{a+b+2\cdot\sqrt{a+6b}}$.

29. Demuestra la identidad: $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{\dfrac{a^2-4}{a}}}+\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{\dfrac{a^2-4}{a}}}=\dfrac{\sqrt{2a+4}}{\sqrt[4]{a}}$.

30. Sean $xy = a$, $xz = b$, $yz = c$, con x, y, z números reales positivos. Demuestra que

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(a + b + c) = \frac{(ab+ac+bc)^2}{abc}.$$

31. Si se sabe que $\log_4 125 = C$. Halla $\log_{10} 64$.

32. El producto de dos pares ordenados $(a;b)$ y $(c;d)$ se define:

$(a;b)(c;d) = (ac - bd;ad + bc + 2bd)$

a) Prueba que este producto así definido satisface la ley distributiva con respecto a la suma definida por: $(a;b) + (c;d) = (a + c;\ b + d)$.

b) Determina el elemento neutro de esta operación.

33. Si $a^2 + b^2 = 7ab$, prueba que $\log\dfrac{a+b}{3}=\dfrac{1}{2}(\log a+\log b)$.

34. Si $\log_2 a + \log_2 b \geq 6$, prueba que $a + b \geq 16$.

35. Prueba que $(n + 1)(n + 2)(n + 3)...(2n - 1)2n = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n - 3)(2n - 1)$

36. Prueba que si $E=\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$, entonces $E = a + b + c$.

37. Demuestra que para todo número real positivo se cumple:

$$\frac{\left(1+p+p^2+...+p^{200}\right)-p^{100}}{1+p+p^2+...+p^{199}}=\frac{1+p+p^2+...+p^{201}}{\left(1+p+p^2+...+p^{200}\right)+p^{100}}.$$

38. Demuestra que si p, q y $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ son números racionales, $\sqrt{p}$ también lo es.

39. Sean $b > 1$, sen $x > 0$, cos $x > 0$ y $\log_b \operatorname{sen} x = a$. Demuestra que

$$\log_b \tan x = a - \frac{1}{2}\log_b (1 - \mathrm{b}^{2a}).$$

40. Demuestra que si los números $\log_k x$, $\log_m x$, $\log_n x$ forman una progresión aritmética, entonces $n^2=(kn)^{\log_k m}$.

41. Sean x, y, z tres números reales positivos diferentes de 1,

a) Demuestra que $\log_{xz} xy = \dfrac{1+\log_x y}{1+\log_x z}$.

b) Aplica esta propiedad para calcular el valor de $\log_7 14 \cdot \log_{14} 21 \cdot \log_{21} 28 \cdot ... \cdot \log_{42} 49$.

42. Si $n = 9^x = 13^y = 17^z$ y $\dfrac{xyz}{xy + xz + yz} = 4\,002$ donde x, y, z son números reales positivos, prueba que n es un cuadrado perfecto.

43. Sea $M = \dfrac{\log_a(2x^2 + 3xy + y^2)}{\log_a(x+y)} - \log_{x+y}(2x + y)$. Prueba que $9^{\log_a(c-M)} = c^2 - 2c + 1$.

44. Si p es un número real y las raíces de $x^3 + 2px^2 - px + 10 = 0$ están en progresión aritmética, halla dichas raíces.

45. Tres obreros trabajando en conjunto pueden realizar una obra en una hora. Si el primer obrero trabaja una hora y a continuación lo sustituye el segundo, trabajando este cuatro horas, terminarán la obra. ¿En cuántas horas puede realizar el trabajo cada obrero por separado si el tercero necesita una hora menos que el primero?

46. Si a, b y c son las raíces de la ecuación $x^3 - 4x^2 + 5x - 7 = 0$, ¿cuál es el valor de $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$?

47. Sea la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ que tiene por raíces a x_1 y x_2. Forma una ecuación que tenga raíces $y_1 = \dfrac{1}{x_1}$ y $y_2 = \dfrac{1}{x_2}$.

48. La ecuación $x^4 - 4x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0$ tiene las cuatro raíces positivas. Encuentra los valores de a y de b.

49. Resuelve la ecuación siguiente $\sqrt{\log_2 x^4} + 4\log_4\sqrt{\dfrac{2}{x}} = 2$.

50. Sean α, β, γ las raíces del polinomio $p(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 1$.
Halla $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^2\gamma + \beta\gamma^2 + \gamma^2\alpha + \gamma\alpha^2 - \alpha\beta\gamma$.

51. ¿Qué valor corresponde a W, si los ceros de las funciones $f(x) = 3x^2 + W + 15$ son números enteros?

52. Resuelve la ecuación $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

53. Dentro de tres años (desde ahora), Esteban tendrá tres veces más años los años que tenía hace tres años. Dentro de cuatro años Esteban tendrá a veces más años que los que tenía hace cuatro años. Determina el valor de a.

54. Se sabe que el número de soluciones reales del sistema:

$(y^2 + 6)(x - 1) = y(x^2 + 1)$, $(x^2 + 6)(y - 1) = x(y^2 + 1)$

es finito. Prueba que este sistema tiene un número par de soluciones reales.

Nota: Decimos que la solución (x_0, y_0) es real cuando x_0 y y_0 son números reales.

55. Halla la solución general del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + ky = 3 \\ kx + 4y = 6 \end{cases}$$

donde k es un número real dado. ¿Para qué valores de k existe una solución del sistema que satisface las desigualdades $x > 1$, $y > 0$?

56. Resuelve en el conjunto de los números reales el sistema:

$xy + xz = 8 - x^2$
$xy + yz = 12 - y^2$
$yz + zx = -4 - z^2$

57. Halla todas las soluciones reales del sistema:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1^2 - x_1 + 1 \\ x_3 &= x_2^2 - x_2 + 1 \\ &\vdots \\ x_{2\,004} &= x_{2\,003}^2 - x_{2\,003} + 1 \\ x_1 &= x_{2\,004}^2 - x_{2\,004} + 1 \end{aligned}$$

58. En los concursos nacionales de matemática se consideran las hembras y los varones participantes. La cantidad de varones es el 55 % del número total de participantes. La razón entre el número de varones de Secundaria Básica es igual a la razón entre la cantidad total de Secundaria Básica y la cantidad total de Preuniversitario. Halla la razón entre la cantidad de varones de Secundaria Básica y la de hembras de Secundaria Básica.

59. Determina todos los números reales r tales que hay precisamente un par $(x;y)$ de números reales que satisfacen las condiciones.

i) $y - x = r$
ii) $x^2 + y^2 + 2x \leq 1$.

60. Halla todos los valores enteros de a, b y c que satisfacen las ecuaciones

$ab + 5 = c$; $bc + 1 = a$ y $ca + 1 = b$.

61. Determina todas las cuádruplas ordenadas de cuatro números reales con la propiedad que cada tres de los cuatro números pueden ser tomados, y la suma del producto de esos tres números con el cuarto número restante es la misma, independientemente de la selección de los tres números.

62. Dada la expresión $A = \dfrac{\operatorname{sen} 8x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x}$. Halla el valor numérico de A para todo x diferente de $\dfrac{1}{2}k\pi$, con k entero.

63. Determina la cantidad de números reales x con $0 \leq x \leq 100$, tales que $|\operatorname{sen} x| = 1$.

64. Halla el valor de la expresión $z = 2(\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x) - 3(\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x)$.

65. Prueba que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que:

a) cos (sen x) > sen (cos x).
b) cos (cos x) > 0.

66. Demuestra que $0 < \cos(\cos x) \leq 1$ para todo x real.

67. Prueba que $\operatorname{sen} 3\alpha = 4\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)$.

68. Determina los valores de todos los ángulos α, para los cuales ambos números $\tan\alpha$ y $\frac{\tan\alpha}{\tan 3\alpha}$ son naturales.

69. Demuestra que para todo x real que cumple $0 < x < \frac{\pi}{4}$ se tiene que:

$\cot x - \cot 4x > 2$.

70. Si $\tan A = \frac{\sqrt{6}}{12}$ y $\tan B = \frac{1}{3}$; prueba que $\cos^2 A = \operatorname{sen} 4B$.

71. Prueba que si $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 11x + 30} < 0$, entonces $\operatorname{sen} 2x < 0$.

72. Demuestra que si A, B y C son los ángulos interiores de un triángulo se cumple que:

a) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$.
b) $\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1$.

73. Prueba que si A, B y C son los ángulos interiores de un triángulo y $\tan A \cdot \tan C = 3$, entonces $\tan A$, $\tan B$ y $\tan C$ están en progresión aritmética.

74. Demuestra que: $\frac{2\operatorname{sen}^2 40°}{\operatorname{sen} 80° - 2\operatorname{sen} 20°} = \frac{\operatorname{sen} 70°}{\cos 70°}$.

75. Demuestra que si en un triángulo ABC se verifica la relación $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B}$; el triángulo es isósceles.

76. Demuestra que si dos ángulos de los ángulos interiores de un triángulo verifican la relación $\tan A : \tan B = \operatorname{sen}^2 A : \operatorname{sen}^2 B$, entonces el triángulo es isósceles o rectángulo.

77. Prueba que: $\cos\frac{2\pi}{9} \cdot \cos\frac{8\pi}{9} + \cos\frac{2\pi}{9} \cdot \cos\frac{14\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9} \cdot \cos\frac{14\pi}{9} = -\frac{3}{4}$.

78. Prueba que si $\operatorname{sen}(2x + y) = 5\operatorname{sen} y$, entonces $\tan(x + y) = \frac{3}{2}\tan x$.

79. Halla el valor de y para $y = \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{20} + \operatorname{sen}^2 \frac{3\pi}{20} + \operatorname{sen}^2 \frac{7\pi}{20} + \operatorname{sen}^2 \frac{9\pi}{20}$.

80. Dado un triángulo de lados a, b, c y ángulos A, B, C, se consideran los ángulos agudos x, y, z definidos por: $\cos x = \frac{a}{(b+c)}$; $\cos y = \frac{b}{(a+c)}$; $\cos z = \frac{c}{(a+b)}$.

Halla el valor de $\tan^2 \frac{1}{2}x + \tan^2 \frac{1}{2}y + \tan^2 \frac{1}{2}z$.

81. El área de un triángulo está dada por la fórmula $A = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$ donde a y b son dos de sus lados. Determina la amplitud de sus ángulos interiores.

82. Determina, sin usar tablas ni calculadoras, el valor del ángulo agudo X en la expresión:
$\operatorname{sen} X = \dfrac{\sqrt{7 - \sqrt{21 + \sqrt{80}}}}{1 + \sqrt{7 + \sqrt{48}} - \sqrt{4 - \sqrt{12}}}$.

83. Demuestra que para todo x real, $x \geq 1 \cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right) > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

84. En el triángulo ABC cuyos ángulos interiores son α, β y γ, se cumple que:

i) $\cot(\alpha - \beta) + \cot(\alpha + \beta) + \cot(\alpha + 2\beta + \gamma) + \cot((\alpha + \gamma) = 0$.
ii) $\cot(\alpha + \beta) = -\cot \beta$.

Clasifica dicho triángulo según las amplitudes de sus ángulos y las longitudes de sus lados.

85. Demuestra que para todo $x, y \in \mathbb{R}$, se cumple: $\cos x^2 + 2\cos y^2 - \cos xy > 4$.

86. Si $m = a\operatorname{sen}^2\alpha + b\cos^2\alpha$; $n = b\operatorname{sen}^2\beta + a\cos^2\beta$ y $a\tan\alpha = b\tan\beta$. Prueba que: $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

87. Si $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Demuestra que $ax + by + cz \leq 1$.

88. Demuestra que para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple que $5a^2 - 6ab + 5b^2 \geq 0$.

89. Demuestra que si a, b, c son números reales, entonces $\frac{1}{4}a^2 + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc$.

90. Demuestra que si los números a y b cumplen la condición $a^2 + b^2 = 1$, entonces $|a+b| \leq \sqrt{2}$.

91. Demuestra que si $a + b = 1$, entonces $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$.

92. Determina para qué valores de $n \in \mathbb{N}$, n^3 se encuentra entre 2^n y 2^{n+1}.

93. Los números reales positivos a, b y c satisfacen $a \geq b \geq c$ y $a + b + c \leq 1$.
Prueba que $a^2 + 3b^2 + 5c^2 \leq 1$.

94. Halla los valores de a y b para los cuales se cumple que:
$4\sqrt{a} + 4\sqrt{b} \geq a + 4b + 5$.

95. Demuestra que para todo x, y reales, se cumple que:

$$2\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 6 > 0.$$

96. Demuestra que $4\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 8\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 6 \geq 0$ para $x, y \in \mathbb{R}^*$.

97. Prueba que para todo $x, y > 0$ se tiene que $\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$.

98. Sean a, b, c, d números reales no negativos desiguales dos a dos. Demuestra que si al menos uno de los números c o d se encuentra entre a y b o si al menos uno de los números a o b se encuentra entre c y d, entonces $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$.

99. Prueba que $a^3b + ab^3 < a^4 + b^4$.

100. Si $2x + 4y = 1$, demuestra que $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{18}$.

101. Sean a, b, c tres números reales positivos. Demuestra que:

$$\left(\frac{a+b}{c}\right)\left(\frac{b+c}{a}\right)\left(\frac{c+a}{b}\right) \geq 8.$$

102. Prueba que si $a + b = 1$, con a, b números positivos, entonces:

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

103. Dados los números reales a, b tales que $0 < a < b$. Prueba que existen infinitos números reales positivos x para los cuales se cumple que $\frac{a}{b} < \frac{a^2 + bx}{b^2 + ax} < 1$.

104. Demuestra que $\frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$.

105. Demuestra que si $a^2 + b^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 1$, entonces $|ax + by| \leq 1$.

106. Si a, b, c son números positivos, demuestra que:

a) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$

b) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

107. Sean x un número real positivo y n un número natural. Demuestra que: $(1+x)^n > \frac{1}{2}n(n-1)x^2$.

108. Sean x, y, z números reales que cumplen $x + y + z = 5$; $xy + xz + yz = 3$. Demuestra que $-1 \leq z \leq \frac{13}{3}$.

109. Sean a, b, x, y números reales tales que $ab \geq \frac{1}{4}$ y $xy \geq 0$. Demuestra que:

$(ay - bx)^2 \geq (a - x)(y - b)$.

110. Prueba que para todo $x \in \mathbb{R}$, el número $x^{1\,988} - 2x^{1\,987} + 3x^{1\,986} - ... - 1\,988x + 1\,989$ es diferente de cero.

111. Demuestra que $n^n > 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n - 1)$.

112. Sean a, b, c y d números reales positivos con $a \leq b \leq c \leq d$ y $a + b + c + d \geq 1$.
Prueba que $a^2 + 3b^2 + 5c^2 + 7d^2 \geq 1$.

113. Prueba que si $|b| < \left|\frac{1}{2}a\right|$, entonces $\left|\frac{1}{a-b}\right| < \frac{2}{|a|}$.

114. Sean a, b, c números reales que cumplen las condiciones siguientes:

$a \geq -\frac{1}{2}$, $b \geq -\frac{1}{2}$, $c \geq -\frac{1}{2}$ y $a + b + c = 1$. Prueba que $\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1} \leq 4$.

115. Demuestra que $b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2 \geq abc(a + b + c)$.

116. Sean a, b, c números reales positivos, prueba que $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$.

117. Halla el primer número no primo de la sucesión de la forma $(a_n) = (n^2 - 79n + 1\,601)$.

118. El primer término de una cierta sucesión numérica es 1; y para todo $n \geq 2$ ($n \in \mathbb{N}$), el producto de los n primeros términos de la sucesión es n^2. Calcula la suma de los términos tercero y quinto.

119. Una pelota se deja caer desde una altura de 10 m. Va saltando la mitad de la distancia en cada salto. ¿Cuál es la distancia total que recorre?

120. Prueba que si los números $\log_a x$, $\log_b x$ y $\log_c x$ con $x \neq 1$ están en progresión aritmética, entonces $c^2 = (a \cdot c)^{\log_a b}$.

121. Si la suma de los diez primeros términos de una cierta progresión aritmética es 100, y la suma de los cien primeros términos es 10. Calcula la suma de los 110 primeros términos de la progresión.

122. La suma de los tres números que forman una progresión aritmética es igual a 15. Si 1, 4 y 19 se suman respectivamente a estos, se obtendrán tres números que forman una progresión geométrica. Encuéntralos.

123. ¿Qué condiciones debe satisfacer la razón de una sucesión geométrica de números positivos para que cualquier trío de términos consecutivos de esa sucesión pueda ser considerada como las longitudes de los tres lados de un triángulo?

124. Prueba que si a, b y c son respectivamente los p-ésimos, q-ésimos y r-ésimos términos de una sucesión aritmética, entonces se cumple:

$(q - r)a + (r - p)b + (p - q)c = 0.$

125. En una sucesión geométrica de términos positivos $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ se conocen los términos $a_{n+m} = A$ y $a_{m-n} = B$. Halla a_m.

126. Sea la sucesión de términos 1, 9, 36, 100, 225, …; halla la ecuación explícita de dicha sucesión.

127. El primer término de una progresión aritmética de enteros consecutivos es $K^2 + 1$. Demuestra que la suma de los $2K + 1$ primeros términos de esta progresión es igual a $K^3 + (K + 1)^3$.

128. Determina todas las sucesiones geométricas de razón no nula para las cuales existen tres términos consecutivos tales que el tercero es la media aritmética de los dos anteriores.

129. Se define la sucesión (x_n) del modo siguiente: $x_0 = 5$, $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$.

Demuestra que $x_{1\,000} > 45$.

130. Sea (x_n) una sucesión definida por recurrencia: $x_0 = 1$, $x_n = \dfrac{x_{n-1}}{x_{n-1}+1}$. Halla x_n en forma explícita.

131. Halla la suma de los términos de la sucesión b_n si

$b_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n(n + 1).$

132. Conocidos A_0 y A_1 y $A_{n+2} = 2A_{n+1} - A_n + 1$. Halla A_n explícitamente.

133. En una sucesión aritmética $a_1, a_2, ...$ se tiene que $S_p = S_q$. Halla S_{p+q} donde S_n representa la suma parcial hasta el término n-ésimo.

134. Sean $S_1 = 1 + q + q^2 + ... (|q|) < 1$; $S_2 = (|Q|) < 1$.

Calcula $S = 1 + qQ + q^2Q^2 + ...$

135. Si $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ y $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2$. Halla a_1.

136. Prueba que los números $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ no pueden ser elementos de una progresión aritmética.

137. Demuestra que si entre los infinitos términos de una progresión aritmética de números enteros positivos hay un cuadrado perfecto, entonces infinitos términos de la progresión son cuadrados perfectos.

138. Tres números forman una progresión aritmética y otros tres, una progresión geométrica. Sumando los términos correspondientes de las dos progresiones se obtiene 85, 76 y 84 respectivamente; sumando los tres términos de la progresión aritmética se obtiene 126. Encuentra los términos de las dos progresiones.

139. A cada número natural k, $k \geq 2$, se le hace corresponder un término de la sucesión $a_n(k)$ de acuerdo con la regla siguiente: $a_0 = k$, $a_1 = t(a_0)$, ..., $a_n = t(a_{n-1})$, ... en donde $t(a)$ es el número de divisores de a. Halla todos los k para los cuales la sucesión $a_n(k)$ no contiene a los cuadrados de números enteros.

140. En la sucesión no decreciente de enteros impares:

$\{a_1, a_2, a_3, ...\} = \{1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5, ...\}$, cada entero positivo impar k aparece k veces. Es sabido que hay enteros b, c, d tales que para todo entero positivo n, $a_n = b\left[\sqrt{n+c}\right] + d$. Calcula el valor de $S = b + c + d$.

Nota: El símbolo $[x]$ representa la parte entera de x.

141. Sean a un número real y (a_n) una sucesión definida por su primer término $a_1 = a$ y por la relación $a_{n+1} = a_n(a_n^2 - 3a_n + 3)$. Halla el valor de a para el cual $a_{1\,989} = a_1$.

142. Sean la función definida por $f(x) = \log x$ y C el conjunto de pares ordenados $(x;y)$ para los cuales se cumplen simultáneamente las condiciones siguientes:

i) x y y son enteros,
ii) $1 \leq x \leq 1\,984$,
ii) $0 \leq y \leq f(x)$.

Determina cuántos elementos tiene el conjunto C. Fundamenta tu respuesta.

143. Sean la función definida por $f(x) = \sqrt[4]{x}$ y M el conjunto de pares ordenados $(x;y)$ para los cuales se cumplen simultáneamente las condiciones siguientes:

i) x y y son enteros,
ii) $1 \leq x \leq 1\,984$,
iii) $0 \leq y \leq f(x)$.

Determina cuántos elementos tiene el conjunto M. Fundamenta tu respuesta.

144. Sea f una función f: $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ que cumple las condiciones siguientes:

i) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$,
ii) $x = 0$ es el único número tal que $f(x) = 1$,
iii) f no tiene ceros.

Prueba que $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

145. Si para todo par de números reales diferentes x y y, una función cumple que:

i) $f(x) - f(y) = f(x - y) + xy + 1$.

ii) $f(1) = -1$.

Demuestra que no hay ningún número entero n que satisfaga $f(n) = n$.

146. Sea $f(x) = \dfrac{3x^2 + x - 2}{x^2 - 2}$, halla todos los valores enteros de x para los cuales $f(x) \in \mathbb{Z}$.

147. Sea f una función definida en el conjunto de los números enteros positivos para la cual se cumple que $f(f(n)) = 4n - 3$ para cada entero n positivo y $f(2^k) = 2^{k+1} - 1$ para cada entero k no negativo. Determina $f(1\ 985)$.

148. Si $f(n+1) = \dfrac{2f(n)+1}{2}$ para $n \in \mathbb{N}$ y $f(1) = 2$, halla $f(1\ 988)$.

149. Si $f(x) = \dfrac{x(x-1)}{2}$ con $x \neq 0$, prueba que $f(x+2) = \dfrac{(x+2) \cdot f(x+1)}{x}$.

150. Consideremos la función $f(n) = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$, donde n es un entero positivo y se tiene que $x_k = (-1)^k$ siendo k un entero positivo, determina los valores posibles para $f(n)$.

151. Si $f(x) = 2x$. Demuestra que $f^2(x) + 2x^2 = 3x \cdot f(x)$.

152. Sea S la función que a cada número natural le hace corresponder la suma de sus dígitos, por ejemplo, $S(1\ 988) = 1 + 9 + 8 + 8 = 26$. Calcula $S(10^{1\ 988} - 1\ 988)$.

153. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que cumple $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Calcula $f(0)$.

154. Sean $f(x) = x^2$ y $g(x) = 4x^2 + a$. ¿Para qué valores de a tienen puntos comunes las gráficas de f y g?

155. Sea $f(x)$ una función cuadrática en variable x tal que para todo $x : f(x) = f(-x)$, se sabe que $f(2) = 5$ y $f(1) = -4$. Calcula $f(3)$.

156. Si $f(1) = 4$ y $f(x + 1) - f(x) = 3f(x)$, halla $f(1\ 989)$.

157. Sean a_0, a_1, a_2, a_3 números reales, con $a_3 \neq 0$.

Halla todas las funciones del tipo $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ que satisfacen la igualdad $(x + 2)P(x - 2) = (x - 4)P(x)$ para todo x real.

158. Dada la función $f(x)$ que verifica $f(0) = 4$, $f(1) = 2$, $f(2) = 0$ y que tiene pendiente nula en $x = 2$; halla $f(x)$ del menor grado posible.

159. Una función f está definida sobre los enteros positivos. Se sabe que f es no decreciente, $f(2) = 2$ y $f(mn) = f(m) \cdot f(n)$ para m y n primos relativos.

Prueba que $f(4) \cdot f(13) = [f(7)]^2$.

160. Sean k un número real diferente de cero y f una función real tal que $f(x - k) = -f(x + k)$.

Demuestra que f es una función periódica de período $4k$.

161. La función f está definida por $f(x)=\dfrac{cx}{2x+3},\left(x\neq-\dfrac{3}{2}\right)$. ¿Cuál es el valor de c que hace que para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(f(x)) = x$?

162. Sean a, b, c, $d \neq 0$, números naturales y f: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(x)=\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)$. Prueba que f es inyectiva si y solo si $\dfrac{a}{b}\neq\dfrac{c}{d}$.

163. Sean a, b, c y d constantes reales tales que la curva representada por la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene pendiente positiva en todos sus puntos, excepto en uno.

a) Demuestra que $b=\sqrt{3ac}$ o $b=-\sqrt{3ac}$.
b) Si la curva, además, pasa por (0;0), $c = 3$ y $b < 0$, muestra que el punto donde la pendiente no es positiva está en la intersección de la curva y la recta $y = x$.

164. Halla la cantidad de puntos de intersección entre los gráficos de las funciones $y = \cos x$, $y = \log_{3p} x$.

165. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x \cdot \cos 16x$. Halla los extremos de f.

166. Sea $f(x) = \operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x$. Halla los extremos de f.

167. Sea x un número real. Considera la función f que a cada número entero positivo n le hace corresponder el número $f(n)=\left[\dfrac{1\,986}{n^2}\right]$ (parte entera).

a) ¿Para qué valores de n se cumple que $f(n) = 1$? Fundamenta.
b) Determina el menor valor de n para el cual se cumple que $f(n) = f(n + 1)$.
c) ¿Cuántos valores diferentes de $f(n)$ se obtienen cuando n recorre todo el conjunto de los números enteros positivos? Fundamenta.

168. La función f está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ y satisface la relación siguiente:

$f(x + 1) \cdot f(x) + f(x + 1) + 1 = 0$. Prueba que f no es continua.

169. Sea $f(x)=\dfrac{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6-\left(x^6+\dfrac{1}{x^6}\right)-2}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3+\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)}$ una función definida para todo número positivo x; calcula el valor mínimo de $f(x)$.

170. Dada la función $f(x)=\dfrac{x}{x-[x]}$.

a) Determina el dominio de f.
b) Di si tiene ceros o no y ¿por qué?
c) Analiza los puntos de discontinuidad. ¿En cuáles es evitable la discontinuidad?

171. Halla el valor mínimo de la función $f(x) = \frac{9x^2 \text{sen}^2 x + 4}{x \text{sen} x}$ para $0 < x < \pi$.

172. Halla la función f que satisface la condición $f(x + 1) = x^2 - 3x + 2$.

173. Resuelve la ecuación $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$, $x \neq -1$.

174. Halla la función f que satisface la condición: $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$.

175. Halla la función f que satisface la ecuación $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1 + x^2}$, $x < 0$.

176. Halla la función f que satisface las dos condiciones siguientes:

i) $f(x^y) = (f(x))^y$ para todo x, y reales positivos.
ii) $f(2) = 8$.

177. Halla la ecuación de la función f que satisface las condiciones:

i) $f^2(x) - 2(f(x)) = \frac{1 - x^4}{x^4}$.

ii) $f(x) \leq 1$ para todo x.

178. Resuelve la ecuación funcional $f(x) - 2f(-x) = x$.

179. Dada la ecuación funcional $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$ no definida para $x = 0$. Halla $f(x)$ y demuestra que la ecuación $f(x) = f(-x)$ es válida solo para dos números reales.

180. Halla la función f que satisface las dos igualdades siguientes:

i) $(x+1) \cdot f(x) = 1 - f\left(\frac{1}{x}\right)$ para $x \neq 0$.

ii) $f(0) = 1$.

181. Halla todos los polinomios $P(t)$ de una variable, que cumplen:
$P(x^2 - y^2) = P(x + y) \cdot P(x - y)$
para todos los números reales x y y.

182. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función que verifica que para todo conjunto de siete puntos $x_1, \ldots, x_7$ que forman los vértices de un heptágono regular, $f(x_1) + \ldots + f(x_7) = 0$. Encuentra f.

183. Halla la ecuación de la función $f(x)$ para la cual se cumple que:

$f(x) + 3f(1 - x) = 2x^2 + x - \frac{5}{2}$.

184. Sea f una función de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ tal que:

a) $f(n + 1) > f(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.
b) $f(n + f(m)) = f(n) + m + 1$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}$.

Encuentra $f(2\ 003)$.

185. ¿Cuáles son las funciones cuadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ para las que existe un intervalo $(h;k)$, tal que para todo $x \in (h;k)$ se cumple que:

$f(x) \cdot f(x + 1) < 0$ y $f(x) \cdot f(x - 1) < 0$

186. Un nadador para entrenar realiza sesiones de entrenamiento de 3, 5 y 7 km. Su entrenador le recomienda practicar un total de 35 km. ¿Podrá realizarlos en 10 sesiones? Explica tu afirmación.

187. Sean n un número natural y m el que resulta al escribir en orden inverso las cifras de n. Determina, si existen, los números de tres cifras que cumplen $2m + S = n$, siendo S la suma de las cifras de n.

188. Halla todos los números de tres cifras $\overline{abc}$ tales que los números de cuatro cifras $\overline{abc1}$ y $\overline{2abc}$ satisfagan la igualdad $\overline{abc1} = 3 \cdot \overline{2abc}$.

189. Halla todos los números de cuatro cifras que satisfacen las condiciones siguientes:

i) La suma de los cuadrados de los dígitos de los extremos es igual a 13.
ii) La suma de los cuadrados de los dígitos medios es igual a 85.
iii) Si del número buscado se sustrae 1 089, resultará un número escrito con las mismas cifras que el buscado, pero en orden inverso.

190. Se consideran todas las fracciones positivas menores que 1, cuyo denominador es 2 001 y cuyo numerador es un número que no tiene divisores comunes con 2 001. Calcula la suma de estas fracciones.

191. ¿Cuántos factores 2 tiene el número k, si $k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 498 \cdot 499 \cdot 500$?

192. Escrito el triángulo aritmético:

0   1   2   3   4   ....   1 991   1 992   1 993
1   3   5   7   ....   3 983   3 985
4   8   12   ....   7 968
....

donde cada número es la suma de los dos que tiene encima (cada fila tiene un número menos y en la última solo hay un número). Prueba que el último número es múltiplo de 1 993.

193. Se escriben en la pizarra 14 números enteros, no necesariamente distintos, que verifican la propiedad de que al borrar cualquiera de estos se pueden agrupar los trece restantes en tres grupos de igual suma.

a) Demuestra que cada uno de los catorce es múltiplo de 3.
b) ¿Es posible que alguno de los catorce que se han escrito no sea el 0?

194. El número: $M = \underbrace{20042004...2004}_{n \text{ veces } 2\,004}$

Se ha obtenido tomando 2 004 a continuación de 2 004 como se indica.

a) Si $n = 2\ 005$. ¿Será M divisible por 66?
b) ¿Cuál será el menor valor de n para que M sea divisible por 66?
c) ¿Cuántos divisores más tiene 2 004 que 2 005?

195. Se tienen dos números enteros: $a = \underbrace{11...11}_{m}$ y $b = 10\underbrace{0...0}_{m-1}05$.

Prueba que $a \cdot b + 1$ es un cuadrado perfecto y determina las cifras de su raíz cuadrada.

196. a) Encuentra un subconjunto B del conjunto $A = \{1, 2, 3, ..., 40\}$ de manera que B tenga 26 elementos y que ningún producto de dos elementos de B sea un cuadrado perfecto.
b) Demuestra que no se puede obtener un subconjunto de A de 27 elementos con la característica mencionada en (a).

197. Considera la sucesión definida como $a_1 = 3$, y $a_{n+1} = a_n + a_n^2$. Determina las dos últimas cifras de $a_{2\,000}$.

198. Halla todos los números naturales de 4 cifras, escritos en base 10, que sean iguales al cubo de la suma de sus cifras.

199. Los números naturales a y b son tales que $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ es entero. Demuestra que el máximo común divisor de a y b no es mayor que $\sqrt{a+b}$.

200. Halla el menor entero positivo n tal que las 73 fracciones $\frac{19}{n+21}, \frac{20}{n+2}, \frac{21}{n+23}, ..., \frac{91}{n+93}$ sean todas irreducibles.

201. Prueba que el producto de dos enteros positivos consecutivos no puede ser igual al producto de dos enteros positivos consecutivos pares.

202. Halla todos los números enteros positivos m tales que $m + 2\,001 \cdot S(m) = 2m$ donde $S(m)$ representa la suma de los dígitos de m.

203. Sean m y n enteros positivos, con $m \geq n$. Prueba que $\frac{\text{mcd}(m,n)}{m}\binom{m}{n}$ es entero.

204. La suma de los dígitos de un entero positivo n escrito en el sistema decimal es igual a 100 y la suma de los dígitos del número $44n$ es igual a 800. Determina la suma de los dígitos del número $3n$.

205. Sea $f(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+^*$ la menor cantidad de unos que pueden usarse al representar n utilizando números unos y cualquier cantidad de los símbolos $+$, $\cdot$.

Por ejemplo, $80 = (1 + 1 + 1 + 1 + 1) \cdot (1 + 1 + 1 + 1) \cdot (1 + 1 + 1 + 1)$ y de esta forma $f(80) \leq 13$.

Prueba que $3\log_3 n \leq f(n) < 5\log_3 n$, para todo $n > 1$.

206. Un número es *equilibrado* si una de sus cifras es el promedio de las otras dos, por ejemplo, el 258 es equilibrado, pues $5 = (2 + 8) : 2$. ¿Cuántos números equilibrados de tres cifras hay?

207. La población de una ciudad era un cuadrado perfecto, es decir, un número entero al cuadrado. Con 100 personas más, la nueva población resultó ser un cuadrado perfecto más uno. Ahora, con otro aumento de 100 personas, la población es nuevamente un cuadrado perfecto. ¿Cuál era la población original?

208. Sea n un número de 6 cifras, cuadrado perfecto y cubo perfecto, si $n - 6$ es un número primo, halla el valor de n.

209. Demuestra que no existen números enteros positivos a, b, c tales que $a^2 + b^2 = 8c + 6$.

210. Los enteros positivos a, b y c satisfacen la igualdad $c(ac + 1)^2 = (5c + 2b)(2c + b)$.

a) Si c es un número impar, prueba que es un cuadrado perfecto.
b) ¿Es posible con las condiciones dadas que c sea un número par?

211. Once hembras y n varones fueron a buscar guayabas.
Ellos encontraron $n^2 + 9n - 2$ en total, cada uno encontró la misma cantidad. ¿Cuál es mayor, el número de hembras o el número de varones?

212. Se tiene el conjunto formado por todos los números de siete dígitos diferentes que se pueden formar con los dígitos 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8. Prueba que no existen dos números del conjunto tales que uno de estos divida al otro.

213. Sean n un número entero positivo menor que 2 001 y $\dfrac{n}{2\,001}$ una fracción tal que mcd$(n,2\,001) = 1$.

Calcula la suma de todas las fracciones que cumplan con ambas condiciones a la vez.

214. Se forman todos los subconjuntos de cuatro elementos del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Con los elementos de cada subconjunto se escriben todos los números de cuatro dígitos diferentes y se suman. Determina el máximo común divisor de todas las sumas.

215. ¿Para qué números naturales n hay exactamente cuatro múltiplos de 20 en el conjunto
$A = \{4n + 1, 4n + 2, ..., 5n\}$.

216. Dados los números naturales A, B, C tales que A^3 es divisible por B, B^3 es divisible por C, C^3 es divisible por A. Prueba que $(A + B + C)^{13}$ es divisible por $A \cdot B \cdot C$.

217. Prueba que hay infinitos pares de números naturales a y b tales que $a^2 + 1$ es divisible por b y $b^2 + 1$ es divisible por a.

218. Halla todas las parejas de enteros positivos $(a;b)$ que satisfacen la ecuación
$a^2 - b^2 = 1\,995$.

219. Prueba que si las dos últimas cifras de un número de tres cifras, son iguales y la suma de sus cifras es divisible por 7, entonces el número es divisible por 7.

220. Determina el mayor número natural n que satisface simultáneamente las condiciones siguientes:

a) $n < 2\,300$ b) $n = p^6q$, p y q son primos.

221. Halla todos los números de seis cifras $\overline{x1986y}$ que son divisibles por 44.

222. Encuentra todos los números naturales n tales que:

i) $1\,500 \leq n \leq 1\,993$. ii) $n = a \cdot b$. iii) $a^2 - b^2 = 2b + 1$.

223. Sea S el conjunto de números naturales que multiplicados por 28 dan como resultado números cuyas cifras son todas iguales a 4.

a) Halla el menor elemento de S.
b) Halla el menor elemento de S que es menor que 10^{54}.

224. Sea E un conjunto de n números naturales diferentes que tiene la propiedad siguiente: cada uno de los elementos de E divide a la suma de todos ellos.

a) Determina todos los conjuntos con la propiedad de E en los casos en que $n = 2$, $n = 3$.
b) Muestra un conjunto con la propiedad de E que tenga 10 elementos.

225. Sean x, y enteros positivos tales que $\text{mcd}(x,y) = 1$ y 3 no divide a $(x + y)$. Demuestra que $x^2 - xy + y^2$ y $x + y$ son primos relativos.

226. Se tiene un tablero de 4×4. Escribe en cada casilla del tablero un número entero positivo menor que 100 de forma tal que el producto de los números situados en cada fila, cada columna y en las dos diagonales sea el mismo.

227. Sea $s(n)$ la suma de los dígitos de n. Determina si la afirmación siguiente es verdadera o falsa, justificando convenientemente.

Existe n natural tal que $s(n) = 2\,005$ y $s(n^2) = 4\,020\,025$.

228. En una sucesión infinita $\{x_n\}$ de enteros positivos, x_{n+1} es la suma de x_n y un dígito distinto de cero de x_n para $n \geq 1$. Prueba que x_n es par para algún $n \geq 1$.

229. Del conjunto $\{1, 2, 3, 4, \ldots, 360\}$. Demuestra que al escoger 8 números compuestos, por lo menos 2 de los escogidos no son primos entre sí.

230. Se escriben 3 000 dígitos, uno después del otro, de modo que todo par de dígitos consecutivos forme un número de dos cifras que sea el producto de cuatro primos (no necesariamente distintos), es decir, que el primer y segundo dígitos formen un número de dos cifras que sea el producto de cuatro primos, el segundo y tercer dígitos formen un número de dos cifras que sea el producto de cuatro primos y así, sucesivamente. ¿Qué dígito ocupa la posición 1 999?

231. Para a y b enteros positivos no múltiplos de 5, se construye una lista de números como sigue: El primer número es 5 y, a partir del segundo número, cada número se obtiene multiplicando el número que le precede (en la lista) por a y sumándole b.

(Por ejemplo, si $a = 2$ y $b = 4$, entonces los primeros tres números de la lista serían:

5, 14, 32 (pues $14 = (5 \cdot 2) + 4$ y $32 = (14 \cdot 2) + 4$). ¿Cuál es la máxima cantidad de primos que se pueden obtener antes de obtener el primer número no primo?

232. ¿Para qué enteros $n \geq 2$ se pueden acomodar los números del 1 al 16 en los cuadrados de una cuadrícula de 4×4 (un número en cada cuadrado, sin repetir números) de manera tal que las 8 sumas de los números que quedan en cada fila y en cada columna sean múltiplos de n y que estos 8 múltiplos sean todos distintos entre sí?

233. Halla el número natural n que es el producto de los primos p, q y r, si se sabe que
$r - q = 2p$ y $rq + p^2 = 676$.

234. Sea p un número primo. Determina todos los enteros $k \in \mathbb{Z}$ tales que $\sqrt{k^2 - kp}$ es natural.

235. Sean a y b enteros positivos primos entre sí. Prueba que todo entero c mayor o igual que el número $(a-1)(b-1)$ puede ser escrito de la forma $c = ar - bs$ con $r, s \geq 0$ y que el menor número con esa propiedad es $(a-1)(b-1)$.

236. Prueba que para cualquier primo p distinto de 2 y 5 existe un múltiplo de p cuyas cifras son todas nueve. Por ejemplo, si $p = 13$, $999\,999 = 13 \cdot 76\,923$.

237. Halla todos los tríos de números enteros que estén en progresión aritmética cuyo producto sea un número primo.

238. Dado el conjunto de números 1, 2, 3, ..., 1 985, escoge el mayor subconjunto tal que la diferencia entre cualesquiera dos números en el subconjunto seleccionado no sea un número primo.

239. Sean p un número primo, r el resto de la división de p por 210. Si sabemos que r es un número compuesto y puede representarse como la suma de dos cuadrados perfectos, determina r.

240. Sean a, b, c enteros positivos tales que $(a+1)(b+1)(c+1) = 3abc$, siendo a un número primo menor que 5 y $b + c > 6$. Halla $a^2 + b + c$.

241. Los primeros dos números de una sucesión son 1 y 2 respectivamente. Cada término de la subsucesión es el menor entero positivo el cual aún no ha aparecido en la sucesión y no es primo relativo con el término anterior de la sucesión. Prueba que todos los enteros positivos aparecen en esta sucesión.

242. Sea n un número obtenido al multiplicar cuatro números primos a, b, c, d tales que:

i) $a + c = d$;
ii) $a(a + b + c + d) = c(d - b)$;
iii) $1 + bc + d = bd$.

Determina n.

243. Demuestra que para todo número primo p distinto de 2 y de 5, existen infinitos múltiplos de p de la forma 1111...1 (escrito solo con unos).

244. Un gran grupo de niños están “jugando a la suma”. El juego consiste en sumar el número de su posición al número que dijo el niño anterior. El primero dice 1, a partir de él, el segundo dice 3, el tercero 6 y así, sucesivamente.

¿Podría alguno decir 595? ¿Y $2^{2\,004} + 1$?

245. Sea p un número primo. Prueba que si i es un entero tal que $2 \leq i \leq p - 2$, entonces existe un entero j con $2 \leq j \leq p - 2$ tal que $i \neq j$ y que $i \cdot j \equiv 1 \pmod{p}$.

246. Demuestra que no existen 1 999 primos en progresión aritmética todos ellos menores que 12 345.

247. Encuentra todos los números primos positivos p tales que $8p^4 - 3\,003$ también sea un primo positivo.

248. Los números enteros desde 1 hasta 9 se distribuyen en las casillas de un tablero de 3×3. Después se suman seis números de tres cifras: los tres que se leen en filas de izquierda a derecha y los tres que se leen en columnas de arriba hacia abajo. ¿Hay alguna distribución para la cual el valor de esa suma sea 2 001?

249. Sea A un número de seis dígitos, tres de los cuales están dados y son iguales a 1, 2 y 4. Demuestra que siempre es posible obtener un número que es múltiplo de 7, efectuando una de las operaciones siguientes, o suprimir los tres dígitos determinados o escribir un dígito de A en algún orden.

250. Sea $n \geq 2$ un número entero. Prueba que n y $n + 2$ son ambos primos si y solo si

$\dfrac{4((n-1)!+1)+n}{n(n+2)}$ es entero.

251. Un número de diez cifras se dice *interesante* si todas sus cifras son diferentes y es un múltiplo de 11 111. ¿Cuántos números interesantes hay?

252. Prueba que si tres términos consecutivos de una progresión aritmética son cuadrados perfectos, entonces la diferencia común entre dos términos consecutivos de la progresión es divisible por 24.

253. Prueba que no existe un número entero $n > 1$ tal que n divida a $3^n - 2^n$.

254. Determina todos los números primos p para los cuales el número $\dfrac{2^{p-1}-1}{p}$ es el cuadrado de un entero.

255. Prueba que si p es un número primo de la forma $4k + 3$, entonces $2p + 1$ también es primo si y solo si $2p + 1$ divide a $2^p - 1$.

256. Diremos que un número es descendente si cada uno de sus dígitos es menor o igual que el dígito anterior, de izquierda a derecha. Por ejemplo, 4 221 y 751 son números descendentes, pero 476 no lo es. Determina si existen enteros positivos n para los cuales 16^n es descendente.

257. Sean n un número natural y m el que resulta al escribir en orden inverso las cifras de n. Determina, si existen, los números de tres cifras que cumplen $2m + S = n$, siendo S la suma de las cifras de n.

258. Sean x, y, z, a, b, c, enteros positivos con $x^2 + y^2 = a^2$; $x^2 + z^2 = b^2$; $y^2 + z^2 = c^2$. Prueba que el número xyz es divisible por 5.

259. Determina el mayor número natural n tal que existen enteros a_1, a_2, ..., a_n tales que para cualquiera b_1, b_2, ..., $b_n \in \{-1, 0, 1\}$, no todos nulos se verifica n^5 no divide a $\sum b_i a_i$.

260. Los cuatro últimos dígitos de un cuadrado perfecto son iguales. Prueba que todos son ceros.

261. Sean $p + 1$ y $2p + 1$ números primos, demuestra que $x^{2p} - 1$ es divisible por $8(p + 1)(2p + 1)$, si x es primo con $2(p + 1)(2p + 1)$.

262. Si p es primo, $p > 2$, $n \in \mathbb{N}^*$. Prueba que $n^{\frac{p-1}{2}}$ deja resto 1 o –1 al dividirse por p, si n no es divisible por p.

263. Sea p un número primo, $p > 3$, $n \in \mathbb{N}$ no divisible por p. Demuestra que existe un número k que cumple una de las condiciones siguientes:

a) o bien $n^{3k} - 1$ es múltiplo de p o $n^{3k} + 1$ lo es.
b) o bien $n^{3k-1} - 1$ es múltiplo de p o $n^{3k-1} + 1$ lo es.

264. Sea p un número primo mayor que 3. Prueba que $2(p - 3)! + 1$ es divisible por p.

265. Si p es un número primo mayor que 2. Prueba que $(p - 2)! - 1$ es un múltiplo de p.

266. Prueba que si p es primo y $A = [(p - 1)!]^3 + 1 + 3\{[(p - 1)!]^2 + (p - 1)!\}$, entonces A es divisible por p y $n^{\sqrt[3]{A}-1}$ deja resto 1 en la división por p.

267. Determina para qué números primos p, se cumple que $2^p + p^2$ es primo.

268. Determina todos los números naturales n para los cuales $1! + 2! + ... + n!$ es un cuadrado perfecto.

269. Observa el triángulo siguiente:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 2 & & 2 & & & \\
 & & 3 & & 4 & & 3 & & \\
 & 4 & & 6 & & 6 & & 4 & \\
5 & & 8 & & 9 & & 8 & & 5 \\
 & & & & \cdots\cdots & & & & \\
2\,000 & & & & \cdots\cdots & & & & 2\,000
\end{array}$$

¿Cuántas veces aparece el número 1 988 y en qué filas?

270. Determina todos los enteros a y b tales que $(19a + b)^{18} + (a + b)^{18} + (19b + a)^{18}$ es un cuadrado perfecto.

271. ¿Existe alguna potencia de 2 que al escribirla en el sistema decimal tenga todos sus dígitos distintos de cero y sea posible reordenarlos para formar con estos otra potencia de 2? Justifica la respuesta.

272. Si los números $\overline{ABC}$ y $\overline{CBA}$ dejan el mismo resto al ser divididos por 7, y $A > C$, determina el valor de A y de C.

273. Sean a y b dos enteros positivos tales que $a^n + n$ divide a $b^n + n$ para cualquier entero positivo n. Prueba que $a = b$.

274. Determina todos los enteros positivos n tales que 33 divide a los números

$(n + 1)^n + 16n$ y $(n + 1)^{n+4} + 16n$.

275. Se define el número N como $2\,005^{2\,005^{\cdot^{\cdot^{2\,005}}}}$, donde el número 2 005 aparece 2 005 veces en la expresión anterior. Sea M el producto de todos los números primos relativos con 27 en el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, N\}$. Determina el resto al dividir M por 27.

276. Considera el conjunto de números $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, escoge dos de estos, digamos a y b, y forma un nuevo conjunto sustituyendo los dos números escogidos por su producto ab y su suma $a + b$. Si esta operación se repite indefinidamente, ¿es posible llegar a formar el conjunto $\{21, 27, 64, 180, 540\}$?

277. Prueba que existen cadenas tan grandes como uno quiera de números enteros consecutivos en las que cada número es divisible por el cuadrado de un entero mayor que 1.

278. Prueba que $2n + 3m$ es divisible por 17 si y solo si $9n + 5m$ lo es.

279. Prueba que existe una sucesión de enteros positivos $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ tal que la suma de sus cuadrados es un cuadrado perfecto para todo entero positivo n.

280. Una sucesión $z_0, z_1, z_2, ...$ está definida por $z_0 = 0$ y $z_z = z_{n-1} + \frac{1}{2}(3^r - 1)$ si $n = 3^{r-1}(3k + 1)$ o $z_z = z_{n-1} + \frac{1}{2}(3^r - 1)$ si $n = 3^{r-1}(3k + 2)$ con k, r enteros. Muestra que cada entero aparece exactamente una sola vez en esta sucesión.

281. La función g se define sobre los números naturales y satisface las condiciones:

i) $g(2) = 1$
ii) $g(2n) = g(n)$
iii) $g(2n + 1) = g(2n) + 1$

Sea n un número natural tal que $1 \leq n \leq 2\ 002$. Calcula el valor máximo M de $g(n)$. Calcula también cuántos valores de n satisfacen $g(n) = M$.

282. Sea $P(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^m$. Halla todos los $m \in \mathbb{N}$ para los cuales se cumplen las dos condiciones siguientes:

i) Existe un número natural n tal que al elevar $P(x)$ a la n-ésima potencia y reducir todos los términos semejantes, se obtiene una expresión que consta de exactamente 1 981 sumandos.
ii) El número $P(2)$ es divisible por $2^{71} - 1$.

283. Sean $a, b \in \mathbb{R}_+$, $n, k \in \mathbb{N}$; $n \geq k$. Demuestra que:

a) $a^n + b^n \geq a^k b^{n-k} + b^k a^{n-k}$.
b) $(a + b)^n \leq 2^{n-1}(a^n + b^n)$.

284. ¿Cuántos de los primeros 100 números enteros positivos pueden expresarse en la forma $[2x] + [4x] + [6x] + [8x]$?

285. Prueba que no existe ninguna función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que verifique que $f(f(n)) = n + 1$.

286. Consideramos el conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ de los números naturales y la aplicación $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que cumple las dos condiciones siguientes:

a) $f(f(n)) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) $f(f(n) + 1) = \{n - 1$, si n es par y $n + 3$, si n es impar.

Determina el valor de $f(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ observando previamente que f es biyectiva y que, al no ser nunca $f(f(n) + 1) = 2$, tiene que ser $f(1) = 2$.

287. Determina la función $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ que cumple, para cualesquiera $s, n \in \mathbb{N}^*$, las condiciones siguientes: $f(1) = f(2^s) = 1$ y si $n < 2^s$, entonces $f(2^s + n) = f(n) + 1$.

a) Calcula el valor máximo de $f(n)$ cuando $n \leq 2\ 001$.
b) Halla el menor número natural n tal que $f(n) = 2\ 001$.

288. Halla todas las funciones $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ estrictamente crecientes y tales que: $f(n + f(n)) = 2f(n)$.

289. ¿Existirá una función f: $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ tal que se cumpla que $f(n) = f(f(n - 1)) + f(f(n + 1))$ para cada número natural $n > 1$?

290. Una función f: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ satisface las condiciones siguientes:

i) $f(ab) = f(a)f(b)$ si el máximo común divisor entre a y b es 1.
ii) $f(p + q) = f(p) + f(q)$ para todos p y q números primos.

Muestra que $f(2) = 2f(3) = 3$ y $f(1\ 999) = 1\ 999$.

291. Sea $\sigma(n)$ la suma de todos los divisores positivos de n donde n es un entero positivo (por ejemplo, $\sigma(6) = 12$ y $\sigma(11) = 12$).

Diremos que n es casi perfecto si se cumple que $\sigma(n) = 2n - 1$ (por ejemplo, 4 es casi perfecto porque $\sigma(4) = 7$). Sean n módulo k el resto de la división de n por k y $S(n) = \sum_{k=1}^{n} n \mod k$ (por ejemplo, $0 + 0 + 0 + 2 + 1 + 0 = 3$ y

$S(11) = 0 + 1 + 2 + 3 + 1 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 22$).

Prueba que n es casi perfecto si y solo si $S(n) = S(n - 1)$.

292. Sea f una función definida en enteros positivos de la forma siguiente:

Dado n, escribimos $n = 2^a \cdot (2b + 1)$, con a y b enteros y definimos $f(n) = a^2 + a + 1$. Determina el menor entero positivo n tal que $f(1) + f(2) + ... + f(n) \geq 1\ 213\ 456$.

293. Sea g una función definida para todo entero positivo n, que satisface:

i) $g(1) = 1$
ii) $g(n + 1) = g(n) + 1$ o $g(n + 1) = g(n) - 1$ para todo $n \geq 1$.
iii) $g(3n) = g(n)$ para todo $n \geq 1$.
iv) $g(k) = 2\ 001$ para algún entero positivo k.

Halla el menor valor posible de k entre todas las funciones g que cumplen las condiciones anteriores y demuestra que es la menor.

294. Para cada número n, sea $f(n)$ la cantidad de maneras en que se puede expresar n como la suma de números iguales a 1, 3 o 4.

Por ejemplo, $f(4) = 4$, pues todas las formas posibles son

$4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 3 = 3 + 1 = 4$. Demuestra que si n es par, $f(n)$ es un cuadrado perfecto.

295. A cada número natural n se le asigna un entero no negativo $f(n)$ de tal manera que se satisfacen las condiciones siguientes:

i) $f(r \cdot s) = f(r) + f(s)$, para $r, s \in \mathbb{N}$.
ii) $f(n) = 0$, cuando el dígito de las unidades es igual a tres.
iii) $f(4) = 0$.

Halla $f(1\ 998)$.

296. Una función f satisface la condición $f(1) + f(2) + ... + f(n) = n^2 \cdot f(n)$ para cualquier entero positivo n. Si $f(1) = 1\ 001$, halla $f(2\ 002)$.

297. Determina la cantidad de fracciones propias, cuyos denominador y numerador son respectivamente 1 983 y un número natural, que sean irreducibles.

298. Demuestra que la suma de todos los números naturales menores que $n \in \mathbb{N}$ y primos relativos con él es $\frac{1}{2} n \cdot \varphi(n)$.

299. Sea n un número compuesto, prueba que $\varphi(n) \le n - \sqrt{n}$.

300. Halla los números naturales n para los cuales $\varphi(n)$ no es divisible por 4.

301. Prueba que si $p > 2$ y $2p + 1$ son números primos, entonces para $n = 4p$, se cumple que $\varphi(n + 2) = \varphi(n) + 2$.

302. Prueba que para cualquier número natural m, existe un número natural n tal que $\varphi(n) - (n - 1) > m$ y $\varphi(n) - \varphi(n + 1) > m$.

303. Halla todas las soluciones de la ecuación $\varphi(n) = \varphi(2n)$.

304. Prueba que $[x + y] \ge [x] + [y]$.

305. Prueba que $\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right]$ para $n \in \mathbb{Z}$.

306. Halla todas las raíces reales de la ecuación $1 - |x - 1| = \frac{[x] - x}{|x - 1|}$.

307. Halla todos los valores de n, enteros positivos, que satisfacen la ecuación

$\left[\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[3]{n}\right] = 2n.$

308. Resuelve la ecuación $\left[\frac{[x]^2}{x}\right] = 2.$

309. Halla la parte entera del número $x = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}}.$

310. Halla la parte entera del número $y = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}.$

311. Prueba que cualquier potencia entera positiva del número $\sqrt{2} - 1$ puede ser expresada en la forma $\sqrt{n} - \sqrt{n - 1}$ donde n es un entero positivo.

Por ejemplo: $\left(\sqrt{2} - 1\right)^2 = 3 - 2\sqrt{2} = \sqrt{9} - \sqrt{8}$; $\left(\sqrt{2} - 1\right)^3 = 5\sqrt{2} - 7 = \sqrt{50} - \sqrt{49}.$

312. Halla todas las soluciones enteras de la ecuación $2x^2 - 3xy - 2y^2 = 7$.

313. ¿Para cuáles números enteros n la fracción $\frac{3n+4}{5}$ es un número entero?

a) Determina los cinco primeros valores naturales de n que cumplen la propiedad anterior.

314. Sea p un número primo. Determina todos los enteros $k \in \mathbb{Z}$ tales que $\sqrt{k^2 - kp}$ es natural.

315. Encuentra todos los enteros positivos m y n tales que $n! + 1 = (m! - 1)^2$.

316. Halla los valores enteros positivos n tales que la expresión $\frac{(2n^2+4n+18)(7-n)}{-3n^2+18n+21}$ representa un número entero.

317. Determina todas las parejas de números naturales $(m;n)$ tales que la parte entera del número $1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+...+\frac{1}{n^m}$ es igual a m.

318. Determina si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n^3 = n + 2\,003$.

319. Resuelve la ecuación: $|2xy - 3x| + |6 - 4y| = 6$, hasta encontrar dos pares $(x; y)$ de números enteros que sean soluciones de dicha ecuación.

320. En una olimpiada de Matemática los concursantes están ocupando todos los asientos de un salón rectangular donde estos están alineados en filas y columnas de tal manera que hay más de dos filas y en cada fila hay más de dos asientos. Al inicio del examen un profesor les sugiere que se deseen suerte dándose la mano; cada uno de los concursantes estrecha la mano de los concursantes que están junto a él (delante, atrás, a los lados y en diagonal) y solo a estos. Alguien observa que se dieron 1 020 apretones de manos. ¿Cuántos concursantes hay?

321. Halla todos los pares de números naturales x, y $(x < y)$ tales que la suma de todos los números naturales comprendidos estrictamente entre ambos es igual a 1 999.

322. Encuentra el mayor número entero N que cumpla las condiciones siguientes:

a) $\left[\frac{N}{3}\right]$ tiene sus tres cifras iguales.

b) $\left[\frac{N}{3}\right] = 1+2+3+...+(n-1)+n.$

323. Sea p un número primo, halla todas las soluciones enteras de la ecuación:

$p(x + y) = xy$.

324. a) Halla todas las soluciones enteras de la ecuación $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{c}$.

b) Halla todas las soluciones enteras de la ecuación $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{c}$.

325. Prueba que no existen enteros positivos x, y, z, t tales que $x^2 + y^2 = 3(z^2 + t^2)$.

326. Determina todos los enteros x, y que satisfacen la ecuación $x^3 + 9xy + 127 = y^3$.

327. Prueba que la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ tiene infinitas soluciones enteras con $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

328. Determina todos los números primos p para los cuales el sistema:

$p + 1 = 2x^2$
$p^2 + 1 = 2y^2$

tiene una solución en enteros x, y.

329. Halla todos los números reales m tales que la ecuación:

$(x^2 - 2mx - 4(m^2 + 1))(x^2 - 4x - 2m(m^2 + 1)) = 0$

tiene exactamente tres raíces reales diferentes.

330. Pedro y Luis suben caminando por una escalera mecánica en movimiento. Cuando Pedro llega a arriba ha subido 21 escalones, mientras que Luis, quien camina con una velocidad que es el doble de la de Pedro, ha subido 28. ¿Cuántos escalones tiene la escalera en reposo?

331. Juan nació antes del año 2000. El 25 de agosto de 2001 cumple tantos años como es la suma de los dígitos del año de su nacimiento. Determina su fecha de nacimiento y justifica que es la única solución posible.

332. Encuentra todos los enteros que se escriben como $\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+...+\frac{9}{a_9}$ donde cada a_i para $i = 1, 2, ..., 9$ son dígitos diferentes de cero que pueden repetirse.

333. Halla todos los pares ordenados de enteros positivos $(m;n)$ tales que los números $m^2 - 4n$ y $n^2 - 4m$ sean cuadrados perfectos.

334. Sea la ecuación $(m - 7)(n + 8) = mn$ con m, n enteros positivos.

a) Determina el mayor valor de $m : n$.
b) Determina el valor mínimo de m y n tal que mn sea un cuadrado perfecto.

335. Sean a, b, c, d, e números naturales (no necesariamente distintos) y la suma de todos los grupos de cuatro de esos números son 21, 25, 28, 30 (dos grupos repiten la suma). Determina dichos números.

336. Halla todos los pares ordenados (x, y) de números enteros tales que $x^2 - 3x - y^2 - y = 6$.

337. Halla todos los números naturales de 4 cifras, que sean iguales al cubo de la suma de sus cifras.

338. Sea n un entero positivo. Prueba que si $3n + 1$ es un cuadrado perfecto, entonces $n + 1$ es la suma de tres cuadrados perfectos (por ejemplo, $n = 40$, se tiene que $3n + 1 = 121 = 11^2$ y $n + 1 = 41 = 6^2 + 2^2 + 1^2$).

339. Halla los dos últimos dígitos de $3^{1\,995}$.

340. En un aula hay n alumnos varones y 13 hembras. A cada uno de ellos se le ha entregado el mismo número de libretas. Si el número total de libretas repartidas fue de $2n^2 + 21n - 40$, determina si en el aula había más varones que hembras.

341. Halla todos los tríos de números enteros positivos (p,q,n), con p y q primos, que son soluciones de la ecuación: $p(p + 3)$ 6+ $q(q + 3) = n(n + 3)$.

342. Sea $b > 800$ un entero positivo. Determina todas las 2 002-úplas de enteros no negativos $(a_1, a_2, ..., a_{2\,002})$ que satisfacen $\sum a_j^{a_j} = 2\,002 \cdot b^b$.

343. Encuentra todos los enteros positivos m y n tales que $n! + 1 = (m! - 1)^2$.

344. ¿Cuántas ternas ordenadas de números naturales (a, b, c) distintos de la unidad hay tales que $a \cdot b \cdot c = 7^{39}$.

345. Considera 10 números enteros positivos, no necesariamente distintos, que sumen 95. Encuentra el menor valor posible de la suma de sus cuadrados.

346. Sea a un entero positivo impar mayor que 17 tal que $3a - 2$ es un cuadrado perfecto. Demuestra que existen enteros positivos diferentes b y c, tales que $a + b$, $a + c$, $b + c$ y $a + b + c$ son cuatro cuadrados perfectos.

347. Halla todos los enteros positivos que son menores que 1 000 y cumplen con la condición siguiente: el cubo de la suma de sus dígitos es igual al cuadrado de dicho entero.

348. Sea N un entero positivo. Hay exactamente 2 005 pares ordenados $(x;y)$ de enteros positivos que satisfacen la igualdad $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{N}$. Prueba que N es un cuadrado perfecto.

349. Determina todas las ternas de enteros positivos (a, b, c) tales que $abc + ab + c = a^3$.

350. Determina la cantidad de sucesiones infinitas $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ de enteros tal que $a_n + a_{n+1} = 2a_{n+2}a_{n+3} + 2\,005$, para todo $n \geq 1$.

351. El número 695 se escribe con una base de numeración factorial, es decir, $695 = a_1 + a_2 \cdot 2! + ... + a_n \cdot n!$ donde $a_1, a_2, ..., a_n$ son enteros tales que $0 \leq a_k \leq k$. Determina a_4.

352. Mediante la notación $1\,989_n$ donde n es un número natural no nulo se designa el número que resulta de escribir 1 989 n veces seguidas formando un número de $4n$ cifras. Ejemplo, $1\,989_3 = 198919891989$. Sea C el conjunto de los números de la forma $1\,989_n$ con $n \geq 1$. Designemos por S al subconjunto de C formado por los elementos de este que son divisibles por 891. Además, si k es un elemento de S designemos por $d(k)$ el número de dígitos de k. Demuestra el valor mínimo de $\left|1\,989 - d(k)\right|$.

353. Considera dos números enteros positivos x y y que satisfacen la relación: $3x^2 + x = 4y^2 + y$. Prueba que los números $(x - y)$, $(3x + 3y + 1)$, $(4x + y + 1)$ son tres cuadrados perfectos.

354. En una sucesión de enteros positivos, cada término después del primero es la suma del término precedente y el mayor dígito de ese término. ¿Cuál es el mayor número posible de los términos impares sucesivos en esa sucesión?

355. Un estudiante estuvo leyendo un libro de Matemática por 37 días de acuerdo con la regla siguiente:

i) Cada día leía al menos una hora.

ii) Cada día leía un número entero de horas y al menos 12 h.
iii) En total él estuvo leyendo al menos 60 h.

Prueba que hay algunos días consecutivos en los cuales el estudiante leyó en total durante esos días, 13 h.

356. Tenemos un conjunto de 221 números reales cuya suma es 110 721. Los disponemos formando un rectángulo de modo que todas las filas y la primera y última columnas son progresiones aritméticas de más de un elemento. Prueba que la suma de los elementos de las cuatro esquinas vale 2 004

357. Dado un conjunto A de enteros positivos, construimos el conjunto A' poniendo todos los elementos de A y todos los enteros positivos que se pueden obtener de la manera siguiente: Se escogen algunos elementos de A, sin repetir, y a cada uno de esos números se le pone el signo + o el signo –; luego se suman esos números con signo y el resultado se pone en A'.
Por ejemplo, si $A = \{2, 8, 13, 20\}$, entonces algunos elementos de A' son 8 y 14 (pues 8 es elemento de A y $14 = 20 + 2 - 8$). A partir de A' construimos A'' de la misma manera que A' se construye a partir de A. Encuentra el mínimo número de elementos que necesita tener A si queremos que A'' contenga a todos los enteros del 1 al 40 (ambos inclusive).

358. Un número es *suertudo* si al sumar los cuadrados de sus cifras y repetir esta operación suficientes veces obtenemos el número 1. Por ejemplo, 1 900 es suertudo, ya que $1\,900 \to 82 \to 68 \to 100 \to 1$.
Encuentra una infinidad de parejas de enteros consecutivos, donde ambos números sean suertudos.

359. ¿Cuántos números, comprendidos entre 1 000 y 9 999, verifican que la suma de sus cuatro dígitos es mayor o igual que el producto de estos? ¿Para cuántos de ellos se verifica la igualdad?

360. La suma de 17 enteros positivos distintos es igual a 1 000. Prueba que se pueden escoger 8 de esos enteros de tal forma que su suma sea mayor o igual que 500.

361. Prueba la existencia de dos conjuntos infinitos A y B no necesariamente disjuntos de números enteros no negativos tales que cada entero no negativo puede ser representado de forma única como $a + b$ con $a \in A$ y $b \in B$.

362. Dadas 9 personas, demuestra que existe un valor de n tal que con las personas se pueden formar n grupos de 3, de modo que cada par de personas se encuentra en exactamente uno de dichos grupos, y muestra una de las posibles conformaciones de los grupos.

363. ¿Existe algún conjunto finito de números reales M que contenga al menos dos elementos distintos y que cumpla la propiedad de que para dos números a, b cualesquiera de M, el número $2a - b^2$ sea también un elemento de M?

364. Calcula $\sqrt{(31)(30)(29)(28)+1}$.

365. Sean m y n enteros positivos. Determina un polinomio mónico p, del mayor grado posible, que divida simultáneamente a los polinomios $x^m - 1$ y $x^n - 1$.

366. Sean $p(x)$ un polinomio con coeficientes enteros tal que $p(0) = p(1) = 1$, y a_0 un entero cualquiera, $a_{n+1} = p(a_n)$. Demuestra que cualesquiera dos términos a_i y a_j son primos relativos.

367. Dado un polinomio $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ con coeficientes enteros $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ suponga que existen enteros distintos a, b, c, d tales que $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 5$. Muestra que no existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $f(k) = 8$.

368. Si a, b y c son números tales que $2a$, $a + b$ y c son enteros, prueba que para todo x entero se cumple que $ax^2 + bx + c$ es un entero.

369. Un polinomio en una variable tiene todos sus coeficientes enteros y para cuatro valores enteros distintos de la variable toma el valor 1. Demuestra que este polinomio no puede tomar el valor 24 para ningún valor entero de la variable.

370. Sea $R(x) = mx + n$ el resto de la división de un polinomio $P(x)$ por el polinomio $T(x) = x^2 - (a + b)x + ab$ en que a y b son constantes diferentes.

a) Determina $R(x)$ en función de a, b, $P(a)$ y $P(b)$.
b) Determina m y n para el caso particular en que $P(x) = x^{200}$, $a = -1$ y $b = 2$.
c) Prueba que para el caso particular del inciso b, m y n son ambos enteros.

371. Sean $P_1(x)$ y $P_2(x)$ dos polinomios con coeficientes enteros. Los coeficientes del polinomio $P_1(x) \cdot P_2(x)$ son todos múltiplos de 5. Demuestra que para al menos uno de estos polinomios todos sus coeficientes son múltiplos de 5.

372. Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros que cumple que:

i) $P(0)$ es impar.
ii) $P(P(0)) = 0$.

Demuestra que la suma de los coeficientes de $P(x)$ es par.

373. Halla las tangentes de los ángulos de un triángulo si se sabe que son números enteros positivos.

374. En el triángulo ABC, D es un punto del lado AB, E es un punto del lado AC y F es el punto de intersección de las rectas que contienen a los segmentos DE y BC.
Si $AD = 1$ cm, $DB = 2$ cm, $BC = 4$ cm, $CE = 2$ cm y $EA = 3$ cm; determina la longitud de CF.

375. En el triángulo ABC, AD es la mediana relativa al lado BC y BE es la bisectriz relativa al ángulo B. Si $AB = 7{,}0$ cm, $BC = 18{,}0$ cm y $EA = ED$; determina la longitud del lado AC.

376. Demuestra que si en un triángulo la razón de las tangentes de dos ángulos es igual a la razón de los cuadrados de los senos de estos ángulos, entonces el triángulo es isósceles o rectángulo.

377. Sean ABC un triángulo y E y F puntos sobre los lados CA y AB. Sea D la intersección de BE con CF y supón que las áreas de los triángulos BDF, CDE y BCD son 3, 3 y 9 respectivamente. Encuentra el área del cuadrilátero $AFDE$.

378. Se considera el triángulo ABC y su circunferencia circunscrita. Si D y E son puntos sobre el lado BC tales que AD y AE son, respectivamente, paralelas a las tangentes en C y en B a la circunferencia circunscrita, demuestra que $BE : CD = AB^2 : AC^2$.

379. En el triángulo acutángulo ABC, AH, AD y AM son, respectivamente, la altura, la bisectriz y la mediana que parten desde A, estando H, D y M en el lado BC. Si las longitudes de AB, AC y MD son, respectivamente 11, 8 y 1, calcula la longitud del segmento DH.

380. ¿Qué condición han de cumplir las longitudes de los lados de un triángulo cualquiera para que la línea que une el *baricentro* (centro de gravedad del triángulo o punto donde coinciden las medianas) y el *incentro* (punto común a las tres bisectrices) sea paralela a uno de los lados?

381. En un triángulo *ABC*, *A'* es el pie de la altura relativa al vértice *A* y *H* el ortocentro.

a) Dado un número real positivo *k* tal que $\frac{AA'}{HA'} = k$, encuentra la relación entre los ángulos *B* y *C* en función de *k*.
b) Si *B* y *C* son fijos, halla el lugar geométrico del vértice *A* para cada valor de *k*.

382. En el triángulo *ABC*, la bisectriz trazada desde *A* divide al lado opuesto en dos segmentos, de los que conocemos uno: *BT* = 572 m. Si dicha bisectriz corta a la mediana *BM* en los segmentos *BD* = 200 m y *DM* = 350 m, calcula el lado *a* del triángulo y plantea una ecuación con incógnita *c* para obtener el lado *c* (no hace falta que lo calcules explícitamente).

383. Dado un triángulo *ABC* con lados de longitud *a* = *BC*, *b* = *AC* y *c* = *AB*, llamemos *D* al punto de intersección del lado *AB* con la bisectriz del ángulo *C*. Demuestra que $CD = \dfrac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$.

384. Sea *ABC* un triángulo isósceles con *AB* = *BC* y $\angle ABC = 144°$. Se consideran el punto *K* en *AB*, el punto *L* en *BC* y el punto *M* en *AC* de modo que *KL* es paralelo a *AC*, *KM* es paralelo a *BC* y *KL* = *KM*. La recta *LM* corta a la prolongación del lado *AB* en *P*. Halla la amplitud del ángulo *BPL*.

385. Las alturas del triángulo *ABC* se cortan en el punto *H*. Se sabe que *AB* = *CH*. Determina el valor del ángulo *BCA*.

386. Sean *ABC* un triángulo, *D* el punto medio de *BC* y *E* un punto sobre *AC* tal que *CD* : *CA* = 1 : *n*. *P* es el punto de intersección de *AD* y *BE*. Determina el menor valor de *n* para el que $\frac{PD}{AD} \le \frac{1}{12}$.

387. Sea *G* el baricentro del triángulo *ABC*. Si se verifica: *AB* + *GC* = *AC* + *GB*, demuestra que el triángulo es isósceles.

388. Demuestra que la condición necesaria y suficiente para que, en el triángulo *ABC*, la mediana desde *B* sea dividida en tres partes iguales por la circunferencia inscrita en el triángulo, es $\frac{a}{5} = \frac{b}{10} = \frac{c}{13}$.

389. Sean *a*, *b*, *c* las longitudes de los lados de un triángulo.

Supón que $u = a^2 + b^2 + c^2$ y $v = (a + b + c)^2$. Prueba que $\frac{1}{3} \le uv < \frac{1}{2}$ y que la fracción $\frac{1}{2}$ no puede ser reemplazada por un número menor.

390. ¿Es verdad que cualquier par de triángulos que comparten un ángulo común, el inradio y el circunradio, deben ser congruentes?

391. Sea *ABC* un triángulo en el que $\angle B > 90°$ y en el que un punto *H* sobre *AC* tiene la propiedad de que *AH* = *BH*, y *BH* es perpendicular a *BC*. Sean *D* y *E* los puntos medios de *AB* y *BC*, respectivamente. Por *H* se traza una paralela a *AB* que corta a *DE* en *F*. Prueba que $\angle BCF = \angle ACD$.

392. En el triángulo *ABC*, la bisectriz del ángulo *A* corta a *BC* en *D*. Demuestra que si la longitud de *BD* es igual a la longitud del radio de la circunferencia circunscrita al triángulo *ABC*, entonces se verifica que:

a) $A_{ADC} = \frac{1}{4}b^2$.

b) La medida del ángulo C es mayor estrictamente que 30° y menor estrictamente que 150°.

393. Sea D el pie de la bisectriz interior del ángulo A en el triángulo ABC. La recta que une los centros de los círculos inscritos en ABD y ACD corta a AB en M y a AC en N. Demuestra que BN y CM se cortan sobre la bisectriz AD.

394. En el triángulo ABC, P y Q son puntos del lado BC tales que las rectas AQ y AP forman ángulos iguales con los lados AB y AC, respectivamente. Sean BT_1 y CT_2 las tangentes al círculo circunscrito a APQ trazadas desde B y C. Si M es el punto donde la bisectriz interior desde A (en el triángulo ABC) corta al lado BC, demuestra que

$$\left(\frac{BT_1}{CT_2}\right)^2 = \frac{AB}{AC}\cdot\frac{MB}{MC}.$$

395. En el triángulo ABC, sean $M \in AB$, $N \in AC$; $P = MN \cap BC$, $Q = CM \cap BN$, $R = AQ \cap BC$. Por último, sea $k = PB : BC$. Demuestra que la condición necesaria y suficiente para que el baricentro de ABC, G, pertenezca a MN, es que $\frac{AQ}{RQ} = \frac{(2k+1)^2}{k(k+1)}$.

396. En un triángulo rectángulo isósceles con hipotenusa de longitud igual a 2 cm se ha inscrito un triángulo equilátero del cual uno de sus vértices está en el punto medio de la hipotenusa. Calcula el área del triángulo equilátero.

397. Halla todos los triángulos rectángulos de lados enteros cuyo perímetro es numéricamente igual al valor del área.

398. Dados un triángulo cualquiera ABC y un punto P cualquiera interior al triángulo; si se une P con los tres vértices, prueba que $p < AP + BP + CP$ donde p es el semiperímetro.

399. Si se conoce que las longitudes de las alturas de un triángulo son $\frac{1}{24}$ cm, $\frac{1}{26}$ cm y $\frac{1}{10}$ cm, determina el área del triángulo.

400. El ángulo A del triángulo isósceles ABC mide $\frac{2}{5}$ de 90°, y sus ángulos B y C son iguales. La bisectriz de su ángulo C corta al lado opuesto en el punto D. Calcula las medidas de los ángulos del triángulo BCD. Expresa la medida a del lado BC en función de la medida b del lado AC, sin que en la expresión aparezcan razones trigonométricas.

401. Considera el punto P interior al triángulo ABC de manera que $\angle PAC = \angle BCP$. Encuentra la posición del punto P para el cual el ΔAPC tiene área máxima.

402. Se tiene un triángulo PQR cuyas longitudes de sus lados son p, q, r y α, β y γ los ángulos opuestos a p, q y r respectivamente. Se conocen q, r y β ($q < r$). Demuestra que

$q = \frac{1}{2}\sqrt{(p_1 - p_2)^2 + (p_1 + p_2)^2 \tan^2\beta}$ siendo p_1 y p_2 las posibles longitudes del lado p.

403. Un cuadrado *ABCD* de centro *O* y lado 1, gira un ángulo a en torno a *O*. Halla el área común a ambos cuadrados.

404. Un cuadrado de papel *ABCD*, de lado unidad, se dobla de modo que el vértice *A* toque en un punto arbitrario *E* del lado *CD*. Así, se obtienen tres triángulos rectos formados por una sola capa de papel (fig. 4).
Determina la longitud de sus lados en función de $x = DE$ y demuestra que el perímetro del triángulo mayor es la suma de los perímetros de los otros dos, y vale la mitad que el perímetro del cuadrado (*teorema de Haga*).

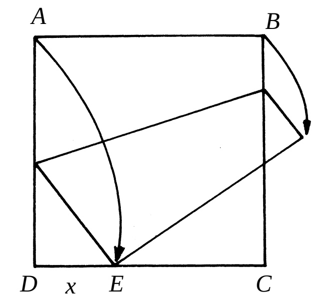

Fig. 4

405. ¿Cuáles son las posibles áreas de un hexágono con todos los ángulos iguales y cuyos lados miden 1, 2, 3, 4, 5 y 6 en algún orden?

406. *ABCD* es un cuadrilátero cualquiera (fig. 5), *P* y *Q* los puntos medios de las diagonales *BD* y *AC* respectivamente.
Las paralelas por *P* y *Q* a la otra diagonal se cortan en *O*. Si unimos *O* con las cuatro puntos medios de los lados *X*, *Y*, *Z* y *T* se forman cuatro cuadriláteros, *OXBY*, *OYCZ*, *OZDT* y *OTAX*.
Prueba que los cuatro cuadriláteros tienen la misma área.

407. Sean *ABCD* un rectángulo, *E* el punto medio de *BC* y *F* el punto medio de *CD*. Sea *G* el punto de intersección de *DE* con *BF*. Si $\angle FAE = 20°$, ¿cuánto mide el $\angle EGB$?

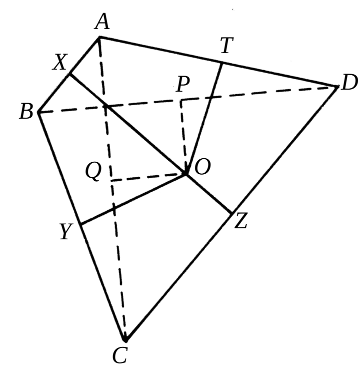

Fig. 5

408. El cuadrilátero *ABCD* está inscrito en una circunferencia y sus diagonales se cortan en *Q*. El lado *DA* prolongado a partir de *A* y el lado *CB* prolongado a partir de *B* se cortan en *P*. Si $CD = CP = DQ$, calcula la amplitud del ángulo *CAD*.

409. Sea *ABCD* un cuadrado con lado 1 cm (fig. 6). Si *M* y *N* son los puntos medios de los lados *AB* y *BC*, respectivamente, ¿cuál es el área de la zona sombreada?

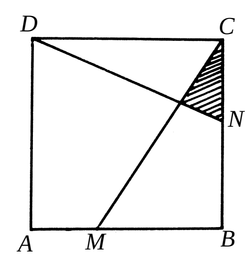

Fig. 6

410. Considera el paralelogramo *ABCD* de la figura 7 en el que el lado *DC* lo hemos acortado un 25 % y el lado *AB* lo hemos alargado un 50 % dando lugar al trapecio *AB'C'D*. ¿En qué porcentaje ha aumentado el área del paralelogramo para llegar a ser el área del trapecio?

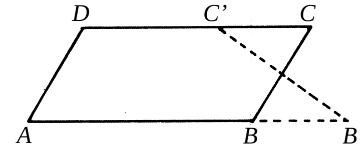

Fig. 7

411. Sean $ABCD$ un cuadrado, E el punto medio de BC, F un punto sobre DE tal que $AF \perp DE$. Demuestra que $\angle CDE = \angle BFE$.

412. En el cuadrilátero cíclico $ABCD$, las diagonales AC y BD se cortan en P. Sean O el centro de la circunferencia circunscrita a $ABCD$ y E un punto de la prolongación de OC por C. Por E se traza una paralela a CD que corta a la prolongación de OD por D en F. Sea Q un punto interior a $ABCD$, tal que $\angle AFQ = \angle BEQ$ y $\angle FAQ = \angle EBQ$. Prueba que $PQ \perp CD$.

413. Un polígono regular de 2 004 vértices $A_1, A_2, ..., A_{2\,004}$ se supone dado. Demuestra que las rectas $A_2A_{1\,005}$, $A_{670}A_{671}$, $A_{1\,338}A_{1\,340}$ son concurrentes y caracteriza geométricamente el punto de intersección.

414. Sea $ABCD$ un paralelogramo. El lado AB se prolonga en $BE = BC$ y el lado AD se prolonga en $DF = DC$.

a) Demuestra que los puntos E, C y F son colineales.

b) Demuestra que la perpendicular a la recta AE en el punto E, la perpendicular a la recta AF en el punto F, la bisectriz del ángulo EAF y la perpendicular a la diagonal BD por el vértice C son todas concurrentes en un punto G.

415. Dibuja una semicircunferencia con centro en O y diámetro AB y, en su interior, otra, con diámetro OA. Traza por un punto C del radio OA una recta perpendicular a este, que cortará a la semicircunferencia pequeña en D y a la grande en E y, finalmente, la recta AD que cortará a la circunferencia grande en F. Demuestra que la circunferencia circunscrita al triángulo DEF es tangente a la cuerda AE en E.

416. Sean A, B, C y D circunferencias tales que A es tangente exteriormente a B en P, B es tangente exteriormente a C en Q, C es tangente exteriormente a D en R y D es tangente exteriormente a A en S. Supón que A y C no se intersectan, ni tampoco B y D.

a) Prueba que los puntos P, Q, R y S están todos sobre una circunferencia.

b) Supón, además, que A y C tienen radio 2, B y D tienen radio 3 y la distancia entre los centros de A y C es 6. Determina el área del cuadrilátero $PQRS$.

417. Sean C_1 de centro O_1 y radio r_1 y C_2 de centro O_2 y radio r_2 dos circunferencias que se cortan en A y B. La circunferencia que pasa por O_1, A y O_2 corta nuevamente a C_1 en M_1 y la circunferencia que pasa por O_1, B y O_2 corta otra vez a C_2 en M_2. Prueba que $\angle M_1AO_2 = \angle M_2BO_1$ si y solo si $r_1 = r_2$.

418. Dados una cuerda PQ de una circunferencia y M el punto medio de esta, sean AB y CD dos cuerdas que pasan por M. Se trazan AC y BD hasta cortar a PQ en los puntos X y Y respectivamente. Demuestra que X y Y equidistan de M.

419. La circunferencia de centro O tiene 5 cm de radio (fig. 8). El triángulo ABC tiene 84 cm de perímetro y sus lados son tangentes a la circunferencia de centro O. Los arcos de circunferencia con centro en cada vértice del triángulo tienen 4 cm de radio. ¿Cuál es el área de la zona sombreada?

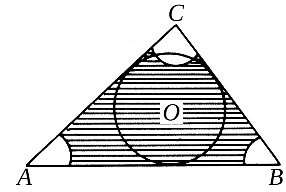

Fig. 8

420. Sean $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia de radio R y E el punto donde se cortan sus diagonales.

a) Demuestra que si las diagonales son perpendiculares entre sí, entonces se cumple que: $AE^2 + BE^2 + CE^2 + DE^2 = 4R^2$.

b) Si la relación anterior se cumple, ¿son las diagonales del cuadrilátero necesariamente perpendiculares entre sí?

421. Sean ABC un triángulo equilátero y P un punto sobre el arco CA del circuncírculo del triángulo.

a) Muestra que $PA - PB + PC = 0$.

b) Considera $ABCDE$ (en ese orden) un pentágono regular y P un punto sobre el arco EA del circuncírculo del pentágono. Muestra que $PA - PB + PC - PD + PE = 0$.

422. Sean dos circunferencias C_1 y C_2 que se cortan en E y F. B es un punto en la prolongación de EF por F, BA es tangente a C_1 y no toca a C_2, BC es tangente a C_2, y no toca a C_1. B es tal que A, B, C y E son cíclicos, $G = BA \cap CE$ y $D = BC \cap AE$. Prueba que $FA \cdot GC \cdot DC = FC \cdot GA \cdot DA$.

423. En una circunferencia de diámetro AB; C y E son dos puntos de esta, de modo tal que en el cuadrilátero $ABCE$, $BC = 2AE = r$, donde r es el radio de la circunferencia.

a) Determina la longitud de EC en función de r.

b) Si BA se prolonga a partir de A y CE, a partir de E, y si estas prolongaciones se cortan en el punto S; obtén la longitud de $\overline{SC}$ en función de r.

424. Se consideran las parábolas $y = x^2 + px + q$ que cortan a los ejes de coordenadas en tres puntos distintos por los que se traza una circunferencia. Demuestra que todas las circunferencias trazadas al variar p y q en $\mathbb{R}$ pasan por un punto fijo que se determinará.

425. Determina las coordenadas de los vértices de todos los cuadrados que un vértice en el punto (25;0) y uno de sus lados estén en la recta de ecuación $3x - 4y = 0$.

426. Demuestra que en un cuadrilátero convexo de área unidad, la suma de las longitudes de todos los lados y diagonales no es menor que $2\left(2+\sqrt{2}\right)$.

427. La figura 9 se compone de seis pentágonos regulares de lado 1 m. Se dobla por las líneas de puntos hasta que coincidan las aristas no punteadas que confluyen en cada vértice. ¿Qué volumen de agua cabe en el recipiente formado?

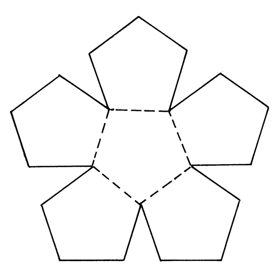

Fig. 9

428. Se consideran conjuntos A de cien números naturales distintos, que tengan la propiedad de que si a, b y c son elementos cualesquiera de A (iguales o distintos), existe un triángulo no obtusángulo cuyos lados miden a, b y c unidades. Se denomina $S(A)$ a la suma de los perímetros considerados en la definición de A. Calcula el valor mínimo de $S(A)$.

429. Un cuadrado de lado 5 se divide en 25 cuadrados unidad por rectas paralelas a los lados. Sea A el conjunto de los 16 puntos interiores, que son vértices de los cuadrados unidad, pero que no están en los lados del cuadrado inicial.
¿Cuál es el mayor número de puntos de A que es posible elegir de manera que **tres** cualesquiera de estos **no** sean vértices de un triángulo rectángulo isósceles?

430. Dadas 9 personas, demuestra que existe un valor de n tal que con las personas se puede formar en grupos de a 3, de modo que cada par de personas se encuentra en exactamente uno de dichos grupos y muestre una correspondiente conformación de estos grupos. Si el mismo número de grupos debe formarse, pero 6 personas cada uno y con la condición de que cada par se encuentre en exactamente k grupos. Determina si existe un valor de k que hace posible que el problema tenga solución y, en caso afirmativo, exhibe una conformación correspondiente.

431. La suma de las edades de los 120 estudiantes que participaron el año pasado en la fase final de la Olimpiada Matemática fue de 2 002 años. Demuestra que podrías haber elegido 3 de ellos tales que la suma de sus edades no fuera menor que 51 años.

432. Sea M un conjunto de once puntos que consisten en los cuatro vértices junto con siete puntos interiores de un cuadrado de área igual a la unidad.

a) Prueba que hay tres de esos puntos que son vértices de un triángulo cuya área es al menos $\frac{1}{16}$.

b) Da un ejemplo de un conjunto M para el cual no haya cuatro puntos interiores colineales y cada triángulo no degenerado formado por tres de estos tenga área por lo menos $\frac{1}{16}$.

433. Un número se llama *ascendente* si cada uno de los dígitos que lo componen es mayor que el dígito que está a su izquierda. Por ejemplo, 2 478 es un número ascendente. ¿Cuántos números ascendentes hay entre 400 y 5 000?

434. Utilizando solo los dígitos 0 y 1. Iván escribe una lista de 101 dígitos, de acuerdo con las reglas siguientes: elige los seis primeros con la única condición de que no sean todos iguales a 0. A partir de ahí, para agregar cada dígito nuevo, calcula la suma de los últimos seis dígitos escritos. Si esta suma es múltiplo de 3, escribe 0, y si la suma no es múltiplo de 3, escribe 1. Determina cuál es el menor valor posible de la suma de los 101 dígitos que escribe Iván.

435. Un plano en el espacio es equidistante de un conjunto de puntos si la distancia de cada punto al plano es la misma. ¿Cuál es el mayor número de planos equidistantes a 5 puntos de los cuales no hay 4 en un mismo plano?

436. Dados 3 puntos no alineados en el espacio, al único plano que los contiene le llamamos *plano determinado* por los puntos. ¿Cuál es el mínimo número de planos determinados por 6 puntos en el espacio si no hay 3 alineados y no están los 6 en un mismo plano?

437. Un automóvil tiene que dar una vuelta a un circuito circular, en este hay n depósitos con cierta cantidad de gasolina. Entre todos los depósitos contienen la cantidad exacta que el automóvil necesita para dar una vuelta. El coche comienza con el depósito vacío. Demuestra que con independencia del número, posición y cantidad de combustible de cada depósito, siempre se puede elegir un punto de comienzo que le permita completar la vuelta.

Nota: El consumo es uniforme y proporcional a la distancia recorrida. El tamaño del depósito es suficiente para albergar toda la gasolina necesaria para dar una vuelta.

438. Se dispone de pequeñas piezas de madera de tamaño $4 \times 5 \times 10$. Decide si es posible o no apilarlas, sin dejar huecos y apoyándolas siempre sobre cualquiera de sus caras, para formar un ortoedro de dimensiones $2^{2\,003} \times 3^{2\,003} \times 5^{2\,003}$.

439. ¿Es posible colorear cada lado y cada diagonal de un dodecágono regular usando 12 colores, de tal manera que para cualesquiera 3 colores exista un triángulo con vértices del polígono de lados pintados con los tres colores?

440. De un grupo de 10 niños y 15 niñas se quiere formar una colección de 5 que tenga exactamente 2 niñas. ¿Cuántas colecciones distintas se pueden formar?

441. En una reunión hay 201 personas de 5 nacionalidades diferentes, se sabe que, en cada grupo de 6, al menos dos tienen la misma edad. Demuestra que hay al menos 5 personas del mismo país, de la misma edad y del mismo sexo.

442. Una cuadrícula de 4 columnas por 7 filas se llena con los números del 1 al 28 sin repetirlos y un número en cada casilla. Sean P_1, P_2, P_3 y P_4 el producto de todos los números de la primera, segunda, tercera y cuarta columnas respectivamente. Demuestra que al menos uno de estos productos es múltiplo de 128.

443. Nueve personas han celebrado cuatro reuniones diferentes sentadas alrededor de una mesa circular. ¿Han podido hacerlo sin que existan dos de esas personas que se hayan sentado una junto a la otra en más de una reunión?

444. Una caja contiene 900 tarjetas numeradas del 100 al 999. Se sacan al azar (sin reposición) tarjetas de la caja y se anota la suma de los dígitos de cada tarjeta extraída. ¿Cuál es la menor cantidad de tarjetas que se deben sacar para garantizar que al menos tres de esas sumas sean iguales?

445. Se divide el plano en un número finito de regiones N mediante tres familias de rectas paralelas. No hay tres rectas que pasen por un mismo punto. ¿Cuál es el mínimo número de rectas necesarias para que $N > 1\,999$?

446. En una agencia hay 16 agentes secretos. Cada uno de ellos vigila a algunos de sus colegas. Se sabe que si el agente A vigila al agente B, entonces B no vigila a A. Además, 10 agentes cualesquiera pueden ser numerados de forma que el primero vigila al segundo, este vigila al tercero, ..., el último (décimo) vigila al primero.

Demuestra que también se pueden numerar de este modo 11 agentes cualesquiera.

447. Una oficina de turismo va a realizar una encuesta sobre el número de días soleados y el número de días lluviosos que se dan en el año. Para eso recurre a seis regiones que le transmiten los datos de la tabla 1.

Tabla 1

Región	**Soleados o lluviosos**	**Inclasificables**
A	336	29
B	321	44
C	335	30
D	343	22
E	329	36
F	330	35

La persona encargada de la encuesta no es imparcial y tiene esos datos más detallados. Se da cuenta de que, prescindiendo de una de las regiones, la observación da un número de días lluviosos que es la tercera parte del de días soleados. Razona cuál es la región de la que prescindirá.

448. Tenemos 10 focos. Al tocar uno de estos todos cambian, el foco prendido se apaga y el apagado se prende, *excepto el foco que se toca, que permanece como estaba*. Se empieza con todos los focos encendidos. Explica qué tienes que hacer para lograr que se apaguen todos los focos.

449. En una circunferencia se dibujan los puntos A, B, C, D y F a igual distancia entre sí. Se dibujan polígonos convexos que tienen sus vértices en algunos o en todos los puntos marcados.

a) ¿Cuántos polígonos distintos se pueden dibujar?

b) ¿Cuántos de esos polígonos son regulares?

450. Un polígono convexo de n lados se descompone en m triángulos, con los interiores disjuntos, de modo que cada lado de esos m triángulos lo es también de otro triángulo contiguo o del polígono dado. Prueba que $m + n$ es par. Conocidos n y m halla el número de lados distintos que quedan en el interior del polígono y el número de vértices distintos que quedan en ese interior.

451. En un polígono regular H de $6n + 1$ lados (n entero positivo), r vértices se pintan de rojo y el resto de azul. Demuestra que el número de triángulos isósceles que tienen sus tres vértices del mismo color no depende del modo de distribuir los colores en los vértices de H.

452. Se consideran 2 002 segmentos en el plano tales que la suma de sus longitudes es la unidad. Prueba que existe una recta r tal que la suma de las longitudes de las proyecciones de los 2 002 segmentos dados sobre r es menor que $\frac{2}{3}$.

453. Se arrojan seis dados y se perfora cada uno de estos mediante un agujero que lo atraviesa desde el centro de una cara hasta el centro de la cara opuesta. Luego se ensartan los seis dados con una aguja de tejer formando una brocheta de dados. Si se apoya la brocheta de dados sobre la mesa puede verse un número de seis dígitos, formado por los seis números que están en las caras superiores de los seis dados. Cada dado se puede rotar en forma independiente de los demás, con eje en la aguja. Demuestra que siempre es posible rotar los dados de manera tal que el número de seis dígitos que se forma sea múltiplo de 7.

454. Se dibuja un rectángulo (el término no excluye el cuadrado). En papel cuadriculado y se sombrean las casillas del contorno. En este caso, el número de cuadrículas sombreadas es inferior al de las que permanecen en blanco, en el interior. ¿Será posible dibujar un rectángulo de proporciones tales que el borde, de una casilla de anchura, contenga igual número de cuadrados que el rectángulo blanco interior? De ser así, halla todas las soluciones.

455. En una ruleta circular se colocan al azar los números del 1 al 36. Demuestra que necesariamente debe haber 3 números consecutivos cuya suma es al menos 55.

456. Se tiene un tablero de $n \times n$ pintado como tablero de ajedrez. Está permitido efectuar la operación siguiente en el tablero: Escoger un rectángulo en la cuadrícula tal que las longitudes de sus lados sean ambas pares o ambas impares, pero que no sean las dos iguales a 1 al mismo tiempo, e invertir los colores de los cuadraditos de ese rectángulo que eran negros (es decir, los cuadraditos del rectángulo que eran negros se convierten en blancos y los que eran blancos, se convierten en negros). Encuentra para cuáles n es posible lograr que todos los cuadraditos queden de un mismo color después de haber efectuado la operación el número de veces que sea necesario.

Nota: Las dimensiones de los rectángulos que se escogen pueden ir cambiando.

457. En una cuadrícula de 8×8 se han escogido arbitrariamente 10 cuadraditos y se han marcado los centros de estos. El lado de cada cuadradito mide 1. Demuestra que existen al menos dos puntos marcados que están separados por una distancia menor o igual que $\sqrt{2}$, o que existe al menos un punto marcado que se encuentra a una distancia de $\frac{1}{2}$ de una orilla de la cuadrícula.

458. En una cuadrícula de 4×4 se van a colocar los números enteros del 1 al 16 (uno en cada cuadradito).

a) Prueba que es posible colocarlos de tal manera que los números que aparezcan en cuadraditos que comparten un lado tengan diferencia menor o igual que 4.

b) Prueba que no es posible colocarlos de tal manera que los números que aparezcan en cuadraditos que comparten un lado tengan diferencia menor o igual que 3.

459. Bordeando una mesa circular hay dibujadas 64 casillas y en cada una hay una ficha. Las fichas y las casillas están numeradas del 1 al 64 en orden sucesivo (cada ficha está en la casilla que lleva el mismo número). En la parte central de la mesa hay 1 996 focos apagados. Cada minuto todas las fichas se desplazan simultáneamente, en forma circular (en el mismo sentido de la numeración), como sigue: la ficha no. 1 se desplaza una casilla, la ficha no. 2 se desplaza dos casillas, la ficha no. 3 se desplaza tres casillas, etc, pudiendo varias fichas ocupar la misma posición. Cada vez que una ficha comparte el lugar en una casilla con la ficha no. 1, se prende uno de los focos (se prenden tantos focos como fichas estén compartiendo la posición con la ficha no. 1 en ese momento). ¿En dónde estará la ficha no. 1 en el primer momento en que ya todos los focos estén prendidos?

460. Cada cuadrado de un tablero de 8×8 contiene un 0 o un 1. Para cada cuadrado A que contiene un 0, la suma de los números en la misma fila de A y los números en la misma columna de A es mayor o igual que 8. Prueba que la suma de todos los números del tablero es mayor o igual que 32.

461. En una cuadrícula de $n \times n$ se escriben los números del 1 al n^2 en el orden habitual (de izquierda a derecha y de arriba a abajo, como se ilustra en la figura 10 para el caso $n = 3$).

Llamamos *camino* en la cuadrícula, a una sucesión de pasos de un cuadrado a otro, desde el cuadrado que tiene el número 1 hasta el que tiene el número n^2, de tal manera que en cada paso el movimiento sea hacia la derecha o hacia abajo. Si c es un camino, denotamos por $L(c)$ a la suma de los números por los que pasa el camino c.

Sea M la mayor $L(c)$ que se puede obtener de entre todos los caminos c en una cuadrícula fija de tamaño $n \times n$ y sea m la menor $L(c)$ también de entre todos los caminos c en una cuadrícula fija de tamaño $n \times n$.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Fig. 10

a) Prueba que $M - m$ es un cubo perfecto.

b) Prueba que en ninguna cuadrícula hay un camino c tal que $L(c) = 1\,996$.

462. Sobre un tablero en forma de triángulo como se indica en la figura 11, se juega un solitario.

Sobre cada casilla se coloca una ficha. Cada ficha es blanca por un lado, y negra por el otro. Inicialmente, solo una ficha, que está situada en un vértice, tiene la cara negra hacia arriba; el resto de las fichas tiene la cara blanca hacia arriba. En cada movimiento se retira solamente una ficha negra del tablero y se da la vuelta a cada una de las fichas que ocupan una casilla vecina.

Casillas vecinas son las que están unidas por un segmento.

Después de varios movimientos ¿será posible quitar todas las fichas del tablero?

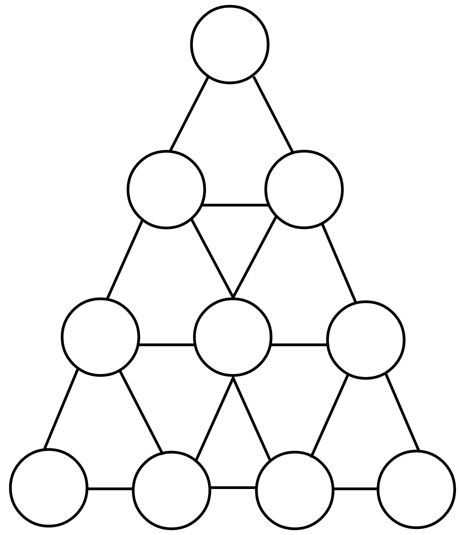

Fig. 11

463. Determina los valores de n para los que es posible construir un cuadrado de $n \times n$ ensamblando piezas del tipo de la figura 12:

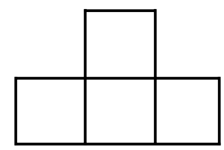

Fig. 12

464. Con 21 fichas de damas, unas blancas y otras negras, se forma un rectángulo de 3×7. Demuestra que siempre hay cuatro fichas del mismo color situadas en los vértices de un rectángulo.

465. En un tablero de $m \times n$ se escriben un número (no necesariamente entero) en cada casilla de tal manera que la suma de los números en cada fila y en cada columna es 1. Demuestra que $m = n$.

466. En el cuadrado mágico multiplicativo de la figura 13, los productos de los elementos de cada fila, columna y diagonal son iguales a k. Si todos los elementos son números enteros, demuestra que k es un cubo perfecto.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Fig. 13

467. En un tablero rectangular de m filas y n columnas se coloca en cada una de las $m \times n$ casillas un 1 o un 0, de modo que los números de cada fila sumen la misma cantidad y y los de cada columna, la misma cantidad c.

Para un tablero con $m = 15$, $n = 10$ y para $y = 4$, determina el valor de c que hace posible esta asignación y muestra una manera de cómo poder realizarla.

468. Un niño tiene fichas redondas que pondrá dentro de los cuadrados blancos de una cuadrícula coloreada como el tablero de ajedrez. Seguirá los pasos siguientes: En el primer paso colocará una ficha en un cuadrado blanco. En el segundo paso pondrá fichas en todas las casillas blancas que rodean la ficha colocada en el primer paso. En cada uno de los pasos siguientes colocará fichas sobre todos los cuadrados blancos que rodean las fichas puestas en el anterior. Si el niño dispone de 5 000 fichas (y la cuadrícula es tan grande como sea necesario), ¿para cuántos pasos completos le alcanzarán sus fichas?

469. Una bolsa está llena con 71 dulces de los sabores siguientes: limón, naranja, uva y fresa. Hay el doble de dulces de limón que de fresa. Los dulces de naranja son uno menos que los de fresa. Hay seis dulces menos de uva que de limón.

a) ¿Cuál es el mínimo número de dulces que tienes que sacar para estar seguros de tener por lo menos dos dulces del mismo sabor?
b) ¿Cuál es el número mínimo de dulces que tienes que sacar para tener dulces de por lo menos dos sabores?

470. Se dan 16 puntos formando una cuadrícula como en la figura 14:

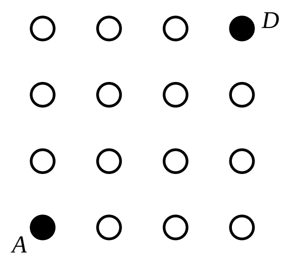

Fig. 14

De estos se han destacado A y D. Se pide fijar de todos los modos posibles otros dos puntos B y C con la condición de que las seis distancias determinadas por los cuatro puntos sean distintas. En ese conjunto de cuaternas, estudia:

a) Cuántas figuras de 4 puntos existen con las condiciones del enunciado.
b) Cuántas de estas son geométricamente distintas, es decir, no deducibles unas de otras por transformaciones de igualdad.
c) Si cada punto se designa por un par de enteros (X_i, Y_i), prueba que la suma:

$|X_i - X_j| + |Y_i - Y_j|$ extendida a los seis pares AB, AC, AD, BC, BD, CD es constante.

471. Sean n y k enteros positivos. Sobre cada carta de una baraja se escribe uno de los números 1, 2, ..., n. La suma de los números sobre todas las cartas es $k \cdot (n!)$. Prueba que la baraja puede dividirse en k grupos tales que la suma de los números de las cartas de cada grupo es n!

472. Encuentra el menor número a tal que exista un cuadrado de lado a que pueda contener completamente 5 círculos de radio 1 de forma que no haya dos círculos con puntos interiores comunes.

473. Sobre una mesa hay 1 999 fichas que son rojas de un lado y negras del otro (no se especifica cuál de sus lados está hacia arriba). Dos personas juegan alternadamente. Cada persona en su turno hace una de las cosas siguientes:

– Retira un número cualquiera de fichas, con la condición de que todas las fichas retiradas tengan el mismo color hacia arriba.
– Voltea un número cualquiera de fichas, con la condición de que todas las fichas tengan el mismo color hacia arriba.

Gana el que toma la última ficha. ¿Cuál jugador puedes asegurar que ganará, el primero en jugar o el segundo?

474. Mario y Elena juegan al juego del 100. Se empieza diciendo el número 3. En cada jugada se debe decir un número mayor que el último que se haya dicho, pero menor que su doble. Gana quien diga el 100. Encuentra una estrategia ganadora.

475. Tres jugadores A, B y C participan en un juego: Hay tres tarjetas, cada una de las cuales tiene escrito un número natural. Estos tres números p, q y r cumplen la condición: $0 < p < q < r$. Las tres tarjetas se revuelven y se reparten (una a cada jugador). A continuación, cada uno de ellos recibe un número de piedrecitas equivalente al número que aparece indicado en la tarjeta que le tocó y que deben conservar por el resto del juego. Después las tarjetas se revuelven otra vez. El proceso anterior se efectúa completo al menos tres veces. Cuando los jugadores se cansan y deciden terminar el juego, el jugador A se queda en total con 20 piedrecitas, B con 10 y C con 9. Además, sabemos que en la última repartición a B le tocó la tarjeta con el número r.
¿Quién recibió la tarjeta con el número q en la primera repartición? Explica tu respuesta.

476. Ensartamos $2n$ bolas blancas y $2n$ bolas negras formando una cadena abierta. Demuestra que, se haga en el orden que se haga, siempre es posible cortar un segmento de cadena exactamente con n bolas blancas y n bolas negras.

477. Colocamos, formando una circunferencia, 2 004 fichas bicolores: blancas por una cara y negras por la otra. Un movimiento consiste en elegir una ficha negra, y dar la vuelta a tres fichas: la elegida, la de su derecha y la de su izquierda. Supongamos que inicialmente hay una sola ficha con la cara negra hacia arriba. ¿Será posible, repitiendo el movimiento descrito, conseguir que todas las fichas tengan la cara blanca hacia arriba? ¿Y si tuviéramos 2 003 fichas, entre las cuales exactamente una tiene al comienzo la cara negra hacia arriba?

478. Un polígono se dice que es ortogonal si todos sus lados tienen longitudes enteras y cada dos lados consecutivos son perpendiculares. Demuestra que si un polígono ortogonal puede cubrirse con rectángulos de 2×1 (sin que estos se traslapen), entonces al menos uno de sus lados tiene longitud par.

479. Demuestra que no es posible cubrir una cuadrícula de 6×6 con 18 rectángulos de 2×1, de tal manera que cada una de las rectas de longitud 6 que forman la cuadrícula y que están en el interior de esta pase por el centro de por lo menos uno de los rectángulos. Demuestra también que sí es posible cubrir una cuadrícula de 6×5 con 15 rectángulos de 2×1, de forma que cada una de las rectas de longitudes 5 o 6 que forman la cuadrícula y que están en el interior de esta pase por el centro de por lo menos uno de los rectángulos.

480. Cada uno de los lados y las diagonales de un octógono regular se pintan de rojo o de negro. Demuestra que hay al menos siete triángulos cuyos vértices son vértices del octógono y sus tres lados son del mismo color.

481. Consideramos los 27 puntos de un cubo siguientes: el centro (1), los centros de las caras (6), los vértices (8) y los centros de las aristas (12). Coloreamos cada uno de esos puntos de azul o de rojo. ¿Puede hacerse de modo que no haya tres puntos del mismo color alineados? Demuéstralo.

482. Considera 7 puntos arbitrarios del plano y los 21 segmentos que los conectan entre sí. Demuestra que al menos 3 de estos 21 segmentos son de distinta longitud.

483. ¿Cuál es el número máximo de vértices de un polígono regular de 21 lados que podemos elegir para que, al trazar los segmentos que los unen entre sí, no haya dos con la misma longitud?

484. Cada punto del plano es coloreado con uno de los 2 000 colores diferentes. Prueba que existe un rectángulo cuyos vértices tienen el mismo color.

SOLUCIONES

1. Si el polinomio puede factorizarse como el producto de tres polinomios, entonces $-2x^3 + 2xy^2 - 7x^2z - 9xyz + 2y^2z + 2xz^2 + 7z^3 = (ax + by + cz)(dx + fz)(gx + hy + iz)$ multiplicando, reduciendo términos semejantes y utilizando el método de los coeficientes indeterminados correctamente, se obtienen todos los polinomios del tipo que aparecen como factores, uno de estos es $(2x + 2y - 7z)(x + z)(x + y - z)$.

2. Se tiene que $x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$, de aquí que $x^2 - xy + y^2 = 2$, ahora $(x^2 + xy + y^2) + (x^2 - xy + y^2) = 6$ por lo que $x^2 + y^2 = 3$ y $xy = 1$.

Entonces $x^6 + x^3y^3 + y^6 = (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4) + x^3y^3 =$

$= 3(x^4 + x^2y^2 + y^4 - 2x^2y^2) + 1^3$

$= 3(8 - 2 \cdot 1^2) + 1 = 19$.

3. Se tienen $P(1) = a^2 + b^2 + a + 2ab = 5$ y $Q(1) = a + b + 4 = 5$ donde $b = 1 - a$

$a^2 + (1 - a)^2 + a + 2a(1 - a) = 5 \Rightarrow a = 4,\ b = -3$.

4. Aplicando dos veces el algoritmo de Ruffini considerando 1 como una raíz doble, queda el sistema $A + B = -1$ y $4A + 3B = 0$ cuyas soluciones son $A = 3$, $B = -4$.

5. Sea $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ el polinomio buscado, aplicando el algoritmo de Ruffini para $x = 2$, $x = -1$, $x = 3$ se llega al sistema de ecuaciones:

$a - b + c = 1$, $4a + 2b + c = -8$ y $9a + 3b + c = -7$ cuyas soluciones son
$a = 1$, $b = c = -4$, teniendo $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$, que al dividirlo por $x + 3$ deja resto 10.

6. Sean $P(x) = ax^2 + bx + c$ la forma de los polinomios buscados, $P(-x) = ax^2 - bx + c$, $P(x^2) = (ax^2 + bx + c)^2$, entonces como $P(x) \cdot P(-x) = P(x^2)$ se tiene:

$(ax^2 + bx + c)(ax^2 - bx + c) = (ax^2 + bx + c)^2$ que utilizando el método de los coeficientes indeterminados, se obtiene $b = 0$. Luego son de la forma $P(x) = ax^2 + c$.

7. El resto será un polinomio de segundo grado (por ser el divisor de grado 3). Sea $Q(x)$ el polinomio dado, $Q(x) = (x^2 - 1)(x - 2)R(x) + P(x) = (x^2 - 1)(x - 2)R(x) + ax^2 + bx + c$

$Q(-1) = a - b + c = 5$, $Q(1) = a + b + c = -1$, $Q(2) = 4a + 2b + c = -1$ que se satisface para los valores: $a = 1$, $b = -3$ y $c = 1$ por lo que el resto de la división del polinomio por el producto $(x^2 - 1)(x - 2)$ es el polinomio $x^2 - 3x + 1$.

8. $x^2 + (2m + 1)x + m^2 - 1 = 0$, hallando el discriminante y considerando que este tiene que ser mayor o igual que 0, se obtiene que para m real y $m \geq -\frac{5}{4}$ se cumple que $p(x) = 0$.

9. Observemos que $\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}=\dfrac{n+1-n}{n\cdot(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$, entonces:

$$S=25\left[\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)+...+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)\right]=25\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{100}\right)=\frac{23}{8}.$$

10. $x^3 - bx^2 - 5x + 5b = 0$, factorizando se tiene $(x - b)(x^2 - 5) = 0$ cuyas raíces son $x = b$, $x=\pm\sqrt{5}$ que son dos números opuestos.

11. $\sqrt{x^4+6x^3+7x^2-6x+1}=ax^2+bx+c$, elevando al cuadrado y utilizando el método de los coeficientes indeterminados, los polinomios pueden ser:

$x^2 + 3x - 1$ o $-x^2 - 3x + 1$.

12. $x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x - 3)(x + 1)(x - 1)$ y
$P = (x - 3)(x + 1)(x - 1)(ax^2 + bx + c) = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + mx^2 + nx + p$
utilizando el método de los coeficientes indeterminados, se tiene $a = b = 1$, $c = -2$, $m = 8$, $n = 5$ y $p = -6$.

13. $x^4 + 6x^2 + 25 = x^4 + 10x^2 + 25 - 4x^2 = (x^2 + 2x + 5)(x^2 - 2x + 5)$ utilizando el algoritmo de la división de polinomios entre los polinomios $3x^4 + 4x^2 + 28x + 5$ y $x^2 + 2x + 5$, queda como cociente $3x^2 - 6x + 1$ y como resto $x^2 + 58x + 5$ el mismo algoritmo para la división entre los polinomios $3x^4 + 4x^2 + 28x + 5$ y $x^2 - 2x + 5$, queda como cociente $3x^2 + 6x + 1$ y como resto 0, luego $P(x) = x^2 - 2x + 5$ y $P(1) = 4$.

14. Sean a y b las raíces comunes a ambos polinomios, sean c y d las otras raíces, entonces:

(1) $a + b + c = 2$, (2) $ab + ac + bc = -1$, (3) $abc = -p$, también (4) $a + b + d = 4$,

(5) $ab + ad + bd = 5$, (6) $abd = -q$.

De (4) – (1) tenemos $d - c = 2$, de (5) – (2) tenemos $a + b = 3$, luego $c = -1$ en (1), $d = 1$ en (4), como $b = 3 - a$, de (2) se tiene $ab - a - b = -1$ que al sustituir se llega a la ecuación de segundo grado

$a^2 - 3a + 2 = 0$ cuyas soluciones son $a = 1$ o $a = 2$, para el primer caso $b = 1$ y para el segundo, $b = 2$, de (3) se tiene $p = 2$, de (6) $q = -2$.

Las raíces de la primera ecuación son 1, 2 y –1 y de la segunda 1, 2 y 1.

15. a) $P(1) = 1^{243} + 1^{81} + 1^{27} + 1^9 + 1^3 + 1 = 6$.

b) $P(1) = (x - 1)\cdot Q(x) + A + B$, $P(-1) = (x + 1)(x - 1)\cdot R(x) - A + B$

de aquí se tiene que $A + B = 6$ y $-A + B = -6$ por lo que $A = 6$, $B = 0$ y el resto buscado es $6x$.

16. Sea $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$,

$P(1 - x) = (1 - x)^4 + a(1 - x)^3 + b(1 - x)^2 + c(1 - x) + d =$

$= x^4 - (4 + a)x^3 + (6 + 3a + b)x^2 - (4 + 3a + 2b + c)x + (1 + a + b + c + d)$, como $P(0) = 0$ entonces

$d = 0$, $P(-1) = 1 - a + b - c = 6$, $b - a - c = 5$, utilizando el método de los coeficientes indeterminados, tenemos

$-(4 + a) = a \Rightarrow a = -2$, $b + 3a + 6 = b \Rightarrow a = -2$, de $-(4 + 3a + 2b + c) = c$ queda $c = 1 - b$ de $b + 2 - c = 5$, del sistema queda

$b = 2$, $c = -1$ por lo que $P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x$, $P(1) = 0$ y $P(2) = 6$.

17. $P(x) = 4x^3 - 32x^2 - 11x + m$, $P(-2) = -138 + m = 225$, de aquí $m = 363$.

$P(x) = 4x^3 - 32x^2 - 11x + 363$.

Utilizando el algoritmo de la división sintética, se obtiene que para $x = -3$ hay un cero y el polinomio tiene dos raíces reales $x = \dfrac{11}{2}$ que es una raíz doble y $x = -3$.

18. $(1 - 3x + 3x^2)^{743}(1 + 3x - 3x^2)^{744} = A_0 + A_1x + A_2x^2 + ... + A_nx^n$ (1) donde $A_0, ..., A_n$ son los coeficientes cuya suma vamos a hallar. El grado de este polinomio es $n = 2\,974$, en (1) tenemos para $x = 1$ que $1^{743} \cdot 1^{744} = A_0 + A_1 + \ldots + A_n$ por lo que la suma de los coeficientes del polinomio es 1.

19. $P(x) = 4(x^2 + ax + a^2)^3 - 27a^2x^2(x + a)^2$

$= 4[x^6 + 3x^4(ax + a^2) + 3x^2(ax + a^2)^2 + (ax + a^2)^3] - 27a^2x^2(x^2 + 2ax + a^2)$

$= 4x^6 + 12ax^5 - 3a^2x^4 - 26a^3x^3 - 3a^4x^2 + 12a^5x + 4a^6 = 0$ que tiene una raíz doble para $x = a$. Aplicando el algoritmo de Ruffini para la división de polinomios, la ecuación se transforma en:

$(x - a)^2(x + 2a)^2(2x + a)^2 = 0$ cuyas raíces todas son dobles.

$\therefore$ el cociente obtenido es un cuadrado perfecto.

20. *Variante 1:*

Sea $f(x;y;z) = (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$.

Como $f(-y;y;z) = f(x;-z;z) = f(-z;y;z) = 0$, entonces

$f(x;y;z) = (x + y)(y + z)(z + x)c$. Evaluando en $(1;1;0)$, obtenemos $c = 3$.

Por tanto, $f(x;y;z) = 3(x + y)(y + z)(z + x)$.

Variante 2:

$(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 =$

$= x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 3y^2z + 6xyz + 3xz^2 + 3yz^2 - x^3 - y^3 - z^3$

$= 3x^2y + 3xy^2 + 3y^2z + 6xyz + 3xz^2 + 3yz^2 = 3(x + y)(y + z)(z + x)$.

21. a) Utilizando el algoritmo de Ruffini, se obtiene $\alpha - 6 = 0$ y $\alpha = 6$.

b) $-x^2 + 1 + (x^4 - 3x^3 + x - 3) : (x^2 - 2x - 3) + 15 = - x^2 + x + x^2 - x + 1 + 15 = 16 = 4^2$ que es el cuadrado de un polinomio.

22. Aplicando el algoritmo de la división de polinomios, se obtiene $2x^2 - x + (a - b - 1)$ como cociente y $(-2a + b + 1)x + 2ab - 2b^2 - 2b + 20$ como resto, luego debe cumplirse que $-2a + b + 1 = 0$ y $2ab - 2b^2 - 2b + 20 = 0$ que es un sistema cuya solución es $a = \dfrac{5}{2}$, $b = 4$ o $a = -2$ y $b = -5$.

23. Sea $P(x)$ el polinomio buscado, entonces $P(-1) = P(3) = P(5) = P(-2) = 0$ y $P(1) = 144$, luego

$P(x) = (x + 1)(x - 3)(x - 5)(x + 2)(x^2 + a)$, $a > 0$

$P(x) = x^6 - 5x^5 + (a - 7)x^4 + (29 - 5a)x^3 + 30 - 7a)x^2 + 29ax + 30a$

$P(1) = 48a + 48 = 144 \Rightarrow a = 2$ y $P(x) = x^6 - 5x^5 - 5x^4 + 19x^3 + 16x^2 + 58x + 60$

$P(4) = 540$ por lo que el resto es 540.

24. Sea $p(x) = C_nx^n + C_{n-1}x^{n-1} + ... + C_1x + C_0$ con $C_n, C_{n-1}, ..., C_1, C_0$ enteros.

Entonces $p(b) - p(a) = C_n(b^n - a^n) + C_{n-1}(b^{n-1} - a^{n-1}) + \ldots + C_1(b - a) = (b - a)I = 1$ con $I \in \mathbb{Z}$ como $a, b \in \mathbb{Z}$, entonces $b - a = 1 : I$ por lo que $I = 1$ o $I = -1$ entonces a y b difieren en 1.

25. $x^8 + x^4 + 1 = x^8 + 2x^4 + 1 - x^4 = (x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) =$
$= (x^4 + 2x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) - x^2(x^4 - x^2 + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$ que es el producto de tres factores.

26. Sean $x = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$, $y = \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ y $r = x + y$, entonces
$r^3 = 14 + 3xy(x + y) = 14 - 3r$ de donde se tiene la ecuación $r^3 + 3r - 14 = 0$ y $r = 2$ es una raíz por lo que la suma es un número racional.

27. Como $a^3 - 1 = (a - 1)(a^2 + a + 1)$ tenemos $\dfrac{b}{a^3-1} = -\dfrac{1}{a^2+a+1}$, de forma similar

$\dfrac{a}{b^3-1} = -\dfrac{1}{b^2+b+1}$. De aquí:

$$\frac{a}{b^3-1} - \frac{b}{a^3-1} = \frac{b^2+b-a^2-a}{(a^2+a+1)(b^2+b+1)} = \frac{(b-a)(b+a+1)}{a^2b^2+a^2b+b^2a+a^2+b^2+ab+a+b+1}$$

y considerando $a^2b^2 + a^2b + b^2a + a^2 + b^2 + ab + a + b + 1 =$
$= a^2b^2 + ab(a + b) + ((a + b)^2 - 2ab) + ab + a + b + 1 = a^2b^2 + 3$ por lo que

$$\frac{a}{b^3-1} - \frac{b}{a^3-1} = \frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}.$$

28. $\sqrt{a+4\sqrt{b+2}} = \sqrt{a-2} + \sqrt{2 \cdot b}$ elevando al cuadrado ambos miembros.

$a + 4 \cdot \sqrt{b+2} = a - 2 + 2 \cdot \sqrt{a-2} \cdot \sqrt{2 \cdot b} + 2 \cdot b$
$4 \cdot \sqrt{b+2} = 2 \cdot \sqrt{2 \cdot b \cdot (a-2)} + 2 \cdot b - 2$ $\quad / : 2$ igualando las partes racionales y las irracionales.
$2 \cdot \sqrt{b+2} = \sqrt{2 \cdot b \cdot (a-2)} + b - 1$

$b - 1 = 0$ por lo que $b = 1$, como $2\sqrt{b+2} = \sqrt{2b(a-2)}$
$4(b + 2) = 2b(a - 2)$ como $b = 1$ y, además, $12 = 2(a - 2)$, entonces $a = 8$

$$\sqrt{a+b+2 \cdot \sqrt{a+6 \cdot b}} = \sqrt{9+2 \cdot \sqrt{14}} = \sqrt{7+2\sqrt{7 \cdot 2}+2} = \sqrt{7} + \sqrt{2}.$$

29. Sean $m = \sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{\dfrac{a^2-4}{a}}}$; $n = \sqrt{\sqrt{a} - \sqrt{\dfrac{a^2-4}{a}}}$ y

$x = m + n = \sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{\dfrac{a^2-4}{a}}} + \sqrt{\sqrt{a} - \sqrt{\dfrac{a^2-4}{a}}}$ al elevar al cuadrado ambos miembros y hacer los cálculos pertinentes se llega a $(m+n)^2 = \dfrac{2a+4}{\sqrt{a}}$ y $x = \dfrac{\sqrt{2a+4}}{\sqrt[4]{a}}$ de esta forma se obtiene la identidad pedida.

30. $xy = a$, $xz = b$, $yz = c$ entonces $x^2yz = ab$, $xy^2z = ac$, $xyz^2 = bc$ de aquí se tiene que

$x^2 = \dfrac{ab}{yz}$, $y^2 = \dfrac{ac}{xz}$, $z^2 = \dfrac{bc}{xy}$, $x^2 = \dfrac{ab}{c}$, $y^2 = \dfrac{ac}{b}$, $z^2 = \dfrac{bc}{a}$; ahora, sustituyendo los valores obtenidos en el miembro izquierdo de la igualdad dada y haciendo los cálculos necesarios se llega a la igualdad pedida.

31. Transformando el $\log_4 125 = C$, tenemos:

$$\log_4 125 = C \Rightarrow \log_4 5^3 = C \Rightarrow 3\log_4 5 = C \Rightarrow \log_4 5 = \frac{C}{3} \Rightarrow \frac{1}{2}\log_2 5 = \frac{C}{3}$$

por último, $\log_2 5 = \frac{2}{3}C$. Por otra parte, transformando

$$\log_{10} 64 = \log_{10} 2^6 = 6\log_{10} 2 = \frac{6}{\log_{10} 2} = \frac{6}{\log_2 2 + \log_2 5} = \frac{6}{1+\frac{2C}{3}} = \frac{6}{\frac{3+2C}{3}} = \frac{18}{3+2C}.$$

32. a) Sean $(a;b)$, $(c;d)$ y $(e;f)$ tres pares ordenados cualesquiera, entonces

$(a;b)[(c;d) + (e;f)] = (a;b)(c + e;\ d + f) = (ac + ae - bd - bf;ad + af + bc + be + 2bd + 2bf)$

$= [(ac - bd) + (ae - bf);\ (ad + bc + 2bd) + (af + be + 2bf)]$

$= (ac - bd;\ ad + bc + 2bd) + (ae - bf;af + be + 2bf) = (a;b)(c;d) + (a;b)(e;f)$ y la ley distributiva se cumple.

b) Sea $(x;y)$ el elemento neutro, entonces $(a;b)(x;y) = (a;b)$

$(ax - by;ay + bx + 2by) = (a;b)$ tenemos entonces que $ax - by = a$ y $ay + bx + 2by = b$

multiplicando la primera igualdad por b y la segunda por $-b$, se tiene

$a^2y + b^2y + 2aby = 0$, es decir, $(a + b)^2y = 0$ por lo que $y = 0$ o $a + b = 0$; si $y = 0$, $x = 1$ y si $a + b = 0$, entonces se tiene que $(a + b)y + b(x + y) = b$; $x + y = 1$ o $y = 1 - x$.

Luego si $a + b \neq 0$ hay un solo par ordenado que cumple, el par $(1;0)$, pero si $a + b = 0$, o sea, el par es de la forma $(a;-a)$, entonces hay infinitos pares de la forma $(x;1 - x)$.

33. $a^2 + b^2 = 7ab$ y $a^2 + 2ab + b^2 = 9ab$ entonces $(a + b)^2 = 9ab$ y $ab = \left(\dfrac{a+b}{3}\right)^2$

$$\log ab = \log\left(\frac{a+b}{3}\right)^2;\ \log a + \log b = 2\log\left(\frac{a+b}{3}\right) \text{ y } \log\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log a + \log b).$$

34. Si $\log_2 a + \log_2 b \geq 6 \Rightarrow a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\log_2 ab \geq 6$, entonces $ab \geq 64$ y $a \geq \dfrac{64}{b}$

$(b - 8)^2 \geq 0$; $b^2 - 16b + 64 \geq 0$; $b^2 + 64 \geq 16b$ y $b + \dfrac{64}{b} \geq 16$ pero $a \geq \dfrac{64}{b}$ de donde se tiene que $a + b \geq 16$.

35. Designemos por A el miembro izquierdo y B el miembro derecho de la igualdad dada, entonces:

$n!A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot A = (2n)!$; $n!B = 2^n \cdot n![1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n - 1)] = (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n)[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n - 1)] = (2n)!$

$\therefore A = B$.

36. $E = \dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)} - \dfrac{b^3}{(a-b)(b-c)} + \dfrac{c^3}{(a-c)(b-c)} = \dfrac{a^3b - a^3c - b^3a + b^3c + c^3(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$

$= \dfrac{ab(a^2-b^2) - c(a^3-b^3) + c^3(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$

haciendo los cálculos correspondientes, se llega a probar que $E = a + b + c$.

37. $1 + p + p^2 + ... + p^{200} = \dfrac{p^{201}-1}{p-1}$; $1 + p + p^2 + ... + p^{199} = \dfrac{p^{200}-1}{p-1}$;

$1 + p + p^2 + ... + p^{201} = \dfrac{p^{202}-1}{p-1}$; luego se tiene

$$\frac{1+p+p^2+...+p^{200}-p^{100}}{1+p+p^2+...+p^{199}} = \frac{p^{201}-p^{101}+p^{100}-1}{p^{200}-1} = \frac{p^{101}+1}{p^{100}+1} \qquad (1)$$

desarrollando el miembro derecho, se llega a la misma expresión (1) por lo que la igualdad se cumple.

38. Supongamos que $\sqrt{p}$ es irracional, entonces $\sqrt{q}-\sqrt{p}$ también es irracional porque

$\sqrt{p} = \dfrac{1}{2}\left[\left(\sqrt{q}+\sqrt{p}\right) - \left(\sqrt{q}-\sqrt{p}\right)\right]$ pero $\left(\sqrt{q}-\sqrt{p}\right)\left(\sqrt{q}+\sqrt{p}\right) = q - p$.

Racional *Irracional*

que sería un número irracional lo que es falso porque p y q son racionales.

$\therefore\ \sqrt{p}$ también es racional.

39. Si $\log_b \operatorname{sen} x = a \Rightarrow \operatorname{sen} x = b^a$; $\cos x = \sqrt{1-b^{2a}}$ y $\tan x = \dfrac{b^a}{\sqrt{1-b^{2a}}}$

$$\log_b \tan x = \log_b \frac{b^a}{\sqrt{1-b^{2a}}} = \log_b b^a - \log_b \sqrt{1-b^{2a}} = a - \frac{1}{2}\log_b(1-b^{2a}).$$

40. Sean $a_1 = \log_k x$; $a_2 = \log_m x = \log_k x + d$; $a_3 = \log_n x = \log_k x + 2d$, como $a_1 + a_3 = 2a_2$ entonces

$2\log_m x = \log_k x + \log_n x$ y $\dfrac{2}{\log_x m} = \dfrac{1}{\log_x k} + \dfrac{1}{\log_x n}$ y

$2 = \dfrac{\log_x m}{\log_x k} + \dfrac{\log_x m}{\log_x n} = \log_k m + \log_n m$

$\log_n n^2 = \log_n n^{\log_k m} + \log_n m = \log_n(n^{\log_k m}\cdot m)$ y $n^2 = n^{\log_k m}\cdot m = n^{\log_k m}\cdot k^{\log_k m} = (kn)^{\log_k m}$.

41. a) $\dfrac{1+\log_x y}{1+\log_x z} = \dfrac{1+\dfrac{\log_{xz} y}{\log_{xz} x}}{1+\dfrac{\log_{xz} z}{\log_{xz} x}} = \dfrac{\log_{xz} xy}{\log_{xz} xz} = \log_{xz} xy.$

b) $\log_7 14 \cdot \log_{14} 21 \cdot \ldots \cdot \log_{42} 49 = \log_{7\cdot 1} 7 \cdot 2 \cdot \log_{7\cdot 2} 7 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot \log_{7\cdot 6} 7 \cdot 7$

$$=\frac{1+\log_7 2}{1+\log_7 1}\cdot\frac{1+\log_7 3}{1+\log_7 2}\cdot\ldots\cdot\frac{1+\log_7 7}{1+\log_7 6}=\frac{1+\log_7 7}{1+\log_7 1}=2.$$

42. Si $n=9^x \Rightarrow x=\log_9 n=\dfrac{1}{\log_n 9}$;

$n=13^y \Rightarrow y=\log_{13} n=\dfrac{1}{\log_n 13}$;

$n=17^z \Rightarrow z=\log_{17} n=\dfrac{1}{\log_n 17}$ sustituyendo la expresión dada por los valores obtenidos, se llega a

$\log_n 17\cdot 13\cdot 9=\dfrac{1}{4\,002}$ entonces $17\cdot 13\cdot 9=n^{\frac{1}{4\,002}}$; $n = 1\,989^{4\,002} = (1\,989^{2\,001})^2$ por lo que n es un cuadrado perfecto.

43. $M=\dfrac{\log_a(2x^2+3xy+y^2)}{\log_a(x+y)}-\log_{x+y}(2x+y)=\dfrac{\log_a(2x+y)(x+y)}{\log_a(x+y)}-\log_{x+y}(2x+y)$

$=\dfrac{\log_a(2x+y)}{\log_a(x+y)} + 1 - \log_{x+y}(2x+y) = \log_{x+y}(2x+y) + 1 - \log_{x+y}(2x+y) = 1$

$9^{\log_3(c-M)}=\left(3^2\right)^{\log_3(c-1)}=3^{\log_3(c-1)^2}=(c-1)^2=c^2-2c+1.$

44. Sean a, $\dfrac{a+c}{2}$ y c dichas raíces. Así pues, $x^3+2px^2-px+10=(x-a)\left(x-\dfrac{a+c}{2}\right)(x-c)$, de donde, identificando coeficientes, llegamos a: $(a+c)\dfrac{3}{2}=-2p$ (1); $\dfrac{(a+c)^2}{2}+ac=-p$ (2);

$(a+c)\dfrac{ac}{2}=-10$ (3).

De (1) y (3) sigue que $\dfrac{ac}{3}=\dfrac{5}{p}$ y como $a+c=-\dfrac{4p}{3}$, llevando estos valores de $a + c$ y ac a (2) podemos concluir que $16p^3 + 18p^2 + 270 = 0$, es decir, $8p^3 + 9p^2 + 135 = 0$. Una raíz real de este polinomio es $p = -3$ y como $8p^3 + 9p^2 + 135 = (p + 3)(8p^2 - 15p + 45)$, sigue que $p = -3$ es la única raíz real del polinomio.
Esto nos lleva a $ac = -5$, $a + c = 4$, de donde a y c son 5 y –1 y las raíces que se piden son –1, 2 y 5.

45. El primero en 3 h, el segundo en 6 h y el tercero en 2 h.

46. Se tiene que $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{bc+ac+ab}{abc}$.

Por las fórmulas de Viète se tiene que $a + b + c = 4$; $ab + bc + ca = 5$ y $abc = 7$, entonces $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{5}{7}$.

47. De acuerdo con el teorema de Viète se tiene $y_1+y_2=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{b}{c}$ y

$y_1y_2=\frac{1}{x_1x_2}=\frac{a}{c}$, entonces la ecuación buscada será $cx^2+bx+a=0$.

48. Sean x_1, x_2, x_3, x_4 las soluciones de la ecuación, de acuerdo con el teorema de Viète se tiene $x_1+x_2+x_3+x_4=4$; $x_1x_2x_3x_4=1$; de acuerdo con la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica se tiene $\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\geq\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}=1$.

Entonces $x_1+x_2+x_3+x_4\geq 4$.

La igualdad se cumple si $x_1=x_2=x_3=x_4=1$.

Por tanto, $x^4-4x^3+ax^2+bx+1(x-1)^4=x^4-4x^3+ax^2+bx+1$. De aquí $a=6$, $b=-4$.

49. Aplicando propiedades de los logaritmos, tenemos $2\log_2 x+\log_2 2-\log_2 x=2$

$2\log_2 x+1-\log_2 x=2$ por lo que $\log_2 x=1$ y $x=2$.

50. Si α, β, γ son las raíces de $p(x)=2x^3+x^2-3x+1\Rightarrow 2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$ y por el teorema de Viète para polinomios de tercer grado, tenemos:

$\alpha\beta\gamma=-\frac{1}{2};\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=-\frac{3}{2};\alpha+\beta+\gamma=-\frac{1}{2}$. Agrupando en la expresión:

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2+\gamma^2\alpha+\gamma\alpha^2-\alpha\beta\gamma$$

$$=\alpha^2(\alpha+\beta+\gamma)+\beta^2(\alpha+\beta+\gamma)+\gamma^2(\alpha+\beta+\gamma)-\alpha\beta\gamma$$

$$=(\alpha+\beta+\gamma)\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)-\alpha\beta\gamma$$

$$=(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)\right]-\alpha\beta\gamma$$

Sustituyendo

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\right]+\frac{1}{2}=\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{4}+3\right]+\frac{1}{2}=-\frac{13}{8}+\frac{1}{2}=-\frac{9}{8}.$$

51. Se tiene que $3x^2=-(w+15)$ para que las soluciones sean enteras debe cumplirse que $w=3t$ con t entero y $t<-4$; la ecuación queda $x^2=-(t+5)$ y los valores de t son $t=-5$ o $t=-5n-1$ con n entero positivo.
$\therefore$ $w=-15$ o $w=-15n-3$ con n entero positivo.

52. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\frac{1}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x}=4$

$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{2x}-4\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+1=0$; Discriminante = 12 luego

$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=\frac{4\pm2\sqrt{3}}{2}=2\pm\sqrt{3}$

Si $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2+\sqrt{3} \Rightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^x = \left(2+\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow x = 2$

Si $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2-\sqrt{3} = \left(2+\sqrt{3}\right)^{-1} \Rightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^x = \left(2+\sqrt{3}\right)^{-2} \Rightarrow x = -2.$

53. Edad actual: x
Edad dentro de tres años: $x + 3$
$3(x - 3) = x + 3$
$x = 6$
Dentro de 4 años tendrá 10 años.
Hace 4 años tenía 2 años.
∴ dentro de 4 años tendrá 5 veces la edad que tenía hace 4 años.

54. Si observamos la simetría del sistema, es decir, que podemos cambiar x por y, llegamos a que si (x_0,y_0) es solución, también lo es (y_0, x_0). Así pues, el número de soluciones que es finito será la suma del número de soluciones (a, b) con $a \neq b$ más el número de soluciones de la forma (a, a).
Acabamos de ver que el número de soluciones de la forma (a, b) con $a \neq b$ es par, luego lo único que nos queda probar es que si ponemos x en lugar de y, obtenemos un número par de soluciones.
Veamos: $(x^2 + 6)(x + 1) = x(x^2 - 1)$. Esta ecuación es equivalente a $-x^2 + 6x - 6 = x$, o sea, $x^2 - 5x + 6 = 0$ cuyas soluciones son 2 y 3, de donde las soluciones de la forma (a, a) son $(2, 2)$ y $(3, 3)$, es decir, un número par como queríamos demostrar.

55. $x = \dfrac{6}{k+2}$, $y = \dfrac{3}{k+2}$, si $k \neq \pm 2$.
No tiene solución, si $k = -2$.

Si $x > 1$, entonces $\dfrac{6}{k+2} > 1$ y se cumple para $-2 < k < 4$.

Si $y > 0$, entonces $\dfrac{3}{k+2} > 0$ y se cumple para $k > -2$.

∴ tiene las soluciones que se piden para $-2 < k < 4$.

56. Sumando, obtenemos $(x + y + z)^2 = 16$.
Reordenando cada ecuación, podemos factorizarla como $x + y + z$ por un factor de grado uno, obteniéndose $(2,3,-1)$ y $(-2,-3,1)$.

57. Sumando todas las igualdades y pasándolo todo al miembro derecho, obtenemos

$0 = x_1^2 - 2x_1 + 1 + x_2^2 - 2x_2 + 1 + \ldots + x_{2\,004}^2 - 2x_{2\,004} + 1$, de aquí que

$0 = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + \ldots + (x_{2\,004} - 1)^2 \Rightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_{2\,004} = 1.$

58. Sean x, la cantidad de hembras de preuniversitario; y la cantidad de hembras de secundaria básica; z la cantidad de varones de preuniversitario; w la cantidad de varones de secundaria básica. Entonces tenemos las ecuaciones $z + w = 0{,}55(x + y + z + w)$; $w : z = (y + w)(x + z)$ y se busca la razón $w : y$.

$\dfrac{z}{w} = \dfrac{x+z}{y+w}$ entonces $\dfrac{z+w}{w} = \dfrac{x+y+z+w}{y+w}$

teniendo que $\dfrac{w}{y+w} = \dfrac{z+w}{x+y+z+w} = \dfrac{55}{100} = \dfrac{11}{20}$, de esta forma $\dfrac{y+w}{w} = \dfrac{20}{11}$ de aquí se tiene que $\dfrac{y}{w} = \dfrac{9}{11}$ o $\dfrac{w}{y} = \dfrac{11}{9}$.

59. $y = x + r$ y $x^2 + y^2 + 2x = x^2 + (x + r)^2 + 2x \leq 1$, es decir, $2x^2 + 2(r + 1)x + r^2 - 1 \leq 0$. Consideremos la ecuación $2x^2 + 2(r + 1)x + r^2 - 1 = 0$ donde su discriminante
$D = -4r^2 + 8r + 12$.
Si $D = 0 \Rightarrow (r - 3)(r + 1) = 0$ por lo que $r = 3$ o $r = -1$.
Si $r = 3$, $y = x + 3$ y $x^2 + x^2 + 6x + 9 + 2x \leq 1$ de donde $x^2 + 4x + 4 \leq 0$ y $(x + 2)^2 \leq 0$ solo para $x = -2$, $y = 1$ teniendo el par $(-2;1)$ que es una solución.
Si $r = -1$, $y = x - 1$ y $x^2 + x^2 - 2x + 1 + 2x \leq 1$ de aquí $2x^2 \leq 0$ solo para $x = 0$, $y = -1$ teniendo el par $(0; -1)$
$\therefore$ hay dos valores reales de r que son 3 y -1.

60. Sustituyendo la segunda ecuación en la tercera, tenemos

$b = c(bc + 1) + 1 \Leftrightarrow b = bc^2 + c + 1$

$\Leftrightarrow b(1 - c^2) = 1 + c \Leftrightarrow b(1 + c)(1 - c) = 1 + c$ de esta forma $1 + c = 0$ o $b(1 - c) = 1$.

Si $b(1 - c) = 1$, $b = bc + 1 = a$. También $b = 1 - c = \pm 1$. Si $b = 1 - c = 1$, tenemos

$b = 1c + 1$, lo cual es una contradicción. Si $b = -1$, $c = 2$ y $c = ab + 5 = 4$, lo cual es una contradicción.

Si $1 + c = 0$, $a = bc + 1 = 1 - b$ y $c = -1$ ahora $-1 = ab + 5 = (1 - b)b + 5$. Simplificando se llega a $b^2 - b - 6 = 0$ de donde $b = -2$ y $a = 3$ o $b = 3$ y $a = -2$. Comprobando las soluciones, se tiene que $(a;b;c) = (3;-2;-1)$ o $(-2;3;-1)$.

61. Este problema se reduce a determinar todas las soluciones (a, b, c, d) del sistema de ecuaciones

$abc + d = abd + c = acd + b = bcd + a$.

Este sistema es simétrico en todas las variables y toda permutación de una solución es también solución. Podemos diferenciar algunos casos:

Las 4 son iguales: $a = b = c = d$.
3 son iguales: $a = b = c \neq d$.
2 pares iguales: $a = b \neq c = d$.
1 par igual: $a = b \neq c \neq d$.

Ninguna igual: no hay dos que sean iguales.

Notemos que en la primera ecuación

$abc + d = abd + c \Leftrightarrow abc - abd - c + d = 0 \Leftrightarrow (c - d)(ab - 1) = 0$

y en el sistema de ecuaciones también se verifica de forma análoga que:

$(a - b)(cd - 1) = 0$
$(a - c)(bd - 1) = 0$
$(a - d)(bc - 1) = 0$
$(b - c)(ad - 1) = 0$
$(b - d)(ac - 1) = 0$

Analicemos ahora los casos anteriores.

Caso 1: (las 4 iguales) si tenemos $a = b = c = d = r$, tenemos solución para todo valor real de r, todas las expresiones son iguales a $r^3 + r$ en ese caso. El conjunto de todas las soluciones es, por tanto,

$S_1 = \{(r, r, r, r) \mid r \in \mathbb{R}\}$.

Caso 2: (3 iguales) como asumimos que $b \neq d$, se tiene por $(b - c)(ab - 1) = 0$ que $ad = 1$ si y solo si $b = \dfrac{1}{a}$ se verifica, como asumimos que $a = b$ tenemos $a^2 = 1$ si y solo si $a = \pm 1$, tomando $a = b = c = \pm 1$ y $d = r \neq a$, todas las cuatro expresiones son iguales a $\pm r \pm 1$, tomando todas las permutaciones, llegamos al conjunto solución

$S_2 = \{(\pm 1, \pm 1, \pm 1, r), (\pm 1, \pm 1, r, \pm 1), (\pm 1, r, \pm 1, \pm 1), (r, \pm 1, \pm 1, \pm 1) \mid r \in \mathbb{R}\}$.

Caso 3: (dos pares) como asumimos que $b \neq c$ se tiene por $(b - c)(ad - 1) = 0$ que $ad = 1$ si y solo si $b = \dfrac{1}{a}$ se verifica. Tomando $a = b = r$ y $c = d = \dfrac{1}{r}$ todas las expresiones son iguales a $r + \dfrac{1}{r}$, también, tomando todas las permutaciones, tenemos el conjunto de soluciones:

$$S_3 = \left\{\left(r, r, \frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right), \left(r, \frac{1}{r}, r, \frac{1}{r}\right), \left(r, \frac{1}{r}, \frac{1}{r}, r\right) \mid r \in \mathbb{R} \wedge r \neq 0\right\}.$$

Caso 4: (un par) no existen soluciones en ese caso. Asumiendo que $b \neq c \neq d$ se tiene que $1 = ad = ab = ac$, y, por tanto, $b = c = d$ contrario al caso que estamos asumiendo.

Caso 5: (ninguno igual) el mismo argumento que el caso 4 demuestra que no pueden haber soluciones en este caso.

La solución del sistema de ecuaciones es el conjunto $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

62. $$A = \frac{\operatorname{sen} 8x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x} = \frac{\operatorname{sen} 8x}{\frac{\operatorname{sen} 2x}{2} \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x} = \frac{2\operatorname{sen} 8x}{\frac{\operatorname{sen} 4x}{2} \cdot \cos 4x} = \frac{4\operatorname{sen} 8x}{\frac{\operatorname{sen} 8x}{2}} = 8$$

por lo que $A = 8$.

63. $|\operatorname{sen} x| = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ siendo $\pi \approx 3{,}14$ entonces $\left[\dfrac{100}{\pi}\right] = [31{,}8] = 31$ como el resto de la división $\left[\dfrac{100}{\pi}\right]$ es $0{,}8 > 0{,}5$, entonces se le adiciona otro a 31 y hay en total 32 valores reales de x que satisfacen la ecuación.

64. $\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x = 1 - 3\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x$

$\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x$ luego

$z = 2(1 - 3\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x) - 3(1 - 2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x) = 2 - 6\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x - 3 + 6\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x = -1$ por lo que $z = -1$.

65. a) sen $x >$ cos x si $x \in \left]\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{5\pi}{4}\right[$ y cos $x >$ sen x para $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right[$ o $x \in \left]\dfrac{5\pi}{4}; 2\pi\right]$ entonces para el primer caso se cumple que cos sen $x >$ sen cos x y para el segundo caso se cumple que sen cos $x <$ cos sen x.

b) $-1 \leq \cos \leq 1$ luego cos cos $x > 0$ porque cos $x > 0$

si $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ y $[-1; 1] \subset \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

66. $-1 \le \cos x \le 1$ y $-1 > -\frac{\pi}{2}$, la función coseno es creciente en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ luego

$0 < \cos(-1) < 1$; $1 < \frac{\pi}{2}$, la función coseno es decreciente en el intervalo $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ luego se cumple que

$0 < \cos 1 < 1$ pero $\cos(\cos x) = 1$ si $\cos x = 0$, $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ por lo que se tiene $0 < \cos(\cos x) \le 1$.

67. $4\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right) = 4\operatorname{sen}\alpha \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2}\right)$

$= 4\operatorname{sen}\alpha\left(\frac{3}{4}\cos^2\alpha - \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha(3(1-\operatorname{sen}^2\alpha) - \operatorname{sen}^2\alpha) = \operatorname{sen}\alpha(3 - 4\operatorname{sen}^2\alpha) =$

$= 3\operatorname{sen}\alpha - 4\operatorname{sen}^3\alpha = \operatorname{sen} 3\alpha$.

68. Consideremos que $\tan\alpha = m \in \mathbb{N}$, entonces $\tan 3\alpha = \tan(2\alpha+\alpha) = \dfrac{\tan^3\alpha - 3\tan\alpha}{3\tan^2\alpha - 1}$

y $\dfrac{\tan\alpha}{\tan 3\alpha} = \dfrac{3\tan^2\alpha - 1}{\tan^2\alpha - 3} = 3 + \dfrac{8}{\tan^2\alpha - 3} = 3 + \dfrac{8}{m^2-3} = n \in \mathbb{N}$.

Luego $m^2 - 3$ es un divisor de 8 por lo que se tiene que cumplir que

$m^2 - 3 = 1$ o	$m^2 - 3 = -1$ o	$m^2 - 3 = 2$ o	$m^2 - 3 = -2$ o
$m = \pm 2$	$m \notin \mathbb{N}$	$m \notin \mathbb{N}$	$m = \pm 1$
$m = 2$			$m = 1$
$m^2 - 3 = 4$ o	$m^2 - 3 = -4$ o	$m^2 - 3 = 8$ o	$m^2 - 3 = -8$
$m \notin \mathbb{N}$	$m \notin \mathbb{N}$	$m \notin \mathbb{N}$	$m \notin \mathbb{N}$

Si $m = 2$, entonces $\tan\alpha = 2 \in \mathbb{N}$ y $\dfrac{\tan\alpha}{\tan 3\alpha} = 11 \in \mathbb{N}$.

Si $m = 1$, entonces $\tan\alpha = 1 \in \mathbb{N}$ y $\dfrac{\tan\alpha}{\tan 3\alpha} = -1 \notin \mathbb{N}$.

$\therefore$ la única solución es para $\tan\alpha = 2$ y $\alpha \in$ I cuadrante y todos sus coterminales.

69. $\cot x \cdot \cot 4x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{\cos 4x}{\operatorname{sen} 4x} = \dfrac{\operatorname{sen} 4x \cos x}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 4x} = \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 4x} = \dfrac{\operatorname{sen} x(3 - 4\operatorname{sen}^2 x)}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 4x}$, como x es diferente de $k\pi$ se tiene:

$$\frac{3 - 4\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 2x)}{\operatorname{sen} 4x} = \frac{1+2\cos 2x}{\operatorname{sen} 4x} = \frac{1}{\operatorname{sen} 4x} + \frac{2\cos 2x}{2\operatorname{sen} 2x \cos 2x} = \frac{1}{\operatorname{sen} 4x} + \frac{1}{\operatorname{sen} 2x} = \operatorname{cosec} 4x + \operatorname{cosec} 2x$$

pero $\operatorname{cosec} 4x > 1$ y $\operatorname{cosec} 2x > 1$ para todo x en el intervalo dado, por lo tanto,
$\operatorname{cosec} 4x + \operatorname{cosec} 2x > 2$ y $\cot x - \cot 4x > 2$.

70. $\tan A = \dfrac{\sqrt{6}}{12} \Rightarrow \operatorname{sen} A = \dfrac{\sqrt{6}}{12}\cos A$ y $\operatorname{sen}^2 A = \dfrac{1}{24}\cos^2 A$ llegando a la igualdad $\cos^2 A = \dfrac{24}{25}$ por otro lado

$\tan B = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \operatorname{sen} B = \dfrac{1}{3}\cos B$ y 3sen B = cos B, es decir, 9sen^2B = cos^2B llegando a la igualdad

$\operatorname{sen}^2 B = \dfrac{1}{10}$ y $\operatorname{sen}^4 B = \dfrac{1}{100}$

sen 4B = 2sen 2Bcos 2B = 4sen Bcos B(1 – 2sen^2B), haciendo las sustituciones y los cálculos pertinentes, se obtiene sen $4B = \dfrac{24}{25}$ por lo que $\cos^2 A = \operatorname{sen} 4B = \dfrac{24}{25}$.

71. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-11x+30} < 0$; $\dfrac{(x-3)(x-2)}{(x-6)(x-5)} < 0$ cuyas soluciones son: $2 < x < 3$ o $5 < x < 6$.

Si $5 < x < 6$ como sen 2x = 2sen x cos x, entonces sen $x < 0$ y cos $x > 0$ luego 2sen x cos x = sen 2x < 0.

Si $2 < x < 3$ como sen $x > 0$ y cos $x < 0$ luego 2sen x cos x = sen 2x < 0.

72. Como A, B y C son los ángulos interiores de un triángulo se tiene que:

$A + B + C = 180°$ y $\tan(A + B + C) = 0$; $\dfrac{\tan(A+B)+\tan C}{1-\tan(A+B)\tan C} = 0$;

$$\frac{\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}+\tan C}{1-\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}\cdot\tan C} = 0; \quad \frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B-\tan A\tan C-\tan B\tan C} = 0$$

luego tan A + tan B + tan C – tan A · tan B · tan C = 0 y tan A + tan B + tan C = tan A · tan B · tan C.

b) Como tan A + tan B + tan C = tan A · tan B · tan C, entonces dividiendo por tan A · tan B · tan C se cumple que $\dfrac{1}{\tan B\tan C}+\dfrac{1}{\tan A\tan C}+\dfrac{1}{\tan A\tan B} = 1$, por lo que cot B · cot C + cot C · cot A + cot A · cot B = 1.

73. Como A, B y C son los ángulos interiores de un triángulo, entonces $A + B + C = 180°$ pero para este caso se cumple que tan A + tan B + tan C = tan A · tan B · tan C y por datos se tiene que tan A · tan C = 3, entonces tan A · tan B · tan C = 3tan B y tan A + tan B + tan C = 3tan C

tan A + tan B = 2tan C y $\dfrac{1}{2}(\tan A+\tan B) = \tan C$. Es decir, tan A, tan B y tan C están en progresión aritmética.

74. $$\frac{\operatorname{sen}70°}{\cos70°} = \frac{\cos20°}{\operatorname{sen}20°} = \frac{\sqrt{1+\cos40°}}{\sqrt{1-\cos40°}} = \frac{\operatorname{sen}40°}{1-\cos40°} = \frac{2\operatorname{sen}^2 40°}{2\operatorname{sen}40°-\operatorname{sen}80°} = \frac{2\operatorname{sen}^2 40°}{2\operatorname{sen}40°-\cos10°}$$

$$= \frac{2\operatorname{sen}^2 40°}{2\operatorname{sen}40°-2\operatorname{sen}30°\cos10°} = \frac{2\operatorname{sen}^2 40°}{2\operatorname{sen}40°-\operatorname{sen}40°-\operatorname{sen}20°} = \frac{2\operatorname{sen}^2 40°}{\operatorname{sen}40°-\operatorname{sen}20°}$$

$$= \frac{2\operatorname{sen}^2 40°}{2\operatorname{sen}40°+\operatorname{sen}20°-2\operatorname{sen}20°} = \frac{2\operatorname{sen}^2 40°}{2\operatorname{sen}30°\cos10°-2\operatorname{sen}20°} = \frac{2\operatorname{sen}^2 40°}{\cos10°-2\operatorname{sen}20°} = \frac{2\operatorname{sen}^2 40°}{\operatorname{sen}80°-2\operatorname{sen}20°}$$

75. Si $\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}$, entonces $a\cos B = b\cos A$ (1) A y $B \neq 0$.

En el ΔABC se tiene $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A}=\dfrac{b}{\operatorname{sen} B}\Rightarrow a=\dfrac{b\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$ sustituyendo en (1), tenemos

$\dfrac{b\operatorname{sen} A\cos B}{\operatorname{sen} B}=b\cos A$; $\operatorname{sen}A\cos B = \cos A\operatorname{sen}B$; $\operatorname{sen}A\cos B - \cos A\operatorname{sen}B = 0$, es decir,

$\operatorname{sen}(A - B) = 0$ luego $A - B = 0$ por ser ángulos interiores de un triángulo, luego $A = B$ y el triángulo ABC es isósceles.

76. $\dfrac{\tan A}{\tan B}=\dfrac{\dfrac{\operatorname{sen} A}{\cos A}}{\dfrac{\operatorname{sen} B}{\cos B}}=\dfrac{\operatorname{sen} A\cos B}{\cos A\operatorname{sen} B}=\dfrac{\operatorname{sen}^2 A}{\operatorname{sen}^2 B}$ por lo que $\dfrac{\cos B}{\cos A}=\dfrac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$ y

$\operatorname{sen}B\cos B = \operatorname{sen}A\cos A$, es decir, $\operatorname{sen} 2B = \operatorname{sen} 2A$, de aquí se tiene que si $2B = 2A$, entonces $A = B$ y el triángulo es isósceles pero si $2B = 180° - 2A$, entonces

$2A + 2B = 180°$ y $A + B = 90°$, entonces el triángulo es rectángulo en C.

77. Observa que $\cos\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$ y que $\cos\dfrac{2\pi}{9}+\cos\dfrac{14\pi}{9}=2\cos\dfrac{8\pi}{9}\cdot\cos\dfrac{6\pi}{9}$

$=-\cos\dfrac{8\pi}{9}$ luego $\cos\dfrac{2\pi}{9}+\cos\dfrac{8\pi}{9}+\cos\dfrac{14\pi}{9}=0.$

Elevando al cuadrado la expresión, vemos que lo que queremos calcular es

$-\dfrac{1}{2}\left(\cos^2\dfrac{2\pi}{9}+\cos^2\dfrac{8\pi}{9}+\cos^2\dfrac{14\pi}{9}\right)$. Usando la identidad $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ esa expresión se transforma en $-\dfrac{1}{4}\left(\cos\dfrac{4\pi}{9}+\cos\dfrac{16\pi}{9}+\cos\dfrac{28\pi}{9}+3\right)$. Por otro lado

$$\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{28\pi}{9}=2\cos\frac{16\pi}{9}\cdot\cos\frac{12\pi}{9}=2\cos\frac{16\pi}{9}\cdot\left(2\cos^2\frac{2\pi}{3}-1\right)=-\cos\frac{16\pi}{9}$$

de donde se tiene que $-\dfrac{1}{4}\left(\cos\dfrac{4\pi}{9}+\cos\dfrac{16\pi}{9}+\cos\dfrac{28\pi}{9}+3\right)=-\dfrac{3}{4}.$

78. $\operatorname{sen}(2x + y) = 5\operatorname{sen} y$; $\operatorname{sen}2x\cos y + \cos 2x\operatorname{sen}y = 5\operatorname{sen} y$

$2\operatorname{sen}x\cos x\cos y + 2\cos^2 x\operatorname{sen}y - \operatorname{sen}y = 5\operatorname{sen} y$ $2(\operatorname{sen}x\cos x\cos y + \cos^2 x\operatorname{sen}y) = 6\operatorname{sen} y$ que al dividir por $\dfrac{1}{2}\cos y$, y como $\cos y \neq 0$, se tiene

$\operatorname{sen}x\cos x + \cos^2 x\tan y = 3\tan y$; $\operatorname{sen}x\cos x = 3\tan y - \cos^2 x\tan y = \tan y(3 - \cos^2 x) = \tan y(3\operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 x)$

entonces $\tan y=\dfrac{\operatorname{sen} x\cos x}{3\operatorname{sen}^2 x+2\cos^2 x}=\dfrac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\dfrac{3\operatorname{sen}^2 x+2\cos^2 x}{\cos^2 x}}=\dfrac{\tan x}{3\tan^2 x+2}$

$= 3\tan^2 x \tan y + 2\tan y = \tan x$; $\dfrac{3}{2}\tan^2 x\tan y + \tan y = \dfrac{1}{2}\tan x$;

$\dfrac{3}{2}\tan^2 x\tan y + \tan y + \tan x = \dfrac{3}{2}\tan x$

$\tan x + \tan y = \dfrac{3}{2}\tan x - \dfrac{3}{2}\tan x - \dfrac{3}{2}\tan^2 x\tan y$; $\tan x + \tan y = \dfrac{3}{2}\tan x(1 - \tan x\tan y)$

$\dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y} = \dfrac{3}{2}\tan x$ entonces $\tan(x+y) = \dfrac{3}{2}\tan x.$

79. $y = \operatorname{sen}^2\dfrac{\pi}{20} + \operatorname{sen}^2\dfrac{3\pi}{20} + \operatorname{sen}^2\dfrac{7\pi}{20} + \operatorname{sen}^2\dfrac{9\pi}{20}$

$= \operatorname{sen}^2\dfrac{\pi}{20} + \operatorname{sen}^2\dfrac{3\pi}{20} + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{7\pi}{20}\right)\right) + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{9\pi}{20}\right)$

$= \operatorname{sen}^2\dfrac{\pi}{20} + \operatorname{sen}^2\dfrac{3\pi}{20} + \cos^2\dfrac{\pi}{20} + \cos^2\dfrac{3\pi}{20} = 2.$

80. $\tan^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x} = \dfrac{b+c-a}{a+b+c}$; $\tan^2\dfrac{y}{2} = \dfrac{a+c-b}{a+b+c}$ y $\tan^2\dfrac{z}{2} = \dfrac{a+b-c}{a+b+c}$ luego

$\tan^2\dfrac{x}{2} + \tan^2\dfrac{y}{2} + \tan^2\dfrac{z}{2} = \dfrac{b+c-a}{a+b+c} + \dfrac{a+c-b}{a+b+c} + \dfrac{a+b-c}{a+b+c} = 1.$

81. $A = \dfrac{1}{4}(a^2+b^2) = \dfrac{1}{2}ab\operatorname{sen} C$ y $\operatorname{sen} C\dfrac{a^2+b^2}{2ab}$; $\operatorname{sen} C - 1 = \dfrac{(a-b)^2}{2ab}$, como se cumple que sen $C \leq 1$, $a > 0$, $b > 0$ y $(a-b)^2 \geq 0$ tenemos que

$0 \leq \dfrac{(a-b)^2}{2ab} = \operatorname{sen} C - 1 \leq 0$. De aquí que $\dfrac{(a-b)^2}{2ab} = \operatorname{sen} C - 1 = 0$, es decir, se cumple que sen $C = 1$ y $a = b$.

$\therefore$ los ángulos interiores del triángulo miden $C = 90°$, $A = B = 45°$.

82. Usando la fórmula $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\dfrac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$ se tiene que

$\operatorname{sen} X = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}.$

83. Como $x \geq 1$ entonces $\dfrac{x}{x^2+1} \leq \dfrac{1}{2}$ pero $\cos x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ si $0 \leq x < \dfrac{\pi}{6}$, demostremos que

$\frac{x}{x^2+1} < \frac{\pi}{6}$ de aquí $x < \frac{\pi}{6}x^2 + \frac{\pi}{6}$ llegando a la inecuación $\frac{\pi}{6}x^2 - x + \frac{\pi}{6} > 0$ como es un trinomio de segundo grado cuyo discriminante $D = 1 - \frac{\pi^2}{9} < 0$. Luego la desigualdad $\frac{\pi}{6}x^2 - x + \frac{\pi}{6} > 0$ se cumple para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo tanto, $\cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right) > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

84. $\cot(\alpha - \beta) + \cot(\alpha + \beta) + \cot(\alpha + 2\beta + \gamma) + \cot(\alpha + \gamma) = 0$

$\cot(\alpha - \beta) + \cot(\alpha + \beta) + \cot(\alpha + 2\beta + 180° - (\alpha - \beta)) + \cot(\alpha + 180° - (\alpha - \beta)) = 0$

$\frac{\cot\alpha\cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha} + \frac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta} + \cot(180° + \beta) + \cot(180° - \beta) = 0$

$\frac{2\cot\alpha\cot^2\beta + 2\cot\alpha}{(\cot\beta - \cot\alpha)(\cot\beta + \cot\alpha)} = 0$ de aquí que $2\cot\alpha(\cot^2\beta + 1) = 0$ y $\cot^2\beta - \cot^2\alpha \neq 0$, $\cot\alpha = 0$ y $\alpha = 90°$; $\cot^2\beta \neq 0$ por ser ambos ángulos interiores de un triángulo.

Luego $\beta + \gamma = 90°$ y

$\cot(90° - \beta) + \cot(90° + \beta) + \cot(90° + 2\beta + 90° - \beta) + \cot(90° + 90° - \beta) = 0$

$\tan\beta - \cot\beta + \cot(180° + \beta) + \cot(180° - \beta) = 0$, $\tan\beta - \frac{1}{\tan\beta} + \cot\beta - \cot\beta = 0$ llegando a la ecuación

$\frac{(\tan^2\beta - 1)}{\tan\beta} = 0$, $(\tan^2\beta - 1) = 0$ y $\tan\beta = \pm 1$ como $\beta \leq 90°$ luego $\beta = 45°$ y $\gamma = 45°$.

$\therefore$ el triángulo ABC es rectángulo e isósceles.

85. Se tiene que $\cos x^2 \leq 1$; $2\cos y^2 \leq 2$; $-\cos xy \leq 1$, entonces sumando las tres desigualdades, se tiene $\cos x^2 + 2\cos y^2 - \cos xy \leq 4$.

Supongamos que $\cos x^2 + 2\cos y^2 - \cos xy = 4$, entonces $x^2 = 2k\pi \Rightarrow x = \sqrt{2k\pi}$;

$y^2 = 2k'\pi \Rightarrow y = \sqrt{2k'\pi}$; $xy = 2\pi\sqrt{kk'}$ con k, $k' \in \mathbb{N}$.

Pero como $\cos xy = -1$ si $xy = (2k'' + 1)\pi$, k'' entero. Entonces debe cumplirse que:

$2\pi\sqrt{kk'} = (2k''+1)\pi$, al elevar al cuadrado y simplificar queda $kk' = \left(\frac{1}{2}(2k''+1)^2\right)$ pero k, k' son naturales y $\left(\frac{1}{2}(2k''+1)^2\right)$ no es natural porque el numerador es impar y el denominador es par. Luego la suposición inicial es falsa.

$\therefore \cos x^2 + 2\cos y^2 - \cos xy < 4$.

86. $a\text{sen}^2\alpha + b\cos^2\alpha = m(\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha)$ entonces $a\text{sen}^2\alpha - m\text{sen}^2\alpha = m\cos^2\alpha - b\cos^2\alpha$

$(a - m)\text{sen}^2\alpha = (m - b)\cos^2\alpha$ entonces $\tan^2\alpha = \frac{m-b}{a-m}$

$b\text{sen}^2\beta + a\cos^2\beta = n(\text{sen}^2\beta + \cos^2\beta)$ entonces $b\text{sen}^2\beta - n\text{sen}^2\beta = n\cos^2\beta - a\cos^2\beta$

$(b - n)\text{sen}^2\beta = (n - a)\cos^2\beta$ entonces $\tan^2\beta = \dfrac{n-a}{b-n}$

luego $a\tan\alpha = b\tan\beta$ y $a^2\tan^2\alpha = b^2\tan^2\beta$ y $a^2\dfrac{m-b}{a-m} = b^2\dfrac{n-a}{b-n}$ haciendo las transformaciones necesarias, se llega a la igualdad pedida.

87. $(a - x)^2 \geq 0$; $(b - y)^2 \geq 0$; $(c - z)^2 \geq 0$, desarrollando los binomios, se tiene
$a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - 2by + y^2 + c^2 - 2cz + z^2 \geq 0$
$(a^2 + b^2 + c^2) + (x^2 + y^2 + z^2) \geq 2(ax + by + cz)$ entonces
$2 \geq 2(ax + by + cz)$ y $ax + by + cz \leq 1$.

88. $5a^2 - 6ab + 5b^2 = 3a^2 + 2a^2 - 6ab + 3b^2 + 2b^2 = 3a^2 - 6ab + 3b^2 + 2a^2 + 2b^2$
$= 3(a^2 - 2ab + b^2) + 2(a^2 + b^2) = 3(a - b)^2 + 2(a^2 + b^2) \geq 0$.

89. $(a - 2b + 2c)^2 \geq 0$; $a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 4ab + 4ac - 8bc \geq 0$; $a^2 + 4b^2 + 4c^2$

$\geq 4ab - 4ac + 8bc \dfrac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc.$

90. $\left(b - \dfrac{1}{2}\right)^2 \geq 0; b^4 - b^2 + \dfrac{1}{4} \geq 0$ y $b^4 - b^2 \geq -\dfrac{1}{4}; b^2 - b^4 \leq \dfrac{1}{4}$ y $b^2(1 - b^2) \leq \dfrac{1}{4}$

$b\sqrt{1-b^2} \leq \left|\dfrac{1}{2}\right|$ (1), como $a^2 + b^2 = 1$ entonces $a^2 = 1 - b^2$ sustituyendo en (1) se tiene

$b\sqrt{a^2} \leq \left|\dfrac{1}{2}\right|$; $ab \leq \dfrac{1}{2}$; $2ab \leq 1$; $1 + 2ab \leq 2$ y $\sqrt{1+2ab} \leq \sqrt{2}$ por lo que

$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} \leq \sqrt{2}$; $\sqrt{(a+b)^2} \leq \sqrt{2}$ y $|a+b| \leq \sqrt{2}$.

91. Utilizando la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica, tenemos:

$\dfrac{a^4+b^4}{2} \geq a^2b^2; \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}; \sqrt{ab}$ es máximo cuando $\sqrt{ab} = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{1}{2}$ de donde se cumple que $ab = \dfrac{1}{4}$

entonces $a^2b^2 = \dfrac{1}{16}$ de donde se obtiene que $\dfrac{a^4+b^4}{2} \geq \dfrac{1}{16}$ y $a^4 + b^4 \geq \dfrac{1}{8}$.

92. $2^n < n^3 < 2^{n+1}$ entonces $1 < \dfrac{n^3}{2^n} < 2$. Para $n = 9$ se cumple que $1 < \dfrac{729}{512} < 2$ y, a partir de $n = 9$ se cumple que $n^3 < 2^n$ luego el único valor es para $n = 9$.

93. Se tiene que $1 \geq a + b + c$ entonces $1 \geq (a + b + c)^2$, es decir,
$1 \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;
$1 \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2c^2$ y $1 \geq a^2 + 3b^2 + 5c^2$.

94. $4\sqrt{a}+4\sqrt{b}\geq a+4b+5; 0\geq a+4b+5-4\sqrt{a}+4\sqrt{b}$

$0\geq a-4\sqrt{a}+4+4b-4\sqrt{b}+1; 0\geq(\sqrt{a}-2)^2(2\sqrt{b}-1)^2$, pero $(\sqrt{a}-2)^2\geq 0$ y $(2\sqrt{b}-1)^2\geq 0$

luego, el único caso posible es que $\sqrt{a}-2=0$ y $2\sqrt{b}-10$ lo cual se cumple para $a = 4$

y $b=\dfrac{1}{4}$.

95. $\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)^2=\dfrac{x^2}{y^2}+2+\dfrac{y^2}{x^2}; \dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}=\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)^2-2$ entonces

$2\left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}\right)-3\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+6=2\left[\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)^2-2\right]-3\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+6$

$=2\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)^2-3\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+2$. Haciendo $\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)=a$, se tiene que $2a^2 - 3a + 2$ es un trinomio de segundo grado cuyo discriminante es $-7 < 0$ por lo que $2a^2 - 3a + 2 > 0$ para todo a, por lo tanto,

$2\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)^2-3\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+2>0$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^*$.

96. $\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-1\right)^2\geq 0; \left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)^2-2\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+1\geq 0; 4\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)^2-8\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+4\geq 0;$

$4\left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}\right)-8\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+12\geq 0.$

97. Como $(x - y)^2 \geq 0$ para todo x, y reales, luego $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$;
$2x^2 - x^2 + 2y^2 - y^2 - 2xy \geq 0$; $2x^2 + 2y^2 \geq x^2 + 2xy + y^2$; $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$

$\dfrac{x^2+y^2}{2}\geq\dfrac{(x+y)^2}{4}$ por lo que $\dfrac{x^2+y^2}{2}\geq\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2$.

98. $\left(\sqrt{ad}-\sqrt{bc}\right)^2\geq 0; ad+bc-2\sqrt{abcd}\geq 0; ad+bc\geq 2\sqrt{abcd}$

$ad + bc + ab + cd \geq 2\sqrt{abcd} + ab + cd$; $a(b + d) + c(b + d) \geq ab + 2\sqrt{abcd} + cd$

$(a + c)(b + d) \geq \left(\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\right)^2$ y $\sqrt{(a+c)(b+d)}\geq\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$.

99. $a^4 - a^3b + b^4 - ab^3 = a^3(a - b) - b^3(a - b) = (a - b)(a^3 - b^3) = (a - b)^2(a^2 + ab + b^2)$
pero $(a - b)^2(a^2 + ab + b^2) > 0$ luego $a^4 - a^3b + b^4 - ab^3 > 0$ y $a^4 + b^4 > a^3b + ab^3$
$\therefore\ a^3b + ab^3 < a^4 + b^4$.

100. Si $2x + 4y = 1$, entonces $x+2y=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{2}-2y$, pero $x^2 + y^2 \geq 2xy$ sustituyendo se tiene que

$4y^2 - 2y + \frac{1}{4} + y^2 \geq y - 4y^2$; $9y^2 - 3y + \frac{1}{4} \geq 0$ por lo que $\left(3y + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0.$

El mínimo valor es $y = \frac{1}{6}$, entonces $x = \frac{1}{6}$ luego $x^2 + y^2 \geq 2\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)$; $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{18}$.

101. $\left(\frac{a+b}{c}\right)\left(\frac{b+c}{a}\right)\left(\frac{c+a}{b}\right)=\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{a}+1+\frac{b^2}{ac}+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\right)$

$=\left(\frac{b}{c}+1+\frac{b^2}{ac}+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\right)=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}+2$ pero

$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2$; $\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\geq 2$; $\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geq 2$ entonces $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}+2\geq 8$

y $\left(\frac{a+b}{c}\right)\left(\frac{b+c}{a}\right)\left(\frac{c+a}{b}\right)\geq 8.$

102. Se sabe que $\frac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$, haciendo $x = a + \frac{1}{a}$; $y = b + \frac{1}{b}$, se tiene que

$$\frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2}{2} \geq \left(\frac{a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}}{2}\right)^2 \text{ pero } \left(\frac{a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}}{2}\right)^2 = \frac{\left(1+\frac{a+b}{ab}\right)^2}{4}$$

$=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2$ como $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ entonces $ab \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$; $ab \leq \frac{1}{4}$ luego $\frac{1}{ab} \geq 4$ y $1 + \frac{1}{ab} \geq 5$ de donde

se tiene que $\frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2}{2} \geq \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2.$

$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{ab}\right) \geq \frac{1}{2}\cdot 5^2 = \frac{25}{2}$ y $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$

103. Como $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ entonces $\frac{ab}{a+b} < a + b$. Sea $x \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $\frac{ab}{a+b} < x < a+b.$

Si $x < a + b \Rightarrow (b - a)x < (a + b)(b - a) \Rightarrow bx - ax < b^2 - a^2 \Rightarrow a^2 + bx < b^2 + ax \Rightarrow \frac{a^2+bx}{b^2+ax} < 1.$

Si $x > \dfrac{ab}{a+b}$ $\Rightarrow (a + b)x > ab \Rightarrow (b^2 - a^2)x > ab(b - a) \Rightarrow b(bx + a^2) > a(ax + b^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow b(a^2 + bx) > a(b^2 + ax) \Rightarrow$ $\dfrac{a^2+bx}{b^2+ax} > \dfrac{a}{b}$ luego $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a^2+bx}{b^2+ax} < 1.$

104. $(a - b)^2 \geq 0$; $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$; $3a^2 - 6ab + 3b^2 \geq 0$;

$4a^2 - a^2 - 4ab - 2ab + 4b^2 - b^2 \geq 0$; $4(a^2 - ab + b^2) \geq (a + b)^2$; $a^2 - ab + b^2 \geq \dfrac{1}{4}(a+b)^2$ multiplicando

por $\dfrac{1}{2}(a+b)$ se llega a $\dfrac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3.$

105. $a^2 + b^2 = 1$ también $x^2 + y^2 = 1$, multiplicando ambas igualdades, se tiene

$a^2x^2 + b^2y^2 + a^2y^2 + b^2x^2 = 1$ entonces $(a^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy) + (a^2y^2 + b^2x^2 - 2abxy) = 1$

$(ax + by)^2 + (ay - bx)^2 = 1$ luego $(ax + by) \leq 1$; $|ax + by| \leq 1$.

106. a) Desarrollando el miembro izquierdo, tenemos:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) \geq 3+2+2+2 = 9$$

(en la última desigualdad se usa que $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a} \geq 2$).

b) Esta desigualdad se puede demostrar apoyándonos en la demostrada anteriormente de la forma siguiente:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}-3 =$$

$$= (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3 =$$

$$= \frac{1}{2}\{(a+b)+(b+c)+(c+a)\}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3 \geq \frac{9}{2}-3 = \frac{3}{2}.$$

107. Aplica el *teorema del binomio.*

108. Tenemos $x + y + z = 5$ (1); $xy + xz + yz = 3$ (2). Despejando en (1), obtenemos $x + y = 5 - z$ (3) y reemplazando (3) en (2), se tiene

$(5 - z)z + xy = 3$ de donde $xy = 3 - 5z + z^2$ (4)

Luego x y y son raíces de la ecuación cuadrática $t^2 - (5 - z)t + 3 - 5z + z^2 = 0$. Para que las raíces sean reales debe cumplirse que $(5 - z)^2 - 4(3 - 5z + z^2) \geq 0$, es decir,

$(13 - 3z)(1 + z) \geq 0$ por lo que $-1 \leq z \leq \dfrac{13}{3}.$

109. Consideremos primero el caso en que uno de los números x o y es 0, supongamos, por ejemplo, que $x = 0$ (lo mismo ocurre para $y = 0$).

La desigualdad se transforma en $(ay)^2 \geq a(y - b)$, que puede escribirse como

$\left(ay - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(ab - \frac{1}{4}\right) \geq 0$, que es verdadera, ya que $ab \geq \frac{1}{4}$.

Pasemos al caso $xy > 0$. Si reemplazamos (a,b,x,y) por $\left(\lambda a, \frac{b}{\lambda}, \lambda x, \frac{y}{\lambda}\right)$ con $\lambda \neq 0$, la desigualdad no cambia. Si elegimos $\lambda = \sqrt{\frac{y}{x}} \neq 0$, podemos suponer que $x = y$. (Notemos que $xy > 0$ implica que $y : x > 0$, de modo que λ está bien definido). Por lo tanto, basta probar que si $ab \geq \frac{1}{4}$. Entonces $(a - b)^2x^2 \geq (a - x)(x - b)$ para todo x real.

Esta última desigualdad es equivalente a $[(a - b)^2 + 1]x^2 - (a + b)x + ab \geq 0$. El miembro izquierdo es una función cuadrática con discriminante

$D = (a + b)^2 - 4ab[(a - b)^2 + 1] = (a + b)^2 - 4ab - 4ab(a - b)^2 = (a - b)^2(1 - 4ab)$.

La condición $ab \geq \frac{1}{4}$ implica que $D \leq 0$, de donde $f(x) \geq 0$ para todo x real. Con lo cual se completa la solución.

110. Se tiene que $x^{1\,988} - 2x^{1\,987} + 3x^{1\,986} - ... + 1\,987x^2 - 1\,988x + 1\,989$

$= (x^{1\,986} + 2x^{1\,984} + 3x^{1\,982} + ... + 993x^2 + 994)(x - 1)^2 + 995 \geq 995 > 0$.

111. $(2n - 1) < n^2$; $3(2n - 3) < n^2$; $5(2n - 5) < n^2$... de donde $[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n - 1)]^2 < n^{2n}$ y $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n - 1) < n^n$ luego $n^n > 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n - 1)$.

112. Se tiene que $a + b + c + d \geq 1$; $(a + b + c + d)^2 \geq 1$

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd \geq 1$

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 + 2d^2 \geq 1$; $a^2 + 3b^2 + 5c^2 + 7d^2 \geq 1$.

113. $|b| < \left|\frac{1}{2}a\right|$; $|a - b| > \left|a - \frac{1}{2}a\right|$; $|a - b| > \left|\frac{1}{2}a\right|$; $\left|\frac{1}{a-b}\right| < \left|\frac{2}{a}\right|$ y $\left|\frac{1}{a-b}\right| < \frac{2}{|a|}$.

114. De acuerdo con la desigualdad de Bernoulli se cumple que $(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$ con $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \geq -1$ y $\alpha \neq 0$ luego $(1 + a)^2 \geq 1 + 2a$; $(1 + b)^2 \geq 1 + 2b$ y $(1 + c)^2 \geq 1 + 2c$, entonces $1 + a \geq \sqrt{2a+1}$; $1 + b \geq \sqrt{2b+1}$; $1 + c \geq \sqrt{2c+1}$; sumando las tres desigualdades, tenemos

$3 + a + b + c \geq \sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1}$ y $\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1} \leq 4$.

115. $(ab - ac)^2 + (ab - bc)^2 + (ac - bc)^2 \geq 0$ desarrollando los binomios, tenemos

$a^2b^2 - 2a^2bc + a^2c^2 + a^2b^2 - 2ab^2c + b^2c^2 + a^2c^2 - 2abc^2 + b^2c^2 \geq 0$

$2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 \geq 2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2$ entonces

$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \geq abc(a + b + c)$.

116. $(ab - bc)^2 + (bc - ac)^2 + (ab - ac)^2 \geq 0$;

$2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - 2ab^2c - 2abc^2 - 2a^2bc \geq 0$ luego

$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \geq abc(a + b + c)$

pero $(a^2 - b^2)^2 + (a^2 - c^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 \geq 0$; $2a^4 + 2b^4 + 2c^4 \geq 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2$, entonces $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$ luego $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$.

117. $a_n = n^2 - 79n + 1\,601 = n^2 - 80n + 1\,600 + n + 1 = (n - 40)^2 + (n + 1)$

$= (n - 41 + 1)^2 + (n + 1) = (n + 1)^2 - 2(n + 1)41 + 41^2 + n + 1$

$= (n + 1)(n + 1 - 82 + 1 + 41^2 = (n + 1)(n - 80) + 41^2 = 41\left[\dfrac{(n+1)(n-80)}{41} + 41\right]$

entonces para $n = 81$ se tiene el primer número no primo, ya que $(82)(1) + 41^2$ es divisible por 41.

118. Si a_n denota el término n-ésimo de la sucesión, entonces

$a_n = \dfrac{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}} = \dfrac{n^2}{(n-1)^2}$, para $n \geq 2$, los 5 primeros términos de la sucesión son

1, 4, $\dfrac{9}{4}, \dfrac{16}{9}, \dfrac{25}{16}$ y se cumple que $a_3 + a_5 = \dfrac{9}{4} + \dfrac{25}{16} = \dfrac{61}{16}$.

119. La distancia será

$$10 + 2 \cdot \frac{10}{2} + 2 \cdot \frac{10}{4} + \ldots = 10 + 20\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right) = 10 + 20\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 30.$$

Recorrerá una distancia de 30 m.

120. Por ser tres números en *progresión aritmética* $2\log_b x = \log_a x + \log_c x$

$2\dfrac{\log x}{\log b} = \dfrac{\log x}{\log a} + \dfrac{\log x}{\log c}$ y como $\log x \neq 0 \to 2 = \dfrac{\log b}{\log a} + \dfrac{\log b}{\log c} = \log_a b + \log_c b.$

Uniformando la base $\log_c c^2 = \log_c c^{\log_a b} + \log_c b = \log_c \left(b \cdot c^{\log_a b}\right)$.

Por tanto: $c^2 = b \cdot c^{\log_a b} = a^{\log_a b} \cdot c^{\log_a b} = (a \cdot c)^{\log_a b}$ como queríamos probar.

121. $S_n = \dfrac{1}{2}n[2a_1 + (n-1)d]$; $S_{10} = 100$; $\dfrac{1}{2}10(2a_1 + 9d) = 100$ entonces $2a_1 + 9d = 20$; $S_{100} = 10$;

$\dfrac{1}{2}100(2a_1 + 99d) = 10$ y $2a_1 + 99d = \dfrac{1}{5}$ resolviendo el sistema se llega a que $a_1 = \dfrac{1\,099}{100}$ y $S_{110} = -110$.

122. Observa que el segundo término de la progresión aritmética es 5. Súmale a cada término de la progresión aritmética los números 1, 4 y 19 y utiliza que el cuadrado del segundo término es el producto del primer y tercer término. Se obtiene una ecuación de segundo grado, en términos de la diferencia común, cuyas raíces son –21 y 3. Las progresiones son: 2, 5, 8 y 26, 5, –16.

123. Sean a, aq y aq^2 tres números positivos que son términos consecutivos de una sucesión geométrica. Si $q > 1$, para que sean tres lados de un triángulo debe cumplirse que $aq^2 < aq + a$, es decir, que

$q^2 < q + 1$ y $q^2 - q - 1 < 0$, entonces $1 < q < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Si $0 < q < 1$, entonces $a > aq > aq^2$ y $q^2 + q - 1 > 0$, es decir, $0 < q < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Si $q = 1$, entonces $a < 2a$ y $1 < 2$. Siempre puede construirse porque serían triángulos equiláteros. El caso $q < 0$ no es posible porque a y aq son positivos.

$\therefore$ la razón tiene que ser un número comprendido en $\left(0;\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\cup\left[1;\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

124. Sean a_1 el primer término de la sucesión aritmética dada y d el número tal que para cualquier a_n y a_{n+1} términos de la sucesión $a_{n+1} - a_n = d$, entonces $a = a_1 + (p - 1)d$;

$b = a_1 + (q - 1)d$; $c = a_1 + (r - 1)d$

$(q - r)a + (r - p)b + (p - q)c = qa - ra + rb - pb + pc - qc =$

$= p(c - b) + q(a - c) + r(b - a)$

$= p[a_1 + (r - 1)d - a_1 - (q - 1)d] + q[a_1 + (p - 1)d - a_1 - (r - 1)d] + r[a_1 + (q - 1)d - (p - 1)d]$

$= p(rd - d - qd + d) + q(a_1 + pd - d - a_1 - rd + d) + r(a_1 + qd - d - a_1 - pd + d)$

$= p(rd - qd) + q(pd - rd) + r(qd - pd) = prd - pqd + pqd - qrd + qrd - prd = 0.$

125. $a_m = a_1 \cdot q^{m-1}$, $A = a_{m+n} = a_1 \cdot q^{m+n-1}$, $B = a_{m-n} = a_1 \cdot q^{m-n-1}$ entonces

$A \cdot B = a_1^2(q^{2m-2}) = a_1^2(q^{m-1})^2 = a_1 \cdot q^{m-1})^2 = a_m^2$ y $a_m = \pm\sqrt{A \cdot B} = a_1 \cdot q^{m-1}$

126. $a_1 = 1$; $a_2 = 9 = a_1 + 8 = a_1 + 2^3$; $a_3 = 36 = a_2 + 3^3 = a_1 + 2^3 + 3^3$;

$a_4 = 100 = a_3 + 4^3 = a_1 + 2^3 + 3^3 + 4^3$ en general

$(a_n) = a_{n-1} + n^3 = (1 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3) = \left[\dfrac{1}{2}(n)(n+1)\right]^2$.

127. Sean a_1, el primer término de la progresión; a_{2K+1} el término de orden $2K + 1$ y n el número de términos de la progresión.

Se tiene $S = \dfrac{1}{2}(a_1 + a_{2K+1})n$ pero $a_{2K+1} = a_1 + (2K + 1 - 1)1 = K^2 + 2K + 1$ luego

$S = \dfrac{1}{2}(K^2 + 1 + K^2 + 2K + 1)(2K + 1)$ y haciendo los cálculos pertinentes se llega a la igualdad pedida.

128. a_i, a_{i+1}, a_{i+2}; $a_{i+2} = a_i q^2 = \dfrac{1}{2}(a_i + a_{i+1})$ como $a_i \neq 0$, $2q^2 - q - 1 = 0$ cuyas soluciones son $q = 1$ o $q = -\dfrac{1}{2}$.

$\therefore$ las sucesiones geométricas con razón 1 o razón $-\dfrac{1}{2}$ cumplen esa condición.

129. Tenemos que por la relación entre la media aritmética y la media geométrica, todos los términos de la sucesión son mayores que $2x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} > 2$ (se descarta la igualdad, ya que $x_n \neq \frac{1}{x_n}$. Si efectuamos $x_1 = x_0 + \frac{1}{x_0}$. Como $x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_{999} > 2^{1\,000}$

$x_2 = x_1 + \frac{1}{x_1}$

$x_3 = x_2 + \frac{1}{x_2}$ sumando las igualdades obtenidas, se tiene $x_n = x_0 + \sum \frac{1}{x_k}$

....

$x_1 = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}$.

Si hacemos $n = 1\,000$ y aplicamos de nuevo la relación entre la media geométrica y la media aritmética, se obtiene:

$\sum_{k=0}^{999} \frac{1}{x_k} \geq 1\,000 \sqrt[1\,000]{\frac{1}{p}} = K$; pero $K > 500$ y $K > 40$, $P > 2^{1\,000}$

Entonces $\sum_{k=0}^{999} \frac{1}{x_k} > 40$ / $+ x_0$ se tiene $x_0 + \sum_{k=0}^{999} \frac{1}{x_k} > 45$ y $x_{1\,000} > 45$.

130. $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{1}{4}$, ..., $(x_n) = \frac{1}{n+1}$ y $x_{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}+1} = \frac{1}{n+2}$ y $(x_n) = \frac{1}{n+1}$.

131. (1) Sea $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + n(n + 1) = A + Bn + Cn^2 + ...$ cambiando n por $n + 1$, obtenemos:

(2) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + (n + 1)(n + 2) = A + B(n + 1) + C(n + 1)^2 + ...$

Restando (1) de (2), obtenemos

$(n + 1)(n + 2) = B + C(2n + 1) + D(3n^2 + 3n + 1) + E(4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) + ...$

siendo $(n + 1)(n + 2) = n^2 + 3n + 2$.

Como no aparecen potencias de n mayores que 2 en el miembro izquierdo, entonces a partir de E todos los coeficientes son 0 y quedaría el sistema $3D = 1$ luego

$D = \frac{1}{3}$; $2C + 3D = 3$, o sea, $C = 1$;

$B + C + D = 2$ y $B = \frac{2}{3}$ de donde $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + n(n + 1) = A + \frac{2}{3}n + n^2 + n^3$; como esta igualdad es válida para todo n, en particular se cumple para $n = 1$ y se tiene $2 = A + 2$ luego $A = 0$.

$\therefore\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + n(n + 1) = \frac{2}{3}n + n^2 + \frac{1}{3}n^3 = \frac{1}{3}n(n^2 + 3n + 2) = \frac{n}{3}(n + 1)(n + 2)$.

Otra vía puede ser buscando el polinomio característico.

132. $A_2 = 2A_1 - A_0 + 1$; $A_3 = 2A_2 - A_1 + 1 = 2(2A_1 - A_0 + 1) - A_1 + 1$; $A_3 = 3A_1 - 2A_0 + 3$ ...

$A_n = nA_1 - (n-1)A_0 + \frac{1}{2}(n)(n-1)$; $A_{n+1} = (n+1)A_1 - nA_0 + \frac{1}{2}(n+1)(n)$;

$A_{n+2} = (n+2)A_1 - (n+1)A_0 + \frac{1}{2}(n+2)(n+1)$. Comprobemos si esta ecuación satisface la ecuación dada.

Sustituyendo y evaluando se puede probar que se cumple, luego $A_n = nA_1 - (n-1)A_0 + \frac{1}{2}(n)(n-1)$.

133. $S_p = pa_1 + \frac{1}{2}(p-1)pd$; $S_q = qa_1 + \frac{1}{2}(q-1)pd$; y $S_{p+q} = (p+q)a_1 + \frac{1}{2}(p+q-1)(p+q)d$;

como $S_p = S_q$ igualando las dos ecuaciones se tiene $(p-q)\ \frac{1}{2}(2a_1 + (p+q-1)d) = 0$, como $p \neq q$ entonces $2a_1 + (p+q-1)d = 0$ y $S_{p+q} = (p+q)\frac{1}{2}(2a_1 + (p+q-1)d) = 0$.

134. $S_1 = 1 + q + q^2 + \dots$ y $S_2 = 1 + Q + Q^2$ como los módulos de q y Q son menores que 1 entonces

$S_1 = \dfrac{1}{1-q}$ y $S_2 = \dfrac{1}{1-Q}$ por lo que $q = \dfrac{S_1 - 1}{S_1}$ y $Q = \dfrac{S_2 - 1}{S_2}$ y

$qQ = \dfrac{S_1S_2 - S_1 - S_2 + 1}{S_1S_2}$ y $q^2Q^2 = \left(\dfrac{S_1S_2 - S_1 - S_2 + 1}{S_1S_2}\right)^2$ luego

$S = 1 + qQ + q^2Q^2 + \dots = \dfrac{1}{1-qQ} = \dfrac{S_1S_2}{S_1 + S_2 - 1}$.

135. $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2 = 1 + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_1a_5 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_2a_5 + a_3a_4 + a_3a_5 + a_4a_5)$ pero

a_1, $a_2 = a_1 + \dfrac{1}{\sqrt{10}}$; $a_3 = a_1 + \dfrac{2}{\sqrt{10}}$; $a_4 = a_1 + \dfrac{3}{\sqrt{10}}$; $a_5 = \dfrac{4}{\sqrt{10}}$ entonces

$(5a_1 + \sqrt{10})^2 = 1 + 2\left(10a_1{}^2 + \dfrac{40}{\sqrt{10}}a_1 + \dfrac{35}{10}\right)$ llegando a la ecuación $5a_1{}^2 + 2\sqrt{10}\,a_1 + 2 = 0$ cuya solución es $a_1 = -\dfrac{2}{\sqrt{10}}$; al hacer la comprobación se demuestra que el resultado obtenido es correcto.

136. Supongamos que $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ son términos de una progresión aritmética, entonces existen a_1, k, m y n tales que $\sqrt{2} = a_1 + kd$, $\sqrt{3} = a_1 + md$ y $\sqrt{5} = a_1 + nd$ y, por lo tanto, $\dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \dfrac{m-k}{n-m} = r$ siendo r un número racional. Elevando al cuadrado y ordenando el resultado, tenemos que $\sqrt{15}r^2 - \sqrt{6} = 4r^2 - \dfrac{5}{2} = s$ que también es un número racional. Elevando nuevamente al cuadrado y despejando, queda que $\sqrt{10}=\dfrac{15r^4-s^2+6}{6r^2}$ que es una contradicción porque el miembro izquierdo es un número irracional y el miembro derecho es un número racional.

137. Bastará probar que a partir de un cuadrado perfecto podemos construir otro. Sea la progresión: a^2, a^2+d, a^2+2d, ..., a^2+kd ...
Como $(a+d)^2 = a^2+2ad+d^2 = a^2+(2a+d)d$, basta tomar $k = 2a+d$ para obtener otro cuadrado en la progresión.

138. Sean a, b y c tres números tales que $b = a+d$, $c = a+2d$ y sean m, n y p tres números tales que $n = mq$, $p = mq^2$; $a+b+c = 126$, es decir, $3a+3d = 126$;
$a+d = 42 = b$ y $d = 42-a$; $c = 126-(a+b)$ por otra parte $a+m = 85$, $b+n = 76$,
$42+n = 76$ y $n = 34$;
$c+p = 84$, $a+2d+p = 84$ y $d+p = 42$; $a+m = 85 \Rightarrow m = 85-a$; $mq = 34$
$\Rightarrow q=\dfrac{34}{m}=\dfrac{34}{85-a}$; $d+p = 42$;

$42-a+mq^2 = 42$; $42-a+\dfrac{34^2}{(85-a)}=42$ llegando a la ecuación de segundo grado en la variable a;
$a^2-85a+1\,156 = 0$ cuyas soluciones son: $a = 68$, $d = -26$, $p = 68$, $q = 2$, $m = 17$, $n = 34$, $b = 42$, $c = 16$ o $a = 17$, $d = 25$, $p = 17$, $q=\dfrac{1}{2}$, $m = 68$, $n = 34$, $b = 42$, $c = 67$ por lo que hay dos parejas de progresiones diferentes que son:
I. Progresión aritmética: 68, 42, 16. Progresión geométrica: 17, 34, 68.
II. Progresión aritmética: 17, 42, 67. Progresión geométrica: 68, 34, 17.

139. Para todo número k, $k > 2$ la sucesión $a_n(k)$ es primero estrictamente decreciente y para cierto número n_0 el resto de los términos son iguales a 2: $a_{n0} = a_{n0+1} = ... = 2$.
El número $a_{n0}-1$ es un número impar. De aquí el número $a_{n0}-2$ puede ser un cuadrado perfecto. Los números m que son cuadrados perfectos tienen un número par de factores, es decir, todos los divisores están distribuidos por pares $\left(d;\dfrac{m}{d}\right)$.
Entonces los números primos y solamente los números primos satisfacen las condiciones del problema.

140. Sean $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 3$, $a_4 = 3$, $a_5 = 5$, $a_1=b\left[\sqrt{1+c}\right]+d$; $a_2=b\left[\sqrt{2+c}\right]+d$; $a_3=b\left[\sqrt{3+c}\right]+d$; $a_4=b\left[\sqrt{4+c}\right]+d$; $a_5=b\left[\sqrt{5+c}\right]+d$; entonces $1=b\left[\sqrt{1+c}\right]+d$; $3=b\left[\sqrt{2+c}\right]+d$; $3=b\left[\sqrt{3+c}\right]+d$; $3=b\left[\sqrt{4+c}\right]+d$; $5=b\left[\sqrt{5+c}\right]+d$; restando las dos primeras igualdades, obtenemos $2=b\left(\left[\sqrt{2+c}\right]-\left[\sqrt{1+c}\right]\right)$ por lo que $b = 1$ y $\left[\sqrt{2+c}\right]-\left[\sqrt{1+c}\right]=2$ o $b = 2$ y $\left(\left[\sqrt{2+c}\right]-\left[\sqrt{1+c}\right]\right)=1$, para el primer caso no hay solución y para el segundo caso sí por lo que $b = 2$.
De igual forma se obtiene para 1 con 3 y 4, luego restando 1 de 5, tenemos que $4=2\left(\left[\sqrt{5+c}\right]-\left[\sqrt{1+c}\right]\right)$, es decir, $\left[\sqrt{5+c}\right]-\left[\sqrt{1+c}\right]=2$ de donde $1+\left[\sqrt{1+c}\right]=\left[\sqrt{2+c}\right]=\left[\sqrt{3+c}\right]=\left[\sqrt{4+c}\right]=\left[\sqrt{5+c}\right]-1$.
Luego para algún entero m y algún entero k, se tiene $2+c = k^2$ y $5+c = m^2$ por lo que $m^2-k^2 = 3$ solo puede ocurrir si $m = \pm 2$ y $k = \pm 1$; $c = k^2-2 = -1$, entonces $d = 1$ y se tiene $S = b+c+d = 2-1+1 = 2$.

141. Sea $a_{n+1} = a_n(a_n^2 - 3a_n + 3) = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n$ y $a_{n+1} - 1 = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n - 1 = (a_n - 1)^3$ a su vez $a_{n+2} - 1 = (a_{n+1} - 1)^3 = [(a_n - 1)^3]^3 = (a_n - 1)^9$. De manera general realizando el mismo proceso análogamente se llega al término k-ésimo que se expresará en función del término $(k - 1)$-ésimo y este en función del $(k - 2)$-ésimo y así sucesivamente hasta obtener el término a_i; tendríamos: $a_k - 1 = (a_{k-1} - 1)^3 = [(a_{k-2} - 1)^3]^3 = ... = (a_1 - 1)^{3^{k-1}}$ por lo que para $k = 1\,989$, tenemos $a_{1\,989} - 1 = (a_1 - 1)^{3^{1\,988}}$.
Si suponemos $a_{1\,989} = a_1 = a$, entonces

$a - 1 = (a_1 - 1)^{3^{1\,988}}$; $(a_1 - 1)^{3^{1\,988}} - (a - 1) = 0$; $(a - 1)\left[(a_1 - 1)^{3^{1\,988}-1} - 1\right] = 0$ luego

$a = 1$ o $(a_1 - 1)^{3^{1\,988}-1} - 1 = 0$; $(a_1 - 1)^{3^{1\,988}-1} = 1$ como $3^{1\,988} - 1$ es par, entonces $a - 1 = 1$ y $a = 2$ o $a - 1 = -1$ y $a = 0$. Por lo que los valores de a son 0, 1 o 2.

142. Para $1 \leq x \leq 9$, $y = 0$; para $10 \leq x \leq 99$, $y = 1$ o $y = 0$; para $100 \leq x \leq 999$, $y = 2$ o $y = 2$ o $y = 1$ o $y = 0$; para $1\,000 \leq x \leq 1\,984$, $y = 3$ o $y = 2$ o $y = 1$ o $y = 0$.
En el primer caso hay 9 pares, en el segundo hay 180, en el tercero hay 2 700 y en el último hay 3 940.
$\therefore$ hay 6 829 elementos en el conjunto C.

143. Se sigue la misma idea que para el ejercicio anterior teniendo en cuenta las cuartas potencias de los números naturales, para $x = 0$, $y = 0$; para $1 \leq x \leq 15$, $y = 0$ o $y = 1$ y así, sucesivamente, al sumar hay en total 11 464 elementos en el conjunto M.

144. Sea $y = -x$, entonces $f(x - x) = f(x) \cdot f(-x)$ por lo que $1 = f(x) \cdot f(-x)$ cumpliéndose que $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

145. Sean $x = n$, $y = 1$,
$f(n) - f(1) = f(n - 1) + n + 1$; $f(n) + 1 = f(n - 1) + n + 1$ y $f(n) = f(n - 1) + n$, entonces $f(n - 1) = 0$.
Pero, esto no se puede determinar de forma única, por ejemplo, si $n = 1$, entonces $f(1) = 1$ que contradice ii). Luego no hay ningún número entero n, que satisfaga $f(n) = n$.

146. $f(x) = 3 + \dfrac{x+4}{x^2-2} \in \mathbb{Z}$, pero $x + 4 \geq x^2 - 2$ para $-2 \leq x \leq 3$.

$\therefore$ los valores de x que satisfacen las condiciones pedidas son: $-2, -1, 0, 1, 2, 3$.

147. $4n - 3 = 2(2n - 1) - 1$ tenemos que $1\,985 = 2 \cdot 993 - 1$ pero $993 = 2 \cdot 497 - 1$, $497 = 2 \cdot 249 - 1$, $249 = 2 \cdot 125 - 1$, $125 = 2 \cdot 63 - 1$, $63 = 2 \cdot 32 - 1$.
Tenemos $f(32) = f(2^5) = 2^6 - 1 = 63$, luego $f(63) = f(f(32)) = 4 \cdot 32 - 3 = 125$,
$f(125) = f(f(63)) = 249$ y $f(993) = 1\,985$ por lo que $f(1\,985) = f(f(993)) = 4 \cdot 993 - 3 = 3\,969$.

148. $f(n+1) = f(n) + \dfrac{1}{2}$, $f(2) = f(1) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$, de igual forma $f(3) = 3$, $f(4) = \dfrac{7}{2}$ y $f(5) = 4$.

Luego $f(1) = \dfrac{1+3}{2}$; $f(2) = \dfrac{2+3}{2}$, …; entonces $f(n) = \dfrac{n+3}{2}$.

$\therefore$ $f(1\,988) = \dfrac{1\,988+3}{2} = 995{,}5$.

Otra vía: $f(1) = 2$; $f(2) = f(1) + \dfrac{1}{2}$; $f(3) = f(2) + \dfrac{1}{2}$; ...; $f(1\,988) = f(1\,987) + \dfrac{1}{2} = 2 + \dfrac{1}{2}(1\,987) = 995{,}5$.

149. $f(x+1)=\dfrac{(x+1)x}{2}$; $f(x+2)=\dfrac{(x+2)(x+1)}{2}=\dfrac{x+2}{x}\cdot\dfrac{x(x+1)}{2}=\dfrac{(x+2)\cdot f(x+1)}{x}$.

150. Hay que considerar dos posibilidades:

I) Para k impar, $x_k = -1$ y $f(n)=\dfrac{(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+...+(-1)^k}{k}=-\dfrac{1}{k}$.

II) Para k par, $x_k = 1$ y $f(n)=\dfrac{(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+....+(-1)^k}{k}=0$.

Luego $f(n) = 0$ si n es par y $-\dfrac{1}{n}$ si n es impar.

151. $f^2(x) + 2x^2 = (2x)^2 + 2x^2 = 6x^2 = 3x \cdot 2x = 3x \cdot f(x)$.

152. $10^{1\,988} - 1\,988 = \underbrace{100 \dots 0}_{1\,988 \text{ ceros}} - 1\,988 = \underbrace{99\dots9}_{1\,984 \text{ nueves}}98012$

$S(10^{1\,988} - 1\,988) = S(\underbrace{99...9}_{1\,984 \text{ nueves.}}98012) = 1\,984 \cdot 9 + 8 + 1 + 2 = 17\,867$

153. $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Sea $x = y = 0$, entonces $f(0 + 0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$ por lo que $f(0) = 0$.

154. $f(x) = x^2$, $g(x) = 4x^2 + a$ entonces $f(x) = g(x)$ si $x^2 = 4x^2 + a$, es decir, para $x^2=-\dfrac{a}{3}$, luego $a \le 0$.

155. Sean $f(x) = ax^2 + bx + c$ y $f(-x) = ax^2 - ax + c$, como $f(x) = f(-x)$ es una función par entonces $f(x) = ax^2 + c$; $f(2) = 4a + 5 = 5$ y $f(1) = a + c = -4$, resolviendo el sistema, se tiene que $a = 3$ y $c = -7$

$\therefore$ $f(x) = 3x^2 - 7$ y $f(3) = 20$.

156. $f(1) = 4$, $f(x + 1) = 4 \cdot f(x)$, $f(2) = 4 \cdot 4 = 4^2 = 16$, $f(3) = 4^3 \dots f(n) = 4^n$

$\therefore$ $f(1\,989) = 4^{1\,989}$.

157. $P(0) = a_0$; $P(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0$; y $P(-2) = 8a_3 - 4a_2 + 2a_1 - a_0$; $4P(0) = -2 \cdot P(2)$ entonces $P(2) = -2P(0) = -2a_0$ de igual forma se obtiene $P(-2) = -2a_0$ luego

$8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 3a_0 = 0$ y $8a_3 - 4a_2 + 2a_1 - 3a_0 = 0$ sumando ambas ecuaciones, se tiene $a_1 = -4a_3$

$P(1) = a_3 + a_2 + a_1 + a_0$ y $P(-1) = -a_3 + a_2 - a_1 + a_0$ pero $P(-1) = -P(1)$ entonces

$a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = -a_3 + a_2 - a_1 + a_0$ y $a_2 = -a_0$ llegando a que $P(0) = a_0 = 0$; $P(1) = -3a_3$; $P(-1) = 3a_3$

$P(2) = P(-2) = -2a_0 = 0$; $P(4) = -12a_1 = 48a_3$; $P(4) = -15a_0 - 12a_1 = -3(5a_0 + 4a_1)$

$6P(2) = 0 \cdot P(4)$, $P(2) = 0$; $a_0 = 0$ y $a_2 = 0$ por lo que $P(x) = a_3x^3 - 4a_3x$ con $a_3 \in \mathbb{R}^*$.

158. $f(x) = (x - 2)^2 \cdot P(x)$, $f(0) = 4 \cdot P(x) \Rightarrow P(0) = 1$ de igual forma $P(1) = 2$ luego

$P(x) = x + 1$ y $f(x) = (x - 2)^2(x + 1) = x^3 - 3x^2 + 4$; $f(0) = 4$, $f(1) = 2$, $f(2) = 0$;

$f'(x) = 3x^2 - 6x$ con $f'(2) = 0$.

159. Como f es decreciente, $f(78) \geq f(77)$ entonces $f(13) \cdot f(6) \geq f(7) \cdot f(11)$ también

$f(44) \geq f(42)$

$f(4) \cdot f(11) \geq f(7) \cdot f(6)$ de aquí que $f(13) \cdot f(6) \cdot f(11) \cdot f(4) \geq f(7) \cdot f(11) \cdot f(7) \cdot f(6)$

pero $f(6) \cdot f(11) \geq f(2) > 0$ de aquí que $f(13) \cdot f(4) \geq [f(7)]^2$.

160. Hay que mostrar que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x + 4k) = f(x)$

$f(x + 4k) = f[(x + 3k) + k] = -f[(+ 3k - k] = -f(x + 2k) = f[(x + k) + k] = -f[(x + k) - k] = -f(x)f(x + 4k) =$
$= -f(x + 2k) = -[-f(x)] = f(x)$.

$\therefore$ $f(x + 4k) = f(x)$, entonces f es una función periódica de período $4k$ porque se cumple para todo x real.

161. $f(x)=\dfrac{cx}{2x+3}$ entonces $f\left(f(x)\right)=f\left(\dfrac{cx}{2x+3}\right)=\dfrac{c\cdot\dfrac{cx}{2x+3}}{\dfrac{2cx}{2x+3}+3}=\dfrac{c^2x}{2cx+6x+9}=x$

$2(c + 3)x^2 - (c + 3)(c - 3)x = 0$, es decir, $(c + 3)x(2x - c + 3) = 0$

$c + 3 = 0 \Rightarrow c = -3$ o $2x - c + 3 = 0 \Rightarrow c = 2x + 3$ luego se cumple para $c = -3$.

162. f es inyectiva si para $x_1 \neq x_2$ se tiene que $f(x_1) \neq f(x_2)$

$f(x_1)=\dfrac{ax_1+b}{cx_1+d}$ y $f(x_2)=\dfrac{ax_2+b}{cx_2+d}$ ahora, si $f(x_1) \neq f(x_2)$, entonces $\dfrac{ax_1+b}{cx_1+d}\neq\dfrac{ax_2+b}{cx_2+d}$ haciendo los cálculos correspondientes, se llega a probar que se cumple que $\dfrac{a}{b}\neq\dfrac{c}{d}$.

163. a) $3ax^2 + 2bx + c = (mx + n)^2 \Rightarrow \left(\sqrt{3ax}\right)^2 \pm 2\left(\sqrt{3a}\cdot\sqrt{3c}\right)x+\left(\sqrt{c}\right)^2$

$= \left(\sqrt{3ax}\right)^2 \pm 2\left(\sqrt{3a}\cdot\sqrt{3c}\right)x+\left(\sqrt{c}\right)^2=\left(\sqrt{3ax}\pm\sqrt{c}\right)^2$

por lo que $b=\sqrt{3ac}$ o $b=-\sqrt{3ac}$.

b) Si f pasa por $(0;0)$ y $c = 3$, entonces $f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x$ se tiene $\sqrt{3a}x\pm\sqrt{c}=0$ y como $c = 3$ entonces $x=\pm\dfrac{\sqrt{a}}{a}$, luego $ax^3 + bx^2 + 3x = x$, para $x \neq 0$ se llega a la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + 2 = 0$ que se satisface para $x=-\dfrac{\sqrt{a}}{a}$ que es el punto donde la pendiente no es positiva.

164. Si consideramos los gráficos de las dos funciones, el gráfico de $y = \cos x$ está acotado entre -1 y 1, por lo que los puntos de intersección pueden estar solamente para valores $-1 \leq y \leq 1$.

Si $y = -1$, $\log_{3\pi}x = -1$ y $x=(3\pi)^{-1}=\dfrac{1}{3\pi}$; si $y = 1$, $\log_{3\pi}x = 1$ y $x = 3\pi$.

Dado que todos los puntos de intersección están entre los puntos $\left(1;\dfrac{1}{3\pi}\right)$ y $(3\pi;1)$. Hay tres puntos de intersección.

165. $f(x)$ = sen $x \cdot$ cos $x \cdot$ cos $2x \cdot$ cos $4x \cdot$ cos $8x \cdot$ cos $16x$ $=\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdot\cos 8x\cdot\cos 16x$

$=\frac{1}{4}\operatorname{sen}4x\cdot\cos 4x\cdot\cos 8x\cdot\cos 16x$ y así, hasta llegar a sen $32x$ pero $-1 \le$ sen $32x \le 1$ luego el mínimo valor de f es $-\frac{1}{32}$ y el valor máximo $\frac{1}{32}$.

166. De $(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^3$ haciendo las transformaciones correspondientes se llega a

$\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x = 1-3\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x\right)^2 = 1-\frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 2x$ pero $0 \le \operatorname{sen}^2 2x \le 1$.

$\therefore$ el mínimo valor de f es $\frac{1}{4}$ y el máximo valor es 1.

167. a) Si $f(n) = 1$ entonces $1\le\frac{1\,986}{n^2}<2$ y $n^2 \le 1\,986 < 2n^2$ de aquí $n\le\sqrt{1\,986}$ entonces $n = 44, 43, 42, ...,$

por otro lado $1\,986 < 2n^2$; $n^2 > 993$ y $n>\sqrt{993}$ y
$n = 32, 33, ...,$ por lo que $n = 32, 33, 34, ..., 43, 44$.

b) Si $f(n) = f(n + 1)$, entonces $\left[\frac{1986}{n^2}\right]=\left[\frac{1986}{(n+1)^2}\right]$. El 32 porque a partir de 45, $f(n) = 0$ y para $n < 32$ no hay ningún valor natural que cumpla la igualdad.

c) Para n natural y $0 < n \le 31$ se tienen 31 valores diferentes, para $32 \le n \le 44$ existe un solo valor, para $n \ge 45$ también hay un solo valor. Se obtienen en total 33 valores diferentes de $f(n)$.

168. De $f(x + 1) \cdot f(x) + f(x + 1) + 1 = 0$, tenemos $f(x + 1)[f(x) + 1] + 1 = 0$ (1) deducimos que $f(x) \ne 0$ (2) y $f(x) \ne -1$ (3). Supongamos que f es continua, entonces de (2) y (3) hay tres posibilidades:

i) Si $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Escribiendo (1) como $f(x + 1)[f(x) + 1] = -1$ (4) vemos que $f(x + 1) > 0 \Rightarrow f(x) < -1$ lo cual indica que (i) no puede ocurrir.

ii) Si $-1 < f(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \Rightarrow |f(x + 1)| < 1$ y $|f(x) + 1| < 1$, que contradice (4).

iii) Si $f(x) < -1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De (4) vemos que $f(x) < -1 \Rightarrow f(x + 1) > 0$, de esta manera tampoco se cumple (4), por lo que f es discontinua.

169. $$f(x)=\frac{\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^3\right]^2-\left(x^6+2+\frac{1}{x^6}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)\right]\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)\right]}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)}$$

$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=3\left(x+\frac{1}{x}\right)$ pero $x+\frac{1}{x}\ge 2$ para todo $x\in\mathbb{R}_+^*$ por lo que el valor mínimo se cumple cuando $x+\frac{1}{x}=2$, o sea, para $x = 1$ y el valor mínimo es 6.

170. a) Como $x - [x] \neq 0$ entonces dom f : $\mathbb{R} \setminus \{k\}$ con k entero.

b) No tiene ceros porque el único cero del numerador es para $x = 0$, pero 0 no pertenece al dominio.

c) Es discontinua en $x_0 = k$ con k entero. No existe ningún punto de discontinuidad evitable.

171. $f(x) = \dfrac{9x^2\text{sen}^2 x + 4}{x\,\text{sen}\, x} = 9x\,\text{sen}\, x + \dfrac{4}{x\,\text{sen}\, x}$ pero se tiene que

$$\frac{9x\,\text{sen}\, x + \dfrac{4}{x\,\text{sen}\, x}}{2} \geq \sqrt{9x\,\text{sen}\, x \cdot \frac{4}{x\,\text{sen}\, x}};\ \frac{9x^2\text{sen}^2 x + 4}{2x\,\text{sen}\, x} \geq \sqrt{36} = 6 \ \text{ entonces } \ \frac{9x^2\text{sen}^2 x + 4}{x\,\text{sen}\, x} \geq 12.$$

$\therefore$ el valor mínimo de f es 12.

172. Haciendo $t = x + 1$, tendremos $x = t - 1$ y sustituyendo en la ecuación dada, resulta

$f(t) = (t - 1)^2 - (t - 1) + 2 = t^2 - 5t + 6$ y la ecuación f está dada por la ecuación:

$f(x) = x^2 - 5x + 6$.

173. Hagamos la sustitución $t = \dfrac{x}{x+1}$ de lo que resulta $x = \dfrac{t}{1-t}$ y la función buscada está definida por

$f(x) = \dfrac{x^2}{(1-x)}$ con $x \neq 1$.

174. Haciendo $t = x + \dfrac{1}{x}$ tenemos $t^2 = x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2}$ de donde $t^2 - 2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ y sustituyendo en la ecuación original, queda: $f\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ y $f(t) = t^2 - 2$ por lo que la función buscada está dada por la ecuación $f(x) = x^2 - 2$.

175. Sea $t = \dfrac{1}{x}$, tenemos $x = \dfrac{1}{t}$ y sustituyendo en la ecuación original, resulta:

$f(t) = \dfrac{1}{t} + \dfrac{\sqrt{t^2+1}}{-t}$ de donde $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{x^2+1}}{x}$.

176. Si hacemos $x = 2$ en (i), resulta: $f(2^y) = 8^y$; $f(2^y) = (2^y)^3$. Haciendo $t = 2^y$, $t > 0$, de (ii) se obtiene: $f(t) = t^3$ con $t > 0$ por lo que $f(x) = x^3$.

177. De la ecuación original se tiene $f^2(x) - 2f(x) + 1 = \dfrac{1-x^4}{x^4} + 1$; $(f(x) - 1)^2 = \dfrac{1}{x^4}$;

$f(x) - 1 = \dfrac{1}{x^2}$, como $f(x) \leq 1$ entonces $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$.

178. Hagamos la sustitución x por $-x$, obtenemos $f(-x) - 2f(x) = -x$. Por otro lado se tiene $f(x) - 2f(-x) = x$, eliminando $f(-x)$ de las ecuaciones resulta $-3f(x) = -x$ y $f(x) = \frac{x}{3}$.

179. Hagamos la sustitución x por $\frac{1}{x}$, resulta $f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=3\cdot\frac{1}{x}$. Eliminando $f\left(\frac{1}{x}\right)$ de la ecuación dada y de la obtenida, tendremos $-3f(x) = 3x - \frac{6}{x}$ por lo que $f(x) = \frac{2-x^2}{x}$.

Para demostrar que la ecuación $f(x) = -f(-x)$ es válida solo para dos números reales, la resolveremos teniendo en cuenta que $f(x) = \frac{2-x^2}{x}$;

$f(x) = f(-x)$ entonces $\frac{2-x^2}{x}=\frac{2-(-x)^2}{-x}$ que se satisface para $x=\pm\sqrt{2}$.

$\therefore$ la ecuación $f(x) = f(-x)$ admite exactamente dos soluciones.

180. Si en (i) sustituimos x por $\frac{1}{x}$, obtenemos $\left(\frac{1}{x}+1\right)-f\left(\frac{1}{x}\right)=1-f(x)$. Ahora podemos formar un sistema de ecuaciones tomando esta última ecuación y la ecuación original

(1) $(x + 1)\cdot f(x) = 1 - f\left(\frac{1}{x}\right)$; (2) $1-f(x)=\left(\frac{1}{x}+1\right)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$. Multiplicando (1) por $\left(\frac{1}{x}+1\right)$, obtenemos:

(1) $\left(\frac{1}{x}+1\right)(x+1)\cdot f(x)=\left(\frac{1}{x}+1\right)-\left(\frac{1}{x}+1\right)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$

(2) $1-f(x)=\left(\frac{1}{x}+1\right)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Sumando (1) y (2) y despejando, obtenemos: $f(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$. Esta función también satisface (ii) por lo que es la función buscada.

181. La ecuación funcional dada $P(x^2 - y^2) = P(x + y)P(x - y)$ (1) es equivalente a la ecuación funcional $P(uv) = P(u)P(v)$ (2) con el cambio de variables $u = x + y$ y $v = x - y$, para todos $u, v \in \mathbb{R}$.

Poniendo $u = v = 0$ en (2) se obtiene $P(0) = (P(0))^2$, de donde $P(0) = 1$ o $P(0) = 0$. Sea $P(0) = 1$, haciendo $v = 0$ en (1) se deduce que $P(0) = P(u)P(0)$ para todo $u \in \mathbb{R}$, es decir, $P(u) \equiv 1$. Sea ahora $P(0) = 0$. Entonces $P(u) = uQ(u)$, siendo $Q(u)$ un polinomio de grado una unidad inferior al grado de $P(u)$. Fácilmente se comprueba que $Q(u)$ satisface la ecuación funcional (2). Por tanto, $P(u) = u^n$ con $n \in \mathbb{N}$.

Recíprocamente se comprueba sin dificultad que $P(x) \equiv 1$ y $P(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$ satisfacen la ecuación funcional inicial (1).

También puede hacerse sin el cambio de variable haciendo $x = y = 0$ se llega a $P(0) = (P(0))^2$. Además, está la solución trivial $P(x) \equiv 0$.

182. Sea x un punto del plano y formemos un heptágono regular $x_1^1 = x$, x_2^1, ..., x_7^1.

Construimos otros seis heptágonos x_1^k, ..., x_7^k, girando este heptágono un ángulo $\frac{2(k-1)\pi}{7}$, $k = 2, ..., 7$ en torno a x. Entonces $f(x_1^k) + ... + f(x_7^k) = 0$, $k = 1, ..., 7$ (1)

Por otro lado $x = x_i^1 = x_i^2 = ... = x_i^7$. Y para $i > 1$, los puntos $x_i^1, x_i^2, ..., x_i^7$ forman un heptágono regular. Por tanto, $f(x_i^1) + ... + f(x_i^7) = 0$, $i = 2, ..., 7$ (2)

Sumando (1) para los valores $k = 1, ..., 7$ y restando (2) para los valores $i = 2, ..., 7$, obtenemos que $7f(x) = 0$, de donde $f(x) = 0$.

183. Sustituyamos x por $1 - x$, tenemos

$$f(1-x) + 3f(x) = 2(1-x)^2 + (1-x) - \frac{5}{2} = 2x^2 - 5x + \frac{1}{2}.$$

Ahora, $3f(1-x) + 9f(x) = 6x^2 - 15x + \frac{3}{2}$.

Sustrayendo la ecuación original de esta, tenemos $8f(x) = 4x^2 - 16x + 4$, obteniendo $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}$. Chequeando esta solución para determinar si es válida o no se tiene

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2} + 3\left(\frac{1}{2}(1-x)^2 - 2(1-x) + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 3x^2 - 6 + 6x + \frac{3}{2} = 2x^2 + x - \frac{5}{2}.$$

184. Sea $m = 0$, $f(n + f(0)) = f(n) + 1$. Pongamos $f(0) = k$ y supongamos que $k \leq 2$

$f(n) < f(n + 1) < f(n + 2) \leq f(n + k) = f(n) + 1$ por a) lo cual es una contradicción, pues las imágenes pertenecen a $\mathbb{Z} \Rightarrow f(n)$ y $f(n + 1)$ no pueden existir otros valores, por tanto, $k = 0$ o $k = 1$. Si $k = 0$, $f(n) = f(n) + 1$, lo cual es imposible.

Si $k = 1$, $f(n + 1) = f(n) + 1$; así

$f(1) = f(0) + 1 \Rightarrow f(1) = 2$

$f(2) = f(1) + 1 \Rightarrow f(2) = 3$

.

.

.

$f(x) = f(x - 1) + 1$, luego

$f(x) = x + f(0)$

$f(x) = x + 1$

Comprobando: MI: $f(n + f(m)) = f(n + m + 1) = n + m + 2$

MD: $f(n) + m + 1 = n + 1 + m + 1 = n + m + 2$

Por tanto, $f(x) = x + 1$ y $f(2\,003) = 2\,004$.

185. Si f es estrictamente positiva o negativa no cumple la condición dada, por tanto:

$D > 0$, es decir, $b^2 - 4ac > 0$. Luego f tiene dos ceros, sean estos x_1 y x_2.

Si $f(x) \cdot f(x+1) < 0$ y $f(x) \cdot f(x-1) < 0$, entonces $|x_1 - x_2| < 1$ y el intervalo que se considerará es el formado por los ceros. Por tanto, se debe cumplir.

$$\left|\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\left(\frac{-b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right|<1$$

$$\left|\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}\right|<1$$

$b^2 - 4ac < |a|^2$.

El conjunto de funciones cuadráticas que cumplen la condición pedida, son las que sus coeficientes a, b y c cumplen la condición $0 < b^2 - 4ac < |a|^2$.

186. No es posible. En cada sesión debe nadar un número impar de kilómetros y la suma de un número par de impares es par, por lo que nunca podrá ser 35.

187. Sean $n = abc = c + 10b + 100a$ y $m = cba = 100c + 10b + a$ entonces $2m + S = n$ nos da: $200c + 20b + 2a + (a + b + c) = 100a + 10b + c$, es decir, $200c + 11b - 97a = 0$. Por lo tanto, $200c - 97a$ es múltiplo de 11. Módulo 11: $2(c + a)$ es 0, y como mcd (2,11) = 1, resulta que $a + c$ es congruente con 0 módulo 11. Módulo 9: $2(c + a + b)$ congruente con 0, y $c + a + b$ congruente con 0. Por la primera congruencia, $c + a = 0$, o bien $c + a = 11$. Si $c + a = 0$, entonces $a = c = 0$ y no hay solución por ser números de tres cifras. Si $c + a = 11$, entonces $b = 7$. Por lo tanto, $200c - 97a$ es múltiplo de 7.

Trabajando módulo 7: $4c + a$ es congruente con 0 módulo 7, es decir; $4c + a = 0, 7, 14, 21, 28, 35, 42$. Como $a + c = 11$, tenemos que $3c$ debe tomar uno de los valores $-11, -4, 3, 10, 17, 24$ o 31 y ser múltiplo de 3. Luego $c = 1$ o $c = 8$.

Si $c = 1$, entonces $a = 10$, imposible.
Si $c = 8$, $a = 3$. Pero $n = 378$ no es solución y no existen números con las condiciones pedidas.

188. El número es 857.

189. El número es 3 762.

190. Como $2\,001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$, debemos sumar todas las fracciones de la forma $\frac{k}{2\,001}$, donde k es un entero positivo menor que 2 001, que no es divisible ni por 3, ni por 23, ni por 29. Ahora bien la suma de todas las fracciones menores que uno de denominador 2 001 es igual a 1 000. A su vez, la suma de dichas fracciones con un numerador divisible por 3 es igual a 333, la suma de las fracciones con numerador divisible por 23 es igual a 43, la suma de las fracciones con numerador divisible por 29 es igual a 34, la suma de las fracciones con numerador divisible por $3 \cdot 23 = 14$, la suma de las fracciones con numerador divisible por 329 es igual a 11 y, finalmente, la suma de las fracciones con numerador divisible por $23 \cdot 29 = 1$. Con esto y considerando que cuando se restan las fracciones de numerador divisible por 3 y las de numerador divisible por 23 se restan dos veces las de numerador divisible por $3 \cdot 23$, etc., se tiene que la suma de fracciones pedidas es igual a: $1\,000 - (333 + 43 + 34) + (14 + 11 + 1) = 616$.

191. El número k tiene 494 factores 2.

192. Si representamos los elementos de la primera fila por a_0, a_1, a_2, ...
los elementos de la segunda serán: $a_0 + a_1$, $a_1 + a_2$, $a_2 + a_3$, ...

los de la tercera serán: $a_0 + 2a_1 + a_1$, $a_1 + 2a_2 + a_3$, ...
para la cuarta: $a_0 + 3a_1 + 3a_1 + a_1$, $a_1 + 3a_2 + 3a_3 + a_4$, ...
Supongamos que los dos primeros elementos $b_{p,0}$ y $b_{p,1}$ de la fila p-ésima son:

$$b_{p,0} = \binom{p-1}{0}a_0 + \binom{p-1}{1}a_1 + \ldots + \binom{p-1}{p-1}a_{p-1}\,;\; b_{p,1} = \binom{p-1}{0}a_1 + \binom{p-1}{1}a_2 + \ldots + \binom{p-1}{p-1}a_p$$

entonces, el primer elemento de la fila siguiente será:

$b_{p+1,0} = \binom{p}{0}a_0 + \binom{p}{1}a_1 + \ldots + \binom{p}{p}a_p$ en nuestro caso la primera fila tiene 1 994 elementos, la segunda 1 993, ... y la última corresponde a $p + 1 = 1\,994$ y su único elemento será:

$$b_{1\,994} = \binom{1\,993}{0}\cdot 0 + \binom{1\,993}{1}\cdot 1 + \ldots + \binom{1\,993}{1\,993}\cdot 1\,993.$$

Al ser 1 993 primo, $\binom{1\,993}{k}$ es múltiplo de 1 993 para todo k menor que 1 993 y, por tanto, $b_{1\,993}$ es múltiplo de 1 993.

193. Sean a_1, a_2, a_3, ..., a_{14} los números que he escrito y $S = \sum_{i=1}^{14} a_i$.

a) Se dice que para cada i, $S - a_i = 3b_i$; siendo b_i la suma de cada grupo obtenido al quitar a_i. Así pues: $S - a_1 = 3b_1$, $S - a_2 = 3b_2$, ..., $S - a_{14} = 3b_{14}$.
Sumando estas igualdades, llegamos a $14S - S = 3(b_1 + b_2 + \ldots + b_{14}) \Rightarrow 13S = 3T$
$\Rightarrow \frac{T}{13S}$ y como 13 es primo, $\frac{T}{S}$, así que $S = 3c$ con c entero.
Escribiendo ahora $S - a_i = 3b_i$; como $3c - a_i = 3b_i$, sigue que cada a_i es múltiplo de 3.

b) Hemos probado que cada $\frac{a_i}{3}$ es un número entero, llamémosle d_i. Trabajemos ahora con estos nuevos catorce enteros. $\sum_{i=1}^{14} d_i = \frac{S}{3}$. Para cada i, $\frac{S}{3} - d_i = \frac{S}{3} - \frac{a_i}{3} = \frac{S - a_i}{3} = \frac{3b_i}{3}$. Así pues, quitando cada d_i, puedo agrupar, los restantes en 3 montones de igual suma, con lo que cada d_i es múltiplo de 3 (siguiendo el argumento de a). Esto nos lleva a que $\frac{a_i}{3^2}$ es múltiplo de 3. Reiterando este proceso, llegamos a que para cada $k \in \mathbb{N}$, $\frac{a_i}{3^k}$ es múltiplo de 3, con lo que la única salida es que $\frac{a_i}{3^k} = 0 \Rightarrow a_i = 0$ para cada i, de donde no es posible que algún a_i no sea 0.

194. a) Cualquiera sea la cantidad de veces que se tome 2 004 a continuación de 2 004 para obtener M, como $2 + 0 + 0 + 4 = 2 \cdot 3$ es múltiplo de 3 y como este número M termina en cifra par, es divisible por 2, entonces M siempre es divisible por 6. Tendremos que analizar bajo qué condiciones es divisible por 11. En 2 004, tenemos que la diferencia de la suma de lugares impares con la suma de los lugares pares es 2, luego al tomar $11k$ veces 2 004 a continuación de 2 004 los números M que resultan son divisibles por 11 y como lo son por 6, serán divisibles por 66. Como $2\,005 \equiv 3(\text{mód } 11)$, entonces cuando n = 2 005 el número M que resulta no es divisible por 11, entonces no es divisible por 66.

b) Según el inciso a) el valor mínimo de n es 11.

c) $2\,004 = 2^2 \cdot 3 \cdot 167$ entonces la cantidad de divisores de 2 004 es

$(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 12$

$2\,005 = 5 \cdot 401$ entonces la cantidad de divisores de 2 005 es

$(1 + 1) \cdot (1 + 1) = 4$ y $12 - 4 = 8$ luego 2 004 tiene 8 divisores más que 2 005.

195. $a \cdot b + 1$ es un cuadrado perfecto

$a = 1\underbrace{1...1}_{m}1$ y $b = 10\underbrace{0...0}_{m-1}05.$

Ejemplos

$a \cdot b + 1 = 11...11 \cdot 100...005 + 1$ — $a = 11 \quad b = 105$

$= 1\underbrace{1...1}_{m}1 \; (9\underbrace{9...9}_{m}9 + 6) + 1$ — $11 \cdot 105 + 1 = 34^2$

$= 1\underbrace{1...1}_{m}1 \, (9 \cdot 1\underbrace{1...1}_{m}1 + 6) \; + 1$ — $a = 111 \quad b = 1\,005$

$= 9 \cdot \; (1\underbrace{1...1}_{m}1)^2 + 6 \cdot 1\underbrace{1...1}_{m}1 + 1$ — $111 \cdot 1\,005 + 1 = 334^2$

$= 3^2 \cdot \; (1\underbrace{1...1}_{m}1)^2 + 2 \cdot 3 \cdot 1\underbrace{1...1}_{m}1 + 1$

$= (3 \cdot 1\underbrace{1...1}_{m}1)^2 + 2 \cdot (3 \cdot 1\underbrace{1...1}_{m}1) + 1$

$= (3\underbrace{3...3}_{m}3)^2 + 2 \cdot (3\underbrace{3...3}_{m}3) + 1$

$= (3\underbrace{3...3}_{m}3 + 1)^2$

$= (3\underbrace{3...3}_{m-1}4)^2$

las cifras de la raíz cuadrada son $3\underbrace{3...3}_{m-1}4$.

196. a) Un posible conjunto B es el que consta del 1, de todos los primos del conjunto A, de todos los productos que caen en A de dos de estos primos y del único producto de tres de estos primos que pertenecen a A:

$B = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, 2 \cdot 11, 2 \cdot 13, 2 \cdot 17, 2 \cdot 19, 3 \cdot 5, 3 \cdot 7, 3 \cdot 11, 3 \cdot 13, 5 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 5\}$.

Para convencernos que el conjunto dado cumple la propiedad, observemos que dados dos elementos a y b en B diferentes de 1, en las factorizaciones de a y b aparecen únicamente primos elevados a la potencia 1, y, como $a \neq b$, entonces en uno de estos aparece un primo p que no está en el otro y así, su producto ab, el primo p aparece a la potencia 1, lo cual muestra que ab no es un cuadrado perfecto. Nótese también que, $1 \cdot a = a$ no es un cuadrado perfecto. Por tanto, ningún producto de dos elementos de B es un cuadrado perfecto.

b) Observemos que un conjunto con las características pedidas deberá tener a lo más un elemento de cada uno de los conjuntos siguientes (pues en cada uno de estos el producto de cualesquiera dos elementos es un cuadrado): $\{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$, es decir, los cuadrados, $\{2, 8, 18, 32\}$, los de la forma $2x^2$; $\{3, 12, 27\}$, los de la forma $3x^2$; $\{5, 20\}$, los de la forma $5x^2$; $\{6, 24\}$, los de la forma $6x^2$; $\{7, 28\}$, los de la forma $7x^2$; $\{10, 40\}$, los de la forma $10x^2$.
Entonces, para formar un conjunto B con las condiciones pedidas, habrá que empezar por eliminar todos menos, tal vez, uno de los elementos de cada uno de esos conjuntos, y el conjunto buscado tendrá como máximo $40 - 5 - 3 - 2 - 1 - 1 - 1 - 1 = 26$ elementos. Por tanto, no puede existir un conjunto con 27 elementos que cumpla lo que se pide en el inciso a.

197. $a_1 = 3$ y $a_{n+1} = a_n + a_n^2 = a_n(1 + a_n)$. Escribimos los primeros términos de la sucesión: 3, 12, 156, 24 492, ..., 56, ...

Supongamos que a_n termina en 56, entonces $a_n = 100a + 56$, y tenemos

$a_{n+1} = (100a + 56)(100a + 57) = 100b + 56 \cdot 57 = 100b + 100c + 92 = 100d + 92$, es decir, las últimas cifras de a_{n+1} son 92. Análogamente, si a_n termina en 92, se prueba que a_{n+1} termina en 56. Como 2 000 es par, entonces $a_{2\,000}$ termina en 92.

198. Sean n un número que verifica el enunciado y s la suma de sus cifras.
Como $1\,000 \le n \le 9\,999$ y $n = s^3$, resulta $11 \le n \le 21$ (1).
Si $n = xyzt$, tenemos $1\,000x + 100y + 10z + t = s^3$ y $x + y + z + t = s$ (2)
Restando queda $999x + 99y + 9z = s^3 - s$ (3) cuyo segundo miembro ha de ser múltiplo de 9 (por serlo el primero) y, habida cuenta de que $s^3 - s = (s - 1)s(s + 1)$ y por (1), solo hay tres valores de $s^3 - s$ que son múltiplos de 9: $16 \cdot 17 \cdot 18$; $17 \cdot 18 \cdot 19$ y $18 \cdot 19 \cdot 20$ que al sustituir en (3) y analizar cada caso.

1) $999x + 99y + 9z = 16 \cdot 17 \cdot 18 \Leftrightarrow 111x + 11y + z = 544$ resulta de inmediato $x = 4$, $y = 9$, $z = 1$, valores que llevados a (2) con $s = 17$ se obtiene $t = 3$ y finalmente $n = 4\,913$.

2) $999x + 99y + 9z = 17 \cdot 18 \cdot 19 \Leftrightarrow 111x + 11y + z = 646$ de donde $x = 5$, $y = 8$, $z = 3$, $s = 18$, $t = 2$, $n = 5\,832$.

3) $999x + 99y + 9z = 18 \cdot 19 \cdot 20 \Leftrightarrow 111x + 11y + z = 760$ resulta $x = 6$, $y = 8$, $z = 6$, $s = 19$ lo que es una contradicción. Por lo que las únicas soluciones son 4 913 y 5 832.

199. Se tiene $\dfrac{a+1}{b} + \dfrac{b+1}{a} = \dfrac{a^2 + b^2 + a + b}{ab}$. Sea $d = \text{mcd}(a,b)$. Como ab es divisible por d^2, entonces $a^2 + b^2 + ab$ es divisible por d^2 y también lo son $a^2 + b^2$ y $a + b$, como a y b son naturales, se tiene $a + b \ge d^2 \Leftrightarrow \sqrt{a+b} \ge d$.

200. La fracción $\dfrac{a}{b}$ es irreducible si y solo si $\dfrac{a}{b-a}$ es irreducible (si a y b tienen un factor común, entonces a y $b - a$ tienen un factor común y recíprocamente). El problema se transforma en hallar el menor valor de n tal que las fracciones $\dfrac{19}{n+21}, \dfrac{20}{n+2}, \dfrac{21}{n+23}, \ldots, \dfrac{91}{n+93}$ sean irreducibles.

Si $n + 2$ es primo mayor que 91, todas las fracciones son irreducibles. Un valor posible es 95. Verifiquemos que es el menor posible.

Si $n + 2 < 97$ y $n + 2$ es par (n es par), hay fracciones reducibles.

Si $19 \le n + 2 \le 94$, obviamente hay una fracción irreducible.

Si $n + 2 < 19$, entonces $n + 2$ tiene un múltiplo común entre 19 y 94 y, por tanto, hay una fracción reducible.

Si $n + 2 = 93$, entonces la fracción de numerador 31 es reducible.

Si $n + 2 = 95$, entonces la fracción de numerador 19 es reducible.

Luego el valor mínimo de $n + 2$ es 97 que corresponde a $n = 95$.

201. Sea A el producto de dos números enteros positivos consecutivos.
Es decir, $A = x(x + 1)$ con $x \in \mathbb{Z}$. Observemos que si x es par, tenemos que

$(x - 2)x < x(x + 1) < x(x + 2) \Rightarrow (x - 2)x < A < x(x + 2)$

Si x es impar, tenemos que $x + 1$ es par y

$(x - 1)(x + 1) < x(x + 1) < (x + 1)(x + 3) \Rightarrow (x - 1)x(x + 1) < \mathrm{A} < (x + 1)(x + 3)$

Analizando los casos tenemos que A está entre dos productos consecutivos de dos enteros pares consecutivos positivos. Luego concluimos que no es posible que el producto de dos enteros positivos consecutivos sea igual al producto de dos enteros positivos consecutivos pares.

202. Tomemos $m + 2\,001 \cdot S(m) = 2m \Leftrightarrow 2\,001 \cdot S(m) = m$. De esta forma m es divisible por 3 y consecuentemente $S(m)$ también lo es.
Luego $S(m) = 3k$ para algún k entero y $m = 2\,001 \cdot 3\mathrm{k} = 9 \cdot 667k$ es divisible por 9. De esta forma 9 divide a $S(m)$. Sea n el número de cifras de m, tenemos que $S(m) \le 9n$ (cada cifra es menor o igual que 9), asimismo $2\,001 \cdot S(m) \le 18\,009n \Leftrightarrow m \le 18\,009n$.
Como $m \ge 100...0 = 10^n$ luego $10^n \le 18\,009n$.
Esta última desigualdad solo es válida para $n \le 6$. Asimismo $S(m) \le 9 \cdot 6$.
Como $S(m)$ es divisible por 9, tenemos $S(m) = 9 \cdot 18 \cdot 27 \cdot 36 \cdot 45$ o 54. Tenemos entonces:

$\mathrm{S}(m) = 9 \Rightarrow m = 9 \cdot 2\,001 = 18\,009$ lo que no es posible, pues $1 + 8 + 0 + 0 + 9 = 18$.

$\mathrm{S}(m) = 18 \Rightarrow m = 18 \cdot 2\,001 = 36\,018$.

$\mathrm{S}(m) = 27 \Rightarrow m = 27 \cdot 2\,001 = 54\,027$, lo que no es posible, pues $5 + 4 + 0 + 2 + 7 = 18$.

$\mathrm{S}(m) = 36 \Rightarrow m = 36 \cdot 2\,001 = 72\,036$, lo que no es posible, pues $7 + 2 + 0 + 3 + 6 = 18$.

$\mathrm{S}(m) = 45 \Rightarrow m = 45 \cdot 2\,001 = 90\,045$, lo que no es posible, pues $9 + 0 + 0 + 4 + 5 = 18$.

$\mathrm{S}(m) = 54 \Rightarrow m = 54 \cdot 2\,001 = 108\,054$, lo que no es posible, pues $1 + 0 + 8 + 0 + 5 + 4 = 18$.

Luego la única solución es $n = 36\,018$.

203. Para este problema usaremos el teorema de Bezout. Sea S el conjunto de enteros x tales que $\frac{x}{m}\binom{m}{n}$ sea entero. m está en S, ya que los coeficientes binomiales son enteros. También n está en S, pues $\frac{n}{m}\binom{m}{n} = \frac{n}{m}\frac{m!}{(m-n)1n!} = \binom{m-1}{n-1}$. Por otro lado notemos que si x, y estuvieran en S, entonces $ux + vy$ también estarían en S, cualesquiera que sean u y v enteros. De este modo $\frac{ux+vy}{m}\binom{m}{n} = u \cdot \frac{x}{m}\binom{m}{n} + v \cdot \frac{y}{m}\binom{m}{n}$ es un entero. Como el mcd(m,n) puede ser escrito de la forma $mu + nv$, para algún par de enteros u y v, sigue que mcd(m,n) está en S.

204. Sean a_1, a_2, ..., a_k las cifras de n y $S(n)$ la suma de sus cifras, entonces

$44n = 40(a_1a_2 ...a_k) + 4(a_1a_2 ...a_k) = 4(a_1a_2 ...a_k)(10 + 1)$ luego si las cifras de $44n$ fueran $4a_1(4a_2 + 4a_1)(4a_3 + 4a_2)...(4a_k + 4a_{k-1})$ y $4a_k$, tendremos $S(44n) = 8(a_1 + a_2 + ... + a_k) = 800$. Asimismo si hubiera algún vacío, la suma de las cifras de $44n$ caería. De este modo todas las cifras de n son menores o iguales que 2 donde las cifras de $3n$ son $3a_1 \cdot 3a_2 \cdot ... \cdot 3a_k$.

Asimismo $S(3n) = 3a_1 + 3a_2 + ... + 3a_k = 3S(n) = 300$.

205. Ante todo observemos lo siguiente:

a) Dado $2k = (1 + 1)k$ y $2k + 1 = (1 + 1)k + 1$, $f(2k) \le f(k) + 2$ y $f(2k + 1) \le f(k) + 3$;

b) $3 < 5\log_3 2 \Leftrightarrow 3^3 < 2^5$.

$f(2) < 5\log_3 2 \Leftrightarrow 2 < 5\log_3 2 \Leftrightarrow 3^2 < 2^5$; $f(3) < 5\log_3 3 \Leftrightarrow 3 < 5\log_3 3 \Leftrightarrow 3 < 5$.

Supongamos nuestra proposición cierta para todos los enteros mayores o iguales que 2 y menores que n ($n \ge 4$), tenemos que si n es par, $n = 2k$, ($2 \le k < n$) y si n es impar,

$n = 2k + 1$, ($2 \le k < n$). Consecuentemente

$f(n) \le f(k) + 3 < 5\log_3 k + 3 < 5\log_3 k + 5\log_3 2 = 5\log_3 2k \Rightarrow f(n) < 5\log_3 n$, con lo cual se completa nuestra demostración.

206. Primero observemos que todos los números con sus tres cifras iguales son equilibrados.

Notemos también que si *abc* es equilibrado, también lo son *acb*, *bac*, *bca*, *cab* y *cba* en total los números equilibrados de cifras diferentes aparecen de 6 en 6 y si un número equilibrado tiene dos cifras iguales, necesariamente la tercera también lo es.

Si *abc* es equilibrado con $c = (a + b) : 2$, entonces a y b son de la misma paridad.

Construimos ahora los números equilibrados siguiendo un orden, primero los que tienen la primera cifra igual a 1, después cuando es 2, y así sucesivamente.

132, 153, 174, 195, 243, 264, 285, 354, 375, 396, 465, 486, 576, 597, 687, 798.

Por la observación anterior, estos 16 números generan 96 números y con los 9 primeros los de las tres cifras iguales dan los 105 números equilibrados.

207. Sean a, b y c enteros no negativos tales que a^2 es la población original, $b^2 + 1$ la población después del primer aumento y c^2 la población después del segundo. Entonces tenemos que: $a^2 + 100 = b^2 + 1$ y $b^2 + 101 = c^2$

$c^2 - a^2 = 200 \Rightarrow (c + a)(c - a) = 200$.

La descomposición de 200 en factores primos es $200 = 2^3 \cdot 5^2$, considerando entonces los divisores de 200 y que $c + a \ge c - a$, tenemos que:

$c + a = 200$ $c - a = 1 \Rightarrow c$ no es entero.
$c + a = 100$ $c - a = 2 \Rightarrow c = 51$ y $a = 49$.
$c + a = 50$ $c - a = 4 \Rightarrow c = 27$ y $a = 23$.
$c + a = 40$ $c - a = 5 \Rightarrow c$ no es entero.
$c + a = 25$ $c - a = 8 \Rightarrow c$ no es entero.
$c + a = 20$ $c - a = 10 \Rightarrow c = 15$ y $a = 5$.

Analicemos ahora los casos 2, 3 y 6.

El segundo caso cumple las otras condiciones del problema, a saber,

$49^2 + 100 = 50^2$ y $50^2 + 101 = 51^2$.

En el tercer caso, $c = 27$ y $a = 23$ tenemos que $23^2 + 100 - 1$ no es un cuadrado perfecto. Igualmente, el último caso $25 + 100 - 1$ no es un cuadrado perfecto. Por lo tanto, la población original era $49^2 = 2\,401$.

208. Como el número es cuadrado perfecto y cubo perfecto, es una sexta potencia de un entero, es decir, $n = a^6$ con a entero.
Los únicos enteros a para los cuales a^6 tiene 6 cifras son 9, 8, 7, pues 10^6 tiene 7 cifras y 6^6 tiene 5. De esta forma, el número buscado es 9^6, 8^6 o 7^6. Pero $9^6 - 6 = 3(3 \cdot 9^5 - 2)$ que no es primo, de la misma forma $8^6 - 6$ es un número par luego no es primo,
veamos $7^6 - 6 = 117\ 649 - 6 = 117\ 643$ que es un número primo por lo que $n = 7^6 = 117\ 649$.

209. Como $8c + 6$ es un número par, tanto a^2 como b^2 deben ser de igual paridad y por ende, a y b deben ser de igual paridad. Ahora bien, la suma de los cuadrados de dos números pares es obviamente divisible por 4, de modo que a y b no pueden ser pares, pues 4 no divide a $8c + 6$, ya que divide a $8c$ pero no a 6. Por otra parte, si a y b son números impares, la suma de sus cuadrados es de la forma $8k + 2$, pues
$(2j + 1)2 = 4j(j + 1) + 1$ y $j(j + 1)$ es siempre par, debiendo entonces tenerse
$8k + 2 = 8c + 6$, y esto último es imposible, pues 8 no divide a 4 (= 6 – 2).
En consecuencia, la ecuación propuesta no puede ser satisfecha en enteros positivos.

210. Denotemos por $M(x,y)$ al máximo común divisor de los números x, y.

a) Sea $d = M(b,c)$ entonces $b = db_0$ y $c = dc_0$ con $M(b_0,c_0) = 1$. La igualdad dada se transforma en $c_0(adc_0 + 1)^2 = d(5c_0 + 2b_0)(2c_0 + b_0)$, observemos que $M(c_0,2c_0 + b_0) = 1$, porque b_0 y c_0 son primos relativos, y $M(c_0,5c_0 + 2b_0) = M(c_0,2b_0) = 1$, porque c_0 es un número impar primo relativo con b_0 por lo que c_0 / d, entonces $M(d,(adc_0 + 1)^2) = 1$ de donde d / c_0, de aquí que $c_0 = d$ y $c = dc_0 = d^2$ siendo c un cuadrado perfecto.

b) Asumamos que c es par, entonces $c = 2c_1$, transformando la igualdad dada, tenemos
$c_1(2ac_1 + 1)^2 = (5c_1 + b)(4c_1 + b)$. Si $d = M(b,c_1)$, entonces $b = db_0$ y $c_1 = dc_0$, con
$M(b_0,c_0) = 1$.
La igualdad se transforma en $c_0(2adc_0 + 1)^2\ d(5c_0 + b_0)(4c_0 + b_0)$.
Como $M(c_0,5c_0,b_0) = M(c_0,4c_0 + b_0) = 1$ y $M(d,(2adc_0 + 1)^2) = 1$ se tiene que $d = c_0$ y
$(2adc_0 + 1)^2 = (5c_0 + b_0)(4c_0 + b_0)$, como
$M(5c_0 + b_0,4c_0 + b_0) = M(c_0,4c_0 + b_0) = M(c_0,b_0) = 1$, concluimos que ambos factores son cuadrados perfectos, sean $5c_0 + b_0 = m^2$ y $4c_0 + b_0 = n^2$ con $m, n \in \mathbb{N}$.
Entonces $m > n$ y $m - n \geq 1$, $d = c_0 = m^2 - n^2$ y $2ad^2 + 1 = 2adc_0 + 1 = mn$.
De esta forma $mn = 1 + 2ad^2 = 1 + 2a(m^2 - n^2)^2$
$= 1 + 2a(m - n)^2(m + n)^2 \geq 1 + 2a(m + n)^2 + 8amn \geq 1 + 8mn$ obteniendo que
$7mn \leq -1$, lo cual es una contradicción.
$\therefore$ c no puede ser un número par.

211. Sea $\dfrac{n^2+9n-2}{n+11} = m \in \mathbb{N}$ pero $\dfrac{n^2+9n-2}{n+11} = (n-2) + \dfrac{20}{n+11}$.

Analicemos los divisores de 20: 1, 2, 4, 5, 10, 20 como $n + 11 > 11$ el único caso posible es $n + 11 = 20$ por lo que $n = 9$.

$\therefore$ es mayor el número de hembras que el de varones.

212. Supongamos que $x = ky$ con x, y elementos del conjunto dado, entonces $k = 2$ o $k = 3$, ya que si dividimos el mayor elemento del conjunto por el menor, se tiene

8 765 432 = 3 · 2 345 678 + 1 728 398. Supongamos que $x = 3y$, entonces x tendría que ser múltiplo de 3 y ningún número del conjunto lo es porque la suma de sus dígitos no lo es. Supongamos que

$x = 2y$, entonces $x + y = 3y$ por lo que $x + y$ sería múltiplo de 3 y eso no ocurre porque la suma de los dígitos sería igual a 2(35) = 70 que no es divisible por 3.

$\therefore$ no existe ningún número que divida a otro de ese mismo conjunto.

213. $$\frac{1}{2\,001}+\frac{2}{2\,001}+...+\frac{2\,000}{2\,001}=\frac{\frac{2\,000\cdot 2\,001}{2}}{2\,001}=1\,000.$$

Saquemos ahora todas las fracciones que no cumplan que mcd(n,2 001) = 1.

$$3\left(\frac{1}{2\,001}+\frac{2}{2\,001}+...+\frac{666}{2\,001}\right)=3\cdot\frac{\frac{666\cdot 667}{2}}{2\,001}=333$$

$667\left(\frac{1}{2\,001}+\frac{2}{2\,001}\right)=1$. La suma será 1 000 – (333 + 1) = 666.

214. Asumiendo que los cuatro dígitos sean a, b, c, d; la suma de los 24 posibles números de 4 dígitos que se forman es:

$6(1000a + 1000b + 1000c + 1000d) + 6(100a + 100b + 100c + 100d) +$
$+ 6(10a + 10b + 10c + 10d) + 6(a + b + c + d) = 6666(a + b + c + d)$.

Como la suma de los cuatro elementos en cada subconjunto varía entre 10 y 30, entonces no hay entre ellos otro divisor común, ya que, por ejemplo, la suma que da 29 no tiene divisor común con ninguna de las otras, de aquí que el mcd de todas las sumas es 6 666.

215. Nos interesa primero ubicar la posición de $4n$ con respecto a algún múltiplo de 20. Para eso basta dividir n por 5, ya que si $n = 5k + r$ $(0 \le r < 5)$, entonces $4n = 20k + 4r$.
Puesto que $0 \le 4r < 20$ resulta que $20k \le 4n$ y los sucesivos múltiplos de 20 a partir de $4n + 1$ son $20(k + 1)$, $20(k + 2)$, ... como el problema requiere que haya exactamente cuatro múltiplos de 20 entre $4n + 1$ y $5n$, deberá satisfacerse la relación

$20(k + 4) \le 5n < 20(k + 5)$ (1)

$4(k + 4) \le n < 4(k + 5)$ entonces $16 + 4k \le 5k + r < 20 + 4k$ y $16 \le k + r < 20$ (2)

Notemos que (2) es equivalente a (1), ya que basta recorrer los pasos anteriores en sentido inverso. Entonces los n que satisfacen la condición del problema son de la forma $n = 5k + r$, $16 \le k + r < 19$. Para cada valor de r hay 4 valores posibles de k, al variar r entre 0 y 4, obtenemos entonces 20 valores para n que son:

64, 68, 69, 72, 73, 74, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 85, 86, 87, 90, 91 y 95.

216. Se tiene que $A^3 = Bx$, $B^3 = Cy$, $C^3 = Az$ entonces $A=\frac{C^3}{z}\Rightarrow A^3=\frac{C^9}{z^3}=Bx\Rightarrow B=\frac{C^9}{xz^3}$

$(A+B+C)^{13}=\left(\frac{C^3}{z}+\frac{C^9}{xz^3}+C\right)^{13}=C^{13}\left(\frac{C^2}{z}+\frac{C^8}{xz^3}+1\right)$ que es divisible por C.

$C=\frac{B^3}{y}\Rightarrow C^3=\frac{B^9}{y^3}$ por lo que $A=\frac{C^3}{z}=\frac{B^9}{zy^3}$

$$(A+B+C)^{13}=\left(\frac{B^9}{zy^3}+B+\frac{B^3}{y}\right)^{13}=B^{13}\left(\frac{B^8}{zy^3}+1+\frac{B^2}{y}\right)$$ que es divisible por B

$$B=\frac{A^3}{x}\Rightarrow B^3=\frac{A^9}{x^3}=Cy\Rightarrow C=\frac{A^9}{x^3y}$$

$$(A+B+C)^{13}=\left(A+\frac{A^3}{x}+\frac{A^9}{x^3y}\right)^{13}=A^{13}\left(1+\frac{A^2}{x}+\frac{A^8}{yz^3}\right)$$ que es divisible por A.

$\therefore$ $(A + B + C)^{13}$ es divisible por $A \cdot B \cdot C$.

217. Construyamos una sucesión de soluciones $(x_i;y_i)$ de la ecuación diofántica $x^2 + y^2 + 1 = 3xy$ con $x_0 = 1$ y $1 = y_0 = x_1 < y_1 = x_2 < y_2 = ...$ Claramente $(x_0;y_0) = (1;1)$ es una solución. Supongamos que $(x_i;y_i)$ es una solución, consideremos la ecuación cuadrática $x^2 + 3xy + y_1^2 + 1 = 0$ una de sus raíces es x_i; sea r la otra raíz entonces

$r + x_i = 3y_i$ y $rx_i = y_1^2 + 1$. Nota que $r = 3y_i - x_i$ es un entero. Por otra parte, dado que

$x_i < y_i$, $r=\dfrac{y_i^2+1}{x_i}>x_i$, podemos colocar $x_{i+1} = y_i$ y $y_{i+1} = r$. Para cada solución $(x_i;y_i)$, x_i divide a $3x_iy_i$

y como $x^2 + y^2 + 1 = 3x_iy_i$, siguiendo que x_i divide a $y_i^2 + 1$ de forma similar y_i divide a $x_i^2 + 1$.

218. $(a + b)(a - b) = 1\,995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$, realizando todas las posibles combinaciones para escribir 1 995 como producto de dos números enteros y teniendo en cuenta que

$(a + b) \geq (a - b)$ se tiene

$1\,995 = 1\,995 \cdot 1 = 665 \cdot 3 = 399 \cdot 5 = 285 \cdot 7 = 105 \cdot 19 = 133 \cdot 15 = 95 \cdot 21 = 57 \cdot 35$.

Para cada caso se resuelve el sistema que se forma y se obtienen las soluciones $(a;b)$ siguientes: (998;997), (334;331), (202;197), (146;139), (62;43), (74;59), (58;37) y (46;11).

219. Sean $\overline{abb}$ un número de tres cifras y $a + 2b = 7m$, pero

$\overline{abb} = 100a + 11b = 98a + 7b + 2a + 4b = 7(14a + b) + 2(a + 2b)$. Como ambos sumandos son divisibles por 7, entonces el número $\overline{abb}$ es divisible por 7.

220. Si $n < 2\,300 \Rightarrow p^6q < 2\,300 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 23$.

Si $p = 2$, $p^6 = 64$ y $2\,300 = 35 \cdot 64 + 60$. El mayor primo menor o igual que 35 es 31 y $n = 64 \cdot 31 = 1\,984$.
Si $p = 3 \Rightarrow p^6 = 729$ y $2\,300 = 3^7 + 113$. El mayor primo menor o igual que 3 es 3 y $n = 3^6 \cdot 3 = 2\,187$.
Si $p = 5 \Rightarrow p^6 > 2\,300$.

$\therefore$ $n = 2\,187$ es el mayor número natural que satisface las condiciones dadas.

221. Para que sea divisible por 44 tiene que ser divisible por 4 y por 11, es decir, $\overline{6y} = 4m$, $m \in \mathbb{N}$ luego $y = 0, 4, 8$ y $(x + 9 + 6) - (1 + 8 + y) = 11n$, $n \in \mathbb{Z}$ entonces $x - y + 6 = 11n$.

Si $y = 0$, $x = 5$ Si $y = 4$, $x = 9$ Si $y = 8$, $x = 2$.

$\therefore$ los números que satisfacen las condiciones dadas son 219 868, 519 860 y 919 864.

222. $a^2 - b^2 = 2b + 1$ entonces $a^2 = (b + 1)^2$ y $a = b + 1$ y $n = a \cdot b = b(b + 1)$, luego n es el producto de dos números consecutivos con $1\,500 \leq n \leq 1\,993$ luego

$b = 39$, $a = 40$ y $n = 1\,560$; $b = 40$, $a = 41$ y $n = 1\,640$; $b = 41$, $a = 42$ y $n = 1\,722$; $b = 42$, $a = 43$ y $n = 1\,806$; $b = 43$, $a = 44$ y $n = 1\,892$; $b = 44$, $a = 45$ y $n = 1\,980$.

223. a) 4 444... : 28 = 15 873 que es el menor elemento de S.

b) Al continuar dividiendo por 28, números cuyas cifras son todas 4, se observa que aparece como período el 015873, es decir, los números que pertenecen a S son de la forma 15873015873015873... entonces debe cumplirse que 15873015873015873... < 10^{54}.

Sea x la cantidad de períodos para que el número sea el mayor posible y menor que 10^{54}, tendremos la cantidad de cifras del número buscado es $5 + 6x \leq 54 \Rightarrow x \leq 8$ luego $x = 8$ y el número buscado es

$$15873\underbrace{015873.....015873}_{8 \text{ veces}}$$

224. Sean a, $b \in E$ para $n = 2$ con $a \mid (a + b)$ y $b \mid (a + b)$, es decir, $a + b = da = mb$ con $m, d \in \mathbb{N}$ por lo que se tiene $a = \frac{m}{d} \cdot b$ entonces $a + b = \frac{m}{d} \cdot b + b = mb$ y $\frac{1}{m} + \frac{1}{d} = 1$ que solo se cumple para $m = d = 2$, por lo tanto, no existe E para $n = 2$.

Sean a, b, $c \in E$ para $n = 3$ con $a \mid (a + b + c)$, $b \mid (a + b + c)$ y $c \mid (a + b + c)$, es decir,

$a + b + c = ax = by = cz$ con $x, y, z \in \mathbb{N}$, entonces $a = \frac{z}{x}c, b = \frac{z}{y}c$ por lo que

$a + b + c = \frac{z}{x}c + \frac{z}{y}c + c = zc$ entonces $yz + xz + xy = xyz$ por lo que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ cuya única solución es $x = 2$, $y = 3$, $z = 6$ entonces se tiene que $a + b + c = 2a = 3b = 6c$, de aquí se tiene que b es par y es múltiplo de 3, es decir, $b = 2m$, $a = 3m$ también $b = 2c$ y $c = m$. Todos los conjuntos pedidos son aquellos para los cuales se cumple que $c = m$, $b = 2m$, $a = 3m$ con $m \in \mathbb{N}$.

b) Un conjunto E que cumple estas propiedades y tiene 10 elementos es $E = \{1, 2, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 384\}$.

225. Supongamos que $\text{mcd}(x^2 - xy + y^2, x + y) = d$ con $d \neq 1$ entonces $x + y = da$ y

$x^2 - xy + y^2 = (x + y)^2 - 3xy = db$ entonces $d^2 \cdot a^2 - 3xy = db$, es decir, $3xy = d \cdot c$ pero $\text{mcd}(x,y) = 1$, luego $x \neq dm$, $y \neq dn$ porque $x + y = da$ por lo que $d = 3$.

Si $d = 3$, $d^2 \cdot a^2 = 9a^2$ y $x + y = 3a$, pero 3 divide a $(x + y)$, por lo tanto, nuestra suposición es falsa y los números dados son primos relativos.

226. Consideremos los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 5\}$ y $B = \{7, 11, 13, 17\}$. Es fácil ver que los 16 productos que se obtienen al multiplicar un número de A por uno B son todos distintos y menores que 100. Los colocaremos de forma que, en cada fila, en cada columna y cada diagonal principal, los números de A y de B aparezcan como factores exactamente una vez. Procederemos así:

1) En una diagonal ponemos $1 \cdot 17$, $2 \cdot 13$, $3 \cdot 11$ y $5 \cdot 7$
2) En las esquinas restantes ponemos: $2 \cdot 11$ y $3 \cdot 13$.
3) Y completamos las demás casillas (tabla 2).

El producto de cada fila, cada columna y las dos diagonales es siempre el mismo

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 = 510\,510$ (tabla 3).

Tabla 2

1 · 17	5 · 11	2 · 7	3 · 13
3 · 7	2 · 13	5 · 17	1 · 11
5 · 13	1 · 7	3 · 11	2 · 17
2 · 11	3 · 17	1 · 13	5 · 7

Tabla 3

17	55	14	39
21	26	85	11
65	7	33	34
22	51	13	35

227. Lema: $\forall\ m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}$: $(sn) = m \wedge s(n^2) = m^2$.

Basta tomar $n = 10^{2^0} + 10^{2^1} + \ldots + 10^{2^{m-1}}$. Este número tendrá en cada posición 2^i-ésima un 1, $\forall\ i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq m - 1$ y en el resto $0 \Rightarrow s(n) = m$. Ahora,

$$n^2 = \left(10^{2^0} + 10^{2^1} + \ldots + 10^{2^{m-1}}\right)^2 = 10^{2^1} + 10^{2^2} + \ldots + 10^{2^m} + 2 \cdot 10^{2^0+2^1} + \ldots + 2 \cdot 10^{2^{m-2}+2^{m-1}}$$

Sumando todos los cuadrados y el duplo de los productos de todas las parejas de sumandos. Si $2^i = 2^j + 2^k \Rightarrow i > \text{máx}(j,k)$ y $2^i = 2^j + 2^k < 2 \cdot 2^{\text{máx}(j,k)} = 2^{\text{máx}(j,k)+1} > i \Rightarrow \text{máx}(j,k) + 1 > i \Rightarrow \text{máx}(j,k) \geq i$ lo cual es una contradicción para $j \neq k$.

Si $2^h + 2^i = 2^j + 2^k \Rightarrow 2^{h - \min(h,i,j,k)} + 2^{i - \min(h,i,j,k)} = 2^{j - \min(h,i,j,k)} + 2^{k - \min(h,i,j,k)}$, pero en uno de los casos será 0 el exponente $\Rightarrow$ el mínimo se alcanza dos veces (por la paridad) $\Rightarrow$ las otras dos potencias son iguales también, luego hablamos de la misma pareja. Es claro que si $2^i = 2^j \Rightarrow i = j$. Entonces, la expansión decimal de n^2 coincide (aunque no en orden, tal vez) con $10^{2^1} + 10^{2^2} + \cdots + 10^{2^m} + 2 \cdot 10^{2^0+2^1} + \cdots + 2 \cdot 10^{2^{m-2}+2^{m-1}}$ es fácil ver que

$$s(n^2) = 1 \cdot m + 2 \cdot \binom{m}{2} = m + m(m-1) = m^2.$$

Lo que se pide es un caso particular para $m = 2\ 005$.

228. Supongamos que x_n es impar para todo $n \geq 1$. Entonces x_1 debe tener un dígito par el cual no está en el último lugar. Sea k el primer dígito par. Dado que la sucesión es creciente fuera del límite, este dígito k se convierte en $k + 1$ en el término x_m para algún $m > 1$. Todos los dígitos después de este $k + 1$ deja resto para x_1 y de esta forma es impar. Todos los dígitos después de estos ceros, excepto el primer dígito el cual es impar. Como x_{m+1} será par, lo cual es una contradicción.

229. Supongamos que hay 8 números compuestos $a_1, a_2, a_3, ..., a_8$ menores que 360 y que son primos dos a dos, $\sqrt{360} < 19$ cada uno de estos números debe tener un factor primo menor que 19, ahora bien, los números primos menores que 19 son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 en total 7, por lo que por el principio de las casillas por lo menos dos de los números escogidos tiene un factor primo común.

230. La primera pregunta que surge es ¿qué números de dos dígitos podemos formar con el producto de cuatro números primos? Nos dicen que los cuatro primos no tienen que ser diferentes, así, por ejemplo, podemos formar el $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ o el $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$. Un punto importante es encontrar una manera *sistemática* de generar todos los números que necesitamos. Una forma de hacerlo es la siguiente. Los números en cuestión tendrán cuatro doses, tres doses, dos doses, un dos o ningún dos. Estos cinco casos cubren todas las posibilidades.

Cuatro doses. Solo está el $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

Tres doses.

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40$, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 56$, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 = 88$, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13 = 104$ no es un número de dos dígitos.

Dos doses.

$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$, $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$, $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$, $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ no es un número de dos dígitos.

Un dos.

$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 54$, $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 90$, $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 126$ no es un número de dos dígitos.

Ningún dos.

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$, $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 135$ no es un número de dos dígitos.

Agrupémoslos de acuerdo con sus terminaciones:

40	60	90
24	54	84
16	36	56
81		
88		

Intentemos usar estos números, de acuerdo con las reglas, para formar un número de 3 000 dígitos. Al leer el problema vemos que se debe cumplir que *todo par de dígitos consecutivos forme un número de dos cifras...,* esto significa que el dígito de las unidades del primer producto de primos será el dígito de las decenas del segundo producto y así sucesivamente. No podemos usar el 40 porque el número formado por los dígitos 2 y 3 no sería un número de dos dígitos puesto que empezaría con 0. Lo mismo ocurre con el 60 y el 90. Empecemos con el 24. El siguiente número tendría que ser 0 (240) pero ya no podemos seguir agregando números. Lo mismo ocurre con el 54 y el 84. Probemos el 16. Debería seguir un 0 (160) y ya no podemos continuar. Lo mismo ocurre con el 36 y el 56. El 81 no lo podemos usar puesto que ninguno de nuestros números empieza con 1. La única forma de formar el número de 3 000 dígitos es que los primeros 2 997 sean 8. Por lo tanto, el número que ocupa la posición 1 999 es un 8.

¿Qué ocurriría si en lugar de formar el número de 3 000 dígitos con números de dos dígitos formados por cuatro primos pedimos que sean números de dos dígitos formados por 3 primos o por 5 primos?

231. Supongamos que sí los hay, y sean p el primer primo y r la diferencia de la progresión. Así, la progresión es: $p, p + r, p + 2r, ..., p + 1\,998r$. El primo p no puede ser ninguno de los primeros primos: 2, 3, ..., 1 997, ya que si es alguno de estos entonces $p + pr$, que está en la progresión, no es primo. Así, $p \geq 1\,999$. Como p es impar y $p + r$ es primo, entonces r es par. Todos los números pares son de la forma $6n$ o $6n + 2$ o $6n - 2$. Veamos ahora que r no puede ser ni de la forma $6n + 2$ ni de la forma $6n - 2$. En efecto, como p es primo, este es de la forma $6k + 1$ o $6k - 1$. En cualquiera de los cuatro casos hay en la progresión un múltiplo de 3:

$p + r = (6k + 1) + (6n + 2)$ $p + 2r = (6k + 1) + (6n - 2)$ $p + 2r = (6k - 1) + (6n + 2)$ $p + r = (6k - 1) + (6n - 2)$

Por lo tanto, r es de la forma $6n$ y entonces la progresión $p, p + 6n, ..., p + 1\,998(6n)$.

Pero $p \geq 1\,999$ y $n \geq 1$ implican que $p + 1\,998(6n) \geq 1\,999 + 11\,988 = 13\,985 > 12\,345$.

232. Supongamos que para cierto $n \geq 2$ si es posible llenar la cuadrícula como se pide y veamos cómo debe ser n. La mínima suma posible por renglones o columnas es $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ y la máxima suma posible es $58 = 13 + 14 + 15 + 16$. Se necesitan 8 múltiplos distintos de n pues hay 4 filas y 4 columnas, pero $\frac{(58-10)}{8} = 6$, así que $n \leq 6$ (por ejemplo, entre 10 y 58 no podemos encontrar 8 múltiplos distintos de 7, ya que entre 10 y 58 solo hay 7 múltiplos de 7 que son: 14, 21, 28, 35, 42, 49 y 56).

Ahora observemos que la suma de todos los números del 1 al 16 es 136, así que este número también se obtiene sumando los 4 múltiplos de n que aparezcan por filas, de donde n no puede ser 3, 5 o 6, pues estos no son divisores de 136. Para ver que los casos $n = 2$ y $n = 4$ sí son posibles, consideremos, por ejemplo, los acomodos de las figuras, en donde el caso $n = 4$ se obtuvo del caso $n = 2$ intercambiando las posiciones de 4 y 6 y las de 12, 16 y 14 (estos últimos tres en forma cíclica) (tablas 4 y 5).

Tabla 4

1	2	3	4	10
5	6	7	8	26
9	10	11	12	42
13	14	15	16	58
28	32	36	40	

Tabla 5

1	2	3	6	12
5	4	7	8	24
9	10	11	14	44
13	16	15	12	56
28	32	36	40	

233. Tomemos $x = r - p = q + p$, entonces

$x^2 = (r - p)(q + p) = rq + (r - p)p - p^2 = rq + 2p^2 - p^2 = rq + p^2 = 276$, luego $x = 26$, como p es un primo tal que $26 - p$ y $26 + p$ son primos. Probamos con los posibles primos p menores que 26 y se ve que eso solo se cumple para $p = 3$.

Así pues $p = 3$, $q = 23$, $r = 29$ y $n = p \cdot q \cdot r = 2\,001$.

234. Pongamos $\sqrt{k^2 - kp} = n \Leftrightarrow k^2 - pk - n^2 = 0 \Rightarrow k = \dfrac{p + \sqrt{p^2 + 4n^2}}{2}$ (*)

El radicando ha de ser cuadrado perfecto, sea a.
Se tiene $p^2 + 4n^2 = a^2 \Leftrightarrow p^2 = (a + 2n)(a - 2n)$. Como p es primo y $a + 2n \geq a - 2n$, solo hay dos posibilidades:

$a + 2n = p^2$ y $a - 2n = 1$
$a + 2n = p$ y $a - 2n = p$

En el caso 1) $a = \dfrac{p^2 + 1}{2}; n = \dfrac{p^2 - 1}{4}$, lo que exige $p \neq 2$ (n natural).

En el caso 2) resulta $a = p$, $n = 0$. Sustituyendo los valores de a en (*) y operando queda:

Si $p = 2$, entonces $k = 2$ o $k = 0$.

Si $p \neq 2$ entonces quedan los cuatro valores: $k_1 = \left(\dfrac{p+1}{2}\right)^2, k = \left(\dfrac{p-1}{2}\right)^2$, $k_3 = p$ y $k_4 = 0$.

235. Dado c entero, a y b primos entre sí garantiza que existen enteros x, y tales que

$c = ax + by$. Sea ahora $y = da + s$ donde $0 \leq s < a$.

Tomemos $c = ax + b(da + s) = a(x + bd) + bs$.

Sea $r = x + bd$, si $c \geq (a - 1)(b - 1)$ entonces $(a - 1)(b - 1) \leq c = ar + bs \leq ar + b(a - 1)$, de modo que $ar \geq -(a - 1)$ y, por tanto, $r \geq 0$.

Queda mostrar que $(a - 1)(b - 1) + 1 = ab + a + b$ no puede ser escrito de la forma $ar + bs$, con $r, s \geq 0$. Entonces tenemos $a(b - 1 - r) = b(s - 1)$. Como a y b son primos entre sí, sigue que a divide a $s + 1$ y b divide a $b - 1 - r$.

Como $b - 1 - r < b$, debe ser $b - 1 - r \leq 0$ y $r \geq b - 1$. También como $s + 1 > 0$ y a divide a $s + 1$, debe ser $s + 1 \geq a$, o $s \geq a - 1$.

Como $ar - bs \geq a(b - 1) + b(a - 1) = 2ab - a - b = (a - 1)(b - 1) - 1$ que es una contradicción.

236. Sea a_i el número compuesto por i nueves $a_i = \overbrace{99...9}^{i}$. Supongamos que $\exists$ p tal que p no divide a a_i para todo $i \in \mathbb{N}$ para probar por contradicción el enunciado.

Considérense en dicho caso los números $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$, en este conjunto sabemos que no hay ningún $a_i \equiv 0(p)$ (por hipótesis). Por tanto, al haber p números y solo $p - 1$ restos posibles módulo p, se sabe que existen m, n tales que $a_m - a_n \equiv 0(p)$. Suponemos sin pérdida de generalidad que $m > n$ y:

$$p \mid a_m - a_n = \overbrace{99...9}^{m} - \overbrace{99...9}^{n} = \overbrace{99...9}^{m-n}\overbrace{00...0}^{n} = a_{m-n} \cdot 10^n$$

Como $p \neq 2$ y $p \neq 5 \Rightarrow p \nmid 10^n = 2^n \cdot 5^n \Rightarrow p \mid a_{m-n}$ y como a_{m-n} pertenece al conjunto escogido por ser $m - n < n$ y $m - n \geq 1$ se ha llegado a una contradicción.

Por ende: $\forall p\, \exists a_i$ tal que $p \mid a_i$ y el enunciado queda probado.

237. Sean a, $a + b$ y $a - b$ tres números en progresión aritmética, con el producto $(a - b)a(a + b)$ un número primo, como es el producto de tres números uno de estos debe ser 1, uno de ellos debe ser –1 y el otro el opuesto de un número primo, porque dos de ellos no pueden ser 1 o –1.

Consideremos $a = 1$, $a - b = -1$, entonces $b = 2$ y los números son –3, –1, 1.

Si $a = -1$, $a - b = 1$, entonces $b = -2$ y $a + b = -3$, el producto es –3 que no es primo.

$\therefore$ la única solución es el trío –3, –1, 1.

238. Tomemos todos los números de la forma $4k + 1$, claramente la diferencia entre cualesquiera de estos es un múltiplo de 4 y de esta forma no es primo. Este es el mayor posible porque para cada grupo consecutivo n, $n + 1$, $n + 2$, ..., $n + 7$ podemos tomar al menos dos números.

Tomemos n, entonces $n + 2$, $n + 3$, $n + 5$, $n + 7$ no pueden tomarse, no podemos tomar $n + 1$ y $n + 4$ porque la diferencia entre ambos es 3, lo mismo sucede si tomamos $n + 1$ y $n + 6$ porque su diferencia es 5, tampoco $n + 4$ y $n + 6$, con esto se completa el argumento.

239. Sea $p = 210n + r$ donde $0 < r < 210$. Si $p = 2$, 3, 5 o 7 entonces $r = 2$, 3, 5 o 7 respectivamente, una contradicción (r es primo), luego $p > 7$. Sea q el menor primo divisor de r.

Por tanto, $r = qm$, $q \leq m$. Tenemos que $210 > r = qm \geq q^2$, luego $q \leq 13$, por otra parte r no es divisible por 2, 3, 5, 7; de otra forma p fuera divisible por algunos de los números, pero p es primo. Por tanto, $q > 7$, luego $q = 11$ o $q = 13$. Por la condición $r = a^2 + b^2$ donde a y b son enteros positivos. Si $q = 11$ entonces $a^2 + b^2$ es divisible por 11. Escribimos todos los posibles restos después de la división de los cuadrados perfectos por 11: 0, 1, 4, 9, 5, 3 con lo cual vemos que la suma de dos restos es divisible por 11 solo si ambos términos son iguales a 0. Por tanto, a y b son divisibles por 11, por tanto, a^2 y b^2 son divisibles por 121 y como $r = a^2 + b^2 \geq 121 + 121 = 242 > 210$ se llega a una contradicción, luego $q = 13$, $m < 210 : q < 17$, por tanto, $m \leq 16$ y el menor primo divisor de m no es menor que 13 y finalmente $r = mq = 13^2 = 169$.

Nota: $169 = 12^2 + 5^2$

240. De $(a + 1)(b + 1)(c + 1) = 3abc$ se tiene la expresión equivalente $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=3$ (1)

Como a es un número primo menor que 5, hay solamente dos posibilidades para a. Consideremos cada caso por separado.

1) Para $a = 2$. De (1), se tiene $\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=2$ (2)

Sin pérdida de generalidad consideremos que $b \geq c$.

De (2) se tiene que $\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\leq\left(1+\frac{1}{c}\right)^2$ y de esta forma $\left(1+\frac{1}{c}\right)^2\geq 2$ y como c es un entero positivo entonces $c = 1$ o $c = 2$, para $c = 1$ no es posible porque sería $\frac{1}{b}=0$ y para $c = 2$ se tiene $b + c < 6$.

2) Para $a = 3$. De (1) se obtiene $\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=\frac{9}{4}$ (3)

Sin pérdida de generalidad consideremos que $b \geq c$. De (2) se tiene que $c \leq 2$.

Pero si $c = 2$ entonces $b + c < 6$. De esta forma $a = 3$, $b = 8$, $c = 1$ y $a^2 + b + c = 18$.

241. Primero debemos probar que existe un número primo p tal que hay infinitos números en esta sucesión los cuales son divisibles por p. Asumamos que no sea así, sea N el mayor número par en la sucesión. Entonces hay un número M en la sucesión tal que no hay ningún número primo menor que N que divida a M. Si q es el menor divisor primo de M entonces el próximo término después de M es $2q$ lo cual contradice que N sea el mayor par. Sea p un número primo que divide a infinitos términos de la sucesión y sea q otro número primo. Para algún entero positivo n, existe un término L de la sucesión tal que L es divisible por p y cada uno de los términos siguientes es mayor que pq^n. Dado que pq^n y L no son coprimos y el próximo término después de L es mayor que pq^n, pq^n debe ser uno de los términos que precede a L. Como hay infinitos términos de la sucesión los cuales son divisibles por q, podemos asumir que K es el mayor entero que no aparece en la sucesión y q es el divisor primo. Como hay infinitos términos de la sucesión que son divisibles por q, existe un término, sea P, de la sucesión tal que P es divisible por q y cada uno de los números 1, 2, ..., $K - 1$ precede a P en la sucesión. Dado que P y K son coprimos, el término próximo después de P debe ser K lo cual es una contradicción.

242. De (i) se tiene que a o $c = 2$. Supongamos que $c = 2$ entonces $d = 2 + a$ y de acuerdo con (iii) $1 + 2b + 2 + a = b(2 + a)$, $3 + a = ab$, pero a y b son ambos impares por lo que $3 + a$ es par y ab es impar, que no es posible. Entonces $c \neq 2$ y $a = 2$, $d = c + 2$. Con esto y de acuerdo con (iii) se tiene $1 + d = b(d - c) = 2b$, $d - b = b - 1$.

De acuerdo con (ii) se implica que $2(2 + b + c + 2 + c) = c(b - 1)$, $2(4 + b + 2c) = c(b - 1)$.

Para $b = 2m + 1$, tenemos $5 + 2m + 2c = cm$, $9 = (c - 2)(m - 2)$.

Luego las soluciones de esta ecuación son $c = m = 5$, $c = 3$, $m = 11$ o $c = 11$, $m = 3$.

Por otro lado $c = 5$, $b = 11$, $c = 3$, $b = 23$ o $c = 11$, $b = 7$. Pero b y c al utilizar (i) e (iii):

$c + 2 = d = 2b - 1$ y la única solución es $a = 2$, $c = 11$, $b = 7$, $d = 13$ y $n = 2\ 002$.

243. Veamos primero que p tiene infinitos múltiplos de la forma 999...9. Consideremos la sucesión: 9, 99, 999, ..., 999...9 (el último tiene n nueves). Entonces se tiene:

$9 = 10 - 1$; $99 = 10^2 - 1$; $999 = 10^3 - 1$; ..., $999…9 = 10^n - 1$ en la sucesión hay infinitos términos de la forma $10^{p-1} - 1$ con $p \neq 2$, $p \neq 5$ y p primo.

Puesto que, por el teorema de Fermat: $10^{p-1} - 1 \equiv 1$ (mód p) si $p \neq 2$, $p \neq 5$ la afirmación queda demostrada.

Finalmente $999...9 = 9 \cdot 111...1$ entonces si p es primo con 9 ($p \neq 3$), p divide al producto, es primo con 9 luego divide a 111...1.

Queda el caso $p = 3$ que es evidente, ya que los infinitos números: 111; 111111; ... son múltiplos de tres.

244. El primer niño dice 1, el segundo 1 + 2, el tercero 1 + 2 + 3, y así según el enunciado del ejercicio, como el $n - 1$-ésimo dijo $1+2+\ldots+n-1$, el n-ésimo dirá $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Se trata de probar si $\exists n\in \mathbb{N}:\frac{n(n+1)}{2}=595$.

$n^2 + n = 595 \cdot 2$; $n^2 + n - 1\,190 = 0$ y $(n - 34)(n + 35) = 0$, pues $n \in \mathbb{N}$. Entonces sí existe.

Ahora probemos si $\exists n\in \mathbb{N}:\frac{n(n+1)}{2}=2^{2\,004}+1$; $\frac{1}{2}n(n+1)=2^{2\,004}+1$; $n^2+n=2^{2\,005}+2$ y $n^2+n-(2^{2\,005}+2)=0$ de aquí se tiene $D = 1 + 4(2^{2\,005} + 2) = 9 + 2^{2\,007}$

Ahora, si $x \equiv 0$ (mód 3) $\Rightarrow x^2 \equiv 0$ (mód 3) si $x \equiv 1$(mód 3) $\Rightarrow x^2 \equiv 1$ (mód 3) o si $x \equiv 2$ (mód 3) $\Rightarrow x^2 \equiv$ $\equiv 1$ (mód 3). Entonces $D = 9 + 2^{2\,007} \equiv 2^{2\,007} \equiv 0$ (mód 3), o $D = 9 + 2^{2\,007} \equiv 2^{2\,007} \equiv 1$ (mód 3), lo cual es falso pues $2^0 \equiv 1$ (mód 3), $2^1 \equiv 2$ (mód 3), $2^2 \equiv 1$ (mód 3), ..., $2^{2k} \equiv 1$ (mód 3), $2^{2k+1} \equiv 2$ (mód 3), y 2 007 es de la forma $2k + 1$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow$ no existe $n \in \mathbb{N}$ que cumpla las condiciones.

De igual modo podemos resolverlo multiplicando por 4 el segundo paso y completando el cuadrado: $4n^2 + 4n = 4 \cdot 2^{2\,005} + 8$; $4n^2 + 4n + 1 = 2^{2\,007} + 9$ y $(2n + 1)^2 = 2^{2\,007} + 9$. El razonamiento que se debe seguir es el mismo.

Si tomamos la ecuación y la factorizamos dejando la potencia de 2 en el miembro derecho quedaría: $n^2 + n = 2^{2\,005} + 2$; $n^2 + n - 2 = 2^{2\,005}$ y $(n - 1)(n - 2) = 2^{2\,005}$. Luego tanto $n - 1$ como $n - 2$ tendrían que ser potencias naturales de 2.

$n-1=2^{\alpha}; n+2=(n-1)+3=2^{\alpha}+3=2^{\beta}$ con $\alpha,\beta\in \mathbb{N}$. El único caso posible es que $2^{\alpha}=1$ (la única potencia impar de 2) pues si $2^{\beta} = 1 \Rightarrow 2^{\alpha} = -2$ lo cual es absurdo. Si $2^{\alpha} = 1 \Rightarrow n = 2$ y con $n = 2$ se obtiene $2^2 \neq 2^{2\,005}$, por tanto, no es posible hallar un n que satisfaga.

245. Los múltiplos de i, ki con $k = 1, 2, 3, ..., p - 1$ admiten la representación siguiente $ki = bp + r$ siendo r tal que $0 \leq r \leq p - 1$ como los $r = r(k)$ son todos distintos para $k = 1, 2, ..., p - 1$ no puede ocurrir que $r(k_1)$ sea igual a $r(k_2)$ para algún $k_1, k_2 \in \{1,2, ..., p - 1\}$,
entonces $k_1 \cdot i - k_2 \cdot i = \{b_1p + r(k_1)\} - \{b_2p + r(k_2)\} = (b_1 - b_2)p$ y, por tanto, $p(k_1 - k_2)i$, es lo mismo que pi lo que es imposible porque $0 < k_1 - k_2 < p$ y p es primo.
Asimismo dado i existe j tal que $ji = b(j)p + r(j)$ con $r(j) = 1$. Ahora si $p(i^2 - 1)$ es lo mismo que $p(i - 1)$ lo que es imposible si $2 \leq i \leq p - 2$. Entonces $i \neq j$. Puede verse también que $j = 1$ o que $j = p - 1$ que es imposible.

246. El máximo es 5. El k-ésimo número construido es $5a^{k-l} + (a^{k-2} + a^{k-3} + ... + l)b$, como puede comprobarse fácilmente.

Si a no es congruente con 1 módulo 5, entonces $a^3+a^2+a+l=\frac{(a^4-1)}{(a-1)}$, es múltiplo de 5. *(Nota: Esto se puede hacer sin usar congruencias analizando el último dígito de a).* Entonces en este caso el quinto número es múltiplo de 5 y mayor que 5, así que no es primo.
Si $a \equiv 1$ (mód 5), entonces $a^4 + a^3 + a^2 + a + l$ es múltiplo de 5 así que el sexto número no es primo. Por otro lado para $a = 1$ y $b = 6$, los primeros 5 números obtenidos son todos primos: 5, 11, 17, 23, 29.

247. Para $p = 5$ tenemos que $8p^4 - 3\,003 = 1\,997$, que es primo. Ahora veremos que es la única posibilidad. Sea p un número primo distinto de 5 y supongamos que $8p^4 - 3\,003$ es primo. Podemos proceder de dos maneras: Tenemos que $8p^4 - 3\,003 \equiv 3p^4 - 3 \equiv 3(p^4 - 1)$ (mód 5).
Pero $p^4 - 1 \equiv 0$ (mód 5) para cualquier primo $p \neq 5$ (esto se comprueba fácilmente analizando los posibles restos de p), así que $8p^4 - 3\,003$ es divisible por 5 y, como estamos suponiendo que es primo, la única posibilidad es $8p^4 - 3\,003 = 5$, lo cual es un absurdo pues $\frac{3\,008}{8}=376$ que no tiene raíz cuarta exacta.

248. Consideremos la distribución en las casillas de una tabla de 3×3 (tabla 6).

Tabla 6

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Resulta: $S = abc + def + ghi + adg + beh + cfi$

$= 100(a + c + f + b + a + d + g) + 10(d + e + f + b + c + h) + (g + h + i + c + f + i)$

$= 200a + 110b + 101c + 110d + 20e + 11f + 101g + 11h + 2i$ módulo 9 tenemos:

$S = 2(a + b + c + ... + h + i) = 2 \cdot 45 = 0$. Como 2 001 no es múltiplo de 9, no habrá ninguna distribución para la que la suma indicada tome el valor 2 001.

249. Probaremos el resultado más general siguiente. Sea A un número de más de 3 cifras, tres de las cuales son 1, 2, 4. Probar que siempre es posible permutar las cifras de A de modo que el número resultante sea un múltiplo de 7.

Ejemplo. Si $B = a_1a_2\ldots a_k$ con $k \geq 1$, el número obtenido a partir de A le suprimimos una ocurrencia de cada una de las cifras 1, 2, 4 y C el número que queremos obtener a partir de A.

$B = 7$, se toma $C = 2\,471$

$B = 7...7$ se toma $C = 7...72471$. Análogamente tratamos el caso en que solo hay cifras 0 y 7 en B.

Supongamos de ahora en adelante, que no todas las cifras de B sean 7 o 0.

B no es congruente con 0 (mód 7).

Como 0, 124, 142, 214, 241, 412, 421 es un sistema completo de restos módulo 7 obtenemos C directamente de B con una permutación conveniente de 124.

$B \equiv 0$ (mód 7).

Sea $a_1 \neq 7, 0$ entonces $B' = a_1...a_2 0 a_1$ que no es múltiplo de 7 porque $10B - B' = 9a_1$. Ahora como 0, 1 024, 1 042, 2 014, 1 041, 4 012, 4 021 también forman un sistema completo de restos módulo 7, obtenemos C como en iii).

250. Primero: Consideremos que n y $n + 2$ son primos. De acuerdo con el teorema de Wilson tenemos que $(n - 1)! + 1$ es divisible por n si $(n + 1)! + 1$ es divisible por $n + 2$ y como n divide a $4((n - 1)! + 1)$ entonces n también divide a n, por lo que divide a su suma $4((n - 1)! + 1) + n$.

Basta analizar ahora si $4((n - 1)! + 1) + n$ también es divisible por $n + 2$.

$x = 4((n - 1)! + 1) + n = 4((n - 1)! + 1) + n + 2(n + 1)! - 2(n + 1)!$

$= 2(n + 1)! + n + 4 - 2[(n + 1)! - 2(n - 1)!]$

$= 2[(n + 1)! + 1] + (n + 2) + [(n - 1)!n(n + 1)! - 2(n - 1)!]$

$= 2[(n + 1)! + 1] + (n + 2) + (n - 1)[n^2 + n + 2]$

$= 2[(n + 1)! + 1] + (n + 2) + (n - 1)!(n + 2)(n - 1)$

Como $n + 2$ divide a cada uno de los sumandos, entonces divide a su suma que es
$x = 4((n - 1)! + 1) + n$.

Como n y $n + 2$ son ambos primos y dividen a $4((n - 1)! + 1) + n$ entonces su producto también divide a $4((n - 1)! + 1) + n$.

Segundo: Supongamos que para un número natural $n > 1$, $4((n - 1)! + 1) + n$ es divisible por el producto $n(n + 2)$.

Si n es par, es decir, $n = 2k$ entonces $n - 1 = k$. Esto implica que $(n - 1)!$ es divisible por n y como $4((n - 1)! + 1) + n = 4(n - 1)! + n + 4$ es divisible por n, entonces 4 es divisible por n. Como n es par entonces $n = 2$ o $n = 4$.

Entretanto se verifica fácilmente que $4((n-1)!+1)+n$ no es divisible por $n(n+2)$ para $n = 2$ o $n = 4$.

Asimismo como $4((n-1)!+1)+n$ es divisible por n implica que $(n-1)!+1$ es divisible por n por lo que n es un número primo y haciendo las mismas operaciones que en la primera parte de la solución $4((n-1)!+1)+n = 2[(n+1)!+1]+(n+2)+(n-1)!(n+2)(n-1)$.

Como cada sumando es divisible por $n+2$ entonces también lo será su suma por lo que $(n+1)!+1$ también es divisible por $n+2$ y $n+2$ también es primo.

251. La respuesta es 3 456. Sea I un número interesante, entonces

$I \equiv 0+1+2+...+9 \equiv 0$ (mód 9)

luego $I = 99\,999 \cdot N = (10^5-1)N$ para algún número natural N de 5 cifras.

Digamos $N = a_1a_2a_3a_4a_5$ $I = 10^9a_1 + ... + 10^5a_5 - 10^4a_1 - ... - 10a_4 - a_5$

$= 10^9a_1 + ... + 10^6a_4 + 10^5(a_5-1) + 10^4(9-a_1) + ... + 10(9-a_4) + 10 - a_5$.

Sean $d_1 \cdot d_2 \cdot ... \cdot d_9 \cdot d_{10}$ los dígitos de I en este orden,

entonces $d_1+d_6 = 9$, $d_2+d_7 = 9$, $d_3+d_8 = 9$, $d_4+d_9 = 9$, $d_5+d_{10} = 9$. Como los únicos pares de dígitos cuya suma es 9 son (0,9), (1,8), (2,7), (3,6) y (4,5) el número de posibilidades para $d_1 \cdot d_2 \cdot ... \cdot d_9 \cdot d_{10}$ es $9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 3\,456$.

252. Sean x^2, y^2, z^2 los tres términos consecutivos de la progresión, es suficiente considerar el caso en que $\text{mcd}(x^2,y^2,z^2) = 1$, en otro caso diferente podemos dividir todos los términos por el mcd. Como el cuadrado de cualquier entero es congruente con 0 o 1 módulo 3, la diferencia de la progresión debe ser divisible por 3, para otro caso x^2, y^2, z^2 deben tener diferente resto módulo 3.

Por otra parte, el cuadrado de cualquier entero es congruente con 0, 1 o 4 módulo 8. Tenemos entonces estos tres casos:

a) $x^2 \equiv y^2 \equiv z^2$ (mód 8),
b) $x^2 \equiv y^2 \equiv 0$ (mód 8), $y^2 \equiv 4$ (mód 8),
c) $x^2 \equiv y^2 \equiv 4$ (mód 8), $y^2 \equiv 0$ (mód 8),

En el primer caso la diferencia común es divisible por 8. Los otros dos casos son imposibles porque $\text{mcd}(x^2,y^2,z^2) \neq 1$.

253. Supongamos lo contrario, es decir, que para algún entero $n > 1$ tenemos

$3^n - 2^n \equiv 0$ (mód n). Obviamente 2 y 3 no dividen a n. Sea ahora p el menor factor primo de n y $n = pm$ $(n > 1)$. Utilizando el pequeño teorema de Fermat, tenemos

$3^n \equiv 2^n$ (mód n) $\Rightarrow 3^{mp} \equiv 2^{mp}$ (mód p) $\Rightarrow 3^m \equiv 2^m$ (mód p) (1). Si $d = \text{mcd}(m,p-1)$, tenemos en particular que d divide a n. Por tanto, debe ser p el menor divisor primo de n implica que $d = 1$. Consideremos los enteros positivos x, y que satisfacen

$mx = (p-1)y + 1$ y utilizando nuevamente el pequeño teorema de Fermat de acuerdo con (1) nos da $3 \equiv 3^{(p-1)y+1} = 2^{mx} \equiv 2^{(p-1)y+1} \equiv 2$ (mód p) lo que es un absurdo.

254. Primero notemos que la expresión dada es entero para $p > 2$ por el pequeño teorema de Fermat si $p = 2$ no sirve, de ahí como p es impar, $2^{p-1} - 1 \equiv 0$ (mód 3).

Si $p = 3$, la expresión dada es igual a 1 que es un cuadrado, entonces

$9 \mid 2^{p-1} - 1 \Leftrightarrow 2^{p-1} - 10 \equiv 1$ (mód 9) $\Leftrightarrow \text{ord}_9 2 = 6p - 1 \Rightarrow p \equiv 1$ (mód 6).

$\therefore$ existe k natural: $p = 1 + 6k \Rightarrow \dfrac{2^{p-1}-1}{p} = \dfrac{2^{6k}-1}{p} = \dfrac{(2^{3k}-1)(2^{3k}+1)}{p}$,

$\text{mcd}(2^{3k}-1, 2^{3k}+1) = \text{mcd}(2, 2^{3k}+1) = 1$ como p es primo $(p > 3)$,

$p \mid 2^{3k} - 1$ o $p \mid 2^{3k} + 1$.

i) $p \mid 2^{3k} - 1$. Como $2^{3k} - 1$ y $2^{3k} + 1$ no tienen factores comunes, $2^{3k} + 1$ es un cuadrado por lo que existe $q \in \mathbb{N}$: $2^{3k} + 1 = q^2 \Leftrightarrow 2^{3k} = (q + 1)(q - 1) \Rightarrow q = 3$ y $k = 1$ (los factores $q - 1$ y $q + 1$ deben ser potencias de 2 y solo son posibles para ese caso 2 y 4), entonces $\dfrac{2^{7-1}-1}{7}=9$ que es un cuadrado perfecto.

ii) $p \mid 2^{3k} + 1$. Asumamos que $k > 1$ pues $k = 1$ ya es solución. De $2^{3k} - 1$ es un cuadrado, por lo tanto, existe $m \in \mathbb{N}$: $2^{3k} - 1 = m^2 \Leftrightarrow (2^k - 1)(2^{2k} + 2^k + 1) = m^2$.

Sea $d = \text{mcd}(2^k - 1, 2^{2k} + 2^k + 1)$, $d \mid 2^k - 1 \Rightarrow d(2^k - 1)^2 = (2^{2k} + 2 \cdot 2^k + 1)$, pero
$d \mid 2^{2k} + 2^k + 1$, luego $d \mid 3 \cdot 2^k$. Como $d \mid 2^k - 1$, d no divide a $2^k \Rightarrow d \mid 3 \Rightarrow d = 1$ o $d = 3$.
Si $d = 1 \Rightarrow 2^{2k} + 2^k + 1$ es un cuadrado que no es posible.

Si $d = 3 \Rightarrow \dfrac{2^k-1}{3}$ es un cuadrado, como $\dfrac{2^k-1}{3}$ es impar,

$\dfrac{2^k-1}{3} \equiv 1 \pmod 8 \Rightarrow 2^k \equiv 4 \pmod 8 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow p = 13$, que no es solución.

255. Primera parte: Sea $2p + 1$ un número primo, tenemos
$2^{\varphi(2p+1)} \equiv 1 \pmod{2p + 1} \Rightarrow 2^{2p} \equiv 1 \pmod{2p + 1} \Rightarrow 2^p \equiv \pm 1 \pmod{2p + 1}$ pero $2p + 1$ es de la forma $8k + 7$, luego $2^p \equiv 1 \pmod{2p + 1} \Rightarrow 2p + 1$ divide a $2^p - 1$.

Segunda parte: Sea $2^p \equiv 1 \pmod{2p + 1}$, como p es primo, entonces $p = \text{ord}_{2p+1}2$, ya que $\text{mcd}(2,2p + 1) = 1 \Rightarrow \varphi(2p + 1) = kp$, con $k \leq 2$, no podemos tener $k = 1$ pues $\varphi(n)$ es par para todo $n \geq 3$. Asimismo $\varphi(2p + 1) = 2p \Rightarrow 2p + 1$ es primo.

256. Sabemos que $16^n \equiv 6 \pmod{10}$, porque la cifra de las unidades siempre es 6 tenemos entonces $2^{4n} \equiv 6 \pmod{10}$ y $2^4 \cdot k \equiv 6 \pmod{10\,000}$.

Tenemos que $2^4 \cdot k \equiv 6 \pmod{10} \to k = 5q + 1$; $2^{4n} \equiv 2^4(5q + 1) \pmod{10\,000}$;

$2^{4n} \equiv 10(8q + 1) + 6 \pmod{10\,000}$.

Tenemos que $8q + 1$ debe tener dígitos mayores o iguales que 6, en particular $8q + 1$ termina en 7 o en 9, teniendo entonces las posibilidades siguientes para sus últimos 3 dígitos:

999, 997, 987, 977, 887, 877, 777, pero los únicos que son de la forma $8q + 1$ son 977 y 777. Como 2^5 divide a 7 776, 16^q no termina en 77 776 ni en 97 776.
$16^q \equiv 87\,776 \pmod{10^5} \Rightarrow 16^q \equiv 987\,776 \pmod{10^6}$. Como 2^7 divide a 987 776, 16^n no termina en 9 987 776, como 2^6 divide a 99 776, 16^n no termina en 999 776 entonces 16^n tiene como máximo 6 dígitos y basta verificar los casos y como para ninguno de los casos hay solución, entonces 16^n nunca es descendente.

257. $n = abc = c + 10b + 100a$; $m = cba = 100c + 10b + a$; $2m + S = n$ nos da:

$200c + 20b + 2a + (a + b + c) = 100a + 10b + c$, es decir, $200c + 11b - 97a = 0$.

Por lo tanto, $200c - 97a$ es múltiplo de 11.

Módulo 11: $2(c + a)$ es 0, y como mcd $(2,11) = 1$, resulta que $a + c$ es congruente con 0 módulo 11.

Módulo 9: $2(c + a + b)$ congruente con 0, y $c + a + b$ congruente con 0.

Por la primera congruencia, $c + a = 0$, o bien $c + a = 11$.

Si $c + a = 0$, entonces $a = c = 0$ y no hay solución por ser números de tres cifras.

Si $c + a = 11$, entonces $b = 7$. Por lo tanto, $200c - 97a$ es múltiplo de 7.

Trabajando módulo 7: $4c + a$ es congruente con 0 módulo 7, es decir;

$4c + a = 0, 7, 14, 21, 28, 35, 42$.

Como $a + c = 11$, tenemos que $3c$ debe tomar uno de los valores –11, –4, 3, 10, 17, 24, o 31 y ser múltiplo de 3. Luego $c = 1$ o $c = 8$.
Si $c = 1$, entonces $a = 10$, imposible.
Si $c = 8$, $a = 3$. Pero $n = 378$ no es solución y no existen números con las condiciones pedidas.

258. Como x, y, a; x, z, b; y, z, c forman tríos pitagóricos entonces en cada trío aparece un número que es divisible por 5, consideremos que $a \equiv b \equiv c \equiv 0$ (mód 5) porque si lo fuera x, y o z entonces el producto xyz sería divisible por 5.

Entonces consideremos $x \equiv \pm 1$ (mód 5), $y \equiv \pm 2$ (mód 5) pero en la segunda ecuación $z \equiv \pm 2$ (mód 5) luego $y^2 + z^2 \equiv 3$ (mód 5) y habíamos supuesto que $c \equiv 0$ (mód 5) luego, alguno de los tres x, y o z debe ser divisible por 5 y el producto lo es.

De igual forma para los otros dos casos, de esta manera el producto xyz es divisible por 5.

259. Supongamos que para un n hay enteros a_1, a_2, ..., a_n verificando la propiedad del enunciado. Dado un número de base 2 entre 0 y 2^{n-1}, sea $b = (b_1b_2...b_n)_2$, tenemos una combinación $a_b = \sum b_i a_i$.

Sean b y b' dos números distintos. Si $a_b \equiv a_{b'}$ (mód n^5), entonces tendríamos que n^5 / $\sum (b_i - b_i')a_i$ con $b - b' \in \{-1, 0, 1\}$, contradiciendo el enunciado. Por tanto, los restos a_b (mód n^5) son distintos. Como consecuencia $2^n \leq n^5 \Leftrightarrow n \leq 22$. Por otro lado, para $n = 22$ tomamos

$a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, ..., $a_{22} = 2^{21}$. Ninguna combinación de la forma $\sum b_i a_i$ con b_1, b_2, ..., $b_n \in \{-1, 0, 1\}$, no todos nulos, puede ser 0 o mayor que n^5, dado que $\sum a_i < 2^{22} < 22^5$, por tanto, n^5 no divide a $\sum b_i a_i$.

260. Sean n^2 el cuadrado perfecto y a el dígito que aparece en las últimas cuatro posiciones, entonces $a = 0$, 1, 4, 5, 6 o 9.

Si $n^2 \equiv a \cdot 1\,111$ (mód 10^4) y consecuentemente $n^2 \equiv a \cdot 1\,111$ (mód 16).

Cuando $a = 0$ ya está resuelto. Supongamos que a es 1, 5 o 9.

Dado que $n^2 \equiv 0$ o 1 o 4 (mód 8) y $1\,111 \equiv 7$ (mód 8), obtenemos $1 \cdot 1\,111 \equiv 7$ (mód 8), $5 \cdot 1\,111 \equiv 3$ (mód 8) y $9 \cdot 1\,111 \equiv 7$ (mód 8). Se tiene la congruencia $n^2 \equiv a \cdot 1\,111$ (mód 16) que no puede ser.

Supongamos que a es 4 o 6.

Como $1\,111 \equiv 7$ (mód 16), $4 \cdot 1\,111 \equiv 12$ (mód 16) y $6 \cdot 1\,111 \equiv 10$ (mód 16).

Concluimos que en este caso la congruencia $n^2 \equiv a \cdot 1\,111$ (mód 16) no puede ser tampoco.

261. Como x es impar, entonces $x^{2p} - 1 = (x^p + 1)(x^p - 1)$ que es divisible por 8.
Por el teorema de Fermat $x^p - 1$ es divisible por $(p + 1)$ por ser x primo con $p + 1$ y $x^{2p} - 1$, es divisible por $8(p + 1)(2p + 1)$.

262. $n^{p-1} - 1 \equiv 0$ (mód p) por el teorema de Fermat, pero por otro lado tenemos que $n^{p-1} - 1 = \left(n^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)\left(n^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)$

entonces $\left(n^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)\left(n^{\frac{p-1}{2}} - 1\right) \equiv 0$ (mód p) de donde se obtiene que $n^{\frac{p-1}{2}} + 1 \equiv 0$

(mód p) o $n^{\frac{1}{2(p-1)}} - 1 \equiv 0$ (mód p) de aquí que se cumpla que $n^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$

(mód p) o $n^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$ (mód p).

263. Si $p > 3$ es un número primo, entonces $p = 6k \pm 1$. Según el teorema de Fermat $n^{p-1} - 1 \equiv 0$ (mód p). Se cumple que:

a) $n^{6k} - 1 \equiv 0$ (mód p)
$(n^{3k} + 1)(n^{3k} - 1) \equiv 0$ (mód p)
de donde $n^{3k} + 1 \equiv 0$ (mód p)
o $n^{3k} - 1 \equiv 0$ (mód p)

b) $n^{6k-2} - 1 \equiv 0$ (mód p)
$(n^{3k-1} + 1)(n^{3k-1} - 1) \equiv 0$ (mód p) de donde
$n^{3k-1} + 1 \equiv 0$ (mód p) o
$n^{3k-1} - 1 \equiv 0$ (mód p)

Luego existe k que cumple las condiciones dadas.

264. Según el teorema de Wilson se cumple que $(p - 1)! + 1 \equiv 0$ (mód p) si p es primo,
$(p - 3)!(p - 2)(p - 1) + 1 \equiv 0$ (mód p)
$(p - 3)!(p^2 - 3p + 2) + 1 \equiv 0$ (mód p) $\Rightarrow p^2(p - 3)! - 3p(p - 3)! + 2(p - 3)! + 1 \equiv 0$ (mód p)
pero $p^2(p - 3)!$ y $3p(p - 3)!$ Son divisibles por p, luego $2(p - 3)! + 1 \equiv 0$ (mód p).

265. Según el teorema de Wilson se tiene que $(p - 1)! + 1 \equiv 0$ (mód p) luego
$(p - 2)!(p - 1) + 1 \equiv 0$ (mód p), $p(p - 2)! - (p - 2)! + 1 \equiv 0$ (mód p) por lo que
$-(p - 2)! + 1 \equiv 0$ (mód p) $\Rightarrow (p - 2)! - 1 \equiv 0$ (mód p).

266. $A = [(p - 1)!]^3 + 1 + 3[(p - 1)!]^2 + 3(p - 1)! + 1 = [(p - 1)! + 1]^3$, pero según el teorema de Fermat se tiene que $(p - 1)! \equiv (p - 1)$ (mód p), $1 \equiv 1$ (mód p) y la suma
$(p - 1)! + 1 \equiv p$ (mód p), es decir, $(p - 1)! + 1 \equiv 0$ (mód p) y A es divisible por p, y
$n^{\sqrt[3]{A}-1} = n^{(p-1)!}$. Como n no es divisible por p, entonces según el teorema de Fermat se cumple que
$n^{(p-1)!} \equiv n^{(p-1)} \equiv 1$ (mód p) luego $n^{\sqrt[3]{A}-1} - 1$ deja resto 1 en la división por p.

267. Consideremos que p es primo y $p > 3$, luego $p \equiv 1$ (mód 3) o $p \equiv 2$ (mód 3).
Si $p \equiv 1$ (mód 3) $\Rightarrow 2^p + p^2 \equiv (-1)^p + 1^2$ (mód 3) $\equiv 0$ (mód 3)
Si $p \equiv 2$ (mód 3) $\Rightarrow 2^p + p^2 \equiv (-1)^p + 1$ (mód 3) $\equiv 0$ (mód 3)
Si $p = 3$, entonces $2^3 + 3^2 = 17$ que es un número primo.
Si $p = 2$, el número $2^p + p^2$ es par diferente de 2, luego no es primo.
$\therefore$ el único caso posible es para $p = 3$.

268. Sea $S_n = 1! + 2! + ... + n! = z^2$ pero $S_n \geq n!$ y para todo $n \geq 5$ los términos de la sucesión son múltiplos de 10 y al sumar los cuatro primeros términos la suma termina en 3, necesariamente S_n termina en 3. Luego para $n \geq 4$ no puede existir $S_n = z^2$ porque ningún cuadrado perfecto termina en 3. Entonces para $n = 1$, $S_1 = 1$, para $n = 2$, $S_2 = 3$, para $n = 3$, $S_3 = 9$.
$\therefore$ los números naturales que cumplen con las condiciones dadas son 1 o 3.

269. $1\,988 = 2^2 \cdot 7 \cdot 71$, tiene 12 factores, por lo tanto, aparecerá 12 veces, ya que el triángulo se va formando con los números naturales y después los múltiplos de cada uno de estos, entonces el 1 988 aparecerá 2 veces en cada fila donde aparezca por no ser un cuadrado perfecto. Aparecerá en las filas:

$1\,988 = 1\,987 + 1$, $995 = 2 \cdot 497 + 1$, $501 = 497 + 4$, $156 = 142 + 14$ y $99 = 71 + 28$.

270. Para cualquier entero c no divisible por 19, tenemos que $c^{18} \equiv 1$ (mód 19).
Sea (a,b) una solución donde se tiene el menor valor posible de $|a+b|$ y $a+b \neq 0$.
Si consideramos la tabla de cuadrados perfectos módulo 19, se tiene (tabla 7).

Tabla 7

c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
c^2	0	1	4	9	16	6	17	11	7	5	5	7	11	17	6	16	9	4	1

Vemos que los cuadrados perfectos no pueden ser congruentes con 2 ni 3 módulo 19.
Dado que cada una de las expresiones en la suma es congruente a 0 o a 1 módulo 19, la suma debe también ser congruente a 0 o a 1 módulo 19. Esto determina que dos o tres de las expresiones $19a + b$, $a + b$ y $19b + a$ deben ser divisibles por 19. Como $19a + b$ es divisible por 19 si y solo si b lo es, de igual forma para $19b + a$ que a tiene que ser divisible por 19 y como son al menos dos de estos tienen que ser divisibles por 19, esto debe cumplirse en el caso que $a = 19a'$ y $b = 19b'$ entonces la expresión dada se transforma en

$(19^2a' + 19b')^{18} + (19a' + 19b')^{18} + (19^2b' + 19a')^{18}$
$= 19^{18}(19a' + b')^{18} + (a' + b')^{18} + (19b' + a')^{18}$, que es un cuadrado perfecto si

$(19a' + b')^{18} + (a' + b')^{18} + (19b' + a')^{18}$ lo es. Siguiendo que (a',b') es una solución con el menor valor de $|a+b|$, contradice la condición que $|a+b|$ es mínimo.
Por lo que solo es posible que $a = b = 0$, es decir, (0,0).

271. Supongamos que exista tal potencia de 2, es decir, que haya dos potencias de 2 cuyas expresiones decimales solo difieran en el orden de colocación de los dígitos. Claramente ninguna de las dos potencias es divisible por 3 y ambas dejan el mismo resto cuando se dividen por 9. Esto último se debe a que el resto de un número al dividirse por 9 es congruente, módulo 9, con la suma de sus dígitos.
Por otra parte la mayor de ambas potencias se obtiene de la menor multiplicando esta por 2, 4 u 8 (de otra manera no tendrían ambas el mismo número de dígitos). Sin embargo al multiplicar la menor potencia de las dos por 2, 4 u 8, cambia el resto cuando se divide por 9. Los restos de las sucesivas potencias de 2 al dividirse por 9 forman una sucesión periódica. Efectivamente, los restos de:
2, 4, 8, 16, 32 64, 128, 256, 512, 1 024, 2 048, 4 096, ..., son:

2, 4, 8, 7, 5, 1, 2, 4, 8, 7, 5, 1, ... Esta sucesión tiene período 6, porque para todo n entero positivo $2^{n+6} - 2^n = 2^n(2^6 - 2^0)$ y este número es divisible por 9, por lo que ambas potencias dejan el mismo resto. No es posible, por tanto, reordenar los dígitos de una potencia de 2 para obtener otra potencia distinta de 2.

272. $\overline{ABC} \equiv \overline{CBA}$ (mód 7) entonces $\overline{ABC} - \overline{CBA} = 7m$ con $m \in \mathbb{Z}$ luego
$100A + 10B + C - 100C - 10B - A = 7m$ y $99(A - C) = 7m$.
Como 7 no divide a 99, entonces $7 / (A - C)$ y $A > C$ por lo que $A = 7$, $C = 0$ o $A = 8$, $C = 1$ o $A = 9$, $C = 2$ pero $C = 0$ no puede ser.
$\therefore$ hay dos valores posibles $A = 8$, $C = 1$ o $A = 9$, $C = 2$.

273. Consideremos que $b \neq a$. Tomemos $n = 1$ y que $a + 1$ divide a $b + 1$, entonces $b \geq a$. Sea $p > b$ un número primo y sea n un entero positivo tal que

$n \equiv 1$ (mód $p - 1$) y $n \equiv -a$ (mód p).

Utilizando el teorema Chino del resto existe n, pues n puede escribirse en la forma

$n = (a + 1)(p - 1) + 1$.

Por el pequeño teorema de Fermat se cumple que $a^n = a(a^{p-1} \dots a^{p-1}) \equiv a$ (mód p), de esta forma $a^n + n \equiv 0$ (mód p) y p divide al número $a^n + n$ entonces también $b^n + n$.

Utilizando de igual manera el pequeño teorema de Fermat, se tiene, análogamente,

$b^n + n \equiv b - a$ (mód p) teniendo de esta forma que p / $b - a$, lo cual es una contradicción.

274. Si n satisface las condiciones dadas, entonces ni n ni $n + 1$ son divisibles por 3, luego $n + 2$ debe serlo. Además, tampoco n ni $n + 1$ son divisibles por 11.
Se probará que $n + 2$ es divisible por 11.
Si $(n + 1)^n + 16n$ y $(n + 1)^{n+4} + 16n$ son simultáneamente divisibles por 33, también lo será su diferencia $(n + 1)^{n+4} + 16n - (n + 1)^n - 16n = (n + 1)^{n+4} - (n + 1)^n$.
Entonces $(n + 1)^{n+4} - (n + 1)^n \equiv 0$ (mód 11), es decir, $(n + 1)^n(n + 1)^4 - 1 \equiv 0$ (mód 11). De aquí se tiene que $(n + 1)^4 - 1 \equiv 0$ (mód 11) y esto implica que
$(n + 1)^2 - 1 \equiv 0$ (mód 11) o $(n + 1)^2 + 1 \equiv 0$ (mód 11). La segunda alternativa no es posible, ya que se cumplirá que $x^2 \equiv (11 - x)$ (mód 11) para cada entero x, por lo que los posibles restos de x^2 módulo 11 son 0, 1, 4, 9, 5, 3 diferentes de 10. Entonces queda solo la posibilidad $(n + 1)^2 - 1 \equiv 0$ (mód 11) lo que significa que $n(n + 2)$ sea divisible por 11 y como 11 es primo entonces 11 / $n + 2$.
Resumiendo, como 3 y 11 son primos relativos que dividen a 1 $n + 2$, se obtiene que 33 divide a $n + 2$, luego $n + 1 \equiv -1$ (mód 33) y, por lo tanto, $(n + 1)^n \equiv (-1)^n$ (mód 33) y
$16n \equiv 16(-2) \equiv -1$ (mód 33). Además, $(n + 1)^4 - 1 \equiv 0$ (mód 33), luego $n(n + 1) + 16n$ y $(n + 1)^{n+4} + 16n$ son ambos congruentes con $(-1)^n + 1$ módulo 33. Para que sean divisibles por 33 es necesario que n sea impar. Como ya estaba determinado que n es de la forma $33k - 2$, el valor de k debe ser impar, por lo que n es de la forma $66t + 31$ para t natural. Está claro que los números de esta forma cumplen la condición pedida.

275. Se demostrará que la respuesta buscada es 19. Para esto, notemos en primer lugar que el resto al dividir por 27 el producto de los número primos relativos con 27 entre 1 y 27 es –1. Aunque se puede verificar fácilmente en forma directa, se mostrará un camino alternativo utilizando algunos rudimentos de álgebra.
$27 = 3^3$, la ecuación $x^2 - 1 = 27k$ solamente va a tener solución para x y k enteros cuando 27 sea divisor de $(x + 1)(x - 1)$ pero como estos números tienen diferencia 2 no es posible que sean simultáneamente múltiplos de 3, lo que hace necesario que 27 sea divisor de $x + 1$ o de $x - 1$. Así, entre 1 y 27 los únicos números x que cumplen son 1 y 26, por lo que los otros números entre 1 y 27 primos relativos con 27 se pueden agrupar en parejas cuyo producto deje resto 1, por lo que el producto final tendrá resto
$1 \cdot 1 \cdot 26 \equiv -1$ (mód 27). Ahora calculemos el resto de dividir N por 27. Como N es potencia de un impar y, por lo tanto, es impar, al igual que 27, con el resto se puede, además, deducir la paridad del cociente. Es decir, si el resto es impar, el cociente debe ser par, mientras que si el resto es par, el cociente debe ser impar.

276. No es posible. Notemos que en la lista inicial hay únicamente un número que es múltiplo de 3 y los otros dejan restos 1 o 2 en la división por 3. Luego, los números del conjunto inicial son de la forma $3k$, $3k + 1$ o $3k + 2$. Observemos qué pasa con los números del conjunto cuando hacemos una operación:

1) Si $a \equiv 0$ (mód 3) y $b \equiv 0$ (mód 3), entonces $a + b \equiv 0$ (mód 3) y $ab \equiv 0$ (mód 3).
2) Si $a \equiv 1$ (mód 3) y $b \equiv 0$ (mód 3), entonces $a + b \equiv 1$ (mód 3) y $ab \equiv 0$ (mód 3).
3) Si $a \equiv 2$ (mód 3) y $b \equiv 0$ (mód 3), entonces $a + b \equiv 2$ (mód 3) y $ab \equiv 0$ (mód 3).
4) Si $a \equiv 1$ (mód 3) y $b \equiv 1$ (mód 3), entonces $a + b \equiv 2$ (mód 3) y $ab \equiv 1$ (mód 3).
5) Si $a \equiv 1$ (mód 3) y $b \equiv 2$ (mód 3), entonces $a + b \equiv 0$ (mód 3) y $ab \equiv 2$ (mód 3).
6) Si $a \equiv 2$ (mód 3) y $b \equiv 2$ (mód 3), entonces $a + b \equiv 1$ (mód 3) y $ab \equiv 1$ (mód 3).

Veamos cómo podemos generar 4 múltiplos de 3 y el 64 que es congruente con 1 módulo 3.
En el conjunto original tenemos dos números congruentes con 1 módulo 3, dos congruentes con 2 módulo 3 y uno que es múltiplo de 3. Analizando las 6 posibilidades, vemos que siempre podemos llegar a cuatro números congruentes con 1 y uno múltiplo de 3 pero como buscamos cuatro números que sean múltiplos de 3 y uno que sea congruente con 1 módulo 3 esto es imposible porque siempre tendremos uno congruente con 2 módulo 3.

277. Sea n un número natural cualquiera y sean $p_1, p_2, \ldots, p_n$ primos diferentes. Consideremos el sistema de congruencias:

$x \equiv -1 \pmod{p_1^2}$; $x \equiv -2 \pmod{p_2^2}$, …, $x \equiv -n \pmod{p_n^2}$.

Por el teorema Chino del resto, este sistema tiene solución pues los módulos son primos relativos por parejas. Una solución cualquiera es tal que

$p_1^2 \mid x + 1$, $p_2^2 \mid x + 2$, …, $p_n^2 \mid x + n$, así que los n números consecutivos buscados son $x + 1, x + 2, \ldots, x + n$.

278. Si $2n + 3m \equiv 0 \pmod{17} \Rightarrow 9n + 5m$ lo es.

Considerando que si una congruencia se multiplica por una constante que sea primo relativo con el módulo, se obtiene una nueva congruencia equivalente a la original. Multipliquemos por 9 (que es inverso multiplicativo de 2 módulo 17) entonces la nueva congruencia de $2n + 3m \equiv 0 \pmod{17}$ será $18n + 27m \equiv 0 \pmod{17}$ o lo que es lo mismo $n + 10m \equiv 0 \pmod{17}$.

Multiplicando nuevamente por 9 tenemos $9n + 90m \equiv 0 \pmod{17}$ que, simplificando, se convierte en $9n + 5m \equiv 0 \pmod{17}$.

Si $9n + 5m \equiv 0 \pmod{17} \Rightarrow 2n + 3m$ lo es.

Multiplicando por 2 (que es el inverso multiplicativo de 9 módulo 17) entonces se tiene

$n + 10\, m \equiv 0 \pmod{17}$ y multiplicando por 2 nuevamente tenemos

$2n + 20\, m \equiv 0 \pmod{17}$ que, simplificando, se convierte en $2n + 3m \equiv 0 \pmod{17}$ que es lo que se quería demostrar.

279. Lo haremos por inducción sobre n, para $n = 2$ basta tomar $a_1 = 3$, $a_2 = 4$ con

$3^2 + 4^2 = 5^2$. Supongamos que $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = k^2$. Veamos que podemos encontrar un entero positivo a_{n+1} tal que $k^2 + a_{n+1}^2 = p^2$, en efecto

$k^2 = p^2 - a_{n+1}^2 = (p + a_{n+1})(p - a_{n+1})$. Pongamos $a = p + a_{n+1}$ y $b = p - a_{n+1}$.

Tenemos $p = \dfrac{a+b}{2}$; $a_{n+1} = \dfrac{a-b}{2}$; $k^2 = \dfrac{a+b}{2} \cdot \dfrac{a-b}{2}$. La última expresión exige que a y b son de la misma paridad. Distinguiremos dos casos:

Primer caso: a y b son pares, entonces $k^2 = 4m$ que tomando $a = 2m$ y $b = 2$ queda

$$p = m + 1 = \frac{k^2}{4} + 1;\ a_{n+1} = m - 1 = \frac{k^2}{4} - 1$$

Segundo caso: a y b son impares, entonces $k^2 = 2m + 1$. Tomando $a = 2m + 1$, $b = 1$ queda

$$p = m + 1 = \frac{k^2 - 1}{2} + 1;\ a_{n+1} = m = \frac{k^2 - 1}{2}.$$

En ambos casos hemos encontrado a_{n+1} entero verificando el enunciado.

280. Es fácil ver que se verifican:

(1) $z_{3m+1} = z_{3m} + 1$, (2) $z_{3m+2} = z_{3m} - 1$, (3) $z_{3m} = 3z_m$, lo probaremos por inducción

(4) $z_0, z_1, \ldots, z_{3^n-1}$ son mutuamente diferentes en el intervalo $I_n = \left[-\frac{3^n-1}{2}, \frac{3^n-1}{2}\right]$ para $n = 0$ y para $n = 1$. Ahora consideremos que (4) se cumple para algunos enteros no negativos n. Dado que $-\frac{3^n-1}{2} \le z_i \le \frac{3^n-1}{2}$ $(i = 0, 1, \ldots, 3^{n-1})$.

Multiplicando por 3 se tiene (5) $-\frac{3^{n+1}-1}{2} + 1 \le z_{3i} \le \frac{3^{n+1}-1}{2} - 1$.

Cada uno de los enteros 0, 1, ..., $3^{n+1} - 1$ es únicamente representado por $3i$, $3i + 1$ o $3i + 2$ con i perteneciendo al conjunto $\{0, 1, ..., 3^{n+1} - 1\}$, por (1), (2) y (5) tenemos $-\frac{3^{n+1}-1}{2} + 2 \le z_{3i+1} \le \frac{3^{n+1}-1}{2}$ y $-\frac{3^{n+1}-1}{2} \le z_{3i+2} \le \frac{3^{n+1}-1}{2} - 2$. Concluyendo que z_k está en el intervalo $I_{n+1} = \left[-\frac{3^{n+1}-1}{2}, \frac{3^{n+1}-1}{2}\right]$ para $k \in \{0, 1, ..., 3^{n+1} - 1\}$. Finalmente, no hay dos de los enteros $z_0, z_1, ..., z_{3^n-1}$ que puedan ser iguales porque estos se han obtenido multiplicando los distintos enteros por 3 y sustituyendo los productos por 0, 1 o –1. Como el intervalo cerrado I_n contiene exactamente 3^n enteros, estos deben ser los enteros mencionados en (4).

Para cualquier entero dado z hay un número natural n con $z \in \left[-\frac{3^{n+1}-1}{2}, \frac{3^{n+1}-1}{2}\right]$.

Y z aparece en la parte $z_0, z_1, ..., z_{3^n-1}$ de la sucesión dada. Esto completa la proposición.

281. Para cualquier natural n, consideramos su representación binaria,

$n = a_k 2^k + a_{k-1} 2^{k-1} + \ldots + a_1 2 + a_0 = a_k \ldots a_1 a_{0(2)}$, donde $a_j = 0$ o 1.

Probaremos por inducción que $g(n) = \sum_{j=0}^{k} a_j$ por inducción sobre k.

Para $k = 0$ es cierto: $g(1_{(2)}) = g(1) = 1$. Supuesto cierto para k, hay dos casos para $k + 1$:

$$g(a_k \ldots a_1 a_0 0_{(2)}) = g(2 \cdot a_k \ldots a_1 a_{0(2)}) = \sum_{j=0}^{k} a_j,$$

$$g(a_k \ldots a_1 a_0 1_{(2)}) = g(1 + 2 \cdot a_k \ldots a_1 a_{0(2)}) = 1 + \sum_{j=0}^{k} a_j$$

donde se han aplicado las propiedades de g y la hipótesis inductiva. Entonces $g(n)$ es el número de unos de n escrito en base 2. Como $2^{11} = 2\ 048 > 2\ 002 > 1\ 024 = 2^{10}$, resulta $M = 10$. Hay cinco soluciones de $g(n) = 10$: 1 023, 1 535, 1 791, 1 919 y 1 983.

282. Si $P(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^m$, entonces $f^n(x)$ es un polinomio de grado mn con los coeficientes estrictamente positivos.

Por hipótesis $mn + 1 = 1\,982$ o $mn = 1\,981 = 1 \cdot 7 \cdot 283$.
De esta forma, m debe pertenecer al conjunto $\{1, 7, 283, 1\,981\}$.
Está claro que el número $2^{m+1} - 1$ con $m = 1$ y $m = 7$ no es divisible por $2^{71} - 1$ y con $m = 283$ sí es divisible, puesto que $2^{283+1} = (2^{142} + 1)(2^{142} - 1) = (2^{71} + 1)(2^{71} - 1)(2^{142} + 1)$.
Demostremos ahora que el número $2^{1\,982} - 1$ no es divisible por $2^{71} - 1$, de donde $m \neq 1\,981$. Pero $1 + x + x^2 + ... + x^{1\,981}$
$= (x^{21} + x^{91} + ... + x^{1\,841} + x^{1\,911})(1 + x + x^2 + ... + x^{70}) + (1 + x + x^2 + ... + x^{20})$.
La cual se cumple para todos los valores reales de la variable, supongamos $x = 2$, obtenemos
$2^{1\,982} - 1 = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{1\,981}$
$= (2^{21} + 2^{91} + ... + 2^{1\,841} + 2^{1\,911})(1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{70}) + (1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{20})$
es decir, $2^{1\,982} - 1 = (2^{21} + 2^{91} + ... + 2^{1\,841} + 2^{1\,911})(2^{71} - 1) + (2^{21} - 1)$, como $2^{21} - 1 \neq 0$ entonces el número $2^{1\,982} - 1$ no es divisible por $2^{71} - 1$ de esta forma $m \neq 1\,981$.
Luego $m = 283$.

283. a) $a^{n-k} - b^{n-k}$ y $a^k - b^k$ son del mismo signo luego $(a^{n-k} - b^{n-k})(a^k - b^k) \geq 0$
$a^k(a^{n-k} - b^{n-k}) - b^k(a^{n-k} - b^{n-k}) \geq 0$ $a^n - a^kb^{n-k} - a^{n-k}b^k + b^n \geq 0$ entonces $a^n + b^n \geq a^kb^{n-k} + b^ka^{n-k}$.

b) Inicio de inducción para $n = 1$ se cumple que $a + b \leq a + b$.
Hipótesis: para $n = k$ se cumple que $(a + b)^k \leq 2^{k-1}(a^k + b^k)$.
Tesis: para $n = k + 1$ se cumple que $(a + b)^{k+1} \leq 2^k(a^{k+1} + b^{k+1})$.
Demostración: $(a + b)^{k+1} \leq 2^k(a^{k+1} + b^{k+1})$; $(a + b)^k(a + b) \leq 2^k(a^{k+1} + b^{k+1})$
$(a + b)^k(a + b) \leq 2^{k-1}(a^k + b^k) + 2^{k-1}(a + b)$; $(a + b)^k \leq 2^{k-1}(a^k + b^k)$ y $a + b \leq 2^{k-1}(a + b)$
luego se cumple que $(a + b)^n \leq 2^{n-1}(a^n + b^n)$.

284. Denotemos $f(x) = [2x] + [4x] + [6x] + [8x]$.
Si n es un entero positivo, entonces $f(x + n) = f(x) + 20n$.
Luego si un entero k puede expresarse como $f(x_0)$ para algún número real x_0, entonces para $n = 1, 2, 3, ...$ podemos expresar $k + 20n$ de manera similar, esto se debe a que $k + 20n = f(x_0 + n)$. Por consiguiente, basta determinar cuáles de los primeros 20 enteros positivos pueden ser generados por $f(x)$ cuando x recorre el intervalo (0,1]
Observa que cuando x se incrementa el valor de $f(x)$ cambia únicamente si alguno de los números $2x$, $4x$, $6x$, $8x$ sobrepasa un valor entero. En el intervalo (0,1] estos cambios ocurren cuando x es de la forma $\frac{m}{n}$, donde $1 \leq m \leq n$ y $n = 2, 4, 6$ u 8.

Existen 12 de estas fracciones, que escritas en forma creciente son $\frac{1}{8}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, 1$
por consiguiente, solo 12 de los primeros 20 enteros positivos pueden ser representados en la forma deseada, y en consecuencia $12 \cdot 5 = 60$ de los primeros 100 enteros positivos pueden representarse así.

285. Supongamos que existe una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que verifica $f(f(n)) = n + 1$. Asimismo $f(0) = a \in \mathbb{N}$
$f(f(0)) = 1$ y $f(f(0)) = 1$ pero como $f(1) = a + 1$, $f(a + 1) = 2$, $f(2) = a + 2$, ...
Supongamos que $f(n - 1) = a + n - 1$, entonces $f(a + n - 1) = a + n$. Luego probamos por inducción que $f(f(n)) = f(a + n) = 2a + n = n + 1$ entonces $a = \frac{1}{2}$ que no es natural. Teniendo una contradicción y la condición supuesta es falsa.

286. Por la condición a), es obvio que f es biyectiva, y como, por la condición b) se observa que nunca es $f(f(n) + 1) = 2$, tiene que cumplirse que $f(1) = 2$ por ser el único elemento que no es de la forma $f(n) + 1$, y por a) $f(2) = 1$.

Vamos a probar por inducción sobre n que: $f(n) = n + 1$ si n es impar y $f(n) = n - 1$ si n es par.

Para $n = 1$ y para $n = 2$ ya está visto. Supongamos $n > 2$, por hipótesis de inducción se tiene que $f(n - 1) = n$ si n es par y $f(n - 1) = n - 2$ si n es impar y también

$f(n - 2) = n - 1$ si n es impar y $f(n - 2) = n - 3$ si n es par ahora $f(n) = f(f(n - 2) + 1)$ si n es impar y $f(n) = f(f(n - 1)$ si n es par por lo que $f(n) = n - 2 + 3 = n + 1$ si n es impar y $f(n) = n - 1$ si n es par.

287. Para cada número natural n definimos $f(n)$ como la suma de las cifras de la expresión de n escrito en base 2. Está claro que esta función f cumple las condiciones a) y b). Además, es la única función que las cumple, porque el valor de $f(n)$ viene determinado por las condiciones a) y b). Probamos esa afirmación por inducción sobre n. Si $n = 1$ o $n = 2^s$, $f(n) = 1$.

Supongamos $n > 1$, $n \neq 2^s$ y que es conocido $f(m)$ para todo $m < n$; se puede escribir

$n = 2^s + m$ con $m < 2^s$ tomando 2^s la mayor potencia de 2 que es menor que n; entonces $f(n) = f(m) + 1$.

Ahora, es fácil resolver las dos cuestiones que nos plantean:

En el primer caso, se trata de ver cuántos unos puede tener como máximo un número menor o igual que 2 001 escrito en base 2. Ese número, escrito en base 2, es, obviamente, 1111111111, que corresponde a $n = 1\,023 = 2^{10} - 1$. Es $f(n) = 10$.

En el segundo caso, razonando de manera análoga, se observa que la respuesta es
$n = 2^{2\,001} - 1$.

288. Supongamos $f(1) = b$. Entonces, $f(1 + b) = 2b$, como f es estrictamente creciente, se tiene $b = f(1) < f(1 + 1) < ... < f(1 + b) = 2b - b = b$ y resulta que $f(1), f(2), \ldots, f(1 + b)$ son $b + 1$ naturales, distintos, el primero vale b y el último $2b$, por tanto, han de ser consecutivos, resulta entonces: $f(1) = b$, $f(2) = 1 + b$, $f(3) = 2 + b$, ..., $f(1 + b) = b + b = 2b$.

En general, para $n > 1$, si $f(n) = c$, $f(n + c) = 2c = c + c$ y resulta que

$c = f(n) < f(n + 1) < \ldots < f(n + c) = 2c = c + c$ y los números $f(n), f(n + 1), ..., f(n + c)$ son consecutivos. Así pues $f(n) = n - 1 + f(1)$.

289. La respuesta es no. Para ver esto, observa que entre los valores $f(2), f(3), ..., f(n), ...$ debe haber un elemento mínimo, digamos que sea $f(n_0)$ donde $n_0 > 1$. Observemos que

$f(n_0 + 1) \geq f(n_0) = f(f(n_0 - 1)) + f(f(n + 1)) \geq 1 + 1 > 1$.

Como $f(n_0 + 1) > 1$, entonces $f(f(n_0 + 1)) \in \{f(2), f(3), ...\}$, por tanto, $f(f(n_0 + 1)) \geq f(n_0)$ lo que implica que $f(n_0) = f(f(n_0 - 1)) + f(f(n_0 + 1)) \geq 1 + f(n_0)$ lo que es imposible.

290. Sea p un número primo, entonces $f(2p) = f(2)f(p)$. Como $f(2p) = f(p) + f(p) = 2f(p)$ se tiene que $f(2) = 2$, $f(4) = 4$ y $f(12) = 4f(3)$, por otro lado $f(12) = f(7) + f(5) \Rightarrow$

$f(12) = 2f(2) + f(3) + f(2) + f(3) = 6 + 2f(3) \Rightarrow f(3) = 3$, $f(5) = 5$, $f(15) = 15$, $f(13) = 13$,

$f(26) = 26$, $f(23) = 23$, $f(11) = 11$, $f(33) = 33$, $f(31) = 31$, $f(29) = 29$,

$f(2\,001) = f(3)f(23)f(29) = 2\,001$ y $f(1\,999) = 1\,999$.

291. Sean $a_i = n$ (mód i) y $b_i = (n - 1)$ (mód i). Tenemos $S(n) = \sum_{i=1}^{n} a_i$ y $S(n-1) = \sum_{i=1}^{n-1} b_i$. Veamos que $d \mid n$, por definición, $a_d = 0$ y que $n \equiv 0$ (mód d) $\Rightarrow n - 1 \equiv -1$ (mód d) $\Rightarrow b_d = d - 1$ (ya que se tiene que $0 \leq b_d \leq d - 1$) (incluso si $d = 1$). Si t no divide a n, $a_t > 0$ es fácil ver que $b_t = a_t - 1$.

Siendo así $S(n)=S(n-1)\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n-1}b_i\Leftrightarrow\sum_{d/n,d\neq n}a_d+\sum_{t\neq dx}a_t+a_n$

$=\sum_{d/n,d\neq n}b_d+\sum_{t\neq dx}b_t\Leftrightarrow\sum_{d/n,d\neq n}(b_d-a_d)=\sum(a_t-b_t)\Leftrightarrow\sum_{d/n,d\neq n}(d-1)=\sum_{t/n}1$. Sea $f(n)$ el número de divisores de n. Tenemos: $\sum_{d/n,d\neq n}(d-1)=\sum_{t/n}1\Leftrightarrow\sum_{d/n,d\neq n}d-\sum_{d/n,d\neq n}1=\sum_{t/n}1$ $\Leftrightarrow(\sigma(n)-n)-(f(n)-1)$
$=n-f(n)\Leftrightarrow\sigma(n)-n-f(n)+1=n-f(n)\Leftrightarrow\sigma n)=2n-1$.

De modo que $S(n)=S(n-1)\Leftrightarrow\sigma(n)=2n-1$.

292. Consideremos las representaciones binarias de los números. Sea $n=2^a\cdot(2b+1)\Leftrightarrow a$ es la cantidad de ceros en su representación binaria.

Sea $S_k=f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2^k)$, como a solo depende de la cantidad de ceros tenemos que si $2^j>n$, $n\geq 1$ entonces $f(2^j+n)=f(n)$ por tener la misma cantidad de ceros escrito en base 2.

Asimismo $S_k=f(1)+f(2)+...+f(2^{k-1}-1)+f(2^{k-1})+f(2^{k-1}+1)+f(2^{k-1}+2)+\ldots+f(2^k)$
$=(f(1)+f(2)+\ldots+f(2^{k-1}-1)+f(2^{k-1}))+(f(1)+f(2)+\ldots+f(2^{k-1}-1))+f(2^k)$
$=(S_{k-1})+(S_{k-1}-f(2^{k-1}))+f(2^k)=S_{k-1}+S_{k-1}+[-(k-1)^2-(k-1)-1]+[k^2+k+1]=2S_{k-1}+2k$
$S_k=2(S_{k-1}+k)$.
$S_0=1$, $S_1=4$, $S_2=12$, $S_3=30$, $S_4=68$, $S_5=146$, $S_6=304$, $S_7=662$, $S_8=1\,260$,
$S_9=2\,538$, $S_{10}=5\,096$, $S_{11}=10\,214$, $S_{12}=20\,452$, $S_{13}=40\,930$, $S_{14}=81\,888$,
$S_{15}=163\,806$.

Sea $g(n)=f(1)+f(2)+...+f(n)$, probaremos que $g(n)=\sum_{i=1}^{+\infty}a_i\cdot S_i$ donde

$n=(...a_j...a_3a_2a_1a_0)$ escrito en base 2.

Sea j el mayor valor posible tal que $a_j=1\cdot n=2^j+a_{j-1}2^{j-1}+...+a_1\cdot 2^1+a_0\cdot 2^0$
$g(n)=(f(1)+f(2)+\ldots+f(2^j))+(f(2^j+1)+f(2^j+2)+\ldots+f(2^j+a_{j-1}\cdot 2^{j-1}+a_0))$
$=(S_j)+f(1)+f(2)+...+f(a_{j-1}\cdot 2^{j-1}+...+a_0))$
De modo análogo tomamos el mayor j_0 tal que $j>j_0$ y $a_{j0}=1$.
$g(n)=S_j+(f(1)+f(2)+\ldots+f(2^{j0}))+(f(2^{j0}+1)+\ldots+f(2^{j0}+a_{j0-1}\cdot 2^{j0-1}+\ldots+a_0))$
$=S_j+(S_{j0})+(f(1)+f(2)+\ldots+f(a_{j0-1}\cdot 2^{j0-1}+\ldots+a_0))$.
De manera análoga, hacemos (vamos bajando) para todos los $a_i=1$.

Como $a_i=1$ o $a_i=0$, podemos escribir $g(n)=\sum_{i=1}^{+\infty}a_i\cdot S_i$. Para obtener el menor entero n, tal que $g(n)\geq 123\,456$. Tenemos que conseguir una suma de $S_{k's}\geq 123\,456$, con los menores k's posibles, pero esto se repetirá en $(...a_j...a_3a_2a_1a_0)$ como los números i's posibles. Mas esto es una tarea fácil si tomamos los $S_{k's}$ calculados anteriormente y también sabiendo que:
$S_k>2\cdot S_{k-1}>S_{k-1}+2S_{k-2}\ldots>S_{k-1}+S_{k-2}+S_{k-3}+\ldots+S_0$
De ahí tenemos que la suma pedida es
$S_{14}+S_{13}+S_7+S_2+S_1=81\,888+40\,930+622+12+14=1\,234\,456$
Asimismo, el menor n tal que $g(n)\geq 123\,456$ y $(11000010000110)_2$
$n=2^{14}+2^{13}+2^7+2^2+2^1=24\,710$ por lo que el menor entero positivo tal que
$f(1)+...+f(n)\geq 123\,456$ es 24 710.

293. Queremos encontrar el menor valor de k tal que $g(k) = 2\,001$. Asimismo sea a_k el menor valor tal que $g(a_k) = n$. De esta forma, debemos calcular $a_{2\,001}$. Tenemos $g(1) = 1$, luego $a_1 = 1$. Podemos tomar $g(4) = 2$ y $g(5) = 3$, luego $a_3 = 5$.

Consideremos $g(k)$ y $g(k + 1)$, tomemos $g(3k) = g(k)$ y $g(3k + 3) = g(k + 1)$.

Asimismo $g(3k + 3) = g(3k) + 1$ o $g(3k + 3) = g(3k) - 1$.

De esta forma $g(3k + 1)$ y $g(3k + 2)$ son máximos iguales a $g(k) + 1$ o $g(k + 1) + 1$. Por ejemplo, si $g(4) = 2$ y $g(5) = 3$, tenemos $g(12) = 2$ y $g(15) = 3$. Tomando $g(13) = 3$ y $g(14) = 4$, tenemos que $a_4 = 14$.

Notemos que, como $g(k) \leq 2$ par $k \leq 4$, tenemos $g(k) \leq 3$ para $k \leq 12$.

Asimismo, podemos continuar a_{n-1} en función de a_n. Tomemos $g(a_n - 1) = n - 1$ pues $g(a_n - 1) < n$ (si $g(a_n - 1) > n$, existirá $k < a_n$ tal que $g(k) = n$, lo que contradice la hipótesis de a_n ser mínimo). Asimismo $g(3a_n - 1) = n - 1$ y $g(3a_n) = n$. Para $k \leq a_n - 1$ tenemos $g(k) \leq n - 1$, luego $g(k) \leq n$ para $k \leq 3(a_n - 1)$. Podemos tomar $g(3a_n - 2) = n$ y $g(3a_n - 1) = n + 1$. Luego $a_{n-1} = 3a_n - 1$.

Nota que tenemos "casi" una progresión geométrica. Si sumáramos un número x de cada lado de la igualdad dada, tenemos $a_{n+1} + x = 3a_{n-1} + x = 3\left(a_n + \frac{x-1}{3}\right)$. Si hacemos $x = \left(\frac{x-1}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$, tenemos $\left(a_{n-1} - \frac{1}{2}\right) = 3\left(a_n - \frac{1}{2}\right)$. Siendo $b_n = a_n - \frac{1}{2}$, tenemos $b_{n+1} = 3b_n$, o sea, b_n es una progresión geométrica de razón 3. Luego $b_n = b_1 \cdot 3^{n-1}$, como

$b_1 = a_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, tenemos $b_n = \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1} \Leftrightarrow a_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1} \Leftrightarrow a_n = \frac{1}{2} \cdot (3^{n-1} + 1)$.

Para $n = 2\,001$, tenemos $a_n = \frac{1}{2}(3^{2\,000} + 1)$.

Observación: La función construida es tal que $g(k)$ es lo mayor posible, para todo k y se obtiene de la forma siguiente: Primero observamos que todo natural n puede ser escrito de manera única como $n = 3^k + \varepsilon_1 \cdot 3^{k+1} + \varepsilon_2 \cdot 3^{k+2} + \ldots + \varepsilon_{k-1} \cdot 3 + \varepsilon_k$, con

$\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$ para $0 \leq j < k$ donde k es tal que $\frac{1}{2}(3^k + 1) \leq n < \frac{1}{2}(3^{k+1} + 1)$. Tenemos entonces

$g(n) = 1 + \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon_i$, o sea, $g(n)$ es el número de términos no nulos representados de esa manera.

294. El coeficiente de x^n en $(x + x^2 + x^4)^k$ consta exactamente una vez cada modo de representar el número n en la forma $\alpha + 3\beta + 4\gamma$ con $\alpha + \beta + \gamma = k$, o sea, cuenta los modos de representar n utilizando 1's, 2's y 3's con un total de k números. Variando k sigue que $f(n)$ es un coeficiente de x^n en la serie $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x + x^2 + x^4)^k$. Sumando la progresión geométrica (PG) factorizando y descomponiendo en fracciones parciales, tenemos:

$$g(x) = \frac{1}{1 - x - x^3 - x^4} = \frac{1}{(1 + x^2)(1 - x - x^2)} = \frac{1}{5} \cdot \frac{x+2}{1+x^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{x+3}{1 - x - x^2}$$

Utilizando respectivamente la suma de PG y el método para series, tenemos

$\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$ y $\dfrac{1}{1-x-x^2} = F_0 + F_1x + F_2x^2 + \ldots$ donde F_n es el n-ésimo número de Fibonacci. Si n es par, $n = 2t$ el coeficiente de x^n en el desarrollo de $g(x)$ será entonces

$[x^n]g(x) = \dfrac{2(-1)^t + F_{2t-1} + 3F_{2t}}{5}$, utilizando que $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})$ donde

$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$: $2(-1)^t + F_{2t-1} + 3F_{2t} = 2(-1)^t + [(F_{2t-1} + F_{2t}) + F_{2t}] + F_{2t}$

$= 2(-1)^t + F_{2t+2} + F_{2t} = 2(-1)^t + \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{2t+3} - \beta^{2t+3}) + \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{2t+1} - \beta^{2t+1})$

$= 2(-1)^t + \dfrac{1}{\sqrt{5}}[(\alpha + \alpha^{-1})\alpha^{2t+2} - (\beta + \beta^{-1})\beta^{2t+2}]$, como $\alpha \cdot \beta = 1$ entonces tenemos:

$\alpha + \alpha^{-1} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$ y $\beta + \beta^{-1} = -\alpha^{-1} - \alpha = -\sqrt{5}$

uniendo todo se llega a $[x^n]g(x) = \dfrac{1}{5}[2(-1)^t + \alpha^{2t+2} + \beta^{2t+2}] = F_t^2$. Por lo que $f(n)$ es un cuadrado perfecto siempre que n sea par.

295. Observemos que $f(4) = f(2 \cdot 2) = f(2) + f(2) = 2f(2) = 0$ entonces $f(2) = 0$.
Entonces $f(1\ 998) = f(2 \cdot 999) = f(2) + f(999) = f(3 \cdot 333) = f(3) + f(333) = 0$ debido a que 3 y 333 terminan en 3. Por lo tanto, $f(1\ 998) = 0$.

296. $f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = n^2 \cdot f(n)$

$f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) = (n-1)^2 \cdot f(n-1)$

De estas dos igualdades se tiene que $f(n) = n^2 \cdot f(n) - (n-1)^2 \cdot f(n-1)$

$(n^2 - 1)f(n) = (n-1)^2 \cdot f(n-1)$ y $(n+1)f(n) = (n-1) \cdot f(n-1)$

$$f(n) = \frac{n-1}{n+1} \cdot f(n-1) = \frac{n-1}{n+1}\frac{n-2}{n} \cdot f(n-2) = \frac{(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n+1)n \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3} \cdot f(1) = \frac{2f(1)}{n(n+1)}$$

Sustituyendo se tiene $\dfrac{2 \cdot 1\,001}{n(n+1)} = \dfrac{2\,002}{n(n+1)}$ y $f(2\,002) = \dfrac{2\,002}{2\,002 \cdot 2\,003} = \dfrac{1}{2\,003}$.

297. Las fracciones buscadas son de la forma $\dfrac{n}{1983}$ con $n < 1\ 983$ y $\text{mcd}(n, 1\ 983) = 1$. El número total de estas fracciones depende de $\varphi(1\ 983) = \varphi(3 \cdot 661) = \varphi(3) \cdot \varphi(661) = 2 \cdot 660 = 1\ 320$.
$\therefore$ hay 1 320 fracciones que cumplen con las condiciones pedidas.

298. Si $x \in \mathbb{N}$ y $x < n$ y $\text{mcd}(x,n) = 1$ entonces $n - x$ también es un número natural menor que n y primo relativo con él.

Sean 1, p, q, r, ... y su suma por S, entonces

$S = 1 + p + q + r + \ldots + (n - r) + (n - p) + (n - q) + (n - 10)$, cuya suma consta de $\varphi(n)$ términos. Escribiendo la suma en orden inverso, se tiene

$S = (n - 1) + (n - p) + (n - q) + (n - r) + \dots + r + q + p + 1$ y sumando ambas igualdades se tiene

$2S = n + n + \dots + \dots$ hasta $\varphi(n)$ términos, luego $S = \frac{1}{2} n \cdot \varphi(n)$.

299. Sean n un número compuesto y p_1 el menor primo que divide a n, entonces

$p_1 \le \sqrt{n}$ y $\varphi(n) \le n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \le n - \frac{n}{\sqrt{n}}$ y $\varphi(n) \le n - \sqrt{n}$.

300. Esos son los números 1, 2, 4 y los números p^α y $2p^\alpha$ donde p es un primo de la forma $4t + 3$.

301. Si $p > 2$ y $2p + 1$ son primos, entonces
$\varphi(4p) = \varphi(4) \cdot \varphi(p) = 2(p - 1)$ y $\varphi(4p + 2) = \varphi(2(2p + 1)) = \varphi(2p + 1) = 2p$ de aquí que
$\varphi(4p + 2) = \varphi(4p) + 2 \Rightarrow \varphi(n + 2) = \varphi(n) + 2$.

302. Sea p un número primo y $p = 4k + 3 > 2m + 3$, entonces
$\varphi(p) = \varphi(4k + 3) = 4k + 2$, $\varphi(p - 1) = \varphi(4k + 2) = \varphi(2(2k + 1)) = \varphi(2k + 1) \le 2k + 1$.
De esta forma $\varphi(p) - \varphi(p - 1) \ge 2k + 1 > m$. Tenemos $p + 1 = 4(k + 1) = 2^\alpha t$ donde $\alpha \ge 2$ y t es un número impar. Dado que $\varphi(p + 1) = 2^{\alpha - 1}\varphi(t) \le 2^{\alpha - 1}t = \frac{1}{2}(p + 1)$ y así

$\varphi(p) - \varphi(p - 1) \ge p - 1 - \frac{1}{2}(p + 1) = \frac{1}{2}(p - 3) > m$.

303. Sean $n = 2a \Rightarrow 2n = 4a$ y $\varphi(n) = \varphi(2a) = \varphi(2^\alpha t) = \varphi(2^\alpha)\varphi(t) = (2^\alpha - 2^{\alpha - 1})\varphi(t)$
$\varphi(2n) = \varphi(4a) = \varphi(2^{\alpha + 1}t) = (2^\alpha - 2^{\alpha - 1})\varphi(t) \ne \varphi(n)$.
Sea $n = 2a + 1 \Rightarrow 2n = 4a + 2 = 2(2a + 1)$, $\varphi(n) = \varphi(2a + 1)$
$\varphi(2n) = \varphi(2(2a + 1)) = \varphi(2)\, \varphi(2a + 1) = \varphi(2a + 1)$
$\therefore$ las soluciones de la ecuación dada son todos los números impares.

304. Si $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = [x] + \alpha$ donde α es un número no negativo menor que 1.
Si $y \in \mathbb{R} \Rightarrow y = [y] + \beta$ donde β es un número no negativo menor que 1.
Entonces $x + y = [x] + [y] + \alpha + \beta$. Si $\alpha + \beta = 0$, entonces $[x + y] = [x] + [y]$.
Si $\alpha + \beta > 0$, entonces $[x + y] > [x] + [y]$ por lo que $[x + y] \ge [x] + [y]$.

305. Sea $x = [x] + \alpha$ con $0 \le \alpha < 1$, consideremos que $[x]$ al dividirse por n cumple $[x] = qn + r$ $(0 \le r < n)$ entonces

$\frac{[x]}{n} = q + \frac{r}{n}$ y $\left[\frac{[x]}{n}\right] = q$, $x = qn + r + \alpha = qn + r_1 \Rightarrow r_1 = r + \alpha < n$, luego

$\frac{x}{n} = q + \frac{r_1}{n}$; $\left[\frac{x}{n}\right] = q = \left[\frac{[x]}{n}\right]$.

306. $1 - |x - 1| = \frac{[x] - x}{x - 1} \Rightarrow |x - 1| - |x^2 - 1| = [x] - x$
para $x = -1 \Rightarrow |-2| - |0| = [-1] - (-1)$ N.S.
para $x < -1 \Rightarrow -x + 1 - x^2 + 1 = [x] - x$ entonces $2 = [x] - x^2 \Rightarrow x = -2$ o $x = 1$ o

$x = -\sqrt{5}$, hay solución para $x = -2$ o $x = -\sqrt{5}$,

para $-1 < x < 1 \Rightarrow -x + 1 + x^2 - 1 = [x] - x$ entonces $[x] = x^2 \Rightarrow x = 1$ o $x = 0$, solución para $x = 0$, para $x > 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x - 1 - x^2 + 1 = [x] - x$ entonces $-x^2 = [x] - 2x \Rightarrow x^2 = 2x - [x]$, $x = 0$ o $x = 1$. Luego $S = \{-\sqrt{5}, -2, 0\}$.

307. La sucesión de los cubos es 1, 8, 27, 64, ... tenemos $\left[\sqrt[3]{n_1}\right] = 1$ para $n_1 = 1, 2, ..., 7$ y la suma de las partes enteras de estos números es 7 y $7 < 14$, $\left[\sqrt[3]{n_2}\right] = 2$ para $n_2 = 8, 9, 10, ..., 26$ y la suma de las partes enteras de estos números es 38 y $7 + 38 = 45 < 52$, $\left[\sqrt[3]{n_3}\right] = 3$ para $n_3 = 27, 28, ..., 63$, como la diferencia entre la suma de las partes enteras de las raíces cúbicas y $2n$ es 7 y como estas aumentan de 3 en 3 y $2n$ aumenta de 2 en 2, si consideramos la suma de los 7 primeros números, a partir de 27 encontraremos una solución de la ecuación $\left[\sqrt[3]{n_1}\right] + \left[\sqrt[3]{n_2}\right] + \left[\sqrt[3]{n_3}\right] = 7 + 38 + 21 = 66 = 2 \cdot 33$. Luego $n = 33$ es una solución de la ecuación.

Si continuamos sumando en el miembro izquierdo las sumas parciales irán aumentando de 3 en 3, luego de 4 en 4 y así sucesivamente mientras que en el miembro derecho aumenta siempre de 2 en 2 por lo que a partir de 34 el miembro izquierdo es mayor que el derecho.

$\therefore$ la ecuación tiene una sola solución que es para $n = 33$.

308. Si $s = 2$, la ecuación se satisface. Analicemos si hay otras soluciones:

En el intervalo $0 \le x < 1$ se cumple que $0 \le \left[\frac{[x]^2}{x}\right] < 1$.

En el intervalo $1 \le x < 2$ se cumple que $1 \le \left[\frac{[x]^2}{x}\right] < 2$.

En el intervalo $2 \le x < 3$ se cumple que $1 \le \left[\frac{[x]^2}{x}\right] < 2$, para $x = 3$ se cumple que $\left[\frac{[x]^2}{x}\right] = 3$.

En el intervalo $3 < x < 4$ se cumple que $2 \le \left[\frac{[x]^2}{x}\right] < 3$.

En el intervalo $4 \le x < 5$ se cumple que $3 \le \left[\frac{[x]^2}{x}\right] < 4$.

Luego la ecuación tiene solución para $x = 2$ y para todo $x \in \mathbb{R}$ con $3 < x < 4$.

309. Se tiene que $1 \le 1 \le 1$. Sumando estas desigualdades, tenemos que

$$0{,}7 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 0{,}8 \qquad 3{,}1 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} < 3{,}4$$

$$0{,}5 < \frac{\sqrt{3}}{3} < 0{,}6 \qquad \text{luego } [x] = 3.$$

$$0{,}5 \le \frac{1}{2} \le 0{,}5$$

$$0{,}4 < \frac{\sqrt{5}}{5} < 0{,}5$$

310. Se tiene que $2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$ entonces tenemos que

$2\sqrt{3}-2\sqrt{2}<2\sqrt{2}-2$

$2\sqrt{4}-2\sqrt{3}<2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$

....

$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$

Sumando estas desigualdades se tiene que 2(1 000) – 2 < y < 2(1 000) – 1 por lo que 1 998 < y < 1 999 luego [y] = 1 998.

311. Tenemos $(\sqrt{2}-1)^1=\sqrt{2}-\sqrt{1}$; $(\sqrt{2}-1)^2=\sqrt{9}-\sqrt{8}$.

Asumamos que $(\sqrt{2}-1)^{2k-1}=B\sqrt{2}-A=\sqrt{2B^2}-\sqrt{A^2}$ que puede escribirse en la forma pedida, es decir, $2B^2=N$ y $A^2=N-1$, o sea, $2B^2-A^2=1$. Consideremos ahora que

$(\sqrt{2}-1)^{2k+1}=B'\sqrt{2}-A'^2=\sqrt{2B'^2}-\sqrt{A'^2}$ con $2B'^2-A'^2=1$. Podemos escribir

$(\sqrt{2}-1)^{2k+1}=(\sqrt{2}-1)^{2k-1}(\sqrt{2}-1)^2=(B\sqrt{2}-A)(3-2\sqrt{2})=$

$=3B\sqrt{2}-4B-3A+2A\sqrt{2}$

$=(3B+2A)\sqrt{2}-(3A+4B)$. Es decir, $B'=3B+2A$ y $A'=4B+3A$ entonces

$2B'^2=2(3B+2A)^2$ y $A'^2=(4B+3A)^2$ por lo que

$2B'^2-A'^2=2(9B^2+12AB+4A^2)-(16B^2+24AB+9A^2)=2B^2-A^2=1$.

312. (x = 3; y = 1) o (x = –3; y = –1).

313. $3n+4=5k$ donde k es un número entero entonces $n=5k-3$
a) 2, 7, 12, 17, 22

314. Pongamos $\sqrt{k^2-kp}=n\Leftrightarrow k^2-pk-n^2=0\Rightarrow k=\dfrac{p\pm\sqrt{p^2+4n^2}}{2}(1)$. El radicando ha de ser cuadrado perfecto, llamémosle a. Se tiene:

$p^2+4n^2=a^2\Leftrightarrow p^2=(a+2n)(a-2n)$. Como p es primo y $a+2n\geq a-2n$, solo hay dos posibilidades:
$a+2n=p^2$ y $a-2n=1$

$a+2n=p$ y $a-2n=p$

En el caso 1) $a=\dfrac{p^2+1}{2}$; $n=\dfrac{p^2-1}{4}$, lo que exige $p\neq 2$ (n natural).

En el caso 2) resulta $a=p$; $n=0$.

Sustituyendo los valores de a en (1) y operando queda:

Si $p=2$, entonces $k=2$ o $k=0$.

Si $p\neq 2$ entonces quedan los cuatro valores:

$$k_1=\left(\frac{p+1}{2}\right)^2,\ k_2=-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2,\ k_3=p,\ k_4=0.$$

315. Si m y n son enteros positivos y $n! + 1 = (m! - 1)^2$, sigue que $m \geq 3$. La ecuación dada se transforma en $n! + 1 = (m!)^2 - 2m! + 1$, o sea, $n! = m!\,(m! - 2)$. Dividiendo por $m!$ (obviamente $n > m$), tenemos que $n(n - 1)\,(n - 2) \ldots (m + 1) = m! - 2$ y al ser $m!$ divisible por 3 ($m \geq 3$), sigue que $m! - 2$ no es divisible por 3, por lo que el término de la izquierda, $n(n - 1) \ldots (m + 1)$, debe tener a lo sumo dos factores. Así pues, tenemos:

1 factor: $n = m + 1 \Rightarrow m + 1 = m! - 2 \Rightarrow m = m! - 3$. Como m divide a $m! - 3$ y divide a $m!$ sigue que m divide a $3 \Rightarrow m = 3$ y $n = 4$. Se comprueba y es solución.

2 factor: $n = m + 2 \Rightarrow (m + 2)\,(m + 1) = m! - 2 \Rightarrow m^2 + 3m + 4 = m!$.

Así pues $3m = m! - m^2 - 4$ con lo que m divide a $m! - m^2 - 4$, de lo que sigue que m divide a 4 y, por tanto, $m = 4$. Pero $m = 4$ no es solución de $m^2 + 3m + 4 = 4!$ pues $16 + 12 + 4 \neq 24$. La única solución es, entonces, $m = 3$; $n = 4$.

316. $$\frac{(2n^2+4n+18)(7-n)}{-3n^2+18n+21} \Leftrightarrow \frac{2n^2+4n+18}{3n+3} \quad (n \neq 7)$$

$\dfrac{2n^2+4n+18}{3n+3} = \dfrac{1}{3}\left[2n+2+\dfrac{16}{n+1}\right]$ de aquí tenemos los posibles casos:

a) $n + 1 = 1$	b) $n + 1 = 2$	c) $n + 1 = 4$	d) $n + 1 = 8$	e) $n + 1 = 16$
$n = 0$	$n = 1$	$n = 3$	$n = 7$	$n = 15$

los casos a) y d) son imposibles.

$\therefore\ n = 1;\ 3;\ 15$

317. *Caso 1:* $m = 1$. Se deben determinar los valores de n tales que

$\left[1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right]=1$, es decir, $1 \leq 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n} < 2$.

Como $S(1) = 1 < 2$, $S(2) = \dfrac{3}{2} < 2$, $S(3) = \dfrac{11}{6} < 2$ y $S(n) \geq S(4) = \dfrac{25}{12} > 2$.

En este caso las únicas soluciones son $(m;n) \in \{(1;1), (1;2), (1;3)\}$.

Caso 2: $m \geq 2$ se tiene sucesivamente,

$$1 < 1 + \frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\ldots+\frac{1}{n^m} \leq 1 + \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}$$

$= 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)k} = 1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2$ de aquí que $\left[1+\dfrac{1}{2^m}+\dfrac{1}{3^m}+\ldots+\dfrac{1}{n^m}\right]=1$ para cualquier n natural y cualquier entero $m \geq 2$. Por lo tanto, las únicas soluciones son las parejas del primer caso.

318. La igualdad planteada es $n^3 - n = 2\,003$, es decir, $(n - 1)n(n + 1) = 2\,003$ pero el producto de tres números consecutivos siempre es divisible por 3 y 2 003 no es múltiplo de 3, por lo que no se cumplirá la igualdad para todo $n \in \mathbb{N}$.

319.

$2xy - 3x + 6 - 4y = 6$	$2xy - 3x - 6 + 4y = 6$
$(x - 2)(2y - 3) = 6$	$(x + 2)(2y - 3) = 6$
$x = 0$ $y = 0$	$x = 0$ $y = 3$

Comprobando en ambos casos, resulta que (0; 0) y (0; 3) son soluciones.

320. Sea n el número de filas y m la cantidad de lugares en cada fila del salón.

i) Cada una de las $(n - 2)(m - 2)$ personas que están en el interior del rectángulo, saluda a 8 personas que están a su alrededor.

ii) Cada una de las $2[(n - 2) + (m - 2)]$ personas que están en las orillas del rectángulo, pero no en las esquinas, saluda a 5 personas.

iii) Las 4 personas de las esquinas saludan a 3.

Así, contando los saludos dos veces y desarrollando tenemos que:

$8(n - 2)(m - 2) + 10[(n - 2) + (m - 2)] + 12 = 2\ 040$ y $8mn - 6m - 6n = 2\ 036$.

Para resolver esta ecuación podemos proceder de varias maneras. Una de ellas podría ser buscando una factorización:

$16mn - 12m - 12n = 4\ 072$; $16mn - 12m - 12n + 9 = 4\ 081$;
$4n(4m - 3) - 3(4m - 3) = 4\ 081$
$(4m - 3)(4n - 3) = 4\ 081 = 7 \cdot 11 \cdot 53$.

Como 7 y 11 no son de la forma $4s - 2$, las únicas soluciones son:

$4n - 3 = 77$ y $4m - 3 = 53$ o $4n - 3 = 53$ y $4m - 3 = 77$, por lo que $n = 20$ y $m = 14$ o $n = 14$ y $m = 20$.

En cualquiera de los casos el número de concursantes es de 280.

321. Tenemos que sumar del número $x + 1$ hasta el número $y - 1$ y obtener el número 1 999. Esta suma: $(x + 1) + (x + 2) + ... + (y - 1) = 1\ 999$ corresponde a la de una progresión aritmética de diferencia 1 y con $y - x - 1$ términos, por tanto, es:

$\left(\frac{(x+1)+(y-1)}{2}\right)(y - x - 1) = 1\ 999$ de donde se deduce la descomposición:

$(x + y)(y - x - 1) = 2 \cdot 1\ 999$.

Como $x > 0$, $y - x - 1 < y + x$, y teniendo en cuenta que 2 y 1 999 son números primos, solamente pueden ocurrir los casos siguientes:

Caso 1: Si $y + x = 2 \cdot 1\ 999$, $y - x - 1 = 1$ que tiene como solución $x = 1\ 998$, $y = 2\ 000$.

Caso 2: Si $y + x = 1\ 999$, $y - x - 1 = 2$ que tiene como solución $x = 998$, $y = 1\ 001$.

322. Condición a): $z = \left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor = 111k$ para todo k dígito.

Condición b): $z = \left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor = 1 + 2 + 3 + ... + n \Rightarrow z = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow n^2 + n - 2z = 0$ y

$n = \frac{-1+\sqrt{1+8z}}{2}$, la otra raíz es negativa uniendo las dos condiciones, queda:

$n = \frac{-1+\sqrt{1+8 \cdot 111 \cdot k}}{2}$. Como n es natural, el radicando tiene que ser un cuadrado perfecto lo que ocurre solo para $k = 6$ que sustituido en la expresión anterior resulta $n = 36$ por lo que el mayor número N que cumple a) y b) es 2 000.

323. Ya que p es primo, $p \neq 0$ y $p \neq 1$. De la ecuación resulta que p divide a x o p divide a y. Como la ecuación es simétrica respecto de x y y, si (α,β) es solución, también lo será (β,α). Si p divide a x,

$x = ap$ (a entero) la ecuación se puede poner como $p(ap + y) = pay \Rightarrow pa + y = ay \Rightarrow y = \dfrac{ap}{a-1}$, ya que a es entero, además, a y a –1 son primos relativos, luego a – 1 divide a p. Al ser p primo solo hay 4 posibilidades:

$a - 1 = \pm 1$ y $a - 1 = \pm p$. Examinemos todos los casos:
$a - 1 = -1$, entonces $a = x = y = 0$
$a - 1 = 1$, entonces $a = 2$, $x = 2p$, $y = 2p$
$a - 1 = p$, entonces $a = p + 1$, $x = p(p + 1)$, $y = p + 1$
$a - 1 = -p$, entonces $a = 1 - p$, $x = p(1 - p)$, $y = p - 1$

En resumen las soluciones son:

$(0;0)$, $(2p;2p)$, $(p(p + 1);p + 1)$, $(p(1 - p);p - 1)$, $(p + 1;p(p + 1))$, $(p - 1;p(1 - p))$.

324. a) Vamos a separarlo en dos casos:

i) Tomando $a = k^2$ y $b = t^2$ tenemos $c = (k + t)^2$ consecuentemente $k^2, t^2, (k + t)^2$ es solución de la ecuación para todo $k, t \in \mathbb{N}$.

ii) Supongamos que a no sea un cuadrado perfecto. En este caso, a puede ser escrito en la forma $a = k^2s$ donde s es el producto de primos distintos.

Como $c = a + b + 2\sqrt{ab}$, debemos tener $b = t^2s$ tal que ab sea un cuadrado perfecto, de ahí se tiene $c = a + b + 2\sqrt{ab} = k^2s + t^2s + 2kts = s(k + t)^2$, en este caso
(k^2s), (t^2s), $s(k + t)^2$ es solución de la ecuación.

b) Elevando al cubo ambos miembros se tiene $c = a + b + 3\left(\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{ab^2}\right)$. Vamos a separar también en dos casos:

i) Tomando $a = k^3$, $b = t^3$ tenemos $c = (k + t)^3$, $k, t \in \mathbb{N}$ y $k^3, t^3, (k + t)^3$ es solución de la ecuación.

ii) Supongamos que a no es un cubo perfecto entonces $a = k^3 \cdot m \cdot n^2$ donde m y n son productos de primos distintos; $b = t^3 \cdot m^2 \cdot n$, por ser $c = a + b + 3\left(\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{ab^2}\right)$.

Se tiene que $a^2 = k^6 \cdot m^2 \cdot n^4$ y $b^2 = t^6 \cdot m^4 \cdot n^2$ entonces

$\left(\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{ab^2}\right)^2 = a\sqrt[3]{ab^2} + 2ab + b\sqrt[3]{a^2b}$ que es racional asumiendo que a y b son distintos por lo que una solución de la ecuación dada es $k^3 \cdot m \cdot n^2$, $t^3 \cdot m^2 \cdot n$, $mn^2(k + t)^3$.

325. Algunas veces no es fácil imaginar cómo introducir un elemento extremo. Una buena idea para estos casos es asumir la negación de la proposición para ver donde se puede encontrar una contradicción. Asumamos que existen enteros positivos x, y, z, t tales que $x^2 + y^2 = 3(z^2 + t^2)$. Ya que $x^2 + y^2$ es divisible por 3 entonces x, y también son divisibles por 3 (probar).
Por tanto, $x = 3m$, $y = 3n$ con m, n enteros positivos, entonces $z^2 + t^2 = 3(m^2 + n^2)$ y así podemos continuar indefinidamente para obtener sucesiones de números enteros positivos lo que es imposible. Luego la idea es considerar el menor elemento en algún sentido.
Sean x, y, z, t enteros positivos tales que $x^2 + y^2 = 3(z^2 + t^2)$ y la suma $x^2 + y^2$ es la menor entre todas las soluciones de la ecuación. Siguiendo igual razonamiento que antes obtenemos los números m, n, p, q que satisfacen la ecuación con $m < x$ y $n < y$, por tanto, $m^2 + n^2 < x^2 + y^2$ que es una contradicción.

326. Las soluciones de la ecuación son $(3,7)$ y $(-7,-3)$.
Haciendo $y = x + a$, sustituyendo y simplificando la ecuación propuesta llegamos a
$(9 - 3a)x^2 - (9a - 3a^2)x + 127 - a^3 = 0 \qquad (1)$

Esta ecuación debe poseer soluciones reales.
Su discriminante es $D = (9 - 3a)(a^3 + 9a^2 - 508)$.
Si $a \geq 6$, entonces $a^3 + 9a^2 \geq 540$ y $D < 0$. Para $-2 \leq a \leq 2$ tenemos $9 - 3a > 0$ y $a^3 + 9a^2 = a^2(a + 9) \leq 4 \cdot 11 < 508$. Para $-8 \leq a \leq -3$, $a^2(a + 9) \leq 64 \cdot 6 < 508$ y para $a \leq -9$, $a^2(a + 9) \leq 0 < 508$. Asimismo $D \geq 0$ solamente para $a = \{3, 4, 5\}$. Para $a = 3$ obtenemos una contradicción en (1).
Para $a = 4$, la ecuación $x^2 + 4x - 21 = 0$ tiene como soluciones $x = 3$ o $x = -7$ y para $a = 5$ la ecuación $3x^2 + 15x - 1 = 0$ no tiene ninguna solución entera. Las únicas soluciones de la ecuación propuesta son, por tanto, $x = 3$, $y = 7$ o $x = -7$, $y = -3$.

327. Consideremos la ecuación cuadrática $x^2 - 3yzx + y^2 + z^2 = 0$.
Si x es una de las soluciones la otra es $3yz - x$.
Supongamos que $x \leq y \leq z$, entonces $3yz - x \geq 3z - x \geq 2z > z$ y $(x;y;z)$ es una solución de la ecuación dada y $(y;z;3yz - x)$ es una solución distinta. De esta forma de la solución (1;1;1) pueden obtenerse infinitas soluciones de la ecuación dada.

328. Asumamos que $y > x \geq 2$ y $p > y$. Restando las dos ecuaciones dadas se tiene $p(p - 1) = 2(y - x)(y + x)$, de aquí que $p > y - x$ y $2p > y + x$, llegando a $p = x + y$ y $p - 1 = 2(y - x)$. Eliminando y de las ecuaciones dadas, tenemos que $p + 1 = 4x$, de aquí se obtiene $x = 2$, $p = 7$ que es el único primo que satisface las dos ecuaciones simultáneamente.

329. Sea m un número real que satisface la condición del problema. Supongamos que las ecuaciones

(1) $\quad x^2 - 2mx - 4(m^2 + 1) = 0$

(2) $\quad x^2 - 4x - 2m(m^2 + 1) = 0$

tienen una raíz común x_0. Restando (1) de (2) se tiene $(2m - 4)x_0 = (2m - 4)(m^2 + 1)$ de donde $x_0 = m^2 + 1$; nótese que si $m = 2$ las dos ecuaciones coinciden. Sustituyendo x_0 en cualquiera de las ecuaciones dadas se tiene $(m^2 + 1)(m^2 - m + 2) = 0$ teniendo $m = -1$ o $m = 3$. Al comprobar se tiene que la condición pedida se satisface para $m = 3$.
Consideremos ahora que (1) y (2) no tienen raíces comunes entonces $D_1 = 4 + 5m^2 > 0$, la ecuación (1) tiene dos raíces reales diferentes. Si $D_2 = 4 + 2m(m^2 + 1) = 0$ que se puede escribir como $(m + 1)(m^2 - m + 2) = 0$ cuya solución es $m = -1$. Entonces la respuesta es $m = 3$.

330. Sean x: total de escalones que tiene la escalera en reposo, t: tiempo que transcurre al pasar un escalón de una posición a la inmediata siguiente. De esta manera una persona en reposo tardaría un tiempo xt en subir la escalera mecánica.
Como Pedro sube 21 escalones caminando, llega arriba en el tiempo $(x - 21)t$ y para subir cada escalón, ha demorado $\dfrac{(x-21)t}{21}$. Similarmente, el tiempo que emplea Luis en subir cada escalón es $\dfrac{(x-28)t}{28}$. Como la velocidad de Luis es el doble de la de Pedro, el tiempo que demora Pedro en subir un escalón es el doble del que emplea Luis, luego $\dfrac{(x-21)t}{21} = \dfrac{2(x-28)t}{28}$ de donde $x = 42$.

331. Sea $19xy$ el año de nacimiento de Juan, de modo que la suma de sus dígitos es $10 + x + y$. Por otra parte, la edad que Juan cumple el año 2001 está dada por $2001 - (1900 + 10x + y) = 101 - 10x - y$. Igualando ambos valores, se tiene que $11x + 2y = 91$, debiendo ser x y y enteros entre 0 y 9.

Solucionando la ecuación, se tiene que como $2y$ es a lo sumo 18, entonces $11x$ es al menos 73, de modo que x es al menos 7. Con $x = 7$, obtenemos $y = 7$. Con $x = 8$ o con $x = 9$, y no resulta entero. Luego la única solución posible se da con $x = y = 7$, siendo entonces la fecha de nacimiento de Juan el 25 de agosto de 1977.

332. Los enteros de esa forma son los del 5 al 45.

Con $a_1 = a_2 = ... = a_9 = 1$, obtenemos el mayor de esos números que es el 45. Con

$a_1 = a_2 = ... = a_9 = 9$ obtenemos el menor que es el 5. Como $\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+...+\frac{7}{7}=4$, se pueden escribir los números 6, 7, 8 y 9,

6 para $a_8 = 8$ y $a_9 = 9$; 7 para $a_8 = 4$ y $a_9 = 9$; 8 para $a_8 = 8$ y $a_9 = 3$;

9 para $a_8 = 8$ y $a_9 = 9$.

Si tomamos cada a_i de i a 1, cada fracción es 1 y obtenemos 9. Si cambiamos alguna a_i de i a 1, la suma aumenta, entonces podemos conseguir aumentos (independientes) de 1, 2, 3, ..., 8 y así formamos los números del 10 al 45.

333. Si los números dados son cuadrados perfectos, entonces tiene que cumplirse que $m^2 - 4m \geq 0$, también $n^2 - 4m \geq 0$ teniendo entonces que $4m \leq n^2 \leq \frac{m^4}{16}$ y de esta forma $m \geq 4$ y de forma similar $n \geq 4$.

Si $m = 4$ entonces $n = 4$.

Sea $m = n$, obtenemos la ecuación $m^2 - 4m = x^2$ de donde

$(m - 2)^2 - x^2 = 4$ y $(m - 2 - x)(m - 2 + x) = 4$. Los factores del miembro izquierdo tienen igual paridad y $m - 2 + x$ es positivo teniendo entonces que el único caso posible es que $m - 2 - x = m - 2 + x = 2$ obteniendo que $m = 4$.

Con el mismo razonamiento podemos suponer que $m > n \geq 5$.

Entonces tenemos

$x^2 = m^2 - 4n > m^2 - 4m = (m - 3)^2 + 2m - 9 > (m - 3)^2 + 2 \cdot 5 - 9 > (m - 3)^2$ por lo que

$m^2 > x^2 > (m - 3)^2$, si $x^2 = (m - 2)^2$, entonces $m^2 - 4n = (m - 2)^2$ y de esta forma

$n = m - 1$, entonces se tiene que $y^2 = n^2 - 4m = (m - 1)^2 - 4m = m^2 - 6m + 1$

$= (m - 3)^2 - 8$ teniendo $(m - 3 + y)(m - 3 - y) = 8$. Los factores del miembro izquierdo tienen igual paridad por lo que uno de ellos es igual a 4 y el otro igual a 2. En ambos casos $m = 6$ y $n = 5$.

Consideremos ahora el caso en que $x^2 = (m - 1)^2$ entonces $4n = 2m - 1$ que no es posible porque $4n$ es par y $2m - 1$ es impar. Por lo tanto, las soluciones son los pares ordenados $(m;n)$ $\{(4;4), (5;6), (6;5)\}$.

334. $mn - 7n + 8m - 56 = mn$ luego $8m - 7n = 56$.

Como 8 / $8m$ y 8 / 56 para que la ecuación tenga soluciones enteras debe cumplirse que $8/7n$ y esto solo ocurre si $n = 8k$ con k entero positivo.

Sustituyendo se tiene $8m - 7(8k) = 56$ y $m = 7k + 7$.

a) $m : n = (7k + 7) : 8k = \frac{7}{8} + \frac{7}{8k}$ que es máximo cuando k es mínimo, es decir, para $k = 1$ y máx $(m : n) = 1{,}75$.

b) $mn = 8k(7k + 7) = 2^2 \cdot 2 \cdot 7k(k + 1)$, para que sea cuadrado perfecto debe cumplirse que 7 / k o 7 / $(k + 1)$, o sea, $k \in \{6, 7, 13, 14, 20, 21, ...\}$

para $k = 6$, mn no es un cuadrado perfecto, para $k = 7$, $mn = 2^6 \cdot 7^2$ que es un cuadrado perfecto y, además, el mínimo por lo que $mn = 56^2$ y se tiene $m = n = 56$.

335. Sean $a + b + c + d = 21$; $a + b + c + e = 25$; $a + b + d + e = 28$; $a + c + d + e = 30$; $b + c + d + e = x$ siendo x uno de los valores 21, 25, 28, 30

sumando miembro a miembro, resulta $4(a + b + c + d + e) = 104 + x$
$4 / 104$ entonces $4 / x$ de aquí que $x = 28$ y $a + b + c + d + e = 33$, resolviendo el sistema se tiene que $a = 5$; $b = 3$; $c = 5$; $d = 8$; $e = 12$.

336. $x^2 - 3x - y^2 - y = 6$ entonces $x^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right)x + \frac{9}{4} - \left[y^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)y + \frac{1}{4}\right] = 8$

$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 8$, es decir, $(x + y - 1)(x - y - 2) = 8$, teniendo en cuenta que cada uno de los factores tiene diferente paridad, analizando los casos tenemos:

I. $x + y - 1 = 1$, $x - y - 2 = 8$
$x = 6$, $y = -4$

II. $x + y - 1 = -1$, $x - y - 2 = -8$
$x = -3$, $y = 3$

III. $x + y - 1 = 8$, $x - y - 2 = 1$
$x = 6$, $y = 3$

IV. $x + y - 1 = -8$, $x - y - 2 = -1$
$x = -3$, $y = -4$

$\therefore$ los pares ordenados son: $(6;-4)$, $(-3;3)$, $(6;3)$, $(-3;-4)$

337. Sean n un número verificando el enunciado y s la suma de sus cifras.
Como $1\,000 \leq n \leq 9\,999$ y $n = s^3$, resulta $11 \leq s \leq 21$ (1)
Si $n = xyzt$, tenemos $1\,000x + 100y + 10z + t = s^3$ (2)
$x + y + z + t = s$, restando queda $999x + 99y + 9z = s^3 - s$ (3)
cuyo segundo miembro ha de ser múltiplo de 9 (por serlo el primero) y, como
$s^3 - s = (s - 1)\, s\, (s + 1)$ y por (1), solo hay tres valores de $s^3 - s$ que son múltiplos de 9
$16 \cdot 17 \cdot 18$; $17 \cdot 18 \cdot 19$ y $18 \cdot 19 \cdot 20$, sustituimos en (3) y analizamos cada caso.

1) $999x + 99y + 9z = 16 \cdot 17 \cdot 18 \Leftrightarrow 111x + 11y + z = 544$ resulta inmediatamente $x = 4$; $y = 9$; $z = 1$, valores que llevados a (2) con $s = 17$ se obtiene $t = 3$ y finalmente $n = 4\,913$.

2) $999x + 99y + 9z = 17 \cdot 18 \cdot 19 \Leftrightarrow 111x + 11y + z = 646$ de donde $x = 5$; $y = 8$; $z = 3$, valores que llevados a (2) con $s = 18$ se obtiene $t = 2$ y finalmente $n = 5\,832$.

3) $999x + 99y + 9z = 18 \cdot 19 \cdot 20 \Leftrightarrow 111x + 11y + z = 760$ resulta $x = 6$; $y = 8$; $z = 6$, valores que llevados a (2) con $s = 19$ resulta una contradicción.

Resumiendo, las únicas soluciones son 4 913 y 5 832.

338. Escribamos $3n + 1 = k^2$. Observemos primero que k no puede ser múltiplo de 3 pues si lo fuera, entonces, 1 sería la diferencia de dos múltiplos de 3, así que 1 también sería divisible por 3, lo cual es un absurdo. Entonces tenemos dos posibilidades para k: que deje resto 1 en la división por 3 o que deje resto 2. En el primer caso $k = 3a + 1$ con a entero y $3n + 1 = k^2 = 9a^2 + 6a + 1$ de donde $n = 3a^2 + 2a$ de donde
$n + 1 = a^2 + a^2 + (a + 1)^2$ y para $k = 3a + 2$ se tiene $n + 1 = a^2 + (a + 1)^2 + (a + 1)^2$.

339. Veamos que los últimos dos dígitos de las potencias de 3 son 03, 09, 27, 81, 43, 29, 87, 61, 83, 49, 47, 41, 23, 69, 07, 21, 63, 89, 67, 01, ... son en total 20 términos y como 1 995 deja resto 15 en la división por 20, los dos últimos de $3^{1\,995}$ son 07.

340. Sea $T = n + 13$, se entregaron $m(n + 13)$ libretas en total,

$m(n + 13) = 2n^2 + 21n - 40$ luego $m = 2n - 5 + \dfrac{25}{n+13}$. Si $n = 12$ la división es exacta, luego había más hembras que varones. $2n^2 + 21n - 40 = 2(12)^2 + 21(12) - 40 = 500$ y $25 \mid 500$.

341. Los tríos (2,3,4) y (3,7,8) son soluciones de la ecuación, veamos si hay alguna otra solución. Observemos que para las dos soluciones encontradas uno de los números primos es el 3 por lo que el 3 juega un importante rol en la ecuación. Asumamos que (p,q,n) es una solución con $3 < p < q$. Entonces $p, q \equiv 1, 2 \pmod 3$ y que $n^2 \equiv p^2 + q^2 \equiv 2 \pmod 3$ pero para $n \equiv 0, 1, 2 \pmod 3$ se tiene que $n^2 \equiv 1, 2 \pmod 3$ que es una contradicción por lo que las únicas soluciones son las encontradas.

342. Debemos probar que la única solución posible de este problema es cuando $a_j = b$ para todo $1 \le j \le 2\,002$. Para eso vamos a dividir nuestra proposición en dos partes. Ante todo mostremos que a_j no puede ser mayor que b. Para ello probemos que

$(b+1)^{b+1} > 2\,002 \cdot b^b \Leftrightarrow \left(\frac{b+1}{b}\right)^b > \frac{2\,002}{b+1} \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{b}\right)^b > \frac{2\,002}{b+1}$ para $b > 800$, si conocemos que

$\left(1+\frac{1}{b}\right)^b$ es creciente, y por otro lado probamos que $\left(1+\frac{1}{b}\right)^b > \left(1+\frac{1}{800}\right)^{800} > \frac{2\,001}{800} > \frac{2\,002}{801} \ge \frac{2\,002}{b+1}$,

dado que $a > b \Leftrightarrow ab + a > ab + b \Leftrightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+1}{b+1}$, tenemos que $\frac{2\,001}{800} > \frac{2\,002}{801}$ y la inecuación solamente

necesitamos probar que es $\left(1+\frac{1}{800}\right)^{800} > \frac{2\,001}{800}$. De acuerdo con el teorema del binomio tenemos que

$$\left(1+\frac{1}{800}\right)^{800} > 1^{800} + \binom{800}{1}\cdot 1^{779}\cdot\frac{1}{800^1} + \binom{800}{2}\cdot 1^{798}\cdot\frac{1}{800^2} + \binom{800}{3}\cdot 1^{797}\cdot\frac{1}{800^3}$$

$$= 1 + 800\cdot 1\cdot\frac{1}{800} + \frac{800\cdot 799}{2\cdot 800^2} + \binom{800}{3}\cdot\frac{1}{800^3} = 1 + 1 + \frac{799}{1\,600} + \binom{800}{3}\cdot\frac{1}{800^3}$$

$= \frac{3\,999}{1\,600} + \binom{800}{3}\cdot\frac{1}{800^3}$ pero como $\frac{2\,001}{800} - \frac{3\,999}{1\,600} = \frac{3}{1\,600}$ se necesita probar que $\binom{800}{3}\cdot\frac{1}{800^3} > \frac{3}{1\,600}$

pero esto es verdadero porque de

$$\binom{800}{3}\cdot\frac{1}{800^3} = \frac{800\cdot 799\cdot 798}{6\cdot 800^3} = \frac{799\cdot 266\cdot 3}{3\cdot 800\cdot 1\,600} > \frac{400\cdot 6\cdot 3}{3\cdot 800\cdot 1\,600} = \frac{3}{1\,600}.$$

Conocemos que $a_j \le b$ para todo $1 \le j \le 2\,002$.

Como un nuevo caso debemos probar que ningún valor de a_j puede ser menor que b. Esto es obvio porque la suma deberá ser también menor, con ninguno de los valores de a_j mayor que b encontramos el menor valor. De esta forma la única posibilidad es que $a_j = b$ para todo $1 \le j \le 2\,002$, como se quería probar.

343. Si m y n son enteros positivos y $n! + 1 = (m! - 1)^2$, sigue que $m \ge 3$. La ecuación dada se transforma en $n! + 1 = (m!)^2 - 2m! + 1$, o sea, $n! = m!\,(m! - 2)$. Dividiendo por $m!$ (obviamente $n > m$), tenemos que $n(n-1)(n-2) \ldots (m+1) = m! - 2$ y al ser $m!$ divisible por 3 ($m \ge 3$), sigue que $m! - 2$ no es divisible por 3, por lo que el término de la izquierda, $n(n-1) \ldots (m+1)$, debe tener a lo sumo dos factores. Así pues, tenemos:

1 factor: $n = m + 1 \Rightarrow m + 1 = m! - 2 \Rightarrow m = m! - 3$. Como m divide a $m! - 3$ y divide a $m!$ sigue que m divide a $3 \Rightarrow m = 3$ y $n = 4$. Compruebo y es solución.

2 factor: $n = m + 2 \Rightarrow (m+2)(m+1) = m! - 2 \Rightarrow m^2 + 3m + 4 = m!$

Así pues $3m = m! - m^2 - 4$ con lo que m divide a $m! - m^2 - 4$, de lo que sigue que m divide a 4 y, por tanto, $m = 4$. Pero $m = 4$ no es solución de $m^2 + 3m + 4 = 4!$ pues $16 + 12 + 4 \neq 24$. La única solución es, entonces, $m = 3$; $n = 4$.

344. Como **7** es primo y $a \neq 1$, $b \neq 1$ y $c \neq 1$, $a \cdot b \cdot c = 7^p \cdot 7^q \cdot 7^r = 7^{39}$ con $p, q, r \in \mathbb{N}$. Por tanto, el número de ternas ordenadas **(**a, b, c**)** será el mismo que el de ternas (p, q, r) con la condición $p + q + r = 39$. Tabulemos y contemos (tabla 8).

Tabla 8

p	*q*	*r*	*No. de ternas*
1	1 2 ... 37	37 36 ... 1	37
2	1 2 ... 36	36 35 ... 1	36
3	1 2 ... 35	35 34 ... 1	35
...	...	...	...
...	...	...	...
36 ...	1 2	2 1	2
37	1	1	1

El total de ternas será: $37 + 36 + 35 + ... + 2 + 1 = \dfrac{37+1}{2} \cdot 37 = 19 \cdot 37 = 703$.

345. Notemos primero que el sistema es simétrico en x y y, es decir, si tenemos un par (a,b) que es solución del sistema entonces el par (b,a) también es solución. Luego cada solución (a,b) del sistema nos generará la solución (b,a), la cual es distinta, cuando a y b son distintos. Por lo tanto, tenemos un número par de soluciones en este caso. Resta probar que existe un número par de soluciones (a,b) con $a = b$. Cuando $x = y$, se tiene que $(x^2 + 6)(x - 1) = x\,(x^2 + 1)$, que implica $x^3 - x^2 + 6x - 6 = x^3 + x$. Simplificando nos queda la ecuación cuadrática $x^2 - 5x + 6 = 0$, o $(x - 2)\,(x - 3) = 0$ cuyas soluciones son $x = 2$ y $x = 3$, es decir, los pares (2,2) y (3,3) son las soluciones del sistema en este caso. Así el sistema tiene un número par de soluciones.

346. Sea u el entero positivo definido por $3a - 2 = u^2$. Consideremos las ecuaciones (1) $a + b = x^2$, (2) $a + c = y^2$, (3) $b + c = z^2$, (4) $a + b + c = t^2$.
De (3) y (4) se obtiene $a = t^2 - z^2 = (t - z)(t + z)$, que se puede satisfacer tomando

$t - z = 1$, $t + z = a$, con lo cual (6) $t = \left(\dfrac{a+1}{2}\right)$. De (1), (2) y (4) se tiene

$x^2 + y^2 = 2a + b + c = a + t^2 = u^2 + \left(\dfrac{a-3}{2}\right)^2$, que se satisface tomando

$x = u$ y $y = \frac{(a-3)}{2}$, resultando la solución, $b = x^2 - a = u^2 - a = 2(a - 1)$, $c = y^2 - a = \left(\frac{a-3}{2}\right)^2$,

Por último $c - b = y^2 - x^2 = (y - x)(y + x)$, y luego de algunos cálculos

$y - x = \frac{1}{6}(u + 1)(u - 7) > 0$, ya que $a > 17$ y, por tanto, $\frac{1}{6}(u^2 - 6u - 7) = 1$, con $u^2 = 3a - 2 > 49$. Por lo tanto, $c > b > 0$.

347. Si $n = 100x + 10y + z$ y $(x + y + z)^3 = n^2$ entonces n debe ser un cubo perfecto, y como debe ser menor que 1 000 basta examinar $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, $4^3 = 64$, $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$, $8^3 = 512$ y $9^3 = 729$, de los cuales los únicos que cumplen con la condición exigida son 1 y 27.

348. Primeramente notemos que debe cumplirse que x, $y > N$, porque de otra manera una de las dos fracciones del miembro izquierdo o las dos fueran mayor que la fracción del miembro derecho.

Entonces $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{N} \Rightarrow \frac{x+y}{xy}=\frac{1}{N}$, es decir, $N(x + y) = xy \Rightarrow (x - N)(y - N) = N^2 \Rightarrow y = \frac{N^2}{x-N} + N$.

Tenemos que el par $(x;y)$ es una solución si y solo si $(x - N) / N^2$, como y es positivo, debe cumplirse que $x > N$. Cada divisor d de N^2 es una solución de la ecuación dada.

Sea $N = p_1^{q_1} \cdot p_2^{q_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{q_n}$ entonces $N^2 = p_1^{2q_1} \cdot p_2^{2q_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{2q_n}$. Entonces cualquier factor de N^2 debe ser de la forma $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ donde $0 \le a_i \le 2q_i$ para cada i, de esta forma hay $(2q_i + 1)$ posibilidades para el exponente de p_i, en cada factor, como N^2 tiene

$(2q_1 + 1)(2q_2 + 1)\ldots(2q_n + 1)$ factores, debe cumplirse que

$(2q_1 + 1)(2q_2 + 1)\ldots(2q_n + 1) = 2\,005 = 5 \cdot 401$, tiene 4 factores que son 1, 5, 401 y 2 005 que son números impares por lo que cada exponente q_i es un número par.

349. Es fácil ver que c es divisible por a, para todo $c = ap$ para algún $p \in \mathbb{N}$.

Entonces $abc + ab + c = a^3 \Leftrightarrow abp + b + p = a^2 \Leftrightarrow a^2 - bpa - (b + p) = 0$

Consideremos la última ecuación cuadrática con respecto $a \in \mathbb{N}$ es necesario que $D = n^2$, $n \in \mathbb{Z}$. Por tanto, $D = (bp)^2 + 4(p + b) = n^2$ con $n \in \mathbb{Z}$. Como $p, q \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$4(b + p) \le 4\ (bp + bp) = 8bp < 8bp + 16$ luego $(bp)^2 < D < (bp + 4)^2$, se tiene que D admite solo 3 posibles valores $(bp + 1)^2$, $(bp + 2)^2$ y $(bp + 3\ )^2$.

Pero $D - (bp)^2 = 4(p + b\ )$ es par, luego $D \ne (bp + 1)^2$ y $D \ne (bp + 3)^2$ entonces

$D = (bp + 2)^2$ y tenemos $4(b + p) = 4bp + 4 \Leftrightarrow b\,p - b - p + 1 = 0 \Leftrightarrow (b - 1)(p - 1) = 0$ para $b = 1$, tenemos $a^2 - pa - (1 + p) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}[p \pm (p+2)] = -1$ o $b + 1$, pero $1 \notin \mathbb{N}$. Entonces $a = p + 1$, $b = 1$, $c = p(p + 1)$.

Es fácil de verificar que la terna $(a;b;c) = (t + 1;1;\ t(t + 1)$ satisface la ecuación original para todo $t \in \mathbb{N}$.

Para $p = 1$ tenemos $a^2 - ba - (1 + b) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}[p \pm (p+c)] = -1 \notin \mathbb{N}$ o es $b + 1$. Entonces tenemos $a = b + 1$, $b = b$, $c = b + 1$, es fácil ver que la terna $(a;\ b;\ c) = (t + 1;1;\ t(t + 1)$ satisface la ecuación original $\forall\, t \in \mathbb{N}$.

350. De las ecuaciones $a_n + a_{n+1} = 2a_{n+2}\, a_{n+3} + 1$ y $a_{n+1} + a_{n+2} = 2a_{n+3}\, a_{n+4} + 1$ se puede implicar que $a_{n+2} - a_n = 2a_{n+3}(a_{n+4} - a_{n+2})$.

Por tanto, $a_{n+2} - a_n = 2^k a_{n+3} \dots a_{n+2k+1}(a_{n+2k+2} - a_{n+2k})$ y, por tanto, 2^k divide $a_{n+2} - a_n$ para todos k y n. Entonces $a_{2n-1} = a_1$ y $a_{2n} = a_2$ para todo $n \geq 1$ y las condiciones dadas se verifican si y solo si $(2a_1 - 1)(2a_2 - 1) = -4\ 009$. Nota que los divisores primos de 4 009 son 19 y 211.

Por tanto, $2\ a_1 - 1 = \pm 1, \pm 19, \pm 211, \pm 4\ 009$, por tanto, son 8 sucesiones que satisfacen las condiciones dadas.

351. El mayor entero de la forma $a_1 + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + a_4 \cdot 4!$ donde los a_k cumplen con las condiciones dadas es 119 por otra parte $6! = 720 > 695$, escrito en una base de numeración factorial tiene la forma $a_1 + a_2 \cdot 2! + ... + a_5 \cdot 5!$ donde $a_5 \cdot 5! \geq 695 - 119 = 576$, luego

$576 \leq a_5 \cdot 5! \leq 695 = a_1 + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + a_4 \cdot 4! + 600 \Rightarrow a_1 + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + a_4 \cdot 4! + 95.$

El mayor valor de $a_1 + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3!$ Es $1 + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! = 23$ por consiguiente

$a_4 \cdot 4! = 95 - 23 = 72 \Rightarrow a_4 = 3.$

352. Los números del tipo $1\ 989_n$ con $n = 99m$, $m \in \mathbb{N}^*$ son múltiplos de 981,

$S = \{1\ 989_{99}, 1\ 989_{198}, ...\}$. El número de dígitos de estos números son de la forma $4 \cdot 99m = 396m$, o sea, $d(k)$ es de la forma $396m$.

$|1\ 989 - d(k)|$ es mínimo cuando $d(k)$ es máximo, luego

I) $396m < 1\ 989$ y $m < 5{,}02...$, luego para $m = 5$ entonces $1\ 989 - 396 \cdot 5 = 9$

II) $396m > 1\ 989$ y $m > 5{,}02...$ para $m = 6$ se tiene $1\ 989 - 396 \cdot 6 = -687$

$\therefore$ el valor mínimo de $|1\ 989 - d(k)|$ es 9.

353. Observemos que $3x^2 + x = 4y^2 + y = (x - y) \cdot (3x^3y + 1) = y^2$, y también
$3x^2 + x = 4 \cdot y^2 + y = (x - y) \cdot (4x + 4y + 1) = x^2$, de donde:
$x^2(3x^3y + 1) = y^2 \cdot (4x + 4y + 1)$ (*)

Ahora bien, como $4(3x + 3y + 1) - 3(4x + 4y + 1) = 1$, se tiene entonces que los números $3x + 3y + 1$ como $4x + 4y + 1$ son cuadrados perfectos y así, por las relaciones anteriores, también lo debe ser $x - y$.

Observación:
La ecuación propuesta tiene infinitas soluciones siendo la menor de estas $x = 30$, $y = 26$
(con $3x^2 + x = 4 \cdot y^2 + y = 2\ 730$).
En consecuencia: $x - y = 4 = 2^2$, $3x + 3y + 1 = 169 = 13^2$, $4x + 4y + 1 = 225 = 15^2$.

354. La sucesión {817, 825, 833, 841, 849} muestra que la longitud mayor puede ser 5. Mostremos ahora que no puede ser mayor. Sea a_1 el primer término en la sucesión más larga de términos impares sucesivos y sea k el mayor dígito. Para que a_2 sea impar, k debe ser par. Como no es el último dígito de a_1. Si el dígito mayor de a_2 tampoco es k, entonces será impar, ya que el último dígito de a_2 es igual a $k + 1$, dado que todos los dígitos excepto el último no puede aumentar más de 1 en un momento. Siguiendo que el primer término cuyo dígito mayor no es k también es el último de los términos impares sucesivos. Ahora el dígito par k es primo relativo con 5.
Dado que a_1, $a_2 = a_1 + k$, $a_3 = a_1 + 2k$, $a_4 = a_1 + 3k$ y $a_5 = a_1 + 4k$ son no congruentes módulo 5. Dado que ellos son todos impares, uno de ellos debe acabar en 9. Entonces 9 será el dígito mayor de este término. Dado que la longitud máxima de una sucesión de términos impares sucesivos es 5.

355. Sea a la cantidad de horas que el estudiante estuvo leyendo durante el día
$i = 1, 2, 3, ..., 37$ y $A_i = a_1 + a_2 + ... + a_i$, $i = 1, 2, 3, ..., 37$ es el número de horas que el estudiante leyó durante los primeros i días.
Debemos probar que existen enteros positivos k, m con $k < m$ tal que
$a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_m = 13 \Leftrightarrow A_m - A_k = 13$ o lo que es lo mismo $A_m = A_k + 13$.

De acuerdo con la hipótesis del problema tenemos $1 \leq A_1 < A_2 <... < A_{37} \leq 60$ (1)
$14 \leq A_m + 13 < A_2 + 13 < ... < A_{37} + 13 \leq 73$, (2) por lo que tenemos 74 enteros entre 1 y 73 y de esta forma al menos dos de ellos son iguales. Dado que cada dos números de la relación (1) son diferentes y también es verdad para los números en la relación (2), concluimos que existen enteros k y m tales que $A_m = A_k + 13$.

356. Denotaremos por a_i^j al elemento de la fila i-ésima y columna j-ésima del rectángulo. Pongamos n para el número de filas, m para el de columnas y S para la suma de los $n \cdot m$ elementos. Con notación matricial queda:

$M = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^m \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}$ Sumando por filas y llamando S_k a la suma de la fila k, resulta:

$$S_1 = \frac{a_1^1 + a_1^m}{2} \cdot m$$

$$S_2 = \frac{a_2^1 + a_2^m}{2} \cdot m$$

....

$$S_n = \frac{a_n^1 + a_n^m}{2} \cdot m$$

y sumando miembro a miembro queda:

$$S = S_1 + S_2 + ... + S_n = \frac{m}{2}\left[\left(a_1^1 + a_2^1 + ... + a_n^1\right) + \left(a_1^m + a_2^m + ... + a_n^m\right)\right] = \frac{n \cdot m}{4}\left(a_1^1 + a_n^1 + a_1^m + a_n^m\right)$$

$$a_1^1 + a_n^1 + a_1^m + a_n^m = \frac{4S}{n \cdot m} = \frac{4 \cdot 110\,721}{221} = 2\,004.$$

357. La respuesta es 3. Veamos primero que si A tiene dos elementos, entonces en A'' no pueden estar todos los números del 1 al 40:

Primera forma. Sea $A = \{a, b\}$ con $a > b$; entonces A' $\{a, b, a - b, a + b\}$, y los elementos de A'' son los enteros positivos de la forma: $pa + qb + r(a - b) + s(a + b)$ con $p, q, r, s \in \{-1, 0, 1\}$, así que el número de elementos de A'' es menor o igual que $3^4 - \frac{1}{2}$ (pues el 0 no debe considerarse y hay tantos números positivos como negativos); sin embargo, $a + b$ se obtiene de dos maneras distintas, así que A'' no puede tener 40 elementos.

Segunda forma. Sean A como en la primera forma y B el conjunto de enteros (positivos, negativos o cero) que se obtienen escogiendo uno o más elementos de A'', poniéndole el signo + o el signo – a cada uno y sumando los números con signo. Probaremos que B tiene a lo más 37 elementos. Los elementos de B son de la forma $ka + ib$ con $|k|$, $|i| \leq 3$.
Es fácil ver que si $|k| = 3$, entonces $|i| = 0$ o 1, análogamente si $|i| = 3$, entonces $|k| = 0$ o 1. Por lo tanto, ($|k|$, $|i|$ no puede ser (2,3), (3,2) o (3,3):

Para ($|k|$, $|i|$) = (0, 0) hay una sola pareja (k,i). Si ($|k|,|i|$) es una de las 6 parejas: (1,0), (2,0), (3,0), (0,1), (0,2) o (0,3); hay dos valores posibles de (k,i). Para cada uno de los otros 6 valores de ($|k|,|i|$) hay cuatro posibilidades para (k,i). Por lo tanto, hay a lo más $1 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 6 = 37$ números en B.
Ahora veamos que con tres sí se puede:

Primera forma. Sea $A = \{4, 13, 14\}$; entonces A' contiene a $\{1, 3, 3^2, 3^3\}$ y es fácil ver que A'' contiene a todos los números del 1 al $1 + 3 + 3^2 + 3^3 = 40$.

Segunda forma. Observemos primero que si $X = \{1,2, ..., n\}$, entonces X' contiene a todos los números del 1 al $1 + 2 + ... + n$ (pues en X' están:

$n + 1, ..., n + (n - 1), n + (n - 1) + 1, ..., n + (n - 1) + (n - 2), ... , n + (n - 1) + (n - 2) + ... + 1$; por tanto, como queremos que A'' contenga del 1 al 40, entonces bastaría con que A' contuviera a todos los números del 1 al 9. Entonces, por lo mismo, bastaría que A contuviera a los números del 1 al 4; así que con cuatro si es posible. Sin embargo, es claro que hay muchas repeticiones al construir A', así que busquemos ver si con tres se puede evitando repeticiones: En A ponemos al 1 y después ponemos al 2 (pues su diferencia con 1 es 1, que ya está); ponemos al 3; no ponemos al 4 (pues $4 - 3 = 1$), ni tampoco al 5 (pues $5 - 3 = 3 - 1$), no ponemos al 6 (pues $6 - 3 = 3$); entonces intentamos con el 7. Ahora comprobamos (fácilmente) que con $A = \{1, 3, 7\}$, en A' obtenemos todos los números del 1 al 9, y ya terminamos.

358. Claramente 10 es suertudo, y como $1^2 + 3^2 = 3^2 + 1^2 = 10$, tenemos que 13 y 31 también lo son. Sucede que $3^2 + 2^2 = 132$, por lo que 32 es suertudo. Entonces 31 y 32 son dos suertudos consecutivos y, por lo tanto, para cualquier $N \geq 1$,

Si A = 111...1000...0 y B = 111...1000...01 son dos enteros suertudos consecutivos.

31 unos y N ceros 31 unos y $N - 1$ ceros

Alternativamente, si n y $n + 1$ son ambos suertudos, también lo son A y B. Y repitiendo la construcción, hallamos una infinidad de parejas de enteros suertudos consecutivos.

359. Si el número tuviera algún cero entre sus cifras, entonces tendríamos la desigualdad estricta. Hay exactamente $9\,000 - 9^4 = 2\,439$ números de este tipo, esto es, con una cifra igual a cero. Consideremos el número $abcd$ que no contiene ninguna cifra cero. Entonces la desigualdad $a + b + c + d \geq a \cdot b \cdot c \cdot d$ es equivalente (dividiendo por $a \cdot b \cdot c \cdot d$) a

$$\frac{1}{b \cdot c \cdot d} + \frac{1}{a \cdot c \cdot d} + \frac{1}{a \cdot b \cdot d} + \frac{1}{a \cdot b \cdot c} \geq 1 \qquad (1)$$

Por lo tanto, si tres o cuatro de estos dígitos fueran unos, entonces uno de los cuatro anteriores sumandos fueran 1 y se obtendría la desigualdad estricta.
Hay exactamente $4 \cdot 8 + 1 = 33$ números de este tipo.

Por otra parte, demostremos que una condición necesaria para que se verifique la desigualdad es que al menos el número debe tener dos unos entre sus cifras. Efectivamente, supongamos por contradicción, y sin pérdida de generalidad que $b, c, d \geq 2$. Entonces $b \cdot c \cdot d \geq 8$, $a \cdot c \cdot d \geq 4$, $a \cdot b \cdot d \geq 4$, $a \cdot b \cdot c \geq 4$; y así, por (1) tenemos:

$1 \leq \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$ lo cual es una contradicción. Resta, por lo tanto, considerar el caso en que el número tiene exactamente dos cifras iguales a uno. Supongamos, por ejemplo, que $a = b = 1$ y $c, d > 1$.

En este caso, la desigualdad en cuestión se traduce en $\frac{2}{c \cdot d} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq 1 \qquad (2)$

Demostremos en primer lugar que, al menos, una de las cifras c o d, debe ser un dos. Efectivamente, si por el contrario $c, d \geq 3$, entonces $c \cdot d \geq 9$; $c \geq 3$; $d \geq 3$ y así, por (2), tenemos: $1 \leq \frac{2}{9}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{8}{9}$, lo cual es una contradicción.

Supongamos, por lo tanto, que $c = 2$. Se obtiene entonces que $\frac{2}{d}+\frac{1}{2} \geq 1$, lo cual es equivalente a decir que $d \leq 4$. Resumiendo:

Si $d = 4$, entonces se obtiene la igualdad inicial (las cifras son 1, 2, 2, 4 y existen 12 números de este tipo).

Si $d = 3$, entonces se obtiene la desigualdad estricta inicial (las cifras son 1, 2, 2, 3 y existen 12 números de este tipo).

Si $d = 2$, entonces se obtiene la desigualdad estricta inicial (las cifras son 1, 1, 2, 2 y existen 6 números de este tipo).

Por lo tanto, la desigualdad se da en 2 439 + 33 + 12 + 12 + 6 = 2 502 números y la igualdad en 12 de estos.

360. Sea $a_1 < a_2 < ... < a_{17}$. Consideremos el número a_9 que es el del medio de la lista ordenada, como [1 000 : 17] = 58. Pueden ocurrir dos casos:

$a_9 \geq 58$ entonces $a_{10} \geq 59, ..., a_{17} \geq 66$, por tanto, $a_{10} + ... + a_{17} = 59 + ... + 66 = 500$.
$a_9 < 58$, entonces $a_9 \leq 57$, $a_8 \leq 57, ..., a_1 \leq 49$, por tanto,
$a_1 + ... + a_9 < 500$ y $a_{10} + ... + a_{17} > 500$.

361. Todo natural se escribe de manera única como suma de potencias de 2 distintas donde los conjuntos $A = \{n \in \mathbb{N}$ se escribe como suma de potencias de 2 distintas con exponente impar$\}$ y $B = \{n \in \mathbb{N}$ se escribe como suma de potencias de 2 distintas con exponente par$\}$ satisfacen las condiciones del enunciado. Nota que $0 \in A$ y $0 \in B$.

362. Como con 9 personas se puede formar $9 \cdot 8 : 2 = 36$ parejas distintas, deberá tenerse $3n = 36$ (pues en cada grupo de a 3, se incluyen 3 parejas), y luego $n = 12$.
Una de las posibles conformaciones de los 12 grupos correspondientes es:

{1, 2, 3}, {1, 4, 5}, {1, 6, 7}, {1, 8, 9}, {2, 4, 7}, {2, 5, 8},

{2, 6, 9}, {3, 4, 9}, {3, 5, 6}, {3, 7, 8}, {4, 6, 8}, {5, 7, 9}.

363. Como M es finito, necesariamente estará acotado.
Pongamos $M \subset [x,y]$, con $x = \text{Mín } M$ y $y = \text{Máx } M$. Supongamos $x \leq 0$:
Tenemos $x \leq 0 \Rightarrow 2x \leq x \Rightarrow 2x - k^2 < x$ (k cualquier número de M). Esto contradice que x sea el mínimo de M. Por tanto, $x > 0$ y $0 < x < y$.
En cualquier caso debe ser:
(1) $x \leq 2x - y^2 \leq y$ y, además, (2) $x \leq 2y - y^2 \leq y$.
De (1) se desprende que: $x \leq 2x - y^2 \Rightarrow 0 \leq x - y^2 \Rightarrow y^2 \leq x < y$; que solo se cumple si $y \in (0, 1)$.
De (2) obtenemos que: $2y - y^2 \leq y \Rightarrow y - y^2 \leq 0 \Rightarrow y \leq y^2$; y esto solo es cierto si $y \in [1,+\infty)$.
Como (1) y (2) deben cumplirse a la vez, no existe ningún $y \in \mathbb{R}$ que pueda ser máximo de M por lo que no estaría acotado y no sería finito.

364. Se tiene que $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 1 = 25 = 5^2 = (3 \cdot 2 - 1)^2$
$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 1 = 11^2 = (4 \cdot 3 - 1)^2$
$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 1 = 19^2 = (5 \cdot 4 - 1)^2$

sugieren que $(k + 1)k(k - 1)(k - 2) + 1 = [k(k - 1) - 1]^2 = [(k^2 - k) - 1]^2$.

Los cálculos $(k + 1)k(k - 1)(k - 2) + 1 = [(k + 1)(k - 2)][k(k - 1)] + 1$

$= (k^2 - k - 2)(k^2 - k) + 1 = (k^2 - k)^2 - 2(k^2 - k) + 1 = [(k^2 - k) - 1]^2$

demuestran que efectivamente esta relación siempre se da.

Por lo tanto, $\sqrt{(31)(30)(29)(28)+1} = 30^2 - 30 - 1 = 869$.

365. Primero, no es difícil ver que, siendo $d = \text{mcd}(m, n)$, entonces $x^d - 1$ divide a $x^m - 1$ y a $x^n - 1$. Sea, por ejemplo, $m = dk$ con $k > 0$ entero, entonces

$x^m - 1 = (x^d)^k - 1 = (x^d - 1)(x^{dk-1} + x^{dk-2} + ... + x^d + 1)$

Mostrar que $x^d -1$ divide a $x^n -1$ es análogo. La parte más difícil es mostrar que $x^d - 1$ es un polinomio mónico p de mayor grado que divide a ambos $x^m - 1$ y $x^n - 1$, para eso se puede utilizar el teorema de Bezout. Sean p un polinomio mónico que divide a los polinomios dados y z una raíz compleja de p. Como p divide a $x^m - 1$ y $x^n - 1$, tenemos que z es una raíz de ambos polinomios. En otras palabras $z^m = z^n = 1$. Más el teorema de Bezout garantiza que existen enteros u y v tales que $mu + nv = 1$, eso nos da que

$z^d = z^{mu+nv} = (z^m)^u(z^n)^v = 1^u \cdot 1^v = 1$ y z es raíz de $x^d - 1$. Como toda raíz de p es también raíz de $x^d - 1$ y como $x^d - 1$ solo tiene raíces simples, se sigue que p divide a $x^d - 1$. Por tanto, $x^d - 1$ es el polinomio mónico de mayor grado que divide a ambos polinomios

$x^m - 1$ y $x^n - 1$.

366. Denotemos por $P_n(x) = \underbrace{P(P...P(x)...)}_{-n \text{ veces-}}$, entonces $P_n(0) = P_{n-1}(1) = P_{n-2}(1) = ... = 1$

$P_n(a_j) = a_{n+j} = a_j \cdot k + 1$ (k entero positivo) $\Rightarrow \text{mcd}(a_{n+j};a_j) = 1$ para todo n y para todo j.

367. Definamos $a'_0 = a_0 - 5$ y $f^*(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 - 5$ y

$f^*(a) = f^*(b) = f^*(c) = f^*(d) = 0$ entonces $f^*(x) = q(x)(x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$. Si existiera $k \in \mathbb{Z}$ tal que $f(k) = 8$, se tendría $f^*(x) = 3$, o sea, $q(k)(k - a)(k - b)(k - c)(k - d) = 3$, pero todos son enteros y diferentes entre sí. Pero el producto de cuatro enteros distintos no puede ser 3.

$\therefore$ con las condiciones dadas no puede existir $k \in \mathbb{Z}$ tal que $f(k) = 8$.

368. Sean $2a = m \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = \frac{1}{2}m$, con m impar, $a + b = n \in \mathbb{Z}$ entonces $b = \frac{1}{2}(2n - m)$ con $n - m$ impar. Si m es par, entonces $a, b \in \mathbb{Z}$ y la solución es tribial, entonces

$ax^2 + bx + c = p \in \mathbb{Z}$, $ax^2 + bx = p - c$, $x(ax + b) = q \in \mathbb{Z}$, $x\left[\frac{mx}{2} + \frac{(2n-m)}{2}\right] = q$, si x es par,

$\frac{mx}{2} \in \mathbb{Z}$ y $\frac{(2n-m)}{2} \in \mathbb{Z}$.

Si x es impar, entonces mx es impar entonces $mx + 2n - m$ es par, luego

$\frac{mx}{2} + \frac{(2n-m)}{2} \in \mathbb{Z}$ y al multiplicarlo por $x \in \mathbb{Z}$ su producto pertenece a $\mathbb{Z}$.

369. Sea $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ y $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$ tal que

$P(x_1) = P(x_2) = P(x_3) = P(x_4) = 1$, definamos $Q(x) = P(x) - 1$ entonces

$Q(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 - 1$;

$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)R(x)$. Supongamos que existe $x_5 \in \mathbb{Z}$ con

$P(x_5) = 24$ y $Q(x_5) = 23$, o sea, $(x_5 - x_1)(x_5 - x_2)(x_5 - x_3)(x_5 - x_4)R(x_5) = 23$ pero $x_5 - x_1 \in \mathbb{Z}$, $x_5 - x_2 \in \mathbb{Z}$, $x_5 - x_3 \in \mathbb{Z}$, $x_5 - x_4 \in \mathbb{Z}$ y $R(x_5) \in \mathbb{Z}$, como x_1, x_2, x_3, x_4 son diferentes, entonces cada uno de los factores son también diferentes y como $23 = (1)(23) = (-1)(-23)$ no pueden existir 5 enteros diferentes que su producto sea 23.

$\therefore$ este polinomio no puede tomar el valor 24 para ningún valor entero de la variable.

370. a) Sea $P(x) = T(x)Q(x) + R(x) = (x - a)(x - b)Q(x) + mx + n$ entonces $P(a) = am + n$, $P(b) = bm + n$

entonces $P(a) - P(b) = (a - b)m$ y $m = \dfrac{P(a)-P(b)}{a-b}$ y

$n = \dfrac{a \cdot P(b) - b \cdot P(a)}{a-b}$ por lo que $R(x) = \dfrac{P(a)-P(b)}{a-b}x + \dfrac{a \cdot P(b) - b \cdot P(a)}{a-b}$.

b) $m = \dfrac{(-1)^{200} - 2^{200}}{-1-2} = \dfrac{2^{200}-1}{3}$ y $n = \dfrac{-1 \cdot 2^{200} - 2 \cdot 1}{-1-2} = \dfrac{2^{200}+2}{3}$.

c) Pero $2^{200} = (2^2)^{100} = 4^{100}$ teniendo

$4 \equiv 1 \pmod 3$, $4^{100} \equiv 1 \pmod 3$ y $4^{100} - 1 \equiv 0 \pmod 3$ luego $2^{200} - 1 \equiv 0 \pmod 3$ y $m \in \mathbb{Z}$, de igual forma $2^{200} \equiv 1 \pmod 3$, $2 \equiv -1 \pmod 3$ y $2^{200} + 2 \equiv 0 \pmod 3$ y $n \in \mathbb{Z}$.

371. Sean $P_1 = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ y $P_2(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_0$ entonces el producto $P_1(x)P_2(x) = (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0)(b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_0)$
$= a_n bmx^{m+n} + a_n b_{m-1}x^{n+m-1} + \ldots + a_0 b_0$.

Como este polinomio tiene todos sus coeficientes múltiplos de 5, se cumple que $a_n b_m, a_n b_{m-1}, \ldots, a_n b_0 = 5a$, $a_{n-1}b_m, a_{n-1}b_{m-1}, \ldots, a_{n-1}b_0 = 5b, \ldots, a_0 b_m, a_0 b_{m-1}, \ldots, a_0 b_0 = 5c$, como 5 es un número primo, si a_i no es múltiplo de 5 ($i = 1, 2, ..., n$), entonces $b_m, b_{m-1}, ..., b_0$ todos son múltiplos de 5 y P_2 tiene todos sus coeficientes múltiplos de 5.

Si a_k es múltiplo de 5 ($k = 0, 1, \ldots, n$) entonces cada uno de los b_j ($j = 0, 1, ..., m$) puede no ser múltiplo de 5 y si a_{k-p} ($k - p = 0, 1, ..., n$) no es múltiplo de 5 contradice que los b_j no sean todos múltiplos de 5 y cada uno de los coeficientes de P_1 son múltiplos de 5.

$\therefore$ al menos uno de estos polinomios tiene todos sus coeficientes múltiplos de 5.

372. Sea $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$, se tiene que $P(0) = a_0$ entonces a_0 es impar, de aquí que $P(P(0)) = P(a_0) = 0$ entonces $a_0 + a_1 a_0 + a_2 a_0^2 + ... + a_n a_0^n = 0$.

Una suma es par si el número de sumandos impares es par, pero la paridad de cada sumando del polinomio depende de la paridad de cada coeficiente porque a_0^i (para todo $i \in \mathbb{N}$) es siempre impar luego: En el polinomio hay un número par de coeficientes impares, por lo que su suma es un número par.

373. Sean α, β, γ los tres ángulos y supongamos $\alpha \le \beta \le \gamma$. Si fuera $\gamma \ge \dfrac{\pi}{2}$, tendría que ser $\alpha < \dfrac{\pi}{4}$ y entonces $\tan \beta$ no es entero.

Si $\tan \alpha > 1$, entonces $\alpha \ge \arctan 2 > \arctan \sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$, imposible.

Por tanto, $\tan \alpha = 1$ y $\beta + \gamma = \dfrac{3\pi}{4}$, con lo que: $\tan(\beta+\gamma) = -1 = \dfrac{\tan\beta + \tan\gamma}{1 - \tan\beta\tan\gamma}$ relación que operada se convierte en: $(\tan\gamma - 1)(\tan\beta - 1) = 2$ de donde, por ser enteros positivos, se sigue $\tan\gamma = 2$ y $\tan\beta = 3$.

374. $CF = 2$ cm.

375. $AC = 15$ cm.

376. $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}=\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\beta}$ de aquí tenemos $\tan\alpha\operatorname{sen}^2\beta-\tan\beta\operatorname{sen}^2\alpha=0$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\operatorname{sen}^2\beta-\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}\cdot\operatorname{sen}^2\alpha=0 \text{ y } \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\left(\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha}-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\beta}\right)=0$$

$$\operatorname{sen}\alpha\neq 0 \ \operatorname{sen}\beta\neq 0 \ \operatorname{sen}2\beta=\operatorname{sen}2\alpha$$

$$\alpha=\beta \text{ o } 2\beta=\pi-2\alpha$$

(isósceles) $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ (rectángulo).

377. Dividamos el cuadrilátero *AFDE* por la diagonal *AD* formando dos triángulos de áreas a y b que determinaremos. Usando el hecho de que si dos triángulos tienen la misma altura, la razón de sus áreas es igual a la razón de sus bases, tenemos que $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}}=\dfrac{a}{3}=\dfrac{a+b+3}{12}$ y $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\dfrac{b}{3}=\dfrac{a+b+3}{12}$. Estas identidades nos llevan al sistema de ecuaciones: $3a = b + 3$ y $3b = a + 3$ que admiten por solución, $a = b = \dfrac{3}{2}$, por lo que $A_{AFDE} = 6$.

378. Los triángulos *ABC* y *ADC* son semejantes (fig. 15), pues tienen los tres ángulos iguales, ya que $\angle ADC = \angle BCM = \angle BAC$ (la primera igualdad por ser *AD* y *CM* paralelas y la segunda por ser $\angle BCM$ ángulo semiinscrito) y el ángulo $\angle ACD$ es común. Estableciendo la proporcionalidad entre sus lados, resulta:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}\Leftrightarrow \overline{CD}\cdot\overline{BC}=\overline{AC}^2 \qquad (1)$$

De modo análogo los triángulos *ABC* y *ABE* son semejantes pues:

$\angle AEB = \angle EBM = \angle BAC$ y el ángulo $\angle ABE$ es común.

Estableciendo la proporcionalidad entre sus lados, resulta:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}\Leftrightarrow \overline{BE}\cdot\overline{BC}=\overline{AB}^2 \qquad (2)$$

Dividiendo las igualdades (1) y (2), se obtiene el resultado.

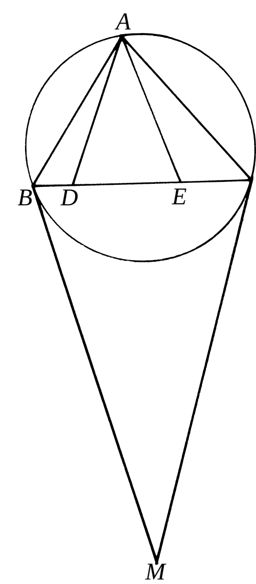

Fig. 15

379. Utilicemos la figura 16. Sabemos que al ser D la bisectriz, $\dfrac{DC}{8}=\dfrac{BD}{11}$; así pues $BD = 11k$, $DC = 8k$.

Por otra parte $BM = MC$, es decir, $11k - 1 = 8k + 1 \Rightarrow k=\dfrac{2}{3}$, $BD=\dfrac{22}{3}$ y $DC=\dfrac{16}{3}$.

Llamando ahora x a DH y aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos ABH y AHC, podemos escribir que

$$11^2-\left(\frac{22}{3}+x\right)^2=8^2-\left(\frac{16}{3}-x\right)^2\Rightarrow x=\frac{5}{4}.$$

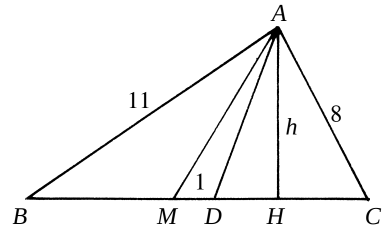

Fig. 16

380. Llamemos I al *incentro* (fig. 17). Por el *teorema de la bisectriz*:

En el triángulo ADC: $\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{CI}{ID}$

En el triángulo BDC: $\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{CI}{ID}$

Luego $\dfrac{CI}{ID}=\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{AC+BC}{AD+BD}=\dfrac{AC+BC}{AB}=\dfrac{b+a}{c}.$

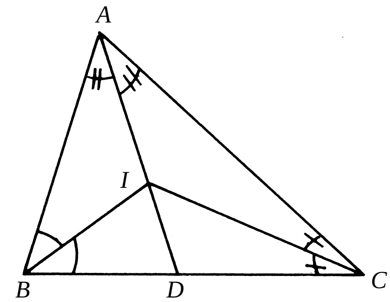

Fig. 17

Dibujemos la situación completa (fig. 18).
Denominemos M al punto medio del lado AB y G al *baricentro*. Los triángulos CIG y CDM han de ser semejantes.
Así, por el *teorema de Tales*:

$\dfrac{CI}{ID}=\dfrac{CG}{GM}$ y por la *propiedad del baricentro*: $\dfrac{CG}{GM}=2$. Luego $\dfrac{CI}{ID}=2.$

Conclusión: $\dfrac{CI}{ID}=\dfrac{a+b}{c}=2.$

La línea que une al baricentro y al incentro de un triángulo será paralela al lado AB si su longitud es media aritmética de los otros dos: $c=\dfrac{a+b}{2}.$

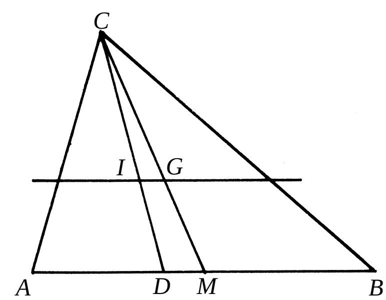

Fig. 18

381. a) Tenemos (fig. 19):

$$BA'=c\cos B;\ \tan HBA'=\cot C=\frac{HA'}{BA'};\ AA'=c\,\mathrm{sen}\,B.$$

De donde: $k=\dfrac{AA'}{HA'}=\dfrac{c\,\mathrm{sen}\,B}{c\cos B\cot C}\Leftrightarrow \tan B\cdot\tan C=k$ (1)

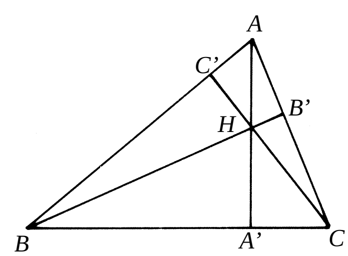

Fig. 19

b) Poniendo $a = BC$, tomando unos ejes con origen en el punto medio de BC y el eje OX sobre el lado BC, resulta $B\left(-\dfrac{a}{2},0\right);C\left(\dfrac{a}{2},0\right)$ y llamando $A(x, y)$, la condición (1) se escribe:

$\dfrac{y}{\frac{a}{2}-x}\cdot\dfrac{y}{\frac{a}{2}+x}=k\Leftrightarrow y^2=k\left(\dfrac{a^2}{4}-x^2\right)$ que, una vez operada, resulta: $\dfrac{x^2}{\frac{a^2}{4}}+\dfrac{y^2}{\frac{ka^2}{4}}=1$ (2)

ecuación de una elipse (fig. 20) en la que distinguimos dos casos:

Si $k < 1$, elipse con eje mayor sobre OX, semidistancia

focal $= \dfrac{a}{2}\sqrt{1-k}$ y semieje mayor $= \dfrac{a}{2}$.

Si $k > 1$, elipse con eje mayor sobre OY, semidistancia

focal $= \dfrac{a}{2}\sqrt{k-1}$ y semieje mayor $= \dfrac{a}{2}\sqrt{n}$.

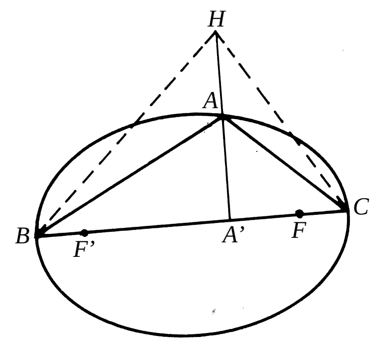

Fig. 20

382. Como BD es la bisectriz de B (fig. 21) y $BD = 200$ y

$DM = 350$, sigue que $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{DM}{DB} = \dfrac{7}{4}$, de donde $AM = 7k$ y $AB = 4k$.

Así pues, $AC = 14k$ y, volviendo a aplicar la relación anterior, sigue que

$\dfrac{TC}{572} = \dfrac{14}{4} \Rightarrow TC = 2\,002.$

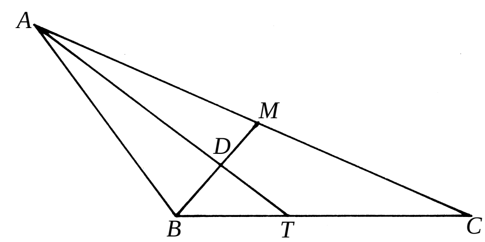

Fig. 21

Como $a = BT + TC = 2\,574$ m. Sea $c = AB \Rightarrow AM = \dfrac{7c}{4}$ y

$AC = \dfrac{7c}{2}$. Aplicando ahora la ley de los cosenos a los triángulos ABC y ABM, podemos escribir

$$2\,574^2 = \frac{49c^2}{4} + c^2 - 7c^2\cos C \qquad (1)$$

$$550^2 = \frac{49c^2}{16} + c^2 - \frac{7c^2}{2}\cos C \qquad (2)$$

En (1), $7c^2\cos C = \dfrac{53c^2}{4} - 2\,574^2$ y en (2), $7c^2\cos C = \dfrac{65c^2}{8} - 2\cdot 550^2$

Luego $\dfrac{53c^2}{4} - 2\,574^2 = \dfrac{65c^2}{8} - 2\cdot 550^2.$

383. A partir del vértice B trazamos una paralela a la bisectriz CD y prolongamos el lado AC hasta obtener el punto E. Y, también, CF perpendicular a BE.

– Así, $CB = CE = a$.

–- Por ángulos alternos-internos, en el triángulo BCF tenemos: $\cos\dfrac{C}{2} = \dfrac{FB}{a} = \dfrac{EB}{2a}$.

– Los triángulos ACD y AEB son semejantes: $\dfrac{AC}{AE} = \dfrac{CD}{EB}$ luego $CD = \dfrac{AC\cdot EB}{AE} = \dfrac{2ab\cos\dfrac{C}{2}}{a\,+\,b}$.

384. El cuadrilátero *LCMK* (fig. 22) es un paralelogramo, pues sus lados opuestos son paralelos, luego $CL = KM$ y $CM = KL$.
Como $KL = KM$, resulta que $CL = CM$ y el triángulo *CML* es isósceles de base *LM*.
En el triángulo *BPL*, tenemos

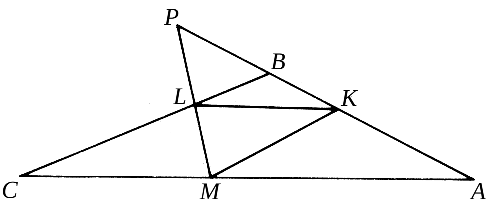

Fig. 22

$\angle BPL = 180º - \angle LBP - \angle PLB.$

El ángulo *LBP* es suplementario del ángulo *ABC*, luego $\angle LBP = 180º - 144º = 36º$.

$\angle PLB = \angle CLM$ por opuestos por el vértice.

En el triángulo isósceles *CML*, tenemos $\angle CLM = \dfrac{1}{2}\,(180º - \angle LCM) = \dfrac{1}{2}\,(180º - \angle BCA)$, y en el triángulo isósceles *ABC* tenemos $\angle BCA = \dfrac{1}{2}\,(180º - \angle ABC) = 18º$, luego

$\angle CLM = \dfrac{1}{2}\,(180º - 18º) = 81º$, es decir, $\angle PLB = 81º$, por lo que $\angle BPL = 180º - 36º - 81º = 63º$.

385. Ángulo $C < 90º$.
Llamaremos *A*' al punto en que la altura de *A* corta al lado *BC* del triángulo *ABC* (fig. 23), y *C*' al punto donde la altura de *C* corta al lado *AB* del triángulo *ABC*.
El ángulo *CHA*' es igual al ángulo *AHC*'.
En el triángulo *CA*'*H*, el ángulo *CA*'*H* es recto, por tanto, el ángulo *HCA*' es $90º - \alpha$. En el triángulo *AHC*' el ángulo *HC*'*A* es recto, por tanto, el ángulo *HAC*' es $90º - \alpha$.
El ángulo *HAC*' es igual al ángulo *A*'*AB* del triángulo *A'AB* que es rectángulo, por tanto, el ángulo *A'BA* es α.
De aquí concluimos que los triángulos *CHA*' y *A'AB* son semejantes, y como $CH = AB$, son triángulos iguales de donde obtenemos que $AA' = CA'$, por tanto, el valor de tan $C = 1$, y $C = 45º$.
Ángulo $C > 90º$.
Procediendo de modo análogo el ángulo *A'CH* es igual al ángulo *C'CB*. En el triángulo *C'CB* el ángulo *CA'H* es recto, por tanto, el ángulo *A'HC* es $90º - \alpha$ y en el triángulo *CC'B* el ángulo *CC'B* es recto y *C'BC* es $90º - \alpha$.

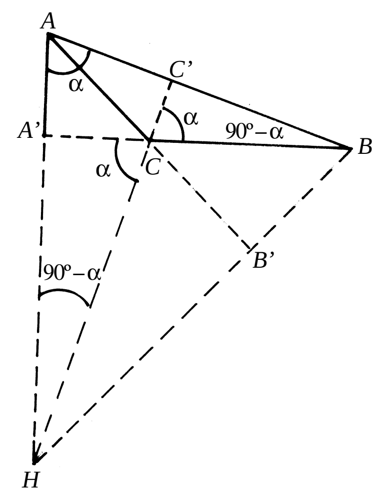

Fig. 23

El triángulo *AA'B* es rectángulo en *A'* y por eso *BAA*' es α.
Entonces los triángulos *AA'B* y *A'CH* son semejantes y tienen la hipotenusa igual, luego son iguales y deducimos $AA' = A'C$, entonces la tangente de *C* vale -1 y $C = 135º$.
Finalmente, si fuese $C = 90º$, *C* coincide con *H* y $CH = 0$.
Como $AB \neq 0$, este valor de *C* no es válido.

386. Los tres puntos colineales *B*, *P* y *E* están sobre los lados o las prolongaciones de los lados del triángulo *ADC* (fig. 24).

Por el teorema de Menelao se cumple:

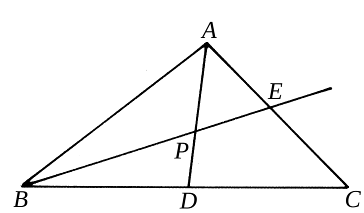

Fig. 24

$\dfrac{AE}{EC}\cdot\dfrac{CB}{BD}\cdot\dfrac{DP}{AP}=\dfrac{n-1}{1}\cdot\dfrac{2}{-1}\cdot\dfrac{DP}{AP}=-1$, entonces

$\frac{DP}{AP}=\frac{1}{2n-2}$, luego

$\frac{DP}{AD}=\frac{1}{2n-1}<\frac{1}{12}$ $\Rightarrow 2n-1>12$, por tanto, $n \geq 7$.

387. Teniendo en cuenta el teorema de la mediana, la relación del enunciado se escribe:

$c-b=\frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4}}-\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}}\right)$ multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada,

queda: $c-b=\frac{2}{3}\frac{\frac{3}{4}\left(c^2-b^2\right)}{m_c+m_b} \Leftrightarrow (c-b)\left(m_c+m_b-\frac{c+b}{2}\right)=0.$

Probaremos que el segundo factor es positivo, de donde se deduce la conclusión.

Llamando B' y C' a los puntos medios de AC y AB respectivamente, en los triángulos $CC'A$ y $BB'A$ tenemos por la desigualdad triangular: $m_b+\frac{b}{2}>c$; $m_c+\frac{c}{2}>b$. Sumando ambas desigualdades, se obtiene el resultado.

388. a) La condición es necesaria.

Sea ABC un triángulo (fig. 25) tal que la mediana BK (K punto medio de AC) corte a la circunferencia inscrita en dos puntos, M y N, tales que $BM = MN = NK = x$. Sea T el punto de tangencia del círculo inscrito con el lado BC. Las relaciones siguientes se verifican en cualquier triángulo:

$a + c - b = 2BT$ y $2a^2 + 2c^2 - b^2 = 4BK^2$. (La primera se deduce sin más de $BT + CT = a$, $BT - CT = c - b$; la segunda, fórmula de Apolonio o de la mediana, se puede también obtener completando el triángulo ABC hasta obtener un paralelogramo $ABCD$).

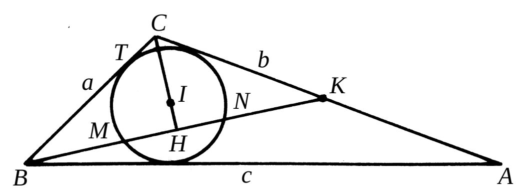

Fig. 25

Entonces resulta $2a^2 + 2c^2 - b^2 = 36x^2$ (1)

La potencia del vértice B respecto del círculo inscrito se puede escribir de dos maneras: $BT^2 = BM \cdot BN$, con lo cual $(a + c - b)^2 = 8x^2$ (2). Como, evidentemente, en el triángulo del problema, los puntos B y K están igualmente alejados del centro del círculo inscrito, resulta $BC = KC$, de donde $b = 2a$.

Sustituyendo esta última igualdad en (1) y (2), obtenemos $c^2 - a^2 = 18x^2$, $(c - a)^2 = 8x^2$, ya que $c - a \neq 0$, $x \neq 0$, resulta $\frac{c+a}{c-a}=\frac{9}{4}$, de donde $\frac{c}{a}=\frac{13}{5}$. Por lo tanto, $\frac{a}{5}=\frac{b}{10}=\frac{c}{13}$.

b) La condición es suficiente.

No hay pérdida de la generalidad en suponer que $a = 5$, $b = 10$, $c = 13$. Sustituyendo los valores de los lados en las fórmulas utilizadas en la parte a), resulta $BK=6\sqrt{2}$, $BT^2=16=BM \cdot BN$

y en el inradio $r=\frac{S}{p}=6\sqrt{14}$ y calculando S por la fórmula de Herón. El triángulo BCK es isósceles, así que la bisectriz del ángulo C es también altura. Sea $H=CI \cap BK$; consideremos el triángulo rectángulo *BIT*; entonces $BI^2 = 4^2 + r^2 = \frac{2^2 \cdot 47}{14}$ por otra parte, en *BIH*, $HI^2 = \frac{4}{7}$, y finalmente en el triángulo *IHM*, se tiene $HM^2 = r^2 - HI^2 = 2$. Como *H* es el punto medio de *MN*, resulta $MN = 2\sqrt{2}$, luego la mediana *BK* queda, en efecto, dividida en tres partes iguales por el círculo inscrito.

389. El numerador de la diferencia $\frac{1}{2} - uv$ es igual a

$v - 2u = 2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2) = a(b + c - a) + b(c + a - b) + c(a + b - c)$.

Por la desigualdad triangular se tiene $a < b + c$, $b < c + a$ y $c < a + b$, así el miembro derecho es siempre positivo. Dado que las variables son positivas, el miembro derecho de la desigualdad es como se decía

El numerador de $uv - \frac{1}{3}$ es igual a

$3u - v = 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$, el miembro derecho comienza con una suma de cuadrados, es no negativa y se anula si y solo si $a = b = c$.

390. Sea *ABC* un triángulo cuyos lados son *a*, *b*, *c*, *R* el circunradio, *r* el inradio, *s* el semiperímetro, A_{ABC} el área, *u*, *v* y *w* las longitudes respectivas de las tangentes al incírculo con vértices *A*, *B* y *C*. Dados que al ángulo *A*, los radios *r* y *R* son fijos entonces también son fijos $a = 2R\operatorname{sen} A$, $b + c - a = u = r\cot \frac{1}{2}A$, $b + c = u + a$, $s = \frac{1}{2}(u + 2a)$ y $A_{ABC} = rs$. Pero $A_{ABC} = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} A$, tenemos que *bc* y $b + c$ son ambos fijos. Ahora *b* y *c* son únicos y, además, son raíces de una ecuación de segundo grado, obteniendo el resultado buscado.

391. Notemos que $\angle BAH = \angle ABH = \angle BHF = \angle FHC = \angle HFD = \angle FDB = \alpha$, pues *ABH* es isósceles, *HF* es paralela a *AB* y *DE* es paralela a *AC*. Entonces, el cuadrilátero *HDBF* es cíclico y como $\angle HDB$ es recto (*ABH* es isósceles), tenemos que $\angle HFB$ es recto. Por lo tanto, $\angle DBF$ es recto (pues $DB \parallel HF$).
Como $\angle HBE$ también es recto, $\angle FBE = \angle DBH = \alpha$.

Primera forma: Sea *G* la intersección de *BF* y *AC*. Los triángulos *ABC* y *BGC* son semejantes (tienen dos ángulos iguales). Notemos que como *DE* es la recta de los puntos medios, *F* es el punto medio de *BG*, de modo que *CF* es mediana de *BGC*. Los ángulos *BCF* y *ACD* son ángulos correspondientes (entre un lado y una mediana) en triángulos semejantes y, por lo tanto, son iguales.

Segunda forma: Sean *I* y *J* las intersecciones de *HF* con *CD* y *BC* respectivamente.
De lo anterior, $\angle FBC = \angle IHC$. Para ver que son semejantes los triángulos *FBC* e *IHC* (lo cual nos da directamente el resultado) solo falta probar que $\frac{BF}{HI} = \frac{BC}{CH}$. Es claro que *I* es el punto medio de *HJ* pues $HJ \parallel AB$ y *D* es el punto medio de *AB*. Como *HBJ* es un triángulo rectángulo, lo anterior quiere decir que *I* es su circuncentro y, por lo tanto, $IH = IB$. También, $IBF \sim HCB$ pues ambos son triángulos rectángulos y $\angle BHC = 2\alpha = \angle BIF$. Por lo tanto, $\frac{BF}{HI} = \frac{BF}{BI} = \frac{BC}{CH}$, que es lo que faltaba probar.

392. a) Utilizando la igualdad $R = \frac{abc}{4A_{ABC}}$ y la propiedad de la bisectriz, se tiene que $\frac{c}{b} = \frac{R}{a - R}$ y haciendo los cálculos pertinentes se tiene $R = \frac{ac}{b + c}$ entonces

$$\frac{abc}{4A_{ABC}} = \frac{abc}{4A_{ABC}}$$ de donde $A_{ABC} = \frac{1}{4}b(b + c) = \frac{1}{2}ab\text{sen}C \Rightarrow b + c = 2a\text{sen}C$ (1)

y como $CD = \frac{ab}{a+c} = \frac{ab}{2a\text{sen}\,C} = \frac{b}{2\text{sen}\,C}$ entonces $A_{ACD} = \frac{1}{2}b \cdot CD \cdot \text{sen}C = \frac{1}{4}b^2$.

b) Utilizando la desigualdad triangular, se tiene $a < b + c \Rightarrow a < 2a\text{sen}C \Rightarrow \text{sen}C > \frac{1}{2}$.

De aquí que $\frac{\pi}{6} < C < \frac{5\pi}{6}$, es decir, que la medida del ángulo C es mayor que 30º y menor que 150º.

393. Sean I_1 e I_2 los incentros de los triángulos ABD y ACD respectivamente (fig. 26). Sea Q el punto donde se cortan I_1, I_2 y AD, por el teorema de las transversales, como MQ pasa por I_1, se verifica que

$$\frac{MB}{MA}\cdot AD + \frac{QD}{QA}\cdot c = BD \qquad (1)$$

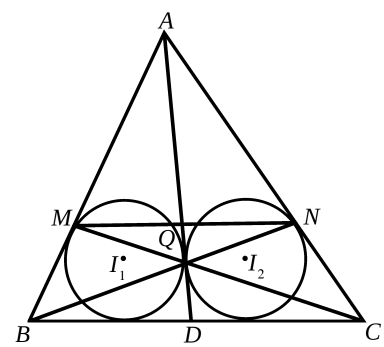

Fig. 26

Análogamente como QN pasa por I_2, será

$$\frac{QD}{QA}\cdot b + \frac{NC}{NA}\cdot AD = DC \qquad (2)$$

Dividiendo la primera por c y la segunda por b, se obtiene

$$\frac{MB}{MA}\cdot\frac{AD}{c} + \frac{QD}{QA} = \frac{BD}{c},$$

$$\frac{QD}{QA} + \frac{NC}{NA}\cdot\frac{AD}{b} = \frac{DC}{b}.$$

Restando se obtiene $\frac{MB}{MA}\cdot\frac{AD}{c} = \frac{NC}{NA}\cdot\frac{AD}{b} \Leftrightarrow \frac{MB}{MA}\cdot b = \frac{NC}{NA}\cdot c$ (3)

Para que se corten sobre la bisectriz, tiene que cumplirse $\frac{MB}{MA}\cdot\frac{NA}{NC}\cdot\frac{CD}{DB} = 1$,

lo cual es cierto porque $\frac{MB}{MA}\cdot\frac{NA}{NC} = \frac{c}{b}$ (por (3)), y $\frac{CD}{DB} = \frac{b}{c}$.

394. Sean B' y C' las intersecciones de la circunferencia circunscrita al ΔAPQ con AB y AC, respectivamente (fig. 27).

Las potencias de los puntos B y C con respecto a AQP se pueden expresar como

$BQ \cdot BP = BB' \cdot BA = BT_1^{\,2}$ y $CP \cdot CQ = CC' \cdot CA = CT_2^{\,2}$ (1)

Pero $B'Q = C'P$, porque son cuerdas de ángulos iguales en la circunferencia AQP.

Eso quiere decir que $B'C'$ es paralela a BC. Entonces

$$\frac{BB'}{CC'} = \frac{BA}{CA} \qquad (2)$$

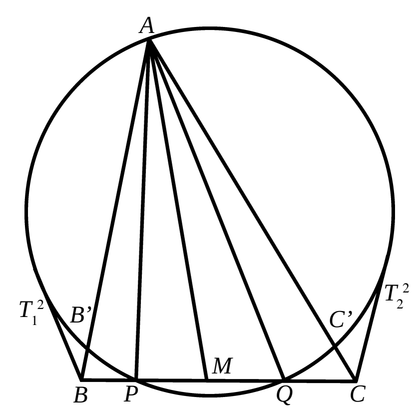

Fig. 27

De las relaciones (1) resulta $\dfrac{BQ\cdot BP}{CQ\cdot CP}=\dfrac{BB'}{CC'}\cdot\dfrac{BA}{CA}$ = por (2) = $\left(\dfrac{BA}{CA}\right)^2$

y también $\dfrac{BQ\cdot BP}{CQ\cdot CP}=\left(\dfrac{BT_1}{CT_2}\right)^2$. Según el teorema de la bisectriz

$\dfrac{BA}{CA}=\dfrac{MB}{MC}$, por lo que $\left(\dfrac{BT_1}{CT_2}\right)^2=\left(\dfrac{BA}{CA}\right)^2\Leftrightarrow\left(\dfrac{BT_1}{CT_2}\right)^2=\dfrac{BA}{CA}\cdot\dfrac{MB}{MC}$.

395. Por una parte, el teorema de Menelao.

En ABC cortado por MN (fig. 28) se tiene

$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BP}{CP}\cdot\frac{CN}{AN}=1 \qquad (1)$$

Por el teorema de Van Aubel aplicado a las cevianas AR, BN y CM, concurrentes en Q, se tiene

$$\frac{AQ}{QR}=\frac{AM}{BM}+\frac{AN}{CN} \qquad (2)$$

Llamemos $m=\dfrac{AM}{BM}$, $n=\dfrac{AN}{CN}$.

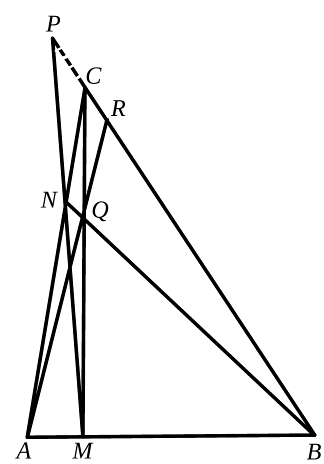

Fig. 28

Por otra parte, usando ahora segmentos orientados,

$k=\dfrac{PB}{BC}=\dfrac{PC+CB}{BC}=\dfrac{PC}{BC}-1\Leftrightarrow\dfrac{PC}{BC}=k+1$, y, por lo tanto, $\dfrac{PB}{PC}=\dfrac{k}{k+1}$; llevando esto a (1) obtenemos

$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{CN}{NA}=\frac{k+1}{k}\Leftrightarrow\frac{m}{n}=\frac{k+1}{k} \qquad (3)$$

Utilizaremos la caracterización siguiente para que una transversal de un triángulo pase por el baricentro

(teorema de Cristea) $G\in MN\Leftrightarrow\dfrac{BM}{MA}+\dfrac{CN}{NA}=1\Leftrightarrow\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=1$ (4)

Supongamos que $G\in MN$. Entonces (4) y (3) permiten calcular *m y n:*

$m=\dfrac{2k+1}{k}$ y $n=\dfrac{2k+1}{k+1}$ y por (2) $\dfrac{AQ}{RQ}=m+n=(2k+1)\left(\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{1}{k}\right)=\dfrac{(2k+1)^2}{k(k+1)}$

Así que la condición es necesaria.

Recíprocamente, supongamos que $m+n=\dfrac{(2k+1)^2}{k(k+1)}$ y que $\dfrac{m}{n}=\dfrac{k+1}{k}$, entonces

$m=\dfrac{2k+1}{k}$ y $n=\dfrac{2k+1}{k+1}$ luego $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=1\Leftrightarrow\dfrac{BM}{MA}+\dfrac{CN}{NA}=1\Leftrightarrow G\in MN$

y la condición es suficiente.

396. Consideremos la figura 29:

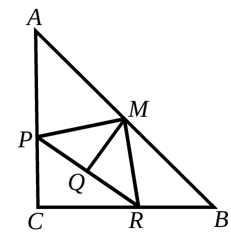

Fig. 29

Donde m es la longitud del lado del triángulo equilátero.

Observemos que, por simetría, MC es bisectriz del $\angle BCA$, así que $\angle MCA = 45°$ y los triángulos AMC y RQC son isósceles y rectángulos. Entonces $MC = 1$ y $RC = \frac{1}{2}$, de donde $MR = 1 - \frac{m}{2}$. Por otro lado, por Pitágoras en ΔMRQ, $MR = \sqrt{m^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2}$. Comparando los dos resultados y despejando m, obtenemos $m = \sqrt{3} - 1$. El área del triángulo MPR es $A = \frac{1}{2}m\left(1 - \frac{m}{2}\right) = \sqrt{3} - 1{,}5$.

397. Si a y b son los catetos del triángulo, entonces: $P = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$, $A = \frac{1}{2}ab$

de donde: $a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{2}ab$ multiplicando por 2, tenemos

$2a + 2b + 2\sqrt{a^2 + b^2} = ab$

$ab - 2b - 2b = 2\sqrt{a^2 + b^2}$ elevando al cuadrado ambos miembros, obtenemos:

$a^2b^2 + 4a^2 + 4b^2 - 4a^2b - 4ab^2 + 8ab = 4a^2 + 4b^2$

$a^2b^2 - 4a^2b - 4ab^2 + 8ab = 0$

$ab\,(ab - 4a - 4b + 8) = 0$ pero como $ab > 0$ entonces resulta la ecuación

$ab - 4a - 4b + 8 = 0$

$ab - 4a - 4b + 16 - 16 + 8 = 0$

$a(b - 4) - 4(b - 4) - 8 = 0$

$(a - 4)\,(b - 4) = 8$:

$a = 12$, $b = 5$ y $c = 13$ primera solución

$a = 6$, $b = 8$ y $c = 10$ segunda solución

además, se cumple: $P_1 = 30$ y $A_1 = 0{,}5 \cdot 5 \cdot 12 = 30$; $P_2 = 24$ y $A_2 = 0{,}5 \cdot 6 \cdot 8 = 24$.

398. (1) $\overline{AB} < \overline{AP} + \overline{BP}$ en el triángulo ABP (fig. 30).

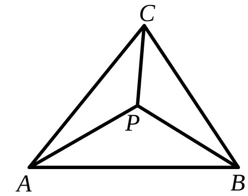

Fig. 30

(2) $\overline{AC} < \overline{AP} + \overline{CP}$ en el triángulo APC.

(3) $\overline{BC} < \overline{BP} + \overline{CP}$ en el triángulo BPC.

Sumando miembro a miembro (1), (2) y (3), tenemos:

$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} < 2(\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP})$

$2p < 2(\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}) \quad |:2$

$p < (\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP})$

399. Datos $h_a = \dfrac{1}{24}$ cm, $h_b = \dfrac{1}{26}$ cm y $h_c = \dfrac{1}{10}$ cm. Sabemos que:

$$A = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c \text{ de donde: } a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c \qquad (1)$$

Analizando obtenemos: $a = \dfrac{c \cdot h_c}{h_a}$, $b = \dfrac{c \cdot h_c}{h_b}$, $c = c$.

Sumando miembro a miembro: $a + b + c = c\left(\dfrac{h_c}{h_a} + \dfrac{h_c}{h_b} + 1\right)$ pero $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

$2p = c\left(\dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{24}} + \dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{26}} + 1\right)$, $2p = \left(\dfrac{24}{10} + \dfrac{26}{10} + 1\right)$, de donde $2p = 6c$, por lo tanto, $p = 3c$

empleando la fórmula de Herón para calcular el área de un triángulo tenemos:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{3c(3c-2{,}4c)(3c-2{,}6c)(3c-c)} = \sqrt{3c \cdot 0{,}3c \cdot 0{,}4c \cdot 2c} = 1{,}2c^2 \qquad (2)$$

igualando este último resultado con lo expresado en (1) se obtiene: $1{,}2c^2 = c \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{10}\text{cm}$;

$1{,}2\, c^2 = c \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}1$ cm $\big|: c$

$1{,}2\, c = 0{,}05$ cm de donde $c = 0{,}05$ cm : $1{,}2$ y $c = \dfrac{1}{24}$ cm,

sustituyendo c en (2) $A = 1{,}2\left(\dfrac{1}{24}\right)^2 \text{cm} = \dfrac{1}{480}\,\text{cm}^2$.

400. Con los datos del enunciado tenemos (fig. 31):

en el triángulo ABC $\angle BAC = 36º$; $\angle ABC = \angle ACB = 72º$

en el triángulo CBD $\angle BCD = 36º$; $\angle CDB = \angle BDC = 72º$

en el triángulo ADC $\angle DAC = \angle ACD = 72º$; $\angle ADC = 108º$,

por tanto, ΔBCD y ΔADC son isósceles y, además, ΔBCD es semejante al ΔABC.

Para los lados se tiene: $DC = AD = a$; $BD = b - a$.

Expresando la proporcionalidad derivada de la semejanza anterior:

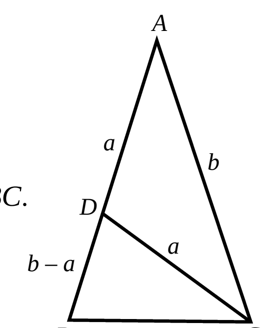

Fig. 31

$$\frac{b-a}{a} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow a^2 = b^2 - ab \Leftrightarrow a^2 + ab - b^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} - 1 = 0$$

y resolviendo queda $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow a = \dfrac{(\sqrt{5}-1)b}{2}$, es decir, a es la sección áurea de b.

401. Si circunscribimos una circunferencia al ΔAPC (fig. 32) notamos que esta tiene que ser tangente en C a BC, de lo contrario, si lo es a otra recta $B'C \Rightarrow \angle BCP \neq \angle B'CP = \angle PAC$, pues $\angle PAC$ está inscrito sobre PC y $\angle B'CP$ semiinscrito sobre PC.

Entonces P pertenece al arco AC de una circunferencia tangente a BC en C. Su centro O se encontrará en la intersección de la mediatriz de AC y la perpendicular por C a BC. Sea M el punto donde la mediatriz de AC corta al arco AC y N donde corta a AC. Sea H el pie de la perpendicular bajada de P a AC. Trácese la tangente a la circunferencia por M, como no la vuelve a tocar

$$\Rightarrow MN \geq PH, \forall P \in AC \Rightarrow \frac{MN \cdot AC}{2} \geq \frac{PH \cdot AC}{2} \Rightarrow [AMC] \geq [APC].$$

Luego P es el punto donde se cortan la mediatriz de AC y la circunferencia cuyo centro está en la intersección de dicha mediatriz con la perpendicular a BC por C, y pasa por A.

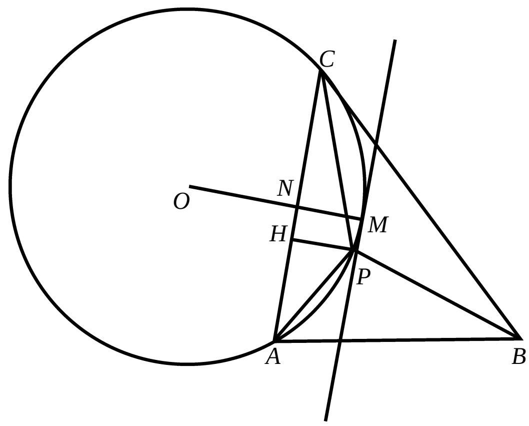

Fig. 32

402. Es análogo a demostrar que $4q^2 = (p_1 - p_2)^2 + (p_1 + p_2)^2\tan^2\beta$ de la Ley de los cosenos tenemos $p^2 - 2r\cos\beta \cdot p + r^2 - q^2 = 0$, pero las raíces de esta ecuación son p_1 y p_2 de aquí tenemos que $p_1 + p_2 = 2r\cos\beta$ y $p_1 \cdot p_2 = r^2 - q^2$

luego $(p_1 - p_2)^2 = (p_1 + p_2)^2 - 4p_1p_2 = 4r^2\cos^2\beta - (r^2 - q^2)$

$\therefore\ (p_1 - p_2)^2 + (p_1 + p_2)^2\tan^2\beta = 4r^2\cos^2\beta - (r^2 - q^2) + 4r^2\cos^2\beta \cdot \tan^2\beta$

$= 4r^2(\cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta) - 4r^2 + 4q^2 = 4r^2 - 4r^2 + 4q^2 = 4q^2$

403. *Solución 1:* (fig. 33).

Por la simetría bastará considerar $0 < \alpha < 90º$, ya que la función es periódica con período de un cuarto de vuelta. El área pedida $S(\alpha)$ sale restando del área del cuadrado cuatro triángulos como el $PA'M$.

Llamando x al cateto PA' y y al cateto $A'M$, el área de cuatro triángulos vale $2xy$. Como el lado $B'A'$ vale 1, tenemos: $x + y = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad (1)$

relación que elevada al cuadrado y simplificada queda:

$2xy = 1 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad (2)$ pero

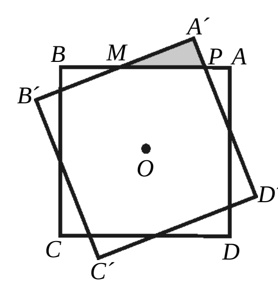

Fig. 33

$x = \sqrt{x^2 + y^2}\cos\alpha,\ y = \sqrt{x^2 + y^2}\operatorname{sen}\alpha$, y sustituyendo en (1), resulta:

$\sqrt{x^2 + y^2}(1 + \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha}$ sustituyendo en (2) y operando, obtenemos: $2xy = 1 - \dfrac{2}{1 + \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha - 1}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha + 1}$.

Finalmente para el área pedida obtenemos: $S(\alpha) = 1 - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha - 1}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha + 1} = \dfrac{2}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha + 1}$ con $0 \leq \alpha \leq 90°$.

Solución 2:

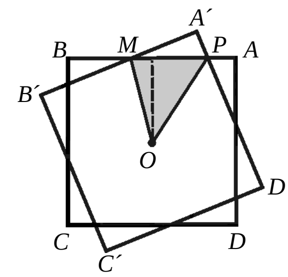

Fig. 34

El área pedida consta de 8 triángulos como el sombreado en la figura 34, *OPM*. Tomando como base $b = MP$, la altura es constante (de trazos en la figura) y vale $\frac{1}{2}$. En el triángulo *PA'M* se tiene: $MA' = b\cos\alpha$, $PA' = b\,\text{sen}\,\alpha$; pero $BM = MA'$ y $PA = PA'$, además:
$BM + MP + PA = 1 \Leftrightarrow b\cos\alpha + b + b\,\text{sen}\,\alpha = 1$, de donde

$b = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha + 1}$ y el área pedida es:

$$S(\alpha) = 8\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha+1} = \frac{2}{\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha+1} \quad \text{con } 0 \le \alpha \le 90°.$$

404. Denominamos, con letras mayúsculas, los puntos característicos que produce el plegado y, con minúsculas, los lados de los triángulos (fig. 35).
Los lados del triángulo *DEF* se obtienen, resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{matrix} x^2+z^2=y^2 \\ z+y=1 \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} z=1-y \\ x^2+(1-y)^2=y^2 \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} z=1-y \\ x^2+1-2y=0 \end{matrix}\right\} \to y=\frac{1+x^2}{2} \quad z=\frac{1-x^2}{2}$$

y su perímetro es

$$P_{DEF} = x+y+z = x+\frac{1+x^2}{2}+\frac{1-x^2}{2} = x+1.$$

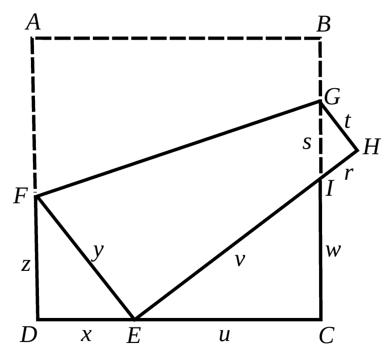

Fig. 35

Los triángulos rectángulos de una capa de papel son semejantes, pues, por un lado, $\angle FED$ y $\angle IEC$ son complementarios y, por otro, $\angle EIC = \angle GIH$.
Por semejanza de los triángulos *EDF* y *ECI*.

$$\frac{x}{z}=\frac{w}{u} \to w=\frac{x\cdot u}{z}=\frac{x(1-x)}{z};\ \frac{y}{z}=\frac{v}{u} \to v=\frac{y\cdot u}{z}=\frac{y(1-x)}{z}$$

Los lados del triángulo *ECI* son: $u = 1 - x$, $v=\dfrac{1+x^2}{1+x}$, $w=\dfrac{2x}{1+x}$

y su perímetro $P_{ECI} = u+v+w = \dfrac{1-x^2}{1+x}+\dfrac{1+x^2}{1+x}+\dfrac{2x}{1+x} = 2.$

Por semejanza de los triángulos *ECI* e *IHG*. $\dfrac{w}{v}=\dfrac{r}{s} \to s=\dfrac{v\cdot r}{w}=\dfrac{v(1-v)}{w}.$

Los lados del triángulo *IHG* son:

$$r=1-v=\frac{x(1-x)}{1+x},\ s=\frac{(1+x^2)(1-x)}{2(1+x)},\ t=1-w-s=\frac{(1-x)^2}{2}$$

y su perímetro es $P_{IHG} = r+s+t = \dfrac{2x(1-x)}{2(1+x)}+\dfrac{(1+x^2)(1-x)}{2(1+x)}+\dfrac{(1-x)^2(1+x)}{2(1+x)} =$

$$=\frac{(1-x)\left[2x+(1+x^2)+(1-x^2)\right]}{2(1+x)}=\frac{(1-x)\left[2x+2\right]}{2(1+x)}=1-x.$$

Queda probado lo que se pedía: $P_{EDF}+P_{IHG}=(x+1)+(1-x)=2=P_{ECI}$ y que $P_{ECI}=2$, es la mitad del perímetro del cuadrado.

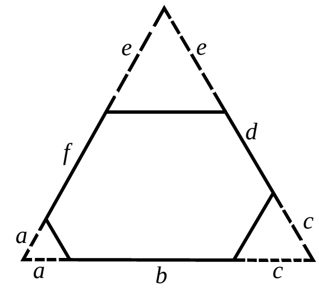

Fig. 36

405. La idea es prolongar los lados para formar un triángulo equilátero (fig. 36).
$a+b+c+d+e+f=21$
$l=a+b+c=c+d+e=e+f+a$
$3l=21+a+c+e$, por tanto,

$l=7+\dfrac{(a+c+e)}{3}$.

El valor más pequeño de $a+c+e$ es 6 y el más grande 15 así que $9\leq l\leq 12$
Si $a+c+e=6$, entonces son:
$(a, c, e)=(1, 2, 3)$ y $(b, c, d)=(4, 5, 6)$
Si $a+c+e=9$ el único caso posible es:
$(a, c, e)=(1, 3, 5)$ y $(b, c, d)=(2, 4, 6)$
Si $a+c+e=12$ el único caso posible es $(a, c, e)=(2, 4, 6)$
Si $a+c+e=15$ el único posible es $(4, 5, 6)$.

Como el área del triángulo de lado l es $l^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ y la del hexágono es $\dfrac{\sqrt{3}}{4}e^2-(a^2+c^2+e^2)$, las áreas posibles son:

Si $a+c+e=6$, entonces $l=9$ y el área $\dfrac{67\sqrt{3}}{4}$.

Si $a+c+e=9$, entonces $l=10$ y el área $\dfrac{65\sqrt{3}}{4}$.

Si $a+c+e=4$, entonces $l=11$ y el área $\dfrac{65\sqrt{3}}{4}$.

Si $a+c+e=5$, entonces $l=12$ y el área $\dfrac{67\sqrt{3}}{4}$.

406. Bastará probar que el área de cada cuadrilátero es la cuarta parte del área total.
La quebrada *APC* divide al cuadrilátero en dos partes de igual área, pues *AP* es la mediana de *ABD* y *PC* lo es de *CBD* (fig. 37).
La quebrada *TPZ* divide al cuadrilátero *APCD* (sombreado) en dos partes de igual área pues *PT* es mediana de *APD* y *PZ* es mediana de *CPD*.
Tenemos ya probado que el área del cuadrilátero *TPZD* es la cuarta parte del área del cuadrilátero inicial.
Finalmente *TZ* es paralela a *OP* por serlo ambas a *AC*; luego los triángulos *TPZ* y *TOZ* tienen la misma área y lo mismo les ocurre a los cuadriláteros *TPZD* y *TOZD*.
Del mismo modo se probaría para los otros tres cuadriláteros.

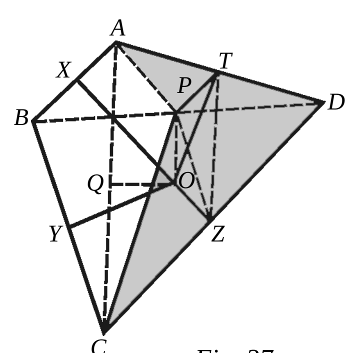

Fig. 37

407. Los triángulos *ABE* y *DCE* son iguales por lo que $\angle AEB=\angle DEC$. Análogamente los triángulos *ADF* y *BCF* son semejantes y $\angle DAF=\angle FBC$. Entonces, tenemos que

$\angle EGB=180°-\angle BEG-\angle GBE=\angle DEC-\angle FBC=\angle AEB-\angle DAF=90°-\angle BAE-\angle DAF=20°$.

408. El ángulo *CAD* mide 60°.

409. *Caso 1:* Una forma de hacerlo es estableciendo semejanzas de triángulos: los triángulos *CIR* y *CMB* son semejantes, y también lo son los triángulos *CMB* y *CNI*.
Caso 2: Trazamos *PB* paralelo a *DN*, *QN* paralelo a *CM* y *OQ* paralelo a *CB*. Se forman cuatro triángulos que son congruentes al triángulo sombreado y, puesto que los cinco forman el triángulo *CMB*, que es $\frac{1}{4}$ del área del triángulo, entonces el área del triángulo sombreado es $\frac{1}{20}$.

410. El paralelogramo inicial tenía de base b y altura h y el trapecio al que hemos llegado tiene de bases $b+\frac{1}{2}b$ y $b-\frac{1}{4}b$ y altura también h. Así pues, el área del trapecio es

$A=\frac{1}{2}\left(\frac{3b}{2}+\frac{3b}{4}\right)h=\frac{9bh}{8}$ y como bh era el área del paralelogramo, esta ha aumentado en $\frac{1}{8}$, es decir, el 12,5 %.

411. a) Como $\angle AFE = \angle ABE = 90°$ entonces por el teorema de Thales están inscritos sobre *AE* (diámetro de la circunferencia), es evidente que $\Delta AEB = \Delta CDE$ son iguales, por lo que $\angle CDE = \angle EAB$, pero $\angle EAB = \angle EFB$ por estar inscrito en la misma cuerda, luego por transitividad se cumple lo pedido.

412. Sea *O* el centro de la circunferencia y sean *M* y *N* los puntos medios de las diagonales *AC* y *BD*. Así, $OM \perp AC$ y $ON \perp BD$, de modo que *OMEN* es un rectángulo. Por lo tanto:

$AM = MC$, $BN = ND$, $ME = ON$, $NE = OM$ (1).

Con eso $AE^2 + CE^2 = (AM + ME)^2 + (MC - ME)^2 = 2(AM^2 + ME^2)$
$= 2(r^2 - OM^2 + ME^2)$,
$BE^2 + DE^2 = (BN - NE)^2 + (ND + NE)^2 = 2(r^2 - ON^2 + NE^2)$.

Sumando ambos resultados, en virtud de (1) se tiene $AE^2 + BE^2 + CE^2 + DE^2 = 4r^2$.

413. Consideramos el círculo *C* circunscrito al polígono.

Como 1 340 – 1 005 = 1 005 – 670 = 335, las diagonales $A_{670}A_{1\,005}$ y $A_{1\,005}A_{1\,340}$ del polígono dado son iguales, y, por lo tanto, también lo son los respectivos arcos en la circunferencia circunscrita, arc$A_{670}A_{1\,005}$, = arc$A_{1\,005}A_{1\,340}$.

En consecuencia la recta A_2A_{1005}, es la bisectriz del ángulo $A_{670}A_2A_{1\,340}$.

Análogamente, la recta $A_{1\,340}A_{336}$ es la bisectriz del ángulo $A_{670}A_{1\,340}A_2$ y la recta $A_{670}A_{673}$ es la bisectriz del ángulo $A_2A_{270}A_{1\,340}$.

Además, A_{671} es diametralmente opuesto a $A_{1\,673}$ en la circunferencia *C*, porque

1 673 – 671 = 1 002 = $\frac{1}{2}(2\,004)$, por lo tanto, el ángulo $A_{1\,673}A_{670}A_{671}$ es recto. Análogamente también es recto $A_{336}A_{1\,340}A_{1\,338}$.

Consideremos el triángulo $A_2A_{670}A_{1\,340}$. Se sigue de los resultados anteriores que $A_2A_{1\,005}$ es bisectriz interior de ese triángulo, y que $A_{670}A_{671}$ y $A_{1\,338}A_{1\,340}$ son bisectrices exteriores del mismo triángulo. En consecuencia, las tres rectas concurren en el centro del círculo exinscrito correspondiente al lado $A_{670}A_{1\,340}$ del triángulo.

414. a) Si $BAD = \alpha$, entonces $BCD = \alpha$, $EBC = \delta$, $CDF = \delta$, $ECB = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$,

$DCF = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$. Con ello $FCE = 180°$, de modo que los puntos E, C y F son colineales.

b) Sea G el punto de concurrencia de la perpendicular a la recta AE en el punto E con la perpendicular a la recta AF en el punto F. Como por construcción $AE = AF$ y los ángulos AEG y AFG son rectos, los triángulos de lado común AG, AGE y AGF, son congruentes, de modo que los ángulos EAG y GAF son iguales y luego AG es la bisectriz del ángulo EAF. Sea I el punto donde AG corta al lado CD.

Así $\angle CIG = \angle DIA = \angle IAB = \dfrac{\alpha}{2}$, $\angle CFG = \angle AFG - \angle DFC = 90° - \left(90° - \dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{\alpha}{2}$, de modo que los puntos C, G, F e I son concíclicos, y, por lo tanto, $FCG = FIG$. A su vez el triángulo ADI es isósceles y $AD = DI$ y como $AB = DF$, $BAD = IDF$, entonces los triángulos ADB y DFI son congruentes. Así, los ángulos DFI y ABD son iguales. Sea $\angle ABD = \beta$. Entonces $FIC = \beta + \beta$, de modo que $FIG = \dfrac{\alpha}{2} + \beta$ y, por lo tanto, $\angle FCG = \dfrac{\alpha}{2} + \beta$.

Por otra parte, si CH es perpendicular a la diagonal BD, considerando el cuadrilátero $HBEC$, se tiene $\angle HCE = 360° - \left(90° + (180° - B) + \left(90° - \dfrac{\alpha}{2}\right)\right) = \dfrac{\alpha}{2} + \beta$. Así, los ángulos FCG y HCE son iguales y los puntos G, C y H son colineales, de modo que la recta CH pasa por el punto G.

415. Como el triángulo AEB es rectángulo (fig. 38).

Por el teorema de los catetos $AE^2 = AC \cdot AB$.

El cuadrilátero $BCDF$ es inscriptible, pues sus ángulos opuestos C y F son rectos.

Así, las rectas ACB y ADF son secantes a la circunferencia que lo circunscribe.

La potencia del punto A respecto de esa circunferencia nos da:

$AC \cdot AB = AD \cdot AF$.

$\therefore\ AE^2 = AD \cdot AF$.

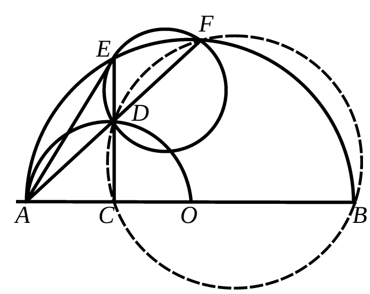

Fig. 38

Y esto quiere decir, por potencia de A respecto a la circunferencia que circunscribe al triángulo DEF, que la recta AE es tangente a dicha circunferencia en E.

416. a) Sean A el centro de $\mathscr{A}$, B el centro de $\mathscr{B}$, C el centro de $\mathscr{C}$ y D el centro de $\mathscr{D}$ (fig. 39). Sabemos que los puntos de tangencia están alineados con los respectivos centros.

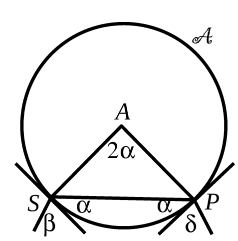

Fig. 39

Primera forma. Sabemos también que el ángulo central en cualquier círculo es el doble del ángulo que forma la tangente con la cuerda, así que si $\angle SAP = 2\alpha$, $\angle PBQ = 2\beta$,
$\angle QCR = 2\gamma$ y $\angle RDS = 2\delta$, entonces $\angle SPQ = \alpha + \delta$ y $\angle QRD = \gamma + \beta$. De esta manera, en el cuadrilátero $PQRS$ la suma de dos ángulos opuestos es

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \dfrac{1}{2}(2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta) = 180^{\circ}$, lo cual es suficiente para que el cuadrilátero $PQRS$ sea cíclico.

Otra vía: Como $AP = AS$, entonces $\angle QPS = 180° - \angle BPQ - \angle SPA$

$= 180° - \left(90° - \frac{1}{2}\angle QBP\right) - \left(90° - \frac{1}{2}\angle PAS\right) = \frac{1}{2}(\angle B + \angle A)$. Análogamente, $\angle SRQ = \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$.

Por lo tanto, $\angle QPS + \angle SRQ = 180°$.

b) Observemos que la distancia de A a B es 5 y que, por simetría, $ABCD$ es un rombo (fig. 40), así que sus diagonales se intersecan perpendicularmente, digamos en O, y $PQRS$ es rectángulo. Como $OA = 3$ entonces, por Pitágoras, $OB = 4$. Por otro lado los triángulos APS y ABD son semejantes en razón 2 : 5, así que $PS = \frac{2}{5}\cdot 8 = \frac{16}{5}$. Análogamente $PQ = \frac{3}{5}\cdot 6 = \frac{18}{5}$. El área es $16\cdot\frac{18}{25} = \frac{288}{25}$.

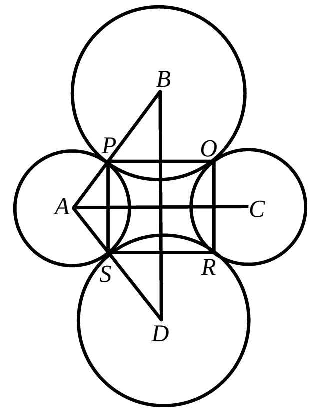

Fig. 40

417. Prolonguemos O_2B por B hasta $M_1' = O_2B \cap C_1$ (fig. 41). Probemos que O_1, A, O_2 y M_1' son concíclicos: $O_1A = O_1B = r_1, O_2A = O_2B = r_2, O_1O_2$ común,

$\Rightarrow \Delta O_1AO_2 = \Delta O_1BO_2 \Rightarrow \angle AO_1O_2 = \angle BO_1O_2 = \alpha, \angle AO_2O_1 = \angle BO_2O_1 = \beta$

$O_1M_1 = O_1B = r_1 \Rightarrow \angle O_1M_1'B = \angle O_1BM_1' = \alpha + \beta \Rightarrow \angle M_1'O_1B = \pi - (2\alpha + 2\beta)$.

$\angle M_1'O_1A + \angle AO_2M_1' = \angle M_1'O_1B + \angle BO_1A + \angle AO_2M_1' = \pi - 2\alpha - 2\beta + 2\alpha + 2\beta = \pi$.

Queda demostrado entonces que $M_1' = M_1$ pues dos circunferencias, si se cortan y no coinciden, lo hacen en uno o dos puntos.

$\angle M_1AO_2 = \angle M_1O_1O_2 = \angle M_1O_1B + \angle BO_1O_2 = \pi - 2\alpha - 2\beta + \alpha = \pi - \alpha - 2\beta$.

Análogamente $\angle M_2BO_1 = \pi - \beta - 2\alpha$ y $\angle M_1AO_2 = \angle M_2BO_1 \Leftrightarrow \alpha = \beta \Leftrightarrow r_1 = r_2$.

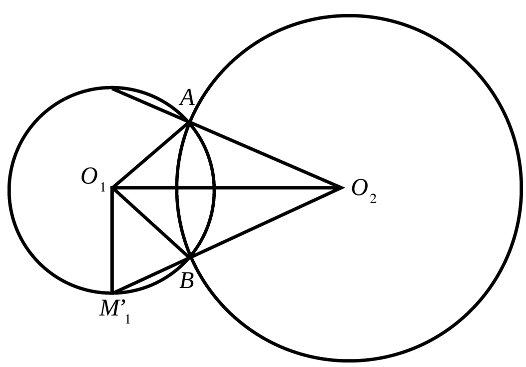

Fig. 41

418. Trazamos desde X y Y las perpendiculares XE, YF a AB; y XG, YH a CD (fig. 42). Tenemos entonces que:

$\Delta XEM \approx \Delta YFM$

$\Delta XGM \approx \Delta YHM$

$\Delta XGC \approx \Delta YFB$

$\Delta XEA \approx \Delta YHD$

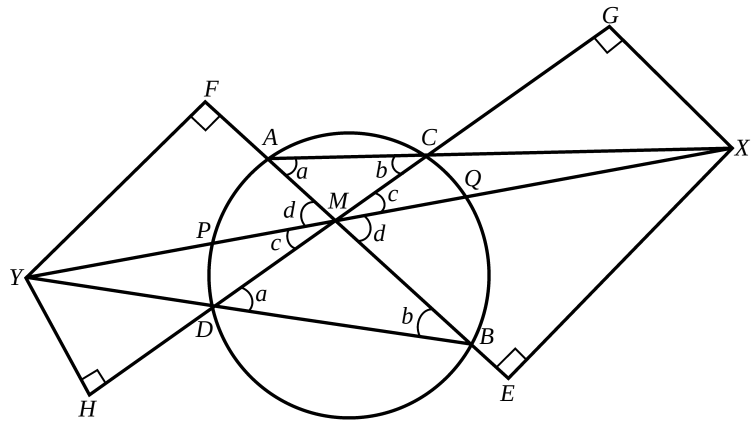

Fig. 42

por ser todos rectángulos y tener un ángulo agudo igual. A partir de las semejanzas, podemos escribir:

$$\frac{MX}{MY}=\frac{XE}{YF} \quad (1); \qquad \frac{MX}{MY}=\frac{XG}{YH} \quad (2); \qquad \frac{XE}{YH}=\frac{AX}{YD} \quad (3); \qquad \frac{XG}{YF}=\frac{XC}{YB} \quad (4)$$

De (1) y (2) tenemos: $\frac{(MX)^2}{(MY)^2}=\frac{XE\cdot XG}{YF\cdot YH}$. Sustituyendo de acuerdo con (3) y (4), queda:

$\frac{(MX)^2}{(MY)^2}=\frac{AX\cdot XC}{YD\cdot YB}$. Pero: $AX \cdot XC = PX \cdot QX$ y $YD \cdot YB = PY \cdot QY$. Entonces:

$$\frac{(MX)^2}{(MY)^2}=\frac{PX\cdot QX}{PY\cdot QY}\Rightarrow\frac{(MX)^2}{(MY)^2}=\frac{(PM+MX)(MX-PM)}{(MY-PM)(PM+MY)};\ \frac{(MX)^2}{(MY)^2}=\frac{(MX)^2-(PM)^2}{(MY)^2-(PM)^2}.$$

Restando las antecedentes entre sí y los consecuentes entre sí, tenemos:

$$\frac{(MX)^2}{(MY)^2}=\frac{(PM)^2}{(PM)^2}\Rightarrow\frac{(MX)^2}{(MY)^2}=1\Rightarrow MX=MY.$$

Con esto se completa la demostración.

419. De los sectores circulares que están en cada vértice sabemos que provienen de una circunferencia de radio 4 cm. No sabemos cuanto mide cada ángulo del triángulo, por lo que no sabemos cuál es el área de cada uno de estos sectores circulares pero sí podemos saber cuanto suman sus áreas, ya que la suma de los ángulos internos del triángulo es 180° así que la suma de sus áreas equivale al semicírculo de radio 4 cm, es decir, $\frac{1}{2}\pi\cdot 4^2=8\pi.$

Del triángulo sabemos que su perímetro es 84 cm y que tiene inscrita una circunferencia de radio 5. En el punto de tangencia, el radio y el lado del triángulo son perpendiculares. Podemos pensar el triángulo original como formado por los triángulos *AOB*, *BOC* y *COA*. Entonces;

área ΔABC = área ΔAOB + área ΔBOC + área ΔCOA = $\frac{1}{2}(AB\cdot r + BC\cdot r + CA\cdot r)$

$= \frac{1}{2} r\,(AB + BC + CA) = \frac{5}{2}(84) = 210.$

Por lo tanto, el área de la figura sombreada es $210 - 8\pi$.

420. Sean O el centro de la circunferencia y DF el diámetro por D. Entonces $DBF = 90°$. Así, los trazos AC y BF son paralelos, de modo que el cuadrilátero $AFBC$ es un trapecio inscrito y, por lo tanto, es isósceles, de modo que $BC = AF$.
Así: $AE^2 + BE^2 + CE^2 + DE^2 = AE^2 + DE^2 + CE^2 + BE^2 = AD^2 + BC^2 = AD^2 + AF^2 = DF^2$ (ya que $DAF = 90°$) $= (2r)^2 = 4r^2$.

Observación:

Si el punto E no coincide con el centro O, la respuesta es igualmente negativa. Como un contraejemplo, puede considerarse la circunferencia de centro en el punto O (39;25) y de radio $r = 65$, los puntos $A\left(\frac{-9\,408}{1\,073}, \frac{-20\,475}{1\,073}\right)$, B (0, –27), $C\left(\frac{44\,352}{1\,073}, \frac{96\,525}{1\,073}\right)$, D (0,77) son los vértices de un cuadrilátero inscrito en ella, que se cortan en el punto $E(0,0)$, no formando un ángulo recto, y tales que: $AE^2 + BE^2 + CE^2 + DE^2 = 4r^2$.

421. Aplicando el teorema de Ptolomeo, tenemos que si a es la longitud del lado del triángulo equilátero (fig. 43), entonces:

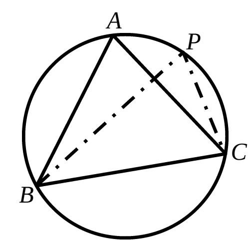

Fig. 43

$$\overline{PA}\cdot a + \overline{PC}\cdot a = \overline{PB}\cdot a$$

$\therefore\ \overline{PA} + \overline{PC} = \overline{PB}$ y entonces $\overline{PA} - \overline{PB} + \overline{PC} = 0.$

b) Si denotamos por a y d al lado y a la diagonal del pentágono regular (fig. 44) y si aplicamos el teorema de Ptolomeo a los cuadriláteros $PABE$, $PACE$, $PADE$, obtenemos:

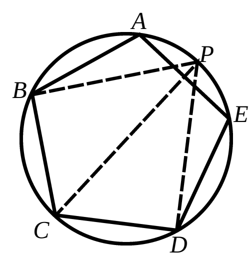

Fig. 44

$$\overline{PA}\cdot a = \overline{PA}\cdot a$$
$$\overline{PB}\cdot a = \overline{PA}\cdot d + \overline{PE}\cdot a$$
$$\overline{PC}\cdot a = \overline{PA}\cdot d + \overline{PE}\cdot d$$
$$\overline{PC}\cdot a = \overline{PA}\cdot a + \overline{PE}\cdot d$$
$$\overline{PE}\cdot a = \overline{PE}\cdot a$$

De estas relaciones se tiene que:

$$a\cdot\left(\overline{PA} - \overline{PB} + \overline{PC} - \overline{PD} + \overline{PE}\right) = 0$$
$$\therefore \left(\overline{PA} - \overline{PB} + \overline{PC} - \overline{PD} + \overline{PE}\right) = 0.$$

422. En la figura 45, tenemos que, como BA y BC tangentes respectivas a C_1 y C_2, y B pertenece al eje radical de las dos circunferencias:

$BF\cdot BE = BA^2 = BC^2 \Rightarrow BA = BC\,\cdot$

Entonces $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$, y por oponerse a arcos iguales $\angle BEC = \angle BEA = \alpha \Rightarrow EF$ bisectriz del $\angle AEC$. Como BA tangente a $C_1 \Rightarrow \angle BAF = \angle AEF = \alpha$ por estar semiinscrito. Luego A, F, C están alineados.

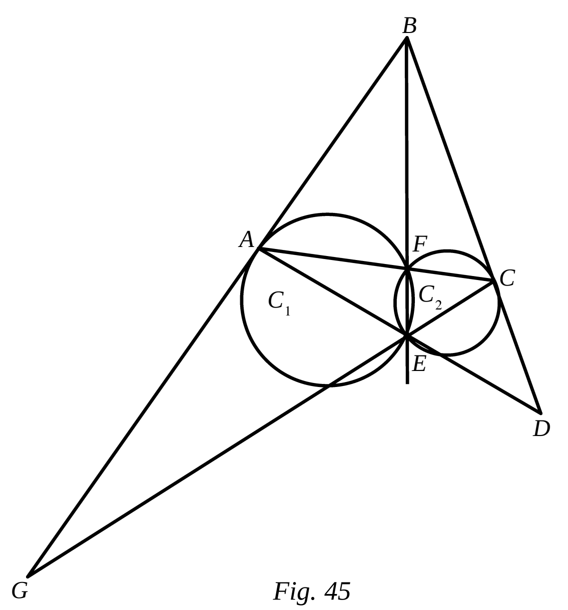

Fig. 45

$ABCE$ cíclico $\Rightarrow \Delta AGE$ semejante al ΔCGB y ΔEDC semejante al ΔBDA.

$\dfrac{FA}{FC} = \dfrac{AE}{EC}$ por la propiedad de la bisectriz.

$\dfrac{GC}{GA} = \dfrac{BC}{AE}$ por ΔAGE semejante al ΔCGB.

$\dfrac{DC}{DA} = \dfrac{EC}{AB}$ por ΔEDC semejante al ΔBDA.

$\dfrac{FA}{FC} \cdot \dfrac{GC}{GA} \cdot \dfrac{DC}{DA} = \dfrac{AE}{EC} \cdot \dfrac{BC}{AE} \cdot \dfrac{EC}{AB} = 1 \Rightarrow FA \cdot GC \cdot DC = FC \cdot GA \cdot DA$.

423. a) Ver figura 46.

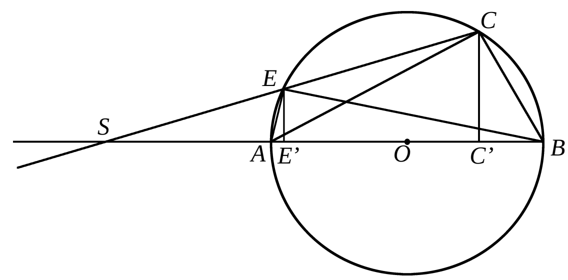

Fig. 46

$AB = 2r,\ AE = \dfrac{r}{2},\ BC = r$

Por el teorema de Pitágoras

$AC = \sqrt{4r^2 - r^2} = \sqrt{3}r$

$EB = \sqrt{4r^2 - \dfrac{r^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{15}}{2} r.$

Por el teorema de Ptolomeo.

$AE \cdot BC + AB \cdot EC = AC \cdot BE$ en cuadrilátero inscriptible sustituyendo

$\dfrac{r}{2} \cdot r + 2r \cdot \overline{EC} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}{2} r^2$ de donde $\overline{EC} = \dfrac{3\sqrt{5} - 1}{4} r.$

b) Si EE' y CC' definen las distancias desde E y C al lado AB entonces $CC' \parallel EE'$.

Luego: $(ABC) = \dfrac{2r \cdot CC'}{2} = \dfrac{\sqrt{3}r.\, r}{2}$ entonces $CC' = \dfrac{\sqrt{3}}{2} r$

$(AEB) = \dfrac{2rEE'}{2} = \dfrac{\sqrt{15}}{2} r \cdot \dfrac{r}{2}$ entonces $EE' = \dfrac{\sqrt{15}}{8} r.$

Si $SE = x$, $SC = x + \dfrac{3\sqrt{5} - 1}{4} r$ por teorema de las transversales se tiene

$\dfrac{x}{x + \dfrac{3\sqrt{5} - 1}{4} r} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{15}}{8}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ y resolviendo quedaría que: $x = \dfrac{5 + \sqrt{5}}{4} r$ entonces:

sustituyendo y calculando en: $SC = x + \dfrac{3\sqrt{5} - 1}{4} r$, se tiene que: $\overline{SC} = \left(\sqrt{5} + 1\right) r.$

424. *Primera solución* (analítica):

Sean α y β las raíces. Los tres puntos que definen la circunferencia son $A(\alpha, 0)$; $B(\beta, 0)$; $C(0, q)$. Verificando $\alpha + \beta = -p$ y $\alpha \cdot \beta = q$ (1). La mediatriz de AB es la recta paralela al eje OY de ecuación $x = -\dfrac{p}{2}$. Hallando la mediatriz de AC, cortando con la anterior y teniendo en cuenta (1), se obtiene para el centro las coordenadas $\left(-\dfrac{p}{2}, \dfrac{q+1}{2}\right)$ y para el radio $r = \sqrt{\dfrac{p^2 + (1-q)^2}{4}}$. La ecuación de la circunferencia es

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{q+1}{2}\right)^2 = \frac{p^2 + (1-q)^2}{4},$$ que una vez operada queda

$x^2 + y^2 + px - (1 + q)y + q = 0$ que se verifica para el punto $(0, 1)$ con independencia de p y q como se comprueba por simple sustitución. Claramente el punto fijo se puede obtener a partir de tres circunferencias concretas.

Segunda solución (geométrica):

Puesto que la parábola corta al eje de las abscisas en dos puntos, se podrá escribir en la forma: $y = (x - a)(x - b)$ y los puntos de intersección son $A(a,0)$; $B(b,0)$; $C(0,ab)$.

La inversión de polo el origen que transforma A en B, transforma C en $U(0,1)$, así que los cuatro puntos A, B, C, U son concíclicos y todas las circunferencias pasan por el punto fijo U.

425. Uno de los vértices (fig. 47) debe ser el pie de la perpendicular desde el punto $(25;0)$ y debe estar en la recta $3x - 4y = 0$.
La ecuación de la perpendicular es $4x + 3y = 100$, y corta a la recta dada en el punto $(16;12)$ que es el pie de la perpendicular y uno de los vértices de los cuadrados buscados.
La longitud de cada uno de los lados del cuadrado es

$\sqrt{(25-16)^2 + (0-12)^2} = 15.$

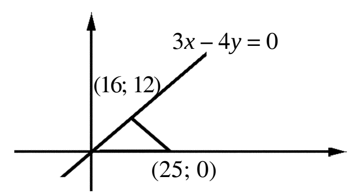

Fig. 47

Entonces hay dos soluciones teniendo en cuenta la reflexión respecto a la recta de ecuación $4x + 3y = 100$ y las coordenadas de los vértices de los cuadrados buscados son: $(25;0)$, $(16;12)$, $(4;3)$, $(13;-9)$ y $(25;0)$, $(16;12)$, $(28;21)$, $(27;9)$.

426. Sea el cuadrilátero de lados a, b, c, d y diagonales p y q (fig. 48). Trazando las paralelas por cada vértice a la diagonal que no pasa por él se forma un paralelogramo de área 2 y lados p y q.
Por el teorema isoperimétrico, de todos los paralelogramos de área 2, el cuadrado tiene perímetro mínimo $4\sqrt{2}$,
luego $2(p+q) \geq 4\sqrt{2} \Leftrightarrow p+q \geq 2\sqrt{2}$ (1). En cuanto a los lados por el mismo teorema para un cuadrado de área 1 el perímetro es 4 luego: $a + b + c + d \geq 4$ (2). Sumando (1) y (2), se obtiene el resultado.
Segunda solución (sin usar la propiedad isoperimétrica):
Consiste en establecer directamente las desigualdades (1) y (2). Si α es el ángulo que forman las diagonales, tenemos: $1 = \dfrac{pq}{2}\operatorname{sen}\alpha \leq \dfrac{pq}{2} \Leftrightarrow pq \geq 2$

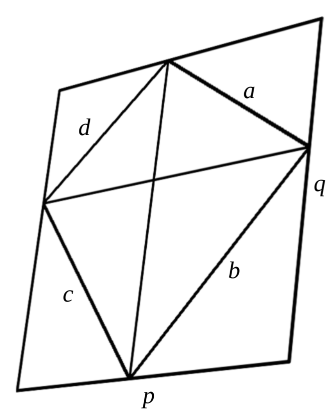

Fig. 48

pero $(p + q)^2 = (p - q)^2 + 4pq \geq 4pq \geq 8$, de donde $p+q \geq \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ (1). Para los lados, si descomponemos el cuadrilátero en dos triángulos mediante la diagonal q, tenemos $1 \leq \frac{ab}{2} + \frac{cd}{2}$. Descomponiendo ahora en dos triángulos mediante la diagonal p resulta: $1 \leq \frac{bc}{2} + \frac{da}{2}$ y de ambas desigualdades se obtiene: $ab + bc + cd + da \geq 4$.
Pero: $(a + b + c + d)^2 = ((a + c) - (b + d))^2 + 4\,(a + c)(b + d) \geq 4(a + c)(b + d) \geq 16$, de donde $a + b + c + d \geq 4$ (2). Basta sumar (1) y (2) para obtener lo pedido.

427. La figura formada por el agua es un tronco de pirámide pentagonal cuya base menor es el pentágono dado y cuya base mayor es otro pentágono regular que tiene por lado la diagonal del anterior paralela a la arista de la base como se muestra en la figura 49a.
En la figura 49b, se ha dibujado en forma invertida para una mejor comprensión del dibujo.
Establezcamos primero algunas relaciones conocidas para un pentágono regular de lado 1 (fig. 49c). Llamemos d a la diagonal. Por semejanza de los triángulos ABE y PCD tenemos:

$$\frac{1}{d-1} = \frac{d}{1} \Leftrightarrow d^2 - d - 1 = 0 \Rightarrow d = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \qquad (1)$$

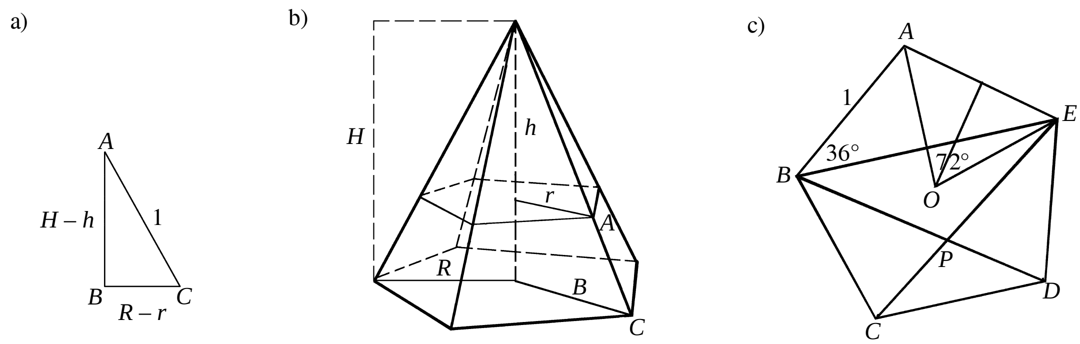

Fig. 49

φ es el llamado número áureo y representa la relación entre la diagonal y el lado de un pentágono regular. En nuestro caso es la relación de semejanza entre las bases del tronco de pirámide.

$$\cos 36° = \frac{d}{2} = \frac{\varphi}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \text{ y para el radio } r\text{: } \operatorname{sen} 36° = \frac{1}{2r} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2\operatorname{sen} 36°} = \frac{1}{\sqrt{4-\varphi^2}} \qquad (2).$$

Llamando V al volumen de la pirámide grande, v al de la pequeña, sabemos que $V = \varphi^3 v$; y para el volumen del tronco de cono V_t queda:

$V_t = V - v = \varphi^3 v - v = v(\varphi^3 - 1) = \frac{1}{3} ah(\varphi^3 - 1)$; siendo a el área del pentágono de lado 1. Solo nos queda calcular a, h, sustituir y operar:

El área a la calculamos sumando 5 triángulos isósceles de lados iguales r, r formando 72°;

$a = \frac{5}{2} r^2 \operatorname{sen} 72° = \frac{5}{2} r^2 2 \operatorname{sen} 36° \cos 36° = \frac{5}{2} r \cos 36° = \frac{5}{4} r\varphi$ (hemos usado $2r\operatorname{sen}36° = 1$ de (2)). Para calcular h, por la semejanza de los triángulos de la figura central, tenemos:

$$\frac{H}{R}=\frac{h}{r}=\frac{H-h}{R-r}\Rightarrow h=\frac{r(H-h)}{R-r}=\frac{r\sqrt{1-(R-r)^2}}{r(\varphi-1)}=\frac{\sqrt{1-r^2(\varphi-1)^2}}{\varphi-1}=\frac{\sqrt{1-\frac{(\varphi-1)^2}{4-\varphi^2}}}{\varphi-1}.$$

Como φ verifica la ecuación (1): $\varphi^2 = \varphi + 1$; tenemos para la expresión de h:

$$h=\frac{\sqrt{1-\frac{(\varphi-1)^2}{4-\varphi^2}}}{\varphi-1}=\frac{\sqrt{4-\varphi^2-\varphi^2+2\varphi-1}}{(\varphi-1)\sqrt{4-\varphi^2}}=\frac{\sqrt{3-2\varphi-2+2\varphi}}{(\varphi-1)\sqrt{4-\varphi^2}}=\frac{1}{(\varphi-1)\sqrt{4-\varphi^2}}.$$

Sustituyendo las expresiones de a y h y poniendo $\varphi^3 - 1= (\varphi - 1)(\varphi^2 + \varphi + 1)$; queda:

$$V_t=\frac{1}{3}\frac{5}{4}\frac{\varphi}{\sqrt{4-\varphi^2}}\frac{(\varphi^3-1)}{(\varphi-1)\sqrt{4-\varphi^2}}=\frac{5}{12}\frac{\varphi(\varphi^2+\varphi+1)}{4-\varphi^2}=\frac{5}{6}\frac{\varphi(\varphi+1)}{3-\varphi}=\frac{5}{6}\frac{2\varphi+1}{3-\varphi}$$

y sustituyendo el valor de φ de (1), queda finalmente: $V_t=\frac{5}{3}\frac{2+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}=\frac{15+7\sqrt{5}}{12}\cong 2{,}554\text{ m}^3$.

428. Si n es el menor de los elementos de A y m el mayor, al tener A cien elementos distintos, será $m \geq n + 99$. Para que el triángulo isósceles de lados n, n, m sea no obtusángulo debe ocurrir que $m^2 \leq 2n^2$; si m es el menor posible, $m = n + 99$ deberá ser $(n + 99)^2 \leq 2n^2$, o sea, $n^2 - 198n - 99^2 \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 99 + \sqrt{99^2+99} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow n \geq 99\left(1+\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow n \geq 240$.

Si $n < 240$, es seguro que el conjunto no cumple la condición del enunciado pues:

$m^2 \geq (n + 99)^2 \geq 2n^2$ y el triángulo de lados n, n, m no puede ser no obtusángulo. En particular la condición se cumple para el conjunto $A = \{240, 241, 242, ..., 339\}$. Cualquier otro conjunto que cumpla la condición, tendrá sus elementos respectivamente iguales o mayores que los de este. Este es, por tanto, el que da lugar al mínimo $S(A)$. El número de triángulos que debe considerarse es el de variaciones ternarias con repetición de los elementos de A, que es 100^3 = 1 000 000, con lo que el número de lados en total será de 3 000 000; de ellos habrá 30 000 de longitud 240, otros tantos de longitud 241, etc. Luego $S(A)$ = 30 000(240 + 241 + ... + 339) = 868 500 000 unidades. Este es el valor mínimo buscado.

429. Numeremos los puntos como se indica.

13	14	15	16
9	10	11	12
5	6	7	8
1	2	3	4

Por simple tanteo se obtiene un conjunto de seis puntos verificando la condición del enunciado, por ejemplo, {1, 2, 3, 8, 12, 16}. Supongamos que hubiera un conjunto M de 7 puntos verificando la condición del enunciado. Notemos que si cuatro puntos forman un cuadrado, a lo sumo figurarán dos de ellos en M. Los puntos de los conjuntos {1, 4, 16, 13}, {2, 8, 15, 9}, {3, 12, 14, 5} forman cuadrados y su unión forma el "contorno exterior" de A, luego a lo sumo 6 de los puntos elegidos deben estar en M y, por tanto, al menos un punto de M debe ser del conjunto "interior" de A: {6, 7, 10, 11}. Por la simetría de la figura supongamos que es el 7.

Como {7, 16, 9} y {1, 7, 14} forman triángulos rectángulo isósceles, a lo sumo 2 de los puntos del conjunto {1, 9, 14, 16} deberán figurar en M. Además, 5, 7, 13, 15} forman un cuadrado, por tanto, a lo sumo podremos elegir dos números entre {5, 13, 15}, de esto se deduce en M deben figurar al menos tres puntos de {2, 3, 4, 6, 8, 10, 11, 12}. Si descomponemos este conjunto en dos subconjuntos "cuadrados" y disjuntos {3, 6, 11, 8} y {2, 4, 10, 12} forzosamente de uno de ellos habremos de tomar dos puntos y uno de otro.

Si tomamos dos puntos del primero las únicas posibilidades son {3, 11} y {6, 8} ambas incompatibles con cualquier elección del punto restante en el segundo conjunto.

Si los dos puntos se eligen del segundo las únicas maneras son {2, 12} y {4, 10}, de nuevo incompatibles con cualquier elección del punto que falta en el primer conjunto.

En resumen el número máximo de elementos es 6.

430. Como con 9 personas se puede formar $9 \cdot 8 : 2 = 36$ parejas distintas, deberá tenerse $3n = 36$ (pues en cada grupo de a 3, se incluyen 3 parejas), y luego $n = 12$. Una de las posibles conformaciones de los 12 grupos correspondientes es:

{1, 2, 3}, {1, 4, 5}, {1, 6, 7}, {1, 8, 9}, {2, 4, 7}, {2, 5, 8},
{2, 6, 9}, {3, 4, 9}, {3, 5, 6}, {3, 7, 8}, {4, 6, 8}, {5, 7, 9}.

Si ahora los 12 grupos se forman con 6 personas, en cada uno de ellos se incluye 15 de las 36 parejas distintas. Por lo tanto, deberá tenerse: $15 \cdot 12 = 36 \cdot k$, de donde $k = 5$ es el único valor que hace posible que el problema tenga solución. Para exhibir una posible conformación correspondiente, basta tomar los respectivos complementos de los grupos anteriores:

{4, 5, 6, 7, 8, 9}, {2, 3, 6, 7, 8, 9}, {2, 3, 4, 5, 8, 9}, {2, 3, 4, 5, 6, 7},
{1, 3, 5, 6, 8, 9}, {1, 3, 4, 6, 7, 9}, {1, 3, 4, 5, 7, 8}, {1, 2, 5, 6, 7, 8},
{1, 2, 4, 7, 8, 9}, {1, 2, 4, 5, 6, 9}, {1, 2, 3, 5, 7, 9}, {1, 2, 3, 4, 6, 8},

teniendo 12 grupos de a 6, donde $k = 5$.

431. Calculemos en primer lugar las ternas posibles que podríamos haber elegido:

$\binom{120}{3} = 120 \cdot 119 \cdot 118 = 280\ 840$. Veámoslo por contradicción: Si no hubiera ninguna terna de suma de edades mayor o igual a 51 años, es que cada una sumaba un número de años menor o igual a 50. Así pues, la suma de todas las ternas sería menor o igual a $50 \cdot 280\ 840 = 14\ 042\ 000$. Pero calculemos la suma de todas las ternas: Cada alumno aparecerá en $\binom{119}{2}$ ternas, o sea, en $119 \cdot 59 = 7\ 021$ ternas, luego la suma de las edades de todas las ternas sería $7\ 021 \cdot 2\ 002 = 14\ 056\ 042$, lo que contradice que la tal suma era menor o igual a 14 042 000.

432. a) Empezamos cubriendo el cuadrado sin solapar triángulos cuyos vértices se encuentran entre los once puntos. Empieza dibujando una de las diagonales del cuadrado. Seleccionamos entonces los otros siete puntos a la vez. Suponga, como una hipótesis de inducción, que hemos seleccionado k. 0 apuntamos y cubrimos el cuadrado con $2(k + 1)$ triángulos cuyos vértices ya están entre los cuatro vértices del cuadrado y los puntos de k seleccionados. Considere el próximo punto. Si está en el interior de un triángulo existente, únalo a cada uno de los tres vértices del triángulo. Si está en el interior de un borde común a dos triángulos, únalo al vértice restante de cada uno de los triángulos. En cada caso, tenemos dos triángulos más que antes, para un total de $2(k + 3)$ triángulos. Cuando los siete puntos interiores se han seleccionado, tenemos un total de $2 \cdot 8 = 16$ triángulos. El área total de estos dieciséis triángulos no solapados es 1, tan por lo menos uno de ellos debe tener área que no excede $\frac{1}{16}$.

b) Permita el cuadrado tener los vértices en (0,0), (1,0), (0,1), (1,1) y sean los puntos interiores (18,58), (28,28), (38,78), (48,48), (58,18), (68,68) y (78,38). Hay una triangulación para que cada uno de los triángulos tenga el área precisamente igual a $\frac{1}{16}$. Cualquier otro triángulo determinado por tres de los puntos tendrá el área por lo menos tan grande como algún triángulo de la triangulación.

433. Cada número ascendente está determinado por el conjunto de sus cifras, entonces de tres cifras y que comiencen por lo menos en 4 hay $\binom{6}{3}=20$ números ascendentes. De 4 cifras hay $\binom{9}{4}=126$ números ascendentes, pero hay que quitar los $\binom{5}{4}=5$ que comienzan por lo menos por 5. Por lo que hay 20 + 126 – 5 = 141 números ascendentes entre 400 y 5 000.

434. Veamos que, a partir del séptimo dígito de la lista, entre seis dígitos consecutivos hay por lo menos tres iguales a 1. Consideramos siete dígitos consecutivos. Los cinco primeros no pueden ser todos 0, pues en tal caso toda la lista sería 0 (retrocediendo).

Si entre los cinco primeros hay exactamente un 1, el sexto es 1 (pues los seis anteriores suman 1 o 2). De este modo, entre los seis primeros hay exactamente dos 1, y el séptimo debe ser 1. En total tres 1.

Si entre los cinco primeros hay exactamente dos 1, si el sexto es 1, ya tenemos tres dígitos 1, y si el sexto es 0, el séptimo debe ser 1 (pues los seis anteriores suman 2). En total tres 1.

Finalmente, está claro que si entre los cinco primeros hay tres o más dígitos 1 ya tenemos al menos tres dígitos 1.

Dividimos la lista de Iván en un bloque inicial de 10 dígitos seguido de 13 bloques de 7 dígitos $(10 + 13 \cdot 7 = 101)$.

Ya hemos visto que en cada bloque de 7 dígitos consecutivos que comienza más allá del sexto dígito de la lista hay al menos tres 1.

Luego, en los 13 bloques hay por lo menos $3 \cdot 13 = 39$ dígitos 1.

Veamos que el bloque inicial de 10 dígitos contiene por lo menos tres 1. Entre los primeros seis dígitos hay al menos un 1, pues así lo requiere el enunciado. Si hay exactamente un 1, entonces el séptimo y el octavo dígitos deben ser 1, y ya tenemos tres 1. Si entre los seis primeros dígitos hay exactamente dos 1, el séptimo es 1, y nuevamente tenemos tres o más 1. La situación es inmediata si entre los primeros seis dígitos hay tres o más que son 1.

Todo lo anterior demuestra que la lista de Iván tiene por lo menos 39 + 3 = 42 dígitos 1. Hay varias maneras de lograr una lista con exactamente 42 dígitos 1, por ejemplo, si los primeros seis dígitos son 000100 entonces la lista es 0001001 | 1001100 | 1001100 | ... | 1001100 |. En total 13 bloques del tipo 1001100.

El menor valor posible de la suma de los 101 dígitos es 42.

435. Para cada plano equidistante *P*, los cinco puntos *A*, *B*, *C*, *D*, *E* están en dos planos paralelos a *P*, dos en uno y tres en el otro. Recuerda que no hay cuatro puntos en un mismo plano.

Tomemos cuatro de los puntos, digamos *A*, *B*, *C* y *D*, y veamos donde puede colocarse el quinto punto *E* para obtener la mayor cantidad de planos equidistantes. Si los cinco puntos se deben dividir

en dos conjuntos, uno de dos elementos y otro de tres, tenemos que hay dos posibilidades: (1) que E esté en un conjunto de tres elementos, y (2) que E esté en un conjunto de dos elementos.
En el caso (1) formemos primero un paralelepípedo de caras paralelas al plano que determinan aristas opuestas del tetraedro $ABDCE$ deberá unirse a un par de puntos del conjunto $\{A, B, C, D\}$ y entonces determinará un plano que será paralelo tanto al otro plano que pasa por los otros dos puntos como al plano equidistante correspondiente, esto se puede hacer de $\binom{4}{2}=6$ maneras y los planos que se determinan así son los planos que contienen a las caras del paralelepípedo, siendo la cara paralela la otra donde se encuentran los otros dos puntos y determinando como plano equidistante el plano paralelo a los anteriores que pasa por los puntos medios de las cuatro aristas que no están sobre los dos primeros planos, así en este caso solamente hay tres posibles planos equidistantes y estos se logran cuando el punto E es cualquier vértice del paralelepípedo diferente de A, B, C, D.
En el caso (2) E deberá unirse a uno de los puntos A, B, C, D y los restantes 3 estarán en un plano paralelo al equidistante, esto se puede hacer de cuatro maneras y los planos donde E puede estar son los planos paralelos a las caras del tetraedro $ABCD$ que pasan por el vértice que no está en la cara que se está considerando; estos planos forman otro tetraedro semejante al $ABCD$. Claramente E no puede estar en los cuatro planos, pero si en tres, cuando E es uno de los vértices de este nuevo tetraedro, en cuyo caso se obtienen también tres planos equidistantes.

436. Supongamos que tenemos 6 puntos no coplanares en el espacio de manera que no hay tres alineados. Tenemos varios casos:

(I) Si 5 de ellos son coplanares. Entonces estos determinan un plano y el otro punto, determina un plano más con cada pareja de los coplanares; como son $\binom{5}{2}=10$ parejas, en total se determinan 11 planos.

(II) Si no hay 5 coplanares pero sí 4. Sean A, B, C y D los cuatro puntos coplanares, sea ρ el plano que determinan y sean X y Y los otros puntos. Tenemos tres subcasos:

(IIa) Si X y Y no son coplanares con ninguna pareja de A, B, C y D. Entonces cada pareja de A, B, C y D determina un plano con cada uno de X y Y y, además, tenemos ρ, así que en este caso se determinan por lo menos $1+2\binom{4}{2}=13$ planos.

(IIb) Si X y Y son coplanares con exactamente una de las parejas de A, B, C y D, digamos con (A,B). Entonces tenemos $2+2\left[\binom{4}{2}-1\right]=12$ planos, pues cada uno de X y Y determina un plano con cada una de las parejas de A, B, C y D distintas de (A,B) (esto es, tenemos los planos: (A,B,C,D), (X,Y,A,B), (X,A,C), (X,A,D), (X,B,C), (X,B,D), (X,C,D), (Y,A,C), (Y,A,D), (Y,B,C), (Y,B,D) y (Y,C,D)).
(IIc) Si X y Y son coplanares con dos de las parejas de A, B, C y D. Observemos que las parejas deben ser ajenas, pues X y Y no pertenecen a ρ. Sin pérdida de generalidad, las parejas son (A,B) y (C,D). Este caso es como el anterior solo que aquí hay un plano repetido que es el (X,C,D) que coincide con el plano (Y,C,D), así que en este caso son 11 planos.

(III) Si no hay 4 coplanares. En este caso, cada terna determina un plano, así que son $\binom{6}{3}=20$.

Hemos analizado todos los casos y con ello probado que el menor número de planos posibles es 11.

437. Se numeran los depósitos de 1 a n comenzando por uno cualquiera en sentido antihorario. Llamamos:

$a_1, a_2, ..., a_n$ a la cantidad de gasolina de cada depósito.
$b_1, b_2, ..., b_n$ a la cantidad de gasolina necesaria para ir del depósito a_i al siguiente.
$d_1 = a_1 - b_1, d_2 = a_2 - b_2, ..., d_n = a_n - b_n$

Diremos que un depósito es positivo o negativo según lo sea d_i.
Si $d_i = 0$, la ubicación del depósito i no influye en la ordenación del recorrido. Por eso podemos suponer sin pérdida de generalidad que $d_i \neq 0$ para todo i.
Por otra parte, si hay varios depósitos consecutivos positivos o negativos, el tramo limitado por estos se puede considerar como un único tramo positivo o negativo. Así, el problema se reduce a tener un número par de depósitos alternativamente positivos o negativos. Agrupando los tramos por parejas, estas resultarán positivas o negativas y volvemos a repetir el proceso.

Así, reducimos el caso a un número de depósitos $n_1 < \frac{n}{2}$.

Como $n < 2^k$, a lo sumo en $k - 1$ etapas llegaremos a tener 2 depósitos, uno con más gasolina que otro, en cuyo caso empezando por el que tenga más combustible se puede completar el circuito.
El caso de un solo depósito es trivial. Se empieza y termina en ese único depósito.

438. La superficie de cada una de las caras del ortoedro es:

$C_1 = 2^{2\,003} \cdot 3^{2\,003} = 6^{2\,003}$, $C_2 = 2^{2\,003} \cdot 5^{2\,003} = 10^{2\,003}$ y $C_3 = 3^{2\,003} \cdot 5^{2\,003} = 15^{2\,003}$

Y, de ser posible el apilamiento, debería ser combinación lineal (con coeficientes naturales) de superficies de las caras de las piezas de madera de

$4 \cdot 5 = 20$, de $4 \cdot 10 = 40$ y de $5 \cdot 10 = 50$; esto es, múltiplo de 10. Pero como $6^{2\,003}$ no lo es, el apilamiento ortoédrico es imposible.

439. Supongamos que es posible. Consideremos todos los segmentos de un color particular, digamos rojo. El número total de triángulos con un lado rojo es igual al número de triángulos con dos lados pintados con los otros 11 colores, es decir

$\binom{11}{2} = 55$. Pero como cada segmento rojo es un lado de 10 triángulos, el número de segmentos rojos es al menos 6. Lo mismo pasa, con los otros 11 colores. Luego, el número total de segmentos es al menos $12 \cdot 6 = 72$. Pero el número total de lados y diagonales en un dodecágono es $\frac{1}{2} 12 \cdot 11 = 66 \neq 72$. Esta contradicción muestra que no existe tal coloración.

440. La elección de las 2 niñas se puede hacer de $\binom{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{2!} = 105$ formas. Como debe ser 5 en total y debe haber 2 niñas exactamente, entonces los niños serán 3; estos se pueden escoger de $\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 120$ formas. Por tanto, el resultado es $105 \cdot 120 = 12\,600$.

441. Si en cada grupo de 6 personas, 2 son de la misma edad, solo puede haber 5 edades diferentes, ya que, si hubiese 6 edades diferentes, eligiendo una persona de cada edad tendríamos 6 personas de edades distintas contra la hipótesis.
Como $200 = 2 \cdot 100 + 1 \Rightarrow$ al menos hay 101 personas del mismo sexo.

$101 = 5 \cdot 20 + 1 \Rightarrow$ al menos hay 21 personas de la misma edad y sexo.
$21 = 4 \cdot 5 + 1 \Rightarrow$ al menos hay 5 personas de la misma nacionalidad, edad y sexo.

442. Observemos primero que $128 = 2^7$ y como $P_1P_2\ P_3P_4 = 128$, tenemos que 2^{25} es la máxima potencia de 2 que divide a 28! (ya que hay 14 pares que contribuyen con un 2, hay 7 múltiplos de 4, que aportan cada uno otro 2, hay 3 múltiplos de 8 y está el 16, luego hay $14 + 7 + 3 + 1 = 25$, factores de 2. Cuando estas 25 potencias de 2 se distribuyen en los 4 factores $P_1P_2\ P_3P_4$ se debe tener por el principio de las casillas que en alguno deberán quedar 7, digamos en el P_j. Por lo tanto, P_j es múltiplo de 2^7.

443. La respuesta es sí, pueden celebrar las cuatro reuniones de modo que al final cada persona haya estado sentada junto a otras dos diferentes cada vez. Para demostrarlo, consideramos las siguientes cuatro formas de ordenar los números del 1 al 9, que representan cuatro maneras de sentarse alrededor de la mesa comenzando en un lugar y siguiendo el giro de las manecillas del reloj.

Primera reunión: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Segunda reunión: 1, 3, 5, 7, 9, 4, 6, 2, 8.
Tercera reunión: 1, 4, 7, 3, 8, 5, 2, 9, 6.
Cuarta reunión: 1, 5, 9, 3, 6, 8, 4, 2, 7.

444. Hay 27 posibles resultados para la suma de dígitos (de 1 a 27). Las sumas 1 y 27 solo se pueden obtener de un modo (100 y 999). En el caso más desfavorable al sacar 52 (27 + 25) tarjetas todas repetirán suma dos veces y en la siguiente (extracción 53) una de estas aparecerá por tercera vez. Por tanto, el número pedido es $27 + 25 + 1 = 53$.

445. Supongamos que hay x rectas en la primera familia, y en la segunda, z en la tercera. Las x rectas de la primera familia determinan $x + 1$ regiones. La primera recta de la segunda familia determina en el plano $2(x + 1)$ regiones, la segunda $3(x + 1)$, ... hasta llegar a la y-ésima que determina $(y + 1)(x + 1)$ regiones. La primera recta de la tercera familia es cortada por las $x + y$ rectas existentes en $x + y + 1$ partes y cada una de estas partes divide en dos a cada región existente de modo que el número de regiones se incrementa en $x + y + 1$ regiones. Cada recta de la tercera familia aumenta las regiones existentes en la misma cantidad; luego el número total de regiones N es $N = (x + 1)(y + 1) + z(x + y + 1) =$ $= x + y + z + xy + xz + yz + 1 = n + m + 1$ siendo $n = x + y + z$, $m = xy + xz + yz$.

Tenemos $m = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{2}((y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2) \le x^2 + y^2 + z^2$, entonces

$n^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2m \ge 3m \Leftrightarrow m \le \frac{n^2}{3}$ y $N = n + m + 1 \le n + \frac{n^2}{3} + 1$.

Para $n = 76$, $n^2 + \frac{n^2}{3} + 1 > 2\,002$. Así si $n = 76 = x + y + z$ con $x = 26$, $y = 25$, $z = 25$, resulta $m = 1\,925$ y $N = 2\,002$.

446. Diremos que los agentes A y B son neutrales si A no vigila a B y B no vigila a A.

Sean $A_1, A_2, ..., A_n$ los agentes. Sean a_i el número de agentes que vigilan a A_i; b_i el número de agentes que son vigilados por A_i, c_i el número de agentes que son neutrales con A_i. Está claro que $a_i + b_i + c_i = 15$, $a_i + c_i \le 8$, $b_i + c_i \le 8$ para todo $i = 1, 2, ..., 16$.

Notemos que si una cualquiera de las dos últimas desigualdades no se verifican, entonces no se podrían numerar 10 espías en la forma indicada. Combinando las relaciones anteriores obtenemos $c_i \le 1$. Por tanto, para cualquier espía el número de sus colegas neutrales es 0 o 1.

Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que hubiera un grupo de 11 espías que **no** se pudiera numerar en la forma descrita. Sea B uno cualquiera de los espías de este grupo.
Numeramos los otros 10 espías como C_1, C_2, ..., C_{10} de modo que C_1 vigila a C_2, ..., C_{10} vigila a C_1. Supongamos que ninguno de los C_i sea neutral respecto de B. Entonces si C_1 vigila a B, B no puede vigilar a C_2, pues en tal caso C_1, B, C_2, ..., C_{10} formarían un grupo en las condiciones del problema, luego C_2 vigila a B, etc. De este modo llegamos a la contradicción de que todos los espías del grupo vigilan a B. Por tanto, cada uno de los 11 espías debe tener uno y solo uno del grupo neutral con él, lo cual es imposible.

447. Al suprimir una región, la suma de días soleados o lluviosos de las restantes ha de ser múltiplo de 4; esta suma vale para las seis regiones 1 994 que dividido entre 4 da resto 2. El único dato de esta columna que deja resto 2 al dividirlo entre 4 es 330 correspondiente a la región F. Suprimiendo esta región quedan entre las cinco restantes 416 días lluviosos y $3 \cdot 416 = 1\ 248$ días soleados.

448. Con el fin de entender bien las reglas del problema y tratar de ir encontrando algún patrón de comportamiento que nos ayude a hallar la solución es recomendable comenzar *a tocar focos* y ver que ocurre. Para eso es conveniente idear una forma eficiente de representar la hilera de los 10 focos en cada momento. En este caso nos será útil elaborar una tabla: usaremos X para focos prendidos y O para focos apagados. Empezamos con los 10 focos prendidos (tabla 9).

Tabla 9

Paso no.	$F1$	$F2$	$F3$	$F4$	$F5$	$F6$	$F7$	$F8$	$F9$	$F10$
0	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Tocamos un foco, el primero, por ejemplo, y obtenemos la tabla 10.

Tabla 10

Paso no.	$F1$	$F2$	$F3$	$F4$	$F5$	$F6$	$F7$	$F8$	$F9$	$F10$
0	$\boxed{\boldsymbol{X}}$	X	X	X	X	X	X	X	X	X
1	X	O	O	O	O	O	O	O	O	O

Toquemos otro foco, diferente del primero, porque si no regresaríamos a la configuración inicial; toquemos el segundo foco (tabla 11).

Tabla 11

Paso no.	$F1$	$F2$	$F3$	$F4$	$F5$	$F6$	$F7$	$F8$	$F9$	$F10$
0	$\boxed{\boldsymbol{X}}$	X	X	X	X	X	X	X	X	X
1	X	$\boxed{\boldsymbol{O}}$	O	O	O	O	O	O	O	O
2	O	O	X	X	X	X	X	X	X	X

Al comparar el estado de focos con la situación original vemos que después de tocar dos focos, aquellos que no fueron tocados quedan como estaban originalmente. Toquemos sucesivamente los focos 3 y 4 para obtener la tabla 12.

Tabla 12

Paso no.	$F1$	$F2$	$F3$	$F4$	$F5$	$F6$	$F7$	$F8$	$F9$	$F10$
0	**X**	X	X	X	X	X	X	X	X	X
1	X	**O**	O	O	O	O	O	O	O	O
2	O	O	**X**	X	X	X	X	X	X	X
3	O	O	X	**O**	O	O	O	O	O	O
4	O	O	O	O	X	X	X	X	X	X

Continuamos tocando los focos sucesivamente y obtenemos la tabla 13.

Tabla 13

Paso no.	$F1$	$F2$	$F3$	$F4$	$F5$	$F6$	$F7$	$F8$	$F9$	$F10$
0	**X**	X	X	X	X	X	X	X	X	X
1	X	**O**	O	O	O	O	O	O	O	O
2	O	O	**X**	X	X	X	X	X	X	X
3	X	X	X	**O**	O	O	O	O	O	O
4	O	O	O	O	**X**	X	X	X	X	X
5	X	X	X	X	X	**O**	O	O	O	O
6	O	O	O	O	O	O	**X**	X	X	X
7	X	X	X	X	X	X	X	**O**	O	O
8	O	O	O	O	O	O	O	O	**X**	X
9	X	X	X	X	X	X	X	X	X	**O**
10	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O

La solución consiste en tocar los focos de manera sucesiva y al final todos estarán apagados.
En este problema la solución fue surgiendo prácticamente sola. Lo importante fue tener una forma eficiente de representar los focos y sus cambios. ¿Qué ocurre si modificamos ligeramente las condiciones del problema? Por ejemplo, si en lugar de tener 10 focos tuviéramos 4, 8 o 2 000, ¿el método para apagarlos todos seguiría funcionando? ¿Y si fueran 3 o 1 999 también funcionaría? Dejaremos que el lector responda la primera pregunta y nosotros analizaremos la segunda.

Veamos primero que ocurre con 3 focos. Toquémoslos de manera sucesiva como cuando teníamos 10 (tabla 14). Nuestro método no sirve: nos regresa al estado original. ¿Podemos encontrar otro método para apagar los focos? Veamos: si empezamos con $F1$ (o cualquiera de los otros dos focos) en el segundo paso debemos cambiar de foco, digamos tocar $F2$. Ya vimos que tocar $F3$ no conduce a nada. Probemos tocar nuevamente $F1$ (tabla 15).

Tabla 14

Paso no.	$F1$	$F2$	$F3$
0	**X**	X	X
1	X	**O**	O
2	O	O	**X**
3	X	X	X

Tabla 15

Paso no.	$F1$	$F2$	$F3$
0	**X**	X	X
1	X	**O**	O
2	**O**	O	**X**
3	X	X	X

No avanzamos: seguimos teniendo un foco prendido y dos focos apagados. Si elegimos uno de los focos apagados tendremos en el siguiente renglón nuevamente uno prendido y dos apagados pero si elegimos el foco prendido, entonces acabamos con los tres focos prendidos, como al principio. Hemos examinado todas las posibilidades por lo que podemos estar seguros de que iniciando con tres focos prendidos nunca podremos llegar a tenerlos todos apagados.
Pero, ¿qué ocurre si tenemos 1 999 focos? Evidentemente no podemos examinar *todas* las posibilidades; tendremos que buscar otro tipo de argumento.
Por lo que hemos visto hasta ahora todo apunta a que cuando el número de focos es par se puede apagarlos simplemente eligiéndolos uno a la vez hasta terminar y pareciera que cuando el número de focos es impar resulta imposible apagarlos todos. ¿Podemos encontrar una razón para que esto sea así? En el caso de tres focos, notemos que el número de focos prendidos siempre es 1 o 3, es decir, un número impar.
Supongamos que tenemos un número impar de focos, de los cuales un número par de ellos está apagado y el resto (un número impar) está prendido:
Tenemos dos posibilidades, elegir un foco prendido o uno apagado:
1) Elegimos un foco prendido, digamos el último de ellos (en realidad da igual cual de los prendidos elijamos). Tendremos que todos los prendidos menos uno se apagan y como era impar el número de prendidos, y apagamos todos menos uno, tendremos que el número de focos apagados es par. Todos los apagados se prenden, era un número par de apagados, más el foco elegido que permanece prendido, resulta que tenemos nuevamente un número impar de focos prendidos.

$\underbrace{X\,X\,X\ldots\boxed{X}}_{\text{impar}}\;\underbrace{O\,O\,O\ldots O}_{\text{par}}$

$\underbrace{O\,O\ldots O}_{\text{par}}\;\underbrace{X\,X\,X\ldots X}_{\text{impar}}$

449. Comencemos por hacer un esquema. El problema consiste en diseñar una forma sistemática de ir contando los polígonos. Lo haremos según su número de lados, que pueden ser 6, 5, 4 o 3.
6 lados. Solo hay uno, el hexágono regular usando los 6 vértices.
5 lados. Usamos cinco vértices, por lo que quitamos un vértice cada vez, es decir, que serán 6. Todos son irregulares.
4 lados. Usamos cuatro vértices, es decir, que quitamos dos vértices cada vez. Fijémonos en los vértices que quitamos:

AB, *AC*, *AD*, *AE*, *AF*
BC, *BD*, *BE*, *BF*
CD, *CE*, *CF*
DE, *DF*
EF

Son en total 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15, todos irregulares.
3 lados. Usamos tres vértices. Es equivalente contar los vértices que usamos o los que quitamos y como son tres y tres da igual contar unos u otros.

Con *A*

ABC, *ABD*, *ABE*, *ABF*
ACD, *ACE*, *ACF*
ADE, *ADF*
AEF

Son en total 1 + 2 + 3 + 4 = 10 y solo 1 regular (*ACE*).

Sin A
Con B

BCD, BCE, BCF
BDE, BDF
BEF

Son en total $1 + 2 + 3 = 6$ y solo 1 regular (BDF).

Sin B

CDE, CDF
CEF
DEF

Son en total 4 todos irregulares.

Tenemos en total $15 + 10 + 6 + 4 = 35$ polígonos, de los cuales solo 3 son regulares.

450. Como hay m triángulos, hay $3m$ lados; de ellos $3m - n$ son interiores, y como lado interior pertenece a dos triángulos, hay $\frac{3m-n}{2}$ lados interiores distintos. En particular $3m - n$ es par, luego m y n tienen la misma paridad y $m + n$ es par.

Supongamos que el número de vértices v solo depende de m y n. Razonemos por inducción sobre v.

Si no hay ningún vértice interior ($v = 0$), uniendo un vértice del polígono con los otros, se divide en $n - 2 = n + 2v - 2$ triángulos.

Supongamos que hay v vértices interiores y $n + 2v - 2$ triángulos. Al añadir un vértice hay dos posibilidades:

a) El vértice está en el interior de un triángulo, entonces, para que se cumplan las condiciones del enunciado, debe unirse a cada uno de los tres vértices del triángulo que se divide en tres y el número de triángulos ahora es:

$n + 2v - 2 + 2 = n + 2(v + 1) - 2$.

b) El vértice está en un lado, entonces hay que unirlo con el vértice opuesto de cada uno de los dos triángulos que comparten ese lado, cada triángulo se descompone en dos y el número de triángulos es ahora: $n + 2v - 2 + 2 = n + 2(v + 1) - 2$.

En conclusión: $m = n + 2v - 2 \Rightarrow v = \frac{m-n+2}{2}$.

451. Debido a que el número de lados del polígono H deja de resto uno al dividirse entre seis, cada diagonal y cada lado del mismo pertenece solo (exactamente) a tres triángulos isósceles distintos (la demostración es sencilla y se debe hacer).

Denotamos por AA, AR y RR los números de segmentos que son lados y diagonales cuyos extremos respectivamente están coloreados ambos de azul, de azul y de rojo o ambos de rojo. Análogamente denotamos por AAA, AAR, ARR y RRR el número de triángulos isósceles cuyos vértices son los tres azules, dos azules y uno rojo, uno azul y el otro rojo o los tres rojos y ninguno azul, respectivamente.

Entonces $3AA = 3AAA + AAR$, porque cada diagonal o lado de H pertenece a tres triángulos isósceles y los triángulos isósceles con tres vértices azules tienen tres lados con sus dos extremos azules. Los triángulos isósceles con dos vértices azules tienen solo un lado con sus extremos de color azul y los triángulos isósceles con menos de dos vértices azules no tiene ningún lado con los extremos del mismo color azul.

Análogamente establecemos: $3RA = 2AAR + 2ARR$ y $3RR = ARR + 3RRR$, (se deben probar estas dos nuevas relaciones). Las tres relaciones obtenidas conducen a que: $AAA + RRR = RR + AA - \frac{1}{2}RA =$ $= \frac{1}{2}R(R - 1) + \frac{1}{2}A(A - 1) - \frac{1}{2}RA$, donde A es el número de vértices azules, $A = 6n + 1 - R$. Esto completa la prueba.

Se observa que el resultado es también cierto si el polígono H tiene $6n + 5$ lados.

452. Cada segmento determina dos vectores de igual módulo y sentido opuesto.

Consideramos los $2 \cdot 2\ 002 = 4\ 004$ vectores así obtenidos y los ordenamos por sus direcciones entre 0 y $2p$ respecto de un sistema de referencia ortonormal arbitrario. Construimos ahora un polígono convexo de 4 004 lados "uniendo" los vectores uno a continuación del otro, a partir de uno cualquiera dado. Claramente el perímetro de este polígono es 2, además, es un polígono centrado y simétrico, respecto de un punto O (la prueba de esta observación es sencilla y es necesario hacerla). Tomamos entonces uno de los lados más próximos a O; sea d el segmento perpendicular a ese lado y a su opuesto que pasa por el centro O. La proyección del polígono sobre la recta que contiene a este segmento es d y, por tanto, la suma de las proyecciones sobre la recta anterior es también d. Por otra parte la circunferencia de centro O y radio $\frac{d}{2}$ está totalmente contenida en el interior del polígono y entonces su circunferencia es menor que el perímetro del polígono. Es decir: $d\pi < 2 \; y \; d < \frac{2}{\pi} < \frac{2}{3}$. Falta considerar el caso trivial de que todos los segmentos tengan la misma dirección en cuyo caso ni hay polígono pero tomando la recta perpendicular a la dirección común sale $d = 0$.

453. Los números de las caras opuestas forman tres pares: (1;6), (2;5) y (3;4).

Primera observación: Cada dado de la brocheta tiene anulado uno de esos pares y cualquiera de los otros cuatro números puede colocarse en la cara superior. Si consideramos dos de los dados, hay uno de los tres pares que no ha sido anulado en ninguno de los dos lados.

Segunda observación: 1 001 es múltiplo de 7, ya que $1\ 001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Entonces 10 010 y 100 100 también son múltiplos de 7. Esto nos permite afirmar que todo número de seis cifras de la forma *abcabc* es múltiplo de 7, pues $abcabc = a(100\ 100) + b(10\ 010) + c(1\ 001) = 7(14\ 300a + 1\ 430b + 143c)$.

Ahora está claro cómo se logra el múltiplo de 7: se coloca un mismo número en las caras superiores del primero y el cuarto dado (vimos que esto es posible); se coloca un mismo número en las caras superiores del segundo y el quinto dado y se coloca un mismo número en las caras superiores del tercer y el sexto dado.

454. Pensemos que el rectángulo tiene m cuadrados en la base y n en los costados, buscamos determinar m y n. La condición que se exige nos lleva a la ecuación: $2n+2(m-2)=(n-2)(m-2)$ (I) que representa: $2n$ a los cuadrados en los costados y $2(m - 2)$ los cuadrados en las bases y la tapa, tanto en la base como en la tapa se quitan dos que ya han sido considerados en los costados. $(n - 2)$ y $(m - 2)$ son la cantidad de cuadrados que no están en la orilla. La ecuación (I) se puede rescribir como:

$nm - 4n - 4m + 8 = 0$ (II) de donde: $(n - 4)(m - 4) = 8$ (III). Pero las formas de descomponer 8 en factores son: $8 \cdot 1$; $2 \cdot 4$; $4 \cdot 2$; $1 \cdot 8$, por tanto:

$n - 4$	1	2	4	8
$m - 4$	8	4	2	1

Y entonces (5;12); (6;8); (8;6) y (12;5) son las únicas soluciones del problema.

455. Sean x_1, x_2, ..., x_{36} los números dispuestos en la ruleta y supongamos que no hay 3 consecutivos cuya suma sea al menos 55. Entonces deberá tenerse:

$x_1 + x_2 + x_3 < 55$
$x_2 + x_3 + x_4 < 55$
....
$x_{34} + x_{35} + x_{36} < 55$
$x_{35} + x_{36} + x_1 < 55$
$x_{36} + x_1 + x_2 < 55$

Sumando estas 36 desigualdades, tendremos en el lado izquierdo, la suma de los números x_1, x_2, ..., x_{36} repetida 3 veces, o sea, el triple de la suma de los números del 1 al 36. Como esta suma es igual a $36 \cdot 55 = 1\,980$, de modo que $1\,998 < 1\,980$, lo cual es una contradicción. En consecuencia, debe haber 3 números consecutivos cuya suma sea al menos 55.

456. Está claro que para $n = 2$ es imposible. Veamos que es posible para todo $n > 2$. Tomemos primero el caso n impar. Eligiendo los rectángulos de $1 \times n$ cambiemos el color de todos los renglones en posición impar. De esta manera todas las columnas en posición impar quedan blancas y todas las columnas en posición par quedan negras; entonces con rectángulos de $n \times 1$ cambiamos las columnas en posición par para lograr que todos los cuadros sean blancos. Para ver el caso cuando $n = 2^a b$, donde $a \geq 1$ y b impar distinto de 1, subdividamos el tablero en tableros de $b \times b$ y hagamos en cada tablero de $b \times b$ las operaciones que indicamos en el caso n impar.
Nos falta analizar las potencias de 2. Por un argumento similar al que describimos en el caso anterior, basta analizar el caso $n = 4$, el cual indicamos en los dibujos de la figura 50, en los que, en cada paso, se ha escogido un rectángulo de 2×4 o de 4×2 para hacer la operación:

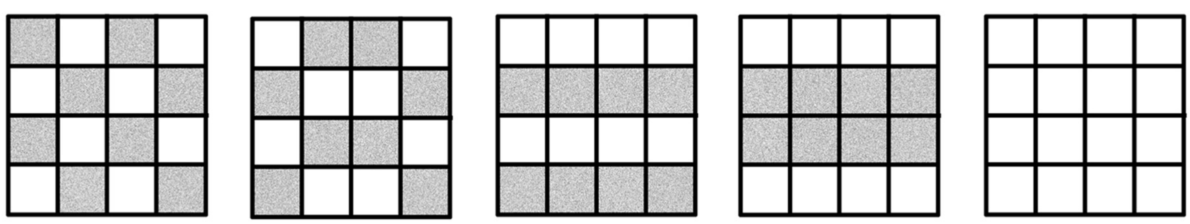

Fig. 50

457. Supongamos que no hay puntos marcados a distancia $\frac{1}{2}$ de la orilla de la cuadrícula. Probaremos que hay dos puntos marcados a distancia menor o igual que $\sqrt{2}$. Como no hay puntos marcados a distancia $\frac{1}{2}$ de la orilla, entonces todos los marcados están en la cuadrícula central de 6×6. Dividimos esta cuadrícula en 9 cuadrados de 2×2. Al haber 10 puntos marcados forzosamente habrá dos en un mismo cuadrado de 2×2 esos dos puntos están a distancia menor o igual que $\sqrt{2}$.

458. En la figura 51 se muestra una posibilidad para acomodar los números de manera que en cuadrados adyacentes la diferencia de los números que aparecen es menor o igual que 4.
Supongamos que sí es posible colocar los números y analicemos cómo deben estar acomodados.

1	3	6	10
2	5	9	13
4	8	12	15
7	11	14	16

Fig. 51

En la lista de seis números 1, 4, 7, 10, 13, 16 entre dos números consecutivos hay una diferencia de 3, de manera que en cualquier colocación de los números en la cuadrícula de 4×4 en la que las diferencias en casillas adyacentes fueran menores o iguales que 3, los números 1 y 16 deberían estar a una separación de, por lo menos 6 casillas; esto solo es posible si uno está en una esquina y el otro en cualquiera de los tres cuadraditos de la esquina opuesta. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que 1 aparece en la esquina superior izquierda; entonces el 16 debe quedar en cualquiera de las 3 casillas más lejanas. Supongamos que 16 no aparece en la esquina. Esto forzaría a que en cualquier "camino" que usara seis casillas adyacentes entre los cuadraditos donde se encontraran el 1 y el 16, aparecieran exactamente los números de la lista; sin embargo, hay más de un "camino" entre las dos casillas (ver el ejemplo en la figura 51), lo que forzaría a que hubiera repetición de números. Entonces, el 16 aparece en la esquina inferior derecha. Ahora observemos que en dos cuadraditos diagonales que compartan un vértice, la diferencia máxima que puede haber es de 5, puesto que, sumando las diferencias por cuadrados adyacentes la diferencia máxima debe ser 6, pero los números no pueden estar repetidos. Como del 1 al 16 se llega en 4 pasos con diferencias de 5: 1-6-11-16 la única posibilidad es que estos números queden en la diagonal como se indica en la figura. Además, en las casillas adyacentes al 1 deben aparecer el 3 y el 4, puesto que con ambos 1 y 6 la diferencia debe ser a lo más 3, sin pérdida de generalidad aparecen como en el esquema.
Entonces las casillas que sobran para acomodar el 2 quedan todas a una distancia a lo más de 4 de la casilla donde está el 16; sin embargo, para llegar del 2 al 16 con diferencias a lo más de 3 se necesitan por lo menos 4 números intermedios, así que no es posible la colocación.

459. Hagamos un ejemplo pensando que fueran $2^4 = 16$ casillas, en lugar de $2^6 = 64$ casillas, para analizar qué pasa con una potencia 2^n de 2 cualquiera. Tenemos la tabla 16 en la que indicamos con • cuando una ficha ocupa el mismo lugar que la ficha no. 1.
Observamos que 8 (resp. 2^{n-1}) números tienen 1 coincidencia; 4 (resp. 2^{n-2}) números tienen 2 coincidencias; 2 (resp. 2^{n-3}) números tienen 4 coincidencias, y 1 (resp. 2^{n-4}) números tienen 8 coincidencias. En general, en el minuto 2^n habrá habido $n \cdot 2^{n-1}$ coincidencias.
(Formalmente: La ficha no. k comparte la casilla r con la ficha no. 1 si y solo si $2^n \mid rk - r = r(k-1)$. Si 2^h es la máxima potencia de 2 que divide a $k-1$, entonces la menor r para la cual $2^n \mid r(k-1)$ es 2^{n-h}, así que en el minuto 2^n hay $2^n : 2^{n-h} = 2^h$ coincidencias de la ficha no. k con la ficha no. 1). Aplicando lo anterior a $n = 6$, tenemos que en 64 minutos habrá $6 \cdot 2^5 = 192$ coincidencias. Después de 10 períodos de estos tendremos 1 920 coincidencias, así que faltarán 76. Ahora, para ver en qué momento se completan las 76 que faltan, debemos sumar por columnas las coincidencias; observando que solo puede haber coincidencias en casillas pares, tenemos que los números de coincidencias por columnas son (tabla 17).

Tabla 16

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	4	6	8	10	12	14	16	2	4	6	8	10	12	14	•
3	6	9	12	15	2	5	•	11	14	1	4	7	10	13	•
4	8	12	16	4	8	12	16	4	8	12	16	4	8	12	•
5	10	15	•				•				•				•
															•
							•								•
															•
	•		•		•		•		•		•		•		•
															•
							•								•
															•
			•				•				•				•
															•
							•								•
															•

Tabla 17

Posición de la ficha no. 1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
Coincidencias	1	3	1	7	1	3	1	15	1	3	1	7	1	3	1	31

Hasta aquí se juntan 80, así que la ficha no. 1 estará en la casilla 32 cuando todos los focos queden prendidos. (Para ver las coincidencias por columnas formalmente, consideremos lo siguiente: Cuando la ficha no. 1 está en el lugar $2^a b$, con b impar, el número de coincidencias es el número de elementos del conjunto
$\{x \mid 1 < x \leq 64,\ 2^a bx \equiv 1 \ (\text{mód } 2^{6-a})\}$. Como la congruencia es equivalente a $x \equiv 1 \ (\text{mód } 2^{6-a})$, el número de coincidencias en esa casilla es de $2^a - 1$).

460. Consideremos la suma de los números en cada fila y en cada columna, escojamos la menor de estas sumas. Suponemos que esa tal suma corresponda a la hilera L. Denotemos por k el número de unos que aparecen en L. Pueden ocurrir los casos siguientes:
$k \geq 4$, entonces cada hilera contiene al menos cuatro unos, por lo que la suma de todos los 7 números en el tablero es mayor o igual que $4 \times 8 = 32$.
$k < 4$, entonces existen $8 - k$ ceros en L. Cada columna que cruza L en un cuadrado con un cero contiene al menos $8 - k$ unos. Por tanto, la suma de todos los números en el tablero es mayor o igual a $(8 - k)^2 + k^2 = 2(32 - 8k + k^2) = 2((k + 4)^2 + 16) \geq 2 \cdot 16 = 32$.

461. Observemos primero que cada camino c cruza exactamente una vez cada una de las diagonales que se muestran en la figura 52:
El mínimo valor de un número en cada diagonal está arriba a la derecha y el máximo está abajo a la izquierda, así que m se logra con el camino que va todo a la derecha hasta terminar el primer renglón

y después hacia abajo por la última columna, y M se logra con el camino que primero va hacia abajo recorriendo toda la primera columna y después hacia la derecha por el último renglón.

Así $m = 1 + 2 + ... + n + 2n + 3n + ... + n^2$, y

$M = [1 + (n + 1) + (2n + 1) + ... + ((n - 1)n + 1)] + [((n - 1)n + 2) + ... + n^2]$.

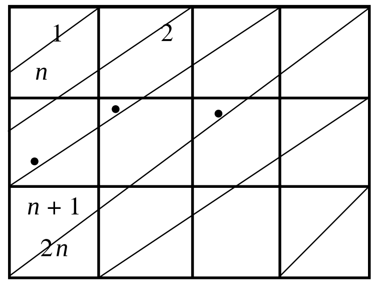

Fig. 52

Además, observemos que sobre las diagonales en cuadraditos juntos, la diferencia es de $n - 1$. Entonces $M - m = (n - 1)^2(n - 1) = (n - 1)^3$ (pues en cada • en la cuadrícula hay una diferencia de $n - 1$ y hay $(n - 1)^2$ •.

Ahora, si buscamos una n y un camino c en una cuadrícula de $n \times n$ que cumpla $L(c) = 1\ 996$, debemos tener $m \leq 1\ 996 \leq M$.

Pero $m = n(n - 1) / 2 + n(n(n - 1) / 2) + n^2 = (n - 1)n)n + 1) / 2 + n^2$, y $M = m + (n - 1)^3$, como vimos arriba; entonces de $m \leq 1\ 996$ obtenemos $n \leq 15$ y de $M \geq 1\ 996$ obtenemos $n \geq 12$ (pues para $n = 15$ tenemos $m = 1\ 905 < 1\ 996$; para $n = 16$, $m = 2\ 296 > 1\ 996$; para $n = 11$, $M = 1\ 781 < 1\ 996$ y para $n = 12$, $M = 2\ 333 > 1\ 996$).

Entonces los posibles valores para n son 12, 13, 14, 15. Ahora recordemos que cualquier camino tiene diferencia un múltiplo de $n - 1$ con el mínimo, así que debemos tener que $1\ 996 - m$ debe ser múltiplo de $n - a$. Calculemos entonces en cada caso $1\ 996 - m$:

Si $n = 12$, entonces $m = 1\ 002$ y $1\ 996 - m = 994$ que no es múltiplo de 11.
Si $n = 13$, entonces $m = 1\ 261$ y $1\ 996 - m = 735$ que no es múltiplo de 12.
Si $n = 14$, entonces $m = 1\ 905$ y $1\ 996 - m = 435$ que no es múltiplo de 13.
Si $n = 15$, entonces $m = 1\ 905$ y $1\ 996 - m = 91$ que no es múltiplo de 14.

De los cálculos anteriores concluimos que no es posible encontrar un camino c con $L(c) = 1\ 996$.

462. En el tablero, hay casillas de tres tipos: vértice, lado o interiores. Cada una de ellas tiene, respectivamente, dos, cuatro o seis casillas vecinas. Si pudiéramos retirar todas las fichas del tablero, habría un momento en que quedaría sobre él una única ficha negra. Esa ficha era inicialmente blanca, luego ha tenido que cambiar de color un número impar de veces. Pero esto es imposible, porque una ficha se vuelve cada vez que se retira una ficha vecina y ninguna ficha tiene un número impar de casillas vecinas.

463. Evidentemente n^2 debe ser múltiplo de 4 y, por tanto, n necesariamente es par. Si $n = 4k$ podemos dividir cualquier cuadrado $n \times n$ en k^2 subcuadrados del tipo 4×4 cada uno de los cuales lo podemos rellenar en la forma señalada en la figura 53.

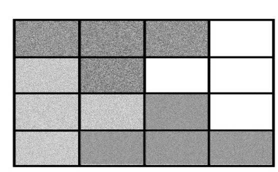

Fig. 53

Queda solo considerar el caso $n = 4k + 2$.
Veamos que en ese caso la respuesta es negativa. Supongamos que sea posible. Si pintamos cada cuadradito Alternativamente de blanco y negro como en un tablero de ajedrez, hay dos posibilidades para cada pieza (fig. 54).

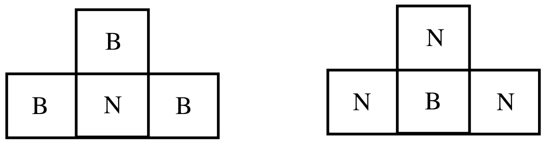

Fig. 54

Sean a el número de piezas del tipo de las de la izquierda y b el número de piezas del tipo de las de la derecha. Tenemos que $a + b = \frac{1}{4}(4k + 2)^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ luego $a + b$ ha de ser impar. Por otra parte, como hay tantas casillas blancas como negras, se tiene
$3a + b = 3b + a \Leftrightarrow a = b$, de donde $a + b = 2a$ ha de ser par en contradicción con lo anterior.

464. Dispondremos el tablero en posición vertical, es decir, con 7 filas y 3 columnas. Asignaremos el color blanco a la cifra 0 y el negro a la cifra 1. De este modo cada fila representa un número escrito en base 2. En primer lugar, es fácil ver que si en una fila se colocan todas las fichas del mismo color, por ejemplo, el negro, necesariamente habrá un rectángulo, ya que no podemos colocar en ninguna fila dos fichas negras y solo podemos llenar un máximo de 5 filas en total sin formar rectángulo.
Por otra parte si dos números son iguales sus filas forman rectángulo, luego todas las filas han de representar números distintos. Por la consideración anterior hemos de excluir los números 000 y 111. Con tres cifras en base dos existen $2^3 = 8$ números distintos, quitando los anteriores quedan 6 para 7 filas por lo que necesariamente hemos de repetir y formar rectángulo. El problema tendría solución en un tablero de 3×6 tal como se muestra en la figura 55.

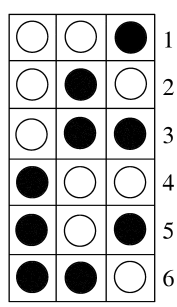

Fig. 55

465. Sumemos todos los números del tablero. Si sumamos primero los de cada fila y después sumamos esos resultados obtenemos m. Si, por otra parte, sumamos primero los de cada columna y después sumamos esos resultados obtenemos n.
Por lo tanto, $m = n$.

466. Como $abc = k$, $ghi = k$ (1); $aei = k$, $gec = k$ y $beh = k$ (2).
Multiplicando las igualdades de (2), obtenemos $aigcbhe^3 = k^3$ (3) y sustituyendo (1) en (3) tenemos: $k^2e^3 = k^3$, por tanto, $k = e^3$. Luego k es un cubo perfecto.

467. En primer lugar, como cada fila debe tener 4 unos y hay un total de 15 filas, el tablero tiene un total de 60 unos. Así, como en cada una de las 10 columnas debe haber c unos, entonces $10c = 60$, es decir, $c = 6$.

A continuación, una posible tal numeración donde los 0 se han omitido:

```
1111
           11 11
11                       11
     111 1
                      1111
1111
           11 11
11                       11
     111 1
                      1111
1111
           11 11
11                       11
     111 1
                      1111
```

468. Observemos que para $n \geq 2$ el número de fichas que se colocan en el paso n es $4(n-1)$. Entonces, en total, el número de fichas que quedan colocadas hasta el paso n es $1 + 4 + 4 \cdot 2 + ... + 4(n-1) = 1 + 4(1 + 2 + ... + (n-1))$. Se quiere que este número sea menor o igual que 5 000, así que $1 + 2 + ... + (n-1) \leq (5\,000 - 1) : 4$, o sea, que n debe cumplir $\frac{n(n-1)}{2} \leq \frac{4\,999}{4}$, de donde $n(n-1) \leq 2\,499{,}5$ por lo que $n \leq 50$.

$\therefore$ le alcanzarán para 50 pasos completos.

469. a) Por supuesto que si tenemos suerte, con dos dulces que saquemos podríamos tener los dos del mismo sabor, pero ¿y si la suerte no nos favorece, cómo podemos estar seguros de tener un sabor repetido? Lo peor que nos puede pasar es que al sacar 4 dulces los cuatro sean de distinto sabor, pero sin duda el quinto dulce que saquemos tendrá uno de los sabores que ya tenemos (fig. 56).

La respuesta a esta pregunta es 5.

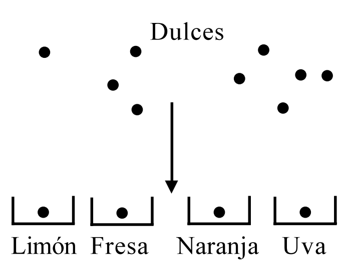

Fig. 56

b) Para responder esta pregunta debemos saber antes cuántos dulces hay de cada sabor. De las condiciones del problema se tiene que del sabor que más dulces hay es de limón.

Además, como los de limón son el doble de los de fresa, la cantidad de dulces de limón es par. Si dividimos los 71 dulces entre los 4 sabores obtenemos $17 \cdot 75$.

Puesto que la cantidad de dulces de limón está claramente encima del promedio, comencemos con 20 de limón y hagamos una tabla para ir encontrando las cantidades de dulces de los otros sabores (tabla 18).

Tabla 18

Limón	Fresa	Naranja	Uva	Total
20	10	9	14	53
22	11	10	16	59
24	12	11	18	65
26	13	12	20	71

Ya sabemos cuántos dulces hay de cada sabor. Lo peor que nos puede pasar es que los primeros 26 sean de limón, que es el sabor que más se repite, pero sin duda el dulce número 27 que saquemos tendrá otro sabor.
La idea utilizada para responder la pregunta del inciso a) es conocida como el Principio de Dirichlet.

470. Puesto que la diferencia entre las casillas debe ser menor o igual que 1, comencemos poniendo la primera hilera del 1 al 10.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

La primera casilla de la segunda fila puede ser 0, 1 o 2. Pero nos conviene poner el 2 porque así al final de la hilera tendremos el 11 que es un número que no hemos utilizado y se trata de tener la mayor cantidad de números distintos (tabla 19).

Tabla 19

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Siguiendo esta misma idea completamos fácilmente el resto de la tabla (tabla 20).

Tabla 20

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Por supuesto que pudimos haber empezado con cualquier número en lugar del 1 y hubiésemos obtenido, siguiendo este método, un tablero que cumpliría las condiciones del problema. ¿Cómo podemos estar seguros de que *no es posible* construir otro tablero que tenga una mayor cantidad de números diferentes?

Si pensamos en recorrer el tablero viajando por casillas adyacentes, la máxima distancia que podemos viajar es de esquina a esquina, cruzando 18 casillas, por lo tanto, a partir de un número n solo podríamos tener $n + 18$ en la otra esquina, es decir, 19 números diferentes.

El segundo inciso del problema se resuelve con una sencilla aplicación del Principio de Dirichlet: si tenemos en total $10 \cdot 10 = 100$ números y a lo más hay 19 diferentes entonces podemos estar seguros de que al menos uno de los números se repetirá $\left[\frac{100}{19}\right]+1$ veces, es decir, 6 veces.

El problema admite dos ejes de simetría coincidentes con las diagonales del cuadrado. Clasificaremos las soluciones posibles por la posición del punto B respecto del vértice A. Usaremos coordenadas enteras con origen en A.

Las tres posiciones "fundamentales" (no deducibles unas de otras por las simetrías anteriores) son aquellas en las que B está en los puntos de coordenadas (0,1); (0,2) y (1,1) para cada una de ellas dibujamos un esquema con las posibles posiciones del punto C.

Las posiciones "prohibidas" se dibujan en negro, la posición de B en gris y las de C_i en blanco (fig. 57).

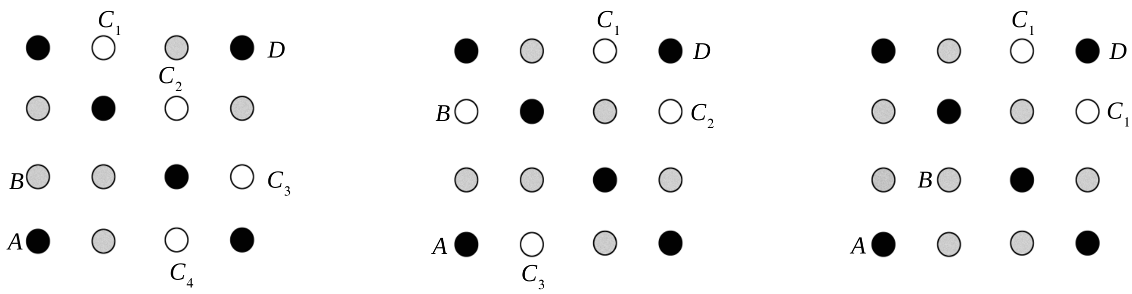

Fig. 57

Un criterio general para prohibir ubicaciones es localizar aquellos puntos que están en la "mediatriz" de dos puntos ya situados. Como A y D son dados y fijos, la diagonal principal siempre contiene puntos "prohibidos".

El esquema de la izquierda contiene 4 posiciones "originales" y cada una de ellas genera otras cuatro por aplicación de las dos simetrías, en total 16.

El esquema del centro contiene 3 posiciones "originales" y cada una de ellas genera otras cuatro por aplicación de las dos simetrías, en total 12.

El esquema de la derecha contiene 1 posición "original" que genera otras cuatro por aplicación de las dos simetrías, en total 4.

Por tanto, existen 32 posiciones posibles y 8 "originales", esto contesta los incisos a) y b).

Para el inciso c) hay que suponer que los enteros asignados a cada punto son sus coordenadas en un origen cualquiera, nosotros supondremos que el origen está en A con lo que las coordenadas de A son (0,0) y las de D(3,0).

los seis sumandos corresponden a las parejas AB, AC, AD, BC, BD y CD.

El correspondiente a AD es constante y vale $3 + 3 = 6$.

Los correspondientes a AB y BD valen en conjunto siempre 6, ya que A está en fila inferior y columna izquierda y D en la fila superior y columna derecha.

Por el mismo motivo los sumandos correspondientes a AC y CD valen entre los dos siempre 6.

Solo queda el sumando $|X_i - X_j| + |Y_i - Y_j|$ correspondiente a BC que por simple comprobación en todos los casos "originales" vale siempre 3.

La suma completa es entonces constante y vale $6 + 6 + 6 + 3 = 21$.

471. Consideremos que cualquier conjunto de n enteros contiene un subconjunto cuya suma es un múltiplo de n. Sea el conjunto $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

Para $1 \leq m \leq n$, se define $b_m = a_1 + a_2 + ... + a_m$. Si $b_m \equiv 0$ (mód n) para algún m, tenemos nada nuevo que probar.
Por otra parte por el principio de las casillas, debemos tener $b_i \equiv b_j$ (mód n). Para algún i, j donde $1 \leq i < j \leq n$. Entonces $a_{i+1} + a_{i+2} + ... + a_j \equiv 0$ (mód n). Esto justifica el reclamo. Ahora resolveremos el problema original por inducción sobre n. Para el primer término es trivial. Supongamos que el resultado para $n - 1$ es verdadero. Consideremos cualquier colección de 1, 2, ..., n con la suma $k(n!)$. Primero pongamos cada n en una sobrecarta y marquemos la sobrecarta 1. Ahora, usando el reclamo de tener n cartas cuya suma es tn para algún entero t, pongámoslo en una sobrecarta. Como cada carta es al menos $n - 1$, tenemos $t \leq n - 1$.
Marquemos la sobrecarta t. Eventualmente estamos a la izquierda con $r < n$ cartas.
Si $r = 0$, ninguna otra cosa está concluida. Si $r > 0$, entonces la suma de estas r cartas es también un múltiplo de n por ser la suma de todas las cartas. Marquemos la sobrecarta t si esta suma es tn. Ahora tenemos una colección de sobrecartas cada una marcada con 1, 2, ..., $n - 1$, y la suma de todas las sobrecartas es $k(n - 1)!$. Por la hipótesis de inducción, las sobrecartas pueden dividirse en k grupos tales que la suma de las sobrecartas es $(n - 1)!$. Para cada grupo, se abren todas las sobrecartas y se ponen todas las cartas interiores a un grupo. La suma de los números de las cartas en cada grupo es $n!$ como se deseaba.

472. Sea $PQRS$ un cuadrado con dicha propiedad. Como los círculos son de diámetro 2, $a > 2$.
Sea $P'Q'R'S'$ el cuadrado dentro de $PQRS$ cuyos lados están a distancia 1 de los lados de $PQRS$, de esta forma los lados de $P'Q'R'S'$ tienen longitud $a - 2$. Como los 5 círculos están dentro de $PQRS$ los 5 centros están dentro de $P'Q'R'S'$. Dividamos $P'Q'R'S'$ en 4 cuadrados iguales uniendo los puntos medios de los lados opuestos, cada uno de estos cuadrados es de lado $\frac{a-2}{2} = \frac{a}{2} - 1$. Por el principio de las casillas al menos dos de los 5 centros están en un mismo cuadrado pequeño y la distancia entre estos dos centros es a lo sumo $\sqrt{2}\left(\frac{a}{2} - 1\right)$, (la diagonal). Como la distancia entre dos centros cualesquiera tiene que ser al menos 2 (por la condición de que dos círculos no pueden tener puntos interiores comunes), entonces $\sqrt{2}\left(\frac{a}{2} - 1\right) \geq 2$ resolviendo queda

$a \geq 2 + 2\sqrt{2}$. Luego si $a = 2 + 2\sqrt{2}$ puede ubicar los centros de los 5 círculos del modo siguiente: uno en el centro de $PQRS$ y los otros 4 que coincidan con P', Q', R' y S'.

Por lo que $a = 2 + 2\sqrt{2}$.

473. El primer jugador tiene estrategia ganadora. Como 1 999 es impar, el número de fichas con el lado rojo hacia arriba y el número de fichas con el lado negro hacia arriba son distintos. Entonces, el primer jugador en su turno puede hacer que el número de fichas rojas sea igual al número de fichas negras quitando de las que haya más. No importa qué haga el segundo jugador, dejará cantidades diferentes de fichas rojas y negras. Después el primer jugador vuelve a hacer que haya el mismo número de fichas rojas que negras. Como al segundo siempre le toca jugar cuando hay la misma cantidad de rojas que negras, no puede evitar dejar cantidades diferentes de fichas rojas y negras, por lo tanto, gana el primero.

474. Hay muchos problemas que se pueden resolver mediante una estrategia que podemos llamar *desandar lo andado*. Vamos a suponer que ya llegamos a nuestra meta, es decir que ya encontramos la estrategia ganadora y por tanto dijimos el 100. Esto significa que obligamos a nuestro contrincante a decir un número mayor que la mitad de 100, que es 50, o sea, que lo obligamos a decir un número mayor que 50 y menor que 100 y esto solo es posible si nosotros dijimos antes el 50. Parte de la estrategia ganadora es decir el 50 así, nuestro compañero de juego dirá un número entre 51 y 99, inclusive, y luego nosotros decimos el 100. ¿Qué tenemos que hacer para poder decir el 50? Repetimos el análisis que hicimos antes y nos damos cuenta que debemos nosotros decir el 25 y para esto antes debemos decir el 12, antes el 6 y primero el 3. Por lo tanto, quien empieza gana y la estrategia consiste en decir la secuencia

$3 \longrightarrow 6 \longrightarrow 12 \longrightarrow 25 \longrightarrow 50 \longrightarrow 100.$

Cambiemos las condiciones del problema y veamos si nuestro método sigue siendo eficaz. ¿Qué pasa si en lugar de que se gana al decir el 100 triunfa quien diga el 223? Aplicando el método de *desandar lo andado* encontramos la estrategia ganadora, en este caso la secuencia

$3 \longrightarrow 6 \longrightarrow 13 \longrightarrow 27 \longrightarrow 55 \longrightarrow 111 \longrightarrow 223.$

Otra vez gana quien empieza. ¿Podría el lector cambiar el 223 por otro número de forma que ganase quien no empieza?

También podemos utilizar el mismo método en problemas con reglas diferentes, por ejemplo:

Gana quien diga el 32. En cada jugada se le puede sumar 1, 2, 3 o 4 al número anterior.

Gana quien diga el 1 000. Se empieza con el 2. En cada jugada debe decirse un número mayor que el anterior pero menor que su cuadrado.

475. n: no. de reparticiones, $n \geq 3$; $n(p + q + r) = 39 \Rightarrow n = 3$ o $n = 13$; si $n = 13$ entonces $p + q + r = 3 \therefore p = q = r$ ¡imposible!

como B se quedó con 10 y en su última ronda le tocó r entonces $r \leq 8$. Como A se quedó con 20 y la última ronda no le tocó r debemos tener que $r \geq 7$ (tabla 21).

Tabla 21

p	q	r
1	4	8
2	3	8
1	5	7
2	4	7

Las posibilidades (2;3;8), (2;4;7) y (1;5;7) quedan descartadas pues ninguna combinación me da las 20 con las que se quedó A. Luego (tabla 22):

Tabla 22

n	A	B	C
1	8	1	4
2	8	1	4
3	4	8	1

$\therefore$ a C le tocó la tarjeta con el número q.

476. Tenemos la cadena con el total de $4n$ bolas, $2n$ blancas y $2n$ negras. Cogemos un grupo de un extremo con $2n$ bolas, este grupo tendrá x bolas negras y y bolas blancas, de forma que la diferencia es $x - y = 2k$ para $k \in \{-n, 1 - n, \ldots, 0, \ldots, n - 1, n\}$.

Vamos moviéndonos de una en una posición hacia el extremo contrario, en cada movimiento la diferencia varía en 2 o no varía, es decir, k aumente en 1, disminuye en 1 o no cambia.

La diferencia varía en 2 si la bola que se deja y que se coge son de distinto color y no se mantiene si son del mismo color.
La posición final, es decir en el otro extremo, tendrá las bolas al revés, x bolas blancas y y bolas negras con lo que la diferencia (blancas – negras) será ahora $y - x = -2k$, para el mismo k.
Es decir, que k pasa de una posición a su opuesta con el mismo valor absoluto. Como k solo puede variar de 1 en 1 tiene que pasar por el cero, ya que no se lo puede saltar.
En el momento en que $k = 0$, $x = y = n$, c, q, d.
Siempre se podrá cortar un segmento de longitud $2n$ con n bolas blancas y n bolas negras.

477. Numeremos las fichas desde 1 hasta 2 004: la 1 es negra y las restantes son blancas. Cada ficha inicialmente blanca debe ser "tocada" un número par de veces, para que al final del proceso siga teniendo la cara blanca hacia arriba. Cada movimiento posible cambia el número de fichas negras en un número impar:

B**N**B pasa a NBN: el número de fichas negras aumenta en 1.
N**N**B pasa a BBN: el número de fichas negras disminuye en 1.
B**N**N pasa a NBB: el número de fichas negras disminuye en 1.
N**N**N pasa a BBB: el número de fichas negras disminuye en 3.

Como inicialmente hay exactamente una ficha negra, el número total de movimientos para tener las 2 004 fichas con la cara blanca hacia arriba debe ser impar.
Designamos por x_i el número de movimientos realizados eligiendo la ficha i (que debe ser negra).
La ficha que ocupa el lugar i cambia de color en los movimientos en que la elegimos a ella (x_i), a la de su izquierda (x_{i-1}) o a la de su derecha (x_{i+1}). Por lo tanto, ($x_{i-1} + x_i + x_{i+1}$) es el número de veces que hemos dado la vuelta a la ficha que ocupa el lugar i (2 004 + 1 se identifica con 1, y 2 003 + 2 se identifica con 1).
El número total de movimientos será: $N = (x_1 + x_2 + x_3) + x_4 + \dots + (x_{2\,002} + x_{2\,003} + x_{2\,004})$.
Como 2 004 es múltiplo de 3, N es la suma del número de veces que hemos dado la vuelta a las fichas en los lugares 2, 5, ..., $3k + 2$, ..., 2 003, todas ellas blancas al principio: así que N, suma de números pares, debería ser par: contradicción, pues N es impar. Por lo tanto, no será posible conseguir que las 2 004 fichas tengan la cara blanca hacia arriba.
Con 2 003 fichas si es posible: iniciando el movimiento sobre la ficha 1, (única negra al principio), y repitiéndolo sobre las fichas que ocupan los lugares 2, ..., 2 001, 2 002 llegaríamos a la configuración NNN NNN ... NNN BB
Eligiendo ahora las fichas que ocupan los lugares 2, 5 ... $3k + 2$ ..., 2 000 tendríamos:
BBB BBB ... BBB BB
en la que todas las fichas tendrían la cara blanca hacia arriba.

478. Tomamos un polígono ortogonal cualquiera y lo colocamos con sus lados sobre las líneas de una cuadrícula infinita. Pintamos la cuadrícula como tablero de ajedrez. Debemos probar que el polígono tiene al menos un lado par suponiendo que es posible llenarlo con rectángulos de 2×1.
Probaremos algo un poco más fuerte: que si un polígono ortogonal de n lados tiene todos los lados impares, entonces no es posible que tenga el mismo número de cuadrados blancos que negros y, de hecho, probaremos que el número B de cuadrados blancos y N de cuadrados negros cumplen

$$|N - B| = \frac{1}{4}n.$$

Asignamos a cada cuadrado negro del interior del polígono 4, 1 por cada lado y a cada cuadrado blanco asignamos –1, –1 por cada lado. La suma de los valores asignados a los cuadrados es claramente $4(N - B)$. Por otra parte, la contribución total de cada segmento del interior es 0: 1 por ser lado de un cuadrado negro y –1 por ser lado de un cuadrado blanco. Entonces, la suma de los valores asignados a los cuadrados es igual a la suma de los valores asignados a los segmentos de la orilla del polígono. Pero si todos los lados tienen longitud impar, la suma de los valores de los segmentos en cada lado es siempre 1 o siempre –1. Por lo tanto, $4(N - B) = n$ o $-n$, es decir, $|N - B| = \frac{1}{4}n$.

479. Supongamos que sí es posible cubrir la cuadrícula de 6×6 con la propiedad mencionada. Primero observemos que, en este caso, cada línea interior vertical deberá estar atravesada por un número par de rectangulitos horizontales; para ver esto observemos que cada rectangulito vertical abarca dos cuadritos verticales y 6 es un número par, de tal manera que entonces en la primera columna vertical habrá un número par de rectángulos horizontales; pero entonces, en la segunda columna pasará lo mismo puesto que los rectángulos horizontales que cubren cuadraditos en la primera columna abarcan un número par en esta segunda, así que los cuadritos que quedan en esta columna también son un número par, y así sucesivamente. Por la condición pedida en el problema, cada línea interior horizontal estará atravesada por dos rectangulitos verticales. Sin embargo, el número total de líneas interiores es 10 (5 verticales y 5 horizontales) y cada uno de los 18 rectangulitos solo puede atravesar una de ellas, así que no puede haber las 20 intersecciones que se dice arriba que debe haber. Entonces no es posible cubrir la cuadrícula como se estaba suponiendo.
Una forma para cubrir la cuadrícula de 6×5 con la condición pedida se muestra en la figura 58.

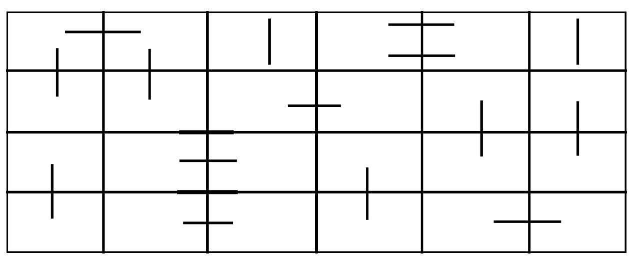

Fig. 58

480. Con triángulos nos referimos a un triángulo con vértices en el octógono, y con ángulo a dos lados de un triángulo. Un ángulo es bicolor si sus lados son de color distinto. Nos fijamos en un vértice del octógono, si k de las líneas que lo unen con los otros vértices son de un color (y $7 - k$ del otro), entonces es vértice de $k(7 - k) \leq 3 \cdot 4$ ángulos bicolor.
Luego el número de ángulos bicolor es $\angle b \leq 8 \cdot 3 \cdot 4 = 96$. Cada triángulo bicolor tiene exactamente dos ángulos bicolor, así el número de triángulos bicolor es $\frac{1}{2}\angle b$ y, por lo tanto, el número de triángulos monocromáticos es $\Delta_m = \binom{8}{3} - \frac{1}{2}\angle b \geq \binom{8}{3} - 96 : 2 = 8$. Entonces siempre hay 8 triángulos monocromáticos (se pide probar que hay al menos 7).

481. La respuesta es no. Para demostrarlo, llamaremos a los puntos centrales de las caras de la forma siguiente: *F*-frontal, *P*-posterior, *I*-izquierda, *D*-derecha, *T*-tapa, *S*-suelo; en donde el nombre representa la situación respecto a un observador que mira el cubo desde un punto exterior situado frente a la cara frontal. El punto medio de cada arista lo denotaremos con las dos letras de los centros de las dos caras a las que limita esa arista: *FT*, *FI*, *FD*, *FS*, *IT*, *IP*, *IS*, *DT*, *DP*, *DS*, *PT*, *PS*. Cada vértice lo denotamos con las tres letras de los centros de las tres caras que concurren en ese vértice: *FTD*, *FTI*, *DTP*, *ITP*, *FSD*, *FSI*, *DSP*, *ISP*. El centro del cubo lo denotamos *C*. Para indicar que un punto lo hemos coloreado de azul, respectivamente de rojo, escribiremos el nombre del punto seguido de (*a*), respectivamente (*r*).

Supondremos que no hay tres puntos alineados del mismo color y llegaremos a una contradicción. No hay problema en suponer que el centro es azul: $C(a)$. (De manera análoga se razonaría si fuera rojo). Eso obliga a que de cada dos caras opuestas al menos una tenga el centro rojo. En consecuencia, habrá tres caras con centro rojo y concurrentes en un vértice. Podemos suponer, por tanto, que tenemos $F(r)$, $T(r)$ y $D(r)$. Ahora, distinguimos dos posibilidades:

Caso 1: $FTD(r)$. Lo cual implica $ITP(a)$ y, por tanto, alineando con el centro, $FSD(r)$. De la misma forma $FTD(r)$ implica $DSP(a)$ y, por tanto, $FTI(r)$. Hemos llegado a la contradicción $FSD(r)$, $F(r)$, $FTI(r)$.

Caso 2: $FTD(a)$. Si $FTD(r)$, entonces $PT(a)$ y $FS(a)$: se tiene, por tanto, la contradicción $FS(a)$, $C(a)$, $PT(a)$. Así pues, ha de ser $FT(a)$. De la misma forma, $DT(a)$. Ahora, $FTD(a)$ y $FT(a)$ implica $FTI(r)$: análogamente, $FTD(a)$ y $DT(a)$ implica $DTP(r)$. Y hemos llegado a la contradicción $FTI(r)$, $T(r)$, $DTP(r)$.

482. Escojamos dos de los 7 puntos A y B, de forma que la recta AB deje todos los puntos en un mismo semiplano (fig. 59).
Supongamos que solo hubiera 2 longitudes distintas: a y b. Llegaremos a una contradicción.
Tomando AB como base, que supondremos mide b, puedo formar 5 triángulos distintos.
Estos triángulos podrían degenerar en segmentos. Para los otros dos lados, tengo longitudes a y b, es decir, que los lados de los triángulos, en orden, sería:
baa, *bab*, *bba*, *bbb*, con lo que el quinto debería ser uno de estos, es decir, al menos dos de estos triángulos serían coincidentes y no tendríamos 7 puntos distintos.

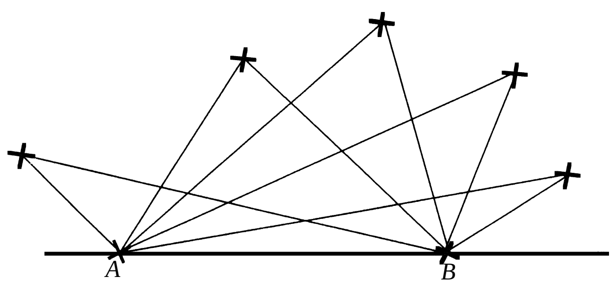

Fig. 59

483. Por la simetría de la figura 60a, solo hay 10 distancias distintas. Como mucho, podremos elegir **5** vértices. Pues, entre cinco puntos no alineados se pueden trazar $C_{5,2} = 10$ segmentos. Nos faltará constatar si con **5**, y con qué **5**, vértices se puede. La figura 60b muestra una posibilidad.

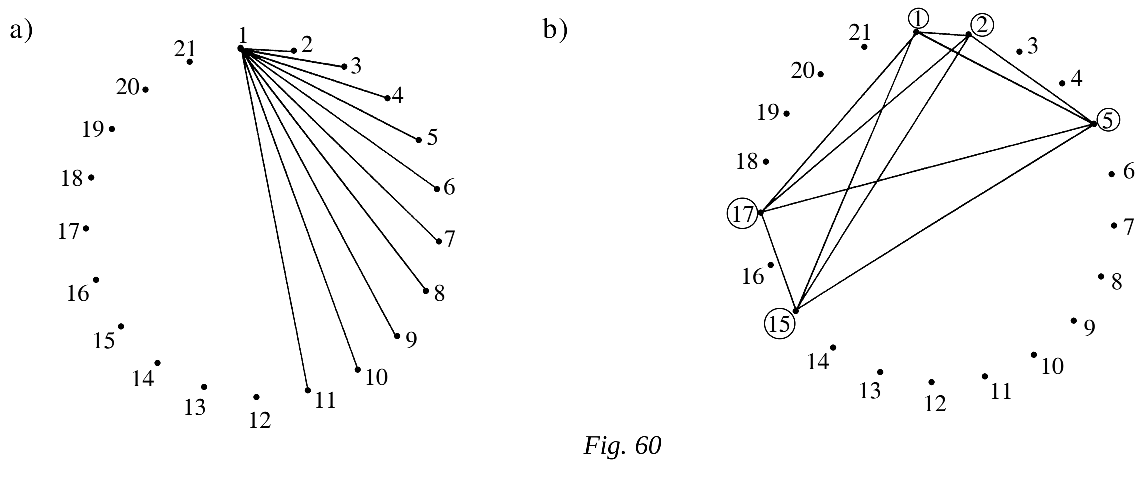

Fig. 60

484. Sean $N = 1\ 000$ y S el conjunto de puntos (x,y) con coordenadas enteras para los cuales $0 \leq x \leq N$, $0 \leq y$. Cada fila $Ry = \{(x,y)\ S\text{: } 0 \leq x \leq N\}$ tiene $N + 1$ puntos, y por el principio de las casillas, hay al menos un color usado dos veces.

Hay $N\left(N+\frac{1}{2}\right)$ veces posibles para donde un color puede ser usado en dos posiciones sobre Ry.

Dado que hay más filas en Ry debe haber dos posiciones en dos de estas filas. Los cuatro puntos en estas dos posiciones en las dos filas determinan el rectángulo deseado.

OLIMPIADA POPULAR ESTUDIANTIL DE MATEMÁTICA
CURSO 2005-2006

Los estudiantes de 10mo. grado deben resolver los problemas 1 al 14.
Los estudiantes de 11no. grado deben resolver los problemas 4 al 17.
Los estudiantes de 12mo. grado deben resolver los problemas 7 al 20.

1. *ABCD* es un rectángulo (fig. 61) con $AB = 2AD$; *AD* y *BC* son diámetros de los semicírculos *AED* y *BFC*.
Si $AD = 6$ dm.
¿Cuántos cuadraditos unidad se necesitarán en el área de *ABFCDE*?

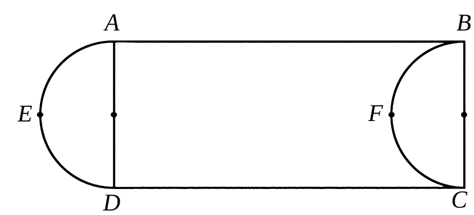

Fig. 61

2. Si el perímetro de un triángulo rectángulo isósceles es de $2t$, halla el área del triángulo.

3. Los puntos $A(1;y_1)$ y $(-1;y_2)$ están sobre la gráfica de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, a, $c \in \mathbb{N}$, $a \neq 1$, $a < c$, si $y_1 - y_2 = -6$, $y_1 + y_2 = 10$; halla la ecuación de la función *f*.

4. Añadiendo la constante *k* a cada uno de los números 60, 100 y 150, respectivamente se obtiene una progresión geométrica. Determina el valor de la razón común para la sucesión.

5. Halla el perímetro de un polígono regular si cada ángulo exterior es 10° menor que $\frac{1}{6}$ del ángulo interior y cada lado mide 8 cm.

6. Considera todos los triángulos isósceles que se pueden formar con los vértices de un hexágono regular de área 1. ¿Cuál es el promedio de las áreas de estos triángulos?

7. Sea $f(m;n) = f(m + 1; n - 1)$ para m, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ y $f(m;0) = m$. Determina $f(101;11)$.

8. Calcula el valor de la suma

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\right)+...+\left(\frac{1}{80}+\frac{2}{80}+...+\frac{79}{80}\right)$$

9. Una caja está llena de bolas de 20 colores distintos. Al azar se van sacando bolas de la caja. ¿Cuál es el menor número de bolas que deben sacarse para poder garantizar que en la colección tomada habrá al menos 100 bolas del mismo color?

10. Halla la longitud del tercer lado de un triángulo, si se conocen dos de sus lados a y b, y se sabe que las medianas correspondientes a estos lados se cruzan formando un ángulo recto.

11. El ángulo del vértice de un triángulo, cuyos lados laterales son a y b ($a < b$), está dividido en tres partes iguales por rectas cuyos segmentos dentro del triángulo son entre sí como $m : n$ ($m < n$). Halla las longitudes de estos segmentos.

12. Se tiene un tablero de 9×8 con un número en cada casilla de modo que los números en cada fila y en cada columna están en progresión aritmética y la suma de los números en las esquinas es 2 001. Determina la suma de todos los números del tablero.

13. Para escribir todos los números del $\overline{1ab}$ hasta el $\overline{ab2}$ inclusive se han empleado $\overline{1ab1}$ cifras (a y b son dígitos). ¿Cuántas cifras más se necesitan para escribir los números hasta $\overline{aab}$?

14. Halla la relación entre el área del triángulo ABC y el área de otro triángulo, cuyos lados son iguales a las medianas del triángulo ABC.

15. En el interior de un sector AOB de 30° representamos un triángulo equilátero ABC con $AB \perp OB$. A partir de C se traza una perpendicular a OB y se forma un nuevo triángulo equilátero. Continuando el mismo proceso se trazan otros dos ángulos en ese sector. Determina la razón entre las áreas del triángulo menor y el mayor.

16. Sea $M = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 2\ 001\}$, el conjunto de los enteros positivos desde el 1 hasta el 2 001. ¿Cuál es el promedio de los resultados obtenidos al sumar los enteros de cada uno de los posibles subconjuntos de M?

17. Dada la función exponencial $f(x) = 6^{x^2 - 2x}$ determina el valor mínimo de f.

18. Sea $ABCD$ (en ese orden) un paralelogramo, $AB = 10$ cm, $AD = 7$ cm, E es un punto de CD tal que $CE = 6$ cm y $BE = 5$ cm.
a) Halla la amplitud del ángulo BEC.
b) Calcula el área del trapecio $ABED$.

19. De un grupo de 10 niños y 15 niñas se quiere formar una colección de 5 jóvenes que tenga exactamente 2 niñas. ¿Cuántas colecciones distintas se pueden formar?

20. En un examen de Matemática que tenía 10 preguntas se daban 5 puntos por cada respuesta correcta y se quitaban 3 puntos por cada error. Todos los alumnos respondieron todas las preguntas. Si Javier obtuvo 34 puntos, Daniel obtuvo 10 puntos y César obtuvo 2 puntos, ¿cuántas respuestas correctas tuvieron entre los tres?

SOLUCIONES

1. Los semicírculos *AED* y *BFC* tienen igual área, luego el área de *ABFCDE* es igual al área del rectángulo *ABCD*, como $AB = 2AD \Rightarrow AB = 12$ dm y $A_{ABFCDE} = 12 \cdot 6 = 72$ cm^2.

2. Sean a la hipotenusa y c cada cateto del triángulo rectángulo isósceles con $a + 2c = 2t$, $a = \sqrt{2}c$, entonces $\sqrt{2}c + c = 2t$ y $c = \dfrac{2}{2+\sqrt{2}}t$. El área es $\dfrac{1}{2}c^2 = \dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}t^2 = (3-2\sqrt{2})t^2$.

3.

$$\begin{array}{l} y_1 - y_2 = -6 \\ \underline{y_1 + y_2 = 10} \\ 2y_1 = 4 \Rightarrow y_1 = 2,\ y_2 = 8 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a + b + c = 2 \\ \underline{a - b + c = 8} \\ -2b = 6 \Rightarrow b = -3 \end{array}$$

$a + c = 5$ entonces $a = 2$, $c = 3$ y $f(x) = 2x^2 - 3x + 3$.

4. Se tiene que $(60 + k)$, $(100 + k)$ y $(150 + k)$ forman una progresión geométrica, entonces debe cumplirse que $(100 + k)^2 = (60 + k)(150 + k)$, es decir, $k^2 + 200k + 10\,000 = k^2 + 210k + 9\,000$ de donde $10k = 1\,000$ y el valor de k es 100. Se tienen los números 160, 200 y 250 que es una progresión geométrica de razón 1,25.

5. Sean α y β las amplitudes de los ángulos interiores y exteriores respectivamente con $\beta = \dfrac{1}{6}\alpha - 10°$.

Como $\alpha + \beta = 180°$ entonces $7 \cdot \dfrac{1}{6}\alpha = 190°$ luego $\alpha = \dfrac{1\,140°}{7}$ y $\beta = \dfrac{120°}{7}$ entonces $360° : \dfrac{120°}{7} = 21$, por tanto, el polígono tiene 21 lados y su perímetro es de 168 cm.

6. $\dfrac{1}{4}$.

7. $f(m;1) = f(m + 1;0) = m + 1$, luego $f(101;11) = f(100 + 1;10 + 1)$
$f(m;2) = f(m + 1;0) = m + 2$ $\qquad\qquad = 100 + 12 = 112$
………………
$f(m;n) = f(m + 1;n - 1) = m + n$

8. $\frac{1}{2}+(1)+\left(1+\frac{1}{2}\right)+(2)+\left(2+\frac{1}{2}\right)+...+\left(39+\frac{1}{2}\right)=1\,580.$

9. Nota que si se sacan 20 bolas, podría ser que todas fueran de colores distintos, así que solo podríamos garantizar que hay dos bolas del mismo color si se sacan 21 bolas (aquí se aplicó el principio de las casillas). De la misma manera, se necesitan 41 = (20 · 2 + 1) bolas para poder afirmar que con seguridad hay 3 bolas (al menos) del mismo color, pues con 40 bolas podría ser que cada color apareciera exactamente 2 veces. Con el mismo razonamiento que hemos seguido llegamos al resultado.
∴ se necesitan 20 · 99 + 1 = 1 981 bolas.

10. Sea un ΔABC, D y E puntos medios de AC y BC respectivamente, $AC = b$; $BC = a$, $OD = x$ y $OE = y$. Hallemos $AB = c$.

$4x^2 + y^2 = \frac{b^2}{4}$; $4x^2 + 4y^2 = c^2$, $4x^2 + 16y^2 = a^2$. Eliminando x y y obtendremos

$c^2=\frac{a^2+b^2}{5}$ y $c=\frac{\sqrt{5(a^2+b^2)}}{5}$.

11. Sean A, D, E y B alineados en ese orden. Admitamos que
$\angle ACD = \angle DCE = \angle ECB = \alpha$ y $CE = x$, $CD = y$. Para (ABC) ((ABC) representa el área del triángulo ABC) se pueden escribir las tres expresiones siguientes:

$(ACD) + (DCB) = \frac{1}{2}by\text{ sen}\alpha + \frac{1}{2}ay\text{ sen}2\alpha$

$(ACE) + (ECB) = \frac{1}{2}bx\text{ sen}2\alpha + \frac{1}{2}ax\text{ sen}\alpha + (ACD) + (DCE) + (ECB) = \frac{1}{2}by\text{ sen}\alpha + \frac{1}{2}xy\text{ sen}\alpha + \frac{1}{2}ax\text{ sen}\alpha$

Igualando las partes izquierdas de estas igualdades y teniendo en cuenta la condición del problema, obtenemos un sistema de ecuaciones de tres ecuaciones:

$2a\cos\alpha = x + a\frac{x}{y}$ $\quad 2b\cos\alpha = y + b\frac{x}{y}$ $\quad \frac{x}{y}=\frac{m}{n}$

Resolviendo, obtenemos que: $x=\frac{(n^2-m^2)ab}{n(bm-an)}$; $y=\frac{(n^2-m^2)ab}{m(bm-an)}$.

12. 36 018.

13. 42.

14. Sea O el punto de intersección de las medianas en el ΔABC. En la prolongación de la mediana BE trazamos $ED = OE$. Según la propiedad de las medianas, los lados del ΔCDO son iguales a $\frac{2}{3}$ de los lados del triángulo compuesto por las medianas. Designando el área de este último por S_1, tenemos: $S_1 = \frac{9}{4}$ (CDO). Por otro lado, el ΔCDO está formado por dos, y el ΔABC por 6 triángulos equidimensionales al ΔCEO. Por eso $(CDO) = \frac{1}{3}$ (ABC) y por consiguiente $\frac{s_1}{(ABC)}=\frac{3}{4}$.

15. En el ΔAOB (fig. 62) se tiene que:

sen 30° = $\dfrac{AB}{OA} = \dfrac{l_1}{OA}$ entonces $OA = 2l_1$ y $OC = AC = l_1$

de esta forma $l_4 = \dfrac{l_1}{8}$

$A_4 : A_1 = (l_4)^2 : (l_1)^2 = \dfrac{1}{64}$.

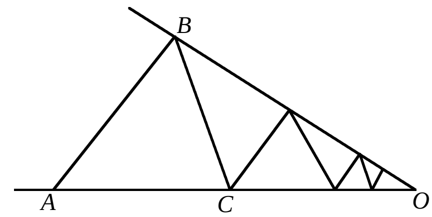

Fig. 62

16. $\dfrac{2\,003\,001}{2}$.

17. La función f es una función exponencial con base mayor que 1 por lo que una función creciente que alcanza su valor mínimo para el menor valor del exponente.
Como la representación gráfica de $x^2 - 2x$ es una parábola que abre hacia arriba, alcanza su valor mínimo en la ordenada del vértice, que es -1 para $x = 1$.

$\therefore\ 6^{-1} = \dfrac{1}{6}$ que es el valor mínimo de f.

18. a) $AB = CD = 10$ cm; $AD = BC = 7$ cm; $CE = 6$ cm $\Rightarrow DE = 16$ cm y $BE = 5$ cm.

$\cos \angle BEC = \dfrac{BE^2 + CE^2 - BC^2}{2BE \cdot CE} = \dfrac{1}{5}$, por lo que $\angle BEC = \text{arc cos } \dfrac{1}{5}$.

b) La altura del trapecio coincide con la altura del triángulo BCE. Sea h la altura buscada entonces

$h = \dfrac{2\sqrt{9 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3}}{6} = 2\sqrt{6}$ cm luego

$A_{ABED} = \dfrac{1}{2}(AB + DE) \cdot h = \dfrac{1}{2}(10 + 16) \cdot 2\sqrt{6} = 16\sqrt{6}$ cm^2.

19. La elección de las 2 niñas se puede hacer de $\dbinom{15}{2} = \dfrac{15 \cdot 14}{2!} = 105$ formas. Como debe ser 5 en total y debe haber 2 niñas exactamente, entonces los niños serán 3; estos se pueden escoger de $\dbinom{10}{3} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 120$ formas. Por tanto, el resultado es $105 \cdot 120 = 12\,600$.

20. La forma de calificar el examen es equivalente a darle a cada alumno 50 puntos al inicio del examen y quitarle 8 puntos por cada respuesta incorrecta.
Entre los tres alumnos perdieron $150 - (34 + 10 + 2) = 104$ puntos, así que fallaron en $104 : 8 = 13$ respuestas. Entre los tres contestaron $30 - 13 = 17$ preguntas acertadamente.

Olimpiada Popular Estudiantil de Matemática
Curso 2006-2007

Los estudiantes de 10mo. grado y primer año de la ETP deben resolver los problemas 1 al 14.
Los estudiantes de 11no. grado y segundo año de la ETP deben resolver los problemas 4 al 17.
Los estudiantes de 12mo. grado y tercer año de la ETP deben resolver los problemas 7 al 20.

1. Se tienen 3 tazas y tres platos de tazas. A la izquierda de la taza blanca está la taza negra; a la izquierda del plato verde está el rojo; a la derecha del plato azul está la taza gris; a la derecha de la taza gris está el plato verde. ¿Con qué taza está el plato azul?

2. La suma de dos números naturales es 968. Uno de los sumandos es divisible por 10. Si se tacha la última cifra de uno de los números se obtiene el otro sumando. Determina estos dos números.

3. La diferencia entre dos números positivos es $4\sqrt{3}$. El producto de los números es 4. Determina el valor absoluto de la diferencia de sus recíprocos.

4. Un triángulo tiene área igual a 42 cm^2 y perímetro igual a 32 cm. Calcula la longitud del radio de la circunferencia inscrita a dicho triángulo.

5. ¿Cuál de los números $\sqrt{2}^{\sqrt{8}}$ o $\sqrt{8}^{\sqrt{2}}$ es mayor?

6. Determina el menor valor entero positivo de n para el cual se cumple que la suma de los primeros cien múltiplos de n es un cuadrado perfecto.

Nota: Considera que todo número es múltiplo de sí mismo.

7. Al aumentar en 6 unidades el radio o la altura de un cilindro, el volumen aumenta en x unidades cúbicas. Si la altura original es de 2 unidades, ¿cuál es la longitud del radio original?

8. Determina la cantidad de pares ordenados que pertenecen al menos a dos de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$A = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x - 2\}$; $B = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x - 2)^2\}$; $C = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x - 2)^3\}$.

9. ¿Cuántos triángulos rectángulos cuyos lados tienen longitudes enteras, tienen un cateto de longitud igual a 15 unidades?

10. Halla todos los enteros positivos n para los cuales se cumpla que $n + 3$ divide a $n^2 + 7$.

11. Halla todos los valores naturales de n para los cuales el valor de $\dfrac{7n^3+14n+90}{n^2+2}$ es un entero.

12. Encuentra todos los pares $(x;y)$ de números enteros no negativos tales que $x^2 - 50x + 25y = 0$.

13. Se tiene un cuadrado $ABCD$ de área igual a 4 u^2, sobre la diagonal BD se sitúa el punto P tal que los segmentos BP y AB son iguales. Sobre el lado AD se sitúa el punto Q con $PQ \perp BD$. Halla el área del triángulo DPQ.

14. Expresar 657 como suma de tres números naturales cuyos cuadrados sean proporcionales a 156, 351 y 624 respectivamente.

15. ¿Cuántos números impares consecutivos hay que sumar para que su suma sea lo más próxima posible a 2 006?

16. Los lados de un polígono regular de n lados ($n > 4$) se prolongan para formar una estrella de n vértices. Determina la amplitud de cada ángulo que se forma en cada vértice de la estrella.

17. Sea p un número primo mayor que 3. Si p^2 se divide por 12, se obtiene un resto. Halla el resto de dicha división para todo p que cumpla las condiciones dadas.

18. En una circunferencia con centro en el punto $A(7;-2)$ reconoce que el punto $B(5;-8)$ es exterior y el punto $C(3;1)$ es interior. Prueba que el radio de dicha circunferencia está entre 5 u y $2\sqrt{10}$ u.

19. En la figura 63:

ΔABC rectángulo en A
$AD = 1$ u, $BD = 3$ u y $AC = 2$ u.
Determina la amplitud de la suma de $\angle ADC$ y $\angle ABC$.

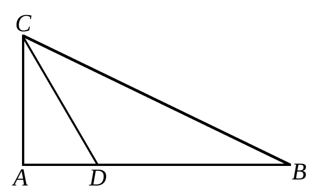

Fig. 63

20. Un cierto número de cubitos de lado uno se ponen juntos para formar un cubo más grande y algunas de las caras del cubo grande se pintan. Después de pintado se vuelven a separar los cubitos pequeños y nos damos cuenta de que 45 de los cubos pequeños no tienen caras pintadas. ¿Cuántas caras del cubo grande se pintaron?

SOLUCIONES

1. Con la taza negra.
Como la taza gris tiene a la derecha el plato verde y a la izquierda el plato azul, entonces está con el plato rojo y, en el medio de las otras dos tazas. Como la taza negra está a la izquierda de la taza blanca, entonces la taza negra es la de la izquierda y está con el plato azul.

2. 880 y 88.

968 = $\overline{ab0}+\overline{ab}$ por ser uno de ellos divisible por 10 entonces
$100a + 10b + 10a + b = 968$
$110a + 11b = 968$ y $10a + b = 88$.
$\therefore$ los números son 880 y 88.

3. $\sqrt{3}$.

Sean x y y los dos números buscados con $x - y = 4\sqrt{3}$, $xy = 4$, entonces:

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|=\left|\frac{y-x}{xy}\right|=\left|-\frac{4\sqrt{3}}{4}\right|=\left|-\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}.$$

4. 2,625 cm.

$A = \frac{1}{2}(a + b + c)r \Rightarrow r = 21 : 8 = 2,625$ cm.

5. $\sqrt{8}^{\sqrt{2}} > \sqrt{2}^{\sqrt{8}}$.

Sean $a=\sqrt{2}^{\sqrt{8}}=\sqrt{2}^{2\sqrt{2}}=2^{\sqrt{2}}$ y $b=\sqrt{8}^{\sqrt{2}}=\left(2\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$, como tienen el mismo exponente y la base de b es mayor que la base de a, entonces $b > a$ y $\sqrt{8}^{\sqrt{2}} > \sqrt{2}^{\sqrt{8}}$.

6. 202.

Se tiene que $n + 2n + 3n + \ldots + 100n = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 101 \cdot n = 5\,050n = 2 \cdot 5^2 \cdot 101 \cdot n$; para que sea cuadrado perfecto debe cumplirse que $n = 202t^2$, como se busca el menor, entonces $n = 202$.

7. 6 u.

$V = 2\pi r^2$, $V_1 = 2\pi(r+6)^2 = V + x = 2\pi r^2 + x$; $V_2 = 8\pi r^2 = 2\pi r^2 + x$ $8\pi r^2 = 2\pi(r+6)^2$

$4r^2 = r^2 + 12r + 36$ $\qquad (r-6)(r+2) = 0$ $\qquad$ El radio original mide 6 u.

$3r^2 - 12r - 36 = 0$ $\qquad r = 6$ o $r = -2$

$r^2 - 4r - 12 = 0$ $\qquad r = 6$

8. 3.

$(x-2) = (x-2)^2 \Rightarrow x - 2 = 0$ o $x - 2 = 1$ por lo que $x = 2$ o $x = 3$

$(x-2) = (x-2)^3 \Rightarrow x - 2 = 0$ o $x - 2 = 1$ o $x - 2 = -1$ por lo que $x = 2$ o $x = 3$ o $x = 1$

$(x-2)^2 = (x-2)^3 \Rightarrow (x-2)^2 = 0$ o $x - 2 = 1$ por lo que $x = 2$ o $x = 3$

$\therefore$ hay 3 pares ordenados.

9. Hay 4 triángulos rectángulos.

Sea $m^2 - n^2 = 15^2$ entonces $(m+n)(m-n) = 15^2$ teniendo los casos:

I) $m + n = 225$ y $m - n = 1$ $\qquad$ II) $m + n = 75$ y $m - n = 3$

III) $m + n = 45$ y $m - n = 5$ $\qquad$ IV) $m + n = 25$ y $m - n = 9$

Para el caso I se tiene que $m = 113$, $n = 112$.

Para el caso II se tiene $m = 39$ y $n = 36$.

Para el caso III se tiene $m = 25$ y $n = 20$.

Para el caso IV se tiene $m = 17$ y $n = 8$.

10. $n = 1$ o $n = 5$ o $n = 13$.

Tenemos que $n^2 + 7 = (n+3)^2 - 6n - 2 = (n+3)^2 - 6(n+3) + 16$.

Entonces $n + 3$ divide a $n^2 + 7$ cuando $n + 3$ divide a 16 por lo que

$n = 1$, $n = 5$ o $n = 13$.

11. $n = 0$, 1, 2 o 4.

Se tiene que $\dfrac{7n^3 + 14n + 90}{n^2 + 2} = 7n + \dfrac{90}{n^2 + 2}$ por lo que $n^2 + 2$ debe ser un divisor de 90. Haciendo $n^2 + 2$ igual a cada uno de los divisores de 90, encontramos todos los valores pedidos, estos son los siguientes: $n = 0$, 1, 2 o 4.

12. Escribamos la ecuación en la forma $x^2 - 50x = -25y$ y completemos el miembro izquierdo a un cuadrado sumando a ambos lados de la igualdad el número 25^2.

Tenemos entonces $(x - 25)^2 = 25(25 - y)$.

Como 25 es un cuadrado entonces $25 - y$ debe ser también un cuadrado. Hagamos una tabla para analizar los casos posibles:

$25 - y$	y	$x - 25$	x	Soluciones
0	25	0	25	(25;25)
1	24	± 5	30 o 20	(30;24) o (20;24)
4	21	± 10	35 o 15	(35;21) o (15;21)
9	16	± 15	40 o 10	(40;16) o (10;16)
16	9	± 20	45 o 5	(45;9) o (5;9)
25	0	± 25	50 o 0	(50;0) o (0;0)

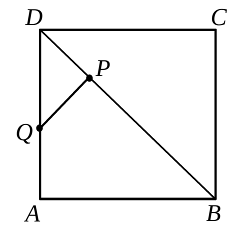

Fig. 64

13. $(6-4\sqrt{2})\ \text{u}^2$.

El lado del cuadrado (fig. 64) tiene longitud 2 u, entonces $AB = BP = 2$ u, $BD = 2\sqrt{2}$ u y $DP = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1)$, por tanto, $PQ = DP$ porque $\angle PDQ = 45°$, luego $PQ = 2(\sqrt{2} - 1)$

$A_{DPQ} = \dfrac{1}{2}[2(\sqrt{2} - 1)]^2 = (6 - 4\sqrt{2})\ \text{u}^2$.

14. $a = 146$; $b = 219$ y $c = 292$.

Sea $657 = a + b + c$ con $\dfrac{a^2}{156}=\dfrac{b^2}{351}=\dfrac{c^2}{624}$ pero mcd(156, 351, 624) = 39 con $156 = 39 \cdot 4$, $351 = 39 \cdot 9$ y $624 = 39 \cdot 16$, entonces $\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{b^2}{9}=\dfrac{c^2}{16}=k$ y $a=2\sqrt{k}$; $b=3\sqrt{k}$; $c=4\sqrt{k}$ sumando las tres igualdades, obtenemos $657=9\sqrt{k}$ y $\sqrt{k}=73$ por lo que $k = 73^2$ de donde $a = 146$; $b = 219$ y $c = 292$.

15. 45.

Debe cumplirse que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ sea un número lo más próximo posible a 2 006. Se tiene que $44^2 = 1\ 936$ y $45^2 = 2\ 025$ por lo que habrá que sumar 45 números impares consecutivos.

16. $\dfrac{180°}{n}(n-4)$.

Analicemos qué pasa para un pentágono (fig. 65) y este resultado podemos generalizarlo para $n > 4$.

$$\angle C = 180° - (\angle A + \angle B) = 180° - 2\angle A = 180°-2\left[180°-\frac{180°(n-2)}{n}\right]=\frac{180°}{n}(n-4).$$

17. 1.

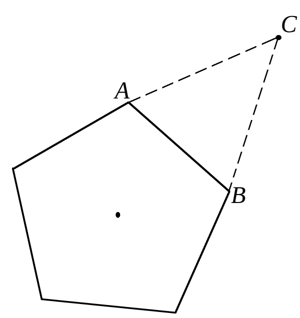

Fig. 65

Sea $p^2 - 1 = (p + 1)(p - 1)$ luego $p^2 - 1$ es divisible por 4, ya que $p + 1$ y $p - 1$ son ambos pares. Como $p = 6m \pm 1$, entonces $p + 1$ o $p - 1$ es divisible por 3 por lo que $p^2 - 1$ divide a 12 y p^2 deja resto 1 en la división por 12.

18. La ecuación de la circunferencia dada es $(x-7)^2+(y+2)^2=r^2$ entonces $\overline{AB}=2\sqrt{10}\,u$, $\overline{AC}=5\,u$, por lo que el radio r cumple que $5\,u<r<2\sqrt{10}\,u$.

19. 90°.

En ΔABC rectángulo en A tenemos $\tan\angle ABC=\frac{1}{2}$ y $\tan\angle ADC=2$

$\tan(\angle ADC+\angle ABC)=\dfrac{\tan ADC+\tan ABC}{1-\tan ADC\cdot\tan ABC}=\dfrac{\frac{5}{2}}{0}$ no está definida. Luego $\angle ADC+ABC=90°$.

20. 4 caras.

Observemos que $45=3\cdot3\cdot5=45$. Si formamos un prisma con cubitos no pintados y con estas dimensiones. Si le agregamos cubitos para formar un cubo, el cubo con los lados más pequeños que se puede formar es uno de $5\cdot5\cdot5$. Si pintamos las cuatro caras verticales de este cubo (no se pintan las bases), adentro habrá 45 cubitos no pintados, luego este es solución.

Si el cubo es mayor, digamos de $6\cdot6\cdot6$, este tiene un cubo interior de $4\cdot4\cdot4=64>45$, por lo que no se puede.

Si el cubo es más pequeño no se puede meter el prisma inicial. Por lo que el cubo inicial es de lado 5 y se pintaron cuatro caras.

OLIMPIADA POPULAR ESTUDIANTIL DE MATEMÁTICA
CURSO 2007-2008

Los estudiantes de 10mo. grado deben resolver los problemas 1 al 14.
Los estudiantes de 11no. grado deben resolver los problemas 4 al 17.
Los estudiantes de 12mo. grado deben resolver los problemas 7 al 20.

1. Considera la sucesión 2, 1, 3, 1, 1, 5, 1, 1, 1, 7, … formada por unos y números primos en orden ascendente. Cuando escribas el número 41, ¿cuántas cifras unos habrás escrito en total?

2. Si la suma de dos números positivos p y q es n y la suma de sus recíprocos es m, calcula el valor de $(p - q)^2$.

3. Determina el menor entero n para que $30! \cdot n$ sea un cuadrado perfecto.

4. Escribe de todas las formas posibles el número 75 como suma de varios números positivos consecutivos.

5. El número -1 es una raíz de la ecuación de segundo grado $3x^2 + bx + c = 0$. Si los coeficientes b y c son números primos, ¿cuál es el valor de $3c - b$?

6. La recta r cuya ecuación es $2x - y + 3 = 0$ es reflejada respecto a la recta s de ecuación $x - y + 1 = 0$ obteniendo la recta r_1. ¿Cuál es la ecuación de r_1?

7. ¿Cuál es el mayor entero positivo n tal que $(n + 10)$ divida a $(n^3 + 100)$?

8. ¿Cuántos números positivos de dos cifras existen tales que la diferencia entre el número y el producto de sus dígitos sea 12?

9. En un triángulo ABC las medianas correspondientes a los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ son perpendiculares. Si $\overline{BC} = a$ y $\overline{AC} = b$, halla la longitud del lado $\overline{AB}$.

10. Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos situados sobre una circunferencia. El lado del cuadrado que no tiene como extremo ninguno de estos vértices es tangente a la circunferencia. Calcula la razón entre el área del cuadrado y la del círculo dados.

11. Sean a, b, c, d números enteros positivos tales que $a^5 = b^4$, $c^3 = d^2$, $c - a = 19$. Halla el menor valor que puede tomar $d - b$.

12. Si $a_n = 6^n + 8^n$. Determina el resto al dividir $a_{1\,991}$ entre 49.

13. En el triángulo ABC, el punto E en el lado $\overline{AB}$ es tal que $\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{1}{3}$, y el punto D del lado $\overline{BC}$ es tal que $\frac{\overline{CD}}{\overline{DB}} = \frac{1}{2}$. Si F es el punto de intersección de $\overline{AD}$ con $\overline{CE}$, halla el valor de $\frac{\overline{AF}}{\overline{FD}}$.

14. Halla todos los pares $(x;y)$ de números reales, que son solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (x+y)^2 + 3(x+y) = 4 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

15. Resuelve: $x^2 + 3 - \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 1{,}5(x+4)$.

16. En el ΔABC isósceles se tiene que $\angle ACB = 100°$. En su interior se ha situado un punto M de manera que $\angle MAB = 30°$ y $\angle MBA = 20°$. Halla la amplitud del $\angle ACM$.

17. Se tienen 5 rectas en el plano de manera que no hay 2 que sean paralelas, no hay 3 que pasen por un mismo punto y no hay 4 que sean tangentes a una circunferencia. ¿Cuántas circunferencias hay que sean tangentes a 3 de las 5 rectas?

18. En el triángulo ABC se conoce que $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$ y $\cos \angle ACB = \frac{3}{4}$. En el lado AC se toma el punto D de manera tal que $\frac{CD}{AD} = \frac{1}{3}$. Halla la razón entre el radio de la circunferencia circunscrita al ΔABC y el radio de la circunferencia inscrita en el ΔABD.

19. Demuestra que para todos los números reales a, b, c se satisface la inecuación:
$a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \geq 6abc$.

20. Encuentra todas las parejas $(a;b)$ de enteros no negativos tales que: $a^2 = 3 \cdot 2^b + 1$.

Soluciones

1. 85.

Observemos que el número de unos que se han escrito antes de poner el $(n + 1)$-ésimo número primo es $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Como el 41 es el décimo tercer número primo y, además, aparecen el 11, el 13, el 17, el 19, el 31 y el 41, el número de unos que se han escrito es $1 + 2 + \ldots + 12 + 7 = (6)(13) + 7 = 85$.

2. $\dfrac{mn^2 - 4n}{m}$.

Se tiene que $p + q = n$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{p+q}{pq} = \frac{n}{pq} = m$ entonces $pq = \frac{n}{m}$

$(p - q)^2 = p^2 - 2pq + q^2 = (p + q)^2 - 4pq = n^2 - 4\frac{n}{m} = \frac{mn^2 - 4n}{m}$.

3. $n = 5 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 = 1\ 077\ 205$.

4. Hay 5 formas posibles.

Si hay una cantidad impar de sumandos, el central debe ser un divisor de 75 y si tienen que ser todos positivos, como central debe ser $75 : 3 = 25$ o $75 : 5 = 15$ teniendo $24 + 25 + 26$, $13 + 14 + 15 +$ $+ 16 + 17$.

Si hay una cantidad par de sumandos $2n$, hay n parejas que suman lo mismo, por lo que la pareja central sumará $75 : n$.

Si $n = 1$ tenemos $37 + 38$.

$n = 3$ la pareja central suma $75 : 3 = 25 = 12 + 13$ teniendo $10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15$.

$n = 5$ la pareja central suma $75 : 5 = 15 = 7 + 8$ teniendo $3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12$.

El próximo divisor de 75 es 15, entonces la pareja central debe sumar $75 : 15 = 5$, entonces habrían números negativos y no hay más soluciones.

5. 1.

Si -1 es raíz de la ecuación $3x^2 + bx + c = 0$, entonces $3 - b + c = 0$, de donde $b - c = 3$.

Si la diferencia de dos números es impar entonces uno debe ser par. El único número primo par es el 2 por lo que $c = 2$ y $b = 5$, y $3c - b = 1$.

6. $r_1 : y = \dfrac{1}{2}x.$

Las rectas r y s se cortan en el punto $R(-2;-1)$, consideremos un punto cualquiera de r, tomemos $P(0;3)$. La recta $y = -x + 3$ es la recta perpendicular a s que pasa por P y la corta en (1;2); así que P' simétrico de P respecto a s, sería el otro extremo de un segmento cuyo centro es (1;2) y un extremo es P, es decir, $P'(2;1)$, con lo que la recta r_1 será la que pasa por R y por P', es decir, $y = \dfrac{1}{2}x$.

7. 890.

8. 28 o 39.

Sea $\overline{ab}$ el número buscado, entonces $\overline{ab} = 10a + b$ por lo que debe cumplirse que

$10a + b - ab = 12$, es decir, $10a - 10 + b - ab = 2$ teniendo $10(a - 1) - b(a - 1) = 2$

$(a - 1)(10 - b) = 2$, entonces $a - 1 = 2$ y $10 - b = 1$ o $a - 1 = 1$ y $10 - b = 2$

Para el primer caso $a = 3$, $b = 9$ y en el segundo caso $a = 2$ y $b = 8$ teniendo los números 28 y 39.

9. $AB = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{5}}.$

10. $\dfrac{64}{25\pi}.$

Consideremos la figura 66 de análisis donde r es el radio de la circunferencia y $r + x$ es la longitud del lado del cuadrado, entonces por el teorema de Pitágoras se tiene

$r^2 = x^2 + \left(\dfrac{r + x}{2}\right)^2$ de donde $3r = 5x$

el lado del cuadrado es $r + \dfrac{3r}{5} = \dfrac{8r}{5}$ y su área $\dfrac{64r^2}{25}$.

La razón pedida es $\dfrac{64r^2}{25} : \pi r^2 = \dfrac{64}{25\pi}$.

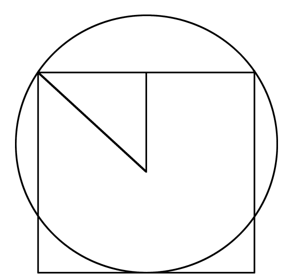

Fig. 66

11. 757.

Como $c - a = 19$ se tiene que $c = a + 19$ y $a = c - 19$, de aquí tendremos que $c > 19$ y $c > a$.

Como $c^3 = d^2$, c^3 y d^2 contienen los mismos factores primos cuando se descomponen

$c = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \ldots;\ d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \ldots$ Entonces $p_1^{3\alpha_1} \cdot p_2^{3\alpha_2} \ldots = p_1^{2\beta_1} \cdot p_2^{2\beta_2} \ldots$

Esto quiere decir que todos los exponentes de los factores primos en la descomposición canónica de c^3 y d^2 son divisibles por 2 y por 3, es decir, por 6.

Con el mismo razonamiento podemos concluir que todos los exponentes que aparecen en la descomposición canónica de a^5 o b^4 son divisibles por 5 y 4, es decir, por 20, por lo tanto, el valor más pequeño que puede tomar a^5 o b^4 sería 2^{20}.

Pero si $a^5 = b^4 = 2^{20}$ entonces $a = 16$ por lo que $c = 35$, es decir, $c = 5 \cdot 7$, entonces $c^3 = 5^3 \cdot 7^3$ y estos exponentes no son divisibles por 6.

El segundo valor que pueden tomar es 3^{20} y en este caso $a = 3^4 = 81$

$c = 81 + 19 = 100$, $c = 2^2 \cdot 5^2$ y $c^3 = 2^6 \cdot 5^6$

En este caso se tienen exponentes que sí son divisibles por 6.

Entonces $a^5 = b^4$

$$81^5 = b^4$$
$$3^{20} = b^4$$
$$b = 243$$

Por otra parte $d^2 = c^3$

……….$d = 1\ 000$

Por lo tanto, $d - b = 757$.

12. 42.

$a_{1\,991} = 6^{1\,991} + 8^{1\,991} = 6^{7(284)+3} + 8^{7(284)+3} \equiv 1 \cdot 20 + 1 \cdot 22 = 42$.

13. 1.

Sean a, b, c, d las áreas de los triángulos AEF, EDF, DCF, CAF respectivamente.

$\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FD}} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{d}{c} = \dfrac{a+d}{b+c}$ (propiedad de las proporciones)

$a + d = \dfrac{1}{4} A_{\Delta ABC}$ y $b + c = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{4} A_{\Delta ABC}$. Por lo tanto, $\dfrac{\overline{AF}}{FD} = 1$.

14. (–2;3) y (3;–2).

15. $\dfrac{7}{2}$ y –2.

Al multiplicar por 2 tenemos

$2x^2 + 6 - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 3x + 12$

$2x^2 - 3x + 2 - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 2} - 8 = 0$

Si sustituimos $K = \sqrt{2x^2 - 3x + 2}$ tenemos $k^2 - 2k - 8 = 0$.

Luego $K = 4$ o $K = -2$.

Por lo que tenemos ahora que sustituir y resolver las ecuaciones con radicales.

De la segunda no obtenemos solución alguna. De la primera obtenemos las soluciones $\dfrac{7}{2}$ y –2.

16. 20°.

Primeramente tracemos los segmentos $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$.

Luego tracemos las perpendiculares a los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, cuyos pies son los puntos C_1, A_1 y B_1 respectivamente. Supongamos que $\overline{CM} = a$.

En el ΔCMB_1 hallamos $\overline{MB_1} = \overline{MC}$ sen$x = a \cdot$ sen$x$

ΔABC es isósceles y, por lo tanto, $\angle CAM = 10°$.

En el ΔAMB_1 tenemos que $\overline{AM} = \dfrac{\overline{MB_1}}{\text{sen}\,10°} = \dfrac{a\text{sen}\,x}{\text{sen}\,10°}$

En el ΔAMC_1 tenemos $\overline{MC_1} = \overline{AM}\ \text{sen}30° = \dfrac{a\text{sen}\,x}{2\text{sen}\,10°}$

Pero en ΔCMA_1 el $\angle MCA_1 = 100° - x$ por lo que

$\overline{MA_1} = \overline{CM}\ \text{sen}(100° - x) = a\text{sen}(100° - x)$, pero como $\angle MBC = 20°$, entonces

$\Delta BMC_1 = \Delta BMA_1$ y como consecuencia $\overline{MC_1} = \overline{MA_1} = a \cdot \text{sen}(100° - x)$

Igualando tenemos $\dfrac{a\text{sen}\,x}{2\text{sen}\,10°} = a \cdot \text{sen}(100° - x)$ y resolviendo esta ecuación llegamos a que $x = 20°$.

17. 40.
Se tiene que para cada tres de estas rectas hay precisamente 4 circunferencias que son tangentes a las tres. Por las condiciones dadas, ninguna de estas 4 circunferencias vuelve a aparecer para alguna otra terna de rectas.

$\therefore$ hay en total $4\dbinom{5}{3} = 40$ circunferencias.

18. $\dfrac{8}{7}(2+\sqrt{2})$.

19. $a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) = a^2 + a^2b^2 + b^2 + b^2c^2 + c^2 + c^2a^2 =$
$= (a - bc)^2 + 2(abc) + (b - ac)^2 + 2(abc) + (c - ab)^2 + 2(abc) \geq 6abc$.

20. Las soluciones son $a = 2$, $b = 0$; $a = 5$, $b = 3$; y $a = 7$, $b = 4$.
De la ecuación tenemos que $3 \cdot 2^b = a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$.
De los dos números $a - 1$ y $a + 1$, uno debe ser potencia de 2 y el otro el triplo de una potencia de 2, hay dos posibilidades:

Caso 1:
$a - 1 = 2^m$ y $a + 1 = 3 \cdot 2^n$. Tenemos que $3 \cdot 2^n = 2^n + 2$. Si $m = 0$, el miembro derecho es 3 y entonces n también es cero, de donde $b = m + n$. Así obtenemos la solución $a = 2$, $b = 0$. Si $m > 0$, el miembro derecho es par y, por lo tanto, n también es mayor que cero. Si $m = 1$ obtenemos $3 \cdot 2^{n-1} = 2$ que es imposible. Cuando m es mayor o igual que 2 el lado derecho es impar y entonces, para que el miembro izquierdo lo sea, n debe ser 1. De $n = 1$ obtenemos la solución $a = 5$, $b = 3$.

Caso 2:
$a - 1 = 3 \cdot 2^m$ y $a + 1 = 2^n$. Ahora tenemos que $2^n = 3 \cdot 2^m + 2$. El miembro derecho es por lo menos $3 \cdot 2^0 + 2 = 5$, de modo que n es mayor o igual que 3. Ahora sabemos que el miembro izquierdo es múltiplo de 8. Si m es mayor o igual que 2, el miembro derecho ni siquiera sería múltiplo de 4, por lo tanto, $m < 2$. Con $m = 0$ se tiene $2^n = 5$ que es imposible y con $m = 1$ se obtiene $n = 3$, de donde $b = 4$ y $a = 7$.
Por lo tanto, las soluciones son $a = 2$, $b = 0$; $a = 5$, $b = 3$; y $a = 7$, $b = 4$.

Olimpiada Popular Estudiantil de Matemática
Curso 2008-2009

Los estudiantes de 10mo. grado deben resolver los problemas 1 al 14.
Los estudiantes de 11no. grado deben resolver los problemas 4 al 17.
Los estudiantes de 12mo. grado deben resolver los problemas 7 al 20.

1. Adriana tenía muchas monedas de tres pesos. Después de darle un tercio del total a Ariel y un cuarto del total a Diego, le quedan 35. ¿Cuánto dinero tenía?

2. Al aumentar en la misma proporción la longitud de los lados de un cuadrado, su área aumenta en un 69 %. ¿Qué porcentaje aumentaron sus lados?

3. Sea f una función numérica tal que $f(2) = 3$, y $f(a + b) = f(a) + f(b) + ab$, para todos a y b del dominio. Calcula $f(11)$.

4. Determina la mayor cantidad de días lunes que puede haber en un período de 45 días consecutivos.

5. ¿Cuántos triángulos isósceles diferentes de perímetro 25 cm y lados de longitudes enteras pueden formarse?

6. Calcula la suma de todos los enteros entre 50 y 350, los cuales terminan en 1.

7. En el triángulo ABC (fig. 67), $\overline{AB} = 1$ u, $\overline{BC} = 2$ u y $\angle ABC$ es de 72°. Se rota el triángulo ABC en el sentido de las manecillas del reloj, fijando el vértice B, obteniéndose el triángulo $A'BC'$. Si A, B, C' son colineales y el arco AA'' es el descrito durante la rotación, ¿cuál es la medida del área sombreada?

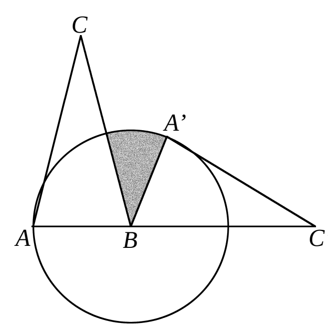

Fig. 67

8. En un grupo de 40 estudiantes, 20 juegan a la pelota, 19 juegan baloncesto y 6 juegan tanto pelota como baloncesto. ¿Cuántos estudiantes no juegan ni pelota ni baloncesto?

9. Consideremos los números de 5 cifras formados por los dígitos 1 y 2 solamente. ¿En cuántos de ellos aparece el 1 más veces que el 2?

10. Una señora dice: Tengo hijos de tres edades distintas. El mayor es todavía menor de edad y el número de años cumplidos por él es múltiplo de seis. La suma de los años de mis hijos es 28. El más pequeño será el primero en celebrar su cumpleaños y cumplirá la mitad de los que tiene el mayor. Determina sus edades.

11. De un triángulo equilátero de 9 cm de lado se recortan tres triángulos equiláteros como se indica en la figura 68 y se obtiene un hexágono regular. Calcula el área del hexágono.

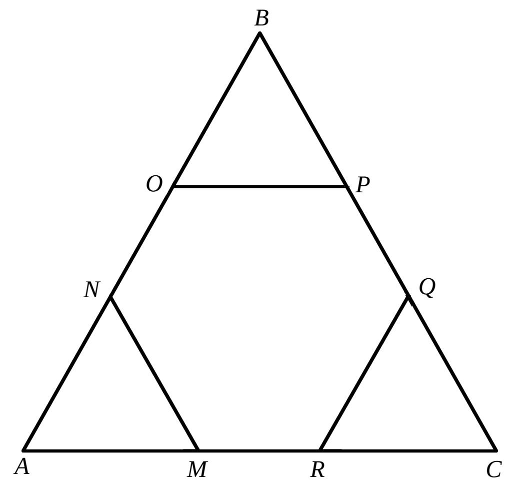

Fig. 68

12. Un triángulo rectángulo tiene una hipotenusa de 6 cm y un perímetro de 14 cm. ¿Cuál es su área?

13. Tenemos nueve bolas con el mismo aspecto exterior, de ellas ocho son iguales y la otra más pesada que las demás. Con una balanza de platillos se puede encontrar la bola desigual con solo dos comparaciones. ¿Cómo lo harías?

14. Sean $ABCD$ un cuadrado y a la longitud de su lado. Además, sea X un punto movible sobre la diagonal $\overline{DB}$. El pie de la perpendicular a AB trazada por X sea E, y el pie de la perpendicular a DA que pasa por X sea F. Demuestra:

a) La suma de las longitudes de los segmentos $\overline{XE}$ y $\overline{XF}$ es igual a a.

b) Los segmentos $\overline{CF}$ y $\overline{DE}$ tienen la misma longitud y son respectivamente perpendiculares.

15. Cuatro números primos tienen la estructura siguiente: AA; BAB; $BACD$; $AAAC$. Sabiendo que cada letra representa una cifra y que letras iguales corresponden a cifras iguales, ¿cuáles son esos números?

16. Se sabe que el polinomio $p(x) = x^3 - x + k$ tiene tres raíces que son números enteros. Determina el valor de k.

17. Pablo eligió tres dígitos distintos y escribió todos los números de 3 cifras que se forman con ellas (sin repeticiones). Después sumó todos los números que obtuvo. Calcula la suma que obtuvo Pablo si la suma de los dígitos originales es 14.

18. Un señor va al mercado a comprar aceite, leche y vino. Para eso lleva 9 recipientes cuyas capacidades son: 3, 6, 10, 11, 15, 17, 23, 25 y 30 litros respectivamente. Compra el doble de vino que de aceite y el triple de leche que de vino. Todos sus recipientes están completamente llenos, salvo uno que está vacío. ¿Puedes indicar, razonando la respuesta, qué recipientes ha utilizado para cada producto?

19. Dos jugadores dicen alternativamente un número del 1 al 5 y van sumando todos los números dichos por uno y otro. El jugador que primero alcance el número 33 gana. ¿Qué número es mejor decir si sales tú?

20. Un niño quiere subir una escalera, lo cual puede hacer subiendo uno o dos escalones a la vez. Si la escalera tiene 10 escalones en total, ¿de cuántas formas distintas puede subir las escaleras?

Soluciones

1. 252 pesos.

Sea x la cantidad de monedas que tenía Adriana entonces $\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x = x - 35$, llegando a la ecuación $\frac{5}{12}x=35$ donde $x = 84$. Como son monedas de tres pesos tenía 252 pesos.

2. 30 %.

Sean a la longitud del lado del cuadrado y x, la cantidad de unidades lineales en que aumenta cada lado, entonces se tiene $(x + a)^2 = \frac{169}{100}a^2$ llegando a la ecuación
$100x^2 + 200ax - 69a^2 = 0$, es decir, $(10x + 23a)(10x - 3a) = 0$ cuyas soluciones son
$x = -2{,}3a$ y $x = 0{,}3a$ que es igual al 30 %.

3. 66.

$f(2) = 3 = f(1 + 1) = f(1) + f(1) + 1 \cdot 1 = 2f(1) + 1$, entonces $f(1) = 1$

$f(3) = f(2 + 1) = f(2) + f(1) + 2 \cdot 1 = 3 + 1 + 2 = 6$

$f(4) = f(2 + 2) = 2f(2) + 2 \cdot 2 = 10$

$f(8) = f(4 + 4) = 2f(4) + 16 = 36$

$f(11) = f(8 + 3) = f(8) + f(3) + 8 \cdot 3 = 66$.

4. 7.

La mayor cantidad de lunes se dará cuando el primero o el segundo o el tercero de los 45 días sea un lunes y en este caso habrá 7.

5. 6.

Los dos lados iguales deben tener una longitud mayor o igual a 7 y una longitud menor o igual a 12, dando un total de seis posibilidades: 7, 8, 9, 10, 11, 12.

6. 5 880.

Los números que serán sumados forman una progresión aritmética cuyo primer término es $a = 51$, el último término es $t = 341$ y la diferencia común es 10. Sea n el número de términos que serán sumados, entonces $341 = 51 + (n - 1)10$, de donde obtenemos que $n = 30$. Ahora para calcular su suma S, usamos la fórmula $S = \frac{1}{2}n(a + 1)$. De aquí obtenemos finalmente que $S = 15 \cdot 392 = 5\ 880$.

7. $\frac{\pi}{10}u^2$.

El ángulo $A\acute{}BC$ mide 180° – 2(72°) = 36°. Por lo tanto, la región sombreada es $\frac{36°}{360°}=\frac{1}{10}$ del área del círculo con centro en B y radio $\overline{AB}$, que es $\pi(1^2)=\pi$. Por eso el área sombreada es igual a $\frac{\pi}{10}u^2$.

8. 7.
La cantidad de estudiantes que juegan algún deporte es igual al número que juegan pelota más el número que juegan baloncesto menos el número que juegan ambos, es decir, 20 + 19 – 6 = 33 por lo que la cantidad de estudiantes que no juegan ninguno de los dos deportes es 40 – 33 = 7.

9. 16.
Como 5 es impar, cada número de los considerados, o tiene más dígitos iguales a 1 o tiene más dígitos iguales a 2. Del total de los números considerados, los que tienen más dígitos 1 que 2 son la mitad. Veamos cuántos números de 5 cifras se forman con los dígitos 1 y 2. En cada posición tenemos dos posibilidades, 1 o 2. Son 5 posiciones, por lo tanto, hay $2^5 = 32$ números. La mitad de ellos es 16. (Los alumnos pueden hacer este ejercicio también por conteo).

10. El mayor tiene 12 años, el menor, 5 años y el mediano, 11 años.
La edad del mayor ha de ser 6 años o 12 años. Si el mayor tuviera 6 años, el más pequeño tendría 2 años y la suma de las tres edades no podría ser 28 años. Luego la edad del mayor es 12 años, la del menor es 5 años y la del mediano, 11 años.

11. $\frac{27\sqrt{3}}{2}\text{cm}^2$.

$\overline{AC}=9$; La altura del triángulo ABC será $h = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ (fig. 69); el área del triángulo ABC = $\frac{81\sqrt{3}}{4}$ cm^2. El área del hexágono $MNOPQR$ = $\frac{2}{3}$ del área del triángulo $ABC=\frac{27\sqrt{3}}{2}\text{cm}^2$ (fig. 68).

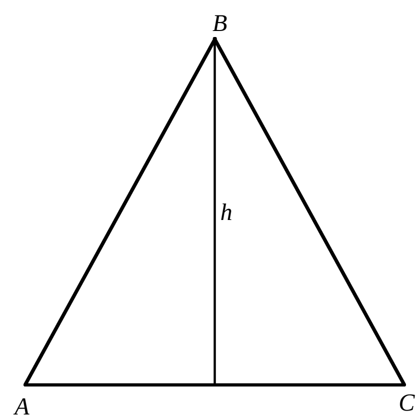

Fig. 69

12. 3,5 cm^2.
Un triángulo rectángulo tiene hipotenusa 6 y perímetro 14, ¿cuál es su área? Sean a y b las longitudes de los catetos del triángulo dado, entonces se tiene que:
$a + b = 8$, $a^2 + b^2 = 36$ y $a^2 + 2ab + b^2 = 64$ de donde $2ab = 28$ y $ab = 14$ por lo que el área del triángulo es 3,5 cm^2.

13. Hacemos tres lotes, de tres bolas cada uno, y les llamamos 3*a*, 3*b* y 3*c*. Comparamos 3*a* y 3*b*. Puede ocurrir:

a) que pesen lo mismo b) que pesen diferente

a) Si pesan lo mismo, entonces la bola más pesada está en el lote 3*c*. Llamamos c_1, c_2 y c_3 a las tres bolas de este lote y comparamos con la balanza c_1 y c_2.
- Si pesan lo mismo, entonces c_3 es la que pesa más.
- Si pesan diferente, la que pesa más es la que buscamos.

b) Si pesan diferente, entonces la defectuosa está en el lote que pesa más y procedemos como en el caso anterior.

14. a) Para cada posición de *X* sobre $\overline{DB}$ y derivada de esta, de *E* sobre $\overline{AB}$ y *F* sobre $\overline{AD}$ se cumple:

$\angle XFD = 90°$

$\angle FDX = \angle ADB = 45°$.

Luego *DFX* es isorrectángulo y $\overline{XF} = \overline{DF}$. (1)

Además:

$\overline{XE} = \overline{FA}$ por ser *AEXF* rectángulo. (2)

De (1) y (2) resulta: $\overline{XE} + \overline{XF} = \overline{AD}$.

b) El punto de intersección de $\overline{CF}$ y $\overline{DE}$ sea *Y*.

De (1) resulta $\overline{DF} = \overline{AE}$.

$\overline{DC} = \overline{AD}$ y $\angle CDF = \angle DAE = 90°$ por ser *ABCD* cuadrado.

Por tanto, $\Delta CDF = \Delta DAE$ por tener dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales.

Luego $\overline{CF} = \overline{DE}$ por lados homólogos en triángulos iguales.

$\angle DCY + \angle CDY = \angle DCF + \angle CDE = \angle ADE + \angle CDE = 90°$.

Luego $\angle CYD = 90°$ por suma de ángulos interiores en un triángulo.

15. 11, 919, 9 173, 1 117.

AA; *BAB*; *BACD*; *AAAC* son números primos entonces *A*, *B*, *C* y *D* representan a cifras impares. Para que *AA* sea primo, *A* tiene que ser 1.

Si 111*C* es primo, *C* no puede ser 3 ni 9, ya que 111*C* sería múltiplo de 3. *C* no puede ser 5 porque 111*C* sería múltiplo de 5. Luego *C* = 7.

Si *B*1*B* es primo, *B* no puede ser 5. *B* tendrá que ser 3 o 9.

Si *B* = 3, entonces *D* = 9 y el número *BACD* = 3 179 es múltiplo de 11. Como esto no puede ser porque *BACD* es primo, entonces:

B = 9 y *D* = 3. Los números son: 11; 919; 9 173; 1 117.

16. 0.

Para $k = 0$ tenemos $p(x) = x^3 - x = x(x - 1)(x + 1)$, que tiene raíces 0, –1 y 1.

Se demuestra que este es el único valor de k para el cual $p(x)$ tiene tres raíces enteras.

En efecto, si a, b, c son enteros, y $p(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$, resultan las ecuaciones

$a + b + c = 0$; $ab + ac + bc = -1$; $abc = k$, entonces

$(a + b + c)^2 = 0 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = a^2 + b^2 + c^2 - 2$

Es decir, $a^2 + b^2 + c^2 = 2$, a^2, b^2, c^2 son enteros no negativos. Necesariamente uno de los valores a, b o c deberá ser nulo, con lo que $k = -abc = 0$.

También pueden representar $q(x) = x^3 - x$, y observar que $q(x) + k$ no puede tener tres raíces enteras, pues no hay enteros ni en (–1,0) ni en (0,1).

17. 3 108.
Sean a, b y c los dígitos que eligió Pablo. Con ellos formó seis números distintos y luego los sumó. Cuando puso los números en columna para sumarlos, en la columna de cada cifra le quedan la misma cantidad de a, b y c. Como son seis números, le quedaron dos de cada uno en la suma final

$2(a + b + c)100 + 2(a + b + c)10 + 2(a + b + c) = 3\ 108$.

18. Si llamamos a al número de litros de aceite: litros de aceite = a; litros de vino = $2a$; litros de leche = $6a$.
El número de litros total que adquiere es un múltiplo de 9.
La capacidad total de los recipientes es 140 L.
Hay que eliminar uno de forma que la capacidad resultante sea un número múltiplo de 9. El que tenemos que quitar no es múltiplo de tres:

$140 - 10 = 130$ no es múltiplo de 9

$140 - 11 = 129$ no es múltiplo de 9

$140 - 17 = 123$ no es múltiplo de 9

$140 - 23 = 117$ sí es múltiplo de 9

$140 - 25 = 115$ no es múltiplo de 9.

Por lo tanto, queda vacío el recipiente de 23 L, y los otros 8 recipientes sumarán 117 L. Como $117 = 9 \cdot 13$ (tabla 23).

Tabla 23

Producto	Cantidad (en litro)	Recipientes (en litro)
Aceite	13	3 + 10
Vino	26	11 + 15
Leche	78	6 + 17 + 25 + 30

19. El 3.
Una buena forma de abordar este tipo de problemas es partir de la última jugada.
Supongamos que los dos jugadores son A y B.
Para que A pueda escribir 33, B habrá escrito 28, 29, 30, 31 o 32.
Si el jugador A escribe 27, entonces gana.
Si el jugador A escribe 21, gana; y si escribe 15 y si escribe 9 y si escribe 3, entonces gana. La secuencia ganadora será: $\boxed{3}$, $\boxed{9}$, $\boxed{15}$, $\boxed{21}$, $\boxed{27}$ y $\boxed{33}$

20. 89.
Para contar el número de formas distintas de subir los escalones, dividiremos el conteo en casos dependiendo del número de veces que subió dos escalones a la vez:

I) Solamente sube escalones de uno en uno. Una posibilidad.
II) Solamente en una ocasión sube 2 escalones a la vez. El número de posibilidades aquí es equivalente a la cantidad de permutaciones distintas de un dos y ocho unos. Nueve posibilidades.

III) En dos ocasiones sube dos escalones a la vez. El número de posibilidades aquí es equivalente a la cantidad de permutaciones distintas de dos doses y seis unos. 28 posibilidades.

IV) En tres ocasiones sube dos escalones a la vez. Permutaciones de tres doses y cuatro unos. 35 posibilidades.

V) En cuatro ocasiones sube dos escalones a la vez. Permutaciones de cuatro doses y dos unos. 15 posibilidades.

VI) En cinco ocasiones sube 2 escalones a la vez. Una posibilidad.

Por lo tanto, el niño puede subir los escalones de 89 formas distintas.

Concurso Nacional de Matemática
Temario común
Curso 2005-2006

1. Cada uno de los n estudiantes de una clase le mandó una tarjeta a cada uno de m compañeros. Demuestra que si $2m + 1 > n$, entonces al menos dos estudiantes se mandaron tarjetas entre sí.

2. n personas numeradas de 1 hasta n están dispuestas en fila. Un *movimiento admisible* consiste en que cada persona cambia a lo sumo una vez su lugar con otra o permanece en su lugar.
Por ejemplo (tabla 24),

Tabla 24

Posición inicial	1	2	3	4	5	6	...	$n-2$	$n-1$	n
Posición final	2	1	3	6	5	4	…	n	$n-1$	$n-2$

Es un *movimiento admisible.*

¿Es posible que partiendo de la posición

1	2	3	4	5	6	...	$n-2$	$n-1$	n

se llegue a

n	1	2	3	4	5	...	$n-3$	$n-2$	$n-1$

mediante dos *movimientos admisibles?*

3. Se pintan k casillas de un tablero cuadriculado de $m \times n$ de tal manera que se cumpla la siguiente propiedad:
Si los centros de cuatro casillas son los vértices de un cuadrilátero de lados paralelos a los bordes del tablero, entonces a lo más dos de estas casillas deben estar pintadas.
Encuentra el mayor valor posible de k.

Soluciones

1. Cada alumno envió m tarjetas, luego en total se mandaron mn tarjetas. A cada tarjeta le asociamos un par de alumnos (A,B): el que la envía y el que la recibe.
Es posible formar $n(n-1)$ pares distintos, pero si ningún par de estudiantes se mandaron tarjetas entre sí, esta cantidad se reduce a $\frac{n(n-1)}{2}$ (si está el par (A,B) no está el par (B,A). En tal caso: $nm \le \frac{n(n-1)}{2}$ por lo que $2mn \le n(n-1)$ entonces $2m + 1 \le n$. Absurdo, por lo tanto, al menos dos estudiantes se mandaron tarjetas entre sí.

2. Sí, es posible.

Primer movimiento:

Se intercambia 1 con n, 2 con $n-1$, 3 con $n-2$, etc. Si n es par, todos habrán cambiado una vez su lugar con otro. Si n es impar, $\frac{n+1}{2}$ permaneció en su lugar y todos los demás intercambiaron su posición con otra persona.

Segundo movimiento:

n queda en su lugar y se intercambian $n-1$ con 1, $n-2$ con 2, $n-3$ con 3, etc. Si n es par n y $\frac{n}{2}$ quedaron en su lugar y todos los demás intercambiaron una vez su posición con otra persona. Si n es impar, n permaneció en su lugar y todos los demás intercambiaron una vez su posición con otra persona.

Queda:

n	1	2	3	4	5	...	$n-3$	$n-2$	$n-1$

3. Diremos que un tablero T de $m \times n$ casillas ($m, n \ge 1$), es *colorido* si tiene algunas casillas pintadas de tal manera que si los centros de cuatro casillas del tablero forman un cuadrilátero de lados paralelos a los bordes del tablero, a lo más dos de estas casillas se encuentren pintadas. Sea también f_T la cantidad de casillas pintadas que tiene T.

Probaremos por inducción que para todo entero $k \ge 2$, se cumple que si $k = m + n$ $(m \ge 1, n \ge 1)$ y T es un tablero colorido de $m \times n$ casillas, entonces:

$$\begin{cases} f_T \le k-1, & si\ m=1 \text{ o } n=1 \\ f_T \le k-2, & si\ m \ge 2 \text{ y } n \ge 2 \end{cases} \qquad (1)$$

Para $k = 2$, el tablero T es de 1×1. Luego, a lo más una casilla estará pintada, con lo cual $f_T \leq 1 = 2 - 1$.
Supongamos que la proposición es cierta para todo k, $2 \leq k \leq r$. Probaremos que la proposición también es cierta para $k = r + 1$.
Consideremos el tablero colorido T de $m \times n$ con $m + n = r + 1$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $m \geq n$. De aquí, $2m \geq m + n = r + 1 \geq 3$, con lo cual $m \geq 2$.
Sea p la mayor cantidad de casillas pintadas que tiene alguna de las m filas de T.

Caso 1: Si $p \leq 1$, entonces T tiene a lo más m casillas pintadas, es decir, $f_T \leq m = (r+1) - n$. Luego, si $n = 1$ tendremos que:

$f_T \leq (r+1) - n = (r+1) - 1.$

En caso contrario, si $n \geq 2$, se cumple:

$f_T \leq (r+1) - n \leq (r+1) - 2.$

En cualquier caso, se cumple (1) para $k = r + 1$.

Caso 2: Si $p \geq 2$. Sea F la fila que tiene p casillas pintadas. Como en la fila F hay n casillas en total, analizaremos dos opciones. Si $p = n$, para que T sea colorido no puede haber otras casillas pintadas en el resto del tablero. Luego,

$f_T = n \leq n + (n-2) \leq n + (m-2) = (r+1) - 2.$

Con lo cual se cumple (1).
De otra manera, sea $2 \leq p \leq n - 1$. Como T es colorido las columnas en las que se encuentran las p casillas pintadas de F no pueden tener otras casillas pintadas. Por lo tanto, $f_T = p + f_{T'}$, donde T' es el tablero colorido de $(m - 1) \times (n - p)$ que resulta de eliminar en T la fila F y las columnas donde se encontraban las p casillas pintadas de F. Por la hipótesis inductiva,

$f_{T'} \leq (m-1) + (n-p) - 1 = (m+n) - (p+2) = (r+1) - (p+2) = r - p - 1$.

Luego, $f_T = p + f_{T'} \leq p + (r - p - 1) = (r+1) - 2$. Nuevamente se cumple (1).
En efecto, es posible conseguir tener las casillas pintadas si, por ejemplo, T tiene coloreadas todas las casillas de la fila superior y todas las casillas de la columna de la izquierda, excepto la casilla ubicada en la esquina superior izquierda.

Concurso Nacional de Matemática
Temario por grados
Curso 2005-2006

La distribución de las preguntas a resolver por grado es la siguiente:

Alumnos de 10mo. grado: Responden las preguntas 1, 2 y 3.
Alumnos de 11no. grado: Responden las preguntas 4, 5 y 6.
Alumnos de 12mo. grado: Responden las preguntas 7, 8 y 9.

1. Determina todos los polinomios $P(x)$ de grado 3 con coeficientes enteros, donde el coeficiente del término de mayor grado es 1, que son divisibles por $x - 1$, tal que al dividirlos por $x - 5$ dejan el mismo resto que al dividirlos por $x + 5$ y tienen un cero comprendido entre 2 y 3.

2. Sea U el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC; O_1, O_2 y O_3 los centros de las circunferencias circunscritas a los triángulos BCU, CAU y ABU, respectivamente. Prueba que las circunferencias circunscritas a los triángulos ABC y $O_1O_2O_3$ tienen el mismo centro.

3. Sean a, b, c números reales diferentes. Prueba que

$$\left(\frac{2a-b}{a-b}\right)^2+\left(\frac{2b-c}{b-c}\right)^2+\left(\frac{2c-a}{c-a}\right)^2\geq 5.$$

4. Sea f una función de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ tal que:

a) $f(n + 1) > f(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

b) $f(n + f(m)) = f(n) + m + 1$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}$.

Encuentra $f(2\ 006)$.

5. La sucesión de números enteros positivos siguiente $a_1, a_2, ..., a_{400}$, satisface la relación: $a_{n+1} = d(a_n) + d(n)$ para todo $1 \leq n \leq 399$. Prueba que en la sucesión no hay más de 210 números primos.

Nota: $d(k)$ es la cantidad de divisores enteros positivos que tiene k.

6. Dos circunferencias concéntricas de radios 1 u y 2 u están centradas en el punto O. El vértice A del triángulo equilátero ABC se encuentra en la circunferencia mayor, mientras que el punto medio del lado BC se encuentra sobre la circunferencia menor. Si B, O y C no son colineales, ¿qué medida puede tener el ángulo BOC?

7. La sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ satisface que:

$a_1 = 3$, $a_2 = -1$, $a_n \cdot a_{n-2} + a_{n-1} = 2$, para todo $n \geq 3$.

Calcula: $a_1 + a_2 + \ldots + a_{99}$.

8. Prueba que para cualquier k entero ($k \geq 2$) existe una potencia de 2 que entre sus últimos k dígitos, los nueves constituyen no menos de la mitad. Por ejemplo, para $k = 2$ y $k = 3$, se tienen las potencias $2^{12} = ...96$ y $2^{53} = ...992$.

9. En el cuadrilátero cíclico $ABCD$, las diagonales AC y BD se cortan en P. Sean O el centro de la circunferencia circunscrita a $ABCD$, y E un punto de la prolongación de OC por C. Por E se traza una paralela a CD que corta a la prolongación de OD por D en F. Sea Q un punto interior a $ABCD$, tal que $\angle AFQ = \angle BEQ$ y $\angle FAQ = \angle EBQ$.

Prueba que $PQ \perp CD$.

Soluciones

1. $P(x) = (x - 1)Q(x)$ con $P(5) = 4Q(5)$ y $P(-5) = -6Q(-5)$

$P(5) = P(-5)$ teniendo que $4Q(5) = -6Q(-5) \Rightarrow 4Q(5) + 6Q(-5) = 0$

$Q(x) = x^2 + px + q$ y $Q(5) = 25 + 5p + q$ $\qquad Q(-5) = 25 - 5p + q$

$4(25 + 5p + q) + 6(25 - 5p + q) = 0$

$100 + 20p + 4q + 150 - 30p + 6q = 0$ de donde $250 - 10p + 10q = 0$

$P = q + 25$ y se tiene

$P(2) = Q(2) = 4 + 2p + q$ y	$P(3) = 2Q(3) = 18 + 6p + 2q$
$4 + 2p + q < 0$	$18 + 6p + 2q > 0$
$4 + 2q + 50 + q < 0$	$9 + 3p + q > 0$
$18 + q < 0$	$4q + 84 > 0$
$q < -18$	$q + 21 > 0;\ q > -21$
$q = -20$	$q = -19$
$p = 5$	$p = 6$
$Q(x) = x^2 + 5x - 20$	$Q(x) = x^2 + 6x - 19$
$P(x) = (x - 1)(x^2 + 5x - 20)$	$P(x) = (x - 1)(x^2 + 6x - 19)$
$P(x) = x^3 + 4x^2 - 25x + 20$	$P(x) = x^3 + 5x^2 - 25x + 19$

2. Las rectas trazadas desde el centro U a las circunferencias inscritas y los vértices A, B y C del triángulo ABC son las bisectrices de los ángulos A, B y C de acuerdo con la figura 70. Sea O el centro de la circunferencia inscrita al triángulo ABC.
Como el centro de la circunferencia circunscrita a un triángulo está situado sobre la mediatriz de cada lado, los puntos O y O_1 están sobre la mediatriz de BC y OO_1 es la mediatriz de BC. De forma análoga OO_3 y O_1O_3 están en la mediatriz de AB y UB. Porque $\angle UBC$ y $\angle O_3O_1O$ son ángulos de lados respectivamente perpendiculares entonces $\angle UBC = \angle O_3O_1O$ y $\angle O_3O_1O = \frac{1}{2}B$.

De forma análoga $\angle OO_3O_1 = \frac{1}{2}B$ por lo que $\angle O_3O_1O = \angle OO_3O_1$ y el triángulo OO_3O_1 es isósceles y $OO_1 = OO_3$. De forma análoga se tiene que $OO_1 = OO_2$ por lo que $OO_1 = OO_3 = OO_2$ teniendo que el punto O es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo $O_1O_2O_3$.

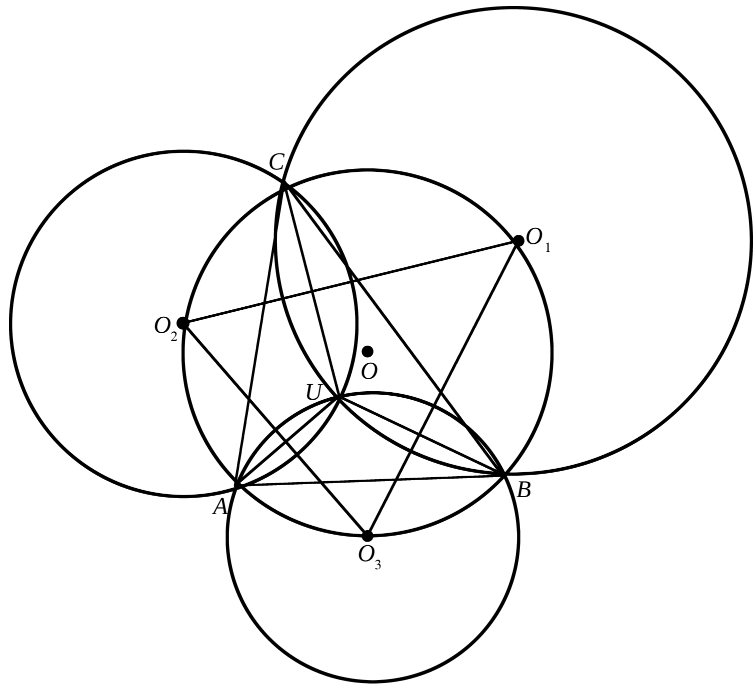

Fig. 70

3. Sea $x = \dfrac{a}{a-b}$, $y = \dfrac{b}{b-c}$, $z = \dfrac{c}{c-a}$ observemos que:

$(x - 1)(y - 1)(z - 1) = \dfrac{b}{a-b}\cdot\dfrac{c}{b-c}\cdot\dfrac{a}{c-a} = \dfrac{a}{a-b}\cdot\dfrac{b}{b-c}\cdot\dfrac{c}{c-a}$ agrupando convenientemente los términos se tiene que $x + y + z = xy + yz + xz = 1$.

De esta forma $\left(\dfrac{2a-b}{a-b}\right)^2 + \left(\dfrac{2b-c}{b-c}\right)^2 + \left(\dfrac{2c-a}{c-a}\right)^2 = (1 + x)^2 + (1 + y)^2 + (1 + z)^2$

$= 3 + x^2 + y^2 + z^2 + 2(x + y + z) = 3 + x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx + 1)$

$= 5 + (x + y + z)^2 \geq 5$.

4. Sea $m = 0$, $f(n + f(0)) = f(n) + 1$,

Pongamos $f(0) = k$ y supongamos que $k \leq 2$

$f(n) < f(n + 1) < f(n + 2) \leq f(n + k) = f(n) + 1$ por a) lo cual es una contradicción, pues las imágenes pertenecen a $\mathbb{Z} \Rightarrow f(n)$ y $f(n + 1)$ no pueden existir otros valores, por tanto,

$k = 0$ o $k = 1$.

Si $k = 0$, $f(n) = f(n) + 1$, lo cual es imposible.

Si $k = 1$, $f(n + 1) = f(n) + 1$; así

$f(1) = f(0) + 1 \Rightarrow f(1) = 2$

$f(2) = f(1) + 1 \Rightarrow f(2) = 3$

…

$f(x) = f(x - 1) + 1$, luego

$f(x) = x + f(0)$

$f(x) = x + 1$

Comprobando: MI: $f(n + f(m)) = f(n + m + 1) = n + m + 2$

MD: $f(n) + m + 1 = n + 1 + m + 1 = n + m + 2$

Por tanto, $f(x) = x + 1$ y $f(2\,003) = 2\,004$.

5. Todo entero positivo k cumple que $d(k) \geq 1$. Por tanto, para todo $m \geq 2$,

$a_m = d(a_{m-1}) + d(m - 1) \geq 1 + 1 = 2$, es decir, $a_m \geq 2$. Además, cuando $k \geq 2$ se cumple que $d(k) \geq 2$. Luego, para todo $m \geq 3$, $a_m = d(a_{m-1}) + d(m - 1) \geq 2 + 2 = 4$, es decir, $a_m \geq 4$ (1).

Sean a_k y a_{k+1} dos números primos, $k \geq 2$. Luego $a_{k+1} = d(a_k) + d(k)$ y $a_{k+1} = 2 + d(k)$.

Por (1), a_{k+1} es impar. Luego, $d(k)$ es impar. Pero esto implica que k es un cuadrado perfecto. En otras palabras, si k no es un cuadrado perfecto, entonces es imposible que a_k y a_{k+1} sean ambos números primos.

Si consideramos todos los a_i con $k^2 < i < (k + 1)^2$ tenemos los $2k$ números siguientes: $a_{k^2+1}, a_{k^2+2}, ..., a_{k^2+2k}$, y con ellos formamos k parejas de índices consecutivos, podemos afirmar que en cada pareja hay a lo más un número primo. Luego, entre los 380 números siguientes: a_2, a_3; a_5, a_6, a_7, a_8; a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}; a_{17}, …; a_{362}, a_{363}, …, a_{399}

hay a lo más $1 + 2 + 3 + ... + 19 = 190$ números primos. Adicionalmente, los números a_1, a_4, a_9, a_{16}, …, a_{396}, a_{400} también pueden ser primos.

Por lo tanto, a lo más se tienen $190 + 20 = 210$ números primos.

6. Sean M el punto medio del lado BC y G el centro del ΔABC. Construimos el ΔDBC equilátero simétrico del ΔABC con respecto a BC (fig. 71).

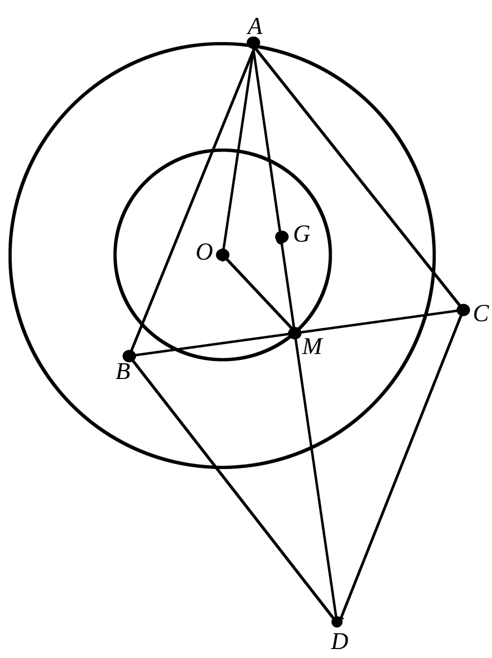

Fig. 71

Como G es centro del ΔABC, $\angle BGC = 120°$. Luego, el cuadrilátero $BGCD$ es cíclico (puesto que $\angle BGC + \angle BDC = 180°$). Llamaremos Γ a la circunferencia que pasa por B, G, C y D.

En el ΔAOM se tiene $AO : OM = 2 = AG : GM$, entonces OG es bisectriz de $\angle AOM$ (T de la bisectriz interior).

Como D es el simétrico de A, se cumple que D, M y A son colineales y $DA : DM = 2$. Nuevamente en el ΔAOM se tiene $AO : OM = 2 = DA : DM$, entonces OD es bisectriz exterior del $\angle AOM$ (teorema de la bisectriz exterior).

Pero como la bisectriz interior y la exterior de un mismo ángulo son perpendiculares, entonces $\angle GOD = 90°$. Además, como GD es perpendicular a la cuerda BC de Γ en su punto medio, GD será un diámetro de Γ.

En consecuencia, dado que $\angle GOD = 90°$, el punto O también se encuentra sobre Γ. Finalmente, $\angle BOC = \angle BGC = 120°$.

Sin embargo, este análisis ha sido realizado considerando que O es interior al ΔABC. Si O fuera exterior a este triángulo, se encontrará en el arco BDC de Γ y su valor resultará la mitad del arco BGC, es decir, $\angle BOC = 60°$.

En conclusión, si O es interior al triángulo ABC, $\angle BOC = 120°$; pero si es exterior, $\angle BOC = 60°$.

7. Utilizamos la fórmula de recurrencia $a_n \cdot a_{n-2} + a_{n-1} = 2$ para calcular los primeros términos de la sucesión:

$a_1 = 3$; $a_2 = -1$; $a_3 = 1$; $a_4 = -1$; $a_5 = 3$; $a_6 = 1$; $a_7 = \frac{1}{3}$; $a_8 = \frac{5}{3}$; $a_9 = 1$; $a_{10} = \frac{3}{5}$; $a_{11} = \frac{7}{5}$; $a_{12} = 1$ …

demostremos que si $a_n = 1$, entonces $a_{n+1} + a_{n+2} = 2$.

En efecto; $a_n \cdot a_{n+2} + a_{n+1} = 2$, $a_{n+1} + a_{n+2} = 2$.

Y luego observemos que si $a_n + a_{n+1} = 2$, entonces $a_{n+2} = 1$:

$a_n \cdot a_{n+2} + a_{n+1} = 2$
$a_n \cdot a_{n+2} + 2 - a_n = 2$
$a_n \cdot a_{n+2} = a_n$
$a_{n+2} = 1$, pues $a_n \neq 0$ para todo n.

entonces $a_1 + a_2 + a_3 = 3$ y, en general, $a_{3k+1} + a_{3k+2} + a_{3k+3} = 3$.

Si agrupamos los 99 términos en grupos de tres, tenemos 33 grupos en cada uno de los cuales la suma es 3.
Luego, la suma total es $3 \cdot 33 = 99$.

8. Demostraremos por inducción que para todo entero positivo k existe un entero positivo m tal que $5^k \mid (4^m + 1)$. Para $k = 1$, $m = 1$ se cumple. Asumiendo que para cierto r se cumple que $5^r \mid (4^s + 1)$, podemos notar que $4^{5s} + 1 = (4^s + 1)(4^{4s} - 4^{3s} + 4^{2s} - 4^s + 1)$.

Pero $4^s \equiv -1$ (mód 5), por lo que el segundo miembro del producto es múltiplo de 5. Luego, como existe s tal que $5^r \mid (4^s + 1)$, entonces existe $s_2 = 5s$ tal que $5^{r+1} \mid (4^{s_2} + 1)$. Queda así probada la afirmación.

Como $2^2 = 4$, podemos afirmar también que para todo entero positivo k, existe un entero positivo m tal que $5^k \mid (2^m + 1)$. Esto último podemos escribirlo como $b \cdot 5^k = 2^m + 1$. Luego, $2^k(b \cdot 5^k) = 2^k(2^m + 1)$, es decir: $b \cdot 10^k - 2^k = 2^{k+m}$ (1)

Pero 8^k tiene a lo más k dígitos, por lo que 2^k tiene a lo más $\left[\frac{k}{3}\right]$ dígitos. Si $k \geq 4$, $\left[\frac{k}{3}\right] \leq \frac{k}{3} + \frac{2}{3} \leq \frac{k}{2} - \frac{k-4}{6} \leq \frac{k}{2}$. Es decir, cuando $k \geq 4$, el número 2^{k+m} es la diferencia entre un número que termina en k ceros menos uno que tiene a lo más $\dfrac{k}{2}$ dígitos, por lo que entre sus últimos k dígitos, al menos la mitad de ellos serán iguales a 9.

Para $k = 2$ y $k = 3$, en (1), se nota que $b \cdot 10^k - 2^k$ terminan en 96 y 992, respectivamente.

9. Tomemos S tal que $\Delta BPC \sim \Delta BSE$ con $\angle CBP = \angle EBS$ y $\angle BPC = \angle BSE$ (fig. 72).

Entonces, $\angle PBS = \angle CBE$.

Como $\dfrac{BP}{BS} = \dfrac{BC}{BE}$, entonces $\dfrac{BP}{BC} = \dfrac{BS}{BE} = k$, entonces ΔBPS ~ ΔBCE por p.a.p.

Si rotamos el ΔBCE con centro en B y $\angle PBC$, y multiplicamos cada lado del ΔBCE por k, el $\angle BCE$ se transforma en $\angle BPS$, por tanto, el ángulo entre PS y CE será igual a $\angle PBC = \dfrac{1}{2}\angle DOC$.

(El ángulo central es el doble del inscrito correspondiente).

Por tanto, PS es paralela a la mediatriz r de CD, la cual pasa por O. ($PS \parallel r$ y $r \perp CD$) $\Rightarrow PS \perp CD$.

Tomemos R, tal que $\Delta APD \sim \Delta ARF$ con $\angle DAP = \angle FAR$ y $\angle APD = \angle ARF$;

análogamente se demuestra que $\Delta APR \sim \Delta ADF$ y $PR \perp CD$.

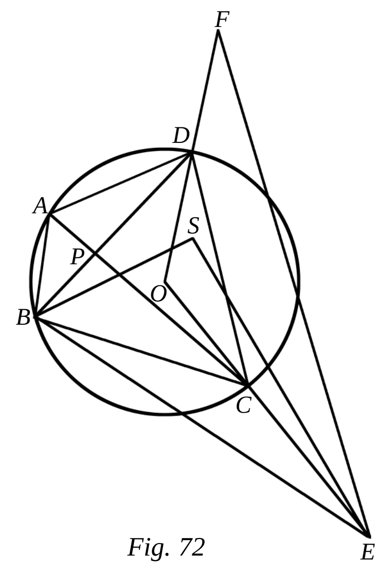

Fig. 72

Como $\Delta BPS \sim \Delta BCE \Rightarrow \dfrac{PS}{CE} = \dfrac{BP}{BC} \Rightarrow PS = \dfrac{BP}{BC} \cdot CE$ (1)

Como $\Delta APR \sim \Delta ADF \Rightarrow \dfrac{PR}{DF} = \dfrac{AP}{AD} \Rightarrow PR = \dfrac{AP}{AD} \cdot DF$ (2)

Pero el ΔDOC es isósceles ($DO = OC$ por ser radios), y como $EF \parallel CD$, entonces ΔOEF es isósceles, por tanto, $DF = OF - OD = OE - OC = CE$. (3)

$\Delta APD \sim \Delta BPC$ (pues $\angle ADB = \angle ACB$ y $\angle CAD = \angle DBC$ por estar inscritos sobre el mismo arco respectivamente).

Por tanto, $\dfrac{BP}{AP} = \dfrac{BC}{AD} \Rightarrow \dfrac{BP}{BC} = \dfrac{AP}{AD}$ (4)

entonces de (1), (2), (3) y (4) $PS = \dfrac{BP}{BC} \cdot CE = \dfrac{AP}{AD} \cdot DF = PR$.

Como $PS = PR$, $PS \perp CD$ y $PR \perp CD$, entonces $S \equiv R$ o P es el punto medio de SR, lo cual es imposible, pues $\angle CBS < \angle CBP$ y $\angle DAR < \angle DAP$. Por tanto, $S \equiv R$ y entonces $\Delta ASF \sim \Delta APD \sim \Delta BPC \sim \Delta BSE$.

Si $Q \equiv S$, entonces $PQ \perp CD$ (pues se probó que $PS \perp CD$).

Supongamos que Q es distinto de S (fig. 73).

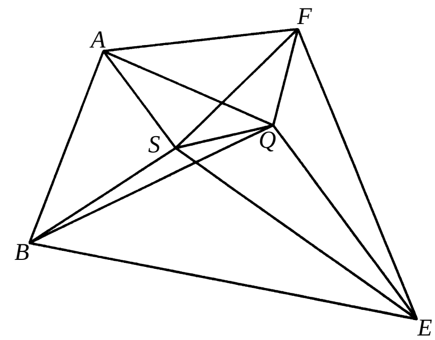

Fig. 73

Como $\angle AFQ = \angle BEQ$ (por datos) y $\angle AFS = \angle BES$ (pues $\Delta ASF \sim \Delta BSE$), entonces $\angle QES = \angle QFS$.

$\dfrac{FQ}{EQ} = \dfrac{AF}{BE} = \dfrac{FS}{ES}$ por ser $\Delta ASF \sim \Delta BSE$ y $\Delta AFQ \sim \Delta BQE$. Luego, $\Delta FSQ \sim \Delta ESQ$, pero $\overline{QS}$ es común, por tanto, $\Delta FSQ = \Delta ESQ$, entonces $FS = ES$ y $\angle FSQ = \angle ESQ$, por tanto, $QS \perp EF$.

Como $QS \perp EF$ y $CD \parallel EF$, entonces $QS \perp CD$, pero $PS \perp CD$. Luego, P, S y Q, estarían alineados y $PQ \perp CD$.

Concurso Nacional de Matemática
Temario común
Curso 2006-2007

1. Se colocan fichas en algunas celdas de un tablero de 8×8 de modo que:

i) Hay al menos una ficha en cualquier rectángulo de lados 2×1 o 1×2;
ii) Hay dos fichas vecinas en cualquier rectángulo de lados 7×1 o 1×7.

Halla la menor cantidad de fichas que pueden tomarse para cumplir con ambas condiciones.

2. Un prisma es llamado *binario* si se le puede asignar a cada uno de sus vértices un número del conjunto $\{-1,+1\}$, de forma tal que el producto de los números asignados a los vértices de cada cara sea igual a -1.

a) Prueba que el número de vértices de los prismas binarios es divisible por 8.
b) Prueba que un prisma con 2 000 vértices es binario.

3. Una competencia de tenis tiene lugar durante cuatro días, el número de participantes es $2n$, $n \geq 5$. Cada participante juega exactamente una vez diaria (es posible que un par de participantes se encuentren más veces). Prueba que tal competencia puede terminar con exactamente un ganador y exactamente tres jugadores en el segundo lugar y tal que no existan jugadores con los cuatro juegos perdidos.

Soluciones

1. Consideremos la figura 74 y veamos que 37 fichas es la menor cantidad que puede tomarse para cumplir con las dos condiciones dadas.

Debemos probar que 37 es el número deseado.

De la condición i) hay al menos 4 fichas en cualquier columna de la tabla de 6×6 obtenida al cortar las filas y columnas más exteriores de la tabla dada.

Si consideramos i) que al menos tenga 3 fichas en cualquiera de esas columnas. Si hay 3 fichas en una columna de 6×1 que no tengan vecinos tenemos una contradicción con ii). De esta manera las 3 fichas están situadas en la segunda, tercera y quinta celda o en la segunda, cuarta y sexta celda.

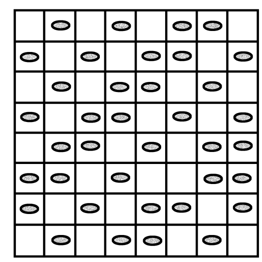

Fig. 74

Denotemos por k el número de columnas con 3 fichas cada una. Hay al menos 4 fichas en cada una de las restantes $6 - k$ columnas de una tabla de 6×6 y las dos columnas exteriores de la tabla inicial. Nota que por i) hay 5 fichas en cada columna de la tabla inicial con 3 fichas en la tabla de 6×6.

Supongamos que hay dos columnas vecinas teniendo 3 fichas cada una. Entonces existe un rectángulo de 2×1 desprovisto de una ficha, una contradicción. De esta manera hay a lo sumo 3 columnas que tienen 3 fichas cada una por lo que $k \leq 3$.

Consideremos los dos rectángulos de 6×1 citados anteriormente y debajo del tablero de 6×6. Hay dos casos:

Caso 1: Hay al menos 3 fichas en uno de esos rectángulos. Ahora, hay al menos 5 fichas en las columnas exteriores del tablero inicial y hay al menos 5 fichas en la columna más exterior del tablero inicial y hay al menos
$5k + 2 \cdot 5 + 4(6 - k) + 2(3 - k) = 40 - k \geq 37$ fichas.

Caso 2: Hay al menos 4 fichas en ambos rectángulos. Entonces el número total de fichas es al menos
$5k + 4(8 - k) + 2(4 - k) = 40 - k \geq 37$ fichas.

2. a) Supongamos que la base del prisma es un polígono con n vértices. Entonces el producto de los números asignados a los vértices de las caras laterales es igual a $(-1)^n$, pero al mismo tiempo es menor o igual a 1, dado que cada uno de los vértices se cuenta dos veces. Se sigue que n es un número par.
Ahora, si $n = 4k + 2$, para algún k, entonces consideremos el producto de los números asignados a los vértices de cada una de las segundas caras laterales. Obtenemos $(-1)^{2k+1} = -1$, esto es igual al producto de todos los números que es 1, lo cual es una contradicción. Esto prueba el resultado.

b) Vamos a enumerar los vértices $A_1, A_3, A_5, \ldots, A_{997}$ con -1 y el resto de los vértices de la base con 1. Para la base superior enumeremos todos con 1, excepto A_{999} que lo enumeramos con -1.

3. Denotemos por n_k el número de participantes que ganan exactamente k juegos, $0 \leq k \leq 4$. Bajo las condiciones dadas tenemos

$n_0 = 0,\ n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 2n \geq 10$ (1)

El número total de juegos es $4n$, entonces

$4n = 1 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2 + 3 \cdot n_3 + 4 \cdot n_4$ (contando los ganadores) (2)

$4n = 3 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2 + 1 \cdot n_3 + 0 \cdot n_4$ (contando los perdedores) (3)

Entonces $2n_1 = 2n_3 + 4n_4$. Sustituyendo en (1) obtenemos

$n_2 + 2n_3 + 3n_4 = 2n$ (4)

Las otras condiciones del problema implicarán (tabla 25).

Tabla 25

n_4	n_3	n_2	n_1	$n_2 + 2n_3 + 3n_4$
0	0	1	3	1
0	1	0	3	2
1	0	0	3	3
0	1	3		5
1	0	3		6

Dando una contradicción.

Resta el caso $n_4 = 1$, $n_3 = 3$, lo cual implica $n_2 = 2n - 9$, $n_1 = 5$.

Para un modelo denotemos por a al ganador y por b_1, b_2, b_3 los tres que quedaron en el segundo lugar, por c uno de los $2n - 9$ ganadores de exactamente dos juegos y por d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 los cinco jugadores con solo un juego ganado. Los restantes $2n - 10$ jugadores tienen ganados dos juegos, serán denotados (para $n > 5$) por $c_1, c_2, \ldots, c_{2n-10}$. Finalmente por xy denotaremos que x gana el juego contra y (tabla 26).

Tabla 26

Día						
1	ab_1	cd_2	b_2d_3	b_3d_4	d_1d_5	c_ic_{i+1}
2	ab_2	b_1d_1	cd_3	b_3d_4	d_2d_5	c_ic_{i+1}
3	ab_3	b_1d_1	b_2d_2	d_5c	d_3d_4	$c_{i+1}c_i$
4	ac	b_1d_1	b_2d_2	b_3d_3	d_4d_5	$c_{i+1}c_i$

Donde $i = 1, 3, \ldots, 2n - 11$.

Concurso Nacional de Matemática
Temario por grados
Curso 2006-2007

La distribución de las preguntas a resolver por grado es la siguiente:

Alumnos de 10mo. grado: Responden las preguntas 1, 2 y 3.
Alumnos de 11no. grado: Responden las preguntas 4, 5 y 6.
Alumnos de 12mo. grado: Responden las preguntas 7, 8 y 9.

1. Halla todos los números reales x, y tales que $x^3 - y^3 = 7(x - y)$ y $x^3 + y^3 = 5(x + y)$.

2. Halla tres enteros positivos diferentes cuya suma sea mínima que cumplan la condición de que la suma de cada pareja de estos sea un cuadrado perfecto.

3. Sea $ABCD$ un cuadrilátero que se puede inscribir en una circunferencia cuyas diagonales son perpendiculares. Denota por P y Q los pies de las perpendiculares por D y C respectivamente a la recta AB, X es el punto de intersección de las rectas AC y DP; Y es el punto de intersección de las rectas BD y CQ. Demuestra que $XYCD$ es un rombo.

4. Sea $\mathbb{R}_+$ el conjunto de todos los números reales positivos. Halla todas las funciones $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que $x^2(f(x) + f(y)) = (x + y)f(f(x)y)$ para todos los números x, y reales positivos.

5. Prueba que existe un único entero positivo formado solamente por los dígitos 2 y 5, que tiene 2 007 dígitos que es divisible por $2^{2\,007}$.

6. Sea ΔABC acutángulo. Tomemos en el segmento BC dos puntos F y G tales que $BG > BF = GC$ y un punto P interior al triángulo en la bisectriz del $\angle BAC$. Se trazan por P, $PD \parallel AB$ y $PE \parallel AC$, $D \in AC$ y $E \in AB$, $\angle FEP = \angle PDG$. Demuestra que ΔABC es isósceles.

7. Dados n puntos en el plano, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $n \geq 2$ no todos alineados, demuestra que existe una recta que pasa por exactamente dos de ellos.

8. Para cada entero positivo n sea $S(n)$ la suma de los dígitos de $n^2 + 1$. Se define una sucesión $\{a_n\}$, con a_0 entero positivo arbitrario y $a_{n+1} = S(a_n)$.
Prueba que la sucesión $\{a_n\}$ es periódica con período tres.

9. Sea O el circuncentro de un triángulo ABC, con $AC = BC$. La recta AO corta el lado BC en D. Si $|BD|$ y $|CD|$ son enteros, y $|AO| - |CD|$ es un número primo, determina esos tres números.

Soluciones

1. La ecuación puede escribirse en la forma:

$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 7(x - y)$ y $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = 5(x + y)$.

El caso $x = y$ conduce a que $2x^3 = 10x$ por lo que $x = 0$ o $x = \pm\sqrt{5}$. Si dividimos la primera ecuación por $x - y$ obtenemos $x^2 + xy + y^2 = 7$. El caso $x = -y$ conduce a que $2x^3 = 14x$ donde $x = 0$ o $x = \pm\sqrt{7}$. Si dividimos la segunda ecuación por $x + y$ obtenemos $x^2 - xy + y^2 = 5$.
La suma de las dos ecuaciones obtenidas da como resultado $x^2 + y^2 = 6$ y $xy = 1$ teniendo que $(x + y)^2 = 8$ de donde $x + y = \pm\sqrt{8}$ resolviendo las ecuaciones tenemos
$y = \pm(\sqrt{2} + 1)$ o $y = \pm(\sqrt{2} - 1)$. En el primer caso tenemos $x = \pm(\sqrt{2} - 1)$ y en el segundo caso $x = \pm(\sqrt{2} + 1)$. Las soluciones son los pares ordenados $(x;y)$:
$(0;0)$, $(\sqrt{5};\sqrt{5})$, $(-\sqrt{5};-\sqrt{5})$, $(\sqrt{7};-\sqrt{7})$, $(-\sqrt{7};\sqrt{7})$, $(\sqrt{2} + 1;\sqrt{2} - 1)$, $(-\sqrt{2} - 1;-\sqrt{2} + 1)$,
$(\sqrt{2} - 1;\sqrt{2} + 1)$ y $(-\sqrt{2} + 1;-\sqrt{2} - 1)$.

2. Sean a, b y c enteros positivos diferentes con la suma de cualesquiera dos de ellos es un cuadrado perfecto. Asumamos que $a < b < c$, con $a + b = x^2$, $b + c = y^2$, $c + a = z^2$ debemos minimizar $x^2 + y^2 + z^2$ bajo las condiciones $x < y < z$, $z^2 < x^2 + y^2$ y $x^2 + y^2 + z^2$ par.

$z > 5$, porque de otra manera $z^2 \geq x^2 + y^2$.

Si $z = 6$, x, y deben ser ambos impares o ambos pares pero no puede ser porque se tiene que
$6^2 > 5^2 + 3^2 > 4^2 + 2^2$.

Si $z = 7$, solamente $(x,y,z) = (5,6,7)$ satisface las condiciones requeridas.

Si $z \geq 8$, $x^2 + y^2 + z^2 > 2z^2 \geq 2 \cdot 8^2 > 7^2 + 6^2 + 5^2$.

De esta forma el único trío que satisface las condiciones es $(5,6,7)$ que minimiza el valor de $x^2 + y^2 + z^2$. Por lo tanto, $(a,b,c) = (6,19,30)$.

3. Denotemos por R la intersección de las diagonales del cuadrilátero. Dado que las diagonales son perpendiculares, tenemos $\angle CDR + \angle DCR = 90º$. Como ambos vértices B y C están situados en el mismo semiplano determinado por la cuerda AD, entonces $\angle ABD = \angle DCR$.

Como $DX \perp AB$ se tiene que $\angle XDB = \angle CDR$ y el triángulo XCD es isósceles de base XC. De la misma forma se puede demostrar que el triángulo YCD es isósceles de base YD.

De aquí se tiene que $XD = CD = CY$, de esta manera $DX = CY$ y $DX \parallel CY$ teniendo que $XYCD$ es un paralelogramo con tres lados iguales por lo que es un rombo.

4. Sea f la función que se busca con $f(1) = a$, con $a > 0$. Consideremos que $x = 1$, $y = 1$, tenemos $f(1) + f(1) = 2f(f(1))$ y $f(a) = a$.

Sean $x = a$, $y = 1$, tenemos $a^2(f(a) + a) = (a + 1)f(f(a))$ teniendo

$2a^3 = a(a + 1)$ y $a(2a + 1)(a - 1) = 0$ por lo que $a = 1$, ya que $a > 0$.

Pongamos $x = 1$ en la ecuación y consideremos que $f(1) = 1$; $1 + f(y) = (1 + y)f(y)$.

Finalmente tenemos $f(y) = \dfrac{1}{y}$ que cumple las condiciones del problema.

5. Por inducción matemática, probemos que para cualquier n natural hay un único entero positivo x_n representado en el sistema decimal solamente por 2 y 5 teniendo n dígitos y divisible por 2^n.

Por ejemplo, si $n = 1, 2, 3$ los números $x_1 = 2$, $x_2 = 52$, $x_3 = 552$ satisfacen las condiciones. Esta es la base de la inducción.

Asumamos que x_n es el único entero positivo representado por dígitos 2 y 5 teniendo n dígitos y divisible por 2^n. Consideremos el número $2 \cdot 10^n + x_n$ y $5 \cdot 10^n + x_n$ obtenido al adicionarle a la izquierda del número x_n el dígito 2 o 5. Ambos están representados por dígitos 2 y 5 y tienen $n + 1$ dígitos. Como x_n y 10^n son ambos divisibles por 2^n, al dividirlos por 2^n, su diferencia es igual a

$\dfrac{5\cdot 10^n + x_n}{2^n} - \dfrac{2\cdot 10^n + x_n}{2^n} = 3\cdot 5^n$, que es un número impar por lo que uno de los números obtenidos en cada división es impar y el otro es par. Con esto se prueba que exactamente uno de los números $2 \cdot 10^n + x_n$ y $5 \cdot 10^n + x_n$ es divisible por 2^{n+1} lo cual satisface todas las condiciones para x_{n+1}.

Para probar la unicidad, observemos que removiendo los dígitos del miembro izquierdo tenemos el número de n dígitos consistente solamente en dígitos 2 y 5, divisible por 2^n. Por la hipótesis de inducción el único número que satisface esas condiciones es x_n. Dado que x_{n+1} tiene que ser de la forma $5 \cdot 10^n + x_n$ o $2 \cdot 10^n + x_n$ se prueba que exactamente uno de esos números puede tomarse como x_{n+1}.

6. Utilicemos la figura 75.

Asumamos sin pérdida de generalidad que $AC > AB$.

$PD \parallel AB$ y $PE \parallel AC \Rightarrow AEPD$ paralelogramo $\Rightarrow \angle EAP = \angle APD$, $\angle DAP = \angle APE$

AP bisectriz $\Rightarrow \angle EAP = \angle PAD \Rightarrow \angle EAP = \angle APD = \angle DAP = \angle APE$ $\Rightarrow AEDP$ es un rombo $\Rightarrow \angle AEP = \angle ADP$ y $AE = AD$

$\angle FEP = \angle PDG$ y $\angle AEP = \angle ADP \Rightarrow \angle BEF = \angle CDG$,

$\angle BEF = \angle CDG$ y $BF = GC \Rightarrow$ los circunradios de los triángulos BEF y CDG son iguales, luego $AC > AB \Rightarrow \angle ABC > \angle ACB \Rightarrow$ $\Rightarrow$sen$(\angle ABC) >$ sen$(\angle ACB) \Rightarrow EF > DG$ por lo que $AEPD$ es un rombo y $\angle BEF = \angle CDG \Rightarrow \angle DEF = \angle EDG$. Al trazar por G la paralela a ED se formará un trapecio isósceles y como $EF > DG$ esta cortará al segmento EF, luego $\angle EFG < \angle DGF$. En el cuadrilátero $DEFG$ se tiene

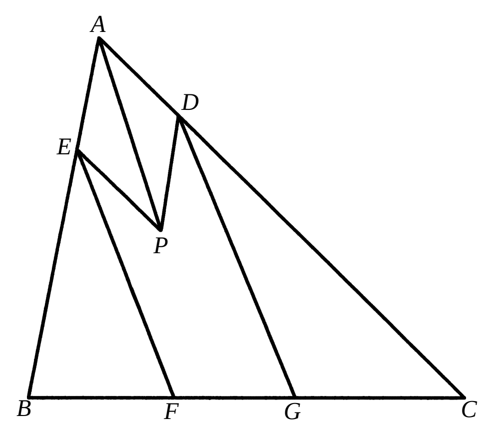

Fig. 75

$360° = \angle DEF + \angle EDG + \angle EFG + \angle GDF > 2(\angle DEF + \angle EFG) \Rightarrow 180° > \angle DEF + \angle EFG \Rightarrow ED$ corta a BC en su prolongación por C.

De $AEPD$ rombo también tenemos que $\angle BED = \angle CDE$.

En el cuadrilátero $BEDC$, $360° = \angle BED + \angle CDE + \angle ACB + \angle ABC \Rightarrow$

$\Rightarrow 360° > 2(\angle CDE + \angle ACB) \Rightarrow 180° > \angle CDE + \angle ACB \Rightarrow ED$ corta a BC en su prolongación por B. ¡Contradicción! Luego $AB = AC$ y ΔABC isósceles.

7. Considérese el conjunto de las distancias de los A_i a las rectas que determinan el resto de los puntos dados que no incluyen a A_i. El conjunto es no vacío, pues no todos están alineados y evidentemente tiene una cantidad finita de elementos, a lo sumo $n\binom{n-1}{2}$, en el caso extremo que las distancias de cualquiera de los n puntos a las $\binom{n-1}{2}$ rectas que determinan los restantes n – 1 sean todas distintas.

Denotemos por $d(a,bc)$ a la distancia de A_a a A_bA_c.

Sea $m = d(k,ij)$ el mínimo del conjunto. Demostremos que en la recta determinada por A_i y A_j no hay más puntos del conjunto.

Sin pérdida de generalidad, entre A_i y A_j están todos los puntos del conjunto que pudiesen pertenecer a esa recta (fig. 76). Supongamos que este nuevo conjunto es no vacío $\Rightarrow \exists l : A_l \in A_iA_j$. Podemos asumir también que A_l está en el mismo semiplano que A_i respecto a la proyección P de A_k sobre A_iA_j. Sea Q la proyección de P sobre A_iA_k. Claramente $0 < d(l,ik) \leq PQ < A_kP = d(k,ij) = m \Rightarrow d(l,ik) < d(k,ij)$ ¡contradicción!

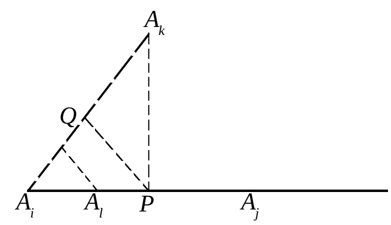

Fig. 76

8. Si encontramos uno de estos tres números en nuestra sucesión, a partir de ahí, podemos afirmar que esta tiene el período propuesto.

Lema: Sea $n \in \mathbb{N}$, si $n \leq 10^k$ y $k \geq 3$, entonces $S(n) \leq 10^{k-1}$.

$n \leq 10^k \Rightarrow n^2 + 1 \leq 10^{2k} + 1 \Rightarrow S(n) \leq 9 \cdot (2k) = 18k \leq 10^{k-1}$ para $k \geq 3$,

demostrable fácilmente por inducción. Aplicando esto sucesivamente,

$$a_0 \leq 10^k$$
$$a_1 \leq 10^{k-1}$$
$$a_2 \leq 10^{k-2}$$
$$\vdots$$
$$a_{k-3} \leq 10^3$$

La suma de los dígitos de cualquier número deja su mismo resto en la división por 9. Veamos que $S(n) \equiv n^2 + 1 (\text{mód } 9) \Rightarrow a_1 \equiv r_1 (\text{mód } 9)$ y $r_1 \in \{1,2,5,8\}$, pues a_0 puede tomar cualquiera de los restos en la división por 9. Como esto no sucede con a_1, que se reduce al conjunto anterior, $a_2 \equiv r_2 (\text{mód } 9)$ y $r_2 \in \{2,5,8\}$.

$a_{k-3}^2 + 1 \leq 1\,000\,001 \Rightarrow a_{k-2} \leq 27 \Rightarrow a_{k-2}^2 + 1 \leq 730 \Rightarrow a_{k-1} \leq 27$, acabamos de demostrar en definitiva que $a_r \leq 27 \Rightarrow a_s \leq 27, \forall s \geq r$.

Luego $\exists n \in \mathbb{N} : a_n \in \{2,11,20,8,17,26,5,14,23\}$, los casos que quedan donde no ha comenzado el período son $a_n \in \{2,20,17,26,14,23\}$, entonces,

$$2^2 + 1 = 5 \Rightarrow a_{n+1} = 5$$
$$20^2 + 1 = 401 \Rightarrow a_{n+1} = 5$$

$17^2 + 1 = 290 \Rightarrow a_{n+1} = 11$

$26^2 + 1 = 677 \Rightarrow a_{n+1} = 20 \Rightarrow a_{n+2} = 5$

$14^2 + 1 = 197 \Rightarrow a_{n+1} = 17 \Rightarrow a_{n+2} = 11$

$23^2 + 1 = 530 \Rightarrow a_{n+1} = 8$

Y queda completada la prueba.

9. Sean $AO = R$, $BD = b$, $CD = c$ y $OD = d$. Como CO es la bisectriz del $\angle ACD$, entonces $\dfrac{d}{R} = \dfrac{c}{b+c}$. La recta AO corta al circuncírculo del triángulo ABC en E. Entonces $AD \cdot DE = BD \cdot CD$, por tanto, $(R + d)(R - d) = bc$.

Como $d = \dfrac{cR}{b+c}$, se tiene que $R^2 = \dfrac{(b+c)^2 c}{b+2c}$

Sea $k = (b, c, R)$, $m = \left(\dfrac{b}{k}, \dfrac{c}{k}\right)$, $R_1 = \dfrac{R}{k}$, $b_1 = \dfrac{b}{km}$, $c_1 = \dfrac{c}{km}$, entonces $R_1^2 = \dfrac{m^2(b_1+c_1)^2 c_1}{b_1+2c_1}$.

Como $(m, R_1) = 1$ y $(b_1 + 2c_1, b_1 + c_1) = (b_1 + 2c_1, c_1) = (b_1, c_1) = 1$, obtenemos $R_1^2 = (b_1 + c_1)^2 c_1$ y $m^2 = b_1 + 2c_1$. Por tanto, c_1 es un cuadrado perfecto, hagamos $c_1 = n^2$. Ahora $c = kmc_1 = kmn^2$, $b = kmb_1 = km(m^2 - 2n^2)$ y $R = kR_1 = kn(m^2 - n^2)$.

La desigualdad $1 > \operatorname{sen}\angle BAC = \dfrac{b+c}{2R} = \dfrac{m}{2n}$, demuestra que $\sqrt{2}n < m < 2n$.

(Recíprocamente, esta condición implica que tal triángulo ABC existe, es acutángulo y la recta AO corta al lado BC). En particular, $n \geq 2$. Como $R - c = kn(m^2 - n^2 - mn)$ es un número primo, se tiene que n es un número primo, $k = 1$ y $m^2 - n^2 - mn = 1$, por tanto, $(m - 1)(m + 1) = n(m + n)$. Por tanto, n divide a $m - 1$ o a $m + 1$.

1) sea $m - 1 = ln$. Entonces $l(ln + 2) = ln + 1 + n$, por tanto:

$n = \dfrac{1-2l}{l^2-l-1}$ como $n < 0$ para $l \geq 2$ tenemos $l = 1$, una contradicción.

2) Sea $m + 1 = ln$. Entonces $l(ln - 2) = ln - 1 + n$, por tanto, $n = \dfrac{2l-1}{l^2-l-1}$.

Como $n \leq 1$ para $l \geq 3$ y $n = -1$ para $l = 1$ tenemos que $l = 2$.
Entonces $n = R - c = 3$, $m = 5$, $b = 35$ y $c = 45$.

Concurso Nacional de Matemática
Temario común
Curso 2007-2008

1. Se tiene un tablero de 9×9 donde se quieren situar todos los números del 1 al 81. Prueba que existe $k \in \{1, 2, 3, \ldots, 8, 9\}$ tal que el producto de los números en la fila k difiere del producto de los números de la columna k.

2. Considera un hexágono regular en el plano. Para cada punto P del plano, sea $L(P)$ la suma de las seis distancias de P a las rectas que contiene cada uno de los lados del hexágono dado, y sea $V(P)$ la suma de las seis distancias de P a cada uno de los vértices del hexágono.

a) ¿Para cuáles puntos P del plano, $L(P)$ toma su menor valor?
b) ¿Para cuáles puntos P del plano, $V(P)$ toma su menor valor?

3. Diego eligió un número natural y lo escribió tres veces en el pizarrón. A continuación realizó varias veces una operación del siguiente tipo: borrar un número del pizarrón y escribir en su lugar el número igual a la suma de los otros dos menos 1. Al final de este proceso, uno de los tres números es 900. Determina todos los posibles valores del número que eligió inicialmente.

Soluciones

1. Supongamos que para cada $i \in \{1, 2, 3, \ldots, 8, 9\}$ el producto de los elementos de la fila i es igual al producto de los elementos de la columna i. Entre 40 y 81 hay exactamente 10 números primos que son 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73 y 79. Como en la diagonal principal del tablero se pueden colocar 9 de estos números para que al multiplicar los números de cada fila i, el producto pueda coincidir con el de la columna i. El otro número al colocarlo en alguna fila i, el producto de esa fila no coincide con el producto de la columna i por no estar este número en la misma. Luego es una contradicción y existe k que cumple con la condición del problema.

2. a) Esta situación puede usualmente ser simetrizada. Cuando un punto P está situado entre dos lados paralelos, la suma de las distancias desde P a los dos lados coincide con la distancia entre los dos lados y es $\sqrt{3}$ veces la longitud de los lados del hexágono. Cuando P es exterior, la suma de las distancias desde P a los dos lados es mayor que la distancia entre los dos lados por ser el doble de la distancia desde P al exterior del lado. Por lo que $L(P)$ es mínimo exactamente cuando la suma de las tres distancias desde los lados paralelos son todas mínimas y eso ocurre cuando P es interior al hexágono o está sobre uno de los lados.

b) Consideremos la suma de las distancias desde P a los vértices opuestos. Por la desigualdad triangular esto es mínimo exactamente cuando los tres puntos están sobre la misma recta y P es el punto medio de los otros dos puntos. Es decir, $V(P)$ es mínimo exactamente cuando P es el centro del hexágono.

3. Sea a el número inicial de Diego. Después de varios pasos los tres números del pizarrón serán de la forma $k(a-1)+1$, $j(a-1)+1$, $h(a-1)+1$, donde k, j y h son enteros positivos. En efecto, al comienzo, $k = j = h = 1$, y al realizar un nuevo paso reemplazará $k(a-1)+1$ por $j(a-1)+1+h(a-1)+1-1 =$ $= (j+h)(a-1)+1$, o reemplazará $j(a-1)+1$ por $k(a-1)+1+h(a-1)+1-1 = (k+h)(a-1)+1$, o reemplazará $h(a-1)+1$ por $k(a-1)+1+j(a-1)+1-1$ $(k+j)(a-1)+1$, luego, el nuevo número también es de la forma $x(a-1)+1$ con x entero positivo. Si en algún momento tiene el 900, debe ser $900 = x(a-1)+1$, es decir, $899 = x(a-1) = 29 \cdot 31$, luego los únicos valores posibles para $a-1$ son 1, 29, 31 y 899, que corresponden respectivamente a los valores de $a = 2$, 30, 32 y 900. Todos ellos pueden lograrse.

Si Diego comienza con (2;2;2), reemplazando en cada operación alternadamente el primero y el segundo número, tendremos siempre el tercer igual a 2; el primero recorrerá los números impares de uno en uno desde 3 hasta llegar a 899, y el segundo recorrerá los números pares de uno en uno hasta llegar a 900.

$(2;2;2) \to (3;2;2) \to (3;4;2) \to (5;4;2) \to \ldots \to (899;898;2) \to (899;900;2)$.

Si Diego comienza con (30;30;30), reemplazando en cada operación alternadamente el primero y el segundo número, tendremos siempre el tercero igual a 30; el primero recorrerá los números de 58 en 58 a partir de 59 hasta llegar a 871, y el segundo recorrerá los números de 58 en 58 a partir de 30 hasta llegar a 900.

(30;30;30) $\rightarrow$ (59;30;30) $\rightarrow$ (59;88;30) $\rightarrow$ (117;88;30) $\rightarrow$ … $\rightarrow$ (871;842;30) $\rightarrow$ (871;900;30).

Si Diego comienza con (32;32;32) reemplazando en cada operación alternadamente el primero y el segundo número, tendremos siempre el tercer igual a 32; el primero recorrerá los números de 62 en 62 a partir del 63 hasta llegar a 869, y el segundo recorrerá los números de 62 en 62 a partir de 32 hasta llegar a 900.

(32;32;32) $\rightarrow$ (63;32;32) $\rightarrow$ (63;94;32) $\rightarrow$ (125;94;32) $\rightarrow$ … $\rightarrow$ (869;838;32) $\rightarrow$ (869;900;32).

Obviamente si Diego comienza con (900;900;900) puede obtener uno de los números igual a 900.

Concurso Nacional de Matemática
Temario por grados
Curso 2007-2008

La distribución de las preguntas a resolver por grado es la siguiente:

Alumnos de 10mo. grado: Responden las preguntas 1, 2 y 3.
Alumnos de 11no. grado: Responden las preguntas 4, 5 y 6.
Alumnos de 12mo. grado: Responden las preguntas 7, 8 y 9.

1. Dado un polinomio de grado 2, $P(x) = ax^2 + bx + c$, se define la función:

$S(P) = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$.

Determina el número r tal que, para cualquier polinomio $P(x)$ de grado 2 y con raíces reales, se tiene que $S(P) \geq ra^2$.

2. Considera el paralelogramo $ABCD$ (en ese orden). Se traza una circunferencia que pasa por A interseca al lado AD en N, al lado AB en M y a la diagonal AC en P, siendo A, M, N y P puntos distintos. Prueba que $AP \cdot AC = AM \cdot AB + AN \cdot AD$.

3. Prueba que hay infinitos pares ordenados de números enteros positivos $(m;n)$ tales que $\frac{m+1}{n}+\frac{n+1}{m}$ es un entero positivo.

4. Determina todas las funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(xy + f(x)) = xf(y) + f(x)$ para todos los números reales x, y.

5. Se tienen un tablero de 2 008 × 2 008, y 2 008 fichas, una en cada fila y cada columna del tablero. Es permitido realizar uno de los movimientos siguientes:

- Dar dos pasos a la derecha y 10 hacia arriba.
- Dar dos pasos a la derecha y 6 hacia abajo.
- Dar dos pasos a la izquierda y 6 hacia arriba.
- Dar dos pasos a la izquierda y 10 hacia abajo.

En caso de que no se pueda completar el camino hacia abajo se salta a la parte superior por la misma columna y se continúa el recorrido normalmente; análogamente en los otros sentidos.

En cada jugada se va a mover una ficha utilizando cualquiera de las operaciones permitidas.

¿Será posible que en algún momento, después de un número finito de jugadas, las fichas estén ubicadas formando un cuadrado de lado 44 en la esquina superior izquierda del tablero y las 72 restantes estén en la última fila en las primeras 72 casillas?

6. Se tiene un triángulo *ABC* isósceles de base *BC*. Por el vértice *A* se traza una recta *r* paralela a *BC*. Los puntos *P*, *Q* están situados sobre la mediatriz de *AB* y *AC* respectivamente, tal que $PQ \perp BC$. *M* y *N* son puntos de la recta *r* tal que los ángulos *APM* y *AQN* son rectos. Prueba que $\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}\leq\frac{2}{AB}$.

7. Sean t_1, $t_2 \geq 0$ tales que $t_1^2 + t_2^2 + t_1 \geq t_1^4 + t_2^4 + t_1^3$. Prueba que $\frac{1}{t_1^2}(1-t_1^4)\geq\frac{1}{t_2}(t_2^2-1)$.

8. Sea *ABC* un triángulo acutángulo.

a) Halla el conjunto de puntos que son centros de los rectángulos cuyos vértices se encuentran sobre los lados de *ABC*.

b) Determina si hay algún punto que es el centro de tres rectángulos diferentes cuyos vértices se encuentran sobre los lados de *ABC*.

9. Se quieren pintar todos los puntos del plano cuyas coordenadas son enteras, de manera que ningún rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados y vértices enteros del mismo color tenga área igual a una potencia de 2. Prueba que es posible hacer esa coloración utilizando solamente dos colores.

Soluciones

1. Sean r_1 y r_2 las raíces reales de $P(x) = ax^2 + bx + c$, entonces $b = -a(r_1 + r_2)$ y $c = ar_1r_2$. Entonces $S(P) = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$
$= a^2((1 + r_1 + r_2)^2 + (r_1 + r_2 + r_1r_2)^2 + (r_1r_2 - 1)^2)$

$= 2a^2(r_1^2r_2^2 + r_1^2 r_2 + r_1 r_2^2 + r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2 + r_1 + r_2 + 1)$

$$= 2a^2\left(\left(r_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)\left(\left(r_2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) \geq \frac{9}{8}a^2.$$

2. Como el cuadrilátero $AMPN$ es cíclico, aplicando el teorema de Ptolomeo se tiene que
$AP \cdot MN = AN \cdot PM + NP \cdot AM$ (1)

Por otro lado $\angle NPM = 180^0 - \angle MAN$ y $\angle PNM = \frac{1}{2}$ arco $PM = \angle CAB$ concluyendo que los triángulos ABC y NPM son semejantes.

Entonces $\dfrac{AB}{PN} = \dfrac{AC}{MN} = \dfrac{BC}{PM}$ sustituyendo en (1) obtenemos que
$AP \cdot AC = AM \cdot AB + AN \cdot AD.$

3. Observemos que una solución es para $m = 1$ y $n = 2$, si tenemos una solución $\dfrac{m+1}{n} + \dfrac{n+1}{m} = k$ con m y n enteros positivos diferentes y sin pérdida de generalidad

$m < n$ entonces podemos escribir la igualdad como $k = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{n(n+1)}{m} + m + 1\right)$ de donde obtenemos

$kn = \dfrac{n(n+1)}{m} + m + 1$ y como kn es un entero m / $n(n + 1)$; consideremos que $r = n(n + 1) : m$ la expresión queda:

$k = \dfrac{1}{n}(r + m + 1) = \dfrac{1}{n}\left(r + \dfrac{n(n+1)}{r} + 1\right) = \dfrac{r+1}{n} + \dfrac{n+1}{r}$. Por lo tanto, si el par $(m;n)$ es solución, entonces el par $(n;r)$ también y $mr = n(n + 1)$, tenemos que $mr > n^2$.

Como $m < n$ tenemos $nr > n^2$ de donde $r > n$ y $n + r > n + m$. De esta forma para cualquier solución $(m;n)$ con $m < n$, podemos generar una nueva solución $(n;r)$, donde la suma de los elementos es mayor por lo que hay infinitas soluciones diferentes.

4. Las funciones $f(x) = 0$ y $f(x) = x$ satisfacen las condiciones. Veremos que son las únicas. Notemos que para $a, b \in \mathbb{R}$, si $f(a) = f(b) \neq 0$, entonces $a = b$, como

$(a + 1)f(a) = af(b) + f(a) = f(ab + f(a)) = f(ba + f(b)) = b + 1f(b)$.

De esta forma $f(0) = 0$ si no lo fuera debe haber una contradicción porque $f(f(0)) = f(0)$. Siguiendo que para cualquier $x \in \mathbb{R}$, $f(f(x)) = f(x \cdot 0 + f(x)) = f(x)$, es decir, $f(x) \neq 0$, entonces $f(x) = x$.

Supongamos entonces que f no es la función identidad, es decir, que $f(a) \neq a$, entonces $a \neq 0$, y $f(a) = 0$: teniendo que para cualquier x real, $f(x) = f(ax + x)$. Si $f(x)$ no es 0, tendríamos una contradicción.

5. Si una ficha está en la casilla (i, j), donde la primera componente denota la fila y el segundo la columna, aplicando la operación 1 pasa a $(i - 10, j + 2)$, y vemos que

$i - 10 + j + 2 = i + j - 8 \equiv i + j$ (mód 8).

Por la segunda operación se pasa a la casilla $(i + 6, j + 2)$ y vemos que

$i + 6 + j + 2 = i + j + 8 \equiv i + j$ (mód 8)

Por la tercera operación se pasa a $(i - 6, j - 2)$ y vemos que

$i - 6 + j - 2 = i + j - 8 \equiv i + j$ (mód 8).

Por la cuarta operación se pasa a $(i + 10, j - 2)$ y vemos que

$i + 10 + j - 2 = i + j + 8 \equiv i + j$ (mód 8).

Cuando se salta a la parte superior, a la inferior, a la derecha o a la izquierda se conserva la congruencia módulo 8, puesto que $2\ 008 \equiv 0$ (mód 8).

Luego cada ficha se mueve en cada jugada a una casilla que conserva la congruencia módulo 8 de la suma de los números que corresponden a su fila y columna, luego hay que analizar si la posición inicial y la final son congruentes en el módulo 8.

En la posición inicial las fichas recorren por fila y columna todos los números desde 1 hasta 2 008.

Luego la suma de estos elementos es $2(1 + 2 + \ldots + 2\ 008) = 2\ 008 \cdot 2\ 009 \equiv 0$ (mód 8).

En la posición final

$44 \cdot 2(1 + 2 + \ldots + 44) = 88 \cdot 22 \cdot 45 \equiv 0$ (mód 8)

$2\ 008 \cdot 72 \equiv 0$ (mód 2 008)

$1 + 2 + \ldots + 72 = 36 \cdot 73 \equiv 4$ (mód 8).

Luego la suma en la posición final es congruente con 4 en el módulo 8, por lo tanto, es imposible.

6. Tenemos que $AN = \dfrac{AQ}{\cos QAN}, AM = \dfrac{AP}{\cos PAM}$, pero $AQ = \dfrac{x}{\cos QAN}, AP = \dfrac{AQ}{\cos QAN}$, donde $x = \dfrac{AB}{2}$.

Ahora $AM = \dfrac{x}{\cos PAM \cdot \cos PAB}, AN = \dfrac{x}{\cos QAN \cdot \cos QAC}$ de aquí obtenemos

$\cos QAC \cdot \cos QAN + \cos PAM \cdot \cos PAB \leq 1$

$$\Leftrightarrow \cos B + \cos\left(QAP - \frac{A}{2}\right) + \cos BAM + \cos\left(QAP - \frac{A}{2}\right) \leq 2.$$

Pero $\angle B = 180° - \angle BAM$, de esta forma $\cos B = -\cos BAM$, esta desigualdad se cumple porque $\cos\left(QAP - \dfrac{A}{2}\right) \leq 1$ es verdadera.

7. Consideremos las funciones $f(t) = t^2(1 - t)$ y $g(t) = t(1 - t)$. Podemos escribir la desigualdad de la forma siguiente:

$t_1^2 + t_2^2 + t_1 \geq t_1^4 + t_2^4 + t_1^3 \Leftrightarrow t_1^2 - t_1^4 + t_2^2 - t_2^4 + t_1 - t_1^3 \geq 0.$

Cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$ y $t \geq 0$, tenemos $(1 - t^n)(1 - t^2) \geq 0 \Leftrightarrow t^n(1 - t^2) \leq 1 - t^2$.

Escogiendo $n = 1$, tenemos que $g(t) \leq 1 - t^2$, si $n = 2$ tenemos que $f(t) \leq 1 - t^2$. Finalmente si $n = 3$, se tiene que $f(t) \leq \frac{1}{t} - t$ y $g(t) \leq \frac{1}{t^2} - 1$.

Asimismo $0 \leq f(t_1) + f(t_2) + g(t_1) \leq (1-t_1^2)+\left(\frac{1}{t_1^2}-t_2\right)+\left(\frac{1}{t_1^2}-1\right)$, que es equivalente a $\frac{1}{t_1^2}(1-t_1^4) \geq \frac{1}{t_2}(t_2^2-1)$.

8. a) El conjunto es la unión de los tres segmentos cuyos puntos extremos son los puntos medios de cada uno de los lados y el punto medio de sus alturas relativas. Probaremos que cada rectángulo que tiene dos vértices sobre un lado, sean P y Q esos puntos situados sobre el lado AB, el vértice R está sobre BC y el vértice S está sobre AC. Dado que $RS \parallel AB$, determina completamente el rectángulo tan largo como su intersección con la altura CH, interior al rectángulo por ser acutángulo. Sea M' el punto medio de la altura CH, N el punto medio de RS y N' su proyección sobre AB, O el punto medio de NN' lo cual es también el centro del rectángulo. Por el teorema de Tales N está sobre la mediana CM. De forma similar en el triángulo CHM se prueba que O está sobre MM' por ser $CH \parallel NN'$. Dado cualquier punto O sobre MM' (diferente de uno de los extremos), sea N el punto de intersección de CM con la recta trazada desde O perpendicular a AB. La recta que pasa por N y es paralela a AB determina el rectángulo pedido.

b) Utilizando argumentos similares debe haber al menos un punto que satisface lo requerido en (b). Sean K y L los puntos medios de AB y BC respectivamente, D, E y F los puntos medios de las alturas AG, BH y CI respectivamente. Por el teorema de Tales D, E y F están sobre el triángulo KLM donde KF, LD y ME son cevianas. De donde se obtiene que $\frac{KE}{EL}=\frac{AH}{HC}$ y de forma similar con D y F, llegando a obtener que $\frac{KE}{EL}\cdot\frac{LF}{FM}\cdot\frac{MD}{DK}=\frac{AH}{HC}\cdot\frac{BJ}{IA}\cdot\frac{CG}{GB}$

Utilizando el teorema de Ceva aplicado a las alturas de ABC, entonces KF, LD y ME son concurrentes.

9. Pintemos de azul todos los puntos $(x;y)$ tales que $x + y$ es múltiplo de 3 y de verde todos los otros puntos de coordenadas enteras y veamos que esta coloración cumple las condiciones pedidas.

Caso 1: Consideremos un rectángulo cuyos vértices son todos azules. Sean $(a;b)$ y $(a;d)$ dos de estos vértices adyacentes. Entonces $a + b$ y $a + d$ son ambos múltiplos de 3 y $d - b$ es también un múltiplo de 3. Consecuentemente el área del rectángulo es un múltiplo de 3 por lo que no puede ser una potencia de 2.

Caso 2: Consideremos los rectángulos R con vértices todos verdes y cuya área sea una potencia de 2, designemos por $(a;b)$, $(a;d)$, $(c;b)$ y $(c;d)$ los vértices de R y consideremos que $c > a$ y $d > b$. Como el área es una potencia de 2, existen p y q enteros no negativos tales que $c - a = 2^p$ y $d - b = 2^q$. Sea $x = a + b$, como los vértices son verdes, entonces $x \not\equiv 0$ (mód 3).

Consecuentemente, $x + (-1)^p \not\equiv 0$ (mód 3), $x + (-1)^q \not\equiv 0$ (mód 3), tampoco es congruente con 0 módulo 3 la suma $x + (-1)^p + (-1)^q$. Tenemos que si $x \equiv 1$ (mód 3), entonces

$x + (-1)^p \equiv 2$ (mód 3), o $x \equiv 2$ (mód 3) y $x + (-1)^p \equiv 1$ (mód 3). De forma análoga se concluye que si $x \equiv 1$ (mód 3), entonces $x + (-1)^q \equiv 2$ (mód 3), o

$x \equiv 2$ (mód 3) y $x + (-1)^q \equiv 1$ (mód 3).

Teniendo que $x + (-1)^p \equiv (-1)^q$ (mód 3) por lo que p y q tienen la misma paridad, esto implica que x, $x + (-1)^p$ y $x + (-1)^q$ dejan restos distintos en la división por 3 y alguno de estos es múltiplo de 3 siendo incompatible con la hipótesis del problema.

Concurso Nacional de Matemática
Temario común
Curso 2008-2009

1. Juan y Pedro juegan alternadamente sobre la cuadrícula dada (fig. 77). Cada uno en su turno traza de 1 a 5 recorridos diferentes a los trazados anteriormente, que unan a A con B, moviéndose únicamente a la derecha y hacia arriba sobre las líneas de la cuadrícula.

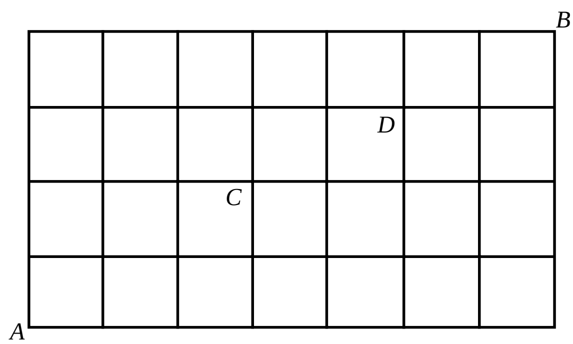

Fig. 77

Juan empieza jugando. Pierde el que trace un recorrido que pase por C o D. Prueba que uno de ellos puede ganar independientemente de cómo juegue el otro.

2. En el planeta Hidro habían 2 008^2 hidras hace algún tiempo. Una de estas tenía 1 tentáculo, otra 2, otra 3 y así sucesivamente hasta la última, con 2 008^2 tentáculos. Desde entonces ha ocurrido lo siguiente: Si dos hidras se encuentran, se acoplan uniéndose tentáculo a tentáculo y de inmediato, los tentáculos acoplados desaparecen. Las hidras sin tentáculos mueren y a las sobrevivientes del acople les crecen 8 nuevos tentáculos, además de los que ya tienen. Ayer regresó de Hidro una expedición que capturó la última hidra viva, que tiene 23 tentáculos. ¿Será realmente esta la última hidra viva?

3. En cada casilla de un tablero $n \times n$ ($n \geq 2$), se escribe un entero z no nulo. Dicho tablero se llama *tablero incaico* si para cada casilla del tablero, el número escrito en ella es igual a la diferencia de los números escritos en dos de sus casillas vecinas (con un lado en común). ¿Para qué valores de n se pueden obtener tableros incaicos?

SOLUCIONES

1. Primeramente contemos los recorridos que hay de A a B sin pasar por C ni D: De A a B van $\binom{11}{7} = 330$ recorridos en total. De A a C hay $\binom{5}{3}$ recorridos y de C a B $\binom{6}{4}$ y como ambos sucesos ocurren de manera independiente entonces hay $\binom{5}{3}\binom{6}{4} = 150$ recorridos de A a B que pasan por C. Análogamente hay $\binom{8}{5}\binom{3}{2} = 168$ recorridos que pasan por D. Pero los conjuntos de los recorridos que pasan por C y de los recorridos que pasan por D, no son disjuntos y su intersección es el conjunto de los recorridos que pasan por C y por D que son $\binom{5}{3}\binom{3}{2}\binom{3}{2} = 90$ recorridos. Entonces en virtud del principio de las inclusiones y exclusiones hay 330 – 150 – 168 + 90 = 102 recorridos diferentes de A a B sin pasar ni por C ni por D.
Pedro puede ganar siempre que trace tantos recorridos como sea necesario para completar un total de seis con los que haya jugado Juan la última vez (fig. 78). Notemos que los 102 recorridos posibles pueden dividirse en 17 "grupos" de 6 recorridos, como no se pueden trazar más de cinco recorridos, entonces Pedro al completar cada uno de estos grupos garantiza trazar el último, y necesariamente Juan tendrá que pasar por C o D.

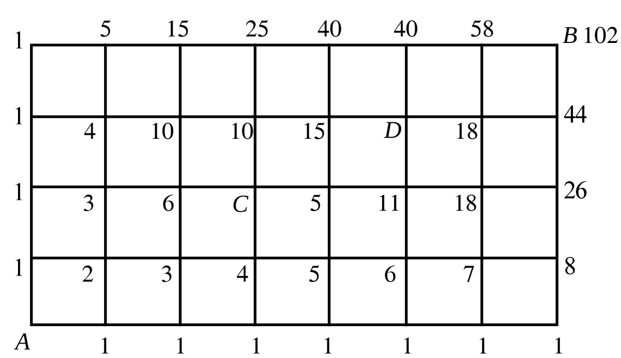

Fig. 78

Nota: La cantidad de recorridos posibles también se podían contar directamente en la cuadrícula.

2. Denotemos por S_n la suma de las cantidades de tentáculos de todas las hidras vivas, después de haber ocurrido el acople número n. Si dos hidras con x y y $(x \geq y)$ tentáculos respectivos realizan el acople número $n + 1$, entonces:

$S_{n+1} = S_n - x - y + (x - y) = S_n - 2y$ lo que indica claramente que la paridad de S es invariante y notemos que $S_0 = 1 + 2 + ... + 2\,008^2 = \dfrac{2\,008^2\left(2\,008^2 + 1\right)}{2}$ es un número par. Entonces es imposible que la suma de los tentáculos sea 23 que es impar, por lo que necesariamente tiene que haber al menos otra hidra viva con una cantidad impar de tentáculos para que la suma de los tentáculos sea par.

3. Para n impar y mayor que 2 es posible la distribución siguiendo uno de los modelos siguientes:

Si n es de la forma $n = 4k + 1$; $k \geq 1$ (tabla 27).

Tabla 27

2	−1	2	−1	2	−1	2	−1	2	…	2	−1	2	−1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	…	1	1	1	1	1
−1	2	−1	2	−1	2	−1	2	−1	…	−1	2	−1	2	−1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	…	1	1	1	1	1
2	−1	2	−1	2	−1	2	−1	2	…	2	−1	2	−1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	…	1	1	1	1	1
−1	2	−1	2	−1	2	−1	2	−1	…	−1	2	−1	2	−1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	…	1	1	1	1	1
2	−1	2	−1	2	−1	2	−1	2	…	2	−1	2	−1	2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2	−1	2	−1	2	0 – 1	2	−1	2	…	2	−1	2	−1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	…	1	1	1	1	1
−1	2	−1	2	−1	2	−1	2	−1	…	−1	2	−1	2	−1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	…	1	1	1	1	1
2	−1	2	−1	2	−1	2	−1	2	…	2	−1	2	−1	2

Si n es de la forma $n = 4k + 3$; $k \geq 0$ (tabla 28).

Tabla 28

2	−1	2	−1	2	−1	2	−1	2	…	2	−1	2	−1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	…	1	1	1	1	1
−1	2	−1	2	−1	2	−1	2	−1	…	−1	2	−1	2	−1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	…	1	1	1	1	1
2	−1	2	−1	2	−1	2	−1	2	…	2	−1	2	−1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	…	1	1	1	1	1
−1	2	−1	2	−1	2	−1	2	−1	…	−1	2	−1	2	−1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	…	1	1	1	1	1
2	−1	2	−1	2	−1	2	−1	2	…	2	−1	2	−1	2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
−1	2	−1	2	−1	2	−1	2	−1	…	−1	2	−1	2	−1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	…	1	1	1	1	1
2	−1	2	−1	2	−1	2	−1	2	…	2	−1	2	−1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	…	1	1	1	1	1
−1	2	−1	2	−1	2	−1	2	−1	…	−1	2	−1	2	−1

donde cada 1 es la diferencia de un 2 y un 1; cada –1 es la diferencia de un 1 y un 2; y cada 2 es la diferencia de un 1 y un –1.

Para n par, $n \geq 4$, es posible la distribución a partir del tablero impar al que se añade una columna a la derecha y una fila inferior siguiendo uno de los modelos siguientes:

Si n es de la forma $n = 4k + 2$; $k \geq 1$, se parte del tablero de lado $4k + 1$ (tabla 29).

Tabla 29

2	−1	2	−1	2	−1	2	−1	2	…	2	−1	2	−1	2	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	…	1	1	1	1	1	1
−1	2	−1	2	−1	2	−1	2	−1	…	−1	2	−1	2	−1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	…	1	1	1	1	1	1
2	−1	2	−1	2	−1	2	−1	2	…	2	−1	2	−1	2	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	…	1	1	1	1	1	1
−1	2	−1	2	−1	2	−1	2	−1	…	−1	2	−1	2	−1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	…	1	1	1	1	1	2
2	−1	2	−1	2	−1	2	−1	2	…	2	−1	2	−1	2	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2	−1	2	−1	2	−1	2	−1	2	…	2	−1	2	−1	2	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	…	1	1	1	1	1	1
−1	2	−1	2	−1	2	−1	2	−1	…	−1	2	−1	2	−1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	…	1	1	1	1	1	1
2	−1	2	−1	2	−1	2	−1	2	…	2	−1	2	−1	2	1
−1	1	−2	−1	−1	1	−2	−1	−1	…	−1	1	−2	−1	3	2

Si es de la forma $n = 4k + 4$; $k \geq 0$, se parte del tablero de lado $4k + 3$ (tabla 30).

Tabla 30

2	−1	2	−1	2	−1	2	−1	2	…	2	−1	2	−1	2	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	…	1	1	1	1	1	1
−1	2	−1	2	−1	2	−1	2	−1	…	−1	2	−1	2	−1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	…	1	1	1	1	1	1
2	−1	2	−1	2	−1	2	−1	2	…	2	−1	2	−1	2	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	…	1	1	1	1	1	1
−1	2	−1	2	−1	2	−1	2	−1	…	−1	2	−1	2	−1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	…	1	1	1	1	1	1
2	−1	2	−1	2	−1	2	−1	2	…	2	−1	2	−1	2	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
−1	2	−1	2	−1	2	−1	2	−1	…	−1	2	−1	2	−1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	…	1	1	1	1	1	1
2	−1	2	−1	2	−1	2	−1	2	…	2	−1	2	−1	2	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	…	1	1	1	1	1	1
−1	2	−1	2	−1	2	−1	2	−1	…	−1	2	−1	2	−1	2
1	−2	−1	3	1	−2	−1	3	1	…	−1	3	1	−2	−1	3

Donde la fila y la columna añadidas están formadas por paquetes de cuatro casillas más algunas en la esquina inferior derecha.

Para $n = 2$ no es posible construir tableros incaicos. Para probarlo supongamos que existe el tablero incaico siguiente.

a	b
c	d

Como las casillas a y d solo tienen dos casillas vecinas entonces $|a| = |d| = |b - c|$ Luego, $a = d$ o $a = -d$. También, $b = c$ o $b = -c$. Si $a = d$ entonces $|a| = |a - d| = 0$, lo que no es posible, pues $c \neq 0$. Lo mismo ocurre si $b = c$. Entonces, $a = -d$ y $b = -c$.

De aquí, $|c| = |a - d| = 2|a|$ y $|a| = |c - b| = 2|c|$, pero de aquí se obtiene que $a = c = 0$ lo que también es imposible.

Concurso Nacional de Matemática
Temario por grados
Curso 2008-2009

La distribución de las preguntas a resolver por grado es la siguiente:

Alumnos de 10mo. grado: Responden las preguntas 1, 2 y 3.
Alumnos de 11no. grado: Responden las preguntas 4, 5 y 6.
Alumnos de 12mo. grado: Responden las preguntas 7, 8 y 9.

1. a) Demuestra que cuando un número primo se divide por 30, el resto es 1 o un número primo.
b) Muestra que si se divide por 60 o por 90 no ocurre lo mismo.

2. Sea I el incentro de un triángulo acutángulo ABC. Sean $C_A = (A;\ \overline{AI})$ la circunferencia de centro en A y radio $\overline{AI}$; $C_B = (B;\ \overline{BI})$; $C_C = (C;\ \overline{CI})$ definidas de manera análoga. Sean X; Y; Z los puntos de intersección (diferentes de I) de C_B y C_C; de C_C y C_A, de C_A y C_B, respectivamente. Muestra que si el radio de la circunferencia que pasa por los puntos X; Y; Z es igual al radio de la circunferencia que pasa por los puntos A, B y C, entonces el triángulo ABC es equilátero.

3. Determina el menor valor de $x^2 + y^2 + z^2$, donde x, y, z son números reales positivos, de modo que: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$.

4. Determina todas las funciones f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tales que:

$x + f(x\,f(y)) = f(y) + y\,f(x)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

5. Demuestra que existen infinitos enteros positivos n tales que $\dfrac{5^n - 1}{n+2}$ es un entero.

6. Sean Ω_1 y Ω_2 circunferencias que se intersecan en los puntos A y B y sean O_1 y O_2 sus respectivos centros. Se toman M en Ω_1 y N en Ω_2 al mismo lado que B con respecto al segmento $\overline{O_1O_2}$, tales que $MO_1 \parallel BO_2$ y $BO_1 \parallel NO_2$. Se trazan las tangentes a Ω_1 y Ω_2 por M y N respectivamente que se intersecan en K. Demuestra que A, B y K son colineales.

7. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales positivos tales que $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. Prueba que se cumple que:

$$\frac{x_1(2x_1 - x_2 - x_3)}{x_2 + x_3} + \frac{x_2(2x_2 - x_3 - x_4)}{x_3 + x_4} + \ldots + \frac{x_{n-1}(2x_{n-1} - x_n - x_1)}{x_n + x_1} + \frac{x_n(2x_n - x_1 - x_2)}{x_1 + x_2} \geq 0\,.$$

8. Sean ABC un triángulo isósceles de base $\overline{BC}$ y $\angle BAC = 20°$. Sea D un punto en el lado $\overline{AB}$ tal que $\overline{AD} = \overline{BC}$. Determina la amplitud del $\angle DCA$.

9. Halla todos los tríos de números primos $(p; q; r)$ para los cuales se cumple que p divide a $2qr + r$, q divide a $2pr + p$ y r divide a $2pq + q$.

Soluciones

1. Sea $n = 30q + r$ con $0 \leq r < 30$. Si r es compuesto puede ser un número par o un número impar.
Si r es par, entonces n debe ser par por lo que n tiene que ser 2 y $r = 2$ que es un número primo.
Si n es impar y r es un número compuesto, r no puede ser 9, 15, 21 o 25 porque en cada uno de estos casos tendría un divisor común con 30 y n no sería primo.

a) Para $109 = 60 + 49$ y $139 = 90 + 49$ no se cumple, luego si se sustituye por 60 o por 90 no sucede lo mismo.

2. Como los puntos de intersección de dos circunferencias son simétricos con respecto a la recta que pasa por los centros, resulta que X, Y, Z son los simétricos de I con respecto a BC, CA y AB, respectivamente. Luego $IX = IY = IZ = 2r$, por lo que I es el circuncentro del triángulo XYZ y el circunradio es $2r$. Si $2r = R$ entonces ABC es equilátero.

3. La condición $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$ puede factorizarse como

$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 1 \qquad (1)$

Sea $A = x^2 + y^2 + z^2$ y $B = x + y + z$. Note que $B^2 - A = 2(xy + yz + zx)$

Nota también que $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \dfrac{1}{2}[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2] \geq 0$.

La ecuación (1) ahora es: $B\left(A - \dfrac{B^2 - A}{2}\right) = 1$

Por lo tanto, $3A = B^2 + \dfrac{2}{B} = B^2 + \dfrac{1}{B} + \dfrac{1}{B} \geq 3$, luego $A \geq 1$.

El mínimo $A = 1$, y se logra en $(x, y, z) = (1, 0, 0)$.

4. Si $x = 0$ tenemos $f(0) = f(y) + y\, f(0)$. Luego, f es lineal de la forma $f(x) = a - ax$ para algún real a. Insertando esto en la ecuación original vemos que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ tenemos

$x + a - ax(a - ay) = a - ay + y(a - ax)$, luego $x - a^2x + a^2xy = -axy$.

Ahora, sea $y = 0$, vemos que $x = a^2x$ para todo x, luego $a^2 = 1$. Por esta condición en la ecuación de arriba tenemos $xy = -axy$ o equivalentemente, $(1 + a)xy = 0$, lo cual implica que $a = -1$, porque esta última igualdad se verifica para todo x, y.

Tenemos demostrado que $f(x) = x - 1$. Usando esta expresión para f en la ecuación inicial, vemos que el miembro izquierdo es igual a:

$x + f(xf(y)) = x + f(xy - x) = x + xy - x - 1 = xy - 1$

y en el miembro derecho $f(y) + yf(y) = y - 1 + y(x - 1) = xy - 1$

Los dos lados son iguales para todo x, y, luego $S = \{f\}$

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x - 1 \ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

5. Sea $n = 5^{2^k}$, entonces $(n + 2) \mid 5^n - 1$ es equivalente a $(5^{2^k} + 1) \mid (5^{5^{5^k}-1} - 1)$.

Tenemos $(5^{2^{k+1}} - 1) = (5^{2^k})^2 - 1 = (5^{2^k} + 1)(5^{2^k} - 1)$, lo que implica que $5^{2^k} + 1$ divide a $5^{2^{k+1}} - 1$. Así, es suficiente mostrar que $5^{2^{k+1}} - 1$ divide a $5^{5^{5^k}-1} - 1$.

Como se sabe que si $m \mid n$ entonces $x^m - 1 \mid x^n - 1$, es suficiente probar que $2^{k+1} \mid 5^{2^k} - 1$ pero eso es cierto, ya que $5^{2^k} - 1 = (5 - 1)(5^2 + 1)\ldots(5^{2^{k-1}} + 1)$ tiene exactamente $k + 2$ factores 2: dos en el primer factor y uno en cada uno de los otros k factores.

Otra solución:

Sea $p > 5$ un número primo, tomemos $n = \dfrac{5^p - 1}{2} - 2$. Entonces $5^p \equiv 1$ (mód $n + 2$) y

$n \equiv \dfrac{5-1}{2} - 2 \equiv 0$ (mód p), de modo que $n + 2 \mid 5^n - 1$.

Como hay infinitos primos $p > 5$, se completa la solución.

6. Prolonguemos MO_1 y NO_2 hasta que se corten en P (fig. 79), veamos que PO_1BO_2 es un paralelogramo, luego $PM = MO_1 + O_1P = R_1 + R_2 = PO_2 + O_2N = PN$ donde R_1 y R_2 son los radios de Ω_1 y Ω_2 respectivamente. De esta forma los triángulos PMK y PNK son iguales al ser rectángulos y tener un cateto y la hipotenusa congruentes, de aquí que $KM = KN$ (1). Supongamos que la recta que une K y B corta a Ω_1 en Q_1 y a Ω_2 en Q_2.

Aplicando potencia de puntos tenemos que $KM^2 = KB \cdot KQ_1$ y $KN^2 = KB \cdot KQ_2$ de (1) se tiene entonces que $KQ_1 = KQ_2$ que implica finalmente que $Q_1 = Q_2 = A$, por tanto, A está en la recta que pasa por K y por B.

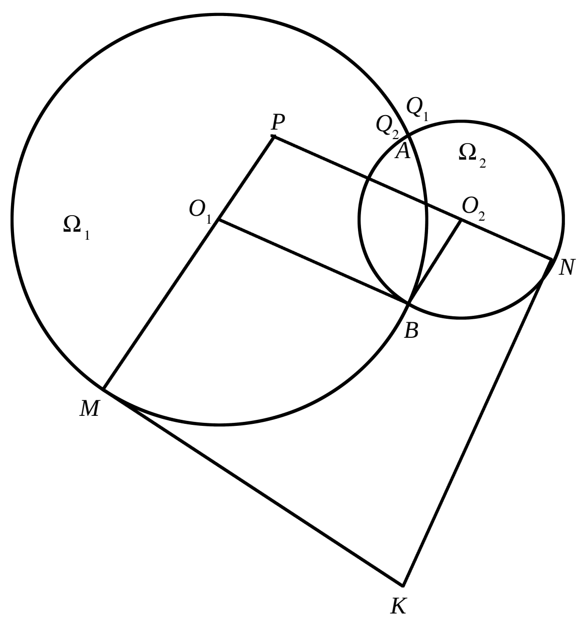

Fig. 79

7. Para todos números reales no negativos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tenemos:

$$\frac{x_1(2x_1 - x_2 - x_3)}{x_2 + x_3} + \frac{x_2(2x_2 - x_3 - x_4)}{x_3 + x_4} + \ldots + \frac{x_{n-1}(2x_{n-1} - x_n - x_1)}{x_n + x_1} + \frac{x_n(2x_n - x_1 - x_2)}{x_1 + x_2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x_1^2}{x_2+x_3}-x_1+\frac{2x_2^2}{x_3+x_4}-x_2+\ldots+\frac{2x_{n-1}^2}{x_n+x_1}-x_{n-1}+\frac{2x_n^2}{x_1+x_2}-x_n\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\frac{x_1^2}{x_2+x_3}+\frac{x_2^2}{x_3+x_4}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n+x_1}+\frac{x_n^2}{x_1+x_2}\geq\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{2}$$

Multiplicando ambos lados de la desigualdad por el número positivo

$(x_2 + x_3) + (x_3 + x_4) + \ldots + (x_n + x_1) + (x_1 + x_2) = 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$, se obtiene

$$\left(\frac{x_1^2}{x_2+x_3}+\frac{x_2^2}{x_3+x_4}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n+x_1}+\frac{x_n^2}{x_1+x_2}\right)\left((x_2+x_3)+(x_3+x_4)+\ldots+(x_n+x_1)(x_1+x_2)\right)\geq$$

$$\geq\left(\sqrt{\frac{x_1^2}{x_2+x_3}}\sqrt{x_2+x_3}+\ldots+\sqrt{\frac{x_n^2}{x_1+x_2}}\sqrt{x_1+x_2}\right)^2=\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)^2.$$

8. Sea m la mediatriz del segmento $\overline{AC}$ y sea D' el simétrico de D respecto a m. Entonces $\angle D'CA=\angle DAC=20°$, por lo tanto,

$\angle D'CB = \angle DAC - \angle D'CA = 80° - 20° = 60°$.

Como $\overline{D'C}=\overline{DA}=\overline{BC}$, el triángulo $D'BC$ es equilátero, por lo que D' equidista de B y C, al igual que A. Esto significa que la recta AD' es la mediatriz de $\overline{BC}$, que es también bisectriz del $\angle BAC$ por ser ABC isósceles, luego $\angle DCA=\angle D'AC=10°$.

9. Supongamos que dos de los primos p, q, r son iguales digamos $p = q$. Entonces como $p \mid 2qr + r$ entonces $p \mid r$ y como p y r son primos entonces $p = r$. Obtenemos entonces las soluciones del tipo $(p;q;r) = (p;p;p)$ con p primo.

Analicemos ahora el caso en que los tres números primos son desiguales. Supongamos sin pérdida de generalidad que p es el menor primo. Así observamos que $2qr + r = r(2q + 1)$; $2pr + p = p(2r + 1)$ y $2pq + q = q(2p + 1)$, entonces

$pqr \mid (2p + 1)(2q + 1)(2r + 1)$, es decir, $pqr \mid 8pqr + 4(pq + qr + rp) + 2(p + q + r) + 1$

de aquí que $pqr \mid 4q(p + 1) + 4r(p + 1) + 4qr - 2q - 2r + 2p + 1$ y como p es el menor de los primos, se cumple que $p + 1 \leq r$ y $p + 1 \leq q$, de modo que

$pqr \leq 4qr + 4rq + 4qr - 2q - 2r + 2p + 1 < 12qr \Rightarrow p < 12$.

Ahora basta examinar los valores para $p = 2, 3, 5, 7, 11$, para los cuales obtenemos respectivamente r divisor de 5, 7, 11, 15, 23. Notemos que r no puede ser divisor de 15 en el caso $p = 7$ pues $r > p$. Además, $p \neq 2$ pues 2 no divide a $2q + n1$. Para $p = 3$, $r = 7$ y obtenemos $q \mid 15$ y $3 \mid 2q + 1$, lo que no es posible; para $p = 5$, tenemos $r = 11$ y obtenemos $q \mid 23$ y $5 \mid 2q + 1$, lo que no es posible; para $p = 11$, tenemos $r = 23$ y obtenemos $q \mid 47$ y $11 \mid 2q + 1$, lo que no es posible.

$\therefore$ las únicas soluciones son de la forma $(p;p;p)$ con p primo.