PROBLEMAS DE ENTRENAMIENTO PARA LOS CONCURSOS DE ESCUELA Y MUNICIPIO

1. Determinar la menor distancia entre la parábola $y = 3x^2 - 5$ y la parábola $y = -(5x^2 + 6)$.

2. Dado el sistema de ecuaciones: $x + y = 1$, $y + z = 5$, $z + x = 2$. Calcula el valor de xyz.

3. Halla todos los números enteros que no son soluciones de la inecuación $x^2 - 3x - 4 > 0$.

4. Determina cuántas raíces reales tiene la ecuación $x^4 - 2x^3 + x^2 - 9 = 0$.

5. Si $a = \log_{\frac{3}{2}} \sqrt{3}$ y $b = \log_{\frac{1}{2}} 3$. Calcula el valor de $\frac{1}{a} - \frac{2}{b}$.

6. El punto P(5;3) es el simétrico de Q(r;s) con respecto a la recta $2x + 3y = 12$. Hallar $2r + 3s$.

7. Sea R la región del plano formada por todos los puntos cuyas coordenadas (x;y) satisfacen la condición $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} \leq 6$. Hallar el área de R.

8. Se definen los siguientes tres conjuntos de números complejos:

$$A = \{z: z^{18} = 1\};\ B = \{w: w^{48} = 1\};\ C = \{zw \text{ con } z \in A \text{ y } w \in B\}$$

Halla cuántos elementos distintos tiene C.

9. Hallar todos los pares (x;y) de números reales que satisfacen el sistema:

$$\frac{1}{xy + x - y} + \frac{3}{xy - x + y} = 2 \qquad \frac{5}{xy + x - y} - \frac{6}{xy - x + y} = 3$$

10. La fracción $\frac{5x - 11}{2x^2 + x - 6}$, ha sido obtenida sumando las fracciones $\frac{A}{x + 2}$ y $\frac{B}{2x - 3}$. Determina los valores de A y B.

11. Si x es un número real positivo y $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 25$, calcula el valor de $x^3 + \frac{1}{x^3}$.

12. Una función f está definida por $f(x) = \frac{a + bx}{b + x}$ donde a y b son números reales diferentes de cero. Determinar todos las funciones f de esta forma para las cuales se cumple que

$$f(1) + 2f(-2) = 0 \text{ y } f(0) - 2f(3) = 0.$$

13. Sean Z_1, Z_2 y Z_3 números complejos. Probar que si $|Z_1| = |Z_2| = |Z_3| = r$, entonces:

$$\left| \frac{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \right| = r$$

14. La dirección del MINED asignó un presupuesto para ser distribuido entre algunos de sus Institutos Politécnicos para la compra de medios audiovisuales, a uno de ellos asignó $ 1 000 más el 10 % de lo que restaba, luego dio a otro $ 2 000 más el 10 % del restante, a otro le dio $ 3 000 más el 10 % de lo que en ese momento quedaba, y así sucesivamente hasta llegar al último. Al final cada Instituto Politécnico recibió la misma asignación. ¿Cuántos Institutos Politécnicos fueron beneficiados?.

15. Tres personas A, B y C se pasaron una tarde en la playa. A llevó 4 bocaditos, B llevó 3 bocaditos, pero C sólo llevó un paquete de 21 caramelos. Como buenos amigos se repartieron a partes iguales los bocaditos. C, muy apenado, decidió no quedarse con ningún caramelo y se los dio a A y a B proporcionalmente en reciprocidad a lo que ellos habían hecho con sus bocaditos, ¿Cuántos caramelos recibió A y cuántos B?

16. Tres obreros trabajando en conjunto pueden realizar una obra en una hora. Si el primer obrero trabaja una hora y a continuación lo sustituye el segundo, trabajando este cuatro horas, terminarían la obra. ¿En cuántas horas puede realizar el trabajo cada obrero por separado si el tercero necesita una hora menos que el primero?

17. Dada la ecuación $x^2 - 4\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\,x - 4\sqrt{2}m + \sqrt{48}m = 0$

a)Calcula el menor valor de $m \in N$ para el cual la ecuación no tiene soluciones reales.
b)Para qué valores de m, la ecuación tiene solución única?. Determínala.

18. Si $\sqrt{a+4\sqrt{b+2}} = \sqrt{a-2} + \sqrt{2b}$, sabiendo que a > b, $a \in N$ y $b \in N$. Descomponer en radicales simples $\sqrt{a+b+2\sqrt{a+6b}}$.

19. Si se cumple que: $\dfrac{\text{Sen}^3\alpha\text{Cos}\alpha+1}{\text{Cos}^3\alpha\text{Sen}\alpha+1} = \dfrac{\text{Cot}\alpha}{3}$. Halla M = $\dfrac{\text{Sen}\alpha - \text{Cos}^7\alpha + \text{Cos}^5\alpha - \text{Sen}^3\alpha}{\text{Cos}\alpha - \text{Sen}^7\alpha + \text{Sen}^5\alpha - \text{Cos}^3\alpha}$

20. Sabiendo que $\log_4 125 = C$. Hallar $\log_{10} 64$.

21. Sea Z = x + yi un número complejo
a) ¿Dónde se encuentra situado el punto z si /z/=1?
b) ¿Y si /z - 2/ = 3?

22. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$xy + xz = 8 - x^2$$
$$xy + yz = 12 - y^2$$
$$yz + zx = -4 - z^2$$

23. Si p(x), q(x), r(x) y s(x) son todos polinomios tales que:

$$p(x^5) + x.q(x^5) + x^2.r(x^5) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)s(x)$$

Prueba que x-1 es un factor de p(x).

24. Sea la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, que tiene por raíces a x_1 y x_2. Formar una ecuación que tenga raíces a $y_1 = \dfrac{1}{x_1}$; $y_2 = \dfrac{1}{x_2}$.

25. Descomponer en factores $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$.

26. La ecuación $x^4 - 4x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0$ tiene las cuatro raíces positivas. Encuentra a y b.

27. Probar que $3(a + b)(b + c)(c + a) \leq 8(a^3 + b^3 + c^3)$.

28. Si a y b son números reales positivos. Halla la imagen de la función f con $f(x) = \dfrac{x}{ax^2 + b}$.

29. Dado el polinomio $p(x) = x^8 + x^5 + x^2 - x + 1$. demuestra que para todo valor real del dominio $p(x) \geq 0$.

30. Resuelve la ecuación $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

31. Determina los valores de los parámetros a y b para que los polinomios
$P(x) = a^2x^3 + b^2x^2 + ax + 2ab$ y $Q(x) = ax^3 + bx + 4$ dejen resto 5 al ser divididos por $x - 1$.

32. ¿Qué valor corresponde a W, si los ceros de las funciones $f(x) = 3x^2 + W + 15$, son números enteros?

33. Sea $F(x) = /x - p/ + /x - 15/ + /x - p - 15/$, donde $0 < p < 15$. Determinar el mínimo valor que toma $F(x)$ en el intervalo $p \leq x \leq 15$.

34. Se escriben todos los números enteros desde el 1 hasta el 2003, ambos inclusive. Entonces se suprimen todos los que son divisibles por 5 y también los que son cubos perfectos. Determina la cantidad de números que quedan sin tachar.

35. Con los dígitos del 1 al 5 se escriben todos los números diferentes, de cinco cifras (sin ninguna repetida) y se ordenan de menor a mayor. Por ejemplo el número 23 541 se escribe a continuación del número 23 514. ¿Qué lugar ocupa en la lista el número 54 123?

36. Prueba que en cualquier colección de 7 o más enteros positivos hay dos cuya suma o diferencia es divisible por 11.

37. Las raíces del polinomio $x^2 + ax + b + 1$ son números enteros positivos. Probar que $a^2 + b^2$ no es primo.

38. Se escriben en sucesión todos los números naturales del 1 al 2 001 en orden, uno a continuación del otro, para formar un número muy grande que llamaremos N. ¿Cuál es la cifra central de N.

39. El producto de tres números enteros es 1500 y su suma es 45. Halla todos los tríos de números enteros que cumplan estas condiciones.

40. ¿Cuántos factores 2 tiene el número k, si $k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 498 \cdot 499 \cdot 500$?

41. Halla todas las soluciones enteras de la ecuación $2x^2 - 3xy - 2y^2 = 7$.

42. Se tienen dos número enteros: $a = 1\underbrace{1...1}_{m}1$ y $b = 10\underbrace{0...0}_{m-1}05$.

Prueba que $a \cdot b + 1$ es un cuadrado perfecto y determina las cifras de su raíz cuadrada.

43. Determina, si existe $n \in N$ tal que $n^3 = n + 2\,003$.

44. Sea $\overline{abc}$ un número de tres cifras. Demuestra que el número de seis cifras $\overline{abcabc}$ es divisible por 7, 11 y 13.

45. Determina cuántos números naturales menores que 2 002, tienen un número impar de divisores positivos.

46. Halla todos los pares de números naturales (x;y) con x < y tales que la suma de todos los números naturales comprendidos estrictamente entre ambos es igual a 1 999.

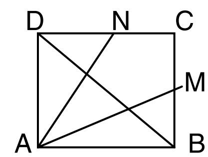
47. Si S(n) es la sucesión de sumar todas las cifras del número n. Por ejemplo: S(195) =1+ 9+ 5 = 15. Calcula $S(4^{1662}\cdot 5^{2003} - 2\,003)$.

48. Sean x, y dígitos tales que el número de 4 cifras $\overline{xxyy}$ representa el cuadrado de un número natural N. Halla N.

49. En un triángulo rectángulo ABC, se traza CD, que es la altura relativa a la hipotenusa; si CD = 6 cm y AD = 3 cm. Calcula la longitud de la hipotenusa.

50. El número de metros cúbicos del volumen de un cubo es el mismo que el número de metros cuadrados del área de sus seis caras. Calcula la longitud de la arista expresada en metros.

51. ABCD es un cuadrado;
M es el punto medio de BC;
N es el punto medio de CD.
Prueba que la diagonal BD está dividida por AN y AM en tres segmentos iguales.



52. En el paralelogramo ABCD, AB = 25 y BC = 31. La bisectriz del ángulo BAD corta a BC en E. Halla la longitud de EC.

53. En un triángulo equilátero las 3 alturas se cortan en un punto cuya distancia a cada vértice es de $2\sqrt{3}$ centímetros. Halla el perímetro del triángulo.

54. En un tetraedro, dos de sus caras tienen área de 48 cm^2 y 56 cm^2. La altura correspondiente a la primera mide 14 cm. Halla la altura relativa a la segunda cara.

55. Sea ABC un triángulo con $\overline{AB} = 10$, $\overline{BC} = 12$ y $\overline{AC} = 14$. En el interior del lado $\overline{AC}$ se sitúa un punto D de forma tal que $\overline{BD} = 10$. Calcula la razón $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{CD}}$.

56. Las longitudes de los lados de un triángulo son 6, 8 y 10. Demostrar que existe una única recta que simultáneamente biseca el área y el perímetro del triángulo.

57. En un triángulo de lados de 9 cm y 15 cm está inscrito un paralelogramo de forma que uno de sus lados mide 6 cm y se encuentra sobre la base del triángulo y sus diagonales son respectivamente paralelas a los lados laterales del triángulo. Halla el lado base del triángulo y el otro lado del paralelogramo.

58. Considera un cubo de lado l.
a) ¿Cómo tenemos que recortar sus ochos esquinas para que las seis caras originales resulten ser octógonos regulares. (aparecerán otras ochos caras que serán triángulos equiláteros)
b) Calcula el volumen de este nuevo sólido en términos de l.

59. Sea ABC un triángulo y sean E, F puntos sobre los lados $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$. Sea D la intersección de $\overline{BE}$ con $\overline{CF}$ y suponga que las áreas de los triángulos ∆BDF, ∆CDE y ∆BCD son 3, 3 y 9 respectivamente. Encuentra el área del cuadrilátero AFDE.

60. Demuestra que si en un triángulo la razón de las tangentes de dos ángulos es igual a la razón de los cuadrados de los senos de estos ángulos entonces el triángulo es isósceles o rectángulo.
61. En el triángulo ABC, **t** es una recta que pasa por el baricentro G y p, q, r son las distancias de B, C y A a **t** y B y C están en un mismo semiplano. ¿Será cierto que p + q = r?

62. En el triángulo ABC, D es punto medio de BC y E es un punto sobre AC tal que CD:CA = 1:n. P es el punto de intersección de AD y BE. Determina el menor valor de n para el que $\frac{PD}{AD} \leq \frac{1}{12}$.

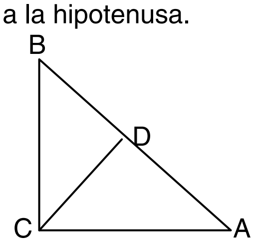
63. En un triángulo rectángulo cuyas longitudes de los catetos son b y c, se inscribe un cuadrado de modo que dos lados están sobre los catetos y uno de los vértices está situado sobre la hipotenusa. Calcula el área del cuadrado en función de b y c.

64. Sea ABC un triángulo rectángulo en C, a y b las longitudes de sus catetos y r el radio de la circunferencia que es tangente a los catetos y que tiene el centro O sobre la hipotenusa. Demuestra que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

65. Prueba que la longitud de los catetos de un triángulo rectángulo isósceles es siempre igual a la suma de los radios de sus circunferencias inscrita y circunscrita.

66. En la siguiente figura. Determinar los ángulos $\alpha = \angle ABC$ y $\beta = \angle BAC$ suponiendo que el área del triángulo ADC es la cuarta parte del área del triángulo ABC siendo el ángulo BCA igual a 90^0 y CD altura relativa a la hipotenusa.



67. Se dibuja un rectángulo (el término no excluye el cuadrado) en papel cuadriculado y se sombrean las casillas del contorno. En este caso, el número de cuadrículas sombreadas es inferior al que permanecen en blanco, en el interior. ¿Será posible dibujar un rectángulo de proporciones tales que el borde, de una casilla de ancho, contenga igual número de cuadrados que el rectángulo blanco interior?. De ser así halla todas las soluciones.

68. Una cuadrícula de 4 columnas por 7 filas se llena con los números del 1 al 28 sin repetir números y un número en cada casilla. Sean P_1, P_2, P_3 y P_4 el producto de todos los números de la primera, segunda, tercera y cuarta columnas respectivamente. Demuestra que al menos uno de estos productos es múltiplo de 128.

69. En el cuadrado mágico multiplicativo mostrado, si los productos de los elementos de cada fila, columna y diagonal son iguales a **k**. Si todos los elementos son números enteros, demostrar que **k** es un cubo perfecto.

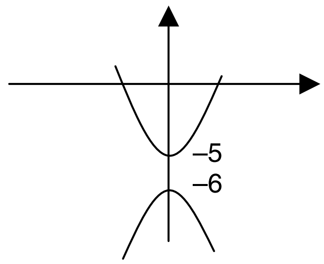
a	b	c
d	e	f
g	h	i

70. Seis cartones con números solamente en una cara son colocados sobre una mesa, como se muestra en la figura. Los cartones X, Y están con la cara numerada hacia abajo. La media aritmética de los números de todos los cartones es 5. La media aritmética del cartón Y y todos sus vecinos es 3. ¿Cuál es el número escrito en el cartón X?

8	2	4
X	6	Y

SOLUCIONES

1. Se pueden hacer los gráficos de ambas parábolas en un mismo sistema de coordenadas y determinar la distancia entre sus vértices.Su distancia es de 1 unidad.



2. $y = 1 - x$; $y + z = 1 - x + z = 5 \Rightarrow z - x = 4$; $z + x = 2$ resolviendo el sistema queda $x = -1$, $y = 2$, $z = 3$. $\therefore xyz = -6$.

3. $x^2 - 3x - 4 > 0$, es decir, $(x - 4)(x + 1) > 0$ cuya solución son los valores reales de x para los cuales se cumple que $x > 4$ o $x < -1$ por lo tanto no son solución los valores reales de x tales que $-1 \leq x \leq 4$.
$\therefore$Los valores enteros que no son soluciones de la inecuación son –1, 0, 1, 2, 3 y 4.

4. $x^2(x^2 - 2x + 1) - 9 = 0$
$x^2(x - 1)^2 - 9 = 0$
$[x(x - 1) + 3][x(x - 1) - 3] = 0$
$(x^2 - x + 3)(x^2 - x - 3) = 0$

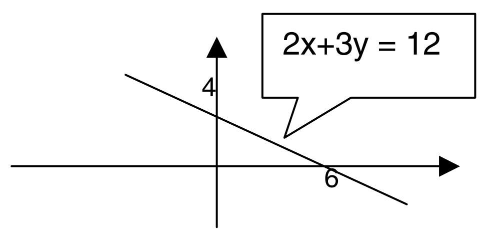
$x^2 - x + 3 = 0$ o $x^2 - x - 3 = 0$
Discriminante < 0 — No hay raíces reales.
Discriminante > 0 — Hay 2 raíces reales.

$\therefore$La ecuación dada tiene 2 raíces reales.

5. $a = \log_{\frac{3}{2}} \sqrt{3}$ entonces $\frac{1}{a} = \log_{\sqrt{3}} \frac{3}{2}$; $b = \log_{\frac{1}{2}} 3$ entonces $\frac{1}{b} = \log_3 \frac{1}{2} = -\log_3 2$ y $\frac{2}{b} = \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{2}$

luego $\frac{1}{a} - \frac{2}{b} = \log_{\sqrt{3}} \frac{3}{2} - \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{2} = 2$.

6. Como el punto medio de PQ es
$\left(\frac{r+5}{2}; \frac{s+3}{2}\right)$ que está en la recta dada,
entonces $2\left(\frac{r+5}{2}\right) + 3\left(\frac{s+3}{2}\right) = 12$
se llega a la expresión $2r + 3s = 5$.



7. El área que se pide es un rombo simétrico respecto a los ejes coordenados de diagonales 4 y 6, luego el área es $A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12\ u^2$.

8. Sean $z^{18} = 1$ y $w^{48} = 1$ mcm(18,48) = 144, $z^{144} = 1^8 = 1$ y $w^{144} = 1^3 = 1$.
Como 144 es el menor exponente que cumple la propiedad, entonces hay 144 elementos distintos en C.

9. Multiplicando la primera ecuación por 2 y sumando ambas ecuaciones se tiene $\frac{7}{xy + x - y} = 7$ por lo que $xy + x - y = 1$ (I) sustituyendo en la primera ecuación y calculando se tiene $xy - x + y = 3$ (II).
De (I) y (II) queda $xy = 2$, $x - y = -1$ resolviendo el sistema se tiene los pares (1:2) y (–2;–1).

10. Se tiene que $\frac{A(2x-3)+B(x+2)}{(2x-3)(x+2)} = \frac{5x-11}{(2x-3)(x+2)}$ entonces 2A+ B = 5 y –3A+ 2B = –11, que al resolverlo queda A = 3 y B = -1.

11. Se tiene que $\left(x+\frac{1}{x}\right)$ = 5 y $x^2 + \frac{1}{x^2}$ = 23, entonces $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)$ = (5)(22) = 110.

12. f(0) = $\frac{a}{b}$; f(1) = $\frac{a+b}{b+1}$; f(-2) = $\frac{a-2b}{b-2}$; f(3) = $\frac{a+3b}{b+3}$

f(1) + f(–2) = $\frac{a+b}{b+1}+2\frac{a-2b}{b-2}=0$ de aquí resulta $3b^2 - 3ab + 6b = 0 \Rightarrow b(b - a + 2) = 0$

b = 0 no es posible

$\therefore$ b + 2 = a

f(0) – 2f(3) = $\frac{a}{b}-2\frac{a+3b}{b+3}=0$ de donde resulta $7b^2 - b - 6 = 0 \Rightarrow b = 1$ o $b = -\frac{6}{7}$ de aquí a = 3, a = $\frac{8}{7}$

$f_1(x) = \frac{x+3}{x+1}$ y $f_2(x) = \frac{-6x+8}{7x-6}$

13. $Z_1 = r\,Cisx$, $Z_2 = r\,Cisy$ $Z_3 = r\,Cis\,z$

sustituyendo:

$$\left|\frac{r^2Cis(x+y)+r^2Cis(y+x)+r^2Cis(x+z)}{Cisx+Cisy+Cisz}\right| = r\ ;\ |r|\left|\frac{Cis(x+y)+Cis(y+z)+Cis(x+z)}{Cisx+Cisy+Cisz}\right| = r$$

$$|Cis(x+y)+Cis(y+z)+Cis(x+z)| = |Cisx+Cisy+Cisz|$$

$$|Cos(x+y)+Cos(y+z)+Cos(x+z)|+i\big(Sen(x+y)+Sen(y+z)+Sen(x+z)\big)$$

= $Cos^2(x + y) + Cos^2(y + z) + Cos^2(x + z)$ + 2[Cos(x + y)Cos(y + z) + Cos(x + y)Cos(x + z) + Cos(y + z)Cos(x + z)] + $Sen^2(x + y) + Sen^2(y + z) + Sen^2(x + z)$ + 2[Sen(x + y)Sen(y + z) + Sen(x + y)Sen(x + z) + Sen(y + z)Sen(x + z)] = 3+ 2$\left[Cos(x-y)+Cos(y-z)+Cos(y-x)\right]$

= (Miembro Izquierdo)

$Sen^2x + Cos^2x + Sen^2y + Cos^2y + Sen^2z + Cos^2z$

+ 2$\left(CosxCosy+SenxSenz+CosyCosz+SenySenz+CosyCosx+SenySenx\right)$

$\Leftrightarrow\ |(Cosx+Cosy+Cosz)+i(Senx+Seny+Senz)| = |Cisx+Cisy+Cisz|$

14. Si x es la cantidad original, tenemos que al primer Instituto Politécnico se le asigna:

1 000 + $\frac{1}{10}$(x – 1 000) y al segundo 2 000 + $\frac{1}{10}$[x – 3 000 - $\frac{1}{10}$(x – 1 000)] y al igualar estas cantidades y resolver tenemos que x = 81 000 y entonces asigna a cada uno 9 000.

$\therefore$ Fueron beneficiados 9 Institutos Politécnicos.

15. Cada uno recibió $\frac{7}{3}$ del total de bocaditos, esto quiere decir que A cedió $\frac{5}{3}$ de sus bocaditos y C cedió $\frac{2}{3}$

$\therefore$ Como la repartición de los caramelos fue proporcional entonces tenemos que: A cedió 5 partes y C cedió 2, infiriéndose que A recibió 15 caramelos y B recibió 6.

16. Sean x, y, x – 1 las horas que necesitan los tres obreros para realizar la obra entonces $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x-1}=1$ de aquí y = $\frac{x^2-x}{x^2-3x+1}$ (1) pero $\frac{x-1}{x}=\frac{4}{y}$ de aquí y = $\frac{4x}{x-1}$ (2)
Igualando (1) y (2) se tiene que x = 3, y = 6.
$\therefore$El primero en 3 horas, el segundo en 6 horas y el tercero en 2 horas.

17. $-x^2-4\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\,x-4\sqrt{2}\mathrm{m}+\sqrt{48}\mathrm{m}=0$ luego $\mathrm{a}=1$; $\mathrm{b}=-4\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; $\mathrm{c}=-4\sqrt{2}\mathrm{m}+\sqrt{48}\mathrm{m}$

a) Si D < 0 no tiene solución real y D = b^2 - 4ac

$(-4\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}})^2-4(-4\sqrt{2}\mathrm{m}+\sqrt{48}\mathrm{m})<0;\quad 16(\sqrt{3}-\sqrt{2})-4(-4\sqrt{2}\mathrm{m}+4\sqrt{3}\mathrm{m})<0\quad /:4$

$4(\sqrt{3}-\sqrt{2})+4\sqrt{2}\mathrm{m}-4\sqrt{3}\mathrm{m}<0;\quad 4(\sqrt{3}-\sqrt{2})-4\mathrm{m}(\sqrt{3}-\sqrt{2})<0$

$4(\sqrt{3}-\sqrt{2})(1-\mathrm{m})<0\quad /:4\sqrt{3}-\sqrt{2}$

1 – m < 0 $\Rightarrow$ m > 1 por lo que m = 2.
b)D = 0 solución única se tiene 1 – m = 0 por tanto m = 1.

$x^2-4\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\,\mathrm{x}-4\sqrt{2}+4\sqrt{3}=0;\ a=1;\ b=(-4\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}});\ x=\frac{b}{2\mathrm{a}}$

$x=-\frac{(-4\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}(\ )}{2}=\frac{4\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{2}=2\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

18. $\sqrt{a+4\sqrt{b+2}}=\sqrt{a-2}+\sqrt{2\,\mathrm{b}}$ elevando al cuadrado en ambos miembros.

$a+4\sqrt{\mathrm{b}+2}=a-2+2\sqrt{\mathrm{a}-2}\sqrt{2\,\mathrm{b}}+2\mathrm{b}$

$4\sqrt{\mathrm{b}+2}=2\sqrt{2\,\mathrm{b}\,(\mathrm{a}-2)}+2\mathrm{b}-2\quad /:2$ igualando las partes racionales y las irracionales.

$2\sqrt{\mathrm{b}+2}=\sqrt{2\,\mathrm{b}\,(\mathrm{a}-2)}+b-1$

b – 1 = 0 o b = 1

$2\sqrt{\mathrm{b}+2}=\sqrt{2\,\mathrm{b}\,(\mathrm{a}-2)}$ de donde se tiene que 4(b + 2) = 2b(a – 2) y como b = 1 tenemos que a = 8.

Luego $\sqrt{a+b+2\sqrt{\mathrm{a}+6\,\mathrm{b}}}=\sqrt{a+2\sqrt{14}}$ supongamos que

$\sqrt{\mathrm{a}+2\sqrt{14}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

de donde se tiene el sistema x + y = 9; x – y = 5 que resolviendo el sistema se obtiene que x = 7; y = 2.

Por tanto $\sqrt{a+b+2\sqrt{a+6b}}=\sqrt{7}+\sqrt{2}$

19. Si M = $\frac{sen\alpha-\cos^7\alpha+\cos^5\alpha-sen^3\alpha}{\cos\alpha-sen^7\alpha+sen^5\alpha-\cos^3\alpha}=\frac{sen\alpha(1-sen^2\alpha)-\cos^5\alpha(\cos^2\alpha-1)}{\cos\alpha(1-\cos^2\alpha-sen^5\alpha(sen^2\alpha-1)}$

$=\frac{sen\alpha\cos^2\alpha+\cos^5\alpha sen^2\alpha}{\cos\alpha sen^2\alpha+sen^5\alpha\cos^2\alpha}=\frac{sen\alpha\cos^2\alpha(1+\cos^3\alpha sen\alpha)}{\cos\alpha sen^2\alpha(1+sen^3\alpha\cos\alpha)}=\cot\alpha\left(\frac{1+\cos^3\alpha sen\alpha}{1+sen^3\alpha\cos\alpha}\right)$

Como $\frac{\mathrm{sen}^3\alpha\cdot\cos\alpha+1}{\cos^3\alpha\cdot\mathrm{sen}\alpha+1}=\frac{\cot\alpha}{3}=\frac{\mathrm{sen}\alpha-\mathrm{sen}^3\alpha-(\cos^7\alpha-\cos^5\alpha)}{\cos\alpha-\cos^3\alpha-(\mathrm{sen}^7\alpha-\mathrm{sen}^5\alpha)}$

$$= \frac{\operatorname{sen}\alpha\left(1-\operatorname{sen}^2\alpha\right)-\cos^5\alpha\left(\cos^2\alpha-1\right)}{\cos\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)-\operatorname{sen}^5\alpha\left(\operatorname{sen}^2\alpha-1\right)}$$ se tiene que $\frac{\cos^3\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha+1}{\operatorname{sen}^3\alpha\cdot\cos\alpha+1}=\frac{3}{\cot\alpha}$ (2)

$$= \frac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos^2\alpha\left(1+\cos^3\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha\right)}{\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}^2\alpha\left(1+\operatorname{sen}^3\alpha\cdot\cos\alpha\right)}$$ y sustituyendo $= \cot\alpha\left(\frac{1+\cos^3\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha}{1+\operatorname{sen}^3\alpha\cdot\cos\alpha}\right)$ (1)

$$M = \cot\alpha\frac{3}{\cot\alpha} = 3$$

20. Transformando el $\log_4 125 = C$ tenemos

$$\log_4 125 = C \Rightarrow \log_4 5^3 = C \Rightarrow 3\log_4 5 = C \Rightarrow \log_4 5 = \frac{C}{3} \Rightarrow \frac{1}{2}\log_2 5 = \frac{C}{3}$$

por último $\log_2 5 = \frac{2}{3}C$

Por otra parte, transformando

$$\log_{10} 64 = \log_{10} 2^6 = 6\log_{10} 2 = \frac{6}{\log_{10} 2} = \frac{6}{\log_2 2+\log_2 5} = \frac{6}{1+\frac{2C}{3}} = \frac{6}{\frac{3+2C}{3}} = \frac{18}{3+2c}$$

21. a) Los puntos del plano tales que su distancia al origen de coordenadas es constante e igual a 1 se encuentran sobre una circunferencia con centro en el origen y radio 1. La ecuación de esta circunferencia puede ser obtenida directamente de la definición de $|Z| = \sqrt{x^2+y^2}$, entonces $\sqrt{x^2+y^2} = 1 \Rightarrow x^2+y^2 = 1$.

b) De forma análoga:

$$|x+y_i-z| = 3 \Rightarrow |x-z+y_i| = 3 \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2} = 3 \Rightarrow (x-2)^2+y^2 = 9.$$

Esto representa una circunferencia con centro en (2;0) y radio 3.

22. $xy + xz = 8 - x^2$ (1)

$xy + yz = 12 - y^2$ (2)

$yz + zx = -4 - z^2$ (3)

Transponiendo y sumando las tres ecuaciones tenemos: $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 16$

$(x + y + z)^2 = 16 \Rightarrow x + y + z = \pm 4$

Reordenando cada ecuación, podemos factorizarla como x + y + z por otro factor de grado uno, y obtenemos las soluciones (2;3; −1) y (−2; −3;1)

23. Teniendo en cuenta que las raíces de la ecuación $x^5 - 1 = 0$ suman cero, entonces si sustituimos una raíz cualquiera en la expresión tenemos:

$p(1) + x\,q(1) + x^2\,r(1) = 0$, esto pasa con cualquiera de las raíces.

∴ Tenemos una ecuación cuadrática con cuatro raíces. Esto significa que cada coeficiente debe ser idénticamente nulo, luego p(1) = 0.

∴Un factor debe ser x – 1.

24. De acuerdo al teorema de Vieta se tiene $y_1 + y_2 = \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = -\frac{b}{c}$ y $y_1y_2 = \frac{1}{x_1x_2} = \frac{a}{c}$, entonces la ecuación buscada será $cx^2 + bx + a = 0$.

25. <u>Variante 1</u>: Sea $f(x;y;z) = (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$. Como f(–y;y;z) = f(x;–z;z) = f(–z;y;z) = 0, entonces f(x;y;z) = (x + y)(y +z)(z + x)c. Evaluando en (1;1;0) obtenemos c = 3.

Por tanto $f(x;y;z) = 3(x + y)(y + z)(z + x)$.
Variante 2:
$(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 3y^2z + 6xyz + 3xz^2 + 3yz^2 - x^3 - y^3 - z^3$
$= 3x^2y + 3xy^2 + 3y^2z + 6xyz + 3xz^2 + 3yz^2 = 3(x + y)(y + z)(z + x)$.

26. Sean x_1, x_2, x_3, x_4 las soluciones de la ecuación,, de acuerdo al teorema de Vieta se tiene $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$; $x_1x_2x_3x_4 = 1$; de acuerdo a la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica se tiene $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \geq \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4} = 1$. Entonces $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 4$.
La igualdad se cumple si $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.
Por tanto $x^4 - 4x^3 + ax^2 + bx + 1$ $(x - 1)^4 = x^4 - 4x^3 + ax^2 + bx + 1$. De aquí $a = 6$, $b = -4$.

27. Aplicando la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica tenemos:
$\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3} \geq \sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$. Elevando al cubo en ambos miembros:
$[(a + b) + (b + c) + (c + a)]^3 \geq 27(a + b)(b + c)(c + a)$ (1). Desarrollando el miembro izquierdo tenemos:
$[(a + b) + (b + c) + (c + a)]^3 = 8(a + b + c)^3$
$= 8(a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc)$
$= 8(a^3 + b^3 + c^3) + 24(a + b)(b + c)(c + a)$ (2)
Sustituyendo (2) en (1) y despejando $8(a^3 + b^3 + c^3)$ tenemos $8(a^3 + b^3 + c^3) \geq 3(a + b)(b + c)(c + a)$.

28. Sea $y = \frac{x}{ax^2+b}$ entonces $ayx^2 - x + by = 0$ que es una ecuación de segundo grado cuyo discriminante $D = 1 - 4aby^2$, si $D \geq 0$ entonces $-\frac{1}{4ab} \leq y \leq \frac{1}{4ab}$ y la imagen es $y \in R$ con $-\frac{1}{4ab} \leq y \leq \frac{1}{4ab}$.

29. $x^8 + x^5 + x^2 - x + 1 = x^5(x^3 + 1) + (x^2 - x + 1) = x^5(x + 1)(x^2 - x + 1) + (x^2 - x + 1)$
$= (x^2 - x + 1)(x^6 - x^5 + 1)$ pero $x^2 - x + 1 > 0$ para todo x real. Analicemos el otro factor:
Si $x \geq 1$ se tiene que $x^2 - x + 1 > 0$; si $0 \leq x < 1$ entonces $1 - x^5 + x^6 > 0$; si $x < 0$ entonces $x^6 - x^5 + 1 > 0$ por lo que para todo $x \in R$ el polinomio $p(x) = (x^2 - x + 1)(x^6 - x^5 + 1) > 0$.

30. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \frac{1}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x} = 4$

$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{2x} - 4\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + 1 = 0$; Discriminante = 12 luego $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$

Si $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^x = (2 + \sqrt{3})^2 \Rightarrow x = 2$

Si $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2 - \sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^{-1} \Rightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^x = (2 + \sqrt{3})^{-2} \Rightarrow x = -2$

31. Se tiene $P(1) = a^2 + b^2 + a + 2ab = 5$ y $Q(1) = a + b + 4 = 5$ donde $b = 1 - a$
$a^2 + (1 - a)^2 + a + 2a(1 - a) = 5 \Rightarrow a = 4, b = -3$.

32. Se tiene que $3x^2 = -(w + 15)$ para que las soluciones sean enteras debe cumplirse que $w = 3t$ con t entero y $t < -4$ y la ecuación queda $x^2 = -(t + 5)$ y los valores de t son $t = -5$ o $t = -5n - 1$ con n entero positivo por lo que $w = -15$ o $w = -15n - 3$ con n entero positivo.

33. Tenemos que $0 < p \leq x \leq 15$; como $x \geq p$ entonces $/x - p/ = x - p$; como $x \leq 15$ entonces $/x - 15/ = 15 - x$, supongamos que $x - p - 15 > 0$ entonces $x > p + 15$; pero como $p > 0$ entonces se tiene que $x>15$ ¡Contradicción! Luego $x - p - 15 < 0$, entonces $/x - p - 15/ = -x + p + 15$, entonces
$F(x) = x - p + 15 - x - x + p + 15 = 30 - x$, como el mayor valor que puede tomar x es 15
El mínimo de $F(x) = 30 - 15 = 15$.

34. $2\ 003 = 5 \cdot 400 + 3$, entonces hay 400 números divisibles por 5.
$1^3 < 2\ 003 < 13^3 = 2\ 197$. Luego hay 12 cubos perfectos, de los cuales hay dos de ellos que son divisibles por 5, (5^3 y 10^3) por lo que quedan 10 números que son cubos perfectos y no divisibles por 5.
Quedan $2\ 003 - (400 + 10) = 1\ 593$.

35. Como el número que se pide es uno de los últimos, entonces comenzamos la lista al revés, es decir por el mayor: 54 321, 54 312, 54 231, 54 213, 54 132, 54 123. Como en la lista hay 120 números, entonces, el número dado ocupa el lugar 115.

36. Los restos al dividir un número por 11 pueden ser 0, 1, 2, 3,...,10. Si de los números dados hay dos que dejan el mismo resto, su diferencia será divisible por 11. Esto se daría siempre que tuviéramos 12 o más números en la colección. Ahora consideremos que tenemos entre 7 y 11 números en esa colección y todos dejan restos diferentes.
Sean $A_0 = \{0\}$, $A_1= \{1,10\}$, $A_2 = \{2,9\}$, $A_3 = \{3,8\}$, $A_4 = \{4,7\}$, $A_5 =\{5,6\}$. Como tenemos entre 7 y 11 números con restos diferentes y si a cada número le asociamos el A_i que contenga a su resto, alguno de los Ai deberá ser asignado a dos de los números, esta pareja de números cumple que su suma es divisible por 11.

37. Sean p y q las raíces: $p + q = -a$ $\quad p.q = b + 1$
$$a^2 + b^2 = (p + q)^2 + (pq - 1)^2 = (p^2+1)(q^2 + 1)$$
Cada uno de estos factores son enteros positivos y mayores que 1
$\therefore a^2 + b^2$ es el producto de dos enteros mayores que 1, es decir, es compuesto.

38. El total de números que se escriben es:
De 1 cifra: $9 \Rightarrow 1 \cdot 9 = 9$
De 2 cifras: $90 \Rightarrow 2 \cdot 90 = 180$
De 3 cifras: $900 \Rightarrow 3 \cdot 900 = 2\ 700$
De 4 cifras hasta 2001· 1002 $\Rightarrow 4 \cdot 1\ 002 = 4\ 008$
En total se escriben $6897 = 2 \cdot 3\ 448 + 1$. De aquí podemos inferir que el número del centro es el que ocupa el lugar 3449.
Entonces, hasta tres cifras hay 2 889 y $3\ 449 - 2\ 889 = 560$ y $560: 4 = 140$
$\therefore$ $999 + 140 = 1\ 139 \Rightarrow$ el número pedido es 9.

39. Sean a, b y c los números buscados con $a.b.c = 1\ 500$ (1) $a + b + c = 45$ (2) ahora bien,
$1\ 500 = 2^2.3.\ 5^3$ (3)
Si uno de ellos es 5^3 es imposible porque $5^3 > 45$. Si hay dos que son múltiplos de 5 y el tercero no, entonces la suma no sería múltiplo de 5, por lo que los tres tienen que ser múltiplos de 5, es decir:
$a = 5x$, $\quad b = 5y$, $\quad c = 5z$ y si sustituimos en (2) tendremos:
$5x + 5y + 5z = 45$ y $5(x + y + z) = 45 \quad \Rightarrow x + y + z = 9$ (4)
$\therefore$Los factores posibles de 1500 son 1, 2, 3, 4 ó 6.
De (3) y (4) se tiene que el único trío que lo cumple es 1, 2 y 6 ya que 2, 3 y 6 no lo cumple porque al multiplicar quedaría $2^3 \cdot 3$ y esto no es posible.

40. El número k tiene 494 factores 2.

41. La expresión $2x^2 - 3xy + 2y^2 = (2x + y)(x - 2y)$ luego $(2x + y)(x - 2y) = 7$ como 7 es un número primo, $2x + y = 7$ y $x - 2y = 1$ ó $2x + y = 1$ y $x - 2y = 7$ ó $2x + y = -7$ y $x - 2y = -1$ ó $2x + y = -1$ y $x - 2y = -7$ resolviendo los sistemas se tiene las soluciones $x = 3$; $y = 1$ o $x = -3$; $y = -1$.

42. $a\cdot b+1$ es un cuadrado perfecto
$a = 1\underbrace{1...1}_{m}1$, y $b = 10\underbrace{0...0}_{m-1}05$

Ejemplos:

$a\cdot b + 1 = 11...11\cdot 100..005 + 1$

$= 1\underbrace{1...1}_{m}1\ (9\underbrace{9...9}_{m}9 + 6) + 1$

$= 1\underbrace{1...1}_{m}1(9 \cdot 1\underbrace{1...1}_{m}1 + 6) + 1$

$= 9 \cdot(1\underbrace{1...1}_{m}1)^2 + 6 \cdot 1\underbrace{1...1}_{m}1 + 1 = 3^2\cdot(1\underbrace{1...1}_{m}1)^2 + 2\cdot 3\cdot 1\underbrace{1...1}_{m}1 + 1 = (3\cdot 1\underbrace{1...1}_{m}1)^2 + 2\cdot(3\cdot 1\underbrace{1...1}_{m}1) + 1$

$= (3\underbrace{3...3}_{m-1}3)^2 + 2\cdot(3\underbrace{3...3}_{m}3) + 1 = (3\underbrace{3...3}_{m}3+1)^2 = (3\underbrace{3..3}_{m-1}4)^2$

las cifras de la raíz cuadrada son $3\underbrace{3...3}_{m-1}4$

$a = 11 \quad b = 105$
$11\cdot 105+1 = 34^2$
$a = 111 \quad b = 1005$
$111\cdot 1005 + 1 = 334^2$

43. La igualdad planteada es $n^3 - n = 2\,003$, es decir, $(n - 1)n(n + 1) = 2\,003$ pero el producto de tres números consecutivos siempre es divisible por 3 y 2 003 no es múltiplo de 3, por lo que no se cumplirá la igualdad para todo $n \in$ N.

44. $\overline{abcabc} = a\cdot 10^2 + b\cdot 10^4 + c\cdot 10^3 + a\cdot 10^2 + b\cdot 10 + c = 10^2\cdot a(10^3 + 1) + 10\cdot b(10^3 + 1) + c(10^3 + 1)$
$= 1\,001(\overline{abc}) = 7\cdot 11\cdot 13\cdot \overline{abc}$ luego el número $\overline{abcabc}$ es divisible por 7, 11 y 13.

45. Para que tenga un número impar de divisores el número debe ser un cuadrado perfecto por lo que debe cumplirse que $x^2 < 2002$ y $x < 45$. Entonces hay 44 números que cumplen.

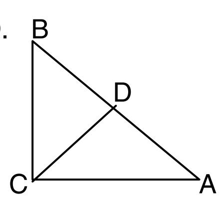
46. Sean x, (x + 1), (x + 2), ..., (x + n – 1) los números buscados, entonces debe cumplirse que $(x + 1) + (x + 2) + ..., (x + n - 1) = (n - 1)x + ½ (n - 1)n = 1\,999$ entonces $(n - 1)(2x + n) = 2\cdot 1\,999$ por lo que $n - 1 = 1\,999$ y $2x + n = 2$ no es posible o $2x + n = 1\,999$ y $n - 1 = 2$, $n = 3$, para $n = 3$, $2x = 1\,996$ por lo que $x = 998$ por lo tanto hay un solo par de números naturales que satisfacen las condiciones del problema que son $x = 998$; $y = 1\,001$.

47. $S(4^{1002}\cdot 5^{2003} - 2\,003) = S(2^{2\cdot(1002)}\cdot 5^{2003}-2\,003) = S(2^{2004}\cdot 5^{2003}-2\,003) = S(2^{2003+1}\cdot 5^{2003}-2\,003)$
$= S(2^{2003}\cdot 2^1\cdot 5^{2003} - 2\,003) = S(2\cdot 10^{2003}-2\,003) = S(\underbrace{200...00}_{2003}-2\,003)$

$=S(1\underbrace{9...9}_{1999}7997) = 18\,024$

48. Sea $\overline{xxyy} = N^2$ entonces $1\,100x + 11y = N^2$ y $11(100x + y) = N^2$ por lo que $N^2 = 11^2\cdot a^2$ siendo a un dígito. Por lo que $100x + y = 11\cdot a^2$. Haciendo una diferenciación de casos se tiene que debe cumplirse que: $x = 2, y = 9$ o $x = 3, y = 8$ o $x = 4, y = 7$ o $x = 5, y = 6$ o $x = 6, y = 5$ o $x = 7, y = 4$ o $x = 8, y = 3$ o $x = 9, y = 2$. El último caso posible es para $x = 7$, $y = 4$ por lo que $\overline{xxyy} = 7\,744 = 88^2$ y $N = 88$.

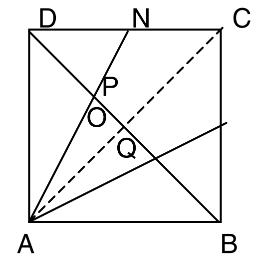
49.



Por el teorema de las alturas se tiene $CD^2 = AD\cdot BD \Rightarrow BD = CD^2:AD = 12$ cm.
Por el teorema de los catetos se tiene $BD = 6^2:3 = 12$ cm.
Entonces AB = 15 cm.

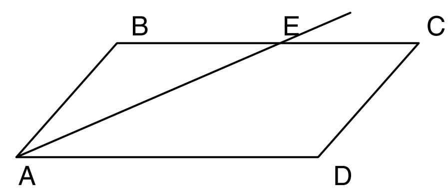
50. Sea x la longitud en metros de la arista, entonces $V = x^3$ y $A = 6x^2$, entonces $x^3 = 6x^2$ y $x = 6$.
$\therefore$La longitud de la arista es de 6 m.

51. Tracemos la diagonal AC formándose los triángulos ABC y ACD que son iguales.
Sea O el punto donde se cortan las diagonales, entonces OD = OB. En los triángulos AND y ABM tenemos AB = AC por ser lados del cuadrado
$\angle$ B = $\angle$ D por ser ángulos rectos y BM = DN = ½ AB.
Luego ΔABM = ΔAND por tener respectivamente iguales dos lados y el ángulo comprendido entre ellos por lo que
$\angle$ AND = $\angle$ AMB y AN = AM (1)



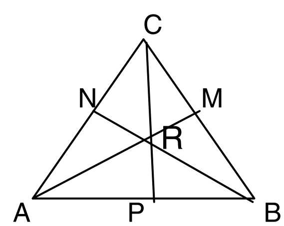
En los triángulos BMQ y DNP tenemos: BM = DN = ½ AB; $\angle$ AMB = $\angle$ AND por (1) y
$\angle$ QBM = $\angle$ NDP = 45°. Luego los triángulos BMQ y DNP son iguales por tener respectivamente iguales un lado y los ángulos adyacentes a dicho lado, luego BQ = DP por elementos homólogos.
Los triángulos DPN y ABP son semejantes por tener dos ángulos iguales que son $\angle$ DNP = $\angle$ NAB por alternos y $\angle$ DPN = $\angle$ APB por opuestos por el vértice.
Entonces $\frac{\mathrm{DN}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{BP}} = \frac{1}{2}$ luego DP = ½ BP = BQ $\Rightarrow$ BP = 2BQ y DP = BQ.
$\therefore$La diagonal queda dividida en tres segmentos iguales.

52. En el triángulo AEB, se tiene:



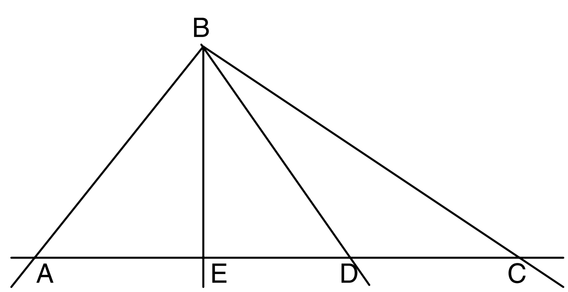
$$\angle \mathrm{E} = 180° - \left(\frac{\mathrm{A}}{2} + \mathrm{B}\right) = 180° - \frac{\mathrm{A}+2\mathrm{B}}{2}$$
$$= 180° - \left(\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2} + \frac{\mathrm{B}}{2}\right) = 90° - \frac{\mathrm{B}}{2}$$
de aquí 2$\angle$ E + $\angle$ B = 180°, es decir, 2$\angle$ E = $\angle$ A y $\angle$ AEB = $\frac{\angle \mathrm{BAD}}{2}$
$\therefore$El triángulo ABE es isósceles de base AE por lo que BE = AB = 25 cm y EC = 31 – 25 = 6 cm.

53. En el triángulo ABC equilátero, AM, BN y CP son las alturas relativas a los lados BC, AC y AB, respectivamente, con AQ = BQ = CQ = 2$\sqrt{3}$ cm,
luego AM = BN = CQ = 3$\sqrt{3}$ cm; pero
$h_a = \frac{\sqrt{3}}{2}a = 3\sqrt{3} \Rightarrow a = 6$ cm. $P_{ABC} = 18$ cm.



54. El volumen es V = $\frac{1}{3}\cdot 48\cdot 14 = \frac{1}{3}\cdot 56\cdot h$, de aquí h = 12 cm.

55.

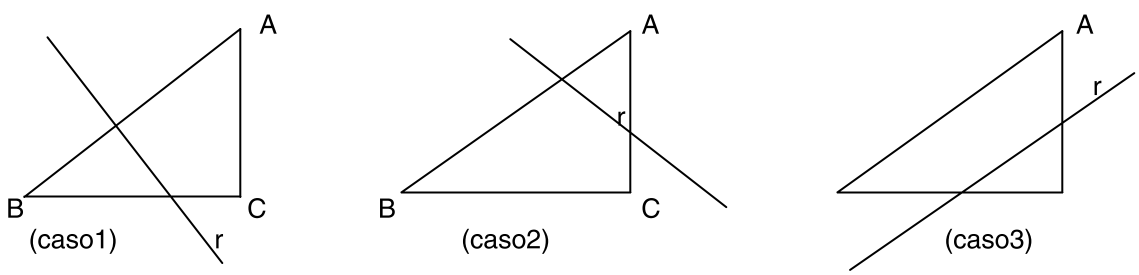


Tracemos BE $\perp$ AC, sea AD = a, CD = 14 – a = b entonces AE = DE = $\frac{a}{2}$ por ser el Δ ADB isósceles de base AD. En el Δ AEB se tiene que: $BE^2 = AB^2 - AE^2 = 10^2 - \frac{a^2}{4}$ (1)

En el Δ BEC se tiene $BE^2 = BC^2 - CE^2 = 144 - (14 - \frac{a^2}{2}) = 14.a - \frac{a^2}{4} - 52$ (2)

De (1) y (2) tenemos: $a = \frac{76}{7}$ y $b = \frac{22}{7}$. Entonces $\frac{AD}{CD} = \frac{a}{b} = \frac{76}{22} = \frac{38}{11}$

56. Hay que analizar tres casos, considerando que el triángulo es rectángulo



Consideremos que BC = 6, AC = 8 y AB = 10. La recta no puede pasar por un vértice porque la única recta que divide al triángulo en dos partes de igual área es la mediana y no biseca al perímetro.
Caso1: La recta r biseca al perímetro y al área si x, y verifican $x < 10$, $y < 6$, $x + y = 12$.

$12 = \frac{1}{2} xysenB = \frac{1}{2}.\frac{4}{5}xy$ y $12 = \frac{2}{5}xy \Rightarrow 30$ quedando la ecuación $y^2 - 12y + 30 = 0$ con soluciones $y = 6 - \sqrt{6}$; $y = 6 + \sqrt{6}$, pero como $y < 6$ la única solución es $y = 6 - \sqrt{6}$ por lo que $x = 6 + \sqrt{6}$.

Caso 2: Igual que el anterior resulta que x + y =12, xy = 40 resultando la ecuación $y^2 - 12y + 40 = 0$ que no tiene soluciones reales.

Caso 3: Análogamente se debe verificar $x < 8$, $y < 6$, $x + y = 12$, $xy = 24$ quedando la ecuación
y^2 Caso3:12y + 24 = 0 con soluciones $y = 6 - 2\sqrt{3}$ y $y = 6 + \sqrt{3}$, pero como $y < 6$, la única solución es
$y = 6 - \sqrt{3}$; $x = 6 + 2\sqrt{3} > 8$ no es solución.
$\therefore$La única solución es $x = 6 + 2\sqrt{3}$; $y = 6 - 2\sqrt{3}$.

57. Sea Δ ABC cualquiera donde $\overline{AC} = 9{,}0$ cm; $\overline{BC} = 15$ cm
$\overline{GE} = 6{,}0$ cm; $\overline{DF} // \overline{AC}$; $\overline{GE} // \overline{BC}$ DEFG es un paralelogramo. Determinar: $\overline{AB}$ y $\overline{DG}$.
El triángulo AFD ~ triángulo ABC (teorema fundamental de semejanza)
ΔDGF ~ ΔEFB (por teorema: dos pares de ángulos respectivamente iguales y lados correspondientes iguales)
$\angle$ FBE = $\angle$ GFD (correspondientes entre //)
$\angle$ EFB = $\angle$ DGF (correspondientes entre //)
$\angle$ GDE = $\angle$ FEB (por suma de ángulos interiores)
$\overline{DO} = \overline{EF}$ (por lados opuestos del paralelogramo)

Luego: $\overline{GF} = \overline{FB}$ (por ser lados homólogos de triángulos iguales)

$\overline{FB}$ = 6, 0 cm $\Rightarrow \overline{GB}$ = 12 cm

ΔAGD $\cong \Delta$ GFE

$\angle$ DGA = $\angle$ GFE (por correspondientes entre //)

$\angle$ DAG = $\angle$ EGF (por correspondientes entre //)

$\angle$ ADB = $\angle$ GEF (por suma de ángulos interiores)

$\overline{DG} = \overline{EF}$, luego $\overline{AG} = \overline{GF}$ = 6,0 cm (por lados homólogos) y $\overline{AD} = \overline{GE}$ = 6,0cm.

$\overline{AB} = 3\overline{GF}$ = 3. 6 = 18 cm.

Triángulo ABC ~ triángulo BGE (teorema fundamental de semejanza) luego $\frac{AC}{GE} = \frac{AB}{GB}$ y

$\frac{9}{GE} = \frac{18}{12}$ por lo que GE = 6 cm

triángulo ABC ~ triángulo ADF (teorema fundamental de la semejanza)

$\frac{BC}{DF} = \frac{AC}{AD}$; entonces DF = 10 cm

En un paralelogramo se cumple que:

$DF^2 + GE^2 = 2\cdot(GF^2 + DG^2)$ y $10^2 + 6^2 = 2\cdot(6^2 + DG^2)$ entonces $136 = 2\cdot(36 + DG^2)$ y $DG^2 = 32$ por lo que $DG = \sqrt{32}; DG = 4\sqrt{2}$cm

58. a) Llamemos 2x la cantidad que de cada arista se va a quitar y "a" a la longitud del lado del octógono resultante. Es claro que a, x y l se relacionan por: $2x + a = l$ y $2x^2 = a^2$

De aquí que: $a = \sqrt{2}x$ y $x\left(2+\sqrt{2}\right) = l$, por tanto $x = \frac{1}{2+\sqrt{2}} = \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)l$ y $a = \left(\sqrt{2}-1\right)\, l$

b) Cada pirámide que se recorta tiene volumen: $V_p = \frac{A_B \cdot h}{3} = \frac{x^3}{6} = \frac{1}{6}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 l^3 = \frac{10-7\sqrt{2}}{24} l^3$

Por lo tanto el volumen del nuevo sólido es:

$$V = l^3 - \frac{8}{24}\left(10-7\sqrt{2}\right)\, l^3 = \left(1-\frac{10}{3}+\frac{7\sqrt{2}}{3}\right) l^3 = \frac{7\left(\sqrt{2}-1\right)}{3} l^3 .$$

59. Dividamos el cuadrilátero AFDE por la diagonal AD formando dos triángulos de áreas a y b que determinaremos. Usando el hecho de que si dos triángulos tienen la misma altura, la razón de sus áreas es igual a la razón de sus bases, tenemos que:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = \frac{a}{3} = \frac{a+b+3}{12} \quad \text{y} \quad \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{b}{3} = \frac{a+b+3}{12}$$

Estas identidades nos llevan al sistema de ecuaciones: 3a = b + 3 y 3b = a + 3

que admiten por solución, a = b = $\frac{3}{2}$, por lo que (AFDE) = 3

60. $\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\beta}$ de aquí tenemos $\tan\alpha\ \text{sen}^2\beta - \tan\beta\ \text{sen}^2\alpha = 0$

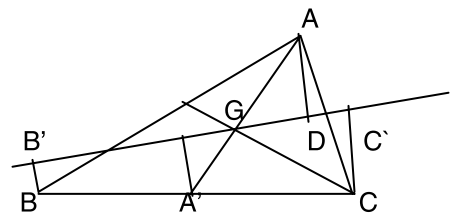
$\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}\text{sen}^2\beta - \frac{\text{sen}\beta}{\cos\beta}.\text{sen}^2\alpha = 0$; $\quad$ $\text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta\left(\frac{\text{sen}\beta}{\cos\alpha} - \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\beta}\right) = 0$

$\operatorname{sen}\alpha \neq 0$ $\operatorname{sen}\beta \neq 0$ $\operatorname{sen}2\beta = \operatorname{sen} 2\alpha$

$\alpha = \beta$ o $2\beta = \pi - 2\alpha$

(isósceles) $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$ (rectángulo)

61. Sea A' el punto medio de BC. Como G es el baricentro del triángulo ABC, entonces AG = 2A'G.
Sea s la distancia de A' a t, A'E es la paralela media del trapecio BCC'B' de bases p y q.
Entonces s = ½ (p + q) y como los triángulos AGD y EA'G son semejantes, entonces s = ½ r, por tanto p + q = r.

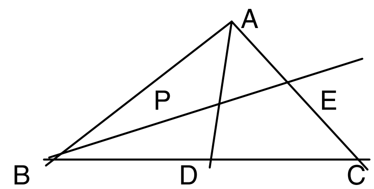


62. Los tres puntos colineales B, P y E están sobre los lados o las prolongaciones de los lados del triángulo ADC.
Por el teorema de Menelao se cumple:

$$\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CB}{BD}\cdot\frac{DP}{AP} = \frac{n-1}{1}\cdot\frac{2}{-1}\cdot\frac{DP}{AP} = -1, \text{ entonces}$$

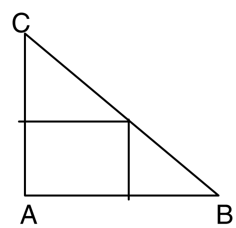
$$\frac{DP}{AP} = \frac{1}{2n-2}, \text{ entonces}$$

$$\frac{DP}{AD} = \frac{1}{2n-1} < \frac{1}{12} \Rightarrow 2n - 1 > 12, \text{ por tanto } n \geq 7 \text{ y el menor valor es para } n = 7.$$



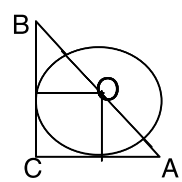
63. Sea ABC el triángulo rectángulo en A y sea m la longitud del lado del cuadrado, entonces el área del triángulo ABC es A_{ABC} = ½ bc.
El área del cuadrado esa
A = m^2 = ½ bc – (½ m(b – m) + ½ m(c – m)) es decir

$2m^2 = bc - bm + 2m^2 - cm$ y $m = \left(\dfrac{bc}{b+c}\right)$ por lo que $A = \left(\dfrac{bc}{b+c}\right)^2$.



64. A_{ABC} = ½ ab = ½ r(a – r) + ½ r(b – r) + r^2
ab = ar – r^2 + br – r^2 + $2r^2$

ab = r(a + b) y $r = \dfrac{ab}{a+b} \Rightarrow \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$



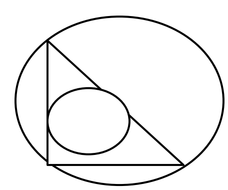
65. Se tiene que $\operatorname{sen}45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{l}{2R} \Rightarrow l = \sqrt{2}R$

Por otro lado $A = \dfrac{2(l+R)}{2} r = \dfrac{2l^2R}{4R} \Rightarrow l = \dfrac{R^2}{r} - R$ (I)

Por el teorema de Pitágoras se tiene que
$2(R + r)^2 = 4R^2$ llegando a la ecuación $R^2 - 2rR - r^2 = 0$

R = (1 + $\sqrt{2}$)r y sustituyendo en (I) se tiene que

$l = \dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2 r^2}{r} -$ (1 + $\sqrt{2}$)r = 2r + $\sqrt{2}$ r = (1 + $\sqrt{2}$)r + r = R + r como se pedía.



66. Observemos que el triángulo BDC es semejante al triángulo ABC, pues ambos son rectángulos y tienen en común el ángulo β. Entonces $\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{BD}$; llamemos t a ese cociente. Entonces $AC = t \cdot DC$ y $BC = t \cdot BD$. Por otro lado el área del triángulo ABC es $\frac{AC \cdot BC}{2}$ y la del triángulo BDC es $\frac{BD \cdot DC}{2}$

$BD \cdot DC = \frac{1}{4} AC \cdot BC$ de manera que $4 = (\frac{AC}{DC})(\frac{BC}{BD}) = t^2$.

Por tanto t = 2 y entonces $\operatorname{sen}\alpha = \frac{CD}{AC} = \frac{1}{2}$ entonces $\alpha = 30^0$ y $\beta = 60^0$.

67. Pensemos que el rectángulo tiene "m" cuadrados en la base y "n" en los costados, buscamos determinar m y n. La condición que se exige nos lleva a la ecuación: $2n + 2(m-2) = (n-2)(m-2)$ (I) que representa: 2n a los cuadrados en los costados y $2(m - 2)$ los cuadrados en las bases y la tapa, tanto en la base como en la tapa se quitan dos que ya han sido considerado en los costados. (n - 2) y (m – 2) son la cantidad de cuadrados que no están en la orilla.
La ecuación (I) se puede escribir como: $nm - 4n - 4m + 8 = 0$ (II) de donde:
$(n-4)(m-4) = 8$ (III). Pero las formas de descomponer 8 en factores son: $8 \cdot 1$; $4 \cdot 2$; $2 \cdot 4$; $1 \cdot 8$, por tanto:

N – 4	1	2	4	8
M – 4	8	4	2	1

entonces (5;12); (6;8); (8;6) y (12;5) son las únicas soluciones del problema.

68. Observemos primero que $128 = 2^7$ y como $P_1P_2\,P_3P_4 = 128$, tenemos que 2^{25} es la máxima potencia de 2 que divide a 28! (ya que hay 14 pares que contribuyen con un 2, hay 7 múltiplos de 4, que aportan cada uno otro 2, hay 3 múltiplos de 8 y está el 16, luego hay 14 + 7 + 3 + 1 = 25, factores de 2. cuando estas 25 potencias de 2 se distribuyen en los 4 factores P1, P_2, P_3, P_4 se debe tener por el principio de las casillas que en alguno deberán quedar 7, digamos en el P_j. Por lo tanto P_j es múltiplo de 2^7.

69. Como abc = k, ghi = k (1); aei = k, gec = k y beh = k (2). Multiplicando las igualdades de (2) obtenemos $aigcbhe^3 = k^3$ y sustituyendo (1) en (3) tenemos: $k^2e^3 = k^3$, por tanto $k = e^3$. Luego k es un cubo perfecto.

70. Se cumple que $\frac{20 + x + y}{6} = 5 \Rightarrow x + y = 10$, por otro lado $\frac{10 + y}{3} = 3 \Rightarrow y = -1$ por lo que x = 11.

OLIMPIADA POPULAR ESTUDIANTIL
CURSO 2002-2003

1. ¿Para qué enteros positivos n es posible dividir un triángulo equilátero de lado n en trapecios iguales cuyos lados midan 1, 1, 1, y 2?

2. Un icosaedro es un sólido regular de 20 caras, cada una de las cuales es un triángulo equilátero. ¿Cuántas diagonales tiene un icosaedro?

3. Dados 19 puntos en un círculo se trazan todos los posibles segmentos con extremos dados por los puntos. Si en el interior del círculo no hay puntos donde se intersequen 3 segmentos. ¿Cuántos puntos de intersección de segmentos hay?

4. En el plano se marcan **a + b** puntos, a de ellos se designan con la letra A y los otros puntos se designan con la letra B. Al unir los puntos consecutivos se forma un polígono de **a + b** lados. Sobre cada uno de los lados hacemos lo siguiente: si los dos vértices del lado están denotados por letras A, escribimos el número 2; si los dos vértices del lado están denotados por letras B, escribimos el número ½ ; si los dos vértices del lado están denotados por letras diferentes, escribimos el número 1. ¿Cuál es el producto de todos los números escritos?

5. ¿Cuáles son las soluciones enteras de la ecuación $x^3 + y^3 + z^3 = 2\ 002$?

6. Se tienen 5 ciudades. Se quieren construir vías de ferrocarril entre pares de ellas de tal forma que no se intersequen. ¿Cuál es el máximo número de vías que pueden construirse con estas características?

7. Considera un triángulo rectángulo ABC, y llama P, Q y R a las reflexiones de A, B, C sobre BC, CA y AB respectivamente. Calcula la razón del área del triángulo ABC entre el área del triángulo PQR.

8. Un trapecio inscrito en una circunferencia de radio r tiene tres lados de longitud "s" y el cuarto lado de longitud " r + s", con s < r. Encuentra las medidas de los ángulos del trapecio.

9. En el Δ ABC, AH es altura (H está sobre BC) y BE es una bisectriz (E está sobre AC). Si $\angle$ BEA = 45^0. Halla el $\angle$ EHC.

10. Una mesa tiene un agujero circular con un diámetro de 12 cm. Sobre el agujero hay una esfera de diámetro 20 cm. Si la mesa tiene 30 cm de altura. ¿Cuál es la distancia en centímetro desde el punto más alto de la esfera hasta el piso?

11. Sean a, b, c, d y e números reales tales que:

$$a > b$$
$$e - a = d - b$$
$$c - d < b - a$$
$$a + b = c + d$$

Ordena los números en orden creciente.

12. Hallar todas las soluciones reales:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 11$$
$$x + y + z = 3$$
$$xyz = -3$$

SOLUCIONES

1. Para n múltiplo de 3.
2. 36 diagonales.
3. 3 876.
4. 2^{a+b}.
5. No tiene.
6. 9 vías.
7. $\frac{1}{3}$.
8. ABC = $\angle$ BCD = 144^0 $\angle$ BAD = $\angle$ ADC = 36^0.
9. 45^0.
10. 48 cm.
11. $c < b < a < d$.
12. (1; –1; –3),(–1;1; –3),(1; –3; –1),(–1; –3;1),(–3;1; –1),(–3; –1;1).

PROBLEMAS DE ENTRENAMIENTO PARA LOS CONCURSOS PROVINCIAL Y NACIONAL

1. Designemos por a , b , a' , b' a cuatro enteros positivos tales que a'b – ab' = 1. Considera las razones

$$\frac{a}{b} \text{ y } \frac{a'}{b'} .$$

a) ¿Cuál de estas razones es mayor? Prueba que ambas son irreducibles.
b) Considera la fracción irreducible de numerador c = a + a' y denominador d = b + b'.
Prueba que a'd - cb' = bc - ad = 1 .
c) Demuestra que $\frac{c}{d}$ está entre $\frac{a}{b}$ y $\frac{a'}{b'}$.

2. Sea $f(x) = x^2 + px + q$ ($p,q \in R$) una función con f(p) = f(q) = 0. Halla todas las funciones f que cumplan la condición dada.

3. Sean x, y dos números positivos inversamente proporcionales. Si x aumenta un p %, ¿cuál es el porcentaje en que disminuye y?

4. Halla todos los pares (x;y) tales que:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{9} \quad \text{y} \quad \frac{1}{y^2}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{16} \quad .$$

5. En la ecuación $(x^2 + ...)(x + 1) = (x^4 + 1)(x + 2)$, un número ha sido borrado y cambiado por puntos. Encuentra el número borrado si se conoce que el número 1 es una raíz de esta ecuación.

6. Demuestra la siguiente identidad para todos los números reales a, b, c, d (diferentes de cero):

$$1+\frac{1}{a}+\frac{a+1}{ab}+\frac{(a+1)(b+1)}{abc}+\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{abcd}=\frac{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)}{abcd}$$

7. Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y + xy &= 19 \\ y + z + yz &= 11 \\ z + x + zx &= 14 \end{aligned}$$

8. Demuestra que si la suma de los cuadrados de tres números naturales se multiplica por tres, el resultado puede expresarse como la suma de cuatro cuadrados perfectos.

9. Sean p, q y r números reales positivos. Probar que al menos una de las siguientes ecuaciones tiene raíces reales.
I).$px^2 + 2qx + r = 0$; II).$rx^2 + 2px + q = 0$; III).$qx^2 + 2rx + p = 0$

10. Hallar todos los valores reales de x, y, z que satisfacen la igualdad:

$$x + y + z = 2\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}+\sqrt{z+2}\right)-9$$

11. Si x, y, z son números reales diferentes de cero y $W = \frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}+\frac{z}{|z|}+\frac{xyz}{|xyz|}$; halla todos los valores posibles de W.

12. La razón de hombres y mujeres votantes en una elección fue de a:b. Si fueran c hombres menos y d mujeres menos, la razón hubiera sido e:f . Determina el número total de votantes.

13. Si x_1 = 743 y para n > 1 se tiene que $x_n = \frac{n}{x_{n-1}}$. Halla el producto $x_1 \cdot x_2 \cdot x_2 \ldots x_8$.

14. Halla el valor mínimo de la expresión $\frac{x^2-2x-1}{(x-4)^2}$.

15. Probar que $\sqrt{5}+\sqrt{8}<\sqrt{6}+\sqrt{7}$.

16. Factoriza (ab + ac + bc)(a + b + c) - abc.

17. Halla los valores de a y b para los cuales se cumple que $4\sqrt{a}+4\sqrt{b}\geq a+4b+5$.

18. Encuentra tres conjuntos A, B y C tales que $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;
$B \cup C = \{1, 2, 4, 6, 8\}$; $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$; $A \cap C = \{2\}$; $A \cap B = \{2, \}$ y $B \cap C = \{2, 4, 8\}$.

19. Si una jarra pesa lo mismo que una botella y un vaso, un vaso y un plato pesan lo mismo que una botella; y tres platos pesan lo mismo que dos jarras. ¿Cuántos vasos pesarán lo mismo que una botella?

20. Hallar todos los valores naturales de x para los cuales se cumple que $1 + \sqrt[x]{x+177} = x$.

21. Sean a, b, x, y números reales positivos con $\frac{a}{b}<\frac{x}{y}$. Probar que $\frac{a}{b}<\frac{a+x}{b+y}<\frac{x}{y}$.

22. Demostrar que la semisuma de los cuadrados de dos números pares cualesquiera es siempre una suma de dos cuadrados perfectos.

23. Si a, b ≠ 0 y | a | ≠ | b |. Halla el conjunto solución de la ecuación:

$$\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=\frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b}.$$

24. Demuestra que las soluciones de la ecuación (x – a)(x – b) +(x – a)(x – c) – (x – b)(x – c) = 0, siempre son reales.

25. Demuestra que si entre los coeficientes de las ecuaciones $x^2 + mx + n = 0$ y $x^2 + px + q = 0$ se cumple que mp = 2(n + q), entonces al menos una de estas ecuaciones tiene solución real.

26. Resolver la ecuación $2x^2 + 3x - 3 + \sqrt{2x^2+3x+9} = 0$.

27. Demuestra que:

$$\frac{a\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1}+b\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}}{\left(\frac{a+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}+\left(\frac{b+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}}=\sqrt{ab}$$

28. Halla los valores de x, y, z que satisfacen simultáneamente las ecuaciones:

$$x^2 + y^2 - 2z^2 = 2a^2 ;\ x + y + 2z = 4(a^2 + 1);\ z^2 - xy = a^2.$$

29. Sea f(x) una función cuadrática tal que para todo x se cumple f(x) = f(–x).
Se sabe además que f(2) = 5 y f(1) = –4. Calcula f(3).

30. Calcula el valor de la expresión: $\dfrac{1}{1+x+xy}+\dfrac{1}{1+y+yz}+\dfrac{1}{1+z+xz}$; sabiendo que xyz = 1.

31. Sabiendo que x, y, z son números reales tales que: $x + y + z = 1$; $x^2 + y^2 + z^2 = 11$; $xyz = 13$.
Calcula $x^3 + y^3 + z^3$.

32. Los restos de la división de un polinomio entero en x, P(x) por los polinomios x + 1 y x – 1 son respectivamente 5 y –1. Halla el resto de la división de P(x) por el producto (x + 1)(x – 1).

33. Hallar las raíces de la ecuación $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$

34. Si xy = a; xz = b; yz = c con x, y, z números reales positivos. Demuestra que:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(a + b + c) = \frac{(ab+ac+bc)^2}{abc}.$$

35. Dado el sistema: $\begin{cases} x+y+xy=32 \\ x^2y+xy^2=240 \end{cases}$ halla las soluciones si x, y $\in$ R.

36. Resuelve la ecuación en variable z: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{z}{xy}-\dfrac{1}{z}$.

37. Resuelve el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x^3+y^3+z^3=8 \\ x^2+y^2+z^2=22 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=-\dfrac{z}{xy} \end{cases}$

38. Un estudiante intentó computar la media aritmética A de los números x, y, z; calculando primero la media aritmética de x e y, luego hallando la media aritmética entre ese resultado y z. Si x < y < z, demuestra que ese resultado siempre es mayor que A.

39. Sean a, A, b, B, c, C y K números reales positivos con a + A = b + B = c + C = K.
Demuestra que $aB + bC + cA < K^2$.

40. Halla todas las raíces reales de la ecuación $x^4 - 4x - 1 = 0$.

41. Demostrar que para todo x, y reales, se cumple que: $2\left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}\right)^2-3\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+6>0$.

42. Demostrar la identidad: $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{\frac{a^2-4}{a}}}+\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{\frac{a^2-4}{a}}}=\frac{\sqrt{2a+4}}{\sqrt[4]{a}}$

43. Demostrar que la ecuación cuadrática $a^2x^2 + (b^2 + a^2 - c^2)x + b^2 = 0$ no puede tener raíces reales si se cumple:
I) $a + b > c$ II) $|a - b| < c$

44. Para todo número real **a**, resolver la ecuación: $x|x + 1| + a = 0$.

45. Forma la ecuación cuadrática, cuyas raíces son iguales a $(x_1 + x_2)^2$ y $(x_1 - x_2)^2$ si x_1 y x_2 son raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

46. Dada la ecuación $x^2 - 3bx + 4b = 2$ Demostrar que:
a) Para todo $b\in R$ esta ecuación admite 2 raíces reales desiguales.
b) Si ambas raíces de la ecuación tienen el mismo signo, entonces ambas son positivas.

47. Dadas las ecuaciones $x^2(y + z) = a^3$, $y^2(x + z) = b^3$, $z^2(x + y) = c^3$, $xyz = abc$. Determina cuál de las tres condiciones siguientes se cumple:
I) $a^3 + b^3 + c^3 + abc = 0$
II) $a^3 + b^3 + c^3 = abc$
III) $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc = 0$

48. Probar que el producto de cuatro enteros consecutivos es una unidad menor que el cuadrado de otro número entero.

49. Determinar el conjunto solución de: $\begin{cases} xy+xz=-4 \\ yz+yx=-1 \\ zx+zy=-9 \end{cases}$

50. Si $\frac{L}{a}+\frac{m}{b}+\frac{n}{c}=1$ y $\frac{a}{L}+\frac{b}{m}+\frac{c}{n}=0.$ Calcula $\frac{L^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}$.

51. Dada la ecuación $abc^2x^2 + 3a^2cx + b^2cx = 6a^2 + ab - 2b^2$.
a) Demuestra que sus raíces son racionales.
b) Determina el conjunto solución de esta ecuación.

52. De un polinomio $p(x) = x^3 + px^2 + qx - 6$, se conoce que es divisible por $x + 1$ y que $\frac{p}{q}=\frac{-2}{5}$.

Escribe el polinomio p(x).

53. Las raíces de la ecuación $x^2 - 24x + c = 0$ son enteros positivos divisibles por 3. Halla el mayor valor que puede tomar c.

54. Sea k la razón entre las raíces de la ecuación $px^2 - qx + q = 0$; $p > 0$, $q > 0$. Halla en términos de k las raíces de la ecuación $\sqrt{p}x^2-\sqrt{q}x+\sqrt{p}=0$.

55. Prueba que $\sqrt[3]{30\sqrt{3}+54}-\sqrt[3]{30\sqrt{3}-54}=6$.

56. ¿Cuál de los siguientes números es mayor:

A = $\frac{1}{1990}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{1990}\right)$ o B = $\frac{1}{1991}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{1991}\right)$?

57. Sea el conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5}. Si dividimos el conjunto A en dos conjuntos arbitrarios, muestra que alguno de ellos contiene a dos de estos números y a su diferencia.

58. Probar que se cumple la siguiente desigualdad:

$\log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8 + \log_8 5 > 4$.

59. La sucesión numérica x_1, x_2,... satisface que $x_1 = ½$ y $x_{k+1} = x_k^2 + x_k$ para todo número natural k. Halla la parte entera de la suma $\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+...+\frac{1}{x_{100}+1}$.

60. Los lados de un triángulo son 3, 7 y 8 respectivamente. Mostrar que los ángulos de dicho triángulo forman una progresión aritmética.

61. Sean las funciones y = cos x, y = $\log_{3\pi}$ x. Halla el número de puntos de intersección entre los gráficos de dichas funciones.

62. Calcular $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$ donde n es un entero positivo.

63. Sean m, n $\in$ N $\sqrt{7}-\frac{m}{n} > 0$. Prueba que $\sqrt{7}-\frac{m}{n} > \frac{1}{mn}$.

64. Calcula la suma: $C_1^{n+1} + C_2^{n+2} + ... + C_k^{n+k}$

65. Si $|ax^2 + bx + c| \le 1$ para todo x tal que $0 \le x \le 1$. Demuestra que $|a| + |b| + |c| \le 17$.

66. Los números reales M_1, M_2, ... satisfacen las condiciones siguientes: $M_1 = 1$ y $M_n = \frac{1}{M_1 + M_2 + ... + M_{n-1}}$ para todo entero n > 1.

Prueba que existe un entero positivo N tal que $M_1 + M_2 + ... + M_N > 1\,989$.

67. Mostrar que para todo x, y, z reales se cumple que $\operatorname{sen}(x^3) + \operatorname{sen}(y^3) + \operatorname{sen}(z^3) - \operatorname{sen}(xyz) < 4$.

68. Probar que $\sqrt[3]{2}$ no puede representarse en la forma a + $\sqrt{b}$ donde a y b son números racionales y $\sqrt{b}$ es irracional.

69. Sean c > b > a las longitudes de tres segmentos con los cuales puede construirse un triángulo rectángulo. Prueba que $2 \log_{b+c}a \cdot \log_{c-b}a = 2 \log_{b+c}a + \log_{c-b}a$.

70. Demuestra que para a, b, c números reales, se cumple que $a^4 + b^4 + c^4 \ge a^2bc + ab^2c + abc^2$.

71. Halla enteros positivos p y q tales que $\frac{7}{10} < \frac{p}{q} < \frac{11}{15}$ si q ha de tener el menor valor posible.

72. Sean a, b, c los lados de un triángulo y p su perímetro, demuestra que $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{p^2}{3}$.

73. Si los números reales x, y satisfacen la igualdad $2x + y = 3$, halla el valor mínimo de $x^2 + y^2$.

74. Sean a, b y c números reales tales que $1 < a < b < c$ y $b - a = c - b$. Demostrar que $\frac{\ln b}{\ln a} > \frac{\ln c}{\ln b}$.

75. Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} xy + x + y &= 80 \\ yz + y + z &= 80 \\ zx + z + x &= 80 \end{aligned}$$

76. Los gráficos de las funciones $f(x) = ax$ y $g(x) = b - x$ se cortan en el punto (p;q) que pertenece al tercer cuadrante del sistema de coordenadas rectangulares. Demuestra que $a \cdot b < 0$.

77. Una sucesión de números enteros se escoge de tal forma que: $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ para cada $n \geq 3$. Halla la suma de los primeros 2 001 términos de esta sucesión si la suma de los primeros 1 492 términos es 1 985 y la suma de los primeros 1 985 términos es 1 492.

78. Las curvas de ecuación $y = \frac{4}{x} + 2$ y $y = ax^2 + bx + c$ tienen las siguientes propiedades:
I) hay un punto común para x = 2,
II) hay una tangente común para x = 2,
III) ambas curvas pasan por el punto (1;6).
Determina la ecuación de la parábola.

79. Se tiene un octógono regular con vértices A, B, C, D, E, F, G, H. Considera el conjunto A donde se encuentran todos los polígonos que tienen a A como uno de sus vértices y el conjunto B formado por los restantes polígonos. Demuestra que en el conjunto A hay más elementos que en el conjunto B.

80. Los coeficientes del polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$ son enteros. Si P(2) y P(3) son ambos impares. Demuestra que la ecuación P(x) = 0 no tiene raíces enteras.

81. Sean (x_n) y (y_n) dos sucesiones recurrentes definidas por las ecuaciones: $x_{n+1} = x_n^3 - 3x_n$; $y_{n+1} = y_n^3 - 3y_n$. Si se sabe que $x_0^2 = y_0 + 2$, demuestra que $x_n^2 = y_n + 2$, para todo n natural.

82. Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 &= 32 \\ x^4y^2 + x^2y^4 &= 128 \end{aligned}$$

83. Sea $S \subset R$. Llamaremos "elemento unitario de S" a todo aquel elemento $e \in S$ tal que, para todo $x \in S$, se cumple que $x / e \in S$. Así por ejemplo, los únicos elementos unitarios en el conjunto Z son 1 y –1. Consideremos ahora, el conjunto D formado por todos los números de la forma $a + b\sqrt{2}$ con $a, b \in Z$.
a) Determina si $1 + \sqrt{2}$ es un elemento unitario de D.
b) Demuestra que si e es un elemento unitario de D, entonces e^2 también lo es.
c) Determina si D admite, o no, infinitos elementos unitarios distintos entre sí.

84. A, B y C son los ángulos interiores de un triángulo. Si cot A, cot B y cot C están en progresión aritmética, probar que a^2, b^2, c^2 están también en progresión aritmética.

85. a) Demostrar que $\frac{\cos A - \cos 3A}{\operatorname{sen} 3A - \operatorname{sen} A} = \tan 2A$.

b) Determina para qué valores de **B** se cumple la igualdad sen B + cos B = sen 3B + cos 3B

86. Resolver el sistema:

$$\sqrt[x]{x+y} = 2$$
$$(x+y)3^x = 279\,936$$

87. Sean A y B dos soluciones distintas de la ecuación a cos C + b sen C = c (donde C es la variable y a, b y c son constantes no nulas). Determina cos (A + B).

88. Sean $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$; n números reales positivos cuyo producto es 1. demuestra que:

$$(1 + a_1)(4 + a_2)(9 + a_3) \ldots (n^2 + a_n) \geq n!2^n.$$

89. Si f(1) = 4 y f(x + 1) = f(x) – 3f(x). Hallar f(2 001).

90. En una sucesión aritmética, cuyo primer término es **a**, si la suma de los "**h**" primeros términos es igual a 0. Demuestra que la suma de los siguientes "**q**" términos es igual a $\frac{-aq(h+q)}{h-1}$.

91. Sea la expresión z = x + 2y; x, y reales.

a) Determina el valor máximo y el valor mínimo que puede tomar z si se conoce que $x^2 + y^2 = \frac{1}{5}$.

b) Calcula los valores de x y y para los cuales alcanza z el valor máximo y el valor mínimo.

92. Sabiendo que las raíces de la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ forman una progresión aritmética, expresa el término en función de a y b.

93. Si a es un número real distinto de 1, demuestra que $(1 + a + a^2) < 3(1 + a^2 + a^4)$.

94. Hallar todos los tríos de enteros no negativos (x;y;z) que satisfacen el sistema:

$$z^x = y^{2x}$$
$$2^z = 2 \cdot 4^x$$
$$x + y + z = 16$$

95. La suma de los términos de una serie geométrica es 56 y la suma de los cuadrados de esos mismos términos es 448. Escribe la expresión general de dicha serie.

96. Hallar el valor de **a** que satisface la ecuación $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}\left(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)$.

97. Prueba que si $a + b + c \geq abc$, entonces $a^2 + b^2 + c^2 \geq \left(\frac{abc}{2}\right)^2$.

98. Supongamos que a, b y c sean pares de números no iguales entre sí. Demostrar que la expresión $a^2(c - b) + b^2(a - c) + c^2(b - a)$ no es igual a cero.

99. Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $x \in [-1;1]$. Determina los valores de las constantes a, b y c con a > 0, sabiendo que la función f es monótona en el intervalo dado, que sus valores máximo y mínimo son respectivamente 29 y 15 y que f(½) = 17.

100. El producto de dos números enteros es 128. La suma de la raíz cúbica del cuadrado del primero y de la raíz cuadrada del cubo del segundo es 68. Hallar los números.

101. Demostrar que si A, B y C son los ángulos interiores de un triángulo se cumple que:
a) tan A + tan B + tan C = tanAtanBtanC.
b) cotAcotB + cotBcotC + cotCcotA. = 1.

102. Resolver la ecuación sen 3x + sen 5x + sen 7x + sen 9x = 0.

103. Si las raíces de la ecuación $x^3 - px^2 - r = 0$ son $\tan\alpha$, $\tan\beta$, $\tan\gamma$; halla el valor de $\sec^2\alpha \cdot \sec^2\beta \cdot \sec^2\gamma$.

104. Dados $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ y $a_n^2 - a_{n-1} \cdot a_{n+1} = (-1)^n$ para n = 1, 2, 3,...; hallar a_3.

105. Sea $S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + (-1)^{n-1}(n)$ donde n es un entero positivo. Calcular $M = S_{17} + S_{33} + S_{50}$.

106. Sea f una función tal que $f(x + a) = \dfrac{1 + f(x)}{1 - f(x)}$ con $a \neq 0$. Demostrar que f(x) es periódica.

107. Probar que para cualquier $x \in R$ y $n \in N^*$.
$S_n(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 3} + \dfrac{x}{(x^2 - 2x + 3)^2} + \ldots.. + \dfrac{x^n}{(x^2 - 2x + 3)^n}$ es menor que $\dfrac{4}{3}$.

108. Sea a_n el entero positivo más próximo de $\sqrt{n}$. Calcula la suma $S_{1980} = 1 + \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_3} + \ldots. + \dfrac{1}{a_{1980}}$.

109. Sea a > 1. Probar que para todos los números naturales 0 < n < k, se cumple que:
$$\frac{a^n - 1}{n} < \frac{a^k - 1}{k}$$

110. Demostrar que si los números naturales k, n (k < n) son primos entre sí, entonces el número $\begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix}$ es divisible por k.

111. Se definen las funciones: $f_1(x) = \dfrac{1}{1 - x}$; $f_2(x) = (f_1 \circ f_1)(x)$; $f_3(x) = (f_1 \circ f_2)(x)$; $f_4(x) = (f_1 \circ f_3)(x)$ y así sucesivamente. Halla $f_{2\,001}(2)$.

112. Hallar los años del siglo pasado cuyos dígitos sumen 21 y su producto sea 162.

113. Si a y b son números enteros positivos con $a^2 - b^2 = 1\,991$.
Halla el máximo valor que puede tomar a – b.

114. Sea $k \in Z$ y $M = \sqrt{(k^2 + 1)(k + 1)^2 + k}$, demuestra que M es impar.

115. Halla todas las cuadruplas (a;b;c;d) de números naturales tales que
1 983 = (a – 1)b(c + 1) y 1 984 = ab(c – d).

116. A un estudiante se le entregó un trabajo práctico, que constaba de 20 ejercicios. Por cada ejercicio resuelto correctamente se le asignaban 8 puntos, por cada ejercicio resuelto incorrectamente se le descontaban 5 puntos y por cada ejercicio no resuelto 0 punto. Un alumno obtuvo 13 puntos. ¿Cuántos ejercicios de cada tipo él resolvió?

117. Un albañil tiene 100 mosaicos rectangulares de 10 cm por 15 cm para cubrir (sin cortarlos) la mayor área posible de un cuadrado. ¿Cuál fue el área cubierta y cuántos mosaicos sobraron?

118. Si 60^n es la mayor potencia de 60 que divide al producto de todos los divisores de 720, halla el valor de n.

119. Demuestra que la igualdad $1\,324^{726} + 1\,991^{726} = 1\,987^{726}$ no es verdadera.

120. Hallar tres números primos que su suma sea 5 veces menor que su producto.

121. A, B y C son dígitos diferentes y distintos de cero. Calcular el menor número de tres cifras $\overline{ABC}$ con la propiedad que el promedio (media aritmética) de todos los números de tres cifras que pueden formarse con los dígitos dados, tenga el número 5 en la cifra de las unidades.

122. Determina cuántos cuadrados perfectos hay entre 4 000 y 64 000 que son múltiplos de 60.

123. Sabiendo que **p** es un número primo mayor que 5. Demuestra que p^2 es un número de la forma $10m \pm 1$, siendo m un número natural.

124. Si restamos de un número x de dos dígitos, el número que se obtiene al intercambiar sus dígitos, el número resultante es un cubo perfecto. Hallar todos los valores posibles de x.

125. Halla todos los pares (x;y) tales que el número $\overline{42x4y}$ sea divisible por 36.

126. En un juego de salón, "el mago" le pide a uno de los participantes que piense un número de tres dígitos $\overline{abc}$. Luego, el mago le pide a la persona que forme los números $\overline{acb}, \overline{bac}, \overline{bca}, \overline{cab}$ y $\overline{cba}$; que sume estos cinco números y diga la suma N que obtuvo. Dado el valor de N el mago puede identificar el número original $\overline{abc}$. Asume el papel del mago y determina el número original cuando N = 3 194.

127. ¿Qué número es necesario añadir a dos números consecutivos para que la diferencia de sus cuadrados aumente en 198?

128. Sea $A = \dfrac{n+6}{n-2}$. Determina todos los valores de n para los cuales se cumple que A sea un entero y $-5 \leq A \leq 8$.

129. Encuentra todos los valores enteros de x tales que $x - 3$ divida a $x^3 - 3$.

130. En un aula se va a repartir un cierto número de hojas, la misma cantidad a cada alumno. Si el número de estudiantes aumenta en 17, cada uno recibiría 16 hojas menos. ¿Cuál es el menor número de estudiantes que puede haber en el aula?

131. Un hombre y su nieto cumplen años el mismo día. Por seis años consecutivos, la edad del hombre es un múltiplo de la de su nieto. ¿Qué edad tiene cada uno de ellos al sexto año de esos cumpleaños?

132. Un gallo cuesta \$ 5, una gallina cuesta \$ 3 y 3 pollitos cuestan \$ 1. Si se quiere comprar la mayor cantidad posible de gallinas. ¿Cuántos gallos, gallinas y pollitos se pueden comprar con \$ 100 para lograr 100 de esas aves?

133. Demuestra que si **p** es un número primo, entonces el número $p^5 + 5p^4 + 5p^3 - 5p^2 - 6p$ es divisible por 120.

134. Cierto matemático visitó a un amigo, pero olvidó anotar su dirección. Más tarde intentó escribirle y sólo recordó que a la calle le correspondía un número entre 200 y 300 y que la casa cuyo número era 10, era la suma de las cifras del número de la calle. Días después preguntó otro amigo la dirección del primero y éste para hacerlo pensar respondió: Sólo recuerdo que el número de la calle tiene exactamente 6 divisores. ¿Cuál es la dirección?

135. El producto de tres números pares consecutivos es $\overline{88AAAAA2}$ donde cada A representa un dígito que falta, no necesariamente iguales. Determina estos 5 dígitos que faltan.

136. Usando todos los dígitos del 1 al 9, construye tres números de tres dígitos tal que su producto sea mínimo.

137. Dados dos números de 3 cifras que tienen el mismo resto al dividirse por 7, se forma un número de 6 cifras escribiéndolo uno al lado del otro. Demuestra que el número así formado es divisible por 7.

138. Determina todos los números de cuatro cifras de la forma $\overline{abcd}$ que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:
I) $a^2 + d^2 = 13$ II) $b^2 + c^2 = 85$ III) $\overline{abcd} - 1\,089 = \overline{dcba}$

139. Usando todos los dígitos del 1 al 9, hallar todos los tríos de números de tres cifras cada uno, los cuales estén en la razón 1:2:3.

140. Consideremos que (r,s) denomina el mínimo común múltiplo de los números enteros positivos r y s. Determina el número de ternas ordenadas (a;b;c) de enteros positivos para los cuales se cumple que:

(a;b) = 1 000; (b;c) = 2 000 y (c;a) = 2 000.

141. Sea **N** un número natural de tres cifras, divisible por 9 tal que al adicionarle 135 se obtiene un número formado por las mismas cifras. Pero con la cifra de las unidades como cifra de las centenas, corriendo las otra dos cifras. Hallar todos los números que cumplen esa condición.

142. Sea $p > 3$ un número primo. Demostrar que 24 es un divisor de $p^2 - 1$.

143. Demuestra que si el número $p = \overline{abc}$ es divisible por 37, entonces los números $q = \overline{bca}$ y $r = \overline{cab}$ también son divisibles por 37.

144. Dados los números naturales desde 1 hasta 1 000. Se construyen las funciones f(a) y g(a). Para construir f(a) se procede de la manera siguiente: Se suman sus cifras, el resultado será otro número natural al que se repetirá la operación hasta lograr un dígito que será f(a).
(Ejemplo: si a = 8 240, entonces f(a) = 5 pues 8 + 2 + 4 = 14 y 1 + 4 = 5). Para construir g(a) se procede de la manera siguiente: Se suman los dígitos que aparecen en los lugares impares de a (contando desde la derecha) y a esta suma se le resta la suma de los dígitos en los lugares pares. Hay tres posibilidades:
I)El número obtenido está entre 0 y 10, entonces g(a) es ese número.
II).El número es mayor que 10. En este caso se le aplica al número obtenido el procedimiento desde el principio para g.
III) El número es negativo. En este caso, se le suma 11 al resultado y la cantidad obtenida será g(a).
Ejemplo: Si a = 71839 tenemos (9 + 8 + 7) – (3 + 1) = 20 que corresponde a (II),
(0 – 2) = –2 que corresponde a (III), luego g(a) = –2 + 11 = 9.
¿Para cuántos números de los dados se cumple que: f(a) = g(a) = 1

145. Probar que si el número $\overline{abc}$ es divisible por 27, entonces 27 divide al número $\overline{cab}$.

146. Determina cuántas ternas ordenadas $(x;y;z)$ de números naturales mayores que 1 cumplen que:
I) $x + y = 13$.
II) El producto xyz tiene exactamente 7 divisores.
III) Solamente dos de ellos sean números primos diferentes menores que 13.

147. Si restamos de un número N de dos dígitos el número que se obtiene al intercambiar sus dígitos, el número resultante es un cubo perfecto. Halla todos los valores posibles de N.

148. Se tienen contenedores de dos tipos, de 130 kilogramos y de 160 kg, es necesario cargar completamente con ellos una carga de 3 000 kg. ¿Cuántos contenedores de cada tipo se necesitan?

149. En una operación de división con el dividendo 1993, se obtiene un resto que es 5 unidades menor que el divisor y 13 unidades menor que el cociente. ¿Cuáles son los términos de esa división?

150. ¿Qué cifras han de escribirse en el número 3 000 003 en lugar de los ceros que ocupan el tercer lugar y el quinto lugar para obtener un número múltiplo de 13?

151. Si n es un número natural con $200 \leq n \leq 300$ y se sabe que n tiene 6 factores y que las cifras suman 10. Halla n.

152. Determinar todos los números primos **p** de modo que los números $p + 2$ y $p + 4$ sean ambos primos.

153. Demuestra que el número $N = 31(n^4 + 1) - 62n^2$ es divisible por 1984 si n es impar.

154. Hallar el número de 4 cifras cuyas 2 primeras cifras, al igual que las 2 últimas son iguales entre sí y además el número es el cuadrado de un número entero.

155. Encuentra el menor número positivo **n** tal que:
I) n tiene exactamente 144 divisores distintos y positivos.
II) Hay 10 enteros consecutivos divisores de n.

156. Nicolás tiene 10 billetes, uno de cada una de las siguientes denominaciones: 1 000, 500, 200, 100, 50, 20, 10, 5, 2 y 1. ¿Cuántas sumas (mayores que 0) hay que son menores que 1 889 y que Nicolás no puede pagar sin que le den vueltos?

157. Determina cuántos números de 4 cifras hay que no son divisibles ni por 7, ni por 11, ni por 13.

158. Hallar todos los números naturales <u>n</u> que cumplen simultáneamente las dos condiciones siguientes:
I) $1\,900 \leq n \leq 2\,000$
II) n tiene exactamente cuatro divisores enteros positivos que son: 1, 5, p y n, en que p es un número primo.

159. Un número natural, al ser elevado a la sexta potencia, da como resultado un número de nueve dígitos, los cuales son 0, 2, 3, 4, 7, 8, 8, 9 aunque no necesariamente en ese orden. Determina este número.

160. Demostrar que ninguno de los números 10 001, 100 010 001. 1000100 010 001 son primos.

161. Determinar cuántos números naturales menores que 1978 son primos relativos con 1978.

162. Dado el número N = 1000...02000...01 donde hay 19 ceros entre 1 y 2 al igual que entre 2 y 1. Calcular $\sqrt{N}$.

163. Hallar un número **N** compuesto de los factores 3, 5 y 7 sabiendo que 9N, 5N y 7N tienen, respectivamente, 40, 15 y 12 divisores más que N.

164. Encontrar todos los números naturales **n** tales que:
I) $6 < n < 41$
II) $N = a \cdot b$
III) $a^2 - b^2 = 2b + 1$.

165. Demuestra que si un número consta de 3^n cifras iguales, entonces es divisible por 3^n .
Por ejemplo 222 es divisible po3, 777...7 (9 veces el 7) es divisible por 3^2.

166. Sean $m, n \in N$, $n > 1$, $m \neq 3$. Demostrar que $\sqrt[n]{2^m + 1}$ no es un número natural.

167. Si p es un entero positivo, ¿qué valores puede tener p, para que $\dfrac{3p+25}{2p-5}$ sea también entero y positivo?

168. Sea **N** un número entero tal que todos los dígitos se utilizan una y sólo una vez en escribir los números N^3 y N^4.
a) Muestra que N^4 tiene 6 cifras y N^3 tiene 4 cifras.
b) Muestra que $15 < N < 22$.
c) Halla N.

169. Probar que $1\,983^{1983} - 1\,985^{1985} + 1\,986^{1986}$ es divisible por 1 984.

170. Una cierta codificación consta de 10 dígitos: x_1 / x_2 x_3 / x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9 / x_{10}, en este código se tiene que $1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + ... + 9 \cdot x_9 + 10 \cdot x_{10} = S$ es divisible por 11. En una codificación se conoce que hay cierto error, se dan los datos 0 / 20 / * 1 * 5 0 2 / 7. ¿Cuántos códigos son posibles a partir de esos datos?

171. Encuentra la condición que necesita un número natural para que al elevarlo al cubo sus dos últimas cifras sean unos.

172. Sean los dígitos a, b ($b \neq 0$) tal que el número $\overline{ababab1}$ en el sistema decimal es un cubo perfecto.

173. Demostrar que la ecuación $6x^2 + 2y^2 = z^2$ no tiene soluciones enteras x, y, z excepto para $x = y = z = 0$.

174. Sean a y b dos números enteros positivos tales que $a + b = 300330$. Demuestra que 30030 no divide a $a \cdot b$.

175. Demuestra que si n es un entero positivo, entonces $\dfrac{n^2+n-1}{n^2+2n}$ es una fracción irreducible.

176. Mostrar que para todo número natural $n > 0$, $A_n = 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ es divisible por 8.

177. Demuestra que los números $2^{19} + 1$ y $2^{86} + 1$ son primos relativos.

178. Hallar un número de seis dígitos cuyo producto por 2, 3, 4, 5 ó 6 contiene los mismos dígitos que el número original en diferente orden.

179. Determina todas las soluciones enteras positivas de la ecuación $x^2 - 4xy + 6y^2 - 2x - 20y = 29$.

180. Si $p > 5$ es un número primo. Prueba que 360 es un factor de $(p-2)(p-1)p(p+1)(p+2)$.
181. Resolver la ecuación $2^p + 1 = q^2$, siendo p y q enteros positivos.

182. Demuestra que el número de soluciones enteras positivas de la ecuación
$x_1 + 8x_2 + 27x_3 + ... 1\,000x_{10} = 3\,025$ es igual al número de soluciones enteras no negativas de la ecuación $y_1 + 8y_2 + 27y_3 + ... 1\,000y_{10} = 0$.

183. Cuatro números tomados por parejas y sumados, se obtienen 6 sumas. Se conoce que las menores 4 de estas sumas son 1, 5, 8 y 9. Determina la mayor de todas las sumas.

184. Hallar los valores de x, y, z para que el número $\overline{xy234z}$ sea divisible por 396.

185. Encuentra todos los pares de números primos (a;b) para que la ecuación $11x^2 - ax + b = 0$ tenga raíces racionales diferentes

186. Sea **n** un número natural. Mostrar que ninguno de los dígitos 2, 4, 7, 9 puede ser el último dígito del número $1 + 2 + ... + n$.

187. Si $a_n = 6^n + 8^n$, determina el resto al dividir a_{83} por 49.

188. Se escriben los números 1, 2,..., n luego se suprime uno de los números de la lista y resulta que la media aritmética de los números restantes es $35\frac{5}{7}$. ¿Cuál fue el número que se suprimió?

189. Sea **n** un número entero mayor que 1. Demuestra que $4^n + n^4$ no puede ser un número primo.

190. Probar que $27\,195^8 - 10\,887^8 + 10\,152^8$ es divisible por 26 460.

191. [x] designa al mayor entero que no excede a x. Ejemplo: [5] = 5, [–5,6] = –6.
Si $\left[\sqrt[4]{1}\right] + \left[\sqrt[4]{2}\right] + ... + \left[\sqrt[4]{n}\right] = 2n$, determina el valor de n.

192. Sea $N = 69^5 + 5(69)^4 + 10(69)^3 + 10(69)^2 + 5(69) + 1$, determina ¿cuántos enteros positivos son factores de N?

193. Probar que el número C_{500}^{1000} no es divisible por 7.

194. Hallar todos los números de cuatro dígitos que son cuadrados perfectos y se escriben con cuatro números pares.

195. ¿Para qué valores de **n** la suma de los n primeros números naturales resulta ser un número de tres cifras iguales?

196. Se tiene que $n^2 = \overline{abcd}$ y $(kn)^2 = \overline{dcba}$. Halla los valores de a, b, c, d, k y n que cumplan ambas igualdades con k > 1.

197. Sean n, $a_1, a_2, ... a_n$ números tales que $a_1 \cdot a_2 ... \cdot a_n = n$ y $a_1 + a_2 + ... + a_n = 0$.
Demuestra que 4 divide a n.

198. Demuestra que si $p = K^n$ donde K y n son números naturales ($n \geq 2$), entonces p se puede expresar como la suma de K números impares consecutivos.

199. Observa el cuadrado de los siguientes números naturales, todos con última cifra 5:
$35^2 = 1\,225$; $75^2 = 5\,625$; $325^2 = 105\,625$. Obtener un procedimiento para hallar el cuadrado de un número natural terminado en 5 y demuestra la validez de tu procedimiento.

200. Determina el mayor valor posible de K para que 3^{11} sea expresado como la suma de K números positivos consecutivos.

201. Sea la siguiente sucesión de conjuntos: $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{2,3,...,8\}$, $S_3 = \{9,10,...,27\}$ y así sucesivamente.
a) Determina cuál ha de ser el valor de n para que S_n contenga exactamente 29 701 elementos.
b) ¿Existe algún valor de m para el cual S_m contenga 3^{1989} elementos?

202. Encuentra todos los pares de números enteros que satisfacen la ecuación $x^2 = y^2 + 2y + 13$

203. Dado el siguiente triángulo numérico:

1
1 1 1
1 2 2 2 1
1 3 6 7 6 3 1
....

Observa que cada número es la suma de 3 números de la fila anterior, el que está exactamente encima de él y los que están a la derecha y a la izquierda de éste. Si no aparece número alguno en esa posición, se toma el cero.
Demuestra que en cada fila comenzando por la tercera aparece al menos un número par.

204. Determina el número mayor que es el producto de enteros positivos cuya suma es 1 988.

205. Sean a, b, c, d, m y n enteros positivos tales que: $a + b + c + d = m^2$, la suma de los cuadrados de a, b, c y d es igual a 1989 y el mayor entre a, b, c y d es n^2.
Determina todos los valores posibles de m y n.

206. Halla los dos últimos dígitos del número $14^{\left(14^{14}\right)}$.

207. Descomponer en factores el polinomio $x^5 + x + 1$.
a) Si $a \in N^*$, se le suma su quinta potencia. Probar que ni el entero así obtenido ni el antecesor, ni el sucesor son primos excepto para un valor de a.
b) Descomponer el número 10 000 000 099 en el producto de dos números enteros.

208. Sea p un número primo, $p \neq 2$ y p no divide a 5. Demuestra que p divide a una cantidad infinita de términos de la sucesión 9, 99,...

209. Sea n un número natural con una cantidad par de divisores d_i (i = 0, 1, 2,..., m) tales que:

$1 = d_0 < d_1 < .... < d_{m-1} < d_m = n$. Demuestra que $\dfrac{\sum_{i=1}^{m-i} \lg d_i}{\lg n}$ es un número natural.

210. Sea n un número par. Cuatro números diferentes a, b, c, d son escogidos entre los enteros 1, 2,...n con a + c = b + d. Mostrar que el número de tales selecciones es $\dfrac{n(n-2)(2n-5)}{24}$.

211. Se tienen todos los números de 3 cifras cuya suma de sus dígitos es 14. Determina de ellos los que cumplen que la suma del número con el que se forma con los mismos dígitos pero en orden inverso es 1 252.

212. Los enteros positivos son colocados según aparece en el diagrama. Determina el número que está en el cuadrado que ocupa la fila 63 y la columna 40. Ejemplo: El número 9 ocupa la fila 4 y la columna 3.

2	3			
4	5	6		
7	8	9	10	
11	12	13	14	15

213. Sea N un número dado en una base cualquiera b, $b \in N$, $b > 2$ y sea S la suma de las cifras de N. Prueba que si S se divide por $b - 1$ entonces N también se puede dividir por $b - 1$.

214. Sea **n** un entero no negativo, $d_0, d_1, ..., d_n$, cada uno de ellos igual a 0, 1 ó 2 y $d_0 + 3d_1 + ... + 3^n d_n$ es el cuadrado de un entero positivo. Probar que $d_1 = 1$ para al menos un i, donde $0 \leq i \leq n$.

215. Resolver en Z_+ la ecuación $9(1 + 3 + 5 + ... + 2x - 1) = 8(2 + 4 + 6 + ... + 2x)$.

216. Si p es un número primo ($p \neq 2$), a, $b \in N^*$ y p no divide a **a**, ni a **b** ni a **a + b**; demuestra que $a^{p-2}b - a^{p-3}b^2 + a^{p-4}b^3 - ... + ab^{p-2}$ deja resto 1 en la división por p.

217. Demostrar que un número de la forma: $(1 + a + a^2 + ... + a^n)^2 - a^n$ no puede ser un número primo para $n > 1$ y a entero positivo.

218. Un número tiene 216 divisores, su duplo tiene 270, su tercera parte tiene 180, y su quinta parte tiene 144. Hallar el menor número que cumpla dichas condiciones.

219. En un triángulo rectángulo ABC, con ángulo recto en C, el incírculo es tangente a la hipotenusa en T. Demuestra que el área del triángulo es igual a $AT \cdot TB$.

220. Cuando se rota un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos el volumen del cono generado es 800π cm^3. Cuando el triángulo se rota alrededor del otro cateto, el volumen del cono generado es $1\,920\pi$ cm^3. Halla el perímetro del triángulo dado.

221. Se tienen dos circunferencias con centros en A y B que son tangentes exteriores en el punto T, se traza el segmento PQ que es un segmento de tangente común a ambas circunferencias, se sitúan los puntos R y S de tal forma que R es un punto de la circunferencia distinto de Q. Si los puntos A, B, T, R y S están alineados. Prueba que el ángulo RXS es un ángulo recto siendo X el punto donde se cortan las rectas RP y SQ.

222. Sean M y N los puntos medios de los lados BC y AD respectivamente del cuadrilátero ABCD. Sean P la intersección de los segmentos AM y BN, Q la intersección de los segmentos CN y DM. Prueba que el área del cuadrilátero MNPQ es igual a la suma de las áreas de los triángulos ABP y CDQ.

223. Dos rectas perpendiculares en T son tangentes a una circunferencia en los puntos A y B. Se sitúan los puntos Q entre A y T, S entre B y T, R sobre la circunferencia, tal que QRST es un rectángulo con QT = 6 cm y ST = 3 cm. Determina la longitud del radio de la circunferencia.

224. En un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen longitudes de 75 cm y 100 cm, el pie de la altura relativa a la hipotenusa la divide en dos segmentos los cuales sirven de diámetro a dos circunferencias que se han trazado. Determina la longitud de los segmentos de los catetos que están dentro de estos círculos.

225. Sean BP y CQ las bisectrices de los ángulos B y C del triángulo ABC y sean H y K puntos de BP y CQ de forma que AH y AK son perpendiculares a BP y CQ respectivamente. Prueba que KH es paralela a BC.
226. En el cuadrilátero ABCD, AB y CD tienen la misma longitud. Los puntos medios de las diagonales AC y BD son distintos. Demuestra que la recta que pasa por estos puntos medios forma ángulos iguales con AB y CD.

227. Sea ACD un triángulo y B un punto en su interior tal que $\angle$ DAB = $\angle$ DCB = 30°. Sean M el punto medio de AC; P y Q los pies de las perpendiculares trazadas desde B hasta DA y DC, respectivamente. Demuestra que el triángulo MPQ es equilátero.

228. Un alambre de 1 metro de longitud, se divide en dos pedazos. Con uno de ellos se construye un rectángulo cuyo largo es el doble del ancho y con el otro, un cuadrado. Si el área encerrada por ambas figuras es de 1/18 m^2, ¿cuáles son las áreas encerradas por cada una de las figuras?

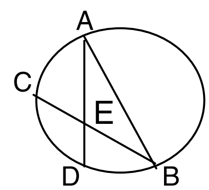
229. Sea P un punto en el interior del triángulo ABC. Demuestra que el perímetro del triángulo ABP es menor que el del triángulo ABC.

230. En un triángulo rectángulo, los catetos están en la razón 3:2, la altura divide a la hipotenusa en segmentos tales que uno de dichos segmentos es 2 unidades mayor que el otro. Determina la longitud de la hipotenusa de dicho triángulo.

231. En un trapecio ABCD donde $\angle$ C = $\angle$ B = 90°, se construye tomando a AD como diámetro una circunferencia la cual corta a BC en los puntos M y N. Demuestra que se cumple BM·MC = AB·CD.

232. Sea ABC un triángulo equilátero y D el punto medio de BC. Se traza DE perpendicular a AB con E punto de AB. Determina la razón entre DE y AB.

233. En la figura: AB es un diámetro,
AD y BC se cortan en E.
Demuestra que AE·AD + BE·BC = AB^2.



234. Sea ABC un triángulo equilátero y P un punto cualquiera interior al triángulo ABC. Demuestra que la suma de las distancias del punto P a cada uno de los lados es igual a la longitud de una de las alturas del triángulo.

235. Dos lados de un triángulo miden 8 cm y 18 cm; si la bisectriz del ángulo formado por ellos mide $\frac{60}{13}$ cm. Halla la longitud del tercer lado.

236. Sean a y b las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo y la longitud de la hipotenusa, si h es la longitud de la altura relativa a la hipotenusa. Demuestra que el triángulo de lados h, c + h y a + b también es rectángulo.

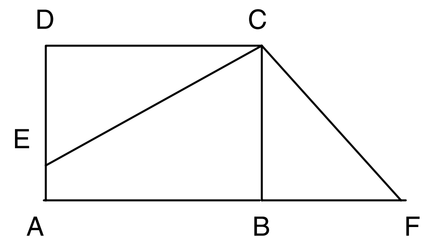
237. En un triángulo rectángulo, uno de los lados es la media aritmética de los otros dos. El número que representa el perímetro es igual al número que expresa el área. Halla la longitud correspondiente a la mediana relativa a la hipotenusa del triángulo.

238. Demuestra que si sobre los tres lados de un triángulo cualquiera se construyen triángulos equiláteros y se trazan los segmentos que unen cada vértice del triángulo primitivo con los vértices más lejanos de los triángulos equiláteros, estos segmentos son iguales.

239. Demuestra que el área de cualquier triángulo rectángulo de hipotenusa h es menor e igual que 0,25 h^2.

240. Halla la longitud del tercer lado de un triángulo conociendo las longitudes de los otros dos lados y que las medianas de los lados conocidos se cortan perpendicularmente.

241. En la figura: ABCD cuadrado de lado a, E es un punto de AD, F es un punto de la prolongación de AB, EC $\perp$ CF. Si el área del triángulo ECF es igual a $\frac{5}{8}$ del área del cuadrado, determina la posición del punto E sobre el lado AD.



242. Los tres lados de un triángulo tienen longitudes 29, 29 y 40. Encuentra otro triángulo isósceles con igual perímetro y área que el triángulo dado y que sus lados también sean números enteros.

243. Se tiene el trapecio ABCD de bases AB y CD, sea M el punto donde se cortan sus diagonales AC y BD. Por el punto M se traza XY $||$ AB, siendo X, Y puntos de AD y BC respectivamente.

Prueba que XM = $\dfrac{AB \cdot CD}{AB + CD}$.

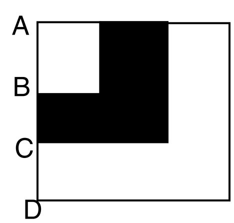
244. Las longitudes de los lados de un triángulo son 6 y 3. Halla la longitud del tercer lado conociendo que la semisuma de las alturas bajadas a los lados dados es igual a la tercera altura.

245. Se tiene un triángulo ABC con a = 13, b = 14 y c = 15, las longitudes de sus lados. Los lados a y b son tangentes a una circunferencia cuyo centro se encuentra sobre el tercer lado. Determina las longitudes de los radios de las circunferencias inscritas y circunscritas

246. Sea ABC un triángulo rectángulo con catetos AC = 12 y BC = 5. Sea AD la bisectriz del ángulo CAB. Se traza una perpendicular desde D hasta la recta AB, siendo E el pie de esta perpendicular; halla AE y EB.

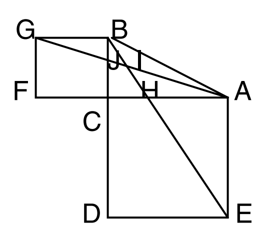
247. Demuestra que las medianas de un triángulo lo dividen en seis triángulos de igual área.

248. Tres cuadrados cuyos lados son números enteros son situados unos sobre otros como se observa en la figura. Si BC = CD y el área sombreada es de 31 u^2, calcula el área del cuadrado mayor.

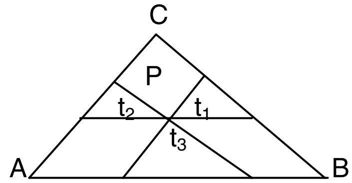


249. Sean C_1, C_2 y C_3 tres cuerdas paralelas de una circunferencia situadas al mismo lado del centro, si la distancia entre C_1 y C_2 es igual a la distancia entre C_2 y C_3 y las cuerdas tienen longitudes de 20, 16 y 8 unidades. Calcula el área del círculo.

250. En la figura: El triángulo ABC es rectángulo en C; BCFG y AEDC son cuadrados; EB corta a AC en el punto H; AG corta a BC en el punto J y corta a BE en el punto I. Si el área del triángulo AIB es de 24 cm^2, determina el área del cuadrilátero HIJC.



251. En la figura: se escoge un punto P en el interior del triángulo ABC de tal manera que cuando se trazan por P paralelas a los lados del triángulo ABC, los triángulos t_1, t_2 y t_3 tienen áreas 4, 9 y 49 respectivamente. Halla el área del triángulo ABC.



252. Los catetos de un triángulo rectángulo son raíces de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + px + q = 0$. Determina la longitud de dichos catetos si se cumplen las siguientes condiciones:
a) La suma de los catetos es numéricamente igual al área del triángulo.
b) El triángulo tiene área máxima.

253. Dos circunferencias de radios $R = 3$ y $r = 1$ tienen un punto común M, es decir son tangentes exteriores en M. Halla la distancia del punto M hasta la recta que es tangente común a las dos circunferencias y no pasa por M.

254. En un triángulo ABC, el ángulo A tiene una amplitud que es el doble de la del ángulo B. Si se conocen los lados b y c; halla la longitud del lado a.

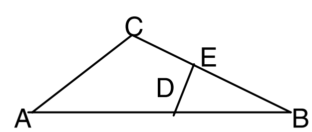
255. Se tiene un triángulo ABC y se traza un segmento PQ paralelo al lado con P y Q puntos de AC y BC respectivamente que divide al triángulo en dos partes cuyas áreas son iguales. Determina la longitud de PQ si AB = 2.

256. Sea ABCD un cuadrado de área p cm^2, en su interior del cuadrado se sitúa un punto E de tal forma que el triángulo ABE es equilátero. Calcula el área del círculo inscrito al triángulo ABE.

257. Dado un triángulo rectángulo cualquiera. Halla la razón entre el área del círculo inscrito y el área del triángulo conocidos la hipotenusa y el radio del círculo inscrito.

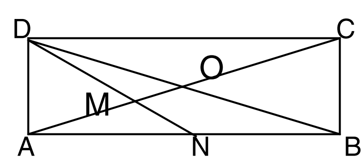
258. Se tienen tres círculos con centros en A, B y C que se cortan cada pareja de ellos en dos puntos y que tienen radio r con $1 < r < 2$. La distancia entre cada par de centros es 2. Si B' es el punto de intersección de los círculos con centros en A y C que está fuera del círculo con centro en B, y C' es el punto de intersección de los círculos con centros en A y B que está fuera del círculo C. Calcula B'C'.

259. En el triángulo ABC, E es el punto medio de BC y D pertenece al lado AC. Si AC = 1. Calcula el área del triángulo ABC y el doble del área del triángulo CDE.



Nota: $\angle$ A = 60°
$\angle$ C = 100°
$\angle$BED = 80°

260. En el rectángulo ABCD, N es el punto medio de AB. Probar que:
a) DM = 2MN.
b) OM = $\frac{AC}{6}$.



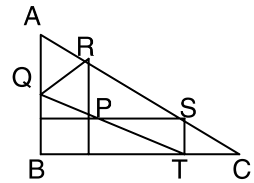
261. La base de un triángulo isósceles es igual a 30 cm y la altura con respecto a la base es igual a 20 cm. Determina las longitudes de las alturas de los lados restantes.

262. La longitud de uno de los lados de un triángulo es igual a 60 cm; la altura con respecto a dicho lado es igual a 12 cm y la mediana de ese mismo lado es igual a 13 cm. Determina las longitudes de los lados restantes del triángulo.

263. Sean C_1, C_2 y C_3 tres cuerdas paralelas de un círculo situadas al mismo lado del centro. Si la distancia entre C_1 y C_2 es igual a la distancia entre C_2 y C_3 y las cuerdas tienen longitudes 20, 16 y 8 unidades. Calcula el área de dicho círculo.

264. En un triángulo ABC, $\angle B = 72°$; E es el punto medio de AC; D es un punto sobre BC tal que 2BD = DC; AD y BE se cortan en F. Calcula la razón entre el área del triángulo BDF y el área del cuadrilátero FDCE.

265. En el interior del triángulo rectángulo ABC de lados 3, 4 y 5 se escoge un punto P tal que dista 1 unidad de cada uno de los catetos. Por P se trazan tres rectas paralelas respectivamente a los tres lados del triángulo como se aprecia en la figura. Calcula la longitud de la paralela media del trapecio QRST.



266. En un triángulo ABC, el punto F divide al lado AC en la razón de 1:2. Sea E el punto de intersección del lado BC con AE que corta a BF en G que es el punto medio de BF. Calcula la razón en que el punto E divide al lado BC.

267. Sean tres circunferencias consecutivas tangentes entre sí cada una a la que está a su derecha inmediata y también tangentes a dos rectas r_1 y r_2 siendo ambas rectas no paralelas entre sí. Sean x, y, z los radios de dichas circunferencias con $x < y < z$. Demuestra que la longitud del radio de la circunferencia del centro es medio proporcional entre las longitudes de los otros dos radios.

268. Demostrar que en un triángulo rectángulo la suma de los catetos es igual a la suma de los diámetros de la circunferencia inscrita y la circunscrita a dicho triángulo.

269. Demostrar que la suma de los catetos de un triángulo rectángulo no es mayor que la diagonal de un cuadrado construido sobre la base de la hipotenusa.

270. Dada una circunferencia C de centro O y radio unitario, t y t' dos tangentes a dicha circunferencia en los extremos A y B de un diámetro fijo a dicha circunferencia, y una tangente móvil que corta a las tangentes t y t' en M y N, respectivamente. Demostrar que $AM \cdot BN = 1$.

271. Sea ABC un triángulo rectángulo en A y sea H el pie de la perpendicular trazada por el punto A a la hipotenusa BC. Haciendo centro en H se traza la circunferencia γ de radio HA. Sean D y E los puntos diferentes de A, donde γ corta a las rectas AB y AC respectivamente. Demuestra que los puntos D, H y E están alineados.

272. Sean dos circunferencias tangentes en A; BC es una tangente común exterior siendo B y C los puntos de tangencia en cada una de las circunferencias, el segmento BA se prolonga hasta tocar a la otra circunferencia en el punto D. Probar que CD es diámetro.

273. En un triángulo ABC, la razón entre los ángulos B y C es como 1 es a 3, la bisectriz del ángulo BAC divide al área del triángulo en la razón 2 es a 1, es decir, $A_{BAD}:A_{ACD} = 2:1$. Halla las amplitudes de los ángulos interiores del triángulo.

274. Sea ABCD un tetraedro regular cuyas aristas miden 2 cm. Halla la longitud de sus alturas.

275. El ángulo A de un triángulo acutángulo ABC tiene una amplitud de 60°. Prueba que la bisectriz de uno de los ángulos formado por las alturas trazadas desde B y C pasa por el centro del circuncírculo.

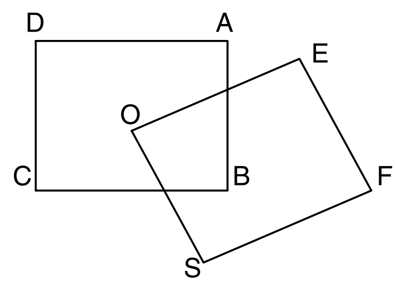
276. Sean F y G los puntos medios de las diagonales BD y AC, respectivamente, en el trapecio ABCD de bases AB y CD. Sean T el punto medio del segmento EF y O el punto de intersección de BD con AC. Demuestra que la recta OT divide al trapecio ABCD en dos trapecios de igual área.

277. En un triángulo ABC, los puntos medios de los lados AB, BC y CA son C_1, A_1 y B_1 respectivamente. Construye un triángulo donde se dan el punto A, el punto O centro de la circunferencia circunscrita al triángulo y F el punto medio de B_1C_1. Verifica que, dependiendo de la posición de los puntos A, O y F existe o no solución del problema.

278. Sea la ecuación polar $\rho = \dfrac{4}{2+\cos\varphi}$ que representa una cónica.

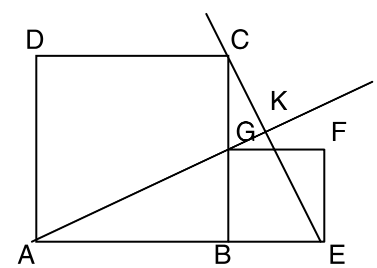
a) Identifícala y halla las longitudes de sus semiejes.
b) Escribe su ecuación cartesiana.
c) Escribe las coordenadas polares del centro de la cónica.

279. Si el vértice O del cuadrado OEFS es el centro del cuadrado ABCD, AM = 1, BM = 2; hallar el área del cuadrilátero OMBN.



280. Se tiene el triángulo ABC, desde un punto interior P se trazan MA, NB y CQ, todos pasan por P; M, N y Q que son puntos de BC, AC y AB respectivamente. S_1 = 40, S_2, = 30, S_3 = 35 y S_4 = 84 son las áreas respectivas de los triángulos APQ, QPB, BPM y CPN. Hallar el área del triángulo ABC.

281. Considera los cuadrados ABCD y BEFG; sea K el punto de intersección de las rectas AG y EC.
a) Halla la amplitud del ángulo AKE.
b) Argumenta por qué se puede trazar una circunferencia que pase por K y esté circunscrita al cuadrado ABCD.

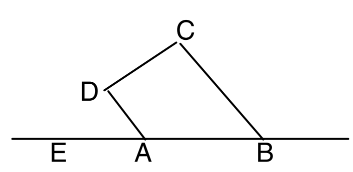


282. ABC es un triángulo cualquiera, exteriormente se construyen los cuadrados ABDE, ACIH y BCFG. Demuestra que las áreas de los triángulos AHE, FIC y BGD son iguales.

283. Se trazan en el plano n círculos de tal manera que uno cualquiera de ellos corta a todos los demás. No pueden pasar tres círculos por el mismo punto, ¿cuántas regiones limitan en el plano estos círculos, incluyendo el que es exterior a todos ellos?

284. ABCD es un trapecio isósceles de bases AB = 16, CD = 8 y altura 7. Se traza la bisectriz del ángulo BAD. Determina si ésta corta a BC o a CD.

285. En la figura: $\angle$ C = 90°, $\angle$ DAE = 75°, CD = BC, AD = 10u, AB = 16u.
Halla el área del cuadrilátero ABCD.



286. Se tiene un cuadrilátero convexo ABCD, se trazan sus diagonales AC y BD que se cortan en el punto P. Las áreas de los triángulos ABP, BCP y CDP son 18 cm^2, 16 cm^2 y 24 cm^2, respectivamente.

a) Prueba que PC = $\dfrac{8}{9}$AP.

b) Halla el área del triángulo ADP.

287. Sea C un cubo de arista **a**, por los puntos medios de dos aristas paralelas, que no están en la misma cara, se traza una recta. Halla la distancia de un vértice del cubo (que no sea extremo de ninguna de las aristas antes mencionadas) a la recta construida.

288. Desde el vértice opuesto a la hipotenusa de un triángulo rectángulo se trazan segmentos rectilíneos a los puntos de trisección de la hipotenusa. Si estos segmentos tienen longitudes sen x y cos x

(x: número real tal que $0 < x < \frac{1}{2}\pi$). Demuestra que la hipotenusa mide $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ u.

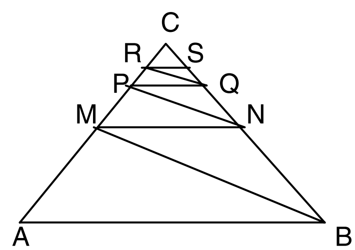
289. La base de un triángulo mide 10 cm y el ángulo opuesto a la base es de 60°. Halla el radio de la circunferencia circunscrita.

290. Se dobla una hoja rectangular de papel de 9 x 12 cm de tal manera que un par de vértices opuestos coinciden. Halla la longitud del doblez.

291. Se construyen dos triángulos equiláteros ABE interior y BFC exterior a un cuadrado ABCD. Probar que los puntos D, E y F están alineados.

292. En un triángulo rectángulo los catetos son b y c. En el triángulo se inscribe un cuadrado de modo que dos de los lados del cuadrado están sobre los catetos y un vértice está en la hipotenusa. Calcula el área del cuadrado en función de b y c.

293. En la figura: triángulo ABC equilátero, AB = 10, M, N, P, Q, R y S son los puntos medios de AC, BC, MC, NC, PC, QC respectivamente y si
H = BM + MN + NP + PQ + ...
Halla el valor de H.



294. ABC es un triángulo y O es su ortocentro. Sea G un punto diferente de C donde OC corta a la circunferencia circunscrita del triángulo ABC. Prueba que el triángulo AOG es isósceles.

295. Los tres lados de un triángulo tienen como longitudes números enteros. Sean a, b y c sus longitudes en orden ascendente. Determina las longitudes de los tres lados sabiendo que los dos primeros son pares y que las expresiones $a^2 - 2a - 35$ y $b^2 - 8b + 12$ son negativas.

296. Dado un triángulo ABC rectángulo en A, se traza la perpendicular a BC por el punto B, cortándose con la prolongación de AC en el punto P. Determina la longitud del radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABP si AC = b y AB = c.

297. Si desde el vértice A de un triángulo ABC inscrito en una circunferencia, se traza la altura AD y el diámetro AF. Probar que $AB \cdot AC = AD \cdot AF$.

298. Dado un triángulo isósceles de base 2a y altura de la base h. En el triángulo se inscribe una circunferencia y se traza un segmento paralelo a la base y tangente a la circunferencia inscrita. Probar que la longitud del segmento trazado es $2a\left(\frac{\sqrt{a^2+h^2}-a}{h}\right)^2$.

299. Prueba que en un triángulo ABC cualquiera de lados a, b y c se cumple $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}$.

300. En un rectángulo de lados AB = a y BC = b, se prolonga el lado AB a partir del vértice B hasta el punto E, con AE = 2AB; se traza el segmento CE y se sitúa sobre este un punto P de manera que el triángulo AEP y el cuadrilátero APCD tengan la misma área. Halla la distancia del punto C al punto P.

301. Sea un triángulo ABC con D el punto medio de BC. Si una paralela a AD corta a la prolongación de AB en P y a AC en Q y la paralela a BC por A corta a PQ en M. Prueba que M es el punto medio de PQ.

302. Dos circunferencias de radios r_1 y r_2 (r_1 = 16 cm y r_2 = 9 cm) son tangentes exteriores. Halla el área del triángulo formado por sus tres tangentes comunes.

303. En el triángulo ABC se han trazado las alturas AA', BB' y CC' cuyas bases se han unido entre sí. Determina la relación entre el área del triángulo A'B'C' y el área del triángulo ABC, si se conocen los ángulos del triángulo ABC.

304. Sea un cuadrado ABCD, en el interior del lado CD se determina el punto E, tal que el ángulo DAE tiene una amplitud de 30°. Se traza la mediatriz del segmento AE y se denotan por P, M y Q respectivamente a los puntos de intersección de esa mediatriz con los segmentos AD, AE y BC. Demuestra que: $\frac{PM}{MQ} = \frac{1+2\sqrt{3}}{11}$.

305. Probar que si la recta formada por dos vértices opuestos de un cuadrilátero inscrito corta al punto de intersección de las tangentes a los otros dos vértices entonces, los productos de las longitudes de los lados opuestos son iguales.

306. Se selecciona un punto O en el interior de un rectángulo de tal manera que la distancia a uno de sus vértices es de 11 cm, la distancia de O al vértice opuesto al primero es de 12 cm y la distancia de O a un tercer vértice es de 3 cm. Halla la distancia al cuarto vértice.

307. Sea M un punto interior del rectángulo ABCD y S su área. Probar que S $\leq$ AM·CM + BM·DM.

308. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores no nulos y no colineales. Demuestra que el vector $\vec{c}$ forma ángulos iguales con los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ siendo $\vec{c}$ = $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

309. Sea un cuadrado OBCD y P un punto interior del mismo; se sabe que OP = 2b; CP = b y BP = 2b. Calcula la longitud del lado del cuadrado.

310. Halla el valor de x para que las circunferencias C_1: $x^2 + y^2 = 25$ y C_2: $(x-6)^2 + y^2 = K^2$ se cortan ortogonalmente. (Dos circunferencias se dice que son ortogonales cuando las tangentes en sus puntos comunes son perpendiculares).

311. Dados el punto A(-1;6) y la recta r : 2x – y – 7 = 0. determina sobre la recta r dos puntos M y N tales que con A formen un triángulo equilátero.

312. A partir de un punto O del espacio se trazan tres semirrectas tales que cada una de ellas es perpendicular a las otras dos. En cada semirrecta se toma un punto diferente de O de modo que las distancias respectivas de los puntos seleccionados hasta el origen son a, b y c (a < b < c). Si los tres puntos se unen formando un triángulo, demuestra que el triángulo es acutángulo y que su área es

$$A = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}\ .$$

313. Una elipse con ejes paralelos a los ejes coordenados y la hipérbola $(x - 1)^2 - (y - 2)^2 = 25$, que tienen sus vértices comunes. En esos vértices están también los centros de dos circunferencias que son tangentes a las asíntotas de la hipérbola en los puntos donde esas asíntotas cortan a la elipse.
a) Escribe la ecuación de ambas circunferencias.
b).Escribe la ecuación de la elipse.

314. Sea ABC un triángulo con A(0;0), B(36;15) y $C(x_c;y_c)$, las coordenadas de C también son números enteros. ¿Cuál es el área mínima que puede tener el triángulo?

315. Todos los vértices de un hexágono convexo en el plano cartesiano son puntos reticulares, es decir, puntos tales que ambas coordenadas son números enteros. Cuatro de los vértices del hexágono son: (–4;0), (0;3), (6;0) y (0;–3). ¿Cuál es la mayor área que puede tener el hexágono?

316. Se colocan triángulos equiláteros con lados de longitudes 1, 3, 5,..., (2n + 1), respectivamente, uno tras otro a lo largo de una línea recta, de tal manera que cada uno tenga un vértice común con el siguiente. Demuestra que los vértices que no están sobre dicha recta están sobre una parábola.

317. Demuestra que si en un triángulo la longitud de un lado es igual a la semisuma de las longitudes de los otros dos lados, la bisectriz interior del ángulo opuesto a este lado es perpendicular a la recta que une los centros de las circunferencias inscritas y circunscritas a dicho triángulo.

318. ABC es un triángulo con AB = 3, BC = 4 y AC = 5. La bisectriz del ángulo A corta a BC en D. La mediatriz de AD corta a AB en X y a AC en Y. Halla la longitud del segmento XY.

319. Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo y α, β, γ los ángulos respectivamente opuestos. Demostrar que si se cumple que $a + b = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\gamma(a\tan\alpha + b\tan\beta)$, entonces el triángulo es isósceles.

320. Todas las caras de un paralelepípedo son rombos con lados de longitud 7 cm y ángulo agudo con amplitud de 60°. Determina el volumen del paralelepípedo.

321. Probar que los segmentos que unen los centros de los cuadrados construidos sobre los lados de un paralelogramo determinan un cuadrado.

322. Tres amigos: Antonio, Benigno y Cirilo disputaron un torneo de ajedrez jugando cada uno 7 partidas con cada uno de los otros dos. Al final de la competencia hicieron las siguientes declaraciones:
Antonio: Gané el mayor número de partidas.
Benigno: Perdí el menor número de partidas.
Cirilo: Obtuve la mayor cantidad de puntos.
Cada jugador obtiene un punto cuando gana, medio punto cuando empata y cero si pierde. ¿Cuántas victorias, derrotas y empates obtuvo cada jugador?

323. En un cuadrado de lado 5 se trazan rectas paralelas a sus lados de forma tal que el cuadrado queda dividido en 25 cuadraditos unitarios. Determina la cantidad de triángulos cuyos vértices son vértices de estos cuadraditos.

324. Se escribe uno de los números +1 ó –1 en cada una de las casillas de un tablero de 3 x 3. Luego, el número en cada casilla se reemplaza por el producto de todos sus vecinos. (Dos casillas son vecinas si

tienen un lado en común). Demuestra que después de un número finito de tales operaciones, cada casilla contendrá un +1.
325. Dos jugadores practican el siguiente juego en un triángulo ABC de área T. El primer jugador elige un punto X sobre el lado BC, luego el segundo jugador escoge un punto Y en AC y finalmente el primer jugador coge un punto Z en AB. El primer jugador quiere que el triángulo XYZ tenga la mayor área posible. ¿Cuál es el área máxima que el primer jugador puede estar seguro de conseguir?

326. De una esquina de una habitación cuadrada de dos metros de largo parte un insecto (del piso). Cada brinco del insecto es de dos metros de largo. ¿A qué región del plano no puede llegar el insecto si se pone a brincar sin parar?

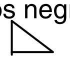
327. Un cubo de arista 4 cm se va a subdividir en 64 cubos de arista 1 cm. se puede hacer con 9 cortes si no se separan y arreglan los pedazos de manera conveniente después de cada corte. Si en cambio, se permite re-arreglar los pedazos de la manera más apropiada después de cada corte (no es necesario conservar la forma de cubo), se reduce el número de cortes requeridos. Halla, con demostración, el número mínimo de cortes necesarios para efectuar la subdivisión.

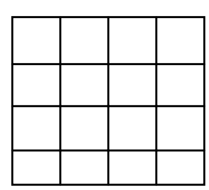
328. Un juego tiene las reglas siguientes:
I) Juegan alternadamente 2 jugadores.
II) Cada jugador, en su turno, escribe un número entero entre 1 y 10 ambos inclusive. Ese número se adiciona a la suma de los números escritos en las jugadas precedentes, (salvo, naturalmente que se trate de la primera jugada).
III) Pierde el jugador cuyo número hace que la suma sea 100 o más.
El jugador que comienza el juego, si su contrincante juega bien, pierde. Explica cómo y por qué.

329. Se tienen 8 monedas iguales en la forma, el color, el brillo y el tamaño. Se sabe que una de ellas es falsa y que su peso es levemente menor que el de una moneda verdadera. ¿Es posible, con dos pesadas en una balanza de dos platillos identificar la moneda falsa?

330. Ángel, Basilio, Ciro y David fueron a cenar en compañía de sus esposas. En el restaurante se sentaron alrededor de una mesa redonda de modo que:
-Ninguno de los presentes se sentó al lado de su pareja.
-Al frente de Ángel se sentó Ciro.
-A la derecha de la esposa de Ángel se sentó Basilio.
-No había dos hombres juntos.
¿Quién se sentó entre Ángel y David?

331. En el pizarrón están escritos los números del 1 al 12, ambos inclusive. En cada paso se eligen dos de esos números, se borran y se escribe en su lugar su suma y su diferencia (el mayor menos el menor).
a) ¿Es posible obtener una lista de todos los números iguales a 10?
b) ¿Es posible obtener una lista de todos los números iguales a 16?

332. Con 16 triángulos negros y 16 triángulos blancos de la forma  que ocupan medio cuadradito, se quiere cubrir el tablero. ¿De cuántas maneras puede hacerse con la condición de que no haya dos triángulos del mismo color con un lado común?



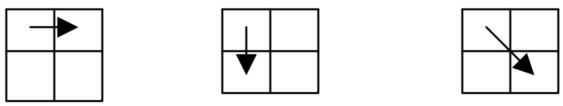
333. Seis equipos de fútbol juegan un torneo todos contra todos. Si hay un equipo ganador, ¿cuál es el mínimo de puntos que debe obtener? Comprobar que este número es efectivamente el mínimo y que existe un desarrollo del torneo donde el ganador obtiene ese puntaje.
Nota: Un partido ganado son 2 puntos, uno empatado es 1 punto y uno perdido es 0 punto.

334. Una urna contiene bolas negras y una segunda urna contiene bolas blancas. Se toma un cierto número de bolas de la primera urna y se coloca en la segunda, se retira el mismo número de bolas de la

segunda y se colocan en la primera. Determina si después de esta operación el número de bolas blancas de la primera urna es mayor o igual al número de bolas negras de la segunda urna.

335. Un club de Matemática tiene 100 miembros. Suponga que en cualquier grupo de 4 miembros existe un miembro que conoce a los otros 3. Probar que existe un miembro del club que conoce a los otros 99 miembros. ¿Cuál es el número mínimo de miembros?

336. Se da un tablero cuadrado de 4x4. Se quiere ir del cuadrado izquierdo superior al cuadrado derecho inferior. Los movimientos permitidos son:



¿De cuántas maneras esto es posible?

337. Colocamos 400 puntos, distintos dos a dos en el interior de un cubo unitario. Probar que, entre los 400 puntos, existen por lo menos 4 que están en el interior de una esfera de radio igual a $\frac{4}{23}$.

338. Hay 2 000 naranjas distribuidas en varios cestos. Uno puede remover cestos y/o remover naranjas desde los cestos. Probar que es posible tener un número igual de naranjas en cada uno de los cestos, con el número total de naranjas no menor que 100.

339. Ocho equipos de balompié participan en un torneo a una vuelta (cada equipo juega una sola vez con cada uno de los otros equipos). Probar que es posible que al concluir el torneo pueda suceder que 4 equipos A, B, C y D tal que A derrotó a B, C y D, B derrotó a C y D y C derrotó a D.

340. En un juego dos jugadores colocan números naturales cualesquiera. A cada turno la diferencia entre el nuevo y el viejo número debe ser mayor que 0 pero menor que el número viejo. El número original es 2. El ganador es aquel que coloque el número 1987. En un partido perfecto, ¿cuál es el jugador que gana?

341. Un cuadrado de 7 x 7 está compuesto de 16 baldosas de 1 x 3 y una baldosa de 1 x 1. Probar que la baldosa de 1 x 1 estará en el centro del cuadrado o linda con una de las fronteras (bordes).

342. Los dígitos 0, 1, 2,..., 9 están escritos en un tablero de 10 x 10, cada número aparece 10 veces.
a) ¿Será posible escribirlos de forma tal que en cualquier fila o columna no haya más de 4 dígitos diferentes?
b) Probar que debe haber una fila o una columna que contenga más de 3 dígitos diferentes.

343. En un aula de 32 alumnos están organizados en 33 equipos, de forma tal que cada equipo tiene 3 alumnos y no hay dos equipos que tengan igual composición. Probar que hay dos equipos los cuales tienen exactamente un miembro común.

344. Tres saltamontes están sobre una línea recta. Cada segundo un saltamontes salta. Al saltar cae del otro lado (pero no al otro lado de dos) del otro saltamontes. Probar que después de 1 985 s los saltamontes no pueden estar en la posición inicial.

345. Hay 68 monedas acuñadas, cada una de las monedas acuñadas tienen un peso diferente a cada una de las otras. Mostrar cómo hallar la más pesada y la más liviana en 100 pesadas.

346. 20 equipos de balompié toman parte en un torneo. El primer día todos los equipos juegan un partido. El segundo día los equipos juegan un partido adicional. Probar que, después del segundo día es posible seleccionar 10 equipos, tal que dos de ellos hayan jugado entre sí.

347. Se escriben los números del 1 al 64 en un tablero de 8 x 8 (del 1 al 8 de izquierda a derecha en la primera fila, del 9 al 16 de izquierda a derecha en la segunda fila y así sucesivamente). Se escriben

signos de más en alguno de los números y signos de menos en los restantes números de forma tal que hayan 4 más y 4 menos en cada fila y en cada columna. Probar que la suma de los números escritos es igual a 0.

348. En un torneo de balompié a una sola vuelta (cada equipo juega una vez con cada uno de los otros), se otorgan 2 puntos cuando un equipo gana, 1 punto por empatar y 0 punto por perder, compiten 28 equipos. Durante el torneo más del 75% de los partidos finalizaron empatados. Probar que hubo al menos dos equipos que finalizaron con el mismo número de puntos.

349. Consideremos una sucesión de palabras de dos letras A y B. La primera palabra es A, la segunda palabra es B. La k-ésima palabra se obtiene de la (k – 2)-ésima, escribiendo después la (k – 1)-ésima. (Los primeros elementos de la sucesión son A, B, AB, BAB, ABBAB). ¿Existirá en esta sucesión una palabra periódica, es decir, una palabra de la forma PP::P donde P es una palabra repetida al menos una vez? (La palabra BABBBABB es de la forma PP; en la cual P se repite exactamente una vez).

350. Hay un conjunto de cartas con números del 1 al 30 (los cuales pueden repetirse). Cada estudiante toma una de esas cartas. El maestro puede realizar la operación siguiente: lee una lista de esos números (posible solo uno) y entonces le dice a los estudiantes que levanten la mano si sus números están en la lista. ¿Cuántas veces él debe realizar esta operación para determinar el número de cada carta de los estudiantes?

351. Uno de los números 1 ó –1 se le asigna a cada uno de los vértices de un cubo. A cada cara del cubo se le asigna el entero que es el producto de los cuatro enteros de los vértices de dicha cara. ¿Es posible que la suma de los 14 enteros asignados sea 0?

352. Probar que para cada uno de los vértices de un poliedro es posible asignar un número natural tal que para cada par de vértices con una cara común, los números asignados no sean primos relativos y con cada par de vértices fuera de una cara común los números asignados son primos relativos.

353. Patricia halló un tablero cuadrado de 2 x 2 con los números 1, 2, 3, 4 de forma tal que todas las sumas horizontales y verticales eran números primos. Entonces, trató de formar un tablero cuadrado de 3 x 3 con los números del 1al 9 en la misma forma pero se dio cuenta que no se podía. Explica por qué.

354. Un individuo miente siempre martes, jueves y sábado y es completamente veraz los demás días de la semana. Si un día particular mantenemos el siguiente diálogo:
Pregunta: ¿Qué día de la semana es hoy?
Respuesta: Sábado.
Pregunta: ¿Qué día de la semana será mañana?
Respuesta: Miércoles.
¿De qué día de la semana se trata?

355. Dos personas A y B juegan del siguiente modo:
Dado un número N de objetos (tal que permita de cada jugador varias jugadas), toman alternativa y forzosamente, a su elección, uno, dos o tres objetos, con la condición de que el que toma el último objeto pierde el juego. Se desea saber:
a) ¿Cómo tiene que jugar A para estar seguro de ganar siempre?
b) Para conseguirlo, ¿es siempre necesario que A tenga libertad o no de empezar el juego?

356. Se da un cierto número de puntos en el interior de un triángulo. Se unen estos puntos, así como los vértices del triángulo por segmentos que no se cruzan entre sí hasta que el interior del triángulo se divide en regiones triangulares disjuntas. Cada uno de los puntos dados es un vértice de cualquier triángulo que lo contiene. Demuestra que el número de regiones triangulares es siempre impar.

357. Los números naturales desde el 1 hasta el 9 se sitúan en una tabla de 3x3 de manera que en cada casilla hay exactamente un número y la suma de tres números cualesquiera, situados en diferentes filas y diferentes columnas es igual a 15.

a) Encuentra una tabla que cumpla las condiciones planteadas.
b) ¿Cuántas tablas diferentes que cumplan estas condiciones existen?
Dos tablas se consideran diferentes si existe al menos un número que no ocupa el mismo lugar en estas tablas.
358. Colocar los números 1, 2, 3,..., n sobre una circunferencia de tal manera que la diferencia entre dos números vecinos cualesquiera sea a lo sumo 2. Demostrar que existe una solución única.

359. En el interior de un triángulo se ubican 13 puntos tal que no existen tres alineados. Demostrar que existen al menos 3 de ellos que dan lugar a un triángulo cuya área es menor que 1/6 del área total.

360. En una fiesta de diez personas, entre tres personas cualesquiera hay al menos dos que no se conocen. Prueba que en la fiesta existen cuatro personas que no se conocen entre sí.

361. Un baldosín cuadrado de 3 x 3 consta de nueve cuadrados unitarios. Estos cuadrados pequeños han de colorearse de rojo, azul o blanco, de tal manera que dos cuadrados con un borde en común deben ser de diferentes colores. Se considera que dos baldosines están coloreados de la misma manera si al rotar uno de ellos resulta idéntico al otro. ¿Cuántas maneras distintas hay de colorear los baldosines?

362. Un conjunto de 1 990 personas es dividido en subconjuntos disjuntos entre sí de tal manera que:
I) Ninguna persona de uno de los subconjuntos conoce a todas las demás de este subconjunto.
II).Entre cualesquiera tres personas de un subconjunto existen siempre al menos dos que no se conocen entre sí.
III).Para cualesquiera dos personas en un subconjunto que no se conozcan entre sí, existe exactamente una persona en el mismo subconjunto que las conoce a ambas.
a) Probar que dentro de cada subconjunto cada persona tiene el mismo número de conocidos.
b) Determinar el número máximo posible de subconjuntos.
Nota: Se entiende que si una persona A conoce a una persona B, entonces la persona B conoce a la persona A. Se supone que toda persona se conoce a sí misma.

363. Mostrar que para todo entero $n \geq 6$, existe un hexágono convexo que puede ser cortado en n triángulos congruentes.

364. Supongamos que hay 997 puntos en un plano. Cada par de puntos es unido con un segmento de línea y su punto medio es coloreado con rojo, demuestra que hay al menos 1 991 puntos rojos en el plano. ¿Podrá encontrarse un caso especial con exactamente 1 991 puntos rojos?

365. En una circunferencia hay **n** puntos marcados. A cada punto se le asigna un número entero de 1 a n, sin repeticiones, luego se restan los números asignados a puntos vecinos (el mayor menos el menor) y se suman las n diferencias así obtenidas. ¿Cuál es el menor valor que se puede tener en el resultado final de este procedimiento?

366. En una circunferencia se sitúan 4n puntos (n es un entero positivo) desde 1 hasta 4n. Todos los 2n puntos pares, se dividen en n pares y los puntos de cada par son unidos por una cuerda verde. Similarmente todos los 2n puntos numerados impar son divididos en n pares y los puntos de cada par son unidos por una cuerda azul. Los puntos y cuerdas unidos son tales que no hay tres cuerdas que se corten en un punto común. Probar que hay al menos n puntos donde una cuerda verde interseca a una cuerda azul.

367. Tres hombres, Pedro, Antonio y Juan, van de compras con sus esposas; los nombres de las tres mujeres son Catalina, Elena e Isabel. Cada una de estas seis personas compra un cierto número de objetos y paga un número de pesos igual al número de objetos que ha comprado . Pedro compra 23 objetos más que Elena, y Antonio 11 objetos más que Catalina. Cada marido gasta 63 pesos más que su esposa. Se pide encontrar los nombres de los matrimonios.

368. Se da una lista de ceros y unos, le podemos aplicar la operación siguiente: Se escogen dos números a y b de la lista, se borran y se agrega a la lista el número 0 si a = b y 1 si a ≠ b. Se repite esta operación hasta quedarse con un solo número. Determinar cómo debe ser la lista para terminar con un 1.

369. De un grupo de personas se sabe que cada una de ellas tiene a lo más 3 primos dentro del grupo. Probar que se pueden separar en dos grupos de tal manera que en cada grupo cada persona tenga a lo más un primo.

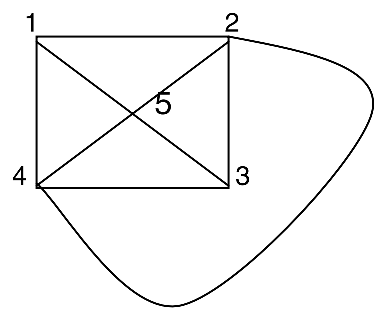
370. Cinco personas deciden guardar un documento secreto en una caja fuerte. Se desea que nunca dos de ellos puedan juntos abrir la caja y que siempre tres de ellos si puedan. El sistema ideado consiste en ponerle a la caja fuerte **a** cerraduras, hacer copias de cada una de las llaves y entregarle a cada uno un número **b** de llaves distintas. Determinar el número mínimo de cerraduras **a** y el número correspondiente de llaves **b** a entregarle a cada persona.

371. Dos jugadores juegan al siguiente juego: Dado un número N de objetos (N ≥ 3) los jugadores tienen la facultad de tomar alternativamente 1, 2 ó 3 objetos. El jugador que toma el último objeto, pierde. ¿Cómo habrá que jugar, según los valores de N, para ganar siempre?

372. Se hace un arreglo rectangular de puntos en 4 filas (horizontales) y n columnas (verticales). Considera las diferentes formas de colorear los puntos si cada punto debe colorearse o bien de amarillo o bien de verde. Diremos que los puntos se han coloreado "**Bien**" si no hay cuatro de ellos que forman (son los vértices de) un cuadrado o rectángulo con lados horizontales y verticales. Determina el máximo valor de n que permite que los puntos se coloreen **"Bien"**.

373. Un rectángulo está formado por 640 cuadrados dispuestos en 20 filas y 32 columnas. ¿Cuántos de estos cuadrados son cortados en su interior por la diagonal del rectángulo?

374. Un ciclista quiere visitar cinco ciudades. Si sólo puede visitar cada ciudad una vez y, si parte de la ciudad 1, ¿cuántos caminos diferentes puede tomar de acuerdo al mapa que aparece abajo?
Aclaración: Los puntos representan las ciudades y las líneas las carreteras que las unen.



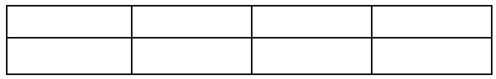
375. Se tiene un tablero de 5 x 5 en que se alternan cuadros negros y blancos. En una operación se invierte el color de todos y cada uno de los cuadros de una misma fila o columna, si es blanco se pinta de negro y si es negro se pinta de blanco. Si es posible, determina el número mínimo de tales operaciones que han de efectuarse para que todos los cuadros del tablero queden de un mismo color. Si no es posible contesta 0.

376. Se escriben 2 001 números sobre una circunferencia, uno de ellos es igual a –1 y los restantes números son iguales a 1. Se toma cada pareja de números que están situados uno al lado del otro y se multiplican hasta tener otros 2 001 números borrando los anteriores. Si esta operación se repite tantas veces como sea posible. ¿En algún momento de este proceso aparecerán solamente números 1 en la circunferencia?

377. Se tiene un candado cuyas posibles combinaciones van del 0000 al 9999. Sabemos que cada una de las combinaciones 1 932, 2 748 y 9 215 tiene exactamente un dígito correcto. ¿Cuál es el mínimo número de combinaciones que se deben realizar para tener la seguridad de abrir el candado?
Nota: Suponiendo que la combinación correcta fuera 3 564, entonces la combinación 7 586 tendría sólo un dígito correcto: el 5.

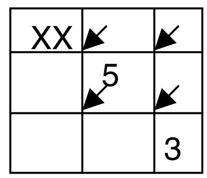
378. Se tienen 5 puntos sobre una recta. Se agregan a esos puntos los puntos medios de todos los segmentos que se pueden formar con dos de los cinco puntos dados como extremos.
a) ¿Cuál es el máximo número de puntos que se tiene al final?
b) ¿Cuál es el mínimo número de puntos que se tiene al final?

379. ¿Cuántas formas hay de colorear una bandera formada por dos bandas horizontales, dividida en 8 cuadros como se muestra en la figura, utilizando a lo más 4 colores de manera que dos cuadros que tengan un lado en común no tengan el mismo color?



380. En una cuadrícula de 1 000 x 1 000 te puedes mover sobre las aristas de la siguiente forma:
I) Sólo puedes avanzar hacia arriba o hacia la derecha.
II) La primera vez que avanzas lo haces solamente un espacio, la segunda vez avanzas 2 y así sucesivamente.
III) Iniciar en la esquina inferior izquierda.
¿Existirá una forma de llegar a la esquina superior derecha?

381. En las casillas de la cuadrícula de la figura se van a escribir los números enteros del 1 al 9 (uno en cada una, sin repetir). Queremos que alrededor de cada vértice marcado con una flecha la suma de los cuatro números que queden sea 20. Si escribes 5 y 3 como se indica. ¿Qué número deberá quedar en la casilla marcada?



382. Se escriben en sucesión todos los números del 1 al 2 003, en orden, uno a continuación del otro, para formar un número G muy grande. ¿Cuál es la cifra central de G y a qué número de la sucesión corresponde esa cifra?

383. Utilizando fichas de tamaño 2 x 1, ¿es posible cubrir un tablero de 8x8 del que se han quitado dos esquinas opuestas (de 1 x 1)?

384. ¿Cuántos números de 4 cifras cumplen la propiedad de que el producto de dichas cifras es un cuadrado perfecto?

385. Seis músicos se distribuyen de forma que en cada concierto programado participan algunos tocando y otros oyendo. ¿Cuál es el menor número de conciertos que necesitan programarse de manera que cada músico oiga a los restantes músicos?

386. En cierto torneo de ajedrez el número de competidores fue de 22. Se dividieron en dos grupos y, en cada grupo todos los jugadores compitieron una vez entre sí. En el segundo grupo se jugaron 21 partidas más que en el primero. El Gran Maestro marcado con la letra A que formaba parte del primer grupo y que no perdió ninguna partida obtuvo 6,5 puntos (se otorgaba 1 punto a cada jugador que ganaba una partida y 0,5 punto por empate). ¿En cuántas partidas empató el jugador A?

387. ¿Cuántas colecciones de cuatro números enteros del 1 al 25 suman un múltiplo de 5? (Por ejemplo, la colección $\{18, 9, 1, 17\}$ cumple la condición, pues la suma es 45 que es múltiplo de 5).

SOLUCIONES

1. a) $\frac{a}{b}-\frac{a'}{b'}=\frac{ab'-a'b}{bb'}=-\frac{1}{bb'}<0$ luego $\frac{a'}{b'}>\frac{a}{b}$. Consideremos que a' = b'm y a = bn con m y n enteros, entonces a'b – ab' = b'mb – bnb' = bb'(m – n) = 1 por lo que m – n = $\frac{1}{bb'}$ > 0, pero la diferencia m – n $\in$ N* por lo que b = b' = 1 ó b = b' = -1 por lo tanto las fracciones son irreducibles.

b) Formando la razón $\frac{c}{d}=\frac{a+a'}{b+b'}$ se llega a que a'd – cb' = bc – ad (1) y, trabajando con el miembro izquierdo de (1) sustituyendo d y c se prueba la igualdad con la relación a'b – ab' = 1.

c) De $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$ se tiene que $\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}>\frac{a}{b}$ y de $\frac{\mathrm{a'}}{\mathrm{b'}}-\frac{c}{d}$ se llega a que $\frac{\mathrm{a'}}{\mathrm{b'}}>\frac{c}{d}$ y se prueba lo pedido.

2. De f(p) = $2p^2 + q = q^2 + pq + q = 0$ se tiene que q(q + p + 1) = 0 de donde q = 0 o q = –p –1. Si q = 0 entonces p = 0 y si q = –p –1 entonces $2p^2 - p - 1 = 0$ y p = 1 o p = –½ y q = –2 o q = –½, teniéndose las funciones $f_1 = x^2$; $f_2 = x^2 + x - 2$ o $f_3 = x^2 - ½ x + ½$.

3. Sea xy = k de acuerdo a lo propuesto se tiene que $\left(x+\frac{p}{100}x\right)(y-z)=k$ y despejando z se tiene que z = $\frac{py}{100+p}$. El porcentaje de disminución es $100\left(\frac{y-z}{y}\right)=\frac{100p}{100+p}\%$

4. De I + II se tiene que $\frac{1}{x^2}+\frac{2}{xy}+\frac{1}{y^2}=\frac{25}{144};\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2=\frac{25}{144}$ por lo que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\pm\frac{5}{12}$.

De I – II se tiene $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=\frac{7}{144}$ y $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)=\frac{7}{144}$ y sustituyendo convenientemente se llega a las ecuaciones $\frac{5}{12}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)=\frac{7}{144}$ ó $-\frac{5}{12}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)=\frac{7}{144}$ de aquí se forman los sistemas de ecuaciones:

$\begin{cases}\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{7}{60}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{12}\end{cases}$ ó $\begin{cases}\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=-\frac{7}{60}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=-\frac{5}{12}\end{cases}$ que al resolverlos se obtienen las soluciones $\left(\frac{15}{4};\frac{20}{3}\right)$ y $\left(-\frac{15}{4};-\frac{20}{3}\right)$.

5. Sea... = a, entonces $(x^2 + a)(x + 1) = (x^4 + 1)(x + 2)$ que multiplicando y transponiendo se llega a la ecuación $x^5 + 2x^4 - x^3 - x^2 + (1 - a)x + 2 - a = 0$ que aplicando Ruffini se llega a la ecuación lineal 4 – 2a = 0 y a = 2.

6. En el miembro izquierdo se tiene que: $\frac{abcd+bcd+(a+1)(b+1)d+(a+1)(b+1)(c+1)}{abcd}$

$$=\frac{bcd(a+1)+(a+1)cd+(a+1)(b+1)d+(a+1)(b+1)8c+1)}{abcd}$$

$$=\frac{(a+1)(b+1)(cd+d+c+1)}{abcd}=\frac{(a+1)(b+1)c+1)(d+1)}{abcd}$$

7. En (1) tenemos $x(y + 1) = 19 - y \Rightarrow x = \frac{19-y}{y+1}$, sustituyendo en III tenemos

$z + \frac{19-y}{y+1} + z\frac{19-y}{y+1} = 14 \Rightarrow y = \frac{4z+1}{3}$, sustituyendo en II se tiene $\frac{4z+1}{y+1} + z + z\frac{4z+1}{y+1} = 11$
$\Rightarrow z^2 + 2z - 8 = 0$, luego $z = -4$, $y = -5$, $x = 6$ o $z = 2$, $y = 3$, $x = 4$.

8. Sean $a, b, c \in N$, tenemos que $3(a^2 + b^2 + c^2) = 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$
$= 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 2ab + 2ac + 2bc - 2ab - 2ac - 2bc$
$= (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2ac + c^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (a + b + c)^2 = (a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 + (a + b + c)^2$
que es la suma de cuatro cuadrados perfectos.

9. Si $px^2 + 2qx + r = 0$ no tiene raíces reales, entonces $4p^2 - 4pr < 0$ y $pr > q^2$ (I).
Si $rx^2 + 2px + q = 0$ no tiene raíces reales, entonces $4p^2 - 4qr < 0$ y $qr > p^2$ (II).
El discriminante de la ecuación $qx^2 + 2rx + p = 0$ es $4r^2 - 4pq$ y por (I) y (II) se tiene $pqr^2 > p^2q^2$ por lo que $r^2 > pq$ luego $4r^2 > 4pq$ y $D > 0$ por lo que si dos de las ecuaciones no tienen raíces reales, la tercera debe tenerlas.

10. $x + y + z + 9 - 2\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{y+2} + \sqrt{z+2}\right) = 0$, entonces
$x + 3 + y + 3 + z + 3 - 2\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{y+2} + \sqrt{z+2}\right) = 0$ y
$\left(\sqrt{x+2} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{y+2} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{z+2} - 1\right)^2 = 0$, pero esto sólo puede ocurrir cuando cada una de las bases es cero por lo que $x = y = z = -1$.

11. Sean $x, y, z > 0$, entonces $W =; \frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|} + \frac{xyz}{|xyz|} = 4$;si $x,y,z < 0$, entonces $W = -4$;
si $x, y > 0$ y $z < 0$, entonces $W = 0$ al igual que para $x,y < 0$ y $z > 0$ luego los valores posibles de W son 4, 0 ó -4 cualquier otra combinación llega al mismo resultado.

12. Sea h el número de hombres votantes y m el de mujeres, se tiene $\frac{h}{m} = \frac{a}{b} \Rightarrow h = \frac{am}{b}$, si fueran c hombres menos y d mujeres menos, entonces $\frac{m-d}{h-c} = \frac{e}{f}$, es decir, $\frac{md}{\frac{a}{b}m - c} = \frac{e}{f}$ haciendo los cálculos pertinentes se llega a que $h + m = \frac{(a+b)(df-ce)}{bf-ae}$.

13. De la igualdad dada se tiene $x_{n-1} \cdot x_n = n$, utilizando este resultado para 2, 4, 6, 8 tenemos que:
$(x_1x_2) \cdot (x_3x_4) \cdot (x_5x_6) \cdot (x_7x_8) = 384$.

14. Sea $E = \frac{x^2-2x-1}{(x-4)^2}$, entonces $Ex^2 - 8Ex + 16E = x^2 - 2x - 1$; $(E - 1)x^2 + (2 - 8E)x + (16E + 1) = 0$ cuyo discriminante es $-\frac{2}{7}$ luego $E \geq -\frac{2}{7}$ y el valor mínimo es $-\frac{2}{7}$.

15. Sea $a = \sqrt{5} + \sqrt{8} \Rightarrow a^2 = 13 + 2\sqrt{40}$ y $b = \sqrt{6} + \sqrt{7} \Rightarrow b^2 = 13 + 2\sqrt{42}$, como $b^2 > a^2$ se tiene que $b > a$ por ser a y b positivos.

16. Efectuando la multiplicación y calculando se tiene:
$a^2b + ab^2 + 2abc + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 = c(a^2 + 2ab + b^2) + c^2(a + b) + ab(a + b)$
$= c(a + b)^2 + c^2(a + b) + ab(a + b) = (a + b)(ac + bc + c^2 + ab) = (a + b)(a + c)(b + c)$

17. $0 \geq a - 4\sqrt{a} + 4 + 4b - 4\sqrt{b} + 1$,es decir, $0 \geq \left(\sqrt{a} - 2\right)^2 + \left(2\sqrt{b} - 1\right)^2$ como el miembro derecho es la suma de dos números no negativos, entonces la igualdad sólo se cumple para $a = 4$ y $b = ¼$.

18. A o B = 3, 5, 6, 7; A ó C = 1, 3, 5, 7; B ó C = 1, 6
luego A = {2, 3, 5, 7}; B = {2, 4, 6, 8}; C = {1, 2, 4, 8}.

19. De acuerdo a los datos tenemos: J = B + V (I), V + P = B (II), 3P = 2J (III) $\Rightarrow$ P = $\frac{2}{3}$J, de II – I se tiene V + P = J –V continuando se llega a que 5 vasos pesan lo mismo que una botella.

20. Transponiendo y elevando ambos miembros a x se tiene: $x + 177 = (x - 1)^x$ para $x \leq 4$ se cumple que MI > MD, para $x > 4$ se cumple que MI < MD, como $(x - 1)^x$ con x natural crece más rápido que x + 177 hay soluciones naturales.

21. Como $\frac{a}{b} < \frac{x}{y}$ con a, b, x, y $\in R_+^*$ se tiene ay < bx, sumando ab en ambos miembros y factorizando se llega a(b + y) < b(a + x), es decir, $\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+y}$ (I), por otra parte ay < bx, sumando xy en ambos miembros, al factorizar y dividir se llega a $\frac{a+x}{b+y} < \frac{x}{y}$ (II) y de (I) y (II) se llega a la desigualdad pedida.

22. Sean a y b dos números pares cualesquiera con a = 2m, b = 2n, entonces la semisuma de sus cuadrados es igual a $2m^2 + 2n^2$ que si le sumamos y le restamos 2mn se obtiene $(m + n)^2 + (m - n)^2$ que es la suma de dos cuadrados perfectos.

23. Eliminando denominadores se tiene:
$a(x - a)^2(x - b) + b(x - b)^2(x - a) = ab^2(x - b) + a^2b(x - a)$
$(x - a)(x - b)[á(x - a) + b(x - b)] = ab[b(x - b) + a(x - a)]$ si $a(x - a) + b(x - b) = 0$ entonces
$(a + b)x - a^2b^2 = 0$ cuya solución es $x = \frac{a^2 + b^2}{a + b}$. Si es diferente de cero, se tiene la ecuación
$(x - a)(x - b) = ab$ de soluciones x = 0 o x = a + b.

24. Después de calcular y reducir términos semejantes se llega a la ecuación
$3x^2 + (a + b + c)x + ab + ac + bc = 0$ cuyo discriminante es mayor o igual a cero. Por lo que siempre tiene soluciones reales.

25. Para que las soluciones sean reales, en (I) debe cumplirse que $D_1 = \frac{m^2 - 4n}{4} \geq 0$ y $m^2 \geq 4n$. En (II) tenemos $D_2 = \frac{p^2 - 4q}{4} \geq 0$ y $p^2 \geq 4q$. Entonces $m^2p^2 \geq 16nq$ pero mp = 2(n + q), por lo que $m^2p^2 = 4(n + q)^2 \geq 16nq$ de aquí se llega que $(n - q)^2 \geq 0$ que se cumple para todo n, q reales.

26. Sea $\sqrt{2x^2 + 3x + 9} = y$, entonces $y^2 = 2x^2 + 3x + 9$ de donde $y^2 - 12 = 2x^2 + 3x - 3$ y la ecuación original se transforma en $y^2 + y - 12 = 0$, obteniendo las soluciones para x = 0 o $x = -\frac{3}{2}$.

27. Siguiendo el orden de operaciones y simplificando de forma adecuada se llega a probar la igualdad pedida.

28. En (I) se tiene $x^2 + y^2 = 2a^2 + 2z^2$, en (II) se tiene: $x + y = 4(a^2 + 1) - 2z$, es decir, $x^2 + 2xy + y^2 = 16(a^2 + 1) - 16(a^2 + 1) + 4z^2$ (IV). En (III) tenemos $-xy = a^2 - z^2$ y $-2xy = 2a^2 - 2z^2$ (V) de (IV) + (V) se tiene $z = a^2 + 1$ luego $x = a^2 + 1 \pm a$, $y = a^2 + 1 \mp a$.

29. Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$, $f(-x) = ax^2 - bx + c$ como $f(x) = f(-x)$ es una función par, es del tipo $f(x) = ax^2 + c$ pero $f(2) = 4a + c = 5$ y $f(1) = a + c = -4$, resolviendo el sistema se tiene $a = 3$ y $c = -7$ por lo que $f(x) = 3x^2 - 7$ y se cumple que $f(3) = 20$.

30. Como $xyz = 1$, entonces x, y, z son diferentes de cero y la expresión dada al ser multiplicada y dividida por z la primera fracción y por xz la segunda se transforma en:

$$\frac{z}{z + xz + xyz} + \frac{xz}{xz + xyz + z} + \frac{1}{1 + z + xz} = 1.$$

31. Si $x + y + z = 1$, entonces $(x + y + z)^2 = 1$ de aquí se tiene que $xy + xz + yz = -5$, después de elevar al cubo y factorizar se tiene:

$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3xy(x + y + z) + 3xz(x + y + z) + 3yz(x + y + z) - 3xyz$ por lo que
$x^3 + y^3 + z^3 = 1 - 3xy - 3xz - 3yz + 3xyz = 1 - 3xy - 3xz - 3yz + 3xyz + 3xyz - 3xyz$
$= 4 - 3(x + y + z)(xy + xz + yz) = 55$

32. El resto será un polinomio de primer grado, sea Q(x) el polinomio dado entonces:
$Q(x) = (x^2 - 1)P(x) + ax + b$ y $Q(-1) = -a + b = 5$, y $Q(1) = a + b = -1$, cuya solución es $b = 2$, $a = -3$.
$\therefore$ el resto buscado es el polinomio $-3x + 2$.

33. Tenemos que $x + 3 - 4\sqrt{x-1} = \left(\sqrt{x-1} - 2\right)^2$ de igual forma se tiene $x + 8 - 6\sqrt{x-1} = \left(\sqrt{x-1} - 3\right)^2$ y la ecuación original se transforma en $\left|\sqrt{x-1} - 2\right| + \left|\sqrt{x-1} - 3\right| = 1$ al resolver la ecuación modular se tiene $S = \{x \in R / 5 \leq x \leq 10\}$.

34. $\dfrac{(ab + ac + bc)^2}{abc} = \dfrac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2abc(a + b + c)}{abc}$

$= \dfrac{x^4y^2z^2 + x^2y^4z^2 + x^2y^2z^4 + 2x^2y^2z^2)a + b + c)}{x^2y^2z^2} = x^2 + y^2 + z^2 + 2(a + b + c)$

35. Sea $x + y = a$, $xy = b$, entonces el sistema se transforma en $a + b = 32$ y $ab = 240$ que al resolverlo se tienen las soluciones del tipo (x;y) que son (10;2) y (2;10).

36. Eliminando los denominadores y resolviendo la ecuación en variable z se tiene las soluciones:

$$z = \frac{x + y \pm \sqrt{x^2 + 6xy + y^2}}{2}.$$

37. Eliminando denominadores en la tercera ecuación, igualando a cero y factorizando se llega a
$(x + z)(y + z) = 0$ por lo que $x = -z$ o $y = -z$. Si $x = -z$, $y = 2$, $z = \pm 3$, $x = \mp 3$.
Si $y = -z$, $x = 2$, $z = \pm 3$, $x = \mp 3$.

38. La media aritmética correcta es $\frac{x+y+z}{3}$, pero el estudiante calculó lo siguiente:

$B = \dfrac{\frac{x+y}{2}+z}{2} = \dfrac{x+y+2z}{4}$ pero $B - A = \dfrac{x+y+2z}{4} - \dfrac{x+y+z}{3} = \dfrac{(z-x)+(z-y)}{12}$ que siempre es un número positivo pues $z > x$, $z > y$, el resultado obtenido es mayor que la media aritmética.

39. Como $\left.\begin{array}{l} a+A=K \\ b+B=K \\ c+C=K \end{array}\right\} \Rightarrow (a + A)(b + B)(c + C) = K^3$

$abc + abC + aBc + aBC + Abc + abC + Abc + ABC = K^3$
$abc + ABC + aB(c + C + bC(a + A) + Ac(b + B) = K^3$ $abc + ABC + K(aB + bC + Ac) = K^3$
como $abc + ABC > 0$, $K(aB + bC + Ac) < K^3$ como $K > 0$, entonces $aB + bC + Ac < K^2$.

40. La ecuación puede escribirse $x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 - 4x - 2 = 0$ por lo que $x^4 + 2x^2 + 1 = 2x^2 + 4x + 2$ entonces $(x^2 + 1)^2 = 2(x + 1)^2$ y $x^2 + 1 = \pm \sqrt{2}(x + 1)$ que resolviendo las ecuaciones cuadráticas se tiene que $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{\sqrt{2} - \dfrac{1}{2}}$.

41. $\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)^2 = \dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}+2$ y $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2} = \left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)^2 - 2$,

$$2\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+6 = 2\left[\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2-2\right]-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+6 = 2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+2 \qquad \text{(I)}$$

haciendo cambio de variable se transforma en el trinomio $2a^2 - 3a + 2$ que tiene discriminante -7 por lo que la expresión (I) es mayor que cero para todo x, y reales.

42. Sea $x = \sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{\dfrac{a^2-4}{a}}} + \sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{\dfrac{a^2-4}{a}}}$ entonces

$x^2 = 2\sqrt{a} + 2\sqrt{\dfrac{4}{a}} = 2\sqrt{a} + \dfrac{4}{\sqrt{a}} = \dfrac{2a+4}{\sqrt{a}} \therefore x = \dfrac{\sqrt{2a+4}}{\sqrt[4]{a}}$

43. $D = (b^2 + a^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + b^2 - c^2 + 2a^2b^2)(b^2 + a^2 - c^2 - 2a^2b^2) = [(a + b)^2 - c^2][(a - b)^2 - c^2]$
$= (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a - b - c)$

44. Para $x > 1$, $x^2 + x + a = 0$, para $a = ¼$ tiene una solución real ya que $D = \dfrac{1-4a}{4} \geq 0$, para $a \leq ¼$ luego si $x = -½$. Si $a < ¼$, $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4a}}{2} > -1$ y $a < 0$ tiene dos soluciones reales.
Si $x < -1$, $x^2 + x + a = 0$ y $a \geq -¼$, para $a = -¼$, $x = -½$ que no es solución.
Si $a > -¼$, $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2} < -1$, para $a < -¼$ no tiene solución para $a > 0$ y $a \neq ¼$.

45. En la ecuación dada se cumple: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ y $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$ en la nueva ecuación se tiene que el coeficiente del término lineal es $-[(x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2]$ y $(x_1 + x_2)^2(x_1 - x_2)^2$ es el término independiente, haciendo las operaciones y sustituyendo se llega a la ecuación pedida:

$$a^2x^2 - 2(b^2 - 2ac)x + \frac{b^2}{a^2}(b^2 - 4ac) = 0.$$

46. a) $D = 9b^2 - 16b + 8$ que a su vez es un trinomio cuyo discriminante es menor que 0, por lo que siempre es positivo y la ecuación dada siempre tiene dos soluciones reales.

b) Las raíces de la ecuación son: $x = \dfrac{3b \pm \sqrt{9b^2 - 16b + 8}}{2}$, supongamos que ambas raíces tienen el mismo signo negativo entonces $3b - \sqrt{9b^2 - 16b + 8} < 0$ que al resolver la inecuación queda $b < ½$, y, al tomar un valor de b en ese intervalo la otra raíz no será negativa. Lo que se cumple para el caso en que las dos raíces son positivas.

47. Si multiplicamos las tres primeras ecuaciones tenemos: $x^2y^2z^2(x + y)(x + z)(y + z) = a^3b^3c^3$ entonces $(x + y)(x + z)(y + z) = abc$; $x^2y + x^2z + xyz + xz^2 + xy^2 + xyz + y^2z + yz^2$ $= abc^2 (y + z) + y^2 (x + z) + z^2 (x + y) + 2xyz = abc$ luego $a^3 + b^3 + c^3 + abc = 0$ y se cumple la condición (I).

48. Sean n, n + 1, n + 2, n + 3 cuatro números consecutivos, entonces:

$n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = [n(n + 3)][(n + 1)(n + 2)] + 1 = (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1$ $= (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$ luego $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) = (n^2 + 3n + 1)^2 - 1$ y se cumple que el producto de cuatro enteros consecutivos es una unidad menor que el cuadrado de otro número entero.

49. Sumando las tres ecuaciones se llega a $xy + yz + zx = -7$ (IV). Sustituyendo las tres ecuaciones dadas en 4 se tiene $yz = -3$ (V), $xz = -6$ (VI), $xy = 2$ (VII) multiplicando (V)(VI)(VII) tenemos $(xyz)^2 = 36$, entonces $xyz = 6$ o $xyz = -6$, sustituyendo convenientemente queda S = {(–2; –1;3), (2;1; –3)}.

50. De $\dfrac{L}{a} + \dfrac{m}{b} + \dfrac{n}{c} = 1$, elevando al cuadrado se tiene: $\dfrac{L^2}{a^2} + \dfrac{m^2}{b^2} + \dfrac{n^2}{c^2} + 2\left(\dfrac{Lm}{ab} + \dfrac{Ln}{ac} + \dfrac{mn}{bc}\right) = 1$ (I). Por otra parte de $\dfrac{a}{L} + \dfrac{b}{m} + \dfrac{c}{n} = 0$ se tiene $\dfrac{a}{L} = -\dfrac{bn + cm}{mn}$ (II) y sustituyendo (II) en (I) y calculando se llega a probar la igualdad pedida.

51. a) $D = (3a^2c + b^2c)^2 - 4abc^2(2b^2 - ab - 6a^2) = (3a^2c - b^2c + 4abc)^2$ que es un cuadrado perfecto por lo tanto las soluciones son racionales.
b) Utilizando la fórmula general de la ecuación de segundo grado y haciendo los cálculos pertinentes se llega a: $S = \left\{\dfrac{2}{c}\ si\ a \neq 0, b \neq 0 \text{ ó } \dfrac{-(3a + 2b)}{bc}\ \text{si } a \neq 0\right\}$.

52. $p(-1) = -1 + p - q - 6 = 0$, de aquí $p - q = -7$ y formando el sistema de ecuaciones con la otra ecuación en p y q se llega a: $p(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 6$.

53. Sean r_1 y r_2 las raíces de la ecuación, entonces: $r_1 + r_2 = 24$ y $r_1r_2 = c$. Como las raíces son números enteros múltiplos de 3, los posibles valores que pueden asumir son: 24 y 0, 21 y 3, 18 y 6, 15 y 9 ó 12 y 12, de estos el mayor es 144, es decir, c = 144.

54. Sean x_1 y x_2 las raíces de la ecuación, para la cual se cumple $\frac{x_1}{x_2} = k \Rightarrow x_1 = kx_2$ como $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$ que al sustituir se llega a la ecuación de segundo grado en variable x_2 que tiene como soluciones $x_2 = \frac{k+1}{k}$ y $x_1 = k + 1$, consideremos ahora la segunda ecuación en la cual se cumple $x_3 + x_4 = \sqrt{\frac{q}{p}} = \sqrt{\frac{(k+1)^2}{k}} = \frac{|k+1|}{\sqrt{k}}$ (I) como $x_3 \cdot x_4 = 1 \Rightarrow x_4 = \frac{1}{x_3}$ que al sustituir en (I) y resolver la ecuación de segundo grado y teniendo en cuenta los módulos, se obtienen las soluciones. $x_3 = \sqrt{k}$ y $x_4 = \frac{\sqrt{k}}{k}$.

55. Se tiene que $\left(\sqrt{3}+3\right)^3 = 30\sqrt{3}+54$ y $\left(\sqrt{3}-3\right)^3 = 30\sqrt{3}-54$, entonces, sustituyendo en el miembro izquierdo de la igualdad y restando se obtiene el miembro derecho.

56. Tenemos que $A - B = \left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{1990}\right)\left(\frac{1}{1990}-\frac{1}{1991}\right)-\frac{1}{1991^2}$

$= \frac{1}{1990 \cdot 1991}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{1990}\right)-\frac{1}{1991^2} > 0$ luego $A > B$.

57. Supongamos que existe una partición tal que ninguno de los subconjuntos contenga a dos elementos y a su diferencia simultáneamente, y, llegaremos a una contradicción. El número 2 debe pertenecer a alguno de los subconjuntos escogidos. Como 2 – 1 = 1, vemos que el 1 no puede encontrarse en el mismo subconjunto que el 2, entonces los únicos elementos que pueden encontrarse en el mismo subconjunto que 2 son 3 y 5.
Veamos la posible manera de efectuar la partición: {2} y {1, 3, 4, 5} pero 5 – 4 = 1 ó {2, 3} y {1, 4, 5} pero 5 – 4 = 1 ó {2, 5} y {1, 3, 4} pero 4 – 3 = 1 ó {2, 3, 5} y {1, 4} pero 5 – 2 = 3 ó 5 – 3 = 2. Como no existe ninguna otra posibilidad necesariamente uno de los subconjuntos contendrá a dos elementos y a su diferencia.

58. Aplicando la identidad $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$. De la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica se tiene que $\log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8 + \log_8 5 > 4\sqrt[4]{\log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 \cdot \log_8 5} = 4$.

59. Para $x_{k+1} = x_k^2 + x_k$ obtenemos: $\frac{1}{x_{k+1}} = \frac{1}{x_k(x_k+1)} = \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}}$, entonces

$\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+...+\frac{1}{x_{100}+1} = \frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_{100}+1}$ donde $\frac{1}{x_1} = 2$ y $0 < \frac{1}{x_{100}+1} < 1$.
Por lo que la parte entera de la suma es 1.

60. Sea el triángulo ABC con a = 3, b = 7 y c = 8, α, β, γ los tres ángulos interiores del triángulo con $\gamma > \beta > \alpha$; $A_{\Delta ABC} = \sqrt{9 \cdot 6 \cdot 21} = 6\sqrt{3}$ = ½ a·c·sen β = 12sen β luego sen $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\beta = 60°$ por ser β un ángulo agudo ya que $\alpha > \beta$. Entonces $3\beta = 180°$; $\beta = 180° - 2\beta = 180° - 2\beta + d - d = 180° - (\alpha + \gamma)$, entonces $\beta + d = \gamma$ y $\beta - d = \alpha$.
$\therefore$Los tres ángulos del triángulo forman una progresión aritmética.

61. Consideremos los gráficos de las funciones, se tiene que la función coseno está acotada entre –1 y 1 por lo que los puntos de intersección pueden estar solamente en ese intervalo.

Si y = –1, $\log_{3\pi}x = -1$ y x = $\frac{1}{3\pi}$; si y = 1, $\log_{3\pi}x = 1$ y x = 3π. Como todos los puntos de intersección ocurren entre los puntos ($\frac{1}{3\pi}$;–1) y (3π; 1) hay tres puntos de intersección en ese intervalo.

62. $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}} = \frac{(1+i)^n}{(1-i)^n}\cdot(1-i)^2 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n\cdot(-2i) = i^n(-2i) = A$

Si n ≡ 0 (mód 4) entonces A = –2i; si n ≡ 1 (mód 4) entonces A = 2; si n ≡2 (mód 4) entonces A = 2i; si n ≡ 3 (mód 4) entonces A = –2.

63.-Supongamos que $\sqrt{7}-\frac{m}{n} > $ y $\sqrt{7}-\frac{m}{n} \le \frac{1}{mn}$, m > 1 entonces $\frac{m}{n} < \sqrt{7} \le \frac{m}{n}+\frac{1}{mn}$ y

$\frac{m^2}{n} < 7 \le \frac{m^2}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{m^2n^2}$,es decir, $m^2 < 7n^2 < (m+\frac{1}{m})^2 < m^2+3$ luego $7n^2 = m^2+1$ ó $7n^2 = m^2+2$; $m^2+1 \ne 7q$ y $m^2+2 \ne 7r$ luego es una contradicción y debe cumplirse lo contrario.

64. Se sabe que $C_1^{n+1}+C_2^{n+2}+\ldots+C_k^{n+k} = C_{i+1}^{n+1}$ y $C_0^{n+1} = 1$ luego si

S = $C_1^{n+1}+C_2^{n+2}+\ldots+C_k^{n+k}$ entonces S + 1 = ($C_0^{n+1}+C_1^{n+1}$) + ... + C_k^{n+k} y así sucesivamente hasta llegar a S = $C_k^{n+k+1} - 1$, es decir, $C_1^{n+1}+C_2^{n+2}+\ldots+C_k^{n+k} = C_k^{n+k+1} - 1$.

65. Para x = 1 se tiene $|a+b+c| \le 1$, para x = 0, $|c| \le 1$. Para x = ½ tenemos

$|\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c| \le 1$ y $|a+2b+4c| \le 4$. Sea m = a + 2b + 4c y n = a + b + c, entonces b = m – n – 3c;

a = 2n – m + 2c; $|b| = |m-n-3c| \le |m| + |n| + |3c| \le 4+1+3 = 8$ $|a|$

$= |2n-m+2c| \le |2n| + |m| + |2c| \le 2+4+2 = 8$

$\therefore |a| + |b| + |c| \le 8+8+1 = 17$.

66. Consideremos que no existe el N buscado, entonces para todo entero n, se cumple $M_1 + M_2 + \ldots + M_n \le 1989$ y de esta forma $M_{n+1} \ge 1\,989$. Sea $M = 1\,989^2 + 1$, entonces como $M_1 = 1$, entonces $M_1 + M_2 + \ldots + M_M = M_1 + M - 2 + 1 = M_1 + M - 1 > 1 + \frac{m-1}{1989} = 1990 > 1989$ lo cual contradice nuestra suposición inicial. De esta forma existe N entero positivo tal que $M_1 + M_2 + \ldots + M_N > 1\,989$.

67. Consideremos que sen x^3 = sen y^3 = sen z^3 = –sen xyz = 1, entonces sen x^3 + sen y^3 + sen z^3 – sen xyz = 4 que es el valor máximo que puede tener esa expresión.

Si sen x^3 = 1 entonces x = $\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$. Si sen y^3 = 1 entonces y = $\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$. Si sen z^3 = 1 entonces z = $\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$. Si sen xyz = –1 entonces xyz = $\frac{3\pi}{2}$ + 2kπ siendo k un entero y diferente para cada caso, pero de acuerdo a los valores obtenidos para x, y, z se tiene que xyz = $\frac{\pi}{2}$ + 2aπ para a ∈ Z lo cual es una contradicción por lo tanto se cumple que : $\text{sen}(x^3) + \text{sen}(y^3) + \text{sen}(z^3) - \text{sen}(xyz) < 4$.

68. Consideremos que $\sqrt[3]{2}$ = a + $\sqrt{b}$ con a, b racionales, entonces 2 = (a^3 + 3ab) + ($3a^2$ + b) $\sqrt{b}$, debe cumplirse que a^3 + 3ab = 2 y $3a^2$ + b = 0 ó $\frac{2-(a^2+3ab)}{3a^2+b} = \sqrt{b}$, para el primer caso no tiene solución el sistema y para el segundo caso el miembro izquierdo es un número racional y el miembro derecho es irracional. Luego no puede representarse.

69. Se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$, entonces $\log_{b+c}a + \log_{c-b}a = \frac{1}{\log_a(b+c)} + \frac{1}{\log_a c-b}$

$$= \frac{\log_a(c-b)+\log_a(b+c)}{\log_a(b+c)\cdot\log_a(c-b)} = \frac{\log_a(c^2-b^2)}{\log_a(b+c)\cdot\log_a(c-b)} = \frac{\log_a a^2}{\log_a(b+c)\cdot\log_a(c-b)}$$

$$= \frac{2}{\log_a(b+c)\cdot\log_a(c-b)} = 2\log_{b+c}a\cdot\log_{c-b}a.$$

70. Se tiene que $a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2$; $a^4 + c^4 \geq 2a^2c^2$; $b^4 + c^4 \geq 2b^2c^2$, entonces
$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$ (I). También se tiene que $a^2(b-c)^2 \geq 0$, es decir,
$a^2b^2 - 2a^2bc + a^2c^2 \geq 0$ y $a^2b^2 + a^2c^2 \geq 2a^2bc$, de igual forma
$a^2b^2 + b^2c^2 \geq 2b^2ac$ y $a^2c^2 + b^2c^2 \geq 2c^2ab$ y de acuerdo a (I) se tiene la desigualdad pedida.

71. De las desigualdades dadas tenemos: 11q > 15p luego 11q – 1 ≥ 15p; por ser p, q enteros positivos; 7q < 10p luego 7q + 1 ≤ 10p por lo que 11q – 1 ≥ $\frac{3}{2}$ (7q + 1) entonces 22q – 2 ≥ 21q + 3 ⇒ q ≥ 5. Para q = 5 se tiene $\frac{7}{10} < \frac{p}{5} < \frac{11}{15}$ y $\frac{7}{2} < p < \frac{11}{3}$, p ∉ N*. Para q = 6 se tiene $\frac{7}{5} < \frac{p}{3}$ y $\frac{p}{2} < \frac{11}{5}$, p ∉ N*. Para q = 7 se tiene p > $\frac{49}{10}$ y $p < \frac{72}{15}$ luego p = 5 que es el valor buscado.

72. Se tiene que $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ y $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2ac + 2bc$;
$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \geq 2ab + 2ac + 2bc + a^2 + b^2 + c^2$ y $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{p^2}{3}$.

73. y = 3 – 2x, entonces $x^2 + y^2 = x^2 + (3-2x)^2 = 5x^2 - 12x + 9$ que es una parábola que abre hacia arriba por lo que el valor mínimo lo alcanza para la ordenada del vértice, es decir para f(6/5) = 1,8.

74. Se tiene que ½ (ln a + ln c) > $\sqrt{\ln a\cdot\ln c}$ por ser a y c diferentes, ½ (ln a + ln c) = ln $\sqrt{ac}$ luego ln $\sqrt{ac}$ < ln ½(a + c) = ln b de donde ln b > ½ (ln a + ln c) > $\sqrt{\ln a\cdot\ln c}$; $(\ln b)^2$ > ln a·ln c por lo que

$$\frac{\ln b}{\ln a} > \frac{\ln c}{\ln b}.$$

75. De las ecuaciones 1 y 2 se tiene xy + x + y = yz + y + z y x(y + 1) = z(y + 1) por lo que x = z si y ≠ –1. Sustituyendo en la ecuación 3 se tiene $x^2 + 2x - 80 = 0$ que tiene como soluciones x = –10 o x = 8 por lo que z = –10 o z = 8.
Si y = –1 se tiene –x + x – 1 = 80 que no es solución, para x = z = –10 se tiene y = –10 y para x 0 z = 8 se tiene y = 8 por lo que las soluciones son las ternas (–10; –10; –10) y (8;8;8).

76. Si f(x) = g(x) entonces ax = b – x y x = $\frac{b}{a+1}$ = b > 0, por otra parte x = $\frac{q}{a}$ = b – q entonces

q = $\frac{ab}{a+1}$ < 0. Como p < 0 y q < 0, entonces b > 0 y a + 1 < 0 o b < 0 y a + 1 > 0 en el primer caso
a < –1 y en el segundo caso a > –1 pero ab > 0 y a + 1 < 0 o ab < 0 y a + 1 > 0 por lo que se tiene
a < –1 y b > 0 o a > –1 y b < 0.
Si –1 < a < 0, b > 0. Si a > 0, b < 0 luego se cumple que a > 0 y b < 0 por lo que ab < 0.

77. Se tiene que $a_3 = a_2 - a_1$; $a_4 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1 - a_2 = -a_1$; $a_5 = -a_2$; $a_6 = a_1 - a_2$; $a_7 = a_1$; $a_8 = a_2$. Aquí puede observarse que los términos de la sucesión van formando bloques de 6 términos con:
a_1 si $n \equiv 1$ (módulo 6); a_2 si $n \equiv 2$ (módulo 6); $a_2 - a_1$ si $n \equiv 3$ (módulo 6);
$-a_1$ si $n \equiv 4$ (módulo 6); $-a_2$ si $n \equiv 5$ (módulo 6) y $a_1 - a_2$ si $n \equiv 0$ (módulo 6).
De esta forma $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ también cumple esta propiedad, es decir, $S_n = a_1$ si $n \equiv 1$ (módulo 6); $S_n = a_1 + a_2$ si $n \equiv 2$ (módulo 6); $S_n = 2a_2$ si $n \equiv 3$ (módulo 6);
$S_n = 2a_2 - a_1$ si $n \equiv 4$ (módulo 6); $S_n = a_2 - a_1$ si $n \equiv 5$ (módulo 6); $S_n = a_1 - a_2$ si $n \equiv 0$ (módulo 6); por lo que se tiene $S_{1985} = S_{6\cdot 330 + 5} = a_2 - a_1 = 1\,492$; $S_{1492} = S_{6\cdot 248 + 4} = 2a_2 - a_1 = 1\,985$ y resolviendo el sistema se tiene $a_2 = 493$ y $a_1 = -999$
$\therefore S_{2001} = S_{6\cdot 333 + 3} = 2a_2 = 986$.

78. Si x = 2, y = 4, luego 4 = 4a + 2b + c (I), si x = 1, y = 6 luego 6 = a + b + c (II), $y' = -\frac{4}{x^2} \Rightarrow y'(2) = -1$ luego la recta tangente a la curva en x = 2, tiene pendiente –1 y su ecuación es y = –x + 6,
$y' = 2ax + b \Rightarrow y'(2) = 4a + b = -1$ (III), entonces resolviendo el sistema se tiene que a = 1, b = –5, c = 10 y la ecuación es $y = x^2 - 5x + 10$.

79. Los polígonos que tienen a A como un vértice son: $C_2^7 + C_3^7 + C_4^7 + C_5^7 + C_6^7 = 119$.
Cantidad de polígonos a formar: $C_3^8 + C_4^8 + C_5^8 + C_6^8 + C_7^8 =$ 99 por lo tanto hay más elementos en el conjunto A que en el B.

80. Consideremos que r es una raíz entera de P(x), entonces P(x) = (x – r)·Q(x), como P(2) y P(3) son ambos impares, r no puede ser igual a 2 ó 3. Supongamos que r es par ($r \neq 2$), entonces
P(2) = (2 – r)·Q(2), pero como 2 – r es par, entonces P(2) es par y se contradice con la condición dada, por lo que r no es par.
Supongamos que r es impar ($r \neq 3$) entonces P(3) = (3 – r)·Q(3), pero 3 – r es par y P(3) es par que contradice la condición dada. Por lo tanto no hay raíces enteras para P.

81. Para n = 0 se tiene $x_0^2 = y_0 + 2$, por datos. Supongamos que $x_k^2 = y_k + 2$, debemos probar que $x_{k+1}^2 = y_{k+1} + 2$, se tiene que $x_{k+1}^2 = (x_k^3 - 3x_k)^2 = (x_k^2)^3 - 6(x_k^2)^2 + 9(x_k)^2 = (y_k + 2)^3 - 6(y_k + 2) + 9(y_k + 2)$
$= y_k^3 - 3y_k + 2 = y_{k+1} + 2$ por lo tanto la demostración es válida.
82.-De (I) se tiene $x^3 + y^3 + xy^2 + x^2y = 32$ entonces $(x + y)(x^2 + y^2) = 32$.
De (II) se tiene que $x^4y^2 + x^2y^4 = 128$ entonces $x^2y^2(x^2 + y^2) = 128$.
Como $x^2 + y^2 \neq 0$ tenemos $\frac{x^2y^2}{x+y} = 4$ y $x^2y^2 = 4(x + y)$ (III),
como $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$, tenemos por la primera o por la segunda ecuación original
$x^6y^6 - 32x^3y^3 - 2048 = 0$ que haciendo el cambio de variable $z = (xy)^3$ queda la ecuación de segundo grado $z^2 - 32z - 2048 = 0$ cuyas soluciones son z = 64 o z = –32 por lo que se tiene xy = 4 (IV) o

$xy = -2\sqrt[3]{4}$ (V) y por las relaciones (III), (IV) y (V) se tiene x + y = 4 o $x + y = 2\sqrt[3]{2}$ teniendo las ecuaciones xy = 4; $xy = -2\sqrt[3]{4}$; x + y = 4 $x + y = 2\sqrt[3]{2}$ cuyas soluciones son los pares ordenados (2;2), $\left[\sqrt[3]{2}(1+\sqrt{3});\sqrt[3]{2}(1-\sqrt{3})\right]$ y $\left[\sqrt[3]{2}(1-\sqrt{3});\sqrt[3]{2}(1+\sqrt{3})\right]$.

83. a) Sea $x + y\sqrt{2}$ un elemento del conjunto D, $\dfrac{x+y\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \dfrac{(x+y\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{-1}$

$= (2y - x) + (x - y)\sqrt{2} \in$ D. Por lo tanto $1 + \sqrt{2}$ es un elemento unitario de D.
b) Sea $m + n\sqrt{2} \in$ D y $e = x + y\sqrt{2}$ un elemento unitario de D. Para que e sea unitario debe cumplirse que $(x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}) = \pm 1$, luego $e^2 = (x + y\sqrt{2})^2 = x^2 + 2y^2 + 2xy\sqrt{2}$ =

$$\frac{m+n\sqrt{2}}{x^2+y^2+2xy\sqrt{2}} = \frac{(m+n\sqrt{2})(x^2+2y^2-2xy\sqrt{2})}{(x^2+2y^2)^2-8x^2y^2} = \frac{mx^2+2my^2-4nxy+nx^2+2ny^2-2mxy\sqrt{2}}{(x^2-2y^2)^2-1}$$

Luego el número es de la forma $a + b\sqrt{2}$ y si e es un elemento unitario de D lo es también e^2.
c) Sí, porque cada elemento unitario de d tiene un cuadrado y ese cuadrado también es un elemento unitario de D, luego hay infinitos elementos unitarios distintos entre sí en el conjunto D.

84. De acuerdo a los datos se cumple que cot B = cot A + d y cot C = cot A + 2d, en el triángulo ABC tenemos:

cos A = $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, cos B = $\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, cos C = $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$,

sen A = $\dfrac{a}{2R}$, sen B = $\dfrac{b}{2R}$ y sen C = $\dfrac{c}{2R}$ (R circunradio)

luego cot A = $\dfrac{R(b^2+c^2-a^2)}{abc}$, cot B = $\dfrac{R(a^2+c^2-b^2)}{abc}$ y cot C = $\dfrac{R(a^2+b^2-c^2)}{abc}$

se tiene que $\dfrac{R(a^2+c^2-b^2)}{abc} = \dfrac{R(b^2+c^2-a^2)}{abc}$ + d y d = $\dfrac{2R}{abc}(a^2-b^2)$

$$\frac{R(a^2+b^2-c^2)}{abc} = \frac{R(b^2+c^2-a^2)}{abc} + \frac{4R}{abc}(a^2-b^2)$$

$a^2 + b^2 - c^2 = b^2 + c^2 - a^2 + 4a^2 - 4b^2$ y haciendo los cálculos pertinentes queda
$a^2 + c^2 = 2b^2$ por lo que a^2, b^2 y c^2 están en progresión aritmética.

85.a)

$$\frac{\cos A - \cos 3A}{\operatorname{sen}3A - \operatorname{sen}A} = \frac{\cos A + \cos A(3-4\cos^2 A)}{\operatorname{sen}A(3-4\operatorname{sen}^2 A) - \operatorname{sen}A} = \frac{4\cos A(1-\cos^2 A)}{2\operatorname{sen}A(1-2\operatorname{sen}^2 A)} = \frac{2\cos A}{\operatorname{sen}A}\cdot\frac{\operatorname{sen}^2 A}{\cos 2A} = \tan 2A$$

b) La ecuación se puede transformar en cos B – cos 3B = sen 3B – sen B, es decir tan 2B = 1 cuya solución es $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}$ con k entero.

86. $x + y = 2^x$ y $279936 = 2^7\cdot 3^7$ en (II) tenemos $2^x\cdot 3^x = 2^7\cdot 3^7$, luego x = 7 y = 121.

87. Como A y B son soluciones de la ecuación dada, entonces: acos A + bsen A = c y acos B + bsen B = c, restándolas se tiene a(cos A – cos B) + b(sen A – sen B) = 0, transformándola en producto se tiene –2asen ½ (A – B)·sen ½ (A+ B) + 2bsen ½ (A – B)·cos ½(A + B) = 0;
sen ½ (A – B)(cos ½ (A+ B) – asen ½ (A + B)) = 0. Si bcos ½(A + B)
= asen ½ (A + B) entonces $\dfrac{b}{a}$ = tan ½ (A + B); $\dfrac{b^2}{a^2}$ + 1 = $\tan^2$ ½ (A + B) = $\sec^2$ ½ (A + B)

$\frac{a^2+b^2}{b^2} = \frac{1}{\cos^2\frac{A+B}{2}} = \frac{1}{2\cos^2(A+B)-1}$ entonces $2\cos^2(A + B) – 1 = \frac{a^2}{a^2+b^2}$ de esta forma

$\cos(A + B) = \pm\sqrt{\frac{2a^2+b^2}{2(a^2+b^2)}}$.

88. Se tiene que $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_n = 1$ entonces

$1 + a_1 \geq 2a_1 \Rightarrow 1^2 + a_1 \geq 2\cdot 1\cdot a_1$

$4 + a_2 \geq 4a_2 \Rightarrow 2^2 + a_2 \geq 2\cdot 2\cdot a_2$

....

$n^2 + a_n \geq 2na_n \Rightarrow 2n^2 + a_n \geq 2\cdot n\cdot a_n$

que al multiplicar esas desigualdades queda $(1 + a_1)(4 + a_2) \ldots (n^2 + a_n) \geq n!\cdot 2^n$ como se quería demostrar.

89. $f(1) = 4$, $f(x + 1) = 4f(x)$, $f(2) = 4\cdot 4 = 4^2 = 16$, $f(3) = 4\cdot 16 = 4^3$ y así sucesivamente, entonces $f(n) = 4^n$ y $f(2\,001) = 4^{2001}$.

90. $a_n = a_1 + (n – 1)d$ y $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = na_1 + ½ (n – 1)nd$

$\sum_{i=1}^{k} a_i = 0$, $a_1 = a$ entonces $\sum_{i=1}^{h+q} a_i = \frac{h+q}{2}\left[a + a + (p+h-1)d\right] = h\left[a + \frac{(h-1)d}{2}\right]$; luego

$h\frac{(h-1)d}{2} = 0$ y $d = \frac{2a}{1-h}$, ahora tenemos $\sum_{i=1}^{h+q} a_i = (h+q)\left[a + \frac{h+q-1}{2}\cdot\frac{2a}{1-h}\right] = \frac{-a(h+q)q}{h-1}$.

91. a) $z = x + 2y$, $x^2 + y^2 = \frac{1}{5}$ entonces $(x;y)$ son las coordenadas de todos los puntos de la circunferencia de centro en el origen y radio $r = \frac{\sqrt{5}}{5}$ de aquí que $-\frac{\sqrt{5}}{5} \leq x \leq \frac{\sqrt{5}}{5}$;

$-\frac{\sqrt{5}}{5} \leq y \leq \frac{\sqrt{5}}{5}$; $\frac{2\sqrt{5}}{5} \leq 2y \leq \frac{2\sqrt{5}}{5}$ luego $\frac{3\sqrt{5}}{5} \leq x + 2y \leq \frac{3\sqrt{5}}{5}$ por lo tanto el valor máximo de z es $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ y el valor mínimo es $-\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

b) El valor de x, y para el cual z alcanza su valor máximo es $x = y = \frac{\sqrt{5}}{5}$ y el mínimo es $x = y = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

92. Sean x_1, x_2, x_3 las soluciones de la ecuación dada, se cumple que $x_2 = x_1 + m$, $x_3 = x_1 + 2m$ entonces

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b$$
$$x_1x_2x_3 = -c$$

Resolviendo el sistema queda $x_1 = \frac{-a-3m}{3}$; $x_2 = -\frac{a}{3}$; $x_3 = \frac{3m-a}{3}$ de (I), trabajando en (II) se obtiene $m^2 = \frac{a^2-3b}{2}$ luego $x_1 = \frac{-a+3\sqrt{a^2-3b}}{3\sqrt{2}}$; $x_3 = \frac{-a-3\sqrt{a^2-3b}}{3\sqrt{2}}$ y en (III) se obtiene que $c = \frac{27ab-8a^3}{54}$

93. $a^2 - a + 1 > 0$ porque $D = -¾ < 0$ luego $(a^2 - a + 1)(a + 1)^2 > 0$;
$(a^2 - a + 1)(a + 1))(a + 1) > 0$ y $(a^3 + 1)(a + 1) > 0$ es decir $a^4 + a^3 + a + 1 > 0$
$-2a^4 - 2a^3 - 2a - 2 < 0$ entonces $a^4 + 1 - 3a^4 - 2a^3 - 2a - 3 < 0$
$a^4 - 2a^3 - 2a + 1 + 3a^2 < 3a^4 + 3a^2 + 3 < 0$ y $(a^2 - a + 1)^2 < 3(a^4 + a^2 + 1)$

94. De $z^x = y^{2x}$ se tiene que $z = y^2$ para $x \neq 0$, de la segunda ecuación se tiene $z = 2x + 1$ por lo que $x = \dfrac{y^2 - 1}{2}$ se tiene $3y^2 + 2y - 33 = 0$ y $(3y + 11)(y - 3) = 0$, que se satisface para $y = 3$, $x = 4$, $z = 9$ pero $z^x = y^{2x} = 1$ si $x = 0$ luego $z = 1$ ó $y = 1$ obteniendo $y = 15$ por lo que las soluciones son las ternas (4;3;9) y (0;15;1).

95. Sean $a_1 + a_2 + a_3 + ... = 56$ y $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... = 448$ entonces $\dfrac{a_1}{1-q} = 56$ y $\dfrac{a_1^2}{1-q^2} = 448$ que resolviendo el sistema se tiene $a_1 = 14$, $q = ¾$ y la expresión general de la serie es $14\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

96. $$\sqrt[3]{a} = \frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1}} = \frac{\dfrac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 + 1^3}{\sqrt[3]{2} + 1}}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1}} = \frac{3}{\left(\sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1}\right)\left(\sqrt[3]{2} + 1\right)}$$

$$a = \frac{27}{\left(\sqrt[3]{2} - 1\right)\left(\sqrt[3]{2} + 1\right)^3} = \frac{27}{\left(\sqrt[3]{4} - 1\right)\left(\sqrt[3]{2} + 1\right)^2} = \frac{27}{\left(\sqrt[3]{4} - 1\right)\left(\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2} + 1\right)} = \frac{27}{\left(\sqrt[3]{4} - 1\right)\left(\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{4} + 1\right)}$$

$$= \frac{27}{\left(\sqrt[3]{4}\right)^3 - (1)^3} = \frac{27}{3} = 9 \quad \text{luego } a = 9.$$

97. $a^2 + b^2 + c^2 \geq a^2b^2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc$ (I)
$(a - b - c)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2b^2c^2 - 2ab - 2ac + 2bc \geq 0$ y $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2ab + 2ac - 2bc$ (II)
$(b - a + c)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2b^2c^2 - 2ab + 2ac - 2bc \geq 0$ y $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2ab - 2ac + 2bc$ (III)
$(c - a + b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2b^2c^2 + 2ab - 2ac + 2bc \geq 0$ y $a^2 + b^2 + c^2 \geq -2ab + 2ac + 2bc$ (IV)
Sumando las desigualdades (I), (II), (III) y (IV) tenemos $4(a^2 + b^2 + c^2) \geq a^2b^2c^2$
$a^2 + b^2 + c^2 \geq \dfrac{a^2b^2c^2}{4}$ y $a^2 + b^2 + c^2 \geq \left(\dfrac{abc}{2}\right)^2$.

98. $a^2(c - b) + b^2(a - c) + c^2(b - a) = a^2c - a^2b + ab^2 - b^2c + bc^2 - ac^2$
$= a^2(c - b) - a(c - b)(c + b) + bc(c - b) = (c - b)\,[a(a - b) - c(a - b)] = (c - b)(a - b)(a - c) \neq 0$ porque a, b y c son diferentes dos a dos.

99. Puede ser que la función sea creciente o decreciente en el intervalo dado, analicemos: en la figura 1 se tiene $f(-1) = 29$, $f(1) = 15$ luego
$a + b + c = 15$
$a - b + c = 29$
$¼a + ½b + c = 17$ y $a + 2b + 4c = 68$
Resolviendo el sistema queda $a = 2$, $b = -7$, $c = 20$ de esa forma $f_1 = 2x^2 - 7x + 20$.
Analicemos la figura 2, tenemos:
$f(-1) = 15$, $f(1) = 29$ luego
$a + b + c = 29$
$a - b + c = 15$

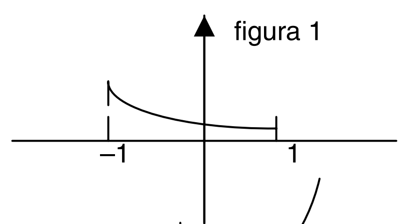


figura 1

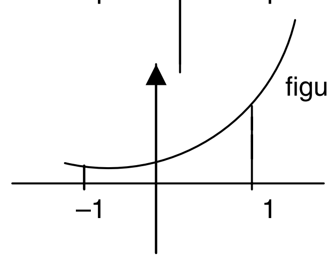


figura 2

a + 2b + 4c = 68

Resolviendo el sistema queda $a = \dfrac{34}{3},\ b = 7$ y $c = \dfrac{32}{3}$ de esa forma $f_2 = \dfrac{34}{3}x^2 + 7x + \dfrac{32}{3}$

100. 128 = 2^7, entonces cada uno de los números buscados deben ser potencias de 2, $2^x \cdot 2^{7-x} = 2^7$ además $\sqrt[3]{2^{2x}} + \sqrt{\left(2^{7-x}\right)^3} = 68$ por lo que $\sqrt[3]{2^{2x}} + 2^{7-x}\sqrt{\left(2^{7-x}\right)} = 68$ de aquí x = 3 o x = 7. Si x = 3, comprobando se satisface. Si x = 6 no es posible, basta comprobar. Por lo tanto los números son 2^3 y 2^4, es decir, 8 y 16.

101. a) A + B + C = 180° entonces tan(A + B + C) = tan 180°, es decir, tan [(A + B) + C] = 0, desarrollando las fórmulas de tangente de sumas de ángulos se llega a la igualdad pedida.
b).Partiendo de la igualdad demostrada en el inciso a se tiene:
$\dfrac{\text{senA}}{\cos A} + \dfrac{\text{senB}}{\cos B} + \dfrac{\text{senC}}{\cos C} = \dfrac{\text{senAsenBenC}}{\cos A \cos B \cos C}$ desarrollando la suma, igualando los numeradores y dividiendo por el miembro derecho se llega a la igualdad pedida.

102. Transformando la suma en producto se tiene (sen 3x + sen 9x) + (sen 5x + sen 7x) = 0;
2sen 6x·cos 3x + 2sen 6x·cos x = 0; factorizando e igualando a cero los factores queda:

$x = \dfrac{\pi}{6}$ o $x = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{k\pi}{2}$ o x = 2kπ con K entero.

103. De acuerdo al teorema de Vieta debe cumplirse que $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = 1$;
$\tan\alpha\cdot\tan\beta + \tan\alpha\cdot\tan\gamma + \tan\beta\cdot\tan\gamma = 0$ y $\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma = 1$
$\sec^2\alpha\cdot\sec^2\beta\cdot\sec^2\gamma = (1 + \tan^2\alpha)(1 + \tan^2\beta)(1 + \tan^2\gamma)$ multiplicando y agrupando convenientemente se llega a $\tan^2\alpha + \tan^2\beta + \tan^2\gamma + \tan^2\alpha\cdot\tan^2\beta + \tan^2\gamma\cdot\tan^2\alpha + \tan^2\beta\cdot\tan^2\gamma + \tan^2\alpha\cdot\tan^2\beta\cdot\tan^2\gamma + 1$
utilizando las relaciones de Vieta y sustituyendo convenientemente se llega a:

$1 - 2(\tan\alpha\cdot\tan\beta + \tan\alpha\cdot\tan\gamma + \tan\beta\cdot\tan\gamma) - 2\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma(\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma) + \tan^2\alpha\cdot\tan^2\beta\cdot\tan^2\gamma$
$= 1 - 0 - 2 + 1 = 0.$

104. $a_n^2 - a_{n-1}\cdot a_{n+1} = (-1)^n$ despejando se tiene $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 - (-1)^n}{a_{n-1}}$, para n = 1; $a_2 = 10$;
para n = 2; $a_3 = 33$.

105. $S_1 = 1$; $S_2 = -1$; $S_3 = 2$; $S_4 = -2$; $S_5 = 3$; $S_6 = -3$; entonces para todo $n \in N^*$ se tiene $S_{2n-1} = n$ y $S_{2n} = -n$. Por lo que $S_{17} = 9$; $S_{33} = 17$; $S_{50} = -25$ y $S_{17} + S_{33} + S_{50} = 1$.

106. $f(x + 2a) = \dfrac{1 + f(x+a)}{1 - f(x-a)} = \dfrac{1 + \dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1 - \dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}} = -\dfrac{1}{f(x)}$

$f(x + 4a) = -\dfrac{1}{f(x+2a)} = \dfrac{1}{-\dfrac{1}{f(x)}}$ = f(x) por lo tanto f(x) es periódica.

107. Es una serie de razón $\frac{x}{x^2-2x+3}$ por lo que S = $\frac{\frac{1}{x^2-2x+3}}{1-\frac{x}{x^2-2x+3}} = \frac{1}{x^2-3x+3}$

como $x^2 - 3x + 3$ es una parábola que abre hacia arriba y el vértice es $V\left(\frac{3}{2};\frac{3}{4}\right)$ entonces

$x^2 - 3x + 3 \geq \frac{3}{4}$ y $\frac{1}{x^2-2x+3} \leq \frac{4}{3}$

108. Si $b - \frac{1}{2} < \sqrt{n} < b + \frac{1}{2}$ entonces $a_n = b$ y se tiene que $b - \frac{1}{2}$, b, $b + \frac{1}{2}$; $b^2 - b + \frac{1}{4}$; b^2; $b^2 + b + \frac{1}{4}$; existen 2b números cuyas raíces se aproximan más al número entero b. (En general un número de la forma a + 0,5 con a natural no es raíz de ningún número natural).

Por lo tanto S = 1 + $\frac{1}{1}$ + ½ + ½ + ½ + ½ + ... + $\frac{1}{44}$ donde ½ aparece 4 veces, $\frac{1}{3}$ aparece 6 veces, en general $\frac{1}{k}$ aparece 2k veces, entonces S = 2 + 2 + 2 + ... + 2 (44 veces 2) y S = 88.

109. Como a > 1, la sucesión 1, a, a^2, ... es creciente y $1 < \frac{1+a+a^2+...+a^{n-1}}{n} < a^{n-1} < a^n$ entonces

si n < k se cumple $\frac{1+a+a^2+...+a^{n-1}}{n} < \frac{\frac{1+a+a^2+...+a^{n-1}}{n}\cdot n+(k-n)a^n}{n+(k-n)}$

$< \frac{1+a+a^2+...+a^{n-1}+a^n+a^{n+1}+...+a^{k-1}}{k}$ y multiplicando ambos miembros de la desigualdad por el número positivo a – 1, tenemos que: $\frac{a^n-1}{n} < \frac{a^k-1}{k}$.

110. Sea N = $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ y M = $\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$ entonces

$\frac{N}{M} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(k-1)!(n-k)!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!}\cdot\frac{(k-1)!}{(n-1)!}$ y Mn = Nk por lo que M es divisible por k, ya que k y n son primos relativos.

$\therefore$El número $\binom{n-1}{k-1}$ es divisible por k.

111. $f_2(x) = (f_1 \circ f_1)(x) = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x}$; $f_3(x) = (f_1 \circ f_2)(x) = x$; $f_4(x) = f_1(x)$; $f_5(x) = f_2(x)$; $f_6(x) = f_3(x)$

como 2 001 = 3.667 entonces $f_{2001}(x) = f_3(x)$ y $f_{2001}(2) = 2$.

112. Los números buscados son de la forma $\overline{19ab}$ con 10 + a + b = 21 y a + b = 11; b = 11 – a (I), entonces 1·9·a·b = 9ab = 162 y ab = 18, sustituyendo de (I) se llega a que los números pueden ser 1 992 ó 1 929.

113. $a^2 - b^2 = 1\,991$, es decir, $(a + b)(a - b) = 11 \cdot 181$ pero $a + b > a - b$ luego $a - b = 1$ y $a + b = 1\,991$ o $a - b = 11$ y $a + b = 181$.
$\therefore$ El máximo valor que puede tomar a – b es 11.

114. M = $\sqrt{(k^2+1)(k+1)^2+k^2}$ que al desarrollarlo se llega a que M = $\sqrt{(k^2+k+1)^2}$ como $k^2 + k + 1 > 0$ para todo k entero, entonces M = $k^2 + k + 1$; si k es par, entonces M es impar.
Si k es impar, entonces M es impar, por lo que M siempre es impar.

115. $1\,983 = 3 \cdot 661$ y $1\,984 = 2^6 \cdot 31$, de aquí que $b \neq 3$ y $b \neq 661$, luego b = 1
a – 1 = 3 y c + 1 = 661 o a – 1 = 661 y c + 1 = 3
a = 4 c = 660 a = 662 c = 2 que no es solución de la segunda ecuación.
c – d = 496 $\Rightarrow$ d = 164 y la única cuádrupla posible es (4;1;660:164).

116. Sean a, b y c la cantidad de ejercicios de cada tipo que él resolvió con a + b + c = 20 y 8a – 5b = 13. b = $\dfrac{8a-13}{5} = a - 2 + \dfrac{3(a-1)}{5}$ luego a = 6 + 5t y b = 7 + 8t, para t entero.
La única solución posible es a = 6, b = c = 7.

117. Cada mosaico cubre un área de 150 cm^2, en total puede cubrirse un área de 15 000 cm^2 pero mcm(10,15) = 30, por lo que el lado del cuadrado tiene que ser un múltiplo de 30, como se busca la mayor área posible a cubrir tenemos $120^2 = 14\,400$; pero $150^2 = 22\,500$ que es mayor que el área a cubrir luego se tiene 14 400 : 150 = 96, luego el área cubierta fue de 14 400 cm^2 y sobran 4 mosaicos.

118. $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$, luego la mayor potencia de 60 que divide al producto de los divisores de 720 es 15.

119. Todo número terminado en 4 cuando se eleva a un exponente par, termina en 6. Todo número terminado en 1 siempre termina en 1. Entonces $1\,324^{726} + 1\,991^{726}$ termina en 7. Todo número terminado en 7 cuando se eleva a un número congruente con 2 módulo 4 termina en 9 y $726 \equiv 2$ (mód 4), por lo que la igualdad no es verdadera.

120. Sean a, b y c tres números primos con 5(a + b + c) = abc luego, uno de ellos es 5. Sea a = 5 entonces 5 + b + c = bc y b = $\dfrac{c+5}{c-1} = 1 + \dfrac{6}{c-1}$ como c – 1 es un divisor de 6 se analizan los tres casos posibles y se tiene que los números son 2, 5 y 7.

121. Los números de tres cifras que pueden formarse son $\overline{ABC}$, $\overline{ACB}$, $\overline{BAC}$, $\overline{BCA}$, $\overline{CAB}$ y $\overline{CBA}$ cuyo promedio es $\dfrac{222(A+B+C)}{6}$ = 37(A + B + C) para que este número termine en 5 es necesario que A + B + C termine en 5 para que el producto termine en 5. Como se busca el menor debe cumplirse que A + B + C = 5, como A, B y C son diferentes de cero y distintos, entonces no se puede obtener sin que sean diferentes, si A + B + C = 15, A = 1, B = 5, C = 9 por lo que el menor número es 159.

122. Se buscan todos los números naturales n tales que $40\,000 < n^2 < 64\,000$, $200 < n < 800$ como $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ y $\dfrac{2}{n}$, $\dfrac{3}{\mathrm{n}}$ y $\dfrac{5}{\mathrm{n}}$ por lo que se buscan todos los múltiplos de 30 entre 200 y 800 que son 20.

123. Si p es un número primo mayor que 5, entonces p es impar y termina en 1, 3, 7 ó 9. Si p termina en 1 o en 9, su cuadrado termina en 1 ó 9 y es de la forma 10m + 1, m natural. Si p termina en 3 o en 7, su cuadrado termina en 9 y es de la forma 10 n – 1, n natural.

124. Sea x = $\overline{ab}$ con $\overline{ab}-\overline{ba}$ = n^3; 10a + b – (10b + a) = n^3 y 9(a – b) = n^3 ⇒ n = $(3m)^3$ y a – b = $3m^3$ pero –9 ≤ a – b ≤ 9 por lo que –9 ≤ $3m^3$ ≤ 9 y –3 ≤ m^3 ≤ 3, entonces m puede tomar los valores –1, 0 ó 1 y probando se llega a que x puede ser para el primer valor 14, 25, 36, 47, 58 ó 69; para el segundo valor 11, 22,---, 99 y para el tercer valor 30, 41, 52, 63, 74, 85 ó 96.

125. Debe cumplirse que 4 + 2 + 4 + x + y = 10 + x + y = 9n, es decir, x + y = 8 o x + y = 17 y $\overline{4y}$ = 4t con y = 0, 4 u 8 al probar con los valores posibles se llega a que los pares pueden ser: (8;0), (4;4), (0;8), (9;8).

126. Se tiene N + $\overline{abc}$ = 222(a + b + c) con a + b + c = k por lo que la suma es 222k, al dividir 3 194 por 222 el cociente es 14 y es resto 86, luego k ≥ 15, para k = 15 o k = 16 se obtiene que $\overline{abc}$ = 358.

127. Sean a y a + 1 dos números consecutivos y $(a + 1)^2 - a^2 = 2a + 1$, se busca d tal que $(a + 1 + d)^2 - (a + d)^2 = 2a + 199$, resolviendo la ecuación se obtiene d = 99 por lo que debe añadirse 99.

128. A = $\dfrac{n+6}{n-2}=1+\dfrac{8}{n-2}$ .Si –5 ≤ A ≤ 8, entonces $-6\le\dfrac{8}{n-2}\le 7$ entonces n – 2 = ±1, ±2, ±4, ±8 por lo que n puede tomar los valores 0, 6, –2, 10 ó –6.

129. $\dfrac{x^3-3}{x-3}=a\in \mathrm{Z}$ pero $\dfrac{x^3-3}{x-3}=x^2+3x+9+\dfrac{24}{x-3}$ se buscan los divisores de 24 y se llega a que x puede tomar los valores 4, 2, 6, 0, 7, –1,9, 11, –5, 15, –9, 27, –21, 5, 1 ó –3.

130. Sea n el número de estudiantes, m el número de hojas para cada estudiante y N el número total de hojas, entonces N = mn y N = (n + 17)(m – 16), luego mn = mn – 16n + 17m – 272 16n = 17(m – 16), como 17 divide a 16n y mcd(16,17) = 1 entonces n = 17k, luego 16·17k = 17m – 272 y 16(k + 1) = m de donde n = 17k, m = 16(k + 1), el menor valor es para k = 1 por lo que n = 17 y m = 32.

131. mcm (2,3,4,5,6) = 60 y haciendo una tabla se tiene:

	nieto	hombre	
I	1	61	
II	2	62	
III	3	63	
IV	4	64	
V	5	65	
VI	6	66	Tienen 66 y 6 años, respectivamente.

132. x + y + z = 100 y 5x + 3y + $\dfrac{z}{3}$ = 100 ⇒ 15x + 9y + z = 300 y 14x + 8y = 200 de aquí se tiene x = $\dfrac{4(25-y)}{7}$, luego x = 12 + 4t, y = 4 – 7t, t ∈ Z Al darle valores a t desde –3 hasta 0 se tiene que pueden comprarse 25 gallinas y 75 pollitos.

133. $p^5 + 5p^4 + 5p^3 - 5p^2 - 6p = p(p^4 + 5p^3 + 5p^2 - 5p - 6) = (p - 1)(p(p + 1)(p + 2)(p + 3)$ que son 5 números consecutivos y como p es primo, entonces hay al menos dos pares consecutivos por lo que uno de ellos es divisible por 4 luego es divisible por el producto 2·3·4·5 = 120.

134. Sea n el número buscado tal que 200 < n < 300, es decir, $\overline{2ab}$ y a + b = 8; pero n = $a_1^{\alpha_1}\cdot a_2^{\alpha_2}$ como el número tiene 6 divisores entonces $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) = 6$ o n = a_1^{α} si se cumple el último caso se tiene $a_1 = 3$ y $3^5 = 243$ con 2 + 4 + 3 = 9 no satisface, al analizar el otro caso se llega que la dirección era calle 244 número 10.

135. Sean (x – 2), x, y (x + 2) tres números pares consecutivos con
$88{\cdot}10^6 = 2^3{\cdot}100^3{\cdot}11 < (x-2)x(x+2) = x^3 - 4x < x^3$, es decir, $440^3 < 88{\cdot}10^6 < 450^3$ (I), tres números pares consecutivos pueden ser de la forma: $\overline{mn0}, \overline{mn2}, \overline{mn4}$ que su producto termina en 0 al igual que $\overline{mn6}, \overline{mn8}, \overline{mn0}$ y $\overline{mn8}, \overline{mn0}, \overline{mn2}$; los casos $\overline{mn2}, \overline{mn4}, \overline{mn6}$ su producto termina en 8 y si $\overline{mn4}, \overline{mn6}, \overline{mn8}$ su producto termina en 2. Luego de acuerdo a (I) los números buscados son 444, 446 y 448 cuyo producto es 88714752, por lo que los números buscados son: 7, 1, 4, 7, 5.

136. El primer dígito de cada número debe ser el menor posible, es decir $\overline{1Aa} \cdot \overline{2Bb} \cdot \overline{3Cc}$, analizando los casos posibles se tiene A < B < C y a < b < c por lo que el producto buscado debe estar formado por los números 147. 258 y 369.Puede demostrarse que si A > B o A > C o B > C se llega a contradicciones.

137. Sean $\overline{abc} \equiv \overline{mnq} \pmod 7$ y $N = \overline{abcmnq}$, N = 1000 $\overline{abc} + \overline{mnq}$ pero
$1\,000 \equiv -1 \pmod 7$ luego $1\,000\,\overline{abc} \equiv -\overline{mnq}$ por lo que $N \equiv \pmod 7$

138. Si $a^2 + d^2 = 13$, entonces a = 3 y d = 2 ó a = 2 y d = 3, si $b^2 + c^2 = 85$, entonces b = 9 y c = 2 o b = 2 y c = 9 o b = 7 y c = 6 o b = 6 y c = 7. De $\overline{abcd} - 1089 = \overline{dcba}$ se tiene 111(a – d) + 10(b – c) = 121.
Si a – d = 1, entonces b – c = 1 por lo que a a = 3, d = 2, b = 7 y c = 6. Si a – d = –1,
entonces 10(b – c) = 232 que no hay solución por lo que 3762 es el único número.

139. Designemos los enteros buscados por N, 2N y 3N. Como un entero al dividirlo por 9 deja el mismo resto que el que deja la suma de sus dígitos, 6N deja resto 0 en la división por 9 ya que la suma de sus dígitos es 45. De aquí 3N es un número de tres dígitos al igual que N y 2N por lo que el primer dígito de N no puede exceder a 3 y el primer dígito no puede ser 1, pues el entero 2N debe terminar en 2 y 3N en 3 y ninguno de esos dígitos podría ser el primero de ellos. N no puede terminar en 5 porque 2N terminaría en 0. Asumamos que el dígito final de N es 2, el de 2N es 4 y el de 3N es 6. Los otros dos dígitos de cada uno sólo puede ser 1, 3, 5, 7, 8 ó 9, como la suma de los dígitos de 3N debe ser un múltiplo de 9, sus primeros dígitos son 3 y 9 ó 5 y 7. Analizando todas las posibilidades se llega que los números pueden ser: 273, 546 y 819 ó 327, 654 y 981 ó 219, 438 y 657.

140. Como $(a;b) = 1\,000 = 2^3{\cdot}5^3$ y $(b;c) = (c:a) = 2\,000 = 2^4{\cdot}5^3$ por lo que los números a, b y c son de la forma $a = 2^m{\cdot}5^n$, $b = 2^p{\cdot}5^q$ y $c = 2^r{\cdot}5^s$ donde m, n, p, q, r, s son enteros no negativos. Analizando cada uno de los casos tenemos que se pueden formar ternas (m;p;r) y (n;q;s) para el primer caso se tiene las ternas (0;3;4), (1;3;4), (2;3;4), (3;0;4), (3;1;4), (3;2;4) y (3;3;4) que son 7 en total y para el segundo caso (3:3;0), (3;3;1), (3;3;2), (3;0;3), (3;1;3), (3;2;3), (0;3;3), (1;3;3), (2;3;3), y (3;3;3) que son 10 por lo que el número de ternas será 70.

141. Sea $\overline{abc}$ el número buscado con a + b + c = 9m y $\overline{abc} + 135 = \overline{cab}$ escribiendo en forma polinómica y reduciendo términos semejantes se tiene que 10a + b + 15 = 11c, pero $a + b + c \neq 27$ luego a + b + c = 9 o a + b + c = 18, resolviendo ambos sistemas tenemos que los números pueden ser 405 ó 738.

142. Se descompone en factores y se analiza que p – 1 y p + 1 son dos números pares consecutivos por lo que su producto es divisible por 8 y p – 1, p y p + 1 son tres números consecutivos por lo que uno de ellos es divisible por 3 y si es divisible por 8 y por 3 lo es por 24.

143. Si 100a + 10b + c = 37x entonces 1 000a + 100b + 10c = 370x y 100b + 10c + a + 999a = 37y, como 999 es divisible por 37 entonces el número $\overline{bca}$ también lo es.
De igual forma para el otro caso si se multiplica la ecuación original por 10.

144. Se tiene f(a) = 1 2 3 4 5 6 7 8 9

y	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Se tiene que los números tales que f(a) = 1 empiezan en 1 y después aparecen sumando múltiplos de 9 a 1.

g(a) =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
	22	23...									

Los números a tales que g(a) = 1 empiezan en 1 y después aparecen sumados múltiplos de 11 a 1. Entonces un número aparecerá en f y en g si se le suma un múltiplo de 99. los números serán de la forma 1 + 99t con t = 0, 1, 2,..., 1 010 por lo tanto hay 1 011 números que tienen esa propiedad.

145. Se sigue la misma idea que el problema 32.

146. Como xyz tiene 7 divisores, entonces debe ser un cuadrado perfecto por tener un número impar de divisores. Como 7 es un número primo, entonces es un cubo perfecto también por lo que xyz = a^6 con a primo y como solamente dos de ellos son primos diferentes, no es posible encontrar ninguna terna que satisfaga las condiciones del problema.

147. Se tiene 10a + b – (10b + a) = 9(a – b) = n^3 luego a – b = 3 por lo que todos los números en que la cifra de las decenas sea 6 unidades mayor que la de las unidades cumplen con las condiciones dadas: 71, 82, 93.

148. Sean x, y las cantidades buscadas, entonces 13x + 16y = 300 y $x = 23 - y + \dfrac{1-3y}{13}$;

x = 28 – 16t; y = –4 + 13t, para t = 1 es el único caso en que ambas variables son positivas obteniéndose x = 12, y = 9. Deben utilizarse 12 contenedores de 130 kg y 9 de 160 kg.

149. 1 993 = dc + r con r + 5 = d y r = c + 13, 1 993 = (r + 5)(r – 13) + r que es una ecuación de segundo grado con soluciones 49 y –42 pero solamente el primer valor es solución luego el divisor es 54, el cociente 36 y el resto 49.

150. 30a0b3 | 13
4a   237731
39
sea a = 9   Las cifras son 9 y 5
100
9b
91

0b–10   b = 5

151. Sean a, b, c, d, 1 y n los factores de n y n = $\overline{2rs}$, entonces se cumple que r + s = 8 y s = 8 – r, por otro lado se tiene que n = 200 + 10r + s, es decir, n = 208 + 9r y ad = bc = n entonces ad = 208 + 9r, probando para r = 0, 1,..., 9 se tiene que el único valor de n es 244 que tiene los factores 1, 2, 4, 61, 122 y 244.

152. Para p = 3, se cumple que p + 2 = 5 y p + 4 = 7 y los tres son números primos, probemos que no hay más casos. Si p es primo, entonces termina en 1, 3, 7, 9 excepto 2 y 5 pero para estos casos no se cumple, si p termina en 1, entonces p + 4 termina en 5, si p termina en 3 ocurre lo mismo para p + 2, si p termina en 7 o en 9, entonces p + 2 y p + 4 serían tres números impares consecutivos y alguno de ellos es divisible por 3.

153. Hagamos $x = 2n – 1$, entonces $x^2 = 4n^2 – 4n + 1$ y $x^4 = 16n^4 –32n^3 + 24n^2 – 8n + 1$ y
$N = 31(x^4 + 1) – 62x^2 = 31(16n^4 –32n^3 + 24n^2 – 8n + 2) – 62(4n^2 – 4n + 1) = 496n^2(n – 1)^2$
$= 2^4\cdot 31n^2(n – 1)^2$ como n y n – 1 son dos números consecutivos uno de ellos es par, luego N es divisible por $1984 = 2^6\cdot 31$.

154. Sea $\overline{aabb} = (\overline{mn})^2$ entonces $11(100a + b) = (10m + n)^2$ entonces $100a + b = 11q^2$ probando para los valores de q desde 1 hasta 8 se tiene que el número es $7744 = 88^2$.

155. $144 = 2^4\cdot 3^2$ es divisible por 10 números enteros consecutivos y se busca el menor, consideremos que es divisible por 2, 3,...10, 11, entonces el número sería $138\ 600 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5^2 7\cdot 11$ y tiene 144 divisores.

156. Analicemos los costos de una cifra que no puede pagar: 4 ni 9, de 2 cifras 14, 19, 24, 29,..., 84, 89 de tres cifras, de cuatro cifras el razonamiento es similar. De 1 cifra hay 2, de 2 cifras hay 34, de tres hay 332, de 4 hay 351 que hacen un total de 71.

157. Los números de 4 cifras son los números n comprendidos entre 1 000 y 9 999, el primer número divisible por 7 es 1 001, luego 9 999 – 1 001 = 8 998 que al dividirlo por 7 da como cociente 1 285, el mismo razonamiento para 11 hay 818 y para 13 hay 692, ahora se sacan los que son divisibles por 77 hay 116, los que son divisibles por 91 hay 98, los divisibles por 143 hay 62, los divisibles por 1 001 hay 8 luego el total de números serán 1 285 + 818 + 692 – (116 + 98 + 62) + 8 que hacen un total de 2517 números de cuatro cifras que no son divisibles ni por 7, ni por 11, ni por 13.

158. Como n está entre 1 900 y 2 000 y además es divisible por 5, sus divisores primos estarán situados de modo que $1\ 900 : 5 \le p \le 2\ 000 : 5$, es decir, $380 \le p \le 400$, si además eliminamos los pares, los múltiplos de 3 y los de 5 quedan los números siguientes: 383, 389, 397 y comprobando que esos números son primos tendremos que n es: $5\cdot 383 = 1\ 915$, $5\cdot 389 = 1\ 945$, $5\cdot 397 = 1\ 985$.

159. Si la sexta potencia es un número de 9 dígitos, entonces el número original es de 2 cifras. Sea $(\overline{mn})^6 = \overline{abcdefghi}$, la última cifra puede ser 0, 4, 9; n = 0, n = 4, n = 8, n = 3 ó n = 7;
$24 \le \overline{mn} \le 31$ comprobando con los posibles valores se tiene: 24^6 comienza en 1, 31^6 termina en 1, 30^6 tiene 6 ceros, 25^6 termina en 5, 26^6 termina en 6, 29^6 termina en 1, luego sólo hay dos números posibles que son el 27 y el 28 y comprobando se tiene que $27^6 = 387420489$ que es el número buscado.

160. $10\ 001 = 10^4 + 1 = 73\cdot 137$, luego no es primo
$100\ 010\ 001 = 10^8 + 10^4 + 1 = 10^8 + 2\cdot 10^4 + 11 - 10^4 = (10^4 + 1)^2 - 10^4 = (10^4 + 1 + 10^2)(10^4 + 1 – 10^2)$ que no es un número primo, de igual forma para el otro caso que falta.

161. $1978 = 2\cdot 23\cdot 43$; ningún número par es primo relativo con 1 978, luego quedan 989 números posibles, hay 86 números que son múltiplos de 23, de ellos la mitad son números pares, luego quedan 43 múltiplos de 23 que no son pares, 989 – 43 = 946. Hay 46 números que son múltiplos de 43, de ellos la mitad son pares, quedan 23 que no son pares y son múltiplos de 43;
946 – 23 = 923, se descuenta el 989 que es múltiplo de 23 y de 43.
Hay 922 números naturales menores que 1978 que son primos relativos con él.

162. N = 1000...0200...01 con 19 ceros entre cada uno de los números diferentes de cero
$N = 10^{40} + 2\cdot 10^{20} + 1 = (10^{20} + 1)^2$ entonces $\sqrt{N} = 10^{20} + 1$ y N = 1000...01 con 19 ceros entre cada uno.

163.

	Cantidad de divisores	
Sea $N = 3^{\alpha}\cdot 5^{\beta}\cdot 7^{\gamma}$	$(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$	Resolviendo el sistema se tiene que
$5N = 3^{\alpha}\cdot 5^{\beta+1}\cdot 7^{\gamma}$	$(\alpha + 1)(\beta + 2)(\gamma + 1)$	$\alpha = 2$, $\beta = 3$ y $\gamma = 4$,
$7N = 3^{\alpha}\cdot 5^{\beta}\cdot 7^{\gamma+1}$	$(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 2)$	entonces $N = 3^2\cdot 5^3\cdot 7^4 = 2701125$.
$9N = 3^{\alpha+2}\cdot 5^{\beta}\cdot 7^{\gamma}$	$(\alpha + 3)(\beta + 1)(\gamma + 1)$	

$(\alpha + 1)(\beta + 2)(\gamma + 1) - (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) = 15$
$(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 2) - (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) = 12$
$(\alpha + 3)(\beta + 1)(\gamma + 1) - (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) = 40$

164. De la condición III se tiene que a = b + 1, de la condición II se llega que n = b(b + 1), luego n es el producto de dos números consecutivos, pero 6 < n< 41, entonces b > 2, para b = 3, n = 12, para b = 4, n = 20 y para b = 5, n = 30.

165. Sea el número N = $\overline{aa...a}$ con 3^n veces a, entonces la suma a + a + ... + a = $3^n \cdot a$ que es divisible por 3^n.

166. Supongamos que $\sqrt[n]{2^m + 1} = a \in N$, entonces $2^m + 1 = a^n$ y $a^n - 2^m = 1$. El único caso posible es si a = m = 3 y n = 2, pero como m ≠ 3, no hay ningún número natural de la forma $\sqrt[n]{2^m + 1}$ con m ≠ 3.

167. Supongamos que $\dfrac{3p+25}{2p-5} = a \in N$, entonces 3p + 25 = 2ap – 5a y p = $\dfrac{5(a+5)}{2a-3}$ luego 2a – 3 = 5 y a = 4 o $\dfrac{a+5}{2a-3} = b \in N$ pero a + 5 ≥ 2a – 3 si a ≤ 8 y comprobando se tiene que para a = 8, b = 1 y p = 5. Si a = 4, p = 9, por lo tanto p puede tomar los valores 5 ó 9.

168. a) Si se utilizan todos los dígitos una y sólo una vez y N^4 tiene más cifras que N^3 entonces N^4 tiene 6 cifras y N^3 tiene 4.
b) 15^3 = 3375 tiene 4 cifras y 15^4 tiene 5 cifras luego N > 15
22^3 = 10 648 tiene 5 cifras por lo que N < 22 y 15 < N < 22.
c) Pero 16^4 tiene 5 cifras al igual que 17^4 luego N = 18, N = 19 ó N = 21 porque si N = 20 hay 3 ceros, comprobando se tiene que N = 18.

169. 1 983 ≡ –1(mód 1984) ⇒ 1983^{1983} ≡ –1(mód 1984); 1 985 ≡1(mód 1984) ⇒ 1 985^{1985} ≡ 1(mód 1984); 1 986 ≡ 2 (mód 1 984) luego la suma
1 983^{1983} – 1 985^{1985} + 1 986^{1986} ≡ –1 –1 + 2 (mód 1 984) ≡ 0 (mód 1 984).

170. Se tiene 1·0 + 2·2 + 3·0 + 4·* + 5·1 + 6·* + 7·5 + 8·0 + 9·2 + 10·7 = 10* + 132 = 11m entonces 10* = 11n luego * = 0 por ser dígito por lo que hay un sólo código posible.

171. Los números buscados deben terminar en 1, porque es el único número que cuando se eleva al cubo termina en 1, pero no puede ser de 1 cifra, analicemos si tiene dos cifras:
$\overline{a1}^3$ = $(10a + 1)^3$ = $10a(100a^2 + 30a + 3) + 1$ que se puede escribir como 10a($\overline{bc3}$) + 1 ó 10a($\overline{mnp3}$) + 1 para que sus dos últimas cifras sean 1, es necesario que a·3 termine en 1 porque la primera cifra ya termina en 1 y eso sólo es posible si a = 7.
∴La condición necesaria es que las dos últimas cifras del número sean 71.

172. Sea $\overline{cmn}^3 = \overline{abababl}$, entonces n = 1 porque ningún número que termine en n ≠ 1 su cubo termina en 1, pero c = 1 ó c = 2 y la suma de sus dígitos es 3(a + b) + 1 ≡ 1 (mód 3) por lo que $\overline{cm1}$ ≡ 1 (mód 3) luego son posibles los casos 121, 152, 181, 211, 241 ó 271 pero los dos últimos tienen más de 7 cifras y quedan sólo 4 casos posibles probando queda que 211^3 = 9 393 931 por lo que a = 9, b = 3.

173. Consideremos que xyz ≠ 0, si x, y, z tienen como máximo común divisor a p entonces x = pr, y = ps y z = pt con r, s, t primos relativos. Entonces $6r^2 + 2s^2 = t^2$ y $2(3r^2 + s^2) = t^2$ sea t = 2m obtenemos $3r^2 + s^2 = 2m^2$ por lo que $3r^2 + s^2$ es par, esto es posible ssi r y s son de igual paridad, pero si ambos son pares entonces contradice que r, s, t son primos relativos, por lo que queda la posibilidad que ambos sean impares, es decir, r = 2a + 1 y s = 2b + 1, entonces $3(2a + 1)^2 + (2b + 1)^2 = 2m^2$;

$6a(a + 1) + 2b(b + 1) + 2 = m^2$ y m es par, sea $m = 2c$ entonces $6a(a + 1) + 2b(b + 1) + 2 = 4c^2$ y $3a(a + 1) + b(b + 1) + 1 = 2c^2$.
Como $a(a + 1)$ y $b(b + 1)$ son ambos pares, entonces, el miembro izquierdo es impar y el miembro derecho es par lo cual es una contradicción.
$\therefore$ La única solución es (0;0;0).

174. Como $a + b = 30\,030 = 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13$. Supongamos que 30 030 divide a $a\cdot b$, como 2 divide a 30 030 debe dividir a ab por lo que 2 divide a a o 2 divide a b. Pero $a + b = 30030$, pero si uno de los dos es par entonces el otro también lo es por lo que 30 030 no divide a ab.

175. $\dfrac{n^2+n-1}{n^2+2n} = 1 - \dfrac{n+1}{n^2+2n}$ hay que demostrar que $\dfrac{n+1}{n^2+2n}$ es irreducible.
Sea $n + 1 = qa$ y $n^2 + 2n = qb$ con $mcd(a,b) = 1$ y $q \in N$, entonces $n = qa - 1$ y
$n^2 + 2n = q^2a^2 - 2qa + 1 + 2qa - 2 = qb$ entonces $q^2a^2 - qb = 1$ y $q(qa^2 - b) = 1$, con $a, b, q \in N$ entonces $q = 1$ y $qa^2 - b = 1$; $a^2 = b + 1$; o $q = -1$ y $qa^2 - b = -1$; $a^2 = b - 1$. Para ambos casos se cumple que mcd $(n + 1, n^2 + 2n) = 1$ luego la fracción es irreducible para todo $n \in N^*$.

176. Si $n = 2k$ entonces $5^n = 25^k \equiv 1$ (mód 8); $3^{n-1} = 3^{2k-1} = 3\cdot9^{k-1} \equiv 3$ (mód 8) por lo que
$A_n \equiv 1 + 2\cdot3 + 1(8) \equiv 0$ (mód 8) por lo que $A_n = 5^n + 2\cdot3^{n-1} + 1(8) \equiv 0$ (mód 8)
$\therefore 8/ A_n$ y para todo número natural $n > 0$, A_n es divisible por 8.

177. $2^{86} + 1 \quad | \; 2^{19} + 1$
$-2^{67} \qquad\qquad 2^{67} - 2^{48} + 2^{29} - 2^{10} + 1$
2^{48}
-2^{29}
$2^{10} + 1$

$2^{19} + 1 \quad | \; 2^{10} + 1$
$\qquad\qquad 2^9$
$-2^9 + 1$ Continuando con las divisiones de $2^{10} + 1$: $-2^9 + 1$ y de $-517:3$ y de $3:2$ se tiene que el $mcd(2^{86} + 1; 2^{19} + 1) = 1$ y los números son primos relativos.

178. Sea x el número buscado con $x = \overline{a_1a_2...a_6}$, entonces $a_1 = 1$ porque 6x tiene 6 dígitos, luego $x = \overline{1a_2...a_6}$, consecuentemente el dígito final de los números x, 2x, 3x, 4x, 5x ó 6x deben ser todos diferentes, como el 1 sólo aparece al final cuando se multiplica $3\cdot7$ se tiene $a_6 = 7$ y $x = \overline{1a_2...7}$, al multiplicar por 2, 4 ó 6, se termina en 4, 8, 2 ó 5 por lo que los dígitos de x son 1, 2, 4, 5, 7, 8 por lo que $x = \overline{1a_2...7}$, $2x = \overline{2...4}$, $3x = \overline{4...1}$, $4x = \overline{5...8}$, $5x = \overline{7...5}$ y $6x = \overline{8...2}$. De 2x se tiene $a_5 = 5$ o $a_5 = 2$ que no es posible luego $a_5 = 5$, $a_4 = 8$, $a_2 = 4$, $a_3 = 2$ por lo que el número buscado es x = 142 857, con 2x = 285 714, 3x = 428 571, 4x = 571 428, 5x = 714 285 y 6x = 857 142.

179. Consideremos la ecuación dada como una ecuación cuadrática en variable x, es decir
$x^2 - (2 + 4y)x + (6y^2 - 20y - 29) = 0$ cuyo discriminante $D = 102 - 2(y - 6)^2$ con
$(y - 6)^2 \leq 51$; $|y - 6| \leq 7$, para que las soluciones sean enteras debe cumplirse que D sea un cuadrado perfecto. Analizando los casos posibles se tiene:
$(y - 6)^2 = 1$ o $(y - 6)^2 = 49$ por lo que para $y - 6 = 7 \Rightarrow y = 13$, $x = 29$, $x = 25$ para $y - 6 = 1 \Rightarrow y = 7$, $x = 25$, $x = 5$ para $y - 6 = -1 \Rightarrow y = 5$, $x = 21$, $x = 1$ $y - 6 = -7 \Rightarrow y = -1$, no es solución porque $y > 0$.
S = {(29;13), (25;13), (25;7), (5;7), (21;5), (1;5)}

180. $360 = 2^3\cdot3^2\cdot5$, por lo que es necesario probar que el producto dado es divisible por 8, 9 y 5. Como son números consecutivos entonces alguno de ellos es divisible por 5, hay al menos dos números pares por lo que uno de ellos es divisible por 4 y su producto es divisible por 8, en 5 números consecutivos con

p primo, dos de ellos serán divisibles por 3 y su producto sería divisible por 9, luego el producto es divisible por 360.

181. $2^p + 1 = q^2 \Rightarrow 2^p = (q + 1)(q - 1)$, luego q es impar. Sea $q = 2n + 1 \Rightarrow 2^p = 4n(n + 1)$. Como en el miembro izquierdo sólo hay potencias de 2, entonces n = 1 y $2^p = 8$ por lo que p = q = 3 que es la única solución.

182. Se tiene que 1 + 8 + 27 + 63 + ... + 729 + 1 000 = 3 025, por lo que la primera ecuación tiene una sola solución en enteros positivos para $x_1 = x_2 = ... = x_{10} = 1$. La segunda ecuación es la suma de enteros no negativos y se satisface solamente para $y_1 = y_2 = ... = y_{10} = 0$.
$\therefore$Ambas ecuaciones sólo tienen una solución.

183. Sean a, b, c y d los números dados con a > b > c > d, como las sumas que se tienen son las menores, debe cumplirse que:

a + d = 9	o	a + d = 9
b + d = 8		b + c = 8
b + c = 5		b + d = 5
c + d = 1		c + d = 1
De II – III tenemos d – c = 3		De II – III tenemos c – d = 3 y por IV
y por IV d + c = 1		c + d = 1
entonces d = 2 y c = –1 que no cumple		entonces c = 2, d = –1 entonces a = 10, b = 6 y la mayor de todas las sumas es 16.

184. 396 = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$ y $\overline{xy234z}$ debe ser divisible por 4, 9 y 11. De aquí se tiene que z = 0, 4 u 8, probando con los casos posibles se tiene que los únicos tríos (x;y;z) que satisfacen las condiciones pedidas son (3;6;0), (3;2;4), (2;8;8).

185. Como la ecuación dada debe tener dos raíces racionales diferentes y a, b son primos, entonces:

$(11x - 1)(x - b) = 0$	ó	$(11x - b)(x - 1) = 0$
$x = \frac{1}{11}$ o x = b		$x = \frac{b}{11}$ o x = 1
pero $b + \frac{1}{11} = \frac{a}{11}$		pero $\frac{b}{11} + 1 = \frac{a}{11}$,
es decir, a – 11b = 1, de aquí se tiene que a y b son de diferente paridad por lo que b = 2, a = 23.		es decir, a – b = 11 de aquí se tiene que a y b son de diferente paridad por lo que a = 13, b = 2.

$\therefore$Los pares de números primos que cumplen con las condiciones pedidas son (13;2) y (23;2).

186. La suma $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$, como n(n + 1) es el producto de dos números consecutivos, este producto puede terminar en 2, 6, 0, que al dividirlo por 2 debe terminar en 1, 6, 3, 8, 0, 5 y no aparecen ninguno de los dígitos dados en el enunciado del problema.
187. Para n impar podemos escribir $A_n = (7 - 1)^n + (7 + 1)^n$

$$= \left\{7^n - \binom{n}{1}7^{n-1} + ... - 1\right\} + \left\{7^n + \binom{n}{1}7^{n-1} + ... + 1\right\} = 2\left\{7^n - \binom{n}{2}7^{n-2} + ... + \binom{n}{n-1}7\right\}$$

$$= 2(49)\left[7^{n-2} + \binom{n}{2}7^{n-4} + ... + \binom{n}{n-3}7\right] + 14n.$$ Como $a_{83} = 49k + 14(83) = 49k + 1162$ con k entero, entonces el resto buscado es 35.

188. Se sabe que el mayor valor del promedio se obtiene al suprimir el 1, entonces $\frac{2+3+...+n}{n-1}=\frac{(n+2)(n-1)}{2(n-1)}=\frac{n+2}{2}$ que el menor valor del promedio se obtiene al suprimir n, entonces $\frac{1+2+..+(n-1)}{n-1}=\frac{n(n-1)}{2(n-1)}=\frac{n}{2}$ luego $\frac{n}{2}\leq 35\frac{5}{7}\leq\frac{n+2}{2}$ teniendo que n $\leq$ 71,4 $\leq$ n + 2, como n es entero y se busca el mayor, entonces n = 71 luego $\frac{1+2+..+(i-1)+(i+1)+(i+2)+...+71}{70}=\frac{250}{7}=\frac{2500}{70}$ y $\frac{71\cdot 72}{2}$ - i = 2500 $\Rightarrow$ i = 56.

$\therefore$El número que se suprimió fue el 56.

189. Si n es par entonces $4^n + n^4$ es un número par mayor que 2, luego no es primo. Si n es impar entonces $4^n + n^4 = 2^{2n} + 2\cdot n^2\cdot 2^n + n^4 - 2\cdot n^2\cdot 2^n = (2^n + n^2)^2 - n^2\cdot 2^{n+1}$, como n = 2k +1 entonces

$[2^{2k+1} + (2k + 1)^2]^4 - (2k + 1)^2\cdot 2^{2(k+1)} = [2^{2k+1} + (2k + 1)^2 + (2k + 1)\cdot 2^{(k+1)}][2^{2k+1} + (2k + 1)^2 - (2k + 1)\cdot 2^{(k+1)}]$. Si p es primo, entonces uno de los factores es 1, tomemos el menor de los dos

$2^{2k+1} + (2k + 1)^2 - (2k + 1)\cdot 2^{k+1} = 2\cdot 2^{2k} - 2\cdot 2^k (2k + 1) + (2k + 1)^2 = 2^{2k} - 2\cdot 2^k(2k + 1) + (2k + 1)^2 + 2^{2k}$

$= [2^k - (2k + 1)]^2 + 2^{2k} \geq 5$, para k > 0 porque n $\neq$ 1.

$\therefore$El número $4^n + n^4$ no es primo para ningún valor de n > 1, siendo n entero.

190. 26 460 = $2^2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7^2$. Debemos probar que N es divisible por 26 460,

N = 27 195^8 – 10 887^8 + 10 152^8 = 27 195^8 – (10 887^8 – 10 152^8) = $(3\cdot 5\cdot 7^2\cdot 37)^8$ – (10 887^8 – 10 152^8); pero 10 887 – 10 152 = 735 = $3\cdot 5\cdot 7^2$, entonces 10 887^8 – 10 152^8 es divisible por 735 = $3\cdot 5\cdot 7^2$ por lo que N es divisible por $3\cdot 5\cdot 7^2$, pero N = (27 195^8 – 10 887^8) + 10 152^8 = (27 195^8 – 10 887^8) + $(2^3\cdot 3^3\cdot 47)^8$, pero 27 195 – 10 887 = 16 308 = $2^2\cdot 3^3\cdot 151$.

Entonces 27 195^8 – 10 887^8 es divisible por 16 308 = $2^2\cdot 3^3\cdot 151$ por lo que N es divisible por $2^2\cdot 3^3$

$\therefore$N es divisible por 26 460 = $2^2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7^2$.

191. $[\sqrt[4]{1}]=[\sqrt[4]{2}]=...=[\sqrt[4]{15}]$ = 1 15 números

$[\sqrt[4]{16}]=[[\sqrt[4]{17}]]=...=[\sqrt[4]{80}]$ = 2 65 números

$[\sqrt[4]{81}]=[[\sqrt[4]{82}]]=...=[\sqrt[4]{255}]$ = 3 175 números

15 + 2·65 = 145, si n = 80 $\Rightarrow$ 2n = 160 y 160 – 145 = 15, faltan 15 para lograr la igualdad, pero 2n aumenta de 2 en 2 y para x $\geq$ 81 la suma aumenta de 3 en 3 por lo que hay que aumentar 15 números para lograr la igualdad y $[\sqrt[4]{1}]+[\sqrt[4]{2}]+...+[\sqrt[4]{95}]$ = 1·15 + 2·65 + 3·15 = 190 = 2·95 . no hay mas soluciones porque el miembro izquierdo aumenta más rápidamente que el derecho.

$\therefore$La única solución es para n = 95.

192. N = $(69 + 1)^5$ de acuerdo al teorema del binomio N = $(2\cdot 5\cdot 7)^5$, por lo que un entero positivo d es un factor de N ssi d = $2^p 5^q\cdot 7^r$ donde p, q, r son cada uno menores o iguales a 5. Por lo tanto hay 6^3 = 216 posibles valores de d. Hay 216 factores de N.

193. $C^{1000}_{500}=\frac{1000!}{(500!)^2}$ Como 7 es un número primo, hallemos la potencia de 7 en la descomposición canónica del numerador y del denominador.

$\left[\frac{1000}{7}\right]+\left[\frac{1000}{49}\right]+\left[\frac{1000}{343}\right]$ = 142 + 20 + 2 = 164 $\left[\frac{500}{7}\right]+\left[\frac{500}{49}\right]+\left[\frac{500}{343}\right]$ = 71 + 10 + 1 = 82.

Como se tiene $(500!)^2$, entonces la potencia de 7 en el denominador es 164 igual que en el numerador por lo que el número resultante no tiene el factor 7.

$\therefore C\begin{matrix}1000\\500\end{matrix}$ no es divisible por 7.

194. Como los números sólo tienen números pares, entonces no pueden comenzar con 2, 4, 6, 8 y como son cuadrados perfectos solo pueden terminar en 0, 4 ó 6, los números buscados están entre 1 999 y 3 000, 3 999 y 5 000, 5 999 y 7 000, 7 999 y 9 000; los números deben ser los cuadrados de los números entre 45 y 55 ó 63 y 71 ó 77 y 84 u 89 y 95. Probando se tiene que los números buscados son 68^2 = 4 624; 78^2 = 6 084; 80^2 = 6 400 y 92^2 = 8 464.

195. Se tiene que 1 + 2 + ... + n = $\frac{n(n+1)}{2} = \overline{aaa}$ = 111a; n(n + 1) = 222a y n^2 + n = 222a = 0 entonces n = $\frac{-1 \pm \sqrt{1+888a}}{2}$, pero 1 + 888a = m^2 por lo que 888a = (m + 1)(m – 1) y $2^3 \cdot 3 \cdot 37a$ = (m + 1)(m – 1) que son dos números de la misma paridad por lo que ambos son pares y también m + 1 = (m – 1) + 2 entonces: $(2^2 \cdot 3a)(2 \cdot 37)$ = (m + 1)(m – 1); 12a = m – 1 y 2·37 = m + 1 ⇒ m = 73 y a = 6 luego
$\frac{n(n+1)}{2}$ = 666, se cumple para n = 36.

196. De aquí se tiene que K = 2, a = 1 ó 2 y d > 3. Si K = 3, a = 1, d = 9.
Supongamos que K = 2 entonces $4n^2 = 10^3d + 10^2 + 10b + a$ y $n^2 = 10^3a + 10^2b\ 10c + d$
$3n^2$ = 999d + 90c – 90b – 999a y n^2 = 3[11(d – a)+ 10(c – b)] luego $n^2 = 9m^2$ por lo que c – b = 3 o c – b = 6. Si c – b = 3 se tiene m^2 = 37(d – a) + 10, para d – a = 3 se tiene m = 11 y n = 33. Comprobemos: 33^2 = 1 089 y 4·1 089 ≠ 9 801, pero 9·1 089 = 9 801; luego se tiene que:
a = 1, b = 0, c = 8, d = 9, K = 3 y n = 33.

197. Si n fuera impar, entonces $a_1, a_2,...a_n$ tendrían que ser todos impares, pero la suma de un número impar de números impares es impar y por lo tanto diferente de cero, lo cual es una contradicción. Entonces n debe ser par y por lo que alguno de los a_i también lo ha de ser.
Sea a_k el término par, entonces $a_1 + a_2 + ... a_{k-1} + a_{k+1} + ... + a_n = -a_k$. Como a la izquierda hay un número impar de términos que sumados dan un número par, alguno de ellos deberá ser par luego hay dos factores pares, el producto es divisible por 4, es decir, n.

198. Sea p = K^n con K, n ∈ N y n ≥ 2. Basta demostrar que existe m∈ N tal que
p = (1 + 2m) + (3 + 2m) + ... + [(2k – 1) + 2m], es decir, la suma de K números impares consecutivos y
p = K^2 + 2mK = K^n, por lo que m = $\frac{K^{n-1}-K}{2}$; $m = \frac{K(K^{n-2}-1)}{2}$ ∈ Z porque K o $K^{n-2} - 1$ uno de ellos es par.

199. Se tiene $\overline{a_1a_2...a_n5} = \overline{a_1a_2....a_n} \cdot 10 + 5$ y $\overline{a_1a_2....a_n5}^2 = \left(\overline{a_1a_2..a_n} \cdot 10 + 5\right)^2$
= $100 \cdot \overline{a_1a_2..a_n}^2 + 100 \cdot \overline{a_1a_2...a_n} + 25 = 100 \cdot \overline{a_1a_2...a_n}(\overline{a_1a_2...a_n} + 1) + 25$
entonces el cuadrado de un número de la forma $\overline{m5}$ = 25 + 100m(m + 1).

200. Los números consecutivos son: n + 1, n + 2,... n + k ; sea S la suma de ellos S = $\frac{k(2n+k+1)}{2}$
como S = 3^{11}, entonces $2 \cdot 3^{11}$ = k(2n + k + 1), sea k un número par luego k = $2 \cdot 3^m$ = y 2n + k + 1 = 3^p con p + m = 11, como k debe ser máximo también m debe serlo, luego m = 11 – k y k = $\frac{2 \cdot 3^{11}}{3^p}$
y $2 \cdot 3^{11} = 3^p(3^p - 2n - 1)$, de aquí se cumple que $3^p(3^p - 2n - 1) > 3^{11}$ y $3^p - 2n - 1 < 3^p$ luego
$3^p(3^p - 2n - 1) < 3^{22}$, para que se cumpla la primera desigualdad entonces $3^{2p} > 3^{11}$ y p > 5 por tanto p = 6. Comprobemos que este valor satisface que $2 \cdot 3^{11} = 3^6(3^6 - 2n - 1)$ y n = 121, k = 486.

201. a) Sea U_n el último elemento del conjunto $U_n - U_{n-1} = Q_n$ cardinal del conjunto.
$U_n = n^3$ y $U_{n-1} = (n - 1)^3$ luego $n^3 - (n - 1)^3 = 29\ 601$ y $n^2 - n - 9\ 900 = 0$, luego se tiene que la ecuación se transforma en $(n - 100)(n + 99) = 0$, por lo que $n = 100$.
b) $m^3 - (m - 1)^3 = 3^{1989}$ y $3m^2 - 3m + 1 = 3^{1989}$ como el miembro derecho es divisible por 3 y el miembro izquierdo no, entonces no se cumple la igualdad y no existe este conjunto.

202. $x^2 - (y^2 + 2y + 1) = 12$; $(x + y + 1)(x - y - 1) = 12$
Como ambos factores son de la misma paridad los únicos casos posibles son :

$x + y + 1 = 2$	$x + y + 1 = 6$	$x + y + 1 = -2$	$x + y + 1 = -6$
$x - y - 1 = 6$	$x - y - 1 = 2$	$x - y - 1 = -6$	$x - y - 1 = -2$
$x = 4,\ y = -3$	$x = 4,\ y = 1$	$x = -4,\ y = 1$	$x = -4,\ y = -3$

$S = \{(4; -3), (4;1), (-4;1), (-4; -3)\}$
Otra vía: Se tiene que $x^2 - 2y = y^2 + 13$; $x^2 - 2y - y^2 - 1 = 12$; $x^2 - (y + 1)^2 = 12$. La sucesión de cuadrados es: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36,... Los únicos cuadrados perfectos cuya diferencia es 12 20n 16 y 4, queda pues $x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$; $(y + 1)^2 = 4 \Rightarrow y + 1 = \pm 2 \Rightarrow y = 1$ o $y = -3$ y los pares son: $(4; -3), (4;1), (-4; -3), (-4;1)$.

203. Como cada fila tiene un número impar de números y además es simétrica con respecto al número del medio se puede analizar a la izquierda de ese número o a la derecha. En la fila 3 aparece el 2 que es par ocupando el lugar 2, los lugares 1 y 3 lo ocupan números impares, pero al sumar los tres números aparece un número par en la fila de abajo, luego suponiendo que todos los demás fueran impares ya se garantiza que en la fila de abajo hay un número par por ser 1 el primer número de cada fila.

204. El número de particiones diferentes de 1 988 en enteros positivos es finito, por lo que debe haber un máximo para el producto. Supongamos que $a_1, a_2,..., a_n$. Consideremos algunos a_i de forma que no cambie la suma pero el producto aumente. Si algún $a_i = 1$, lo sumamos a algún $a_j \geq 4$ lo cambiamos por los números 2 y $a_j - 2$ y el factor a_j es reemplazado por $2(a_j - 2) = 2a_j - 4$ y si $a_j \geq 4$, entonces $2a_j - 4 \geq a_j$. Este proceso transforma números mayores que 3 en varios 2 y varios 3 y el nuevo producto es al menos tan grande como el anterior. Tenemos que el producto será de la forma $2^x \cdot 3^y$. Si $x \geq 3$ reemplazamos $2 + 2 + 2$ por $3 + 3$, como $2^3 < 3^2$ el producto es de la forma $2^a \cdot 3^b$ con $a = 0, 1, 2$;
$1\ 988 = 3 + 3 + ... + 3 + 2$ (el 3 aparece 662 veces), entonces su producto P será máximo si $P = 2 \cdot 3^{662}$.

205. Sea $a \leq b \leq c \leq d = n^2$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1\ 989 - n^4 \Rightarrow 1 \leq n \leq 4 \Rightarrow$
$a^2 + b^2 + c^2 \leq 3 \cdot 256 = 768$; $1\ 989 - n^4 = 1\ 989 - 256 = 1\ 733$ y $768 < 1\ 733$ por lo que
$5 \leq n \leq 6$, es decir, $n = 5$ o $n = 6$. Si $n = 5$, $d = 25$ y $a + b + c + 25 = - m^2$,
$a^2 + b^2 + c^2 = 1\ 364$, es decir, $a \equiv b \equiv c$ (mód 2), es decir, $a = 2a_1$, $b = 2b_1$, $c = 2c_1$ con
$a + b + c \leq 75$; $a + b + c = 56$ o $a + b + c = 24$.
I) Para el primer caso no hay solución ni para el segundo por lo que $n \neq 5$, entonces $n = 6$, $d = 36$ y
$a + b + c = 13$ o $a + b + c = 45$. El par $m = 9$, $n = 6$ satisface las condiciones.

206. Debemos buscar el resto de $14^{(14)^{14}}$ al dividirlo por 100; $14^{(14)^{14}} = 7^{(14)^{14}} \cdot 2^{(14)^{14}}$. Analizando por separado cada factor tenemos $7^4 - 1 = 2\ 400 \equiv 0$ (mód 100) o sea

$7^{4k} - 1$ que es divisible por $7^4 - 1$, es decir, $7^{(14)^{14}}$ es divisible por 100 y termina en 01.
$2^{20} - 1$ es divisible por 25; 14^{14} deja resto 16 en la división por 20 por lo que $2^{(14)} = 2^{16} \cdot 2^{20k}$ que deja resto igual a $2^{16} = 65\ 536$ en la división por 25 por lo que solo puede terminar en 11, 36, 61 u 86. Como es divisible por 4 termina en 36 que es el número con el que termina el número dado.

207. a) $x^5 + x + 1 = x^5 + x^4 - x^4 + x^3 - x^3 + x^2 - x^2 + 1 = x^3(x^2 + x + 1) - x^2(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$
$= (x^3 - x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$
b) $a + a^5 = a(a^4 + 1)$ que no es primo excepto para $a = 1$.
$a^5 + a\ 1\ 1 = (a^3 + a^2 - 1)(a^2 - a + 1)$ que no es primo excepto para $a = 1$
c) $10\ 000\ 000\ 099 = 10^{10} + 10^2 - 1 = (10^2)^5 + 10^2 - 1 = (10^4 - 10^2 + 1)(10^6 + 10^4 - 1) = (1\ 009\ 999)(9\ 901)$

208. 9 = 10 – 1; 99 = 10^2 – 1; 999 = 10^3 – 1 y, en general 999...9 (n veces 9) = 10^n – 1, como p es primo, p ≠ 2 y p ≠ 5, entonces 10 y p son primos entre sí por lo que si n = p – 1, entonces p/10^{p-1} – 1 (según el teorema de Fermat) de aquí se tiene que p^2 / 10^{p-1} – 1, luego p divide a cualquier número de manera que la base sea 10 y su exponente sea una potencia de p disminuido en 1 y a esta potencia se le reste 1. Luego cualquier potencia m-ésima de p divide a números de la forma que el anterior siempre y cuando la potencia de p sea la m-ésima por lo que hay infinitos números de la sucesión 9, 99,... que son divisibles por p.

209. $\frac{\sum_{i=1}^{m-1} \lg d_i}{\lg n} = \frac{\lg(d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_{m-1})}{\lg n}$, pero $d_1 \cdot d_{m-1}$ = n; $d_2 \cdot d_{m-2}$ = n; ...; $d_{m-1} \cdot d_1$ = n que al multiplicar todas estas igualdades queda $(d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots d_{m-1})^2 = n^{m-1}$ es decir

$d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots d_{m-1} = n^{1/2\,(m-1)}$ y $\frac{\sum_{i=1}^{m-1} \lg d_i}{\lg n} = \frac{\lg n^{\frac{m-1}{2}}}{\lg n} = \frac{m-1}{2}$ como n tiene una cantidad par de divisores m es impar se tiene que ½ (m – 1) es par.

210. Supongamos que a < b < d < c. Para cada par a, c, el número de cuádruplas depende solamente de c – a.

c – a	# de pares (a;c)	# de cuadruplas para cada par (a;c)
1	n – 1	0
2	n - 2	0
3	n – 3	1
....	....	....
n – 3	3	½ n – 2
n – 2	2	½ n – 2
n – 1	1	½ n – 1

De aquí que el número total de cuadruplas está dado por:

(2n – 7)1 + (2n – 11)2 + ... + 5(½n – 2) + (½n – 1) = $\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-2} (2n-3-4i)i + (\frac{n}{2}-1)$

= (2n – 3)$\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-2} i$ - 4$\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-2} i^2 + \left(\frac{n}{2}-1\right)$ que haciendo los cálculos pertinentes se llega a la igualdad pedida.

211. Sea $\overline{abc}$ un número de tres cifras con a + b + c = 14 (I) y $\overline{abc}$ + $\overline{cba}$ = 1252, 100a + 10b + c + 100c + 10b + a = 1 252; 101a + 20b + 101c = 1 252, formando el sistema con la ecuación (I) se llega a 81a + 81c = 972 quedando a + c = 12, de aquí b = 2, probando con los diferentes casos de dos dígitos cuya suma sea 12 se tiene que las soluciones son: 329, 428, 527, 626, 725, 824 y 923.

212. Los números enteros usados hasta la fila 62 son: 1 + 2 + 3 + ... + 62 = (1 + 62) + (2 + 61) + (31 + 32) entonces $\frac{63 \cdot 62}{2}$ = 31·63 = 1 953. Luego, la fila 63 empieza con el 1 954 y en la columna 40 aparece el 1 953 + 40 = 1 993 y el número buscado es el 1 993.

213. Sea N = $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$; N = $a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$ y S = $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0$ entonces N – S = $a_n(b^n - 1) + a_{n-1}(b^{n-1} - 1) + \ldots + a_2(b^2 - 1) + a_1(b - 1)$.

Como $n \in N$, $n \geq 1$, el binomio $b^n - 1$ se divide por $b - 1$, luego $N - S = (b - 1)q$, por lo que $N = (b - 1)q + S$, por tanto como el primer sumando del miembro derecho se divide por $b - 1$, se tendrá que si S se divide por $b - 1$ entonces N se divide por $b - 1$.

214. El problema puede considerarse como: Mostrar que la representación en base 3 de un cuadrado perfecto puede contener al dígito 1 al menos una vez.
Tenemos $1^2 = 1_3$, $2^2 = 11_3$, $3^2 = 100_3$, $4^2 = 121_3$. Consideremos que sea x el menor entero positivo tal que $x^2 = d_0 + 3d_1 + 3^k d_k + ... + 3^n d_n$ y cada d_i es 0 ó 2.
Si $d_0 = 2$, tenemos $x^2 \equiv 2$ (mód 3) lo cual es imposible.
Si $d_0 = 0$, entonces $3 / x^2$ de aquí que $3 / x$ y $3^2 / x^2$. De este modo $d_1 = 0$ y $x^2 = 3^2y^2$, donde $y^2 = d_2 + 3d_3 + 3^{k-2}d_{k-2} + ...+ 3^{n-2}d_{n-2}$. Esto es una contradicción como y es un entero positivo menor, el cual cumple la misma propiedad que x.

215. Ambas expresiones entre paréntesis son sucesiones aritméticas en las que la cantidad de sumandos es x luego $1 + 3 + 5 + 7 + ... + 2x - 1 = \dfrac{2x + x(x-1)2}{2} = x^2$
$2 + 4 + 6 + ... + 2x = x(x + 1)$, queda entonces $9x^2 = 8x(x + 1)$ y la ecuación a resolver es $x^2 - 8x = 0$ cuyas soluciones son: $x_1 = 0$ y $x_2 = 8$.

216. Se tiene de acuerdo al teorema de Fermat que $a^p \equiv a$ (mód p) y $b^p \equiv b$ (mód p) que al sumar ambas congruencias queda $a^p + b^p \equiv a + b$ (mód p). Como p es primo y $p \neq 2$, en el miembro izquierdo de esta congruencia hay una suma de potencias de exponente impar,
$a^p + b^p = (a + b)(a^{p-1} - a^{p-2}b + a^{p-3}b^2 - ... -ab^{p-2} + b^{p-1})$sustituyendo:
$(a + b)(a^{p-1} - a^{p-2}b + a^{p-3}b^2 - ... - ab^{p-2} + b^{p-1}) \equiv a + b$ (mód p). Como p no divide a $a + b$ por hipótesis se puede dividir por $a + b$ y resulta $a^{p-1} - a^{p-2}b + a^{p-3}b^2 - ... - ab^{p-2} + b^{p-1}) \equiv 1$ (mód p), pero
$a^{p-1} \equiv 1$ (mód p) y $b^{p-1} \equiv 1$ (mód p) según el teorema de Fermat, entonces
$1 - a^{p-2}b + a^{p-3}b^2 - ... - ab^{p-2} + 1 \equiv 1$ (mód p), es decir, $-a^{p-2}b + a^{p-3}b^2 - ... - ab^{p-2} \equiv -1$ (mód p) y multiplicando por -1 queda $a^{p-2}b - a^{p-3}b^2 + ... + ab^{p-2} \equiv 1$ (mód p) lo que demuestra lo pedido.

217. $\sqrt{y} = 1 + a + a^2 + ... a^n = \dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}$, luego $y - a^n = \left(\dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}\right)^2 - a^n$

$$= \frac{a^{2(n+1)} - 2a^{n+1} + 1 - a^n(a^2 - 2a + 1)}{(a-1)^2} = \frac{a^{2(n+1)} - a^{n+2} + 1 - a^n}{(a-1)^2} = \frac{a^{n+2}(a^n - 1) - (a^n - 1)}{(a-1)^2}$$

$= \dfrac{(a^n - 1)(a^{n+2} - 1)}{(a-1)^2} = (a^{n-1} + a^{n-2} + ... + a + 1)(a^{n+1} + a^nb + ... + 1)$, como el segundo factor es mayor que el primero entonces $a^{n-1} + a^{n-2} + ... + a + 1 = 1 \Rightarrow a(a^{n-2} + a^{n-3} + ... + 1) = 0$ que no es posible.
$\therefore$El número no es primo.

218. $216 = 2^3 \cdot 3^3$. Sea $n = a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \cdots a_n^{\alpha_n}$ con $(\alpha_1 + 1) (\alpha_2 + 1)...(\alpha_n + 1) = 216$. el 2 debe ser uno de los divisores de n, sea $a_1 = 2$, entonces:

$(\alpha_1 + 2)(\alpha_2 + 1) ... (\alpha_n + 1) = 270 \Rightarrow \dfrac{\alpha_1 + 2}{\alpha_1 + 1} = \dfrac{5}{4}$ y $4\alpha_1 + 8 = 5\alpha_1 + 5$ y $\alpha_1 = 3$.

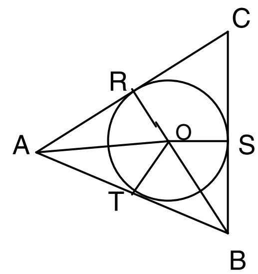
Sea $a_2 = 3$, entonces $n/3 = 2^3 \cdot 3^{\alpha_2 - 1}$ .... $a_m^{\alpha_m} \Rightarrow 4(\alpha_2)(\alpha_3 + 1) ... (\alpha_m + 1) = 180$ y $\dfrac{\alpha_2 + 1}{\alpha_2} = \dfrac{6}{5}$, es decir,

$\alpha_2 = 5$ y $n:5 = 2^3 \cdot 3^5 5^{\alpha_3 - 1}$ .... $a_m^{\alpha_m} \Rightarrow 4 \cdot 6(\alpha_3)(\alpha_4 + 1) ... (\alpha_m + 1) = 144$ y $\alpha_3 = 2$ como se busca el menor entonces $n = 2^3 \cdot 3^5 5^2 \cdot 7^2$ que tiene 216 divisores.

219. Tracemos OR ⊥ AC y OS ⊥ BC, entonces OT = OR = OS = r = RC = CS, tenemos que $K = AT \cdot r + BT \cdot r + r^2$ por ser AR = AT y BT = SB.

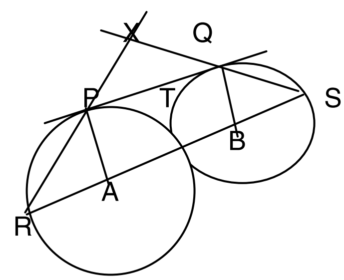
Por otra parte $K = \dfrac{(AT + r)(BT + r)}{2} = \dfrac{AT \cdot BT}{2} + \dfrac{K}{2}$

y se llega que $K = AT \cdot BT$.



220. Sea $V_1 = 800\pi$ cm^3 = $\dfrac{a^2 b}{3}\pi$ cm^3 y $V_2 = 1920\pi$ cm^3 = $\dfrac{ab^2}{3}\pi$ cm^3, dividiendo ambas ecuaciones se llega a la igualdad $a = \dfrac{5}{12}b$ que sustituyendo en alguna de las igualdades iniciales se obtiene a = 10, b = 24 y c = 26, por lo que el perímetro del triángulo es de 60 cm.

221. Tracemos AP y BQ, entonces AP ∥ BQ y ∠ APQ = ∠ QBT = 90°. En el cuadrilátero PABQ se tiene que ∠ PAT + ∠ QBT = 180°, ∠ PRT = ½ ∠ PAT y ∠ QST = ½ ∠ QBT por lo que ∠ PRT + ∠ QST = ½(∠ PAT + ∠ QBT) = 90°. En el Δ RXS de ángulos PRT, QST y RXS se tiene que el ∠ RXS es recto.

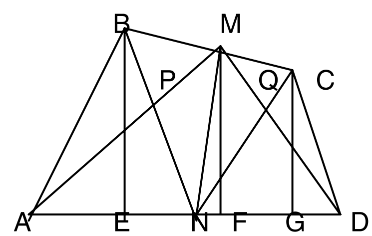


222. Tracemos BE, MF y CG perpendiculares a AD, entonces BCGE es un trapecio y MF es su paralela media, AN = ND = b; $A_{\Delta ABN} = A_{\Delta ABP} + A_{\Delta APN} = \dfrac{b \cdot BE}{2}$ (I)

$A_{\Delta NCD} = A_{\Delta NDQ} + A_{\Delta CDQ} = \dfrac{b \cdot CG}{2}$ (II)

$A_{\Delta AMD} = A_{\Delta APN} + A_{\Delta NQD} + A_{MPNQ} = b \cdot MF$

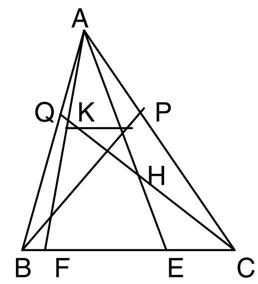
$= \dfrac{b(BE + CG)}{2} = \dfrac{b \cdot BE}{2} + \dfrac{b \cdot CG}{2} = A_{\Delta ABN} = A_{\Delta NCD}$ (III). De (I), (II) y (III) tenemos $A_{\Delta APN} + A_{MPNQ} + A_{\Delta NQD}$ $= A_{\Delta ABP} + A_{\Delta APN} + A_{\Delta NQD} = A_{\Delta CDQ}$, es decir, $A_{MPNQ} = A_{\Delta ABP} + A_{\Delta CDQ}$



223. Sea O el centro de la circunferencia, se trazan los radios OR, OA y OB formándose los ángulos rectos OAT, OBT y BOA. De esta forma OATB es un cuadrado de lado r (radio de la circunferencia). Se prolonga QR hasta cortar a OB en D y RS hasta cortar a OA en C, entonces AQ = CR = r – 6. En el triángulo OCR rectángulo en C se aplica el teorema de Pitágoras y como OC = r – 3, entonces se resuelve la ecuación de segundo grado en variable r obteniendo r = 15.

224. En el triángulo ABC rectángulo en A se tiene AC = 75 cm, AB = 100 cm y AD altura relativa a BC. Aplicando Pitágoras se tiene BC = 125 cm. Utilizando el teorema de los catetos se tiene que BD = 80 cm y por resta de segmentos CD = 45 cm. Tracemos DR ⊥ AC y DS ⊥ AB, tenemos que hallar CR y BS, aplicando Pitágoras en los triángulos CRD y ADR se obtiene CR = 27 cm, aplicando Pitágoras nuevamente en el triángulo BDS se llega a que BS = 64 cm.

225. Prolonguemos AH hasta E un punto de BC y prolonguemos AK hasta F un punto de BC. En los triángulos AHB y EHB tenemos:
∠ ABH = ∠ EBH por ser BF bisectriz del ∠ B,
∠ AHB = ∠ BHE = 90° y BH lado común,
entonces los triángulos ABH y EHB son iguales y EH = AH. De igual forma se prueba que los triángulos AKC y FKC son iguales y se cumple que FK = AK. De aquí que en el triángulo AEF se tiene que KH es la paralela media de EF y por tanto KH y BC son paralelas.

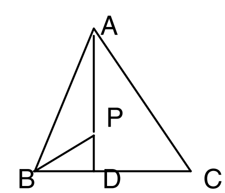


226. Sean E, G y F los puntos medios de AC, BD y BC, respectivamente, y sean H e I los puntos de intersección de EG con AB y CD, respectivamente. Entonces EF es paralela media a AB y FG es paralela media de CD, de aquí se tiene que EF = FG y el triángulo EFG es isósceles de base EG por lo que ∠ FEG = ∠ EGF. También se tiene que ∠ BHE = ∠ FEG y ∠ CIG = ∠ FGE, por lo tanto ∠ BHE = ∠ CIG y ∠ AHE = ∠ GID.

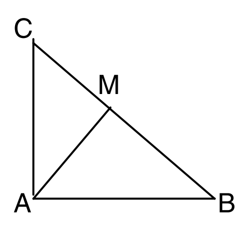
227. Sean R y S los puntos medios de BA y BC, respectivamente, entonces los triángulos BQS y BPR son equiláteros pues son isósceles ya que QS y PR son medianas de la hipotenusa de triángulos rectángulos y tienen un ángulo de 60° por lo que PR = RB = PB y QB = BS = SQ, también ∠ RBS = 120° = ∠ PQB. Además MS || AB (paralela media) y MS = RB (por ser R punto medio). Entonces MSBR es un paralelogramo, ∠ BRM = 60°. Tenemos que ΔPRM = ΔQSM = ΔPBQ por tener dos lados y el ángulo comprendido, respectivamente, iguales y PM = MQ = PQ por elementos homólogos de triángulos iguales, por lo tanto el triángulo MPQ es equilátero.

228. Sean a y 1 –a los dos pedazos de alambre, con a se construye el rectángulo y con 1– a el cuadrado. Sean x, y los lados del rectángulo con x = 2y y 2(x + y) = a, resolviendo el sistema se tiene x = $\frac{a}{3}, y = \frac{a}{6}, x \cdot y = \frac{a^2}{18} = A_1$. El lado del cuadrado es $\frac{1-a}{4}$ y su área A_2 es igual a $\frac{a^2 - 2a + 1}{16}$ sumando ambas áreas y resolviendo la ecuación de segundo grado en variable a se tiene que:
a = $\frac{1}{17}, A_1 = \frac{1}{5202} m^2 \ y \ A_2 = \frac{16}{289} m^2$.

229. Prolonguemos AP hasta cortar a BC en el punto D, tenemos: AC + CD > AD en el triángulo ACD
PD + BD > PB en el triángulo PBD,
pero CD = BC – BD y AD = AP + PD, luego
AC + BC – BD > AP + PD
PD + BD > PB
AC + BC > AP + PB ⇒ AB + AC + BC > AB + AP +PB. Por lo que $P_{\Delta APB} < P_{\Delta ABC}$.

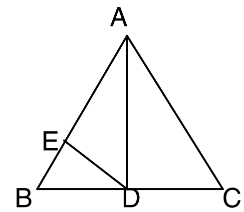


230. ABC es un triángulo rectángulo en A y AM altura relativa a BC con $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{2}$.
Sea CM = x, BM = x + 2 y BC = 2x + 2
Utilizando el teorema de los catetos para los dos catetos y dividiendo ambas ecuaciones se llega al valor de x = 1,6 y BC = 5,2 unidades.



231. Al unir M con A y D se forman los triángulos MCD y ABM que son semejantes ya que ∠ ABM = ∠ MCD = 90° y ∠ BAM = ∠ MDC por ser complementarios del mismo ángulo (∠ AMB) estableciendo la razón de semejanza y multiplicando se llega a la igualdad pedida.

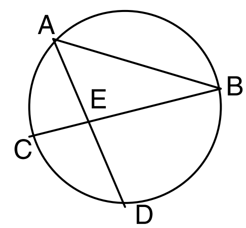
232. Tracemos AD $\perp$ BC, entonces los triángulos ABD y BED son semejantes y se cumple que:



$$\frac{BD}{AB} = \frac{DE}{AD} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow BE = \frac{BD^2}{AB} = \frac{(\frac{1}{2}AB)^2}{AB} = \frac{AB}{4}$$

En el triángulo BDE rectángulo en E aplicando Pitágoras se llega a que la razón entre DE y AB es $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

233. Tracemos AC y CD, entonces los triángulos ABE y CDE son semejantes y se establece la proporcionalidad entre los elementos homólogos ahora tenemos
$\angle$ ACB = 90° y AE·DE = BE·CE
AE(AD – AE) = BE(BC – BE)
AE·AD – (CE^2 + AC^2) = BE·BC – BE^2
AE·AD – [$(BC – BE)^2$ + AC^2] = BE·BC – BE^2
Trabajando algebraicamente se llega a la igualdad pedida.



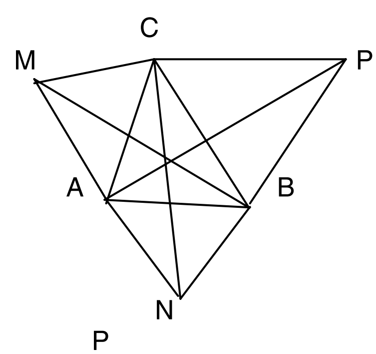
234. Sea l la longitud del lado del triángulo ABC equilátero PQ = x, PR = y, PS = z, entonces el área del triángulo ABC es igual a la suma de las áreas de los triángulos APC, APB y BCP e igual al semiproducto de uno de los lados por su altura, de ahí se puede deducir la igualdad pedida.

235. Utilizando la fórmula de la bisectriz de un ángulo de un triángulo en función de sus lados resulta fácil llegar a lo pedido.
Otra vía pudiera ser trazando AM $\perp$ BM siendo M un punto de BC y utilizando Pitágoras varias veces también se puede obtener la longitud pedida.

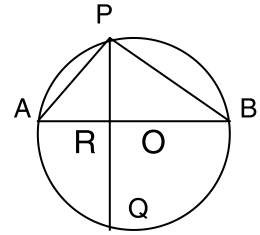
236. $(c + h)^2 – h^2 = c^2 + 2ch + h^2 – h^2 = c^2 + 2ch$; pero $a^2 + b^2 = c^2$ y $c·h = a·b$, entonces se tiene que $(c + h)^2 – h^2 = a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$ por lo que es un triángulo rectángulo de hipotenusa c + h.

237. Sea un triángulo rectángulo ABC con AC = $\frac{AB + BC}{2}$ y AB + AC + BC = $\frac{AB \cdot BC}{2}$, de aquí se tiene AB = 6, $AB^2 + AB^2 = BC^2$, pero BC = 2AC – AB = 2AC – 6, luego $6^2 + AC^2 = (2AC – 6)^2$ y AC = 8, BC = 10. Como el triángulo ABC es rectángulo, la mediana relativa a la hipotenusa es el radio de la circunferencia circunscrita, por lo que es igual a la mitad de la hipotenusa, es decir, 5 u.

238. En $\triangle$APB y $\triangle$CBN tenemos:
AB = BN, BP = BC y $\angle$ ABP = $\angle$ ABC + 60°
$\angle$ CBN = $\angle$ ABC + 60°,
por lo que $\angle$ ABP = $\angle$ CBN y los triángulos APB y CBN son iguales de donde CN = AP.
De igual forma para otra pareja de triángulos que sean iguales para llegar a que CN = BM = AP.

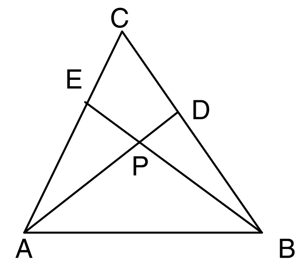


239. Circunferencia de centro O y diámetro AB = h. Sea P $\neq$ A y B un punto cualquiera de la circunferencia. Cuando P se mueve en el arco AB, se obtienen todas las posibles áreas de los triángulos rectángulos de hipotenusa h. Tracemos PQ una cuerda con PQ $\perp$ AB y sea R el punto donde se cortan.



Luego: PQ ≤ AB, $\frac{PQ}{2} \leq \frac{AB}{2} \Rightarrow$ PR ≤ $\frac{AB}{2}$ y PR ≤ $\frac{h}{2}$. $A_{\Delta ABP}$ = ½ AB·PR ≤ ½ h·$\frac{h}{2}$ ≤ 0,25h^2

240. Sea el triángulo ABC con BC = a, AC = b, m_a y m_b se cortan perpendicularmente en P.
Sea AP = 2x y BP = 2y, entonces
$c^2 = (2x)^2 + (2y)^2 = 4(x^2 + y^2)$ (I)



$(\frac{b}{2})^2 = (2x)^2 + y^2$ y $b^2 = 16x^2 + 4y^2$ (II)

$(\frac{a}{2})^2 = x^2 + (2y)^2$ y $a^2 = 4x^2 + 16y^2$ (III)

De (II) + (III) y utilizando (I) se tiene c = $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{5}}$

241. Tracemos EF entonces el área del triángulo ECF es igual a $\frac{EC \cdot CF}{2}$. Ahora en el triángulo CDE rectángulo en D se tiene $EC^2 = CD^2 + DE^2$. En los triángulos CDE y BFC se tiene BC = CD, ∠ CDE = ∠ CBF = 90° y ∠ ECP = ∠ BCF por complementos del ∠ BCE, luego los triángulos CDE y BFC son iguales y EC = CF entonces el área del triángulo ECF es $\frac{EC^2}{2} = \frac{CD^2 + DE^2}{2}$,por tanto $\frac{CD^2 + DE^2}{2} = \frac{5}{8}$ CD^2 y DE = $\frac{CD}{2} = \frac{AD}{2}$ por lo que el punto E debe estar situado en el punto medio de AD.

242. Sea $A_1 = \sqrt{49(49-29)^2(49-40)}$ = 420 u^2 y P_1 = 98 u, el área y el perímetro del triángulo dado. Consideremos que x son los lados iguales y 98 – 2x la base del triángulo buscado con área 420u^2 entonces h = $\sqrt{x^2 - (49-x)^2}$, h = 7$\sqrt{2x-49}$ y formando la ecuación con el valor numérico del área se obtienen tres valores para x que son: 29, 37 y $\frac{113}{2}$, este último no sirve y el primer valor es para el caso inicial por lo que en el nuevo triángulo sus lados miden 37, 37 y 24.

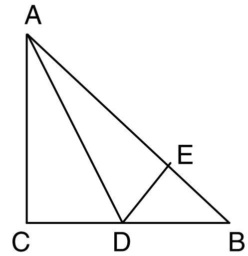
243. En triángulos DXM y DAB tenemos: ∠ DAB común y ∠ DXM = ∠ DAM por correspondientes, entonces los triángulos son semejantes y se tiene que $\frac{XM}{AB} = \frac{DM}{BD} = \frac{DX}{AD}$ también son semejantes los triángulos AXM y ADC y se cumple que $\frac{XM}{CD} = \frac{AX}{AD} = \frac{AM}{AC}$ y $\frac{XM}{AB} + \frac{XM}{CD} = \frac{DX}{AD} + \frac{AX}{AD}$ y haciendo los cálculos pertinentes se prueba lo pedido.

244. Sea el triángulo ABC con AB = 6 cm, AC = 3 cm; AD, BE y CF alturas que se cortan en O y AD = $\frac{CF + BE}{2}$, A = $\frac{AB \cdot CF}{2} = \frac{AC \cdot BE}{2} = \frac{BC \cdot AD}{2}$, luego 2CF = BE y BC = 4 cm.

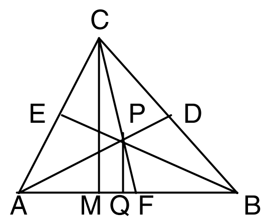
245. Sea el triángulo ABC con AB = c = 15, AC = b = 14 y BC = a = 13. La circunferencia de centro O es tangente a los lados BC y AC en M y N, respectivamente, y O es un punto de AB; OM = ON = r.

Tracemos OC, entonces el área del triángulo ABC es igual a la suma de las áreas de los triángulos AOC y BOC y se cumple $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{AC}{2}r + \frac{BC}{2}r$, luego r = $\frac{56}{9}$ siendo $\mathrm{p} = \frac{\mathrm{a+b+c}}{2}$ = 21.

246. AD = $\frac{2}{AC+BC} \cdot \sqrt{AB \cdot AC \cdot p(p-5)}$ y AD = $\frac{12}{25}\sqrt{26}$. En el triángulo ACD rectángulo en C se tiene CD = 2,4 luego BD = 2,6.
Como los triángulos BDE y ABC son semejantes se tiene $\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{BE}$ y BE = 1, entonces AE = 12.

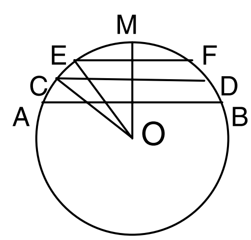


247. Los triángulos APF y BPF tienen igual área, también los triángulos BPD y CDP y CPE y APE. Tracemos CM ⊥ AB y PQ ⊥ AB, entonces los triángulos PFQ y CFM son semejantes y CM = 3PQ. De aquí que el área del triángulo ABP sea la tercera parte del área del triángulo ABC, de igual forma para los otros lados, de aquí que las áreas de los 6 triángulos son iguales.



248. Sea m = AB, n = AC, l = AD con $A_1 = m^2$, $A_2 = n^2$, $A_3 = l^2$, $A_2 - A_1 = n^2 - m^2 = 31$; (n – m)(n + m) = 31, como n + m > n – m y 31 es un número primo, entonces n + m = 31 y n – m = 1, de aquí n = 16u y
m = 15u de aquí CD = 1 y AD = 17, $A_3 = 289$ u^2.

249. Tracemos OM perpendicular a las tres cuerdas; sean AB = 20, CD = 16 y EF = 8
$r^2 = 10^2 + d^2 = 8^2 + (d + d_1)^2 = 4^2 + (d + 2d_1)^2$
resolviendo el sistema se tiene:
$d_1 = \sqrt{6}$ u y $d = 5\sqrt{6}$ u, por lo que r = $5\sqrt{10}$ u.



250. Como BCFG y AECD son cuadrados, entonces: BC = CF = FG = GB y AE = ED = DC = CA.
Los triángulos AHE y CHB son semejantes y $\frac{AE}{BC} = \frac{HA}{HC}$ se tiene $AH = \frac{AE \cdot HC}{BC} = \frac{AE(AC-AH)}{BC}$

y AH = $\frac{AE^2}{BC+AE}$ (I)

De igual forma para los triángulos ACJ y GBJ que son semejantes y se cumple CJ = $\frac{AE \cdot BC}{AE+BC}$ (II).

El área del triángulo ABH es $\frac{AH \cdot BC}{2} = \frac{BC \cdot AE^2}{2(AE+BC)}$ por (I)

El área del triángulo AJH es $\frac{AC \cdot CJ}{2} = \frac{AE}{2} \cdot \frac{AE \cdot BC}{AE+BC} = \frac{AE^2 \cdot BC}{2(AE+BC)}$ por (II). Por lo tanto

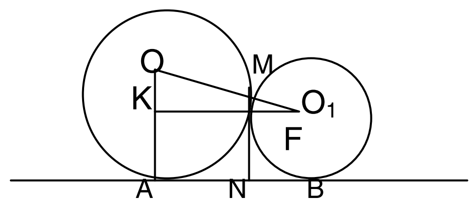
$A_{\Delta ABH} = A_{\Delta AJH}$ y $A_{\Delta ABH} = A_{\Delta AHI} + A_{\Delta AIB}$; $A_{\Delta AJC} = A_{\Delta AHI} + A_{HIJC}$, luego $A_{HIJC} = A_{\Delta AIB} = 24$ cm^2

251. Denotemos por t el área del triángulo ABC y T_1, T_2 y T_3 las áreas de t_1, t_2 y t_3, respectivamente. Sea c la longitud de AB y sean c_1, c_2 y c_3 las longitudes de las bases paralelas a AB de los triángulos t_1, t_2 y t_3, respectivamente. Como los triángulos t_1, t_2 y t_3 son semejantes, se tiene que la razón entre las áreas de los triángulos es proporcional a la razón del cuadrado de sus bases, es decir: $\frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{t}} = \frac{c_1}{c}; \frac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{t}} = \frac{c_2}{c}; \frac{\sqrt{T_3}}{\sqrt{t}} = \frac{c_3}{c}$ y sumando las tres igualdades anteriores y despejando se tiene

t = $(\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2} + \sqrt{T_3})^2$ = 144.

252. Sean a y b los catetos, c la hipotenusa, entonces a + b = $\frac{a \cdot b}{2}$ = –p y a·b = q, luego –p = $\frac{q}{2}$ y q = –2p, como D = $p^2 - 4q \geq 0$. El valor mínimo es para D = 0, es decir $(a + b)^2 + 8p = 0$ y resolviendo la ecuación se tiene a + b = 8, p = –8 y q = 16, resolviendo el sistema en variables a y b se tiene a = b = 4. Los catetos miden 4.

253. Tracemos OO_1 que pasa por M, MN $\perp$ AB, a y B son los puntos de tangencia de la tangente común y F $\in$ O_1K. Tracemos O_1K || AB Con K $\in$ OA. Los triángulos OO_1K y MO_1F son semejantes y $\frac{OK}{MF} = \frac{OO_1}{MO_1}$



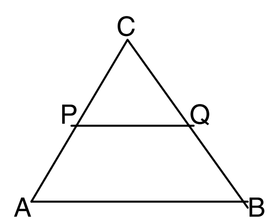
$\frac{OA - AK}{MF} = \frac{R + r}{r}$ y $\frac{3 - 1}{\mathrm{MF}} = \frac{3 + 1}{1}$ de aquí MF = ½ MN = MF + FN = $\frac{3}{2}$

254. Tracemos AD bisectriz del ángulo A, entonces $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$, es decir, $\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BD}$; $\frac{b}{CD} = \frac{c}{BD} = \frac{b + c}{a}$, luego CD = $\frac{a \cdot b}{b + c}$. Como $\angle$ C es común a los triángulos ABC y ACD por lo que son semejantes y $\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{AC}$ entonces a = $\sqrt{b^2 + bc}$.

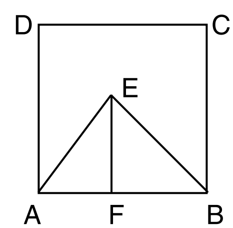
255. Los triángulos ABC y CPQ son semejantes y se cumple que $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{CP}$ por lo que $\frac{\mathrm{h} \cdot \mathrm{AB}}{\mathrm{h} \cdot \mathrm{PQ}} = \frac{AC}{CP}$,

luego h·AB = $\frac{AC}{CP}$·h·PQ y h·AB = $\frac{AB}{PQ}$·h·PQ

como la razón entre las áreas de los triángulos ABC y PQC es 2, se forma la razón y haciendo los cálculos correspondientes se llega a PQ = $\sqrt{2}$.



256. Sea r el radio de la circunferencia inscrita al triángulo ABE y O su centro, r = $\frac{1}{3}$ EF y EF = 3r (I), como AB^2 = p y AB = $\sqrt{p}$ = AE



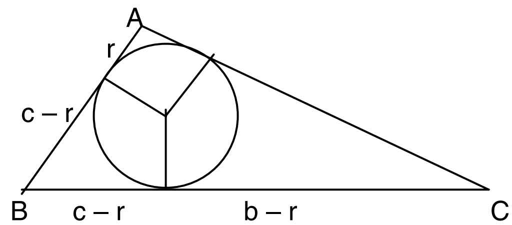
EF = $\frac{\sqrt{3p}}{2}$ de acuerdo a (I) se llega a r = $\frac{\sqrt{3p}}{6}$ cm

A = $\frac{\pi \cdot p}{12}$ cm^2.

257. Se tiene a = b – r + c – r = b + c – 2r
b + c = a + 2r y $b^2 + c^2 = a^2$

ahora A = ½·b·c = ½ $\left[\frac{(b+c)^2-(b-c)^2}{2}\right]$

y haciendo las sustituciones convenientes



se llega a que A = r^2 + ar y la razón entre las áreas es $\frac{\pi \cdot r}{r+a}$.

258. Sean D y E los puntos de intersección de B'C' con AB y con AC, respectivamente; y sea B'F la perpendicular trazada a AC a partir del punto B', entonces B'F = $\sqrt{r^2-1}$. B'C' = 2B'E + EA y B'C' = 2 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ B'F + 1 – EF y haciendo los cálculos se llega a B'C = $\sqrt{3r^2-3}$ + 1.

259. Prolonguemos AB a partir de B hasta F de forma que AF = 1; entonces el triángulo ACF es equilátero. Sea G el punto del segmento AF con ∠ BCG = 20°, entonces los triángulos BCG y DCE son semejantes de razón 2; BC = 2EC y los triángulos ABC y FGC son iguales por lo que

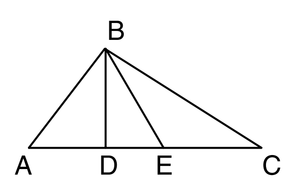
$A_{\Delta ACF} = A_{\Delta ABC} + A_{\Delta FGC} + A_{\Delta BCG}$ y $\frac{\sqrt{3}}{4} = 2A_{\Delta ABC} + 4A_{\Delta CDE}$ y $\frac{\sqrt{3}}{8} = A_{\Delta ABC} + 2A_{\Delta FGC}$.

260. a) En el triángulo ABD tenemos: O es el punto medio de BD, entonces AO es mediana de BD, de igual forma DN es mediana de AB por lo que DM = 2MN.

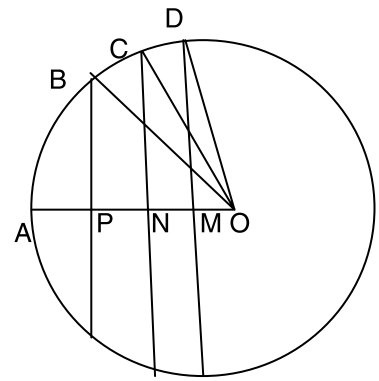
b) OM = $\frac{1}{3}$ AO, como AO = OC, entonces OM = $\frac{1}{3}$OC, como AC = AO + OC se tiene AC = 3OM + 3 OM, de aquí se prueba la igualdad pedida.

261. Sea ABC un triángulo isósceles de base AB = 30 cm, sea CD la altura relativa a AB, cuya longitud es 20 cm. Sea AE la altura relativa al lado BC, el área del triángulo es de 300 cm^2.
En el triángulo DBC por Pitágoras se halla BC = 25 cm y por la fórmula del área se puede calcular AE = 24 cm. Como las dos alturas que se buscan son iguales, el problema está resuelto.

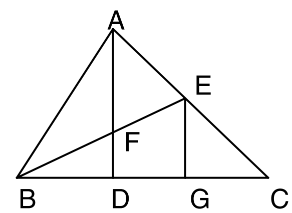
262. Sea el triángulo ABC con AC = 60 cm,
BD = 12 cm, altura del lado AC,
BE = 13 cm, mediana del lado AC,
por Pitágoras se tiene DE = 5 cm,
AD = AE – DE = 25 cm y CD = AC – AD = 35 cm.
Por Pitágoras BC = 37 cm y AB = $\sqrt{769}$ cm que son los lados restantes.



263. OA = OB = OC = OD = r;
MD = 10u; NC = 8u y PB = 4u.
Sea x la distancia entre cada pareja de cuerdas consecutivas, entonces:
$r^2 = OM^2 + MD^2$;
$r^2 = ON^2 + NC^2 = (OM + x)^2 + NC^2$;
$r^2 = OP^2 + BP^2 = (OM + 2x)^2 + BP^2$.
Sustituyendo por los valores conocidos y resolviendo el sistema se tiene x = $\sqrt{6}$ u
$r^2 = \frac{550}{4}$ u^2 y el área buscada es $\frac{550}{4}\pi$ u^2



264. Tracemos EG donde G es el punto medio de CD. En el triángulo ADC se tiene EG ││AD por ser paralela media y EG = ½ AD.
Los triángulos BDF y BGE son semejantes
$A_{\Delta BDF} = \frac{1}{2} BD \cdot h_{BD} = \frac{1}{4} BG \cdot h_{BG}$
$A_{\Delta BGE} = \frac{1}{2} BG \cdot h_{BG}$; $A_{\Delta BDF} = \frac{1}{4} A_{\Delta BGE}$
$A_{\Delta BCE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} BG \cdot h_{BG} = \frac{3}{4} BG \cdot h_{BG}$



Hallando las áreas que se necesitan se concluye que la razón buscada es $\frac{1}{5}$.

265. Sean M y N los puntos medios de QR y ST, respectivamente, entonces MN││RS││QT y MN = $\frac{RS + QT}{2}$. Entonces QARP es un paralelogramo al igual que PSCT, QP = AR; QA = RP y PT = SC; PS = CT. Tenemos que QT = QP + PT = AR + SC, QT + RS = AR + SC + RS = AC = 5; por lo que MN = 2,5.

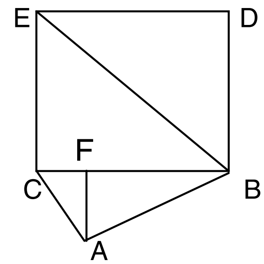
266. Tracemos TE││AC, entonces los triángulos BET y BCF son semejantes y se cumple que $\frac{ET}{FC} = \frac{BT}{BF} = \frac{BE}{BC}$ y haciendo los cálculos correspondientes BT = 2BG$\cdot\frac{BE}{BC}$.
También son semejantes los triángulos TEG y GFA y se cumple que $\frac{ET}{AF} = \frac{TG}{GF} = \frac{EG}{AG}$ y se cumple que TG = BG$\cdot\frac{ET}{AF}$. Ahora BT + TG sustituyendo y calculando se llega a que la razón buscada es $\frac{1}{3}$.

267. Sean P, Q y R los centros de las 3 circunferencias, estos puntos son colineales y pertenecen a la recta que biseca el ángulo formado por las tangentes dadas. Sean A, B y C los puntos de tangencia y sean PS y QT segmentos paralelos a r_1. De esta forma se determinan los triángulos PQS y QRT que son semejantes y $\frac{PQ}{QR} = \frac{PS}{ST} = \frac{QS}{RT}$; pero se tiene que PQ = x + y, QR = y + z, QS = y – x, TR = z – y por lo que $\frac{x+y}{y+z} = \frac{y-x}{z-y}$ haciendo los cálculos correspondientes se tiene $\frac{x}{y} = \frac{y}{z}$.

268. Sea O el centro de la circunferencia inscrita y P el centro de la circunferencia circunscrita A', B' y C' son los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con cada uno de los lados del triángulo ABC. Entonces OA' = OB' = OC' = r (radio de la circunferencia inscrita) por otro lado PA = PB = PC = R (radio

de la circunferencia circunscrita). Los triángulos A'OB y C'OB son iguales, también los triángulos B'OA y C'OA, de igual forma A'OC y B'OC. Entonces A'B = BC', AB' = AC', A'C = B'C = r y B'C = A'C = r. Sumando las igualdades tenemos: A'B + A'C + AB' + B'C = BC' + AC' + r + r. De aquí BC + AC = AB + d (diámetro de la circunferencia inscrita), AB es el diámetro de la circunferencia circunscrita.

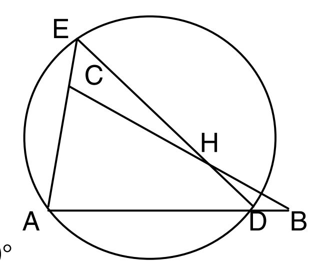
269. Sea ABC un triángulo rectángulo cualquiera con hipotenusa BC, AF es su altura relativa
AB + AC > BC; EB > BC; EB > $\sqrt{2}$ BC
$EB^2 = 2\ BC^2$ por la fórmula del área se llega que AB·AC = BC·AF
AF ≤ ½ BC, 2AF ≤ BC



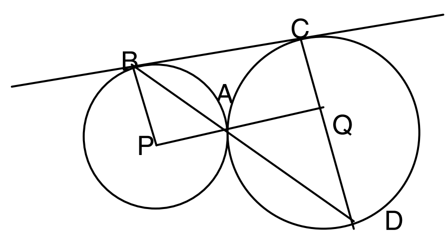
2AF·BC ≤ BC^2; 2AB·AC ≤ BC^2; BC^2 + 2AB·AC ≤ 2 BC^2 continuando el trabajo algebraico se llega a probar que AB + AC ≤ EB, es decir, la suma de los catetos de un triángulo rectángulo no es mayor que la diagonal de un cuadrado construido sobre la base de la hipotenusa.

270. Sea MN la recta tangente a la circunferencia en P que corta a t y t' en M y N, respectivamente. Se tiene OM: distancia de O a M; ON distancia de O a N; PA y PB cuerdas; Q y R puntos de contacto entre OM y ON con la circunferencia dada. Los arcos PR y RB son iguales al igual que los arcos PQ y QA, entonces sumando ordenadamente los arcos se tiene que la suma de los arcos PR y PQ es igual a la suma de los arcos RB y QA y la misma es igual a 90°, de donde se obtiene que ∠ MON = 90°. Entonces PM·PN = OP^2 = 1, pero PM = MA y PN = NB por lo tanto PM·PN = AM·BN = 1

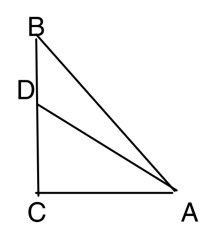
271. Sea α = ∠ EHA y β = ∠AHD, bastará probar que α + β = 180°. Designemos por ∠ 1 al ∠ DAH y por ∠ 2 al ∠ CAH.
En el triángulo HAB se tiene HA = HD por ser radios de una misma circunferencia y ∠ ADH = ∠ 1. Análogamente ∠ AEH = ∠ 2.
Entonces en Δ ADH el ∠ β = 180° – 2(∠ 1) y en el Δ AHE ∠ α = 180° – 2(∠ 2) sumando ordenadamente ∠ α + ∠ β = 360° – 2(∠ 1 + ∠ 2), pero ∠ 1 + ∠ 2 = ∠ BAC = 90° luego ∠ α + ∠ β = 180° y los puntos D, H y E están alineados.



272. Sea P el centro de la circunferencia menor, tracemos PB y PA hasta cortar a CD en Q, se tiene que: PB ⊥ BC y QC ⊥ BC por lo que PB ││ QC.
El triángulo PAB es isósceles de base AB, luego ∠ PBA = ∠ PAB; el triángulo QAD también es isósceles de base QA, luego ∠ QAD = ∠ QDA pero ∠ PAB = ∠ QAD, entonces ∠ PBA = ∠ QDA, de esta forma PB ││QD, pero PB ││ QC de aquí que los puntos C, Q y D están alineados y CD es un diámetro.



273. Sea AD la bisectriz del ∠ BAC, como la razón entre las áreas de los triángulos BAD y ACD es 2:1 entonces CD = ½ BD
En el triángulo ACD tenemos:



$$\frac{CD}{sen\angle\frac{A}{2}} = \frac{AD}{sen\angle 3B} = \frac{AC}{sen\angle ADC}\ . \text{ (I)}$$

En el triángulo ADB tenemos $\dfrac{BD}{sen\angle\frac{A}{2}} = \dfrac{AD}{sen\angle B} = \dfrac{AB}{sen\angle(180^\circ - ADC)} = \dfrac{AB}{sen\angle ADC}$. (II)

De (I) se tiene $\dfrac{BD}{2sen\angle\frac{A}{2}} = \dfrac{AC}{sen\angle ADC} \Rightarrow BD = \dfrac{2AC\cdot sen\frac{A}{2}}{sen\angle ADC}$ sustituyendo en (II) se tiene 2AC = AB,

de igual forma se tiene AD = $\dfrac{AC\cdot sen3B}{sen\angle ADC} = \dfrac{AB\cdot senB}{sen\angle ADC}$ y ACsen3B = 2ACsenB $\Rightarrow$ sen3B = 2senB; senB(3 – 4 sen^2B) = 2senB de aquí 3 – 4sen^2 B = 2 y sen^2 B = ¼ $\Rightarrow$ sen B = ± ½ , pero 0° < B < 180° luego sen B = ½ y $\angle$ B = 30°, $\angle$ C = 90°, $\angle$ A = 60°.

274. Sea PD una de las alturas del tetraedro (todas tienen igual longitud). Tracemos PT $\perp$ AB y en el triángulo ATP tenemos

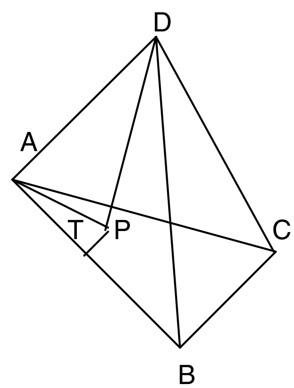
$\angle$ PAT = 30° y cos $\angle$ PAT = $\dfrac{AT}{AP}$, es decir,

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{AT}{AP} = \dfrac{1}{AP}$ por ser T el punto medio

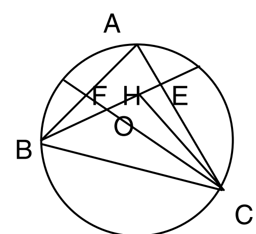
de AB, luego AP = $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

En el triángulo APD rectángulo en P tenemos

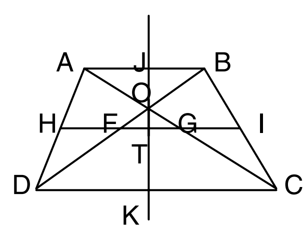
$PD^2 = AD^2 - AP^2$ y PD = $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ cm.



275. Sean BE y CF las alturas trazadas desde B y C, respectivamente, y sea H el ortocentro. Sea O el circuncentro y tracemos HO, entonces
$\angle$ BOC = 2$\angle$ BAC = 120°, también
$\angle$ BHC = $\angle$ FHE = 180° – $\angle$ BAC = 120°.
Dado que BCHO es cíclico y $\angle$ OHB = $\angle$ OCB = 30° por ser el triángulo OBC isósceles con $\angle$ BOC = 120°.
Pero $\angle$ BHF = 180° – $\angle$ BHC = 180° – 120° = 60°, lo que indica que OH es la bisectriz del $\angle$ BHF.



276. Sean J y K los puntos donde la recta OT corta a las bases AB y CD, respectivamente. Tracemos GI, FH y AK, entonces HF = ½ AB por ser la paralela media de AB en el triángulo ABD y GI = ½ AB por igual razón en el triángulo ABC. HF + GI = AB; HG = ½ CD y FI = ½ CD paralelas medias, luego HG + FI = CD.
Además HG = HF + FG, FI = FG + GI, de donde CD – AB = 2 FG y
FG = ½ (CD – AB), por otra parte HT = HF + FT = ½ AB + ½ ·½ (CD – AB) = ¼ (AB + CD). Ahora en el trapecio AJKD, tenemos que el área del trapecio AJKD es igual a la suma de las áreas de los triángulos ADK y AJK = ½ DK·h + ½ AJ·h, donde h es la altura del trapecio ABCD, luego:
A_{AJKD} = ½ (DK + AJ)h = h(RT + HR) = h(HT) = ¼ (AB + CD)h = ½ A_{ABCD} luego A_{KCBJ} = A_{AJKD} = ½ A_{ABCD}.



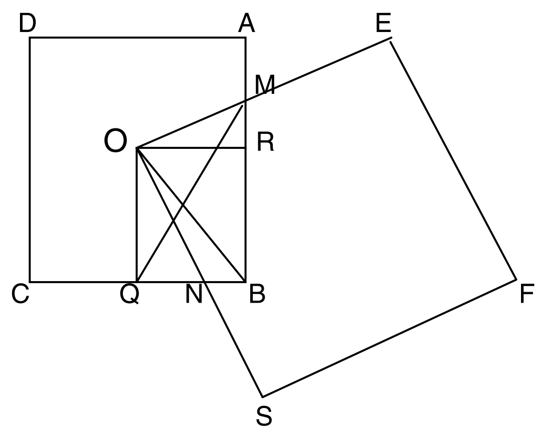
277. Prolonguemos el segmento AF, duplicando este segmento a partir de F. De esta forma obtenemos el punto A_1, entonces A_1O es la mediatriz del lado BC. Trazamos una recta perpendicular al segmento A_1O a partir de A_1 la circunferencia de centro O y radio ½ AO corta a esta recta en los puntos B y C. El problema sólo admite solución si el punto F está en el interior de la circunferencia de radio ½ AO y centro O_1 donde O_1 es el punto medio del segmento OA.

278. a) La cónica es una elipse x = cos φ; y = sen φ.

b) r = $\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{2}\cos\varphi}$ y r + ½ rcos φ = 2 y r = 2 – ½ x por lo que 2r = 4 – x; 2 $\sqrt{x^2+y^2}$ = 4 – x llegando a la ecuación $3x^2 + 4y^2 + 8x = 16$ que es equivalente a la ecuación $3(x+\frac{4}{3})^2 + 4y^2 = \frac{64}{3}$ y $M(-\frac{4}{3};0)$

c) $M(\frac{4}{3};\pi)$ en coordenadas polares.

279. Tracemos OQ ⊥ BC, OR ⊥ AB y OB, entonces OR = OQ = 3/2 y OB = $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$



A_{OMBQ} = ½ (OQ + BM)BQ = 21/8

OM = $\sqrt{OR^2 + RM^2} = \sqrt{\dfrac{9}{4}+\dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

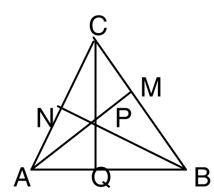
y sen ∠ MOQ = $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$; QM = $\sqrt{\dfrac{9}{4}+4} = \dfrac{5}{2}$

cos ∠ MOQ = $\dfrac{\dfrac{5}{2}+\dfrac{9}{4}-\dfrac{25}{4}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{10}}{2}\cdot\dfrac{3}{2}} = -\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

cos ∠ QON = $\dfrac{3}{2ON}$ = cos(∠ MOQ – 90°) = sen ∠ MOQ = $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$; luego ON = $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

QN = $\sqrt{ON^2 - OQ^2} = \sqrt{\dfrac{5}{2}-\dfrac{9}{4}} = \dfrac{1}{2}$; el área del triángulo OQN es A = $\dfrac{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}}{2} = \dfrac{3}{8}$ el área del cuadrilátero OMBN es la diferencia de las áreas del cuadrilátero OMBQ y el triángulo OQN que es igual a $\dfrac{21}{8}-\dfrac{3}{8}=\dfrac{9}{4}$ u^2.

280. Sea x = A_{MPC}, y = A_{APN}. Se sabe que si dos triángulos tienen la misma altura, entonces sus áreas son proporcionales a sus bases, de acuerdo a la figura se tiene que:



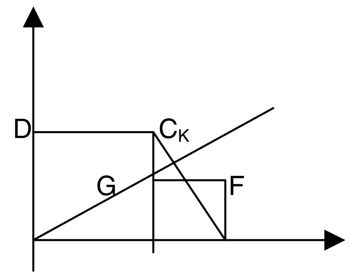
h_{AB} = $\dfrac{AQ}{QB} = \dfrac{40}{30} = \dfrac{S_1+y+S_4}{S_2+S_3+x} = \dfrac{40+y+84}{30+35+x}$ (I)

h_{AC} = $\dfrac{CN}{NA} = \dfrac{35}{x} = \dfrac{S_2+S_3+S_1}{x+S_4+y} = \dfrac{30+35+40}{x+84+y}$ (II)

$h_{AB} = \dfrac{BM}{CM} = \dfrac{84}{y} = \dfrac{S_4 + x + S_3}{y + S_1 + S_2} = \dfrac{x + 84 + 35}{y + 40 + 30}$ (III)

En (I) tenemos: 4x – 3y = 112 (IV) y en (II): y = 2x – 84 sustituyendo en (III) llegamos a 4x – 3(2x – 84) = 112, entonces x = 70 y = 56. Ambos valores satisfacen la tercera ecuación. Luego A_{ABC} = 30 + 35 + 40 + 56 + 70 + 84 = 315u^2.

281. a) Sea A(0;0), B(l;0), C(l;l), D(0;l), E(l + m;0), F(l + m;m), G(l;m), ecuación de la recta que pasa por A y G: y = m/l x cuya pendiente es m/l, ecuación de la recta que pasa por E y C: $\dfrac{y}{x - l - m} = -\dfrac{l}{m}$ como el producto de las pendientes es –1 esas rectas se cortan perpendicularmente.



b) La circunferencia circunscrita al cuadrado ABCD es la que tiene como centro el punto O(½ l;½ l) y radio $\dfrac{\sqrt{2}}{2}l$, cuya ecuación es

$(x – ½ l)^2 + (y – ½ l)^2 = ½\, l^2$; $\dfrac{m}{l}x = -\dfrac{l}{m}x + \dfrac{l}{m}(l + m)$ de aquí

x = $\dfrac{l^2(l+m)}{l^2+m^2}$, y = $\dfrac{lm(l+m)}{1^2+m^2}$; $K\left(\dfrac{l^2(l+m)}{l^2+m^2};\dfrac{lm(l+m)}{l^2+m^2}\right)$ que al evaluarlo en la ecuación de la circunferencia cumple dicha ecuación.

∴El punto K pertenece a la circunferencia circunscrita a ABCD.

282. Se tiene que ∠ BAC + ∠ EAH + ∠ ABC + ∠ DBG = ∠ ACB + ∠ FCI = 180°.

$A_{ABC} = \dfrac{AB \cdot AC \cdot sen\angle BAC}{2} = \dfrac{AB \cdot BC \cdot sen\angle ABC}{2} = \dfrac{AC \cdot BC \cdot sen\angle ACB}{2}$

$A_{AEH} = \dfrac{AB \cdot AC \cdot sen\angle EAH}{2} = \dfrac{AB \cdot AC \cdot sen\angle BAC}{2} = A_{ABC} = A_1$

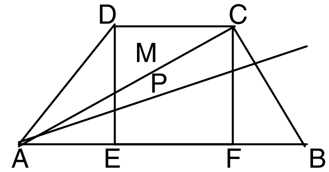
$A_{CIF} = \dfrac{AC \cdot BC \cdot sen\angle ACB}{2} = A_{ABC} = A_2$

$A_{BGD} = = \dfrac{AB \cdot BC \cdot sen\angle ABC}{2} = A_{ABC} = A_3$

∴A_1 = A_2 = A_3 y los tres triángulos tienen áreas iguales.

283. El primer círculo divide al plano en dos regiones, el segundo círculo corta al anterior en dos puntos y divide a cada una de las dos regiones en 2, o sea, 2·1, el tercer círculo corta a las anteriores en dos puntos y divide a cada una de las dos regiones en dos, obteniéndose como total de regiones:
2 + 2·1 + 2·2 +2·3 + ... + 2(n – 1) = 2 + 2[1 + 2 + ... + (n – 1)] = 2 + n(n – 1).

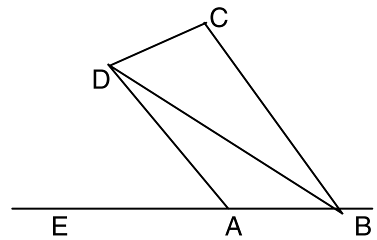
284. Sean DE y CF alturas, tracemos la diagonal AC y sea M el punto donde AC corta a DE, entonces
$\dfrac{AE}{AF} = \dfrac{ME}{CF}; ME = \dfrac{AE \cdot CF}{AF} = \dfrac{4 \cdot 7}{12} = \dfrac{7}{3}$.



En el triángulo AED tenemos:

AD = $\sqrt{DE^2 + AE^2} = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65}$ y $\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{EP}{PD}$ siendo P el punto en que la bisectriz del $\angle$ BAD corta a DE. $\dfrac{4}{\sqrt{65}} = \dfrac{EP}{DE - EP} = \dfrac{EP}{7 - EP}$ de aquí queda EP = $\dfrac{4}{7}\left(\sqrt{65} - 4\right)$ ahora $\dfrac{7}{3} > \dfrac{4}{7}\left(\sqrt{65} - 4\right)$, ya que 97 > 12$\sqrt{65}$ $\approx$96,... como EM > MP entonces la bisectriz corta a BC.

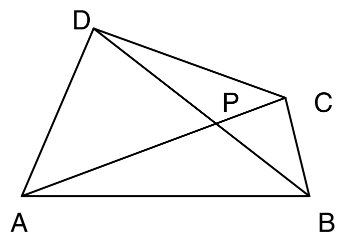
285. Tracemos BD, entonces el triángulo BCD es rectángulo e isósceles y $BD^2 = 2BC^2$ (I)



$\angle$ BAD = 105° y cos (60° + 45°) = $\dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

y sen 105° = $\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$. En el triángulo ABC se tiene $BD^2 = AD^2 + AB^2 = 2AB{\cdot}AB{\cdot}\cos 105°$ y $BD^2 = 356 + 80\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$u. De (I) se tiene que $BC^2 = 178 + 40\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$ y el área del cuadrilátero ABCD $A_{ABCD} = A_{ABD} + A_{BCD} = (89 + 40\sqrt{6})u^2$

286. a) $A_{ABP} = 18 = \dfrac{AP \cdot PB \cdot sen\angle ABP}{2}$ y sen $\angle$ APB = $\dfrac{36}{AP \cdot PB}$ $A_{CPD} = 24$ $= \dfrac{CP \cdot PD \cdot sen\angle CPD}{2}$, sen $\angle$ CPD = $\dfrac{48}{CP \cdot PD}$ y



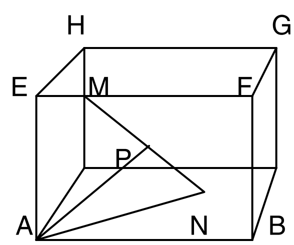
sen $\angle$ CPD = $\dfrac{48}{CP \cdot PD}$ y sen $\angle$ BPC = $\dfrac{32}{BP \cdot PC}$

Pero $\angle$ BPC + $\angle$ APB = 180°, luego

sen $\angle$ BPC = sen $\angle$ APB y $\dfrac{36}{AP \cdot PB} = \dfrac{32}{BP \cdot PC}$ por lo que $\dfrac{AP}{PC} = \dfrac{9}{8}$

b) $A_{APD} = \dfrac{AP \cdot PD}{2} sen\angle APD = \dfrac{AP \cdot PD}{2} \cdot \dfrac{48}{PC \cdot PD}$ y $A_{APD} = 108\ cm^2$.

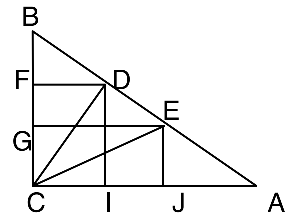
287. MN = BD, luego MN = $\sqrt{2}$ a; AP $\perp$ MN por ser distancia. Tracemos AN, entonces el triángulo ANP es rectángulo en P y AN = $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ a.



Entonces AP = $\sqrt{AN^2 - NP^2}$; pero P es punto medio de MN, luego NP = $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ a y

AP = $\sqrt{\dfrac{5}{4}a^2 - \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

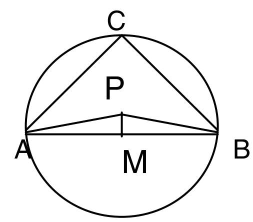
288. Tracemos CD y CE puntos de trisección
de la hipotenusa con CD = sen x y CE = cos x.
Tracemos FD $\parallel$ GE $\parallel$ AC y DI $\parallel$ EJ $\parallel$ BC.
En el triángulo CID tenemos $sen^2x = CI^2 + DI^2$.
En el triángulo CJE tenemos $cos^2x = CJ^2 + EJ^2$;
pero CJ = 2 CI y DI = 2EJ por lo que
$sen^2x + cos^2x = 5(CI^2 + EJ^2)$ y



$CI^2 + EJ^2 = \dfrac{1}{5}$, pero los triángulos AEJ, DEH y BDF son iguales, entonces $\dfrac{AB}{3} = \sqrt{FD^2 + FB^2} =$

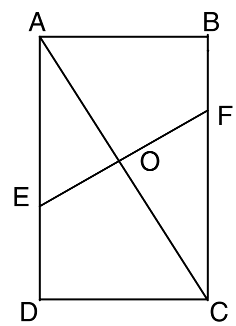
$= 3\sqrt{CI^2 + EJ^2} = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

289. Sea ABC un triángulo con AB = 10 cm,
$\angle$ C = 60° y P es el centro de la circunferencia
circunscrita al triángulo ABC.
Tracemos AP y PB radios y PM $\perp$ AB, entonces
$\angle$ APB = 120° en el triángulo PMB rectángulo en
M con $\angle$ MPB = 60° y MB = ½ AB = 5.



En el triángulo PMB se tiene PB = $\dfrac{BM}{sen 60°} = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$ que es el radio de la circunferencia circunscrita.

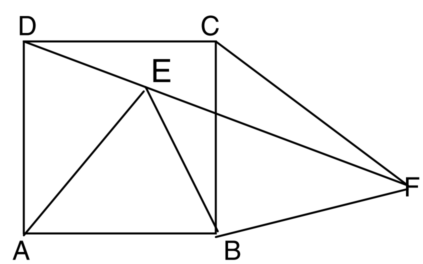
290. Sean A, B, C, D los vértices del rectángulo
con AD = BC = 12cm y CD = AB = 9cm, EF es
la longitud del doblez, AC es una diagonal del
rectángulo. Se cumple que AC $\perp$ EF y se cortan
en O. AC = $\sqrt{AD^2 + CD^2}$ = 15 cm. En triángulos
ACD y AOE semejantes se cumple que
$\dfrac{AC}{AE} = \dfrac{CD}{OE} = \dfrac{AD}{AO}$ (I) pero los triángulos AOE y OCF
son iguales, porque $\angle$ AOE = $\angle$ COF = 90°,



$\angle$ OAE = $\angle$ OCF por alternos y AE = CF por lo que tienen dos parejas de ángulos iguales y el lado que se opone al mayor ángulo entonces OE = OF = ½ EF y AO = OC = ½ AC. De (I) tenemos:

OE = $\dfrac{CD \cdot AO}{AD} = \dfrac{22{,}5}{4}$ = 5,625 luego EF = 11,25 cm.

291. El triángulo FCD es isósceles de
base DF; $\angle$ DCF = 150°, luego
$\angle$ CDF = $\angle$ CFD = 15°; $\angle$ ADE = 75°
y $\angle$ AED = 75° por ser el triángulo
AED isósceles de base DE; el triángulo
EBF es isósceles de base EF, $\angle$ BF = 90°,
luego $\angle$ BFE = $\angle$ BEF = 45°. Como



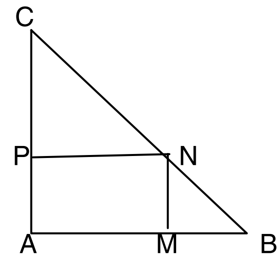
$\angle$ DEA + $\angle$ AEB + $\angle$ BEF = 180°, entonces los puntos D, E y F están alineados.

292. Los triángulos ABC y PNC son semejantes

y $\dfrac{c}{l} = \dfrac{b}{b-l}$ de aquí bc – cl = bl

$l = \dfrac{bc}{b+c}$ entonces el área de AMNP es

$A_{AMNP} = \dfrac{b^2c^2}{(b+c)^2}$



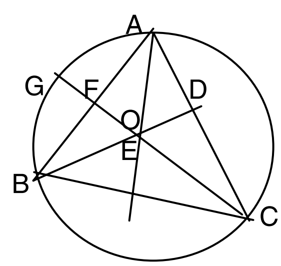
293. Los triángulos que se forman son semejantes y sus ángulos miden 30°, 60° y 90°.

BM = $\dfrac{\sqrt{3}}{2}AB = 5\sqrt{3}$, como MN es paralela media en el triángulo ABC, luego MN = 5. En el triángulo MNP tenemos: NP = $\dfrac{\sqrt{3}}{2}MC = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$; PQ es paralela media y PQ = 5/2. Teniendo

H = $5\sqrt{3} + 5 + \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ + ... = $5\sqrt{3}$ (1 + ½ + ¼ + ...) + 5 (1 + ½ + ¼ + ...)

= $5(\sqrt{3} + 1)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ = $5(\sqrt{3} + 1)\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}$ y H = $10\sqrt{3} + 10$.

294. Tracemos AG, como OC corta a la circunferencia circunscrita en G.
En los triángulos AFO y COD tenemos:
∠ AOF = ∠ COD por opuestos por el vértice, ∠ AFO = ∠ CDO = 90° y
∠ FAO = ∠ OCD = ∠ GCB, pero
∠ GCB = ∠ GAB por estar inscritos en el



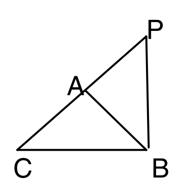
mismo arco; ∠ GAB = ∠ GAF. En los triángulos AFO y AFG tenemos: ∠ AFO = ∠ AFG = 90°,
∠ FAO = ∠ GAF, por lo que ∠ AOG = ∠ AGO por lo tanto el triángulo AOG es isósceles de base OG.

295. a < b < c, sea a = 2n, b = 2m como
$a^2 - 2a - 35 < 0$ o $(a-7)(a+5) < 0$ y $b^2 - 8b + 12 < 0$ o $(b-6)(b-2) < 0$
cuya solución es –5 < a < 7 cuya solución es 2 < b < 6
Como a y b son números pares y positivos entonces a = 2, 4, 6 y b = 4, pero a < b, entonces a = 2, como a + b > c y a < b < c, luego c = 5. Los tres lados miden 2, 4 y 5.

296. El circunradio del triángulo ABP es igual a ½ BP por ser rectángulo en A.
Los triángulos ABC y CBP son semejantes,

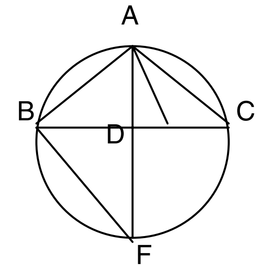
luego: $\dfrac{BC}{CP} = \dfrac{AB}{BP} = \dfrac{AC}{BC}$,

es decir, $\dfrac{c}{BP} = \dfrac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}$ y



BP = $\dfrac{c}{b}\sqrt{c^2+b^2}$, por lo tanto el radio buscado es r = $\dfrac{c}{2b}\sqrt{c^2+b^2}$.

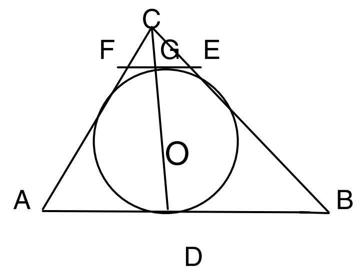
297. Tracemos BF, entonces en los triángulos ABF y ACD se tiene: $\angle$ ABF = $\angle$ ADC = 90° y $\angle$ BFA = $\angle$ BCA por estar inscritos en el mismo arco por lo que los triángulos ABF y ACD son semejantes y $\frac{AF}{AC} = \frac{AB}{AD}$. AF·AD = AB·AC.



298. Sea BC isósceles de base AB = 2a y altura CD = h, EF tangente en G a la circunferencia Inscrita de centro O y EF $\|$ AB;

AC = BC = $\sqrt{a^2+h^2}$;

A_{ABC} = a·h = $\frac{AB+BC+AC}{2}\cdot r = \frac{2a+2\sqrt{a^2+h^2}}{2}\cdot r$



= (a + $\sqrt{a^2+h^2}$)r, de aquí que r = $\frac{ah}{a+\sqrt{a^2+h^2}}$, como EF $\|$ AB; entonces $\frac{CG}{CD} = \frac{EF}{AB}$,

$$EF = \frac{AB\cdot CG}{CD} = \frac{2a(h-2r)}{h} = \frac{2a\left(h-\frac{2ah}{a+\sqrt{a^2+h^2}}\right)}{h} = 2a\left(\frac{\sqrt{a^2+h^2}-a}{h}\right)^2.$$

299. En el triángulo ABC se cumple que sen A = $\frac{a}{2r}$, cos A = $\frac{\sqrt{4R^2-a^2}}{2R}$,

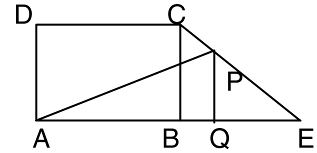
sen B = $\frac{b}{2r}$ y cos B = $\frac{\sqrt{4R^2-b^2}}{2R}$; $\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{1-\cos(A+B)}}{\sqrt{1+\cos(A+B)}}}{\frac{\sqrt{1-\cos(A-B)}}{\sqrt{1+\cos(A+B)}}}$

$$= \frac{sen^2 A\cos^2 B-\cos^2 A sen^2 B}{1-2senAsenB-\cos^2 A\cos^2 B+sen^2 A sen^2 B}$$

$$= \frac{\frac{a^2}{4R^2}\cdot\frac{4R^2-b^2}{4R^2}-\frac{4R^2-a^2}{4R^2}\cdot\frac{b^2}{4R^2}}{1-\frac{2ab}{4R^2}-\frac{4R^2-a^2}{4R^2}\cdot\frac{4R^2-b^2}{4R^2}+\frac{a^2b^2}{16R^4}} = \frac{a+b}{a-b}$$

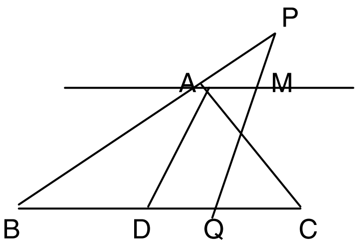
300. Tracemos PQ $\perp$ AE y AP, entonces CE = $\sqrt{a^2+b^2}$ por ser BEC rectángulo en B; pero CP = CE – EP, los triángulos BEC y QEP son semejantes y PE = $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$·PQ, QE = $\frac{a}{b}\cdot$PQ

A_{APCD} = A_{ABCD} + A_{BQPC} – A_{AQP}

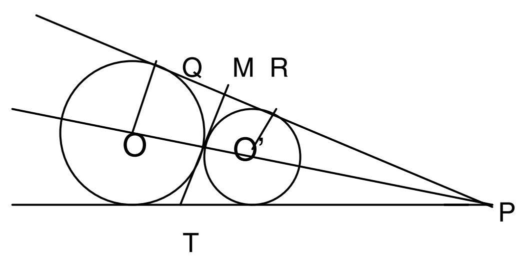


$= ab + \dfrac{b+PQ}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot BQ - A_{AEP} + \dfrac{QE \cdot PQ}{2} = \dfrac{3}{4}$ ab = a·PQ luego ¾ b

$= \dfrac{b \cdot PE}{\sqrt{a^2+b^2}}\ y PE = \dfrac{3}{4}\sqrt{a^2+b^2}$ CP = $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{4}$.



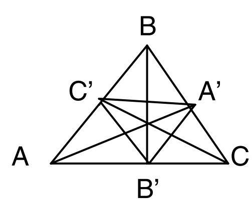
301. Los triángulos AMP y BAD son semejantes porque ∠ MAP = ∠ ABD por correspondientes y ∠ AMP = ∠ BDA por tener sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido entonces se cumple $\dfrac{MP}{AD} = \dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AM}{BD}$ (I). Los triángulos AMQ y CDA son semejantes porque ∠ AMQ = ∠ CDA por tener sus lados paralelos y dirigidos en el sentido contrario también ∠ MAQ = ∠ ACD por alternos y se cumple $\dfrac{AQ}{AC} = \dfrac{MQ}{AD} = \dfrac{AM}{CD}$ (II). Como BD = CD entonces de (I) y (II) se tiene que $\dfrac{MP}{AD} = \dfrac{MQ}{AD}$ de aquí que MP = MQ y M es el punto medio de PQ.



302. Sean OQ y O'R perpendiculares a PQ, tangentes en Q y R, respectivamente, entonces OQ | | O'R por lo que $\dfrac{O'P}{O'R} = \dfrac{O'P+25}{OQ}$ y O'P = $\dfrac{225}{7} cm, PT = \dfrac{288}{7}$ cm. En el triángulo O'RP rectángulo en R se tiene

PR = $\sqrt{O'P^2 - O'R^2} = \dfrac{216}{7}$ cm. Los triángulos O'RP y PMT son semejantes y $\dfrac{PT}{PR} = \dfrac{MT}{O'R}$ por lo que MT = 12 cm, entonces MN = 24 cm y A_{MNP} = ½ MN·PT = $\dfrac{3456}{7}$ cm^2.

303. Se tiene que:



$A_{ABC} - A_{A'B'C'} = A_{B'AC'} + A_{C'BA'} + A_{A'CB'}$ (I)
tenemos $A_{B'AC'}$ = ½ AB'·AC'sen A
= ½ ABcos A·ACcos Asen A
= ½ AB·ACsen Acos^{2}A = A_{ABC}·cos^{2}A
de igual forma $A_{C'BA'} = A_{ABC}$·cos^{2}B y
$A_{A'CB'} = A_{ABC}$·cos^{2}C, sustituyendo en (I) se tiene

$A_{ABC} - A_{A'B'C'} = A_{ABC}$(cos^{2}A + cos^{2}B + cos^{2}C) y $\dfrac{A_{A'B'C'}}{A_{ABC}}$ = 1 – cos^{2}A – cos^{2}B – cos^{2}C.

De ser el triángulo obtusángulo la razón es cos^{2}A + cos^{2}B + cos^{2}C – 1.

304. Sea l el lado del cuadrado, tracemos PQ $||$ AB

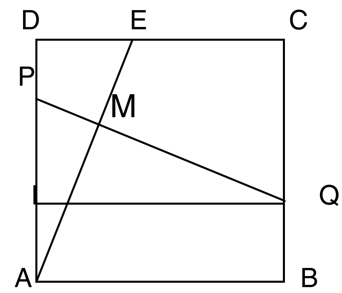
cos 30° = $\dfrac{a}{AE} \Rightarrow$ AE = $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$ y PQ = $\dfrac{a}{sen60°} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$

luego PQ = AE, en el triángulo AMP se tiene

tan 30° = $\dfrac{2PM}{AC}$ y PM = $\dfrac{a}{3}$, pero $\dfrac{PQ}{PM} = 2\sqrt{3}$

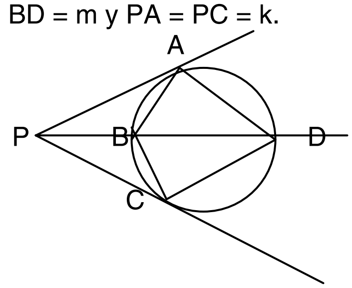
$$\frac{PM + MQ}{PM} = 2\sqrt{3} y \frac{MQ}{Pm} = 2\sqrt{3} - 1$$

luego $\dfrac{PM}{MQ} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}-1} = \dfrac{2\sqrt{3}+1}{11}$.

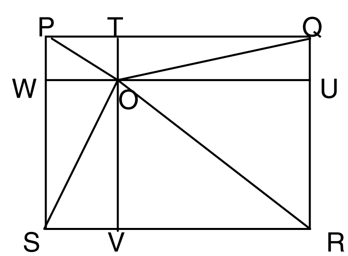


305. Sea BC = a, CD = b, DA = c, AB = d, PB = n, BD = m y PA = PC = k.
En el triángulo APD tenemos usando el teorema de Stewart que:
$d^2(m + n) = c^2n + k^2m - mn(m + n)$
$a^2(m + n) = b^2n + k^2m - mn(m + n)$
pero PB·PD = $AP^2 \Rightarrow (m + n)k^2$ luego
$d^2(m + n) = c^2n$ y $a^2(m + n) = b^2n$ por

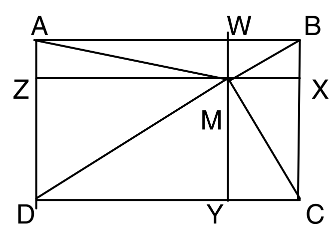
lo que $\dfrac{d^2}{a^2} = \dfrac{c^2}{b^2}\ y\ \dfrac{d}{a} = \dfrac{c}{b} \Rightarrow$ ac = bd.



306. Sea PQRS el rectángulo y O el punto interior, sean TV y UW dos rectas perpendiculares que pasan por O como se muestra en la figura.
Sea a = PT, b = TQ, x = OR. OP = 3, OQ = 12, OS = 11, QU = c y UR = d.
De acuerdo al teorema de Pitágoras:
I) $a^2 + c^2 = 9$, II) $a^2 + b^2 = 121$, III) $b^2 + c^2 = 144$,
IV) $b^2 + d^2 = x^2$; de III – IV se tiene
$x^2 - 144 = d^2 - c^2$ y restando I de II se tiene $d^2 - c^2 = 121 - 9 = 112$.
Entonces $x^2 - 144 + (d^2 - c^2) = 256$ y x = 16.

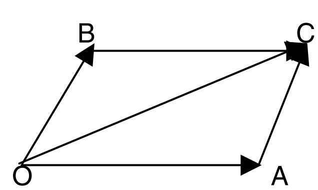


307. Tracemos WY $\perp$ CD y XZ $\perp$ BC, consideremos que $\angle$ BAM = α, $\angle$ CBM = β, $\angle$ DCM = γ, $\angle$ ADM = δ, AM = a, BM = b, CM = c y DM = d.
El área S del rectángulo ABCD es la suma de las áreas de los rectángulos menores AWMZ, BXMW, CYMX y DZMY. De aquí que:
S = $d sen\delta \cdot b cos\beta + a sen\alpha \cdot c cos\gamma + b sen\beta \cdot d cos\delta + c sen\gamma \cdot a cos\alpha$
= $ac(sen\alpha \cdot cos\gamma + sen\gamma \cdot a cos\alpha) + bd(sen\beta \cdot cos\delta + sen\delta \cdot cos\beta) = ac\ sen(\alpha + \gamma) + bd\ sen(\beta + \delta) \le ac + bd$.

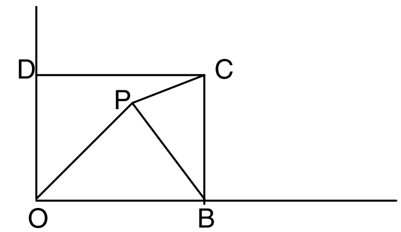


308. Los vectores $\overrightarrow{a_1} = \dfrac{\vec{a}}{|\overrightarrow{a_1}|}$ y $\overrightarrow{b_1} = \dfrac{\vec{b}}{|\overrightarrow{b_1}|}$ son unitarios;

$|\overrightarrow{a_1}| = |\overrightarrow{b_1}|$ = 1. Sea $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b_1}$ y construyamos el paralelogramo OACB que es un rombo, ya que OA = OB y la diagonal OC es la bisectriz del ángulo AOB. Por eso el vector $\vec{c} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{b_1}$ forma ángulos iguales con $\overrightarrow{OA}\ y\ \overrightarrow{OB}$ y con los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.



309. Sean O(0;0), B(l;0), C(l;l), D(0;l)
y P(x;y), se tiene que $x^2 + y^2 = OP^2 = 4b^2$ (I)
$(l - x)^2 + y^2 = BP^2 = 4b^2$ (II)
$(l - x)^2 + (l - y)^2 = b^2$ (III)



De (II) – (III) se tiene y = $\dfrac{l^2 + 3b^2}{2l}$

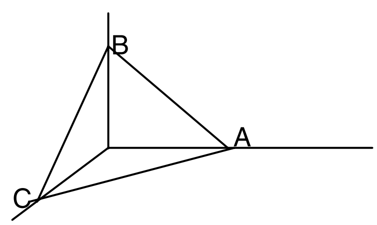
De (II) – (I) se tiene x = ½ l. Sustituyendo x, y en (I) se tiene $l = \dfrac{b}{2}\sqrt{5 \pm \sqrt{7}}$.

310. $y^2 = 25 - x^2 = k^2 - (x - 6)^2$ y x = $\dfrac{61 - k^2}{12}$, el producto escalar $\left(6 - \dfrac{61-k^2}{12}; y\right)\left(\dfrac{k^2 - 61}{12}; y\right)$ = 0 que al resolver la ecuación queda k = $\sqrt{11}$

311. Sean $M(x_M;2x_M - 7)$, $N(x_N; 2x_N - 7)$, entonces MN = $\sqrt{5}\left|x_M - x_N\right|$;

AM = $\sqrt{(x_M + 1)^2 + (2x_M - 13)^2}$; AN = $\sqrt{(x_N + 1)^2 + (2x_N - 13)^2}$, como AM = AN al igualar y resolver queda $(x_M + x_N) = 10$ que al sustituir en alguna de las ecuaciones anteriores se tiene que M(5 + $\sqrt{3}$; 3 + 2$\sqrt{3}$) y N(5 – $\sqrt{3}$; 3 – 2$\sqrt{3}$).

312. $AB^2 = a^2 + b^2$; $BC^2 = b^2 + c^2$;
$AC^2 = a^2 + c^2$, como a < b < c entonces
b + c > a + b y b + c > a + c.
Entonces BC es el mayor de los tres lados
y se tiene: $BC^2 = b^2 + c^2 < a^2 + b^2 + a^2 + c^2$
y se cumple que $BC^2 < AB^2 + AC^2$ por lo que
el triángulo es acutángulo.



313. a) Sea $V_1(6;2)$ y $V_2(-4;2)$, la ecuación de las asíntotas son:

y = 5(x – 1) = 5x – 5 (I)
para m = $-\dfrac{1}{5}$
la ecuación queda x + 5y – 16 = 0
que se corta con la recta (I) en el punto
P$\left(\dfrac{41}{26};\dfrac{75}{26}\right)$

C_1: $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = \dfrac{529}{26}$

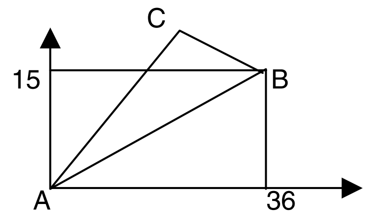
y = –5(x – 1) = –5x + 5 (II)
para m = $\dfrac{1}{5}$
la ecuación queda x – 5y + 4 = 0
que se corta con la recta (II) en el punto
Q$\left(\dfrac{21}{26};\dfrac{25}{26}\right)$

C_2: $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = \dfrac{529}{26}$

b) E: $\dfrac{(x-1)^2}{a^2} + \dfrac{(y-2)^2}{b^2} = 1$ que al sustituir por las coordenadas de los puntos P y Q hallados en el inciso anterior y resolviendo el sistema se llega a obtener $a^2 = \dfrac{725}{676}$ y $b^2 = \dfrac{29}{26}$ entonces

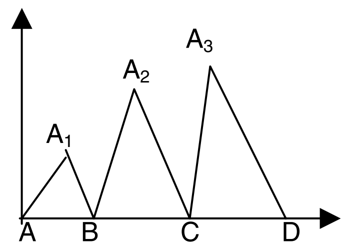
E: $\dfrac{(x-1)^2}{\dfrac{725}{676}} + \dfrac{(y-2)^2}{\dfrac{754}{676}}$ = 1.

314. Sea AB la base del triángulo ABC
r_{AB}: 5x – 12y = 0, el área del triángulo ABC
es A_{ABC} = ½ AB·h pero h = $\frac{|5x-12y|}{13}$. Para
que la distancia sea mínima debe cumplirse
que h = $\frac{1}{13}$ entonces AB = $\sqrt{36^2+15^2}$ = 39 y A_{ABC} = 1,5.



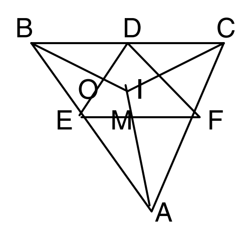
315. El cuadrilátero formado por los cuatro vértices dados tiene área 30. Los otros dos vértices tienen que colocarse en el exterior de este cuadrilátero de manera que su área sea mayor que 30. Pero el hexágono está formado por dos trapecios y cuatro triángulos cuyas bases y alturas son longitudes enteras. Aunque el producto de base por altura o suma de bases por altura sea impar y, por tanto, su área no necesariamente entera, la simetría en la figura asegura que el área total es entera. Luego el valor mínimo del área es 31 que ocurre cuando los otros dos vértices son (–3;1) y (–3;–1).

316. Sean A(0;0), B(1;0), C(4;0), D(9;0) entonces
ABA_1, BA_2C,... son triángulos equiláteros de lados
1, 3, 5,…, de aquí se obtiene que:
$A_1\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right), A_2\left(1+\frac{3}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right), A_3\left(1+3+\frac{5}{2};\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$
Para n = 1, n = 3, n = 5, respectivamente. En general
el vértice superior de uno de estos triángulos equilátero



tiene coordenadas [1 + 3 + ... + 2(n – 1) – 1 + ½ (2n –1);(2n – 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$]
pero la suma 1 + 3 + 5 + … + (2k + 1) = k^2, donde los vértices en cuestión tienen coordenadas $\left[(n-1)^2+\frac{2n-1}{2};(2n-1)\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, es decir [$n^2$ – n + ½ ; (2n – 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$] y estos pertenecen a la función
x = f(y) = $\frac{1}{3}y^2+\frac{1}{4}$ donde y = g(n) = (2n – 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, es decir, se tiene la función compuesta x = f(g(n)) cuya gráfica es claramente una parábola con el vértice situado en (¼;0).

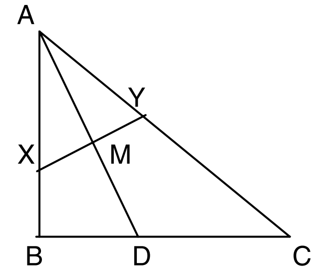
317. Sean BC = ½ (AB + AC), E y F son los
puntos medios de AB y AC, D el punto de BC
tal que BD = BE, CD = CF. Las bisectrices BI,
CI de los ángulos B y C son perpendiculares a
las bases DE y DF de los triángulos isósceles
BDE y CDF, respectivamente.



Luego el punto I centro del incírculo del triángulo ABC es también el centro del circuncírculo del triángulo DEF y por tanto, la perpendicular IM que pasa por EF pasa por el punto medio M de EF. Pero la intersección I de la bisectriz AI de un ángulo del triángulo AEF y de IM ⊥ EF pertenece a la circunferencia circunscrita al triángulo AEF. Las perpendiculares en E y F a AB y a AC, respectivamente, se cortan en el centro O de la circuncircunferencia al triángulo ABC. Por consiguiente la circunferencia circunscrita al triángulo AEF tiene por diámetro AD y como pasa por I, el ángulo AIO es recto y se tiene que AI ⊥ IO.

318. En el triángulo ABC tenemos cos A = $\frac{3}{5}$

en el triángulo ABD tenemos cos ½ A = $\frac{3}{AD}$



pero cos ½A = $\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ de

aquí que AD = $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ $y\ \text{AM} = \frac{3\sqrt{5}}{4}$. En el triángulo ABD, BD = $\frac{3}{2}$, como los triángulos ABD y AXM son semejantes se tiene:

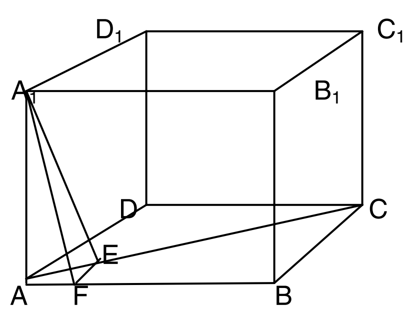
$\frac{BD}{XM} = \frac{AD}{AX} = \frac{AB}{AM}$ sustituyendo y calculando XM = $\frac{3\sqrt{5}}{8}$ ahora como los triángulos AXM y AMY son iguales porque AM es lado común, $\angle$ XMA = $\angle$ YMA = 90° y $\angle$ XAM = $\angle$ YAM = ½ A, entonces XM = MY y XY = 2XM = $\frac{3\sqrt{5}}{4}$.

Otra solución por Geometría Analítica.

319. Se tiene que a + b = tg ½γ(atgα + btgβ) = $\frac{sen\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}\left(a\frac{sen\alpha}{\cos\alpha} + b\frac{sen\beta}{\cos\beta}\right)$

(a + b)(cosαcosβcos½ γ) = asenαcosβsen½ γ) + bsenβcosαcosβsen½γ
a cosαcosβcos½ γ + bcosαcosβcos½ γ = asenαcosβsen½ γ) + bsenβcosαcosβsen½γ
acondicionando los cálculos convenientemente se tiene que:
acosβcos(α + ½ γ) = –bcosαcos(β + ½γ), pero α + ½γ + β + ½γ = 180° entonces
α + ½γ = 180° – (β + ½γ) y cos(α + ½γ) = –cos(β + ½γ) se tiene que
acosβcos(β + ½ γ) = bcosαcos(β + ½γ) para cos(β + ½γ) ≠ 0, entonces acosβ = bcosα
si cos(β + ½γ) = 0 se tiene (β + ½γ) = 90° y (α + ½γ) = 90°, por lo que α = β, si
acosβ = bcosα aplicando la ley de los senos se tiene que asenβ = bsenα por lo que se cumple que tanα = tanβ y α = β, por lo tanto para cualquier caso α = β y el triángulo ABC es isósceles.

320. Se tiene que AC es la diagonal del rombo por lo que es la bisectriz del $\angle$ BAD.



$A_{ABCD} = 7^2$sen 120° = $\frac{49\sqrt{3}}{2}$ cm^2 en el triángulo AA_1E rectángulo en E se tiene que A_1E = h

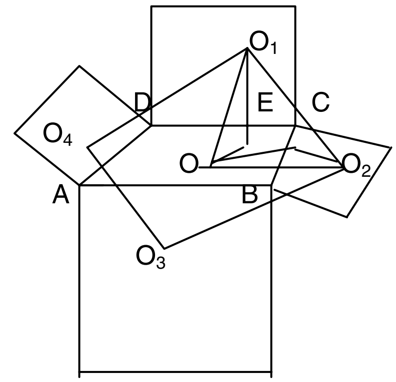
= $\sqrt{AA_1^2 - AE^2} = \sqrt{49 - AE^2}$ (I)

En el triángulo AFA_1 rectángulo en F se tiene
AF = AA_1cos60° = 7/2 cm. En el triángulo AFE rectángulo en F se tiene

AE = $\frac{AF}{\cos 30°} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$ cm. Sustituyendo en (I) se tiene h = $\sqrt{49 - \frac{49}{3}} = \frac{7\sqrt{6}}{3}$ de aquí que el volumen

V = $\frac{49\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{7\sqrt{6}}{3} = \frac{343\sqrt{2}}{2}$ cm^3.

321. Tracemos las diagonales AC y BD que se cortan en O. Tracemos OO_1 y OO_2 y los segmentos OE y OF con E y F los puntos medios de los lados CD y BC, respectivamente, tenemos que:
$OE = FC = O_2F$, $O_1E = OF$ y los ángulos OEO_1 y OFO_2 son iguales por tener sus lados perpendiculares y ser ambos obtusos entonces los triángulos OEO_1 y OFO_2 son iguales y $OO_1 = OO_2$; $\angle\ OO_1E = O_2OF$.
Como $O_1E \perp OF$, entonces $OO_1 \perp OO_2$, es decir, $\angle\ O_1OO_2 = 90°$ por lo que el triángulo O_1OO_2 es rectángulo e isósceles.
De igual forma para los triángulos restantes.



322. Cada uno jugó 7 partidas con el otro en total jugó 14 partidas.

Antonio ---→	Benigno	Benigno ---→	Cirilo	Cirilo ---→	Antonio
2 victorias	2 derrotas	0 victoria	0 derrota	4 victorias	4 derrotas
3 empates	3 empates	7 empates	7 empates	0 empate	0 empate
2 derrotas	2 victorias	0 derrota	0 victoria	3 derrotas	3 victorias

Resumen:	Victorias	Empates	Derrotas	Puntos
Antonio	5	3	6	6,5
Benigno	2	10	2	7
Cirilo	4	7	3	7,5

Cumpliendo todas las afirmaciones realizadas por los participantes.

323. Total de vértices: $\binom{36}{3}$ = 7 140. Total de tríos no alineados:

I) 14 $\binom{6}{3}$ = 280 II) $4\left[\binom{5}{3}+\binom{4}{3}+\binom{3}{3}\right]$ = 4(10 + 4 + 1) = 60

Total de tríos de vértices no alineados: 7 140 – (280 + 60) = 6 800 y total de triángulos: 6 800 – 32 = 6 768.

324.

a	b	c
d	e	f
g	h	I

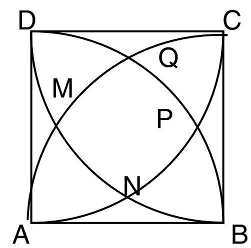
bd	ace	bf
aeg	bdhf	cei
dh	gei	fh

a^2e^2cg	$b^3f^2d^2h$	c^2e^2ai
$b^2d^3h^2f$	$a^2c^2e^4g^2f$	$b^2dh^2f^3$
ae^2g^2i	$bd^2h^3f^2$	ce^2gi^2

Después de dos operaciones más, entonces todas las variables que representan a los números +1 ó –1 indistintamente estarán elevadas a exponentes pares.
$\therefore$ Después de 4 pasos todos los números que aparecen en las casillas son +1.

325. El área máxima que el primer jugador puede garantizar es $\frac{T}{4}$ que la obtiene situando X como el punto medio de BC, en cualquier posición que el segundo jugador sitúe Y entonces el primer jugador sitúa a Z en el punto medio de AB con lo cual se tiene que XZ es paralela media del triángulo ABC y de ahí el área es $\frac{T}{4}$.

326. Consideremos los arcos de circunferencia de radio 1 y centro en una esquina del cuadrado. Tales arcos definen una región limitada por los puntos M, N, P y Q.
Al interior de esta región no puede llegar el insecto puesto que su salto deberá ser dentro del cuarto y de una distancia de 2 m.



327. El número mínimo de cortes se tiene cuando en cada corte dividimos el mayor número posible de trozos que tenemos. Ahora bien, como al hacer un sólo corte cada trozo lo podemos dividir como máximo en dos, entonces la forma óptima de hacer los cortes es tal que en cada corte se duplique el número de trozos que tenemos. Como al principio tenemos un trozo y queremos $64 = 2^6$ trozos, hay que duplicar el número de trozos 6 veces. Entonces el número mínimo de cortes necesarios para convertir el cubo de 4 x 4 x 4 en 64 de 1 x 1 x 1 es 6.

328. El segundo jugador siempre escribe el número que sumado con la suma anterior tenga en la cifra de las unidades el 9.
De esta forma cuando se aproxima a 100, adiciona un número tal que llegue al 99, de esta forma el primer jugador pierde porque esto siempre es posible lograrlo porque se llega hasta el 10.

329. Sí, es posible. Se forman dos grupos de 3 monedas y se pesan. Pueden suceder dos cosas:

I) Que las balanzas queden en equilibrio. Si sucede esto, entonces se pesan las dos restantes, en el platillo que quede bajo está la moneda falsa.
II) Que las balanzas no queden en equilibrio. Si sucede esto, se pone una moneda en cada platillo si una de ella es la falsa, el platillo queda bajo, si las dos son verdaderas, entonces la que no se pesó es la falsa.

330. Denotemos por E_A, E_B, E_C y E_D las esposas de Ángel, Basilio, Ciro y David, respectivamente, y hagamos un esquema que represente la posición alrededor de la mesa.
Entonces, se puede observar que entre Ángel y David se sentó la esposa de Ciro.

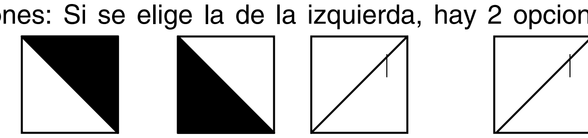
$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & E_C & & E_D & \\ D & & & & B \\ & E_B & & E_A & \\ & & C & & \end{array}$$

331. a) Para 10 no es posible porque el número 12 al sumarlo con cualquiera el resultado es mayor o igual que 12.

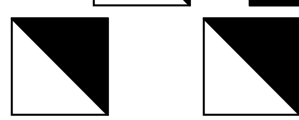
b) Para el 16 si es posible. En la siguiente tabla se muestra un posible camino para su obtención.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	8	5	6	7	8	9	10	11	16
1	2	3	0	5	6	7	16	9	10	11	16
1	2	3	0	6	6	7	16	9	10	16	16
1	2	3	0	4	6	7	16	9	16	16	16
1	2	3	0	4	6	2	16	16	16	16	16
2	2	4	0	4	6	2	16	16	16	16	16
2	2	6	0	4	6	2	16	16	16	16	16
2	2	6	0	2	10	2	16	16	16	16	16
2	2	4	0	2	16	2	16	16	16	16	16
0	4	4	0	2	16	2	16	16	16	16	16
0	0	8	0	2	16	2	16	16	16	16	16
0	0	8	8	2	16	2	16	16	16	16	16
0	0	0	16	2	16	2	16	16	16	16	16
0	0	0	16	0	16	2	16	16	16	16	16
0	0	0	16	4	16	4	16	16	16	16	16
0	0	0	16	0	16	8	16	16	16	16	16
0	0	0	16	8	16	8	16	16	16	16	16
0	0	0	16	0	16	16	16	16	16	16	16
16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16

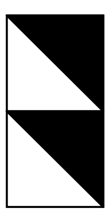
332. Para llenar la primera casilla hay 4 opciones: Si se elige la de la izquierda, hay 2 opciones para llenar la que sigue en esa fila, por ejemplo:



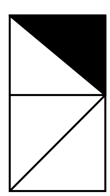
o



Entonces hay 4·2·2·2·2 = 64 opciones para llenar la primera fila.
Elegida la de arriba, sólo hay 2 opciones para llenar la que sigue en esa columna, por ejemplo:

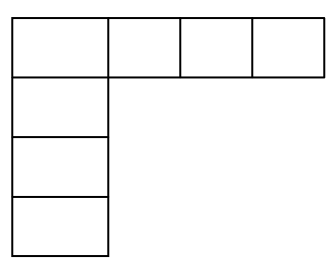


o

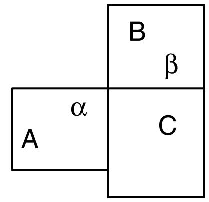


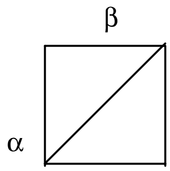
Entonces, por cada opción para llenar la primera fila hay 2·2·2 = 8 para llenar la primera columna.

En total hay $64 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 256 = 4^2 \cdot 4^2$ opciones para llenar los casilleros de la primera fila y la primera columna.
Veremos que estas casillas determinan completamente las restantes.
En efecto, si una casilla C tiene su vecina de la izquierda y su vecina de arriba cubiertas por dos triangulitos hay una sola manera de cubrir la casilla C respetando la regla del problema.

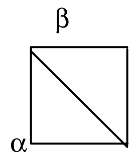


Si los lados α y β pertenecen a triángulos del mismo color en las casillas A y B, entonces hay que ubicar los triángulos de la casilla C asi:





y elegir el color de los triángulos de la única manera que respeta la regla. Si los lados α y β pertenecen a triángulos de distinto color en las casillas A y B, entonces hay que ubicar los triángulos de la casilla C así:



y elegir el color de los triángulos de la única manera que pueda respetar la regla.

333. Cada equipo juega 5 partidos, el máximo puntaje que puede obtener es 10. Como son 6 equipos en total se juegan ½ (6·5) = 15 partidos.
El total de puntos a repartir es de 15·2 = 30. Como hay 6 equipos, si el equipo ganador tiene 5 puntos entonces no sería el ganador porque todos tendrían 5 puntos, ahora mostremos que si un equipo tiene 6 puntos puede ganar el torneo, con el mínimo de puntos posible. La siguiente tabla muestra esta posibilidad:

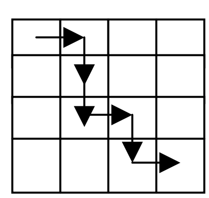
Equipo	1	2	3	4	5	6	Puntos
1	–	2	2	2	0	0	6
2	0	–	2	2	0	0	4
3	0	0	–	1	2	2	5
4	0	0	1	–	2	2	5
5	2	2	0	0	–	1	5
6	2	2	0	0	1	–	5

334. Supongamos que en la segunda operación fueron retiradas de la segunda urna b bolas blancas y p bolas negras, el número total de bolas retiradas es b + p.
En la primera urna habrá b bolas blancas más.
En la segunda urna que en la primera operación había obtenido b + p bolas negras, en la segunda operación perderá p bolas negras. Sobrará en la segunda urna b bolas negras. Los números son iguales.

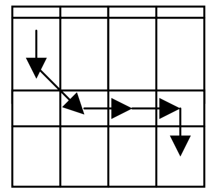
335. Supongamos que un miembro A no conoce a los otros, es decir, existe un miembro B que no conoce al miembro A. Sea el grupo formado por los miembros A, B, X, Y, uno de ellos conoce a los otros 3, supongamos que no es ni A ni B, sea X entonces X y Y se conocen. Podemos entonces concluir que, excluyendo A y B todos los demás se conocen mutuamente y que por lo menos X conoce a los otros 99 miembros.
Puede suceder que Y no conoce a A o a B o a ambos. Aparte de Y puede haber un Z que no conoce a A o a B en el grupo A, B, Y, Z entonces no satisface las condiciones del problema. Por lo que por lo menos hay 97 miembros que conocen a todos los demás.

336. Vamos a indicar los movimientos permitidos por H (→), V (↓) y D(↘) .
Examinemos los casos D = 0, 1, 2, 3:

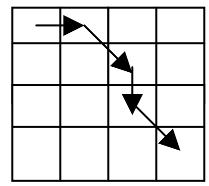
Para D = 0; cualquier sucesión con 3 símbolos H y 3 símbolos V es una solución del problema. Ejemplo: (HVVHVH) y el número de formas posible es $\frac{6!}{3!3!}$ = 20.



Para D = 1; cualquier sucesión con 2 símbolos H, 2 símbolos V y 1 símbolo D es una solución del problema.
Ejemplo: (VDHHV) y el número de formas posible es $\frac{5!}{2!2!1!}$ = 30.



Para D = 2; cualquier sucesión con 1 símbolo H, 1 símbolo V y 2 símbolos D es una solución del problema.
Ejemplo: (HDVD) y el número de formas posible es $\frac{4!}{2!1!1!}$ = 12.



Para D = 3; hay una sola forma. El número total es 20 + 30 + 12 + 1 = 63.

337. Dividimos las aristas en cinco partes iguales, obteniendo de esta manera 5^3 = 125 cubos de aristas igual a $\frac{1}{5}$, la diagonal de estos cubos es $\frac{\sqrt{3}}{5}$ y $\frac{\sqrt{3}}{5} < \frac{8}{23}$ todos los cubos pueden ser cubiertos por esferas de radio $\frac{4}{23}$ con centros en los centros de los cubos pequeños.
Como tenemos 400 puntos y 400 > 3·125, por lo menos en algún cubo deben caber más de 3 puntos.

338. Asumamos lo contrario. Entonces el número total de cestos no es mayor que 99 (de otra forma podemos coger 1 naranja en cada uno de los 100 cestos y remover los otros). De esta forma, el número total de cestos con al menos dos naranjas no es mayor que 49, el número total de cestos con al menos 3 naranjas no es mayor que 33, etc. Así el número total de naranjas no es mayor que 99 + 49 + 33 + ... Este número es menor que 2 000. Por lo cual hay una contradicción.

339. De los 8 equipos, debe haber un campeón el cual tiene ganados la mayor cantidad de juegos, sea A ese equipo. Este equipo debe tener ganados al menos 4 juegos, supongamos que A derrotó a B, C, D y E. Entonces esos equipos deben también ser campeones, el cual tiene ganados al menos dos juegos, sea, por ejemplo, el equipo B, el cual ganó a C y a D. Siguiendo que C o D ganan el juego con el cual ellos juegan entre sí, entonces esos equipos cumplen las condiciones del problema.

340. El primer jugador gana. La sucesión 1 987, 993, 496, 248, 124, 62, 31, 15, 7 y 3 se obtiene, por división de cada término por 2 sin tener en cuenta el resto. Consideremos que son posiciones ganadoras. Por la regla dada, 1 987 es una posición ganadora. Suponga que 2k o 2k + 1 es una posición ganadora. Supongamos que así es k. El próximo oponente se mueve el número mayor que pueda ser colocado es 2k – 1 lo cual se queda por debajo de 2k. El menor número que puede colocarse es k + 1, después puede ser reemplazado por 2k + 1. Esto justifica lo analizado ya que el número inicial es 2, el primer jugador puede ganar colocando 3 y la próxima posición ganadora aparece después de eso.

341. Marcar cada uno de los cuadrados como sigue:

A	B	C	A	B	C	A
B	C	A	B	C	A	B
C	A	B	C	A	B	C
A	B	C	A	B	C	A
B	C	A	B	C	A	B
C	A	B	C	A	B	C
A	B	C	A	B	C	A

Cada una de las baldosas de 1 x 3 deben ser colocadas en el cuadrado A, B y C. Como hay 17 A, 16 B y 16 C el cuadrado de 1 x 1 debe de esta forma ocupar un cuadrado marcado con A. De cualquier modo, como la orientación del cuadrado no es relevante debemos eliminar todas estas ocurrencias de A es por lo cual no queda como A es sobre rotación por ser múltiplos de 90. Esto ocurre solamente en aquellos de las esquinas, el cuatro a lo largo los puntos medios de cada arista lateral y el uno en el centro. Esto completa la proposición.

342. a) Esto es posible y una forma se muestra a continuación:

0	0	1	1	2	2	3	3	3	3
0	0	0	0	2	2	3	3	3	3
0	0	0	0	2	2	4	4	4	4
1	1	1	1	2	2	4	4	4	4
1	1	1	1	2	2	3	3	4	4
5	5	6	6	7	7	8	8	8	8
5	5	5	5	7	7	8	8	8	8
5	5	5	5	7	7	9	9	9	9
6	6	6	6	7	7	9	9	9	9
6	6	6	6	7	7	8	8	9	9

b) Construir un gráfico partido en dos como el siguiente: Una parte X consta de 10 vértices representando los 10 dígitos. La otra parte Y consta de 20 vértices representando las 10 filas y las 10 columnas. Un vértice x en X es unido a un vértice en Y si y sólo si el dígito representado en X aparece en la fila o columna representado por Y. Supongamos que cada X tenga grado al menos 7, consideremos el dígito que representa. Sean sus 10 apariciones contenidas en m filas y n columnas, entonces el producto $mn \geq 10$, tal que $m + n \geq 7$. Dado que el gráfico tiene al menos 70 caras y algún y en Y debe tener grado menor o igual que 4. Esto significa que la fila o columna representada por Y contiene más de 3 dígitos diferentes.

343. Asumamos que no hay dos equipos que tengan exactamente un miembro común. Si cada estudiante pertenece al menos a 3 equipos, ahí puede haber, al menos 32 equipos. Dado que algún estudiante A está en al menos 4 equipos. Sea el primero de estos formado por A, B y C. El segundo debe contener exactamente uno de B y C. Debemos asumir que el consistente de A, B y D. Si el tercer equipo no contiene a B, está formado por A, C y D. De esta forma el cuarto equipo puede contener al menos uno de B, C y D y tendrá exactamente un miembro común con uno de los primeros 3 equipos. Si el siguiente B pertenece a cada equipo contiene a A y viceversa por simetría.
Estén ellos en K equipos, entonces K < 33 dado que ninguno de los restantes 30 estudiantes pueden pertenecer a más de un equipo conteniendo a A y a B. Ninguno de los alumnos en este K equipo puede pertenecer a alguno de los restantes 33 – K equipos diferentes.
Estos 30 – K alumnos lo satisfacen. Como anteriormente uno de los que satisfacen deben pertenecer al menos a 4 equipos dado que 30 – K < 33 – K. Igual argumento puede ser aplicado repetidamente, esto es una contradicción porque no puede tener un descenso positivo sobre enteros positivos.

344. Hay seis permutaciones de los saltamontes:
123 132 312 321 231 213
Hay arreglos para cada uno alterno. Un salto cambia una permutación en otra por uno de sus vecinos (considerando la primera y la última permutación como vecino de cada uno de otro). Supongamos que la permutación inicial no está. Note que 1 985 es un número impar. Entonces, después de un número impar de saltos, la permutación resultante debe estar. Como después de 1 985 saltos los saltamontes no pueden regresar a la posición inicial relativa.

345. Primero dividimos en 34 parejas y efectuar 34 pesadas, separando la moneda pesada y liviana en cada caso. Poner todas las monedas pesadas en un grupo y las livianas en otro. Las pesadas estarán en el primer grupo.
Ahora dividimos este grupo en 17 parejas y efectuamos 17 pesadas para encontrar la más pesada. Si hay un número impar de monedas debemos poner otra, se tiene así un total

de 17 + 8 + 4 + 2 + 1 + 1 = 33, tales que las pesadas se identifican hasta encontrar la más pesada. Con 33 pesadas similares del grupo de las más livianas se podrá encontrar la más liviana. El número total de pesadas es entonces 34 + 33 + 33 = 100 como se pedía.

346. Construir un gráfico con 20 vértices representando los 20 equipos. Dos vértices son unidos por un lado rojo si los equipos que ellos representan juegan el primer día y por un lado azul si juegan el segundo día. Como cada vértice debe tener un lado rojo y uno azul, cada componente del gráfico es un ciclo par. Tomando cada uno de los otros vértices en cada ciclo tenemos 10 vértices independientes representando 10 equipos dos de los cuales tienen que haber jugado con cada uno de los otros.

347. Notemos que el número en cada fila "i", y cada columna "j" puede escribirse en la forma 8(i – 1) + j. Deseamos determinar S = $\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8} S_{ij}\left[8(i-1)+j\right]$ donde en cada fila y cada columna S_{ij} toma los valores 1 y –1 cada cuatro veces. Dentro de cada fila (ejemplo para i constante), la suma de los coeficientes de 8(i – 1) debe ser cero. Adicionando todas las tales filas sumadas mostrar que:
S = $\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8} S_{ij}\left[0+j\right]$. Con un argumento similar (adicionando todas las columnas sumadas) notar que la suma de los coeficientes de j en el interior de cada columna es cero por lo que se tiene que S = 0 que es el resultado requerido.

348. Hay $\binom{28}{2} = \frac{28\cdot 27}{2}$ = 378 juegos en total, al menos 284 de los cuales terminaron empatados. De estos, hay al menos 94 victorias y al menos 94 derrotas. Para cada equipo computar la diferencia entre los números de victorias y de derrotas. Supongamos que todos los equipos tienen distintos resultados, estos 28 resultados deben ser distintos. A lo sumo uno de ellos puede ser 0, de los 27 restantes, por el principio de las casillas, al menos 14 son positivos y al menos 14 son negativos. El número de victorias de este equipo debe ser al menos 1 + 2 + …+ 14 = 105. Pero como hay a lo sumo 94 victorias en total, esta situación es imposible. Por lo tanto al menos dos equipos terminaron con el mismo número de puntos.

349. Denotemos por a_k y b_k los números respectivos de A y de B en la k-ésima palabra.
Entonces $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$ y $b_k = b_{k-1} + b_{k-2}$, notar que $a_2 = b_1 = 0$ y $a_3 = b_2 = 1$. Siguiendo que $a_k = b_{k-1}$ para todo K. Supongamos que $(b_0, b_1) = (b_1, b_2) = ... = (b_{k-2}, b_{k-1}) = 1$, pero $(b_{k-1}, b_k) = d > 1$ para algún K. Como d divide a b_k y b_{k-1}, divide a $b_{k-1} = b_k - b_{k-1}$. De aquí que $(b_{k-2}, b_{k-1}) \geq d > 1$ que es una contradicción por lo que $(a_k, b_k) = 1$ para todo K. Si la K-ésima palabra es alguna palabra repetida al menos una vez debemos tener $(a_k, b_k) > 1$ por lo que ninguna de las palabras de la sucesión es periódica.

350. Cinco operaciones son suficientes y necesarias de acuerdo al número de estudiantes presentes. Cuatro operaciones pueden solamente distinguir 2^4 = 16 posibilidades, las cuales no son suficientes porque hay 30 posibles números. Por otra parte, cinco operaciones son suficientes si extendemos el rango de los números incluyendo el 0 y el 31. Representemos estas como un número de cinco dígitos en base dos, desde 00000 a 11111. En la K-ésima operación 1 ≤ K ≤ 5, el profesor lee todos los números con un 0 en el K-ésimo dígito de sus bases dos operaciones, el profesor conocerá la representación en base dos de los números de cada uno de los estudiantes, con lo cual determina su valor en base 10.

351. Sea p el producto de los 8 números que aparecen en los vértices. El producto de los 14 números es p^4, los cuales deben ser igual a 1. Consecuentemente, entre los 14 números hay un número par de –1. De esta manera la suma de los 14 números no puede ser cero.

352. Asociar a cada una de las caras un número primo diferente. El número asignado a un vértice es el producto de los primos asociados con cada una de las caras que coinciden con el vértice. Para dos vértices unidos por una cara, los números asignados a ellos no son primos relativos dado que ambos son

divisibles por el primo asociado con aquella cara. Para dos vértices no unidos por una cara, los números asignados a ellos son primos relativos de aquí que sus respectivos conjuntos de factores primos son disjuntos.

353. Para que todas las sumas sean números primos, deben ser impares y en esos 9 números hay 5 impares y 4 pares, para formar números impares con la suma de 3 números hacen falta 2 pares (P) y 1 impar (I) ó 3 impares.

P	P	I
I	P	
P	I	

I	P	I
I	P	P

En cualquiera de los 2 casos no es posible combinar sumas que todas sean impares.

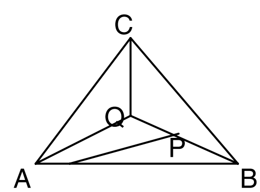
354. No es martes, porque sino estuviera diciendo verdad en P_2. No es sábado, porque sino estuviera diciendo verdad en P_1. Si fuera jueves, las dos respuestas fueran mentira por lo tanto satisface que siempre miente. Si fuera cualquier otro día de la semana, las dos respuestas fueran verdaderas y el miércoles no viene después del sábado. Por lo tanto es jueves.

355. Si el número de objetos es 2, 3 ó 4, gana el jugador que empieza porque siempre puede dejar sólo un objeto.

L					

Si hay 5 objetos pierde el jugador que comienza
A --- 1, B --- 3 queda 1 pierde A
A --- 2, B --- 2 queda 1 pierde A
A --- 3, B --- 1 queda 1 pierde A. Sea N > 5, puede ocurrir que:
I) $N \equiv 1$ (mód 4) en cuyo caso pierde el jugador que comienza ya que al realizar A la primera elección, B puede dejar sin coger 4y + 1 objetos y repitiendo el proceso, se llega a la situación ya descrita.
II) $N \equiv 0$ (mód 4) o $N \equiv 2$ (mód 4) o $N \equiv 3$ (mód 4). En estos casos gana el jugador que comienza porque en la primera elección puede dejar 4y + 1 objetos y se tiene el caso anterior para el segundo jugador.
Luego si $N \equiv 0$ (mód 4) o $N \equiv 2$ (mód 4) o $N \equiv 3$ (mód 4), gana el jugador que comienza.
Si $N \equiv 1$ (mód 4) pierde el jugador que comienza.
Por lo que para garantizar que gane siempre A es necesario que pueda empezar o no el juego.

356. Sea n el número de segmentos trazados en el interior del triángulo. Cada segmento trazado desde el triángulo forma parte de dos subtriángulos y solamente de dos, ya que todos deben ser disjuntos. Los lados del triángulo original formarán parte de un solo subtriángulo; si contamos los lados de cada subtriángulo, cada vez por separado, y luego sumamos habremos contado dos veces cada segmento en el interior del triángulo original y un sola vez los tres lados de este triángulo. Hemos contado entonces 2n + 3 lados. De aquí deducimos que el número total de regiones triangulares disjuntas es $T = \frac{2n+3}{3} = \frac{2n}{3} + 1$. Como $\frac{2n}{3}$ es un número par, porque n debe ser múltiplo de 3 ya que T es entero, entonces $\frac{2n}{3}$ + 1 es un número impar.

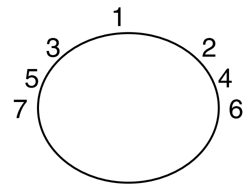


357. Demostremos que a partir de cualquier tabla que satisface las condiciones del problema por medio de tres tipos de operaciones, intercambiando las columnas, las filas y rotación de un ángulo de 90° alrededor de la casilla central en el sentido antihorario; se puede llegar a la tabla estándar:
Puede mostrarse con ejemplos particulares.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Toda tabla se puede obtener a partir de esta tabla por medio de las operaciones ya mencionadas.
Como las filas pueden intercambiarse de 3! = 6 formas diferentes y las columnas también de 3! = 6 formas; entonces partiendo de la tabla estándar obtendremos 36 tablas diferentes.
Rotando cada una de ellas 90° obtendremos 36 tablas más (dos rotaciones sucesivas son equivalentes a la transposición de primero dos columnas y después dos filas).
De esta manera, el número de tablas que satisfacen las hipótesis del problema es 72.

358. Los vecinos del 1 tendrán que ser 2 y 3. El otro vecino de 2 tiene que ser 4, y el otro vecino de 3 tiene que ser 5. Similarmente el próximo vecino de 4 tendrá que ser 6, etc. De esa forma tenemos por un lado la sucesión 2, 4, 6,... de números pares por un lado del 1 y la sucesión 3, 5,... de números impares por el otro lado.

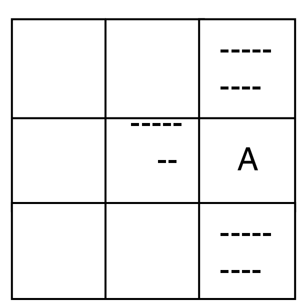


Los vecinos de n tendrán que ser n – 1 y n – 2, uno de los cuales es par y el otro impar. Claramente esta es una solución y la única posible.

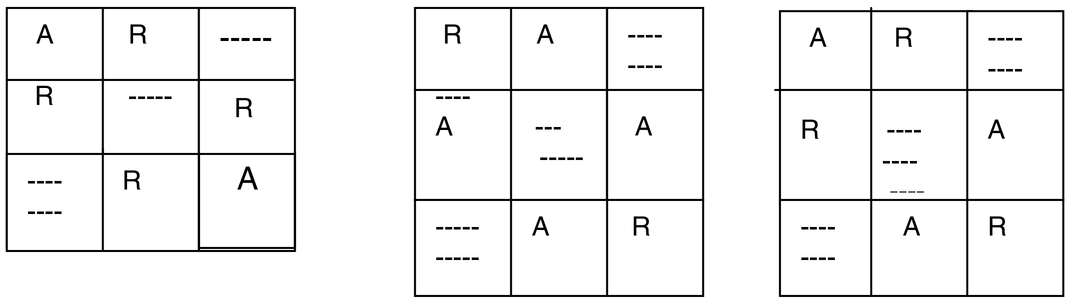
359. Hemos construido 6 triángulos de igual área e igual a $\frac{1}{6}$ del área total, como hay que ubicar 13 puntos, entonces hay al menos 3 en el interior de uno de esos triángulos y, por lo tanto el triángulo que formen esos tres puntos tendrá un área menor que $\frac{1}{6}$ del área total.

360. Usaremos el lenguaje de gráficas cromáticas representando las 10 personas por 10 puntos del plano donde no hay 3 alineados y unimos cada par de puntos por medio de un segmento rojo o azul de acuerdo a si las personas correspondientes se conocen o no entre sí.
Un subconjunto –tres rojos se refiere a tres puntos unidos por tres segmentos rojos y un subconjunto– 4 azul a cuatro puntos unidos por 6 segmentos azules.
Consideremos las proposiciones: X. No existen subconjuntos tres rojos. Y: Existe un subconjunto cuatro azul. Debemos entonces demostrar que “X $\Rightarrow$ Y”.
Supongamos que X es cierto y sea A cualquiera de los 10 puntos. Debemos considerar dos casos:
I) Al menos cuatro líneas rojas salen de A. Sean AB, AC, AD y AE líneas rojas. X nos dice que no pueden existir líneas rojas entre B, C, D y E. Por lo tanto BCDE es un subconjunto cuatro-azul y Y es verdad.
II) Máximo tres líneas rojas deben salir de A. Aquí A debe estar unida por líneas azules al menos a un total de 9 – 3 = 6 puntos, digamos B, C, D, E, F, G. Si B está unido por líneas rojas con al menos 3 puntos de C, D, E, F, G, digamos C, D, E entonces por X, CDE es un subconjunto tres-azul. Por otra parte si B está unido por un línea roja con máximo 2 y por tanto con mínimo 3, estará unido por línea azul, digamos BC, BD, BE son azules. Por X al menos un par C, D, E está pintado de azul; digamos CD. Entonces ABCD es un subconjunto 4-azul o sea se cumple Y.

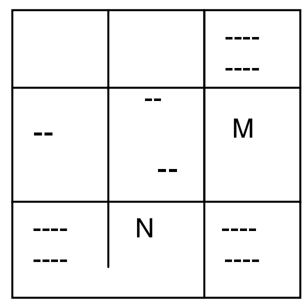
361. El número total de maneras es tres veces el total de formas en que se puede colorear un baldosín, cuyo cuadro central es blanco, porque se presentan casos análogos si el central es azul o si es rojo.
Con el blanco en el centro hay 6 casos distintos:
I) Ningún blanco en la periferia, en cuyo caso hay dos formas de colorear los demás cuadros, puesto que el rojo y el azul deben alternarse.
II) Un blanco esquinero; en cuyo caso hay dos formas de colorear porque los cuadros restantes son contiguos y deben alternarse el rojo y el azul.
III) Dos esquineros blancos en un solo lado; en cuyo caso hay 4 formas de colorear los demás cuadros. En la figura se aprecia que el cuadro A es independiente de los demás, mientras que estos son contiguos, A puede colorearse de dos maneras y los cuadros contiguos de dos maneras independientes así 2·2 = 4.



IV) Dos esquineros opuestos son blancos, en cuyo caso hay tres formas de colorear los demás, los cuales están representados en la figura a continuación.



V) Tres esquineros blancos; en cuyo caso se presentan tres regiones del baldosín que pueden colorearse independientemente, cada una de dos maneras diferentes.
En total en este caso hay 2·2·2 = 8 formas.

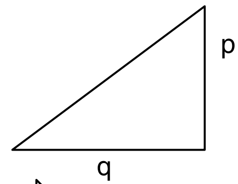


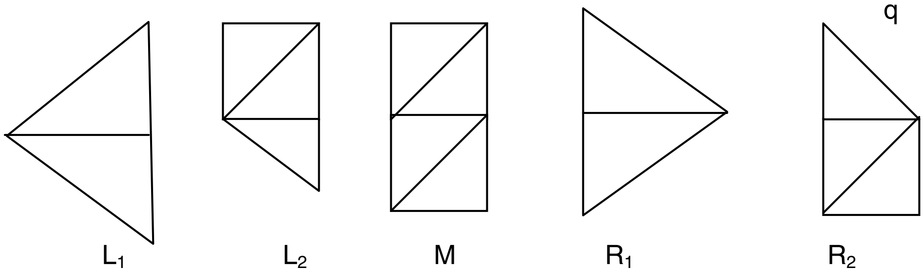
VI) Cuatro esquineros blancos; en cuyo caso hay 6 formas de colorear los demás, pues aunque haya cuatro regiones independientes, hay varias formas que son equivalentes bajo rotaciones del baldosín.
El total de formas de colorear el baldosín con blanco en el centro es 2 + 2 + 4 + 3 + 8 + 6 = 25.
Total de maneras: 3·25 = 75.

362. a) Sea S un subconjunto de personas que satisfacen las condiciones I), II), III). Sea $x \in S$ el cual conoce el máximo número de personas en S. Consideremos que x conoce a $x_1, x_2, \dots, x_n$. Por II) dado que x conoce a x_i y a x_j entonces x_i y x_j son extraños si $i \neq j$ para cada x_i. Sea N_i el conjunto de personas en S los cuales conocen a x_i pero no a x. Notar que, para $i \neq j$, N_i no tiene personas comunes con N_j, por lo que hay más de una persona conociendo a x_i y a x_j contradiciendo III). Por I) asumamos que N_i no es conocido, se $y_1 \in N_i$. Por III), para $k > 1$ hay exactamente una persona y_k en N_k los cuales conocen a y_1. Es decir, y_1 conoce n personas $x_1, y_2, \dots, y_n$.
Porque n es el número máximo de personas en S, una persona en S puede conocer y_1 conoce exactamente n personas en S.
Por el mismo razonamiento hallamos que cada persona en N_i $i = 1, 2, \dots, n$ conoce exactamente n personas en S.
Consideremos que y_1 toma el lugar de x en nuestro argumento, vemos que también cada x_i conoce exactamente N_j. De esta forma cada persona en S conoce exactamente n personas en S y esto tiene el mismo número de elementos de S.

b) El número máximo de subconjuntos posibles es uno y el cual cada persona conoce exactamente dos personas. Deben ser exactamente cinco personas en este subconjunto dadas las condiciones I) y III). En efecto estos cinco deben formar un ciclo donde dos personas conocen a cada uno de los otros. De esta forma el número máximo posible de subconjuntos es 1 990:5 = 398.

363. El bloque básico de la construcción será un triángulo con lados p, q (los cuales son enteros positivos) adyacentes al ángulo recto. Tomemos primero p = q = 1 y construyamos cinco bloques básicos L_1, L_2, M, R_1, R_2.



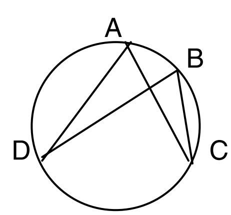


Mostremos ahora la construcción del hexágono convexo, sobre la izquierda, uno de los bloques L_i, tomando n copias del bloque M y finalmente tomando uno de los bloques R_j.
Para (i;j) = (1;1), (i;j) = (1;2) o (i;j) = (2;1) seguiremos que $n \geq 1$, pero para (i;j) = (2;2) sólamente necesitamos que $n \geq 0$. Esto con la interpretación obvia.
$L_1 + nM + R_1$ dado un hexágono convexo conteniendo $2 + 4n + 2 = 4n + 4$ ($n \geq 1$) triángulos congruentes.
$L_1 + nM + R_2$ o $L_2 + nM + R_1$ dado un hexágono convexo conteniendo $3 + 4n + 3 = 4n + 5$ ($n \geq 1$) triángulos congruentes.
$L_2 + nM + R_2$ dado un hexágono convexo conteniendo $3 + 4n + 3 = 4n + 6$ ($n \geq 0$) triángulos congruentes o $4n + 2$ ($n \geq 1$) triángulos congruentes.
Obtener el caso de $4n + 3$ ($n \geq 1$) triángulos congruentes modificamos las longitudes de los lados del triángulo rectángulo.

364. Hay al menos $\binom{997}{2}$ = 496 506 posibles puntos rojos distintos. Los 997 puntos deben ser unidos tal que algunos de los puntos medios coinciden y el número de puntos rojos diferentes es considerablemente menor que 496 506.
Por ejemplo, si todos los puntos $P_1, P_2, ..., P_{1997}$ son colineales y $P_1P_2 = P_2P_3 = \ldots = P_{1996}P_{1997}$, entonces hay 996 puntos medios para $P_{i-1}P_i$ (i = 1,2,…n – 1).
Los p-iésimos deben ser puntos medios de $P_{i-1}P_{i+1}$ tal que tenemos otros 995 puntos rojos. Los otros puntos medios coinciden con esos 996 + 995 = 1 991 puntos medios y de estos hay precisamente 1 991 puntos rojos, en este caso especial. No hay otro arreglo para los puntos rojos como se muestra. Los puntos dados, deben ser puntos M y N con la mayor distancia. Construimos dos circunferencias C_M y C_N con radios ½ MN y centros en M y N, respectivamente. Para cualquier punto P entre los restantes 995 puntos, $MP \leq MN$, dado que $½\ MP \leq ½\ MN$. Estos dos puntos medios de MP deben estar en el interior de C_M. De forma similar los puntos medios de NP están en el interior de C_N dado que hay al menos 995 puntos en el interior de C_M y C_N, respectivamente.
Ambos con los puntos medios de MN hay $2 \cdot 995 + 1 = 1\,991$ puntos rojos.
De esta forma hay al menos 1 991 puntos rojos sobre el plano.

365. El menor valor que se puede obtener es 2(n – 1) que se obtiene cuando se sitúan de forma tal que la diferencia, entre cada vecino sea n excepto entre el último y el primero que es n – 1, como hay n – 1 diferencias 1 entonces la suma total sería 2(n – 1).
De lo contrario si hubieran siempre diferencias mayores que 1, como hay n diferencias, entonces sería mayor que 2(n – 1).

366. Consideremos que hay un conjunto de 4n puntos que satisfacen la condición del problema, tal que el número de puntos de intersección entre las cuerdas verdes y azules es menor que n.



Desde todos esos conjuntos, consideremos que el número de puntos de intersección entre las cuerdas verdes es mínimo.
Supongamos que este número es mayor que cero, A, B, C y D son puntos numerados, AC y BD son cuerdas verdes.
Sustituyendo AC y BD por cuerdas verdes AD y BC obtenemos otra configuración que satisface la condición del problema. Es fácil chequear que el número de intersecciones entre cuerdas verdes y azules en este nuevo conjunto no incrementa pero el número de intersecciones entre cuerdas verdes va decreciendo lo cual no es posible. Con esto mostramos que no dos cuerdas verdes se intersectan en la configuración mostrada.
Dado que el número de intersecciones entre cuerdas verdes y azules en el conjunto que tenemos mostrado es menor que n, existe una cuerda verde, sea c, la cual corta un número impar de cuerdas azules. Entonces otro lado de c debe estar un número impar de puntos. De esta forma existe una cuerda que interseca c, lo cual es una contradicción como no dos cuerdas verdes se intersecan en el conjunto mostrado. De esta forma, al menos hay n puntos donde una cuerda verde interseca una cuerda azul.

367. Designemos a cada persona por la letra inicial de su nombre y, a la cantidad de dinero que gasta cada una por la minúscula correspondiente. Entonces, teniendo en cuenta las condiciones del enunciado, sólo se pueden dar, en principio, las siguientes situaciones:
I) (P;C), (A;E), (J;I), II) (P;C), (A;I), (J;E), III) (P;I), (A;E), (J;C)
La primera situación no se puede dar. En caso contrario,
$p = 63 + c$, $p = 23 + e$, $a = 63 + e$, $a = 11 + c$ de donde $e = c + 40$ y $e = c – 52$, lo que es contradictorio.
Por lo que las situaciones II) y III) son soluciones.

368. Consideremos la cantidad C de unos que hay en un momento determinado, y la cantidad C’ de unos que hay después de haber aplicado la operación una vez. Observamos que la paridad de C y la de C’ es la misma. Entones, la condición necesaria y suficiente para obtener un solo 1 al final es haber iniciado con una cantidad impar de unos.

369. Dividamos de cualquier forma las personas en dos grupos y consideremos, para cada persona A, el número p(A) de primos de A dentro del mismo grupo que A (entonces $p(A) \leq 3$). Analicemos la suma total de todos los p(A)’s. Si algún $p(A) > 1$, entonces cambiamos A de grupo. De esta manera, la suma de todos los p(A) disminuye con respecto a la anterior.
Volvemos a repetir el procedimiento mientras haya algún $p(A) > 1$. Como la suma es siempre un entero mayor o igual que 0, el procedimiento no puede continuar indefinidamente; esto quiere decir que en algún momento todos los p(A) serán a lo más 1, que es lo que buscábamos.

370. Cada tipo de llave tiene que ser repartida al menos 3 veces por lo que la cantidad de llaves tiene que ser 3a y la cantidad de llaves que tiene cada uno es $b = \frac{3a}{5}$. Como $b \in Z$ entonces a es múltiplo de 5. Si a = 5 no hay solución. Si a = 10, b = 6 y una posible distribución es:

Tipos de llaves	A	B	C	D	E
1	x	x	x		
2	x	x		x	
3	x	x			x
4	x			x	x
5	x		x	x	
6	x		x		x
7			x	x	x
8		x	x	x	
9		x	x		x
10		x		x	x

A, B, C, D, E son las personas del quinteto y x las llaves.

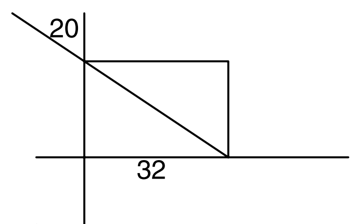
371. Sean R_0, R_1, R_2,... la cantidad de objetos que quedan en la mesa antes del último, penúltimo, antepenúltimo,... juego. Necesariamente $R_0 = 1$, porque si fuese mayor, el jugador B no los tomaría todos y perdería. El jugador que gana, A, para dejar un objeto debe encontrar, sobre la mesa $R_{-1} = 1 + 1$, $1 + 2$ ó $1 + 3$; es decir, 2, 3 ó 4 objetos.
Para que el jugador B esté obligado a dejar uno de estos números de objetos, es necesario que encuentre $R_{-2} = 5$; luego, para que A pueda dejar este número debe encontrar $R_{-3} = 5 + 1$, $5 + 2$ ó $5 + 3$, es decir, 6, 7 u 8 lo que obtendrá si antes dejó $R_{-4} = 9$, etc. Se ve, pues, que A gana si deja, cada vez que le toca jugar, $4m + 1$ objetos. Esto lo consigue si juega primero y $N = 4t + 2$, $4t + 3$, $4t$. Para $N = 4t + 1$, deberá jugar el segundo, porque después del primer juego, quedará un número de objetos $4t + 2$, $4t + 3$ ó $4t$.

372. El número de maneras de seleccionar 2 objetos de una colección de 4 es $C_4^2 = 6$. Un arreglo de 4 por 6 puede colorearse de verde y amarillo de tal manera que no se forme ningún rectángulo con los 4 vértices del mismo color como se muestra en el diagrama siguiente:

A	A	A	V	V	V
A	V	V	A	A	V
V	A	V	A	V	A
V	V	A	V	A	A

Ahora bien, no es posible colorear un arreglo de 7 por 4 sin formar un rectángulo porque, por el principio de las casillas, en una de las columnas se tendría que repetir una manera de colorear los cuatro puntos (hay sólo 6 diferentes en total). Es suficiente considerar las combinaciones C(4;2) porque si alguna de las columnas contuviera 3 puntos coloreados del mismo color, digamos verde, entonces ninguna otra columna podría tener 3 puntos coloreados de verde (pues se formaría un rectángulo con los cuatro vértices verdes); y a lo sumo tres columnas adicionales pueden tener 2 puntos coloreados de verde, porque una cuarta columna de dos de cada color daría un rectángulo de vértices verdes. Así se tendrían no más de 4 columnas por lo tanto el máximo es 6.

373. Ecuación de la diagonal $m = -\frac{5}{8}$ se tiene $y = -\frac{5}{8}x + 20$. Trazamos todas las rectas del tipo $x = t_1$ con $0 \leq t_1 \leq 32$, los puntos de



intersección de estas rectas con la diagonal son $P(t_1 ; 20 - \frac{5}{8}t_1)$ para $x = 0$, $y = 20$; para $x = 8$, $y = 15$; para $x = 16$, $y = 10$, para $x = 32$, $y = 20$ que son los únicos puntos de coordenadas enteras por donde pasa la diagonal.
La diagonal corta en su recorrido de un vértice a otro a las 33 líneas del tipo $x = t_1$ y a las 21 líneas del tipo $y = t_2$. Pero como hay 4 puntos comunes, la diagonal tiene, en total, intersecciones con 50 puntos y como entre punto y punto hay un cuadrado, la diagonal corta a 49 cuadrados.

374. El ciclista al salir de la ciudad 1 tiene 3 opciones diferentes para escoger, a saber ir a la ciudad 2, a la 4 o a la 5 (de acuerdo a la figura). Cuando está en la segunda ciudad de su recorrido también puede escoger entre tres opciones. Por ejemplo, si la segunda ciudad visitada es la 2, la tercera podría ser alguna de las ciudades 3, 4 ó 5. Al salir de la tercera ciudad puede escoger una cualquiera de las dos ciudades que le faltan por visitar, y al llegar a esta, solo tiene la opción de llegar a la última ciudad que no ha visitado. El número de trayectorias posibles será entonces: 3 x 3 x 2 = 18.

375. En un tablero de ajedrez de 5 x 5, hay 12 casillas de un color y 13 casillas del otro color. Sin perder generalidad, podemos suponer que tenemos un tablero con 13 casillas negras y 12 casillas blancas. Tratemos de cambiar las casillas blancas en negras con el menor número de operaciones posible. La idea es que cada operación realizada debe cambiar el mayor número de casillas blancas posible. (Esto implica cambiar el menor número de casillas negras posible.) Como las columnas con mayor número de

casillas blancas son la 2 y la 3 (ver dibujo), cambiemos estas realizando 2 operaciones. Ahora tenemos dos filas con todas sus casillas blancas: las filas B y D. Para cambiarles el color realizamos dos operaciones. En el dibujo se puede apreciar todo el proceso.

	1	2	3	4	5
A	n	b	n	b	n
B	b	n	b	n	b
C	n	b	n	b	n
D	b	n	b	n	b
E	n	b	n	b	n

n	n	n	b	n
b	b	b	n	b
n	n	n	b	n
b	b	b	n	b
n	n	n	b	n

n	n	n	n	n
b	b	b	b	b
n	n	n	n	n
b	b	b	b	b
n	n	n	n	n

n	n	n	n	n
n	n	n	n	n
n	n	n	n	n
b	b	b	b	b
n	n	n	n	n

n	n	n	n	n
n	n	n	n	n
n	n	n	n	n
n	n	n	n	n
n	n	n	n	n

376. Para llegar a obtener solamente números 1, es necesario en el paso anterior obtener solamente números –1 lo cual no es posible ya que siempre aparecerá al menos un número 1 por ser 2 001 un número impar y hay que realizar siempre 2 001 productos de números vecinos.

377. Notemos que en cualquiera de las cuatro posiciones las combinaciones 1 932, 2 748 y 9 215 tienen dígitos diferentes (es decir, sus primeros dígitos son diferentes, sus segundos dígitos son diferentes, etc.). ¿Cuáles combinaciones pueden ser las correctas? La combinación correcta debe coincidir con cada una de esas tres combinaciones en alguna posición, y en la posición restante, no puede tener ninguno de los tres dígitos que aparecen en esa posición en esas tres combinaciones. Podemos elegir de 4 formas en qué posición coincide con 1 932, luego de 3 formas en qué posición coincide con 2 748, luego de dos formas en qué posición coincide con 9 215, y después, podemos elegir de 7 formas el dígito de la posición restante. Por lo tanto, hay $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 = 168$ combinaciones que podrían ser la correcta según la información del problema; como no podemos saber cuál de ellas es la correcta, el mínimo número de combinaciones a revisar para abrir el candado es 168.

378. a) El número máximo de puntos que se puede agregar se logra cuando se agrega un punto diferente por cada pareja de puntos. Hay 10 parejas posibles de modo que se tienen al final a lo más 15 puntos (10 que se agregan más los 5 originales). Una forma de lograrlo es situar los puntos de manera que no haya tres alineados.
b) Si A, B, C, D, E son los puntos en el orden que aparecen en la recta, cuando menos agregamos los puntos medios de los segmentos AB, BC, CD y DE. Por lo tanto se tienen al final, al menos 9 puntos. Una forma de lograrlo es situando los puntos de modo que AB = BC = CD = DE, se agregan sólo 4 puntos, por lo que el mínimo buscado es 9.

379. Designemos con una letra a cada cuadro.

A	C	E	G
B	D	F	H

Para el cuadro A puede usarse cualquiera de los 4 colores. Para el cuadro B, como no podemos usar el mismo color del cuadro A, podemos colorearlo con cualquiera de los 3 colores restantes. Por lo tanto, los primeros cuadros de ambas bandas pueden colorearse de 4 x 3 = 12 formas. Ahora pasemos a colorear los cuadros C y D. Tenemos dos casos:
El cuadro C tiene el mismo color que el cuadro B. En este caso, podemos colorear al cuadro D de 3 formas, puesto que también podemos usar el color de A.

El color de C es diferente al de B. En este caso, tenemos 2 formas de colorear C, puesto que no podemos usar el color de A (y estamos suponiendo que es distinto al de B). Para el cuadro D podemos usar 2 colores, puesto que tiene que ser diferente al color de B y al de C. En este caso tenemos 2 x 2 = 4 formas de colorear C y D.
Juntando los resultados de los casos anteriores, tenemos que el número total de formas de colorear C y D es 3 + 4 = 7.
Por lo tanto, hasta aquí tenemos que las formas de colorear A, B, C y D son el producto de (No. de formas de A y B)(No. de formas de C y D) = 12 x 7 = 84.
Para colorear E y F tenemos los mismos dos casos anteriores, por lo que se pueden colorear también de 7 formas y para G y H tenemos la misma situación. Entonces el número total de formas es:
12 x 7 x 7 x 7 = 4 116.

380. No hay forma de llegar. En efecto, supongamos que la hay y que se lleva n pasos (de un espacio el primero, dos el segundo, etc.). Entonces, 1 + 2 + ... + n es el número de espacios avanzados en total. Se avanzan 1 000 hacia la derecha y 1 000 hacia arriba, de donde $\frac{n(n+1)}{2}$ = 2 000.
Pero entonces $(2n + 1)^2 = 4n(n + 1) + 1 = 8 \cdot 2\,000 + 1 = 16\,001$, lo cual es absurdo pues 16 001 no es un cuadrado perfecto.

381. Junto al 5 y al 3 se deben poner dos números que sumen 12. Como no pueden repetirse entre sí y ninguno de ellos puede ser 5 ó 3, la única posibilidad para esos dos números es 8 y 4. Consideremos la posibilidad que se indica en la figura (la otra posibilidad es simétrica con respecto a la diagonal determinada por 5 y 3, así que nos da el mismo resultado en la casilla marcada).

XX		
	5	8
	4	3

Ahora, arriba del 5 y el 8 deberán aparecer dos números cuya suma sea 20 – (5 + 8) = 7. Otra vez, dado que no debe haber repeticiones, la única posibilidad es 1 y 6. De la misma manera, a la izquierda del 5 y el 4 deben aparecer el 2 y el 9. Combinando estas con las de arriba tenemos las 4 posibilidades que se muestran más abajo en la figura. Considerando que los 4 números de arriba a la izquierda deben sumar 20 y que no debe haber repeticiones observamos que la única posibilidad que se puede completar es la tercera y el número que la completa es el 7.

X	1	6
2	5	8
9	4	3

X	1	6
9	5	8
2	4	3

X	6	1
2	5	8
9	4	3

X	6	1
9	5	8
2	4	3

382. El número total de cifras de G es 9 + 2(99 – 9) + 3(999 – 99) + 4(2 003 – 999) = 6 905.
Entones la cifra central está en el lugar 3 453. Para llegar a esa cifra necesitamos todos los números del 1 al 999 (en total 2 889) y otras 564 cifras más. Como a partir del 1 000 todos los números que se escriben tienen 4 cifras y 564 = 4·141 por lo que necesitaremos 141 números después del 999, es decir, hasta el 1 140; la última cifra (el 0) de este número es la cifra buscada y el número al que corresponde es, precisamente al 1 140.

383. Pintemos el tablero como si fuera un tablero de ajedrez (alternando los colores blanco y negro). Observamos entonces que a las dos esquinas que se eliminaron les correspondía el mismo color, así que quedaron más cuadros de un color que de otro. Por otro lado, sin importar el lugar donde se coloquen las fichas de 2 x 1, cada una de ellas cubre un cuadro negro y uno blanco así que, si se pudiera cubrir el tablero, el número de cuadros blancos cubierto sería el mismo que el de negros.

Este argumento demuestra que no es posible cubrir el tablero.

	B	N	B	N	B	N	B
B	N	B	N	B	N	B	N
N	B	N	B	N	B	N	B
B	N	B	N	B	N	B	N
N	B	N	B	N	B	N	B
B	N	B	N	B	N	B	N
N	B	N	B	N	B	N	B
B	N	B	N	B	N	B	

384. Contemos por casos:

a) Números de 4 cifras con al menos un cero hay 9 000 – 9^4 = 2 439 (pues hay 9^4 números sin ceros).
b) Los números que no tienen ceros conviene separarlos en casos según el número de cifras iguales.
c) Los números con todas las cifras iguales (de la forma aaaa) son 9 y todos cumplen la condición de que el producto de las cifras sea un cuadrado.
d) Los números con tres cifras iguales y la otra distinta son de la forma aaab, aaba, baaa. De aquí que deberemos analizar las distintas posibilidades para a y b (según la condición del problema) y después multiplicar por 4 (para considerar la posición de b en el número); estas son de dos tipos; el primer tipo es cuando ambos a y b son cuadrados (o sea, 1, 4 ó 9), lo que nos da 3 x 2 posibilidades; el segundo tipo es cuando a y b son los números 2 y 8 (en cualquier orden) lo cual nos da otras dos posibilidades. En total en este caso tenemos 4(3 x 2 + 2) = 32 posibilidades.
e) Los números con dos cifras iguales y otras dos distintas: aabc con a, b y c todos distintos entre sí y las distintas posibilidades de orden de a, b y c que son 12 (pues la posición de b se puede elegir entre 4 posiciones y entonces la de c, de 3). Analicemos las posibilidades para a, b y c en el número aabc y después multiplicaremos por 12 para considerar las posiciones. La primera posibilidad es que b y c sean cuadrados y a cualquier otro dígito (distinto de b y c); en este caso hay que escoger 2 de los 3 números 1, 4 y 9, lo cual es (aquí no debemos considerar el orden entre b y c, pues cuando multipliquemos por 12 ya se tomará en cuenta); una vez elegidos b y c nos quedarán 7 posibilidades para a (pues a debe ser un dígito distinto de 0, de b y de c); así en este subcaso hay 3 x 7 = 21 posibilidades. Análogamente, si b y c son 2 y 8 (en cualquier orden), a tiene 7 posibilidades. Entonces el total en este caso son
12(21 + 7) = 336.
f) Números con dos cifras repetidas cada una; forma básica aabb con a ≠ b, considerando las distintas posiciones para a y b. En este caso la posición de a (que se puede escoger de $\binom{4}{2}$ = 6 formas) determina la de b. La elección de a y b (dos dígitos distintos cualesquiera) puede hacerse de $\binom{9}{2}$ = 36 formas (el papel de a y b el de b es indistinguible en esta elección, pero una vez elegidos, al fijar cualquiera de ellos se determinan sus posiciones). En este caso tenemos entonces 6 x 36 = 216 posibilidades.
g) Números abcd con a, b, c y d todos diferentes. Podemos pensar que vamos a permutar todas las elecciones de a, b, c y d (hay 4! = 24 permutaciones) y considerar la elección de estos sin repetir colecciones. En este caso no pueden ser todos cuadrados. Si a = 2 u 8, b = 3, c = 6 y d un cuadrado, entonces hay 6 posibilidades. Si a = 2, b = 8 y c y d son cuadrados, entonces hay 3 posibilidades. En total hay 24(3 + 6) = 216.
Sumando todos los resultados parciales tenemos el resultado final que es 3 248.

385. Sean A, B, C, D, E y F los músicos. Supongamos que hay solamente tres conciertos. Dado que cada uno de los seis músicos deben efectuar al menos una vez un concierto deben efectuarlo dos o más músicos. Digamos que sean A y B los que actúan en el primer concierto. Ellos deben actuar mientras los otros observan. Sea A el que efectúa el segundo concierto por B y B en el tercero por A. Ahora C, D, E y F deben todos participar en el segundo concierto dado que solamente B está en el auditorio. De forma

similar ellos deben actuar en el tercero. En el primer concierto no pueden actuar solamente A y B. Como necesitamos más de tres, tomemos un ejemplo para 4 de la siguiente manera: A, B y C en el primer concierto; A, D y E en el segundo concierto; B, D y F en el tercero y C, E y F en el cuarto.

386. Sean n el número de integrantes del primer grupo y k el número de integrantes del segundo. Entonces el número de partidos que se jugaron en el primer grupo es $\frac{n(n-1)}{2}$ y el del segundo grupo es $\frac{k(k-1)}{2}$ y tenemos que $\frac{n(n-1)}{2}$ + 21 = $\frac{k(k-1)}{2}$. (*) Por otro lado, n + k = 22, así que k = 22 – n y, sustituyendo en (*) y despejando n, tenemos n = 10. Llamemos g al número de partidas ganadas por el jugador A y e al número de empates. Entonces g + e = n – 1 = 9 y g + 0,5e = 6,5. Restando la segunda ecuación de la primera y despejando e obtenemos e = 5.

387. Para cada resto **r** de la división por 5 consideremos la colección r' de los números del 1 al 25 que dejan resto r (por ejemplo, 2' = {2,7,12,17,22}). Está claro que cada r' consta de 5 elementos. El que la suma de 4 números sea múltiplo de 5 equivale a que la suma de los restos lo sea. Analicemos todas las posibilidades de restos con suma múltiplo de 5 y contemos las posibilidades de elección en nuestra colección según los restos:

Colección de restos	Número de posibilidades de elección
0,0,0,0	$\binom{5}{4}$ = 5
1,1,1,2	$\binom{5}{3}\cdot 5$ = 50
2,2,2,4	50
3,3,3,1	50
4,4,4,3	50
0,0,1,4	$\binom{5}{2}\cdot 5\cdot 5$ = 250
0,0,2,3	250
1,1,0,3	250
1,1,4,4	$\binom{5}{2}^2$ = 100
2,2,0,1	250
2,2,3,3	100
3,3,0,4	250
4,4,0,2	250
1,2,3,4	5^4 = 625

El total es de 2 530.

CONCURSO NACIONAL
TEMARIO COMÚN
CURSO 2002-2003

1. Dada la siguiente lista de números:

$$1\,990,\ 1\,991,\ 1\,992,...,\ 2\,002,\ \underbrace{2\,003,\ 2\,003,\ 2\,003...2\,003}_{\text{12 veces}}$$

¿Es posible escribir estos números en algún orden de modo que el número de 100 cifras que se obtiene sea primo ?

2. Sean KL y KN las dos tangentes trazadas desde K a la circunferencia **C** donde L y N son los puntos de tangencia. M es un punto arbitrario de la prolongación de $\overline{KN}$ por N y P es el segundo punto de intersección de **C** con el circuncírculo del ΔKLM. Q es el pie de la perpendicular trazada desde N a ML. Prueba que $\angle$ MPQ = 2 $\angle$ KML.

3. Un tablero de 4×4 tiene todas sus casillas pintadas de blanco. Una operación permitida es escoger un rectángulo que contiene 3 casillas y pintar cada una de las casillas de la siguiente forma:

I) Si la casilla es blanca entonces se pinta de negro,
II) Si la casilla es negra entonces se pinta de blanco.
Prueba que aplicando varias veces la operación permitida, es imposible conseguir que todo el tablero quede pintado de negro.

CONCURSO NACIONAL
TEMARIO POR GRADOS
CURSO 2002-2003

Décimo grado, preguntas 1, 2 y 3.
Onceno grado, preguntas 4, 5 y 6.
Duodécimo grado, preguntas 7, 8 y 9.

1. Las raíces de la ecuación $x^2 + (3a + b)x + a^2 + 2b^2 = 0$ son x_1 y x_2 siendo x_1 diferente de x_2. Determina los valores de a y b para que las raíces de la ecuación $x^2 - 2a(3a + 2b)x + 5a^2b^2 + 4b^4 = 0$ sean x_1^2 y x_2^2.

2. Prueba que si: $\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{1334} + \frac{1}{1335}$ donde $p, q \in \mathrm{N}^*$ entonces 2 003 divide a p.

3. Sea ABC un triángulo acutángulo y T un punto interior a este tal que: $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA$. Sean M, N y P los pies de las perpendiculares desde T a $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$, respectivamente. Prueba que si la circunferencia circunscrita al ΔMNP corta nuevamente a los lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$ en M_1, N_1, P_1, respectivamente, entonces el $\Delta M_1N_1P_1$ es equilátero.

4. Sea f: N → N tal que f(p) = 1 para todo p primo y f(ab) = bf(a) + af(b) para todos a, b ∈ N.
Si n = $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, donde los p_i son primos diferentes dos a dos y p_i no divide a α_i (i = 1, 2,..., k),
Prueba que $\frac{n}{(n, f(n))}$ es libre de cuadrados (no divisible por un cuadrado mayor que 1).
Nota: (a,b) es el máximo común divisor de a y b.

5. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_9$ números reales no negativos tales que $a_1 = a_9 = 0$ y al menos uno de los restantes términos es distinto de cero.
a) Prueba que para algún i, (i = 2,...,8) se cumple que $a_{i-1} + a_{i+1} < 2a_i$
b) ¿Será cierto el planteamiento anterior si cambiamos el número 2 por 1,9 en la desigualdad?

6. Sean P_1, P_2, P_3, P_4 cuatro puntos sobre una circunferencia, sea I_1 el incentro del triángulo de vértices P_2P_3,P_4, I_2 el incentro del triángulo $P_1P_3P_4$, I_3 el incentro del triángulo $P_1P_2P_4$, I_4 el incentro del triángulo $P_2P_3P_1$. Prueba que $I_1I_2I_3I_4$ son los vértices de un rectángulo.

7. Determina la suma de los dígitos de la suma de los dígitos de la suma de los dígitos del número $(2\,003)^{2003}$.

8. Halla todas las funciones f:C –> R^+ tales que se cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:
$f(uv) = f(u)f(v) \quad \forall\, u,v \in C$
$f(\alpha u) = |\alpha|\, f(u) \qquad \forall\, \alpha \in R$ y $u \in C$
$f(u) + f(v) \leq |u| + |v| \quad \forall\, u,v \in C$

9. Sea D el punto medio de la base $\overline{AB}$ del triángulo isósceles y acutángulo ABC, E es un punto sobre $\overline{AB}$ y O circuncentro del triángulo ACE.
Prueba que la recta que pasa por D perpendicular a $\overline{DO}$, la recta que pasa por E perpendicular a $\overline{BC}$ y la recta que pasa por B paralela a $\overline{AC}$, se cortan en un punto.

SOLUCIONES
TEMARIO COMÚN

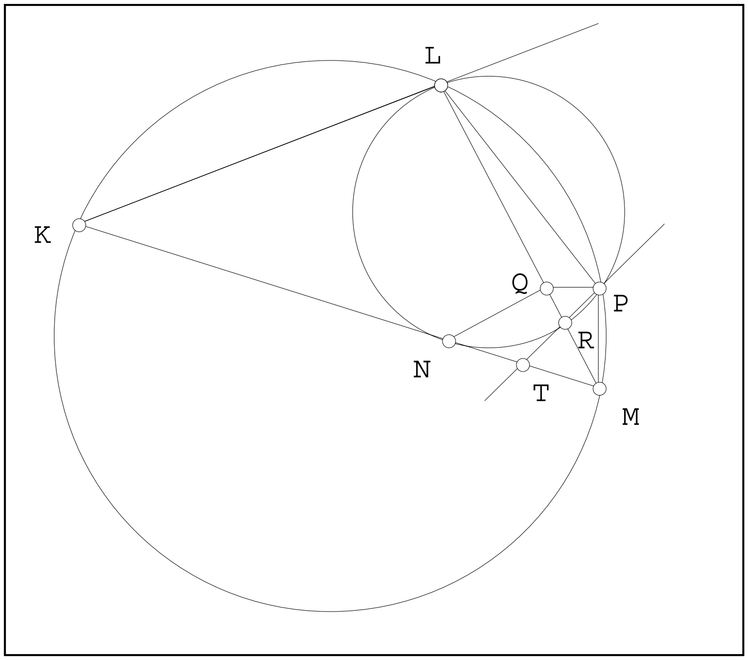
1. No se puede.
Sea N un número arbitrario de 100 cifras de los que se pueden formar con las condiciones del problema. Demostremos que 11/ N.
En N los dígitos que ocupan las posiciones impares son los dígitos $1^{ro.}$ y $3^{ro.}$ de los números de 4 cifras de la lista y los que ocupan las posiciones pares son los dígitos $2^{do.}$ y $4^{to.}$ de dichos números.
Sean S_I y S_P las sumas de los dígitos que ocupan las posiciones impares y pares, respectivamente, del número N.

$$S_I = \underbrace{1+1+1+...+1}_{\text{10 veces}} + \underbrace{2+2+2+...+2}_{\text{15 veces}} + \underbrace{9+9+9+...+9}_{\text{10 veces}}$$ en algún orden.

$$S_P = \underbrace{9+9+9+...+9}_{\text{10 veces}} + \underbrace{1+2+3+....9+1+2} + \underbrace{3+3+3+...+3}_{\text{12 veces}}$$ en algún orden.

$S_I = 130$, $S_P = 174$, $S_I - S_P = 130 - 174 = -44$, luego 11/($S_i$ – S_p).
En virtud de la regla de la divisibilidad por 11, 11/N. N>11.

2. Sea $R = \{C \cap \overline{LM}\} \setminus L$ y $T = \{PR \cap KM\}$.
Como el cuadrilátero KLPM está inscrito en una circunferencia, $\angle MPL = 180^0 - \angle MKL$,
$\angle LPR = \angle KLM$ (inscrito en la circunferencia y seminscrito sobre el mismo arco en C).
En el triángulo KLM, $\angle KLM = 180^0 - \angle MKL - \angle KML$.
Luego $\angle LPR = 180^0 - \angle MKL - \angle KML$,
$\angle MPT = \angle MPL - \angle LPR = 180^0 - \angle MKL - (180^0 - \angle MKL - \angle KML) = \angle KML$
Por tanto $\Delta MPT \sim \Delta MRT$ (ángulo MTP común). De aquí $\overline{MT}^2 = \overline{TR} \cdot \overline{TP}$ pero por potencia de T respecto a C $\overline{NT}^2 = \overline{TR} \cdot \overline{TP} \Rightarrow \overline{NT} = \overline{MT}$ y como el triángulo MQN es rectángulo en Q entonces $\angle TQM = \angle KML = \angle MPT$.
Por tanto el cuadrilátero PQTM es cíclico de donde:
$\angle QTP = \angle KML$, luego: $\angle MPQ = \angle QPT + \angle MPT = \angle KML + \angle KML = 2\angle KML$,
es decir, $\angle MPQ = 2\angle KML$.



3. Vamos a distribuir las letras a, b, y c en el tablero de la siguiente forma:

a	**b**	**c**	**a**
c	**a**	**b**	**c**
b	**c**	**a**	**b**
a	**b**	**c**	**a**

Notemos que las letras están alternadas tanto en las filas como en las columnas. Esto hace que cada vez que se seleccione un rectángulo con 3 casillas, entonces exactamente una letra a, una letra b y una letra c son seleccionadas.
Sean A la cantidad de casillas blancas con la letra a, B la cantidad de casillas blancas con letra b y C la cantidad de casillas blancas con la letra c.
Al inicio tenemos: A = 6, B = 5 y C = 5. Cada vez que seleccionemos un rectángulo formado por 3 casillas, está sumando a cada valor de A, B y C los valores +1 ó –1.

De aquí tenemos que si todas las casillas fueran negras, entonces A = B = C = 0. Pero, como iniciamos con A = 6, B = C = 5, y alternando simultáneamente por +1 ó –1 estos valores, siempre tenemos entre los valores de A, B y C dos números impares y un par o, dos pares y un impar, por lo que la situación A = B = C = 0 es imposible.

TEMARIO POR GRADOS

1. Como x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación dada, entonces $x_1 + x_2 = -(3a + b)$ y $x_1 \cdot x_2 = a^2 + 2b^2$.
Supongamos que x_1^2 y x_2^2 sean las raíces de la segunda ecuación entonces
$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 9a^2 + 6ab + b^2 - 2(a^2 + 2b^2) = 7a^2 + 6ab - 3b^2$
y $x_1^2 \cdot x_2^2 = (a^2 + 2b^2)^2 = a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4$ tenemos que $7a^2 + 6ab - 3b^2 = 6a^2 + 4ab$ entonces
$a^2 + 2ab - 3b^2 = 0$ y $(a + 3b)(a - b) = 0$ por lo que $a = -3b$ o $a = b$.
Por otro lado $a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 = 5a^2b^2 + 4b^4$, es decir, $a^4 - a^2b^2 = 0$ y $a^2(a^2 - b^2) = 0$ por lo que
$a = 0$ o $a = \pm b$.
Si $a = 0$, entonces $b = 0$ y las raíces de la ecuación no son diferentes.
Si $a = b$, entonces la primera ecuación es $x^2 + 4bx + 3b^2 = 0$ cuyas raíces son $-b$ y $-3b$ y la segunda ecuación es $x^2 - 10b^2 x + 9b^4 = 0$ cuyas raíces son b^2 y $9b^2$.
$\therefore$ La única solución es para $a = b$ siendo a cualquier número real diferente de 0.

2. Notemos que 2 003 es primo.

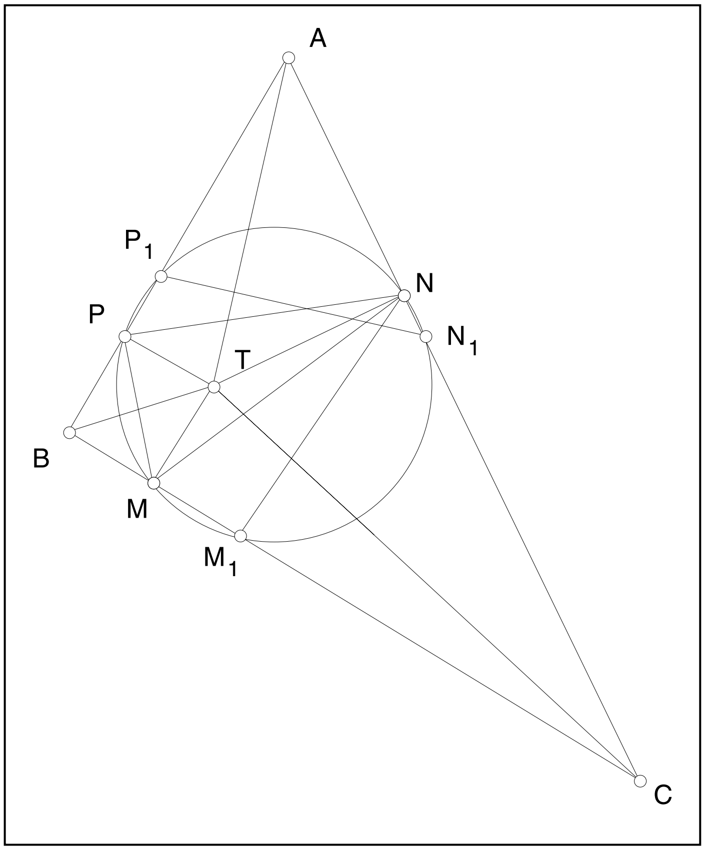
Luego $\dfrac{p}{q} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{1334} + \dfrac{1}{1335} - 2\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{1334}\right) =$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1335} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{667}\right) = \frac{1}{668} + \ldots + \frac{1}{1335}$$

Significa que $\dfrac{p}{q} = 2003\left(\dfrac{1}{668 \cdot 1335} + \dfrac{1}{669 \cdot 1334} + \ldots + \dfrac{1}{1001 \cdot 2002}\right)$

Digamos que A= $\dfrac{1}{668 \cdot 1335} + \dfrac{1}{669 \cdot 1334} + \ldots + \dfrac{1}{1001 \cdot 2002}$. Pero como 2 003 es primo, el denominador de A es primo relativo con 2 003 pues todos los factores son menores que él. Luego 2 003/p.

3. Como $\angle$ BTC = $\angle$ ATB = $\angle$ CTA, entonces $\angle$ BTC = $\angle$ ATB = $\angle$ CTA = 120°. Asumamos sin pérdida de generalidad que los puntos M_1, N_1, P_1 están ubicados en la disposición que se muestra; otro caso sería análogo.
$\angle$ BAC = $\angle$ A, $\angle$ ABC = $\angle$ B y $\angle$ ACB = $\angle$ C. Sea ε la circunferencia circunscrita al ΔMNP.
En el cuadrilátero ACTB tenemos $\angle$ CAT + $\angle$ CBT = 120° – $\angle$ C.
Los cuadriláteros APTN y BPTM son cíclicos. Por tanto $\angle$ CAT = $\angle$ NPT y $\angle$ CBT = $\angle$ MPT
luego $\angle$ NPT + $\angle$ MPT = 120° – $\angle$ C = $\angle$ NPM.
El cuadrilátero $MPNM_1$ es cíclico, luego $\angle NM_1C = \angle$ NPM = 120° – C
En el ΔNM_1C :
$\angle CNM_1 = 180° - \angle NM_1C - \angle C = 60°$
Por tanto: $\overline{M_1N_1}$ se ve bajo un ángulo central de 120° de ε. (I)
Análogamente se demuestra que $\angle ANP_1 = 60° \Rightarrow \angle P_1NN_1 = 120°$.
Por tanto $\overline{P_1N_1}$ se ve bajo un ángulo central de 120° de ε. (II)
Luego de (I) y (II) el $\Delta M_1N_1P_1$ es equilátero.



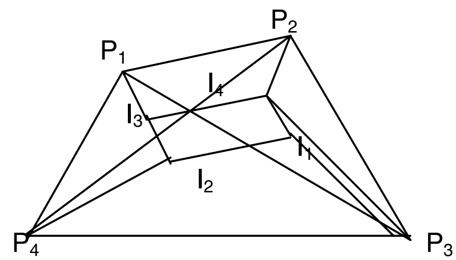
4. $f(a) = f(a\cdot 1) = f(a) + a\cdot f(1) \Rightarrow f(1) = 0$ y $f(p) = 1$ si p es primo.
Si $f(p^k) = k\cdot p^{k-1} \Rightarrow f(p^{k+1}) = f(p^k)p + p^k f(p) = kp^{k-1}p + p^k = (k + 1)p^k \Rightarrow f(p^k) = k\cdot p^{k-1}$.
Si $n = p^k q$ con p no divide a q $\Rightarrow f(n) = kp^{k-1}q + p^k f(q) \Rightarrow f(n) = p^{k-1}(kq + pf(q))$.
Si p no divide a k entonces $f(n) = p^{k-1}q_1$ donde p no divide a q_1.
Entonces si p_i no divide a α_i y $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} \Rightarrow f(n) = p_1^{\alpha_1-1} \cdot p_2^{\alpha_2-1} \cdots p_k^{\alpha_k-1} q_2$ con p_i no divide a q_2
$(i = 1, 2,..., k) \Rightarrow (n,f(n)) = p_1^{\alpha_1-1} \cdot p_2^{\alpha_2-1} \cdots p_k^{\alpha_k-1}$

$\Rightarrow \dfrac{n}{(n, f(n))} = p_1p_2...p_k$ que es libre de cuadrados.

5. a) Supongamos lo contrario: $a_{i-1} + a_{i+1} \geq 2a_i \ \forall i = \overline{2,8}$.
Sea $a_k = \max \{a_i\}$ $(1 \leq i \leq 9)$, entonces como $a_{ik-1} + a_{k+1} \geq 2_k$ entonces necesariamente $a_{k-1} = a_k = a_{k+1}$, asi análogamente $a_{k-2} = a_{k-1} = a_{k+1}$ y asi sucesivamente obtenemos $a_1 = a_k$ significa que $a_k = 0$. <u>Contradicción</u> !!
Supongamos lo contrario, es decir: $a_{i-1} + a_{i+1} \geq 1{,}9a_i \ \forall i = \overline{2,8}$, de aquí:
$a_{i+1} \geq 1{,}9a_i - a_{i-1} \ \forall i = \overline{2,8}$, Sea $a_k = \max \{a_i\}$ $(1 \leq i \leq 9)$. Podemos multiplicar todos los números a_1, a_2,..., a_9 por una misma constante positiva, sin cambiar las condiciones del problema, de manera que podamos asumir que $a_k = 1$. Entonces tenemos que: $a_{k-1} + a_{k+1} \geq 1{,}9$ y de aquí: $0{,}9 \leq a_{k-1}$ y $a_{k+1} \leq 1$; luego al menos uno de los números a_{k-1} o a_{k+1} es mayor o igual que 0,95; asumamos que $a_{k+1} \geq 0.95$ y consideremos dos casos:

Caso (I) $k \geq 5$. Entonces:
$1 \geq a_{k+1} \geq 0{,}95 > 0$
$1 \geq a_{k+2} \geq 1{,}9\, a_{k+1} - a_k \geq 1{,}9 \cdot 0{,}95 - 1 > 0{,}805 > 0$
$a_{k+3} \geq 1{,}9\, a_{k+2} - a_{k+1} \geq 1{,}9 \cdot 0{,}805 - 1 > 0{,}5295 > 0$
$a_{k+4} \geq 1{,}9\, a_{k+3} - a_{k+2} \geq 1{,}9 \cdot 0{,}5295 - 1 > 0{,}00605 > 0$ por tanto obtenemos que $a_9 > 0$ lo cual implica una contradicción !!
Caso (II) $k \leq 4$. Entonces:
$1 \geq a_{k-1} \geq 0{,}9 > 0$
$a_{k-2} \geq 1{,}9\, a_{k-1} - a_k \geq 1{,}9 \cdot 0{,}9 - 1 = 0{,}71 > 0$
$a_{k-3} \geq 1{,}9\, a_{k-2} - a_{k-1} \geq 1{,}9 \cdot 0{,}71 - 1 = 0{,}349 > 0$ y de aquí $a_9 > 0$, lo cual es nuevamente una contradicción !! con las condiciones del problema .

6. Consideremos primero el cuadrilátero $I_1P_3P_2I_4$, como I_1 es el incentro del triángulo $P_2P_3P_4$, tenemos $\angle I_1P_2P_3 = ½ \angle P_4P_2P_3$, como I_4 es el incentro del triángulo $P_1P_2P_3$ tenemos que $\angle I_4P_2P_3 = ½ \angle P_1P_2P_3$, se cumple que
$\angle I_4P_2P_3 - \angle I_1P_2P_3 = ½\angle P_1P_2P_3 - ½\angle P_4P_2P_3$
$= ½ (\angle I_1P_2P_3 = \angle P_4P_2P_3) = ½ \angle P_1P_2P_4$.



De forma similar se prueba que $\angle I_4P_3I_1 = ½ \angle P_1P_3P_4$.
Pero $\angle P_1P_2P_4 = \angle P_1P_3P_4$ y como esos dos ángulos están subtendidos por el lado P_1P_4 es un cuadrilátero cíclico de esta forma $\angle I_1I_4P_2 = 180° - \angle I_1P_3P_2 = 180° - ½ \angle P_4P_3P_2$ como I_1 es el incentro del triángulo $P_2P_3P_4$. De forma similar consideramos el cuadrilátero $P_1P_2I_4I_3$, concluyendo que:
$\angle P_2I_4I_3 = 180° - ½ \angle P_2P_1P_4$. De esta forma se tiene
$\angle I_1I_4I_1 = 360° - \angle I_3I_4P_2 - \angle I_1I_4P_2 = 360° - (180° - ½ \angle P_2P_1P_4) - (180° - ½ \angle P_4P_3P_2)$
$= ½ (\angle P_2P_1P_4 + \angle P_4P_3P_2) = 90°$ y como $P_1P_2P_3P_4$ es un cuadrilátero cíclico entonces se tiene que $\angle I_3I_4I_1 = 90°$. De forma similar los otros tres ángulos del cuadrilátero $I_1I_2I_3I_4$ son ángulos rectos y el cuadrilátero $I_1I_2I_3I_4$ es un rectángulo.

7. Sea $S(n)$ la suma de los dígitos del número n. Se conoce que un número n tiene k dígitos si
$10^{k-1} \leq n < 10^k$. Sea $a = 2\,003^{2003}$; las relaciones $a = 2\,003^{2003} < (10^4)^{2000} = 10^{8000}$ implica que el número a tiene no más de 8 000 dígitos. Como un resultado $S(a) \leq 8\,000 \cdot 9 = 72\,000 < 10^5$. Por lo que el número $S(a)$ no tiene más de 5 dígitos y $S(S(a)) \leq 5 \cdot 9 = 45$. Si el número no excede a 45, entonces la suma de sus dígitos no excede a $3 + 9 = 12$. De esta forma $S(S(S(a))) \leq 12$. (I)
Si conocemos que $n \equiv S(n)$ (mód 9), para todo $n \in N$.
Se tiene que $a \equiv S(a) \equiv S(S(a)) \equiv S(S(S(a)))$ (mód 9). Pero $2003 \equiv -4$ (mód 9),
$2\,003^{2003} \equiv (-4)^{2003} \equiv (-64)^{667} \cdot (-4)^2 \equiv (-1)^{667} \cdot 16 \equiv (-1)(-2) \equiv 2$ (mód 9).
De acuerdo a (I) se tiene que $S(S(S(a))) = 2$.

8. $f = 0$ es una solución trivial. Supongamos que $f \neq 0$ para $u \neq 0$. ($f(0) = 0$ de I) y II))
Sea u^* = conjugado de u. Haciendo $v = \alpha \in R$ en i) e igualando a II) se tiene que $f(\alpha) = |\alpha|$ $\forall\ \alpha \in R$
Haciendo $v = u^*$ en I) tenemos que $f(uu^*) = f(u)f(u^*)$ pero $uu^* = |u|^2 \in R$, o sea $f(u)f(u^*) = f(|u|^2) = |u|^2$ [I]
Haciendo $v = u^*$ en III) se tiene que $f(u) + f(u^*) \leq |u| + |u^*| = 2|u|$ y usando la Desigualdad de la Media Aritmética y la Media Geométrica se llega a que $|u| = \sqrt{f(u)f(u^*)} \leq \dfrac{f(u) + f(u^*)}{2} \leq |u|$, o sea,
$f(u) + f(u^*) = 2|u|$ [II]. Uniendo [I] y [II] llegamos a que $f(u) = |u|$ para todo $u \in C$.
Se comprueba fácilmente que esta función cumple las características del enunciado.
Nota: La restricción $Im(f) \subseteq R^+$ no es necesaria, solo se usa para "suavizar" el ejercicio. En efecto, de II) se deduce que $f(u^2) = f^2(u) \Rightarrow f(u^2) \geq 0$ para todo u.

Ahora, cualquier número complejo z se puede escribir como el cuadrado de algún número complejo u, esto es f(z) $\geq$ 0 para todo z $\in$ C.

9. $\angle ABC = \angle BAC = \alpha$, G circuncentro del triángulo ABC. Sean F' y F'' en la recta que pasa por B paralela a $\overline{AC}$ tal que $\overline{OD} \perp \overline{DF'}$ y $\overline{BC} \perp \overline{EF''}$, denotamos por H' y H'' las proyecciones de F' y F'' sobre $\overline{AB}$, respectivamente.

Como O es interior al $\angle ADC$ y $\angle ACB < 90^0$, los puntos F' y F'' están en el interior del $\angle BAC$; por tanto es suficiente probar que F' = F'' $\Rightarrow \overline{F'H'} = \overline{F''H''}$.

Sean O' y G' las proyecciones de O sobre $\overline{AB}$ y de G sobre $\overline{OO'}$. $\Delta DH'F' \sim \Delta OO'D$ de donde $\dfrac{\overline{DH'}}{\overline{F'H'}} = \dfrac{\overline{OO'}}{\overline{DO'}}$, además $\angle GOG' = \alpha$ y $\dfrac{\overline{BH'}}{\overline{F'H'}} = \dfrac{\overline{OG'}}{\overline{GG'}}$ luego $\overline{GG'} = \overline{DO'}$, $\overline{O'G'} = \overline{DG}$ y $\angle DBG = 2\alpha - 90^0$, por tanto $\overline{F'H'} = \dfrac{\overline{BD} \cdot \overline{O'D}}{\overline{GD}} = \overline{O'D}\cot\left(2\alpha - 90^0\right) = -\overline{O'D}\tan 2\alpha$ (1).

Por otro lado $\angle CBF'' = 180^0 - 2\alpha$ y $\overline{BE} = 2\overline{O'D}$, además

$\overline{F''H''} = \overline{BF''}\text{sen}\alpha = \dfrac{\overline{BI}\text{sen}\alpha}{\cos\left(180^0 - 2\alpha\right)} = -\overline{BE}\dfrac{\text{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos 2\alpha} = -\overline{O'D}\tan 2\alpha$, (2) donde $I = \overline{BC} \cap \overline{EF''}$.

De (1) y (2) se obtiene que $\overline{F'H'} = \overline{F''H''}$.

BIBLIOGRAFÍA

Antonov, N.; Vygodsky, M.; Nikiti, V.; Sankin, A.: Problems in Elementary Mathematics for Home Study, Editorial Mir, 1974.

Bellot Rosado, Fco. Deban Miguel, Ma. V. López Fdez-Asenjo Félix: Olimpiada Matemática Española. Problemas propuestos en el distrito de Valladolid. Instituto de Ciencias de la Educación Universidad de Valladolid, 1992.

Boletín Asociación Matemática Venezolana, Boletín, vol. VIII, No. 1, 2001.

C2K2 Century 2 of KöMal. Roland Eötvös Physical Society Budapest 2002. vol. 2, 1998-2000.

Conde Calero, Juan M. y otros: Problemas de la Olimpiada Matemática Nacional: Probabilidad e Integrales. ICE Alicante, 1986.

Concurso Canguro Matemático, 1998-2001.

Concurso de Primavera, 1997-2001,

Davidson, Luis; Reguera, Raimundo y otros: Problemas de Matemática Elemental 1, Editorial Pueblo y Educación, 1995.

Davidson, Luis; Reguera, Raimundo y otros: Problemas de Matemática Elemental 2, Editorial Pueblo y Educación, 1995

Grozdev, S. Kolev, E. Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions. Union of Bulgarian Mathematicians. Sofía, Bulgaria 2002.

Gusiev, V. Litvinenko, V. Mordkovich, A.: Prácticas para resolver Problemas de Matemática. Geometría, Editorial Mir, Moscú, 1989.

Guzmán, Miguel de: Tendencias Innovadoras en Educación Matemática, OMA, 1992.

Guzmán, Miguel de: Para pensar mejor, Editorial Labor, España, 1991.

Hungarian Problem Book (2 vols). N:M:L: 11-12, M.A.A. 1963.

Krechmar, V.A. A Problem Book in Algebra, Editorial Mir, Moscú, 1974.

Litvinenko, V. Mordkovich, A.: Prácticas para resolver Problemas de Matemática. Álgebra y Trigonometría, Editorial Mir, Moscú, 1989.

Mathematical Olympiads. The Australian Scene. Volúmenes varios, publicados en los años 1988, 1989.

Mega, Elio y Watanabe, Renate: Olimpiadas Brasileiras de Matemática. 1ª a 8ª, Editorial Núcleo, 1988.

Olimpiadas Colombianas de Matemática: volúmenes varios publicados en los años 1985, 1987, 1992 al 1999.

Olimpiadas Matemáticas de varios paises. Sitios de Internet relacionados con las Olimpiadas Matemáticas.

Olimpiada Matemática Española. Real Sociedad Matemática Española, Granada, 1999.

Olimpiada Mexicana de Matemáticas: Problemas para las Olimpíadas: volúmenes varios, publicados en los años 1992, 1995, 1998, 2000, 2001 y 2002.

Polya, G.: Cómo plantear y resolver problemas, Editorial Trillas, México, 1972.

Polya, G.: How to solve it: A new aspect of mathematical method, Garden City, NY, Doubleday, 1957.

Problemarios de Concursos de Matemática, Sociedad Mejicana de Matemática, 1991-1997.

Problemas de Entrenamiento: O.M.A., 1995-2002.

Problemas Semanales: O.M.A., 1995-2002.

Revista del Profesor de Matemáticas. Sociedad de Matemática de Chile, 1994.

Revista do Profesor de Matemática: Volúmenes varios.

Revista EUREKA. Olimpíada Brasilera de Matemática. Volúmenes varios, publicados en los años 1997 al 2002.

Santaló, L. y colaboradores: Enfoques hacia una didáctica humanista de la Matemática, Editorial Troquel Bs. As., 1994.

Shariguin, I.: Problemas de Geometría. Colección Ciencia Popular, Editorial Mir, Moscú, 1989.

Schoenfeld, Alain: Ideas y tendencias en la resolución de problemas, O.M.A., Buenos Aires, 1991.