GEOMETRÍA.

Para la Escuela Pedagógica.

Autores:

Dr. C. Jorge Francisco González Concepción. UCP “Félix Varela Morales”, Villa Clara.
Dr. C. Carlos Duardo Monteagudo. UCP “Félix Varela Morales”, Villa Clara.
Ms. C. Nelly de la Caridad Martín Campillo. UCP “Félix Varela Morales”, Villa Clara.
Lic. Alina Victoria Peña Acosta. UCP “Félix Varela Morales”, Villa Clara.
Ms. C. Fidel Rubén Rodríguez Ramos. UCP “Félix Varela Morales”, Villa Clara.
Ms. C. Ortelio Nilo Quero Méndez. UNISS “José Martí Pérez”

Preámbulo:

Este libro fue escrito con el fin de servir de texto básico para los contenidos de geometría que son estudiados en el tercer semestre de la asignatura Matemática de la carrera de Formación de educadoras de Preescolar, Maestros Primarios y Educación Especial. No obstante en él aparecen de manera breve algunos contenidos que no están presentes directamente en dicho programa, pero que complementan al mismo y ayudan a tener una visión más general de la geometría.

Se presenta el fruto del esfuerzo de un colectivo de cinco profesores de la Universidad de Ciencias Pedagógicas “Félix Varela Morales” de Villa Clara y un profesor de la Universidad “José Martí Pérez” de Sancti Spíritus. Esperamos que sea de utilidad a los profesores y alumnos a los que va dirigido, de esa manera los objetivos del colectivo de autores se verán cumplidos.

Los autores.

ÍNDICE

Introducción

Este libro que se dedica a la geometría, con el propósito de que sea utilizado como texto de la asignatura Matemática en el tercer semestre de las escuelas pedagógicas en Cuba, tiene entre sus objetivos esenciales facilitar la labor de los profesores de este tipo de escuela y contribuir a que los estudiantes adquieran los conocimientos geométricos necesarios para concluir exitosamente sus estudios y para desempeñarse como profesionales de la educación en el nivel primario.

Acerca de la importancia que para los maestros y profesores tiene el dominio de la geometría se pueden dar muchos argumentos, uno de ellos se encuentra en la Historia de la Matemática y es el siguiente, se dice que el filósofo griego de la antigüedad Platón hizo escribir en la entrada de su academia[1] las siguientes palabras: "Que ningún ignorante de la geometría entre aquí"[2].

Acerca de la importancia de la geometría escolar, en Cuba, plantean Álvarez, Almeida y Villegas que:

> *"[…]. Ella prepara a los alumnos para orientarse en el entorno espacial, percibir sus proporciones y dimensiones, desarrollar una memoria visual, captar semejanzas y diferencias, regularidades y manipular mentalmente figuras geométricas, entre otros aspectos, lo que debe servirles para la apreciación estética de la realidad, y desenvolverse en su medio natural y productivo, pero también contribuye al desarrollo de importantes convicciones y cualidades de la personalidad, lo que se refleja en actitudes como la curiosidad científica"[3].*

Sobran las razones para que te motives por el estudio y el aprendizaje de la geometría, por lo que esperamos que este libro se convierta en un valioso medio para el cumplimiento de los objetivos de la asignatura Matemática en este semestre de tu carrera.

El contenido de este libro se estructuró en tres capítulos y estos se dividieron en epígrafes. Cada capítulo contiene definiciones, teoremas, ejemplos donde se muestran los procedimientos fundamentales que debes tener en cuenta para resolver los ejercicios que aparecen al final de cada epígrafe y capítulo. Estos últimos pretenden que puedas integrar los diferentes conocimientos adquiridos en el capítulo.

---

[1] Escuela filosófica de la antigüedad fundada por Platón y que contribuyó en gran medida al progreso de la matemática y de la astronomía.

[2] Bell, E, ( ):Los Grandes Matemáticos. p.2

[3] Álvarez, M, Almeida, B y Villegas, E. (2014): El proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura Matemática. Documentos metodológicos. Pueblo y Educación. La Habana. Cuba.p.76.

En el proceso de resolución de los ejercicios que se proponen en el libro es importante que realices las siguientes acciones:

- Lee detenidamente cada uno de ellos.
- Separa lo dado y lo buscado.
- Confecciona una figura de análisis, en caso de ser necesario.
- Recuerda las definiciones y teoremas que se relacionan con lo dado y con lo buscado.
- Trata de relacionar el ejercicio con los ejemplos que aparecen en el texto o realizados por tu profesor en las clases.
- Analiza si el resultado obtenido es lógico y si existe alguna forma de comprobar la solución obtenida.
- Analiza si existe otra vía de solución para el ejercicio.

Entre los ejercicios encontrarás algunos donde se pide utilizar el software GeoGebra en el proceso de resolución o para comprobar ciertas afirmaciones, si no has trabajado anteriormente con este software te recomendamos que le consultes a tu profesor de Matemática o a un compañero que tenga conocimientos de este asistente matemático. Es importante que te intereses en conocer las herramientas de este *software*, pues esto te ayudará a estudiar la geometría con mayor facilidad.

Algunos de los ejercicios pretenden que te familiarices con los programas y textos de la Educación Primaria, es importantes que los realices y si te surge alguna duda le preguntes a tu profesor.

El ***primer capítulo*** se dedica al estudio de algunos conceptos básicos de la geometría euclidiana, se definen además conceptos importantes como segmento, semirrecta, semiplano, circunferencia, ángulo, polígono y triángulo. En este apartado se presta especial atención a los diferentes tipos de ángulos, se presentan los principales teoremas acerca de estos entes geométricos y por último se exponen las definiciones y teoremas más importantes sobre los triángulos y algunas consecuencias, especialmente lo relacionado con los ángulos entre paralelas.

El ***segundo capítulo*** está dedicado al estudio de la igualdad de las figuras planas y comienza con el estudio de los movimientos, a continuación se trata la igualdad de triángulos y seguidamente el perímetro y el área de algunas figuras planas. Especial atención se presta, en este capítulo, a los cuadriláteros y a las construcciones fundamentales con regla y compás, por último se estudian algunos cuerpos geométricos, así como su área lateral, total y volumen.

En el ***tercer capítulo***, comienza con un repaso sobre razones y proporciones y a continuación se estudia el teorema de las transversales y algunas de sus aplicaciones. Una parte importante de este capítulo se destina al estudio de la semejanza de figuras y particularmente de los triángulos y finalmente se presenta la homotecia y las transformaciones semejantes.

Queremos agradecer a todas aquellas personas que han contribuido a que esta obra se concluya y llegue a los estudiantes de las escuelas pedagógicas y en especial al Dr. C Robert Barcia Martínez por las valiosas observaciones y recomendaciones ofrecidas en la oponencia realizada a este texto.

Los autores

Capítulo 1: Elementos básicos de la geometría

Introducción

Si miras a tu alrededor podrás darte cuenta que la geometría te rodea, el hombre ha construido un sinnúmero de obras, pero todas ellas de acuerdo con las figuras geométricas, eso lo puedes ver con solo salir a la calle y observar con detenimiento, por ejemplo, si miras un edificio como el de la foto de la figura 1.1, pero lo haces con detenimiento observarás lo que te muestra la foto, pero hay algo más escondido en esa fachada, como lo muestra la figura 1.2.

Se puede observar que hay triángulos y rectángulos, pero también estas figuras contienen sus lados que son segmentos y sus vértices que son puntos. Las figuras 1.3 y 1.4 muestran otras construcciones del hombre, en las se identifican otras figuras geométricas como cuadrados, trapecios, circunferencias y semicírculos se destacan sobre las fotos, pero un interesante ejercicio que puedes realizar es buscar más de estas figuras que se encuentran ocultas en las fotos, no escribas en el libro, pero trata de buscar las figuras conocidas posibles.

Figura 1.1

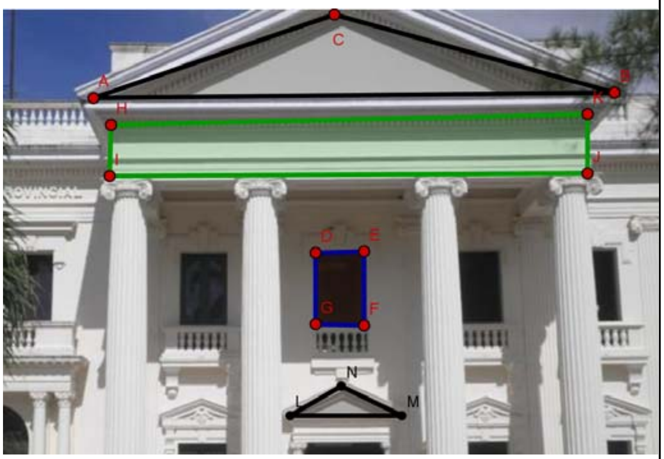


Figura 1.2

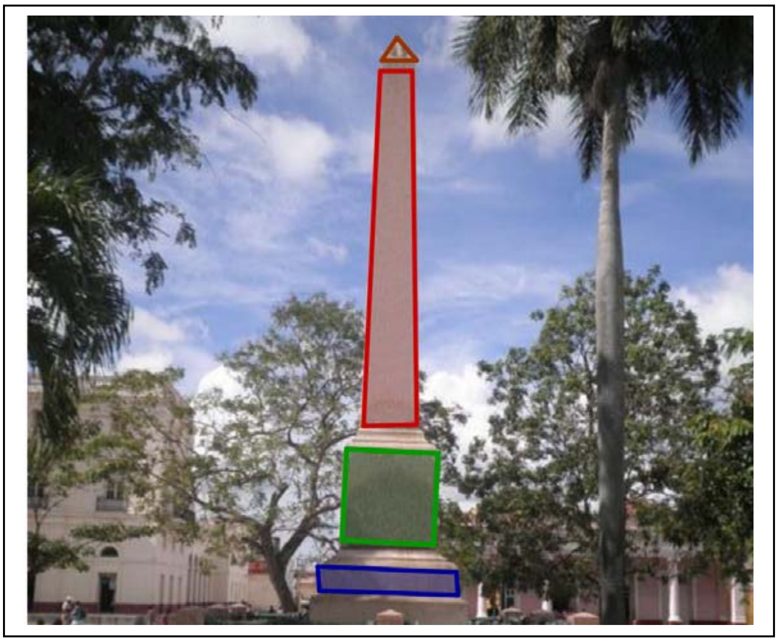


Figura 1.3

Figura 1.4

Para llegar a conocer y utilizar las figuras geométricas el hombre primero observó el mundo que lo rodeaba, donde de manera natural no es común ver estas figuras, y fue extrayendo conclusiones y aprendiendo a lo largo de muchos siglos. Cuando salió de la comunidad primitiva y tuvo propiedades, una de las primeras de esas fue la tierra y el hombre aprendió a medirla, de ahí le viene el nombre a la ciencia “geometría”, donde “geo” significa tierra y “metría” significa medida, así desde sus orígenes esta ciencia tuvo un fin práctico al cual debe su nombre, medir la tierra.

Sobre las figuras geométricas y sus propiedades se escribieron libros desde la antigüedad, uno de esos libros, donde se organizó la mayoría de lo conocido hasta el momento, pero además se agregó el orden y algunos aspectos nuevos, se llamó “Elementos” y fue escrito por Euclides en el siglo III antes de nuestra era. Ese libro representó un avance en el estudio de esta ciencia y hasta este siglo se utilizan traducciones de él en algunos países para el estudio de la geometría en la escuela media.

Corresponde entonces, no apurarse mucho, para comprender la geometría en toda su extensión es bueno comenzar por los primeros conceptos que se necesitan y sobre los cuales se levanta la geometría, estos conceptos no se definen, se llaman conceptos básicos.

1.1 Conceptos básicos

El mundo que nos rodea no se reduce a la superficie de una mesa, a una pared o la superficie del mar, que se observa de forma plana, ese mundo tiene tres dimensiones y se le llama espacio, es el lugar donde vivimos, construimos y estudiamos, pero ya se mencionó que ese espacio está “lleno” de geometría, esa geometría se construye sobre la base de puntos, rectas y planos que llenan ese espacio, como debes haber aprendido en grados anteriores. Es bueno tener claridad que esos elementos geométricos no se definen, se aceptan, como algo que la experiencia ha hecho conocer.

Cuando se habla de un **punto** se piensa en la marca que deja la punta bien fina de un lápiz en una hoja de papel, o la tiza sobre el pizarrón o la punta de una aguja sobre un papel o tela, o sobre la propia piel cuando se pincha con ella; también una lejana estrella da esa idea de un punto, de esa forma se acepta lo que se conoce como un punto.

Una **recta** hace pensar en la marca que deja el lápiz sobre la hoja de papel al deslizarlo por el borde de una regla, o lo mismo, pero realizado por la tiza sobre la pizarra, o a veces cuando se observa las líneas del ferrocarril que se pierden a lo lejos, no se terminan, que es otra característica que asociamos a las rectas, son ilimitadas.

El **plano**, que es donde generalmente se desarrolla la mayor parte de la geometría está asociado a la hoja de papel, la superficie de la pizarra, la de una mesa y a veces en gran escala, la superficie de una presa o del mar cuando está en calma, la hoja de papel o la pizarra, se ve como el lugar donde se pueden representar los puntos y las rectas que estudiamos en las clases de Matemática.

Todas estas ideas son buenas y permiten desarrollar a partir de ahí los contenidos geométricos. Es bueno recordar la manera que se representan y se denotan estos conceptos básicos y algunas de las propiedades mediante las cuales se relacionan.

Los puntos se denotan por letras mayúsculas y las rectas por letras minúsculas. Los planos también tienen su forma de denotarlos, generalmente con letras griegas, pero serán poco utilizados en este curso. La figura 1.5 ilustra los elementos estudiados.

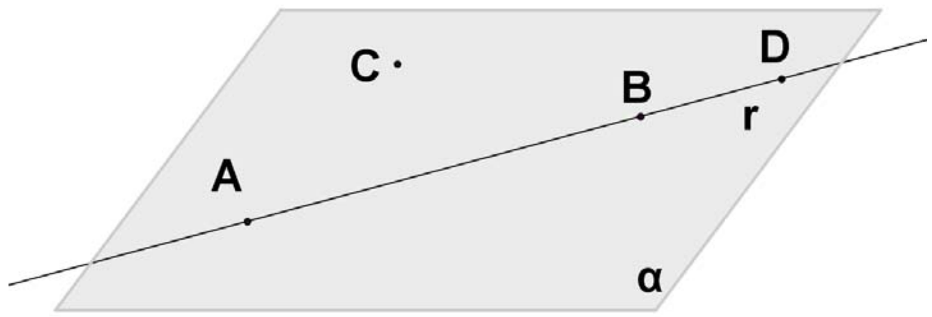


Figura 1.5

Por ejemplo: los puntos **A**, **B y D** están o pertenecen a la recta **r**, el punto **C** no está o no pertenece a la recta **r** y tanto los puntos **A**, **B**, **C, D** y la recta **r** están o pertenecen al plano α. Se ilustró la recta que sobrepasa los límites del plano representado, para resaltar la característica de la misma de ser ilimitada, en la práctica, cuando se esboza una figura, no es necesario hacerlo de esta manera.

Es necesario ir recordando algunas propiedades que son conocidas de estudios anteriores, algunas de estas propiedades se aceptan como verdades, porque la práctica geométrica ha hecho que se acepten, a algunas de estas propiedades se les conoce actualmente como axiomas, por su parte Euclides en su obra Elementos las consideró con el nombre de postulados.

La siguiente propiedad es el primer postulado del Libro I de Euclides: por los puntos A y B solo pasa una recta, en este caso r, generalmente se dice que **dos puntos determinan una única recta**. Esta es una propiedad inicial que no hay que justificar y se toma como verdadera, se puede comprobar, de manera gráfica, la imposibilidad de trazar más de una recta por dos puntos construidos en una hoja de papel o en la pizarra. En correspondencia con esta propiedad la recta r de la figura 1.5 se puede denotar como $\mathbf{r_{AB}}$ pues es la única recta que contiene a los puntos A y B a la vez, esta forma se puede utilizar en lugar de decir: recta AB o recta que pasa por los puntos A y B.

Ya se ha asociado a cada número un punto de la recta numérica y a cada par ordenado de números en el plano cartesiano un punto de dicho plano, eso es suficiente para saber que en la recta y en el plano existen infinitos puntos, si cada dos puntos diferentes determinan una recta, entonces también existen infinitas rectas.

Por otra parte se puede considerar otro axioma: **Existen por lo menos tres puntos no alineados**, se entienden por alineados los puntos que están en una recta, en consecuencia, tres puntos no alineados no están en la misma recta. En la figura 1.5 A, B y C son no alineados, por su parte A, B y D son alineados.

Las relaciones entre rectas del plano.

Si se tienen dos rectas en el plano, con ellas pueden darse tres posibilidades:

a) Las rectas son iguales.

b) Las rectas no tienen puntos comunes.

c) Las rectas son diferentes y tienen por lo menos un punto común.

Si suceden las posibilidades a) o b) se dice que las rectas son paralelas, si es el caso a) las rectas son paralelas idénticas.

El caso c) se puede resumir en un teorema de fácil demostración.

Teorema: Dos rectas diferentes pueden tener, como máximo, un punto común.

Demostración

Ya se analizó que puede suceder que dos rectas diferentes no tengan puntos comunes, luego se debe investigar si pueden tener más de un punto en común.

Si se supone que las rectas r y s tienen dos puntos comunes, A y B, entonces, como dos puntos determinan una única recta, las rectas r y s estarían determinadas por A y B, y serían iguales. Por tanto dos rectas diferentes no pueden tener más de un punto en común y esto demuestra el teorema.

Definición:

a) Dos rectas r y s de un plano **se llaman paralelas** si cumplen una de las condiciones siguientes: r = s o la intersección de r y s es vacía (no tienen puntos comunes). Se denota por r // s y se lee: la recta r es paralela a la recta s.

b) Dos **rectas diferentes** r y s se cortan si son diferentes y tiene un punto en común. Este punto común se llama punto de intersección de las rectas r y s.

Como consecuencia de la definición de paralelas y de acuerdo con las propiedades del paralelismo, se define que cada conjunto de rectas paralelas se llama una **dirección en el plano**, de manera que diferentes rectas que no son paralelas determinan diferentes direcciones.

Aquí es conveniente recordar un contenido que resulta imprescindible en algún momento del estudio de la geometría: **Si P es un punto que no está en la recta r, por P se puede trazar solo una paralela p a la recta r**. esta propiedad se conoce como **axioma de las paralelas**.

Ejemplo: En la figura 1.6 se observan los principales conceptos y relaciones analizados en el epígrafe, el plano α y además puntos y rectas sobre el, hay puntos alineados y no alineados y rectas en las diferentes posiciones, por ejemplo: E, M y H son alineados, pero J, F y K no lo son. Por su parte las rectas r_{JF} y r_{KG} son rectas paralelas, mientras que r_{EH} y r_{IG} se cortan en el punto M.

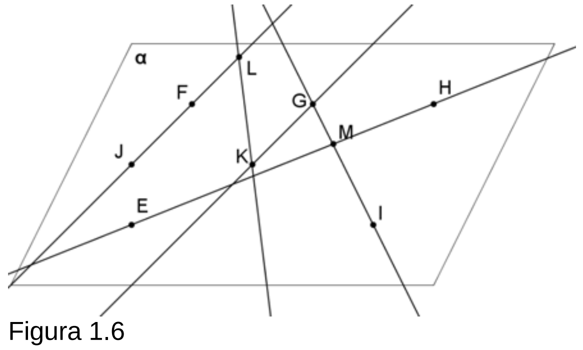


Figura 1.6

Ejercicios

1. Analiza la figura 1.6 y nombra:

a) Los tríos de puntos no alineados no identificados en el ejemplo.

b) Los tríos de puntos alineados no identificados en el ejemplo.

c) Las rectas que se cortan no identificadas en el ejemplo.

d) Las otras rectas que no están nombradas o dibujadas en el ejemplo pero que están definidas por los puntos necesarios.

2. ¿En cada caso del ejercicio anterior han sido identificados todos los elementos posibles? Revise y complete lo que pueda faltar.

3. Dibuje 5 puntos tales que cada tres de ellos no están alineados. ¿Cuántas rectas determinan estos 5 puntos? Dibújelas y escriba su nombre.

4. Utilice papel cuadriculado y dibuje rectas paralelas. ¿Cuál es la principal característica de estos pares de rectas?

1.2 El orden en una recta.

Cuando se habla del orden en una recta, existe un componente que tiene que ver con la experiencia y que tampoco se define, por eso es también un concepto básico, como se observa en la figura 1.7, donde están representadas algunas rectas, de manera práctica es posible “recorrer” la recta r según las flechas, de A hacia B o de B hacia A; en el primer caso se dice que A es anterior a B o está antes que B y en el segundo caso que B es anterior al punto A. Cada una de las formas, se llama **sentido**, entonces se establecen dos **sentidos** en la recta, que sea uno u otro no altera las propiedades de la recta. Igual sucede con las demás rectas representadas.

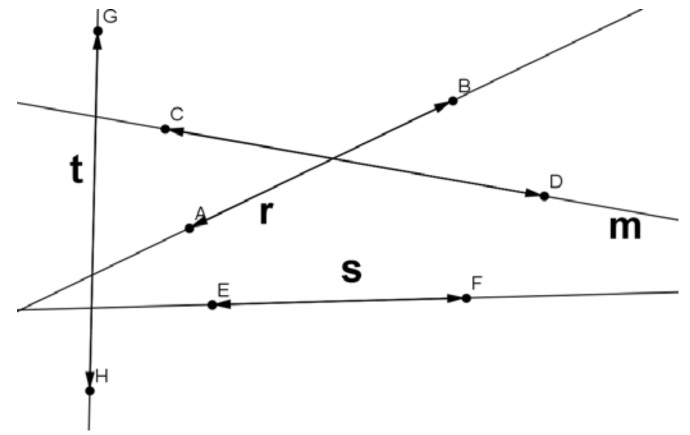


Figura 1.7

Cuando se trabaja con las rectas se asume uno u otro sentido, el resultado es independiente del sentido. Se dice de un punto P, que es posterior a A y anterior a B o posterior a B y anterior a A, según el sentido, que el punto P está entre A y B.

Es evidente que si se asume un sentido, por ejemplo, en la recta s de la figura 1.6, si se considera que el punto E es anterior al punto F, no se puede considerar a la vez que en ese sentido F es anterior a E, es decir, establecido un sentido en una recta r, **para dos puntos P y Q de r, solo se cumple una de las relaciones: P = Q, P anterior a Q o Q anterior a P**, esta es una propiedad importante para el orden en la recta.

A partir del orden considerado en la recta se obtienen algunas consecuencias que son estudiadas a continuación

Teniendo en cuenta el orden explicado se puede definir un concepto muy conocido, el de segmento.

Definición: Sean A y B dos puntos de una recta, el conjunto de puntos situados en r entre los puntos A y B se denomina **segmento**.

Si se considera que los extremos A y B pertenecen al segmento, se dice que el segmento es cerrado, si A y B no se consideran en el segmento, el segmento es abierto. El segmento cerrado determinado por A y B se denota por $\overline{AB}$ y el segmento abierto se denota por AB (Figura 1.8). Los puntos del segmento que no coinciden con los extremos se denominan puntos interiores del segmento.

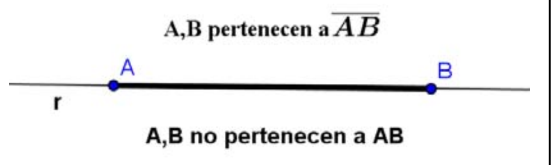


Figura 1.8

Otra definición que se puede establecer a partir de lo analizado sobre el orden en una recta es la siguiente:

Definición: Un punto cualquiera O que pertenece a la recta r determina sobre ella dos subconjuntos de puntos, de acuerdo con el sentido, uno contiene los puntos anteriores a O y el otro conjunto contiene los puntos posteriores a O, estos conjuntos así definidos se llaman **semirrectas** de origen O.

Las semirrectas se denotan por letras minúsculas y como se refieren a los dos subconjuntos que determina un punto en una recta se escriben con subíndice, en la figura 1.9 se ilustra un caso. Se dice que las dos semirrectas que determina un punto en una recta son opuestas, por ese motivo también se pueden denotar una de ellas por una letra minúscula y la otra, su opuesta, por la misma letra, pero ahora con supraíndice (–), que significa estar como un exponente.

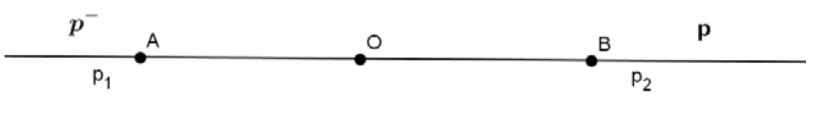


Figura 1.9

En la figura 1.9 se utilizan dos de las formas de notación, se tiene que $p_1 = p^-$ y $p_2 = p$. También se puede utilizar otra forma, donde $p_1 = p^-$ es la semirrecta OA y la semirrecta $p_2 = p$ es la semirrecta OB.

Nota: Si el origen pertenece a la semirrecta la semirrecta es cerrada, en caso contrario se dice que es abierta.

En la figura 1.10 se observa que una recta r en el plano divide al plano en dos conjuntos de puntos, que son subconjuntos del plano, de manera tal que, si dos puntos están situados en uno de estos conjuntos, entonces, el segmento que determinan no contiene puntos de la recta r, sin embargo, si los dos puntos están situados en subconjuntos diferentes, el segmento que determinan contiene un punto interior que pertenece a la recta r, se dice también, que el segmento corta a la recta en un punto.

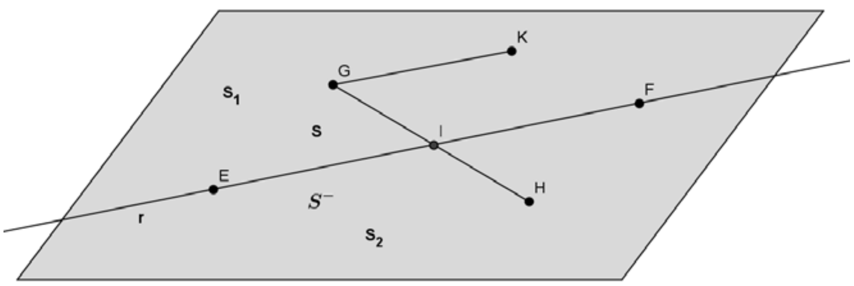


Figura 1.10

Los conjuntos caracterizados en el párrafo anterior dan lugar a la definición siguiente.

Definición: Una recta r divide al plano en dos subconjuntos S_1 y S_2 llamados **semiplanos** de borde r. Se dice que un **semiplano es cerrado** si contiene al borde, en caso contrario es **abierto**.

Las notaciones para los semiplanos pueden ser las que aparecen en la definición anterior, pero además, se pueden denotar por su borde y un punto del semiplano, o por dos puntos del borde y un punto del semiplano, también, por una letra mayúscula, fundamentalmente S y el otro, que es su opuesto por la propia letra con el supraíndice (–), es decir, el opuesto de S es el semiplano S^-.

De acuerdo con la figura 1.9 se tienen entonces los semiplanos opuestos:

rG = EFG = S_1 y además rH = EFH = S_2, se puede también decir que S_1 = S y, como consecuencia, $S_2 = S^-$

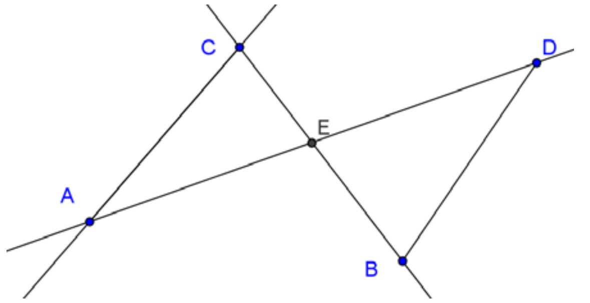


Figura 1.11

Ejemplo: En la figura 1.11 se pueden identificar loa siguientes entes geométricos que son consecuencia del orden establecido en una recta, algunos de ellos se mencionan a continuación: los segmentos $\overline{AC}$, $\overline{AE}$, $\overline{EB}$ **y** $\overline{CD}$ entre otros; las semirrectas CA (se puede denotar como CA^+), la semirrecta EA (se puede denotar como EA^+ o ED^-) y la semirrecta ED (que se puede denotar como ED^+ o EA^-) las dos últimas son semirrectas opuestas.

También se identifican los semiplanos de borde r_{AC} que contienen a E (se puede denotar como ACE o como $r_{AC}E$) y su opuesto del mismo borde que no contiene a E (se puede denotar como $r_{AC}E^-$ o en consecuencia ACE^-), estos dos semiplanos son opuestos, con respecto a los puntos E y B se puede afirmar que están en el semiplano $r_{AC}E$, pues el segmento abierto EB no corta al borde r_{AC} del semiplano. Con relación a los semiplanos ADB y ADC se observa que los puntos B y C están en diferentes semiplanos, puesto que el segmento abierto AB corta al borde r_{AD} en el punto E.

Ejercicios

1. Representa en un plano 5 puntos tales que cada tres de ellos no están alineados.
    a) ¿Cuántas rectas diferentes determinan estos puntos? Denótalas.
    b) ¿Cuántos segmentos diferentes determinan estos puntos? Denótalos.
    c) ¿Cuántas semirrectas diferentes determinan estos puntos? Denótalas.
    d) ¿Cuántos semiplanos diferentes determinan estas rectas en el plano?. Denótalos.
    e) Para cada caso posible determine puntos que están en el mismo semiplano o en semiplanos opuestos de acuerdo con la recta borde. Explique porqué los puedes considerar de una manera o la otra.
2. Traza una recta y tres puntos A, B y C situados en ella.
    a) ¿Cuántos segmentos determinan sobre esta recta los puntos A, B y C.? Denótalos

b) ¿Cuántas semirrectas determinan sobre esta recta los puntos A, B y C.? Denótalos.

3. Consulta los libros y programas de la Educación Primaria y responde:

a) ¿En qué grado se introducen las relaciones “el punto…está en la recta…”, “la recta…no pasa por el punto…”y “el punto…está entre los puntos…y…”?

b) ¿En qué grado se introducen los conceptos de segmento, semirrecta y semiplano?

1.3 Medición de segmentos

Es muy común escuchar frases como: “el largo de la mesa es 1,5 metros”, “de mi casa a la escuela hay 5 cuadras”, “ de la Habana a Santa Clara hay casi 300 kilómetros”, en todos los casos se habla de la medida de ciertas distancias, que como se observa se refiere en cada ejemplo a una unidad: centímetro, cuadra, kilómetro, pero eso no queda ahí, se mide con la unidad que se tenga a mano: el paso, la cuarta, etc.

Lo común en todos estos casos es que se compara cierto segmento con una unidad y mediante ese proceso a cada segmento se le asocia un número, pero, ¿Cómo se hace la medición en geometría y que es lo que se mide en estos casos?

Primero la respuesta a la segunda parte de la pregunta, se miden segmentos y la forma en que se hace se pasa a explicar. Se consideran en lo adelante segmentos cerrados.

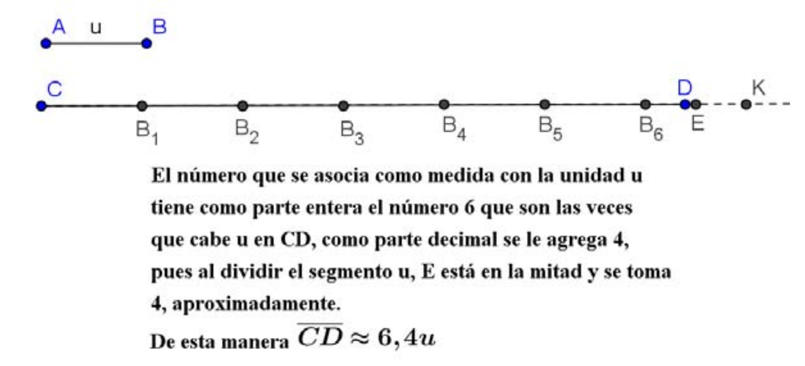


Figura 1.12

Se toma un segmento cualquiera como unidad, por ejemplo en la figura 1.12 el segmento unidad es $\overline{AB}$ y el segmento a medir es $\overline{CD}$, a partir de C en la dirección de C a D se pone $\overline{AB}$ y a continuación de él se vuelve a ubicar $\overline{AB}$, hasta que el extremo coincida con D, si no coincide, el último segmento se divide en 10, pues el sistema de numeración utilizado es decimal y se analiza si alguna división coincide con D, de ser así se cuenta las veces que “cabe” $\overline{AB}$ en $\overline{CD}$ y las partes de 10 con la que coincide D y se forma el número que es la medida. Este proceso es práctico y se usa cuando decimos que la distancia es 10 cuadras y media.

En la práctica este proceso se realiza de manera, lo más exacta posible, con alguna herramienta, por ejemplo una cinta métrica utilizada en las construcciones, o en la escuela con una regla graduada como indica la figura 1.13.

En este caso la longitud del segmento $\overline{AB}$ es 10 cm., las del segmento $\overline{AC}$ es 6 cm. Y la del segmento $\overline{CB}$ es 4 cm. La longitud del segmento $\overline{AB}$ es igual a la suma de las longitudes de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$

Figura 1.13

Teniendo en cuenta el proceso explicado se puede definir longitud.

Definición 5:

a) El número real positivo, asociado a cada segmento se llama **longitud** del segmento y comúnmente se llama medida de un segmento.

b) Se dice que dos **segmentos son iguales** si tienen la misma longitud.

En la figura 1.13 se dice que la longitud del segmento $\overline{AB}$ es la suma de las longitudes de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$, se observa que los segmentos están situados uno a continuación de otro en una misma recta. Cuando los segmentos están en esta posición se dice que los segmentos son consecutivos.

Poner los segmentos en posición de consecutivos, es necesario para poder sumar dos segmentos de manera práctica y para ello se realiza una operación que en geometría se denomina transporte de segmentos, esencialmente esta operación, que siempre es posible, consiste en:

Si se tienen un segmento $\overline{AB}$ el segmento se transporta a partir de un punto, esto es posible de dos formas:

a) A partir de un punto O, en cada una de las semirrectas que determina O en las rectas que pasan por dicho punto, cuando es así, como ya se conoce que las rectas son infinitas, se pueden determinar infinitos puntos P_i tales que $\overline{OP_i}$ tiene la misma

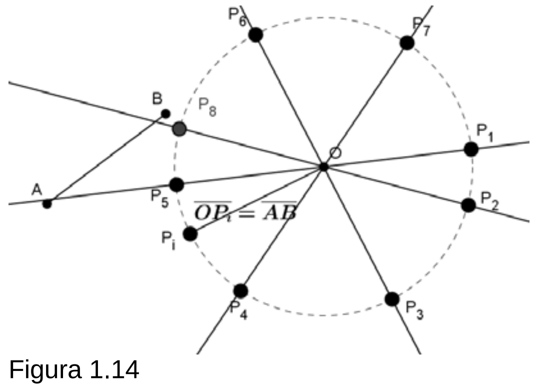


Figura 1.14

longitud que $\overline{AB}$, de los puntos P_i así determinados se dice que están a la misma distancia del punto O y que determinan una figura que se conoce como circunferencia (Figura 1.14).

b) A partir de un punto O que es el origen de una semirrecta p, de esta manera en p solo existe un único punto C tal que $\overline{OC} = \overline{AB}$, se habla entonces de transportar un segmento a una semirrecta a partir de su origen, en esta situación sí se puede realizar de manera única, sobre esa semirrecta (Figura 1.15).

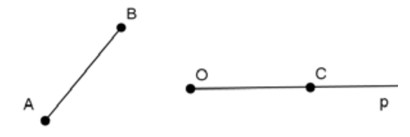


Figura 1.15

Como consecuencia del análisis efectuado se puede hablar de un conjunto de puntos que se obtienen en el plano a partir del transporte de un segmento en todas las semirrectas con origen en un punto O del plano.

Definición: Se llama **circunferencia** al conjunto de puntos que se obtienen al transportar un segmento $\overline{AB}$ de longitud r a partir de un punto O del plano. Se dice que la circunferencia tiene centro O y radio r.

Nota: Seguro que conoces un instrumento mediante el cual se pueden trazar las circunferencias, exactamente, este instrumento es conocido como compás y es bueno que se conozca que cuando se abre, las puntas se encuentran a una distancia dada r, de manera que cuando apoyas la punta de metal en un punto O de la hoja de papel o de la pizarra, y haces girar la otra punta, esta construye sobre esa hoja de papel o la pizarra, todos los puntos que junto con O determinan segmentos de longitud r, es decir, con el compás se puede construir la circunferencia con el centro y el radio dado.

De las semirrectas que pasan por O y sobre las cuales se transporta el segmento $\overline{AB}$, se considera que en una de ellas se obtiene el punto P_i y en su opuesta el punto P_j, el segmento $\overline{P_iP_j}$ así determinado se llama **diámetro de la circunferencia de centro O y radio** $\overline{AB}$ de longitud r. Se puede entonces afirmar que la longitud del diámetro es el doble de la longitud del radio (Figura 1.16).

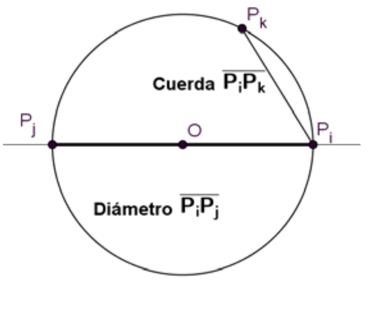


Figura 1.16

Por otra parte si se consideran dos puntos P_i y P_k, determinados en dos de las semirrectas de origen O al transportar $\overline{AB}$ se dice que el segmento $\overline{P_iP_k}$ así determinado se denomina **cuerda de la circunferencia,** la mayor de las cuerdas es el diámetro.

De acuerdo con esta observación si se tiene una semirrecta p de origen O, al trazar la circunferencia con un radio r y centro O, la circunferencia corta a la semirrecta en un punto P, tal que $\overline{OP} = r$ (Figura 1.17), este es el único punto en esa semirrecta que cumple esa condición y esa es la forma de transportar un segmento a una semirrecta a partir de su origen y por consecuencia es la forma que, repetida con diferentes longitudes, permite transportar segmentos consecutivos en una semirrecta, y así realizar la suma de los mismos como medida total del segmento que resulta con origen en el primer punto y extremo en el último extremo del segmento final (Figura 1.18).

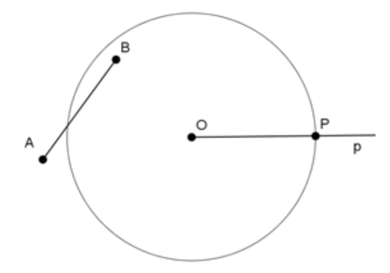


Figura 1.17

Lo explicado anteriormente e ilustrado en la figura 1.18 es un ejemplo de la forma gráfica de sumar dos segmentos, pero es muy sencillo sumar dos segmentos conocidas sus longitudes, que son números reales, se suman las longitudes y el número resultante es la suma de las longitudes de los segmentos, que es la longitud del segmento resultante de la suma. Construir un segmento con esa longitud es obtener el segmento suma.

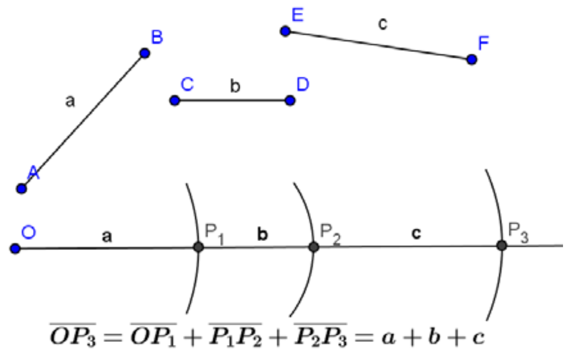


Figura 1.18

Definición: Al punto M del segmento $\overline{AB}$ se le denomina **punto medio** de $\overline{AB}$ si los segmentos $\overline{AM}$ y $\overline{MB}$ tienen la misma longitud.

En la figura 1.19 se ilustra un segmento y su punto medio.

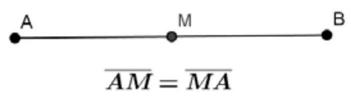


Figura 1.19

Ejercicios

1. En la figura 1.20 se da una circunferencia, algunos puntos y segmentos dibujados, teniendo en cuenta los conocimientos alcanzados en este epígrafe diga si las proposiciones siguientes son verdaderas o falsas.

a) $\overline{EG} + \overline{GC} = \overline{EC}$

b) $\overline{FB} + \overline{BD} = \overline{FD}$

c) $\overline{HK} + \overline{KJ} + \overline{JC} = \overline{CH}$

d) Los segmentos $\overline{AF}$ **y** $\overline{\mathbf{AH}}$ no son iguales.

e) $\overline{EI}$ es una cuerda de la circunferencia.

f) $\overline{FD}$ es un diámetro de la circunferencia.

g) $\overline{AE}$ es un radio de la circunferencia.

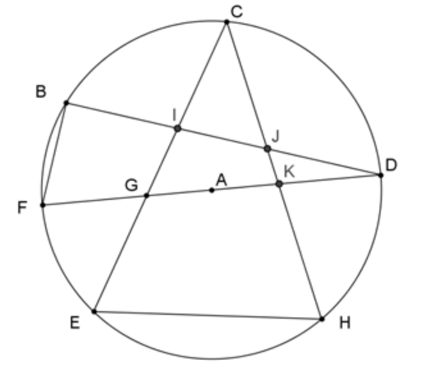


Figura 1.20

2. En la figura 1.20 identifique segmentos que sean:

a) Radios.

b) Cuerdas

c) Suma de otros dos, tres o cuatro (identifique los sumandos).

1.4 Estudio de los ángulos

Otros elementos importantes en el estudio de la geometría son los ángulos, se definen como:

Definición: Se llama **ángulo** a una figura formada por la unión de dos semirrectas de origen común. Este punto se llama **vértice del ángulo** y las semirrectas se llaman **lados del ángulo.**

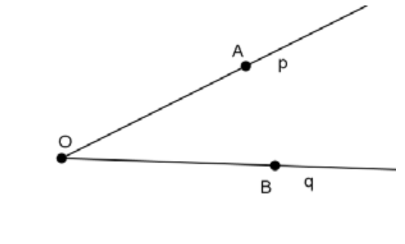


Figura 1.21

En la figura 1.21 se ilustra el ángulo de vértice O y como lados las semirrectas p y q. Los puntos A y B están en los lados del ángulo.

El ángulo se puede denotar como: $\angle$ (p,q) o $\angle$ (q,p), o como $\angle$ AOB o $\angle$ BOA, todas estas formas se refieren al mismo ángulo que se ilustra en la figura 1.20

Si se cumple que p = q, entonces se dice que el $\angle$ (p,q) = $\angle$ (p,p) = $\angle$ (q,q) y se llama ángulo nulo.

Si q = p $^{-}$ entonces los dos lados son semirrectas opuestas y en este caso el $\angle$ (p,q) = $\angle$ (p,p $^{-}$) = $\angle$ (q $^{-}$,q) y se llama ángulo llano. La figura 1.22 ilustra los ángulos explicados.

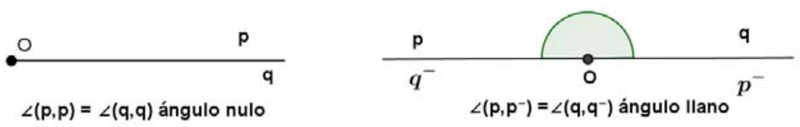


Figura 1.22

Otra forma de considerar los ángulos es como un par ordenado, donde importa el orden, lo cual se denota poniendo un arco con una saeta en el símbolo de ángulo, cuando se hace de esa forma los ángulos se llaman orientados y se consideran dos orientaciones, una en el sentido que giran las manecillas del reloj (sentido horario) y otra contraria al giro de las manecillas del reloj (sentido antihorario)

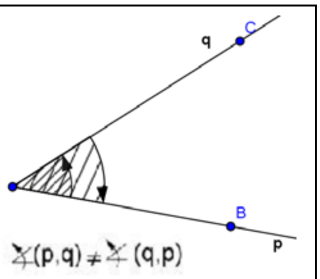


Figura 1.23

$\measuredangle(p,q)$ sentido horario

$\measuredangle(q,p)$ sentido antihorario

En la figura 1.23 se ilustra lo explicado

Por ser pares ordenados, independientemente de la figura que ilustra se tiene que si los componentes no son iguales, entonces los pares no lo serán tampoco, luego como consecuencia de esa forma de definir se tiene la desigualdad de los pares y con esto de los ángulos orientados.

$$\measuredangle(p,q) \neq \measuredangle(q,p)$$

Para el caso de la medición de un ángulos se sigue un proceso análogo al caso de la medición de segmentos, a partir de tomar un ángulo como unidad. Pero no se explica el proceso. Existe una herramienta que permite realizar la medición de los ángulos, esa herramienta se llama transportador de ángulos o semicírculo graduado. Como se observa en la figura 1.24a se tiene un transportador y el ángulo que se quiere medir, ¿Cómo se hace la medición?

Se observa que el transportador tiene una serie de marcas, que por la derecha comienza con 0º en una marca más oscura y termina en la izquierda con una marca en 180º, se lee cero grado y 180 grados sexagesimales.

Se traslada el transportador de manera tal que el vértice O, del ángulo, coincida con la división 4 del transportador, señalada más oscuro, y uno de los lados, en este caso el p esté sobre la marca de 0º. Se observa entonces la marca con la que coincide el lado q (Figura 1.24b) y el número correspondiente es la medida en grados del ángulo ∠ (p,q), en este caso es 50º. Es común decir, y así se asume en el libro que la medida, así asociada al ángulo, es la **medida de la amplitud del ángulo o medida del ángulo** y se escribe ∠ (p,q) = 50º

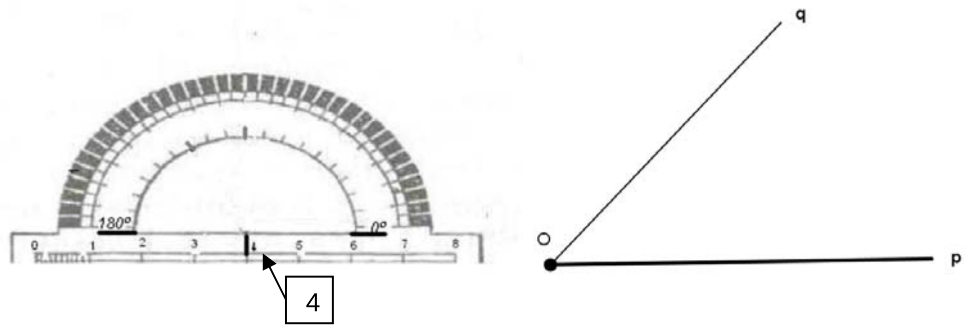


Figura 1.24a

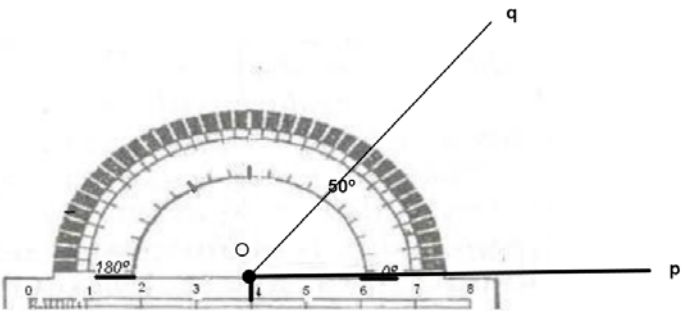


Figura 1.24b

En la figura 1.25 se ilustra la medida de los ángulos ∠ (p,q) y ∠ (p,l); ∠ (p,q) = 90º y ∠ (p,l) = 120º, sobre la base de la misma figura se puede afirmar que, ∠ (q,l) = 30º y

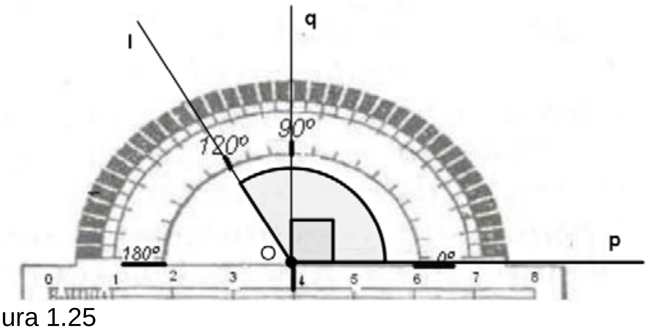


Figura 1.25

que $\angle$ (p,q) +$\angle$ (q,l) = $\angle$ (p,l)

Nota: Las amplitudes de los ángulos y los propios ángulos se denotan en ocasiones con letras griegas minúsculas: α(alfa), β(beta), γ(gamma), δ(delta), φ (fi), etc.

Otras definiciones asociadas a los ángulos se dan a continuación.

Definición: Los ángulos que tienen la misma amplitud son **iguales**.

Definición: Los ángulos con amplitud de 90º se llaman **rectos**. (Ángulo $\angle$ (p,q) de la figura 1.25)

Una consecuencia directa de las definiciones anteriores es:

Teorema: Todos los ángulos rectos son iguales.

Demostración

Se dan dos ángulos rectos cualesquiera $\angle$ (p,q) y $\angle$(m,n), luego se cumple que $\angle$ (p,q) = 90º y $\angle$(m,n) = 90º por definición de ángulo recto, como los dos ángulos tienen la misma medida, entonces por definición son iguales, por tanto, los ángulos rectos son iguales.

Definición: Si dos rectas se cortan y forman un ángulo de 90º se dice que las **rectas son perpendiculares**.

Definición:

a) Los ángulos que tienen un lado común y los otros dos lados están situados en semiplanos opuestos con respecto a la recta que contiene al lado común se llaman **consecutivos**.

b) Dos ángulos consecutivos donde los lados diferentes son semirrectas opuestas se llaman **adyacentes**.

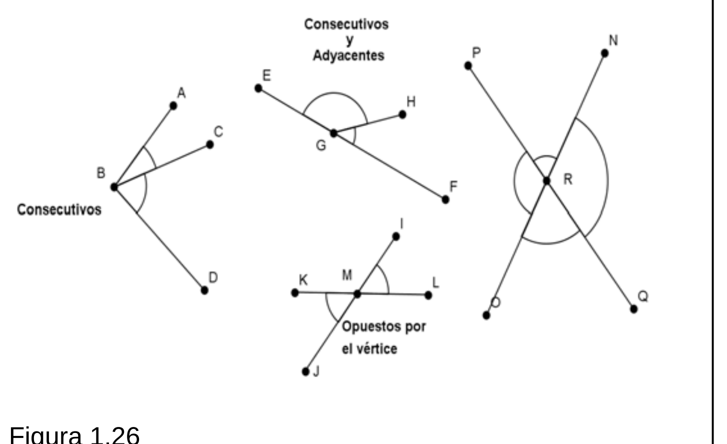


Figura 1.26

c) Dos ángulos cuyos lados son semirrectas opuestas se llaman **opuestos por el vértice.**

Los pares de ángulos definidos se ilustran en la figura 1.26, se pueden encontrar otros de los pares de ángulos definidos en la propia figura.

Los ángulos adyacentes y opuestos por el vértice se caracterizan por una propiedad que se enuncia en le siguiente teorema:

Teorema:

a) Los ángulos adyacentes suman 180º

b) Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

De acuerdo con la definición de ángulos consecutivos para poder sumar, de manera gráfica, dos ángulos hay que ponerlos en la posición de consecutivos, si se conocen las medidas de dos ángulos se suman y se obtiene la medida de la suma de los dos ángulos como adición de dos números reales.

La necesidad de sumar ángulos gráficamente, da lugar a la necesidad de realizar el transporte también para los ángulos, para los ángulos se tiene la herramienta que precisamente tiene ese nombre, transportador de ángulos, aunque más adelante se estudiará como realizar el transporte con la regla y el compás.

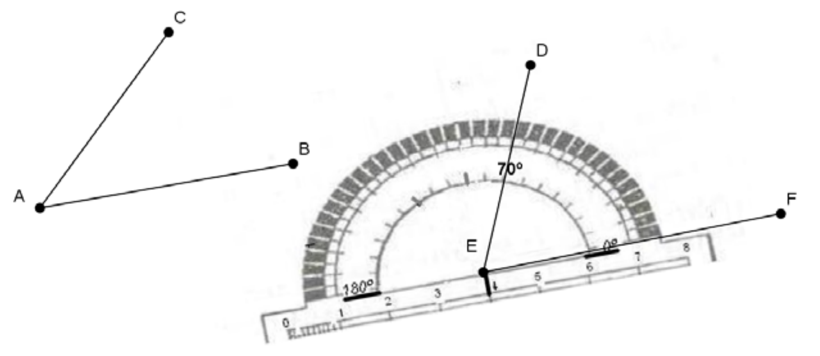


Figura 1.272a

En la figura 1.27 a) se tienen los ángulos $\angle CAB$ y $\angle DEF$ y se quieren sumar gráficamente, para ello se transporta $\angle DEF$ de manera que quede consecutivo con $\angle CAB$, a partir del lado AB (pudiera ser respecto al otro lado), para ello se coloca el transportador en la

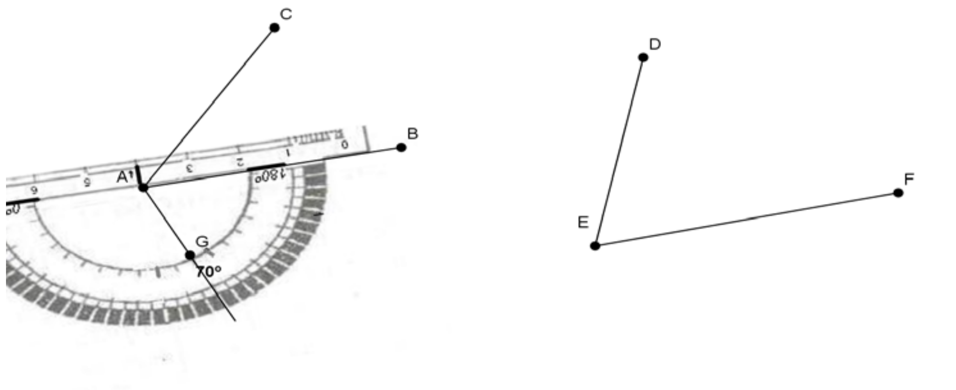


Figura 1.27 b

posición de medir al ∠DEF y se realiza una marca (en este caso 70º que es la medida que refleja el transportador).

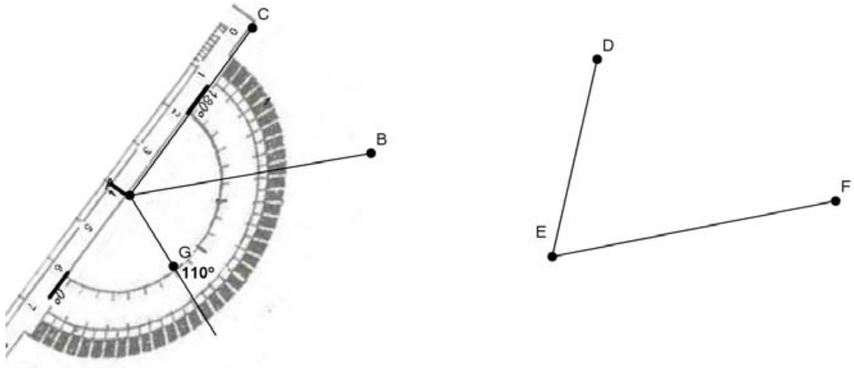


Figura 1.27 c

Ahora se procede como en la figura 1.27 b) la línea de 0º (180º) se pone sobre el lado AB de manera que A esté sobre la marca del transportador y la parte graduada esté en el semiplano opuesto, con respecto a la recta r_{AB}, al que contiene al punto C, entonces se marca un punto G, en la medida de 70º a partir de AB y por ese punto y A se traza el lado del ángulo, que en este caso se ha transportado de manera que ∠BAG mida 70º, ahora los ángulos ∠CAB y ∠BAG son consecutivos y ∠BAG =∠DEF = 70º, por tanto solo resta medir con el transportador la amplitud del ∠CAG, que es la suma de las amplitudes de los ángulos en cuestión, lo cual aparece en la figura 1.27 c).

Se observa en el transportador que la medida es de 110º.

Hay ocasiones que cuando se suman dos ángulos, como los que indica la figura 1.28, el semicírculo graduado "no alcanza" para medir el ángulo que resulta.

Se puede observar como a partir del lado BC del ángulo α se transportó el ángulo β, pero al colocar el transportador para ver la medida del ángulo resultante de la suma de $\alpha + \beta$, situados ahora en la posición de consecutivos, el lado final BG queda fuera de las posibilidades del transportador. El ángulo que resulta de la suma $\alpha + \beta$ recibe el nombre de ángulo **cóncavo** o **sobreobtuso**, se observa que su medida es mayor que 180º. En consecuencia los que son

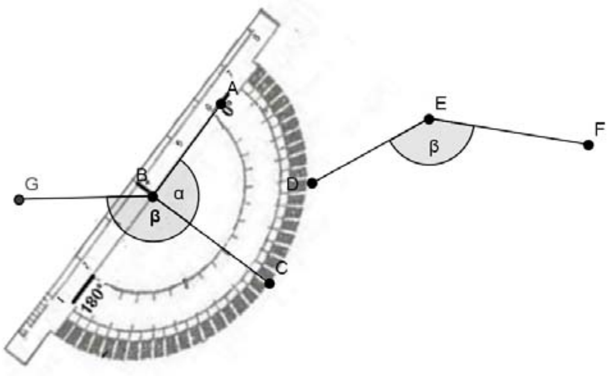
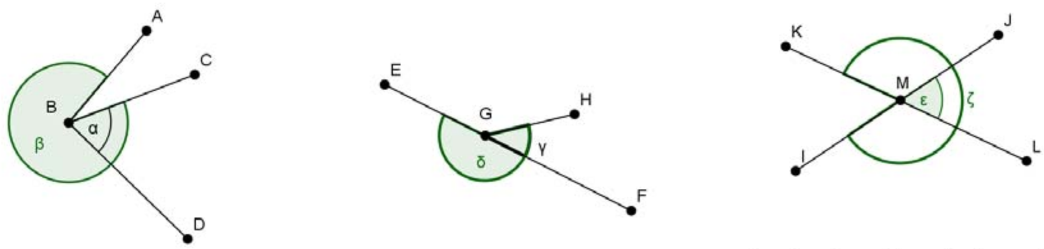


Figura 1.28

menores de 180º se denominan **convexos**. Para terminar de analizar los ángulos de acuerdo con su medida se le da el nombre de agudos a los que son menores de 90º y de obtuso a los que tienen su medida entre 90º y 180º.

Notas:

1. La definición de ángulos consecutivos, adyacentes y opuestos por el vértice, tratada anteriormente, excluye los casos de que se trate de ángulos sobreobtusos, la figura 1.29 ilustra ángulos con las condiciones de la definición que no son consecutivos, ni adyacentes ni opuestos por el vértice. En consecuencia no cumplen las propiedades de esos pares de ángulos.



Los ángulos α y β tiene un lado común y los otros dos lados en semiplanos opuestos con respecto a la recta que contiene al lado BC común, pero no son consecutivos porque β es sobreobtuso.

Los ángulos γ y δ están en la posición de adyacentes según la definición 12, un lado común y el otro par son opuestos, sin embargo no son adyacentes porque δ es sobreobtuso.

Los ángulos ε y ζ cumplen las condiciones de la definición 12, sus lados son opuestos, pero no son opuestos por el vértice porque ζ es sobreobtuso.

Figura 1.29

2. En el caso de la definición de estos ángulos sobreobtusos, ya no se considera solamente el ángulo como unión de dos semirrectas, sino que se tiene en cuenta la “superficie comprendida entre las semirrectas”, en cualquiera de los casos si se considera la superficie no señalada se tendría un ángulo entre 0º y 180º como los analizados anteriormente.

Existe la posibilidad de medir directamente la suma de dos ángulos, para eso se usa el círculo graduado como transportador, como indica la figura 1.30.

Se observa como el lado final que se obtiene al poner los ángulos de amplitudes α y β en posición de consecutivos coincide con el valor aproximado de 232º en el transportador, luego esa es la medida del $\angle ABG$ que es la suma de α y β.

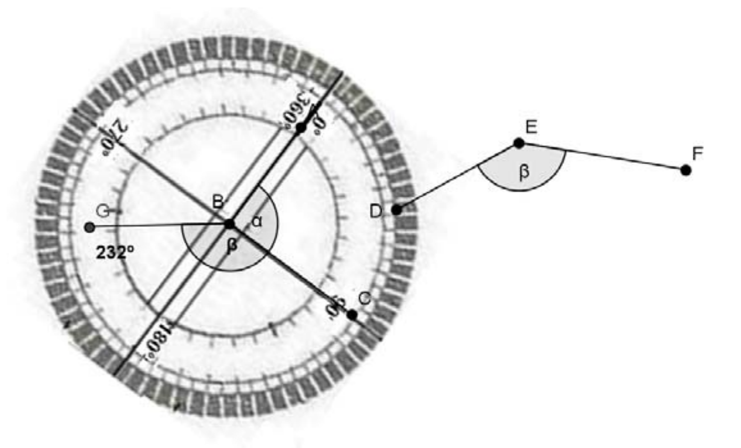


Figura 1.30

El mismo proceso de medición del ángulo de la figura 1.30 se puede realizar si no se cuenta con un círculo graduado como transportador, esto se ilustra en las figuras 1.31a y 1.32b.

Se pone el transportados haciendo coincidir el 0º con el lado BA y en la medida 180º se coloca un punto Provisional y se traza una semirrecta para evitar confusiones (Figura 1.31a).

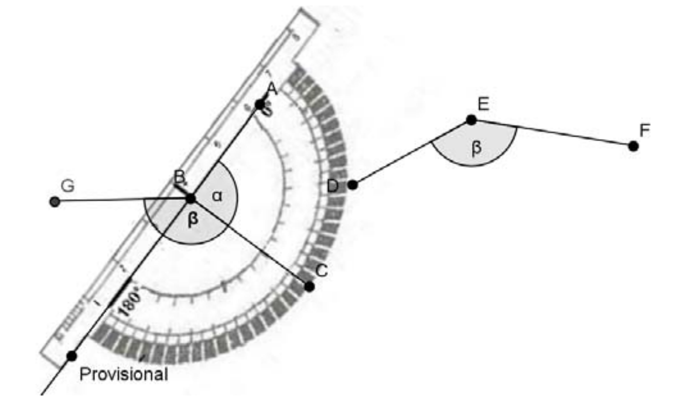


Figura 1.31a

Ahora se coloca el 0º del transportador en la semirrecta provisional trazada y se determina el ángulo que determina BG en el transportador, en la figura 1.31b) se ilustra como BG determina un ángulo de aproximadamente 52º, que sumado al ángulo de 180º de la primera parte de la medición da un total de 232º al igual que en le caso anterior.

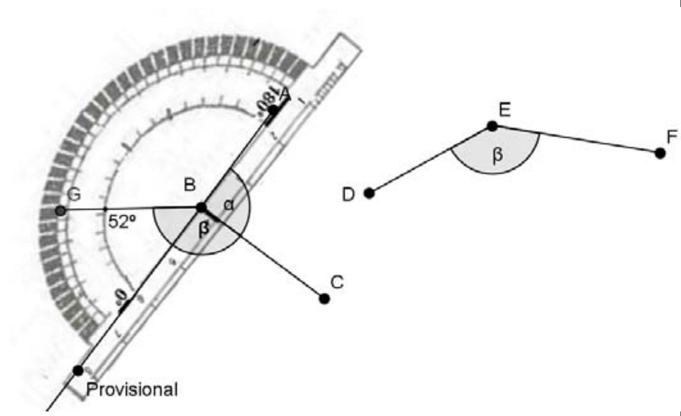


Figura 1.31b

En el transportador (círculo graduado) se observa que las medidas de los ángulos comienzan en 0º y terminan, después de recorrer toda la circunferencia en el ángulo que mide 360º, la figura 1.32 muestra una posibilidad de ilustrar el ángulo de 360º que recibe el nombre de **ángulo completo.**

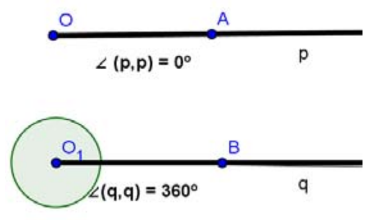


Figura 1.32

Este tipo de ángulos, que miden más de 180º y además, que como ya se ha dicho, en su concepción se tiene en cuenta la **"superficie comprendida entre las semirrectas"** son definidos en la educación primaria como superficies angulares que se obtienen como unión o intersección de semiplanos cerrados. Esto no significa que los ángulos agudos u obtusos también se puedan obtener de esta manera, en el siguiente gráfico se ilustran estas superficies angulares, las semirrectas que las limitan, definen los ángulos bajo esta forma de concebirlos.

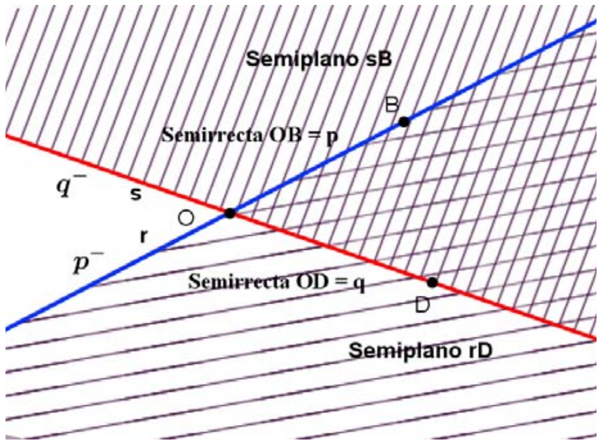


Figura 1.33

Las rectas r y s se cortan en O, se consideran las semirrectas de origen O, p, p^- y q, q^- y los semiplanos de borde r que pasa por D: rD y de borde s que contiene a B: sB. Cada uno de los semiplanos está rayado de una forma diferente, en la figura 1.33 se muestra la intersección de los dos semiplanos que está rayada doblemente, esta región es una superficie angular y el ángulo ∠ (p,q) que la limita es un ángulo agudo, se puede escribir que en este caso ∠ (p,q) = rD ∩ sB.

Si se considera rD ∪ sB, la región considerada es la que está rayada de cualquiera de las maneras, en la figura la zona rayada, que está limitada por las semirrectas p^- y q^-, estas semirrectas determinan el ángulo ∠ (p^-,q^-) = rD ∪ sB, que también es una superficie angular, en este caso el ángulo es sobreobtuso.

Si se consideran otros semiplanos determinados por las dos rectas, y se determina la intersección o unión de ellos, se pueden determinar todas las superficies limitadas por las semirrectas de origen O, donde se cortan las rectas r y s.

Generalmente cuando en la geometría se pasa a trabajar con figuras de más de tres lados, se utiliza este concepto de ángulo, que generalmente no se menciona, se trabaja solamente con operaciones con las medidas sin representación gráfica.

Ejercicios

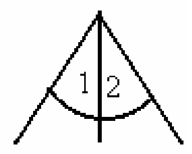
1. Demostrar que los pares de ángulos adyacentes suman 180º (son suplementarios).

2. Demostrar que los pares de ángulos opuestos por el vértice son iguales.

3. Demostrar que si dos ángulos adyacentes son iguales, entonces son rectos.

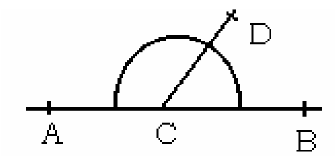
4. Analice los libros de texto de primaria y conteste: ¿En qué grado se estudian los ángulos? ¿Qué conceptos y proposiciones se estudian? Selecciona un ejercicio y resuélvelo.

5. ¿Por qué los ángulos 1 y 2 no son adyacentes?. ¿Qué relación existe entre ellos? Argumenta.

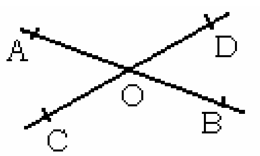


6. Auxiliándote de la figura calcula:

a) x, si y = 72° b) y, si x = 144° c) y, si x = 2y d) x, si x – y = 42°., considera que x = ∠ACD , y = ∠ DCB



7. Las rectas AB y CD se cortan en O. Si ∠AOC = 3 x° – 90° y ∠DOB = 2 x °+ 10°. Calcula la amplitud de estos ángulos. Fundamenta.



1.5 Ángulos y rectas paralelas

A partir de los contenidos tratados hasta el momento sobre ángulos se pueden abordar algunas importantes propiedades de uso común en el estudio de la geometría.

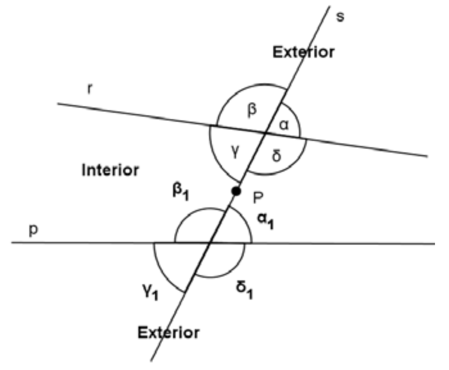


Figura 1.34

En la figura 1.34 se observan dos rectas r y p que son cortadas por la recta secante s, en cada intersección se forman ángulos, los cuales se pueden clasificar según lo estudiado como opuestos por el vértice, adyacentes, consecutivos, también existen algunos que son llanos, en general se puede determinar la relación entre algunos, los opuestos por el vértice o la suma de algunos pares de ellos. Un **ejercicio** interesante es nombrar los pares de ángulos mencionados que se forman y establecer de acuerdo con sus propiedades las relaciones entre ellos. Observar que en este caso se prefirió nombrar los ángulos que interesa analizar por sus amplitudes, denotadas con letras griegas minúsculas.

Ahora se dirige la atención a otros pares de ángulos que tienen posiciones particulares interesantes. Para delimitar estas posiciones es necesario nombrarlas para referirse a ellas con más facilidad. La región limitada por las rectas r y p que contiene al punto P se le llama región interior, las otras **regiones** que son los semiplanos respecto a r y p que no contienen al punto P son la **región exterior**, a su vez, la recta s determina dos semiplanos que ayudan a caracterizar un lugar específico en la figura.

Desde el punto de vista que se asume son interesantes para el análisis **los pares de ángulos** tales que tengan, uno, un lado en la recta r y el otro, un lado en la recta p, los segundos lados en la recta s, y los vértices, del primero, en la intersección de r con s y del segundo, en la intersección de p con s, de manera que estén en:

- Diferentes regiones y en el mismo semiplano de s, serán llamados **correspondientes**. Los pares son: α y α_1, δ y δ_1, β y β_1 y γ y γ_1.
- La misma región y semiplanos diferentes de s, serán llamados **alternos**, internos o externos de acuerdo con la región donde se encuentren. Los pares son: β y δ_1, α y γ_1, γ y α_1 y δ y β_1.

- La misma región y el mismo semiplano, serán llamados **conjugados**. Los pares son: α y δ_1, β y γ_1, γ y β_1 y δ y α_1.

Siempre serán llamados de esa forma los ángulos que se forman cuando una recta corta a otras dos, resulta interesante analizar el caso cuando las rectas r y p son paralelas, lo cual requiere de un análisis especial.

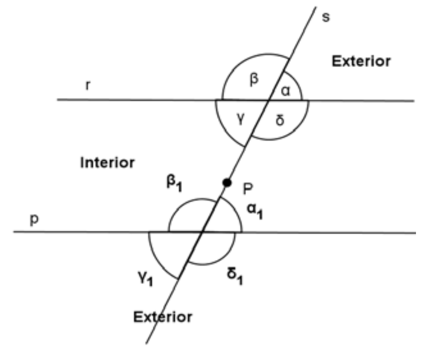


Figura 1.35

Ángulos entre paralelas

Las rectas paralelas r y p son cortadas por la secante s (Figura 1.35), si se considera que $\alpha = \alpha_1$, es muy fácil comprobar, de acuerdo con las propiedades de los ángulos adyacentes y opuestos por el vértice, que los ángulos γ y α_1 también son iguales, porque $\alpha = \gamma$ por ser opuestos por el vértice, también se puede comprobar que $\delta + \alpha_1 = 180º$ puesto que $\delta + \alpha = 180º$ por ser adyacentes y se tiene que $\alpha = \alpha_1$.

El análisis que se puede realizar con todos los pares de ángulos conocidos permite arribar a un importante teorema.

Teorema: Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante, entonces se cumple que si **un par de ángulos correspondientes son iguales** entonces:

a) Todos los pares de ángulos correspondientes son iguales.

b) Todos los pares de ángulos alternos son iguales.

c) Todos los pares de ángulos conjugados suman 180º.

Ejercicios

1. Comprueba que si un par de ángulos alternos son iguales, entonces se cumple que todos los pares de ángulos correspondientes son iguales, todos los pares de ángulos alternos son iguales y todos los pares de ángulos conjugados suman 180º.
2. Comprueba que si un par de ángulos conjugados suman 180º, entonces se cumple que todos los pares de ángulos correspondientes son iguales, todos los pares de ángulos alternos son iguales y todos los pares de ángulos conjugados suman 180º.

3. Si con las condiciones del ejercicio 1, se tiene que β_1= 120º (en la figura 1.35) es uno de los ángulos alternos iguales, calcule el valor de los demás ángulos.

1.6 Línea poligonal y polígono

Definición:

a) Sean A_1, A_2,…, A_n puntos diferentes del plano, entonces la unión de los segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$,…, $\overline{A_{n-1}A_n}$ ($\overline{A_1A_2} \cup \overline{A_2A_3} \cup \ldots \cup \overline{A_{n-1}A_n}$) se denomina **línea poligonal o simplemente poligonal** (Figura 1.36a).

b) Si $A_1 \neq A_n$ la **poligonal se llama abierta**, si $A_1 = A_n$ la **poligonal se llama cerrada.** En el caso de las poligonales cerradas el último punto que coincide con el primero no se nombra (Figura 1.36b).

Usualmente no se denotan los puntos utilizando letras con subíndices, por eso en la siguiente figura aparecen denotados utilizando diferentes letras del alfabeto, los puntos consecutivos se denotan por letras consecutivas. Por ejemplo A, B y C en una poligonal son consecutivos, así como O, P y Q.

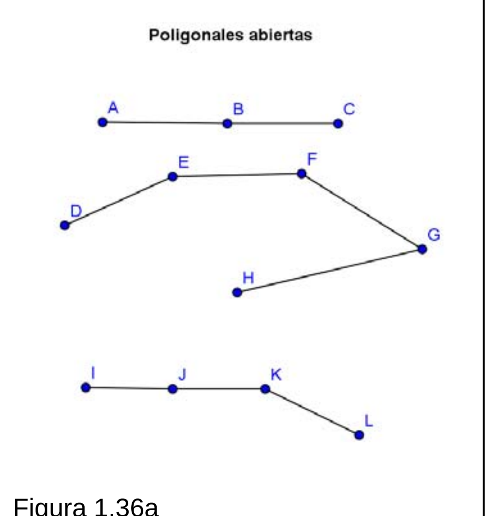


Figura 1.36a

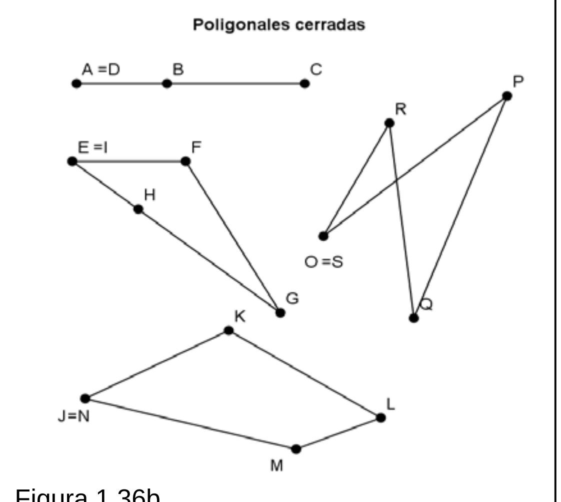


Figura 1.36b

Resultan de interés para el estudio aquellas poligonales cerradas donde tres puntos consecutivos no sean alineados, tal es el caso del ejemplo de las poligonales cerradas JKLM y OPQR.

Definición: Las poligonales cerradas donde tres puntos consecutivos no son alineados se llaman **polígonos**.

En el caso de la figura 1.36b, son polígonos JKLM y OPQR, en este caso se puede observar que tienen 4 puntos que la determinan, que a su vez determinan 4 segmentos. Estos puntos se llaman vértices y los segmentos que determinan se llaman lados del polígono.

Los polígonos se pueden entonces clasificar por el número de vértices, que a su vez determinan el número de lados de la siguiente manera:

Con 3 vértices: polígono de 3 lados que se denomina: triángulo.

Con 4 vértices: polígono de 4 lados que se denomina: cuadrilátero.

Con 5 vértices: polígono de 5 lados que se denomina: pentágono

Con 6 vértices: polígono de 6 lados que se denomina: hexágono

Con 7 vértices: polígono de 7 lados que se denomina: heptágono.

Con 8 vértices: polígono de 8 lados que se denomina: octógono

Con 9 vértices: polígono de 9 lados que se denomina: nonágono.

Con 10 vértices: polígono de 10 lados que se denomina: decágono.

No es necesario aprenderse los nombres específicos, en general:

Con **n** vértices: polígono de n lados que se denomina: n – ágono.

Polígonos como el OPQR de la figura anterior no son estudiados con detenimiento, aunque algunos de ellos tiene propiedades importantes, estos polígonos se nombran polígono estrellados.

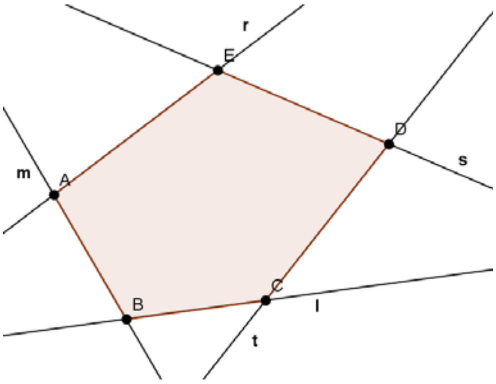


Figura 1.37

Son interesantes para su estudio desde la primaria los polígonos como el JKLM que tienen una propiedad que se puede comprobar gráficamente, cuando se traza la recta que contiene a cada lado del polígono, el resto del polígono queda en uno solo de los semiplanos que determina la recta, este tipo de polígonos se denomina convexo y sobre ellos se realizan estudios importantes en todos los niveles de educación, en este libro encontrarás el estudio que se realiza de los triángulos y cuadriláteros.

La figura 1.37 ilustra la propiedad que caracteriza a los polígonos convexos. Se han trazado las rectas r, s, t, l, m cada una de las cuales contiene uno de los lados del pentágono y se puede observar que con respecto a cada una de ellas el polígono queda situado en uno de los semiplanos. La figura 1.38 ilustra un caso de un polígono que no es convexo y como se observa respecto a la recta trazada el polígono queda "dividido en dos", una parte está en uno de los semiplanos y la otra en el otro semiplano, por eso este polígono es no convexo.

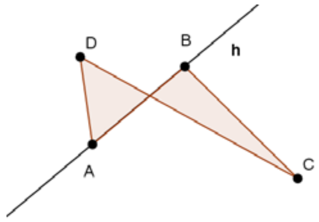


Figura 1.38

Ejemplo: En la figura 1.39 se identificarán los polígonos convexos que están presentes, este tipo de trabajo es muy común cuando se trata de realizar el conteo de determinado tipo de figura. Generalmente se dan figuras en la forma que se presenta, pero a la hora de trabajar es muy útil representar los puntos y nombrarlos, de la forma como aparece en la figura 1.40, es más fácil proceder a la identificación y conteo correspondiente. Ya en estas condiciones se procede al trabajo, en este caso solo se ilustra el modo de proceder para poder llegar de forma cierta al resultado.

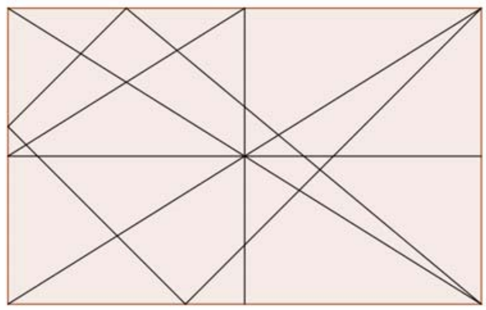


Figura 1.39

En el caso de los triángulos, generalmente son muchos, se comienzan a identificar, por ejemplo a partir del vértice A: AEF, AEM, AFM, AJH, AJL, AHL, AJQ, AHQ, ABD, ABQ, ADQ, ABC, ACD, AQD, AWD, ACF, pudieran existir otros, lo importante es denotarlos con cierto orden, en este caso, buscando los segmentos a partir de A y analizando si los segmentos a partir del extremo completan un triángulo.

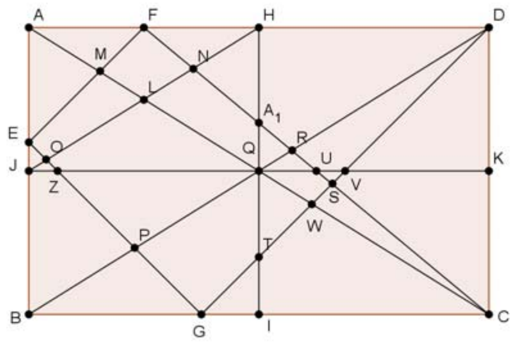


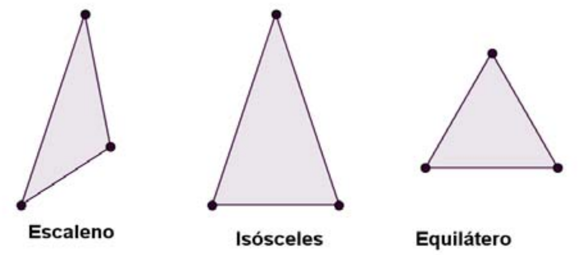
Figura 1.40

Pueden analizarse los cuadriláteros con el mismo sistema, por ejemplo, a partir del vértice A, el primer segmento AE, con el se pueden completar los cuadriláteros convexos AEPQ, AEOL, AEOH y AEGW, con el segmento AJ, se completa AJQH, AJUF y AJKD y así sucesivamente. Otros polígonos se pueden contar, por ejemplo pentágonos como AEZQH, hexágonos como AEGTHA y se puede seguir buscando polígonos.

Con los contenidos estudiados es posible diferenciar los triángulos, teniendo en cuenta la longitud de los lados y la amplitud de los ángulos interiores.

La figura 1.41 ilustra los diferentes tipos de triángulos según la longitud de sus lados.

Figura 1.41



Esta forma de trabajo con los triángulos, ilustrada en la figura 1.41, es la que usualmente se utiliza en la educación, de esta manera:

- Si los tres lados son desiguales el triángulo es escaleno.
- Si tiene dos lados iguales el triángulo se denomina isósceles.
- Si los tres lados son iguales el triángulo es isósceles.

Nota: Resulta interesante, sobre la base de la diferenciación realizada, responder a preguntas como: ¿Son los triángulos isósceles también equiláteros? O ¿Son los triángulos equiláteros también isósceles? La respuesta a estas preguntas permite elaborar conclusiones acerca de cuál es el conjunto más amplio, el de los triángulos isósceles o el de los equiláteros.

Antes de pasar a la clasificación de los triángulos según la amplitud de sus ángulos interiores es preciso definir estos ángulos, para ello en la figura siguiente se representa un triángulo y la prolongación de sus lados, así como los ángulos que importan para el estudio de los mismos.

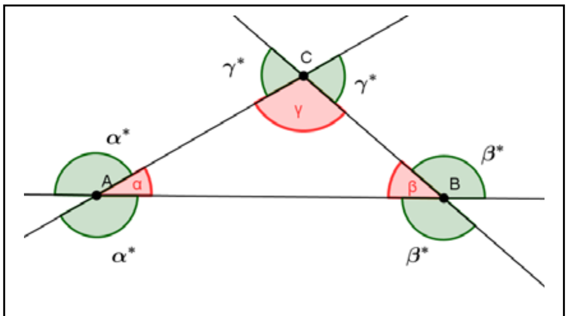


Figura 1.42

Los ángulos, que en la figura 1.42 se nombran α, β y γ son llamados interiores; los adyacentes a los interiores que se nombran con la misma letra griega y con * se llaman exteriores, observe que a cada interior corresponden dos adyacentes, cualquiera de ellos es el exterior, es decir, cada ángulo interior tiene un exterior adyacente, pues como son iguales, se habla de un exterior porque cumplen las mismas propiedades.

Ya estamos en condiciones de clasificar los triángulos según sus ángulos.

- Si los tres ángulos interiore son agudos el triángulo es acutángulo.
- Si un ángulo interior es de 90º el triángulo es rectángulo.
- Si un ángulo interior es mayor de 90º el triángulo es obtusángulo.

Después de conocer los ángulos interiores se puede definir un caso particular de polígonos convexos, los polígonos regulares, como aquellos que tienen los lados y también los ángulos iguales, los más conocidos son el triángulo equilátero y el cuadrado.

Algunas propiedades de los triángulos

Ya son conocidas algunas propiedades de los triángulos, pero es bueno recordarlas y fundamentarlas pues son objeto de estudio desde la educación primaria.

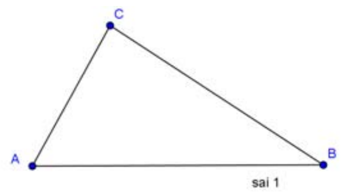


Figura 1.43

Un experimento que permitirá llegar a una importante propiedad de los ángulos interiores del triángulo es el siguiente.

Recorta un triángulo en cartulina o papel como el de la figura 1.43 y con la regla mide y construye los puntos medios E y D de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, se coloca un lado del cartabón de los que forman el ángulo recto sobre el lado $\overline{AB}$, de manera que el otro lado del ángulo recto pase por el punto E, entonces se traza el segmento de perpendicular por E al lado $\overline{AB}$ que corta al mismo en el punto F, se realiza la misma operación por D y se obtiene el punto G como ilustra la figura 1.44.

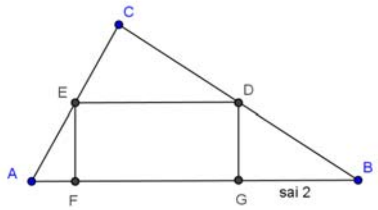


Figura 1.44

En la figura 1.45 se muestran los triángulos resultantes de la operación anterior y se han trazado y nombrado por α, β y γ a los ángulos interiores del triángulo.

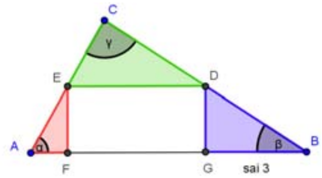


Figura 1.45

Se realizan dobleces al triángulo ABC por los segmentos trazados como muestra la figura 1.46, se observa en esta figura que los vértices A, B y C coinciden en un punto al cual se denota por A' = B' = A', en la figura 1.47 se realiza el análisis de lo que sucede con la suma de los ángulos α, β y γ, puesto que $\angle$ AA'B, $\angle$ AB'B y $\angle$ AC'B coinciden y son llanos, luego su medida es de 180º y por tanto la suma resultante de los ángulos interiores del triángulo tiene ese valor.

Este experimento permite arribar a una importante propiedad de los ángulos interiores de un triángulo.

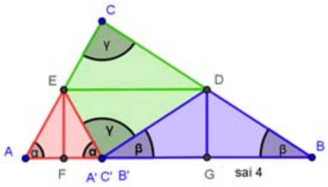


Figura 1.46

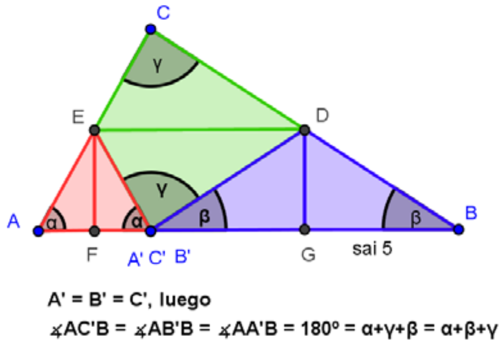


Figura 1.47

Teorema (suma de los ángulos interiores de un triángulo)

Los ángulos interiores de un triángulo suman 180º

La propiedad anterior, unida al conocimiento de que los ángulos adyacentes suman 180º, permite arribar a la conclusión, para el caso que se ilustra en la figura 1.48, que el ángulo exterior tiene una medida igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a él y en correspondencia también a la propiedad de que es mayor que los interiores no adyacentes.

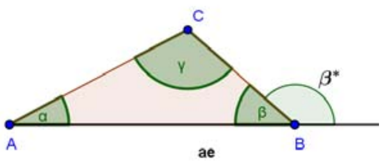


Figura 1.48

Estas propiedades se expresan de la siguiente manera:

Teorema. (Ángulos exteriores de un triángulo)

En todo triángulo cada **ángulo exterior**:

- Es mayor que los interiores no adyacentes a él.
- Tiene una amplitud igual a la suma de los interiores no adyacentes a él.

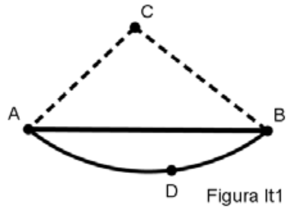


Figura 1.49

Una propiedad muy utilizada de los triángulos es la relación que existe entre las longitudes de los lados del triángulo, para su análisis se plantea la situación que se ilustra en la figura 1.49, obviamente si se quiere ir del punto A al punto B, la forma más corta, que ahorra tiempo y energías es seguir el camino que determina el segmento $\overline{AB}$, precisamente se define que **la menor distancia entre dos puntos es el segmento que ellos determinan.**

Si se suman las longitudes b y a, de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, utilizando el transporte de segmentos, a partir del punto A en la semirrecta AB, se puede observar como b + a > c, donde c es la longitud de AB, este proceso se puede hacer con todos los lados y comprobar gráficamente una importante propiedad relativa a los lados del triángulo (Figura 1.50), conocida como **desigualdad triangular**.

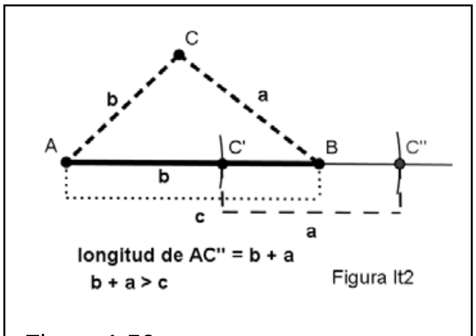


Figura 1.50

Teorema: En todo triángulo la suma de la longitud de dos lados es mayor que la longitud del tercer lado, es decir, a + b > c, b + c > a y a + c > b.

Si se tiene en cuenta los teoremas sobre los ángulos interiores de un triángulo se puede explicar un importante teorema sobre los ángulos formados cuando una recta corta a dos rectas paralelas.

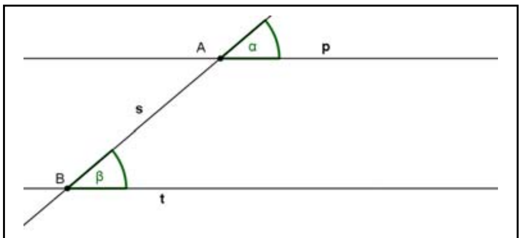


Figura 1.51

Con anterioridad se estudió un teorema, que plantea que si un par de ángulos correspondientes formados cuando una recta corta a dos paralelas son iguales, entonces se cumplen ciertas relaciones entre los demás pares de ángulos, pero ahora si se consideran estos teoremas sobre los ángulos interiores y exteriores de un de un triángulo se puede afirmar que:

a) Si dos rectas son paralelas y las corta una secante, obligatoriamente se cumple que los ángulos correspondientes son iguales y de ahí el teorema estudiado anteriormente.

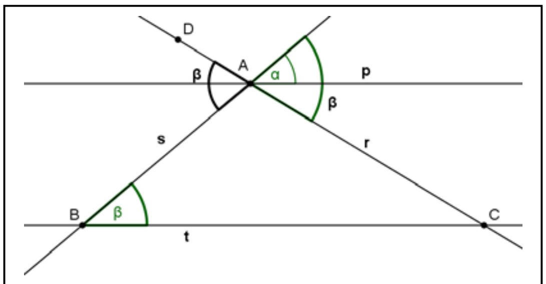


Figura 1.52

b) También el recíproco de esta proposición es verdadera, si una secante corta a dos rectas y forma un par de ángulos correspondientes iguales, entonces las rectas son paralelas.

En el caso de la afirmación a) se puede comprobar con facilidad, si observamos la figura 1.51 y consideramos que un par de ángulos correspondientes no son iguales, en particular sin pérdida de generalidad, sea $\alpha < \beta$, es posible construir por el punto A una recta r que forme con la recta s un ángulo de amplitud β, como por A solo se puede trazar una paralela a la recta t, la nueva recta r corta a la recta t en un punto C, formándose el triángulo ABC (Figura 1.52), en dicho triángulo el ángulo exterior DAB tiene amplitud β, porque es opuesto por el vértice al ángulo β formado por las rectas r y s y este ángulo exterior, es igual al interior ABC no adyacente a él, esto es contradictorio por la propiedad de los ángulos exteriores del triángulo, por ese motivo el ángulo α y su correspondiente β son iguales según se ilustra en la figura 1.52.

En el caso de la afirmación b) recíproco de la explicada, si se considera la igualdad de α y β y que p y t no son paralelas, entonces p y t se cortan en un punto C y se forma el triángulo ABC, donde se tiene un ángulo exterior igual a uno interior señalados en la figura 1.53, lo cual no es posible por las propiedades estudiadas, de donde se deduce que las rectas p y t son paralelas. Para la ilustración se tomó la recta p curva, pues como se pudo comprobar p y t son paralelas.

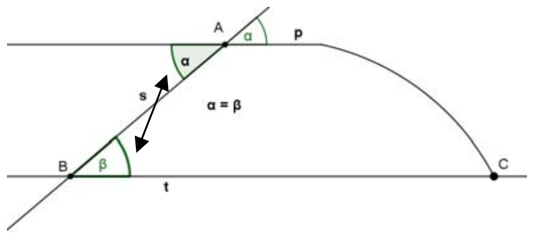
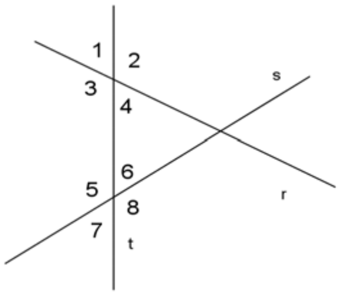


Figura 1.53

Ejercicios

1. En las figuras 1.54 y 1.55 siguientes contesta:
   a) Si en la figura 1.54, $\angle 2 = 120°$ y $\angle 6 = 40°$. Calcula las amplitudes de los restantes ángulos.
   b) Si en la figura 1.55 las rectas r y s son paralelas y $\angle 2 = 40°$. Calcula las amplitudes de los restantes ángulos.
   c) Si en la figura 1.55 las rectas r y s son paralelas y $\angle 4 = 2x+20°$ y $\angle 6 = 3x-90°$ Calcula las amplitudes de los restantes ángulos.
   d) Si en la figura 1.55 se conoce que $\angle 1 = \angle 8$. ¿Cuál es la posición relativa de las rectas r y s? Fundamenta.

Figura 1.54



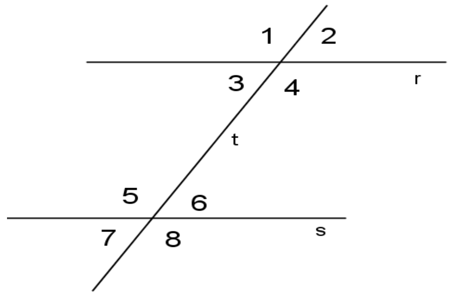


Figura 1.55

2. En la figura 1.56 MN || PQ, MQ || NP y MR || SP, si ∠NSP= 35° y ∠MQR=90°. Calcula las amplitudes de los siguientes ángulos:

   a) ∠SPQ b) a) ∠MRQ c) ∠RMN

   d) ∠ QMR e) ∠ MNP

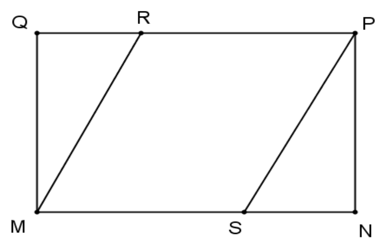


Figura 1.56

3. De un triángulo DEF se conoce que ∠DEF= 43,5° y ∠EDF=54,3°.¿Cuánto mide el ángulo ∠DFE? Fundamenta.
   a) ¿Qué tipo de triángulo es el DEF atendiendo a las amplitudes de sus ángulos interiores?
   b) ¿Qué tipo de triángulo es el DEF atendiendo a las longitudes de sus lados? Fundamenta.
4. Uno de los ángulos interiores de un triángulo isósceles mide 52°. ¿Cuánto miden los restantes ángulos interiores? Fundamenta.

5. ¿En qué grado se estudian los triángulos? ¿Qué conceptos y proposiciones se estudian? Selecciona un ejercicio y resuélvelo.

Ejercicios del capítulo

1. Trace una recta y tome cuatro puntos A, B, C, y D de modo que el punto C esté entre los puntos A y D y el punto D esté entre los puntos B y C.

2. Por que todo punto del segmento $\overline{AB}$ pertenece a la semirrecta BA.

3. Considerando la figura 1.57, determine si las afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) ___$B \in r$ b) ___$r \in \alpha$

c) ___ $B \in \alpha$ d) ___$B \in rA$

e) ___$A \in s$ f) ___$C \in \alpha$

g) ___$A \in \overline{DE}$ h) ___$\overline{DE} \in \alpha$

i) ___$r \subset \alpha$ j) ___$\overline{DE} \subset \alpha$

k) ___ $s \subset \alpha$

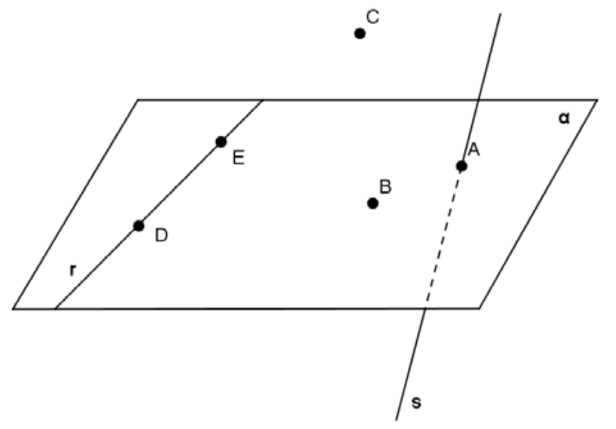


Figura 1.57

4. ¿Por qué todo punto del segmento $\overline{AB}$ pertenece a la semirrecta AB?.

5. Responda la siguiente pregunta: ¿Todos los ángulos consecutivos son adyacentes?

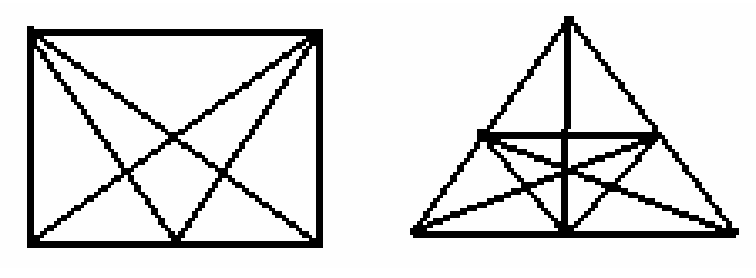
6. Responda la pregunta: ¿Todos los ángulos adyacentes son consecutivos? Elabore una proposición sobre la base de las respuestas a las preguntas de los ejercicios 5 y 6.

7. Demuestre que si dos ángulos son congruentes sus ángulos adyacentes también los son.

8.- Que valor tiene un ángulo adyacente que es dos veces mayor al otro.

9. Uno de los ángulos formados por dos rectas del plano al cortarse tiene un valor de 60°. Halle el valor de los demás ángulos.

10. ¿Cuántos triángulos hay en cada figura? ¿Cuáles son?



11.- Indica si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Convierte las falsas en verdaderas. Fundamenta.

____a) Existen triángulos isósceles que son rectángulos.

_____b) Existen triángulos rectángulos que son obtusángulos.

_____c) Todo triángulo equilátero es isósceles.

_____d) Todo triángulo isósceles es equilátero.

_____e) Existen triángulos equiláteros que son rectángulos

12. En los siguientes enunciados escribe en la raya una de las palabras « siempre », « a veces», « nunca », de forma que se obtengan proposiciones verdaderas. Fundamenta.

a) Un triángulo_______________ tiene dos ángulos rectos.

b) Un triángulo ______________tiene dos ángulos obtusos.

c) Un triángulo que tiene un ángulo recto ____________ tiene los otros dos agudos.

d) Un triángulo _____________ tiene un ángulo obtuso.

e) Si un triángulo tiene un ángulo obtuso, sus otros dos ángulos son ___________ agudos.

f) Un triángulo _____________ tiene dos ángulos agudos.

g) Un triángulo _____________ tiene un ángulo llano.

h) Un triángulo ______________ tiene un ángulo nulo.

i) Un triángulo _______________ tiene un ángulo sobreobtuso.

j) Un triángulo ______________ tiene un ángulo exterior recto.

k) Un triángulo ______________ tiene un ángulo exterior llano.

l) En un triángulo ______________ la longitud de un lado es mayor que la suma de las longitudes de los otros dos lados.

m) En un triángulo ______________ la longitud de un lado es igual a la suma de las longitudes de los otros dos lados.

n) En un triángulo ______________ la longitud de un lado es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados.

13. En un triángulo ABC se tiene $\angle A = 2x° + 30°$, $\angle B = 3x° - 45°$ y $\angle C = x° + 9°$. Halla la amplitud en grados de estos ángulos. Fundamenta.

14. Un triángulo tiene dos ángulos iguales y el tercero mide 52°. ¿Cuánto miden los dos primeros? Fundamenta.

15. Uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo mide 39°. Halla la amplitud del otro ángulo agudo. Fundamenta.

16. Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo miden 4x y 2x. Halla su amplitud en grados. Fundamenta.

17. Si $\angle A = 6x° - 12°$ y $\angle C = 4x° + 32°$, halla la amplitud de estos ángulos sabiendo que son los ángulos agudos de un triángulo rectángulo. Fundamenta.

18. En un triángulo rectángulo, uno de los ángulos mide el doble que el otro. Halla la amplitud de los ángulos del triángulo. Fundamenta.

19. Si la amplitud de uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es $\frac{2}{5}$ de la amplitud del otro, ¿cuál es la amplitud de cada uno?. Fundamenta.

20. ¿Es posible formar triángulos con tres segmentos que miden, respectivamente:

a) 10 cm, 15 cm y 6 cm   d) 1 cm, 6 cm y 70 mm.

b) 14 cm, 9 cm y 20 cm   e) 12 cm, 11 cm y 0,1 m.

c) 8 cm, 110 mm y 20 cm   f) 16 cm, 20 cm y 1,4 dm?

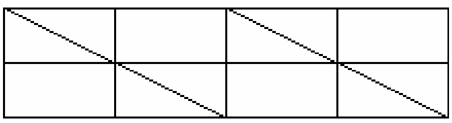
Fundamenta.

21. Dados 5 segmentos de longitudes diferentes. ¿Cuántos triángulos escalenos diferentes pueden construirse? Fundamenta.

a) Si las medidas de las longitudes en cm son: 4, 6, 7, 8 y 9.

b) Si las medidas de las longitudes en cm son: 2, 3, 5, 7 y 9.

22. ¿Cuántos cuadriláteros hay en la figura?



23. Una recta al cortar dos rectas paralelas, ha formado dos ángulos conjugados tales que uno de ellos es la octava parte del otro. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos formados?

24. Del triángulo ABC se conoce que $\angle A = 35°$y que el ángulo exterior de vértice C mide 100°. Calcula las amplitudes de los restantes ángulos interiores del triángulo.

a) ¿Qué tipo de triángulo es el ABC atendiendo a las amplitudes de sus ángulos interiores?

b) ¿Qué tipo de triángulo es el ABC atendiendo a las longitudes de sus lados?. Fundamenta.

25. Del triángulo MNP se conoce que $\angle P = 3x-55°$, $\angle N = 2x+5°$ y que el ángulo exterior de vértice M mide 2x+ 40°. Calcula las amplitudes de los ángulos interiores del triángulo.

    a) ¿Qué tipo de triángulo es el MNP atendiendo a las amplitudes de sus ángulos interiores?

    b) ¿Qué tipo de triángulo es el MNP atendiendo a las longitudes de sus lados? Fundamenta.

26. En la figura 1.58: AB // CD; MN // PQ; AB corta a MN en F y a PQ en H; CD corta a PQ en I; RS corta a las rectas CD y PQ en los puntos E y G respectivamente. $\angle BFN = 54º$; $\angle QGS = 67º$. Utilizando los datos dados, elabora al menos tres preguntas y respóndelas.

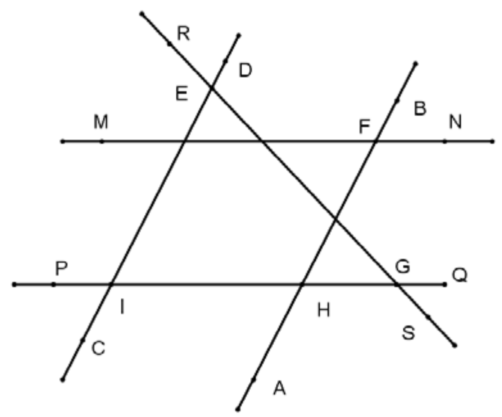


Figura 1.58

27. Construye utilizando el software GeoGebra:

    a) Ángulos consecutivos, opuestos por el vértice y adyacentes.

    b) Triángulos equiláteros, isósceles, escálenos, rectángulo y obtusángulos.

    c) Comprueba mediante la medición las relaciones y propiedades que caracterizan a las figuras geométricas construidas.

d) Rectas paralelas y rectas secantes a las paralelas. Señala los diferentes pares de ángulos que se forman. Compruebe, mediante la medición, las relaciones entre estos ángulos.

Capítulo 2: Igualdad de figuras planas

2.1 Los movimientos del plano

En este epígrafe continuarás ampliando tus conocimientos geométricos y específicamente lo relacionado con los movimientos del plano que estudiaste en la enseñanza primaria y secundaria, así como profundizando en lo que conoces sobre las figuras iguales. Se recuerdan tres teoremas que te permitirán demostrar que dos triángulos son iguales y resolver ejercicios sencillos de demostración en los cuales debes fundamentar cada paso que realices.

Si observas a tu alrededor verás que existen objetos que se corresponden con las figuras geométricas conocidas; las imágenes del primer capítulo así lo muestran, en cada obra humana aparecen las figuras geométricas; sin salir del aula se puede observar que las losas del piso son cuadradas, las superficies de las mesas son rectangulares, como también la pizarra, las paredes, el piso en su conjunto y el propio techo, la misma forma tienen las superficies de los libros y libretas escolares; los cartabones que utiliza el profesor y los que tú utilizas son triangulares. Las monedas son circulares, los botones de las camisas, de las blusas también son circulares y si sigues observando en tu vecindad encontrarás múltiples objetos que tienen la forma de las figuras conocidas. Si vuelves a observar con detenimiento te darás cuenta que algunas son iguales sin embargo otras tienen la misma forma, pero no el mismo tamaño, luego no son iguales.

Es importante este análisis porque a partir de ahora abordaremos en Geometría las relaciones que pueden existir entre dos figuras.

En la educación primaria, específicamente en quinto grado, se introduce el concepto de ***figuras iguales***; entendiendo por ello las figuras que al superponerse coinciden. En particular, si dos segmentos son iguales, entonces tienen igual longitud; así mismo que si dos ángulos son iguales tienen la misma amplitud.

Muchos son los ejemplos de la vida práctica que ilustran la aplicación del concepto figuras iguales, que a su vez está muy relacionado con el de movimiento en el plano. Algunos ejemplos serán mostrados en el desarrollo de este capítulo.

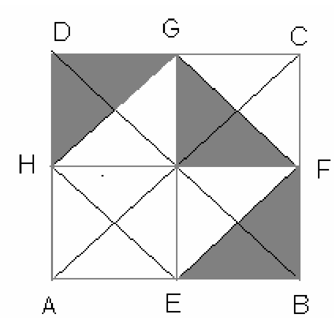


Figura 2.1

En la figura 2.1 que se representa a continuación aparece representado un cuadrado, el cual ha sido dividido en cuatro cuadraditos iguales de lados de longitud 1 u; estos a su vez se han dividido en triángulos iguales.

Observa la figura y, sobre la base del concepto de figuras iguales, coincidirás que en ella hay:

- 4 cuadraditos iguales de área igual a 1 u^2.
- 4 rectángulos iguales de área igual a 2 u^2.
- 3 triángulos sombreados iguales de área igual a 0,5 u^2.

Si analizas detenidamente la figura encontrarás:

Otros triángulos iguales de área 0,5 u^2 que no están sombreados así como cuadraditos, triángulos y rectángulos que son iguales, sin embargo tienen diferentes dimensiones a las anteriores, trata de encontrarlos.

Se puede concluir entonces que si dos figuras son iguales todas sus medidas coinciden: la longitud de los lados, por eso los lados son iguales; la amplitud de los ángulos; el perímetro y el área.

Te podrás dar cuenta que si tienes dos figuras en tu hoja de la libreta o en el libro una forma de comprobar si son iguales o no, es calcando una de las figuras con un papel transparente y comprobando si la puedes superponer sobre la otra, existe un procedimiento que permite superponer dos figuras iguales sin necesidad de calcar, recortar o superponer con un modelo.

Al estudiar el concepto de figuras iguales viste que, siempre es posible "mover" una figura A en el plano hasta que coincida (se superponga) con otra figura B igual a ella; observando que a cada punto de la figura original (en este caso A), se le puede hacer corresponder un único punto en la figura imagen (figura B).

Recordemos que llamamos **movimiento** a toda correspondencia de puntos del plano, en la cual a cada punto original se le asocia exactamente un punto imagen, y viceversa, de manera que siempre se conserven las distancias entre dos puntos cualesquiera.

Nota: Siempre se cumple que una figura y su imagen son iguales. Al realizar un movimiento, las figuras conservan su forma y tamaño, no sufren deformación alguna.

En la figura que se presenta a continuación (fig. 2.2) los puntos A’, B’, C’, D’, E’ y F’ son las imágenes respectivas de los vértices A, B, C, D, E y F del hexágono original H por un determinado movimiento del plano.

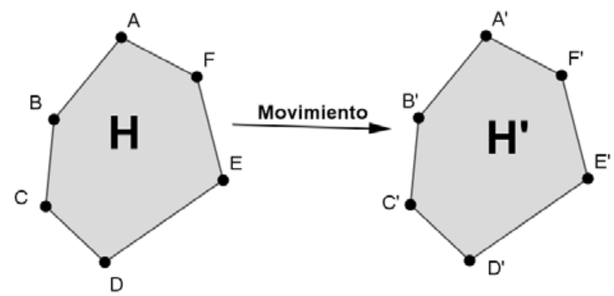


Figura 2.2

Conoces de estudios anteriores que los movimientos del plano cumplen las siguientes propiedades:

- Los segmentos, semirrectas y rectas se transforman respectivamente en segmentos, semirrectas y rectas.
- Los segmentos y ángulos se transforman en segmentos y ángulos respectivamente, de la misma medida.
- Las rectas paralelas se transforman en rectas paralelas y las que se cortan en rectas que se cortan.

Algunos movimientos del plano que permiten transformar una figura en su imagen son:

- la reflexión respecto a una recta *r* o simetría axial ,
- la traslación de vector $\vec{v}$ en el plano,
- la rotación de centro O y ángulo de rotación $\propto$,
- la simetría central.

A continuación se resumen aspectos esenciales que debes tener en cuenta para reconocer los movimientos estudiados, así como para construir la imagen de puntos mediante cada uno de ellos.

Reflexión respecto a una recta *r* o simetría axial

En la vida cotidiana puedes encontrar objetos simétricos e imaginar sus ejes de simetría. A continuación, en la figura 2.3, se muestran algunos objetos de la realidad a los cuales se les han trazado los ejes de simetría, algunos son dibujos, por ser más sencillo representarlos de esa manera.

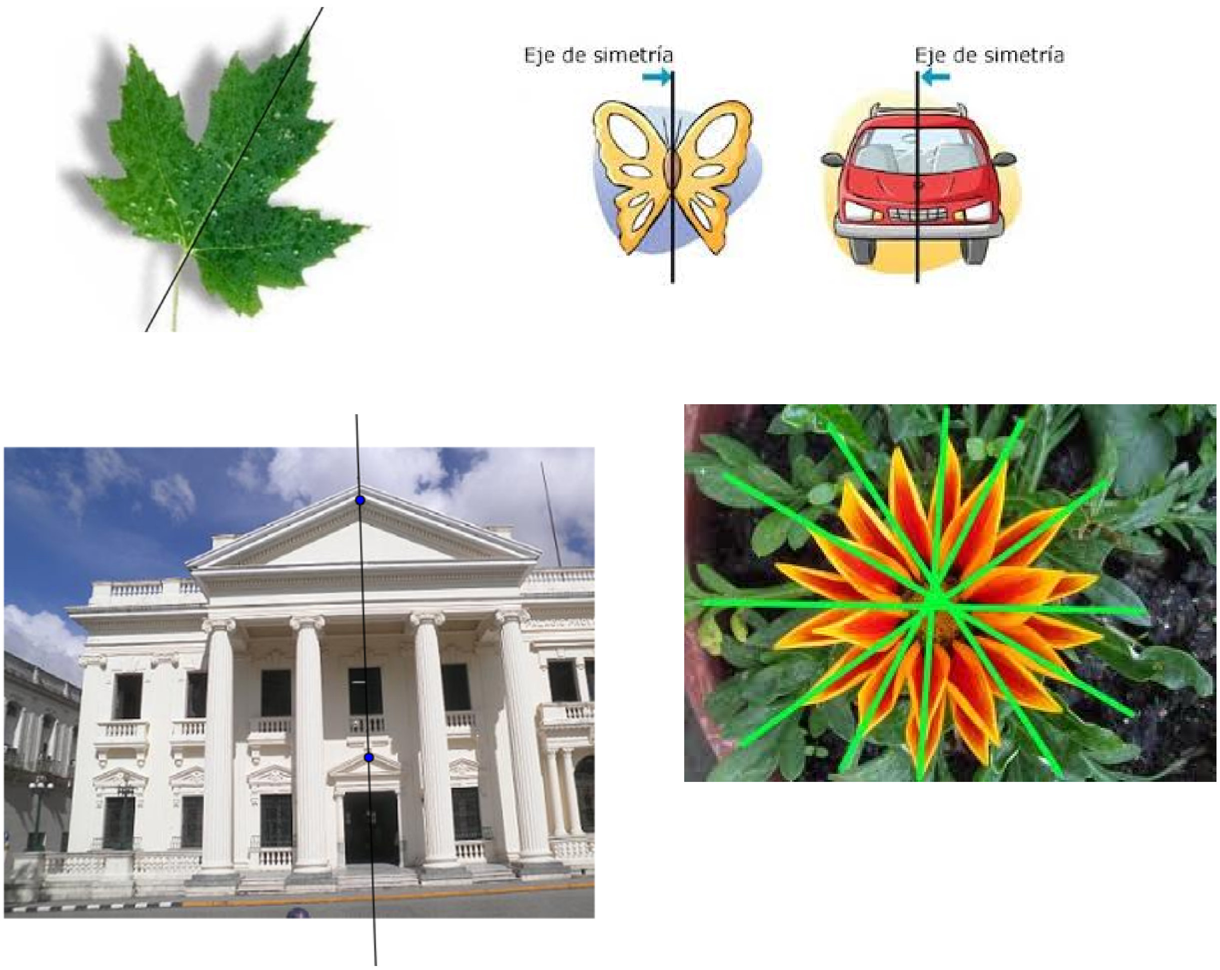


Figura 2.3

Si se observa con detenimiento estas figuras, que por ser fotos, son planas, se puede constatar que si se dobla la foto por los ejes, una parte se superpone a la otra, para lograr esto de manera real hay que levantar la figura del plano para invertir su posición respecto a un eje, mientras el eje permanece fijo; es el mismo efecto que se produce al mirarse ante el espejo, por ejemplo cuando te peinas, si eres derecho parece que eres zurdo en la imagen.

En la Matemática existen figuras axialmente simétricas, por ejemplo

- un triángulo isósceles tiene un eje de simetría,
- un triángulo equilátero tiene tres y
- uno escaleno no tiene ninguno.

Por otra parte un cuadrado tiene cuatro ejes de simetría, el trapecio isósceles tiene uno, y un rectángulo tiene dos ejes; por su parte un círculo tiene infinitos ejes de simetría. Si una figura tiene dos ejes de simetría perpendiculares, entonces es centralmente simétrica con respecto al punto de intersección de ambos ejes, tal es el caso del cuadrado, el rectángulo y la circunferencia representados en la figura 2.4.

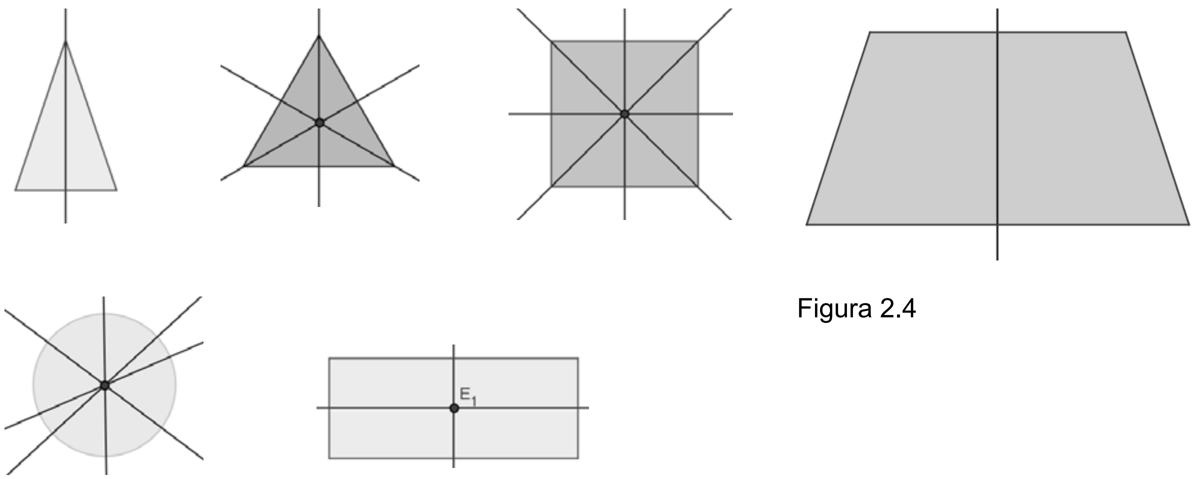


Figura 2.4

Dos ejemplos de otras figuras simétricas están ilustrados en el gráfico siguiente, se han representado los ejes de simetría y también algunos puntos simétricos unidos por líneas discontinuas. Algunas figuras axialmente simétrica tienen muchos ejes, otras uno sólo.

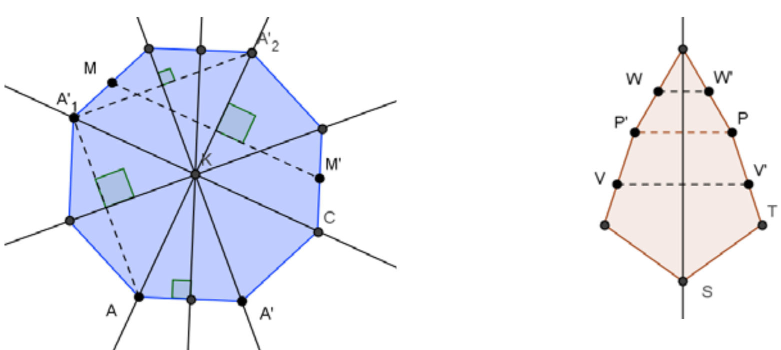


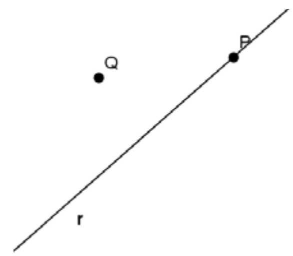
Figura 2.5

Definición

La **reflexión de eje r o simetría axial** es una transformación del plano, mediante la cual cada punto P del plano se transforma en un punto P′ tal que $\overline{PP'}$ es perpendicular a r y, además P y ′ P' equidistan de r. Se dice entonces que los puntos P y P′ son simétricos a r.

Ejemplo: Construye la imagen de los puntos P y Q del plano por una reflexión de eje r.

Descripción de la construcción (Figura 2.6)



- Trazamos la recta perpendicular a la recta que pasa por el punto Q.
- Determinamos el punto de intersección de ambas rectas y lo denotamos, sea este punto M.
- Transportamos el segmento $\overline{MQ}$ sobre la semirrecta opuesta a la semirrecta MQ y queda así determinado el punto Q', por la reflexión de eje r.
- El punto P está situado en el eje de reflexión y coincide con su imagen P'.

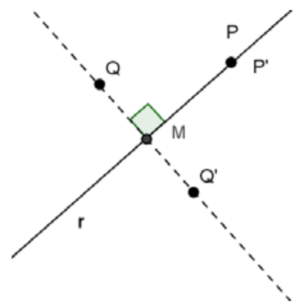


Figura 2.6

Luego dado el eje de reflexión r y un punto original, se construye su imagen trazando una recta perpendicular al eje r y ubicando en ella la imagen del punto a la misma distancia del eje de reflexión que la que hay del eje de reflexión al punto original.

Si el punto original está en el eje, coincide con su imagen.

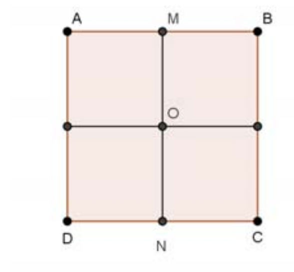
Propiedades fundamentales

El eje de reflexión es la mediatriz de todo segmento determinado por un punto no situado en el eje y su imagen.

Una recta que no sea paralela, ni perpendicular al eje y su imagen se cortan en un punto que se encuentra sobre el eje de la simetría axial.

La simetría axial está determinada por una recta del plano, llamada eje de reflexión o eje de simetría o por un punto y su imagen.

Ejemplo:



El cuadrado ABCD está formado por 4 “cuadraditos” iguales. Si se le aplica una reflexión de eje MN, entonces el vértice A tiene por imagen el vértice:

1---- A 2) ---- B 3) ---- C 4) ----D.

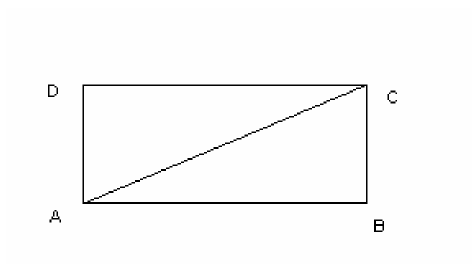
Solución

Es evidente que la imagen de A por la reflexión de eje MN es el vértice B, de la misma forma la imagen de C es D, la de B es A y la de D es C. Por otra parte los puntos M,N y O coinciden con sus imágenes.

Observa que en una reflexión de eje r si un punto se transforma en otro, este último también se transforma en el primero.

Ejemplo:

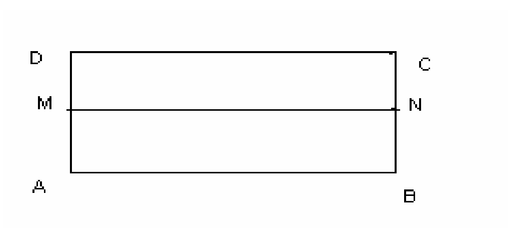
Sea el rectángulo ABCD.



a) ¿Qué imágenes tienen A y C por la reflexión de eje AC?
b) Traza el eje de una reflexión que transforma el rectángulo en el mismo rectángulo.

Solución

a) Los puntos A y C están situados en el eje de reflexión AC, luego A es su propia imagen y C es su propia imagen.
b)



Una posibilidad es trazar el eje de simetría MN, siendo M y N los puntos medios de los lados opuestos AD y BC respectivamente. Mediante este movimiento A se trasforma en D y viceversa, también B en C y viceversa. De forma análoga puedes trazar el eje de simetría PQ, donde P y Q son los puntos medios de AB y CD respectivamente.

Traslación de vector $\vec{v}$ en el plano

En la vida cotidiana puedes encontrar figuras iguales que se han obtenido a partir de un movimiento de traslación; la figura 2.7 puede representar el fragmento de un piso que se ha obtenido trasladando el mosaico ABCD y los resultantes, en las direcciones de AB y AD respectivamente.

La traslación se efectúa en línea recta, como cuando te trasladas por el camino más corto que une dos puntos, el segmento. Para determinar la imagen de una figura mediante una traslación es necesario establecer la dirección en que se va a realizar, la distancia y hacia dónde, es decir, el sentido; esto se logra muy fácilmente estableciendo un punto inicial y un punto final unidos por un segmento. La longitud del segmento es la distancia que se va a mover la figura, y con esto cada uno de sus puntos.

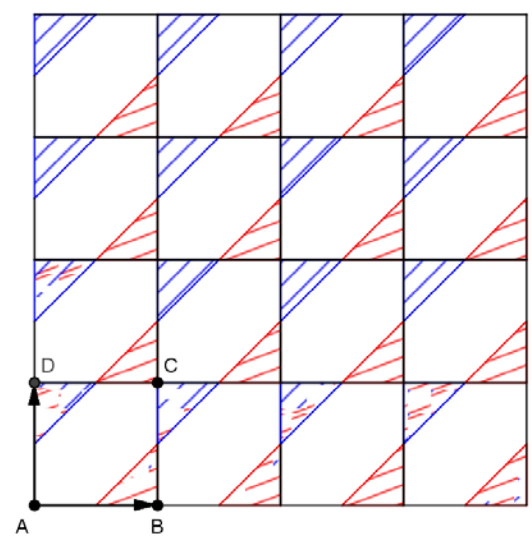


Figura 2.7

Pero es más sencillo dar un segmento donde a través de una flecha se indica el sentido, un segmento así se llama vector e indica la dirección, el sentido y la distancia del movimiento, se representa como en la figura 2.8

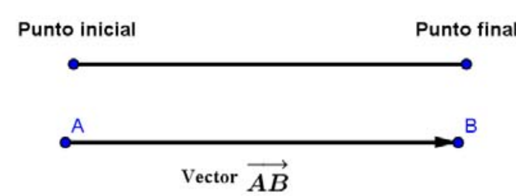


Figura 2.8

El movimiento de la figura según estas características recibe el nombre de traslación.

Definición

La **traslación** de vector $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ es una transformación del plano mediante la cual cada punto X del plano se transforma en un punto X′ tal que:

1. La semirrecta X X′ está orientada en la misma dirección y el mismo sentido que el vector $\overrightarrow{PQ}$.
2. El segmento $\overline{XX'}$ tiene la misma longitud que el vector $\overrightarrow{PQ}$.

Ejemplo: Construye la imagen del triángulo ∆ABC por una traslación de vector $\vec{v}$.

Solución:

Son dados el triángulo ABC y el vector de la traslación de extremos P y Q. La descripción de la construcción realizada en la figura 2.9 es:

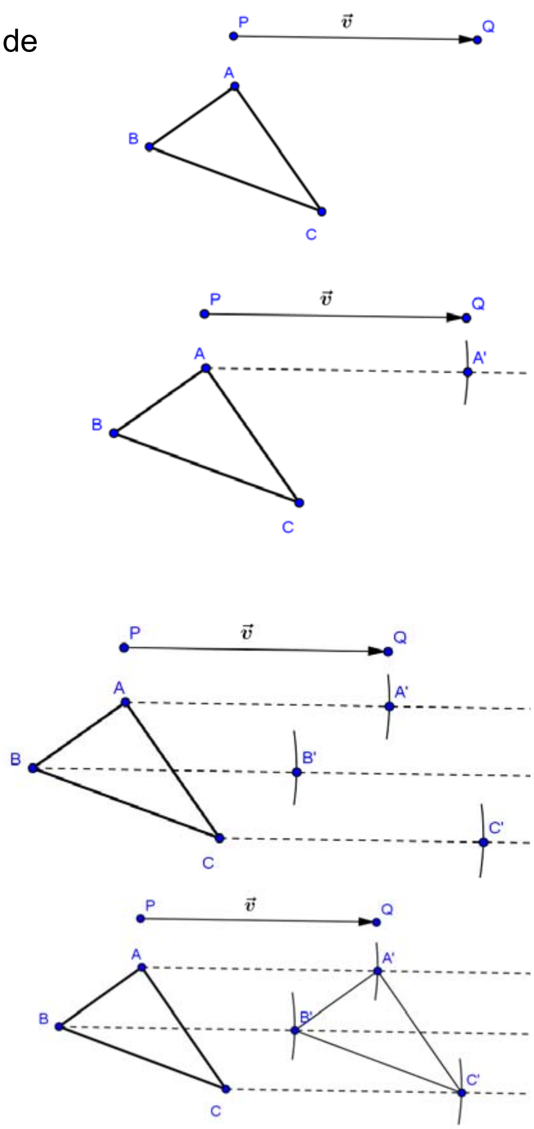


Figura 2.9

Descripción de la construcción

- Se traza una semirrecta de origen A paralela al vector $\vec{v}$ y con el mismo sentido.
- Se transporta sobre esta semirrecta un segmento de igual longitud que la del vector.

  Se denota por A' el otro extremo de este segmento. El punto A' es la imagen del punto A por la traslación de vector $\vec{v}$.
- De forma análoga se procede para obtener las imágenes de los puntos B y C.
- Se unen los puntos A', B' y C' y obtenemos la imagen del ∆ABC por esta traslación.

Luego dado el vector de traslación $\vec{v}$ y un punto original, se construye su imagen trazando una semirrecta de origen en el punto original; paralela al vector de traslación y de igual sentido, se determina sobre la misma, a partir del origen, un segmento de igual longitud que la del vector de traslación. El extremo de ese segmento es la imagen del punto.

Propiedades fundamentales

Un punto y su imagen por una traslación determinan un vector igual al vector de traslación.

En una traslación, una recta y su imagen son paralelas.

La traslación en el plano está determinada de manera única por un vector de traslación o por un punto y su imagen.

Rotación de centro O y ángulo de rotación $\propto$

En la vida cotidiana puedes encontrar ejemplos de este movimiento en las ruedas de un automóvil, las manecillas del reloj y las ruedas de las bicicletas al girar, etc.

Definición

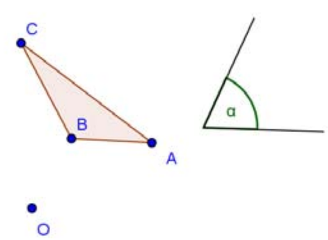
La **rotación** de centro O y ángulo de rotación $\propto$ es una transformación del plano mediante la cual cada punto X del plano se transforma en un punto X′ tal que:

1. El segmento $\overline{OX}$ tiene la misma longitud que el segmento $\overline{OX'}$
2. El $\angle$ XOX' $=\propto$, donde los dos ángulos tienen el mismo sentido, a favor o en contra de las manecillas del reloj (sentido horario o antihorario respectivamente).

Nota: Siempre que no se indique lo contrario consideraremos la rotación en sentido antihorario.

Ejemplo: Construye la imagen del triángulo ∆ABC por una rotación de centro O y ángulo de rotación $\propto$.

Solución



Se quiere rotar el triángulo ∆ABC por una rotación de centro O y ángulo α . Es suficiente determinar las imágenes de los vértices A, B y C por la rotación.

Descripción de la construcción (Figura 2.10)

- Se traza la semirrecta de origen O que pasa por el punto A.
- Se transporta el ángulo α a partir de la semirrecta OA en sentido antihorario, se obtiene así el lado libre del ángulo (el lado que no contiene al punto A)
- Se transporta el segmento $\overline{OA}$ sobre el lado libre. El punto A' es la imagen por la rotación de centro O y ángulo α del punto A.
- De forma análoga se procede para obtener las imágenes de los puntos B y C.
- Se unen los puntos A', B' y C' y obtenemos el $\Delta A'B'C'$ que es la imagen del ΔABC por este movimiento.

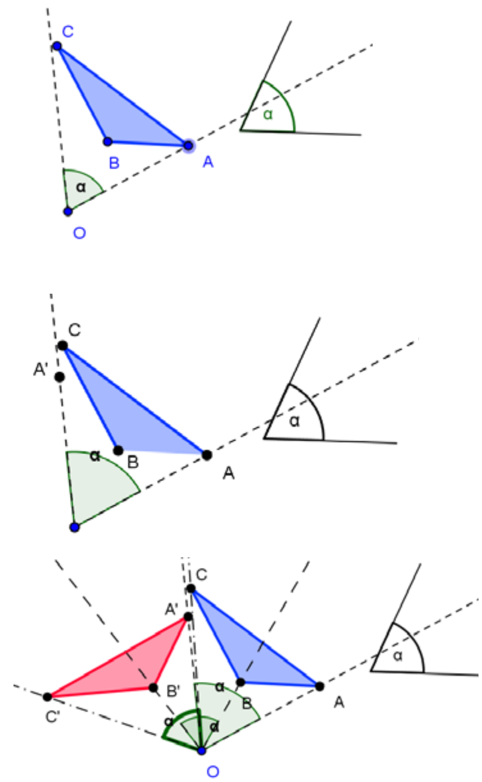


Figura 2.10

Propiedades fundamentales

- El centro de rotación es su propia imagen.
- Todo punto y su imagen están a la misma distancia del centro de rotación.
- Todo punto y su imagen determinan un ángulo con vértice en el centro, igual al ángulo de rotación, es decir todos los puntos rotan un mismo ángulo.

El movimiento de rotación está determinado de manera única si se conoce el centro de rotación y el ángulo o el centro de rotación y un punto y su imagen.

Simetría central o reflexión con respecto a un punto

Una rotación especial es cuando el ángulo de rotación es de 180º

Definición**: La simetría central** de centro O es una transformación del plano mediante la cual cada punto A del plano se transforma en un punto A', tal que el punto O es el punto medio del segmento $\overline{AA'}$

Una observación importante a la definición: Se observa en la figura 2.11 que el ángulo $\angle AOA' = 180º$ y que se cumplen las demás propiedades de la rotación.

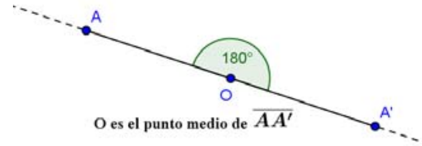


Figura 2.11

Se dice que los puntos A y A' son simétricos con respecto al punto O.

El centro de la simetría se transforma en sí mismo.

Propiedades de la simetría central:

Se mantienen las propiedades características de la rotación con un ángulo α, además se cumplen las siguientes propiedades

- Un segmento y su imagen por una simetría central son paralelos e iguales.
- Una recta y su imagen son paralelas.

Nota: Un punto y su imagen se llaman simétricos en el caso de este movimiento, pero una figura que esté formada de manera tal que cada uno de sus puntos tenga en la propia figura su simétrico se dice que es una figura simétrica con respecto a un punto o centralmente simétrica. La figura 2.12 ilustra algunas figuras simétricas, donde se representa el centro de simetría y se unen por segmentos algunos puntos que son simétricos.

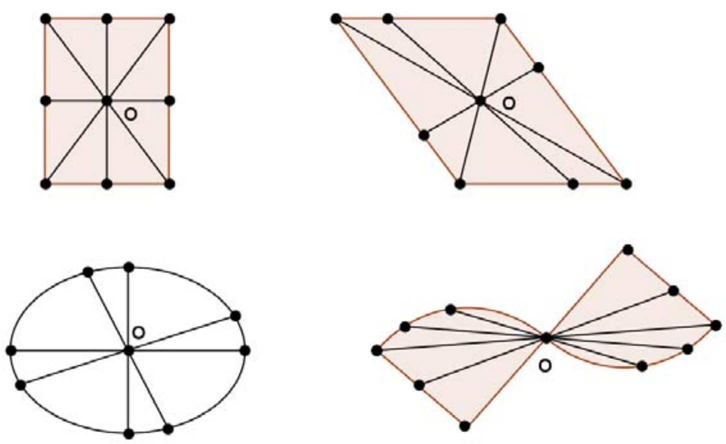


Figura 2.12

El movimiento de simetría central está determinado de manera única si se conoce un punto del plano considerado su centro de simetría o si se conoce un punto y su imagen.

Ejemplo:

El cuadrado ABCD está formado por 4 “cuadraditos” iguales. Si se le aplica una simetría de centro O, entonces el vértice A tiene por imagen el vértice:

1) ___ A 2) ___ B 3) ___ C 4) ___D.

Solución

La imagen de A por la simetría de centro O es el vértice C, de la misma forma la imagen de B es D, la de C es A y la de D es B. Por otra parte M es la imagen de N y viceversa y O coincide con su propia imagen.

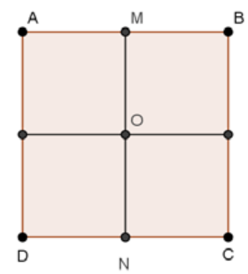
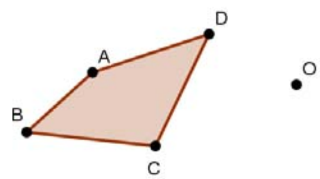


Figura 2.13

Ejemplo: Construye la imagen del cuadrilátero ABCD por una simetría central de centro O.

Solución

Descripción de la construcción. Figura 2.14



- Se trazan semirrectas con origen en los vértices del cuadrilátero que pasen por el centro O de la simetría
- Se determinan los puntos imágenes de los vértices del cuadrilátero, situados en las semirrectas opuestas a OA, OB, OC OD respectivamente y a la misma distancia del origen que A, B, C y D respectivamente.

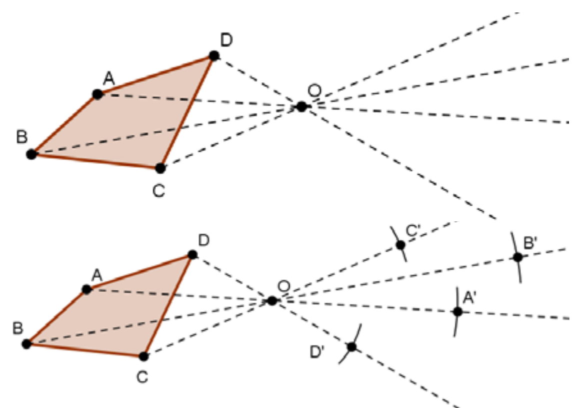


Figura 2.14

- Se traza el cuadrilátero A'B'C'D' y se obtiene la figura imagen. (Figura 2.15)

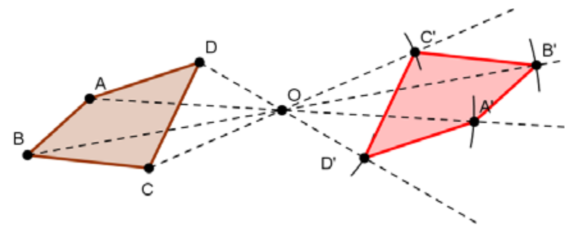


Figura 2.15

Haciendo un **resumen de los movimientos** estudiados se puede concluir que las propiedades que los caracterizan son:

- Todos los movimientos estudiados transforman un segmento en otro que tiene la misma longitud que el segmento original.
- Todos los movimientos estudiados transforman una recta en otra recta.
- Todos los movimientos estudiados transforman una semirrecta en otra semirrecta.
- Todos los movimientos estudiados transforman un ángulo en otro que tiene la misma amplitud que el ángulo original.

Luego podemos definir movimiento en general como:

Definición

Los **movimientos del plano** son las transformaciones que conservan la distancia entre los puntos.

Las figuras iguales no siempre se obtienen al aplicar un solo movimiento, en ocasiones resultan de la aplicación sucesiva de los movimientos estudiados.

La **operación composición** o aplicación compuesta, cuando se asocia al concepto de correspondencia, tiene una gran importancia en la Matemática. En el estudio de la Geometría plana es oportuno tratar la composición de movimientos.

La aplicación sucesiva de dos o más movimientos del plano es también un movimiento del plano.

El ejemplo consiste en lo siguiente: a un triángulo se le aplica una <u>traslación</u>, a la imagen que se obtiene se le aplica una <u>simetría central</u> y a la nueva imagen obtenida se le aplica una reflexión**.** ¿Qué relación existirá entre los lados del triángulo original y los del último triángulo, y entre los ángulos?

El siguiente gráfico ilustra el proceso de solución del ejemplo, que no es difícil pues se trata de aplicar sucesivamente diferentes movimientos a imágenes sucesivas que se van obteniendo; para entenderlo puedes estudiar lo referido a la determinación de imágenes por cada uno de los movimientos estudiados. Independientemente del resultado que se puede observar en el gráfico te darás cuenta inmediatamente que cada uno de los movimientos que aplicas conserva la longitud de los segmentos y la amplitud de los ángulos, por lo tanto según la definición la transformación del plano realizada es un movimiento, que como ya ves no es ninguno de los estudiados, sino una combinación de ellos que se llama **composición de movimientos.**

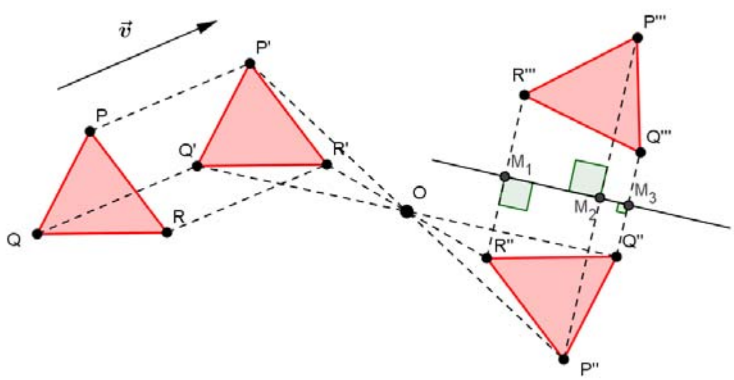


Figura 2.16

También es importante considerar que:

- La composición de dos simetrías axiales, cuyos ejes son paralelos, es una traslación que se caracteriza porque el módulo del vector de traslación o su longitud, es igual al doble de la distancia entre los ejes (Figura 2.17). Se tiene que el vector de traslación es $\overrightarrow{CC'}$´y su longitud es el doble de la distancia entre los ejes r y s.
- La composición de dos simetrías axiales cuyos ejes se cortan, es una rotación con centro en el punto de intersección de los ejes y con ángulo de rotación igual al doble del ángulo que forman dichos ejes. En caso de que el ángulo que forman los ejes sea de 90^{O}, los estudiantes deben comprender que están en presencia de una simetría central (Figura 2.18).

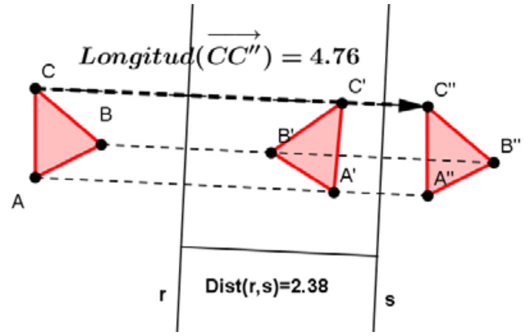


Figura 2.17

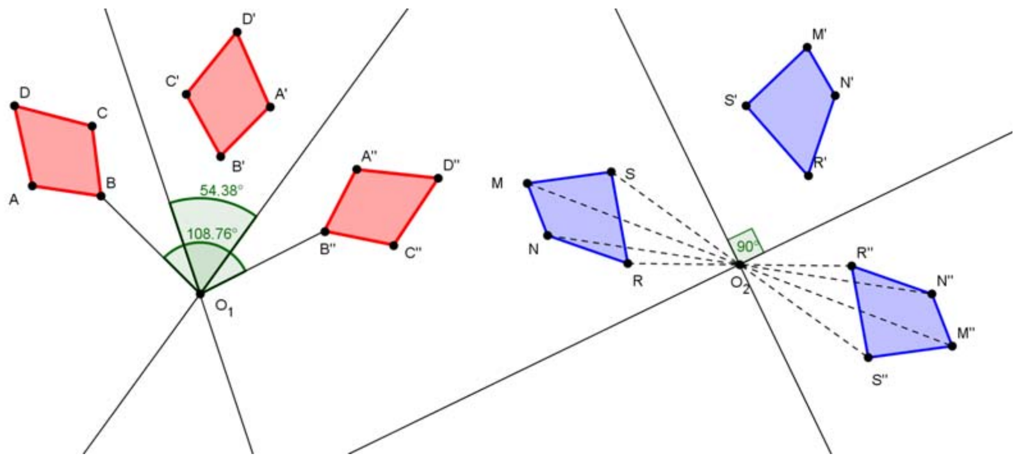


Figura 2.18

Propiedades fundamentales de los movimientos.

- Las figuras conservan sus formas y su tamaño, no sufren deformación alguna.
- Los segmentos, semirrectas y rectas se transforman, respectivamente, en segmentos, semirrectas y rectas.
- Los segmentos y ángulos se transforman en segmentos y ángulos respectivamente, de la misma medida.
- Transforma rectas paralelas en rectas paralelas y rectas que se cortan en rectas que se cortan.

Ejercicios

1- Traza en un sistema de coordenadas los puntos A(0;8), B(2;1),C(2;7) ,D(3;3) E(6;1),F(9;6) y G(10;0). Comprueba los resultados obtenidos, al trabajar con lápiz y papel, utilizando el asistente GeoGebra.

2- Traza la recta g, paralela al eje *y*, que pasa por el punto P(5;10).Escribe las coordenadas de las imágenes de cada uno de los puntos dados, por la reflexión de eje g. Traza en un sistema de coordenadas una recta g que pasa por los puntos (0;4) y (10;6)

a) Traza el punto A (4; 10) y construye su imagen A′ según la reflexión de eje *g*. Escribe las coordenadas de A′.

b) Traza el punto B (11; 3), construye su imagen B′ por la reflexión de eje *g y describe* la construcción que realizaste.

c) Comprueba los resultados obtenidos, al trabajar con lápiz y papel, utilizando el asistente GeoGebra.

3- Traza un rectángulo PQRS y por R traza la recta *g* paralela a la diagonal QS.

a) Determina la imagen de cada vértice del rectángulo PQRS por la reflexión de eje *g* y denota la imagen P′Q′R′S′

b) ¿Qué clase de cuadrilátero es P′Q′R′S′ y qué relación puedes establecer entre él y el rectángulo PQRS? Argumenta tu respuesta.

4- Dibuja un cuadrilátero y construye su imagen por una reflexión.

5- Construye la imagen de una circunferencia de 1,5 cm de radio, por una reflexión con respecto a una recta que no la interseca.

6- Diga cuál es la imagen por una reflexión de eje p

a) de una recta perpendicular al eje p

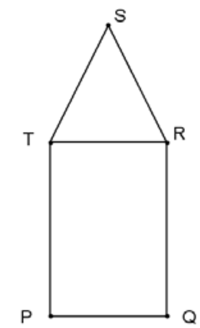
b) del eje p

c) de un segmento no paralelo al eje p

d) de un segmento paralelo al eje p.

7- Dibuja un triángulo ΔABC isósceles de base $\overline{AB}$. El segmento $\overline{CD}$ es la altura relativa a la base. ¿Mediante qué movimiento se ha transformado el triángulo ACD en el triángulo BCD? Justifica.

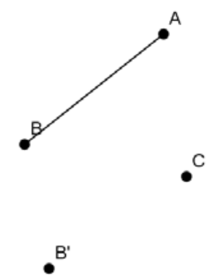
8- Dibuja en tu libreta el polígono PQRST. Halla su imagen por la traslación $\overline{TR}$.



9-Traza dos rectas p y q que sean perpendiculares y un vector $\overrightarrow{a}$ cualquiera.

a) Halla la imagen de las rectas p y q por la traslación $\overrightarrow{a}$.

b) ¿Qué relación existe entre las rectas p′ y q′ imágenes de p y q respectivamente?



10- En la figura se ha trazado la imagen B’ de un punto B, por una rotación de centro C y ángulo β. Determina el ángulo de rotación y la imagen del segmento $\overline{AB}$ por este movimiento.

11-Dibuja un ángulo agudo cualquiera, denótalo. Rota el ángulo dibujado con centro en su vértice y ángulo de rotación de 180^0. ¿A qué conclusión llegas?

12-Dibuja un paralelogramo ABCD, O es el punto de intersección de sus diagonales .Si al triángulo ΔAOD se le aplica la simetría central de centro O, entonces su imagen por dicho movimiento es el triángulo:

1) ___ Δ AOB   3) ___Δ BOC

2)___ Δ COD   4) ___ Δ AOD.

13-Traza un cuadrado MNPQ de 3,5 cm de lado :

a- Refleja el cuadrado en la recta PN.

b- Traslada 4,5 cm el cuadrado con sentido de dirección MN.

c- Rota el cuadrado MNPQ alrededor del punto N con ángulo de120^0.

d- Compara las longitudes de los segmentos y las amplitudes de los ángulos de la figura original con las de la figura imagen.

14- Construye un triángulo Δ PQR y determina su imagen por cada uno de los siguientes movimientos:

a) Reflexión de eje m: mediatriz del lado $\overline{PQ}$

b) Traslación del vector $\vec{v} = 2\overline{PR}$

c) Reflexión de centro O: punto medio del lado $\overline{RQ}$

d) Rotación de centro P y ángulo de 45^0.

15- Traza en un sistema de coordenadas los puntos P (1; 4), Q (5; 2), R (6; 3) y T (4; 5).

a) Halla la imagen del cuadrilátero PQRT por la traslación de vector $\overrightarrow{AB}$ donde A (4;6) y B (7;9).

b) Traza la recta CD con C (8:0) y D (8:4) y halla la imagen del cuadrilátero P'Q'R'T' por la reflexión de eje CD.

c) Halla la imagen del cuadrilátero P'Q'R'T' por la simetría de centro en E (7:5).
En cada uno de los incisos anteriores escribe las coordenadas de los puntos imágenes.

d) Comprueba los resultados obtenidos, al trabajar con lápiz y papel, utilizando el asistente GeoGebra.

16- Responde verdadero o falso y justifica cada una de tus respuestas.

a) ______ Sea ABCD un rectángulo y r una recta que pasa por los puntos medios de los lados de mayor longitud, entonces la imagen del rectángulo por la reflexión de eje r es un cuadrado.

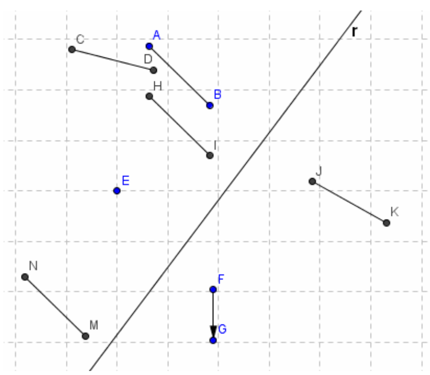
b) ______Si $\overline{MN}$ es un segmento y R su punto medio, entonces la imagen del punto M por la simetría central de centro R es el punto N y viceversa.

c) ______Si dos rectas a y b son perpendiculares y se les aplica una traslación de vector $\vec{a}$, entonces las rectas imágenes de a y b son paralelas.

d) ______Si al triángulo equilátero ABC se le aplica una reflexión con respecto a la recta que contiene a la altura relativa al lado $\overline{BC}$, entonces el punto A se transforma en el punto B, el punto C se transforma en el punto C el punto B se transforma en el punto A.

e) ______Si a una circunferencia de centro O se la aplica una simetría con centro en dicho punto O, entonces la circunferencia se transforma en sí misma.

17- Determina por cuáles movimientos los segmentos trazados son imágenes del segmento $\overline{AB}$. Argumenta en cada caso tu respuesta.



18– Dibuja un rectángulo ABCD. Determina su imagen mediante la composición de una simetría axial de eje en la recta BC y una rotación de centro B y ángulo 90^0.

19- Representa en un sistema de coordenadas los puntos:

A (4; 3), B (6; 0), C (8; 3) y D (6; 6).

Determina y fundamenta en cada caso:

a) La imagen de la recta AC por la reflexión de eje BD.

b) La imagen de la recta BD por la simetría de centro E (6; 3).

c) La imagen de la recta AD por la simetría de centro E.

d) La imagen de la recta BC por la traslación $\overline{AD}$.

19.1- Comprueba los resultados obtenidos, al trabajar con lápiz y papel, utilizando el asistente GeoGebra.

20-Consulta los libros y programas de la Educación Primaria y responde:

a) ¿Qué movimientos se estudian en la Educación Primaria? ¿En qué grado?

b) ¿Cómo se define cada movimiento?

c) ¿Qué propiedades de cada movimiento se estudian?

d) Selecciona un ejercicio del libro de texto y resuélvelo.

2.2 Igualdad de triángulos

Ya estudiaste anteriormente cómo dada una figura geométrica puedes construir otras figuras iguales, a partir de los diferentes movimientos del plano y de las construcciones geométricas.

A nuestro alrededor se pueden observar muchas figuras que son iguales; precisamente muchas construcciones basan su belleza en la simetría axial y en este caso con respecto al eje imaginario se observan figuras a ambos lados del eje que son iguales. Además se pueden observar un sinnúmero de figuras que son iguales y que algunas son utilizadas en los primeros grados de la enseñanza primaria para definir ciertos casos particulares de figuras geométricas, por ejemplo las que aparecen ilustradas en la figura 2.19.

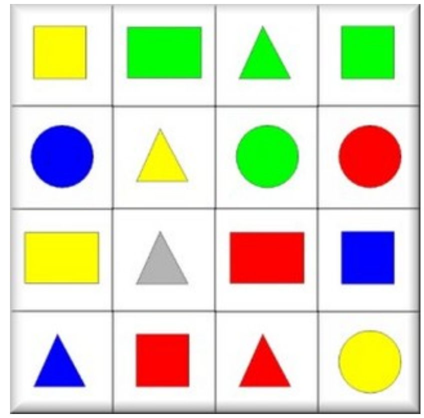


Figura 2.19

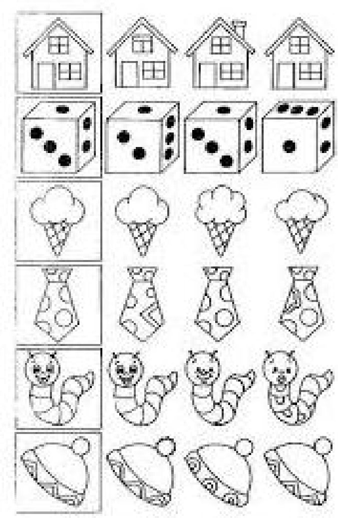


Figura 2.20

En la figura 2.20 se puede buscar una figura que sea igual a la que aparece en la columna de la izquierda, esto es interesante como ejercicio para adiestrar la vista.

No siempre se da una figura geométrica y se busca otra igual a la dada, en ocasiones se presentan dos figuras geométricas y debemos determinar si las mismas son iguales. La veracidad de una proposición de esta forma no debe asegurarse por “simple observación”, podemos afirmar que una proposición matemática es verdadera si esta es fundamentada o demostrada a partir del sistema de axiomas establecido o de otras proposiciones verdaderas.

Como te habrás dado cuenta la condición geométrica para que dos figuras sean iguales, es decir, para que exista la igualdad geométrica entre ellas, es que exista un movimiento que transforme una en la otra, pues precisamente es a través de los movimientos que se pueden superponer dos figuras, entonces:

Dos **figuras** son **iguales** si existe un movimiento que transforma una en la otra.

Observa los polígonos dados en la figura 2.21

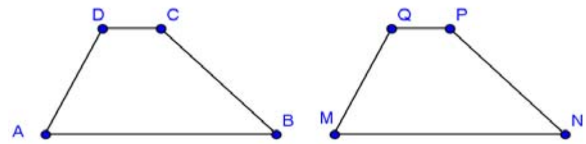


Figura 2.21

Los polígonos ABCD y MNPQ parecen iguales, pero no se puede decir a simple vista que lo sean. Al superponer los dos polígonos iguales por un movimiento podemos apreciar que sus lados tienen respectivamente la misma longitud y sus ángulos tienen respectivamente la misma amplitud. Esta idea permite definir en particular, la igualdad de polígonos.

Definición de polígonos iguales:

Dos **polígonos son iguales** si sus ángulos interiores son respectivamente iguales y los lados adyacentes a los ángulos iguales son respectivamente iguales.

Como consecuencia tenemos que si dos polígonos son iguales, entonces sus lados y sus ángulos son iguales también.

El concepto figuras iguales incluye, desde luego, a los triángulos.

Igualdad de triángulos

El estudio de los triángulos es útil para la vida práctica y para la Matemática. Un lugar importante dentro de la igualdad de figuras lo constituye la igualdad de triángulos por las diversas aplicaciones al cálculo de áreas y en la demostración de propiedades geométricas, de ahí que se estudien los triángulos iguales como caso particular de polígonos iguales.

Ejemplo: Comprueba que los triángulos ABC y PQR son iguales (figura f4).

Solución: El ∆ABC se transforma en el ∆PQR mediante el movimiento que resulta de la composición de la reflexión de eje l y la traslación de vector $\overline{MN}$, como se muestra en la figura 2.22

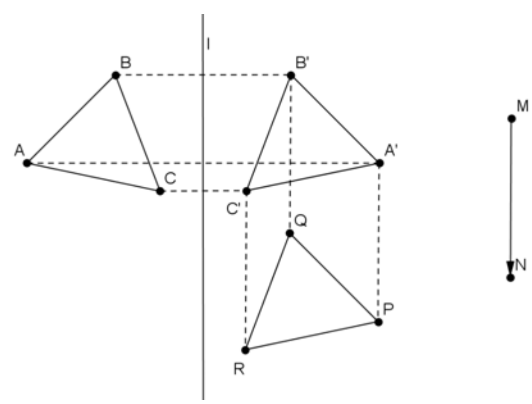


Figura 2.22

Podemos asegurar entonces, que los triángulos

ABC y PQR son iguales.   Abreviadamente, $\triangle ABC = \triangle PQR$

En estos triángulos los elementos correspondientes son iguales:

$\overline{AB} = \overline{PQ}$, $\overline{BC} = \overline{QR}$, $\overline{AC} = \overline{PR}$, $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$, $\angle C = \angle R$

Definición de triángulos iguales:

Dos **triángulos son iguales** si sus ángulos interiores tienen respectivamente la misma amplitud y si los lados opuestos a estos ángulos tiene respectivamente la misma longitud.

Elementos homólogos de triángulos iguales

- Los **lados y ángulos homólogos** de dos triángulos iguales son los elementos que se corresponden por el movimiento que generó estos triángulos iguales y son siempre respectivamente iguales.
- Se cumple siempre que en triángulos iguales, a lados respectivamente iguales (**lados homólogos**) se oponen ángulos respectivamente iguales (**ángulos homólogos**) y recíprocamente, a ángulos respectivamente iguales (**ángulos homólogos**) se oponen lados respectivamente iguales (**lados homólogos**).

Se hace difícil comprobar por superposición o por movimientos la igualdad de dos triángulos, por tal motivo se buscan criterios que hagan más fácil la comprobación de la igualdad de triángulos, y es precisamente este el aspecto que trataremos a continuación. Buscar una vía que permita comprobar que dos triángulos son iguales sin necesidad de recurrir a ninguna de las dos vías vistas anteriormente.

De la definición de triángulos iguales se deduce que se deben justificar seis igualdades geométricas, tres igualdades referidas a lados y tres igualdades referidas a ángulos.

En el estudio de la Matemática se deben seguir las vías más racionales, por tal motivo se hace necesario tratar de buscar condiciones más sencillas que las que plantea la definición de triángulos iguales. Cuando se quiera demostrar o comprobar la igualdad de dos triángulos, sería mejor analizar un número menor de elementos, que los tres lados y tres ángulos de los triángulos, por ese motivo, en esa búsqueda, se ha llegado a una serie de condiciones mínimas que garantizan la igualdad de dos triángulos y que son denominadas criterios de igualdad o congruencia de triángulos, las cuales se pasan a estudiar a continuación.

Teorema 1 (Criterio de igualdad de triángulos l. a. l.)

Si dos triángulos tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales, entonces esos triángulos son iguales.

Aquí se presentará solamente la demostración del teorema 1 o criterio l.a.l., a partir de la igualdad de los ángulos que aparece en la premisa, se tiene que existe un movimiento por el cual un ángulo se transforma en el otro y se demostrará que ese movimiento transforma un triángulo en el otro y se obtendrá directamente la igualdad de los triángulos, es decir se empleará el método directo de demostración.

Demostración

Sean ABC y PQR (Figura 2.23) dos triángulos que cumplen las condiciones que establece la premisa: $\overline{AB} = \overline{PQ}$, $\angle ABC = \angle PQR$, $\overline{BC} = \overline{QR}$

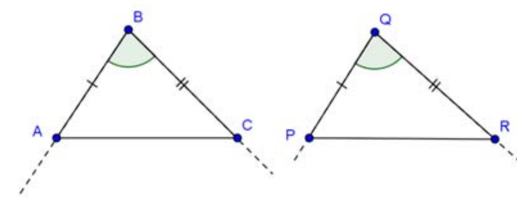


Figura 2.23

Luego existe un movimiento por el cual el $\angle$ABC se transforma en el $\angle$PQR, por tanto:

- el punto Q es la imagen del punto B,
- la semirrecta QP es la imagen de la semirrecta BA,
- la semirrecta QR es la imagen de la semirrecta BC,

Como $\overline{AB} = \overline{PQ}$ y $\overline{BC} = \overline{QR}$, entonces por este mismo movimiento:

- el punto P es la imagen del punto A y
- el punto R es la imagen del punto C.

Luego, podemos concluir que el triángulo ABC se transforma en el triángulo PQR por ese movimiento, ya que los vértices del segundo triángulo son las imágenes de los vértices del primero, por tanto se cumple: $\Delta ABC = \Delta PQR$

De manera análoga se pueden demostrar los siguientes criterios.

Teorema 2 (Criterio de igualdad de triángulos (a.l.a.)

Si dos triángulos tienen un lado y los ángulos adyacentes a ese lado respectivamente iguales, entonces estos triángulos son iguales.

Teorema 3 (Criterio de igualdad de triángulos (l.l.l.)

Si dos triángulos tienen sus tres lados respectivamente iguales, entonces estos triángulos son iguales.

De esta manera hemos obtenido los tres criterios de igualdad de triángulos, mediante los cuales, sin necesidad de probar la igualdad de todos los elementos, se puede llegar a concluir que dos triángulos son iguales. En todos los casos, partiendo de las condiciones que son características a cada criterio, comprobamos que a partir de la aplicación de un movimiento o de la combinación de varios de ellos se pueden superponer con lo cual se tiene también la igualdad de todos los lados y ángulos.

Es muy importante considerar que la cantidad mínima de elementos (lados o ángulos) que hay que comprobar para demostrar la igualdad de dos triángulos utilizando uno de estos criterios, es de tres. Dentro de estos tres elementos tiene que haber por lo menos un lado.

Los pares de triángulos que aparecen en las figuras 2.24y 2.25 te permitirán comprobar que dos triángulos pueden tener dos o tres elementos iguales, que no son los expresados en los criterios y estos triángulos no son iguales.

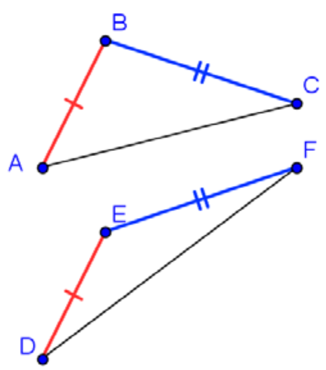


Figura 2.24

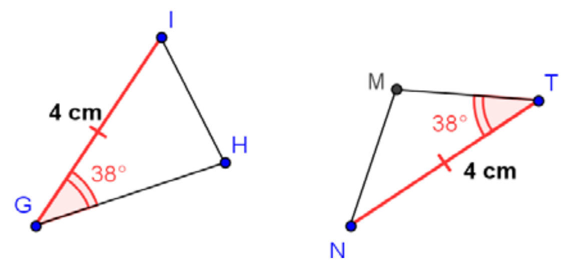


Figura 2.25

En la figura 2.26 se observa que los tres ángulos son iguales, sin embargo, los triángulos no lo son, es interesante que te des cuenta que lo que sí tienen iguales estos triángulos, es la forma, sobre lo relacionado con la forma de la figura también se habla más adelante.

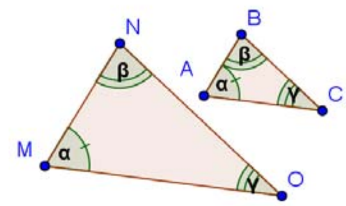
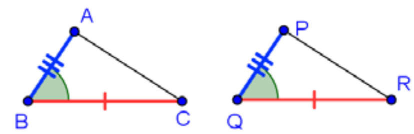
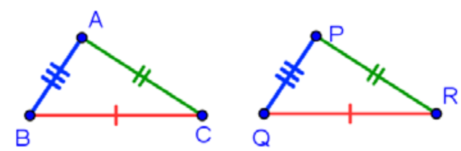
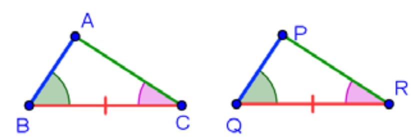


Figura 2.26

Resumen de los teoremas de igualdad de triángulos.

Criterio	Enunciado	Ilustración
l.a.l	Si dos triángulos tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales, entonces esos triángulos son iguales.	
l.l.l	Si dos triángulos tienen sus tres lados respectivamente iguales, entonces esos triángulos son iguales.	
a.l.a	Si dos triángulos tienen un lado y los ángulos adyacentes respectivamente iguales, entonces esos triángulos son iguales.	

Queda un aspecto importante que analizar relacionado con la igualdad de triángulos; ya has visto que cuando se dan las condiciones de los criterios, los triángulos son iguales, lo cual significa que sean iguales todos sus elementos, es decir, todos los lados y todos los ángulos. Como los triángulos que cumplen las condiciones de los criterios son iguales, entonces existe un movimiento que transforma uno en otro, en correspondencia tenemos los elementos homólogos, de acuerdo con lo cual se puede resumir que:

- Los elementos homólogos de dos triángulos son respectivamente iguales.
- En triángulos iguales a lados respectivamente iguales se oponen ángulos iguales y viceversa.

Esta segunda afirmación es la que permite concluir de la igualdad de los lados de dos triángulos iguales, la igualdad de los ángulos opuestos.

En ocasiones probar que dos triángulos son iguales no es interesante por sí mismo, sin embargo a veces se quieren fundamentar o justificar la igualdad de segmentos o ángulos de determinadas figuras y entonces una herramienta muy importante es la aplicación de los criterios de igualdad.

Por **ejemplo** si el triángulo ACD de la figura 2.27 es isósceles de base $\overline{AC}$, se conoce que los lados $\overline{AD} = \overline{CD}$ son iguales, se puede comprobar otra propiedad importante de los triángulos isósceles, en este caso la relación de los ángulos que se oponen a los lados iguales.

Ejemplo: Dado el triángulo ACD, isósceles de base $\overline{AC}$, siendo O el punto medio del lado $\overline{AC}$, demuestra que: $\Delta AOD = \Delta COD$.

Demostración

En el triángulo ACD se considera el punto medio O del lado $\overline{AC}$ y se analiza la relación entre los triángulos AOD y COD, se tiene que $\overline{AO} = \overline{OC}$

porque O punto medio de $\overline{AC}$

$\overline{OD}$ es un lado común de los dos triángulos,

$\overline{AD} = \overline{CD}$ por lados iguales del triángulo isósceles,

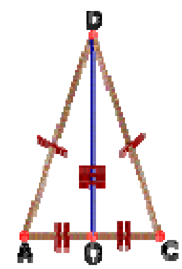


Figura 2.27

Por lo tanto se puede concluir que: $\Delta AOD = \Delta COD$

por tener sus tres lados respectivamente iguales (I.I.I.).

Observa que teniendo en cuenta lo relativo a los elementos homólogos se obtiene que: $\measuredangle DAC = \measuredangle DCA$ porque se oponen al lado que es común.

Importante: Cuando quieras fundamentar una propiedad debes escribir el por qué de lo que afirmas.

Ejemplo

En la figura 2.28 ABC y CDE son triángulos isósceles de base $\overline{AC}$ y $\overline{DE}$ respectivamente, y $\measuredangle ABD = \measuredangle EBC$.

Demuestra que $\Delta ABD = \Delta EBC$.

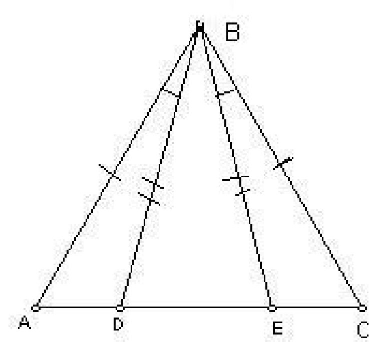


Figura 2.28

Demostración

En los triángulos ΔABD y ΔEBC ,

$\measuredangle ABD = \measuredangle EBC$ por datos

$\overline{AB} = \overline{BC}$ y $\overline{BD} = \overline{BE}$ por ser lados iguales de los triángulos isósceles

Por tanto $\Delta ABD = \Delta EBC$ por tener dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales (l.a.l.).

Ejemplo:

En la figura 2.29 se tiene que $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$ y que C es el punto medio de $\overline{BE}$. Además se conoce que los puntos A, C y D son alineados, así como los puntos B, C y E. Demuestra que Δ ABC = Δ CDE.

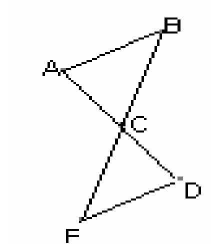


Figura 2.29

Demostración

En los triángulos ABC y CDE se tiene que:

$\overline{BC} = \overline{EC}$ por ser C el punto medio de $\overline{BE}$,

$\angle$ ACB = $\angle$ DCE por ser ángulos opuestos por el vértice,

$\angle$ ABC = $\angle$ CED por ser ángulos alternos entre las paralelas $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$, y la secante $\overline{BE}$

Resulta que: Δ ABC = Δ CDE por tener un lado y los ángulos adyacentes a dicho lado respectivamente iguales (a.l.a.).

Observación:

A la afirmación $\angle$ABC = $\angle$CED se podía haber llegado justificando primeramente que $\angle$BAC = $\angle$CDE por ser ángulos alternos entre las paralelas $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$, y la secante $\overline{AD}$, y finalmente , como los dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente iguales, se puede concluir que sus terceros ángulos también los son pues, la suma de los ángulos interiores de un triángulo siempre es igual a 180°.

Otro teorema importante sobre los lados y ángulos de un triángulo se puede enunciar, esta propiedad es esencial para lograr algunos resultados importantes.

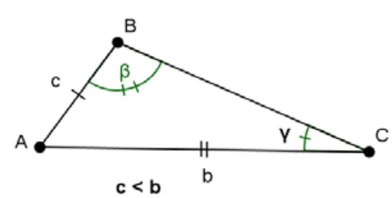


Figura 2.30

Teorema: Si en un triángulo dos lados son desiguales, al mayor lado se opone el mayor ángulo.

Demostración:

La figura 2.30 muestra un triángulo ABC donde el lado $\overline{AB}$ (c) es menor que el lado $\overline{AC}$ (b), se puede lograr explicar que en correspondencia el ángulo $\gamma<\beta$.

Como c< a se puede encontrar un punto D en $\overline{AC}$ tal que $\overline{AD}$ = c, entonces el triángulo ABD es isósceles con los lados iguales $\overline{AB} = \overline{AD}$, luego los ángulos $\angle ABD$ y $\angle ADB$ son iguales de amplitud β_1. Se observa que

$\angle ABD < \angle ABC = \beta$.

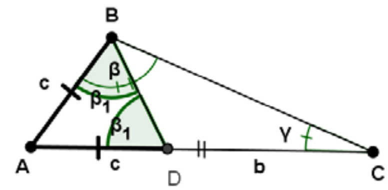


Figura 2.31

Por otra parte en el triángulo BCD el ángulo $\angle ADB$ es exterior, luego es mayor que el interior no adyacente a él, $\angle ACB = \gamma$, luego como, $\gamma < \beta_1$ y $\beta_1 < \beta$ se obtiene que $\gamma < \beta$, es decir, a mayor lado se opone mayor ángulo.

El recíproco de esta propiedad también se cumple:

Teorema: Si en un triángulo dos ángulos son desiguales, al mayor ángulo se opone el mayor lado.

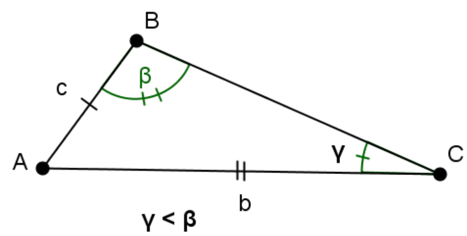


Figura 2.32

Si se considera que no se cumple la propiedad, entonces se cumpliría una de las dos posibilidades siguientes: c = b o b< c, lo cual no es posible porque aplicando propiedades conocidas se llegaría a que $\gamma = \beta$ o $\beta < \gamma$ lo cual es falso porque se tiene que: $\gamma < \beta$. (Figura2.32)

Esta propiedad permite arribar a conclusiones importantes:

- El lado mayor del triángulo rectángulo, es el que se opone al ángulo recto y es conocido como hipotenusa.

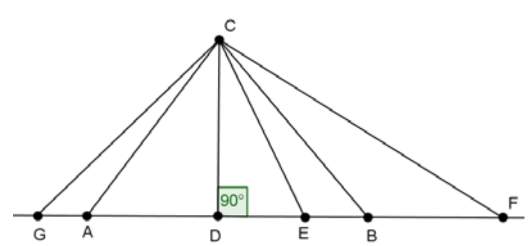


Figura 2.33

- De los segmentos trazados desde un punto a una recta, el menor segmento es el que es perpendicular, pues se aplica la conclusión anterior y se tiene que cualquier otro es hipotenusa de los triángulos rectángulos que se forman con el segmento de perpendicular $\overline{CD}$ (Figura 2.33)

Teniendo en cuenta la segunda conclusión se puede definir:

Distancia de un punto a una recta: es el segmento de la perpendicular trazada desde un punto a una recta, es el menor de los segmentos que se puede trazar con un extremo en el punto y el otro en un punto de la recta. En la figura d se representa por $\overline{CD}$ la distancia de C a la recta.

<u>Mediatriz de un segmento</u>

Con los elementos estudiados hasta aquí, se puede definir un tipo de recta muy importante relacionada con el estudio de la geometría.

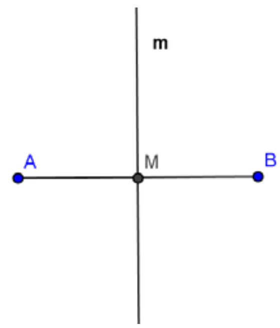


Figura 2.34

Definición: Se denomina **mediatriz** de un segmento AB a la recta m que corta perpendicularmente al segmento en su punto medio.

La figura 2.34 ilustra la mediatriz m del segmento AB, donde M es el punto medio del segmento.

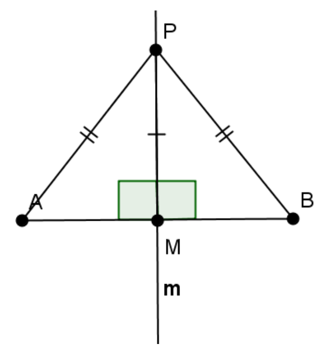


Figura 2.35

Si consideramos un punto P cualquiera en la recta m (Figura 2.35), se forman dos triángulos: ΔPMA y ΔPMB, se cumple que $\overline{AM}$ = $\overline{MB}$ por ser M punto medio de $\overline{AB}$ A, $\overline{PM}$ es un lado común y además los ángulos ∠PMA = ∠PMB por ser de 90º, luego por el criterio l.a.l se tiene que ΔPMA = ΔPMB y por elementos homólogos se obtiene que $\overline{PA}$ = $\overline{PB}$, es decir el punto arbitrario P de la mediatriz está a la misma distancia de los extremos del segmento, lo cual en Matemática se expresa como: P equidista de los extremos del segmento y esto es precisamente un teorema que contiene una importante propiedad de los puntos de la mediatriz:

Teorema:

Los puntos de la mediatriz de un segmento equidistan de los extremos del segmento.

Cuando seas capaz de construir la mediatriz de un segmento utilizando los instrumentos de dibujo, podrás comprobar gráficamente que **solo los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos del segmento**, también lo puedes comprobar gráficamente utilizando el

Geogebra, que permite construir la mediatriz de un segmento directamente y comparar la distancia de cualquier punto P que no está situado en la mediatriz a lo extremos del segmento, si arrastras el punto P.

Dada estas condiciones entonces se puede definir la **mediatriz** como: Lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos de un segmento.

Bisectriz de un ángulo

Otro elemento geométrico que es posible definir, en este caso relacionado con los ángulos es:

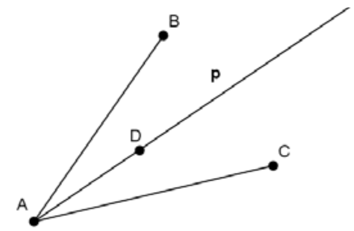


Figura 2.36

Definición: La semirrecta p de origen en el vértice de un ángulo, que lo divide en dos ángulos iguales, se denomina **bisectriz del ángulo.**

En la Figura 2.36 se ilustra la semirrecta p que es la bisectriz del $\angle$BAC y se cumple que $\angle$BAD = $\angle$CAD. Otra importante propiedad de la bisectriz se puede estudiar.

El siguiente teorema caracteriza a la bisectriz como lugar geométrico:

Teorema: Los puntos de la bisectriz equidistan de los lados del ángulo.

Demostración

En la figura 2.37se ilustra el $\angle$(p,q) al cual se le ha trazado su bisectriz AD y se han construido los segmentos que representan la distancia de D a los lados del ángulo, se quiere comprobar que $\overline{DE} = \overline{DF}$.

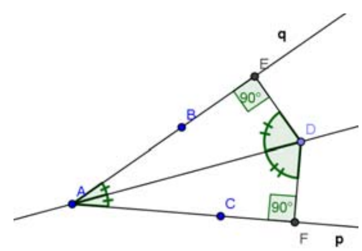


Figura 2.37

En los triángulos ADE y ADF se tiene que $\overline{AD}$ es lado común, $\angle$AED = $\angle$AFD = 90º por $\overline{DE}$ y $\overline{DF}$ representar las distancias de D a los lados del ángulo. Por otra parte como $\overline{AD}$ es la bisectriz los ángulos $\angle$EAD y $\angle$FAD son iguales y por tanto, por la suma de los ángulos interiores del triángulo se tiene que $\angle$ADE = $\angle$ADF, entonces por criterio de congruencia ALA, los triángulos son iguales y por elementos homólogos se obtiene que: $\overline{OE} = \overline{OF}$, es decir, los puntos de la bisectriz están a la misma distancia de los lados del ángulo.

Ejemplo: En la figura 2.38, $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ y $\overline{DC} \perp \overline{BC}$, ∠ ACB = ∠ DBC

Demuestra que $\overline{AB}$ = $\overline{DC}$.

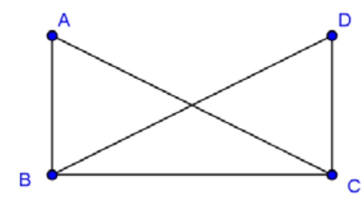


Figura 2.38

Solución

En este ejemplo no se pide demostrar la igualdad de pares de triángulos, sin embargo para obtener que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ son iguales, es necesario apoyarse en la igualdad de triángulos.

Para probar que $\overline{AB}$ = $\overline{DC}$ se necesita demostrar que $\Delta ABC = \Delta DCB$, para ello se puede utilizar el criterio ALA, que establece que los triángulos son iguales por tener un lado y los ángulos adyacentes a dicho lado iguales; puedes realizar la demostración siguiendo esta vía.

Si analizas detenidamente los datos de este ejemplo te puedes dar cuenta que si los triángulos ΔABC y ΔDCB son rectángulos para cualquier par de triángulos de este tipo siempre se tendrá la igualdad del ángulo recto. Por ejemplo en el caso analizado, los ángulos agudos que son iguales tienen un lado común, que es un cateto, luego conocido el cateto, si se cumple que un cateto y el ángulo adyacente a este son respectivamente iguales a un cateto y el ángulo adyacente a este, de otro triángulo (Cateto, Ángulo Agudo) , se obtiene la igualdad de los triángulos rectángulos por el criterio a.l.a.

Si los dos catetos son iguales, como el ángulo formado por ellos es recto, entonces para comprobar la igualdad de los dos trángulos rectángulos puede aplicar un criterio Cateto, Cateto, que coincide con el criterio general l.a.l; también en el caso de los dos catetos iguales se puede proceder por el criterio l.l.l, pues por el teorema de Pitágoras, el tercer lado, la hipotenusa sería también igual.

De forma similar se puede aplicar la simplificación de los criterios de igualdad de triángulos para triángulos rectángulos si se conoce: Hipotenusa y Ángulo Agudo e Hipotenusa y Cateto.

Ejemplo: Calcula la distancia entre los puntos A y B entre los cuales existe un obstáculo (figura2.39), que impide medirla.

Solución

Se puede proceder de la forma siguiente:

1) Se selecciona un punto C desde el que podamos llegar hasta A y B, y desde el cual estos puntos son visibles.
2) Se miden las longitudes de $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ y se prolongan los segmentos de manera que $\overline{CD}$ = $\overline{AC}$ y $\overline{EC}$ = $\overline{CB}$.Entonces $\overline{ED}$ es igual a la distancia entre los puntos A y B, ya que con los datos dados puede probarse que los triángulos ABC y EDC son iguales y los segmentos AB y ED son iguales por elementos homólogos.
   Todo esto puede hacerse clavando estacas en cada uno de esos puntos y uniéndolos con un cordel, tal y como ilustra la figura.

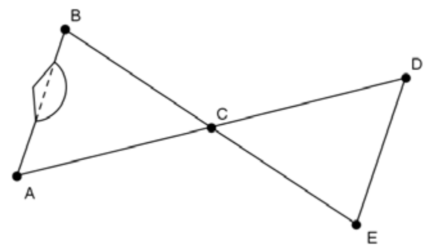
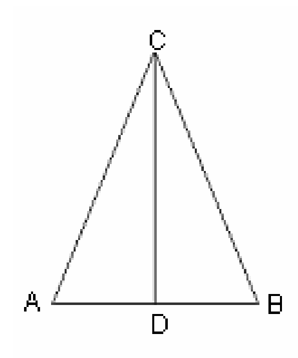


Figura 2.39

Ejercicios

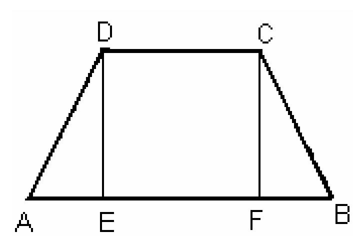
1.Cita ejemplos de figuras iguales a tu alrededor y cómo compruebas en la práctica que son realmente iguales.

2.En la figura, D $\in \overline{AB}$ ¿Cuáles de las siguientes igualdades seleccionarías para probar que Δ ADC =Δ BDC? Justifica tu respuesta.



a) ____$\overline{AD} = \overline{DB}$
b) _____$\angle$ ACD =$\angle$DCB
c) _____$\overline{AD} = \overline{BC}$
d) ______$\angle$ ADC=$\angle$BDC

3. Sea ABCD un trapecio isósceles de bases $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$, CDEF es un rectángulo y $\overline{AF} = \overline{EB}$. Completa los espacios en blanco para demostrar que Δ AED =Δ FBC.



Demostración:

En los triángulos AED y FBC se tiene que:

$\overline{AD} = \overline{BC}$ ____________________

-------------------- por ser lados opuestos del rectángulo CDEF.

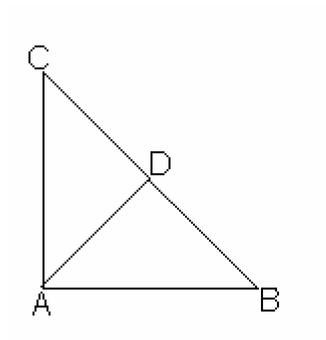
------------------- porque son segmentos que tienen como longitud, la diferencia de las longitudes de segmentos respectivamente iguales.

Por tanto:

Δ AED =Δ FBC por el teorema: ____.

4. El triángulo ABC de la figura es isósceles rectángulo de base $\overline{BC}$,$\overline{AD}$ es la mediana relativa del lado $\overline{BC}$.

Llena los espacios en blanco para completar las igualdades o fundamentaciones necesarias para demostrar que: Δ ABD =Δ CAD.



Demostración:

En los triángulos ABD y CAD se cumple que:

$\angle$ DCA=$\angle$ ABD _________________________________

$\overline{CD} = \overline{DB}$ _____________________________________

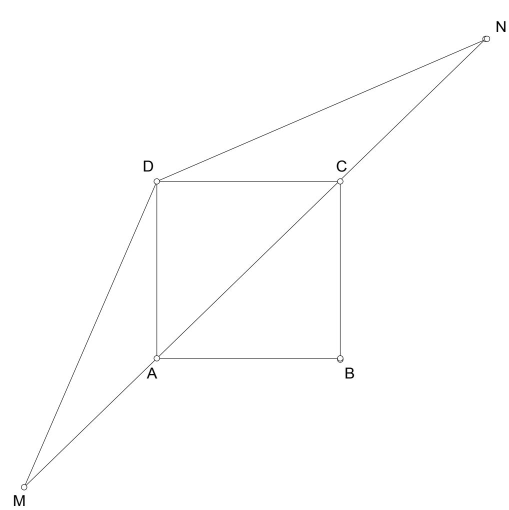
_____________ porque son lados iguales del Δ ABC isósceles

Por tanto:

Δ ABD =Δ CAD por el teorema: ______________________.

5- Complete los espacios en blanco:

En la figura ΔMDN es isósceles de base $\overline{MN}$, ABCD es un cuadrado y $\overline{MA} = \overline{CN}$ Demuestra que $\angle$MDA=$\angle$NDC.



En el ΔMDA y el ΔNDC tenemos que:

____________ por datos

$\angle$AMD=$\angle$CND por ______________________

____________ por ser ΔMDN isósceles de base $\overline{MN}$,

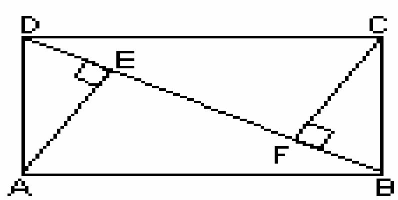
Luego ΔMDA=ΔNDC___________________________

____

Entonces $\angle$MDA=$\angle$NDC por _______________________

____.

6-En la figura se muestra un rectángulo ABCD y en su interior han quedado representados seis triángulos determinándose tres parejas de triángulos iguales, se cumple $\overline{AE} \perp \overline{BD}$ y $\overline{CF} \perp \overline{BD}$.



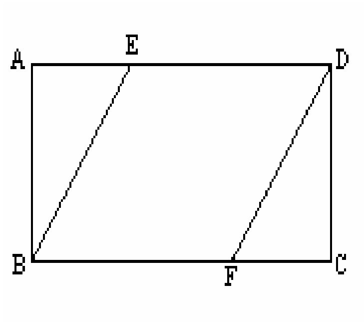
a) Nombra las tres parejas de triángulos iguales y justifica por qué son iguales.

b) Completa los espacios en blanco atendiendo a los elementos homólogos en las parejas de triángulos iguales.

- El lado homólogo al lado $\overline{AE}$ es el lado ___en los triángulos_______ y ________.
- El lado homólogo al lado ___ es el lado $\overline{BC}$ en los triángulos_______ y ________.
- El ángulo homólogo al $\angle$FBC es ____________ en el triángulo ____________.

7-En la figura ABCD rectángulo, E y F puntos de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, $\overline{AE} = \overline{FC}$ y BEDF paralelogramo.

a) Demuestra que Δ ABE = ΔDCF.
b) Clasifica el Δ ABE de acuerdo con la amplitud de sus ángulos.



8- Dos pueblos representados por los puntos A y B respectivamente están separados por un bosque. Se desea tirar un tendido telefónico desde un pueblo hasta el otro.

a) ¿Cómo determinar la longitud del cable sin atravesar el bosque?

b) ¿Qué criterio de igualdad de triángulos justifica tu respuesta?

9-Consulta los libros y programas de la Educación Primaria y responde:

a) ¿En qué grado se estudian los triángulos?

b) ¿Qué proposiciones relacionadas con los triángulos se presentan en los textos?

c) Selecciona un ejercicio del libro de texto que se pueda resolver utilizando la proposición seleccionada y resuélvelo.

10-Consulta los libros y programas de la Educación Primaria y responde:

a) ¿En qué grado se estudia la mediatriz de un segmento?

b) ¿Qué proposiciones relacionadas con la mediatriz se presentan en los textos?

11-Consulta los libros y programas de la Educación Primaria y responde:

a) ¿En qué grado se estudia la bisectriz de un ángulo?

b) Selecciona un ejercicio relacionado con la bisectriz de un ángulo y resuélvelo

2.3 Rectas, segmentos y puntos notables en un triángulo

En este epígrafe profundizarás tus conocimientos sobre los conceptos de mediatriz de un segmento y bisectriz de un ángulo. Además de estos conceptos, en el caso de los triángulos podemos encontrar otros segmentos notables que tienen múltiples aplicaciones a la solución de ejercicios y problemas, son estos las medianas y las alturas.

Mediatrices, alturas, medianas y bisectrices de un triángulo

Definición**:** Las **mediatrices** de un triángulo ABC son las mediatrices $\mathbf{m_a}$**,** $\mathbf{m_b}$ **y** $\mathbf{m_c}$ de los lados a, b y c de dicho triángulo.

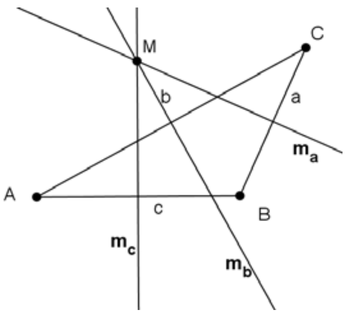


Figura 2.40

Teorema: Las mediatrices de un triángulo se cortan en un punto.

Demostración

Sea M el punto de intersección de las mediatrices $\mathbf{m_a}$ **y** $\mathbf{m_c}$ (Figura 2.40)

Se pueden obtener las igualdades de segmentos siguientes:

$\overline{MC} = \overline{MB}$ por ser M punto de $\mathbf{m_a}$

$\overline{MA} = \overline{MB}$ por ser M punto de $\mathbf{m_c}$

$\overline{MC} = \overline{MA}$ por carácter transitivo.

Por tanto, M es un punto de $\mathbf{m_b}$ ya que equidista de los extremos de $\overline{AC}$, es decir, las tres mediatrices se cortan en el punto M.

Notas:

1- En un triángulo la mediatriz de cada uno de sus lados recibe el nombre de recta notable.

2- Las mediatrices de un triángulo no necesariamente pasan por los vértices.

3- Las mediatrices de un triángulo se cortan en un punto llamado **circuncentro,** luego se puede escribir que: $m_a \cap m_b \cap m_c = \{M\}$.

4- El circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo. La distancia de este punto a los vértices del triángulo es la misma y es el radio de esa circunferencia.

5- El circuncentro del triángulo es un punto que puede estar situado dentro, fuera o sobre el triángulo, en dependencia del tipo de triángulo (de acuerdo a la clasificación de los triángulos según las amplitudes de los ángulos).

Ejemplo:

Si r es la mediatriz de un segmento $\overline{AB}$ y N es un punto que está situado sobre la recta r. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

____ a) ABN es un triángulo escaleno.

____ b) $\overline{AN} = \overline{BN}$.

____ c) Los ángulos NAB y ABN son diferentes.

Solución

Conocido el concepto de mediatriz de un segmento y de la propiedad que plantea que todo punto situado sobre la mediatriz de un segmento equidista de sus extremos; por lo cual los segmentos que se forman al unir un punto de la mediatriz con los extremos del segmento son iguales, de ahí que la respuesta correcta es la b), ya que al cumplirse esto, el triángulo ABN es, al menos, isósceles por lo que no puede ser escaleno y los ángulos bases de este triángulo son iguales.

Definición: Se llaman **alturas** de un triángulo ABC a los segmentos $\mathbf{h_a}$**,** $\mathbf{h_b}$ **y** $\mathbf{h_c}$ de las perpendiculares, que pasan por los vértices del triángulo, a las rectas que contienen los lados opuestos. Los pies de dichas perpendiculares se llaman pies de las alturas.

Notas:

1- En un triángulo la altura relativa a cada uno de sus lados recibe el nombre de segmento notable.
2- La distancia del vértice al pie de la altura se llama longitud de la altura.
3- Las rectas que contienen las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto llamado ortocentro.

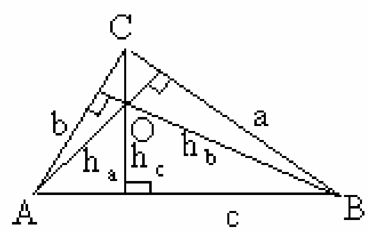


Figura 2.41

4- El ortocentro del triángulo es un punto que puede estar situado dentro, fuera o sobre el triángulo, en dependencia del tipo de triángulo (de acuerdo a la clasificación de los triángulos según las amplitudes de los ángulos).

Definición**:** Se llaman **medianas** de un triángulo ABC a los segmentos $\mathbf{m_A}$, $\mathbf{m_B}$ **y** $\mathbf{m_C}$ determinados por los vértices del triángulo y el punto medio de sus lados opuestos.

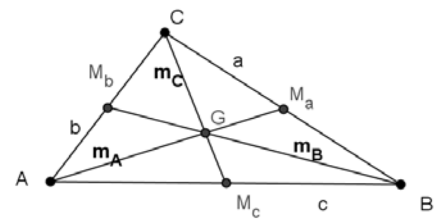


Figura 2.42

Notas:

1- En un triángulo la mediana relativa a cada uno de sus lados recibe el nombre de segmento notable.

2- Las medianas de un triángulo se cortan en un punto llamado baricentro, luego se puede escribir que: $m_A \cap m_B \cap m_C = \{G\}$.

3- El baricentro es el centro de gravedad del triángulo. Este punto siempre se encuentra en el interior del triángulo para cualquiera sea el tipo de triángulo.

Definición**:** Se llaman **bisectrices de un triángulo** ABC a los segmentos $\mathbf{b_A}$**,** $\mathbf{b_B}$ **y** $\mathbf{b_C}$ de las bisectrices de los ángulos A, B y C interiores del triángulo, determinados por los vértices y por el punto de intersección de ella con el lado opuesto a dichos vértices.

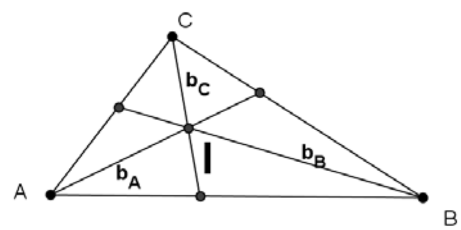


Figura 2.43

Notas:

1- En un triángulo las bisectrices de cada uno de sus ángulos recibe el nombre de segmento notable.

2- Las bisectrices de un triángulo se cortan en un punto llamado incentro, luego se puede escribir que: $b_A \cap b_B \cap b_C = \{I\}$

3- Este punto siempre se encuentra en el interior del triángulo para cualquiera sea el tipo de triángulo y equidista de los lados del triángulo.

4- El incentro es el centro de una circunferencia inscrita en el triángulo.

En resumen:

- En todo triángulo las mediatrices se cortan en un punto y esta misma propiedad se cumple para las alturas, las medianas y las bisectrices.
- Al punto de intersección de las mediatrices se le llama circuncentro, al de las alturas ortocentro, al de las medianas baricentro y al de las bisectrices incentro.

Ejercicios

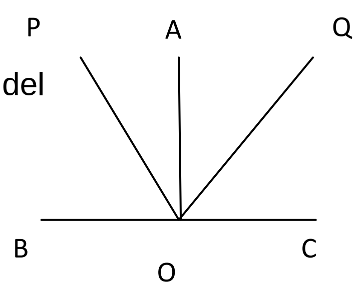
1- Construye la mediatriz de un segmento de 4,5 cm de longitud.

2- El punto O es la intersección de $\overline{PQ}$ con su mediatriz: $\overline{PQ} = 6,0\ cm$

¿Cuál es la longitud de $\overline{PO}\ y\ \overline{PQ}$?

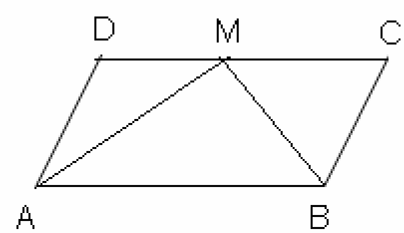
3- Sea S el punto medio de $\overline{PR}$ y $\overline{PQ} = \overline{RQ}$. Di si podemos asegurar que $\overline{QS}$ es la mediatriz de $\overline{PR}$. Fundamente su respuesta.

4- Construye la bisectriz de un ángulo de $75°$.



5- En la figura, $\angle$ BOA $= 100°$ y OP y OQ son bisectrices del $\angle$ AOB y $\angle$ AOC respectivamente. Halla el $\angle$.POQ

6- La figura muestra el paralelogramo ABCD donde $\overline{AM}$ y $\overline{BM}$ son las bisectrices de los ángulos DAB y CBA respectivamente.



a) Si en la figura $\overline{AM}$ y $\overline{BM}$ son las bisectrices de los ángulos DAB y CBA. Nombra los pares de ángulos que tengan igual amplitud.

b) Prolonga el segmento $\overline{AM}$ y localiza:

- pares de ángulos iguales
- pares de ángulos cuyas amplitudes suman 180^0.

c) Identifica los triángulos que se forman en la figura y cuáles de ellos son isósceles. Justifica tu respuesta.

7- En la figura se tiene que $\overline{AC} \,||\, \overline{DE}$ y triángulo ABC isósceles de base $\overline{AB}$, $\angle$ DBF = 2 $\angle$ DBE.

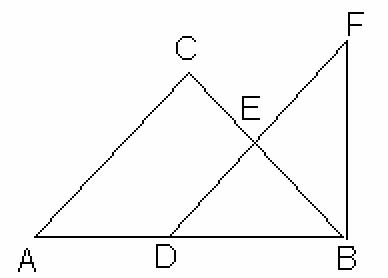
¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? Fundamenta.

a) ____$\angle ACB = \angle DFB$ por correspondientes.

b) ____$\overline{CB}$ es bisectriz del $\angle$ DBF.

c) ____BDE triángulo isósceles.

d) ____$\angle$ ACB $\neq \angle$ CEF.



8- Selecciona la respuesta correcta:

Si un triángulo MNP es equilátero y $\overline{MO}$ bisectriz del ángulo NMP, entonces el triángulo MNO atendiendo a las amplitudes de sus ángulos es:

_____Obtusángulo _____Rectángulo ____Acutángulo

9- En el interior de un terreno de forma triangular se requiere situar un puesto de observación que equidista de las cercas que limitan este terreno. Construye un triángulo que represente el terreno y determina gráficamente el punto en que se debe situar el puesto de observación.

10- Dibuja un triángulo isósceles y construye la altura, la mediana, la mediatriz (relativa al lado base) y la bisectriz del ángulo opuesto a este lado, ¿a qué conclusión puedes arribar? Enuncia esta importante propiedad de los triángulos isósceles.

2.4 Polígonos de cuatro lados: cuadriláteros

Se consideró en el capítulo 1 que se denomina **cuadrilátero** a un polígono que tiene 4 lados y en consecuencia, también estudiado en ese capítulo, el cuadrilátero es **convexo** si queda en un mismo semiplano respecto a las rectas que contienen a cada uno de sus lados.

De manera análoga a como hay triángulos con características especiales, también existen algunos cuadriláteros con características especiales, se realizan algunas consideraciones sobre este tipo de polígonos de cuatro lados. Si se considera el cuadrilátero ABCD de la figura 2.44 se puede observar que se ha trazado una diagonal $\overline{AC}$ que lo divide en dos triángulos, a los cuales se le han marcado y denotado con letras griegas los ángulos.

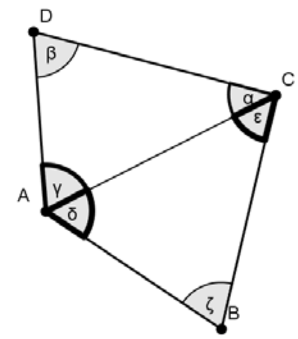


Figura 2.44

Se cumple por la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo que: $\alpha + \beta + \gamma = 180º$ en el triángulo ACD y que $\delta + \varepsilon + \zeta = 180º$ en el triángulo ABC, entonces los 6 ángulos suman 360º y a su vez β y ζ son ángulos interiores del cuadrilátero, $\gamma + \delta$ y $\alpha + \varepsilon$ son los otros dos ángulos del cuadrilátero. Como este proceso de descomponer un cuadrilátero en dos triángulos se puede realizar con cualquier cuadrilátero convexo, se puede arribar a una propiedad general de los cuadriláteros:

La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360º.

En lo que sigue se obtendrán algunos casos especiales de cuadriláteros convexos.

Si se agrega al cuadrilátero convexo la condición de tener un par de lados opuestos paralelos, se arriba a un nuevo concepto.

Definición: El cuadrilátero convexo que tiene un par de lados opuestos paralelos recibe el nombre de **trapecio**.

En la figura 2.45 se observan algunos ejemplos de trapecio. En todos los incisos se puede observar la característica incluida a los cuadriláteros para que sean considerados trapecios, a su vez, en los incisos b) y c) aparecen otras condiciones que permiten diferenciar los trapecios.

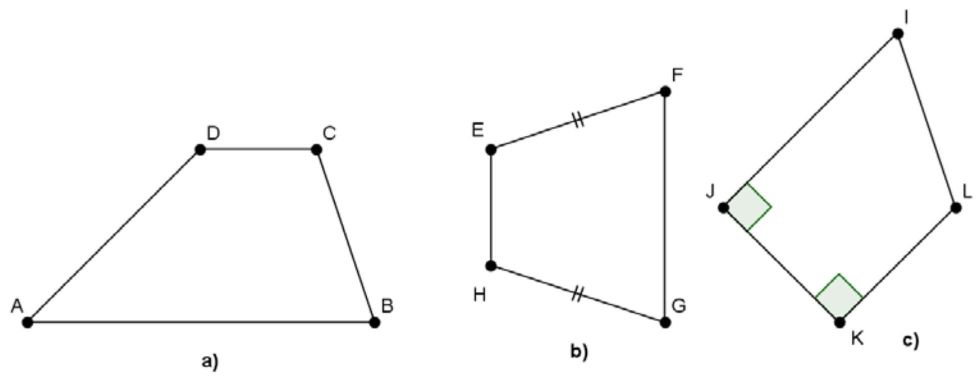


Figura 2.45

Definición: El trapecio cuyos lados no paralelos tienen la misma longitud recibe el nombre de **trapecio isósceles**.

De forma similar, en correspondencia con las condiciones dadas en el inciso c) se obtiene la siguiente definición.

Definición: Al trapecio que tiene dos ángulos rectos se denomina trapecio **rectángulo**.

La figura 2.46 muestra la relación que existe entre el conjunto de los trapecios y el de los cuadriláteros, todos los trapecios son cuadriláteros, pero existen cuadriláteros que no son trapecios.

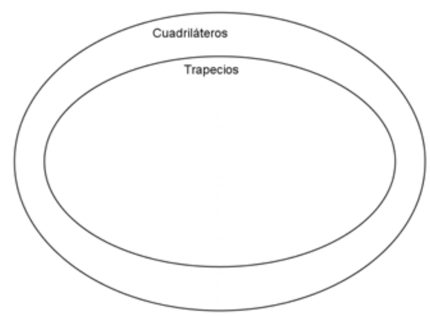


Figura 2.46

Definición: El cuadrilátero convexo que tiene sus lados opuestos paralelos se denomina **paralelogramo**.

En la figura 2.47 se observan algunos de estos tipos particulares de cuadriláteros, observa que la característica que los identifica entre los cuadriláteros es la relación de paralelismo de los lados opuestos.

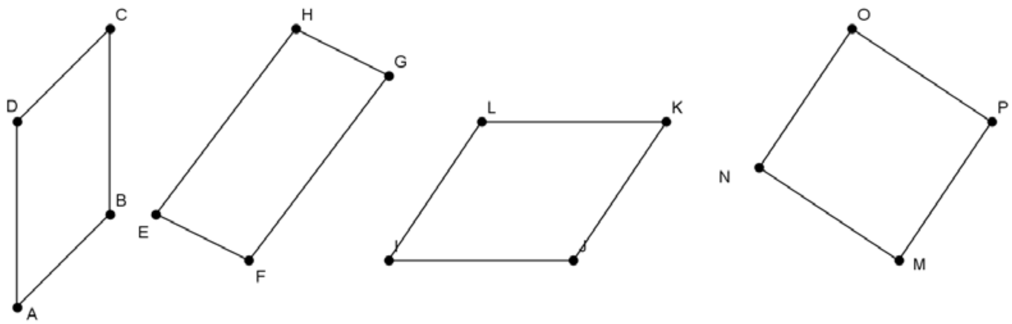


Figura 2.47

La relación entre los conjuntos de cuadriláteros estudiados hasta el momento se observa en la figura 2.48

En los paralelogramos la condición que los lados opuestos sean paralelos permite deducir algunas propiedades de esta figura.

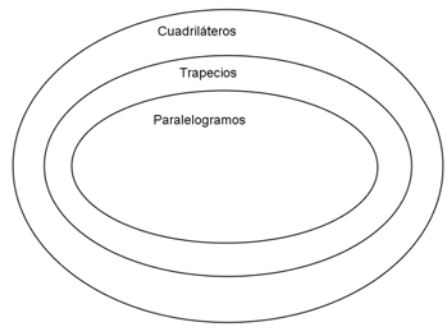


Figura 2.48

Teorema: Propiedades del paralelogramo

Si ABCD es un paralelogramo entonces se cumple que:

a) $\overline{AB} = \overline{CD}$ y $\overline{AD} = \overline{BC}$ (Los lados opuestos son iguales)

b) $\angle A = \angle C$ y $\angle B = \angle D$ (Los ángulos opuestos son iguales)

c) $\angle A + \angle B = 180º$, $\angle B + \angle C = 180º$, $\angle C + \angle D = 180º$ y $\angle D + \angle A = 180º$ (Los ángulos consecutivos suman 180º o son suplementarios)

d) Si O es el punto de intersección de las diagonales se cumple que $\overline{AO} = \overline{OC}$ y $\overline{BO} = \overline{OD}$ (Las diagonales se cortan en su punto medio).

Demostración

Se demuestran estas propiedades, para esto se utilizan los criterios de igualdad (congruencia) de triángulos.

a) Al trazar la diagonal BD como se ilustra en la figura 2.49 se observa que en los triángulos ABD y BCD se tiene que el lado $\overline{BD}$ es común y además $\alpha = \beta$ y $\gamma = \delta$ por ser pares de ángulos alternos entre las paralelas r_{AB} y r_{CD} y la secante r_{BD}, entonces según el criterio de igualdad (a.l.a.) se obtiene que los triángulos ABD y BCD son iguales. Analizando los elementos homólogos, los lados que se oponen a ángulos iguales son iguales, en triángulos iguales, de donde se obtiene que $\overline{AB} = \overline{CD}$ y $\overline{AD} = \overline{BC}$, es decir, los lados opuestos del paralelogramo son iguales.

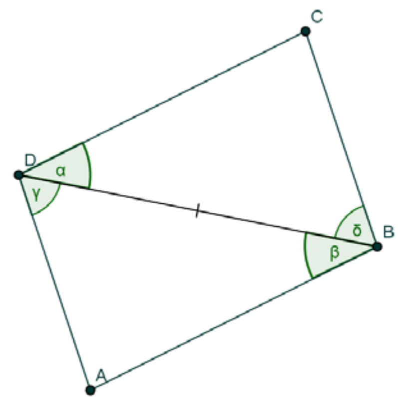


Figura 2.4.9

b) De manera análoga se tiene que $\angle A = \angle C$, por otra parte sumando ordenadamente las igualdades $\alpha = \beta$ y $\gamma = \delta$ se obtiene que sus resultados son iguales, es decir, $\angle B = \angle D$ ($\alpha + \gamma = \angle D$ y $\beta + \delta = \angle B$). Con esto se tiene que los ángulos opuestos del paralelogramo son iguales.

c) Es una consecuencia del paralelismo de los lados opuestos del paralelogramo, donde los pares de ángulos consecutivos considerados son conjugados, y de ahí se obtiene que su suma en todos los casos es 180º.

En la figura 2.50 se han trazado las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ que se cortan en el punto O, se observa que los triángulos ABO y CDO son iguales por el criterio (a.l.a.), puesto que $\overline{AB} = \overline{CD}$ por propiedad demostrada del paralelogramo y $\alpha = \beta$ y $\gamma = \delta$ por alternos entre rectas paralelas. Se aplica la propiedad de los elementos homólogos en estos triángulos iguales y se obtiene que $\overline{AO} = \overline{OC}$ y $\overline{BO} = \overline{OD}$, es decir, el punto de intersección de las diagonales es el punto medio de las mismas.

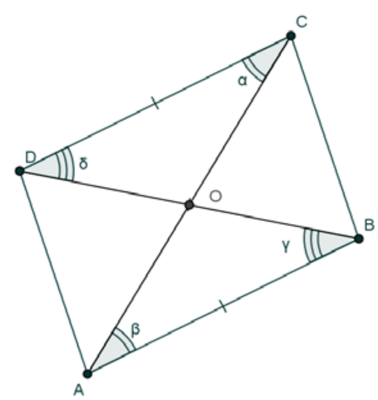


Figura 2.50

La propiedad recíproca del teorema anterior también es verdadero, se cumple entonces el teorema recíproco siguiente:

Teorema: (Caracterizaciones del paralelogramo)

Si un cuadrilátero convexo cumple alguna de las propiedades siguientes es un paralelogramo:

a) $\overline{AB} = \overline{CD}$ y $\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{BC}}$ (Los lados opuestos son iguales).

b) $\angle$A = $\angle$C y $\angle$B = $\angle$D (Los ángulos opuestos son iguales).

c) $\angle$A + $\angle$B = 180º, $\angle$B + $\angle$C = 180º, $\angle$C + $\angle$D = 180º y $\angle$D + $\angle$A = 180º (Los ángulos consecutivos suman 180º o son suplementarios).

d) Si O es el punto de intersección de las diagonales se cumple que $\overline{AO} = \overline{OC}$ y $\overline{BO} = \overline{OD}$ (Las diagonales se cortan en su punto medio).

Demostración

La idea general para demostrar este teorema se basa en la aplicación de los criterios de igualdad de triángulos para obtener como elementos homólogos la igualdad de ángulos en la posición de alternos, correspondientes o conjugados en rectas paralelas cortadas por una secante, de donde es posible inferir el paralelismo de los lados opuestos. Se ejemplifica con la primera propiedad.

a) Se considera en la figura 2.51 que: $\overline{AB} = \overline{CD}$ y $\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{BC}}$,como la diagonal $\overline{\mathrm{AC}}$ es común para los triángulos

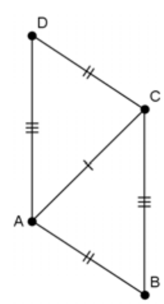


Figura 2.51

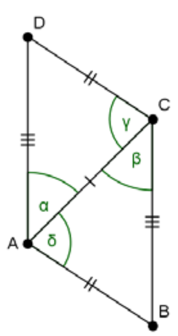
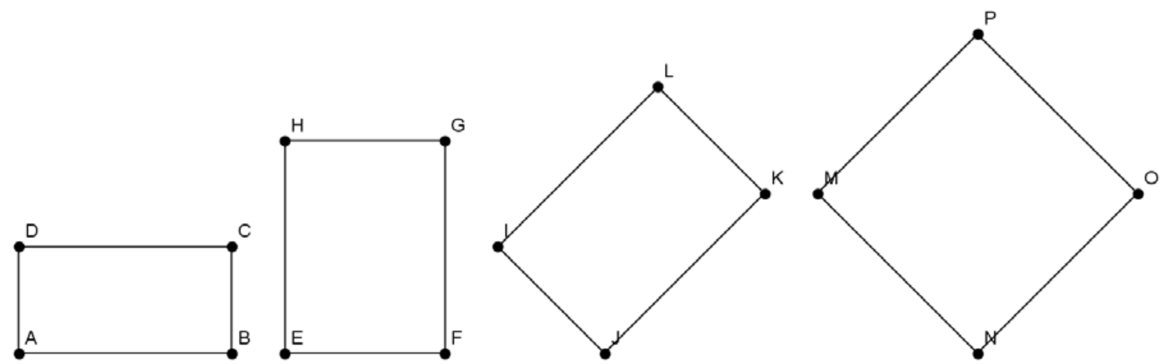


Figura 2.52

ABC y ACD, se tiene entonces por el criterio (l.l.l.) que los triángulos son iguales y por elementos homólogos se obtiene, según figura 2.52 que: $\angle\alpha = \angle\beta$, como son alternos entre las rectas r_{AD} y r_{BC}, con la secante r_{AC}, entonces las rectas son paralelas, es decir,

$\overline{\mathrm{AD}} \parallel \overline{\mathrm{BC}}$, por otra parte $\angle\gamma = \angle\delta$, como son alternos, análogamente se cumple que $\overline{\mathrm{AB}} \parallel \overline{\mathrm{CD}}$, por lo tanto ABCD es un paralelogramo como plantea el teorema.

Definición: El paralelogramo que tiene un ángulo recto se denomina **rectángulo**. Con estos elementos se puede obtener como primera conclusión que todos los ángulos son rectos, teniendo en cuenta las relaciones de los pares de ángulos entre paralelas. La figura 2.53 ilustra algunos ejemplos de rectángulos.



La

Figura 2.53

Observa en la figura 2.54, se puede analizar que el rectángulo es un paralelogramo, por tal motivo cumple todas las propiedades analizadas para el paralelogramo.

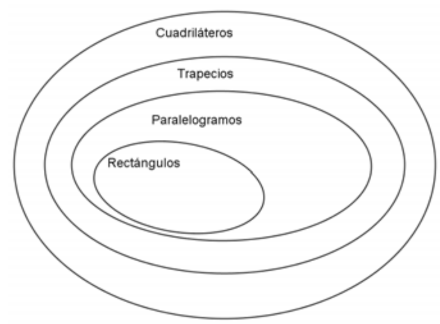


Figura 2.54

Además de las propiedades mencionadas para el rectángulo, este cuadrilátero especial tiene una propiedad que los distingue de los anteriores.

Teorema: Las diagonales del rectángulo son iguales.

Demostración:

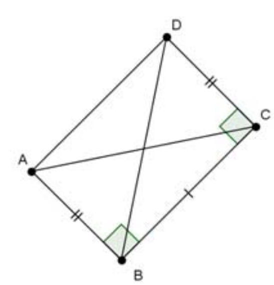


Figura 2.55

En el rectángulo ABCD (figura2.55) se tiene que los triángulos ABC y BCD son iguales, ya que el lado $\overline{BC}$ escomún y además $\overline{AB} = \overline{CD}$ por lados opuestos de un paralelogramo.

Por otra parte $\angle ABC = \angle DCB = 90°$ por ser ángulos interiores del rectángulo.

Por el criterio (l.a.l.) se obtiene $\Delta ABC = \Delta\ BCD$, luego por elementos homólogos de triángulos iguales las diagonales AC y BD son iguales.

También se cumple el recíproco de este teorema.

Teorema: (caracterización del rectángulo)

Si un paralelogramo tiene las diagonales iguales, entonces es un rectángulo.

Si en lugar de agregar al paralelogramo la propiedad de tener un ángulo recto se agrega la propiedad de tener un par de lados consecutivos iguales, se obtiene que los cuatro lados son iguales, puesto que los lados opuestos a esos consecutivos también lo son, en este caso se obtiene un nuevo tipo de cuadrilátero especial.

Definición: El paralelogramo que tiene sus cuatro lados iguales se denomina **rombo**.

La figura 2.56 ilustra algunos casos de rombos.

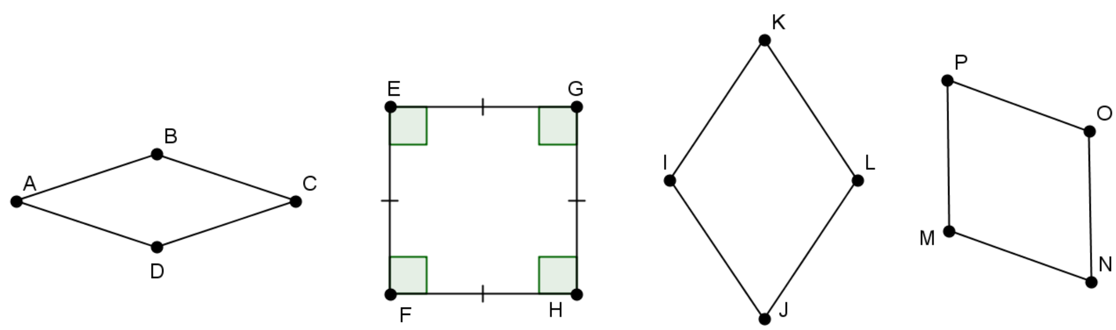


Figura 2.56

El rombo también tiene una propiedad característica para sus diagonales que lo diferencia de los demás cuadriláteros especiales, eso se expresa en el teorema que sigue.

Teorema: (propiedad de las diagonales del rombo)

Las diagonales del rombo se cortan perpendicularmente y son bisectrices de los ángulos.

La demostración de este teorema se basa en las ideas siguientes:

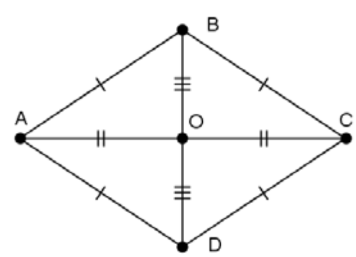


Figura 2.57

Trazando las diagonales como se muestra en la figura 2.57 se observa que se forman triángulos, algunos de ellos son isósceles, pero además hay pares de triángulos que son iguales, esto se puede comprobar aplicando los criterios de igualdad y las propiedades de estos triángulos, dadas las propiedades conocidas de los paralelogramos y la definición del rombo. En la figura se señalan los pares de lados que son iguales. Así se podrá arribar a la propiedad mencionada de las diagonales del rombo.

Los rombos son paralelogramos, pero entre los ejemplos mostrados en la figura 2.56, se señala en el caso de EFHG los ángulos que miden 90º y además los lados iguales. La primera condición hace que el rombo sea un rectángulo también, por eso los conjuntos de rectángulos y rombos tienen una intersección.

Se puede también definir otro tipo de cuadrilátero especial que cumple con las propiedades características del rectángulo y del rombo.

Definición: Un paralelogramo que tiene un ángulo recto y un par de lados consecutivos iguales, se denomina **cuadrado**.

La figura 2.58 muestra un diagrama

de Venn donde se expresan las relaciones entre los diferentes conjuntos

de cuadriláteros especiales estudiados,

es importante que analices las relaciones en cuanto a propiedades de estas figuras, respondiendo a las preguntas: ¿Es el rectángulo un cuadrado? , ¿Es el cuadrado un rectángulo?

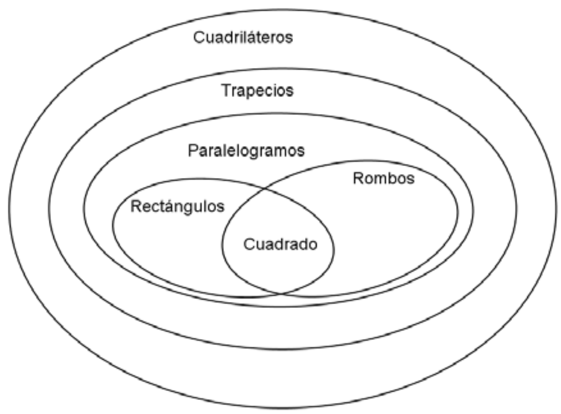


Figura 2.58

Ejercicios

1**-** Responde a las preguntas siguientes y justifica la respuesta.

a) ¿Son los paralelogramos trapecios?

b) ¿Son los cuadriláteros paralelogramos?

2- a) Enuncia las propiedades del rectángulo.

b) ¿Son los rectángulos también trapecios?

c) ¿Son los paralelogramos también rectángulos

3- Responde a las preguntas siguientes y justifica la respuesta.

a) ¿Son los trapecios también rombos?

b) ¿Son los rombos también cuadrados?

4- Un ángulo interior de un paralelogramo mide 63°, determina las amplitudes de los restantes ángulos interiores del paralelogramo.

5-Enuncia la propiedad recíproca del teorema de las propiedades del rombo y analice si es verdadera.

6-Analiza, de acuerdo con la relación que tiene el cuadrado con el rombo y con el rectángulo ¿Qué propiedad tienen las diagonales del cuadrado? Valora si el recíproco de esta propiedad es verdadero.

7- Demuestra que los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales.

2.5 Construcciones geométricas fundamentales con regla y compás

Ya en capítulos anteriores del libro estudiaste, cómo es posible transportar un segmento de longitud r a partir del origen O de una semirrecta utilizando el compás. Como consecuencia se pudo definir circunferencia como el conjunto de todos los puntos que están a la distancia r de O, en todas las semirrectas que existen de origen O, precisamente esa es la primera construcción fundamental, transportar un segmento a partir de un punto en una de las semirrectas con origen en ese punto.

Corresponde entonces estudiar otras construcciones, que como esta que referimos en el párrafo anterior, son llamadas fundamentales, pues combinándolas y conociendo las propiedades de las figuras geométricas es que puedes realizar la construcción de esas figuras estudiadas.

Las construcciones que realizaremos a continuación tienen su fundamento en las propiedades de las figuras geométricas estudiadas anteriormente, las cuales debes tener muy claras antes de enfrentarte a este estudio.

Las construcciones las realizaremos utilizando dos instrumentos de dibujo: la regla y el compás; la regla se utiliza para construir rectas, segmentos o semirrectas, sean arbitrarias o determinados por dos puntos. En el caso del compás una de sus funciones es construir circunferencias tomando un punto como centro y un radio de acuerdo con las características de la construcción.

Construcción de la mediatriz del segmento $\overline{AB}$

Descripción de la construcción

Dado un segmento $\overline{AB}$

1ro Tomas el compás con una abertura mayor que la mitad de la longitud del segmento y con centro en los extremos A y B, y con el radio r considerado trazas dos circunferencias, que se cortan en los puntos E y F, uno en cada semiplano con respecto a la recta que contiene al segmento $\overline{AB}$. (Figura2.59)

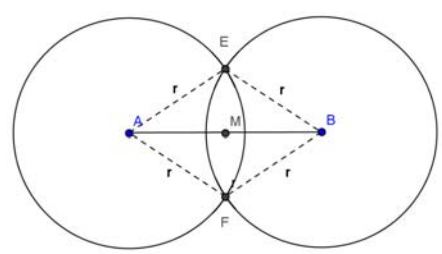


Figura 2.59

2do Trazas la recta que pasa por los puntos E y F, entonces la recta r_{EF} es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, como se observa en la figura 2.60

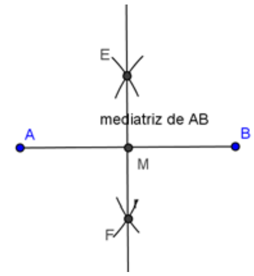


Figura 2.60

La construcción anterior se cumple porque el radio r tomado es mayor que la mitad del segmento $\overline{AB}$, luego de acuerdo con la desigualdad triangular se puede construir un triángulo en cada semiplano con el lado $\overline{AB}$ común (Figura2.59). Se observa que AEBF es un rombo, luego sus diagonales son perpendiculares y se cortan en su punto medio, entonces la recta **r_{EF} es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, siendo M su punto medio.**

Construcción de la bisectriz de un ángulo ∠(p,q) = ∠AOB

Descripción de la construcción

Sea ∠(p,q) = ∠AOB

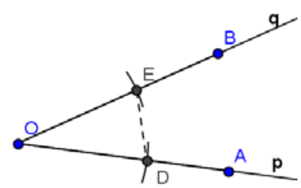


Figura 2.61

1ro Se toma el compás con una abertura (radio) ***a*** cualquiera y se transporta esa longitud a partir de O en cada una de las semirrectas que son

lados del ángulo, se obtienen los puntos D y E respectivamente en los lados p y q del ángulo y se

forma el triángulo ODE isósceles de base DE y lados

iguales $\overline{OD}$ y $\overline{OE}$, como muestra la figura 2.61

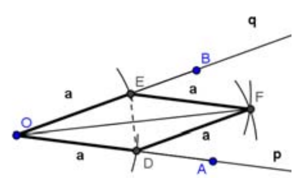


Figura 2.62

2do Con centro en D y E se trazan dos circunferencias del mismo radio ***a***, que se cortan en un punto F, diferente de O, como muestra la figura 2.62

3ro Se traza la semirrecta OF que es la bisectriz del ángulo ∠AOB.

Se observa que ODFE es un rombo, luego sus diagonales bisecan a los ángulos, por tanto como se observa en la figura 2.63 la semirrecta OF es la bisectriz del ángulo ∠AOB.

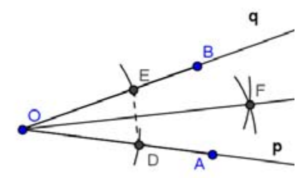


Figura 2.63

Construcción de la perpendicular por un punto a una recta

En este caso se dan dos situaciones, el punto puede estar situado en la recta o estar fuera de la recta, para cada uno de los casos existe una construcción particular.

Construcción de la perpendicular a una recta r por un punto C (situado en la recta)

Descripción de la construcción (Con regla y compás)

Sea r la recta y C un punto situado en dicha recta por el cual hay que trazar una perpendicular.

1ro Se toma un radio cualquiera **a** y con centro en C se traza una circunferencia que corta a la recta r en los puntos A y B (figura 2.64).

2do Se toman como centro los puntos A y B y con radio **b** mayor que **a** se trazan dos circunferencias o arcos que se cortan en un punto D.

3ro Se traza la recta r_{CD} que es la perpendicular buscada.

Se ha realizado la construcción en uno de los semiplanos de borde r. Los segmentos a, b y b cumplen la desigualdad triangular. (figura2.65), el triángulo ABD es isósceles de base $\overline{AB}$ y el segmento $\overline{DC}$ es mediana y también altura de la base, luego la recta $r_{CD} \perp r$ (figura2.66).

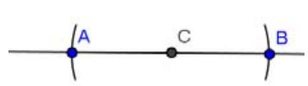


Figura 2.64

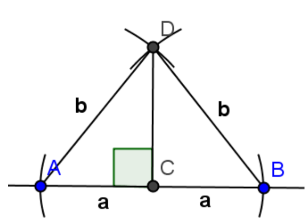


Figura 2.65

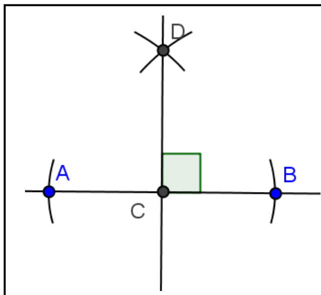


Figura 2.66

Construcción de la perpendicular a una recta r por un punto C (situado fuera de la recta)

Descripción de la construcción (Con regla y compás)

Sea r la recta y C un punto que no pertenece a la recta y por el cual hay que trazar una perpendicular.

1ro Se toma en el compás un radio **a** de manera que la circunferencia de centro en C que se trace, corte a la recta r en los puntos D y E (Figura 2.67).

2do Se trazan con centro en los puntos D y E circunferencias del mismo radio **a**, que se cortan, en el semiplano opuesto al que contiene a C, en el punto F (Figura2.68).

3ro Se traza la recta r_{CF} que es la perpendicular buscada.

Se observa que el cuadrilátero CDFE es un rombo, luego sus diagonales son perpendiculares, en particular $\overline{CF} \perp \overline{DE}$ y como $\overline{DE}$ está contenido en la recta r, se tiene que la recta p = r_{CF} es la perpendicular buscada (Figura2.69).

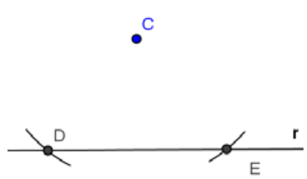


Figura 2.67

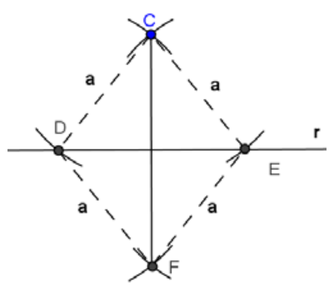


Figura 2.68

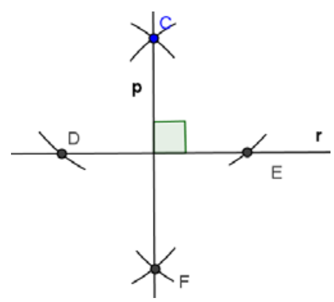


Figura 2.69

Transporte de un ángulo

Ya en el primer capítulo utilizando el instrumento conocido como semicírculo (círculo) graduado se puede transportar un ángulo a partir de una semirrecta, en este caso se trata de hacer esta construcción utilizando la regla y el compás.

Descripción de la construcción

Se tiene un ángulo ∠(p, q) de vértice O y una semirrecta p' de origen O' y sea un punto P en uno de los semiplanos que determina la recta

que contiene a la semirrecta p'. Transportar el

ángulo ∠(p, q) consiste en construir un ángulo

∠(p', q') = ∠(p, q), para esto se procede de la

manera siguiente.

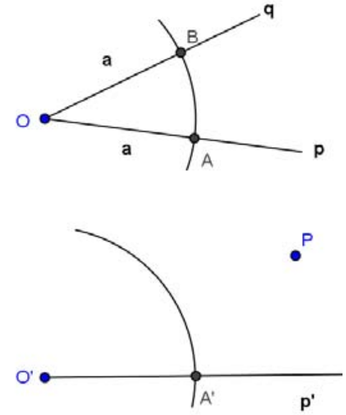


Figura 2.70

1ro Se traza un arco de circunferencia de centro O y un radio cualquiera **a**, que corta a las semirrectas p y q en los puntos A y B respectivamente, con el mismo radio **a** se traza la circunferencia de centro O' que corta a la semirrecta p' en el punto A' (Figura2.70).

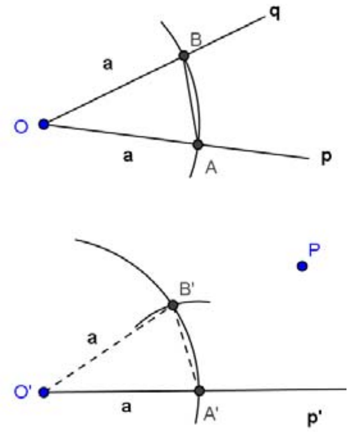


Figura 2.71

2do Se traza el segmento $\overline{AB}$ y se construye un arco de circunferencia con ese radio y con centro en A' que corta al primer arco de circunferencia en el punto B'.

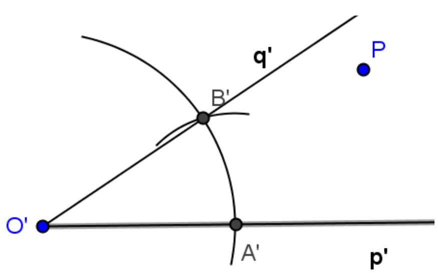


Figura 2.72

3ro Se traza la semirrecta de origen O' que pasa por el punto B'.

Se observa en la figura 2.71 que los triángulos OAB y O'A'B' son iguales por tener los tres lados iguales, entonces por elementos homólogos ∠AOB = ∠A'O'B', luego la semirrecta

p' buscada es la de origen O' que pasa por B', como muestra la figura 2.72

Un famoso geómetra que vivió en el siglo III ane, Euclides, escribió una obra llamada "Elementos", esa obra estaba formada por 13 pequeños libros, donde organizaba, fundamentalmente, los conocimientos geométricos que existían hasta su época, en el primero de sus libros después de dar una serie de definiciones y postulados iniciales, plateaba 48 proposiciones (teoremas) que eran el contenido de dicho libro, la primera de las mismas planteaba la posibilidad de construir un triángulo equilátero a partir de dar uno de sus lados, él demostraba que era posible y daba la vía de hacerlo, la cual es sencilla y se explica a continuación.

Se parte del segmento $\overline{AB}$ como primer lado del triángulo, se construyen circunferencias con centros en A y B y radio el propio segmento $\overline{AB}$ que se cortan en cada semiplano en un punto, en el caso de la figura 2.73 se ilustra el caso del punto C en uno de los semiplanos, que determinan el triángulo ABC, que según la construcción es equilátero, pues sus tres lados son de longitud a.

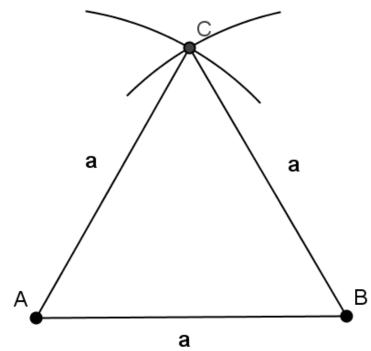


Figura 2.73

Los ángulos del triángulo equilátero también son iguales, como la suma de los tres es 180º se tiene entonces que cada ángulo mide 60º y además de construir un triángulo equilátero se ha encontrado la forma de construir un ángulo de 60º.

Construcción de la paralela a una recta por un punto no situado en ella

El problema consiste en tener una recta r y un punto A que no está en dicha recta y hay que construir la recta paralela p, a la recta r, que pase por el punto A.

Descripción de la construcción

1ro Se toma un punto B en la recta r y se traza la circunferencia de centro en el punto A y que pasa por B como ilustra la figura 2.74.

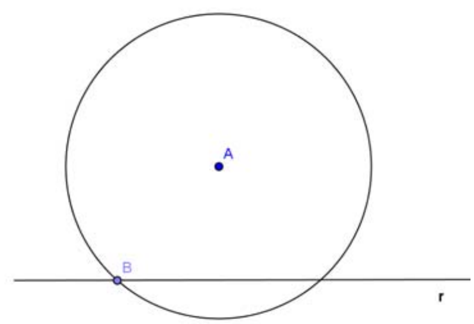


Figura 2.74

2do Se traza la circunferencia de centro en B y que pasa por A (Observe que las dos circunferencias trazadas tiene el mismo radio que llamaremos a), esta circunferencia corta a la recta r en el punto C (figura 2.75).

3ro Se traza la circunferencia de centro en C y que pasa por B, circunferencia que tiene el mismo radio a y se corta, como ilustra la figura 2.76, con la circunferencia de centro A, en el punto D.

4to Se traza la recta paralela p buscada, por los puntos A y D.

Se observa que el cuadrilátero ABCD es un rombo, luego es un paralelogramo y sus lados opuestos son paralelos, luego la recta que contiene al lado $\overline{AD}$ es la recta p buscada, paralela a la recta r.

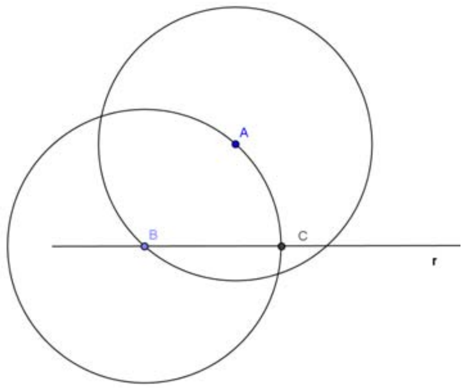


Figura 2.75

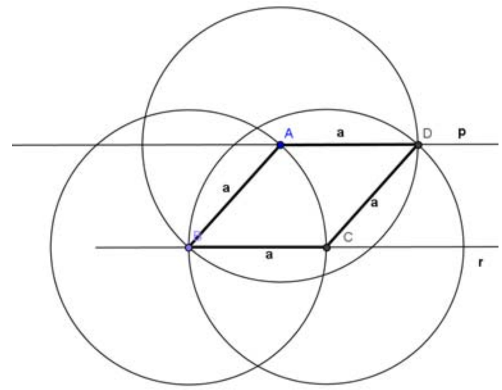


Figura 2.76

Otras construcciones geométricas

Las construcciones fundamentales realizadas se han basado en la construcción de algunas de las figuras estudiadas, cuyas propiedades justifican la veracidad de la construcción. Una aplicación inmediata de estas construcciones es obtener determinados triángulos y cuadriláteros de los estudiados bajo ciertas condiciones.

Por ejemplo si se quiere construir un triángulo cualquiera basta con considerar tres puntos no alineados y unirlos mediante segmentos utilizando la regla, pero si se dan condiciones ¿cómo es posible construir determinada figura?, mediante dos ejemplos ilustraremos este proceso.

Ejemplo1: Construcción de un triángulo rectángulo con regla y compás.

Descripción de la construcción

Se procede a construir un triángulo rectángulo con el ángulo recto en el vértice A.

1ro Construir un segmento $\overline{AB}$ como ilustra la figura 2.77, después se construye la perpendicular **p** por el punto A a la recta r_{AB} como ilustra la figura 2.78

2do Se considera un punto C que pertenece a la recta **p** (figura2.79) y se une C con el punto B, se ha construido el triángulo ABC, rectángulo en A.

El punto C se puede escoger en cualquier lugar de la perpendicular, así como el lado $\overline{AB}$ que puede tomarse en cualquier posición y longitud. De esta manera el triángulo rectángulo arbitrario se puede construir de infinitas maneras.

Figura 2.77

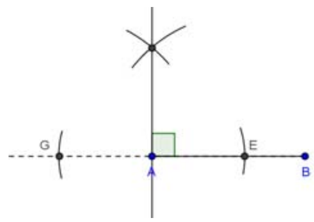


Figura 2.78

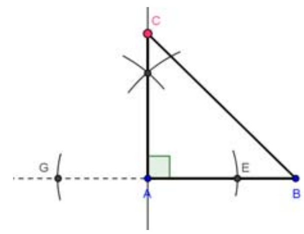


Figura 2.79

Ejemplo 2: Construir un rombo si se conoce la diagonal $\mathbf{d_1}$.

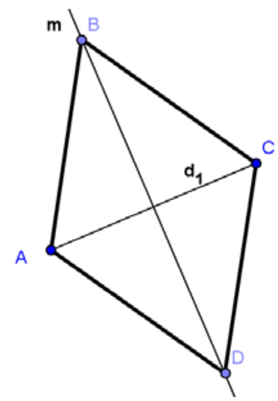


Figura 2.80

Descripción de la construcción

1ro Se construye un segmento $\overline{AC}$ de longitud $\mathbf{d_1}$ y se determina su mediatriz **m**, se toma un punto **B** en la mediatriz; en el semiplano opuesto con respecto a r_{AC} donde se encuentra **B**.

2do Se toma un punto **D** en la mediatriz a la misma distancia de r_{AC} que **B**. Al trazar los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ se obtiene el rombo ABCD (Figura 2.80).

La posición en la que se coloque $\overline{AC}$ no determina el resultado, sin embargo, el punto B se puede poner arbitrariamente en cualquier posición y en correspondencia cambiará la posición de D, esto indica que las soluciones también en este ejemplo son infinitas.

Ejercicios

1) Construye la perpendicular a una recta m por un punto:

a) $P \in m$ b) $Q \notin m$ c) En cada caso describe los pasos de la construcción.

2) Determina el punto medio de un segmento $\overline{CD}$ de longitud 4,5 cm. Describe los pasos de la construcción.

3) Traza un segmento $\overline{AB}$, construye su mediatriz. Ubica un punto M cualquiera en la mediatriz y compara las distancias desde M a los extremos del segmento $\overline{AB}$. Selecciona otro punto K que no pertenece a la mediatriz de $\overline{AB}$, y compara también las distancias desde K a los extremos del segmento $\overline{AB}$. Fundamenta.

4- Construye la bisectriz de un ángulo de 75º. Describe los pasos de la construcción.

5- Dibuja un triángulo ABC y traza las perpendiculares a $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ en el punto C.

6- Dado un triángulo ABC, construye un punto P que equidista de los puntos A y B y de los puntos A y C. Fundamenta la construcción realizada.

7- Dibuja un triángulo equilátero cualquiera ABC. Traza la perpendicular desde el vértice C hasta el lado c.

a) ¿Qué nombre recibe la recta notable que has trazado?

b) Marca un punto D cualquiera en esta recta notable, únelo con A y C. Expresa todo lo que conoces sobre el triángulo ABD. Fundamenta.

8- Consulta los libros y programas de la Educación Primaria y responde:

a) ¿En qué grado se estudia la construcción de la paralela a una recta por un punto que no pertenece a la misma?

b) Describa el procedimiento empleado para realizar esta construcción.

c) Selecciona un ejercicio y resuélvalo.

2.6 Perímetro y Área de polígonos convexos de 3 y 4 lados

Perímetro de figuras planas

Cuando se menciona la palabra perímetro, nos vienen a la mente expresiones como cerca perimetral, referida a la cerca que rodea determinada zona, que puede ser una casa, un jardín, una escuela, pero siempre nos da la idea del contorno de determinada superficie. Casi todas las construcciones realizadas por el hombre están en una región que tiene la forma de determinada figura geométrica o de una combinación de varias figuras y ese contorno en geometría se llama perímetro.

Si nos referimos a las figuras geométricas estudiadas, en este caso a los polígonos convexos, que son los que se estudian, en la escuela primaria y secundaria, se puede afirmar que el **perímetro** es la suma de las longitudes de los lados del polígono.

Por la vía explicada se puede hallar el perímetro si se conoce la longitud de los lados, sumándolos, pero para figuras específicas se utilizan fórmulas, tales casos se ilustran en la figura2.81.

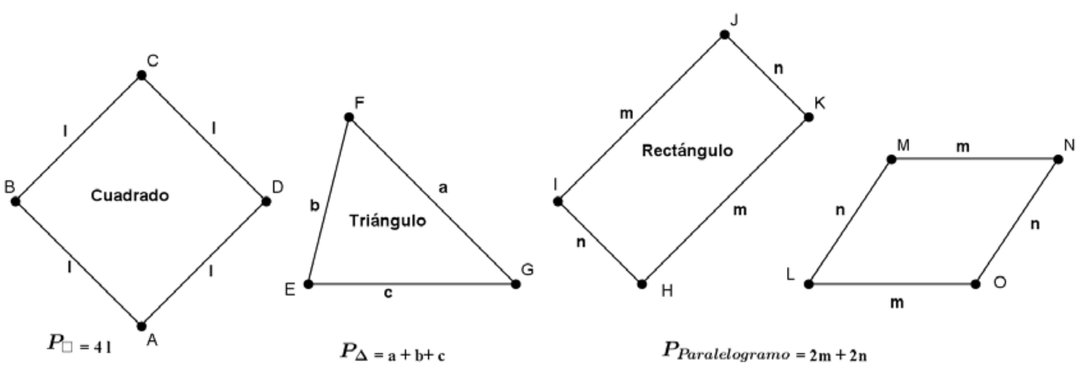


Figura 2.81

Cada uno de los polígonos representados tiene escrita la fórmula para calcular el perímetro, pero es preferible adoptar el simple hecho de sumar las longitudes de los lados, pues pueden aparecer figuras como la que se ilustra en la figura 2.82, donde no existe una fórmula específica para su perímetro, solo la comprensión

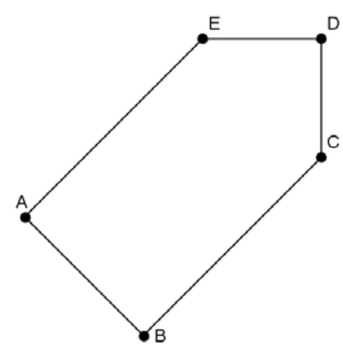


Figura 2.82

de lo que significa la palabra perímetro permite calcular esa magnitud.

Mediante el proceso explicado se le hace corresponder a cada figura geométrica un número, su perímetro. Otra forma de asociar un número real positivo a una figura geométrica será abordada a continuación.

Área de polígonos convexos de 3 y 4 lados

Cuando se tratan los polígonos convexos, por la definición estudiada se piensa en la unión de los segmentos que son sus lados, pero en la práctica estos polígonos aparecen, no solo como un contorno, sino que se refieren a la región que se encuentra entre sus lados, que geométricamente está caracterizada por la intersección de los semiplanos que determinan las rectas que contienen a los lados.

En la figura 2.83 el semiplano determinado por la recta r_{AB} que contiene a los demás lados es uno de los semiplanos explicados en el párrafo anterior, en este caso son 4 los semiplanos que determinan una región que se denomina **superficie poligonal** o **interior del polígono** y que está sombreada en la figura. Observa que el rayado de cada semiplano tiene diferentes tipos de trazo y esta región sombreada es donde coinciden los 4 tipos de rayados diferentes.

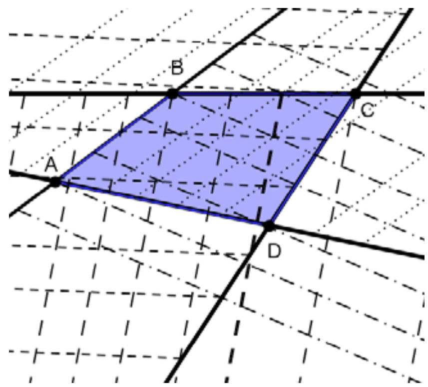


Figura 2.83

Este tipo de región limitada por el polígono o superficie es la que tiene una medida llamada área, la forma de calcular esta magnitud se analiza a continuación.

Seguramente en tu casa o en la de un vecino has oído hablar acerca de cuántas losas de piso ocupa determinado mueble cuando quieren hacer cambios o arreglos, para ver si, al cambiarlo de posición, cabe en el nuevo espacio donde se le quiere poner, eso no es casual, las losas de piso generalmente tienen forma de cuadrado y precisamente esa figura geométrica es la que es tomada para el cálculo del área.

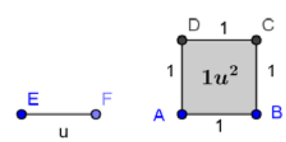


Figura 2.84

Al igual que se toma un segmento como unidad de longitud, en la geometría se toma un segmento como unidad y se construye un cuadrado con esa unidad de lado, ese cuadrado es tomado para medir el área en la unidad dada. Se dice que el cuadrado de lado la unidad considerada tiene un área de 1 u^2 y se obtiene de calcular 1 x 1, que son las medidas de dos lados consecutivos de ese cuadrado, esto se ilustra en la figura2.84.

En la figura 2.85 se ilustra un cuadrado cuyos lados miden 2 unidades, en este caso se transporta la unidad en cada lado las veces posibles, que es dos en el ejemplo, y uniendo los puntos como en la figura se obtienen 4 cuadrados de 1 u^2, es decir, que el área del cuadrado en este caso es 4 u^2, este número se obtiene de multiplicar las medidas de dos lados consecutivos, 2 x 2 = 4 y se le agrega u^2.

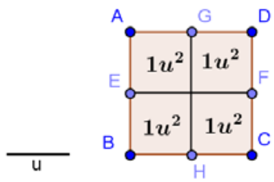


Figura 2.85

A veces estas medidas no son exactas, el área entonces no será un número natural, sino, fraccionario. Para el caso del cuadrado surge entonces una fórmula, si **l** es la longitud del lado del cuadrado, entonces la fórmula para el cálculo del área es:

$$\boxed{A_{Cuadrado} = l^2}$$

Para el caso del rectángulo, observemos a partir de la figura 2.86 que se trata de descomponer en cuadraditos de área igual a 1 u^2, para lo cual se transporta a partir de un vértice la longitud de la unidad en los dos lados consecutivos (Figura2.87)

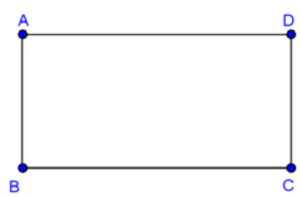


Figura 2.86

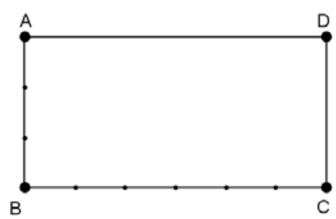


Figura 2.87

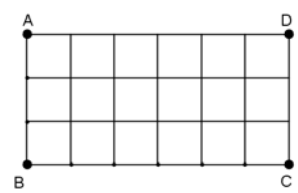


Figura2.88

y después (Figura 2.88), se trazan por cada división del transporte segmentos perpendiculares al lado hasta el lado opuesto, ahora se cuentan los cuadrados de área 1 u^2 y en el caso ilustrado se obtienen 18 cuadraditos, es decir, su área es 18 u^2.

Lo observado en las figuras anteriores conduce a una suposición: en un lado hay 6 unidades y en el consecutivo hay 3, el producto de 6 x 3 = 18, entonces pudiera suponerse que el **área del rectángulo se obtiene multiplicando las medidas en una unidad dada de dos lados consecutivos**.

¿Qué sucede si no se puede transportar de manera exacta la unidad sobre los lados consecutivos? La respuesta la da la figura 2.89, se hace el mismo proceso, pero quedan cuadraditos incompletos, ya la medida del área no es un número natural, sino que en general, como sucede en la vida real, es un número racional positivo. Para obtenerla hay que medir los lados consecutivos, con la unidad de medida tomada (las medidas en la realidad que nos rodea no son números racionales) y seguir el proceso: multiplicar las medidas de dos lados.

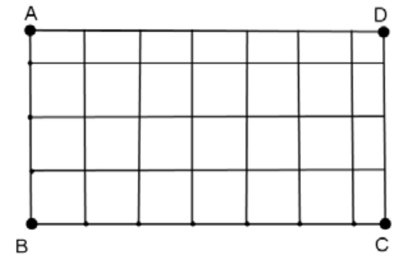


Figura 2.89

En el caso del rectángulo se llamará a uno de sus lados **base** y se denotará su longitud por **b** y al otro **altura** y se denotará su longitud por **h**, ambos segmentos son perpendiculares, lo cual sucederá en todos los casos donde se calcule utilizando los conceptos de base y altura.

Este análisis permite arribar a que la fórmula del área del rectángulo es:

$$\boxed{A_{Rectángulo} = b \cdot h}$$

Antes de continuar con el análisis de las fórmulas para el área de algunas figuras es necesario que se realicen dos consideraciones importantes:

1ro. Si dos figuras son iguales tienen la misma área.

2do. Si dos figuras se pueden descomponer en figuras con igual área, las figuras se llaman equivalentes y tiene la misma área.

¿Qué sucede con los paralelogramos en general?

El siguiente análisis permitirá deducir una fórmula para el área de un paralelogramo en general.

En la figura 2.90 se observa un paralelogramo, donde se muestran dos segmentos especiales, uno de ellos es la **base** (se denota por **b**) que coincide con uno de los lados y el otro es la distancia entre el lado paralelo a la base y la propia base (recordar que son paralelos) y se llama **altura**, se denota por **h**.

Se debe observar que se toma indistintamente cualquier lado como base y en correspondencia se toma como altura la distancia del lado paralelo a la base, es decir, en cada paralelogramo se pueden considerar dos bases y en consecuencia dos alturas, ligadas entre sí.

Aunque se han señalado la base y la altura es evidente que de la observación de la figura no se puede obtener directamente una fórmula para el área del paralelogramo.

Se realizan algunas construcciones auxiliares en la figura, en este caso se aplica al triángulo ABE una traslación de vector $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ y se obtiene el triángulo imagen DCG, como una figura y su imagen son iguales se tiene en particular que el $\angle$ DGC =90º también y además $\overline{BE} = \overline{CG}$ y $\overline{AE} = \overline{DG}$, de esto se desprende que $\overline{BC} = \overline{EG}$ lo cual indica que la base del rectángulo es igual a la base del paralelogramo y las alturas también son iguales. Además como los triángulos son iguales sus áreas son iguales, lo cual significa que el área del paralelogramo ABCD es igual al área del rectángulo AEGD y se concluye que para calcular el área del paralelogramo se puede utilizar la misma fórmula que la del rectángulo.

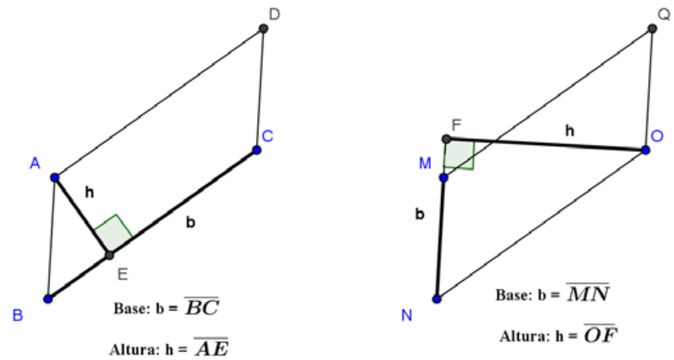


Figura 2.90

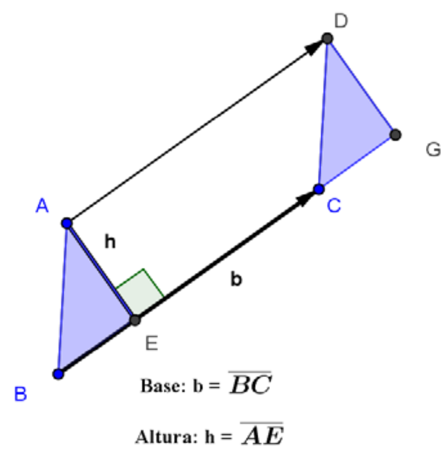


Figura 2.91

$$\boxed{A_{Paralelogramo} = b \cdot h}$$

Lo que en este caso hay una diferencia, la base si es cualquiera de los lados del paralelogramo, como sucede en el rectángulo, pero la altura no es su lado consecutivo, sino la distancia entre el lado considerado como base y el lado paralelo a él, que en un paralelogramo general no coincide con un lado, según se observa en a figura 2.91 .Se hace un aparte para analizar cuál es el área del triángulo, para ello se recurre al paralelogramo de nuevo, aunque también se realiza el análisis utilizando el rectángulo.

Área del triángulo a partir del área del paralelogramo

En la figura 2.92 se muestra un triángulo ABC, del cual trazando paralelas por B y C a los lados $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente se ha obtenido el paralelogramo ABDC. En este paralelogramo $\overline{BC}$ es una diagonal, luego divide al paralelogramo en dos triángulos que se puede comprobar que son iguales, luego tienen igual área. En estas condiciones el área del paralelogramo es igual al doble del área del triángulo, luego si se divide por 2 el área del paralelogramo se obtiene el área del triángulo.

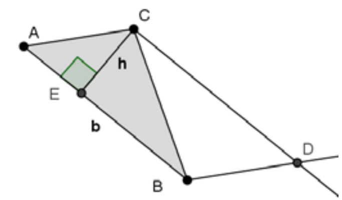


Figura 2.92

Como el proceso realizado al triángulo ABC se puede hacer con cualquier triángulo, se llega a la fórmula del área del triángulo:

$$\boxed{A_{\text{Triángulo}} = \frac{1}{2} b.h}$$

Área del triángulo a partir del área del rectángulo

En el triángulo ABC se trazan:

1ro Los puntos medios de los lados $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$, sean D y E dichos puntos.

2do Las perpendiculares por A y B al lado AB que interseca a la recta DE en los puntos G y H respectivamente.

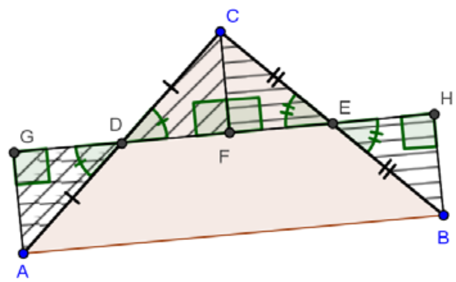


Figura 2.93

3ro La perpendicular por C a $\overline{GH}$ con pie en F.

Se forma de esta manera el rectángulo ABHG y además los pares de triángulos AGD y CFD, así como BHE y CFE.

Se tiene que: ΔAGD=ΔCFD y ΔBHE=Δ CFE ya que tienen un lado igual por determinarlos los puntos medios de $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ y. además dos ángulos, el recto y los señalados de manera análoga por ser opuestos por el vértice, luego el tercer ángulo de los triángulos también es igual, por tanto los pares de triángulos son iguales (criterio a.l.a.).

Por lo que:

a) En cada pareja de triángulos, los mismos tienen igual área.

b) Los lados homólogos son iguales en especial: $\overline{AG} = \overline{CF} = \overline{BH}$

De la igualdad de los triángulos se puede observar que el triángulo ABC se descompuso en el cuadrilátero ABED y los triángulos ADG y BHE, que componen al rectángulo, luego el rectángulo y el triángulo ABC tienen igual área.

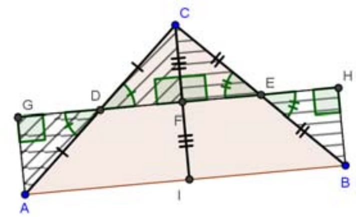


Figura 2.94

Si se tiene en cuenta que $\overline{AG}$ es la altura del rectángulo y que la base del mismo es $b = \overline{AB}$, la cual coincide con la base del triángulo, y que además como se observa en la figura 2.94 los segmentos $\overline{CF}$ y $\overline{FI}$ son iguales y su suma es la altura $h = \overline{CI}$ del triángulo, se llega a que la altura del rectángulo es $\frac{1}{2}h$, luego el área del paralelogramo que es igual a la del triángulo, se calcula como $\frac{1}{2}b.h$, de donde se llega a la misma fórmula que se obtuvo anteriormente.

Área del rombo

Como paralelogramo, el área del rombo puede ser determinada según la fórmula del área del paralelogramo, sin embargo es común que se determine una fórmula que tenga en cuenta las diagonales, la cual es muy usada. Para obtener esta fórmula se parte de un rombo al que se trazan sus diagonales, de esa manera el rombo se divide en 4 triángulos que son iguales, a cada uno de ellos se le aplica una simetría con respecto al punto medio del lado del rombo y se obtienen 4 triángulos iguales a los 4 en que está dividido el rombo, como ilustra la figura 2.95, con igual rayado cada triángulo y su imagen.

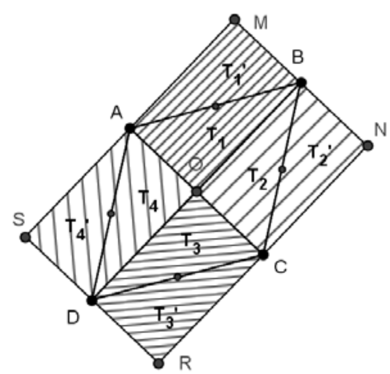


Figura 2.95

El análisis de la figura obtenida y las propiedades del rombo, permite afirmar que MNRS es un rectángulo, que se ha dividido en 8 triángulos iguales, luego el área del rombo contiene 4 de los triángulos, por tanto es la mitad del área del rectángulo, se observa que las diagonales del rombo $\overline{AC} = d_1$ y $\overline{BD} = d_2$ son la base y la altura del rectángulo, luego su área se puede expresar como:

$A_{MNRS} = d_1 . d_2$, como el área del rombo es la mitad de la del rectángulo obtenido entonces se puede expresar esa área en función del área del rectángulo, es decir, $A_{ABCD} = \frac{A_{MNRS}}{2}$.

El proceso seguido con el rombo ABCD se puede realizar con cualquier rombo y se arriba a la fórmula del área del rombo, conocidas sus diagonales.

$$\boxed{A_{Rombo} = \frac{d_1 \bullet d_2}{2}}$$

Área del trapecio

Otro de los polígonos especiales es el trapecio, determinemos una fórmula para el cálculo de su área. Las fórmulas analizadas hasta ahora no se pueden aplicar, pero no es difícil deducir una fórmula para este cuadrilátero.

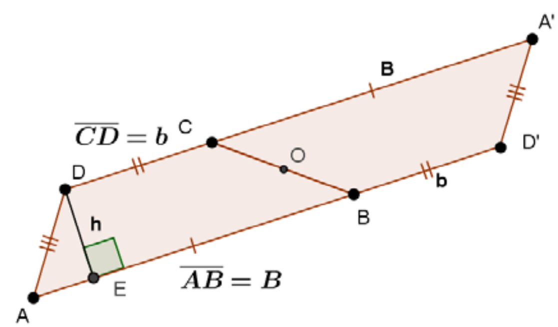


Figura 2.96

En la figura 2.96 se puede observar un trapecio ABCD al cual se le ha realizado una simetría central con centro en el punto medio O del lado $\overline{BC}$ y se ha obtenido el trapecio imagen A'CBD', donde se tiene que el polígono AD'A'D resulta un paralelogramo, según las propiedades del movimiento aplicado. La figura permite determinar que la altura del paralelogramo en cuestión coincide con la del trapecio ABCD, por otra parte el lado $\overline{AD'}$ del paralelogramo tiene como longitud la suma de los lados paralelos del trapecio **B + b**, donde **B**: base mayor y **b**: base menor; el paralelogramo $_{AD'A'D}$ se puede descomponer en dos trapecios iguales, luego el área del trapecio ABCD es la mitad del área del paralelogramo.

Como el área del paralelogramo es $A_{AD'A'D} = (B + b).h$, entonces el área del trapecio es

$$\boxed{A_{Trapecio} = \frac{1}{2}(B + b) \bullet h}$$

Como el proceso realizado con el trapecio ABCD**,** es posible realizarlo con cualquier trapecio, se asume la fórmula anterior como fórmula del área del trapecio.

Método general para el cálculo del área de un polígono cualquiera.

Si se tiene un polígono cualquiera un método que permite calcular su área es el que consiste en descomponerlo en triángulos o en una combinación cualquiera posible de polígonos para los cuales se han estudiado fórmulas para el área, la figura 2.97 ilustra el caso de algunos polígonos descompuestos, según la explicación anterior.

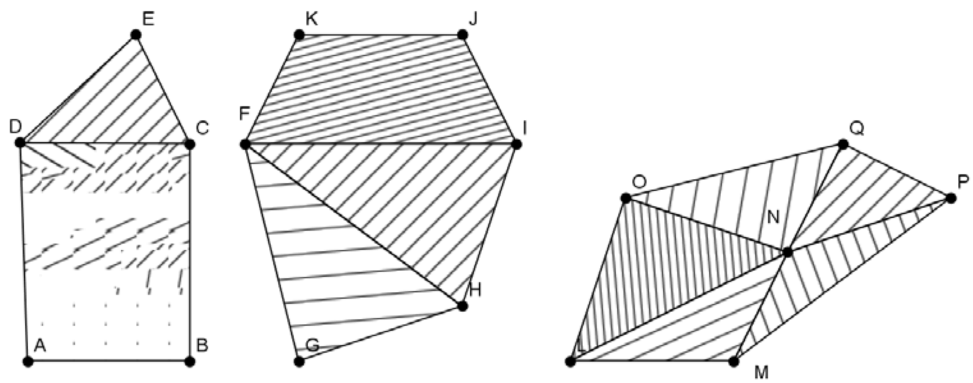
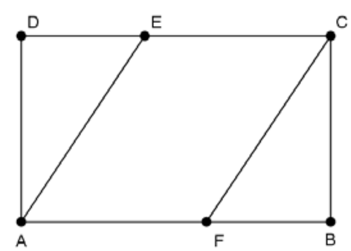


Figura 2.97

Para calcular el área de cualquiera de estas figuras se necesita aplicar fórmulas para el cálculo del área de las figuras en las que se han descompuesto. En los casos ilustrados aparecen un rectángulo, un trapecio y el resto son triángulos.

Ejemplo.

En la figura ABCD es un rectángulo



$\overline{DC} = 3{,}2\,\text{dm}$

$\overline{FC} = \overline{\text{AE}} = 15\,\text{cm}$

$\overline{BF} = 61\ \text{cm}$

Calcula el área del paralelogramo BFDE.

Solución

Observa que todos los datos no están en la misma unidad de longitud, primero debes expresarlos en la misma unidad, luego: $\overline{DC} = 32\,\text{cm}$

$A_{BFDE} = \overline{BF} \cdot \overline{DC}$ $=61\cdot32=1952\ \text{cm}^2 \approx 19\ \text{dm}^2$

Otra vía de solución

$A_{BFDE} = A_{ABCD} – (A_{FCD} + A_{AEB})$

$A_{ABCD} = \overline{BC} \cdot \overline{DC} = (\overline{BF} + \overline{FC}) \cdot \overline{DC} = (61+15) \cdot 32 = 1432\ cm^2$

$A_{FCD} = \frac{1}{2}\overline{FC}.\overline{DC} = \frac{1}{2}(15 \cdot 32) = 240\ cm^2$ (1)

$A_{AEB} = \frac{1}{2}\overline{AE}.\overline{AB} = \frac{1}{2}(15 \cdot 32) = 240\ cm^2$ (2)

Luego $A_{BFDE} = 1432-(240 + 240) = 1432-480 = 1954\ cm^2 \approx 19\ dm^2$

Otra vía de solución es fundamentar el resultado que mediante el cálculo se obtuvo en (1) y (2), al considerar la igualdad de los dos triángulos, luego $A_{BFDE} = A_{ABCD} – 2A_{FCD}$.

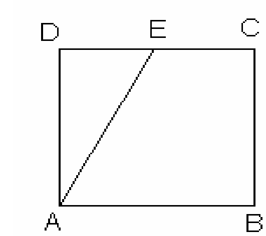
Ejercicios

1- Calcula el perímetro de un cuadrado que tiene un área de 25 m^2.

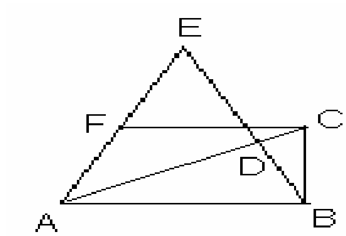
2- En la figura ABCD cuadrado, E es el punto medio de $\overline{DC}$, $\overline{AB}$ = 6,0 cm.

a) Halla el perímetro del cuadrado.

b) Determina el área del trapecio ABCE.



3- En la figura ABCF es un cuadrilátero y ABE un triángulo isósceles de base $\overline{AB}$, $\overline{FC} \parallel \overline{AB}$; $\overline{AC}$ bisectriz del $\angle$ A; $\overline{AB} \perp \overline{BC}$; $\angle$ ACF = 37^0.

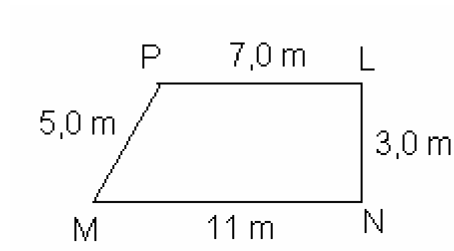


a) Calcula la amplitud de los ángulos interiores del ΔABE.

Clasifica el cuadrilátero ABCF y calcula su área sabiendo que $\overline{AB} = 10$ cm; $\overline{BC} = 7{,}5$ cm; $\overline{FC} = 78$ mm

4- En el trapecio MNLP que se muestra $\overline{NL} \perp \overline{MN}$ y $\overline{NL} \perp \overline{PL}$.

Señala la respuesta correcta.



Su área es:

a) ___ 26 m^2

b) ___27 m^2

c) ___33 m^2

d) ___ 84 m^2

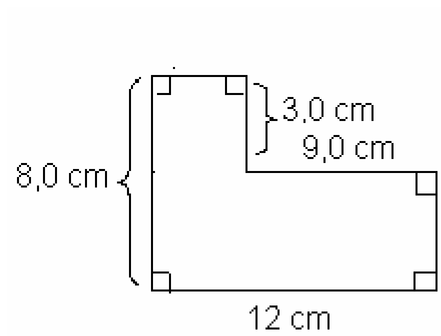
5- ¿Cuál es el área en centímetros cuadrados de la figura que se muestra?

___66 cm^2

a. ___69 cm^2

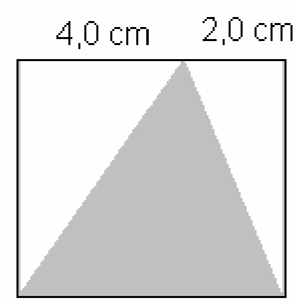
b. ___81 cm^2

c. ___ 96 cm^2



6- La figura muestra un triángulo dentro de un cuadrado.

¿Cuánto mide el área del triángulo?



a) ___36 cm^2

b) ___18 cm^2

c) ___No se puede calcular por falta de datos.

7- En la figura se tiene un cuadrado ABCD, con $\overline{AB}$ = 4,0 cm. Si E, F, G y H son los puntos medios de sus lados.

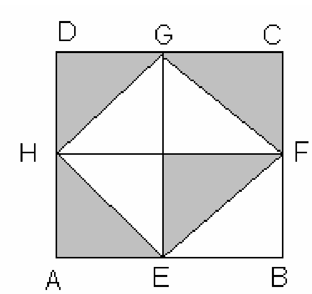
El área sombreada es:

a) ___2% del área del cuadrado ABCD.

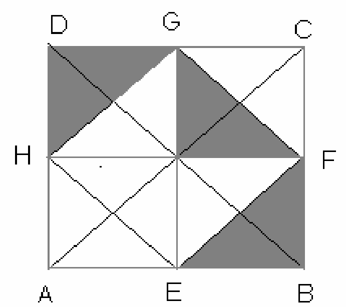
b) __12,5% del área del cuadrado ABCD.

c) ___25% del área del cuadrado ABCD.

d) ___50% del área del cuadrado ABCD.



8- En el cuadrado ABCD de la figura, E, F, G y H son puntos medios de sus lados. Si $\overline{AB}$ = 4,0 cm, entonces el área sombreada es:



a) ___ 10 cm^2

b) ___6,0 cm^2

c) ___ $\frac{3}{8}$ cm^2

d) ___ 6,0 dm^2 .

9- Un circuito en el que tiene lugar una carrera de bicicleta tiene forma de hexágono regular y cada lado mide 150,0 m ¿Cuántos kilómetros ha recorrido aproximadamente un ciclista, cuando ha dado 6 vueltas?

10-Si en una sala rectangular de 6,5 m de largo y 40 dm de ancho se coloca una alfombra cuadrada de 2,0 m de largo. ¿Cuál es la superficie al descubierto de la sala?

2.7 Algunos cuerpos geométricos. Área lateral y total. Volumen

El mundo circundante en su mayoría está formado por objetos que no están en un plano como las figuras que hemos estudiado hasta el momento. Si observas a tu alrededor encontrarás que realmente la pizarra tiene una superficie plana, pero también tiene un espesor, luego ocupa no solamente una superficie; lo mismo sucede con la mesa, e incluso con una delgada hoja de papel. Otros ejemplos pueden ser las monedas, los botones, los lápices, las pelotas de béisbol y de fútbol, todos ellos son objetos que nos rodean y que están limitados por superficies planas o curvas o por combinaciones de ellas.

En su relación con el arte, por ejemplo para que exista una armonía visual en la observación de las dimensiones arquitectónicas debe existir una proporción armoniosa entre la altura, anchura y profundidad; muchos arquitectos utilizan para ello la aritmética, o sea, el cálculo y otros se basan en sistemas geométricos. De manera muy semejante a la arquitectura, en la pintura, también se necesita del análisis de las dimensiones para la representación en el plano de un objeto. Antes de concretar su obra, la mayoría de los pintores utilizan el dibujo como punto de partida, así prescinden de las dimensiones reales de los materiales empleados.

La Geometría aporta elementos para resolver necesidades de carácter práctico que se presentan con frecuencia en la vida ya que su estudio está por ejemplo muy relacionado con las unidades de medida: longitud, superficie, volumen y capacidad, de ahí su aplicación en la estimación y cálculo de áreas de superficies que deben construirse, dimensiones y capacidad de un tanque empleado como depósito, etc.

Previo al trabajo con los cuerpos geométricos se debe considerar el trabajo con las diferentes magnitudes. Se sugiere recordar entonces, que unidad de medida es una cantidad determinada que sirve para medir las demás cantidades de su misma magnitud, medir una cantidad con cierta unidad es averiguar cuántas veces la unidad está contenida en la cantidad; el resultado de la medida es una expresión compuesta de dos partes: un número que expresa cuántas veces la unidad está contenida en la cantidad y la segunda, la unidad que se utilizó para medir, por ejemplo: 54m.

La unidad para medir no existe en la naturaleza, sino que es creada arbitrariamente por el hombre, cada pueblo creó sus propias unidades de medida. En Cuba se implementó el uso del Sistema Internacional de Unidades (SIU) desde 1982, acorde con ello utilizaremos como unidades básicas:

- de longitud, el metro (m)
- de superficie, el metro cuadrado (m^2)
- de volumen, el metro cúbico (m^3)
- de capacidad, el litro (L)

Al realizar las conversiones de unidades hay que considerar que:

Las unidades de longitud aumentan o disminuyen de 10 en 10.

Las unidades de superficie aumentan o disminuyen de 100 en 100.

Las unidades de volumen aumentan o disminuyen de 1000 en 1000.

Las unidades de capacidad necesitan la relación: $1dm^3 = 1L$

Desde la educación primaria y secundaria te has ido familiarizando con los distintos cuerpos geométricos a través de la observación de objetos reales y de modelos que te han ayudado a conocer algunos de sus elementos y propiedades. En este epígrafe se presenta el estudio de algunos cuerpos geométricos, en particular el prisma y la pirámide.

Definición**:** Llamamos **cuerpo geométrico** a la región del espacio limitada por superficies planas o curvas o por la combinación de estas superficies.

Al primer tipo de cuerpos que estudiaremos pertenecen los que se observan en las cajas de fósforos, muebles de los refrigeradores, cajas que contienen cualquier producto, edificios y otros que tú puedes encontrar.

Definición**:** Llamamos **prisma** al cuerpo geométrico limitado por dos polígonos iguales de n lados situados en planos paralelos, llamados

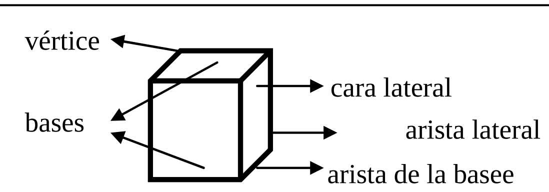


Figura 2.98

bases, y por n paralelogramos, llamados caras laterales.

A las bases y caras laterales en general, se les llama **caras del prisma**.

Los lados de las caras reciben el nombre de **aristas** (en particular, las correspondientes a las caras laterales se nombran **aristas laterales**) y sus extremos son los **vértices** (Figura 2.98).

Se llama **altura** del prisma al segmento de una recta perpendicular a los planos de las bases, determinado también por ambos (también se denomina altura a la longitud de este segmento).

Si la altura del prisma coincide con la arista lateral el prisma es **recto** (como el de la figura 2.99), por el contrario, si la altura es menor que la arista lateral, el prisma se llama **oblicuo**.

Notas:

- Observa que en el prisma recto la altura coincide con la arista lateral.
- Los prismas se denominan según sea el número de lados de los polígonos de sus bases. Así si las bases del prisma son triángulos se llama triangular, si son cuadriláteros se llama cuadrangular y si son pentágonos se llama pentagonal, etc.

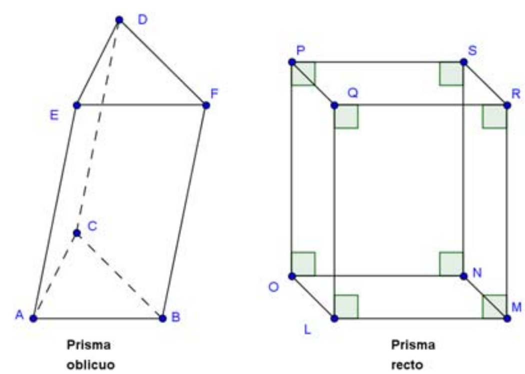


Figura2.99

Definición: Un prisma **recto** de base rectangular se denomina **ortoedro.**

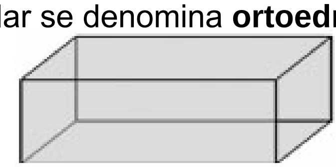


Figura 2.100

Definición**:** Un **prisma regular** es un prisma recto cuyas bases son polígonos regulares.

Recuerda que un polígono es regular si tiene todos sus lados de igual longitud y todos sus ángulos interiores de igual amplitud.

Las caras laterales de un prisma regular son rectángulos iguales, pues todas las aristas de las bases son iguales y también lo son las aristas laterales.

El **cubo** es el cuerpo geométrico limitado por seis superficies cuadradas iguales (Figura 2.101).

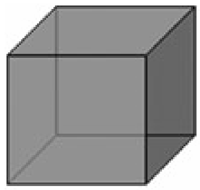


Figura 2.101

Las culturas antiguas incluían pirámides entre sus construcciones, con motivo de adoración a sus dioses, en el caso de México, y como tumbas de personajes importantes, en el caso de Egipto.

La Gran pirámide de Guiza es la más antigua de las Siete maravillas del mundo y la única que aún perdura, además de ser la mayor de las pirámides de Egipto.

Gran Pirámide de Guiza

Definición**:** Se llama **pirámide** al cuerpo limitado por un polígono cualquiera de n lados contenido en un plano α y por n triángulos, uno por cada lado del polígono los cuales concurren en un vértice común que no pertenece al plano α.

El punto que está fuera del plano de la base se llama **vértice superior** y los segmentos que unen los **vértices de la base** entre ellos y estos con el vértice superior se llaman **aristas**.

La altura es la distancia desde el vértice principal a la base y los triángulos que la limitan se llaman **caras**. Para el estudio que realizas son interesantes las pirámides donde el pie de la altura es el centro de la base, las cuales son llamadas **pirámides rectas**.

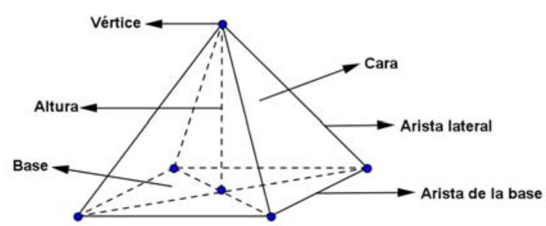


Figura 2.102

Resulta sencillo determinar el centro de la base si esta es un cuadrado o un rectángulo, en estos casos es suficiente intersecar las diagonales.

La base de una pirámide puede ser cualquier tipo de polígono convexo.

Las pirámides se denominan según sea el número de lados de los polígonos de sus bases. Así si la base de la pirámide es un triángulo se llama tetraedro, si son cuadriláteros se llama pirámide de base cuadrangular y si son pentágonos se llama pirámide de base pentagonal, etc.

Definición: Una **pirámide regular** es una pirámide recta cuyas bases son polígonos regulares.

Notas:

Las caras laterales de una pirámide regular son triángulos isósceles iguales.

Las alturas de los triángulos, caras de la pirámide, reciben el nombre de apotema.

En lo adelante solo trataremos los prismas y pirámides rectos.

Para representar un prisma o una pirámide en **perspectiva caballera** debes considerar los siguientes pasos:

- Los segmentos en dirección del ancho se dibujan horizontalmente y los correspondientes a la altura en forma vertical. Estos segmentos se dibujan con las mismas longitudes que tienen en el cuerpo.
- Los segmentos en dirección de la profundidad se trazan formando un ángulo de 45º con la horizontal y con una longitud igual a la mitad de la que tienen ellos en el cuerpo.
- Cualquiera de estos segmentos que al representar la figura quede por detrás de una de las caras debe ser representado con líneas discontinuas.

Ejemplo: Dibuja un prisma de base rectangular (ortoedro) cuyas dimensiones son:

Ancho 4,0 cm; largo 2,0 cm (profundidad) y 6,0 cm de altura.

Solución: La figura 2.103 muestra el dibujo que se obtiene mediante el procedimiento descrito anteriormente.

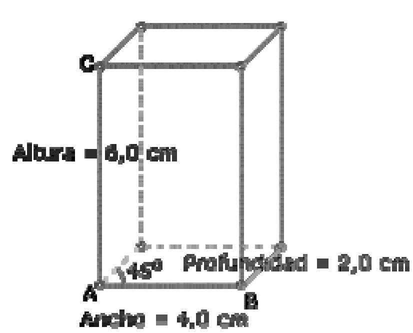


Figura 2.103

Cálculo de áreas y volúmenes de prismas y pirámides

Para poder resolver problemas prácticos relacionados con prismas y pirámides es necesario, muchas veces, hallar superficies que abarquen todas las caras, o solamente que abarquen sus caras laterales, para eso es necesario aplicar determinadas relaciones (fórmulas) que te permitan calcular sus áreas y volúmenes.

Área lateral

El **área lateral** de estos **cuerpos geométricos** es la suma de las áreas de cada una de sus caras laterales.

El área lateral de un prisma se calcula sumando las áreas de los paralelogramos que componen sus caras laterales, es decir por la fórmula AL $= A_1 + A_2 + \ldots + A_n$.

Para reconocer y poder calcular el área lateral de los diferentes cuerpos geométricos es conveniente realizar, siempre que se pueda, el desarrollo en el plano.

Ejemplo: Representa el desarrollo del siguiente prisma de base pentagonal. Explique cómo calcular el área lateral de este cuerpo.

Solución: Este prisma posee dos bases que son los pentágonos y sus caras laterales son cinco rectángulos, una representación del desarrollo en el plano de este prisma es el que se ilustra a continuación. El área lateral de este cuerpo es igual al área del rectángulo ABCD.

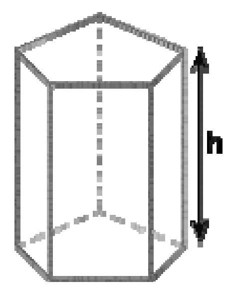


Figura 2.104

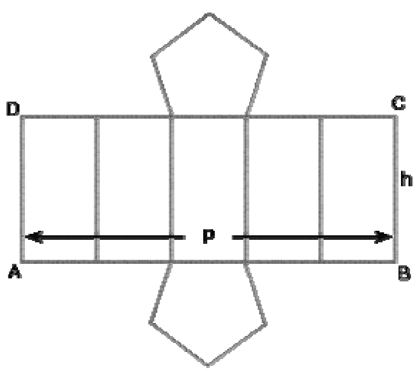


Figura 2.105

El **área lateral de un prisma** recto también se puede calcular como el producto del perímetro de una de sus bases por la altura del prisma:

$A_L = p \cdot h$

Nota: En el ejemplo anterior el área lateral del prisma es igual a la suma de las longitudes de los lados de la base, es decir, su perímetro por la altura del prisma.

El **área lateral de una pirámide A_L** se calcula como la suma de las áreas de las caras laterales que forman la pirámide, que en este caso, son triángulos, es decir por la fórmula **$A_L = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$.**

Área total

El **área total** de estos **cuerpos geométricos** es igual a la suma del área lateral y el área de las bases.

Para calcular el **área total de un prisma** utilizamos la fórmula siguiente:

$A_T = 2A_B + A_L$, donde **A_B** es el área de la figura que esté en la base del prisma y **A_L** el área lateral que se calcula por la fórmula **$A_L = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$**, o sea sumando las áreas de los paralelogramos que componen sus caras laterales.

Área total de la pirámide

Para calcular el área total de la pirámide utilizamos la fórmula:

$A_T = A_B + A_L$, donde **A_B** es el área del polígono que esté en la base y **A_L** es el área lateral; que se calcula como la suma de las áreas de las caras laterales que forman la pirámide, que son triángulos.

Ejemplo: Calcula el área total de un prisma de base rectangular cuyas dimensiones son: ancho 3,2 cm; profundidad 2,0 cm y altura 5,0 cm.

Solución: Para calcular el área total de este prisma debes hallar las áreas laterales y de las bases, es conveniente realizar un esbozo de este cuerpo, similar al de la figura f. Realicemos el desarrollo en el plano del prisma, según figura 2.106

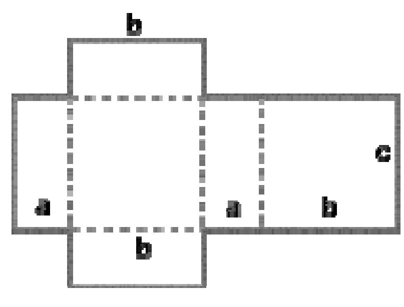


Figura 2.106

Sean, a = 3,2 cm; b = 2,0 cm y c = 5,0 cm

Observa que para el cálculo del área lateral se deben considerar dos parejas de rectángulos de igual área, cuyas dimensiones son: a y c; b y c, luego:

$A_L = 2(a \cdot c + b \cdot c) = 2(3{,}2 \cdot 5{,}0 + 2{,}0 \cdot 5{,}0) = 52 \text{ cm}^2$

Observa que el área lateral del prisma se puede calcular también por la fórmula

$A_L = p \cdot h = (a+b+a+b) \cdot c$

Calculemos el área de las dos bases, para ello determinamos el área de una de ellas y luego la duplicamos, ya que son rectángulos iguales.

$A_B = a \cdot b = 3{,}2 \cdot 2{,}0 = 6{,}4\ cm^2$

$A_T = A_L + 2\ A_B = 52 + 2 \cdot 6{,}40 = 52 + 12{,}8 = 64{,}8$

Como los datos han sido expresados con dos cifras la respuesta final debe aparecer también con dos cifras significativas, por ello escribimos $A_T = 65\ cm^2$.

Ejemplo**:** Determina el área total de una pirámide de base cuadrada de 6,0 cm de lado si se sabe que la altura de cada cara es de 5,0 cm.

Solución: Para calcular el área total de esta pirámide debes hallar las áreas laterales y la de la base, es conveniente realizar un esbozo de este cuerpo, similar al de la figura 2.102.

Hallemos el área de la base cuadrada, $A_B = a^2 = 6^2 = 36\ cm^2$

El área lateral de esta pirámide se obtiene al sumar las áreas de los cuatro triángulos, o teniendo en cuenta que todos los triángulos tienen la misma área, entonces:

$A_L = 4\ A\Delta$ siendo $A\Delta = \frac{b.h}{2} = \frac{6.5}{2} = 15\ cm^2$ (la base de cada triángulo es un lado del cuadrado).

Sustituyendo $A_L = 4\ A\Delta = 4 \cdot 15 = 60\ cm^2$

Por tanto el área total $A_T = A_L + A_B = 60 + 36 = 96\ cm^2$.

En ocasiones debemos calcular áreas de cuerpos geométricos (prismas o pirámides) en los que las bases son triángulos rectángulos. Recuerda que un triángulo rectángulo posee un ángulo recto y los dos restantes son agudos. Los lados que forman el ángulo recto reciben el nombre de catetos y al lado que se opone al ángulo recto se le denomina hipotenusa.

Existe una relación mediante la cual conocidos dos de los lados de un triángulo rectángulo, puedes hallar la longitud del tercero, tal propiedad es conocida como teorema de Pitágoras y data de más de 2600 años.

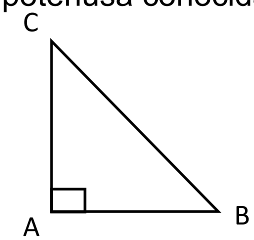
Teorema de Pitágoras: En todo triángulo rectángulo se cumple que el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

El **teorema recíproco** se enuncia: Si en un triángulo se cumple que el cuadrado de la longitud del lado mayor es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, entonces el triángulo es rectángulo.

Ejemplo: En un triángulo ABC, rectángulo en A, $\overline{\mathbf{AB}}$ = 3,0 cm y $\overline{\mathbf{AC}}$ = 4,0 cm. Calcula la longitud de $\overline{\mathbf{BC}}$.

Solución:

El triángulo ABC es rectángulo en A, para calcular la longitud de la hipotenusa conocidas las de sus catetos, aplicamos el teorema de Pitágoras.



$\overline{\mathbf{CB}}^2 = \overline{\mathbf{AC}}^2 + \overline{\mathbf{AB}}^2$

$\overline{\mathbf{CB}}^2 = 42 + 3^2 = 16 + 9 = 25$; $\overline{\mathbf{CB}} = \sqrt{\mathbf{25}}$; $\overline{\mathbf{CB}}$ =5,0 cm

En el triángulo ABC del ejemplo anterior, si se conocen las longitudes de la hipotenusa y uno de los catetos para hallar la longitud del otro cateto es necesario despejar de esta manera:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{AC}^2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{AB}^2}$$

Nota: El trío de números (3, 4 y 5) es conocido como trío pitagórico ya que cumplen con la relación que establece el teorema de Pitágoras, este no es el único trío de números naturales que cumple la relación, tú puedes encontrar otros tríos pitagóricos.

Ejemplo: Calcula el área total de un prisma cuya altura es de 6,6 m y la base es un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 5,0 m y uno de sus catetos mide 3,0 m.

Solución: En la solución de este ejercicio hay que considerar que las bases son triángulos rectángulos. Para calcular el área de la base se necesitan las longitudes de los catetos, se conoce la longitud de la hipotenusa y la de un cateto, luego utilizando el teorema de Pitágoras y según el ejemplo anterior obtenemos que la longitud del otro cateto es 4,0 m.

$A_T = A_L + 2\,A_B$ pero $A_B = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6{,}0\ m^2$

$A_L = A_1 + A_2 + A_3 = 5 \cdot 6{,}6 + 4 \cdot 6{,}6 + 3 \cdot 6{,}6 = (5 + 4 + 3) \cdot 6{,}6 = 12 \cdot 6{,}6 = 79{,}2 m^2$

$A_T = 2 \cdot 6 + 79{,}2 = 91{,}2\ m^2 \approx 91 m^2$.

Volumen del prisma

En grados anteriores estudiaste cómo calcular el volumen de un cubo y el de un ortoedro. El volumen del cubo se calcula mediante la fórmula $\mathbf{V = a^3}$, donde **a** representa una cualquiera de las aristas del cubo (Figura 2.101). Para calcular el volumen del ortoedro se utiliza la fórmula **V= a· b · c**, donde a, b y c representan las longitudes del largo, el ancho y la altura del ortoedro (Figura 2.103), tanto uno como el otro son casos particulares de prismas.

En los casos recordados anteriormente habrás notado que si **V = a. a. a** y **V= a . b . c**, el producto de los dos primeros factores corresponde al área de la base de los cuerpos correspondientes (la base del cubo es un cuadrado y la del ortoedro es un rectángulo); el último factor de cada fórmula representa la longitud de la altura, para el cubo es **a** y para el ortoedro es **c**.

En general el volumen de un prisma se calcula mediante el producto del área de una de sus bases (A_B) por la altura del prisma (h):

$$\boxed{\mathbf{V_{Prisma} = A_B \cdot h}}$$

Volumen de la pirámide

El volumen de una pirámide es igual a la tercera parte del producto del área de su base por su altura: $V_{pirámide} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} A_B \cdot h$

Observa que el volumen de la pirámide es igual a la tercera parte del volumen de un prisma que tenga igual base y altura que ella. Para mejor comprensión puedes realizar el experimento para que compruebes por ti mismo la fórmula que se utiliza para calcular el volumen de la pirámide, para ello debes construir con cartón un prisma y una pirámide que tengan la misma base y la misma altura, como las que se ilustran:

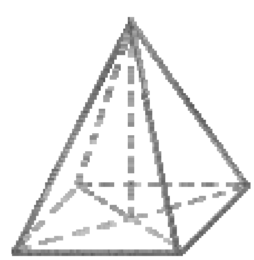


Figura2.107

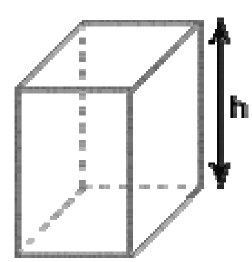


Figura 2.108

Para construirlos puedes utilizar el esquema de cómo se desarrollan en el plano, teniendo en cuenta las condiciones iniciales, que la base sea la misma, al igual que la altura. Deja destapado el prisma por una cara y no le construyas la base a la pirámide, llena entonces la pirámide de arena y vacía su contenido en el prisma, tantas veces como sean necesarias para llenar el prisma. Podrás comprobar que el prisma se llena con tres pirámides de arena, esto significa que el volumen de la pirámide es la tercera parte del volumen del prisma**,** es decir:

$$V_{PIRÁMIDE} = \frac{1}{3} V_{PRISMA}$$

Ejemplo**:** Halla el volumen de un cubo de 3,8 cm de arista.

Solución: Resulta conveniente realizar un esbozo de este cuerpo, similar al de la Figura 2.101.

$V = a^3 = (3,8\ cm)^3 \approx 54,872\ cm^3$

$V \approx 55\ cm^3$

Ejemplo**:** Halla el volumen de un ortoedro que tiene 4,52 cm de ancho; 6,24 cm de profundidad y 8,12 cm de altura.

Solución: Resulta conveniente realizar un esbozo de este cuerpo, similar al de la Figura 2.103

$V = a \cdot b \cdot c$

$V = (4,52\ cm) \cdot (6,24\ cm) \cdot (8,12\ cm)$

$V = 229,02\ cm^3 \approx 229\ cm^3 \approx 0,23\ dm^3$

Ejemplo**:** Halla el volumen de un cubo si se conoce que su área total es igual a 384 cm^2.

Solución: Resulta conveniente realizar un esbozo de este cuerpo, similar al de la Figura 2.101.

$A_T = 6 \cdot a^2 = 384\ cm^2$ las seis caras del cubo son cuadrados iguales

$a^2 = 384\ cm^2 : 6 = 64\ cm^2$, luego $a = 8,0\ cm$

$V = a^3 = (8,0\ cm)^3 = 512\ cm^3$.

Ejemplo: Un camión transporta cajas iguales de forma cúbica; de arista 1,0 m. El espacio del camión destinado para la carga posee dimensiones 2,0 m de ancho; 4,0 m de largo y 2,0 m de altura. ¿Cuántas cajas de un metro cúbico puede transportar el camión?

Solución: Las cajas poseen forma de cubo y su arista es 1,0 m; luego cada caja ocupa un volumen de 1,0 m^3. El volumen a transportar se calcula mediante la fórmula de volumen del ortoedro,

$V= a \cdot b \cdot c = 2 \cdot 4 \cdot 2 = 16\ m^3$

R/ El camión puede transportar 16 cajas de 1 m^3.

Ejemplo: Los pioneros de un grupo de sexto grado desean montar una pecera de dimensiones 30 cm de ancho; 0,8 m de largo y 5,0 dm de altura. ¿Cuántos cubos de agua, de 10 L de capacidad, se necesitan para llenar la pecera hasta las tres quintas partes de la altura de la misma?

Solución: Los datos están expresados en diferentes unidades de longitud, debemos trabajar con ellos en la misma unidad. En este caso solicitan la cantidad de cubos necesarios para llenar la pecera y la capacidad de los mismos está dada en litros, luego resulta más cómodo expresarlas todas las unidades en decímetros, a partir de la relación $1dm^3= 1L$.

30 cm= 3,0 dm; 0,8 m = 8,0 dm y 5,0 dm

En este caso se debe calcular el volumen del agua que contiene la pecera, no el volumen de la misma, de ahí que debemos calcular la altura del nivel del agua, en este caso:

$\frac{3}{5} .5\ dm = 3\ \mathrm{dm}$

$V= a \cdot b \cdot c = 3,0 \cdot 8,0 \cdot 3,0 = 72,0\ dm^3$

Determinemos la cantidad de cubos, para ello:

72: 10 = 7,2

R/ Para llenar la pecera hasta la altura deseada, se necesitan 7cubos y 2 litros de agua.

Ejemplo: Determina el volumen de una pirámide cuya base es un cuadrado de 3,0 m de lado y de altura 10 m.

Solución:

$V = \frac{1}{3} A_B \cdot h$

$V = \frac{1}{3} a^2 \cdot h$ (la base de la pirámide es cuadrada, su área se calcula a^2)

$V = \frac{1}{3} (3{,}0)^2 \cdot 10 = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 10 = 30$

$V = 30\ m^3$.

Ejemplo: Sobre dos caras opuestas de un cubo de 4,0 cm de arista se construyen dos pirámides de 3,0 cm de altura. Halla el volumen del sólido formado.

Solución:

Sea V_s el volumen del sólido formado, V_c el volumen del cubo y V_p el volumen de la pirámide, luego:

$V_s = V_c + 2\,V_p$ ya que las dos pirámides son pirámides regulares iguales

$V_c = a^3 = (4{,}0\ )^3 = 64\ cm^3$

$V_p = \frac{1}{3} A_B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 3{,}0 = 16\ cm^3$

$V_s = V_c + 2\,V_p = 64 + 2 \cdot 16 = 64 + 32 = 96\ cm^3$

$V_s = 96\ cm^3$.

Ejercicios

1.-Investiga sobre la historia de los cuerpos geométricos destacando:

a) Civilizaciones que conocieron estos cuerpos y estudios que realizaron sobre los mismos.

b) Matemáticos que hicieron aportes al estudio de los cuerpos geométricos.

2- Mencione objetos que tienen forma de prismas y de pirámides.

3- Realiza el desarrollo en el plano de una caja de fósforos.

a) Realiza una ampliación de la figura obtenida según el doble de sus dimensiones.
b) Representa el cuerpo a mano alzada.
c) Representa el cuerpo en perspectiva caballera, considerando varios casos para la selección de la base.

d) Mencione los elementos fundamentales de un prisma de esas características (caras, aristas, vértices, diagonales).

4- Represente una pirámide de base rectangular en su desarrollo en el plano.

a) De su representación realiza una ampliación a escala y construye en cartulina la pirámide de base rectangular.

b) Representa la pirámide de base rectangular en perspectiva caballera.

5- Completa:

a) Si el prisma tiene 5 caras es porque tiene _______ aristas.

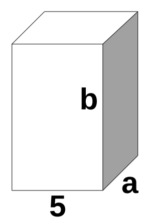
b) Un prisma tiene 4 caras laterales, posee entonces ______ vértices.

c) Todas las caras laterales de un prisma son ____________.

d) El menor número de caras que puede tener un prisma es _____________.

6- Dada la figura y las condiciones dadas:

a) Escribe las expresiones matemáticas que describan con ayuda de variables el enunciado correspondiente en la figura.



El volumen es 30.
La altura es el doble del ancho.
La superficie lateral sombreada es 60.

b) Nombre el prisma.

7- Seleccione la respuesta correcta.

Una pirámide de base triangular tiene:

___ 3 caras ___ 4 caras ___ 5 caras

___ 4 vértices ___ 5 vértices ___ 6 vértices

___ 4 aristas ___ 5 aristas ___ 6 aristas

8- El área lateral de un prisma recto de 2,5 dm de altura, cuya base es un rectángulo de 1,6 m por 90 cm es igual:

a) ___125 cm^2 b) ___1,2 m^2 c) ___$1{,}25 \cdot 10^{-3}$ km^2 d) ___ Ninguno de los anteriores.

9- Las áreas total y lateral de una pirámide miden 435 cm^2 y 2,91dm^2 respectivamente. Si la base es cuadrada el lado mide:

Ejercicios del capítulo

1- Dibuja un hexágono regular ABCDEF de centro O, identifica los seis triángulos equiláteros iguales que se obtienen al trazar las diagonales. Completa los espacios en blanco de forma tal que se obtengan proposiciones verdaderas.

a) La imagen del triángulo ΔAOB por una rotación de centro O y ángulo 120° es _________.

b) La imagen del ΔDOE *por* simetría central de centro O es _________.

c) El ΔBOC es la imagen del ΔAOB por ___________________________________ ______________________________________*.*

d) El segmento _____ es la imagen del segmento $\overline{AO}$ por una traslación de vector $\overline{AB}$.

e) El segmento _____ es la imagen del segmento $\overline{AO}$ por una simetría central de centro O.

f) El segmento _____ es la imagen del segmento $\overline{FC}$ por una reflexión de eje $\overline{FC}$

g) La imagen del triángulo ΔDOE por una rotación de centro O y ángulo 180^{0} es _________

1.1 ¿Qué conclusión obtienes cuando analizas los resultados de los incisos b) y g)?

2- Construye:

a) un paralelogramo

b) un rectángulo

c) un círculo.

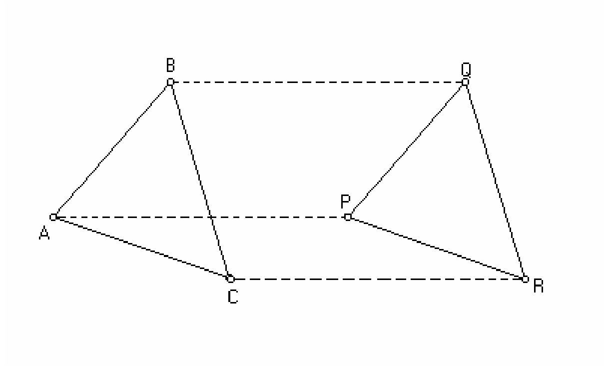
De las figuras anteriores di cuáles son simétricas con respecto a un eje y cuántos ejes de simetría tiene, trázalos todos, si es posible. Además di cuáles son simétricas con respecto a un punto y traza el centro de simetría.

3- Argumenta las siguientes afirmaciones:

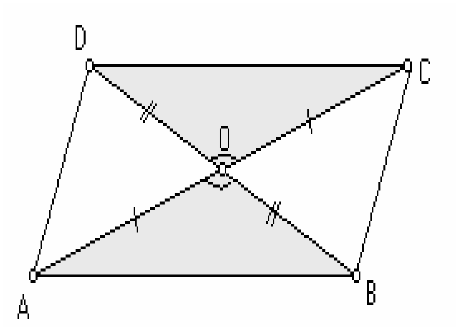
a) En un paralelogramo, el punto donde se cortan las diagonales es a la vez el punto medio de cada una de ellas.

b) En un cuadrado las diagonales son perpendiculares, se cortan en su punto medio y determinan en cada vértice ángulos de 45^{0}.

4.-En la figura $\Delta ABC = \Delta PQR$ y mediante un movimiento que transforma uno en el otro, las imágenes de A, B y C son respectivamente P, Q y R. Di cuáles son los lados homólogos y los ángulos homólogos.



5-Sea el paralelogramo ABCD, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ sus diagonales y O el punto donde se cortan las diagonales. ¿Son iguales el ΔAOB y el ΔDOC? Fundamenta.

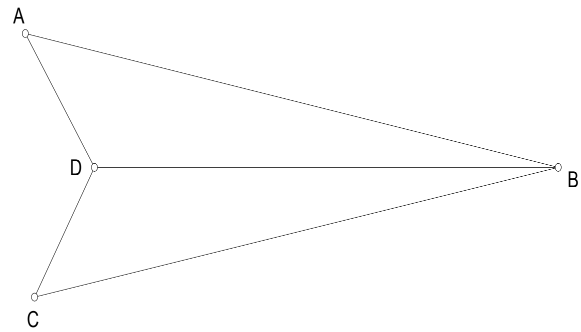


6- En la figura, $\overline{AB} = \overline{BC}$ y $\overline{AD} = \overline{DC}$.

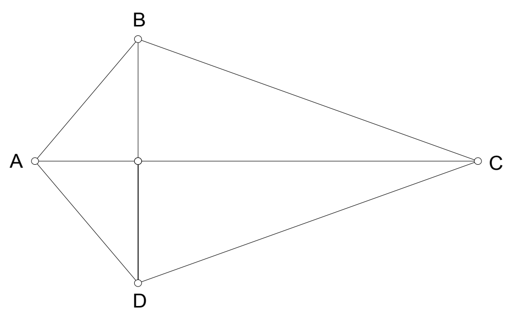
a) Demuestra que $\Delta ABD = \Delta CBD$.

b) Di cuales son los lados homólogos.

c) Di cuales son los ángulos homólogos.



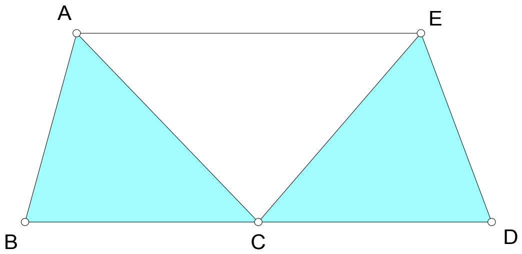
7- En la figura ΔABD y ΔBCD son isósceles de base $\overline{BD}$, Demuestra que $\Delta ABC = \Delta ADC$.



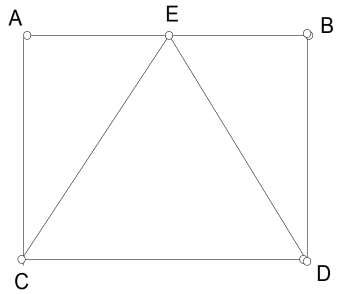
8- En la figura, $\overline{BC} = \overline{CD}$, $\overline{AC} = \overline{EC}$ y $\angle$ACD=$\angle$ECB. Demuestra que:

a) Δ ABC=ΔEDC

b) $\overline{AB} = \overline{ED}$



9- En la figura ABCD es un cuadrado y E punto medio de $\overline{AB}$ .Demuestra que ΔDEC es isósceles.



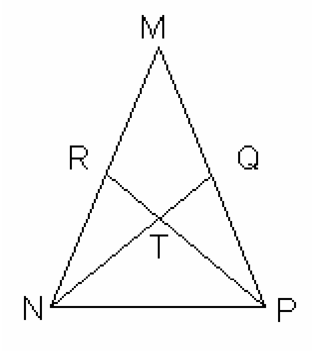
10- En la figura se muestra el triángulo MNP isósceles de base $\overline{NP}$. Los segmentos $\overline{PR}$ y $\overline{NQ}$ representan las medianas relativas a los lados $\overline{MN}$ y $\overline{MP}$ respectivamente.

a) Prueba que Δ PRN =Δ PQN.

b) Prueba que Δ RNT =Δ PQT.

c) Si $\angle$PMN = 50° y

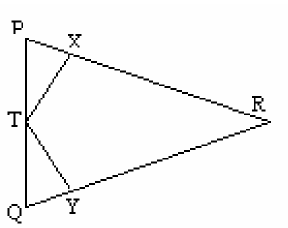
$\angle$TNP=48°; calcula las amplitudes de los ángulos $\angle$NTP, $\angle$QPN, $\angle$NTR y $\angle$ NQP.



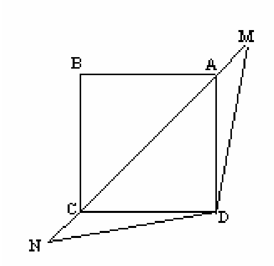
11- En la figura se tiene que el triángulo PQR es isósceles de base $\overline{PQ}$, T es el punto medio de $\overline{PQ}$, $\overline{TX} \perp \overline{PR}$ y $\overline{TY} \perp \overline{QR}$.

a) Prueba que $\overline{XR}$ = $\overline{YR}$.

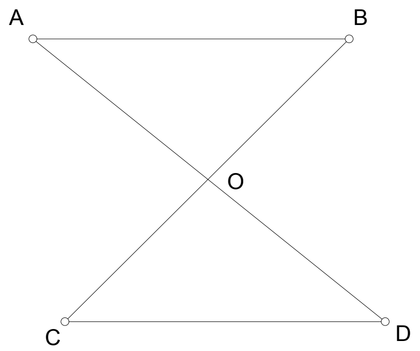
b) Si $\angle$PQR = 58°, calcula las amplitudes de los ángulos interiores del cuadrilátero XTYR.



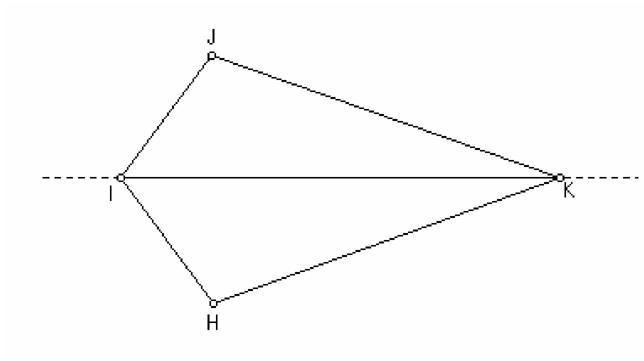
12-En la figura ABCD es un cuadrado y MND un triángulo isósceles de base $\overline{MN}$; además se conoce que los puntos N, C, A y M están alineados y que $\overline{AM} = \overline{CN}$. Demuestra que $\angle CDM = \angle ADN$.



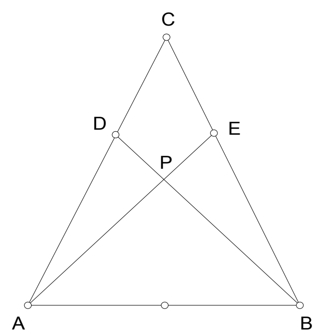
13- En la figura $\overline{AB} // \overline{CD}$ y $\overline{AB} = \overline{CD}$. Demuestra, por todas las vías posibles, que $\Delta ABO = \Delta CDO$.



14- En la figura tenemos que IK es un segmento común de las bisectrices de los ángulos $\angle$HKJ y $\angle$HIJ. Demuestra que: $\overline{HI} = \overline{IJ}$ y $\overline{HK} = \overline{JK}$.

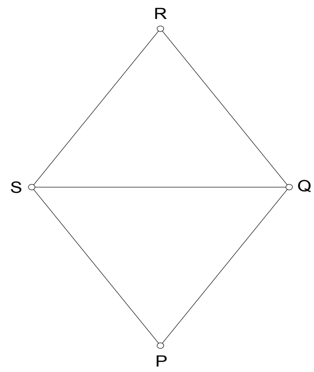


15- En el Δ ABC de la figura, $\overline{AE}$ y $\overline{BD}$ se cortan en P, $\overline{AD} = \overline{BE}$ y el Δ ABC es isósceles de base $\overline{AB}$. Prueba que $\overline{AE} = \overline{BD}$.

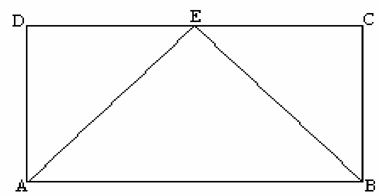


16- En la figura PQRS es un rombo y $\overline{QS}$ es una de sus diagonales.

Prueba que Δ PQS=ΔQRS utilizando diferentes criterios.



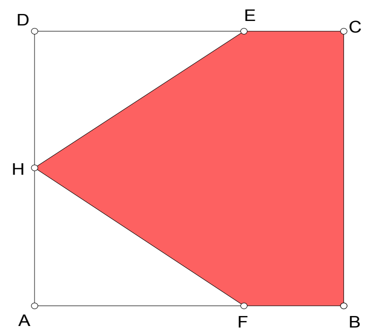
17-En la figura ABCD un rectángulo y E el punto medio de $\overline{DC}$. El triángulo Δ ABE es isósceles de base $\overline{AB}$.



a) Demuestra que Δ ADE=Δ BCE.

b) Si el área del Δ ABE es de 12 cm^2 y $\overline{AB}$ = 60 mm, calcula el perímetro del rectángulo ABCD.

18-En el cuadrado ABCD, $\overline{AD}=2\overline{AH}$, $\overline{EC}=\overline{FB}$. E$\in\overline{DC}$ y F$\in\overline{AD}$.



a) Prueba que $\angle$DEH=$\angle$HFA

b) Si $\overline{BC}$ = 4,0 cm y $\overline{FB}=\frac{1}{4}\overline{AB}$, Calcula el área de la región sombreada.

19- Demuestra que los puntos situados en la mediatriz de un segmento equidistan de los extremos del mismo.

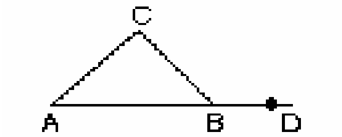
20-Explica cómo determinar la distancia entre los puntos A y B si el punto A está en una posición inaccesible desde el punto B.

21-Selecciona la respuesta correcta

a) Si en un cuadrilátero dos ángulos interiores consecutivos son rectos y los otros dos tienen una amplitud de 70^0 y 110^0, entonces el cuadrilátero es:

____Un paralelogramo ____Un cuadrado ____Un trapecio rectángulo b). En la figura ABC es un triángulo al cual se le ha prolongado el lado $\overline{AB}$, $\angle$ CBD = 2 $\angle$ BAC, entonces el triángulo ABC es:

____Equilátero ____ Escaleno____ Isósceles.



22-Dibuja un triángulo isósceles EFG de base $\overline{FG}$, sea D punto medio de $\overline{FG}$ y traza el segmento $\overline{DE}$, ¿Qué tipo de triángulo es DEF atendiendo a la amplitud de sus ángulos?

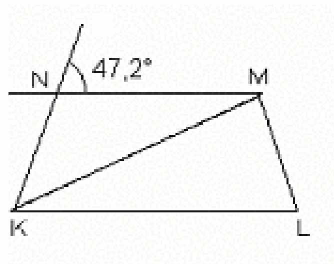
23-Di cuáles afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas, argumenta las falsas.

a) ____ La bisectriz de un ángulo es su eje de simetría.
b) ____ La bisectriz de un ángulo de un triángulo es un eje de simetría del triángulo.
c) ____ El circuncentro equidista de los vértices del triángulo.
d) ____ Un triángulo tiene tres medianas.
e) ____ Toda recta que pasa por el punto medio de un lado del triángulo es su mediatriz.

24- En la figura $\overline{MN} \parallel \overline{KL}$; $\overline{KM}$ bisectriz del $\angle$ LKN.

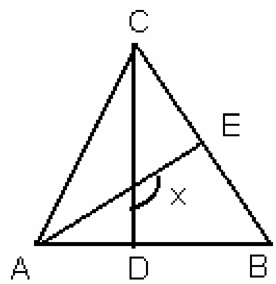
a) Halla la amplitud de los ángulos MKL y MNK.

b) Clasifica el cuadrilátero KLMN.



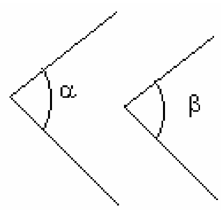
25--Dada la figura, halla el valor del $\angle$ x; si E punto de $\overline{CB}$, $\overline{AE}$ es la bisectriz del $\angle$ A, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$,

$\angle$ B = 68º y $\angle$ C = 46º.



26- En la figura aparecen los ángulos α y β de lados respectivamente paralelos.

Demuestra que son iguales.



27-En triángulos acutángulos (rectángulos, obtusángulos), construye:

a) Las alturas c) Las medianas
b) Las bisectrices d) Las mediatrices.

28-Dibuja un cuadrilátero ABCD y determina un punto que equidiste de $\overline{BC}$,

$\overline{CD}$ y $\overline{AD}$.

29-Dibuja un triángulo isósceles RQS de base y $\overline{QS}$ determina un punto que cumpla las siguientes condiciones:

a) Equidista de los puntos Q y S.
b) Equidista de $\overline{QR}$ y $\overline{QS}$.

30-Di si son verdaderas o falsas las proposiciones siguientes y en caso de ser falsas muestra un contraejemplo.

En un triángulo cualquiera se cortan en un punto interior a él:

a) Las bisectrices
b) Las medianas
c) Las alturas
d) Las mediatrices.

31-La base de un triángulo isósceles tiene el doble de la longitud de la altura relativa a ella. Halla la amplitud de los ángulos de este triángulo.

32-Halla la amplitud de los ángulos de un triángulo rectángulo si el ángulo formado por la bisectriz y la altura trazada desde el vértice del ángulo recto es de $15°$.

33-Fundamenta las siguientes afirmaciones:

a) Todo triángulo isósceles con un ángulo de $60°$ es equilátero.
b) La mediana de la hipotenusa en un triángulo rectángulo es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa.

34-Demuestra que si la bisectriz de un ángulo exterior de un triángulo es paralela a uno de los lados, entonces dicho triángulo es isósceles.

35-Demuestra que las bisectrices de dos ángulos adyacentes forman un ángulo recto.

36-De acuerdo con lo que se ha estudiado sobre las construcciones fundamentales elabora los pasos que se deben seguir para construir:

a) Un ángulo de 45º

b) Un ángulo de 30º

c) Un ángulo de 60º.

37--Construye un triángulo ABC, rectángulo en A, con la longitud de $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$ y un ángulo en B de 60º.

38- Construye un rombo si se conocen las dos diagonales. Analizar si se puede construir más de un rombo.

39-Partiendo de las construcciones fundamentales es posible realizar la construcción de las figuras estudiadas, por eso construye:

a) Un trapecio.

b) Un paralelogramo.

c) Un rectángulo.

d) Un cuadrado.

e) Un triángulo isósceles.

f) Un rombo.

40-Selecciona con una equis (x) la respuesta correcta.

1.1 Un cuadrilátero es un rectángulo si:

a) ___ La suma de las amplitudes de los ángulos interiores es 360°.

b) ___ Las diagonales del cuadrilátero son iguales.

c) ___ Los ángulos consecutivos suman 180°.

1.2 Un paralelogramo es un rombo si:

a) ___ Los lados son paralelos e iguales.

b) ___ Todos sus ángulos interiores son iguales.

c) ___ Tiene un par de lados consecutivos iguales.

d) ___ Tiene un par de ángulos opuestos iguales.

41- Diga si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones, justifique las falsas.

a) ___ En todo paralelogramo los ángulos opuestos siempre son iguales.

b) ___ Las diagonales de un cuadrilátero se cortan en su punto medio.

c) ___ Un cuadrilátero con sus ángulos opuestos iguales se denomina rombo.

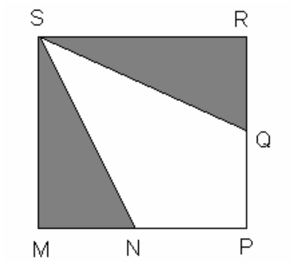
d) ___ Un rectángulo con las diagonales perpendiculares se considera un cuadrado.

42-- Determina las amplitudes de los ángulos interiores de un paralelogramo si se conoce que sus ángulos consecutivos están en la razón 1 es a 2.

43- Demuestra los incisos b), c) y d) del teorema: caracterizaciones del paralelogramo.

44-En la figura MPRS es un cuadrado; M punto medio de $\overline{MP}$ y Q punto medio de $\overline{PR}$ .Selecciona la respuesta correcta

El área de NPQS es igual a:



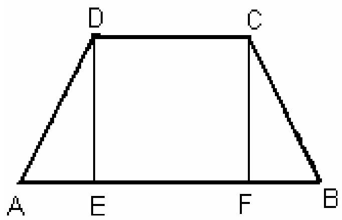
a) —— La tercera parte del área del cuadrado MPRS.

b) —— El 60% del área del cuadrado MPRS.

c) ——— La suma de las áreas de los triángulos MNS y QRS.

d) ——— No se puede determinar por falta de datos.

45- Sea ABCD un trapecio isósceles de bases $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$. Los segmentos $\overline{DE}$ y $\overline{CF}$ son perpendiculares a la base $\overline{AB}$ del trapecio; el área de este trapecio es igual 45,1 cm^2, y su altura es de 5,5 cm.

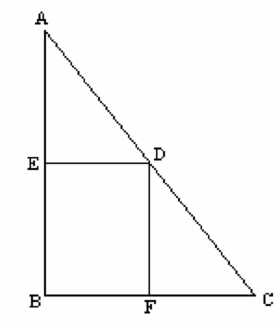


a) Si se conoce que $\overline{AE}$ =1,8 cm.; calcula el área y el perímetro del rectángulo EFCD.

b) Clasifica el cuadrilátero DEBC y fundamenta.

c) Calcula el área del cuadrilátero DEBC.

d) Calcula la longitud del segmento $\overline{AD}$, si se conoce que el perímetro del trapecio es igual a 2,8 dm.



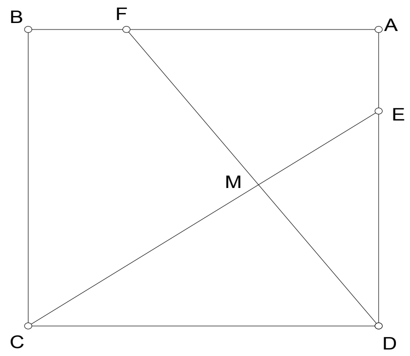
46.-En la figura se representa el triángulo ABC rectángulo en B. El punto D es el punto medio de $\overline{AC}$, $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, y $\overline{DF} \parallel \overline{AB}$.

a) Determina qué tipo de cuadrilátero es BFDE. Justifica.

b) ¿Qué representa el punto F para el segmento $\overline{BC}$?

c) Si el área del triángulo AED es igual a 14,7 cm^2; determina las dimensiones, el perímetro y el área del cuadrilátero BFDE, conociendo además que $\overline{BF} = 4,2$ cm.

47.- En la figura ABCD cuadrado, $\overline{BF} = \overline{AE}$, $\overline{CE}$ y $\overline{DF}$ se intersecan en M. F y E son puntos de $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ respectivamente.



a) Prueba que $\overline{DF} = \overline{CE}$

b) Si el $\angle$FDA=33,7º calcula la amplitud del $\angle$BCE

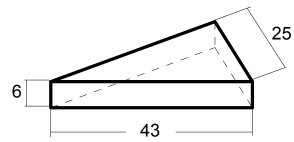
c) Si el perímetro del cuadrado ABCD es 36 cm y $\overline{DE}$ = 60 mm. Calcula el área del cuadrilátero ABCE.

48- Calcula el perímetro y el área de un rombo de 5,0 cm de lado si se conoce que una de sus diagonales mide 6,o cm.

49- Demuestra que en todo paralelogramo los ángulos opuestos son iguales.

50-Demuestra que en todo paralelogramo las diagonales se bisecan.

51- Calcula el volumen del prisma representado en la figura. Las longitudes de las aristas están expresadas en milímetros.



52- El volumen de un ortoedro es 120 m^3. Si el largo de la base aumenta 2,0 m; entonces el volumen aumenta en 40 m^3.Si el ancho de la base disminuye 2,0 m; entonces el volumen disminuye en 100 m^3.Calcula el perímetro de cada cara lateral del ortoedro.

53-¿Cuántos m^3 de hormigón serán necesarios para construir una cisterna de forma cúbica con capacidad para 8000 libros de agua si las paredes han de tener 0,20 m de grueso y el fondo 0,12 m?

54- Exprese el volumen de un cubo en función de su diagonal.

55- Con 125 cubos de aristas de 1cm, se arma un cubo mayor de 5 cm de arista y luego se pintan cuatro caras del cubo grande de modo que las dos caras que quedan sin pintar son paralelas. Después se deshace el cubo grande separándose los cubos pequeños. Determine cuántos cubos pequeños no tienen pintura en ninguna de sus caras.

56-Exprese el volumen del tetraedro regular en función de su arista.

57-Se necesita proteger un cultivo de tabaco, para ello se debe cubrir el campo con una tela semejante a un mosquitero en forma de prisma. Halla la cantidad de tela necesaria para cubrir el campo de 104 m de largo y 78 m de ancho si la tela debe alcanzar una altura uniforme de 2,5 m.

58- Halla el área total de un cubo equivalente a un ortoedro de 18,0 cm de largo, 16 cm de ancho y 6,00 cm de alto.

59- ¿Qué cantidad de tierra hay que extraer para abrir una cisterna en forma de ortoedro de 8,1 m de largo, 5,4 de ancho y 1,8 m de profundidad?

60- Dos pirámides tienen igual altura. Sus bases son cuadradas, siendo el lado de uno de los cuadrados el doble que el lado del otro. ¿Qué relación existe entre sus volúmenes?

61-Una piscina cuya forma es de prisma recto de base rectangular tiene 50 m de largo, 25 m de ancho y 200 cm de profundidad.

a) ¿Cuál es, en litro, su capacidad?

b) Si está cubierta completamente con azulejos cuadrados de 0,04 m^2de superficie, ¿cuántos azulejos se utilizaron?

Capítulo 3. Semejanza de figuras geométricas.

Según la leyenda (relatada por **Plutarco**), Tales de Mileto en un viaje a Egipto, visitó las pirámides de Guiza (**Keops, Kefrén y Micerinos**), construidas varios siglos antes. Admirado ante tan portentosos monumentos, quiso saber su altura. La leyenda dice que solucionó el problema aprovechando la semejanza de triángulos (y bajo la suposición de que los rayos solares incidentes eran paralelos).

El desarrollo de la Geometría comienza a partir del siglo VII a.n.e. en Grecia, alcanza su florecimiento con el trabajo científico de notables matemáticos entre los que se encuentran Tales de Mileto y Pitágoras (500 a.n.e.), que pueden considerarse los padres de esta ciencia.

Tales de Mileto vivió entre los años 625 a. C. y 547 a. C., fue un filósofo y científico griego. Nació y murió en Mileto, ciudad griega de la costa Jonia (hoy en Turquía). En la antigüedad se le consideraba uno de los Siete Sabios de Grecia. En la matemática se dedicó al estudio de la Geometría. Los egipcios habían aplicado algunos de estos conocimientos para la división y parcelación de sus terrenos, pero según los pocos datos con los que se cuenta, Tales se habría dedicado en Grecia mucho menos al espacio (a las superficies) y mucho más a las líneas y a las curvas, alcanzando así su geometría un mayor grado de complejidad y abstracción. Se le considera el iniciador de la geometría demostrativa, en la que las propiedades comienzan a demostrarse por medio de razonamientos y no como un simple resultado de la práctica.

Se atribuyen a Tales varios descubrimientos matemáticos:

1. Todo diámetro biseca a la circunferencia.
2. Los ángulos en la base de un triángulo isósceles son iguales.
3. Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.
4. Dos triángulos que tienen dos ángulos y un lado respectivamente iguales son iguales.
5. Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.
6. Los segmentos determinados por una serie de paralelas cortadas por dos transversales son proporcionales.

Estos contenidos de diferentes maneras se desarrollan en el presente texto, por ejemplo, entre las propiedades demostradas, está la relacionada con los segmentos de semirrectas determinados por rectas paralelas que las intersecan y que se conoce con el nombre de Teorema de las Transversales. Además, el conocido como primer teorema de Tales recoge uno de los postulados más básicos de la geometría, a saber, que: "**Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtienen dos triángulos semejantes".** Derivado de este teorema se obtiene un corolario que es considerado la base de la geometría descriptiva. Su utilidad es evidente, según **Heródoto**, el propio Tales empleó el corolario de su teorema para medir la altura de la pirámide de Keops en Egipto.

3.1 Repaso sobre razones y proporciones geométricas.

Es conocido que razón o relación entre dos números es el resultado de compararlos. Además, sabemos que existen dos formas de comparar o relacionar cantidades expresadas en la misma unidad:

1- Hallando cuantas unidades es una de ellas mayor que la otra, o sea, encontrando la diferencia entre dichas cantidades; en este caso tenemos la razón aritmética o por diferencia.
2- Hallando cuantas veces la una contiene a la otra, es decir, buscando el cociente de ambas; en este caso tenemos la razón geométrica o por cociente.

Por las importantísimas aplicaciones que tiene en Geometría, en este estudio, solamente nos ocuparemos de la razón geométrica.

Por ejemplo, para comparar los números 12 y 4 podemos obtener el cociente entre ellos $\left(\frac{12}{4} = 3\right)$ y entonces decimos que 3 veces el número 4 está contenido en el número 12 o que el número 12 es el triplo del número 4.También podemos decir que la razón entre 12 y 4 es 3.

Si comparamos los números 6 y 9 obteniendo el cociente (o razón) entre ellos $(\frac{6}{9} = \frac{2}{3})$, decimos que el número 6 es $\frac{2}{3}$ del número 9 o que la razón entre 6 y 9 es $\frac{2}{3}$.

Por lo que, **razón geométrica o cociente de dos números**: es el cociente obtenido al dividir uno entre el otro.

Cuando se habla de la razón de dos cantidades, sin especificar, se sobreentiende que es la razón geométrica.

En general, la razón entre dos números *a* y *b* (*b*≠0) es la fracción $\frac{a}{b}$. Esta razón también puede escribirse así a: *b*. En ambas representaciones

$(\frac{a}{b} \quad o \quad a : b)$ se lee *a* es *a* *b.*

Ejemplo 1

Halla la razón entre los números siguientes:

a) 3 y 5 b) $\frac{2}{3}$ y $\frac{2}{5}$ c) 0,48 y 0,8 d) 48 y 36

Solución.

a)3 y 5

La razón es el cociente entre 3 y 5, o sea, la fracción que tiene como numerador el primer número, que es 3, y como denominador el número 5.

Respuesta: La razón entre 3 y 5 es $\frac{3}{5}$.

b)$\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{5}$

Se plantea el cociente entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{2}{5}$ $\left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{5}}\right)$ o $\left(\frac{2}{3} : \frac{2}{5}\right)$; ahora bien multiplicando por el recíproco obtenemos $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2}\right)$, efectuando el producto de fracciones y simplificando da como resultado $\left(\frac{5}{3}\right)$.

Respuesta: La razón entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{2}{5}$ es $\frac{5}{3}$.

c) 0,48 y 0,8

Se plantea el cociente $\left(\frac{0{,}48}{0{,}8}\right)$ o (0,48: 0,8); se puede calcular la razón representando las expresiones decimales como una fracción decimal $\left(\frac{\frac{48}{100}}{\frac{8}{10}}\right)$ o $\left(\frac{48}{100} : \frac{8}{10}\right)$ y proceder como el inciso anterior $\left(\frac{48}{100} \cdot \frac{10}{8}\right)$, efectuando el producto de fracciones y simplificando tanto como sea posible, da como resultado $\left(\frac{3}{5}\right)$.

Respuesta: La razón entre 0,48 y 0,8 es $\frac{3}{5}$.

d) 48 y 36

Escribimos la fracción $\frac{48}{36}$, esta fracción se puede simplificar y se simplifica tanto como sea posible y así obtenemos una fracción equivalente a ella $\frac{4}{3}$.

Respuesta: La razón entre 48 y 36 es $\frac{4}{3}$.

Ejemplo 2.

Busca tres pares de números que estén a la razón:

a) $\frac{3}{5}$ b) 6: 2

Solución.

a) Hay que hallar pares de números cuyo cociente indicado sea $\frac{3}{5}$, para ello ampliamos esta fracción (multiplicando el numerador y el denominados por un mismo número diferente de cero). En este caso la ampliaremos por: 2; $\frac{1}{4}$ y 0,3.

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{0,9}{1,5}$$

Respuesta: Los pares de números 6 y 10; $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{4}$; 0,9 y 1,5 están en la razón $\frac{3}{5}$.

b) En este caso podemos proceder ampliando (multiplicando el numerador y el denominados por el número 4 y por el número 10) o simplificando la fracción $\frac{6}{2}$

$\frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{24}{8} = \frac{60}{20}$, por lo que hemos hallados fracciones equivalentes a $\frac{6}{2}$ y están a la misma razón.

Respuesta: Los pares de números 3 y 1; 24 y 8; 60 y 20 están en la razón 6 : 2.

La igualdad entre dos razones es una proporción.

Por lo que una proporción geométrica es la igualdad de dos razones geométricas. Cuando se hable de proporción se sobrentiende que es de proporción geométrica.

Por ejemplo, la igualdad $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$ es una proporción, que también puede escribirse así: 5: 6 = 10: 12. En ambos casos se lee **5 es a 6 como 10 es a 12.**

Los números que figuran en una proporción son sus términos y se les denomina de la forma siguiente:

extremo medio medios

$\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$ 5: 6 = 10: 12

medio extremo extremos

Propiedad fundamental de las proporciones: En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Por ejemplo, en la proporción anterior el producto de los extremos 5. 12 es igual al producto de los medios 6. 10.

5. 12 = 6. 10 = 60

Esta propiedad nos posibilita calcular un término de una proporción si conocemos los tres restantes.

Ejemplo 3.

Halla el valor de *x* en las proporciones siguientes:

a) $\frac{x}{21} = \frac{6}{7}$ b) $\frac{3}{4} : x = \frac{2}{3} : \frac{4}{5}$ c) $\frac{1{,}3}{0{,}8} = \frac{3{,}9}{x}$

Solución.

a) Aplicando la propiedad fundamental de las proporciones obtenemos la ecuación 7x = 126 y resolviendo obtenemos el valor de *x* = 18.

Sustituimos el valor de *x* para verificar si es solución de la ecuación original, o sea, si es el término de la proporción que queríamos hallar.

Comprobación.

$\frac{18}{21} = \frac{6}{7}$ resulta que 18. 7 = 126

21. 6 = 126

Comparando: 126 = 126

Respuesta: El valor de *x* = 18.

b) Podemos escribir la proporción de esta manera $\frac{\frac{3}{4}}{x} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}$. Aplicando la propiedad fundamental de las proporciones obtenemos la ecuación:

$x = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}}{\frac{2}{3}}$ de aquí resulta que $x = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{3}}$, luego $x = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{2}$ por lo que el valor de $x = \frac{9}{10}$.

Comprobación

$\frac{3}{4} : \frac{9}{10} = \frac{2}{3} : \frac{4}{5}$

M.I: $\frac{3}{4} : \frac{9}{10} = \frac{3}{4} \cdot \frac{10}{9} = \frac{5}{6}$ M.D: $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{6}$

Comparación: $\frac{5}{6} = \frac{5}{6}$

Respuesta: El valor de $x = \frac{9}{10}$.

c) Aplicando la propiedad fundamental de las proporciones obtenemos la ecuación 1,3x = 3,9. 0,8. Al despejar la x obtenemos que: $x = \frac{3,9\ .\ 0,8}{1,3}$, luego el valor de$x$=2,4

Comprobación:

$\frac{1,3}{0,8} = \frac{3,9}{2,4}$ entonces 1,3. 2,4 = 3,12

3,9 . 0,8 = 3,12

Comparando: 3,12 = 3,12

Respuesta: El valor de x = 2,4

Ejemplo 4.

a) Dos números están en la razón 3 es a 4. Si el menor es 15, ¿cuál es el mayor?

b) Lo que tiene María es a lo que tiene Pedro como 5 es a 8. Si María tiene $100, ¿Cuánto tiene Pedro?

Solución.

a) Decir que están en la razón 3 a 4 es decir que el menor es al mayor como 3 es a 4.

Si representamos al mayor por x, la relación del menor al mayor será $\frac{15}{x}$ y como, según el problema, esta relación es la misma que la de 3 a 4, entonces:

$\frac{3}{4} = \frac{15}{x}$ Comprobación:

$x = \frac{15\ .\ 4}{3}$ $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$ resulta que: 3 . 20 = 60

x = 20 4. 15 = 60

Comparación: 60 = 60

Respuesta: El número mayor es 20.

b) Datos

Cantidad de dinero de María - $100 $\frac{100}{x} = \frac{5}{8}$

Cantidad de dinero de Pedro- $x = \frac{100\ .\ 8}{5}$

El dinero de María, con relación x = 160 al de Pedro es como 5 es a 8

Comprobación:

$\frac{100}{160} = \frac{5}{8}$ resulta que: 100 . 8 = 800

160. 5 = 800

Comparación: 800 = 800

Respuesta: La cantidad de dinero que tiene Pedro es de $160.

De toda proporción se pueden obtener otras tres proporciones distintas manteniéndose la proporción.

Por ejemplo, si tenemos la proporción $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$, podemos a partir de ella obtener tres proporciones aplicando las siguientes transformaciones:

a) Intercambiamos sus medios: $\frac{3}{15} = \frac{4}{20}$

b) Intercambiamos sus extremos: $\frac{20}{4} = \frac{15}{3}$

c) Invirtiendo las razones: $\frac{4}{3} = \frac{20}{15}$

Ejercicios del epígrafe 1

1- Halla la razón entre los números siguientes.

a) 7 y 8 b) 12 y 3 c) 42 y 63

d) 0,48 y 1,68 d) 2, 5 y $\frac{5}{3}$ e) $\frac{4}{3}$ y $\frac{3}{2}$

2-Halla cuatro pares de números que estén en la razón que se indica en cada caso:

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{40}{80}$ c) 4: 5 d) 15: 3

3- Indique cuáles son proporciones y cuáles no, y porqué, en:

a) $\frac{1}{4} = \frac{3}{12} = \frac{3}{12}$ b) $\frac{7}{5} = \frac{14}{10}$ c) $\frac{11}{12} = \frac{12}{11}$

d) $\frac{0,36}{5,4} = \frac{1}{15}$ e) 5: 6 = 12: 14 f) $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{15}} = \frac{5}{2}$

g) $\frac{m}{n} = \frac{bm}{bn}$ ($b \neq 0$) h) $\frac{x+y}{4} = \frac{7x+7y}{28}$

4- Calcula el valor de x en las proposiciones siguientes:

a) $\frac{5}{12} = \frac{30}{x}$ b) $\frac{x}{4} = \frac{1,5}{24}$ c) $\frac{7,2}{0,18} = \frac{x}{0,5}$ d) 25 : x = x : 36

e) $\frac{7}{8} : x = 3 : \frac{8}{5}$ f) $\frac{15-x}{3} = \frac{24}{9}$ g) $\frac{x-2}{x} = \frac{3}{x+6}$

5- La razón entre un número P y 15 es $\frac{4}{5}$, entonces el número *P* es:

a) 60 b) $\frac{4}{3}$ c) 12 d) $\frac{75}{4}$

6- Dos números están en la razón de 13 es a 5. Si el menor es 15, ¿cuál es el mayor?

7- Los números 2 y 8 están en la misma razón que los números 11 y 44. Forma tres proporciones diferentes con estos números.

8- Para construir una vivienda en una parcela de una zona de nueva urbanización, el Instituto de Planificación Física municipal, establece que el área construida con relación al área de la parcela sea de $\frac{4}{5}$ de la misma. Si la parcela tiene un área de 80 m^2, ¿qué superficie ocuparía la vivienda?

3.2 Razón entre segmentos.

En planos, mapas y maquetas encontramos usualmente una escala, como por ejemplo, 1 : 90 000 000. Esta razón numérica indica que la longitud de cada segmento en el mapa, se comporta como 1 a 90 000 000, o sea, que 1 cm en el mapa o el plano equivalen a 900 km. Esta escala no es más que la razón entre dos segmentos.

Definición

Se llama **razón entre dos segmentos** a la razón entre los números que representan las medidas de sus longitudes en la misma unidad de medida.

La razón entre dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ la denotamos así: $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$.

De acuerdo con la definición, las cantidades deben estar expresadas en la misma unidad.

Ejemplo 1

Hallar la razón entre los segmentos:

a) $\overline{AB}$ = 3,0 cm y $\overline{CD}$ = 7,0 cm

b) $\overline{MN}$ = 4,0 dm y $\overline{PQ}$ = 8,0 cm

Solución.

a) Si $\overline{AB}$ = 3,0 cm y $\overline{CD}$ = 7,0 cm, tenemos que la razón entre ellos es $\frac{3}{7}$ ($\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{3}{7}$).

b) Si $\overline{MN}$ = 4,0 dm y $\overline{PQ}$ = 8,0 cm, es un **error** plantear que la razón entre ellos es $\frac{4}{8}$, ya que ambos segmentos no tienen la misma unidad de medidas, lo **correcto** es expresar primero las medidas de los segmentos en la misma unidad de longitud (se escoge cualquiera de ellos).

$\overline{MN}$ = 4,0 dm = 40 cm ; $\overline{PQ}$ = 8,0 cm

$\frac{\overline{MN}}{\overline{PQ}} = \frac{40}{8}$ = 5

Definición

Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son proporcionales a los segmentos $\overline{A_1B_1}$ y $\overline{C_1D_1}$, si se cumple que $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{C_1D_1}}$

Ejemplo 2

Comprueba en cada caso si los segmentos $\overline{MN}$ y $\overline{PT}$ son proporcionales a los segmentos $\overline{RQ}$ y $\overline{AB}$.

a) $\overline{MN} = 35\ mm$ y $\overline{PT} = 63\ mm$

$\overline{RQ} = 10\ mm$ y $\overline{AB} = 18\ mm$

b) $\overline{MN} = 0{,}24\ dm$ y $\overline{PT} = 0{,}8\ dm$

$\overline{RQ} = 30\ dm$ y $\overline{AB} = 10\ m$

c) $\overline{MN} = 0.5\ cm$ y $\overline{PT} = 65\ mm$

$\overline{RQ} = 20\ mm$ y $\overline{AB} = 34\ mm$

Solución.

Los segmentos son proporcionales si son iguales las razones entre los pares de segmentos dados, o sea: $\frac{\overline{MN}}{\overline{PT}} = \frac{\overline{RQ}}{\overline{AB}}$.

a) $\frac{35}{63} = \frac{10}{18}$ Comprobación:35. 18 = 63. 10 = 630

Respuesta: Son proporcionales.

b) Expresamos primero las medidas de $\overline{RQ}$ y $\overline{AB}$ en la misma unidad de medida.

$\overline{RQ} = 30\ dm = 3{,}0\ m;$ $\overline{AB} = 10\ m$

$\frac{0{,}24}{0{,}8} = \frac{3}{10}$ Comprobación: 0,24. 10 = 0,8. 3 = 2,4

Respuesta: Son proporcionales.

c) Expresamos primero las medidas de $\overline{MN}$ y $\overline{PT}$ en la misma unidad de medida.

$\overline{MN} = 0.5\ cm = 5{,}0\ mm;\ \ \overline{PT} = 65\ mm$

$\frac{5}{65} \neq \frac{20}{34}$ Comprobación: 5. 34 $\neq$ 65. 20

170 $\neq$ 1300

Respuesta: No son proporcionales.

Definición

A un segmento de longitud xse le llama **cuarto proporcional** de tres segmentos de longitudes *a, b* y *c* si se cumple que:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ (*a*: *b* = *c* : *x*)

Ejemplo 3

Determina la longitud de un segmento $\overline{GH}$ que sea cuarto proporcional a los segmentos $\overline{AB}$ = 6,0 cm, $\overline{CD}$ = 2,4 cm y$\overline{EF}$ = 7,0 cm.

Solución.

Para encontrar la longitud del segmento $\overline{GH}$ debemos plantear una proporción entre los cuatros segmentos dados:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}}$$

Sustituyendo las longitudes de los segmentos conocidos podemos encontrar la longitud del segmento pedido, luego:

$$\frac{6{,}0\ cm}{2{,}4\ cm} = \frac{7{,}0\ cm}{\overline{GH}}$$

$6{,}0\ cm$. $\overline{GH}$ = $7{,}0\ cm$. $2{,}4\ cm$

$\overline{GH}$ = $(\frac{16{,}8}{6})cm$

$\overline{GH}$ = 2,8 cm

Respuesta: La longitud del segmento $\overline{GH}$ es cuarto proporcional a las longitudes de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$ es de 2,8 cm.

Definición

A un segmento de longitud *x* se le llama **tercero proporcional** de dos segmentos de longitudes *a y b* si se cumple que:

$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$ (*a* : *b* = *b* : *x*)

Ejemplo 4

Determina la longitud de un segmento $\overline{GH}$ que sea tercero proporcional a los segmentos $\overline{AB}$ = 6,0 cm, $\overline{CD}$ = 2,4 cm.

Solución.

Para encontrar la longitud del segmento $\overline{GH}$ debemos plantear una proporción entre los tres segmentos dados:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{GH}}$$

Sustituyendo las longitudes de los segmentos conocidos podemos encontrar la longitud del segmento pedido, luego:

$$\frac{6{,}0\ cm}{2{,}4\ cm} = \frac{2{,}4\ cm}{\overline{GH}}$$

$6{,}0\ cm\ .\ \overline{GH} = 2{,}4\ cm\ .\ 2{,}4\ cm$

$\overline{GH} = (\frac{5.76}{6})cm$

$\overline{GH}$= 0,96 cm

Respuesta: La longitud del segmento $\overline{GH}$ es tercero proporcional a las longitudes de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$.

Definición

A un segmento de longitud *x* se le llama **medio proporcional** de dos segmentos de longitudes *a y b* si se cumple que:

$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ ($a : x = x : b$)

Ejemplo 4

Determina la longitud de un segmento $\overline{GH}$ que sea medio proporcional a los segmentos $\overline{AB}$ = 0,6 cm, $\overline{CD}$ = 2,4 cm.

Solución.

Para encontrar la longitud del segmento $\overline{GH}$ debemos plantear una proporción entre los tres segmentos dados:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{CD}}$$

Sustituyendo las longitudes de los segmentos conocidos podemos encontrar la longitud del segmento pedido, luego:

$$\frac{0{,}6\ cm}{\overline{GH}} = \frac{\overline{GH}}{2{,}4\ cm}$$

$\overline{GH}\ .\ \overline{GH} = 0{,}6\ cm\ .\ 2{,}4\ cm$

$(\overline{GH})^2 = 1{,}44\ cm^2$

$\overline{GH} = \sqrt{1{,}44\ cm^2}$

$\overline{GH} = 1{,}2\ cm$

Respuesta: La longitud del segmento $\overline{GH}$ es medio proporcional a las longitudes de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$.

Existen algunas propiedades referidas a las proporciones que son de gran utilidad.

Propiedades:

1) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

2) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a \pm b}{a \text{ o } b} = \frac{c \pm d}{c \text{ o } d}$

Ejemplo 5

a) La razón de dos segmentos es $\frac{4}{3}$ y su suma de sus longitudes es 28 cm. Halla la longitud de estos dos segmentos.

b) Dos triángulos PQR y ABC tienen sus lados proporcionales; si el perímetro del primero mide 30 cm y los lados del segundo triángulo miden 4,0 cm, 5,0 cm y 6,0 cm, respectivamente. Halle la longitud de los lados del triángulo PQR.

Solución.

a) Sean a y b las longitudes de los segmentos buscados y por los datos se tiene que:

$\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$ y $a + b = 28$

Aplicando la propiedad 2) se cumple:

$\frac{a+b}{b} = \frac{4+3}{3} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{7}{3}$, sustituyendo el valor de $a + b$, obtenemos que:

$\frac{28}{b} = \frac{7}{3}$

$b = \frac{28\ .\ 3}{7}$

$b = 12$

Sustituyendo el valor de b en $a + b = 28$, obtenemos que $a = 16$

Comprobación: $\frac{16}{12} = \frac{4}{3}$ resulta que: 16. 3 = 12. 4 = 48

Respuesta: La longitud de un segmento es de 12 cm y el del otro es de 16 cm.

b) Sean a, b y c las longitudes de los lados buscados y por los elementos que se ofrecen en el ejercicio se puede plantear:

$\frac{a}{4}=\frac{b}{5}=\frac{c}{6}$ y $a + b + c = 30$

Aplicando la propiedad 1) se cumple:

$\frac{a+b}{9}=\frac{c}{6}$

$\frac{a+b+c}{15}=\frac{a}{4}=\frac{b}{5}=\frac{c}{6}\Rightarrow\frac{30}{15}=\frac{a}{4}\Rightarrow a = 8.$

De forma análoga se obtiene los otros dos lados del triángulo, es decir, $b = 10$ y c = 12. (Realiza la comprobación.)

Respuesta: La longitud de cada lado del triángulo PQR es de 8,0 cm, 10 cm y 12 cm respectivamente.

Ejercicios del epígrafe 2

1. Hallar la razón entre los siguientes segmentos:
   a) $\overline{AB}$ = 48 mm y $\overline{CD}$ = 6,0 mm
   b) $\overline{PQ}$ = 0,17 m y $\overline{RT}$ = 85 cm
   c) $\overline{MN}$ = $2\frac{3}{4}$ dm y $\overline{EF}$ = 220 cm
   d) $\overline{GH}$ = $\frac{4}{3}$ mm y $\overline{KL}$ = 0,04 dm
2. Calcula las cantidades o números que corresponden a los espacios en blanco en la tabla siguiente:

	Longitud de $\overline{AB}$	Longitud de $\overline{CD}$	$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$	$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$
a)	5,0 m	25 m		
b)		24 cm	0,25	
c)	40 km			0,2
d)		3,6 mm		$1\frac{2}{7}$
e)	$2\frac{3}{5}$ dm	5,2 m		

3. El segmento $\overline{PQ}$, figura 3.1, se ha dividido en 9 segmentos iguales. En él se han ubicado los puntos R, S y T, entonces:

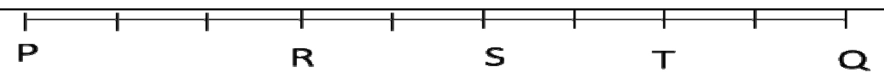


Fig. 3. 1

a) La razón entre los segmentos $\overline{PR}$ y $\overline{PQ}$ es de ________.

b) La razón entre los segmentos $\overline{RT}$ y $\overline{PS}$ es de ________.

c) La razón de $\frac{\overline{QR}}{\overline{RT}}$ es igual a _______

d) $\frac{2}{7}$ es la razón numérica entre los segmentos _____ y _____

e) Si $\frac{\overline{ST}}{\overline{QS}}$ = 0,5entonces la longitud de $\overline{ST}$ es de ______ y la longitud de $\overline{QS}$ es de____

4. Complete los espacios en blanco de forma tal que se cumpla $\overline{AB} : \overline{CD} = \overline{PQ} : \overline{RS}$

   a) Si $\overline{CD}$ = 5,6 dm $\overline{PQ}$ = 2,0 dm $\overline{RS}$ = 4,0 dm entonces $\overline{AB}$ = ______

   b) Si $\overline{AB}$ = 30 mm $\overline{PQ}$ = 16 cm $\overline{RS}$ = $1\frac{1}{3}$ cm entonces $\overline{CD}$ = ______

   c) Si $\overline{AB}$ = 0,7 cm $\overline{CD}$ = 49 mm $\overline{RS}$ = 0,07 m entonces $\overline{PQ}$ = ______

   d) Si $\overline{AB}$ = 36 m $\overline{CD}$ = $\frac{3}{5}$ m $\overline{PQ}$ = 120 dm entonces $\overline{RS}$ = _______

5. Seleccione la respuesta correcta

Se tiene que $\overline{AB}$ = 4,2 cm, $\overline{CD}$ = 50 mm y $\overline{EF}$ = 7,0 cm. La longitud que debe tener el segmento $\overline{GH}$ para que se cumpla la proporción $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}}$ es:

a) ___ 0,012 cm b) ___ 1,2 cm c) ___ 8,3 cm d) ___ 0,12 cm

6. Determina la longitud de un segmento $\overline{PH}$ que sea cuarto proporcional a los segmentos $\overline{AB}$ = 3,5 cm, $\overline{RD}$ = 28 cm y $\overline{EM}$ = 10 mm.

   b) Determina la longitud de un segmento $\overline{PH}$ que sea tercero proporcional a los segmentos $\overline{AB} = \frac{2}{5}$ cm, $\overline{RD} = \frac{4}{15}$ cm.

   c) Determina la longitud de un segmento $\overline{PH}$ que sea medio proporcional a los segmentos $\overline{AB}$ = 0,49 dm, $\overline{EM} = \frac{25}{64}$ dm.

7. Un segmento $\overline{RH}$ de 85 cm de longitud se divide por un punto N en dos segmentos que están en la relación 5: 12. Halla la longitud de los segmentos $\overline{RN}$ y $\overline{NH}$.

8. El perímetro de un triángulo es de 240 m. Si sus lados están en la relación 3: 4: 5, hallar la longitud de cada lado del triángulo.

9. Los rectángulos de la figura 3.2 tienen la misma área, *a* y *b* son las longitudes de los lados de uno de ellos, *c* y *d* son las longitudes del otro. Prueba que $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$

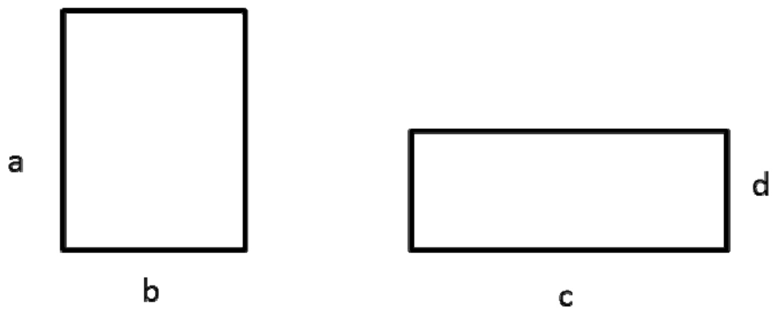


Fig. 3.2

3.3 Teoremas sobre segmentos proporcionales.

Estudiaremos algunos teoremas sobre segmentos proporcionales, de mucha importancia por la aplicación que tiene a la resolución de problemas, tanto geométricos como de la vida práctica.

En la figura 3.3 tenemos dos semirrectas de origen común O que son cortadas por varias rectas paralelas. Las rectas trazadas determinan varios segmentos en cada una de las semirrectas. Se dice que un segmento de una de estas semirrectas es correspondiente de un segmento de la otra:

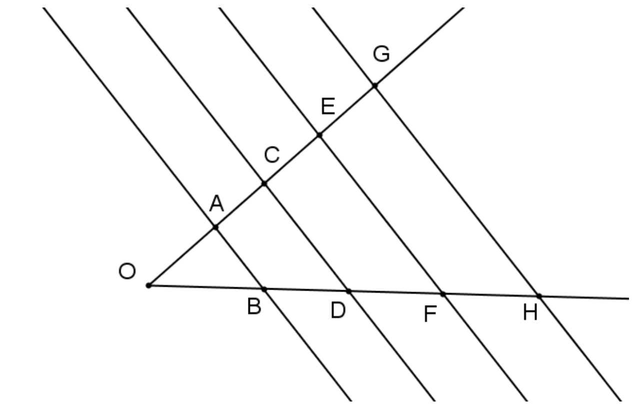


Figura 3.3

1) si sus extremos pertenecen a las mismas rectas, o

2) si tiene un extremo común (que es el origen de las semirrectas) y los otros extremos de ambos segmentos pertenecen a la misma recta.

Por ejemplo, en la figura 3.3 son correspondientes los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, $\overline{CE}$ y $\overline{DF}$, $\overline{AG}$ y $\overline{BH}$, $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$, $\overline{OG}$ y $\overline{OH}$, $\overline{OE}$ y $\overline{OF}$, etcétera.

Como las rectas que cortan a las semirrectas son paralelas entre sí, tiene lugar a un teorema que recibe el nombre de Teorema de las transversales, el cual consta de tres partes.

Teorema (Teorema de las transversales, primera parte).

Si dos semirrectas de origen común son cortadas por varias rectas paralelas, entonces la razón entre dos segmentos de una de ellas es igual a la razón entre los dos segmentos correspondientes en la otra.

Es decir, se forman segmentos proporcionales. Por ejemplo en la figura 3.3 se cumple que:

$\frac{\overline{OA}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{BD}}$, $\frac{\overline{OA}}{\overline{OG}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OH}}$, $\frac{\overline{AC}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{OF}}$ Para demostrar este teorema es suficiente tomar el caso en que las dos semirrectas son cortadas por dos rectas paralelas (fig. 3.4).

En este caso particular, la premisa es la siguiente:

Premisa*:*

- *AB* | | *CD*
- *OC* y *OD* semirrectas
- *A* punto de la semirrecta *OC*
- *B* punto de la semirrecta *OD*

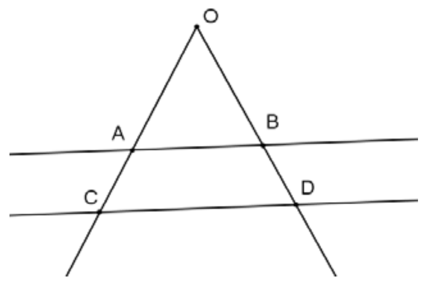


Figura 3.4

En la semirrecta *OC* las rectas paralelas determinan los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{AC}$ y $\overline{OC}$ y sus segmentos correspondientes en la semirrecta *OD* son $\overline{OB}$, $\overline{BD}$ y $\overline{OD}$ respectivamente.

Los diferentes pares de segmentos que podemos considerar en la semirrecta *OC* son: $\overline{OA}$ y $\overline{AC}$, $\overline{OA}$ y $\overline{OC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{OC}$. Por lo tanto, la tesis es la siguiente:

Tesis: $\frac{\overline{OA}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{BD}}$ (1) $\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}}$ (2) $\frac{\overline{AC}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{OD}}$ (3)

Demostración para (1):

Se trazan los segmentos AD *y CB* (fig.3.5) y consideramos las áreas de algunos triángulos.

En el ΔOAB se cumple que:

$A_1 = \frac{\overline{OA}\,.\,h_1}{2} = \frac{\overline{OB}\,.\,h_2}{2}$ por lo que $\overline{OA}\,.\,h_1 = \overline{OB}\,.\,h_2$ (a)

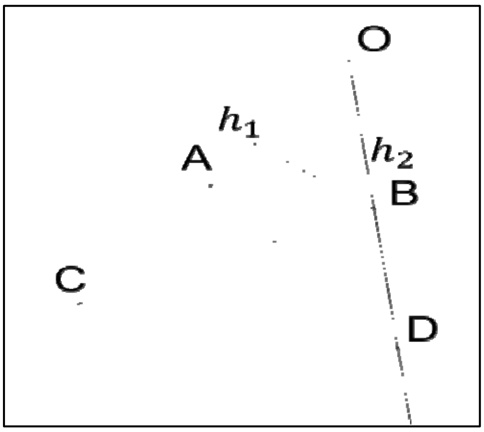


Fig. 3.5

En el ΔABC y en el ΔABD respectivamente se cumple que:

$$A_2 = \frac{\overline{AC}\,.\,h_1}{2} \quad y \quad A_3 = \frac{\overline{BD}\,.\,h_2}{2}$$

Dado que el ΔABC y el ΔABD tienen el lado $\overline{AB}$ y su altura común, sus áreas son iguales.

$A_2 = A_3$ por lo que $\frac{\overline{AC}\,.\,h_1}{2} = \frac{\overline{BD}\,.\,h_2}{2}$, por lo tanto $\overline{AC}\,.\,h_1 = \overline{BD}\,.\,h_2$ (b)

Dividiendo miembro a miembro (a) y (b) obtenemos:

$\frac{\overline{OA}\,.\,h_1}{\overline{AC}\,.\,h_1} = \frac{\overline{OB}\,.\,h_2}{\overline{BD}\,.\,h_2}$ luego: $\frac{\overline{OA}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{BD}}$

Análogamente se pueden demostrar (2) y (3), aunque (2) y (3) se pueden deducir a partir de la igualdad (1).

Con el asistente matemático el Geómetra o el Geogebra construye la figura 1.2 y con ayuda del puntero varia la posición del origen común de las semirrectas, comprobando mediante la medición previa de la longitud de los segmentos, la veracidad de las proporciones que aparecen en la tesis de la demostración.

Además, con el asistente matemático el Geómetra o el Geogebra realiza la construcción de una figura donde las rectas que cortan a las semirrectas no sean paralelas, y con ayuda del puntero varia la posición del origen común de las semirrectas, realizando la medición previa de la longitud de los segmentos ¿a qué conclusión llegas? Analízala con tu profesor.

Ejemplo 1

En la figura 3.6, *HI* | | *JK* intersecan a las semirrectas *SJ y SK*, *H* e *I* están en las semirrectas *SJ* y *SK* respectivamente. Plantea todas las proporciones que se obtienen si se aplica el teorema de las transversales.

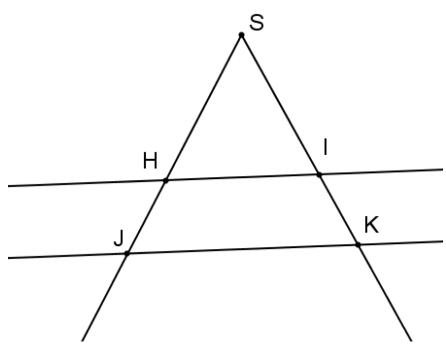


Figura 3.6

Solución:

En la semirrecta *SJ* las rectas paralelas determinan tres segmentos: $\overline{SH}$, $\overline{HJ}$ y $\overline{SJ}$. Sus segmentos correspondientes en la semirrecta *SK* son: $\overline{SI}$, $\overline{IK}$ y $\overline{SK}$.

Con $\overline{SH}$, $\overline{HJ}$ y $\overline{SJ}$ se pueden formar tres pares de segmentos: $\overline{SH}$ y $\overline{HJ}$,

$\overline{SH}$ y $\overline{SJ}$, $\overline{HJ}$ y $\overline{SJ}$ por lo que las proporciones que se obtienen son las siguientes:

$$\frac{\overline{SH}}{\overline{HJ}} = \frac{\overline{SI}}{\overline{IK}};\ \frac{\overline{SH}}{\overline{SJ}} = \frac{\overline{SI}}{\overline{SK}};\ \frac{\overline{HJ}}{\overline{SJ}} = \frac{\overline{IK}}{\overline{SK}}$$

Si se conocen tres términos de una proposición es posible calcular el cuarto término. Apoyándonos en esto es posible aplicar el teorema de las transversales para calcular las longitudes de segmentos si contamos con los datos necesarios.

Ejemplo 2

En la figura 3.7, *MC* | | *ND* cortan a las semirrectas *ON y OD, M* y *C* están en la semirrectas *ON* y *OD* respectivamente. $\overline{OM}$ = 2,0 cm. $\overline{MN}$ = 4,0 cm y $\overline{OC}$

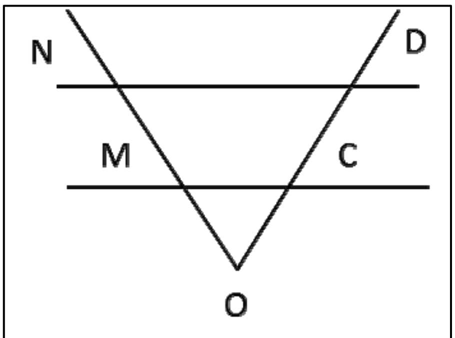


Fig. 3.7

= 3,0 cm. Halla $\overline{CD}$ y $\overline{OD}$.

Solución.

Si aplicamos el teorema de las transversales podemos plantear una proporción en la que la figuren los segmentos cuyas longitudes son conocidas.

$\frac{\overline{OM}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{CD}}$ (1)

Sustituyendo en (1) tenemos que:

$\frac{2}{4} = \frac{3}{\overline{CD}} \Rightarrow$ 2 $\overline{CD}$ = 4. 3 luego $\overline{CD} = \frac{4\,.3}{2}$ obtenemos que: $\overline{CD}$ = 6,0 cm

$\overline{OD}$ lo podemos obtener calculando la suma de segmentos.

$\overline{OD} = \overline{OC} + \overline{CD}$

$\overline{OD}$ = 3,0 cm + 6,0 cm obtenemos que $\overline{OD}$ = 9,0 cm

Ejemplo 3

En la figura 3.8, *SQ* | | *RP* intersecan a las semirrectas *AP y AR*, *Q* y *S* son puntos de la semirrectas *AP* y *AR* respectivamente y se cumple que: $\frac{\overline{AQ}}{\overline{QP}} = \frac{1}{4}$, $\overline{QP}$ = 12,0 cm y $\overline{AR}$ = 16,0 cm. Calcula $\overline{AQ}$, $\overline{AS}$ y $\overline{RS}$

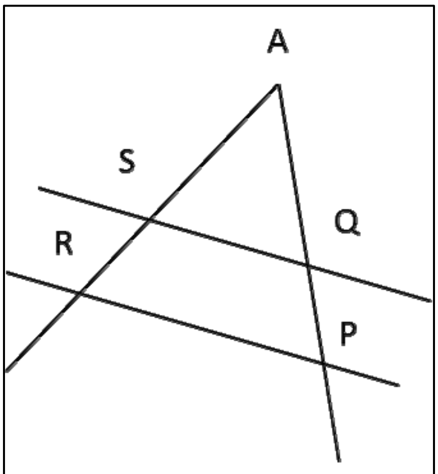


Fig. 3. 8

Solución.

Para calcular $\overline{AQ}$

$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QP}} = \frac{1}{4}$ por datos

$\overline{AQ} = \frac{1}{4}\overline{QP}$

$\overline{AQ} = \frac{1}{4}$. 12,0cm obtenemos que $\overline{AQ}$ = 3,00 cm

Para calcular $\overline{AS}$, como conocemos que $\overline{AR}$ = 16 cm y *SQ* | | *RP* por el teorema de las transversales podemos plantear:

$\frac{\overline{AS}}{\overline{AR}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}}$ (1)

En la proporción (1) falta conocer la longitud de $\overline{AP}$, pero:

$\overline{AP} = \overline{AQ} + \overline{QP}$ por suma de segmentos

$\overline{AP}$ = 3,00 cm + 12,0cm obtenemos que $\overline{AP}$ = 15,0 cm

De (1) tenemos:

$\overline{AS} = \frac{\overline{AQ}\,.\,\overline{AR}}{\overline{AP}}$, sustituyendo los valores de las longitudes de $\overline{AQ}$, $\overline{AR}$ y $\overline{AP}$ obtenemos que:

$\overline{AS} = (\frac{3 \cdot 16}{15})$ cm   luego $\overline{AS} = 3{,}20$ cm

Para calcular $\overline{RS}$:

$\overline{RS} = \overline{AR} - \overline{AS}$ por resta de segmentos

$\overline{RS} = 16{,}0 \text{ cm} - 3{,}20 \text{ cm}$

$\overline{RS} = 12{,}8$ cm

(También se puede calcular la longitud de $\overline{RS}$ aplicando el teorema de las transversales).

Para una mejor comprensión de la segunda y tercera parte del Teorema de las transversales, es importante destacar, que no necesariamente tienen que ser dos semirrectas que tengan un punto común, sino que pueden ser varias. Además, pueden ser varias las rectas paralelas que corten a las semirrectas.

Definición

Se dice que un **segmento de una recta paralela es correspondiente de un segmento de otra paralela** si sus extremos están en las mismas semirrectas.

En la figura 3.9 son correspondientes los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$; $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$ y $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$

Teorema (Teorema de las transversales, segunda parte).

Si varias semirrectas de origen común son cortadas por varias rectas paralelas, entonces se cumple que la razón entre dos segmentos de una semirrecta es igual a la razón entre los dos segmentos de paralelas correspondientes.

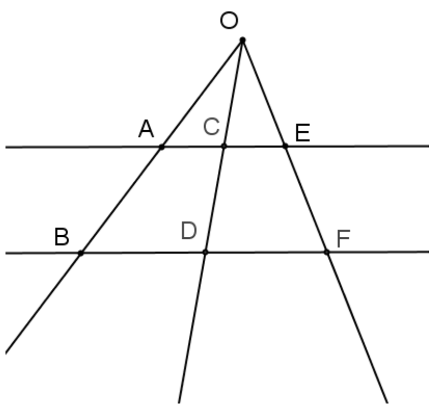


Figura 3.9

En la figura 3. 9 se cumple que:

$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}$, $\frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{DF}}$, $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{BF}}$

Nota:

Los segmentos de semirrectas tienen que tener siempre un extremo que coincide con el origen de las semirrectas.

Teorema (Teorema de las transversales, tercera parte).

Si varias semirrectas de origen común son cortadas por varias rectas paralelas, entonces se cumple que la razón entre dos segmentos de paralelas es igual a la razón entre los dos segmentos de paralelas correspondientes.

En la figura 3. 9 se cumple que:

$\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DF}}$ y $\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BF}}$

Ejemplo 4

En el triángulo ABC (figura 3.10), se conoce que:

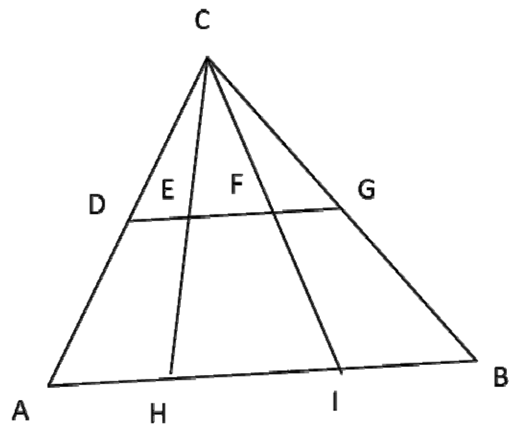


Fig. 3. 10

- $\overline{DG} \parallel \overline{AB}$
- $\overline{CH} \cap \overline{DG}$ = {E} y $\overline{CI} \cap \overline{DG}$ = {F}
- D $\in \overline{AC}$ y G $\in \overline{CB}$
- A, H, I y B puntos alineados.
- $\overline{CD}$ = 3,2 cm, $\overline{CA}$ = 8,0 cm, $\overline{DE}$ = 1,2 cm y $\overline{HB}$ = 7,0 cm

Calcula la longitud de $\overline{AH}$, $\overline{EG}$ y $\overline{DG}$.

Solución

Para calcular $\overline{AH}$ utilizamos la segunda parte del teorema de las transversales, procediendo de la siguiente forma:

$\frac{\overline{CD}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AH}}$ luego $\overline{AH} = \frac{\overline{DE}\,.\,\overline{CA}}{\overline{CD}}$

Sustituyendo obtenemos que: $\overline{AH} = \frac{1,2\,.\,8,0}{3,2}$ y $\overline{AH}$ = 3,0 cm

Para calcular $\overline{EG}$ utilizamos la tercera parte del teorema de las transversales, procediendo de la siguiente forma:

$\frac{\overline{DE}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{HB}}$ luego $\overline{EG} = \frac{\overline{DE}\,.\,\overline{HB}}{\overline{AH}}$

Sustituyendo obtenemos que:

$\overline{EG} = \frac{1,2\,.\,7,0}{3,0}$

$\overline{EG}$ = 2,8 cm

Para calcular $\overline{DG}$, procedemos de la siguiente forma:

$\overline{DG} = \overline{DE} + \overline{EG}$

$\overline{DG}$ = 1,2 cm + 2,8 cm

$\overline{DG}$ = 4,0 cm

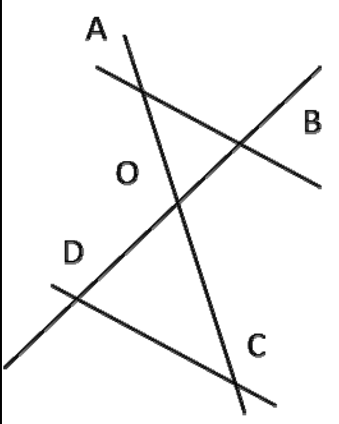


Fig. 3. 11

Para determinar la longitud de $\overline{DG}$ existe otra vía. Analízala con tu profesor.

En la figura 3. 11, dos rectas que se cortan son cortadas por dos rectas paralelas de forma tal que el punto 0, donde se cortan las rectas, está situado entre las rectas paralelas.

De esta forma surgen los segmentos de rectas $\overline{OD}$ y $\overline{OC}$ correspondientes al segmento de paralela $\overline{DC}$, así como los segmentos de recta $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ correspondientes al segmento de paralela $\overline{AB}$.

Aquí se cumple la proporción

$\overline{DC} : \overline{AB} = \overline{OD} : \overline{OB}$ (= $\overline{OC} : \overline{OA}$)

Esto se deduce de la segunda parte del teorema de las transversales, cuando al ΔOAB (Fig. 3.11) se le aplica una rotación de 180^0 con centro O. También la primera parte del teorema puede aplicarse en esta situación.

Teorema recíproco del teorema de las transversales.

Para poder analizar el recíproco del teorema de las transversales, es necesario diferenciar claramente la premisa y la tesis del teorema.

Al intercambiar una de las condiciones de la premisa y de la tesis del teorema obtenemos una nueva proposición que puede ser verdadera o falsa, y para considerarla un teorema es preciso demostrarla. En el caso de que la proposición sea verdadera constituiría el teorema recíproco del teorema de las transversales.

Enunciemos el teorema de las transversales (de acuerdo con la figura 3.12) de la siguiente manera:

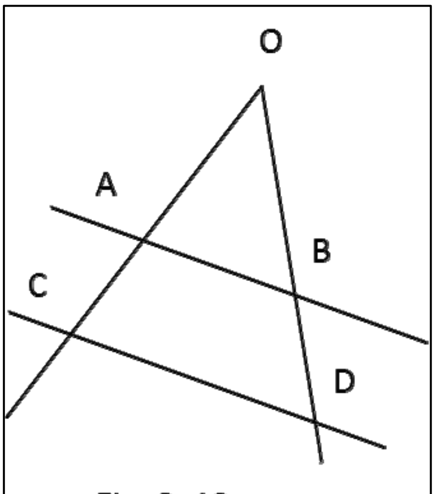


Fig. 3. 12

Si las rectas *AB y CD* cortan a las semirrectas *OC y OD y* AB||*CD*, entonces se cumple

$\overline{OA} : \overline{AC} = \overline{OB} : \overline{BD}$

(Basta considerar una sola proposición en la tesis, ya que si una de ellas se cumple también se cumple las dos restantes)

Premisa: *AB*| |*CD* cortan a las semirrectas *OC y OD A* punto de la semirrecta *OC* y *B* punto de la semirrecta *OD*

Tesis: $\overline{OA} : \overline{AC} = \overline{OB} : \overline{BD}$

Enunciado del **teorema recíproco**.

Si las rectas *AB y CD* cortan a las semirrectas *OC y OD,* y $\overline{OA} : \overline{AC} = \overline{OB} : \overline{BD}$ entonces *AB*||*CD.*

Premisa: *AB y CD* cortan a las semirrectas *OC y OD* y $\overline{OA} : \overline{AC} = \overline{OB} : \overline{BD}$

Tesis: *AB*||*CD*

Una de las premisas del teorema directo (*AB*||*CD*) pasó a ser la tesis del teorema recíproco, mientras que la tesis

$\overline{OA} : \overline{AC} = \overline{OB} : \overline{BD}$ del teorema directo pasa a ser una de las premisas del teorema recíproco.

El enunciado general del recíproco del teorema de las transversales es el siguiente:

Teorema

Si dos semirrectas de origen común son cortadas por varias rectas de manera que la razón entre dos segmentos de una de ellas es igual a la razón entre los dos segmentos correspondientes en la otra, entonces las rectas son paralelas.

Para realizar la demostración del teorema recíproco del teorema de las transversales, la realizaremos por el tipo de demostración llamado demostración indirecta o por reducción al absurdo. En este tipo de demostración se empieza por suponer como cierta la negación de lo que se quiere demostrar(o sea, lo contrario de la tesis del teorema), y al deducir de ello algo que está en contradicción con una condición establecida en la premisa del teorema, o con verdades demostradas anteriormente, nos veremos obligados a desechar, por falso, lo que habíamos supuesto inicialmente y admitir como verdadera la tesis, que es lo que se quería demostrar.

Para que se comprenda mejor lo que se acaba de explicar, se demuestra a continuación por el método indirecto o de reducción al absurdo.
Premisa: *AB y CD* cortan a las semirrectas *OC y OD* y $\overline{OA}:\overline{AC}=\overline{OB}:\overline{BD}$

Tesis: $AB||CD$

Demostración

Supongamos que $AB \nparallel CD$.

Luego por el punto D se traza una recta paralela a *AB* que pasa por el punto C' distinto al punto C, que se encuentra sobre la semirrecta *OC* (fig.3.13).

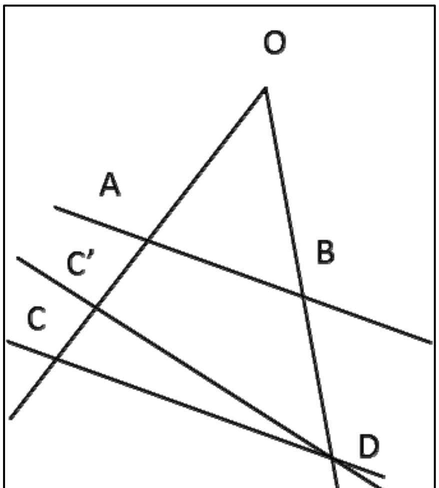


Fig. 3. 13

Según el teorema de las transversales se cumple:

$\overline{OA}:\overline{AC'}=\overline{OB}:\overline{BD}$pero por premisa se conoce que:

$\overline{OA}:\overline{AC}=\overline{OB}:\overline{BD}$ y entonces se obtiene que $\overline{OA}:\overline{AC'}=\overline{OB}:\overline{BD}$ y de aquí que $\overline{AC'}=\overline{AC}$, lo que es una contradicción con la construcción realizada, pues el punto C' distinto al punto *C*, o sea, $\overline{AC'}\neq\overline{AC}$.

Se ha llegado a una contradicción, por tanto la suposición AB no paralela a CD no es verdadera y se cumple que AB//CD

Un teorema que es consecuencia del teorema de las transversales y resulta de gran utilidad es el siguiente:

Teorema (Teorema de la bisectriz)

En todo triangulo la bisectriz de cualquiera de sus ángulos interiores divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados del triángulo.

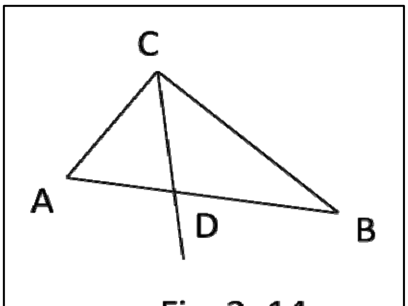


Fig. 3. 14

Para realizar la demostración del teorema planteamos la premisa y la tesis(fig.3.14).

Premisa: $\triangle ABC$ cualquiera

CD: bisectriz del $\angle C$

Tesis: $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ (1)

Hasta el momento para demostrar la proporcionalidad de segmentos contamos con el teorema de las transversales, pero para ello debemos tener dos o más semirrectas de origen común cortadas por paralelas. Esta condición la premisa del teorema que queremos demostrar no la tiene, por lo que es necesario realizar una construcción auxiliar.

Se prolonga el lado $\overline{AC}$ por el extremo *C*, y por *B* se traza una paralela a $\overline{CD}$ de forma tal que corte la prolongación del lado $\overline{AC}$ en un punto *E* (fig. 3.15).

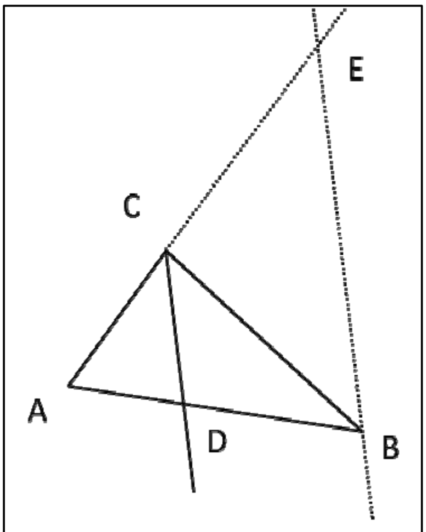


Fig. 3. 15

Demostración

En la fig. 3.15 tenemos que $\overline{BE} || \overline{CD}$ y por el teorema de las transversales podemos plantear que:

$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CE}}$ (2)

Al comparar las proporciones (1) y (2) observamos que se diferencian en $\overline{BC}$ y $\overline{CE}$, luego para que este teorema se cumpla debemos probar que $\overline{BC} = \overline{CE}$ o que el $\triangle BCE$ es isósceles, para ello tenemos:

$\angle DCB = \angle CBE$ por ser alternos entre $\overline{BE} || \overline{CD}$ y $\overline{CB}$ secante.

$\angle ACD = \angle CEB$ por ser correspondientes entre $\overline{BE} || \overline{CD}$ y $\overline{AE}$ secante.

Pero $\angle ACD = \angle DCB$ por ser $\overline{CD}$ bisectriz del $\angle ACB$.

Luego $\angle CBE = \angle CEB$ por cáractertransitivo de la relación de igualdad.

Entonces en el $\triangle ACE$ se cumple que:

$\overline{BC} = \overline{CE}$ (3) porque en un triángulo a ángulos iguales se oponen lados iguales.

Sustituyendo (3) en (2) tendremos que: $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$

Quedando así demostrado el teorema de la bisectriz.

Este teorema que se acaba de demostrar se usa muy a menudo en la solución de problemas y ejercicios, pues se recomienda que cuando exista una bisectriz en un triángulo como dato hay que pensar siempre en la posibilidad de usar el mismo.

Ejemplo 5

En el ΔPQR (fig. 3.16) se conoce que $\overline{PQ}$ = 36 cm, $\overline{QR}$ = 54cm y $\overline{PR}$ = 70 cm. La semirrecta $\overline{QT}$ es bisectriz del $\angle PQR$. Calcule la longitud de los segmentos determinados en el lado $\overline{PR}$, por la bisectriz del $\angle PQR$.

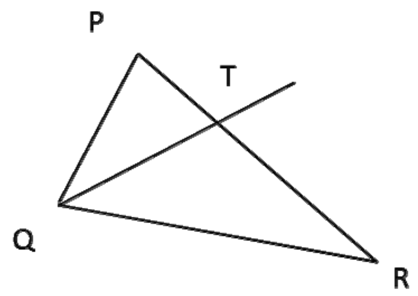


Fig. 3. 16

Solución.

Como se tiene por datos la bisectriz del $\angle PQR$, determina los segmentos $\overline{RT}$ y $\overline{TP}$ sobre el lado $\overline{PR}$, entonces:

$\frac{\overline{RT}}{\overline{TP}} = \frac{\overline{QR}}{\overline{PQ}}$ por el teorema de la bisectriz.

Se conoce por datos que $\overline{PR}$ = 70 cm, luego $\overline{RT}$ = x y $\overline{TP}$ = 70 – x, sustituyendo se obtiene que:

$$\frac{x}{70-x} = \frac{54}{36}$$

De donde 36 x = 54(70 –x) y 36 x = 3780 – 54 x, realizando transformaciones 54 x + 36 x = 3780 y 90 x = 3780, de donde resulta: x = 42

Respuesta: La longitud del segmento $\overline{RT}$ es de 42cm y la longitud del segmento $\overline{TP}$ es de 28 cm.

Ejercicios del epígrafe 3

1. En la figura 3. 17 , las semirrectas de origen común S son cortadas por las rectas AC, DF, GI y JL. B, E, H y K son los puntos de intersección de las rectas con la semirrecta SK respectivamente. AC ∥ GI ∥ JL. Plantea todas las proporciones que se obtienen.

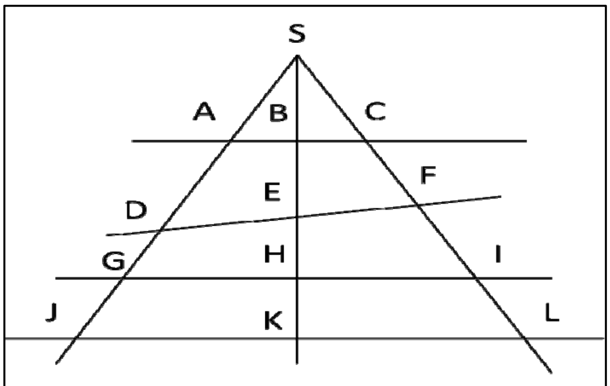


Fig. 3. 17

2. En la figura 3. 18 , PQR y ABC son triángulos. $\overline{AB} \parallel \overline{PR}$, $\overline{BC} \parallel \overline{PQ}$ y $\overline{AC} \parallel \overline{RQ}$. Además, $\overline{AC} \cap \overline{PB}$ = {D}. Identifica que parte del teorema de las transversales se ha utilizado en cada una de las proporciones dadas:

   a) $\frac{\overline{PA}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{QR}}$ ________________________

   b) $\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{QB}}{\overline{BR}}$ ________________________

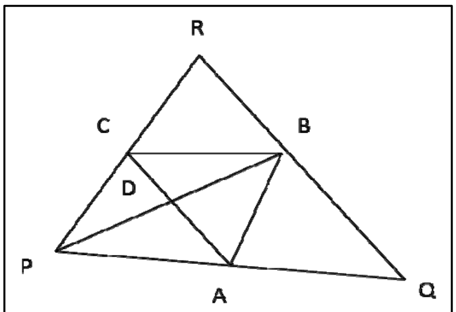


Fig. 3. 18

c) $\frac{\overline{RC}}{\overline{RF}} = \frac{\overline{RB}}{\overline{RQ}}$ ______________________

d) $\frac{\overline{QB}}{\overline{BR}} = \frac{\overline{QR}}{\overline{RP}}$ ______________________

e) $\frac{\overline{PD}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{CB}}$ ______________________

3. Basándote en la figura 3. 19 donde AC ∥ *DF* ∥ *GI*, intersecan a las semirrectas *MG, MH* y *MI*. Completa cada una de las igualdades siguientes de modo que se obtenga una proporción.

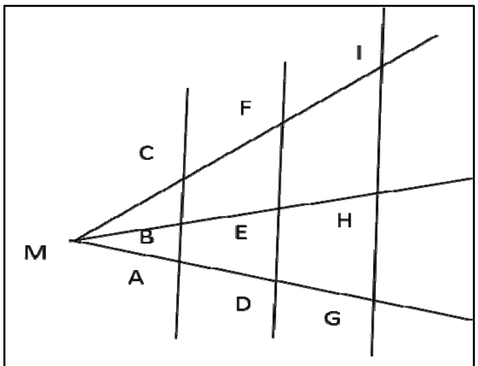


Fig. 3. 19

a) $\frac{}{\overline{MD}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{ME}}$ b) $\frac{\overline{MD}}{\overline{DG}} = \frac{}{\overline{FI}}$

c) $\frac{\overline{MA}}{} = \frac{\overline{AC}}{\overline{GI}}$ d) $\frac{\overline{DE}}{} = \frac{\overline{GH}}{\overline{GI}}$

e) $\frac{}{\overline{EF}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{MF}}$ f) $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{GI}}{}$

g) $\frac{\overline{BE}}{\overline{EH}} = \frac{}{\overline{FI}}$ h) $\frac{\overline{AG}}{\overline{CI}} = \frac{\overline{DG}}{}$

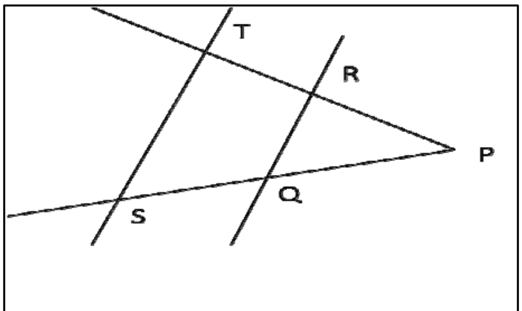


Fig. 3. 20

4. En la figura 3. 20, *QR* ∥ *ST* interseca a las semirrectas *PS* y *PT*.

$\overline{PQ}$ = 3,0 cm, $\overline{PR}$ = 21 mm, $\overline{PS}$ = 7,0 cm y $\overline{ST}$ = 0,56 dm.

Halla $\overline{PT}$, $\overline{QR}$ y $\overline{RT}$

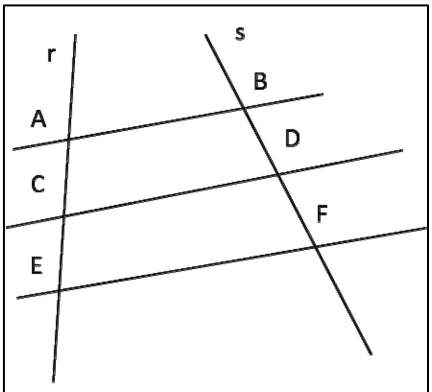


Fig. 3. 21

5. En la figura 3. 21, *AB* ∥ *CD* ∥ *EF*, *r* y *s* cortan a las tres rectas. *A, C,* y *E* pertenecen a la recta *r*. *B,* D y *F* pertenecen a la recta *s*. $\overline{AC}$ = 8,0 cm, $\overline{CE}$ = 12 cm, entonces la posible longitud de los segmentos $\overline{BD}$ y $\overline{DF}$ son:

1) ___ 24 cm y 36 cm 2) ___ 20 cm y 40 cm

3)___ 40 cm y 20 cm 4) ____ 36 cm y 24 cm

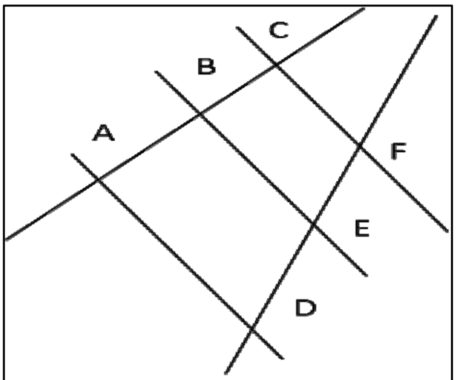


Fig. 3. 22

6. En la figura 3. 22, las rectas *AC* y *DF* son cortadas por *CF* ∥ *BE* y *CF* ∥ *AD*. Calcula la longitud del segmento $\overline{DF}$ si $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{3}{2}$ y $\overline{DE}$ = 6,0 cm.

7. En la figura 3. 23, se cumple que:

- Las rectas *p* y *q* se intersecan en A
- Los puntos C, E y G pertenecen a *p*.
- Los puntos D, B y F pertenecen a *q*.
- $\overline{CD} \parallel \overline{BE}$
- $\overline{CD}$ bisectriz del $\angle$ ACB

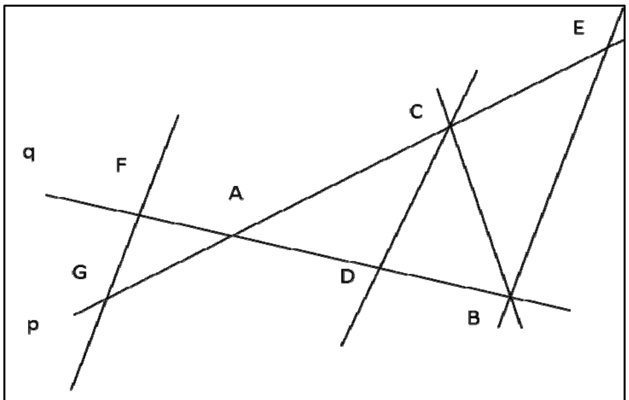


Fig. 3. 23

Diga si las siguientes proposiciones son verdaderas (V) o Falsas (F). En el caso de las falsas, argumenta.

a) ___ $\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$ por primera parte del teorema de las transversales.

b) ___ $\overline{BC} = \overline{CE}$

c) ___ $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}$ por segunda parte del teorema de las transversales.

d) ___ Si $\frac{\overline{AC}}{\overline{GF}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}$ entonces *FG* $\parallel$ *CD*

e) ___ $\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BE}}$ por primera parte del teorema de las transversales.

8. En él ΔABC, $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{DF} \parallel \overline{BC}$ (fig. 3. 24). Si $\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} = \frac{2}{3}$, $\overline{AD}$ = 1,2 dm y $\overline{DF}$ = 5,0 cm.

a) Clasifica el cuadrilátero *FBED*.

b) Calcula $\overline{AC}$.

c) Halla el perímetro del ΔABC.

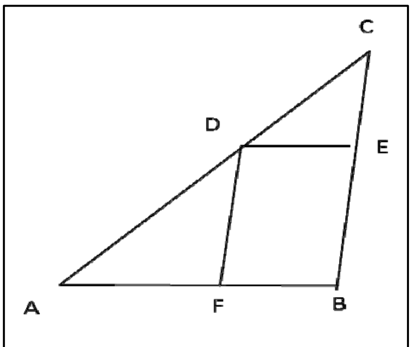


Fig. 3. 24

9. En la figura 3. 25, la semirrecta *AC* es tangente en *B* y en *C* a $C_1(O'; \overline{O'B})$ y $C_2(O; \overline{OC})$ respectivamente.

- Los puntos A, O' y *O* están alineados.
- $\overline{AB}$ = 8,0 cm y $\overline{BC}$ = 120 mm

a) Clasifica el cuadrilátero *OO'BC.*

b) Halla la razón $\frac{\overline{O'B}}{\overline{OC}}$.

c) Demuestra que $A_{C_1} : A_{C_2}$ = 4 : 25

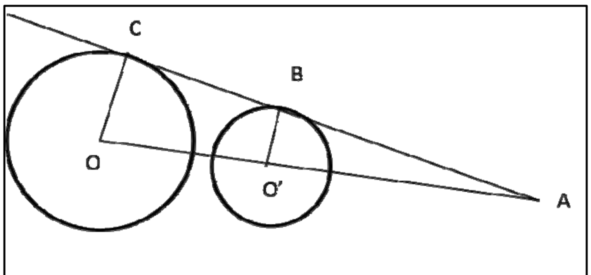


Fig. 3. 25

10. En la figura 3. 26, *ABCD* es un trapecio de bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

- $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$ diagonales del trapecio.
- $\overline{AC} \cap \overline{DB} = \{O\}$

Demuestra que $\overline{OC} : \overline{OA} = \overline{OD} : \overline{OB}$

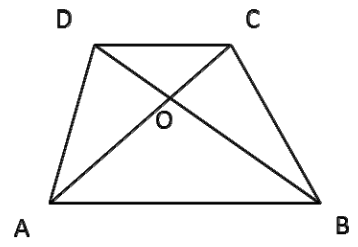


Fig. 3. 26

11. En la figura 3. 27, *ABCD* trapecio isósceles de bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

- *EFCD* rectángulo.
- *A, E, G, F* y *B* puntos alineados.
- *G* punto medio de $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$ respectivamente.
- $\overline{DI} \cap \overline{CH} = \{G\}$ y $\overline{AB} \parallel \overline{HI}$
- $\frac{\overline{CH}}{\overline{HI}} = \frac{5}{8}$ y $\overline{CG} = 5{,}0$ cm
- $\overline{AB} - \overline{DC} = 2{,}0$ cm y $2\overline{DE} = \overline{AG}$

a) Demuestra que $\Delta AGD = \Delta GBC$

b) Calcula $\overline{DC}$.

c) Halla el área del trapecio *ABCD.*

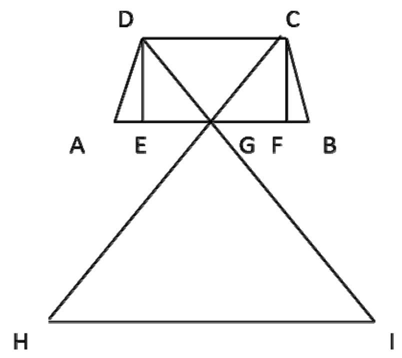


Fig. 3. 27

12. En un triángulo *ABC, CD* bisectriz del ángulo con vértice en *C* ($D \in \overline{AB}$). Si $\overline{AC} = x + 2$; $\overline{BC} = 5x - 2$; $\overline{AD} = x$; $\overline{BD} = 5x - 8$, halle las longitudes de los lados del triángulo.

13. Si *AD* es la bisectriz del ángulo de vértice *A* de triángulo *ABC* y $\overline{DE} \parallel \overline{BA}$ (fig. 3. 28), demuestre que:

a) $\overline{AB} = \frac{\overline{AC}(\overline{BC}-\overline{CD})}{\overline{CD}}$

b) $\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC}+\overline{AB}}$

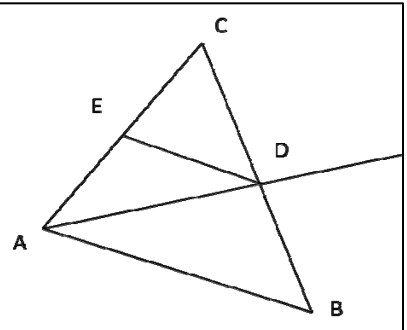


Fig. 3. 28

14. En la figura 3. 29, ABCD es un cuadrado.

- $\overline{EA} \cap \overline{DC} = \{F\}$ y $\overline{EB} \cap \overline{DC} = \{G\}$
- $4\overline{EF} = 3\,\overline{EA}$ y $\overline{FG} = 4{,}5$ cm
- $\overline{DG} = \overline{FC}$

a) Demuestra que $\Delta AFD = \Delta BGC$

b) Halla el área del cuadrado *ABCD*

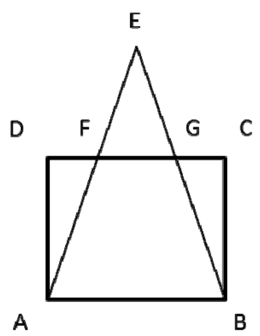


Fig. 3. 29

3.4. Aplicaciones del teorema de las transversales.

Si tenemos un segmento $\overline{AB}$ podemos construir otro segmento $\overline{CD}$ de manera que ellos estén en una razón *k* ($\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = k$). Como $\overline{CD} = k\,.\overline{AB}$ se dice que $\overline{CD}$ es un múltiplo de $\overline{AB}$.

Si *k* es un número natural (k ≠ 0), entonces tenemos que la longitud del segmento *CD* es *k* veces la longitud del segmento *AB* ($\overline{CD} = k\,.\overline{AB}$) y para hacer esta construcción procedemos de la forma siguiente:

Se traza una semirrecta de origen C y transportamos con un compás a $\overline{AB}$ a partir de C, se obtiene A_1; se transporta $\overline{AB}$ a la semirrecta de origen A_1 que no pasa por A, se obtiene A_2 y así sucesivamente hasta obtener k segmentos iguales.
La figura 3.30 ilustra la construcción para el caso en que *k* = 3.

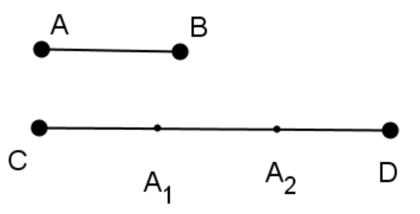


Figura 3.30

Si *k* es un número racional positivo cualquiera, también puede hacerse la construcción.

Ejemplo 1

a) Dado $\overline{AB}$ (fig. 3.31), construye $\overline{CD}$ de manera que $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{1}{4}$

b) Dado $\overline{AB}$ (fig. 3.31), construye $\overline{AC}$ de manera que $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{5}{3}$

Figura 3.31

Solución.

a) Si $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{1}{4}$ obtenemos que $\overline{CD} = \frac{1}{4}\,.\overline{AB}$, lo que significa que tenemos que construir la cuarta parte de $\overline{AB}$.

Construcción:

- A partir de un extremo de $\overline{AB}$, digamos *A* (fig.3.32) se traza una semirrecta que forme un ángulo agudo con el segmento $\overline{AB}$. Transportamos con un compás un segmento arbitrario sobre la semirrecta a partir de *A*, se obtiene el punto *Q*, se transporta el mismo segmento arbitrarios obre la semirrecta de origen Q que no contiene a A, se obtiene *R*, se transporta a partir de *R*, el segmento a la semirrecta de origen R que no contiene a *Q*, se obtiene *S* y por último se transporta el segmento a

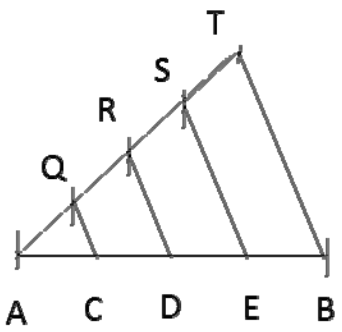


Fig. 3. 32

la semirrecta de origen *S* que no contiene a *R*, se obtiene *T*. El extremo *T* del segmento así obtenido lo unimos con *B*.

- Si se traza ahora rectas paralelas a $\overline{TB}$ por los puntos determinados en $\overline{AT}$, estas dividen a $\overline{AB}$ en cuatro segmentos iguales.

El procedimiento empleado se fundamenta aplicando el teorema de las transversales.

$\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QR}} = 1$; por lo que $\overline{AC} = \overline{CD}$

$\frac{\overline{AC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{RS}} = 1$; por lo que $\overline{AC} = \overline{DE}$

Planteando las proporciones restantes podemos demostrar que

$\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EB}$, por consiguiente $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{1}{4}$

b) Si $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{5}{3}$ obtenemos que $\overline{AC} = \frac{5}{3} . \overline{AB}$, lo que significa que tenemos que construir primeramente la tercera parte de $\overline{AB}$ y quintuplicar entonces ésta.

Construcción:

- A partir de un extremo de $\overline{AB}$, digamos *A* (fig.3.33) se traza una semirrecta que forme un ángulo agudo con el segmento $\overline{AB}$. Transportamos con un compás 3 veces un segmento arbitrario sobre la semirrecta a partir de *A*, *P y Q*. El extremo *T* del segmento así obtenido lo unimos con *B*.

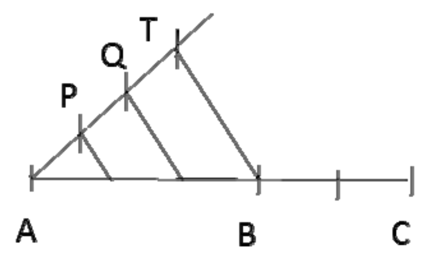


Fig. 3. 33

- Si se traza ahora rectas paralelas a $\overline{TB}$ por los puntos determinados en $\overline{AT}$, estas dividen a $\overline{AB}$ en tres segmentos iguales.
- Prolongamos $\overline{AB}$ y transportamos con un compás dos veces más uno de los segmentos determinados sobre $\overline{AB}$, obteniéndose así el $\overline{AC}$.

Por consiguiente $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{5}{3}$

En general de esta forma se puede proceder con todo número racional *k* (*k*> 0). Así tenemos que para *k*< 1 se obtiene un segmento menor y para *k*> 1, uno mayor.

El teorema de las transversales también se puede aplicar para dividir un segmento dado en dos segmentos que estén en una razón dada *k* (*k*: racional positivo). Esta construcción se conoce como la **división interior de un segmento en una razón dada.**

Ejemplo 2

Dividir $\overline{AB}$ (fig.3.34) en dos segmentos que estén en la razón $\frac{2}{3}$

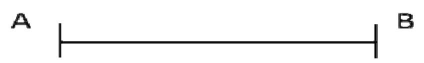


Fig. 3. 34

Solución.

Construcción. Se traza con origen *A* una semirrecta (fig.3.35) y transportamos con un compás 5 veces (2 + 3 = 5) un segmento arbitrario a partir de *A*; el extremo *D* del segmento así obtenido lo unimos con *B*.

- Determinamos sobre $\overline{AD}$ un punto *C* (tomando dos veces el segmento arbitrario que hemos transportado) y se traza una recta paralela a $\overline{BD}$.

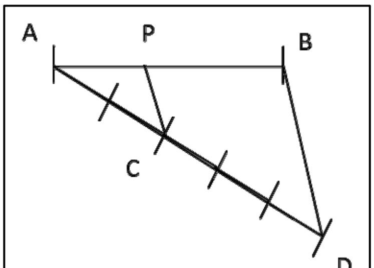


Fig. 3. 35

Así obtenemos el punto *P* que divide a $\overline{AB}$ en dos segmentos cuya razón es $\frac{2}{3}$.

Por el teorema de las transversales se cumple que: $\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{2}{3}$

Ejemplo 3

Juan desea conocer la longitud de un cable (tensor), que sujeta a un poste cerca de su casa; para lo que mide la distancia que hay del pie del poste al pie del cable, que es de 3,3 m. Utiliza una varilla que coloca perpendicularmente a la tierra, de manera que su pie esté alineado con el pie del poste y el del cable, y que su parte superior toque al cable (fig. 3. 36). La distancia que hay del pie de la varilla al pie del cable es de 1,5 m y desde la parte superior de la varilla al pie del cable mide 2,5 m. ¿Qué longitud tiene el cable?

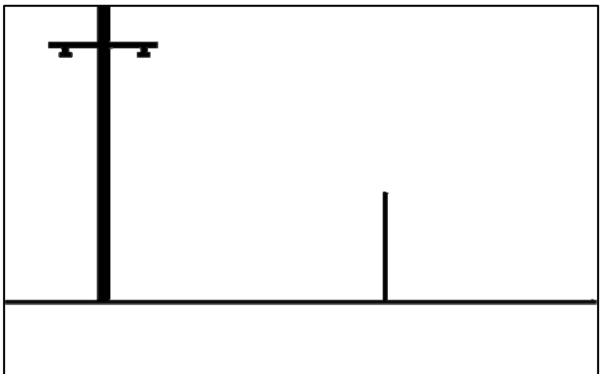


Fig. 3. 36

Solución.

Sea los puntos (fig. 3.37):

O: pie del cable.

S: pie de la varilla.

R: pie del poste.

T: parte superior de la varilla alineado con los puntos *Q* y *O*.

Q: parte superior del poste donde lo sujeta el cable.

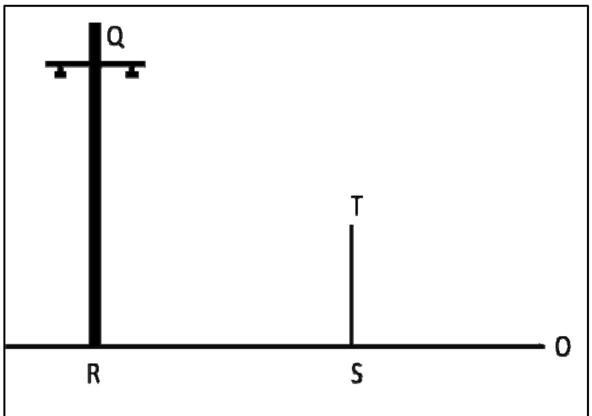


Fig. 3. 37

Aplicando el teorema de las transversales:

$\frac{\overline{OQ}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{OR}}{\overline{OS}}$ de donde $\overline{OQ} = \frac{\overline{OR}.\ \overline{OT}}{\overline{OS}}$

Luego $\overline{OQ} = \frac{3.3.\ 2.5}{1.5}$

$\overline{OQ}$ = 5,5 m

Respuesta: La longitud del cable es de 5,5 m.

Ejercicios del epígrafe 4

1. Traza un segmento de $\overline{AB}$ = 2,5 cm y construye un múltiplo de $\overline{AB}$ de acuerdo con los siguientes valores de *k*:

    a) 1, 5   b) 0,7   c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{4}{3}$

2. Traza un segmento $\overline{PQ}$ = 60 mm de longitud y determina el punto que lo divide interiormente en la razón:

    a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{5}{8}$

3. ¿En qué razón dividen al segmento $\overline{AB}$ el punto P en la figura 3. 38?

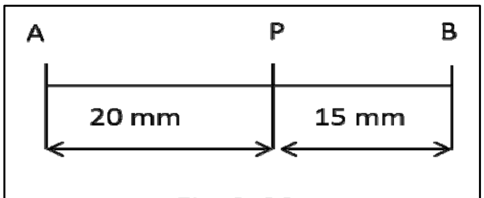
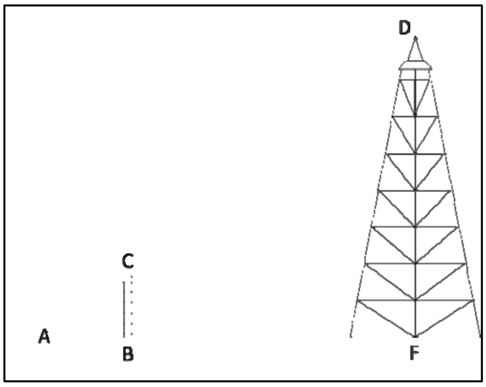


Fig. 3. 38

4. Una habitación de forma rectangular, tiene un perímetro de 24 m. Determine la longitud del largo "l" y del ancho "a" de la habitación, si se cumple $\frac{a}{l} = \frac{2}{3}$.

5. Un observador que se encuentra en el punto *A* (fig. 3.39) ve el extremo *C* de un jalón y el punto *D* de una torre, sobre una línea recta. ¿Cuál es la altura de la torre si $\overline{AF}$ = 60m; $\overline{AB}$ = 6,0 m y $\overline{BC}$ = 3,0 m?

Fig. 3. 39



6. El ancho de un rio se puede determinar como lo muestra la figura 3. 40. Esto es necesario cuando no se tiene acceso a la prolongación de $\overline{AB}$ a partir de *B.* Halla el ancho del río si $\overline{BC}$ = 2,9 dm; $\overline{CD}$ = 11 m y $\overline{DE}$= 14 m.

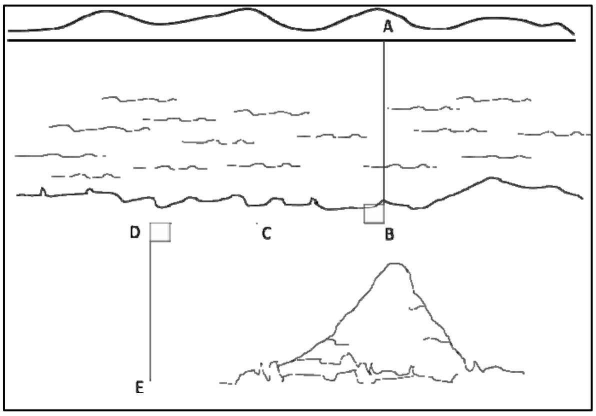


Fig. 3. 40

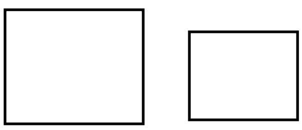
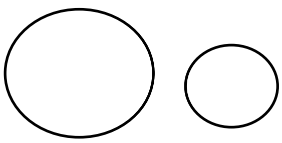
3.5 Figuras semejantes.

En el estudio de la Geografía tiene una singular importancia la utilización de los mapas, en ellos se muestran países, continentes y otras imágenes, que constituyen en el papel una representación de cada uno a una escala definida. En los bordes del mapa siempre se señalan las escalas que se establecen, por ejemplo 1:10 000 o 1: 100 000, sin embargo si se trata de dos mapas de un mismo país a diferentes escalas las dos imágenes que se presentan son ***semejantes.***

Observe que a pesar de tener tamaños diferentes la forma de las figuras que representan el mapa de Cuba es la misma.

De igual manera, una misma foto (tomada el 4 de octubre de 2012, en Ciudad Caracas, en apoyo al Comandante Hugo Rafael Chávez) en distintos tamaños o una imagen ampliada o disminuida mediante el zoom en la computadora también representan ***figuras semejantes***.


Teniendo en cuenta lo anterior, se puede afirmar que dos figuras que tienen la misma forma y dimensiones proporcionales se llaman ***figuras semejantes,*** como por ejemplo las figuras que se muestran a continuación.

Polígonos semejantes.

Definición.

Dos ***polígonos*** *se llaman* ***semejantes*** *cuando tienen sus ángulos respectivamente iguales y proporcionales los lados homólogos*.

Los lados homólogos en polígonos semejantes son los adyacentes a ángulos respectivamente iguales.

Ejemplo:

En la figura 3.41 se observan dos rectángulos, en los cuales el largo y el ancho de ABCD duplican la longitud de EFGH.

Como se trata de rectángulos todos sus ángulos miden 90^0 y por tanto son iguales, si se establecen las relaciones entre los lados homólogos se obtiene lo siguiente:

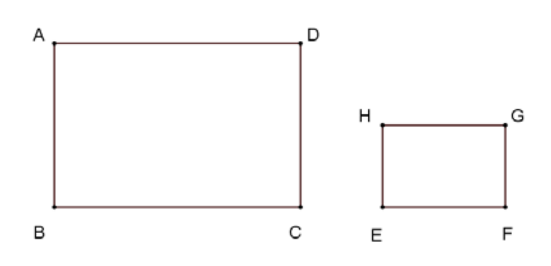


Figura 3.41

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{HE}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{GF}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{HG}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = 2$$

Por tanto como los ángulos son iguales, en este caso particular todos son rectos, y la proporción que se establece entre los lados homólogos es igual, entonces los dos rectángulos son semejantes.

Al valor común de las razones que se establecen entre los lados homólogos de dos polígonos semejantes se le llama ***razón de semejanza.***

Un caso particular de la semejanza de polígonos, al que se le dedicará un estudio detallado a continuación, es la semejanza de triángulos.

Semejanza de triángulos.

A partir del concepto de polígonos semejantes, se puede afirmar *que* ***dos triángulos son semejantes si sus ángulos son respectivamente iguales y cuando sus lados homólogos, o sea, los que se oponen a ángulos iguales son respectivamente proporcionales.***

Sean los triángulos ABC y MNP (figura 3.42). Si en ellos se cumple que:

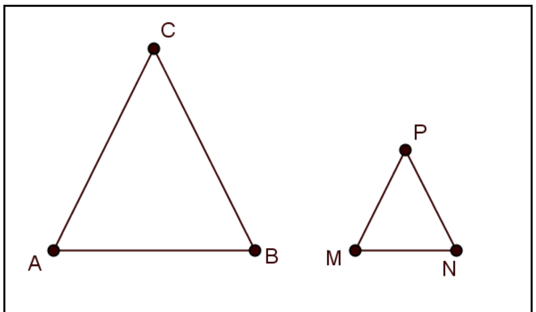


Figura 3.42

$\angle A = \angle M$

$\angle B = \angle N$

$\angle C = \angle P$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{NP}} = k$$

Decimos que los triángulos ABC y MNO son semejantes, en símbolos lo expresamos de la siguiente manera: $\Delta ABC \sim \Delta MNP$; donde ***k*** es la razón de semejanza.

Nota: la igualdad entre dos triángulos es un caso particular de semejanza en el que la razón entre los lados homólogos es $k = 1$.

Propiedades.

La semejanza de triángulos tiene tres propiedades características:

- ***Carácter idéntico:*** todo triángulo es semejante a sí mismo., es decir $\Delta ABC \sim \Delta ABC$
- ***Carácter recíproco:*** si un triángulo es semejante a otro, este es semejante al primero, es decir si $\Delta ABC \sim \Delta MNP$ entonces $\Delta MNP \sim \Delta ABC$
- ***Carácter transitivo:*** si un triángulo es semejante a otro, y este lo es a un tercero, el primero es semejante al tercero, es decir, si $\Delta ABC \sim \Delta MNP$ y $\Delta MNP \sim \Delta EGH$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta EGH$.

  En particular, si un triángulo es semejante a otro, y este igual a un tercero, el primero y el tercero son semejantes, es decir, si $\Delta ABC \sim \Delta MNP$ y $\Delta MNP = \Delta EGH$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta EGH$

Teorema. (Teorema fundamental de la semejanza de triángulos)

Toda recta paralela a un lado de un triángulo, forma con los otros dos lados (o con sus prolongaciones) otro triángulo que es semejante al triángulo dado.

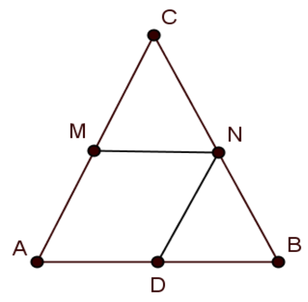


Figura 3.43

En la figura 3.43 se tiene como premisa que:

ABC es un triángulo, $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$, el ΔCMN se obtiene al cortar la recta MN a los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.

Tesis: $\Delta ABC \sim \Delta CMN$

Demostración

Tracemos una paralela por N a $\overline{AC}$, que interseca a $\overline{AB}$ en D, es decir $\overline{ND} \parallel \overline{AM}$

$\angle C$ común.

$\begin{Bmatrix} \angle A = \angle CMN \\ \angle B = \angle CNM \end{Bmatrix}$ por ser correspondientes: $\overline{MN}//\overline{AB}$ y $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ secantes.

Además:

$\dfrac{\overline{CM}}{\overline{CA}} = \dfrac{\overline{CN}}{\overline{CB}}$(1) y $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{CN}}{\overline{CB}}$(2), por el teorema de las transversales, $\overline{MN}//\overline{AB}$ y $\overline{ND}//\overline{AM}$

De las proporciones (1) y (2) se obtiene:

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \quad (3)$$

Pero ADMN es un paralelogramo, luego $\overline{AD} = \overline{MN}$, sustituyendo en (3) resulta

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{AB}}$$

Por lo tanto, $\Delta ABC \sim \Delta CMN$ por tener sus ángulos iguales y sus lados homólogos proporcionales.

Observación: la demostración es análoga para el caso en que la recta paralela a uno de los lados del triángulo corte a las prolongaciones de estos.

Criterios de semejanza de triángulos.

En el epígrafe de las igualdades de triángulos, estudiamos algunos teoremas que permitían llegar a la misma sin necesidad de aplicar la definición, de igual forma analizaremos tres casos particulares para demostrar la semejanza entre dos triángulos.

Teorema. (Teorema de igualdad de semejanzas *aa*)

Si dos triángulos tienen **dos ángulos respectivamente iguales** entonces son semejantes.

En la figura 3.44 se muestran los triángulos ABC y PQR que cumplen las condiciones que establecen las premisas del teorema.

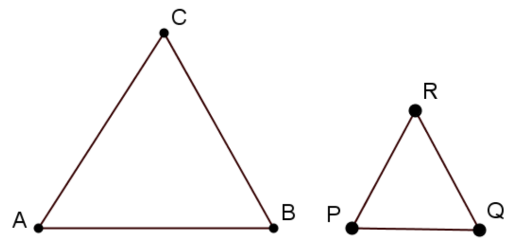


Figura 3.44

Premisas: $\angle A = \angle P$ y $\angle C = \angle R$

Tesis: $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

Demostración.

Tomemos $\overline{CM} = \overline{RP}$ y en el ΔABC tracemos $\overline{MN} // \overline{AB}$ como se muestra en la 3.45.

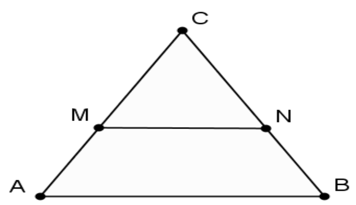


Figura 3.45

Los triángulos CMN y PQR tienen $\overline{CM} = \overline{RP}$ por construcción y $\angle C = \angle R$ por hipótesis.

Se tiene también que $\angle CMN = \angle A$ por correspondientes entre las paralelas $\overline{MN}$ y $\overline{AB}, \overline{AC}$ secante.

Además por hipótesis $\angle A = \angle P$, luego $\angle CMN = \angle P$.

Por tanto $\Delta CMN = \Delta PQR$ por tener un lado y los ángulos adyacentes al mismo respectivamente iguales.

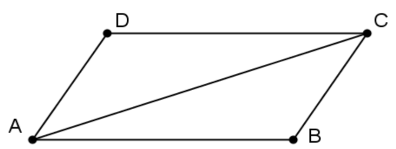


Figura 3.46

Pero $\Delta CMN \sim \Delta ABC$ por el teorema fundamental de la semejanza de triángulos, y como $\Delta CMN = \Delta PQR$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ por el carácter transitivo de la semejanza de triángulos.

Ejemplo 1

En la figura 3.46 ABCD paralelogramo. Demuestra que $\Delta ADC \sim \Delta ABC$.

Demostración.

En los triángulosΔADC y ΔABC se tiene:

$\angle ADC = \angle ABC$por ser opuestos de un paralelogramo.

$\angle DAC = \sphericalangle\ \angle ACB$ por ser alternos entre paralelas ($\overline{AD}//\overline{BC}$)

Por tanto: $\Delta ADC \sim \Delta ABC$ por tener dos ángulos respectivamente iguales.

Teorema. (Teorema de semejanza de triángulos *p.a.p*)

Si dos triángulos tienen **dos lados respectivamente proporcionales e igual el ángulo comprendido** entre dichos lados, entonces estos triángulos son semejantes.

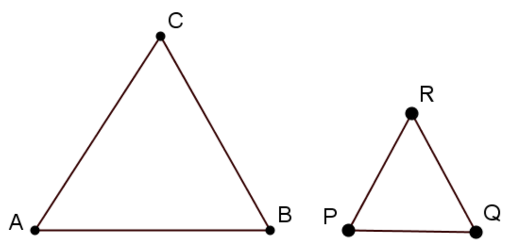


Figura 3.47

En la figura 3.47 se muestran los triángulos ABC y PQR que cumplen las condiciones que establecen las premisas del teorema.

Premisas: $\angle C = \angle R$ y $\frac{\overline{AC}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{QR}}$

Tesis: $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.

Demostración.

Tomemos $\overline{CM} = \overline{RP}$ y en el ΔABC tracemos $\overline{MN}//\overline{AB}$ como se muestra en la 3.48.

En los triángulos CNM y PQR se tiene que $\overline{CM} = \overline{RP}$ por construcción.

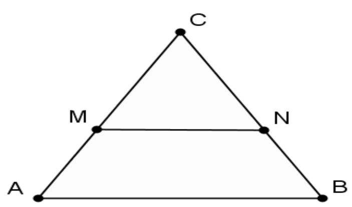


Figura 3.48

Como $\Delta ABC \sim \Delta CNM$ por teorema fundamental de la semejanza de triángulos, resulta $\frac{\overline{AC}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CN}}$por proporcionalidad entre elementos homólogos, y como $\overline{CM} = \overline{RP}$ entonces$\frac{\overline{AC}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CN}}$, pero por hipótesis $\frac{\overline{AC}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{QR}}$ luego $\overline{CN} = \overline{QR}$, es decir $\Delta CNM = \Delta PQR$ por tener dos lados respectivamente iguales e igual el ángulo comprendido.

Pero $\Delta CMN \sim \Delta ABC$ y como $\Delta CMN = \Delta PQR$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ por el carácter transitivo de la semejanza de triángulos, que es la tesis.

Ejemplo 2.

En la figura 3.49 ABCD es un paralelogramo y $\frac{\overline{DM}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DN}}{\overline{AB}}$.

Demuestra que $\Delta DMN \sim \Delta DAC$

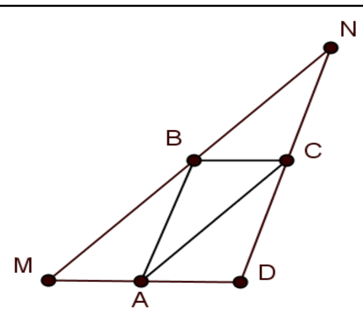


Figura 3.49

Demostración.

$\frac{\overline{DM}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DN}}{\overline{AB}}$ (1) por datos.

$\overline{DA} = \overline{BC}$ y $\overline{DC} = \overline{AB}$ por ser lados opuestos de un paralelogramo.

Sustituyendo las igualdades anteriores en (1) tenemos que: $\frac{\overline{DM}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{DN}}{\overline{DC}}$

En ΔDMN y ΔDAC se cumple que $\frac{\overline{DM}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{DN}}{\overline{DC}}$.

Además $\angle D$ es común.

Por lo tanto $\Delta DMN \sim \Delta DAC$. Por tener dos lados respectivamente proporcionales e igual el ángulo comprendido entre dichos lados.

Teorema. (Teorema de semejanza de triángulos *p.p.p*)

Si dos triángulos tienen sus **tres lados respectivamente proporcionales**, entonces son semejantes.

En la figura 3.50 se muestran los triángulos ABC y PQR que cumplen las condiciones que establecen las premisas del teorema.

Premisas: $\frac{\overline{AC}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{QR}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}}$(1)

Tesis: $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

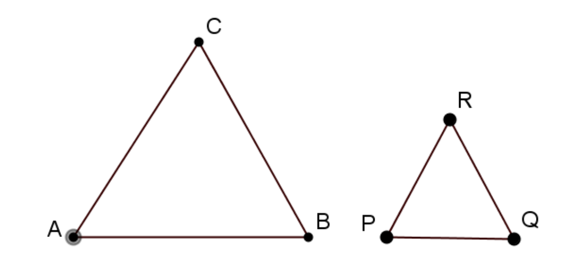


Figura 3.50

Demostración.

Tomemos $\overline{CM} = \overline{RP}$ y en el ΔABC tracemos $\overline{MN} // \overline{AB}$(como se muestra en la 3.51) se obtienen que $\Delta ABC \sim \Delta CMN$ por el teorema fundamental de la semejanza de triángulos.

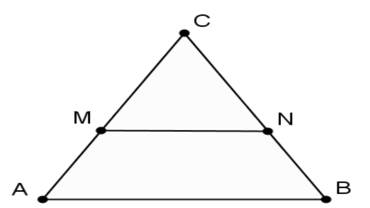


Figura 3.51

Por tanto $\frac{\overline{AC}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CN}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{MN}}$por proporcionalidad entre elementos homólogos

Pero $\overline{CM} = \overline{RP}$, por construcción, luego $\frac{\overline{AC}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CN}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{MN}}$(2)

Por hipótesis$\frac{\overline{AC}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{QR}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}}$(1). Comparando las series de razones (1) y (2), resultan iguales, ya que ambas contienen a $\frac{\overline{AC}}{\overline{PR}}$. De lo anterior se obtiene que

$\frac{\overline{BC}}{\overline{CN}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{QR}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}}$, en la que la primera y tercera razones tienen iguales sus numeradores, así como la segunda y la cuarta, por tanto:

$\overline{CN} = \overline{QR}$ y $\overline{MN} = \overline{PQ}$, como además $\overline{CM} = \overline{RP}$ por construcción se obtiene que

$\Delta CMN = \Delta PQR$por tener sus tres lados respectivamente iguales.

Pero $\Delta ABC \sim \Delta CMN$ y como $\Delta CMN = \Delta PQR$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ por el carácter transitivo de la semejanza de triángulos, que es la tesis.

Ejemplo 3.

En la figura 3.52 CDEF es un rectángulo inscrito en el ΔABC. Demuestra que $\Delta ABC \sim \Delta BEF$.

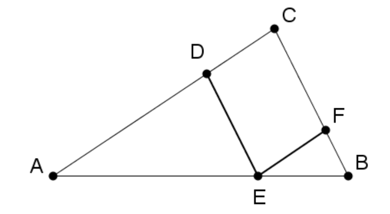


Figura3.52

Demostración.

$\overline{DE} // \overline{BC}$ y $\overline{AC} // \overline{EF}$ por estar el rectángulo CDEF inscrito en el ΔABC.

$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}$ por el Teorema de las transversales pero $\overline{DC} = \overline{EF}$por lados opuestos del rectángulo CDEF, luego $\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{EF}}$.

$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{FB}}$ por el Teorema de las transversales.

Pero $\overline{CF} = \overline{DE}$ por lados opuestos del rectángulo CDEF, luego $\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{FB}}$.

Entonces $\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{EF}}$por el carácter transitivo dela relación de igualdad.

$\therefore$ $\Delta ABC \sim \Delta BEF$por tener respectivamente proporcionales los tres lados.

Razón entre perímetros y áreas en triángulos semejantes

Ahora estudiaremos dos teoremas que te permitirán calcular perímetros y áreas de dos triángulos semejantes y que tiene también otras aplicaciones:

Teorema(relación entre los perímetro de triángulos semejantes)

Si $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$; k el coeficiente de esa semejanza; P el perímetro del ΔABC y P′ el perímetro del $\Delta A'B'C'$' entonces se cumple que: **P ' = k • P**

Teorema (relación entre las áreas de triángulos semejantes)

Si $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$; k el coeficiente de esa semejanza; A el área del ΔABC y A’ el área del $\Delta A'B'C'$ entonces se cumple para esas áreas que: **A’ = k^2 • A**

Recuerda siempre que esos dos teoremas se cumplen en triángulos semejantes, pero también puedes aplicarlos en otros polígonos semejantes.

Ejemplo 4

En la figura 3.53 aparecen representados los triángulos $\Delta MNP\ y\ \Delta MQR$, se cumple también que $\overline{PN} \parallel \overline{QR}$

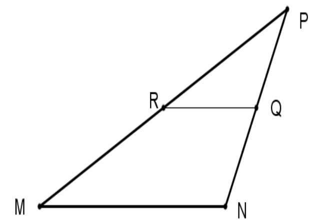


Figura 3.53

a) Fundamenta por qué $\Delta MNP \sim \Delta MQR$.

b) Si la razón de proporcionalidad es $k = 2{,}5$ y el área del $A_{\Delta MNP} = 20\ cm^2$; calcula $A_{\Delta PQR}$. Fundamenta tu respuesta.

Solución

a) En los triángulos $\Delta MNP\ y\ \Delta MQR$ se cumple que: $\overline{PN} \parallel \overline{QR}$ según los datos, luego $\Delta MNP \sim \Delta MQR$ por el teorema fundamental de la semejanza de triángulos.

b) Según el teorema de área de triángulos semejantes, se cumple que $A_{\Delta MNP} = k^2.A_{\Delta PQR}$,sustituyendo: $k = 2{,}5$ y $A_{\Delta MNP} = 20\ cm^2$

$20 = (2{,}5)^2.A_{\Delta PQR}$

$20 = 6{,}25.A_{\Delta PQR}$

$A_{\Delta PQR} = 3{,}2\ cm^2$

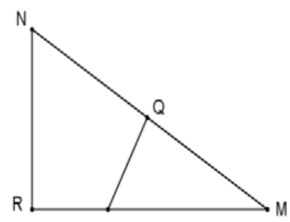
Respuesta: El área del ΔPQR es $3{,}2\ cm^2$

Ejemplo 5

En la figura 3.54 se tiene el ΔMNR rectángulo en R, $Q \in \overline{MN},\ S \in \overline{RM}$ y $\overline{QS} \perp \overline{MN}$. Demuestra que $\Delta MNR \sim \Delta MQS$, y calcula el perímetro de ambos triángulos si $\overline{QS} = 7{,}0\ cm$; $\overline{MN} = 1{,}8\ dm$; $\overline{NR} = 1{,}4\ dm$ y $\overline{RM} = 12\ cm$.

Solución

Figura 3.54



En los triángulos dados se tiene que:

$\angle NRM = 90^0$ por ser ΔMNR recto en R, $\angle MQS = 90^0$ por ser $\overline{QS} \perp \overline{MN}$ en Q, luego $\angle NRM = \angle MQS$. Además $\angle M$ es común, por tanto $\Delta MNR \sim \Delta MQS$ por tener dos ángulos respectivamente iguales. Debemos hacer primero las conversiones de unidades que sean necesarias para después calcular $k, P_{\Delta MNR}\ y\ P_{\Delta MQS}$.

Calculando primero la razón de semejanza se obtiene que: $k = \frac{\overline{QS}}{\overline{NR}} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$

$P_{MNR} = \overline{MN} + \overline{NR} + \overline{RM} = 18\ cm + 14\ cm + 12\ cm$

$P_{\Delta MNR} = 44\ cm$

Por propiedad del perímetro de triángulos semejantes puede plantearse que:

$P_{\Delta MQS} = k.P_{\Delta MNR} = \frac{1}{2}.44\ cm = 22\ cm.$

R/ El perímetro del triángulo ΔMNR es 44 cm, y el del triángulo ΔMQS es 22 cm.

Ejercicios epígrafe 3.5.

1. Diga si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones. Fundamente sus respuestas.
   a) Si un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es igual a un ángulo de otro triángulo rectángulo, entonces esos triángulos son semejantes.
   b) Si un ángulo de un triángulo isósceles es igual a un ángulo de otro triángulo isósceles, entonces estos triángulos son semejantes.
   c) Todos los triángulos equiláteros son semejantes.
   d) Dos polígonos iguales son también semejantes.
   e) Todos los cuadrados son semejantes.
   f) Los paralelogramos que tienen sus ángulos respectivamente iguales, son semejantes.
   g) Dos rombos cualesquiera son semejantes.
   h) Dos rectángulos cualesquiera son semejantes.
   i) Si uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es igual a un ángulo de otro triángulo rectángulo, entonces los triángulos son semejantes
   j) Si dos triángulos rectángulos tienen proporcionales sus catetos, son semejantes.
   k) Si dos triángulos rectángulos tiene respectivamente proporcionales la hipotenusa y un cateto, son semejantes.

2. Dos heptágonos son equiángulos. ¿Se puede afirmarse que son semejantes? ¿Por qué?

3. ¿Bajo qué condiciones dos rectángulos son semejantes?

4. Dos rectángulos son semejantes. Los anchos respectivos tienen una longitud de 16 m y 24m y el primero tiene 30m de largo. ¿Cuál es el largo del segundo rectángulo?

5. Considere un paralelogramo ABCD y trace los puntos medios E y F de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$, respectivamente. Si $\overline{AB} = 4{,}0cm$ y $\overline{BC} = 3{,}0cm$, ¿son semejantes los polígonos ABCD y AEFD? ¿Y los polígonos AEFD y EBCF? Fundamenta tu respuesta.

6. Dos canteros en forma de cuadrado ocupan una superficie de 64dm^2 y 36 dm^2, respectivamente.
   a) ¿Cuál es la razón de semejanza de los cuadrados?
   b) ¿Cuál es la razón entre sus perímetros?
   c) ¿Cuál es la razón entre sus áreas?

7. En grupos de triángulos que se dan a continuación en cada inciso se han marcado de la misma forma los ángulos iguales y además se dan otros datos. Selecciona las parejas de triángulos semejantes en cada inciso y fundamenta tu selección. Establezca la proporcionalidad entre los lados homólogos de los triángulos semejantes.

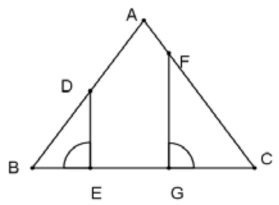


Figura 3.55

a) En la figura 3.55, ΔABC isósceles de base $\overline{BC}$

$D \in \overline{AB}, F \in \overline{AC}, E \in \overline{BC}$ y $G \in \overline{BC}$

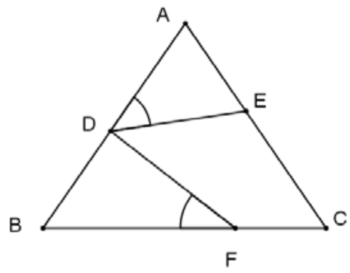


Figura 3.56

b) En la figura 3.56, ΔABC equilátero, $D \in \overline{AB}, F \in \overline{BC}$ y $E \in \overline{AC}$

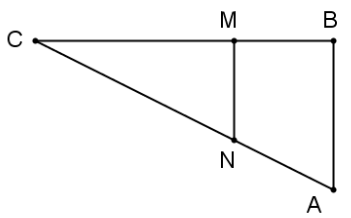


Figura 3.57

c) En la figura 3.57, $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$, $N \in \overline{BC}$ y $M \in \overline{AC}$

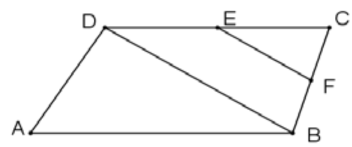


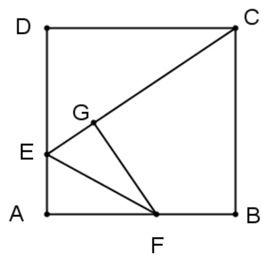
Figura 3.58

8. En la figura 3.58:
   - ABCD paralelogramo.
   - E y F puntos de $\overline{CD}$ y $\overline{BC}$, respectivamente
   - $\overline{EF} \parallel \overline{BD}$ y $\overline{BD} \perp \overline{AD}$.

   a) Prueba que $\frac{\overline{AD}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{EF}}$

   b) Si $\overline{BD} = 12\ cm$ y $\overline{AB} = 13\ cm$, halla el perímetro de ABCD.

Figura 3.59



9. En la figura 3.59, ABCD un cuadrado E, F G son puntos de $\overline{AD}, \overline{AB}$ y $\overline{EC}$ respectivamente $\overline{FG} \perp \overline{EC}$

$\frac{\overline{ED}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{FG}} = 2$, $\overline{EC} = 2\sqrt{5}$. Entonces $\overline{EF}$ mide:

a) ____ $2\sqrt{5}$ b) ____ $\sqrt{5}$

c) ____ $4\sqrt{5}$ d) ____ no sé.

Porque: ____

10. En la figura 3.60, C es un punto situado en el interior del lado $\overline{AD}$ tal que equidista de los vértices del triángulo rectángulo BAD. $\overline{CE}$ altura relativa al lado $\overline{BD}$

a) Prueba que $\Delta ABD \sim \Delta DCE$

b) Demuestra que $\overline{AB} = \frac{\overline{BD}.\overline{CE}}{\overline{DE}}$

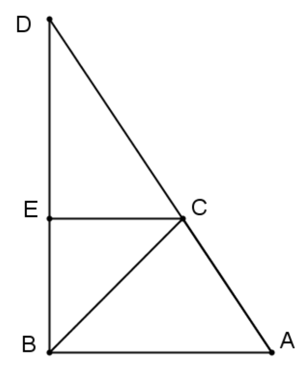


Figura 3.60

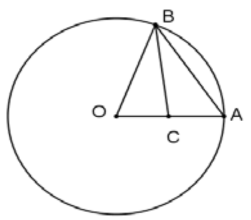


Figura 3.61

11. Sea la circunferencia de centro O que se muestra en la figura 3.61, A y B son puntos de la misma, $\angle BOA = 36^0$, $\overline{BC}$ es la bisectriz del $\angle OBA$. Demuestra que $\overline{AB}^2 = \overline{OB}.\overline{AC}$

12. En la figura 3.62: ABCD es un cuadrado, B, C y F están en la misma recta; $\overline{DF} \cap \overline{AB} = \{E\}.\overline{BE} = 2{,}0\ cm$ y $\overline{BF} = 3{,}0\ cm.$

a) Prueba que los triángulos ADE y BEF son semejantes.

b) Calcula el área del cuadrado ABCD

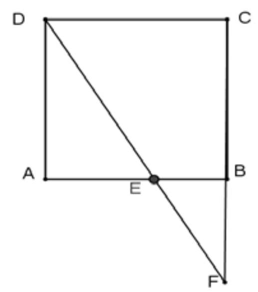


Figura 3.62

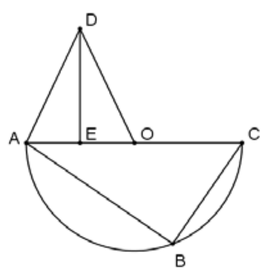


Figura 3.63

13. En la figura 3.63 se muestra un semicírculo de centro O y diámetro $\overline{AC}$ en que se ha inscrito el triángulo ABC.

- El triángulo AOD es isósceles de base $\overline{AO}$.
- E es el punto medio de $\overline{AO}$.
- $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$

a) Demuestra que: $\Delta ABC \sim \Delta DEO$.

b) Prueba que $\overline{EO} = \frac{1}{2}\sqrt{\overline{BC}.\overline{DO}}$

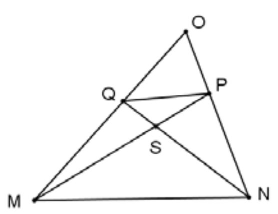


Figura 3.64

14. En la figura 3.64 el ΔMNO se tiene que S es el punto donde se cortan $\overline{NQ}$ y $\overline{PM}$, $\overline{MS} = 2\overline{SP}$, $\overline{SN} = 2\overline{SQ}$

a) Prueba que $\Delta MNS \sim \Delta PSQ$

b) Establecer la proporcionalidad entre los lados correspondientes de ΔMNS y ΔPSQ.

c) Si $\overline{MN} = 18{,}8\ cm$, calcula $\overline{PQ}$.

15. En la figura 3.65 se tiene que ABCD es un trapecio isósceles de altura $\overline{DE}$, M y N son puntos de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente y $\overline{MN} \perp \overline{AB}$.

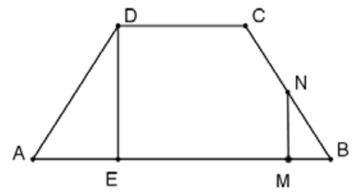


Figura3.65

a) Prueba que $\overline{AD} = \frac{\overline{DE} \cdot \overline{BM}}{\overline{MN}}$

b) Si $\overline{AE} = 3\overline{MB}$, y el área del triángulo ADE es de 36 cm^2, halla el área del ΔMBN.

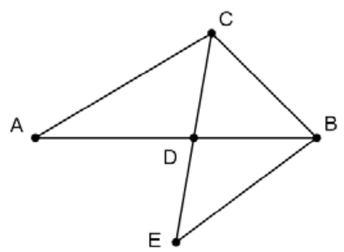


Figura 3.66

16. En el triángulo ABC de la figura 3.66, $\overline{EC}$ es la bisectriz del ángulo $\angle ACB, D \in \overline{EC} \cap \overline{AB}$ y $\angle ABE = \angle ACD$

a) Demuestre que $\Delta ACD \sim \Delta DBE$, $\Delta ADC \sim \Delta CEB$.

b) Escriba la proporcionalidad entre los lados homólogos de estos triángulos.

17. En la figura 3.67, ABCD es un cuadrado cuyos lados miden 3 cm.

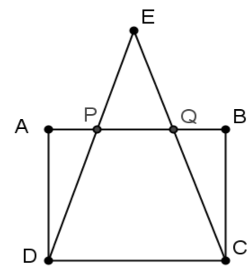


Figura 3.67

a) Demuestre que $\Delta PEQ \sim \Delta DEC$

b) Diga qué lado del triángulo EPQ es homólogo del lado $\overline{EC}$.

c) Calcule la razón de semejanza si $\overline{PQ} = 1{,}5\ cm$.

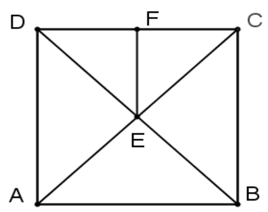


Figura 3.68

18. En la figura 3.68, ABCD es un cuadrado, E es el punto de intersección de sus diagonales y $\overline{FE} \perp \overline{DC}$.

a) Demuestre que $\Delta CEF \sim \Delta ABC$

b) Diga cuál es la razón entre el perímetro del triángulo EFC y del triángulo ABC.

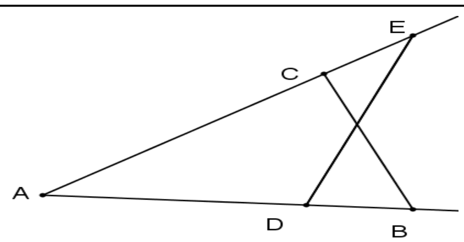


Figura 3.69

19. Si los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{DE}$ de la figura 3.69 tienen sus extremos en los lados del ángulo $\angle EAB$ y forman con estos lados los ángulos $\angle BCE$ y $\angle EDB$ iguales, demuestre $\Delta ADE \sim \Delta ABC$

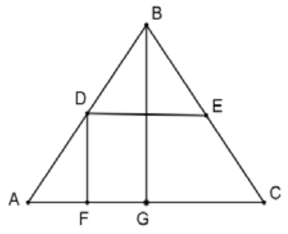


Figura 3.70

20. En la figura 3.70: ΔABC, ABED trapecio isósceles de bases $\overline{DE}$ y $\overline{AB}$, $\overline{AC} \perp \overline{DF}$, $\overline{BG}$ mediana relativa al lado $\overline{AC}$.

a) Demuestra que $\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{CG}}$

b) Si $\overline{AF} = 3\ cm, \overline{DF} = 3\ cm, \overline{BC} = 7{,}5\ cm$, calcula el área del ΔBCG.

3.6 Homotecia.

Definición.

Una **homotecia** es una transformación del plano en sí mismo que se define de la manera siguiente:

1. Se determina un punto O como centro de la homotecia.
2. Se determina un número real *k* $(k \neq 0)$ como razón de la homotecia.
3. Si $k > 0$, la imagen P' de un punto está situada sobre la semirrecta OP de modo que $OP' = k.OP$, si P no coincide con O.
4. SI $k < 0$, la imagen P' de un punto está situada sobre la semirrecta opuesta a la semirrecta OP de modo que $OP' = |k|.OP$, si P no coincide con O.
5. O es su propia imagen (O y O´ coinciden)

Propiedades de la homotecia

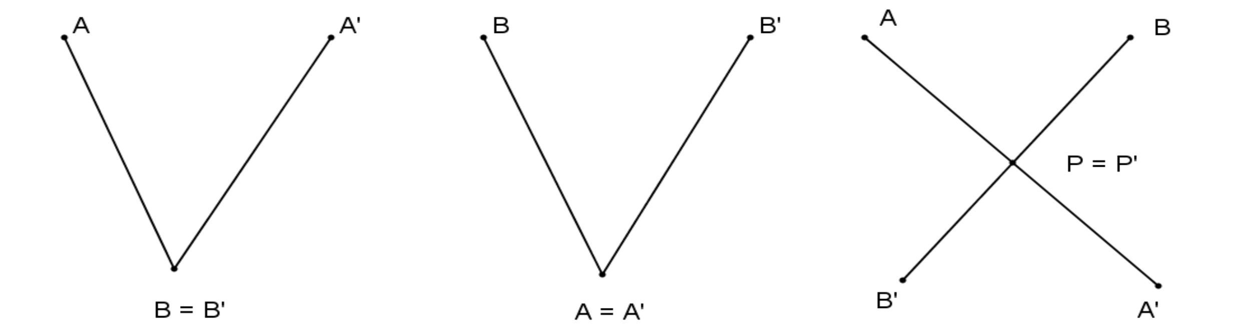
a) La imagen de un segmento es un segmento paralelo al original.
b) La longitud del segmento imagen es k veces la longitud del segmento original.
c) La imagen de una recta es una recta paralela a la original.
d) La imagen de un ángulo es un ángulo de igual amplitud.

Demostración:

a) Sea $\overline{A'B'}$ la imagen del segmento $\overline{AB}$ por la homotecia H(O, k). Supongamos que el segmento $\overline{A'B'}$ no es paralelo al segmento $\overline{AB}$, luego puede ocurrir que:

$\overline{A'B'} \cap \overline{AB} = B$ (figura 3.71 a) o $\overline{A'B'} \cap \overline{AB} = A$ (figura 3.71 b) o $\overline{A'B'} \cap \overline{AB} = P$ (figura 3.71 c)

Figura 3.71 a) Figura 3.71 b) Figura 3.71 c)



Es decir, se obtiene que B = B’ o A = A’ o P = P’ y esto es una contradicción con la definición de homotecia.

Luego, lo supuesto es falso y se cumple la tesis (el segmento imagen es paralelo al original)

Las demostraciones también pueden realizarse aplicando el recíproco del teorema de las transversales y el teorema fundamental de la semejanza de triángulos.

Notas:

- Basándonos en las propiedades de la homotecia podemos asegurar que la imagen de un polígono cualquiera por H(O, *k*) es un polígono semejante al original ya que sus lados son respectivamente proporcionales (*k* es la razón de proporcionalidad) y sus ángulos tienen la misma amplitud.
- Los vértices del polígono imagen son las imágenes de los vértices del polígono original.
- La imagen de una circunferencia C (P, r) por H(O, *k)* es una circunferencia de radio $r_1 = kr$ y su centro P´ es la imagen del punto P.

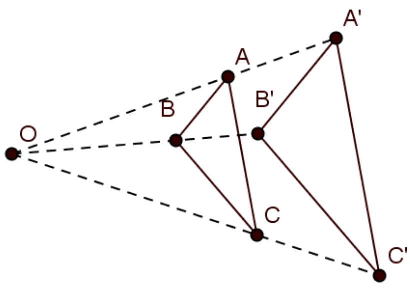


Figura 3.72

En general la imagen de una figura geométrica plana cualquiera por una homotecia es una figura geométrica semejante a ella, que puede ser ampliación o reducción de la figura original, según el valor de *k,* como se muestra en la figura 3.72.

Transformaciones semejantes.

Con anterioridad se realizó el estudio de diferentes movimientos, como la traslación, reflexión, rotación y la simetría central, así como la composición de los mismos. También se estudió la composición de varios movimientos, en los que al aplicar reiteradamente diferentes casos se obtiene una figura igual a la original. La composición de varios movimientos es también un movimiento.

De manera similar podemos hablar de la **composición de homotecias,** cuando sucesivamente se aplican varias homotecias. Analicemos qué sucede cuando se componen dos homotecias de un mismo y de diferentes centros.

Si se consideran dos homotecias $H_1(O; k_1)$ y $H_2(O; k_2)$ y P un punto cualquiera del plano, donde sea P' la imagen de P por la homotecia H_1y P'' la imagen de P' por la homotecia H_2, se puede afirmar que el resultado obtenido es una homotecia de centro O y razón k_1k_2, es decir producto de dos homotecias de igual centro es otra homotecia del mismo centro y su razón el producto de las razones de las homotecias dadas.

Si por el contrario se consideran homotecias de diferentes centros, por ejemplo H_1 (O_1, k_1) y H_2 (O_2, k_2) y Pun punto cualquiera del plano, donde P' la imagen de P por la homotecia H_1 y P'' la imagen de P' por la homotecia H_2. Si $k_3 = k_1k_2 \neq 1$se obtiene una homotecia H_3 (O_3, k_1k_2) y su centro O_3 se encuentra situado sobre la recta O_1O_2. En el caso en que $k_3 = k_1k_2 = 1$entonces el producto de las dos homotecias es una traslación de dirección $(1 - k_1)\overline{O_1O_2}$.

Por ejemplo en la figura 3.73 se ilustra la realización sucesiva de las homotecias $H_1(O_1, {}^1/_2)$ y $H_2(O_2, 4)$ a un segmento $\overline{AB}$ y a su imagen $\overline{A'B'}$ respectivamente.

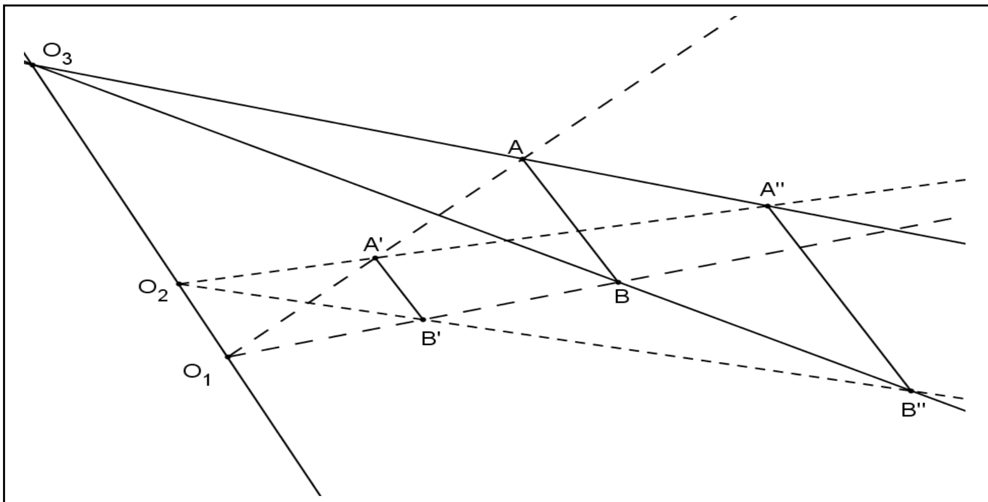
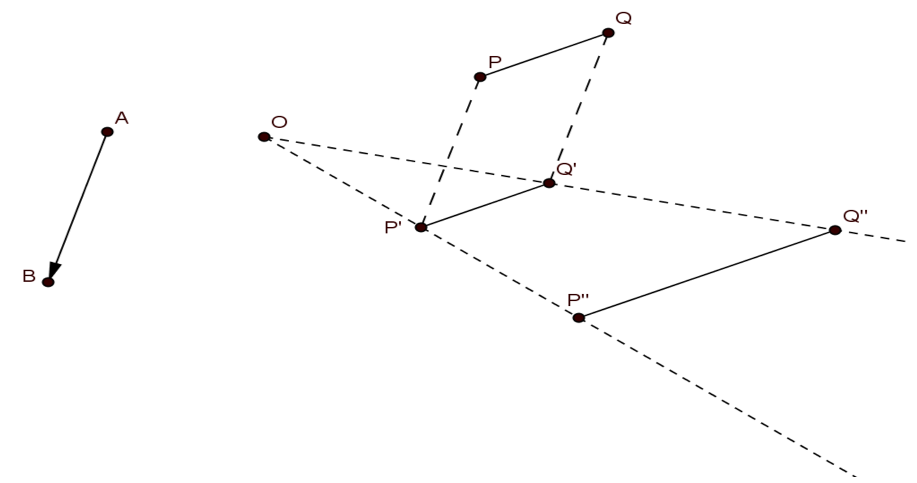


Figura 3.73

También se puede realizar la composición de una homotecia con un movimiento, en el ejemplo siguiente se muestra la composición de una traslación $\overline{AB}$ y una homotecia $H(O, 2)$sobre un segmento $\overline{PQ}$ (figura 3.74).

Figura
3.74



Transformaciones semejantes.

Definición.

La composición de una homotecia con un movimiento recibe el nombre de **transformación semejante.**

De la definición también se puede concluir que todo movimiento es una transformación semejante, pues basta considerarlo como la composición de un movimiento con una homotecia de razón *k = 1.*

Ejemplo 1

En la figura 3.75 se muestra una transformación semejante que resulta de la composición de una reflexión de eje ***m*** y una homotecia ***H(O,2)*** sobre el ΔABC.

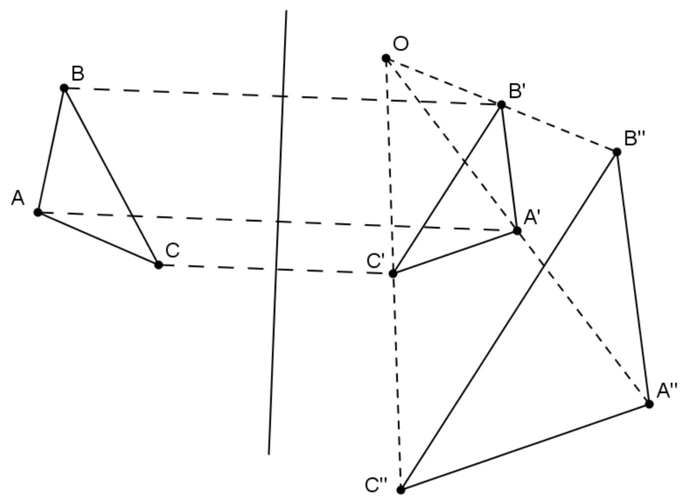


Figura 3.75

El triángulo ABC y su imagen $\Delta A''B''C''$, por esta trasformación, son semejantes ya que:

$\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ y $\Delta A'B'C' \sim \Delta A''B''C''$

y por el carácter transitivo de la semejanza de triángulos se cumple que $\Delta ABC \sim \Delta A''B''C''$.

Ya anteriormente se había dado el concepto de figuras semejantes como aquellas figuras que tienen la misma forma y dimensiones proporcionales, definamos este concepto ahora basándonos en las **transformaciones semejantes.**

Definición.

Dos **figuras son semejantes** si existe una transformación semejante que transforme una figura en la otra.

Notación: F1~ F2

Teorema.

Si dos figuras F_1 y F_2 son semejantes con razón *k*, entonces se cumple para sus **perímetros que $P' = k.\ P$ y para sus áreas que $A' = k^2.\ A$**

Ejercicios.

1. El triángulo A'B'C' es la imagen del triángulo ABC por la homotecia H(O;k) con $k \neq 1$. Diga si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones:
   a) __ $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$
   b) __ $\overline{AC} = \overline{A'C'}$
   c) __ $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$
   d) __ $\overline{B'C'} = K \cdot \overline{BC}$
   e) __ $O, A\ y\ A'$ están alineados.
2. Halla la imagen de un triángulo ABC por la homotecia H(A;2)
3. Dado un triángulo ABC y un punto cualquiera de su plano como centro, construir su imagen por homotecia para los siguientes valores de la razón de homotecia:
   a) $k = 2$
   b) $k = \frac{1}{2}$
   c) $k = -2$

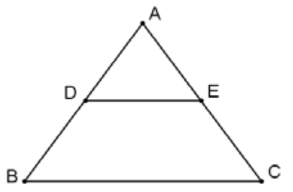


Figura 3.76

4. En la figura 3.76, $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. Determine:
   a) La homotecia mediante la cual el triángulo ADE se transforma en el triángulo ABC.
   b) La homotecia mediante la cual el triángulo ABC se transforma en el triángulo ADE.

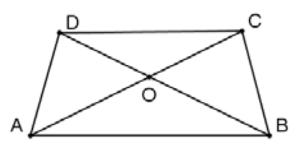


Figura 3.77

5. En la figura 3.77, ABCD es un trapecio, $\overline{DC}$ es su base mayor y O es el punto de intersección de sus diagonales. Determine la homotecia mediante la cual el triángulo AOBse transforma en el triángulo COD.

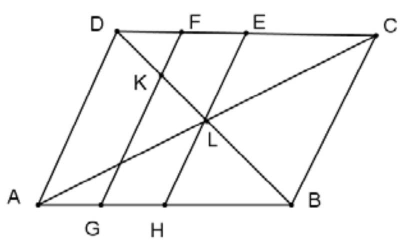


Figura 3.78

6. En la figura 3.78, ABCD y EFGH son paralelogramos, E y F son puntos medios de $\overline{DC}$ y de $\overline{DE}$ respectivamente, K y L son los puntos de intersección de $\overline{DB}$ con $\overline{FG}\ y\ \overline{EH}$. Diga cuál

es la homotecia que transforma:

a) El triángulo KBG en el triángulo DBA.
b) El triángulo LBH en el triángulo KBG.
c) El triángulo FDK en el triángulo CDB.
d) El triángulo CDB en el triángulo EDL.
e) El segmento $\overline{AG}$ en el segmento $\overline{FC}$, resultante de la composición.

7. Al triángulo ABC se le aplica una homotecia H(O;k) con $k = 2{,}0$ y a la imagen obtenida se le aplica una traslación. Di si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones:
   a) El triángulo original y su imagen son semejantes
   b) $\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{A'B'}$
   c) $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$
   d) $\Delta ABC \sim A'B'C'$
   e) $P_{\Delta A'B'C'} = 2P_{\Delta ABC}$
   f) $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{4}A_{\Delta A'B'C'}$
8. Traza, en un sistema de coordenadas, un triángulo ABC con A(2;19), B(4;3) y C(2;4) y la recta que pasa por D(4,0) y E(5;3).
   a) Determina la imagen de ABC por la aplicación sucesiva de la reflexión de eje DE y la homotecia H (F; 2) si F (6;-1).
   b) Comprueba el resultado utilizando el software GeoGebra.

Ejercicios del capítulo.

1. Diga si es verdadero (V) o falso (F) las siguientes proposiciones. Justifica las falsas.

   a) ____ Si $\frac{\overline{PQ}}{\overline{QB}} = \frac{2}{3}$, $\overline{PQ}$ = 3a y a = $\frac{2}{21}$ entonces $\overline{QB}$ = $\frac{5}{7}$

   b) ____Si el lado "a" de un hexágono regular es de 6,0 cm y su perímetro "p" es de 30cm entonces $\frac{a}{p} = \frac{1}{5}$.

   c) ____Si el volumen de un cubo 1 es a^3 y el volumen de un cubo 2 es $8a^3$, entonces la razón entre una de las aristas de cubo 1 con respecto a una de las aristas de cubo 2 es $\frac{1}{8}$.

   d) ____ El área de un cuadrado *ABCD* es de 20 dm^2 y el área de un cuadrado *PQRS* es de 1,9 m^2 entonces $\frac{A_{ABCD}}{A_{PQRS}} > 1$.

   e) ____ La edad de Juan es a la edad de Rosa como 2 es a 7. Si Juan tiene 12 años entonces Rosa tiene 42 años.

2. Comprueba si dos segmentos con longitudes 0,4 y 0,8 cm son proporcionales a otros dos segmentos que miden 50 y 100 dm respectivamente.
3. Se tienen tres segmentos de longitudes *a, b* y *c* tales que *a : b* = 4 : 3 y

   b : c = 1 : 3. Si *a* = 8, 0 mm, la longitud de *c* es:

   a) 2,0 mm b) 18 mm c) 3,0 mm d) 36 mm
4. Un punto interior de un segmento $\overline{EF}$ lo divide en dos segmentos que están a la razón $\frac{5}{7}$, si uno de ellos es 6,0 cm mayor que el otro, entonces la longitud de $\overline{EF}$ es:

   a) 1, 2 dm b) 2,0 cm c) 360 mm d) 0,15 m
5. Traza dos segmentos que estén en la razón:

   a) 0,7 b) 2,5

6. Selecciona la respuesta correcta.

6.1- La longitud del segmento tercero proporcional de dos segmentos de longitudes 0,60 cm y 0,30 cm es de:

a) ___ 1,5 cm b) ___ 0,42 cm c) ___ 0,15 cm d) ___ 0,60 cm

6.2- La longitud del segmento medio proporcional de dos segmentos de longitudes $\frac{4}{9}$ cm y $\frac{25}{64}$cm es de:

a) ___ 0 ,34 cm b) ___ $\frac{5}{12}$cm c) ___ $\frac{100}{576}$cm d) ___ $\frac{25}{162}$cm

6.3- La longitud del segmento cuarto proporcional de tres segmentos de longitudes 3,5 cm, 2,8 dm y 10 mm es de:

a) ___ 8,0 cm b) ___ 0,13 cm c) ___ 98 cm d) ___ 0,80 cm

7. Si El perímetro de un triángulo es 240 m. Si sus lados están en la relación 3 : 4: 5, hallar las longitudes de los lados del triángulo

8. Basándote en la figura 3. 79, donde $AI \parallel BJ \parallel CK \parallel DL$, intersecan a las semirrectas *OD, OH* y *OL*; *E, F* y *G* pertenecen a la semirrecta *OH*. Diga cuales de las siguientes proporciones son Verdaderas (V) o Falsas (F). Justifica las falsas.

a) $\frac{\overline{KL}}{\overline{IJ}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$ b) $\frac{\overline{EF}}{\overline{IJ}} = \frac{\overline{FG}+\overline{GH}}{\overline{JK}+\overline{KL}}$

c) $\frac{\overline{EF}+\overline{FG}}{\overline{IJ}+\overline{JK}} = \frac{\overline{OI}}{\overline{OE}}$ d) $\frac{\overline{GH}}{\overline{EF}+\overline{FG}} = \frac{\overline{KL}}{\overline{IJ}+\overline{JK}}$

e) $\frac{\overline{FG}}{\overline{OE}+\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{OA}+\overline{AB}}$ f) $\frac{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}}{\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{BC}} = \frac{\overline{IJ}+\overline{JK}+\overline{KL}}{\overline{OI}+\overline{IJ}+\overline{JK}}$

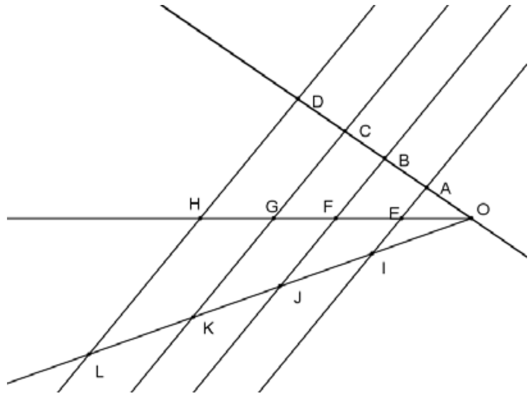


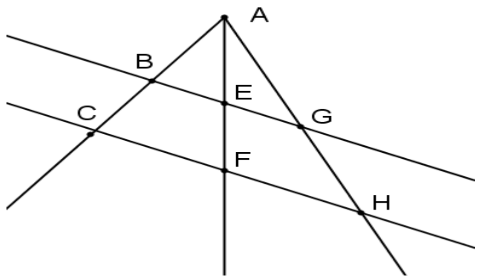
Figura 3.79

9. En la figura 3. 80, se tienen tres semirrectas de origen *A*, $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{7}{8}$,

$\overline{BG}$ = 14,7 cm y $\overline{BG} \parallel \overline{CH}$.

a) Halla la longitud de $\overline{CH}$.
b) Demuestra que $\overline{AE} < \overline{EF}$
c) Diga si es verdadera o falsa la proporción siguiente $\frac{\overline{CH}}{\overline{BG}} = \frac{\overline{FH}}{\overline{BG}-\overline{BE}}$. Fundamenta tu respuesta.

Figura 3.80



10. En la figura 3. 81, $\overline{BF} \parallel \overline{CE}, \overline{DF} \parallel \overline{AC}$ y *ACE* es un triángulo.

11. Determina x tal que en cada caso se obtengan proporciones válidas.

a) $\frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{DE}}{x}$ b) $\frac{x}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AF}+\overline{FE}}$

c) $\frac{\overline{AB}}{x} = \frac{\overline{DC}}{\overline{CE}}$ d) $\frac{\overline{AC}}{\overline{AC}-\overline{AB}} = \frac{x}{\overline{ED}}$

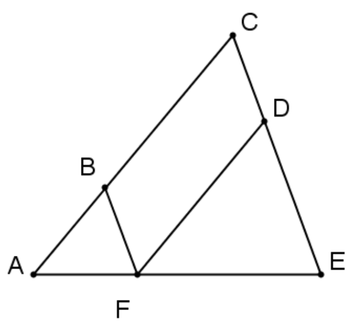


Figura 3.81

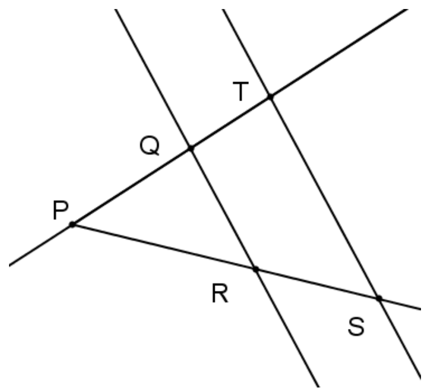


Figura 3.82

11. En la figura 3. 82, PS y PT son semirrectas, $\overline{PR}$ = 30 mm, $\overline{PS}$ = 18 cm y

$\overline{PQ} = \frac{1}{6}\overline{PT}$. Demuestra que $RSTQ$ es un trapecio.

12. En la figura 3. 83, ΔADE es isósceles de base $\overline{AD}$, $\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}}$= 1, $\frac{\overline{EC}}{\overline{EF}}$= 1

y $\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{1}{2}$. Demuestra que $BCFE$ es un paralelogramo.

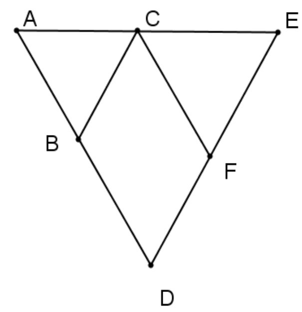


Figura 3.83

13. Construye un segmento $\overline{PQ}$ tal que $\overline{PQ} = k\overline{MN}$ (fig. 3. 84), conociendo que:
a) $k = \frac{3}{2}$ b) $k = \frac{3}{4}$ c) $k = 0,6$

Figura 3.84

14. ¿En qué razón divide el punto T al segmento $\overline{AB}$ si $\overline{AT}$ = 3,0 dm y $\overline{AB}$ = 50 cm?

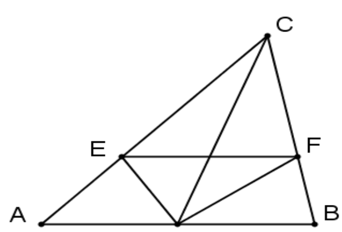
15. Construya un ΔABC isósceles de base $\overline{BC}$, conociendo que $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{3}{2}$ y $\overline{AC} + \overline{BC}$ = 10 cm.

16. Un lado de un triángulo mide 5,0 cm y la suma de los otros dos lados 15 cm. Si la diferencia entre los segmentos determinados por la bisectriz del ángulo opuesto al lado conocido es de 1,0 cm, hallar la longitud de los otros dos lados del triángulo, así como los segmentos determinados por cada bisectriz sobre el lado opuesto.

17. En ΔABC (fig. 3. 85)
- CD es mediana
- DE bisectriz del $\angle ADC$
- DF bisectriz del $\angle BDC$

Probar que $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$

Figura 3.85



18. Los lados de un triángulo miden respectivamente 15 cm, 1,3 dm y 200 mm. Calcular los segmentos determinados por las bisectrices del ángulo mayor sobre el lado opuesto.

19. Formula un problema donde se aplique:
   a) La primera parte del teorema de las transversales.
   b) La segunda parte del teorema de las transversales

20. En la figura 3.86, ADF triángulo, $B \in \overline{AD}$, $E \in \overline{DF}$, $C \in \overline{AF}$ y $\overline{AE}$ es la bisectriz del $\angle BAC$, $\overline{AC} = 10\ cm$, $\overline{AM} = 9{,}0\ cm$ y $\overline{AD} = 3{,}0\ dm$, además, $\angle AED = \angle AMC$.
   a) Prueba que: $\Delta AED \sim \Delta AMC$.
   b) Calcule $\overline{ME}$

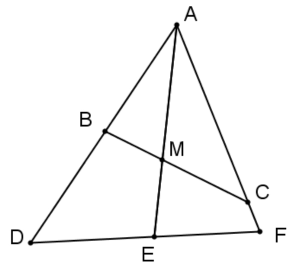


Figura 3.86

21. En los triángulos ΔABC y ΔDEB, figura 3.87, $\overline{ED} \parallel \overline{AB}$, $\overline{EB} \parallel \overline{AC}$, Demuestra que: $\Delta ABC \sim \Delta BED$

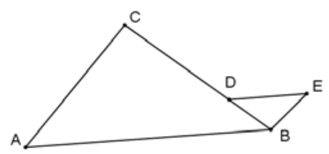


Figura 3.87

22. En la figura 3.88, $\angle CAB = \angle CEB$, $\overline{CD}$ bisectriz del $\angle ACB$. Demuestre que:
   a) $\Delta ACD \sim \Delta DBE$
   b) $\Delta ADC \sim \Delta CBE$

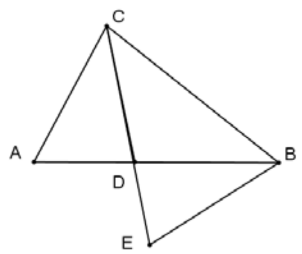


Figura 3.88

23. En el paralelogramo ABCD, figura 3.89, E es punto medio de $\overline{BC}$, D, E y F puntos alineados. Prueba que: $\Delta DEC \sim \Delta BEF \sim \Delta AFD$.

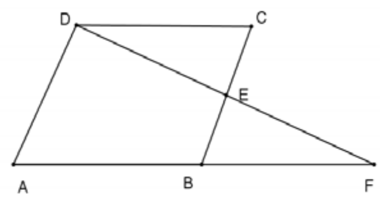


Figura 3.89

En la figura 3.90, $C, D \in \overline{DQ}$ y $A, B \in \overline{AQ}$, para probar que $\frac{\overline{QA}}{\overline{QD}} = \frac{\overline{QC}}{\overline{QB}}$:

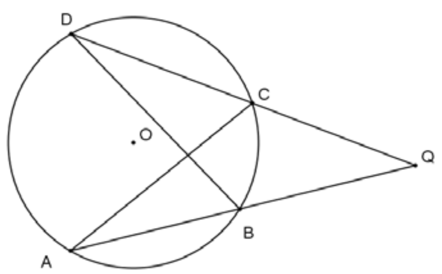


Figura 3.90

a) ¿Qué triángulos habrá que seleccionar para demostrar que son semejantes?
b) Demuestre la semejanza de los mismos.
c) ¿Cuáles son los lados homólogos?

24. En el rectángulo ABCD, figura 3.91, $\overline{CE} \perp \overline{BD}$ y $\overline{FB} \perp \overline{DC}$. Pruebe que: $\Delta CED \sim \Delta CEB \sim \Delta BCD \sim \Delta BCF$ y establezca la proporcionalidad entre sus lados homólogos.

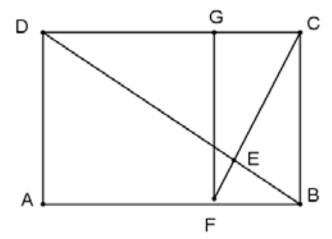


Figura 3.91

25. Si en el ΔABC, figura 3.92 $E \in \overline{BC}, D \in \overline{AC}, \overline{DE} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$, pruebe que: $\overline{CD}.\overline{FB} = \overline{EF}.\overline{DE}$

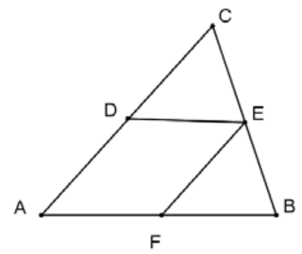


Figura3.92

26. Un alumno calculó la altura de una torre colocando un espejo horizontalmente en la tierra y caminando hacia atrás hasta que pudo ver, por reflexión, la copa de la torre. Sus ojos están a 1,2m de la tierra y sus pies a 1,8 m del espejo (figura 3. 93). ¿Cuál es la altura de la torre si este está a 12,6 m del espejo?

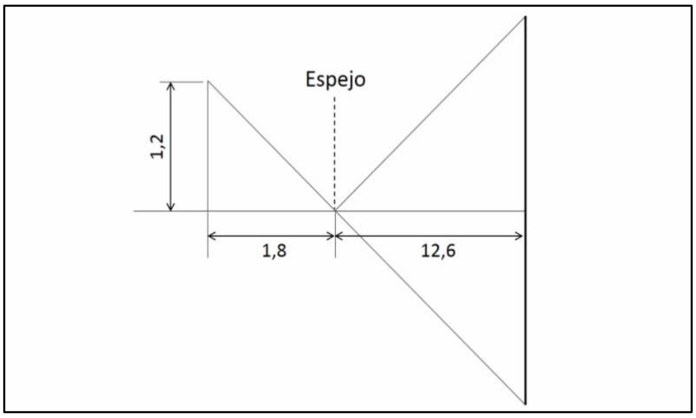


Fig. 3. 93

27. La figura 3. 94, muestra una escalera de 12 m de longitud que está apoyada contra una pared. El pie de la escalera dista de la pared 16 dm. ¿Cuánto dista de la pared el escalón que está a 2,5 m del extremo de la escalera que se apoya en el suelo?

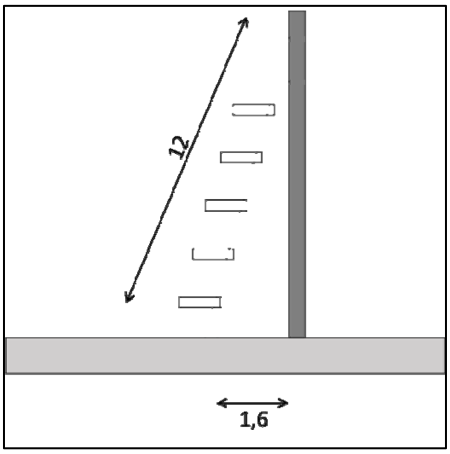


Fig. 3. 94

29. Para hallar la altura de un árbol un muchacho puso un palo como indica la figura 3.95. La longitud de alcance del muchacho al palo es de 0,60 m y la medida de $\overline{DE}$ es 0,15 m; la distancia del árbol al muchacho es de 52 m. Hallar la altura del árbol.

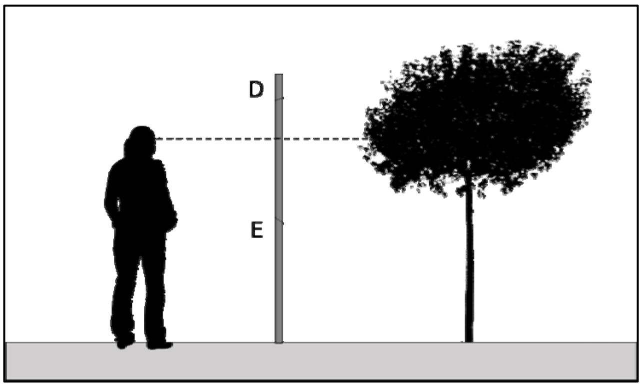


Fig. 3. 95

30. Los radios de dos circunferencias de centros O y O' tienen una longitud que miden 9 cm y 3 cm respectivamente. Si dichas circunferencias son tangentes interiormente en el punto Ay se conoce que $\overline{AB}$es una cuerda quemide 15 cm y que corta a la circunferencia interior en el punto C, halle las longitudes de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.

31. Halla la imagen de $\overline{AB} = 2.0\ cm$ por la transformación que resulta de la composición de las homotecias H(O;3) y H(O;$\frac{1}{2}$). Determina el centro y la razón de la homotecia

BIBLIOGRAFÍA.

Álvarez, M y otros (2008): Manual de ejercicios de Matemática para la Educación Superior. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.

Estrada, M. R y Sánchez, J. L. (2010): Geometría Plana. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.

Fiterre, I (1955): Geometría y Nociones de trigonometría. Editorial “Selecta”. La Habana.

MINED (1990): Matemática 5to grado. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.

______ (1990): Matemática 6to grado. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.

______ (1991): Matemática 7mo grado. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.

______ (1991): Matemática 8vo grado. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.

______ (1991): Matemática 9no grado. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.

Muller, H (1977). Conceptos básicos de la Geometría Plana. Tomo I, II, III. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana.

Palacio, J. (2003): Colección de problemas matemáticos para la vida. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.